



# Thèse de Doctorat en Science

Génie Mécanique

Intitulée

## Modélisation des Ecoulements avec Transfert de Chaleur dans les Cavités à Surfaces Ailettées

Présentée par :

**Mohamed Tarek ATTOUCHI**  
Magister en Génie Mécanique

Devant le jury composé de :

*Président :* **Mr. Bouzid BENKOUSSAS** *Professeur, ENP*

*Directeur :* **Mr. Salah LARBI** *Professeur, ENP*

*Examineurs :* **Mr. Boussad BOUMEDDANE** *Professeur, Univ. Blida*  
**Mr. Belkacem DRAOUI** *Professeur, Univ. Béchar*  
**Mr. Mabrouk AIT SAADA** *Professeur, USTHB*  
**Mr. Belkacem KEBLI** *Professeur, ENP*



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique  
*Laboratoire de Génie Mécanique et Développement*



# Thèse de Doctorat en Science

Génie Mécanique

Intitulée

## Modélisation des Ecoulements avec Transfert de Chaleur dans les Cavités à Surfaces Ailettées

Présentée par :

**Mohamed Tarek ATTOUCHI**

Magister en Génie Mécanique

Devant le jury composé de :

*Président :* **Mr. Bouzid BENKOUSSAS** *Professeur, ENP*

*Directeur :* **Mr. Salah LARBI** *Professeur, ENP*

*Examineurs :* **Mr. Boussad BOUMEDDANE** *Professeur, Univ. Blida*  
**Mr. Belkacem DRAOUI** *Professeur, Univ. Béchar*  
**Mr. Mabrouk AIT SAADA** *Professeur, USTHB*  
**Mr. Belkacem KEBLI** *Professeur, ENP*

ENP 2022

**ملخص:**

العمل المقدم في هذه الأطروحة يتعلق بتحليل آثار بعض الوسائط على تدفق السوائل وانتقال الحرارة في التجاويف ذات الأسطح المزودة بزعانف. ترتبط الزعانف بالجدار السفلي الساخن للتجويف حيث تكون درجة الحرارة متغيرة على شكل دالة جيبية أو خطية. الجدار العلوي ذو درجة حرارة باردة ثابتة بينما الجدران الجانبية نقيها عازلة للحرارة (كظومة). النمذجة الرياضية للمشكلة تم وضعها على أساس معادلات التوازن لانحفاظ (الكتلة والطاقة وكمية الحركة) في حالة تدفق صفائحي حول سطح مزود بزعانف. تم تحليل الجوانب الحرارية والهيدروديناميكية من تدفق السوائل عن طريق الحل العددي للمعادلات المتحكممة باستخدام طريقة الحجم المنتهية مع شروط على الحدود ملانمة. أرقام Rayleigh المعتبرة محصورة في المجال،  $10^3$  و  $10^6$ ، في حين تم أخذ عدد Prandtl مساوي للقيمة 0.71. في حين تم التحقق من صحة البرنامج الحسابي الذي تم تطويره لهذه الدراسة إستنادا إلى حلول De Vahl Davis القياسية والنتائج المتحصل عليها من طرف الآخرين. النتائج المعروضة في بحثنا تتعلق بتمثيل الخطوط المتساوية الحرارة، وخطوط التيار وتوزيع السرعة حول الأسطح المزودة بزعانف ورقم Nusselt لمختلف الوسائط الهندسية. تركز الدراسة بشكل رئيسي على تأثير عدد Rayleigh ودرجة الحرارة السطحية الساخنة، عدد الزعانف والمباعدة بينهم على تكوين التدفق وانتقال الحرارة في التجاويف.

الكلمات المفتاحية: انتقال الحرارة؛ نمذجة التدفق؛ التجويفات؛ الأسطح المزودة بزعانف؛ المحاكاة العددية.

**Abstract:**

The present work is dedicated to some parameter effects analysis on fluid flow and heat transfer in enclosures with conducting fins attached to the hot horizontal bottom wall. The hot wall was under variable (sinusoidal or linear) surface temperature while the cold one, on the top side, was kept at constant temperature. The vertical walls were assumed to be insulated. The mathematical modelling of the problem was achieved starting from conservative balance equations in laminar natural convection airflow around the finned surface. Hydrodynamic as well as thermal aspects of the airflow were analyzed by solving the governing differential equations numerically using the finite volume method with adequate boundary conditions. The Rayleigh numbers considered in this study are in the range of  $10^3$  and  $10^6$ , and the Prandtl number is equal to 0.7. The developed numerical code is validated starting from benchmark solutions of De Vahl Davis and others results from literature revue. The presented results are related to isothermal lines, the streamlines, the velocity distributions around the finned surface and the Nusselt number for various geometrical parameters. The current study is specifically focused on the effects of Rayleigh number, the variable surface hot temperature, the fins number, their spacing and their length on the fluid flow pattern and heat transfer.

**Keywords:** Heat transfer; Fluid flow modelling; Enclosures; Finned surfaces; Numerical simulation.

**Résumé :**

Le travail présenté dans cette thèse est relatif à l'analyse des effets de certains paramètres sur l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur dans les cavités à surfaces ailetées. La paroi inférieure chaude de la cavité est à surface ailetée avec température variable à profil sinusoïdal ou linéaire. La paroi supérieure est à température constante froide. Les parois latérales sont adiabatiques. La modélisation mathématique du problème est établie sur la base des équations de bilan de conservation pour le cas d'un écoulement laminaire autour d'une surface ailetée. Les aspects, thermique et hydrodynamique de l'écoulement de fluide, ont été analysés par résolution numérique des équations gouvernantes en utilisant la méthode des volumes finis avec des conditions aux limites bien adaptées. Les nombres de Rayleigh considérées sont dans l'intervalle,  $10^3$  à  $10^6$ , alors que le nombre de Prandtl est pris égal à 0.71. Le code de calcul développé dans le cadre de cette étude a été validé sur la base des solutions Benchmark de De Vahl Davis et des résultats issus de la littérature. Les résultats présentés sont relatifs aux isothermes, aux lignes de courant, à la distribution de vitesses autour des surfaces ailetées et au nombre de Nusselt pour différents paramètres géométriques. L'étude est axée principalement sur l'influence du nombre de Rayleigh, de la température superficielle chaude, du nombre d'ailettes, et de leur espacement, sur la configuration d'écoulement et le transfert de chaleur dans les cavités.

**Mots clés :** Transfert de chaleur ; Modélisation d'écoulement ; Cavités ; Surfaces ailetées ; Simulation numérique.

## ***DEDICACES***

*Je dédie ce modeste travail à :*

*- Mes très chers parents ;*

*Puisse Dieu tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.*

*- Mes enfants Mohamed El Amine et Imène ;*

*Puisse Dieu tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et réussite.*

*- Ma femme ;*

*Puisse dieu vous protéger, garder et renforcer notre relation sacrée.*

*- Au défunt mon frère Khaled Fahim ;*

*Qui nous a quitté à l'âge des fleurs, je n'oublierai jamais les merveilleux moments que nous avons passé ensemble.*

*- Mes frères et sœurs*

*Puisse Allah vous protéger, garder et renforcer notre fraternité.*

*- Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation à leur tête*

*Pr Salah LARBI que dieu vous protège.*

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie le bon dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage, l'énergie et la volonté pour l'accomplissement de ce travail. Louange à Dieu, Seigneur de l'univers.

C'est avec beaucoup d'émotion et de sincérité que je tiens à remercier toutes les personnes ayant contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail :

En premier lieu, mon directeur de thèse, le professeur Salah LARBI, Professeur à l'école nationale polytechnique, pour tous ses efforts. Les mots me manquent pour lui exprimer toute ma profonde gratitude, que ce soit pour sa disponibilité permanente, sa contribution majeure à l'orientation des travaux de recherche et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse. Les longues heures de discussions qu'il m'a consacrées m'ont permis d'apprécier l'étendue de ses compétences scientifiques, ses connaissances et ses qualités professionnelles et humaines. Il était toujours proche de moi dans ma formation de chercheur, et qui, par sa sagesse et sa compétence a semé en moi l'amour de la science. Il m'a toujours apporté culture et finesse scientifique. J'ai agréablement aimé travailler avec lui, et je suis fier d'être son doctorant.

En second lieu, les examinateurs de cette thèse, Mr. BOUMEDDANE Boussad, Professeur à l'université de Blida, Mr. KEBLI Belkacem, Professeur à l'école nationale polytechnique, Mr. DRAOUI Belkacem, Professeur à l'université de Béchar et Mr. AIT SAADA Mabrouk, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène (USTHB), d'avoir répondu favorablement à notre invitation pour faire partie de mon jury ainsi qu'à l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail de recherche, en dépit de leurs multiples occupations.

A Mr. BENKOUSSAS Bouzid, Professeur à l'école nationale polytechnique, pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse.

Je n'oublie pas de remercier Mr KHELLADI Sofiane, Professeur des universités à l'école nationale supérieure d'arts et métiers de Paris, et directeur du laboratoire LIFSE, qui m'a accueilli dans son laboratoire pendant mes stages.

L'expression de toute ma reconnaissance et de ma plus affectueuse gratitude va bien entendu à mes chers parents : ma chère mère et mon cher père qui n'a pas cessé de m'encourager, et de m'aider moralement, ses conseils et invocations m'ont été d'un grand secours. «Ô mon seigneur, fais leurs, à tous deux miséricorde comme ils nous ont élevé tout petit».

J'exprime toute ma profonde gratitude à tous les membres de ma famille pour leurs encouragements et soutien et à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

<b>Liste des figures</b>	
<b>Liste des tableaux</b>	
<b>Nomenclature</b>	

<b>Introduction générale .....</b>	<b>16</b>
------------------------------------	-----------

### **Chapitre I : Généralités sur la convection naturelle dans les cavités**

I.1. Introduction.....	20
I.2. Définitions et propriétés.....	20
I.3. Approximation de Boussinesq pour l'écoulement de la couche limite.....	22
I.4. Paramètres adimensionnels.....	25
I.4.1. Nombre de Prandtl.....	25
I.4.2. Nombre de Rayleigh.....	26
I.4.3. Nombre de Grashof.....	27
I.4.4. Nombre de Reynolds.....	28

### **Chapitre II : Contexte bibliographique**

II.1. Introduction.....	30
II.2. Travaux à caractère expérimental et analytique.....	30
II.3. Travaux à caractère numérique.....	33
II.4. Conclusion.....	55

### **Chapitre III : Modélisation mathématique et conditions aux frontières**

III.1. Introduction.....	58
III. 2. Modèles physique et mathématique.....	58
III.2.1. Modèle Physique.....	58
III.2.2. Système d'équations dimensionnel.....	59
III.2.2.1. Equation de continuité.....	60
III.2.2.2. Equation de quantité de mouvement dans la direction x.....	60
III.2.2.3 Equation de quantité de mouvement dans la direction y.....	61
III.2.2.4. Equation d'énergie thermique.....	62
III.2.2.5. Equation d'énergie cinétique turbulente.....	63
III.2.2.6. Equation de taux de dissipation d'énergie.....	63
III.2.7 Solution Laminaire.....	64
III.2.8. Solution Turbulente.....	64
III.3 Système d'équations gouvernantes simplifié.....	64
III.4. Approximation de Boussinesq pour le problème considéré.....	65
III.5. Système d'équations adimensionnelles.....	65
III.5.1. Equation adimensionnelle de continuité.....	67
III.5.2. Equation adimensionnelle de quantité de mouvement dans la direction x.....	67
III.5.3. Equation adimensionnelle de quantité de mouvement dans la direction y.....	67
III.5.4 Equation adimensionnelle d'énergie thermique.....	67
III.5.5 Equation adimensionnelle d'énergie cinétique turbulente.....	68
III.5.6. Equation de taux de dissipation d'énergie .....	68

III.6. Equations adimensionnelles gouvernantes.....	68
III.7. Définition de la fonction de courant .....	69

### **Chapitre IV : Résolution numérique**

IV. I. Introduction.....	71
IV.2. Equations de transport.....	71
IV. 3. Grille décalée.....	73
IV.4. Equations de quantité de mouvement discrétisées.....	74
IV.4.1. Equations discrétisées de quantité de mouvement dans la direction $x$ .....	76
IV.4.2 Equations discrétisées de quantité de mouvement dans la direction $y$ .....	78
IV.4.3 Equation discrétisée du terme source.....	80
IV.5. Algorithme SIMPLE.....	82
IV.6. Equation de continuité discrétisée .....	84
IV.7. Résolution ligne par ligne de Gauss Seidel.....	88
IV.7.1 Application de TDMA pour un problème unidimensionnel.....	88
Résumé de l'algorithme.....	89
Critère de convergence de Scarborough.....	89
IV.7.2 Application de la méthode TDMA pour un problème bidimensionnel.....	89
Discussion de la méthode ligne par ligne de Gauss-Seidel.....	90
IV.8. Assemblage de la méthode complète.....	90
IV. 9. Fonctions génératrices de maillage.....	92
IV.10.Schémas de résolution.....	93
IV.11. Traitement du terme source $S$ .....	99
IV.12. Les quatre règles de base de Patankar.....	99

### **Chapitre V : Validation des résultats**

V.1 Introduction.....	101
V.2 Résolution numérique du problème.....	101
V.2.1 Grille de maillage.....	101
V.2.2 Analyse des tests d'indépendance de la grille.....	102
V.3. Validation du code de calcul.....	103
V.4. Conclusion.....	112

### **Chapitre VI : Résultats et discussions**

VI.1 Introduction .....	114
VI.2. Présentation de résultats et discussions.....	114
VI.2.1 Cas d'une cavité sans ailette.....	114
VI.2.2 Cavités à surfaces ailettées.....	120
VI.3. Effet de la variation de la hauteur d'ailettes .....	140
VI.3.1-Cas d'une seule ailette.....	140
VI.3.2 Cas de deux ailettes.....	143
VI.4 Effet de l'espacement entre ailettes.....	145
VI.4.1 Cas d'une seule ailette.....	145
VI.4.2 Cas de deux ailettes.....	147

VI.5- Effet de la variation de la hauteur.....	149
VI.6. Effet de la variation de la largeur.....	152
VI.7 Conclusion.....	161
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>164</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>168</b>

## Liste des figures

<b>Figure (I.1)</b> : Représentation schématique d'un modèle physique de simple cavité.....	21
<b>Figure (I.2)</b> : Couche limite dynamique laminaire en convection naturelle autour d'une plaque plane verticale.....	23
<b>Figure (II.1)</b> : Schéma de l'enceinte partiellement divisée et modèle d'écoulement. (Source: Lin et Bejan [8]).....	30
<b>Figure (II.2)</b> : Géométrie du réseau d'ailettes (orientation verticale). (Source: Nada [10]).....	31
<b>Figure (II.3)</b> : Domain des calculs test (Source: S.K. Mahapatra, A. Sarkar (2007) [11]).....	32
<b>Figure (II.4)</b> : Cellule de l'expérience ; (Source: F. Corvaro, M. Paroncini 2009 [12]).....	32
<b>Figure (II.5)</b> : Compartiment expérimental. (Source: C. Butler, D. Newport, M. Geron; (2013) [13]).....	33
<b>Figure (II.6)</b> : Schématisation du problème, conditions aux limites et système de coordonnées (Source: E. K. Lakhal, E. Bilgen, P. Vasseur (1995) [17]).....	34
<b>Figure (II.6-a, b)</b> : Cavité partitionnée à la paroi inférieure et supérieure (Source: S-P. How, T-H. Hsu (1998) [19]).....	35
<b>Figure (II.7)</b> : Schématisation des enceintes complexes. (Source: Cho Young Han ET Seung Wook Baek (2000) [20]).....	36
<b>Figure (II.8)</b> : La géométrie et les coordonnées du problème (Source: Dagtekin et H.F. Oztop (2001) [21]).....	36
<b>Figure (II.9)</b> : La géométrie physique et le système de coordonnées. (Source: A.K. da Silva, L. Gosselin (2005) [23]).....	37
<b>Figure (II.10)</b> : Schéma d'une cavité carrée Avec une ailette mince attachée à la paroi chaude (Source: E. Bilgen (2005) [24]).....	38
<b>Figure (II.11)</b> : Schématisation du problème, système de coordonné et conditions aux limites (Source: H. Oztop, E. Bilgen (2005) [25]).....	39
<b>Figure (II.12)</b> : Domaine de la solution: les éléments de la phase solide (1, 2 et 3), la phase gazeuse (4), la source de dégagement de chaleur (5) (Source: G.V. Kuznetsov et M. A. Sheremet (2006) [27]).....	40
<b>Figure (II.13)</b> : Schémas et système de coordonnées pour une cavité carrée avec une ailette inclinée au centre de la paroi chaude (Source : A. Ben-Nakhi A.J. Chamkha (2007) [29]).....	41
<b>Figure (II.14)</b> : Modèle physique et système de coordonnées du problème. (Source: Ahmet Koca (2008) [31]).....	42
<b>Figure (II.15)</b> : Configurations des cas étudiant (Source: Changzheng Sun, Bo Yu (2009) [32]).....	42
<b>Figure (II.16)</b> : Schéma du modèle physique. (Source: Al Amiri, K. Khanafer et I. Pop [33]).....	43
<b>Figure (II.17)</b> : Schéma de la configuration étudiée. (Source: A. Bahlaoui et al. [35]).....	44
<b>Figure (II.18)</b> : Géométrie du problème (Source: A.H. Mahmoudi ; M. Shahi (2010) [36]).....	45

<b>Figure (II.19) :</b> Schéma du modèle physique (Source: V.A.F. Costa (2012) [41]).....	47
<b>Figure (II.20) :</b> Schéma du problème (Source: Benseghir Chahrazed, Rahal Samir (2012) [43]).....	48
<b>Figure (II.21) :</b> Domaine et conditions aux limites pour une convection naturelle dans une cavité avec une ailette ondulée fixée à la paroi latérale chaude (Source: A. Arefmanesha , M. Najafib et S.H. Musavic ; (2013) [44]).....	49
<b>Figure (II.22) :</b> Croquis du domaine de calcul. (Source : E. Fontana , C. A. Capeletto , A. da Silva, V. C. Mariani ; (2013) [45]).....	50
<b>Figure (II.23) :</b> Domaine de calcul constitué de l'enceinte et de la salle. (Source: R. Abhinav et al. [46]).....	50
<b>Figure (II.24):</b> Schéma de la configuration physique et le système de coordonnées: 1- Des murs solides, 2- de l'air, 3-Source de chaleur de température constante (Source: Semen G. Martyusheva , Mikhail A. Sheremeta (2014) [47]).....	51
<b>Figure (III.1) :</b> Modèle physique utilisé.....	58
<b>Figure (IV.1) :</b> Champ régulier de maillage.....	72
<b>Figure (IV.2) :</b> Positionnement des volumes du contrôle $u$ et $v$ .....	74
<b>Figure (IV.3) :</b> Volume du contrôle $u$ et ses composantes de vitesse voisins.....	76
<b>Figure (IV.4) :</b> Le volume du contrôle $v$ et ses composantes de vitesse voisins.....	79
<b>Figure (IV.5) :</b> Grille de solution.....	81
<b>Figure (IV.6) :</b> Volume du contrôle utilisé pour l'équation de continuité discrétisée.....	85
<b>Figure (IV.7) :</b> Présentation de la méthode ligne par ligne.....	90
<b>Figure (IV.8) :</b> L'Algorithme SIMPLE.....	91
<b>Figure (V.1-a, b) :</b> Evolution du nombre de <i>Nusselt</i> moyen $\overline{Nu}$ en fonction de la taille de la grille pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> . -a)- Côté paroi inférieure de l'enceinte -b)- Côté paroi supérieure de l'enceinte.....	102
<b>Figure (V.2) :</b> Convergence du code de calcul en fonction des résidus.....	103
<b>Figure (V.3) :</b> Comparaison de nos résultats et ceux de la référence [73] Pour le cas d'une ailette avec : $Pr=0.71$ et $Ra=10^4$ .....	105
<b>Figure (V.4) :</b> Comparaison de nos résultats et ceux de la référence [73] Pour le cas d'une ailette avec : $Pr=0.71$ et $Ra=10^5$ .....	105
<b>Figure (V.5) :</b> Comparaison du nombre de Nusselt local par rapport à la référence [71].....	105
<b>Figure (V.6) :</b> Comparaison du nombre de Nusselt moyen par rapport à la référence [73]..	106
<b>Figure (V.7) :</b> Comparaison de résultats relatifs aux isothermes, aux lignes de courant et aux iso-vitesses $u$ et $v$ [70].....	109
<b>Figure (V.8) :</b> Comparaison de résultats relatifs aux isothermes et aux lignes de courant [71].....	111
<b>Figure (V.9) :</b> Fonction de courant pour: $Ra = 6.39 \times 10^4$ (Gauche), $Ra=3.16 \times 10^5$ (Droite) avec $Pr =0.71$ . Résultats de comparaison.....	112
<b>Figure (VI.1-a) :</b> Chauffage sinusoïdal de la paroi de fond sans ailettes.....	116
<b>Figure (VI.1-b) :</b> Nombre de Nusselt local, à la paroi de haut et de bas pour une cavité simple $Ra=10^3$ à $10^6$ .....	117
<b>Figure (VI.2) :</b> Résultats pour une cavité simple, profil de température constant et linéaire à $Ra=10^5$ .....	118
<b>Figure (VI.3) :</b> Résultats pour une cavité simple, profil de température constant et linéaire à $Ra=10^6$ .....	119
<b>Figure (VI.4) :</b> Géométrie de la cavité ailettee utilisée.....	120

<b>Figure (VI.5) :</b> Présentations des isothermes et des lignes de courant relatifs aux profils de température constante, linéaire et sinusoïdale pour différentes hauteurs de l'ailette.....	129
<b>Figure (VI.6) :</b> Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence des ailettes à $Ra=10^3$ .....	130
<b>Figure (VI.7) :</b> Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence des ailettes à $Ra=10^4$ .....	131
<b>Figure (VI.8) :</b> Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence des ailettes à $Ra=10^5$ .....	133
<b>Figure (VI.9) :</b> Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes à $Ra=10^5$ .....	133
<b>Figure (VI.10) :</b> Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence des ailettes à $Ra=10^6$ .....	135
<b>Figure (VI.11) :</b> Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes à $Ra=10^6$ .....	129
<b>Figure (VI.12) :</b> Nombre de Nusselt moyen pour les parois de haut et de bas en fonction de nombre de Rayleigh.....	131
<b>Figure (VI.13) :</b> Nombre de Nusselt moyen pour les parois haut et bas en fonction de nombre de Rayleigh. Comparaison des différents profils de température.....	132
<b>Figure (VI.14) :</b> Comparaison de nombre de Nusselt local par rapport aux parois horizontales.....	132
<b>Figure (VI.15) :</b> Nombre de Nusselt moyen en fonction de nombre d'ailette.....	133
<b>Figure (VI.16) :</b> Nombre de <i>Nusselt</i> moyen à $Ra=10^5$ en fonction de la hauteur de l'ailette.....	133
<b>Figure (VI.17) :</b> Vitesses et températures adimensionnelles calculées au milieu de la cavité.....	134
<b>Figure (VI.18) :</b> Effet de la variation de la hauteur de l'ailette.....	135
<b>Figure (VI.19) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ : $h = H/10, l = L/10$ et $Ra=10^5$ .....	135
<b>Figure (VI.20) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ : $h = H/4, l = L/10$ et $Ra=10^5$ .....	135
<b>Figure (VI.21) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ : $h = H/3, l = L/10$ et $Ra=10^5$ .....	136
<b>Figure (VI.22) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ : $h = H/2, l = L/10$ et $Ra=10^5$ .....	142
<b>Figure (VI.23) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ : $h = 2H/3, l = L/10$ et $Ra=10^5$ .....	142
<b>Figure (VI.24) :</b> Géométrie de la cavité, effet de la différence des hauteurs des ailettes....	143
<b>Figure (VI.25) :</b> Effet de la variation de hauteur des ailettes sur le flux de chaleur.....	145
<b>Figure (VI.26) :</b> Géométrie de la cavité, effet de l'espacement d'une seule ailette.....	145
<b>Figure (VI.27) :</b> Résultat de la température, des lignes de courant et des iso-vitesse $u$ et $v$ pour différentes positions de l'ailette.....	146
<b>Figure (VI.28) :</b> Géométrie de la cavité, effet de l'espacement entre ailettes.....	147
<b>Figure (VI.29-a) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse $u$ et $v$ par l'effet de la variation des positions des ailettes - Espacement régulier.....	148
<b>Figure (VI.29-b) :</b> Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse $u$ et $v$	

	par l'effet de la variation des positions des ailettes - Espacement non régulier.....	148
<b>Figure (VI.30)</b>	: Résultats des différents paramètres en fonction de la variation de la hauteur de l'ailette.....	151
<b>Figure (VI.31)</b>	: Résultats des différents paramètres en fonction de la variation de la largeur de l'ailette.....	153
<b>Figure (VI.32)</b>	: Représentation du nombre de Nusselt local à travers la paroi verticale.....	155
<b>Figure (VI.33)</b>	: Représentation du nombre de Nusselt moyen en fonction de nombre d'ailette à la paroi de bas.....	156
<b>Figure (VI.34)</b>	: Représentation du nombre de Nusselt moyen en fonction de nombre d'ailette à la paroi de haut.....	158
<b>Figure (VI.35)</b>	: Représentation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour différents nombres d'ailettes.....	159
<b>Figure (VI.36)</b>	: Représentation du nombre de <i>Nusselt</i> moyen en fonction du nombre de <i>Rayleigh</i> pour un profil de température sinusoïdal à différents nombres d'ailettes.....	160
<b>Figure (VI.37)</b>	: Représentation des profils de température pour 0 ailette, 1 ailette et 2 ailettes.....	160
<b>Figure (VI.38)</b>	: Représentation des profils de vitesse et de température pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ .....	161

## Liste des Tableaux

<b>Tableau (IV.1)</b>	: Expressions des coefficients, $a_{i,j}$ .....	85
<b>Tableau (IV.2)</b>	: Expressions des coefficients, $a_i$ pour différents écoulements.....	95
<b>Tableau (IV.3)</b>	: Expressions des coefficients $F$ et $D$ .....	95
<b>Tableau (IV.4)</b>	: Expressions des coefficients, $a_W$ et $a_E$ suivant les différents schémas.....	96
<b>Tableau (IV.5)</b>	: Expressions de $A( P_i )$ suivant les différents schémas.....	96
<b>Tableau (V.1)</b>	: Comparaison de nos résultats de <i>Nusselt</i> maximum, minimum et moyen avec ceux de la littérature pour une cavité simple sans ailettes ayant les mêmes conditions aux limites.....	103

## Nomenclature

$A$  : Surface d'échange, [m<sup>2</sup>]

$a_P, a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  : Coefficients associées à la variable  $\phi$

$C_P$  : Chaleur spécifique à pression constante, [J/kg.K]

$d$  : Espacements entre les ailettes, [m]

$f_x$ , et  $f_y$  : Composants des forces de volume par unité de masse, [N/kg]

$g$  : Accélération due à la gravité, [m/s<sup>2</sup>]

$G_k$  : Terme de génération d'énergie cinétique turbulente due au gradient de la vitesse moyenne

$h$  : Coefficient d'échange convectif, [W/m<sup>2</sup>.K]

$H$  : Hauteur de la cavité, [m]

$K$  : Conductivité thermique, [W/m.K]

$k$  : Energie cinétique turbulente

$L$  : Longueur de la cavité, [m]

$l$  : Largeur de l'ailette, [m]

$N$  : Nombre d'ailettes

$P$  : Pression, [Pa]

$Q$  : Flux de chaleur, [W] ;

$t$  : Temps, [s]

$T$  : Température locale du fluide, [K]

$T_\infty$  : Température du fluide, [K]

$T_c$  : Température de la paroi froide, [K]

$T_h$  : Température de la paroi chaude, [K]

$T'_h$  : Température variable de la paroi chaude, [K]

$T_{ref}$  : Température de référence

$T^*$  : Température adimensionnelle

$\vec{V}$  : Le champ de vitesse tel que  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$u$  : Composante de la vitesse du fluide dans la direction  $x$ , [m/s]

$v$  : Composante de la vitesse du fluide dans la direction  $y$ , [m/s]

$w$  : Composante de la vitesse du fluide dans la direction  $z$ , [m/s]

**Indices inférieurs et supérieurs :**

$c$  : Froide

$h$  : Chaude

$réf$  : représente l'expression de référence pour toutes les variables

$*$  : représente les variables adimensionnelles

$k$  : Cinétique

$L$  : Local

$M$  : Moyen

$t$  : Turbulent

**Symboles Grecques :**

$\sigma$  : Nombre de Prandtl turbulent

$\psi$  : Fonction de courant, [ $m^2/s$ ]

$\alpha$  : Diffusivité thermique, [ $m^2/s$ ];

$\beta$  : Coefficient d'expansion (dilatation) thermique du fluide ;

$\varepsilon$  : Taux de dissipation d'énergie.

$\emptyset$  : Variable générale dépendante (température, vitesse, enthalpie, fraction massique,...)

$\rho$  : Masse volumique, [ $Kg/m^3$ ]

$\nu$  : Viscosité cinématique, [ $m^2/s$ ];

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide, [ $kg/(m.s)$ ];

$\mu_t$  : Viscosité turbulente

$\sigma_T$  : Constante représentant le nombre de Prandtl turbulent ;

$\sigma_k$  : Nombre de *Prandtl* turbulent de l'énergie cinétique pour le modèle ( $k - \varepsilon$ ) ;

$\Gamma$  : Coefficient de diffusion

$\Delta$  : Différence ;

**Abréviations :**

CFD : Computational fluid dynamics

MCI : Moteur à combustion interne

TDMA : Tri-diagonal- matrix- algorithm

SIMPLE : Semi implicit-method for pressure-linked equations

**Nombres adimensionnels :**

$$Nu_L : \text{Nombre de Nusselt}, \quad Nu_L = \frac{h_f \cdot L}{K_f}$$

$\overline{Nu}$  : Nombre de Nusselt moyen

$$Pr : \text{Nombre de Prandtl}, \quad Pr = \frac{C_{pf} \cdot \mu_f}{K_f}$$

$$Gr : \text{Nombre de Grashof}, \quad Gr = \frac{g \beta_f (T_w - T_f) L^3}{\nu^2}$$

$$Ra : \text{Nombre de Rayleigh}, \quad Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Re : \text{Nombre de Reynolds}, \quad Re = \frac{U \cdot D}{\nu}$$

$$Ri : \text{Nombre de Richardson}, \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

$$Pe : \text{Nombre de Peclet:} \quad Pe = Re \cdot Pr = \frac{\rho \cdot C_p \cdot U \cdot D}{K}$$

---

# ***INTRODUCTION GENERALE***

---

## INTRODUCTION GENERALE

Les problèmes d'interaction fluide-structure sont rencontrés dans différentes situations naturelles ou processus industriels. Les interactions peuvent être entre un solide et un liquide où les phénomènes relèvent de l'hydro-élasticité tel que l'écoulement autour d'un navire, d'un sous-marin, d'une digue ou dans les conduites. Pour les interactions entre un solide et un gaz, les phénomènes sont d'ordre aéro-élastique et leurs applications sont aussi importantes que celles relatives à l'hydro-élasticité. Ces phénomènes sont rencontrés dans les écoulements autour des véhicules aériens (avions, missiles...) et terrestres (trains à grandes vitesses, voitures de course...), ainsi que dans le domaine de la construction (action du vent sur les ponts suspendus etc...) [1].

Pour le cas particulier des moteurs à combustion interne (MCI), les gaz chauds, confinés par les parois des moteurs peuvent entraîner des perturbations au niveau des jeux de fonctionnement dus à des contraintes mécaniques et thermiques (déterminés par des considérations d'ordre mécanique et tribologique). Il est alors nécessaire, pour le bon fonctionnement de ces machines, que ces structures mécaniques soient maintenues à des températures modérées. En effet, l'existence d'un gradient thermique entre les parois d'un moteur et les gaz de combustion, peut induire un flux de chaleur pouvant aller de 15 à 30% de la valeur de l'énergie totale introduite dans ce dernier. Ce pourcentage peut varier suivant la vitesse de rotation du moteur, sa charge et son type (essence ou diesel). Dans les systèmes de refroidissement de ces moteurs, les coefficients d'échange utilisés sont en général d'origine empirique. Pour une meilleure estimation des flux de chaleur évacués et une compréhension assez fine des écoulements autour de ces systèmes, la connaissance des champs de température et de vitesse est primordiale [2].

Le programme de recherche sur la thématique est relatif à l'analyse des effets d'interactions entre un écoulement et une structure sous contraintes mécaniques et thermiques. L'objectif principal de l'analyse est relatif à une modélisation mathématique et numérique des problèmes de couplage conducto-convectif entre une structure et un écoulement de fluide en considérant que la structure est rigide et sans déplacement.

Cette analyse permettra de comprendre et de mettre en évidence l'importance des écoulements et des flux thermiques par une meilleure prise en charge des effets de couplage.

La compréhension des phénomènes physiques pourra être établie, en se basant sur des reproductions expérimentales sur maquettes, accompagnées d'un développement de la modélisation. L'outil numérique peut jouer un rôle primordial dans l'analyse des résultats expérimentaux.

Nous nous sommes intéressés à un problème d'interaction fluide-structure où la modélisation du problème, côté externe, a été établie moyennant l'utilisation d'une approche basée sur une modélisation d'écoulement en convection naturelle autour d'une surface ailetée en régime laminaire.

Il est à souligner que les cavités à surfaces ailetées comptent parmi les configurations qui ont suscité l'intérêt des chercheurs à travers des décennies en raison de leur implication dans divers domaines de l'ingénierie tels que le stockage d'énergie et le refroidissement des composants électroniques et des systèmes de production d'énergie nucléaire et chimique [3].

La présence d'ailettes génératrices de chaleur au sein d'une cavité a pour but d'augmenter la surface d'échange, elle conduit à des configurations qui s'identifient au problème pratique des plaques électroniques munies de composants générant de la chaleur par effet joule. Cette dernière devrait être évacuée pour éviter une éventuelle surchauffe des composants. D'où l'intérêt d'étudier de près les détails des écoulements (souvent complexes) et des transferts thermiques au sein de tels systèmes pour dégager les conditions assurant un bon refroidissement des systèmes étudiés [4].

L'étude des phénomènes liés à la convection naturelle des fluides confinés dans les enceintes à surfaces ailetées ont fait l'objet de diverses investigations au cours de ces dernières décennies, notamment sous les aspects expérimentaux et numériques, en raison de leurs importances dans diverses applications industrielles tels que les capteurs solaires, les chaudières, la lutte contre les incendies, le stockage et la conservation de l'énergie, l'efficacité énergétique des bâtiments, etc...

L'objectif du présent travail est relatif à une modélisation mathématique et numérique d'un problème de convection naturelle dans une cavité à surfaces ailetées en régime laminaire. Les aspects, thermique et hydrodynamique de l'écoulement, ont été traités à travers la résolution des équations de la dynamique des fluides, par utilisation de la méthode des volumes finis avec des conditions aux limites adéquates. Les conditions aux limites utilisées sont relatives à

une température chaude à la base (constante ou variable), une température froide à la paroi supérieure et des parois latérales adiabatiques.

Les nombres de *Rayleigh* sont dans la plage  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$  alors que le nombre de *Prandtl* considéré est pris égal à 0.71 en adéquation avec le régime laminaire. Cette analyse permettra de comprendre et de mettre en évidence l'importance des flux thermiques et des écoulements de fluide à travers l'analyse des distributions de vitesse, des lignes de courant et des isothermes dans ces cavités.

Le travail développé dans cette thèse est réparti en six chapitres principaux :

Le chapitre (I) est relatif à des généralités sur la convection naturelle dans les cavités.

Le chapitre (II) consiste à une étude bibliographique où est présentée une synthèse des différents travaux de recherche dans les cavités de différentes formes géométriques, fermés ou partialement ouvertes, ayant un ou plusieurs obstacles (ailettes) et soumises aux différents conditions aux limites.

Le chapitre (III) est consacré à la définition du problème considéré où sont décrites, la géométrie de la cavité et les différentes conditions aux limites, ainsi que les équations gouvernantes dimensionnelles et adimensionnelles.

Le chapitre (IV) est réservé à la résolution numérique du problème par une présentation détaillée de la discrétisation des équations gouvernantes et du schéma de résolution de ces équations.

Le chapitre (V) est consacré aux résultats obtenus et à leur discussion. Ils sont relatifs aux nombres de Nusselt sur les parois, chaude et froide, à la distribution de température, aux lignes de courant et aux champs de vitesse autour de la surface ailetée, en fonction des paramètres géométriques des ailettes et de leur espacement. Les résultats ainsi obtenus ont été validés par les solutions Benchmark de De Vahl Davis et autres solutions issues de la littérature.

La thèse se termine par une conclusion générale donnant les objectifs fixés, les difficultés rencontrées et les perspectives à prévoir pour la continuité de ce travail.

## *Chapitre I*

---

# ***GENERALITES SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS LES CANVITES***

---

## Chapitre I: Généralités sur la convection naturelle dans les cavités

### I.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux transferts thermiques convectifs dus à la variation de densité du fluide sous l'effet de la variation de la température. Le fluide, objet de l'étude est de l'air. Les équations relatives aux bilans de conservation sont fortement couplées. Cela signifie qu'on ne pourra pas déterminer le champ de température indépendamment du champ de vitesse et inversement.

La convection naturelle est un phénomène physique très important en transferts thermiques. Elle est rencontrée dans différentes situations naturelles et processus industriels (échanges sol-atmosphère, refroidissement de composants électroniques, collecteurs solaires, chauffage des locaux d'habitation, centrales nucléaires, etc...).

Etant donné que le travail de cette thèse est basé essentiellement sur l'analyse des écoulements avec transferts thermiques convectifs dans les cavités à surfaces ailetées pour différentes conditions aux limites, en particulier à température chaude de profil variable: A savoir les profils, sinusoïdale et linéaire. Nous allons présenter dans ce qui suit les équations gouvernantes ainsi que les nombres adimensionnels correspondants.

### I.2. Définitions et propriétés :

L'échange de chaleur par convection entre une paroi solide (s) et un fluide ( $\infty$ ) est donné par l'expression :

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty) \quad (I.1)$$

où :

$\dot{Q}$  : Flux de chaleur [W] ;

$h$  : Coefficient d'échange convectif [ $W/m^2.K$ ] ;

$A$  : Surface d'échange [ $m^2$ ] ;

$T_s$  : Température de la paroi [K].

$T_\infty$  : Température de fluide [K].

La convection naturelle aura lieu, sous certaines conditions, dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température imposé par le milieu extérieur. La masse de fluide se réchauffe à proximité d'une paroi chaude, le gradient de densité crée une poussée d'Archimède et cet air devient moins lourd que l'air ambiant. Ainsi, il s'élève et il est remplacé par une nouvelle masse d'air froid qui se réchauffe à son tour. Ce phénomène conduit à une mise en mouvement du fluide. Dans ce cas, c'est le pack de conditionnement d'air qui entraîne un échauffement de l'air environnant et donc crée des mouvements de convection naturelle.

La valeur du coefficient d'échange convectif,  $h$ , dépend de la géométrie de la surface, des propriétés du fluide et de la vitesse d'écoulement du fluide.

Le nombre de *Nusselt*, noté «  $Nu$  », caractérise l'importance de la convection par rapport à la conduction. C'est le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à la quantité de chaleur échangée par conduction. Il est défini par :

$$Nu_L = \frac{hL_c}{K} \quad (\text{I. 2. a})$$

Où :

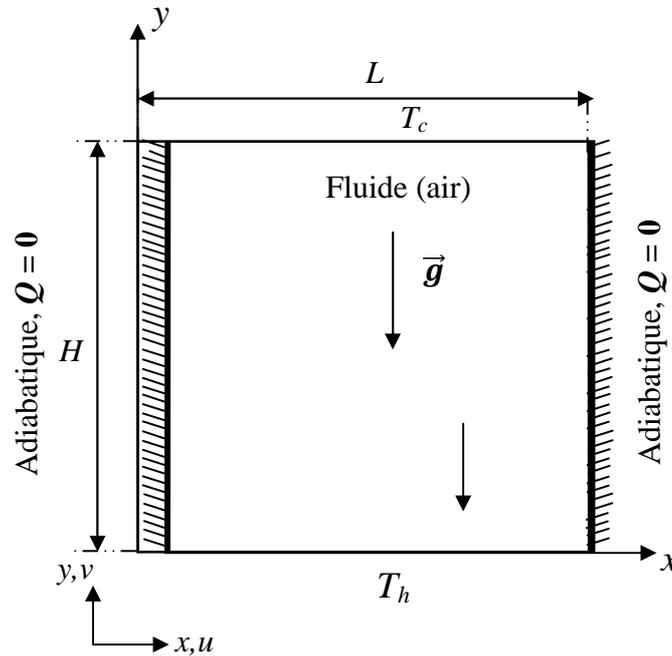
$h$  : Coefficient d'échange convectif [ $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ] ;

$K$  : Conductivité thermique du fluide [ $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ ] ;

$L_c$  : Longueur caractéristique de l'obstacle [m].

Pour le cas d'une plaque plane, la longueur caractéristique est la longueur de la plaque.

La figure (I.1) donne la représentation schématique du modèle physique utilisé dans le cadre de cette étude : elle consiste en l'analyse de la convection naturelle dans une cavité fermée dont la paroi inférieure (à surface ailettée) est à température chaude, la paroi supérieure est à température froide et les parois latérales sont adiabatiques.



**Figure (I.1) :** Représentation schématique d'un modèle physique de simple cavité.

Le nombre de Nusselt local pour le cas d'une cavité de hauteur,  $H$ , est défini par :

$$\begin{cases} Nu_x = -\frac{H}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ Nu_y = -\frac{H}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases} \quad (1.2. b)$$

Le nombre du Nusselt moyen à la paroi chaude de la cavité :

$$\overline{Nu} = -\frac{H}{\Delta T} \int \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=0} dx \quad (1.2 - c)$$

**NB :**

Le calcul de nombre de *Nusselt* à travers une surface ailetée comprend toute la surface de l'ailette en tenant compte des parois de la hauteur ainsi que la largeur, afin de pouvoir calculer le nombre de *Nusselt* moyen.

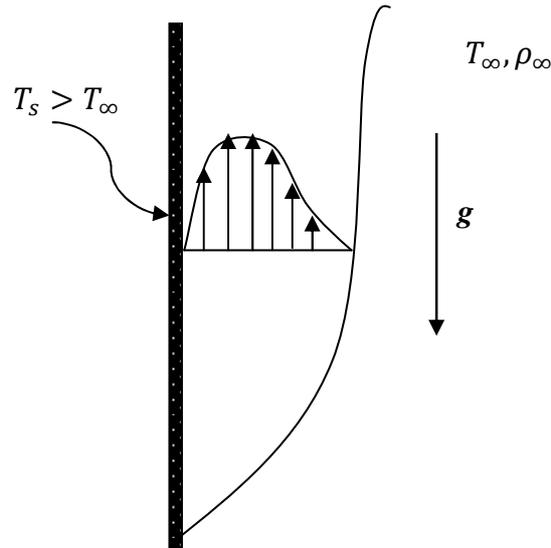
### **I.3. Approximation de Boussinesq pour l'écoulement de la couche limite :**

Dans un fluide, la masse volumique peut être supposée constante sauf dans le terme de poussée d'Archimède lorsque les écarts de température ne conduisent pas à de fortes variations de la pression motrice.

Il fallait observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur les fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là, résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité  $g$ , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci ». Cela conduit à l'hypothèse la plus utilisée en convection naturelle ou mixte et qui s'appelle « l'approximation de Boussinesq ».

Cela signifie que la masse volumique est supposée constante sauf dans le terme de gravitation de l'équation de quantité de mouvement. Comme la convection forcée, les équations relatives à la quantité de mouvement et au transfert d'énergie en convection libre découlent des principes de conservation.

La différence entre les deux types d'écoulements est que, dans la convection libre, le rôle majeur est joué par les forces de flottabilité [5]. La figure (I.2) montre le développement de la couche limite dynamique en convection naturelle autour d'une plaque plane verticale en écoulement laminaire.



**Figure (I.2) :** Couche limite dynamique laminaire en convection naturelle autour d'une plaque plane verticale

L'approximation de Boussinesq stipule que la masse volumique du fluide est constante dans tous les termes de l'équation de quantité de mouvement, sauf pour le terme de force de volume, où  $\rho = \rho(T)$  et :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g \quad (\text{I.3})$$

L'équation (I.3) peut être formulée sous une forme autrement : d'abord il faut noter que, s'il n'y a pas de force de volume dans la direction  $x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ , à partir de l'équation de quantité de mouvement selon «  $x$  » :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.4})$$

Ce qui signifie que la pression ne varie pas dans la direction normale à la surface. D'où le gradient de pression selon «  $y$  » à un point quelconque dans la couche limite doit être égal au gradient de pression dans la région laminaire en dehors de la couche limite.

Cependant, dans cette région  $v = 0$  et l'équation (I.3) se réduit à:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{I.5})$$

En substituant l'équation (I.5) dans (I.3) et en effectuant quelques développements mathématiques, l'équation résultante dans la direction «  $y$  » sera :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (I.6)$$

Où :

$$\Delta \rho = \rho_{\infty} - \rho \quad (I.7)$$

L'expression doit s'appliquer à chaque point dans la couche limite de la convection libre.

Le premier terme du côté droit de l'équation (I.6) est relatif à la force de flottabilité : l'écoulement est induit parce que la densité est variable. Si les variations de la densité sont dues uniquement aux variations de température, le terme peut être lié à la propriété du fluide connu sous le coefficient de dilatation thermique volumétrique qui est :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (I.8 - a)$$

Le terme de flottabilité se produit dans le composant -y- de l'équation de mouvement.

La densité en termes de flottabilité est linéarisée en fonction de l'expression :

$$\frac{\rho(T)}{\rho(T_{ref})} = 1 - \beta(T - T_{ref}) \quad (I.8 - b)$$

Où :

$\rho$  : Masse volumique du fluide [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] ;

$T$  : Température locale de fluide [K] ;

$T_{ref}$  : Température de référence [K] ;

$\beta$  : Coefficient d'expansion (dilatation) thermique du fluide [ $\text{K}^{-1}$ ].

Cette propriété thermodynamique du fluide fournit une mesure de qualité par laquelle les variations de la densité en réponse à un changement de température à pression constante.

Si elle est exprimée sous la forme approximative suivante :

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_{\infty} - \rho}{T_{\infty} - T} \quad (I.9)$$

Pour le cas des gaz parfaits:

$$\beta = \frac{1}{T_{\infty}}$$

Il s'ensuit que :

$$(\rho_{\infty} - \rho) \approx \rho \beta (T - T_{\infty}) \quad (I.10)$$

Cette simplification est connue sous le nom, d'approximation de *Boussinesq*. Après substitution on aura:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (I.11)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant « y » devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{I.12})$$

Dans la dynamique des fluides, l'approximation de *Boussinesq* (d'après Joseph Boussinesq Valentin) est utilisée dans le domaine de l'écoulement de flottabilité entraînée qui est connu comme la convection naturelle.

Elle indique que les variations dans la densité sont suffisamment petites pour qu'elle peut être négligée, sauf là où ils apparaissent en termes multipliés par l'accélération due à la pesanteur  $g$ .

#### I.4. Paramètres adimensionnels :

Dans les écoulements causés par la force de flottabilité, le comportement de fluide est complètement décrit par le champ d'écoulement, le champ thermique, la distribution de pression et les propriétés locales de fluide. Ces variables sont gouvernées par les lois fondamentales de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie.

La solution de ces équations gouvernantes dépend des valeurs de plusieurs groupes adimensionnels. Dans les écoulements de convection naturelle, nous distinguons les nombres de : Rayleigh, Prandtl, et d'autres nombres sans dimensions représentés par plusieurs propriétés physiques dépendantes de la température.

L'analyse dimensionnelle permet de faire des approches sur les critères de similitude en transfert de chaleur et a fait ressortir les variables caractéristiques adimensionnelles (nombre de *Prandtl*, nombre de *Rayleigh*, nombre de *Grashoff*).

##### I.4.1. Nombre de Prandtl :

Ce nombre caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température. L'interprétation physique du nombre de *Prandtl* découle de sa définition comme un rapport de la viscosité cinématique (diffusivité de quantité de mouvement)  $\nu$  à la diffusivité thermique  $\alpha$  :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{k_f}{\rho C_p} \rightarrow Pr = \frac{\mu C_p}{k_f}$$

Où :

$C_p$  : Chaleur spécifique du fluide à pression constante [J/kg.K] ;

$k_f$  : Conductivité thermique du fluide [W/m.K] ;

$\alpha$  : Coefficient de diffusion thermique [m<sup>2</sup>/s] ;

$\nu$  : Viscosité cinématique [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

Le nombre de *Prandtl* fournit une évaluation de l'efficacité relative de la quantité de mouvement et de l'énergie de transport par diffusion de la vitesse et les couches limites thermiques. Lorsque le nombre de *Prandtl* est très proche de l'unité. Cela signifie que l'énergie et le transfert de la quantité de mouvement par diffusion sont comparables. Quand il est inférieur à un, le taux de diffusion de l'énergie dépasse largement le taux de diffusion de la quantité de mouvement, l'inverse est vrai pour des valeurs de *Prandtl* supérieures à un.

- Lorsque  $Pr \gg 1$  : cela correspond donc à un fluide ayant plus de facilité à diffuser la quantité de mouvement que la chaleur. Il existe donc une couche limite thermique d'épaisseur " $\delta_t$ " dans laquelle la température est plus chaude qu'à l'infini où elle vaut  $T_\infty$ . Cette couche limite thermique est donc le siège de force d'Archimède qui élève le fluide et il y a création d'un jet pariétal (couche limite cinématique) d'épaisseur " $\delta_c$ " supérieur à " $\delta_t$ ".
- Lorsque  $Pr \ll 1$ , on s'attendrait à ce que la couche limite thermique soit beaucoup plus épaisse que la couche cinématique. Cela signifierait alors qu'il existerait une zone de fluide immobile dans laquelle la température est supérieure à  $T_\infty$ .

Cela est évidemment impossible car la poussée d'Archimède contrarierait cet équilibre instable : on observe en fait que les couches limites cinématiques et thermiques ont la même épaisseur. A partir de cette interprétation, il s'ensuit que la valeur de *Prandtl* influe fortement sur l'évolution relative de la vitesse et les couches limites thermiques.

#### I.4.2. Nombre de Rayleigh :

Il est important de noter que les couches limites de la convection libre ne sont pas limitées à l'écoulement laminaire. Les écoulements en convection libre proviennent habituellement d'une instabilité thermique, c'est un fluide plus chaud, plus léger qui se déplace verticalement vers le haut par rapport à un fluide refroidisseur, plus lourd.

Cependant, comme avec la convection forcée, les instabilités hydrodynamiques peuvent également survenir. Autrement dit, les perturbations dans l'écoulement peuvent être amplifiées, conduisant à la transition de l'écoulement laminaire au turbulent.

La transition dans une couche limite de convection libre dépend de l'ampleur relative aux forces de flottabilité et aux forces visqueuses dans le fluide. Il est habituel de corrélérer en termes du nombre de *Rayleigh*, qui est simplement le produit des nombres de *Grashof* qu'on le définit ultérieurement et de *Prandtl* :

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (\text{I. 14 - a})$$

Le nombre de *Rayleigh* est défini comme :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3 Pr \rho^2}{\mu^2} \quad (\text{I. 14 - b})$$

où :

$g$  : Accélération la pesanteur [ $\text{m/s}^2$ ] ;

$H$  : Hauteur de la cavité [m] ;

$\Delta T$  : Différence de température entre la paroi chaude et froide [K].

$Gr$  : Nombre de *Grashof* ;

$T_\infty$  : Température de fluide, loin de la paroi ;

A partir du nombre de *Rayleigh* critique, la transition vers la turbulence commence. La turbulence a un effet important sur le transfert de chaleur, c'est pourquoi l'accent particulier est mis sur des résultats expérimentaux pour obtenir des corrélations appropriées pour les écoulements turbulents où pour les plaques, le nombre de *Rayleigh* est supérieure à  $10^9$  [6].

Des nombres de *Rayleigh* moins de  $10^8$  indiquent un écoulement laminaire de flottabilité induite. La transition vers la turbulence se produit dans l'intervalle de  $10^8$  à  $10^{10}$  (Cai et al. 2009) [7].

#### I.4.3. Nombre de *Grashof* :

Le nombre de *Grashof* est un nombre sans dimension, défini comme suit :

$$Gr_H = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)H^3}{\nu^2} \quad (\text{I. 15})$$

Le nombre de *Grashof* joue le même rôle dans la convection libre que jouera le nombre de *Reynolds* en convection forcée. Le nombre de *Reynolds* fournit une mesure du rapport de l'inertie aux forces visqueuses agissant sur un élément fluide. En revanche, le nombre de *Grashof* indique le rapport de la force de flottabilité à la force visqueuse agissant sur le fluide.

Généralement, les effets combinés de la convection libre et forcée doivent être considérés quand :  $\left(\frac{Gr_L}{Re_L^2}\right) \approx 1$  . Si l'inégalité  $\left(\frac{Gr_L}{Re_L^2}\right) \gg 1$  est satisfaite, les effets de la convection forcée peuvent être négligés. Au sens strict, l'écoulement en convection libre est celui qui est induit exclusivement par les forces de flottabilité, dans ce cas, la vitesse de la convection forcée n'est pas bien définie.

**I.4.4. Nombre de Reynolds :**

Le nombre de *Reynolds*, compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Il est défini par :

$$Re = \frac{U L_c}{\nu} \quad (\text{I. 16})$$

où :

$U$  : Vitesse du fluide [m/s] ;

$L_c$  : Longueur caractéristique de l'obstacle [m] ;

$\nu$  : Viscosité cinématique [m<sup>2</sup>/s]

## ***Chapitre II***

---

### ***CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE***

---

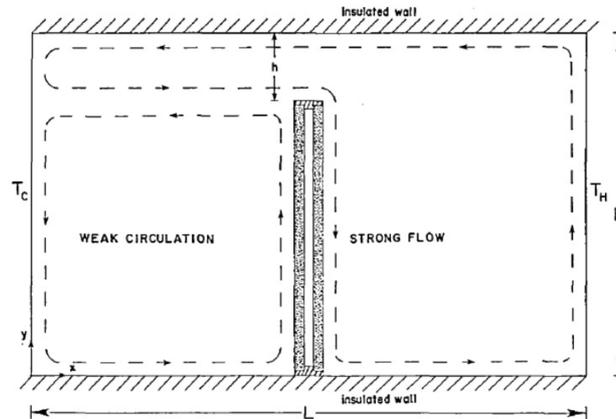
## Chapitre II : Contexte bibliographique

### II.1. Introduction :

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons nous intéresser à présenter l'état de l'art sur la convection naturelle dans les cavités différemment chauffées avec surfaces ailetées. Cette étude passe par une analyse bibliographique des différentes recherches issues de la littérature permettant de faire une synthèse des différents travaux de recherches antérieures. L'analyse bibliographique comprend aussi bien les études à caractère expérimentale que les études à caractère théorique (analytique et numérique) sur les cavités de différentes formes géométriques, fermées ou partialement ouvertes, ayant un ou plusieurs obstacles et soumises à différentes conditions aux limites.

### II.2. Travaux à caractères expérimentaux et analytiques :

Lin et Bejan [8] ont mené une étude expérimentale et analytique sur la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire munie d'un obstacle interne. Les auteurs ont effectué des expériences dans une enceinte remplie d'eau avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales maintenues à des températures différentes (**Figure II.1**).



**Figure (II.1) :** Schéma de l'enceinte partiellement divisée et modèle d'écoulement.

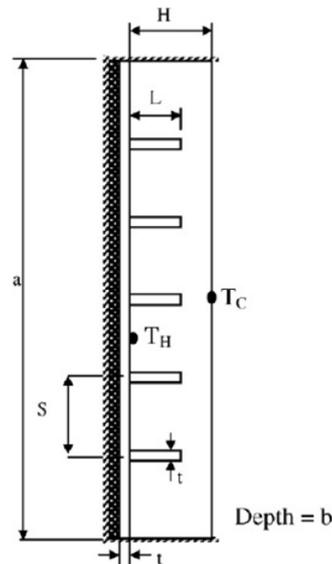
(Source : Lin et Bejan [8])

Leur analyse a été faite pour une gamme de nombres de Rayleigh variant entre  $10^9$  et  $10^{10}$  et pour différents valeurs du rapport,  $h/H = 1, 1/4, 1/8, 1/16$ , et 0, où  $h$  et  $H$  sont la hauteur de l'ouverture interne et la hauteur de l'enceinte, respectivement. Les auteurs ont démontré que le rapport  $h/H$  a un effet important à la fois sur le transfert de chaleur et l'écoulement de fluide.

Ampofo [9] a étudié expérimentalement la convection naturelle turbulente de l'air dans une cavité non partitionnée et une cavité partitionnée avec des murs verticaux différemment

chauffées et des murs horizontaux soumis à la conduction. Les parois chaudes et froides de la cavité sont isothermes à des températures respectives  $50^{\circ}\text{C}$  et  $10^{\circ}\text{C}$ . Le nombre de *Rayleigh* correspondant est  $158 \times 10^9$ . Cinq ailettes avec un matériau de conductivité thermique plus élevée que celui de la cavité, ont été installées sur la paroi chaude. Les ailettes sont portées sur la profondeur de la cavité, la vitesse locale et la température ont été systématiquement mesurées à différents emplacements dans la cavité au moyen d'un anémomètre à laser à effet Doppler et un thermocouple de micro-diamètre. Les quantités moyennes et les fluctuations sont présentées, les nombres de *Nusselt* locaux et moyens, la contrainte de cisaillement de mur ainsi que l'énergie cinétique turbulente ont été déterminées par l'auteur.

Nada [10] a étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle et les caractéristiques d'écoulement de fluide dans des enceintes étroites horizontales et verticales avec une plaque rectangulaire chauffée. La base de la plaque est à surface ailetée. Les auteurs ont analysé le problème de convection pour différents nombre de *Rayleigh*  $Ra$  et différents espacements et longueurs d'ailettes (**Figure II.2**).

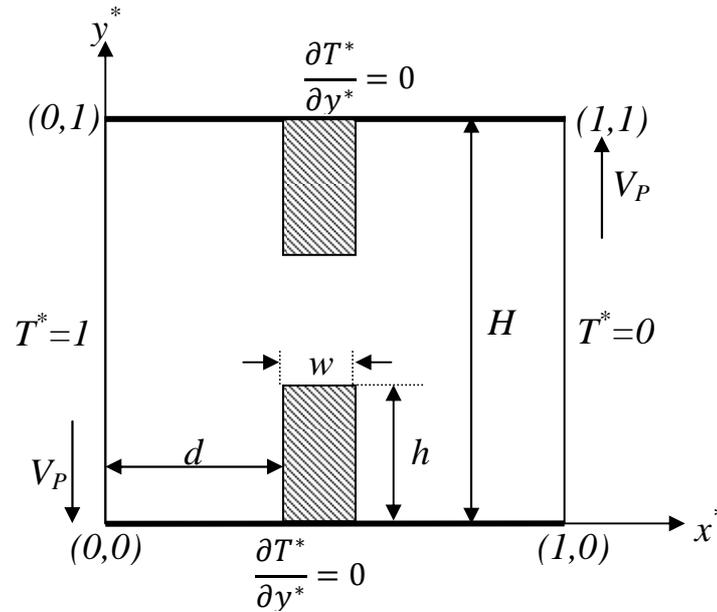


**Figure (II.2) :** Géométrie du réseau d'ailettes (orientation verticale).

(Source : Nada [10])

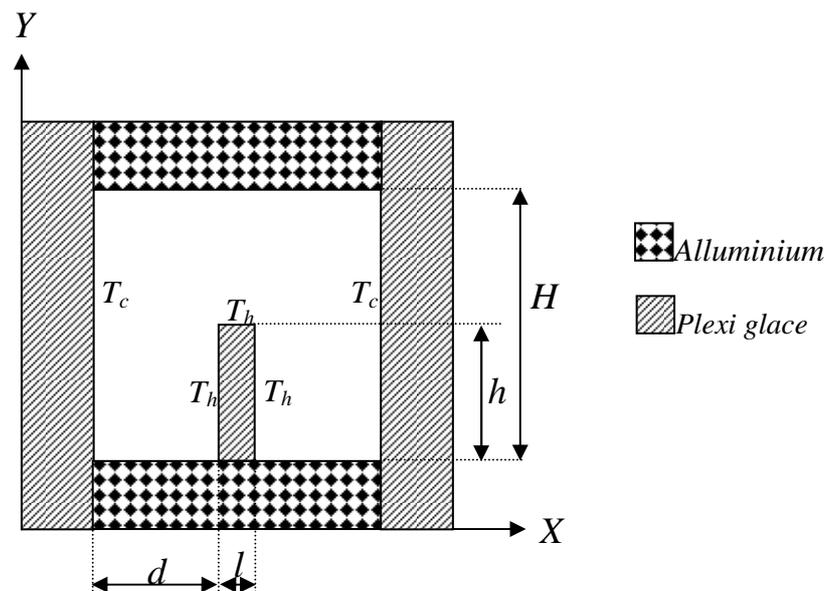
En comparaison avec une enceinte sans ailettes, l'insertion d'ailettes améliore le flux de chaleur. L'auteur a bien étudié la géométrie du dispositif pour différent cas mais malheureusement dans un intervalle étroit de nombre de *Rayleigh* qui est compris entre 0 et  $3 \times 10^4$ .

Mahapatra et Sarkar [11] ont étudié la convection mixte dans une enceinte partitionnée différemment chauffée. Le phénomène à l'intérieur de l'enceinte avec des partitions situées au centre et décalée sont également analysées. Le nombre de *Richardson* ( $Ri$ ) a été modifié afin de simuler la convection mixte ( $Ri = 1$ ) et le flux de la convection forcée dominée ( $Ri = 0.1$ ). L'étude entamée par les deux auteurs est focalisée sur une seule valeur de nombre de *Rayleigh*  $Ra = 10^4$  et à deux valeurs seulement de nombre de *Richardson* ( $Ri = 0.1$  ou  $Ri = 1.0$ ).



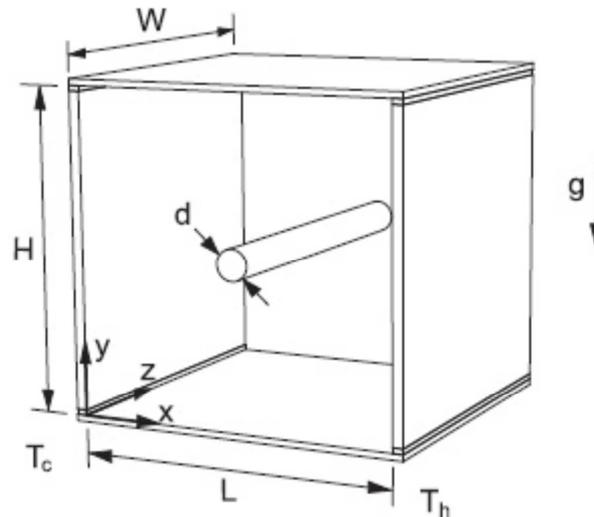
**Figure (II.3) :** Domain des calculs test  
(Source : S.K. Mahapatra, A. Sarkar (2007)[11])

Corvaro et Paroncini [12], ont analysé expérimentalement la convection naturelle dans une enceinte carrée différemment chauffée de hauteur  $H$ . La cavité est remplie d'air et chauffée par une source chaude de hauteur  $H/2$ . L'effet de la position de cette source sur les structures dynamiques générées par le transfert de chaleur par convection naturelle, a été analysé en régime laminaire et permanent. Au cours de l'étude, la présence de deux petits tourbillons a été notée sur la surface supérieure de la source de chaleur, celles-ci dépendent à la fois du nombre de *Rayleigh* et de la position de la bande. Les résultats de cette étude sont basés sur la variation des vitesses et de géométrie de la cavité.



**Figure (II.4) :** Cellule de l'expérience ; (Source : F. Corvaro, M. Paroncini 2009 [12])

Butler et al. [13] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle d'un cylindre horizontal, faisant l'objet d'une source de chaleur, enfermée dans une cavité carrée, pour une gamme de nombre de *Rayleigh*  $2.10^4 < Ra_{cy} < 8.10^4$  et un nombre de *Prandtl* de  $Pr=0.71$  où une différence de température existe à travers ses parois verticales. Un bon accord a été observé entre les résultats obtenus par les auteurs avec les corrélations disponibles dans la littérature.



**Figure (II.5):** Compartiment expérimental.

(Source :C. Butler, D. Newport, M. Geron; (2013) [13])

### II.3. Travaux à caractères numériques :

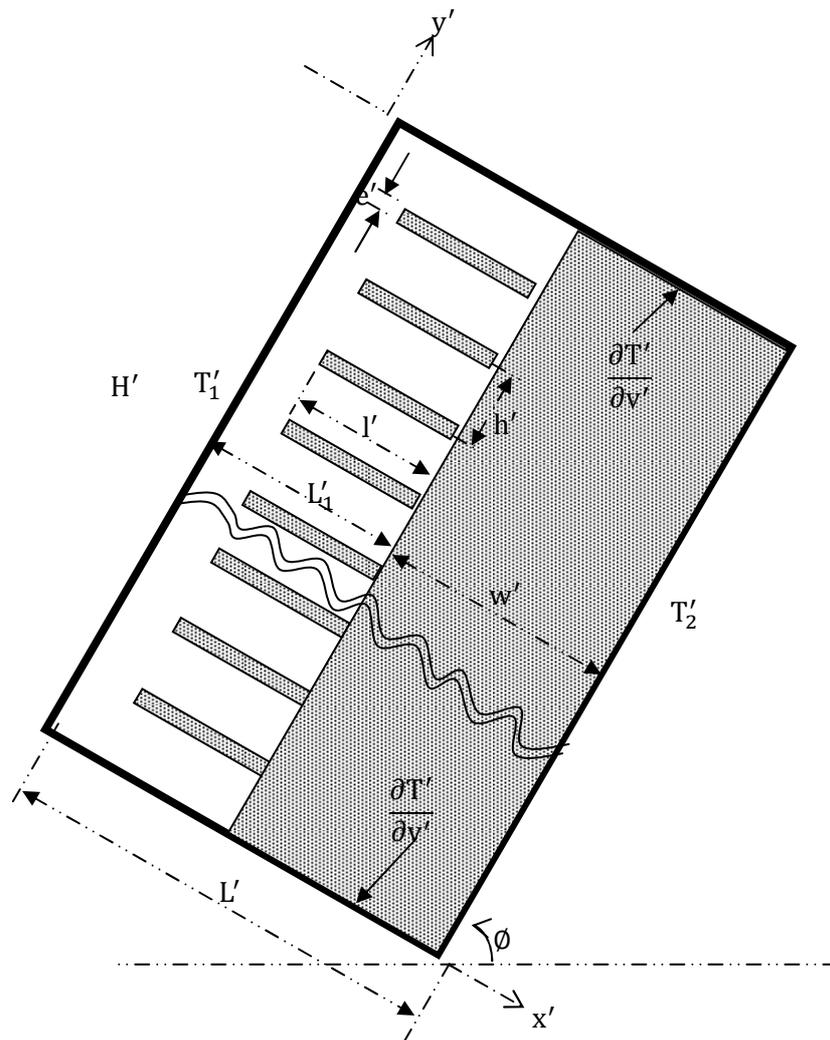
Wu-Shung Fu et Wen- Jiann Shieh [14] ont effectué une étude théorique à caractère numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée partitionnée par une seule ailette adiabatique attachée à la paroi supérieure de la cellule. La méthode des éléments finis quadrilatéraux avec 9 nœuds et éléments ainsi que le schéma de *Newton-Raphson* ont été utilisés dans cette étude. Le fluide dans l'enceinte est de l'air, la gamme de nombres de *Rayleigh* varie entre  $10^4$  et  $10^5$ . Les résultats ont montré que les coefficients de transfert de chaleur ont été influencés par la hauteur de la cavité et l'emplacement de l'ailette.

Hasnaoui et al. [15] ont étudié numériquement l'effet de la flottabilité sur l'écoulement et le transfert de chaleur qui se développent entre une surface froide horizontale et des cavités ouvertes bidimensionnelles chauffées par le bas. Les auteurs ont montré que la symétrie de l'écoulement peut être déformée en raison de la présence d'une paroi supérieure.

Milos H. Novak et Edwin S. Nowak [16] ont analysé le transfert de chaleur laminaire par convection naturelle et l'écoulement de fluide dans les cavités rectangulaires verticales avec ou sans ailettes intérieures. Un programme de calcul basé sur la méthode des différences finies intitulé CAV est utilisé. Pour rendre le programme CAV utile pour un certain nombre d'applications, différents types de conditions aux limites ont été imposées sur les calculs du programme. Les applications du programme présentées sont relatives à l'analyse numérique

en 2D de transfert de chaleur par convection naturelle en cavités très fines avec et sans petites ailettes intérieures et des recommandations sont faites pour la conception de fenêtre.

Lakhal et al. [17] ont étudié numériquement la convection naturelle et le transfert de chaleur par conduction dans des enceintes rectangulaires inclinées avec une structure ailetée, attachée à la paroi chauffée. Les conditions aux limites utilisées sont relatives à un flux de chaleur constant à la paroi ailetée, des températures isothermes sur les parois longues et adiabatiques sur les parois courtes. Les paramètres utilisés sont le nombre de *Rayleigh*, le rapport d'aspect des enceintes, les longueurs adimensionnelles des partitions, le rapport d'aspect des micro-cavités, l'angle d'inclinaison, l'épaisseur de la paroi et l'épaisseur de l'ailette.

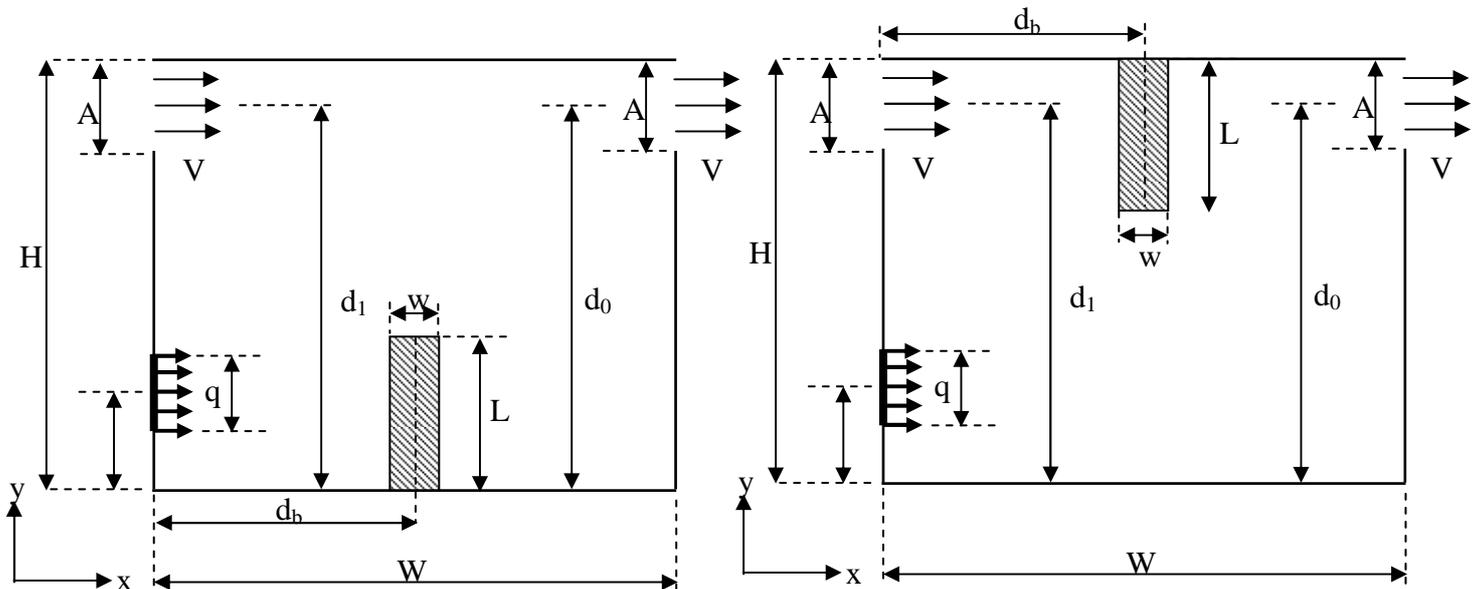


**Figure (II.6) :** Schématisation du problème, conditions aux limites et système de coordonnées (Source: E. K. Lakhal, E. Bilgen, P. Vasseur (1995) [17])

R. Kumart [18] a obtenu des résultats numériques du flux de chaleur et des champs d'écoulement longitudinaux dans un espace annulaire muni d'ailettes verticales, pour différents paramètres tel que le rapport de rayons, le nombre et l'épaisseur d'ailettes. Pour des nombres fixes de *Rayleigh*, le rapport de rayons, le rapport d'ailettes, l'angle de l'épaisseur

d'ailette, le flux de chaleur est maximal pour un nombre déterminé d'ailettes. Ce flux de chaleur augmente avec le rapport de l'ailette et du rayon.

How et Hsu [19] ont étudié numériquement la convection laminaire transitoire mixte dans une enceinte bidimensionnelle partitionnée par un obstacle conducteur. L'enceinte dispose d'une source de chaleur de taille finie encastrée sur la paroi verticale. Le travail simule un système pratique d'un équipement électronique avec des composants chauffants refroidis par l'air. Les effets du nombre d'ailettes et de *Reynolds* sur le mécanisme de transfert de chaleur sont importants. Les résultats indiquent que le régime permanent dépend fortement des paramètres qui régissent le phénomène et de la configuration de l'ailette.



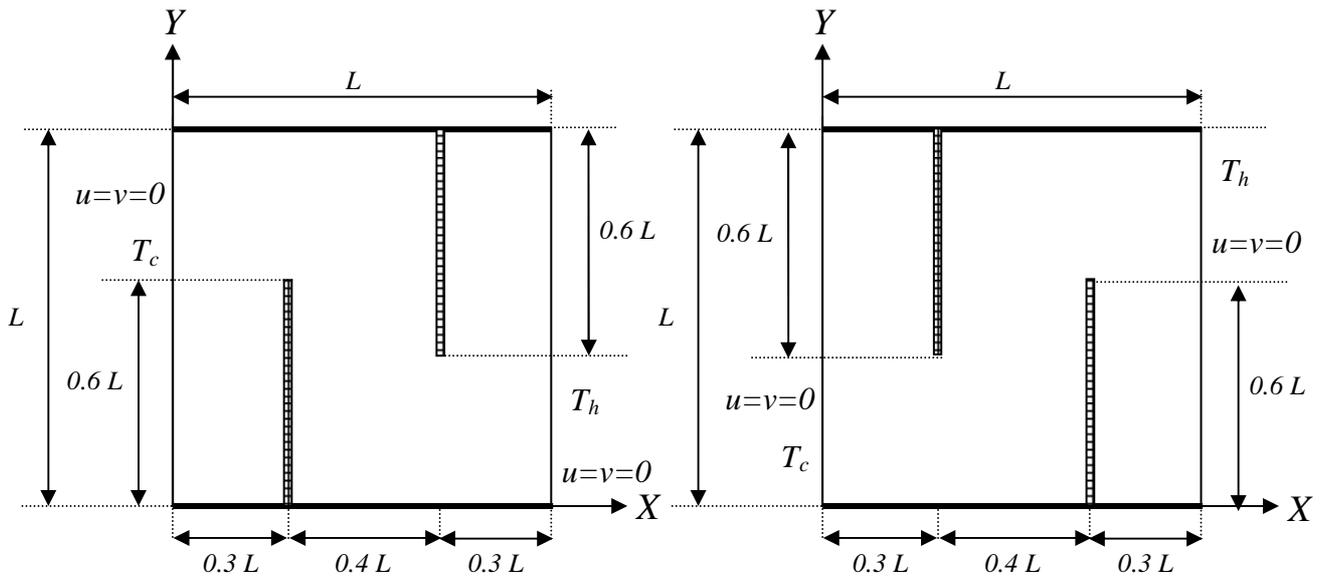
**Figure (II.6-a)** Cavité partitionnée à la paroi inférieure

(Source: S-P. How, T-H. Hsu (1998) [19])

**Figure (II.6-b)** Cavité Partitionnée à la paroi supérieure

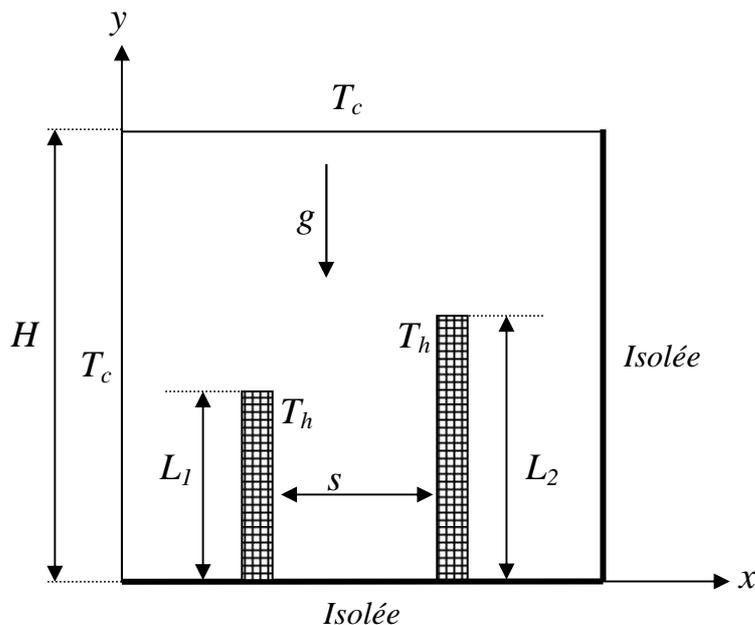
Young Han et WookBaek [20] ont étudié numériquement le phénomène de rayonnement accompagné d'une convection naturelle en régime permanent et laminaire dans une enceinte rectangulaire avec deux partitions. La convection pure, la convection avec rayonnement de surface, et la convection avec rayonnement surface/gaz ont été traitées par les auteurs.

Dans l'examen des effets des deux partitions sur le comportement thermo-fluide, les auteurs ont supposé que les obstacles sont minces, adiabatiques et opaques. La solution obtenue numériquement, sous les effets de rayonnement a permis de noter que le rayonnement joue un rôle important dans le développement de la dynamique des fluides et dans la distribution de température par rapport à des cas sans rayonnement.



**Figure (II.7) :** Schématisation des enceintes complexes  
(Source: Cho Young Han ET Seung WookBaek (2000) [20])

L'analyse numérique menée par Dagtekin et Oztop [21] est basée sur l'étude de transfert de chaleur par convection naturelle avec écoulement de fluide dans une enceinte munie de deux ailettes chauffées. La paroi latérale droite et la paroi inférieure de l'enceinte ont été isolées parfaitement tandis que la paroi gauche et la paroi supérieure ont été maintenues à température uniforme. Les ailettes ont été placées sur le fond de l'enceinte avec des températures maintenues plus élevées que celle des parois non isolées. Les effets de la position et de la hauteur des ailettes sur le transfert de chaleur et le champ d'écoulement ainsi que le nombre de *Nusselt* moyen ont été étudiés.



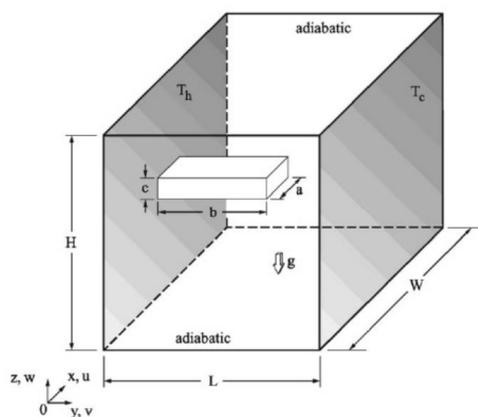
**Figure (II.8) :** Géométrie et coordonnées du problème.  
(Source: Dagtekin et H.F. Oztop (2001) [21])

Yucel et Ozdem [22] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide avec transfert de chaleur dans les enceintes carrés partiellement divisées. Ils ont considéré les parois d'extrémités horizontales de l'enceinte adiabatiques et les parois latérales, gauche et droite de l'enceintes, maintenues à des températures uniformes, mais différentes et soumises à des conditions aux limites appropriées avec une plage de nombre de *Rayleigh* variant entre  $10^3$  à  $5.10^5$ .

Une formulation conjuguée à l'interface solide-fluide est utilisée, alors que la conductivité thermique et la viscosité sont calculées en utilisant une formulation harmonique moyenne, afin de traiter les changements brusques dans les propriétés du matériau. En utilisant le fait que, le transfert de chaleur à partir de la paroi latérale chaude par conduction doit être égal à la transmission de chaleur au fluide par convection, le nombre de *Nusselt* local est évalué, l'effet des nombres de *Rayleigh*, le nombre de partition et la hauteur de la partition sur la structure du fluide et l'écoulement de fluide ont été étudiés.

Il a été observé que, le nombre de *Nusselt* moyen augmente avec l'augmentation du nombre de *Rayleigh* et diminue avec l'augmentation du nombre de partitions. Toutefois, la diminution du nombre moyen de *Nusselt* est inférieure aux faibles nombres de *Rayleigh*. En outre, l'augmentation de la hauteur de la partition diminue le nombre de *Nusselt* moyen.

Da Silva et Gosselin [23] ont évalué les l'effet du rapport d'aspect et la longueur horizontale d'une ailette rectangulaire de haute conductivité fixée à la paroi chaude d'une enceinte cubique tridimensionnelle différemment chauffée, soumise à une convection naturelle laminaire. L'objectif de cette étude est d'analyser l'augmentation du transfert de chaleur à partir de la paroi chauffée au fluide lorsque la fraction volumique de l'ailette est fixée. Deux valeurs différentes pour le volume de l'ailette ont été envisagées: une grande ailette qui occupe 10% de l'enceinte cubique et une ailette beaucoup plus petite qui occupe seulement 0.1% du volume total de l'enceinte.



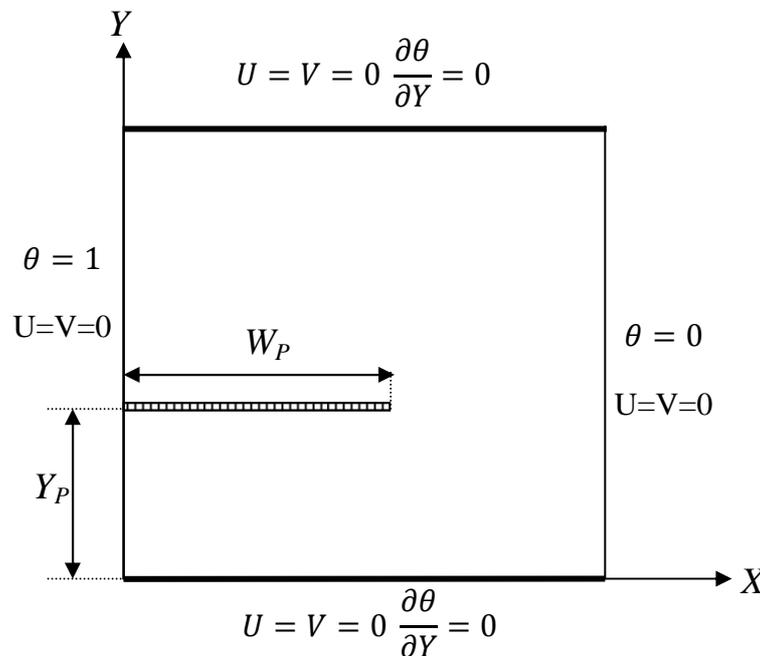
**Figure (II.9) :** Géométrie physique et système de coordonnées.

(Source : A.K. da Silva, L. Gosselin (2005))[23])

Les résultats numériques ont montré que pour une enceinte avec grande fraction volumique de l'ailette, le rapport d'aspect d'ailette ne joue pas un rôle important, et le flux de chaleur moyen transféré au fluide augmente de façon monotone avec la longueur horizontale

d'ailette. Pour une enceinte cubique avec petite fraction de volume d'ailette, le flux moyen de quantité de chaleur fournie au fluide augmente avec le rapport d'aspect de l'ailette et avec la longueur de l'ailette horizontale.

Bilgen [24] a réalisé une étude numérique sur les cavités carrées différemment chauffées, formées de parois horizontales adiabatiques et de parois verticales isothermes. Une ailette mince est fixée sur la paroi active. Une étude paramétrique a été réalisée en utilisant les paramètres suivants : le nombre de *Rayleigh*, la longueur adimensionnelle de l'ailette mince, sa position adimensionnelle et le rapport de la conductivité adimensionnelle de l'ailette mince (parfaitement isolée). Les auteurs ont noté que le nombre de *Nusselt* est une fonction croissante du nombre de *Rayleigh* et une fonction décroissante par rapport à la longueur de l'ailette. De plus, ils ont observé qu'il y a une position optimale de la longueur de l'ailette, qui se situe souvent au centre ou à proximité du centre de la cavité, ce qui conduit à un transfert de chaleur par convection naturelle minimal. Le transfert de chaleur peut être réduit jusqu'à 38%, en choisissant des paramètres thermiques et géométriques appropriés de l'ailette.

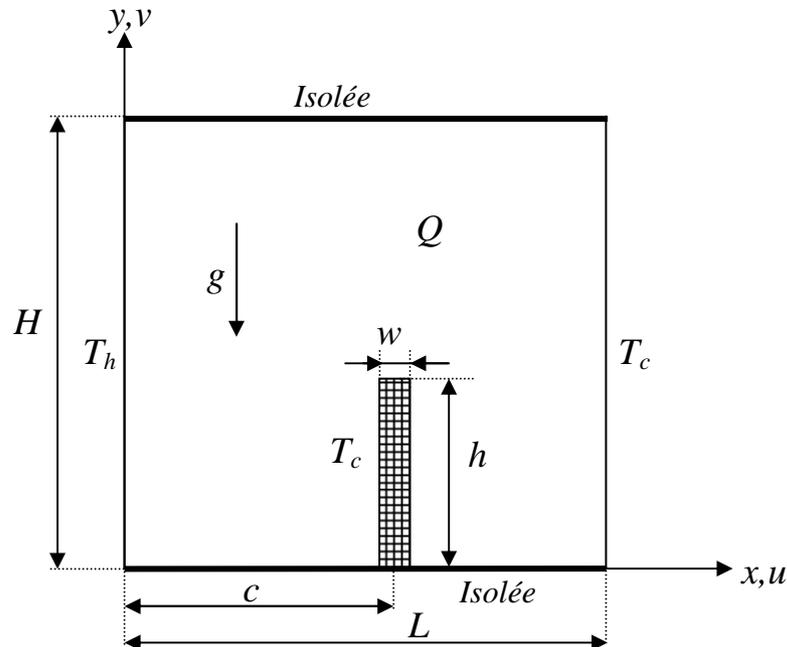


**Figure (II.10) :** Schéma d'une cavité carrée  
Avec une ailette mince attachée à la paroi chaude  
(Source : E. Bilgen (2005))[24]

Oztop e Bilgen [25] ont étudié numériquement le transfert de chaleur dans une cavité carrée, partitionnée, différemment chauffée, contenant un fluide générant de la chaleur. Les parois verticales sont isothermes, les parois horizontales sont adiabatiques et une partition isotherme de la température de référence a été fixée à la paroi inférieure.

Les résultats ont été obtenus pour différents paramètres géométriques : la hauteur, l'épaisseur et la position de la partition pour un nombre de *Rayleigh* caractérisant le chauffage interne et externe. Selon le rapport des nombres de *Rayleigh* interne et externe, deux régimes

distincts ont été observés et étudiés avec différents paramètres géométriques. Il est constaté que le champ d'écoulement a été considérablement modifié avec des partitions partiels et le transfert de chaleur a été généralement réduit, en particulier lorsque le rapport des nombres de *Rayleigh* interne et externe est de  $10^1$  à  $10^2$ .



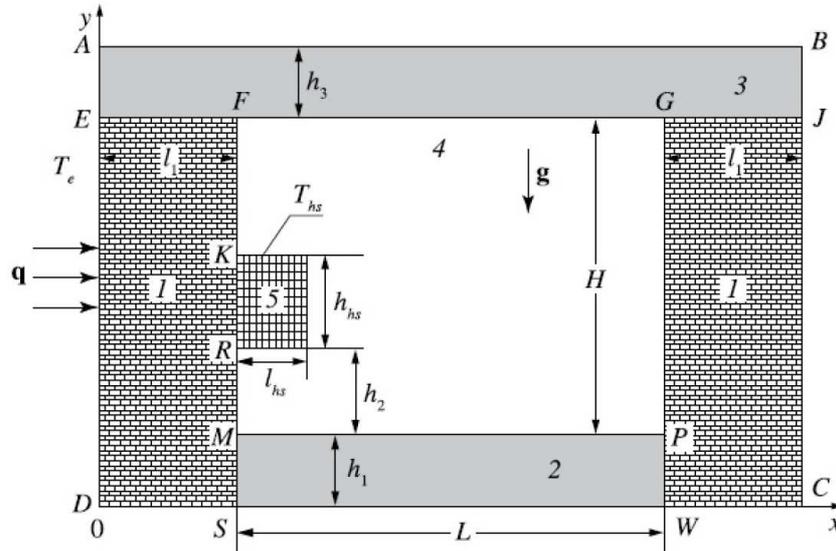
**Figure (II.11) :** Schématisation du problème, Système de coordonnées et conditions aux limites (Source: H. Oztop, E. Bilgen (2005)) [25]

Joubert et Le Quéré [26] ont présenté les résultats d'un problème numérique visant à comparer les prédictions de différentes approches conventionnelles de modélisation de la turbulence pour la convection naturelle à des nombres de *Rayleigh* caractéristiques des applications telles que l'économie de l'énergie, la sécurité incendie ou le confort thermique.

Une configuration bidimensionnelle a été considérée, consistant en deux chambres adjacentes séparées par un linteau, dans lequel la convection naturelle est induite par chauffage sur leurs côtés opposés et soumis à la diffusion d'un polluant d'une chambre à l'autre. La comparaison est effectuée, en termes de quantités locales ou globales, pour les champs moyens thermiques et dynamiques et pour la diffusion instationnaire du polluant d'une chambre à l'autre.

Kuznetsov et Sheremet [27] ont mené une étude numérique sur le transfert de chaleur transitoire par convection naturelle dans un domaine rectangulaire fermé dans le cas d'un chauffage local sur la surface intérieure de la paroi verticale. Le transfert de chaleur par convection-rayonnement a eu lieu sur une des limites extérieures du domaine d'étude. La circulation des flux peuvent être distinguées dans les diverses zones du domaine d'étude sur la base des investigations numériques effectuées. Ces flux sont dus à l'effet de la source de

dégagement de chaleur, la propagation des perturbations induites par les éléments de la paroi rigide, et le transfert de chaleur par conduction dans le matériau solide.



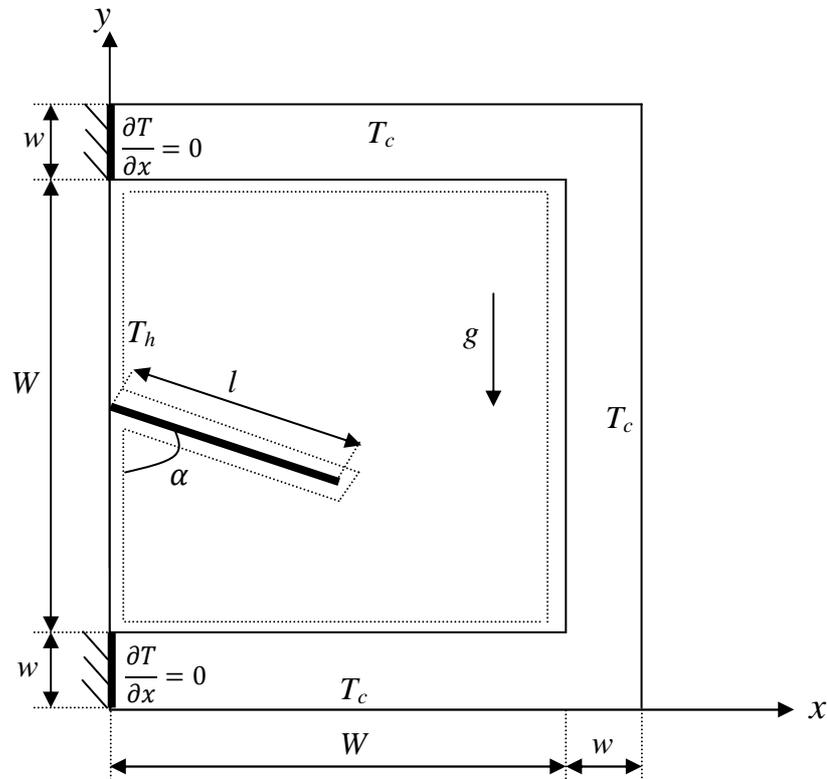
**Figure (II.12) :** Domaine de la solution: les éléments de la phase solide (1, 2 et 3), la phase gazeuse (4), la source de dégagement de chaleur (5)  
(Source: G.V. Kuznetsov et M. A. Sheremet (2006) [27])

Al Fahaid [28] a étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans des enceintes verticales munies d'ailettes conductrices attachées à la paroi verticale chaude. Les parois verticales latérales ont été maintenues à des températures constantes mais différentes, tandis que la paroi horizontale et la paroi de fond sont adiabatiques. L'objectif principal du travail présenté est d'étudier numériquement les effets du nombre et de la longueur d'ailette ainsi que le nombre de *Rayleigh* sur le modèle d'écoulement et de transfert thermique. Il a été observé que le transfert de chaleur à travers une enceinte est largement affecté et par conséquent, il peut être contrôlé par le nombre d'ailettes attachées à la paroi latérale verticale de l'enceinte, ainsi que les longueurs d'ailette.

L'auteur a fait varier le nombre, la longueur et la position des ailettes sur la paroi, les résultats présentés sont relatifs aux isothermes, à la fonction de courant et au nombre de *Nusselt* moyen, aucun résultat sur le développement des vitesses n'est présenté.

Ben-Nakhi et Chamkha [29] ont abordé un travail centré sur l'étude numérique de la convection naturelle en régime permanent, laminaire, conjugué dans une enceinte carrée avec une ailette mince inclinée de longueur arbitraire. L'ailette est fixée sur le côté gauche vertical de l'enceinte tandis que les trois autres côtés sont considérés comme finis et d'épaisseurs égales et de conductivité thermique arbitraire. La paroi de gauche de l'enceinte à laquelle est attachée l'ailette est supposée chauffée tandis que les côtés extérieurs des trois autres surfaces de l'enceinte sont refroidis. L'ailette mince inclinée est parfaitement conductrice et positionnée dans la surface moyenne chauffée de l'enceinte. Les résultats représentatifs illustrant les effets de l'angle d'inclinaison de l'ailette mince sur la longueur et la conductivité thermique des surfaces épaisses sur les lignes de courant et les contours de température dans

l'enceinte. Les résultats relatifs aux nombres de *Nusselt* locaux et moyens sont présentés et discutés pour différents conditions paramétriques. Les résultats présentés par les auteurs ne concernaient qu'une ailette placée à une position fixe.



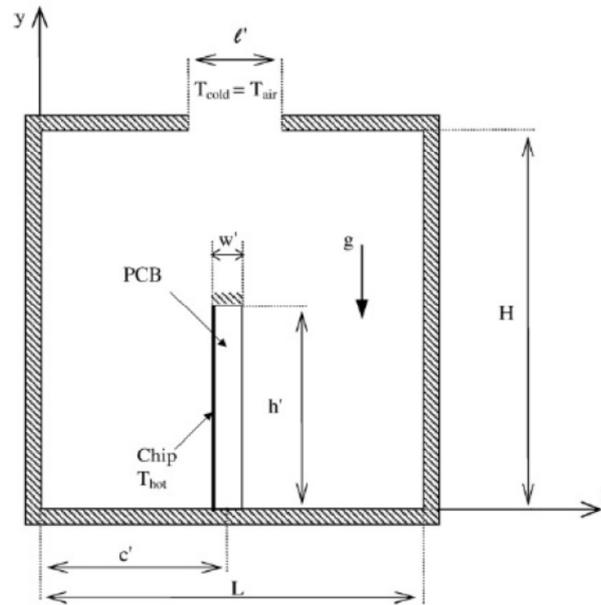
**Figure (II.13) :** Schémas et système de coordonnées pour une cavité carrée avec une ailette inclinée au centre de la paroi chaude (Source : A. Ben-Nakhi A.J. Chamkha (2007)) [29]

Varol et al. [30] ont analysé numériquement l'aspect bidimensionnel de la convection naturelle d'une ailette solide mince et adiabatique attachée à la paroi du fond d'une enceinte triangulaire droite. La paroi verticale de l'enceinte est isolée alors que le fond et les parois inclinées sont isothermes. La température de la paroi de fond est plus élevée que la température de la paroi inclinée. Les emplacements adimensionnels de l'ailette mince sont de 0.2 à 0.6. Le rapport d'aspect de l'enceinte triangulaire est de 0.25 à 1, le nombre de *Rayleigh* est de 100 à 1000 et la hauteur de l'ailette adimensionnelle est de 0.1 à 0.4 sont utilisées en tant que paramètres gouvernants qui sont efficaces sur le transfert de chaleur et l'écoulement de fluide. Les auteurs ont observé que l'ailette mince peut être utilisée comme un élément de contrôle passif pour le champ d'écoulement, la distribution de température et le transfert de chaleur.

Koca [31] a étudié numériquement le transfert de chaleur conjugué dans une cavité carrée partiellement ouverte avec une source de chaleur verticale. La cavité comporte une ouverture sur le dessus les autres parois de la cavité sont supposées adiabatiques.

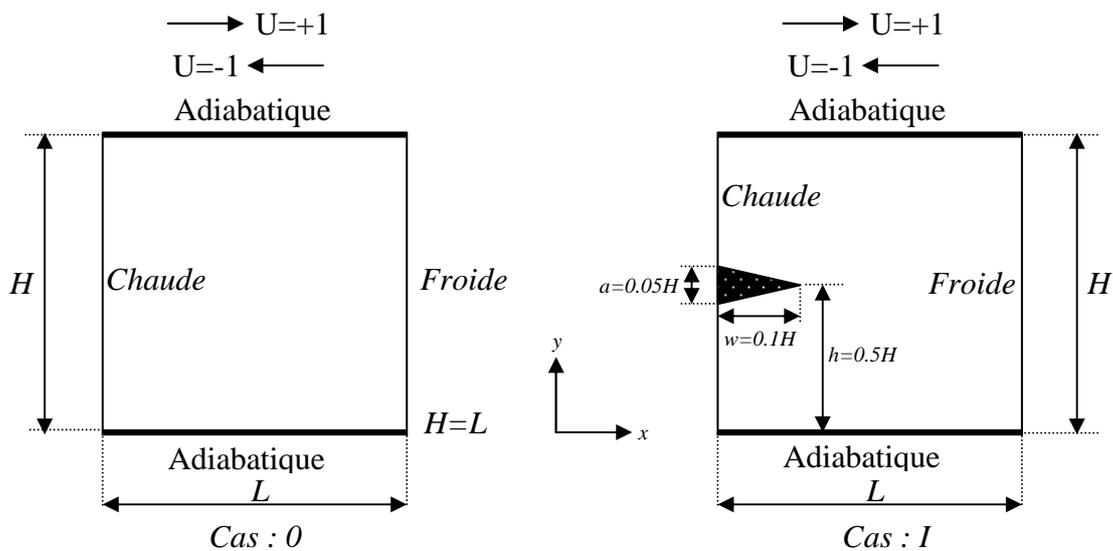
Les résultats ont été rapportés pour différents paramètres gouvernants tels que le nombre de *Rayleigh* ( $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ), le rapport de conductivité, la position d'ouverture, la

durée d'ouverture, la distance de PCB (Printed Circuit Boards) et la hauteur de PCB. Il a été constaté que la position de ventilation a un effet significatif sur le transfert de chaleur.

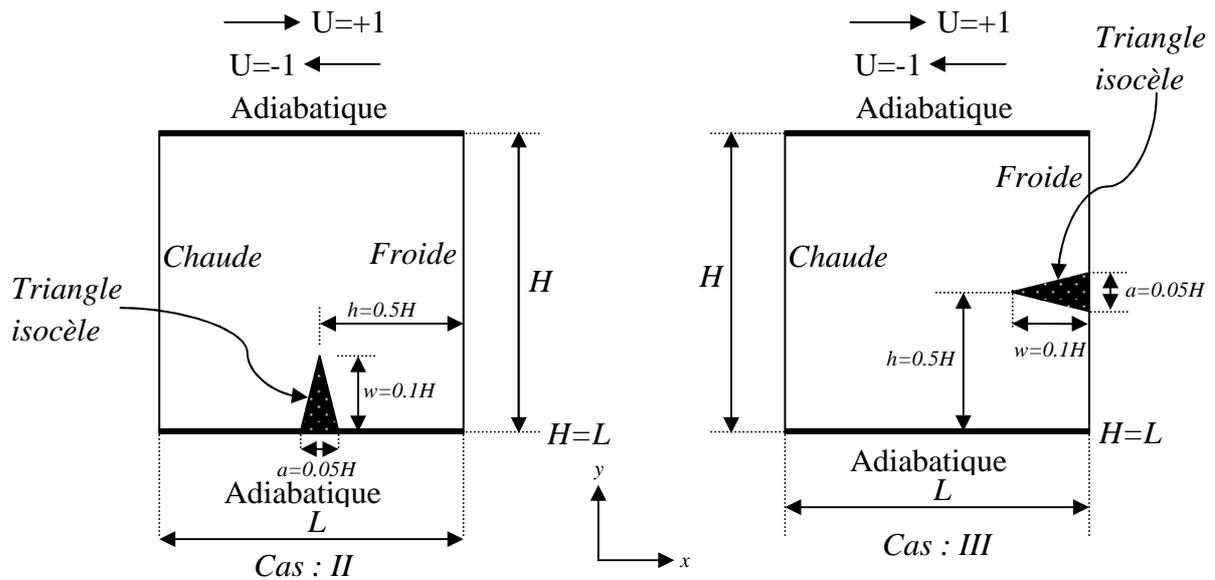


**Figure (II.14) :** Modèle physique et système de coordonnées du problème.  
(Source :Ahmet Koca(2008)) [31]

Sun et al. [32] ont réalisé une étude ayant fait l'objet de contrôle de la convection mixte (forcée et naturelle) dans une cavité carrée d'un couvercle entraîné en utilisant une courte ailette conductrice triangulaire. Les parois verticales de la cavité sont différemment chauffées, alors que le couvercle et la paroi du fonds sont adiabatiques. L'ailette est située sur l'une des parois immobiles de la cavité.



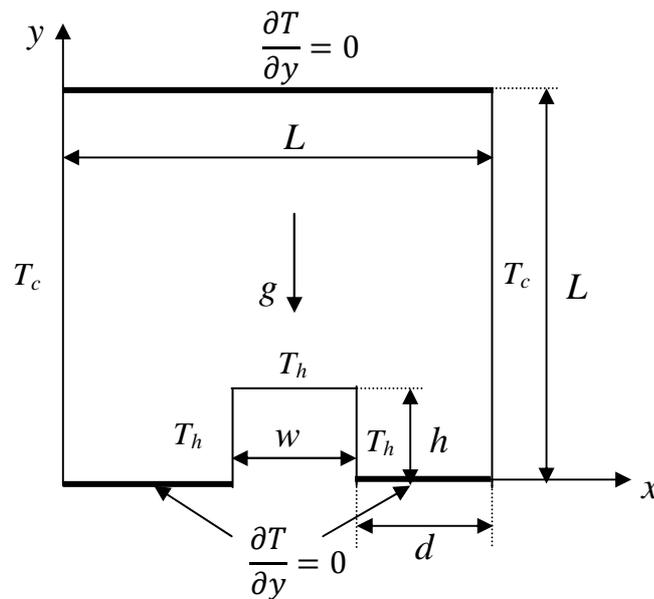
**Figure (II.15-a) :** Configurations des cas étudiés  
(Source :Changzheng Sun, Bo Yu (2009)) [32]



**Figure (II.15-b) :** Configurations des cas étudiant  
 (Source :Changzheng Sun, Bo Yu (2009)) [32]

Trois cas différents ont été étudiés en fonction du l'emplacement de l'ailette. Il a été observé que l'ailette triangulaire est un bon paramètre de contrôle du transfert de chaleur, de distribution de température et du champ d'écoulement.

Al Amiri, Khanafer et Pop [33] ont présenté une étude portant sur la flottabilité induite par le transfert de chaleur dans une enceinte carrée partiellement divisée avec un nombre de *Rayleigh* compris entre :  $10^4 \leq Ra \leq 10^7$ . Les résultats ont montré que tous les paramètres liés aux dimensions géométriques de l'élément chauffant ont eu des variations importantes sur le champ d'écoulement, sur les isothermes, et sur le transfert de chaleur (Figure II.16).



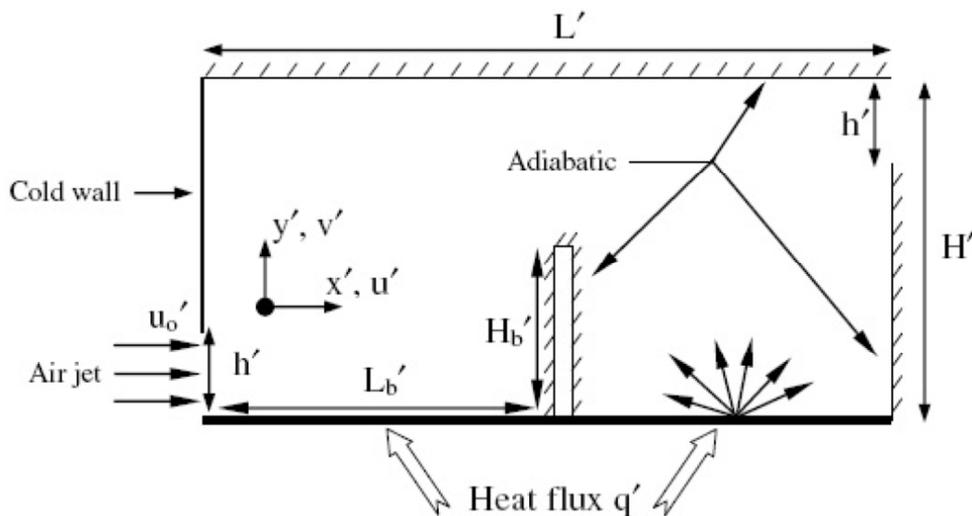
**Figure (II.16) :** Schéma du modèle physique.  
 (Source : Al Amiri, K. Khanafer et I. Pop [33])

Les dimensions géométriques adimensionnelles utilisées avec leurs intervalles respectifs sont: la largeur de chauffage ( $0.005 \leq W \leq 0.5$ ), la hauteur de chauffage ( $0.005 \leq h \leq 0.5$ ) et l'emplacement de l'élément chauffant ( $0 \leq d \leq 0.5$ ).

L'étude a révélé que l'accroissement de la hauteur de l'élément chauffant, sa largeur et son emplacement améliorent le transfert de chaleur dû à l'augmentation de la surface d'échange de l'élément chauffant.

Kasayapan et Kiatsiriroat [34] se sont intéressés à la modélisation numérique de l'effet du champ électrique sur la convection naturelle dans des cavités carrées partiellement ouvertes avec une ailette mince attachée à la paroi chaude de gauche. Il a été constaté que le débit et les améliorations de transfert de chaleur sont des fonctions décroissantes du nombre de *Rayleigh*, de plus, le débit volumique et le coefficient de transfert de chaleur se sont sensiblement améliorés par électro-hydrodynamique en particulier à faible taille d'ouverture, de la position haute de l'ouverture, et de l'angle d'inclinaison élevé.

Bahlaoui et al. [35] ont présenté des résultats numériques du transfert mixte de la convection et le rayonnement de surface à l'intérieur d'une cavité horizontalement ventilée, chauffée par le bas et munie d'une ailette mince adiabatique sur la surface chauffée. L'air, comme milieu transparent radiatif, est considérée comme étant le fluide de refroidissement, l'effet de certains paramètres gouvernants, qui sont le nombre de *Reynolds*,  $200 \leq Re \leq 5000$  la position de l'ailette par rapport à l'entrée de la cavité,  $0 \leq \varepsilon \leq 0.85$  et l'émissivité des parois  $0.25 \leq L_b \leq 1.75$ , sur l'écoulement de fluide et des caractéristiques de transfert de chaleurs ont été étudiés en détail (Figure II.17).



**Figure (II.17) :** Schéma de la configuration étudiée.

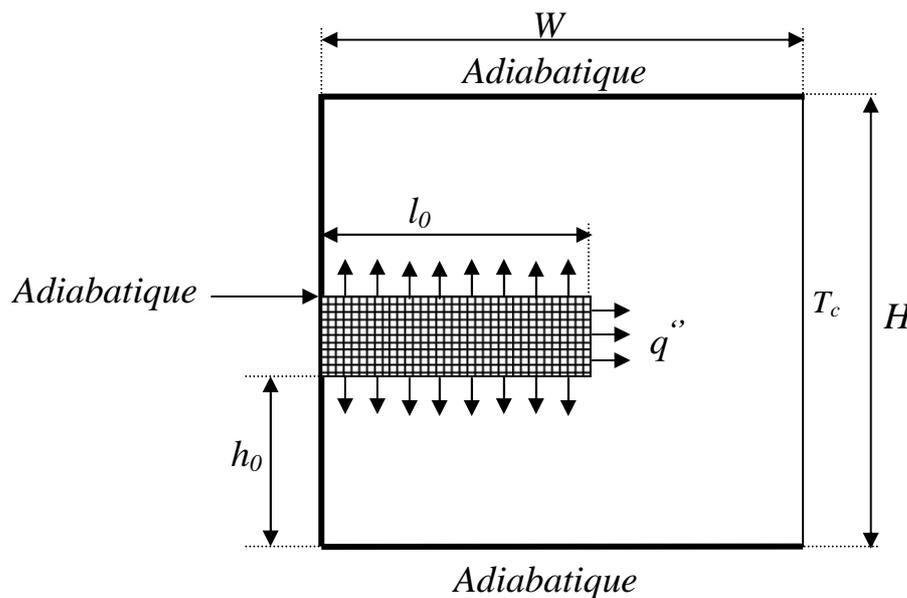
(Source: A. Bahlaoui et al. [35])

Les températures maximales et moyennes, le rapport,  $Q_E/Q_L$ , de la quantité de chaleur  $Q_E$  sortant de la cavité à travers la sortie, et  $Q_L$  par le côté gauche vertical froid, sont également représentés en fonction des paramètres de contrôle. Le travail effectué dans cet

article sera plus conséquent si la plage de nombre de *Rayleigh* était plus importante ainsi que le changement de l'emplacement de l'ailette.

Mahmoudi et al. [36] ont développé une étude basée sur une analyse numérique du refroidissement par convection naturelle d'une source de chaleur horizontalement attachée à la paroi verticale gauche de la cavité. La cavité étant remplie d'un nano-fluide d'eau de cuivre, la paroi de gauche verticale est maintenue à une température constante, tandis que les autres sont adiabatiques. L'influence de certains paramètres, tels que: le nombre de *Rayleigh*, la position et la géométrie de la source de chaleur et de la concentration du solide ont été étudiés et discutés.

Les résultats obtenus ont montré que la dimension de la source de chaleur est un paramètre important affectant le modèle d'écoulement et le champ de température, de façon que le nombre de *Nusselt* moyen diminue avec l'augmentation de la longueur de l'élément chauffant. Il a été observé également qu'à un nombre donné de *Rayleigh* et à une géométrie déterminée de la source de chaleur, le nombre de *Nusselt* moyen augmente linéairement avec l'augmentation de la fraction volumique de solide du nano-fluide. Ainsi l'augmentation du nombre de *Rayleigh* renforce la convection naturelle qui conduit à la diminution de la source de chaleur.



**Figure (II.18) :** Géométrie du problème  
(Source : A.H. Mahmoudi ; M. Shahi (2010)) [36]

Kuznetsov et Sheremet [37] ont étudié numériquement la convection naturelle turbulente dans une enceinte rectangulaire ayant des parois thermo-conductrices d'épaisseur finie où une source de chaleur locale située au fond de la cavité, avec des conditions d'échange de chaleur par convection et par rayonnement avec l'environnement à travers une des frontières. La formulation comprend deux équations du modèle standard de la turbulence  $k - \varepsilon$  avec les fonctions de paroi, en même temps que l'approximation de *Boussinesq*, pour l'écoulement et le transfert de chaleur. Une attention particulière a été accordée aux effets du

nombre de *Grashof* ( $10^8 \leq Gr < 10^{10}$ ), le facteur transitoire ( $0 < \tau < 1000$ ) et le rapport de la conductivité thermique ( $K_{2,1} = 5.7 \times 10^4$ ;  $6.8 \times 10^5$ ) à la fois au niveau des paramètres locaux et sur les problèmes d'intégrale.

Fontanaa et al. [38] ont entamé une étude numérique de l'écoulement d'air en régime permanent en flottabilité-entraînée dans une cavité carré bidimensionnelle partiellement ouverte avec une source de chaleur interne. Les parois inférieures et supérieures sont adiabatiques alors que les parois verticales sont maintenues à des températures constantes mais différentes. Une source de chaleur de 1% du volume de la cavité est placée dans le centre de la paroi inférieure. La paroi froide de droite contient une ouverture partielle d'occupation de 25%, 50% ou 75% de la paroi. L'influence du gradient de température entre les parois verticales a été analysée pour  $Ra_e = 10^3 - 10^5$ , alors que l'influence de la source de chaleur a été évaluée par la relation  $R = Ra_i / Ra_e$  (Nombre de *Rayleigh* interne par rapport à l'externe), et est étudiée entre 400 et 2000.

Pour un faible nombre de *Rayleigh*, les auteurs ont noté la dominance de la source de chaleur, mais avec l'augmentation de  $Ra_e$ , l'écoulement devient lentement dominé par la différence de température entre les parois. Il est également observé que plusieurs fortes circulations secondaires sont formées pour des fluides avec des petites valeurs de  $Ra_e$  alors que ces caractéristiques sont absentes aux grands nombres de  $Ra_e$ . Les résultats numériques montrent une influence significative du transfert de chaleur à l'ouverture dans la cavité.

Mahmoudi et al. [39] ont présenté une étude numérique de refroidissement par convection naturelle de deux sources de chaleur attachés verticalement aux parois horizontales d'une cavité, la limite d'ouverture à droite est soumise à un nano fluide cuivre-eau à basse température et à pression constante, tandis que les autres limites sont supposées être adiabatiques. L'étude a été effectuée pour un nombre de *Rayleigh* dans la plage  $10^4 \leq Ra \leq 10^7$  et pour une fraction volumique du solide,  $0 \leq \phi \leq 0,05$ . Afin d'étudier l'effet de l'emplacement de la source de chaleur, trois configurations de placement différent de la source de chaleur ont été considérés. Les effets de nombre de *Rayleigh* et les emplacements de source de chaleur sur les lignes de courant, les isothermes et le nombre de *Nusselt* sont également étudiés.

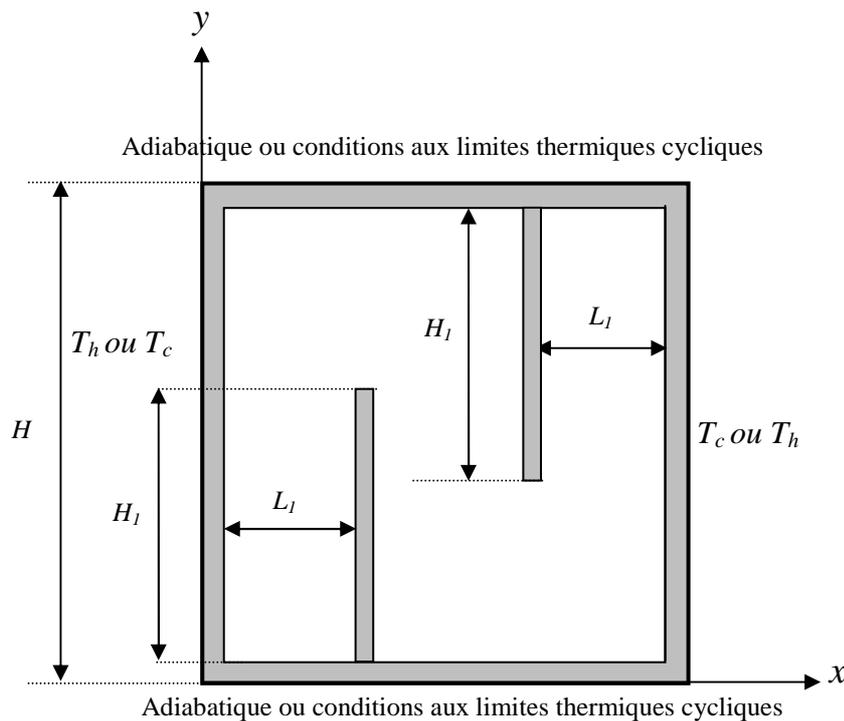
Les résultats indiquent que le champ d'écoulement et la distribution des températures à l'intérieur de la cavité sont fortement dépendantes des nombres de *Rayleigh* et de la position des sources de chaleur. Les auteurs ont noté que le nombre de *Nusselt* est une fonction croissante du nombre de *Rayleigh*, de la distance entre les deux sources de chaleur, et de la distance à partir de la paroi. En outre, il a été observé que le nombre de *Nusselt* moyen augmente de manière linéaire avec l'augmentation de la fraction volumique du solide de nanoparticules.

Sharma et al. [40] ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle à partir d'un empilement de cavités ouvertes horizontales formées d'ailettes attachées à l'équipement.

L'étude a été vérifiée pour une large gamme de nombre de *Rayleigh*, ainsi que l'espacement de la cavité et le nombre de cavités dans l'empilement. L'interaction entre la convection naturelle d'une cavité avec les autres cavités de l'empilement a fait l'objet de l'étude.

Les résultats numériques ont été validés avec des solutions publiés pour une seule cavité isolée. Les auteurs ont remarqué que le transfert de chaleur d'un empilement de cavités est inférieur à celle prévue pour les cavités isolées. En raison de l'effet de préchauffage du fluide atteignant l'entrée des cavités supérieures de celles du bas, le transfert de chaleur des cavités supérieures se dégrade. L'écartement optimale des ailettes sans dimension qui fournit le transfert de chaleur maximum est trouvée être de 2,5 à  $Ra \leq 10^4$  et il est de 0,5 pour  $Ra \geq 10^5$ . La réduction du nombre de *Nusselt* de la cavité supérieure par rapport à celle dans la cavité inférieure est dans la gamme de 65 % au nombre de *Rayleigh* le plus élevé étudié.

Costa [41] a étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée partitionnée remplie d'air. Le but principal est de caractériser ces enceintes, en se basant sur leurs rendements globaux de transfert de chaleur. Deux ailettes d'épaisseur finies sont placées dans l'enceinte suivant un arrangement ordonné, dont la position, la longueur et la conductivité thermiques varient pour certaines valeurs du nombre de *Rayleigh* et pour différentes conditions aux limites thermiques.



**Figure (II.19) :** Schéma du modèle physique

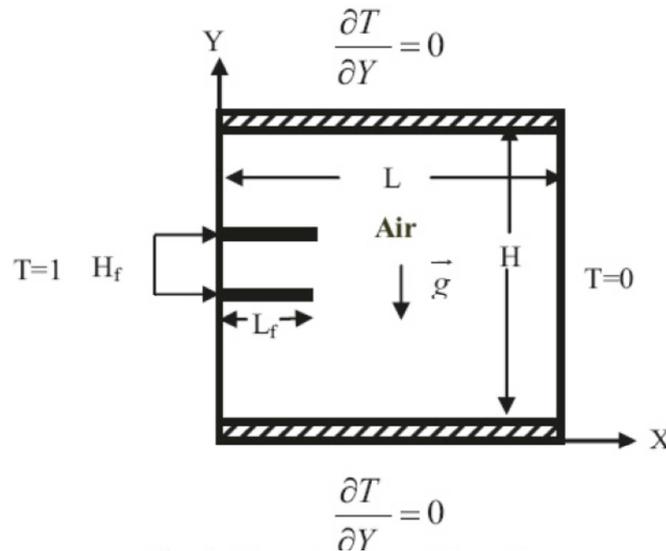
(Source : V.A.F. Costa (2012) [41])

Fendigil et Öztöp [42] ont mené une étude numérique sur le transfert de chaleur à partir d'une cavité carrée en présence d'une ailette mince adiabatique et inclinée. La paroi de haut et de bas de la cavité sont maintenues à une température constante, alors que les parois verticales sont supposées adiabatiques. La hauteur de l'ailette, son angle d'inclinaison, et le

nombre de *Richardson* sont considérés comme données d'entrée et le nombre de *Nusselt* moyen est considéré comme donnée de sortie de ce modèle de résolution. Le nombre de *Reynolds* basé sur la longueur de la cavité est de 300 tandis que le nombre de *Richardson* varie entre 1 et 30.

Benseghir et Rahal [43] ont effectué une étude numérique de la convection naturelle laminaire et transitoire dans une cavité carrée différemment chauffée, remplie d'air. Des ailettes minces rectangulaires fabriquées avec un matériau de haute conductivité ont été placés sur la paroi chaude de la cavité.

L'étude paramétrique a été réalisée en considérant les paramètres suivants: le nombre de *Rayleigh*  $Ra = 10^5$ , la longueur adimensionnelle ( $L_f$ ) et de la position adimensionnelle ( $H_f$ ) d'ailettes. Il a été trouvé que c'est toujours une longueur optimale des ailettes ( $L_f \leq 0.4$ ) et une position optimale d'ailettes ( $H_f = 0.25$  et  $0.5$ ) et ( $H_f = 0.25$  et  $0.75$ ) qui doit être considérées.

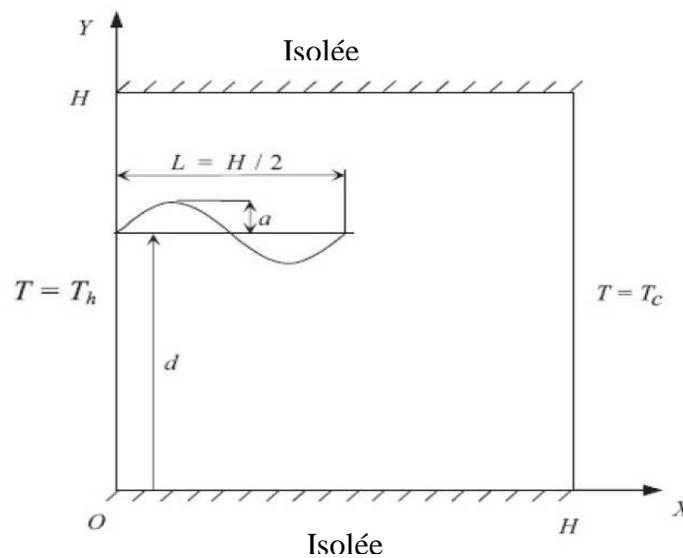


**Figure (II.20) :** Schéma du problème  
(Source: Benseghir et Rahal (2012) [43])

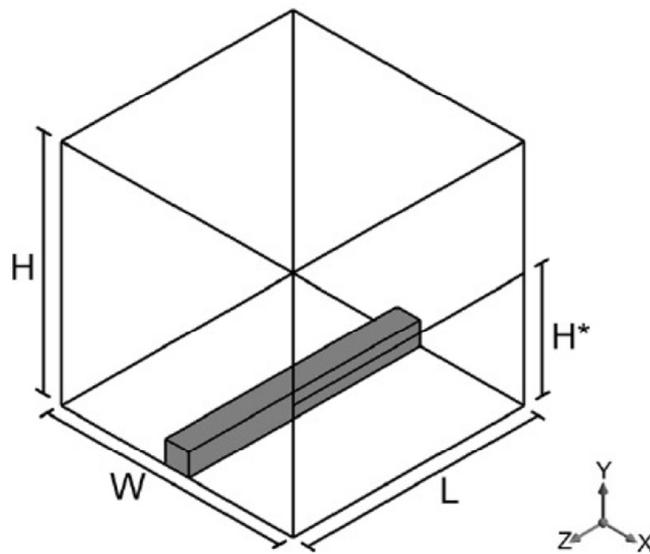
Arefmanesha et al. [44] ont mis en œuvre une méthode dite de Petrov-Galerkin pour simuler le flux de flottabilité entraînée et le transfert de chaleur dans une enceinte chauffée d'une façon différentielle ayant une ailette fixée à la paroi latérale de la température la plus élevée. Les analyses comportent une étude paramétrique pour impliquer les effets du nombre d'ondulation de l'ailette, l'amplitude et la localisation sur la paroi et le nombre de *Rayleigh* du système. L'étude révèle la participation éminente du transfert de chaleur de l'ailette à partir de la paroi chaude et également l'augmentation du nombre de *Nusselt* moyen à la paroi chaude en élevant l'emplacement de l'ailette sur cette paroi, ce nombre de *Nusselt* moyen décroît avec l'augmentation de l'amplitude de l'ailette, alors que le nombre de *Nusselt* moyen de la paroi froide augmente à mesure que le nombre d'ondulation de l'ailette augmente.

Fontana et al. [45] se sont intéressés à un modèle à trois dimensions pour résoudre numériquement le problème de la convection naturelle dans une cavité cubique partiellement ouverte avec une source de chaleur interne. Les conditions aux limites sont réglées de sorte que les deux parois verticales opposées sont maintenues à des températures différentes constantes tandis que les autres parois sont considérées adiabatiques. Une ouverture occupant la moitié de la surface totale est placée à la paroi froide de droite, ce qui permet au fluide d'entrer et de sortir de la cavité. La différence de température entre les parois non adiabatique est définie en utilisant un nombre de *Rayleigh* externe dans la plage  $Ra_e=10^3-10^5$ .

L'intensité de la source de chaleur interne a été évaluée par la relation,  $R = Ra_i/Ra_e$ , et a été étudiée dans l'intervalle de 0 à 2000. Les résultats montrent une influence importante des effets tridimensionnels, en particulier pour des valeurs élevées de  $Ra_e$  et  $R$ , affectant l'énergie et la distribution de flux à l'intérieur de la cavité. Dans de nombreux cas, le transfert de chaleur entre le fluide et les parois, mesurée par le nombre de *Nusselt*, montre une tendance assez différente, même à la partie centrale de la cavité par rapport aux résultats obtenus avec un modèle à deux dimensions.



**Figure (II.21) :** Domaine et conditions aux limites pour la convection naturelle dans une cavité avec ailette ondulée fixée à la paroi latérale chaude  
(Source : A. Arefmanesha , M. Najafib et S.H. Musavic ; (2013) [44])

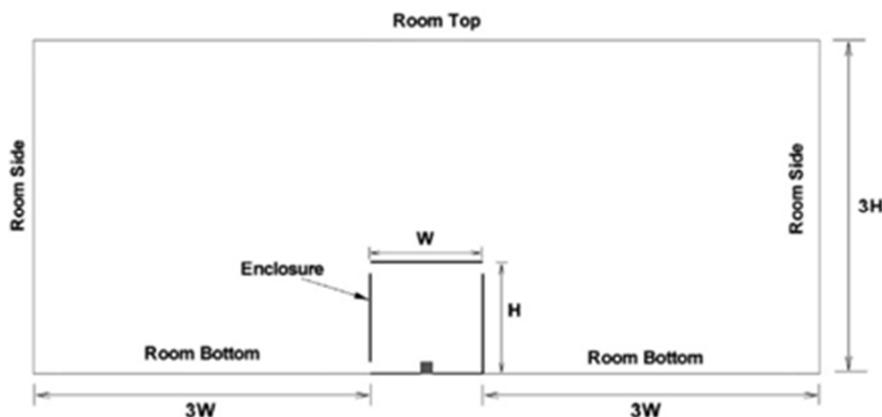


**Figure (II.22):** Schéma du domaine de calcul.

(Source : E. Fontana , C. A. Capeletto , A. da Silva , V. C. Mariani ; (2013) [45])

Abhinav et al. [46] ont mené une investigation qui comporte l'étude de l'effet d'emplacement de ventilation par convection naturelle dans des enceintes avec des ouvertures partielles ayant une source de chaleur interne. Il s'agit d'une simulation numérique en 2D de la convection naturelle en régime permanent dans une enceinte de différents rapports d'aspect ( $H/W = 1.2$  et  $3$ ) pour des faibles nombres de *Rayleigh* ( $Ra_h = 10^3, 10^4$  et  $10^5$ ).

Quatre configurations différentes ont été envisagées en fonction du nombre et des positions des événements (ouvertures). Le débit de masse entraîné à travers l'enceinte et le nombre moyen de *Nusselt* sur la surface du dispositif de chauffage pour l'ensemble des quatre configurations ont été comparés. Il a été trouvé que la configuration de deux entrées et une sortie a donné un flux de transfert de chaleur mieux que les quatre considérées. Il a été constaté également que les flux de masse et le nombre de *Nusselt* ont augmenté avec l'augmentation de  $Ra_h$  et la diminution du rapport d'aspect.



**Figure (II.23) :** Domaine de calcul constitué de l'enceinte et de la salle.

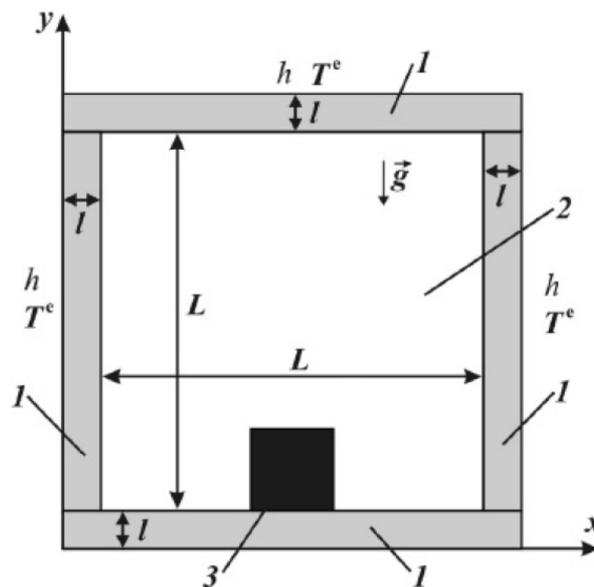
(Source : R. Abhinav et al. [46])

Martyusheva et Sheremeta [47] ont effectué une analyse numérique bidimensionnelle de transfert de chaleur combinée (convection naturelle transitoire, surface à rayonnement thermique et conduction) dans une enceinte carrée remplie d'air ayant des parois solides conductrices de chaleur d'épaisseur finie et une source de chaleur locale avec des conditions d'échange de chaleur par convection avec le milieu environnant.

Des efforts particuliers sont portés sur les effets de cinq types de facteurs influents tels que le nombre de *Rayleigh*  $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ , l'émissivité interne de surface  $0 \leq \varepsilon < 1$ , le rapport de conductivité thermique  $1 \leq k_{1,2} \leq 1000$ , le rapport de l'épaisseur de la paroi solide à l'espacement de la cavité  $0,1 \leq l/L \leq 0,3$  et le temps adimensionnel  $0 \leq \tau \leq 100$  sur l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur.

Il a été observé que, indépendamment de l'interface fluide-solide examinée, le nombre de *Nusselt* convectif moyen augmente avec le nombre de *Rayleigh* et du rapport de la conductivité thermique et diminue avec l'émissivité de la surface et le rapport de l'épaisseur de la paroi du solide à l'espacement de cavité. Alors que le nombre de *Nusselt* radiatif moyen augmente avec  $Ra$ ,  $\varepsilon$  et  $k_{1,2}$ , et diminue avec,  $l/L$ . Une augmentation de  $Ra$ ,  $\varepsilon$  et  $l/L$  conduit à un refroidissement à faible intensité du domaine d'intérêt.

Les auteurs ont constaté que les variations les plus essentielles des lignes de courant et des isothermes sont observés à  $1 \leq k_{1,2} \leq 7$ . Une augmentation de  $Ra$  et  $tk_{1,2}$  conduit à une croissance d'ordre ascendant et descendant des vitesses d'écoulement.



**Figure (II.24):** Schéma de la configuration physique et le système de coordonnées:

1- Des murs solides, 2- de l'air, 3- Source de chaleur de température constante.

(Source: Semen G. Martyusheva, Mikhail A. Sheremeta (2014) [47])

Khanafer, AlAmiri et Bull [48] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle en régime laminaire dans une cavité carrée chauffée différemment doté

d'une ailette fine et poreuse attachée à la paroi chaude. Divers paramètres pertinents ont été utilisés, tels que le nombre de Rayleigh, le nombre de *Darcy*, l'angle d'inclinaison, la longueur et la position de l'ailette. Trois longueurs et positions différentes de l'ailette étaient considérées. L'angle d'inclinaison est compris entre 30° et 150°.

La paroi gauche de la cavité à laquelle est fixée l'ailette est supposée chauffée uniformément tandis que la paroi droite est maintenue à une température plus basse. De plus, les parois horizontales de la cavité étaient considérées isolées thermiquement. Les équations de transport régissant les milieux poreux sont traitées selon la théorie de la moyenne volumique, tandis que les équations de Navier-Stokes sont utilisées pour représenter les phénomènes de transport dans le reste de la cavité. En outre, les équations gouvernantes sont résolues en utilisant une formulation d'éléments finis basée sur la méthode de *Galerkin* des résidus pondérés.

Les résultats de cette étude ont montré que la présence d'une ailette poreuse augmente le nombre moyen de *Nusselt* par rapport à la cavité chauffée différemment pour différentes longueurs, positions et angles d'inclinaison de l'ailette. Pour obtenir un transfert de chaleur optimal, les résultats actuels suggèrent que l'ailette poreuse doit être placée près de la surface inférieure ou au milieu de la surface chaude verticale et avec un angle de 90°. Finalement, une corrélation numérique pour le nombre moyen de *Nusselt* a été développée en fonction de la gamme employée du nombre de Rayleigh, du nombre de *Darcy*, de la longueur et de la position des ailettes.

Elatar, Teamah et Hassab [49] ont réalisé une étude numérique de convection naturelle laminaire à l'intérieur d'une enceinte carrée avec une seule ailette horizontale attachée à sa paroi chaude. Les surfaces horizontales de l'enceinte sont adiabatiques, la paroi de gauche est chaude tandis que la paroi de droite est froide. Le nombre de Prandtl pour le flux à l'intérieur de l'enceinte est de 0,71. Une étude paramétrique a été réalisée pour étudier l'effet du nombre de Rayleigh, de la longueur d'ailette, du rapport de conductivité, de l'épaisseur et de la position de l'ailette sur le transfert de chaleur. L'épaisseur de l'ailette a montré un effet négligeable sur le nombre moyen de *Nusselt* pour toutes les valeurs des rapports de conductivité des ailettes.

L'efficacité des ailettes et la distribution de température ont été examinées. L'efficacité de l'ailette a été également étudiée, il a été constaté que l'efficacité de l'ailette augmente en général avec l'augmentation de sa longueur. De plus, l'efficacité maximale de l'ailette a été trouvée au plus petit nombre de Rayleigh pour un rapport de conductivité de l'ailette donné. Une corrélation a été proposée pour la relation entre le nombre de *Nusselt* et les paramètres d'étude.

Azimifar et Payan [50] ont étudié les caractéristiques optimales des ailettes minces très conductrices dans la cavité confinée. La convection libre est le mode dominant de transfert de chaleur dans la cavité, et les ailettes conductrices sont attachées à la paroi chaude verticale de la cavité. Les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont discrétisées

et résolues par la méthode des volumes finis à travers l'approche *SIMPLER*. L'algorithme *PSO* est utilisé pour l'optimisation de ce problème. Les ailettes sont fixées sur la paroi chaude verticale de la cavité. Pour la modélisation d'ailettes minces très conductrices, les coefficients de diffusion dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont pris comme infini. L'algorithme *PSO* est appliqué pour obtenir les caractéristiques d'un réseau des ailettes fines.

Les résultats obtenus sur la base de l'algorithme *PSO* sont comparés aux valeurs de référence. Les résultats montrent que cette méthode est capable d'obtenir des caractéristiques des ailettes fines sur la paroi chaude verticale. Les résultats montrent également qu'un réseau d'ailettes minces très conductrices diminue le transfert de chaleur d'une cavité avec un nombre élevé de Rayleigh ( $Ra = 10^7$ ).

L'étude menée par Khatamifar, et al. [51] présente des résultats numériques pour le flux de convection naturelle conjuguée et le transfert de chaleur dans une cavité carrée différemment chauffée divisée par une partition avec une épaisseur finie et une conductivité thermique. Une série de simulation numérique est réalisée en utilisant la méthode des volumes finis sur une large gamme du nombre de *Rayleigh* ( $10^5$ - $10^9$ ), avec trois épaisseurs de partition adimensionnelles (0,05, 0,1 et 0,2) et trois positions de partition adimensionnelles (0,25, 0,5 et 0,75). Les résultats montrent que le nombre moyen de *Nusselt* augmente avec le nombre de Rayleigh mais diminue avec l'épaisseur de la partition. On trouve également que la position de partition a un effet négligeable sur le nombre moyen de *Nusselt* pour toute la gamme de nombres de Rayleigh considérés.

Torabi Keyhani et Peterson [52] ont étudié la convection naturelle qui se produit dans de nombreux systèmes d'ingénierie tels que le refroidissement électronique et les capteurs solaires. Le nombre de *Nusselt* ( $Nu$ ) est l'un des paramètres les plus importants dans ces systèmes qui devraient être sous contrôle. Cette étude est une analyse de transfert de chaleur complète pour des cavités partiellement et différemment chauffées avec une petite ailette mince montée sur la paroi chaude de la cavité pour augmenter ou diminuer le nombre de *Nusselt*. Une approximation de *Boussinesq* a été utilisée pour modéliser le flux entraîné par la flottabilité. Deux ensembles de fonctions de distribution pour la méthode de Boltzmann en réseau sont utilisés pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie.

Un total de 180 cas ont été analysés pour déterminer le nombre de *Nusselt*  $Nu$  maximum, minimum et moyen pour la section chaude de la cavité. Pour les cas étudiés, les sections chaudes et froides ont été supposées pour comprendre environ 30% des parois verticales. Après avoir obtenu les distributions de vitesse et de température, trois nombres différents de *Rayleigh*, à savoir  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ , ont été utilisés pour fournir les résultats des lignes de courant et des isothermes pour un certain nombre de cas. Les nombres moyens et normalisés de *Nusselt* ont ensuite été calculés et comparés graphiquement pour tous les cas étudiés. Les résultats ont indiqué qu'en choisissant la position appropriée pour l'ailette, le nombre de *Nusselt* moyen  $Nu_{moy}$  pourrait être augmenté de plus de 150%.

Al- Kouz et al. [53] ont étudié numériquement l'écoulement gazeux à basse pression d'un transfert de chaleur par convection naturelle laminaire et bidimensionnelle en régime permanent dans une cavité avec deux ailettes solides fixées à la paroi chaude. De tels flux peuvent être trouvés dans de nombreuses applications d'ingénierie telles que les collecteurs solaires, les récepteurs des collecteurs paraboliques (PTC), le refroidissement des réacteurs nucléaires et le refroidissement des équipements électroniques. L'effet de flottabilité est modélisé en utilisant l'approximation de *Boussinesq*.

Les effets des nombres de *Knudsen* et de *Rayleigh*, l'emplacement et la longueur des ailettes, le rapport de conductivité et la porosité des ailettes, et l'angle d'inclinaison sur les caractéristiques de transfert de chaleur et d'écoulement sont étudiés. Les plages de paramètres physiques dans cette étude sont les suivantes;  $0 \leq Kn \leq 0.1$ ,  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ , le rapport de la largeur de l'ailette  $L_F$  prend les valeurs de 0.25, 0.5 et 0.75 m, le rapport de la hauteur  $H_F$  prend les valeurs de 0.25, 0.75 et 0.5,  $1 \leq Kr \leq 8000$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  et  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ . Il est montré que le nombre de *Nusselt* dépend directement du nombre de *Rayleigh* et inversement du nombre de *Knudsen*. De plus, il s'avère que la fixation de deux ailettes solides sur la paroi chaude améliora le transfert de chaleur pour de tels écoulements.

Du point de vue transfert de chaleur, les auteurs ont constaté que les ailettes poreuses sont supérieures aux ailettes solides. En outre, il est montré que pour la géométrie où le rapport de la longueur de l'ailette inférieure à la cavité est de 0,25 et le rapport de la hauteur de l'ailette supérieure à la cavité est de 0,75, le meilleur transfert thermique est obtenu. De plus, pour les longueurs d'ailettes considérées dans l'étude, ils concluent qu'en augmentant la longueur de l'ailette, ils obtiennent un meilleur transfert de chaleur. En outre, en augmentant l'angle d'inclinaison de la cavité, ils obtiennent un meilleur transfert de chaleur jusqu'à une certaine valeur qui s'est avérée être ( $30^\circ$ ) où, au-delà de cette valeur, le nombre de *Nusselt* diminuera. De plus en augmentant le rapport de la conductivité jusqu'à une certaine valeur ( $10^3$ ), ils obtiennent un meilleur transfert de chaleur.

Dileep et Ghoshdastidar [54] ont présenté une étude numérique comparative du transfert de chaleur par convection naturelle laminaire conjuguée à 2 ou 3 D à partir d'un réseau vertical d'ailettes rectangulaires en aluminium soumis à un flux de chaleur élevée distribué lié au refroidissement d'un luminaire d'éclairage public LED 105W. L'effet du rayonnement est également pris en compte dans les modèles précités. Le modèle 2D utilise l'approche de la fonction de courant-Vorticité- Température. La méthode des différences finies est utilisée pour discrétiser les équations gouvernantes. La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation du modèle 3D.

L'algorithme de solution est *SIMPLE* (méthode semi-implicite pour les équations liées à la pression). Une étude paramétrique détaillée basée sur des données réalistes est réalisée pour observer l'effet du flux thermique, de l'espacement des ailettes, de la hauteur, la largeur et l'épaisseur des ailettes, ainsi que le matériau des ailettes (aluminium, laiton, cuivre, acier doux) sur la distribution de la vitesse et de la température du fluide (air), le transfert de chaleur et la température de jonction des LED. Une nouvelle découverte de ce travail est la

révélation de champs d'écoulement asymétrique et thermique dans les canaux successifs du réseau d'ailettes, comme prédit par le modèle 3D.

Contrairement aux études existantes dans lesquelles la base des ailettes est considérée comme isotherme, il existe un espacement optimal des ailettes correspondant au coefficient de transfert thermique maximal dans la présente étude. La différence entre les coefficients de transfert de chaleur moyens prédits par le modèle 2-D et 3-D augmente avec l'augmentation de la hauteur des ailettes par rapport au rapport d'espacement des ailettes. La contribution du transfert de chaleur par rayonnement est d'environ 8-14% du transfert de chaleur total dans la gamme de dimensions du réseau d'ailettes considéré dans ce travail. Une étude d'optimisation basée sur la fonction de pénalité est effectuée pour maximiser le coefficient de transfert thermique moyen tout en maintenant les LED sous la limite sécuritaire de 353 K. Enfin, les corrélations pour prédire le coefficient de transfert thermique moyen dans le dissipateur thermique vertical à ailettes rectangulaire, La température des LED en fonction de la puissance du luminaire et les paramètres géométriques du réseau d'ailettes ont été présentées.

Vesper et al [55] ont analysé les effets individuels et combinés des parois horizontales conductrices et des ailettes conductrices sur la convection naturelle de l'air dans les cavités chauffées aux parois latérales verticales. L'écoulement et le transfert de chaleur sont étudiés pour les nombres de Rayleigh dans la plage :  $10^4 - 10^9$ , la simulation numérique directe (DNS) est réalisée pour les nombres de Rayleigh inférieurs et la simulation aux grandes échelles (LES) pour les nombres de Rayleigh supérieurs ( $10^8$ ). Les parois thermiquement conductrices déstabilisent l'écoulement, ce qui produit une transition plus précoce vers la turbulence et accélère la décroissance de l'épaisseur de la couche limite avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Le préchauffage/pré-refroidissement le long des parois conductrices, réduit le transfert de chaleur réel au niveau des parois verticales. Au-dessus de l'ailette, les instabilités ne sont que marginalement augmentées pour les parois horizontales adiabatiques, alors que pour les parois horizontales conductrices, des panaches s'échappent de l'ailette. Cet effet de type Rayleigh-Bénard localisé déclenche des instabilités 3D dans tout le champ d'écoulement et donne une pente plus raide dans le diagramme de Nusselt-Rayleigh. La présence d'une ailette augmente le transfert thermique intégral de 18 % pour les parois adiabatiques et de 21 % pour les parois horizontales conductrices.

## II.4. Conclusion

La revue bibliographique présentée dans ce chapitre montre que la convection naturelle induite dans une cavité simple ou munis de blocs chauffants a fait l'objet de nombreuses études en raison de l'importance du phénomène dans de nombreuses applications. Notons que la majorité des travaux cités n'ont traité que le cas d'écoulements bidimensionnels. L'approche de blocs isothermes et celle de blocs libérant un flux de chaleur surfacique uniforme ont été utilisées dans de nombreuses simulations numériques bien que leurs domaines de validité ne soient pas parfaitement définis.

Depuis des décennies, nombreux sont les chercheurs qui se sont intéressés aux simulations numériques des écoulements dans les enceintes et ont conclu que la prédiction numérique est une voie qui peut mener à de bons résultats.

Il ressort de la revue bibliographique, que même s'il y a quelques travaux ayant trait aux cas des cavités carrées ou rectangulaires à surfaces non ailetées avec des profils de température variables sur l'une des faces de la cavité, à notre connaissance, très peu sont les travaux ayant traité le problème de la convection naturelle avec des surfaces ailetées et profils de température variable.

L'utilisation des profils de température variable s'approche de la réalité, où on peut apporter un certain nombre de réponses aux problèmes pratiques rencontrés au quotidien à savoir les composantes électroniques, les moteurs à combustion internes (MCI)...etc.

L'objectif principal de cette étude est relatif à l'analyse de la convection naturelle en régime laminaire et permanent dans une enceinte munie d'une à sept éléments chauffants sur la paroi de fond, les parois latérales de la cavité sont soumises à des températures chaudes et froides constantes ou variables suivant différents profils de température, les autres parois sont adiabatiques.

## *Chapitre II*

---

# ***MODELISATION MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES***

---

## Chapitre III : Modélisation Mathématique et conditions aux frontières

### III.1. Introduction :

Dans le cadre de ce chapitre nous allons nous intéresser à la modélisation, physique et mathématique, d'un problème de convection naturelle dans une cavité fermée dont l'une des faces est à surface ailetée. Les équations gouvernantes seront ainsi établies sur la base des équations de bilans de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) en convection naturelle moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

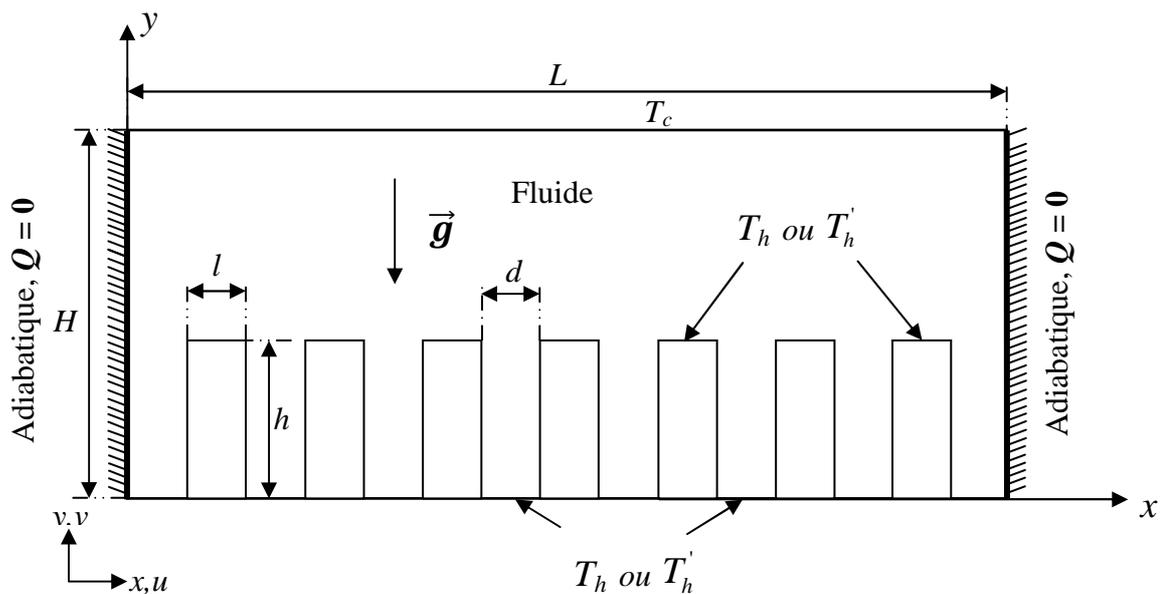
### III. 2. Modèles physique et mathématique :

#### III.2.1. Modèle Physique :

Le modèle physique considéré est relatif à une cavité rectangulaire de longueur " $L$ " et de hauteur " $H$ ". Les parois verticales sont isolées thermiquement alors que les parois horizontales de l'enceinte sont différentiellement chauffées et maintenues à des températures différentes : chaude " $T_h$ " constante ou " $T_h'$ " variable à la paroi de bas et " $T_c$ " froide à la paroi de haut de telle sorte que " $T_h$ " ou " $T_h'$ " soient supérieures à " $T_c$ ". Des obstacles thermiques identiques (ailettes) de 0 à 7 ailettes d'épaisseur " $l$ " et de hauteur " $h$ ", équidistantes de " $d$ " de sorte que :

$$d = \frac{(L - N_{Ailettes} \times l)}{(N_{Ailettes} + 1)}$$

$N_{Ailettes}$  : étant le nombre d'ailettes considérées, placées à différents positions sur la paroi du fond (cf. Figure III.1).



**Figure III.1** : Modèle physique utilisé.

### III.2.2. Système d'équations dimensionnelles :

Le transfert de chaleur dans la cavité se fait par convection naturelle. Le nombre de *Prandtl* correspondant est celui de l'air égal à 0.71, le vecteur  $\mathbf{g}$  représente l'accélération due à la gravité.

Le problème considéré obéit aux hypothèses de travail suivantes :

- L'écoulement de fluide et le transfert de chaleur sont permanents et le régime d'écoulement est laminaire ;
- Le fluide est supposé incompressible, cela est dû aux faibles vitesses d'écoulement qui ne dépasse pas 0.3 Mach et qui satisfont l'approximation de Boussinesq, c'est à dire que le rapport de densité est très inférieur à 1, ( $\Delta\rho/\rho_\infty \ll 1$ ) ce qui signifie également que les fluides ont une masse volumique constante. Elle est utilisée dans les équations de mouvement pour calculer les forces de flottabilité. Ce qui implique que la variation de la densité avec la température est négligeable sauf dans le terme de flottabilité de l'équation de mouvement. (Les détails peuvent être trouvés dans le travail de Gray et Giorgini (1976) [56]) ;
- Le fluide est Newtonien avec des propriétés thermiques et de transport constantes ;
- La dimension "z" est beaucoup plus grande que celles de x et de y, le problème peut être considéré essentiellement à deux dimensions d'espace ;
- L'effet de rayonnement ainsi que la diffusion dans la paroi de la cavité sont considérés négligeables ;
- Les ailettes sont supposées parfaites ;
- La gravité agit dans la direction verticale négative.

L'équation générale de transport s'écrit sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\vec{V}) = \text{div}(\Gamma\text{grad}\phi) + S_\phi \quad (\text{III. 1})$$

Les quatre termes de cette équation sont définis comme suit :

- $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$  : Taux d'augmentation de la variable  $\phi$  de l'élément fluide (terme transitoire) ;
- $\text{div}(\rho\phi\vec{V})$  : Taux net de l'écoulement hors que l'élément fluide, on l'appelle aussi : Terme de convection ou du transport ;
- $\text{div}(\Gamma\text{grad}\phi)$  : Taux d'augmentation de  $\phi$  dû à la diffusion (terme de diffusion) ;
- $S_\phi$  : Taux d'augmentation de  $\phi$  dû au terme source tel que :  
 $\phi$  : Variable générale dépendante qui peut être (température, vitesse, enthalpie, fraction massique,...)

$\vec{V}$  : Le champ de vitesse tel que  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\Gamma$  : Coefficient de diffusion ;

$S_\phi$  : Terme source volumique.

Les équations gouvernantes sont basées sur les équations de bilans de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie).

### III.2.2.1. Equation de continuité :

La forme générale de l'équation de continuité, basée sur la loi de conservation de la masse, pour le cas bidimensionnel s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 2})$$

Avec :  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$t$  représente le temps ;

$u$  et  $v$ , sont les composantes de la vitesse du fluide dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Pour un fluide incompressible en régime permanent, cette équation se réduit à la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{III. 3})$$

Ainsi, l'équation de continuité en coordonnées cartésiennes pour un écoulement bidimensionnel en régime permanent s'écrit sous la forme détaillée :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{III. 4})$$

### III.2.2.2. Equation de quantité de mouvement dans la direction $x$ :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes, à deux dimensions d'espace, dans la direction  $x$ , est donnée par l'expression :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{III. 5})$$

où :

$\rho \frac{\partial u}{\partial t}$  : Terme relatif au régime instationnaire ;

$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}$  : Terme de convection ;

$\frac{\partial P}{\partial x}$  : Terme de pression ;

$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$  : Terme de diffusion ;

Avec :

$P$  : La pression ;

$\mu$  : La viscosité dynamique du fluide ;

$\mu_t$  : La viscosité turbulente.

### III.2.2.3 Equation de quantité de mouvement dans la direction $y$ :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes, à deux dimensions d'espace, dans la direction  $y$ , est donnée par l'expression :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (\text{III. 6})$$

Avec :

$\rho g \beta (T - T_{ref})$  : Terme de flottabilité ;

$T_{ref}$  : Température de référence ;

$\rho$  : Masse volumique.

$\beta$  : Terme d'expansion thermique  $[1/K] = \frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}$

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes, bidimensionnelles pour tout fluide visqueux incompressible et Newtonien sont :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{III. 7})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{III. 8})$$

où :  $f_x$ , et  $f_y$  sont les composants des forces de volume par unité de masse.

Les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  sont supposées être nulles le long des frontières de la cavité soit horizontales ou verticales alors que la pression est supposée constante.

Dans les équations ci-dessus, la densité du fluide est constante. Quand les forces de volume dans la direction  $x$  sont considérées négligeables et pour une viscosité du fluide constante, les équations de Navier-Stokes se simplifient en :

#### \* Composante - $x$ de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 9})$$

$\nu$ : viscosité cinématique

\* **Composante -y de l'équation de quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 10})$$

**III.2.2.4. Equation d'énergie thermique :**

L'équation de conservation d'énergie du fluide en termes d'enthalpie est définie par :

$$\frac{Dh}{Dt} = \nabla(k\nabla T) + \frac{DP}{Dt} + \phi + \dot{q} \quad (\text{III. 11})$$

où :  $h$  est l'enthalpie, définie par l'expression :

$$h = U + \frac{P}{\rho} \quad (\text{III. 12})$$

Dans l'équation d'énergie (III.11), le terme de côté gauche,  $\frac{Dh}{Dt}$ , est le terme de convection. Le premier terme du côté droit  $\nabla(k\nabla T)$  est le taux de diffusion de chaleur sur les particules fluide où le second terme  $\frac{DP}{Dt}$  est le taux de travail réversible fait sur les particules fluide par compression. Le troisième terme " $\phi$ " est le taux de dissipation visqueuse par unité de volume et le dernier terme " $\dot{q}$ " représente la génération de chaleur par unité de volume.

De façon développée, on a :

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (\text{III. 13})$$

$T$  : Température locale du fluide ;

$Pr$  : Nombre de Prandtl ;

$\sigma_T$  : Constante représentant le nombre de Prandtl turbulent pour la température considérée.

Pour un fluide incompressible, de conductivité thermique constante, avec dissipations visqueuses et travail de compression négligeables et sans aucune production de chaleur, l'équation (III.13) se simplifie en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 14})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$$

$K$  : Conductivité thermique ;

$\rho$  : Masse volumique ;

$C_p$  : Chaleur spécifique ;

### III.2.2.5. Equation d'énergie cinétique turbulente :

L'équation d'énergie cinétique turbulente est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \rho \varepsilon + D \end{aligned} \quad (\text{III. 15})$$

$k$  : Energie cinétique turbulente ;

$\sigma_k$  : Nombre de *Prandtl* turbulent de l'énergie cinétique pour le modèle ( $k - \varepsilon$ ).

Le modèle ( $k - \varepsilon$ ) donne de bons résultats dans le cas des écoulements simples, mais ne peut reproduire de façon satisfaisante les caractéristiques des écoulements complexes (zones de recirculation et écoulements secondaires)

où :

$G_k$  : Terme de génération de l'énergie cinétique turbulente dû au gradient de la vitesse moyenne

$\varepsilon$  : Taux d'énergie de dissipation.

$D$  : représente un terme qui se pose lorsque des modèles à faible nombre de *Reynolds* de la turbulence sont mises en œuvre (n'est pas pris en compte en laminaire).

### III.2.2.6. Equation de taux de dissipation d'énergie :

L'équation de taux de dissipation d'énergie est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \\ & (c_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + c_{\varepsilon 2} G_k) - \rho c_{\varepsilon 3} f_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + E \end{aligned} \quad (\text{III. 16})$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_k &= \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ G_k &= - \frac{\mu_t}{\sigma_T} g \beta \frac{\partial T}{\partial y} \\ \mu_t &= \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$E$  : un terme qui se produit lorsque des modèles à faible nombre de *Reynolds* de la turbulence sont utilisés.

$\sigma_\varepsilon$  : le nombre de *Prandtl* turbulent pour  $\varepsilon$ .

Les valeurs suivantes sont des constantes empiriques utilisées dans le modèle standard

( $k - \varepsilon$ ), sont données par :

$$c_\mu = 0.09 ; c_{\varepsilon 1} = 1.44 ; c_{\varepsilon 2} = 1.92 ; \sigma_T = 0.9 ; \sigma_k = 1.0 ; \sigma_\varepsilon = 1.3 ; f_\mu = f_1 = f_2 = 1.0$$

### III.2.7 Solution Laminaire :

Pour les solutions laminaires, les équations (III.15) et (III.16) ne sont pas utilisées pour les calculs. La viscosité turbulente,  $\mu_t$  est une valeur prise égale à zéro. Les variables  $u$ ,  $v$ ,  $p$  et  $T$  sont des quantités instantanées pour les calculs laminaires.

On peut utiliser une approche permanente ou une approche transitoire pour les calculs laminaires. Dans le premier cas, les dérivées du temps dans les équations (III.2), (III.5), (III.6) et (III.13) sont remises à zéro.

### III.2.8. Solution Turbulente :

Pour les solutions turbulentes, les équations (III.15) et (III.16) sont résolues simultanément avec les équations (III.2), (III.5), (III.6) et (III.13). Les variables,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  et  $T$  sont des quantités moyennées en temps pour le calcul turbulent. Ici encore, on peut utiliser une approche permanente pour se rapprocher de la solution stationnaire en l'intégrant à travers le temps.

Les dérivés par rapport au temps des équations de Navier-Stockes moyennées représentent le comportement très large selon Henkes (1990) [57]. Cependant la nature de la solution transitoire dépendra du type de modèle de turbulence utilisé. Ainsi, la viscosité turbulente  $\mu_t$  est introduite sous la forme d'une modification de la viscosité du fluide.

Les quantités  $D$  et  $E$  représentent des termes qui doivent être ajoutées pour les modèles de turbulence ( $k - \epsilon$ ) pour les faibles nombres de Reynolds. Pour le modèle standard ( $k - \epsilon$ ),  $D$  et  $E$  sont mises égal à zéro. Des données expérimentales plus récentes sur la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée ont été fournies par Ampofo et Karayiannis (2003) [58] contre lesquels les différents modèles peuvent être comparés.

### III.3 Système d'équations gouvernantes simplifié :

L'ensemble des équations qui régissent le phénomène de la convection naturelle en coordonnées rectangulaires bidimensionnelles sont relatifs aux équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie. Ces équations sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 17})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 18})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 19})$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 20})$$

Ces équations sont valables pour le problème simplifié, cependant, la densité est fonction de la température.

### III.4. Approximation de Boussinesq pour le problème considéré :

Dans cette étude, la force de volume agissant dans la direction négative de ( $-y$ ) est la force due uniquement aux variations de la température ( $P = \text{constante}$ ), l'approximation de Boussinesq peut être appliquée dans l'équation -y- de l'équation de quantité de mouvement (I.6) en considérant les pressions statique et dynamique :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P_{dynamic}}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P_{static}}{\partial y} - \rho g \quad (\text{III. 21})$$

En introduisant (I.10) dans (I.12) :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P_{dynamic}}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_{\infty} g - \rho g \quad (\text{III. 22})$$

L'équation (III.22) peut être réarrangée pour obtenir :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P_{dynamic}}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g(\rho - \rho_{\infty}) \quad (\text{III. 23})$$

En utilisant la relation (I.10) avec (III.23), on aura :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P_{dynamic}}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_{\infty}) \quad (\text{III. 24})$$

### III.5. Système d'équations adimensionnelles :

La forme adimensionnelle des équations permet de réduire le nombre de paramètres indépendants dans les équations et rendre les solutions plus générales pour un ensemble donné de paramètres. De plus, il aide à gagner en temps machine en augmentant la vitesse de convergence de la solution. Les équations adimensionnelles sont dérivées de telle manière que seuls les nombres de *Prandtl* et de *Rayleigh* du fluide soient des paramètres sans dimensions.

Dans le cas d'écoulements en convection naturelle, pour des fluides à faible nombre de *Prandtl* comme les gaz ainsi que les liquides à faible viscosité, le terme d'accélération convective est équilibré par le terme de flottabilité dans l'équation de quantité de mouvement.

L'indice de référence inférieur,  $ref$ , représente l'expression de référence pour toutes les variables. L'indice de référence supérieur \*, représente les variables adimensionnelles. En utilisant les variables adimensionnelles précitées, on peut remplacer le terme d'accélération convective et le terme de flottabilité dans l'équation (III.6) et aboutir à :

$$u_{ref} = \sqrt{g\beta\Delta TH}$$

En assimilant le terme d'accélération convective au terme de pression on obtient alors :

$$P_{ref} = \rho u_{ref}^2$$

La température de référence est prise comme suit :

$$T_{ref} = \frac{T_c + T_h}{2}$$

La densité et la viscosité de référence sont considérées comme la densité et la viscosité du fluide respectivement. Le temps de référence  $t_{ref}$  est considéré comme le rapport de scalaire de la longueur de référence et de scalaire de la vitesse de référence, c'est à dire :

$$t_{ref} = \frac{H}{\sqrt{g\beta\Delta TH}}$$

Les valeurs de référence de l'énergie cinétiques turbulentes et de dissipation ont été calculées à l'aide de la théorie de la turbulence développée par Wilcox (1993) [59] et est respectivement donnée comme :

$$k_{ref} = u_{ref}^2 ; \varepsilon_{ref} = \frac{u_{ref}^3}{H}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{u_{ref}} ; v^* = \frac{v}{v_{ref}} ; v_{ref} = \frac{u_{ref}}{\sqrt{Pr}} ; \beta = \frac{1}{273.15 + T_{ref}} \\ \Delta T &= T_h - T_c ; T^* = \frac{T - T_{ref}}{T_h - T_c} \\ x^* &= \frac{x}{L} ; y^* = \frac{y}{H} ; \psi^* = \frac{\psi}{\alpha_f} ; \alpha_f = \frac{k_f}{\rho C_p} \\ P^* &= \frac{P}{P_{ref}} = \frac{P}{\rho(g\beta\Delta TH)} ; \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{ref}} ; \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_{ref}} ; \mu_t^* = \frac{\mu_t^*}{\mu_{ref}} ; t^* = \frac{t}{t_{ref}} ; \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ref}} ; k^* = \frac{k}{k_{ref}} \end{aligned}$$

$\alpha_f$ : Terme de diffusivité thermique du fluide.

En utilisant les paramètres adimensionnels et en omettant l'indice supérieur \* de toutes les variables, les équations (III.2) à (III.16) peuvent être écrites comme suit :

### III.5.1. Equation adimensionnelle de continuité :

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 25})$$

### III.5.2. Equation adimensionnelle de quantité de mouvement dans la direction (x) :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\ & + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III. 26})$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (\text{III. 27})$$

### III.5.3. Equation adimensionnelle de quantité de mouvement dans la direction (y) :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = -\frac{\partial P}{\partial y} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (T - T_{ref}) \right] \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \rho g \beta (T - T_{ref}) \end{aligned} \quad (\text{III. 29})$$

### III.5.4 Equation adimensionnelle d'énergie thermique :

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t Pr}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t Pr}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (\text{III. 30})$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{III. 31})$$

Dans le cas où on veut étendre l'étude en régime turbulent, on introduit les équations d'énergie cinétique turbulente et l'équation de taux de dissipation d'énergie.

**III.5.5. Equation adimensionnelle d'énergie cinétique turbulente :**

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} \\ &= \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \rho \end{aligned} \quad (\text{III. 32})$$

**III.5.6. Equation de taux de dissipation d'énergie:**

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \\ & (c_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + c_{\varepsilon 3} G_k) - \rho c_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \end{aligned} \quad (\text{III. 33})$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_k &= \mu_t \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ G_k &= - \sqrt{\frac{1}{Pr Ra}} \frac{\mu_t}{\sigma_T} g \beta \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad \mu_t = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Les formes adimensionnelles des équations sont actuellement utilisées avec leurs conditions aux limites (voir chapitre V). Les températures  $T_h$  et  $T_c$  varient en 0 et 1.

**III.6. Equations adimensionnelles gouvernantes :**

L'ensemble des équations (III.17), (III.18), (III.19) et (III.20) doivent être résolus afin d'obtenir les inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $P$  et  $T$ . En appliquant l'approximation de Boussinesq et en introduisant les paramètres adimensionnels, l'ensemble des équations adimensionnelles peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 34})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.3.5})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Ra \cdot Pr \cdot T \quad (\text{III. 36})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III. 37})$$

où :

$Ra$  et  $Pr$ , représentent respectivement, les nombres de *Rayleigh* et de *Prantdl* ;

$T = \frac{T - T_{ref}}{T_h - T_c}$ : est la température adimensionnelle du fluide.

### III.7. Définition de la fonction de courant :

Pour un écoulement d'un fluide incompressible, permanent et bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$  du système de coordonnées cartésiennes, l'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par l'équation (III.17). Si une fonction continue,  $\psi = \psi(x, y)$ , qui est connue comme la fonction de courant, est définie par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III. 38})$$

Alors, l'équation (III.17) de continuité sera exactement être satisfaite, car :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{III. 39})$$

En utilisant l'équation des lignes de courant, on aura :

$$u dy - v dx = 0 \quad (\text{III. 40})$$

En remplaçant les composantes de vitesse en termes de fonction de courant et en utilisant l'expression (III.39), on aura :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{III. 41})$$

L'équation ci-dessus devient une différentielle exacte ou totale le long des lignes de courant :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{III. 42})$$

La fonction de courant est constante le long des lignes de courant lors d'un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible, elle est nulle à travers toutes les parois de la cavité.

Il faut noter que la fonction potentielle des lignes de courant peut être définie à trois dimensions d'espace alors que la fonction de courant ne peut être définie pour les champs d'écoulement qu'à deux dimensions.

## ***Chapitre IV***

---

# ***RESOLUTION NUMERIQUE***

---

## Chapitre IV : Résolution Numérique

### IV. 1. Introduction :

Le présent chapitre est consacré à la résolution des équations gouvernantes vues au chapitre III. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées qui n'admettent pas de solution analytique. Le recours aux méthodes numériques permet de résoudre ces équations avec de bonnes approximations. Dans le cas de notre étude, on s'est intéressé à la méthode des volumes finis.

### IV.2. Equations de transport :

Les équations de transport pour chaque composante de vitesse de la quantité de mouvement peuvent être déduites de l'équation générale de transport (III.1):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\vec{V}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (\text{IV. 1})$$

où:

$\vec{V}$  : Le champ de vitesse tel que  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\Gamma$  : Le coefficient de diffusion.

$S_\phi$  : Le terme source volumique.

$\Gamma$  et  $S_\phi$  sont spécifiées à la signification particulière de  $\phi$ .

En remplaçant la variable  $\phi$  par  $u$  et  $v$ , le champ de vitesse doit, bien entendu, aussi satisfaire l'équation de continuité. Le problème est de trouver le champ de température en présence d'un champ de vitesse et de densités données.

Dans les cas où l'écoulement de fluide joue un rôle signifiant on doit considérer les effets de convection, l'équation de la convection-diffusion en régime permanent peut être obtenue de l'équation de transport (IV.1), en éliminant le terme de transition :

$$\text{div}(\rho\phi\vec{V}) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (\text{IV. 2})$$

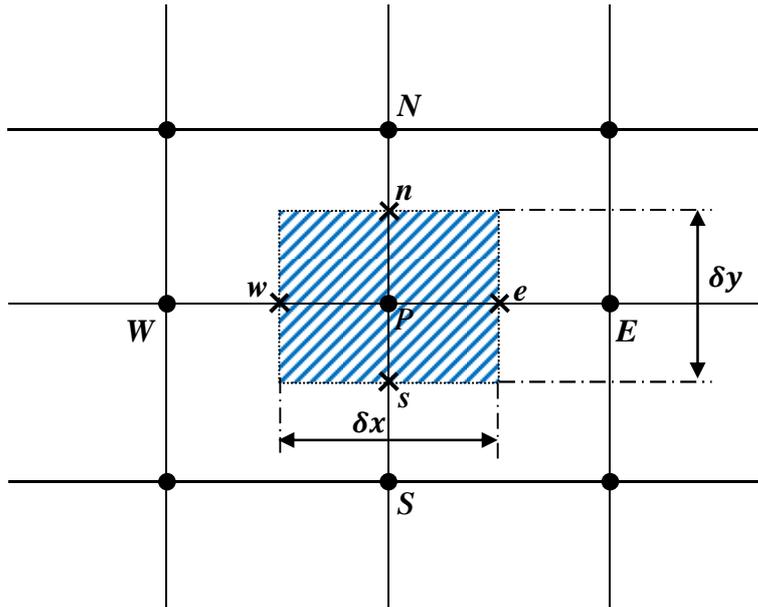
Sa forme intégrale à travers le volume de contrôle est donnée par :

$$\int_A \vec{n} \cdot (\rho\phi\vec{V}) dA = \int_A \vec{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{IV. 3})$$

L'interprétation physique de  $\vec{n} \cdot (\rho\phi\vec{V})$  est les composantes du vecteur  $(\rho\phi\vec{V})$  dans la direction du vecteur,  $\vec{n}$ , normale, unitaire externe à la surface élémentaire  $dA$ . Cette équation

représente l'équilibre de flux à travers le volume de contrôle. Le côté gauche donne le flux net de convection et le côté droite intègre le flux net de diffusion et le terme source

Si les vitesses et les pressions sont toutes deux définies au niveau des nœuds d'un volume de contrôle ordinaire, la non-uniformité du champ de pression peut agir comme un champ uniforme dans les équations discrétisées de quantité de mouvement. Cela peut être démontré avec une simple situation à deux dimensions comme le montre dans la figure (IV.1), où une grille uniforme est utilisée pour plus de simplicité.



**Figure (IV.1) :** Volume de contrôle pour une situation bidimensionnelle.  
Champ régulier de maillage.

Si les pressions en « e » et « w » sont obtenus par interpolation linéaire, le terme de gradient de pression,  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , dans l'équation de quantité de mouvement,  $u$ , est donné par:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{P_E + P_P}{2}\right) - \left(\frac{P_P + P_W}{2}\right)}{\delta x}$$

Or :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_E - P_W}{2\delta x} \quad (\text{IV. 4})$$

De même, le gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , dans l'équation de quantité de mouvement,  $v$ , est évalué comme :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_N - P_S}{2\delta y} \quad (\text{IV. 5})$$

La pression au niveau du nœud central (P) n'apparaît pas dans les équations (IV.3) et (IV.4).

En substituant les valeurs appropriées, du champ de pression irrégulier de la figure (IV.1) dans les formules (IV.2, IV.3, IV.4), nous aboutissons au résultat que tous les gradients discrétisés sont nuls à tous les points nodaux, même si le champ de pression montre des oscillations spatiales dans les deux directions. En conséquence, ce champ de pression donnerait la même source (zéro) de la quantité de mouvement dans les équations discrétisées comme un champ de pression uniforme, ce comportement est bien évidemment non physique.

Il est clair que, si les vitesses sont définies au niveau des nœuds scalaires de la grille, l'influence de la pression n'est pas correctement représentée dans les équations discrétisées de la quantité de mouvement.

### IV. 3. Grille décalée :

Pour remédier au problème de discrétisation, on utilise une grille décalée pour les composantes de la vitesse (*Harlow et Welch, 1965 [62]*). L'idée est d'évaluer les variables scalaires, tels que la pression, la densité, la température etc., à des points nodaux ordinaires, seulement pour calculer les composantes de vitesse sur des grilles décalées centrées autour des interfaces des volumes de contrôles.

La disposition pour un calcul d'écoulement bidimensionnel est montrée dans la figure (IV.2). Les variables scalaires, y compris la pression, sont stockés au niveau des nœuds (●). Les vitesses sont définies à l'interface du volume de contrôle (scalaire) entre les nœuds et sont indiqués par des flèches.

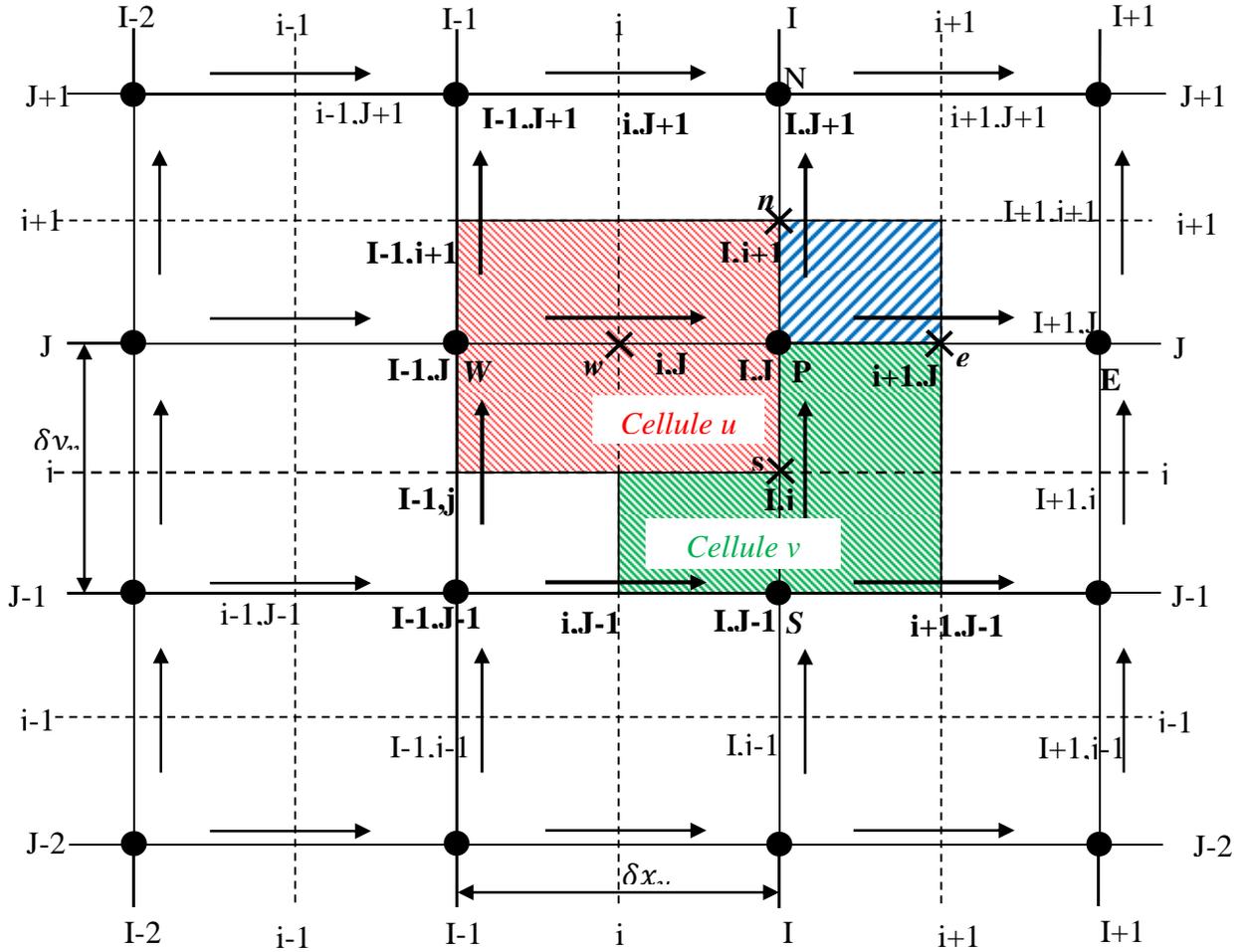
Les flèches horizontales (→) indiquent les positions pour les vitesses horizontales  $u$  et

(↑) sont désignées pour les vitesses verticales  $v$ .

En plus, les notations de  $E$  : Nœud "East",  $W$  : Nœud "West",  $N$  Nœud "North": et  $S$  : Nœud "South" de la figure (IV.2). On introduit également un nouveau système de notation basé sur une numérotation des lignes de grille et les interfaces des volumes de contrôle, il sera expliqué et utilisé plus tard dans ce chapitre.

Nous continuons à utiliser la notation originale,  $E$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $S$ , les vitesses  $u$  sont stockées comme des scalaires aux interfaces ' $e$ ' et ' $w$ ' et les vitesses,  $v$ , sont stockées aux interfaces ' $n$ ' et ' $s$ '. Dans le cas d'écoulement tridimensionnel la composante,  $w$ , est évaluée à l'interface ' $t$ ' et ' $b$ '. On note que les volumes de contrôle de  $u$  et  $v$  sont différents des volumes de contrôle scalaires et de chacun d'eux.

Les volumes de contrôle scalaires sont parfois dénommés « volumes de contrôle de pression » car, comme nous le verrons plus tard, l'équation discrétisée de continuité est transformée en une équation de correction de pression, qui est évaluée sur des volumes de contrôle scalaires.



**Figure (IV.2) :** Positionnement des volumes du contrôle  $u$  et  $v$ . [63]

Dans la disposition de la grille décalée, les nœuds de pression coïncident avec l'interface  $u$  du volume de contrôle. Le terme du gradient de pression,  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , est donné par :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_P - P_W}{\delta x_u} \quad (IV.6)$$

où :  $\delta x_u$ , est la largeur du volume de contrôle de  $u$ .

Par similarité,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , pour le volume de contrôle, le terme,  $v$ , montré sur la figure est donné par :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_P - P_S}{\delta y_v} \quad (IV.7)$$

où :  $\delta y_v$  est la largeur de volume du contrôle  $v$ .

Si on considère le champ de pression irrégulier de nouveau, la substitution des valeurs nodales appropriées de la pression dans les équations (IV.6) et (IV.7) donne désormais des termes très significatifs non nuls du gradient de pression. Le décalage de la vitesse permet d'éviter le

comportement irréaliste de l'équation de quantité de mouvement pour le modèle de pression oscillant spatialement discrétisé, comme champ irrégulier.

Un autre avantage de la disposition de la grille décalée, est qu'elle génère des vitesses exactement aux endroits requis pour le calcul scalaire du transport de la convection-diffusion. Par conséquent, aucune interpolation n'est nécessaire pour calculer les vitesses scalaires aux interfaces des volumes de contrôle.

#### IV.4. Equations de quantité de mouvement discrétisées :

Comme mentionné précédemment, si le champ de pression est connu, la discrétisation des équations de vitesse et la procédure de la solution ultérieure est similaire à celle d'une équation scalaire. Puisque la grille de vitesse est décalée, la nouvelle notation basée sur la numérotation des lignes de grille et l'interface des volumes de contrôle est définie comme le montre la figure (IV.2). Les lignes de la grille continues sont numérotées par des lettres en majuscules, dans la direction  $x$ , la numérotation est..., I-1, I, I+1, ...etc., alors que dans la direction  $y$  la numérotation est..., J-1, J, J+1, ...etc.

Les lignes en discontinues ou interrompues qui construisent les interfaces des volumes de contrôle scalaires sont désignées par des lettres en minuscules..., i-1, i, i+1, ...et ..., j-1, j, j+1, ...dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Un système d'indice basé sur cette numérotation permet de définir les positions des nœuds de la grille et les interfaces des volumes de contrôle avec précision. Les nœuds scalaires, situés à l'intersection de deux lignes de grille, sont identifiés par deux lettres majuscules : par exemple, le point  $P$  est noté par (I,J).

Les vitesses,  $u$ , par exemple, sont stockées aux interfaces 'e' et 'w' d'un volume de contrôle scalaire. Elles sont situées à l'intersection d'une ligne définissant une frontière de volume de contrôle et une ligne de la grille et sont, par conséquent, définies par une combinaison d'une lettre minuscule et majuscule : à titre d'exemple, l'interface,  $w$ , du volume de contrôle autour du point  $P$  est identifié par (i,J).

Pour les mêmes raisons, les positions de stockage pour les vitesses,  $v$ , sont des combinaisons d'une lettre majuscule et minuscule, à titre d'exemple, l'interface est donnée par (I, j). Nous pouvons utiliser en avant ou en arrière la grille décalée de la vitesse, la grille uniforme dans la figure (IV.2) est décalée en arrière, car la position  $i$  pour la vitesse  $u$ ,  $u_{i,j}$  est à une distance de  $-(1/2)\delta x_u$  à partir du nœud scalaire (I,J), et également, la position  $j$  pour la vitesse  $v$ ,  $v_{i,j}$  est à  $-(1/2)\delta y_v$  de nœud (I,J).



$N$  et  $S$ , impliqués dans la sommation,  $\sum a_{nb}u_{nb}$  sont :  $(i-1,J)$ ,  $(i+1,J)$ ,  $(i,J+1)$  et  $(i,J-1)$ . Leurs positions et les vitesses en vigueur sont présentées en détail sur la figure (IV.3).

Les valeurs des coefficients  $a_{i,j}$  et  $a_{nb}$  peuvent être calculées avec l'un des schémas de différenciation (Différences centrées, Upwind (amont), Loi de puissance, Hybride et Exponentiel ou exacte). Voir Tableau (IV.4).

Les coefficients contiennent des combinaisons de flux convectif par unité de masse  $F$  et de la conductance de diffusion  $D$  à l'interface du volume de contrôle  $u$ . L'application du nouveau système de notation permet de donner les valeurs de  $F$  et  $D$  pour chaque interface  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$  du volume de contrôle.

Le flux convectif par unité de masse  $F$  est définis par :

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2}$$

$$F_w = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \quad (\text{IV.9-a})$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2}$$

$$F_e = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \quad (\text{IV.9 - b})$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2}$$

$$F_s = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-1,j-1}}{2} \right) v_{i-1,j} \right] \quad (\text{IV.9 - c})$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{2}$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left( \frac{\rho_{i-1,j+1} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) v_{i-1,j+1} \right] \quad (\text{IV.9 - d})$$

La conductance de diffusion  $D$  est définie par :

$$D_w = \frac{\Gamma_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \quad (\text{IV.9 - e})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{IV.9 - f})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i,j-1} + \Gamma_{i-1,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (\text{IV.9 - g})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{i-1,j+1} + \Gamma_{i,j+1} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j}}{4(y_{j+1} - y_j)} \quad (\text{IV.9 - h})$$

Les formules (IV.9) montrent que lorsque les variables scalaires ou les composantes de la vitesse ne sont pas disponibles à l'interface cellulaire du volume de contrôle,  $u$ , deux ou quatre points souhaitables en moyenne sont formés sur les points au voisinage où les valeurs sont disponibles. Au cours de chaque itération, les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse utilisées pour évaluer les expressions ci-dessus sont celles obtenues comme résultats de l'itération précédente où (l'estimation initiale de la première itération).

Il est à noter que les valeurs connues de  $u$  et  $v$  contribuent à l'un des coefficients  $a$  dans l'équation (IV.8). Elles sont distinctes de  $u_{i,j}$  et  $u_{nb}$  dans cette équation qui dénote les scalaires inconnus.

#### IV.4.2 Equations discrétisées de quantité de mouvement dans la direction $y$ :

Par analogie, l'équation de quantité de mouvement  $v$  devient :

$$a_{i,j}v_{i,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (P_{i,j-1} - P_{i,j})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (IV.10)$$

Les nœuds voisins impliqués dans la sommation ( $\sum a_{nb}v_{nb}$ ) et les vitesses dominantes sont montrés dans la figure (IV.4).

Les coefficients  $a_{i,j}$  et  $a_{nb}$  contiennent des combinaisons de flux convectif  $F$  par unité de masse et de la conductance de diffusion  $D$  à l'interface du volume de contrôle  $v$ .

Leurs valeurs sont obtenues en valeurs moyennes en utilisant la même procédure adoptée pour le volume de contrôle  $u$  et sont données ci-dessous :

Le flux convectif par unité de masse  $F$  est défini par :

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2}$$

$$F_w = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j-1} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right] \quad (IV.11 - a)$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2}$$

$$F_e = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right] \quad (IV.11 - a)$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j}}{2}$$

$$F_s = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j-2}}{2} \right) v_{i,j-1} + \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} \right] \quad (IV.11 - c)$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j} - F_{i,j+1}}{2}$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} \right] \quad (IV.11 - d)$$

La conductance de diffusion  $D$  est définie par :

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})} \quad (\text{IV.11 - e})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I+1,J-1} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)} \quad (\text{IV.11 - f})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,J-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (\text{IV.11 - g})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,J}}{y_{j+1} - y_j} \quad (\text{IV.11 - h})$$

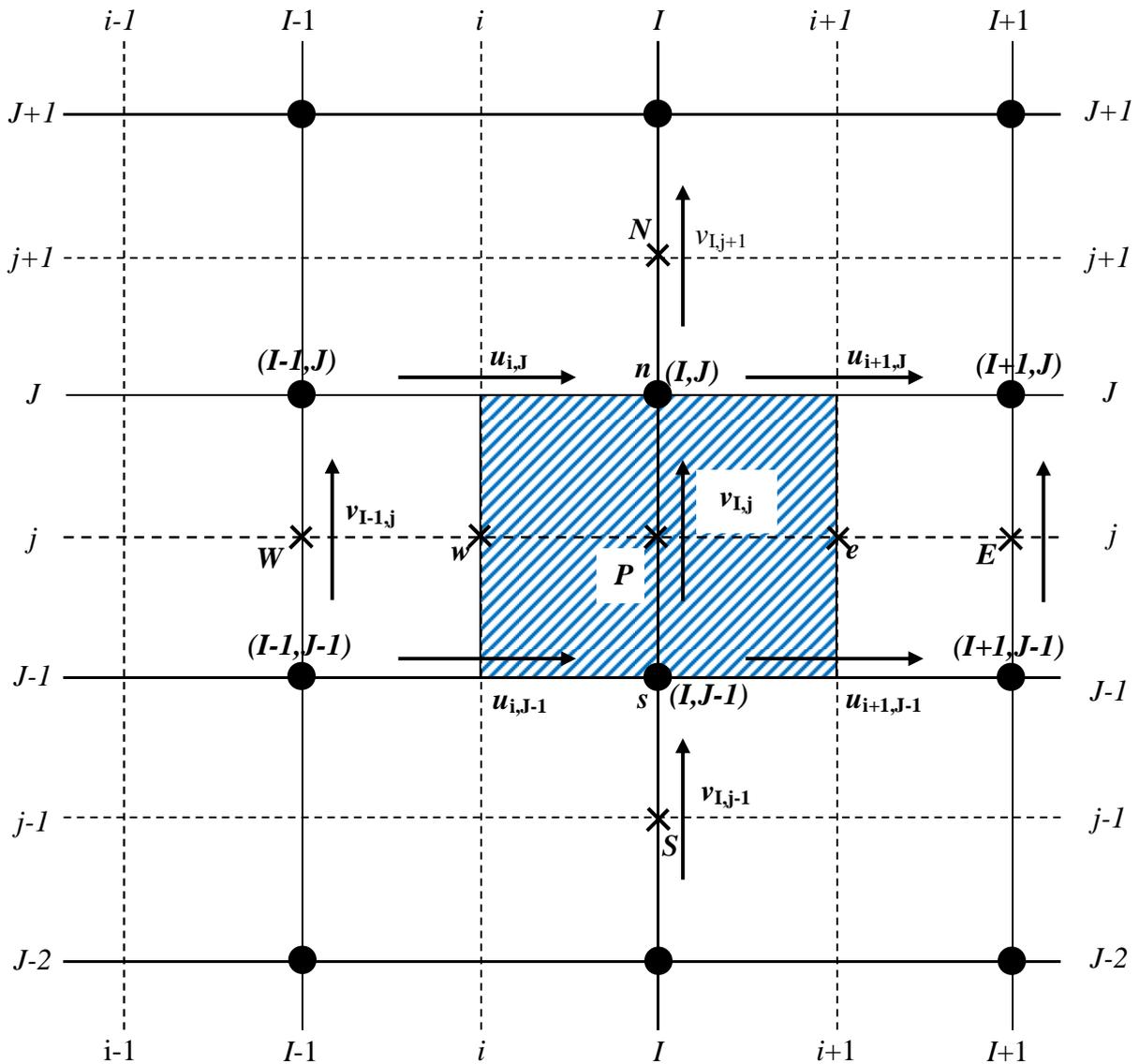


Figure (IV.4) : Volume de contrôle  $v$  et ses composantes de vitesse voisines.

A chaque niveau d'itération, les valeurs de  $F$  sont calculées en utilisant les composantes des vitesses  $u$  et  $v$  résultants de l'itération précédente. Etant donné que pour un champ de pression  $P$ , les équations discrétisées de la quantité de mouvement de la forme (IV.8) et (IV.10) peuvent être écrites pour chaque volume du contrôle de  $u$  et  $v$  et ensuite résolues pour obtenir les champs de vitesse. Si le champ de pression est correct, le champ de vitesse résultant doit satisfaire l'équation de continuité. Comme le champ de pression est inconnu, nous avons besoin d'une méthode pour calculer la pression.

#### IV.4.3. Equation discrétisée du terme source :

Les termes sources des équations discrétisées sont évalués en utilisant les valeurs dominantes des variables. Puisque la grille décalée est utilisée dans la procédure de calcul, l'interpolation est nécessaire dans le calcul des termes de gradient de vitesse qui apparaissent souvent en termes de source, à titre d'exemple.

Considérons l'équation bidimensionnelle de la vitesse- $u$  :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (\text{IV.12 - a})$$

où :

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Et de la vitesse- $v$  :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_v \quad (\text{IV.12 - b})$$

Une petite partie de la grille de solution est représentée sur la figure (IV-5), nous utilisons la notation standard pour les composantes de vitesse décalées en arrière introduites précédemment.

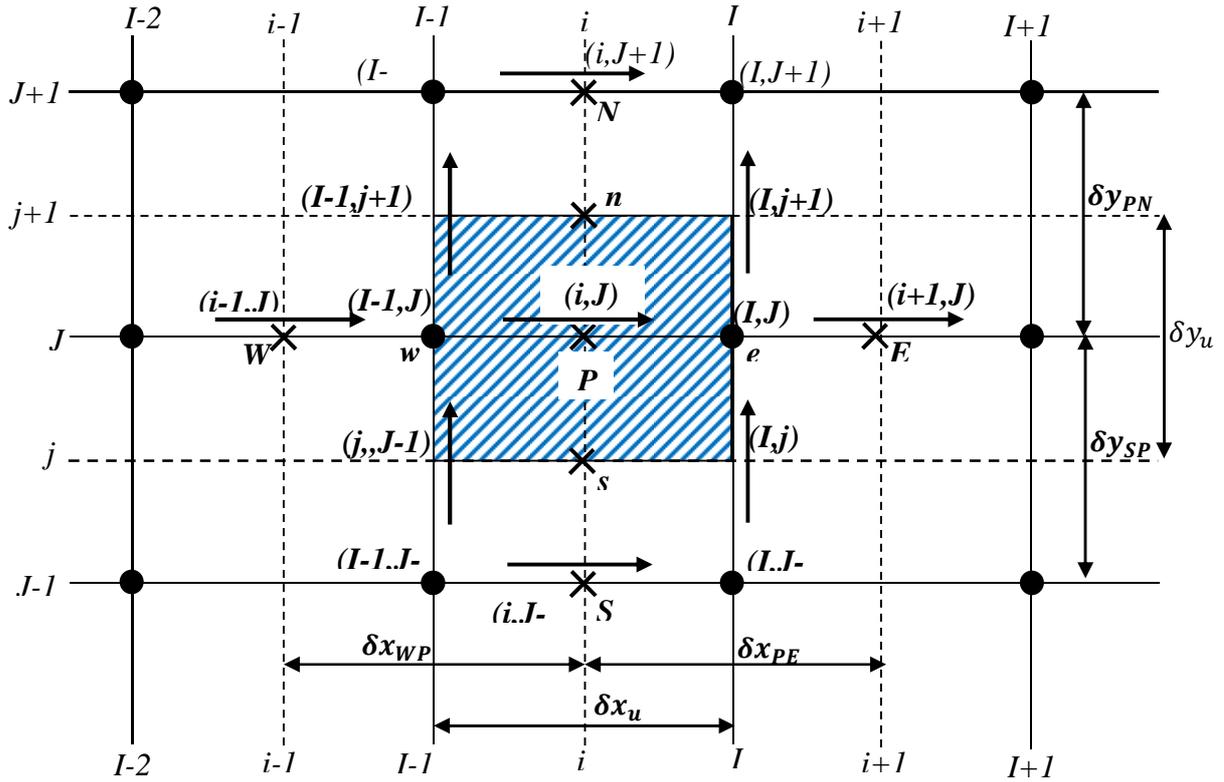


Figure (IV.5): Grille de solution.

La forme discrétisée de l'équation (IV.2) pour le volume du contrôle centré à  $(i, J)$  est : [63]

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{P_{I,J}-P_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S}\Delta V_u \quad (IV.13)$$

où  $\delta x_u$  est la largeur du volume de contrôle  $u$  et  $\Delta V_u$  son volume.

Le terme source pour l'équation de vitesse  $u$  de la cellule montrée dans la figure est évalué comme :

$$\begin{aligned} \bar{S}_u \Delta V &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{cell} \cdot \Delta V \\ \bar{S}_u \Delta V &= \left[ \frac{(\mu \frac{\partial u}{\partial x})_{east\ face} - (\mu \frac{\partial u}{\partial x})_{west\ face}}{\delta x_u} + \frac{(\mu \frac{\partial v}{\partial y})_{north\ face} - (\mu \frac{\partial v}{\partial y})_{south\ face}}{\delta y_u} \right] \cdot \Delta V \\ &= \left[ \frac{(\mu \frac{u_{i+1,J} - u_{i,J}}{\delta x_{PE}}) - (\mu \frac{u_{i,J} - u_{i-1,J}}{\delta x_{WP}})}{\delta x_u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu \frac{v_{I,j+1} - v_{I-1,j+1}}{\delta x_u}) - (\mu \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\delta x_u})}{\delta y_u} \right] \delta x_u \delta y_u \quad (IV.14) \end{aligned}$$

Les termes sources des autres équations sont aussi calculés d'une manière similaire.

### IV.5. Algorithme SIMPLE :

L'acronyme, *SIMPLE*, signifie **Semi Implicit- Method for Pressure-Linked Equations** a été mis en œuvre avec succès dans de nombreuses procédures de CFD. L'algorithme a été initialement développé par *Patankar* et *Spalding* (1972) [64].

Il constitue une procédure permettant d'estimer et corriger pour le calcul de la pression sur la disposition de la grille décalée introduite ci-dessus.

Il faut noter que des variantes de SIMPLE ont été développées après, à savoir SIMPLER (SIMPLE Revised), SIMPLEC (SIMPLE-Consistent) et PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) pour améliorer les résultats et la convergence.

La méthode SIMPLE est illustrée en considérant que les équations sont bidimensionnelles et que l'écoulement est laminaire et permanent en coordonnées cartésiennes.

Pour lancer le processus de calcul *SIMPLE*, un champ de pression  $P^*$  est estimé. L'indice (\*) est réservé aux valeurs estimées.

Les équations de quantité de mouvement discrétisées (IV.8) et (IV.10) sont résolues en utilisant le champ de pression estimé pour produire des composantes de vitesse estimées  $u^*$  et  $v^*$  comme suit :

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (IV.15)$$

$$a_{i,j}v_{i,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (P_{i,j-1}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (IV.16)$$

Nous définissons la correction,  $P'$ , comme la différence entre le champ de pression corrigé,  $P$ , et le champ de pression estimé,  $P^*$ , de sorte que :

$$P = P^* + P' \quad (IV.17)$$

De manière similaire, nous définissons les corrections des vitesses  $u'$  et  $v'$  pour relier les vitesses corrigées,  $u$  et  $v$ , aux vitesses estimées,  $u^*$  et  $v^*$  :

$$u = u^* + u' \quad (IV.18)$$

$$v = v^* + v' \quad (IV.19)$$

La substitution du champ de pression corrigé  $P$  dans les équations de quantité de mouvement produit le champ de vitesse corrigé ( $u$ ,  $v$ ). Les équations discrétisées (IV.8) et (IV.10) relient les champs de vitesse corrigés avec le champ de pression corrigé, la soustraction d'équations (IV.18) et (IV.19) de (IV.8) et (IV.10), respectivement, donne :

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(P_{I-1,J} - P_{I-1,J}^*) - (P_{I,J} - P_{I,J}^*)]A_{i,j} \quad (IV.20)$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(P_{I,J-1} - P_{I,J-1}^*) - (P_{I,J} - P_{I,J}^*)]A_{I,j} \quad (IV.21)$$

En utilisant les formules de correction (IV.17 - IV.19), les équations (IV.20 et IV.21) peuvent être écrites comme suit :

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (P'_{I-1,J} - P'_{I,J})A_{i,j} \quad (IV.22)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (P'_{I,J-1} - P'_{I,J})A_{I,j} \quad (IV.23)$$

A ce stade, une approximation est introduite. Les termes,  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  et  $\sum a_{nb}v'_{nb}$ , sont développés pour simplifier les équations (IV.22) et (IV.23) pour la correction de la vitesse.

Elle correspond à l'approximation principale de l'algorithme *SIMPLE*. Ce qui permet d'obtenir :

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \quad (IV.24)$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}(P'_{I,J-1} - P'_{I,J}) \quad (IV.25)$$

où :

$$\begin{cases} d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \\ d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} \end{cases} \quad (IV.26)$$

Les équations (IV.24) et (IV.25) décrivent les corrections à appliquer aux vitesses au moyen des formules (IV.18) et (IV.19), ce qui donne :

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \quad (IV.27)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + d_{I,j}(P'_{I,J-1} - P'_{I,J}) \quad (IV.28)$$

Des expressions similaires existent pour  $u_{i+1,j}$  et  $v_{I,j+1}$  :

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j}(P'_{I,J} - P'_{I+1,j}) \quad (IV.29)$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1}(P'_{I,j} - P'_{I,j+1}) \quad (IV.30)$$

où :

$$\begin{cases} d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}} \\ d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}} \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les équations de quantité de mouvement. Comme mentionné précédemment, le champ de vitesse est également soumis à la contrainte qui devrait satisfaire l'équation de continuité.

#### IV.6. Equation de continuité discrétisée :

L'équation de continuité est satisfaite sous forme discrétisée pour le volume de contrôle de la figure (IV.6). Elle est donnée par l'expression :

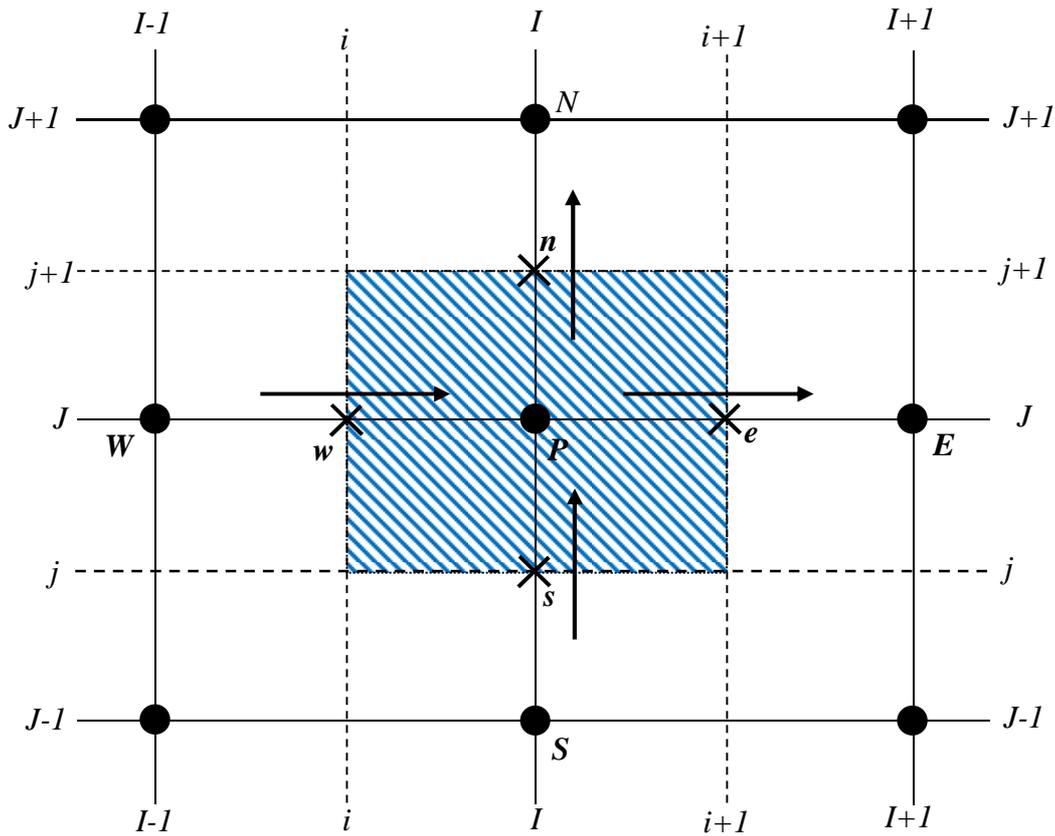
$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Les substitutions des vitesses corrigées des équations (IV.27 - IV.30) dans l'équation de continuité discrétisée (IV.32) donnent : [63]

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} \left( u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J} (P'_{I,J} - P'_{I+1,J}) \right) - \rho_{i,J} A_{i,J} \left( u_{i,J}^* + d_{i,J} (P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \right) \right] \\ & + \left[ \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} \left( v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1} (P'_{I,J} - P'_{I+1,J}) \right) - \rho_{I,j} A_{I,j} \left( v_{I,j}^* + d_{I,j} (P'_{I,J-1} - P'_{I,J}) \right) \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Cette équation peut être réarrangée pour donner :

$$\begin{aligned} & [(\rho d A)_{i+1,J} + (\rho d A)_{i,J} + (\rho d A)_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j}] P'_{I,J} \\ & = (\rho d A)_{i+1,J} P'_{I+1,J} + (\rho d A)_{i,J} P'_{I-1,J} + (\rho d A)_{I,j+1} P'_{I,J+1} + (\rho d A)_{I,j} P'_{I,J-1} \\ & + (\rho d A)_{I,j} P'_{I,J-1} + [(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} \\ & - (\rho v^* A)_{I,j+1}] \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$



**Figure (IV.6) :** Volume du contrôle utilisé pour l'équation de continuité discrétisée.

L'identification des coefficients de  $P'$ , peut être écrite comme suit :

$$a_{I,J}P'_{I,J} = a_{I+1,J}P'_{I+1,J} + a_{I-1,J}P'_{I-1,J} + a_{I,J+1}P'_{I,J+1} + a_{I,J-1}P'_{I,J-1} + b'_{I,J} \quad (IV.35)$$

où :

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$$

L'équation (IV.34) représente l'équation de continuité discrétisée comme étant une équation pour la correction de pression,  $P'$ .

Les coefficients,  $a_{I,J}$ , sont donnés par le tableau (IV.1) ci-dessous :

**Tableau (IV.1) :** Expressions des coefficients,  $a_{I,J}$ .

$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b'_{I,J}$
$(\rho dA)_{i+1,J}$	$(\rho dA)_{i,J}$	$(\rho dA)_{I,J+1}$	$(\rho dA)_{I,j}$	$(\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$

Le terme source  $b'$  dans l'équation est le déséquilibre de continuité résultant du champ de vitesse estimé  $u^*$  et  $v^*$ . En résolvant l'équation (IV.35), le champ de pression de correction  $P'$  peut-être obtenu en tous points, une fois le champ de correction de pression est connu, le

champ de pression de correction peut être obtenu en utilisant la formule (IV.17) et les composantes de vitesse à travers la correction des formules (IV.27-IV.30).

L'omission des termes tels que  $(\sum a_{nb}u'_{nb})$ , dans la dérivation n'affecte pas la solution finale, car la correction de pression et les corrections de vitesse seront tous nuls dans la solution convergente donnant :  $P^*=P$ ,  $u^*=u$  et  $v^*=v$ .

L'équation de correction de pression est susceptible à la divergence à moins que certaines sous-relaxations soient utilisées au cours du processus itératif où de nouvelles améliorations de pression sont obtenues avec :

$$P^{new} = P^* + \alpha_p P' \quad (IV.36)$$

où :  $\alpha_p$  est le facteur de sous- relaxation de la pression.

Si nous choisissons  $\alpha_p$  égale à 1, le champ de pression estimé  $P^*$  est corrigé par  $P'$ . Cependant, les corrections  $P'$ , en particulier lorsque le champ estimé  $P^*$  est loin de la solution finale, est souvent trop grand pour les calculs de stabilité, si la valeur de  $\alpha_p$  égale à zéro, ne s'appliquerait pas à toutes les corrections, qui est également indésirable.

Prendre  $\alpha_p$  entre 0 et 1 nous permet d'ajouter au champ estimé  $P^*$  une fraction du champ de correction  $P'$  qui est assez considérable pour déplacer le processus d'amélioration itératif en avant, mais suffisamment petit pour assurer la stabilité du calcul.

Les vitesses sont également sous-relaxées, les composantes de vitesse itérativement améliorée  $u^{new}$  et  $v^{new}$  sont obtenues à partir de :

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u)u^{(n-1)} \quad (IV.37)$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v)v^{(n-1)} \quad (IV.38)$$

où :  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  sont les facteurs de sous-relaxation des vitesses,  $u$  et  $v$ , avec des valeurs comprises entre 0 et 1.  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse corrigée sans relaxation et  $u^{(n-1)}$  et  $v^{(n-1)}$  représentent les valeurs obtenues à l'itération précédente.

Après calcul, il peut être démontré qu'avec la sous- relaxation, l'équation de quantité de mouvement discrétisée  $u$  prend la forme :

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,j} + b_{i,j} + [(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u}] u_{i,j}^{(n-1)} \quad (IV.39)$$

L'équation de quantité de mouvement  $v$  discrétisée également prend la forme :

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_v} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J})A_{i,j} + b_{i,j} + [(1 - \alpha_v) \frac{a_{i,j}}{\alpha_v}] v_{i,j}^{(n-1)} \quad (IV.40)$$

L'équation de correction de pression est aussi affectée par la sous relaxation de la vitesse et il peut être démontré que les termes,  $d$ , de l'équation de correction de pression deviennent :

$$\begin{aligned}d_{i,J} &= \frac{A_{i,J}\alpha_u}{a_{i,J}} \\d_{i+1,J} &= \frac{A_{i+1,J}\alpha_u}{a_{i+1,J}} \\d_{I,j} &= \frac{A_{I,j}\alpha_v}{a_{I,j}} \\d_{I,j+1} &= \frac{A_{I,j+1}\alpha_v}{a_{I,j+1}}\end{aligned}$$

Notons que dans ces formules,  $a_{i,J}$ ,  $a_{i+1,J}$ ,  $a_{I,j}$  et  $a_{I,j+1}$ , sont les coefficients centraux des équations discrétisées de la vitesse aux positions (i, J), (i + 1, J), (I, j) et (I, j + 1) d'un volume de contrôle scalaire autour de  $P$ .

Un choix correct de facteurs de la sous-relaxation,  $\alpha$ , est essentiel pour une simulation rentable : une très grande valeur de  $\alpha$  peut conduire à des instabilités (oscillations), voire des solutions itératives divergentes et une valeur très petite causera une convergence extrêmement lente, malheureusement, les valeurs optimales du facteur de sous-relaxation sont dépendantes de l'écoulement et doivent être recherchées au cas par cas. L'utilisation de la sous-relaxation sera discutée ultérieurement.

### En résumé :

Les équations de discrétisations sont écrites comme suit :

Les équations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}a_{i,J}u_{i,J}^* &= \sum a_{nb}u_{nb}^* + (P_{I-1,J}^* - P_{I,J}^*)A_{i,J} + b_{i,J} \\a_{I,j}v_{I,j}^* &= \sum a_{nb}v_{nb}^* + (P_{I,J-1}^* - P_{I,J}^*)A_{I,j} + b_{I,j}\end{aligned}$$

L'équation de correction de pression :

$$a_{I,J}P'_{I,J} = a_{I+1,J}P'_{I+1,J} + a_{I-1,J}P'_{I-1,J} + a_{I,J+1}P'_{I,J+1} + a_{I,J-1}P'_{I,J-1} + b'_{I,J}$$

Correction de pression et de vitesses

$$\begin{aligned}P_{I,J} &= P_{I,J}^* + P'_{I,J} \\u_{i,J} &= u_{i,J}^* + d_{i,J}(P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \\v_{I,j} &= v_{I,j}^* + d_{I,j}(P'_{I,J-1} - P'_{I,J})\end{aligned}$$

Résoudre l'équation de température :

$$a_{I,J}T_{I,J} = a_{I-1,J}T_{I-1,J} + a_{I+1,J}T_{I+1,J} + a_{I,J-1}T_{I,J-1} + a_{I,J+1}T_{I,J+1} + bT_{I,J}$$

### IV.7. Résolution ligne par ligne de Gauss Seidel :

Y compris l'équation de correction de pression, il y a maintenant six équations aux dérivés partielles à résoudre. Ces équations sont résolues au moyen de la méthode ligne par ligne de Gauss-Seidel qui utilise une combinaison de l'algorithme de TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) et la méthode itérative point par point de Gauss-Seidel.

#### IV.7.1 Application de la méthode TDMA pour un problème unidimensionnel :

Dans ce qui suit, la description de l'algorithme TDMA est pour les situations unidimensionnelles. L'équation de discrétisation unidimensionnelle pour la variable  $\phi$  peut être écrite comme suit :

$$d_j\phi_j = a_j\phi_{j+1} + b_j\phi_{j-1} + c_j \quad (IV.41)$$

où :  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  représentent les coefficients de l'équation discrétisée de la variable,  $\phi$ . L'indice inférieur  $j$  : représente un compteur d'espace,  $j=jmin, jmax$ .

L'algorithme de TDMA consiste en une formule de récurrence pour la variable en question de sorte qu'on puisse obtenir la nouvelle valeur de  $\phi$  avec l'aide des conditions aux limites.

Pour le procédé de substitution d'avant on cherche une relation :

$$\phi_j = P_j\phi_{j+1} + Q_j \quad (IV.42)$$

Avec :  $j=j-1$  dans la relation ci-dessus, on peut aboutir à une équation de  $\phi_{j-1}$  :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1} \quad (IV.43)$$

La substitution de l'équation (IV.40) dans l'équation (IV.38) conduit à :

$$d_j\phi_j = a_j\phi_{j+1} + b_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + c_j \quad (IV.44)$$

Si l'équation (IV.44) est réarrangée pour prendre la forme de l'équation (IV.42) et les coefficients sont comparés, on aboutit à une relation de récurrence de la forme :

$$P_j = \frac{a_j}{d_j - b_jP_{j-1}} \quad (IV.45)$$

$$Q_j = \frac{c_j + b_j Q_{j-1}}{d_j - b_j P_{j-1}} \quad (\text{IV. 46})$$

Pour  $j=j_{min}$ , la relation de récurrence (IV.45) et (IV.46) donne une valeur bien déterminée pour  $P_{min}$  et  $Q_{min}$ . Par similarité pour  $j=j_{max}$ , la relation de récurrence donne une certaine valeur bien déterminée pour  $P_{max}$  et  $Q_{max}$

Une explication pour un problème de conditions aux limites spécifiques avec température variable, est donnée par Patankar (1980) [60].

#### \*Résumé de l'algorithme :

1. Calcul de  $P_{min}$  et  $Q_{min}$  en utilisant les conditions aux limites gauches (c'est à dire, pour  $j=j_{min}$ ) ;
2. Utilisation des relations de récurrence (IV.44) et (IV.45) pour obtenir  $P_j$  et  $Q_j$ , pour  $j=j_{min+1}, j_{max}$  ;
3. Assimiler les conditions aux limites droites (c'est à dire, pour  $j=j_{max}$ ) avec  $P_{max}$  et  $Q_{max}$  ;
4. Utiliser l'équation (IV.41) pour  $j=j_{max}, j_{min}$  pour obtenir  $\phi_{j_{max}-1}, \phi_{j_{min}}$

#### \*\*Critère de convergence de Scarborough [60] :

Le critère de convergence de Scarborough est une condition suffisante pour la convergence de la méthode de Gauss- Seidel est défini comme suit :

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} \begin{cases} \leq 1 & \text{pour toutes les équations} \\ < 1 & \text{pour au moins une équation} \end{cases}$$

#### IV.7.2. Application de la méthode TDMA pour un problème bidimensionnel :

Pour la situation bidimensionnelle on a besoin d'utiliser la méthode point par point de Gauss-Seidel en combinaison avec l'algorithme de TDMA.

L'équation de discrétisation générale bidimensionnelle peut être écrite comme suit :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S \quad (\text{IV. 47})$$

où :

$a_P, a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  : représentent des coefficients associées à la variable  $\phi$  .  
 $S$ , représente le terme source.

Afin de pouvoir utiliser le TDMA on doit choisir une direction particulière pour un seul balayage et supposer l'autre direction d'être constante. Dans le présent travail, la direction Sud-Nord est choisie pour les calculs, et on suppose que la direction Ouest-Est soit constante pour chaque balayage. Ainsi un nouveau terme source  $S_\theta$ , est introduit comme partie parmi les termes dans la direction W-E.

L'équation (IV.41) modifiée donne :

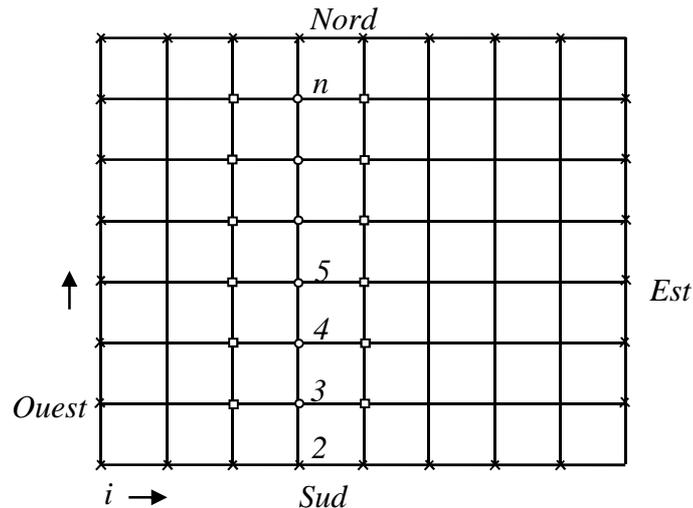
$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_0 \quad (\text{IV.48})$$

Avec :

$$S_0 = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S$$

• **Discussion de la méthode ligne par ligne de Gauss-Seidel :**

Le schéma ligne par ligne peut être montré en se référant à la figure (IV.7).



**Figure (IV.7) :** Présentation de la méthode ligne par ligne.

○ : Points où les valeurs sont calculées.

□ : Points où les valeurs sont considérées temporairement comme connues.

× : Valeurs inconnues aux limites.

Les équations de discrétisation pour les points du maillage le long d'une ligne choisie sont considérées en premier, ceux-ci contiennent les valeurs de  $\phi$  aux points du maillage (représentés par des petits carrés) le long de deux lignes adjacentes. Si ces  $\phi$  sont substitués à leurs dernières valeurs, les équations pour les points de maillage (représentés par des petits cercles) le long de la ligne choisie ressembleraient aux équations unidimensionnelles et pourraient être résolues par l'algorithme de TDMA. Cette procédure est suivie pour toutes les lignes dans la direction S-N. Pour plus de détails voir [63].

#### IV.8. Assemblage de la méthode complète :

L'algorithme SIMPLE donne une méthode de calcul de la pression et la vitesse. La méthode est itérative et quand d'autres scalaires sont couplés à des équations de quantité de mouvement, le calcul doit être fait d'une manière séquentielle. La séquence des opérations dans la procédure de CFD qui utilise l'algorithme *SIMPLE* est donnée par la figure (IV.8).

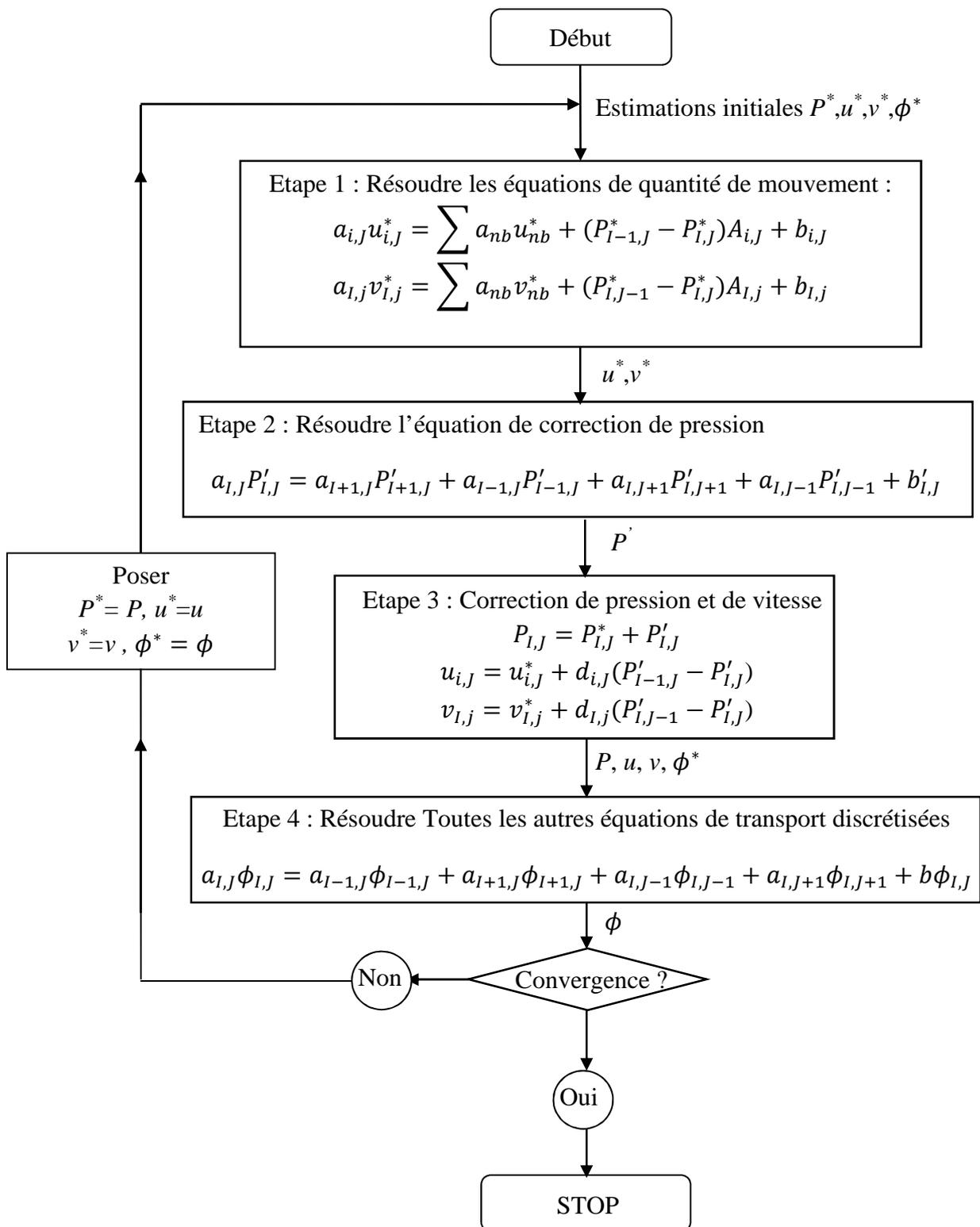


Figure (IV.8) : L'Algorithme SIMPLE

### IV. 9. Fonctions génératrices de maillage :

Dans le problème présenté ci-dessus, On propose d'utiliser des fonctions multiples pour produire le maillage non uniforme décalé dans les directions  $x$  et  $y$ , on cite la première fonction qui peut être exprimée mathématiquement comme :

$$\frac{xu(i)}{L} = \frac{i-2}{I_{max}} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{i}{I_{max}}\right); \quad i = I_{min}, I_{max}$$

$$\frac{yv(i)}{H} = \frac{j-2}{J_{max}} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{j}{J_{max}}\right); \quad j = J_{min}, J_{max}$$

Avec :  $I_{min}=J_{min} = 2, I_{max} = NI - 2$  et  $J_{max} = NJ - 2$

Pour le maillage non structuré:

Ces deux fonctions de sinus, engendrent un maillage non-uniforme qu'est attentivement espacée de près de la paroi et peu abondamment éloignée loin de la paroi.

Pour le maillage structuré ou uniforme:

$$\frac{xu(i)}{H} = \frac{i-2}{imax}$$

$$\frac{yv(i)}{L} = \frac{j-2}{jmax}$$

Avec :  $j = jmin, jmax,$

$imin=jmin=2, imax=NI-2,$  et  $jmax=NJ-2$

Une deuxième fonction ou un autre maillage qui a été utilisé également, est celui proposé par C. Shu et H. Xue [65] :

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{i-1}{NI-1}\pi\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, NI$$

Avec:  $NI = imax$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{j-1}{NJ-1}\pi\right) \right], \quad j = 1, 2, \dots, NJ$$

Avec:  $NJ = jmax$

Les fonctions utilisées par D. C. Lo, D. L. Young, et K. Murugesan [66] sont :

$$x_i = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2NI}\right] - \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2NI}\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2NI}\right] - \cos\left[\frac{(2NI-1)\pi}{2NI}\right]}; \quad i = 1, 2, \dots, NI$$

Avec:  $NI = imax$

$$y_j = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2NJ}\right] - \cos\left[\frac{(2j-1)\pi}{2NJ}\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2NJ}\right] - \cos\left[\frac{(2NJ-1)\pi}{2NJ}\right]} ; j = 1, 2, \dots, NJ$$

Avec:  $NJ = jmax$

- Il s'avère qu'un maillage à pas variable [67], défini par les expressions périodiques suivantes et donnant pour chaque point ses coordonnées :

$$X(I) = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{(I-1)\pi}{NI}\right) \right], \quad I = 1, 2, \dots, NI$$

Avec :  $NI = imax$  et  $L$ : Largeur de la cavité.

$$Y(J) = \frac{H}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{(J-1)\pi}{NJ}\right) \right], \quad J = 1, 2, \dots, NJ$$

Avec :  $NJ = jmax$  et  $H$ : Hauteur de la cavité.

Ce maillage permet d'obtenir des résultats plus rapidement, quelle que soit la taille problème.

Pour les cavités simple à surfaces non ailettées, un maillage non uniforme ou non structuré décalé dans les directions  $x$  et  $y$  a été utilisé ce maillage est attentivement espacée de près de la paroi et peu abondamment éloigné loin de la paroi. Par contre pour les cavités à surfaces ailettées, un maillage uniforme ou structuré est proposé pour avoir des résultats meilleurs.

#### IV.10. Schémas de résolution :

Les problèmes de discrétisation de l'équation de la convection-diffusion, en supposant que le champ de l'écoulement est connu, ont été discutés précédemment. Le problème crucial est la formulation d'expressions convenables pour les valeurs de la propriété de transport de  $\phi$  à l'interface de la cellule (volume de contrôle) quand on comptabilise la contribution de la convection dans l'équation.

Cependant, si l'écoulement est incompressible, la densité est constante et donc par définition elle n'est pas liée à la pression. Dans ce cas, le couplage entre la pression et la vitesse introduit une contrainte pour la solution du champ d'écoulement, si la correction du champ de pression est appliquée dans les équations de quantité de mouvement le champ de vitesse résultant devrait satisfaire la continuité.

A la fois les problèmes liés aux non-linéarités dans l'ensemble des équations et la relation pression-vitesse peuvent être résolues par l'adoption d'une stratégie de solutions itératives telles que l'algorithme *SIMPLE* de (Patankar et Spalding 1972) [64]. Dans cet algorithme les flux convectifs par unité de masse  $F$  à travers les interfaces des volumes de contrôle sont évaluées à partir de ce qu'on appelle composantes de vitesse estimé.

Par ailleurs, un champ de pression estimé est utilisé pour résoudre les équations de quantité de mouvement et l'équation de correction de pression, déduite de l'équation de continuité, est résolue pour obtenir un champ de correction de pression qui est à son tour utilisé pour mettre à jour les champs de vitesse et de pression.

Pour démarrer le processus d'itération, nous utilisons les estimations initiales pour les champs de vitesse et de pression. Le processus est itéré jusqu'à convergence des champs de vitesse et de pression. Les principales caractéristiques de l'algorithme *SIMPLE* et ses améliorations les plus récents seront discutés dans ce chapitre.

Tous les schémas de volumes finis présentés dans ce chapitre décrivent les effets de convection simultanée et la diffusion par les moyens d'équations de discrétisation dont les coefficients sont des combinaisons pondérés de flux massique convectif par unité de surface  $F$  et la conductance de diffusion  $D$ .

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui de l'équation d'énergie. *Patankar [60]* a montré que si on calculait les variables  $u, v, T, P$  et la fonction de courant  $\psi$  sur la même grille, on aboutirait à une solution non réaliste. Pour remédier à ce problème, il préconise d'utiliser un maillage décalé pour le calcul des champs de vitesse par rapport aux champs de pression. Le champ de vitesse obtenu par résolution de l'équation de quantité de mouvement à partir d'un champ de pression estimé (à priori incorrect) ne satisfait pas en général l'équation de continuité qui est utilisée pour corriger le champ de vitesse, pour cela, on utilise alors une procédure itérative de correction de vitesse et de pression basée sur l'algorithme *SIMPLE* vu précédemment.

Les équations de discrétisations pour un nœud interne général pour le schéma différences centrées, Upwind, hybride et le schéma loi de puissance d'un problème de convection-diffusion unidimensionnel sont de la forme suivante :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (\text{IV.49})$$

Avec :

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Les coefficients voisins,  $a_i$ , sont donnés par le tableau (IV.4).

- La forme finale et générale de l'équation de discrétisation en bidimensionnelle s'écrit encore :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S \quad (\text{IV.50 - a})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e A(|P_e|) + \text{Max}[-F_e, 0] \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \text{Max}[F_w, 0] \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \text{Max}[-F_n, 0] \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \text{Max}[F_s, 0] \end{cases} \quad (\text{IV.50 - b})$$

Les formes discrétisées bidimensionnelles initiales et finales peuvent s'écrire :

$$\frac{(\rho_P u_P - \rho_P^0 u_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C + S_P u_P) \Delta x \Delta y \quad (\text{IV.50 - c})$$

où :

$$J_e = \left\{ (\rho u)_e u - (\mu + \mu_t)_e \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \Delta y$$

$$J_w = \left\{ (\rho u)_w u - (\mu + \mu_t)_w \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \Delta y$$

$$J_n = \left\{ (\rho v)_n u - (\mu + \mu_t)_n \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \Delta x$$

$$J_s = \left\{ (\rho v)_s u - (\mu + \mu_t)_s \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \Delta x$$

**Tableau (IV.2) :** Expressions des coefficients,  $a_i$  pour différents écoulements.

	Écoulement unidimensionnel	Écoulement bidimensionnel	Écoulement tridimensionnel
$a_w$	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$
$a_e$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$
$a_s$		$\max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}), 0]$	$\max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}), 0]$
$a_n$		$\max[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0]$	$\max[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0]$
$a_b$			$\max[F_b, (D_b + \frac{F_b}{2}), 0]$
$a_t$			$\max[-F_t, (D_t - \frac{F_t}{2}), 0]$
$\Delta F$	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_s$

Dans les expressions précitées les valeurs de  $F$  et  $D$  sont déterminées à partir du tableau (IV.3).

**Tableau (IV.3) :** Expressions des coefficients  $F$  et  $D$ .

Interface	$w$	$e$	$s$	$n$	$b$	$t$
$F$	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho u)_s A_s$	$(\rho u)_n A_n$	$(\rho u)_b A_b$	$(\rho u)_t A_t$
$D$	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{PS}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{PN}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$

**Tableau (IV.4) :** Expressions des coefficients,  $a_w$  et  $a_E$  suivant les différents schémas.

Schémas	$a_w$	$a_E$
Différences Centrées	$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$
Upwind-Amont	$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$
Hybride	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}), 0]$
Loi de puissance	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w )^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e )^5] + \max[-F_e, 0]$

La fonction de  $A(|P_i|)$  s'exprime selon les différents schémas donnés par le tableau (IV.5) suivants:

**Tableau (IV.5) :** Expressions de  $A(|P_i|)$  suivant les différents schémas.

Schémas	$A( P_i )$
Différences Centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind-Amont	1
Hybride	$Max(0, 1 - 0.5 P )$
Loi de puissance	$Max[0, (1 - 0.1 P )^5]$
Exponential (Exact)	$\frac{ P }{\exp( P ) - 1}$

$$S = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^0 + M$$

$$a_p = (a_w + a_E + a_N + a_S) + \Delta F + (a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y)$$

$$\Delta F = F_e - F_w + F_n - F_s$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$F$  : La force de convection ou le débit massique à travers les interfaces des volumes du contrôle ;

$D$ : La force de diffusion ;

$$P = \frac{F}{D} \text{ (Nombre de Peclet).}$$

$M$ : Modification aux équations de quantité de mouvement donnée par :

$$M = \left[ \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} [(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)] \right]$$

( $M=0$  pour les fluides incompressible où la densité ne change pas avec le temps).

Pour les équations de quantité de mouvement :

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} = \frac{(\mu + \mu_t)_e}{(\delta x)_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} = \frac{(\mu + \mu_t)_w}{(\delta x)_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} = \frac{(\mu + \mu_t)_n}{(\delta y)_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} = \frac{(\mu + \mu_t)_s}{(\delta y)_s}$$

$$\begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{cases}$$

- La forme finale de l'équation générale de discrétisation tridimensionnelle s'écrit:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_T \phi_T + a_B \phi_B + S \quad (\text{IV.51 - a})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e A(|P_e|) + \text{Max}[-F_e, 0] \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \text{Max}[F_w, 0] \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \text{Max}[-F_n, 0] \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \text{Max}[F_s, 0] \\ a_T = D_t A(|P_t|) + \text{Max}[-F_t, 0] \\ a_B = D_b A(|P_b|) + \text{Max}[F_b, 0] \end{cases} \quad (\text{IV.51 - b})$$

$$S = S_C \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 \phi_P^0 + M$$

Avec :

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}$$

$$a_p = (a_w + a_e + a_n + a_s + a_t + a_b) + \Delta F + (a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \Delta z)$$

$$\Delta F = F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$$

$$\begin{cases} F_e = (\rho u)_e \Delta y \Delta z \\ F_w = (\rho u)_w \Delta y \Delta z \\ F_n = (\rho v)_n \Delta x \Delta z \\ F_s = (\rho v)_s \Delta x \Delta z \\ F_t = (\rho w)_t \Delta x \Delta y \\ F_b = (\rho w)_s \Delta x \Delta y \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e} = \frac{(\mu + \mu_t)_e}{(\delta x)_e} \\ D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w} = \frac{(\mu + \mu_t)_w}{(\delta x)_w} \\ D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_n} = \frac{(\mu + \mu_t)_n}{(\delta y)_n} \\ D_s = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s} = \frac{(\mu + \mu_t)_s}{(\delta y)_s} \\ D_t = \frac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t} = \frac{(\mu + \mu_t)_t}{(\delta z)_t} \\ D_b = \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b} = \frac{(\mu + \mu_t)_b}{(\delta z)_b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \\ P_t = \frac{F_t}{D_t} \\ P_b = \frac{F_b}{D_b} \end{cases}$$

### IV.11. Traitement du terme source $S$ :

Si le terme source  $S$  varie de façon non linéaire,  $S = S(T)$ , on écrit :

$$\bar{S} = S_C + S_P T_P$$

où :  $S_C$  est un terme constant (indépendant de température). Il faut le linéariser en  $T$  pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

### IV.12. Les quatre règles de base de Patankar :

En vue d'assurer la stabilité et la convergence du système d'équations discrétisées, il est nécessaire de respecter les quatre règles de base suivantes énoncées par *Patankar*, [60]:

#### ***Règle 01 : Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.***

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

#### ***Règle 02 : Tous les coefficients $a_P$ et $a_{vs}$ ( $vs$ : voisin) doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée***

La valeur de la variable  $\phi$  en un point donné est influencée par les valeurs de  $\phi$  aux nœuds voisins. Dans les mêmes conditions, l'augmentation de la valeur  $\phi$  en un point doit provoquer une augmentation de  $\phi$  aux nœuds voisins. Pour cela les coefficients  $a_M$  ( $M = P, E, W, S, N$ ) doivent tous avoir le même signe (positif ou négatif).

On peut justifier cette règle par un contre-exemple. Supposons que dans l'équation (IV.86-a) on ait  $a_P > 0$ ,  $a_E > 0$  et  $a_W < 0$ . Alors, si  $\phi_W$  augmente il faut que  $\phi_P$  baisse, donc un comportement physique non réaliste.

#### ***Règle 03 : Pente négative dans le terme source linéarisé.***

Quand le terme source est linéarisé comme l'indique l'équation  $\bar{S} = S_C + S_P T_P$ , le coefficient  $a_P$  peut devenir négatif à travers le terme  $S_P$  entraînant ainsi des instabilités numériques. C'est la raison pour laquelle la pente  $S_P$  doit être négatif ou nul  $S_P \leq 0$  si non on peut avoir  $a_P < 0$  avec  $a_W > 0$  (contrairement à la règle N°2).

#### ***Règle 04 : somme des coefficients voisins***

Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :

$$a_P = \sum a_{vs} \text{ si } S=0$$

## *Chapitre V*

---

# ***VALIDATION DU CODE DE CALCUL***

---

## Chapitre V : Validation des Résultats

### V.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la validation des résultats issus du code de calcul développé dans le cadre de cette étude. Ces résultats sont ceux de la résolution numérique des équations gouvernantes, de (III-34) à (III-37).

Les équations résultantes ont été utilisées sous leur forme adimensionnelle dans la simulation numérique, dans le but de réduire le nombre de paramètres indépendants dans les équations et rendre les solutions plus générales pour un ensemble de données de paramètres, dans un souci de gain en temps machine en réduisant le temps de calcul et en augmentant la vitesse de convergence de la solution.

*Prandtl* et *Rayleigh* sont les nombres adimensionnels utilisés dans ces équations. La modélisation numérique du problème est réalisée à partir de la résolution des équations de la dynamique des fluides par la méthode des volumes finis avec des conditions aux limites appropriées.

Les nombres de *Rayleigh* utilisés sont compris entre  $10^3$  et  $10^6$  tandis que le nombre de *Prandtl* est pris égal à 0.71.

### V.2 Résolution numérique du problème:

#### V.2.1 Grille de maillage :

Les grilles de maillage utilisées dans le calcul sont de tailles différentes selon la géométrie de la cavité. Elles sont régulières dans le calcul de la température et sont décalées pour le calcul des vitesses, la précision recherchée et la géométrie considérée à proximité ou à distance des parois. La taille de la grille varie entre  $102 \times 102$  et  $402 \times 402$ .

Le critère de convergence est assuré par un test d'arrêt pris dans l'intervalle :

$10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-6}$  basé sur les résidus de  $T$ ,  $u$  et  $v$ , appliqués dans le présent calcul comme suit :

$$\varnothing^{(n)} - \varnothing^{(n-1)} = \varepsilon$$

Où  $(n)$  et  $(n - 1)$  représente l'itération actuelle et précédente respectivement.

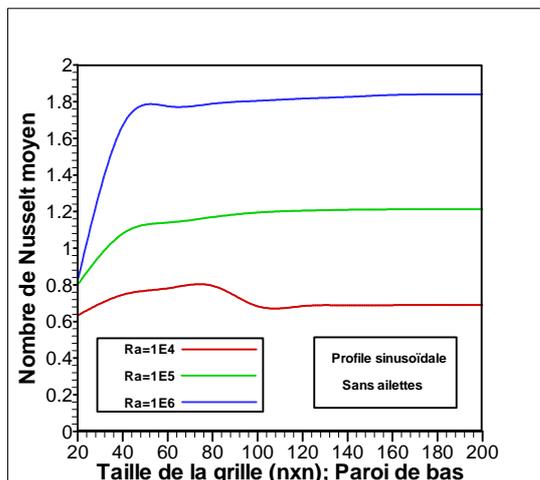
Dans tous les calculs, les valeurs des facteurs de sous-relaxation de  $u$ ,  $v$ ,  $T$  et  $P$ , sont pris égaux à 0.4, 0.4, 0.8 et 0.5 respectivement.

### V.2.2 Analyse des tests d'indépendance de la grille :

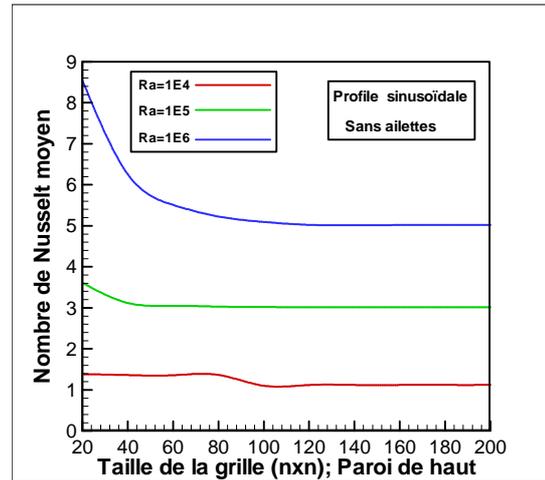
Une étude de test d'indépendance de la grille est menée en utilisant différentes tailles, (20×20), (40×40), (60×60), (80×80), (100×100) et (200×200) pour différents nombres de *Rayleigh*.

Les figures (V.1-a et V.1-b) illustrent l'évolution du nombre de *Nusselt* moyen  $\overline{Nu}$  en fonction de la taille de la grille pour trois nombres de *Rayleigh* ( $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ ), respectivement pour les parois inférieure et supérieure de l'enceinte. Notons que le nombre de *Nusselt* moyen augmente avec l'augmentation des nombres de *Rayleigh* et toutes les courbes sont stabilisées au-delà d'une certaine valeur de la taille de la grille.

La figure (V.2) représente l'évolution des résidus en fonction de nombre d'itérations, ce qui montre que le code de calcul atteint la convergence à partir de 6000 itérations.



(V.1- a)



(V.1-b)

**Figure (V.1-a, b) :** Evolution du nombre de *Nusselt* moyen  $\overline{Nu}$  en fonction de la taille de la grille pour différents nombres de *Rayleigh*.

- a)- Côté paroi inférieure de l'enceinte
- b)- Côté paroi supérieure de l'enceinte

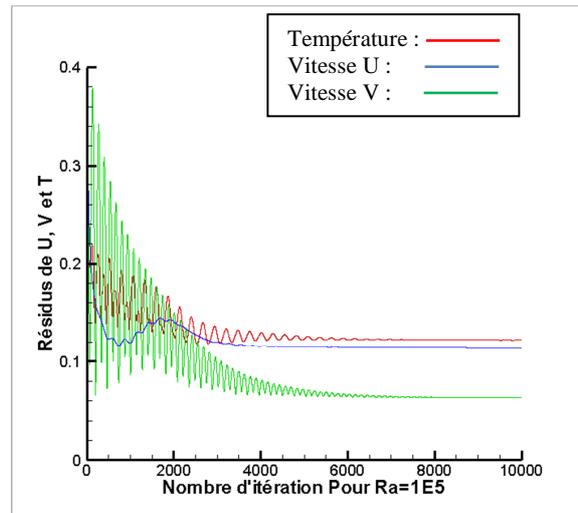


Figure (V.2): Convergence du code de calcul en fonction des résidus.

### V.3- Validation du code de calcul:

Le code de calcul ainsi développé a été validé par les solutions Benchmark relatives au problème de la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée et à différents nombres de *Rayleigh*.

Le code numérique développé dans cette étude est écrit en langage FORTRAN (90). Il a été validé sur la base des solutions Benchmark de De Vahl Davis et des résultats issus de la littérature relatifs à la convection libre dans les enceintes.

Le tableau (V.1) montre les résultats de comparaison des différents nombres de *Nusselt* pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* avec ceux issus de la littérature.

**Tableau (V. 1) :** Comparaison des résultats de cette étude relatifs au nombres de *Nusselt* maximum, minimum et moyen avec ceux de la littérature pour une cavité simple sans ailettes.

$Ra$	$Nu$	Wan et al [70]	Barakos et al [71]	De Vahl Davis [72]	<b>Le présent travail</b>
$10^3$	Max	1.501 - 1.444	1.50	1.47	<b>1.506</b>
	Min	0.691 - 0.665	0.692	0.623	<b>0.697</b>
	Moy	1.117 - 1.073	1.12	1.074	<b>1.1008</b>
$10^4$	Max	3.576 - 3.441	3.53	3.47	<b>3.535</b>
	Min	0.577 - 0.528	0.586	0.497	<b>0.605</b>
	Moy	2.254 - 2.155	2.243	2.084	<b>2.225</b>

10 <sup>5</sup>	Max	7.945 - 7.662	7.71	7.71	<b>7.724</b>
	Min	0.698 - 0.678	0.729	0.614	<b>0.784</b>
	Moy	4.598 - 4.352	4.52	4.3	<b>4.486</b>
10 <sup>6</sup>	Max	17.86 - 17.39	17.92	17.46	<b>17.4912</b>
	Min	0.9132 - 0.903	0.989	0.716	<b>1.185</b>
	Moy	8.976 - 8.632	8.8	8.743	<b>8.7268</b>

Le tableau (V.1) illustre un bon accord des nombres de *Nusselt* maximum, minimum et moyen entre la présente étude et les résultats numériques de Wan et al. [70], Barakos et al. [71], et De Vahl Davis [72].

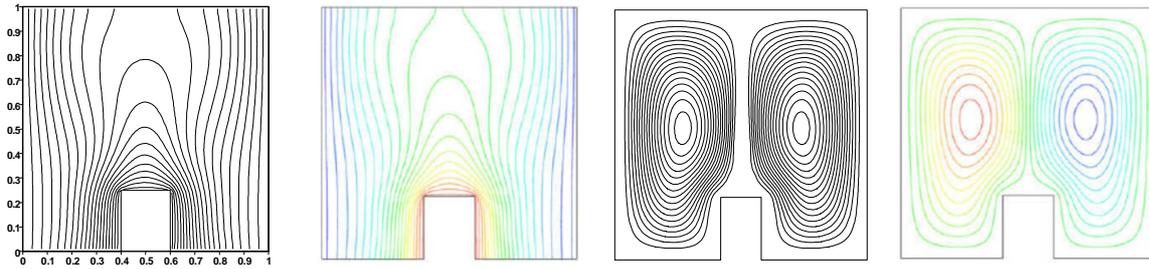
Les résultats de comparaison relatifs aux contours d'isothermes, d'iso-courants et de nombre de *Nusselt*, avec ceux de la référence [73] sont montrés sur les figures (V.3) à (V-6).

Les résultats de la référence [73] correspondent à une cavité carrée fermée, la paroi de bas est caractérisée par la présence d'un obstacle, alors que les parois verticales gauche et droite sont maintenues à une température constante froide  $T_c$ , tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques, l'obstacle isotherme est maintenue à une température constante  $T_h$  et est placé à une distance bien déterminée de la paroi de droite et de gauche.

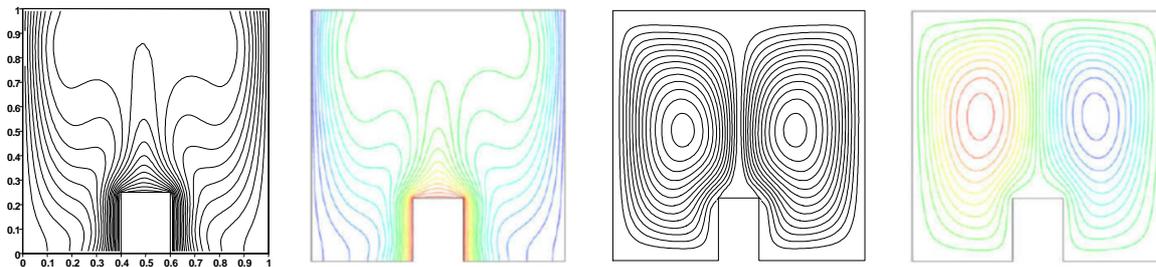
L'effet du nombre de *Rayleigh* sur les isothermes et les lignes de courant est représenté sur les figures (V.3) et (V.4). Pour les faibles valeurs du nombre de *Rayleigh*, les isothermes correspondantes sont essentiellement parallèles aux parois verticales, sauf le long de la surface supérieure de l'élément chauffant (l'ailette), les lignes de courant sont caractérisées par deux tourbillons symétriques contre-rotatifs occupant la totalité de la cavité du corps, la contribution de la convection est perceptible à des nombres élevés de *Rayleigh*.

Les vitesses au centre de la cavité sont très petites par rapport à celles au niveau des parois verticales ainsi qu'au-dessus de l'élément de chauffage où le fluide est en mouvement rapide, cela est évident où la vitesse verticale et le profil de température le long d'un plan horizontal passant par le centre de la cavité.

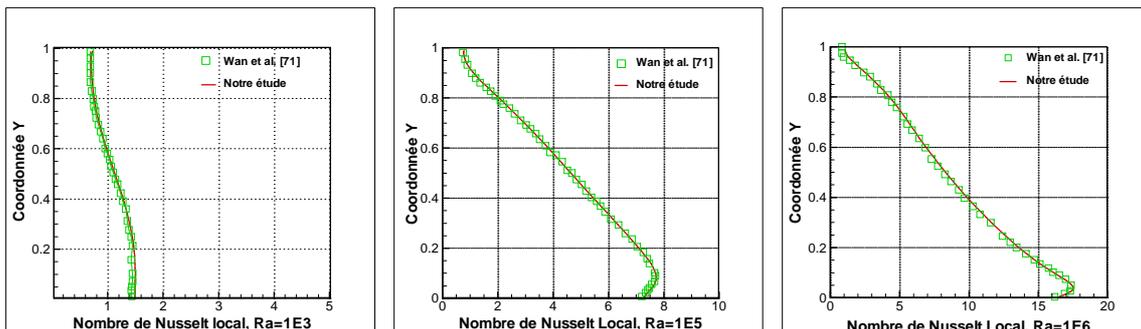
La figure (V.5) montre la comparaison des résultats issus de cette étude avec ceux de Wan et al. [71]. Ces résultats sont relatifs à l'évolution du nombre de *Nusselt* local par rapport à la coordonnée Y pour la paroi chaude de l'enceinte et pour différents nombres de *Rayleigh*.



**Figure (V.3):** Comparaison de nos résultats et ceux de la référence [73]  
 Pour le cas d'une ailette avec :  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^4$

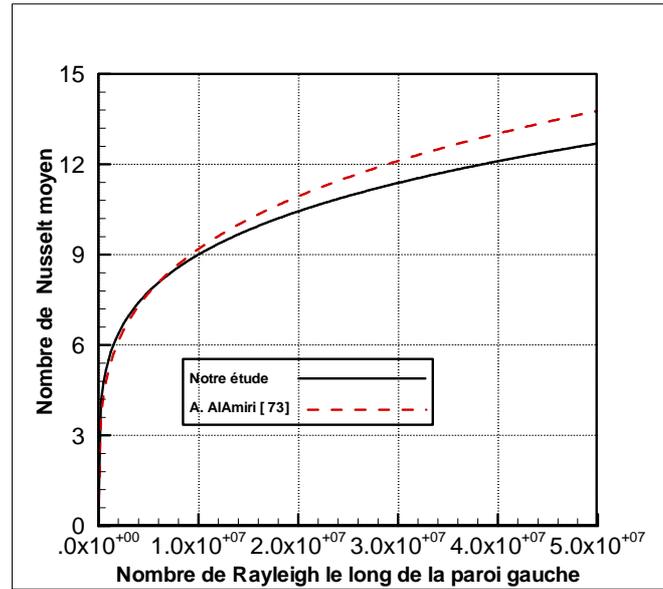


**Figure (V.4):** Comparaison de nos résultats et ceux de la référence [73]  
 Pour le cas d'une ailette avec :  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^5$



**Figure (V.5) :** Comparaison du nombre de *Nusselt* local par rapport à la référence [71].

La figure (V. 6) illustre la comparaison des résultats de cette étude avec ceux de la référence [73]. Ces résultats correspondent au nombre de *Nusselt* moyen pour une ailette pour différents nombres de *Rayleigh*. Le décalage observé à partir de  $Ra = 10^7$  est dû au passage vers le régime turbulent où d'autres conditions qu'il faut introduire.



**Figure (V.6):** Comparaison du nombre de *Nusselt* moyen par rapport à la référence [73].

Les résultats de la référence [70] correspondent à une cavité carrée fermée dont les parois verticales, gauche et droite, sont différemment chauffées, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Le fluide est supposé visqueux, incompressible, Newtonien, et satisfait l'approximation de *Boussinesq* et les conditions aux limites suivantes :

\* Pour la température, les conditions aux limites adimensionnelles sont :

Pour la paroi de gauche :

-  $T^*(0, y^*) = 1$  : est une température chaude constante.

Pour la paroi de droite :

-  $T^*(1, y^*) = 0$  : est une température froide constante.

Pour la paroi de haut :

-  $\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(x^*, 1) = 0$  ;

Pour la paroi de bas :

-  $\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(x^*, 0) = 0$  ;

\* Pour les vitesses et les fonctions de courant :

-  $u^*(0, y^*) = u^*(1, y^*) = 0$  ;  $u^*(x^*, 0) = u^*(x^*, 1) = 0$  ;

-  $v^*(0, y^*) = v^*(1, y^*) = 0$  ;  $v^*(x^*, 0) = v^*(x^*, 1) = 0$  ;

-  $\psi^*(0, y^*) = \psi^*(1, y^*) = 0$  ;  $\psi^*(x^*, 0) = \psi^*(x^*, 1) = 0$  ;

Les contours des isothermes, des iso-courants et des iso-vitesses  $u$  et  $v$ , sont tracés respectivement. Les résultats de la référence [70] sont tracés alternativement après les résultats de cette étude pour les valeurs de *Rayleigh*  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$  respectivement.

Les résultats ci-dessous correspondent à une cavité carrée simple ayant des parois verticales maintenues à une température constante froide de  $20^\circ\text{C}$  avec des parois horizontales. Celle de la partie supérieure est parfaitement adiabatique, par contre, la paroi de la partie inférieure est maintenue à une température chaude de  $40^\circ\text{C}$ . L'intérieur de la cavité est rempli d'un fluide de 1.22 de densité, le régime d'écoulement est permanent et le nombre de *Prandtl* est pris constant est égal à 0.71.

Le problème des cavités carrées ayants des parois verticales différemment chauffées est relatives à deux types d'écoulements distincts :

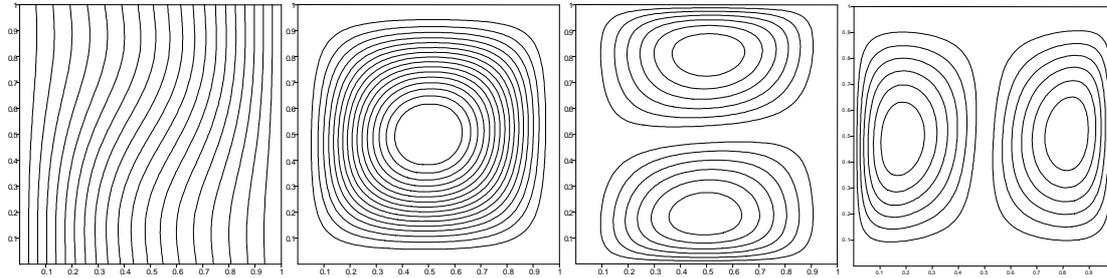
- La croissance de la couche limite le long de la paroi ;
- Le mouvement de recirculation dans la région de cœur.

Ce dernier occupe une place importante dans les faibles nombres de *Ra*, tandis que le premier concerne les grands nombres de *Rayleigh*. Cependant, les deux modèles sont valables dans la gamme moyenne de *Ra*. Ces caractéristiques sont très bien représentées dans les lignes de courant de la figure (V.7), seul un seul tourbillon circulant persiste pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$ .

Avec l'augmentation de  $Ra=10^5$ , le tourbillon a tendance à devenir elliptique et finit par se scinder en deux tourbillons. La zone la plus interne de la recirculation principale se divise en deux petits tourbillons contra-rotatifs dans la région du cœur.

Ces deux petits tourbillons intérieurs sont tendus vers le coin supérieur gauche et inférieur droit, tout en maintenant la domination de la circulation principale. Il existe un point de rétrécissement le long d'une ligne imaginaire reliant ces deux tourbillons intérieurs. Avec l'augmentation du nombre de *Rayleigh*,  $Ra = 10^6$ , il existe une transformation supplémentaire dans les schémas d'écoulement de fluide, avec des tourbillons secondaires intérieurs se déplaçant plus près de la paroi chaude et la paroi froide.

$Pr=0.71, Ra=10^3$

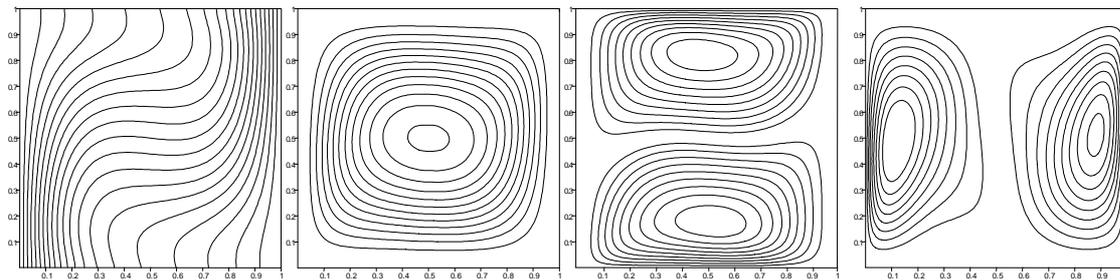


-(a1)-

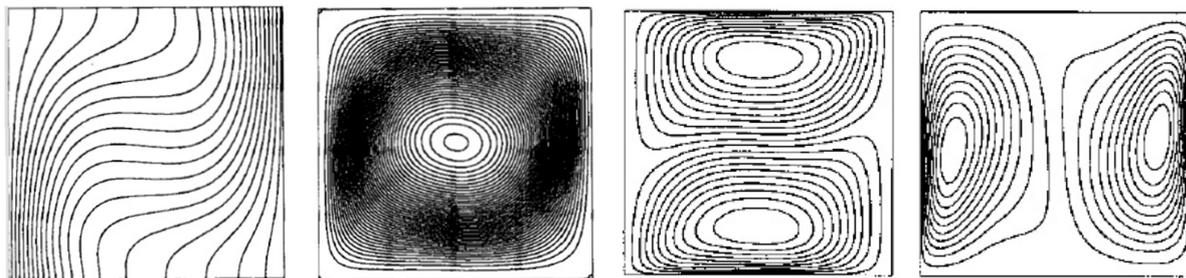


-(a2)-

$Pr=0.71, Ra=10^4$

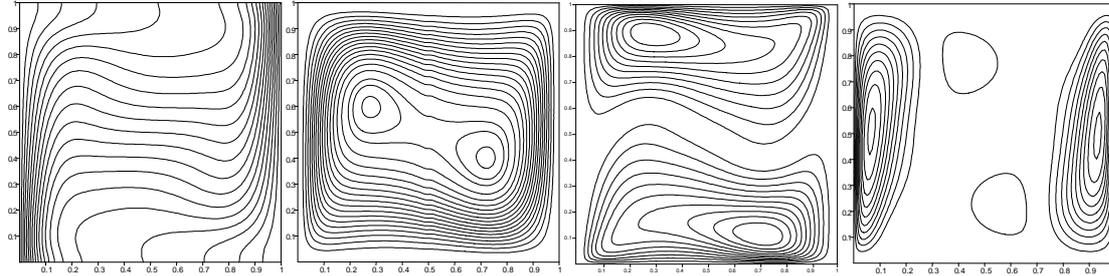


-(b1)-

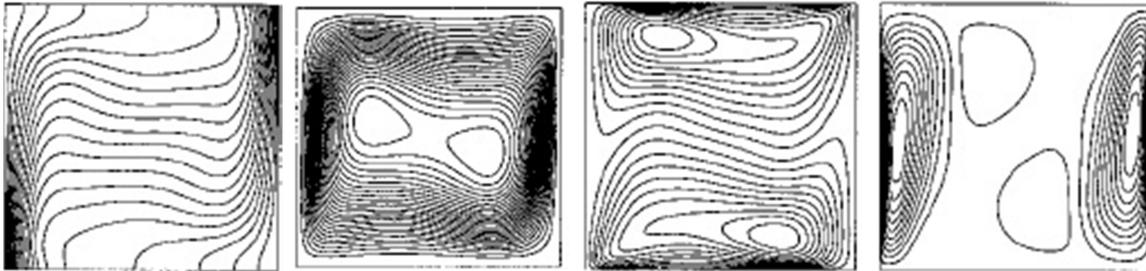


-(b2)-

$Pr=0.71, Ra=10^5$

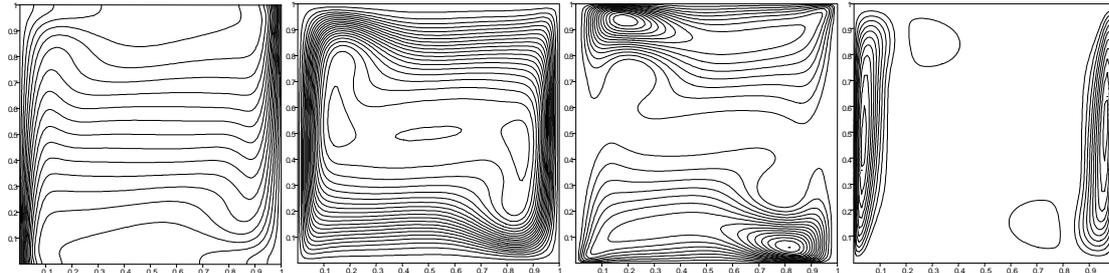


-(c1)-

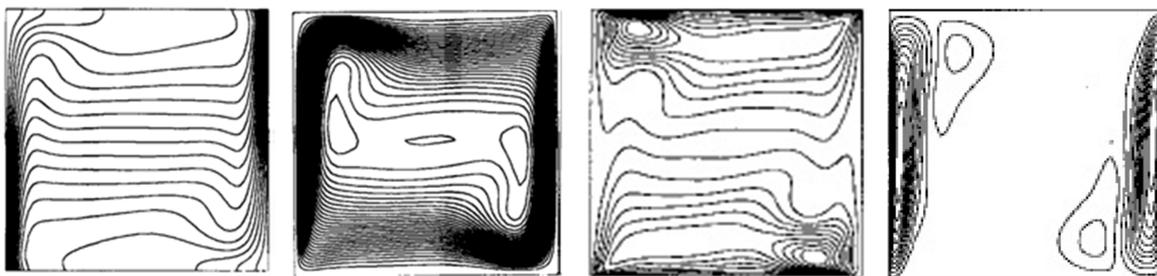


-(c2)-

$Pr=0.71, Ra=10^6$



-(d1)-



-(d2)-

**Figure (V.7) :** Comparaison de résultats relatifs aux isothermes, aux lignes de courant et aux iso-vitesses  $u$  et  $v$  [70].

- (a1)- Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^3$  ; (a2)- Résultats de la référence [70] pour :  $Ra=10^3$   
 (b1)- Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^4$  ; (b2)- Résultats de la référence [70] pour :  $Ra=10^4$   
 (c1)- Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^5$  ; (c2)- Résultats de la référence [70] pour :  $Ra=10^5$   
 (d1)- Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^6$  ; (d2)- Résultats de la référence [70] pour :  $Ra=10^6$

Les contours d'iso-vitesses révèlent plusieurs caractéristiques importantes. Dans les contours iso-vitesses  $u$  il y a deux tourbillons horizontaux, un au-dessous de l'autre, pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$ .

Pour les valeurs élevées du nombre de *Rayleigh*, ces deux tourbillons se rapprochent des deux parois adiabatiques. De même, pour  $Ra = 10^3$  deux circulations dominantes sont bien visibles dans les contours verticaux des iso-vitesses  $v$  (une de chaque sur les zones gauche et droite de la cavité), ces deux tourbillons se rapprochent par la suite de la paroi chaude et la paroi froide avec une augmentation du nombre de *Rayleigh*. Ceci illustre bien que la couche limite devient plus fine, en fonction du nombre de *Rayleigh*.

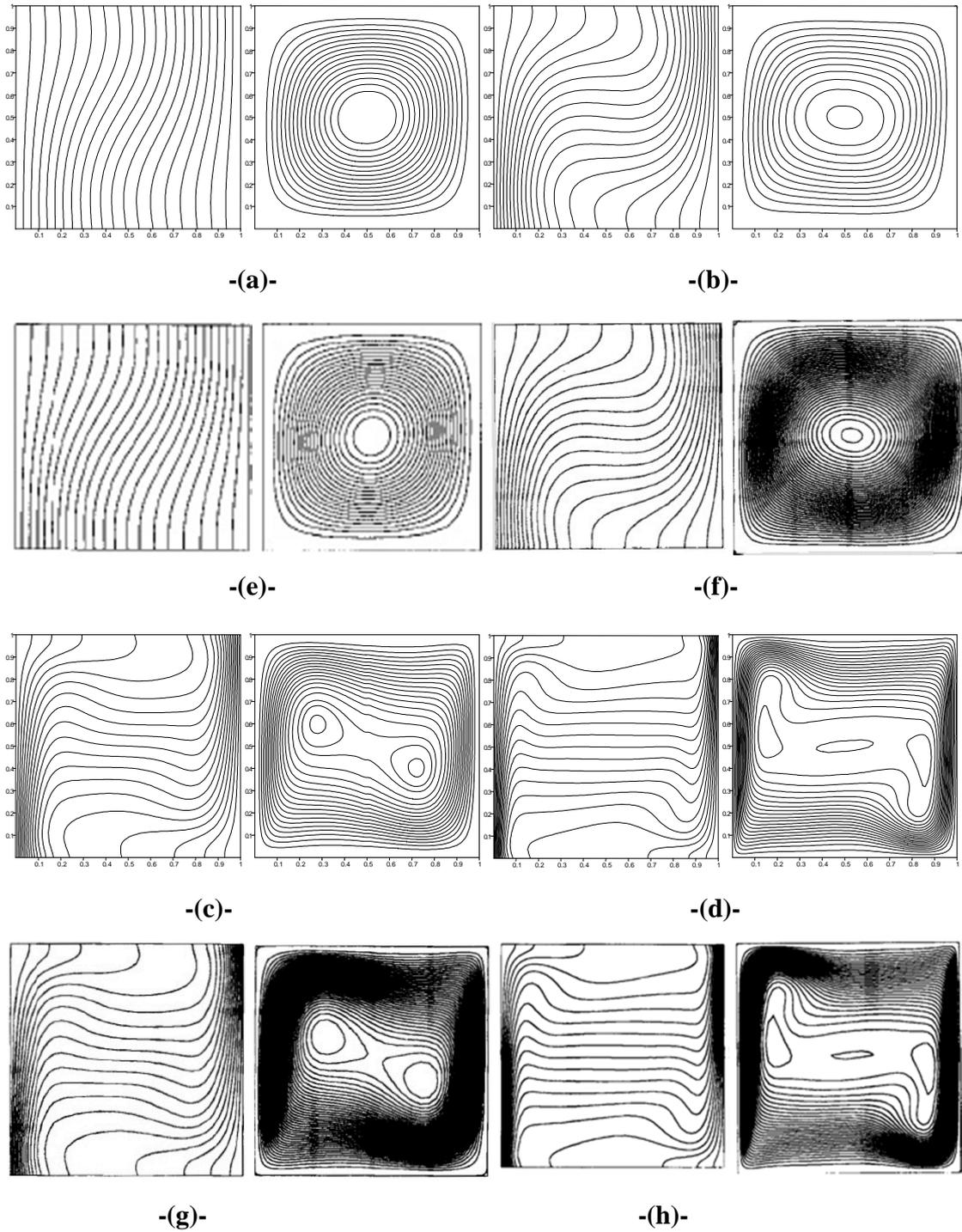
La figure (IV.8) illustre les résultats de comparaison relatifs aux isothermes et aux lignes de courant, entre les résultats obtenus dans le cadre de cette étude et ceux issus de la référence [71] pour des nombres de *Rayleigh* allant de  $10^3$  à  $10^6$  et pour un nombre de *Prandtl* fixé à 0.71 avec les mêmes conditions de la référence cité ci-dessus.

L'examen des formes d'isothermes de la figure (V.8) montre comment le mécanisme des transferts thermiques dominants évolue lorsque le nombre de *Rayleigh*,  $Ra$ , augmente. Pour des valeurs inférieures de  $Ra$ , on note que les isothermes sont presque verticales, compte tenu que le flux de chaleur est transféré par conduction entre les parois chaude et froide.

Lorsque les isothermes s'écartent de la position verticale, le mécanisme de transfert de chaleur passe de la conduction à la convection. Les isothermes du centre de la cavité sont horizontales et deviennent verticales seulement à l'intérieur des couches limites très minces.

Les résultats correspondent à une cavité carrée simple ayant des parois verticales maintenues à des températures constantes chaude et froide de différence de  $20^\circ\text{C}$  avec des parois horizontales parfaitement adiabatiques. L'intérieure de la cavité est remplie d'air, le régime d'écoulement est permanent et le nombre de *Prandtl* demeure constant est égal à 0.71.

Les résultats de calculs sont présentés sous forme d'isothermes et de fonctions de courants, pour des valeurs de nombre de *Rayleigh* allant de  $Ra=10^3$  jusqu'à  $10^6$ . Pour ce cas, l'écoulement est symétrique, une légère déviation de la symétrie apparaît aux valeurs plus élevées de  $Ra$ . Pour les faibles valeurs de  $Ra$  un vortex central apparaît comme caractéristique dominante de l'écoulement.

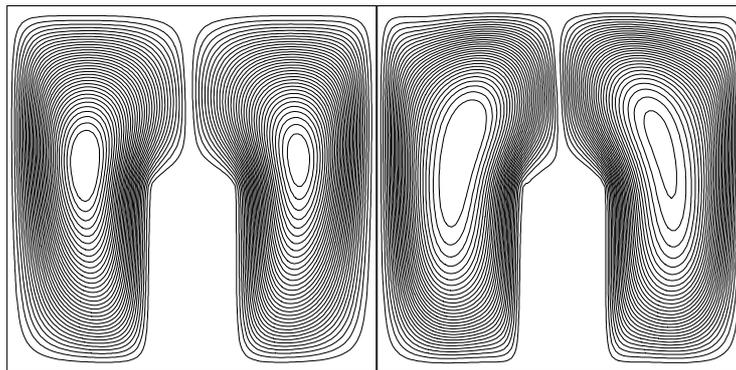


**Figure (V.8):** Comparaison de résultats relatifs aux isothermes et aux lignes de courant[71].  
**(a)-** Résultats de l'étude :  $Ra=10^3$  ; **(b)-** Résultats de l'étude :  $Ra=10^4$   
**(c)-** Résultats de l'étude :  $Ra=10^5$  ; **(d)-** Résultats de l'étude :  $Ra=10^6$   
**(e)-** Résultats de la référence [71] :  $Ra=10^3$  ; **(f)-** Résultats de la référence [71] :  $Ra=10^4$   
**(g)-** Résultats de la référence [71] :  $Ra=10^5$  ; **(h)-** Résultats de la référence [71] :  $Ra=10^6$

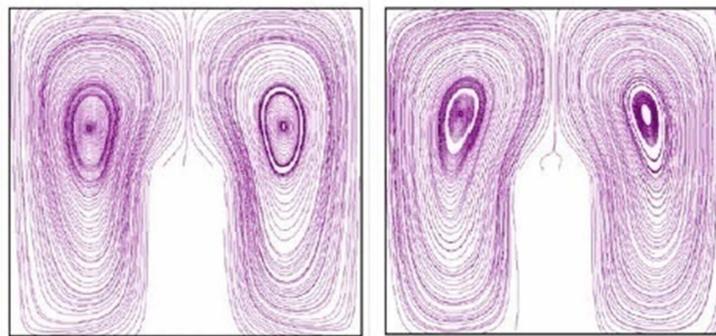
Pour valider les résultats obtenus, une comparaison avec des données expérimentales est effectuée. Le dispositif expérimental utilisé est une PIV 2D. La figure (V.9) illustre aussi la comparaison des résultats des fonctions de courant, pour une ailette, entre cette étude et les mesures expérimentales de Corvaro et Paronchini [12] pour deux nombres de *Rayleigh*,  $Ra = 6.39 \times 10^4$  et  $Ra = 3.16 \times 10^5$  avec  $Pr = 0.71$ .

Un bon accord est noté entre nos résultats et les mesures expérimentales.

### Résultats de l'étude



### Corvaro et Paronchini [12]



**Figure(V.9) :** Fonction de courant pour:  $Ra = 6.39 \times 10^4$  (Gauche),  $Ra = 3.16 \times 10^5$  (Droite) avec  $Pr = 0.71$ . Résultats de comparaison.

## V.4. Conclusion :

Dans ce chapitre on s'est intéressé à la comparaison des résultats obtenus dans le cadre de cette étude, sur la base de la résolution numérique des équations gouvernantes, avec ceux issus de la littérature. Le code de calcul ainsi développé a été validé sur la base des solutions benchmark de De Vahl Davis et des résultats théoriques et expérimentaux de la littérature. Maintenant que le code de calcul est validé on passera aux résultats obtenus et à leur interprétation, ce qui fera l'objet du chapitre VI.

## *Chapitre VI*

---

# ***RESULTATS ET DISCUSSIONS***

---

## Chapitre VI : Résultats et discussions

### VI.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la présentation des résultats issus de la résolution numérique des équations gouvernantes ainsi qu'à leur interprétation.

Ces résultats concernent essentiellement les lignes de courants, les isothermes, les champs de vitesse ainsi que les nombres de *Nusselt* pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh*.

Les nombres de *Rayleigh* utilisés sont compris entre  $10^3$  et  $10^6$  tandis que le nombre de *Prandtl* est pris égal à 0.71.

Dans tous les calculs, les facteurs de sous-relaxation dont les valeurs 0.4, 0.4, 0.8 et 0.5 sont affectés à  $u$ ,  $v$ ,  $T$  et  $P$ , respectivement.

Il y a plusieurs facteurs qui peuvent influencer la précision des résultats prédits. Par ailleurs, différents résultats peuvent être obtenus avec le même programme de simulation numérique par la même configuration parmi les différents facteurs influents, une sélection appropriée de schéma de résolution Cf. tableau (IV.5) ainsi que le maillage choisi est une clé qui affecte directement la précision des simulations.

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution des équations gouvernantes, sont relatives à la condition de non glissement pour la vitesse et la condition de *Dirichlet* ou de *Newman* pour la température. Les ailettes sont chauffées d'une manière uniforme à une température constante,  $T_h$ , ou non uniforme et variable  $T'_h$ .

### VI. 2. Présentation de résultats et discussions :

#### VI.2.1 Cas d'une cavité sans ailette :

##### -Profil de température sinusoïdal :

En choisissant un profil de température à la paroi de fond  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$ , où les conditions aux limites de la température sont définies comme suit :

\*Paroi inférieure:

$-T^*(x^*, 0) = \sin(\pi x^*)$  : profil de température sinusoïdal au niveau des ailettes et sur le reste de la paroi ;

\*Paroi supérieure:

$-T^*(x^*, 1) = 0$  : profil de température froide constant ;

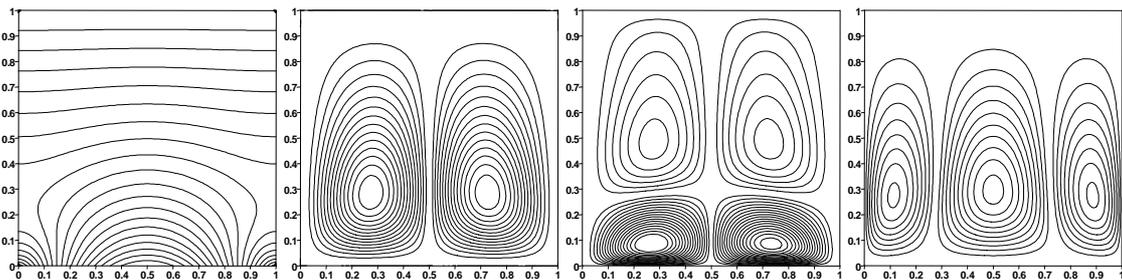
- $\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(0, y^*) = 0$  : adiabatique sur la paroi de gauche ;
- $\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(1, y^*) = 0$  : adiabatique sur la paroi de droite ;

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, de lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement. Les contours d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$ , ainsi que le nombre de *Nusselt* local en fonction de nombre de *Rayleigh* sont tracés pour les nombres de *Rayleigh*  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$  respectivement.

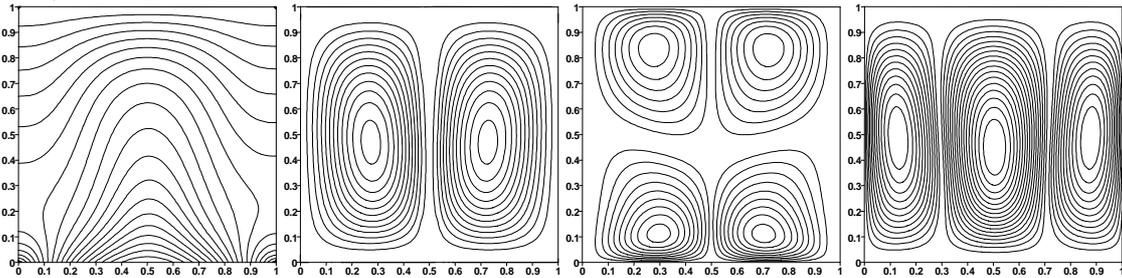
### -Chauffage sinusoïdal de la paroi de fond sans ailettes :

Les contours des isothermes, des lignes de courant ainsi que les iso-vitesses pour  $Ra = 10^3$ - $10^6$  et  $Pr = 0.71$  sont représentés respectivement dans les figures (VI.1-a). Lorsque la paroi de fond est chauffée d'une manière non uniforme et sinusoïdale, elle présente une répartition de température régulière dans toute la cavité.

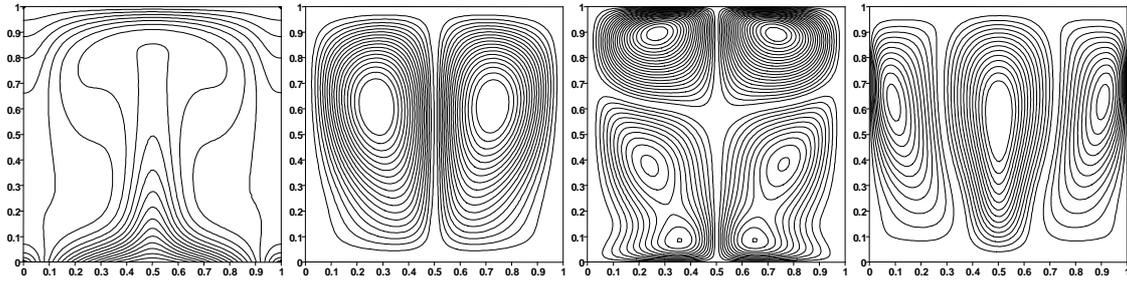
#### $Pr=0.71$ et $Ra=10^3$



#### $Pr=0.71$ , $Ra=10^4$



$Pr=0.71, Ra=10^5$



$Pr=0.71, Ra=10^6$

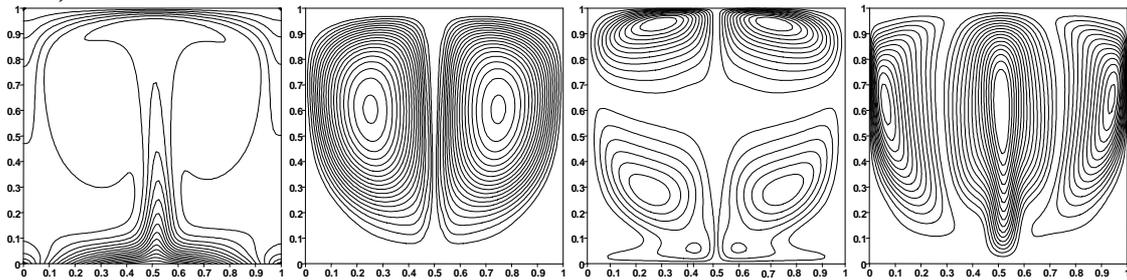
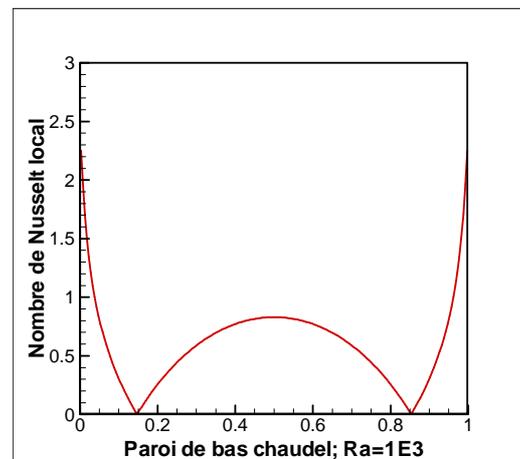
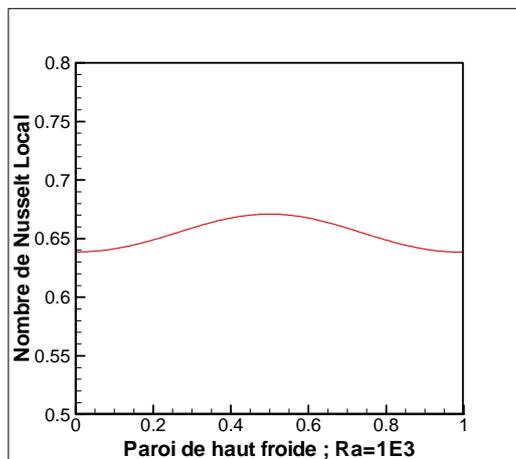
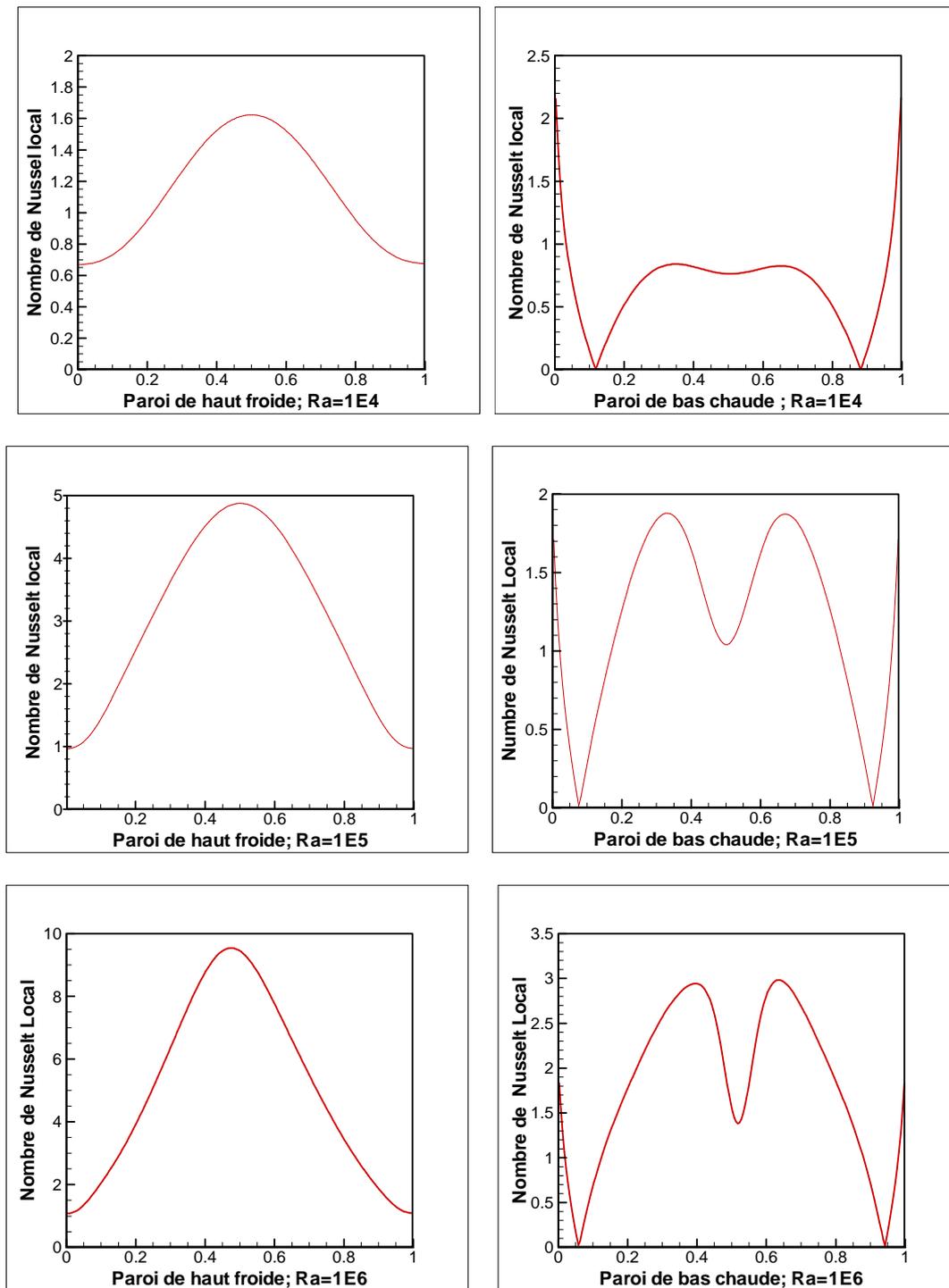


Figure (VI.1-a): Chauffage sinusoïdal de la paroi de fond sans ailettes.



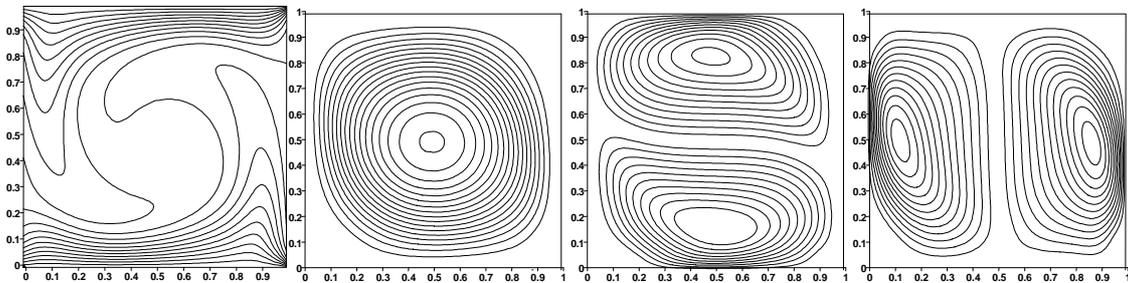


**Figure (VI.1-b):** Nombre de *Nusselt* local, à la paroi de haut et de bas pour une cavité simple,  $Ra = 10^3$  à  $10^6$

- $Pr=0.71$  et  $Ra=10^5$

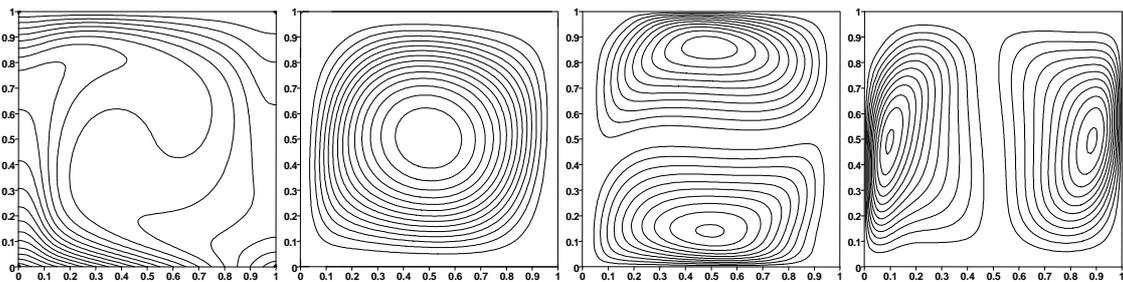
**Profil de température constant :  $T_h$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :



**Profil de température linéaire :**

$$T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$$

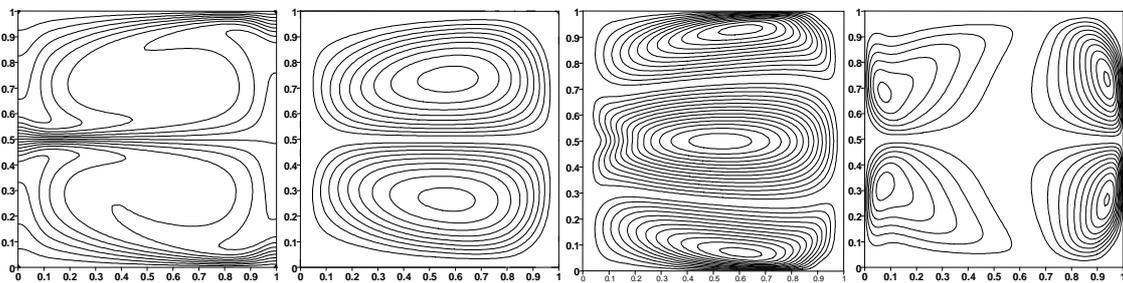


**Figure (VI.2):** Résultats pour une cavité simple, profil de température constant et linéaire à  $Ra=10^5$

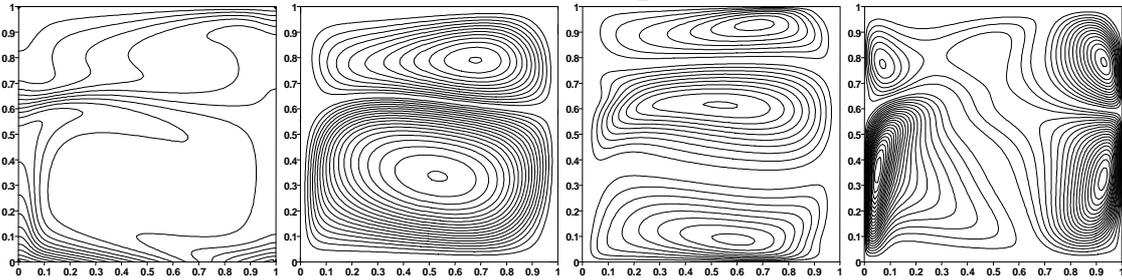
- $Pr=0.71$  et  $Ra=10^6$

- **Profil de température constant:  $T_h$  :**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :



- **Profil de température linéaire:**  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  ;  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^6$



**Figure (VI.3):** Résultats pour une cavité simple, profil de température constant et linéaire à  $Ra=10^6$

### Discussions :

Pour  $Ra = 10^3$ , la couche limite thermique ne se développe qu'à plus de 60% de la cavité. Il est observé dans les environs de  $Ra = 10^4$ , on peut noter que la température à la paroi de fond n'est pas uniforme et un maxima de température se produit au centre, par conséquent, des taux plus élevés de transfert de chaleur se produisent au centre.

A  $Ra = 10^5$ , le modèle de circulation est qualitativement semblable au cas de chauffage uniforme. En raison de chauffage du fond non uniforme, la vitesse de chauffage à proximité de la paroi est généralement inférieure, ce qui induit moins de flottabilité résultante dans un gradient thermique plus faible dans tout le domaine. L'uniformité de la distribution de température et le gradient de température sont moins encore observée sur le régime de la partie centrale à l'intérieur de la moitié supérieure du domaine.

L'effet de la flottabilité inférieure conduit aussi à une grande zone de stratification de température au niveau de la ligne de symétrie verticale.

A partir de  $Ra = 10^6$ , le mécanisme de la convection devient plus prononcé et par conséquent le vortex central se déplace vers le haut, la figure montre également que les isothermes sont horizontales et verticales à l'intérieur de l'enceinte, les couches limites deviennent très minces, ceci peut être attribué à un courant à l'intérieur de la cavité qui provoque également une réduction de gradients de température dans le centre de la cavité à forte convection.

Les contours des iso-vitesses révèlent plusieurs caractéristiques importantes, dans les contours des iso-vitesse- $u$ , pour les valeurs de  $Ra=10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ , on remarque quatre tourbillons horizontaux qui se forment, deux au-dessous des deux autres. Pour les contours des iso-vitesse- $v$ , et si nous prenons les valeurs de  $Ra=10^3$ ,  $10^4$  et  $10^5$  trois circulations verticales dominantes un de chaque sur les zones gauche milieu et droite de la cavité presque complètement balayée, les allures sont simulables pour les trois valeurs citées, une légère déformation est observée aux extrémisés des tourbillons avec l'augmentation du nombre de *Rayleigh*  $Ra=10^6$ .

- Les figures (VI.1-b) présentent la variation du nombre de *Nusselt* local par rapport à la paroi froide de haut et la paroi chaude de fond pour différentes nombres de *Rayleigh*, la variation est plus considérée pour les parois chaudes ce qui explique l'effet de la température la plus élevée.
- Aux figures (VI.2) et (VI.3) sont présentés les résultats pour des profils constants et linéaires afin de pouvoir faire la comparaison entre les différents profils.

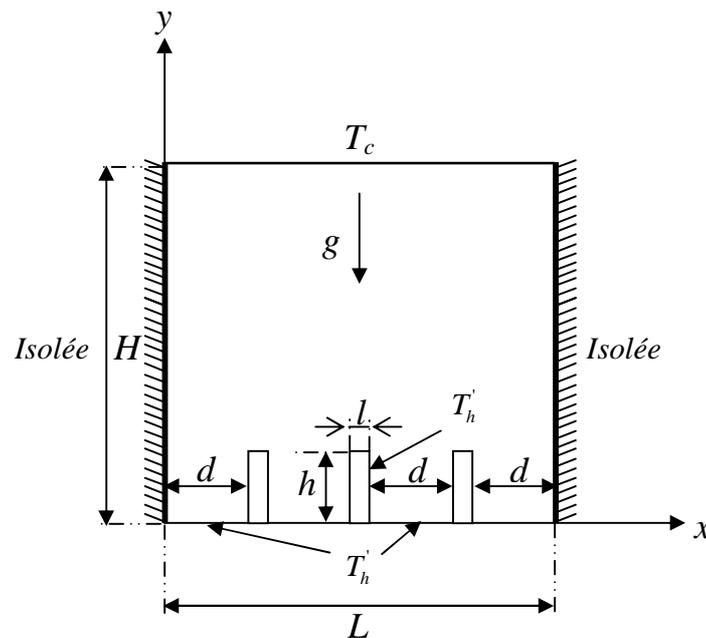
### VI.2.2 Cavités à surfaces ailettées :

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à  $h/H=1/5$ .

Sa largeur  $l/L=1/20$ , La distance entre ailettes pour  $N$  ailettes est :

$$d = \frac{(L - N_{Ailettes} \times l)}{(N_{Ailettes} + 1)}$$

$Pr = 0.71$ ,  $T_h'$  variable. Dans cette étude le nombre de *Rayleigh*  $Ra$  varie de :  $10^3$  à  $10^6$ .



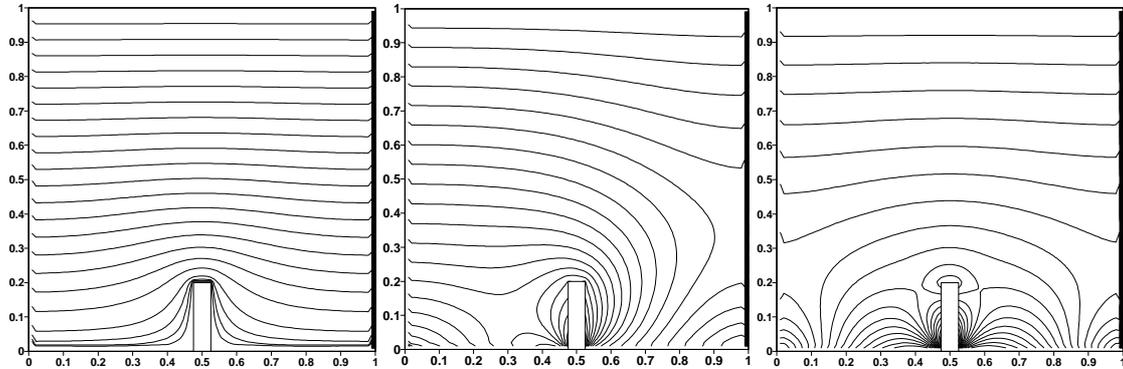
**Figure (VI.4):** Géométrie de la cavité ailettée utilisée.

On présente dans ce qui suit les différents résultats des isothermes et des lignes de courant pour différents profils de température et hauteurs d'ailette:

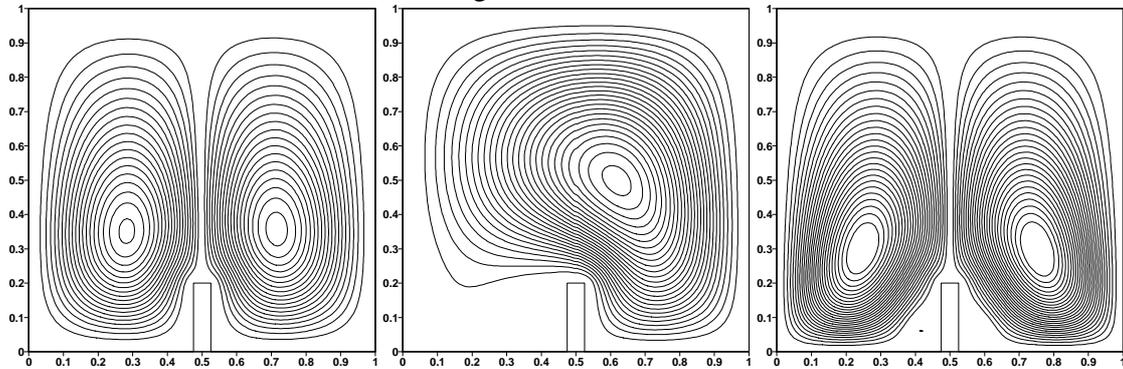
- Le Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur adimensionnelle de l'ailette égale à  $h/H=1/5$ ,  $2/5$  et  $3/5$ . Sa largeur  $l=L/20$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $T_h = Cte$  et  $T_h =$  variable.

$Ra = 10^3$  ;  $h/H = 1/5$  ; pour:  $T_h = \text{Cte}$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Température :



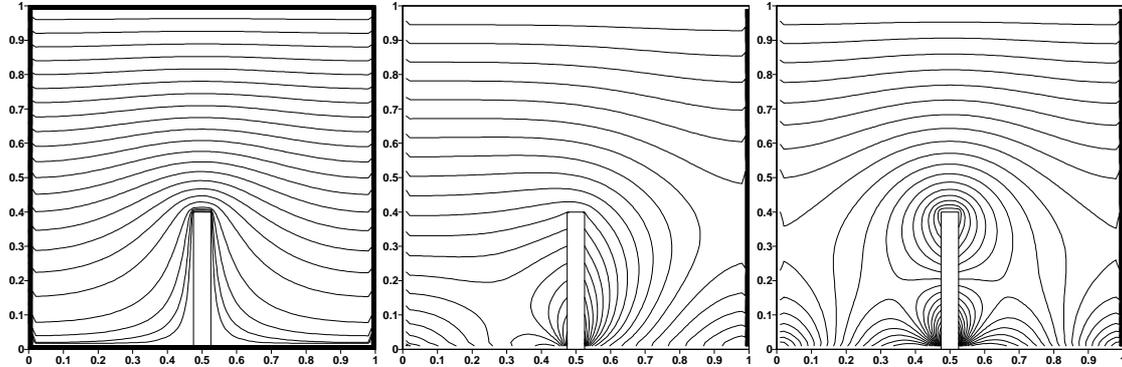
Lignes de courant :



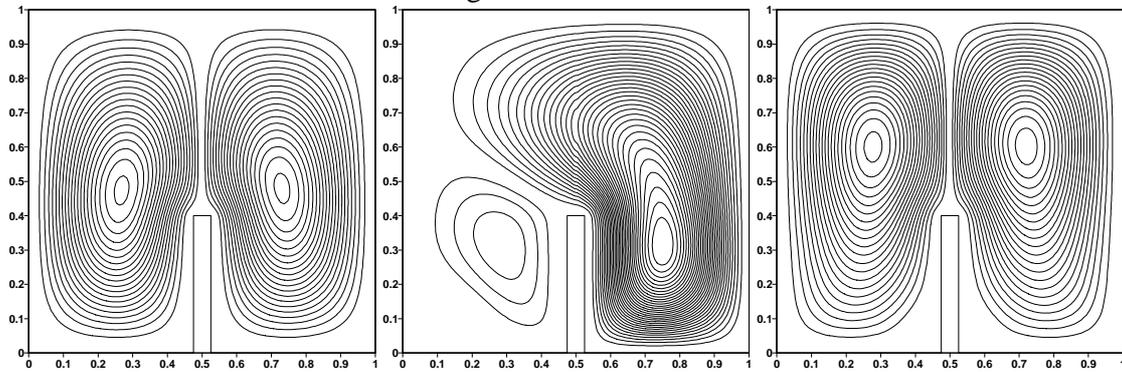
(a1)-

$Ra=10^3$ ,  $h/H=2/5$ , pour :  $T_h = Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c)\frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :



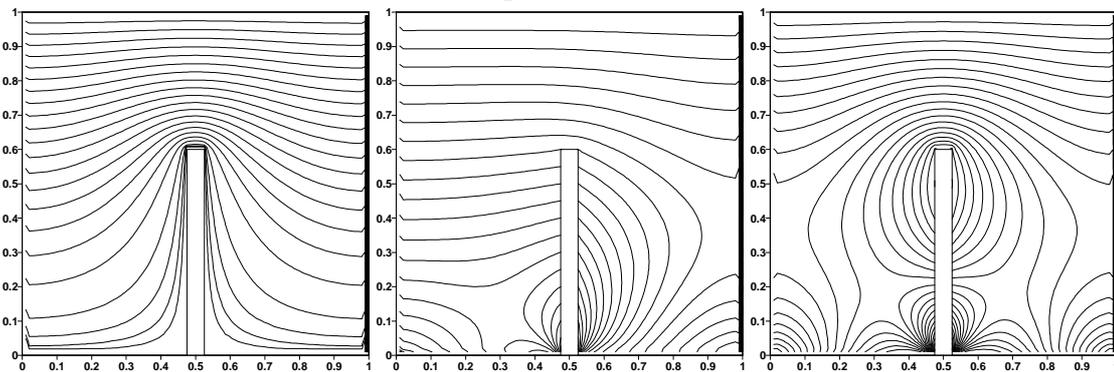
Lignes de courants :



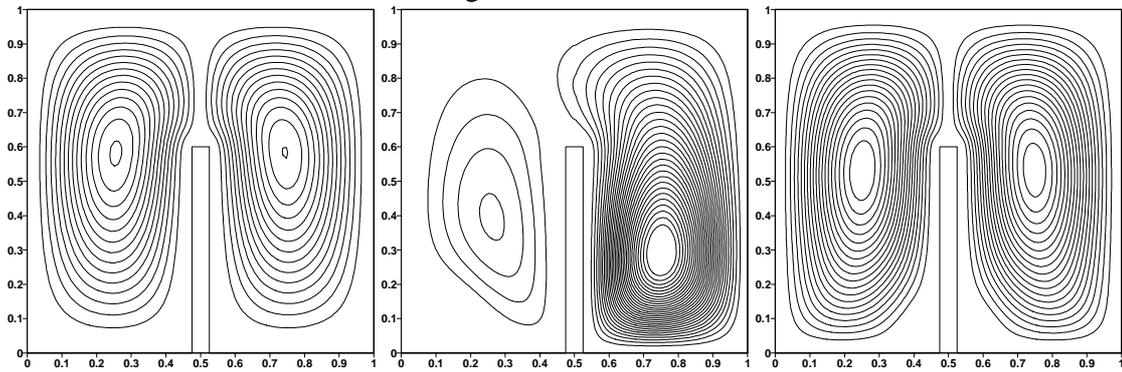
(b1)-

$Ra=10^3$ ,  $h/H=3/5$ ; pour:  $T_h = Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c)\frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Température :



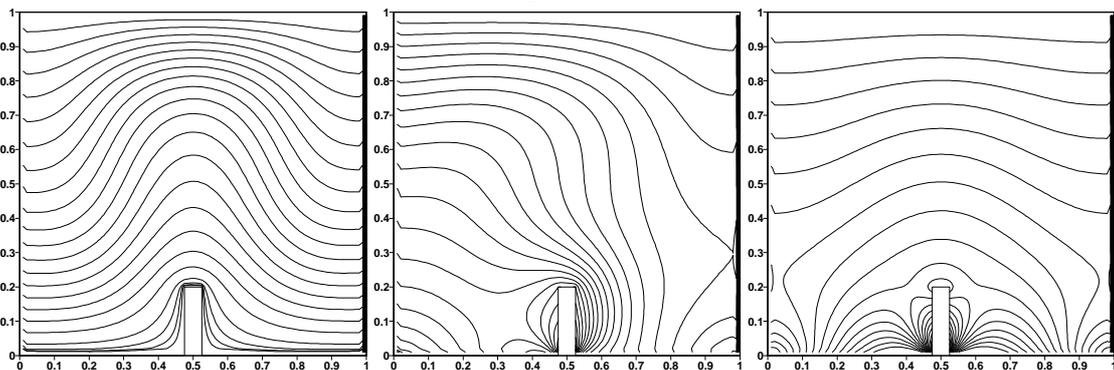
Lignes de courants :



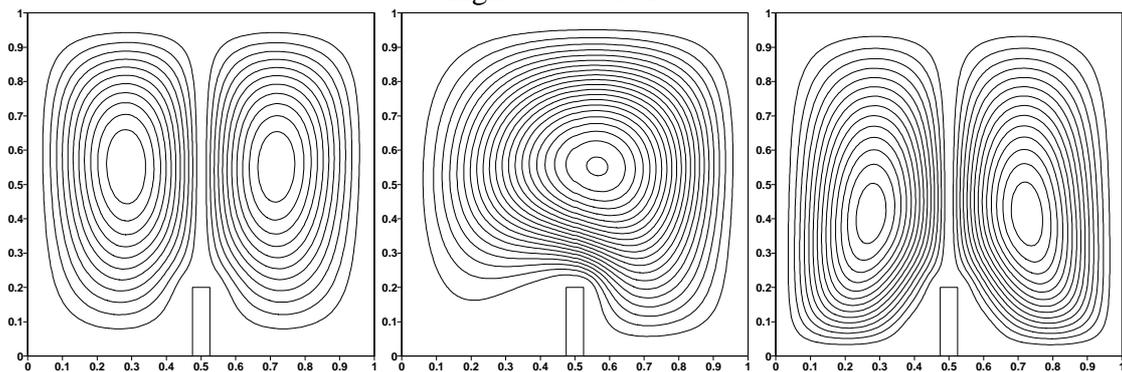
(c1)-

$Ra=10^4$ ,  $h/H=1/5$ , pour :  $T_h=Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures



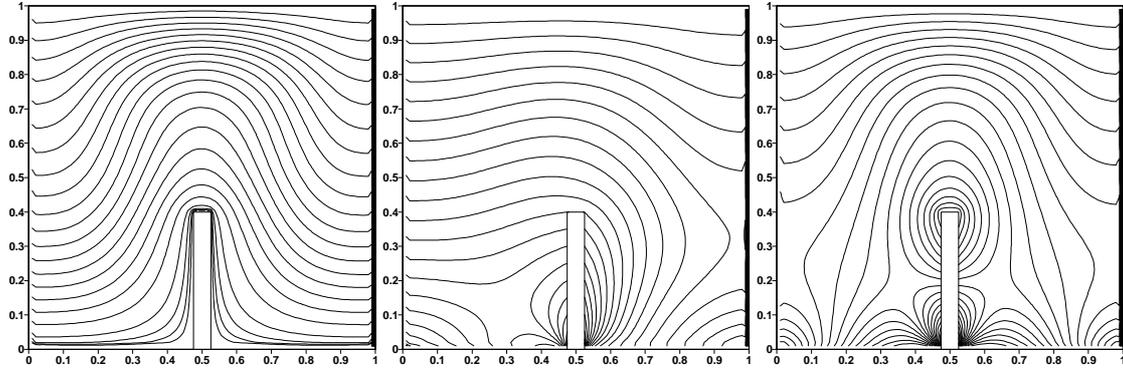
Lignes de courant :



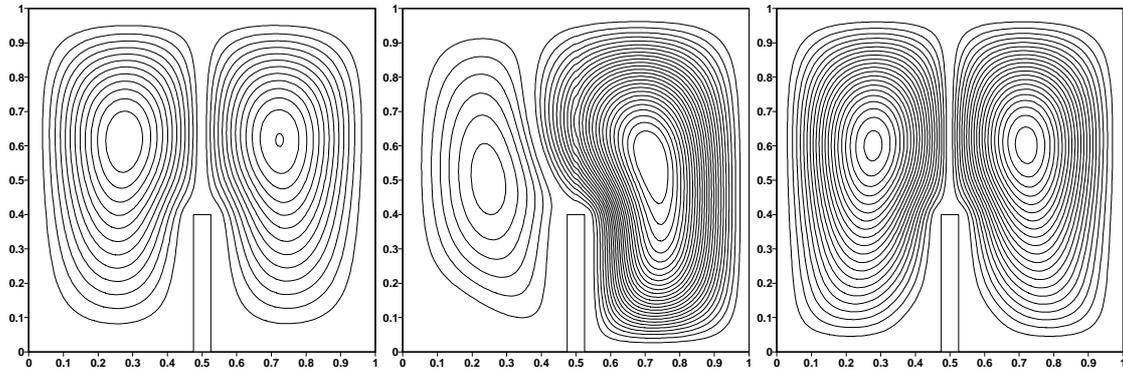
(a2)-

$$Ra = 10^4; h/H = 2/5, \text{ pour : } T_h = \text{Cte}, T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L} \text{ et } T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$$

Température :



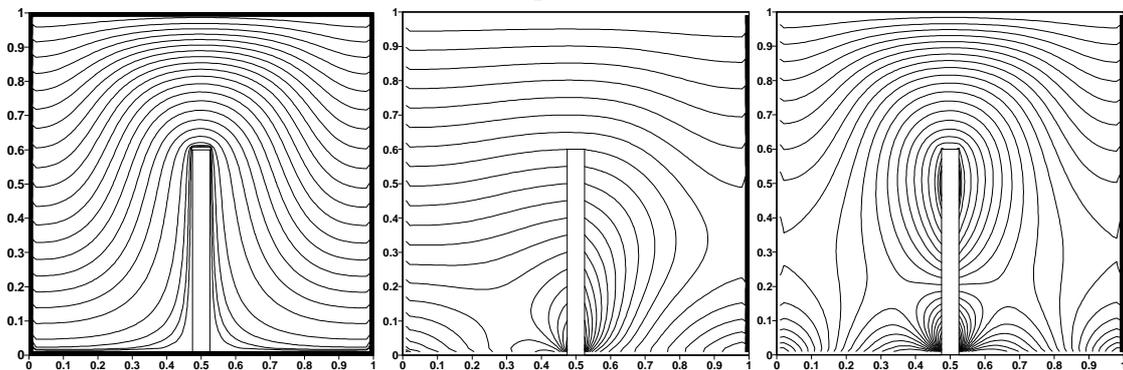
Lignes de courant



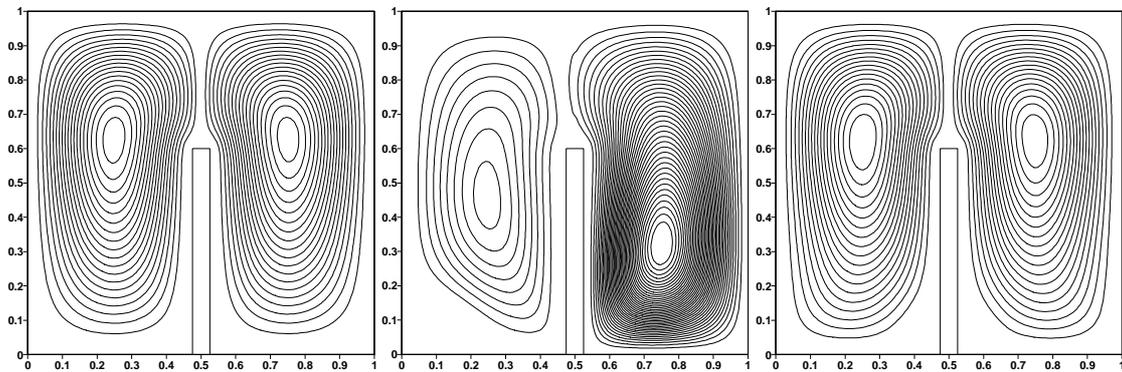
(b2)-

$$Ra = 10^4; h/H = 3/5 \text{ pour : } T_h = \text{Cte}, T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L} \text{ et } T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$$

Température :



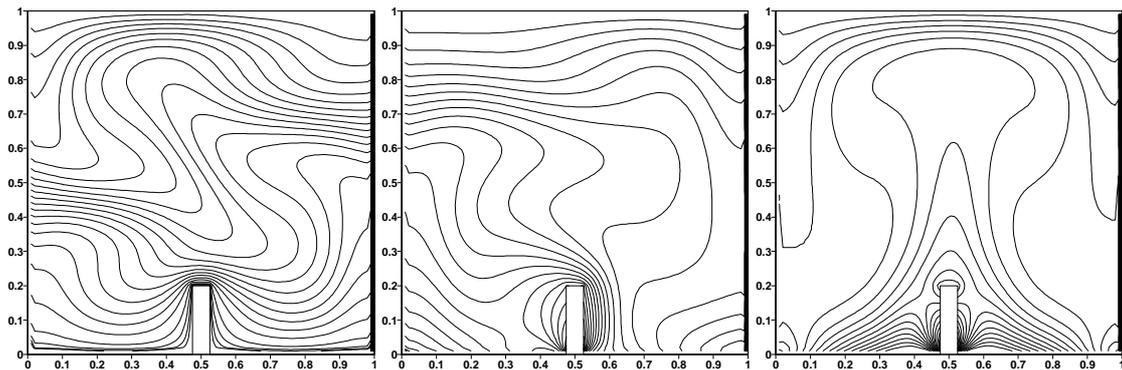
Lignes de courant



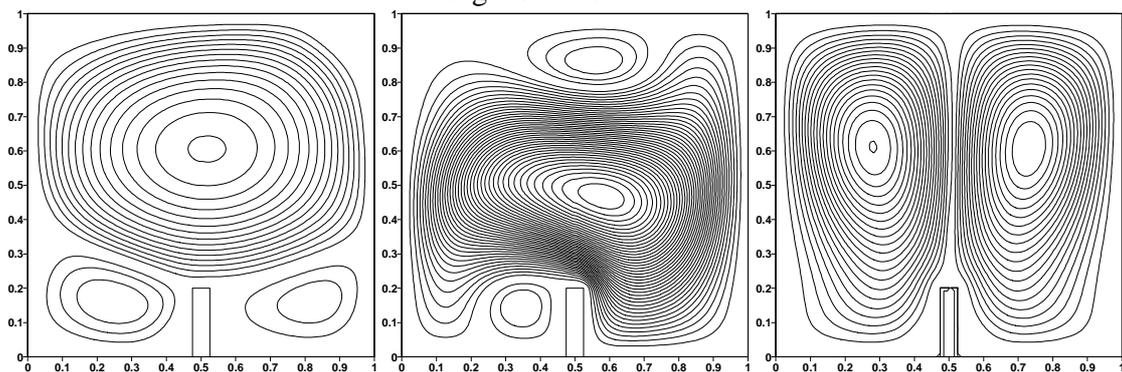
(c2)-

$Ra=10^5$  ;  $h/H=1/5$  pour:  $T_h=Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c)\frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Température :



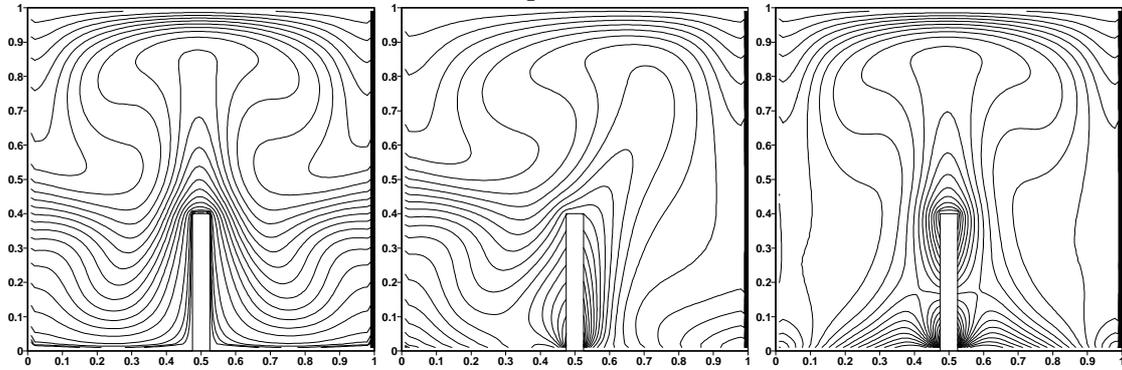
Lignes de courant :



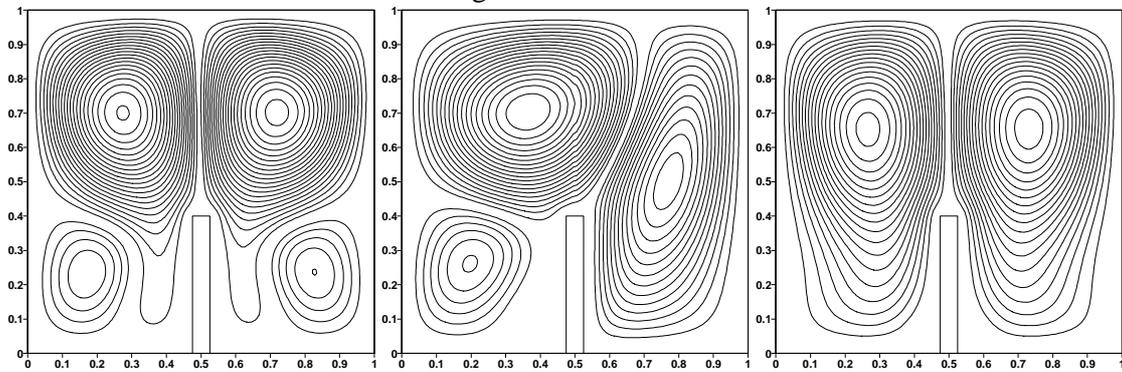
(a3)-

$Ra = 10^5$ ,  $h/H = 2/5$ , pour:  $T_h = Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :



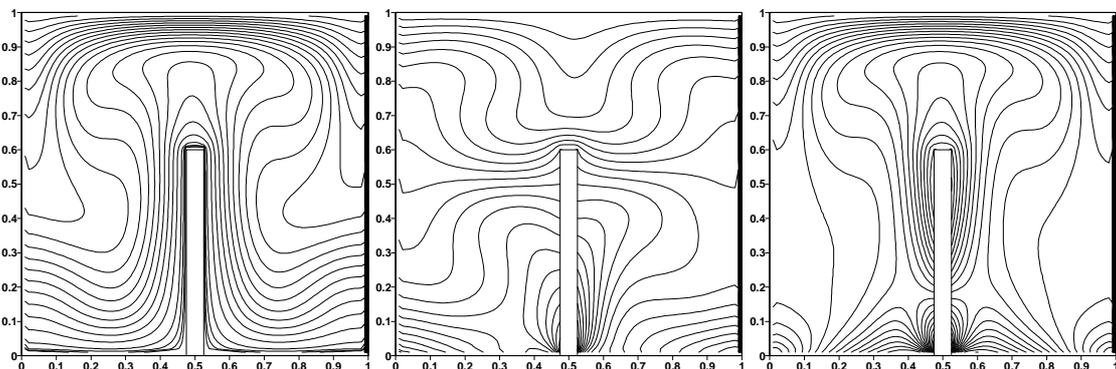
Lignes de courant :



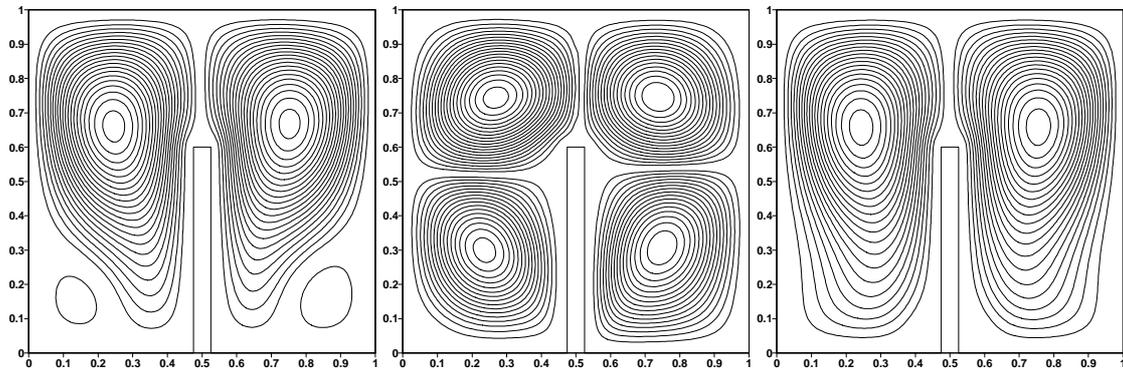
(b3)-

- $Ra = 10^5$ ,  $h/H = 3/5$ , pour:  $T_h = Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :



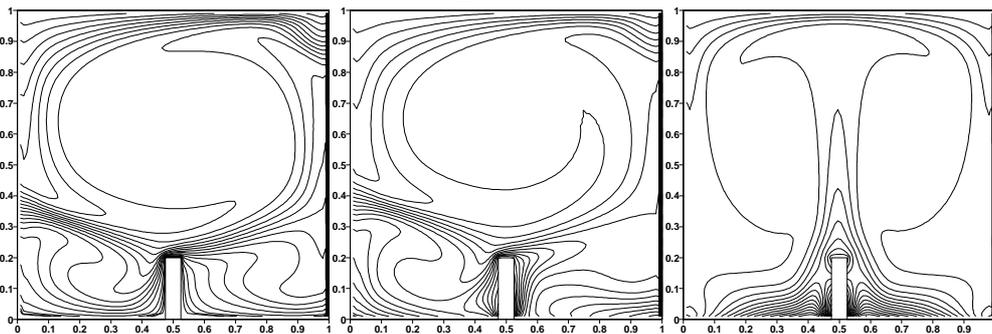
Lignes de courants :



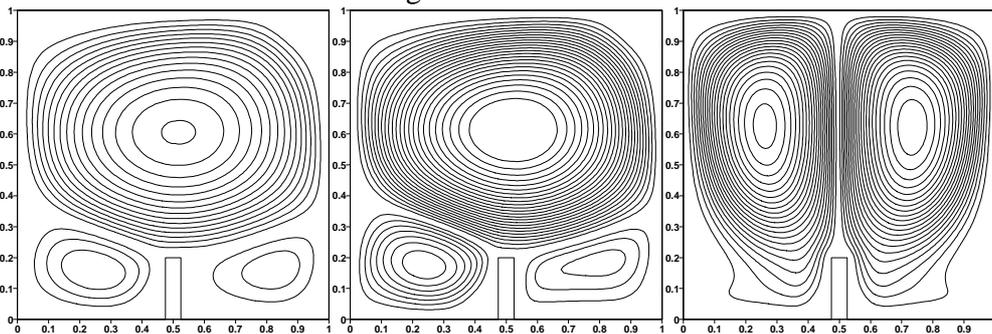
(c3)-

$Ra = 10^6$ ,  $h/H = 1/5$ , pour:  $T_h = Cte$ ,  $T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :



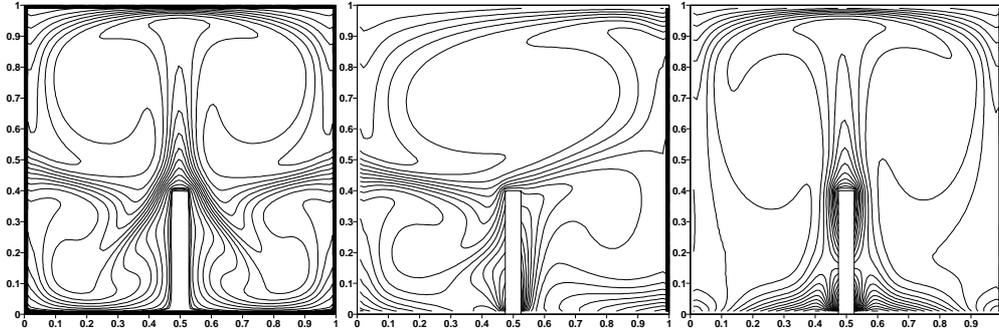
Lignes de courant :



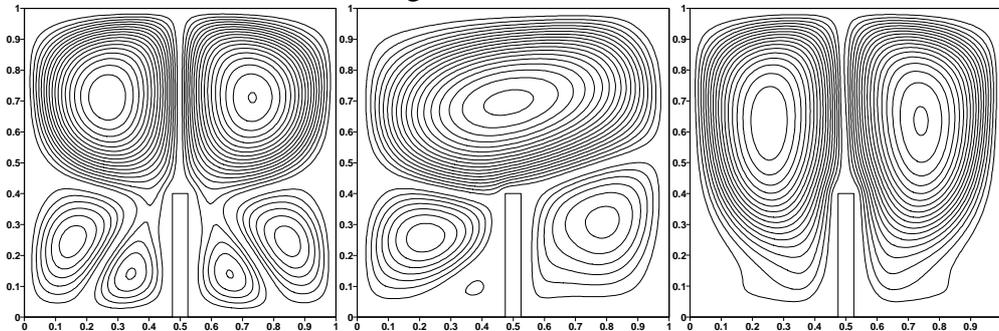
(a4)-

- $Ra = 10^6, h/H=2/5$  pour:  $T_h = Cte, T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :



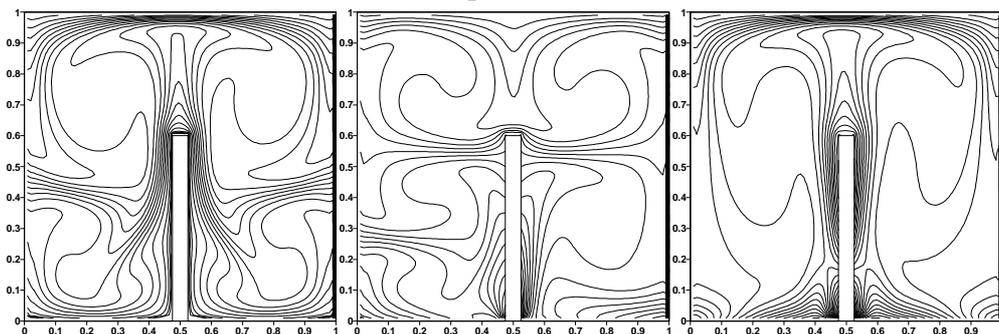
Lignes de courants :

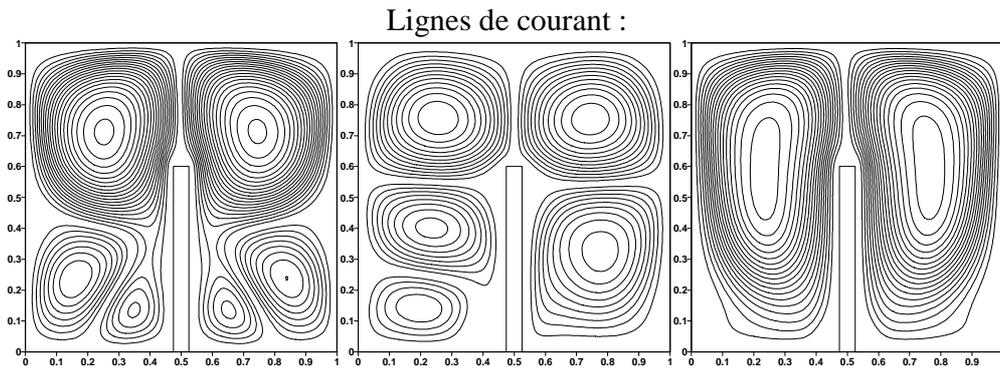


(b4)-

- $Ra = 10^6, h/H=3/5$ , pour:  $T_h = Cte, T'_h = T_h - (T_h - T_c) \frac{x}{L}$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$

Températures :





(c4)-

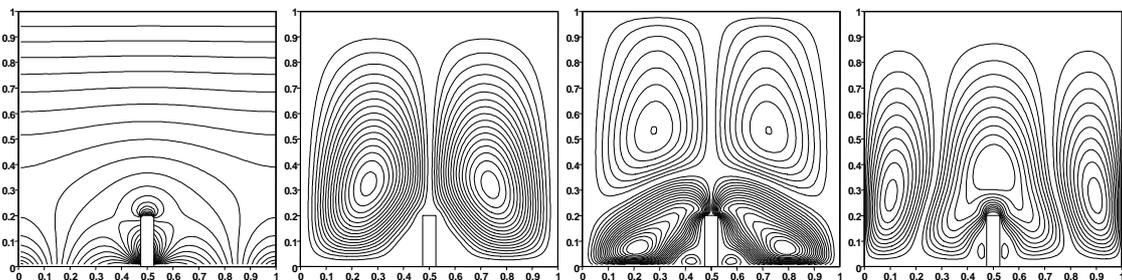
**Figure (VI.5):** Isothermes et lignes de courant relatifs aux profils de température : constant, linéaire et sinusoïdal pour différentes hauteurs d'ailette

- (a1),(b1) et (c1) Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^3$ ; pour  $h/H=1/5$ ,  $h/H=2/5$  et  $h/H=3/5$   
 (a2),(b2) et (c2) Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^4$ ; pour  $h/H=1/5$ ,  $h/H=2/5$  et  $h/H=3/5$   
 (a3),(b3) et (c3) Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^5$ ; pour  $h/H=1/5$ ,  $h/H=2/5$  et  $h/H=3/5$   
 (a4),(b4) et (c4) Résultats de l'étude pour :  $Ra=10^6$ ; pour  $h/H=1/5$ ,  $h/H=2/5$  et  $h/H=3/5$

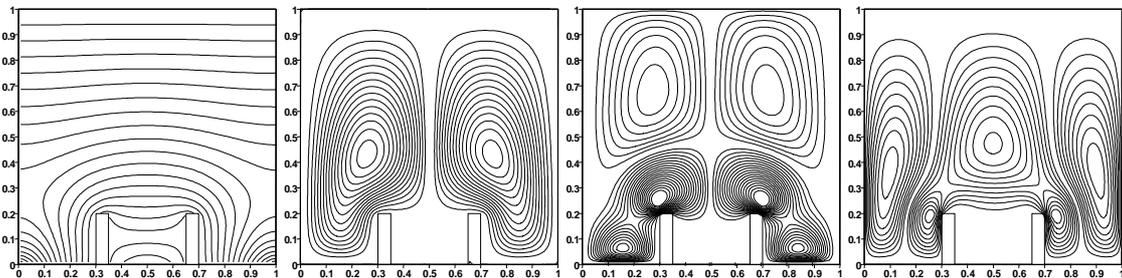
**-Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes :  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^3$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement.

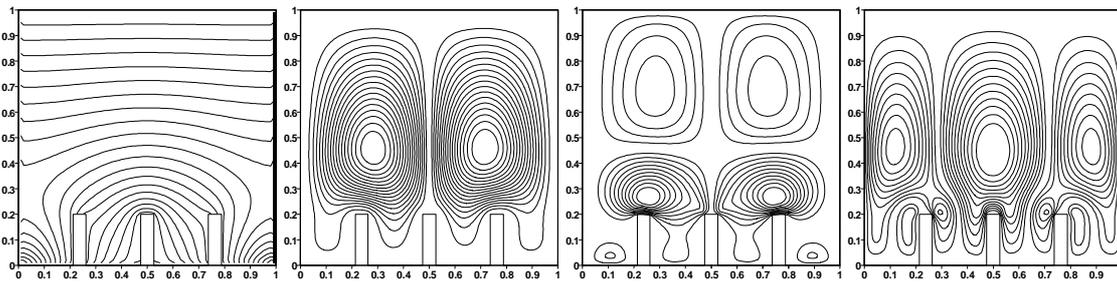
- Cas d'une ailette :



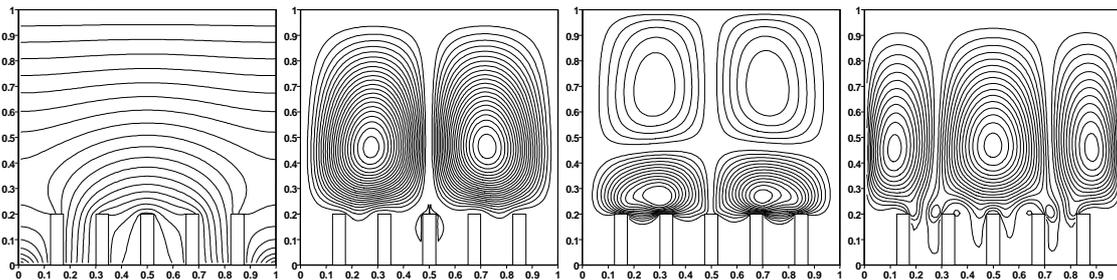
- Cas de deux ailettes :



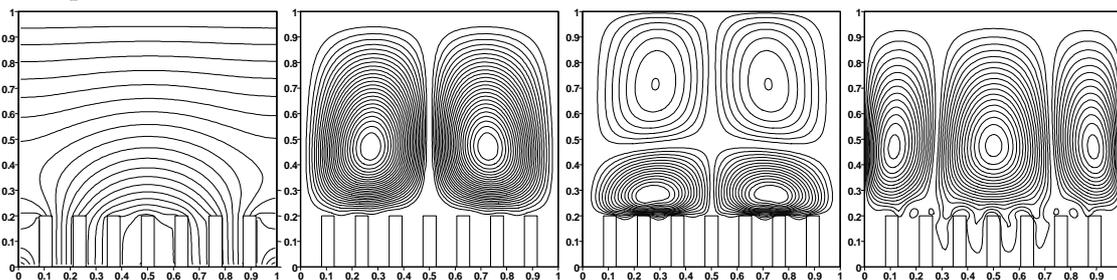
-Cas de trois ailettes :



- Cas de cinq ailettes :



- Cas de sept ailettes :

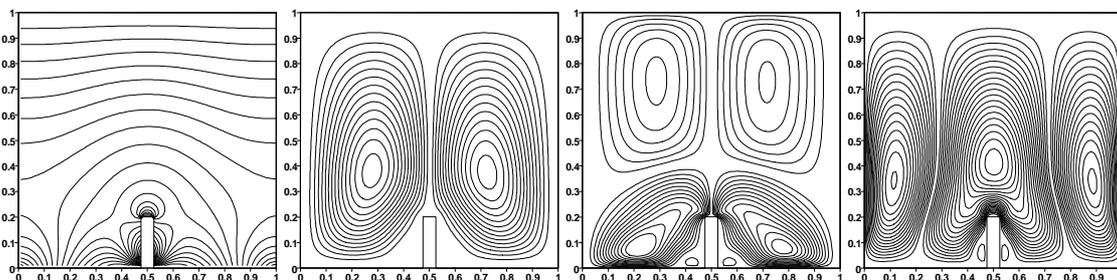


**Figure (VI.6):** Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes à  $Ra = 10^3$

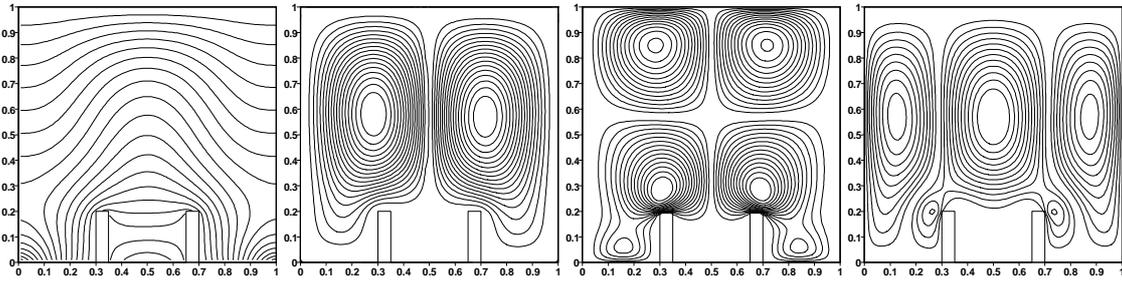
**Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes :  $Pr=0.71$  et  $Ra = 10^4$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :

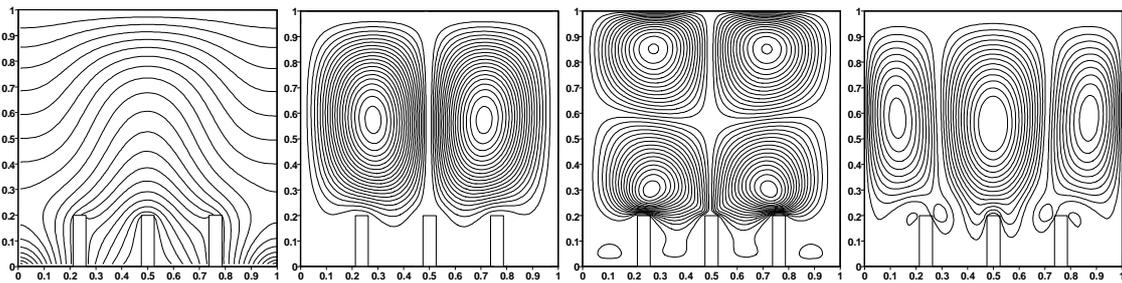
- Cas d'une ailette :



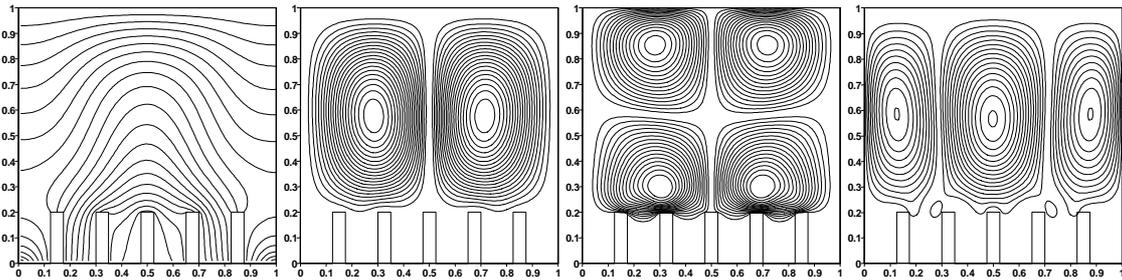
- Cas de deux ailettes :



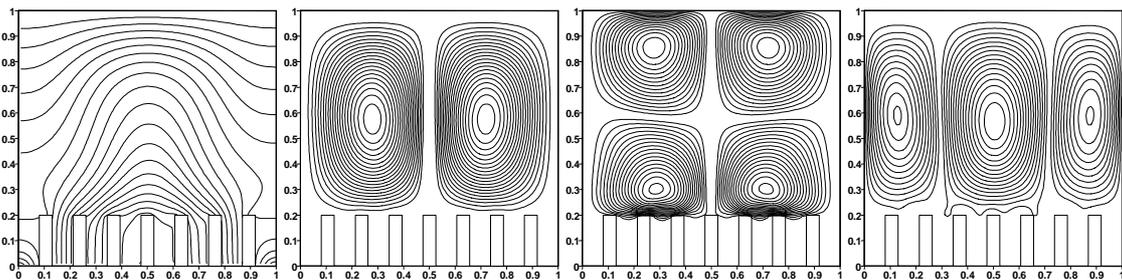
- Cas de trois ailettes :



- Cas de cinq ailettes :



- Cas de sept ailettes :

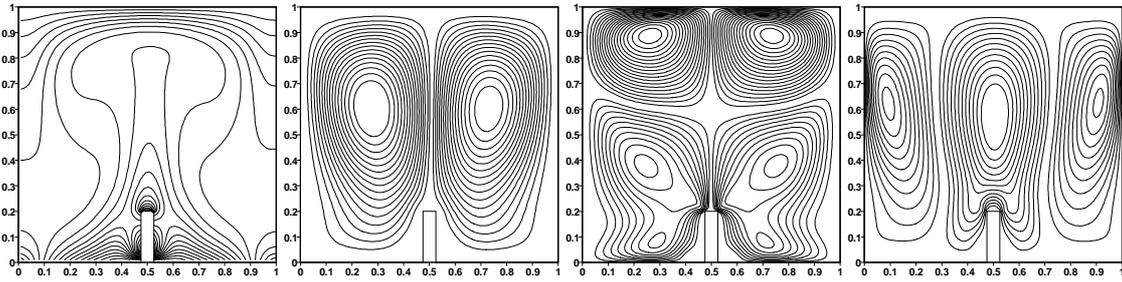


**Figure (VI.7):** Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes à  $Ra=10^4$

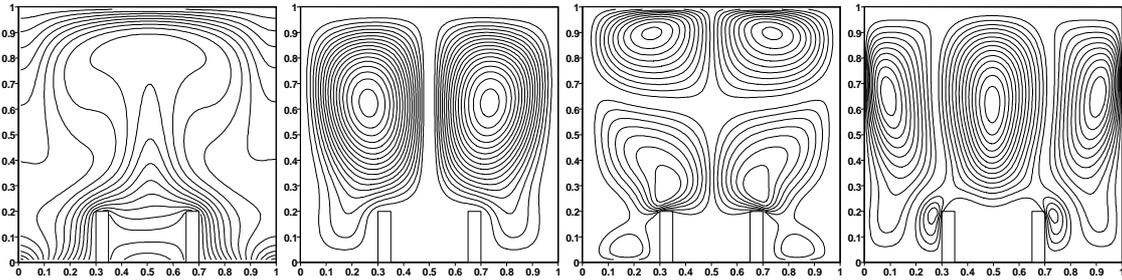
**Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes :  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^5$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :

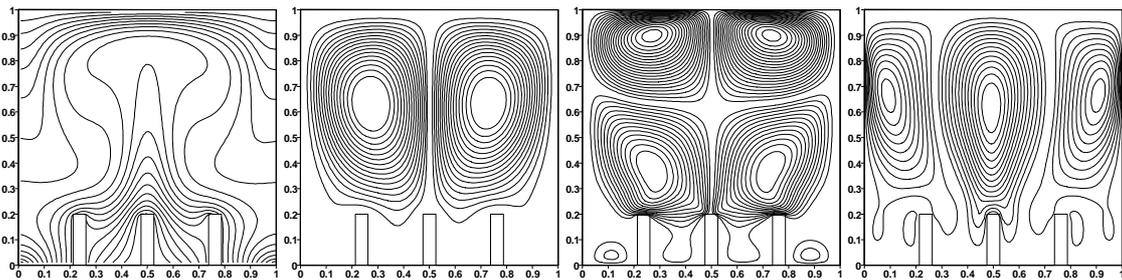
- Cas d'une ailette :



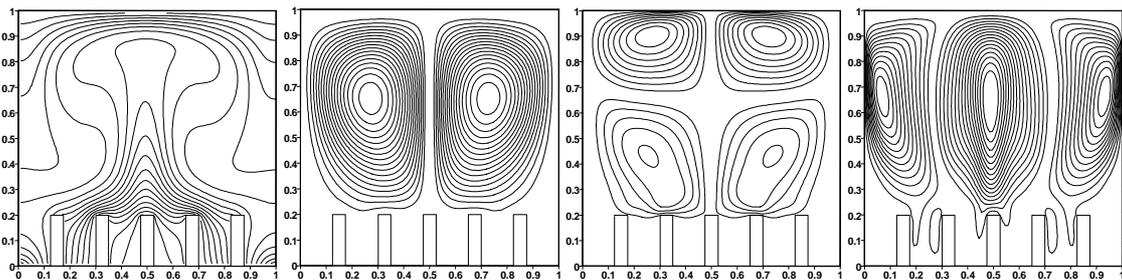
- Cas de deux ailettes :



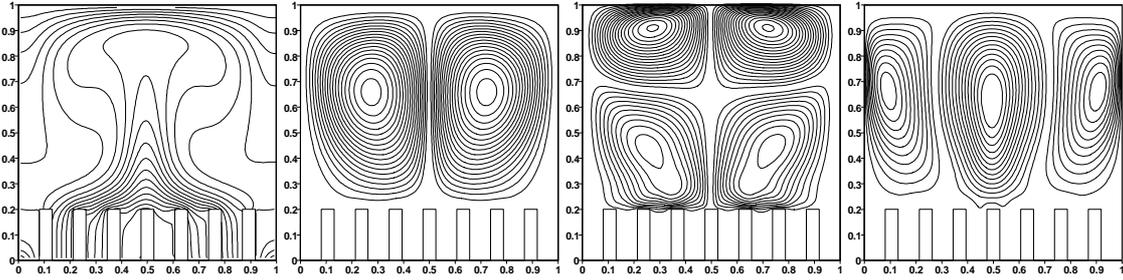
- Cas de trois ailettes :



- Cas de cinq ailettes :



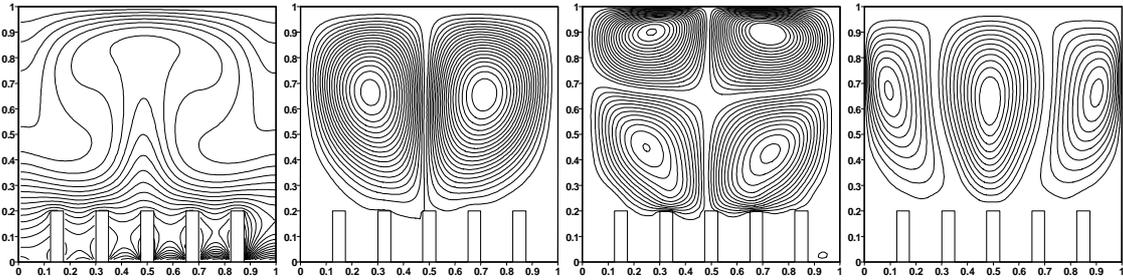
- Cas de sept ailettes :



**Figure (VI.8):** Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence des ailettes à  $Ra=10^5$

**Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes :  $Pr=0.71$  et  $Ra=10^5$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement.



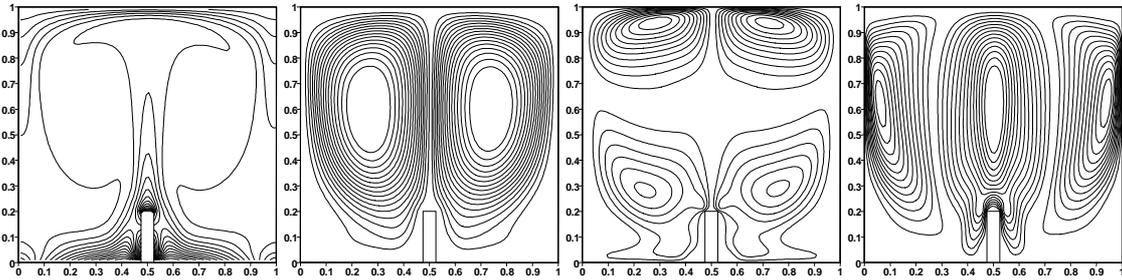
**Figure (VI.9):** Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes à  $Ra=10^5$

A  $Ra = 10^5$ , le modèle de circulation est qualitativement semblable au cas de chauffage uniforme figure (VI.1). En raison de chauffage du fond non uniforme, la vitesse de chauffage à proximité de la paroi est généralement inférieure, ce qui induit moins de flottabilité résultante dans un gradient thermique plus faible dans tout le domaine. L'uniformité de la distribution de température et le gradient de température sont moins encore observée sur le régime de la partie centrale à l'intérieur de la moitié supérieure du domaine. L'effet de la flottabilité inférieure conduit aussi à une grande zone de stratification de température au niveau de la ligne de symétrie verticale.

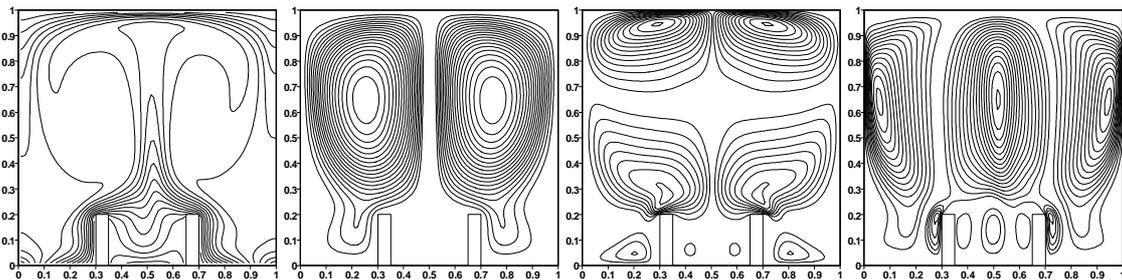
**Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes :  $Pr = 0.71$  et  $Ra = 10^6$**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement.

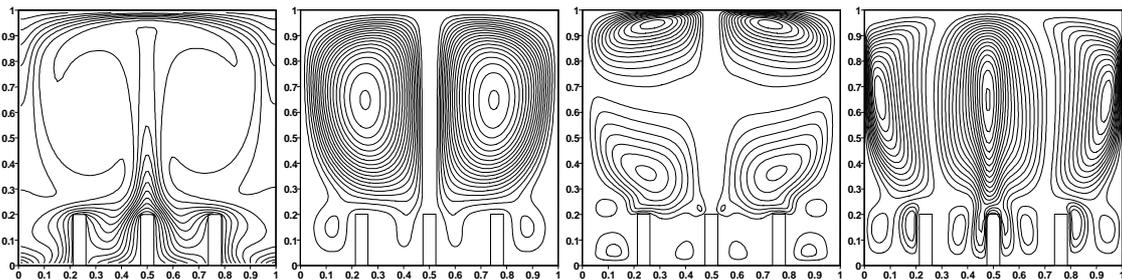
- Cas d'une ailette :



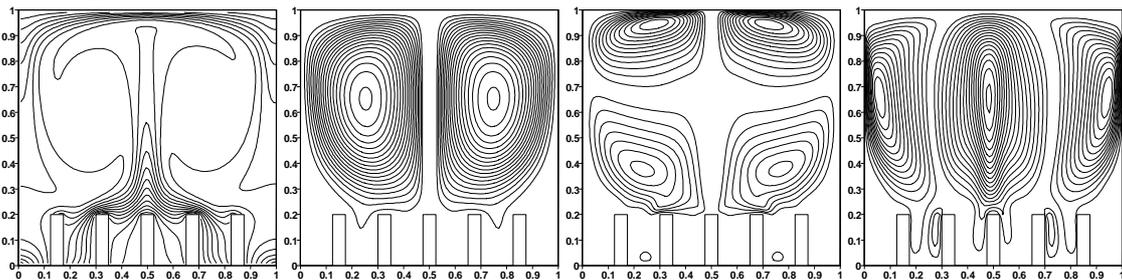
- Cas de deux ailettes :



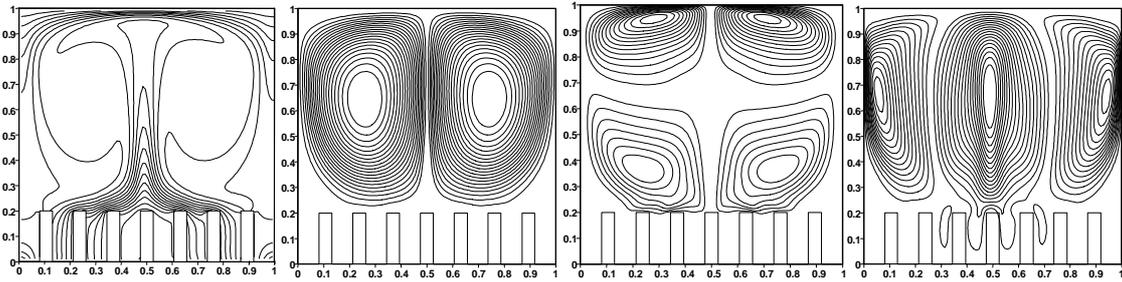
- Cas de trois ailettes :



- Cas de cinq ailettes :



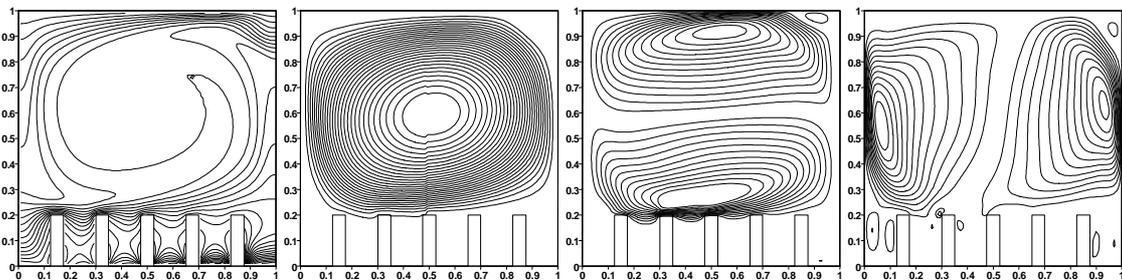
- Cas de sept ailettes :



**Figure (VI.10):** Chauffage sinusoïdal de la paroi du fond en présence d'ailettes à  $Ra = 10^6$

**Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes :**  $Pr=0.71$  et  $Ra = 10^6$

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :



**Figure (VI.11):** Chauffage linéaire de la paroi du fond en présence de cinq ailettes à  $Ra = 10^6$

A partir de  $Ra = 10^6$ , le mécanisme de la convection devient plus prononcé et par conséquent le vortex central se déplace vers le haut, la figure (V.11) montre également que les isothermes sont horizontales et verticales à l'intérieur de l'enceinte, les couches limites deviennent très minces, ceci peut être attribué à un courant à l'intérieur de la cavité qui provoque également une réduction de gradients de température dans le centre de la cavité à forte convection.

### Discussions :

Les contours des isothermes, des fonctions de courant et des iso-vitesses sont représentés dans les figures (VI.6), (VI.7), (VI.8) et (VI.10) pour  $Ra = 10^3 - 10^6$  et  $Pr = 0.71$  lorsque la paroi de fond est chauffé d'une manière sinusoïdale non uniforme, le chauffage non uniforme supprime les singularités sur les bords de la paroi de fond et présente une répartition de température régulière dans toute la cavité.

Pour  $Ra = 10^3$  et  $Pr = 0,7$ , dans la figure (VI.6) la couche limite thermique se développe plus que 70% de la cavité, qui est inférieure par rapport au cas d'un chauffage uniforme, il est observé dans les environs de  $Ra = 10^4$  figure (VI.7), qu'on peut noter que la température à la paroi de fond

n'est pas uniforme et un maxima de température se produit au centre. Par conséquent, des taux plus élevés de transfert de chaleur se produisent au centre.

A  $Ra = 10^5$ , (VI.8). En raison de chauffage du fond non uniforme, la vitesse de chauffage à proximité de la paroi est généralement inférieure, ce qui induit moins de flottabilité résultante dans un gradient thermique plus faible dans tout le domaine. L'uniformité de la distribution de température et le gradient de température sont moins encore observée sur le régime de la partie centrale à l'intérieur de la moitié supérieure du domaine. L'effet de la flottabilité inférieure conduit aussi à une grande zone de stratification de température au niveau de la ligne de symétrie vertical.

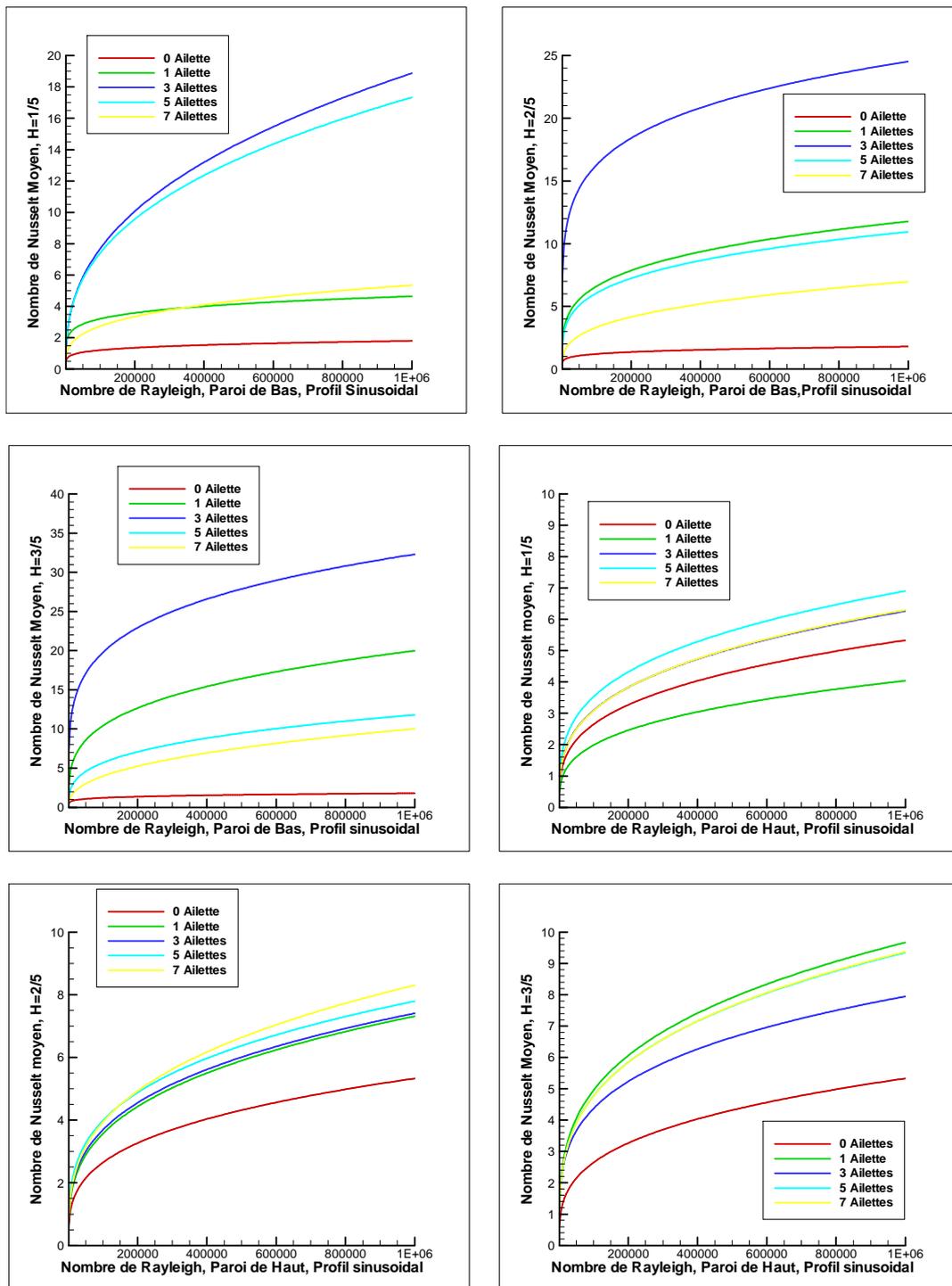
A partir de  $Ra = 10^6$  (figure (VI.9)) le mécanisme de la convection devient plus prononcé et par conséquent le vortex central se déplace vers le haut, on remarque également que les isothermes sont horizontales et verticales à l'intérieur de l'enceinte, les couches limites deviennent très minces. Ceci peut être attribué à un courant à l'intérieur de la cavité qui provoque également une réduction de gradients de température dans le centre de la cavité à haute convection.

Les contours des iso-vitesses révèlent plusieurs caractéristiques importantes, dans les contours des iso-vitesse- $u$ , pour les valeurs de  $Ra=10^3$ ,  $10^4$  et  $10^5$ , on remarque quatre tourbillons principaux horizontaux se forment au-dessus des ailettes, deux autres secondaires se forment en bas de la cavité en dessus de la paroi chaude. Pour la valeur de  $Ra = 10^6$ , deux tourbillons principaux s'éloignent vers le haut en direction de la paroi adiabatique tandis que dans le reste de la cavité plusieurs tourbillons secondaires se forment aux alentours de l'ailette.

Pour les contours des iso-vitesse- $v$ , si nous prenons les valeurs de  $Ra=10^3$ ,  $10^4$  et  $10^5$  trois circulations verticales dominantes, un de chaque sur les zones gauche milieu et droite de la cavité presque complètement balayée, les allures sont simulables pour les trois valeurs citées, une légère déformation est observée aux extrémités des tourbillons avec l'augmentation du nombre de *Rayleigh*  $Ra=10^6$ .

Il est à remarquer que la présence des ailettes n'a influé que légèrement l'allure de température, des lignes de courant ou des iso-vitesses, le changement n'est observé qu'au voisinage des ailettes.

On présente ci-dessous la variation de nombre de *Nusselt* moyen pour la paroi de haut et de bas, en fonction de nombre de *Rayleigh* pour différents nombre et hauteurs des ailettes.



**Figure (VI.12):** Nombre de *Nusselt* moyen pour les parois de haut et de bas en fonction de nombre de *Rayleigh*, pour différents nombre d'ailettes

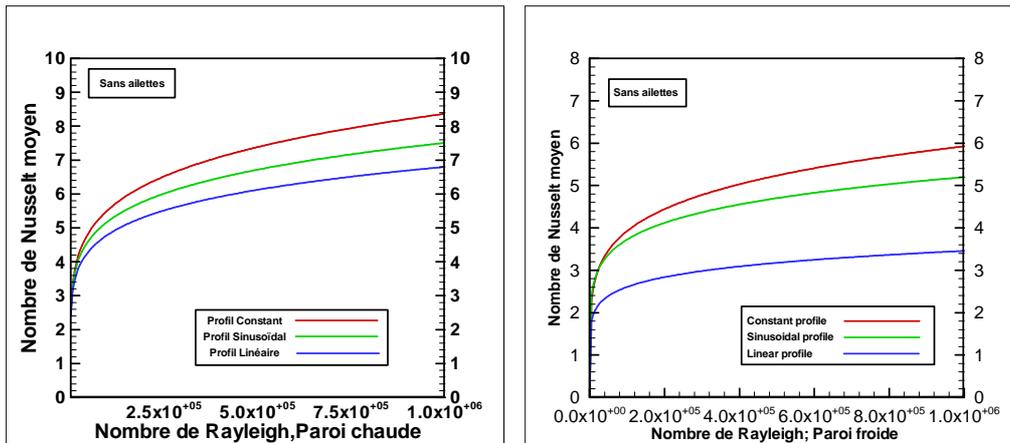


Figure (VI.13): Nombre de *Nusselt* moyen pour les parois, haut et bas, en fonction de nombre de *Rayleigh*. Comparaison des différents profils de température.

Dans ce qui suit on présente la variation de nombre de *Nusselt* local par rapport à la paroi de haut et de bas.

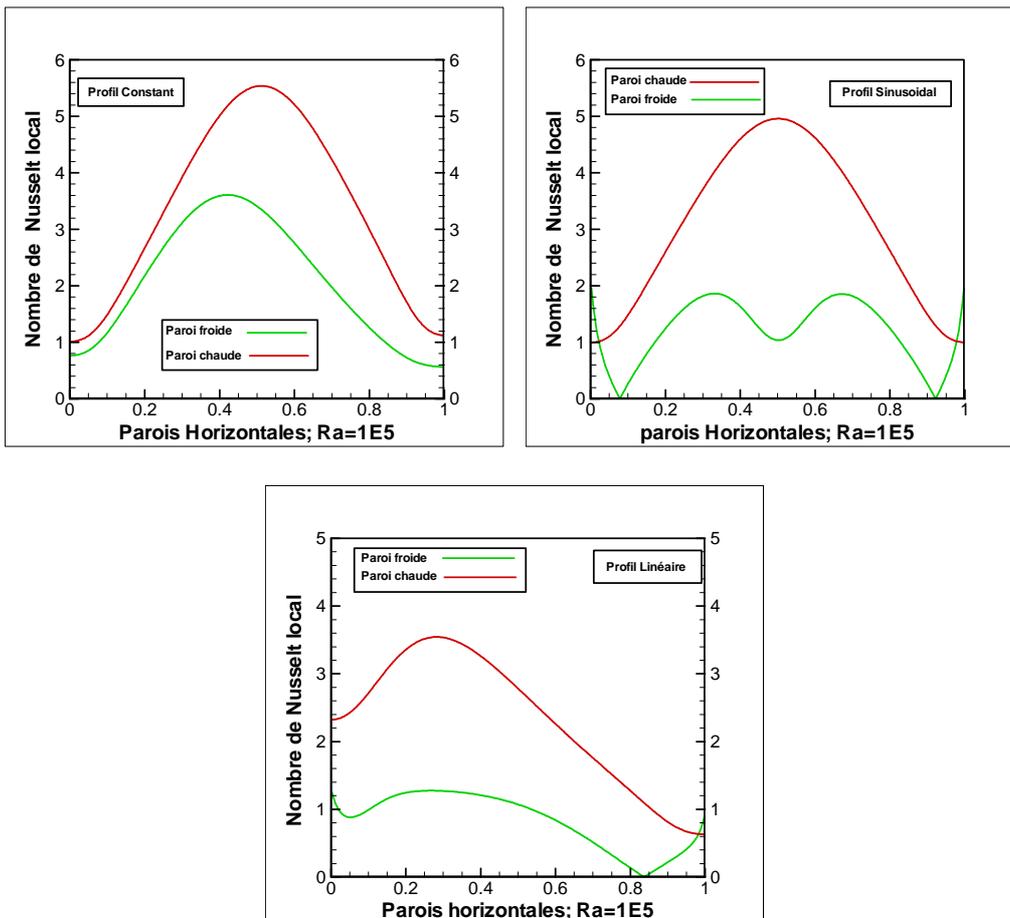
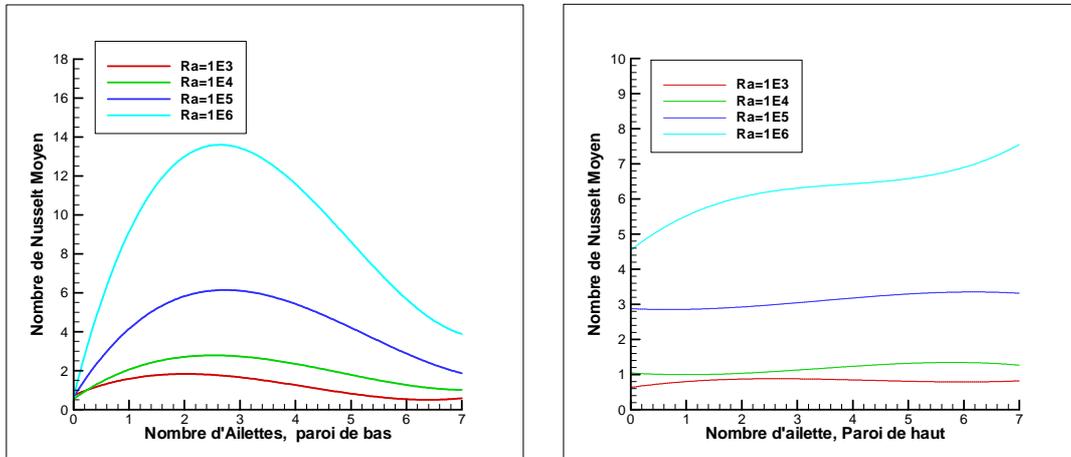


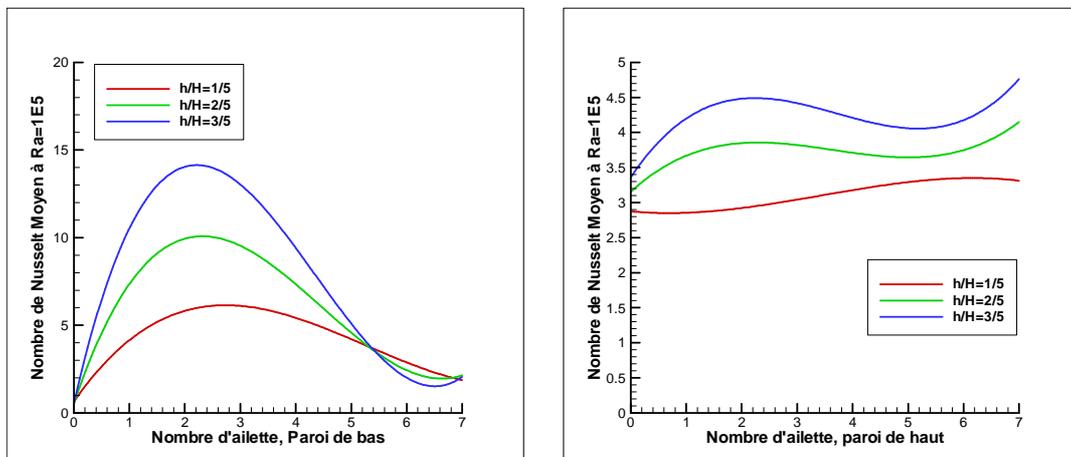
Figure (VI.14): Comparaison du nombre de *Nusselt* local par rapport aux parois horizontales.

On présente ci-dessous la variation de nombre de *Nusselt* moyen pour la paroi de haut et de bas, en fonction de nombre d'ailettes pour différents nombre de *Rayleigh*.



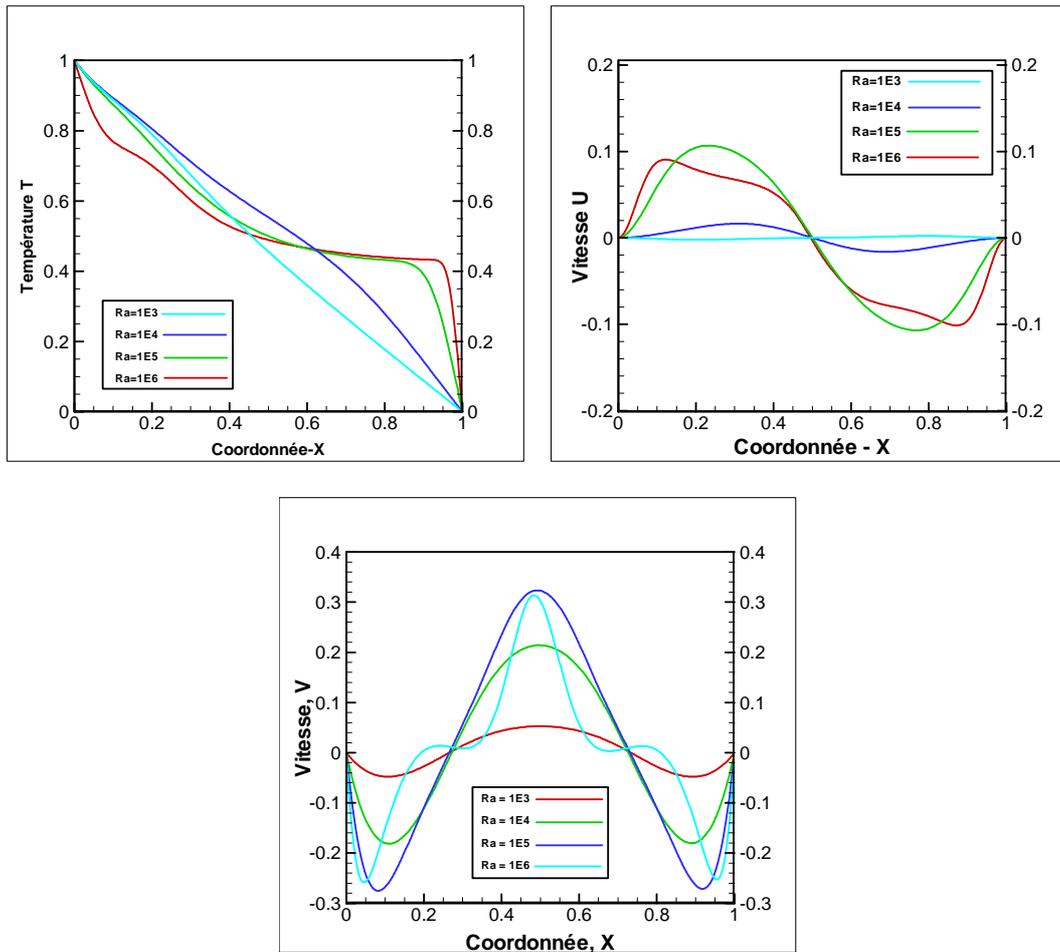
**Figure (VI.15):** Nombre de *Nusselt* moyen en fonction de nombre d'ailette. Pour différents nombre de *Rayleigh*

Ci-dessous est présentée la variation de nombre de *Nusselt* moyen pour la paroi de haut et de bas, à un nombre de *Rayleigh* fixé à  $10^5$  en fonction de nombre d'ailettes pour différentes hauteurs d'ailette.



**Figure (VI.16):** Nombre de *Nusselt* moyen à  $Ra=10^5$  en fonction de nombre d'ailettes Pour différentes hauteurs.

Résultats des vitesses et des températures adimensionnelles calculées au milieu de la cavité pour différents nombres de *Rayleigh*.



X= milieu, Y= variant

X= variant, Y= milieu

X=milieu, Y= variant

**Figure (VI.17):** Vitesses et températures adimensionnelles calculées au milieu de la cavité.

Les distributions des vitesses à la section médiane horizontale de l'enceinte par rapport à la coordonnée  $X$ , pour différents nombre de *Rayleigh* sont tracées à la **Figure (VI.17)**.

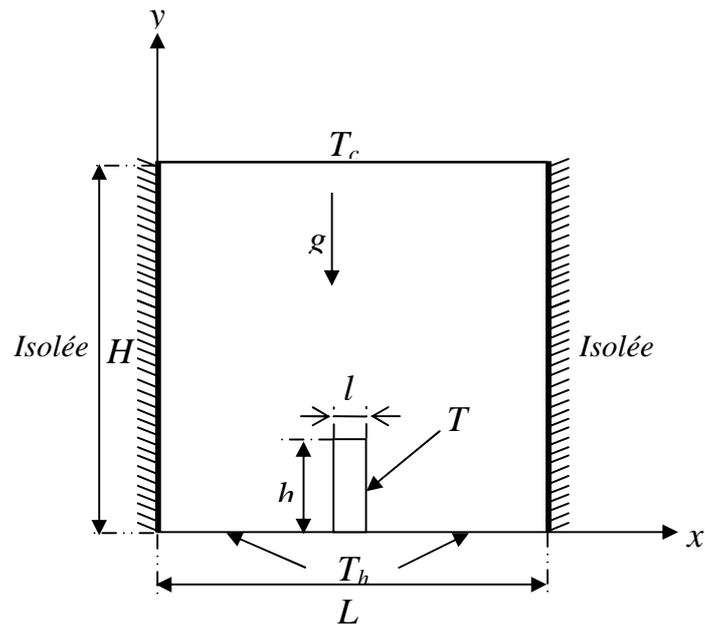
Pour les faibles valeurs du nombre de *Rayleigh*, la vitesse d'écoulement de fluide est presque nulle, ce qui correspond au mode de transfert de chaleur par conduction.

La distribution de température en fonction de la coordonnée  $X$  est presque linéaire pour les faibles valeurs de *Rayleigh*.

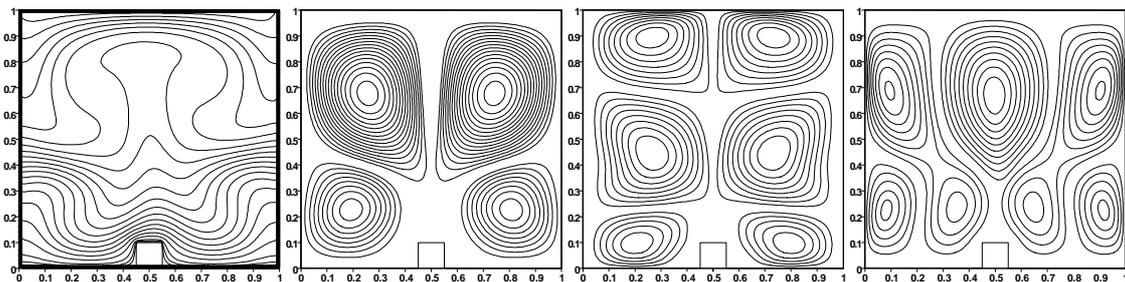
### VI.3. Effet de la variation de la hauteur d'ailettes :

#### VI.3.1-Cas d'une seule ailette :

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette est égale à  $h = H/10$  et sa largeur  $l = L/10$  pour  $Ra=10^5$ . Profil de température constant.

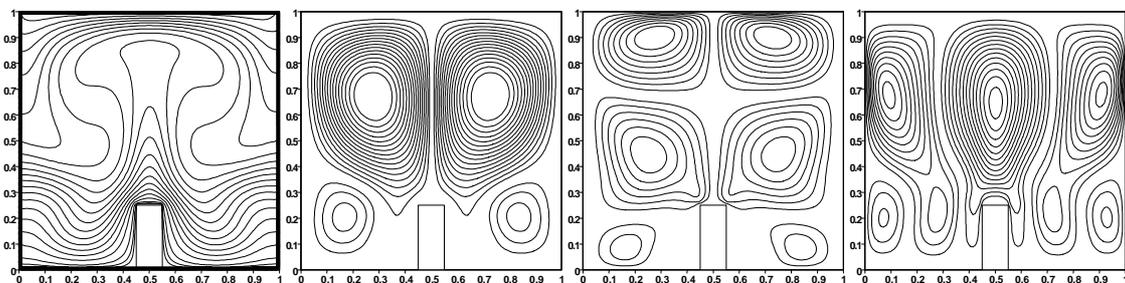


**Figure (V.18):** Effet de la variation de la hauteur de l'ailette.



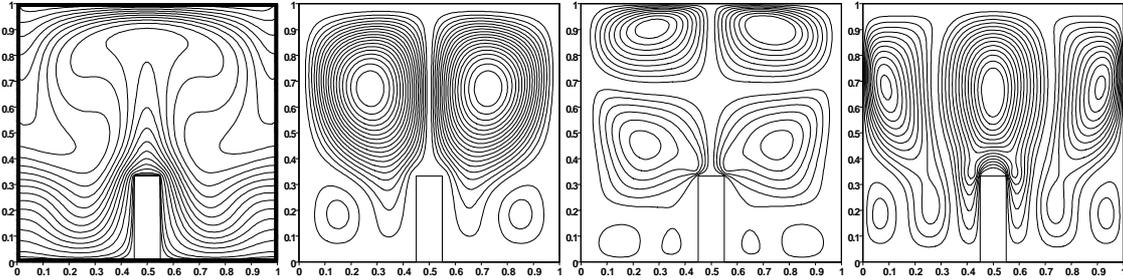
**Figure (VI.19):** Résultat pour la température, les lignes de courant les iso-vitesse  $u$  et  $v$  :  $h = H/10$ ,  $l = L/10$  et  $Ra=10^5$

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h = H/4$  et sa largeur  $l = L/10$  pour  $Ra=10^5$ .



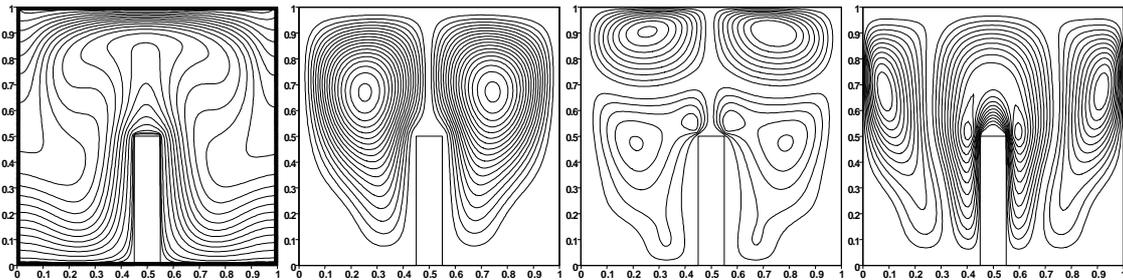
**Figure (VI.20):** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  :  $h = H/4$ ,  $l = L/10$  et  $Ra=10^5$

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h = H/3$  et sa largeur  $l = L/10$  pour  $Ra=10^5$ .



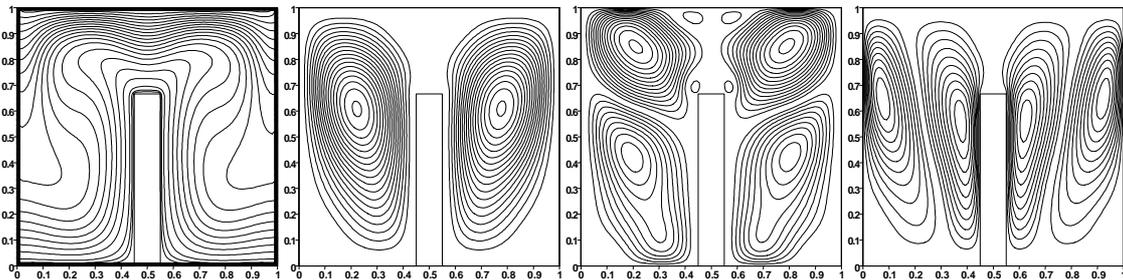
**Figure (VI.21):** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  :  $h = H/3$ ,  $l = L/10$  et  $Ra=10^5$

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à  $h = H/2$  et sa largeur  $l = L/10$  pour  $Ra=10^5$ .



**Figure (VI.22):** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  :  $h = H/2$ ,  $l = L/10$  et  $Ra=10^5$

- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à  $h = 2H/3$  et sa largeur  $l = L/10$  pour  $Ra=10^5$ .



**Figure (VI.23):** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  :  $h = 2H/3$ ,  $l = L/10$  et  $Ra=10^5$

L'effet de la hauteur de l'ailette sur les isothermes, les iso-courant ainsi que les iso-vitesse est démontré dans les figures (VI.19-23), est étudié à  $Ra=10^5$ .

Les régimes d'écoulement et les distributions de températures sont symétriques de chaque côté de l'ailette de chauffage tel que représenté sur les différentes figures.

- Comme la hauteur de l'ailette augmente, cela entraîne une diminution des valeurs des lignes de courant à l'intérieur de l'enceinte. En outre, la taille du tourbillon central diminue avec l'augmentation de la hauteur de l'ailette.

Les isothermes correspondantes sont essentiellement parallèles aux parois verticales, sauf le long de la surface supérieure de l'ailette chauffante en gardant une symétrie parfaite par rapport au centre de l'enceinte.

- Les contours des iso-vitesses révèlent plusieurs caractéristiques importantes, dans les contours des iso-vitesse- $u$ , on remarque que quatre tourbillons horizontaux qui se forment, deux au-dessous des deux autres. deux tourbillons s'éloignent vers la paroi froide de haut tandis que les deux autres vers la paroi chaude de bas.
- Pour les contours des iso-vitesse- $v$ , si trois circulations verticales dominantes un de chaque sur les zones gauche milieu et droite de la cavité presque complètement balayée.

### VI.3.2- Cas de deux ailettes :

Modèle de cavité à surface ailettée muni d'ailettes de largeurs identiques  $l/L=1/20$  et des hauteurs différentes, où la hauteur de la première ailette égale à  $h$  alors que la deuxième égale à  $h'$ , avec les paramètres :  $L_1=0.3L$ ,  $L_2=0.3L$ ,  $Pr=0.71$ ,  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$ .

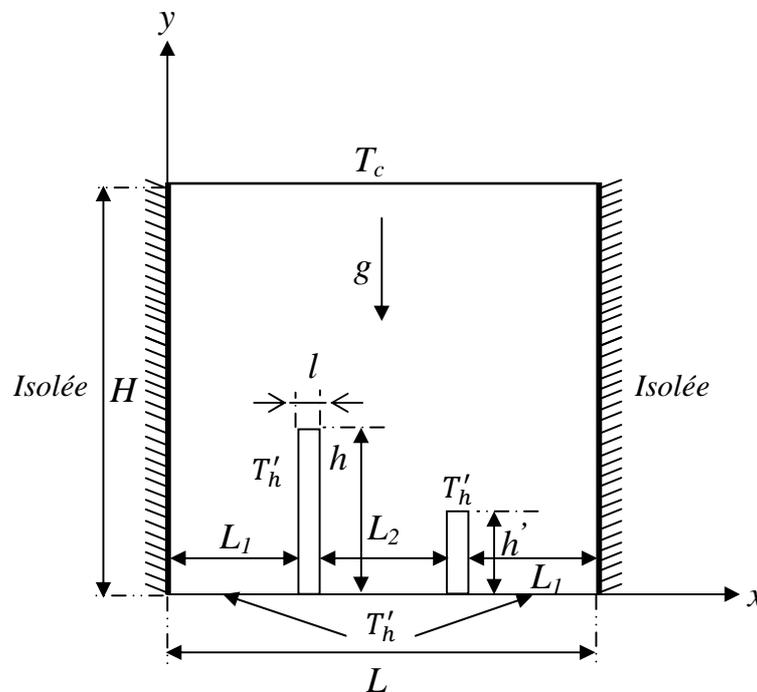
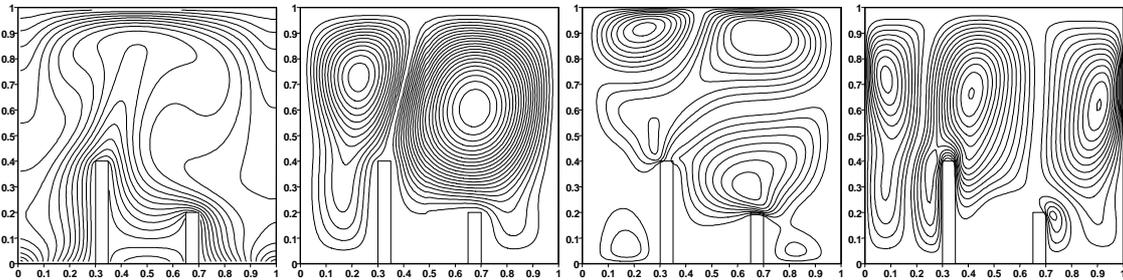


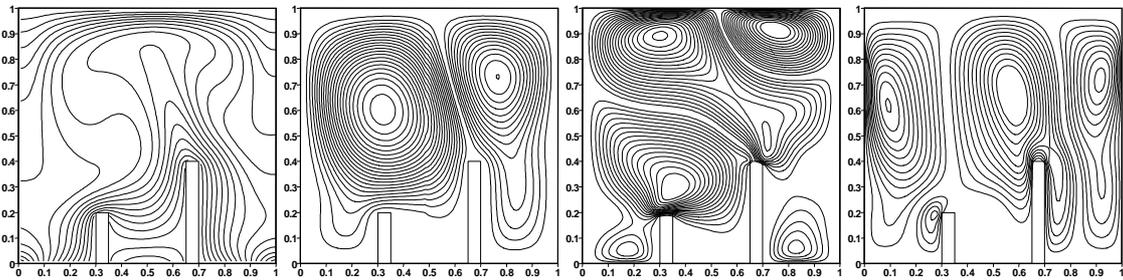
Figure (VI.24) : Géométrie de la cavité, effet de la différence des hauteurs des ailettes.

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :

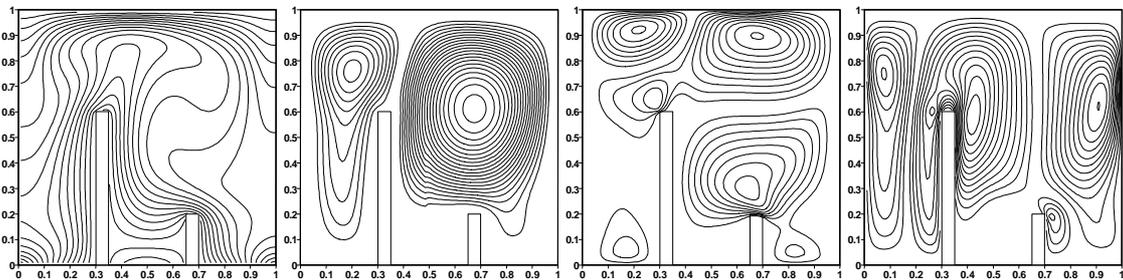
- $h/H=2/5, h'/H=1/5,$



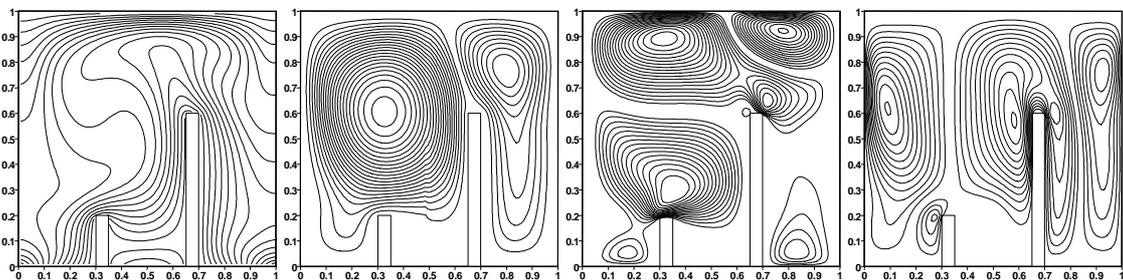
- $h/H=1/5, h'/H=2/5,$



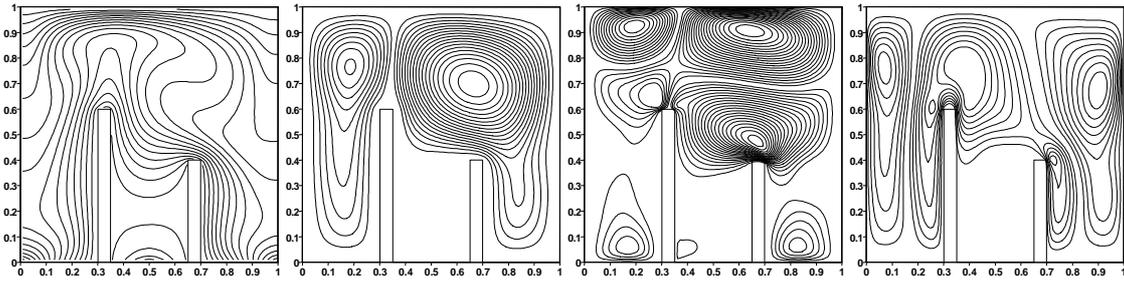
- $h/H=3/5, h'/H=1/5,$



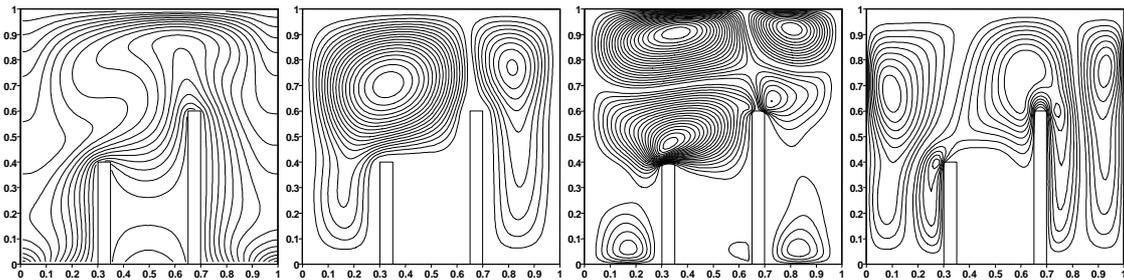
- $h/H=1/5, h'/H=3/5,$



- $h/H=3/5, h'/H=2/5,$



- $h/H=2/5, h'/H=3/5,$



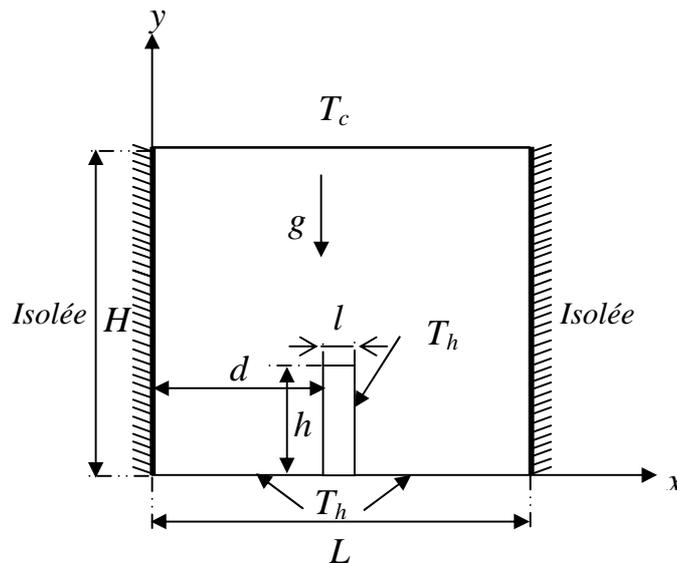
**Figure (V.25) :** Effet de la variation de hauteur des ailettes sur le flux de chaleur.

Dans la figure (V.25), le flux dans une enceinte est plus sensible à la hauteur des ailettes, ces résultats indiquent que la stratification thermique entre les ailettes chauffantes a été formée comme l'espace entre eux augmente.

#### VI.4 Effet de l'espacement entre ailettes :

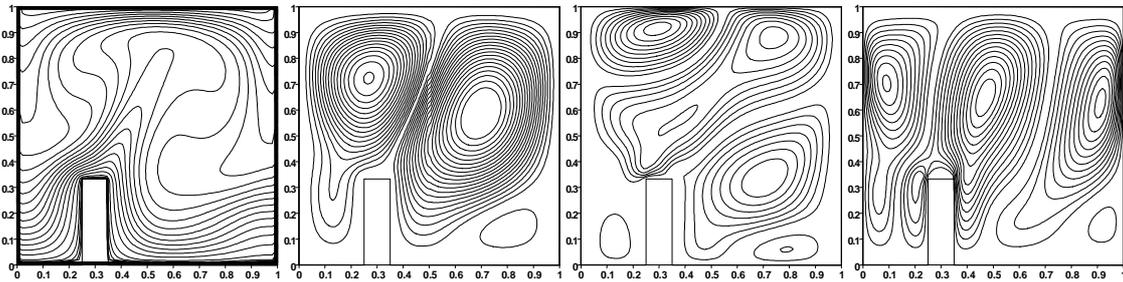
##### VI.4.1 Cas d'une seule ailette:

- Modèle de cavité utilisé où la hauteur de l'ailette égale à  $h=H/3$ , sa largeur  $l=L/10$  et son emplacement  $d$  variable, avec  $Pr = 0.71$  et  $Ra = 10^5$ . Profil de température constant.

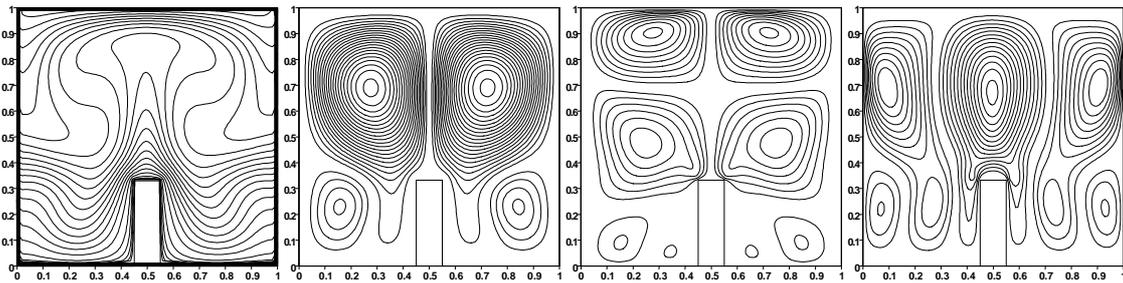


**Figure (VI.26) :** Géométrie de la cavité, effet de l'espacement d'une seule ailette.

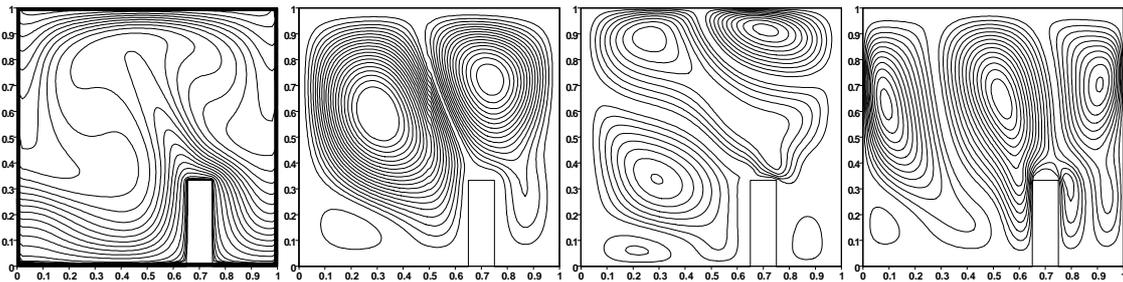
- $d=0.25$



- $d=0.45$



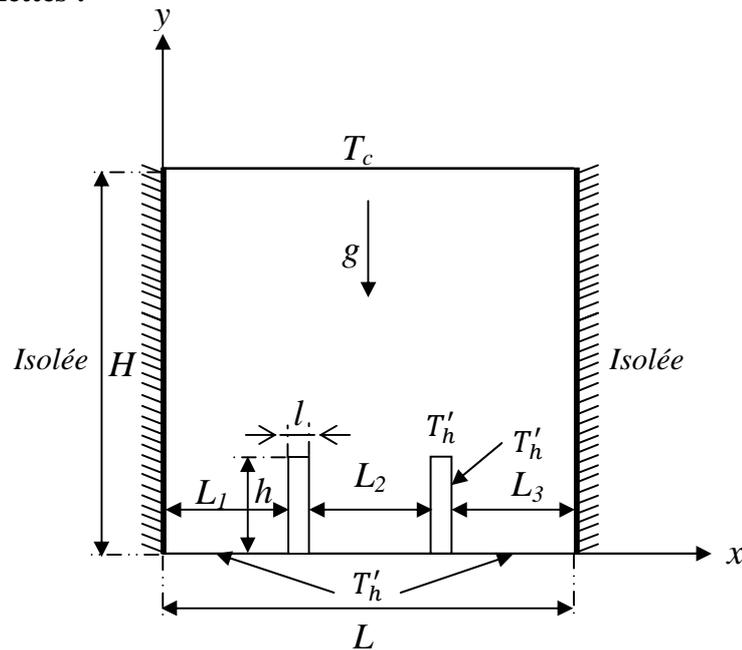
- $d=0.65$



**Figure (VI.27)** Résultat de la température, des lignes de courant et des iso-vitesses  $u$  et  $v$  pour différentes positions de l'ailette

Il faut noter que la symétrie n'est respectée que dans le cas où l'ailette est située au milieu exact de la cavité, le déplacement de l'ailette soit vers la gauche ou vers la droite provoque une inclinaison des différents résultats vers le sens opposé du déplacement de l'ailette.

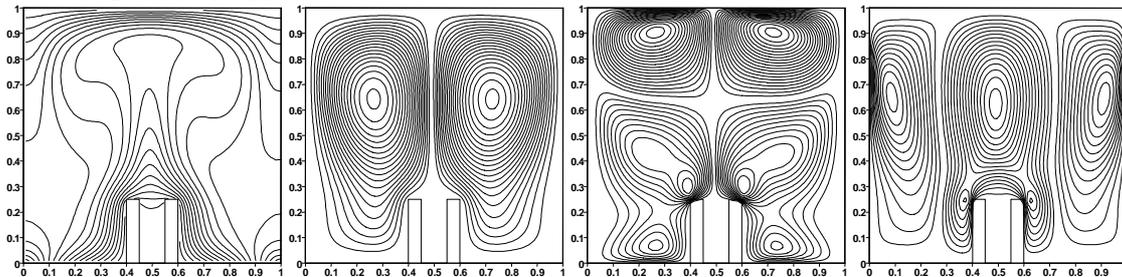
VI.4.2 Cas de deux ailettes :



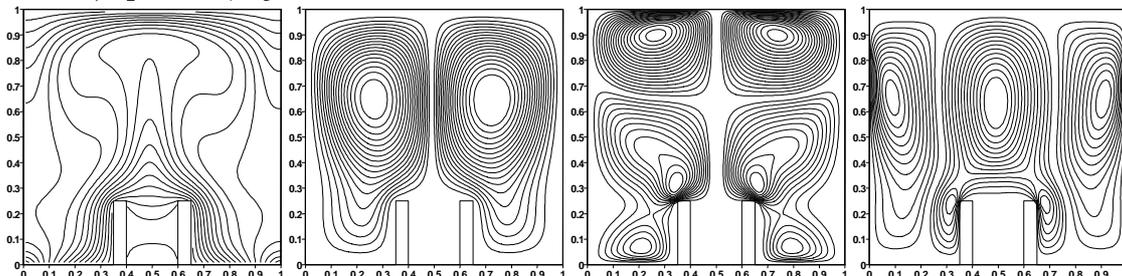
Figure(VI.28) : Géométrie de la cavité, effet de l'espacement entre ailettes.

Modèle de cavité à surface ailettee munie de deux ailettes de hauteurs constantes  $h/H=1/4$  et des espacements différents  $L_1, L_2$  et  $L_3$  ; Avec  $l/L=1/20, Pr = 0.71, T_h' = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$ .

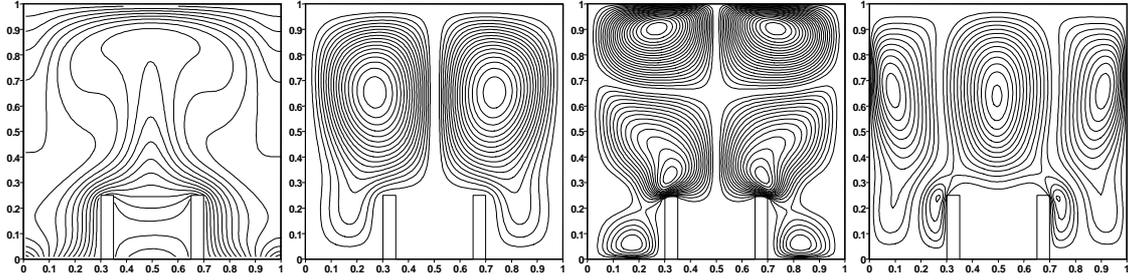
- $L_1 = 0.4 L, L_2 = 0.1 L, L_3 = 0.4 L$



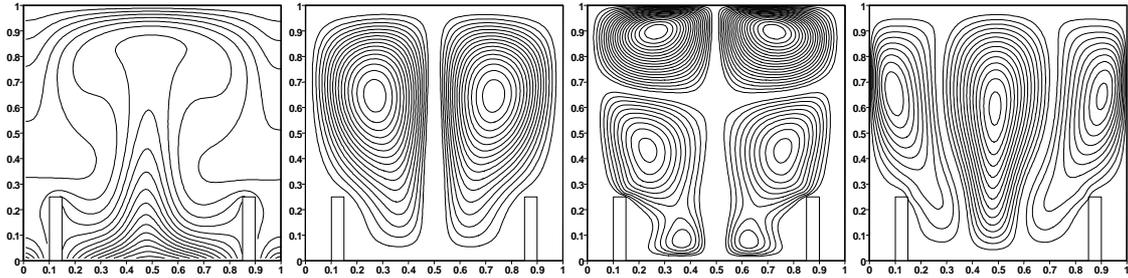
- $L_1 = 0.35 L, L_2 = 0.2 L, L_3 = 0.35 L$



- $L_1 = 0.3 L, L_2 = 0.3 L, L_3 = 0.3 L$

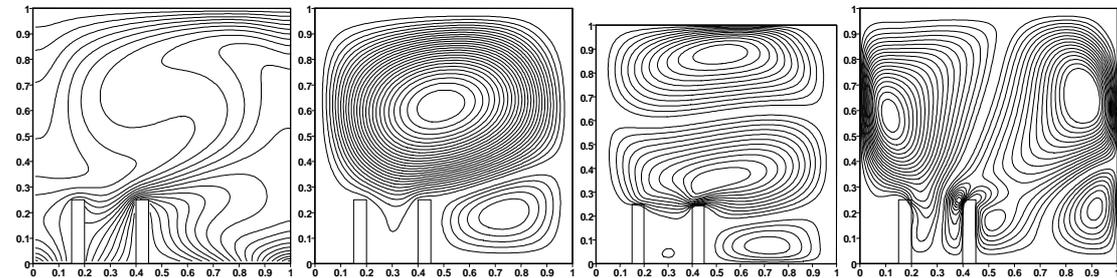


- $L_1 = 0.1 L, L_2 = 0.7 L, L_3 = 0.1 L$

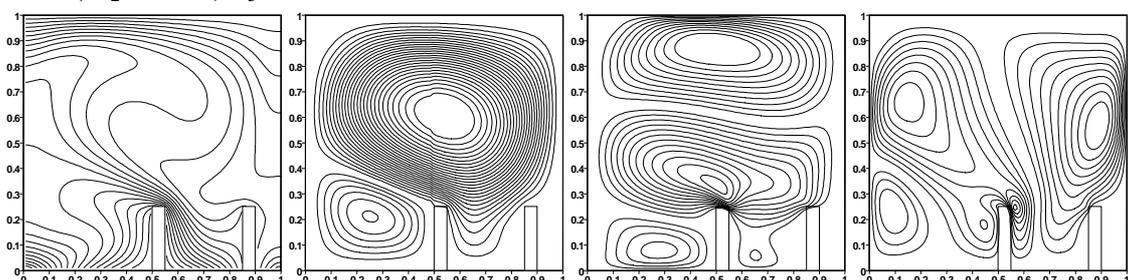


**Figure (VI.29-a) :** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  par l'effet de la variation des positions des ailettes. Espacement régulier.

- $L_1 = 0.15 L, L_2 = 0.2 L, L_3 = 0.55 L$



- $L_1 = 0.5 L, L_2 = 0.3 L, L_3 = 0.1 L$



**Figure (VI.29-b) :** Résultat pour la température, les lignes de courant et les iso-vitesse  $u$  et  $v$  par l'effet de la variation des positions des ailettes  
Espacement non régulier

Les iso-termes et les lignes de courant ainsi que les iso-vitesses pour les espacements réguliers à un nombre modéré  $Ra = 10^5$  ont été présentés sur les figures (VI.29-a). On remarque qu'il n'y a pas de différence significative entre les isothermes, les lignes de courant et les iso-vitesses.

Ces résultats indiquent que la stratification thermique entre les ailettes chauffantes a été formée comme l'espacement entre eux augmente. Deux zones de recirculation de centres différents ont lieu entre les ailettes chauffées et les parois latérales.

Comme les ailettes se rapprochent les uns des autres aux parois, les zones de recirculation ne se forment pas dans les espaces étroits en raison du blocage de l'écoulement dans les espaces implantés par les ailettes et que le mécanisme de la flottabilité n'est pas efficace dans cette région.

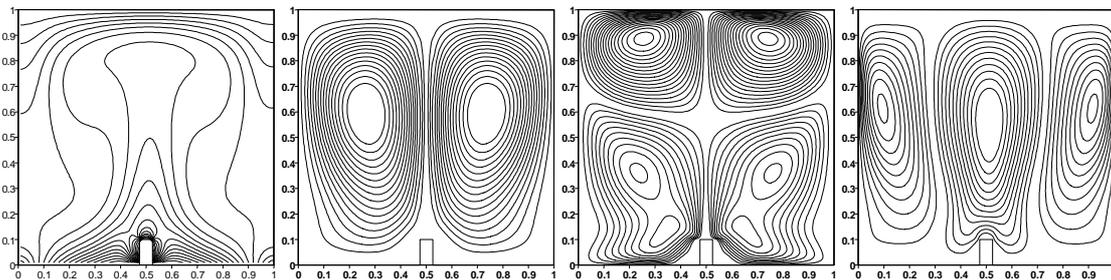
Sur les figures (VI.29-b), où l'espace entre ailettes n'est pas régulier, on remarque que l'effet sur les isothermes, les lignes de courant ainsi que les iso vitesses est très significatifs où les formes des courbes ont complètement changées.

Notons que l'écoulement dans une enceinte est plus sensible à la hauteur de l'ailette que pour son espacement. La position des ailettes a beaucoup d'effets sur l'écoulement de fluide.

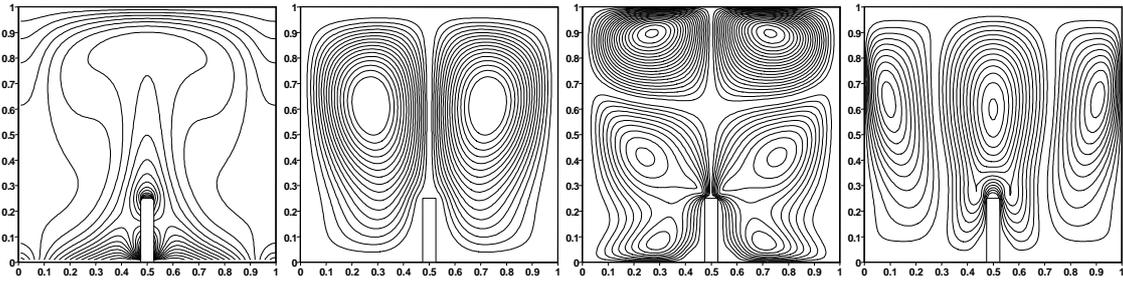
### VI.5- Effet de la variation de la hauteur :

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesses  $u$  et  $v$  respectivement :

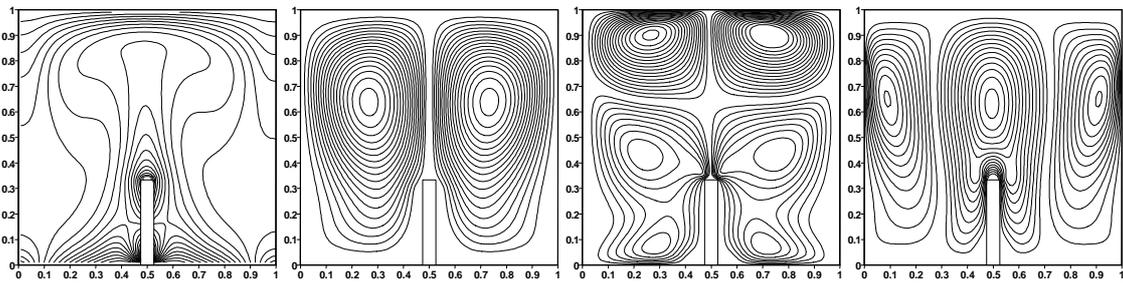
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/10$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$ .



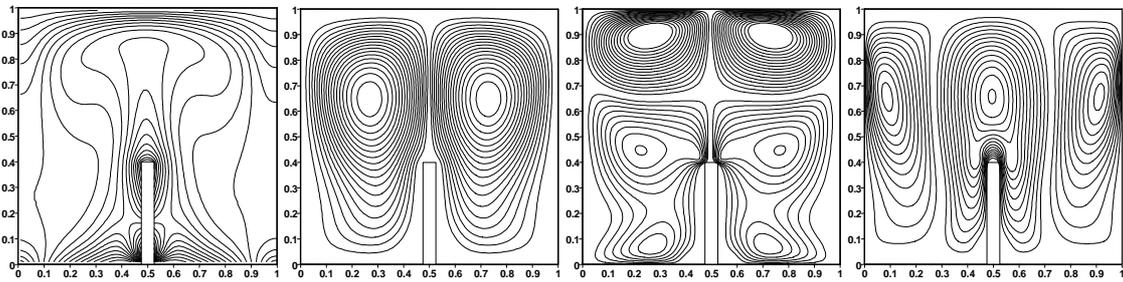
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/5$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$



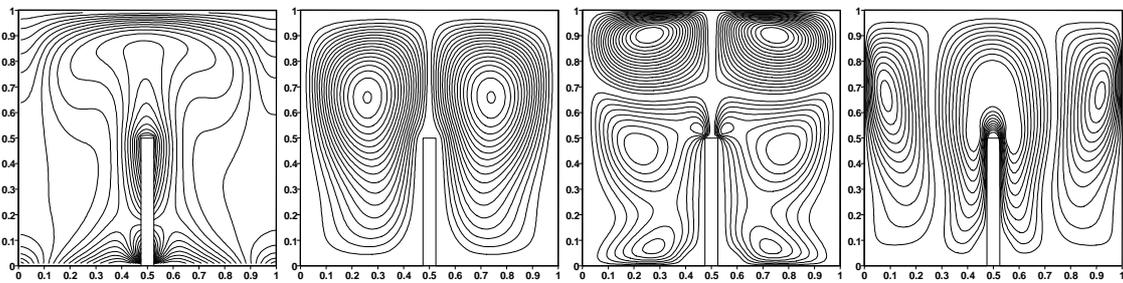
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à  $h/H = 1/3$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$ .



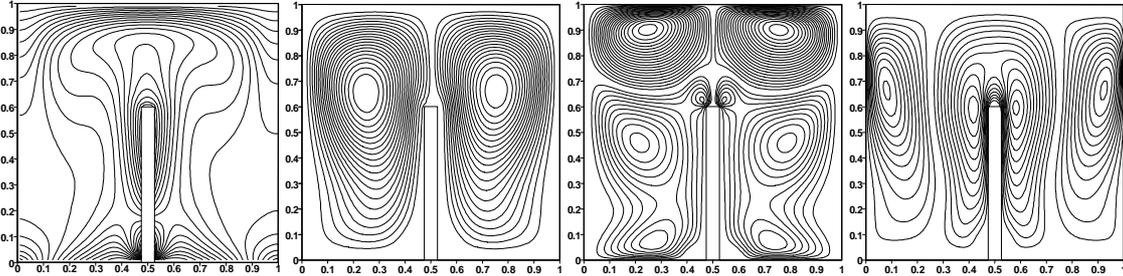
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 2/5$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



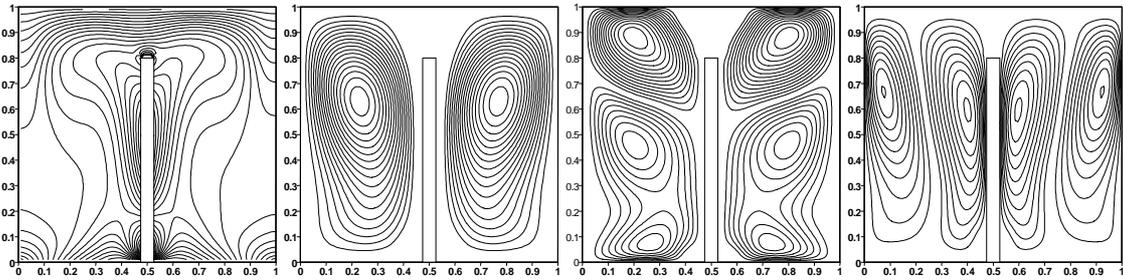
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/2$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



- Modèle de cavité utilisé dans le codage calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 3/5$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 4/5$  et sa largeur  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



**Figure (VI.30) :** Résultats des différents paramètres en fonction de la variation de la hauteur de l'ailette

L'effet de la hauteur de l'ailette sur les isothermes, les iso-courant ainsi que les iso-vitesses est démontré dans les figures (VI.30) et est étudié à  $Ra = 10^5$ . Les régimes d'écoulement et les distributions de température sont symétriques de chaque côté de l'ailette de chauffage tel que représenté sur les différentes figures.

Les isothermes correspondantes sont essentiellement parallèles à la paroi verticale supérieure et forment des demi-tourbillons à la paroi chaude inférieure, sauf le long de la surface de l'élément chauffant où ils gardent une symétrie parfaite par rapport au centre de l'enceinte.

Comme la hauteur de l'ailette augmente, cela entraîne une diminution des valeurs des lignes de courant à l'intérieur de l'enceinte. En outre, la taille de tourbillon central diminue avec l'augmentation de la hauteur de l'ailette.

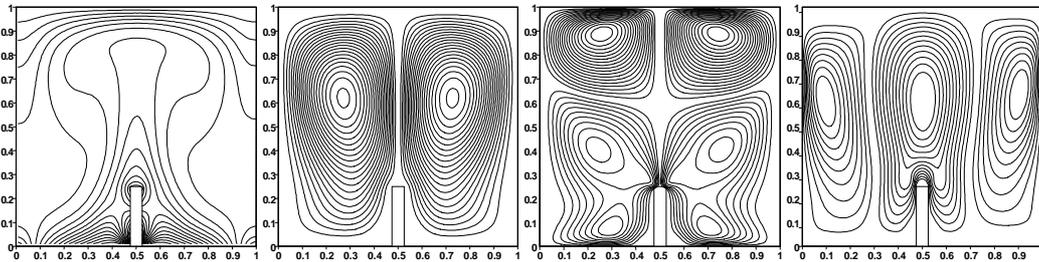
Les contours d'iso-vitesses révèlent plusieurs caractéristiques importantes. Dans les contours d'iso-vitesse- $u$ , on remarque que quatre tourbillons horizontaux qui se forment, deux au-dessous des deux autres. Deux tourbillons s'éloignent vers la paroi froide de haut tandis que les deux autres vers la paroi chaude de bas.

Pour les contours des iso-vitesse- $v$ , si trois circulations verticaux dominantes un de chaque sur les zones gauche milieu et droite de la cavité presque complètement balayée, en augmentant considérablement la hauteur de l'ailette le quatrième tourbillon vertical se forme tout en gardant la symétrie parfaite dans l'enceinte.

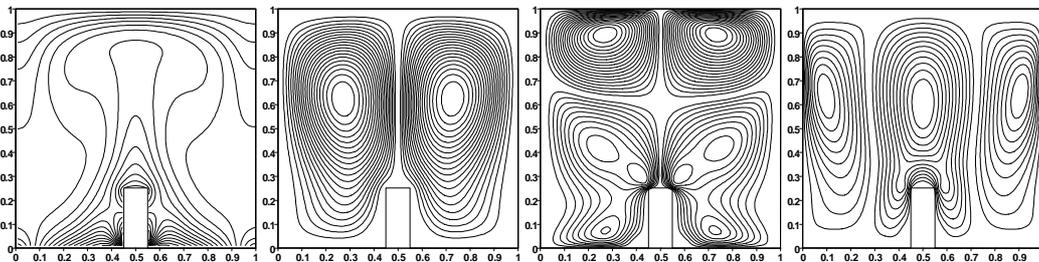
**VI.6. Effet de la variation de la largeur :**

Les résultats sont donnés sous forme d'isothermes, des lignes de courant et d'iso-vitesse  $u$  et  $v$  respectivement :

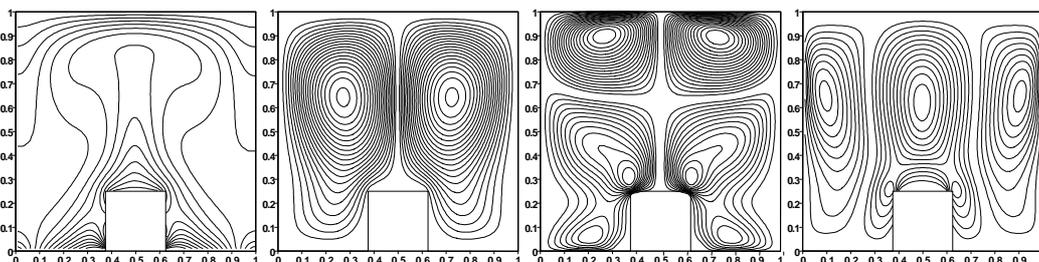
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où : La hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/4$  ; Sa largeur égale à :  $l/L = 1/20$  pour  $Ra=10^5$  et :  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



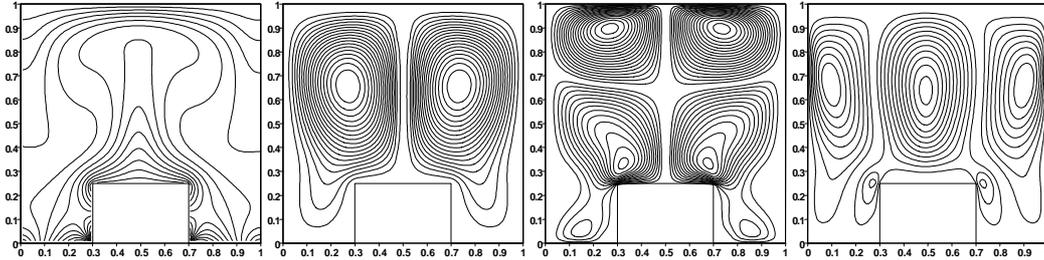
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/4$  et sa largeur  $l/L = 1/10$  pour  $Ra=10^5$  et :  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



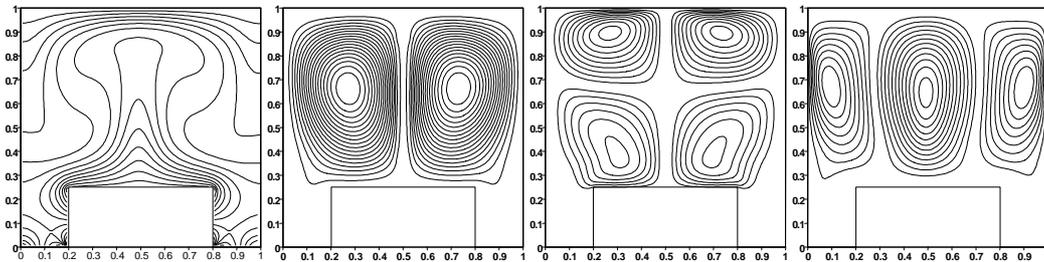
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où la hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/4$ ; Sa largeur est égale à :  $l/L = 1/5$  pour  $Ra=10^5$  et :  $T'_h = (T_h - T_c)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



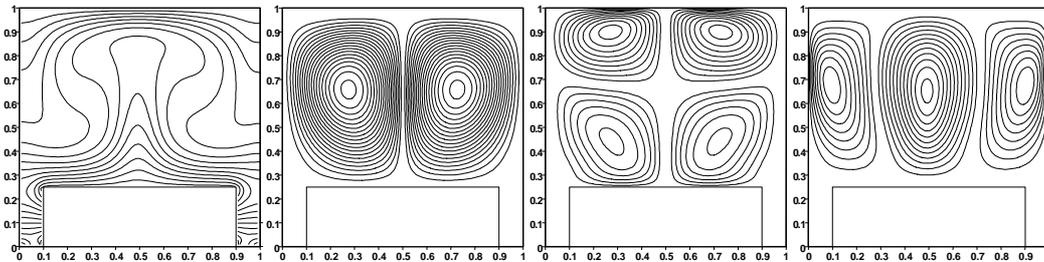
- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où : La hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/4$  ;  
Sa largeur égale à :  $l/L = 2/5$  pour  $Ra=10^5$  et:  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où : La hauteur de l'ailette est égale à :  $h/H = 1/4$  ;  
Sa largeur égale à :  $l/L = 3/5$  pour  $Ra=10^5$  et:  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



- Modèle de cavité utilisé dans le code de calcul où : La hauteur de l'ailette égale à :  $h/H = 1/4$  ;  
Sa largeur égale à :  $l/L = 4/5$  pour  $Ra=10^5$  et:  $T'_h = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + T_c$



**Figure (VI.31):** Résultats des différents paramètres en fonction de la variation de la largeur de l'ailette.

### Discussions :

L'effet de la largeur de l'ailette chauffée sur les isothermes, les lignes de courant ainsi que les vitesses  $u$  et  $v$  est illustré dans la figure (VI.31), tout en gardant la symétrie.

En raison des parois verticales adiabatiques, le fluide se développe à partir de la partie médiane de la paroi de fond et s'écoule vers le bas le long des deux parois verticales formant deux rouleaux symétriques avec des rotations dans le sens horaire et anti horaire à l'intérieur de la cavité.

La circulation de la flottabilité entraînée à l'intérieur de la cavité est considérable, de la même manière que les plus grandes amplitudes des fonctions de courant.

Les circulations sont plus grandes à proximité du centre et moins aux parois en raison de l'absence des conditions aux limites de glissement.

La plus grande circulation dans chaque moitié de la cavité suit un enveloppement progressif autour des centres de rotation, et produisent une compression plus prononcés des isothermes vers les surfaces de délimitation des enceintes. Par conséquent, les gradients de température à proximité à la fois de la paroi de fond et celle de haut ont tendance à un développement significatif d'une couche limite thermique.

Grâce à de plus grandes circulations à proximité de la partie centrale de la partie supérieure de l'enceinte, il y a de faibles gradients de température alors qu'une grande zone de stratification de température est observée à la symétrie verticale due à la stagnation de l'écoulement.

Une forte intensité de flux est observée avec l'augmentation de la largeur de l'élément chauffant, Il est intéressant de noter que l'intensité des lignes de courant diminue à mesure que la largeur de l'ailette augmente de  $l/L=1/20$  jusqu'à  $l/L=4/5$ .

On peut voir à partir de ces figures que la largeur de l'ailette augmente la résistance à la circulation qui est décalée vers le vortex de gauche.

Le vortex de gauche circule dans le sens anti horaire au-dessus de l'ailette chauffée, puisque le fluide est chauffé le long de l'ailette et de la paroi du fond, et est refroidi le long de la paroi du haut. Toutefois, le vortex droit circule dans le sens horaire à côté de la paroi de droite.

Cependant, l'intensité des lignes de courants augmente pour  $l/L=4/5$ , en raison de la formation de la couche limite mince le long de la paroi horizontale de l'enceinte, que l'élément chauffant se rapproche de la paroi horizontale du plafond.

Les contours des iso-vitesses- $u$  révèlent plusieurs caractéristiques importantes, dans les contours des iso-vitesse- $u$ , on remarque quatre tourbillons horizontaux qui se forment, deux au-dessous des deux autres, celles de dessous enveloppent l'ailette, pour une largeur plus importante de l'ailette en atteignant la valeur  $l/L=3/5$ , les deux tourbillons de haut s'éloignent vers la paroi de haut tandis que les deux autres s'éloignent de la paroi ailette.

Pour les contours des iso-vitesse- $v$ , trois circulations verticales dominantes un de chaque sur les zones gauche milieu et droite de la cavité presque complètement balayée, les allures sont simulables pour les trois premières valeurs, alors que la zone de milieu se détache de l'ailette et devienne indépendante en arrivant à la valeur  $l/L=3/5$ .

En se qui suit, différents résultats sont présentés :

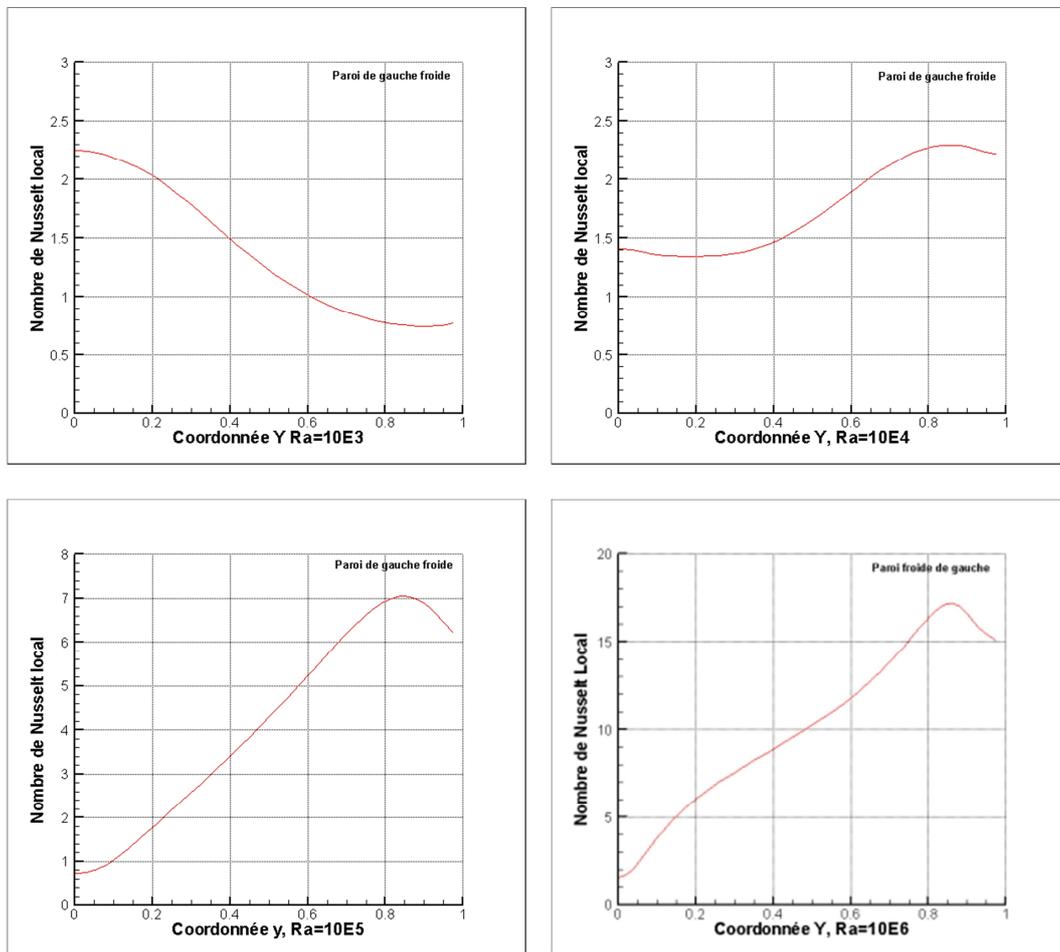
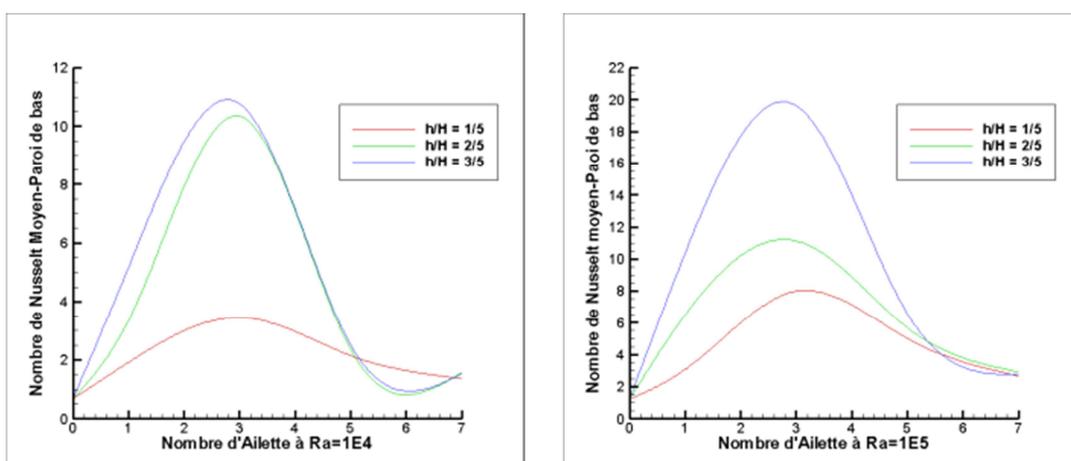


Figure (VI.32) : Nombre de *Nusselt* local à travers la paroi verticale.



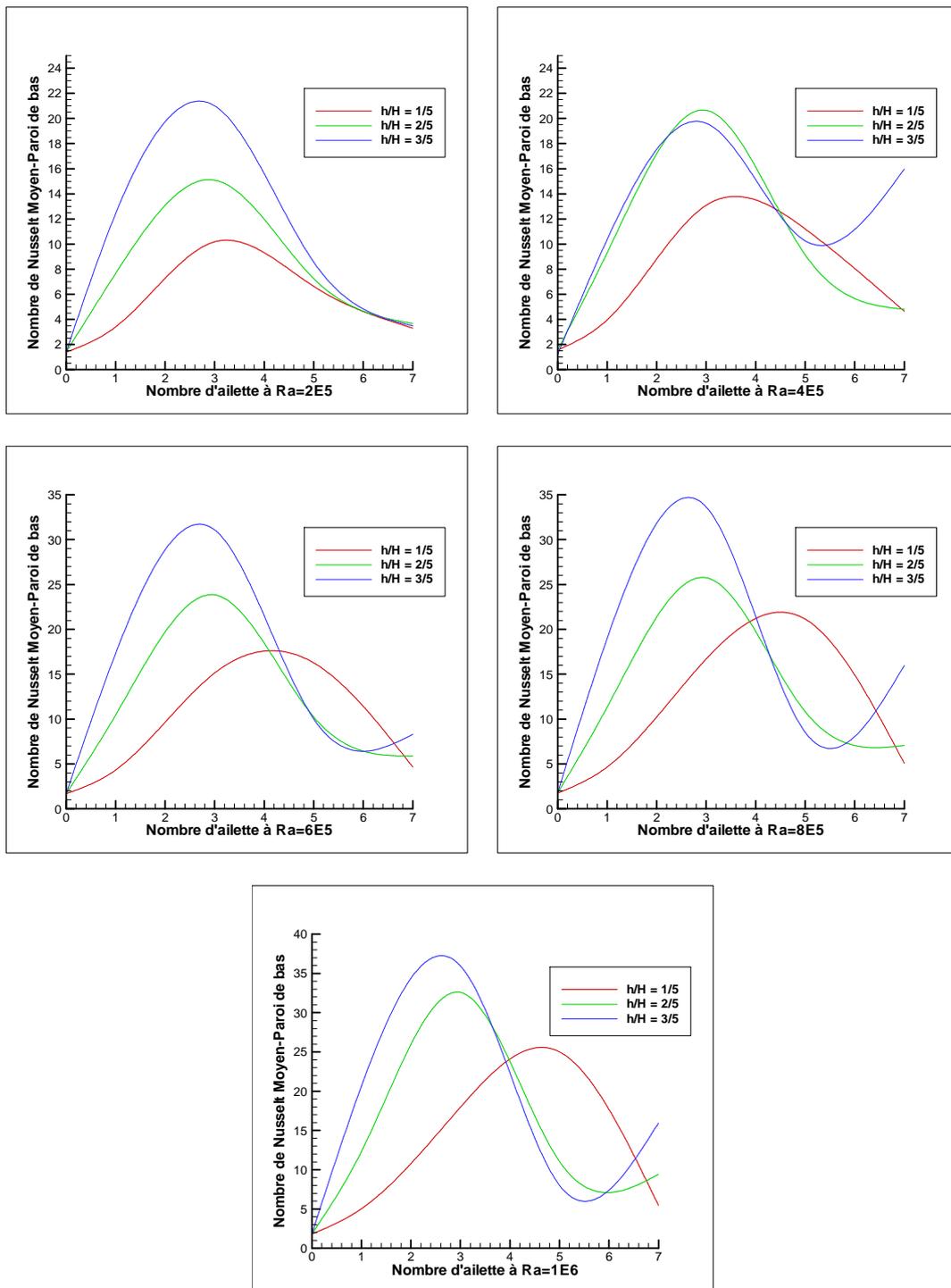
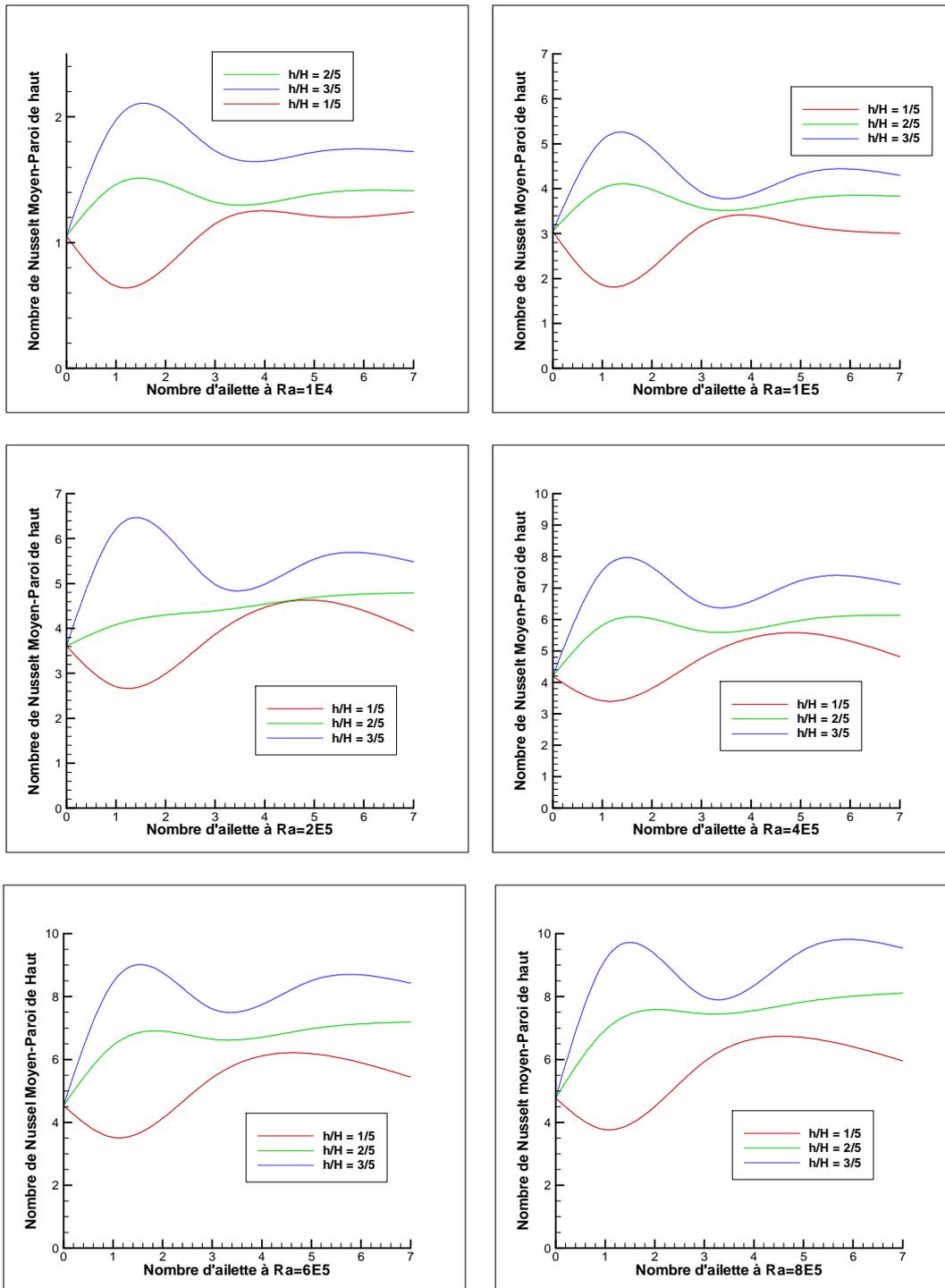


Figure (VI.33) : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre d' ailettes à la paroi du bas Pour différentes hauteurs.



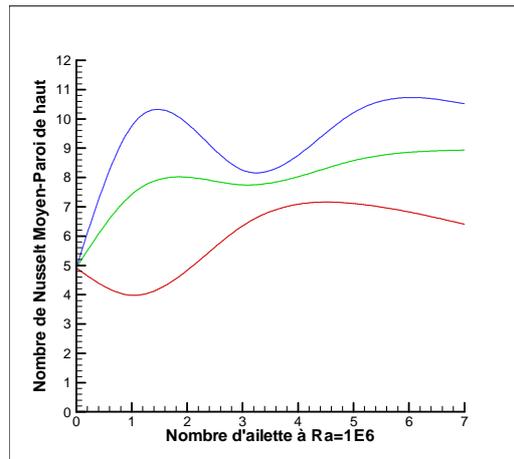
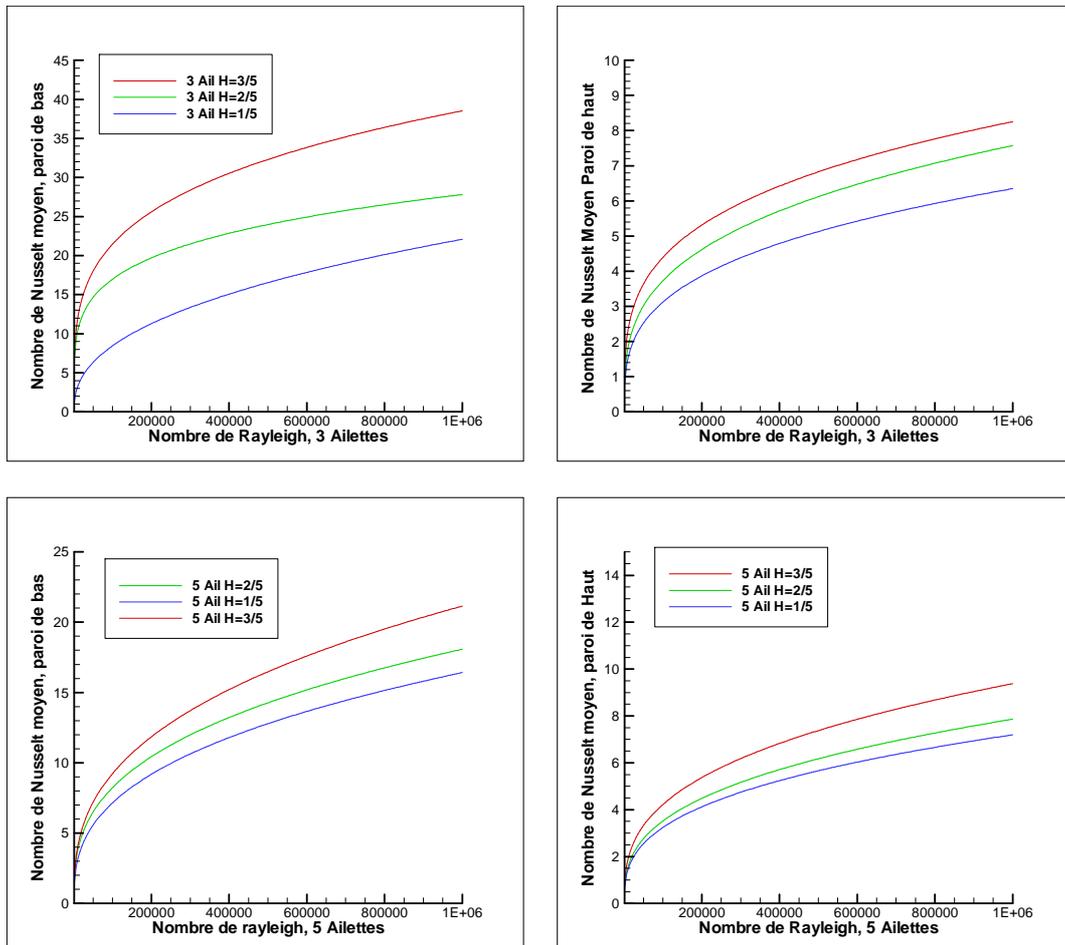


Figure (VI.34) : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre d'ailettes à la paroi de haut Pour différentes hauteurs.



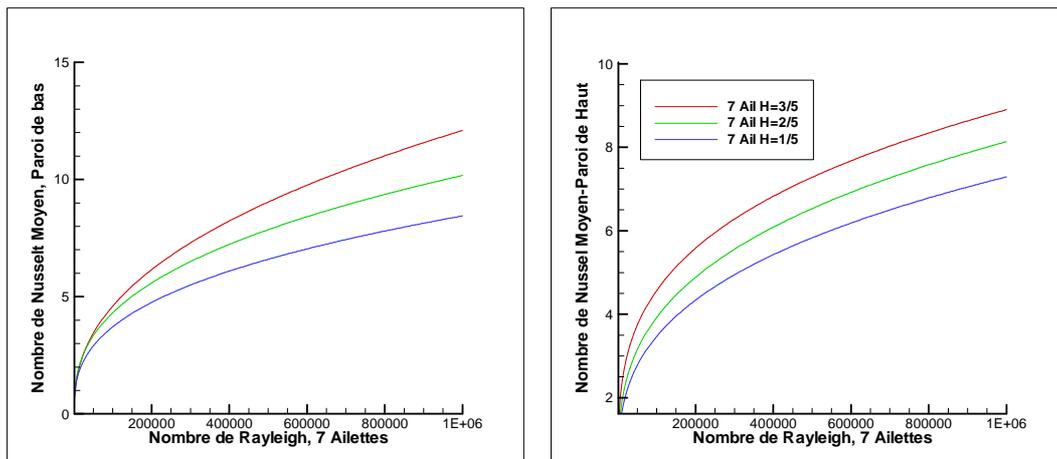
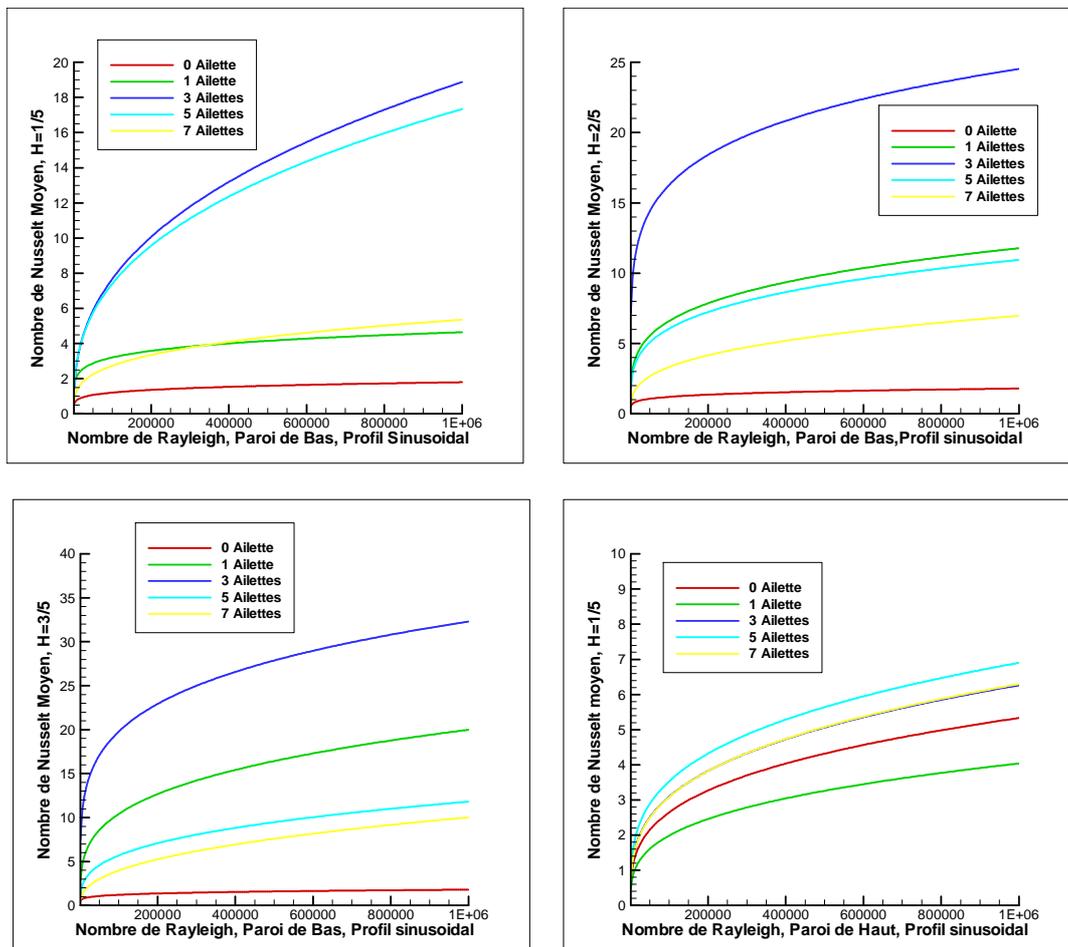


Figure (VI.35) : Nombre de *Nusselt* moyen en fonction du nombre de *Rayleigh* pour différents nombres d'ailettes et hauteurs.



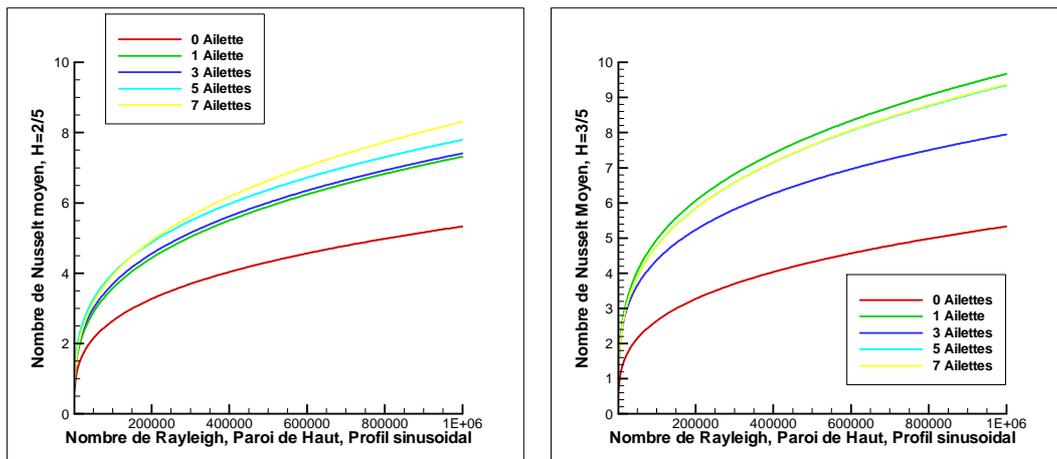


Figure (VI.36) : Nombre de *Nusselt* moyen en fonction du nombre de *Rayleigh* pour un profil de température sinusoïdale à différents nombres d'ailettes.

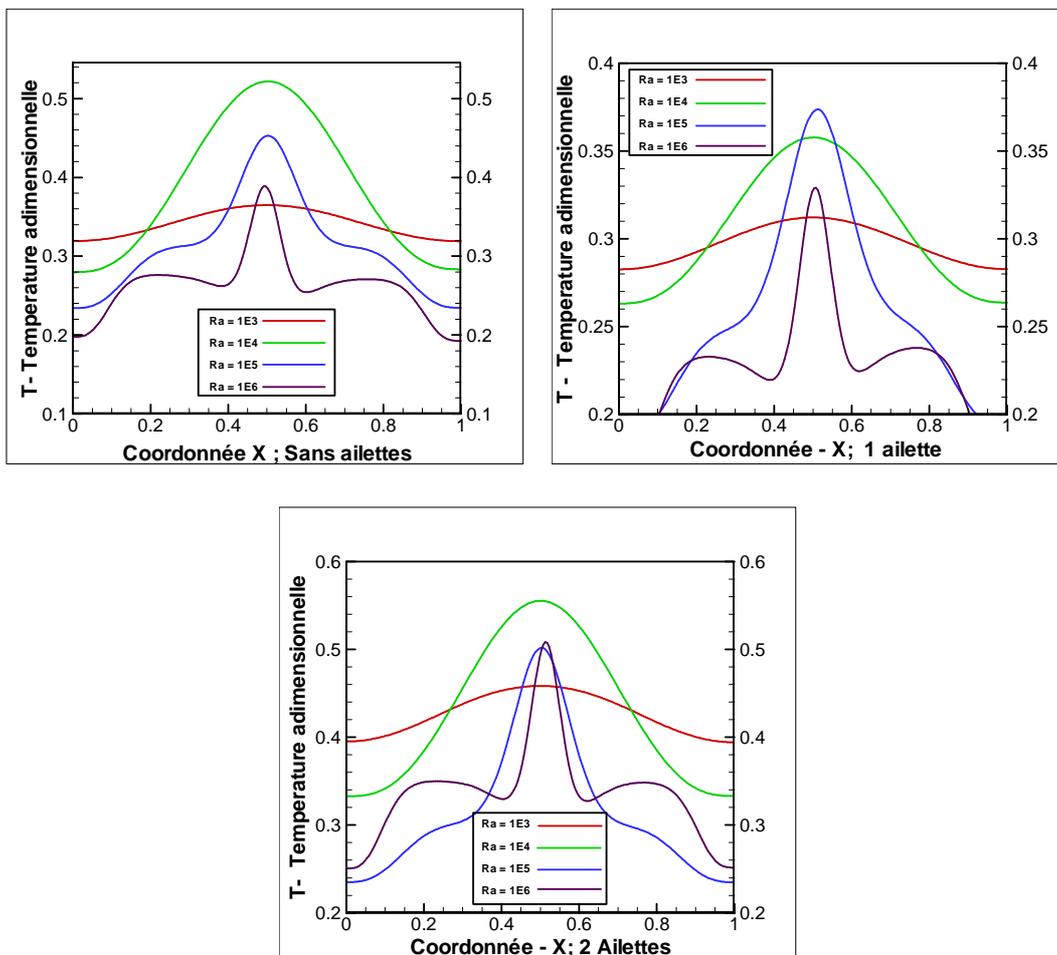


Figure (VI.37) : Profils de température pour 0 ailette, 1 ailette et 2 ailettes.

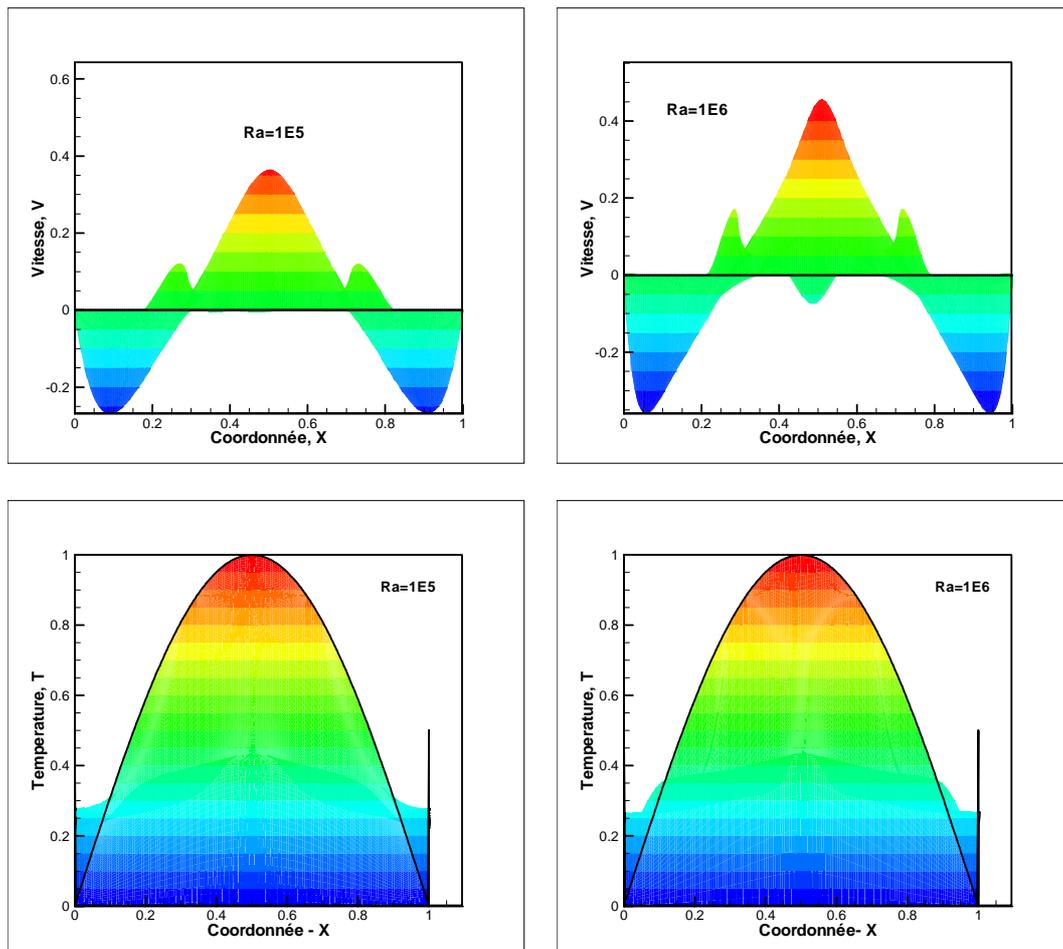


Figure (VI.38) : Profils de vitesse et de température pour  $Ra=10^5$  et  $Ra=10^6$ .

### VI.7. Conclusion :

Une étude numérique détaillée a été réalisée pour étudier la convection naturelle pour un écoulement laminaire dans une cavité carrée. La cavité est constituée d'un nombre fini d'ailettes sur la paroi de fond. L'objectif est d'améliorer le taux global de transfert de chaleur, les ailettes sont à profil de température variable sinusoïdal non uniforme, les parois verticales sont adiabatiques alors que les parois horizontales sont soumises à une température froide sur la partie haute et chaude et non uniforme sur la partie basse.

La méthode des volumes finis est utilisée, permettant ainsi d'obtenir des solutions plus réalistes en termes d'isothermes, de lignes de courant et des iso-vitesses pour une large gamme de nombre de *Rayleigh* et un nombre de *Prandtl* fixé à 0.71.

Le taux de transfert de chaleur est plus faible au niveau des bords par le chauffage non uniforme, alors qu'il présente des taux plus élevés de transfert de chaleur au centre de la paroi inférieure. Il

a été démontré que la formation de la couche limite thermique se développe sur environ 60% pour le chauffage non uniforme.

Le chauffage non-uniforme ou sinusoïdal peut être utilisé dans les petits régimes suivis par un chauffage uniforme et cette combinaison peut convenir pour atteindre une amélioration des effets de transfert de chaleur.

Les résultats obtenus sont également très utiles pour une meilleure compréhension du transfert de chaleur par convection naturelle ayant lieu dans des enceintes partitionnés, et vers le meilleur et le moins cher moyen d'atteindre une performance thermique de ces éléments de transfert de chaleur.

Enfin, nous tenons à souligner l'idée que la modélisation d'un problème de transfert de chaleur ou d'un système d'écoulement de fluide doit être guidée par les objectifs et les contraintes du système.

---

## ***CONCLUSION GENERALE***

---

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans cette thèse est relatif à une étude numérique de la convection naturelle de l'air dans des cavités de géométrie rectangulaire ou carrée différentiellement chauffées et dont l'une des faces est à surface ailettée.

Le modèle physique considéré consiste en une cavité rectangulaire, dont les parois verticales sont isolées thermiquement. Celles disposées horizontalement sont maintenues à des températures différentes : froide et constante à la paroi supérieure et chaude de profil constant ou variable, sinusoïdal ou linéaire, sur la paroi inférieure. Des ailettes identiques, à température chaude, sont placées de manière équidistante sur la paroi inférieure de la cavité.

La géométrie et les conditions aux limites thermiques imposées sur les ailettes et sur les parois ont une influence majeure sur les structures d'écoulements et les transferts thermiques générés au sein de cette géométrie.

La problématique, a été établie en utilisant une modélisation d'écoulement interne d'un fluide autour d'une surface ailettée en régime laminaire et permanent.

Les aspects, thermique et hydrodynamique, de l'écoulement ont été traités à travers la résolution numérique des équations de bilans de conservation, équation de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie, en utilisant la méthode ligne par ligne de Gauss-Seidel par combinaison avec l'algorithme de TDMA (**Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm**) et la méthode itérative point par point de Gauss-Seidel.

A cet effet, un code de calcul en langage Fortran 90, basé sur la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLE a été développé. Cette procédure permet d'estimer et corriger le calcul de la pression-vitesse sur la disposition de la grille décalée et TDMA avec des conditions aux limites adéquates et bien déterminées.

Le nombre de *Rayleigh* considéré varie dans l'intervalle  $10^3$  et  $10^6$ . Par ailleurs, la valeur relative au nombre de Prandtl considéré est 0.71, en adéquation avec le régime laminaire.

Le travail présenté dans cette thèse a apporté un certain nombre de réponses aux problèmes assez complexes de la convection naturelle dans les cavités à surfaces ailettées différentiellement chauffées. Des études de sensibilité ont été conduites dans le but de déterminer les différents paramètres influant sur le comportement thermique et dynamique de l'écoulement de fluide dans ces cavités. Il est à souligner qu'il est relativement difficile de pouvoir maîtriser les

différents paramètres influant la convection naturelle en cavité. Nous nous sommes intéressés dans ce travail à un certain nombre d'entre eux, il reste encore cependant de nombreuses études à mener afin de déterminer précisément l'influence de ces divers paramètres.

En effet, la connaissance de l'influence de certains paramètres pourrait permettre de bien mieux appréhender les écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée, et à terme, d'avoir la possibilité de maîtriser et même de contrôler ces écoulements.

Nous avons conclu dans cette étude que la prédiction numérique est une voie qui peut mener à de bons résultats. Cependant, il y a beaucoup de facteurs qui peuvent influencer la précision des résultats prédits. Par ailleurs, différents résultats peuvent être obtenus avec le même programme de simulation numérique par la même configuration, en tenant compte des différents facteurs influents, une sélection appropriée de schéma de résolution ainsi que le maillage choisi est une clé qui affecte directement la précision de calcul.

Les résultats obtenus concernent la distribution de température, les lignes de courant, les champs de vitesse ainsi que les nombres de *Nusselt* moyens. Ces résultats ont été confrontés aux solutions de Benchmark de De Vahl Davis et à d'autres solutions trouvées dans la littérature. Un bon accord a été observé entre les différents résultats.

L'étude a révélé que l'accroissement de la hauteur de l'ailette, sa largeur et son emplacement ainsi que le nombre des ailettes améliorent le transfert de chaleur dû à l'augmentation de la surface d'échange ainsi la géométrie de la cavité représentée principalement par le nombre d'ailette a grande influence sur l'écoulement du fluide.

De plus, l'utilisation des profils de température variables a pour but de se rapprocher à des cas réelles qu'on peut les appliquer par exemple aux moteurs à combustion interne (MCI) avec des cylindres munis d'ailettes.

### **Perspectives :**

La présente étude pourra offrir de nombreuses perspectives, aussi bien pédagogiques que scientifiques. En perspective, il convient de donner à ce travail une suite logique qui consiste à :

- Étendre l'étude aux régimes, transitoire et turbulent, en convection mixte ;
- Analyser la convection naturelle dans les cavités pour le cas d'écoulement de fluide avec des nano- particules ;
- Tenir compte de la conduction et du rayonnement des parois ;
- Déterminer les coefficients d'échanges convectifs par analyse des effets d'interaction fluide- structure et la continuité des flux conducto- convectif ;

- Insérer des gaz où le coefficient de convection est variable dans les cavités ;
- Faire une étude à caractère expérimental par la détermination des champs de vitesse et de température dans l'écoulement de fluide dans les cavités.

---

***REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES***

---

## Références Bibliographiques

- [1] S. Piperno, "Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure," *Thèse de doctorat en mathématiques*, Ecole des ponts et chaussées, Paris Tech, France 1995.
- [2] J. P. Moranne, "Refroidissement des moteurs à combustion interne," *Technique de l'ingénieur*, B2830-20, Novembre 1986.
- [3] S. Ostrach, "Natural Convection in Enclosures" *Advances in Heat Transfer*, Vol 8, pp 161-227, 1972 DOI :10.1016/S0065-2717(08)70039-X
- [4] I. Catton, "Natural convection in enclosures," *In: Proc. 6th International Congress on Heat Transfer, Conf., Toronto, Canada*, Vol. 6, PP. 13–31. 1978, Hemisphere, Washington, D. C.
- [5] E. Hakyemez, "Conjugate natural convection heat transfer in a cavity with finite wall Thickness," *Phd Thesis, School of Engineering and Sciences, İzmir Institute of Technology, Turkey*, May 2009
- [6] K. Akselvoll and P. Moin, "Large-Eddy Simulation (LES) of turbulent confined coannular jet," *J. Fluid Mech*, Vol.315, pp.387–411, 1996. DOI:10.1017/S0022112096002479.
- [7] J.Cai, X. Huai, R. Yan and Y. Cheng, "Numerical simulation on enhancement of natural convection heat transfer by acoustic-cavitations in a square enclosure." *Applied Thermal Engineering*, Vol. 29, pp.1973-1982, 2009. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2008.09.015.
- [8] N. Lin and A. Bejan, "Natural Convection in a Partially Divided Enclosure," *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 26. No.12, pp. 1867-1878, 1983. DOI: 10.1016/S0017-9310(83)80157.
- [9] F. Ampofo, "Turbulent natural convection of air in a non-partitioned or partitioned cavity With differentially heated vertical and conducting horizontal walls," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 29, pp.137–157, 2005. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2004.02.005.
- [10] S.A. Nada, "Natural convection heat transfer in horizontal and vertical closed narrow enclosures with heated rectangular finned base plate," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp.667–679, 2007. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.07.010.

- [11] S.K. Mahapatra; A. Sarkar, "Numerical simulation of opposing mixed convection in differentially heated square enclosure with partition." *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 46, pp.970–979, 2007. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2006.11.017.
- [12] F. Corvaro, M. Paroncini, "An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2D-PIV system," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 355–365, 2009.  
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.05.039.
- [13] C. Butler, D. Newport, M. Geron, "Natural convection experiments on a heated horizontal cylinder in a differentially heated square cavity," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol.44, pp.199–208, 2013.  
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2012.06.009.
- [14] W.-S. Fu and W.-J. Shieh; "A penalty finite element method for natural convection heat transfer in a partially divided enclosure," *International Comm. Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 323-332, 1988. DOI: 10.1016/0735-1933(88)90033-4.
- [15] M. Hasnaoui, E. Bilgen, and P. Vasseur," Natural convection above an array of open cavities heated from below," *Numerical Heat transfer, Part A*, Vol. 18, pp. 463-482, 1990. DOI: 10.1080/10407789008944803
- [16] M. H. Novak and E. S. Nowak, " The CAV program for numerical evaluation of laminar natural convection heat transfer in vertical rectangular cavities, " *Computer Physics communications*, Vol.78, pp.95-104, 1993. DOI: 10.1016/0010-4655(93)90145-3.
- [17] E. K. Lakhal, E. Bilgen, P. Vasseur, "Natural convection and conduction in inclined enclosures bounded by a wall with honeycomb structure," *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol, 38, No. 8, pp.1397-1407, 1995.  
DOI: 10.1016/0017-9310(94)00267-Y ISBN: 0017-9310.
- [18] R. Kumart, " Three-dimensional natural convective flow in a vertical annulus with longitudinal fins, " *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.40, No. 14, pp. 3323- 3334, 1997. DOI: 10.1016/S0017-9310(96)00379-1.
- [19] S-P. How, T-H. Hsu, " Transient Mixed Convection in a Partially Divided Enclosure, " *Computers Math. Applic*, Vol. 36, No. 8, pp. 95-115, 1998.  
DOI: 10.1016/S0898-1221(98)00186-2.
- [20] C. Young Han and S. Wook Baek, "The effects of Radiation on Natural Convection in A Rectangular Eclosure Divided by Two Partitions". *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 37, pp. 249 -270, 2000. DOI: 10.1080/104077800274280.

- [21] I. Dagtekin and H.F. Oztop, “Natural Convection Heat Transfer by Heated Partitions Within Enclosure,” *International Communication Heat Mass Transfer*, Vol. 28, No. 6, pp. 823-834 2001. DOI: 10.1016/S0735-1933(01)00286-X.
- [22] N. Yucel, A.H. Ozdem, “ Natural convection in partially divided square enclosure,” *Heat and Mass Transfer*, Vol.40, pp.167–175, 2003. DOI: 10.1007/s00231-002-0361-4.
- [23] A.K. da Silva, L. Gosselin, “On the thermal performance of an internally finned three-dimensional cubic enclosure in natural convection,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 540–546, 2005. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2004.11.011.
- [24] E. Bilgen, “ Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 3493–3505,2005. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.03.016.
- [25] H. Oztop, E. Bilgen, “Natural convection in differentially heated and partially divided square cavities with internal heat generation,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.27, pp.466–475, 2006. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2005.11.003.
- [26] P. Joubert, “A numerical exercise for turbulent natural convection and pollutant diffusion in a two-dimensional partially partitioned cavity,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 311–322, 2005. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2004.09.005.
- [27] G. V. Kuznetsov and M. A. Sheremet, “Two-Dimensional Problem of Natural Convection in a Rectangular Domain with Local Heating and Heat-Conducting Boundaries of Finite Thickness,” *Fluid Dynamics*, Vol. 41, No. 6, pp. 881–890, 2006. DOI: 10.1007/s10697-006-0103-2.
- [28] A. F. Fahaid, “ Numerical study of conjugate heat transfer in enclosures with fins attached to a vertical Sidewall” *Kuwait J. Sc. Eng.* Vol. 33, pp. 205-208, 2006.
- [29] A. Ben-Nakhi and A. J. Chamkha, “Conjugate natural convection in a square enclosure with inclined thin fin of arbitrary length,” *International Journal of Thermal Sciences* , Vol. 46, pp. 467–478, 2007. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2006.07.008.
- [30] Y. Varol, H. F. Oztop and A. Varol, “Effects of thin fin on natural convection in porous triangular enclosures.” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 46, pp. 1033–1045, 2007. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2006.11.001.
- [31] A. Koca, “ Numerical analysis of conjugate heat transfer in a partially open square cavity with a vertical heat source,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 1385–1395, 2008. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.07.018.

- [32] C. Sun, B. Yu, H. F. Oztop, Y. Wang and J. Wei, “ Control of mixed convection in driven enclosures using conductive triangular fins,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, pp. 894–909, 2011.  
DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.09.068.
- [33] A. Al Amiri, K. Khanafer, I. Pop, “Buoyancy-induced flow and heat transfer in a partially divided square enclosure,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp.3818–3828, 2009. DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.01.043.
- [34] N. Kasayapanand and T. Kiatsiriroat, “ Enhanced heat transfer in partially open square cavities with thin fin by using electric field” *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, pp. 287–296, 2009. DOI:10.1016/j.enconman.2008.09.031.
- [35] A. Bahlaoui, A. Rajia, M. Hasnaoui, M. Naïmi, T. Makayssi and M. Lamsaadi, " Mixed convection cooling combined with surface radiation in a partitioned rectangular cavity,” *Energy Conversion and Management*, Vol 50, pp. 626–635, 2009.  
DOI:10.1016/j.enconman.2008.10.001.
- [36] A. H. Mahmoudi, M. Shahi, A. Honarbakhsh Raouf and A. Ghasemian, “ Numerical study of natural convection cooling of horizontal heat source mounted in a square cavity filled with nanofluid,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1135–1141, 2010. DOI:10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.06.005.
- [37] Geniy V. Kuznetsov and Mikhail A. Sheremet, “Numerical simulation of turbulent natural convection in a rectangular enclosure having finite thickness wall,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, pp.163–177, 2010.  
DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.09.043
- [38] E. Fontana, A. Da Silva and V. C. Mariani, “Natural convection in a partially open square cavity with internal heat source: An analysis of the opening mass flow,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, pp.1369–1386, 2011.  
DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.11.053.
- [39] A. H. Mahmoudi, M. Shahi, A. Moheb Shahedin and N. Hemati, “Numerical modeling of natural convection in an open cavity with two vertical thin heat sources subjected to a nanofluid,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 110–118, 2011. DOI:10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.09.009.
- [40] A. K. Sharma, A. Pradeep, K. Velusamy, P. Chellapandi and B. Raj, “ Interaction of natural convection flow in multiple open cavities formed due to horizontal fins,” *Annals of Nuclear Energy*, Vol.38, pp. 1906–1915, 2011. DOI:10.1016/j.anucene.2011.05.007.

- [41] V.A.F. Costa, “Natural convection in partially divided square enclosures: Effects of thermal boundary conditions and thermal conductivity of the partitions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 7812-7822, 2012. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.08.004.
- [42] F. Selim efendigil and H. F. Öztop, “Fuzzy-based estimation of mixed convection heat transfer in a square cavity in the presence of an adiabatic inclined fin,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, pp.1639–1646, 2012. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.10.006.
- [43] C. Benseghir and S. Rahal, “ Simulation of heat transfer in a square cavity with two fins attached to the hot wall,” *Energy Procedia*, Vol.18, pp. 1299 – 1306, 2012. DOI: 10.1016/j.egypro.2012.05.147.
- [44] A. Arefmanesh, M. Najafi and S.H. Musavi, “Buoyancy-driven fluidflow and heat transfer in a square cavity with a wavy baffle- meshless numerical analysis,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp.366–382, 2013. DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.11.004.
- [45] E. Fontana, C. A. Capeletto, A. da Silva and V. C. Mariani, “ Three-dimensional analysis of natural convection in a partially open-cavity with internal heat source,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 61, pp.525–542, 2013. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.047.
- [46] R. Abhinav, P.B. Shyam Sunder, A. Gowrishankar, S. Vignesh, M. Vivek and V. R. Kishore, “Numerical study on effect of vent locations on natural convection in an enclosure with an internal heat source,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol.49, pp. 69–77, 2013. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2013.09.001.
- [47] S. G. Martyusheva and M. A. Sheremeta, “Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in an air filled cavity with internal heat source,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol.76, pp. 51-6, 2014. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2013.08.012 ISBN: 1290-0729
- [48] K. Khanafer, A. Alamiri and J. Bull, “ Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated cavity with a thin porous fin attached to the hot wall,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 87, pp. 59-70, 2015. DOI :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.03.077.
- [49] A. Elatar, M. A. Teamah and M. A. Hassab, “Numerical study of laminar natural convection inside square enclosure with single horizontal fin,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 99, pp. 41-51, 2016. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2015.08.003.

- [50] A. Azimifar and S. Payan, “Optimization of characteristics of an array of thin fins using PSO algorithm in confined cavities heated from a side with free convection,” *Applied Thermal Engineering*, Vol., pp. 1371-1388, 2017.  
DOI : 10.1016/j.applthermaleng.2016.08.012.
- [51] M. Khatamifar, W. Lin, S.W. Armfield, D. W. Holmes and M.P. Kirkpatrick, “Conjugate natural convection heat transfer in a partitioned differentially-heated square cavity,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 81, pp. 92-103, 2017. DOI :10.1016/j.icheatmasstransfer.2016.12.003.
- [52] M. Torabi, A. Keyhani and G.P. Peterson, “A comprehensive investigation of natural convection inside a partially differentially heated cavity with a thin fin using two-set lattice Boltzmann distribution functions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 115, Part A, pp. 264-277, 2017.  
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.07.042.
- [53] W. Al-Kouz, A. Alshare, S. Kiwan, A. Al-Muhtady and H. Saadeh, “Two-dimensional analysis of low-pressure flows in an inclined square cavity with two fins attached to the hot wall,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 126, pp. 181-193, 2018.  
DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.005.
- [54] D. V. Nair and P.S. Ghoshdastidar, “A comparative study of 2-D and 3-D conjugate natural convection from a vertical rectangular fin array with multilayered base subjected to distributed high heat flux,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 121, pp. 1316-1334, 2018. DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.12.037.
- [55] J. E. Vesper, S.C. Tietjen, M. Chakkingal and S. Kenjereš, “Numerical analysis of effects of fins and conductive walls on heat transfer in side heated cavities- onset of three-dimensional phenomena in natural convection,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 183, Part B, pp. 122-033, 2022.  
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122033 ISBN: 0017-9310.
- [56] D. D. Gray and A. Giorgini, “The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 125-131, 1976. DOI: 10.1016/0017-9310(76)90168-X.
- [57] R. A. W. M. Henkes, “Natural-Convection Boundary Layers,” *PhD Thesis*, Technical University of Delft, The Netherlands, 1990.
- [58] F. Ampofo and T. G. Karayiannis, “Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3551-3572, 2003. DOI: 10.1016/S0017-9310(03)00147-9.

- [59] D. C. Wilcox, "Turbulence Modelling for CFD," *DCW Industries*, Canada, 1993.
- [60] S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow," *Hemisphere Publishing Corporation Book Company*, New York, USA, 1980.
- [61] P. Galon, "Méthode des Volumes Finis pour les écoulements compressibles," *CEN Saclay bat.607 91191gif*, Yvette, FRANCE.
- [62] F. H. Harlow and J. E. Welch, "Numerical calculation for time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *Physics of Fluids*, Vol. 8, pp. 2182-2189, 1965.
- [63] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, "An introduction to computational fluid dynamics-The finite volume method," Copyright Licensing Agency Ltd, Saffron House, London, UK, 2007.
- [64] S. V. Patankar, S. V. and D. B. Spalding, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, Issue 10, pp. 1787-1806, 1972. DOI :10.1016/0017-9310(72)90054-3.
- [65] C. Shu ad H. Xue, "Comparison of two approaches for implementing stream function boundary conditions in DQ simulation of natural convection in a square cavity," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, Issue 1, pp. 59-68, 1998. DOI: 10.1016/S0142-727X(97)10010-8.
- [66] D. C. Lo, D. L. Young and K. Murugesan," GDQ method for natural convection in a square cavity using velocity– vorticity formulation," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 47, pp.321–341, 2000. DOI:10.1080/10407790590901585 ISBN: 1040-7790.
- [67] M. Boussaid, A. Mezenner and M. Bouhadeif, "Convection naturelle de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale," *International Journal of Thermal science*, Vol.38, pp. 363-371, 1999. DOI: 10.1016/S1290-0729(99)80103-3.
- [68] D. B. Spalding, "A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives." *Znt. J. Num Methods Eng.*, Vol.4, p. 551. 1972. DOI: 10.1002/nme.1620040409.
- [69] G. D. Raithby and K. E. Torrance, "Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow." *Comput. Fluids*, Vol. 2, p. 191-210, 1974. DOI: 10.1016/0045-7930(74)90013-9.
- [70] D. C. Wan, B. S. V. Patnaik and G. W. Wei, "A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution," *Num. Heat Trans.* Vol.40, pp.199-228, 2010. DOI :10.1080/104077901752379620.

- [71] G. Barakos, E. Mitsoulis and D. Assimacopoulos, “Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions,” *Int. J. Num. Meth. Flui.* Vol. 18, pp. 695-719, 1994. DOI:10.1002/FLD.1650180705.
- [72] G. De Vahl Davis, “Natural Convection of Air in a square Cavity : A Benchmark numerical solution,” *Int., J., Numer. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 249-264, 1983. DOI:10.1002/flid.1650030305.
- [73] A. Al Amiri, K. Khanafer and I. Pop; “Buoyancy-induced flow and heat transfer in a partially divided square enclosure,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp.3818–3828, 2009. DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.01.043.