



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus (LCP)



Mémoire de projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Automatique

Contribution à l'estimation non-asymptotique basée sur les fonctions modulatrices pour les systèmes d'ordre fractionnaire

Réalisé par :

M. AKHROUF Abderrahim

M. BOUKAF Mohamed

Encadré par :

Pr. CHAKIR Messaoud

Pr. LALEG Taous Meriem

Pr. BELKHATIR Zehor

Présenté et soutenu publiquement le 25/06/2023.

Composition du jury :

- | | | | |
|-----------------|-------------------------|----|------------------------------|
| - Président | M. BOUDJEMA Fares | Pr | ENP |
| - Examineur | M. TADJINE Mohamed | Pr | ENP |
| - Promoteur | M. CHAKIR Messaoud | Pr | ENP |
| - Co-promotrice | Mme. LALEG Taous Meriem | Pr | INRIA |
| - Co-promotrice | Mme. BELKHATIR Zehor | Pr | Université de
Southampton |



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus (LCP)



Mémoire de projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Automatique

Contribution à l'estimation non-asymptotique basée sur les fonctions modulatrices pour les systèmes d'ordre fractionnaire

Réalisé par :

M. AKHROUF Abderrahim
M. BOUKAF Mohamed

Encadré par :

Pr. CHAKIR Messaoud
Pr. LALEG Taous Meriem
Pr. BELKHATIR Zehor

Présenté et soutenu publiquement le 25/06/2023.

Composition du jury :

- | | | | |
|-----------------|-------------------------|----|------------------------------|
| - Président | M. BOUDJEMA Fares | Pr | ENP |
| - Examineur | M. TADJINE Mohamed | Pr | ENP |
| - Promoteur | M. CHAKIR Messaoud | Pr | ENP |
| - Co-promotrice | Mme. LALEG Taous Meriem | Pr | INRIA |
| - Co-promotrice | Mme. BELKHATIR Zehor | Pr | Université de
Southampton |

هذا العمل يركز بشكل أساسي على طرق التقدير غيرالمتقاربة التي تعتمد على الاعتبارات الهندسية والنهج التكاملي، باستنادها إلى نظرية الدوال المعدلة. تُطبق هذه الطرق بشكل رئيسي على الأنظمة غير صحيحة الرتبة. نعمم مقدر الأوامر الكسرية المشتركة والمعاملات أو الإشارات لنظام خطي كسري، مما يؤكد التقارب العالمي. وبذلك يتم حل مشكلة التمهيد التي واجهتها التقديرات الموجودة حتى الآن، بالاعتماد على خوارزمية جينية تكون قوية منهجياً. تم إجراء دراسة حالة على تقدير إشارات نظام القلب والأوعية الدموية لتحقيق صحة خوارزمية التقدير السابقة، مما أظهر نتائج أفضل من الأبحاث الحديثة. بعد ذلك، نقترح طريقة لتقدير الحالات للأنظمة غير الخطية، سواء كانت من الرتبة الصحيحة أو الكسرية. طوال هذه الدراسة، تم إجراء تحليلات الحساسية للمقدرات المختلفة التي تم تطويرها، مما يسلط الضوء على حساسيتها لاختيار المعاملات والبيانات المستخدمة، مما يتيح لنا تسليط الضوء على حدود هذا النهج

كلمات مفتاحية : متانة ، تقارب في وقت محدد ، تقدير غير مقارنة ، أنظمة غير الخطية ، أنظمة ذات أساس كسري ، الدوال المعدلة

Abstract

This work focuses on non-asymptotic estimation methods constructed based on geometric considerations and an integral approach, relying on *Modulating Functions* theory and primarily applied to fractional systems. We extend the joint estimator for fractional orders and parameters or signals of a linear fractional system with global convergence, thus resolving the initialization problem encountered by existing estimators. This estimator is based on a heuristic genetic algorithm and is robust against noise. A case study on the estimation of signals from a cardiovascular system is then conducted, allowing us to validate the aforementioned estimation algorithm while proposing results superior to those of recent research. Subsequently, we propose an estimation method for nonlinear fractional and integer-order systems states. Sensitivity analyses were performed throughout the work for the different devised estimators, enabling us to assess their sensitivity to parameters tuning and data usage, thereby highlighting the limitations of the method.

Keywords : Modulating functions, fractional systems, nonlinear systems, non-asymptotic estimation, finite-time convergence, robustness.

Résumé

Ce travail s'intéresse principalement aux méthodes d'estimation non-asymptotique qui reposent sur des considérations géométriques et une approche intégrale, en s'appuyant sur la théorie des *Fonctions Modulatrices*. Ces méthodes sont principalement appliquées aux systèmes d'ordre non entier. Nous généralisons l'estimateur conjoint des ordres fractionnaires et des paramètres ou signaux d'un système linéaire fractionnaire, assurant une convergence globale. Cela résout le problème d'initialisation rencontré jusqu'à présent par les estimateurs existants, en se basant sur un algorithme heuristique génétique robuste. Une étude de cas sur l'estimation des signaux d'un système cardio-vasculaire a été réalisée pour valider l'algorithme d'estimation précédent, démontrant des résultats supérieurs à ceux des recherches récentes. Nous proposons ensuite une méthode d'estimation des états pour les systèmes non linéaires, qu'ils soient d'ordre entier ou fractionnaire. Tout au long de cette étude, des analyses de sensibilité ont été effectuées pour les différents estimateurs développés, mettant en évidence leur sensibilité au choix des paramètres et aux données utilisées, nous permettant ainsi de souligner les limites de cette approche.

Mots clés : Fonctions modulatrices, systèmes fractionnaires, systèmes non linéaires, estimation non-asymptotique, convergence en temps fini, robustesse.

Dédicaces

“

*À la lumière de ma vie et ma raison d'être, ma maman que
j'aime plus que tout,*

*À l'homme qui m'a fait grandir et qui m'a tout appris, ,
celui à qui je dois ma réussite, mon papa,*

*À mon pilier dans la vie, celle qui a toujours été à mes
côtés, ma sœur que je chéris,*

*À mes acolytes avec lesquels nous avançons contre vents et
marrées, ils se reconnaîtront,*

À la mémoire de ceux qui ne sont plus là,

Je dédie ce modeste travail,

”

- Mohamed

“

*À ma chère maman, à mon cher papa, merci d'être à mes
côtés,*

À ma sœur Lyna, à mon frère Abdelmalek, je vous aime,

*À mon cher comité avec qui j'ai vécu une année
exceptionnelle,*

À mes chers amis qui étaient là durant ce voyage, l'ENB,

À mon cher compagnon, Serron,

Je dédie ce modeste travail,

”

- Abderrahim

Remerciements

Avant toute chose, nous louons Allah, le Tout-Puissant de nous avoir donné cette opportunité et accordé la capacité et la patience pour mener à bien ce travail.

Parce qu'aucun travail n'est le fruit d'un effort individuel, et parce que ce qui reste à la fin de chaque projet est la mémoire des gens qui croisent notre chemin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'études.

Nous aimerions remercier chaleureusement nos encadreurs, Pr. LALEG-KIRATI, Pr. BELKHATIR et Pr. CHAKIR d'abord pour leur soutien continu tout au long de notre projet de fin d'études, pour leurs directives et leurs conseils avisés, et pour leurs encouragements chaleureux, même pendant les moments de doute.

Nos vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury qui nous font l'honneur d'évaluer notre travail, Pr. BOUDJEMA et Pr. TADJINE.

Notre gratitude s'étend à tous les enseignants du département d'Automatique et de l'École Nationale Polytechnique de façon générale pour tout ce qu'ils nous ont enseigné durant ces cinq années d'études.

Enfin, nous témoignons notre profonde gratitude à nos chers parents et familles respectives, puisse Dieu les bénir, pour leur soutien continu, leurs encouragements et appui inconditionnel tout au long de la réalisation de ce projet de fin d'études.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des acronymes

Introduction générale	14
1 Calcul fractionnaire	17
1.1 Introduction	18
1.2 Historique	18
1.3 Préliminaires	18
1.3.1 Fonctions particulières	19
1.3.1.1 Fonction Gamma	19
1.3.1.2 Fonction Bêta	20
1.3.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	20
1.3.1.4 Fonctions de Wright	21
1.3.1.5 Fonction Hypergéométrique	21
1.3.2 Intégrales fractionnaires	22
1.3.3 Dérivées fractionnaires	22
1.3.3.1 Dérivée fractionnaire de Reimann-Liouville	22
1.3.3.2 Dérivée fractionnaire de Caputo	23
1.3.3.3 Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov	24
1.3.4 Intégration par partie fractionnaire	25
1.4 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	25
1.4.1 Modèle entrée/sortie	25
1.4.2 Solution générale	26
1.4.3 Causalité du système	26
1.4.4 Réponse temporelle	26
1.4.5 Représentation pseudo-état	27
1.5 Conclusion	28
2 Méthode des Fonctions Modulatrices	29
2.1 Introduction	30
2.2 Historique	30
2.3 Préliminaires	30
2.3.1 Définition et construction des fonctions modulatrices	30
2.3.2 Types de fonctions modulatrices existantes	31
2.3.2.1 Fonction modulatrice sinusoïdale	31
2.3.2.2 Fonction modulatrice polynomiale	32

2.3.2.3	Fonction modulatrice d'Hartley	33
2.3.2.4	Fonction modulatrice de Fourier	34
2.4	Identification paramétrique pour des systèmes linéaires d'ordre entier (<i>Système Linéaire d'Ordre Entier (SLOE)</i>)	35
2.4.1	Méthodologie	35
2.4.2	Effet du bruit en sortie	40
2.4.3	Effet du nombre de <i>Fonction Modulatrice (FM)</i> s	41
2.4.4	Effet du type de FMs	41
2.5	Conclusion	42
3	Estimation conjointe des ordres et paramètres d'un système fractionnaire	43
3.1	Introduction	44
3.2	Estimation en utilisant les fonctions modultrices et l'algorithme de Newton	44
3.3	Estimation en utilisant l'algorithme global génétique	49
3.3.1	Algorithmes évolutionnaires	49
3.3.2	L'algorithme génétique	50
3.3.3	Estimation en utilisant l'algorithme génétique	51
3.4	Convergence de l'algorithme génétique	54
3.5	Conclusion	55
4	Estimation autour du flux artériel sanguin : Modèle de Windkessel	56
4.1	Introduction	57
4.2	Flux sanguin aortique et effet de Windkessel	57
4.2.1	Phases du cycle cardiaque	57
4.2.2	Modèle du flux sanguin artériel de Windkessel	57
4.2.3	Modèle de Windkessel entier à deux éléments	59
4.2.4	Modèle de Windkessel fractionnaire à deux éléments	60
4.3	Estimation conjointe du flux sanguin artériel et des paramètres du <i>Modèle de Windkessel à deux éléments (MWK2)</i>	60
4.3.1	Méthodologie	61
4.3.2	La base de données In-Silico	63
4.3.3	Solution analytique du flux sanguin artériel	63
4.3.4	Solution analytique de la pression artérielle	64
4.3.5	Simulations numériques à partir de données générées analytiquement	65
4.3.5.1	Résultats des simulations numériques	65
4.3.6	Simulations numériques à partir de données réelles	67
4.3.6.1	Résultats des simulations numériques	68
4.4	Estimation conjointe du flux sanguin artériel et de l'ordre fractionnaire du <i>Modèle de Windkessel Fractionnaire à deux éléments (MWKF2)</i>	69
4.4.1	Méthodologie	70
4.4.2	Simulations numériques à partir de données réelles	74
4.5	Conclusion	77
5	Estimation des états et des pseudo-états d'un système non-linéaire	78
5.1	Introduction	79
5.2	Méthode des fonctions modultrices pour l'estimation des états : <i>Système Non Linéaire d'Ordre Entier (SNLE)</i>	79
5.2.1	Méthodologie	80

5.2.2	Simulations numériques	82
5.3	Méthode des fonctions modulatrices pour l'estimation des pseudo-états :	
	<i>Système Non Linéaire d'Ordre Fractionnaire (SNLF)</i>	84
5.3.1	Méthodologie	85
5.3.2	Simulations numériques	88
5.3.3	Effet du bruit en sortie	89
	5.3.3.1 Discussion des résultats	90
5.4	Conclusion	90
	Conclusions et perspectives	92
	Bibliographie	

Liste des figures

1.1	Représentation de la fonction Gamma pour les nombres réels.	19
1.2	Représentation de la fonction Beta pour différentes valeurs de z en fonction de w	20
1.3	Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre avec variation du paramètre α	21
1.4	Réponse indicielle et impulsionnelle pour différents systèmes.	27
2.1	Fonctions modulatrices sinusoïdales pour $h=1,\dots,7$	32
2.2	Fonctions modulatrices polynomiales pour $h = 1, \dots, 7, q = 0$	33
2.3	Fonctions modulatrices polynomiales normalisées pour $h = 1, \dots, 7, q = 0$	33
2.4	Fonctions modulatrices d'Hartley pour $h = 1, \dots, 7$	34
2.5	Fonctions modulatrices de Fourier pour $h = 1, \dots, 7, \alpha = 1$ et $k = 5$	35
2.6	Entrée et sortie bruitée du SLOE (2.18).	39
2.7	Résultats de l'estimation paramétrique et erreurs d'estimation absolues.	40
3.1	La sortie y pour une entrée de type porte sans bruit	47
3.2	Évolution de la convergence des 4 paramètres du système à travers les itérations	47
3.3	Visualisation de la sortie pour plusieurs bruits ajoutés en sortie.	48
3.4	Évolution de la fitness au long de la population, avec le meilleur individu possible	52
3.5	La sortie y avec l'addition de différents bruits	53
4.1	Cycle cardiaque	58
4.2	(a) : Le modèle de Windkessel à deux éléments, (b) : Le modèle de Windkessel à trois éléments	58
4.3	Schéma électrique du MWK2	59
4.4	Pression Sanguine Artérielle (PSA) et Flux Sanguin Artériel (FSA) réels.	63
4.5	PSA et FSA analytiques du MWK2	65
4.6	Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 non bruité : données analytiques.	66
4.7	Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 bruité : données analytiques.	67
4.8	Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 non bruité : données réelles.	68
4.9	Entrée estimée et son erreur absolue du MWKF2 non bruité : données réelles.	75
5.1	Estimation des états du SNLE (5.13) : PE*	84
5.2	Estimation des pseudo-états du SNLF (5.29) : PE1*	89

Liste des tableaux

2.1	Paramètres estimés et leurs erreurs relatives pour différents niveaux de bruit pour un SLOE	40
2.2	Paramètres estimés et leurs erreurs relatives pour un SLOE en fonction du nombre de FMs	41
2.3	Paramètres estimés et leurs erreurs relatives en fonction du type de FM pour un SLOE	41
3.1	Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires estimés pour une entrée non bruitée avec des conditions initiales $\hat{\alpha}^0 = [1.7, 0.7]$	47
3.2	Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour plusieurs valeurs de bruit ajouté à la sortie	48
3.3	Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour différentes conditions initiales	49
3.4	Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires estimés avec l'algorithme génétique	52
3.5	Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour plusieurs valeurs de bruit ajouté à la sortie en utilisant l'algorithme génétique.	53
3.6	Influence du nombre d'individus sur la convergence des valeurs pour 50 populations (générations)	54
3.7	Influence du nombre de populations (générations) sur la convergence des valeurs pour 30 individus	54
4.1	Résultats du PE* et leurs erreurs relatives trouvées dans la littérature du MWK2	66
4.2	Résultats du PE* et leurs erreurs relatives pour différents niveaux de bruit du MWK2.	67
4.3	Profils et paramètres utilisés pour le problème d'estimation du MWK2 : données réelles.	68
4.4	Entrée et paramètre estimés et leurs erreurs absolues du MWK2 non bruité : données réelles.	69
4.5	Entrée et paramètre estimés et leurs erreurs absolues du MWK2 trouvés dans la littérature.	69
4.6	Profils et paramètres utilisés pour le problème d'estimation du MWK2 : données réelles.	75
4.7	Entrée et ordre fractionnaire estimés et leurs erreurs absolues du MWKF2 : données réelles.	76
4.8	Comparaison des erreurs absolues du MWKF2 (données réelles) existants dans la littérature et ceux trouvés précédemment.	76
5.1	Paramètres utilisés pour le PE* du SNLE (5.13)	83

5.2	Erreurs relatives pour le PE* du SNLE (5.13)	84
5.3	Paramètres utilisés pour le PE1* du SNLF (5.29)	88
5.4	Erreurs relatives pour le PE1* du SNLF (5.29)	89
5.5	Paramètres utilisés pour le PE1* du SNLF (5.29) pour une sortie bruitée.	90
5.6	Erreurs relatives pour le PE1* du SNLF (5.29) pour différents niveaux de bruit.	90

Liste des acronymes

FM	<i>Fonction Modulatrice</i>
FMC	<i>Fonction Modulatrice Classique</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>
SLOE	<i>Système Linéaire d'Ordre Entier</i>
SNL	<i>Système Non Linéaire</i>
MWK2	<i>Modèle de Windkessel à deux éléments</i>
MWKF2	<i>Modèle de Windkessel Fractionnaire à deux éléments</i>
EDO	<i>Equation aux Dérivées Ordinaires</i>
PSA	<i>Pression Sanguine Artérielle</i>
FSA	<i>Flux Sangin Artériel</i>
RL	<i>Reimann-Louville</i>
GL	<i>Grünwald-Letnikov</i>
AG	<i>Algorithme Génétique</i>
SNLE	<i>Système Non Linéaire d'Ordre Entier</i>
SNLF	<i>Système Non Linéaire d'Ordre Fractionnaire</i>

Introduction générale

Contexte et motivation

La théorie du contrôle est une discipline de l'ingénierie qui étudie les méthodes pour influencer et réguler le comportement des systèmes dynamiques. Elle vise à concevoir des systèmes de contrôle qui permettent de diriger un système vers un état souhaité en manipulant ses entrées ou ses actions. La résolution des problèmes de la théorie du contrôle requiert la connaissance précise des paramètres du modèle du système étudié et de ses états. Toutefois, dans la pratique, il est souvent fastidieux de mesurer ces paramètres, que ce soit pour des raisons techniques ou numériques : inaccessibilité, coût de la mise en place des techniques de mesure ou encore la limitation des capteurs disponibles.

Pour surmonter ces obstacles, des approches ont été mises en œuvre afin d'obtenir ces informations de manière indirecte. Cela est réalisé en utilisant des techniques d'estimation mathématique ainsi que des observateurs d'états. Un observateur, également appelé estimateur, est un élément qui permet d'estimer des états internes ou des paramètres non mesurés d'un système dynamique à partir des mesures disponibles. Il est basé sur un modèle mathématique du système, le plus souvent représenté sous forme d'équations différentielles, d'équations aux différences ou de système d'état, qui décrivent l'évolution des états internes en fonction des entrées et des sorties du système. Cette estimation est généralement mise à jour à chaque instant de mesure en utilisant des techniques telles que les filtres de Kalman, de Kalman étendu (EKF), de Kalman unscented (UKF) ou d'autres méthodes d'estimation adaptées selon le problème étudié. En ce qui concerne les estimations, il est important de noter que deux aspects doivent être considérés du point de vue des applications pratiques. D'une part, pour les applications en temps réel, des estimations non-asymptotiques sont généralement requises. D'autre part, dans de nombreuses applications pratiques, seule la sortie du système est disponible via des capteurs, et les bruits de mesure sont inévitables. Il est donc nécessaire de tenir compte des effets des bruits dans la conception de l'estimateur. En résumé, du point de vue de l'ingénierie, les estimations correspondantes doivent être non-asymptotiques et robustes.

L'une de ces méthodes d'estimation est celle basée sur les Fonctions Modultrices, introduite pour la première fois en 1953 par Shinbrot [39]. Cette approche d'estimation non-asymptotique, basée sur des considérations et des constructions algébriques, a depuis prouvé son efficacité pour divers problèmes d'estimation. Elle est appliquée notamment sur des systèmes linéaires simples et d'autres plus complexes. Ces derniers incluent notamment les systèmes non linéaires ou les systèmes fractionnaires qui sont des systèmes dont la dynamique est décrite par des équations différentielles ou des équations aux différences contenant des dérivées d'ordre non entier.

Comme caractéristique essentielle, les estimateurs conçus par la méthode des Fonctions Modultrices sont exactement formulés sous la forme d'intégrales, où les mesures de sortie bruitées n'interviennent que dans les termes intégraux. Conséquemment, ces méthodes sont algébriques et non-asymptotiques. Ainsi, les estimateurs correspondants n'impliquent aucune source d'erreur dans le cas continu sans bruit. Dans un environnement bruité, les estimateurs sont robustes face aux perturbations, car les intégrales impliquées se comportent comme des filtres passe-bas pour atténuer les effets des bruits.

L'une des applications qui intéresse la communauté scientifique ces dernières années est l'estimation de certaines grandeurs relatives aux systèmes cardio-vasculaires ou la méthode des Fonctions Modultrices donne des résultats très prometteurs, notamment en raison de son caractère non-invasif, des ressources de calculs modérées requises ainsi que de son efficacité. Néanmoins, cette méthode est confrontée aujourd'hui à des limitations qui nous empêchent d'exploiter tout son potentiel. Les restrictions majeures concernent les problèmes de stabilité numérique, de convergence globale et de paramétrage des algorithmes d'estimation.

Objectifs et contributions

À travers cette thèse, nous allons donc explorer l'estimation et la convergence en temps fini basées sur la méthode des Fonctions Modultrices pour différentes classes de systèmes, notamment les systèmes fractionnaires, afin de mieux comprendre les limitations de cette méthode dans un premier temps, pour ensuite tenter de repousser ses limites et améliorer ses performances. Nous proposons une généralisation de l'estimateur robuste conjoint des ordres fractionnaires et des paramètres ou des signaux d'un système linéaire fractionnaire dont la convergence est globale contrairement aux estimateurs existants. Une étude de cas a été faite sur l'estimation des signaux et des ordres fractionnaires du modèle du système cardio-vasculaire afin de valider le modèle qui a abouti à des résultats supérieurs à ceux des recherches récentes ont été trouvés. Nous développons également une méthode d'estimation robuste pour les pseudo-états d'un système non linéaire fractionnaire canonique. Tout au long de cette étude, des analyses de sensibilité ont été effectuées pour les différents estimateurs développés, mettant en évidence leur sensibilité au choix des paramètres et aux données, nous permettant ainsi de souligner les limites de cette approche.

Description du travail

Le projet se divise en plusieurs chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions de base du calcul fractionnaire, en expliquant ses propriétés et ses outils. Nous mettons également en évidence l'importance du calcul fractionnaire pour la modélisation des systèmes dynamiques aux comportements non locaux et non markoviens.

Dans le deuxième chapitre, nous nous concentrons sur l'approche des Fonctions Modultrices pour l'estimation non-asymptotique robuste. Nous présentons les différentes Fonctions Modultrices généralement utilisées dans la littérature, leurs propriétés et leurs caractéristiques. Nous explorons également l'application de cette méthode à un système linéaire d'ordre entier, en étudiant l'influence des différents paramètres d'estimation.

Le troisième chapitre aborde l'identification et l'estimation des grandeurs relatives aux systèmes d'ordre fractionnaire. Nous examinons différentes approches d'estimation conjointe, telles que la méthode itérative de Newton et l'algorithme génétique, tous deux basés sur les Fonctions Modultrices. Nous étudions également l'influence des paramètres et des conditions initiales sur l'estimation, et proposons un nouvel estimateur conjoint des

ordres fractionnaires et des paramètres ou des signaux d'un système linéaire fractionnaire.

Le quatrième chapitre met en évidence l'importance de l'estimation non-asymptotique dans un contexte réel, en se concentrant sur l'estimation du flux sanguin artériel à travers le réseau artériel. Nous présentons les modèles de Windkessel à deux éléments, tant d'ordre entier que fractionnaire, et proposons des méthodes d'estimation basées sur les Fonctions Modulatrices. Nous analysons la robustesse et la sensibilité de ces méthodes par le biais de simulations numériques.

Enfin, le cinquième chapitre explore l'estimation des états des systèmes non linéaires fractionnaires en utilisant la méthode des Fonctions Modulatrices. Nous adaptons la méthodologie précédemment appliquée pour les systèmes non linéaires fractionnaires, en utilisant des estimateurs non asymptotiques.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Le calcul fractionnaire, également connu sous le nom de calcul avec des dérivées et des intégrales non entières, est une branche des mathématiques qui généralise les concepts de dérivées et d'intégrales à des ordres non entiers. Contrairement au calcul traditionnel, qui traite uniquement des dérivées et des intégrales entières, le calcul fractionnaire permet de modéliser des phénomènes complexes et de mieux représenter les systèmes dynamiques avec des comportements non locaux et non markoviens. Le calcul fractionnaire offre de nouvelles perspectives pour l'analyse, la modélisation et la compréhension des systèmes complexes. Il permet ainsi de capturer des comportements dynamiques plus riches. À travers ce chapitre, nous allons introduire les notions de base du calcul fractionnaire et des systèmes fractionnaires, leurs propriétés, ainsi que les outils du calcul fractionnaire.

1.2 Historique

Le calcul fractionnaire est un sujet ancien, car le concept de dérivées fractionnaires remonte à 1695, lorsque l'idée de dérivées non entières est apparue dans la communication entre Leibniz et L'Hôpital [3]. Ensuite, d'autres mathématiciens, tels que L. Euler, J.L. Lagrange, P.S. Laplace et J. Fourier, ont progressivement posé les bases théoriques du calcul fractionnaire. N. Abel a utilisé pour la première fois les opérations d'ordre fractionnaire en 1823 en résolvant le problème de la tautochrone [10]. Par la suite, diverses définitions des dérivées fractionnaires ont été évoquées, telles que la définition de Riemann-Liouville, la définition de Caputo, la définition de Grünwald-Letnikov, la définition de Riesz et la définition de Weyl [29]. Il convient de souligner que le concept exact d'ordre fractionnaire devrait être l'ordre non entier, et que le terme « fractionnaire » n'est conservé que pour des raisons historiques. Pendant près de 300 ans après sa première apparition, le calcul fractionnaire n'est resté que dans le domaine des mathématiques pures jusqu'à quelques décennies auparavant. Plusieurs applications sont apparues et ont été développés sur les systèmes d'ordre fractionnaire après la première conférence tenue en 1974 dans différents domaines, notamment la biologie [24], le traitement de signal [30], la physique [23] et d'autres.

1.3 Préliminaires

Dans cette partie, nous allons introduire les fonctions nécessaires pour le calcul fractionnaire que l'on va par la suite exploiter : Fonctions de bases du calcul fractionnaire, opérateurs du calcul différentiel fractionnaire, ainsi que la construction des systèmes d'ordres fractionnaires.

1.3.1 Fonctions particulières

1.3.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1.

La fonction gamma est une généralisation de la fonction fractionnelle, et est définie par une intégrale d'Euler du second ordre comme suit [21] :

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

Cette intégrale impropre converge pour tout nombre complexe avec partie réelle positive. Nous avons la formule de réflexion de la fonction gamma suivante :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{1.2}$$

De plus, en faisant une intégration par partie pour la définition ci-dessus, on déduit la relation récursive de la fonction gamma :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.3}$$

Une application de la fonction gamma, pour $\beta, \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}_-$ est le coefficient binomial généralisé, défini par [14] :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}, \tag{1.4}$$

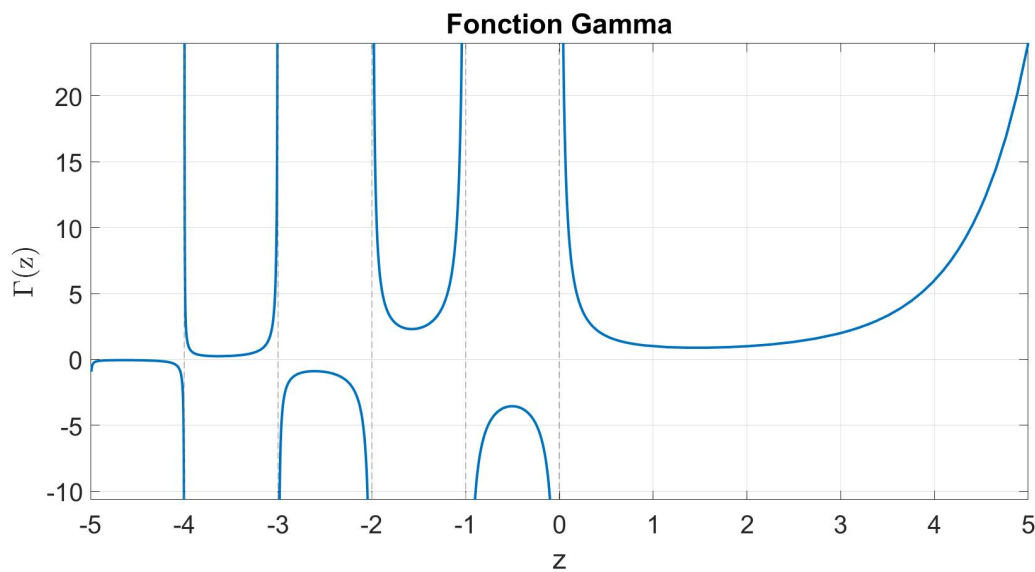


FIG. 1.1 : Représentation de la fonction Gamma pour les nombres réels.

Remarque 1.1.

La fonction Gamma n'est pas définie pour les entiers pairs négatifs.

1.3.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.

La fonction Beta est définie par l'intégrale d'Euler du premier ordre comme suit :

$$B(z, w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (1.5)$$

La fonction Beta est liée à la fonction gamma comme suit [1] :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (1.6)$$

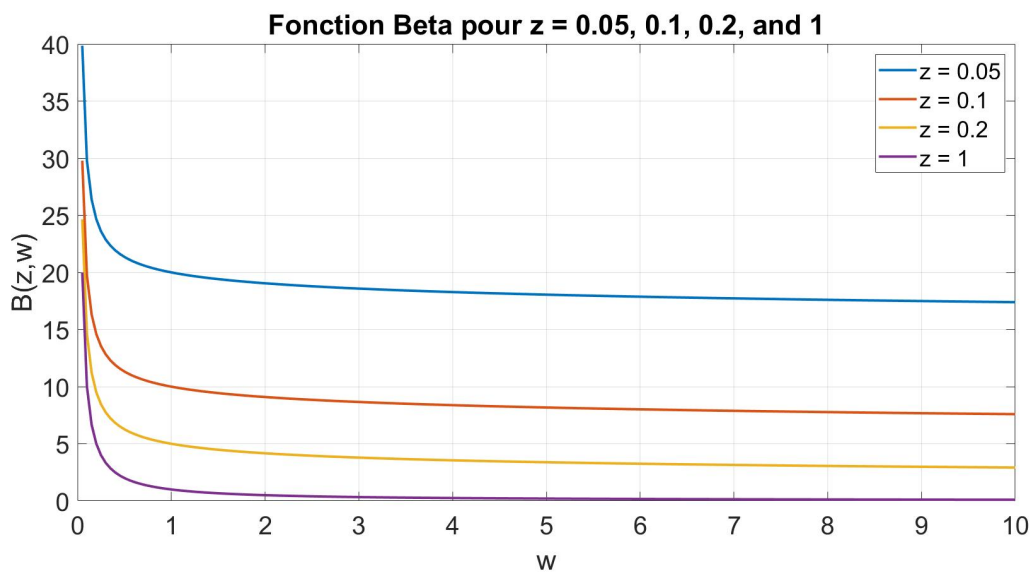


FIG. 1.2 : Représentation de la fonction Beta pour différentes valeurs de z en fonction de w

Remarque 1.2. La fonction Gamma : figure (1.3) est définie sur le demi-plan droit, car l'intervalle de w choisi est $[0, 10]$.

1.3.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Les fonctions de Mittag-Leffler jouent un rôle très important dans le calcul fractionnaire, car elles représentent une généralisation de la fonction exponentielle.

Définition 1.3. [46]

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (1.7)$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ nous avons respectivement :

$$\begin{cases} E_1(z) = \exp(z), \\ E_2(z) = \cosh(z), \end{cases} \quad (1.8)$$

Définition 1.4. [46]

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$, on définit la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres comme suit :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (1.9)$$

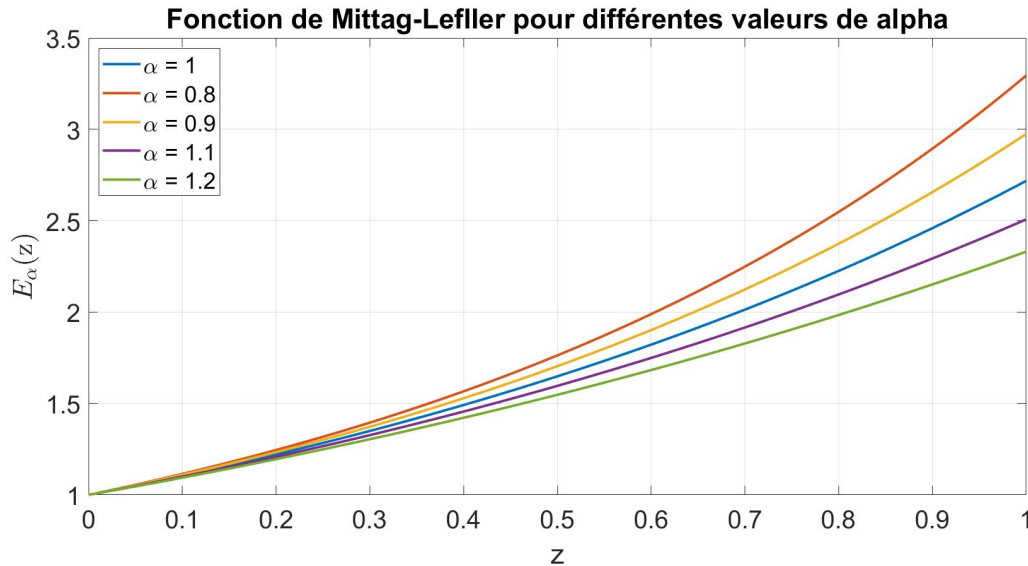


FIG. 1.3 : Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre avec variation du paramètre α .

Remarque 1.3.

Pour $\alpha = 1$, la fonction est équivalente à la fonction exponentielle.

1.3.1.4 Fonctions de Wright

Définition 1.5. [14]

Pour $\alpha, \beta > -1 \in \mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ la fonction ϕ de Wright est définie comme suit :

$$\phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad (1.10)$$

Un cas spécial de la fonction ϕ pour $\alpha = 0$ est défini par :

$$\phi(0, \beta; z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \exp(z), \quad (1.11)$$

1.3.1.5 Fonction Hypergéométrique

La fonction hypergéométrique est la solution de l'équation différentielle complexe définie par :

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (1.12)$$

Elle peut être définie par les séries de Gauss comme suit :

$$F_2(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.13)$$

Certaines fonctions peuvent être représentées par la fonction hypergéométrique comme suit :

- $(1 + z)^n = F_2(-n, 1; 1; -z),$
- $\ln(1 + z) = zF_2(1, 1; 2; -z),$
- $e^z = \lim_{b \rightarrow \infty} F_2(1, b; 1; \frac{z}{b}),$

1.3.2 Intégrales fractionnaires

Définition 1.6. [3]

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale itérative de Cauchy sur $I = [0, T] \subset \mathbb{R}_+$ comme suit :

$$D_t^{-k} := \int_0^t \int_0^{\tau_k} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_1 \cdots d\tau_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

Comme une généralisation de l'intégrale itérative de Cauchy, on introduit l'intégrale fractionnaire de Reimann-Louville (RL).

Définition 1.7. [14]

Pour toute fonction $f \in L^1(I)$ avec $I = [0, T]$, l'intégrale fractionnaire de RL à gauche d'ordre α est définie par :

$$D_t^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.15)$$

De même, on définit l'intégrale de RL à droite d'ordre α comme suit :

$$D_{t,T}^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.16)$$

On donne la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de RL par :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \quad (1.17)$$

Où $F(s)$ représente la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

1.3.3 Dérivées fractionnaires

Dans cette partie, on introduit les définitions des principales dérivées fractionnaires, trois définitions essentielles se manifestent :

1.3.3.1 Dérivée fractionnaire de Reimann-Louville

Définition 1.8. [14]

Soit $\alpha \in (R)_+$, $n = \lceil \alpha \rceil$ et $I = [0, T]$, pour toute fonction $f \in L^1(I)$, on définit la dérivée fractionnaire de RL à gauche d'ordre α comme suit :

$$D_t^\alpha f(t) := \frac{d^n}{dt^n} D_t^{\alpha-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.18)$$

De même, si l'intégrale à droite existe, on définit la dérivée fractionnaire de RL à droite d'ordre α comme suit :

$$D_{t,T}^{\alpha} f(t) := (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} D_t^{\alpha-n} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^T (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de RL est donnée par :

$$\mathcal{L}\{D_t^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k [D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad (1.20)$$

Où $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

Exemple 1.1. [1]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in (-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$, alors :

$$D_t^{\alpha} (t^{\gamma}) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad (1.21)$$

Exemple 1.2. [25]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\Omega \in \mathbb{R}$, donc :

$$D_t^{\alpha} (\sin(\Omega t)) = \frac{\Omega t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} F_2\left(1; \frac{2-\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}; -\frac{1}{4}\Omega^2 t^2\right), \quad (1.22)$$

$$D_t^{\alpha} (\cos(\Omega t))^{\circ} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} F_2\left(1; \frac{1-\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{2}; -\frac{1}{4}\Omega^2 t^2\right), \quad (1.23)$$

Où F_2 représente la fonction hypergéométrique à deux paramètres.

1.3.3.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.9. [14]

Soit $\alpha \in (R)_+$, $n = [\alpha]$ et $I = [0, T]$. Pour toute fonction $f \in L^1(I)$, on définit la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α comme suit :

$$D_t^{\alpha} f(t) := D_t^{\alpha-n} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

De même, si l'intégrale à droite existe, on définit la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α comme suit :

$$D_{t,T}^{\alpha} f(t) := (-1)^n D_t^{\alpha-n} f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1.25)$$

On donne la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo par :

$$\mathcal{L}\{D_t^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k f^{(k)}(0), \quad (1.26)$$

Où $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

Exemple 1.3. [14]

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n = [\alpha]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$D_t^{\alpha} (e^{\lambda t}) = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t), \quad (1.27)$$

Où $E_{1,n-\alpha+1}$ représente la fonction de Mittag-Leffler.

1.3.3.3 Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Soit $n \in \mathbb{N}$, $I = [0, h] \subset \mathbb{R}_+$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^n(I)$ alors la dérivée du premier ordre de f en $t \in I$ est définie par :

$$\frac{d}{dt}f(t) := f'(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t_\epsilon)}{\epsilon}, \quad (1.28)$$

D'une manière similaire, pour $k \leq n \in \mathbb{N}$, la $k^{\text{ème}}$ dérivée de f est donnée par :

$$\frac{d^k}{dt^k}f(t) := f^{(k)}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(t - j\epsilon), \quad (1.29)$$

Par généralisation de k vers les nombres réels, on obtient la définition suivante de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov (GL).

Définition 1.10. [46]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $I = [0, T]$ et f une fonction définie sur I , alors la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov de f en $t \in I$ est définie par :

$$D_t^\alpha f(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{\epsilon} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - j\epsilon), \quad (1.30)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de GL est donnée par :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s), \quad (1.31)$$

Remarque 1.4.

Il existe plusieurs définitions de l'opérateur fractionnaire selon différentes logiques, où chacune présente des avantages et des inconvénients, et jusqu'à présent, aucune d'entre elles n'est acceptée universellement et leurs utilisations dépendent de l'application.

- La définition de RL est basée sur l'idée de diviser la fonction en une série d'intervalles infinitésimaux, puis de prendre la dérivée de chaque intervalle. Cette dernière est facile à comprendre, mais difficile à calculer dans certains cas.
- La définition de Caputo est basée sur l'idée de prendre la dérivée de la fonction jusqu'à un certain ordre, puis soustraire l'intégrale de la fonction de cet ordre. Le calcul de la dérivée fractionnaire de Caputo est assez simple en dépit de sa difficulté.
- La définition de GL est une méthode numérique pour la définition d'une dérivée fractionnaire en se basant sur la définition d'une dérivée entière calculée en un nombre. L'implémentation de cette méthode est la plus simple.

Le choix de dérivée fractionnaire à utiliser est également influencé par le type de fonction différenciée. Certaines fonctions sont plus facilement différenciées en utilisant une définition plutôt qu'une autre. Par exemple, la définition de RL est souvent utilisée pour différencier les fonctions qui sont lisses et continues, tandis que la définition de Caputo est souvent utilisée pour différencier les fonctions qui ne sont pas lisses ou sont discontinues.

1.3.4 Intégration par partie fractionnaire

Nous avons introduit jusqu'à présent les notions de base nécessaires pour le calcul fractionnaire. Cependant, l'intégration par partie fractionnaire, qui joue un rôle crucial dans la méthode des fonctions modulatrices introduites en section 1 reste à définir.

Pour commencer, on rappelle la formule d'intégration par partie standard :

Lemme 1.1. [17]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathbb{C}^n([a, b])$ avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b g(t) f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_a^b g^{(n)}(t) f(t) dt + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [g^{(i)}(t) f^{(n-1-i)}(t)]_{t=a}^{t=b}, \quad (1.32)$$

On présente alors la formule d'intégration par partie fractionnaire :

Lemme 1.2. [33]

Soit $\alpha \in (-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $n = [\alpha]$ et $f, g \in L^n([a, b])$ pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \int_a^b g(t) D_t^\alpha f(t) dt = \int_a^b D_{t,\tau}^\alpha g(t) f(t) dt, & 0 < \alpha < 1, \\ \int_a^b g(t) D_t^\alpha f(t) dt = \int_a^b D_{t,\tau}^\alpha g(t) f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [g^{(k)}(t) D_t^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=a}^{t=b}, & \alpha > 1, \end{cases} \quad (1.33)$$

On remarque que la formule précédente intègre l'opérateur d'intégrale et de dérivée fractionnaire à droite. Cette dernière est difficile à calculer, on s'intéresse donc à introduire la formule suivante qui n'inclut que les opérateurs fractionnaires à gauche.

Lemme 1.3. [48]

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a la formule d'intégration par partie suivante :

$$\begin{cases} \int_a^b g(\tau - t) D_t^\alpha f(t) dt = \int_a^b D_t^\alpha g(t) f(\tau - t) dt, & 0 < \alpha < 1, \\ \int_a^b g(\tau - t) D_t^\alpha f(t) dt = \int_a^b D_{t,\tau}^\alpha g(t) f(\tau - t) dt + \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} (-1)^k [g^{(k)}(\tau - t) D_t^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=a}^{t=b}, & \alpha > 1, \end{cases} \quad (1.34)$$

1.4 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

1.4.1 Modèle entrée/sortie

On considère le système dynamique linéaire continu dans le temps d'ordre fractionnaire défini par l'équation :

$$\sum_{i=0}^n a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D_t^{\beta_i} u(t), \quad (1.35)$$

Avec $n \geq m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$. $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

1.4.2 Solution générale

La solution générale est définie sous forme de fonctions de Mittag-Leffler et de fonctions de Wright.

Nous présentons la solution pour $n = 1$, autrement dit l'équation :

$$a_0 y(t) + D_t^{\alpha_1} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D_t^{\beta_i} u(t), \quad (1.36)$$

Nous supposons que $\bar{u} = \sum_{i=0}^m b_i D_t^{\beta_i} u(t)$, $a_n = 1$, $\alpha_0 = 0$, la solution est donnée par [1] :

$$y(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha_1 - 1} E_{\alpha_1, \alpha_1}(-a_0(t - \tau)^{\alpha_1}) \bar{u}(\tau) + \sum_{j=1}^{[\alpha_1]} c_j t^{\alpha_1 - j} E_{\alpha_1, \alpha_1 + 1 - j}(-a_0 t^{\alpha_1}), \quad (1.37)$$

1.4.3 Causalité du système

Considérons la causalité du système (1.35), qui est nécessaire pour que le système soit physiquement réalisable.

Définition 1.11. [11]

Assumons que l'instant initial est $t_0 = 0$, le système (1.35) est dit causal si la sortie $y(t)$ dépend uniquement des états précédents ou actuels : $y(0)$ va donc dépendre uniquement de $u(t)$ pour $t \leq 0$.

Théorème 1.1. [37]

La solution du système $y(t)$ est dite causale si et seulement si la réponse impulsionnelle est causale, c'est-à-dire :

$$y(t) = 0, \forall t < 0, \quad (1.38)$$

De plus, si $y(t)$ est une solution causale pour (1.35), alors elle peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \int_0^t y_\sigma(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (1.39)$$

Avec y_σ qui représente la réponse impulsionnelle du système.

1.4.4 Réponse temporelle

En appliquant la transformée de Laplace sur (1.35) avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert est donnée par [42] :

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{\alpha_i}}, \quad (1.40)$$

Exemple 1.4. [44]

On considère le système d'ordre fractionnaire donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{s^{2\alpha} + \mu s^\alpha + \nu}, \quad (1.41)$$

On étudie la réponse temporelle de ce système pour une entrée échelon unitaire et impulsion pour différents cas : (on prendra $\alpha = 0.5$).

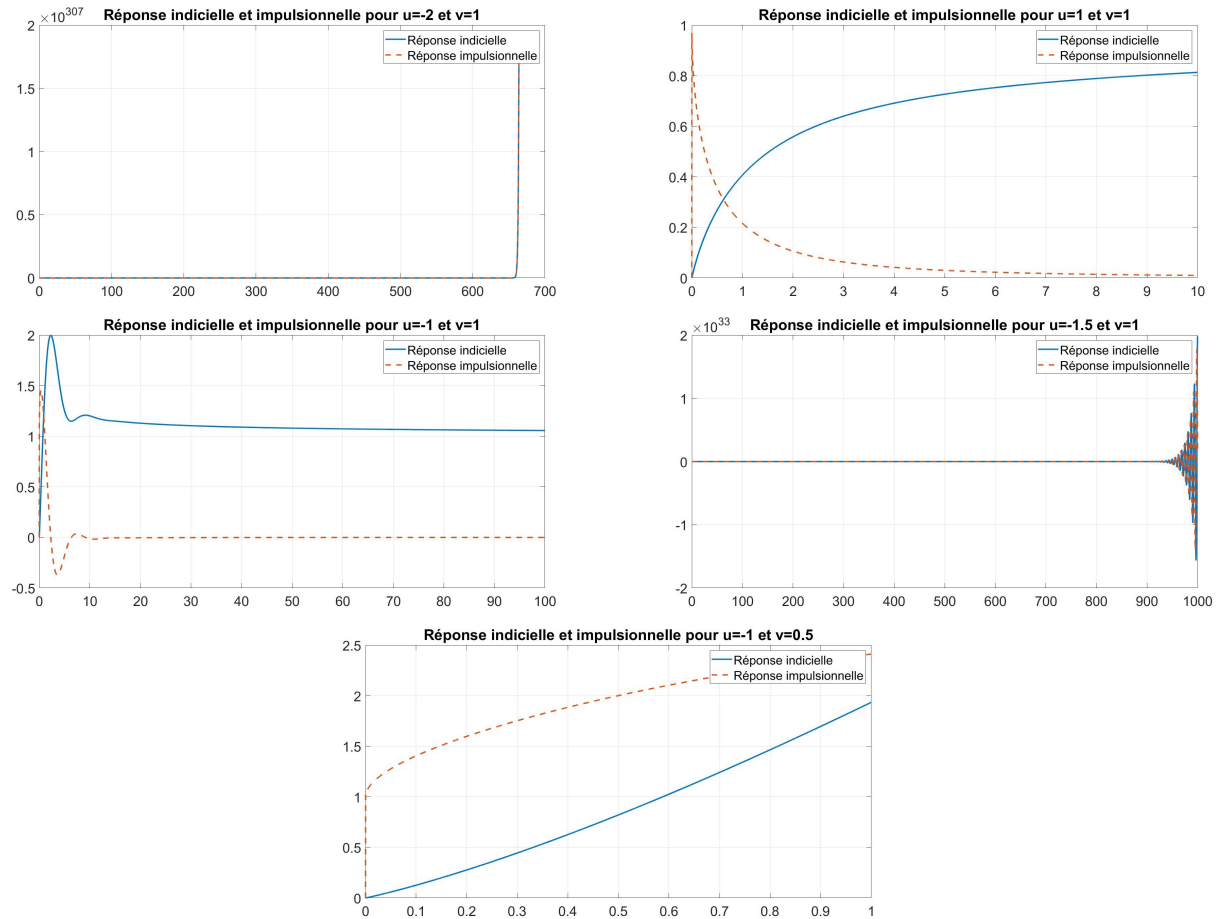


FIG. 1.4 : Réponse indicielle et impulsionnelle pour différents systèmes.

Remarque 1.5.

Nous pouvons noter que les comportements du précédent système sont similaires à ceux d'un système linéaire, qualitativement parlant.

Remarque 1.6.

Ces résultats sont déduits à travers l'étude du polynôme caractéristique de la fonction de transfert :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \mu\lambda + \nu = 0, \lambda = s^\alpha, \quad (1.42)$$

1.4.5 Représentation pseudo-état

Contrairement à la représentation d'état des systèmes d'ordre entier, pour les systèmes d'ordre fractionnaire, l'état réel se compose de deux parties [12] : pseudo-état et la

fonction d'initialisation, en raison de la localité de la dérivée d'ordre fractionnaire.

Pour plusieurs applications, la représentation pseudo-état fournit les informations suffisantes pour décrire et contrôler le système, malgré le fait que la vraie représentation dépend de la fonction d'initialisation.

On s'intéresse au pseudo-état, représentation des systèmes linéaire d'ordre fractionnaire invariant dans le temps, décrite comme suit :

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \quad (1.43)$$

Avec $\alpha \in [0, 2] \subset \mathbb{R}_+^*$, $D_t^\alpha x = [D_t^\alpha x_1, D_t^\alpha x_2, \dots, D_t^\alpha x_N]^T$, $x(t) \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur d'état, l'entrée $u \in \mathbb{R}$, la sortie $y \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice de pseudo-état, $B \in \mathbb{R}^N$ la matrice d'entrée, $C \in \mathbb{R}^N$ la matrice de sortie, $D \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse à la solution temporelle de ce système, pour cela, on applique la transformée de Laplace sur le système (1.43), on trouve :

$$s^\alpha X(s) - \sum_{k=0}^{l-1} s^k [D_t^{\alpha-k-1} x(t)]_{t=0} = AX(s) + BU(s), \quad (1.44)$$

Avec $l = \lceil \alpha \rceil$, on aura donc :

$$X(s) = (s^\alpha I_N - A)^{-1} (BU(s) + \sum_{k=0}^{l-1} s^k [D_t^{\alpha-k-1} x(t)]_{t=0}), \quad (1.45)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace sur (1.44) on trouve [15] :

$$x(t) = \sum_{i=0}^l \Phi_i x^{\alpha-l}(0^+) + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau, \quad (1.46)$$

Avec $\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-i}}{\Gamma((k+1)\alpha-i+1)}$ et $\Phi(t) = \Phi_1(t)$.

1.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire, en mettant l'accent sur les dérivées fractionnaires et les différentes définitions qui leur sont associées. Nous avons souligné les caractéristiques intéressantes des dérivées fractionnaires, telles que leur non-localité, leur mémoire, ainsi que leur linéarité. Nous avons également examiné les systèmes d'ordre fractionnaire, en discutant de leurs représentations et de leurs propriétés. Il a été mis en évidence que les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent capturer des comportements dynamiques complexes et non locaux, offrant ainsi de nouvelles possibilités pour modéliser des phénomènes réels.

Chapitre 2

Méthode des Fonctions Modulatrices

2.1 Introduction

La méthode des FMs fournit un cadre rigoureux pour l'estimation non-asymptotique robuste dans le domaine temporel qui fait l'objet d'une attention croissante de la part de la communauté scientifique grâce à son enjeu. Pour commencer, les estimateurs ont une importance primordiale dans le domaine du contrôle, avec des exigences croissantes en matière de fiabilité, de précision, de robustesse et de sécurité, notamment dans les systèmes industriels [42].

En effet, bon nombre de signaux, de paramètres et de variables ne peuvent être mesurés pour des raisons techniques (la technologie nous permettant d'effectuer cela n'a pas encore été développée) ou encore pour des raisons économiques [42, 5]. Ensuite, pour bon nombre d'applications en ingénierie, uniquement la sortie du système est mesurable à travers des capteurs, les bruits ne peuvent donc pas être évités, d'où la nécessité d'une estimation robuste [8].

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir de ce qu'est une Fonction Modulatrice, puis nous dresserons une liste des FMs les plus couramment utilisées, en examinant leurs propriétés et leurs caractéristiques. Nous aborderons également une première application de l'estimation basée sur la méthode des FM pour un système linéaire d'ordre entier. Enfin, nous conclurons en étudiant l'influence des différents paramètres impliqués dans cette estimation.

2.2 Historique

La méthode des fonctions modulatrices a été introduite pour la première fois dans les années cinquante par Shinbort [39]. Utilisées dans un premier temps pour l'estimation paramétrique de systèmes d'ordre entier [39], les FM ont ensuite été développées pour traiter des systèmes de plus en plus complexes. À titre d'exemple, Lie et al. [18] ont étendu la méthode à l'estimation de paramètres inconnus des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.

2.3 Préliminaires

2.3.1 Définition et construction des fonctions modulatrices

Dans ce paragraphe, nous allons définir rigoureusement les FMs ainsi que leur méthode de construction, en illustrant cela par quelques exemples.

Définition 2.1. [34]

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, avec $n \leq L - 1$, et soit g une fonction définie sur $[a, b]$.

1. Si g satisfait les propriétés suivantes :

(P₁) : $g \in C^L$ sur $[a, b]$.

(P₂) : $g^{(k)}(a) = 0, \forall k \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$.

(P₃) : $g^{(k)}(b) = 0, \forall k \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$.

Alors, g est appelée fonction modulatrice classique d'ordre L sur $[a, b]$.

2. Si g satisfait (P₁) et (P₂) (respectivement (P₁) et (P₃)), alors g est appelée fonction modulatrice généralisée à gauche (respectivement à droite) d'ordre L sur $[a, b]$.

3. Si g_n est une fonction modulatrice à gauche, d'ordre L sur $[a, b]$, et qu'en plus la propriété suivante est satisfaite :

$$(P_4) : g_n^{(k)}(b) = \delta_{nk}, \text{ où } \delta_{nk} \text{ est le symbole delta de Kronecker : } \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Alors g_n est appelée fonction modulatrice généralisée d'ordre (L, n) sur $[a, b]$.

Remarque 2.1. Dans ce qui suit, Fonction Modulatrice fait référence à une Fonction Modulatrice Classique.

2.3.2 Types de fonctions modulatrices existantes

Théoriquement, toute fonction satisfaisant les conditions citées dans la définition précédente (2.1) est une FM . Cependant, différents types de FM sont cités dans la littérature. Numériquement parlant, on remarque que certaines FM sont plus performantes que d'autres, et cela, en fonction de leur application. Nous allons citer les plus importantes.

2.3.2.1 Fonction modulatrice sinusoidale

La FM sinusoidale a été la première à être introduite par Shinbrot [39] en 1953. Elle est définie comme suit :

$$g_h(t) = \sin^h\left(\frac{\pi}{T}t\right) \quad , \quad \forall t \in [0, T], \quad h = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

Avec : $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{N}^*$, donc $g_h \in C^n([0, T]), n \geq h$.

Exemple 2.1.

La figure ci-dessous (2.1) représente les fonctions modulatrices sinusoidales pour $T = 10s$ et $N = 7$.

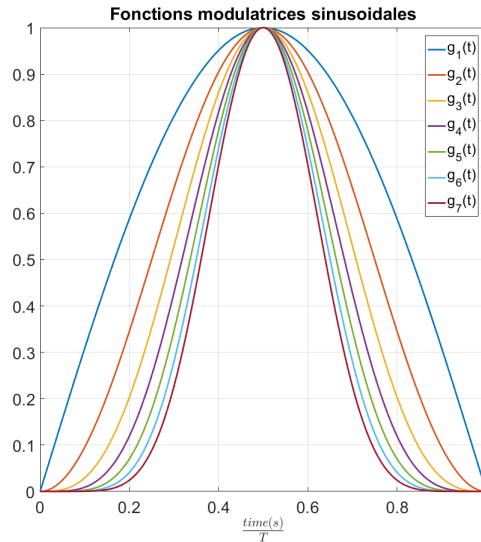


FIG. 2.1 : Fonctions modulatrices sinusoidales pour $h=1, \dots, 7$.

2.3.2.2 Fonction modulatrice polynomiale

La FM polynomiale a été introduite assez récemment [8]. Sa construction est similaire à celle des polynômes de Jacobi qui s'annulent aux bords :

$$g_{h_1, h_2}(t) = (T - t)^{h_1} t^{h_2} \quad , \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.2)$$

Avec : $T \in \mathbb{R}_+^*$, $g_{h_1, h_2} \in C^n([0, T])$, $n \geq h$. et $h_1, h_2 \geq n$

Le choix le plus commun dans la littérature est le suivant :

$$g_h(t) = (T - t)^{(N-h+q+1)} t^{(q+h)} \quad , \quad \forall t \in [0, T], \quad h = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

Avec : $T \in \mathbb{R}_+^*$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}^+$

Exemple 2.2.

La figure ci-dessous (2.2) représente les fonctions modulatrices polynomiales pour $T = 10s$, $N = 7$ et $q = 0$.

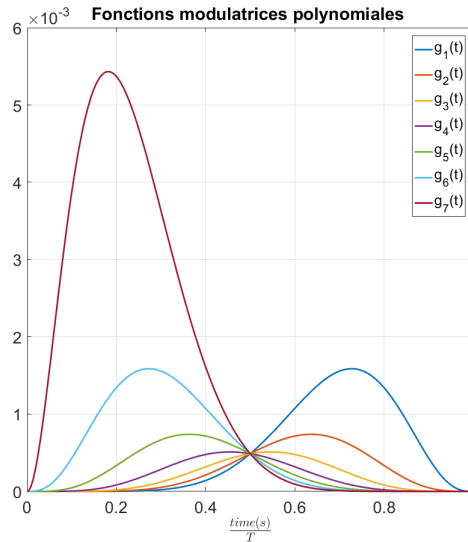


FIG. 2.2 : Fonctions modulatrices polynomiales pour $h = 1, \dots, 7, q = 0$.

Remarque 2.2.

Avec ce type de FM, l'amplitude peut très vite atteindre d'importantes valeurs, ce qui peut engendrer des erreurs numériques, pour éviter cela, on procède à une normalisation de ces dernières, nous retrouvons principalement deux types de normalisation : normalisation maximale et normalisation énergétique.

Exemple 2.3.

La figure ci-dessous (2.3) représente les fonctions modulatrices polynomiales normalisées pour $T = 10s, N = 7$ et $q = 0$.

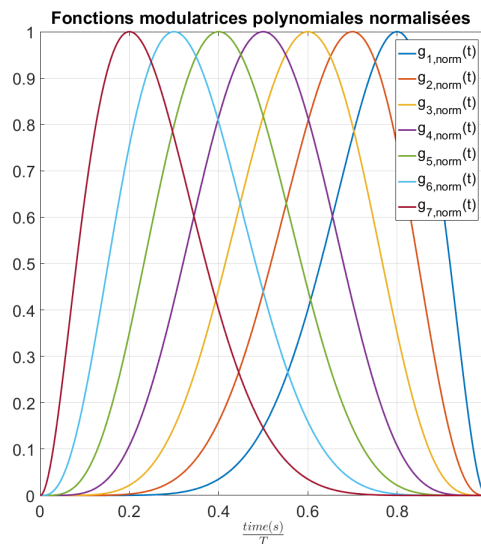


FIG. 2.3 : Fonctions modulatrices polynomiales normalisées pour $h = 1, \dots, 7, q = 0$.

2.3.2.3 Fonction modulatrice d'Hartley

La FM d'Hartley a été introduite en 1995, par Hartley et al. [31] et a été utilisée d'abord pour l'identification d'une classe de Système Non Linéaire (SNL)s. Elle est définie comme

suit :

$$g_h(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \text{cas}\left((n+h-j)\frac{2\pi t}{T}\right), \quad \forall t \in [0, T], \quad h = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

Avec : $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{N}^*$, $g_h \in C^n([0, T])$, $n \geq h$. et $h_1, h_2 \geq n$

Remarque 2.3.

$$\text{cas}(x) = \cos(x) + \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

Exemple 2.4.

La figure ci-dessous (2.4) représente les fonctions modulatrices d'Hartley pour $T = 10s$ et $N = 7$.

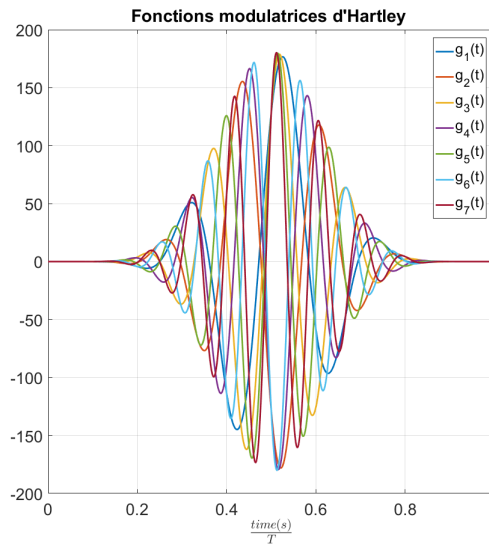


FIG. 2.4 : Fonctions modulatrices d'Hartley pour $h = 1, \dots, 7$.

2.3.2.4 Fonction modulatrice de Fourier

Les FM de Fourier ont été introduites en 1985 par Pearson et al. [32] et sont construites comme suit :

$$g_h(t) = e^{-jah} (e^{-j\frac{2\pi t}{T}} - 1)^K, \quad \forall t \in [0, T], \quad h = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

Avec : $T, K \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{N}^*$, $g_h \in C^n([0, T])$, $n \geq h$.

Exemple 2.5.

La figure ci-dessous (2.5) représente les fonctions modulatrices de Fourier pour $T = 10s$ et $N = 10$.

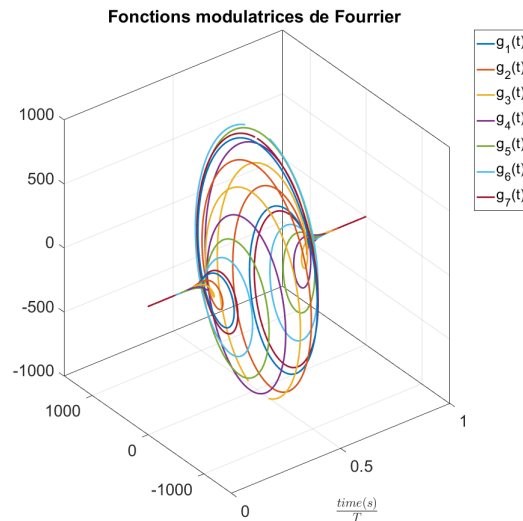


FIG. 2.5 : Fonctions modulatrices de Fourier pour $h = 1, \dots, 7$, $\alpha = 1$ et $k = 5$.

2.4 Identification paramétrique pour des systèmes linéaires d'ordre entier (SLOE)

2.4.1 Méthodologie

La procédure à suivre pour l'application de la méthode des FM comporte quatre principales étapes :

Étape 1. Traduire le système étudié en équations différentielles dans le domaine temporel.

Étape 2. Multiplier les deux côtés des équations différentielles générées par des FM et prendre l'intégrale de 0 à t de part et d'autre de l'équation différentielle.

Étape 3. Effectuer l'intégration par partie pour les deux termes, et pour les bornes spécifiées précédemment.

Étape 4. Éliminer les termes indésirables de part et d'autre et conserver les termes à estimer en exploitant les propriétés des FM conçues.

Nous allons dans cette partie étudier le cas des SLOEs. Considérons, pour ce qui suit, le SLOE suivant :

$$\sum_{i=1}^N a_i y^{(d_i)}(t) = u(t), \quad (2.7)$$

Où y est la sortie, u est l'entrée, $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, N$ un ensemble de réels qui constituent les inconnues à identifier et $d_i \in \mathbb{N}$ les ordres de dérivation entière.

Appliquons la méthodologie des fonctions modulatrices en quatre étapes :

Étape 1. Traduction du système en équation différentielle, ce qui est déjà le cas pour l'équation (2.7).

Étape 2,3. Soient g_j pour $j = 1, \dots, M$ des *Fonction Modulatrice Classique* (FMC)s d'ordre d , avec $d \geq \max\{d_i | i = 1, \dots, M\}$ satisfaisant les propriétés citées précédemment. En multipliant l'équation (2.7) de part et d'autre et en intégrant entre 0 et t pour $j = 1, \dots, M$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N a_i \int_0^t g_j(\tau) y^{(d_i)}(\tau) d\tau = \int_0^t g_j(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

En appliquant la formule d'intégration par partie lemme (1.1) sur l'équation (2.8), nous obtenons pour $j = 1, \dots, M$:

$$\sum_{i=1}^N a_i (-1)^{(d_i)} \int_0^t g_j^{(d_i)}(\tau) y(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{d_i-1} (-1)^k [g_j^{(k)}(\tau) y^{(L-1-k)}(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} = \int_0^t g_j(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^N a_i (-1)^{(d_i)} \int_0^t g_j^{(d_i)}(\tau) y(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{d_i-1} a_i (-1)^k [g_j^{(k)}(\tau) y^{(L-1-k)}(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} = \int_0^t g_j(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.10)$$

Étape 4. Grâce aux propriétés (P_2) et (P_3) des fonctions modulatrices, (2.10) devient pour $j = 1, \dots, M$:

$$\sum_{i=1}^N a_i (-1)^{(d_i)} \int_0^t g_j^{(d_i)}(\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t g_j(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

Ainsi, en posant $a = [a_1, \dots, a_n]^T$, l'estimation paramétrique peut être effectuée en résolvant le système linéaire suivant :

$$M(t)a = b(t), \quad (2.12)$$

Ou $M(t) \in \mathbb{R}^{M*N}, b(t) \in \mathbb{R}^M$, avec :

$$\begin{cases} M_{j,i}(t) = (-1)^{(d_i)} \int_0^t g_j^{(d_i)}(\tau)y(\tau)d\tau & i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ b_j(t) = \int_0^t g_j(\tau)u(\tau)d\tau & j = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous obtenons pour finir :

$$a = (M(t))^+b(t), \quad (2.14)$$

Où $(.)^+$ représente le pseudo-inverse d'une matrice que nous définissons ci-dessous.

Définition 2.2.

Le pseudo-inverse d'une matrice est une généralisation de l'inverse d'une matrice qui peut être appliquée à des matrices non carrées ou singulières (c'est-à-dire des matrices qui n'ont pas d'inverse). Le pseudo-inverse est également connu sous le nom d'inverse généralisé.

*Pour une matrice A de dimensions $m * n$, le pseudo-inverse de A , noté A^+ , est défini comme suit :*

- *Si A est une matrice carrée inversible (une matrice carrée non singulière), alors le pseudo-inverse A^+ est égal à l'inverse de A :*

$$A^+ = A^{-1} \quad (2.15)$$

- *Si A est une matrice rectangulaire avec plus de lignes que de colonnes ($m > n$), alors le pseudo-inverse A^+ est calculé à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de A . Le pseudo-inverse est donné par :*

$$A^+ = VS^+U^T \quad (2.16)$$

Où U , S et V sont les matrices obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières de A , avec S^+ étant la pseudo-inverse de la matrice diagonale S . La pseudo-inverse de S est obtenue en prenant le pseudo-inverse de chaque valeur singulière non nulle de S et en remplaçant les valeurs singulières nulles par zéro.

- *Si A est une matrice rectangulaire avec plus de colonnes que de lignes ($m < n$), alors le pseudo-inverse A^+ est calculé comme suit :*

$$A^+ = US^+V^T \quad (2.17)$$

Où U , S et V sont les matrices obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières de A , et S^+ est la pseudo-inverse de la matrice diagonale S .

Remarque 2.4. *Le pseudo-inverse d'une matrice n'est pas unique. Si une matrice A a un pseudo-inverse, alors toute autre matrice qui peut être obtenue en multipliant A^+ par une matrice à droite ou à gauche est également un pseudo-inverse de A .*

On distingue principalement deux types d'estimation en termes de disponibilité et d'utilisation des données ou mesures : l'estimation « offline » et l'estimation « online ».

Estimation « offline »

L'estimation hors ligne, « offline » également connue sous le nom d'estimation a posteriori ou d'estimation en mode « batch », est une approche d'estimation dans laquelle toutes les données nécessaires sont disponibles simultanément avant de commencer le processus d'estimation. Dans ce contexte, l'objectif est d'utiliser les données historiques pour estimer les paramètres inconnus d'un modèle mathématique ou d'un système.

Estimation « online »

L'estimation en ligne, « online » est une approche d'estimation dans laquelle les données sont acquises et traitées en temps réel ou de manière itérative, au fur et à mesure de leur disponibilité. Contrairement à l'estimation hors ligne, qui utilise des ensembles de données historiques, l'estimation en ligne est adaptée aux situations où les données sont générées en continu et nécessitent une estimation en temps réel.

Remarque 2.5.

Les équations précédentes sont adaptées à l'estimation et l'identification dite « online », en prenant $t \in I$

Remarque 2.6.

Pour des résultats plus détaillés sur l'estimation et l'identification paramétrique pour des systèmes linéaires d'ordre entier en utilisant les FMs, voir [18, 2]

L'algorithme utilisé pour l'estimation est présenté ci-dessous (1), il prend comme arguments (u, y, t, p, M) où u et y sont les mesures entrée-sortie du système, t est le support temporel, h est le pas et M est le nombre de fonctions modulatrices à utiliser.

Algorithm 1 Algorithme Estimation Paramétrique SLOE(u, t, y, p, M)

```

1: Data :  $u, y$ 
2: Result :  $\hat{a}$ 
3: for  $k = 1 : size(p)$  do
4:    $t = k * p$ 
5:   for  $j = 1 : M$  do
6:     for  $i = 1 : N$  do
7:        $M_{j,i}(t) = (-1)^{(d_i)} \int_0^t g_j^{(d_i)}(\tau)y(\tau)d\tau$  ▷ Compute  $M$ 
8:     end for
9:      $b_j(t) = \int_0^t g_j(\tau)u(\tau)d\tau$  ▷ Compute  $b$ 
10:  end for
11:   $\hat{a} \leftarrow M(t)^+b(t)$  ▷ Compute  $\hat{a}$ 
12: end for

```

Exemple 2.6.

Considérons le système linéaire d'ordre entier suivant, $\forall t \in [0, 10]$:

$$a_1y(t) + a_2\dot{y}(t) = u(t), \tag{2.18}$$

Prenons $a_1 = 3$, $a_2 = -2$. Soit la sortie du système non bruitée $y(t) = 3\cos(2t)$, l'observation bruitée $y^\varpi = y + \rho\varpi$ où ϖ représente un bruit blanc gaussien de moyenne nulle

et $\rho = \sqrt{2}$, l'observation est donc bruitée avec un *Signal to Noise Ratio* (SNR)=10 dB, nous avons comme entrée $u(t) = 9\cos(2t) + 12\sin(2t)$.

L'objectif ici est d'estimer les deux inconnus a_1 ainsi que a_2 ($a = [a_1, a_2]^T$) à partir des observations entrée-sortie représentées ci-dessous sur la figure (2.6) avec un pas d'échantillonnage de $T_s = 0.001s$.

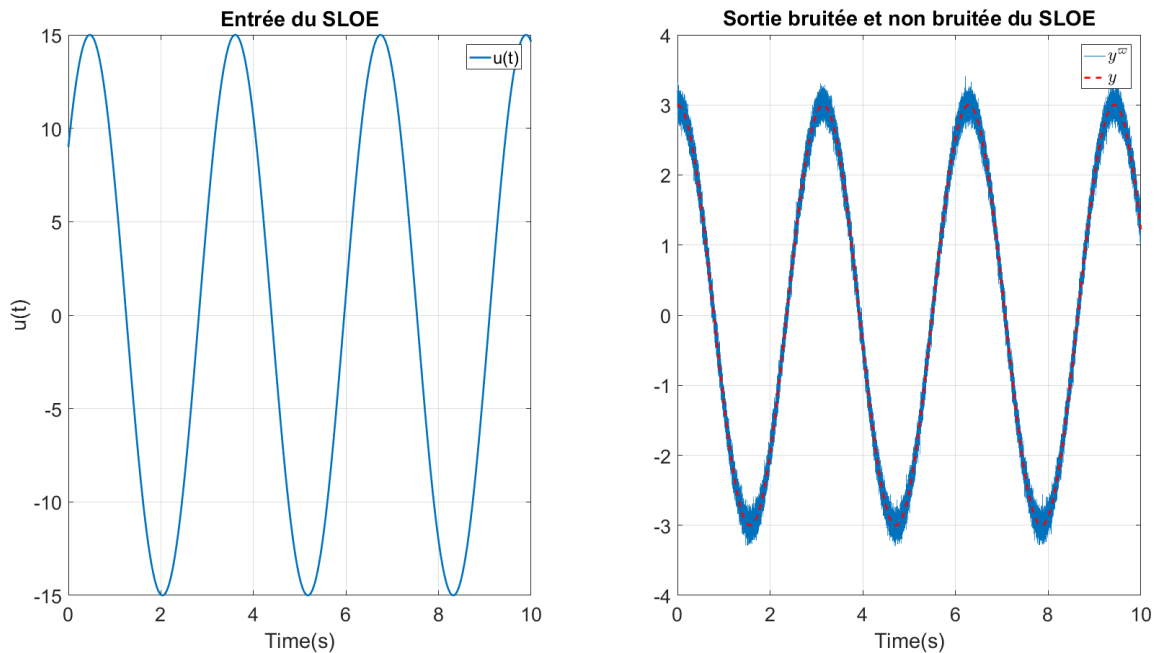


FIG. 2.6 : Entrée et sortie bruitée du SLOE (2.18).

Les FMs suivantes sont utilisées afin d'effectuer l'estimation :

$$g_1(\tau) = (t - \tau)^2 \tau^2 \quad , \quad g_2(\tau) = (t - \tau) \tau^3, \quad (2.19)$$

Remarque 2.7.

D'un point de vue numérique, nous allons utiliser l'intégration trapézoïdale afin d'approximer les intégrales, ce qui peut engendrer des erreurs et réduire la précision. L'Eq (2.14) est utilisée pour estimer les paramètres a_1 et a_2 .

Les résultats sont présentés ci-dessous sur la figure (2.7).

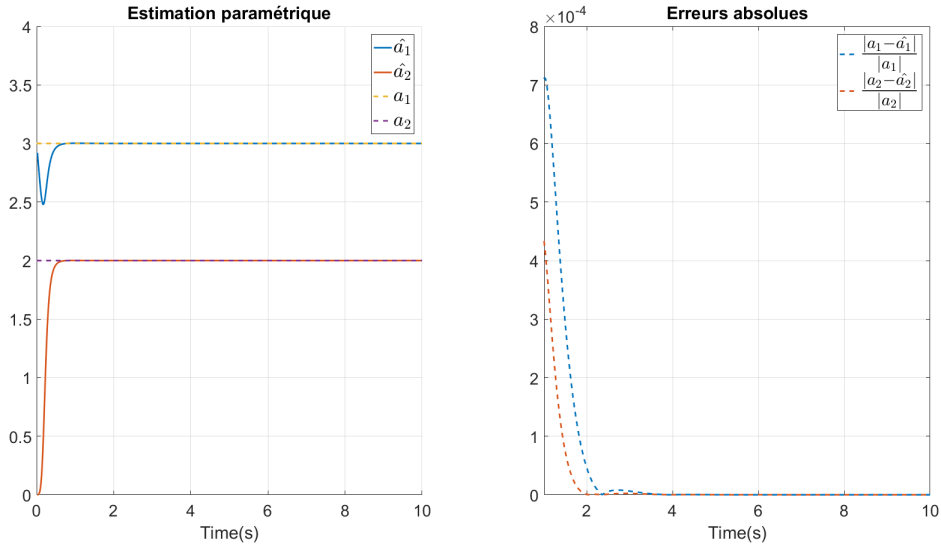


FIG. 2.7 : Résultats de l'estimation paramétrique et erreurs d'estimation absolues.

Discussion des résultats

Nous notons que l'estimation converge à partir de $t_c = 1s$. Ainsi, pour $t > t_c$, nous notons une erreur relative pour les deux paramètres estimés inférieure à 0.1% :

$$\begin{cases} \frac{|a_1 - \hat{a}_1|}{|a_1|} < 10^{-4} \\ \frac{|a_2 - \hat{a}_2|}{|a_2|} < 10^{-4} \end{cases}$$

L'estimation précédente nous permet ainsi de justifier le caractère non-asymptotique de l'estimation par la méthode des Fonctions Modulatrices qui est, rappelons le, dû au caractère géométrique et intégral de l'approche.

2.4.2 Effet du bruit en sortie

Afin d'étudier la robustesse de la méthode d'estimation précédente, une analyse de sensibilité de l'algorithme appliquée par rapport au niveau de bruit dans la sortie a été faite. Le tableau(2.1) montre l'effet du niveau de bruit en sortie en prenant un nombre de fonctions modulatrices fixe : $M = 2$ pour une estimation "online", nous représentons ci-dessous les valeurs finales obtenues à la fin de l'estimation : $t = T$.

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	$\frac{ a_1 - \hat{a}_1 }{ a_1 } (\%)$	$\frac{ a_2 - \hat{a}_2 }{ a_2 } (\%)$
Sans bruit	3.00000	2.00000	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$
1% de bruit	3.00000	2.00000	$3.4 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$
3% de bruit	3.00000	2.00000	$7.1 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-7}$
5% de bruit	3.00000	2.00000	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$
10 % de bruit	3.00007	2.00004	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
20 % de bruit	3.00153	2.00088	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$

TAB. 2.1 : Paramètres estimés et leurs erreurs relatives pour différents niveaux de bruit pour un SLOE

Discussion des résultats

Dans le cas de la sortie bruitée, l'erreur absolue atteint $5.1 \cdot 10^{-2}\%$ au maximum, ce

qui représente un très bon résultat pour une grande partie des domaines d'applications. Ainsi, la précision des résultats est maintenue pour des mesures bruitées, nous pouvons ainsi statuer sur la robustesse de l'estimation par la méthode des Fonctions Modulatrices pour les SLOE.

2.4.3 Effet du nombre de FMs

Afin d'étudier l'effet du nombre de fonctions modulatrices, nous avons estimé les paramètres pour le système précédent en utilisant différents nombres de FMs et une sortie bruitée à 10%, le tableau (2.2) résume les résultats obtenus à la fin de l'estimation : $t = T$.

Nombre de FMs	\hat{a}_1	\hat{a}_2	$\frac{ a_1 - \hat{a}_1 }{ a_1 } (\%)$	$\frac{ a_2 - \hat{a}_2 }{ a_2 } (\%)$
2	3.00007	2.00004	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
3	3.00006	2.00003	$2.0 \cdot 10^{-3}$	1.1^{-3}
5	3.00263	2.00578	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-1}$
10	3.016598	2.013654	$5.5 \cdot 10^{-1}$	$6.8 \cdot 10^{-1}$
20	3.048756	2.057963	1.62	2.90

TAB. 2.2 : Paramètres estimés et leurs erreurs relatives pour un SLOE en fonction du nombre de FMs

Discussion des résultats

Il est clair d'après le tableau (2.2) qu'augmenter le nombre de FM utilisées n'augmente pas nécessairement les performances de l'estimation (précision), bien au contraire, cela a tendance à les diminuer et donc augmenter l'erreur relative pour un nombre assez élevé (>10). Il est donc préférable, compte tenu de cela, de se restreindre à un nombre réduit mais suffisant de FMs.

2.4.4 Effet du type de FMs

D'après ce qui précède, nous remarquons que pour ce système les fonctions modulatrices polynomiales sont les plus adaptés, et leur nombre optimal est de $M = 3$ pour une sortie bruitée à 10%. Procédons à une étude comparative des résultats en fonction du type de fonction modulatrice pour montrer l'influence des FMs utilisées. Le tableau (2.3) résume les résultats obtenus.

Type de FMs	\hat{a}_1	\hat{a}_2	$\frac{ a_1 - \hat{a}_1 }{ a_1 } (\%)$	$\frac{ a_2 - \hat{a}_2 }{ a_2 } (\%)$
Polynomiales	3.00006	2.00003	$2.0 \cdot 10^{-3}$	1.1^{-3}
Sinusoidales	3.00654	2.00879	0.22	0.49
Hartley	3.07686	2.09876	2.56	4.938
Fourier	3.59846	2.48654	19.95	24.33

TAB. 2.3 : Paramètres estimés et leurs erreurs relatives en fonction du type de FM pour un SLOE

Discussion des résultats

Notons ici que les fonctions modulatrices polynomiales donnent le meilleur résultat, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, le type de fonctions modulatrices donnant les meilleures performances en termes de précision et/ou de robustesse dépend explicitement des données et des mesures, donc implicitement du système.

2.5 Conclusion

La méthode d'estimation basée sur les fonctions modulatrices est une méthode d'estimation intégrale qui conduit pour les systèmes étudiés à des estimations non-asymptotiques invariantes dans le temps, et ce, à travers une construction algébrique. Cette approche a été largement utilisée ces dernières années en raison de ses performances remarquables, que ce soit en termes de robustesse ou de précision. Néanmoins, l'un des problèmes rencontrés lors de son application est le choix des fonctions modulatrices à utiliser : leur type ainsi que leur nombre. Si ce choix s'avère simple pour des systèmes simples, il peut être problématique pour des systèmes plus complexes, et les fonctions modulatrices existantes peuvent échouer lors de l'estimation, généralement à cause de problèmes numériques.

Chapitre 3

Estimation conjointe des ordres et paramètres d'un système fractionnaire

3.1 Introduction

Il existe plusieurs méthodes pour l'identification et l'estimation d'un système d'ordre fractionnaire, on cite par exemple la version fractionnaire du filtre de Kalman appliquée au système fractionnaire discret pour estimer les paramètres et les ordres fractionnaires dans [40], une méthode de variable instrumentale simplifiée avec une approche de Newton-Gauss pour estimer les paramètres et les ordres fractionnaires dans [38]. La méthode des fonctions modultrices pour les systèmes d'ordre fractionnaire a été introduite en [13] comme une extension de la méthode pour les systèmes d'ordre entier [39], une combinaison de la méthode des fonctions modultrices et une méthode itérative (l'algorithme de Newton) a été introduite dans [49].

Dans cette partie, nous présenterons l'algorithme pour l'estimation conjointe des ordres et paramètres d'un système d'ordre fractionnaire, nous discuterons l'influence de plusieurs paramètres notamment le bruit et les conditions initiales, ainsi, nous étudierons les limitations de l'algorithme utilisé vis-à-vis de la convergence pour proposer par la suite un meilleur algorithme.

3.2 Estimation en utilisant les fonctions modultrices et l'algorithme de Newton

Soit le système fractionnaire linéaire suivant :

$$y(t) + \sum_{i=1}^N a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = u(t), \quad (3.1)$$

Où $y(t) \in \mathbb{R}$ est l'entrée, $u(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ sont les paramètres inconnus, $\alpha_i \in [n_i - 1, n_i], n_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, N$ sont les ordres fractionnaires inconnus.

Nous considérons les vecteurs des paramètres et des ordres fractionnaires respectivement :

$$\theta = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T \quad ; \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T, \quad (3.2)$$

Ainsi que leurs estimations :

$$\hat{\theta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N)^T \quad ; \quad \hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_N)^T, \quad (3.3)$$

Afin d'estimer les deux vecteurs $(\hat{\theta}, \hat{\alpha})$ conjointement, nous avons utilisé dans un premier lieu l'algorithme en deux stages développé ci-dessous, sans initialisation, sur le système (4.31).

Stage 1. Tout d'abord, on multiplie (4.31) par l'ensemble des fonctions modultrices $g_m(T-t)$ pour $m = 1, \dots, M$ et par intégration sur $[0, T]$ nous trouvons :

$$\int_0^T g_m(T-t)y(t)dt + \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T g_m(T-t)D_t^{\alpha_i} y(t)dt = \int_0^T g_m(T-t)u(t)dt, \quad (3.4)$$

En utilisant la formule (1.34) introduite dans le chapitre 1, pour la deuxième intégrale de (3.4), l'équation (3.4) devient :

$$\sum_{i=1}^N a_i A_{mi}(\alpha) = b_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.5)$$

Avec A_{mi} et b_m qui sont définis comme suit :

$$\begin{cases} A_{mi}(\alpha) = \int_0^T D_t^{\alpha_i} g_m(T-t)y(t)dt \\ b_m = \int_0^T g_m(T-t)[u(t) - y(t)]dt \end{cases}, \quad (3.6)$$

Le système (3.5) peut s'écrire sous la forme du système suivant :

$$A(\alpha)\theta = b, \quad A(\alpha) \in \mathbb{R}^{M \times N}, \quad b \in \mathbb{R}^M, \quad (3.7)$$

Stage 2. Pour simplifier la notation par la suite, les notions suivantes sont introduites $\tilde{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $\check{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^M$ et $\check{b} \in \mathbb{R}^N$ tel que leurs éléments sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{A}_{mi}(\alpha) = A_{mi}(\alpha) \\ \tilde{b}_m = b_m \end{cases}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \check{A}_{mi}(\alpha) = A_{(m+M)i}(\alpha) \\ \check{b}_m = b_{m+M} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.9)$$

D'une part, pour un $\hat{\alpha}^k$ donné, une estimation de $\hat{\theta}(\hat{\alpha}^k)$ est calculée en résolvant le système linéaire suivant :

$$\tilde{A}(\hat{\alpha}^k)\hat{\theta}(\hat{\alpha}^k) = \tilde{b}, \quad (3.10)$$

Et d'autre part, le vecteur des ordres fractionnaires estimés $\hat{\alpha}^k$ est calculé en utilisant la formule itérative de Newton suivante :

$$\hat{\alpha}^{k+1} = \hat{\alpha}^k - [L'(\hat{\alpha}^k)]^{-1}J(\hat{\alpha}^k), \quad (3.11)$$

$J(\hat{\alpha}^k)$ est défini comme suit :

$$J(\hat{\alpha}^k) = L(\hat{\alpha}^k) - R, \quad (3.12)$$

Avec :

$$\begin{cases} R_j = \check{b}_j \\ L_j(\hat{\alpha}^k) = \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i(\hat{\alpha}^k)\check{A}_{ji}(\hat{\alpha}^k) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.13)$$

La matrice $L'(\hat{\alpha}^k)$ est la jacobienne de $L(\hat{\alpha}^k)$, ses éléments sont donnés par :

$$L'_{ij}(\hat{\alpha}^k) = \frac{\partial L_j}{\partial \alpha_i}(\hat{\alpha}^k) \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

L'algorithme d'estimation est appliqué sur deux étapes :

- **Étape 1** : Soit l'ensemble des fonctions modulatrices $g_m(t)_{m=1}^M$. Pour un α donné, on calcule $\hat{\theta}(\alpha)$ la solution estimée du système $\tilde{A}(\alpha)\theta = \tilde{b}$
- **Étape 2** : Soit l'ensemble des fonctions modulatrices $g_m(t)_{m=M+1}^{M+N}$, $\hat{\alpha}^k$ est calculé à chaque itération en utilisant la loi de Newton (3.11).

Algorithm 2 Algorithme Estimation à 2 étapes en utilisant Newton

- 1: Initialize $k=0$ and $\hat{\alpha}^0$
 - 2: Compute $\hat{\theta}(\hat{\alpha}^k)$
 - 3: Compute $J(\hat{\alpha}^k)$
 - 4: **if** $\|\frac{J(\hat{\alpha}^k)}{R}\| < \epsilon$ **then**
 - 5: break
 - 6: **else**
 - 7: Compute $\hat{\alpha}^k$ using Newton's algorithm
 - 8: $k = k + 1$ ▷ Increment k
 - 9: **end if**
-

Afin de calculer $L'(\hat{\alpha}^k)$, les formules suivantes sont introduites :

$$L'_{ij}(\hat{\alpha}^k) := \frac{\partial L_j}{\partial \alpha_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{\theta}_k(\alpha)}{\partial \alpha_i} \check{A}_{jk} + \hat{\theta}_k(\alpha) \frac{\partial \check{A}_{jk}(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \quad (3.15)$$

Les termes $\frac{\partial \hat{\theta}_k(\alpha)}{\partial \alpha_i}$ sont estimés à travers la résolution du système linéaire suivant :

$$\check{A}(\alpha) \hat{\theta}_d^i = \bar{b}^i(\alpha), \quad (3.16)$$

Tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_d^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\theta}_1(\alpha)}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \hat{\theta}_2(\alpha)}{\partial \alpha_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{\theta}_N(\alpha)}{\partial \alpha_i} \end{pmatrix}, \\ \bar{b}_m^i = -\hat{\theta}_i(\alpha) \frac{\partial \check{A}_{mi}(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \end{array} \right. \quad m = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

Les termes $\frac{\partial \check{A}_{mi}(\alpha)}{\partial \alpha_i}$ sont calculés en utilisant la formule suivante :

$$\frac{\partial \check{A}_{mi}(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \int_0^T \frac{\partial D_t^{\alpha_i} g_m(t)}{\partial \alpha_i} y(T-t) dt, \quad (3.18)$$

Tel que :

$$\frac{\partial D_t^\alpha f(t)}{\partial \alpha} = \psi_0(p) D_t^\alpha f(t) - \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_0^t (t-\tau)^{p-1} \ln(t-\tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (3.19)$$

Avec $p = n - \alpha$, $n = [\alpha]$ et ψ_0 est la fonction digamma.

Exemple 3.1.

Pour la simulation, nous avons choisi le système suivant :

$$y(t) + 3D_t^{1.5}y(t) + 2D_t^{0.5}y(t) = u(t), \quad (3.20)$$

Avec une entrée porte, activé en $t = 2s$ et désactivée en $t = 7s$.

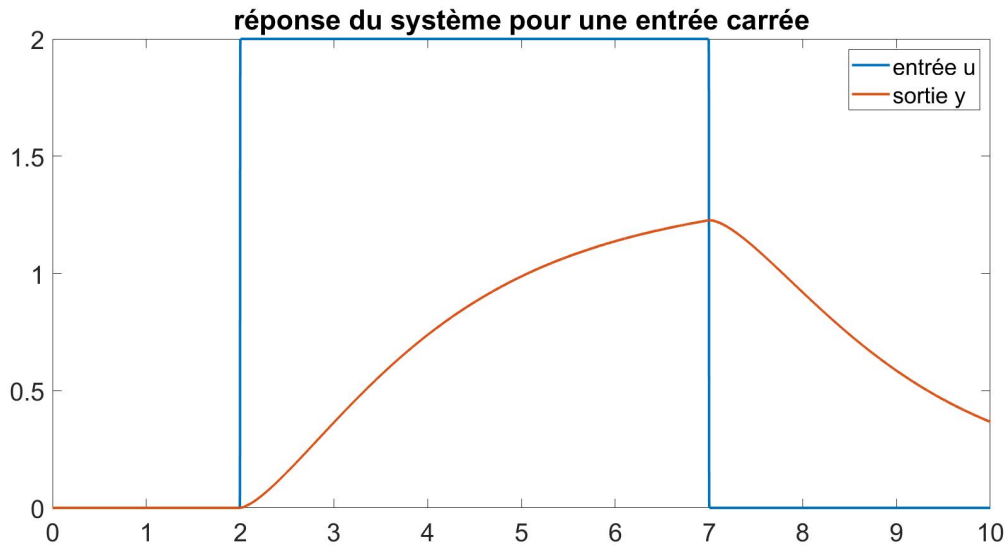


FIG. 3.1 : La sortie y pour une entrée de type porte sans bruit

En premier lieu, on estime pour une sortie non bruitée avec des conditions initiales $\hat{\alpha}^0 = [1.7, 0.7]^T$, pour 100 itérations :

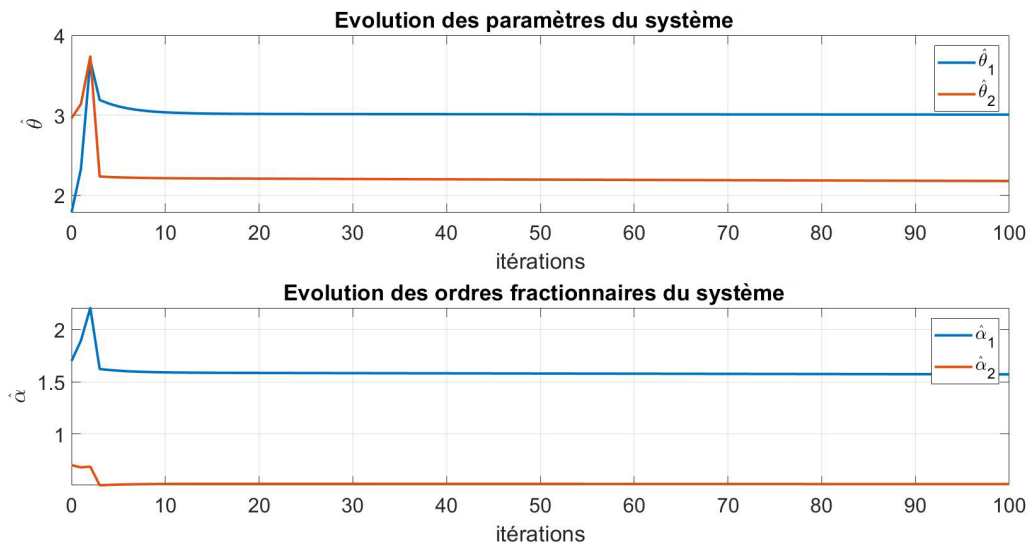


FIG. 3.2 : Évolution de la convergence des 4 paramètres du système à travers les itérations

On peut remarquer une convergence rapide au bout de 4 itérations, avec des erreurs relatives résumées dans le tableau suivant :

	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
Erreur relative (%)	0.2195	0.1585	0.0096	0.4231

TAB. 3.1 : Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires estimés pour une entrée non bruitée avec des conditions initiales $\hat{\alpha}^0 = [1.7, 0.7]$.

Nous étudions maintenant l'influence du bruit en sortie sur l'estimation des paramètres et des ordres.

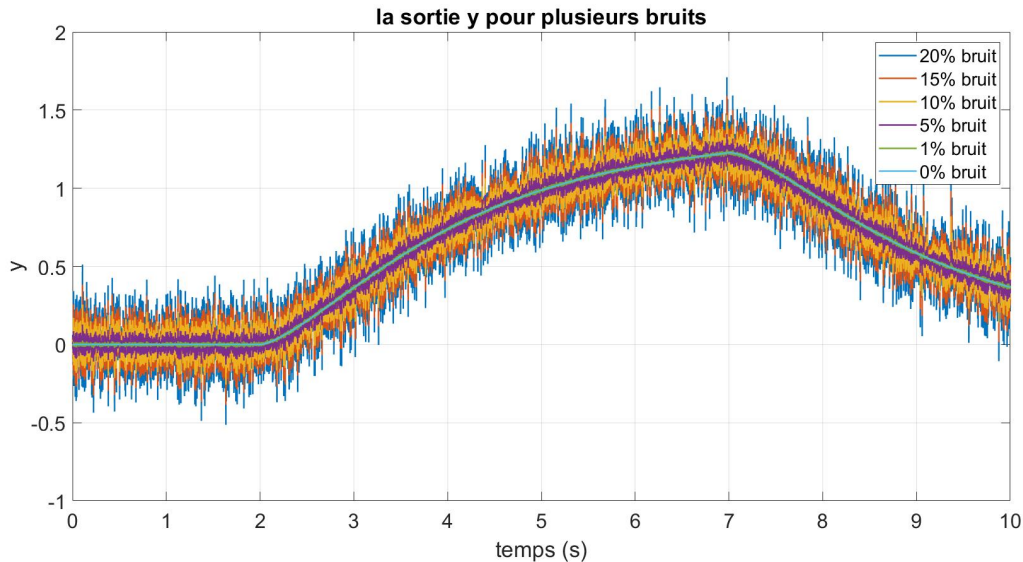


FIG. 3.3 : Visualisation de la sortie pour plusieurs bruits ajoutés en sortie.

Les résultats de l'estimation sont résumés dans le tableau suivant :

Bruit (%)	$\frac{\ \alpha_1 - \hat{\alpha}_1\ }{\ \alpha_1\ }$ (%)	$\frac{\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2\ }{\ \alpha_2\ }$ (%)	$\frac{\ \theta_1 - \hat{\theta}_1\ }{\ \theta_1\ }$ (%)	$\frac{\ \theta_2 - \hat{\theta}_2\ }{\ \theta_2\ }$ (%)
1%	0.4825	0.7497	0.4702	1.188
5%	1.7845	2.8491	1.8800	4.3729
10%	0.1884	0.1089	0.1699	0.1233
15%	0.9512	1.2635	2.1521	2.5808
20%	1.7955	6.1147	3.0879	7.1257

TAB. 3.2 : Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour plusieurs valeurs de bruit ajouté à la sortie

D'après le tableau (3.2), on peut remarquer que l'influence du bruit est minime malgré son augmentation, et ce, jusqu'à un SNR de 20%, nous pouvons donc constater que la méthode est robuste vis-à-vis de la présence de bruit en sortie.

La prochaine étape est d'étudier l'influence des conditions initiales sur la convergence, les résultats sont résumés dans le tableau suivant (3.3) :

$\hat{\alpha}^0$	$\frac{\ \alpha_1 - \hat{\alpha}_1\ }{\ \alpha_1\ } (\%)$	$\frac{\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2\ }{\ \alpha_2\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_1 - \hat{\theta}_1\ }{\ \theta_1\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_2 - \hat{\theta}_2\ }{\ \theta_2\ } (\%)$
[1.55, 0.55]	0.4825	0.1587	0.0096	0.4235
[1.6, 0.6]	1.7110	1.7922	0.4527	3.4849
[1.7, 0.7]	0.2195	0.1584	0.0096	0.4230
[1.8, 0.8]	91.8985	75.7766	156.6650	63.8400
[1.9, 0.9]	75.6420	79.4271	97.4631	94.9061
[2, 1]	66.7359	199.6251	33.5226	50.1311

TAB. 3.3 : Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour différentes conditions initiales

Nous constatons que pour des valeurs initiales éloignées des valeurs réelles du système, l'algorithme d'estimation à 2 étapes diverge avec une erreur relative importante. Dans [49], la convergence quadratique de l'algorithme à deux étapes a été prouvée. Néanmoins, en raison de l'utilisation de l'algorithme de Newton afin d'estimer $\hat{\alpha}^k$, alors selon [16], l'algorithme converge localement uniquement pour $\hat{\alpha}^0 = \alpha \pm \lambda$ avec λ comme constante.

Le caractère local de la convergence de l'algorithme de Newton nous a motivé, dans ce qui suit, à introduire un algorithme dont la convergence est globale.

3.3 Estimation en utilisant l'algorithme global génétique

L'algorithme que nous proposons est basé sur celui proposé dans [49], mais en substituant l'algorithme de Newton par un algorithme génétique. Les algorithmes génétiques sont des algorithmes de recherche heuristiques adaptatifs qui appartiennent à la plus grande partie des algorithmes évolutifs. Les algorithmes génétiques sont basés sur les idées de sélection naturelle et de génétique. Il s'agit d'une exploitation intelligente de la recherche aléatoire fournie avec des données historiques pour diriger la recherche dans la région de meilleures performances dans l'espace de solution. Ils sont couramment utilisés pour générer des solutions de haute qualité pour les problèmes d'optimisation et de recherche.

3.3.1 Algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires sont une famille d'algorithmes dont le principe s'inspire de la théorie de l'évolution pour résoudre divers problèmes. Ce sont donc des méthodes de calcul bio-inspirées. L'idée est de faire évoluer un ensemble de solutions à un problème donné, dans l'optique de trouver les meilleurs résultats. Ce sont des algorithmes dits stochastiques, car ils utilisent itérativement des processus aléatoires. La grande majorité de ces méthodes sont utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation, elles sont en cela des méta-heuristiques, bien que le cadre général ne soit pas nécessairement dédié aux algorithmes d'optimisation au sens strict du terme. Ces algorithmes manipulent des populations de solutions. Les algorithmes évolutionnaires s'inspirent de l'évolution des êtres

vivants, en considérant que celle-ci tend à produire des organismes plus adaptés à leur environnement. Selon la théorie de l'évolution, plusieurs mécanismes sont à l'œuvre :

- Les caractéristiques d'un organisme sont en grande partie codées dans ses gènes.
- Chaque population d'organismes est composée d'individus tous différents.
- Les individus sont plus ou moins adaptés à leur environnement.
- Les organismes transmettent une partie de leurs caractéristiques à leurs descendants.
- Les individus les plus adaptés se reproduisent plus « efficacement », leurs caractéristiques ont donc tendance à davantage se répandre dans la population.

Tous les algorithmes évolutionnaires font évoluer un ensemble (population) de solutions (individus). Les individus sont représentés par leur génotype, qui s'exprime sous la forme d'un phénotype, auxquels on associe une qualité, la fitness. Les algorithmes sont conçus de façon que plus la fitness d'un individu est élevée, plus il a des chances de transmettre son génotype au sein de la population. À chaque étape de l'algorithme est associé un opérateur, qui décrit la façon de manipuler les individus. On regroupe parfois les différents opérateurs sous des termes génériques :

- Opérateurs de sélection pour la sélection et le remplacement.
- Opérateurs de variation pour la mutation et le croisement.

Après avoir initialisé une première population d'individus, on itère un nombre fini de fois, jusqu'à atteindre un critère d'arrêt (par exemple un nombre maximum de générations). La première étape de sélection permet de séparer les individus qui participeront à la reproduction de ceux qui n'y participeront pas. Les individus sélectionnés (les parents) se reproduisent (on dit aussi que l'on effectue des croisements), donnant un ensemble d'enfants partageant une partie des caractéristiques de leurs ascendants. Ces enfants subissent alors une étape de mutation, qui modifie aléatoirement leur génotype. Les nouveaux individus sont alors évalués (on met à jour leur valeur en faisant appel à la fonction objective). Enfin, on choisit un nombre d'individus déterminé parmi l'ensemble *parents + enfants*, pour former la génération suivante.

3.3.2 L'algorithme génétique

Les algorithmes génétiques simulent le processus de sélection naturelle, ce qui signifie que les espèces qui peuvent s'adapter aux changements dans leur environnement peuvent survivre, se reproduire et passer à la génération suivante. En termes simples, ils simulent la « survie du plus fort » chez une personne de génération consécutive pour résoudre un problème. Chaque génération se compose d'une population d'individus et chaque individu représente un point dans l'espace de recherche et la solution possible. L'algorithme génétique est résumé dans les étapes suivantes :

Algorithm 3 Algorithme Génétique

- 1: Randomly initialize population p
 - 2: Compute the fitness of the population
 - 3: **do**
 - 4: Select parent from population
 - 5: Crossing and creating a new population
 - 6: Make a mutation on the new population
 - 7: Compute the fitness of the new population
 - 8: **while** Precision not reached
-

Les algorithmes génétique sont largement utilisés dans plusieurs applications vu leur robustesse et leur rejet de bruit ou présence, ils sont utilisés dans :

- Problèmes d'optimisation.
- Traitement de signaux et d'image.
- Robotique et modélisation.
- Identification et estimation des paramètres.

Algorithm 4 Algorithme d'Estimation en utilisant l'Algorithme Génétique

- 1: Initialize population with parameter intervals
 - 2: **do**
 - 3: Choose $(\hat{\alpha}^k)$ from the population
 - 4: Crossing and creating a new population
 - 5: Make mutation on new population
 - 6: Compute the fitness of new population ($J(\hat{\alpha}^k)$)
 - 7: **while** Number of populations not reached
-

3.3.3 Estimation en utilisant l'algorithme génétique

L'algorithme que l'on propose consiste en l'adaptation de l'algorithme proposé dans [49] en substituant l'algorithme de Newton, par l'algorithme génétique.

L'algorithme génétique calculera à chaque itération (population) la meilleure valeur de la fonction fitness, qui est dans notre cas $J(\hat{\alpha}^k)$. Nous considérons toujours le système (3.20) avec une entrée porte non bruitée, 50 populations et 50 individus avec un intervalle de recherche de solution $I = [0, 2]$. Nous trouvons les résultats suivants :

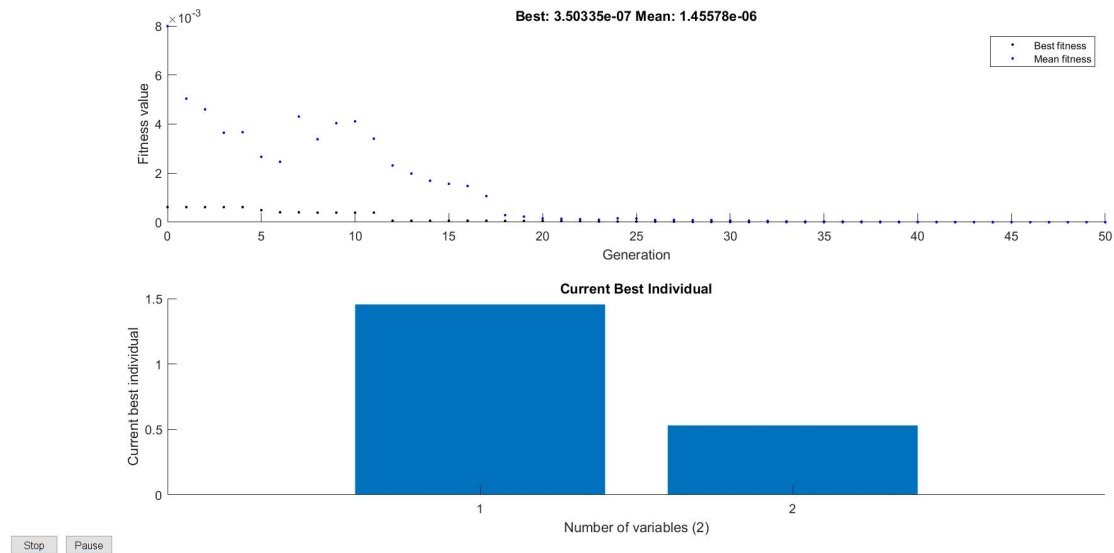


FIG. 3.4 : Évolution de la fitness au long de la population, avec le meilleur individu possible

Les erreurs relatives sont résumées dans le tableau suivant :

	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
Erreur relative %	2.9745	6.1052	8.7032	2.4103

TAB. 3.4 : Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires estimés avec l'algorithme génétique

Remarque 3.1.

Nous avons des erreurs relatives relativement acceptables (inférieures à 10%). Rappelons que pour l'estimation précédente (en utilisant l'algorithme de Newton), les erreurs relatives étaient de l'ordre de 66% pour la même initialisation.

On passe maintenant à l'étude de robustesse avec l'introduction de différentes valeurs de bruit comme suit :

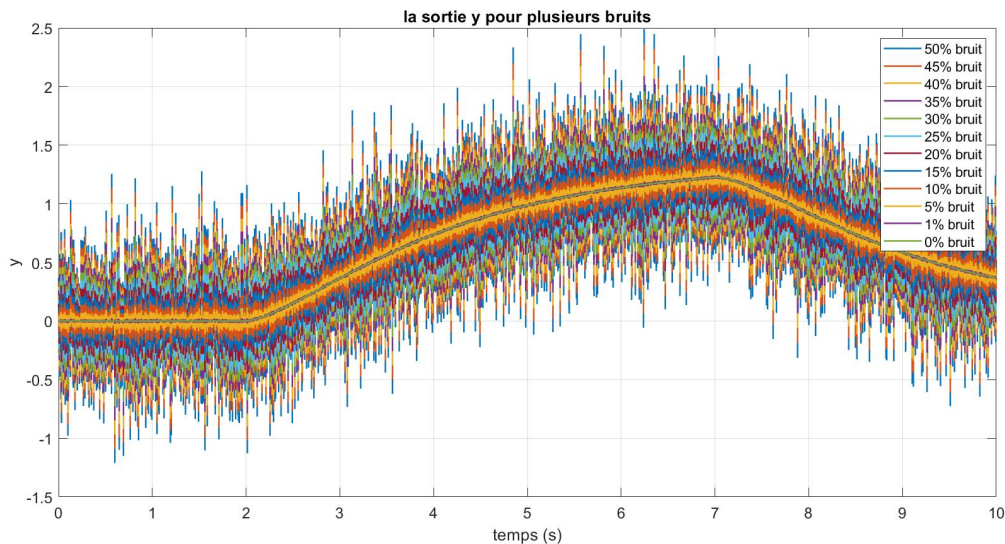


FIG. 3.5 : La sortie y avec l'addition de différents bruits

Nous appliquons l'algorithme génétique, nous trouvons les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

Bruit (%)	$\frac{\ \alpha_1 - \hat{\alpha}_1\ }{\ \alpha_1\ }$ (%)	$\frac{\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2\ }{\ \alpha_2\ }$ (%)	$\frac{\ \theta_1 - \hat{\theta}_1\ }{\ \theta_1\ }$ (%)	$\frac{\ \theta_2 - \hat{\theta}_2\ }{\ \theta_2\ }$ (%)
1%	3.0075	2.7591	0.3914	6.0334
5%	0.5146	1.8167	1.4181	1.9030
10%	2.1714	0.1007	2.3447	2.8572
15%	0.5263	2.3312	1.3176	1.9794
20%	1.8677	4.5687	5.3644	8.7738
25%	1.5608	3.8503	4.9433	3.7535
30%	0.7006	0.0128	0.7612	0.4399
35%	4.8659	13.0614	9.4704	15.2613
40%	0.8067	11.1879	10.6558	7.9620
45%	4.2837	4.3186	0.9594	8.8340
50%	0.7175	6.3988	6.4327	5.1691

TAB. 3.5 : Erreurs relatives des paramètres et des ordres fractionnaires du système pour plusieurs valeurs de bruit ajouté à la sortie en utilisant l'algorithme génétique.

Remarque 3.2.

L'algorithme génétique est très robuste et n'est pas affecté par la convergence de l'algorithme, en effet, les résultats sont satisfaisants, et cela, même en présence de bruits jusqu'à un SNR=50%.

Par la suite, nous étudions l'effet du nombre de populations et d'individus sur la convergence de l'algorithme, afin d'identifier la valeur optimale de ces paramètres. Les résultats trouvés sont présentés ci-dessous :

Nombre d'individus	$\frac{\ \alpha_1 - \hat{\alpha}_1\ }{\ \alpha_1\ } (\%)$	$\frac{\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2\ }{\ \alpha_2\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_1 - \hat{\theta}_1\ }{\ \theta_1\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_2 - \hat{\theta}_2\ }{\ \theta_2\ } (\%)$
10	4.0968	4.8627	1.9225	8.9233
20	2.5456	1.6871	7.6492	4.0417
30	0.3933	0.3609	0.6702	0.4549
40	4.4897	5.3997	0.8654	10.2356
50	1.7234	1.7429	2.3741	0.9939
60	1.5608	3.8503	4.9433	3.7535

TAB. 3.6 : Influence du nombre d'individus sur la convergence des valeurs pour 50 populations (générations)

Nombre de populations	$\frac{\ \alpha_1 - \hat{\alpha}_1\ }{\ \alpha_1\ } (\%)$	$\frac{\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2\ }{\ \alpha_2\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_1 - \hat{\theta}_1\ }{\ \theta_1\ } (\%)$	$\frac{\ \theta_2 - \hat{\theta}_2\ }{\ \theta_2\ } (\%)$
20	9.3534	13.3698	10.5534	28.4565
30	3.3172	3.8643	0.4505	9.8909
40	0.4615	0.4131	0.1210	0.9539
50	3.6380	2.9981	1.8113	7.0358
60	0.9255	0.8324	0.1304	1.8158
70	1.3270	1.4369	1.1115	3.2601

TAB. 3.7 : Influence du nombre de populations (générations) sur la convergence des valeurs pour 30 individus

Le nombre de générations ou de populations n'influence pas sur la convergence de l'algorithme à grande échelle, car ces derniers représentent les valeurs à tester à travers les mutations et des meilleurs individus de chaque population.

3.4 Convergence de l'algorithme génétique

L'objectif de notre recherche est d'améliorer l'algorithme de Newton en atténuant les effets de la dépendance des conditions initiales. Pour atteindre cet objectif, nous avons utilisé une approche basée sur l'algorithme génétique. L'Algorithme Génétique (AG) fournit un moyen bien défini d'améliorer la recherche en utilisant un processus de sélection recuit, qui permet aux individus de se reproduire et d'explorer de nouvelles régions de l'espace de recherche. En tenant compte de ces considérations, les conditions de convergence suivantes ont été établies :

- $J(\alpha^k)$ est bien défini et admet une solution $\alpha^k = 0$.
- Un espace de recherche suffisamment grand, car nous utilisons les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$ qui sont denses \mathbb{R} , afin de fournir suffisamment de solutions possibles.
- Nous utilisons suffisamment de générations et de personnes pour couvrir le maximum d'espace de recherche.

Si ces conditions sont satisfaites, nous avons l'assurance que l'algorithme génétique convergera. De plus, nous utilisons la technique de sélection mondiale de recuit afin d'améliorer les résultats obtenus, garantissant ainsi notre capacité à éviter les minima locaux.

Remarque 3.3.

Plusieurs études de convergence de l'algorithme génétique ont été faites dans la littérature, par exemple, [36], [9] et [7] parlent d'une représentation en chaîne de Markov des algorithmes génétiques et de l'étude de convergence pour plusieurs méthodes, tant dit que [26] étudie l'influence des paramètres sur la convergence de l'algorithme et définit des conditions suffisantes pour la convergence.

3.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons appliqué l'algorithme d'estimation conjointe en deux stages : avec fonctions modulatrices et algorithme itératif de Newton sur un système fractionnaire, où nous avons étudié l'influence de plusieurs paramètres. Cette étude nous a permis de statuer sur la robustesse de l'algorithme, où nous avons vu que l'algorithme est robuste vis-à-vis de l'ajout du bruit, mais il est très sensible aux conditions initiales. Pour remédier à ça, nous avons introduit l'algorithme génétique afin d'éliminer la sensibilité par rapport aux conditions initiales, ainsi l'algorithme conjoint hybride tolère une plage d'initialisation beaucoup plus importante tout en étant robuste.

Chapitre 4

Estimation autour du flux artériel sanguin : Modèle de Windkessel

4.1 Introduction

À travers ce chapitre, nous allons illustrer l'importance de l'estimation non-asymptotique en temps fini par la méthode des Fonctions Modulatrices, et ce, en prenant comme exemple l'estimation du flux sanguin artériel à travers le réseau artériel, qui est une problématique cruciale dans le domaine physiologique et dans la bio-ingénierie. L'implémentation de la méthode des FMs pour l'estimation du flux sanguin est motivée par le caractère invasif des méthodes existantes, les quelques-unes qui ne le sont pas, nécessitent des capacités de calculs importantes ou sont trop complexes à implémenter. Ceci a donc motivé la communauté scientifique à proposer plusieurs modèles représentant le flux artériel sanguin, l'un des plus importants étant le modèle de Windkessel à deux éléments, d'ordre entier ou fractionnaire.

Nous allons introduire dans ce qui suit ces deux modèles en proposant des techniques et des méthodes d'estimation pour chacun des deux, toutes basées sur la méthode des FMs, le but étant d'illustrer l'efficacité et l'intérêt de ces méthodes d'estimation pour un problème de la vie réelle ainsi que d'identifier leurs limites. Pour ce faire, nous aurons besoin dans un premier temps de développer les modèles de Windkessel à deux paramètres, nous construirons ensuite les méthodes d'estimation algébriques pour chacun des deux modèles. Enfin, nous fournirons une analyse de robustesse et de sensibilité de ce problème d'estimation à l'aide de simulations numériques et discuterons les résultats.

4.2 Flux sanguin aortique et effet de Windkessel

4.2.1 Phases du cycle cardiaque

L'aorte est l'artère principale du corps humain, elle prend naissance à la base du ventricule gauche du cœur, tronc commun du système artériel et s'étend jusqu'à l'abdomen en branches plus petites. La figure (4.1) décrit le cycle cardiaque qui est décrit par deux phases :

1. **La diastole ventriculaire** : Elle se produit après la relaxation du ventricule où le sang oxygéné est poussé dans les oreillettes. Au cours de cette phase, la pression sanguine est à son plus bas et elle est connue sous le nom de pression diastolique.
2. **La systole** : Elle suit directement la diastole, où les ventricules éjectent le sang à travers l'aorte. Durant cette phase, la tension artérielle atteint sa valeur maximale et est connue comme la pression systolique.

4.2.2 Modèle du flux sanguin artériel de Windkessel

Les modèles de Windkessel sont des modèles à paramètres groupés, largement utilisés pour caractériser le système vasculaire et les systèmes artériels pulmonaires. Le Windkessel est le modèle mathématique le plus simple qui peut décrire la fonction globale des

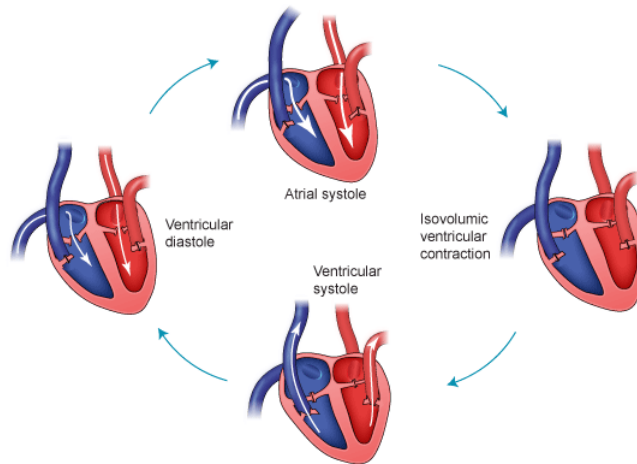


FIG. 4.1 : Cycle cardiaque

arbres systématiques artériels humains, en utilisant des paramètres simples tels que la compliance artérielle totale (C), l'impédance caractéristique aortique (Z_c) et la résistance périphérique totale (R_p). L'objectif principal des méthodes de Windkessel est de modéliser l'impédance d'entrée aortique comme une post-charge au cœur [4, 27].

Classiquement, il est très pratique d'adopter l'analogie électrique, lors de l'utilisation du modèle de Windkessel, où la résistance, la compliance et l'inertie sanguine sont représentées respectivement par une résistance, un condensateur et une inductance.

De plus, la tension artérielle correspond à la tension électrique et le débit sanguin au courant. Par conséquent, l'impédance d'entrée aortique est également équivalente à l'impédance électrique, exprimée comme le rapport tension sur courant, dans le domaine fréquentiel, voir la figure (4.2), nous développerons par la suite les modèles de Windkessel à deux éléments : entier et fractionnaire.

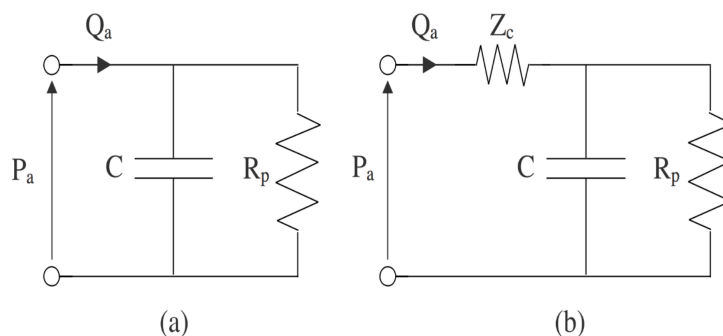


FIG. 4.2 : (a) : Le modèle de Windkessel à deux éléments, (b) : Le modèle de Windkessel à trois éléments

Plusieurs variantes du modèle de Windkessel ont été proposées pour capturer l'hémodynamique artérielle. Ces modèles varient selon le nombre d'éléments électriques impliqués. Malgré les progrès faits, la compliance C , qui décrit l'élasticité du vaisseau sanguin, n'est toujours pas bien représentée. Cela est dû au fait que les modèles de Windkessel supposent que les vaisseaux artériels sont purement élastiques et donc un condensateur

idéal est généralement utilisé. Ceci contredit les travaux de recherche récents, qui expliquent que les tissus des vaisseaux artériels sont viscoélastiques comme n'importe quel biomatériau.

4.2.3 Modèle de Windkessel entier à deux éléments

Sur la base de la conservation de masse, le débit sanguin artériel d'entrée, $Q_a(t)$, pompé du ventricule gauche du cœur vers le lit vasculaire artériel, peut être exprimé comme suit :

$$Q_a(t) = Q_{stored}(t) + Q_{out}(t), \quad (4.1)$$

Où $Q_{stored}(t)$ est le sang contenu dans l'arbre artériel et $Q_{out}(t)$ correspond au débit sortant du système artériel. $Q_{out}(t)$ est supposé proportionnel à la pression artérielle aortique $P_a(t)$, c'est-à-dire :

$$Q_a(t) = \frac{1}{R_p} P_a(t), \quad (4.2)$$

Où R_p est la résistance périphérique totale. Quant à $Q_{stored}(t)$, il est défini comme le débit en prenant la dérivée première de l'équation du volume sanguin $V(t)$ pour le temps, c'est-à-dire :

$$Q_{stored}(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad (4.3)$$

$$Q_{stored}(t) = \underbrace{\frac{dV(t)}{dP_a(t)}}_C \frac{dP_a(t)}{dt}, \quad (4.4)$$

Avec : $C = \frac{dV(t)}{dP_a(t)}$ est une constante proportionnelle qui exprime la compliance artérielle totale, la figure (4.3) schématise ce résultat.

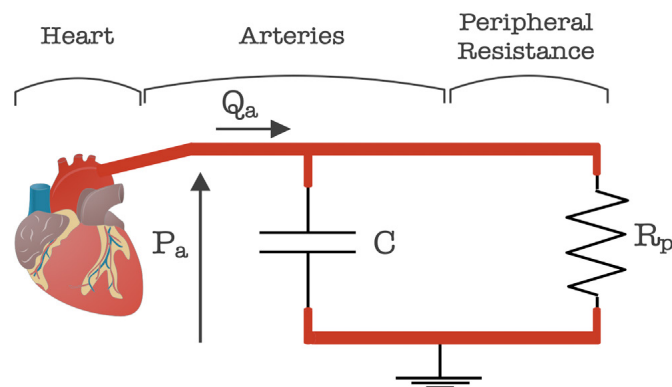


FIG. 4.3 : Schéma électrique du MWK2

En remplaçant les Eq (4.2) et (4.8) dans l'Eq (4.1), nous obtenons :

$$Q_{in}(t) = C \frac{dP_a(t)}{dt} + \frac{1}{R_p} P_a(t), \quad (4.5)$$

Ainsi, nous introduisons le lemme suivant :

Lemme 4.1.

Le modèle de Windkessel à deux éléments (MWK2) est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$F_{in}(t) = \tau \frac{dP_a(t)}{dt} + P_a(t), \quad (4.6)$$

Avec : $\tau = R_p C$ est la constante de temps du système et $F_{in}(t) = R_p Q_{in}(t)$

4.2.4 Modèle de Windkessel fractionnaire à deux éléments

La modélisation de Windkessel fractionnaire à deux éléments reprend les mêmes étapes que la modélisation entière, à la seule différence près que pour la représentation fractionnaire, nous avons :

$$Q_{stored}(t) = D_t^\alpha V(t) = \frac{d^\alpha V(t)}{dt^\alpha}, \quad (4.7)$$

$$Q_{stored}(t) = \underbrace{\frac{d^\alpha V(t)}{d^\alpha P_a(t)}}_{C_\alpha} \frac{d^\alpha P_a(t)}{dt^\alpha}, \quad (4.8)$$

Avec : $C_\alpha = \frac{d^\alpha V(t)}{d^\alpha P_a(t)}$ est une constante proportionnelle qui exprime la compliance artérielle fractionnaire totale et $0 \leq \alpha \leq 1$

Ainsi, nous introduisons le lemme suivant :

Lemme 4.2.

Le modèle de Windkessel fractionnaire à deux éléments (MWKF2) est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$F_{in}(t) = \tau_\alpha \frac{d^\alpha P_a(t)}{dt^\alpha} + P_a(t), \quad (4.9)$$

Avec : $\tau_\alpha = R_p C_\alpha$ est la constante de temps fractionnaire du système et $F_{in}(t) = R_p Q_{in}(t)$.

4.3 Estimation conjointe du flux sanguin artériel et des paramètres du MWK2

Dans cette partie, nous allons nous attaquer à un problème d'estimation qui concerne l'estimation conjointe de l'entrée (flux sanguin artériel) ainsi que des paramètres α du modèle de Windkessel fractionnaire à deux éléments. Ce problème d'estimation a été traité précédemment dans la littérature ([19]) et représente des challenges importants compte tenu des résultats existants et que nous allons exposer plus tard.

4.3.1 Méthodologie

Après avoir défini le MWK2, l'objectif de cette partie est d'estimer l'entrée du modèle $F_{in}(t) = R_p Q_{in}(t)$ ainsi que la constante de temps τ conjointement à partir de la pression artérielle $P_a(t)$ comme mesure. Voici la formulation du problème d'estimation traité :

$$\mathbf{PE} \begin{cases} \text{À partir de l'EDO (4.6) et de la pression artérielle } P_a(t) \text{ comme entrée, estimer} \\ \text{conjointement l'entrée du système ainsi que la constante de temps } (\hat{F}_{in}(t), \hat{\tau}) \\ \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Afin que la méthode des FM puisse être utilisée, des transformations algébriques doivent être apportées au système, la première étant de décomposer le signal d'entrée qui doit être estimé $F_{in}(t)$ dans une base (un espace), l'entrée devient donc :

$$F_{in}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \beta_i(t), \quad (4.10)$$

Où les $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ sont des fonctions de classe C^1 et les $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ des constantes $\in \mathbb{R}$.

Procédons à une troncature d'ordre V de la décomposition précédente afin de pouvoir procéder à l'estimation, nous obtenons ainsi :

$$F_{in}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \beta_i(t) \approx \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t), \quad (4.11)$$

Introduisons à présent la notation suivante pour la troncature du signal $F_{in}(t)$:

$$\overline{F}_{in}(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t) \quad (4.12)$$

où $\overline{F}_{in}(t)$ est une approximation de $F_{in}(t)$.

Introduisons également l'estimé du FSA ($\hat{F}_{in}(t)$) :

$$\hat{F}_{in}(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i \beta_i(t), \quad (4.13)$$

Le problème d'estimation **EP** devient donc :

$$\mathbf{EP}^* \begin{cases} \text{À partir de l'EDO (4.6) et de la pression artérielle } P_a(t) \text{ comme entrée, estimer} \\ \text{conjointement les constantes ainsi que la constante de temps } (\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^V, \hat{\tau}) \\ \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant développer les étapes nécessaires à l'estimation :

Étape 1. Substituer l'Eq (4.11) dans l'EDO (4.6), en d'autres termes, nous substituons F_{in} par son approximation $\overline{F_{in}}(t)$.

$$\sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t) = \tau \frac{dP_a(t)}{dt} + P_a(t), \quad (4.14)$$

Étape 2. Multiplier l'Eq (4.14) par un ensemble de M fonctions modulatrices $\{g_m(t)\}_{m=1}^M$ et intégrons le résultat entre 0 et T, nous obtenons ainsi, pour $m = 1, \dots, M$:

$$\sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(t) \beta_i(t) dt = \tau \int_0^T g_m(t) \frac{dP_a(t)}{dt} dt + \int_0^T g_m(t) P_a(t) dt, \quad (4.15)$$

Étape 3. Exploiter le lemme (1.1) et les propriétés des fonctions modulatrices, nous obtenons le système suivant :

$$\sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(t) \beta_i(t) dt = -\tau \int_0^T \frac{dg_m}{dt}(t) P_a(t) dt + \int_0^T g_m(t) P_a(t) dt, \quad (4.16)$$

Finalement, nous construisons le système algébrique suivant :

$$A\theta = b, \quad (4.17)$$

Tel que $A \in \mathbb{R}^{M \times (V+1)}$, $b \in \mathbb{R}^M$, $\theta \in \mathbb{R}^{V+1}$ et :

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^T g_1(t) \beta_1(t) dt & \int_0^T g_1(t) \beta_2(t) dt & \dots & \int_0^T g_1(t) \beta_V(t) dt & \int_0^T \frac{dg_1}{dt}(t) P_a(t) dt \\ \int_0^T g_2(t) \beta_1(t) dt & \int_0^T g_2(t) \beta_2(t) dt & \dots & \int_0^T g_2(t) \beta_V(t) dt & \int_0^T \frac{dg_2}{dt}(t) P_a(t) dt \\ \int_0^T g_3(t) \beta_1(t) dt & \int_0^T g_3(t) \beta_2(t) dt & \dots & \int_0^T g_3(t) \beta_V(t) dt & \int_0^T \frac{dg_3}{dt}(t) P_a(t) dt \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \int_0^T g_M(t) \beta_1(t) dt & \int_0^T g_M(t) \beta_2(t) dt & \dots & \int_0^T g_M(t) \beta_V(t) dt & \int_0^T \frac{dg_M}{dt}(t) P_a(t) dt \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \int_0^T g_1(t) P_a(t) dt \\ \int_0^T g_2(t) P_a(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T g_M(t) P_a(t) dt \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_V \\ \tau \end{bmatrix}$$

Étape 4. Finalement, le vecteur estimé $\hat{\theta}$ est donné par :

$$\hat{\theta} = A^+b \quad (4.18)$$

En se basant sur les étapes développées précédemment, voici l'algorithme du **PE*** :

Algorithm 5 Algorithme Estimation MWK2 (t, P, h, M, V)

```

1: Data :  $P$ 
2: Result :  $\hat{\tau}, \hat{F}_{in}$ 
3: for  $i = 1 : M$  do
4:   for  $j = 1 : V$  do
5:      $A(i, j) = \int_0^T g_i(t)\beta_j(t)dt$  ▷ Compute A
6:   end for
7:    $A(i, V + 1) = \int_0^T \frac{dg_i(t)}{dt} P_a(t)dt$ 
8:    $b(i, 1) = \int_0^T g_i(t)P_a(t)dt$  ▷ Compute b
9: end for
10:  $\hat{\theta} \leftarrow A^+b$  ▷ Compute  $\hat{\theta}$ 

```

4.3.2 La base de données In-Silico

La base de données In-Silico a été générée à partir d'un modèle validé qui réussit à reproduire les signaux hémodynamiques tels que la PSA ou le FSA tels qu'ils sont en réalité, et ce, par Willmet et al. [22]. La figure (4.4) ci-dessous montre le profil type du FSA et de la PSA d'une personne en bonne santé.

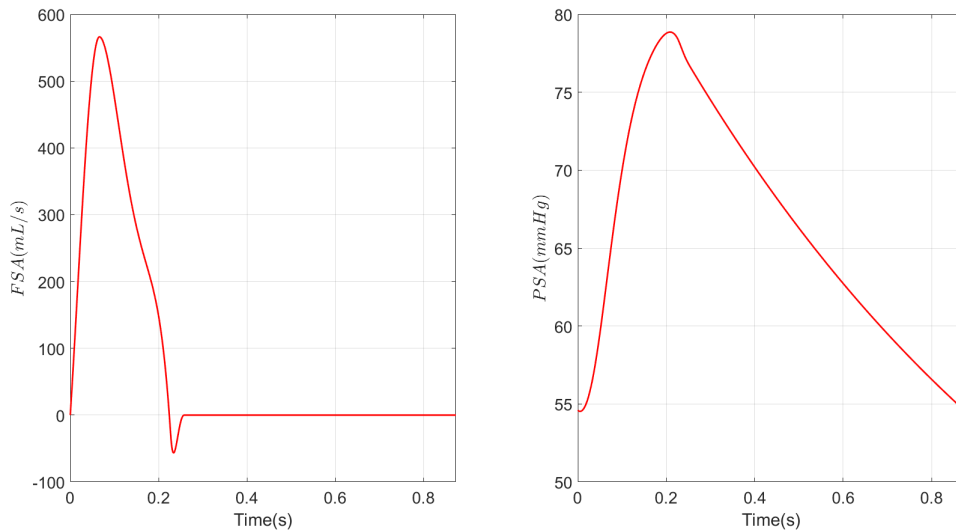


FIG. 4.4 : PSA et FSA réels.

4.3.3 Solution analytique du flux sanguin artériel

Catanho et al. [6] ont développé une solution analytique du modèle de Windkessel que nous allons utiliser dans un premier temps pour l'estimation formulé précédemment.

$$Q_{a,anal}(t) = Q_{a,0} \sin\left(\pi \frac{\text{mod}(t, T_c)}{T_s}\right), \quad (4.19)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} T_c : \text{Période totale du cycle cardiaque.} \\ T_s : \text{Période de la systole .} \\ \text{mod}(x_1, x_2) : \text{Le reste de division de } x_1 \text{ par } x_2. \\ Q_{a,0} : \text{Valeur maximale du FSA, sa valeur est de } 424.1 \text{ mL [6].} \end{cases}$$

4.3.4 Solution analytique de la pression artérielle

La solution analytique de la pression artérielle est divisée selon les deux cycles cardiaques.

Phase systolique

L'EDO (4.6) est une équation hétérogène du premier degré, sa solution est donnée par :

$$P_{a,systolique}(t) = \alpha e^{\frac{-t}{R_p C}} + \frac{e^{\frac{-t}{R_p C}} T_s Q_{a,0} R (C \pi R_p \cos(\frac{\pi t}{T_s}) - T_s \sin(\frac{\pi t}{T_s}))}{T_s^2 + C^2 \pi^2 R_p^2}, \quad (4.20)$$

Où :

$$\alpha = P_{SS} + \frac{Q_{a,0} T_s R_p [C \pi R_p]}{T_s^2 + C^2 \pi^2 R_p^2}, \quad (4.21)$$

Où P_{SS} est là PSA au début du cycle systolique.

Phase diastolique

Durant le cycle diastolique, l'Eq (4.6) se transforme en EDO homogène suivante :

$$\frac{dP_a(t)}{dt} + \frac{P_a(t)}{C R_p} = 0, \quad (4.22)$$

Sa solution est donc triviale :

$$P_{a,diastolique}(t) = P_{sd} e^{-\frac{t}{R_p C}}, \quad (4.23)$$

Où P_{sd} est la PSA au début du cycle diastolique (la fin du cycle systolique).

La figure (4.5) illustre le FSA et la PSA analytiques.

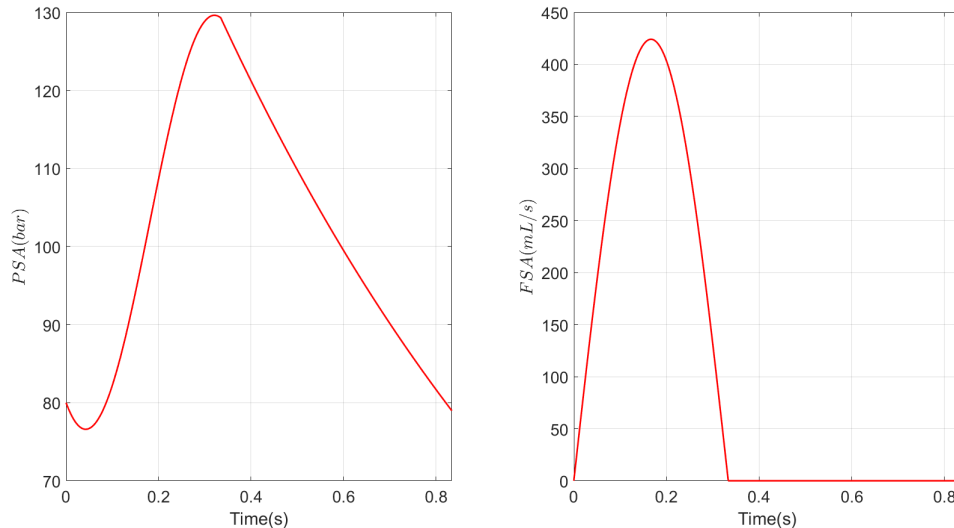


FIG. 4.5 : PSA et FSA analytiques du MWK2

4.3.5 Simulations numériques à partir de données générées analytiquement

Dans cette partie, nous allons étudier les simulations numériques et les expliquer à travers une étude de sensibilité des différents paramètres qui rentrent en jeu, et ce, en exploitant des données générées analytiquement.

4.3.5.1 Résultats des simulations numériques

Afin de simuler le problème d'estimation formulé précédemment à partir de MWK2, utilisons dans un premier temps un ensemble de V fonctions modulatrices polynomiales :

$$g_m(t) = (T - t)^{m+q} t^{M+q+1-m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.24)$$

Avec $q \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre réel positif représentant le degré de liberté [18].

Nous utilisons également le modèle analytique de Windkessel sur un seul cycle cardiaque (Diastole + Systole) pour générer les données dont nous aurons besoin pour l'estimation (PSA).

Nous avons choisi comme base un ensemble de fonctions de type B-Spline cubique.

Définition 4.1.

Étant donné un vecteur nœud (t_0, \dots, t_k) , on appelle fonctions B-Splines associées à ce vecteur nœud les fonctions ξ_m^i , pour $0 \leq m \leq k - 1$ et $0 \leq i \leq k - m - 1$, définies par la formule récurrente suivante :

$$\xi_m^i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} \xi_{m-1}^i(t) + \frac{t_{m+i+1} - t}{t_{m+i+1} - t_{i+1}} \xi_{m-1}^{i-1}(t), \quad (4.25)$$

Avec $\xi_0(t) = 1$ si $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et $\xi_0 = 0$ sinon, et pour $m \geq 1$

Afin d'évaluer la performance et la précision du **PE***, nous introduisons deux indicateurs de performances :
$$\begin{cases} \epsilon_\tau = \frac{\|\tau - \hat{\tau}\|_2}{\|\tau\|_2}, \\ \epsilon_\xi = \frac{\|F_{in} - \hat{F}_{in}\|_2}{\|F_{in}\|_2}, \end{cases}$$

Sortie non bruitée

Voici les résultats obtenus : figure (4.6) en exploitant des données non bruitées et en utilisant $V=16$ bases de type B-Splines d'ordre 3 ainsi que $M=16$ fonctions modulatrices polynomiales, le degré de liberté $q=2$, ces trois valeurs : $(V, M, q) = (16, 16, 2)$ sont celles qui donnent les meilleurs résultats. De plus, nous avons choisi un pas temporel $h = 10^{-2}s$.

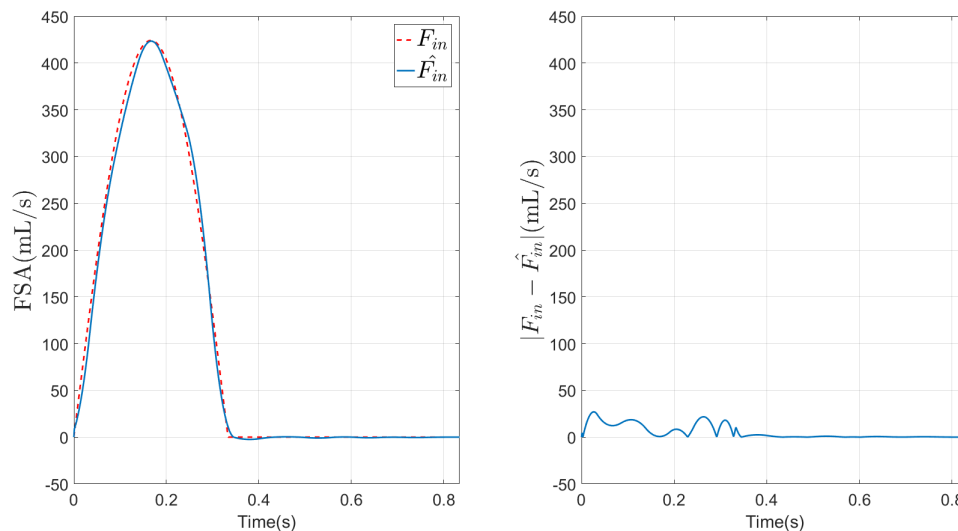


FIG. 4.6 : Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 non bruité : données analytiques.

Quant à $\hat{\tau}$, nous trouvons comme résultat : $\hat{\tau} = 1.0164$.

Pour ces résultats, voici les erreurs relatives obtenues :
$$\begin{cases} \epsilon_\tau = 1.64\% \\ \epsilon_\xi = 2.2\% \end{cases}$$

Discussion et comparaison des résultats obtenus

Ainsi, d'après les résultats obtenus, nous pouvons affirmer que les performances de l'estimateur sont remarquables. En termes de précision (erreurs relatives de l'ordre de 1.64% et de 2.34% pour le paramètre temporel $\hat{\tau}$ et l'entrée estimée $\hat{F}_{in}(t)$ respectivement). Voici un tableau résumant les résultats que nous pouvons trouver dans la littérature [41] :

	$\hat{\tau}$	$\epsilon_\tau(\%)$	$\epsilon_\xi(\%)$
Sans bruit	1.02	2	20

TAB. 4.1 : Résultats du **PE*** et leurs erreurs relatives trouvées dans la littérature du MWK2

Sortie bruitée

Voici les résultats obtenus : figure (4.7) en exploitant des données bruitées et en utili-

sant $V = 16$ bases de type B-Splines d'ordre 3 ainsi que $M = 16$ fonctions modulatrices polynomiales, le degré de liberté $q = 2$, ces trois valeurs : $(V, M, q) = (16, 16, 2)$ i.e : les mêmes paramètres que ceux du cas non bruité. De plus, nous avons choisi un pas $p = 10^{-2}s$

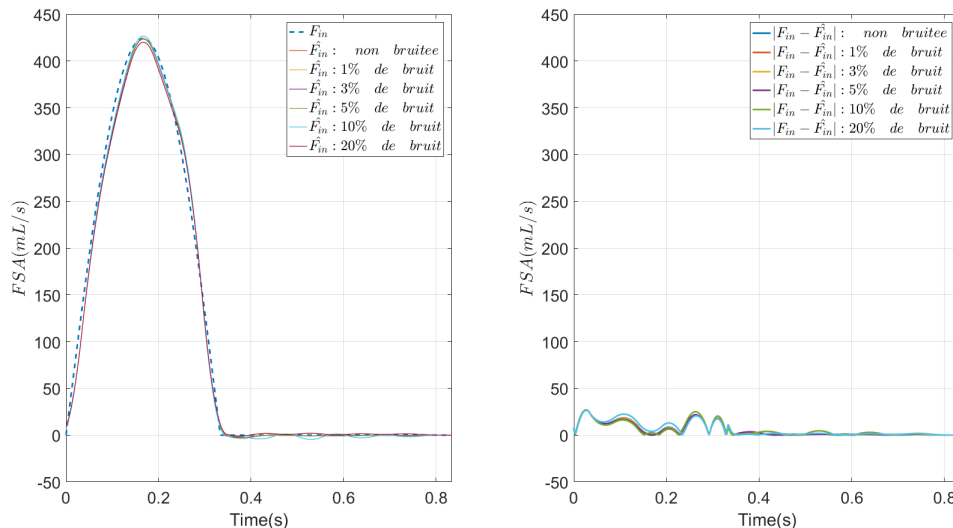


FIG. 4.7 : Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 bruité : données analytiques.

Le tableau (4.4) résume les résultats obtenus pour différents niveaux de bruits :

	$\hat{\tau}$	$\epsilon_{\tau}(\%)$	$\epsilon_{\xi}(\%)$
Sans bruit	1.0164	1.64	2.34
1% de bruit	1.0182	1.82	2.98
3% de bruit	1.0212	2.12	3.16
5% de bruit	1.0234	2.34	3.02
10 % de bruit	1.0255	2.56	3.42
20 % de bruit	1.0267	2.7	3.65

TAB. 4.2 : Résultats du **PE*** et leurs erreurs relatives pour différents niveaux de bruit du MWK2.

Discussion et comparaison des résultats obtenus

Ainsi, d'après les résultats obtenus, nous pouvons affirmer que les performances de l'estimateur sont remarquables. Que ce soit en termes de précision (erreurs relatives de l'ordre de 2.7% et de 3.5% pour le paramètre temporel τ et l'entrée estimée $\hat{F}_{in}(t)$ respectivement et au maximum) ou en termes de robustesse.

4.3.6 Simulations numériques à partir de données réelles

Dans cette partie, nous allons étudier les simulations numériques et les expliquer à travers une étude de sensibilité des différents paramètres qui rentrent en jeu, et ce, en exploitant des données générées réelles.

4.3.6.1 Résultats des simulations numériques

Afin de simuler le problème d'estimation formulé précédemment à partir de MWK2, utilisons dans un premier temps un ensemble de V fonctions modulatrices polynomiales :

$$g_m(t) = (T - t)^{m+q} t^{M+q+1-m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.26)$$

Avec $q \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre réel positif représentant le degré de liberté [18].

Nous utilisons les données de la base de données In-Silico sur un seul cycle cardiaque (Diastole + Systole).

Nous avons choisi comme base un ensemble de fonctions de type B-Spline cubique.

Sortie non bruitée

Voici les résultats obtenus : figure (4.6) en exploitant des données non bruitées de trois profils différents, et ce, afin de valider le modèle. Le tableau ci-dessous (4.4) résume les caractéristiques des profils choisis ainsi que les paramètres optimaux qui ont été utilisés pour l'estimation.

Profil	τ	M	V	q
A	1.0135	29	15	2.5
B	1.1985	23	14	3.6
C	1.2726	31	19	1.6

TAB. 4.3 : Profils et paramètres utilisés pour le problème d'estimation du MWK2 : données réelles.

Voici le résultat des simulations : figure (4.8).

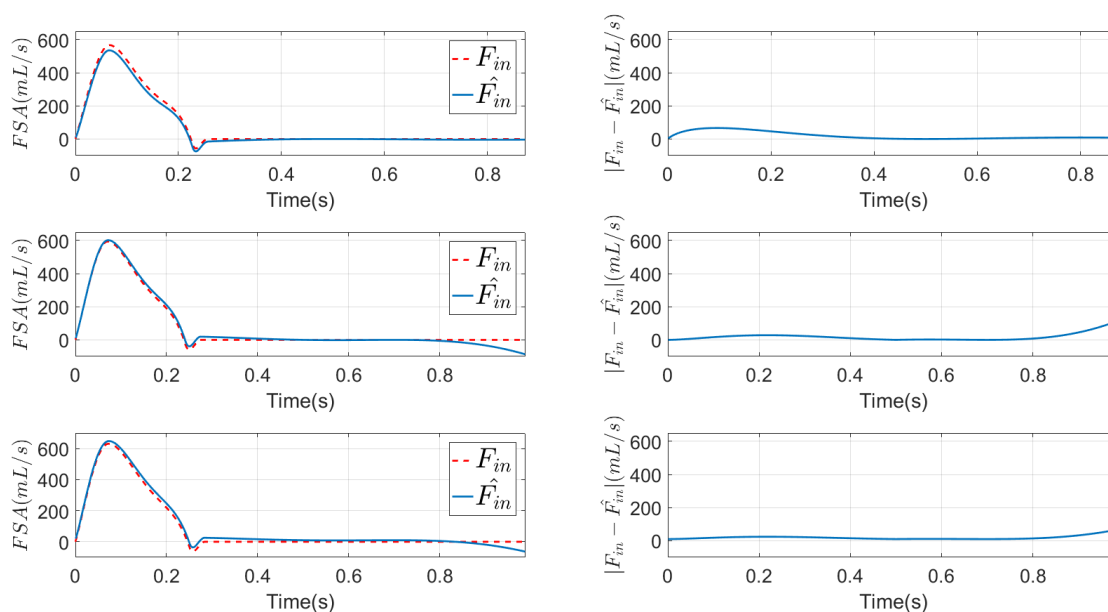


FIG. 4.8 : Entrée estimée et son erreur absolue du MWK2 non bruité : données réelles.

Nous résumons les résultats du **PE*** dans le tableau ci-dessous :

Profil	$\hat{\tau}$	$\epsilon_{\tau}(\%)$	$\epsilon_{\xi}(\%)$
A	1.0182	0.46	4.12
B	1.1846	1.15	7.56
C	1.2695	1.7602	5.69

TAB. 4.4 : Entrée et paramètre estimés et leurs erreurs absolues du MWK2 non bruité : données réelles.

Remarque 4.1.

Il est judicieux de noter que le choix des paramètres (M, V, q) joue un rôle primordial, un mauvais paramétrage peut entraîner la divergence de l'estimation.

Remarque 4.2.

Malgré le « tuning » des paramètres, l'erreur relative atteint un minimum de 4.12 % pour l'estimation de l'entrée, ceci est dû aux limites du MWK2.

Discussion et comparaison des résultats obtenus

Ainsi, d'après les résultats obtenus, nous pouvons affirmer que les performances de l'estimateur sont remarquables. Que ce soit en termes de précision (erreurs relatives de l'ordre de 2.7% et de 3.5% pour le paramètre temporel τ et l'entrée estimée $\hat{F}_{in}(t)$ respectivement et au maximum) ou en termes de robustesse. Le tableau ci-dessous (4.5) résume les résultats trouvés dans la littérature.

Profil	$\epsilon_{\tau}(\%)$	$\epsilon_{\xi}(\%)$
A	24.63	14.00
B	3.17	16.15
C	14.37	13.75

TAB. 4.5 : Entrée et paramètre estimés et leurs erreurs absolues du MWK2 trouvés dans la littérature.

Nous pouvons ainsi affirmer que les résultats ont grandement été améliorés, ceci étant dû en partie aux choix de la base, du type de fonctions modulatrices ainsi qu'au tuning des paramètres.

4.4 Estimation conjointe du flux sanguin artériel et de l'ordre fractionnaire du MWKF2

Dans cette partie, nous allons nous attaquer à un problème d'estimation qui concerne l'estimation conjointe de l'entrée (flux sanguin artériel) ainsi que de l'ordre fractionnaire α du modèle de Windkessel fractionnaire à deux éléments. Ce problème d'estimation a été traité précédemment dans la littérature [20] et représente des challenges importants compte tenu des résultats existants et que nous allons exposer plus tard.

4.4.1 Méthodologie

Après avoir défini le MWKF2, l'objectif de cette partie est d'estimer l'entrée du modèle $F_{in}(t) = R_p Q_{in}(t)$ ainsi que l'ordre fractionnaire α conjointement à partir de la pression artérielle $P_a(t)$ comme mesure. Voici la formulation du problème d'estimation traité :

PE1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{À partir de l'EDO (4.9) et de la pression artérielle } P_a(t) \text{ comme entrée, estimer} \\ \text{conjointement l'entrée du système ainsi que l'ordre fractionnaire } (\hat{F}_{in}(t), \hat{\alpha}) \\ \text{pour } t \in [0, T]. \end{array} \right.$

Afin que la méthode des FM puisse être utilisée, des transformations algébriques doivent être apportées au système, la première étant de décomposer le signal d'entrée qui doit être estimé $F_{in}(t)$ dans une base (un espace), l'entrée devient donc :

$$F_{in}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \beta_i(t), \quad (4.27)$$

Où les $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ sont des fonctions de classe C^1 et les $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ des constantes $\in \mathbb{R}$.

Procédons à une troncature d'ordre V de la décomposition précédente afin de pouvoir procéder à l'estimation, nous obtenons ainsi :

$$F_{in}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \beta_i(t) \approx \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t), \quad (4.28)$$

Introduisons à présent la notation suivante pour la troncature du signal $F_{in}(t)$:

$$\overline{F}_{in}(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t), \quad (4.29)$$

où $\overline{F}_{in}(t)$ est une approximation de $F_{in}(t)$.

Introduisons également l'estimé du FSA $F_{in}(t)$:

$$\hat{F}_{in}(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i \beta_i(t), \quad (4.30)$$

Le problème d'estimation **EP1** devient donc :

EP1* $\left\{ \begin{array}{l} \text{À partir de l'EDO (4.6) et de la pression artérielle } P_a(t) \text{ comme entrée, estimer} \\ \text{conjointement les constantes ainsi que l'ordre fractionnaire } (\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^V, \hat{\alpha}) \\ \text{pour } t \in [0, T]. \end{array} \right.$

En utilisant l'algorithme génétique introduit dans le Chapitre 2.1 pour l'estimation de l'ordre fractionnaire, l'algorithme d'estimation conjoint est le suivant :

Premier stage : L'objectif de ce dernier est d'estimer l'entrée, donc les constantes $(\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^V)$ pour un ordre fractionnaire connu.

Soit le système fractionnaire linéaire suivant :

$$y(t) + \sum_{i=1}^N a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = u(t), \quad (4.31)$$

Où $u(t) \in \mathbb{R}$ est l'entrée inconnue, $y(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie connue, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ sont les paramètres connus, $\alpha_i \in [n_i - 1, n_i], n_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, N$ sont les ordres fractionnaires inconnus.

Afin que la méthode des FM puisse être utilisée, des transformations algébriques doivent être apportées au système, la première étant de décomposer le signal d'entrée qui doit être estimé $u(t)$ dans une base (un espace), l'entrée devient donc :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \beta_i(t), \quad (4.32)$$

Où les $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ sont des fonctions de classe C^1 et les $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ des constantes $\in \mathbb{R}$.

Procédons à une troncature d'ordre V de la décomposition précédente afin de pouvoir procéder à l'estimation, nous obtenons ainsi :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^k \beta_i(t) \approx \sum_{i=1}^V \xi_i^k \beta_i(t), \quad (4.33)$$

Introduisons à présent la notation suivante pour la troncature du signal d'entrée $u(t)$:

$$\bar{u}(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t), \quad (4.34)$$

où $\bar{u}(t)$ est une approximation de $u(t)$.

Introduisons également l'estimé du signal d'entrée du système (4.31) :

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i \beta_i(t), \quad (4.35)$$

Nous considérons les vecteurs des paramètres de notre base et des ordres fractionnaires respectivement :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T \quad ; \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T, \quad (4.36)$$

et leurs estimations :

$$\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_N)^T \quad ; \quad \hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_N)^T, \quad (4.37)$$

Pour estimer les deux vecteurs $(\hat{\theta}, \hat{\xi})$, nous avons utilisé dans un premier lieu l'algorithme développé ci-dessous sans initialisation sur le système (4.31).

Étape 1. On substitue $u(t)$ dans l'équation (4.31) par son approximation $\bar{u}(t)$, nous obtenons le système dont l'entrée est tronquée suivant :

$$y(t) + \sum_{i=1}^N a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = \bar{u}(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \beta_i(t), \quad (4.38)$$

Étape 2. On multiplie à présent (4.38) par l'ensemble des fonctions modulatrices $g_m(T-t)$ pour $m = 1, \dots, M$ et par intégration sur $I = [0, T]$ nous trouvons :

$$\int_0^T g_m(T-t)y(t)dt + \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T g_m(T-t)D_t^{\alpha_i} y(t)dt = \sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(T-t)\beta_i(t)dt, \quad (4.39)$$

Étape 3. En utilisant la formule (1.33) introduite dans le chapitre 1, pour la deuxième intégrale de (4.39), l'équation devient :

$$\int_0^T g_m(T-t)y(t)dt + \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T D_t^{\alpha_i} g_m(t)y(T-t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(T-t)\beta_i(t)dt, \quad (4.40)$$

Ce qui donne sous forme compacte :

$$\sum_{i=1}^V \xi_i A_{mi}(\alpha) = b_m \quad , \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.41)$$

Avec A_{mi} et b_m qui sont définis comme suit :

$$\begin{cases} A_{mi} = \int_0^T g_m(T-t)\beta_i(t)dt, \\ b_m = \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T D_t^{\alpha_i} g_m(t)y(T-t) + \int_0^T g_m(T-t)y(t)dt, \end{cases} \quad (4.42)$$

Étape 4. Le système (4.42) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A\xi = b(\alpha), \quad A(\alpha) \in \mathbb{R}^{M \times V}, \quad b \in \mathbb{R}^M, \quad (4.43)$$

Étape 5. Ainsi, l'estimation des constantes relatives à la base est donnée comme suit :

$$\hat{\xi} = A^+b(\hat{\alpha}), \quad (4.44)$$

L'entrée estimée $\hat{u}(t)$ est donnée par :

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i \beta_i(t), \quad (4.45)$$

Second stage : L'objectif de ce deuxième stage est d'estimer le vecteur des ordres fractionnaire $\hat{\alpha}$, et ce, en utilisant l'algorithme génétique développé au sein du chapitre 3.

Étape 1. Reprenons l'équation (4.39), où les ordres fractionnaires sont inconnus. Les paramètres de la base de projection sont donc dépendants du vecteur des ordres fractionnaires $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$.

$$\int_0^T g_m(T-t)y(t)dt + \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T D_t^{\alpha_i} g_m(t)y(T-t) = \sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(T-t)\beta_i(t)dt, \quad (4.46)$$

Étape 2. Notons :

$$\begin{cases} L_m(\alpha) = \sum_{i=1}^V \xi_i \int_0^T g_m(T-t)\beta_i(t)dt - \sum_{i=1}^N a_i \int_0^T D_t^{\alpha_i} g_m(t)y(T-t), \\ R_m = \int_0^T g_m(T-t)y(t)dt, \end{cases} \quad (4.47)$$

Ainsi, l'équation (4.46) peut être écrite sous la forme suivante :

$$L_m(\alpha) - R_m = K_m(\alpha) = 0, \quad (4.48)$$

Le système non linéaire (4.48) contient N ordres fractionnaires inconnus à estimer, une solution unique existe si le système est déterministe. L doit donc contenir N éléments $L \in \mathbb{R}^N$, correspondants à un ensemble de FMs $\{g_m(t)\}_{m=M}^{M+N}$. Nous obtenons ainsi la loi d'adaptation suivante :

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - [L'(\alpha^k)]^{-1}K(\alpha^k), \quad (4.49)$$

Où le vecteur $L(\alpha^k)$:

$$L(\alpha^k) = [L_1(\alpha^k), \dots, L_N(\alpha^k)]^T, \quad (4.50)$$

correspond à l'ensemble de FMs $\{g_{(M+m)}(t)\}_{m=1}^N$.

La matrice Jacobienne $L'(\alpha^k)$ est donnée par :

$$L'(\alpha^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial L_N}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial L_N}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial L_N}{\partial \alpha_N} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

Le calcul de l'élément $\frac{\partial L_i}{\partial \alpha_j}$ s'obtient par différentiation directe du terme $L_i(\alpha)$ par rapport à α_j , nous obtenons pour $i, j = 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial L_i}{\partial \alpha_j}(\alpha^k) = \sum_{i=1}^V \frac{\partial \xi_i(\alpha^k)}{\partial \alpha_j} \int_0^T g_{(M+m)}(t) \beta_i(t) dt - a_j \int_0^T \frac{\partial D_t^{\alpha_j} g_{(M+m)}(t)}{\partial \alpha_j} y(T-t) dt, \quad (4.52)$$

Tel que :

$$\frac{\partial D_t^{\alpha_j} g_{(M+m)}(t)}{\partial \alpha_j} = \psi_0(p) D_t^{\alpha_j} g_{(M+m)}(t) - \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_0^t (t-\tau)^{p_j-1} \ln(t-\tau) g_{(M+m)}(\tau) d\tau \right], \quad (4.53)$$

Avec $p_j = n - \alpha_j$, $n = \lceil \alpha_j \rceil$ et ψ_0 est la fonction digamma.

Et :

$$\bar{x}_i^j = \frac{\partial \xi_i(\alpha^k)}{\partial \alpha_j}, \quad (4.54)$$

est calculée à travers la résolution du système linéaire suivant.

$$A \bar{x}^j = \bar{b}^j, \quad (4.55)$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{x}^j = \left[\frac{\partial \xi_1(\alpha^k)}{\partial \alpha_j} & \dots & \frac{\partial \xi_V(\alpha^k)}{\partial \alpha_j} \right], \\ \bar{b}_m^j = \alpha_j \int_0^T \frac{\partial D_t^{\alpha_j} g_{(m)}(t)}{\partial \alpha_j} y(T-t) dt, \end{cases} \quad (4.56)$$

Et $A \in \mathbb{R}^{M \times V}$ est donné par (4.42).

L'algorithme d'estimation conjointe est résumé ci-dessous.

Algorithm 6 Algorithme Estimation MWKF2 (t, P, h, M, V)

- 1: **Data** : P
 - 2: **Result** : $\hat{\alpha}, \hat{F}_{in}$
 - 3: Initialize $k = 0$
 - 4: **for** $i = 1 : iterations$ **do**
 - 5: Compute $\hat{\xi}(\hat{\alpha}^k)$ using equations of Stage 1
 - 6: Compute $K(\hat{\alpha}^k)$
 - 7: Update $\hat{\alpha}^k$ using the previous genetic algorithm
 - 8: **end for**
-

4.4.2 Simulations numériques à partir de données réelles

Dans cette partie, nous allons étudier les simulations numériques et les expliquer à travers une étude de sensibilité des différents paramètres qui rentrent en jeu, et ce, et en

exploitant des données générées réelles.

Afin de simuler le problème d'estimation formulé précédemment à partir de MWK2 , utilisons dans un premier temps un ensemble de V fonctions modulatrices polynomiales :

$$g_m(t) = (T - t)^{m+q}t^{M+q+1-m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.57)$$

Avec $q \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre réel positif représentant le degré de liberté. [18].

Nous utilisons les données de la base de données In-Silico sur un seul cycle cardiaque (Diastole + Systole).

Nous avons choisi comme base un ensemble de fonctions de type B-Spline cubique.

Voici les résultats obtenus : figure (4.6) en exploitant des données non bruitées de trois profils différents, et ce, afin de valider le modèle. Le tableau ci-dessous (4.4) résume les caractéristiques des profils choisis ainsi que les paramètres optimaux qui ont été utilisés pour l'estimation. De plus, nous avons choisi un pas de $h = 10^{-2}s$ et la dérivée de GL a été utilisée pour le calcul des dérivées fractionnaires.

Profil	τ	M	V	q
A	1.0135	26	16	2.8
B	1.1985	29	15	2.6
C	1.2726	33	18	1.9

TAB. 4.6 : Profils et paramètres utilisés pour le problème d'estimation du MWK2 : données réelles.

Voici le résultat des simulations : figure (4.9).

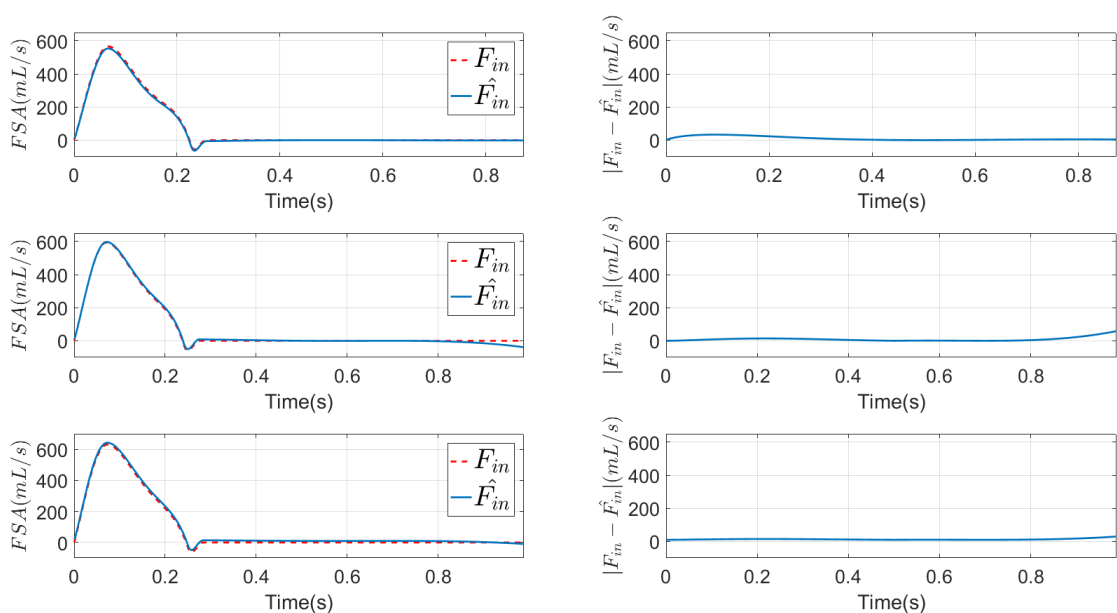


FIG. 4.9 : Entrée estimée et son erreur absolue du MWKF2 non bruité : données réelles.

Nous résumons les résultats du **PE1*** dans le tableau ci-dessous :

Profil	$\hat{\alpha}$		$\epsilon_{\xi}(\%)$	
	Niveau de bruit			
	0%	10%	0%	10%
A	0.96	0.96	2.12	2.96
B	0.98	0.98	1.56	1.75
C	0.95	0.95	2.69	2.81

TAB. 4.7 : Entrée et ordre fractionnaire estimés et leurs erreurs absolues du MWKF2 : données réelles.

Remarque 4.3.

Nous pouvons noter que la précision d'estimation pour le MWKF2 est meilleure que celle du MWK2, ce qui nous indique que la modélisation fractionnelle du système cardiovasculaire est plus adéquate que la modélisation entière.

Remarque 4.4.

Nous notons également la robustesse de l'algorithme d'estimation construit précédemment ainsi que des résultats très prometteurs, néanmoins le problème du tuning des paramètres représente une limite non négligeable de cette méthode.

Discussion et comparaison des résultats obtenus

Ainsi, d'après les résultats obtenus, nous pouvons affirmer que les performances de l'estimateur pour le MWKF2 sont très satisfaisantes. Que ce soit en termes de précision (erreurs relatives de l'ordre de 2.96% au maximum pour l'entrée estimée $\hat{F}_{in}(t)$) ou en termes de robustesse. Le tableau ci-dessous (4.5) résume les résultats trouvés dans la littérature ([20]) : (1) représente les résultats trouvés dans la littérature, (2) représente les résultats que nous avons obtenus.

Profil	$\epsilon_{\xi}(\%)(1)$		$\epsilon_{\xi}(\%)(2)$	
	Niveau de bruit			
	0%	10%	0%	10%
A	11.77	13.51	2.12	2.96
B	11.19	12.69	1.56	1.75
C	9.94	11.31	2.69	2.81

TAB. 4.8 : Comparaison des erreurs absolues du MWKF2 (données réelles) existants dans la littérature et ceux trouvés précédemment.

Nous pouvons ainsi affirmer que les résultats ont grandement été améliorés, ceci étant dû en partie aux choix de la base, du type de fonctions modulatrices, au tuning des paramètres, mais surtout à l'utilisation de l'algorithme génétique pour l'estimation de l'ordre fractionnaire. En effet, le problème d'initialisation que posait l'estimation des ordres fractionnaires ne concerne pas les algorithmes génétiques grâce à leur convergence globale. L'estimation de l'entrée et de l'ordre fractionnaire étant dépendants, l'amélioration de

l'estimation de l'ordre fractionnaire améliore également l'estimation de l'entrée du système.

4.5 Conclusion

L'estimation du flux sanguin artériel ainsi que la constante temporelle du modèle de Windkessel en utilisant des méthodes basées sur les fonctions modulatrices est une technique très prometteuse, donnant une convergence rapide, robuste et en utilisant peu de ressources qui sont de plus non invasives. Ceci nous a en plus permis de confirmer la modélisation cardio-vasculaire de Windkessel à deux éléments fractionnaire, qui est plus adaptée que la modélisation entière. Néanmoins, ces techniques d'estimations ont leurs limites, la plus importante étant la sensibilité aux paramètres choisis, à savoir : le nombre de fonctions modulatrices, le nombre de bases, ainsi que le degré de liberté. Un tuning des paramètres doit être effectué en fonction des données utilisées, nous avons en effet vu à travers les simulations que dépendamment des données utilisées, les paramètres optimaux à utiliser pour l'estimation diffèrent.

Chapitre 5

Estimation des états et des pseudo-états d'un système non-linéaire

5.1 Introduction

Ces dernières années, une attention accrue a été portée aux systèmes non linéaires fractionnaires, suscitant de nombreuses études sur leur stabilité [45, 43]. Des efforts ont également été déployés pour estimer leurs pseudo-états en utilisant différentes techniques, telles que le filtre de Kalman fractionnaire [35] ou un observateur adaptatif basé sur la méthode H_∞ [28]. Bien que ces méthodes d'estimation aient fait leurs preuves, un problème subsiste quand il s'agit de leur applicabilité : la convergence asymptotique. En effet, ces estimateurs sont pour la plupart d'entre eux à convergence en temps infini.

Pour surmonter cette limitation, une approche novatrice a été proposée dans l'article [47], introduisant l'observateur de temps fini pour les systèmes non linéaires fractionnaires. Cette méthode combine l'utilisation de fonctions modulatrices pour estimer le pseudo-état et l'utilisation d'un réseau neuronal pour estimer la perturbation. Ces travaux récents ont jeté les bases d'une nouvelle méthodologie d'estimation pour les systèmes non linéaires fractionnaires, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans ce domaine de recherche.

Dans ce chapitre, en nous appuyant sur les avancées récentes [47], nous nous concentrons sur l'estimation des états d'un système non linéaire ayant une structure canonique. Nous commencerons par examiner l'estimation des systèmes non linéaires d'ordre entier (SNLE), en utilisant des estimateurs non asymptotiques basés sur la méthode des Fonctions Modulatrices. Nous étendrons ensuite cette méthodologie aux systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire (SNLF).

L'objectif de ce chapitre est de développer des techniques d'estimation précises et robustes pour les systèmes non linéaires fractionnaires, en exploitant les avantages offerts par la méthode des Fonctions Modulatrices. Nous montrerons comment cette approche peut être appliquée à des systèmes non linéaires d'ordre entier, puis étendue avec succès aux systèmes d'ordre fractionnaire.

5.2 Méthode des fonctions modulatrices pour l'estimation des états : SNLE

Nous avons introduit dans cette partie une méthode à base de fonction modulatrice pour l'estimation des états d'un système non-linéaire d'ordre entier.

Soit le système d'ordre fractionnaire défini par la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x, u) \end{bmatrix} \right. ; \quad y = x_1, \quad (5.1)$$

Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états ou $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie. $f(x, u)$ est une fonction non-linéaire inconnue, on assume qu'elle est continue et Lipschitzienne localement pour tout x et u bornés.

La structure canonique du système (5.1) a une forme spécifique qui nous permet de découpler la non-linéarité $f(x, u)$ et les états $x_i \quad i = 1, \dots, n$.

5.2.1 Méthodologie

Nous allons construire la méthodologie permettant l'estimation des états du système x_1, \dots, x_n à partir des mesures d'entrées sorties (u, y) pour $t \in [0, T]$. La structure précédente offre un avantage important : les états du système sont indépendants, nous allons exploiter cette propriété pour la construction du système algébrique utilisé pour l'estimation. Voici la formulation du problème d'estimation traité :

$$\mathbf{PE} \left\{ \begin{array}{l} \text{À partir du système (5.1) et des mesures } u, y \text{ comme entrée, estimer les} \\ \text{états du système } x_1, \dots, x_n \text{ pour } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Afin que la méthode des FM puisse être appliquée, des transformations algébriques doivent être apportées au système, la première étant de décomposer chacun des états du système x_1, \dots, x_n dans une base (un espace) les états deviennent donc :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.2)$$

Où les $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^V$ sont des fonctions de classe C^1 et les $\{\xi_i\}_{i=1}^V$ des constantes $\in \mathbb{R}$.

Procédons à une troncature d'ordre V de la décomposition précédente afin de pouvoir procéder à l'estimation, nous obtenons ainsi :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^k \beta_i(t) \approx \sum_{i=1}^V \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

Introduisons à présent la notation suivante pour la troncature de l'état $x_k(t)$:

$$\bar{x}_k(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

où $\bar{x}_k(t)$ est une approximation de $x_k(t)$.

Introduisons également les estimés des états du système canonique précédent :

$$\hat{x}_k(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.5)$$

Le problème d'estimation **PE** devient donc :

$$\mathbf{PE} \begin{cases} \text{À partir du système (5.1) et des mesures } u, y \text{ comme entrée, estimer les} \\ \text{les constantes } \{\hat{\xi}_i^k\}_{i=1}^V, k = 2, \dots, n \text{ pour chaque état du système} \\ x_1, \dots, x_n \text{ pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant développer les étapes nécessaires à l'estimation :

Étape 1. Multiplier les $(n - 1)$ premières équations du système (5.1) par une fonction modulatrice g , nous obtenons ainsi et nous intégrons sur $I = [0, T]$:

$$\begin{bmatrix} \int_0^T g(t)\dot{x}_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t)\dot{x}_{n-1}(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t)x_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t)x_n(t)dt \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

Étape 2. Substituer les dérivées des états $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1})$ par des dérivées d'ordre supérieur de la sortie x_1 , ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \int_0^T g(t)\dot{x}_1 dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t)x_1^{(n-1)}(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t)x_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t)x_n(t)dt \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

Étape 3. Remplacer les états par leurs approximations à travers la projection introduite précédemment, en utilisant l'intégration par partie, nous obtenons pour $k = 2, \dots, n$:

$$\int_0^T g(t)\overline{x}_k(t)dt = (-1)^{(k-1)} \int_0^T g^{(k-1)}(t)x_1(t)dt = \sum_{i=1}^V \xi_i^k \int_0^T g(t)\beta_i(t)dt, \quad (5.8)$$

Ce qui donne sous forme vectorielle :

$$(-1)^{(k-1)} \int_0^T g^{(k-1)}(t)x_1(t)dt = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t)\beta_1(t)dt & \dots & \int_0^T g(t)\beta_V(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_V^k \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

Étape 4. Pour résoudre ce système d'équations pour $i = 1, \dots, V$, nous aurons besoin d'au moins V Fonctions Modulatrices. Soit M le nombre de FM que nous allons utiliser, nous obtenons donc le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^T g_1(t)\beta_1(t)dt & \dots & \int_0^T g_1(t)\beta_M(t)dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^T g_M(t)\beta_1(t)dt & \dots & \int_0^T g_M(t)\beta_V(t)dt \end{bmatrix}}_{\Gamma_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_V^k \end{bmatrix}}_{\Xi_k} = (-1)^{k-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^T g_1^{(k-1)}(t)x_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T g_M^{(k-1)}(t)x_1(t)dt \end{bmatrix}}_{\Lambda_k}, \quad (5.10)$$

Ce qui donne le système linéaire à résoudre suivant :

$$\Gamma_k \Xi_k = (-1)^{(k-1)} \Lambda_k, \quad (5.11)$$

Avec : $\Gamma \in \mathbb{R}^{M \times V}$, $\Xi \in \mathbb{R}^V$, $\Lambda \in \mathbb{R}^M$.

Étape 5. Finalement, la solution est donnée en résolvant le système linéaire précédent (5.27), l'estimation du vecteur des constantes tronqué de la base est donc :

$$\hat{\Xi}_k = (-1)^{(k-1)} \Gamma_k^+ \Lambda_k, \quad (5.12)$$

L'algorithme d'estimation est résumé ci-dessous.

Algorithm 7 Algorithme Estimation des États d'un SNLE (t, u, y, M, V)

```

1: Data :  $u, y$ 
2: Result :  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ 
3: for  $k = 2 : n$  do
4:   for  $i = 1 : M$  do
5:     for  $j = 1 : V$  do
6:        $\Gamma_k(i, j) = \int_0^T g_i(t)\beta_j(t)dt$  ▷ Compute  $\Gamma$ 
7:     end for
8:      $\Lambda_k(i) = \int_0^T g_i^{(k-1)}(t)x_1(t)dt$  ▷ Compute  $\Lambda$ 
9:   end for
10:   $\hat{\Xi}_k \leftarrow (-1)^{(k-1)} \Gamma_k^+ \Lambda_k$  ▷ Compute  $\Lambda$ 
11:   $\hat{x}_k \leftarrow \hat{\Xi}_k^T \beta_i(t)$  ▷ Compute  $\hat{x}_k$ 
12: end for

```

5.2.2 Simulations numériques

Considérons pour nos simulations le SNLE de dimension $n = 4$ dont la représentation d'état canonique est la suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \underbrace{\sqrt{|u|x_2^2 - x_1^3}}_{f(x,u)} \end{bmatrix}, \quad y = x_1, \quad (5.13)$$

Avec comme entrée $u(t) = 2 \sin(\frac{2}{5}) + \log(t+1)$, $I = [0 \quad 10]$ et l'état initial du système $x_0 = [10^{-3} \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{7}{2}]^T$.

Afin de simuler le problème d'estimation formulé précédemment, utilisons dans un premier temps un ensemble de M fonctions modulatrices polynomiales :

$$g_m(t) = (T - t)^{m+q} t^{M+q+1-m}, \quad m = 1, \dots, M \quad (5.14)$$

Avec $q \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre réel positif représentant le degré de liberté [18].

Nous avons choisi comme base un ensemble de V fonctions de type B-Spline cubique. Le tableau ci-dessous (5.1) regroupe les différents paramètres utilisés.

Paramètre	M	V	q
Valeur	15	12	2

TAB. 5.1 : Paramètres utilisés pour le **PE*** du SNLE (5.13)

Afin d'évaluer la performance et la précision du **PE***, nous introduisons l'indicateur de performance suivant :

$$\epsilon_{\xi^k} = \frac{\|x_k - \hat{x}_k\|_2}{\|x_k\|_2} \quad (5.15)$$

Résultats des simulations numériques

Voici les résultats obtenus pour un pas de simulation $p = 10^{-2}s$.

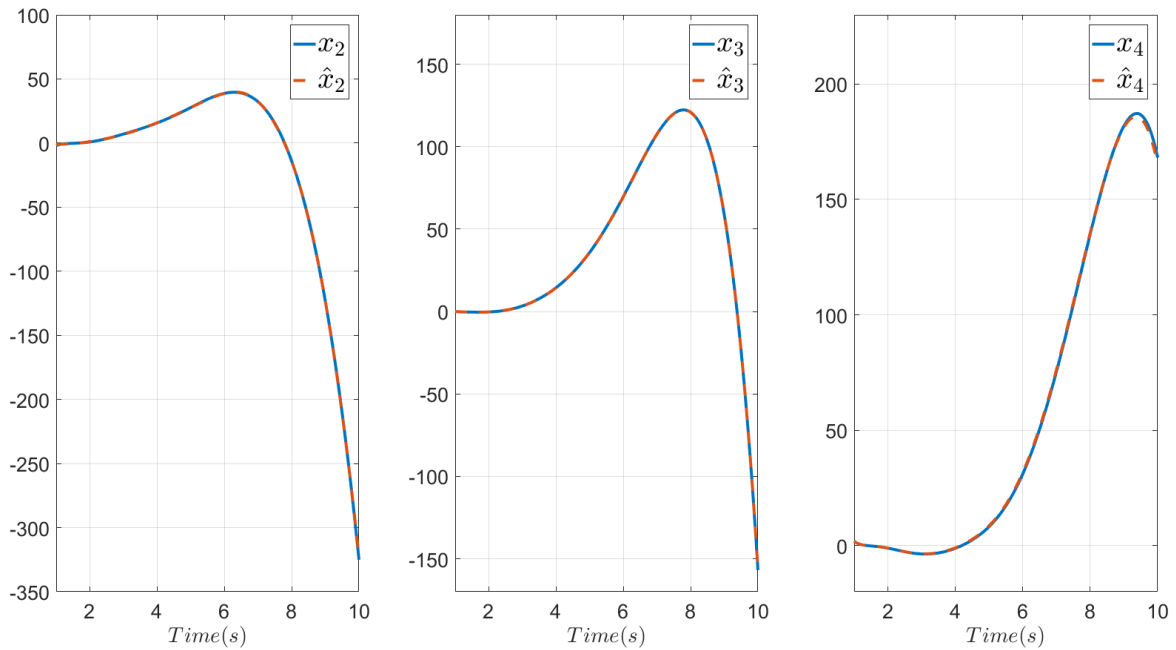


FIG. 5.1 : Estimation des états du SNLE (5.13) : **PE***

Le tableau (5.2) résume les erreurs relatives pour les différents états estimés.

État	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4
$\epsilon_{\xi^k}(\%)$	0.012	0.009	0.011

TAB. 5.2 : Erreurs relatives pour le **PE*** du SNLE (5.13)

Discussion des résultats

Nous notons que la méthode donne des résultats très satisfaisants pour la classe de systèmes étudiée, l'erreur est inférieure à 0.0012% et est généralement présente dans les pics ou aux bornes de l'estimation.

Le choix des polynômes B-spline est dû à leur régularité élevée sur un support compact, ce qui en fait des candidats intéressants pour l'approximation des états.

5.3 Méthode des fonctions modulatrices pour l'estimation des pseudo-états : SNLF

Nous avons introduit dans cette partie une méthode à base de fonctions modulatrices pour l'estimation des pseudo-états d'un système non-linéaire d'ordre fractionnaire.

Soit le système d'ordre fractionnaire défini par la représentation pseudo-état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^{\alpha_1} x_1 = x_2 \\ D_t^{\alpha_2} x_2 = x_3 \\ \vdots \\ D_t^{\alpha_{n-1}} x_{n-1} = x_n \\ D_t^{\alpha_n} x_n = f(x, u) \end{array} \right. ; \quad y = x_1, \quad (5.16)$$

Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des pseudo-états ou $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie. $f(x, u)$ est une fonction non-linéaire inconnue, on assume qu'elle est continue et Lipschitzienne localement pour tout x et u borné.

Le vecteur $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \in \mathbb{R}_+^*$ est le vecteur des ordres fractionnaires qui est connu.

La structure canonique du système (5.1) à une forme spécifique qui nous permet de découpler la non-linéarité $f(x, u)$ et les pseudo-états x_i , $i = 1, \dots, n$.

5.3.1 Méthodologie

Nous allons construire la méthodologie permettant l'estimation des pseudo-états du système x_1, \dots, x_n à partir des mesures d'entrées sorties (u, y) pour $t \in [0, T]$. La structure précédente offre un avantage important : les pseudo-états du système sont indépendants, nous allons exploiter cette propriété pour la construction du système algébrique utilisé pour l'estimation. Voici la formulation du problème d'estimation traité :

$$\text{PE1} \left\{ \begin{array}{l} \text{À partir du système (5.16) et des mesures } u, y \text{ comme entrée et connaissant} \\ \text{le vecteur des ordres fractionnaires } \alpha, \text{ estimer les pseudo-états du système} \\ x_1, \dots, x_n \text{ pour } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Afin que la méthode des FM puisse être appliquée, des transformations algébriques doivent être apportées au système, la première étant de décomposer chacun des pseudo-états du système x_1, \dots, x_n dans une base (un espace) les pseudo-états deviennent donc :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.17)$$

Où les $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ sont des fonctions de classe C^1 et les $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ des constantes $\in \mathbb{R}$.

Procédons à une troncature d'ordre V de la décomposition précédente afin de pouvoir procéder à l'estimation, nous obtenons ainsi :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^k \beta_i(t) \approx \sum_{i=1}^V \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.18)$$

Introduisons à présent la notation suivante pour la troncature du pseudo-état $x_k(t)$:

$$\bar{x}_k(t) = \sum_{i=1}^V \xi_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.19)$$

où $\bar{x}_k(t)$ est une approximation de $x_k(t)$

Introduisons également les estimés des pseudo-états du système canonique précédent :

$$\hat{x}_k(t) = \sum_{i=1}^V \hat{\xi}_i^k \beta_i(t), \quad k = 2, \dots, n, \quad (5.20)$$

Le problème d'estimation **PE** devient donc :

PE1* $\left\{ \begin{array}{l} \text{À partir du système (5.1) et des mesures } u, y \text{ comme entrée et connaissant le} \\ \text{vecteur des ordres fractionnaires } \alpha, \text{ estimer les constantes } \{\hat{\xi}_i^k\}_{i=1}^V, k = 2, \dots, n \\ \text{pour chaque pseudo-état du système } x_1, \dots, x_n \text{ pour } t \in [0, T]. \end{array} \right.$

Nous pouvons maintenant développer les étapes nécessaires à l'estimation :

Étape 1. Multiplier les $(n-1)$ premières équations du système (5.16) par une fonction modulatrice g , nous obtenons ainsi et nous intégrons sur $I = [0, T]$:

$$\begin{bmatrix} \int_0^T g(t) D_t^{\alpha_1} x_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t) D_t^{\alpha_{n-1}} x_{n-1}(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t) x_2 dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t) x_n(t) dt \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

Étape 2. Substituer les dérivées des pseudo-états $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1})$ par des dérivées d'ordre supérieur de la sortie x_1 , ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \int_0^T g(t) D_t^{\alpha_1} x_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t) D_t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}} x_1(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t) x_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t) x_n(t) dt \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

Remarque 5.1.

La propriété d'additivité des dérivations fractionnaires successives exploitée dans l'équation (5.22) n'est valable que pour une certaine classe de fonctions $f(t)$ aux conditions initiales nulles. Un terme de correction $\delta(f, \alpha)$ doit être ajouté à la sommation des ordres si cette condition n'est pas vérifiée. Ce terme est cependant difficile à calculer. Nous assumons dans ce qui suit que la propriété d'additivité est vérifiée.

En exploitant le lemme (1.33), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \int_0^T D_t^{\alpha_1} g(t)x_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T D_t^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}} g(t)x_1(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T g(t)x_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T g(t)x_n(t)dt \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

Étape 3. Remplacer les pseudo-états par leurs approximations à travers la projection introduite précédemment, en utilisant l'intégration par partie, nous obtenons pour $k = 2, \dots, n$:

$$\int_0^T g(t)\overline{x_k}(t)dt = \int_0^T D_t^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}} g(t)x_1(t)dt = \sum_{i=1}^V \xi_i^k \int_0^T g(t)\beta_i(t)dt, \quad (5.24)$$

Ce qui donne sous forme vectorielle :

$$\int_0^T D_t^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}} g(t)x_1(t)dt = \left[\int_0^T g(t)\beta_1(t)dt \quad \dots \quad \int_0^T g(t)\beta_V(t)dt \right] \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_V^k \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

Étape 4. Pour résoudre ce système d'équations pour $i = 1, \dots, V$, nous aurons besoin d'au moins V Fonctions Modultrices. Soit M le nombre de FM que nous allons utiliser, nous obtenons donc le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^T g_1(t)\beta_1(t)dt & \dots & \int_0^T g_1(t)\beta_V(t)dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^T g_M(t)\beta_1(t)dt & \dots & \int_0^T g_M(t)\beta_V(t)dt \end{bmatrix}}_{\Gamma_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_V^k \end{bmatrix}}_{\Xi_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^T D_t^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}} g_1(t)x_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T D_t^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}} g_M(t)x_1(t)dt \end{bmatrix}}_{\Lambda_k}, \quad (5.26)$$

Ce qui donne le système linéaire à résoudre suivant :

$$\Gamma_k \Xi_k = \Lambda_k, \quad (5.27)$$

Avec : $\Gamma \in \mathbb{R}^{M \times V}$, $\Xi \in \mathbb{R}^V$, $\Lambda \in \mathbb{R}^M$.

Étape 5. Finalement, la solution est donnée en résolvant le système linéaire précédent (5.27), l'estimation du vecteur des constantes tronqué de la base est donc :

$$\hat{\Xi}_k = \Gamma_k^+ \Lambda_k, \quad (5.28)$$

L'algorithme d'estimation est résumé ci-dessous.

Algorithm 8 Algorithme Estimation des Pseudo-états d'un SNLF (t, u, y, M, V, α)

```

1: Data :  $u, y$ 
2: Result :  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ 
3: for  $k = 2 : n$  do
4:   for  $i = 1 : M$  do
5:     for  $j = 1 : V$  do
6:        $\Gamma_k(i, j) = \int_0^T g_i(t)\beta_j(t)dt$  ▷ Compute  $\Gamma$ 
7:     end for
8:      $\Lambda_k(i) = \int_0^T D_t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}} g_i(t)x_1(t)dt$  ▷ Compute  $\Lambda$ 
9:   end for
10:   $\Xi_k \leftarrow \Gamma_k^+ \Lambda_k$  ▷ Compute  $\Lambda$ 
11:   $\hat{x}_k \leftarrow \Xi_k^T \beta(t)$  ▷ Compute  $\hat{x}_k$ 
12: end for

```

5.3.2 Simulations numériques

Considérons pour nos simulations le SNLF de dimension $n = 4$ dont la représentation de pseudo-état canonique est la suivante :

$$D^\alpha x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \underbrace{u^2}_{f(x,u)} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

Avec comme entrée $u(t) = 1.5\sin(t)$, $I = [0 \ 10]$ et l'état initial du système $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Les fonctions modultrices utilisées sont de type polynomiale (2.2).

Nous avons choisi une base polynomiale de la forme $\beta_k(t) = t^k$, avec les paramètres donnés dans le tableau suivant (5.3) :

Paramètre	M	V	q
Valeur	16	7	2.2

TAB. 5.3 : Paramètres utilisés pour le **PE1*** du SNLF (5.29)

L'évaluation de la performance se fait à travers l'indicateur (5.15).

Résultats des simulations numériques

Les résultats obtenus pour les paramètres ci-dessus et pour un pas $h = 10^{-2}$.

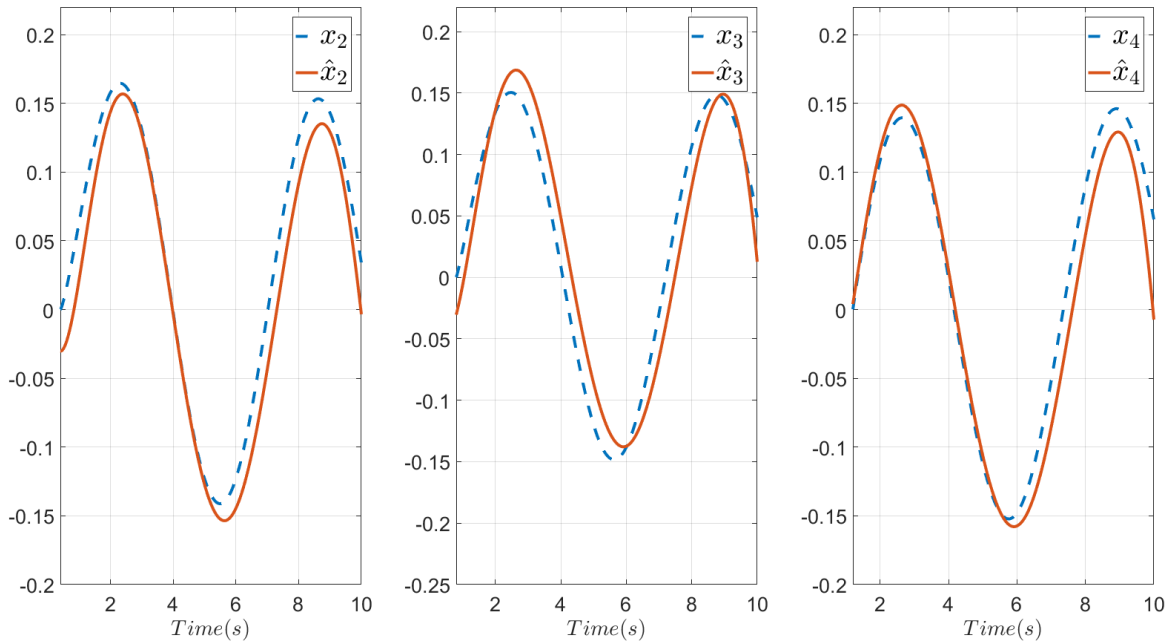


FIG. 5.2 : Estimation des pseudo-états du SNLF (5.29) : **PE1***

Le tableau (5.4) résume les erreurs relatives pour les différents pseudo-états estimés.

Pseudo-état	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4
$\epsilon_{\xi^k}(\%)$	5.7	6.2	5.4

TAB. 5.4 : Erreurs relatives pour le **PE1*** du SNLF (5.29)

Discussion des résultats

Il est observé que l'application de la méthode au système d'ordre fractionnaire conduit à des résultats de qualité satisfaisante, tant sur le plan qualitatif que sur celui de l'erreur relative, en utilisant une base polynomiale et un ordre fractionnaire spécifique pour les fonctions modultrices.

L'utilisation des fonctions modultrices d'ordre fractionnaire nous a permis d'imiter au mieux le SNLF et nous a donné de meilleurs résultats d'estimation, en forme et en valeur, on remarque la présence d'une certaine décorrélation présente dans les pics.

5.3.3 Effet du bruit en sortie

Afin d'étudier la robustesse de la méthode d'estimation précédente, une analyse de sensibilité de l'algorithme appliquée par rapport au niveau de bruit dans la sortie pour le SNLF (5.29) a été faite. Le tableau (5.6) montre l'effet du niveau de bruit en sortie.

Nous avons choisi une base polynomiale de la forme $\beta_k(t) = t^k$, avec les paramètres donnés dans le tableau suivant :

Paramètre	M	V	q
Valeur	16	7	2.2

TAB. 5.5 : Paramètres utilisés pour le **PE1*** du SNLF (5.29) pour une sortie bruitée.

L'évaluation de la performance se fait à travers l'indicateur (5.15).

Nous représentons ci-dessous les résultats obtenus.

	$\epsilon_2(\%)$	$\epsilon_3(\%)$	$\epsilon_4(\%)$
Sans bruit	5.7	6.2	5.4
1% de bruit	5.9	6.3	5.6
2% de bruit	6.0	6.4	5.8
5% de bruit	6.2	6.6	5.9
10% de bruit	6.5	6.9	6.1

TAB. 5.6 : Erreurs relatives pour le **PE1*** du SNLF (5.29) pour différents niveaux de bruit.

5.3.3.1 Discussion des résultats

Dans le cas de la sortie bruitée, l'erreur relative atteint $6,9 \cdot 10^{-2}\%$ au maximum, ce qui représente un très bon résultat pour une grande partie des domaines d'applications. Nous remarquons également que la variation de l'erreur relative entre le scénario bruité et non bruité pour les différents pseudo-états est petite. Ainsi, la précision des résultats est maintenue pour des mesures bruitées, nous pouvons ainsi statuer sur la robustesse de l'estimation.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une méthode d'estimation de pseudo-état d'un système non-linéaire d'ordre fractionnaire triangulaire basé sur les fonctions modulatrices. Dans un premier temps, nous avons appliqué la méthode sur des systèmes d'ordre entier, où nous avons retrouvé des résultats assez bien, puis nous avons généralisé pour système d'ordre fractionnaire. Nous avons aussi étudié l'influence de plusieurs paramètres, notamment le choix de type de base et leur nombre, l'influence de l'ordre des fonctions modulatrices.

Conclusions et perspectives

L'estimation joue un rôle fondamental dans la théorie du contrôle en raison de son importance cruciale. Lorsqu'il s'agit d'estimation, trois aspects essentiels doivent être pris en considération : la robustesse, la convergence et l'estimation en temps fini. Dans cette perspective, le présent travail vise à contribuer aux méthodes d'estimation non-asymptotiques en utilisant l'approche algébrique des Fonctions Modulatrices, largement appréciée pour son caractère intégral, notamment dans certaines classes de systèmes fractionnaires.

Dans le chapitre 1, nous avons exposé les bases calculatoires de la théorie fractionnaire en mettant l'accent sur son application dans la théorie du contrôle, tout en présentant les caractéristiques et les propriétés inhérentes à ces systèmes. Par la suite, à travers le chapitre 2, nous avons introduit la théorie des Fonctions Modulatrices en posant les fondements de cette méthode d'estimation et en détaillant les différentes fonctions modulatrices. Nous avons ainsi développé un estimateur pour un système linéaire d'ordre entier, qui nous a permis d'effectuer une étude de sensibilité envers divers facteurs pouvant influencer cette estimation. Nous nous sommes ensuite attaqués, au sein du chapitre 3, à l'estimation conjointe des ordres fractionnaires et des paramètres ou des signaux d'un système linéaire fractionnaire. Les estimateurs existants basés sur les fonctions modulatrices présentent tous un problème d'initialisation du vecteur des ordres fractionnaires, lié à la nature locale de la convergence de ces algorithmes, ce qui les rend difficiles à appliquer dans des problématiques d'ingénierie. Ce constat nous a incités à développer un estimateur dont la convergence est globale, fondé sur l'utilisation d'un algorithme génétique, une approche heuristique. Une étude de convergence et de sensibilité aux perturbations a été réalisée pour valider l'algorithme proposé. Le chapitre 4 a été consacré à l'illustration de l'importance des estimateurs non-asymptotiques, l'algorithme d'estimation à convergence globale conçu précédemment a été appliqué à un problème bien connu de la communauté scientifique : l'estimation des grandeurs relatives au système cardiovasculaire. Cette étude comparative a permis de valider l'algorithme susmentionné, aboutissant à des résultats supérieurs aux recherches récentes menées dans la communauté scientifique. Enfin, dans le chapitre 5, nous nous sommes penchés sur le problème de l'estimation des pseudo-états d'un système fractionnaire non linéaire en concevant un estimateur basé sur la méthode des fonctions modulatrices, adapté à certaines classes de systèmes canoniques. Cette approche s'appuie uniquement sur les mesures de l'entrée et de la sortie du système, sans avoir connaissance de la non-linéarité. L'estimateur a donné des résultats satisfaisants lors de sa première implémentation. Une étude de robustesse a été réalisée pour évaluer ses performances face aux perturbations.

Malgré les performances notables des estimateurs basés sur les fonctions modulatrices, ces approches se heurtent à certaines limitations qui entravent leur pleine exploitation. Parmi ces limitations, deux problématiques majeures méritent une attention approfondie : le problème de l'ajustement des paramètres et le problème de l'initialisation des fonctions modulatrices. Ces aspects sont cruciaux pour optimiser les performances des estimateurs et garantir leur efficacité dans des applications pratiques. Le premier défi, celui de l'ajustement des paramètres, englobe plusieurs aspects tels que la sélection du type et du nombre de fonctions modulatrices, le degré de liberté accordé à ces fonctions, ainsi que le choix de la base utilisée pour représenter les signaux. Chacun de ces paramètres influence directement la précision et la robustesse de l'estimateur. Par conséquent, une étude approfondie de ces paramètres et de leur impact sur les performances de l'estimation est nécessaire

pour tirer le meilleur parti des fonctions modulatrices.

Le deuxième défi concerne l'initialisation des fonctions modulatrices. L'estimateur repose sur une configuration initiale des fonctions modulatrices, qui peut grandement influencer la convergence de l'algorithme d'estimation. La localité de la convergence observée dans les méthodes existantes nécessite une initialisation précise pour éviter les minimums locaux et atteindre une convergence globale. Ainsi, des études approfondies sur les techniques d'initialisation des fonctions modulatrices doivent être menées afin d'élaborer des stratégies efficaces permettant de contourner ce problème. En explorant plus en détail ces deux pistes de recherche, il sera possible de repousser les limites actuelles des estimateurs basés sur les fonctions modulatrices et de leur permettre d'atteindre leur plein potentiel. Une compréhension approfondie des paramètres ajustables et une recherche active sur les méthodes d'initialisation peuvent conduire à des améliorations significatives de ces estimateurs, ouvrant ainsi la voie à des applications plus étendues et à une meilleure résolution des problèmes d'estimation en temps fini, de convergence et de robustesse dans le domaine du contrôle des systèmes.

Bibliographie

- [1] H. M. Srivastava A. A. KILBAS et J. J. TRUJILLO. “Theory and applications of fractional differential equations”. In : *Elsevier* vol. 204 (2006).
- [2] D. Liu A. ALDOGHATHER et T. LALEG-KIRATI. “Modulating functions based algorithm for the estimation of the coefficients and differentiation order for a space-fractional advection-dispersion equation”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* (2015).
- [3] B. Vinagre D. Xue A. CONCEPCIÓN Y. Chen et V.FELIU-BATLLE. “Fractional order Systems and Controls : Fundamentals and Applications”. In : *Springer Science Business Media* (2010).
- [4] Y. ABOELKASSEM et Z. VIRAG. “A hybrid windkessel-womersley model for blood flow in arteries”. In : *Journal of theoretical biology*, vol. 462 , pp. 499-513 (2019).
- [5] D. BOUTAT et G. ZHENG. “Observer Design for Nonlinear Dynamical Systems”. In : *Springer* (2021).
- [6] M. Sinha CATANHO et V. VIJAYAN. “Model of aortic blood flow using the Windkessel effect”. In : *Mathematical Methods in Bioengineering* (2012).
- [7] A. E. EIBEN, E. H. AARTS et K. M. Van HEE. “Global convergence of genetic algorithms : A Markov chain analysis”. In : *Parallel Problem Solving from Nature : 1st Workshop, PPSN I Dortmund, FRG*. Springer, (1991).
- [8] B. Chen G. PIN et T. PARISINI. “Robust finite-time estimation of biased sinusoidal signals : A volterra operators approach”. In : *Automatica*, vol. 77 (2017).
- [9] D. GREENHALGH et S. MARSHALL. “Convergence criteria for genetic algorithms”. In : *SIAM Journal on Computing* 30.1 (2000).
- [10] R. L. Magin I. PODLUBNY et I. TRYMORUSH. “Fractional Calculus and Applied Analysis”. In : *Elsevier* vol. 20, no. 5,pp. 1068–1075 (2017).
- [11] R. W. Schafer J. H. MCCLELLAN et M. A. YODER. “Signal processing first”. In : *Pearson education Upper Saddle River* (2003).
- [12] C. Farges J. SABATIER et J.-C. TRIGEASSOU. “Fractional systems state space description : some wrong ideas and proposed solutions”. In : *Journal of Vibration and Control* vol. 20, no. 7, pp. 1076–1084 (2014).
- [13] T. JANICZEK. “Generalization of the modulating functions method into the fractional differential equations”. In : *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences* (2010).
- [14] B. JIN et al. *Fractional differential equations*. Springer, (2021).

- [15] T. KACZOREK et K. ROGOWSKI. “Fractional linear systems and electrical circuits”. In : *Springer* (2015).
- [16] T. Carl KELLEY. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM, (1995).
- [17] D.-Y. LIU et T.-M. LALEG-KIRATI. “Robust fractional order differentiators using generalized modulating functions method”. In : *Signal Processing* vol. 107, pp. 395–406 (2015).
- [18] O. Gibaru LIU T. Laleg-Kirati et W. PERRUQUETTI. “Identification of fractional order systems using modulating functions method”. In : *The American Control Conference, Washington, DC, USA* (2013).
- [19] T. M. Laleg Kirati M. A. BAHLOUL. “Finite-time joint estimation of the arterial blood flow and the arterial Windkessel parameters using modulating functions”. In : *IFAC PapersOnLine* (2020).
- [20] Z. Belkhatir T. M. Laleg-Kirati M. A. BAHLOUL M. Benencase. “Finite-time simultaneous estimation of aortic blood flow and differentiation order for fractional-order arterial Windkessel model calibration”. In : *IFAC PapersOnLine* (2021).
- [21] I. A. Stegun M. ABRAMOWITZ et al. “Handbook of mathematical functions,” Applied mathematics series”. In : *Elsevier* vol. 55, no. 62, p. 39 (1966).
- [22] P. Chowienczyk M. WILLEMET et J. ALASTRUEY. “A database of virtual healthy subjects to assess the accuracy of foot-to-foot pulse wave velocities for estimation of aortic stiffness. American Journal of Physiology-Heart and Circulatory”. In : *Physiology* 309, H663-H675 (2015).
- [23] J. T. MACHADO et A. M. GALHANO. “Fractional order inductive phenomena based on the skin effect”. In : *Automatica* vol. 68, no. 1, pp. 107–115 (2012).
- [24] R. MAGIN. “Fractional calculus in bioengineering, part 1”. In : *Elsevier* vol. 32, no. 1 (2004).
- [25] K. S. MILLER et B. ROSS. “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations”. In : *Wiley* (1993).
- [26] M. MITCHELL. *An introduction to genetic algorithms*. MIT press, 1998.
- [27] J.-W. Lankhaar N. WESTERHOF et B. E. WESTERHOF. “The arterial windkessel”. In : *Medical biological engineering computing*, 47(2) :131–141 (2009).
- [28] I. N’DOYE et al. “Adaptive observer for nonlinear fractional-order systems”. In : *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 31.3 (2017).
- [29] E. C. De OLIVEIRA et J. A. Tenreiro MACHADO. “A review of definitions for fractional derivatives and integral”. In : *Automatica* vol. 2014 (2014).
- [30] M. D. ORTIGUEIRA et J. T. MACHADO. “Fractional signal processing and applications”. In : *Automatica* (2003).
- [31] A. PATRA et H. UNBEHAUEN. “Identification of a class of nonlinear continuous time systems using Hartley modulating functions”. In : *Journal of Control, vol. 62* (1995).
- [32] A. E. PEARSON et F. C. LEE. “Efficient parameter identification for a class of bilinear differential systems. Proceedings of 7th IF AC Symposium on Identification and System Parameter Estimation”. In : *University of York , U.K. (Pergamon)* 18, 5 161-165 (1985).

- [33] I. PODLUBNY et Y. CHEN. “Adjoint fractional differential expressions and operators”. In : *Automatica* vol. 4806, pp. 1385–1390 (2007).
- [34] H. PREISING et D. RIPPIN. “Theory and application of the modulating function method. review and theory of the method and theory of the spline-type modulating functions”. In : *Computers Chemical Engineering, vol. 17, no. 1* (1993).
- [35] A. RAMEZANI et B. SAFARINEJADIAN. “A modified fractional-order unscented Kalman filter for nonlinear fractional-order systems”. In : *Circuits, Systems, and Signal Processing* 37 (2018).
- [36] G. RUDOLPH. “Convergence analysis of canonical genetic algorithms”. In : *IEEE transactions on neural networks* 5.1 (1994).
- [37] I. Schäfer S. KEMPFLE et H. BEYER. “Fractional calculus via functional calculus : theory and applications”. In : *Medical biological engineering computing* vol. 29, no. 1, pp. 99–127 (2002).
- [38] H. Garnier S. VICTOR R. Malti et A. OUSTALOUP. “Parameter and differentiation order estimation in fractional models”. In : *Automatica* 49.4 (2013).
- [39] M. SHINBROT. “On the analysis of linear and nonlinear systems”. In : *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* 79.3 (1957).
- [40] D. SIEROCIUK et A. DZIELIŃSKI. “Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation”. In : *Zielona Góra : Uniwersytet Zielonogórski* (2006).
- [41] R. TAFAT. “Non asymptotic estimation methods : a focus on the Volterra and modulating functions approaches”. Thèse de doct. Ecole Nationale Polytechnique, King Abdullah University of Science et Technology, (2020).
- [42] Z. WANG. “Modulating functions-based non-asymptotic and robust estimations for fractional-order systems”. Thèse de doct. Ecole Doctorale MIPTIS, (2023).
- [43] Z. WANG, D. YANG et H. ZHANG. “Stability analysis on a class of nonlinear fractional-order systems”. In : *Nonlinear Dynamics* 86 (2016).
- [44] X. WEI. “Non-asymptotic method estimation and applications for fractional order systems”. Thèse de doct. Institut National des Sciences Appliquées-Centre Val de Loire, (2017).
- [45] X. J. WEN, Z. M. WU et J. G. LU. “Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems”. In : *IEEE Transactions on circuits and systems II : Express Briefs* 55.11 (2008).
- [46] D. XUE. “Robust fractional order differentiators using generalized modulating functions method”. In : *Walter de Gruyter GmbH Co KG* vol. 1 (2017).
- [47] I. N’Doye Y. MARANI et T. M. Laleg KIRATI. “Neural Network-based Finite-Time State and Disturbance Estimation for a Class of Nonlinear Systems”. In : *Umy* (2022).
- [48] D. Boutat H.-R. Liu Y.-Q. WEI D.-Y. Liu et Z.-H. WU. “Modulating functions based model-free fractional order differentiators using a sliding integration window”. In : *Automatica* vol. 130, p. 109679 (2021).

- [49] T. M. Laleg-Kirati Z. BELKHATIR. “Parameters and fractional differentiation orders estimation for linear continuous-time non-commensurate fractional order systems”. In : *Elsevier* (2018).