

M0011/99B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
Département d'Hydraulique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Thèse  
présentée par

**SEGHIR ABDELGHANI**

Ingénieur d'état en Hydraulique

Pour obtenir le titre de

**MAGISTER EN HYDRAULIQUE**

Thème

**INVESTIGATION DES EFFETS D'INTERACTION  
SISMIQUE FLUIDE-STRUCTURE PAR COUPLAGE  
ELEMENTS FINIS – ELEMENTS INFINIS**

Soutenue le 04 Juillet 1999 devant le jury composé de :

|              |                  |                    |
|--------------|------------------|--------------------|
| A. Kettab    | Professeur       | Président du jury  |
| B. Tiliouine | Professeur       | Directeur de thèse |
| S. Benmamar  | Chargée de cours | Examinatrice       |
| M. Berkani   | Chargé de cours  | Examinateur        |
| A. Bilek     | Chargé de cours  | Examinateur        |

بحث تأثيرات التفاعل الزلزالي مائع - هيكل بازدواج العناصر المنتهية - العناصر اللامنتهية

### ملخص

أجرى بحث حول تأثيرات التفاعل مائع - هيكل على السلوك الديناميكي للهياكل الملامسة لمائع غير محدود. الجملة مائع - هيكل النموذجية، التي أنجزت من أجلها هذه الدراسة، مكونة من سد حرساني ثقلي و خزانة. أنجز لهذا الغرض، نموذج عددي بازدواج العناصر المنتهية و العناصر اللامنتهية. مثل هيكل السد بطريقة العناصر المنتهية المؤسسة على صيغة الانتقالات. وُصف الخزان حسب صيغتين: الأولى تركز على متغير الضغط و الثانية على صيغة ثنائية مكونة من الضغط و كمون الانتقالات. تقتضي هندسة الخزان من تقسيمه إلى مجالين: مجال منتهي مقسم إلى عناصر منتهية و مجال لا نهائي ممثّل إما بحد مشع، إما بعناصر لا نهائية ملائمة.

كلمات مفاتيح: تفاعل مائع - هيكل، رد فعل زلزالي، عناصر منتهية، عناصر لامنتهية، حد مشع، سد مرن، ماء منضغط، ضغط هيدروديناميكي

### Subject

Investigation of seismic fluid-structure interaction effects by coupled finite - infinite elements

### Abstract

An investigation of the fluid-structure interaction effects on the dynamic behaviour of structures in contact with non confined fluid has been accomplished. The typical fluid-structure system, for which the survey has been achieved, is constituted by a concrete gravity dam and its reservoir. A coupled finite - infinite elements numerical model is performed to this effect. The dam structure is modelled by the standard finite elements method based on the displacements formulation. The reservoir fluid, described ones according to a pressure formulation and another according to a pressure - displacement potential mixed formulation, is subdivided into two regions: a finite domain discretised in finite elements and an infinite domain represented by a radiating boundary or by appropriate infinite elements.

**Keywords:** Fluid-structure interaction, Earthquake response, Finite elements, Infinite elements, Radiating boundary, Dam flexibility, Water compressibility, Hydrodynamic pressures.

### Sujet

Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-éléments infinis

### Résumé

Une investigation des effets d'interaction fluide-structure sur le comportement dynamique des structures en contact avec un fluide non borné a été effectuée. Le système fluide-structure typique, pour lequel l'étude a été réalisée, est constitué d'un barrage poids en béton et de sa retenue. Un modèle numérique de couplage éléments finis - éléments infinis est élaboré à cet effet. La structure du barrage est modélisée par la méthode standard d'éléments finis basée sur la formulation en déplacements. Le fluide du réservoir, décrit selon une formulation en pression et une autre en pression - potentiel de déplacements, est subdivisé en deux régions: un domaine finis discrétisé en éléments finis et un domaine infini représenté soit par une frontière de radiation soit par des éléments infinis appropriés.

**Mots clés :** Interaction fluide-structure, Réponse sismique, Eléments finis, Eléments infinis, Limite radiative, Barrage flexible, Eau compressible. Pressions Hydrodynamiques.

*A la mémoire de mon père qui a tant souffert pour que je puisse étudier*

*A la mémoire de ma grand-mère dont l'affection est inoubliable*

*A ma très chère mère qui m'a tout donné*

*A mon frère que je trouve toujours à mes côtés et à sa famille*

*A mes deux sœurs bien aimées et à leurs familles*

*A tous mes proches et amis*

*et ...*

*à tous ceux pour qui chaque réponse est une question*

## REMERCIEMENTS



Ce travail a été effectué à l'Ecole Nationale Polytechnique, dans le Laboratoire de Modélisation Numérique des Structures (M.N.S) sous la direction du professeur B.Tiliouine. Le suivi permanent du Professeur, son expérience d'enseignant dévoué, sa rigueur et sa persévérance dans la recherche et la production scientifique m'ont permis de comprendre qu'un travail continu et sérieux ne peut aboutir qu'à un résultat fructueux. La bonté et le sens de responsabilité de sa Personne, ainsi que sa générosité, particulièrement dans les moments difficiles, m'ont été un précieux soutien moral. Je ne saurais trouver les mots qu'il faut pour lui exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude.

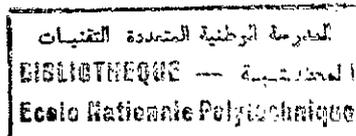
Je tiens à remercier le Professeur A. Kettab qui m'a fait l'honneur de présider le jury, Mlle S. Benmamar, Mr. M. Berkani et Mr. A. Bilek pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer au jury. Je suis particulièrement reconnaissant envers Mlle S. Benmamar pour son aide et ses encouragements.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce document, en particulier, à Mme. D. Cherid et à Mr. E.H. Amer Ouali pour leurs conseils et critiques. Sans oublier tout le personnel de la bibliothèque et du centre de calcul de l'Ecole, spécialement, Salah, Krimou et Da L'Hocine.

Je dois un grand merci à tous mes amis, notamment, à Abdel Ouahab et ses parents pour leurs aide, à Halim ainsi qu'à Ouassila pour leur soutien amical, et pour les précieuses discussions, pendant la réalisation de cette thèse, aussi bien au niveau scientifique que quotidien.

Enfin, je rends hommages à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à ma formation.

# SOMMAIRE



|  |    |
|--|----|
| CHAPITRE 1   |    |
| INTRODUCTION GENERALE .....  | 8  |
| 1.1 Définition du problème .....                                     | 8  |
| 1.2 Méthode de résolution .....                                      | 9  |
| 1.3 Objectif et organisation de l'étude .....                        | 13 |
| CHAPITRE 2   |    |
| MODELISATION DES SYSTEMES BARRAGE-RESERVOIR .....                    | 16 |
| 2.1 Introduction .....   | 16 |
| 2.2 Formulation (u,p) .....  | 18 |
| 2.2.1 Modélisation du barrage .....                                  | 18 |
| 2.2.2 Modélisation du réservoir .....                                | 21 |
| 2.3 Formulation (u, $\varphi$ , p) .....                             | 25 |
| CHAPITRE 3   |    |
| DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS .....                               | 30 |
| 3.1 Introduction .....   | 30 |
| 3.2 Discrétisation des domaines géométriques .....                   | 30 |
| 3.3 Discrétisation des formes intégrales .....                       | 32 |
| 3.3.1 Discrétisation de la formulation (u, p) .....                  | 33 |
| 3.3.2 Discrétisation de la formulation (u, $\varphi$ ,p) .....       | 38 |
| 3.4 Utilisation de l'élément de référence .....                      | 41 |
| 3.4.1 Transformation des coordonnées .....                           | 42 |
| 3.4.2 Calcul du Jacobien .....                                       | 42 |
| 3.5 Evaluation des intégrales .....                                  | 44 |
| 3.6 Calcul des matrices élémentaires .....                           | 45 |
| CHAPITRE 4   |    |
| UTILISATION DES ELEMENTS INFINIS .....                               | 47 |
| 4.1 Introduction .....   | 47 |
| 4.2 Approche directe .....   | 49 |
| 4.2.1 Choix des fonctions de décroissance .....                      | 51 |
| 4.2.1.1 Fonctions de décroissance du type exponentiel .....          | 51 |
| 4.2.1.2 Fonctions de décroissance de type puissance .....            | 52 |
| 4.2.1.3 Elément infini Q8 .....                                      | 53 |
| 4.2.1.4 Autres choix de fonctions de décroissance .....              | 57 |
| 4.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis .....    | 58 |
| 4.2.2.1 Intégration des formes de décroissance exponentielles .....  | 58 |
| 4.2.2.2 Intégration des formes de décroissance en puissance .....    | 60 |
| 4.3 Approche inverse .....   | 61 |
| 4.3.1 Transformation géométrique .....                               | 62 |
| 4.3.1.1 Transformation de Zienkiewicz .....                          | 62 |
| 4.3.1.2 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz .....     | 64 |
| 4.3.2 Génération des fonctions de transformations géométriques ..... | 66 |

|                                      |  |     |
|--------------------------------------|--|-----|
| 4.4                                  | Application au cas du réservoir .....                    | 69  |
| 4.4.1                                | Expression des matrices élémentaires .....               | 69  |
| <br>                                 |  |     |
| CHAPITRE 5                           |  |     |
| ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES .....  |  | 72  |
| 5.1                                  | Introduction.....  | 72  |
| 5.2                                  | Présentation des systèmes analysés.....                  | 73  |
| 5.3                                  | Analyse de la structure du barrage.....                  | 74  |
| 5.4                                  | Analyse du fluide du réservoir .....                     | 76  |
| 5.5                                  | Analyse du système couplé barrage-réservoir .....        | 80  |
| 5.5.1                                | Formulation (u, p).....                                  | 81  |
| 5.5.1.1                              | Symétrisation par couplage-masse.....                    | 81  |
| 5.5.1.2                              | Symétrisation par couplage-raideur .....                 | 82  |
| 5.5.2                                | Formulation (u, $\varphi$ , p).....                      | 83  |
| 5.5.2.1                              | Condensation de la variable P.....                       | 83  |
| 5.5.3                                | Système Barrage-réservoir de Pine Flat.....              | 84  |
| 5.5.4                                | Système Barrage-réservoir de Oued-Fodda.....             | 86  |
| 5.5.4.1                              | Effet du taux de remplissage du réservoir.....           | 86  |
| 5.5.4.2                              | Effet de la compressibilité de l'eau .....               | 86  |
| 5.5.4.3                              | Effet des ondes de surface .....                         | 87  |
| <br>                                 |  |     |
| CHAPITRE 6                           |  |     |
| ANALYSE DE LA REPONSE .....          |  | 89  |
| 6.1                                  | Introduction.....  | 89  |
| 6.2                                  | Les excitations dynamiques considérées.....              | 90  |
| 6.3                                  | Analyse avec hypothèse de barrage rigide .....           | 91  |
| 6.4                                  | Analyse avec hypothèse de barrage flexible.....          | 93  |
| 6.4.1                                | Le coefficient de pression maximale.....                 | 93  |
| 6.4.2                                | Histoires de la réponse .....                            | 94  |
| 6.5                                  | Analyse des facteurs de réponse critiques.....           | 98  |
| 6.5.1                                | Effets de la flexibilité et de la compressibilité.....   | 98  |
| 6.5.1.1                              | Distribution de la pression maximale .....               | 98  |
| 6.5.1.2                              | Histoire de la réponse en pressions hydrodynamiques..... | 99  |
| 6.5.2                                | Effets de la fréquence d'excitation sismique .....       | 101 |
| 6.5.3                                | Effets d'amortissement .....                             | 102 |
| <br>                                 |  |     |
| CHAPITRE 7                           |  |     |
| CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS ..... |  | 105 |
| <br>                                 |  |     |
| REFERENCES .....                     |  | 109 |
| <br>                                 |  |     |
| ANNEXE A. INTEGRATION NUMERIQUE..... |  | 113 |
| <br>                                 |  |     |
| ANNEXE B. ETAPES DE RESOLUTION.....  |  | 114 |

## NOTATIONS

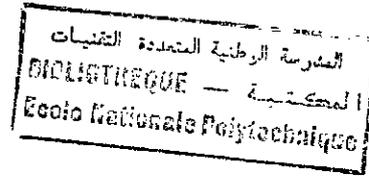
- $U_i$  : déplacement dans la direction  $i$  ( ou du nœud  $i$  )  
 $U$  : vecteur déplacement ( colonne )  
 $\sigma$  : tenseur des contraintes en vecteur colonne  
 $\varepsilon$  : tenseur des déformations en vecteur colonne  
 $D$  : matrice d'élasticité  
 $n$  : vecteur normal  
 $\Omega$  : désigne un domaine  
 $\Gamma$  : désigne un contour ( une limite )  
 $w$  : désigne une forme integrale  
 $\delta$  : fonction de Dirac  
 $\delta_{ij}$  : symbole de Kroniker  
 $p$  : pression  
 $\tau$  : contrainte de viscosité  
 $\mu$  : coefficient de viscosité dynamique  
 $V$  : vitesse  
 $f$  : force de chargement, de volume, d'excitation...  
 $\rho$  : masse volumique ( béton ou eau )  
 $N$  : fonction de forme en vecteur ligne  
 $\partial$  : opérateur de dérivée partielle  
 $d$  : opérateur de dérivée totale  
 $\nabla$  : opérateur de divergence  
 $\nabla^T$  : opérateur gradient  
 $f_{,x}$  : dérivée de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$   
 $^T$  : transposé  
 $\dot{\phantom{x}}$  : dérivée par rapport au temps  
 $T$  : fonction de transformation géométrique  
 $h$  : fonction de décroissance d'un élément infini  
 $\varphi$  : potentiel des déplacement dans le fluide

*"Comme tout événement peu probable, la vie est cernée d'innombrables dangers. La mort la guette à chaque pas. Sauvegarder la vie exige l'intervention permanente de l'intelligence, force supérieure et exceptionnelle de la vie. Le travail permanent de l'intelligence s'applique à un but unique : lutter pour la vie, lutter pour la sauvegarde de l'événement cosmique le plus important et le moins probable, car l'intelligence et son enfant, la science, sont l'ultime recours de tous ce qui vit"*

*A. Tchijevski*

*"Bien qu'elle soit incertaine, la science doit être utile"*

*R. Feynman*

**CHAPITRE 1****INTRODUCTION GENERALE****1.1 Définition du problème**

Tous les systèmes physiques, particulièrement les constructions rencontrées dans le domaine du Génie Civil, présentent un certain degré d'interaction ou de couplage entre structures composantes, avec un fluide en contact ou avec des parties du sol de fondation. Ce couplage peut être dû aux effets thermiques, inertiels ou autres. Les fluides comme l'air, l'eau, ou les lubrifiants peuvent interagir réciproquement avec les éléments structurels tels que les bâtiments, les barrages, les structures offshore, les composants mécaniques... etc. Les structures de surface interagissent avec le sol à travers leurs fondations. Le comportement des structures enterrées est couplé avec celui du rocher ou des couches de sol voisinant. Les caractéristiques dynamiques des structures en contact avec un fluide peuvent être fortement modifiées par les effets inertiels d'interaction fluide-structure.

Dans beaucoup de cas pratiques, il est souvent supposé que les effets d'un milieu sur un autre ne se produisent pas concurremment. Les forces du vent sur les bâtiments rigides ou les forces hydrodynamiques sur les massifs des plate-formes offshore sont des exemples typiques de ce comportement. Les forces agissant sur de telles constructions peuvent être calculées en supposant que les structures sont rigides et leur interaction avec le fluide est négligeable. Les systèmes correspondants sont dit découplés [2, 25, 26, 54, 55]. Par ailleurs, pour les structures telles que les mâts flexibles et les barrages de grande hauteur, les systèmes représentant le solide et le fluide doivent souvent être considérés simultanément. Ces systèmes sont dits couplés, de telle sorte qu'à n'importe quel moment, le comportement de l'un des constituants influence celui des autres et vice versa [29, 61, 65].

L'interaction peut se produire non seulement entre plusieurs systèmes physiques de mêmes ou de différents types (structure-structure ou fluide-structure) mais aussi dans un même et un seul système (champs de température et champs de contraintes dans un même corps). La considération des cas dans lesquels le fluide est en écoulement ou subit de larges mouvements est très complexe. Cependant, dans plusieurs variétés de problèmes, les déplacements du fluide demeurent petits, bien que l'interaction soit dominante. Lorsque l'interaction statique est considérée, ou bien quand la compressibilité du fluide est négligée, le problème peut être presque toujours découplé. Alors que dans les situations dynamiques dans lesquelles le fluide est compressible, l'interaction entre la structure et le fluide est souvent couplée [14, 16, 53].

Dans le cas des structures en contact avec l'eau, une procédure d'analyse approfondie de la réponse sismique, exige que les effets de l'interaction fluide-structure et, dans quelques

circonstances, de la compressibilité de l'eau soient considérés [7, 11, 21-23, 51-53]. De tels effets peuvent introduire des modifications substantielles dans les caractéristiques modales telles que les fréquences de résonance et les modes propres de vibrations, et causer un comportement en battement dans la réponse, provoquant ainsi de considérables amplifications des forces hydrodynamiques résultantes [36, 51, 53].

Un système couplé barrage-réservoir est un problème d'interaction fluide-structure classique. Il constitue, du fait de sa complexité, un sujet d'étude de beaucoup de recherches entreprises dans ce domaine [10, 29, 32, 36-41, 44-53, 61-67]. L'évaluation des forces hydrodynamiques et leurs effets sur la réponse des barrages poids en béton dépend du modèle numérique utilisé pour la modélisation des deux sous-systèmes barrage et réservoir. Ces modèles peuvent être classés par catégories en fonction des hypothèses retenues pour les propriétés physiques du corps du barrage et du fluide du réservoir [53]. Dans cette étude, des propriétés élastiques linéaires sont supposées pour la structure du barrage et l'eau du réservoir. Le mouvement du système barrage-réservoir est considéré bidimensionnel et restreint aux petites amplitudes. Le fluide est supposé sans écoulement s'étendant à l'infini dans la direction amont. Cependant, les effets des ondes surface, de la compressibilité de l'eau, de la flexibilité du barrage, de radiation à la limite amont du réservoir et l'inclinaison du parement amont du barrage sont considérés et constituent une extension par rapport aux suppositions usuelles souvent faites lors de l'analyse des barrages poids avec inclusion des effets hydrodynamiques.

## 1.2 Méthode de résolution

Les systèmes couplés peuvent être résolus soit simultanément en se basant sur des considérations de compatibilité et d'équilibre pour joindre ensemble les différents éléments composants, soit en analysant séparément chaque composant et synthétiser la solution de l'ensemble par l'application des conditions de compatibilité et d'équilibre. Généralement, la première méthode est préférée parce que la caractéristique principale des systèmes couplés est la simultanéité et la dépendance des réponses des sous structures composantes. Par contre, la deuxième méthode est souvent plus utilisée puisqu'il existe des codes de calcul pouvant analyser les éléments composant le système entier, la synthèse de la réponse totale dépend essentiellement des caractéristiques de couplage [29]. Une variété de méthodes de synthèse modale pour les problèmes de vibrations libres ainsi que des schémas d'intégration directe séparée ont été développées [14, 66]. Dans le cas des systèmes fluide-structure, le problème devient, cependant, plus compliqué du fait d'un couplage de structures de différentes natures. En effet, en plus des complexités introduites par la compressibilité du fluide, la condition à la limite interface fluide-structure induit d'importantes modifications dans les techniques de résolution et de superposition. Ainsi, dans le but d'utiliser, avec un minimum de modifications et d'extension, les codes de calcul usuels et disponibles en littérature, il est préférable de résoudre le problème des vibrations et de la réponse transitoire des systèmes barrage-réservoir, par solution simultanée des équations couplées.

Deux paramètres importants doivent être pris en compte lors du développement d'une formulation ou d'une procédure de résolution pour un problème d'interaction fluide-structure. Le premier réside dans l'incorporation des effets de dissipation associés aux propriétés constitutives viscoélastiques de la structure et aux effets de radiation dans le fluide. La formulation doit tenir compte de la configuration géométrique, souvent non bornée, du fluide pour modéliser correctement la condition de radiation à l'infini y découlant. Les techniques des équations intégrales aux frontières sont particulièrement attirantes pour ce type de problème ; elles évitent d'imposer explicitement la condition de radiation par le biais de la fonction de Green d'un espace libre; ou par un développement en série représentant la solution de l'équation d'onde réduite à l'extérieur du domaine fini. De telles techniques ont été proposées pour l'équation de Helmholtz dans de nombreux travaux [6, 8, 27, 28]. Des codes de calcul ont été développés pour le problème de l'interaction fluide-structure. Cependant, la méthode des équations intégrales aux frontières souffrent de plusieurs inconvénients qui peuvent être résumés en [40] :

- Elle conduit, pour l'équation d'Helmoltz, à des matrices non symétriques, donc exige l'adoption d'une technique de résolution de systèmes non symétriques ou d'une technique de symmetrisation matricielle.
- Malgré la réduction de la dimension du problème, elle reste numériquement coûteuse et difficile à mettre en œuvre. Le couplage des deux domaines fluide et structure induit l'inversion de matrice pleine. D'autres difficultés sont introduites par la définition des éléments singuliers et autres traitements spéciaux requis pour résoudre la singularité dans les équations.
- Dans les cas de résonance, les équations intégrales associées à l'équation d'Helmoltz admettent des solutions non uniques. Pour des nombres d'onde critiques, les formulations numériques basées sur les équations intégrales sont singulières et deviennent mal conditionnées pour des valeurs du nombre d'onde voisines des valeurs critiques. Bien que des formulations perfectionnées aient été proposées pour résoudre le problème de non unicité de la solution, elles amplifient, toutefois, la complexité et les efforts numériques.
- Dernier mais non moins important ; l'application des techniques des équations intégrales aux frontières est à présent restreinte aux problèmes d'interaction fluide-structure linéaires et périodiques. Une extension aux problèmes transitoires est possible par l'utilisation des transformations de Fourier mais reste encore limités aux cas linéaires.

Une autre technique, basée sur le couplage de la méthode des équations intégrales aux frontières et de la méthode des éléments finis, consiste à diviser le domaine fluide en une région intérieure modélisée par éléments finis et un domaine extérieur, modélisé avec une représentation intégrale [4]. Les deux régions sont ensuite assemblées sur une limite artificielle.

Bien que cette méthode permet d'incorporer la non homogénéité dans la région modélisée par éléments finis, elle présente, tout de même, les mêmes insuffisances de la méthode classique des équations intégrales aux frontières. Une méthode très proche de cette technique de couplage appelée la méthode de Dirichlet-to-Newmann (DtN) a été proposée [39]. Elle paraît être prometteuse pour les études harmoniques dans le domaine des temps sans toutefois atténuer les difficultés posées par les problèmes de résonance.

En opposé à la classe générale des approches intégrales, il existe des méthodes d'approche avec équations et conditions aux limites locales. Cette classe inclue les méthodes des éléments infinis, la méthode de Smith et plusieurs autres méthodes de modélisation d'amortissements. Les éléments infinis permettent de satisfaire la condition de radiation par un choix judicieux des fonctions de forme décroissantes [5, 13, 20, 39, 42, 45, 62, 64]. Ces éléments conviennent mieux aux problèmes harmoniques. Leur application aux cas transitoires sera examinée dans cette présente étude. La méthode de Smith [40] résout le même problème deux fois, une fois avec une condition au limite de type Dirichlet et une autre fois avec une condition au limite de type Newmann. La superposition des deux solutions annule toute réflexion d'onde, et satisfait donc la condition de radiation. Cette méthode particulièrement coûteuse est performante pour l'analyse transitoire, mais elle est non applicable aux cas harmoniques. Par ailleurs, des conditions aux limites non réfléchissantes ayant l'effet d'un amortisseur ont été présentées et appliquées pour l'analyse harmonique des systèmes fluide-structure [31, 43, 44, 46, 47, 60].

Compte tenu des restrictions des méthodes citées, et de la considération des problèmes transitoires et harmoniques, le concept d'amortissement basé sur la discrétisation de la condition de radiation de type Summerfield ainsi que la technique de couplage avec les éléments infinis sont adoptés et examinés dans cette étude. Le problème majeur introduit par l'extension du domaine fluide à l'infini consiste à annuler toute réflexion d'ondes de pressions du domaine lointain vers l'intérieur du réservoir. Le concept d'amortissement fluide dans sa forme la plus simple, a pour effet d'un élément absorbant d'ondes planes. Il est le résultat de la discrétisation de la condition à la limite de troncature du domaine fluide. La performance d'un tel amortissement, exacte à l'infini, se détériore pour des positions de la limite de troncature artificielle proches de l'interface fluide-structure. L'utilisation des éléments infinis avec un choix judicieux des fonctions et des paramètres de décroissance, ou des fonctions de transformations géométriques appropriées, permettent de représenter convenablement la tendance de la solution à l'infini. Cette hypothèse sera vérifiée par des modèles de couplage éléments finis – éléments infinis pour le cas des systèmes barrage-réservoir.

Le second paramètre, devant être considéré dans les problèmes d'interaction fluide-structure, concerne le choix des variables de champs pour la description du fluide. En effet, le choix des variables de champ pour la formulation variationnelle d'un système fluide-structure est d'une importance primordiale et conditionne le degré de complexité du problème discret à résoudre. Les différents choix et leur implications sont exposés dans le chapitre suivant.

Dans le présent travail une formulation déplacements–pressions ainsi qu’une formulation mixte déplacements–pressions–potentiel de déplacement dans le fluide sont examinées. Comme il est en pratique très fréquent, le champs des déplacements est utilisé pour la description de la structure du barrage [15, 67]. La description du fluide du réservoir par un seul champ des pressions réduit la taille du système discret résultant et permet de satisfaire à priori la condition d’irrotationnalité, et de résoudre le problème directement en terme de chargement hydrodynamique, donc en terme de forces agissant sur la structure. Cependant, elle conduit après le couplage des deux systèmes, décrivant la structure et le fluide, à un système complet non symétrique. Cet inconvénient induit la considération d’une autre formulation faisant introduire le potentiel des déplacements comme variable supplémentaire pour la description du fluide [37, 40]. Cette formulation permet effectivement d’annuler le problème de non symétrie, mais requiert la condensation de la variable pression du système couplé résultant et devient plus coûteuse que la symétrisation de la formulation en champ pressions par une technique élaborée dans le cadre de cette étude [52, 53].

Il est à rappeler que la non symétrie a été prise comme inconvénient de la méthode des équations intégrales aux frontières, elle est maintenant considérée contre la modélisation en éléments finis basée sur la formulation en pressions. Ces réservations sont motivées par le fait que la non symétrie requiert plus de temps d’exécution, de volume de calcul et d’espace mémoire, et empêche l’utilisation de la plus parts des algorithmes et codes de calcul usuels développés spécifiquement pour traiter des matrices symétriques. Pour des problèmes harmoniques, plusieurs techniques de symétrisation ont été développées pour reprendre, souvent avec des difficultés considérables, la symétrie du système complet [14, 53]. La plus part de ces techniques font intervenir l’inversion d’une ou de plusieurs matrices, ce qui est numériquement indésirable. Pour le cas fréquent des systèmes fluide–structure où la masse de la structure peut être modélisée par un système de masses concentrées, une technique de symétrisation relativement très performante, permettant d’éviter l’inversion matricielle et de résoudre efficacement le problème de symétrie, à été développée et appliquée au cas du système barrage–réservoir de Oued–fodda [14]. Elle sera exposée dans le chapitre cinq.

Pour la réponse transitoire, un autre problème important relatif au terme d’amortissement non proportionnel introduit dans les systèmes couplés, symétriques ou non symétriques, par la présence du fluide augmente, la complexité et la difficulté de résolution par les méthodes standards. La solution de tels systèmes non symétriques à amortissement non proportionnel exige l’utilisation d’algorithmes d’intégration directe spécifiques. La considération de la formulation symétrique, basée sur l’introduction du potentiel de déplacement dans le fluide, n’améliore en rien la nature du problème à résoudre. Ceci revient, d’une part, à la présence d’élément nuls en diagonales des matrices couplées, et d’autre part, à la non proportionnalité de l’amortissement global qui demeure posée. Par conséquent, un schéma d’intégration directe pas à pas du système non symétrique est utilisé dans cette étude. Ce schéma est basé sur la méthode de Newmark avec la factorisation de Crout [3, 17, 35, 57, 58].

### 1.3 Objectif et organisation de l'étude

Ce présent travail consiste en l'étude et l'investigation des effets d'interaction fluide-structure sur le comportement sismique des structures en contact avec un fluide non confiné. Un barrage poids en béton et sa retenue constituent un système couplé fluide-structure typique pour lequel un modèle numérique, permettant de conduire cette étude, est développé.

La structure du barrage est modélisée par la méthode standard d'éléments finis basée sur la formulation en déplacements. Le comportement de l'eau dans le réservoir est décrit, une fois, selon une formulation basée sur un champ de pressions comme variable de base, et une autre fois, selon une formulation mixte faisant intervenir un champ de pression et un champ de potentiel des déplacements. La configuration géométrique non bornée du réservoir nécessite de le subdiviser en deux régions ; un domaine fini modélisé par éléments finis et un domaine infini représenté, soit, par une condition de radiation, ou bien, par un couplage avec des éléments infinis. La résolution des systèmes discrets découlant de ces deux approches entraînent quelques difficultés numériques contournées, dans ce travail, par la proposition d'une technique de symétrisation très performante.

Les effets de divers paramètres critiques, entre autres, la compressibilité de l'eau, la flexibilité du barrage, la fréquence d'excitation sismique et les taux d'amortissements critiques sont évalués sur la base de l'analyse en vibrations libres et de la réponse sismique des systèmes barrage-réservoir de Oued-fodda et de Pin Flat. Les excitations sismiques utilisées sont les répliques du séisme d'El-Asnam (1980) et le séisme de Loma Preita (1989).

Comme toute étude par la méthode des éléments finis, l'objectif, visé ici, sera atteint en trois étapes essentielles présentées, dans cette thèse, en six chapitres avec la présente introduction en premier chapitre et une conclusion générale des principaux résultats en dernier chapitre.

La première étape consiste, comme dans n'importe quelle autre étude, la recherche d'une modélisation adéquate s'appêtant à une mise en œuvre et permettant une compréhension du phénomène d'une manière aussi simple que possible. Le deuxième chapitre fait le thème de cette étape ; le comportement dynamique du système physique barrage-réservoir est décrit selon les deux formulations variationnelles citées plus haut. Les modèles mathématiques sont d'abord présentés sous forme de problèmes classiques en termes d'équations et de conditions aux limites, ensuite, les problèmes variationnels correspondant sont déduit par l'application du principe des résidus pondérés selon la méthode de Galerkin. L'écriture du problème mathématique sous forme variationnelle est d'une importance fondamentale dans toute modélisation par éléments finis.

La deuxième étape est la discrétisation des domaines physiques et des formes variationnelles associées aux équations gouvernant leurs comportements dynamiques. La discrétisation spatiale et géométrique ainsi que les expressions des différentes matrices obtenues sont

exposées dans le chapitre trois. Comparativement à la théorie des éléments finis actuellement disponible et assez réponde et qu'il n'est donc pas nécessaire d'exposer, celle des éléments infinis fait l'objet du chapitre quatre. Ce chapitre n'est d'ailleurs inséré ici que dans le seul but de réaliser un apport dans la documentation particulièrement insuffisante. Bien qu'un exposé complet d'une méthode ne peut faire l'objet d'un seul chapitre, mais les grandes lignes ainsi que la méthodologie d'application peuvent être relativement bien cernées. La mise en œuvre de la technique pour la représentation du domaine infini du réservoir, selon les deux approches de génération d'éléments infinis, est décrite en fin du chapitre.

La troisième étape consiste la résolution des systèmes discrets et la mise en œuvre des modèles élaborés pour la conduite des investigations. Les codes de calcul numériques utilisés pour effectuer l'étude sont des extensions des programmes élaborés en langage Fortran et présentés en détails pour une thèse de projet de fin d'études [46]. Ainsi, seulement les modifications apportées dans le cadre de ce travail ainsi que les étapes essentielles de mise en œuvre sont présentées dans les chapitres trois et quatre. Une description des étapes à suivre pour le calcul des modes propres de vibrations et la détermination de la réponse du système est reportée en annexe B. Les résultats d'une analyse en vibrations libres des systèmes barrage-réservoir de Oued-Fodda et de Pine Flat sont discutés en chapitre cinq. L'histoire de réponse aux excitations dynamiques, considérées et appliquées aux deux systèmes étudiés, est analysée suivant différents paramètres de réponse spécifiques, dans le chapitre six.

# MODELISATION DES SYSTEMES BARRAGE-RESERVOIRE

*"A ceux qui ne connaissent rien aux mathématiques,  
il est difficile de transmettre le sentiment de la beauté  
de la nature, de sa beauté la plus profonde"*

*R. Feynman*

*"Les mathématiques, en effet, sont puissantes. Mais  
ce qu'on peut comprendre mathématiquement, trop  
souvent ne peut être ni représenter, ni conçu en des  
images ordinaires par des modèles"*

*G. Tsolkovski*

**CHAPITRE 2****MODELISATION DES SYSTEMES BARRAGE-RESERVOIR****2.1 Introduction**

La méthode des éléments finis constitue l'outil le plus puissant actuellement disponible pour l'analyse approfondie des systèmes fluide-structure faisant intervenir notamment des conditions géométriques d'interface quelconques. Néanmoins, le choix des variables de champs pour la formulation variationnelle de tels systèmes est d'une importance primordiale et conditionne le degré de complexité du problème discret à résoudre.

Dans l'approche usuelle, le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  de la structure et le champ de pressions hydrodynamiques  $p$  dans le fluide sont utilisés comme variables nodales [32, 40, 44, 61-63, 65, 66]. Le problème aux fréquences et modes propres de vibrations du système découlant de cette approche conduit, après la discrétisation en éléments finis du domaine fluide-structure, à un système matriciel global non symétrique. Diverses techniques de symétrisation du système matriciel ont ainsi été développées [14, 51, 52].

Une formulation variationnelle symétrique à trois variables de champs a été introduite en utilisant le champ des pressions hydrodynamiques  $p$  et le potentiel des déplacements  $\varphi$  comme variables nodales pour la description du fluide. Le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  est retenu pour la description du solide. La formulation implique un couplage de termes dans la matrice des raideurs du système complet résultant [37, 38, 40].

La description du fluide par un champ des déplacements introduit des difficultés relatives à la discrétisation de la condition d'irrotationnalité. Une analyse par éléments finis d'une formulation en déplacements d'un système fluide-structure couplé est présentée dans la référence [30].

Dans d'autres approches, existant dans la littérature [40], la description du fluide par un potentiel des déplacements  $\varphi$  ou un potentiel des vitesses  $\mathcal{V}$  au lieu de la pression  $p$  est utilisée. Le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  est souvent retenu pour la description du solide, toutefois, une variable supplémentaire  $\mathbf{R}$  représentant les forces de réactions dynamiques ou les accélérations nodales dans la structure peut être introduite dans le but d'obtenir une formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{R}, p)$  ou  $(\mathbf{u}, \mathbf{R}, \varphi)$  symétrique.

La formulation non symétrique  $(\mathbf{u}, p)$  et la formulation symétrique  $(\mathbf{u}, \varphi, p)$  seront considérées dans la suite de ce chapitre.

Dans le but de considérer des systèmes fluide-structure avec frontières irrégulières pour lesquels la solution analytique n'est pas valable, et d'inclure les effets de non linéarités géométriques et matérielles sur la réponse à de fortes excitations sismiques, la discrétisation spatiale par éléments finis ainsi que le schéma d'intégration par différences finis sont souvent utilisés. Cependant, dans beaucoup de situations, des difficultés surviennent dans la discrétisation du domaine fluide dû à son extension pratiquement sans bornes qui doit être tronquée à une distance assez loin de l'interface fluide-structure pour obtenir des résultats suffisamment acceptables. Ce qui requiert des efforts numériques considérables pour analyser le système complet. Cet inconvénient peut être pratiquement contourné par l'utilisation d'une des techniques suivantes :

- a) Application d'une solution analytique lorsque c'est possible.
- b) Limiter le domaine fluide par une limite de rayonnement ayant l'effet d'un élément absorbant et utiliser une condition au limite convenable.
- c) Représenter le domaine infini par des éléments infinis et procéder par couplage éléments finis-éléments infinis.

Un barrage et son réservoir constituent un système fluide-structure typique. L'évaluation des forces hydrodynamiques et leurs effets sur la réponse des barrages poids en béton dépend du modèle numérique utilisé pour la modélisation des deux sous-systèmes barrage et réservoir. Ces modèles peuvent être classés par catégories en fonction des hypothèses retenues pour les propriétés physiques du corps du barrage et le fluide du réservoir [53].

Dans cette étude, des propriétés linéaires sont supposées pour le corps du barrage et l'eau du réservoir. Le mouvement du système barrage-réservoir est considéré bidimensionnel et restreint aux petites amplitudes. Le fluide est supposé sans écoulement s'étendant à l'infini dans la direction amont. Cependant, les effets des ondes de surface, de la compressibilité de l'eau, de la flexibilité du barrage, de radiation à la limite amont du réservoir et l'inclinaison du parement amont du barrage sont considérés et constituent une extension par rapport aux suppositions usuelles souvent faites lors de l'analyse des barrages poids avec inclusion des effets hydrodynamiques.

Dans ce chapitre deux formulations variationnelles, permettant de développer les modèles d'éléments finis utilisés pour l'investigation des effets de l'interaction fluide-structure sur la réponse sismique des systèmes couplés barrage-réservoir, seront présentées. La formulation variationnelle non symétrique  $(\mathbf{u}, p)$  sera d'abord exposée en première partie. Ensuite la formulation symétrique  $(\mathbf{u}, \phi, p)$ , faisant intervenir une variable supplémentaire, sera examinée en seconde partie. Le modèle de couplage éléments finis-éléments infinis utilisé pour la description du fluide sera développé dans le chapitre suivant.

## 2.2 Formulation (u,p)

Le barrage ainsi que le domaine fini du réservoir, illustrés dans la figure 2.1, sont d'abord modélisés séparément. Ensuite, il est démontré que les forces d'interaction dynamique liant les deux sous-systèmes à l'interface barrage-réservoir sont causées par les pressions hydrodynamiques, agissant sur la face amont du barrage, et les accélérations structurales à l'interface agissant à leur tour sur le réservoir en générant des ondes de pressions.

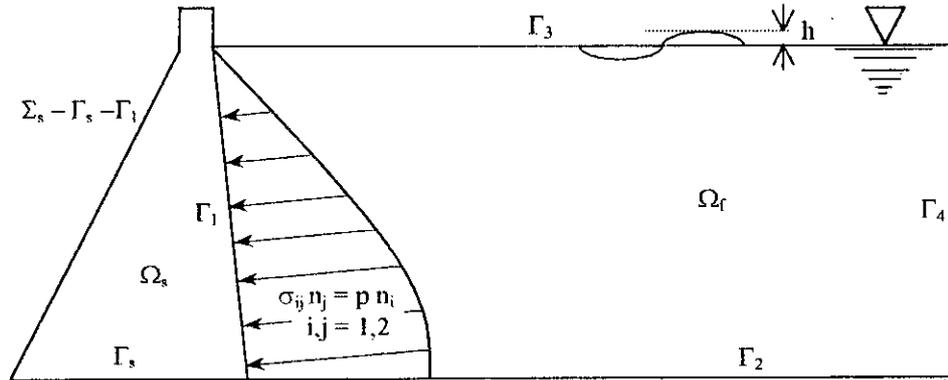


Figure 2.1 Domaine barrage-réservoir et distribution des forces hydrodynamiques.

### 2.2.1 Modélisation du barrage

En se basant sur les notations suivantes :

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\Omega_s, \Sigma_s$ | domaine solide et son contour à l'équilibre  |
| $\Gamma_s$           | base de la structure du barrage  |
| $\Gamma_1$           | l'interface fluide-structure   |
| $\rho_s$             | densité massique de la structure du barrage  |
| $u_i, \ddot{u}_i$    | déplacement et accélération dans la $i^{\text{ème}}$ direction à l'intérieur du corps du barrage |
| $p$                  | pression hydrodynamique sur le parement amont  |
| $n_i$                | la $i^{\text{ème}}$ composante de la normale unitaire $\mathbf{n}$                               |
| $f_i$                | forces de volume dans la $i^{\text{ème}}$ direction  |
| $\sigma_{ij}$        | composante du tenseur des contraintes,   |

l'équation d'équilibre en champs continus d'un monolithe de barrage poids flexible, homogène, a comportement bidimensionnel élastique linéaire, fixé à sa base s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho_s \ddot{u}_i \quad | \Omega_s \quad (2.1)$$

Les conditions aux limites appropriées devant être vérifiées sont :

a) La condition d'équilibre dynamique entre les contraintes et le chargement dû à la pression hydrodynamique sur la face amont du barrage :

$$\sigma_{ij}n_j = pn_i \quad | \Gamma_1 \quad (2.2)$$

b) Les déplacements relatifs sont nuls à la base. La liaison entre le corps du barrage et le rocher de fondation supposé rigide est parfaite ; l'interaction sol-structure étant simplifiée dans cette étude :

$$u_i = 0 \quad | \Gamma_s \quad (2.3)$$

c) Sur le reste du contour, le barrage étant libre, les contraintes sont nulles :

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad | \Sigma_s - \Gamma_1 - \Gamma_s \quad (2.4)$$

Pour des raisons de clarté, il est utile de rappeler que vue leurs symétrie, les quantités tensorielles intervenant dans les équations seront écrites en notation vectorielle pour alléger les expressions. Les relations suivantes sont ainsi à noter :

relation contraintes-déformations :

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{D}$ , matrice d'élasticité, s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

avec, pour le cas d'un problème en contraintes planes :

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2} ; \quad d_2 = \nu d_1 \quad (2.7)$$

et pour le cas d'un problème en déformations planes :

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{1-\nu} \quad (2.8)$$

Dans les deux cas, de contraintes ou de déformations planes,  $d_3$  est défini par :

$$d_3 = \frac{1}{2} (d_1 - d_2) \quad (2.9)$$

Le cas du barrage présente un problème de déformations planes [15, 41].  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau.

L'expression du tenseur des contraintes peut être réduit, du fait de la symétrie, à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (2.10)$$

et celle du tenseur des déformations à :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad (2.11)$$

La relation déformations-déplacements s'écrit par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{S}$  opérateur de différenciation :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Il est facile de montrer [1, 3, 17-19, 24, 29, 42, 46, 64] que l'application de la formulation variationnelle faible de type Galerkin aux équations d'équilibre (2.1) avec les conditions aux limites (2) à (4) conduit, en prenant la fonction teste  $\delta \mathbf{u}$  et en se basant sur les relations précédentes, à l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} \delta \mathbf{u} \mathbf{D} \cdot \mathbf{S} \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_s \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

$\forall \delta \mathbf{u} \in V_u$

où  $V_u$  est la classe des fonctions régulières admissibles.

Il est à noter que l'équation (2.14) est une écriture du principe des travaux virtuels exprimant l'égalité entre le travail des charges externes s'exerçant sur un système physique et le travail des contraintes développées par le système.

### 2.2.2 Modélisation du réservoir

Dans le cas d'hypothèses où l'eau du réservoir est supposée comme un fluide linéairement compressible, non visqueux et subit des mouvements de petites amplitudes ; l'équation de Naviers–Stokes exprimant l'équilibre dynamique des fluides en mouvement se réduit à l'expression suivante :

$$\rho_r \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p \quad (2.15)$$

Pour une description complète, l'équation de conservation de la masse ainsi que l'équation d'état doivent être associées à l'équation du mouvement précédente. Elles s'écrivent respectivement par :

$$\dot{\rho}_r + \rho_r \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (2.16)$$

$$d\rho_r = \frac{\rho_r}{K} dp \quad ; \quad \dot{\rho}_r = \frac{\rho_r}{K} \dot{p} \quad (2.17)$$

K étant le module de compressibilité de l'eau.

La réécriture de (2.16) tenant compte de (2.17) donne :

$$\frac{\rho_r}{K} \dot{p} + \rho_r \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (2.18)$$

La multiplication de (2.18) par  $\nabla$  et la dérivation de (2.17) par rapport au temps conduit au système d'équations d'équilibre dynamique suivant :

$$\rho \nabla \dot{\mathbf{v}} + \nabla^2 p = 0 \quad (2.19)$$

$$\rho \nabla \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 \quad (2.20)$$

dans lequel

$$C = \sqrt{K/\rho} \quad (2.21)$$

désigne la célérité des ondes de compression dans le fluide. Pour l'eau  $C \approx 1440$  m/s.

L'élimination de la variable  $\mathbf{v}$  du système d'équations (2.19) et (2.20) conduit à l'équation d'onde régissant le comportement de la perturbation des pressions à l'intérieur du réservoir :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 \quad (2.22)$$

dans le cas d'hypothèse d'un fluide incompressible, cette équation se réduit à l'équation de Laplace suivante :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2.23)$$

Les conditions aux limites nécessaires pour bien poser le problème mathématique sont :

- Sur le parement amont du barrage  $\Gamma_1$ , l'hypothèse d'une liaison parfaite entre les deux milieux lie les déplacements des particules fluides et ceux des particules solides. L'équation dynamique (2.15) du fluide s'écrit pour cette limite par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \dot{\mathbf{v}}_n = -\rho_f \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.24)$$

où  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  désigne la projection des accélérations des particules solides sur la normale  $\mathbf{n}$  à la face amont du barrage.

- Sur le fond  $\Gamma_2$ , lorsque le chargement sismique d'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  ou le fond du réservoir, ou bien les deux en même temps sont inclinés, l'écriture de l'équation dynamique devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} \quad (2.25)$$

pour le cas considéré dans cette étude, le séisme et le fond sont horizontaux ; cette condition se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2.26)$$

- Sur la surface libre  $\Gamma_3$ , la condition la plus simple est de considérer une pression atmosphérique ( $p = 0$ ) et de négliger les ondes de surface. Toutefois, les variations de pressions à l'intérieur du réservoir engendrent des fluctuations de la surface libre. Une idée approximative pour inclure les effets des ondes de surface consiste en la considération d'une surface moyenne pour laquelle toute élévation ou abaissement de la surface actuelle

d'une hauteur  $h$  se traduit par une variation de pression pouvant être prise isostatique :

$$p = \rho_f g h \quad (2.27)$$

l'application de l'équation dynamique pour ce cas donne :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \ddot{h} \quad (2.28)$$

compte tenu de l'équation (2.27) avec deux dérivations par rapport au temps, cette condition devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{p} \quad (2.29)$$

Cette condition est connue sous le nom de condition d'ondes de surface linéarisée.

- Sur la limite de troncature  $\Gamma_4$  ; cette frontière délimite un domaine physiquement non borné. Une condition prenant en compte cet effet est donc nécessaire. Le principal effet dynamique dans cette région est dû à la propagation d'ondes de pression voyageant à partir de l'interface fluide-structure vers l'amont du réservoir supposé étendu assez loin pour être infini et sans source de réflexion d'ondes. La solution générale de l'équation (2.22) peut alors s'écrire :

$$p = f(x - C t) + g(x + C t) \quad (2.30)$$

avec  $g(x + C t) = 0$  pour traduire la condition de non réflexion d'onde. La limite est supposée assez loin pour considérer l'onde de pression se propageant horizontalement en un front dans la direction  $x$ .

La dérivation de la condition (2.30) par rapport au temps et par rapport à la normale permet de définir la condition appropriée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = f' \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -C f' \end{array} \right. ; \quad \text{soit : } \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{C} \dot{p} \quad (2.31)$$

Cette condition est présentée pour la première fois par Zienkiewicz et Newton en 1969 pour les limites de radiation, et à une analogie avec un élément absorbant [61]. D'autres conditions de radiation ont été introduites par la suite dans de nombreux travaux [31, 43, 44, 46-47, 60].

Dans le but d'obtenir une expression décrivant le comportement du réservoir et s'appêtant à la discrétisation par éléments finis, la forme intégrale faible, de l'équation du mouvement et de ses conditions aux limites, doit être considérée.

Le problème mathématique classique revient à résoudre pour l'inconnu  $p$  le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 p - \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 & |\Omega_r \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & |\Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{g} \ddot{p} & |\Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{C} \dot{p} & |\Gamma_4 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème variationnel associé s'obtient en adoptant la formulation faible de type Galerkin avec fonction poids  $\delta p$ . Il s'écrit :

$$-\int_{\Omega_r} \delta \nabla p \nabla p d\Omega - \int_{\Omega_r} \delta p \ddot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \nabla p \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.32)$$

avec  $\Gamma_f$  représente le contour complet du réservoir.

En remplaçant l'intégrale sur  $\Gamma_f$  par la somme des intégrales sur les différentes limites constituant le contour, et en utilisant pour chacune d'elles la condition à la limite correspondante, l'expression finale de la formulation variationnelle devient :

$$\int_{\Omega_r} \nabla \delta p \nabla p d\Omega + \int_{\Omega_r} \delta p \frac{1}{C^2} \ddot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta p \rho_f \ddot{u}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta p \frac{1}{g} \ddot{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta p \frac{1}{C} \dot{p} d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

$$\forall \delta p \in V_p$$

où  $V_p$  représente la classe des fonctions régulières admissibles.

Il est à noter que cette expression est analogue à celle décrivant le comportement du barrage. Les deux formulations obtenues sont couplées à travers l'intégrale de surface sur l'interface fluide-structure  $\Gamma_1$ . Cela peut être directement vérifié à partir des conditions aux limites appliquées de part et d'autre de l'interface fluide-structure selon les relations (2.2) et (2.24).

### 2.3 Formulation ( $\mathbf{u}$ , $\phi$ , $p$ )

Dans cette formulation, le modèle mathématique développé pour la description du barrage reste valable et l'expression variationnelle (2.14) est toujours applicable. Par contre le comportement de l'eau du réservoir sera décrit par deux variables : la pression  $p$  et le potentiel des déplacements  $\phi$ . Il est donc considéré que les déplacements  $\mathbf{u}_f$  des particules fluides dérivent d'un potentiel soit :

$$\mathbf{u}_f = \nabla\phi ; \quad (2.34)$$

Par conséquent, la vitesse est :

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}_f = \nabla\ddot{\phi} \quad (2.35)$$

ce qui permet d'écrire l'équation d'équilibre dynamique (2.15) sous la forme :

$$\rho_f \nabla\ddot{\phi} = -\nabla p. \quad (2.36)$$

et l'équation de conservation de la masse par :

$$\frac{\rho_f}{K} \dot{p} + \rho_f \nabla(\nabla\dot{\phi}) = 0 \quad (2.37)$$

Le réservoir peut donc être maintenant décrit par le système des deux équations (2.36) et (2.37). Toutefois l'utilisation directe de ces deux équations pour développer un modèle d'éléments finis conduit, d'une part, à des matrices non symétriques, ce qui peut être vérifié par l'écriture des formulations variationnelles associées, et introduit, d'autre part, des termes de couplage dans la matrice d'amortissement du système complet, ce qui induit des difficultés numériques dans le calcul des modes de vibrations du système complet.

Il convient donc de réécrire l'équation du mouvement, soit par différentiation ou par intégration sous l'une des formes suivantes :

$$\nabla^2 p + \rho_f \nabla^2 \ddot{\phi} = 0 \quad (2.38)$$

$$p + \rho_f \ddot{\phi} = 0 \quad (2.39)$$

La première, utilisée dans la référence [37] conduit à une intégrale nulle sur le contour dans l'expression de la formulation variationnelle. La seconde équation est l'équation d'équilibre des moments, introduite dans la référence [40], nécessite une approximation en élément finis

de type constant ainsi que l'utilisation des contraintes de type Lagrange dans la forme intégrale associée pour inclure les conditions aux limites.

La dérivation par rapport au temps de l'équation de continuité (2.37) conduit à un système complet non symétrique pouvant être réduit au système résultant de la formulation  $(\mathbf{u}, p)$ . Son intégration par rapport au temps donne :

$$p + \rho_f C^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.40)$$

avec toujours  $C^2 = K/\rho$ .

Cette équation, aussi utilisée dans la référence [37], combinée avec l'équation (2.39) conduit à une formulation symétrique. Elle est à retenir.

Les conditions aux limites sous les mêmes hypothèses discutées précédemment deviennent :

- Sur tout le contour du réservoir l'équation du mouvement (2.37) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \rho_f \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial n} = 0 \quad (2.41)$$

cette condition au limite est valide pour tout le contour du réservoir et permet d'annuler l'intégrale de surface intervenant dans la forme variationnelle faible de l'équation (2.40).

- Sur le parement amont, l'égalité des déplacements, compte tenu de (2.34) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (2.42)$$

le vecteur  $\mathbf{u}$  étant les déplacements couplés des particules solides et fluides à l'interface.

- Pour la surface libre, moyennant le concept de surface moyenne, l'équation (2.34) s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = h = \frac{p}{\rho_f g} \quad (2.43)$$

- Dans la limite de troncature, la même condition de non réflexion d'onde est utilisée pour  $\phi$ . En effet, il peut être vérifié, par élimination de  $p$  à partir des équations (2.40) et (2.41), que le potentiel des déplacements est régit par l'équation d'onde. Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \dot{\phi} \quad (2.44)$$

Le problème mathématique classique revient donc maintenant à résoudre pour les champs continus  $p$  et  $\phi$  le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 p + \rho_f \nabla^2 \ddot{\phi} = 0 \quad |\Omega_r \\ p + \rho_f C^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad |\Omega_r \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \rho_f \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial n} = 0 \quad |\Gamma_r \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad |\Gamma_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad |\Gamma_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{\rho_f g} p \quad |\Gamma_3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{C} \dot{\phi} \quad |\Gamma_4 \end{array} \right. \quad (2.II)$$

Pour obtenir un même terme de couplage que celui introduit dans la formulation (2.14), le problème variationnel associé au système (2.II) s'obtient en multipliant l'équation (2.38) par la fonction teste  $\delta\phi \in V_\phi$  et l'équation (2.40) par  $\delta p \in V_p$  tout en utilisant la formule de Green pour tenir compte des conditions aux limites appropriées.  $V_p$  et  $V_\phi$  sont les classes admissibles des fonctions régulières. La première intégrale sous forme forte est :

$$\int_{\Omega_r} \delta\phi (\nabla^2 p + \rho_f \nabla^2 \ddot{\phi}) d\Omega = 0 \quad (2.45)$$

et la forme faible correspondante :

$$- \int_{\Omega_r} \delta \nabla \phi \nabla p d\Omega - \int_{\Omega_r} \delta \nabla \phi \rho_f \nabla \ddot{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_r} \delta\phi \left( \frac{\partial p}{\partial n} + \rho_f \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.46)$$

qui se réduit compte tenu de (2.41) à :

$$\int_{\Omega_r} \delta \nabla \phi \nabla p d\Omega + \int_{\Omega_r} \delta \nabla \phi \rho_f \nabla \ddot{\phi} d\Omega = 0 \quad (2.47)$$

La seconde intégrale s'écrit :

$$\int_{\Omega_f} \delta p (p + \rho_f C^2 \nabla^2 \phi) d\Omega = 0 \quad (2.48)$$

et sous la forme faible :

$$\int_{\Omega_f} \delta p \frac{1}{\rho_f C^2} p d\Omega - \int_{\Omega_f} \delta \nabla p \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta p \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.49)$$

qui se présente compte tenu des conditions aux limites comme :

$$\int_{\Omega_f} \delta p \frac{1}{\rho_f C^2} p d\Omega - \int_{\Omega_f} \delta \nabla p \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta p \frac{1}{\rho_f g} p d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta p \frac{1}{C} \phi d\Gamma = 0 \quad (2.50)$$

Cette formulation ne fait intervenir les termes d'amortissement que sur la frontière de troncature  $\Gamma_4$ . Physiquement, sous les hypothèses de base, les seuls effets de dissipation dans le fluide sont dû aux radiations au niveau de cette limite. Ce terme disparaît avec l'utilisation de la technique des éléments infinis. Une limite libre sans condition peut être adoptée d'un point de vue mathématique sans rendre le problème mal posé ; ce qui revient à mettre  $p=0$  et  $\phi=0$  à l'infini comme limites d'une solution décroissante, cependant les valeurs tendent à devenir plus importantes au niveau de la limite de troncature lorsque celle-ci est localisée à une distance finie de l'interface fluide-structure. Une autre alternative consiste en un développement d'une limite de radiation appropriée [32, 46].

De plus, le même terme de couplage apparaissant dans l'expression de la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  est obtenu ici dans l'expression de l'intégrale de surface sur  $\Gamma_1$ , bien que dans ce cas, il n'est pas évident de le vérifier à partir des équations gouvernantes en champs continus.

# DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS

*"La nature n'utilise que les plus longs fils  
pour tisser ses motifs, de sorte que la plus  
petite pièce révèle la structure de la  
tapisserie toute entière"*

*R. Feynman*

## CHAPITRE 3

# DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, deux formulations variationnelles associées aux problèmes d'interaction fluide-structure ont été développées pour les cas des systèmes barrage-réservoir. Le but de ce chapitre est de montrer comment utiliser la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale des domaines physiques barrage et réservoir, et l'approximation nodale des formes intégrales afin d'exprimer le comportement des domaines discrets correspondants par un système d'équations algébriques discrètes. Le système obtenu sera écrit sous forme matricielle. Les expressions des différentes matrices assemblées ainsi que celles des matrices élémentaires correspondantes seront exposées.

### 3.2 Discrétisation des domaines géométriques

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous-domaines. Avant toute application, il est nécessaire de subdiviser le domaine  $D$  à étudier en un nombre fini de sous-domaines  $D^e$  de géométrie simple appelés "éléments" de telle sorte que l'union des tous les éléments constitue un domaine  $D_a$  aussi proche que possible du domaine initial  $D$  et leur intersection soit un domaine vide (Fig. 3.1). Une telle subdivision est appelée discrétisation et le domaine discret  $D_a$  est appelé maillage [17, 19].

$$D \approx D_a = \Sigma D^e \quad (3.1)$$

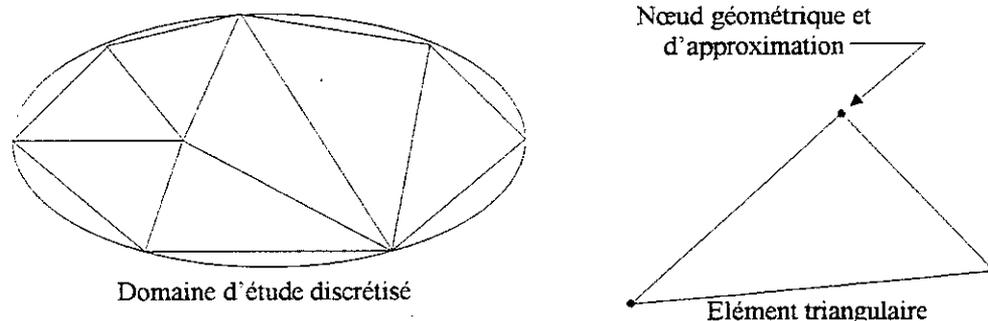


Figure 3.1. Exemple de discrétisation en éléments triangulaires

Chaque élément est défini par un nombre de nœuds géométriques qui constituent en générale ses sommets, et un nombre de nœuds d'interpolation qui constituent les points du domaine dans lesquels la fonction inconnue est approximée. Dans la plus parts des cas pratiques, les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolations sont confondus, ce qui défini un élément isoparamétrique.

Lors d'une discrétisation d'un domaine géométrique quelconque, les règles suivantes doivent être respectées [18] :

1. Tout élément est d'intérieur non vide.
2. Il ne doit pas exister de vide entre éléments.
3. L'intersection de deux éléments distincts ne peut être que réduite soit à l'ensemble vide, soit à un point ou bien à une arête dans les cas de 2D ou une surface dans les cas de 3D.
4. Un nœud appartenant à deux éléments doit être défini dans chacun des deux.
5. Les angles proches de  $0^\circ$  et  $180^\circ$  doivent être évités.

Le résultat du procédé de discrétisation géométrique doit contenir essentiellement deux types de données qui sont :

- Données relatives à la définition des éléments par la numérotation des nœuds. Une table de connectivités, ayant en lignes les numéros des éléments et en colonnes les numéros des nœuds correspondants, décrit d'une manière cohérente ces données.
- Données relatives à la définitions des nœuds. Chaque nœud est défini par son numéro et ses coordonnées dans le repère global définissant la géométrie du domaine considéré.

Dans certains cas, il peut être nécessaire d'ajouter des données physiques du problème telles que le chargement, la température, les propriétés du matériau... etc.

Plusieurs techniques et méthodes de génération automatique de maillages ont été développées dans le but faciliter la préparation et la modification des données pour les codes de calcul en éléments finis. En effet, la phase de définition des données peut souvent être longue et difficile pour la plus part des cas réels, notamment lorsque l'analyse exige un raffinement du maillage. Parmi les multiples méthodes, les trois types suivants sont à distinguer :

1. Méthodes de superposition-déformation de grilles : Ce type de méthodes se base sur une génération régulière ou récursive de grilles, de façon à contenir le domaine à discrétiser. Les grilles seront ensuite déformées et équilibrées en fonction du contour et éventuellement subdivisées ou raffinées de manière à produire le maillage recherché [54].

2. Méthodes des superéléments, parfois connues sous le nom des méthodes des blocs, consistent à découper le domaine considéré en une série de blocs de géométries élémentaires. Chaque bloc est alors maillé par simple subdivision. Le maillage du domaine complet est obtenu par recollement des maillages de la partition [31, 33].
3. Méthodes frontales, dans lesquelles la génération des éléments se fait selon un processus itératif avec un front se déplaçant à partir du contour vers l'intérieur du domaine. A chaque itération, un ensemble d'éléments est créé sous forme de couche, le front est mis à jour par liaison des nœuds internes et la zone non recouverte se rétrécit [33].

Le choix d'une méthode de maillage est dicté par la complexité de la géométrie du domaine à discrétiser. Dans le cas des systèmes barrage-réservoir considérés dans cette étude, la nécessité de mailler séparément les deux milieux d'une part, et la configuration géométrique de chacun des deux s'appropriant bien à une subdivision en plusieurs surfaces trapézoïdales d'autre part, prescrit le choix de la méthode des superéléments. Chaque superélément est subdivisé selon un nombre d'éléments dans la direction horizontale puis dans la direction verticale. La difficulté majeure rencontrée dans la mise en œuvre de cette technique réside dans l'ajustement des interfaces entre blocs de façon à permettre le recollement correct des maillages. Le maillage utilisé dans ce travail est réalisé selon cette méthode [45].

### 3.3 Discrétisation des formes intégrales

Une fois le domaine physique est discrétisé et chaque élément est bien défini, il convient de remplacer la fonction exacte recherchée par une interpolation entre les valeurs aux nœuds de l'élément. Dans le présent cas, les champs de déplacements  $\mathbf{u}$  du barrage, de la pression  $p$  et du potentiel des déplacements  $\phi$  dans le réservoir sont approximés de la manière suivante :

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{U} \tag{3.2}$$

$$p \approx \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{P} \tag{3.3}$$

$$\phi \approx \mathbf{N}_\phi \cdot \phi \tag{3.4}$$

avec  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\phi$  sont respectivement les vecteurs nodaux de déplacements, pression et potentiel des déplacements, définis comme valeurs inconnues et approximées des champs continus. Les vecteurs  $\mathbf{N}_u$ ,  $\mathbf{N}_p$  et  $\mathbf{N}_\phi$  sont des fonctions d'interpolation nodale appelées aussi fonctions de forme de l'élément. La forme générale de ces vecteurs lignes s'écrit pour deux degrés de liberté des déplacements par nœuds des particules solides par :

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u1} & 0 & \dots & \mathbf{N}_{ui} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{N}_{u1} & \dots & 0 & \mathbf{N}_{ui} & \dots \end{bmatrix}; i = 1, n_u \tag{3.5}$$

et pour un degré de liberté des pressions et potentiel des déplacements des particules fluides :

$$\mathbf{N}_p = \langle N_{p1} \dots N_{pi} \dots \rangle ; i = 1, n_p \quad (3.6)$$

$$\mathbf{N}_\phi = \langle N_{\phi 1} \dots N_{\phi i} \dots \rangle ; i = 1, n_\phi \quad (3.7)$$

avec  $n_u$ ,  $n_p$  et  $n_\phi$  représentent chacun le nombre de nœuds par élément utilisés pour l'interpolation.

Les opérateurs intervenant dans les formulations variationnelles développées dans le chapitre précédent sont exprimés, compte tenu des équations (3.2) à (3.4), par leur approximations de la manière suivantes :

Pour l'opérateur de perturbations des champs continus :

$$\delta \mathbf{u} \approx \delta(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{U}) = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{N}_u^T \quad (3.8)$$

$$\delta p \approx \delta(\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{P}) = \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \quad (3.9)$$

$$\delta \phi \approx \delta(\mathbf{N}_\phi \cdot \phi) = \delta \phi^T \mathbf{N}_\phi^T \quad (3.10)$$

et pour l'opérateur de dérivation spatiale des champs continus et des perturbations.

$$\nabla p \approx \nabla \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{P} ; \nabla \delta p \approx \delta \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{N}_p^T \quad (3.11)$$

$$\nabla \phi \approx \nabla \mathbf{N}_\phi \cdot \phi ; \nabla \delta \phi \approx \delta \phi^T \nabla \mathbf{N}_\phi^T \quad (3.12)$$

### 3.3.1 Discrétisation de la formulation (u, p)

L'écriture des formes intégrales définies par les équations (2.14) et (2.33), en remplaçant les fonctions continus  $\mathbf{u}$  et  $p$  par leurs approximations et en tenant compte des expressions (3.2) à (3.12), donne pour le cas du barrage :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{S} \mathbf{N}_u)^T \mathbf{D} (\mathbf{S} \mathbf{N}_u) \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{N}_u^T \rho_f \mathbf{N}_u \ddot{\mathbf{U}} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p \mathbf{P} d\Gamma + \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{f} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

et pour le cas du réservoir :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \mathbf{P} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p \ddot{\mathbf{P}} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \rho_f \mathbf{N}_u \mathbf{n} \mathbf{U} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \ddot{\mathbf{P}} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \dot{\mathbf{P}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les vecteurs lignes  $\delta \mathbf{U}^T$  et  $\delta \mathbf{P}^T$  peuvent être simplifiés dans les équations précédentes qui deviennent, avec arrangement des termes, sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho_s \mathbf{N}_u \, d\Omega \right) \ddot{\mathbf{U}} + \left( \int_{\Omega} (\mathbf{S} \mathbf{N}_u)^T \mathbf{D} (\mathbf{S} \mathbf{N}_u) \, d\Omega \right) \mathbf{U} \\ & - \left( \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \right) \mathbf{P} + \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f} \, d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

et

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega_r} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega \right) \mathbf{P} + \left( \int_{\Omega_r} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \right) \ddot{\mathbf{P}} \\ & + \left( \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_p^T \rho_f \mathbf{N}_u \mathbf{n} \, d\Gamma \right) \ddot{\mathbf{U}} + \left( \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \right) \dot{\mathbf{P}} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

La modification de l'équation (3.15) pour tenir compte du terme d'amortissement structural et pour exprimer les forces de volume en fonction des forces d'inertie, permet d'écrire les deux équations précédentes sous forme de systèmes d'équations matricielles :

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S \mathbf{U} = \mathbf{F}_g + \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_F \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_F \mathbf{P} = -\rho_f \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.18)$$

dans lesquels,  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{C}_S$  et  $\mathbf{K}_S$  représentent respectivement les matrices classiques assemblées masse, amortissement et raideur de la structure du barrage. Les matrices  $\mathbf{M}_F$ ,  $\mathbf{C}_F$  et  $\mathbf{K}_F$  sont leurs analogues pour le fluide et quantifient, respectivement, l'énergie cinétique, l'énergie dissipée par de radiation et l'énergie potentielle du fluide dans le réservoir. La matrice d'interaction fluide-structure  $\mathbf{Q}$  couple les accélérations des particules solides de la structure et les pressions exercées par le fluide à l'interface.

La matrice  $\mathbf{C}_S$  est plus efficacement construite en appliquant le concept d'amortissement de Rayleigh à la structure du barrage et peut être calculée à partir de l'équation:

$$\mathbf{C}_S = \alpha \mathbf{M}_S + \beta \mathbf{K}_S \quad (3.19)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les constantes de proportionnalité sélectionnées pour contrôler les taux d'amortissement des modes le plus élevé et le plus bas contribuant considérablement à la réponse [12]. Le vecteur force :

$$\mathbf{F}_g = -\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (3.20)$$

contient les composantes des forces d'entraînement générées par le vecteur des accélérations sismiques  $\ddot{\mathbf{U}}_g$  appliquées aux points nodaux de la structure.

Chaque matrice globale intervenant dans les systèmes d'équations (3.17) et (3.18) est un assemblage de matrices élémentaires calculées, chacune pour un élément du maillage, par l'expression correspondante à un terme de la somme des intégrales sur éléments. Cette somme est égale à l'intégrale sur le domaine entier. Soit si une matrice  $\mathbf{M}$  quelconque définie par une intégrale d'une fonction  $f$  sur un domaine donné  $\Omega$  :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} f \, d\Omega \quad (3.21)$$

alors la subdivision de  $\Omega$  en  $n$  sous domaines  $\Omega^e$  permet d'écrire la somme :

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} f \, d\Omega = \sum_{e=1}^n \mathbf{M}_e \quad (3.22)$$

Il est à noter que la matrice élémentaire  $\mathbf{M}_e$  doit être de même ordre que  $\mathbf{M}$  pour pouvoir écrire la somme. Toutefois, la prise en compte de la structure interne de  $\mathbf{M}_e$ ; seulement les éléments des lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté de l'élément considéré sont non nuls, entraîne la nécessité pratique de ne calculer et sauvegarder que la matrice élémentaire compactée qui est d'ordre égale au nombre de degré de libertés de l'élément et d'établir un procédé d'assemblage permettant de sommer les contributions de chaque élément. La somme est ainsi remplacée par l'assemblage.

Les expressions des matrices élémentaires permettant de construire les matrices assemblées de la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  sont explicitées dans les points suivants :

- La relation donnée par la formulation variationnelle de Galerkin pour la matrice masse de la structure est référée comme consistante, la masse est dite répartie et la matrice élémentaire correspondante est exprimée par :

$$\mathbf{M}_s^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \rho_s \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (3.23)$$

soit en explicitant les termes :

$$(\mathbf{M}_s^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} \rho_f \begin{bmatrix} N_{uj} & 0 \\ 0 & N_{uj} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} \rho_f \begin{bmatrix} N_{ui} N_{uj} & 0 \\ 0 & N_{ui} N_{uj} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.24)$$

La matrice masse consistante induit des erreurs optimales dans les calculs. Cependant comme il est souvent le cas dans la méthode des éléments finis, il existe une forte motivation pour abuser des règles de base [24] ; c'est particulièrement le cas dans le développement des matrices masses. Dans la pratique, la matrice masse diagonale ou concentrée est souvent utilisée du fait de son économie générale et des résultats souvent obtenus sans amplifications sensibles des erreurs. Son expression élémentaire est :

$$\mathbf{M}_s^e = \int_{\Omega^e} \rho_s \mathbf{N}_u \, d\Omega ; (\mathbf{M}_s^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \rho_s \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.25)$$

- La matrice de rigidité de la structure caractérise l'énergie de déformation et correspond au terme facteur de  $\mathbf{U}$  dans l'équation (3.15) et s'écrit :

$$\mathbf{K}_s^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{S}\mathbf{N}_u)^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{N}_u) \quad (3.26)$$

et sous forme familière :

$$\mathbf{K}_s^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.27)$$

avec  $\mathbf{B}$  est la matrice des dérivées des fonctions de formes obtenue par la produit :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{S}\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} & \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

ce qui permet d'écrire la forme explicite de la matrice de rigidité élémentaire par :

$$(\mathbf{K}_s^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_{ui,x} & 0 & N_{ui,y} \\ 0 & N_{ui,y} & N_{ui,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ui,x} & 0 \\ 0 & N_{ui,y} \\ N_{ui,x} & N_{ui,x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.29)$$

dans cette équation la virgule en indice désigne la dérivation par rapport à la variable désignée x ou y.

- Les forces hydrodynamiques agissant sur la face amont du barrage sont reliées au vecteur inconnu des pressions nodales  $\mathbf{P}$ , du modèle d'éléments finis du réservoir à travers la matrice d'interaction fluide-structure  $\mathbf{Q}$  exprimée par :

$$\mathbf{Q} = - \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p d\Gamma \quad (3.30)$$

La matrice élémentaire permettant d'assembler cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{Q}_{ij}^e = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ui} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{ui} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \langle \mathbf{N}_{pj} \rangle d\Gamma = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ui} \mathbf{N}_{pj} n_1 \\ \mathbf{N}_{ui} \mathbf{N}_{pj} n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (3.31)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les cosinus directeur de la normale à la face amont du barrage.

Les éléments  $(i, j)$  des matrices  $\mathbf{K}_s$  et  $\mathbf{M}_s$  sont eux mêmes des matrices carrées d'ordre deux  $(2 \times 2)$  constituées de facteurs des deux déplacements nodaux horizontal et vertical. Les éléments de  $\mathbf{Q}$ , par contre, sont des matrices rectangulaires  $(2 \times 1)$  dont les éléments sont multipliés par la pression normale à l'interface fluide-structure pour donner la force agissante dans le système discret d'équations d'équilibre de la structure.

La matrice masse fluide  $\mathbf{M}_F$  comprenant à la fois les effets d'inertie dû à la compressibilité et aux ondes de surface, est donnée par :

$$\mathbf{M}_F = \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p d\Omega + \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p d\Gamma \quad (3.32)$$

les matrices élémentaires correspondantes sont :

$$(\mathbf{M}_F^e)_{\Omega ij} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{pi} \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_{pj} d\Omega ; (\mathbf{M}_F^e)_{\Gamma_s ij} = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_{pi} \frac{1}{g} \mathbf{N}_{pj} d\Gamma \quad (3.33)$$

Dans la première étape de la construction de  $\mathbf{M}_F$ , la première intégrale est évaluée pour tous les éléments du domaine et chaque matrice élémentaire est assemblée dans la matrice globale. Dans une deuxième étape, la seconde intégrale est évaluée pour les seuls éléments constituant la surface libre et l'assemblage se fait de la même façon.

La matrice d'amortissement du fluide associée aux effets de radiations s'écrit :

$$\mathbf{C}_F = \int_{\Gamma_a} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p d\Gamma \quad (3.34)$$

la matrice élémentaire correspondante est évaluée seulement pour les éléments à la limite de troncature par :

$$(\mathbf{C}_F)_{ij} = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_{pi} \frac{1}{C} \mathbf{N}_{pj} d\Gamma \quad (3.35)$$

La matrice "des raideurs fluide" associée à l'énergie potentielle est donnée par :

$$\mathbf{K}_F = \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega \quad (3.36)$$

et la matrice élémentaire correspondante par :

$$\left( \mathbf{K}_F^e \right)_{ij} = \int_{\Omega^e} \langle N_{pi,x} \quad N_{pi,y} \rangle \begin{Bmatrix} N_{pj,x} \\ N_{pj,y} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} (N_{pi,x} N_{pj,x} + N_{pi,y} N_{pj,y}) d\Omega \quad (3.37)$$

Bien entendu, la transposée de la matrice d'interaction obtenue à partir de la discrétisation de la formulation variationnelle décrivant le comportement du fluide s'écrit par simple mutation des produits intervenant dans l'expression (3.31) obtenue par discrétisation de la formulation variationnelle décrivant le comportement du barrage.

Les deux système matriciels peuvent être réécrit en un seul système ayant comme variable de base  $\begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix}$  ; soit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_g \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Il est à noter que ce système couplé d'équations différentielles du second ordre est non symétrique à amortissement non proportionnel. Une procédure particulière de résolution ou une technique de symétrisation doit être considérée.

### 3.3.2 Discrétisation de la formulation $(\mathbf{u}, \phi, \mathbf{p})$

Dans cette section, les formes intégrales définies par les équations (2.47) et (2.50) seront discrétisées en remplaçant les fonctions continues par leurs approximations comme indiquées dans les équations (3.3) et (3.4). L'expression discrète de la forme intégrale (2.14), définissant le comportement de la structure, sera utilisée comme elle est obtenue dans la section précédente ; aucun changement n'est nécessaire.

L'écriture discrète des deux formes intégrales considérées donne pour l'équations (2.47) :

$$\int_{\Omega_s} \delta \phi^T \nabla \mathbf{N}_\phi^T \nabla \mathbf{N}_p \mathbf{P} \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta \phi^T \nabla \mathbf{N}_\phi^T \rho_f \nabla \mathbf{N}_\phi \ddot{\phi} \, d\Omega = 0 \quad (3.39)$$

et pour l'équation (2.50) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_f C^2} \mathbf{N}_p \mathbf{P} d\Omega - \int_{\Omega_f} \delta \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_\phi \phi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_v \mathbf{n} \mathbf{U} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_3} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_f g} \mathbf{N}_p \mathbf{P} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta \mathbf{P}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_\phi \phi d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

de même que précédemment, les vecteurs lignes  $\delta \mathbf{P}^T$  et  $\delta \phi^T$  peuvent être simplifiés et les termes peuvent être regroupés de telle sorte à écrire :

$$\left( \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{N}_\phi^T \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \right) \mathbf{P} + \left( \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{N}_\phi^T \rho_f \nabla \mathbf{N}_\phi d\Omega \right) \ddot{\phi} = 0 \quad (3.41)$$

et

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_f C^2} \mathbf{N}_p d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_f g} \mathbf{N}_p d\Gamma \right) \mathbf{P} \\ & - \left( \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_\phi d\Omega \right) \phi + \left( \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_\phi d\Gamma \right) \phi + \left( \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_v \mathbf{n} d\Gamma \right) \mathbf{U} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

ce qui se traduit par l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbf{K}_\phi^T \mathbf{P} + \mathbf{M}_\phi \ddot{\phi} = 0 \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_p \mathbf{P} + \mathbf{K}_\phi \phi + \mathbf{C}_\phi \dot{\phi} + \mathbf{Q}^T \mathbf{U} = 0 \quad (3.44)$$

Dans ce système  $\rho \mathbf{K}_p = \mathbf{M}_F$  et  $\mathbf{Q}$  sont identiques aux matrices obtenues pour la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  et décrite respectivement par les expressions (3.30) et (3.32).

Les nouvelles matrices  $\mathbf{M}_\phi$ ,  $\mathbf{C}_\phi$  et  $\mathbf{K}_\phi$  obtenues dans cette formulation sont d'expressions semblables à celles des matrices  $\mathbf{K}_F$  et  $\mathbf{C}_F$  obtenues dans la formulation en pressions seule. Chacune d'elles est explicitée dans les points suivants.

• La matrice  $\mathbf{M}_\phi$  associée, maintenant, à l'énergie potentielle s'exprime par :

$$\mathbf{M}_\phi = \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{N}_\phi^T \rho_f \nabla \mathbf{N}_\phi d\Omega \quad (3.45)$$

et la matrice élémentaire correspondante se calcule par la même procédure requise pour la discrétisation de l'opérateur Laplacien dans la construction de la matrice  $\mathbf{K}_F$  à partir de

l'équation (3.45). Dans ce cas, ce sont les fonctions de formes  $N_\phi$  qui seront utilisées et l'intégrale sera multiplier par  $\rho_f$  ; soit :

$$(\mathbf{M}_\phi^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \rho_f (N_{\phi,i,x} N_{\phi,j,x} + N_{\phi,i,y} N_{\phi,j,y}) d\Omega \quad (3.46)$$

- La matrice  $\mathbf{K}_\phi$  couple les pressions hydrodynamiques et le potentiel des déplacements de toutes les particules fluides et s'écrit comme :

$$\mathbf{K}_\phi = - \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla N_\phi d\Omega \quad (3.47)$$

De même la matrice élémentaire permettant de construire cette matrice s'obtient par la même procédure de discrétisation du Laplacien :

$$(\mathbf{K}_\phi^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \langle N_{p_i,x} \quad N_{p_i,y} \rangle \begin{Bmatrix} N_{\phi,j,x} \\ N_{\phi,j,y} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} (N_{p_i,x} N_{\phi,j,x} + N_{p_i,y} N_{\phi,j,y}) d\Omega \quad (3.48)$$

- De plus, l'hypothèse d'extension du réservoir à l'infini impose l'utilisation de la condition de radiation dans le cas d'une limitation du domaine, et conduit à l'apparition de la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}_\phi$  comportant des termes mixtes de  $p$  et de  $\phi$  et s'écrit par la relation :

$$\mathbf{C}_\phi = \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_\phi d\Gamma \quad (3.49)$$

De même que pour  $\mathbf{C}_p$ , la matrice élémentaire n'est évaluée que pour les éléments à la limite de troncature et s'exprime de la même façon par :

$$(\mathbf{C}_\phi^e)_{ij} = \int_{\Gamma^e} N_{p_i} \frac{1}{C} N_{\phi_j} d\Gamma \quad (3.50)$$

Maintenant les systèmes d'équations matricielles (3.17), (3.43) et (3.44) sont réécrits en un seul système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_\phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_\phi \\ 0 & \mathbf{K}_\phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Contrairement au système (3.38) correspondant à la discrétisation de la formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ , ce système présente une symétrie dans les matrices couplées "masses" et "raideur". Par contre, la matrice d'amortissement est non symétrique et non proportionnelle, l'utilisation d'une frontière libre ou d'une technique de couplage éléments finis – éléments infinis permet de contourner la non-symétrie alors que la non-proportionnalité demeure posée. La présence d'éléments nuls dans les diagonales des matrices masses et raideurs pose un autre problème harassant du point de vue numérique. Une alternative permettant d'éviter les zéros diagonaux consiste en la condensation de  $\mathbf{P}$  du système global. Cette technique sera détaillée ultérieurement. L'introduction du potentiel des déplacements produit des résultats attirants du point de vue conceptuel mais pas aussi intéressants du point de vue pratique.

### 3.4 Utilisation de l'élément de référence

La notion d'élément de référence est introduite dans le but de normaliser la définition analytique des éléments. Les fonctions de forme sont définies une seule fois dans le domaine de référence et peuvent être réutilisées pour chaque élément du domaine de discrétisation. Une technique d'intégration peut être développée pour chaque type d'élément. Les calculs sont ainsi considérablement réduits et deviennent facilement programmables.

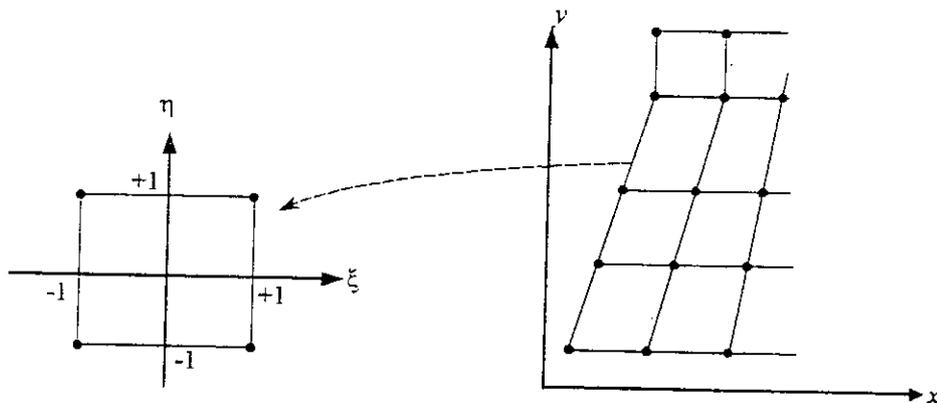


Figure 3.2 Élément réel et élément de référence

Un élément de référence est un élément de forme géométrique très simple repéré dans un espace de référence  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  et pouvant être transformé en élément réel  $\mathbf{X}(x, y, z)$  par une transformation géométrique  $f$  bijective [1, 3, 17-19, 24, 29, 43, 65]:

$$\mathbf{X} = f(\xi) \quad (3.52)$$

Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel et chaque portion de frontière, définie par deux nœuds géométriques, dans l'élément de référence correspond à celle, définie par les deux nœuds correspondants dans l'élément réel. La figure 3.2 illustre une telle transformation.

### 3.4.1 Transformation des coordonnées

La méthode la plus simple pour déterminer les formules de transformation de coordonnées consiste à exploiter les fonctions de forme standards utilisées pour l'approximation des variables inconnues. Dans le cas où tous les nœuds géométriques sont utilisés à la fois pour l'interpolation des variables et pour la transformation des coordonnées, l'élément est dit isoparamétrique et les fonctions de forme s'identifient aux fonctions de transformation de coordonnées. Dans la pratique, les éléments isoparamétriques sont d'utilisation régulière.

En deux dimensions ; le cas de la présente étude, la transformation s'écrit :

$$\begin{cases} x = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \{ \mathbf{X} \} \\ y = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \{ \mathbf{Y} \} \end{cases} \quad (3.53)$$

où  $\mathbf{N}$  est le vecteur ligne des fonctions de forme standard exprimées dans le repère de référence en fonction de  $\xi$  et de  $\eta$ . Les coordonnées naturelles des nœuds géométriques sont regroupées en deux vecteurs colonnes  $\{ \mathbf{X} \}$  et  $\{ \mathbf{Y} \}$ .

### 3.4.2 Calcul du Jacobien

Avec la définition de la transformation géométrique par les fonctions de forme, l'expression des dérivées et des intégrales en fonction des coordonnées de référence ainsi que leur évaluation pratique peut se faire par le biais du Jacobien de l'élément réel. En deux dimensions la relation (3.53) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3.54)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

soit en écriture condensée :

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_{,x} \quad (3.56)$$

Cette équation établie la relation entre les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées de référence et leurs dérivées par rapport au coordonnées réelles. La matrice  $J$  est appelée matrice Jacobienne de l'élément, son écriture explicite est :

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{X\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{Y\} \\ \langle N_{,\eta} \rangle \{X\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{Y\} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} [\{X\} \quad \{Y\}] \quad (3.57)$$

Dans le calcul des intégrales de volumes ou de surface les produits  $d\Omega = dx.dy$  et  $d\Gamma = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$  interviennent et doivent être exprimés en fonction des coordonnées de référence. La dérivation de la transformation géométrique (3.53) s'obtient comme suit :

$$dx = dN.X \quad \text{et} \quad dy = dN.Y \quad (3.58)$$

en remplaçant les dérivées totales des fonctions de forme par leurs développements :

$$dN = N_{,\xi} d\xi + N_{,\eta} d\eta \quad (3.59)$$

la relation entre les dérivées totales des coordonnées naturelles et celles des coordonnées de référence devient :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{X\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{X\} \\ \langle N_{,\xi} \rangle \{Y\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{Y\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

soit en permutant les produits scalaires des vecteurs à l'intérieur de la matrice :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle X \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle X \rangle \{N_{,\eta}\} \\ \langle Y \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle Y \rangle \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

avec cette écriture, il est claire que la matrice des produits scalaires intervenant dans cette équation n'est autre que la transposée de la matrice Jacobienne ; ce qui conduit à :

$$dx.dy = \det(J^T) d\xi d\eta = \det(J) d\xi d\eta \quad (3.62)$$

Cette relation permet d'évaluer les intégrales de volume. En ce qui concerne les intégrales sur contours, il est nécessaire de connaître l'arête concernée. Les connectivités de l'élément réel considéré fait correspondre la face appropriée dans l'élément de référence. La relation (3.60) appliquée pour une arête permet de substituer la dérivée totale de  $\Gamma$  par la dérivée totale de l'une des coordonnées de référence.

Pour la famille d'éléments rectangulaires à deux dimensions, si la face considérée est  $\xi = \pm 1$  alors :

$$d\Gamma = \sqrt{dx_{|\xi=\pm 1}^2 + dy_{|\xi=\pm 1}^2} \quad (3.63)$$

soit en tenant compte des relations (3.60) :

$$d\Gamma = \sqrt{\left[ \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}(\xi = \pm 1, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle d\eta \{\mathbf{X}\} \right]^2 + \left[ \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}(\xi = \pm 1, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle d\eta \{\mathbf{Y}\} \right]^2} = J_s d\eta \quad (3.64)$$

avec  $J_s$  est un scalaire tel que :

$$J_s = \sqrt{\left( \left\langle \mathbf{N}_{,\eta}(\xi = \pm 1, \eta) \right\rangle \{\mathbf{X}\} \right)^2 + \left( \left\langle \mathbf{N}_{,\eta}(\xi = \pm 1, \eta) \right\rangle \{\mathbf{Y}\} \right)^2} \quad (3.65)$$

Bien entendu, dans le cas où la face considérée est  $\eta = \pm 1$  il faut permuter les variable  $\xi$  et  $\eta$  dans l'expression de  $J_s$ .

Pour les éléments triangulaires, la facette considérée peut être l'un des deux cotés  $\xi=0$  ou  $\eta=0$  ou bien la diagonale  $\eta=1-\xi$ .

### 3.5 Evaluation des intégrales

Maintenant avec les définitions précédentes, Il ne reste plus qu'à évaluer les intégrales pour calculer les matrices élémentaires. Deux moyens sont possible pour calculer ces intégrales :

- 1- Intégration explicite analytique, lorsque c'est possible, sur l'élément de référence ou sur l'élément réel ; ce qui fourni l'expression exacte des éléments de la matrice. Une telle méthode est utilisée pour évaluer les matrices de raideurs pour les éléments linéaires de type triangulaire et rectangulaire dans le repère réel ou dans la repère de référence [43].
- 2- Intégration numérique ; utilisant souvent la quadrature de Gauss qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme des valeurs pondérées de la fonction en des points spécifiques appelés points de Gauss. Un nombre de  $n$  points permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre  $2n$  [17, 64].

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) \quad (3.66)$$

Une liste des points  $(x_i, y_i)$  et des poids  $w_i$  correspondant pouvant être utilisés pour l'intégration des matrices élémentaires à la précision voulue ( $n$ ) est établie pour chaque type d'éléments et existe dans la plus part des ouvrages traitant des éléments finis.

### 3.6 Calcul des matrices élémentaires

Tous les algorithmes permettant l'évaluation numériques des matrice élémentaires ont la même structure générale pouvant être représentée par le schéma suivant :

```

Début de la routine
  Initialisation
  Début de boucle sur les points de Gauss - Legendre
    Appel des fonctions de forme
    Appel du Jacobien
    Calcul de la somme appropriée
  Fin de boucle sur les points de Gauss
  Partie symétrique
  Retour
Fin de la routine

```

Dans cet algorithme la boucle principale est celle des points de Gauss à l'intérieur de laquelle sont évaluées les fonctions de forme en chaque point de Gauss pour ensuite calculer la somme définissant la matrice élémentaire considérée. Dans le calcul du Jacobien, les fonctions de forme sont exprimées dans l'élément de référence.

La somme de type :  $\int_{\Omega} N^T c N d\Omega$  ;  $c$  est un coefficient est évaluée selon l'algorithme suivant :

```

Début d'une boucle externe sur les nœuds de l'élément (i=1,Nne)
  Produit  $P=N_i \cdot \det(J) \cdot c \cdot w_i$ 
  Début d'une boucle interne sur les nœuds de l'élément (j=1,Nne)
    Calcul de la somme  $S_{ij}=S_{ij}+P \cdot N_j$ 
  Fin de boucle interne
Fin de boucle externe

```

La somme de type :  $\int_{\Omega} \nabla N^T c \nabla N d\Omega$  ;  $c$  est un coefficient par :

```

Début d'une boucle externe sur les nœuds de l'élément (i=1,Nne)
  Produit  $P1=N_{i,\xi} \cdot \det(J) \cdot c \cdot w_i$ 
  Produit  $P2=N_{i,\eta} \cdot \det(J) \cdot c \cdot w_i$ 
  Début d'une boucle interne sur les nœuds de l'élément (j=1,Nne)
    Calcul de la somme  $S_{ij}=S_{ij}+P1 \cdot N_{j,\xi}+P2 \cdot N_{j,\eta}$ 
  Fin de boucle interne
Fin de boucle externe

```

La somme permettant d'évaluer la matrice d'interaction se traduit par :

```

Initialisation d'un incrément K
Début d'une boucle externe sur les nœuds de l'élément (i=1,Nne)
  Produit  $P1=N_i \cdot n1 \cdot J_s \cdot w_i$ 
  Produit  $P2=N_i \cdot n2 \cdot J_s \cdot w_i$ 
  Début d'une boucle interne sur les nœuds de l'élément (j=1,Nne)
    Calcul de la somme  $Q_{kj}=Q_{kj}+P1 \cdot N_j$ ,  $Q_{k+1j}=Q_{k+1j}+P2 \cdot N_j$ 
  Fin de boucle interne
  Incrémenter  $K=k+1$ 
Fin de boucle externe

```

# UTILISATION DES ELEMENTS INFINIS

*Comprenez-vous bien ce qu'est l'infini et l'éternité ? Non bien sûr, pas plus que moi d'ailleurs, ni qu'aucun des humains ...*

*Par infinité nous entendons ce qui ne contrevient pas au bon sens, et qui n'est pas catégorie de quelque système philosophique, sans quoi on risque de se perdre dans les labyrinthes de l'inconcevable. Pourtant, il faut ajouter que ce mot d'infinité dépasse l'entendement humain, et qu'en l'utilisant, nous ne nous représentons rien du tout. Que faire, c'est le destin de nombreuses catégories de la science moderne ...*

*Il y a une certaine part de vérité dans l'assertion selon laquelle la science de demain apprendra à contrôler ces catégories, à abréger le temps et à réduire l'espace. Mais cela concerne l'avenir, la nouvelle physique et les nouvelles mathématiques encore à créer. En attendant, l'homme conçoit le mieux ce qu'il connaît pratiquement.*

*Constantin Tsiolkovsky*

## CHAPITRE 4

### UTILISATION DES ELEMENTS INFINIS

#### 4.1 Introduction

La première introduction du concept d'infini en mathématiques a été dans la forme de processus de calcul infini et fut apparemment par les Babyloniens ( 2000 Av. J-C – 1590 Av. J-C) en développant une procédure itérative pour l'évaluation de la racine carrée d'un nombre. Une ancienne table Babylonienne inclue le calcul de la racine carrée de deux (02) à trois chiffres sexagésimaux.

Le concept de résolution d'un problème de mécanique où le domaine est supposé étendu à l'infini date au moins du temps de Newton (1642–1727) lorsqu'il essaya de calculer la force d'entraînement sur un objet plongé dans un fluide. En plus du fait que le résultat n'était pas correct, l'idée de postuler un fluide imaginaire infini n'a pu attirer aucune attention particulière. La notation actuelle de l'infini par le symbole " $\infty$ " a été introduite par le mathématicien Anglais Wallis en 1655.

Dans le dix-neuvième siècle, de nombreux problèmes où le domaine est non borné ou infini ont été posés et résolus par les mathématiciens. Apparemment, ce processus a été débuté par le mathématicien Anglais George Green (1793–1841) qui a introduit deux idées très importantes, souvent utilisées en conjonction, pour la résolution des problèmes continus et linéaires ; ce sont le théorème de Green et les fonctions de Green. Dès lors, le développement des solutions valables pour les problèmes d'espace cartésien non borné, de demi espace et d'espace plans et demi plan continue fermement. Généralement ces solutions sont établies pour les études de fluide idéal, de fluide visqueux et de solide élastique. La première d'entre elles a été établie en 1848 par Lord Kelvin en traitant un espace élastique sous l'effet d'une charge ponctuelle. Ce qui a permit plus tard, l'étude d'un demi-espace élastique aussi sous une charge ponctuelle par Boussinesq et du problème d'écoulement uniforme d'un fluide visqueux infini autour d'une sphère par Stokes. Par la suite des solutions numériques ont été proposées pour les domaines non bornés. Une des premières tentatives à produire des solutions numériques aux problèmes idéalisés comme infini était l'analyse en différences finis d'un barrage et sa fondation. Elle est effectuée par Richardson en 1911 sur le barrage d'Aswan dans le fleuve du Nil. La solution était fondée sur une approche numérique de la solution analytique de Boussinesq pour un demi-plan [5].

En plus de l'intérêt intrinsèque évident de telles solutions analytiques et numériques, elles sont très utiles dans la suggestion des formes appropriées d'éléments infinis avec fonctions de transformation géométrique ou avec fonctions de décroissance monotone.

Pour toutes les méthodes numériques, à part la méthode des intégrales aux frontières et ses variantes, une procédure particulière doit être adoptée pour traiter les domaines non bornés. Il existe plusieurs possibilités d'application d'un calcul numérique fini à un domaine pratiquement infini. L'efficacité de chaque technique dépend de plusieurs facteurs incluant essentiellement le caractère temporel du problème et la distance à laquelle le couplage est effectué. Chaque technique possède ses propres avantages et ses propres inconvénients, dans ce chapitre seule la méthode des éléments infinis nous intéresse.

Les premiers éléments infinis apparus ont été produits par Ungless et Anderson en 1973 et appelé "élément fini infini" [5]. Ce travail fut l'objet d'une thèse qui n'a été publiée qu'en 1977. Ainsi, le premier travail publié sur les éléments infinis est l'article de Zienkiewicz et Bettess paru en 1975 [64].

L'idée introduite dans l'élément de Ungless et Anderson était l'utilisation d'une fonction de forme qui varie comme  $1/(1+r)$  dans la direction radiale  $r$ . Ceci est suffisamment simple pour manier la plus part des opérations analytiquement. L'élément était tridimensionnel à base triangulaire définie dans le plan local  $xy$  et s'étend à partir de cette base à l'infini dans la direction  $z$ . Les matrices élémentaires étaient calculées en utilisant l'intégration analytique dans la plan  $xy$  et l'intégration numérique par la règle des trapèzes dans la direction  $z$  après une transformation géométrique.

Une autre origine de la formulation des éléments infinis, totalement différente est décrite par Bettess. Le domaine de l'élément est étendu à l'infini en utilisant n'importe quel élément fini comme base. Les fonctions de forme sont ensuite multipliées par des fonctions de décroissance appropriées au problème traité. Une décroissance de type exponentielle a été d'abord utilisée et les matrices élémentaires obtenues comprenaient des termes d'intégrales de polynômes multipliés par  $e^{-r}$  et simplement évaluées analytiquement.

Ces deux origines de formulation d'éléments infinis ont constitué les deux lignes principales de développement de nouveaux types d'éléments. Ce qui a conduit la classification des éléments infinis en deux approches [13] : approche directe par fonctions de décroissance et approche indirecte par fonctions de transformation géométrique. Il est à noter que quelque soit l'approche considérée, les éléments infinis correspondants ne sont pas isoparamétriques.

Le but visé dans ce chapitre est de montrer la facilité d'introduire des éléments infinis dans un programme d'éléments finis par quelques simples modifications. Les deux approches seront présentées et utilisées pour le calcul des matrices élémentaires obtenues par la discrétisation des deux formulations variationnelles développées pour le réservoir.

## 4.2 Approche directe

L'approche directe consiste en l'extension, jusqu'à l'infini, du domaine de définition des coordonnées naturelles et des coordonnées de référence d'un élément fini avec l'utilisation des fonctions de décroissance en conjonction avec les fonctions de forme ordinaires de l'élément. La Figure 4.1 ci-dessous montre un exemple d'élément infini obtenu à base d'élément fini quadrilatéral linéaire.

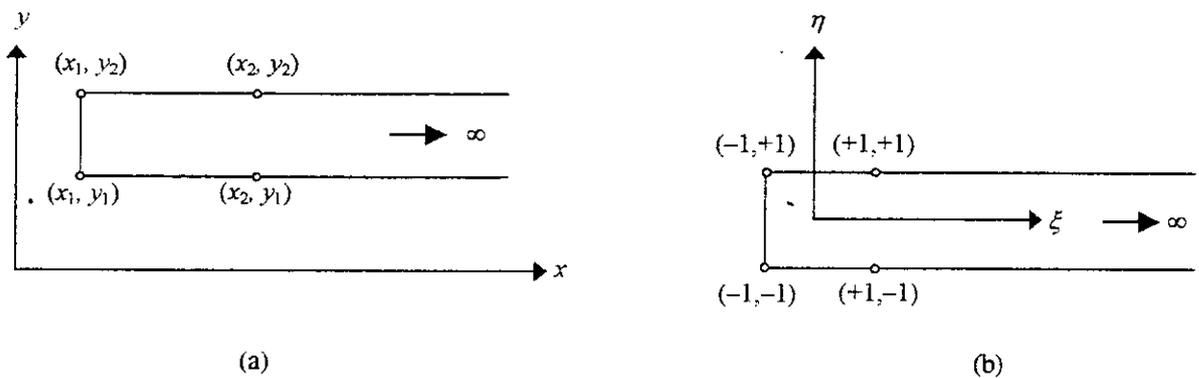


Figure 4.1. Approche Directe. (a) coordonnées physiques. (b) coordonnées de référence.

Avec cette définition d'élément infini les mêmes fonctions de transformation géométrique sont gardées comme dans le cas d'élément fini, le domaine d'intégration s'allonge à l'infini dans la direction considérée. Chaque fonction d'interpolation  $F_i$  associée au nœud  $i$  d'un élément infini est obtenue par la multiplication de la fonction de forme  $N_i$  de l'élément fini de base par un terme  $h_i$  décroissant d'une façon asymptotique vers zéro à l'infini. Les nouvelles fonctions d'interpolations  $F_i$  s'écrivent :

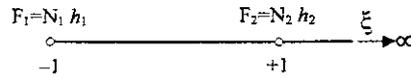
$$F_i = N_i \cdot h_i \quad (4.1)$$

Chacune des fonctions de décroissance choisies  $h_i$  doit être égale à l'unité au nœud  $i$  auquel elle est liée, aucune autre condition n'est imposée sur les valeurs quelle doit prendre aux autres nœuds.

La somme des fonctions de forme "infinies"  $F_i$  devient différente de l'unité. en effet, il peut être montré par un calcul que la somme est un polynôme en  $\xi$ , ou en  $\eta$  selon la direction

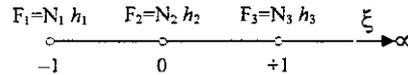
considérée infinie, d'ordre au moins égal à celui de l'élément. Les expressions correspondantes à chaque type d'élément sont données par les relations suivantes :

Elément linéaire :



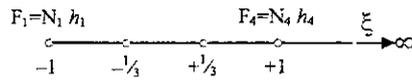
$$\sum F_i = \frac{1}{2}(h_2 - h_1)\xi + \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \quad (4.2)$$

Elément quadratique :



$$\sum F_i = \frac{1}{2}(h_1 - 2h_2 + h_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(h_3 - h_1)\xi + h_2 \quad (4.3)$$

Elément cubique :



$$\begin{aligned} \sum F_i = & \frac{9}{16} [(h_4 - h_1) + 3(h_2 - h_3)]\xi^3 + \frac{9}{16} [(h_4 + h_1) - (h_2 + h_3)]\xi^2 \\ & - \frac{1}{16} [(h_4 - h_1) + 27(h_2 - h_3)]\xi - \frac{1}{16} [(h_4 + h_1) - 9(h_2 + h_3)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ces expressions permettent de suggérer à priori le type de fonctions de décroissance à utiliser pour que les polynômes correspondant tendent vers 0 quand  $\xi$  tend vers  $\infty$ . Elles sont valides aussi pour le cas de deux dimensions avec une seule direction infinie.

Quelque soit l'ordre de l'élément, quand  $\xi$  prend la valeur au nœud  $i$  ( $\xi = \xi_i$ ) la somme se réduit à la seule fonction  $h_i$  définie en ce même nœud et donc à l'unité puisque par définition  $h_i(\xi_i) = 1$  ; soit :

$$\sum F_i (\xi = \xi_i) = h_i(\xi = \xi_i) = 1 \quad (4.5)$$

Si les fonctions  $h_i$  sont correctement définies, lorsque  $\xi$  augmente de  $+1$  à  $\infty$ , la somme décroît d'une manière asymptotique vers 0. Ce type de variation permet de représenter à la fois les valeurs de champs constant, à l'intérieur du domaine fini, et les valeurs nulles, par hypothèse, à l'infini. Des paramètres sont souvent introduits pour contrôler la décroissance.

### 4.2.1 Choix des fonctions de décroissance

Il est presque inévitable de s'en passer du théorème de Green aussi bien dans la formulation variationnelle que dans l'utilisation des résidus pondérés pour traiter un problème donné, ce qui pose des restrictions sur le choix des fonctions de forme pour une analyse par la méthode des éléments finis. De plus, si le domaine d'intégration et non borné d'autres contraintes supplémentaires doivent être respectées par les fonctions de forme complètes à construire pour un élément infini. Toutefois, il est possible de synthétiser plusieurs fonctions décroissantes ; deux types sont considérés dans cette section.

#### 4.2.1.1 Fonctions de décroissance du type exponentiel

Un choix de fonction de décroissance exponentielle  $e^{-x}$  possède l'avantage de dominer le comportement de n'importe quel polynôme quand  $x$  devient grand ; ce qui assure la convergence vers zéro à l'infini des fonctions de formes construites avec ce type de décroissance. Plus précisément, pour chaque nœuds  $i$  dans l'élément de référence, ces fonctions ont pour expression :

$$h_i(\xi, \eta) = e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} \quad (4.6)$$

pour une décroissance seulement dans la direction  $\xi$ .

L'introduction de  $\xi_i$  assure que les fonctions de forme complètes gardent la valeur  $F_i = 1$  aux nœuds. Pour une décroissance dans les deux directions  $\xi$  et  $\eta$ , l'expression des fonctions  $h_i$  devient :

$$h_i(\xi, \eta) = e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L_1} - \frac{\eta_i - \eta}{L_2}} \quad (4.7)$$

Le paramètre  $L$  ( $L_1, L_2$ ) est une longueur déterminant la sévérité de décroissance. Il est possible de le fixer à l'unité et de contrôler la sévérité par la distance entre les nœuds de l'élément réel dans le maillage du problème physique à étudié. La plus part des auteurs préfèrent varier  $L$ . Dans les cas où la tendance de la solution théorique du problème posé est connue a priori en champs lointain, la valeur du paramètre  $L$  pourrait être estimé, mais, généralement il est déterminé par une étude paramétrique.

Ainsi, les expressions des fonctions de forme complètes et leurs dérivées pour un élément infini dans la direction  $\xi$  s'écrivent :

$$F_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} ; \quad \frac{\partial F_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{L} \right] e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} ; \quad \frac{\partial F_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} \quad (4.8)$$

#### 4.2.1.2 Fonctions de décroissance de type puissance

Dans le cas de problème présentant un comportement de type  $l/r$  où  $l$  est une longueur constante spécifique au problème et  $r$  est un rayon assez grand pour être infini, il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement est essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes de type puissance, prenant la forme suivante :

$$h_i = \left( \frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (4.9)$$

avec  $\xi_0$  est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être en hors de l'élément ; dans la face opposée à celle s'étendant à l'infini. Si la décroissance est dans la direction positive de  $\xi$  alors  $\xi_0$  doit être inférieur à  $-1$  sinon il doit être supérieur à  $1$  pour éviter des singularités à l'intérieur de l'élément. Le paramètre de sévérité  $n$ , contrôlant la décroissance en puissance, doit être supérieur au plus grand ordre des polynômes en  $\xi$  intervenant dans les fonctions de forme standard  $N$ . Ceci permet d'assurer que quand  $\xi$  augmente, les fonctions de forme 'infini'  $F_i$  tendent vers  $1/\xi$  qui est le comportement attendu du problème posé. Il n'existe aucune règle à suivre pour déterminer  $n$ , encore, seule l'expérimentation permet de porter un jugement. Cependant, il est claire que si  $n$  est trop petit, alors d'une part, les conditions d'application de l'identité de Green pourrait être violées, et d'autre part les fonctions de forme complètes infinies deviennent ascendantes. S'il est trop grand ; d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représenté et même omises.

La décroissance peut être généralisée pour les deux directions :

$$h_i = \left( \frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \left( \frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right)^m \quad (4.10)$$

Les paramètres  $n$  et  $m$  ne sont pas nécessairement des entiers et peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique [20].

Pour ce cas de décroissance aussi, il convient d'écrire les expressions des fonctions de forme complètes et de leurs dérivées pour un élément infini dans la direction  $\xi$  :

$$\begin{aligned} F_i(\xi, \eta) &= N_i(\xi, \eta) \left( \frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n ; & \frac{\partial F_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{n N_i}{\xi - \xi_0} \right] \left( \frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n ; \\ \frac{\partial F_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left( \frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.2.1.3 Élément infini Q8

Pour plus de clarté et de pratique, la construction ainsi que les propriétés des fonctions de forme d'un élément infini quadratique bidimensionnel, basé sur l'élément fini de type Serendip à 8 nœuds Q8, sont détaillées et constituent l'exemple à traiter dans cette section. La numérotation des nœuds et des fonctions de forme dans le plan de référence  $(\xi, \eta)$  est montrée dans la figure (4.2) suivante :

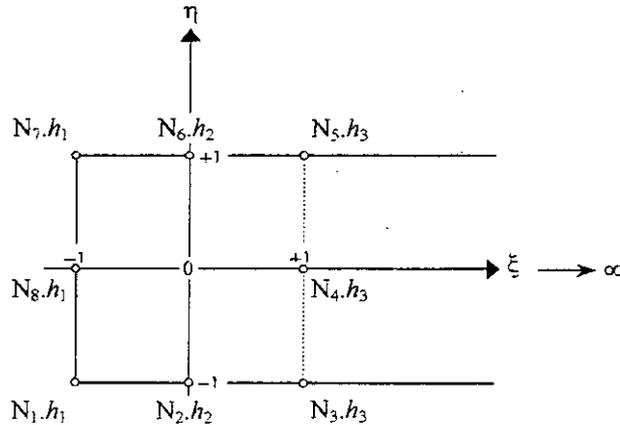


Figure 4.2. Élément de référence infini Q8 - Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

Les trois fonctions de décroissance correspondants aux nœuds de coordonnées  $\xi_1=-1$ ,  $\xi_2=0$  et  $\xi_3=+1$  sont illustrées dans la Figure 4.2. Ces fonctions sont obtenues pour un exemple de paramètres typiques. Les fonctions à décroissance de type exponentielle avec  $L=2$  sont représentées en (a) et celles à décroissance de type puissance avec  $n=5$  et  $\xi_0=-6$  en (b).

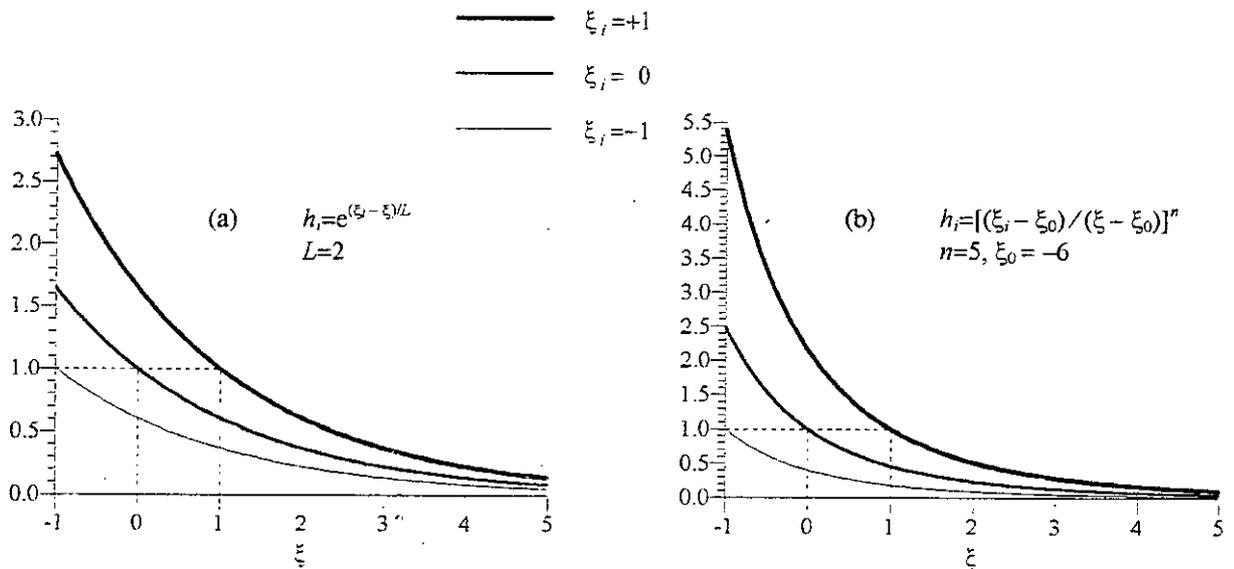


Figure 4.2. Exemple de fonctions de décroissance de type (a) exponentiel et (b) puissance

Les fonctions de formes de l'élément finis isoparamétrique incomplet Q8 ont pour les nœuds sommets des cotés l'expression :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) ; i = 1, 3, 5 \text{ et } 7 \quad (4.12)$$

et pour les nœuds milieux des cotés :

$$N_i = \frac{1}{2}\xi_i^2(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1 + \eta_i \eta)(1 - \xi^2) ; i = 2, 4, 6 \text{ et } 8 \quad (4.13)$$

Chacune des expressions précédentes possède la même allure pour les quatre fonctions de forme quelle défini. Les fonctions correspondant aux nœuds sommets, prennent des valeurs nulles sur les arrêtes opposées au nœud pour lequel elles sont définies, et varient d'une manière quadratique sur les cotés adjacents au nœud. La variation dans l'espace de référence de ces fonctions est illustrée dans la Figure (4.3a) par  $N_1(\xi, \eta)$ , définie au nœud  $(\xi_i, \eta_i) = (-1, -1)$ . Les projections sur les cotés  $\eta = -1$  et  $\eta = +1$  sont tracées dans la même figure en (c) et (e) respectivement. Les fonctions correspondant aux nœuds milieux des cotés sont représentées en (b) par  $N_2$  au nœud  $(\xi_i, \eta_i) = (0, -1)$ . Elles varient d'une manière parabolique sur le coté comprenant le nœud considéré, comme illustré en (d) aussi pour le même coté  $\eta = -1$ , et s'annulent pour tous les autres cotés.

La multiplication de chacune de ces fonctions par la fonction de décroissance appropriée (Figure 4.2) permet de déterminer les fonctions de formes 'infinies' ayant, respectivement, pour une décroissance de type exponentielle et pour une décroissance de type puissance, avec les mêmes paramètres fixés précédemment, les expressions :

$$F_1(\xi, \eta = -1) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) e^{-(1+\xi)/2} ; \quad F_1(\xi, \eta = -1) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) [5/(\xi + 5)]^5 \quad (4.14)$$

$$F_2(\xi, \eta = -1) = -(\xi^2 - 1) e^{-\xi/2} ; \quad F_2(\xi, \eta = -1) = -(\xi^2 - 1) [6/(\xi + 6)]^5 \quad (4.15)$$

$$F_3(\xi, \eta = -1) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) e^{(1-\xi)/2} ; \quad F_3(\xi, \eta = -1) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) [7/(\xi + 7)]^5 \quad (4.16)$$

Pour une comparaison, les courbes correspondantes sont reportées sur les mêmes graphes représentant les  $N_i$  dans la figure (4.2) en (c) pour  $F_1$ , en (d) pour  $F_2$  et en (e) pour  $F_3$ .

Dans le domaine  $\xi \in [-1, 1]$ , les fonctions  $F_i$  varient de la même manière que  $N_i$  indépendamment du type de décroissance considéré. Leurs sensibilités aux paramètres de décroissance est faible. Cependant, pour des valeurs de  $\xi > 1$ , les fonctions de formes standards, n'étant pas définies sur cet intervalle, divergent si elles sont prolongées alors que leur multiplication par des fonctions décroissantes les ramènent vers zéro pour des valeurs de  $\xi$  assez grand pour que les termes de décroissance dominent le comportement du produit. Dans cet intervalle, les fonctions  $F_i$  sont fortement sensibles aux paramètres de décroissance ; elles peuvent même diverger si  $n$  n'est pas assez grand ou si  $L$  est négatif.

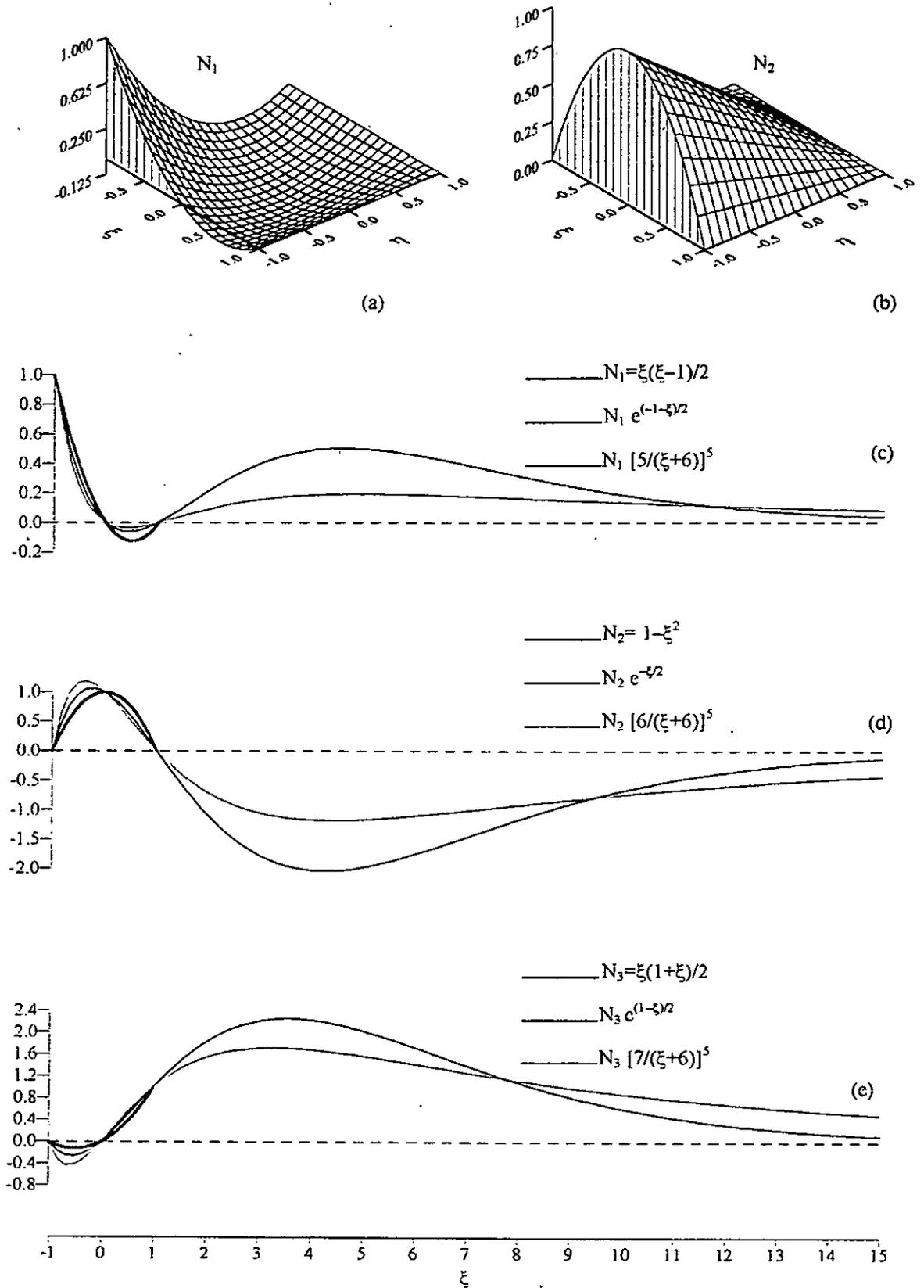


Figure 4.3. Construction des fonctions de forme décroissantes d'un élément infini rectangulaire quadratique. (a) et (b) Fonctions  $N_1$  et  $N_2$  de l'élément fini Q8. (c), (d) et (e) Fonctions  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  pour  $-1 \leq \xi \leq +1$  et  $\eta = -1$  avec les fonctions de forme décroissantes  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  correspondantes ( $L=2$ ,  $\xi_0=6$  et  $n=5$ ) pour  $-1 \leq \xi \leq +15$  et  $\eta = -1$ .

Il est aussi intéressant d'examiner les variations de la somme des fonctions de forme. Dans le cas d'un élément fini, elle est constante et égale à l'unité. Ce qui permet de représenter les valeurs unitaires aux nœuds, que peuvent prendre les variables champs, et d'interpoler correctement les valeurs de champ constant dans le milieu discrétisé. Par contre, dans le cas d'un élément infini la somme varie et dépend des fonctions et des paramètres de décroissance utilisés. Les équations (4.2) à (4.4) mentionnées précédemment expriment d'une manière générale cette variation, pour l'élément considéré dans cet exemple, elle s'écrit dans le cas de la décroissance de type exponentiel par :

$$\sum F_i = [(\cosh(1/L) - 1) \xi^2 + \sinh(1/L) \xi + 1] e^{-\xi/L} \quad (4.17)$$

et dans le cas de la décroissance de type puissance, par :

$$\sum F_i = \left\{ \frac{1}{2} [(1 - \xi_0)^n + (-1 - \xi_0)^n - 2(-\xi_0)^n] \xi^2 + \frac{1}{2} [(1 - \xi_0)^n - (-1 - \xi_0)^n] \xi + (-\xi_0)^n \right\} / (\xi - \xi_0)^n \quad (4.18)$$

Ces deux types de variation sont représentés dans les figures (4.4) et (4.5). A l'intérieur de l'intervalle  $-1 \leq \xi \leq +1$ , la somme oscille autour de l'unité et prend des valeurs égales à 1 aux nœuds (en  $\xi = -1, 0$ , et  $1$ ), puis décroît d'une manière asymptotique vers zéro quand  $\xi$  augmente. Les valeurs unitaires aux nœuds sont donc reproduites mais celles de champ constant ne peuvent être interpolées, puisque par définition de l'élément, le champ varie et tend à s'annuler à l'infini. Cette propriété est obtenue par les deux types de décroissance et dépend fortement des paramètres de sévérité. L'influence du paramètre  $L$  intervenant dans les fonctions exponentielles est montrée sur la figure (4.2). Pour des valeurs de  $L$  de plus en plus faibles, les variations dans l'intervalle  $[-1$  et  $+1]$  ainsi que la décroissance sont de plus en plus prononcées. Une discontinuité peut avoir lieu entre  $\xi = -1$  et  $\xi = 0$  si  $L$  est très faible. Les valeurs de  $L > 1$  sont ainsi à recommander.

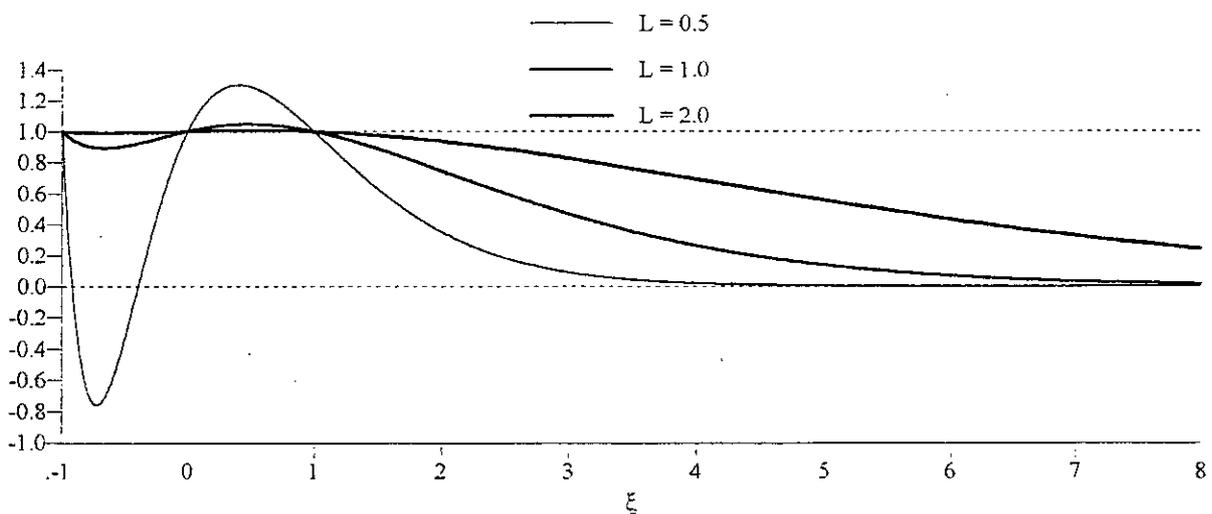


Figure 4.4. Somme des fonctions de forme à décroissance exponentielle d'un élément infini

L'influence des deux paramètres  $n$  et  $\xi_0$  intervenant dans les fonctions à décroissance de type puissance dépend de l'ordre  $m$  des fonctions de forme de l'élément fini de base. Pour le cas de l'exemple présent ;  $m=2$ , les différentes situations pouvant se produire sont reportées sur la figure (4.5). Pour des valeurs discrètes de  $n = 0, 1, 2, \dots, m$  la somme se réduit à 1 ; les fonctions  $h_i$  sont de même forme que les termes des polynômes de Lagrange et les termes produits de la somme se simplifient. Pour des valeurs de  $n$  réelles positives et inférieures à  $m$ , la somme diverge vers  $-\infty$  ou vers  $+\infty$  selon que  $n < 1$  ou  $n > 1$ . La divergence est d'autant plus rapide que le pôle  $\xi_0$  et proche du nœud  $\xi = -1$ . Cette situation est représentée dans la figure par les courbes relatives à  $\xi_0 = -1.25$  et  $n = 0.5$  et  $1.5$ . Le seul cas où la somme décroît d'une manière asymptotique vers 0 correspond aux valeurs prévues de  $n > m$ . Ce cas est analogue au cas précédent de décroissance exponentielle ;  $\xi_0$  influe sur les variations de la somme dans l'intervalle  $[-1, +1]$  de la même façon que  $L$ . La discontinuité peut survenir dans ce cas quand le pôle est proche de l'élément. Il serait donc prudent d'éloigner  $\xi_0$ .

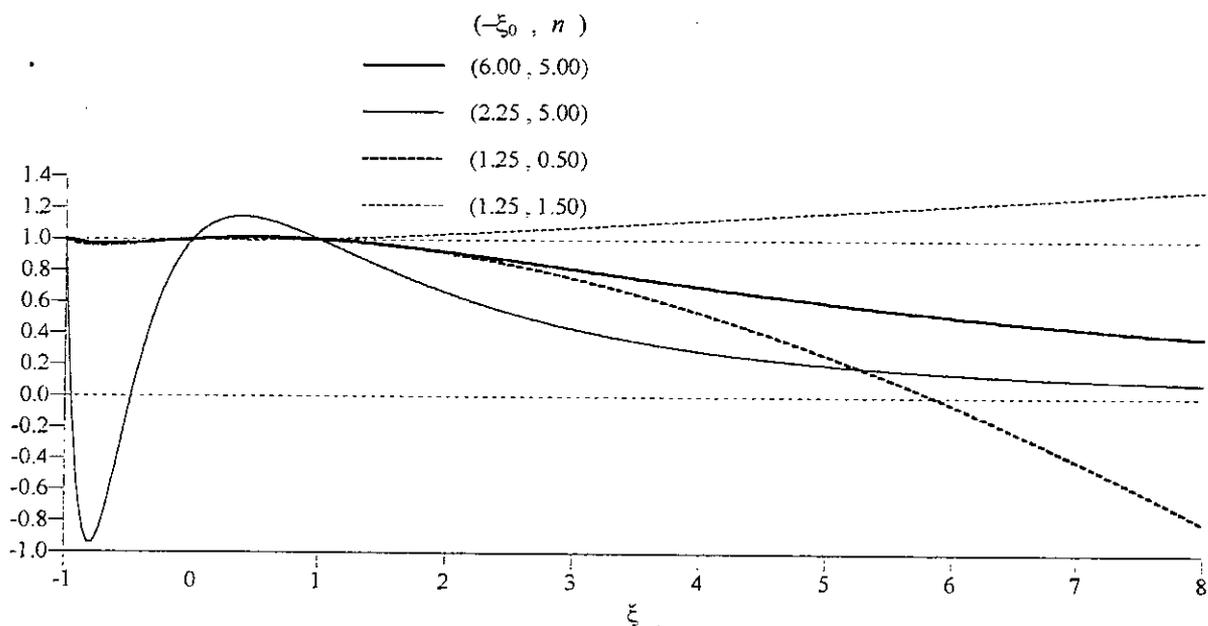


Figure 4.5. Somme des fonctions de forme à décroissance de type puissance d'un élément infini

#### 4.2.1.4 Autres choix de fonctions de décroissance

D'autres choix de fonctions décroissantes peuvent être adoptés. En exemple, une décroissance de type tangente hyperbolique a été suggérée [5], elle est similaire à la décroissance exponentielle. Si n'importe qu'elle information sur la nature de la solution en champs lointain est connue, elle pourrait être exploitée pour le choix judicieux de type de décroissance. Dans certains cas, la solution à l'infini peut différer de zéro, être constante ou variant dans le temps. Un choix de fonctions, combinées avec les fonctions de formes standards, permettant de tendre vers cette solution peut devenir une tâche pénible. Dans la plus part des cas pratiques, les types de décroissance présentés s'appliquent favorablement.

### 4.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis

Il est possible d'intégrer analytiquement les matrices élémentaires pouvant être obtenues pour les éléments infinis. Ceci a été fait par quelque auteurs lors des du développement des premiers éléments infinis. Cependant, la méthode d'intégration numérique est aussi disponible pour l'intervalle  $[0, \infty[$  et elle est d'application aussi simple que celle utilisée pour les éléments finis. Ainsi, l'intégration numérique est préférée pour sa généralité par rapport à l'intégration analytique.

#### 4.2.2.1 Intégration des formes de décroissance exponentielles

La formule standard d'intégration numérique de Gauss-Laguerre, utilisant les polynômes de Laguerre, permet d'évaluer les intégrales de la forme :

$$I = \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx \quad (4.19)$$

L'intégration numérique est exacte si la fonction  $f(x)$  est un polynôme et un nombre approprié des points d'intégration est utilisé. Il est clair que cette formule d'intégration convient parfaitement à la décroissance de type exponentiel.

Les termes d'intégrales intervenants dans les matrices élémentaires sont de la forme suivante :

$$I = \int_{-1}^{\infty} f(\xi) e^{-\xi/1} dx \quad (4.20)$$

où, maintenant, le domaine d'intégration s'étale de  $-1$  à l'infini et  $f$  est un polynôme en  $\xi$  correspond aux fonctions de forme ou à leurs dérivées. Les éléments des matrices élémentaires font intervenir des multiplications de ces termes et les intégrales finales à évaluer prennent la forme :

$$I = \int_{-1}^{\infty} q(\xi) e^{-a\xi/1} dx \quad (4.21)$$

avec  $a=2$ , pour la plus part des cas, et  $q(\xi)$  est un autre polynôme résultant des produits intervenant sans les expressions des matrices élémentaires.

La formule d'intégration de Gauss-Laguerre peut être adaptée pour évaluer ce genre d'intégrale par un simple changement de variable. Une nouvelle variable  $s$  peut être définie de telle sorte que quand  $\xi=-1$ ,  $s=0$  et quand  $\xi=\infty$ ,  $s=\infty$ .

$$s = \frac{a}{L}(\xi + 1) ; \xi = \frac{L}{a}s - 1 \quad (4.22)$$

et pour les dérivées :

$$ds = \frac{a}{L}d\xi ; d\xi = \frac{L}{a}ds \quad (4.23)$$

Ainsi, l'intégrale (4.11) devient :

$$\int_{-1}^{\infty} q(\xi) e^{-a\xi/L} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(\frac{L}{a}s - 1\right) \frac{L}{a} e^{s/L} e^{-s} ds = \frac{L}{a} e^{s/L} \int_0^{\infty} f(s) e^{-s} ds \quad (4.24)$$

Ensuite, pour utiliser l'intégration de Gauss-Laguerre, les abscisses et poids  $(s, W_0)$  tabulés doivent être modifiés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \xi = \frac{L}{a}s - 1 \\ W_r = W_0 \frac{L}{a} e^{s/L} \end{cases} \quad (4.25)$$

pour obtenir les nouvelles valeurs des abscisses des poids  $(\xi, W_n)$  à remplacer dans la somme permettant le calcul des matrices élémentaires.

Si la décroissance est dans la direction négative les expressions correspondantes deviennent :

$$s = \frac{a}{L}(1 - \xi) ; \xi = 1 - \frac{L}{a}s \quad (4.26)$$

pour le changement de variable, et

$$\int_{-\infty}^0 q(\xi) e^{a\xi/L} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(1 - \frac{L}{a}s\right) \frac{L}{a} e^{s/L} e^{-s} ds = \frac{L}{a} e^{s/L} \int_0^{\infty} f(s) e^{-s} ds \quad (4.27)$$

pour l'intégration. La modification des valeurs tabulées se fait par (4.16) pour les abscisses et toujours par (4.15) pour les poids.

Des tableaux des abscisses et des poids pour différent ordre d'intégration sont donnés en annexe 1.

#### 4.2.2.2 Intégration des formes de décroissance en puissance

Il est également possible d'utiliser l'intégration numérique de Gauss-Laguerre pour des fonctions de décroissance du type puissance, ne contenant pas un terme exponentiel, simplement en les multipliant par  $e^x$  :

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} [f(x)e^x] e^{-x} dx \quad (4.28)$$

cela peut fonctionner seulement dans le cas où la fonction se comporte raisonnablement bien quand  $x$  tend vers l'infini.

Une autre possibilité d'intégrer les fonctions de décroissance du type puissance est de concevoir une méthode d'intégration spécifique ; ce qui a été fait dans le cas des problèmes d'ondes. Cependant, la technique actuellement utilisée est de transformer le domaine d'intégration infini en domaine fini puis utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre qui est applicable dans le domaine  $[-1, +1]$ . Une façon de réaliser une telle transformation consiste en le changement de variable suivant :

$$x = \frac{a-s}{s-b} ; \quad dx = \frac{b-a}{(s-b)^2} ds \quad (4.29)$$

ce qui permet d'écrire l'égalité :

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{a-s}{s-b}\right) \frac{1}{(s-b)^2} ds \quad (4.30)$$

Avec les éléments infinis construits à base des fonctions de forme d'éléments de référence fini, les bornes d'intégration désirées sont  $-1$  et  $\infty$  ou bien  $-\infty$  et  $+1$  selon la direction de décroissance considérée. Un autre changement de variable doit être effectué ; soit, pour une décroissance dans la direction positive :

$$\xi = x - 1 = \frac{a+b-2s}{s-b} ; \quad d\xi = dx = \frac{b-a}{(s-b)^2} ds \quad (4.31)$$

pour une décroissance dans la directions négative :

$$\xi = 1 - \frac{1}{x} = \frac{a+b-2s}{a-s} ; \quad d\xi = \frac{1}{x^2} dx = \frac{b-a}{(a-t)^2} ds \quad (4.32)$$

Avec cette nouvelle variable, il serait possible d'évaluer numériquement, par la méthode de Gauss-Legendre, les intégrales intervenant dans l'expression des matrices élémentaires d'un élément infini en mettant  $a=-1$  et  $b=+1$  :

$$\int_{-1}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_a^b f\left(\frac{a+b-2s}{s-b}\right) \frac{2}{(s-b)^2} ds = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1-s}\right) \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (4.33)$$

pour une décroissance dans la direction positive, et

$$\int_{-1}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_a^b f\left(\frac{a+b-2s}{a-s}\right) \frac{2}{(a-s)^2} ds = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1+s}\right) \frac{2}{(1+s)^2} ds \quad (4.34)$$

pour une décroissance dans la direction négative.

Dans ce cas aussi, les abscisses et les poids  $(s, W_o)$  tabulés pour l'intégration par la méthode de Gauss-Legendre doivent être modifiées pour une direction infinie positive:

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad ; \quad W_n = W_o \frac{2}{(1-s)^2} \quad (4.35)$$

et pour une direction infinie négative :

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad ; \quad W_n = W_o \frac{2}{(1+s)^2} \quad (4.36)$$

### 4.3 Approche inverse

Contrairement à l'approche directe, cette second approche de construction d'éléments infinis, implique presque toujours une projection ou transformation du domaine. Parfois, deux transformations sont utilisées ; l'une pour les fonctions de formes et l'autre pour la formule d'intégration. Le domaine de définition de l'élément de référence ainsi que les fonctions d'interpolation sont gardés et retenus comme définis pour un élément fini standard. Les fonctions de transformation géométrique, par contre, sont construites ascendantes avec une singularité aux nœuds limites de telle sorte à projeter les nœuds correspondants de l'élément naturel à l'infini. La première projection explicitement énoncée a été réalisée par Beer et Meek qui ont utilisé une transformation incluant un terme de forme  $1/(1-\xi)$  et permettant de projeter un domaine fini  $\xi$  en un domaine infini  $x$ . La transformation était divisée en deux parties dont la seconde est similaire à celle proposée plus tard par Zienkiewicz et qui est actuellement la plus utilisée. La méthode de constructions des fonctions de forme pour les éléments infinis, se basant sur cette transformation, sera exposée dans les sections suivantes.

### 4.3.1 Transformation géométrique

Il convient tout d'abord de considérer la projection sur le domaine de référence  $[-1,+1]$  d'un élément infini unidimensionnel défini par deux nœuds. Les fonctions de transformation géométriques pour les éléments de plus haut ordre et des éléments bi- et tridimensionnels sont élaborées sur la base de cette projection.

#### 4.3.1.1 Transformation de Zienkiewicz

L'élément représenté sur la figure (4.7) s'étend du point  $x_1$  à travers  $x_2$  en  $x_3$  qui se trouve à l'infini. Une transformation convenable [5, 64] a pour expression :

$$x = [-\xi/(1-\xi)] x_0 + [1 + \xi/(1-\xi)] x_2 \quad (4.37)$$

et permet d'avoir  $x = \infty$  quand  $\xi=+1$ ,  $x = x_2$  quand  $\xi=0$  et  $x = \frac{1}{2}(x_0+x_2) = x_1$  quand  $\xi=-1$ . Le point  $x_1$  est l'abscisse du milieu de  $x_0x_2$  ce qui implique que la moitié interne de l'élément infini est de même étendue que celle du domaine fini à partir du point  $x_0$  qui est le pôle du problème.

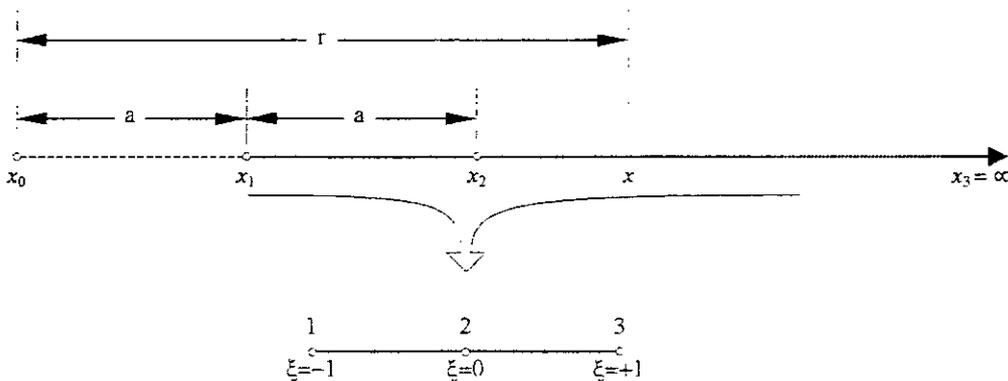


Figure 4.6. Transformation d'un élément infini unidimensionnelle

Cette transformation peut aussi s'écrire directement en fonction des seules coordonnées de l'élément infini en éliminant  $x_0$  de l'équation (4.37) :

$$x = T_1(\xi) x_1 + T_2(\xi) x_2 ; T_1(\xi) = -2\xi/(1-\xi) ; T_2(\xi) = (1+\xi)/(1-\xi) \quad (4.38)$$

ce qui définit les fonctions de transformation géométrique de l'élément. Une caractéristique importante de ces fonctions est qu'elle conduit à une transformation indépendante de l'origine du système des coordonnées car :

$$T_1(\xi) + T_2(\xi) = 1 \quad (4.49)$$

En effet, un décalage de l'origine de  $\Delta x$  conduit aux nouvelles coordonnées :

$$\bar{x}_1 = x_1 + \Delta x, \quad \bar{x}_2 = x_2 + \Delta x \quad \text{et} \quad \bar{x} = x + \Delta x \quad (4.50)$$

et leur substitution dans l'équation (4.38) donne :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= T_1(\xi) \bar{x}_1 + T_2(\xi) \bar{x}_2 ; \quad x + \Delta x = (x_1 + \Delta x) T_1(\xi) + (x_2 + \Delta x) T_2(\xi) ; \\ x + \Delta x &= [T_1(\xi) x_1 + T_2(\xi) x_2] + \Delta x [T_1(\xi) + T_2(\xi)] \end{aligned} \quad (4.51)$$

qui n'est vrai que dans le seul cas où la propriété (4.49) est vérifiée.

Le pôle  $x_0$  représente le centre à partir duquel la perturbation prend naissance et permet d'exprimer l'approximation, avec l'utilisation des fonctions de forme, du champs inconnu par un développement de type :

$$u = C_0 + C_1/r + C_1/r^2 + C_1/r^3 + \dots \quad (4.52)$$

où  $r$  est la distance radiale mesurée à partir de ce point selon  $r = x - x_0$  et  $C_i$  sont des coefficients quelconques. Effectivement, l'approximation nodale de la variable de champs peut se mettre sous la forme :

$$u = \sum N_i u_i = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_1 \xi^3 + \dots \quad (4.53)$$

avec les facteurs  $\alpha_i$  sont des combinaisons linéaires des valeurs nodales  $u_i$ . La substitution de  $\xi$  par sa valeur obtenue à partir de la transformation (4.37) et qui s'écrit :

$$\xi = (x - x_2)/(x - x_0) = 1 - (x_2 - x_0)/r = 1 - 2a/r \quad (4.54)$$

dans la précédente expression conduit immédiatement au développement (4.52). Les constantes  $C_i$  prennent la signification des facteurs  $\alpha_i$ , particulièrement  $C_0$  se réduit à la valeur nulle de la variable de champs au dernier nœud à l'infini :  $C_0 = u_n = 0$ .

Le grand avantage de cette transformation est qu'elle peut modéliser le comportement en champs lointain exprimé par l'équation (4.52) et qui régit plusieurs problèmes physiques, en utilisant directement les polynômes ordinaires d'éléments finis avec l'intégration numérique standard de Gauss-Legendre. Le seul changement requis pour modifier un programme d'élément fini dans le but d'intégrer des éléments infinis consiste en un nouveau calcul de la matrice Jacobienne avec les dérivées des fonctions de transformation  $T_i$  au lieu de celles des fonctions de formes  $N_i$ .

### 4.3.1.2 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz

La généralisation de la transformation de Zienkiewicz au cas d'éléments unidimensionnels linéaires ou de plus haut ordre est simple et pratique et conduit aussi à la génération des fonctions de transformation de n'importe quel élément. La première écriture de cette transformation à l'aide de fonctions telle qu'elle est exprimée par l'équation (4.38) est introduite par Marques et Owen. Une procédure de construction systématique des fonctions de transformation géométrique pour les cas uni- bi- et tridimensionnel est décrite par Bettess. Pour les éléments de type Lagrange, elle consiste simplement à prendre les fonctions de forme de l'élément fini avec le terme relatif au nœud infini inversé. Cependant, pour les éléments de type Serendip, la procédure est plus ingénieuse et sera présentée dans la section suivante. Un autre procédé pouvant être appliqué pour les deux types se base sur l'interpolation polynomiale.

Ainsi, la considération des deux premières fonctions de forme de l'élément quadratique de la figure (4.6) relatives aux nœuds  $\xi=-1$  et  $\xi=0$  et qui s'écrivent par :

$$N_1 = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) = \left( \frac{\xi - 0}{-1 - 0} \right) \left( \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \right) = -\xi(1 - \xi)/2 \quad (4.55)$$

$$N_2 = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) = \left( \frac{\xi + 1}{0 + 1} \right) \left( \frac{\xi - 1}{0 - 1} \right) = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (4.56)$$

permet de remarquer, comparativement aux expressions (4.38) des fonctions  $T_1$  et  $T_2$ , que la seule différence réside dans le dernier terme qui est inversé. Ce qui montre immédiatement la possibilité de génération de fonctions de transformation géométrique pour un ensemble d'éléments infinis jusqu'à n'importe quel ordre désiré. L'expression générale de ces fonctions s'écrit sous la forme :

$$T_i = \frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} ; \quad i = 1, n-1 \quad (4.57)$$

avec n est le nombre de nœuds y compris celui qui est à l'infini correspondant à  $\xi=+1$ .

Il est important de noter que cette expression peut s'écrire sous la forme d'un produit des fonctions de forme standards par des fonctions croissantes présentant une singularité au nœud infini, et par conséquent d'identifier la transformation géométrique des éléments infinis comme approche analogue à l'approche directe utilisant des fonctions de décroissance. L'expression (4.57) devient elle aussi sous la même forme que (4.1) soit :

$$T_i = N_i \cdot \bar{h}_i ; \quad \bar{h}_i = [(1 - \xi_i)/(1 - \xi)]^2 \quad (4.58)$$

avec maintenant les fonctions  $\bar{h}_i$  sont croissantes puisque l'intervalle sur lequel elle sont définis est restreint à celui de l'élément fini  $[-1, +1]$ . Cette écriture s'applique aussi pour les éléments bi- et tridimensionnels. La figure (4.8) illustre en (a) les variations de des fonctions de croissance  $\bar{h}_1$  et  $\bar{h}_2$  et en (b) les deux fonctions  $T_1$  et  $T_2$  de l'élément quadratique correspondant à la transformation de Zienkiewicz.

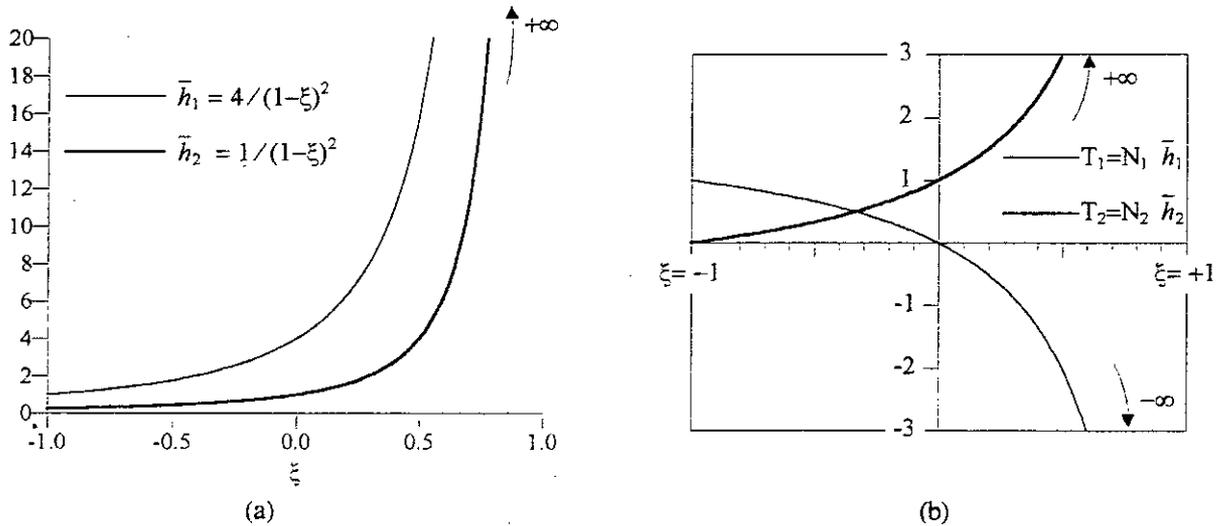


Figure 4.8. Fonctions croissance et fonctions de transformation géométrique pour un élément quadratique

Dans le tableau suivant sont explicitées les fonctions de forme  $N$  ainsi que les fonctions de transformation géométrique  $T$  avec leurs dérivées respectives pour des élément infinis usuels unidimensionnels linéaires, quadratiques et cubiques.

| $N^d i$                    | $\xi_i$ | $N_i$                                | $\partial N_i / \partial \xi$    | $T_i$                                  | $\partial T_i / \partial \xi$            |
|----------------------------|---------|--------------------------------------|----------------------------------|--|--|
| Élément infini linéaire    |         |                                      |                                  |  |  |
| 1                          | -1      | $(1-\xi)/2$                          | $-1/2$                           | $2/(1-\xi)$                            | $2/(1-\xi)^2$                            |
| 2                          | +1      | $(1+\xi)/2$                          | $-1/2$                           | —                                      | —  |
| Élément infini quadratique |         |                                      |                                  |  |  |
| 1                          | -1      | $-\xi(1-\xi)/2$                      | $\xi-1/2$                        | $-2\xi/(1-\xi)$                        | $-2/(1-\xi)^2$                           |
| 2                          | 0       | $(1+\xi)(1-\xi)$                     | $-2\xi$                          | $(1+\xi)/(1-\xi)$                      | $+2/(1-\xi)^2$                           |
| 3                          | +1      | $\xi(1+\xi)/2$                       | $\xi+1/2$                        | —                                      | —  |
| Élément infini cubique     |         |                                      |                                  |  |  |
| 1                          | -1      | $\frac{1}{16}(-1+\xi+9\xi^2-9\xi^3)$ | $\frac{1}{16}(1+18\xi-27\xi^2)$  | $-\frac{1}{4}(1+3\xi)(1-3\xi)/(1-\xi)$ | $\frac{1}{4}(-1+18\xi-9\xi^2)/(1-\xi)^2$ |
| 2                          | $-1/3$  | $\frac{9}{16}(1-3\xi-\xi^2+3\xi^3)$  | $\frac{9}{16}(-3-2\xi+9\xi^2)$   | $(1+\xi)(1-3\xi)/(1-\xi)$              | $(-1-6\xi-3\xi^2)/(1-\xi)^2$             |
| 3                          | $-1/3$  | $\frac{9}{16}(1+3\xi-\xi^2-3\xi^3)$  | $\frac{9}{16}(3-2\xi-9\xi^2)$    | $\frac{1}{4}(1+\xi)(1+3\xi)/(1-\xi)$   | $\frac{1}{4}(5+6\xi-3\xi^2)/(1-\xi)^2$   |
| 4                          | +1      | $\frac{1}{16}(-1-\xi+9\xi^2+9\xi^3)$ | $\frac{1}{16}(-1+18\xi+27\xi^2)$ | —                                      | —  |

Tableau 4.1 Fonctions de forme et fonctions de transformation géométrique d'élément infinis unidimensionnels.

### 4.3.2 Génération des fonctions de transformations géométriques

Les fonctions de transformation géométriques des éléments infinis à deux ou trois dimensions avec une direction infinie peuvent être générées en appliquant directement le produit des fonctions de forme par les fonctions ascendantes telles que celles décrites par l'expression (4.17). Dans le cas où la direction infinie est négative cette expression devient :

$$\bar{h}_i = [(1-\xi_i)/(1+\xi)]^2 \quad (4.59)$$

Dans la pratique, l'utilisation d'élément fini dans une direction et s'étend à l'infini dans l'autre constitue le cas le plus fréquent. Toutefois, un élément s'étendant à l'infini dans les deux directions peut être requis pour représenter les coins d'un maillage, les fonctions croissantes appropriées se généralisent par :

$$h_i = \left( \frac{1-\xi_i}{1-\xi} \right)^2 \left( \frac{1-\eta_i}{1-\eta} \right)^2 \quad (4.60)$$

évidemment dans cette expression, les directions infinies sont supposées positives.

Cette technique est très pratique et fortement recommandée si les fonctions de forme de l'élément fini de base sont connues. Dans le cas contraire, les fonctions de transformation peuvent être obtenues à partir du cas unidimensionnel. Pour les éléments de type Lagrange, elles sont simplement, le produit des fonctions de forme dans la direction finie  $\eta$  et des fonctions de transformation géométrique dans la direction infinie  $\xi$ . Ainsi, pour un exemple d'élément infini rectangulaire à six nœuds Q6 représenté dans la figure (4.9) et pouvant être couplé à l'élément fini rectangulaire à quatre nœuds, les fonctions de transformations géométriques sont, compte tenu des expressions du tableau 4.1, données par :

$$\begin{aligned} T_1 &= [(-2\xi)/(1-\xi)] \times [(1-\eta)/2] , & T_2 &= [(1+\xi)/(1-\xi)] \times [(1-\eta)/2] , \\ T_3 &= [(1+\xi)/(1-\xi)] \times [(1+\eta)/2] , & T_4 &= [(-2\xi)/(1-\xi)] \times [(1+\eta)/2] \end{aligned} \quad (4.61)$$

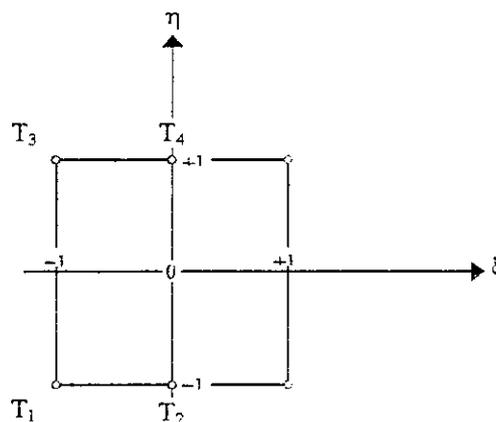


Figure 4.9. Numérotation des fonctions de transformation géométrique de l'élément infini Q6

Pour les éléments de type Serendip, une procédure rationnelle analogue à celle décrite par Zienkiewicz [64] pour les fonctions de forme d'éléments finis peut être appliquée pour la construction des fonctions de transformation géométrique. Cette procédure est clairement expliquée par Bettess et reproduite ici pour l'élément Q8 représenté dans la figure 4.4. D'abord, les fonctions  $T_2$ ,  $T_6$  et  $T_8$  correspondantes aux nœuds milieux sont construites de la même manière que pour un élément de type Lagrange. Pour les nœuds 2 et 6, la variation est quadratique en  $\xi$  et linéaire en  $\eta$  ce qui conduit au produit des fonctions de transformation géométriques quadratique en  $\xi$  et des fonctions de forme linéaires en  $\eta$ . Pour le nœud 8, la variation dans la direction  $\xi$  est linéaire et celle dans la direction  $\eta$  est quadratique, le produit fait intervenir la fonction de forme quadratique en  $\eta$  et la fonction de transformation linéaire en  $\xi$  soit aussi en se référant au tableau 4.1 :

$$\begin{aligned} T_2 &= [(1+\xi)/(1-\xi)] \times [(1-\eta)/2] , \quad T_6 = [(1+\xi)/(1-\xi)] \times [(1+\eta)/2] \\ T_8 &= [2/(1-\xi)] \times [(1-\eta)(1+\eta)] \end{aligned} \quad (4.62)$$

Les fonctions  $T_1$  et  $T_7$ , correspondantes aux nœuds sommets, sont d'abord construites à partir des produits des fonctions de transformation linéaires en  $\xi$  et des fonctions de forme linéaires en  $\eta$ . Ensuite, elle seront annulées par des combinaisons des fonctions de transformation correspondantes aux nœuds adjacents. Les produits s'écrivent par :

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= [2/(1-\xi)] \times [(1-\eta)/2] , \quad \bar{T}_7 = [2/(1-\xi)] \times [(1+\eta)/2] \\ \bar{T}_1(-1, 0) &= \bar{T}_7(-1, 0) = 1/2, \quad \bar{T}_2(0, -1) = \bar{T}_7(0, +1) = 2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

pour annuler ces fonctions aux nœuds milieux, les multiplications de leurs valeurs par les fonctions de transformation correspondantes doivent être retranchées ; ainsi :

$$\begin{aligned} T_1 &= \bar{T}_1 - 2T_2 - \frac{1}{2} T_8 = -(1-\eta)(1+\xi+\eta)/(1-\xi) \\ T_7 &= \bar{T}_7 - 2T_6 - \frac{1}{2} T_8 = -(1+\eta)(1+\xi-\eta)/(1-\xi) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Cette technique très ingénieuse peut être utilisée pour générer les fonctions de forme ou les fonctions de transformation géométriques pour des éléments infinis de plus haut ordre et des éléments tridimensionnels.

Un autre procédé, basé sur l'approximation polynomiale et fréquemment utilisé dans le cas des éléments finis, peut aussi être appliqué pour la génération automatique des fonctions de transformations géométriques pour les éléments infinis. Ce procédé est décrit dans les références [17, 64] pour les fonctions de forme, une description exhaustive des polynômes complets et incomplets à utiliser pour l'interpolation des variables de champs est présentée par Zienkiewicz. Pour les transformations géométriques, les mêmes polynômes auxquels sont retranchés les termes quadratiques correspondant à la direction infinie et les autres termes sont

divisés sur  $(1-\xi)$  peuvent être utilisés pour projeter le domaine infini  $x(x,y)$  sur le domaine fini de référence  $\xi(\xi,\eta)$ . Pour l'élément Q8 précédent, la projection et le polynôme s'écrivent :

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\xi,\eta) \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{p}(\xi,\eta) = \langle 1/(1-\xi) \quad \xi/(1-\xi) \quad \eta/(1-\xi) \quad \xi\eta/(1-\xi) \quad \eta^2/(1-\xi) \rangle \quad (4.65)$$

avec  $\mathbf{a}$  est le vecteur des paramètres généraux. L'évaluation de ce polynôme aux nœuds conduit à :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \quad \text{soit} \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (4.66)$$

avec  $\mathbf{x}$  représente à la fois l'abscisse et l'ordonnée. Ce qui permet de résoudre pour  $\mathbf{a}$  :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} \quad \text{soit} \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_n \quad (4.67)$$

et enfin de réécrire l'expression (4.65) sous la forme nodale suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_n; \quad \mathbf{T} = \mathbf{p}(\xi,\eta) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (4.68)$$

et de vérifier l'expression des fonctions de transformations  $T_i$  obtenues précédemment.

Bien que ce procédé est pratique, il présente cependant un inconvénient majeur ; il arrive que la matrice  $\mathbf{A}$  ne soit pas inversible et de grandes difficultés algébriques peuvent être rencontrées pour l'inversion [64].

Finalement, il est nécessaire de noter que lors de la représentation d'un domaine physique non borné par un maillage d'éléments finis et d'éléments infinis, il faut veiller à ce que la relation entre les coordonnées de référence  $\xi$  et celles de l'élément réel infini  $x$  vérifie l'équation (4.54) pour que le développement (4.52) soit obtenu. A cet effet, les coordonnées naturelles  $x_i$  des  $n$  nœuds disposés dans la direction s'étendant à l'infini doivent être calculées par l'expression :

$$x_i = \frac{(n-1)x_{n-1} + (n+1-2i)x_0}{2(n-i)}, \quad i = 1, n-1 \quad (4.69)$$

## 4.4 Application au cas du réservoir

L'objectif principal ciblé dans le développement de la technique de couplage d'éléments finis avec des éléments infinis pour l'analyse des systèmes barrage-réservoir est de modéliser économiquement le domaine non borné du réservoir. En effet, cette technique permet d'éviter l'utilisation de la condition de radiation au niveau de la limite de troncature devant être, d'ailleurs, localisée à une distance assez loin de l'interface fluide-structure pour que les ondes puissent être considérées planes et sans réflexion. Ce qui conduit ainsi à une considérable réduction de la taille du système d'équations à résoudre. Les termes d'intégration sur la limite  $\Gamma_4$  intervenant dans les formes intégrales faibles (2.33) et (2.50) ainsi que les matrices correspondantes, associées aux effets de dissipation par radiation dans le fluide et intervenant dans les équations (3.18), (3.43) et (3.44), disparaissent. Les autres matrices fluides résultantes de la discrétisation des formulations  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}, \varphi, p)$  deviennent un assemblage des matrices élémentaires d'éléments finis telles qu'elles sont exprimées par les équations (3.33), (3.37), (3.46) et (3.48) et des matrices élémentaires relatives aux éléments infinis suivant l'approche adoptée. Il est à rappeler que le système discret d'équations différentielles (Equation 3.51) résultant de la discrétisation de la formulation  $(\mathbf{u}, \varphi, p)$  devient symétrique ( $C_\varphi = 0$ ) alors que le système (3.38) associé à la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  demeure non symétrique.

### 4.4.1 Expression des matrices élémentaires

Dans le cas de l'approche directe, les intégrales deviennent non bornées et les matrices élémentaires masse et raideur sont exprimées, pour la formulation  $(\mathbf{u}, p)$ , par :

$$\left(\mathbf{M}_F^e\right)_{\Omega_{ij}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} F_{p_i} \frac{1}{C^2} F_{p_j} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta; \quad \left(\mathbf{M}_F^e\right)_{\Gamma_{3ij}} = \int_{-1}^{\infty} F_{p_i}(\xi, \eta = 1) \frac{1}{g} F_{p_j} J_s d\xi \quad (4.70)$$

$$\left(\mathbf{K}_F^e\right)_{\Omega_{ij}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} (F_{p_i \xi} F_{p_j \xi} + F_{p_i \eta} F_{p_j \eta}) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (4.71)$$

et pour les matrices de la formulation  $(\mathbf{u}, \varphi, p)$ , par :

$$\left(\mathbf{M}_\varphi^e\right)_{\Omega_{ij}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} \rho_f (F_{\varphi_i \xi} F_{\varphi_j \xi} + F_{\varphi_i \eta} F_{\varphi_j \eta}) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (4.71)$$

$$\left(\mathbf{K}_\varphi^e\right)_{\Omega_{ij}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} (F_{p_i \xi} F_{\varphi_j \xi} + F_{p_i \eta} F_{\varphi_j \eta}) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (4.71)$$

avec  $J_s$  est tel qu'il est défini par l'équation (3.65). Les indices  $p$  et  $\varphi$  indiquent que les variables de champ correspondantes peuvent être interpolées différemment. La matrice Jacobienne  $\mathbf{J}$  est la même que pour un élément fini. Les intégrales non bornées sont évaluées numériquement selon la méthode de Gauss-Laguerre.

L'algorithme permettant de construire ces matrices élémentaires ne diffère pas trop de celui des matrices élémentaires d'éléments finis. La même boucle sur les points de Gauss-Legendre est appliquée pour les points de Gauss-Laguerre et l'appel aux fonctions de formes à l'intérieur s'applique aux fonctions de forme décroissantes infinies. La structure de l'algorithme devient :

```

Début de la routine
  Initialisation
  Début de boucle sur les points de Gauss-Laguerre
    Appel des fonctions de forme infinies
    Appel du Jacobien
    Calcul de la somme appropriée
  Fin de boucle sur les points de Gauss-Laguerre
  Partie symétrique
  Retour
Fin de la routine

```

Le calcul de la somme à l'intérieur de la boucle permet d'évaluer la matrice élémentaire considérée. L'algorithme devant être utilisé pour chaque matrice d'élément infini est le même que celui exposé précédemment pour les matrices d'éléments finis avec l'utilisation des fonctions  $F_i$  au lieu de  $N_i$ .

Dans le cas de l'approche inverse, par contre, les mêmes expressions des matrices élémentaires sont gardées et assemblées, ainsi le même algorithme de calcul pour les éléments finis est utilisé. Le seul changement requit pour rendre l'élément infini réside dans la nouvelle expression de la matrice Jacobienne par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\xi \\ \mathbf{T}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

avec  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont les coordonnées nodales de l'élément infini construites tenant compte de la relation (4.69). Ce qui impose l'insertion d'un appel aux fonctions de transformation géométrique et du code de la routine adéquate. La structure de l'algorithme est :

```

Début de la routine
  Initialisation
  Début de boucle sur les points de Gauss-Legendre
    Appel des fonctions de forme finis
    Appel des fonctions de transformation géométrique
    Appel du Jacobien
    Calcul de la somme appropriée
  Fin de boucle sur les points de Gauss-Laguerre
  Partie symétrique
  Retour
Fin de la routine

```

# ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES

*"La physique est un jeu d'analogies dans lequel on réduit un ensemble complexe par quelque devinettes approximatives"*

*R. Feynman*

*Le physicien traite le problème du véhicule à une roue, à deux roues, à trois, quatre roues. Le mathématicien traite le problème général du véhicule à  $n$  roues,  $n$ , étant un entier ou fractionnaire, positif ou négatif, réel ou imaginaire"*

*Bouasse*

## CHAPITRE 5

# ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES

## 5.1 Introduction

La détermination des modes et des fréquences naturelles de vibrations propres d'un système à grandes dimensions constitue généralement une tâche difficile. Elle devient plus complexe dans le cas des systèmes couplés, notamment s'il s'agit d'un problème d'interaction fluide-structure, du fait de la nature des équations matricielles d'éléments finis résultantes. En effet, l'évaluation des modes propres d'un barrage, compte tenu des effets d'interaction hydrodynamiques, qui représentent un système fluide-structure typique, a fait et continue à faire l'objet de plusieurs investigations. De nombreuses contributions, en particulier les travaux de Chopra et de ses collaborateurs [7, 11, 21-23], ont apparus dans la littérature, apportant ainsi chacune d'elles, un plus à la compréhension et au développement de nouvelles procédures d'analyse du comportement dynamique des systèmes couplés [14, 52, 52].

Le problème des modes et fréquences propres d'un modèle d'éléments finis d'un système physique correspond au problème des valeurs et vecteurs propres d'un système matriciel. Toutes les méthodes de résolution de tel problème sont alors de nature itérative [3], puisque cela revient en principe au calcul des racines d'un polynôme caractéristique du même ordre que le système matriciel et qui est d'ordinaire supérieur à quatre. La difficulté majeure de résolution d'un problème aux modes et fréquences propres réside dans la taille des matrices d'éléments finis correspondantes ; une transformation ou projection des matrices sur une autre base de coordonnées doit être considérée à fin de réduire leurs tailles. Deux techniques robustes sont d'utilisation fréquente : la méthode de recherche de déterminant et la méthode d'itérations par sous espaces. Ces deux méthodes sont décrites dans plusieurs références, Bathe & Wilson [3] donnent une description exhaustive et Olson & Vandini [37] font une application aux cas de systèmes fluide-structure.

Le but visé dans ce chapitre est l'analyse du comportement vibratoire de deux modèles numériques d'un système barrage-réservoir en utilisant la méthode d'itérations par sous espaces. Le premier consiste en l'utilisation du modèle d'éléments finis avec frontière de radiation qui, malheureusement, n'intervient pas dans le problème des vibrations propres. Le second est le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis, qui permet d'inclure les effets radiatifs dans le problème des modes propres. Pour une meilleure compréhension, les sous systèmes barrage et réservoir sont d'abord considérés l'un indépendamment de l'autre. Ensuite, le système complet est analysé suivant les deux formulations  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}, \phi, p)$  présentées précédemment, la symétrisation du système (3.38) ainsi que la condensation du système (3.51) sont effectuées avant le calcul des valeurs et vecteurs propres.

## 5.2 Présentation des systèmes analysés

Le système de coordonnées physiques et la géométrie, ainsi qu'un maillage représentatif d'éléments finis et d'éléments infinis d'un système barrage-réservoir sont montrés sur la Figure 5.1. Le monolithe du barrage, de hauteur  $H_b$  et de largeur  $L_b$  à la base et  $L_c$  à la crête, consiste en un assemblage de  $N_{eb}$  éléments isoparamétriques à deux degrés de liberté par nœud ; les deux composantes de déplacement horizontale et verticale, disposés selon un nombre  $N_{xb}$  horizontalement et  $N_{yb}$  verticalement. Le domaine fluide est discrétisé en  $N_{ef}$  éléments du même type que ceux utilisés pour la discrétisation du barrage pour faciliter le couplage au niveau de l'interface fluide-structure  $\Gamma_1$  sur le parement amont. Chaque élément possède un seul degré de liberté par nœud représentant soit la variable de champ pression ou le potentiel de déplacement à l'intérieur du réservoir. Le nombre d'éléments  $N_{yf}$  suivant la direction verticale dépend de  $N_{yb}$ , de la hauteur de la crête  $H_c$  et du niveau de remplissage  $H_f$ . Suivant la direction horizontale, le domaine fluide, étant infini, est divisé en deux parties ; l'une finie de longueur  $L_f$ , est discrétisée en  $N_{xf}$  éléments finis et l'autre infinie représentée, soit par la condition de rayonnement sur la frontière  $\Gamma_4$ , soit par des éléments infinis.

Le comportement du béton est supposé linéaire, élastique et isotrope. Ses caractéristiques mécaniques requises pour l'analyse sont la masse volumique  $\rho_b$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module d'élasticité  $E$ . Les limites et les dimensions géométriques du barrage et du réservoir sont représentées sur la même figure ci dessous, les fruits amont et aval du barrage sont respectivement  $f_m$  et  $f_v$ . La masse volumique du fluide est  $\rho_f$ , le module de compressibilité volumique de l'eau est  $k_0$  ce qui conduit à une célérité des ondes sonores de  $C$ .

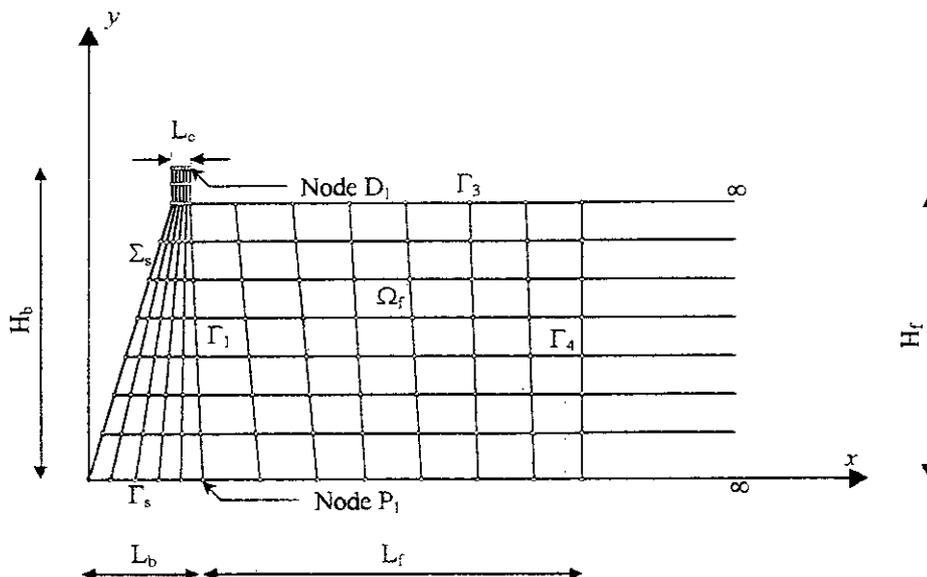


Figure 5.1. Maillage du barrage et du réservoir

Les caractéristiques de deux barrages considérés ici comme cas d'études, sont résumées dans le tableau 5.1 suivant.

| Barrage    | $\rho_b$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | $\nu$ | E (Mpa) | H <sub>b</sub> (m) | L <sub>b</sub> (m) | H <sub>c</sub> (m) | L <sub>c</sub> (m) | f <sub>m</sub> | f <sub>v</sub> |
|------------|-------------------------------|-------|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------|----------------|
| Oued-Fodda | 2640                          | 0.2   | 24600   | 101.0              | 65.5               | 4.6                | 5.0                | 0.1            | 0.55           |
| Pine Flat  | 2483                          | 0.2   | 34500   | 122.0              | 96.0               | 19.2               | 9.75               | 0.0            | 0.85           |

Tableau 5.1. Caractéristiques mécaniques et géométriques des barrages analysés

Le barrage de Pine Flat, construit dans le Kings River en Californie, est étudié par Chopra [7, 11] avec inclusion des effets d'interaction fluide-structure selon une méthode semi-analytique développée par le même auteur. Ce cas servirait de comparaison et de validation du code de calcul élaboré. Par contre, le barrage de Oued-Fodda au nord-ouest Algérien a fait l'objet de plusieurs travaux dirigés par le professeur Tiliouine [50-53] et constitue ici le sujet d'études et d'investigations paramétriques.

### 5.3 Analyse de la structure du barrage

Le comportement en oscillations libres d'un barrage est déterminé à partir de la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres de l'équation (3.17) du mouvement de la structure sans la prise en compte des termes d'amortissement et du chargement. En supposant les déplacements de la structure harmoniques d'amplitude  $\omega$  et exprimés par :

$$U = \phi e^{i\omega t} ; i^2 = -1 \quad (5.1)$$

l'équation en vibrations libres du barrage s'écrit :

$$K_S \phi - \omega^2 M_S \phi = 0 \quad (5.2)$$

La solution de cette équation constitue l'ensemble des vecteurs propres  $\phi_i$  représentant chacun une configuration géométrique du barrage et vibrant avec une amplitude  $\omega_i$ . Néanmoins, comme dans la plus part des cas d'études, les résultats sont exprimés et discutés en termes de périodes propres correspondantes :  $T_i = \omega_i / 2\pi$ .

D'abord, pour la validation du programme de calcul élaboré, les résultats de l'application du modèle d'éléments finis du barrage de Pine Flat, tel qu'il est réalisé par Chopra et Chakrabarti sont calculés, puis répertoriés dans le tableau 5.2 selon les deux types de modélisation des effets d'inertie de la structure ; par un système de masses concentrées et par un système de masses réparties. Le modèle consiste en un assemblage de  $N_{eb} = 136$  éléments quadrilatéraux linéaires isoparamétriques (Q4) avec une répartition de  $N_{xb} = 8$  et  $N_{yb} = 17$ , ce qui donne un nombre de 162 points nodaux qui se traduit, avec l'élimination des points à la base supposée encastree à la fondation rigide, un nombre total de degrés de liberté égal à 306.

Pour la comparaison, les résultats obtenus par les deux auteurs sont aussi présentés dans le même tableau ci dessous :

| Modes | Masses réparties | Masses concentrées | Référence |
|-------|------------------|--------------------|-----------|
| 1     | 0.256            | 0.257              | 0.256     |
| 2     | 0.127            | 0.129              | 0.125     |
| 3     | 0.091            | 0.091              | 0.092     |
| 4     | 0.071            | 0.073              | 0.072     |

Tableau 5.2. Périodes propres (sec.) du barrage de Pine Flat.

On note immédiatement, à partir de ce tableau, que les résultats obtenus par le présent code de calcul sont très proches de ceux présentés en référence, et ce, quelque soit le modèle de masse adopté pour la représentation des effets d'inertie de la structure. Ainsi, pour tirer profit des avantages que présente la structure diagonale de la matrice masse résultante, la modélisation du barrage par un système de masse concentrées sera choisie.

Dans le but de déterminer l'influence de la discrétisation suivant les deux directions horizontale et verticale, une étude du maillage optimum est effectuée sur le modèle d'éléments finis du barrage de Oued-fodda. Les résultats les plus intéressants obtenus pour les périodes des cinq premiers modes de vibration du barrage, sont reportés dans le tableau 5.3. La discrétisation est effectuée en éléments finis isoparamétriques Q4 pour différentes répartitions des éléments selon les directions horizontale et verticale.

| $N_{xb}$ | 5     | 7     | 8     | 10    |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| $N_{yb}$ | 9     | 15    | 20    | 22    |
| Modes    |       |       |       |       |
| 1        | 0.260 | 0.267 | 0.267 | 0.267 |
| 2        | 0.104 | 0.109 | 0.113 | 0.113 |
| 3        | 0.092 | 0.092 | 0.093 | 0.093 |
| 4        | 0.056 | 0.065 | 0.066 | 0.066 |
| 5        | 0.040 | 0.043 | 0.044 | 0.044 |

Tableau 5.3. Périodes propres (sec.) du barrage de Oued-fodda pour différents maillages.

Ce tableau montre, d'une part, que la sensibilité des valeurs des périodes propres calculées pour différents maillages est plus prononcée pour la discrétisation dans la direction verticale que pour la discretisation dans la direction horizontale. D'autre part, les résultats permettent d'affirmer qu'un maillage constitué de  $N_{eb} = 160$  éléments, répartis suivant  $N_{xb} = 8$  et  $N_{yb} = 20$  et donnant un nombre de degrés de liberté égale à 360, est suffisant pour la modélisation du barrage de Oued-Fodda. Des résultats très proches peuvent être obtenus par un maillage plus grossier si l'élément fini à huit nœuds (Q8) est utilisé ; en effet, une autre étude du maillage basée sur cet élément a été effectuée. Elle conduit à la discrétisation optimale de  $N_{xb} = 3$  et  $N_{yb} = 8$  et fournit des valeurs des cinq premières périodes de 0.268, 0.113, 0.093, 0.066 et 0.044 secondes.

## 5.4 Analyse du fluide du réservoir

D'une façon analogue à celle décrite pour la structure du barrage, le comportement en oscillations libres du fluide du réservoir peut être défini comme l'ensemble des valeurs des pressions ou du champ des déplacements en variations harmoniques d'amplitude  $\phi_i$  et de pulsation  $\omega_i$ . L'étude d'un tel comportement a pour but de déterminer d'une part, la position de la limite de troncature à laquelle il faut mettre, soit la condition de radiation pour le modèle d'éléments finis, soit utiliser les éléments infinis pour le modèle de couplage éléments finis-éléments infinis, d'autre part, le maillage optimal à utiliser pour le domaine de discrétisation. La caractérisation du problème par les équations (3.43) et (3.44) correspondantes à la formulation en pression et potentiel de déplacements, conduit à un système matriciel comportant des éléments nuls en diagonale et donc à des difficultés numériques. Il est, par conséquent, préférable de résoudre le problème vibratoire découlant de la formulation en champ de pression seulement. L'équation en oscillations libres se déduit de l'expression (3.18) en mettant les pressions sous la forme (5.1) et en omettant les termes du chargement et de dissipation ; elle s'écrit par :

$$\mathbf{K}_F \phi - \omega^2 \mathbf{M}_F \phi = 0 \quad (5.3)$$

Les vecteurs propres solution  $\phi_i$  représentent maintenant des valeurs de pressions. La solution de cette équation ne peut être réalisée que dans la cas où les ondes de surface sont ignorées et les matrices fluides  $\mathbf{K}_F$  et  $\mathbf{M}_F$  sont rendues définies positives par la suppression des lignes et colonnes correspondantes aux nœuds de la surface libre. A défaut de disponibilité d'une solution de référence, seul le cas du réservoir du barrage de Oued-Fodda, qui constitue le sujet des investigations, est considéré. La hauteur normale de remplissage du réservoir est  $L_f = 96.4$  m.

D'abord, il convient de déterminer le maillage à utiliser pour le modèle d'éléments finis. A cet effet la position de la limite de troncature est fixée à  $L_f = 10H_f$  à partir de l'interface fluide-structure ; cette position est a priori considérée assez loin pour considérer le réservoir infini. Le nombre d'éléments dans la direction verticale étant fixé par le maillage du barrage, il est prit  $N_{yf} = 19$  et le nombre d'éléments dans la direction horizontale est déterminé à partir des observations sur le tableau 5.4 des valeurs des périodes propres obtenues pour des nombres de pas de discrétisation croissant.

| $N_{xf}$ | 5     | 10    | 15    | 20    | 30    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Modes    |       |       |       |       |       |
| 1        | 0.267 | 0.267 | 0.267 | 0.267 | 0.267 |
| 2        | 0.251 | 0.262 | 0.262 | 0.262 | 0.262 |
| 3        | 0.231 | 0.249 | 0.249 | 0.249 | 0.249 |
| 4        | 0.209 | 0.230 | 0.231 | 0.231 | 0.232 |
| 5        | 0.181 | 0.207 | 0.210 | 0.211 | 0.212 |

Tableau 5.4. Périodes propres (sec.) du réservoir du barrage de Oued-Fodda en fonction du nombre d'éléments.

On note que la valeur de la période propre fondamentale n'est pratiquement pas sensible au raffinement du maillage. La sensibilité est d'autant plus notable que l'on considère les périodes des modes supérieurs. Néanmoins, un nombre d'éléments  $N_{xf} = 20$  est largement suffisant pour ne pas tenir compte des erreurs induites par le maillage.

Ensuite, dans le but d'évaluer l'influence du paramètre de décroissance  $L$ , utilisé dans les fonctions d'interpolation décroissantes des éléments infinis construits selon l'approche directe, sur les périodes propres du réservoir, la position de la limite de radiation est fixée proche de l'interface fluide-structure à la distance de  $L_f = 1H_f$ . Les périodes propres calculées pour des valeurs croissantes de  $L$  sont consignées dans le tableau 5.5 suivant :

| $L$   | 1     | 5     | 10    | 100   | 300   | 600   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Modes |       |       |       |       |       |       |
| 1     | 0.197 | 0.223 | 0.239 | 0.267 | 0.267 | 0.267 |
| 2     | 0.950 | 0.123 | 0.149 | 0.260 | 0.263 | 0.266 |
| 3     | 0.085 | 0.087 | 0.093 | 0.164 | 0.174 | 0.180 |
| 4     | 0.067 | 0.078 | 0.089 | 0.089 | 0.089 | 0.089 |
| 5     | 0.059 | 0.075 | 0.079 | 0.088 | 0.088 | 0.088 |

Tableau 5.5. Périodes propres (sec.) du réservoir du barrage de Oued-Fodda en fonction du paramètre  $L$ .

Il est clair, à partir de ce tableau, que les périodes propres calculées varient très peu pour des valeurs du paramètre  $L$  grandes, supérieures à 100. Toutefois, il est à remarquer que quand  $L$  dépasse la valeur 600, des problèmes d'ordre numérique peuvent survenir lors de l'exécution des codes de calcul. Ainsi, la valeur  $L = 300$  sera donc utilisée dans la suite. En outre, à partir de plusieurs expériences effectuées pour différentes positions de la limite de troncature et qu'il n'est pas nécessaire de représenter ici, il peut être observé que l'influence du paramètre  $L$  sur les résultats est d'autant plus faible que la limitation du réservoir est plus éloignée de l'interface fluide-structure. Cette influence est de plus en plus accentuée lorsque la longueur du réservoir est inférieure à  $1H_f$ .

Enfin, la position de la limite de troncature peut maintenant être étudiée en utilisant les deux modèles ; modèle d'éléments finis, avec les deux hypothèses de condition à la limite  $\Gamma_4$  : pression nulle et pression non nulle, et le modèle de couplage avec les éléments infinis selon les deux approches : approche directe et approche inverse. Le tableau 5.6 représente l'ensemble valeurs des cinq premières périodes propres calculées selon les deux modèles appliqués pour différentes longueurs  $L_f$  du réservoir.

Pour le modèle d'éléments finis, la condition à la limite ; de pression nulle ou de pression non nulle, sur  $\Gamma_4$ , est d'autant plus importante que la position de la limite de troncature est proche de l'interface fluide-structure. Cette condition devient sans influence à partir d'une longueur  $L_f$  supérieure à  $6H_f$ . Lorsque la condition de pression nulle est appliquée, les périodes propres du réservoir y compris la période fondamentale, varient fortement en fonction de la position

$L_f$ . Par contre, pour une limite libre ; condition de pression non nulle, la période fondamentale, à l'opposé des périodes des modes supérieurs, est pratiquement insensible à l'augmentation de la longueur de réservoir. L'ensemble des valeurs des périodes propres considérées, notamment des trois premières, permettent de considérer la position à  $8H_f$  comme suffisante pour l'application du modèle d'éléments finis sans tenir compte de la nature de la condition de pression appliquée à cette limite.

| $L_f$  |                    |       | $1 H_f$ | $2 H_f$ | $3 H_f$ | $4 H_f$ | $6 H_f$ | $8 H_f$ |
|--|--------------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Modèle d'éléments finis avec condition au limite | Pression non nulle | Modes |         |         |         |         |         |         |
|  |                    | 1     | 0.263   | 0.265   | 0.267   | 0.267   | 0.267   | 0.267   |
|  |                    | 2     | 0.126   | 0.193   | 0.226   | 0.240   | 0.254   | 0.259   |
|  |                    | 3     | 0.089   | 0.125   | 0.165   | 0.193   | 0.225   | 0.241   |
|  |                    | 4     | 0.076   | 0.089   | 0.124   | 0.153   | 0.193   | 0.217   |
|  | 5                  | 0.069 | 0.089   | 0.098   | 0.124   | 0.165   | 0.193   |         |
|  | Pression nulle     | 1     | 0.193   | 0.239   | 0.253   | 0.258   | 0.263   | 0.265   |
|  |                    | 2     | 0.090   | 0.154   | 0.193   | 0.217   | 0.241   | 0.251   |
|  |                    | 3     | 0.085   | 0.104   | 0.143   | 0.172   | 0.209   | 0.229   |
|  |                    | 4     | 0.066   | 0.088   | 0.110   | 0.137   | 0.178   | 0.205   |
| 5  |                    | 0.056 | 0.081   | 0.088   | 0.113   | 0.153   | 0.182   |         |
| Modèle de couplage avec les éléments infinis     | Méthode inverse    | 1     | 0.266   | 0.267   | 0.267   | 0.267   | 0.268   | 0.268   |
|  |                    | 2     | 0.240   | 0.257   | 0.262   | 0.264   | 0.266   | 0.266   |
|  |                    | 3     | 0.144   | 0.204   | 0.231   | 0.244   | 0.255   | 0.260   |
|  |                    | 4     | 0.089   | 0.137   | 0.177   | 0.203   | 0.231   | 0.245   |
|  |                    | 5     | 0.087   | 0.096   | 0.132   | 0.161   | 0.200   | 0.222   |
|  | Méthode directe    | 1     | 0.267   | 0.268   | 0.268   | 0.268   | 0.268   | 0.268   |
|  |                    | 2     | 0.263   | 0.262   | 0.265   | 0.267   | 0.267   | 0.268   |
|  |                    | 3     | 0.174   | 0.217   | 0.240   | 0.255   | 0.261   | 0.264   |
|  |                    | 4     | 0.089   | 0.142   | 0.183   | 0.211   | 0.237   | 0.249   |
|  |                    | 5     | 0.088   | 0.097   | 0.135   | 0.165   | 0.204   | 0.225   |

Tableau 5.6. Périodes propres (sec.) du réservoir du barrage de Oued-Fodda en fonction de la position de la limite de troncature.

Pour le modèle de couplage avec les éléments infinis, les deux approches directe et inverse conduisent à des résultats pratiquement identiques pour toutes les valeurs de  $L_f$ . La sensibilité à la position de la limite de troncature n'est observable qu'à partir de la considération du troisième mode de vibration. De plus, les valeurs des périodes propres, calculées par le modèle d'éléments finis à une distance loin de l'interface, peuvent être obtenues par ce modèle une distance inférieure à la moitié, et ce, seulement avec un nombre minimum d'éléments finis. Ce qui permet de réaliser des gains substantiels en temps de calcul. Enfin, pour ce modèle, la position de la limite de troncature à une distance supérieure à  $3H_f$  de l'interface fluide-structure permet d'avoir des résultats plus ou moins satisfaisant.

D'autre part, il est montré dans le tableau 5.7 que tous les modes sont confondus pour des positions de la limite de radiation assez éloignées de l'interface fluide-structure pour considérer le réservoir infini. En effet, à partir des valeurs observées sur le même tableau et qui sont obtenues pour différentes positions de la limite de troncature avec une discrétisation maximale de  $N_{xf} = 40$  éléments, une longueur égale à  $L_f = 50H_f$  conduit à des périodes propres pratiquement identiques à la période fondamentale pour la plus part des modes considérés. Cette valeur correspond exactement à la période analytique  $T = 4H_f/C$  définie dans les références [7, 36] pour un réservoir s'étendant à l'infini dans une direction et de valeur de  $T = 0.268$  secondes dans le cas du barrage de Oued-Fodda.

| $L_f$ | $20 H_f$ | $30 H_f$ | $40 H_f$ | $50 H_f$ | $100 H_f$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Modes |          |          |          |          |           |
| 1     | 0.268    | 0.268    | 0.268    | 0.268    | 0.268     |
| 2     | 0.266    | 0.267    | 0.267    | 0.268    | 0.268     |
| 3     | 0.266    | 0.266    | 0.266    | 0.267    | 0.267     |
| 4     | 0.257    | 0.263    | 0.265    | 0.266    | 0.267     |
| 5     | 0.250    | 0.259    | 0.263    | 0.266    | 0.267     |

**Tableau 5.7.** Périodes propres (sec.) du réservoir du barrage de Oued-Fodda en fonction des positions éloignées de la limite de troncature

Il est important de faire remarquer que, l'utilisation des éléments infinis ne change pas grand chose dans les résultats ci-dessus. Au contraire, pour des positions de la limite de troncature loin de l'interface, les modèles de couplage avec les éléments infinis fournissent aussi les mêmes valeurs des périodes de vibration et proches de la période fondamentale, et ce, indépendamment des paramètres utilisés pour les fonctions de décroissance dans l'approche directe ou du type d'éléments utilisé dans l'approche indirecte.

En somme, il est essentiel de souligner que la position de la limite de troncature, à laquelle il faut appliquer la condition de radiation ou bien utiliser un couplage avec les éléments infinis, est difficile à déterminer à partir de l'analyse des vibrations du réservoir indépendamment du système complet. Cependant, l'étude paramétrique effectuée permet d'une part de vérifier la validité des codes de calcul et les performances des modèles réalisés, et d'autre part, d'estimer d'une façon générale, l'influence du maillage et du type d'élément à utiliser pour la discrétisation du fluide ainsi que la longueur finie du réservoir et le paramètre de décroissance.

Des conclusions et des résultats analogues sont obtenus avec la modélisation du réservoir en utilisant l'élément fini Q8 pour le modèle d'éléments finis et de l'élément infini construit à base de cet élément pour les deux modèles de couplage. Il a été observé que cet élément permet de réaliser les mêmes proportions en gains de discrétisation puisque en principe un nombre, presque constant, de nœuds est gardé avec une discrétisation en un nombre d'éléments double lorsque le Q4 est utilisé.

## 5.5 Analyse du système couplé barrage-réservoir

Pour les problèmes des grandes structures composées, il est généralement possible de générer les modes propres de la structure complète à partir des modes propres des sous structures composantes. Ceci permet d'éviter la résolution d'un problème aux valeurs et vecteurs propres d'un système matriciel de grande dimension. Une variété de telles méthodes de synthèse modale ont été développées [14]. Le problème devient, cependant, plus compliqué dans le cas des systèmes fluide-structure du fait d'un couplage de structures de différentes natures. En effet, en plus des complexités introduites par la compressibilité du fluide, la condition à la limite interface fluide-structure induit d'importantes modifications dans les méthodes de synthèse modales. Par conséquent, il est préférable de résoudre le problème des vibrations du système barrage-réservoir, directement, par la solution des équations couplées.

Dans le cas relativement simple, où l'eau du réservoir est supposée incompressible, les variables des pressions hydrodynamiques  $\mathbf{P}$  peuvent être éliminées du problème de vibrations libres du système complet. Ce cas ne diffère alors du problème classique des modes propres des structures que par la présence du terme de masse ajoutée. Lorsque la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  est adoptée, ce terme peut être obtenu directement à partir de l'équation (3.18) dans laquelle les matrices  $\mathbf{M}_F$  et  $\mathbf{C}_F$  sont nulles. Il est ensuite remplacé dans l'équation (3.17) qui devient, sans la prise en compte des termes du chargement et d'amortissement, sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}_s]\{\mathbf{U}\} - \omega^2 \left[ \mathbf{M}_s + \rho_f \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \right] \{\mathbf{U}\} = 0 \quad (5.4)$$

Lorsque la formulation  $(\mathbf{u}, \phi, p)$  est utilisée pour la description du système, le terme de masse ajoutée s'obtient en considérant d'abord les équations (3.43) et (3.44) à partir desquelles il devient possible d'exprimer les variables  $\mathbf{P}$  et  $\phi$  puisque le fluide est incompressible, soit :

$$\ddot{\phi} = -\mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{U}} \quad , \quad \mathbf{P} = -\mathbf{K}_\phi^{T-1} \mathbf{M}_\phi \ddot{\phi} = \mathbf{K}_\phi^{T-1} \mathbf{M}_\phi \mathbf{K}_\phi^T \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{U}} \quad (5.5)$$

Ensuite, par substitution de  $\mathbf{P}$  dans (3.17), l'équation des vibrations du système devient :

$$[\mathbf{K}_s]\{\mathbf{U}\} - \omega^2 \left[ \mathbf{M}_s + \mathbf{Q} \mathbf{K}_\phi^{T-1} \mathbf{M}_\phi \mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{Q}^T \right] \{\mathbf{U}\} = 0 \quad (5.6)$$

Bien entendu, pour ce type de problème où le fluide est considéré incompressible, vu le nombre de matrices intervenant dans les produits du terme de la masse ajoutée, il est préférable de résoudre le problème dynamique tel qu'il est caractérisé par l'équation (5.4). Cette équation est d'ailleurs la plus usitée en littérature. Pour les systèmes barrage réservoir, la compressibilité de l'eau ne peut être négligée et les systèmes matriciels doivent être considérés et résolus couplés.

### 5.5.1 Formulation (u, p)

Le problème des vibrations libres découlant de cette approche est défini par le système (3.38), l'équation aux valeurs et vecteurs propres correspondante s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

Comme il a été fait remarqué, ce système n'est pas symétrique, par conséquent, les méthodes d'analyse modales usuelles ne sont pas directement applicables. Cependant on peut aisément montrer qu'il peut être réécrit sous différentes formes symétriques qu'il est proposé de classer, ici, en deux types principaux de couplage ; un couplage "masse" comprenant plusieurs techniques dont les plus importantes sont citées ci-après, et un couplage "raideur" dans lequel est classée la technique de symétrisation développée dans le cadre de ce travail.

#### 5.5.1.1 Symétrisation par couplage-masse

Pour ce type, le couplage apparaît dans la matrice masse du système. Trois variantes sont présentées ci-après.

- Un changement de variable :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{C^2} \mathbf{M}_F \mathbf{P} \quad (5.8)$$

proposé initialement par Zienkiewicz [14] permet d'obtenir une forme symétrique faisant intervenir l'inversion des deux matrices fluides et conduit au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{C^2}{\rho_f} \mathbf{M}_F^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f} \mathbf{K}_F^{-1} & \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} & \mathbf{M}_s + \rho_f \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

- Une autre forme présentant le double avantage de garder le problème posé en variables de bases (U,P) et de ne faire intervenir que l'inversion d'une seule matrice (masse fluide) peut être obtenue [50] et s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s + \rho_f \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T & \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \\ \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \mathbf{Q}^T & \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

Pour les deux variantes précédentes, les effets des ondes de surface sur les caractéristiques vibratoires du système ne peuvent être pris en compte du fait que les matrices fluides ne sont pas définies positives ; les nœuds de la surface libre déformée n'étant pas connus a priori.

- Une troisième variante permettant d'éviter l'inversion des matrices fluides et par conséquent de prendre en compte les effets des ondes de surface est présentée dans la référence [14]. Cette forme fait intervenir l'inversion de la matrice raideur de la structure et pose les variables de base en termes de pressions dans le réservoir et d'accélération dans la structure.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f} \mathbf{K}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \ddot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_F + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \\ -\mathbf{M}_S^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{M}_S \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \ddot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

De toute évidence, cette variante ne peut apporter des améliorations sensibles en termes de performance numérique par rapport aux deux variantes précédentes du fait du volume des calculs découlant de la nature spécifique des produits matriciels induits.

### 5.5.1.2 Symétrisation par couplage-raideur

Dans ce cas, le couplage proposé apparaît dans la matrice des raideurs du système. La technique fait intervenir l'inversion de la matrice masse de la structure et permet de garder le problème aux valeurs propres posé en termes de variables de base ( $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{P}$ ) tout en permettant d'inclure aisément sur le plan numérique l'effet des ondes de surface. Le système symétrique se présente alors sous la forme [52, 53] :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f} \mathbf{K}_F + \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_F \\ -\mathbf{K}_S^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{K}_S^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_S^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Dans le cas où la structure est modélisée par un système de masses concentrées ; cas le plus fréquent en pratique, le processus d'inversion numérique de la matrice masse peut être évité puisque le calcul de  $\mathbf{M}_S^{-1}$  est immédiat :

$$\mathbf{M}_S^{-1} = \frac{1}{m_{ii}} \mathbf{I} \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité et  $m_{ii}$  les éléments de la matrice masse. En outre, la configuration diagonale de la matrice  $\mathbf{M}_S^{-1}$  intervenant dans le produit des trois matrices, qui apparaît dans la forme symétrique proposée, permet de réduire considérablement le volume des calculs et d'atteindre un gain allant jusqu'à 65% en temps d'exécution.

### 5.5.2 Formulation ( $\mathbf{u}$ , $\phi$ , $\mathbf{p}$ )

Le problème aux valeurs et vecteurs propres découlant de cette approche se déduit à partir du système d'équations (3.51). L'élimination des termes de dissipation et du chargement de l'équation permet de caractériser le problème des vibrations du système couplé barrage-reservoir par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\phi^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

Bien que ce système est symétrique, comme il a été indiqué précédemment, il présente un inconvénient majeur ; la présence des éléments nuls, en diagonales des matrices masse et raideur, rendent l'application de la méthode de calcul des modes propres par sous-espaces impossible. Ce qui impose le condensation de la variable  $\mathbf{P}$  ayant les coefficients nuls dans la matrice masse.

#### 5.5.2.1 Condensation de la variable $\mathbf{P}$

L'écriture du système en ses trois équations composantes permet de remplacer cette variable dans la première et la deuxième par son expression obtenus à partir de la troisième équation :

$$\mathbf{P} = -\mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{U} - \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{K}_\phi \phi \quad (5.15)$$

le système condensé s'écrit alors par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s - \mathbf{Q} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{Q}^T & -\mathbf{Q} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{K}_\phi \\ -\mathbf{K}_\phi^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{Q}^T & -\mathbf{K}_\phi^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{K}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

Il est clair que ce système introduit un couplage de type raideur à variable de base ( $\mathbf{u}$ ,  $\phi$ ). Il serait préférable du point de vue pratique de garder le problème posé en termes de déplacements dans la structure et de pressions dans le réservoir, ces variables représentent pour la structure le chargement et la réponse. La condensation de la variable  $\phi$  ou même de  $\mathbf{U}$  ne conduit pas à un système symétrique. Le calcul de la pression et du chargement sur la face amont du barrage peut être effectué selon la relation (5.1) ou bien, de préférence, à partir de la troisième équation du système de base, par :

$$\mathbf{P} = -\omega^2 \mathbf{K}_\phi^T \mathbf{M}_\phi^{-1} \mathbf{M}_\phi \phi = \mathbf{K}_\phi^T \mathbf{M}_\phi^{-1} \mathbf{M}_\phi \ddot{\phi} \quad (5.17)$$

La relation précédente se réduit à la simple égalité entre la pression et la dérivée seconde des potentiels des déplacements lorsque la même interpolation nodale est utilisée pour les deux variables, ce qui est d'ailleurs réalisé dans ce travail pour minimiser le volume des calculs et des modifications nécessaires aux modèles d'éléments finis et de couplage éléments finis-éléments infinis basés sur la formulation  $(u, p)$ .

Il est aussi important de noter que la solution du système (2.10) requiert un volume de calcul et un espace mémoire importants. En effet, la nature des produits matriciels intervenant dans la matrice raideur couplée introduisent, en plus de l'inversion de la matrice fluide  $K_p$ , un nombre d'opérations très élevé pour effectuer le produit et un stockage en mémoire volumineux du résultat qui est une matrice pleine. Ceci permet d'affirmer que la technique de symétrisation proposée, introduisant aussi un couplage raideur, pour la formulation en déplacements-pressions demeure, comparativement aux autres techniques examinées, la plus performante. L'introduction du potentiel des vitesses au lieu du potentiel des déplacements, dans certains travaux [38], induit le même type des produits matriciels et conduit donc aux mêmes problèmes numériques.

### 5.5.3 Système Barrage-réservoir de Pine Flat

De nouveau, dans le même esprit de comparaison, le cas du barrage de Pine Flat est considéré en premier. L'analyse complète de la réponse du barrage, avec inclusion des effets d'interaction hydrodynamique, effectuée par Chopra et Chakrabarti suivant la méthode semi-analytique, développée dans la même référence, permet de relever les quatre premières périodes propres du système couplé et de les évaluer à 0.345, 0.130, 0.092 et 0.076 secondes. Le résultat découlant de ces valeurs consiste à faire remarquer que l'interaction avec l'eau a pour effet l'allongement des périodes de vibrations du barrage, la période fondamentale considérablement et les périodes des modes supérieurs à un degré moindre. L'application des modèles d'éléments finis, décrits précédemment, pour ce système conduisent, pour toutes les variantes utilisées, à la même valeur de la période fondamentale, cependant, pour les périodes des modes supérieurs, une tendance inverse est observée ; l'allongement de ces périodes est au contraire plus important. Le tableau 5.8 regroupe les valeurs des quatre premières périodes de vibrations calculées avec le modèle d'élément finis, sans imposer la condition de pression nulle sur la limite de troncature du réservoir, et les deux modèles de couplage éléments finis - éléments infinis établis suivant la méthode directe et la méthode inverse. Ces modèles sont appliquées, pour les deux formulations : déplacements-pressions qui correspond à la solution de l'équation (5.12) et déplacements-pressions-potentiel de déplacements caractérisée par l'équation (5.10). La limite de troncature est fixée à des positions variables de distances  $L_T$  à partir de l'interface fluide-structure. Le nombre d'éléments finis utilisée pour le barrage étant déterminé plus haut et celui utilisé pour la discrétisation du fluide varie suivant la longueur prise pour le réservoir. Le paramètre de décroissance des fonctions de forme d'éléments infinis dans l'approche directe est fixé, compte tenu des résultats précédents, à  $L = 300$ .

|                                |                  | $L_f$   | $0.1 H_f$ | $0.5 H_f$ | $1 H_f$ | $2 H_f$ | $4 H_f$ | $8 H_f$ |       |
|--------------------------------|------------------|---------|-----------|-----------|---------|---------|---------|---------|-------|
| Formulation (u, p)             | Eléments finis   | Modes   |           |           |         |         |         |         |       |
|                                |                  | 1       | 0.501     | 0.378     | 0.362   | 0.344   | 0.343   | 0.333   |       |
|                                |                  | 2       | 0.234     | 0.249     | 0.270   | 0.278   | 0.309   | 0.319   |       |
|                                |                  | 3       | 0.131     | 0.133     | 0.159   | 0.223   | 0.268   | 0.299   |       |
|                                | 4                | 0.095   | 0.105     | 0.129     | 0.151   | 0.228   | 0.274   |         |       |
|                                | Eléments infinis | Inverse | 1         | 0.341     | 0.342   | 0.340   | 0.338   | 0.336   | 0.333 |
|                                |                  |         | 2         | 0.281     | 0.306   | 0.313   | 0.319   | 0.322   | 0.322 |
|                                |                  |         | 3         | 0.195     | 0.242   | 0.257   | 0.277   | 0.304   | 0.318 |
|                                |                  |         | 4         | 0.129     | 0.138   | 0.171   | 0.230   | 0.263   | 0.298 |
|                                | Eléments infinis | Directe | 1         | 0.343     | 0.343   | 0.340   | 0.334   | 0.334   | 0.333 |
|                                |                  |         | 2         | 0.293     | 0.317   | 0.321   | 0.322   | 0.322   | 0.322 |
|                                |                  |         | 3         | 0.223     | 0.268   | 0.286   | 0.312   | 0.320   | 0.322 |
| 4                              |                  |         | 0.131     | 0.147     | 0.203   | 0.246   | 0.272   | 0.305   |       |
| Formulation (u, $\varphi$ , p) | Eléments finis   | 1       | 0.330     | 0.324     | 0.328   | 0.325   | 0.324   | 0.323   |       |
|                                |                  | 2       | 0.248     | 0.256     | 0.255   | 0.257   | 0.292   | 0.314   |       |
|                                |                  | 3       | 0.127     | 0.129     | 0.150   | 0.232   | 0.256   | 0.290   |       |
|                                |                  | 4       | 0.109     | 0.107     | 0.129   | 0.148   | 0.232   | 0.263   |       |
|                                | Eléments infinis | Inverse | 1         | 0.320     | 0.321   | 0.323   | 0.323   | 0.323   | 0.323 |
|                                |                  |         | 2         | 0.256     | 0.269   | 0.298   | 0.313   | 0.320   | 0.322 |
|                                |                  |         | 3         | 0.194     | 0.249   | 0.254   | 0.257   | 0.294   | 0.314 |
|                                |                  |         | 4         | 0.128     | 0.130   | 0.169   | 0.242   | 0.256   | 0.293 |
|                                | Eléments infinis | Directe | 1         | 0.321     | 0.323   | 0.323   | 0.323   | 0.323   | 0.323 |
|                                |                  |         | 2         | 0.293     | 0.321   | 0.322   | 0.322   | 0.322   | 0.322 |
|                                |                  |         | 3         | 0.256     | 0.257   | 0.257   | 0.284   | 0.311   | 0.320 |
|                                |                  |         | 4         | 0.129     | 0.135   | 0.209   | 0.253   | 0.257   | 0.299 |

Tableau 5.8. Périodes propres (sec.) du système barrage-réservoir de Pine Flate en fonction de la position de la limite de troncature.

Il convient de noter d'abord que les conclusions ressorties à partir de l'étude du réservoir seul restent valables pour le cas du système couplé indépendamment de la formulation utilisée. Le couplage avec les éléments infinis permet dans le cas de ce système de réduire la distance de troncature dans le réservoir jusqu'à  $0.1H_f$  sans altérer les valeurs des trois premières périodes. Cette réduction peut être poursuivie à  $0.01H_f$  pour la période fondamentale avec un nombre d'élément dans la direction horizontale minimal : un seul élément fini couplé à un autre infini. La formulation (u,  $\varphi$ , p) fournit des valeurs des périodes inférieures à celles calculées selon la formulation (u, p) et ce quelque soit les modèles utilisés sans toutefois changer l'ordre de grandeurs et des conclusions qui en découlent. Les modèles d'éléments finis permettent non seulement de constater le couplage entre les modes de vibrations du système mais aussi d'approcher la solution semi-analytique avec les paramètres  $L > 600$  et  $L_f = 0.001H_f$  qui donnent des valeurs des périodes égales à : 0.295, 0.143, 0.098 et 0.09 sec.

### 5.5.4 Système Barrage-réservoir de Oued-Fodda

Sur la base de l'étude paramétrique précédente des modèles d'éléments finis, le comportement en vibrations libre du système couplé barrage-réservoir de Oued-Fodda peut être analysé pour déterminer l'influence des effets d'interaction fluide-structure caractérisés notamment par le taux de remplissage du réservoir, la compressibilité de l'eau et les ondes de surface. La position de la limite de troncature du réservoir est fixée à  $1H_f$ . Cette position est largement éloignée pour inclure l'hypothèse d'un réservoir non borné lorsque les éléments infinis sont utilisés. Les calculs sont effectués avec le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis basé sur la méthode directe.

#### 5.5.4.1 Effet du taux de remplissage du réservoir

Le tableau 5.9 ci-dessous représente les périodes des cinq premiers modes de vibration du système, calculées pour diverses conditions du taux de remplissage du réservoir, d'eau compressible, par rapport à la hauteur du barrage  $H_b$ .

| Modes | Barrage vide (0.0H) | 0.25H | 0.5H  | 0.75H | Hauteur normale (0.95H) | H     |
|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------------------------|-------|
| 1     | 0.260               | 0.260 | 0.261 | 0.268 | 0.307                   | 0.321 |
| 2     | 0.103               | 0.104 | 0.140 | 0.208 | 0.255                   | 0.265 |
| 3     | 0.092               | 0.092 | 0.133 | 0.186 | 0.213                   | 0.217 |
| 4     | 0.056               | 0.068 | 0.116 | 0.147 | 0.161                   | 0.163 |
| 5     | 0.040               | 0.068 | 0.103 | 0.102 | 0.119                   | 0.120 |

Tableau 5.9. Périodes propres (sec.) en fonction du taux de remplissage

Il est à remarquer, dans ce cas aussi, que l'interaction hydrodynamique a pour effet principal l'allongement des périodes de vibration du barrage notamment pour les taux de remplissage supérieurs à 50%. Il peut être également constaté que les valeurs des périodes des mode supérieurs, pour une configuration donnée du système barrage-réservoir, se rapprochent de la valeur de la période fondamentale du système correspondant. Ce rapprochement est d'autant plus important que le taux de remplissage du réservoir est plus élevé.

#### 5.5.4.2 Effet de la compressibilité de l'eau

L'effet de la compressibilité de l'eau est examiné avec le même modèle de couplage d'éléments finis et infinis. L'influence de la compressibilité est caractérisée par des valeurs croissantes de la célérité des ondes de pression dans l'eau. Le taux de remplissage du réservoir est fixé à la hauteur normale  $H_f = 65.5\text{m}$ . Les valeurs des périodes propres obtenues par ce modèle sont comparées à celles calculées lors de l'étude du même système par éléments finis [50], dans l'hypothèse d'un fluide incompressible et avec le modèle de masse ajoutée de Westergaard.

On voit dans le tableau 5.10, ci-après, que le modèle d'éléments finis utilisant un fluide compressible (cas le plus réaliste) fournit des valeurs de périodes plus grandes que celles du modèle d'éléments finis utilisant un fluide incompressible pour lequel on observe une nette séparation des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de vibration par rapport au mode fondamental. En outre, on remarque que lorsque la célérité des ondes de pressions est égale à  $4C$ , les deux modèles fournissent des résultats pratiquement identiques.

| Modes | Modèles de masse ajoutée<br>De Westergaard [60] | Modèle d'éléments finis |       |       |       |                       |
|-------|---|-------------------------|-------|-------|-------|-----------------------|
|       |   | Fluide compressible     |       |       |       | Fluide incompressible |
|       |   | C                       | 2C    | 3C    | 4C    |                       |
| 1     | 0.328   | 0.307                   | 0.288 | 0.287 | 0.286 | 0.285                 |
| 2     | 0.131   | 0.255                   | 0.135 | 0.115 | 0.113 | 0.112                 |
| 3     | 0.094   | 0.213                   | 0.119 | 0.092 | 0.092 | 0.092                 |
| 4     | 0.079   | 0.161                   | 0.098 | 0.086 | 0.060 | 0.059                 |
| 5     | 0.063   | 0.119                   | 0.092 | 0.072 | 0.052 | 0.040                 |

**Tableau 3.** Périodes propres (sec.) en fonction de la compressibilité et comparaison avec le modèle de masse ajoutée de Westergaard

Le modèle de masse ajoutée de Westergaard fournit une valeur de période du mode fondamental très proche de celle du modèle utilisant un fluide compressible. A contrario, les valeurs des périodes des modes supérieurs sont plus proches de celles du modèle d'éléments finis fondé sur l'hypothèse d'un fluide incompressible. La différence des résultats obtenus à partir du modèle de Westergaard et du modèle d'éléments finis utilisant l'hypothèse d'un fluide incompressible reflète l'effet de la distribution de masse dans le fluide.

#### 5.5.4.3 Effet des ondes de surface

L'effet des ondes de surface ne peut être évalué qu'approximativement et seulement par solution de l'équation (5.12) qui permet la prise en compte des matrices fluides non définies positives. L'inclusion de ces effets, dans la modélisation mathématique du problème, par considération d'une surface libre moyenne par rapport à laquelle la pression est supposée hydrostatique n'est valable que pour de petites fluctuations de la surface réelle. La modélisation des problèmes où les ondes gravitaires sont prépondérantes ne constitue pas le sujet de cette étude ; seule la condition à appliquer au niveau de la surface libre du réservoir est à vérifier. La technique du décalage spectral est à utiliser conjointement avec la méthode du sous espace pour éliminer les mode parasites, le nombre de vecteurs d'essais est augmenté de 20 à 30 pour pouvoir extraire les modes à fréquences nulles.

Les valeurs des périodes propres des cinq premiers modes, calculées avec la prise en compte des ondes de surface dans le même modèle et paramètres utilisé pour les effets précédents, sont : 0.31, 0.257, 0.216, 0.164 et 0.123 secondes. Ces valeurs indiquent que la condition de pression non nulle à la surface libre et la prise en compte des effets d'ondes de surface induisent une diminution négligeable des périodes propres de vibration du système.

# ANALYSE DE LA REPONSE SISMIQUE

*" Pour la Physique je croirais n'y rien savoir si je ne savais que dire comment les choses peuvent être sans démontrer qu'elles ne peuvent être autrement "*

*Descartes*

## **CHAPITRE 6**

# **ANALYSE DE LA REPONSE**

### **6.1 Introduction**

L'analyse du comportement dynamique des barrages est synonyme de l'analyse de la réponse sismique. Le séisme est principalement le seul effet dynamique qu'une structure, telle qu'un barrage, est amenée à supporter. La représentation statique des forces sismiques est une hypothèse excessivement simplificatrice, car elle élimine totalement la réponse dynamique et les effets inertiels. Cette représentation reste suffisante pour une estimation grossière du comportement dynamique. Il est donc nécessaire d'adopter des techniques de calcul de la réponse permettant d'obtenir, pour les efforts sismiques, la même précision que pour les efforts statiques.

En générale, pour des modèles d'éléments finis, la détermination d'un comportement dynamique revient à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre de même forme que ceux définis par les équations (3.38) et (3.51) pour les systèmes couplés barrage-réservoir. En principe, la solution de telles équations peut être obtenue par les procédures standards de résolution d'équations différentielles à coefficients constants. Cependant, ces procédures peuvent devenir très coûteuses si la taille des matrices est grande. En pratique, dans les études par éléments finis, les techniques usitées sont divisées en méthodes d'intégration directe et méthodes de superposition modale.

Le choix de la méthode à appliquer est dicté par des critères principalement numériques. Dans le cas des systèmes d'équations à amortissement proportionnel, comparativement aux méthodes d'intégration directe, la méthode de superposition modale est plus utilisée du fait des gains en temps de calcul qu'elle permet de réaliser en réduisant considérablement la taille des matrices par un changement de base en coordonnées généralisées [3]. Dans beaucoup de cas d'études, l'hypothèse d'amortissement proportionnel est satisfaisante et permet de représenter convenablement les effets dissipatifs ; l'utilisation de la méthode de superposition modale est alors recommandée. Cependant, pour les structures ayant des propriétés matériels fortement variables, un amortissement non proportionnel peut être considéré. Par exemple dans les problèmes d'interaction structure-fondation, un amortissement plus important peut être observé dans la fondation que dans la structure de surface, et dans les problèmes d'interaction fluide-structure, différents types d'amortissement peuvent être introduits par la présence du fluide, ce qui conduit à un amortissement global non proportionnel. La solution d'un système d'équations avec un tel amortissement nécessite l'utilisation d'une des méthodes d'intégration directe sans modifications, parce que les propriétés de la matrice d'amortissement n'influent pas les procédures de résolution [53].

Dans le cas des systèmes couplés barrage-réservoir, l'inclusion des effets hydrodynamiques et de la compressibilité de l'eau dans l'analyse de la réponse sismique du barrage introduit un amortissement non proportionnel. Pour les modèles d'eau incompressible, le système d'équations couplé se réduit à un système avec masse ajoutée et le problème devient similaire à celui d'une structure simple. Par contre, pour les modèles d'eau compressible, un schéma d'intégration directe pas à pas du système d'équations différentielles exprimées en coordonnées géométriques doit être utilisé pour inclure efficacement l'amortissement non proportionnel du système barrage-réservoir. De plus, la nature des matrices couplées induite par la formulation  $(\mathbf{u}, \phi, p)$  impose, du fait de la présence d'éléments diagonaux nuls dans les matrices couplées, la considération du système discret correspondant à la formulation  $(\mathbf{u}, p)$ .

Dans ce chapitre, la réponse dynamique du système de Oued-Fodda a été déterminée en termes de plusieurs paramètres de réponse spécifiques incluant les déplacements nodaux, les contraintes élémentaires dans la structure du barrage, et les pressions nodales dans l'eau du réservoir. La distribution des coefficients de pressions hydrodynamiques sur le parement amont ainsi que l'histoire de réponse en pressions à la base du barrage ont été déterminées. Un résumé des principaux résultats numériques est présenté pour illustrer la performance relative des modèles d'interaction fluide-structure examinés.

## 6.2 Les excitations dynamiques considérées

Les excitations dynamiques considérées dans cette étude sont les enregistrements accélérométriques des composantes horizontales de la réplique d'El-Attaf du 29-10-1980 du séisme d'El-Asnam, et celles du tremblement de terre de Loma Preita 1989 ainsi que diverses excitations harmoniques artificielles pour la validation des modèles et l'étude des effets de la fréquence d'excitation sismique. Le deux séismes sont représentées sur la figure 6.1 en (a) pour le celui d'El-asnam et en (b) pour celui de Loma Preita.

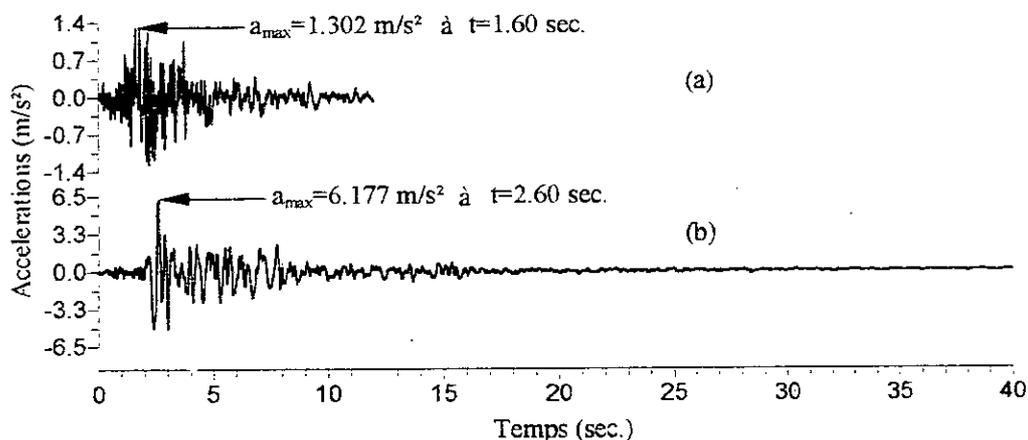


Figure 6.1. Les accélérations sismiques considérées dans l'étude.  
(a) El-Asnam 1980, (b) Loma Preita 1989.

### 6.3 Analyse avec hypothèse de barrage rigide

Dans le but de tester l'efficacité et la validé des modèles de calcul considérés, l'analyse du système barrage-réservoir de Oued-fodda est d'abord effectuée sur la base d'hypothèse d'un barrage infiniment rigide pour laquelle la solution analytique de Westergaard est applicable. L'eau dans le réservoir est prise linéairement compressible. Les accélérations sismiques sont supposées horizontales et harmoniques avec une période  $T = 0.4$  sec. L'amplitude maximale est prise égale à l'unité.

Les modèles d'éléments infinis sont utilisés pour le réservoir de hauteur  $H_f$  s'étendant à l'infini dans la direction amont. Les résultats correspondants pour le coefficient de pression hydrodynamique  $C_p = P / \rho g H_f$  sont présentés dans la figures 6.2 pour l'approche directe par fonctions de décroissance et dans la figure 6.3 pour l'approche inverse basée sur l'élément quadrilatéral linéaire à quatre nœuds Q4. La pression  $P$  utilisée pour le calcul du coefficient de pression  $C_p$  est la pression qui correspond à la composante horizontale maximale des forces hydrodynamiques exercées sur le parement amont du barrage durant l'application de l'excitation.

Pour l'approche directe par des fonctions décroissantes, le même type d'élément (Q4) est utilisé avec une décroissance exponentielle dans la direction amont. Le réservoir est idéalisé par  $18 \times 15 = 270$  éléments finis et 18 éléments infinis dans la direction amont. La position de la limite de troncature est fixée à  $L_f = H_f$  à partir du fond de l'interface fluide-structure. Pour l'approche inverse basée, sur la transformation géométrique de l'élément Q4 infinis dans la direction amont, la position de la limite de troncature est variée telle que  $L_f = 1, 5$  et  $10 H_f$ .

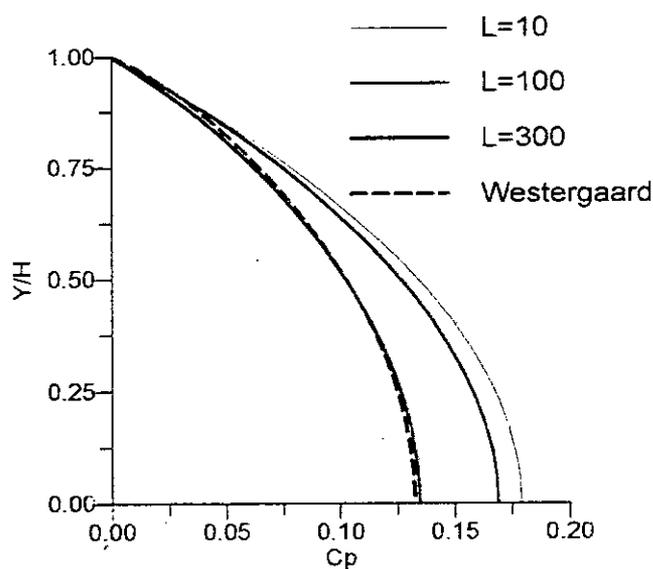


Figure 6.2. Coefficient de pressions hydrodynamiques selon la théorie de Westergaard et l'approche directe d'éléments infinis.

Il est observé sur la figure 6.2, qu'une concordance, de résultats très proches, est obtenue pour plusieurs valeurs du paramètre de sévérité  $L$  proches de 300. Les valeurs de  $L$  supérieures à 300 n'ont pratiquement aucune influence sur les résultats concernant la distribution des pressions sur le parement amont du barrage. En outre, des tendances analogues sont obtenues lorsque la limite de troncature est déplacée à des positions de plus en plus éloignées de l'interface fluide-structure pour lesquelles l'influence du paramètre de sévérité diminue.

Cependant, il est à noter à partir de la figure 6.4, que des erreurs considérables peuvent être induites quand l'approche inverse est utilisée avec la position de la limite de troncature fixée à  $L_f = 1H_f$ . Il est frappant qu'un accord satisfaisant avec la solution analytique de Westergaard ne peut être obtenu à moins que la limite de la troncature soit déplacée latéralement jusqu'à la position  $L_f = 10H_f$ . Des conclusions similaires sont obtenues avec l'utilisation d'un modèle d'élément fini avec condition au limite radiative. L'augmentation des pressions, pour des positions de la limite de troncature proches de l'interface fluide-structure, peut être interprétée comme effet de réflexions d'ondes de pressions vers l'intérieur du réservoir. Le seul facteur à l'origine de cette réflexion est la compressibilité de l'eau puisque ce paramètre est isolé dans le cas d'hypothèse présent.

Il peut être ainsi conclu que, pour le cas d'un barrage rigide et comparativement aux modèles d'éléments finis, l'approche directe dans les modèles de couplage avec les éléments infinis permet d'améliorer sensiblement les résultats et de réaliser des gains importants en temps et volume de calculs. Par contre, l'approche inverse s'est avérée sans grands apports dans le cas où l'élément de base est le Q4. D'autres éléments ne sont pas testés, une variation quadratique dans la direction horizontale peut introduire des améliorations.

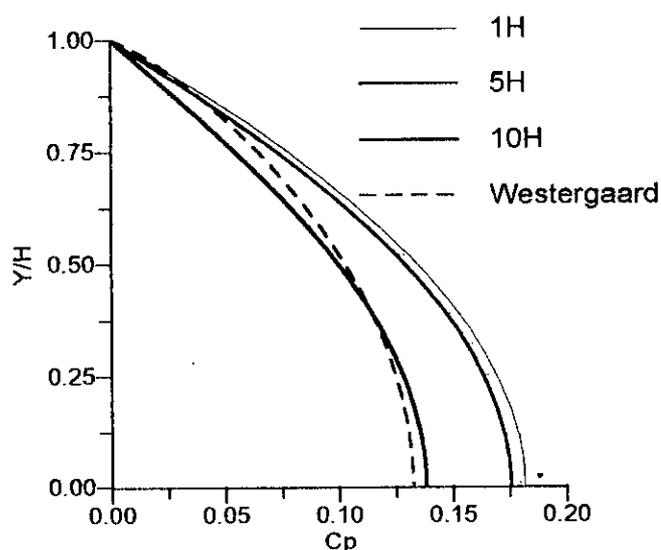


Figure 6.3. Coefficient de pressions hydrodynamiques selon la théorie de Westergaard et l'approche inverse d'éléments infinis.

## 6.4 Analyse avec hypothèse de barrage flexible

Le barrage est maintenant supposé flexible modélisé par un assemblage de  $20 \times 8 = 160$  éléments finis quadrilatéraux isoparamétriques linéaires (Q4). Le même modèle est utilisé pour le calcul du réservoir. L'histoire de la réponse est calculée pour les dix premières secondes qui paraissent être critiques pour la réponse du système barrage-réservoir. La réponse sismique du système a été déterminée en termes de déplacements nodaux de la structure du barrage et de pressions nodales à l'intérieur du réservoir. Quelques résultats, relativement importants, sont donnés ci-après pour montrer les variations temporelles et les valeurs maximales des quantités les plus intéressantes.

### 6.4.1 Le coefficient de pression maximale

La figure 6.3 montre la distribution du coefficient de pression hydrodynamique s'exerçant à l'interface fluide-structure du système barrage-réservoir de Oued-Fodda, et résultant de l'application de la composante horizontale du séisme de Loma Preita 1989 (Figure 6.1). Les résultats obtenus, en utilisant le modèle d'éléments finis avec et sans limite de radiation et le modèle de couplage avec les éléments infinis selon les deux approches, sont montrés sur la figure 6.4 ; en (a) pour une position de la limite de troncature fixée à  $L_f = 3H$  et en (b) pour une position de  $L_f = 1H$ .

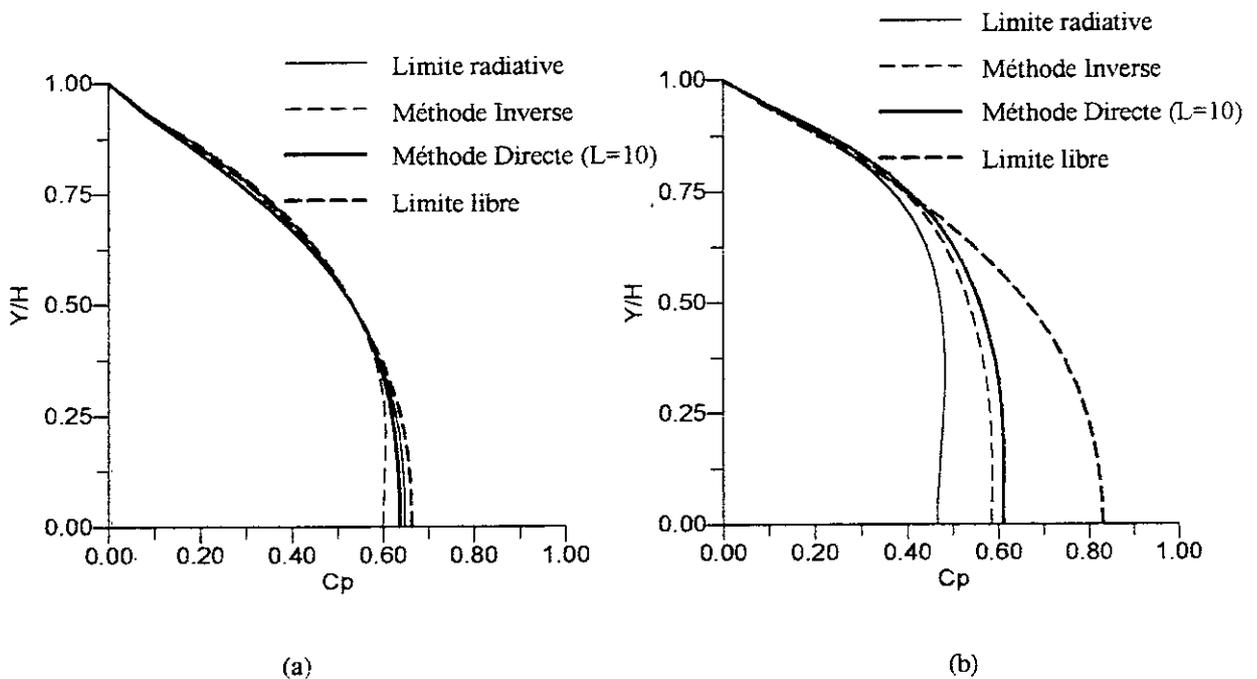


Figure 6.4. Pressions hydrodynamiques obtenues avec hypothèse de barrage flexible.  
La limite de troncature est fixée à : (a)  $x=3H$  and (b)  $x=1H$

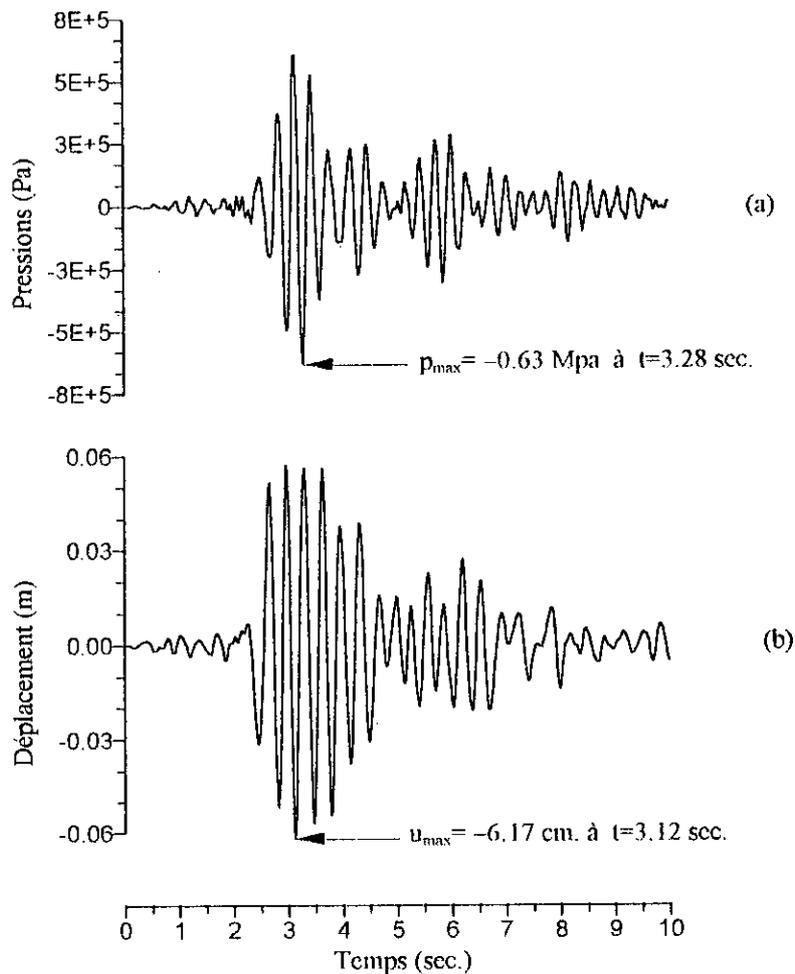
A partir de la figure 6.4 (a), il est à constater que quand la limite de la troncature est localisée à  $L_f = 3H$ , pour laquelle le nombre des éléments finis dans la direction  $x$  égale à 30, tous les modèles considérés conduisent à des résultats semblables. Les résultats obtenus en utilisant une condition au limite libre à la surface de troncature du modèle d'éléments finis indique que la solution est pratiquement non affectée par les réflexions d'ondes de pression. La solution correspondante peut donc être considérée comme une solution de référence.

Pour évaluer la performance des modèles de couplage avec les éléments infinis, la limite de troncature est déplacée à la position  $L_f = 1H$  et le nombre des éléments finis dans la direction correspondante est maintenant réduit à 15. Les résultats correspondant, reportés dans la figure 6.4 (b), montrent clairement qu'il existe des différences considérables entre les solutions dérivées de l'application des modèles d'éléments finis et celles des modèles de couplage avec les éléments infinis. Il est clair qu'à cause du phénomène de réflexion d'ondes, le modèle d'éléments finis conduit à une diminution, par dissipation, de la pression dans le cas où une limite de radiation est utilisée et à une augmentation substantielle des pressions hydrodynamiques si une limite libre est utilisée avec aucune condition. Cependant, il devrait être remarqué à partir de la même figure qu'un bon accord peut être observé entre la solution de référence précisée en (a) et les résultats calculés par les modèles de couplage avec les éléments infinis, indépendamment de la variante considérée dans l'analyse. De plus, il est valable de noter qu'une valeur plutôt basse du paramètre de sévérité est suffisante dans le cas présent.

#### 6.4.2 Histoires de la réponse

La réponse dynamique du système fluide-structure est représentée dans la figure 6.5 en (a) pour les pressions de hydrodynamiques calculées à la base du barrage, et en (b) pour les déplacements horizontaux calculés à la crête. Le taux d'amortissement critique dans la structure du barrage est fixé à 5%. Cette solution de référence est obtenue en utilisant le modèle d'éléments finis avec une limite de radiation localisée à une distance  $L_f = 3H$  de l'interface barrage-réservoir. Trente (30) éléments finis sont utilisés dans la direction amont pour modéliser le fluide du réservoir et le même nombre d'éléments que précédemment est utilisé pour la modélisation du barrage.

Il est intéressant de remarquer que la réponse se comporte en battements. Les graphes représentant les déplacements et les pressions sont composés d'un ensemble de paquets amortis. Ce comportement est plus clair dans l'allure des pressions, il est cependant, plus amorti et difficile à déceler dans le graphe des déplacements ; le taux d'amortissement, par les effets visqueux dans la structure est plus important que celui des effets radiatifs dans le fluide. Le maximum des déplacements est atteint en premier avant celui des pressions et après 0.52 secondes de retard par rapport au maximum des accélérations sismique. Les deux pics des déplacements et de la pression sont différés d'un temps très court de 0.16 secondes.



**Figure 6.5.** Solution de référence obtenue par le modèle d'éléments finis avec  $L_f = 3H$   
 (a) Pressions hydrodynamiques au fond.  
 (b) Déplacements horizontaux à la crête.

Dans les figures 6.6 et 6.7 sont exposés les résultats de la réponse obtenus en utilisant les deux variantes du modèle de couplage avec les éléments infinis et un modèle un modèle d'éléments finis avec une limite de rayonnement. La limite de troncature est fixée à  $L_f = 1H$ . Seulement 15 éléments ont été utilisés pour la discrétisation du réservoir dans la direction amont. La comparaison de ces résultats avec ceux de la figure 6.5 permet de conclure que :

- La réponse en terme de déplacements est moins sensible à la position de la limite de troncature que celle exprimée en terme de pressions hydrodynamiques. Le maximum des déplacements et les temps d'occurrence correspondants sont remarquablement semblable pour tous les modèles en dépit du nombre relativement petit d'éléments finis utilisés pour la discrétisation du réservoir.

- Les maximums des pressions hydrodynamiques et les temps de leurs production sont reproduits correctement avec l'utilisation des modèles de couplage avec les éléments infinis. Des erreurs considérables peuvent être induites par les solutions d'élément finis si la limite de radiation est localisée à une distance égale à la hauteur du réservoir.

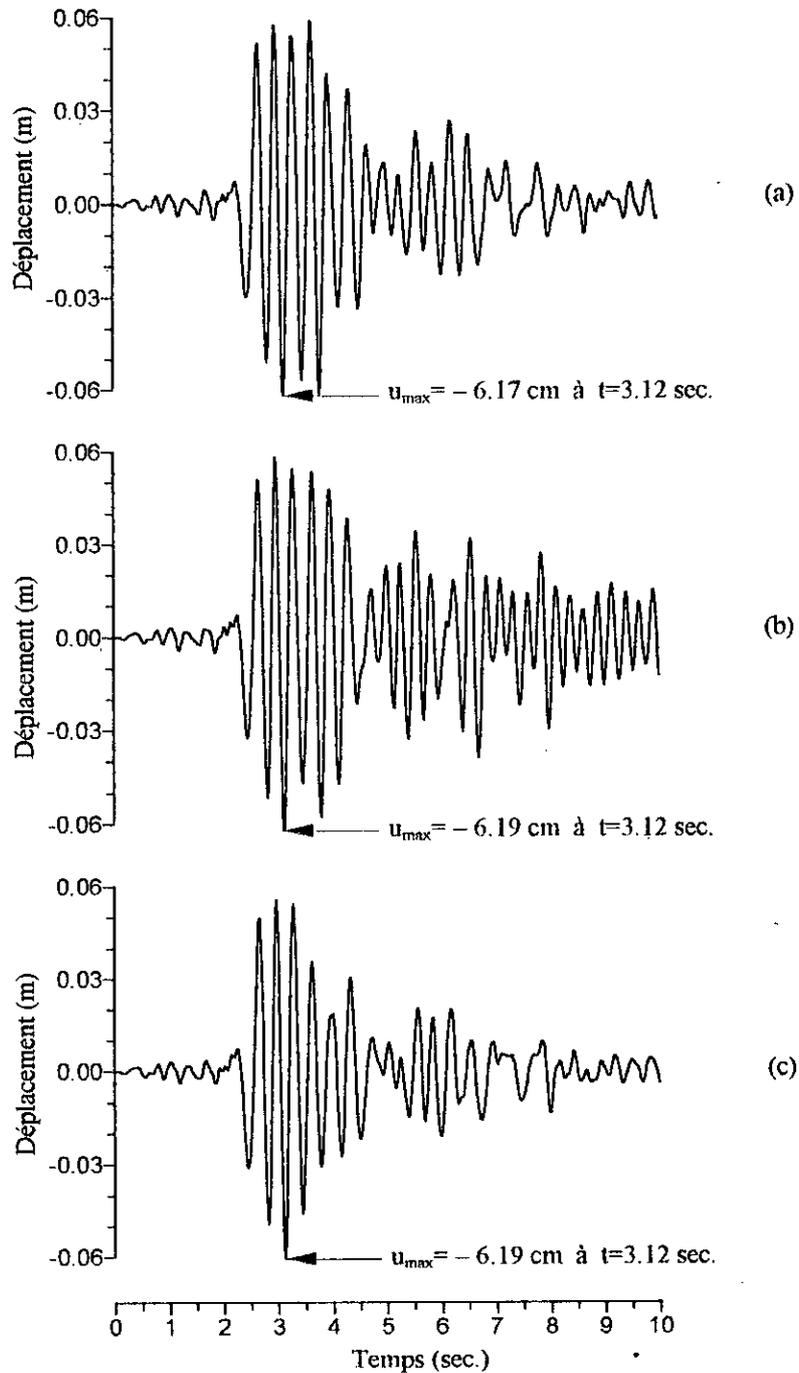
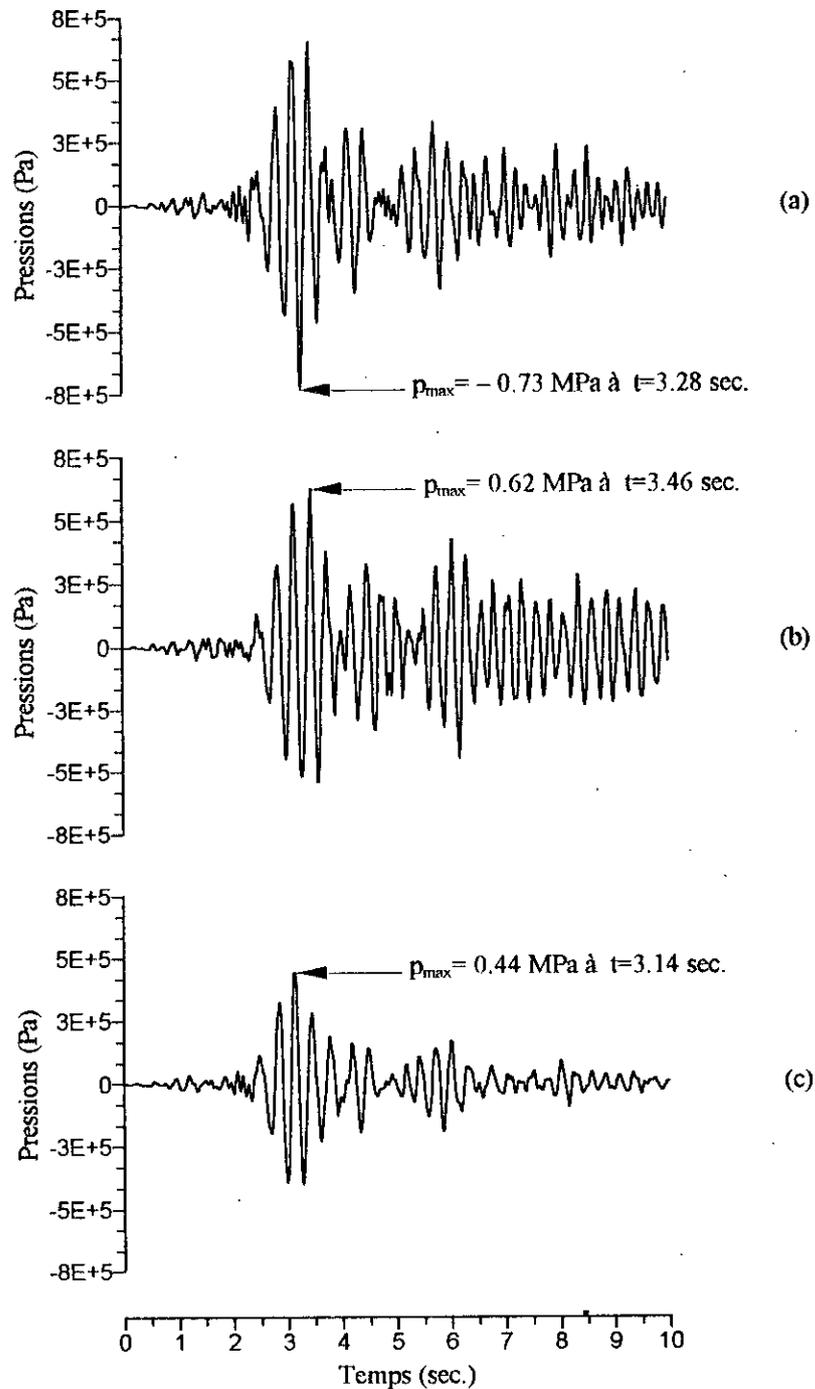


Figure 6.6. Déplacements horizontaux à la crête obtenus pour  $L_r = 1H$ , en utilisant :  
 (a) l'approche directe, (b) l'approche inverse et (c) limite de radiation.

- Les modèles de couplage avec les éléments infinis sont plus performants et plus économiques en temps et en volume de calcul que les modèles d'éléments finis avec une limite de radiation.
- Pour des positions de la limite de troncature proche de l'interface fluide-structure, les effets dissipatifs dans le réservoir sont mieux représentés avec l'utilisation des éléments infinis qu'avec l'utilisation de la limite de rayonnement.



**Figure 6.7.** Pressions hydrodynamiques au fond du parement amont du barrage pour  $x=1H$  obtenues en utilisant : (a) l'approche directe, (b) l'approche inverse et (c) limite de radiation

## **6.5 Analyse des facteurs de réponse critiques**

Afin de compléter l'étude paramétrique du système barrage-réservoir de Oued-Fodda, l'influence de la flexibilité de la structure, de la compressibilité de l'eau, de la fréquence d'excitation sismique et du taux d'amortissement dans la structure sur la réponse du système est analysée. Ces effets sont appréciés sur la base des résultats exprimés sous forme de distribution des pressions sur la face amont du barrage et de l'histoire de la réponse en déplacements et en pressions.

### **6.5.1 Effets de la flexibilité et de la compressibilité**

L'évaluation des forces hydrodynamiques et leurs effets sur la réponse des barrages poids en béton dépend des modèles numériques utilisés pour l'idéalisation des sous-systèmes barrage et réservoir interagissant l'un sur l'autre. Ces modèles peuvent être classés par catégories essentiellement en fonction des hypothèses retenues pour les propriétés physiques du matériau du barrage et du fluide du réservoir ; particulièrement la flexibilité et la compressibilité. Une étude théorique ainsi qu'une analyse détaillée de quatre modèles fluide-structure découlant des effets séparés et combinés de ces deux principaux facteurs sont présentés dans la référence [53]. Les résultats et les conclusions essentiels obtenus sont présentés ci-après.

#### *6.5.1.1 Distribution de la pression maximale*

La Figure 6.8 illustre la distribution des pressions hydrodynamiques à l'interface barrage-réservoir, normalisées par le maximum des pressions hydrostatiques résultant de l'application des composantes horizontales des séismes d'El-Asnam et de Loma Preita au système barrage-réservoir de Oued-Fodda selon les quatre modèles fluide-structure étudiés. Il est clairement observé que l'usage de différents modèles numériques fluide-structure peut induire des différences considérables dans la réponse hydrodynamique. Particulièrement, dans le cas d'un fluide incompressible, l'hypothèse d'un barrage rigide conduit aux valeurs des pressions hydrodynamiques pratiquement semblables à celles qui résulteraient de la supposition d'une structure flexible. Cependant, dans le cas d'un fluide compressible, l'hypothèse d'un barrage rigide entraîne une diminution substantielle des pressions par rapport aux pressions résultant de l'hypothèse, plus réaliste, d'un barrage flexible. Il peut être donc conclu que la flexibilité du barrage ne possède pas une influence importante sur les pressions hydrodynamiques dans le cas d'un fluide incompressible, alors qu'elle induit une augmentation substantielle des ces pressions dans le cas d'un fluide compressible. Ces observations restent essentiellement valables pour les deux excitations sismiques considérées dans l'analyse de la réponse du système barrage-réservoir.

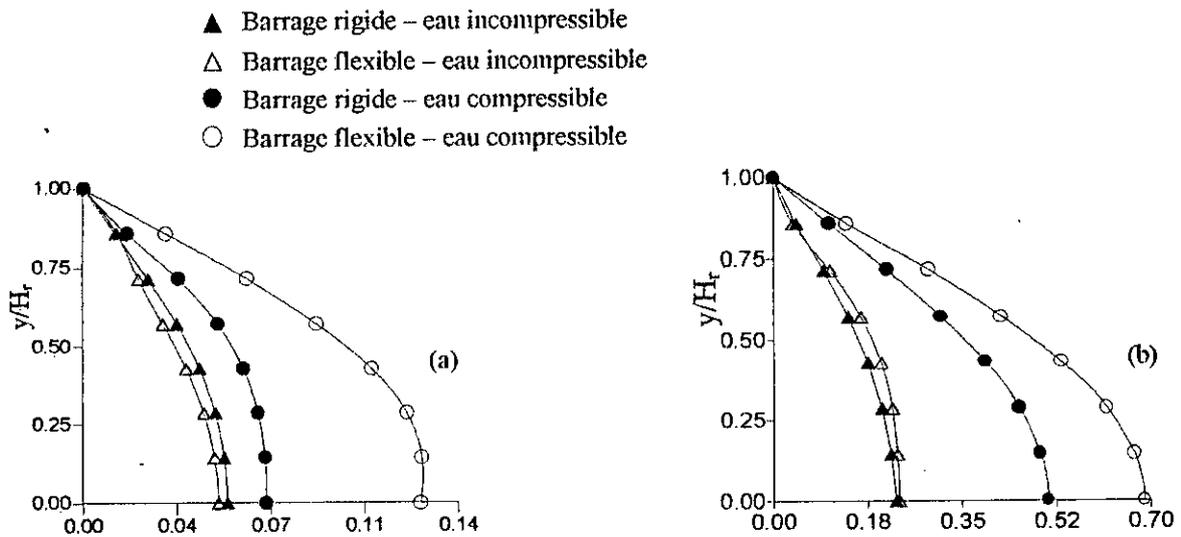


Figure 6.8. Pressure coefficient distribution using the four fluid-structure models.  
 (a) El-Asnam 1980 Earthquake, (b) Loma Preita 1989 Earthquake.

En d'autres mots, les résultats obtenus indiquent clairement que la compressibilité de l'eau induit une augmentation substantielle des pressions hydrodynamiques pour les grands barrages flexibles. Pour ces barrages, les erreurs introduites si la compressibilité est négligée, notamment dans les conditions de la réponse en résonance, peuvent devenir importantes. Les effets combinés de la compressibilité du fluide et de la flexibilité du barrage peuvent mener, à cause d'un comportement en battement dans la réponse, à des forces hydrodynamiques s'exerçant sur le parement amont du barrage considérablement grandes, et ainsi, à de hautes amplifications dans la réponse du système barrage-réservoir.

Finalement, il est intéressant de noter que les résultats obtenus en utilisant le modèle de barrage rigide et de fluide incompressible (modèle analogue à celui de Westergaard) conduit à des forces hydrodynamiques considérablement faibles par rapport à celles découlant du modèle de barrage flexible et de fluide compressible (un modèle théoriquement plus réaliste).

### 6.5.1.2 Histoire de la réponse en pressions hydrodynamiques

Pour plus d'illustration des performances relatives des quatre modèles d'interaction fluide-structure étudiés, l'histoire de la réponse du système barrage-réservoir de Oued-Fodda est déterminée sur la durée totale d'application des accélérations sismiques de Loma Preita. Ce séisme est choisi pour sa violence dans le but de montrer les différences entre les valeurs maximales notées en tableau 6.1 et pouvant être obtenues selon les quatre modèles.

Il peut être clairement observé, à partir du tableau ci-dessous, que les effets combinés de la flexibilité du barrage et de la compressibilité de l'eau sont les plus critiques dans l'étude de la réponse du système barrage-réservoir. Le déphasage exprimé en terme de différence entre le

temps où se produit le pic des pressions hydrodynamiques et celui des accélérations sismiques est pratiquement insignifiant pour les modèles de barrage rigide.

| Modèles | Barrage  | eau du réservoir | $P_{\max}$ (MPa) | t (sec.) | Déphasage du Pic (sec.) |
|---------|----------|------------------|------------------|----------|-------------------------|
| M1      | Rigid    | Incompressible   | 0.22             | 2.60     | 0.00                    |
| M2      | Flexible | Incompressible   | -0.27            | 3.10     | 0.50                    |
| M3      | Rigid    | Compressible     | 0.49             | 2.66     | 0.06                    |
| M4      | Flexible | Compressible     | 0.66             | 3.26     | 0.66                    |

Tableau 6.1. Maximum des pressions hydrodynamiques  $P_{\max}$  et le temps d'occurrence t, selon les quatre modèles d'interaction ( séisme de Loma Preita 1989).

Les histoires de réponse en pressions hydrodynamiques calculées à partir des quatre modèles d'interaction fluide-structure sont illustrées dans la figure 6.9. Il est à noter que les dix (10) premières secondes paraissent être les plus critiques pour la réponse du système barrage-réservoir. Les résultats fournis par le modèle de barrage flexible et de fluide compressible beaucoup plus grands que ceux découlant des autres modèles.

Pour les modèles de barrage flexible, le contenu fréquentiel des résultats obtenus dans le cas d'un fluide compressible est semblable à celui des résultats correspondant au cas de fluide incompressible. Cependant, une grande différence est notée quant aux valeurs maximales des pressions. Le déphasage devient relativement important pour les deux modèles. Le comportement en battement dans la réponse est aussi observé et est amplifié dans le cas d'un fluide compressible.

Pour les modèles de barrage rigide, aucun comportement en battement dans la réponse n'est observé. Les pressions hydrodynamiques dérivées du modèle de barrage rigide-fluide compressible sont plus grandes que celles obtenues du modèle de barrage rigide-fluide incompressible (encore à cause des effets de la compressibilité de l'eau). Les temps où se produisent les pics des pressions hydrodynamiques pour les deux modèles de fluide compressible et incompressible sont très près de celui où se produit le pic des accélérations sismiques appliqués. Ceci est dû à l'hypothèse de barrage rigide utilisée pour les deux modèles.

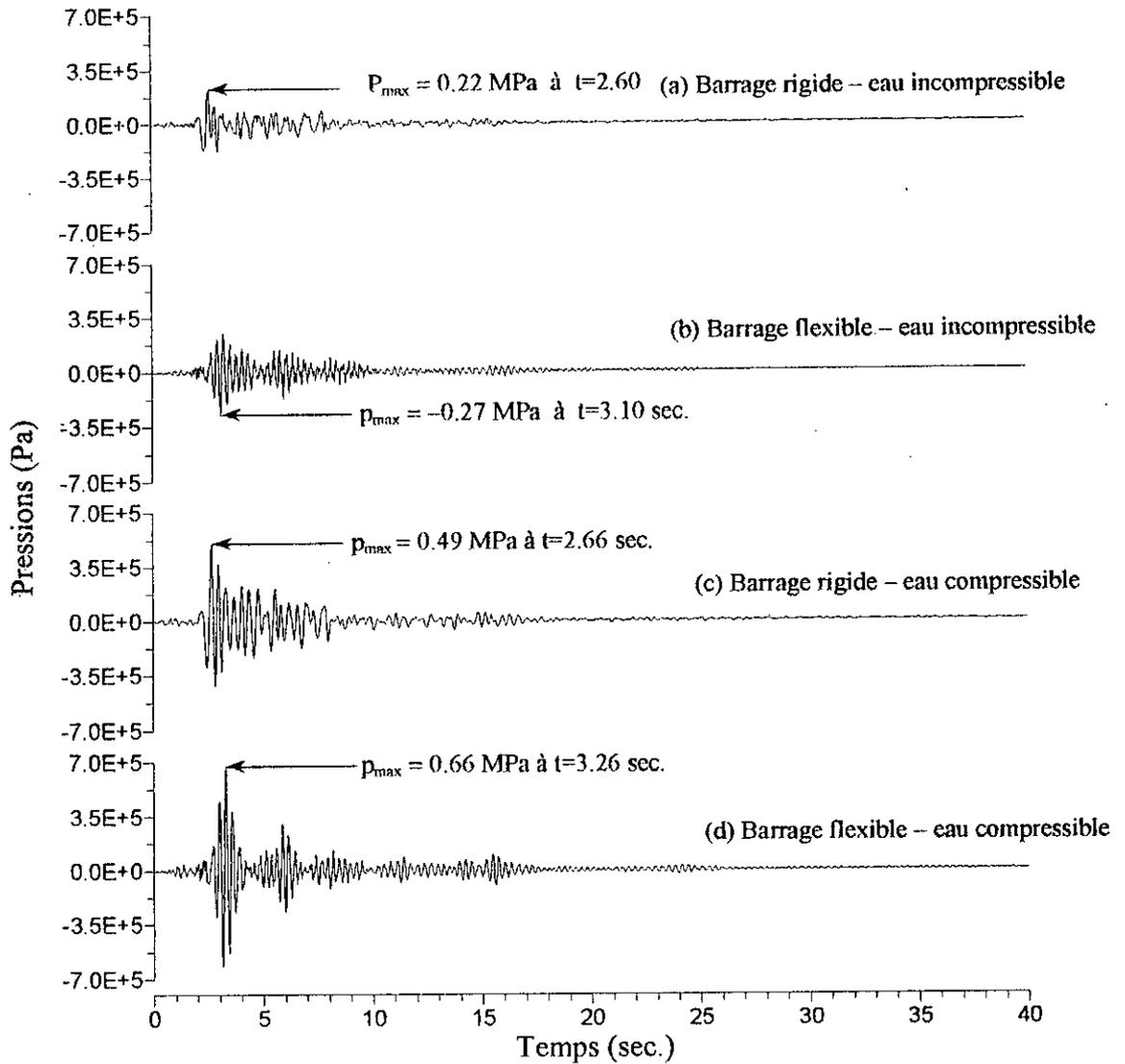


Figure 6.9. Time histories of hydrodynamic pressures (MPa) derived from the four fluid-structure models.

### 6.5.2 Effets de la fréquence d'excitation sismique

Pour montrer l'effet de la fréquence d'excitation sur la distribution de la pression maximale exercée sur le parement amont, une série d'expériences numériques est effectuée. Le pourcentage d'amortissement critique de la structure est fixé à  $\gamma=5\%$  puis à  $\gamma=0.1\%$ . Le système barrage-réservoir est excité par un signal à amplitude unitaire et de fréquence variable couvrant la plage des valeurs des fréquences sismiques. La valeur maximale de pression hydrodynamique est prélevée pour chaque fréquence et les valeurs adimensionnelles du coefficient de pression  $C_p$  sont reportées sur la figure 5 en fonction de paramètre de fréquence  $\omega H / C$  où  $\omega$ ,  $H$ , et  $C$  désignent respectivement, la fréquence d'excitation, la hauteur du réservoir et la célérité des ondes de pressions dans l'eau. On observe sur la figure 5a que le pic le plus élevé ne correspond pas à la valeur de la fréquence de résonance associée au mode

fondamental mais plutôt à celle du 3<sup>ème</sup> mode de vibration. Ce fait remarquable corrobore les observations effectuées par Chopra [16] lors de l'étude du barrage de Pine Flat ( U.S.A ). Il est non moins remarquable d'observer que lorsque le pourcentage d'amortissement critique diminue à 0.1% (figure 6.10 b) puis à des valeurs très voisines de 0%, les pics les plus élevés sont obtenus aux fréquences de résonance du 1<sup>er</sup> mode. Ces observations montrent clairement que le paramètre amortissement contrôle non seulement les valeurs maximales de la réponse sismique à la résonance mais aussi la nature du mode de vibration excité.

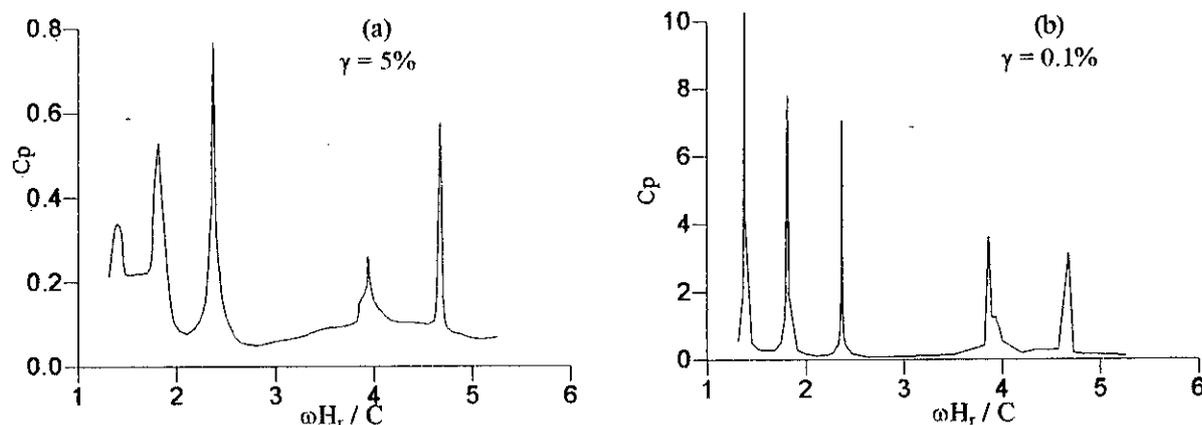


Figure 6.10. Variation du coefficient de pression maximal en fonction de la période d'excitation.  
(a)  $\gamma=5\%$ , (b)  $\gamma=0.1\%$ .

### 6.5.3 Effets d'amortissement

L'identification de la dissipation d'énergie dans le comportement dynamique des systèmes barrage-réservoir par un terme d'amortissement non proportionnel pose des problèmes numériques lors de l'application des méthodes d'intégration par superposition modale. La résolution du système couplé est souvent effectuée à l'aide d'un schéma d'intégration pas à pas permettant de prendre en compte la nature de la matrice d'amortissement. Les effets de dissipation dans un tel système, sont générés principalement dans la structure du barrage, dans le fluide du réservoir et par radiation à l'infini des ondes de pression, voyageant de l'interface fluide-structure vers l'amont du réservoir. L'inclusion des effets radiatifs par l'application d'une limite de radiation ou par modélisation du domaine infini par des éléments infinis, peut être appréciée à partir de la figure 6.4. Maintenant, les effets d'amortissement à l'intérieur de la structure du barrage et du fluide du réservoir sont étudiés isolément. A cet effet, le système barrage-réservoir de Oued-fodda, modélisé par le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis, est soumis à l'excitation de Loma Preita (figure 5.1). Le maximum des déplacements horizontaux enregistrés à la crête (nœud D1 figure 5.1) ainsi que le maximum de pressions s'exerçant au fond du parement amont (nœud P1 figure 5.1) sont notés et représentés dans la figure 6.11 en fonction des taux d'amortissement variant de 1% à 10%.

Dans une première étape, le taux d'amortissement du barrage est fixé  $\zeta_b=0$  et celui du fluide est varié de 1% à 10%. Ainsi un amortissement visqueux de type Rayghley est introduit pour caractériser toute dissipation dans le fluide autre que la radiation. Les pressions maximales prélevées sont représentées par la courbe (C1). En deuxième étape par contre, le taux d'amortissement du fluide est fixé à  $\zeta_f=0$  ; les effet visqueux sont négligés, et celui du barrage varie dans la même plage. Il est à noter que dans la pratique le taux d'amortissement du barrage est généralement pris entre 4% et 5%. Les résultats sont représentés dans la même figure par la courbe (C2). En troisième étape, et dans le souci d'élargir l'applicabilité de la méthode de superposition modale aux problèmes comportant un amortissement non proportionnel, il est intéressant d'approcher la matrice d'amortissement couplé du système complet par l'amortissement classique de Rayghley. La courbe (C3) dans la figure 6.11 (a) représente les variations de la pression maximale relevée en fonction du taux d'amortissement critique du système  $\zeta_s=0$ .

Il peut être noté, à partir de la figure 6.11, que la diminution des valeurs maximales en fonction de l'augmentation des taux d'amortissements critiques à l'intérieur du réservoir est plus influencée par l'amortissement du système complet que par celui du barrage seul, et encore, moins par celui du réservoir. En effet, il peut être observé dans la figure 6.11 (b) qu'à partir des taux d'amortissement critique supérieurs à 4%, l'amortissement du réservoir n'influe pratiquement pas sur les des déplacements maximum observés. En outre, les courbes C2 et C3, qui sont parallèles dans les deux cas : déplacements ou pressions, permettent de préconiser un amortissement du système proportionnel avec un taux d'amortissement critique légèrement inférieur à celui utilisé pour le barrage. Des valeurs  $\zeta_s$  variant de 8% à 10% de celles de  $\zeta_b$  conduisent sensiblement aux mêmes résultats obtenus avec un amortissement du système non proportionnel ; celui utilisé dans les applications précédentes.

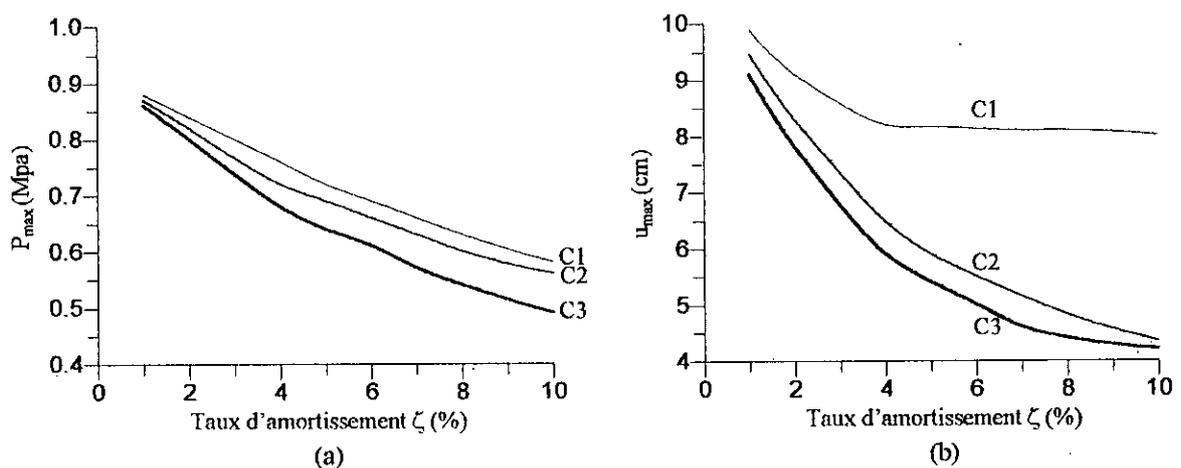


Figure 6.11. Effet du taux d'amortissement.

(a) : pression maximale au fond, (b) : déplacement maximal à la crête.

Amortissement du : C1 : fluide, C2 : structure et C3 système complet

# CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

*"La science ne peut rien nous prescrire, pas même de cultiver la science"*

*Bourtroux*

*"Ils t'interrogeront sur l'esprit ; dis : « l'esprit est du domaine exclusif de mon Seigneur et vous n'avez reçu de la science que fort peu de choses »"*

*Coran - Le voyage nocturne 84 (El Israa)*

## CHAPITRE 7

### CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Une investigation des effets d'interaction fluide-structure sur le comportement dynamique des structures en contact avec un fluide non confiné a été effectuée avec un modèle numérique de couplage éléments finis – éléments infinis. Le système fluide-structure typique pour lequel l'étude a été réalisée est constitué d'un barrage poids en béton et de sa retenue. Le modèle numérique, élaboré pour calculer la réponse d'un tel système, implique la modélisation par éléments finis de la structure du barrage et l'idéalisation du domaine du réservoir par un couplage d'éléments finis – éléments infinis. Le couplage est effectué sur une frontière de troncature artificielle dont la position a été étudiée en fonction des deux approches de génération d'éléments infinis, et en fonction de l'application d'une condition de limite libre ou de limite radiative dans un modèle d'éléments finis standard.

Du point de vue numérique, il a été montré que le choix des variables de champs pour la description du fluide est d'une importance primordiale et conditionne le degré de complexité des systèmes discrets qui en découlent. Le choix de la pression comme variable de base conduit à un système global couplé non symétrique. L'introduction d'un potentiel de déplacements comme variable supplémentaire permet de contourner la non symétrie mais augmente la taille du système et introduit de éléments diagonaux nuls dans les matrices globales. Cette approche produit des résultats attirants du point de vue conceptuel mais pas intéressants du point de vue pratique. La technique de symétrisation proposée, évitant l'inversion de matrice pour l'analyse du système en vibrations libres, oriente le choix vers la description du fluide avec la seule variable pression. En effet, comparativement aux autres techniques de symétrisation ou de condensation, elle conduit à un gain de temps d'exécution substantiel dans le cas où la structure est modélisée par un système de masses concentrées. Il en découle que la description du fluide par la variable pression, avec l'utilisation de cette technique de symétrisation, est fortement recommandée pour l'étude du comportement vibratoire des systèmes barrage-réservoir. De plus, il a été noté que l'intégration pas à pas du problème non symétrique est plus performante que la résolution avec ou sans condensation du système symétrique introduisant le potentiel de déplacement.

En outre, l'utilisation des éléments infinis pour représenter le domaine fluide, non borné dans la direction amont, permet d'une part, d'éviter l'inclusion des effets dissipatifs par une matrice d'amortissement relative à la discretisation de la condition de radiation et d'autre part, de positionner la limite de troncature à une distance assez proche de l'interface fluide-structure et diminuer ainsi le nombre d'éléments finis utilisés sans altérer les résultats obtenus à des positions lointaines avec un nombre d'éléments plus grand. Par conséquent, des gains importants en termes d'espace mémoire et de volume de calcul ont été obtenus sans, pour

autant, déployer un grand effort pour insérer ces éléments dans le code de calcul d'éléments finis existant.

Par ailleurs, encore du point de vue numérique, il est nécessaire de noter que la nature de l'amortissement global non proportionnel a imposé l'élaboration et la programmation d'un algorithme de résolution du système complet par intégration directe pas à pas. Le schéma d'intégration est basé sur la méthode de Newman, qui est inconditionnellement stable pour certaines valeurs de ses paramètres, et la factorisation de Crout-Cholesky pour prendre en compte la non symétrie du système couplé. A présent, aucune proposition ne peut être préconisée sur un amortissement proportionnel.

Du point de vue physique et compréhension du phénomène d'interaction fluide-structure, les résultats, obtenus par l'analyse des systèmes barrage-réservoir considérés dans cette étude, montrent clairement que :

- Pour des taux de remplissage du réservoir supérieur à la moitié du barrage, la modification du comportement dynamique de la structure du barrage devient de plus en plus notable et les périodes propres du système barrage-réservoir augmentent considérablement. L'interaction fluide-structure a pour effet principal l'allongement des périodes propres du barrage.
- La prise en compte de la compressibilité du fluide induit des valeurs de périodes du système plus grandes que celles découlant de l'hypothèse d'un fluide incompressible pour lequel on observe une nette séparation des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de vibration par rapport au mode fondamental. Elle conduit aussi à une augmentation substantielle des pressions notamment pour les structures flexibles telles que les grands barrages.
- La flexibilité de la structure, dans le cas des barrages ne peut être négligée dans le calcul des pressions hydrodynamiques. Les effets combinés de la flexibilité et de la compressibilité peuvent provoquer un comportement en battement dans la réponse du système, en particulier au voisinage des conditions de résonance. D'importantes amplifications peuvent être observées dans les pressions hydrodynamiques et dans les déplacements de la structure.
- Pour une célérité des ondes de pressions supérieure ou égale à quatre fois celle du son dans l'eau, les valeurs des périodes sont pratiquement identiques indépendamment des hypothèses retenues quant à la compressibilité ou l'incompressibilité du fluide. Pour ces valeurs, l'eau du réservoir peut être supposée incompressible.
- La modélisation des effets inertiels du barrage par un système de masses cohérentes fournit des résultats identiques à ceux obtenus par un système de masses concentrées.
- La limite de troncature du réservoir ne présente pas une incidence importante sur la réponse dynamique du système au delà d'une distance supérieure à trois fois la hauteur du barrage.

- Les effets des ondes de surface, pris en compte par considération d'une surface moyenne, sur les périodes propres ainsi que la réponse du système peuvent être négligés.
- L'étude de l'effet de la fréquence d'excitation sismique révèle que le maximum de pressions hydrodynamiques ne correspond pas forcément à la valeur de la fréquence de résonance associée au mode fondamental du système. Dans les cas de résonance, les valeurs des pressions dans le fluide et de déplacements dans le solide peuvent dépasser largement le domaine linéaire.
- Le taux d'amortissement de la structure contrôle non seulement les valeurs maximales de la réponse sismique à la résonance mais aussi la nature du mode de vibration excité.
- En dernier point, il est essentiel de noter que dans la plus part des cas pratiques des systèmes barrage-réservoir, la pression hydrodynamique n'excède pas la pression hydrostatique. Toutefois, elle modifie amplement le comportement dynamique du barrage.

Finalement, en recommandations, il serait intéressant de vérifier le comportement non linéaire du système particulièrement dans les cas de résonances. Ce comportement peut inclure la non linéarité matérielle de la structure et la cavitation pouvant se produire à l'intérieur du réservoir en particulier au voisinage de l'interface fluide-structure. Il est également prudent de ne pas généraliser le résultat concernant les effets des ondes de surface, qui sont négligeables dans le cas des systèmes barrage-réservoir, pour tous les problèmes d'interaction fluide-structure. Dans le cas des structures offshore par exemple, ces ondes engendrent l'effet dynamique le plus prépondérant. En outre, l'étude paramétrique peut être étendue pour évaluer les effets de la variabilité spatiale de l'excitation sismique, l'inclinaison du fond du réservoir induisant des forces supplémentaires, l'absorption d'ondes par les vases aux fond du réservoir, la variation des propriétés physiques du fluide et du matériau de la structure ainsi que d'autres paramètres variant d'un problème à un autre.

# REFERENCES

*"La science progresse d'évidences sommaire et provisoires en évidences sommaires et provisoires"*

*Gonseth*

*"Le nombre de livres écrits sur l'électron en cinquante ans est sans doute plus grand que le nombre de livres écrits sur la lune en cinq cents ans. Exister par le livre, c'est déjà une existence, une existence si humaine, si solidement humaine"*

*Bachelard*

## REFERENCES

- [1] ALLAIRE, P.E. *"Basics of the finite element, solid mechanics, heat transfer, and fluid mechanics"*, wmc Brown publishers, 1985.
- [2] AVILES, J. *"Water pressures on rigid gravity dams with finite reservoir during earthquakes"*, Earthquake Eng. Struct. Dyn., 8, 527-537, 1989.
- [3] BATHE, K.J. & WILSON, E.L. *"Numerical methods in finite element analysis"*, Prentice Hall, 1976.
- [4] BEER, G. *"Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics"*, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 567-580, 1983.
- [5] BETTESS, P. *"Infinite elements"*, Penshaw Press, 1992.
- [6] BREBBIA, C.A. *"The boundary element method for Engineers"*, Pentech Press, London, 1978.
- [7] CHAKRABARTI, P. & CHOPRA, A.K. *"Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction"*, Earthquake Eng. Struct. Dyn. 2, 143-160, 1973.
- [8] CHANDRACHAKER, R. & HUMAR, J.L. *"Boundary element analysis of seismic response of a gravity dams"*, 6<sup>th</sup> Canadian Conference on Earthquake Engineering, Toronto, 1991.
- [9] CHARBAL, F. *"A simple and efficient automatic FEM domain decomposer"*, Comp. Struc., 28, 5, 579-602, 1988.
- [10] CHEN, B.F. *"Seismic waves induced dynamic response of coastal structures"*, Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6<sup>th</sup> – 11<sup>th</sup> September, 1998.
- [11] CHOPRA, A.K. & GUPTA, S. *"Hydrodynamic and foundation interaction effects in earthquake response of concrete gravity dams"*, J. Structural Division, ASCE, 107, ST8, August 1981.
- [12] CLOUGH, R.W. & PENZIEN, J. *"Dynamics of structures"*, Mc Graw-Hill, London, England, 1993.
- [13] CURNIER, A. *"A static infinite element"*, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 1479-1488, 1983.
- [14] DANIEL, W.J.T. *"Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems"*, Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1161-1175, 1980.
- [15] DARBRE, G.R. *"State of practice in earthquake analysis of concrete dams"*, Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6<sup>th</sup> – 11<sup>th</sup> September, 1998.
- [16] DAS, Y.C. & A.K.L, F.A. *"Hydrodynamic pressure on dams"*, Int. J. Modelling and simulation 8, 1, 33-37, 1988.
- [17] DHATT, G. & TOUZOT, G. *"Une présentation de la méthode des éléments finis"*, 2<sup>ème</sup> ed. Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [18] DHATT, G. *"Modélisation des fluides par élément finis"*, Polycopie de cours. Université de technologie Compiègne, Mai 1992.
- [19] EUVRAR, *"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Différences finies, éléments finis, méthode des singularités"*, 2<sup>ème</sup> Ed. Masson. Paris, 1990.
- [20] GUEZOULI, S. *"Comportement des chaussées souples : Modélisation et simulation numérique"*, Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale : Science pour l'ingénieur de Nantes, Génie Civil, 1994.

- [21] HALL, J.F. & CHOPRA, A.K. "Two-dimensional dynamic analysis of embankment and concrete-gravity dams including hydrodynamic effects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 305-332, 1982.
- [22] HALL, J.F. & CHOPRA, A.K. "Two-dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 305-332, 1982.
- [23] HALL, J.F. & CHOPRA, A.K. "Hydrodynamic effects in the dynamic response of concrete gravity dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 333-395, 1982.
- [24] HUGES, T.J.R. "The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J., 1987.
- [25] HUMAR, J.L. & ROUFAIEL, M. "Finite element analysis of reservoir vibration", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 109, pp. 315-230, 1983.
- [26] JABLONSKI, A.M. & RAINER, J.H. "Effect of seismic input on hydrodynamic forces acting on gravity dams", 6<sup>th</sup> Canadian Conf. Earthquake Eng. Toronto, 1991.
- [27] JABLONSKI, A.M. & HUMAR, J.L. "Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 16, 5, 1988.
- [28] JABLONSKI, A.M. & HUMAR, J.L. "Three dimensional boundary element reservoir model for seismic analysis of arch and gravity dams", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 19, 359-376, 1990.
- [29] KIENFLING FENG "Fluid-structure vibrational analysis" *AIAA Journal* 199-203, 1976.
- [30] KARDESTUNCER, H. & NOURRI, D.H. "Finite element handbook", Mc. Graw-Hill Book Company, 1987.
- [31] LI, X. ROMO, M.P. & AVILES, J. "Finite element analysis of dam-reservoir systems using an exact far-boundary condition", *Comp. Struct.*, 60, 5, 751-762, 1996.
- [32] LIU, Y. & CHEN, K. "A two-dimensional mesh generator for variable order triangular and rectangular elements", *Comp. Struct.*, 29, 6, 1033-1053, 1988.
- [33] LO, S.H. "Finite element mesh generator over curved surfaces", *Comp. and Struc.*, 29, 5, 731-742, 1988.
- [34] MADABUSHI, S.P.G. "Centrifugal modelling of dams subjected to earthquake induced hydrodynamic pressures", Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6<sup>th</sup> - 11<sup>th</sup> September, 1998.
- [35] MIRANDA, I., FERENCZ, R. M. & HUGHES, T. J. R. "An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 18, 643-653, 1989.
- [36] O'CONNOR, J.P.F. & BOOT, J.C. "A solution procedure for the earthquake analysis of arch dam-reservoir systems with compressible water", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, 757-773, 1988.
- [37] OHAYON, R. "Vibrations of fluid-structure coupled systems", *Finite Elements In the 90's*. E. Oñate, J. Periot, A. Samuelson (Eds.), Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona 1991.
- [38] OLSON, L.G. & VANDINI, T. "Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions", *Comp. Struct.* 33, 3, 679-687, 1989.
- [39] OLSON, L.G. & BATHE, K.G. "An infinite element for the analysis of transient fluid-structure interactions", *Eng. Comput.* 2, 319-329, 1985.

- [40] PINSKY, P.M. & ABOUD, N.N. "Two mixed variational principals for exterior fluid-structure interaction problems", *Comp. Struct.*, 33, 3, 621-635, 1989.
- [41] PRISCU, R., POPOVICI, A., STEMATIU, D. & STERE, C. "Earthquake engineering for large dams", Editura Academiei and John Willey & Sons, Ltd., 1985.
- [42] RAJAPAKSE, R.K.N.D. & KARASUDHI, P. "Elastostatic infinite elements for layered half space", *J. Eng. Mech.* 111, 9, September 1985.
- [43] ROKEY, K.C. , EVANS, H.R. & GRIFFITHS, W. "Introduction à la méthode des éléments finis", Edit. Eyroles, 1979.
- [44] SAINI, S. "Modelling of hydrodynamic Effects on dams using Finite Elements", *Journal of the Institution of Engineers, (India)*, 59, 204-210, 1978.
- [45] SAINI, S., BETTESS, P. & ZIENKIEWICZ, O.C. "Coupled hydrodynamic response of concrete gravity dams using finite and infinite elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, 363-374, 1978.
- [46] SEGHIR, A. & SOUFARI, A. "Interaction fluide-structure : cas des barrages poids en béton", Thèse de Projet de Fin d'Etudes, Ecole National Polytechnique, Alger, Juin 1995.
- [47] SHARAN, S.K. "A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction", *Comp. Struct.* 26, 5, 841-846, 1987.
- [48] SHARAN, S.K. "Dam-reservoir interaction during earthquake", 6<sup>th</sup> Canadian Conf. Earthquake Eng., Toronto, 1991.
- [49] TASEV, S.G. "A method for determination of the dynamic characteristics of concrete dams using combined field tests and numerical investigations", Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6<sup>th</sup> - 11<sup>th</sup> September, 1998.
- [50] TILIOUINE, B. & MOUSSAOUI, A. "Vibrations des grands systèmes : application à l'interaction sol-structure", Association Française de Génie Parasismique, Paris, France, Mars 1996.
- [51] TILIOUINE, B. & SEGHIR, A. "Influence de l'interaction fluide-structure sur le comportement sismique du barrage de Oued-Fodda (Nord-Ouest Algérien)", Actes du 1<sup>er</sup> Congrès Arabe de Mécanique, Damas, Syrie, 1-5 Juin, 1997.
- [52] TILIOUINE, B. & SEGHIR, A. "A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction", CST 98 International Conference, Edinburg, Scotland, 18<sup>th</sup> - 20<sup>th</sup> August, 1998.
- [53] TILIOUINE, B. & SEGHIR, A. "Fluid-structure models for dynamic studies of dam-water systems", Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6<sup>th</sup> - 11<sup>th</sup> September, 1998.
- [54] TSAMASPHYROS, G. & PAPAIOANNOU, M. "Automatic mesh generator over singularities", *Comp. Struct.*, 29, 5, 815-823, 1988.
- [55] VELETSOS, A.S., PRESSAD, A.M. & HAHN, G. "Fluid-structure interaction effects for offshore structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, 631-652, 1988.
- [56] WASHIZU, K. "Variational methods in elasticity and plasticity", 2<sup>nd</sup> ed. Pergamon Press, 1975.
- [57] WARBURTON, G.B. "Formulae for errors for initial displacement and velocity problems using the Newmark method", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 18, 565-573, 1989.
- [58] WARBURTON, G.B. "Assessment of errors in the newmark method in structural dynamics", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 19, 457-467, 1990.

- [59] WESTERGAARD, H.M. "Water pressures on dams during earthquakes", Transactions, ASCE 98, 418-472, 1933.
- [60] ZANGAR, C.N. "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake effects", Eng. Monographie, 11, U.S Bureau of reclamation, 1952.
- [61] ZIENKIEWICZ, O.C. & NEWTON, R.E. "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid", Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1<sup>st</sup> -15<sup>th</sup> May 1969.
- [62] ZIENKIEWICZ, O.C., EMSON, C. & BETTESS, P. "A novel boundary infinite element", Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 333-404, 1983.
- [63] ZIENKIEWICZ, O.C. & BETTESS, P. "Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems", Computing Methods in Applied Sciences, 2<sup>nd</sup> International Symposium, 15-19 December 1975.
- [64] ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. "La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires", Volume 1. AFNOR technique, 1991.
- [65] ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. "The finite element method. Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity", Volume 2 Mc. Graw-Hill Book Company, 1991.
- [66] ZIENKIEWICZ, O.C., PAUL, D.K. & HINTON, E. "The transient dynamic analysis of reservoir-dam interaction using staggered solution schemes", Unknown source.
- [67] ZIENKIEWICZ, O.C. "Finite element method in analysis and design of dams", CIGB ICOLD, Bulletin 38a, 1987.

## ANNEXE A. INTEGRATION NUMERIQUE

Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i)$$

| Nombre $i$       | Abscisse $a_i$     | Poids $w_i$        |
|------------------|--------------------|--------------------|
| <b>Ordre n=1</b> |                    |                    |
| 1                | 0.0000000000000000 | 2.0000000000000000 |
| <b>Ordre n=2</b> |                    |                    |
| 1                | 0.5773502691896257 | 1.0000000000000000 |
| <b>Ordre n=3</b> |                    |                    |
| 1                | 0.0000000000000000 | 0.8888888888888889 |
| 2                | 0.7745966692414833 | 0.5555555555555556 |
| <b>Ordre n=4</b> |                    |                    |
| 1                | 0.3399810435848562 | 0.6521451548625461 |
| 2                | 0.8611363115940525 | 0.3478548451374538 |

Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre

$$\int_{-1}^{+1} e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i)$$

| Nombre $i$       | Abscisse $a_i$         | Poids $w_i$            |
|------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Ordre n=1</b> |                        |                        |
| 1                | 0.1000000000000000E+01 | 0.1000000000000000E+01 |
| <b>Ordre n=2</b> |                        |                        |
| 1                | 0.5857864376269049E+00 | 0.8535533905932737E+00 |
| 2                | 0.3414213562373095E+01 | 0.1464466094067262E+00 |
| <b>Ordre n=3</b> |                        |                        |
| 1                | 0.4157745567834790E+00 | 0.7110930099291730E+00 |
| 2                | 0.2294280360279041E+01 | 0.2785177335692408E+00 |
| 3                | 0.6289945082937479E+01 | 0.1038925650158613E-01 |
| <b>Ordre n=4</b> |                        |                        |
| 1                | 0.3225476896193923E+00 | 0.6031541043416336E+00 |
| 2                | 0.1745761101158346E+01 | 0.3574186924377996E+00 |
| 3                | 0.4236620296921127E+01 | 0.3888790851500538E-01 |
| 4                | 0.9395070912301133E+01 | 0.5392947055613274E-03 |

## ANNEXE B. ETAPES DE RESOLUTION

Dans cette annexe, sont données les structures des fichiers de commandes à exécuter pour la détermination des vibrations libres et le calcul de la réponse. Chaque étape correspond à l'exécution d'un programme approprié.

Le calcul des modes propres des sous structures barrage et réservoir se fait selon l'algorithme suivant :

**Début** des commandes

Ouverture du fichier de données

Maillage du système

Calcul de la matrice masse M et de la matrice des raideurs K

Pour le réservoir, ces matrices sont calculées, selon le programme à exécuter dans cette étape, soit par éléments finis, soit par couplage éléments finis - éléments infinis.

Calcul des modes propres

Extraction à partir du fichier des résultats et affichage des périodes

**Fin** des commandes.

Le problème des modes propres du système barrage-réservoir nécessite un programme de couplage des matrices ainsi que la symétrisation du système couplé. L'algorithme devient :

**Début** des commandes

Ouverture du fichier de données

Maillage du système

Calcul des matrices K et M du barrage

Calcul des matrices K et M du réservoir

Toujours, soit par éléments finis, soit par couplage éléments finis - éléments infinis.

Couplage des matrices assemblées

Symétrisation du système couplé

Calcul des modes propres

Extraction à partir du fichier des résultats et affichage des périodes

**Fin** des commandes.

La détermination de la réponse transitoire du système est effectuée selon les étapes suivantes :

**Début** des commandes

Ouverture du fichier de données

Maillage du système

Calcul des matrices K, M et C du barrage

Calcul des matrices K, M et C du réservoir

Pour le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis la matrice d'amortissement est nulle et les matrices K et M sont calculées avec le programme d'éléments infinis.

Couplage des matrices assemblées

Résolution Pas à Pas

Affichage des valeurs maximales

**Fin** des commandes.