

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

*Département d'Hydraulique*

*Thèse*

Présentée par

**BERREKSI ALI**

Ingénieur d'Etat en Hydraulique  
de l'Ecole Nationale Polytechnique

Pour obtenir le titre de

**MAGISTER**

en *Hydraulique*

*THEME*

***SIMULATION DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE  
DANS DES CANAUX A FAIBLE ET A FORTE PENTE  
A GEOMETRIE VARIABLE***

Soutenue publiquement en *Juin 1998* devant le jury composé de :

Président	<b>A. KETTAB</b>	Professeur, E.N.P.
Rapporteur	<b>S. BENMAMAR</b>	Chargée de cours, E.N.P.
Examineurs	<b>M. BERKANI</b>	Docteur, E.N.P.
	<b>A. BILEK</b>	Docteur, E.N.P.
	<b>B. REMINI</b>	Maître de conférences Université de Blida.
Invité	<b>D. DJEMAOUN</b>	Directeur à l'E.P.E.AL.

# Remerciements



Le présent travail n'aurait pu être mis au point sans l'aide et l'orientation prodiguées par ma directrice de thèse, M<sup>lle</sup> **S. BENMAMAR**, Chargée de cours à l'E.N.P., envers laquelle j'adresse tous mes remerciements et mes plus profondes reconnaissances. A cet effet, je tiens à souligner ses précieux conseils et recommandations joignant harmonie et rigueur scientifique.

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de présider ou d'examiner ce modeste travail.

J'exprime ma vive gratitude à M<sup>f</sup> le Professeur **A. KETTAB** (E.N.P.), pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Que Messieurs **M. BERKANI**, Docteur et Chargé de cours à l'E.N.P., **A. BILEK**, Docteur et Chargé de cours à l'E.N.P. et **B. REMINI**, Maître de conférences à l'Université de Blida, pour avoir accepté de siéger dans le jury comme examinateurs.

J'exprime mes vifs remerciements à M<sup>f</sup> **D. DJEMAOUN**, Directeur à l'E.P.E.AL, d'avoir accepté notre invitation.

Mes remerciements vont également à M<sup>f</sup> le Professeur **W. H. HAGER** (Suisse) et M<sup>f</sup> le Professeur **R. KERBACHI** (E.N.P.) pour leur contribution ô combien précieuse.

Ce travail doit également beaucoup au personnel du centre de calcul, du centre de documentation et de la bibliothèque centrale de l'école nationale polytechnique, en particulier à *Hocine, Salah* et *Krimo*. Qu'ils trouvent tous ici, le témoignage de mes sincères reconnaissances.

Mes remerciements vont tous particulièrement à mes amis : *Farid, Abdelghani, Chemseddine, Brahim, Abdelouahab, Halim, Ali, Mebarek, Mohamed, Kamel, Hocine* et *Hassan* pour leurs encouragements et leur impatience à voir ce travail achevé.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude.

## ملخص

تعطي هذه الأطروحة دراسة تحليلية لجريان المياه ذات السطح الحرّ في مجاري متغيرة الأبعاد الهندسية ذات ميل ضعيف أو معتبر. تمت هذه الدراسة باستعمال معادلات ثنائية البعد على أعماق متوسطة في حالة غير مستقرة، و المتحصل عليها بتطبيق قانوني الحفاظ على الكتلة و كمية الحركة معتمدا على بعض الفرضيات. لتسهيل الدراسة، حول المجال الفيزيائي المعقد إلى مجال حسابي مستطيل. ثم بعد ذلك تمّ حساب عدديا معادلات الحركة في مجال حولت إحداثياته باستعمال مخططين لطريقة الفروقات المتناهية ألا وهما: مخطط "ماك كورماك" و مخطط "غابوتي". استعمل النموذج الرياضي في حالته غير المستقرة لإيجاد حلول في الحالة المستقرة، و هذا بأخذ عنصر الزمن كوسيط تكراري. النتائج المحصل عليها توضح توافقا جيدا مع النتائج النظرية و العددية و التجريبية لعدة باحثين في هذا الميدان.

## ABSTRACT

The simulation of flows in non prismatic open channels with a small and large bottom slop was done by using the two-dimensional depth-averaged unsteady flow equations, derived by applying the laws of conservation of mass and momentum. The non-rectangular physical domain is converted into a rectangular computational domain in order to facilitate the inclusion of solid side wall boundaries. The equations of motion in a transformed coordinate are solved numerically by using two explicit finite-difference schemes : MacCORMACK and GABUTTI schemes. The unsteady flow model is used to obtain steady flow solutions by treating the time variable as an iteration parameter. The results obtained show satisfactory agreement compared with analytical, computational and experimental data obtained by other investigators.

## RESUME

La simulation des écoulements à surface libre dans des canaux non prismatiques à faible et forte pente a été faite en utilisant les équations bidimensionnelles, moyennées sur la profondeur, en régime non permanent, obtenues par l'application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Afin de faciliter la prise en compte des conditions aux limites au niveau de la paroi solide, le domaine physique est transformé en un domaine de calcul rectangulaire. Les équations de base en coordonnées transformées sont par la suite résolues numériquement par deux schémas aux différences finies explicites qui sont le schéma de "MacCORMACK" et le schéma de "GABUTTI". Le modèle en régime non permanent est utilisé pour obtenir des solutions à l'état permanent en traitant la variable temps comme paramètre d'itération. Les résultats obtenus montrent une concordance très satisfaisante avec les résultats analytiques, numériques et expérimentaux d'autres investigateurs.

## TABLE DES MATIERES



### **Chapitre 1 : INTRODUCTION GENERALE**

1.1. Introduction générale .....	2
1.2. Généralités sur les écoulements à surface libre .....	4
1.2.1. Définitions .....	4
1.2.2. Canaux prismatiques, canaux non prismatiques .....	5
1.2.3. Classification des écoulements .....	6
1.2.4. Régime d'écoulement – Notion du nombre de Froude .....	6
1.2.5. Onde de gravité- Intumescence- .....	7

### **Chapitre 2 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

2.1. Etat de connaissance sur les équations de base .....	11
2.2. Etat de connaissance sur les ondes transversales .....	22

### **Chapitre 3 : ECOULEMENT A SURFACE LIBRE DANS LES TRANSITIONS**

3.1. Introduction .....	27
3.2. Notion d'ondes transversales .....	27
3.3. Déviation brusque d'un mur .....	28
3.4. Déviation positive d'un mur .....	28
3.5. Déviation négative d'un mur .....	31
3.6. Déviation infinitésimale d'un mur .....	33
3.7. Notions d'ondes positives et d'ondes négatives .....	35
3.8. Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritiques .....	36
3.8.1. Les différents types de rétrécissement .....	36
3.8.2. Rétrécissement en forme d'entonnoir .....	37
3.9. Elargissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritiques .....	42
3.10. Ecoulement dans un canal de pente considérable .....	47
3.11. Réduction des ondes transversales .....	48
3.11.1. Les moyens de réduction des ondes .....	50
3.11.2. Conclusion .....	53

### **Chapitre 4 : MODELISATION MATHEMATIQUE**

4.1. Introduction .....	55
4.2. Mise en équation et plan de référence .....	56
4.3. Equations fondamentales .....	57
4.3.1. Equation de continuité .....	58
4.3.2. Equations dynamiques .....	59
4.4. Transformation géométrique .....	65
4.5. Application de la transformation géométrique .....	66
4.5.1. Transformation du premier système d'équations .....	67
4.5.2. Transformation du second système d'équations .....	68
4.5.3. Opérations d'algèbre matricielle sur les équations .....	68

4.6. Conditions initiales, conditions aux limites .....	71
4.6.1. Conditions initiales.....	71
4.6.2. Conditions aux limites .....	72

**Chapitre 5 : MODELISATION NUMERIQUE**

5.1. Introduction .....	76
5.2. Méthodes des différences finies .....	77
5.3. Analyse de l'approximation .....	79
5.3.1. Erreur de troncature .....	79
5.3.2. Stabilité d'un schéma aux différences finies .....	79
5.3.3. Consistance d'un schéma aux différences finies .....	80
5.3.4. Convergence d'un schéma aux différences finies.....	80
5.4. Schéma explicite, Schéma implicite .....	80
5.5. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés .....	81
5.5.1. Schéma de MacCormack .....	82
5.5.2. Schéma de Lambda .....	83
5.5.3. Schéma de Gabutti .....	84
5.6. Application du schéma de MacCormack au modèle mathématique .....	85
5.7. Application du schéma de Gabutti au modèle mathématique .....	88
5.8. Stabilité des schémas .....	92
5.9. Traitement numériques des ondes de choc – notion de viscosité artificielle - .....	93
5.10. Organigrammes de calcul .....	96
5.10.1. Organigramme relatif au schéma de MacCormack .....	96
5.10.2. Organigramme relatif au schéma de Gabutti .....	98

**Chapitre 6 : EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES**

6.1. validation du modèle mathématique	
- application sur des canaux à faible pente - .....	102
6.1.1. Etude d'un rétrécissement rectiligne à faible pente .....	102
6.1.2. Etude d'un élargissement progressif à faible pente .....	115
6.1.3. Conclusion .....	123
6.2. Application du modèle mathématique sur des canaux à forte pente .....	124
6.2.1. Ecoulement dans le coursier d'un évacuateur de crues en modèle réduit	
- canal prismatique à forte pente - .....	124
6.2.2. Etude d'un élargissement rectiligne à pente variable .....	131
6.2.3. Etude d'un rétrécissement rectiligne à forte pente .....	137
6.2.4. Etude d'un élargissement progressif à forte pente .....	143
6.2.5. Conclusion .....	148

**CONCLUSION GENERALE** 150

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES** 155

## LISTE DES SYMBOLES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

- $B(x)$  : Largeur de la transition à une distance  $x$ .
- $b_1$  : Largeur amont de la transition.
- $b_3$  : Largeur aval de la transition.
- $b_{min}$  : Largeur minimale de la transition.
- $c$  : Célérité d'onde.
- $c_0$  : Célérité d'onde absolue.
- $C$  : Coefficient de CHEZY.
- $C_f$  : Coefficient de frottement.
- $C_n$  : Nombre de COURANT.
- $D$  : Intensité de perturbation.
- $D_h$  : Profondeur hydraulique.
- $F$  : Nombre de Froude.
- $F_i$  : Nombre de Froude au niveau de la section  $i$ .
- $F_f$  : Force de frottement.
- $F_g$  : Force de gravité.
- $F_{gx}$  : Composante de la force de gravité suivant  $x$ .
- $F_{gy}$  : Composante de la force de gravité suivant  $y$ .
- $F_p$  : Force de pression.
- $F_{px}$  : Composante de la force de pression suivant  $x$ .
- $F_{py}$  : Composante de la force de pression suivant  $y$ .
- $f$  : Fonction.
- $f_c$  : Facteur de CORIOLIS.
- $f_e$  : Paramètre de courbure de la paroi.
- $g$  : Accélération de la pesanteur.
- $h$  : Profondeur de l'écoulement.
- $h_i$  : Profondeur de l'écoulement au niveau de la section  $i$ .
- $h^f$  : Profondeur de l'écoulement au point fictif du maillage.
- $i$  : Indice du maillage suivant la direction  $x(\xi)$ .
- $j$  : Indice du maillage suivant la direction  $y(\eta)$ .
- $k$  : Indice de l'incrémentement du pas de temps.
- $k_f$  : Facteur de forme.
- $L$  : Longueur de la transition.
- $L_p$  : Longueur de la courbe modifiée.
- $L_t$  : Longueur totale de la zone de transition.
- $l_s$  : Largeur du front de l'onde de choc.
- $n$  : Coefficient de rugosité de MANNING.

- P : Pression
- $P_i$  : Pression au niveau de la section i.
- $P_m$  : Périmètre mouillé.
- p : Débit par unité de largeur suivant x.
- Q : Débit de l'écoulement.
- q : Débit par unité de largeur suivant y.
- $R_h$  : Rayon hydraulique.
- r : Rapport de largeurs.
- S : Nombre de choc.
- $S_m$  : Surface mouillée.
- $S_{fx}$  : Pente de frottement suivant x.
- $S_{fy}$  : Pente de frottement suivant y.
- $S_{f\xi}$  : Pente de frottement suivant  $\xi$ .
- $S_{f\eta}$  : Pente de frottement suivant  $\eta$ .
- $S_{ox}$  : Pente de fond suivant x.
- $S_{oy}$  : Pente de fond suivant y.
- $S_{o\xi}$  : Pente de fond suivant  $\xi$ .
- $S_{o\eta}$  : Pente de fond suivant  $\eta$ .
- t : Temps.
- u : Composante de la vitesse suivant x( $\xi$ ).
- $u^f$  : Composante de la vitesse suivant x( $\xi$ ) au point fictif.
- V : Vitesse de l'écoulement.
- $V_i$  : Vitesse de l'écoulement au niveau de la section i.
- $V_{in}$  : Vitesse normale au front de l'onde au niveau de la section i.
- $V_{it}$  : Vitesse tangentielle au front de l'onde au niveau de la section i.
- $V_m$  : Vitesse moyenne de l'écoulement.
- $V^f$  : Vitesse de l'écoulement au point fictif.
- v : Composante de la vitesse suivant y( $\eta$ ).
- $v^f$  : Composante de la vitesse suivant y( $\eta$ ) au point fictif.
- $W_1$  : Force de pression à la paroi.
- $W_x$  : Force due au vent par unité de masse suivant x.
- $W_y$  : Force due au vent par unité de masse suivant y.
- x : Coordonnée spatiale longitudinale.
- Y : Rapport de profondeur d'écoulement.
- $Y_s$  : Rapport de profondeur d'écoulement.
- y : Coordonnée spatiale transversale.
- $Z_b$  : Elévation du fond.
- z : Coordonnée spatiale verticale.
- $\alpha$  : Angle d'inclinaison du fond.



- $\alpha_x$  : Inclinaison du fond suivant x.
- $\alpha_y$  : Inclinaison du fond suivant y.
- $\alpha_\xi$  : Inclinaison du fond suivant  $\xi$ .
- $\alpha_\eta$  : Inclinaison du fond suivant  $\eta$ .
- $\beta$  : Angle de choc.
- $\chi$  : Coefficient de dissipation.
- $\varepsilon$  : Coefficient de la viscosité turbulente.
- $\eta$  : Coordonnée spatiale transformée.
- $\lambda_\ell$  : Valeurs propres ,  $\ell = 1,2,3$ .
- $\lambda_\ell^+$  : Valeurs propres positives.
- $\lambda_\ell^-$  : Valeurs propres négatives.
- $\theta$  : Angle de déviation de la paroi.
- $\theta^*$  : Constante d'intégration.
- $\rho$  : Densité de l'eau.
- $\tau_{sx}$  : Contraintes dues au vent suivant x.
- $\tau_{sy}$  : Contraintes dues au vent suivant y.
- $\tau_x$  : Le rapport  $\Delta t / \Delta x$ .
- $\tau_y$  : Le rapport  $\Delta t / \Delta y$ .
- $\tau_\xi$  : Le rapport  $\Delta t / \Delta \xi$ .
- $\tau_\eta$  : Le rapport  $\Delta t / \Delta \eta$ .
- $\omega_\ell$  : Valeurs propres,  $\ell = 1,2,3$ .
- $\omega_\ell^+$  : Valeurs propres positives.
- $\omega_\ell^-$  : Valeurs propres négatives.
- $\xi$  : Coordonnée spatiale transformée.
- $\Delta x$  : Pas de discrétisation suivant x.
- $\Delta y$  : Pas de discrétisation suivant y.
- $\Delta t$  : Pas de temps.
- $\Delta \xi$  : Pas de discrétisation suivant  $\xi$ .
- $\Delta \eta$  : Pas de discrétisation suivant  $\eta$ .
- $\Delta_x$  : Opérateur de différence finie avant suivant x.
- $\Delta_y$  : Opérateur de différence finie avant suivant y.
- $\nabla_x$  : Opérateur de différence finie arrière suivant x.
- $\nabla_y$  : Opérateur de différence finie arrière suivant y.
- $\sim$  : Indice relatif à l'étape de prédiction ( I ).
- $--$  : Indice relatif à l'étape de prédiction ( II ).
- $\wedge$  : Indice relatif à l'étape de correction.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Chapitre 1*

# ***INTRODUCTION GENERALE***

## 1.1. Introduction générale

L'étude de l'écoulement de l'eau dans les canaux à ciel ouvert est d'une extrême complexité, lorsque nous l'envisageons dans toute sa généralité. En effet, tout changement de section ou de direction d'un canal considéré, tel qu'un rétrécissement ou élargissement entraîne une surface d'écoulement irrégulière et ondulée. Ces irrégularités représentent de grandes perturbations qui provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau. De telles ondes sont appelées "ondes transversales", ou par analogie avec la dynamique des gaz "ondes de choc".

Cette complexité a été d'ailleurs soulignée par GALILEE (1564-1642) : "je me suis heurté, dit-il, à moins de difficultés dans la découverte du mouvement des corps célestes, malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches sur le mouvement de l'eau courante qui se produit cependant sous nos yeux".

On relève d'une part, que les conditions d'écoulement torrentielles ne se retrouvent généralement que dans des canaux artificiels, et d'autre part que des ondes de choc sont habituellement présentes dans des canaux non prismatiques pour des écoulements en régime supercritique ; ce qui nécessitera une surélévation importante des parois latérales du canal.

Par ailleurs, la solution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Ces derniers sont en général multiples et compliqués. Pour les représenter, on est amené à négliger certains phénomènes et à simplifier certains autres. Et même avec ça, les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes algébriques connues.

Le progrès de l'analyse mathématique et l'arrivée de l'outil de calcul numérique et l'impact des grands calculateurs ont contribué à un rapide développement dans toutes les branches des sciences physiques englobant le domaine hydraulique. Ce qui a permis de traiter un grand nombre de problème décrits par les équations aux dérivées partielles.

Malgré tout cela, on dit toujours que "l'hydraulique est pleine de paradoxes".

On présente dans cette étude, une analyse sur les écoulements à surface libre supercritiques dans des canaux à géométrie variable, appelés souvent "transitions", du fait qu'ils sont généralement utilisés sur de courtes distances. Le principal objectif consiste à déterminer l'allure de la surface libre dans ces transitions.

Cette étude se compose de deux parties. En premier lieu on s'intéressera aux canaux non prismatiques de très faible pente (presque horizontaux). Ensuite, l'influence de l'augmentation

de la pente de fond sur l'écoulement ou sur la forme de la ligne d'eau dans ces zones de transitions sera traitée.

Les transitions dans les canaux à surface libre sont communément utilisées dans les applications hydrauliques, notamment dans les coursiers d'évacuateurs de crues, dans la réduction des pertes d'énergie et dans certains bassins d'amortissement.

Etant donné que le passage d'un écoulement supercritique dans des canaux non prismatiques entraîne des particularités du type ondes qui constituent des problèmes caractéristiques le long du canal (creux ou - ce qui est plus dangereux - surélévations), il devient donc indispensable de connaître le réseau d'ondes de choc qui se forme, et par suite la hauteur extrême de l'onde, pour pouvoir dimensionner correctement les parois latérales de ces transitions ; en d'autres termes, déterminer la hauteur nécessaire aux bajoyers pour éviter le débordement de l'eau : c'est l'intérêt pratique de notre étude.

Un modèle hydrodynamique bidimensionnel permettant la simulation du phénomène étudié est déterminé en conséquence. Ce modèle mathématique, qui découle des principes fondamentaux de la mécanique (principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement) n'est autre qu'une généralisation des équations différentielles d'un écoulement graduellement varié en régime non permanent dans les canaux découverts, de SAINT-VENANT, avec deux dimensions spatiales, et qui proviennent de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de NAVIER-STOKES, moyennant quelques hypothèses.

Les écoulements non permanents à surface libre sont donc régis par un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, non linéaire. De telles équations ne peuvent être résolues théoriquement que dans des cas particuliers (problèmes très simples ou de géométrie très particulière), difficilement retrouvés dans la réalité.

Par conséquent, plusieurs problèmes en hydrauliques exigent par manque de solution analytique, une solution numérique des équations aux dérivées partielles.

La résolution des équations de base est alors faite en utilisant deux schémas aux différences finies explicites du type prédicteur-correcteur, précis à l'ordre deux, en espace et en temps, à savoir le schéma de MacCORMACK et le schéma de GABUTTI. Ces derniers sont les mieux adaptés au type de problème étudié dans la présente thèse.

Le modèle mathématique bidimensionnel relatif aux écoulements non permanents a été utilisé pour obtenir des solutions à l'état permanent en traitant la variable temps comme paramètre d'itération.

La discrétisation du domaine physique qui est de forme géométrique complexe est cependant assez délicate. Pour cela, nous avons utilisé une transformation géométrique simple, en convertissant le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire ; notre modèle mathématique sera donc basé sur les équations en coordonnées transformées.

On utilisera ce modèle pour analyser d'abord l'écoulement supercritique dans des structures hydrauliques convergentes et divergentes de très faible pente, puis, l'effet d'une pente de fond considérable sur l'écoulement dans les mêmes transitions sera étudié.

Les résultats obtenus seront comparés avec les résultats analytiques, numériques et expérimentaux d'autres investigateurs.

## 1.2. Généralités sur les écoulements a surface libre

### 1.2.1. Définitions

- Les écoulements à surface libre sont caractérisés par l'existence d'une surface de séparation entre l'air et l'eau appelée "surface libre" et qui est généralement soumise à la pression atmosphérique.
- On appelle "canal" un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique .

On distingue cependant deux catégories de canaux [ 11, 17, 18 et 31 ] :

- i)- "Les canaux naturels" qui sont des cours d'eaux existant naturellement sur terre, tels que les rivières, fleuves et estuaires, et dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont généralement assez irrégulières (Figure 1.1.a) :

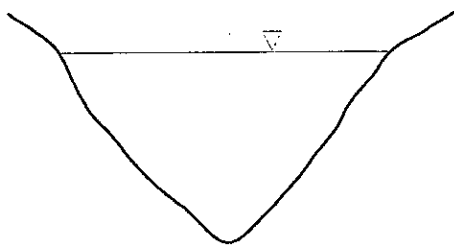


Figure 1.1.a : Section transversale d'un cours d'eau naturel.

- ii)- "Les canaux artificiels" qui sont des cours d'eaux réalisés par l'homme, tels que, les canaux de navigation et d'évacuation, et dont les propriétés hydrauliques et géométriques sont généralement assez régulières.

Les canaux artificiels usuellement utilisés sont illustrés dans la figure (1.1.b) :

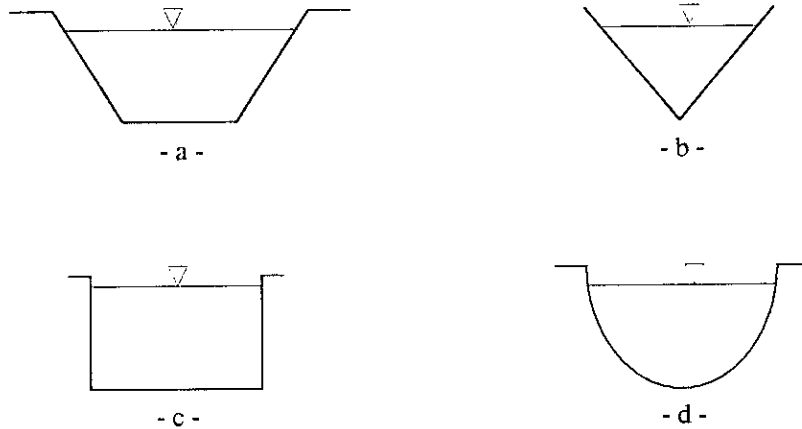


Fig. 1.1.b : Canaux artificiels

- a - Profil trapézoïdale
- b - Profil triangulaire
- c - Profil rectangulaire
- d - Profil semi-circulaire.

### 1.2.2. Canaux prismatiques, canaux non prismatiques [14,18, 20 et 78]

Un canal est dit "prismatique" si :

- Les génératrices du canal sont des droites parallèles entre elles .
- La forme géométrique du canal ne varie pas le long du courant liquide.

Par ailleurs, on dit qu'un canal est "non prismatique" si :

- Les génératrices du canal ne sont plus parallèles entre elles.
- La forme du canal est soumise à des changements locaux de sections le long du courant liquide.

Les changements locaux de sections peuvent être :

- Des rétrécissements brusques ou graduels (convergents).
- Des élargissements brusques ou graduels (divergents).

Les canaux non prismatiques sont souvent utilisés sur une courte distance, c'est pour cela d'ailleurs qu'on les désigne généralement sous le nom de "transitions". Leur présence engendre des instabilités à la surface libre.

### 1.2.3. Classification des écoulements [14, 20, 24, 25 et 59]

Les écoulements à surface libre peuvent être classés suivant la variation de la profondeur de l'écoulement dans le temps et dans l'espace. On distinguera l'écoulement permanent et l'écoulement non permanent, si le temps est pris comme critère de classification. Par contre, si l'espace est pris comme critère, on distinguera alors l'écoulement uniforme et l'écoulement varié.

Un écoulement à surface libre est dit "uniforme", si la profondeur - ainsi que les autres paramètres - de l'écoulement est la même en toute section du canal; un écoulement uniforme peut être permanent ou non permanent.

Remarquons qu'un écoulement uniforme non permanent implique que la surface libre fluctue en restant parallèle à la pente de fond, évidemment ce cas est pratiquement impossible.

Un écoulement à surface libre est dit "varié", si la profondeur de l'écoulement - ainsi que les autres paramètres - varie le long du canal, il peut être permanent ou non permanent. La variation en question peut être soit graduelle, soit brusque et rapide : l'écoulement varié se subdivise donc en écoulement graduellement varié et en écoulement brusquement varié.

### 1.2.4 : Régime d'écoulement - Notion du nombre de Froude - [24, 25, 31, 74 et 78]

L'écoulement d'un fluide dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes :

Forces d'inertie; forces de gravité; forces de frottement (viscosité et rugosité).

L'effet de la gravité sur le régime d'écoulement est représenté par le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité. Ce rapport de grande utilité en hydraulique des écoulements à surface libre est défini comme étant le nombre de FROUDE, et est exprimé par :

$$F = \frac{V}{\sqrt{gD_h}} \quad (1.1)$$

où,  $V$  : Vitesse de l'écoulement (m / s).

$g$  : Accélération de la pesanteur (m / s<sup>2</sup>).

$D_h$  : Profondeur hydraulique définie comme étant le rapport entre la section mouillée du canal et la largeur de la surface libre (m).

Si le nombre de Froude "F" est égal à l'unité, on dira que l'écoulement est en régime "critique".

Par contre, si le nombre de Froude "F" est inférieur à l'unité, l'écoulement est alors en régime "subcritique". Dans ce cas l'effet de la gravité est plus prononcé, ceci se traduit par une faible vitesse d'écoulement.

Finalement, si le nombre de Froude "F" est supérieur à l'unité, le régime d'écoulement devient "supercritique". Les forces d'inertie seront donc plus prépondérantes, ceci se traduit par une importance vitesse d'écoulement.

**Remarque :** La vitesse critique  $V = \sqrt{gD_h}$  est souvent appelée "célérité de l'onde gravitaire".

### 1.2.5. Onde de gravité - Intumescence -

Dans un canal, un écoulement variable dans le temps se manifeste par des ondes de gravité à la surface libre. On considère ici des ondes de faibles amplitudes ou de grandes longueurs d'ondes. La théorie hydrodynamique [35 et 65] pour les ondes de faibles amplitudes donne pour la vitesse apparente de propagation, appelée également "célérité" d'une intumescence :

$$c = \pm \sqrt{gD_h} \quad (1.2)$$

Cette relation peut aussi être obtenue par l'application de l'équation de continuité et celle de l'énergie [20 et 35].

#### 1.2.5.1. Écoulement avec ondes [24, 35 et 74]

L'équation (1.2) de la célérité  $c$ , avec laquelle se propage une onde de gravité, qui est longue et de faible amplitude, dans un canal de section quelconque, a été établie pour un canal rempli d'eau au repos. Elle reste cependant valable même dans le cas où l'eau est en mouvement, l'onde se superpose à ce courant. Par conséquent, on écrit la célérité absolue d'onde,  $c_o$ , pour un canal ayant une vitesse moyenne,  $V_m$ , comme suit :

$$c_o = V_m \pm c$$

Cette célérité a évidemment deux valeurs :

$$c'_o = V_m + c \quad ; \quad c''_o = V_m - c$$



Par suite, on distingue essentiellement trois cas :

- i)-  $V_m < c$ , où l'onde avec la célérité,  $c'_o$ , se propage vers l'aval et où l'onde avec la célérité,  $c''_o$ , se propage vers l'amont ; c'est le régime "fluvial" .
- ii)-  $V_m > c$ , où l'onde avec la célérité,  $c'_o$ , se propage vers l'aval et où l'onde avec la célérité,  $c''_o$ , se propage vers l'aval; c'est le régime "torrentiel".
- iii)- Dans le cas particulier où la vitesse de courant,  $V_m$ , et la célérité d'onde,  $c$ , sont égales ( $V_m \equiv c$ ), l'écoulement est en régime "critique".

### 1.2.5.2. Instabilité à la surface - Ondes en cascade - [ 17, 35 et 65]

Si la pente de fond du canal est très importante et/ou l'écoulement est torrentiel (supercritique), la surface libre de l'eau peut devenir par suite instable (Figure 1.2). Cette instabilité se manifeste par :

- Une série d'onde de gravité de faible amplitude, appelées "ondes en cascade", qui se propage vers l'aval.
- Un déferlement, qui provoque un entraînement d'air.

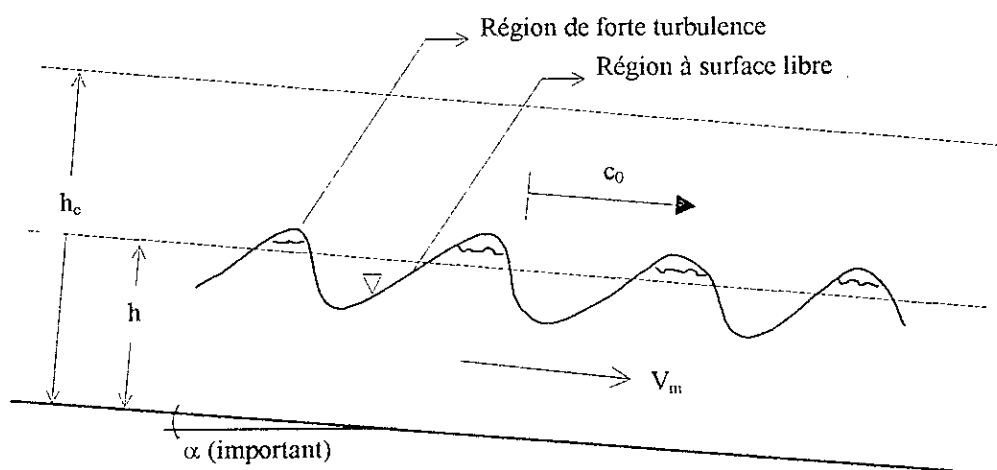


Figure 1.2 : Ondes en cascade

Ainsi, les ondes en cascade se superposent à l'écoulement, et se déplacent en croissant vers l'aval avec une célérité absolue,  $c_0$ , plus importante que la vitesse moyenne,  $V_m$ :

$$c_0 = V_m + \sqrt{gD_h}$$

Les crêtes des ondes en cascade forment une région de forte turbulence, tandis que les creux se présentent comme une surface plutôt lisse.

Par contre, on peut dire que la présence de tels phénomènes rend l'étude des écoulements à surface libre extrêmement compliquée.

*Chapitre 2*

***ETUDE  
BIBLIOGRAPHIQUE***

## 2.1. Etat de connaissance sur les équations de base

En vue d'étudier les écoulements supercritiques dans des canaux non prismatiques, à faible et à forte pente, il est nécessaire de poser d'abord les équations de base qui les régissent. Ces dernières sont celles des écoulements graduellement variés en régime non permanent à surface libre.

On trouve dans la littérature plusieurs travaux entrepris par certains chercheurs et scientifiques sur les écoulements supercritiques, et qui ont proposé des systèmes d'équations obtenus en appliquant soit les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ou alors les principes de conservation de la masse et de l'énergie, tout en posant certaines hypothèses afin de faciliter la résolution du problème en question.

Parmi ces hypothèses, on cite celle d'une faible pente de fond du canal, dont l'effet d'une valeur appréciable n'a pas été pris en considération que par quelques chercheurs seulement.

- Ainsi, **CHOW (1959)** [20] a donné dans son ouvrage, qui est une excellente référence pour les Ingénieurs, les différents types d'écoulements et leurs équations de base dans le cas unidimensionnel seulement.

Les écoulements graduellement variés non permanents sont gouvernés par les équations unidimensionnelles de BARRE de SAINT-VENANT, obtenues par l'application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennant certaines hypothèses simplificatrices, notamment celle d'une pente faible :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

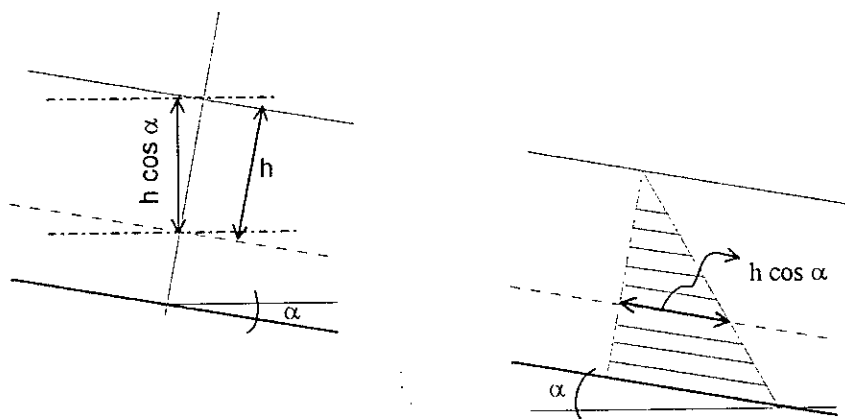
avec,  $D = A / B$

où,  $A$  : surface,  $B$  : largeur.

- Equation de quantité de mouvements :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = S_o - S_f \quad (2.2)$$

Par contre, si la pente du canal est considérable, elle aura alors un effet sur la distribution de pression. Cette dernière est de ce fait multipliée par un facteur de correction « $\cos\alpha$ », où  $\alpha$  représente l'angle d'inclinaison du fond du canal avec l'horizontale (Figure 2.1) :



- Figure 2.1 -

$$P = \rho g h \cos\alpha$$

avec,  $h$  : mesurée perpendiculairement au fond du canal.

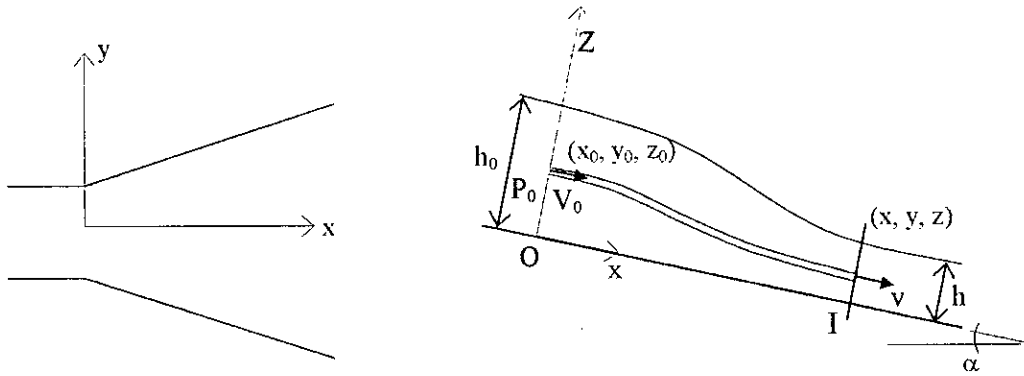
L'équation dynamique deviendra :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial h}{\partial x} = S_o - S_f \quad (2.3)$$

Par ailleurs, le nombre de Froude dans ce cas est donné comme suit :

$$F = \frac{V}{\sqrt{g h \cos\alpha}}$$

• **BAGGE et HERBICH (1967)** [7] ont constaté que la majorité des travaux effectués sur les écoulements supercritiques dans les canaux à ciel ouvert, sont seulement des travaux sur des canaux horizontaux, où à la limite à très faible pente. Ils ont alors, fait une tentative pour analyser ce type d'écoulement, faisant intervenir ainsi l'effet de la pente, en utilisant un modèle mathématique basé sur l'équation de continuité et l'équation de l'énergie appliquée entre les points O et I (Figure 2.2) :



- Figure 2.2 -

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho g z_0 \cos \alpha = P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g [z \cos \alpha - (x - x_0) \sin \alpha] \quad (2.4)$$

Par hypothèse, la pression est hydrostatique, elle est exprimée dans ce cas par :

$$P = \rho g (h - z) \cos \alpha$$

Le nombre de Froude pour un canal incliné est tel que :  $F = \frac{V}{\sqrt{g h \cos \alpha}}$

avec,  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$  : vitesse résultante.

- Suivie d'une étude expérimentale faite en (1972) par **HERBICH et WALSH** [47]. Cette étude a pour but l'analyse d'un écoulement supercritique dans un élargissement rectiligne, dont la pente de fond est variée, afin de faire une comparaison entre les résultats obtenus par expérimentation et ceux obtenus théoriquement [7].

- En (1973) **YEN** [82] a présenté un document qui est une étude purement théorique et globale, concernant les équations générales gouvernant les écoulements dans les canaux découverts. On y trouve des développements détaillés sur les équations unidimensionnelles de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, pour différents types d'écoulements : turbulent ou laminaire, permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, subcritique ou supercritique, graduellement ou rapidement varié, et pour différents types de fluides : compressible ou incompressible, homogène ou non homogène, visqueux ou non visqueux...

Pour un écoulement unidimensionnel graduellement varié non permanent, l'équation dynamique est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_0 - S_F) \quad (2.5)$$

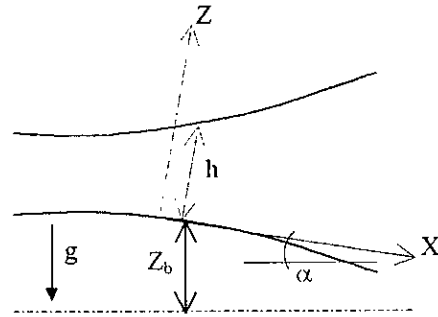
où,

-  $S_0 = -\frac{\partial Z_b}{\partial x} = \sin \alpha$  : pente de fond,

-  $S_F$  : pente de frottement,

-  $Z_b$  : élévation du fond par rapport à l'horizontale,

-  $h$  : hauteur mesurée perpendiculairement au fond du canal.



- Figure 2.3 -

La pression piézométrique est calculée, en se référant au fond du canal (Figure 2.3), avec l'hypothèse d'une distribution hydrostatique :

$$P = \rho g z \cos \alpha$$

Par ailleurs, le nombre de Froude modifié pour les écoulements en canaux inclinés est :

$$F = \frac{V}{\sqrt{g h \cos \alpha}}$$

• Afin de tenir compte de la dimension transversale et, éventuellement de la force de Coriolis, une généralisation des équations de SAINT-VENANT avec deux dimensions spatiales a été faite et présentée par HUG (1975) [49]. Les équations développées sont celles des écoulements bidimensionnels presque horizontaux, en régime non permanent dans les canaux à ciel ouvert, obtenues par application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à un prisme élémentaire de base  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et de hauteur  $h$  (Figure 2.4), avec les suppositions classiques émises par SAINT-VENANT. Le système d'équations ainsi obtenu est :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{h} \right) + g h \frac{\partial Z}{\partial x} = -g \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} + f_c V \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UV}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{h} \right) + g h \frac{\partial Z}{\partial y} = -g \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} - f_c U \tag{2.8}$$

avec,  $Z = h + Z_b$  ;  $U = uh$  ;  $V = vh$

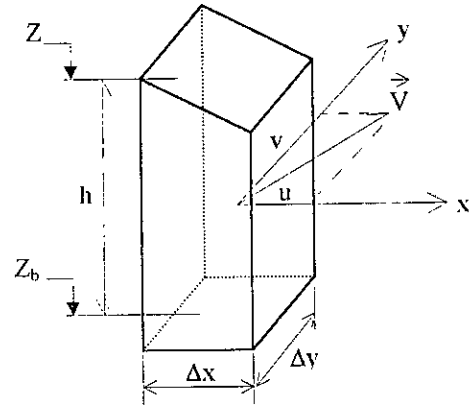
$f_c$  : facteur de Coriolis.

$C$  : Coefficient de CHEZY.

La pente du fond étant supposée très faible, c'est à dire :

$$\text{tg } \alpha_i \approx \sin \alpha_i \approx \alpha_i = S_{0i}$$

$$\text{D'où : } \left( -\frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) = S_{0x} \quad \text{et} \quad \left( -\frac{\partial Z_b}{\partial y} \right) = S_{0y}$$



- Figure 2.4 -

• Par ailleurs, **LAI (1977)** [55] a donné une analyse sur le calcul des écoulements bidimensionnels non permanents dans les rivières et les estuaires, par la méthode des caractéristiques.

L'intégration des équations générales du mouvement (équations tridimensionnelles de NAVIER STOKES) sur la profondeur suivant le système d'axes choisi, dont le plan x-y repose sur un plan de référence horizontal, et l'axe z lui est perpendiculaire, tout en faisant quelques suppositions nécessaires, fournit le système d'équations gouvernant ces écoulements. Ce dernier est quasiment le même que celui obtenu par HUG [49], sauf qu'il tient compte de l'effet du vent en plus.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + (Z - Z_b) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial Z}{\partial x} - u \frac{\partial Z_b}{\partial x} + (Z - Z_b) \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial Z}{\partial y} - v \frac{\partial Z_b}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_c v + g \frac{\partial Z}{\partial x} + g S_x - w_x = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f_c u + g \frac{\partial Z}{\partial y} + g S_y - w_y = 0 \quad (2.11)$$

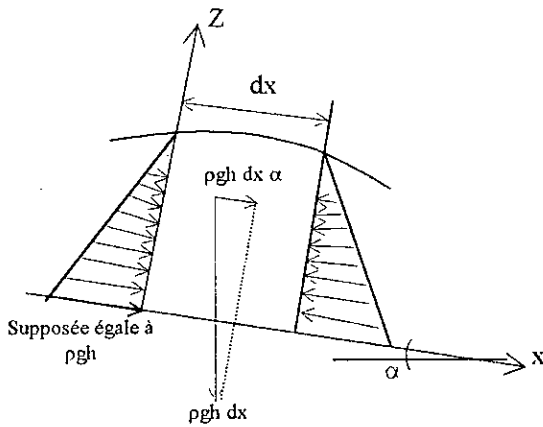
avec,

- $w_{x,y}$  : forces dues au vent par unité de masse suivant x et y respectivement.
- $S_{x,y}$  : pentes de frottement suivant x et y respectivement.

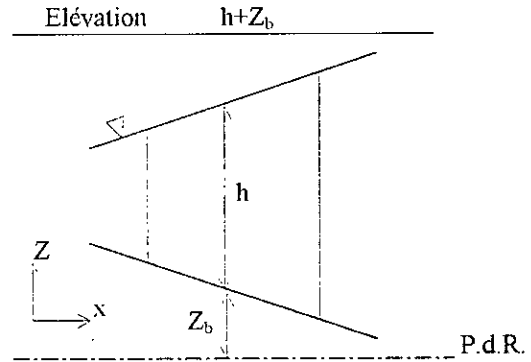
• En (1979), **ABBOTT** [1] a illustré dans son ouvrage, les différentes équations de base décrivant les écoulements à surface libre graduellement variés unidimensionnels et bidimensionnels en régime non permanent, tenant compte des effets de certains paramètres : apports latéraux, frottements, contraintes dues au vent, et l'élévation du fond par rapport à l'horizontale...



Pour un écoulement unidimensionnel, ou la pente du fond est considérée très faible mais non nulle, la détermination des équations du mouvement (continuité et quantité de mouvement) se fait suivant un système d'axes (Figure 2.5.a), pris de sorte que le fond représente la direction x, et la profondeur h (axe z) est mesurée perpendiculairement à celui-ci.



- Figure 2.5.a -



- Figure 2.5.b -

Le résultat est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h u)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u^2 + g \frac{h^2}{2} \right) - g h \alpha + g \frac{u |u|}{C^2} = 0 \quad (2.13)$$

Pente très faible, ce qui signifie que :  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ .

Dans le cas où la pente est considérable, un autre système de coordonnées (Figure 2.5.b) est choisi, il en résulte :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h u)}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h u) + \frac{\partial}{\partial x} (h u^2) + g h \frac{\partial}{\partial x} (h + Z_b) + g \frac{u |u|}{C^2} = 0 \quad (2.15)$$

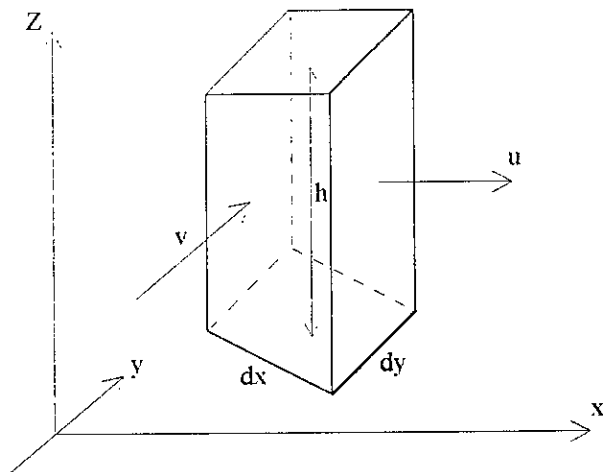
En outre, si l'écoulement est bidimensionnel, les équations du mouvement sont obtenues en utilisant les mêmes procédés que ci-dessus concernant le choix du système d'axes. Il s'ensuit dans le cas d'une pente faible (Figure 2.5.c) que :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h u) + \frac{\partial}{\partial y}(h v) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u^2 + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(h u v) - g h \alpha + g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h v) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h v^2 + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x}(h u v) - g h \alpha + g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} = 0 \quad (2.18)$$

$h$  : mesurée perpendiculairement au fond du canal.



- Figure 2.5c -

Mais, si la pente est appréciable, on a alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h u) + \frac{\partial}{\partial y}(h v) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h u) + \frac{\partial}{\partial x} (h u^2) + g h \frac{\partial}{\partial x} (h + Z_b) + \frac{\partial}{\partial y}(h u v) + g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h v) + \frac{\partial}{\partial x}(h u v) + \frac{\partial}{\partial y} (h v^2) + g h \frac{\partial}{\partial y} (h + Z_b) + g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} = 0 \quad (2.21)$$

avec,

$$\left( -\frac{\partial Z_b}{\partial x} = \sin \alpha_x \right) : \text{pente de fond suivant } x.$$

$$\left( -\frac{\partial Z_b}{\partial y} = \sin \alpha_y \right) : \text{pente de fond suivant } y.$$

• Une analyse du phénomène d'ondes de choc prenant naissance dans des transitions graduelles ou brusques à surface libre, et leurs calcul à l'aide d'un système d'équations régissant les écoulements bidimensionnels à surface libre presque horizontaux (pente faible) a été faite par **KATAPODES (1984)** [54]. Le système utilisé est comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{pq}{h} \right) + g h \frac{\partial Z_b}{\partial x} + g n^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{1/3}} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{pq}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) + g h \frac{\partial Z_b}{\partial y} + g n^2 \frac{q(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{1/3}} = 0 \quad (2.24)$$

où,  $p$  : débit par unité de largeur suivant  $x$ .

$q$  : débit par unité de largeur suivant  $y$ .

• En (1986), **GARCIA et KAHAWITA** [33] ont présenté une étude purement numérique, dans le but de résoudre les équations de SAINT-VENANT généralisées à un cas bidimensionnel, et faisant intervenir en plus les effets de Coriolis, du vent et de la viscosité turbulente. Les équations obtenues par intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de NAVIER-STOKES, comme il a été développé précédemment par **LAI** [55], sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u v h) = E'_x \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u v h) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 h + g \frac{h^2}{2} \right) = E'_y \quad (2.27)$$

où,

$$E'_x = g h (S_{0x} - S_{Fx}) + f_c V - \frac{1}{\rho} \tau_{sx} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$E'_y = g h (S_{0y} - S_{Fy}) - f_c U - \frac{1}{\rho} \tau_{sy} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

$$U = u h \quad ; \quad V = v h \quad ; \quad S_{0x} = -\frac{\partial Z_b}{\partial x} \quad ; \quad S_{0y} = -\frac{\partial Z_b}{\partial y}$$

$$S_{Fx} = \frac{n^2 U (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}} \quad ; \quad S_{Fy} = \frac{n^2 V (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}}$$

- $\tau_{sx}, \tau_{sy}$  : contraintes dues au vent.
- $\varepsilon$  : coefficient de la viscosité turbulente.

Les termes de la pente sont donnés par  $S_{ox}$  et  $S_{oy}$ .

- **CHAUDHRY (1987)** [19] a fourni dans le douzième chapitre de son important ouvrage, un développement des écoulements unidimensionnels non permanents à surface libre, qui sont décrits par les équations de SAINT-VENANT, avec l'hypothèse d'une inclinaison très faible du fond ( $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \alpha$  et  $\cos\alpha \approx 1$ ), données auparavant par CHOW [20].

- De même, **CUNGE (1988)** [21] a donné une simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux, régis par les équations d'un écoulement unidimensionnel non stationnaire, qui ne sont autres que celles de SAINT-VENANT, basées sur certaines hypothèses énoncées en 1871, parmi lesquelles, la pente longitudinale du chenal est faible, suffisamment pour qu'on puisse remplacer le cosinus de l'angle entre le thalweg et l'horizontale par l'unité.

- D'autre part, **JIMENEZ et CHAUDHRY (1988)** [52] ont traité le problème du calcul des écoulements supercritiques dans des canaux à surface libre de géométrie irrégulière, où les ondes transversales apparaissent. Les équations des écoulements permanents obtenues par élimination des dérivées temporelles dans les équations à l'état non permanent déterminées par LAI [55], sont utilisées en conséquence.

- En (1992), une analyse relative aux calculs des écoulements à surface libre dans des changements de géométrie -élargissements, rétrécissements- a été présentée par **BHALLAMUDI et CHAUDHRY** [15]. Ces écoulements sont gouvernés par les équations bidimensionnelles moyennées sur la profondeur, obtenues par intégration des équations générales du mouvement, en l'occurrence, celles de NAVIER STOKES. Le système d'équations obtenu est le même que celui donné par LAI [55], avec l'hypothèse d'une pente faible.

- En vue d'étudier le phénomène de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret rencontrant un cylindre, ou traversant une structure convergente-divergente, en régime non permanent, **YANG et HSU (1993)** [81] ont utilisé les équations des écoulements bidimensionnels non permanents à surface libre - théorie des eaux de faible profondeur -, qui sont données antérieurement par HUG [49], ABBOTT [1] et autres. Mais dans ce cas, en plus de l'hypothèse d'une distribution hydrostatique de la pression, la pente et les frottements sont supposés carrément nuls, conduisant ainsi au système suivant :

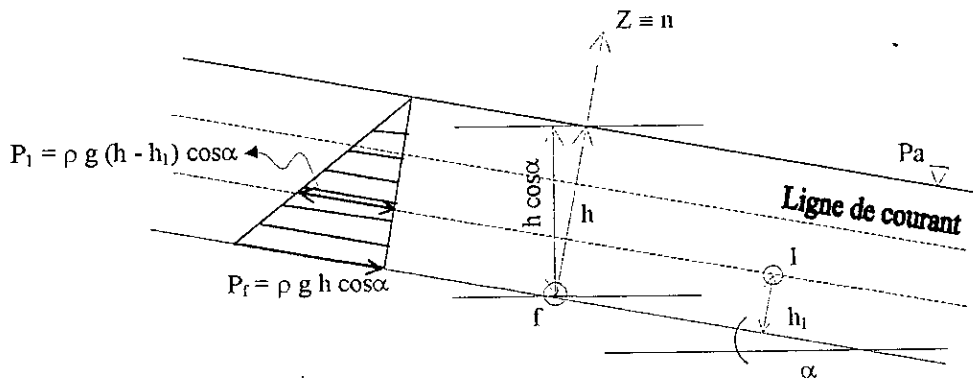
$$\partial_t \hat{Q} + \partial_x \hat{E} + \partial_y \hat{G} = 0 \quad (2.28)$$

où,

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} ; \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ huv \end{pmatrix} ; \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

• **BERREKSI et BOUHADJI (1993)** [14] ont présenté une thèse d'ingénieur sous la direction de Mr. BELHADJ en rapport avec le travail fait par BHALLAMUDI et CHAUDHRY [15] et qui avait pour objectif, la simulation et l'analyse des écoulements à surface libre dans les transitions. Un modèle mathématique des écoulements bidimensionnels en régime permanent, HUG [49] et ABBOTT [1] a été utilisé pour obtenir des solutions à l'état permanent, en prenant le temps comme paramètre d'itération.

• Par ailleurs, **GRAF et ALTINAKAR (1993)** [35] ont édité un ouvrage dans lequel des informations sur la pression dans un canal de pente non négligeable ont été fournies, en supposant toujours qu'elle est hydrostatique (Figure 2.6).



- Figure 2.6 -

Dans un tel cas, elle est égale à :  $P_r = \rho \cdot g \cdot h \cdot \cos \alpha$

où, h représente la profondeur d'écoulement mesurée perpendiculairement au fond du canal.

- **ABSI et RETIEB (1994)** [3] ont utilisé les équations d'un écoulement bidimensionnel graduellement varié et non permanent à surface libre données antérieurement par **BHALLAMUDI et CHAUDHRY** [15] pour analyser le problème de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire.

- De même, la simulation des écoulements supercritiques bidimensionnels et à surface libre, traités d'abord par **BHALLAMUDI et CHAUDHRY** [15] et ensuite par **BERREKSI et BOUHADJI** [14] utilisant des schémas aux différences finies a été étudiée en (1995) par **AMGHAR et MORSALI** [6] en employant la méthode des éléments finis, tout en gardant le même système d'équations préalablement donné [14 et 15].

- Cependant, en (1996) une thèse portant sur l'étude des écoulements à surface libre dans des canaux non prismatiques à forte pente a été présentée par **OUKACHA et LECHEHEB** [64].

Un modèle mathématique englobant les équations d'un écoulement bidimensionnel graduellement varié en régime non permanent a été élaboré. Le système d'équations obtenu en conséquence, par application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement est le suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h u) + \frac{\partial}{\partial y}(v h) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u^2 + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}(h u v) = g h (S_{0x} - S_{Fx}) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h v) + \frac{\partial}{\partial x}(h u v) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h v^2 + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) = g h (S_{0y} - S_{Fy}) \quad (2.31)$$

avec,  $S_{0x} = \sin \alpha_x$  (pente suivant x).

$S_{0y} = \sin \alpha_y$  (pente suivant y).

Ce travail rentre dans le cadre du thème de recherche traité dans la présente thèse.

Toutefois, il y a lieu de relever que dans la littérature, on trouve aussi d'autres études sur cette catégorie d'écoulements, que ce soit dans un cas unidimensionnel : **BALTZER et LAI** (1968) [8] et **FENNEMA et CHAUDHRY** (1986) [28]..., ou encore dans un cas bidimensionnel : **PONCE et YABUSAKI** (1981) [66], **RAJAR et CETINA** (1983) [68], **FENNEMA et CHAUDHRY** (1989) [29] et (1990) [30] et **RAHMAN et CHAUDHRY** (1997) [67]...

## 2.2. Etat de connaissance sur les ondes transversales (ondes de choc)

Les écoulements supercritiques dans les canaux non prismatiques à surface libre entraînent des perturbations distinctes, qui ne se manifestent pas dans le cas subcritique. Celles-ci, ne sont autres que des ondes stationnaires, appelées "ondes de choc", et qui peuvent conduire à de grandes complications si leur hauteur est considérable. Par conséquent, il devient indispensable d'étudier et d'analyser ce phénomène, afin de trouver les moyens nécessaires permettant au moins leur réduction.

Plusieurs chercheurs ont tenté d'étudier et d'éclairer ce type d'écoulement, avec toutes les complexités qui s'engendrent, et de présenter l'influence du changement de direction sur la surface du cours d'eau.

Ainsi, lorsqu'un écoulement supercritique passe à travers un canal dont la paroi latérale est déviée en un certain point d'un angle  $\theta$  vers l'écoulement, ce changement provoquera alors, des lignes de discontinuités et par suite perturbation de l'écoulement le long d'une ligne droite appelée "onde transversale", faisant un angle  $\beta_1$  (Figure 2.7) avec la direction initiale.

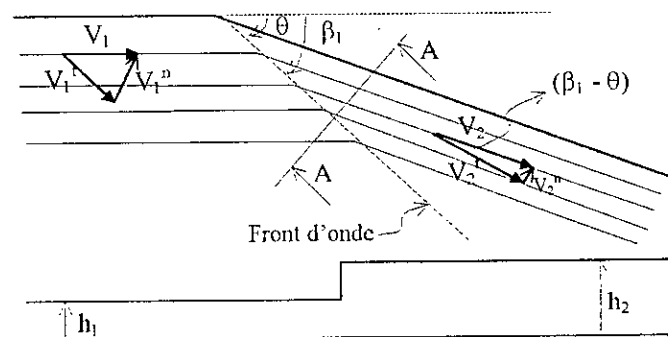


Figure 2.7 : Déviation d'un mur - Coupe A-A

Les équations de base sont obtenues par application des principes de continuité et de quantité de mouvement perpendiculairement et parallèlement au front d'onde, GRAF et ALTINAKAR [35], HAGER et ALTINAKAR [39], IPPEN et DAWSON [50], REINAUER [70], STURM [77] et TISON [78] :

$$h_1 V_1 \sin \beta_1 = h_2 V_2 \sin(\beta_1 - \theta) \tag{2.32}$$

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \frac{h_2 V_2^2 \sin^2(\beta_1 - \theta) - h_1 V_1^2 \sin^2 \beta_1}{g} \tag{2.33}$$

$$h_1 \operatorname{tg} \beta_1 = h_2 \operatorname{tg}(\beta_1 - \theta) \tag{2.34}$$

Dans un écoulement supercritique à travers une contraction rectiligne (Figure 2.8), les ondes de choc symétriques qui se forment à l'entrée de la transition, se rencontrent au point B sur l'axe de symétrie du canal, puis elles sont réfléchies sur les parois opposées à l'aval. Donc, l'écoulement dans le canal aval est très perturbé.

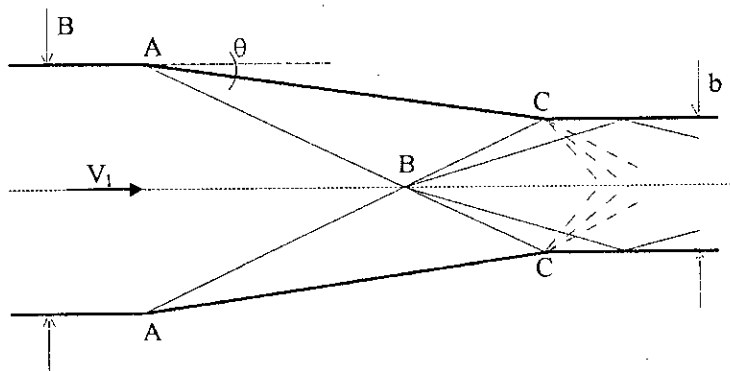


Figure 2.8 : Représentation schématique de l'écoulement dans un rétrécissement

Afin de minimiser ces perturbations, il faudra concevoir une contraction dans laquelle, la réflexion des ondes transversales (Figure 2.9) ne pénètre pas dans le canal aval.

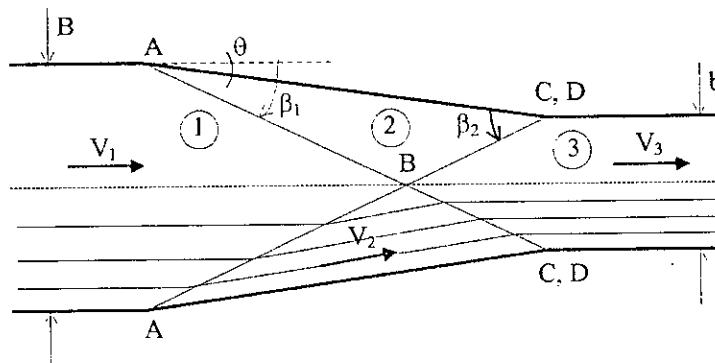


Figure 2.9 : Conception d'un rétrécissement



Dans le cas d'un élargissement de canal, la géométrie (Figure 2.10) qui présente le moins de problème lors du passage d'un écoulement supercritique est donnée par la relation suivante CHOW [20], HAGER [42], ROUSE et Col. [71] et SINNIGER et HAGER [76] :

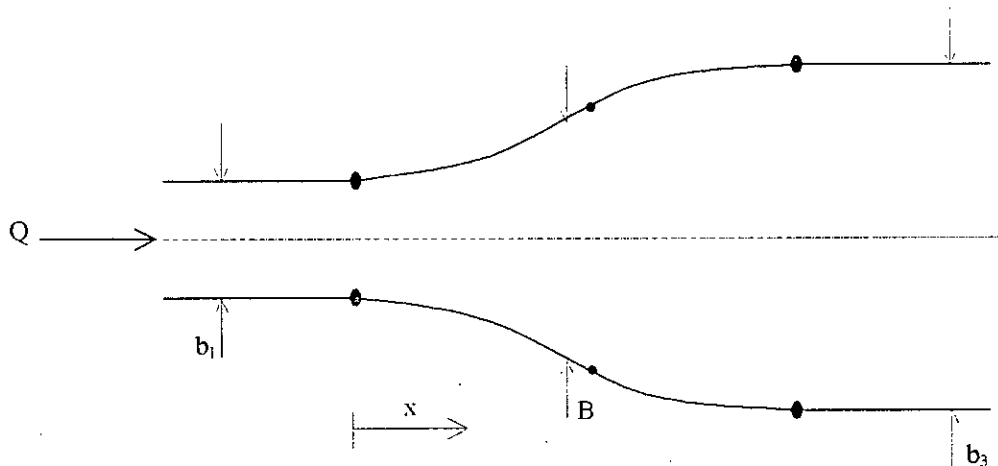


Figure 2.10 : Géométrie d'un élargissement dans des conditions d'écoulement torrentielles.

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{x}{b_1 F_1} \right]^{3/2} + 1 \right) \quad (2.35)$$

où,  $B(x)$  : largeur à une distance  $x$ .

$b_1$  : largeur amont.

$F_1$  : nombre de Froude amont.

D'autre part, l'étude pratique des écoulements supercritiques traversant des discontinuités –élargissements, rétrécissements, courbes, piles, jonctions et autres– entraînant la naissance des ondes transversales a été traitée par un certain nombre d'investigateurs, que ce soit d'une manière analytique [7, 26, 28 et 52]..., ou d'une manière expérimentale sur modèle réduit réalisé au laboratoire [41, 45, 47, 69, 73 et 74]..., ou encore en utilisant la résolution avec des méthodes numériques, exploitant ainsi le grand progrès de l'outil informatique, qui a beaucoup contribué au développement de l'hydraulique [15, 22, 28, 45, 54 et 81] et autres...

Au niveau du département "Hydraulique" de l'Ecole Nationale Polytechnique (E.N.P.), on trouve quelques travaux qui traitent ces écoulements par des procédés numériques. Un premier travail a été présenté en (1993) par BERREKSI et BOUHADJI [14], suivi en (1994) par celui de ABSI et RETIEB [3], puis en (1995) par celui d'AMGHAR et MORSALI [6], qui n'ont tous pas pris en considération l'effet d'une pente augmentée, et se sont contentés à des transitions de faible pente. Par contre, en (1996) un travail qui rentre dans le cadre du thème de recherche traité dans la présente thèse, examinant les écoulements supercritiques dans des transitions à forte pente a été présenté par OUKACHA et LECHEHEB [64].

Par ailleurs, l'objectif principal de notre travail est la détermination de l'allure de la surface libre dans des canaux non prismatiques - contraction, expansion -, à faible et à forte pente, traversés par des écoulements à grandes vitesses.

*Chapitre 3*

***ÉCOULEMENT A  
SURFACE LIBRE  
DANS LES  
TRANSITIONS***

### 3.1. Introduction

Tout changement de section ou de direction d'un canal considéré entraîne une surface d'écoulement irrégulière et ondulée. Les irrégularités ainsi générées sont négligeables pour des écoulements fluviaux (ou subcritiques), mais deviennent très importantes pour des écoulements torrentiels (ou supercritiques) [14, 26 et 76].

On relève d'une part, que des ondes de choc sont fréquemment présentes dans des canaux non prismatiques pour des écoulements en régime supercritique [3, 6 et 51], et d'autre part, que les conditions d'écoulement torrentielles ne se retrouvent pratiquement que dans des canaux artificiels [76].

Plusieurs questions peuvent alors se poser dans ce contexte, dont :

- Quel est le réseau d'ondes de choc qui se forme?,
- Quelle est la hauteur extrême de l'onde?,
- Quelle sera la hauteur nécessaire aux parois pour éviter le débordement de l'eau?, et
- Quels sont les moyens de réduction de ces ondes de choc?.

La formation d'ondes transversales, l'analyse des rétrécissements, des élargissements et les moyens de réduction de telles ondes seront examinés dans ce chapitre.

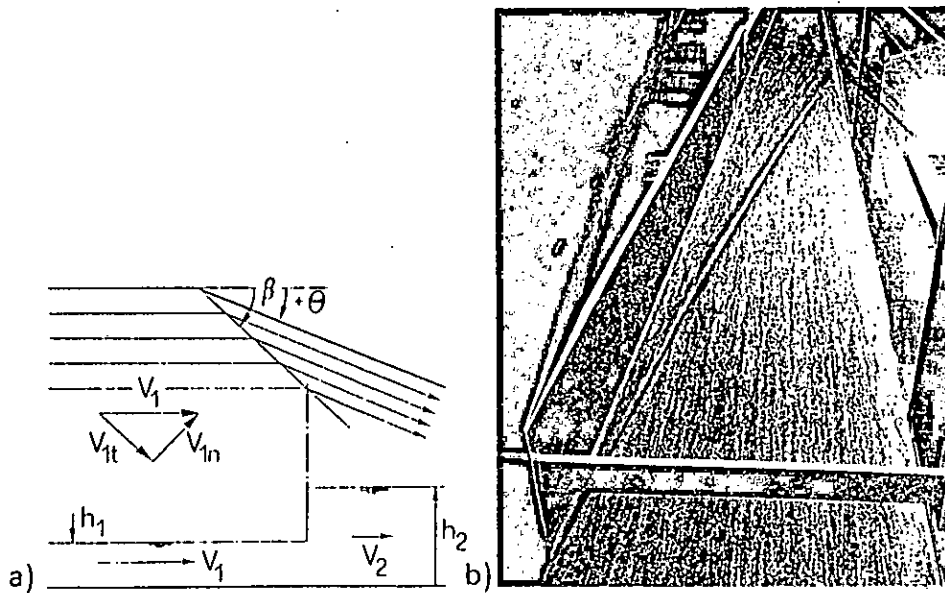
### 3.2. Notion d'ondes transversales

Les écoulements subcritique et supercritique dans des canaux à surface libre ont un comportement tout à fait différent; si le premier ne produit pas d'ondes de choc, le deuxième par contre est le siège d'apparition de celles-ci.

Les écoulements torrentiels entraînent donc des particularités du type ondes, qui constituent des problèmes caractéristiques le long du canal dans les deux directions, amont et aval. Ainsi, chaque obstacle dans le canal – par exemple, pile [69], rétrécissement [15, 51 et 54], élargissement [7, 47, 73 et 81], courbe [22 et 39], déviation brusque [30, 45 et 73] ou jonction de mur [41 et 74] – crée de grandes perturbations qui provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau (creux ou –ce qui est plus dangereux- surélévations). De telles ondes sont appelées "ondes transversales" ou, par analogie avec la dynamique des gaz "ondes de choc". Il devient par suite indispensable de chercher les moyens permettant d'éviter ou au moins de réduire la formation de ces ondes, qui nécessitent dans la plupart des cas une revanche supplémentaire.

### 3.3. Déviation brusque d'un mur

Soit un écoulement supercritique parallèle dans un canal rectangulaire large. Après une certaine longueur du canal, le mur est brusquement dévié vers l'écoulement d'un angle  $(+\theta)$  (Figure 3.1). Cette déviation provoque une perturbation de l'écoulement le long d'une ligne droite faisant un angle  $\beta$  par rapport à la direction initiale de l'écoulement. L'angle  $\beta$  est appelé "angle de choc", et la ligne correspondante "onde transversale" [20, 42 et 78].



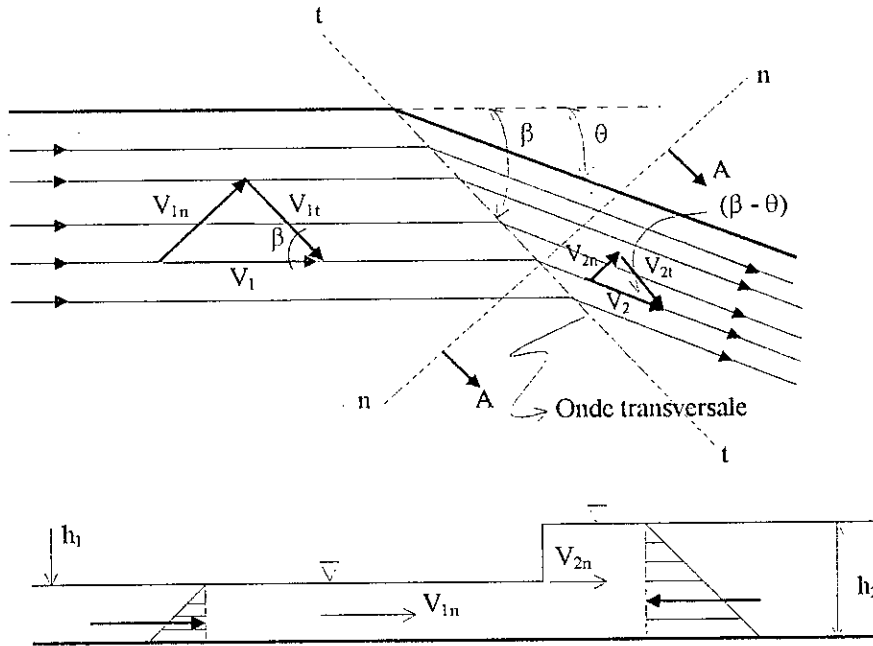
-Figure 3.1 -

- a) Déviation d'un mur et notations relatives à l'onde transversale.  
 b) Onde transversale dans un canal en laboratoire.

**Remarque** : L'angle de choc  $\beta$  est toujours plus grand que l'angle de déviation du mur  $\theta$ .

### 3.4. Déviation positive d'un mur

Considérons un écoulement supercritique dans un canal présentant un changement de direction brusque et positive d'un angle  $\theta$ , illustré par la figure (3.2) :



Coupe A - A

Figure 3.2 : Schéma d'une déviation positive d'une paroi.

L'application de l'équation de continuité et celle de la quantité de mouvement normalement au front de l'onde [20 et 78] donne respectivement :

$$h_1 V_{1n} = h_2 V_{2n} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{g} h_1 V_{1n}^2 = \frac{1}{2} h_2^2 + \frac{1}{g} h_2 V_{2n}^2 \quad (3.2)$$

D'autre part, on admet que tangentiellement au front de l'onde, la quantité de mouvement est nulle [35 et 46], d'où :

$$V_{2t} = V_{1t} \quad (3.3)$$

A partir de la figure (3.2) quelques relations géométriques peuvent être établies :

$$\begin{aligned} V_{1n} &= V_1 \sin \beta & \text{et} & & V_{2n} &= V_2 \sin (\beta - \theta) \\ V_{1t} &= \frac{V_{1n}}{\operatorname{tg} \beta} & \text{et} & & V_{2t} &= \frac{V_{2n}}{\operatorname{tg} (\beta - \theta)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En remplaçant les relations (3.4) dans les équations (3.1), (3.2) et (3.3), et après réarrangement, on a :

$$h_1 V_1 \sin\beta = h_2 V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (3.5)$$

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \frac{h_2 V_2^2 \sin^2(\beta - \theta) - h_1 V_1^2 \sin^2 \beta}{g} \quad (3.6)$$

$$h_1 \operatorname{tg}\beta = h_2 \operatorname{tg}(\beta - \theta) \quad (3.7)$$

où, les indices « 1 » et « 2 » indiquent respectivement les positions à l'amont et à l'aval de l'onde transversale,  $\theta$  et  $\beta$  sont les angles de déviations de la paroi et de l'onde de choc, et  $g$  est l'accélération gravitationnelle. Ainsi, si l'on connaît  $h_1$ ,  $V_1$  et  $\theta$  les équations (3.5) à (3.7) donnent des expressions pour les inconnues  $h_2$ ,  $V_2$  et  $\beta$ .

La combinaison des équations (3.5), (3.6) et (3.7) donne par ailleurs [17, 35 et 42] :

$$Y = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 1 \right] \quad (3.8)$$

$$\sin \beta = \frac{1}{F_1} \left[ \frac{1}{2} Y (Y + 1) \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)} \quad (3.10)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta \left( \sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 3 \right)}{2 \operatorname{tg}^2 \beta + \sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 1} \quad (3.11)$$

$$F_2^2 = Y^{-1} \left[ F_1^2 - \frac{1}{2Y} (Y - 1)(Y + 1)^2 \right] \quad (3.12)$$

$$\text{où, } F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g h_1}} \quad ; \quad F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g h_2}} \quad ; \quad Y = \frac{h_2}{h_1}$$

Pour  $Y = 1$ , correspondant à de petites variations de la surface libre de l'amont à l'aval, il a été obtenu [26 et 39] que :

$$\sin \beta = \frac{1}{F_1} \quad (3.13)$$

Pour  $F_1 = 1$ , l'angle de choc devient  $\beta = 90^\circ$ , tandis que ce dernier diminue pour des nombres de Froude élevés.

Dans le cas où  $F_1 \sin\beta > 1$ , HAGER et BRETZ [40] ont démontré que l'équation (3.8) peut être remplacée par l'équation approchée suivante :

$$Y = \sqrt{2} F_1 \sin \beta - \frac{1}{2} \tag{3.14}$$

et HAGER [41] a montré aussi que :

$$\beta = \theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} F_1^{-1} \tag{3.15}$$

Pour  $\beta < 45^\circ$  et  $F_1 > 2$ , les valeurs caractéristiques tirées de l'équation (3.10) présentent un écart inférieur à 2% par rapport à la valeur exacte [42 et 70].

Pour de faibles valeurs de  $\beta$ , le rapport des profondeurs  $Y$  dépend linéairement de l'angle de déviation  $\theta$ , et du nombre de Froude à l'entrée  $F_1$  [45 et 73], tel que :

$$Y = 1 + \sqrt{2} F_1 \theta \tag{3.16}$$

Les équations (3.8) à (3.12) ont été expérimentalement vérifiées par plusieurs chercheurs (IPPEN et HARLEMAN) [35 et 42]. Pour  $Y > 2$ , ce système d'équations concorde bien avec les observations.

A noter enfin que l'équation (3.11) est seulement valable pour les rétrécissements.

### 3.5. Déviation négative d'un mur [70]

Soit à présent un écoulement supercritique dans un canal ayant une déviation négative de la paroi, faisant un angle  $\theta$  avec la direction initiale (Figure 3.3) :

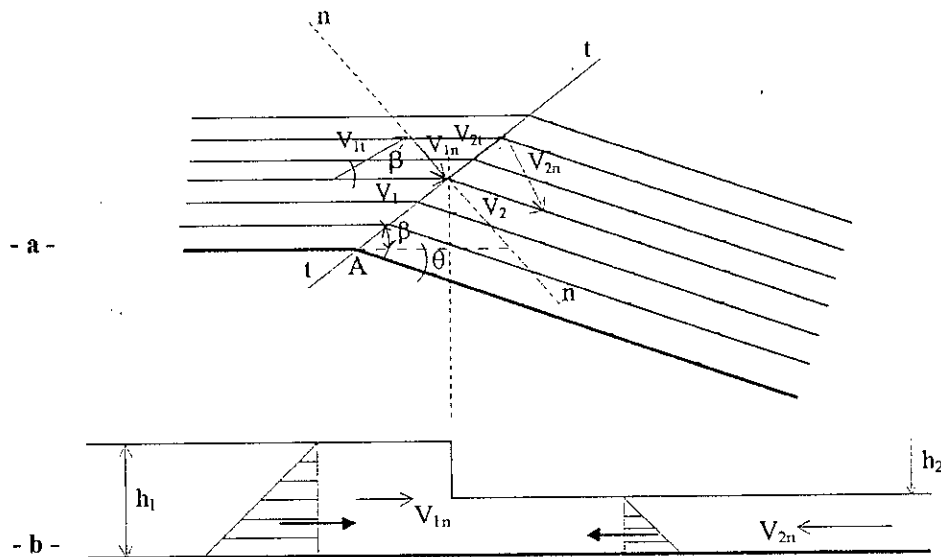


Figure 3.3 : Illustration d'une déviation négative de la paroi.

a – Composantes de la vitesse.

b – Coupe perpendiculaire au front de l'onde.



ANASTASI [70] a supposé, dans la détermination du front de l'onde qu'il n'y a pas de variation de l'énergie –constante –, et que la continuité est valable perpendiculairement au front de l'onde.

Comme le montre la figure (3.3), l'application de l'équation de continuité perpendiculairement au front de l'onde se fait de la même manière que dans le cas d'une déviation positive de la paroi, ce qui mène de nouveau à l'équation (3.5), à savoir :

$$h_1 V_1 \sin\beta = h_2 V_2 \sin(\beta - \theta)$$

L'angle de déviation  $\theta$  est pris dans ce cas négativement.

Avec la condition géométrique (Figure 3.3)  $V_{1t} = V_{2t}$ , il en résulte que :

$$V_1 \cos\beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad (3.17)$$

Le théorème de conservation de l'énergie est équivalent à :

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.18)$$

En effectuant une transformation trigonométrique dans l'équation (3.17), il a été obtenu que :

$$\sin(\beta - \theta) = \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_2^2} (1 - \sin^2 \beta)} \quad (3.19)$$

La combinaison des équations (3.5) et (3.19) donne pour l'angle de choc  $\beta$ , la relation suivante :

$$\sin \beta = \frac{1}{F_1} \sqrt{\frac{2}{\frac{h_1}{h_2} \left( \frac{h_1}{h_2} + 1 \right)}} \quad (3.20)$$

où,  $F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g h_1}}$  représente le nombre de Froude de l'écoulement entrant.

**Remarque :** si  $h_1 = h_2$ , alors  $\sin \beta = \frac{1}{F_1}$ .

La résolution de l'équation (3.20) par rapport au rapport des profondeurs d'eau  $Y_s = h_1/h_2$  permet d'obtenir :

$$Y_s = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} - 1}{2} \quad (3.21)$$

D'un autre côté, l'équation donnant l'angle de choc  $\beta$  est obtenue, en égalisant l'équation (3.21) et l'équation (3.10), d'où :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta \left( \sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} - 3 \right)}{\operatorname{tg}^2 \beta \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} \right) - 2} \quad (3.22)$$

L'utilisation du théorème de conservation de l'énergie (équation 3.18) fournit la relation qui permet de déterminer le nombre de Froude aval  $F_2$  :

$$F_2 = \sqrt{\frac{h_1}{h_2} (F_1^2 + 2) - 2} \quad (3.23)$$

### 3.6. Déviation infinitésimale d'un mur

Dans ce qui a précédé, la déviation du mur ( $\theta$ ) avait une valeur finie. Par contre, un choc provoqué par une déviation infinitésimale ( $d\theta$ ) de la paroi (Figure 3.4) provoquera un changement infiniment petit ( $dh$ ) de hauteur et ( $dv$ ) de la vitesse.

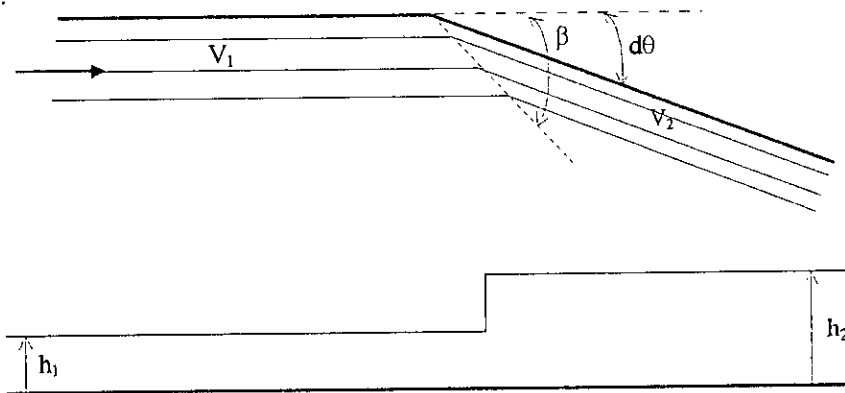


Figure 3.4 : Déviation infiniment petite d'une paroi.

La combinaison des équations (3.5) à (3.7) donne la relation entre la profondeur de l'écoulement et la vitesse locale [39 et 76] :

$$dh = \left( \frac{V^2}{g} \right) \operatorname{tg} \beta \, d\theta \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) ne peut être résolue sauf si des hypothèses simplificatrices sont émises. VON KARMAN [39 et 42] a considéré des écoulements avec une charge spécifique  $H = h + V^2/2g$  constante, rapportée au fond rectiligne du canal, et a obtenu la relation suivante :

$$\theta - \theta^* = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{F^2 - 1}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{F^2 - 1}} \right) \quad (3.25)$$

dans laquelle :  $F^2 = V^2/gh$  et  $\theta^*$  correspond à la constante d'intégration dépendant du nombre de Froude de l'écoulement entrant  $F_1$ .

D'après KNAPP et IPPEN [39], des résultats adéquats peuvent être obtenus avec la relation suivante :

$$\frac{h}{h_1} = F_1^2 \sin^2 \left( \beta \pm \frac{1}{2} \theta \right) \quad (3.26)$$

donnant la variation de la profondeur de l'écoulement, où  $F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}$  est le nombre de Froude amont.

Cette expression est obtenue en admettant une vitesse constante  $V = V_1$ , qui passe à travers l'onde transversale, puisque, d'après les observations expérimentales [39 et 42] la variation de la profondeur de l'écoulement pour de grandes valeurs du nombre de Froude "F" est faible.

Une déviation positive (+ $\theta$ ) conduit à une augmentation de la profondeur d'écoulement  $h/h_1 > 1$ .

Notons enfin que cette procédure est généralement utilisée dans le cas des canaux courbes.

### 3.7. Notions d'ondes positives et d'ondes négatives [42 et 70]

Soit le canal à surface libre présentant un changement de direction brusque mais faible donné par la figure (3.5), et dont le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée est  $F_1 > 2$ . Le canal en question change de direction aux points A et B d'un angle  $\theta$ .

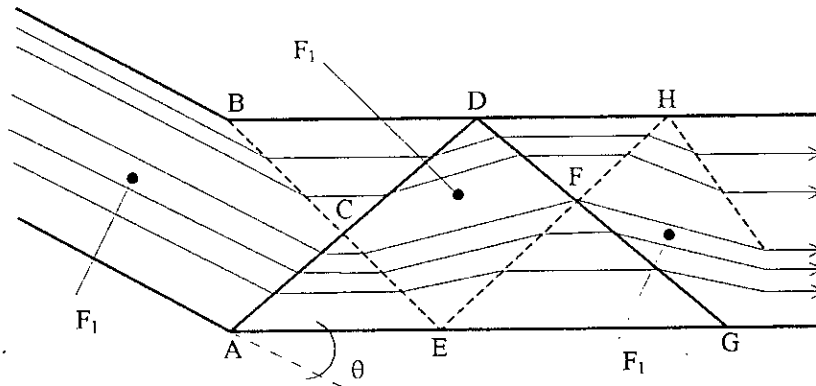


Figure 3.5 : Déviation d'un mur et représentation des lignes de courants dans un canal de largeur finie.

- Onde positive.
- - - Onde négative.

La déviation de la paroi au point A est qualifiée de positive, et une "onde positive" se forme ainsi, engendrant une augmentation de la profondeur de l'écoulement. Par contre, la déviation de la paroi au point B est négative, ce qui conduit à la formation d'une "onde négative" avec diminution de la profondeur de l'écoulement. L'onde négative est cependant différente de l'onde positive du fait que le changement de profondeur s'effectue d'une manière progressive et non brutale.

Dans la zone située à l'amont des ondes transversales, c'est-à-dire à gauche de ACB, l'écoulement n'est pas influencé par le changement de direction, et les lignes de courant restent donc parallèles au canal d'entrée. Tandis que, dans les zones ACE et BCD, les lignes de courant sont parallèles aux parois du canal aval et les profondeurs de l'écoulement augmentent et diminuent respectivement.

Les deux ondes transversales partant respectivement des points A et B se rencontrent au point C. Elles pénètrent alors dans des zones perturbées, mais aboutissent – en raison de l'inversion – à la zone d'état initial. Il en résulte que les caractéristiques de l'écoulement dans la zone CDEF sont égales à  $h_1$  et  $F_1$ . Mais les lignes de courant ont été déviées de  $2\theta$  par rapport à la direction de l'écoulement initial.

A l'aval de la ligne DFE, une inversion se produit de nouveau, et les lignes de courant deviennent par suite parallèles aux parois. Il en résulte une augmentation de la profondeur de l'écoulement dans la zone DFH et une diminution dans la zone EFG. Donc, le long de la paroi AEG, la surface de l'eau s'élève tout d'abord brusquement, puis chute au-dessous de la profondeur initiale  $h_1$ .

L'écoulement dans le canal devient ainsi très perturbé, ce qui nécessite des parois plus hautes que celles de la zone d'entrée, d'où, on conclut qu'une grande partie de l'étude des coursiers doit se porter sur la réduction des sommets des ondes.

### 3.8. Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritiques

La conception des rétrécissements de canaux, dans un écoulement supercritique entraîne plusieurs complications contrairement à un cas subcritique. Un rétrécissement se présente [20, 51 et 70] aux endroits où :

- la pente du radier est augmentée,
- la rugosité est réduite, ou
- le débit augmente.

Des ondes transversales obliques prennent naissance et peuvent se propager loin à l'aval nécessitant ainsi des hauteurs considérables des parois du canal; à moins que la transition soit conçue de manière à minimiser ce phénomène, qui peut entraîner beaucoup d'air et un bassin d'amortissement situé à l'extrémité du coursier peut aussi souffrir d'un écoulement entrant dissymétrique.

Un rétrécissement bien conçu se caractérise par un écoulement presque uniforme dans la partie du canal rétrécie [77].

#### 3.8.1. Les différents types de rétrécissement

Un rétrécissement consiste à passer d'un canal d'entrée de largeur  $b_1$  à un canal de largeur  $b_3$  avec  $b_3 < b_1$ . Il existe plusieurs types de rétrécissements, parmi lesquels on distingue principalement [70] ceux en forme d'entonnoir, en forme d'éventail et en forme de tuyère (Figure 3.6).

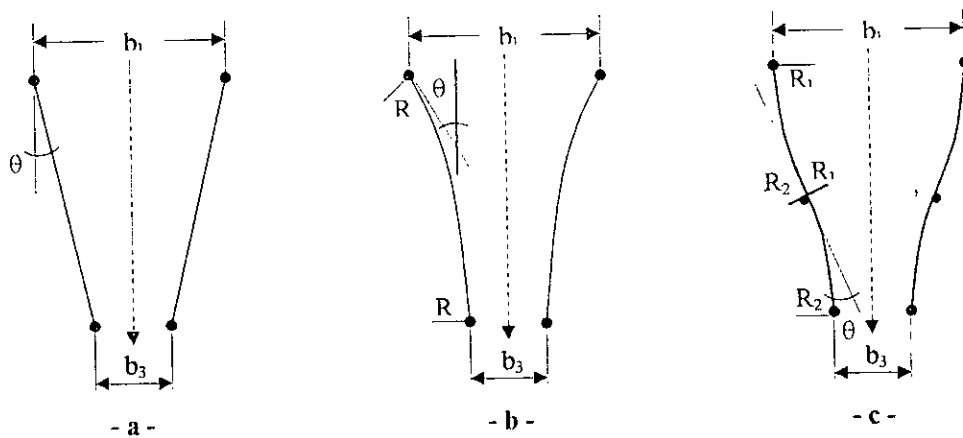


Figure 3.6 : Rétrécissement de canal.

a) Entonnoir, b) Eventail, c) Tuyère.

Le premier type a une forme polygonale entre la partie large et la partie étroite du canal. Dans la forme en éventail, on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement, tandis que dans la forme en tuyère deux arcs circulaires sont disposés en S. Le rétrécissement en forme d'éventail correspond à la forme optimale du point de vue géométrique, car il présente le minimum de déviations élémentaires. En ce qui concerne le rétrécissement en forme de tuyère, l'arc aval aura un rayon plus grand que l'arc amont.

Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement au rétrécissement en forme d'entonnoir.

### 3.8.2. Rétrécissement en forme d'entonnoir

Soit le rétrécissement symétrique, de tracé rectiligne représenté par la figure (3.7) avec lignes de courant et ondes transversales. L'indice « 1 » correspond aux conditions d'écoulement à l'amont de la transition,  $h_1$ ,  $V_1$  et  $F_1$  sont respectivement la profondeur, la vitesse et le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée. Les largeurs du canal d'entrée et du canal de sortie sont  $b_1$  et  $b_3$  ( $b_3 < b_1$ ). Pour un angle de rétrécissement arbitraire  $\theta$ , le schéma de l'écoulement est aussi illustré sur la figure (3.7) :

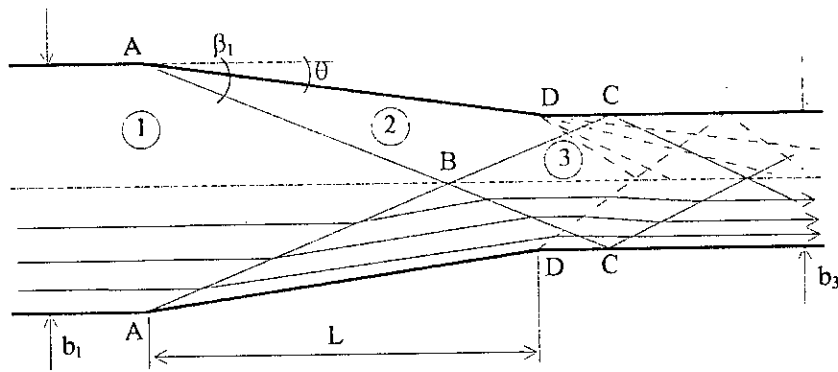


Figure 3.7 : Représentation schématique de l'écoulement dans un rétrécissement de canal d'après IPPEN et DAWSON (1951) [50].

Ce changement de la largeur du canal, ou cette déviation du mur d'un angle  $\theta$ , engendre un système d'ondes de choc [3 et 14]. Ainsi, des ondes transversales positives partent des points A sous un angle  $\beta_1$ .

Les deux ondes de choc des points A se rencontrent au point B situé sur l'axe du canal, puis sont réfléchies sur les parois opposées aux points C et pénètrent par suite dans le canal aval. Entre-temps, des ondes négatives sont créées aux points D à la sortie du rétrécissement. L'interférence entre les ondes positives et négatives donne naissance à des ondes croisées (souvent assez désagréables) qui peuvent persister loin en aval, ce qui conduira à un écoulement très agité. Il en résulte que l'écoulement dans le canal aval connaît de fortes perturbations [70], comme le montre bien la figure (3.8) :

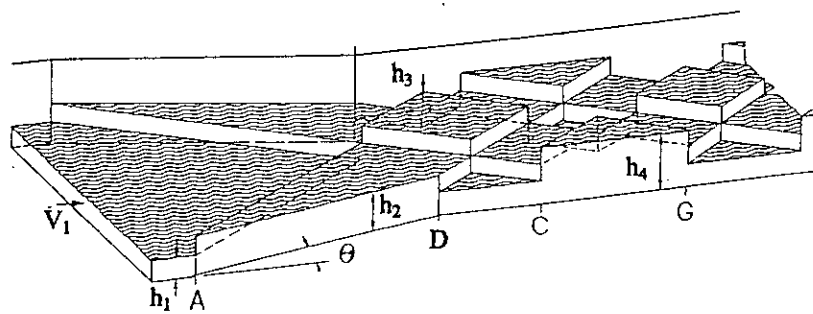
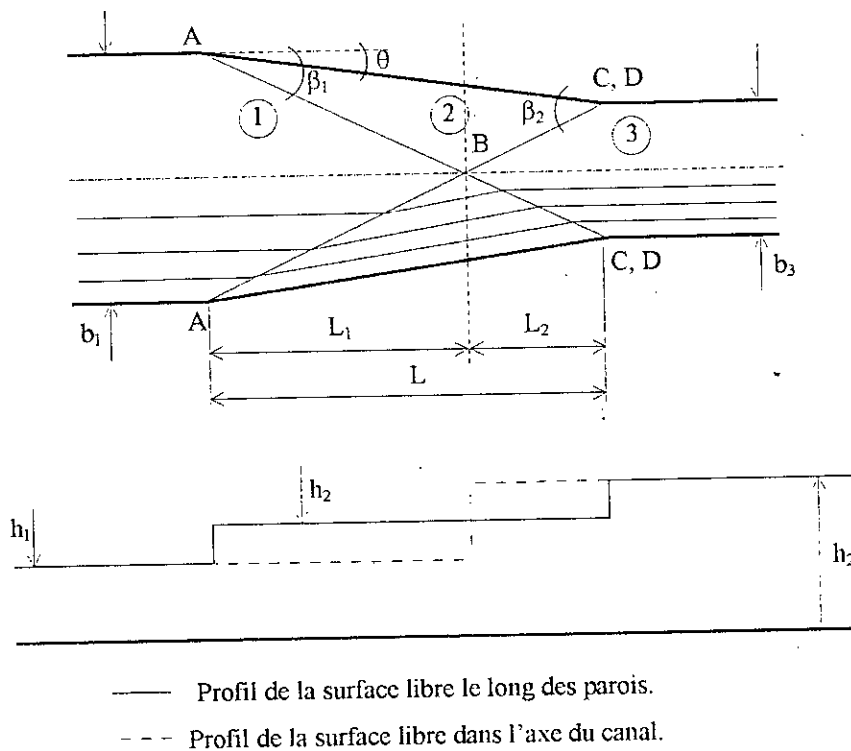


Figure 3.8 : Schématisation de la perturbation de l'écoulement dans le canal aval du rétrécissement.

Par conséquent, un choix correct de l'angle de rétrécissement  $\theta$ , qui dépend du nombre de Froude amont  $F_1$  et du rapport des largeurs  $r = b_3/b_1$ , donne une nette amélioration de l'écoulement. Mais, une fois  $r$  et  $\theta$  fixés, chaque changement de  $F_1$  conduit à la situation représentée dans la figure (3.7) précédente.

Si l'angle de déviation  $\theta$  est bien choisi, les ondes transversales positives partant des points A et se rencontrant au point B sur l'axe du canal, seront dans ce cas dirigées exactement vers les points D sous l'angle  $\beta_2$  [6 et 64] (Figure 3.9), l'interférence des ondes se produit alors (voir § 3.11). L'écoulement qui en résulte dans le canal aval n'a pratiquement pas de perturbation de surface. Il s'ensuit que seul l'écoulement dans la zone (2) n'est pas axial (Figure 3.9.a). Les profils caractéristiques de surface le long des murs latéraux et le long de l'axe du canal sont donnés dans la figure (3.9.b).



**Figure 3.9 :** Conception d'un rétrécissement de canal en forme d'entonnoir d'après IPPEN et DAWSON (1951) [50].  
 a) Vue en plan, b) Coupe longitudinale.

L'écoulement sans perturbation dans un rétrécissement conçu avec un choix judicieux de l'angle  $\theta$  [70] est illustré par la figure (3.10) :



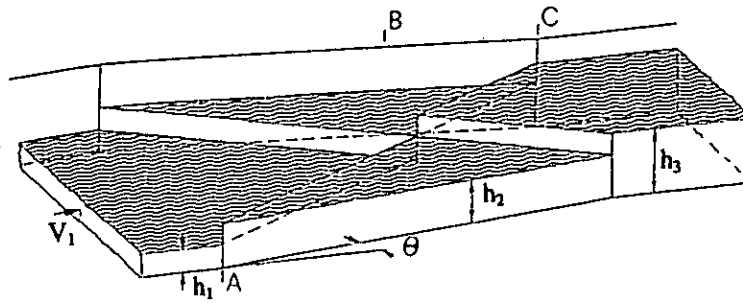


Figure 3.10 : Schématisation de l'amélioration des conditions d'écoulement dans le canal aval du rétrécissement.

Donc, afin d'éviter ou au moins minimiser la propagation d'onde comme suggéré par IPPEN et DAWSON [50 et 77], il faut que la réflexion des fronts d'ondes touche exactement les parois de la transition à la fin de la contraction (Figure 3.9). Cette condition peut-être exprimée d'après les considérations géométriques (Figure 3.9) par :

$$L = L_1 + L_2 = \frac{b_1 - b_3}{2 \operatorname{tg} \theta} \quad (3.27)$$

$$L_1 = \frac{b_1}{2 \operatorname{tg} \beta_1} \quad (3.28)$$

$$L_2 = \frac{b_3}{2 \operatorname{tg} (\beta_2 - \theta)} \quad (3.29)$$

En outre, l'application de l'équation de continuité et le théorème de la quantité de mouvement normalement et tangentiellment au front d'onde A-B fournit les relations (3.5), (3.6) et (3.7). De ces trois équations SINNIGER et HAGER [76] et STRUM [77] ont tiré les expressions suivantes :

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} (\beta_i - \theta)} \quad (3.30)$$

$$\sin \beta_i = \frac{1}{F_i} \cdot \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} (\beta_i - \theta)} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} (\beta_i - \theta)} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} = \frac{\sin \beta_i}{\sin (\beta_i - \theta)} \cdot \left( \frac{h_i}{h_{i+1}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.32)$$

où,  $i = 1, 2$

Pour  $i = 1$ , les équations (3.30), (3.31) et (3.32) se rapportent au tronçon A-B, pour  $i = 2$  au tronçon B-C du système des ondes de choc.

Pour  $F_i$  ( $i=1$ ) et  $\theta$  fixés, l'équation (3.31) permet de calculer  $\beta_i$ . Les valeurs de  $h_{i+1}$  et  $F_{i+1}$  résultent alors des deux autres équations. On répète ensuite la même procédure pour  $F_{i+1}$ ,  $\theta$  fixé on obtient  $\beta_{i+1}$  ( $i=1$ ) et  $F_{i+1}$ ,  $h_{i+1}$  ( $i=2$ ).

Mais, la solution obtenue de cette manière n'assure pas la minimisation (ou la réduction) de la propagation d'onde vers le canal aval [77]. Par contre, si l'équation (3.32) est appliquée deux fois de suite à travers la transition, c'est-à-dire :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin \beta_1}{\sin (\beta_1 - \theta)} \cdot \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.32a)$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin (\beta_2 - \theta)} \cdot \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.32b)$$

puis, combinée avec l'équation de continuité à travers la contraction elle même, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{r} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{F_3}{F_1} \cdot \left( \frac{h_3}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.33)$$

Il en résulte que [76 et 77] :

$$r = \frac{\sin (\beta_1 - \theta) \cdot \sin (\beta_2 - \theta)}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \quad (3.34)$$

D'une autre façon, et afin de réduire la propagation d'onde, STURM [77] a démontré à partir des considérations purement géométriques (équations 3.27, 3.28 et 3.29) que :

$$r = \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \beta_1}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} (\beta_2 - \theta)}} \quad (3.35)$$

Il a été prouvé aussi par des identifications trigonométriques l'équivalence des équations (3.34) et (3.35).

Finalement, la condition permettant la réduction des ondes transversales dans une contraction traversée par un écoulement supercritique, comme défini par la figure (3.9) et l'équation (3.27), est équivalent à satisfaire simultanément l'équation de continuité le long du front d'onde (équation 3.5) et l'équation de la quantité de mouvement normalement

et tangentiellement au front d'onde (équations 3.6 et 3.7), et l'équation de continuité à travers la contraction (équation 3.33), ce qui a fourni les deux équations identiques (3.34) et (3.35).

D'après HAGER et BRETZ [40 et 42], l'angle de rétrécissement  $\theta$ , peut être déterminé par la formule approchée suivante :

$$\text{Arctg } \theta = \frac{1}{2F_1} \left[ \frac{b_1}{b_3} - 1 \right] \tag{3.36}$$

si  $\theta < 10^\circ$ .

Pour de plus grandes valeurs de  $\theta$ , les résultats devront être vérifiés vis-à-vis de l'engorgement, étant donné que  $F_3$  peut être proche de l'écoulement critique, ce qui est à éviter [42]. Donc, il faut maintenir un écoulement supercritique à travers la transition.

L'étude se base sur le débit pour lequel la hauteur maximale de l'onde se produit. Comme celui-ci n'est pas à priori connu, on considère généralement, le débit maximal comme débit de projet. Pour tous les autres débits la forme du rétrécissement ne sera pas alors conforme à l'équation (3.36).

### 3.9. Elargissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritiques

Un élargissement de canal dans un écoulement supercritique est fréquemment utilisé aux endroits où l'écoulement sort avec une grande vitesse à partir d'une conduite fermée, d'une vanne de fond, d'un évacuateur de crues ou d'un déversoir à pente raide [20, 58 et 71].

Par opposition à un rétrécissement de canal, où la vitesse moyenne  $V$  diminue et la hauteur d'eau  $h$  augmente, la vitesse  $V$  dans des canaux à parois divergentes augmente et  $h$  décroît pour des conditions pseudo-uniformes. La figure (3.11) montre une variation graduelle de la largeur du canal.

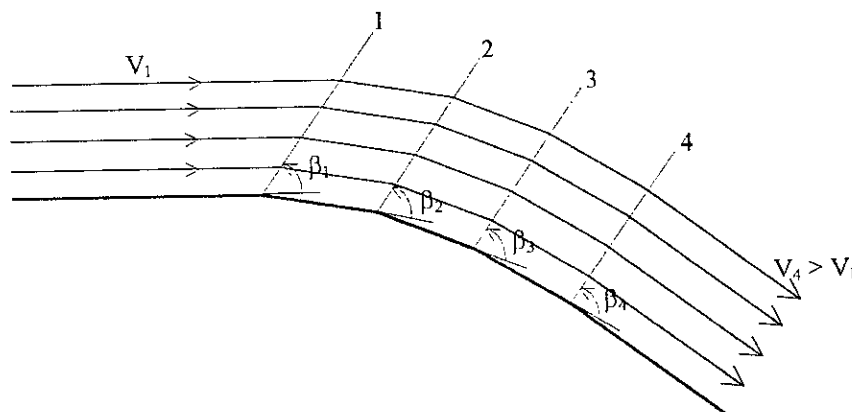


Figure 3.11 : Ondes de choc dues à une paroi concave.

Alors que la hauteur d'eau décroît, l'angle de choc  $\beta_i$  augmente et les ondes de choc divergent en conséquence. C'est la raison pour laquelle de tels écoulements n'entraînent pas de variations rapides de la hauteur [76].

Par ailleurs, si la transition entre le canal étroit et le canal large est trop brusque, d'importantes ondes transversales peuvent se former, et d'autre part, si les parois d'un élargissement divergent très rapidement une séparation de l'écoulement aura lieu, car ce dernier n'adhérera pas avec les parois, ce qui est à éviter. Enfin, une transition trop progressive conduit à un ouvrage de grande longueur et coûteux. D'où l'importance d'une conception adéquate des élargissements de point de vue pratique.

La meilleure façon d'étudier un élargissement particulier de canal se fait par voie expérimentale (tests sur modèles réduits au laboratoire). Néanmoins, une approche analytique peut être utilisée, mais elle donne seulement des résultats approximatifs, à cause de certaines limitations [20] dont :

- Les pertes d'énergie dues à la résistance sur les parois sont négligeables,
- Les parois sont verticales, et
- Une distribution de pression hydrostatique.

Dans la littérature, les premières études des élargissements sont l'œuvre de Rouse et ses collaborateurs [20, 42, 70, 73 et 76], et c'est pour cette raison qu'on rencontre souvent l'appellation "élargissement de Rouse". Ces chercheurs ont étudié expérimentalement et analytiquement des élargissements de canaux dans des conditions d'écoulement torrentielles en comparaison avec un élargissement brusque, et ont présenté ainsi des résultats permettant leur dimensionnement.

Pour un canal avec élargissement infini (Figure 3.12), il a été démontré que la surface libre  $h(x,y)$  dépendait seulement de la profondeur  $h_1$ , de la largeur relative  $b_1/h_1$  et du nombre de Froude  $F_1 = Q / (g b_1^2 h_1^3)^{1/2}$  de l'écoulement entrant.

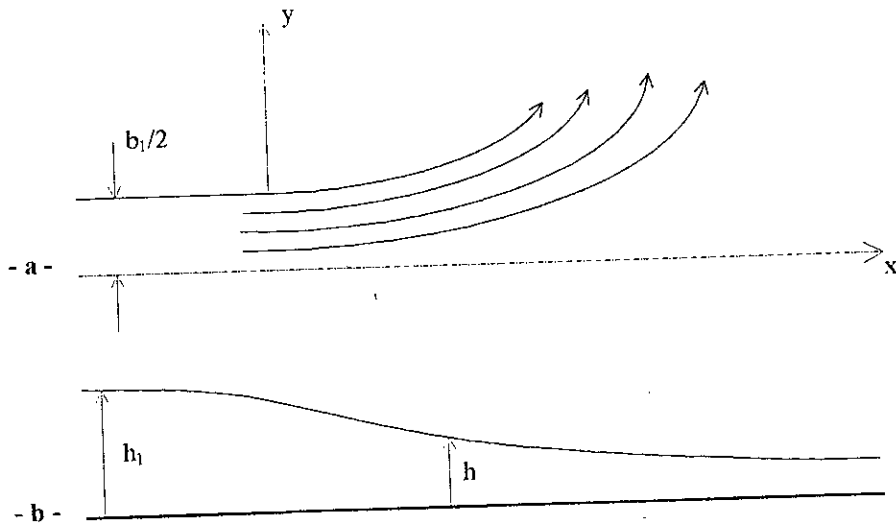


Figure 3.12 : Canal avec élargissement infini.

a) Vue en plan

b) Profil le long de l'axe du canal

Rouse et ses collaborateurs [20 et 71] ont déterminé une courbe limite  $B(x)$  contenant 90% du débit, pour  $f_e = 1$ , et qui peut-être définie par l'équation suivante :

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + f_e \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.37)$$

où,  $f_e$  : représente le paramètre de courbure de la paroi.

L'élargissement donné par l'équation (3.37) pour  $f_e = 1$ , et appelé généralement "élargissement de Rouse", a été considéré en premier comme le plus efficace, parce que la divergence des parois est tellement progressive (graduelle) (Figure 3.13), que la distribution des pressions est hydrostatique (ou presque), et que la formation des ondes transversales est réduite [76].

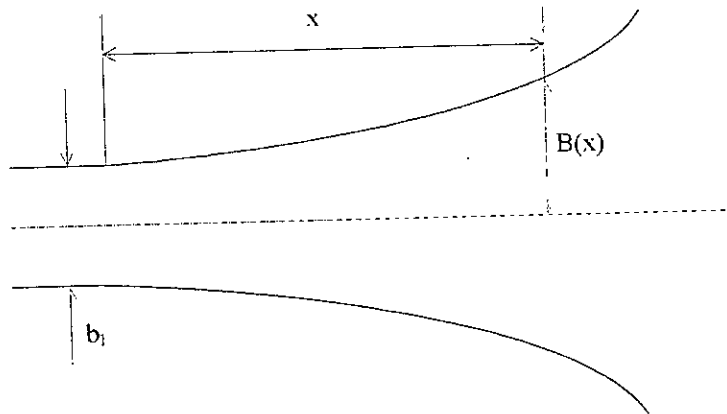


Figure 3.13 : Elargissement de Rouse.

Etant donné que l'élargissement de Rouse défini ci-dessus est trop progressif, il sera alors d'une part très coûteux, et d'autre part peu ou non utilisable dans le cas des pentes considérables où l'écoulement a tendance à moins s'étendre latéralement.

Par la suite, Rouse et ses collaborateurs [43, 59 et 71] ont proposé une autre forme de l'élargissement, illustré par la figure (3.14) :

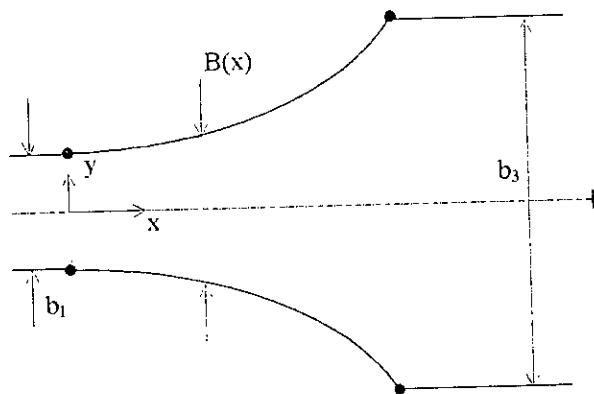


Figure 3.14 : Elargissement à parois modifiées de Rouse.

et défini par l'équation (3.37) avec  $f_c = 1/4$ , c'est-à-dire :

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.38)$$

Dans cet élargissement, appelé "élargissement à parois modifiées de Rouse", les parois divergentes données par l'équation (3.38) sont suivies à l'aval par des parois parallèles. Mais, cette forme engendre des perturbations -apparition des ondes de choc- à l'aval, et ne donne pas une nette amélioration de l'écoulement.

Dans le but d'éliminer ces perturbations, Rouse et ses collaborateurs [43, 59 et 60] ont introduit ce qui est appelé "élargissement à parois inversées de Rouse" représenté par la figure (3.15) :

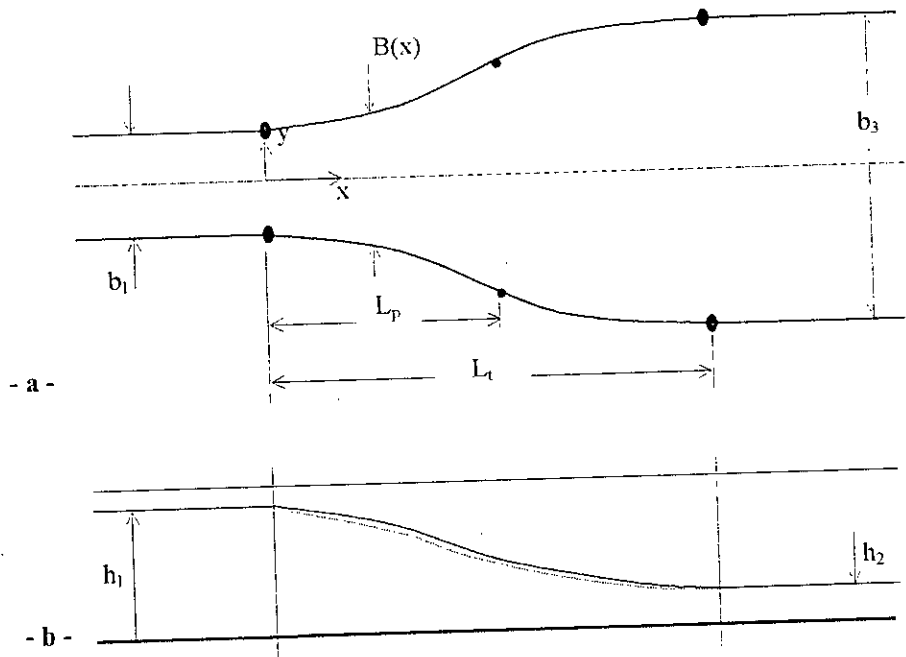


Figure 3.15 : Elargissement à parois inversées de Rouse.

- Profil de la surface libre le long de l'axe.
- - - Profil de la surface libre le long des parois.
- (•) Début et fin de la transition.

C'est une transition composée d'une portion de l'élargissement à parois modifiées de Rouse défini par l'équation (3.38) jusqu'au point tangent de longueur  $L_p$  ( $0 < x < L_p$ ), à laquelle est ajoutée une courbe convergente (inversée) à l'aval de la première portion ( $L_p < x < L_1$ ). La longueur de la courbe modifiée  $L_p$  et celle de la transition complète sont données comme suit [43, 59 et 60] :

$$\frac{L_p}{b_1 F_1} = 0,7 \left( \frac{b_3}{b_1} \right) \quad (3.39)$$

$$\frac{L_1}{b_1 F_1} = 1 + 3,25 \left( \frac{b_3}{b_1} - 1 \right) \quad (3.40)$$

$$\text{pour } \frac{b_3}{b_1} \leq 5.$$

D'après Rouse et ses collaborateurs [42], la conception représentée sur la figure (3.15) donne un écoulement sortant essentiellement uniforme.

### 3.10. Écoulement dans un canal de pente considérable [70]

Soit un écoulement supercritique dans un canal rétréci représenté par la figure (3.16), et dont l'effet de la pente du fond est pris en considération.

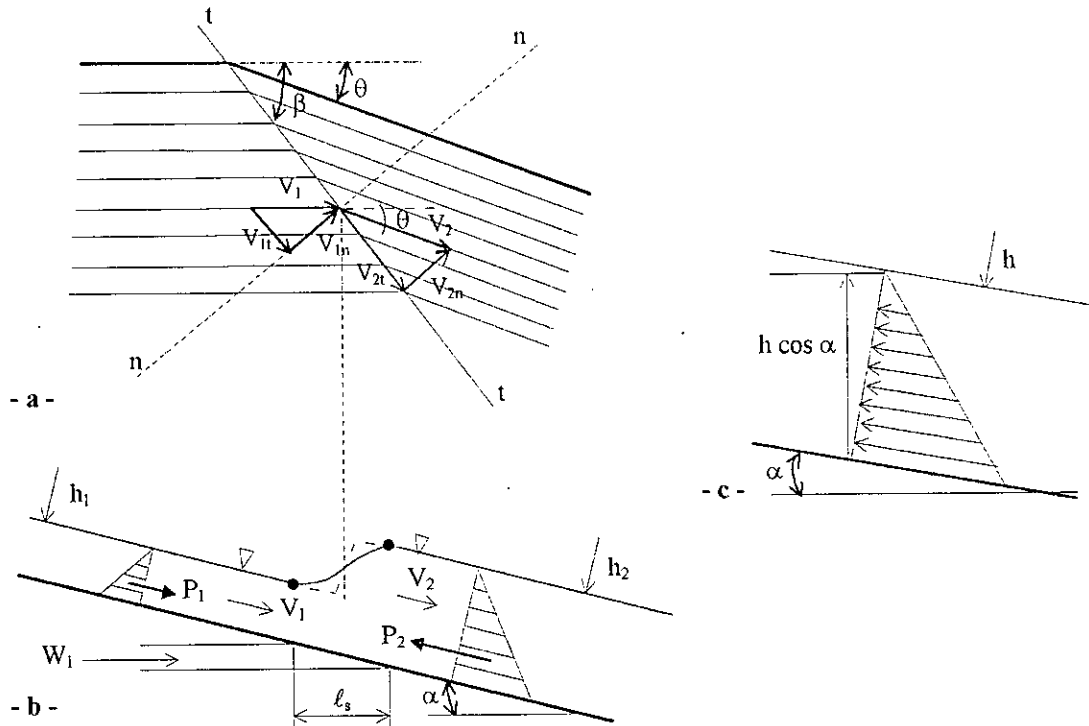


Figure 3.16 : Description d'une déviation brusque de la paroi dans un canal incliné.

- a) Composante de la vitesse.
- b) Coupe (t - t) perpendiculaire au front de choc.
- c) Définition de la hauteur de pression.

L'application de l'équation de continuité et du théorème de la quantité de mouvement perpendiculaire au front de l'onde de choc, se fait de la même façon présentée auparavant (§ 3.4). Ceci étant fait, on a dans l'ordre :

$$h_1 V_1 \sin \beta = h_2 V_2 \sin (\beta - \theta) \tag{3.41}$$

$$P_1 + \frac{h_1}{g} V_1^2 \sin^2 \beta + W_1 = P_2 + \frac{h_2}{g} V_2^2 \sin^2 (\beta - \theta) \tag{3.42}$$

dans lesquelles :

$$P_1 = \frac{1}{2} h_1^2 \cos \alpha ; P_2 = \frac{1}{2} h_2^2 \cos \alpha ; W_1 = \frac{1}{2} k_f \ell_s (h_1 + h_2) \sin \alpha \sin \beta$$



avec,

- $\theta$  : angle de déviation de la paroi.
- $\beta$  : angle de choc.
- $h_1$  : hauteur de l'écoulement à l'amont.
- $V_1$  : vitesse de l'écoulement amont.
- $k_f$  : facteur de forme.
- $\ell_s$  : largeur du front de l'onde de choc (Figure 3.16).
- $W_1$  : force de pression à la paroi.
- $P_1, P_2$  : pressions statiques.

La combinaison des deux équations (3.41) et (3.42) donne la relation suivante :

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{\left(\frac{\ell_s}{h_1}\right)^2 (1+Y)^2 \sin^2 \alpha + 8F_1^2 \left(1 - \frac{1}{Y}\right) \cos \alpha (Y^2 - 1) - \left(\frac{\ell_s}{h_1}\right) (1+Y) \sin \alpha}}{4F_1^2 (1 - Y^{-1})} \quad (3.43)$$

où,

$$Y = \frac{h_2}{h_1} : \text{rapport des profondeurs de l'écoulement.}$$

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g h_1}} : \text{nombre de Froude amont.}$$

Le coefficient de forme est pris tel que :  $k_f = 1$ .

En utilisant maintenant l'équation de continuité :  $h_1 V_{1n} = h_2 V_{2n}$ , il vient que :

$$Y = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)} \quad (3.44)$$

$$\theta = \beta - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{Y}\right) \quad (3.45)$$

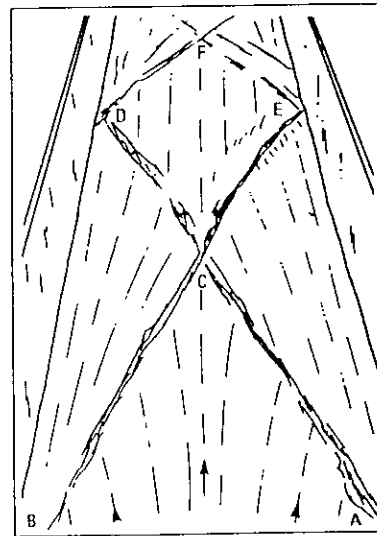
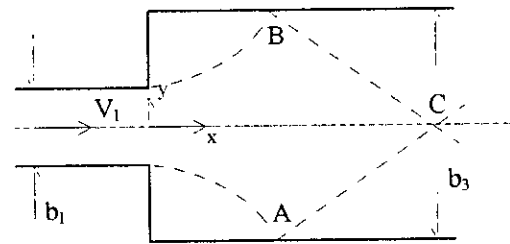
**Remarque** : D'après les expériences faites [70], la largeur du front de l'onde  $\ell_s$ , n'est jamais plus grande que la hauteur de l'écoulement  $h_1$ .

### 3.11. Réduction des ondes transversales

On sait que les ondes de choc dans un écoulement supercritique sont la cause de plusieurs discontinuités ou perturbations. Elles se propagent vers l'aval et sont caractérisées par des hauteurs différentes.

La figure (3.17) donne une schématisation typique de l'écoulement dans un élargissement brusque de canal, et dont  $h_1$ ,  $F_1 = V_1/\sqrt{gh_1}$  et  $V_1$  sont respectivement la profondeur, le nombre de Froude et la vitesse de l'écoulement amont. Cette variation brusque dans la largeur, entraîne une expansion de l'écoulement qui touche les parois aux points A et B, ensuite une réflexion d'ondes se produit, et les deux ondes de choc se rencontrent au point C et continuent à se propager d'avantage à l'aval donnant ainsi un écoulement perturbé (Figure 3.18).

**Figure 3.17 :** Schématisation d'un écoulement dans un élargissement brusque.



**Figure 3.18 :** La surface d'eau dans le canal d'un élargissement brusque.

L'intérêt particulier en hydraulique est de connaître le profil de la surface d'eau au niveau des parois, puisque la hauteur de ces dernières dépend sensiblement du profil des ondes sur les parois latérales. La conception des canaux avec écoulement supercritique, est par conséquent mauvaise quand de grandes ondes de choc apparaissent, et est par contre acceptable si ces ondes de choc sont maintenues à des limites raisonnables.

### 3.11.1. Les moyens de réduction des ondes

Une bonne conception des zones de transition [44 et 79] permet dans la majorité des cas d'éliminer les régions pratiquement sans écoulement et celles avec concentration d'écoulement, c'est-à-dire arriver à un écoulement uniforme. En d'autres termes, il faut exclure :

- les zones avec des eaux stagnantes -concentration d'écoulement- où les débris peuvent être déposés;
- les zones de basses pressions causées par les effets de courbures, avec un risque potentiel de cavitation; et,
- l'écoulement asymétrique qui peut causer des difficultés pour la dissipation de l'énergie à l'aval.

Durant, ces dernières années, un certain nombre de dispositifs ont été développés dans le but de réduire les sommets des ondes locales. Ces dernières peuvent donc être traitées par différentes méthodes, parmi lesquelles on a principalement [79] :

- Réduction de l'intensité de perturbation ;
- l'interférence d'ondes; ou,
- les éléments de réduction.

#### 3.11.1.1. Réduction de l'intensité de perturbation

D'après VISCHER et HAGER [79], la hauteur de l'onde de choc est un indice de l'intensité de perturbation, et qui peut-être exprimé en fonction de ce qui est appelé "nombre de choc" :

$$S = D F_1 \quad (3.46)$$

- où,
- S : nombre de choc.
  - D : intensité de perturbation.
  - $F_1$  : nombre de Froude amont.

Généralement, des nombres de Froude dépassant 2 sont considérés, pour éliminer l'effet de courbure des lignes de courant.

L'intensité de perturbation D est égale à :

- La courbure relative  $b/R$  pour un écoulement dans les courbes ( $R =$  rayon);
- l'angle de déviation  $\theta$  pour une déviation brusque de la paroi ; ou,
- l'angle de jonction  $\delta$  pour les canaux à jonctions.

La réduction des ondes de choc par diminution du nombre de choc, nécessite soit un abaissement dans l'intensité de perturbation, ou un abaissement dans le nombre de Froude de l'écoulement entrant -amont-. Néanmoins, en pratique, ce procédé n'est applicable qu'à des cas très limités. Par conséquent d'autres méthodes sont requises pour une bonne conception des coursiers.

### 3.11.1.2. Principe d'interférence des ondes

Le moyen le plus efficace pour réduire les ondes transversales est basé sur le principe d'interférence d'ondes [42, 60 et 79]. Selon ce principe, une onde négative est produite pour remplacer une onde positive identique. Par exemple, une déviation de mur positive dans un canal de largeur finie, telle que représentée sur la figure (3.19.a), conduit à une augmentation de la profondeur de l'écoulement  $h_2 > h_1$ . Dans la figure (3.19.b), l'inverse se produit conduisant à une diminution de la profondeur de l'écoulement à l'aval.

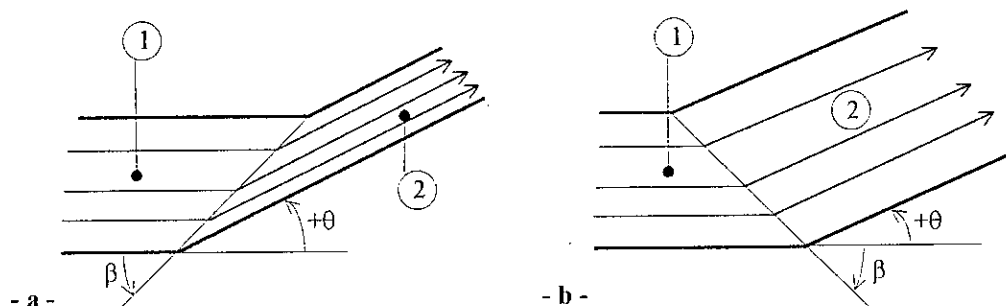


Figure 3.19 : Principe de l'interférence d'ondes appliqué à un canal de largeur finie.

- a) Augmentation de la profondeur de l'écoulement et  $F_1 > F_2$ .
- b) Diminution de la profondeur de l'écoulement et  $F_1 < F_2$ .

En d'autres termes, la géométrie de la transition devra être conçue de manière à réduire au maximum, la naissance des ondes de choc.

Ainsi, une bonne conception d'un rétrécissement rectiligne de canal - développé précédemment dans le paragraphe (3.8) - nécessite que la réflexion des ondes qui partent du début de la transition, touche les parois exactement à la fin de la transition et ne doit pas pénétrer dans le canal aval (Figure 3.9). Ceci revient à satisfaire à la fois l'équation de continuité le long du front d'onde et le théorème des quantités de mouvement perpendiculairement et parallèlement à ce front, avec l'équation de continuité à travers la transition elle-même.

D'un autre côté, une étude comparative de différents types d'élargissements - élargissement à parois modifiées et à parois inversées de Rouse - par rapport à un

élargissement brusque, a été faite par MAZUMDER et HAGER [59]. Il a été trouvé que l'élargissement à parois modifiées ne donne pas une amélioration de l'écoulement car il y a toujours apparition des ondes de choc à l'aval. Par contre, la forme géométrique de l'élargissement à parois inversées produit un écoulement aval uniforme, ce qui permet la réduction des ondes transversales. La figure (3.20) donne une comparaison entre l'élargissement brusque et l'élargissement à parois inversées de Rouse, et montre par suite l'amélioration des caractéristiques de l'écoulement.

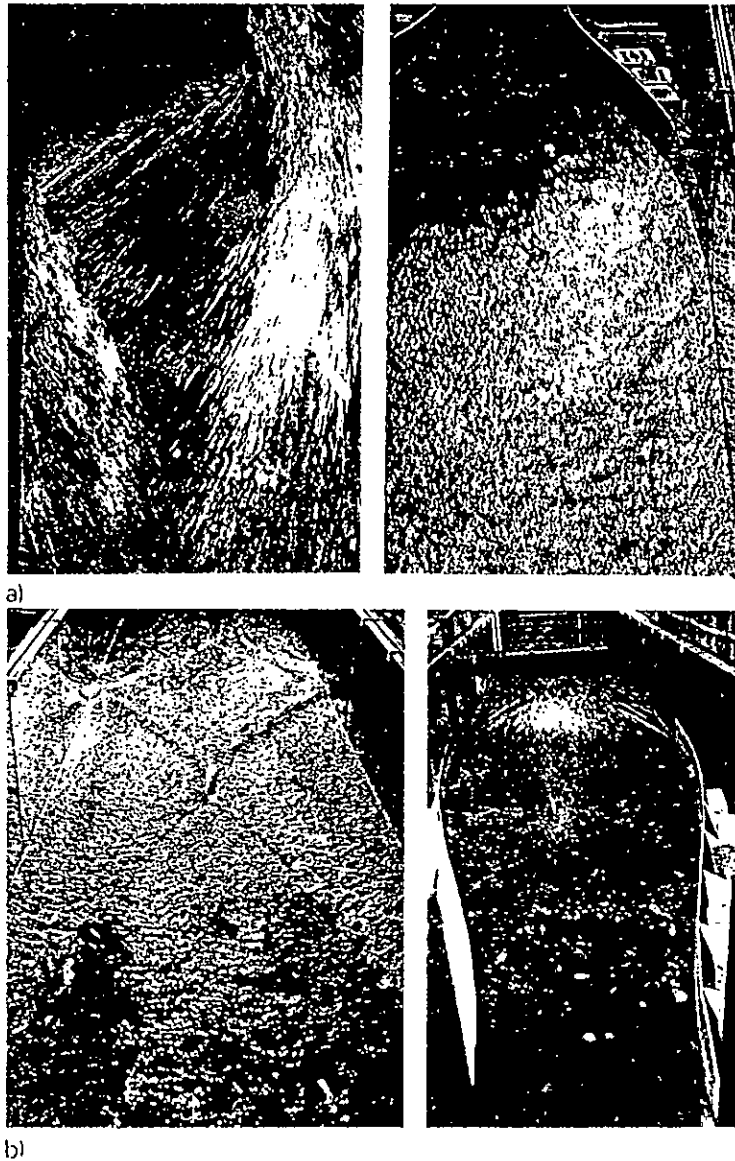


Figure 3.20 : Comparaison de l'écoulement dans un élargissement brusque et un élargissement de Rouse à parois inversées.

a) Vue amont.

b) Vue aval.

Enfin, le troisième moyen utilisé pour réduire les ondes de choc, qui consiste à utiliser des éléments de réduction que ce soit au niveau de l'axe de symétrie ou au niveau des parois, n'est pas traité dans cette thèse, car il est généralement utilisable pour les canaux courbes ou à jonctions –qui ne rentre pas dans le cadre de ce travail -. Des informations détaillées sur ces procédés sont données dans les références [60 et 79].

### 3.11.2. Conclusion

Malgré tout ces dispositifs mis au point afin d'éliminer les ondes transversales, il est évident que ceux-ci ne peuvent supprimer totalement ces ondes dans n'importe quelles conditions d'écoulement, pour plusieurs raisons, parmi lesquelles :

- Les effets de la couche limite et de courbure peuvent localement modifier le modèle mathématique;
- L'effet des frottements sur la paroi n'est pas pris en considération;
- Les débits différents du débit de projet ne satisfont pas aux conditions pour l'élimination des ondes.

On peut dire que l'étude du phénomène d'ondes transversales engendrées par le passage d'un écoulement supercritique dans une transition, ainsi que les moyens permettant leur réduction est très complexe.

Dans notre étude, on s'intéressera plus particulièrement à la détermination de la forme de la ligne d'eau dans des structures rétrécies et élargies.

*Chapitre 4*

***MODELISATION  
MATHÉMATIQUE***

*"L'origine des mathématiques ne revient pas à la sagesse humaine, sans passer par l'expérience concrète, c'est la nature qui a poussé l'être humain à compter et à schématiser; par la suite l'évolution des capacités morales, lui a permis de l'abstraire".*

J. S. MILL

#### 4.1. Introduction

Le problème de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts est d'une extrême complexité, lorsque nous l'envisageons dans toute sa généralité. Aussi ne faut-il pas s'étonner que, jusqu'au début du XIXème siècle, les hydrauliciens se soient bornés à n'étudier que les mouvements permanents.

A l'époque de la renaissance, l'écoulement à surface libre a par exemple intéressé des génies tels que les Léonard de Vinci (1452-1519) et Galilée (1564-1642). Ce dernier a souligné d'ailleurs la complexité du problème : "je me suis heurté, dit-il, à moins de difficultés dans la découverte du mouvement des corps célestes, malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches sur le mouvement de l'eau courante qui se produit cependant sous nos yeux".

Le mouvement d'une masse liquide est gouverné par les lois de conservation de la physique des milieux continus, en l'occurrence :

- Loi de conservation de la masse.
- Loi de conservation de l'énergie.
- Loi de conservation de la quantité de mouvement.

Pour étudier l'écoulement non permanent dans des canaux découverts à géométrie variable, un modèle hydrodynamique qui découle des principes fondamentaux de la mécanique, sera présenté en conséquence. Les équations obtenues constituent une généralisation des équations différentielles d'un écoulement graduellement varié en régime non permanent dans les canaux à surface libre de Saint Venant avec deux dimensions "spatiales".

Rappelons par ailleurs que les équations hyperboliques de Saint Venant proviennent de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes.



## 4.2. Mise en équation et plan de référence

Etudions un écoulement à surface libre bidimensionnel en régime non permanent dans un canal non prismatique (Figure 4.1), dont le repère orthonormé est lié au fond du canal [1, 14, 52 et 55] :

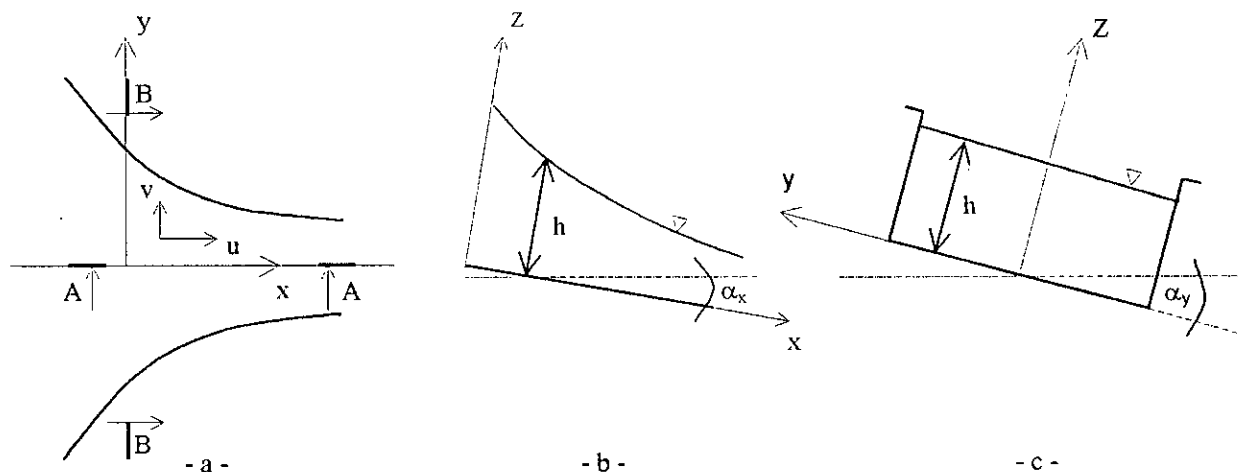


Figure 4.1 : Écoulement dans un canal à ciel ouvert - Choix des axes -.

- a- Vue en plan
- b- Section A-A
- c- Section B-B

L'écoulement est ainsi défini dans l'espace et dans le temps par deux variables, à savoir :

- La profondeur d'écoulement  $h = h(x, y, t)$
- La vitesse  $\vec{V}$  ayant pour composante  $u$  et  $v$  suivant les deux directions  $x$  et  $y$  respectivement :

$$\vec{V} = \vec{u}(x, y, t) + \vec{v}(x, y, t)$$

Il y a trois inconnues à déterminer en chaque point en fonction du temps,  $h$ ,  $u$  et  $v$ . On a besoin donc de deux couples des lois de conservation présentés sous les formes suivantes :

- Conservation masse-énergie.
- Conservation masse-quantité de mouvement.

Cependant, ces deux couples ne sont pas équivalents, car le premier est seulement applicable aux écoulements continus, alors que le deuxième est applicable aussi bien aux écoulements continus que discontinus [21].

Etant donné qu'on traite des écoulements supercritiques, où les ondes de choc peuvent apparaître, les variables du problème peuvent donc être discontinues. D'où le couple conservation masse-quantité de mouvement est plus approprié, et on l'utilisera afin de déterminer les équations de base régissant l'écoulement étudié tout en faisant certaines hypothèses.

Les principales hypothèses émises sont les suivantes :

- 1°) Le fluide est incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ) [13 et 18].
- 2°) La répartition des vitesses est uniforme sur une verticale, autrement dit, chaque vitesse calculée représente une vitesse moyenne sur une colonne d'eau (sur la verticale) [8, 29, 30, et 53].
- 3°) La vitesse verticale de l'écoulement est faible [1 et 55].
- 4°) La courbure des lignes de courant est faible [2 et 54].
- 5°) L'accélération verticale d'une particule fluide est très faible comparée à l'accélération gravitationnelle  $g$ , et peut ainsi être négligée ((conséquence de l'hypothèse 4°)) [21, 33, 38 et 56].
- 6°) La répartition des pressions sur la verticale est hydrostatique ((conséquence des hypothèses 4° et 5°)) [19, 52, 81, et 82].
- 7°) Le coefficient de résistance aux frottements pour l'écoulement non permanent peut être représenté globalement par les formules de la résistance du même type que celles qui sont valables dans l'écoulement permanent (formule de CHEZY ou de MANNING) [14, 28, et 68].
- 8°) Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes [15 et 66].
- 9°) L'accélération de Coriolis est négligée [1, 6 et 49].
- 10°) Le canal peut être prismatique ou non prismatique - la section transversale varie avec la distance -, de pente faible ou forte [21 et 68].
- 11°) L'effet de l'entraînement d'air n'est pas pris en considération [21, 55, et 82].
- 12°) Les forces extérieures appliquées au volume de contrôle étudié ayant permis de déterminer les équations de base sont les forces de pression, de gravité et de frottements (résistances dues aux frottements).

### 4.3. Equations fondamentales

Considérons un volume de contrôle constitué par un prisme élémentaire de base  $\Delta x, \Delta y$  et de hauteur  $h$  (Figure 4.2) :

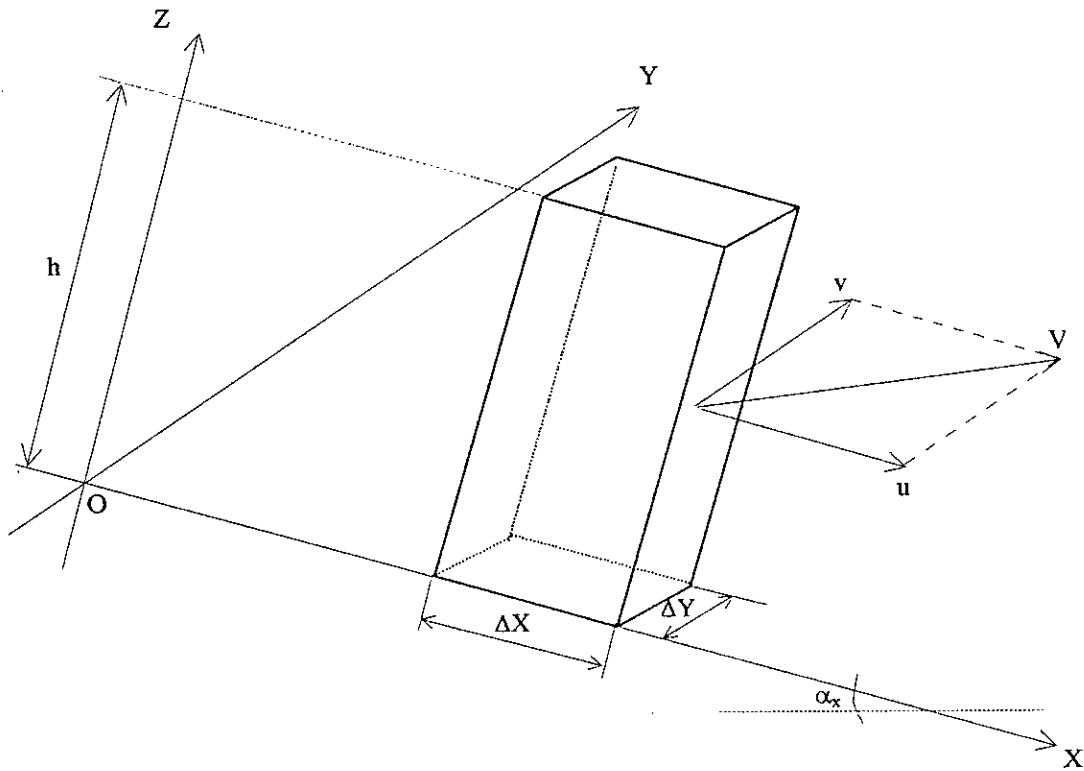


Figure 4.2 : Volume de contrôle élémentaire

**4.3.1. Equation de continuité**

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse. Elle exprime que le fluide est continu, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut ni être créé, ni disparaître dans un volume donné [1, 3 et 18].

Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , la variation de la masse fluide dans l'élément de volume, de base  $\Delta x, \Delta y$  et de hauteur  $h$  (Figure 4.2) est :

- Suivant  $x$  :

$$[\rho u h(x, y, t) - \rho u h(x + \Delta x, y, t)] \Delta y \Delta t$$

- Suivant  $y$  :

$$[\rho v h(x, y, t) - \rho v h(x, y + \Delta y, t)] \Delta x \Delta t$$

Le principe de conservation de la masse exprime l'égalité entre la variation de la masse fluide dans les deux directions  $x$  et  $y$  et la masse stockée dans l'élément de volume considéré; ce qui est formulé par :

$$\rho \Delta h \Delta x \Delta y = [\rho u h(x, y, t) - \rho u h(x + \Delta x, y, t) \Delta y \Delta t] \\ + [\rho v h(x, y, t) - \rho v h(x, y + \Delta y, t) \Delta x \Delta t]$$

D'après la première hypothèse,  $\rho$  est constante. En divisant l'équation ci-dessus par  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t)$ , et en faisant par la suite tendre ces grandeurs vers zéro, on obtient finalement la relation mathématique exprimant la conservation de la masse et donnant ainsi l'équation de continuité [15, 38, 49, et 56] :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u h) + \frac{\partial}{\partial y}(v h) = 0 \quad (4.1)$$

#### 4.3.2. Equations dynamiques

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement au prisme élémentaire considéré. Ce principe énonce que : "la variation de la quantité de mouvement dans l'élément du volume de contrôle pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , doit être égale à la somme de l'accroissement de la quantité de mouvement et la somme des forces extérieures appliquées sur l'élément du volume de contrôle pendant le même intervalle de temps" [19, 20, 21 et 55].

La variation de la quantité de mouvement dans l'élément du volume de contrôle pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est :

- Suivant x :

$$[(\rho h u \Delta x \Delta y)_t - (\rho h u \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}]$$

- Suivant y :

$$[(\rho h v \Delta x \Delta y)_t - (\rho h v \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}]$$

Par ailleurs, l'augmentation de la quantité de mouvement dans l'élément du volume de contrôle pris en considération est définie par la différence entré celle entrant par la section x (respectivement; y) et celle sortant par la section  $x + \Delta x$  (respectivement;  $y + \Delta y$ ) suivant la direction x (respectivement; y), et qui est donnée par :

- Suivant x :

$$[(\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_x - (\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] + [(\rho h u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho h u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}]$$

- Suivant y :

$$[(\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_y - (\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] + [(\rho h u v \Delta y \Delta t)_x - (\rho h u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}]$$

Les principales forces extérieures agissant sur l'élément du volume de contrôle pendant le même intervalle de temps  $\Delta t$  sont dues à :

#### 4.3.2.1. Force de pression

L'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions sur une section verticale d'un écoulement en canal à ciel ouvert (hypothèse 6°) n'est valide que si la courbure des lignes de courant est faible (hypothèse 4°), suffisamment pour pouvoir négliger l'accélération verticale par rapport à l'accélération de la pesanteur  $g$  (hypothèse 5°).

Par ailleurs, l'augmentation de la pente de fond d'un canal en écoulement à surface libre - cas d'une pente forte - aura un effet sur l'expression de la pression [5, 20, 35 et 82]. En se référant au canal à forte pente, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, illustré par la figure (4.3) :

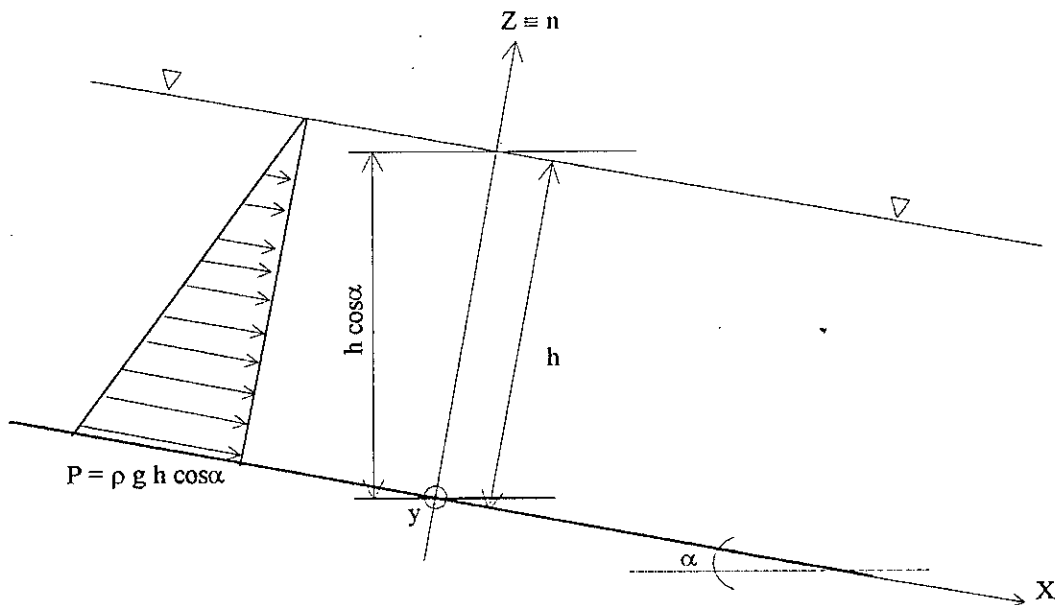


Figure 4.3 : Distribution de pression dans un canal incliné.

L'expression de la pression est alors donnée par la formule suivante [7, 20, 35, 47, 64, et 82] :

$$P = \rho g h \cos \alpha \quad (4.2)$$

On constate donc, que la pression dans un tel cas est multipliée par un facteur de correction «  $\cos \alpha$  » [20], où  $\alpha$  représente l'angle d'inclinaison du fond du canal avec l'horizontale, et  $h$ , la hauteur d'eau mesurée perpendiculairement au fond du canal.

Hasumi [20], avait étudié la distribution de pression le long des parements inclinés des barrages déversoirs. L'équation (4.2) avait été vérifiée d'une façon très satisfaisante.

Ainsi, dans l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions ( $6^\circ$ ), les isobares sont des surfaces parallèles à la surface libre. La résultante des forces de pressions s'exerçant sur l'élément du volume de contrôle est telle que :

$$|F_p| = \rho g h \cos \alpha_x \Delta x \Delta y \quad (4.3)$$

En projetant cette résultante sur les deux axes x et y, il vient que :

- Suivant x :

$$F_{px} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha_x \Delta x \Delta y \quad (4.4)$$

- Suivant y :

$$F_{py} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha_x \Delta x \Delta y \quad (4.5)$$

**Remarque :** Si la pente de fond du canal est supposée très faible, on peut alors remplacer le cosinus de l'angle entre le fond et l'horizontale par l'unité. En d'autres termes :  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$  et  $\cos \alpha \approx 1$ . L'expression de la pression et celle de la résultante des forces de pressions seront respectivement :

$$P = \rho g h$$

$$|F_p| = \rho g h \Delta x \Delta y$$

#### 4.3.2.2. Force de gravité (poids)

La décomposition de la force de gravité  $F_g$ , correspondant à l'élément du volume de contrôle étudié, suivant les deux directions x et y nous donne [3 et 64] :

- Suivant x :

$$F_{gx} = \rho g h \Delta x \Delta y \sin \alpha_x \quad (4.6)$$

- Suivant y :

$$F_{gy} = \rho g h \Delta x \Delta y \sin \alpha_y \quad (4.7)$$

### 4.3.2.3. Force de frottement

La force de frottement  $F_f$ , est proportionnelle à la surface de contact eau-fond ; puisque le fond est supposé relativement plat, cette surface est égale pour l'élément du volume de contrôle considéré à  $\Delta x \Delta y$ . D'autre part, cette force est aussi proportionnelle au carré de la vitesse et dirigée au sens opposé de l'écoulement. Elle est donc donnée par l'expression suivante [14 et 49] :

$$F_f = -\frac{1}{2} \rho C_f \overline{V} |\overline{V}| \Delta x \Delta y \quad (4.8)$$

D'après CHEZY [18 et 64], le coefficient de frottement  $C_f$  est exprimé par la relation suivante :

$$C_f = \frac{2g}{C^2}$$

où,  $C$  : représente le coefficient de CHEZY

De nombreux hydrauliciens ont toutefois proposé plusieurs expressions du coefficient de CHEZY. Nous citerons par exemple celles de BAZIN, de PRONY, de KUTTER, de MANNING et de STRICKLER, qui sont les plus usuelles. A priori, ce coefficient dépend des paramètres hydrauliques - nature des parois -, et géométriques - forme de la section transversale- de l'écoulement.

On se propose dans notre cas d'utiliser la formule de MANNING, dans laquelle le coefficient de CHEZY est donné par la relation suivante [18] :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$$

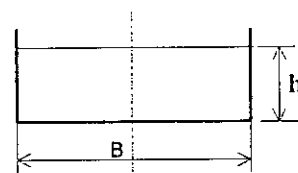
où,  $n$  et  $R_h$  sont respectivement le nombre de MANNING, qui dépend de la nature des parois du canal, et le rayon hydraulique.

avec,

$$R_h = \frac{S_m}{P_m} = \frac{\text{Surface mouillée}}{\text{Périmètre mouillé}}$$

Etant donné qu'on traite des canaux non prismatiques avec une section transversale rectangulaire alors :

$$R_h = \frac{Bh}{B + 2h}$$



avec,  $B$  : largeur du canal

$h$  : hauteur du tirant d'eau.

De plus, puisque le canal est symétrique, le rayon hydraulique devient :

$$R_h = \frac{bh}{b+h} ; \text{ avec, } b = \frac{B}{2}$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

- Suivant  $x$  :

$$\begin{aligned} & [(\rho h u \Delta x \Delta y)_t - (\rho h u \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}] = [(\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_x - (\rho h u^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] \\ & + [\rho h u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho h u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] + [-\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha_x \Delta x \Delta y + \rho g h \sin \alpha_x \Delta x \Delta y \\ & - \rho g n^2 \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y] \Delta t \end{aligned}$$

- Suivants  $y$  :

$$\begin{aligned} & [(\rho h v \Delta x \Delta y)_t - (\rho h v \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}] = [(\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_y - (\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] \\ & + [\rho h u v \Delta y \Delta t)_x - (\rho h u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] + [-\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha_x \Delta x \Delta y + \rho g h \sin \alpha_y \Delta x \Delta y \\ & - \rho g n^2 \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \Delta x \Delta y] \Delta t \end{aligned}$$

Divisant à présent les équations ci-dessus par  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t)$  et faisant tendre ensuite ces grandeurs vers zéro tout en sachant que  $\rho$  est constante par hypothèse. Les équations dynamiques suivant les deux directions  $x$  et  $y$  sont respectivement [15, 33, 64 et 68] :

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (4.10)$$

où,  $S_{0(x,y)}$  et  $S_{f(x,y)}$  sont dans l'ordre, les pentes de fond du canal et les pentes de frottement suivant  $x$  et  $y$ .



$$\text{avec,} \quad S_{\alpha_x} = \sin \alpha_x \quad (4.11)$$

$$S_{\alpha_y} = \sin \alpha_y \quad (4.12)$$

$$S_{\alpha_x} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (4.13)$$

$$S_{\alpha_y} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (4.14)$$

Le modèle mathématique en termes des variables de l'écoulement ( $h, uh, vh$ ), se résume finalement dans le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) &= gh(S_{\alpha_x} - S_{\alpha_x}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) &= gh(S_{\alpha_y} - S_{\alpha_y}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou, sous la forme condensée suivante :

$$U'_t + E_x + F'_y + S' = 0 \quad (4.16a)$$

$$\text{avec,} \quad U'_t = (h, uh, vh)^t$$

$$E_x = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \\ uvh \end{bmatrix}; \quad F'_y = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \end{bmatrix}; \quad S' = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{\alpha_x} - S_{\alpha_x}) \\ -gh(S_{\alpha_y} - S_{\alpha_y}) \end{bmatrix} \quad (4.16b)$$

Par ailleurs, le système d'équations du mouvement en termes de primitives des variables de l'écoulement ( $h, u, v$ ) est tel que :

$$V'_t + P_x + R_y + T = 0 \quad (4.17a)$$

$$\text{avec,} \quad V'_t = (h, u, v)^t$$

$$P_x = \begin{bmatrix} u h \\ \frac{u^2}{2} + g h \cos \alpha_x \\ u v \end{bmatrix}; R_y = \begin{bmatrix} v h \\ u v \\ \frac{v^2}{2} + g h \cos \alpha_x \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{0x} - S_{fx}) \\ -g(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

où, les termes  $S_{0x}$ ,  $S_{fx}$ ,  $S_{0y}$  et  $S_{fy}$  sont données par les relations (4.11) à (4.14).

Toute fois, en pratique, on est souvent amené à étudier des écoulements dans des canaux à géométrie irrégulière et relativement complexe, tels que les canaux non prismatiques ou encore courbés. Le problème principal qui se pose dans ce cas, est la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois latérales. Par conséquent, une grande attention doit être faite au moment de la discrétisation du domaine physique de forme géométrique complexe.

#### 4.4. Transformation géométrique

Afin de résoudre les écoulements à surface libre dans les transitions par des méthodes numériques, il devient nécessaire de remplacer les limites de la transition par une grille approximative. Roache [14, 15 et 52] a montré que l'approximation illustrée par la figure (4.4), et dont les points de la grille ne coïncident pas avec les limites de la transition, nécessite l'utilisation d'une procédure d'interpolation après discrétisation du domaine physique. Mais, cette procédure conduit à des solutions aberrantes et induit de fortes instabilités, principalement si des ondes de choc sont présentes.

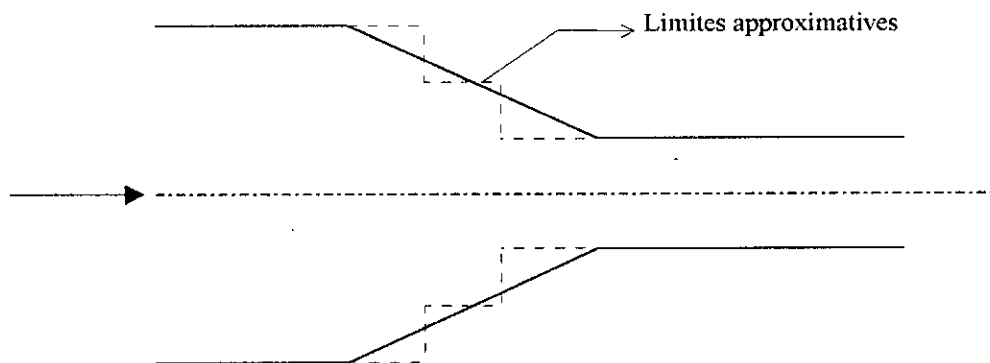


Figure (4.4) : Schématisation à la limite dans une transition

Ces instabilités peuvent être évitées en transformant le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire ( Figure 4.5) plus simple à étudier. Cette procédure est basée sur la transformation de coordonnées suivante (Anderson et Col. [15 et 52]) :

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \frac{y}{b(x)} \end{cases} \quad (4.18)$$

où,  $b(x)$  représente la distance entre l'axe de symétrie et la paroi latérale à une distance  $x$  (Figure 4.5.a).

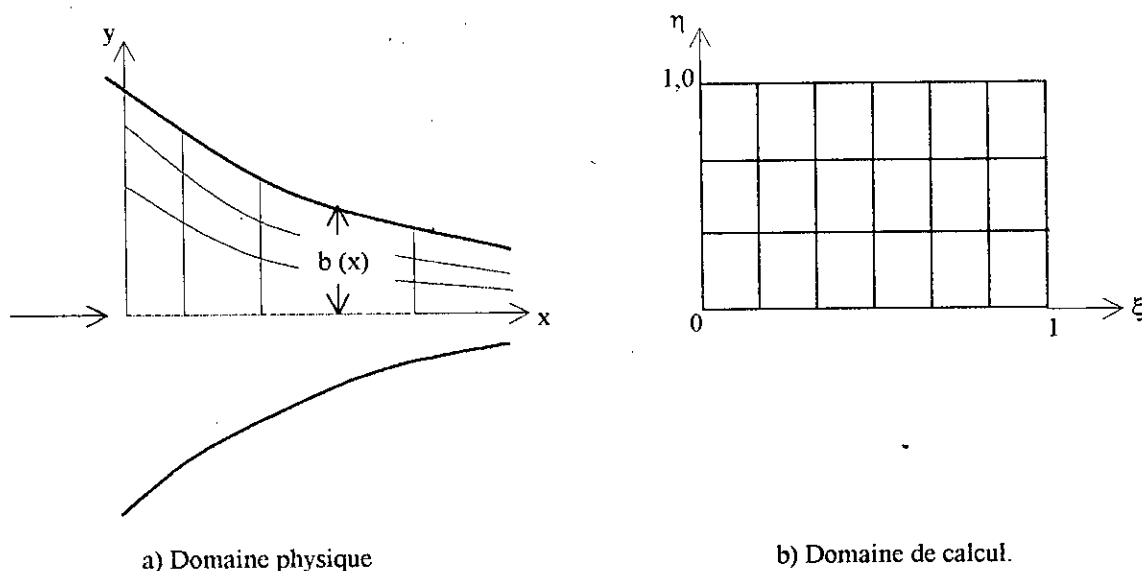


Figure 4.5 : Transformation de coordonnées pour une transition symétrique.

Avec cette transformation, il est à présent possible d'appliquer les méthodes numériques dans un maillage uniformément espacé dans le plan de calcul, et dont les frontières coïncident avec  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$  (Figure 4.5.b).

#### 4.5. Application de la transformation géométrique

Les équations de base régissant le phénomène étudié devront être écrites maintenant en fonction des nouvelles coordonnées  $\xi$  et  $\eta$ , et ce en utilisant la procédure de la transformation géométrique donnée ci-dessus (équations 4.18).

Soit  $f$  une fonction de  $x$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ),  $y$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ), on peut écrire d'après les propriétés des dérivées partielles que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Ceci appliqué à la transformation de coordonnées (4.18), donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (4.20)$$

où,  $b'(\xi) = \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi}$

#### 4.5.1. Transformation du premier système d'équations

L'application de la transformation géométrique (4.18) et la procédure mathématique (4.20) au système d'équations du mouvement (4.15) écrit en termes des variables de l'écoulement,  $U_i' = (h, uh, vh)^t$  donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial(uh)}{\partial \eta} + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) \\ &\quad + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} = gh (S_{\alpha_\xi} - S_{r_\xi}) \\ \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) &= gh (S_{\alpha_\eta} - S_{r_\eta})\end{aligned}$$

Après développement et réarrangement, les équations de base en coordonnées transformées seront :

$$U_i'' + E_\xi + F_\eta' + S'' = 0 \quad (4.21a)$$

avec,  $U_i'' = (bh, uhb, vhb)^t$

$$E_{\xi} = \begin{bmatrix} u h b \\ b \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_{\xi} \right) \\ u v h b \end{bmatrix} ; F'_{\eta} = \begin{bmatrix} v h - \eta h u \frac{\partial b}{\partial \xi} \\ u v h - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_{\xi} \right) \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_{\xi} - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} (u v h) \end{bmatrix} ;$$

$$S'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -g h b (S_{o\xi} - S_{r\xi}) \\ -g h b (S_{o\eta} - S_{r\eta}) \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

### 4.5.2. Transformation du second système d'équations

Le deuxième système donné par les équations (4.17) est exprimé par contre en termes de primitives des variables  $h$ ,  $u$  et  $v$ . L'application de la transformation géométrique aux équations de l'écoulement se fait de la même façon que ci-dessus, ce qui donnera les équations de base en coordonnées transformées suivantes :

$$V'_i + P_{\xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) P_{\eta} + \frac{1}{b(\xi)} R_{\eta} + T = 0 \quad (4.22a)$$

avec,  $V'_i = (h, u, v)^t$

$$P_{\xi} = \begin{bmatrix} u h \\ \frac{u^2}{2} + g h \cos \alpha_{\xi} \\ u v \end{bmatrix} ; P_{\eta} = \begin{bmatrix} u h \\ \frac{u^2}{2} + g h \cos \alpha_{\xi} \\ u v \end{bmatrix} ; R_{\eta} = \begin{bmatrix} v h \\ u v \\ \frac{v^2}{2} + g h \cos \alpha_{\xi} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g (S_{o\xi} - S_{r\xi}) \\ -g (S_{o\eta} - S_{r\eta}) \end{bmatrix} \quad (4.22b)$$

### 4.5.3. Opérations d'Algèbre matricielle sur les équations

Les équations du mouvement en fonction de  $x$  et  $y$  (4.16) et (4.17), et celles en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  (4.21) et (4.22), ne sont pas dans une forme totalement conservative, à cause de la présence des termes  $S'$ ,  $T$  et  $S''$ , appelés fréquemment "termes de source". Lorsque ces termes ne sont pas nuls, ils agissent comme une source. Mais, puisque la contribution de ceux-ci

est généralement faible, les propriétés de la forme conservative ne sont pas alors altérées [30 et 64].

A partir de plusieurs investigations, il a été montré que la célérité de l'onde calculée en employant le même schéma numérique concorde très bien avec les résultats expérimentaux, dans le cas où une forme conservative des équations est utilisée au lieu d'une forme non conservative [30]. Il est toutefois nécessaire pour certains schémas numériques que les équations soient dans une forme non conservative - c'est-à-dire dissipative -. Pour cela, la forme non conservative des équations de base (4.22) est obtenue en faisant les substitutions suivantes [30 et 75] :

$$\begin{aligned} P_{\xi} &= G' V'_{\xi} & (P_{\eta} &= G' V'_{\eta}) \\ R_{\eta} &= H' V'_{\eta} \end{aligned}$$

où,  $G'$  et  $H'$  sont des matrices Jacobiennes définies respectivement par :

$$G' = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g \cos \alpha_{\xi} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} ; \quad H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g \cos \alpha_{\xi} & 0 & v \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Les valeurs propres des matrices  $G'$  et  $H'$  sont dans l'ordre :

$$G' = \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad (4.24a)$$

$$H' = \begin{cases} \omega_1 = v \\ \omega_2 = v + c \\ \omega_3 = v - c \end{cases} \quad (4.24b)$$

Dans lesquelles,  $c$ , représente la célérité de l'onde, tel que :

$$c = \sqrt{g h \cos \alpha_{\xi}} \quad (4.25)$$

D'autre part, les deux matrices Jacobiennes  $G'$  et  $H'$  peuvent être diagonalisées de la manière suivante :

$$G' = M \cdot D_{G'} \cdot M^{-1} \quad (4.26)$$

$$H' = N \cdot D_{H'} \cdot N^{-1} \quad (4.27)$$

où,  $D_{G'}$  et  $D_{H'}$  désignent les matrices diagonales de  $G'$  et  $H'$ .

$M$  et  $N$  sont des matrices de passage exprimées par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & h/2c & h/2c \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & h/2c & h/2c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (4.28a)$$

$M^{-1}$  et  $N^{-1}$  sont les matrices inverses de  $M$  et  $N$  :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c/h & 1 & 0 \\ c/h & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c/h & 0 & 1 \\ c/h & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.28b)$$

Les matrices Jacobiennes diagonalisées  $G'$  et  $H'$  s'écrivent aussi en fonction des valeurs propres, de la sorte :

$$G' = M D_{G'} M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & \frac{h}{2c}(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ \frac{c}{2h}(\lambda_2 - \lambda_3) & \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$H' = N D_{H'} N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) & 0 & \frac{h}{2c}(\omega_2 - \omega_3) \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{c}{2h}(\omega_2 - \omega_3) & 0 & \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

En plus, les matrices diagonales  $D_{G'}$  et  $D_{H'}$  peuvent être partagées en deux parties, l'une positive et l'autre négative :

$$D_{G'} = D_{G'}^+ + D_{G'}^-$$

$$D_{H'} = D_{H'}^+ + D_{H'}^-$$

Cette décomposition peut être accomplie, en effectuant le test ci-dessous, sur les valeurs propres [30 et 64] :

$$\begin{aligned}\lambda_i^+ &= \max(\lambda_i, 0) \\ \lambda_i^- &= \min(\lambda_i, 0) \\ \omega_i^+ &= \max(\omega_i, 0) \\ \omega_i^- &= \max(\omega_i, 0)\end{aligned}\tag{4.31}$$

avec,  $i=1,2,3$

Par conséquent, les matrices Jacobiennes  $G'$  et  $H'$  sont décomposées aussi en deux matrices, la première contient des valeurs positives, tandis que la deuxième contient des valeurs négatives :

$$G' = G'^+ + G'^- = M D_G^+ M^{-1} + M D_G^- M^{-1}\tag{4.32a}$$

$$H' = H'^+ + H'^- = N D_H^+ N^{-1} + N D_H^- N^{-1}\tag{4.32b}$$

L'incorporation de tout les changements ci-dessus dans le système d'équations initial (4.22), nous donne enfin de compte le nouveau système à utiliser :

$$\begin{aligned}V'_i + G'^+ V'_\xi + G'^- V'_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) (G'^+ V'_\eta + G'^- V'_\eta) \\ + \frac{1}{b(\xi)} (H'^+ V'_\eta + H'^- V'_\eta) + T = 0\end{aligned}\tag{4.33}$$

## 4.6. Conditions initiales, conditions aux limites

Une équation aux dérivées partielles admet d'une manière générale, une infinité de solutions. La solution particulière désirée est déterminée à partir de quelques conditions supplémentaires. Dans la majorité des cas, ces conditions portent sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle souvent frontière ou limite [16].

### 4.6.1. Conditions initiales

La notion de conditions initiales est évidemment liée aux conditions qui correspondent au temps initial  $t = 0$ . Ainsi, afin de commencer les calculs à partir de l'état initial de l'écoulement, les valeurs des trois variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  devront être judicieusement choisies et spécifiées en tout les points du domaine de calcul –maillage-. Le choix des valeurs de ces trois variables, se fait habituellement à partir de la limite amont, c'est-à-dire, de la condition amont.



#### 4.6.2. Conditions aux limites

La prise en compte des limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats. Les équations hyperboliques sont particulièrement très sensibles, car chaque erreur qui s'introduit au niveau des frontières se propage automatiquement à travers la grille de calcul, ce qui mène dans la plupart des cas à de fortes instabilités (Anderson et Col.) [15].

Quatre types de conditions aux limites doivent être utilisées dans les différentes applications liées au problème physique étudié dans la présente thèse, à savoir :

- Les conditions d'amont et d'aval.
- La condition de symétrie.
- Les conditions sur les parois latérales solides.

##### 4.6.2.1. Conditions d'amont, conditions d'aval

Les conditions d'amont et d'aval sont aussi connues comme étant des conditions aux frontières ouvertes ; où l'écoulement peut entrer ou quitter le domaine de calcul. STOKER[15] et VERBOOM et Col. [33], ont montré que ces conditions seront spécifiées selon le type de l'écoulement ( nombre de Froude) et le type de problème considéré. Le nombre de conditions est résumé dans le tableau ci - dessous :

Problème Considéré	écoulement subcritique $F < 1$		écoulement supercritique $F > 1$	
	Amont (entrée)	Aval (sortie)	Amont (entrée)	Aval (sortie)
1 D	1	1	2	0
2 D	2	1	3	0

Pour un écoulement bidimensionnel en régime supercritique, par exemple, trois conditions aux frontières doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval ; alors que pour le même écoulement mais en régime subcritique, deux conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et une condition à l'aval.

#### 4.6.2.2. Conditions de symétrie

Dans le but de calculer les variables de l'écoulement  $h$ ,  $u$  et  $v$  au niveau de l'axe de l'écoulement (axe de symétrie géométrique), il est préconisable d'employer une procédure adéquate, qui n'est autre que la procédure de réflexion [14 et 52]. Le principe de cette dernière est tel que les valeurs des variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  aux points fictifs du maillage sont remplacées par les valeurs correspondant immédiatement aux points intérieurs (Figure 4.6).

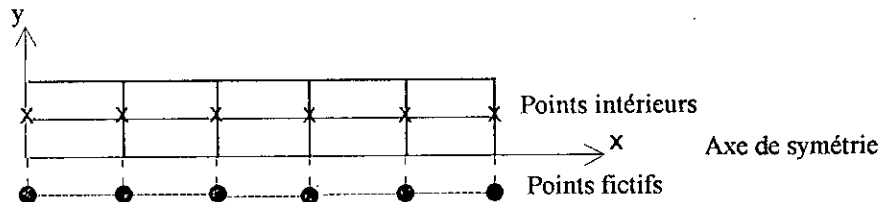


Figure 4.6 : Procédure de réflexion au niveau de l'axe de symétrie (de l'écoulement)

Dans ce cas, une réflexion symétrique est utilisée pour déterminer  $h$  et  $u$ , alors qu'une réflexion antisymétrique est utilisée pour avoir  $v$  [14 et 30]. Notant aussi que cette procédure est seulement exacte pour une ligne symétrique.

#### 4.6.2.3. Conditions sur les parois solides

Comme il a été mentionné ci-dessus, les conditions aux limites au niveau de la paroi sont d'une très grande importance, du moment qu'une simple petite erreur peut se propager et conduira par la suite à des instabilités.

Lors de l'utilisation des schémas numériques pour la résolution des équations du mouvement, un problème se pose alors aux points du maillage le long de la paroi latérale, où les valeurs de toutes les variables de l'écoulement sont exigées. Il est donc indispensable de trouver une façon de calculer ces variables en utilisant les informations à partir des points intérieurs [52].

Dans ce contexte, vingt cinq (25) différentes techniques, classées dans quatre grandes catégories, avaient été comparées par ABBETT [15 et 52] pour le calcul des divers points le long de la paroi solide, dans les écoulements supersoniques :

- Les procédures de réflexions (ou l'image d'un point).
- Les procédures de la dérivée première.
- Les procédures basées sur la méthode des caractéristiques.
- Divers procédures (notamment la procédure d'ABBETT).

Parmi tout cela, la première catégorie ou la procédure de réflexion, est celle qui est fréquemment utilisée dans les applications relatives au domaine de l'hydraulique, et aussi la plus recommandée pour l'analyse des écoulements dans les canaux découverts, dont la section est principalement rectangulaire [3 et 14].

□ *Procédure de réflexion*

Le principe de la procédure de réflexion consiste à considérer que la profondeur de l'écoulement  $h$  et la valeur de la vitesse résultante  $V$  au point de réflexion fictif du maillage sont les mêmes que les valeurs correspondant au point intérieur de la grille de calcul (Figure 4.7).

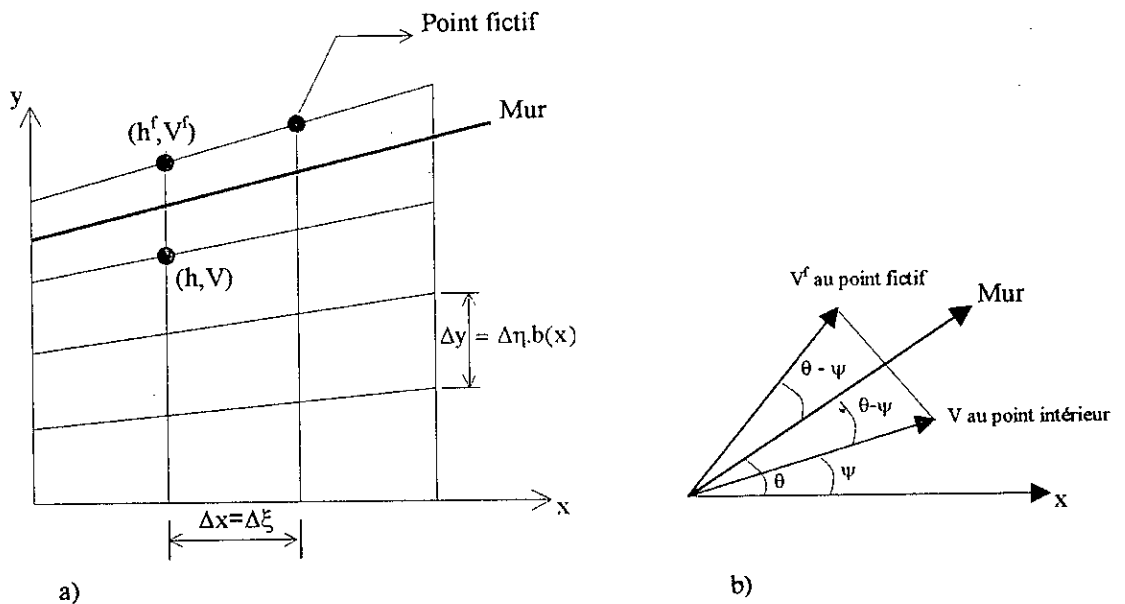


Figure 4.7 : Procédure de réflexion pour une paroi solide

La direction de la vitesse résultante de l'écoulement  $V$ , est déterminée telle que sa composante normale au niveau du mur soit nulle.

Si  $\theta$  est l'angle que fait la paroi avec l'axe des  $x$ , et  $\psi$  l'angle que fait la vitesse résultante  $V$  au point intérieur du maillage et l'axe des  $x$ , alors, les composantes de la vitesse  $u^f$  et  $v^f$  au point fictif (point de réflexion) sont [3, 14 et 15] :

$$\begin{cases} u^f = V \cos(2\theta - \psi) \\ v^f = V \sin(2\theta - \psi) \end{cases} \quad (4.34)$$

*Chapitre 5*

***MODELISATION  
NUMERIQUE***

*« Les solutions analytiques exactes, qui sont rares en physiques, sont élégantes, mais n'ont pas plus de valeur intrinsèque que les solutions numériques. On ne doit pas sous-estimer la facilité et la puissance des méthodes de calcul numérique. »*

*M. A. RUDERMAN*

*Cours de physique de BERKELEY*

## 5.1. Introduction

La solution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Ces phénomènes sont en général multiples et compliqués. Pour les représenter, on est amené à négliger certains phénomènes et à simplifier certains autres. Même avec ces simplifications, les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes algébriques connues. Il est alors nécessaire d'avoir recours à d'autres méthodes.

Comme nous l'avons déjà signalé, les écoulements non permanents à surface libre sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, non linéaire. De telles équations ne peuvent être résolues théoriquement que dans des cas particuliers (problèmes très simples ou de géométrie très particulière), difficilement retrouvés dans la réalité.

Ainsi, les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes important de la compréhension scientifique, et aussi l'un des plus rapide développement dans toutes les branches des sciences physiques englobant le domaine hydraulique.

Les raisons principales de cet état de fait, sont d'une part, les progrès de l'analyse mathématique et d'autre part, l'arrivée de l'outil de calcul numérique qui était resté, pour les équations aux dérivées partielles, presque totalement inadéquat jusqu'aux années 1950. L'arrivée, en effet des ordinateurs, leurs progrès immenses et incessants, ont permis -pour la première fois dans l'histoire - de calculer, à partir des modèles, des quantités qui jusqu'alors, ne pouvaient être que très approximativement estimées et peut-être par dessus tout, de les calculer sûrement et rapidement, d'où la possibilité (fondamentale) pour les chercheurs et pour les ingénieurs, de pouvoir utiliser les résultats numériques pour la modification ou l'adaptation des raisonnements, des expériences ou des réalisations en cours.

L'impact des grands calculateurs a été donc d'une très grande importance dans le traitement des problèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Divers méthodes

numériques ont été par suite développées dans ce contexte, et qui sont classées en trois principales catégories :

- Méthode des différences finies.
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des intégrales aux frontières.

Notre objectif n'est pas de faire un descriptif exhaustif de ces méthodes, mais l'analyse particulière des méthodes numériques largement déployées dans l'étude des écoulements non permanents à surface libre. Le choix de la méthode à utiliser et son emploi est assez délicat, et représente tout un art : c'est "l'analyse numérique".

Parmi les différentes méthodes citées ci-dessus, on optera pour la méthode des différences finies, du moment quelle est la plus utilisée et la plus appropriée pour le traitement des problèmes relatifs aux écoulements non permanents dans les canaux découverts.

Finalement, on peut dire que, dans des sujets très divers, la modélisation par les équations aux dérivées partielles, suivie de l'analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour de la confrontation à l'expérience, est devenue une démarche de base.

## 5.2. Méthode des différences finies

Plusieurs problèmes en hydraulique exigent, par manque de solutions analytiques, une solution numérique des équations aux dérivées partielles, et l'une des méthodes classiques pour approcher cette solution est l'utilisation de la méthode des différences finies. La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies. En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau (appelé aussi maillage ou grille) (Figure 5.1).

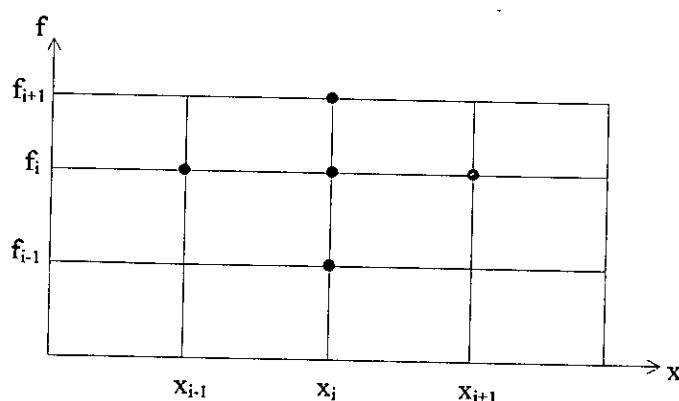


Figure 5.1 : Maillage élémentaire

Si  $f$  est une fonction continue et continûment différentiable, on écrit alors

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

avec,  $f_i = f(x_i)$  et  $x_i = (i-1) \Delta x$

Dans les différenciations ci-dessus, on a utilisé respectivement une différence avant et une différence arrière.

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide d'un développement en série de Taylor de la fonction  $f$  :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{(n-1)} f}{\partial x^{n-1}} \right|_x + R_n$$

où, le reste  $R_n$  est de l'ordre de  $\|\Delta x\|^n$ , ce que l'on note habituellement :

$$R_n = o(\|\Delta x\|^n)$$

Par ailleurs, la méthode des différences finies peut-être facilement étendue au cas où la fonction  $f$  considérée dépend de deux ou plusieurs variables. Ainsi, si  $f$  dépend de deux variables  $(x,t)$ ; et si dans le plan  $oxt$  on trace une série de droites parallèles aux axes, déterminant de la sorte un réseau de points  $(i,j)$  (Figure 5.2) auxquels correspond les coordonnées de la fonction inconnue  $f_{i,j}$ ; on peut écrire pour les différences centrales :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x}$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \Delta t}$$

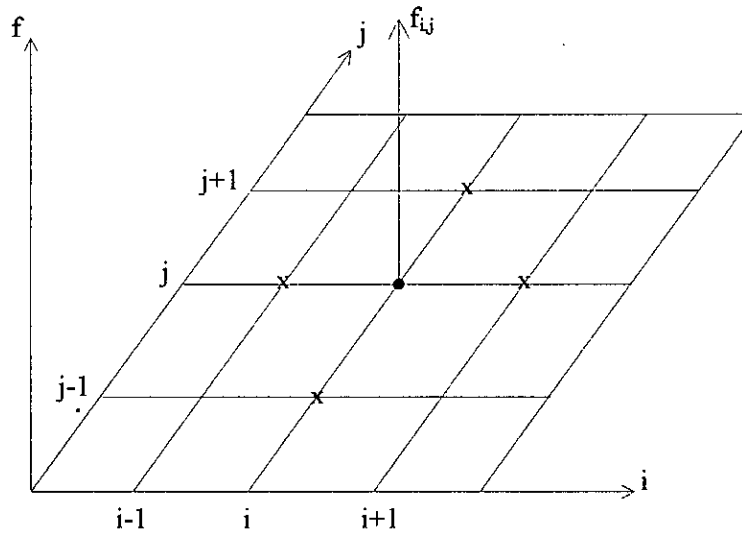


Figure 5.2 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables.

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta t^2}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right]_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta t}$$

### 5.3. Analyse de l'approximation

#### 5.3.1. Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction  $f$ . L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques [3,10 et 80].

#### 5.3.2. Stabilité d'un schéma aux différences finies

Bien entendu, les opérations de l'algorithme ne sont jamais effectuées exactement. Lors de la résolution d'un algorithme, on n'attaque pas le pas  $j \rightarrow j+1$  dans les mêmes conditions que le pas  $0 \rightarrow 1$ , car on l'aborde avec un lourd handicap : la lourde charge est constituée par la somme des erreurs de discrétisation précédentes (et d'arrondis à l'occasion !). Les erreurs sont donc petites à chaque opérations, mais comme il y a beaucoup d'opérations, leur



accumulation peut avoir un effet désastreux. Ainsi un coureur qui à déjà fait trois « cent mètres » dans sa journée n'aborde pas le quatrième dans la même forme que pour le premier !.

Par conséquent, on dira qu'un schéma numérique est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discrétisation et d'arrondis [14, 27 et 63].

### 5.3.3. consistance d'un schéma aux différences finies

On dit qu'un schéma est consistant (ou compatible), si les équations aux différences sont construites à partir d'une expression équivalente à l'équation de départ au second ordre près [10, 62 et 80]. En d'autres termes, ceci veut dire que les dérivées partielles sont remplacées par des différences finies effectivement voisines. La "qualité" de cette consistance s'appelle "la précision du schéma". Cela signifie que l'erreur de troncature, tend vers zéro, lorsque les dimensions du maillage tendent vers zéro.

### 5.3.4. Convergence d'un schéma aux différences finies

Le schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent simultanément vers zéro [9, 27 et 63].

**Remarque :** L'intérêt des notions de stabilité et de consistance est lié au théorème de LAX qui établit que pour une large classe d'équations, la consistance et la stabilité constituent une condition nécessaire et suffisante de convergence [16].

## 5.4. Schéma explicite, schéma implicite

Divers schémas aux différences finies sont utilisés dans l'étude des problèmes d'évolution, c'est-à-dire dépendant du temps [23 et 65]. Il existe deux principaux types de schémas, en l'occurrence, les schémas implicites et explicites.

Un schéma est dit "explicite" [16, 19 et 48], si chaque valeur approchée de la solution, au temps  $t+\Delta t$  et au point  $x$ , est écrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps  $t$ . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque  $x$ .

Par contre, un schéma est dit "implicite" [19, 29, 34 et 62], si la valeur approchée, en un point au temps  $t+\Delta t$ , est écrite en fonction de la solution précédente au temps  $t$ , et des valeurs voisines au temps  $t+\Delta t$ . Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps  $t+\Delta t$ , qui se résout globalement.

Mais, le choix du type de schéma à employer dépend essentiellement de la nature du problème physique à traiter, et de l'aptitude du schéma à prendre en compte les caractéristiques du problème en question. Les principaux avantages et inconvénients des deux types de schémas aux différences sont [19, 34 et 48] :

- **Stabilité** : Dans la méthode explicite, une condition de stabilité sur le pas de temps devra être satisfaite, ce qui n'est pas le cas pour une méthode implicite.
- **Simplicité ( souplesse ) de programmation** : La méthode explicite est relativement plus facile à programmer que la méthode implicite. Par conséquent, quand le temps nécessaire pour le développement d'un programme est limité, la méthode explicite doit être utilisée.
- **Economie** : Puisque la valeur du pas de temps  $\Delta t$  pour un schéma implicite n'est pas restreinte par un critère de stabilité, une grande valeur de  $\Delta t$  est permise, ce qui donnera un temps de calcul relativement inférieur comparé au schéma explicite dans lequel  $\Delta t$  est limité par une condition de stabilité.
- **Simulation des sommets abruptes** : Du moment que le pas de temps  $\Delta t$  est souvent très petit, les méthodes explicites sont plus appropriées pour l'analyse des phénomènes transitoires dans lesquels des sommets brusques de courte durée apparaissent, mais dans les méthodes implicites, de tels sommets sont généralement lissés.
- **Formation de chocs** : La méthode explicite est plus convenable que la méthode implicite dans le cas où il y a apparition de choc ou de mascaret (discontinuités) dans le phénomène étudié.

Tenant compte de toutes ces constatations, il est à présent évident que les schémas explicites sont les plus performants dans le traitement des problèmes des écoulements non permanents à surface libre, dans les zones de transition, où l'apparition des ondes de choc est quasiment sûre. Ces schémas sont bien adaptés à la prise en compte des discontinuités - chocs -. Ils sont cependant, de type "prédicteur-correcteur" du second ordre, c'est-à-dire précis à l'ordre deux en espace et en temps.

### 5.5. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés

Plusieurs schémas aux différences finies explicites de second ordre ont été développés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique, qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides. On distingue principalement les trois schémas ci-dessous, à cause de leur simplicité, leur vigueur et leur aptitude à localiser les chocs.

### 5.5.1. Schéma de MacCORMACK

Une classe de méthodes aux différences finies étudiée par LAX et WENDROFF [12, 23, 34, 48 et 65] est devenue très populaire dans le calcul de la dynamique des fluides. Ces méthodes sont basées essentiellement sur un développement d'ordre deux dans le temps en série de Taylor. Au milieu de celle-ci, on trouve le schéma explicite de MacCORMACK, qui est l'un des plus utilisés dans l'intégration des équations du mouvement du type hyperbolique non linéaire. L'avantage principal de ce schéma, réside dans son aptitude à bien traiter les discontinuités - ondes de choc -.

#### • Formulation générale du schéma de MacCORMACK

La méthodologie du schéma de MacCORMACK [15, 30, 33, 52, 57 et 67] consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de prédiction et une autre de correction. Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au niveau du pas de temps  $(k + 1)$ , sachant que leurs valeurs sont connues au pas de temps  $k$ .

En vue d'illustrer les étapes de calcul du schéma de MacCORMACK, considérons les équations de base sous forme conservative, régissant l'écoulement étudié, et données en coordonnées cartésiennes par le système (4.16) :

$$U'_t = E_x + F'_y + S' = 0$$

Le schéma de MacCORMACK appliqué au système ci-dessus se compose de deux étapes :

i) Etape de prédiction :

$$\tilde{U}'_{i,j} = U'_{i,j}{}^k - \tau_x (E_{i,j}^k - E_{i-1,j}^k) - \tau_y (F'_{i,j}{}^k - F'_{i,j-1}{}^k) - \Delta t S'_{i,j}{}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M \end{cases} \quad (5.1)$$

ii) Etape de correction :

$$\hat{U}'_{i,j} = \tilde{U}'_{i,j} - \tau_x (\tilde{E}_{i+1,j} - \tilde{E}_{i,j}) - \tau_y (\tilde{F}'_{i,j+1} - \tilde{F}'_{i,j}) - \Delta t \tilde{S}'_{i,j} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases} \quad (5.2)$$

où,  $\tau_x = \Delta t / \Delta x$  ;  $\tau_y = \Delta t / \Delta y$

La valeur de la variable  $U'$  au temps  $(k+1)$  est telle que :

$$U'_{i,j}{}^{k+1} = \frac{1}{2} (U'_{i,j}{}^k + \hat{U}'_{i,j}) \quad (5.3)$$

Les indices  $i$  et  $j$  correspondent aux points du maillage suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Dans l'exemple développé ci-dessus, auquel le schéma de MacCORMACK a été appliqué, les différences finies arrières sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape prédiction et les différences finies avants utilisant les variables prédites, sont utilisées dans l'étape correction. Il faut savoir par ailleurs, qu'il est possible d'utiliser les différences finies avants dans l'étape prédiction et les différences finies arrières dans l'étape correction, comme il est possible d'alterner la direction de différenciation d'un pas de temps à l'autre.

### 5.5.2. Schéma de Lambda

Moretti [28 et 32] a introduit par la suite un nouveau schéma aux différences finies, connu sous le nom de "schéma de Lambda ( $\lambda$ )". Dans ce schéma, qui utilise principalement la théorie des caractéristiques, les équations de base doivent être écrites sous une forme non conservative, contrairement au schéma précédent (de MacCORMACK).

- **Formulation générale du schéma de Lambda**

Le schéma de Lambda ( $\lambda$ ) consiste [28, 37 et 61] aussi à discrétiser les équations en deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de correction. Afin de développer le principe de ce schéma, soit à titre d'exemple le système d'équations en coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , et écrit en termes de primitives des variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  donné par (4.17), et que nous reprenons ici :

$$V'_t + P_x + R_y + T = 0$$

La forme non conservative de ce système est obtenue en faisant les mêmes substitutions et les mêmes étapes effectuées dans le chapitre 4 (§ 4.5.3), ce qui donnera le nouveau système d'équations (écrit en fonction des directions caractéristiques) à discrétiser :

$$V'_t + G'^+ V'_x + G'^- V'_x + H'^+ V'_y + H'^- V'_y + T = 0 \tag{5.4}$$

L'application du schéma de Lambda se fait selon les étapes suivantes :

i) Étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \tilde{V}'_{i,j} = & V'_{i,j} - \tau_x \left[ G'^{+k} (1 + \nabla_x) \nabla_x V'_{i,j} + G'^{-k} \Delta_x V'_{i,j} \right] \\ & - \tau_y \left[ H'^{+k} (1 + \nabla_y) \nabla_y V'_{i,j} + H'^{-k} \Delta_y V'_{i,j} \right] - \Delta t T'_{i,j} \end{aligned} \tag{5.5}$$

ii) Etape de correction :

$$\begin{aligned} \hat{V}'_{i,j} = & \tilde{V}'_{i,j} - \tau_x \left[ \tilde{G}'^+ \nabla_x \tilde{V}'_{i,j} + \tilde{G}'^- (1 - \Delta_x) \Delta_x \tilde{V}'_{i,j} \right] \\ & - \tau_y \left[ \tilde{H}'^+ \nabla_y \tilde{V}'_{i,j} + \tilde{H}'^- (1 - \Delta_y) \Delta_y \tilde{V}'_{i,j} \right] - \Delta t \tilde{T}'_{i,j} \end{aligned} \quad (5.6)$$

où,

$\nabla_{x,y}$  : désigne une différence finie arrière suivant x et y respectivement.

$\Delta_{x,y}$  : désigne une différence finie avant suivant x et y respectivement.

Il s'ensuit alors que :

$$\begin{aligned} (1 + \nabla_x) \nabla_x V'_{i,j} &= 2 V'_{i,j} - 3 V'_{i-1,j} + V'_{i-2,j} \\ (1 + \nabla_y) \nabla_y V'_{i,j} &= 2 V'_{i,j} - 3 V'_{i,j-1} + V'_{i,j-2} \\ (1 - \Delta_x) \Delta_x \tilde{V}'_{i,j} &= -2 \tilde{V}'_{i,j} + 3 \tilde{V}'_{i+1,j} - \tilde{V}'_{i+2,j} \\ (1 - \Delta_y) \Delta_y \tilde{V}'_{i,j} &= -2 \tilde{V}'_{i,j} + 3 \tilde{V}'_{i,j+1} - \tilde{V}'_{i,j+2} \end{aligned}$$

La solution au pas de temps (k+1) est calculée par :

$$V'_{i,j}{}^{k+1} = \frac{1}{2} (V'_{i,j}{}^k + \hat{V}'_{i,j}) \quad (5.7)$$

### 5.5.3 Schéma de GABUTTI

Après avoir été testé, il a été conclu que le schéma de Lambda ne donne pas d'assez bons résultats, et ne peut être par conséquent utilisé dans tous les cas.

GABUTTI [30 et 32] a essayé d'améliorer le schéma précédent en tenant compte de tous ces inconvénients, dans le but de trouver un autre schéma aux différences plus efficace. Ainsi, il a proposé un schéma appelé "schéma de GABUTTI", qui est d'un côté similaire à celui de Lambda, dans la procédure de développement des équations, qui doivent être écrites sous une forme non conservative, et qui utilise aussi largement la théorie des caractéristiques, mais d'un autre côté diffère de celui-ci dans l'approximation des dérivées partielles par des différences finies.

- **Formulation générale du schéma de GABUTTI**

Le schéma de GABUTTI [28, 32 et 64] qui est aussi précis à l'ordre deux, en espace et en temps, a la particularité d'effectuer deux étapes de prédiction et une étape de correction. Si on applique ce schéma au système d'équations en coordonnées cartésiennes (5.4) écrit sous la forme non conservative, il vient que :

i) Etape de prédiction : *Partie I*

$$\begin{aligned} \tilde{V}'_{i,j} = & V'_{i,j}{}^k - \tau_x \left[ G'^{+k} \nabla_x V'_{i,j}{}^k + G'^{-k} \Delta_x V'_{i,j}{}^k \right] \\ & - \tau_y \left[ H'^{+k} \nabla_y V'_{i,j}{}^k + H'^{-k} \Delta_y V'_{i,j}{}^k \right] - \Delta t T'_{i,j}{}^k \end{aligned} \quad (5.8)$$

ii) Etape de prédiction : *Partie II*

$$\begin{aligned} \bar{V}'_{i,j} = & V'_{i,j}{}^k - \tau_x \left[ G'^{+k} (1 + \nabla_x) \nabla_x V'_{i,j}{}^k + G'^{-k} (1 - \Delta_x) \Delta_x V'_{i,j}{}^k \right] \\ & - \tau_y \left[ H'^{+k} (1 + \nabla_y) \nabla_y V'_{i,j}{}^k + H'^{-k} (1 - \Delta_y) \Delta_y V'_{i,j}{}^k \right] - \Delta t T'_{i,j}{}^k \end{aligned} \quad (5.9)$$

iii) Etape de correction :

$$\begin{aligned} \hat{V}'_{i,j} = & \tilde{V}'_{i,j} - \tau_x \left[ \tilde{G}'^+ \nabla_x \tilde{V}'_{i,j} + \tilde{G}'^- \Delta_x \tilde{V}'_{i,j} \right] \\ & - \tau_y \left[ \tilde{H}'^+ \nabla_y \tilde{V}'_{i,j} + \tilde{H}'^- \Delta_y \tilde{V}'_{i,j} \right] - \Delta t \tilde{T}'_{i,j} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les quantités  $(1 + \nabla_{x,y}) \nabla_{x,y} V'_{i,j}{}^k$  et  $(1 - \Delta_{x,y}) \Delta_{x,y} V'_{i,j}{}^k$  s'obtiennent de la même manière que dans le schéma de Lambda.

La nouvelle valeur de  $V'$  au pas de temps  $(k+1)$  se calcule par :

$$V'_{i,j}{}^{k+1} = \frac{1}{2} \left( V'_{i,j}{}^k + \bar{V}'_{i,j} + \hat{V}'_{i,j} - \tilde{V}'_{i,j} \right) \quad (5.11)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons deux schémas numériques pour la résolution des équations gouvernant l'écoulement étudié dans la présente thèse, en l'occurrence, le schéma de MacCORMACK et le schéma de GABUTTI.

## 5.6. Application du schéma de MacCORMACK au modèle mathématique

Les équations du mouvement écrites sous une forme conservative en coordonnées transformées  $\xi$  et  $\eta$  sont données par le système (4.21).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hb)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(uhb) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(vh - \eta hu \frac{\partial b}{\partial \xi}\right) &= 0 \\ \frac{\partial(uhb)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[b\left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[uvh - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi}\left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi\right)\right] \\ &= ghb(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ \frac{\partial(vhb)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(uvhb) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi}(uvh)\right] &= ghb(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \\ S_{f\xi} &= \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left(\frac{b+h}{bh}\right)^{3/2} \\ S_{f\eta} &= \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left(\frac{b+h}{bh}\right)^{3/2} \\ S_{o\xi} &= \sin \alpha_\xi \\ S_{o\eta} &= \sin \alpha_\eta \end{aligned}$$

Et en effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} H &= hb ; U = uhb ; V = vhb \\ F &= \frac{U^2}{H} + \frac{gH^2}{2b} \cos \alpha_\xi \\ G &= \frac{UV}{bH} - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left[ \frac{U^2}{bH} + \frac{gH^2}{2b^2} \cos \alpha_\xi \right] \\ K &= \frac{UV}{H} \\ S &= \frac{V^2 - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} UV}{bH} + \frac{gH^2}{2b^2} \cos \alpha_\xi \\ W &= \frac{V - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} U}{b} \\ S_{f\xi} &= \frac{n^2 Ub \sqrt{U^2 + V^2}}{H^3} \left(\frac{b^2 + H}{bH}\right)^{3/2} \\ S_{f\eta} &= \frac{n^2 Vb \sqrt{U^2 + V^2}}{H^3} \left(\frac{b^2 + H}{bH}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

D'où, une formulation plus simple des équations de base :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} &= gH(S_{o\xi} - S_{F\xi}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} &= gH(S_{o\eta} - S_{F\eta})\end{aligned}\quad (5.12)$$

Appliquons maintenant le schéma de MacCORMACK aux équations du mouvement, après le changement de variables ci-dessus :

i)- Etape de prédiction :

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{H}_{i,j} - H_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta \xi} + \frac{W_{i,j+1}^k - W_{i,j}^k}{\Delta \eta} &= 0 \\ \frac{\tilde{U}_{i,j} - U_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{F_{i+1,j}^k - F_{i,j}^k}{\Delta \xi} + \frac{G_{i,j+1}^k - G_{i,j}^k}{\Delta \eta} &= gH_{i,j}^k (S_{o\xi} - S_{F\xi,i,j}^k) \\ \frac{\tilde{V}_{i,j} - V_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{K_{i+1,j}^k - K_{i,j}^k}{\Delta \xi} + \frac{S_{i,j+1}^k - S_{i,j}^k}{\Delta \eta} &= gH_{i,j}^k (S_{o\eta} - S_{F\eta,i,j}^k)\end{aligned}$$

De cette première étape, on tire les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{i,j} &= H_{i,j}^k - \tau_\xi (U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k) - \tau_\eta (W_{i,j+1}^k - W_{i,j}^k) \\ \tilde{U}_{i,j} &= U_{i,j}^k - \tau_\xi (F_{i+1,j}^k - F_{i,j}^k) - \tau_\eta (G_{i,j+1}^k - G_{i,j}^k) + g \Delta t H_{i,j}^k (S_{o\xi} - S_{F\xi,i,j}^k) \\ \tilde{V}_{i,j} &= V_{i,j}^k - \tau_\xi (K_{i+1,j}^k - K_{i,j}^k) - \tau_\eta (S_{i,j+1}^k - S_{i,j}^k) + g \Delta t H_{i,j}^k (S_{o\eta} - S_{F\eta,i,j}^k)\end{aligned}\quad (5.13)$$

ii)- Etape de correction :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}_{i,j} - \tilde{H}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j}}{\Delta \xi} + \frac{\tilde{W}_{i,j} - \tilde{W}_{i,j-1}}{\Delta \eta} &= 0 \\ \frac{\hat{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i-1,j}}{\Delta \xi} + \frac{\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i,j-1}}{\Delta \eta} &= g\tilde{H}_{i,j} (S_{o\xi} - \tilde{S}_{F\xi,i,j}) \\ \frac{\hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\tilde{K}_{i,j} - \tilde{K}_{i-1,j}}{\Delta \xi} + \frac{\tilde{S}_{i,j} - \tilde{S}_{i,j-1}}{\Delta \eta} &= g\tilde{H}_{i,j} (S_{o\eta} - \tilde{S}_{F\eta,i,j})\end{aligned}$$



De cette étape, on tire les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{i,j} &= \tilde{H}_{i,j} - \tau_{\xi} (\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j}) - \tau_{\eta} (\tilde{W}_{i,j} - \tilde{W}_{i,j-1}) \\
 \hat{U}_{i,j} &= \tilde{U}_{i,j} - \tau_{\xi} (\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i-1,j}) - \tau_{\eta} (\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i,j-1}) + g \Delta t \tilde{H}_{i,j} (S_{o\xi} - \tilde{S}_{F\xi i,j}) \\
 \hat{V}_{i,j} &= \tilde{V}_{i,j} - \tau_{\xi} (\tilde{K}_{i,j} - \tilde{K}_{i-1,j}) - \tau_{\eta} (\tilde{S}_{i,j} - \tilde{S}_{i,j-1}) + g \Delta t \tilde{H}_{i,j} (S_{o\eta} - \tilde{S}_{F\eta i,j})
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\text{où, } \tau_{\xi} = \frac{\Delta t}{\Delta \xi}, \quad \tau_{\eta} = \frac{\Delta t}{\Delta \eta}$$

La solution au temps (k+1) est telle que :

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (H_{i,j}^k + \hat{H}_{i,j}) \\
 U_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}) \\
 V_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (V_{i,j}^k + \hat{V}_{i,j})
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

## 5.7. Application du schéma de GABUTTI au modèle mathématique

Reprenons dans ce cas les équations de base écrites en coordonnées transformées  $\xi$  et  $\eta$ , et sous une forme non conservative données déjà par le système (4.33) :

$$V'_t + G'^+ V'_{\xi} + G'^- V'_{\xi} - \frac{\eta b'(\xi)}{b(\xi)} (G'^+ V'_{\eta} + G'^- V'_{\eta}) + \frac{1}{b(\xi)} (H'^+ V'_{\eta} + H'^- V'_{\eta}) + T = 0$$

Etant donné que :  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$ , alors  $G'^- = [0]$ , d'où :

$$G'^+ = G' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & \frac{h}{2c}(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ \frac{c}{2h}(\lambda_2 - \lambda_3) & \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

D'autre part, puisque  $(\omega_1, \omega_2) > 0$  et  $\omega_3 < 0$ , il vient que :

$$H'^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_2 & 0 & \frac{h}{2c}\omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{c}{2h}\omega_2 & 0 & \frac{1}{2}\omega_2 \end{bmatrix}; \quad H'^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & -\frac{h}{2c}\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2h}\omega_3 & 0 & \frac{1}{2}\omega_3 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations devient donc :

$$V'_t + G'^+ V'_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) G'^+ V'_\eta + \frac{1}{b(\xi)} [H'^+ V'_\eta + H'^- V'_\eta] + T = 0 \quad (5.16)$$

Si on applique à présent le schéma de GABUTTI à ce dernier système, on aura :

i)- Etape de prédiction :

- Partie I :

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} \\ \tilde{u}_{i,j} \\ \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^k \\ u_{i,j}^k \\ v_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_{\xi} [G']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j}^k - h_{i-1,j}^k) \\ (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \\ (v_{i,j}^k - v_{i-1,j}^k) \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \tau_{\eta} [G']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) \\ (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \\ (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) \end{bmatrix} \\ - \tau_{\eta} \frac{1}{b(i)} \left\{ [H^{'+}]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) \\ (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \\ (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) \end{bmatrix} + [H^{'-}]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j+1}^k - h_{i,j}^k) \\ (u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) \\ (v_{i,j+1}^k - v_{i,j}^k) \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [T]_{i,j}^k \quad (5.17)$$

- Partie II :

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_{i,j} \\ \bar{u}_{i,j} \\ \bar{v}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^k \\ u_{i,j}^k \\ v_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_{\xi} [G']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j}^k - 3h_{i-1,j}^k + h_{i-2,j}^k) \\ (2u_{i,j}^k - 3u_{i-1,j}^k + u_{i-2,j}^k) \\ (2v_{i,j}^k - 3v_{i-1,j}^k + v_{i-2,j}^k) \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \tau_{\eta} [G']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j}^k - 3h_{i,j-1}^k + h_{i,j-2}^k) \\ (2u_{i,j}^k - 3u_{i,j-1}^k + u_{i,j-2}^k) \\ (2v_{i,j}^k - 3v_{i,j-1}^k + v_{i,j-2}^k) \end{bmatrix} \\ - \tau_{\eta} \frac{1}{b(i)} \left\{ [H^{'+}]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j}^k - 3h_{i,j-1}^k + h_{i,j-2}^k) \\ (2u_{i,j}^k - 3u_{i,j-1}^k + u_{i,j-2}^k) \\ (2v_{i,j}^k - 3v_{i,j-1}^k + v_{i,j-2}^k) \end{bmatrix} + [H^{'-}]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (-2h_{i,j}^k + 3h_{i,j+1}^k - h_{i,j+2}^k) \\ (-2u_{i,j}^k + 3u_{i,j+1}^k - u_{i,j+2}^k) \\ (-2v_{i,j}^k + 3v_{i,j+1}^k - v_{i,j+2}^k) \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [T]_{i,j}^k \quad (5.18)$$

ii)- Etape de correction :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{h}_{i,j} \\ \hat{u}_{i,j} \\ \hat{v}_{i,j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j}^k \\ \tilde{u}_{i,j}^k \\ \tilde{v}_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_\xi [\tilde{G}']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i-1,j}) \\ (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}) \\ (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-1,j}) \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \tau_\eta [\tilde{G}']_{i,j}^k \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j-1}) \\ (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}) \\ (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1}) \end{bmatrix} \\
 &- \tau_\eta \frac{1}{b(i)} \left\{ [\tilde{H}'^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j-1}) \\ (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}) \\ (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1}) \end{bmatrix} + [\tilde{H}'^-]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j+1} - \tilde{h}_{i,j}) \\ (\tilde{u}_{i,j+1} - \tilde{u}_{i,j}) \\ (\tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j}) \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [\tilde{T}]_{i,j}^k
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

La solution au pas de temps (k+1) se détermine de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} h_{i,j}^{k+1} \\ u_{i,j}^{k+1} \\ v_{i,j}^{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (h_{i,j}^k + \bar{h}_{i,j} + \hat{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j}) \\ (u_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j} + \hat{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}) \\ (v_{i,j}^k + \bar{v}_{i,j} + \hat{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j}) \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

## 5.8. Stabilité des schémas

Par opposition aux schémas aux différences finies implicites, qui ne nécessitent pas une condition de stabilité, une condition de stabilité est par contre exigée pour les schémas explicites.

Ainsi, les deux schémas numériques traités ci-dessus, à savoir le schéma de MacCORMACK et celui de GABUTTI, ne sont stables que si la condition de stabilité de "Courant -Friedrichs- Lewy" (C. F. L.) soit satisfaite. Cette condition est exprimée, pour les écoulements bidimensionnels par l'expression suivante [14, 15, 30 et 64] :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{g h \cos \alpha_\xi}) \Delta t}{b(\xi) \Delta \xi \Delta \eta} \sqrt{\Delta \xi^2 + [b(\xi) \Delta \eta]^2} \quad (5.21)$$

où,  $V$  : est la vitesse résultante au point du maillage.

$C_n$  : est le nombre de Courant.

L'analyse de stabilité de VON NEUMANN [32] pour les schémas précédents donne les conditions de stabilité suivantes :

- Schéma de MacCORMACK :  $C_n \leq 1$
- Schéma de Lambda :  $C_n \leq 0,66$
- Schéma de GABUTTI :  $C_n \leq 2$

Cette condition (C.F.L.) doit être satisfaite en tout les points du maillage; il est donc évident de prendre l'incrément de temps  $\Delta t$  tel que :

$$\Delta t = C_n \frac{b_{\min}(\xi) \Delta \xi \Delta \eta}{\max(V + \sqrt{g h \cos \alpha_\xi}) \sqrt{\Delta \xi^2 + [b_{\min}(\xi) \Delta \eta]^2}} \quad (5.22)$$

A chaque temps  $t$ , la condition (5.22) fixe le pas de temps  $\Delta t$ , sachant que les pas d'espace  $\Delta \xi$  et  $\Delta \eta$  sont supposés constants.

**Remarque** : Il faut noter qu'une expérimentation numérique est requise avant de choisir la valeur optimale du nombre de Courant  $C_n$ .

### 5.9. Traitement numérique des ondes de choc - Notion de viscosité artificielle -

Plusieurs schémas aux différences finies explicites précis à l'ordre deux produisent de très grandes oscillations numériques près des discontinuités. Ces oscillations sont dues essentiellement aux erreurs de troncatures.

Par ailleurs, il arrive que les conditions aux limites imposées à un écoulement de fluide ne soient pas compatibles avec l'idée intuitive que la solution doit être une fonction continue à dérivées continues (idée sur laquelle est fondée la mise en équation). Dans un tel cas, il faut renoncer à cette idée et admettre que la solution est une fonction régulière par domaine qui peut présenter des discontinuités sur certaines lignes limitant les domaines; à l'intérieur d'un domaine il n'y a pas de discontinuités et les équations sont valables. Une onde de choc est justement une surface de discontinuité séparant deux domaines où la solution est régulière.

La difficulté principale qui surgit lors de la présence d'ondes de choc est que la position des lignes de discontinuité n'est généralement pas connue a priori, et fait partie des inconnues du problème.

Du point de vue numérique, les ondes de choc sont le plus souvent traitées en introduisant dans les équations de base un terme supplémentaire, dit de "viscosité artificielle", qui a la propriété d'être négligeable partout où la solution est régulière, mais de permettre un lissage des singularités là où elles apparaissent. Avec cette méthode, la position du choc n'est pas prise en compte, ce qui la rend facile à mettre en œuvre.

Afin d'amortir les oscillations numériques, on utilisera dans notre cas une procédure développée par Jameson et Col. (1981) [14, 15, 22, 30, 48 et 64], dont le principe consiste à rajouter un terme de dissipation au système d'équations régissant le phénomène étudié. Les valeurs des variables calculées au nouveau pas de temps, que se soit par le schéma de MacCORMACK ou celui de GABUTTI sont par la suite modifiées en utilisant l'algorithme suivant :

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^{k+1} + \left[ \varepsilon_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} (f_{i+1,j}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\xi_{i-\frac{1}{2},j}} (f_{i,j}^{k+1} - f_{i-1,j}^{k+1}) \right] + \left[ \varepsilon_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} (f_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}} (f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j-1}^{k+1}) \right] \quad (5.23)$$

où,

$$\varepsilon_{\xi i+\frac{1}{2},j} = \chi \max(\Omega_{\xi i+1,j}, \Omega_{\xi i,j})$$

$$\varepsilon_{\xi i-\frac{1}{2},j} = \chi \max(\Omega_{\xi i-1,j}, \Omega_{\xi i,j})$$

$$\varepsilon_{\eta i,j+\frac{1}{2}} = \chi \max(\Omega_{\eta i,j+1}, \Omega_{\eta i,j})$$

$$\varepsilon_{\eta i,j-\frac{1}{2}} = \chi \max(\Omega_{\eta i,j-1}, \Omega_{\eta i,j})$$

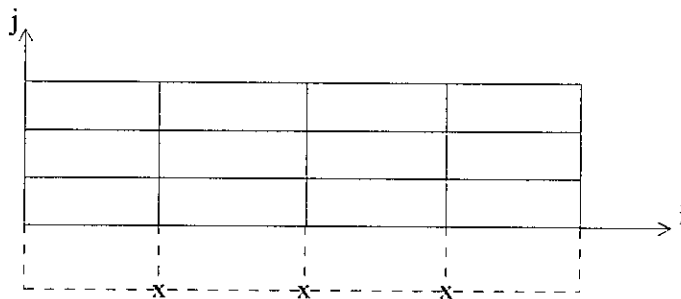
$\chi$  : représente une constante de dissipation.

Les valeurs de  $\Omega_{\xi i,j}$  et  $\Omega_{\eta i,j}$  sont données par :

$$\Omega_{\xi i,j} = \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \quad (5.24)$$

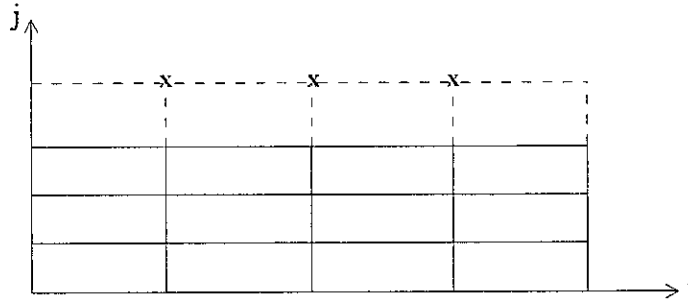
$$\Omega_{\eta i,j} = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (5.25)$$

Aux points où  $h_{i,j-1}$  n'existe pas (Figure ci-dessous) :



$$\Omega_{\eta i,j} = \frac{|h_{i,j+1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j+1}| + |h_{i,j}|} \quad (5.26)$$

Aux points où  $h_{i,j+1}$  n'existe pas (Figure ci-dessous) :



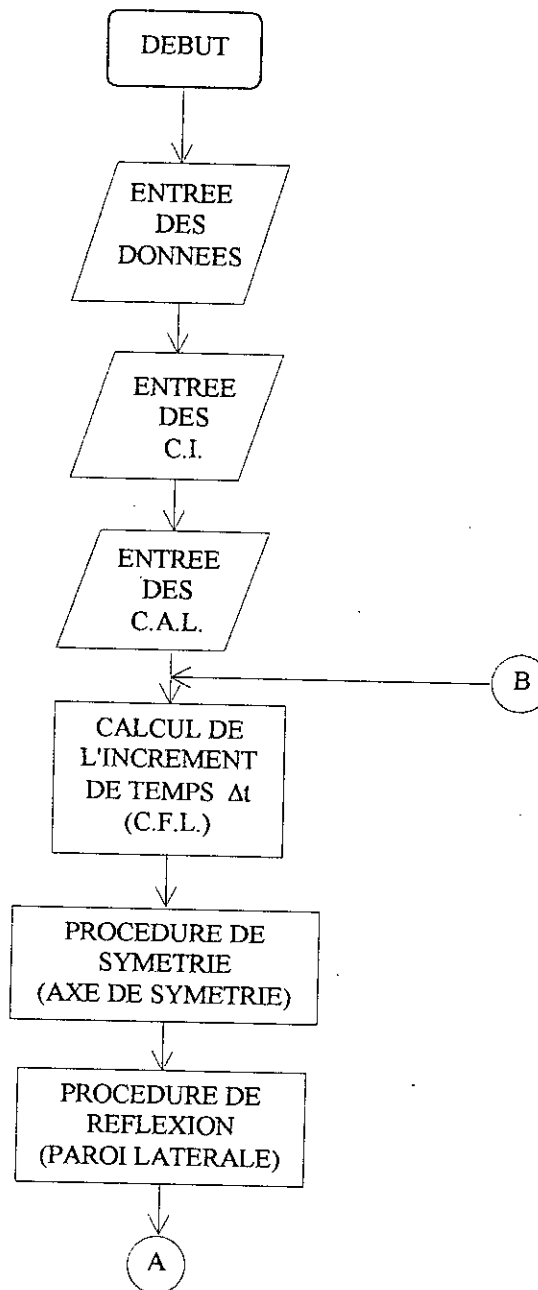
$$\Omega_{i,j} = \frac{|h_{i,j-1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j-1}| + |h_{i,j}|} \quad (5.27)$$

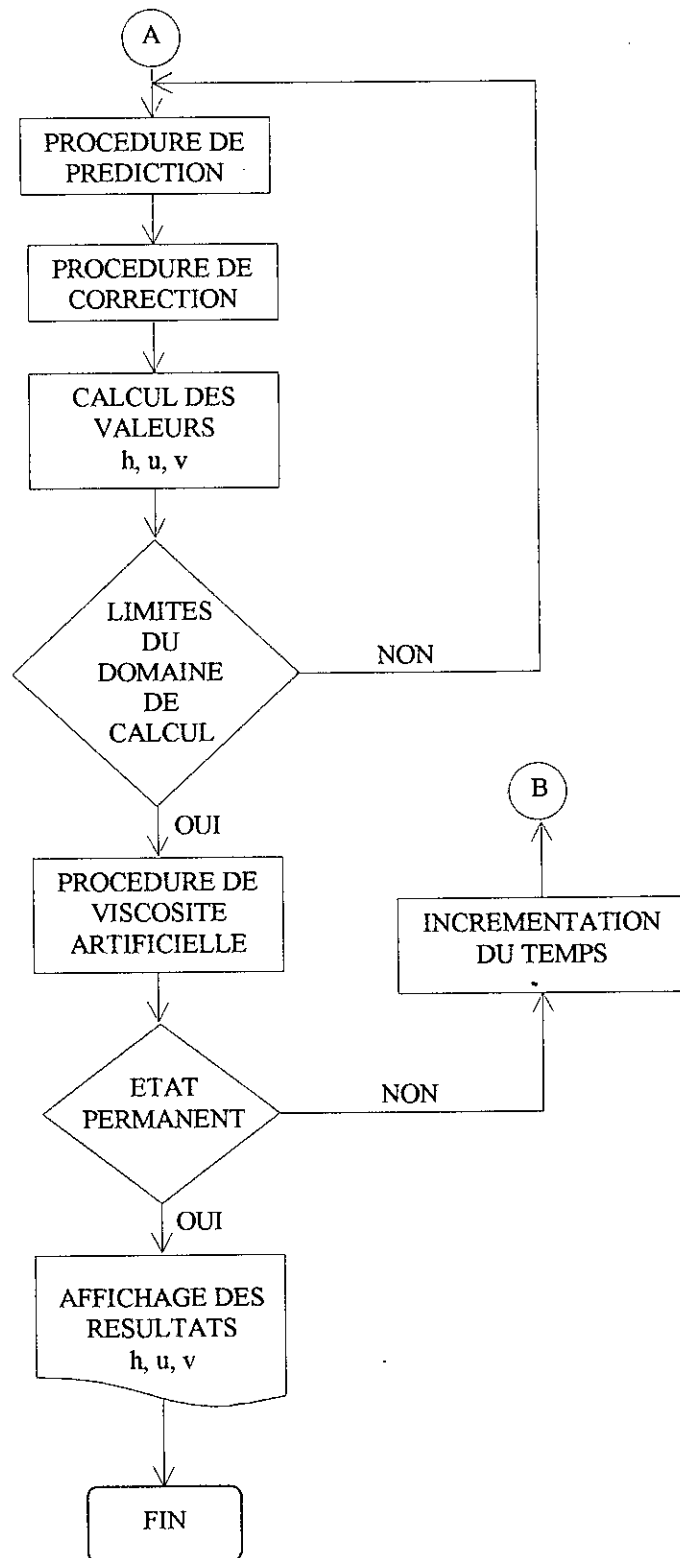
Remarquons finalement que la relation (5.23) doit être vue comme étant une affectation.



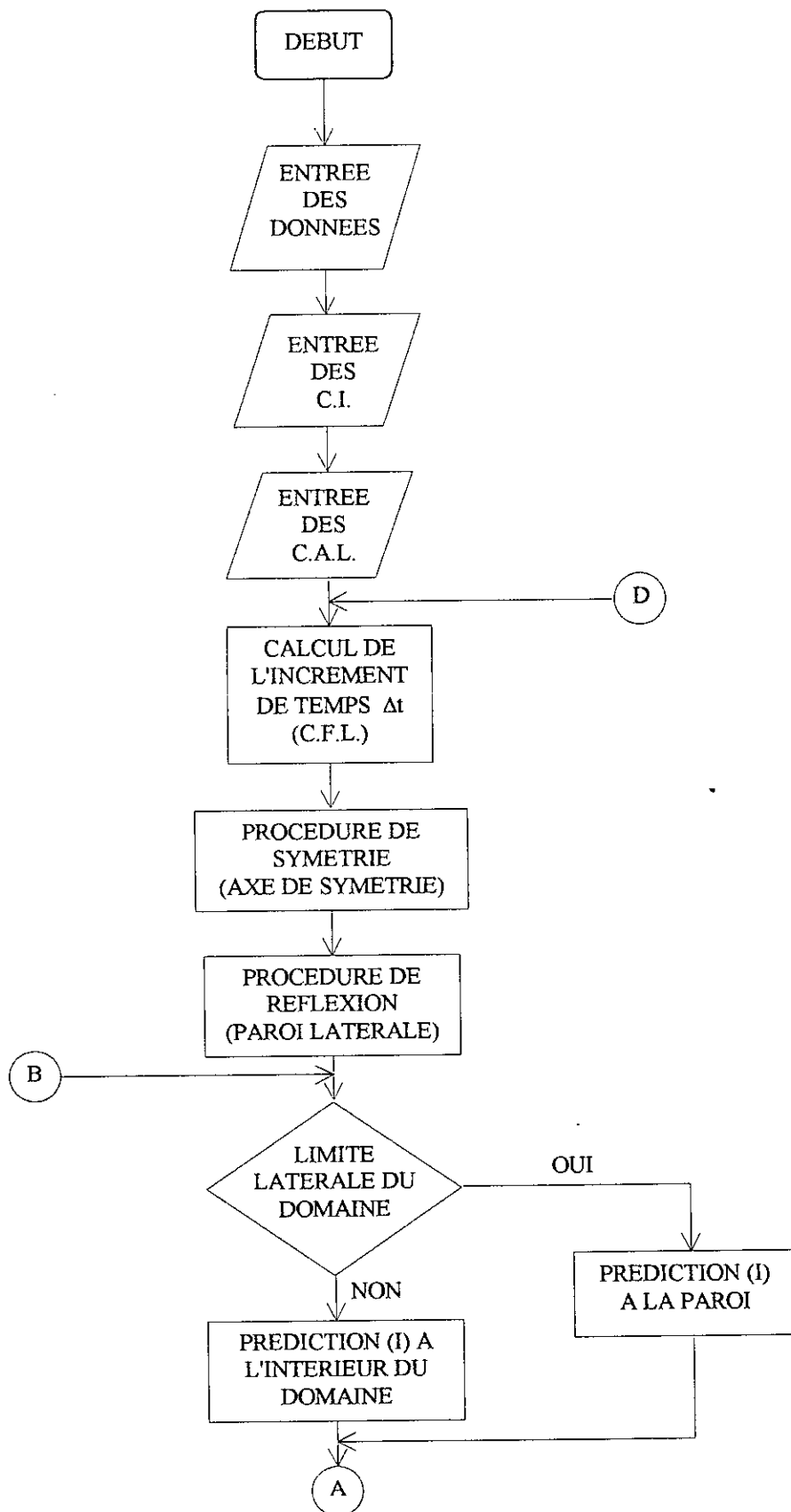
## 5.10. Organigrammes de calcul

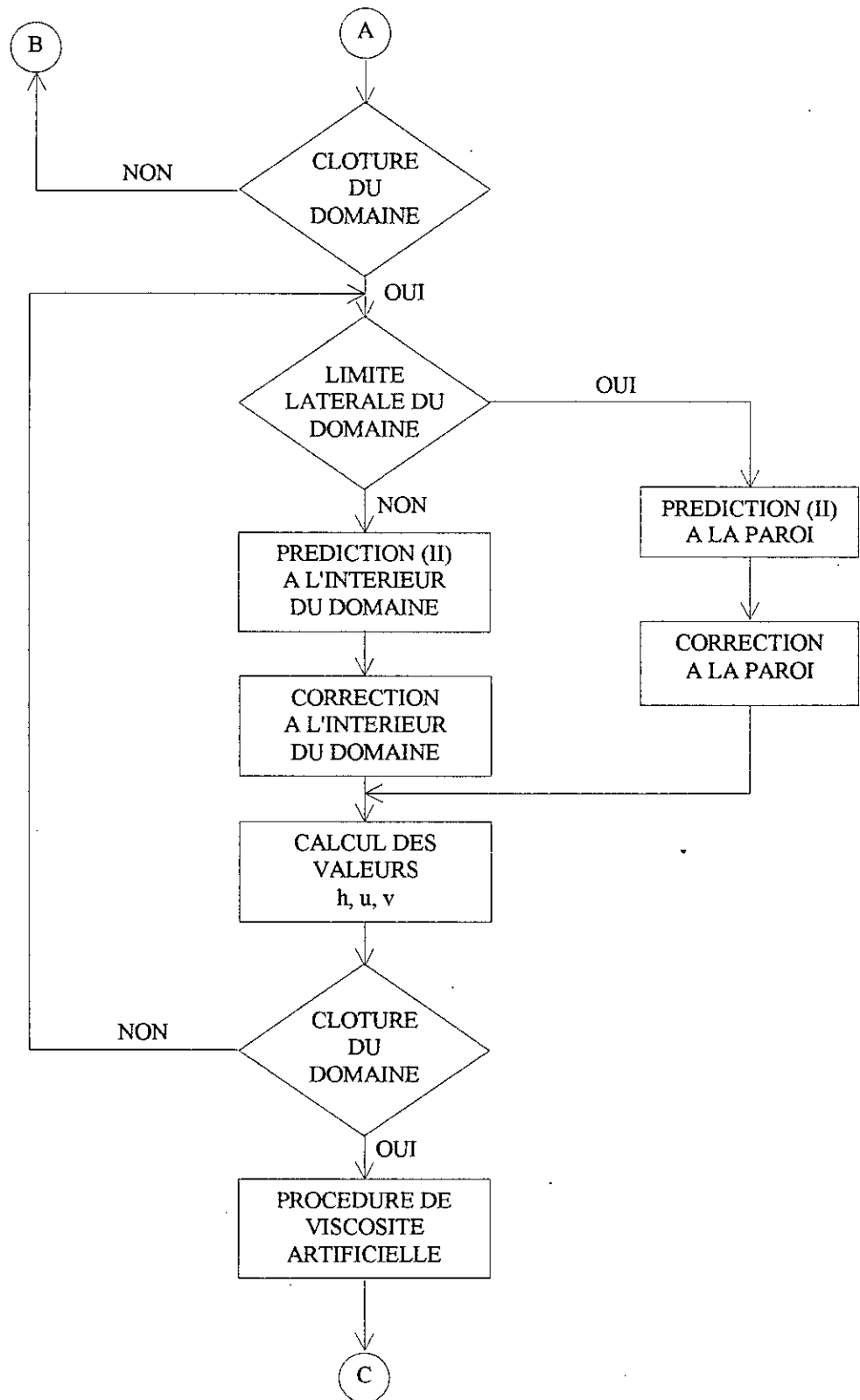
### 5.10.1. Organigramme relatif au schéma de MacCORMACK

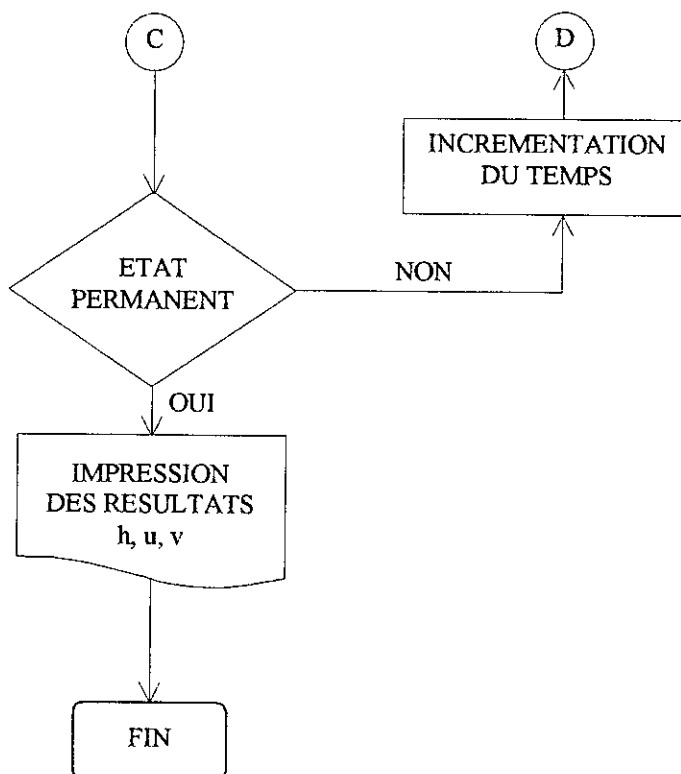




5.10.2. Organigramme relatif au schéma de GABUTTI







- N.B.* :
- C.I. : Conditions initiales.
  - C.A.L. : Conditions aux limites.
  - C.F.L. : Condition de stabilité de

« COURANT – FRIEDRICHS – LEWY ».

*Chapitre 6*

***EXPERIMENTATIONS***  
***NUMERIQUES***

Les puissants outils de calcul que constituent les ordinateurs permettent de résoudre par voie numérique tous problèmes susceptibles d'être exprimés par des équations mathématiques.

Un modèle mathématique qui gouverne les écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert a été présenté. Une modélisation numérique des équations de base est par la suite faite en utilisant des schémas aux différences finies assez compliqués (MacCormack et Gabutti).

Dans le but de tester la validité et l'aptitude du modèle mathématique à simuler ces écoulements, des expérimentations numériques seront faites dans le présent chapitre. On analysera d'abord l'écoulement dans des canaux faiblement inclinés, puis l'effet de l'augmentation de la pente de fond sur les caractéristiques de l'écoulement sera traité dans la seconde étape. Les résultats obtenus seront comparés avec des résultats expérimentaux, théoriques et numériques d'autres chercheurs, s'ils existent bien sûr.

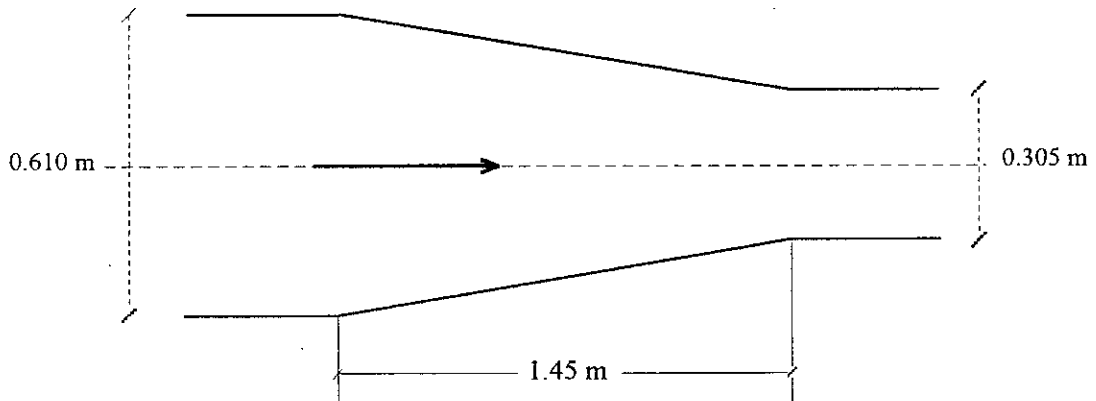
## **6.1. VALIDATION DU MODELE MATHEMATIQUE**

### **- APPLICATION SUR DES CANAUX A FAIBLE PENTE -**

La validité du modèle proposé sera faite en premier sur les écoulements dans des canaux à faible pente.

#### **6.1.1. Etude d'un rétrécissement rectiligne symétrique à faible pente**

Dans la première application, on analysera un écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique, à section transversale rectangulaire, avec une pente de fond nulle. Ce cas a été traité expérimentalement par Coles et Shintaku [15] et numériquement par Bhallamudi et Chaudhry [15]. Les dimensions de la contraction sont données dans la figure (6.a).



- Figure 6.a - Rétrécissement rectiligne.

Les conditions aux limites de l'écoulement sont :

- Le tirant d'eau à l'amont est  $h_0 = 0.0305$  m
- La vitesse de l'écoulement à l'amont est  $V = 2.188$  m/s
- La vitesse transversale est  $v_0 = 0$  m/s
- Le maillage suivant a été utilisé :

$$\Delta\xi = 0.0483333 \text{ m} \quad ; \quad \Delta\eta = 0.047619$$

Pour les problèmes de stabilité et d'oscillations numériques, les valeurs suivantes sont considérées :

- Le nombre de COURANT (C.F.L.) est  $Cn = 0.8$
- Le coefficient de dissipation est  $\chi = 0.8$

Les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles.

La profondeur de l'écoulement  $h_0 = 0.0305$  m, la vitesse longitudinale  $u_0 = 2.188$  m/s et la vitesse transversale  $v_0 = 0$  m/s sont par ailleurs spécifiées en tous les points du maillage comme conditions initiales.

#### ◆ Résultats et analyses

Les figures (6.1) et (6.2) montrent respectivement le profil de la surface libre le long de l'axe médian et le long de la paroi latérale du rétrécissement rectiligne. Elles regroupent les résultats que nous avons obtenus en utilisant les schémas de MacCormack et de Gabutti, avec des résultats expérimentaux [15] et numériques [15] d'autres chercheurs.



A travers ces figures, on constate que :

- Il y a deux surélévations distinctes dans la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie. La première à l'intérieur de la transition et la deuxième, plus importante, juste à l'entrée du canal aval, c'est-à-dire, à la fin de la contraction.
- Le long de la paroi latérale, on a aussi deux importantes surélévations. L'une se manifeste à la fin de la contraction et l'autre loin dans le canal aval rectangulaire.
- Les résultats obtenus en utilisant le schéma de MacCormack montrent un bon accord avec ceux de Bhallamudi (schéma de MacCormack) [15], que se soit au niveau de l'axe de symétrie (figure (6.1)) qu'au niveau de la paroi latérale (figure (6.2)).
- Les résultats obtenus avec le schéma de Gabutti concordent aussi avec ceux de Bhallamudi, sauf qu'à l'aval on a un léger décalage du pic de la ligne d'eau (axe de symétrie). Mais l'allure de cette ligne est la même que celle calculée par Bhallamudi et celle obtenue avec le schéma de MacCormack le long de l'axe et de la paroi.
- Les résultats obtenus avec les deux schémas numériques cités ci-dessus, comparés avec les mesures expérimentales [15], sont assez bons au niveau de la paroi latérale de la transition (figure (6.2)), et relativement moins bons au niveau de l'axe médian (figure (6.1)), où il y a un décalage entre les pics des lignes d'eau calculées et le pic observé expérimentalement.
- La hauteur maximale obtenue avec le schéma de Gabutti est presque identique avec celle calculée par Bhallamudi, et sont toutes les deux inférieures à la hauteur observée expérimentalement.
- Le pic déterminé en utilisant le schéma de MacCormack est quasiment identique avec l'expérimental.

Ceci peut-être expliqué principalement au fait, que dans l'élaboration du modèle mathématique, on a utilisé un certain nombre d'hypothèses (passage obligé pour n'importe quelle étude théorique ou numérique), parmi lesquelles, la répartition des pressions est supposée hydrostatique. Cette hypothèse est valide seulement dans les zones où il n'y a pas d'apparition de chocs, mais qui est malheureusement non valide au voisinage des discontinuités.

On peut dire que le modèle proposé donne d'assez bons résultats dans les régions où les chocs ne sont pas fortement dominants et de moins bons résultats dans les zones où les chocs sont très dominants.

Malgré cela, les résultats obtenus peuvent être largement utilisés dans le dimensionnement des parois latérales d'une telle transition, du moment que les hauteurs des pics calculées par les procédés numériques coïncident bien avec les observations expérimentales.

Les profils de la vitesse de l'écoulement le long de l'axe médian et long de la paroi latérale solide sont donnés respectivement pour les deux schémas dans les figures (6.3) et (6.4). On constate que :

- La vitesse de l'écoulement diminue avec l'augmentation de la profondeur.
- La diminution de la vitesse a lieu exactement au niveau de la même section que l'augmentation de la hauteur.
- La diminution de la vitesse obtenue avec le schéma de MacCormack est supérieure à celle obtenue avec le schéma de Gabutti, ce qui est en parfait accord avec les hauteurs d'eau calculées par les deux schémas (la hauteur maximale déterminée par le schéma de MacCormack est supérieure à celle calculée par le schéma de Gabutti).

Donc, l'augmentation de la profondeur de l'écoulement engendre une diminution de la vitesse.

Les figures (6.5) et (6.6) donnent une représentation plane de l'écoulement dans un rétrécissement rectiligne. On constate que les fronts d'ondes, qui prennent naissance au début de la transition se rencontrent au niveau de l'axe de symétrie (première surélévation de la hauteur), puis sont réfléchis sur les parois latérales. Cette réflexion, ne touche pas exactement les parois à la fin de la transition, ce qui a engendré la naissance des ondes négatives et par suite agitation de l'écoulement dans le canal aval (deuxième surélévation). La réduction des perturbations nécessite que la réflexion des ondes touche les parois exactement à la fin de la contraction (au début du canal rectangulaire aval).

Rappelons par ailleurs qu'on a utilisé un modèle mathématique en régime non permanent pour obtenir des solutions à l'état permanent en traitant la variable temps comme paramètre d'itération. L'efficacité de cette technique est illustrée dans la figure (6.7), qui donne une comparaison entre les résultats calculés en utilisant le modèle non permanent avec les schémas de MacCormack et de Gabutti au niveau de l'axe de symétrie, et les résultats obtenus par Jimenez [15] avec un modèle permanent. Les profils des lignes d'eau qu'on a obtenus suivent l'allure du profil de Jimenez, ce qui confirme que l'écoulement a effectivement convergé vers l'état permanent.

Les figures (6.8), (6.9), (6.10) et (6.11) donnent le temps de convergence de l'écoulement vers un état permanent. On remarque que :

- La ligne d'eau obtenue avec le schéma de MacCormack pour un temps de 1.69 sec est totalement superposée avec celle au temps 1.51 sec, le long de l'axe (figure (6.8)) et de la paroi (figure (6.9)). L'état permanent est donc atteint à 1.51 sec pour ce schéma.
- La ligne d'eau le long de l'axe et de la paroi obtenue avec le schéma de Gabutti au temps 1.77 sec est confondue avec celle de 1.57 sec. L'état permanent est par conséquent atteint à 1.57 sec pour ce schéma.

L'état permanent pour les résultats de Bhallamudi (schéma de MacCormack) est par contre atteint à 3 sec. A partir de là, on peut dire que :

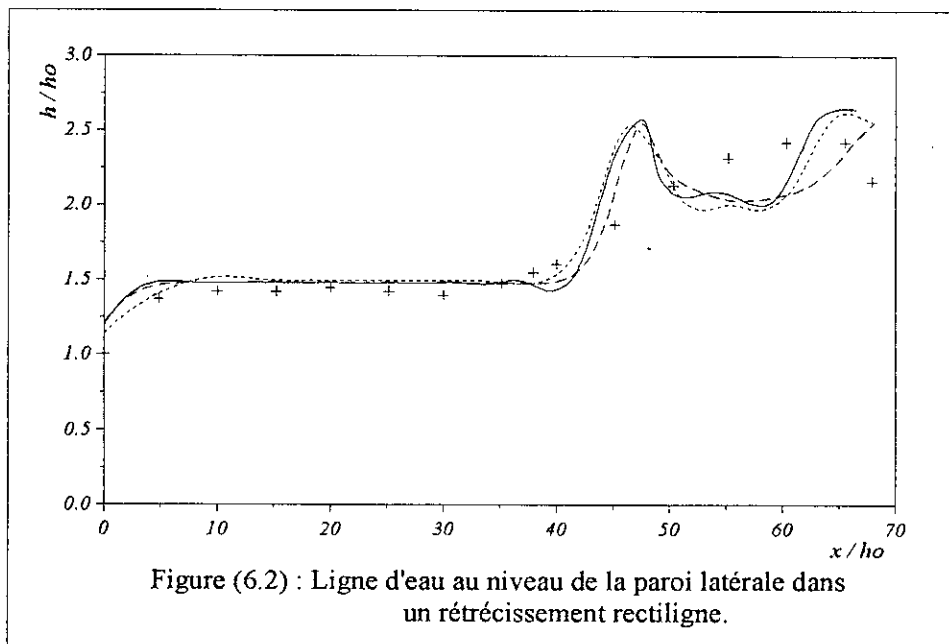
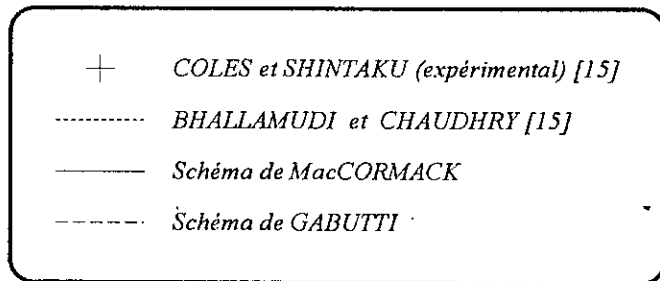
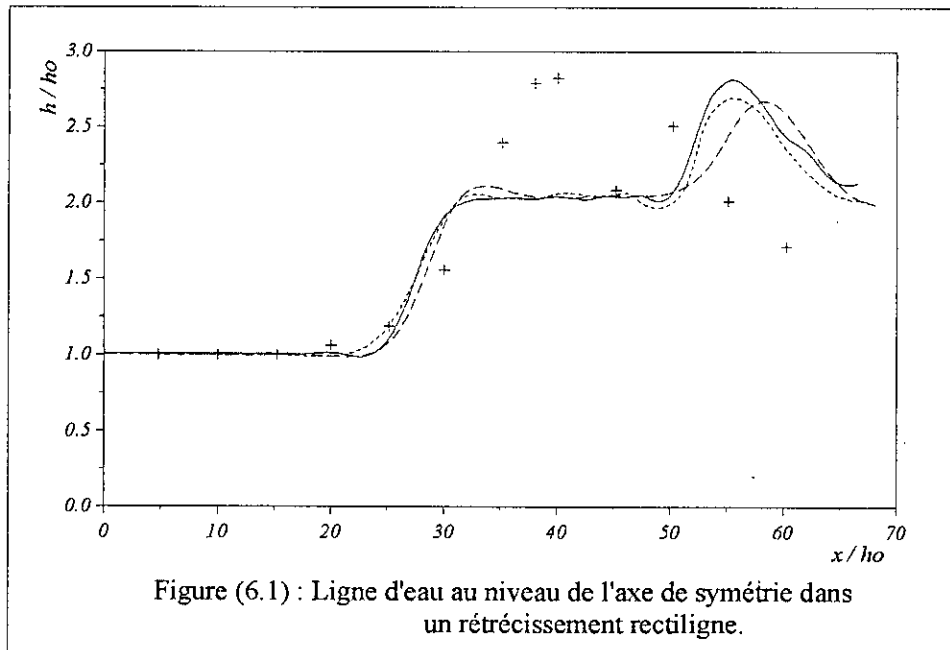
- Les résultats que nous avons obtenus avec le schéma de MacCormack présentent un léger avantage par rapport à ceux obtenus avec le schéma de Gabutti (1.51 sec contre 1.57 sec).
- Les résultats que nous avons obtenus avec les deux schémas présentent par ailleurs un très grand avantage par rapport à ceux de Bhallamudi ((1.51 sec et 1.57 sec) contre 3 sec).

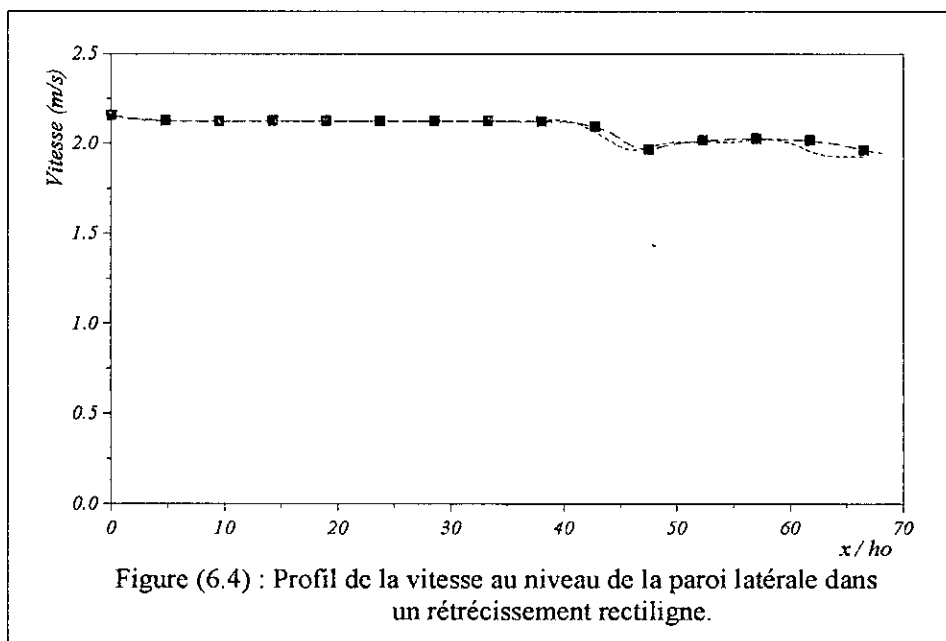
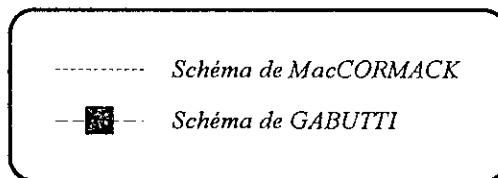
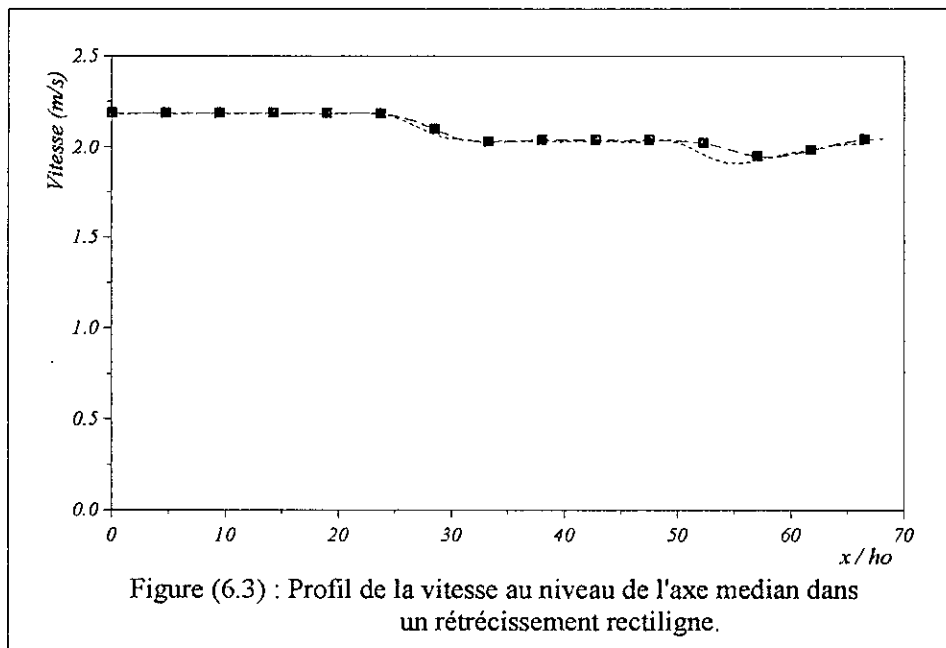
On a donc un gain d'environ 50% sur le temps.

La majorité des schémas aux différences finies explicites précis à l'ordre deux, en espace et en temps, entraînent de très grandes oscillations numériques près des discontinuités. Les ondes de choc représentent justement des discontinuités. Le traitement numérique de ces oscillations consiste à introduire un terme supplémentaire dit de "viscosité artificielle" dans les équations de base, et qui a la propriété d'être négligeable partout où la solution est régulière, et permet par contre un lissage des singularités là où elles apparaissent.

L'effet de la viscosité artificielle est représenté respectivement pour les schémas de MacCormack et de Gabutti dans les figures (6.12) et (6.13). L'analyse est faite pour des coefficients de dissipation de 0.3, 0.5, 0.8 et 0.9. Ceci nous a permis de conclure que la valeur optimale de ce coefficient est de 0.8. C'est le même résultat obtenu par Bhallamudi.

De la même façon, des essais numériques sont faits pour déterminer la valeur optimale du nombre de Courant (condition de stabilité). D'après les figures(6.14) et (6.15), la valeur optimale est de 0.8 pour les deux schémas. Ce qui a été aussi obtenu par Bhallamudi.





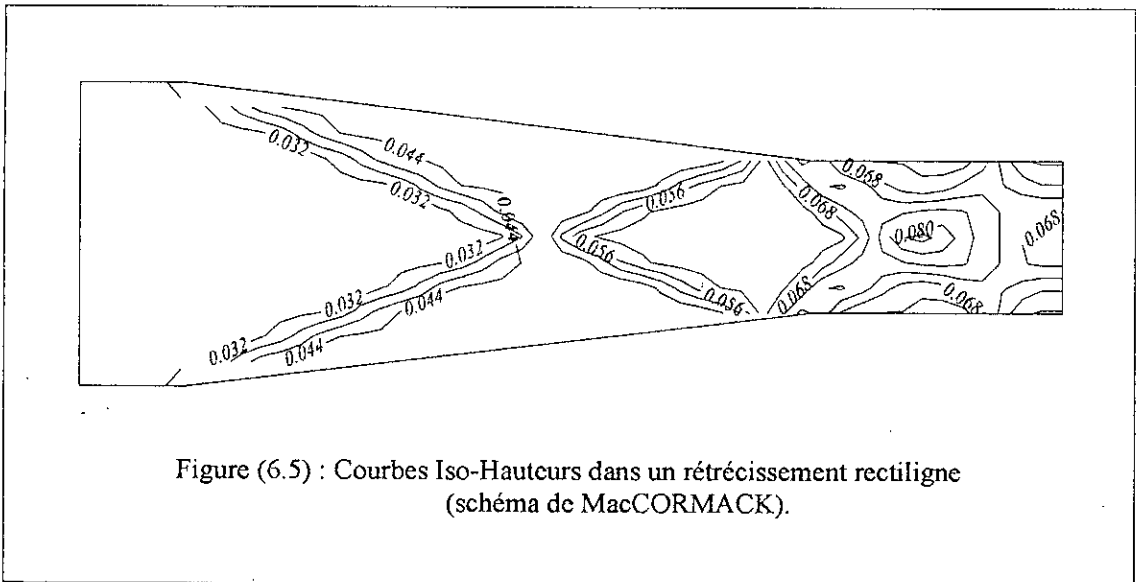


Figure (6.5) : Courbes Iso-Hauteurs dans un rétrécissement rectiligne (schéma de MacCORMACK).

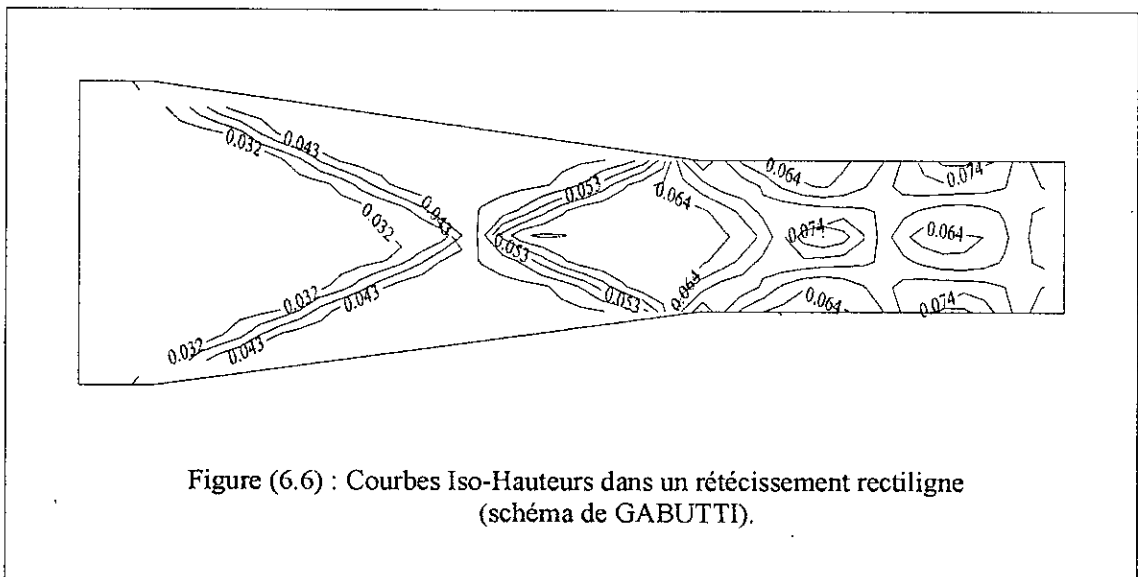
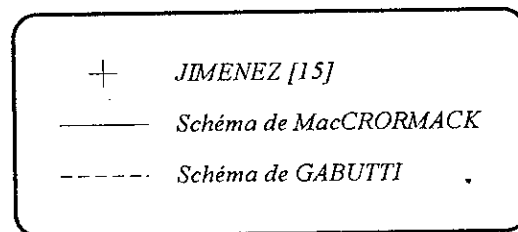
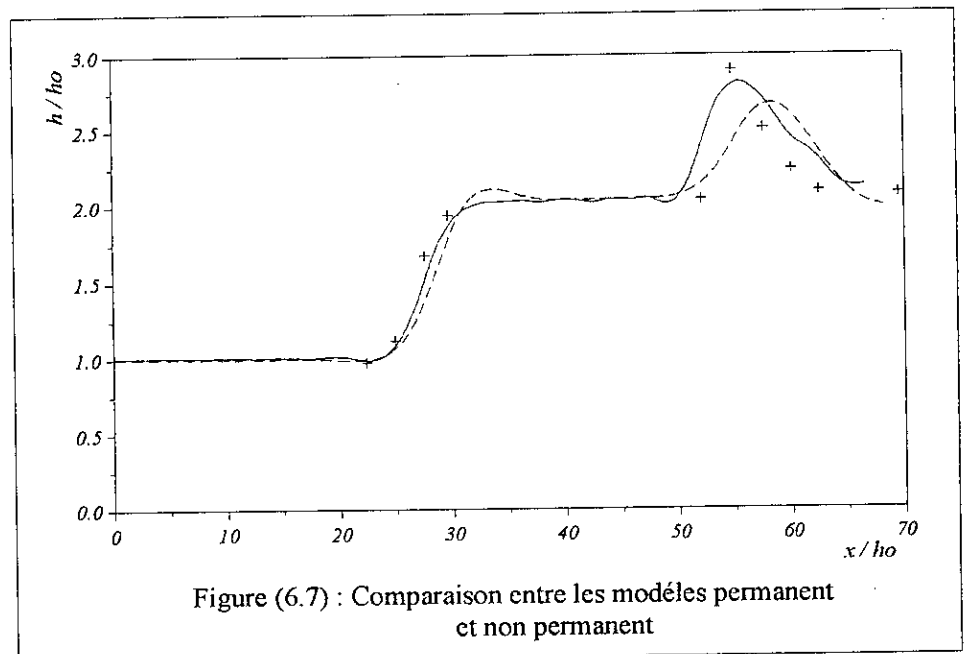
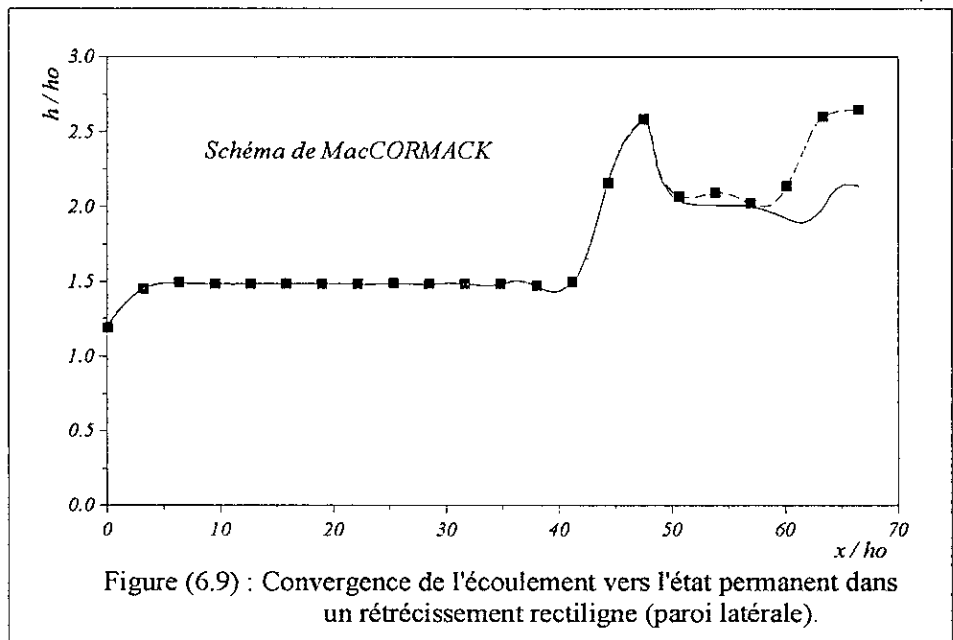
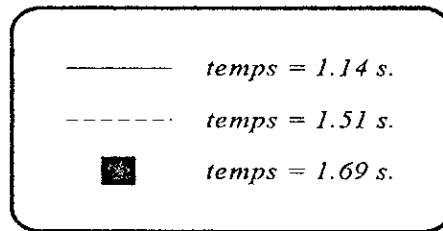
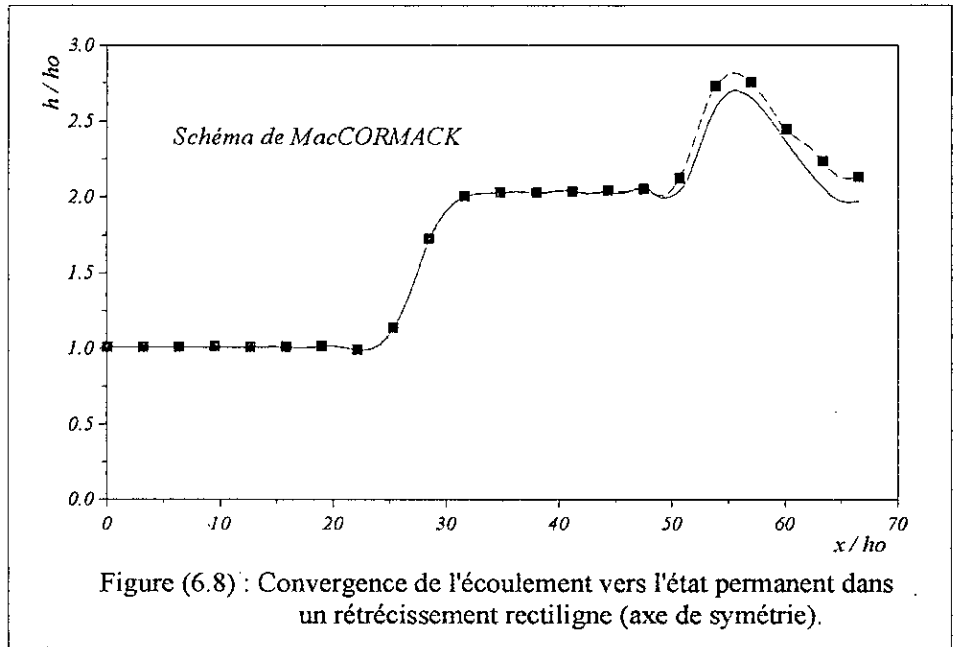
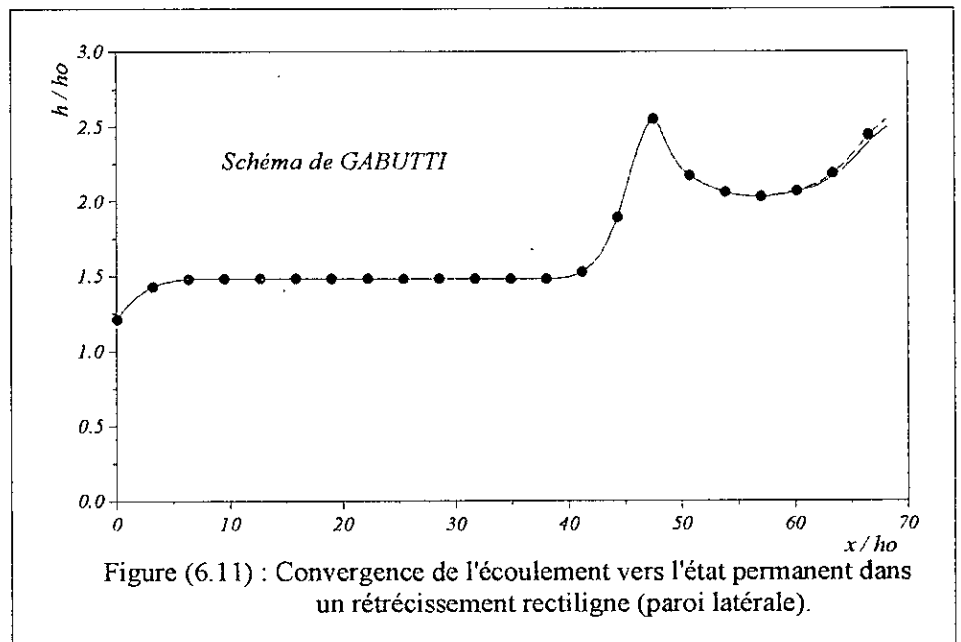
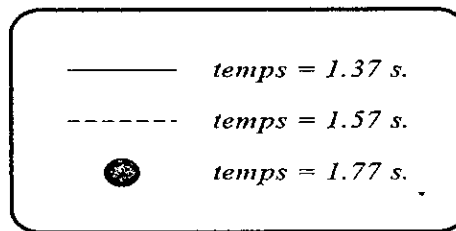
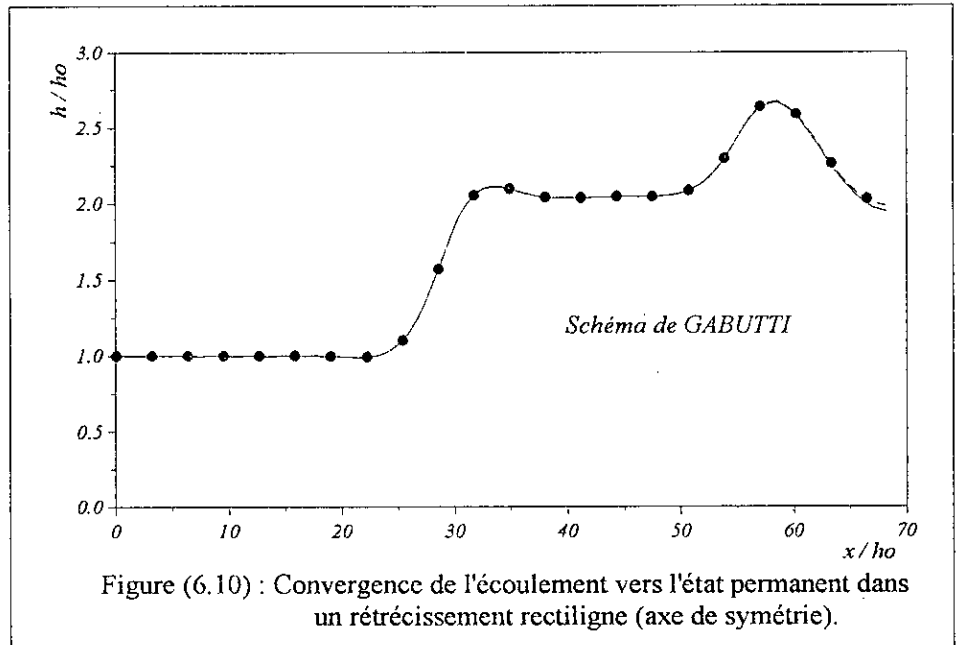


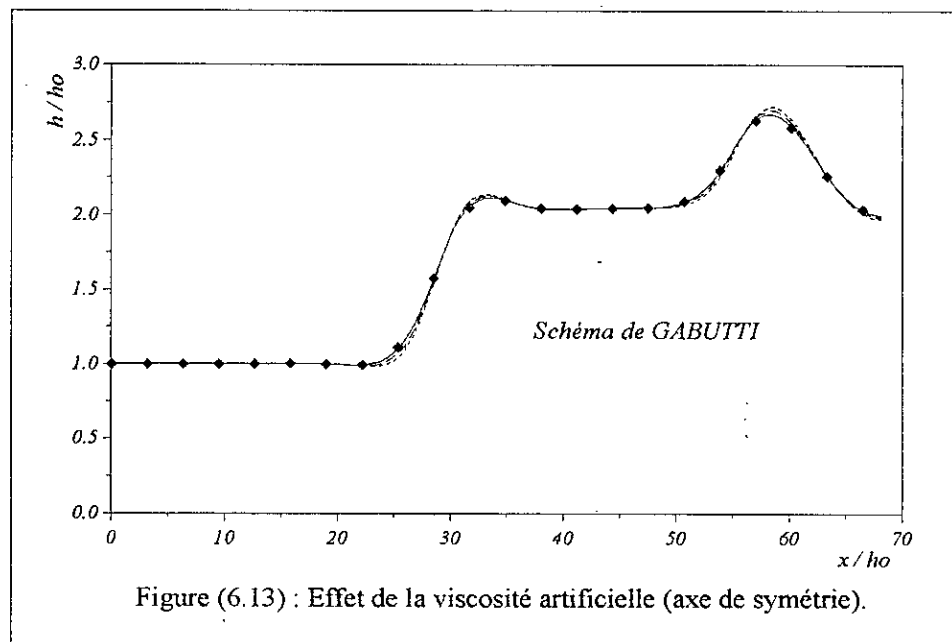
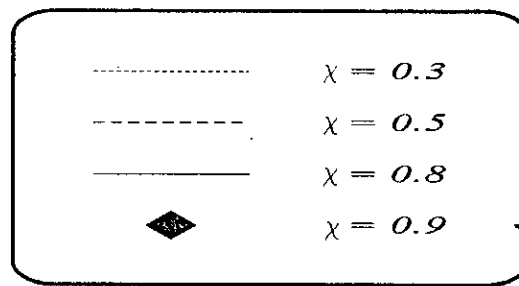
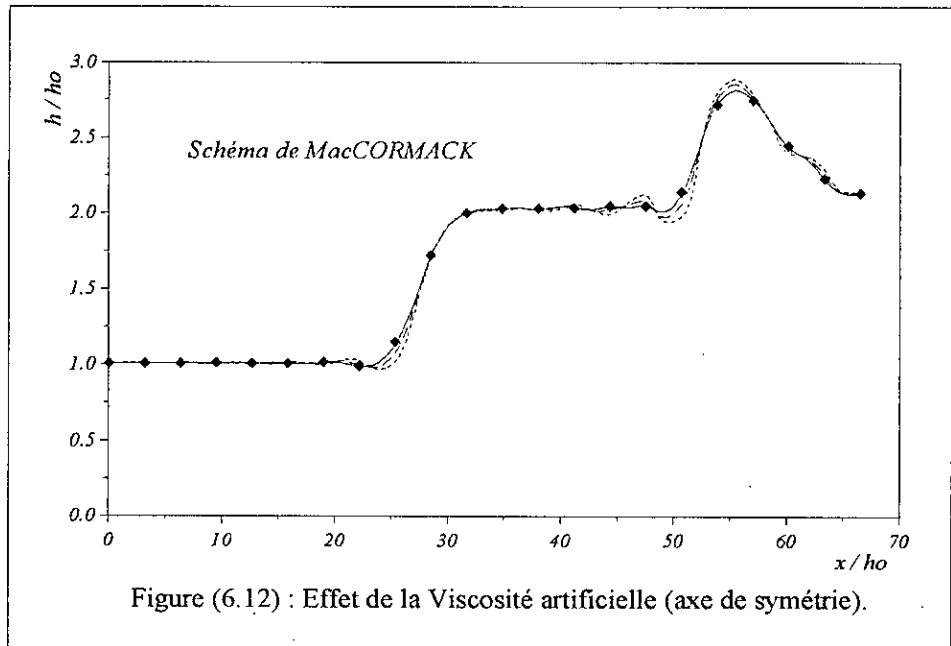
Figure (6.6) : Courbes Iso-Hauteurs dans un rétrécissement rectiligne (schéma de GABUTTI).

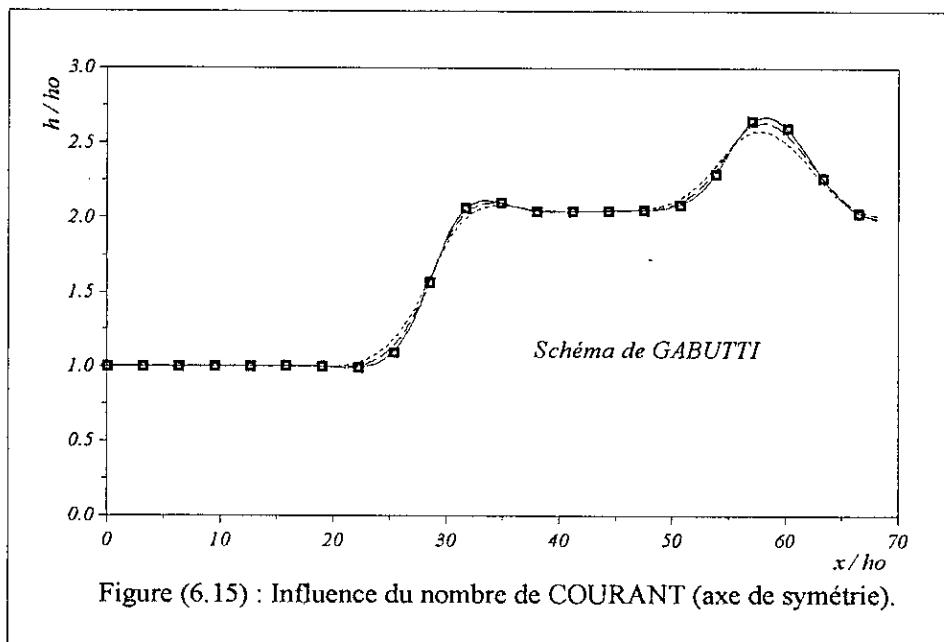
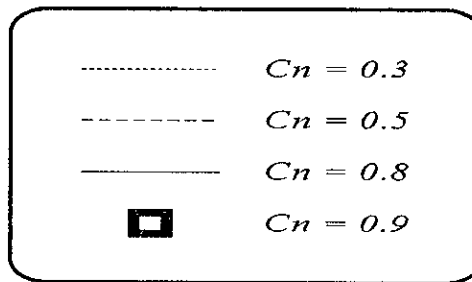
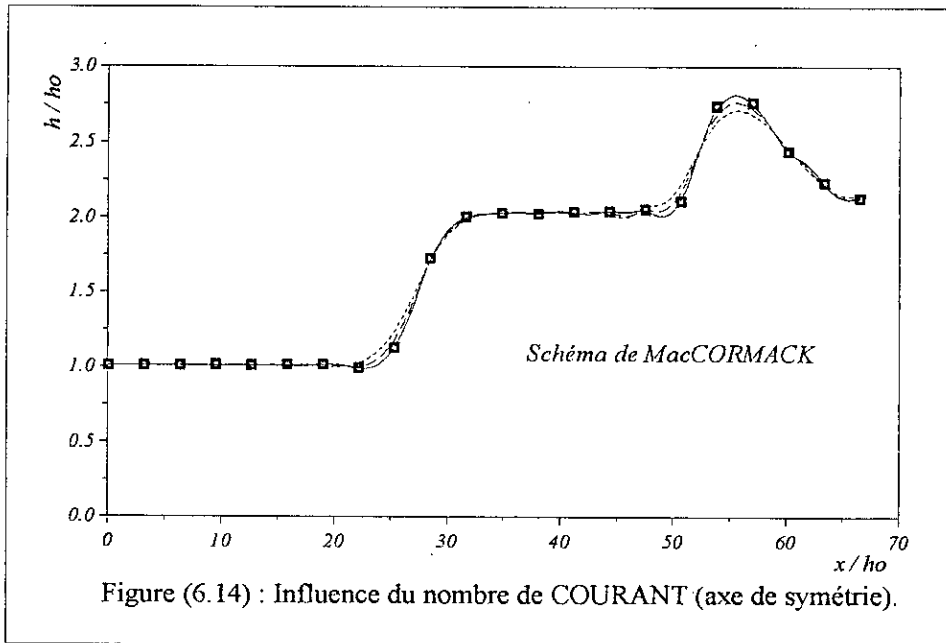








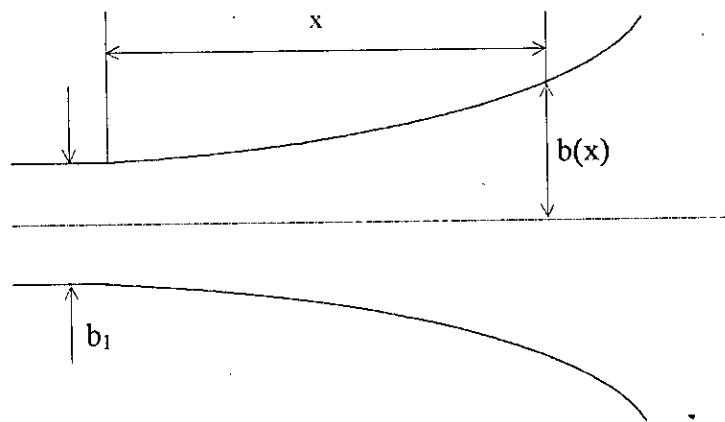




### 6.1.2. Etude d'un élargissement progressif à faible pente

L'analyse d'un écoulement supercritique traversant un élargissement progressif symétrique à section transversale rectangulaire avec une pente de fond nulle est l'objectif de cette application. L'équation donnant la forme de cet élargissement (figure 6.b), appelé souvent "élargissement de Rouse", est :

$$b(x) = \frac{b_1}{2} \left[ \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{1.5} + 1 \right]$$



- Figure 6.b – Elargissement progressif.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans cette transition sont :

- La hauteur d'eau à l'amont est  $h_o = 0.0305$  m
- La vitesse de l'écoulement à l'amont est  $V = 1.094$  m/s
- La vitesse transversale est  $v_o = 0$  m/s

Le maillage suivant a été utilisé :

$$\Delta\xi = 0.0305 \text{ m} \quad ; \quad \Delta\eta = 0.047619$$

Pour les problèmes de stabilité et d'oscillations numériques, les coefficients suivants sont pris en considération :

$$C_n = 0.9 \quad ; \quad \chi = 0.3$$

- La pente de fond est supposée nulle.
- Le coefficient de Manning est  $n=0.012$
- Le rapport profondeur-largeur est  $h_0/b_1=0.25$

La profondeur  $h_0 = 0.0305$  m, la vitesse longitudinale  $u_0 = 1.094$  m/s et la vitesse transversale  $v_0 = 0$  m/s sont spécifiées en tous les points du maillage comme conditions initiales.

#### ◆ Résultats et analyses

Les profils de la surface obtenus dans cette seconde application sont illustrés dans les figures (6.16) et (6.17). Les principales constatations sont :

- Les lignes d'eau au niveau de l'axe de l'écoulement obtenues avec les schémas de MacCormack et de Gabutti décroissent en fonction de la distance. Au début de la transition, la diminution se fait progressivement.
- Les profils de la surface libre calculés avec les deux schémas numériques ci-dessus, le long de la paroi latérale, diminuent aussi en fonction de la distance. La diminution est plus rapide par rapport à celle de l'axe médian.
- Les résultats obtenus en utilisant les deux schémas aux différences finies, présentent un accord très satisfaisant avec les résultats numériques de Bhállamudi (schéma de MacCormack) [15], aussi bien au niveau de l'axe médian que le long de la paroi solide.
- Une très bonne concordance existe aussi entre nos résultats et les mesures expérimentales [15] au niveau de l'axe et du mur.
- Aucune perturbation de l'écoulement n'est observée dans cette transition.
- Les résultats obtenus avec le schéma de Gabutti sont relativement plus proche des valeurs expérimentales que ceux calculés avec le schéma de MacCormack. Ceci n'enlève en rien de la qualité de ces derniers résultats.

Les figures (6.18) et (6.19) donnent une représentation plane de l'écoulement dans l'élargissement progressif. Ces dernières, déterminées dans l'ordre avec les schémas de MacCormack et de Gabutti, montrent d'une part, que l'écoulement s'effectue d'une façon graduelle et non brutale, et d'autre part, qu'il n'y a aucune agitation de l'écoulement dans cette transition.

Les profils des vitesses sont illustrés dans les figures (6.20) et (6.21). Les résultats obtenus avec les deux schémas aux différences finies explicites sont en parfait accord. Pour une pente nulle, on n'observe pas une augmentation rapide de la vitesse.

Les excellents résultats obtenus dans cette application sont dus principalement à la validité de l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions, ce qui n'était guère le cas dans la première application.

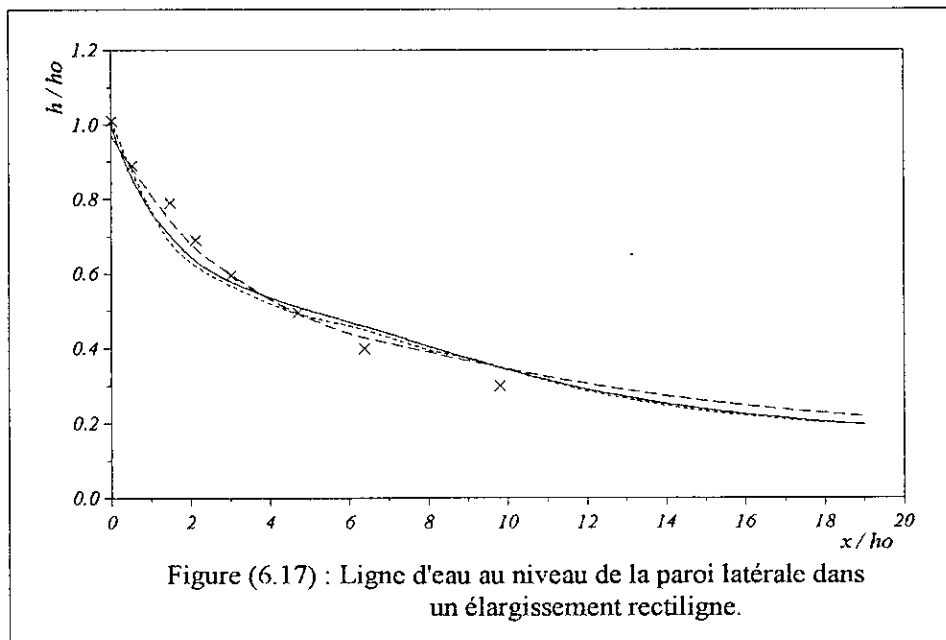
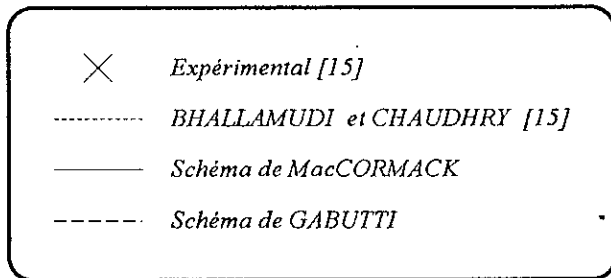
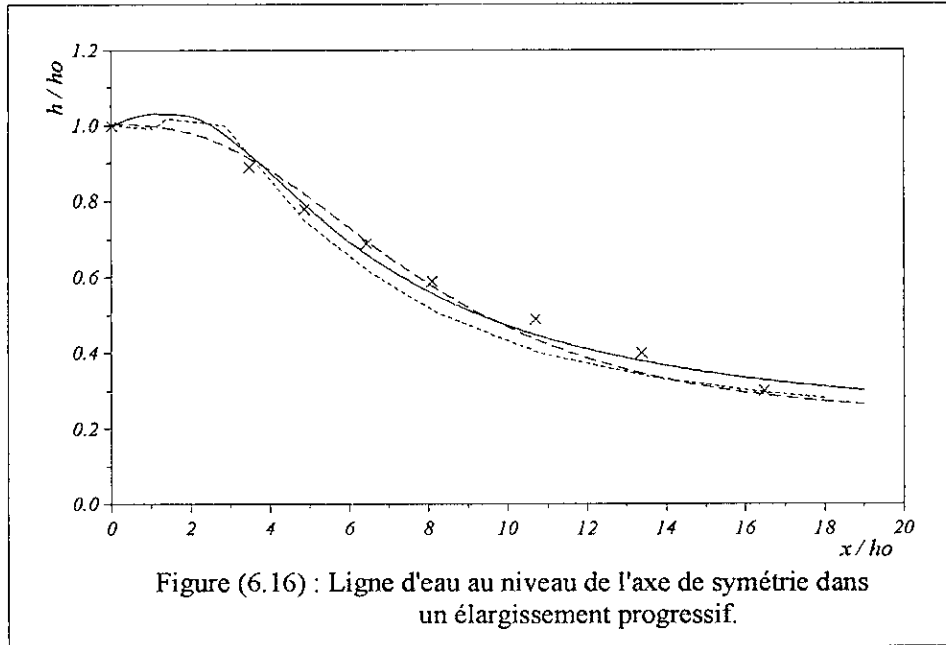
En effet l'augmentation de l'angle de déviation de la paroi est suffisamment graduelle pour prévenir la formation des ondes transversales positives, et ne cause donc aucun changement brusque de la profondeur de l'écoulement à n'importe quelle section du canal.

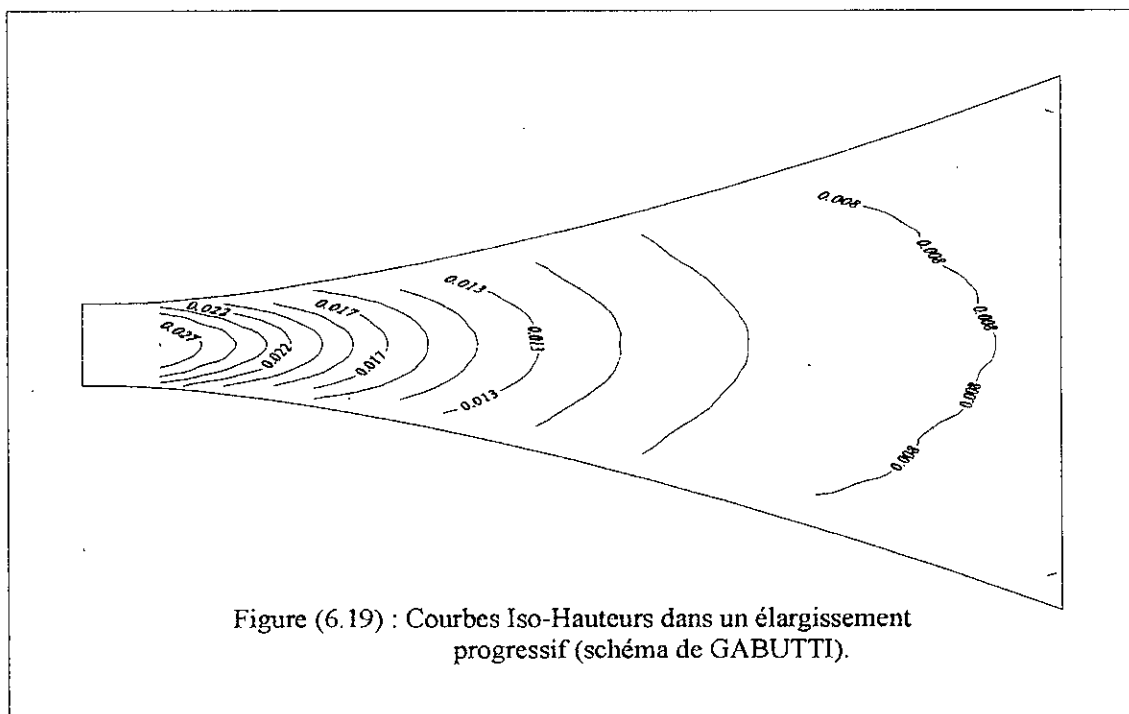
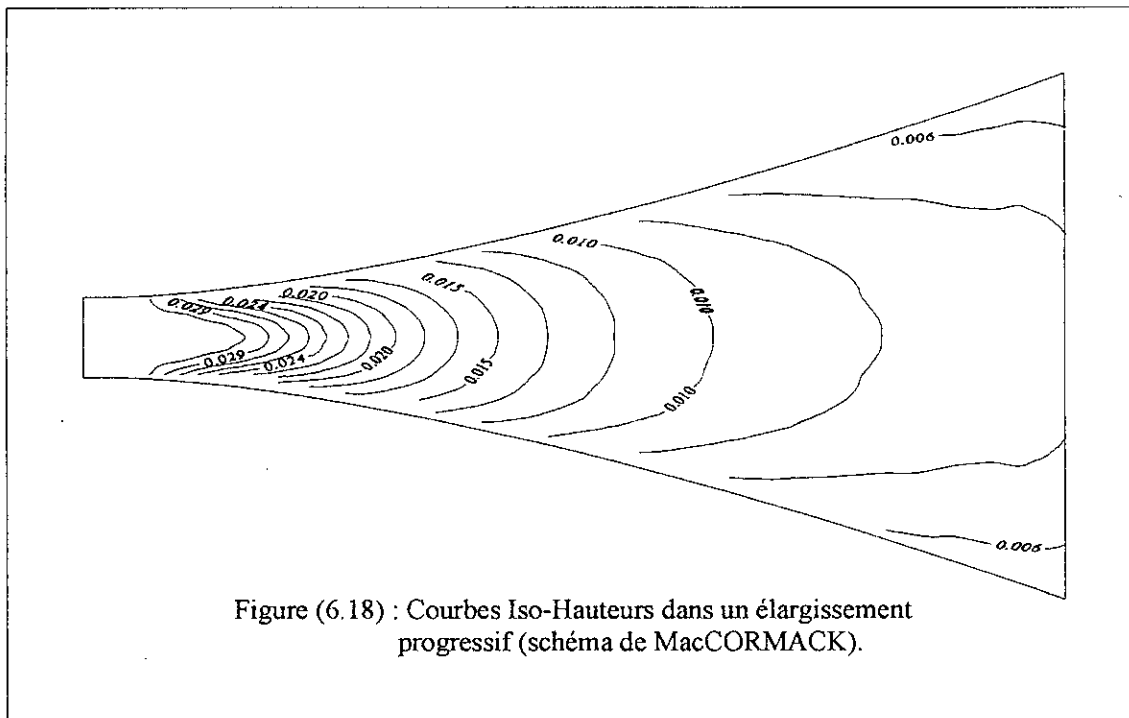
Le début de la transition est par ailleurs, tellement progressif que la distribution des pressions est hydrostatique (ou presque). Ce type d'élargissement réduit sensiblement l'effet d'une distribution non-hydrostatique des pressions.

La convergence de l'écoulement vers l'état permanent le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi solide est représentée dans les figures (6.22) et (6.23) pour le schéma de MacCormack, et dans les figures (6.24) et (6.25) pour le schéma de Gabutti. On constate que :

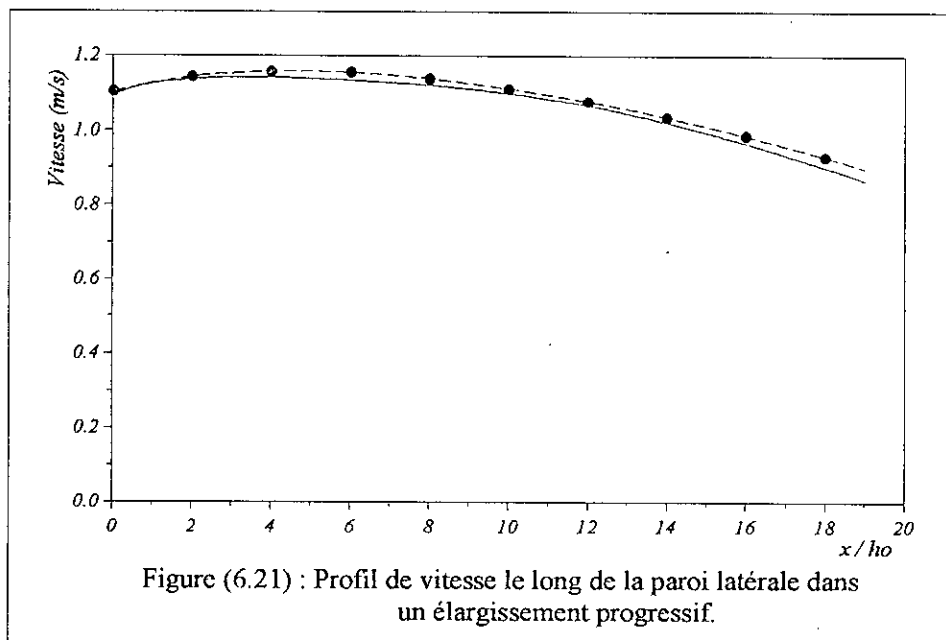
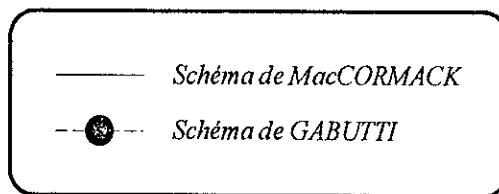
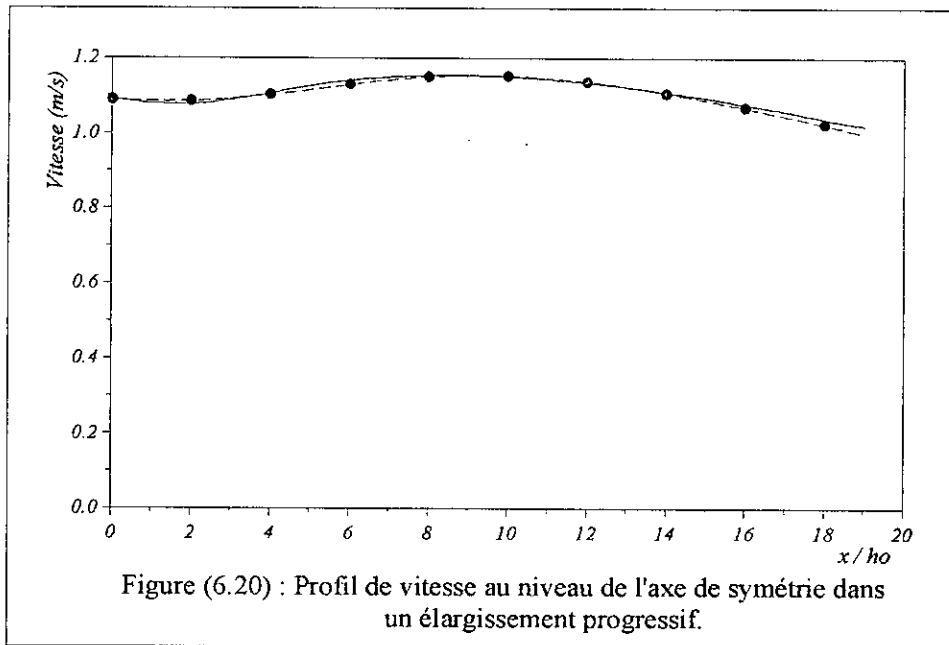
- L'état permanent est atteint à 0.87 sec pour le schéma de MacCormack.
- Alors que, cet état est atteint à 1.05 sec pour le schéma de Gabutti.

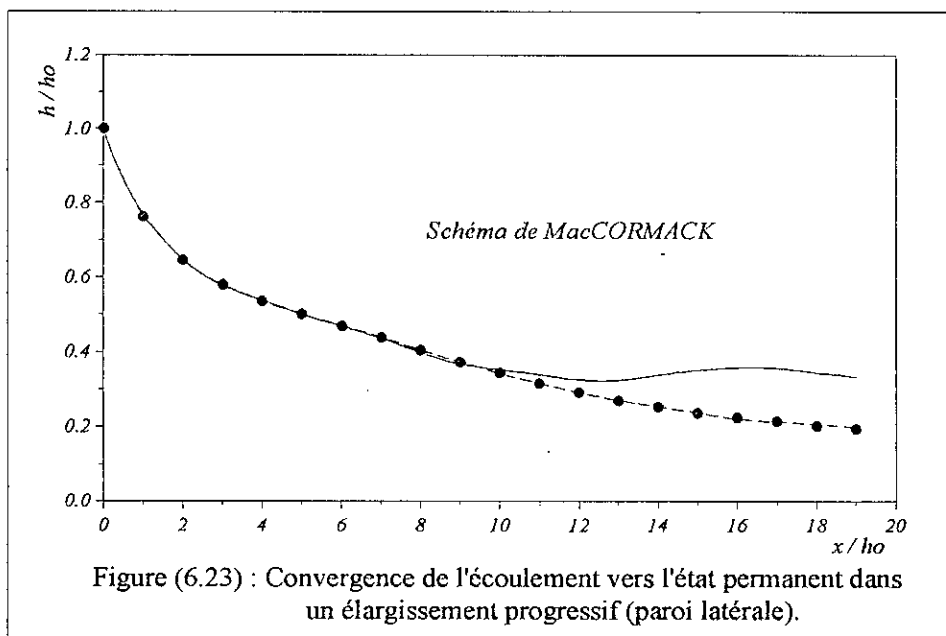
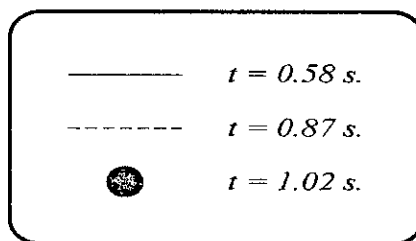
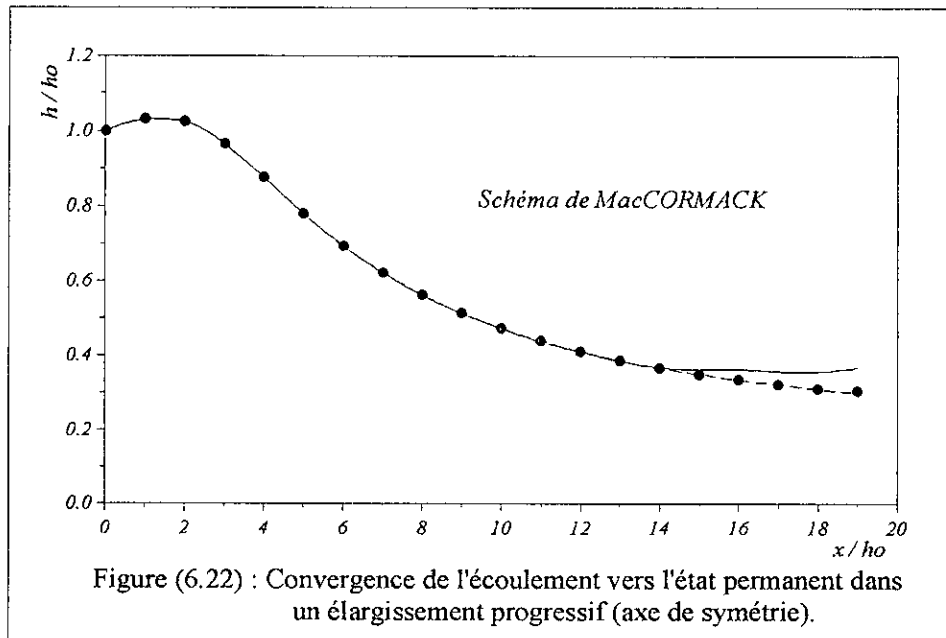
Donc, l'état permanent est atteint plus rapidement avec le schéma de MacCormack.











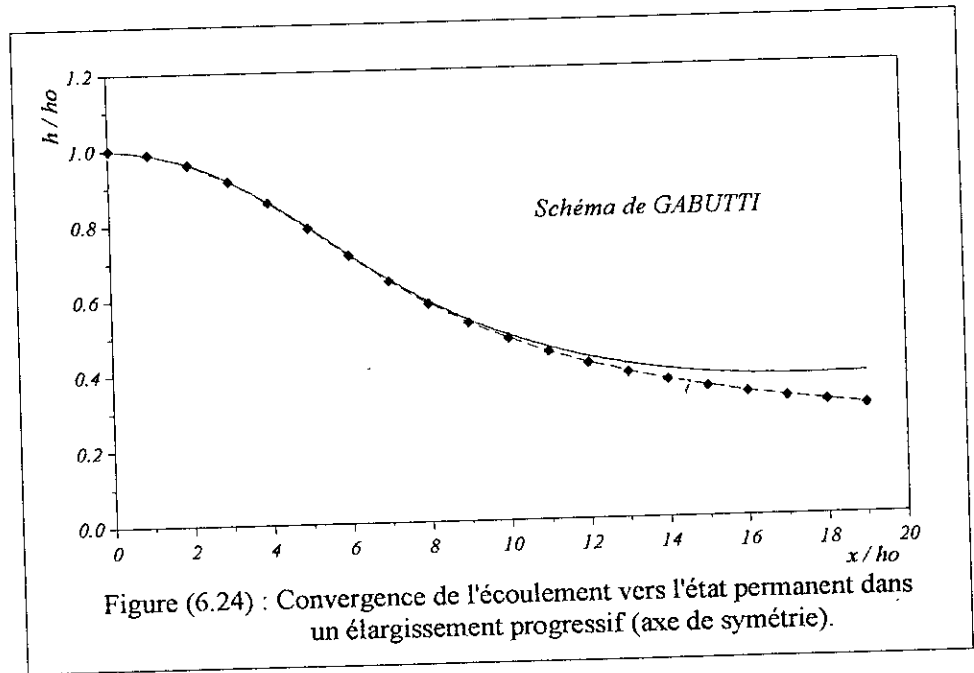


Figure (6.24) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement progressif (axe de symétrie).

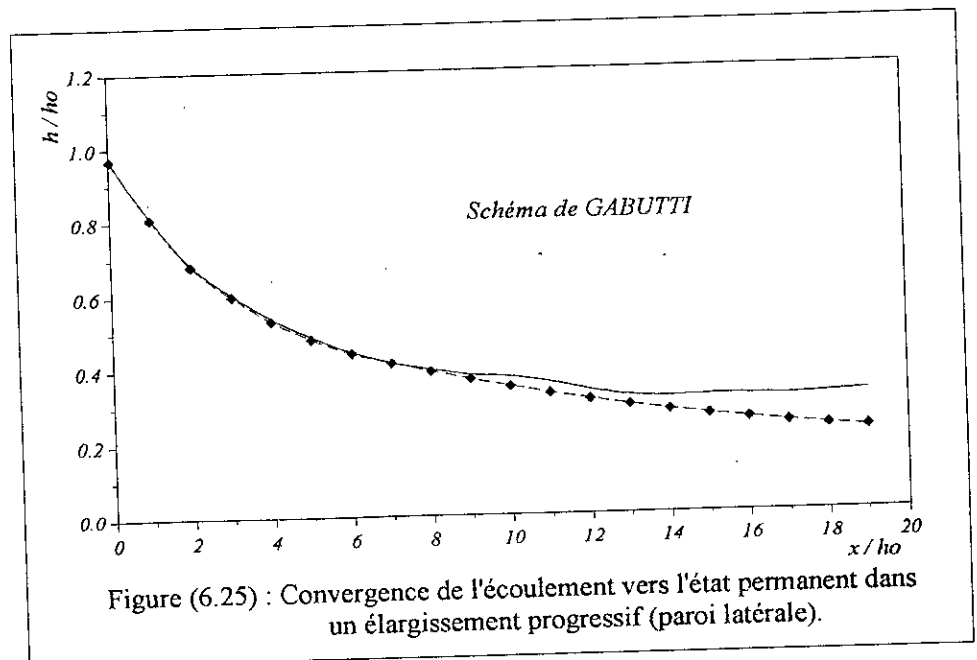
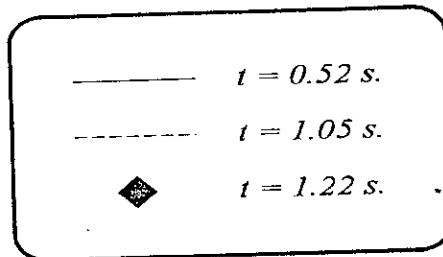


Figure (6.25) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement progressif (paroi latérale).

### 6.1.3. Conclusion

En guise des résultats fort appréciables obtenus dans les applications traitées ci-dessus, on peut conclure que :

- Le modèle mathématique présenté soit avec le schéma de MacCormack ou avec celui de Gabutti est très fiable et efficace.
- Le modèle est par conséquent apte à bien simuler les écoulements supercritiques dans des canaux non prismatiques à faible pente.
- Les temps de convergence obtenus en utilisant les deux schémas numériques sont meilleurs que ceux obtenus par Bhallamudi et Chaudhry [15].
- Les temps de convergence vers l'état permanent obtenus avec le schéma de MacCormack sont d'autre part mieux que ceux obtenus avec le schéma de Gabutti.
- Le modèle mathématique avec le schéma de MacCormack donne généralement de bons résultats dans l'étude d'un rétrécissement rectiligne symétrique à faible pente.
- Alors que, le modèle avec le schéma de Gabutti fournit des résultats relativement satisfaisants dans le cas d'un élargissement progressif.

## 6.2. APPLICATION DU MODELE MATHEMATIQUE SUR DES CANAUX A FORTE PENTE

L'aptitude du modèle mathématique à traiter les écoulements à surface libre dans des canaux avec des pentes de fond très faibles a été prouvée dans les sections précédentes. Qu'est ce qu'il en est pour des canaux à pente considérable?

### 6.2.1. Ecoulement dans le coursier d'un évacuateur de crues en modèle réduit - canal prismatique à forte pente-

Dans le but de valider l'aptitude du modèle mathématique à simuler les écoulements à surface libre dans des canaux à forte pente, nous allons étudier un écoulement dans le coursier d'un évacuateur de crues en modèle réduit.

Le modèle réduit en question [4] est un évacuateur de surface, composé d'un déversoir latéral, d'un bac de réception, d'un coursier à forte pente et d'un saut de ski. La partie du modèle qui nous intéresse, c'est évidemment "le coursier", qui est un canal dont la pente du radier est d'environ  $28^\circ$  sur une longueur de 0.74 m et possédant une section rectangulaire symétrique de 0.41 m.

L'étude expérimentale est faite avec des débits de  $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$  (débit réel  $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ ), de  $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$  (débit réel  $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ ) et pour un débit exceptionnel de  $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$  (débit réel  $2700 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

On va déterminer par simulation numérique l'allure de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale pour les trois débits précédents. Les conditions de l'écoulement dans le coursier sont résumées dans le tableau suivant :

Conditions de l'écoulement dans le coursier			
- Tirant d'eau à l'amont (m)	0.0656	0.1000	0.1300
- Vitesse longitudinale (m/s)	1.2800	1.6805	1.7450
- Vitesse transversale (m/s)	0	0	0

On utilisera aussi les données suivantes :

- Un maillage avec des pas d'espace  $\Delta\xi = 0.0211\text{m}$  et  $\Delta\eta = 0.01$
- Nombre de Courant  $Cn = 0.5$
- Coefficient de dissipation  $\chi = 0.2$
- Nombre de Manning  $n = 0.01$
- Pente de fond  $\alpha = 28,1245^\circ$

Les valeurs de  $h$ ,  $u$  et  $v$  données dans le tableau ci-dessus sont spécifiées comme conditions initiales en tous points de la grille de calcul.

#### ◆ Résultats et analyses

Les figures (6.26), (6.27) et (6.28) donnent dans l'ordre les profils de la ligne d'eau au niveau de la paroi solide d'un canal prismatique pour des débits de  $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ , de  $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$  et de  $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$ . Ce canal possède une pente de fond considérable, d'environ  $28^\circ$ . Ainsi, on constate que :

- La profondeur de l'écoulement diminue avec l'augmentation de la pente de fond dans un canal prismatique.
- Les résultats calculés avec le schéma de MacCormack approchent les mesures expérimentales au début et à la fin du canal, où la ligne d'eau devient presque constante. Au milieu du canal, ces résultats s'éloignent un peu des observations expérimentales [4].
- Les résultats obtenus avec le schéma de Gabutti s'approchent dans la majeure partie du canal des mesures expérimentales, mais à l'aval, elles s'éloignent de ces mesures. La ligne d'eau déterminée avec ce schéma présente une diminution graduelle.
- Pour le débit de  $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ , les lignes d'eau calculées avec les deux schémas s'éloignent quelque peu des observations expérimentales dans la première partie du canal. Par contre, à l'aval elles sont plus proches.
- Pour les débits de  $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$ , les résultats déterminés avec les deux schémas comparés avec les mesures expérimentales sont par contre fort appréciables.

Les profils de la surface vitesse de l'écoulement au niveau de la paroi solide, pour les trois débits étudiés, sont illustrés dans les figures (6.29), (6.30) et (6.31). On remarque alors :

- L'écoulement dans un canal prismatique avec une pente du radier considérable engendre, une augmentation de la vitesse en fonction de la distance.
- La vitesse obtenue à l'aval avec le schéma de Gabutti est supérieure à celle calculée avec le schéma de MacCormack. Ceci est en parfait accord avec les profils des lignes d'eau.

Par conséquent, on conclue que l'écoulement supercritique dans un canal prismatique à forte pente, entraînera principalement un rabaissement de la profondeur de l'écoulement et par suite une augmentation de la vitesse (ainsi que le nombre de Froude) de l'écoulement.

Rappelons par ailleurs, que notre but n'est pas l'étude d'un écoulement à surface libre dans des canaux prismatiques, mais l'objectif de cette application est de tester la validité du modèle présenté dans cette thèse à simuler les écoulements supercritiques dans des canaux à pente raide. La qualité des résultats obtenus avec les deux schémas numériques (MacCormack et Gabutti) montrent l'aptitude de ce modèle à traiter ce type d'écoulement.

De point de vue résultats on constate aussi que l'utilisation du schéma de Gabutti donne relativement de bons résultats que le schéma de MacCormack dans un tel cas.

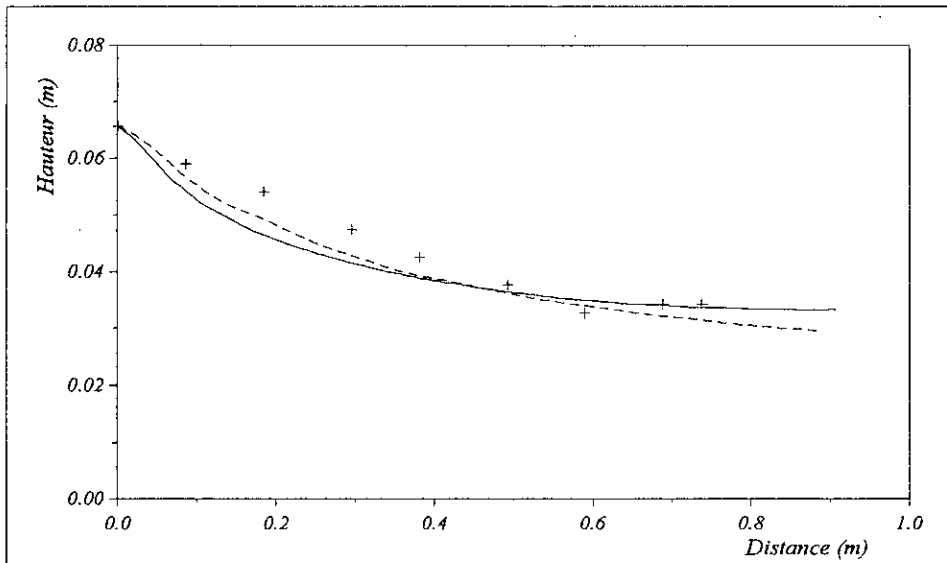


Figure (6.26) : Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de  $0.0344 \text{ (m}^3/\text{s)}$ .

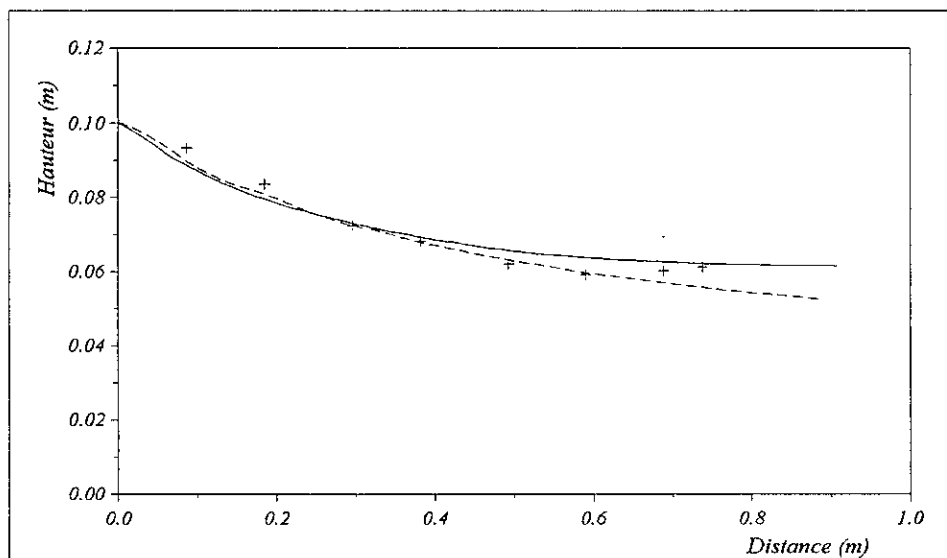
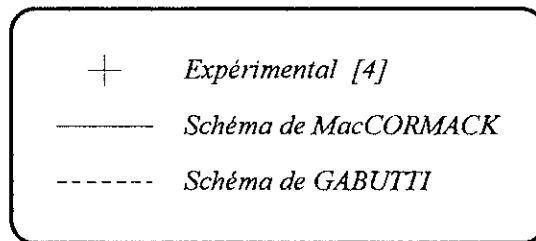
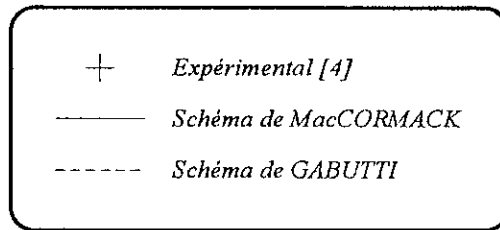
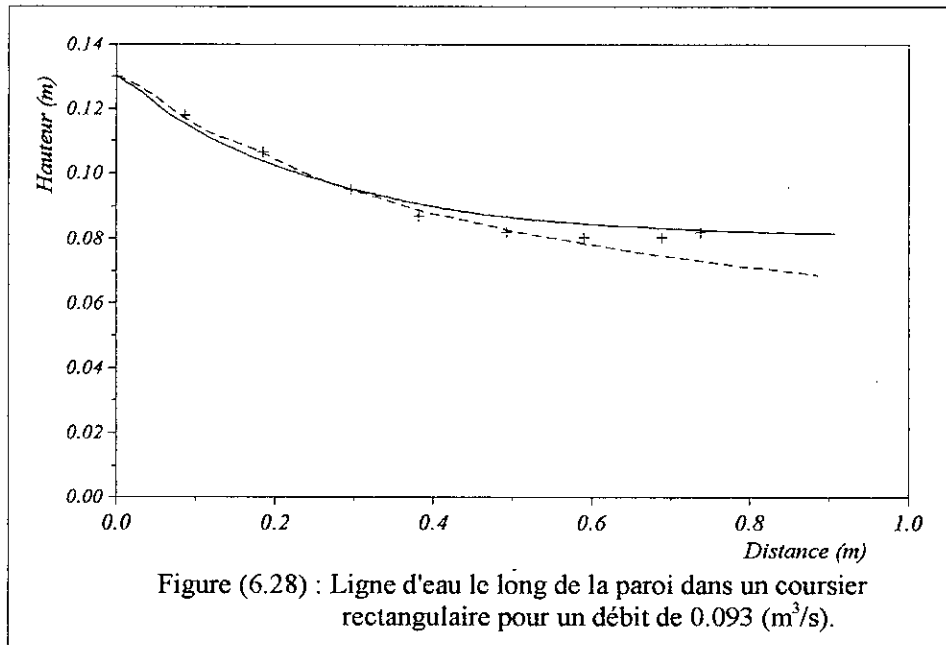
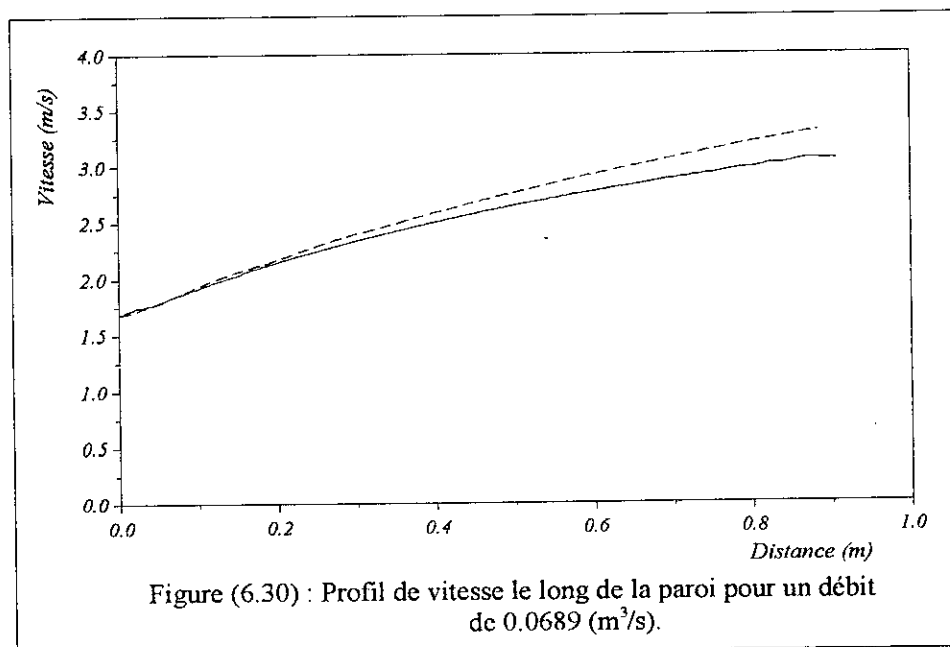
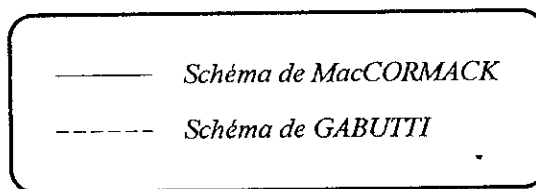
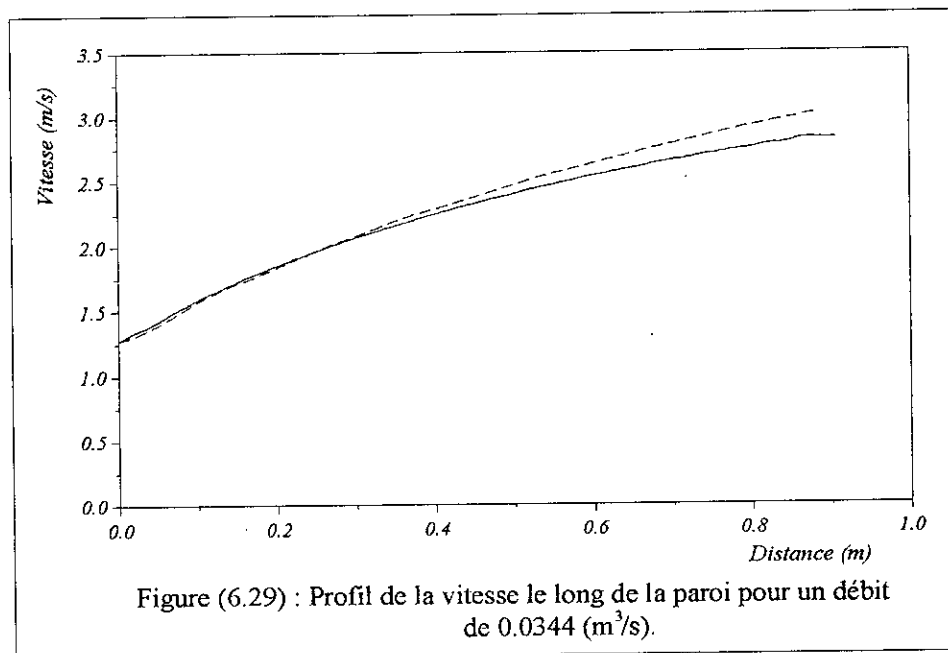
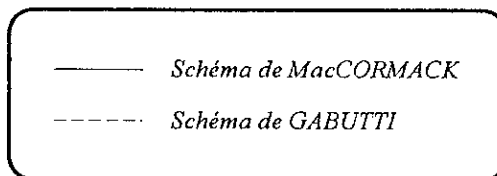
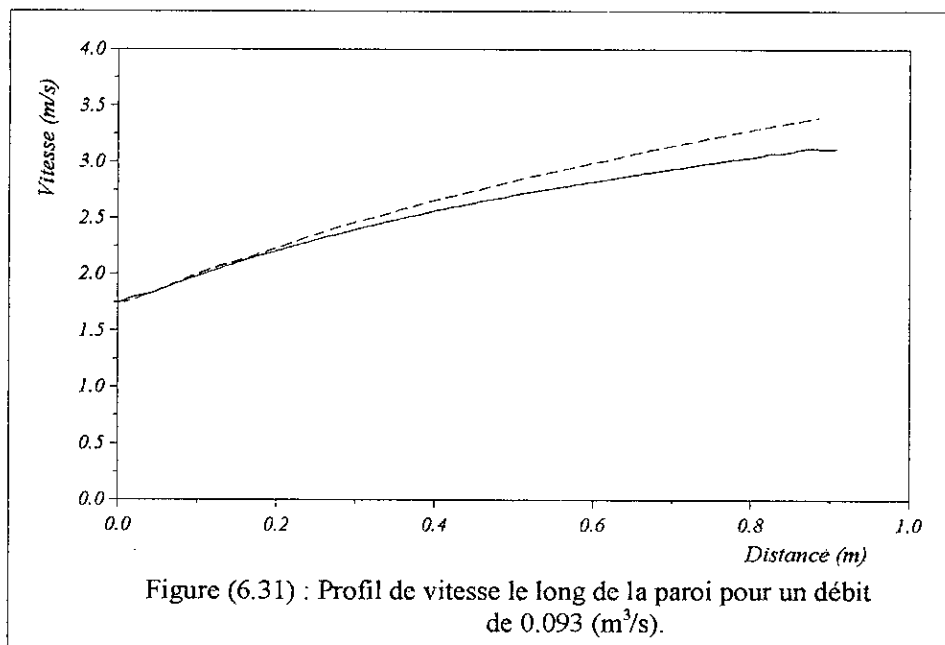


Figure (6.27) : ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de  $0.0689 \text{ (m}^3/\text{s)}$ .



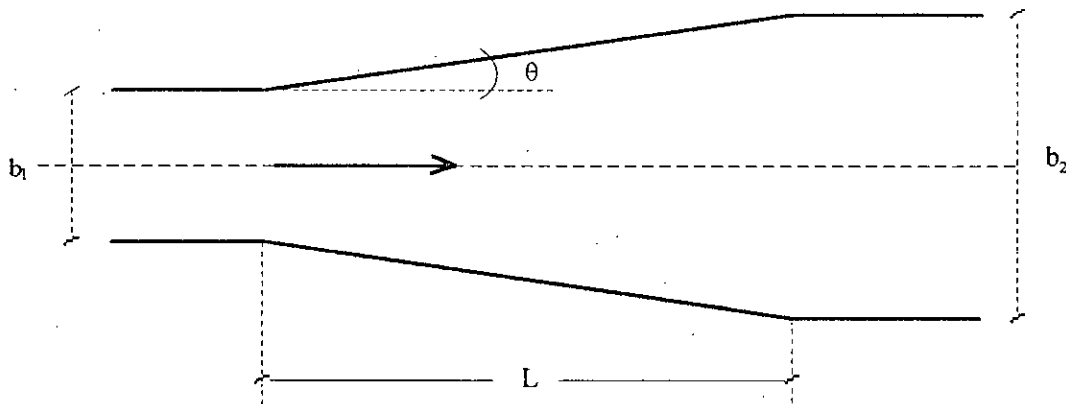






### 6.2.2. Etude d'un élargissement rectiligne à pente variable

L'étude d'un écoulement supercritique traversant un élargissement rectiligne symétrique de pente variable, et à section transversale rectangulaire est le but de cette application. Ce cas a été traité théoriquement par Bagge et Herbich [7], puis expérimentalement par Herbich et Walsh [47]. Les dimensions de l'élargissement sont illustrées sur la figure (6.c).



- Figure 6.c – Elargissement rectiligne.

L'étude est faite pour trois pentes différentes,  $0.745^\circ$ ,  $4.014^\circ$  et  $7.470^\circ$ . Les conditions aux limites de l'écoulement sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Pente de fond ( $^\circ$ )	0.745	4.014	7.470
- Tirant d'eau (m)	0.012	0.020	0.012
- Vitesse longitudinale (m/s)	0.103	1.068	1.373
- Vitesse transversale (m/s)	0	0	0

Les autres données du problème sont :

- Largeur amont  $b_1 = 0.305$  m
- Largeur à l'aval  $b_2 = 0.61$  m
- Angle de déviation  $\theta = 5.73$  m
- Longueur de la transition  $L = 1.52$  m

- Les pentes de frottement sont supposées nulles.
- Le maillage est choisi tel que  $\Delta\xi = 0.0435$  m et  $\Delta\eta = 0.050$
- Le coefficient de dissipation  $\chi = 0.98$
- Le nombre de Courant  $Cn = 0.5$

Les conditions initiales spécifiées en tous les points du maillage sont données dans le tableau ci-dessus.

#### ◆ Résultats et analyses

Les résultats de l'application en cours sont représentés dans les figures (6.32), (6.33) et (6.34), qui regroupent les profils de la surface libre calculés théoriquement et mesurés expérimentalement avec les résultats que nous avons obtenu avec les schémas aux différences finies de MacCormack et de Gabutti, pour les trois pentes respectives de  $0.745^\circ$ ,  $0.4014^\circ$  et  $7.47^\circ$ .

Dans le cas d'une pente de  $0.745^\circ$ , on remarque

- Un rabaissement assez important des lignes d'eau déterminées avec les deux schémas numériques par rapport à la ligne théorique.
- Les résultats obtenus en utilisant ces deux schémas présentent la même allure avec les mesures expérimentales, qui donnent aussi un rabaissement par rapport au profil théorique.
- La ligne d'eau déterminée avec le schéma de Gabutti est plus proche des observations expérimentales que celle obtenue avec le schéma de MacCormack. Cette dernière présente un petit décalage vers l'aval par rapport à l'expérimentation.

En augmentant la pente de fond à environ  $4^\circ$ , on constate :

- Les lignes d'eau calculées avec les deux schémas numériques coïncident avec les mesures expérimentales dans la première partie de la transition, puis deviennent inférieures à ces mesures dans la seconde partie.
- Les résultats que nous avons obtenus sont par contre au-dessus du profil théorique dans la première partie de l'élargissement, et chutent ensuite au-dessous des valeurs théoriques. La ligne théorique est totalement inférieure aux mesures expérimentales, sauf à la fin de la transition.

- Le profil calculé avec le schéma de MacCormack est dans ce cas plus proche de la ligne expérimentale que celui obtenu avec le schéma de Gabutti.

Tandis que, pour une pente de  $7.47^\circ$ , on remarque que :

- Les résultats obtenus avec les schémas de MacCormack et de Gabutti sont légèrement au-dessous des observations expérimentales, mais ils présentent une assez bonne approche avec ces mesures.
- La ligne d'eau calculée avec le schéma de MacCormack est plus proche des valeurs expérimentales que celle obtenue avec le schéma de Gabutti.
- Les résultats numériques sont dans une partie supérieurs aux valeurs théoriques, et dans l'autre partie deviennent inférieurs. La ligne théorique est par contre au-dessous des mesures expérimentales au début de la transition, puis devient au-dessus de celle-ci.
- Les profils théoriques et expérimentaux présentent un palier au milieu de l'élargissement, où la hauteur reste constante, ce qui n'est pas fourni par les résultats numériques.

Contrairement à un élargissement progressif où les parois latérales divergent graduellement, les parois solides d'un élargissement rectiligne divergent linéairement suivant un angle de déviation  $\theta$ . Il existe donc des points de discontinuités au niveau de la jonction entre les parois de la transition et celles des canaux rectangulaires amont et aval.

Le choix de l'angle  $\theta$ , devra se faire d'une manière très rigoureuse car dans des transitions de ce type, si  $\theta$  est mal choisi, un décollement se manifestera juste au début de la transition. Par conséquent la distribution des pressions ne sera en aucun cas hydrostatique. Ceci explique en quelque sorte la différence entre les résultats théoriques, numériques et les mesures expérimentales, du moment que les calculs sont faits avec la supposition d'une distribution hydrostatique des pressions. Le phénomène de séparation de l'écoulement doit être évité ou au moins minimiser dans de telles structures.

Par ailleurs, il y a aussi d'autres paramètres qui influent sur les caractéristiques de l'écoulement dans des canaux non prismatiques à forte pente. Les frottements par exemple, qui ont été négligés dans la présente analyse, ce qui est en contradiction avec la réalité.

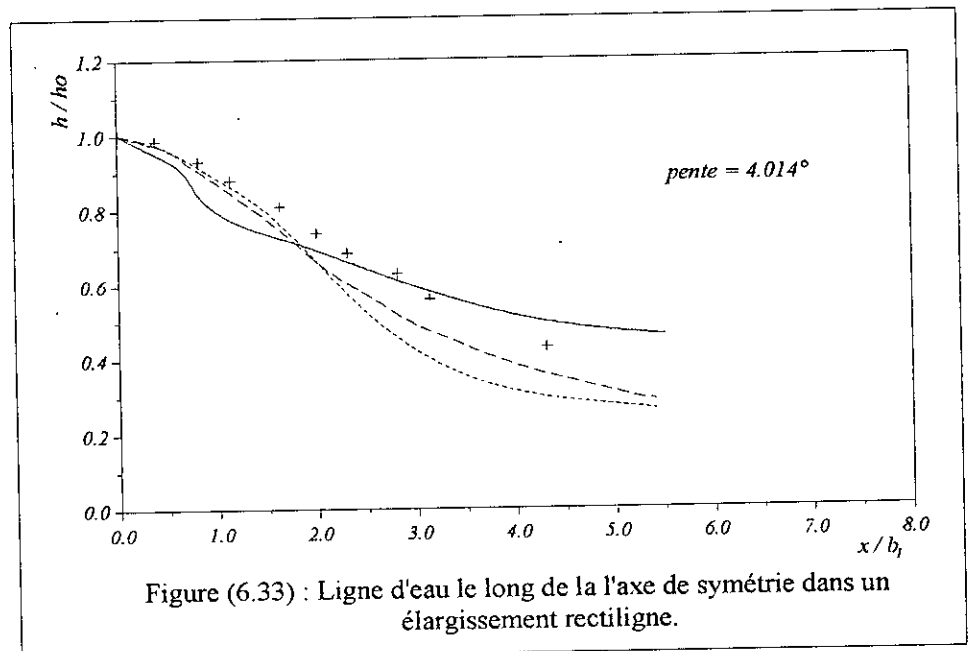
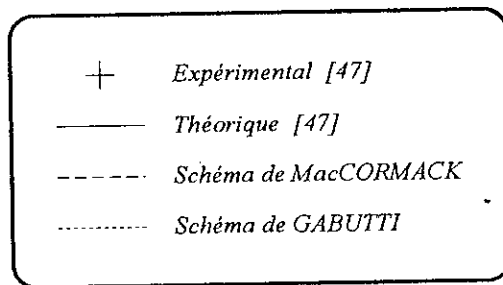
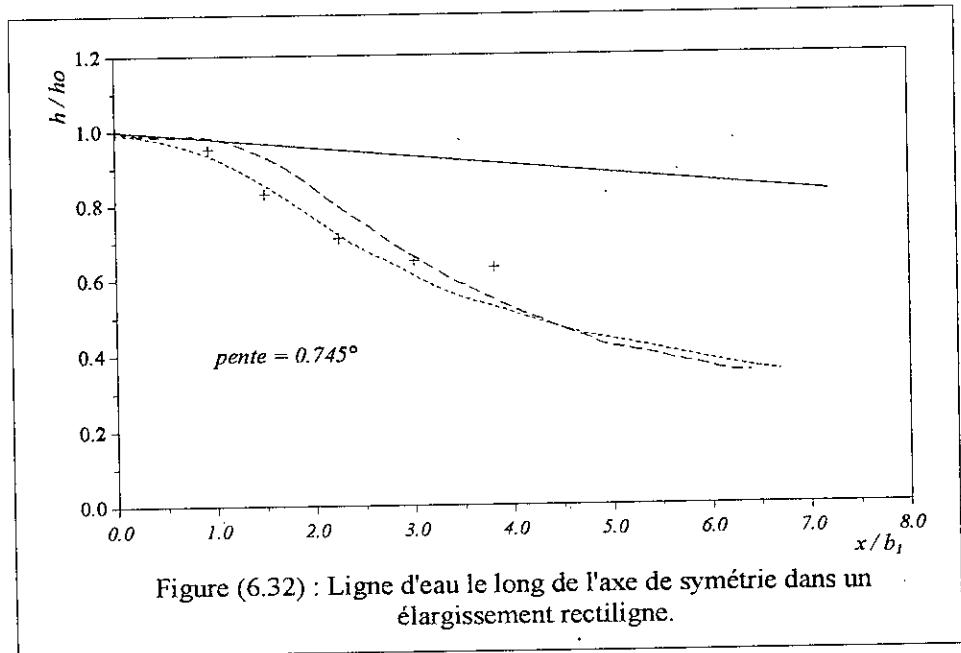
L'effet de l'entraînement d'air n'est pas aussi pris en considération, alors que dans des transitions fortement inclinées, ce phénomène est quasiment présent.

En somme, c'est à cause de ces raisons là, qu'il y a différence entre les résultats théoriques, numériques et expérimentaux.

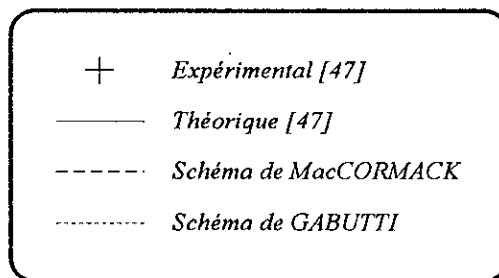
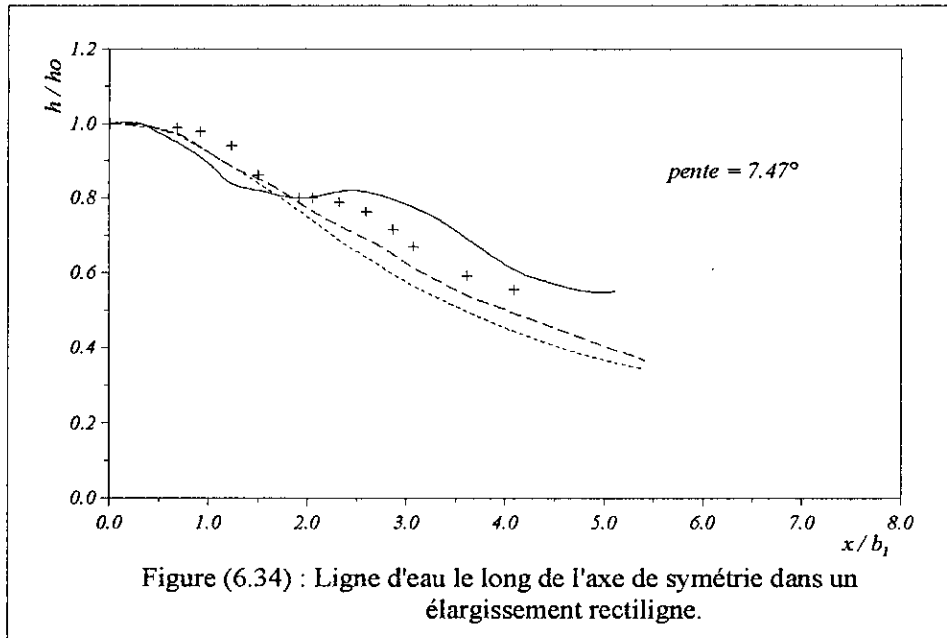
Cette application a été traitée dans le but de valider le modèle mathématique présenté dans cette thèse avec deux schémas aux différences finies explicites.

Malgré que les pentes du radier ne soient pas vraiment fortes, les résultats obtenus avec les deux schémas sont dans l'ensemble bons et justifient par suite l'aptitude du modèle proposé en conséquence.

Finalement, on peut dire que le modèle avec le schéma de Gabutti donne d'excellents résultats dans le cas d'une pente de fond presque nulle. Tandis que lors de l'augmentation de la pente de fond d'un tel élargissement, le modèle mathématique avec un schéma de MacCormack donne d'assez bons résultats par rapport à ceux obtenus avec le schéma de Gabutti.







### 6.2.3. Etude d'un rétrécissement rectiligne à forte pente

Reprenons le rétrécissement rectiligne étudié auparavant (§ 6.1.1) avec une pente de fond nulle, tout en gardant les dimensions et les données du problème (conditions initiales, conditions aux limites ...) inchangées.

Dans cette application, on examinera l'influence de l'augmentation de la pente de fond sur les caractéristiques de l'écoulement dans la transition en question. Pour cela, on se propose trois pentes différentes de  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$ .

#### ◆ Résultats et analyses

Les figures (6.35) et (6.37) donnent respectivement les profils de la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie déterminés numériquement avec les schémas de MacCormack et de Gabutti. Les résultats calculés pour des pentes de  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$  sont comparés avec ceux obtenus pour une pente nulle. On remarque que :

- Les résultats obtenus avec les schémas de MacCormack et de Gabutti sont dans l'ensemble identiques pour les trois pentes.
- L'augmentation de la pente de fond provoquera un rabaissement de la surface libre par rapport au cas d'une pente nulle (très faible).
- Les profils des lignes d'eau obtenus pour les trois pentes montrent seulement une seule surélévation contrairement au cas d'une pente nulle, où on en constate deux.
- La surélévation de la surface libre pour les pentes de  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$  n'excède pas la première surélévation observée dans les canaux horizontaux.
- Plus on augmente la pente de fond, plus le système d'ondes de choc se déplace loin à l'aval.

Dans les figures (6.36) et (6.38), on trouve les profils de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale, déterminés avec les schémas de MacCormack et Gabutti. Les constatations suivantes peuvent être faites :

- Les résultats obtenus en utilisant les deux schémas numériques cités précédemment sont aussi semblables dans ce cas, comme ceux de l'axe de symétrie.

- Aucune surélévation importante de la ligne d'eau n'est observée pour les trois pentes étudiées, par rapport aux résultats d'une pente nulle.
- Les lignes d'eau pour les pentes de  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$  gardent une hauteur presque constante dans la zone de transition.
- Par contre, juste à la fin de la contraction, c'est-à-dire à l'entrée du canal aval, la profondeur de l'écoulement chute rapidement.
- L'augmentation de la pente de fond entraîne donc une diminution de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale solide.

Par ailleurs, les figures (6.39) et (6.40) donnent dans l'ordre les profils des vitesses le long de l'axe médian calculés avec les schémas de MacCormack et de Gabutti. On remarque que :

- Les résultats obtenus avec les deux schémas sont en parfait accord.
- La vitesse de l'écoulement accroît rapidement et devient de plus en plus importante avec l'augmentation de la pente de fond.

On peut dire que l'augmentation de la pente du radier dans un rétrécissement symétrique de tracé rectiligne traversé par un écoulement supercritique engendre principalement une diminution de la surface libre, et une augmentation de la vitesse d'écoulement (et du nombre de Froude à l'occasion). Cette vitesse considérable entraîne le système d'ondes de choc de plus en plus à l'aval, et empêche la formation des grands sommets d'ondes ; ce qui est par contre observé dans les canaux horizontaux (ou faiblement inclinés).

Par manque d'études expérimentales ou même numériques sur les écoulements supercritiques dans des canaux à géométrie variable avec des radiers fortement inclinés, ne nous permet pas de faire une critique sur les résultats que nous avons obtenus, et d'autre part de voir l'influence de certaines hypothèses émises dans l'élaboration du modèle mathématique.

En effet, la distribution des pressions supposée hydrostatique n'est pas en réalité valide; du moment que l'écoulement dans les transitions engendre généralement des discontinuités (ondes de choc). Au voisinage de ces discontinuités, l'hypothèse d'une distribution hydrostatique des pressions est totalement remise en cause.

D'un autre côté, dans la présente application, les pentes de frottement sont supposées nulles, ce qui n'est pas du tout le cas dans la réalité, car les frottements au niveau des parois ou du fond ont une influence sur les caractéristiques de l'écoulement dans des canaux à pentes considérables ou autres.

Il y a aussi d'autres phénomènes qui peuvent influencer les caractéristiques de l'écoulement dans ce type de transition, et qui sont négligés dans l'étude numérique. On fait référence essentiellement au phénomène de l'entraînement d'air qui surgit souvent dans les canaux fortement inclinés.

Néanmoins, la bonne concordance constatée entre les résultats obtenus numériquement avec les schémas aux différences finies explicites de MacCormack et de Gabutti, nous permet aisément de conclure sur la fiabilité de ces résultats et l'aptitude du modèle mathématique proposé avec les deux schémas à simuler le type d'écoulement étudié dans la présente thèse.

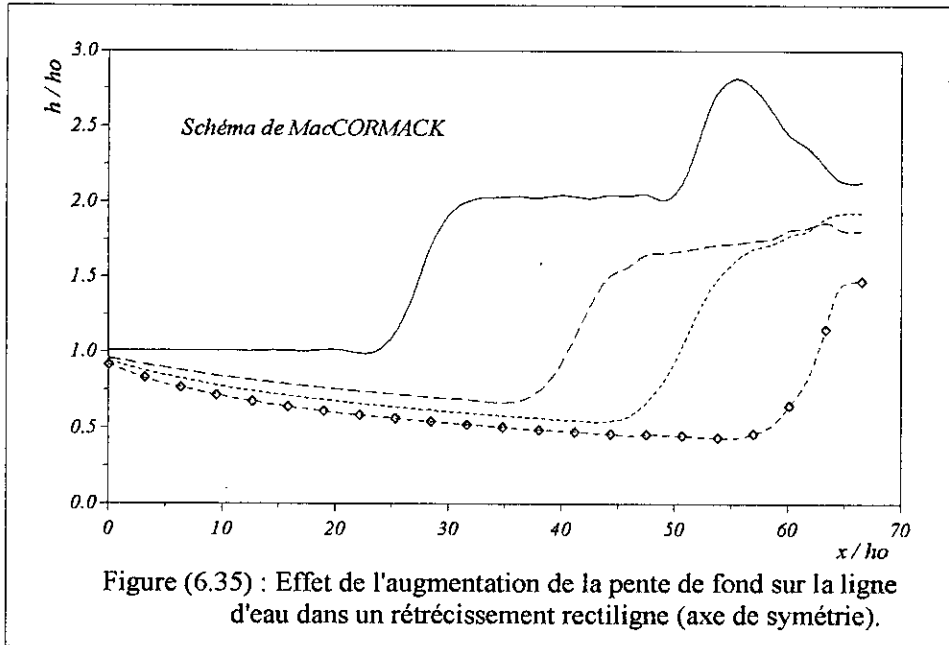


Figure (6.35) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans un rétrécissement rectiligne (axe de symétrie).

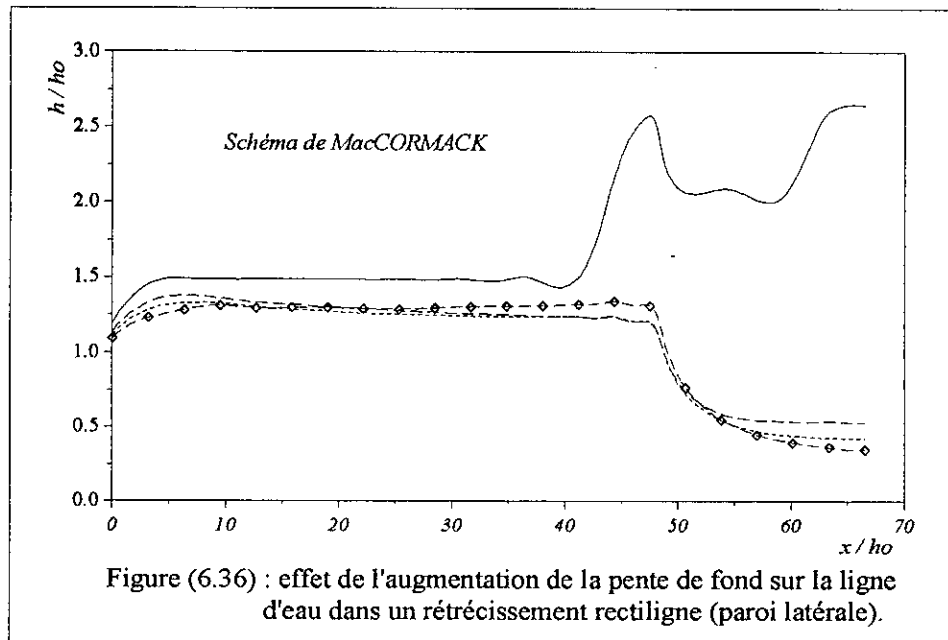
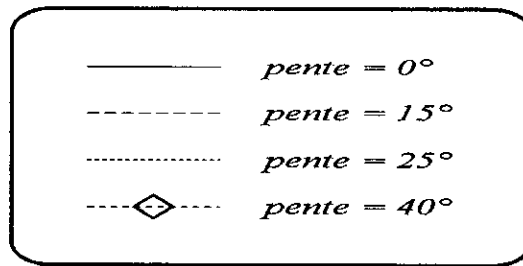


Figure (6.36) : effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans un rétrécissement rectiligne (paroi latérale).

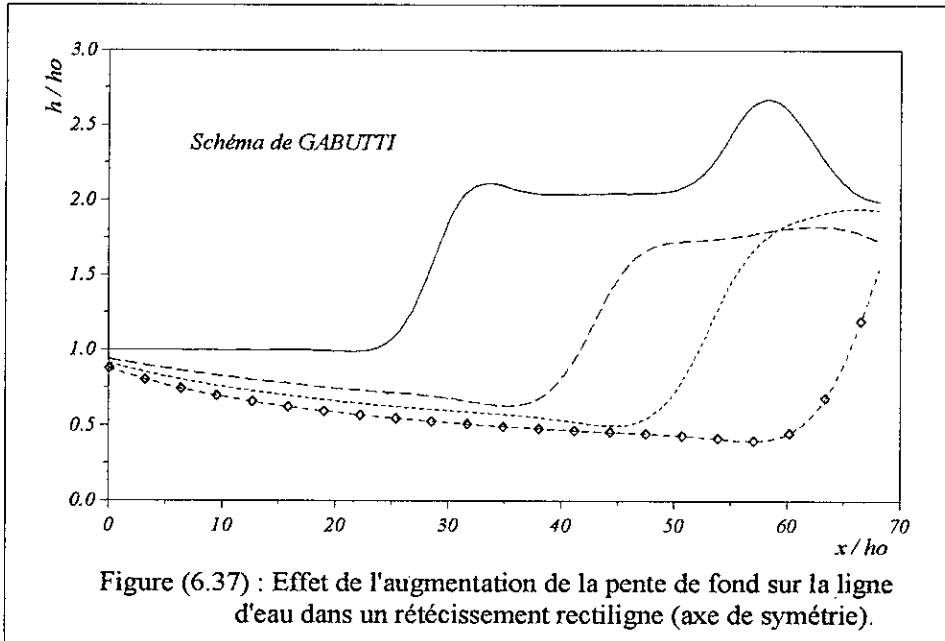


Figure (6.37) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans un rétrécissement rectiligne (axe de symétrie).

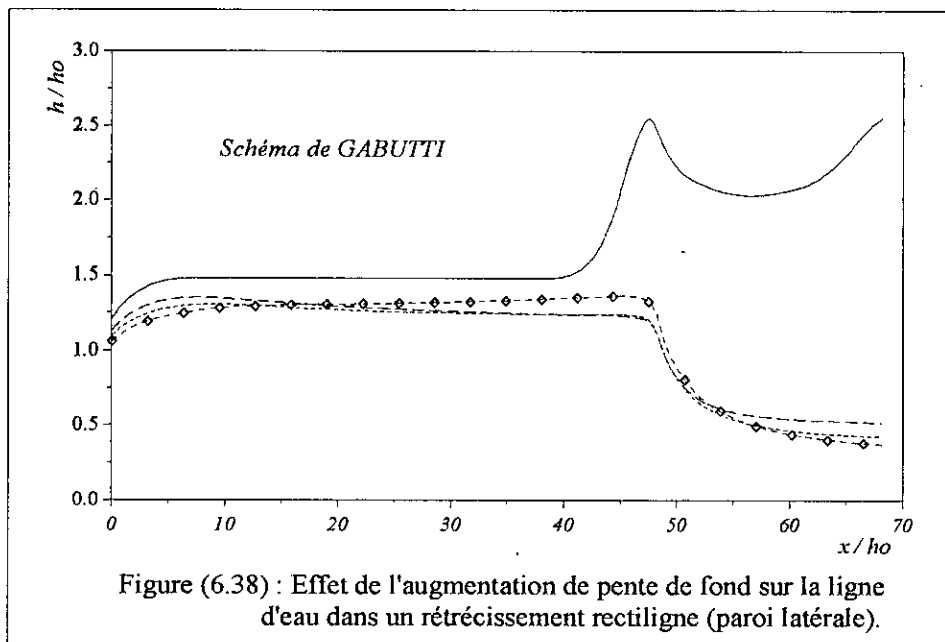
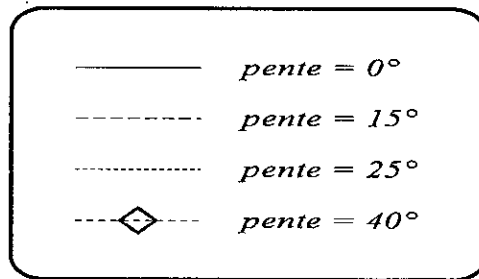
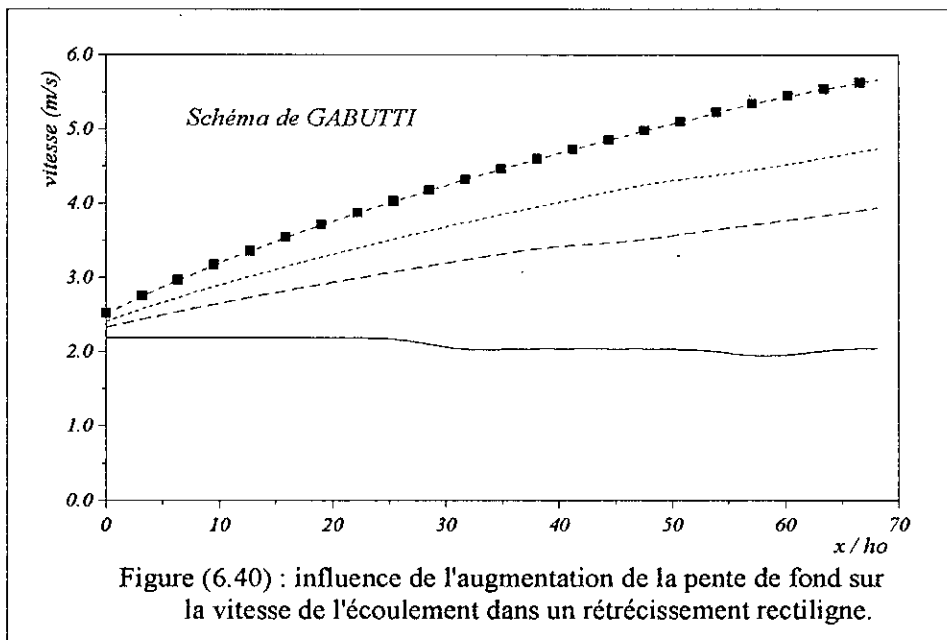
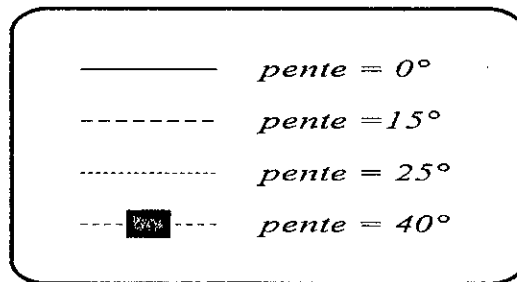
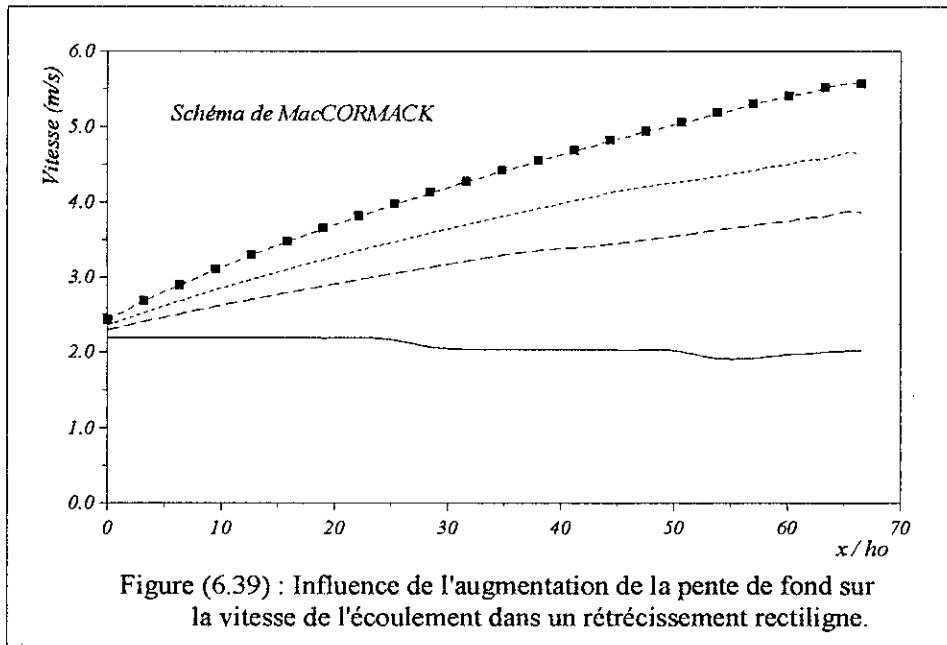


Figure (6.38) : Effet de l'augmentation de pente de fond sur la ligne d'eau dans un rétrécissement rectiligne (paroi latérale).



#### 6.2.4. Etude d'un élargissement progressif à forte pente

On analysera dans cette dernière application, le passage d'un écoulement supercritique à travers un divergent graduel dont la pente de fond est considérablement accentuée, afin de voir comment deviendra l'allure de la ligne d'eau par rapport au profil obtenu pour une transition horizontale.

Les dimensions de cet élargissement et les données de l'application sont déjà explicitées dans le paragraphe (6.1.2). L'étude est alors faite pour les trois pentes suivantes :  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$ .

##### ◆ Résultats et analyses

Les profils de la surface libre au niveau de l'axe de l'écoulement calculés pour les trois pentes précédentes avec les schémas de MacCormack et de Gabutti sont illustrés respectivement dans les figures (6.41) et (6.43). On remarque que :

- Les résultats obtenus avec le schéma de MacCormack montrent un bon accord avec ceux calculés en utilisant le schéma de Gabutti.
- Un léger rabaissment à l'amont, de la ligne d'eau obtenue pour les trois pentes consécutives de  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$ , par rapport au profil calculé pour une pente nulle.
- Les trois profils déterminés soit avec le schéma de MacCormack ou avec le schéma de Gabutti, se rencontrent à l'aval au niveau d'une même hauteur (rapport de profondeurs d'écoulement  $h/h_0 \approx 0.25$ ).
- Aucune perturbation de l'écoulement n'est observée dans cette transition.

Tandis que les figures (6.42) et (6.44) regroupent les profils des lignes d'eau le long de la paroi latérale solide, obtenus avec les deux schémas cités ci-dessus pour les pentes de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$ . On constate que :

- L'augmentation de la pente de fond entraîne une diminution considérable de la profondeur d'écoulement.
- Plus la pente du radier augmente, plus le rabaissment de la ligne d'eau devient très important.
- Les résultats obtenus avec le schéma de MacCormack donnent une diminution de la surface libre relativement supérieure à celle calculée avec le schéma de Gabutti.



- L'écoulement se fait sans perturbation dans la transition.

Les profils des vitesses au niveau de l'axe de symétrie, déterminés avec les deux schémas aux différences finies, sont représentés dans les figures (6.45) et (6.46). Les vitesses deviennent donc importantes avec l'augmentation de la pente.

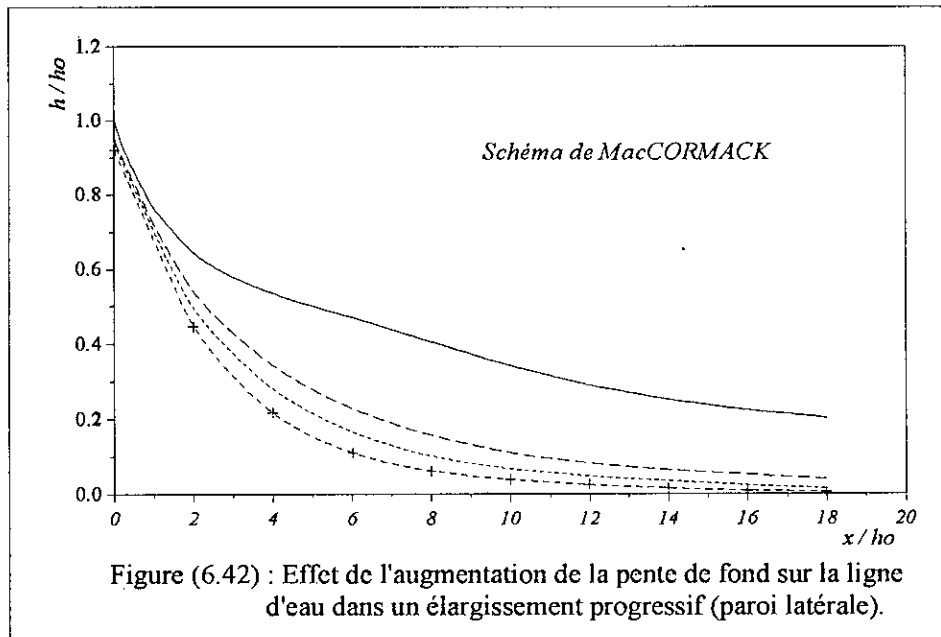
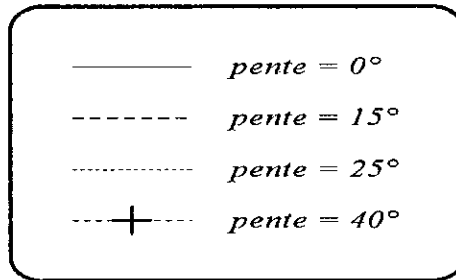
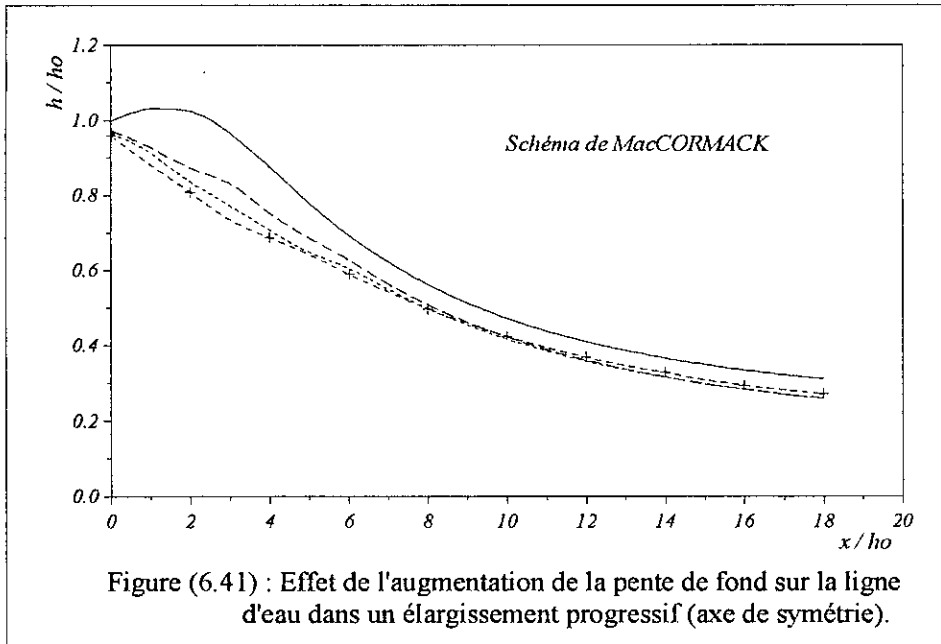
En résumé, on dira que l'accroissement de la pente du radier d'un élargissement progressif traversé par un écoulement supercritique engendre principalement une diminution de la profondeur de l'écoulement et par suite l'augmentation de la vitesse, ce qui était prévisible.

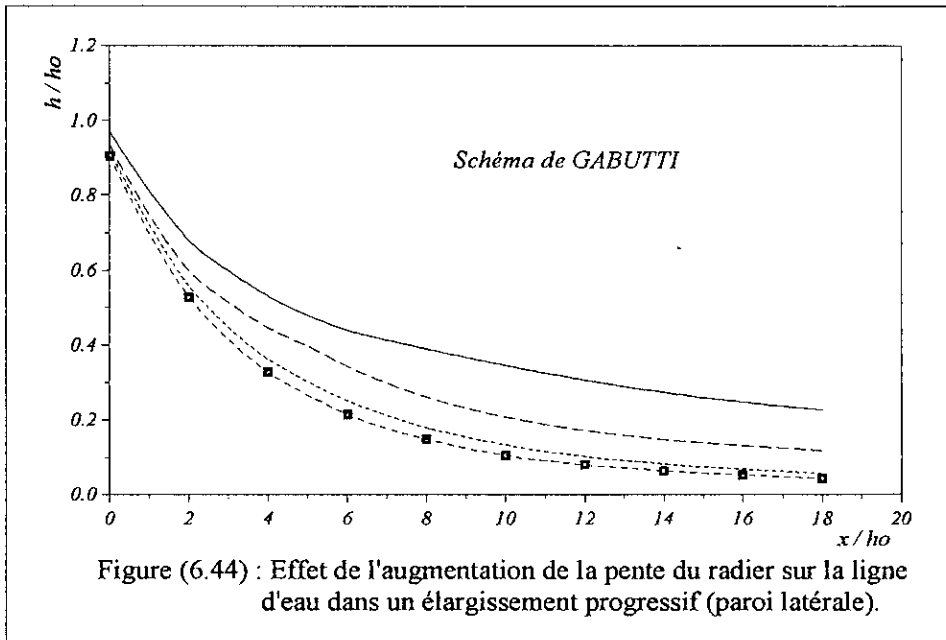
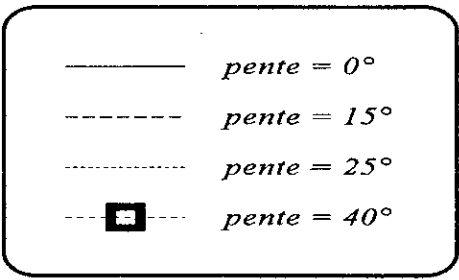
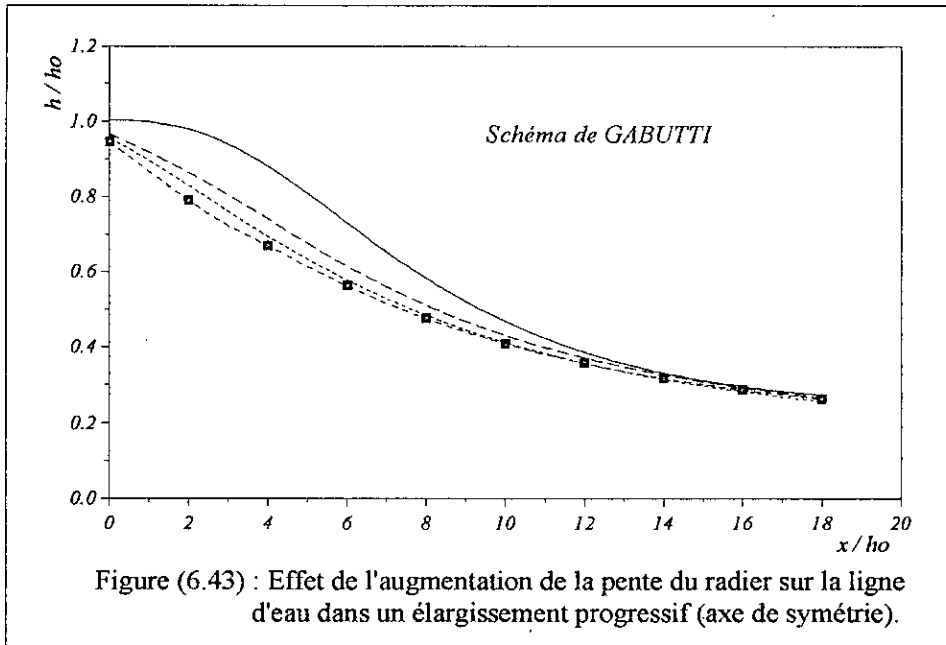
Comme il a été signalé dans les sections précédentes, la divergence des parois d'une telle transition est tellement progressive que la distribution des pressions est hydrostatique, et que la formation des ondes transversales est réduite.

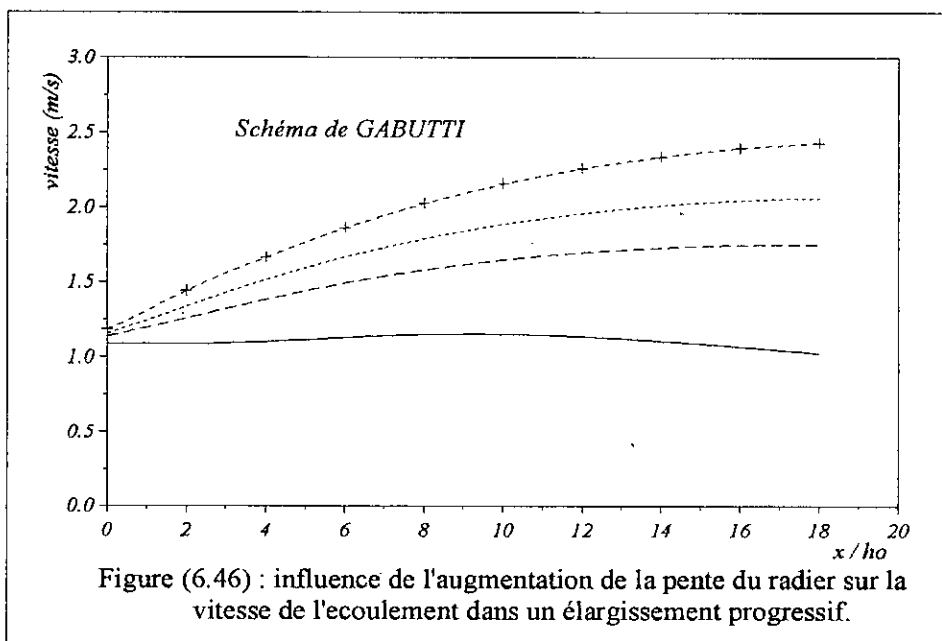
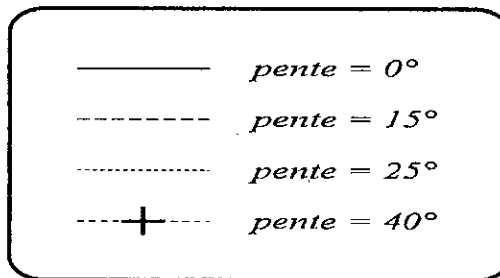
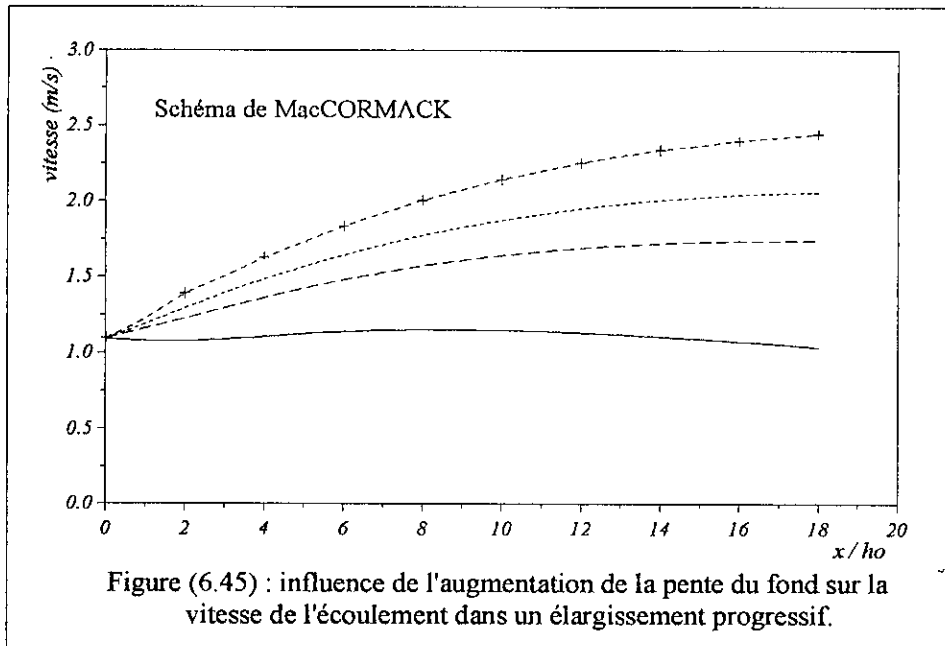
D'un autre côté, en fonction des résultats obtenus au niveau de la paroi latérale, et qui ont montré un rabaissement très important de la ligne d'eau, on constate que l'écoulement dans un élargissement pareil, avec des pentes appréciables a tendance à moins s'étendre latéralement.

Une transition bien conçue devra permettre dans la majorité des cas, d'éliminer les régions avec concentration d'écoulement et surtout les régions pratiquement sans écoulement, qui sont des zones de basses pressions causées par les effets de courbures avec un risque potentiel de cavitation. C'est d'ailleurs pour cela que les élargissements progressifs sont généralement peu ou non utilisables, en plus de leur coût trop élevé.

On notera finalement, que les résultats obtenus avec le schéma de MacCormack concordent bien avec ceux calculés avec le schéma de Gabutti. Ceci traduit en quelque sorte l'aptitude du modèle proposé à simuler les écoulements supercritiques à surface libre dans des canaux non prismatiques à forte pente, et ce malgré l'absence d'études expérimentales ou même numériques dans ce contexte, et qui nous auraient permis de faire sans doute d'autres constatations.







### 6.2.5. conclusion

La validation du modèle mathématique proposé avec deux schémas numériques (MacCormack et Gabutti) a été faite en premier sur l'écoulement dans un canal prismatique, possédant une pente de fond considérable ( $28^\circ$ ). Les résultats obtenus dans cette application, avec les deux schémas nous permettent facilement de conclure sur l'aptitude et la fiabilité du modèle en question.

Cette aptitude a été aussi vérifiée lors de l'étude d'un élargissement rectiligne et dont la pente de fond n'est pas vraiment appréciable. Mais les résultats obtenus sont bons dans l'ensemble, et s'approchent bien des mesures expérimentales que des résultats théoriques.

Une expérimentation numérique a été faite ensuite sur un écoulement supercritique traversant un convergent rectiligne et un divergent progressif, et dont la pente du radier fut augmentée jusqu'à  $40^\circ$ . Les résultats qu'on a obtenus avec les deux schémas aux différences finies utilisés dans cette thèse montrent un accord très satisfaisant entre eux. Malheureusement, l'absence d'études expérimentales ne nous permet pas dans un sens de voir l'appréciabilité de nos résultats.

Du point de vue purement numérique, on constate que le schéma de Gabutti donne d'excellents résultats pour un canal prismatique et un élargissement rectiligne avec une pente de fond presque nulle. Ce qui a été aussi remarqué dans l'élargissement progressif à faible pente. Par contre, le schéma de MacCormack donne de bons résultats dans un élargissement rectiligne avec une pente de fond accentuée.

Par ailleurs la concordance des résultats obtenus avec les deux schémas pour un rétrécissement rectiligne et un élargissement progressif à forte pente, nous laisse le choix libre quant à l'utilisation d'un tel schéma ou de l'autre. Le choix dépend dans ce cas d'autres paramètres, principalement de la souplesse de programmation.

***CONCLUSION***  
***GENERALE***

## *Conclusion générale*

L'intérêt accordé aux problèmes des écoulements supercritiques dans des canaux découverts, à travers les différents travaux de recherches relevés dans la littérature spécialisée dans ce domaine dénote l'importance que revêt ce sujet.

On a présenté dans ce travail, une étude sur les écoulements supercritiques traversant des canaux à ciel ouvert non prismatiques, à faible et forte pente. Ce type d'écoulement est très complexe, du moment qu'il engendre toujours des surfaces d'écoulement irrégulières et ondulées. Ces irrégularités représentent de grandes perturbations qui provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau. De telles ondes sont appelées "ondes transversales" ou par analogie avec la dynamique des gaz "ondes de choc".

Un modèle mathématique qui permet la simulation de ce phénomène a été élaboré en conséquence. Ce modèle obtenu par l'application des principes de conservation (masse-quantité de mouvement), est une généralisation des équations différentielles d'un écoulement graduellement varié en régime non permanent dans les canaux découverts, de Saint-Venant, avec deux dimensions spatiales et tient compte aussi de l'effet d'une pente de fond quelconque.

Par ailleurs, le modèle mathématique est un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, non linéaire, qui a rarement une solution théorique.

La résolution des équations du mouvement a été faite en utilisant deux schémas aux différences finies explicites du type prédicteur-correcteur, précis à l'ordre deux en espace et en temps ; en l'occurrence, les schémas de MacCormack et de Gabutti.

Une extrême attention doit être prise en compte lors de la discrétisation du domaine physique géométriquement complexe, car les équations hyperboliques sont particulièrement très sensibles ; chaque erreur qui s'introduit au niveau des frontières se propage automatiquement à travers la grille de calcul, ce qui mène dans la plupart des cas à de fortes instabilités. Pour cela, nous avons utilisé une transformation géométrique simple (mais efficace !) pour analyser notre problème, en convertissant le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire.

La majorité des schémas aux différences finies explicites entraînent par ailleurs de très grandes oscillations numériques près des discontinuités. Les ondes transversales représentent justement des discontinuités. Afin d'amortir ces oscillations, on a utilisé une procédure dont

le principe consiste à introduire un terme supplémentaire dit de "viscosité artificielle" dans les équations de base, et qui a la propriété d'être négligeable partout où la solution est régulière et permet par contre un lissage des singularités.

L'analyse d'un écoulement supercritique dans des transitions – rétrécissement, élargissement progressif – de très faible pente avec les schémas de MacCormack et de Gabutti a été traitée dans la première partie des applications.

Le calcul de la ligne d'eau le long des parois d'un convergent rectiligne symétrique donne des résultats satisfaisants avec les deux schémas numériques au niveau de la paroi latérale, et de moins bons résultats le long de l'axe médian du canal, où l'hypothèse d'une distribution hydrostatique des pressions n'est plus valide (présence de chocs). Par conséquent, le modèle peut être utilisé avec confiance dans la conception des parois latérales du canal.

Les résultats obtenus avec les schémas de MacCormack et de Gabutti dans l'étude d'un écoulement supercritique à travers un divergent progressif sont très satisfaisant aussi bien au niveau de l'axe de symétrie qu'au niveau de la paroi latérale du canal. L'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions est dans ce cas valide.

Nous avons remarqué aussi que les chocs, s'ils existent, sont bien pris en compte par le modèle ; il nous donne une bonne idée sur la position, la direction et la forme du choc.

Le modèle mathématique avec le schéma de MacCormack donne de bons résultats dans le cas d'un rétrécissement rectiligne à faible pente, alors que le modèle avec le schéma de Gabutti donne d'excellents résultats dans le cas d'un élargissement graduel.

Un modèle mathématique en régime non permanent a été utilisé pour obtenir des solutions à l'état permanent, en traitant la variable temps comme paramètre d'itération, et en laissant la solution converger vers l'état permanent. Le temps de convergence de l'écoulement vers l'état permanent déterminé avec les deux schémas numériques est d'environ 1.5 sec contre 3 sec obtenu par Bhallamudi et Chaudhry [15], soit une amélioration de 50%. Ceci justifie d'une part l'efficacité de cette technique et d'autre part l'aptitude du modèle à simuler les écoulements supercritiques dans des transitions de faible pente.

L'étude des écoulements supercritiques dans des canaux à géométrie variable à forte pente fut l'objectif de la seconde partie de l'expérimentation numérique.

La validation du modèle mathématique avec les deux schémas aux différences finies a été testée sur un écoulement supercritique dans un canal prismatique (coursier d'un évacuateur de crues). L'appréciabilité des résultats obtenus comparés avec les mesures



expérimentales affirme l'aptitude du modèle proposé, à simuler les écoulements à surface libre dans des canaux considérablement inclinés.

Le calcul de la ligne d'eau, le long de l'axe de symétrie d'un élargissement rectiligne symétrique avec variation de la pente de fond, donne des résultats acceptables et satisfaisants avec les deux schémas numériques. La valeur maximale de la pente n'est pas vraiment forte dans cette application ( $\approx 7^\circ$ ). Mais, en vue des résultats obtenus, on peut conclure sur la fiabilité du modèle en question. Le modèle mathématique avec le schéma de Gabutti donne d'excellents résultats pour une pente de fond nulle, alors que le schéma de MacCormack donne de bons résultats en augmentant la pente du radier.

Une diminution de la profondeur et une augmentation de la vitesse d'écoulement sont les principales conséquences engendrées par le passage d'un écoulement supercritique à travers un convergent rectiligne avec des pentes de fond très fortes. L'augmentation considérable de la vitesse entraîne le système d'ondes de choc plus loin à l'aval et empêche la formation des grands sommets d'ondes, qui existent toujours dans les transitions horizontales.

Dans la dernière application on a analysé un écoulement supercritique dans un divergent progressif à forte pente. Une pente forte conduit à un rabaissement de la hauteur d'eau et par suite à une accentuation de la vitesse. Le rabaissement de la profondeur est plus prononcé au niveau de la paroi latérale, où un danger de dépression peut persister.

Les résultats obtenus dans ces deux dernières applications en utilisant les schémas de MacCormack et de Gabutti sont dans l'ensemble identiques et semblables. Mais l'absence d'études expérimentales ou numériques dans des cas pareils, ne nous permet pas de conclure sur l'efficacité de ces résultats. Ceci n'enlève par ailleurs, en rien de la qualité des résultats obtenus.

A la lumière des résultats satisfaisants obtenus dans toutes les applications traitées dans le sixième chapitre de la thèse, nous pouvons dire que nous avons atteint le but que nous nous sommes fixé, à savoir, présenter un modèle mathématique capable de simuler les écoulements supercritiques dans des canaux à géométrie variable, à faible et forte pente. Ceci ne signifie pas que le problème est définitivement résolu ; il reste en effet beaucoup de travail à faire pour rendre ce modèle de plus en plus performant.

Par exemple, la prise en compte de l'effet d'une distribution non hydrostatique des pressions, des frottements, de l'entraînement d'air, de la couche limite, et autres ... A ce stade là, le modèle pourrait être considéré définitif et efficace.

Les schémas aux différences finies explicites du type prédicteur-correcteur (MacCormack et Gabutti) sont donc les mieux adaptés à résoudre les équations régissant

l'écoulement dans les transitions avec présence de chocs. Le choix du schéma à utilisé est cependant assez délicat, et dépend de plusieurs facteurs. En fonction des résultats obtenus dans toutes les applications, on propose l'utilisation du schéma de MacCormack comme schéma de résolution. Hormis la qualité des résultats obtenus avec ce schéma, sa souplesse de programmation par rapport à celui de Gabutti le rend aussi plus apte.

Finalement, on peut dire que, dans des sujets très divers, la modélisation par les équations aux dérivées partielles, suivie de l'analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour de la confrontation à l'expérience est devenue une démarche de base.

***REFERENCES***  
***BIBLIOGRAPHIQUES***

Références bibliographiques

- [1] ABBOTT, M. B., "*Computational hydraulics : Elements of the theory of free surface flow*", Ed. Pitman publishing limited, London, 1979.
- [2] ABBOTT, M. B., McCOWAN, A. D., and WARREN, I. R., "*Accuracy of short-wave numerical models*", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 110, No. 10, pp.1287-1301, October, 1984.
- [3] ABSI, R., RETIEB, S., BELHADJ, O., et BENMAMAR, S., "*Modélisation et simulation numérique des problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire*", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1994.
- [4] AGENCE NATIONALE DES BARRAGES, "*Etude d'avant-projet détaillé du barrage de l'oued CHERF*", Modèle réduit hydraulique, Rapport Partiel No. 11, 1987.
- [5] ALHAMID, A. A., and NEGM, A. M., "*Depth ratio of hydraulic jump in rectangular stilling basins*", Jour. of Hydr. Research, vol. 34, No. 5, pp. 597-604, May, 1996.
- [6] AMGHAR, D., MORSALI, M., et BELHADJ, O., "*Modélisation par éléments finis des écoulements à surface libre dans les transitions*", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1995.
- [7] BAGGE, G., and HERBICH, J. B., "*Transitions in supercritical open-channel flow*", Jour. of Hydr. Div. ASCE, vol. 93, No. Hy5, pp. 23-41, September, 1967.
- [8] BALTZER, R. A., and LAI, C., "*Computer simulation of unsteady flows in waterways*", Jour. of Hydr. Div., ASCE, vol. 94, No. Hy4, pp.1083-1117, July, 1968.
- [9] BANAT, A., "*Finite difference approximations*", Polycopier de méthodes numériques, 1990.
- [10] BARANGER, J., "*Introduction à l'analyse numérique*", Ed. Hermann, Paris, 1977.
- [11] BAUER, T., "*Cours d'hydraulique à surface libre : les réseaux d'assainissement et ouvrages annexes*", IUT Génie Civil, option TP, France, 1991.

- [12] **BENATSOU, H., BOUZID, M. K., et BELHADJ, O.**, *"Analyse d'un écoulement instationnaire –DAM BREAK–"*, Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1992.
- [13] **BENAYADA, L.**, *"Construction d'une solution analytique et critique d'algorithmes numériques afférents aux équations de SAINT VENANT en vue d'application aux écoulements transitoires sur fond mobile"*, Thèse de Doctorat, INPT, Toulouse, 1994.
- [14] **BERREKSI, A., BOUHADJI, A., et BELHADJ, O.**, *"Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transitions"*, Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1993.
- [15] **BHALLAMUDI, S. M., and CHAUDHRY, M. H.**, *"Computation of flows in open channel transitions"*, Jour. of Hydr. Research, vol. 30, No. 1, pp. 77-93, January, 1992.
- [16] **BOISSON, C., GAY, B., et GOTTELAND, M.**, *"Différences finies : Quelques applications en mécanique des fluides"*, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [17] **BRATER, E. F., and KING, H. W.**, *"Handbook of hydraulics : For the solution of hydraulic engineering problems"*, Ed. Mc Graw-Hill, New York, 1976.
- [18] **CARLIER, M.**, *"Hydraulique générale et appliquée"*, Ed. Eyrolles, Paris, 1972.
- [19] **CHAUDHRY, M. H.**, *"Applied hydraulic transients"*, Ed. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.
- [20] **CHOW, V. T.**, *"Open-channel hydraulics"*, Ed. MacGraw-Hill Book Co., New York, 1959.
- [21] **CUNGE, J. A.**, *"Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux"*, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- [22] **DAMMULLER, D. C., BHALLAMUDI, S. M., and CHAUDHRY, M. H.**, *"Modeling of unsteady flow in curved channel"*, Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 115, No. 11, pp. 1479-1495, November, 1989.
- [23] **DAUTRAY, R., et LIONS, J. L.**, *"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques"*, Ed. Masson, Paris, 1988.

- [24] DAVIS, C. V., and SORENSEN, K. E., *"Handbook of applied hydraulics"*, Ed. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [25] DOUGLAS, J. F., GASIOREK, J. M., and SWAFFIELD, J. A., *"Fluid mechanics"*, Ed. Essex, Grande Bretagne, 1985.
- [26] ENGELUND, F., and MUNCH-PETERSON, J., *"Steady flow in contracted and expanded rectangular channels"*, La Houille Blanche, vol. 8, No. 4, pp. 464-474, 1953.
- [27] EUVRARD, D., *"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Différences finies, Eléments finis, Méthodes des singularités"*, Ed. Masson, Paris, 1990.
- [28] FENNEMA, R. J., and CHAUDHRY, M. H., *"Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks"*, Water Resources Research, vol. 22, No. 13, pp. 1923-1930, 1986.
- [29] FENNEMA, R. J., and CHAUDHRY, M. H., *"Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows"*, Jour. of Hydr. Research, vol. 27, No. 3, pp. 321-332, March, 1989.
- [30] FENNEMA, R. J., and CHAUDHRY, M. H., *"Explicit methods for 2-D transient free-surface flows"*, Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 116, No. 8, pp. 1013-1034, August, 1990.
- [31] FOX, R. W., and McDONALD, A. T., *"Introduction to fluid mechanics"*, Ed. Siversion, John Wiley and Sons, INC., New York, 1994.
- [32] GABUTTI, B., *"On two upwind finite-difference schemes for hyperbolic equations in non-conservative form"*, Computers and Fluids, vol. 11, No. 3, pp. 207-230, 1983.
- [33] GARCIA, R., and KAHAWITA, R. A., *"Numerical solution of the ST. VENANT equations with the MacCORMACK finite-difference scheme"*, Inter. Jour. for Num. Meth. in Fluids, vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- [34] GODOUNOV, S., et RIABENKI, V., *"Schémas aux différences"*, Ed. OPU, Alger, 1987.

- [35] GRAF, W. H., et ALTINAKAR, M. S., "Hydraulique fluviale", Tome 1 : « *Ecoulement permanent uniforme et non uniforme* », Ed. Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne, 1993.
- [36] GRAF, W. H., et ALTINAKAR, M. S., "Hydraulique fluviale", Tome 2 : « *Ecoulement non permanent et phénomène de transport* », Ed. Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne, 1993.
- [37] HACHEMI, M. A, et BELHADJ, O., "Analyse du coup de belier par trois méthodes numériques : MacCormack, Lambda, Gabutti", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1994.
- [38] HADJ-RABIÀ, N., "Contribution à l'étude d'un modèle numérique bidimensionnel de transport de sédiments en suspension", Thèse de Magister, ENP, Alger, 1994.
- [39] HAGER, W. H., and ALTINAKAR, M. S., "Infinitesimal cross-wave analysis", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol.110, No. 8, pp.1145-1150, August, 1984.
- [40] HAGER, W. H., and BRETZ, N. V., "Discussion to : simplified design of contractions in supercritical flow", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 113, No. 3, pp. 422-425, March, 1987.
- [41] HAGER, W. H., "Supercritical flow in channel junctions", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 115, No. 5, pp. 595-616, May, 1989.
- [42] HAGER, W. H., "Spillways. shockwaves and air entrainment", Review and recommendation , Commission internationale des grands Barrages, CIGB, bulletin 81, Paris, 1992.
- [43] HAGER, W. H., and MAZUMDER S. K., "Supercritical flow at abrupt expansions", Proc. Inst. of Civ. Engrs., -Water Maritime and Energy, London-, 96, pp. 153-166, September, 1992.
- [44] HAGER, W. H., and MAZUMDER S. K., "Flow choking in an expanding bucket", International water power and dam construction, vol. 45, No. 4, pp. 50-52, April, 1993.
- [45] HAGER, W. H., SCHWALT, M., JIMENEZ, O., and CHAUDHRY, M. H., "Supercritical flow near an abrupt wall deflection", Jour. Of Hydr. Research, vol. 32, No. 1, pp. 103-118, January, 1994.

- [46] HEGGEN, R. J., "*Choke angle in supercritical contractions*", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 114, No. 4, pp. 441-444, April, 1988.
- [47] HERBICH, J. B., and WALSH, P., "*Supercritical flow in rectangular expansions*", Jour. of Hydr. Div., ASCE, vol. 98, No. 9, pp. 1691-1700, September, 1972.
- [48] HOFFMANN, K. A., "*Computational fluid dynamics for engineers*", Engineering Education System, USA, 1989.
- [49] HUG, M., "*Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétique*", Ed. Eyrolles, Paris, 1975.
- [50] IPPEN, A., T., and DAWSON, J., H., "*Design of channels contractions*", Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs., Vol. 116, pp. 326-346, 1951.
- [51] JAUMOTTE, A. L., "*Chocs et ondes de choc*", Ed. Masson, Paris, 1973.
- [52] JIMENEZ, O. F., and CHAUDHRY, M. H., "*Computation of supercritical free-surface flows*", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 114, No. 4, pp. 377-395, April, 1988.
- [53] KATAPODES, N. D., and STRELKOFF, T., "*Computing two-dimensional DAM-BREAK flood waves*", Jour. of Hydr. Div., ASCE, vol. 104, No. HY9, pp. 1269-1288, September, 1978.
- [54] KATAPODES, N. D., "*Two-dimensional surges and shocks in open channels*", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 110, No. 6, pp. 794-812, June, 1984.
- [55] LAI, C., "*Computer simulation of two-dimensional unsteady flows in estuaries and embayments by the method of characteristics*", Water Resources Investigations 77-85, U. S. Geological Survey, August, 1977.
- [56] LAROUÏ, D., BILEK, A., et KAHAWITA, R., "*Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode simple modifiée de Patankar*", Thèse de Magister, ENP, Alger, 1994.
- [57] MacCORMACK, R. W., "*Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer*", Lectures notes in physics, Springer-Verlag, vol. 8, pp. 151-163, 1971.



- [58] MASSEY, B. S., *"Mechanics of fluids"*, Ed. Van Nostrand Reinhold Company, Grande Bretagne, 1983.
- [59] MAZUMDER, S. K., and HAGER, W. H., *"Supercritical expansion flow in Rouse modified and reversed transitions"*, Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 119, No. 2, pp. 201-218, February, 1993.
- [60] MAZUMDER, S. K., and HAGER, W. H., *"Comparison between various chute expansions"*, IE (I) Journal – CV, vol. 75, pp. 186-192, February, 1995.
- [61] MORETTI, G., *"The  $\lambda$  - scheme"*, Computers and Fluids, vol. 7, No. 3, pp. 191-205, 1979.
- [62] NOUGIER, J. P., *"Méthodes de calcul numérique"*, Ed. Masson, Paris, 1991.
- [63] OBLED, C. H., *"Analyse numérique"*, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989.
- [64] OUKACHA, M., LECHEHEB, M., BILEK, A., BERREKSI, A., et BENMAMAR, S., *"Détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et à forte pente"*, Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, Alger, 1996.
- [65] PEYRET, R., and TAYLOR, T. D., *"Computational methods of fluid flow"*, Computational Physics, Springer Verlag, New York, 1983.
- [66] PONCE, V. M., and YABUSAKI, S. B., *"Modeling circulation in depth-averaged flow"*, Jour. of Hydr. Div., ASCE, vol. 107, No. HY11, pp. 1501-1518, November, 1981.
- [67] RAHMAN, M., and CHAUDHRY, M. H., *"Computation of flow in open-channel transitions"*, Jour. of Hydr. Research, vol. 35, No. 2, pp. 243-255, 1997.
- [68] RAJAR, R., and CETINA, M., *"Two-dimensional DAM-BREAK flow in steep curved channels"*, Proc. XX Congress of IAHR, Inter. Assoc. for Hydr. Research, vol. 11, pp. 571-579, 1983.
- [69] REINAUER, R., and HAGER, W. H., *"Supercritical flow behind chute piers"*, Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 120, No. 11, pp. 1292-1308, November, 1994.
- [70] REINAUER, R., *"Kanalkontraktionen bei schiessendem abfluss und stosswellenreduktion mit diffraktoren"*, VAM, Mitteilungen 140, Zürich, 1995.

- [71] ROUSE, H., BHOOTA, B. V., and HSU, E. V., "Design of channels expansions", Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. Vol. 116, pp. 347-363, 1951.
- [72] SABERSKY, R. H., ACOSTA, A. J., and HAUPTMANN, E. G., "Fluid flow : A first course in fluid mechanics", Ed. MacMillan, New York, 1989.
- [73] SCHWALT, M., and HAGER, W. H., "Shock pattern at abrupt wall deflection", Proceedings Environmental Engineering Sessions Water Forum'92, pp. 231-236, Baltimore, Maryland, August, 1992.
- [74] SCHWALT, M., and HAGER, W. H., "Experiments to supercritical junction flow", Experiments in fluids, vol. 18, pp. 429-437, 1995.
- [75] SCOUARNEC, C., "Algèbre spectrale", Ed. Publisud, Toulouse, 1987.
- [76] SINNIGER, R. O., et HAGER, W. H., "Constructions hydrauliques : Ecoulements stationnaires", Ed. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1989.
- [77] STURM, T. W., "Simplified design of contractions in supercritical flow", Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, vol. 111, No. 5, pp. 871-875, May, 1985.
- [78] TISON, L. J., "Cours d'hydraulique : Théorie des cours d'eau en mouvement permanent, phénomènes de filtration", Université de Grand, Belgique, 1953.
- [79] VISCHER, D. L., and HAGER, W. H., "Reduction of shockwaves : a typology", The International Journal on Hydropower and Dams, vol. 1, No. 4, pp. 24-30, July, 1994.
- [80] WARMING, R. F., and HYETT, B. J., "The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite - difference methods", Jour. of Comput. Physics, vol. 14, No. 2, pp. 159-179, 1974.
- [81] YANG, J. Y., and HSU, C. A., "Computations of free surface flows", Part 2 : « Two-dimensional unsteady bore diffraction », Jour. of Hydr. Research, vol. 31, No. 3, pp. 403-413, 1993.
- [82] YEN, B. C., "Open-channel flow equations revisited", Jour. of the Engrg. Mech. Div., ASCE, vol. 99, No. EM5, pp. 979-1009, October, 1973.