

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Electrique

THESE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Pour l'obtention du Diplôme de

MAGISTER EN ELECTROTECHNIQUE

Option : MACHINES ELECTRIQUES

Présentée Par

MEZOUAR Abdelkader

Ingénieur d'Etat, ENP

THEME

**ANALYSE ET CONTROLE
DES SYSTEMES
SINGULIEREMENT PERTURBES :
APPLICATION AUX MODELES DES
MACHINES A COURANT ALTERNATIF**

Soutenue publiquement le 04-07-1999 devant le jury composé de :

MM.

N. LOUAM	Professeur, ENP	Président
O. TOUHAMI	Maître de Conférences, ENP	Rapporteur
R. IBTIOUEN	Professeur, ENP	Rapporteur
M. TADJINE	Docteur d'Etat, ENP	Examineur
S. MEKHTOUB	Chargé de Cours, ENP	Examineur
E. M. BERKOUK	Docteur d'Etat, ENP	Examineur

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de ma très chère grand-mère ;

Ma très chère mère ;

Mon très cher père ;

Toutes mes sœurs ;

Tous mes frères ;

Toute ma famille ;

Tous mes amis ;

.....et à vous.

.... *AVANT-PROPOS*

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du laboratoire de Machines Electriques du Département de Génie Electrique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, sous la direction conjointe de Messieurs **O. TOUHAMI**, Maître de conférences à l'ENP et **R. IBTIOUEN**, Professeur à l'ENP.

Je tiens, en tout premier temps, à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mes promoteurs pour l'aide efficace et les conseils précieux qu'ils n'ont cessé de me prodiguer, ainsi que le soutien et les encouragements qu'ils m'ont apporté le long de ce travail.

Je tiens, également à remercier très vivement Monsieur **N. LOUAM**, Professeur à l'ENP, pour avoir examiné ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes très vifs remerciements vont aussi à Monsieur **M. TADJINE**, Docteur d'Etat à l'ENP, pour sa contribution dans ce travail par ses remarques pertinentes et constructives et pour sa documentation intéressante.

Je remercie très vivement Monsieur **S. MEKTOUB**, Chargé de cours à l'ENP, pour avoir examiné ce travail et pour l'intérêt qu'il a porté à ce mémoire en me faisant l'honneur de participer à ce jury.

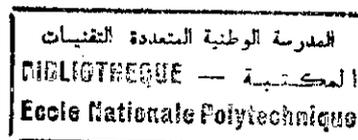
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers Monsieur **E. M. BERKOUK**, Docteur d'Etat à l'ENP, pour avoir examiné ce travail et pour l'attention particulière qu'il a porté à ce travail en acceptant de faire partie du jury d'examen malgré ses occupations.

Mes remerciements vont également à mes camarades **M. BESSAAD**, **M. LARABI** et **Y. AMARA** pour l'aide morale et matérielle qu'ils m'ont apporté pour réaliser ce travail.

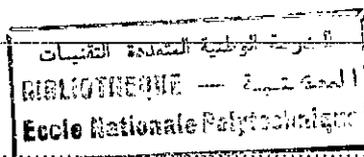
Que tout les enseignants qui ont contribué à ma formation, depuis la première classe de primaire jusqu'à aujourd'hui, reçoivent ma gratitude et en particulier ceux du département de Génie Electrique de l'ENP.

Sans oublier d'exprimer mes remerciements à tous mes amis chacun avec son nom et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

SOMMAIRE



INTRODUCTION GENERALE	1
 CHAPITRE I : TECHNIQUE DES PERTURBATIONS SINGULIERES	
I. 1. INTRODUCTION	4
I. 2. THEORIE DES PERTURBATIONS ET DE LA MOYENNE.....	5
I. 3. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES	6
I. 4. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERS APPLIQUEE AUX SYSTEMES NON LINEAIRES	9
I. 5. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES APPLIQUEE AUX MODELES CONTINUS LINEAIRES	13
I. 5. 1. Calcul des modèles réduits lent et rapide	14
I. 5. 2. Application.....	17
I. 5. 2. 1. <i>Sous modèle lent</i>	17
I. 5. 2. 2. <i>Sous modèle rapide</i>	17
I. 5. 2. 3. <i>Interprétation</i>	20
I. 6. CONCLUSION.....	20
 CHAPITRE II : COMMANDE MULTIECHELLES DE TEMPS DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES	
II. 1. INTRODUCTION.....	21
II. 2. COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES	22
II. 2. 1. Système réduit lent	23
II. 2. 2. Système réduit lent	24
II. 2. 3. La commande composée	25
II. 3. PROPRIETES DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES.....	25
II. 3. 1. Stabilité.....	25
II. 3. 2. Commandabilité et Observabilité	27



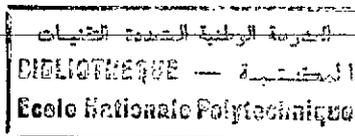
II. 4. COMMANDE LINEAIRE COMPOSEE.....	28
II. 4. 1. Retour d'état linéaire.....	28
II. 4. 2. Retour de sortie et observateur.....	29
II. 5. CONCLUSION.....	31

CHAPITRE III : DECOMPOSITION GEOMETRIQUE PAR LES CERCLES DE GERSCHGORIN

III. 1. INTRODUCTION.....	32
III. 2. IDENTIFICATION GEOMETRIQUE DES DYNAMIQUES.....	32
III. 2. 1. Cercles de Gerschgorin.....	32
III. 2. 2. Application.....	34
III. 2. 2. 1. Cas d'un modèle linéaire.....	34
III. 2. 2. 2. Cas d'un modèle non linéaire.....	35
III. 3. TRANSFORMATIONS MODALES.....	36
III. 3. 1. Changement de tailles des rayons des cercles.....	36
III. 3. 2. Déplacement des centres des cercles.....	38
III. 4. REGROUPEMENT ET SEPARATION DES DYNAMIQUES D'UN SYSTEME LINEAIRE.....	39
III. 4. 1. Etape 1 (Réorganisation du vecteur d'état).....	39
III. 4. 2. Etape 2 (Séparation des dynamiques).....	39
III. 5. APPLICATION.....	40
III. 5. 1. Séparation des dynamiques.....	40
III. 5. 1. Application de la technique des perturbations singulières.....	41
III. 5. 1. 1. Modèle réduit lent.....	41
III. 5. 1. 2. Modèle réduit rapide.....	41
III. 6. CONCLUSION.....	42

CHAPITRE IV : MISE SOUS FORME STANDARD SINGULIEREMENT PERTURBEE DES MODELES DES MACHINES A COURANT ALTERNATIF

IV. 1. INTRODUCTION.....	43
IV. 2. APPLICATION AUX MODELES DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	44
IV. 2. 1. Le problème de la dynamique.....	44
IV. 2. 2. Les Modes Electromagnétiques.....	44



IV. 2. 3. Le Mode Electromécanique	47
IV. 2. 4. Modèles d'état de la machine asynchrone	50
IV. 2. 4. 1. <i>Modèle d'état de la machine en (α, β)</i>	50
IV. 2. 4. 2. <i>Modèle d'état de la machine en (d, q)</i>	50
IV. 2. 5. Mise en évidence de l'existence de deux dynamiques électromagnétiques	50
IV. 2. 6. Séparation des dynamiques en (d, q) par les cercles de Gerschgorin	54
IV. 2. 6. 1. <i>Séparation des dynamiques pour les petites vitesses</i>	54
IV. 2. 6. 2. <i>Séparation des dynamiques électromagnétiques pour des vitesses quelconques</i>	56
IV. 2. 6. 3. <i>Mise sous la forme standard singulièrement perturbée</i>	64
IV. 2. 7. Modèles réduits en repère (d, q)	65
IV. 2. 7. 1. <i>Modèle réduit lent</i>	65
IV. 2. 7. 2. <i>Modèle réduit rapide</i>	65
IV. 2. 8. Séparation en (α, β) par les cercles de Gerschgorin	66
IV. 2. 8. 1. <i>Calcul des valeurs propres</i>	66
IV. 2. 8. 2. <i>Séparation des modes électromagnétiques</i>	67
IV. 2. 8. 3. <i>Mise sous la forme standard singulièrement perturbée</i>	74
IV. 2. 9. Modèles réduits de la machine asynchrone en repère (α, β)	75
IV. 2. 9. 1. <i>Modèle réduit lent</i>	75
IV. 2. 9. 2. <i>Modèle réduit rapide</i>	75
IV. 2. 9. 3. <i>Modèles réduits en flux et en courants</i>	75
IV. 2. 10. Simulations et interprétations	77
IV. 3. APPLICATION AU MODELE DE LA MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE ALIMENTEE EN TENSION	82
IV. 3. 1. <i>Modèle d'état de la machine synchrone</i>	82
IV. 3. 2. <i>Mise en évidence des différentes dynamiques</i>	82
IV. 3. 3. <i>Découplage géométrique des modes par application des cercles de Gerschgorin</i>	83
IV. 3. 4. <i>La mise sous forme standard singulièrement perturbée</i>	85
IV. 3. 5. <i>Mise en équations des modèles réduits</i>	86
IV. 3. 5. 1. <i>Modèle réduit lent</i>	87
IV. 3. 5. 2. <i>Modèle réduit rapide</i>	87
IV. 3. 5. 3. <i>Grandeurs réelles</i>	87
IV. 4. CONCLUSION	94

**CHAPITRE V : CONTROLE PAR MODES GLISSANTS DES SYSTEMES
 SINGULIEREMENT PERTURBES**

V. 1. INTRODUCTION.....	95
V. 2. OBSERVATEUR NON-LINEAIRE DE TYPE MODES GLISSANTS.....	96
V. 3. CONTROLE PAR MODE DE GLISSEMENT POUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES.....	97
V. 3. 1. Synthèse des commandes lente et rapide	98
V. 3. 2. Commande composée	101
V. 4. OBSERVATEUR DE TYPE MODES GLISSANTS POUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES.....	102
V. 4. 1. Synthèse de l'observateur.....	103
V. 4. 2. Commande composée avec observateur de type modes glissants	105
V. 5. OBSERVATEUR DE TYPE MODES GLISSANTS D'UNE MACHINE ASYNCHRONE A MODELE NON-LINEAIRE SINGULIEREMENT PERTURBE ...	107
V. 5. 1. Modèle de la machine	107
V. 5. 1. Modèle singulièrement perturbé de la machine	108
V. 5. 2. Observateur non-linéaire de type modes glissants	109
V. 6. CONTROLE MULTI-ECHELLES DE TEMPS AVEC OBSERVATEUR	113
V. 6. 1. Les dynamiques rapides	115
V. 6. 2. Les dynamiques lentes	115
V. 7. SIMULATIONS.....	116
V. 8. CONCLUSION.....	117
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	126
BIBLIOGRAPHIE.....	128

ANNEXE A : THEORIE DES PERTURBATIONS ET METHODE DE LA MOYENNE

A. 1. THEORIE DES PERTURBATIONS.....	131
A. 2. METHODE DE LA MOYENNE.....	133

**ANNEXE B : RAPPELS SUR LA MODELISATION DES MACHINES A COURANT
 ALTERNATIF**

B. 1. TRANSFORMATION DE PARK	136
B. 2. TRANSFORMATION DE CLARKE.....	137

B. 3. REPRESENTATION D'ETAT DE CLARKE DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	137
B. 4. REPRESENTATION D'ETAT DE PARK DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	138
B. 5. REPRESENTATION D'ETAT DE PARK DE LA MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE ALIMENTEE EN TENSION	142

ANNEXE C : CONTROLE PAR MODES DE GLISSEMENT

C. 1. INTRODUCTION.....	143
C. 1. 1. Systèmes à structure variable	143
C. 1. 2. Théorie des modes glissants	144
C. 2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR MODES DE GLISSEMENT	145
C. 2. 1. Choix de la surface de glissement	145
C. 2. 1. Conditions de convergence.....	145
C. 2. 3. Calcul de la commande	147
C. 2. 4. Définition des grandeurs de commande	147
C. 3. APPLICATION DE LA COMMANDE DANS L'ESPACE D'ETAT.....	148
C. 4. ELIMINATION DU PHENOMENE DE CHATTERING	150

INTRODUCTION GENERALE

Les trois dernières décennies sont caractérisées par un fort développement de la théorie de l'analyse et de la commande des systèmes dont les dynamiques sont régies par des équations différentielles non linéaires. Dans plusieurs cas, les modèles mathématiques obtenus sont fortement non-linéaires et présentent des dynamiques différentes ou d'ordre élevé. L'analyse et le contrôle de tels systèmes peuvent s'avérer difficiles. En effet, dans de nombreux cas, on procède à une phase de simplification dans laquelle le facteur déterminant est le rapport entre le coût d'exploitation du modèle (en temps de calcul notamment) et la qualité de fonctionnement.

Dans ce contexte, deux grandes classes de méthodes de simplification de modèles peuvent être définies [Bor-92]. La première classe consiste à effectuer sur le modèle du système des simplifications d'ordre *structural*, correspondant à une modification dans le type du modèle utilisé. Ainsi, on peut donner comme exemple : Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement ou discrétisation d'une équation d'état d'un système continu, ... etc.

La deuxième classe de méthodes a pour principe de base de ne pas modifier le type de modèle utilisé pour représenter le système global, mais de *réduire* l'ordre du modèle ou de *découpler* les variables pour aboutir à des sous-modèles d'ordre réduit. Dans ce cadre, une classification entre les méthodes apparaît suivant que le modèle de départ est :

- une fonction de transfert,
- une équation d'état linéaire,
- une équation d'état non-linéaire.

Le but de ces méthodes de simplification est de fournir à l'utilisateur un modèle de système plus simple qui lui permettra de résoudre, avec une quantité limitée de calculs, des problèmes tels que les lois de commande, la détermination et la construction d'observateurs, ... etc.

Comme exemple pratique, on peut citer le domaine de l'Electrotechnique où plusieurs techniques simplifiées de commande ont été proposées pour l'analyse et la commande de tels systèmes, dont la plupart sont issues du principe dit « La commande vectorielle ».

Les progressions récentes dans l'emploi de la technique des perturbations singulières et celles des deux échelles de temps (Two-Time-Scale) sur les systèmes linéaires révèlent les tendances des futures recherches vers la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes non linéaires, stochastiques et complexes à structure variable. Les propriétés basées sur la notion de la multi-échelles de temps [Dje-96], [Gue-92], [Im-81], [Tou-94] et plus spécialement la méthode des perturbations singulières ont souvent lieu naturellement dues à la présence d'un petit paramètre parasite, typiquement petite constante de temps, masse, ... etc. Dans le cas général, ces propriétés sont dues à la présence d'un grand gain de retour d'état ou de sortie, ou de faible couplage.

La méthode des perturbations singulières concernant aussi le problème d'approximation des valeurs initiales et de couche limite ainsi que celui de stabilité. Ces caractéristiques et propriétés étaient largement traitées dans les années quatre-vingt [Kha-79], [Sak-82], où la technique des

perturbations singulières était d'abord devenue un moyen pour simplifier les calculs des trajectoires optimales. Peu après, il était connu que les perturbations singulières sont présentes dans la plupart des schémas classiques et modernes du contrôle basé sur les modèles d'ordre réduit (commande vectorielle), qui négligent les grandes fréquences des parasites ou les phénomènes et les dynamiques rapides non modélisables [Kok-86], [Cor-93].

Cette reconnaissance conduit au développement des méthodes à plusieurs échelles de temps pour des classes spéciales d'applications englobant le retour d'état, retour de sortie, filtres et observateurs. En outre, la méthode des perturbations singulières offre la simplicité pour l'analyseur des systèmes à grand gain et des systèmes à grand gain de retour, et facilite l'interprétation des autres techniques de réduction d'ordre du modèle [Cor-92].

Dans les années récentes, la méthode des perturbations singulières était appliquée à la modélisation et au contrôle des réseaux dynamiques et à certaines classes de systèmes multi-échelles de temps. Plus récemment, cette technique était introduite en Electrotechnique dans la modélisation, l'identification, l'analyse et le contrôle des machines électriques [Ahm-81], [Dje-96], [Gue-92], [Tou-94]. La souplesse de l'emploi de la méthode des perturbations singulières est due à l'utilisation des propriétés des différentes échelles de temps qui sont communes dans les systèmes linéaires et non-linéaires [Kok-86], [Gra-95], [Nai-88].

La première difficulté qui apparaît lorsqu'on veut découpler les variables réside dans l'identification des variables lentes et rapides. Ceci peut être effectué dans certains cas directement grâce à des méthodes géométriques (Cercles de Gerschgorin, Ovale de Cassini) ou par des méthodes analytiques. En particulier, celle basée sur les cercles de Gerschgorin permet de localiser les valeurs propres sur le plan complexe dans des faisceaux de cercles : Le regroupement des modes est immédiat dès que des cercles sont disjoints ; et a posteriori, le nombre de modes lents et rapides est déterminé.

Les travaux que nous présentons dans cette thèse peuvent faire l'objet de deux grandes parties. La première, concerne la mise sous forme standard singulièrement perturbée des modèles des machines à courant alternatif où nous avons appliqué l'approche géométrique par les cercles de Gerschgorin pour le découplage des variables lentes et rapides. La deuxième partie est consacrée au problème de contrôle multi-échelles de temps. Cette partie présente une nouvelle méthode de contrôle qui combine la technique des perturbations singulières et la méthode de contrôle par les modes glissants. En effet, nous avons développé une commande à deux échelles de temps pour un modèle d'une machine asynchrone sous sa forme standard singulièrement perturbée. Cette commande est munie d'un observateur de type modes glissants pour l'observation des flux magnétiques.

Notre choix sur le contrôle par les modes glissants est justifié par les avantages incontestables que possède ce type de contrôle [Dra-92], [Utk-93]. L'intérêt de ce type de contrôle réside dans la simplicité de la solution apportée aux problèmes de réalisation d'un contrôle de qualité pour les processus à paramètres variables ou mal identifiés. Ainsi, l'analyse des systèmes par ce type de contrôle se justifie par le double avantage :

- La mise en œuvre de tels systèmes ne nécessite pas une identification paramétrique très précise du processus à contrôler.
- La possibilité de procéder à la commande des systèmes dont les paramètres varient dans le temps et dans de larges proportions.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la technique des perturbations singulières. Nous nous sommes limités à détailler cette méthode pour les systèmes continus linéaires et non-linéaires. En effet, nous avons appliqué cette technique sur deux exemples de structures différentes pour mettre en évidence la source physique du terme parasite ε et pour rendre la décomposition multi-échelles de temps plus apparente.

Le deuxième chapitre concerne l'étude du problème de contrôle multi-échelles de temps des systèmes singulièrement perturbés. Dans ce cas, les différentes vitesses d'évolutions (diverses échelles de temps) sont exploitées pour réaliser des schémas de commande multi-échelles de temps. L'utilisation de cette technique de contrôle est justifiée par la physique du procédé à contrôler. L'approche par la *variété intégrale* est utilisée pour l'analyse des systèmes singulièrement perturbés. Elle conduit à des schémas de *commande composée* (à deux échelles de temps). Cette commande composée est une extension à une classe particulière des systèmes non-linéaires singulièrement perturbés (machines à courant alternatif), de la technique déjà utilisée dans le cas linéaire. A la fin de ce chapitre, on effectue un résumé de très nombreux travaux relatifs à l'application de la technique des perturbations singulières aux procédures du contrôle.

L'utilisation correcte de la technique des perturbations singulières pour la réduction des modèles singulièrement perturbés requière l'identification et la séparation des différentes dynamiques du système. Pour ce faire, nous avons présenté dans le troisième chapitre, une approche géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin qui répond à ce besoin. Cette méthode donne une bonne sélection des variables lentes et rapides. Cependant, cette dernière nécessite une forme spéciale de la matrice d'état qui doit être à diagonale dominante. Pour ce la, nous avons encore présenté quelques concepts mathématiques des transformations modales.

Dans le quatrième chapitre, nous avons appliqué les techniques mathématiques du chapitre précédent (cercles de Gerschgorin et transformations modales) sur les modèles singulièrement perturbés des machines à courant alternatif, pour la mise sous forme standard singulièrement perturbée. Comme les matrices d'états des modèles des machines à courant alternatif sont non-linéaires, la mise sous forme standard singulièrement perturbée a nécessité l'utilisation des transformations paramétrées en fréquence (ou glissement) ou en angle de rotation. Ensuite, nous avons appliqué la technique des perturbations singulières sur les modèles obtenus pour développer des modèles réduits. Enfin, quelques modèles simplifiés sont utilisés pour une simulation en boucle ouverte pour tester l'utilité de la décomposition multi-échelles de temps.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous nous sommes intéressés à un problème plus pratique, c'est à dire à un problème de contrôle multi-échelles de temps de la machine asynchrone par la technique des modes glissants. La détermination des lois de commande est basée sur les modèles réduits lent et rapide développés par application de la technique des perturbations singulières sur le modèle original. Après un rappel sur les observateurs non linéaires du type modes glissants et sur la méthodologie des perturbations singulières, nous sommes passés à la représentation du modèle de la machine asynchrone dans le référentiel diphasé tournant (d, q) sous la forme d'un système singulièrement perturbé. La synthèse de l'observateur du type modes glissants et celle de la commande à deux échelles de temps sont calculées sur la base de l'état mesuré partiellement et de l'état estimé par l'observateur. Dans ce chapitre, il est très intéressant de signaler que nous avons procédé à l'idée des perturbations singulières forcées.

Enfin, le travail entrepris est achevé par une conclusion qui insiste sur les problèmes restés ouverts et nos perspectives de recherches. Nous ajoutons quelques annexes afin que le lecteur étranger au domaine, n'ait pas trop à se reporter à la littérature sur le sujet.

Chapitre I

TECHNIQUE DES PERTURBATIONS SINGULIÈRES

I. 1. INTRODUCTION

La technique des perturbations singulières et plus généralement de décompositions en échelles de temps multiples a été largement étudiée ces dernières années en théorie des équations différentielles. En Electrotechnique, la plupart des problèmes directement liés à la commande sont maintenant résolus de façon implicite par cette technique au moins en ce qui concerne le comportement asymptotique.

Cette technique ne conduit pas à une réduction de l'ordre du modèle, mais plutôt à une séparation des variables en sous-ensembles disjoints. Les modèles découplés ainsi obtenus permettent un calcul simplifié des lois de commande. Cependant, cette approche peut conduire à une réduction d'ordre en ne retenant que les variables associées aux modes dominants.

Le but principal de l'approche par la méthode des perturbations singulières est la diminution de la grande dimension et/ou du mal conditionnement des systèmes résultant de l'interaction entre les dynamiques lentes et rapides. Cette approche par la multi-échelles de temps est asymptotique, elle est exacte à la limite, lorsque le rapport ε des vitesses des dynamiques lente et rapide tend vers zéro. Quand ε est petit, des approximations asymptotiques du modèle global sont obtenues à partir des modèles simplifiés d'ordre réduit et dans différentes échelles de temps séparées.

Si la méthode des perturbations singulières est un outil traditionnel dans le domaine de la mécanique des fluides et dans les problèmes de la mécanique non-linéaire où elle embrasse une grande variété de phénomènes dynamiques possédant des modes lents et rapides, son emploi dans le domaine de la modélisation des machines électriques pour différentes raisons, et notamment en contrôle, est très récent. La mise en œuvre de cette théorie dans ce domaine a connu un développement très rapide [Ahm-81], [DeL-95], [Dje-96], [Gue-92], [Tou-], ... etc.

L'intérêt de cette méthode concerne surtout la détermination des lois de commande sous forme composite. Le modèle global est découplé en un sous-modèle lent et un sous-modèle rapide. Ce découplage apparaît aussi au niveau des commandes. Ainsi, la loi de commande « u » se décompose en :

$$u = u_s + u_f,$$

ce qui permet de calculer séparément les gains de retour d'état sous la forme :

$$u_s = G_s x_s \quad \text{et} \quad u_f = G_f x_f,$$

où x_s et x_f représentent respectivement l'évolution lente (en régime quasi-permanent) et l'évolution rapide (transitoire).

Avant la mise en évidence et en œuvre de cette technique, il nous est apparu opportun de rappeler les origines de cette méthode, à savoir, la théorie des perturbations (*Perturbations Theory*) et celle de la moyenne « *Averaging Method* » (voir Annexe A).

I. 2. THEORIE DES PERTURBATIONS ET DE LA MOYENNE

Les solutions analytiques exactes des équations différentielles ne sont possibles que pour un nombre limité de classes des équations différentielles. En général, on a recourt aux méthodes approximatives. Il existe deux catégories de méthodes approximatives que l'Ingénieur doit connaître ; pour l'analyse des systèmes non-linéaires [Kha-96], il s'agit de :

1. Méthodes numériques,
2. Méthodes asymptotiques.

Avant de commencer l'analyse de ces méthodes (Annexe A), il est préférable de faire une petite introduction aux méthodes asymptotiques utilisées pour l'analyse des équations différentielles non-linéaires. Soit le système décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X} = f(X, t, \varepsilon),$$

où ε est un petit paramètre, et sous certaines conditions, cette équation a une solution exacte $X(t, \varepsilon)$.

Le but des méthodes asymptotiques est de trouver une approximation $\tilde{X}(t, \varepsilon)$ de la solution exacte, de telle façon que l'erreur $X(t, \varepsilon) - \tilde{X}(t, \varepsilon)$ soit faible. Pour des valeurs petites de $|\varepsilon|$, la solution $\tilde{X}(t, \varepsilon)$ a une expression plus simple que celle de la solution exacte. Les méthodes approximatives asymptotiques trouvent leurs justifications dans les propriétés structurelles possédées par le système d'équations d'état original lorsque $|\varepsilon|$ est petit.

En plus, les méthodes asymptotiques utilisent les propriétés structurelles des différentes échelles de temps inhérentes dans plusieurs problèmes pratiques. Souvent, la solution d'équations d'état exploite le phénomène tel que quelques variables évoluent dans une échelle de temps plus rapidement que d'autres variables. Ceci conduit à une classification des variables en deux groupes ; des variables lentes et rapides. L'interaction entre les variables lentes et rapides concerne aussi bien la méthode de la moyenne que la méthode des perturbations.

La méthode classique des perturbations recherche une solution approximative comme un développement fini de la solution exacte au sens de Taylor [Kha-96]. La méthode de la moyenne sera présentée sous sa forme simple, elle est appelée parfois *la méthode de la moyenne périodique* ou (*Periodic Averaging*), parce que le second membre de l'équation d'état est une fonction périodique du temps, de période T (voir annexe A).

I. 3. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES

Tandis que les deux méthodes précédentes sont applicables aux équations d'état qui dépendent lisseusement du paramètre ε , dans cette section, on analysera un problème de perturbation plus compliqué, caractérisé par une dépendance discontinue des propriétés du système au paramètre parasite ε . Les systèmes singulièrement perturbés analysés par cette technique doivent avoir une forme spéciale dite *standard*. Cette forme standard s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z, u, t, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z, u, t, \varepsilon)\end{aligned}$$

La particularité principale de cette théorie est que la discontinuité de la solution causée par les perturbations singulières peut être surmontée en faisant une analyse dans les différentes échelles de temps existant dans le comportement du système. Cette approche multi-échelles de temps est une caractéristique fondamentale de la méthode des perturbations singulières.

Pour ce faire, on va illustrer en premier lieu, un exemple de système singulièrement perturbé, et on mettra en évidence la source physique du terme parasite ε . L'intuition de la décomposition multi-échelles de temps devient plus apparente avec un exemple numérique, qui sera présenté ultérieurement.

I. 3. 1. Mise en évidence du paramètre parasite ε

Un modèle singulièrement perturbé d'un système dynamique est un modèle dans l'espace d'état dont les dérivés de quelques variables d'état sont multipliées par un petit paramètre positif ε ; soit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z, u, t, \varepsilon) & x \in \mathfrak{R}^n \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z, u, t, \varepsilon) & z \in \mathfrak{R}^m\end{aligned}\tag{1.1}$$

et on suppose que les fonctions f et g sont suffisamment continues et dérivables par rapport à leurs arguments x, z, u, t, ε et $(x, z, u, t, \varepsilon) \in D_1 \times D_2 \times [t_0, T] \times [0, \varepsilon]$, où $D_1 \subset \mathfrak{R}^n$ et $D_2 \subset \mathfrak{R}^m$.

Modéliser un système dynamique sous la forme singulièrement perturbée n'est pas une tâche facile parce qu'il n'est pas toujours clair comment choisir le petit terme ε . Heureusement, dans plusieurs applications, l'existence de petites et de grandes constantes de temps ou de phénomènes hautes et basses fréquences constituent un outil de diagnostic important, et ε peut être défini un comme rapport entre ces paramètres.

I. 3. 1. 1. Cas d'un système physique singulièrement perturbé

Considérons à titre d'exemple le modèle simplifié d'un moteur à courant continu, contrôlé par son induit et schématisé par la figure (1.1).

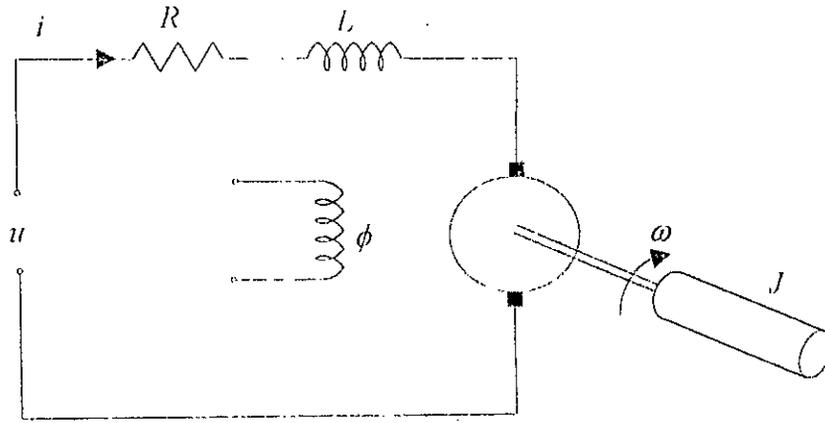


Figure 1.1 : Moteur à courant continu contrôlé par l'induit.

Ce système peut être modélisé par :

$$\begin{cases} J \frac{d\omega}{dt} = k i \\ L \frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u \end{cases} \quad (1.2)$$

où $i, u, R,$ et L sont respectivement le courant, la tension, la résistance et l'inductance de l'induit, J est le moment d'inertie de l'arbre, ω la vitesse de rotation, $k i$ et $k \omega$ sont respectivement le couple électromagnétique et la force électromotrice développée par le flux d'excitation constant ϕ .

En pratique, l'inductance de l'induit est faible et peut donc jouer le rôle d'un petit paramètre ε . Par conséquent les variables ω et i peuvent être considérées comme respectivement lente (x) et rapide (z). Mais, ce choix est déconseillé [Kha-96]. Il est préférable de choisir ε sans dimension, c'est à dire, un rapport entre deux paramètres physiques de même nature.

Pour cela, on va exprimer le modèle (1.2) en valeurs réduites :

$$\omega_r = \frac{\omega}{\Omega}; \quad i_r = \frac{Ri}{k\Omega}; \quad u_r = \frac{u}{k\Omega},$$

et on écrit :

$$\begin{cases} T_m \frac{d\omega_r}{dt} = i_r \\ T_e \frac{di_r}{dt} = -\omega_r - i_r + u_r \end{cases}$$

où $T_m = JR/k^2$ est la constante mécanique, $T_e = L/R$ la constante électrique. Comme $T_m \geq T_e$, on introduit une variable de temps sans dimension, soit $t_r = t/T_m$, et on écrit le modèle sous sa forme standard singulièrement perturbée comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_r}{dt} = i_r \\ \frac{T_e}{T_m} \frac{di_r}{dt} = -\omega_r - i_r + u_r \end{cases}$$

Cette normalisation (calibrage) a ramené le modèle original en un autre sous la forme standard singulièrement perturbée avec le paramètre sans dimension suivant :

$$\varepsilon = \frac{T_e}{T_m} = \frac{lk^2}{JR^2}$$

1.3.1.2. Cas d'un système linéaire singulièrement perturbé

Une autre démarche consiste, lorsque la matrice d'état possède des termes d'ordre de grandeur très différents, de réorganiser le vecteur d'état pour regrouper les termes en fonction de leur amplitude.

Supposons que le modèle $\dot{X} = AX + BU$ se répartitionne en :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U,$$

où A_{21}, A_{22}, B_2 sont très grands en module par rapport à ceux de A_{11}, A_{12}, B_1 . Alors une normalisation peut être faite en introduisant un paramètre ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, tel que :

$$A_{21}^* = \varepsilon A_{21}$$

$$A_{22}^* = \varepsilon A_{22}$$

$$B_2^* = \varepsilon B_2$$

Mise en œuvre sur un exemple

Considérons l'exemple suivant [Bor-92], caractérisé par :

$$\dot{X} = AX + BU$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.15 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.15 & 0.005 & 0 \\ 2.05 & 1.85 & -1.95 & 0 \\ 3.25 & 0 & 0 & -1.52 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0.052 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

L'introduction du paramètre $\varepsilon = 0.1$, normalise les ordres de grandeur des termes de A et B :

$$A_{21}^* = \begin{bmatrix} 0.205 & 0.185 \\ 0.325 & 0 \end{bmatrix}, A_{22}^* = \begin{bmatrix} -0.195 & 0 \\ 0 & -0.152 \end{bmatrix}, B_2^* = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

et le modèle apparaît sous une forme singulièrement perturbée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U$$

Le paramètre ε peut être également calculé à partir des valeurs caractéristiques du modèle global obtenu après bloc-diagonalisation, ainsi on peut citer

$$\varepsilon = \frac{\min |\lambda(\hat{A}_1)|}{\max |\lambda(\hat{A}_2)|} \text{ ou } \varepsilon = \left\| \hat{A}_1 \right\| \left\| \hat{A}_2^{-1} \right\|, \text{ ou } \varepsilon = \left\| A_{22}^{-1} \right\| \left(\left\| A_{12} \right\| + \left\| L_0 \right\| \right)$$

Avec :

$$L_0 = -A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \text{ et } A_0 = A_{11} + A_{12}^{-1} \cdot L_0.$$

I.4. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES APPLIQUEE AUX SYSTEMES NON-LINEAIRES

Un grand avantage de l'approche par la méthode des perturbations singulières sur les systèmes à deux échelles de temps est qu'elle n'est pas limitée aux systèmes linéaires contrairement à toutes les autres méthodes de simplification connues [Bor-92]. En effet, la méthode des perturbations singulières cause un comportement multi-échelles de temps et les dynamiques du système sont caractérisées par la présence des variables lentes et rapides.

Le modèle :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z, u, t, \varepsilon) & x &\in \mathfrak{R}^n \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z, u, t, \varepsilon) & z &\in \mathfrak{R}^m \\ y &= h(x, z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

avec :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \xi(\varepsilon) \\ z(t_0) &= \eta(\varepsilon) \\ \varepsilon &\in [0, \varepsilon_0] \end{aligned}$$

est le premier modèle de système à avoir été utilisé pour la construction simplifiée de lois de commande, il a été étudié largement dans la littérature [Kok-76], [Sak-84], [Syr-83], [Tik-52].

Les fonctions f, g sont supposées suffisamment continues et dérivables par rapport à leurs arguments x, z, u, ε, t , ainsi que $\xi(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ par rapport à ε , et $t_0 \in [0, T]$. Et en notant $x(t, \varepsilon)$ et $z(t, \varepsilon)$ la solution du problème original (1.3).

Le modèle (1.3) est dit sous forme *singulièrement perturbée* car :

- l'introduction d'un petit, paramètre ε est considéré comme une perturbation.
- la valeur particulière $\varepsilon = 0$ introduit une *singularité*, car m équations différentielles se transforment en équations algébriques.

$$g(x, z, u, t, 0) = 0, \quad (1.4)$$

propriété : [Kha-96]

On dit que le modèle (1.3) est sous la forme standard singulièrement perturbée si et seulement si l'équation (1.4) admet k racines réelles distinctes ($k \geq 1$) définies par :

$$z_s = q_i(x_s, u_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.5)$$

pour tout $(x, t) \in D_1 \times [t_0, T]$.

Cette propriété assure qu'un modèle réduit bien défini de dimension n correspondra à chaque solution z_s de l'équation (1.5).

L'indice « s » sur les variables indique qu'elles appartiennent au modèle écrit avec $\varepsilon = 0$. En développant le modèle réduit caractérisé par $\varepsilon = 0$, on peut seulement spécifier n valeurs initiales parce que le modèle résultant est d'ordre n , donc on a retenu les états initiaux de x , soit le système d'état résultant :

$$\dot{x}_s = f(x_s, q(x_s, t), u_s, t, 0), \quad x_s(t_0) = \overset{def}{\xi_0} = \xi(0) \quad (1.6)$$

On note la solution de (1.6) par $x_s(t, u_s)$. La variable z est exclue du modèle réduit et elle est remplacée par son régime quasi-permanent $q(x_s, t)$. La seule information qu'on peut obtenir sur z est de calculer :

$$z_s = \overset{def}{q}(x_s(t), t), \quad (1.7)$$

qui décrit le comportement quasi-permanent de la variable z lorsque $x = x_s$.

La commande u est devenue u_s , car écrire $\varepsilon = 0$ revient à considérer le système en régime quasi-permanent et à supposer que seules les composantes lentes de l'entrée sont encore actives, les transitoires rapides ont donc disparus.

Pour obtenir le i -ième modèle réduit, il suffit de substituer (1.5) dans (1.3), soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f(x_s, q_i(x_s, u_s, t), u_s, t, 0) \\ y &= h(x_s, q_i(x_s, u_s, t)) \end{aligned}$$

En gardant la même condition initiale sur x_s que sur x :

$$x_s(t_0) = x_0$$

Dans la suite nous utiliserons la notation plus compacte :

$$\dot{x}_s = f(x_s, u_s, t) \tag{1.8}$$

$$y = h(x_s, u_s, t) \tag{1.9}$$

$$z_s = q(x_s, u_s, t) \tag{1.10}$$

Ce modèle réduit est appelé *modèle lent* ou le modèle *quasi-permanent* car il donne l'évolution du système quand les transitoires rapides ont disparus.

Si l'on considère maintenant le modèle (1.10), qui correspond au régime quasi-établi de la variable rapide z , il est évident que z_s n'est libre de partir de la valeur initiale z_0 , et qu'il peut y avoir un grand écart entre la valeur initiale et :

$$z_s(t_0) = q(x_s(t_0), u_s(t_0), t_0)$$

Ceci indique que z_s ne peut pas être une approximation uniforme de z valable sur $[t_0, T]$. Le mieux que l'on puisse obtenir est que l'approximation :

$$z(t) = z_s(t) + O(\varepsilon) \tag{1.11}$$

soit valable sur un intervalle excluant t_0 , soit $[t_1, T]$, avec $t_1 > t_0$.

Par contre, on peut contraindre x_s à partir de x_0 , et l'approximation ,

$$x(t) = x_s(t) + O(\varepsilon)$$

sera valable sur $[t_0, T]$.

L'approximation (1.11) établit que, durant un intervalle $[t_0, t_1]$ dit de *couche limite*, la variable initiale z approche z_s dans $[t_0, T]$. Dans le domaine $[t_0, t_1]$ la vitesse de z peut être grande, soit

$$\dot{z} = \frac{g}{\varepsilon}$$

Poser $\varepsilon = 0$ revient en fait à considérer que les transitoires sont instantanés si $g \neq 0$. Le terme $\varepsilon \dot{z}$ doit rester fini, même si $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\dot{z} \rightarrow \infty$. Pour cela, posons :

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$$

et utilisons $\tau = 0$ comme valeur initiale à $t = t_0$, la nouvelle variable temporelle :

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \quad \tau = 0 \text{ pour } t = t_0$$

est dilaté, et τ tend vers l'infini quand ε tend vers 0, même pour un temps t légèrement supérieur à t_0 . De plus, alors que z et τ changent presque instantanément, x reste très proche de sa valeur initiale x_0 .

Pour décrire le comportement de z comme fonction de τ , on utilise la correction de couche limite :

$$z_f = \bar{z} - \bar{z}_s$$

qui nous permet de représenter le système original comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, z_f + q(x, u_s, t), u, t, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz_f}{dt} &= g(x, z_f + q(x, u_s, t), u, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} q(x, u_s, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} q(x, u_s, t). \end{aligned}$$

Afin de profiter de l'ordre petit du terme ε , on exprime le modèle précédent dans l'échelle de temps rapide ; soit :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon f(x, z_f + q(x, u_s, t), u, t, \varepsilon) \\ \frac{dz_f}{d\tau} &= g(x, z_f + q(x, u_s, t), u, t, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x} q(x, u_s, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} q(x, u_s, t). \end{aligned}$$

Le modèle réduit dans cette échelle de temps est obtenu en posant $\varepsilon = 0$, et on suppose que $\frac{\partial u_s}{\partial \tau} = O(\varepsilon)$. Par conséquent, le système réduit vérifiant l'équation de couche limite s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dz_f}{d\tau} &= g(x_0, z_f(\tau), z_s(\tau), u(\tau), t_0) \\ y_f &= h(x_0, z_f(\tau) + z_s(\tau)) \\ z_f(0) &= z_0 - z_s(t_0) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Cette équation comporte le terme $u(\tau)$ qui, à cette échelle de temps τ , correspond au comportement rapide de la variable u , défini par : $u_f = u - u_s$

Une approximation uniforme de z , valable sur $[t_0, T]$ est :

$$z = z_s(t) + z_f(\tau) + O(\varepsilon) \quad (1.13)$$

avec z_s, z_f décrivant respectivement les composantes lentes et rapides de z .

Pour que l'approximation (1.13) converge, après une courte période, vers l'approximation (1.11), il faut que le terme correctif $z_f(\tau)$ décroisse, quand $\tau \rightarrow \infty$, vers une valeur en $O(\varepsilon)$. Ceci revient en fait à étudier la stabilité asymptotique du modèle (1.12) dans le domaine de couche limite.

Propriété 1: [Bor-92].

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} z_f(\tau) = 0$ si l'équilibre $z_f(\tau) = 0$ de l'équation (1.12) est asymptotiquement stable et uniformément en x_0 et t_0 , et si $z_0 = z_s(t_0)$ appartient à son domaine d'attraction.

Propriété 2: [Bor-92].

Les valeurs propres de $(g)_z$ calculées pour $\varepsilon \approx 0$, le long des trajectoires $x_s(t)$ et $z_s(t)$, ont des parties réelles plus faibles qu'un nombre négatif fixé, soit :

$$\text{Re}(\lambda\{(g)_z\}) \leq -c \leq 0$$

L'énoncé des propriétés 1 et 2 conduit au théorème de Tikhonov,

Théorème: [Tik-52].

Si les propriétés 1 et 2 sont satisfaites, alors les approximations :

$$x = x_s + O(\varepsilon),$$

$$z = z_s + z_f + O(\varepsilon),$$

sont valables pour tout $t \in [t_0, T]$ et il existe un instant $t_1 \geq t_0$ tel que :

$$z = z_s + O(\varepsilon) \text{ est valable pour } t \in [t_1, T].$$

I. 5. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES APPLIQUEE AUX MODELES CONTINUS LINEAIRES

Soit le modèle suivant sous la forme singulièrement perturbée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U \quad (1.14)$$

et

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}.$$

avec:

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

$$z(t_0) = z_0, \quad z \in \mathfrak{R}^m$$

Il est dit sous *forme explicite* si la matrice A_{22} est inversible, et sous *forme implicite* dans le cas contraire. Ce dernier cas suppose que le découplage en x (*lent*) et z (*rapide*) est mauvais, et que les différentes dynamiques sont encore réparties entre x et z , il faut donc faire un changement de variables pour regrouper les dynamiques.

I. 5. 1. Calcul des modèles réduits lent et rapide

Le modèle réduit lent est obtenu en considérant que les variables rapides z ont atteint leur régime établi, ce qui correspond à écrire $\varepsilon = 0$.

Le modèle devient :

$$\dot{x}_s = A_{11}x_s + A_{12}z_s + B_1u_s$$

$$0 = A_{21}x_s + A_{22}z_s + B_2u_s$$

$$y_s = C_1x_s + C_2z_s$$

où x_s, z_s, u_s, y_s représentent les composantes lentes des variables x, z, y, u .

Après transformations, on obtient le système lent réduit d'ordre n .

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B_s u_s$$

$$y_s = C_s x_s + D_s u_s$$

(1.15)

$$z_s = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_s + B_2u_s)$$

avec :

$$A_s = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$B_s = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

$$C_s = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$D_s = -C_2A_{22}^{-1}B_2$$

Si A_{22} est inversible, le modèle (1.15) fournit une bonne approximation du comportement du modèle global, qui sera valable pour $t \geq t_0$, si on fixe :

$$x_s(t_0) = x_0$$

Par contre, la valeur initiale des composantes lentes z_s vaut :

$$z_s(t_0) = -A_{22}^{-1} A_{12} x_s(t_0),$$

ce qui est en général différent de z_0 . Les variables rapides z ne peuvent donc pas être approchées par z_s sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$.

Introduisant un terme correctif z_f , défini par :

$$z_f = z - z_s$$

qui représente les variations rapides de z . Donc, l'équation de couche limite, exprimée en temps dilaté τ ($\varepsilon \frac{dz_f}{dt} = \frac{dz_f}{d\tau}$) :

$$\frac{dz_f}{d\tau} = A_{22} z_f(\tau) + B_2 u_f(\tau) \quad (1.16)$$

$$y_f = C_2 z_f(\tau)$$

$$z_f(t_0) = z_0 + A_{22}^{-1} A_{21} x_0$$

est obtenue par la différence entre le modèle initial (1.14) et le modèle simplifié (1.15), en considérant immobiles les variables lentes pendant les transitoires rapides ($\frac{dx_s}{d\tau} = 0$).

➤ **Théorème [Kok-86]**

Si $Re(\lambda(A_{22})) < 0$, alors il existe un $\varepsilon^* > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, les états du modèle initial (1.14), partant de valeurs initiales bornées quelconques x_0 et z_0 , $\|x_0\| \leq c_1$ et $\|z_0\| \leq c_2$ (c_1 et c_2 constantes indépendantes de ε), sont approchés pour tout $t \geq t_0$ par :

$$\begin{cases} x(t) = x_s(t) + O(\varepsilon) \\ z(t) = z_s(t) + z_f(\tau) + O(\varepsilon) \end{cases}$$

où $x_s(t)$, $z_s(t)$ et $z_f(\tau)$ sont les états respectifs du modèle réduit lent et rapide (1.15) et (1.16).

Remarque : La variable $z_f(\tau)$ n'a pas de sens que durant un court intervalle $[t_0, t_1]$ dit «domaine de couche limite», défini par [Kok-86] :

$$t_1 - t_0 = O(\varepsilon \log \varepsilon)$$

Cette décomposition en modèles découplés lent et rapide est présentée par les figures (1.2) à partir de la forme initiale présentée par figure (1.3).

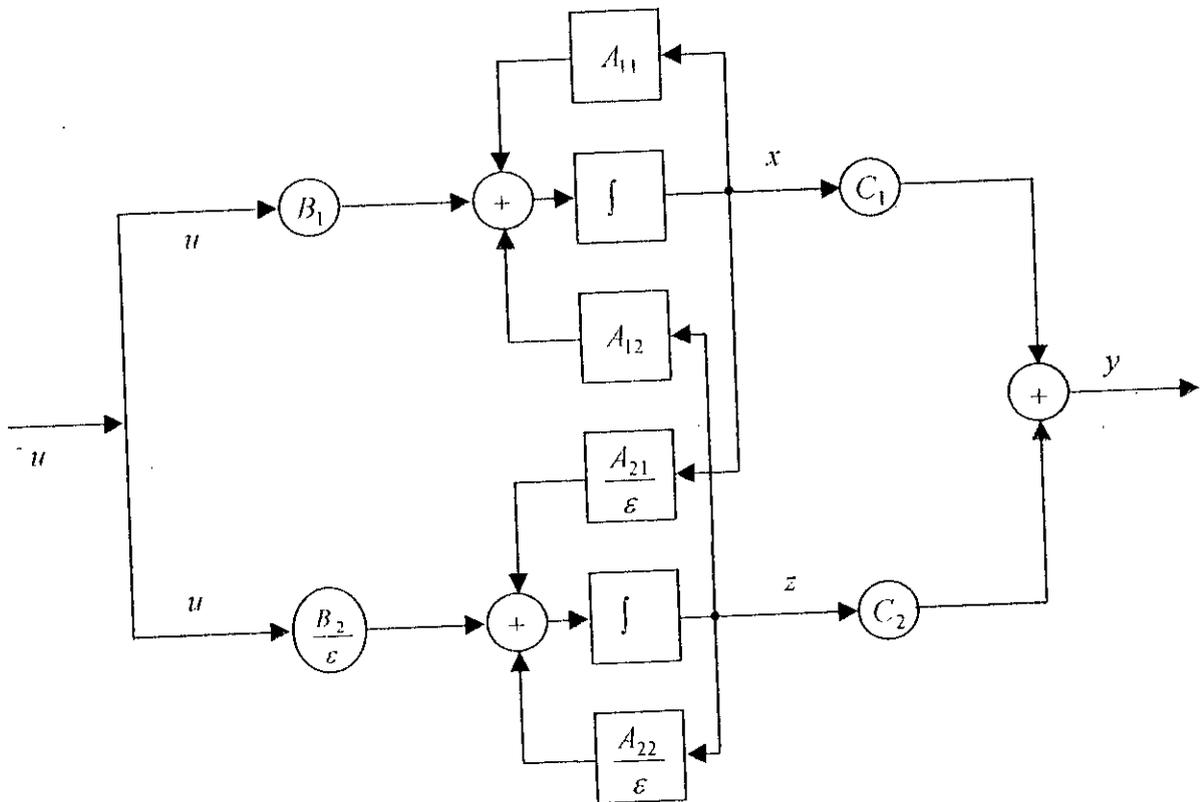


Figure 1.2 : forme globale issue de l'équation (1.14).

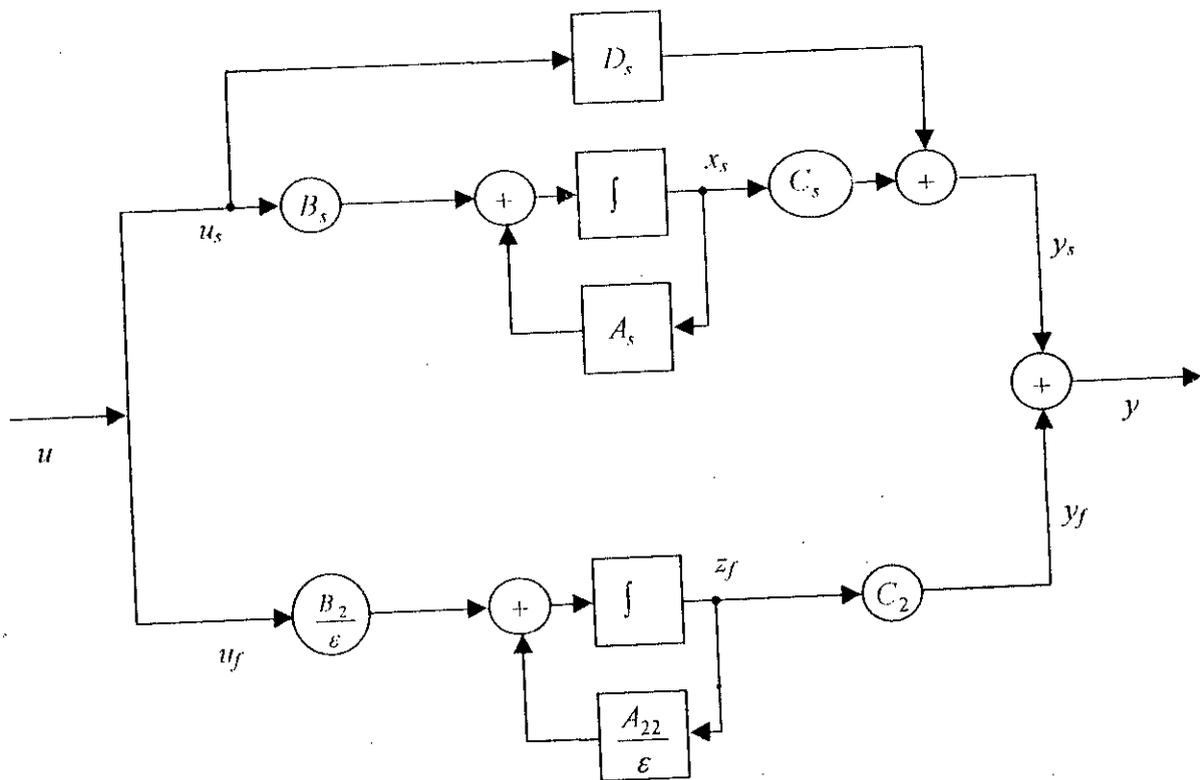


Figure 1.3 : Schéma découplé issue des équations (1.15) et (1.16).

1. 5. 2. Application

Considérons le système d'état, correspondant à la forme singulièrement perturbée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -0.08 & 0.04 & -0.01 \\ -0.01 & -0.1 & -0.14 \\ \hline 0.011 & 0.002 & -0.09 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1.0 \quad 0.0 \quad -0.5] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix},$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z(t_0) = [1],$$

Pour avoir une idée sur l'influence du choix de ε , on prend quatre valeurs pour ε . Soit : $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = 0.4$ et $\varepsilon_4 = 0.6$.

Conformément aux équations (1.15) à (1.16), nous obtenons les deux sous modèles suivants :

1. 5. 2. 1. Sous modèle lent

$$\frac{d}{dt} x_s = \begin{bmatrix} -0.0812 & 0.0398 \\ -0.0271 & -0.1031 \end{bmatrix} \cdot x_s + \begin{bmatrix} 0.9889 \\ -0.1556 \end{bmatrix} \cdot u_s$$

$$y_s = [0.9389 \quad -0.0111] \cdot x_s + [-0.5556] \cdot u_s$$

$$x_s(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_s = [0.1222 \quad 0.0222] \cdot x_s + [1.1111] \cdot u_s$$

1. 5. 2. 2. Sous modèle rapide

$$\frac{d}{dt} z_f = \left[-\frac{1}{\varepsilon} 0.09 \right] \cdot z_f + \left[\frac{1}{\varepsilon} 0.1 \right] \cdot u_f$$

$$y_f = z_f \tag{2.34}$$

$$z_f(t_0) = 0.8778$$

On porte sur les figures (1.4) et (1.5), les réponses indicielles des quatre modèles correspondant aux quatre choix de ε .

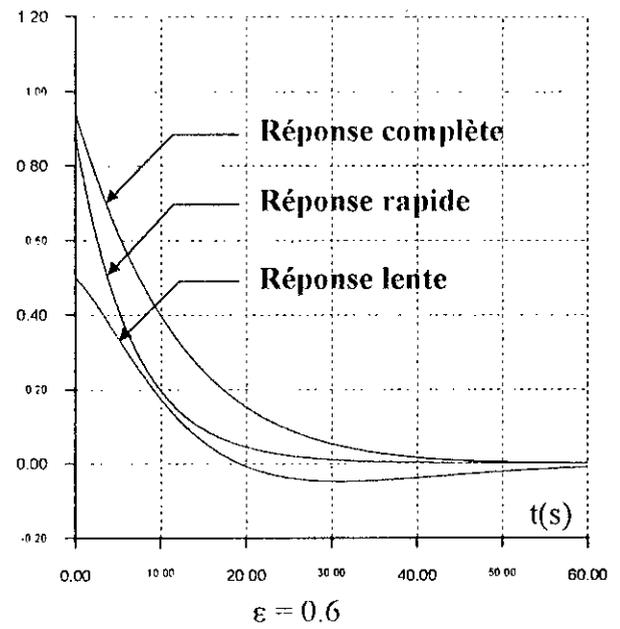
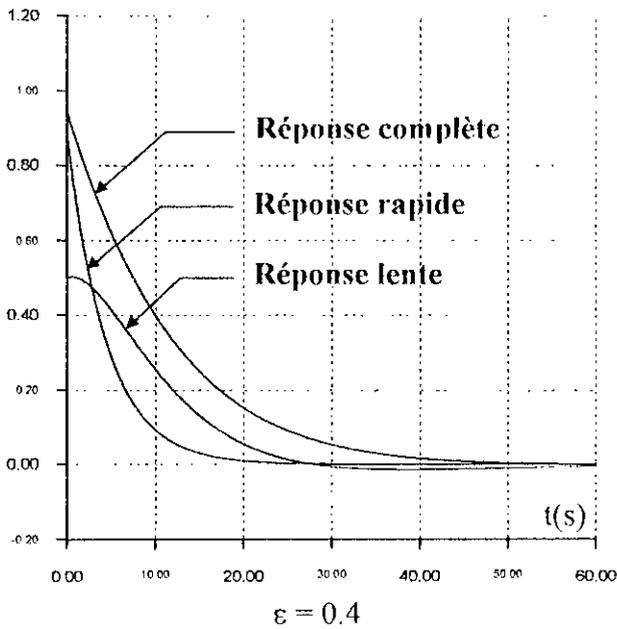
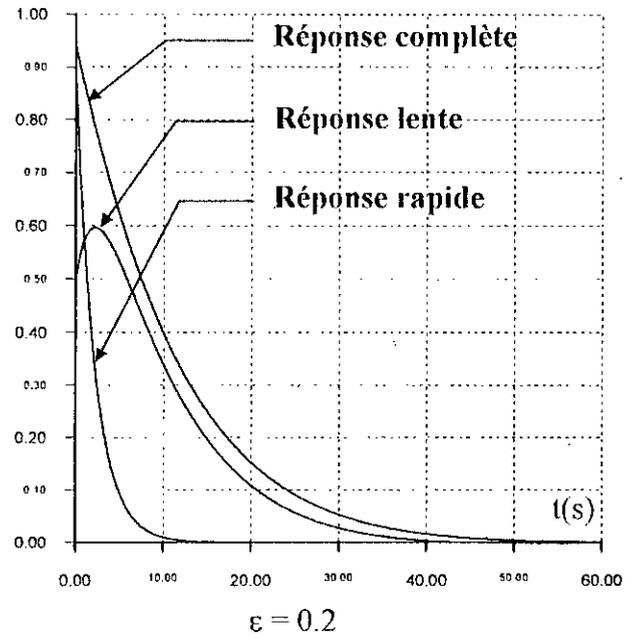
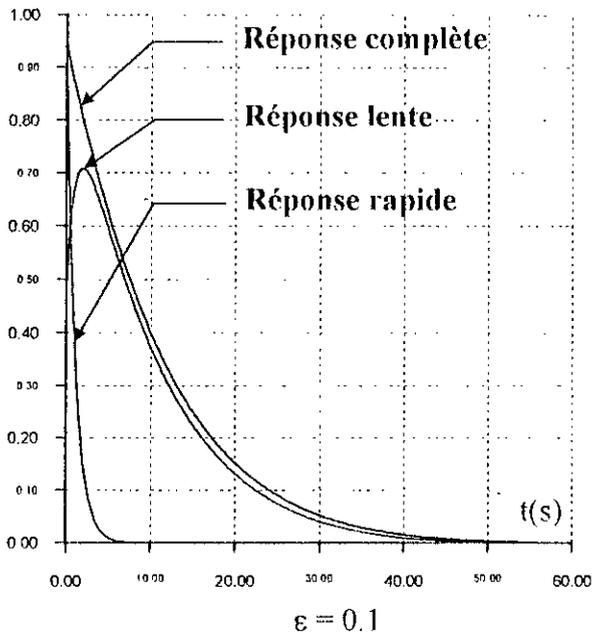


Figure 1.4 : Réponses indicelles en fonction du terme parasite.

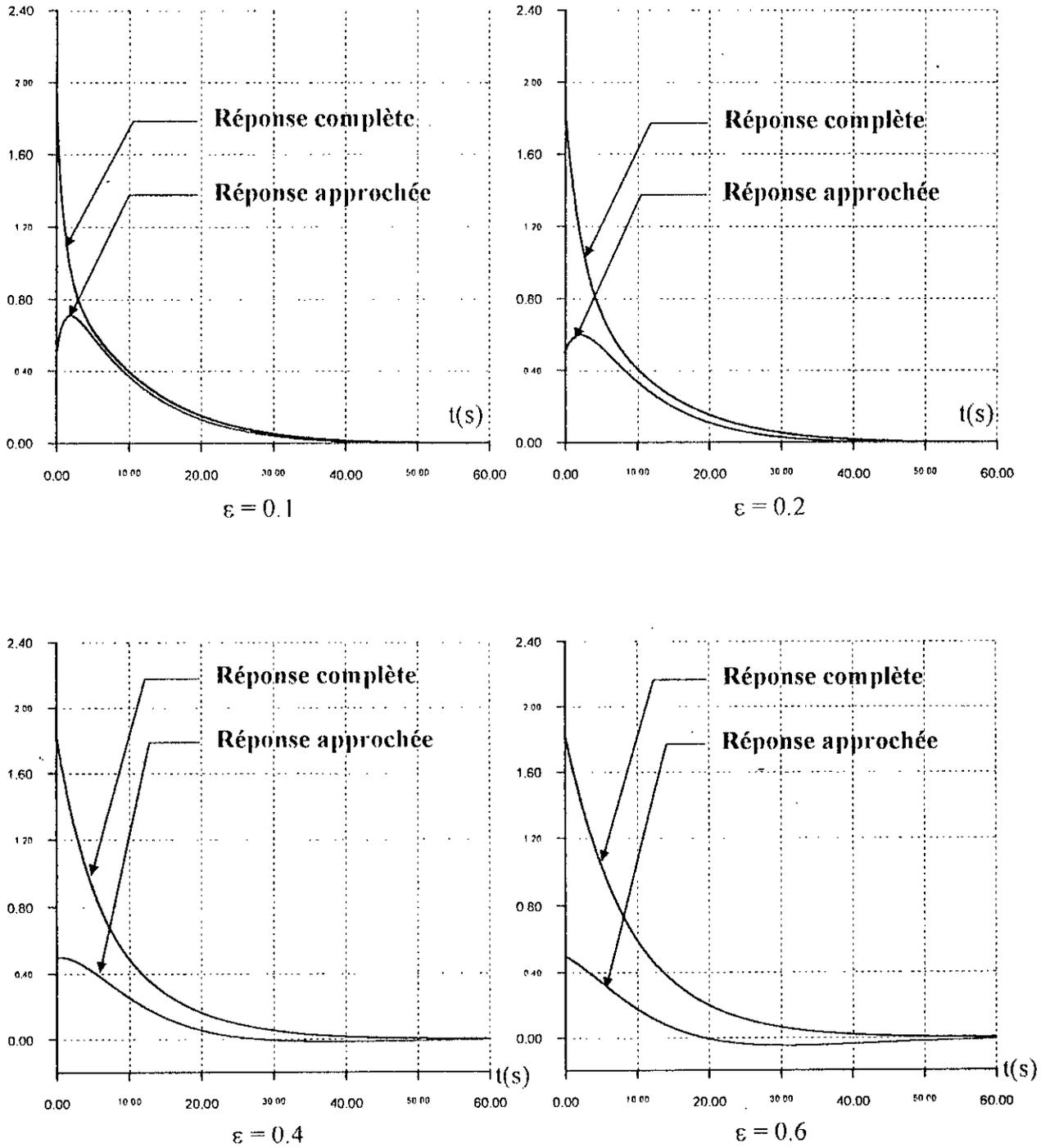


Figure 1.5 : Réponses réelles et approchées.

1. 5. 2. 3. Interprétation

La validité de la méthode des perturbations singulières dépend du terme parasite ε , c'est à dire du taux de séparabilité des dynamiques. Différentes courbes sont représentées pour diverses valeurs de ε .

Les figures (1.4) et (1.5) montrent bien la différence des conditions initiales entre les deux réponses réelle et approchée. On remarque aussi l'importance de la durée de couche limite au fur et à mesure que la valeur du terme parasite augmente.

Les valeurs propres de la matrice d'état pour $\varepsilon = 0.1$ sont :

$$\lambda(A_f) = \{ (-0.0919 + j0.0311), (-0.0919 - j0.0311), (-0.8961) \}.$$

Elles sont approchées de façon satisfaisante par les valeurs propres de A_s , et A_f :

$$\lambda(A_{1s}) = \{ (-0.0922 + j0.0310), (-0.0922 - j0.0310) \}.$$

$$\lambda(A_{1f}) = \{ (-0.9000) \}.$$

1. 6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de la décomposition multi-échelles de temps basée sur la technique des perturbations singulières. Son application suppose en préalable une mise sous forme plus ou moins proche de la forme standard singulièrement perturbée. Dans le cas des systèmes à multi-échelles de temps, la décomposition des modèles en sous-systèmes lents et rapides permet d'analyser et de traiter ces modèles avec moins de complexités et de calculs.

Les modèles ainsi découplés sont essentiellement des modèles de commande. Ils sont plus difficiles à utiliser pour une simulation en boucle ouverte car il n'est pas toujours possible de décomposer une entrée en une composante lente et une composante rapide.

Si le calcul des valeurs propres de la matrice d'état des systèmes linéaires met en évidence des dynamiques lentes et des dynamiques rapides, l'identification des variables d'état correspondantes peut être difficile. De plus même s'il n'est pas utile de connaître la valeur exacte de ε , il est par contre important de pouvoir chiffrer le *taux de séparabilité* des dynamiques et d'avoir un ordre de grandeur pour ε .

Pour les systèmes non-linéaires, il est difficile d'évaluer ε . Dans la plupart des cas, seule l'expérience de l'utilisateur peut fournir des renseignements sur le comportement des variables. Cependant, sans information particulière, l'utilisateur peut décider d'introduire un paramètre ε , même proche de 1, pour bénéficier de la simplification apportée par l'application de la technique des perturbations singulières. On parle dans ce cas de *perturbations singulières forcées*.

Chapitre II

COMMANDE MULTI-ECHELLES DE TEMPS DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES**II. 1. INTRODUCTION**

La notion de la théorie des perturbations dans l'analyse des systèmes dynamiques est très importante et représente la base théorique de nombreux concepts modernes, i.e., poursuite singulière, perturbation régulière, perturbation singulière, ... etc. Ce dernier cas a été à l'origine développé pour analyser les phénomènes à échelles de temps multiples caractérisant l'évolution des systèmes appartenant au domaine de la mécanique des fluides. Par la suite, cette théorie a été étendue à l'étude d'autres phénomènes caractérisés par des perturbations singulières. Par exemple, en théorie des circuits [Jun-81], en électromagnétisme, en biologie, en mécanique du vol, ... etc.

L'introduction de la technique des perturbations singulières dans le domaine de la commande [Kok-76], [Sak-84] a conduit à des résultats importants concernant la commande des systèmes linéaires singulièrement perturbés à partir du concept de la commande dite composée, obtenue entre autres dans [Nai-88], [Sha-89]. L'application de ces résultats a permis d'aborder d'une manière rigoureuse deux grands problèmes en théorie de contrôle :

1. Systèmes de grande dimension, impliquant des commandes lourdes à mettre en œuvre.
2. La présence combinée de phénomènes physiques à plusieurs échelles de temps, impliquant d'importantes difficultés numériques (mauvais conditionnement).

Récemment, une autre approche, dite de la *variété intégrale*, a été introduite afin d'étudier, de façon géométrique, le comportement des solutions d'un système singulièrement perturbé [Kok-86]. Selon cette approche, les dynamiques rapides du système sont *contraintes* sur une *variété attractive*, sur laquelle l'évolution du système est décrite par un modèle d'ordre réduit (appelé aussi modèle lent). Le modèle lent doit représenter, après une petite période de temps, la dynamique du système réel. Les objectifs de commande peuvent ainsi être fixés sur la base de ce modèle. Ceci simplifie considérablement la procédure. Plusieurs applications qui utilisent cette approche ont été développées, notamment, dans les domaines de la robotique et en Electrotechnique [DeL-95], [Dje-93]... etc.

L'analyse et la synthèse de commande des systèmes non-linéaires à deux échelles de temps sont largement développées en utilisant l'approche des perturbations singulières. En effet cette approche permet de simplifier considérablement la synthèse de la commande de tels systèmes. Celle-ci décompose le problème de commande en deux sous problèmes ; l'un avec une dynamique lente (représentée par l'état x), l'autre avec une dynamique rapide (représentée par l'état z « en première approximation »).

La commande composée que nous présentons dans cette section, est une extension à une classe particulière¹ des systèmes non-linéaires singulièrement perturbés de la technique déjà utilisée dans le cas des systèmes linéaires singulièrement perturbés [Kok-86], [Lit-85], [Nai-88].

Dans ce chapitre, nous allons essayer de résumer les très nombreux travaux relatifs à l'application de la technique des perturbations singulières aux problèmes et procédures de la commande.

II. 2. COMMANDE DES SYSTEMES NON-LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES

Soit le système non-linéaire singulièrement perturbé :

$$\sum_x \begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u, t) = a_1(x) + A_1(x)z + B_1(x)u, & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{z} = g(x, z, u, t) = a_2(x) + A_2(x)z + B_2(x)u, & z(0) = z_0 \\ y = h(x, z, u, t) = c_1(x) + c_2(x)z + D(x)u, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$, $z \in \mathfrak{R}^m$, $u \in \mathfrak{R}^q$ et $y \in \mathfrak{R}^p$. De plus les fonctions f et g sont supposées suffisamment continûment différentiables par rapport à leurs arguments. Les matrices $(a_i(x)$, $A_i(x)$, $B_i(x)$, $c_i(x)$ et $D(x)$ sont de dimensions appropriées. Notant par \mathcal{D} , le domaine de l'étude de l'état et de l'entrée. Nous énonçons l'hypothèse classique suivante [Bor-92] :

Hypothèse 1 :

On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}$, la partie réelle des valeurs propres de la matrice $A_2(x)$ est plus petite qu'un nombre négatif $-\lambda$, i. e. :

$$\operatorname{Re}\{A_2(x)\} < -\lambda < 0$$

Remarque 1 :

- Cette hypothèse assure la stabilité des variables rapides,
- Les vecteurs x et z représentent respectivement les modes lents et rapides.

L'avantage de la représentation (2.1) est la possibilité de décomposer le système réel en deux sous-systèmes de dimensions réduites décrits dans deux échelles de temps différentes. La synthèse de la loi de commande est faite séparément pour chaque sous-système, obtenant ainsi une commande dite « commande composée » ou « composite control » ;

$$u = u_s + u_f$$

qui est appliquée au système complet (Figure 2.1).

¹ Cette classe particulière des systèmes non-linéaires singulièrement perturbés est caractérisée par un modèle linéaire en z .

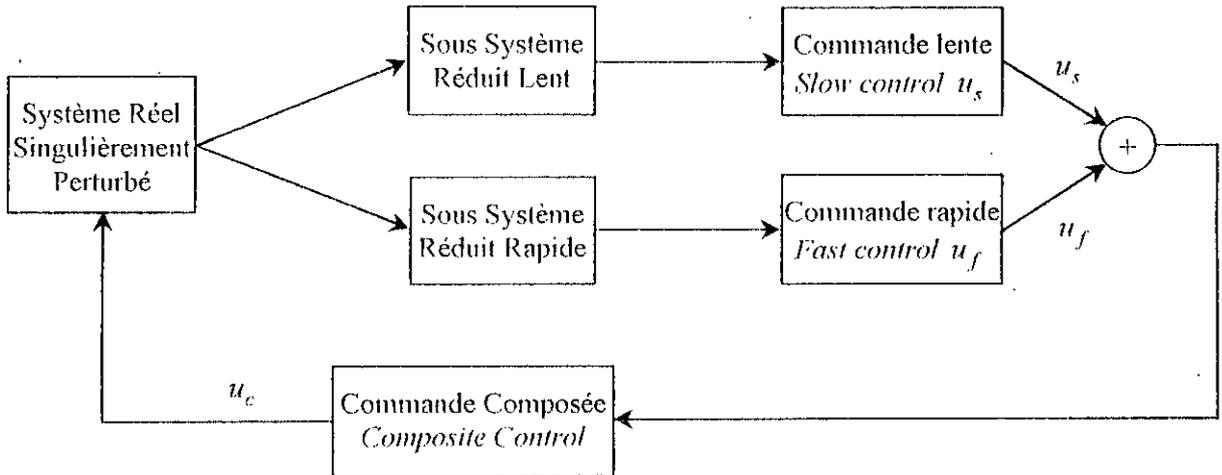


Figure 2.1 : Schéma de principe de la commande composée.

II. 2. 1. Système réduit lent

La simplification du système (2.1) consiste à négliger le terme ε . Un passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, avec les variables notées x_s , z_s et u_s , donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = a_1(x_s) + A_1(x_s)z_s + B_1(x_s)u_s, & (2.2) \\ \sum_0 \left\{ \begin{aligned} 0 &= a_2(x_s) + A_2(x_s)z_s + B_2(x_s)u_s, & (2.3) \\ y_s &= c_1(x_s) + c_2(x_s)z_s + D(x_s)u_s, & (2.4) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

L'expression (2.5) est une équation algébrique (équation de contraintes), et sous l'hypothèse 1, elle peut se mettre sous la forme :

$$z_s = q(x_s, u_s) = -A_2^{-1}(x_s)[a_2(x_s) + B_2(x_s)u_s] \quad (2.5)$$

En substituant z_s dans les équations (2.2) et (2.4), on obtient la dynamique réduite lente « Slow reduced dynamic », soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s(x_s) + B_s(x_s)u_s \\ y_s &= C_s(x_s) + D_s(x_s)u_s \\ x_s(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec :

$$A_s(x_s) = a_1(x_s) - A_1(x_s)A_2^{-1}(x_s)a_2(x_s),$$

$$B_s(x_s) = B_1(x_s) - A_1(x_s)A_2^{-1}(x_s)B_2(x_s),$$

$$C_s(x_s) = c_1(x_s) - c_2(x_s)A_2^{-1}(x_s)a_2(x_s),$$

$$D_s(x_s) = D(x_s) - c_2(x_s)A_2^{-1}(x_s)B_2(x_s).$$

Afin de donner une approximation d'ordre plus élevé en ε , on peut utiliser un développement en série de Taylor plus élevé (voir Annexe A). Ceci permet de tenir compte des couplages entre les dynamiques rapides et lentes quelque soit l'ordre de l'approximation en ε . Dans le cas présent, nous nous limitons à la partie nominale correspondant à $\varepsilon = 0$.

II. 2. 2. Système réduit rapide

Le système réduit rapide « *Fast reduced system* » ou « *Boundary layer system* » est obtenu en transformant l'échelle de temps t du système original (2.1) en une échelle de temps rapide τ , $\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$. On utilise ensuite le changement d'état : $z_f = z - z_s$ et on introduit le changement d'échelle de temps :

$$\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$$

Dans cette échelle de temps « dilaté », le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon[a_1(x) + A_1(x)z + B_1(x)u] \\ \frac{dz_f}{d\tau} = A_2(x)z_f + B_2(x)(u - u_s) - \left[\frac{\partial q(x_s, u_s)}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \tau} + \frac{\partial q(x_s, u_s)}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial \tau} \right] + O(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.7)$$

Par définition $u - u_s = u_f$ est la commande rapide « *fast control* ». Dans cette échelle de temps rapide, on suppose x et u_s sont constantes, donc, l'évolution de z dans la couche limite est décrite par la dynamique suivante, en posant $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dz_f}{d\tau} = A_2(x_0)z_f + B_2(x_0)u_f + O(\varepsilon) \quad (2.8)$$

$$y_f = c_2(x_0)z_f + D(x_0)u_f$$

Ainsi, une approximation approchée de la solution exacte $z(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$z(t) = z_s(t) + z_f(\tau) + O(\varepsilon) \quad (2.9)$$

II. 2. 3. La commande composée

Les commandes lente et rapide sont calculées séparément et respectivement sur la base d'un sous-système lent et un autre rapide [Kok-86], [Nai-88]. Si la dynamique rapide est naturellement stable, alors celle-ci converge après un certain temps vers la variété lente, sans avoir besoin de commander cette dynamique. Si la vitesse de convergence est suffisamment rapide pour nous, on peut poser une commande rapide $u_f = 0$. Mais, si cette dynamique est instable ou pas suffisamment rapide, on utilise une commande rapide u_f qui permet d'imposer la convergence de z , ou d'accélérer cette convergence vers la variété lente. Dans les deux cas la commande rapide u_f doit être nulle après un temps t_1 nécessaire à la convergence de z . Pour cette raison, le vecteur de commande u_c du système (2.1) est de la forme (Figure 2.1) :

$$u_c = u_s + u_f \quad (2.10)$$

appelée commande composée « *composite control* ».

II. 3. PROPRIETES DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES

Le problème maintenant est comment utiliser les propriétés des modèles réduits tels que : la commandabilité, la stabilité, l'observabilité et la robustesse, pour étudier celles du système global.

II. 3. 1. Stabilité

Pour garantir la stabilité d'un système linéaire singulièrement perturbé (1.14), il est suffisant en vue de la nature de découplage des systèmes déduits (1.15) et (1.16) qu'ils possèdent les mêmes propriétés. Plus précisément, si les systèmes réduits (1.15) et de couche limite (1.16) sont asymptotiquement stables, donc il existe un $\varepsilon^* > 0$, tel que le système original (1.14) sera asymptotiquement stable pour toute valeur de $\varepsilon \in]0, \varepsilon^*]$ et ceci pour ε suffisamment petit [Sak-84].

Un tel résultat concernant les systèmes linéaires variants et les systèmes non-linéaires date de 1970 [Kok-76]. Pour les systèmes linéaires variants, une expression explicite pour la limite supérieure de ε^* est récemment donnée par [Nai-88] et différentes conditions via les valeurs singulières apparaissaient dans [San-79]. Des progrès considérables sont apparus pour la construction de la fonction de Lyapunov pour les systèmes singulièrement perturbés [Sab-84].

Pour les systèmes non-linéaires singulièrement perturbés et qui sont linéaires en z , peuvent se mettre sous une forme plus compacte que (2.1);

$$\sum^z \begin{cases} \dot{x} = f(x) + F(x)z \\ \varepsilon \dot{z} = g(x) + G(x)z \end{cases} \quad (2.11)$$

avec :

$G^{-1}(x)$ existe pour toute valeur de x .

La fonction de Lyapunov proposée par [Sab-84] est constituée de deux fonctions :

La première s'écrit :

$$v = a^T(x)Q(x)a(x) \quad (2.12)$$

établit la stabilité asymptotique du sous-système réduit lent $\dot{x}_s = a(x_s)$, dont :

$$a(x) = f(x) - F(x)G^{-1}(x)g(x)$$

et $Q(x) > 0$ satisfait :

$$Q(x)a_x(x) + a_x^T(x)Q(x) = -C(x)$$

avec :

$$a_x = \frac{\partial a}{\partial x} \text{ et } C(x) > 0.$$

La deuxième fonction s'exprime comme suit :

$$W = (z + \Gamma g - P^{-1}\Gamma^T P^T v_x^T)^T P(z + \Gamma g - P^{-1}\Gamma^T P^T v_x^T) \quad (2.13)$$

avec : $\Gamma = G^{-1}(x)$ et $P(x)$ satisfassent à l'expression suivante :

$$P(x)G(x) + G^T(x)P(x) = -I.$$

Elle établit la stabilité asymptotique (uniforme en x) du modèle réduit rapide :

$$\frac{dz_f}{d\tau} = G(x)z_f + g(x).$$

La fonction de Lyapunov $V(x, z, \varepsilon)$ pour le système original (2.11) est

$$V(x, z, \varepsilon) = v(x) + \frac{1}{2} \varepsilon W(x, z) \quad (2.14)$$

Cette fonction peut être utilisée pour estimer la dépendance du domaine d'attraction de $x = 0$, et $z = 0$ en ε .

Par exemple, le système ;

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 + z \\ \varepsilon \dot{z} = -x - z \end{cases}$$

qui est analysé par [Sak-84] avec la fonction du Lyapunov suivante :

$$V(x, z, \varepsilon) = \frac{x^4}{4} + \frac{\varepsilon}{4} (x + 2x^2 + z)^2.$$

Pour $\varepsilon = 0.01$, la région d'attraction inclue $|x| < 1$ et $|z| < 10$, tandis que pour $\varepsilon < 0.005$, la variable z est étendue à $|z| < 20$.

II. 3.2. Commandabilité et Observabilité

Considérons le système singulièrement perturbé Σ_ε suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (2.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

avec :

$$x \in \mathfrak{R}^n, z \in \mathfrak{R}^m, \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

où $u(t) \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur de commande, et $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ le vecteur de sortie.

Les sous modèles réduits lent et rapide sont :

$$\Sigma_s: \begin{cases} \dot{x}_s = A_0 x_s + B_0 u_s \\ y_s = C_0 x_s + D_0 u_s \\ x_s(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\Sigma_f: \begin{cases} \varepsilon \dot{z}_f = A_{22} z_f + B_2 u_f \\ y_f = C_2 z_f + D_2 u_f \\ z_f(0) = z_0 - z_s(0) \end{cases} \quad (2.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} z_f &= z - z_s, & u_f &= u - u_s, & y_f &= y - y_s, \\ A_0 &= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, & B_0 &= B_1 - A_{11} A_{22}^{-1} B_2 \\ C_0 &= C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}, & D_0 &= -C_2 A_{22}^{-1} B_2. \end{aligned}$$

Les deux conditions de commandabilité [Sak-84] sont:

$$\begin{cases} \text{rang}[\rho I_n - A_0, B_0] = n \\ \text{rang}[\rho I_m - A_{22}, B_2] = m \end{cases}$$

et par suite, elles impliquent $\text{rang}[\rho I_{n+m} - A, B] = n + m$, pour tout complexe ρ où ε est suffisamment petit.

L'observabilité du système original (2.15) et (2.16) résulte de l'observabilité des sous-systèmes réduits, c'est à dire, des paires (A_0, B_0) et (A_{22}, C_2) . Ces résultats de commandabilité ont été introduits pour les systèmes linéaires invariants puis étaient étendus sur les systèmes linéaires variants et sur certaines classes de systèmes non-linéaires [O'Re-79].

Des résultats analogues sont apparus pour les systèmes linéaires à deux échelles de temps dans le cas continu [Sak-84] et discret [Phi-80]. Il est montré que la commandabilité du système singulièrement perturbé (2.15) pour $\epsilon > 0$, n'entraîne pas obligatoirement la commandabilité des sous-systèmes (2.17) et (2.18), bien que dans la pratique, des systèmes faiblement commandables sont indésirables.

II. 4. COMMANDE LINEAIRE COMPOSEE

Ce n'est que récemment encore que les chercheurs se sont intéressés de généraliser les méthodes classiques de l'automatique aux cas des systèmes multivariables [Por-77]. La tendance générale est la commande stabilisante par un retour d'état avec éventuellement un critère quadratique [Sab-84]. La réduction des modèles trouve alors un intérêt évident puisqu'il est impossible, notamment pour les systèmes de grande dimension, d'incorporer une multitude de boucles de contre réaction.

Lorsque toutes les sorties ne peuvent pas être reliées aux entrées, notamment pour les systèmes interconnectés mais dont les unités sont séparées (géographiquement), la commande par retour d'état ou de sortie permet de traiter les informations au niveau local mais la prise en charge de la commande de toutes les unités nécessite un coordinateur [Kha-79].

Dans le cas des systèmes à plusieurs échelles de temps, la décomposition des modèles en plusieurs sous-systèmes lents et rapides, plus ou moins indépendants, permet :

1. De commander ces systèmes par des retours utilisant la partie lente et la partie rapide.
2. De rechercher des correcteurs d'ordre réduit pour chaque sous-système.

La décomposition d'un système à deux échelles de temps en sous-systèmes lent et rapide suppose les commandes séparées lente et rapide sont appliquées sur chaque sous-système et ensuite combinées en une commande composée (*mixte*) appliquée sur le système original. Si la commande rapide n'est pas accessible, alors seulement la commande réduite lente sera utilisée. Cette idée est très utilisée dans la commande des systèmes à deux échelles de temps [Cor-93], [Kok-76], [Kok-86], [Lit-85].

II. 4. 1. Retour d'état linéaire

Supposant que les commandes :

$$u_s = K_0 x_s \quad \text{et} \quad u_f = K_2 z_f, \tag{2.19}$$

sont séparément appliquées sur les modèles réduits lent et rapide (2.17) et (2.18).

Pour exprimer

$$u = u_s + u_f = K_0 x_s + K_2 z_f, \tag{2.20}$$

comme une commande composée pour le système original (2.15), il faut exprimer les états fictifs x_s et z_f en termes des états réels x et z .

Notons que :

$$\bar{z}_s = -A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2 K_0)x_s,$$

et la substitution de l'approximation :

$$\begin{aligned} x &\cong x_s \\ z &\cong \bar{z}_s + \bar{z}_f \end{aligned}$$

dans l'équation (2.20) donne la commande composée :

$$u_c = (K_0 + K_2 B_2 K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21})x + K_2 \bar{z} \quad (2.21)$$

Quand cette commande est appliquée sur le modèle original (2.15), le système de retour d'état résultant est singulièrement perturbé et de plus, il est décomposable en sous-systèmes lent et rapide. La décomposition montre que les matrices des modèles réduits lent et rapide sont respectivement :

$$A_0 + B_0 K_0 + O(\varepsilon)$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon} [A_{22} + B_2 K_2 + O(\varepsilon)]$$

Par conséquent, K_0 et K_2 sont utilisés pour un placement de pôles, stabilisation ou régulation optimale pour que les paires (A_0, B_0) et (A_{22}, B_2) soient stabilisables et commandables. Cette approche est proposée par [Suz-76].

Si la matrice A_{22} est stable, alors le sous modèle rapide n'a pas besoin d'un contrôle, et donc poser $K_2 = 0$ dans (2.21) réduit la commande u_c en une commande d'ordre réduit et stable.

II. 4. 2. Retour de sortie et observateur

La commande à retour de sortie statique des systèmes à deux échelles de temps et singulièrement perturbés est traitée largement par récentes références [Sak-84]. En outre, il est montré qu'une commande à retour de sortie peut être non robuste en forme singulièrement perturbée. Pour cela, on considère l'exemple de la figure (1. 1) analysé par [Kha-81], soit :

$$\sum_{\varepsilon} : \begin{cases} \dot{x} = z \\ \varepsilon \dot{z} = -x - z + u \\ y = 2x + z \end{cases} \quad (2.22)$$

Le modèle réduit lent ;

$$\sum_s : \begin{cases} \dot{x}_s = -x_s + u_s \\ y_s = x_s + u_s \end{cases} \quad (2.23)$$

est utilisé pour une commande à retour de sortie $u_s = ky_s$ pour imposer la valeur propre du système (2.23) à -3 , et donc $k = 2$.

Appliquant la même commande $u = ky$ au système original (2.22), on constate que le système résultant est :

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \varepsilon \dot{z} = 3x + z \end{cases} \quad (2.24)$$

Le système a vraiment une valeur propre lente $-3 + O(\varepsilon)$ comme on veut, mais en plus, il a une valeur propre rapide instable $\frac{1}{\varepsilon} + O(1)$. Donc ce type contrôle n'est pas efficace.

Par conséquent, la possibilité de l'instabilité est due à la présence de la variable rapide dans l'équation de sortie (forte observabilité des parasites). Il est facile de voir qu'une condition suffisante pour que la commande réduite sera robuste est que $C_2 = 0$ (dans l'équation (2.16)) et par conséquent $D_0 = 0$, dans l'équation (2.17).

Des conditions semblables dans [Che-80] ont la forme de faible observabilité des parasites. Si ces conditions ne sont pas satisfaisantes, donc en plus de la sortie statique, on doit utiliser une sortie dynamique. L'exemple proposé par [O'Re-79] est une commande typique par retour de sortie dynamique basée sur un observateur.

A ce propos, on fixe notre attention sur la reconstruction des états inaccessibles du système singulièrement perturbé (2.15), (2.16) et on utilise un observateur d'ordre complet, $\hat{\Sigma}_\varepsilon$;

$$\hat{\Sigma}_\varepsilon : \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + G(y - \hat{y}) + B_\varepsilon u \quad (2.25)$$

avec \hat{x} , \hat{z} sont les estimations des états x et z , et

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}/\varepsilon & A_{22}/\varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon \end{bmatrix}.$$

L'erreur d'état de cette construction :

$$e(t) = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

satisfait :

$$\dot{e}(t) = (A_\varepsilon - GC)e(t), \quad e(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{z}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Suivant la dualité avec la commande composée, la matrice de gain de l'observateur, composée de G_0 et G_2 s'écrit :

$$G = \begin{bmatrix} A_{12}A_{22}^{-1}G_2 + G_0(I_m - C_2A_{22}^{-1}G_2) \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Cette formulation est utilisée par [Por-77] et [O're-79] pour l'analyse de la robustesse de la commande par retour de sortie dynamique.

Dans [Sak-82], il est montré que le gain de l'observateur (2.27) ne dépend pas de ϵ , et que peu d'évaluation de ϵ est préféré pour l'implémentation des observateurs. La non robustesse des observateurs d'ordre réduit est analysée par [Kha-81] et [Sak-82], où ils ont montré des conditions sous lesquelles un observateur d'ordre réduit peut être utilisé pour estimer les états des variables lentes d'un système linéaire singulièrement perturbé par la connaissance de son modèle réduit lent.

Des observateurs décentralisés pour les grands systèmes (*Large Scale System*) présentant deux échelles de temps sont examinés par [Ozg-77], et la construction des observateurs pour les systèmes discrets à deux échelles de temps a fait l'objet d'un travail intéressant par [Sho-95].

II. 5. CONCLUSION

Pour les systèmes singulièrement perturbés, les recherches sont axées principalement sur la modélisation, l'analyse et la commande.

Concernant la modélisation, la tendance est d'aller au-delà des modèles standards discutés dans le premier chapitre. Les deux grandes classes qui peuvent être présentées dans cette discipline sont :

- Les modèles avec connaissance des paramètres petits et qui ne sont pas multipliés par des dérivés.
- Les modèles dont les différentes échelles de temps sont causées par des paramètres cachés.

Comme exemples de systèmes représentant la première classe, on peut citer les systèmes à grand gain et quelques systèmes singuliers. Pour la deuxième classe, ce sont les réseaux électriques dynamiques avec des groupes d'état cohérents.

Pour l'analyse, la tendance est de traiter des nouvelles classes à savoir ; les systèmes discrets, stochastiques et continus non-linéaires, pour étudier leur commandabilité, stabilité et autres propriétés dans des échelles de temps différentes. En effet, la méthode des perturbations singulières s'avère d'être un outil puissant pour l'analyse de la robustesse des systèmes adaptatifs. Dans le cas des systèmes linéaires, les méthodes géométriques s'apparentent aux méthodes asymptotiques.

Enfin, les méthodes de commande par retour d'état basées sur l'approche multi-échelles de temps s'élargissent au retour de sortie (*output feed-back*), aux observateurs, au contrôle par modes glissants et aux problèmes de compensation. Le succès apporté par la commande composée pour certaines classes de systèmes linéaires, non-linéaires et stochastiques s'étend à des classes de systèmes spéciaux tels que les machines à courant alternatif. Dans notre étude, nous proposons l'application du contrôle multi-échelles de temps de type modes glissants au modèle singulièrement perturbé de la machine asynchrone (chapitre V).

Chapitre III

DECOMPOSITION GEOMETRIQUE DES SYSTEMES PAR LES CERCLES DE GERSCHGORIN

III. 1. INTRODUCTION

Il est bien connu que l'utilisation de la technique des perturbations singulières pour la réduction des modèles de systèmes complexes requière l'identification et la séparation des différentes échelles de temps existantes dans le comportement du système d'ordre élevé.

La première difficulté qui apparaît lorsque l'on veut découpler les variables réside dans l'identification des variables lentes et rapides. Ceci peut être effectué dans certains cas directement grâce à des méthodes géométriques ou par des méthodes analytiques.

Le calcul direct des valeurs propres de la matrice d'état permet de déterminer les modes du modèle, mais ne conduit pas à une identification des variables correspondantes. De plus, ce calcul n'est valable qu'en linéaire. Cette restriction disparaît pour les méthodes géométriques pour certaines classes de modèles non linéaires.

Ceci nous a conduit à utiliser l'approche géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin. Cette méthode donne une bonne sélection des variables lentes et rapides. Cependant, cette dernière nécessite une forme spéciale de la matrice d'état qui doit être à diagonale dominante.

III. 2. IDENTIFICATION GEOMETRIQUE DES DYNAMIQUES

Notons $(a_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$ les éléments de la matrice carrée d'état A et :

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

$$Q_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

III. 2. 1. Cercles de Gerschgorin

Les cercles de Gerschgorin sont généralement utilisés pour développer des algorithmes plus simples destinés à identifier les différentes échelles de temps dans les systèmes linéaires. En effet, après des transformations algébriques que subit la matrice d'état, cette dernière se présente sous forme diagonale dominante et dont les valeurs propres correspondent aux différentes

échelles de temps. Des conditions nécessaires et suffisantes sont énoncées pour que cette technique soit correctement applicable.

Théorème 1 : [Dur-72]

Les valeurs propres de la matrice A appartiennent au domaine D_1 du plan complexe formé par la réunion des régions intérieures des n cercles de Gerschgorin C_i , centrés en a_{ii} et de rayon R_{ii} :

$$R_{ii} = P_i$$

et dans le domaine D_2 formé par la réunion des n interférences de centres a_{ii} et de rayon R_{ci} :

$$R_{ci} = Q_i$$

Théorème 2 : [Dur-72]

1- Chaque valeur propre de la matrice carrée A appartient à au moins un des cercles C_i de centre a_{ii} et de rayon :

$$R_i = R_{ii} \text{ ou } R_i = R_{ci},$$

2 - Si m cercles $C_i (a_{ii}, R_i)$ forment un domaine séparé des autres cercles, alors il y'a exactement m valeurs propres situées dans ce domaine.

Théorème 3 : [Bor-92] (Système à deux dynamiques).

Si on peut définir deux ensembles d'indices I et K , avec $I \cap K = \emptyset$ et $I \cup K = \{1, \dots, n\}$, tels que :

$\forall (i, j) \in I \times K$, les cercles $C_i(a_{ii}, R_i)$ et $C_k(a_{kk}, R_k)$ vérifient :

$$|a_{ii} - a_{kk}| \geq (R_i + R_k) \quad \forall i \in I \text{ et } \forall k \in K,$$

alors la matrice A possède deux ensembles de valeurs propres séparés. Si $|a_{ii}|$ est supposé plus grand que $|a_{kk}|$ (voir figure (3.1)), les variables $x_i, i \in I$ sont alors rapides et $x_k, k \in K$ sont lentes.

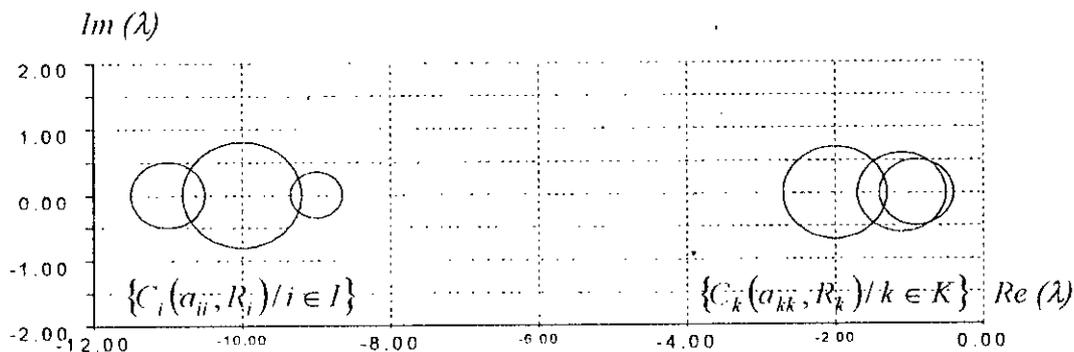


Figure 3.1 : Localisation des modes d'un système à deux dynamiques.

Taux de séparabilité

Le taux de séparabilité des dynamiques peut être estimé par la relation :

$$\varepsilon_s = \sup(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad 0 < \varepsilon_s < 1. \quad (3.3)$$

avec :

$$\varepsilon_1 = \max_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \left(\frac{R_i + R_k}{|a_{ii} - a_{kk}|} \right) \text{ et } \varepsilon_2 = \max_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \left(\frac{|a_{kk}|}{|a_{ii}|} \right),$$

Remarques :

1. Les deux paramètres ε_1 et ε_2 ont des rôles complémentaires : ε_1 indique le degré de couplage entre les différentes variables, et ε_2 correspond au rapport entre les différentes échelles de temps.
2. La valeur de ε_s dépend du conditionnement de la matrice A . Pour diminuer les rayons des cercles, il est parfois utile d'effectuer un calibrage des termes hors diagonale par un changement de base, afin de rendre la matrice à diagonale dominante.
3. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour l'application correcte du théorème des cercles des Gerschgorin est que la matrice d'état soit à diagonale dominante. En plus, il faut noter que chaque matrice linéaire peut se transformer en une autre à diagonale dominante [Kok-76].

III. 2. 2. Application

III. 2. 2. 1. Cas d'un modèle linéaire

Considérons le modèle proposé par [Cho-76] d'un générateur de vapeur :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 3.493 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.908 & -0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0.273 & 0.047 & 0.28 & -0.1125 \end{bmatrix} \tilde{x}, \quad (3.4)$$

Le tracé des cercles de Gerschgorin est représenté par la figure (3.2).

Description :

- Le tracé des cercles de Gerschgorin est représenté à la figure 3.2.
- Les cercles de Gerschgorin indiquent deux différentes échelles de temps, avec les sous-ensembles de variables d'état (x_3, x_5) et (x_1, x_2, x_4) , respectivement lent et rapide, correspondant au rapport $\varepsilon_s = 0.747$.

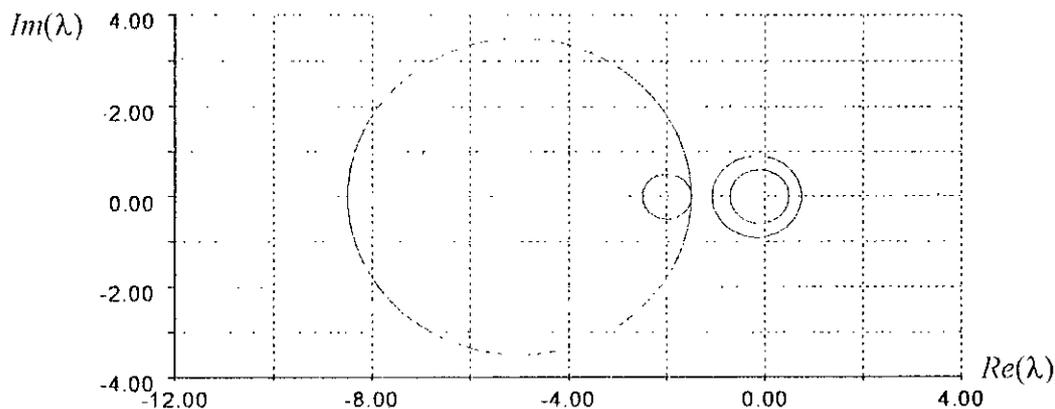


Figure 3.2 : Cercles de Gerschgorin pour un modèle d'un générateur de vapeur (cas linéaire).

III. 2. 2. 2. Cas d'un modèle non linéaire

On considère maintenant le modèle proposé dans [Bor-92], où $A(t)$ s'exprime par :

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 0.1 \cdot \sin(t) & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 2.525 & 0.025 & -10 - e^{-|t|} \end{bmatrix},$$

qui donne les cercles de Gerschgorin présentés à la figure (3.3) :

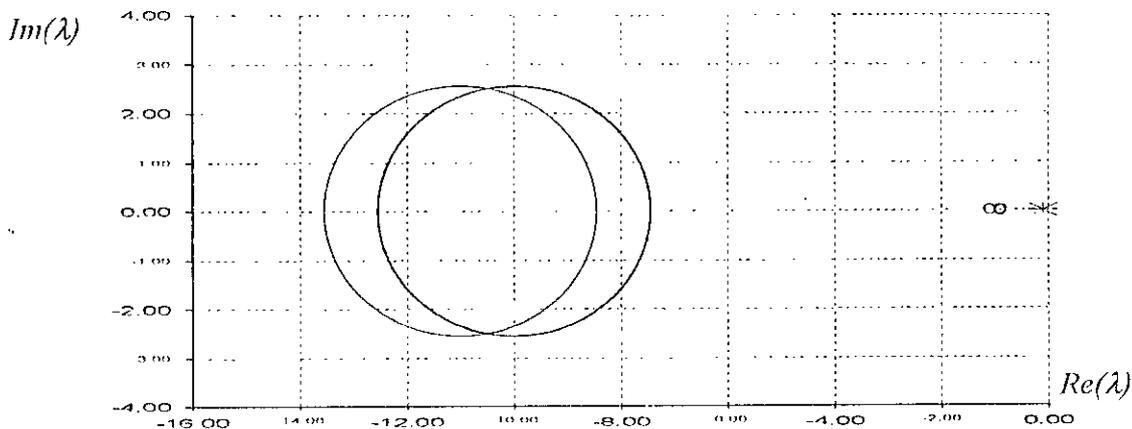


Figure 3.4 : Exemple de cercles de Gerschgorin pour un système non linéaire.

Remarque : [Kha-96]

Pour les systèmes linéaires variants, la stabilité ne peut être déduite par la localisation des valeurs propres de la matrice d'état. Cependant, il existe des classes spéciales de systèmes linéaires variants où la stabilité peut être déduite de la même façon que pour les systèmes linéaires, dont on cite :

1. les systèmes périodiques (Periodic systems),
2. les systèmes où la matrice d'état varie lentement (Slowly-varying systems).

III. 3. TRANSFORMATIONS MODALES

La technique des perturbations singulières peut réduire l'ordre des modèles complexes pour permettre leur analyse et contrôle. Le problème majeur de cette réduction est l'écriture du modèle mathématique sous la forme standard singulièrement perturbée [Gue-92]. Une solution pour remédier à ce problème est de trouver une matrice équivalente de la matrice de base sous forme bloc-diagonale ou à diagonale dominante pour garantir la séparation correcte des dynamiques lentes et rapides.

Des algorithmes dans ce sens ont été développés par [Ans-89], [Gue-92], [Gue-96]. Ils traitent le cas des systèmes linéaires singulièrement perturbés dont il est possible de faire une extension sur certaines classes de modèles non linéaires. Cependant, la convergence de ces algorithmes est conditionnée par la bonne sélection des dynamiques lente et rapide du système. En effet, le théorème de cercles de Gerschgorin est un bon test de la convergence.

Pour un système linéaire présentant deux échelles de temps et modélisé sous la forme implicite (1.1), il est difficile de le poser sous la forme standard singulièrement perturbée. Le problème se résume à :

1. l'évaluation des dimensions n et m des vecteurs lent et rapide,
2. l'identification et l'arrangement correct, parmi les composantes de \underline{X} , des modes lents et rapides.
3. l'évaluation du terme ε .

Pour traiter les points 1 et 2, il n'y a pas des méthodes systématiques, par contre, le terme ε peut être estimé par le rapport entre les valeurs absolues de la petite valeur propre des composantes lentes et la grande valeur propre des composantes rapides.

III. 3. 1. Changement de taille des rayons des cercles [Gue-96]

Soit la matrice

$$S_k = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha_k, 1, \dots, 1) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Le changement de base $\underline{X}' = S_k \underline{X}$ fait apparaître la nouvelle matrice d'état sous la forme :

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k}/\alpha_k & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k}/\alpha_k & a_{k-1,k+1} & \dots & a_{k-1,n} \\
 a_{k,1}\alpha_k & \dots & a_{k,k-1}\alpha_k & a_{k,k} & a_{k,k+1}\alpha_k & \dots & a_{k,n}\alpha_k \\
 a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k-1} & a_{k+1,k}/\alpha_k & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k}/\alpha_k & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn}
 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les rayons R_{lk} et R_{ck} deviennent respectivement $R_{lk}\alpha_k$ et R_{ck}/α_k . Un choix judicieux de α_k peut introduire une séparation entre les cercles.

Si l'opération est répétée plusieurs fois, la transformation obtenue est :

$$\begin{cases} X = S\underline{X} \\ A = S\underline{A}S^{-1} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec : $S = \prod_k S_k$,

et s'il y'a deux ensembles disjoints de cercles, la matrice de permutation est donc trouvée:

$$\begin{cases} X = P\underline{X} \\ A = P\underline{A}P^{-1} \end{cases} \quad (3.8)$$

III. 3. 2. Déplacement des centres des cercles [Gue-96]

Il est parfois nécessaire, pour améliorer la séparation des dynamiques par les cercles de Gerschgorin d'introduire un déplacement des cercles. Ce déplacement est caractérisé par la transformation suivante :

$$T_l = I_n + \beta_l J_{ij} \quad (3.9)$$

avec :

$$J_{ij} = \begin{matrix} & & & j & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & i \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \end{matrix} \quad (3.10)$$

et la nouvelle matrice d'état sera :

$$\begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} - \beta_l a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \beta_l a_{j1} & \dots & a_{ii} + \beta_l a_{ji} & \dots & X_{ij} & \dots & a_{in} + \beta_l a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} - \beta_l a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} - \beta_l a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] & \dots & i \\ & & & & & & & \dots & j \end{matrix} \quad (3.11)$$

dont seuls les éléments de la ligne i et de la colonne j changent, et les cercles i et j sont déplacés de a_{ii} et a_{jj} à $a_{ii} + \beta_l a_{ji}$ et $a_{jj} + \beta_l a_{ji}$ respectivement.

Le choix de β_l peut se faire de telle manière que $X_{ij} = 0$; c'est à dire solution de l'équation de Riccati :

$$X_{ij} = a_{ij} + \beta_l (a_{jj} - a_{ii}) - \beta_l^2 a_{ji} = 0 \quad (3.12)$$

Si plusieurs cercles se coupent, les termes $\beta_l (l = 1, 2, \dots)$ se calculent par la même méthode, la transformation finale est donc :

$$\begin{cases} X = T \underline{X} \\ A = T \underline{A} T^{-1} \end{cases} \quad (3.13)$$

avec :

$$T = \prod_l T_l,$$

si deux groupes de cercles sont disjoints, la matrice de permutation P trouvée est :

$$\begin{cases} X = P \underline{X} \\ A = P \underline{A} P^{-1} \end{cases} \quad (3.14)$$

III. 4. REGROUPEMENT ET SEPARATION DES DYNAMIQUES D'UN SYSTEME LINEAIRE

Dans ce contexte, on présente un algorithme simple pour le regroupement et la séparation des différentes échelles de temps d'un système linéaire. Cet algorithme basé sur les cercles de Gerschgorin suppose que la matrice d'état est à diagonale dominante [Ans-89].

III. 4. 1. Etape 1 (Réorganisation du vecteur d'état)

Comme la localisation des valeurs propres est liée aux lignes de la matrice d'état (*Théorème 1*), on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de telle sorte à regrouper les termes de la diagonale en fonction de leur amplitude d'ordre croissant. Cette réorganisation permet l'utilisation correcte de la technique des perturbations singulières.

Ce processus nécessite la transformation suivante :

$$\begin{cases} \tilde{A} = P^T A P, \\ \tilde{B} = P^T B, \\ \tilde{C} = C P^T. \end{cases} \quad (3.15)$$

La matrice P caractérise le changement de lignes correspondant à l'ordre croissant des valeurs propres de A et P^T sa transposée. Les éléments de la matrice P seront déterminés comme suit :

$$\begin{cases} P_{ij} = 1, & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ ligne sera transférée à la } j^{\text{ème}}, \\ P_{ii} = 1, & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ ligne ne sera pas à permuter,} \\ P_{ij} = 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.16)$$

III. 4. 2. Etape 2 : (Séparation des dynamiques)

L'utilisation des cercles de Gerschgorin met en évidence les différentes dynamiques du système. Si les cercles présentent q ensembles disjoints, alors le système est à q échelles de temps.

Par exemple, un système à deux échelles de temps sera partitionné comme suit :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C_{11} \quad C_{22}] \quad (3.17)$$

Le bloc de ligne $[A_{11} \quad A_{12}]$ est associé à la réunion des cercles qui contient les petites valeurs propres en valeurs absolues et correspond au modèle dit lent. Si les dynamiques sont suffisamment séparées, les modèles réduits lent et rapide peuvent se calculer facilement en utilisant la technique des perturbations singulières.

III. 5. APPLICATION

III. 5. 1. Séparation des dynamiques

Considérons le modèles suivant d'ordre 5 [Ans-89] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{X} &= \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{B} \cdot U \\ y &= \underline{C} \cdot \underline{X} \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -17.0 & 0.2 & 0.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.1 & -16.5 & -0.4 & 0.0 & -1.0 \\ 0.5 & -0.03 & -1.5 & -0.02 & -0.05 \\ -0.3 & 0.0 & -1.1 & -16.0 & -0.2 \\ -0.01 & -0.4 & 0.0 & 0.04 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ et } \underline{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Pour partitionner le vecteur d'état correctement, on utilise l'algorithme précédent (étape 1). En effet, la matrice P est :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

et la nouvelle représentation d'état est:

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1.2 & 0.0 & 0.04 & -0.4 & -0.01 \\ -0.05 & -1.5 & -0.02 & -0.03 & 0.5 \\ \hline -0.2 & -1.1 & -16.0 & 0.0 & -0.3 \\ -1.0 & -0.4 & 0.0 & -16.5 & -0.1 \\ -0.5 & 0.0 & -0.5 & 0.2 & -17.0 \end{array} \right], \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\underline{C} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Le tracé des cercles est représenté sur la figure (3.5). On remarque deux ensembles disjoints des cercles, donc il y'a deux échelles de temps, et les sous-vecteurs $x = [x_1 \ x_2]^T$ et $z = [x_3 \ x_4 \ x_5]^T$ sont respectivement lent et rapide et leur valeurs initiales sont $x_0 = [0 \ 0]^T$ et $z_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$.

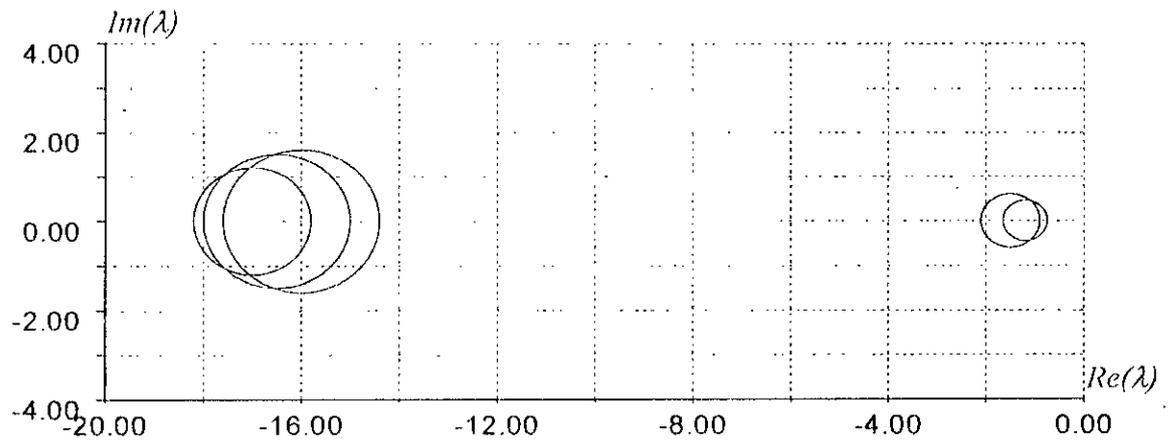


Figure 3.5 : Cercles de Gerschgorin de l'exemple numérique considéré.

III. 5. 1. Application de la technique des perturbations singulières

En appliquant les équations (3.25) à (3.31), les deux sous systèmes sont :

➤ *Modèle réduit lent :*

$$\frac{d}{dt}x_s = \begin{bmatrix} -1.1760 & 0.0069 \\ -0.0628 & -1.4970 \end{bmatrix} x_s + \begin{bmatrix} -0.9758 \\ -0.0015 \end{bmatrix} u_s,$$

$$y_s = [0.9702 \quad 1.0013] x_s + [7.1336 * 10^{-4}] u_s \quad (3.21)$$

$$z_s = \begin{bmatrix} -0.0119 & -0.0688 \\ -0.0604 & -0.0243 \\ -0.0298 & 0.0017 \end{bmatrix} x_s + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0606 \\ 0.0007 \end{bmatrix} u_s$$

avec :

$$x_{s0} = [0 \quad 0]^T.$$

➤ *Modèle réduit rapide :*

$$\frac{d}{d\tau} z_f = \begin{bmatrix} -16.0000 & 0.0000 & -0.3000 \\ 0.00000 & -16.5000 & -0.1000 \\ -0.5000 & 0.2000 & -17.0000 \end{bmatrix} z_f(\tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_f(\tau)$$

$$y_f(\tau) = [0 \quad 1 \quad 1] z_f(\tau), \quad (3.22)$$

avec :

$$z_{f0} = z_0 + \begin{bmatrix} 0.0119 & 0.0688 \\ 0.0604 & 0.0243 \\ 0.0298 & -0.0017 \end{bmatrix} x_0$$

On présente à la figure (3.6), les réponses indicielles du modèle initial et des modèles réduits lent et rapide.

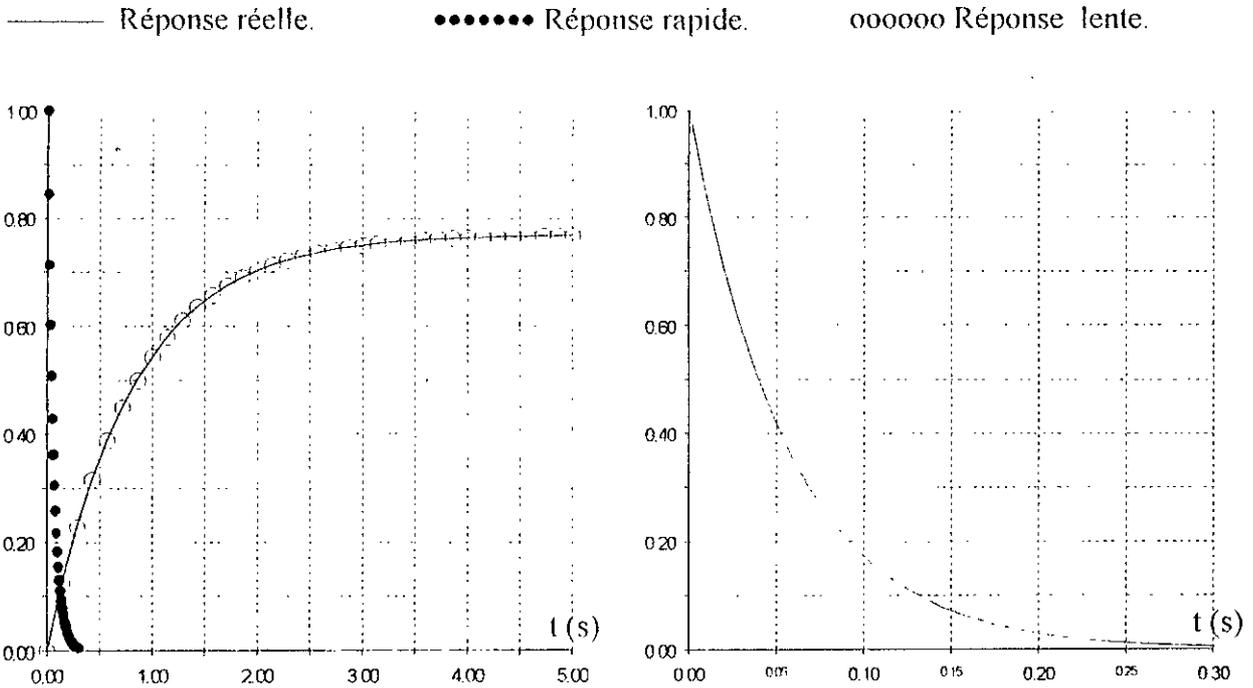


Figure 3.5.a : Réponses réelle, lente et rapide.

Figure 3.5.b : Réponse rapide.

III. 6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin pour l'identification et la séparation des dynamiques. Pour améliorer la séparation des dynamique, nous avons procédé à des transformations modales afin de remédier à quelques problèmes d'identification des modes lents et rapides.

En effet, nous avons présenté des algorithmes de changement de tailles des rayons et de déplacement des centres des cercles, et nous avons mis en évidence l'utilisation d'un algorithme efficace pour le regroupement et la séparation correcte des dynamiques.

Le test numérique de cet algorithme montre clairement sa simplicité et sa souplesse ainsi que la séparation correcte des différentes dynamiques qui permet une meilleure application de la technique des perturbations singulières.

La méthode des cercles de Gerschgorin pour l'identification des dynamiques, peut être utilisée même si on ne connaît pas a priori les variables lentes et rapides. En effet, le calcul des valeurs propres donne un test sur le bon partitionnement du vecteur d'état global. Dans certains cas, il est nécessaire d'effectuer un calibrage (changement de base diagonale) qui transforme la matrice d'état initiale en une autre diagonale dominante.

L'exploitation de cette approche pour les systèmes singulièrement perturbés permet de développer des modèles réduits qui représentent de manière suffisante le comportement global du système avec moins de complexité. Ces modèles peuvent être utilisés pour des raisons de simulation, d'analyse et de contrôle.

Chapitre IV

MISE SOUS FORME STANDARD SINGULIEREMENT PERTURBEE DES MODELES DES MCA

IV. 1. INTRODUCTION

Les équations des machines à courant alternatif sont fortement non-linéaires et couplées. Cependant, ces modèles peuvent être considérés à plusieurs échelles de temps (dynamiques électriques, électromagnétiques et mécanique, hormis l'échelle de temps thermiques). Donc, un découplage préalable des dynamiques peut faciliter l'élaboration de stratégies du contrôle de ces machines.

Un système dynamique implicite évoluant suivant deux ou plusieurs échelles de temps, peut être réduit ou même découplé en deux ou plusieurs sous-systèmes, en utilisant la technique des perturbations singulières. Le calcul des modèles réduits suppose au préalable, un regroupement adéquat des modes lents et rapides du système (système modélisé sous la forme standard singulièrement perturbée dite explicite).

Cependant, il est difficile, pour un système pour lequel la propriété de deux échelles de temps a été détectée par le spectre des valeurs propres, dans le cas linéaire, ou par expérience dans le cas non-linéaire, modélisé sous la forme implicite, de le transformer sous la forme standard singulièrement perturbée. Le problème se résume en :

1. Evaluation des tailles des vecteurs lents et rapides ainsi que l'identification parmi les composantes du vecteur d'état, des modes lents et rapides.
2. Evaluation du terme parasite ε .

En fait, il n'existe pas de méthodes systématiques pour aborder ces points.

Dans ce chapitre, nous présentons une procédure itérative pour la mise sous forme standard singulièrement perturbée des modèles des machines à courant alternatif. Cette procédure qui utilise l'approche par les cercles de Gerschgorin, permet d'obtenir une forme standard pour des vitesses quelconques et de proposer un critère suffisant de la séparation des dynamiques. Enfin, nous présentons des résultats (simulation en boucle ouverte) justifiant l'utilité de cette procédure suivie par application de la technique des perturbations singulières.

IV. 2. APPLICATION AUX MODELES DE LA MACHINE ASYNCHRONE

IV. 2. 1. Le problème de la dynamique

La cartographie des pôles et des zéros donne une bonne approche visuelle des modes dynamiques d'un système, notamment du comportement dominant et peut être une aide précieuse pour l'analyse et la compréhension du processus.

L'expression matricielle du modèle électrique de la machine asynchrone est à coefficients variables avec les vitesses angulaires ω_s et ω_r . Il s'agit donc d'un système non linéaire et il n'est normalement pas possible d'établir des fonctions de transfert explicitant des relations opérationnelles entre les entrées et les sorties.

IV. 2. 2. Les Modes Electromagnétiques

Les expressions mathématiques décrivant le comportement dynamique de la machine asynchrone peuvent être mises sous la forme d'une équation différentielle généralisée :

$$[U] = [R][I] + [L] \frac{d}{dt} [I] \quad (4.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} [U] &= [v_{ds} \quad v_{qs} \quad v_{dr} \quad v_{qr}]^T \\ [I] &= [i_{ds} \quad i_{qs} \quad i_{dr} \quad i_{qr}]^T \end{aligned}$$

Mise sous forme d'équation d'état, cette équation devient :

$$\frac{d}{dt} [I] = [A][I] + [B][U] \quad (4.2)$$

avec :

$$[A] = -[L]^{-1}[R], \text{ et } [B] = [L]^{-1}$$

Soit la matrice d'évolution :

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}$$

Pour laquelle :

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega \\ -(\omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_s} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sigma T_s} I_2 - (\omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) J_2$$

$$[A_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{M}{\sigma L_s T_r} & \frac{M}{\sigma L_s} \omega \\ -\frac{M}{\sigma L_s} \omega & \frac{M}{\sigma L_s T_r} \end{bmatrix} = \frac{M}{\sigma L_s T_r} I_2 - \frac{M}{\sigma L_s} \omega J_2$$

$$[A_{21}] = \begin{bmatrix} \frac{M}{\sigma L_r T_S} & \frac{M}{\sigma L_r} \omega \\ -\frac{M}{\sigma L_r} \omega & \frac{M}{\sigma L_r T_S} \end{bmatrix} = \frac{M}{\sigma L_r T_S} I_2 - \frac{M}{\sigma L_r} \omega J_2$$

$$[A_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_r} & (\omega_S \frac{1}{\sigma}) \\ (\omega_S \frac{1}{\sigma}) & \frac{1}{\sigma L_r} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma L_r} I_2 + (\omega_S \frac{1}{\sigma}) J_2$$

et la matrice d'application des entrées :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_S} \\ -\frac{1}{\sigma L_S L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sigma L_S L_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_S} I_2 \\ -\frac{M}{\sigma L_S L_r} I_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et J_2 une matrice de rotation de 90° .

Les pôles de ce système sont donc les valeurs propres de la matrice d'évolution¹, obtenues en recherchant les racines du déterminant de la matrice de transition [Car-95]. Ces racines caractéristiques précisent la dynamique des modes électromagnétiques propres à la machine et sont les éléments non nuls de la matrice diagonale $[D_\lambda]$, semblable à $[A]$

L'analyse avec des valeurs numériques montre que cette matrice prend la forme générale suivante :

$$[D_\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

¹ Dans ce chapitre, les matrices d'évolution des états électromagnétiques varient lentement (fonction de la vitesse de rotation). De plus, la notion de pôles est seulement utilisée pour faciliter la mise sous forme standard singulièrement perturbée.

où :

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^*$$

$$\lambda_3 = -\xi'\omega_n + j\omega_n'\sqrt{1-\xi'^2}, \quad \lambda_4 = \lambda_3^*$$

et, que par un changement de base approprié, on peut revenir à une partition en blocs réels, soit :

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} -\xi \omega_n & \omega_n\sqrt{1-\xi^2} & 0 & 0 \\ -\omega_n\sqrt{1-\xi^2} & -\xi \omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi' \omega_n' & \omega_n'\sqrt{1-\xi'^2} \\ 0 & 0 & -\omega_n'\sqrt{1-\xi'^2} & -\xi' \omega_n' \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

De cette disposition, il en résulte deux modes électromagnétiques oscillatoires, quelque soit le point de fonctionnement. Les pulsation naturelles ω_n et ω_n' , et les facteurs d'amortissements ξ et ξ' sont ainsi des paramètres du polynôme du quatrième ordre caractérisant la partie électrique du processus machine asynchrone [Car-95].

La figure (4.1) donne, dans le plan complexe les zones qu'occupent les pôles complexes représentant les deux modes lorsque la pulsation statorique varie de 0 à 314 rad/s sachant que la pulsation rotorique n'excède jamais 31.4 rad/s, et ce pour les deux premières machines du tableau (4.1).

	$R_S(\Omega)$	$L_S(H)$	$R_R(\Omega)$	$L_R(H)$	$M(H)$	$J (kg \cdot m^2)$
MACHINE 1	5.793	0.386	3.421	0.386	0.363	0.018
MACHINE 2	1.100	0.16734	1.465	0.16734	0.160	0.092
MACHINE 3	1.200	0.1554	1.000	0.1554	0.150	0.066
MACHINE 4	1.000	0.250	1.630	0.250	0.242	0.070

Tableau 4.1 : Exemples de machines asynchrones [Gue-92].

Ces résultats confirment qualitativement le comportement global de la machine, lors d'un démarrage direct sur le réseau. On remarque l'importance de la partie imaginaire du mode 1 qui devient dominant au fur et à mesure que diminue la pulsation statorique. Cette tendance révèle un découplage des modes pour les faibles valeurs ω_s , mais il est ainsi prouvé qu'une commande de la machine asynchrone à forte dynamique ne peut être réalisée qu'en contrôlant les grandeurs instantanées, lorsque la qualité du couple moteur est un facteur important pendant les régimes transitoires.

Remarque :

Il existe différentes représentations d'un processus en raison du multiple choix possible pour le vecteur d'état lui-même. Dans plusieurs cas, le vecteur constitué des quatre flux ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, \phi_{dr}, \phi_{qr}$) ou celui constitué des flux et des courants statoriques ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, i_{ds}, i_{qs}$) sont choisis comme vecteurs d'état.

Cette diversité ne remet évidemment pas en cause les modes électromagnétiques puisque dans tous les cas le déterminant reste le même, donc les valeurs propres également.

IV. 2. 3. Le Mode Electromécanique

Chacune des configurations de quatre pôles des modes électromagnétiques est donnée par une vitesse constante de rotation de l'arbre, puisque les vitesses ω et ω' sont elles mêmes fixées.

Dans ces conditions, l'accélération $\frac{d\Omega}{dt}$ est nulle et le couple moteur C_{em} peut être considéré égal à sa valeur moyenne pour le point de fonctionnement considéré.

Cette hypothèse permet d'analyser le mode électromécanique pour des petits mouvements (petites variations de la vitesse de rotation).

En régime permanent le couple électromagnétique s'exprime par la relation suivante :

$$C_{em} = 3p\phi_s^2 \frac{R\omega_r}{R^2 + (N\omega_r)^2} \tag{4.5}$$

avec :

ω_r : la pulsation des grandeurs rotoriques.

R : la résistance d'une phase rotorique ramenée au stator.

$$R = R_r \left(\frac{L_s}{M} \right)^2$$

N : l'inductance de fuite rotorique totalisée ramenées au stator.

$$N = \sigma L_r \left(\frac{L_s}{M} \right)^2$$

A partir de l'expression (4.5), et en considérant $N \cdot \omega_r \ll R$, on obtient :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 3p \frac{\phi_s^2}{R} \omega_r - C_r$$

En remplaçant ω_r par $\omega_s - p\Omega$ et en choisissant la valeur nominale du flux statorique, il vient :

$$\tau_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_{sn} - \frac{1}{K_m} C_r$$

où :

$$\tau_m = \frac{JR}{3p^2 \phi_{sn}^2},$$

$$K_m = \frac{R}{3p^2 \phi_{sn}^2},$$

$$\phi_{sn} = \frac{V_{sn}}{\omega_{sn}}.$$

τ_m représente une constante de temps électromécanique de même nature que celle du moteur à courant continu.

Pour les machines du tableau (4.1), on calcule les modes électromécaniques. Le flux nominal est donné à une tension de 220V à 314.16 rad/s. Les pôles correspondants $P_m = -\omega_m$ sont reportés sur le tableau (4.2).

MACHINE	MAS_1	MAS_2	MAS_3	MAS_4
Pôle électromécanique (P_m)	-120.68	-57.00	-118.63	-68.78

Tableau 4.2 : Exemples des modes électromécaniques.

Remarque :

En comparant aux résultats précédents, la conclusion est immédiate : le mode électromécanique ne peut être considéré découplé pour des valeurs élevées des moments d'inertie et de la pulsation statorique ω_s . Une telle disposition placerait le pôle électromécanique proche de l'origine et éloigné des modes électromagnétiques.

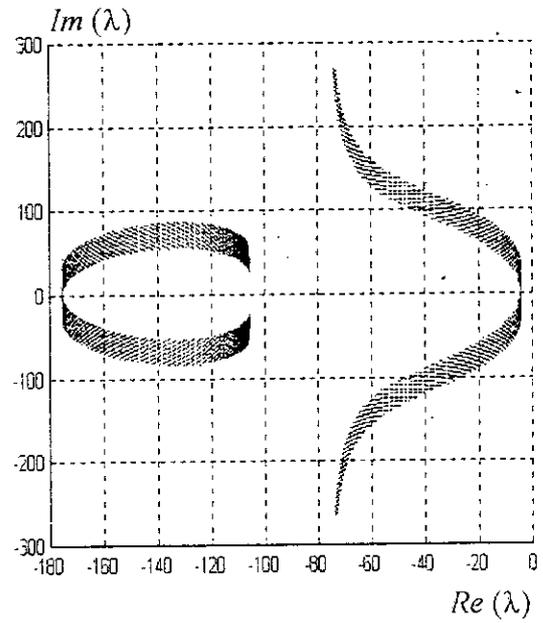
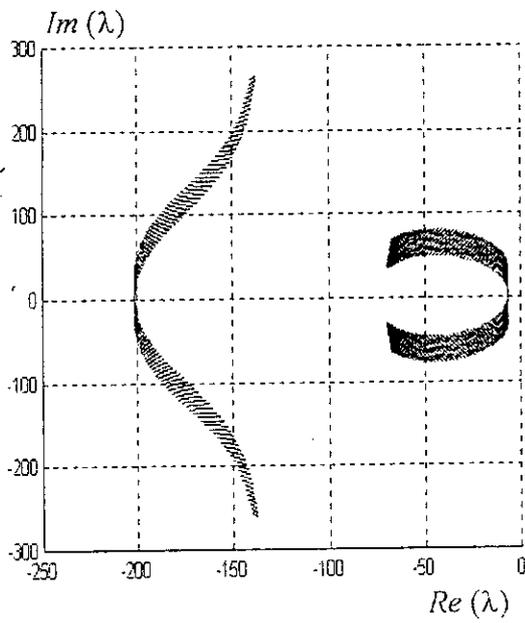


Figure 4. 1. a : Configuration des modes électromagnétiques et du mode mécanique pour les machines MAS_1 et MAS_2 .

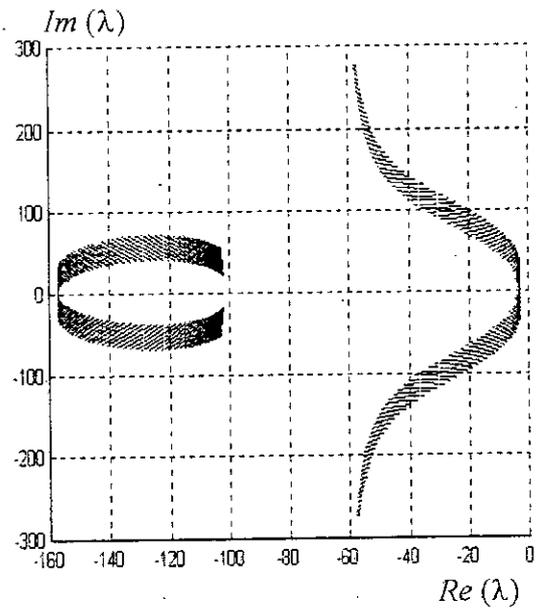
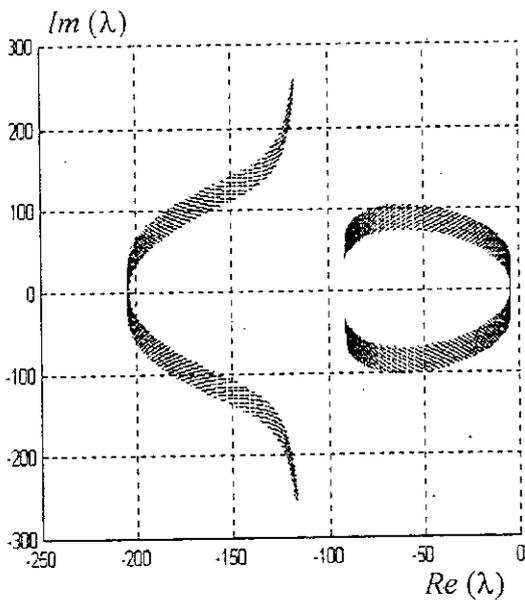


Figure 4. 1. b : Configuration des modes électromagnétiques et du mode mécanique pour les machines MAS_3 et MAS_4 .

IV. 2. 4. Modèles d'état de la machine asynchrone

IV. 2. 4. 1. Modèle d'état de la machine en α, β :

En utilisant les équations (4.1) et (4.2), le modèle d'état s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma T_r B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma T_r} I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

avec : $B_r = \frac{M}{L_r}$, $[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

et l'expression du couple électromagnétique devient :

$$C_{em} = p \frac{B_r}{\sigma L_s} \phi_{s\alpha\beta}^T R(-\theta) J_2 \phi_{r\alpha\beta}, \quad (4.7)$$

IV. 2. 4. 2. Modèle d'état de la machine en d, q

A partir du chapitre précédent, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\sigma T_s} I_2 + \omega_s J_2\right) & \frac{B_r}{\sigma T_s} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{\sigma L_r B_r} I_2 & -\left(\frac{1}{\sigma T_r} I_2 + \omega_r J_2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{sdq} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

et :

$$C_{em} = p \frac{B_r}{\sigma L_s} \phi_{sdq}^T J_2 \phi_{rdq}. \quad (4.9)$$

Remarque :

Ces deux représentations d'état seront utilisées pour la mise sous forme standard singulièrement perturbée des modèles de la machine asynchrone.

IV. 2. 5. Mise en évidence de l'existence de deux dynamiques électromagnétiques

Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre (3), l'application de certaines méthodes de réduction nécessite l'identification des dynamiques du système. Pour cette raison, nous avons représenté sur la figure (4.2) la distribution des modes électromagnétiques du modèle de la machine (4.1), pour différents choix de repère d'axes d, q .

Les valeurs propres pour les quatre machines asynchrones du tableau (4.1), sont paramétrées en ω . Le tracé est effectué dans le plan complexe.

	$R_s(\Omega)$	$L_s(H)$	$R_r(\Omega)$	$L_r(H)$	$M(H)$	σ
MACHINE 1	5.793	0.386	3.421	0.386	0.363	0.1156
MACHINE 2	1.100	0.16734	1.465	0.16734	0.160	0.0858
MACHINE 3	1.200	0.1554	1.000	0.1554	0.150	0.0683
MACHINE 4	1.000	0.250	1.630	0.250	0.242	0.0661

Tableau 4.3 : Exemple des machines asynchrones.

Remarque :

On remarque que la distribution des valeurs propres dépend du choix du référentiel . Au contraire des systèmes linéaires comme celles vues au chapitre (3), il est difficile de donner une valeur au paramètre ε , et par suite la difficulté d'avoir un modèle réduit à partir du modèle d'état (4.1) directement.

Pour surmonter ce problème, il faut découpler les variables d'état ou les séparer de manière suffisante pour pouvoir utiliser la technique des perturbations singulières.

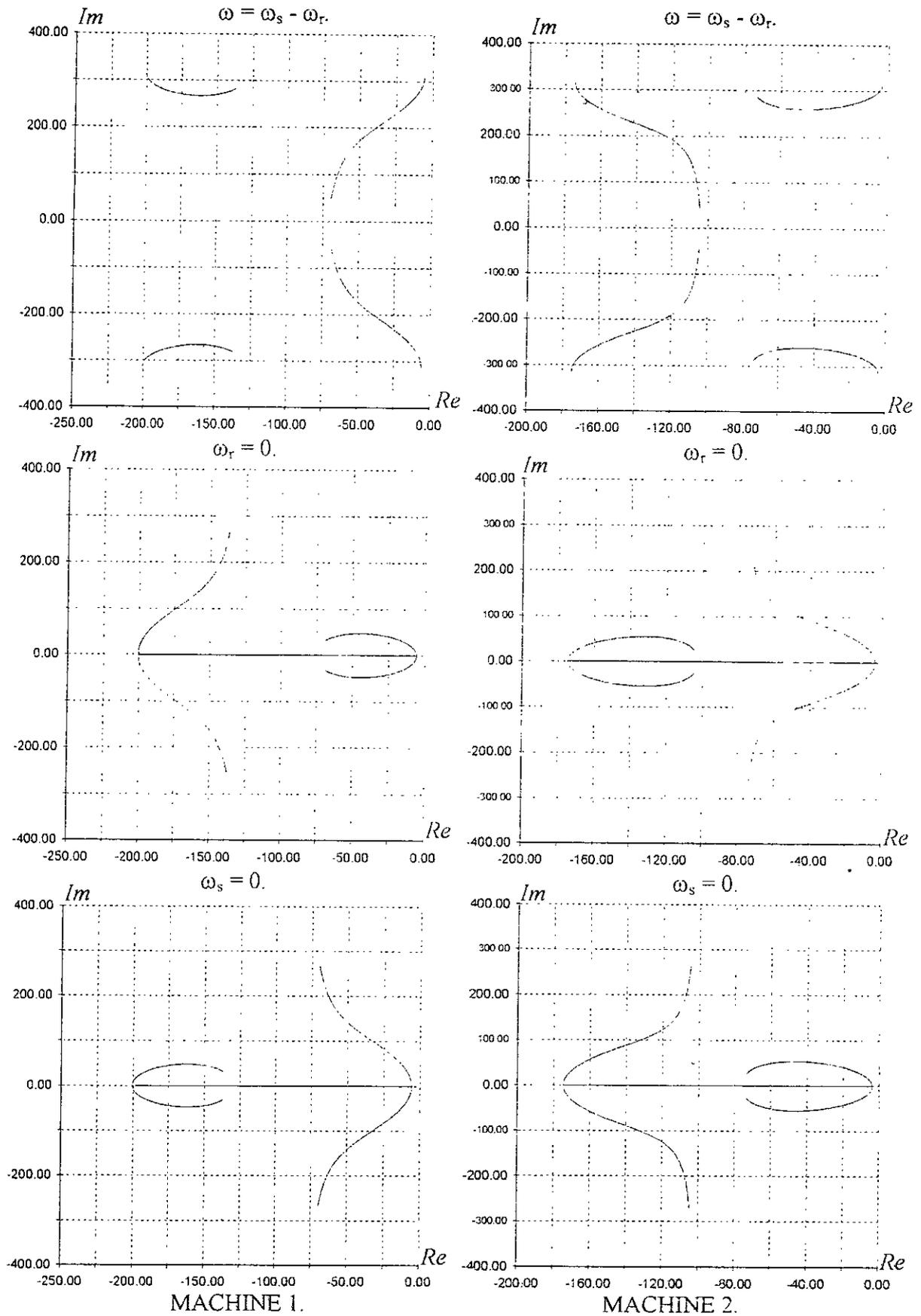


Figure 4. 2. a : Tracé des valeurs propres pour des exemples des machines asynchrones.

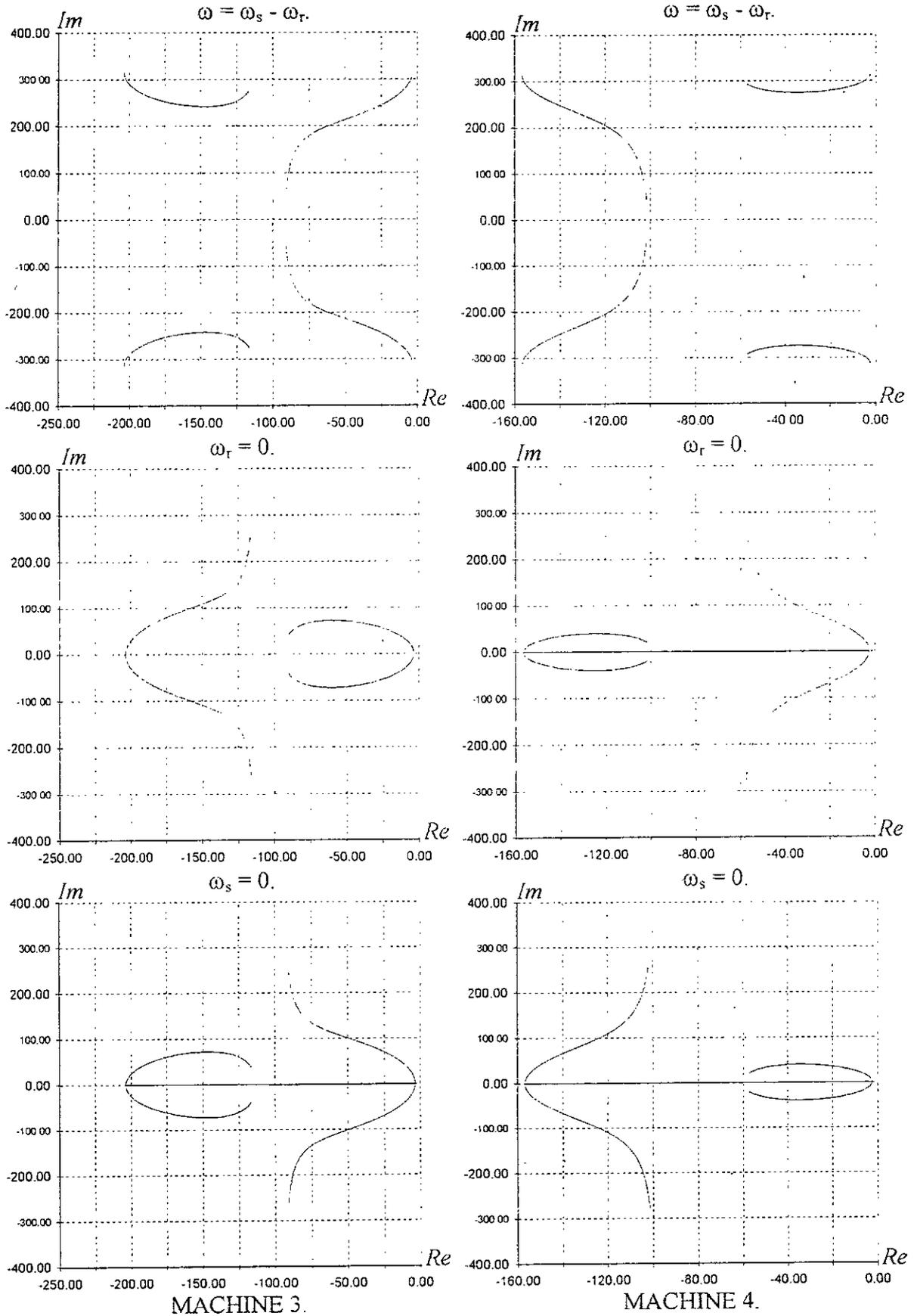


Figure 4. 2. b : Tracé des valeurs propres pour des exemples des machines asynchrones.

IV. 2. 6. Séparation des dynamiques en (d,q) par les cercles de Gerschgorin

IV. 2. 6. 1. Séparation des dynamiques pour les petites vitesses

En se basant sur les tracés des valeurs propres de la figure (4.1), les variables lentes sont ϕ_{sd} et ϕ_{sq} , et les variables rapides sont ϕ_{rd} et ϕ_{rq} .

La matrice d'état (4.8) s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} \quad (4.10)$$

et l'équation caractéristique a la forme suivante :

$$P(\lambda) = \det \left[(A_{11} - \lambda \cdot I_2) \cdot [(A_{22} - \lambda \cdot I_2) - A_{21}(A_{11} - \lambda \cdot I_2)^{-1} A_{12}] \right] \quad (4.11)$$

Pour utiliser l'équation (4.11) de manière efficace, on effectue le changement de base suivant (équation de Riccati) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

qui transforme le système (4.8) en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_s J_2 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\left(\frac{\sigma}{T_{rp}} I_2 - \omega J_2\right) & -\left(\frac{1+\alpha}{T_{rp}} I_2 + \omega_r J_2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \cdot v_{sdq}, \quad (4.13)$$

avec : $T_{sp} = \sigma T_s$, $T_{rp} = \sigma T_r$ et $\alpha = T_s / T_r$.

1. Calcul des valeurs propres

Pour les petites vitesses ($\omega \rightarrow 0$), l'équation (4.11) s'écrit :

$$P(\lambda) = \det \left\{ (\lambda I_2 + \omega_s J_2) \cdot \left[(\lambda I_2 + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} + \omega_r J_2) + \frac{\alpha \sigma}{\Delta T_{sp}^2} (\lambda I_2 - \omega_s J_2) \right] \right\} = 0, \quad (4.14)$$

avec :

$$\Delta = \lambda^2 + \omega_s^2$$

ou bien :

$$P(\lambda) = \det \left\{ \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \omega_s \cdot \omega_r + \frac{\alpha \cdot \sigma}{T_{sp}^2} \right] \cdot I_2 + \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) + \lambda \omega_r \right] \cdot J_2 \right\} = 0$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\det[(\alpha_1 I_2 + \alpha_2 J_2)] = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

soit :

$$\alpha_1 = \pm j \alpha_2 .$$

L'équation (4.14) devient :

$$\left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \omega_s \omega_r + \frac{\sigma \alpha}{T_{sp}^2} \right] = \pm j \cdot \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \lambda \omega_r + \frac{\omega}{T_{sp}} \right] \quad (4.16)$$

et après arrangement, elle s'écrit :

$$(\lambda \pm j \omega_s) \cdot \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \pm j \omega_r \right) + \frac{\alpha \sigma}{T_{sp}^2} = 0 \quad (4.17)$$

Cette équation est du deuxième ordre, et facile à résoudre. Donc, l'équation caractéristique s'annule pour :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)T_{sp}} \pm j \omega_s, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \pm j \omega_r \quad (4.18)$$

Si le repère de Park est lié au stator ou au rotor :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)T_{sp}}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \quad (4.19)$$

Sinon

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)T_{sp}} \pm j \omega_s, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \pm j \omega_s \quad (4.20)$$

Ces résultats sont validés par les tracés de la figure (4.2).

2. Estimation du paramètre ε :

Soit le rapport des modules des valeurs propres :

$$\frac{|\lambda_{3,4}|}{|\lambda_{1,2}|} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_s T_{sp}}{1+\alpha} \right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha \sigma}{(1+\alpha)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_s T_{sp}}{1+\alpha} \right)^2}}, \quad (4.21)$$

Vu l'ordre du grandeur de σ , le rapport $|\lambda_{3,4}|/|\lambda_{1,2}|$ est toujours supérieur à σ . Donc, lorsque la vitesse tend vers zéro, le choix $\varepsilon = \sigma$ est correct.

La mise du modèle du système sous forme réduite est possible, mais le problème se pose sur l'ordre de grandeur sur la gamme de vitesse pour laquelle l'approximation est valable.

IV. 2. 6. 2. Séparation des dynamiques électromagnétiques pour des vitesses quelconques

Comme nous l'avons déjà vu, le problème de découplage des variables réside dans l'identification des variables lentes et rapides. Pour cela, on va utiliser les cercles de Gerschgorin pour surmonter cette difficulté et en supposant que le repère de PARK est libre.

1)- L'algorithme basé sur les cercles de Gerschgorin, appliqué à la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 + \omega_s J_2\right) & \frac{B_r}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{B_r T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 + \omega_r J_2\right) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donne les cercles représentés sur la figure (4.3).

1. Les cercles sont doublés et leurs rayons sont variables.
2. Les valeurs propres sont mal localisées.

2)- On peut simplifier la matrice A par la transformation :

$$T_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & B_r J_2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec : $\phi_1 = T_1 \phi_{dq}$ et $A_1 = T_1 A T_1^{-1}$.

Soit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 + \omega_s J_2\right) & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 + \omega_r J_2\right) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

- Les cercles restent toujours doublés et quelconques.

3)- Pour réduire les tailles des rayons, on utilise la transformation suivante :

$$\phi_2 = T_2 \phi_1, \quad (4.25)$$

avec :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad j^2 = -1.$$

et on obtient :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 - j\omega_s I_{-1}\right) & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 - j\omega_r I_{-1}\right) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

1. Cette fois, les cercles sont doublés deux à deux, avec une séparation au niveau de l'axe des imaginaires figure (4.4).
2. Le problème d'estimation de ε est toujours très difficile à résoudre.

4)- Pour séparer les parties réelles des valeurs propres, on exploite la transformation vue dans le premier chapitre :

soit :

$$\phi_3 = T_3 \phi_2, \quad T_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -\delta I_2 & I_2 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

et la nouvelle matrice d'état s'écrit :

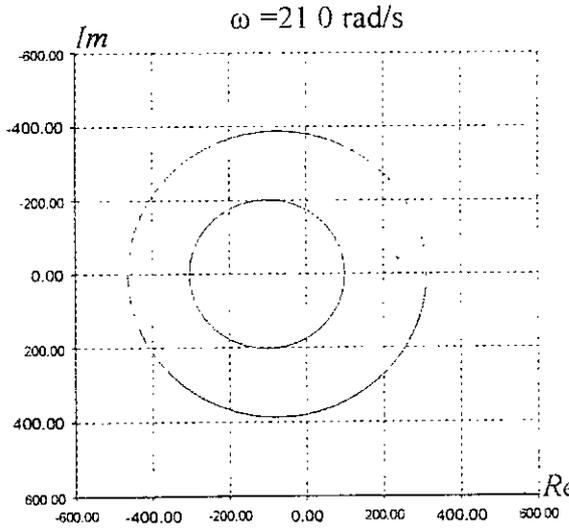
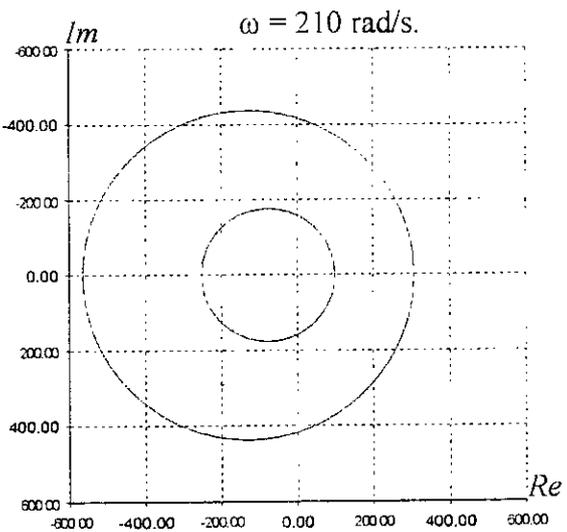
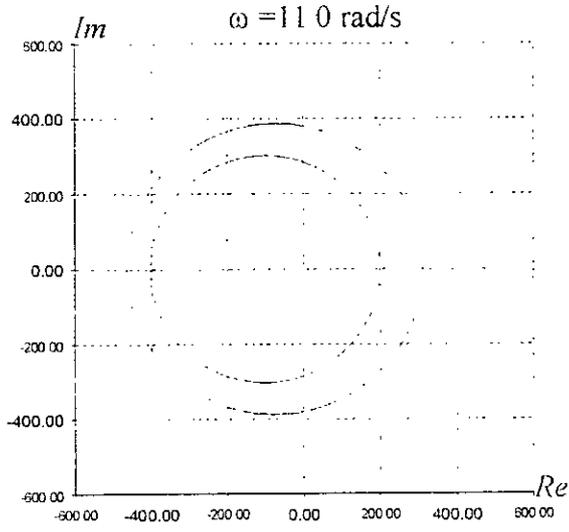
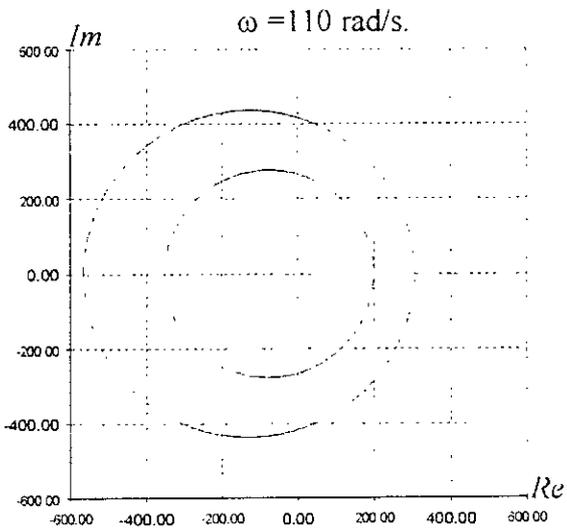
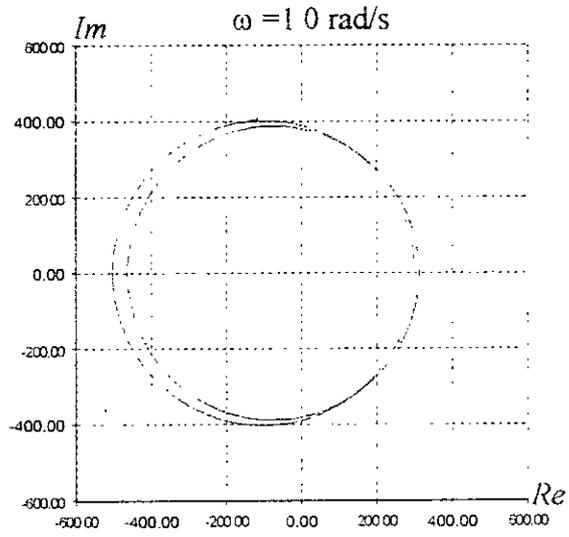
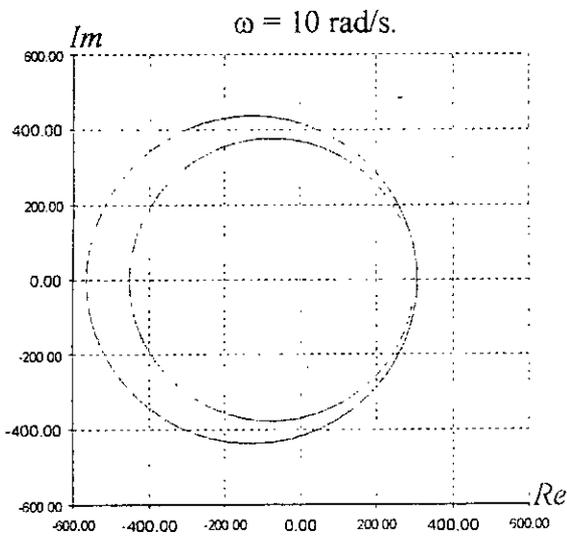
$$A_3 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} I_2 + j\omega_s I_{-1}\right) & \left(\frac{1}{T_{sp}} I_2\right) \\ \left(\frac{(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + j \delta\omega I_{-1}\right) & -\left(\frac{(\alpha+\delta)}{T_{sp}} I_2 + j\omega_r I_{-1}\right) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

1. Les nouveaux cercles sont centrés en $C_1 = \left(-\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s\right)$, $C_1' = \left(-\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s\right)$,
 $C_2 = \left(-\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} - j\omega_r\right)$ et $C_2' = \left(-\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} + j\omega_r\right)$, mais leurs rayons respectifs $R_1 = \frac{1}{T_{sp}}$, $R_1' = \frac{1}{T_{sp}}$,
 $R_2 = \frac{1}{T_{sp}} \sqrt{[(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma]^2 + [\delta\omega T_{sp}]^2}$ et $R_2' = \frac{1}{T_{sp}} \sqrt{[(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma]^2 + [\delta\omega T_{sp}]^2}$ sont

fonctions de la vitesse.

2. Pour éloigner les cercles sur l'axe des réels, il faut que δ soit positif.
3. Pour réduire la taille des rayons lorsque ω augmente, on doit choisir δ comme fonction de la vitesse.
4. Lorsque la condition nécessaire et suffisante est satisfaite : $C_1 C_2 \geq R_1 + R_2$, la séparation des modes est possible.
5. Pour tout cela, on va prendre $\delta = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$.
6. Le tracé des cercles pour ce choix est représenté sur la figure (4.5)

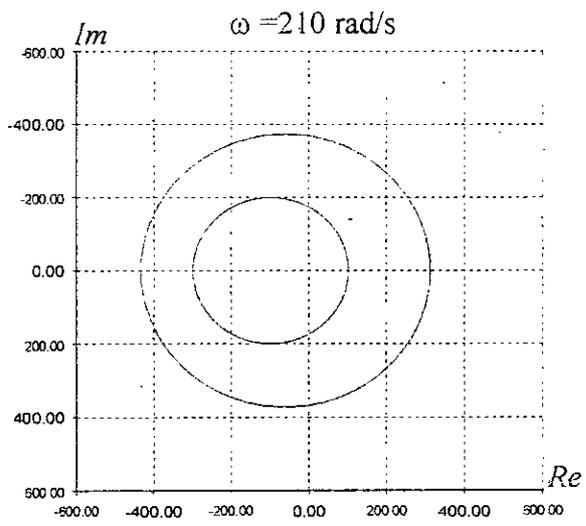
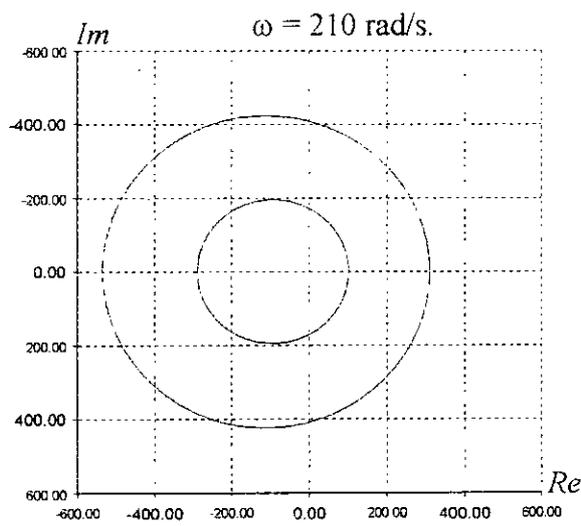
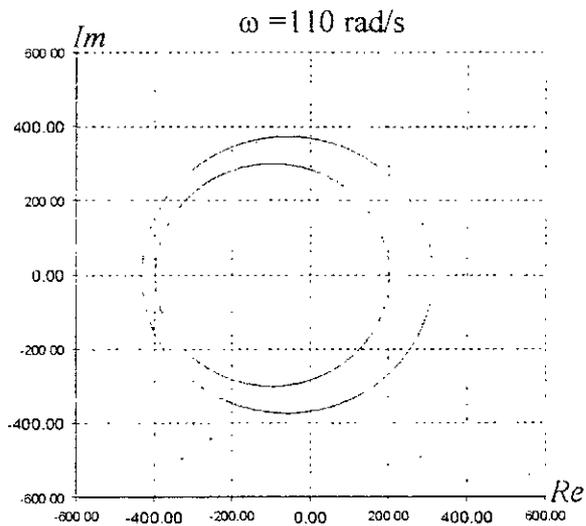
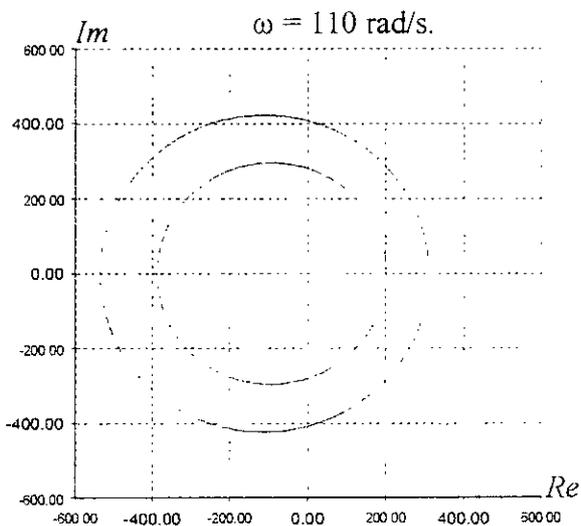
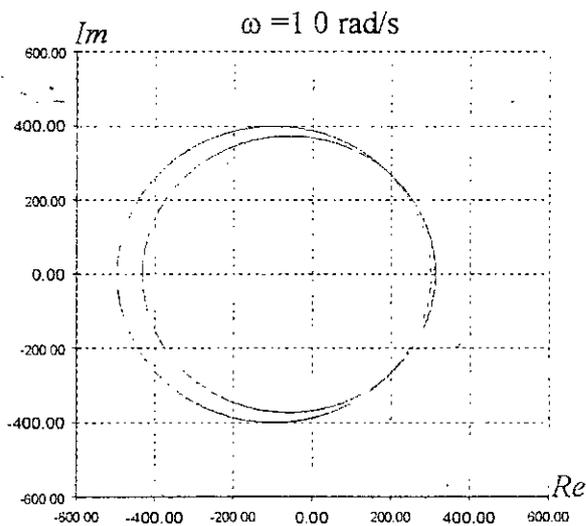
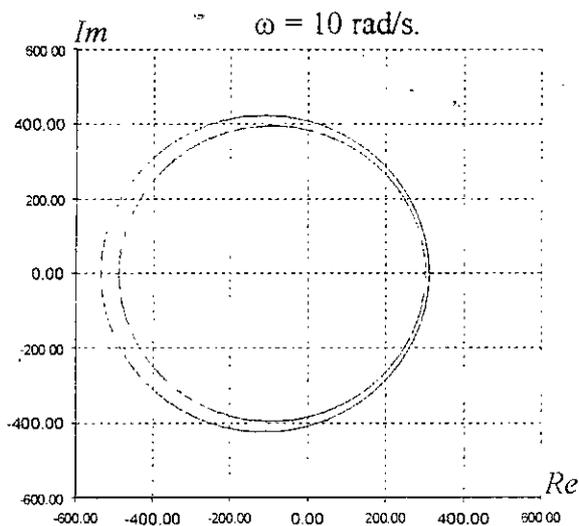
Le paramètre ε peut être estimé par la relation (3.3) du troisième chapitre.



MACHINE (1).

MACHINE (2).

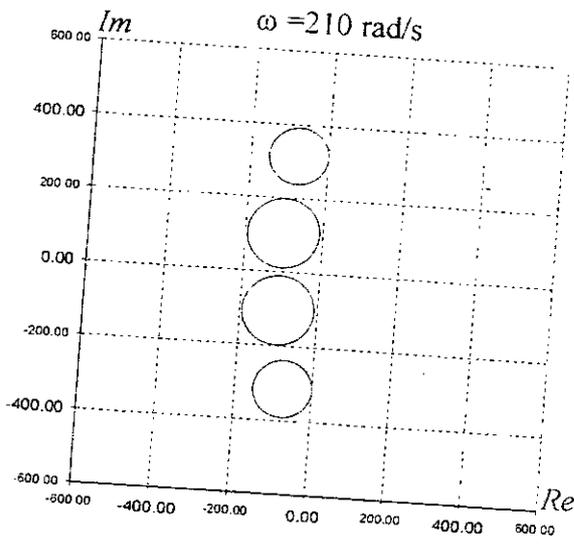
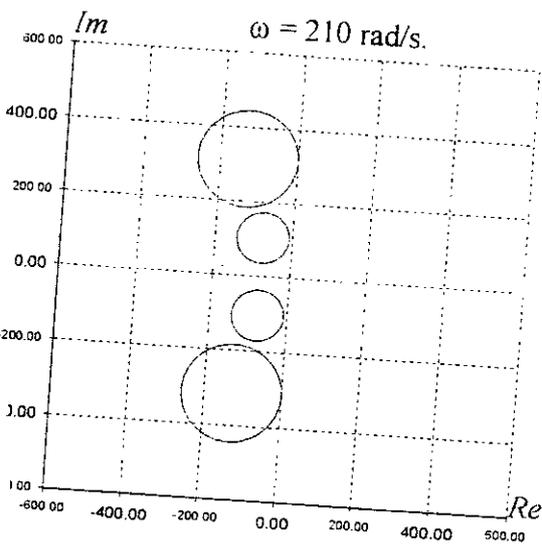
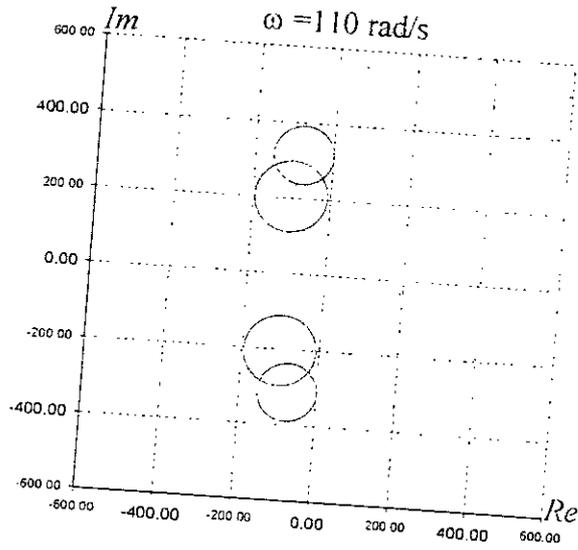
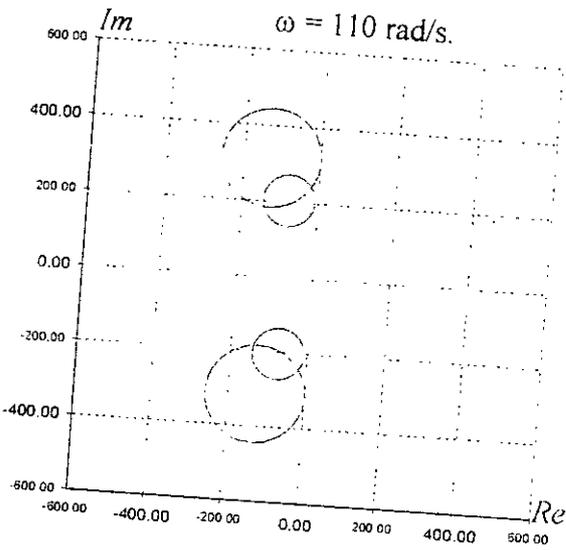
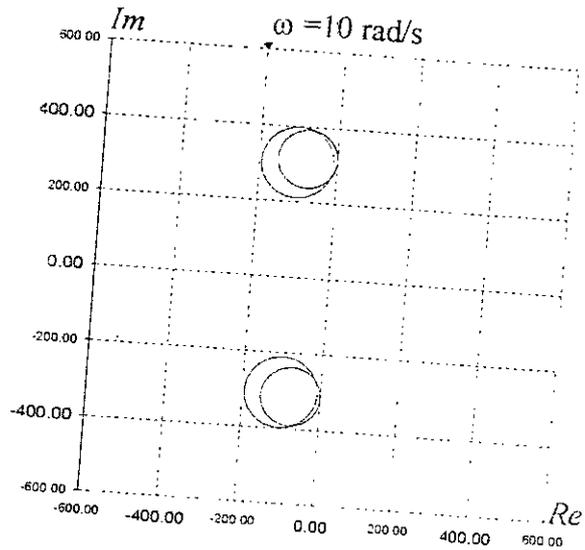
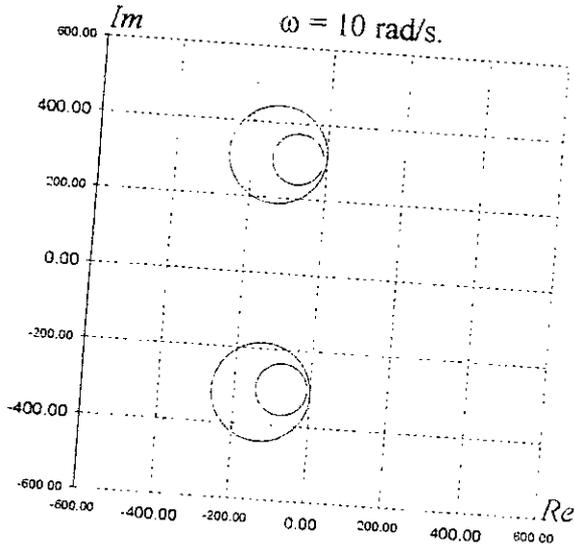
Figure 4. 3. a : Tracé des cercles de Gerschgorin (matrice d'état initiale).



MACHINE (3).

MACHINE (4).

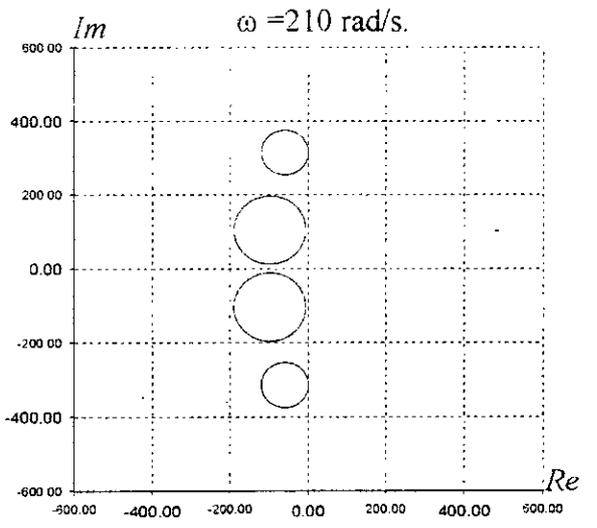
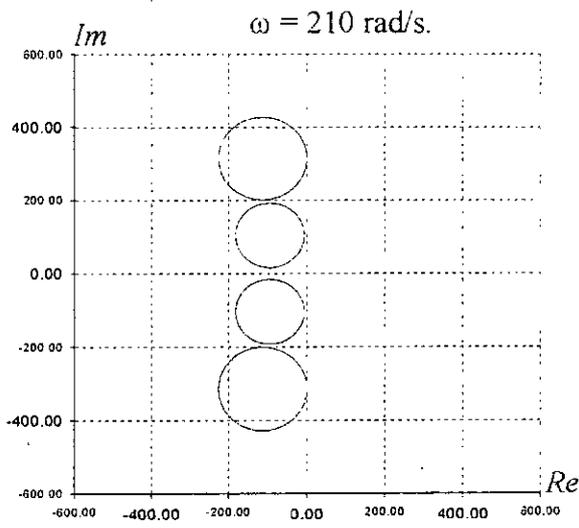
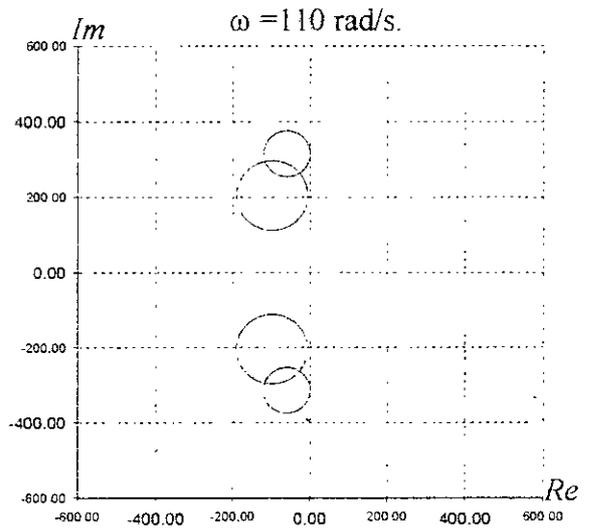
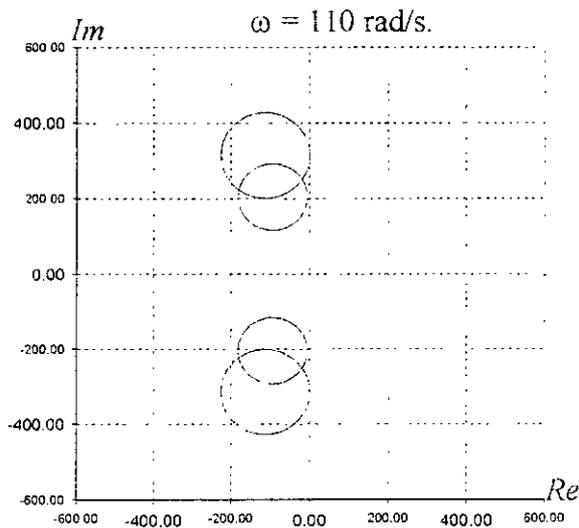
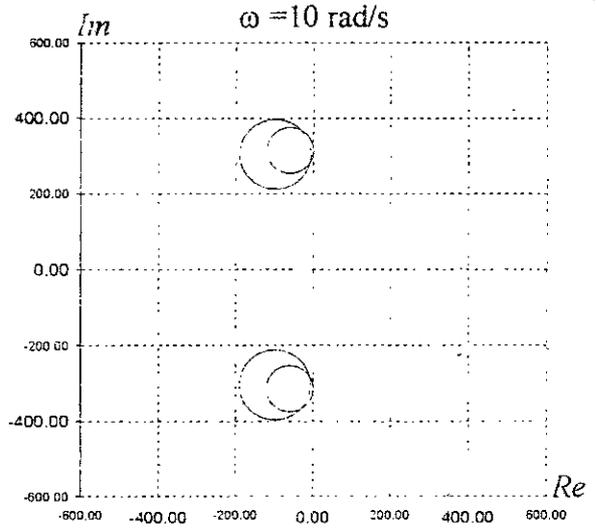
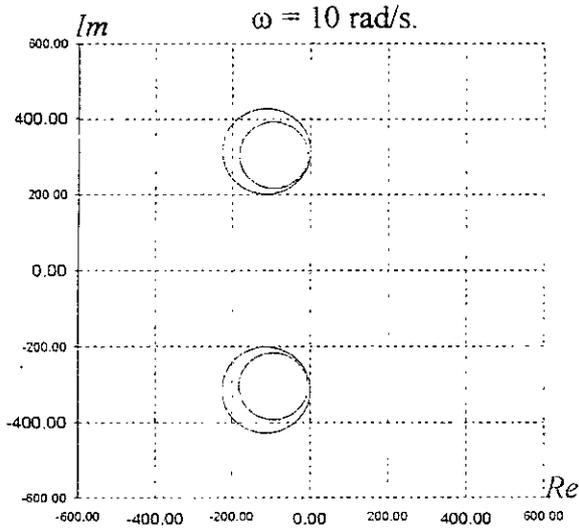
Figure 4. 3. b : Tracé des cercles de Gerschgorin (matrice d'état initiale).



MACHINE (1).

MACHINE (2).

Figure 4. 4. a : Tracé des cercles de Gerschgorin (première séparation).



MACHINE (3).

MACHINE (4).

Figure 4. 4. b : Tracé des cercles de Gerschgorin (première séparation).

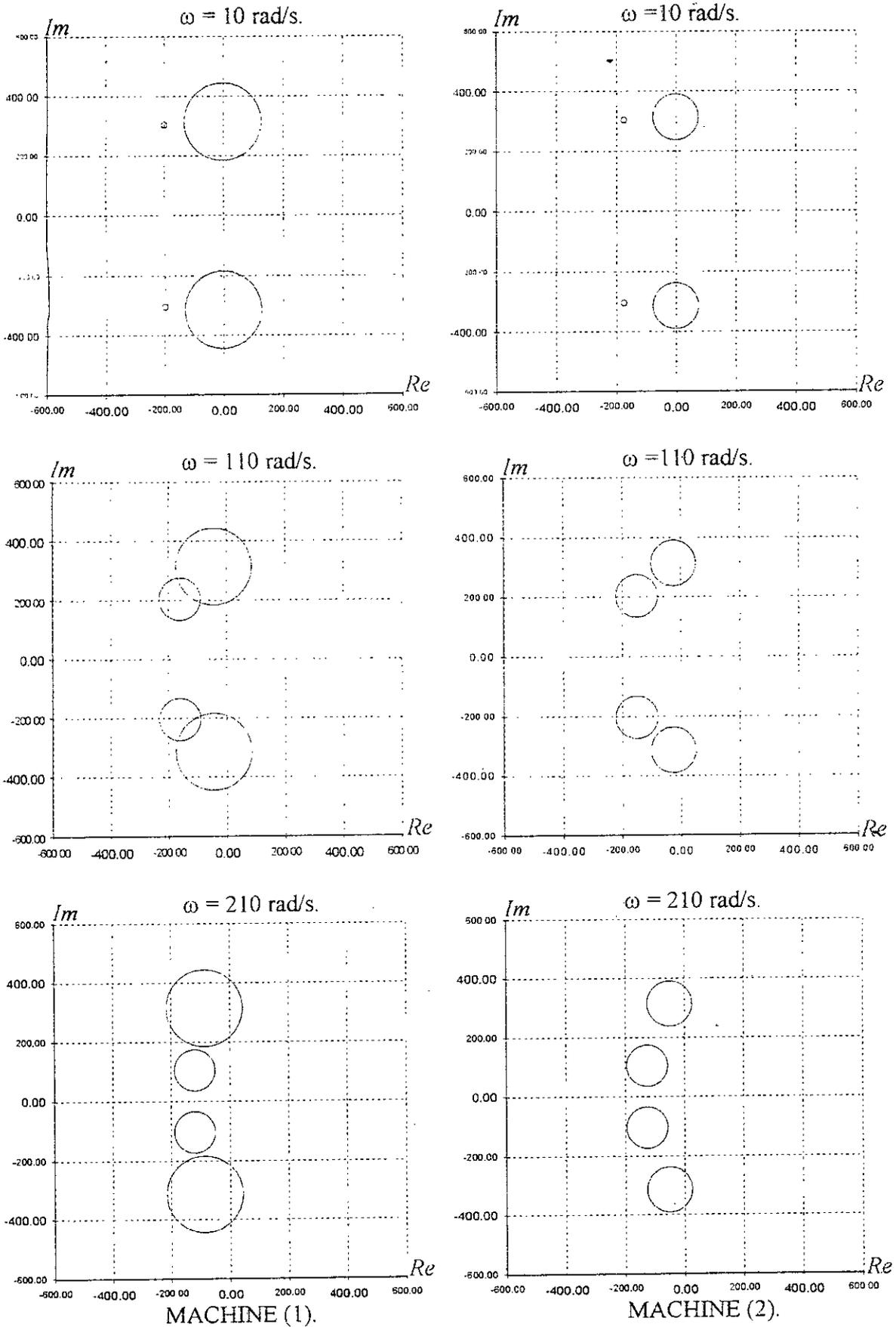
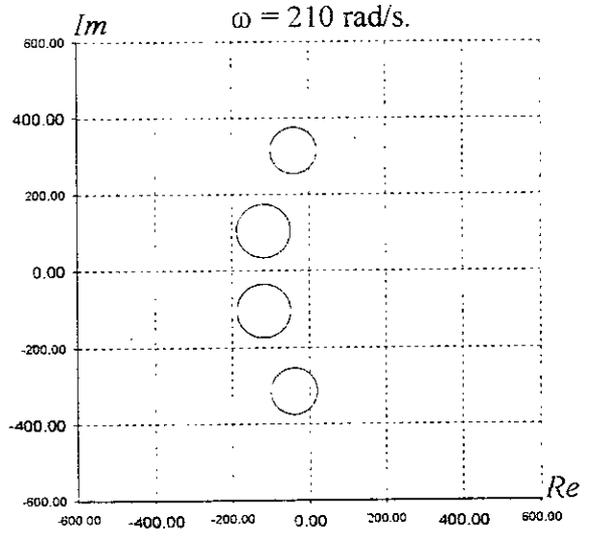
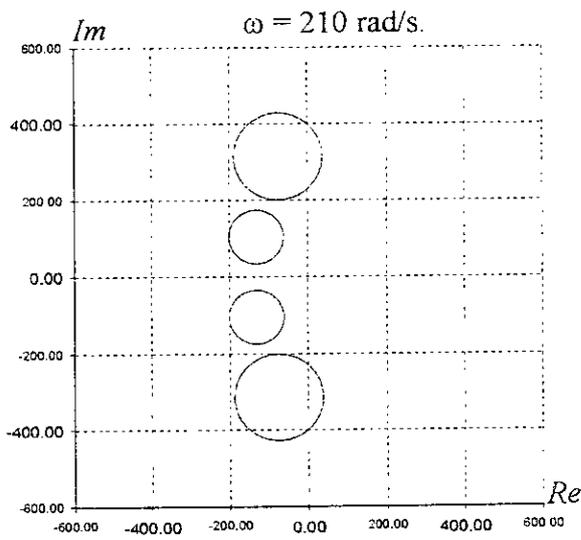
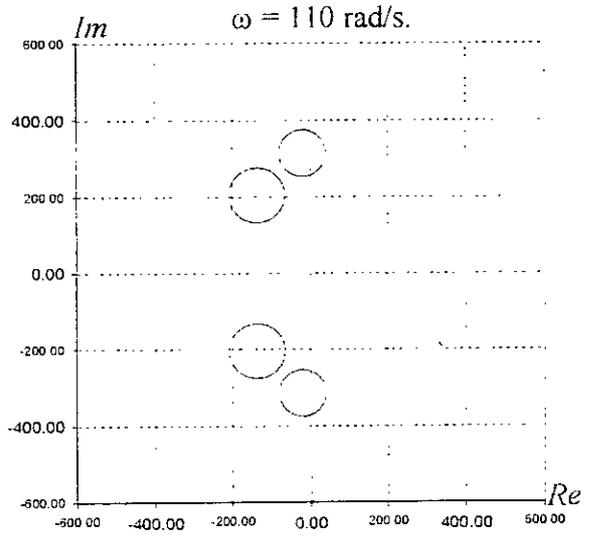
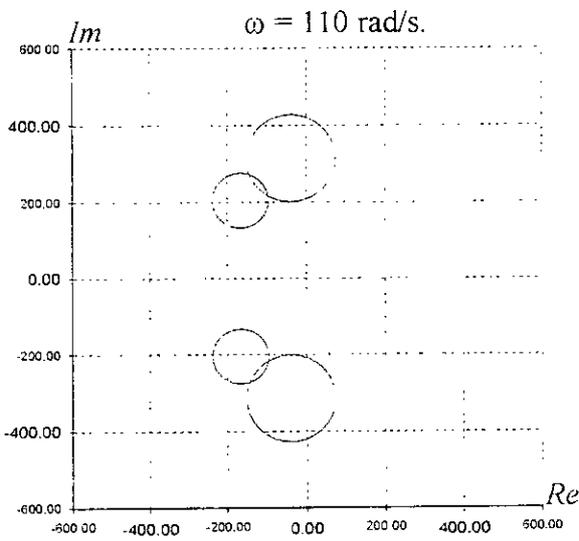
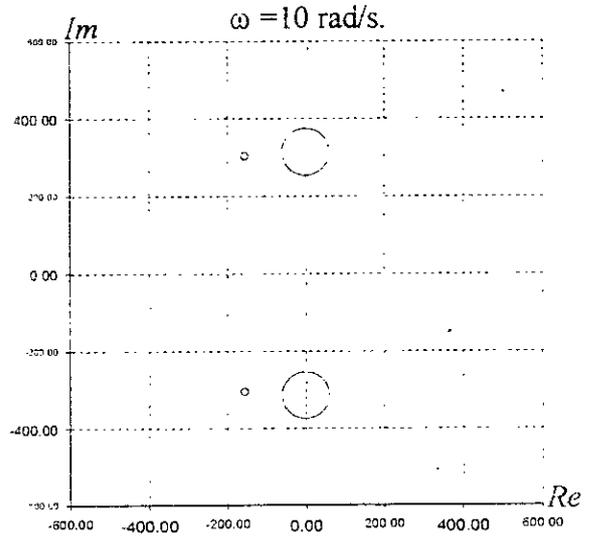
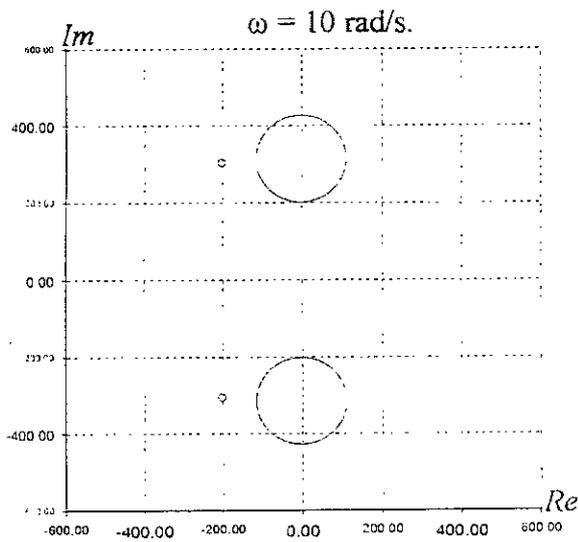


Figure 4. 5. a : Tracé des cercles de Gerschgorin (deuxième séparation).



MACHINE (3).

MACHINE (4).

Figure 4. 5. b : Tracé des cercles de Gerschgorin (deuxième séparation).

IV. 2. 6. 3. Mise sous la forme standard singulièrement perturbée

La matrice de regroupement des modes est obtenue par la transformation finale :

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = T_1 T_2 T_3 \begin{bmatrix} \phi_{dqs} \\ \phi_{dqr} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

avec :

$$T_1 T_2 T_3 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ -B_r W & B_r W \end{bmatrix}$$

La nouvelle représentation d'état est :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ \frac{s}{T_{sp}} - j\delta\omega & 0 & -\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} + j\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{s}{T_{sp}} - j\delta\omega & 0 & -\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} - j\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W \\ -\delta W \end{bmatrix} \cdot v_{sdq} \quad (4.30)$$

$$C_{em} = \frac{1}{2} p \frac{1}{L_{sp}} x^T J_2 z$$

avec :

$$s = (1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma$$

$$L_{sp} = \sigma L_s$$

Pour calculer les sous modèles déduits, on pose :

$$k = s + j\delta T_{sp} \omega, \quad k^* = s - j\delta T_{sp} \omega,$$

$$d = (\alpha + \delta) + jT_{sp} \omega_r, \quad d^* = (\alpha + \delta) - jT_{sp} \omega_r, \quad \text{et } D = d \cdot d^*.$$

Et on considère :

$$x = x_s, \quad z = z_s + z_f(\tau),$$

$$v_{sdq} = v_{sdq(s)} + v_{sdq(f)}(\tau),$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{\sigma}.$$

IV. 2. 7. Modèles réduits en repère (d,q)

Enfin, les sous systèmes réduits décrivant le comportement du système global s'écrivent :

IV. 2. 7. 1. Modèle réduit lent

En appliquant les équations (1.4), (1.5) et (1.6), le sous système réduit lent s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} x_s &= A_{1s} x_s + B_{1s} v_{sdq(s)} \\
 \dot{z}_s &= A_{2s} x_s + B_{2s} v_{sdq(s)} \\
 C_{em(s)} &= \frac{1}{2} p \frac{1}{L_{sp}} x_s^T J_2 z_s
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_{1s} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s\right) + \frac{1}{T_{sp}} \frac{d^*k}{D} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s\right) + \frac{1}{T_{sp}} \frac{dk^*}{D} \end{bmatrix} \\
 B_{1s} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta l^*}{D} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\delta l}{D} \end{bmatrix} \cdot [W] \\
 A_{2s} &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d^*k & 0 \\ 0 & dk^* \end{bmatrix}, \quad B_{2s} = -\frac{\delta T_{sp}}{D} \begin{bmatrix} d^* & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot [W],
 \end{aligned}$$

IV. 2. 7. 2. Modèle réduit rapide

L'équation (1.12) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} z_f(\tau) &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha + \delta}{T_{sp}} + j\omega_r\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\alpha + \delta}{T_{sp}} - j\omega_r\right) \end{bmatrix} \cdot z_f(\tau) - \delta \cdot [W] \cdot v_{sdq(f)} \\
 C_{em(f)} &= \frac{1}{2} p \frac{1}{L_{sp}} x_s^T J_2 z_f
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Remarque: Les transformations développées conduisent à des résultats de formes simples qui mettent en évidence la position des modes électromagnétiques pour un repère d,q tout en utilisant les cercles de Gerschgorin. Le paramètre ε peut être estimé par la relation (3.3) du troisième chapitre.

IV. 2. 8. Séparation en α, β par les cercles de Gerschgorin

L'équations de la machine en α, β s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma T_r B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma T_r} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} C_{em} - \frac{p}{J} C_r - \frac{f}{J} \omega \quad (4.34)$$

$$C_{em} = p \frac{B_r}{\sigma L_s} \phi_{s\alpha\beta}^T R(-\theta) J_2 \phi_{r\alpha\beta},$$

avec :

$$R(\theta) \cdot R(-\theta) = I_2$$

$$R(\theta) \cdot J_2 \cdot R(-\theta) = J_2$$

$$\dot{R}(\theta) \cdot R(-\theta) = -\omega \cdot J_2$$

On voit que la matrice d'état est une fonction de la vitesse et du temps. Donc, on ne peut pas faire un tracé direct des valeurs propres comme nous l'avons déjà fait pour la séparation précédente. Pour montrer l'existence de deux dynamiques pour les variables électromagnétiques, on doit simuler ce modèle ou faire un calcul numérique (à l'aide d'un simple calculateur).

IV. 2. 8. 1. Calcul des valeurs propres

l'équations caractéristique de la matrice d'état (4.33) est :

$$P(\lambda) = \det \left\{ \left[\left(\lambda + \frac{1}{T_{sp}} \right) \left(\lambda + \frac{1}{T_{rp}} \right) - \frac{1-\sigma}{T_{sp} T_{rp}} \right] \cdot I_2 \right\} = 0 \quad (4.35)$$

soit :

$$\left[\left(\lambda + \frac{1}{T_{sp}} \right) \left(\lambda + \frac{1}{T_{rp}} \right) - \frac{1-\sigma}{T_{sp} T_{rp}} \right]^2 = 0$$

ou :

$$\left(\lambda^2 + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \lambda + \frac{\alpha \cdot \sigma}{T_{sp}^2} \right) = 0$$

La résolution de cette dernière équation donne :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\alpha}{2T_{sp}} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2}} \right] \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4} = \frac{1+\alpha}{2T_{sp}} \left[-1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2}} \right], \quad (4.36)$$

pour une valeur toujours positive du déterminant $\sqrt{1 - \frac{4\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2}}$.

Un calcul des valeurs propres pour les quatre machines précédentes, est donné dans le tableau (4.3).

	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	σ	$\varepsilon_0 = \lambda_{1,2} / \lambda_{3,4} $	$\varepsilon_0^{-1} = \lambda_{3,4} / \lambda_{1,2} $
MACHINE 1	-5.7312	-200.7240	0.1156	0.0286	35.0229
MACHINE 1	-3.8368	-174.8086	0.0858	0.0219	45.5607
MACHINE 1	-3.5715	-203.7340	0.0683	0.0175	57.0438
MACHINE 1	-2.5189	-156.7036	0.0661	0.0161	62.2102

Tableau 4. 3 : Valeurs propres des machines asynchrones en α, β .

On voit que les valeurs propres sont différentes deux à deux, et le choix $\varepsilon = \sigma$ reste valable puisque la valeur de σ est toujours supérieure à celle de ε_0 .

IV. 2. 8. 2. Séparation des modes électromagnétiques

a)- L'application de l'algorithme des cercles de Gerschgorin à la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma T_r B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma T_r} I_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

donne :

1. Les cercles sont doublés et centrés en $C_{1,2} = -\frac{1}{T_{sp}}$ et $C_{3,4} = -\frac{1}{T_{rp}}$, et leur rayons sont

$$\text{respectivement } R_{1,2} = -\frac{B_r}{T_{sp}} (|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|) \text{ et } R_{3,4} = -\frac{1-\sigma}{B_r T_{sp}} (|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|).$$

2. Pour toutes les valeurs de $R_{1,2}$ et $R_{3,4}$, les cercles se coupent. Donc, on ne peut rien dire.

b)- Pour éliminer les coefficients B_r et $R(\theta)$, on utilise la transformation :

$$\phi_1 = P_1 \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

avec :

$$A_1 = P_1 A P_1^{-1}$$

soit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{sp}} I_2 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\frac{1}{T_{rp}} I_2 - \omega J_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

1. Les cercles sont toujours doublés et centrés en $C_{1,2} = -\frac{1}{T_{sp}}$ et $C_{3,4} = -\frac{1}{T_{rp}}$, et leurs rayons

sont respectivement $R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}}$ et $R_{3,4} = \frac{1-\sigma}{B_r T_{sp}} + \omega$.

2. Les cercles se coupent même pour les petites vitesses.

d)- On peut déplacer les centres des cercles doublés par la transformation :

$$\phi_2 = P_2 \phi_1, P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -\mu I_2 & I_2 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

qui donne :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\mu}{T_{sp}} I_2 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{(\alpha + \mu) \cdot (1-\mu) - \alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \mu\omega I_2 & -\frac{\alpha + \mu}{T_{sp}} I_2 - \omega I_2 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

- La valeur de μ doit être supérieure à zéro.

Pour le choix $\mu = 1$, la matrice d'état s'écrit :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \omega I_2 & -\frac{\alpha+1}{T_{sp}} I_2 - \omega I_2 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

ou

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} & -\omega & -\frac{\alpha+1}{T_{sp}} & \omega \\ \omega & -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} & -\omega & -\frac{\alpha+1}{T_{sp}} \end{bmatrix}$$

On représente sur la figure (4.6), les cercles de Gerschgorin qui sont encore doublés et centrés en $C_{1,2} = 0$ et $C_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}}$, et leurs rayons sont respectivement $R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}}$ et $R_{3,4} = \frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} + 2\omega$.

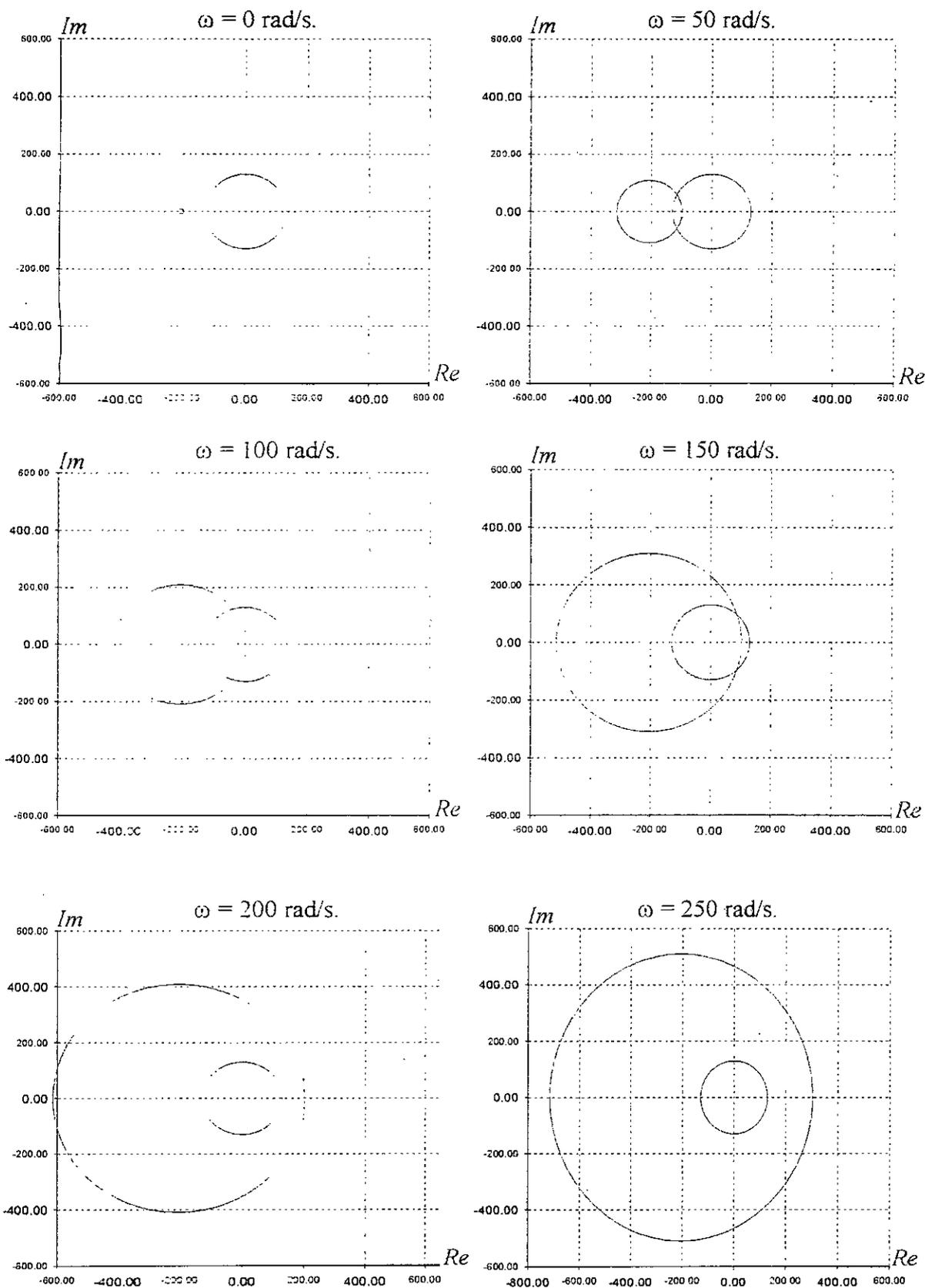


Figure 4. 6. a : Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (1).

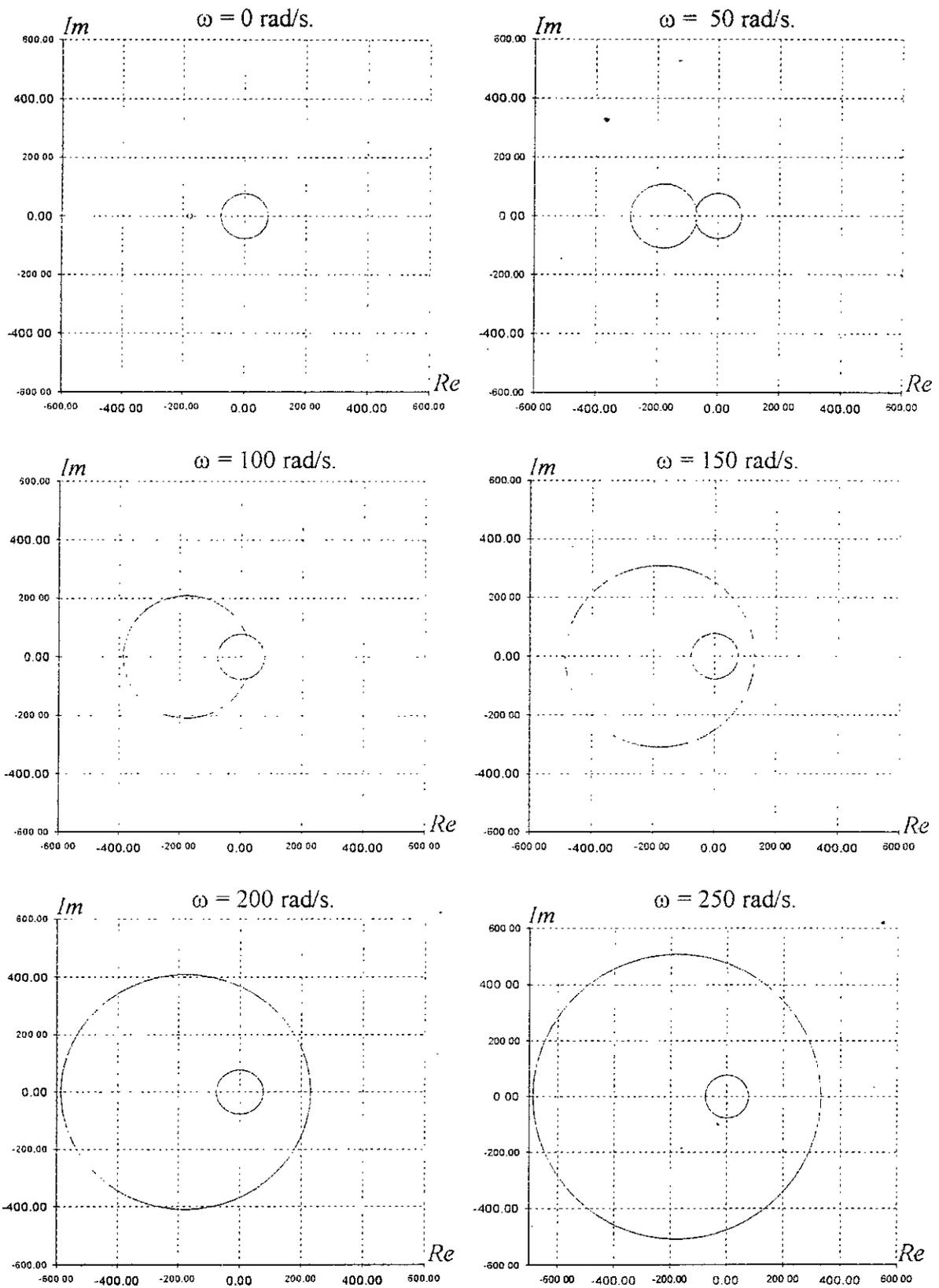


Figure 4. 6. b : Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (2).

d)- On peut maintenant changer la taille de ces rayons par la transformation :

$$\phi_3 = P_3 \phi_3, \quad P_3 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

avec :

$$WJ_2W^{-1} = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \omega WJ_2W^{-1} & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} I_2 + \omega WJ_2W^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

ou encore :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} - j\omega & 0 & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} - j\omega & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} + j\omega & 0 & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} + j\omega \end{bmatrix}$$

1. Les cercles centrés en $C_{1,2} = 0$ et $C_{3,4} = -\left(\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \pm j\omega\right)$, et leurs rayons respectivement

$$R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}} \text{ et } R_{3,4} = \sqrt{\left(\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}}\right)^2 + (\omega)^2}, \text{ sont représentés sur la figure (4.7).}$$

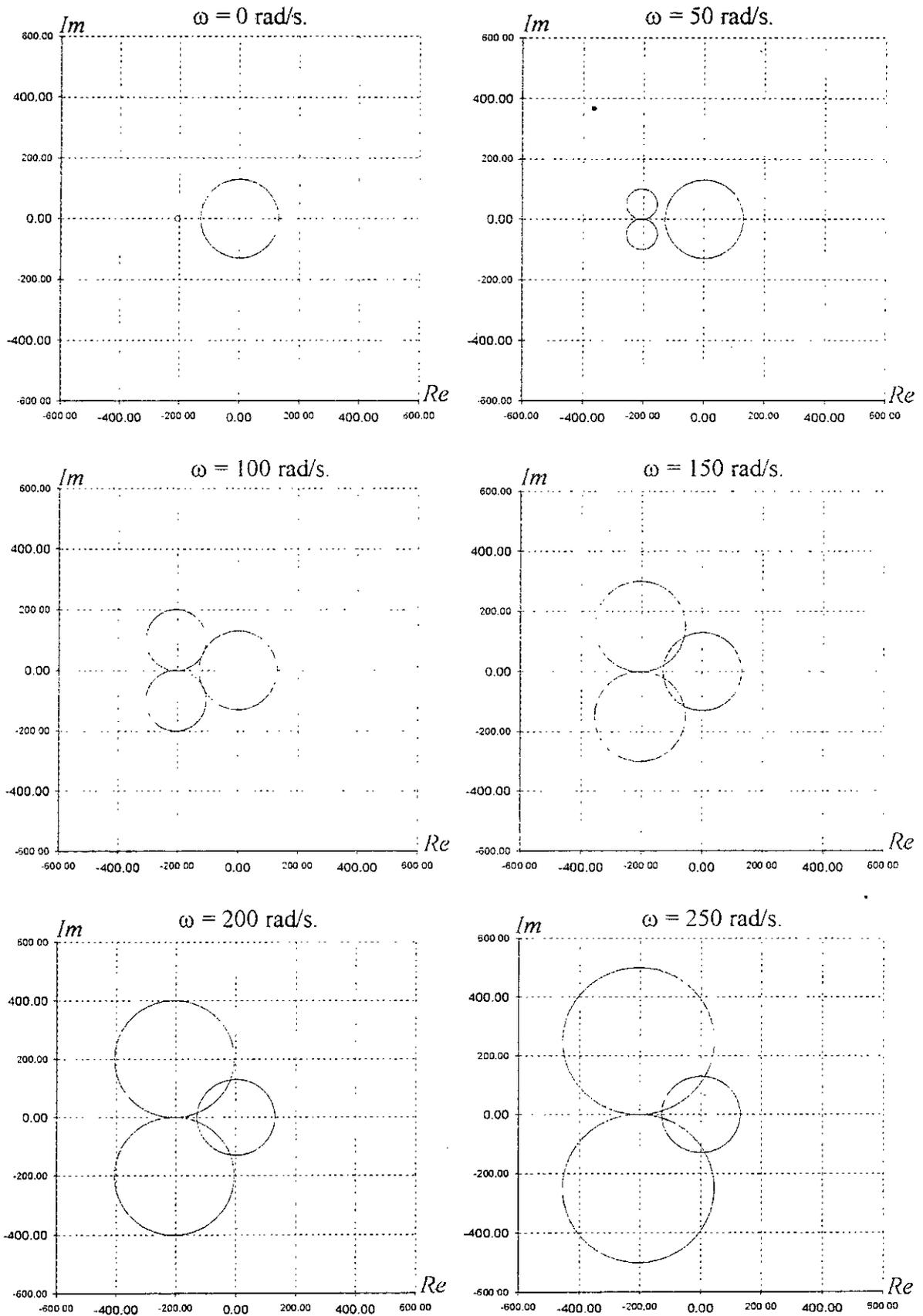


Figure 4. 7. a : Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (1).

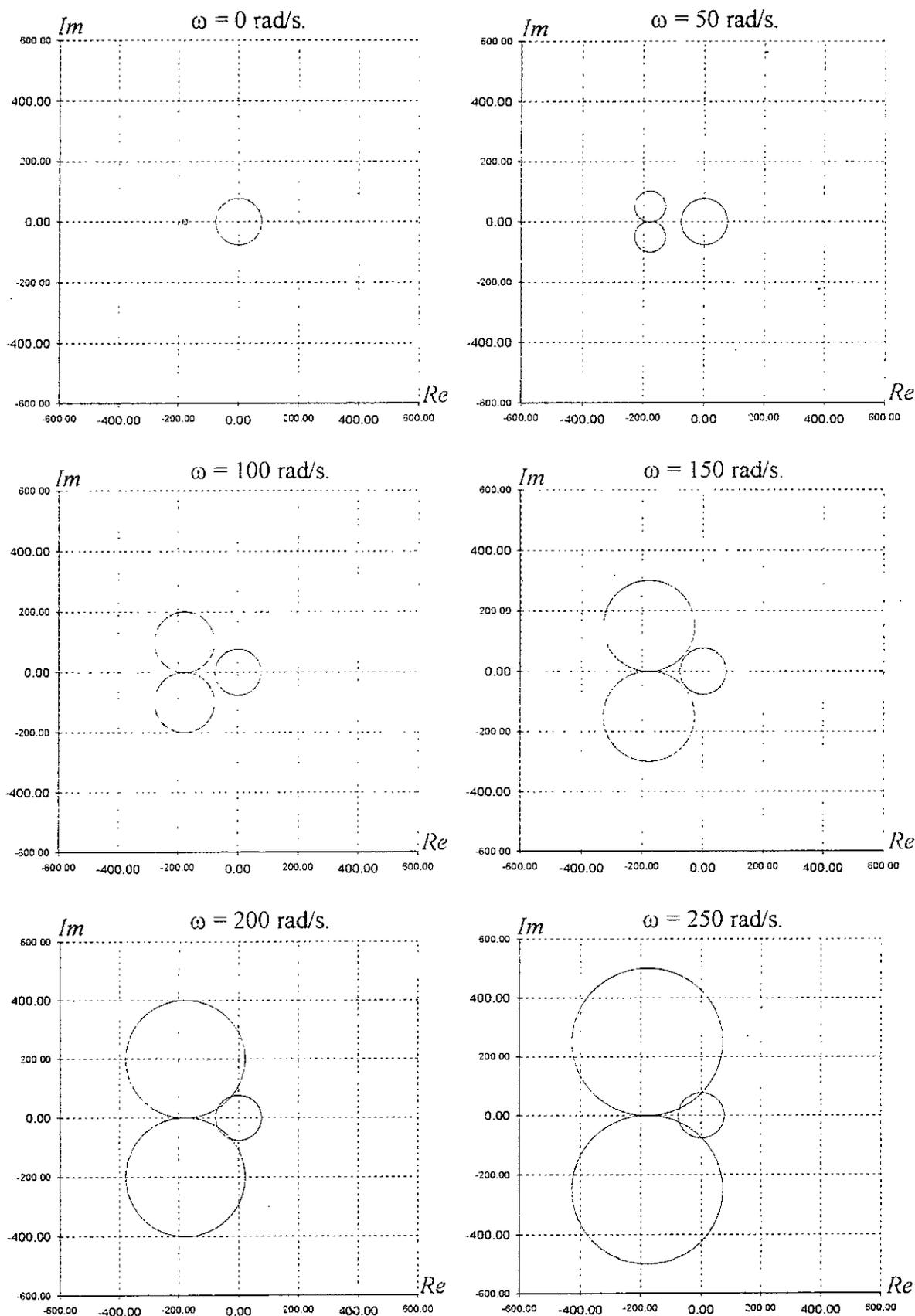


Figure 4. 7. b : Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (2).

IV. 2. 8. 3. Mise sous la forme standard singulièrement perturbée

Pour les petites vitesses, la transformation finale utilisée est :

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = P_1 P_1 \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad P_1 P_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

et la nouvelle représentation d'état s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1}{T_{rp}} I_2 & -\frac{\alpha+1}{T_{sp}} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Le couple électromagnétique s'exprime par l'expression :

$$C_{em} = \frac{p}{L_{sp}} x^T J_2 z. \quad (4.47)$$

Les modèles réduits sont calculés en posant :

$$\begin{aligned} x &= x_s(t) \\ z &= z_s(t) + z_f(\tau) \\ v_{s\alpha\beta} &= v_{s\alpha\beta(s)}(t) + v_{s\alpha\beta(f)}(\tau) \end{aligned} \quad (4.48)$$

IV. 2. 9. Modèles réduits de la machine asynchrone en repère (α, β)

IV. 2. 9. 1. Modèle réduit lent

Ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_s = -\frac{1}{T_r(1+\alpha)} x_s + \frac{\alpha}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta(s)} \\ z_f = -\frac{T_{sp}}{1+\alpha} \left(\frac{1}{T_r} x_s + v_{s\alpha\beta(s)} \right) \\ C_{em(s)} = \frac{p}{L_{sp}} x_s^T J_2 z_s \end{cases} \quad (4.49)$$

IV. 2. 9. 2. Modèle réduit rapide

Ce modèle s'exprime par :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} z_f(\tau) = -\frac{(1+\alpha)}{T_s} z_f - \sigma v_{s\alpha\beta(f)} \\ C_{em(f)} = \frac{p}{L_{sp}} x_s^T J_2 z_f \end{cases} \quad (4.50)$$

IV. 2. 9. 3. Modèles réduits en flux et en courants

On peut expliciter les expressions précédentes avec les flux et les courants

1. D'après la relation (4.45), on écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{s\alpha\beta} &= x \\ \phi_{r\alpha\beta} &= \frac{1}{B_r} R(\theta)(x + z) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Les flux $\phi_{s\alpha\beta}$ sont donc des variables lentes et les flux $\phi_{r\alpha\beta}$ peuvent être décomposés en des flux lentes $\phi_{r\alpha\beta l}$ et des flux rapides $\phi_{r\alpha\beta r}$.

Soit :

$$\phi_{s\alpha\beta} = \phi_{s\alpha\beta(s)} \quad (4.52)$$

$$\phi_{r\alpha\beta} = \phi_{r\alpha\beta(s)} + \phi_{r\alpha\beta(r)} \quad (4.53)$$

Avec (4.48) et (4.51), l'équation (4.53) devient :

$$\phi_{r\alpha\beta} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \left(\frac{1+\alpha-\sigma\alpha}{1+\alpha} x_s - \frac{T_{sp}}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta(s)} + z_f \right), \quad (4.67)$$

et en identifiant les parties lentes et rapides, l'équation (4.53) permet d'écrire :

$$\phi_{ra\beta(s)} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \left(\frac{1 + \alpha - \sigma\alpha}{1 + \alpha} x_s - \frac{T_{sp}}{1 + \alpha} v_{sa\beta(s)} \right) \quad (4.54)$$

$$\phi_{ra\beta(f)} = \frac{1}{B_r} R(\theta) z_f \quad (4.55)$$

2). En utilisant la relation entre les flux et les courants de la machine asynchrone , il vient :

$$L_{sp} I_{sa\beta} = \phi_{sa\beta} - B_r R(-\theta) \phi_{ra\beta} \quad (4.56)$$

$$L_{rp} I_{ra\beta} = -\frac{1 - \sigma}{B_r} R(\theta) \phi_{sa\beta} + \phi_{ra\beta}$$

et en décomposant les courants en composantes lentes et rapides :

$$I_{sa\beta} = I_{sa\beta(s)} + I_{sa\beta(f)} \quad (4.57)$$

$$I_{ra\beta} = I_{ra\beta(s)} + I_{ra\beta(f)}$$

on aboutit aux expressions suivantes :

$$L_{sp} I_{sa\beta(s)} = \phi_{sa\beta} - B_r R(-\theta) \phi_{ra\beta(f)} \quad (4.58)$$

$$L_{sp} I_{sa\beta(f)} = -B_r R(-\theta) \phi_{ra\beta(f)}$$

et :

$$L_{rp} I_{ra\beta(s)} = -\frac{1 - \sigma}{B_r} R(\theta) \phi_{sa\beta} + \phi_{ra\beta(s)} \quad (4.59)$$

$$L_{rp} I_{ra\beta(f)} = \phi_{ra\beta(f)}$$

3). Donc, les sous systèmes (4.49) et (4.50) deviennent:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(1 + \alpha)T_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1 + \alpha)T_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \begin{bmatrix} v_{sa(s)} \\ v_{s\beta(s)} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$C_{em(s)} = \frac{pT_s}{(1 + \alpha)L_s} (\phi_{s\alpha} v_{s\beta(s)} - \phi_{s\beta} v_{sa(s)}), \quad (4.61)$$

$$I_{sa\beta(s)} = \frac{1}{L_{sp}} \left(\frac{\alpha\sigma}{1 + \alpha} \phi_{sa\beta(s)} + \frac{T_{sp}}{1 + \alpha} v_{sa\beta(s)} \right), \quad (4.62)$$

et :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{s\alpha(f)} \\ I_{s\beta(f)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1+\alpha}{T_s} & 0 \\ 0 & -\frac{1+\alpha}{T_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s\alpha(f)} \\ I_{s\beta(f)} \end{bmatrix} - \frac{1}{L_s} \cdot \begin{bmatrix} v_{s\alpha(f)} \\ v_{s\beta(f)} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$C_{em(f)} = p(\phi_{s\alpha} I_{s\beta(f)} - \phi_{s\beta} I_{s\alpha(f)}) \quad (4.64)$$

avec :

$$\begin{cases} I_{ra\beta(s)} = \frac{1}{(1+\alpha)B_r L_r} R(\theta) (\phi_{s\alpha\beta(s)} - T_s v_{s\alpha\beta(s)}) \\ I_{ra\beta(f)} = -\frac{L_s}{M} R(\theta) I_{sa\beta(f)} \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\begin{cases} \phi_{ra\beta(s)} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \left(\left(1 - \frac{\alpha\sigma}{1+\alpha} \right) \phi_{s\alpha\beta(s)} - \frac{T_{sp}}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta(s)} \right) \\ \phi_{ra\beta(f)} = -\frac{L_s}{B_r} R(\theta) I_{sa\beta(f)} \end{cases} \quad (4.66)$$

IV. 2. 10. Simulations et interprétations

Nous utilisons les modèles réduits (4.60) et (4.63) pour la simulation numérique. Les tensions d'alimentation sont considérées sinusoïdales, équilibrées et de valeurs efficaces de 220 V.

Pour montrer l'influence du choix des valeurs initiales, nous avons pris deux vecteurs d'état initiaux, $\phi_{10} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, figure (4.8) et $\phi_{10} = [0 \ 0.9 \ 0 \ 0]^T$, figure (4.9).

Le tracé des différentes grandeurs caractérisant les modèles réduits est représenté sur les figures (4.8) et (4.9). On remarque que les variables rapides s'annulent pour $t = 0.2$ s, puis les grandeurs réelles sont données par leurs composantes réelles lentes.

On constate aussi que les résultats du deuxième choix se rapprochent des résultats réels de la simulation mieux que ceux pour le premier choix. Ce constat résultat est prévisible, car il est clair que l'approximation $\varepsilon = 0$, ne peut respecter les conditions initiales des variables originales. Cependant, un tel choix permet de réduire la durée de *la couche limite*.

Il est intéressant de signaler que le modèle réduit est une approximation acceptable du régime transitoire (démarrage de la machine), que du régime permanent (influence du taux de séparabilité des dynamiques).

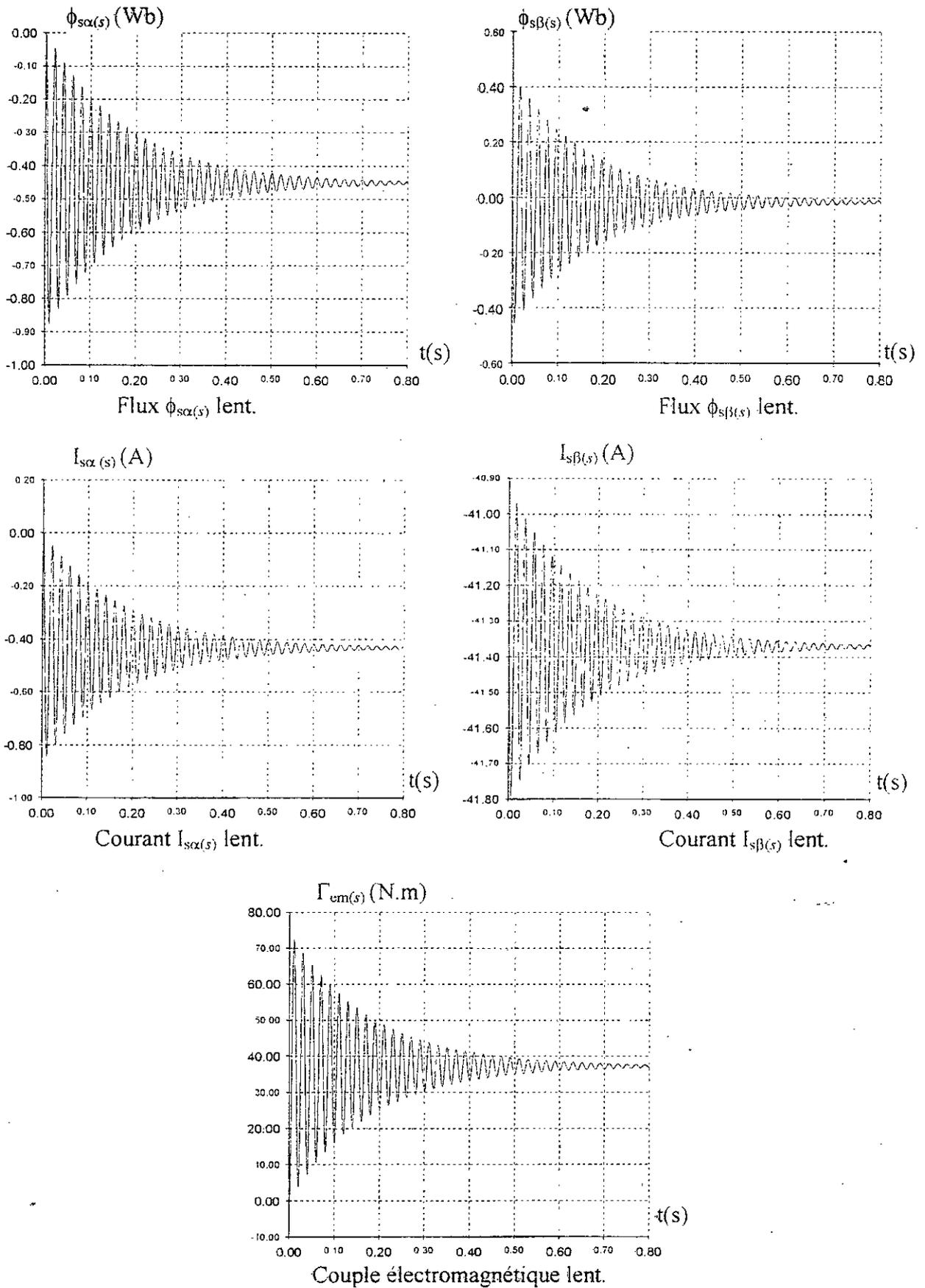


Figure 4. 8. a : Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

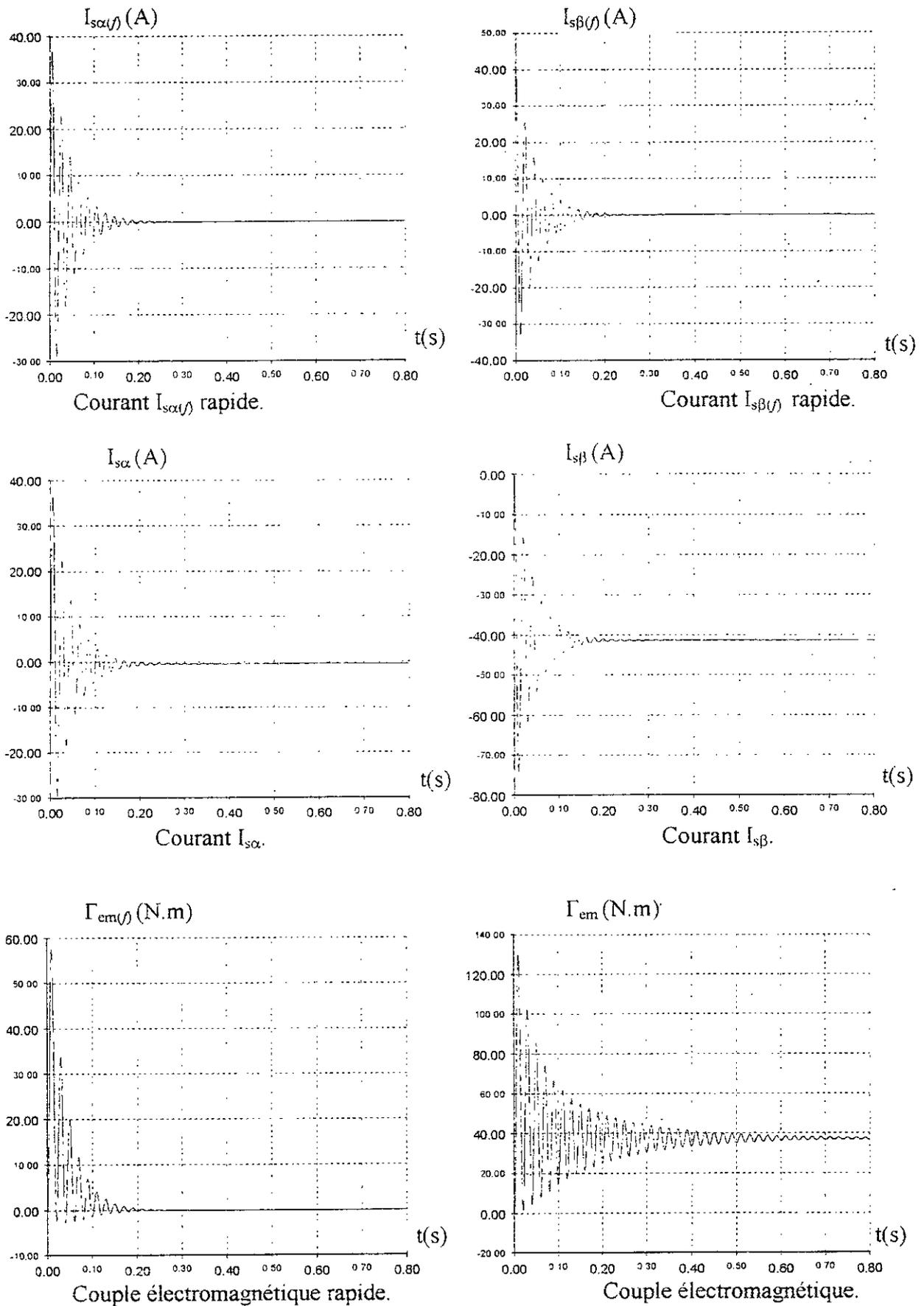


Figure 4. 8. b : Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

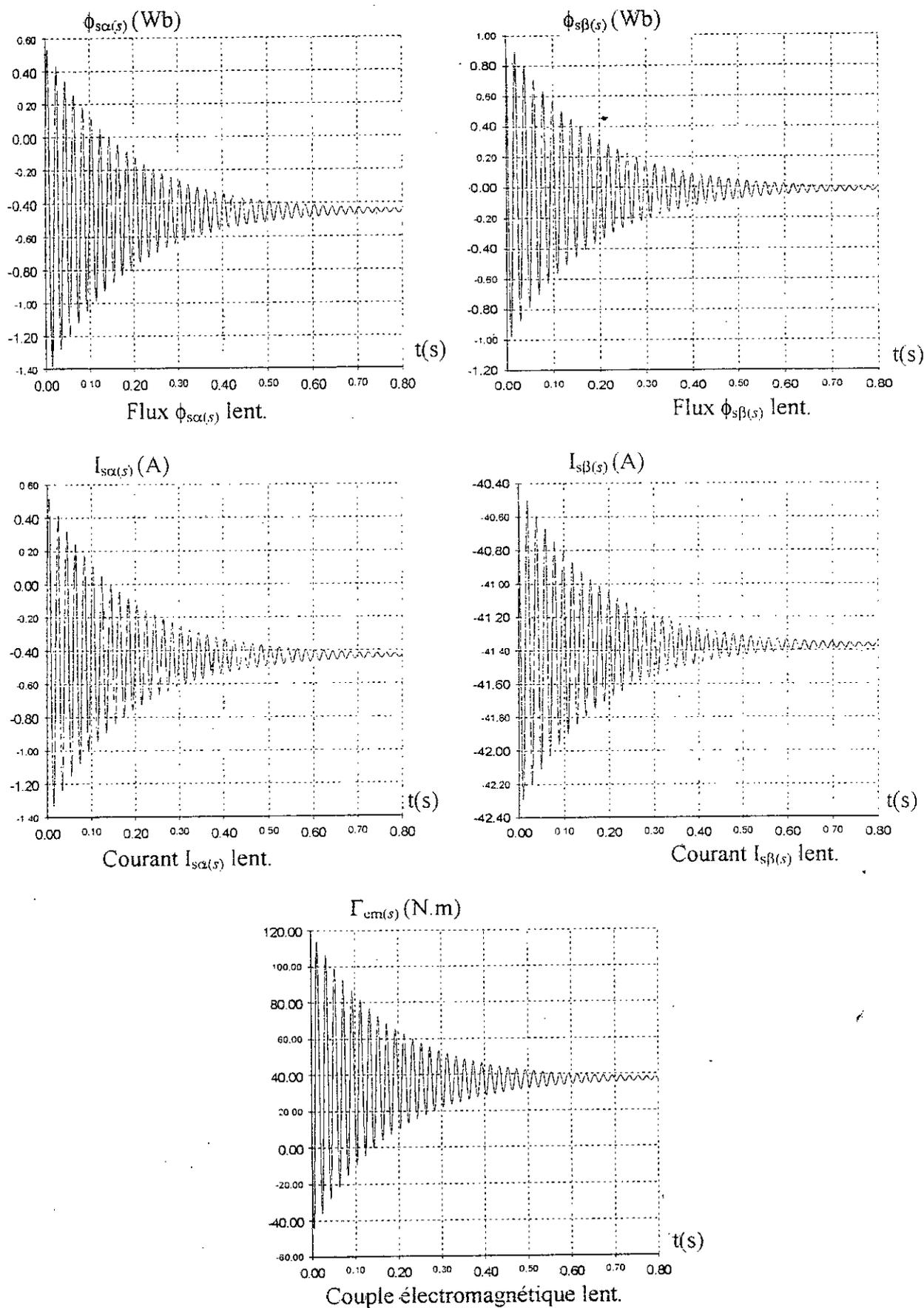


Figure 4. 9. a : Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

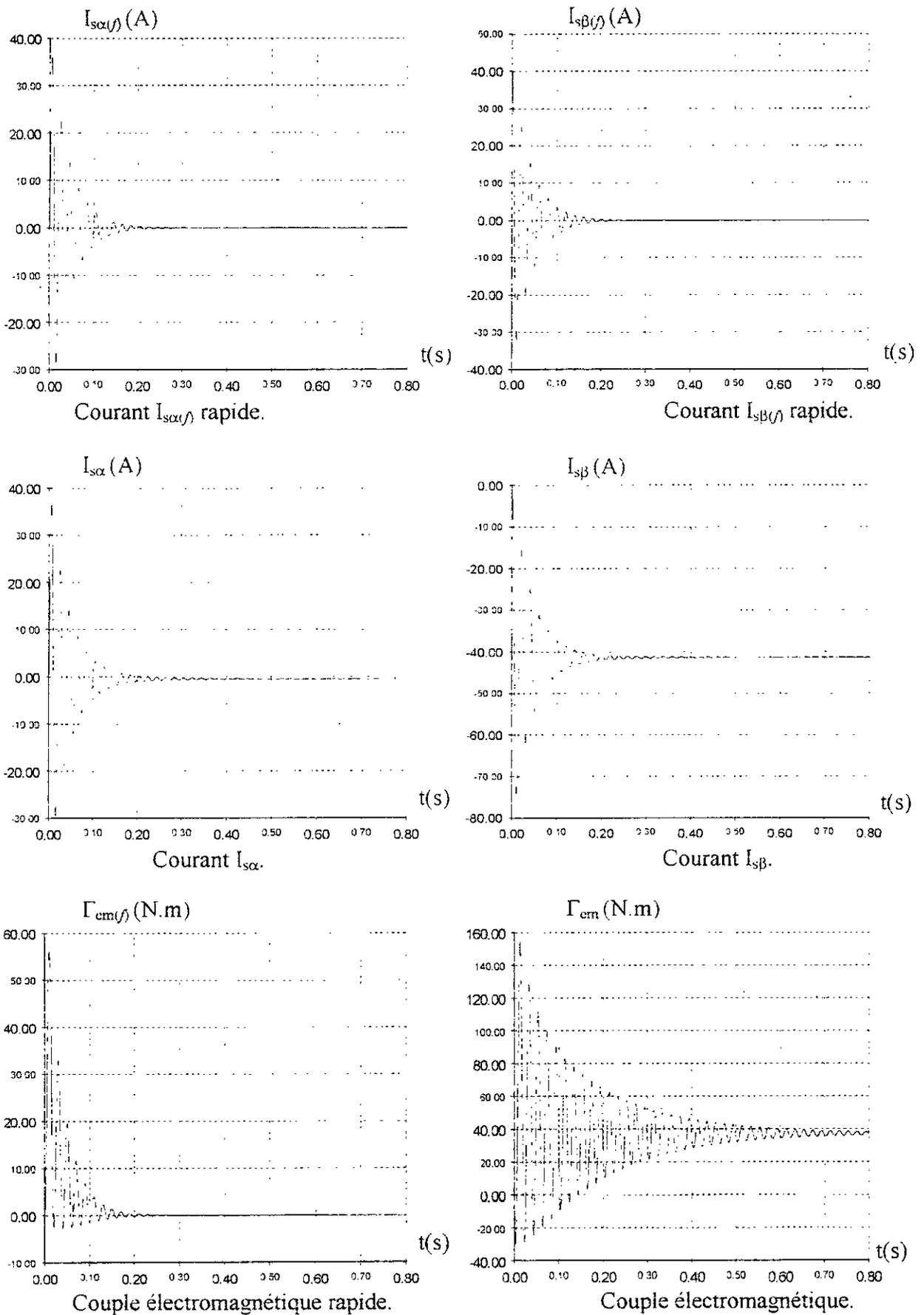


Figure 4. 9. b : Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

V. 3. APPLICATION AU MODELE DE LA MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE ALIMENTEE EN TENSION

IV. 3. 1. Modèle d'état de la machine synchrone

Le modèle dynamique de la machine est d'écrit par les équations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_s} & \omega & -\frac{M_{sr}R_s}{\sigma L_s L_r} \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ -\frac{M_{sr}R_r}{\sigma L_s L_r} & 0 & -\frac{R_r}{\sigma L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} C_{em} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (4.68)$$

avec:

$$C_{em} = \frac{pM_{sr}}{\sigma L_s L_r} \phi_{qs} \left(-\frac{M_{sr}}{L_s} \phi_{ds} + \phi_{dr} \right)$$

L'équation (4.67) peut se mettre sous la forme:

$$\dot{\phi} = A_0 \phi + U \quad (4.69)$$

avec:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega & -\frac{K_r}{\sigma T_s} \\ -\omega & -\frac{1}{T_s} & 0 \\ \frac{K_s}{\sigma T_s} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

IV. 3. 2. Mise en évidence des différentes dynamiques

Les pôles de ce système sont les valeurs propres de la matrice A_0 , obtenues en recherchant les racines du déterminant de la matrice de transition. Ces racines caractéristiques précisent les dynamiques des modes électromagnétiques propres à la matrice.

La figure (4.10) présente dans le plans complexe les qu'occupent les pôles complexes et le pôle réel représentant respectivement les dynamiques lente et rapide, et ce ci lorsque la vitesse électrique varie de 0 à 314.16 d/s.

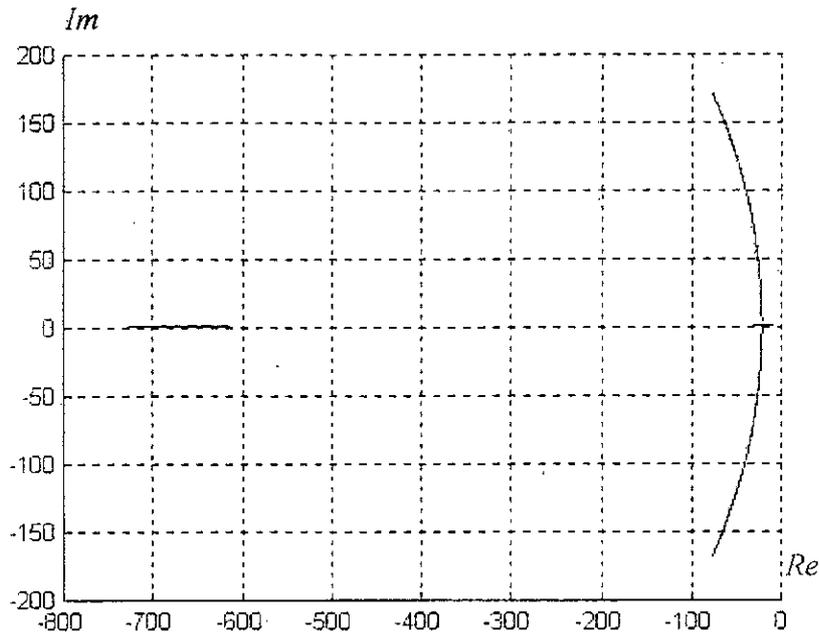


Figure 4.10 : Configuration des modes électromagnétiques.

Ces résultats confirment l'existence de deux dynamiques électromagnétiques. La dynamique lente est caractérisée par deux pôles complexes conjugués tandis que la dynamique rapide est caractérisée par un pôle réel.

IV. 3. 3. Découplage géométrique des modes par application des cercles de Gerschgorin

1. L'algorithme basé sur les cercles de Gerschgorin appliqué à la matrice d'état,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega & -\frac{K_r}{\sigma T_s} \\ -\omega & -\frac{1}{T_s} & 0 \\ \frac{K_s}{\sigma T_s} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

donne les cercles représentés par la figure (4.11), où les dynamiques sont mal identifiées.

2. Pour simplifier la matrice A_0 , on applique la transformation suivante:

$$X_1 = T_1 \phi \tag{4.72}$$

avec:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_r \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega & \frac{1}{\sigma T_s} \\ -\omega & -\frac{1}{T_s} & 0 \\ \frac{K_s K_r}{\sigma T_s} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

où les dynamiques restent toujours confondues, figure(4.12).

3. On applique encore la transformation:

$$X_2 = T_2 X_1 \tag{4.74}$$

avec:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega & \frac{1}{\beta \sigma T_s} \\ -\omega & -\frac{1}{T_s} & 0 \\ \frac{1}{\beta \sigma T_s} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix}$$

et:

$$\beta = \sqrt{\frac{T_r}{T_s K_s K_r}}$$

- Les cercles commencent à se séparer, figure (4.13)
- Les dynamiques restent toujours mal identifiées.

4. Pour réduire les tailles des rayons, on applique la transformation suivante:

$$X_3 = T_3 X_2 \tag{4.75}$$

avec:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la nouvelle matrice d'état sera :

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) & \omega & \frac{1}{\beta \sigma T_s} \\ -\omega & -\frac{1}{T_s} & 0 \\ P_{31}(\alpha) & \alpha \omega & -\frac{1}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \end{bmatrix}$$

où:

$$P_{31}(\alpha) = -\frac{1}{\beta \sigma T_s} (\alpha^2 + \beta \alpha - 1) + \frac{\alpha}{\sigma T_r}$$

- Pour réduire les tailles des rayons on va imposer $P_{31}(\alpha)=0$, ce qui implique que $\alpha=0.6325$.
- Les dynamiques sont identifiées, et l'exploitation de la technique des perturbations singulières est possible.

On fait alors une permutation des variables d'état, caractérisée par la matrice T_4 , pour la mise sous la forme standard d'un système singulièrement perturbé, soit:

$$X_4 = T_4 X_3 \quad (4.76)$$

avec:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) & \alpha \omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} & -\omega \\ \frac{1}{\beta \sigma T_s} & \omega & -\frac{1}{\sigma T_s} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \end{bmatrix}$$

Pour normaliser la matrice d'état, on effectue une autre transformation:

$$X = T_5 X_4 \quad (4.77)$$

avec:

$$T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) & \alpha \omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} & -\frac{\omega}{\mu} \\ \frac{\mu}{\beta \sigma T_s} & \mu \omega & -\frac{\mu}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \end{bmatrix}$$

IV. 3. 4. Mise sous forme standard singulièrement perturbée

La matrice de regroupement des variables lentes et rapides est obtenue finalement par la transformation:

$$X = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 \phi \quad (4.78)$$

où:

$$X = T \phi \quad (4.79)$$

avec:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta K_r \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\beta K_r} & 0 & -\frac{\alpha}{\mu \beta K_r} \end{bmatrix}$$

Soit:

$$\dot{X} = AX + TU \quad (4.79)$$

Pour développer les modèles réduits, on pose:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$z = [x_3] \quad (4.81)$$

$$U = U_s + U_f(\tau) \quad (4.82)$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{2\sigma} \quad (4.83)$$

IV. 3. 5. Mise en équations des modèles réduits

On utilise l'enchaînement mathématique de la technique des perturbations singulières, le modèle de la machine s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) & \alpha \omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_s} & -\frac{\omega}{\mu} \\ \frac{2\mu}{\beta T_s} & 2\sigma \mu \omega & -\frac{2}{T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta K_r \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$C_{em} = \frac{p}{L_p} x_2 \left(\frac{1}{\beta K_r} x_1 - \left(\frac{K_s}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu \beta K_r} \right) z \right) \quad (4.85)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} C_{em} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (4.86)$$

avec:

$$x = x_s + O(\varepsilon)$$

$$z = z_s + z_f + O(\varepsilon)$$

IV. 3. 5. 1 Modèle réduit lent

Ce modèle s'écrit:

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B_s U_s \quad (4.87)$$

$$C_{em(s)} = \frac{p}{L_p} x_{2s} \left(\frac{1}{\beta K_r} x_{1s} - \left(\frac{K_s}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu \beta K_r} \right) z_s \right) \quad (4.88)$$

$$\dot{z}_s = A_{zs} x_s + B_{zs} U_s \quad (4.89)$$

avec:

$$x_s(t_0) = x_0$$

$$z_s(t_0) = A_{zs} x_s(t_0)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} \left(\frac{T_s}{T_r} - \frac{\alpha}{\beta} \right) & \alpha \omega \\ -\frac{\omega}{\alpha + \beta} & -\frac{1}{T_s} - \frac{\beta \sigma T_s}{\alpha + \beta} \omega^2 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta K_r \\ -\frac{\beta \sigma T_s}{\alpha + \beta} \omega & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{zs} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\alpha + \beta} & \mu \frac{\beta \sigma T_s}{\alpha + \beta} \omega \end{bmatrix}, \quad B_{zs} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta \sigma T_s}{\alpha + \beta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. 3. 5. 2. Modèle réduit rapide

$$\frac{dz_f}{d\tau} = -\frac{2}{T_s} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) z_f + 2\mu \sigma v_{ds(f)} \quad (4.90)$$

$$C_{em(f)} = -\frac{p}{L_p} \left(\frac{K_s}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu \beta K_r} \right) x_{2s} z_f \quad (4.91)$$

avec:

$$z_f(t_0) = z_{20} - z_s(t_0)$$

IV. 3. 5. 3. Grandeurs réelles

Les grandeurs réelles de la machine sont données par les équations suivantes:

$$C_{em} = C_{em(s)} + C_{em(f)} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ds} &= \frac{1}{\mu} (z_s + z_f) \\ \phi_{qs} &= x_2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\phi_{dr} = \frac{1}{\beta K_r} x_1 - \frac{\alpha}{\mu \beta K_r} (z_s + z_f)$$

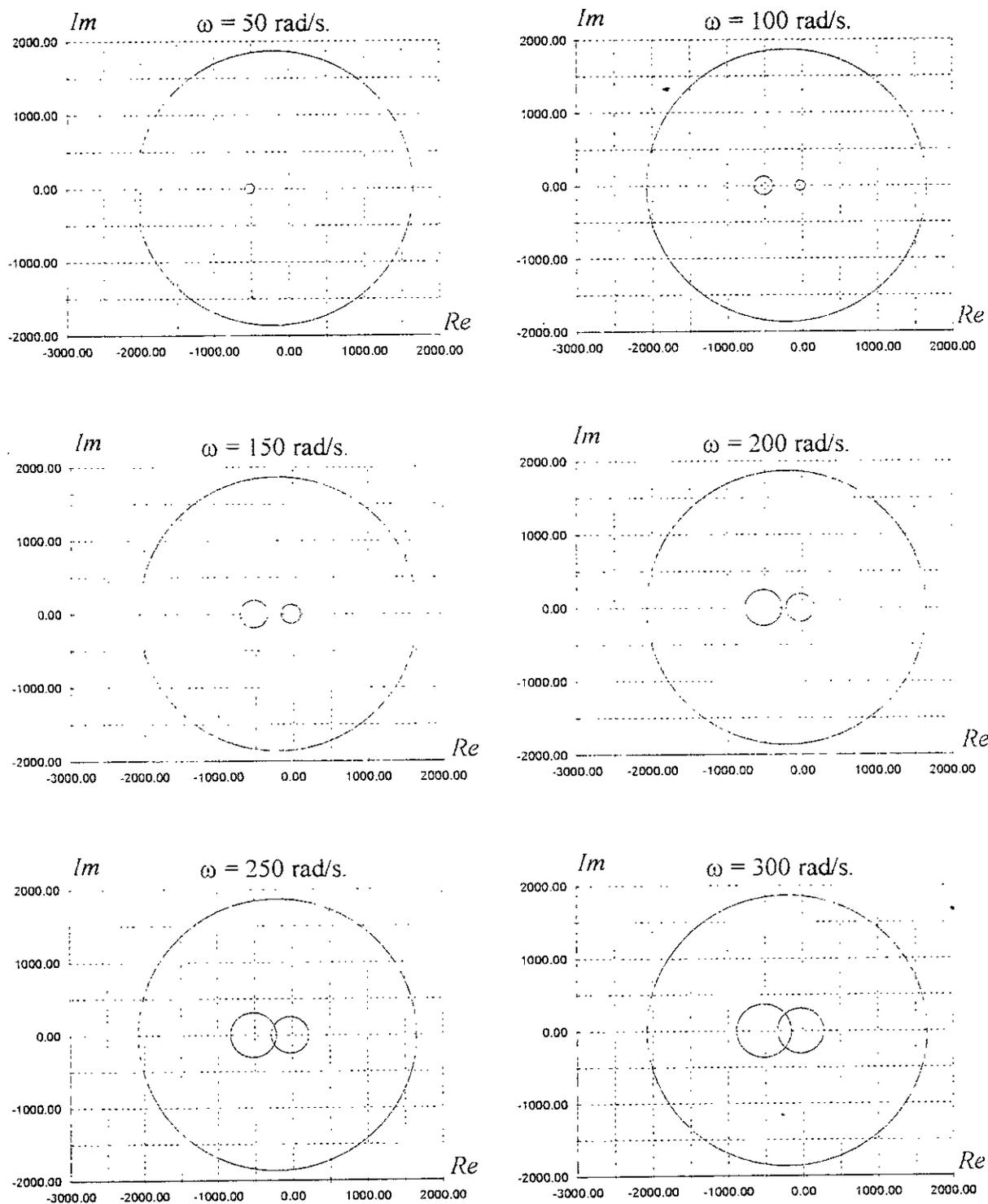


Figure 4. 11 : Tracé des cercles de Gerschgorin pour la matrice d'état initiale.

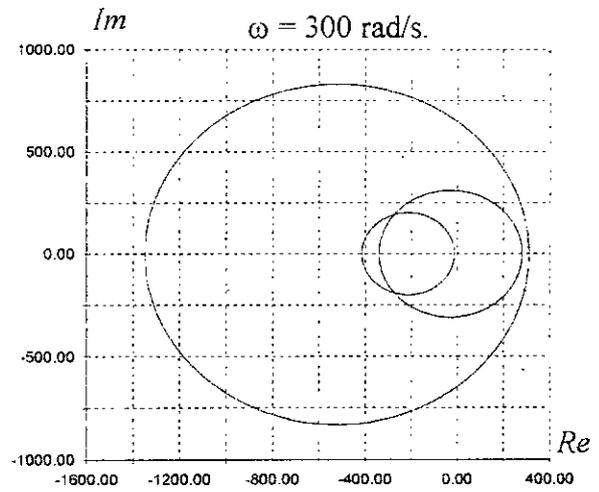
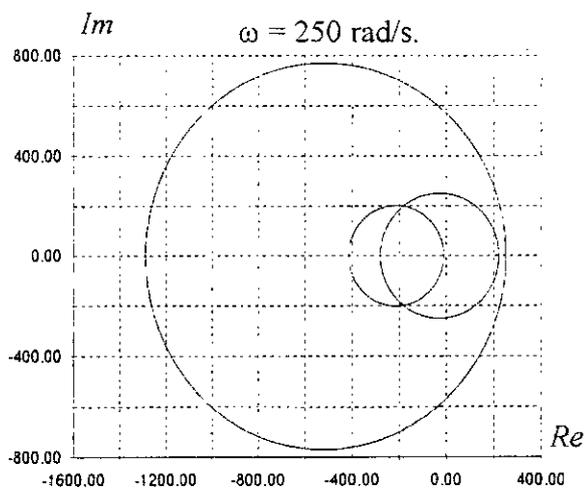
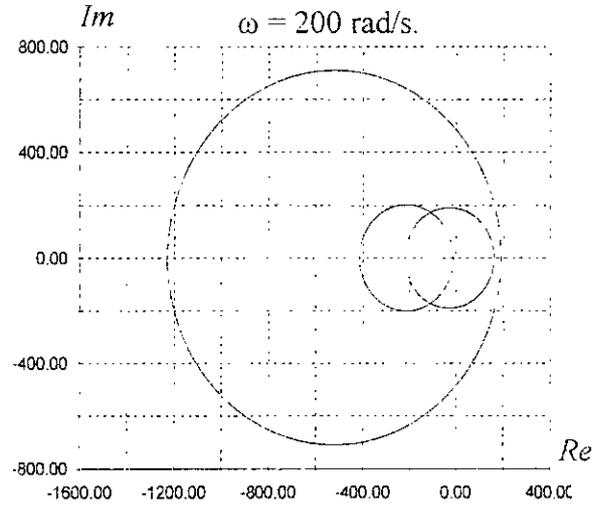
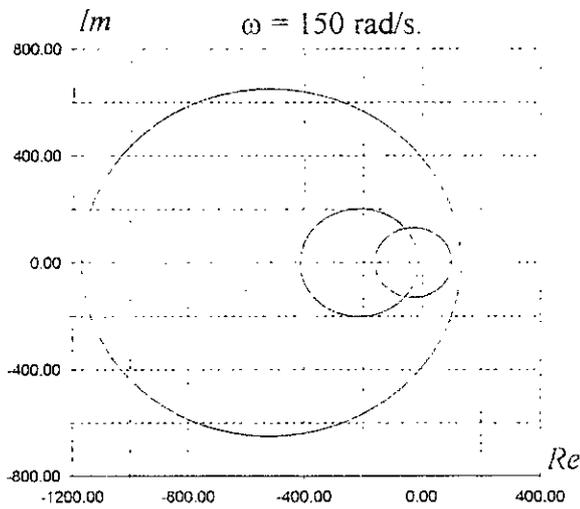
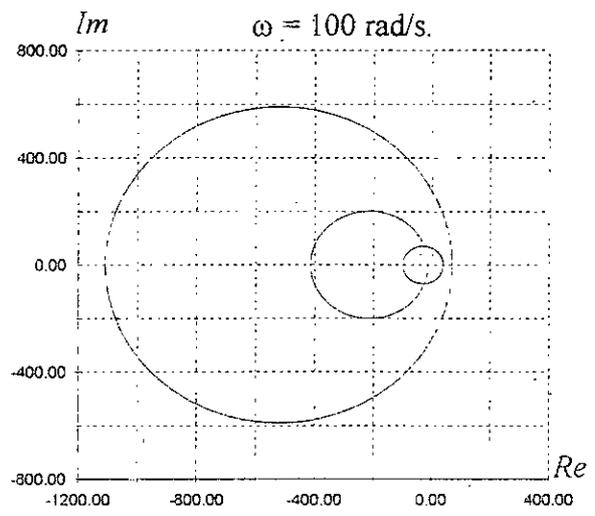
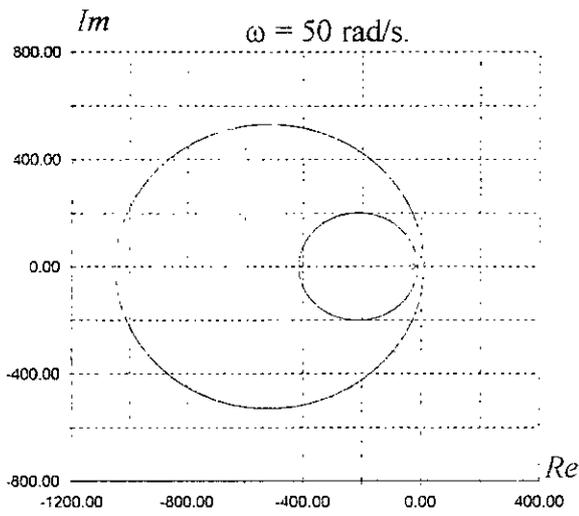


Figure 4. 12 : Tracé des cercles de Gerschgorin.

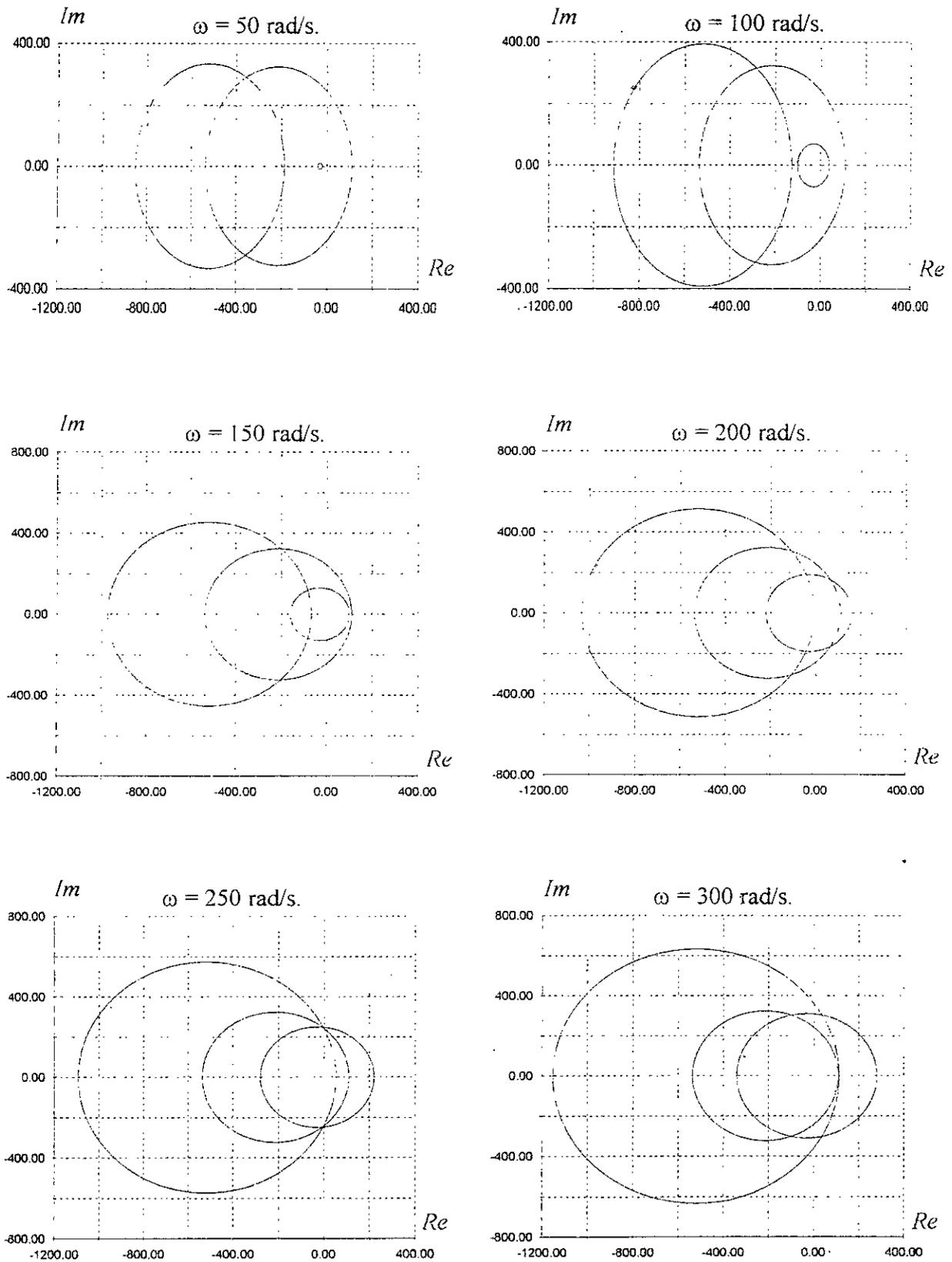


Figure 4. 13 : Tracé des cercles de Gerschgorin.

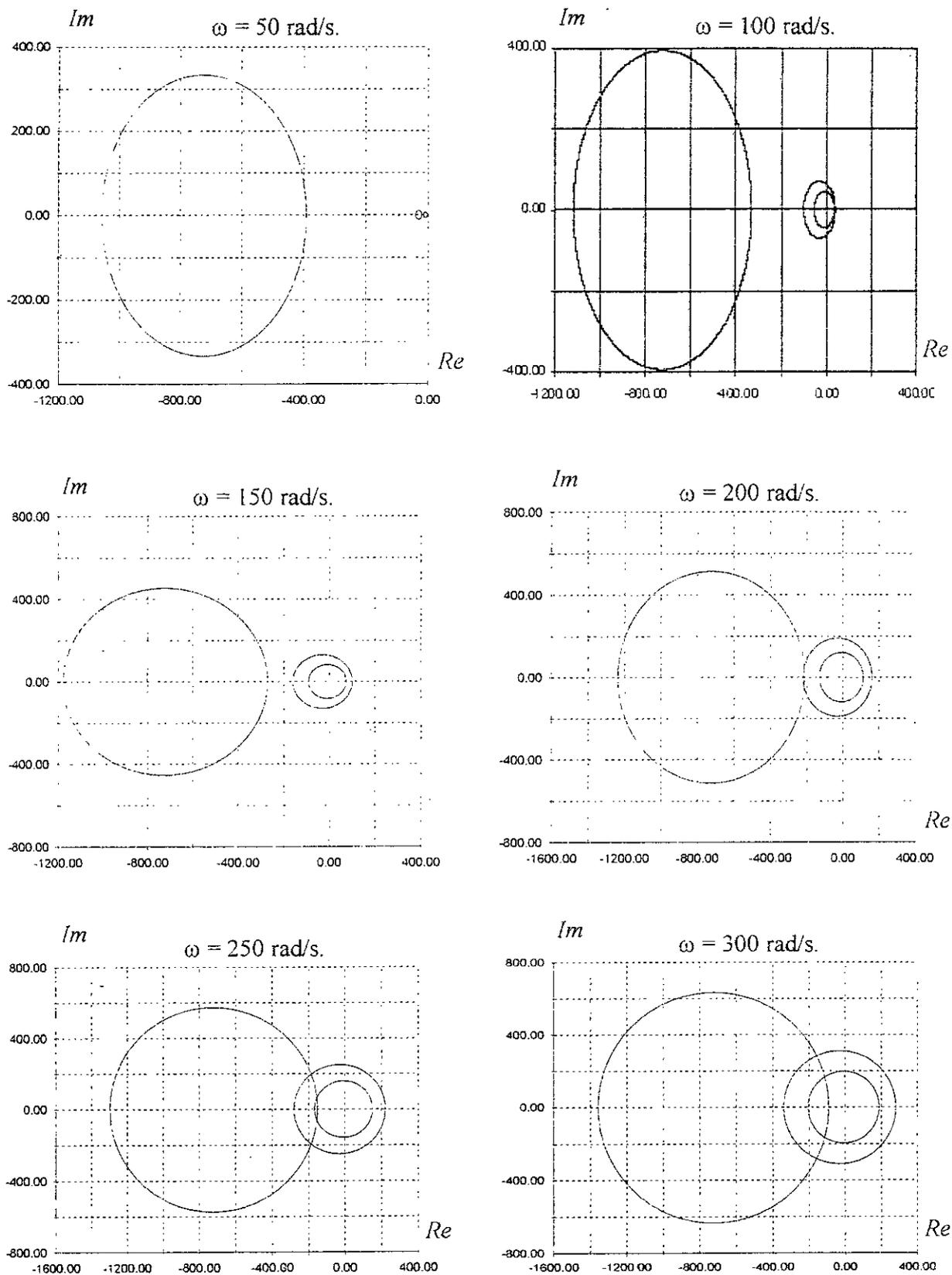


Figure 4. 14 : Tracé des cercles de Gerschgorin (Calcul des rayons suivant les lignes).

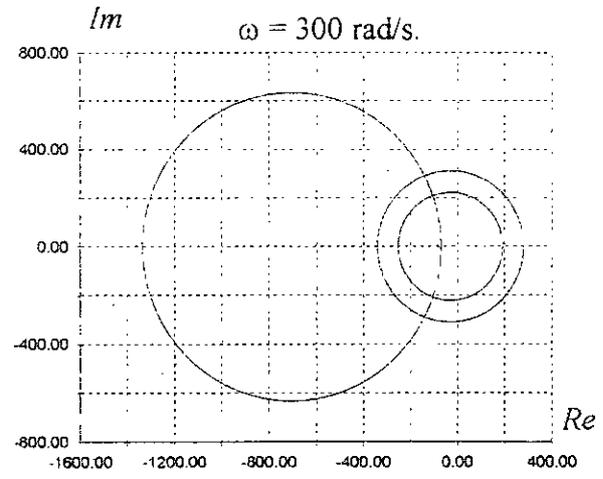
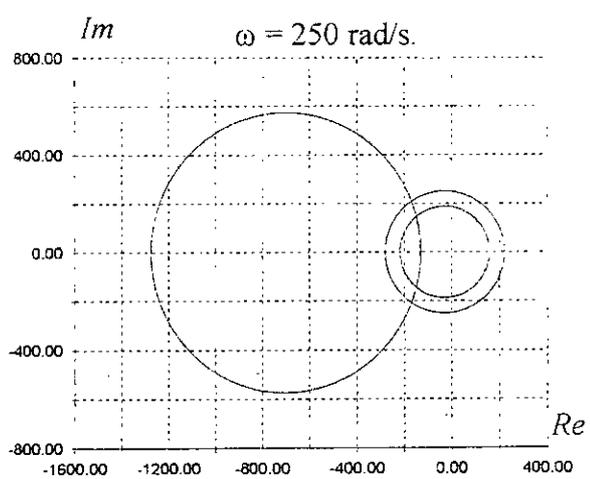
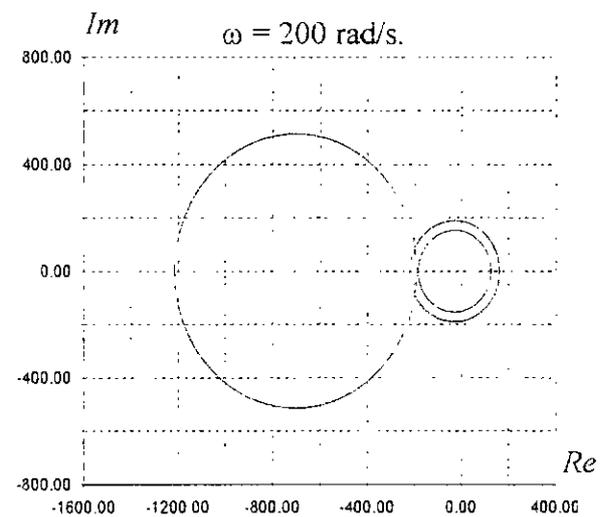
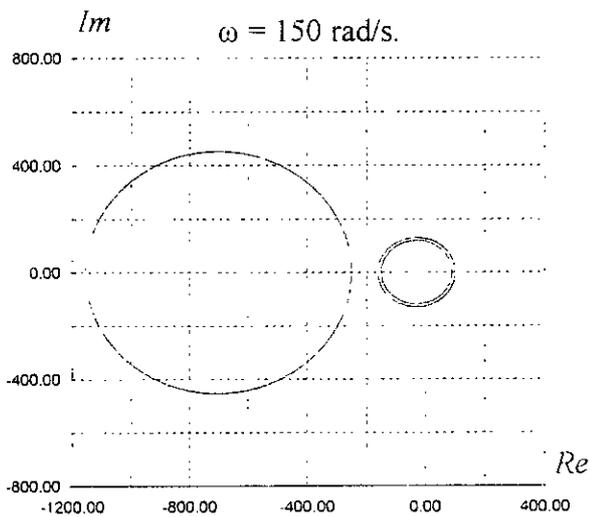
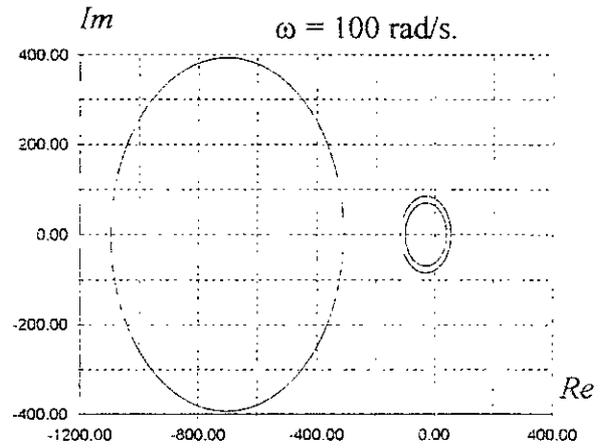
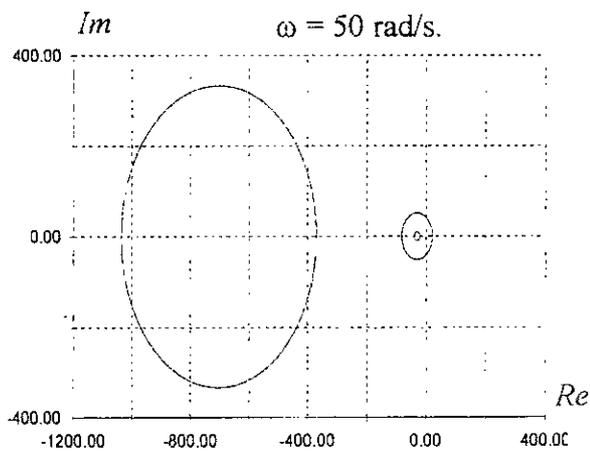


Figure 4. 16 : Tracé des cercles de Gerschgorin ($A_3(2,2) = A_3(3,3)$).

IV. 4. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons développé des modèles réduits pour les machines à courant alternatif fonctionnant à des vitesses quelconques. Les modèles réduits sont obtenus après deux étapes :

- Application de l'approche géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin pour mettre les modèles originaux sous forme standard singulièrement perturbée.
- Application de la technique des perturbations singulières.

La mise sous forme standard singulièrement perturbée n'est guère une tâche aisée, car les modèles utilisés sont fortement non-linéaires et couplés. Il n'existe pas de démarche systématique pour traiter de tels problèmes. La solution est basée sur la connaissance que l'on a du phénomène physique. Dans ce cas la mise sous forme standard singulièrement perturbée nécessite des transformations paramétrées en angle de rotation.

Concernant la machine asynchrone, il est intéressant de remarquer que les modèles réduits en (α, β) sont plus répandus aux problèmes de contrôle que ceux en (d, q) . Ceci est justifié par des simulations données en boucle ouverte. Par contre nous n'avons pas pu obtenir des résultats en (d, q) .

Nous avons également montré l'influence du choix des valeurs initiales sur l'approximation apportée par les modèles réduits. Ce choix est un élément fondamental pour l'approche multiéchelles de temps.

Enfin, il est important de signaler que les modèles réduits conviennent mieux au régime transitoire où les dynamiques sont suffisamment éloignées.

Chapitre V

**CONTROLE PAR MODES GLISSANTS
DES SYSTEMES
SINGULIEREMENT PERTURBES****V. 1. INTRODUCTION**

La synthèse des commandes non linéaires performantes devient plus compliquée lorsqu'on considère par exemple des systèmes dont la dynamique est régie par des équations différentielles affectées par un petit paramètre $\varepsilon > 0$ (petit et constant), où il y'a introduction de la notion de la multi-échelles de temps (multi-time scale). L'analyse et la synthèse de commande des systèmes non linéaires continus à deux échelles de temps sont largement développés en utilisant l'approche des perturbations singulières ([Dje-96], [Hec-91], [Kha-96], [Kok-86], [Sha-89], ...). En effet, cette approche permet de simplifier considérablement la synthèse de tels systèmes. Celle-ci décompose le problème de commande en deux sous problèmes ; l'un avec une dynamique lente et l'autre avec une dynamique rapide.

D'autre part, la méthode de réglage par modes glissants est une stratégie de commande qui possède des avantages incontestables. Ces avantages sont importants, bien connus et appréciés depuis le début des années quatre-vingt [Utk-92], [Slo-91]. Ce type de commande permet une très haute précision, une bonne stabilité, la simplicité de conception, un temps de réponse très faible et notamment la robustesse. Celui-ci permet d'être particulièrement adapté au traitement des systèmes dont les modèles sont imprécis.

Donc, l'idée de combiner les deux méthodes (technique des perturbations singulières et le réglage par les modes glissants) constitue une bonne approche pour le traitement des systèmes multi-échelles de temps, où se présentent des dynamiques parasites ou non modélisables ([Dje-96], [Hec-91], [DeL-95, 96]). La conception de telle commande suppose que l'état est complètement accessible. Or, d'une manière générale pour des applications industrielles concernant la machine asynchrone, on ne dispose pas de la mesure des flux de la machine. Donc, il est nécessaire d'estimer ces états non mesurables en utilisant un observateur d'état pour compléter la synthèse des lois de commande.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination des lois de commande basées sur les modèles réduits lent et rapide développés par application de la technique des perturbations singulières en utilisant la méthode de réglage par modes glissants. Après un rappel sur les observateurs non linéaires du type modes glissants et sur la méthodologie des perturbations singulières, on passe à la représentation du modèle de la machine asynchrone dans le référentiel diphasé tournant (d, q) sous la forme d'un système singulièrement perturbé. La synthèse de l'observateur du type modes glissants et la synthèse de la commande à deux échelles de temps sont calculées sur la base de l'état mesuré partiellement et de l'état estimé par l'observateur.

Des résultats sur le même sujet ont été présentés dans l'article [DeL-95] pour un problème de commande multi-échelles de temps de la machine asynchrone, mais dans un référentiel lié au stator (deux variables de commande). Dans ce contexte, un travail intéressant basé sur la commande par retour d'état fait l'objet de la référence [Dje-93]. Cependant, ce travail présente une difficulté d'ordre pratique (problème de conditions initiales).

Dans notre travail, nous proposons une autre solution au problème du contrôle multi-échelles de temps de la machine asynchrone utilisant l'approche aux perturbations singulières. Cette solution se base sur la technique de réglage par modes glissants. Pour ce type de contrôle, nous avons fait en premier lieu un calibrage de la matrice d'état électromagnétique (matrice des flux et courants) pour améliorer la forme standard singulièrement perturbée du modèle de la machine. Le choix du terme parasite ε est justifié au chapitre précédent.

V. 2. OBSERVATEUR NON-LINEAIRE DE TYPE MODES GLISSANTS ([Ben-96],[Dje-93])

Pour ce type d'observateur, nous considérons le système non linéaire en temps continu, dans l'espace d'état de dimension fini, décrit par le système d'équations :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ y = HX \end{cases} \tag{5.1}$$

où $X \in \mathcal{R}^n$, $y \in \mathcal{R}^p$ et $U \in \mathcal{R}^q$ représentent respectivement l'état du système, l'entrée (ou la commande) et la sortie.

Le système est supposé observable. Par conséquent, l'observation des états X peut se faire à partir des mesures de y .

On définit la structure de l'observateur comme suit :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{X}} = \hat{f}(\hat{X}, y, U) + \Lambda I_s \\ \hat{y} = H\hat{X} \end{cases} \tag{5.2}$$

où : $\hat{X} \in \mathcal{R}^n$, est l'état observé,

\hat{f} est une copie du modèle f ,

Λ est une matrice de gains ($n \times p$) à déterminer,

I_s est un vecteur de dimension ($p \times 1$) qui s'écrit sous la forme :

$$I_s = [sign(S_1), sign(S_2), \dots, sign(S_p)]^T$$

avec :

$$[S_1, S_2, \dots, S_p]^T = \Gamma [y - \hat{X}]$$

et Γ , une matrice ($p \times p$) à déterminer suivant des conditions de stabilité.

De plus, on définit l'erreur d'observation sur l'état :

$$e_x = X - \hat{X}$$

et par suite :

$$e_y = y - \hat{y} = y - \hat{X}$$

En utilisant les équations (5.1) et (5.2), on peut déduire la dynamique des erreurs ; soit :

$$\hat{\Sigma}_e : \{\dot{e}_X = \Delta f - \Lambda s \quad (5.3)$$

avec :

$$\Delta f = f(X, U) - \hat{f}(\hat{X}, y, U).$$

Les p surfaces, $S = 0$, seront attractives [Utk-77], [Utk-93] si :

$$S_i \dot{S}_i < 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Cette équation définit la région du glissement.

La stabilité du système (5.3) consiste à déterminer la matrice des gains Λ pour assurer la stabilité asymptotique des erreurs d'observation (du modèle $\hat{\Sigma}_e$).

Remarque 1 :

Pour mieux concevoir la synthèse de cet observateur, il faut connaître la structure du modèle réel (i.e., remplacer f par les équations du système), et par suite, on peut définir la structure de Δf qui est indispensable pour analyser la stabilité asymptotique du système (5.3).

V. 3. CONTROLE MULTI-ECHELLES DE TEMPS PAR MODES GLISSANTS DES SYSTEMES NON-LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES

La commande composée basée sur les modes glissants que nous proposons dans cette section, est une combinaison des travaux déjà présentés par J. De-Léon et al. [DeL-95, 96] et dans [Dje-93]. En premier lieu, on rappelle le modèle du aux perturbations singulières (chapitre I) qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = a_1(x) + A_1(x)z + B_1(x)u, & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{z} = a_2(x) + A_2(x)z + B_2(x)u, & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

où le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$. De plus le vecteur de commande $u \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre constant et mesuré.

V. 3. 1. Synthèse des commandes lentes et rapides

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la technique des perturbations singulières permet de décomposer le système original (5.4) en deux sous systèmes d'ordre inférieur, dont chacun dans une échelle de temps différente.

Le système réduit lent est obtenu en posant $\varepsilon = 0$ dans l'équation (5.4) ; soit :

$$\dot{x}_s = f_s(x_s) + g_s(x_s)u_s, \quad x_s(t_0) = x_0 \quad (5.5)$$

avec :

$$z_s = h_s(x_s, u_s) = -A_2^{-1}(x_s)[a_2(x_s) + B_2(x_s)u_s]$$

où $x_s \in \mathfrak{R}^n$, $z_s \in \mathfrak{R}^m$ et $u_s \in \mathfrak{R}^q$, sont respectivement les composantes lentes des variables x , z et u .

Les expressions de f_s et g_s sont données par :

$$f_s(x_s) = a_1(x_s) - A_1(x_s)A_2^{-1}(x_s)a_2(x_s)$$

$$g_s(x_s) = B_1(x_s) - A_1(x_s)A_2^{-1}(x_s)B_2(x_s)$$

La dynamique réduite rapide (système de couche limite) est obtenu en transformant l'échelle de temps lente du système original (5.4), en une échelle de temps rapide $\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$. On utilise ensuite le changement d'état usuel $z_f = z - h(x, u_s)$. Cela nous permet de représenter le système original dans l'échelle de temps rapide comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon[a_1(x) + A_1(x)z + B_1(x)u] \\ \frac{dz_f}{d\tau} = a_2(x) + A_2(x)[z_f + h(x, u_s)] + B_2(x)u - \left[\frac{\partial h(x, u_s)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial h(x, u_s)}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial \tau} \right] \end{cases}$$

Par définition $u - u_s \stackrel{\text{def}}{=} u_f$ est la commande rapide. Si ε est suffisamment petit, on peut négliger le terme $\frac{\partial x}{\partial \tau}$. Dans cette échelle de temps rapide, on suppose que $\frac{\partial u_s}{\partial \tau} = O(\varepsilon)$, ainsi que u_s ne doit être fonction que des variables lentes et doit aussi satisfaire des objectifs de la commande lente. On obtient alors pour $\varepsilon = 0$, le système réduit rapide :

$$\frac{dz_f}{d\tau} = A_2(x)z_f + B_2(x)u_f \quad (5.6)$$

Le contrôle par mode de glissement pour le système original (5.4) se fait en deux étapes. La première étape consiste à déterminer la commande lente $u_s(x_s) \in \mathbb{R}^q$. Pour ce faire, on considère les surfaces non linéaires suivantes définies par :

$$S_s(x_s) = [s_1(x_s), s_2(x_s), \dots, s_p(x_s)]^T$$

La méthode de la commande équivalente [Hec-91], [Utk-92] est utilisée pour déterminer la commande du système réduit lent associée aux surfaces lentes $S_s(x_s) = 0$. Ainsi, on obtient

$$u_{s,eq} = - \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial S_s}{\partial x_s} f_s(x_s) \quad (5.7)$$

où la matrice $\left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]$ doit être non singulière pour toute $x_s \in D_{x_s}$.

En substituant la commande équivalente lente dans la première équation (5.5), il résulte :

$$\dot{x}_s = \left[I_n - g_s(x_s) \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial S_s}{\partial x_s} \right] f_s(x_s) \quad (5.8)$$

où sous une forme condensée :

$$\dot{x}_s = f_{s,eq}(x_s)$$

avec :

$$f_{s,eq}(x_s) = \left[I_n - g_s(x_s) \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial S_s}{\partial x_s} \right] f_s(x_s)$$

et I_n , la matrice identité d'ordre $(n \times n)$.

Pour garantir la stabilité locale du système (5.8), il faut que $f_{s,eq}$ satisfasse la condition nécessaire et suffisante suivante [DeL-96]:

$$\lambda \left\{ \frac{\partial f_{s,eq}}{\partial x_s} \right\} \leq 0, \quad \forall x_s \in D_{x_s}$$

avec $\lambda(\cdot)$ représente l'ensemble des valeurs propres.

De plus, la loi de commande (5.7) doit être complétée pour avoir la commande lente :

$$u_s = u_{s,eq} + u_{sN}$$

avec u_{sN} est la partie discontinue de la commande lente u_s , active lorsque $S_s(x_s) \neq 0$.

Dans ce cas, on la choisie sous la forme d'une expression non linéaire pour des raisons qu'on va exposer plus loin :

$$u_{sN} = - \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} L_s(x_s) S_s(x_s) \quad (5.9)$$

où $L_s(x_s)$ est une matrice définie positive de dimensions $(p \times p)$, et ses éléments fonctions de x_s sont bornés.

La dérivée de S_s est donnée par :

$$\dot{S}_s(x_s) = \frac{\partial S_s}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} = -L_s(x_s) S_s(x_s).$$

Concernant la stabilité, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x_s) = \frac{1}{2} S_s^T(x_s) S_s(x_s)$$

La dérivée de cette fonction de Lyapunov est :

$$\dot{V}(x_s) = -S_s^T(x_s) L_s(x_s) S_s(x_s)$$

Dans [DeL-96], il est montré que :

$$\dot{V}(x_s) \leq -\alpha_s \|x_s\|^2 < 0$$

pour toute $x_s \in D_{x_s}$ et $\alpha_s > 0$. Donc, on peut conclure l'existence d'un mode de glissement lent.

Similairement, on peut calculer la commande rapide basée sur les modes glissants. La loi de cette commande s'exprime par :

$$u_f = - \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} B_2(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} A_2(x) z_f + L_f(z_f) S_f(z_f) \right] \quad (5.10)$$

où S_f est la surface rapide de glissement et $L_f(z_f)$ est une matrice $(p \times p)$, définie et positive.

Comme auparavant, la fonction de Lyapunov est choisie de la forme :

$$W(z_f) = \frac{1}{2} S_f^T(z_f) S_f(z_f)$$

est sa dérivée [DeL-96] par rapport à la variable rapide de temps τ est :

$$\frac{dW}{d\tau} = -S_f^T(z_f) L_f(z_f) S_f(z_f)$$

où :

$$\frac{dW}{d\tau} \leq -\alpha_f \|\bar{z}_f\|^2 < 0$$

avec : $\alpha_f > 0$.

Donc, on peut conclure qu'il y a stabilité asymptotique du système de couche limite gouverné par un contrôle de type modes glissants.

V. 3. 2. Commande composée

Lorsque les commandes lente et rapide sont calculées séparément et respectivement sur la base d'un sous système lent et un autre rapide, on peut par la suite composer la commande nécessaire pour le système original (5.1), cette commande est de la forme [Kok-86], [Kha-96] :

$$u_c = u_s + u_f$$

ou en d'autres termes :

$$\begin{aligned} u_c = & - \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} f_s(x_s) + L_s(\dot{x}_s) S_s(x_s) \right] \\ & - \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} B_2(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} A_2(x) z_f + L_f(z_f) S_f(z_f) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Cette commande doit être exprimée en termes des états réels x et z . Donc, nous remplaçons la variable de couche limite z_f par $z - h(x, u)$ et x_s par x , soit :

$$\begin{aligned} \dot{x} = & a_1(x) + A_1(x)z - B_1(x) \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} f_s(x_s) + L_s(x_s) S_s(x_s) \right] \\ & - B_1(x) \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} B_2(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} A_2(x) z_f + L_f(z_f) S_f(z_f) \right] \\ \varepsilon \dot{z} = & a_2(x) + A_2(x)z - B_2(x) \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} g_s(x_s) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_s}{\partial x_s} f_s(x_s) + L_s(x_s) S_s(x_s) \right] \\ & - B_2(x) \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} B_2(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S_f}{\partial z_f} A_2(x) z_f + L_f(z_f) S_f(z_f) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec :

$$\bar{z}_f = z - h(x, u_s)$$

Quelques résultats concernant la stabilité du système (5.12) sont donnés dans les références [Kha-96], [Kok-86] pour ε suffisamment petit.

V. 4. OBSERVATEUR DE TYPE MODES GLISSANTS POUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES [Dje-96]

La commande par modes glissants présentée dans la section (V.3) et l'annexe (C), nécessite la connaissance du vecteur d'état. Si sa mesure n'est pas accessible ou présente des difficultés techniques, et si les variables correspondants sont observables, il convient de remplacer les composantes inconnues du vecteur d'état par l'estimations de leurs valeurs. Cette estimation se fait sur la base d'un observateur utilisant les équations du modèle original de la machine avec introduction des termes correcteurs pour réduire la sensibilité aux bruits de mesure et aux variations paramétriques.

Dans le cas des systèmes non-linéaires singulièrement perturbés, la détermination des gains correcteurs se base sur la structure particulière du modèle ainsi que de la propriété de réduction en deux sous systèmes (variables lentes et variables rapides), afin de réaliser un observateur le plus simple possible.

Dans cette section, on présente la synthèse d'un observateur de type modes glissants pour les systèmes non-linéaires singulièrement perturbés permettant l'estimation des composantes inconnues du vecteur d'état sur la base de la mesure partielle de l'état et de la sortie. Cette synthèse repose sur l'approche proposée par [Dje-96]. L'approche présentée était utilisée de façon implicite par [Ben-96] sur les observateurs non-linéaires de type modes glissants dans le cadre d'une implémentation expérimentale.

On rappelle le modèle dû aux perturbations singulières, qui peut se décomposer en [Dje-96]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, z, u, \varepsilon) = a_{11}(x) + A_{11}(x)z + B_{11}(x)u \\ \dot{x}_2 = f_2(x, z, u, \varepsilon) = a_{12}(x) + A_{12}(x)z + B_{12}(x)u \\ \varepsilon \dot{z}_1 = g_1(x, z, u, \varepsilon) = a_{21}(x) + A_{21}(x)z + B_{21}(x)u \\ \varepsilon \dot{z}_2 = g_2(x, z, u, \varepsilon) = a_{22}(x) + A_{22}(x)z + B_{22}(x)u \end{cases} \quad (5.13)$$

avec :

$$x = (x_1^T, x_2^T)^T, \quad z = (z_1^T, z_2^T)^T, \quad \text{où } x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque2 : le choix de dimension identique pour les x_i et les z_i est uniquement fait dans le but de simplifier les notations. Un cas réel sera présenté dans l'application à la fin de ce chapitre.

Le vecteur des sorties mesurées est :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Si le rang de la matrice d'observabilité est égal à $4n$, c'est à dire, la dimension de l'espace d'état, alors le système est complètement observable. Ainsi, la synthèse de l'observateur est envisageable.

On exprime les dynamiques rapides du système (5.13) dans l'échelle de temps en τ par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, z, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x, z, u) \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{d\tau} = g_1(x, z, u) \\ \frac{dz_2}{d\tau} = g_2(x, z, u) \\ y_1 = z_1 \end{cases} \quad (5.15)$$

V. 4. 1. Synthèse de l'observateur

La structure de l'observateur par modes de glissements, en exprimant les variables lentes et rapides dans des échelles de temps différentes, prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = f_1(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) + \Lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f_2(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) + \Lambda_2 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \frac{d\hat{z}_1}{d\tau} = g_1(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) + \Gamma_1 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1) \\ \frac{d\hat{z}_2}{d\tau} = g_2(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) + \Gamma_2 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1) \end{cases} \quad (5.16)$$

où :

- $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_{i,1}\}$ et $\Gamma_1 = \text{diag}\{\gamma_{i,1}\}$ sont des matrices de constantes positives de dimension $(n \times n)$
- Λ_2 et Γ_2 sont des matrices de dimension $(n \times n)$, à déterminer.
- $\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)^T = [\text{sign}(x_{1,1} - \hat{x}_{1,1}), \text{sign}(x_{2,1} - \hat{x}_{2,1}), \dots, \text{sign}(x_{n,1} - \hat{x}_{n,1})]$
- $\text{sign}(z_1 - \hat{z}_1)^T = [\text{sign}(z_{1,1} - \hat{z}_{1,1}), \text{sign}(z_{2,1} - \hat{z}_{2,1}), \dots, \text{sign}(z_{n,1} - \hat{z}_{n,1})]$

Remarque 3 :

Ici les matrices sont choisies diagonales pour simplifier l'exposé. Mais, on peut choisir des matrices non diagonales afin de profiter de certaines propriétés structurelles du système.

Pour représenter les dynamiques de l'erreur d'estimation, nous adoptons la notion suivante :

$$\begin{aligned} e_x &= x - \hat{x} \\ e_z &= z - \hat{z} \end{aligned}$$

et donc, on obtient les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{e}_{x_1} = f_1(x_1, x_2, z_1, z_2, u) - f_1(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) - \Lambda_1 \text{sign}(e_{x_1}) \\ \dot{e}_{x_2} = f_2(x_1, x_2, z_1, z_2, u) - f_2(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) - \Lambda_2 \text{sign}(e_{x_2}) \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \frac{de_{z_1}}{d\tau} = g_1(x_1, x_2, z_1, z_2, u) - g_1(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) - \Gamma_1 \text{sign}(e_{z_1}) \\ \frac{de_{z_2}}{d\tau} = g_2(x_1, x_2, z_1, z_2, u) - g_2(x_1, \hat{x}_2, z_1, \hat{z}_2, u) - \Gamma_2 \text{sign}(e_{z_2}) \end{cases} \quad (5.18)$$

où :

$$\begin{cases} \dot{e}_{x_1} = \Delta f_1 - \Lambda_1 \text{sign}(e_{x_1}) \\ \dot{e}_{x_2} = \Delta f_2 - \Lambda_2 \text{sign}(e_{x_2}) \\ \frac{de_{z_1}}{d\tau} = \Delta g_1 - \Gamma_1 \text{sign}(e_{z_1}) \\ \frac{de_{z_2}}{d\tau} = \Delta g_2 - \Gamma_2 \text{sign}(e_{z_2}) \end{cases}$$

Le calcul des matrices de gains doit garantir la stabilité ces deux dynamiques lente et rapide.

1. Stabilité en 0 dans l'échelle de temps lent t , du système (5.17)

On choisit une surface S de telle sorte que :

$$S = 0 \Leftrightarrow e_{x_1} = 0, \quad (5.19)$$

en d'autres termes, l'erreur d'estimation e_{x_1} est nulle sur (5.19) qui est unique. La surface (5.19) est attractive si la dérivée de la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} S^T S$$

est négative $\forall S \neq 0$, soit :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} < 0 \quad (5.20)$$

Avec un choix judicieux de S et de la fonction de Lyapunov, la deuxième dynamique de (5.17), de l'erreur totale d'estimation e_x , réduites sur la surface attractive ($e_{x_1} = 0$), avec :

$$\text{sign}(e_{x_1}) = \Lambda_1^{-1} \Delta f_1$$

s'écrit :

$$\dot{e}_{x_2} = \Delta f_2 - \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \Delta f_1 \quad (5.21)$$

Ainsi, Λ_1 est calculé de façon à vérifier (5.20), et la matrices de gains Λ_2 , de façon à assurer la stabilité en 0 des dynamiques (5.21).

La stabilité de (5.21) nécessite la connaissance des informations sur Δf_1 et Δf_2 (donc la connaissance de f_1 et f_2 ; pour plus de détails, voir l'application ci-jointe sur la machine asynchrone).

2. Stabilité en 0 dans l'échelle de temps rapide τ , du système (5.18)

De la même façon, on choisit une fonction de Lyapunov dépendante de z_1 et Γ_1 , tel que :

$$\frac{dV}{d\tau} < 0, \quad \forall V \neq 0$$

Les dynamiques (5.18) de l'erreur totale d'estimation en e_z réduites sur la surface attractive (où $e_{z_1} = 0$) s'écrivent alors :

$$\frac{de_{z_2}}{d\tau} = \Delta g_2 - \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} \Delta g_1 \quad (5.22)$$

comme pour l'équation (5.21), il n'existe pas une méthode systématique pour déduire Γ_2 qui stabilise le système (5.35).

V. 4. 2. Commande composée avec observateur de type modes glissants

Dans le premier chapitre, un schéma de commande est proposé pour le modèle aux perturbations singulières examiné dans les échelles de temps lentes et rapide, et sur la base de l'état complet $(x_1^T, x_2^T, z_1^T, z_2^T)^T$. Si l'on substitue maintenant x_2 par \hat{x}_2 et z_2 par \hat{z}_2 dans les expressions de ce schéma de commande, le principe de séparation n'étant pas vérifié en non-linéaire après bouclage. Donc, on ne peut rien conclure sur la stabilité des dynamiques globales du système étendu, c'est à dire, système (5.13) plus système observateur (5.16).

Nous présentons ici une solution utilisant les grandeurs estimées. Cette solution consiste à calculer la commande sur la base de l'observateur et à l'appliquer au système réel. En effet, la convergence de $(\hat{x}, \hat{z}) \rightarrow (x^*, z^*)$, où (x^*, z^*) désigne l'état désiré, et de $(e_x, e_z) \rightarrow 0$ assure la convergence de $(x, z) \rightarrow (x^*, z^*)$. L'idée de la synthèse de la commande sur la base de l'observateur repose sur la simple constatation que seul l'état (\hat{x}, \hat{z}) est disponible.

Ceci nous a conduit à envisager la réalisation d'un observateur de type modes glissants pour ce type de système, comme suit :

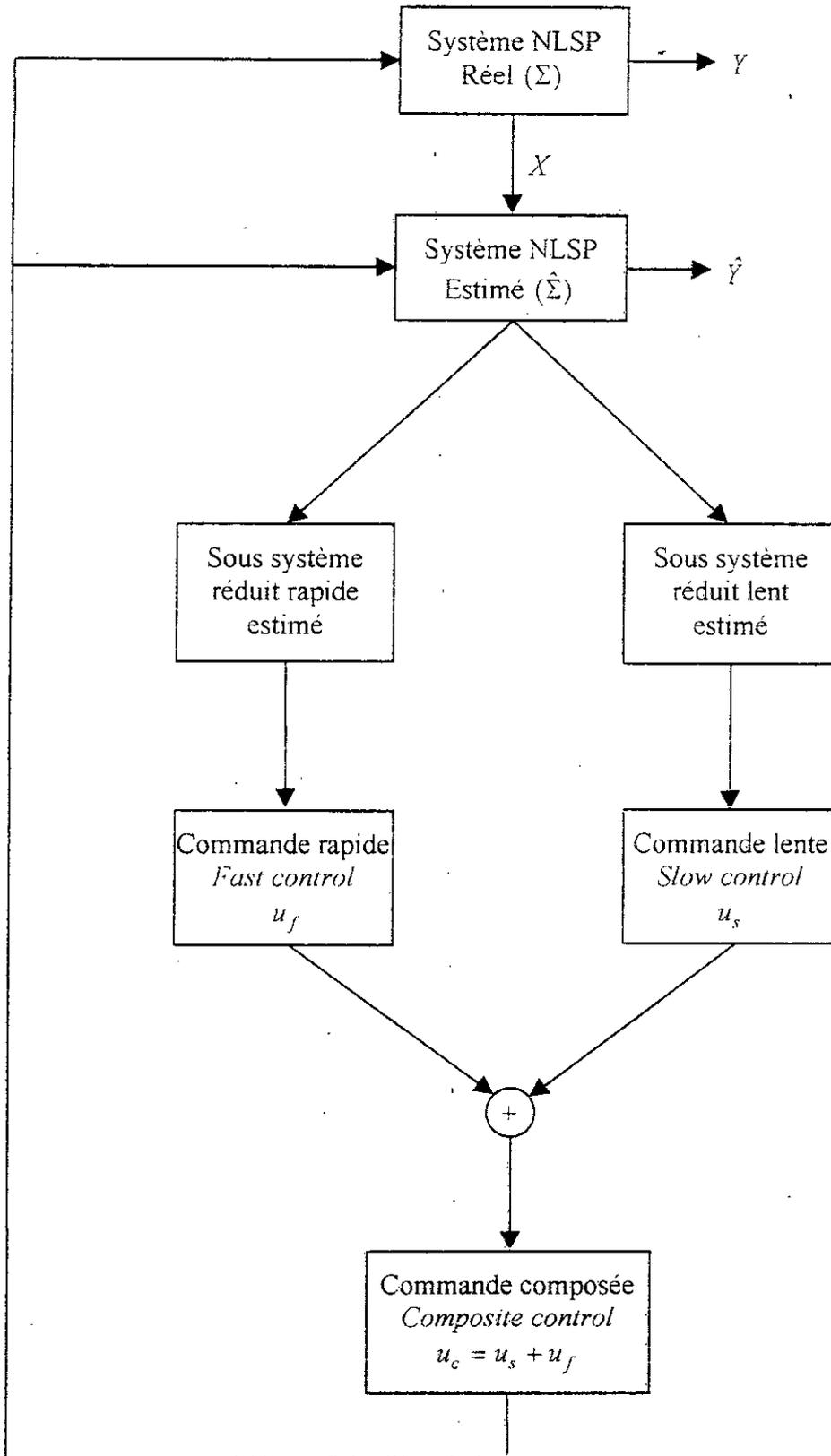


Figure 5.1 : Schéma de commande composée avec observateur de type modes glissants.

V. 5. OBSERVATEUR DE TYPE MODES GLISSANTS D'UNE MACHINE ASYNCHRONE A MODELE NON-LINEAIRE SINGULIEREMENT PERTURBE

La synthèse d'une commande pour une machine asynchrone nécessite dans la plupart des cas la connaissance du vecteur d'état. Or, si la vitesse mécanique et les courants électriques sont aisément mesurables, en revanche la mesure des flux rotoriques présente plusieurs difficultés techniques et pratiques. D'où l'utilité d'un observateur qui permet d'estimer ces dernières variables.

Pour la commande de la machine asynchrone, les constantes de temps du système sont de trois ordres de grandeurs :

- variables très lente : vitesse de rotation,
- variables lentes : flux,
- variables rapides : courants.

Cette séparations des modes électromagnétiques et mécanique a conduit les chercheurs à adopter un formalisme propre aux systèmes non-linéaires singulièrement perturbés pour l'observation des variables non accessibles par des mesures pour la machine asynchrone [Dje-93]. Notre apport consiste à améliorer la forme standard singulièrement perturbée du modèle de la machine.

V. 5. 1. Modèle de la machine

Suivant la notation standard, le modèle de la machine asynchrone qui permet l'application de la technique des perturbations singulières peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & -R_s & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & -R_s \\ \frac{1}{\sigma L_s T_r} & \frac{1}{\sigma L_s} \omega & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} \omega & \frac{1}{\sigma L_s T_r} & 0 & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{qs} \\ 0 & 1 & -\phi_{ds} \\ \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & i_{qs} \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & -i_{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ \omega_s - \omega \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{p^2}{J} i_{qs} & \frac{p^2}{J} i_{ds} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} & \phi_{qs} & i_{ds} & i_{qs} & \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} [C_r]$$

Une normalisation de la matrice d'état électromagnétique conduit à la nouvelle présentation d'état suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ L_{s0} i_{ds} \\ L_{s0} i_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & -R_s & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & -R_s \\ \frac{1}{\sigma T_r} \eta_s & \frac{1}{\sigma} \eta_s \omega & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sigma} \eta_s \omega & \frac{1}{\sigma T_r} \eta_s & 0 & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{qs} \\ 0 & 1 & -\phi_{ds} \\ \frac{1}{\sigma} \eta_s & 0 & L_{s0} i_{qs} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \eta_s & -L_{s0} i_{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ \omega_{split} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{p^2}{J} L_{s0} i_{qs} & \frac{p^2}{J} L_{s0} i_{ds} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ L_{s0} i_{ds} \\ L_{s0} i_{qs} \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} [C_r]$$

où η_s caractérise la variation de l'inductance mutuelle statorique lors du fonctionnement.

$$\text{avec : } L = \frac{1}{\eta_s} L_{s0} \text{ et } \omega_{split} = \omega_s - \omega.$$

V. 5. 2. Modèle singulièrement perturbé de la machine

Maintenant, nous développons des lois de commande par modes glissants qui tiennent compte de l'ensemble commande et observateur, afin d'éviter l'hypothèse du principe de séparation. La stabilité de l'ensemble commande-observateur est prouvée pour un contrôle de vitesse et de flux en utilisant un observateur d'ordre réduit et la technique de contrôle par modes glissants.

Pour ce faire, un choix convenable des variables d'état consiste à utiliser la vitesse du rotor Ω , les composantes du flux statorique et les courants statoriques comme variables d'état, dans un référentiel diphasé (d,q) tournant avec le champ statorique. Suivant la méthodologie de la technique des perturbations singulières, nous posons (voir chap. IV) :

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [\omega \quad \phi_{ds} \quad \phi_{qs}]^T \\ z &= [z_1 \quad z_2]^T = [L_{s0} i_{ds} \quad L_{s0} i_{qs}]^T \\ \varepsilon &= \sigma \end{aligned}$$

comme variables lentes et rapides respectivement et $\sigma = 1 - M^2/L_s L_r$, le coefficient de dispersion de la machine.

Remarque 4 : les choix des vecteurs lent et rapide ainsi que du terme parasite sont justifiés au chapitre précédent, concernant la mise sous forme standard singulièrement perturbée du modèle de la machine asynchrone

Dans notre cas, les variables ω , i_{ds} et i_{qs} sont obtenues directement par des mesures, alors que les flux statoriques ϕ_{ds} et ϕ_{qs} sont observés par un observateur non linéaire de type modes glissants. Les tensions v_{ds} et v_{qs} , ainsi que la fréquence de la machine ω_{split} (c'est à dire, la différence entre la vitesse du champ tournant statorique et celle du rotor), sont considérées comme variables de contrôle, soit :

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = [v_{ds} \quad v_{qs} \quad \omega_{split}]^T$$

Le modèle dynamique singulièrement perturbé de la machine asynchrone peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2 z_2 - x_3 z_1) - \frac{f}{J} x_1 - \frac{p}{J} C_r \\ \dot{x}_2 = -\alpha z_1 + x_1 x_3 + x_3 u_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = -\alpha z_2 - x_1 x_2 - x_2 u_3 + u_2 \\ \dot{z}_1 = -(\alpha + \beta) z_1 + \eta_s \beta x_2 + \eta_s x_1 x_3 + \varepsilon_2 u_3 + \eta_s u_1 \\ \dot{z}_2 = -(\alpha + \beta) z_2 + \eta_s \beta x_3 - \eta_s x_1 x_2 - \varepsilon_1 u_3 + \eta_s u_2 \end{cases} \quad (5.23)$$

avec :

$$\alpha = \frac{R_s}{L_s} ; \beta = \frac{R_r}{L_r} ; k = \frac{p^2}{JL_{s0}}$$

Généralement, la définition des sorties du système est liée aux objectifs du contrôle. Souvent, la variable la plus importante à contrôler est la vitesse mécanique du rotor, donc :

$$y_1(x) = x_1 = \omega$$

Pour assurer le bon comportement de la machine, il faut tenir compte de l'équation du couple électromagnétique. Une solution simple pour surmonter ce problème est de contrôler les flux du moteur, ceci peut s'effectuer indifféremment en utilisant les flux statoriques ou rotoriques. Dans notre cas et pour des raisons concernant l'utilisation de la technique des perturbations singulières, nous choisissons la composante du flux statorique suivant l'axe « d », soit :

$$y_2(x) = x_2 = \phi_{ds}$$

De plus, il est opportun de contrôler la composante du flux statorique suivant l'axe « q », pour garantir une meilleure orientation du flux statorique, soit :

$$y_3(x) = x_3 = \phi_{qs}$$

Remarque 5 :

On note que notre objectif est de contrôler indépendamment les sorties $y_1(x)$ et $y_2(x)$. La sortie auxiliaire $y_3(x)$ est liée à la sortie $y_2(x)$, et ne peut être contrôlée indépendamment. Néanmoins, elle est utilisée pour le développement des lois de commande.

V. 5. 3. Observateur non linéaire de type modes glissants

Dans ce paragraphe, nous présentons la synthèse de l'observateur des flux basée sur la technique des perturbations singulières et la technique des modes glissants. Notons $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{z}_1, \hat{z}_2$ les estimations des états x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 respectivement. Le modèle d'estimation ($\hat{\Sigma}$) est une copie du modèle original (Σ), où sont ajoutés des termes correctifs, soit :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = k(\hat{x}_2 z_2 - \hat{x}_3 z_1) - \frac{f}{J} x_1 - \frac{p}{J} C_r + \Lambda_{11} I_s + q_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\alpha z_1 + x_1 \hat{x}_3 + \hat{x}_3 u_3 + u_1 + \Lambda_{12} I_s \\ \dot{\hat{x}}_3 = -\alpha z_2 - x_1 \hat{x}_2 - x_2 u_3 + u_2 + \Lambda_{13} I_s \\ \dot{\hat{z}}_1 = -(\alpha + \beta) z_1 + \eta_s \beta \hat{x}_2 + \eta_s x_1 \hat{x}_3 + \varepsilon_2 u_3 + \eta_s u_1 + \Lambda_{21} I_s \\ \dot{\hat{z}}_2 = -(\alpha + \beta) z_2 + \eta_s \beta \hat{x}_3 - \eta_s x_1 \hat{x}_2 - \varepsilon_1 u_3 + \eta_s u_2 + \Lambda_{22} I_s \end{cases} \quad (5.24)$$

avec :

$\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}, q_1$ sont les gains de l'observateur.

Le vecteur I_s s'exprime sous la forme :

$$I_s = \begin{bmatrix} \text{sign}(S_1) \\ \text{sign}(S_2) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

avec :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} z_1 - \hat{z}_1 \\ z_2 - \hat{z}_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\eta_s} \begin{bmatrix} \beta & x_1 \\ -x_1 & \beta \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.27)$$

Remarque 6:

Dans la technique de réglage par modes de glissement, la dynamique \hat{x}_1 n'est pas nécessaire pour la construction des états x_2 et x_3 , mais nous l'introduisons pour compléter la synthèse du contrôle.

Posons $e_{x_i} = x_i - \hat{x}_i$ et $e_{z_j} = z_j - \hat{z}_j$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$. Les dynamiques des erreurs d'observation sont obtenues en soustrayant ($\hat{\Sigma}$) de (Σ), soit : $\dot{\hat{\Sigma}}_e = \Sigma - \hat{\Sigma}$

$$\hat{\Sigma}_e : \begin{cases} \dot{e}_{x_1} = k(e_{x_2} z_2 - e_{x_3} z_1) - \Lambda_{11} I_s - q_1 e_{x_1} \\ \dot{e}_{x_2} = (x_1 + u_3) e_{x_3} - \Lambda_{12} I_s \\ \dot{e}_{x_3} = -(x_1 + u_3) e_{x_2} - \Lambda_{13} I_s \\ \dot{e}_{z_1} = \eta_s \beta e_{x_2} + \eta_s x_1 e_{x_3} - \Lambda_{21} I_s \\ \dot{e}_{z_2} = \eta_s \beta e_{x_3} - \eta_s x_1 e_{x_2} - \Lambda_{22} I_s \end{cases} \quad (5.28)$$

Pour que les états x_i et z_j , $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$, converge vers x_i^* et z_j^* , il suffit que le système $\hat{\Sigma}_e$ soit stable et les erreurs e_{x_i} et e_{z_j} convergent vers zéro.

L'analyse de la stabilité du système $\hat{\Sigma}_e$ consiste à déterminer les gains nécessaires pour que le système $\hat{\Sigma}_e$ converge asymptotiquement vers zéro. Par priorité de convergence, on doit déterminer les gains $\Lambda_{21}, \Lambda_{22}$ de telle façon que dans l'échelle de temps rapides en τ , la surface $S(\tau) = 0$ est attractive. Ensuite, les gains $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, q_1$ sont déterminés de telle manière que le système d'ordre réduit obtenu lorsque $S(\tau) = 0$, est localement stable à zéro dans le domaine attractif défini par les conditions données par la proposition A_1 :

Proposition A_1 : [Dje-93]

Les conditions d'attractivité de la surface de glissement $S(\tau) = 0$ sont données par :

$$S^\tau \left(\frac{d}{d\tau} S \right) < 0 \quad (5.29)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{21} \\ \Lambda_{22} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \Delta; \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

où :

$$\delta_1, \delta_2 > 0.$$

Donc la condition (5.29) est vérifiée avec les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} e_{x_2} < \delta_1 & \text{si } S_1 > 0 \\ e_{x_2} > -\delta_1 & \text{si } S_1 < 0 \\ e_{x_3} < \delta_2 & \text{si } S_2 > 0 \\ e_{x_3} > -\delta_2 & \text{si } S_2 < 0 \end{cases}$$

Remarque 7 :

Le choix de Λ_{21} et Λ_{22} est basé sur la structure du modèle $\hat{\Sigma}_e$ (voir la démonstration suivante).

Démonstration 1:

En utilisant les expressions (5.26) et (5.27), on peut écrire :

$$\frac{d}{d\tau} S = \frac{d}{d\tau} \left\{ \Gamma(x_1) \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} \right\},$$

et un petit développement de cette équation, nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{d\tau} S = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma(x_1) \times \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \times \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} + \Gamma(x_1) \times \frac{d}{d\tau} \left\{ \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} \right\}.$$

D'après la méthodologie de la technique des perturbations singulières, on a $\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = 0$, donc :

$$\frac{d}{d\tau} S = \Gamma(x_1) \times \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

A partir du modèle $\hat{\Sigma}_e$ (équation (5.28)), on peut tirer :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1}(x_1) \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda_{21} \\ \Lambda_{22} \end{bmatrix} I_s,$$

et le choix de (5.30), nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} e_{z_1} \\ e_{z_2} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1}(x_1) \left\{ \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} - \Delta I_s \right\}.$$

En substituant cette équation dans l'équation (5.31), l'équation (5.29) se transforme en :

$$S^T \left(\frac{d}{d\tau} S \right) = S^T \left\{ \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} - \Delta I_s \right\} \quad (5.32)$$

ou encore :

$$S^T \left(\frac{d}{d\tau} S \right) = S_1(e_{x_2} - \delta_1 \text{sign}(S_1)) + S_2(e_{x_3} - \delta_2 \text{sign}(S_2))$$

Fin de démonstration 1.

Remarque 8 :

A partir du choix de Γ et Δ , l'attractivité des surfaces $S_i = 0$ est découplée, ce qui garantit l'attractivité de S [Hec-91], [Dra-92].

Lorsque la surface $S(\tau) = 0$, le vecteur de commutation équivalent \tilde{I}_s ([Dra-92]) est obtenu à partir de (5.32) ; soit :

$$\tilde{I}_s = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Maintenant, le système réduit $\hat{\Sigma}_e^r$ des erreurs d'observation peut s'exprimer comme suit :

$$\hat{\Sigma}_e^r : \begin{cases} \dot{e}_{x_1} = \left\{ k \begin{bmatrix} -z_2 & -z_1 \end{bmatrix} - \Lambda_{11} \Delta^{-1} \right\} \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} - q_1 e_{x_1} \\ \dot{e}_{x_2} = (x_1 + u_3) e_{x_3} - \Lambda_{12} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} \\ \dot{e}_{x_3} = -(x_1 + u_3) e_{x_2} - \Lambda_{13} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} e_{x_2} \\ e_{x_3} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.34)$$

Alors, ce système sera stable sous les conditions imposées dans la proposition A_2 .

Proposition A_2 : [Dje-93]

Afin d'assurer la stabilité asymptotique du système réduit $\hat{\Sigma}_e^r$, nous pouvons choisir :

$$\Lambda_{11} = k \begin{bmatrix} -z_2 & -z_1 \end{bmatrix} \Delta \tag{5.35}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{12} \\ \Lambda_{13} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & (x_1 + u_3) \\ -(x_1 + u_3) & 0 \end{bmatrix} + Q \right\} \Delta$$

avec :

$$Q = \text{diag}\{q, q\}$$

Démonstration 2:

La substitution des équations (5.35) dans le système réduit $\hat{\Sigma}_e^r$ (5.34), simplifie considérablement ce dernier, ainsi on peut écrire :

$$\hat{\Sigma}_e^r : \begin{cases} \dot{e}_{x_1} = -q_1 e_{x_1} \\ \dot{e}_{x_2} = -q_2 e_{x_2} \\ \dot{e}_{x_3} = -q_3 e_{x_3} \end{cases}$$

ce système ($\hat{\Sigma}_e^r$) sera stable et converge exponentiellement vers zéro, pour un choix :

$$q_1, q_2, q_3 > 0$$

Fin de démonstration 2.

V. 6. CONTROLE MULTI-ECHELLES DE TEMPS PAR MODES GLISSANTS AVEC OBSERVATEUR

En général, pour les systèmes non linéaires, le principe de séparation n'est pas retenu. Cependant, substituant les variables x_2 et x_3 par ses valeurs observées \hat{x}_2 et \hat{x}_3 (respectivement) dans la commande composée $u_c = u_s + u_f$, la stabilité en boucle fermée n'est pas assurée. Afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée, on propose de construire une commande par modes glissants sur la base du système d'observation ($\hat{\Sigma}$).

La procédure de décomposition multi-échelles de temps présentée en section (V. 4) appliquée sur le mode ($\hat{\Sigma}$) permet d'obtenir la commande composée $u_c = u_s + u_f$ pour le système original (Σ). Dans ce sens, il est possible de séparer (pour les variables lentes), d'un coté les dynamiques des erreurs d'observation, et d'un autre coté les dynamiques des erreurs de troncature.

Cette procédure nous a conduit à proposer un autre schémas bloc pour ce type de contrôle basé sur des observateurs d'ordres réduits et la technique des modes glissants comme le présente la figure (5. 2). La simulation de ce schémas bloc nécessite en premier lieu la détermination des dynamiques rapides et lentes intervenant dans ce type de contrôle.

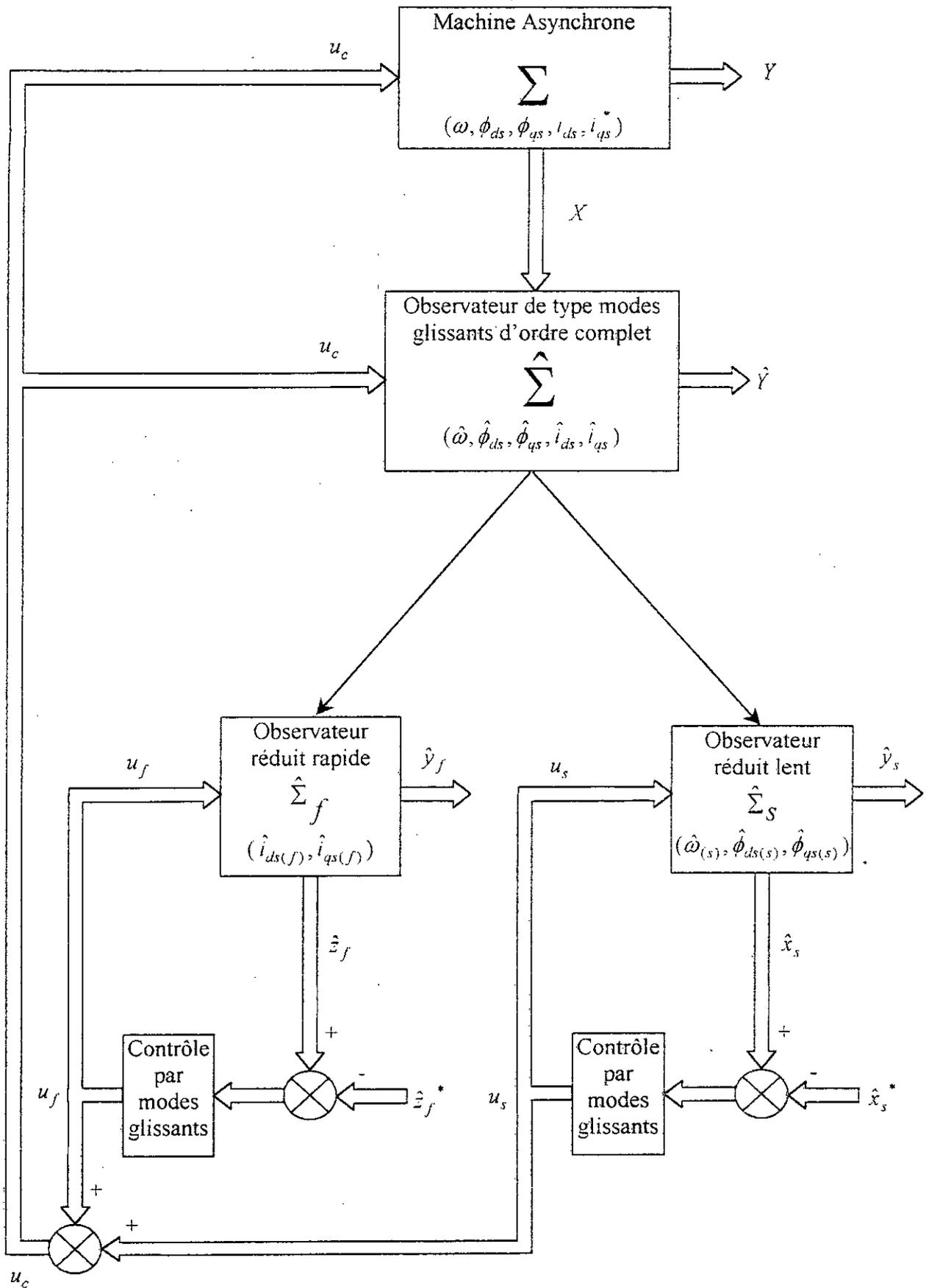


Figure 5.2 : Schéma bloc du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants.

V. 6. 1. Les dynamiques lentes

Lorsque la variable rapide \hat{z}_f se stabilise à zéro, c'est à dire $z = \hat{z}_s$, il est possible de substituer z par \hat{z}_s dans le modèle $(\hat{\Sigma})$ et par suite, on peut obtenir le sous modèle réduit lent. Ceci correspond à écrire $\varepsilon = 0$ dans le modèle $(\hat{\Sigma})$. Soit :

$$\hat{z}_s = \begin{bmatrix} \hat{z}_{1(s)} \\ \hat{z}_{2(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \left\{ \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{2(s)} \\ \hat{x}_{3(s)} \end{bmatrix} + \eta_s \begin{bmatrix} u_{1(s)} \\ u_{2(s)} \end{bmatrix} + \Gamma^{-1} \Delta I_s \right\} \quad (5.36)$$

ou encore :

$$\hat{z}_s = \frac{1}{\alpha + \beta} \left\{ \Gamma^{-1} \hat{X}_s + \eta_s \begin{bmatrix} u_{1(s)} \\ u_{2(s)} \end{bmatrix} \right\}$$

avec :

$$\hat{X}_s = \begin{bmatrix} \hat{X}_{2(s)} \\ \hat{X}_{3(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2(s)} \\ \hat{x}_{3(s)} \end{bmatrix} + \Delta I_s.$$

Le modèle d'état dans cette échelle de temps s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1(s)} \\ \dot{\hat{x}}_{2(s)} \\ \dot{\hat{x}}_{3(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k\eta_s}{\alpha + \beta} x_{1(s)} \|\hat{X}_s\|^2 - \frac{p}{J} x_{1(s)} - \frac{p}{J} C_r + q_1 e_{x_1} \\ \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} -\alpha\beta & \beta x_{1(s)} \\ -\beta x_{1(s)} & -\alpha\beta \end{bmatrix} \hat{X}_s + Q \Delta I_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{k}{\alpha + \beta} \hat{X}_{3(s)} & \frac{k}{\alpha + \beta} \hat{X}_{2(s)} & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta} & 0 & \hat{X}_{3(s)} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha + \beta} & -\hat{X}_{2(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(s)} \\ u_{2(s)} \\ u_{3(s)} \end{bmatrix}$$

Ce modèle peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\hat{\Sigma}_s : \quad \dot{\hat{x}}_s = f_s(\hat{x}_s) + g_s(\hat{x}_s) u_s \quad (5.37)$$

avec : $\hat{y}_s = h(\hat{x}_s)$

Les $h_i(\hat{x}_s)$ sont données au paragraphe (V. 5). La commande lente peut être obtenue facilement en utilisant la technique de contrôle par modes glissants présentée en section (V.3) qui permet d'assurer la stabilité en boucle fermée.

V. 6. 2. Les dynamiques rapides

Les dynamiques de couche limite du modèle $(\hat{\Sigma})$ sont obtenues en transformant l'échelle de temps lente (t), à l'échelle de temps rapide correspondante (τ). Pour remplacer \hat{z}_s dans modèle $(\hat{\Sigma})$, on définit la variable rapide $\hat{z}_f = \hat{z} - \hat{z}_s$. Substituant z par $\hat{z}_f + \hat{z}_s$ dans ce modèle, le sous modèle rapide résultant est :

$$\hat{\Sigma}_f : \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{\hat{z}}_f = -(\alpha + \beta) \hat{z}_f + \eta_s \begin{bmatrix} u_{1f} \\ u_{2f} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.38)$$

V. 7. SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS

Pour tester les performances de ce type de contrôle multi-échelles de temps, nous avons procédé à la simulation numérique afin d'illustrer le comportement du système en boucle fermée. La simulation de ce système présentée sur la figure (5.2) utilise la technique de réglage par modes glissants pour développer les lois de commande nécessaire sur la base des modèles réduits développés par application de la technique des perturbations singulières.

Notre objectif est de contrôler lissement la vitesse de la machine vers sa valeur nominale et d'aligner le flux statorique suivant l'axe « d » à sa valeur nominale (i.e., $\phi_{ds} = 1 \text{ V.s}$ et $\phi_{qs} = 0 \text{ V.s}$). Ensuite, nous avons procédé à d'autres tests pour évaluer les performances de ce type de contrôle. Pour ce faire, nous avons utilisé la première machine du tableau (4.1).

Il est bien connu que la technique des modes glissants génère un broutement indésirable (Chattering), ce problème peut être remédié en remplaçant la fonction de commutation « sign » par une fonction de saturation adéquate qui filtre les hautes fréquences [Slo-91].

- **Machine fonctionnant à vide :**

Les dynamiques désirées sont obtenues sur la base des commandes lentes (Figures (5. 5. a)). Il est important de noter que la commande rapide u_f (Figures (5. 5. b)), qui est active seulement dans le temps de la couche limite, assure la stabilité de la variété rapide. Il faut signaler aussi que les commandes lente et rapide (u_s et u_f) sont acceptables par rapport aux valeurs admissibles.

Les figures (5. 3. a) et (5. 3. b) montrent l'efficacité de la décomposition multiéchelles de temps basée sur la technique des perturbations singulières, en utilisant la technique de contrôle par modes glissants. Ceci est confirmé par les figures (5. 4. b), qui donnent une comparaison entre les deux grandeurs réelles désirées et celles obtenues par l'observateur d'ordre complet. Ces dernières figures montrent clairement l'efficacité de ce type d'observateur qui donne une très bonne estimation des flux, de la vitesse de rotation et des courants statoriques malgré le changement des conditions initiales procédé sur les deux systèmes.

D'autre part, il est important de noter que les lois de la commande composée ont permis une bonne orientation du flux statorique suivant l'axe « d ».

- **Inversion de l'orientation du flux statorique :**

Dans un premier test de ce type de contrôle multi-échelles de temps, nous avons inversé l'orientation du flux statorique à l'instant ($t = 0.5\text{s}$). Les figures (5. 6. b) représentent l'évolution des dynamiques désirées avec un temps de réponse assez faible. Les erreurs d'observation tendent vers zéro au bout de 0.1s. Elles ne sont pas affectées par l'inversion de l'orientation du flux statorique.

- **Application d'un couple résistant de 10 N.m :**

Pour ce test, on remarque une légère dégradation des performances de ce type de contrôle. Ce constat est justifié par les réponses présentées sur les figures (5. 8. b) qui montrent une légère diminution de la vitesse de rotation et une légère augmentation du flux statorique suivant l'axe « d ». Dans ce sens, on note aussi les performances intéressantes de l'observateur d'ordre complet vis-à-vis la variation de la charge.

- **Augmentation de la valeur de la résistance rotorique de 20% :**

Dans ce cas, on remarque une dégradation importante des performances de ce type de contrôle multi-échelles de temps. Ceci est confirmé par les figures (5. 10. b) et (5. 10. c). Les performances de l'observateur d'ordre complet de type modes glissants sont presque inchangées sauf en régime transitoire. Dans ce dernier teste, il est important de noter que les résultats présentés ne sont pas d'ordre pratique (sans limitations des commandes). Dans le cas d'une telle limitation, nous avons constaté une divergence totale des simulations.

Enfin, nous signalons aussi que l'inversion du sens de rotation de la machine a causée la divergence des simulation.

V. 8. CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, il est montré que la technique de contrôle multi-échelles de temps par modes glissants avec des parties lentes et rapides, basées sur l'approche des perturbations singulières et l'intervention d'un observateur de type modes glissants est une technique efficace pour résoudre et simplifier le problème de contrôle de la machine asynchrone. Cependant, l'inconvénient majeur de ce type de contrôle est la non-robustesse aux variations paramétriques et à l'inversion du sens de rotation de la machine. En effet, cet inconvénient justifie absolument la non utilisation de ce type de contrôle dans le monde industriel.

L'avantage le plus important de la combinaison de la méthode des perturbations singulières et de la technique des modes glissants est la possibilité de faire un bon réglage sous des incertitudes sur les paramètres des modèles obtenus par la décomposition du modèle original.

La commande considérée est calculée sur la base d'un modèle de Park. Cependant, cette commande doit être reportée vers le référentiel original (a, b, c), d'où la connaissance de la position du rotor.

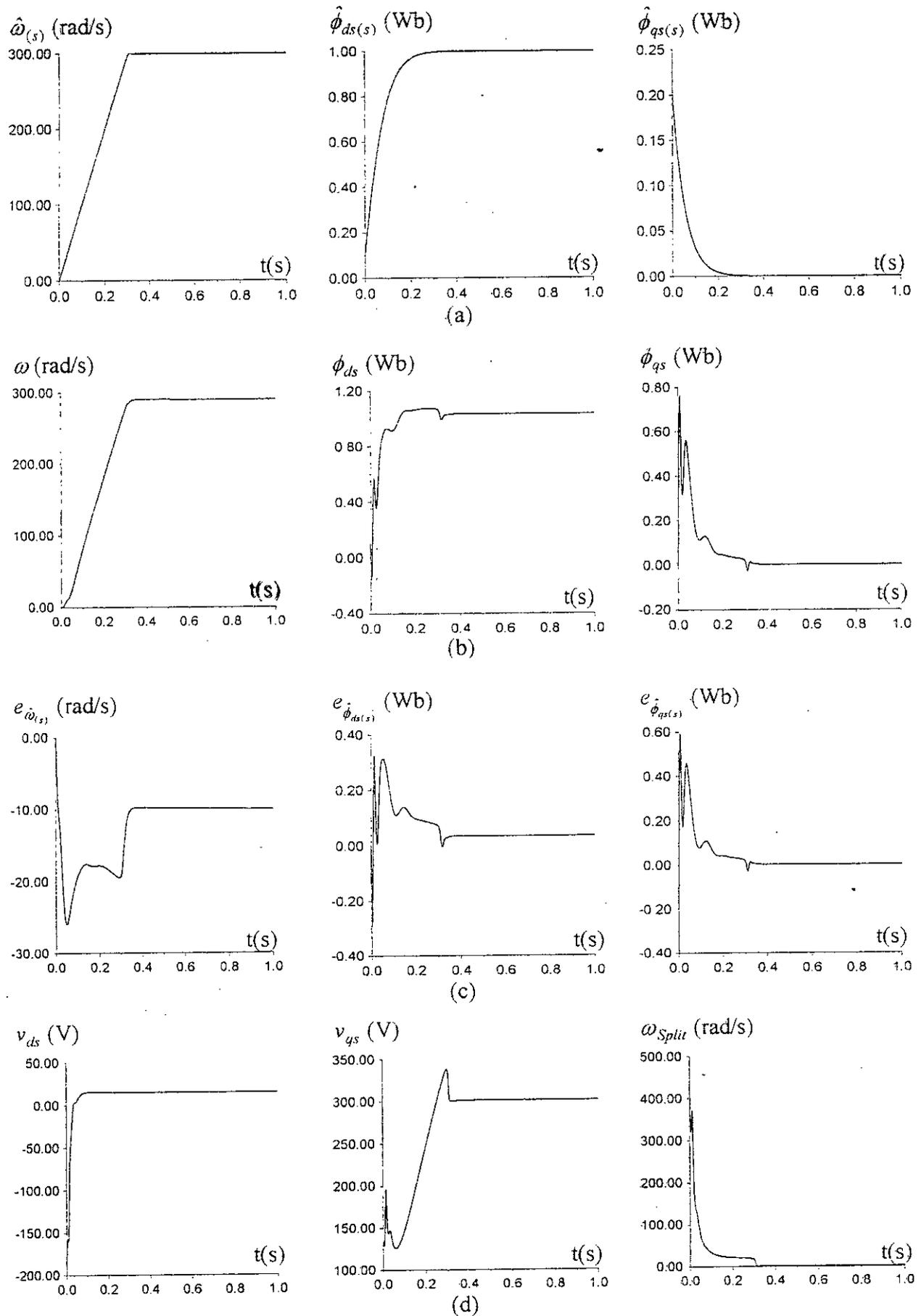


Figure 5. 3 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (fonctionnement à vide).

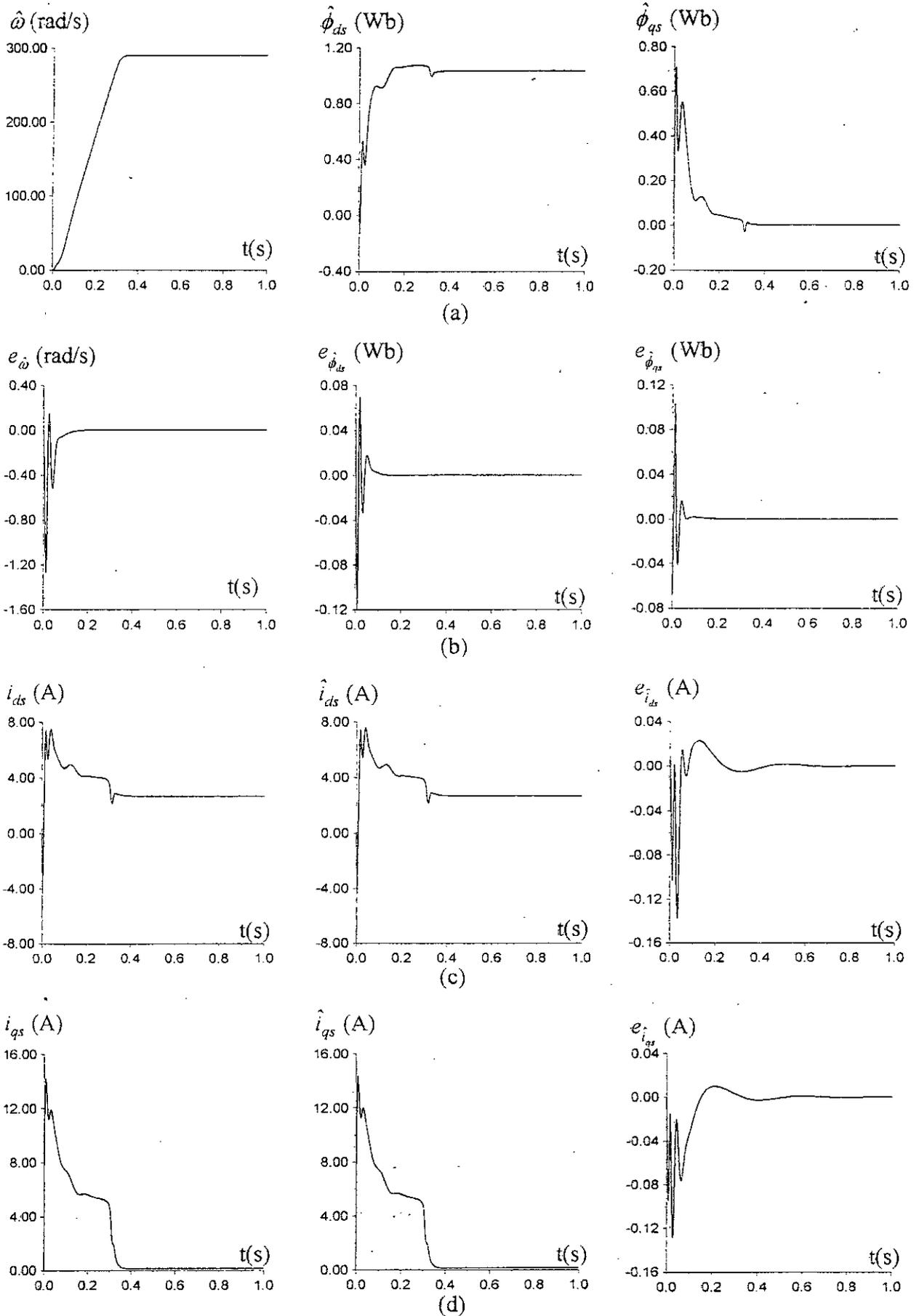


Figure 5. 4 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (fonctionnement à vide).

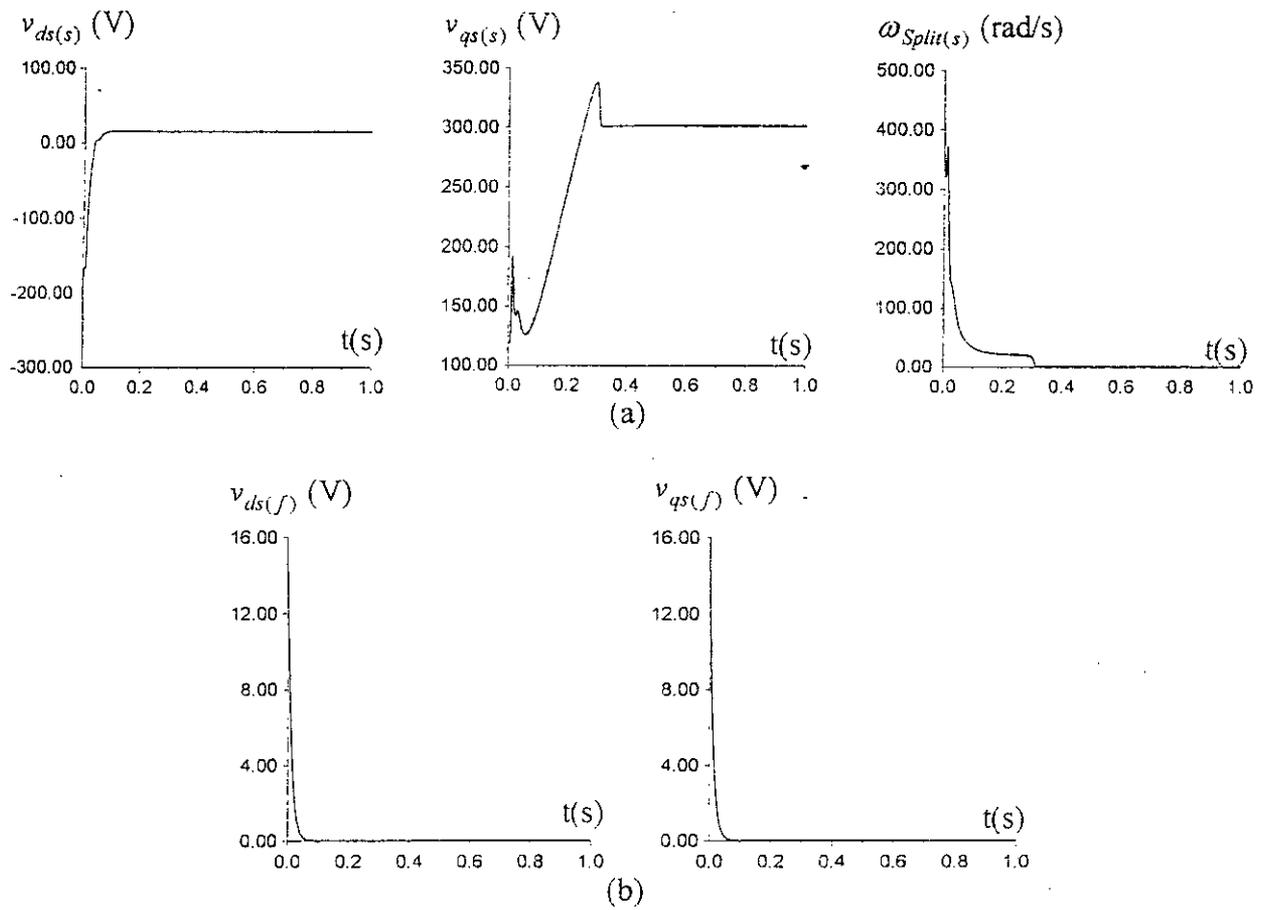


Figure 5. 5 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (fonctionnement à vide).

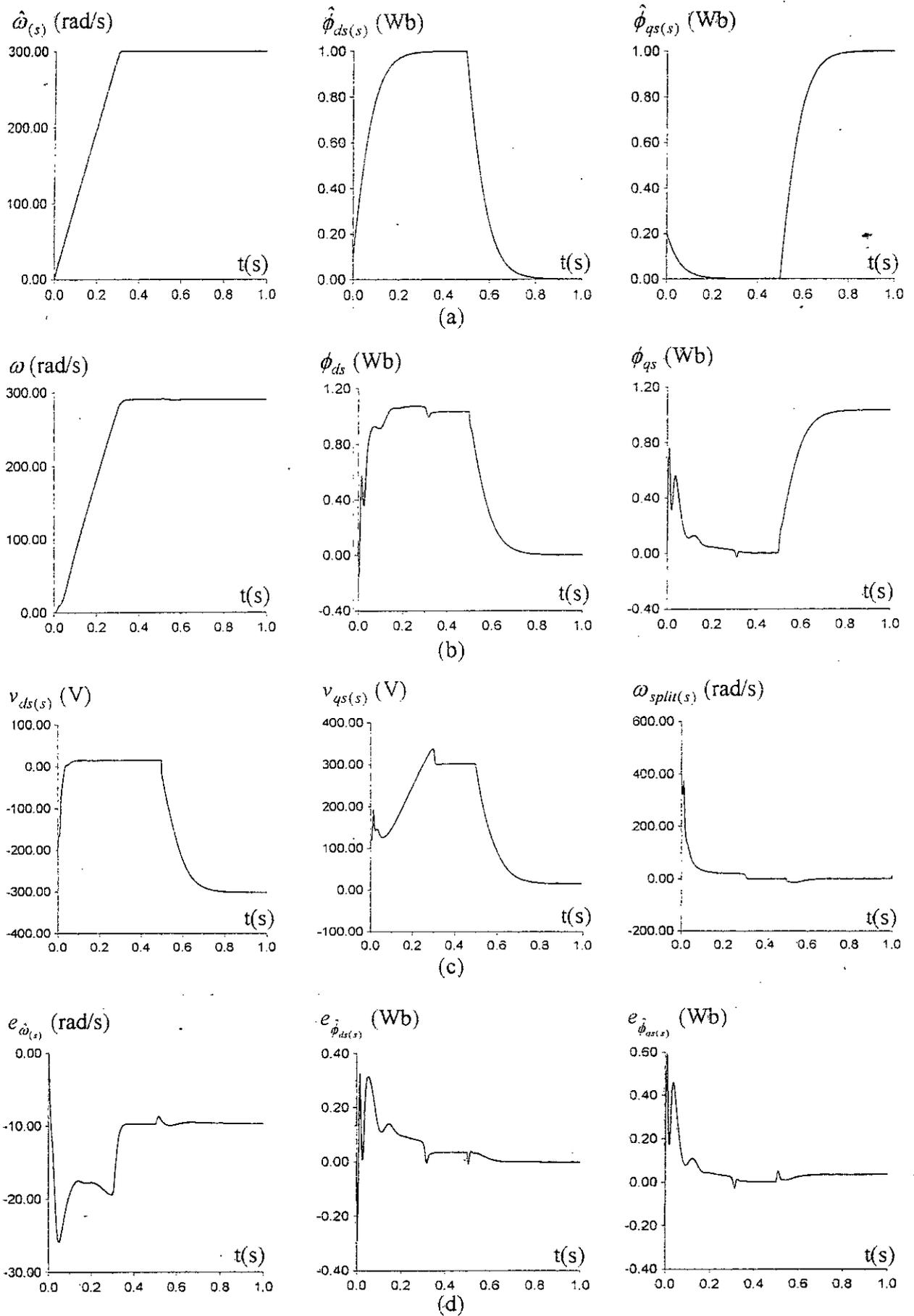


Figure 5. 6 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (avec inversion de l'orientation du flux statorique).

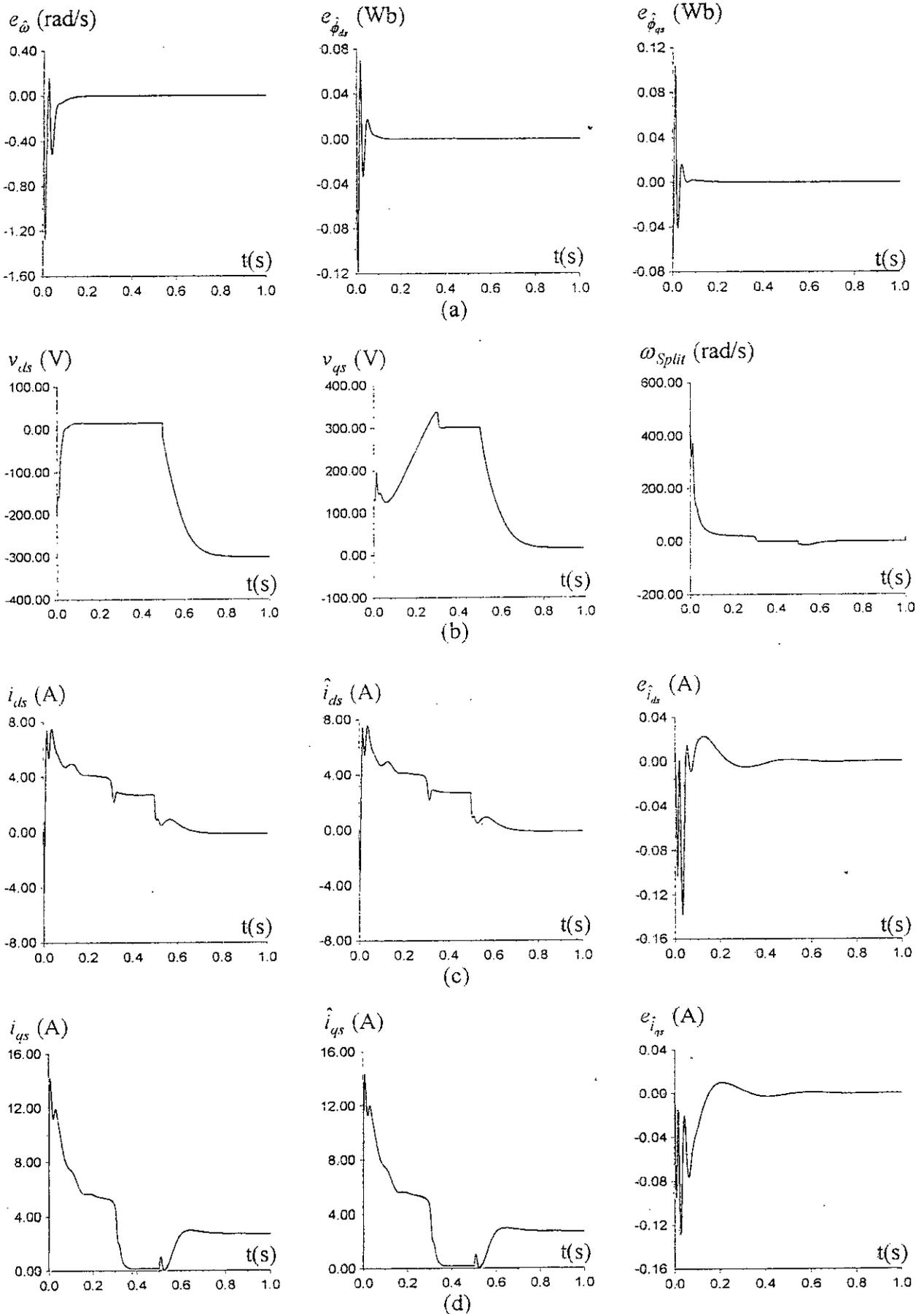


Figure 5.7 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (avec inversion de l'orientation du flux statorique).

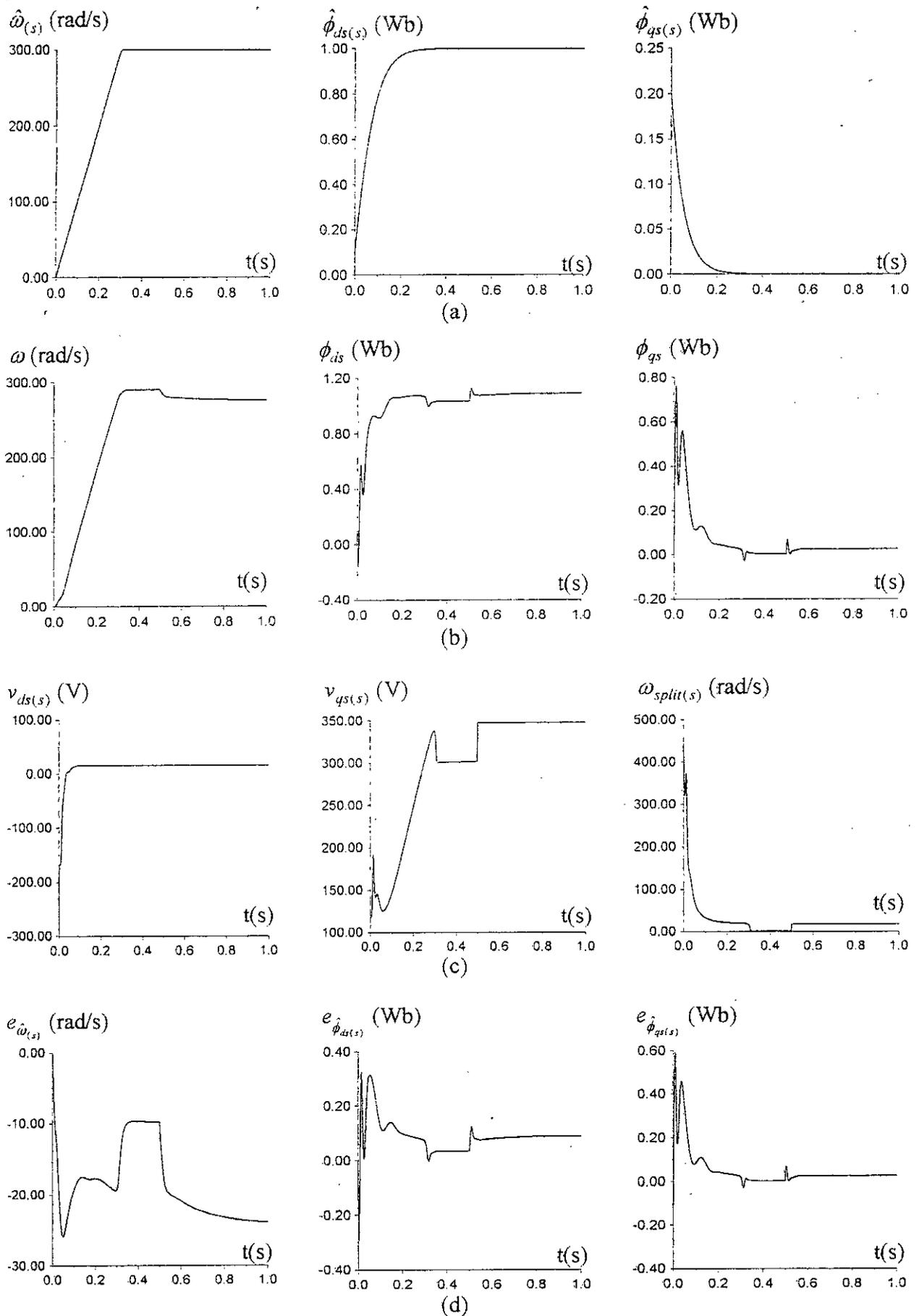


Figure 5. 8 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (avec application d'un couple résistant de 10 N.m).

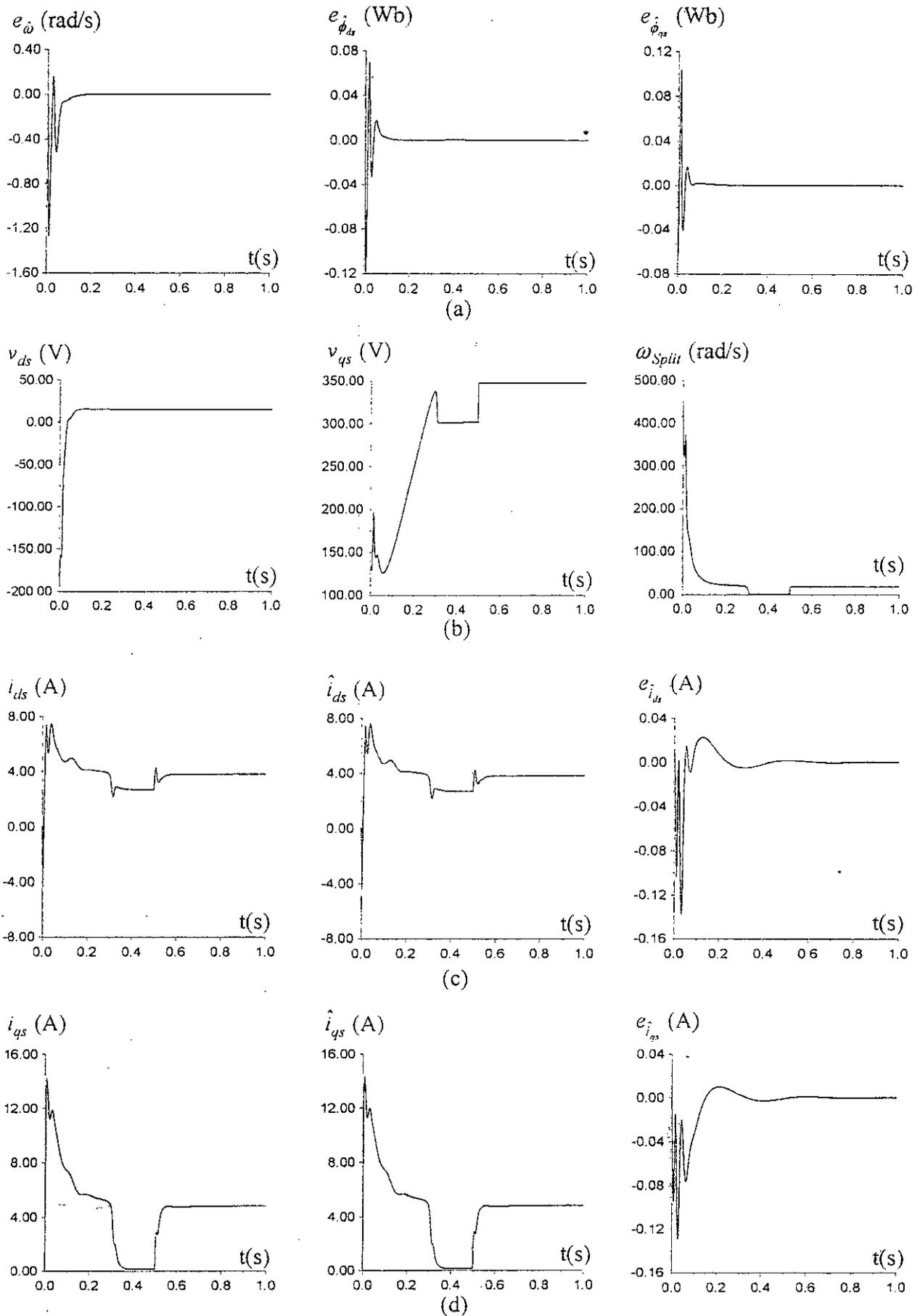


Figure 5. 9 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (avec application d'un couple résistant de 10 N.m).

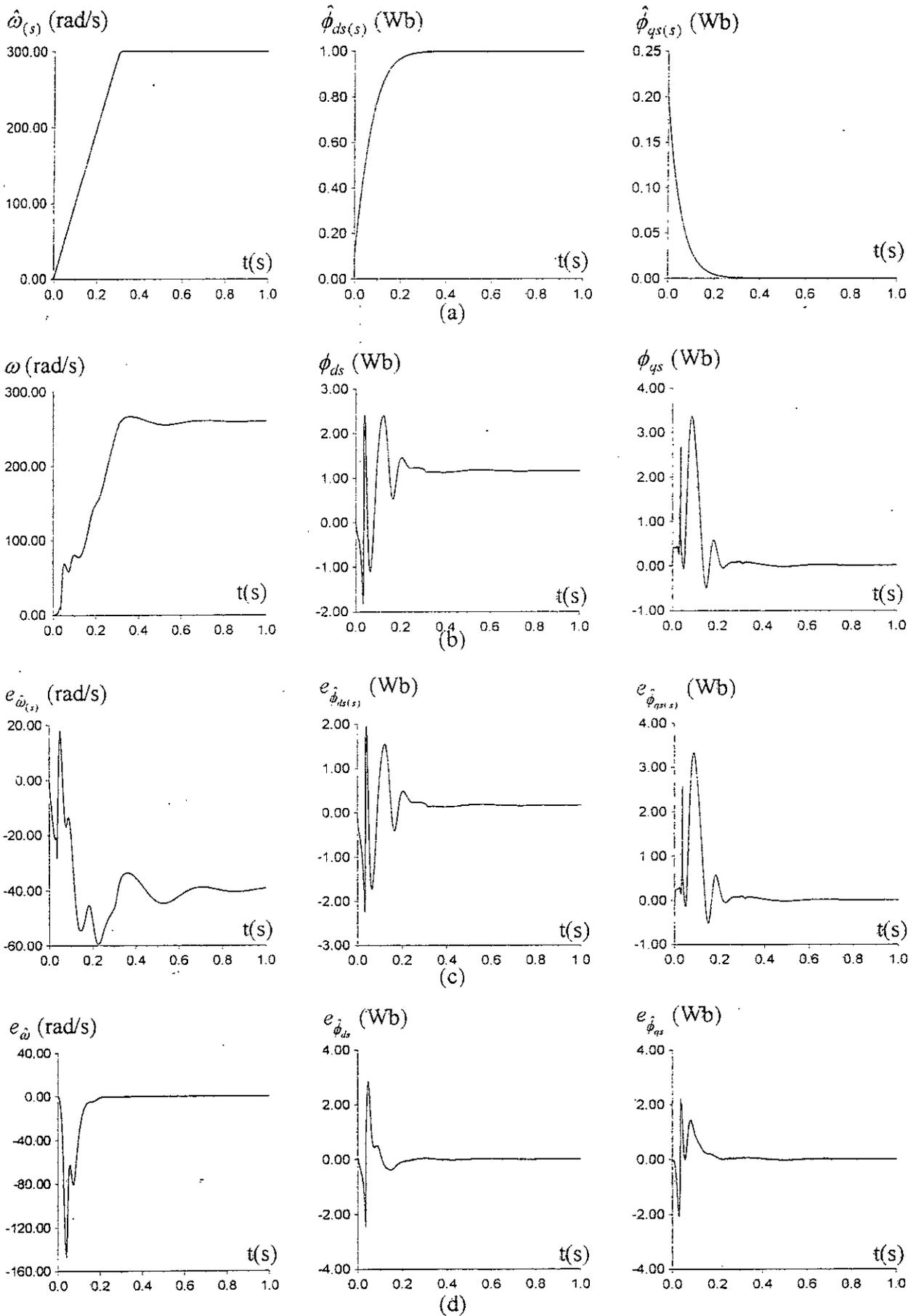


Figure 5. 10 : Réponses du contrôle multi-échelles de temps avec observateur de type modes glissants d'une machine asynchrone (avec augmentation de la valeur de R_r de 20%).

CONCLUSION GENERALE

ET PERSPECTIVES

L'objet de ce mémoire est l'analyse et le contrôle d'une classe spéciale de systèmes non-linéaires (modèles des machines à courant alternatif) dont la dynamique est régie par des équations différentielles affectées d'un petit paramètre parasite ε . De tels systèmes sont dits singulièrement perturbés. Notre objectif était d'appliquer certaines méthodes de simplification et de réduction de modèles, aux modèles mathématiques des machines à courant alternatif afin d'obtenir des modèles réduits qui représentent de manière satisfaisante le comportement dynamique de ces machines.

Ces méthodes de simplification qui ont toujours été utilisées de manière plus ou moins implicite en physique, sont maintenant exploitées explicitement en Electrotechnique. Généralement le choix des modes lents et rapides est fondé sur une connaissance physique du système. Cependant, l'étude des procédures et des justifications permettant l'écriture des équations sous forme standard singulièrement perturbée n'a relativement que peu d'attention. En effet, le problème est très important, car on sait que pour une même machine mais en des points de fonctionnement différents ou dans des repères différents, les décompositions sont différentes.

Les travaux présentés dans ce mémoire se résument essentiellement dans la mise sous forme standard singulièrement perturbée de modèles des machines à courant alternatif (décomposition multi-échelles de temps basée sur l'approche géométrique par les cercles de Gerschgorin et la technique des perturbations singulières) et la mise en œuvre des lois de commande multi-échelles de temps tenant compte des propriétés structurelles du système. Le développement de ces lois de commandes basées sur la technique des modes glissants est muni d'un observateur de type modes glissants pour la construction des états du système non accessibles par des mesures. Enfin, le but final à atteindre est l'implantation sur site des schémas de commande développés dans ce mémoire. Il est important également de rappeler que notre travail est structuré comme suit :

- **Mise sous forme standard singulièrement perturbée:**

Cette partie concerne le quatrième chapitre. L'obtention des modèles singulièrement perturbés est basée sur l'utilisation des cercles de Gerschgorin. Ensuite, nous avons employé la technique des perturbations singulières pour le découplage des dynamiques et le développement des modèles réduits. En fait, nous avons appuyé notre étude sur l'approche géométrique des cercles de Gerschgorin, en proposant une procédure

(transformations modales) pour faire évoluer les centres et la taille des rayons de ces cercles jusqu'à obtenir une séparation des dynamiques.

La séparation des modes et des dynamiques devient plus simple et plus efficace s'ils sont suffisamment éloignés. Cette conclusion est justifiée par les résultats obtenus sur un modèle de la machine asynchrone exprimé dans le référentiel (α, β) . Les modèles ainsi obtenus gardent un sens physique car ceux sont les variables originales qui y interviennent ou éventuellement des combinaisons simples de ces variables.

Sur un exemple d'un modèle de la machine asynchrone, nous avons montré l'efficacité de la combinaison de l'approche géométrique par les cercles de Gerschgorin et la technique des perturbations singulières et notamment pour les dynamiques éloignées (démarrage de la machine). Cette efficacité est justifiée par les résultats obtenus par simulation des modèles réduits en boucle ouverte. Cependant, l'inconvénient majeur de cette combinaison réside dans le choix des valeurs initiales qui ne sont jamais triviales. Dans ce cas, seule l'expérience de l'utilisateur peut fournir une idée pour surmonter ce problème.

- **Commande multi-échelles de temps :**

Cette partie a été consacrée à la synthèse de la commande composée (Commande à deux échelles de temps) des systèmes nonlinéaires singulièrement perturbés. Dans un premier temps, nous avons rappelé les techniques de commandes et d'analyses des systèmes singulièrement perturbés linéaires (Chapitre II). Nous avons principalement donné une classification des différents cas de commandes composées, leurs justifications, avantages et inconvénient, ainsi que les tendances futures de recherche dans ce domaine. Par la suite, nous avons donné une synthèse de la méthodologie de combinaison de la technique des perturbations singulières et la théorie du contrôle par modes glissants pour un problème de commande multiéchelles de temps (Chapitre V).

Enfin, nous avons présenté la commande multiéchelles de temps avec observateur de type modes glissants pour une machine asynchrone à partir de son modèle singulièrement perturbé. La synthèse de la commande et de l'observateur de type modes glissants est faite sur la base des modèles réduits et sur la base de l'état mesuré partiellement et de l'état estimé par l'observateur. Ce chapitre sur la commande multiéchelles de temps avec observateur de type modes glissants soulève beaucoup de problèmes. En effet, des simulations ont montré les possibilités potentielles de ce type de contrôle et surtout sous les incertitudes sur les paramètres des modèles obtenus par décomposition du modèle original. Cependant, l'inconvénient majeur de ce type de contrôle est sa grande sensibilité aux variations paramétriques.

A la vue des conclusions données dans chaque chapitre et face aux problèmes d'ordre pratique rencontrés lors des applications, on a constaté que la bonne connaissance des propriétés physiques et structurelles du système est très importante pour la réalisation de telle commande. Cette connaissance peut conduire à plusieurs méthodes différentes.

Pour un système donné, le choix d'une technique de contrôle est fonction de la structure physique du système et de l'objectif visé. Ainsi, on peut de façon générale résumer nos perspectives dans les points suivants :

- Améliorer la forme standard singulièrement perturbée des modèles des machines à courant alternatif avant de procéder à la décomposition multi-échelles de temps.
- Faire l'identification paramétrique des machines à courant alternatif sur la base des modèles réduits développés par la décomposition multi-échelles de temps.
- Traiter le problème de l'adaptation de la résistance rotorique.
- Tenir compte des contraintes physiques sur des systèmes électromécaniques : Saturation magnétique et échauffement.
- Traiter les problèmes de discrétisation des systèmes singulièrement perturbés.

BIBLIOGRAPHIE

- [*Ahm-82*] P. Ahmed Zaid, P. W. Sawyer, M. A. Pai and M. K. Sarioglu, « Reduced Order Modelling of Synchronous Machines using Singular Perturbation », IEEE Trans. Power. App. Syst., Vol. PAS-29, No.11, pp. 782-789, 1982.
- [*Ans-89*] A. Ansary and J. A. DE Abreu-Garcia, « A Simple Algorithm for Time-Scale Separation », 15th Ann. Conf. of IEEE-IES, 1989, pp. 445-448.
- [*Ben-96*] A. Benchaib, M. Tadjine and A. Rachid, "On DSP Based Real Time Control of an Induction Motors using Sliding Mode", IEEE Workshop on Variable Structure Systems, 1996, pp. 78-83.
- [*Bor-92*] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rottéla, et I. Zambettakis, « Modélisation et identification des processus », Tome II, Edition Technip-Paris, 1992.
- [*Car-95*] J. P. Caron et J. P. Hautier, « Modélisation et commande de la Machine asynchrone », Edition Technip-Paris, 1995.
- [*Che-80*] P. Chemouil and A. M. Wahdun, « Output Feedback Control of Systems with Slow and Fast Modes », J. Large Scale Syst., Vol. 1, pp. 257-263, 1980.
- [*Cho-76*] J. H. Chow, P. V. Kokotovic, « A Decomposition of Near-Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes », IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. 21, pp. 701-705, 1976.
- [*Cho-78*] J. H. Chow, « Pole Placement Design of Multiple Controllers Via Weak and Strong Controllability », Int. J. Syst. Sci., Vol. 9, pp. 129-138, 1978.
- [*Cor-93*] N. I. Coriess, F. Garofalo and L. Glielmo, « New Results on Composite Control of Singularly Perturbed Uncertain Linear Systems », Automatica, Vol. 29, pp. 387-400, 1993.
- [*Chr-95*] P. D. Christofides, A. R. Teel and P. Daoutidis, « Robust Semi-Global Output Tracking for Non-linear Singularly Perturbed Systems », Proc. of the 34th IEEE Conf. on Dec. and Cont. , 1995, pp. 2251-2256.
- [*Cor-92*] M. Corless and L. Glielmo, « Robustness of output Feedback for a Class of Singularly Perturbed Non-linear Systems », Proc. Of the 30th IEEE Conf. on Dec. And Cont., 1992, Vol. 2, pp. 1066-1071.
- [*DeL-95*] J. De-Leon, Jm. Alvares and R. Castro, « Sliding Mode Control and State estimation for Non-linear Singularly Perturbed Systems : Application to an Induction Electric Machine », Proc. of the 34th IEEE Conf. Control. App., New York, 1995, pp.998-1003.
- [*DeL-96*] J. De-Leon, R. Castro and Jm. Alvares, « Two-Time Sliding Mode Control and State Estimation for Non-linear Systems », Proc. of the 13th Triennial World Congress, IFAC, San Francisco, USA, 1996, pp. 265-270.
- [*Dje-93*] M. Djemai, J. Hernandez and J. P. Barbot, « Nonlinear Control with Flux Observer for a Singularly Perturbed Induction Motor », Proc. of the 32th IEEE Conf. on Dec. and Cont., USA, 1993, pp. 3391-3396.
- [*Dje-96*] M. Djemai, « Analyse et commande des systèmes non-linéaires régulièrement et singulièrement perturbés, en temps continu et sous échantillonnage », Thèse de Doctorat ès-science, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1996.

- [Dra-92] S. V. Drakunov and V. I. Utkin, « Sliding Mode Control in Dynamic Systems », *Int. J. Cont.*, Vol.55, No. 4, pp1029-1037, 1992.
- [Dra-95] S. Drakunov and V. Utkin, « Sliding Mode Observers : A Tutorial », *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, 1995, pp. 3376-3378.
- [Dur-72] E. Durand, « Solutions numériques des équations algébriques », Tome II, Masson, 1972.
- [Gue-92] H. Guesbaoui, « Contribution à la mise sous forme standard des systèmes à multiechelles de temps; Application à la modélisation des Machines à courant alternatif », Thèse de Doctorat ès-science, INPL, Nancy 1992.
- [Gue-96] H. Guesbaoui and C. Iung, « A Models Reduction of Multi-Time-Scale Discrete-Time Linear Systems using the Gerschgorin's Circle Technique », *Int. J. Modelling and simulation*, Vol.16, No.2, 1996.
- [Gra-95] G. Grammel, « Singularly Perturbed Control Systems: Recent Progress », *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, 1995, pp. 505-510.
- [Hec-91] B. S. Heck, « Sliding Mode Control for Singularly Perturbed Systems », *Int. J. Cont.*, Vol.53, No.4, pp. 985-1001, 1991.
- [Ioa-83] P. Ioannou and P. V. Kokotovic, « Decentralized Adaptive Control in the Presence of Multiparameter Singular Perturbations and Bounded Disturbances », *Proc. IEEE A. C. C.*, 1983, pp. 553-558.
- [Iun-81] C. Iung, « Contribution à la simplification et à la simulation des systèmes Complexes; Application à des procédés électromécaniques », Thèse de Doctorat ès-science, INPL, Nancy 1981.
- [Kha-79] H. K. Khalil, « Stabilization of Multiparameter Singularly Perturbed Systems », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol.24, pp. 790-796, 1979.
- [Kha-81] H. K. Khalil, « On the Robustness of Output Feedback Control Methods to Modelling Errors », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol.28, pp. 524-530, 1981.
- [Kha-96] H. K. Khalil, « Non-linear Systems », Mac Milan Ed., 1996.
- [Kok-76] P.V. Kokotovic, J. O'Malley and P. Sannuti, « Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory : An overview », *Automatica*, Vol. 12, pp. 123-132, 1976.
- [Kok-86] P.V. Kokotovic, H. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, New York, 1986.
- [Lit-85] B. Litkouhi and H. k. Khalil, « Multirate and Composite Control of Two-Time Scale Discrete-Time Systems », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 30, pp. 645-651, 1985.
- [Mez-98] A. Mezouar, O. Touhami and R. Ibtouen, « Décomposition des modèles de machines asynchrones par les cercles de Gerschgorin », *ICEL '98, USTO, Oran, Algérie*, 1998.
- [Nai-88] D. S. Naidu, « Singular Perturbation Methodology : in Control Systems », *IEE Control Engineering, Series. 34*, 1988.
- [O'Ma-77] R. E. O'Malley, « High-Gain Feedback Systems as Singular Perturbation Problems », *Proc. of J. A. C. C.*, 1977, pp. 1278-1285.
- [O'Re-79] J. O'Reilly, « Full Order Observers for a Class of Singularly Perturbed Linear Time-Varying Systems », *Int. J. Contr.*, Vol. 30, pp. 745-756. 1979,
- [Özg-77] Ü. Özgüner, « Decentralized Observers for a Large Scale System with Two-Time-Scales », *Proc. of J. A. C. C.*, 1977, pp. 1119-1125.

- [Phi-80] R. G. Phillips, « Reduced Order Modelling and Control of Two-Time Scale Discrete Systems », *Int. J. Cont.*, Vol. 38, pp. 225-234, 1980
- [Por-77] B. Porter, « Singular Perturbation Methods in the Design of State Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems », *Int. J. Cont.*, Vol. 26, pp. 583-895, 1977.
- [Ret-95] Z. Retchkiman and G. Silva, « Stability Analysis of Singularly Perturbed Systems via Vector Lyapunov Methods », *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, 1995, pp. 580-585.
- [Sab-84] A. Saberi and H. K. Khalil, « Quadratic-Type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 29, pp. 542-550, 1984.
- [Sak-82] V. R. Saksena and J. B. Cruz, « Stabilization of Singularly Perturbed Linear Time Invariant Systems using Low Order Observer », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 28, pp. 510-516, 1982.
- [Sak-84] V. R. Saksena, J. O'reilly and P. V. Kokotovic, « Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory : A Survey 1976-1983 », *Automatica*, Vol. 20, pp. 273-293, 1984.
- [San-79] N. R. Sandell, « Robust Stability of Systems with Applications to Singular Perturbation », *Automatica*, Vol. 15, pp. 467-479, 1979.
- [San-83] P. Sannuti, « A Direct Singular Perturbation Analysis of High-Gain and Cheap Control Problems », *Automatica*, Vol. 19, pp. 41-53, 1983.
- [Sha-89] P. M. Sharkey, « Composite Control of Non-linear Singularly Perturbed Systems : Meeting a Design Objective », *Int. J. of Cont.*, Vol. 50, No.6, pp. 2173-2186, 1989.
- [Sho-95] K. R. Shouse and D. G. Taylor, « Discrete-Time Observers for Singularly Perturbed Continuous-Time Systems », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 40, No.2, pp. 224-235, 1995.
- [Slo-91] J. J. Slotine and W. Li, « Applied Non-linear Control », Prentice-Hall, 1991.
- [Suz-76] M. Suzuki and M. Miura, « Stabilizing Feedback Controllers for Singularly Perturbed Linear Constant Systems », *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 21, pp. 123-129, 1976.
- [Syr-83] G. P. Syros and P. Sannuti, « Singular Perturbation Modelling of Continuous and Discrete Physical Systems », *Int. J. of Cont.*, Vol.37, No.5, pp. 1007-1022, 1983.
- [Tik-52] A. Tikhonov, « Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative », *Mat. SB.*, Vol.31, pp. 575-586, 1952.
- [Tou-94] O. Touhami, « Contribution à l'identification paramétrique des Machines électriques », Thèse de Doctorat d'état ès-science, ENP, ALGER, 1994.
- [Tou-98] O. Touhami, R. Ibtouen and A. Mezouar, « On the Application of Gerschgorin's Circles Method to the Three-Phase Induction Machine », Soumis à Archives of Electrical Engineering, Polytechnika, Poland.
- [Tou-99] O. Touhami, A. Mezouar and R. Ibtouen, « Sliding Mode control and Flux Observer for a Singularly Perturbed Model of an Induction Machine », Soumis IFAC/ IBRA-BIRA, Symp. On Power Plants & Power Systems Control 2000, Brussels, May 24-27.
- [Utk-77] V. I. Utkin, « Variable Structure Systems with Sliding Mode », *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, Vol. 26, No.2, pp.212-222, 1977.
- [Utk-93] V. I. Utkin, « Sliding Mode in Control Design Principles and Applications to Electric Drives », *IEEE Trans. on Indus. Elec.*, Vol.40, No.1, pp.23-36, 1993.

ANNEXE A

THEORIE DES PERTURBATIONS ET METHODE DE LA MOYENNE

A. 1. THEORIE DES PERTURBATIONS

On considère le système d'équation d'état suivant :

$$\dot{X} = f(X, t, \varepsilon) \quad (\text{A.1})$$

avec $f: D \times [t_0, t_1] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathfrak{R}^n$, suffisamment lisse (continue et dérivable).

Le problème consiste à résoudre l'équation (A.1) avec la condition d'état initiale :

$$X(t_0) = \eta(\varepsilon) \quad (\text{A.2})$$

et on accepte que l'état initial dépende lissement du paramètre ε . Par conséquent, la solution de (A.1)-(A.2) sera dépendante du paramètre ε .

Le but de cette méthode est d'exploiter l'ordre petit du paramètre parasite ε pour construire une approximation de la solution exacte. Cette solution sera valable pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. La simple approximation avec cet ordre de paramètre résultera en posant $\varepsilon = 0$ dans l'équation (A.1) pour obtenir un modèle moins complexe (modèle non perturbé) :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, t, 0) \\ X(t_0) &= \eta(0) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Supposant que ce problème a une solution unique $X_0(t)$ (indice zéro attribué pour la valeur $\varepsilon = 0$), définie sur $[t_0, t_1]$ et $X_0(t) \in D$ pour toute valeur de $t \in [t_0, t_1]$. De la continuité de la solution par rapport aux états initiaux et du paramètre perturbateur ε , le problème (A.1)-(A.2) a une solution unique $X(t, \varepsilon)$ définie sur $[t_0, t_1]$ pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit [Kha-96]. Approximer $X(t, \varepsilon)$ par $X_0(t)$ peut être justifié en utilisant le théorème 2.5 de [Kha-96], et donc on peut écrire :

$$\|X(t, \varepsilon) - X_0(t)\| \leq k|\varepsilon|, \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (\text{A.4})$$

pour $k > 0$ et $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$.

Si on arrive à préciser cette limite de l'erreur d'approximation, on voit que cette erreur est de l'ordre $O(\varepsilon)$, par conséquent, on écrit :

$$X(t, \varepsilon) - X_0(t) = O(\varepsilon)$$

Cet ordre est très utilisé dans l'analyse des méthodes approximatives, et il est défini comme suit :

Définition :

$\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ s'il existe deux constantes positives k et c , tel que :

$$|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)| \quad \forall |\varepsilon| < c$$

Sachant que l'erreur $O(\varepsilon)$ signifie que la norme de l'erreur est inférieure à $k|\varepsilon|$ pour k positif et indépendant de ε , donc, ceci garanti que $k|\varepsilon|$ décroît lorsque ε décroît. Par conséquent, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, l'erreur sera petite..

Pour obtenir une approximation d'ordre élevé de $X(t, \varepsilon)$, on procède au développement fini en série de Taylor de $X(t, \varepsilon)$, soit :

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \sum_{k=1}^{N-1} X_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N X_R(t, \varepsilon) \quad (\text{A.5})$$

où $X_R(t, \varepsilon)$ est le reste de ce développement. Il doit être fini et borné sur D pour $t \in [t_0, t_1]$. La continuité de $f(X, t, \varepsilon)$ sur l'état initial $\eta(\varepsilon)$ garantie l'existence d'un développement fini en série de Taylor pour $\eta(\varepsilon)$ qui est :

$$\eta(\varepsilon) = \eta(0) + \sum_{k=1}^{N-1} \eta_k \varepsilon^k + \varepsilon^N \eta_R(\varepsilon)$$

avec:

$$X_0(t_0) = \eta(0), \quad \eta_k(t_0) = \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

La substitution de (A.5) dans (A.1) donne :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N \dot{X}_R(t, \varepsilon) = f(X(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} h(t, \varepsilon) \quad (\text{A.6})$$

et $h(t, \varepsilon)$ peut se mettre sous la forme :

$$h(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N h_R(t, \varepsilon)$$

Où les coefficients de la série de Taylor de $h(t, \varepsilon)$ sont eux même fonction des coefficients de la série de Taylor de $X(t, \varepsilon)$. En calculant ces coefficients (de $h(t, \varepsilon)$), on peut dériver les équations qui doivent satisfaire X_0, X_1 et ainsi de suite ($X_k, k = 0, 1, 2, \dots$). Avant de faire ça, on va générer les coefficients du développement en série de Taylor de $h(t, \varepsilon)$.

Le terme d'ordre zéro, $h_0(t)$ est donné par :

$$h_0(t) = f(X_0(t), t, 0)$$

En utilisant (A.6), on peut déterminer $X_0(t)$ qui satisfait :

$$\dot{X}_0 = f(X_0, t, 0), \quad X_0(t_0) = \eta(0), \quad (\text{A.7})$$

et qui est le problème non perturbé (A.3).

Le terme d'ordre un, $h_1(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial t}(X(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \left\{ \frac{\partial f}{\partial X}(X(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}(X_0(t), t, 0) X_1(t) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0(t), t, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En comparant les coefficients de ε dans (A.6)-(A.8), on trouve $X_1(t)$ qui satisfait :

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial X}(X_0(t), t, 0) X_1(t) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0(t), t, 0), \quad X_1(t_0) = \eta_1 \quad (\text{A.9})$$

ou:

$$\dot{X}_1 = A(t)X_1(t) + g_1(X_0(t), t), \quad X_1(t_0) = \eta_1$$

avec:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial X}(X_0(t), t, 0)$$

$$g_1(X_0(t), t) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0(t), t, 0)$$

Ce processus peut continuer pour dériver les équations satisfaisant X_2, X_3 , et ainsi de suite. Dans plusieurs applications d'engineering, de la méthode des perturbations, des approximations adéquates s'arrêtent à $N = 2$ ou $N = 3$, et l'idée de poser $\varepsilon = 0$, simplifie le système d'équations considérablement.

A. 2. METHODE DE LA MOYENNE

La méthode de la moyenne s'applique aux systèmes d'équations de la forme :

$$\dot{X} = \mathcal{E}f(X, t, \varepsilon) \quad (\text{A.10})$$

où ε est toujours un petit paramètre, mais cette fois positif et $f(X, t, \varepsilon)$ est fonction périodique du temps, de période T ; soit:

$$f(X, t+T, \varepsilon) = f(X, t, \varepsilon), \quad \forall (X, t, \varepsilon) \in D \times [0, \infty) \times [0, \varepsilon_0]$$

pour un domaine $D \subset \mathfrak{R}^n$.

Cette méthode approxime la solution de ce système par une solution d'un système moyen (Averaged system), obtenu en faisant la moyenne de $f(X, t, \varepsilon)$ à $\varepsilon = 0$. On associe avec le système (A.10), le système autonome moyen :

$$\dot{X} = \varepsilon f_{av}(X) \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$f_{av}(X) = \frac{1}{T} \int_0^T f(X, \tau, 0) d\tau$$

Le problème de base de la méthode de la moyenne est de déterminer dans quel sens le comportement du système autonome (A.11) approxime celui du système complexe non autonome (A.10). Pour ce faire, on va procéder à un changement de variables de telle façon que le système non autonome (A.10) soit représenté par un système perturbé à partir du système moyen (A.11), soit :

$$u(X, t) = \int_0^t h(X, \tau) d\tau \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$h(X, t) = f(X, t, 0) - f_{av}(X)$$

Puisque $h(X, t)$ est une fonction périodique du temps, la fonction $u(X, t)$ est aussi périodique et de même période T . Cependant, $u(X, t)$ est bornée pour toute paire $(X, t) \in D \times [0, \infty)$. Donc $\partial u / \partial t$ et $\partial u / \partial X$ sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= h(X, t) \\ \frac{\partial u}{\partial X} &= \int_0^t \frac{\partial h}{\partial X}(X, \tau) d\tau \end{aligned}$$

et sont de même période T et bornées sur $D \times [0, \infty)$.

Maintenant, on considère le changement de variables suivant :

$$X = Y + \varepsilon u(Y, t) \quad (\text{A.13})$$

et par conséquent

$$\dot{X} = \dot{Y} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(Y, t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial Y}(Y, t) \dot{Y} \quad (\text{A.14})$$

En substituant (A.10) dans (A.14), il résulte :

$$\begin{aligned} \left[I + \frac{\partial u}{\partial Y}(\dot{Y}, t) \right] \dot{Y} &= \varepsilon f(Y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(Y, t) \\ &= \varepsilon f(Y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - \varepsilon f(Y, t, 0) + \varepsilon f_{av}(Y) \\ &\stackrel{def}{=} \varepsilon f_{av}(Y) + \varepsilon p(Y, t, \varepsilon) \end{aligned}$$

où :

$$p(Y, t, \varepsilon) = [f(Y, t, \varepsilon) - f(Y, t, 0)] + [f(Y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - f(Y, t, \varepsilon)]$$

Dans [Kha-96], il est montré que la matrice $[I + \varepsilon \partial u / \partial Y]$ est non singulière pour ε suffisamment petit, et que :

$$\left[I + \frac{\partial u}{\partial Y}(Y, t) \right]^{-1} = I + O(\varepsilon), \text{ sur } D \times [0, t].$$

Par conséquent, l'équation d'état en Y s'écrit :

$$\dot{Y} = \varepsilon f_{av}(Y) + \varepsilon^2 q(Y, t, \varepsilon) \quad (\text{A.15})$$

où $q(Y, t, \varepsilon)$ est une fonction périodique du temps de même période T et elle est bornée pour toutes valeurs de $(X, t) \in D \times [0, \infty)$.

Cette équation est de la forme perturbée et peut être approximée par la méthode des perturbations présentée en section (A.1), et pour différents ordres d'approximation. La solution approximative $\tilde{X}(t, \varepsilon)$ sera déduite à partir de la solution de (A.15) et en procédant au changement de variables (A.13).

ANNEXE B

RAPPELS SUR LA MODELISATION DES MACHINES A COURANT ALTERNATIF

B. 1. TRANSFORMATION DE PARK :

Un changement de variables simple qui exprime une transformation des variables triphasées des éléments d'un circuit stationnaire à un système de référence arbitraire, peut être schématisé par la figure (B.1).

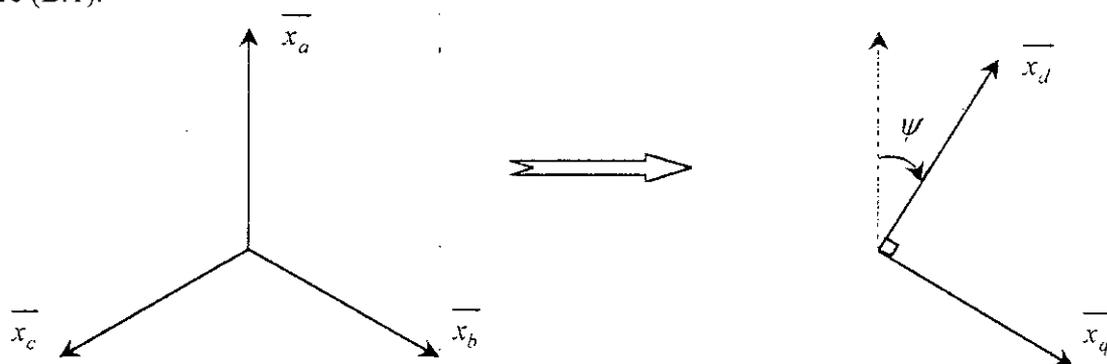


Figure B.1 : Transformation système triphasé – système diphasé d'un circuit stationnaire.

En écriture matricielle, on peut écrire :

$$[X_{dqh}] = [P_0(\psi)][X_{abc}] \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$[X_{dqh}]^T = [x_d \quad x_q \quad x_h]$$

$$[X_{abc}]^T = [x_a \quad x_b \quad x_c]$$

$$[P_0(\psi)] = k_0 \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \cos(\psi - 2\pi/3) & \cos(\psi - 4\pi/3) \\ -\sin(\psi) & -\sin(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi - 4\pi/3) \\ k_1 & k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \psi(0)$$

où ξ est une variable fictive d'intégration.

Pour que cette transformation soit orthogonale, c'est à dire une transformation qui conserve la puissance, on doit prendre $k_0 = \sqrt{2/3}$ et $k_1 = 1/\sqrt{2}$, et donc la transformation finale dite de PARK sera :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = [P(\psi)] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

où :

$$[P(\psi)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \cos(\psi - 2\pi/3) & \cos(\psi - 4\pi/3) \\ -\sin(\psi) & -\sin(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi - 4\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

Puisque cette transformation est orthogonale, la matrice inverse est égale à la transposée :

$$[P(\psi)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\psi - 4\pi/3) & -\sin(\psi - 4\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Dans les équations ci-dessus, X peut présente un système de tensions, de courants, de flux ou de charges. Le déplacement angulaire ψ doit être continu. Cependant, la vitesse angulaire associée au changement de variables n'est pas spécifiée.

B. 2. TRANSFORMATION DE CLARKE

Lorsque la valeur zéro est attribuée à l'angle de rotation ψ , la transformation de PARK ainsi particularisée porte le nom de transformation de CLARKE, $[C]$, et les axes (d, q) sont habituellement désignés par (α, β) . Le passage aux axes (d, q) s'effectue tout simplement au moyen de la matrice de rotation $[\mathfrak{R}(\psi)]$ de sorte que :

$$[P(\psi)] = [\mathfrak{R}(\psi)][C] \quad (B.5)$$

avec :

$$[X_{\alpha\beta h}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot [X_{abc}] \quad (B.6)$$

ou:

$$[X_{\alpha\beta h}] = [C][X_{abc}]$$

et

$$[X_{dqh}] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [X_{\alpha\beta h}] \quad (\text{B.7})$$

ou

$$[X_{dqh}] = [\mathcal{R}(\psi)] [X_{\alpha\beta h}]$$

où X représente une grandeur électrique ou magnétique.

Puisque la composante homopolaire est nulle, on pose :

$$[X_{dq}] = [R(\psi)] [X_{\alpha\beta}] \quad (\text{B.8})$$

avec :

$$[R(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

La matrice de rotation $[R(\psi)]$ possède les propriétés suivantes :

$$[R(\psi)]^{-1} = [R(-\psi)]$$

$$[R(\psi_1)] [R(\psi_2)] = [R(\psi_1 + \psi_2)]$$

$$\frac{d}{dt} [R(\psi)] = \frac{d\psi}{dt} \left[R\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

J_2 est une matrice de rotation de 90° .

B. 3. REPRESENTATION D'ETAT DE CLARKE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

En utilisant le modèle général de la machine asynchrone ainsi que les relations entre flux et courants, nous obtenons la représentation d'état (B.10) de la machine asynchrone avec les composante de CLARKE, qui sera utilisée par la suite, soit:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 & \frac{\beta_r}{\sigma \cdot T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot T_r \cdot \beta_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p^2}{J} \frac{M}{\sigma L_s L_r} \phi_{s\alpha\beta}^T R(-\theta) J_2 \phi_{r\alpha\beta} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (\text{B.11})$$

avec : $\beta_r = \frac{M}{L_r}$

Diverses manipulations des équations fondamentales de la machine procèdent d'un choix d'élimination de certaines variables des équations des flux, conduisent à l'établissement d'autres expressions du modèle d'état de la machine. On trouve ainsi :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sigma L_s I_{s\alpha\beta} \\ \sigma L_r I_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 + \dot{\theta} \frac{M^2}{\sigma L_s L_r} J_2 & \frac{B_r}{\sigma_s} \left[\dot{R}(-\theta) - \frac{1}{T_r} R(-\theta) \right] \\ \frac{\beta B_s}{\sigma} \left[\dot{R}(-\theta) - \frac{1}{T_s} R(-\theta) \right] & -\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 - \dot{\theta} \frac{M^2}{\sigma L_s L_r} J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma L_s I_{s\alpha\beta} \\ \sigma L_r I_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 & -\beta_r R(-\theta) \\ \beta_r R(\theta) & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha\beta s} \\ v_{\alpha\beta r} \end{bmatrix} \quad (B.12)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p^2}{J} M I_{s\alpha\beta}^T R(-\theta) J_2 I_{r\alpha\beta} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (B.13)$$

avec : $\beta_s = \frac{M}{L_s}$

B. 4. REPRESENTATION D'ETAT DE PARK DE LA MACHINE ASYNCHRONE

Description

Pour une machine asynchrone triphasée alimentée en tension, les tensions statoriques (v_{ds}, v_{qs}) et la vitesse du champ tournant (ω_{syn}) sont considérées comme variables de commande, le couple résistant (C_r) comme perturbation. Nous choisissons le référentiel lié aux champ tournant, et le modèle de la machine est représenté par les équations (B.30) à (B.35) en supposant $v_{dr} = 0$ et $v_{qr} = 0$.

Equations d'état

Nous pouvons choisir les courants statoriques, les courants rotoriques et la vitesse électrique ($i_{ds}, i_{qs}, i_{dr}, i_{qr}, \omega$) ou les flux statoriques, les flux rotoriques et la vitesse électrique ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, \phi_{dr}, \phi_{qr}, \omega$) ou les flux statoriques, les courants statoriques et la vitesse électrique ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, i_{ds}, i_{qs}, \omega$), ou les flux rotoriques, les courants statoriques et la vitesse électrique ($\phi_{dr}, \phi_{qr}, i_{ds}, i_{qs}, \omega$) comme variables d'état.

1. Considérons tout d'abord les courants statoriques, les courants rotoriques et la vitesse électrique ($i_{ds}, i_{qs}, i_{dr}, i_{qr}, \omega$) comme variables d'état, après réarrangement des équations d'état de la machine, nous obtenons :

- Equations électriques :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega & \frac{\beta_s}{\sigma T_r} & \frac{\beta_r \omega}{\sigma} \\ -(\omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_s} & \frac{\beta_s \omega}{\sigma} & \frac{\beta_r}{\sigma T_r} \\ \frac{\beta_r}{\sigma T_s} & -\frac{\beta_r \omega}{\sigma} & -\frac{1}{\sigma T_r} & \omega_s - \frac{1}{\sigma} \omega \\ \frac{\beta_r \omega}{\sigma} & \frac{\beta_r}{\sigma T_s} & -(\omega_s - \frac{1}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\beta_r & 0 \\ 0 & -\beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

- Equation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{p^2 M}{J} i_{qr} & \frac{p^2 M}{J} i_{dr} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} [C_r] \quad (\text{B.15})$$

2. Considérons ensuite les flux statiques, les flux rétorques et la vitesse électrique $(\phi_{ds}, \phi_{qs}, \phi_{dr}, \phi_{qr}, \omega)$ comme variables d'état, après arrangement des équations (B.14) et (B.15), nous obtenons :

- Equations électriques :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega_s & \frac{\beta_s}{\sigma L_r T_s} & 0 \\ -\omega_s & -\frac{1}{\sigma T_s} & 0 & \frac{\beta_r}{\sigma T_s} \\ \frac{\beta_s}{\sigma T_r} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} & \omega_s - \omega \\ 0 & \frac{\beta_s}{\sigma T_r} & -(\omega_s - \omega) & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

- Equation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{p^2 \beta_s \beta_r}{J \sigma M} \phi_{qr} & \frac{p^2 \beta_s \beta_r}{J \sigma M} \phi_{dr} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} [C_r] \quad (\text{B.17})$$

B. 5. REPRESENTATION D'ETAT DE PARK DE LA MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE ALIMENTEE EN TENSION

1. Considérons les flux statiques le flux rotorique et la vitesse de rotation comme variables d'état, les équations d'état seront:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_s} & \omega & -\frac{M_{sr}R_s}{\sigma L_s L_r} \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ -\frac{M_{sr}R_r}{\sigma L_s L_r} & 0 & -\frac{R_r}{\sigma L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} C_{em} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (\text{B.23})$$

avec:

$$C_{em} = \frac{pM_{sr}}{\sigma L_s L_r} \phi_{qs} \left(-\frac{M_{sr}}{L_s} \phi_{ds} + \phi_{dr} \right)$$

2. Considérons ensuite les courants statoriques, le courant rotorique et la vitesse de rotation comme variables d'état, après réarrangement des équations, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_s} & \frac{\omega}{\sigma} & \frac{M_{sr}R_r}{\sigma L_s L_r} \\ -\omega & -\frac{R_s}{L_s} & \frac{M_{sr}}{L_s} \omega \\ \frac{M_{sr}R_s}{\sigma L_s L_r} & -\frac{M_{sr}}{\sigma L_r} \omega & -\frac{R_r}{\sigma L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -\frac{M_{sr}}{\sigma L_s L_r} \\ 0 & \frac{1}{L_s} & 0 \\ -\frac{M_{sr}}{\sigma L_s L_r} & 0 & \frac{1}{\sigma L_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p^2 M_{sr}}{J} i_{qs} i_{dr} - \frac{f}{J} \omega - \frac{p}{J} C_r \quad (\text{B.25})$$

avec

$$C_{em} = pM_{sr} i_{qs} i_{dr}$$

Les équations d'état (B.24) régissant le système à régler possèdent trois grandeurs d'entrée (v_{ds} , v_{qs} et v_{dr}). Dans le cas où les tensions statoriques sont sinusoïdales, et la source d'excitation est constante, le système devient monovisible (δ grandeur de commande).

ANNEXE C

CONTROLE PAR MODES DE GLISSEMENT

C. 1. INTRODUCTION

Le contrôle par modes de glissement est un mode de fonctionnement particulier pour les systèmes à structure variable. Ce type de contrôle a été introduit d'abord par Utkin [Utk-77]. Par la suite, ses travaux ont été repris, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour des applications, et ceci à partir des travaux théoriques du mathématicien A. F. Filipov.

Le contrôle par modes de glissement possède des avantages incontestables, telles que, la robustesse vis-à-vis les variations des paramètres. Cependant, l'utilisation de cette méthode de commande a été longtemps limitée par les oscillations causées par le phénomène de Chattering qui nécessite une forte oscillation de l'organe de commande.

Ce n'est qu'à partir des années quatre-vingt que cette technique de commande est devenue attractive, elle est considérée comme une des approches la plus simple pour le contrôle des systèmes ayant un modèle imprécis (imprécision due aux problèmes de modélisation, de simplification et de réduction d'ordre du modèle) [Slo-91], [Utk-93], [DeL-95, 96].

C. 1.1. Systèmes à structure variable

Le terme «systèmes à structure variable» apparaît à cause de la structure particulière du système ou du régulateur utilisé, où cette structure change d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures.

Définition: Un système est dit à structure variable s'il admet une représentation par des équations différentielles du type :

$$\dot{X} = \begin{cases} f_1(X) & \text{si la condition 1 est vérifiée} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(X) & \text{si la condition n est vérifiée} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où les fonctions f_i appartiennent à un ensemble de sous systèmes de classe C^1 au moins, et appelées structures. En effet, il y'a commutation entre ces différentes structures suivant la condition vérifiée.

L'étude de tels systèmes présente un grand intérêt, notamment en physique, en mécanique et en électricité. Ce La grâce aux propriétés de stabilité que peut avoir le système global indépendamment de celles de chacun de sous système $f_i(X)$ pris seul.

Les circuits de conversion de puissance constituent un exemple pratique d'un système à structure variable. En effet, pour chaque position de l'interrupteur, le système est gouverné par un système d'équations différentielles.

C. 1. 2. Théorie des modes glissants

Les systèmes à structure variable sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation appropriées. Ce choix permettra à tout instant de commuter entre ces structures, en combinant les propriétés utilisées de chacune de ces structures afin d'avoir un comportement désiré du système global.

En effet, comme l'avons dit précédemment, la commande par modes glissants est un cas particulier de la commande à structure variable appliquée à des systèmes décrits par l'équation suivantes (on se limite pour le cas $n = 2$) :

$$\dot{X} = f = \begin{cases} f^+(X, U^+) & \text{si } S(X, t) > 0 \\ f^-(X, U^-) & \text{si } S(X, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Les champs de vecteurs f^+ et f^- sont définis par:

$$U = \begin{cases} U^+ & \text{si } S(X, t) > 0 \\ U^- & \text{si } S(X, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

où $S(X, t)$ est la fonction de commutation, et

$$S_0 = \{X(t) \mid S(X, t) = 0\} \quad (\text{C.4})$$

est la surface de commutation.

Ici, on a choisi une surface de glissement (Variété invariante sur laquelle on commute); C'est la surface sur laquelle le système évolue comme on le désire. En général la variété de commutation est de dimension « n » moins le nombre de fonction de commutation dont on dispose (i.e. dans le cas de la commande, c'est le nombre d'entrées indépendantes).

Les avantages de la commande par mode de glissement sont importants, bien connus et appréciés depuis le début des années quatre-vingt [Slo-91]. Ce type de commande permet une très haute précision, une bonne stabilité, la simplicité de conception, un temps de repense très faible et notamment la robustesse. Ce ci lui permet d'être particulièrement adapté au traitement des systèmes dont les modèles sont imprécis. Cette imprécision peut être due à deux raisons:

- ❖ Imprécision et variation de paramètres: Problème d'identification.
- ❖ Simplification du modèle dynamique du système: Problème de modélisation.

Il faut signaler aussi la simplicité de la mise en œuvre, l'adaptation, aussi bien aux processus linéaires qu'aux non linéaires. Ce type de commande peut être également utilisé d'une manière tout a fait analogue; non seulement en régulation, mais aussi dans les problème de poursuite de modèle [Slo-91].

C. 2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR MODES DE GLISSEMENT

La conception des contrôleurs par les modes glissants prend en compte des problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique. La conception de cette méthode de commande peut être divisée en trois étapes principales, à savoir:

1. Choix de surfaces,
2. Etablissement des conditions d'existence de convergence,
3. Détermination de la loi de commande.

C. 2. 1. Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement concerne le nombre nécessaire ainsi que la forme, en fonction de l'application et de l'objectif visé. En général, pour un système défini par l'équation d'état suivant :

$$\dot{X}(t) = A(X, t) + B(t)U(t), \quad (C.5)$$

Il faut choisir «*m*» surfaces de glissement pour un vecteur U de dimension «*m*». En ce qui concerne la forme de la surface, deux possibilités se présentent; soit dans le plan de phase ou dans l'espace d'état. Dans ce dernier cas, on trouve la méthode dite «loi de commutation par contre réaction d'état ». Celle ci utilise les concepts du réglage par contre réaction d'état pour synthétiser la loi de commutation.

Dans le cas du traitement dans l'espace de phase, la fonction de commutation est une fonction scalaire, telle que la variable à régler glisse sur cette surface pour atteindre l'origine du plan de phase (i.e. convergence de la variable d'état vers sa valeur désirée). Ainsi, la surface $S(X)$ représente le comportement dynamique désiré du système. J. J. Slotine [Slo-91] nous propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée:

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x) \quad (C.6)$$

avec :

$e(x)$: l'écart de la variable à régler; $e(x) = x^* - x$;

λ_x : une constante positive qui interprète la bande passante du contrôle désiré ;

r : degré relatif, égale au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

pour $r = 1$, $S(x) = e(x)$;

pour $r = 2$, $S(x) = \lambda_x e(x) + \dot{e}(x)$;

pour $r = 3$, $S(x) = \lambda_x^2 e(x) + 2\lambda_x \dot{e}(x) + \ddot{e}(x)$.

$S(x) = 0$ est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est $e(x) = 0$, pour un choix convenable du gain λ_x .

C. 2. 1. Conditions de convergence

Les conditions de convergence permettent aux dynamiques du système de converger vers les surfaces de glissement. Nous retenons de la littérature deux conditions, celles-ci correspondent au mode de convergence de l'état de système.

Fonction directe de commutation

C'est la première condition de convergence, elle est proposée par Utkin [Utk-77]. Elle s'exprime sous la forme:

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (\text{C.7})$$

Dans cette condition, il faut introduire pour $S(x)$ et sa dérivée $\dot{S}(x)$, les valeurs justes à gauches et à droite de la droite de commutation.

Fonction de Lyapunov

Il s'agit de formuler une fonction scalaire positive $V(x) > 0$ pour les variables d'état du système, et de choisir la loi de commutation qui fera décroître cette fonction (i.e. $\dot{V}(x) < 0$). Cette fonction est généralement utilisée pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires.

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{C.8})$$

et sa dérivée par :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x)$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. Ceci est vérifié si :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

C. 2. 3. Calcul de la commande

Une fois la surface de glissement est choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour atterrir la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant la condition d'existence des modes glissants.

Une des hypothèses essentielles dans la conception des systèmes à structure variable contrôlés par les modes glissants est que la commande doit commuter entre U_{Max} et U_{Min} instantanément (fréquence infinie), en fonction du signe de glissement (Figure C. 2). Dans ce cas, des oscillations de très haute fréquence appelées « *broutement* » ou « *Chattering* » apparaissent dans le mode de glissement.

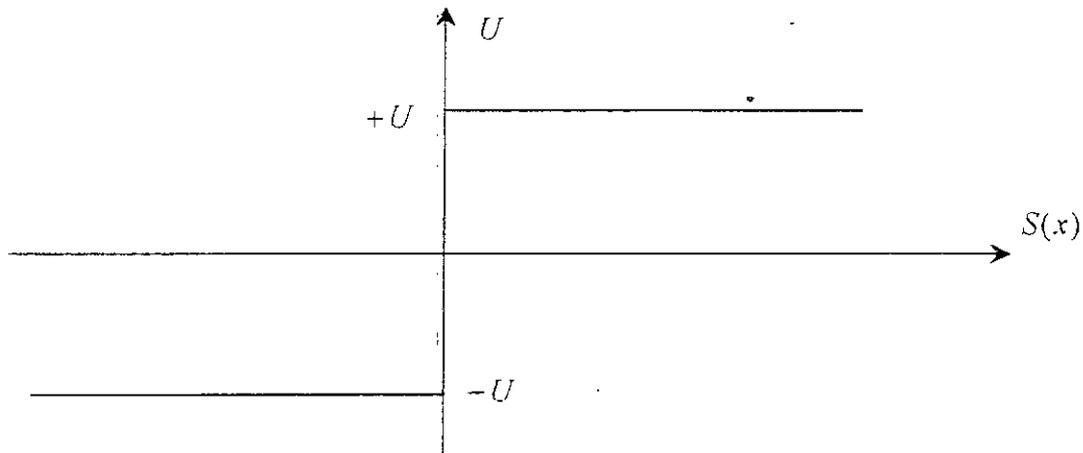


Figure C. 1 : Commande appliquée aux systèmes à structure variable.

C. 2. 4. Définition des grandeurs de commande

Comme nous l'avons vu précédemment, la surface de glissement se détermine sur la base du système et des performances désirées, indépendamment de la commande, et l'obtention du régime glissant supposerait la commande discontinue. De ce fait, si cette commande est indispensable, elle n'empêche nullement, au contraire, qu'une partie continue lui soit adjointe pour diminuer l'amplitude de la discontinuité.

Par conséquent, la structure d'un contrôleur comporte deux parties; une première concernant la linéarisation exacte et une deuxième stabilisante. Cette dernière est très importante dans la technique de commande par modes de glissement, car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et de rejeter les perturbations extérieures.

Nous posons donc :

$$U(t) = U_{eq}(t) + U_N \quad (C.9)$$

$U_{eq}(t)$ correspond à la commande équivalente proposée par Filipov et Utkin. Cette commande est considérée comme la plus directe et la plus simple. Elle est calculée en reconnaissant que le comportement du système durant le mode de glissement est décrit par :

$$\dot{S}(x) = 0$$

La commande équivalente peut être interprétée comme la valeur moyenne modulée en largeur (grandeur continue) que prend la commande lors de la commutation rapide entre U_{Max} et U_{Min} (Figure C. 2).

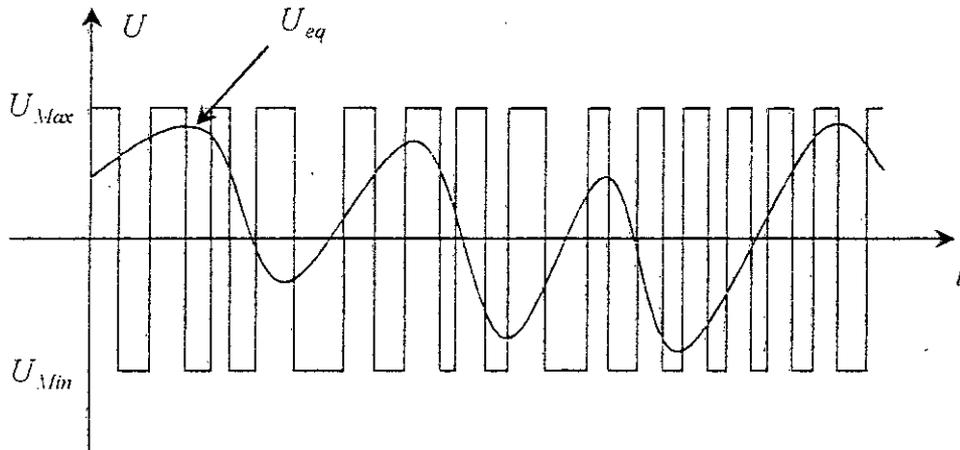


Figure C. 2 : la valeur continue U_{eq} prise par la commande lors de la commutation entre

La commande U_N est déterminée pour garantir l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface de glissement et satisfaire la condition de convergence :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

En d'autre terme, elle définit le comportement dynamique du système durant le mode de convergence.

C. 3. APPLICATION DE LA COMMANDE DANS L'ESPACE D'ETAT

Nous considérons un système défini dans l'espace d'état par l'équation (C.10). Nous s'occupons du calcul de la commande équivalente, ensuite de la commande attractive. Soit :

$$\dot{X}(t) = A(X, t) + B(t)U(t) \quad (C.10)$$

Le vecteur U est composé de deux grandeurs U_{eq} et U_N , soit :

$$U(t) = U_{eq}(t) + U_N \quad (C.11)$$

Nous nous intéressons à déterminer les expressions analytiques des ces grandeurs. Nous avons :

$$\dot{S}(X) = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial X} \{A(X, t) + B(t)U_{eq}(t)\} + \frac{\partial S}{\partial X} \{B(t)U_N\} \quad (C.12)$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la dérivée de la surface est nulle (Parce que la surface est égale à zéro). Ainsi, nous obtenons :

$$U_{eq}(t) = \left\{ \frac{\partial S}{\partial X} B(t) \right\}^{-1} \left\{ \frac{\partial S}{\partial X} A(X, t) \right\} \quad (C.13)$$

$$U_N = 0$$

Durant le mode de convergence, en remplaçant le terme U_{eq} par sa valeur (C.13) dans l'équation (C.12). Donc, nous obtenons une nouvelle expression de la dérivée de la surface, soit :

$$\dot{S}(X) = \frac{\partial S}{\partial X} \{B(t)U_V\}$$

Le problème revient à trouver U_V tel que :

$$S(X)\dot{S}(X) = S(X) \frac{\partial S}{\partial X} \{B(t)U_V\} < 0 \quad (C.14)$$

La solution la plus simple est de choisir U_V sous la forme de relais (Figure C.6). Dans ce cas, la commande s'écrit comme suit :

$$U_V = K \cdot \text{sign}(S(X)) \quad (C.15)$$

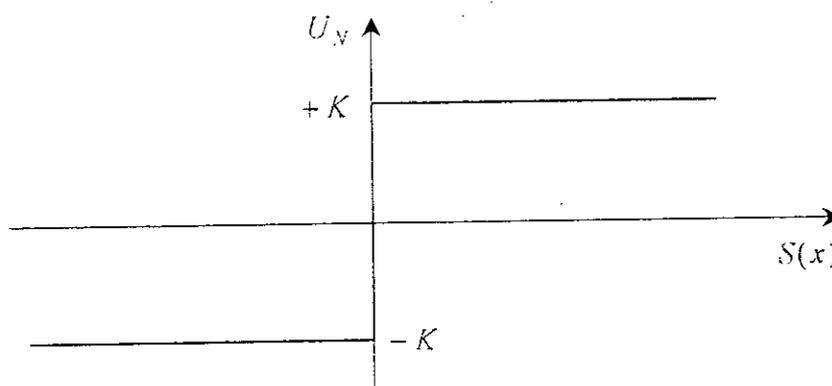


Figure C. 3 : Définition de la commande « sign ».

En remplaçant l'expression (C.15) dans (C.14), on obtient :

$$S(X)\dot{S}(X) = \frac{\partial S}{\partial X} B(t)K|S(X)| < 0 \quad (C.16)$$

où le facteur $\frac{\partial S}{\partial X} B(t)$ est toujours négatif pour la classe de système que nous considérons.

Le gain K est choisi positif pour satisfaire la condition (C.16). Le choix de ce gain est très influant car s'il est très petit, le temps de réponse sera très long, et s'il est choisi très grand, nous aurons des fortes oscillations au niveau de la commande. Ces oscillations peuvent exciter les dynamiques négligées (phénomène de Chattering), ou même détériorer l'organe de commande. Ce phénomène de Chattering peut apparaître sur l'état ou sur la sortie.

C. 4. ELIMINATION DU PHENOMENE DE CHATTERING

Le phénomène de Chattering est provoqué par une commutation non infiniment rapide de la commande (comme la théorie le réclame) quand les techniques des modes glissants sont utilisées lors de la synthèse d'une loi de commande (directement : commande par mode de glissement, ou indirectement : commande calculée sur la base de l'état estimé par observateur). Ce phénomène est indésirable car il ajoute au spectre de la commande des composantes de haute fréquence. Ces composantes peuvent détériorer le système en excitant les modes élevés dont on n'a pas tenu compte lors de la modélisation, ou encore endommager les actionneurs par des sollicitations trop fréquentes.

Le broutement (phénomène de Chattering) peut être réduit en remplaçant la fonction « *sign* » par une fonction de saturation adéquate qui filtre les hautes fréquences [Slo-91]. On donne ci-dessous un exemple de fonction de saturation (Figure C.4):

$$\begin{cases} Sat(S) = 1 & \text{si } S > \mu \\ Sat(S) = -1 & \text{si } S < -\mu \\ Sat(S) = \frac{S}{\mu} & \text{si } |S| < \mu \end{cases}$$

avec μ un paramètre petit et positif.

On peut aussi remplacer la fonction « *sign* » par une fonction de classe C^1 . On donne ci-dessous un exemple de ce type de fonction (Figure (C. 5)) ; soit :

$$Smooth(S) = \frac{S}{|S| + \mu}$$

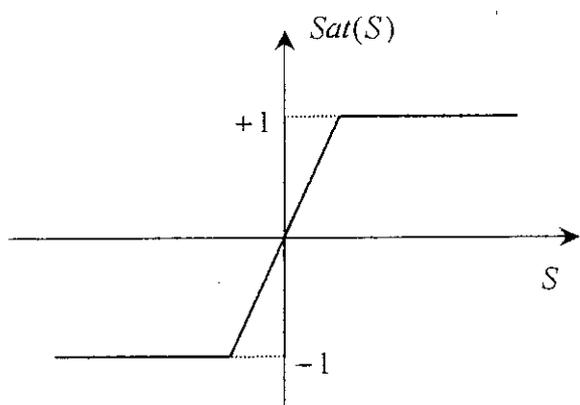


Figure C. 4 : Fonction « *Sat* ».

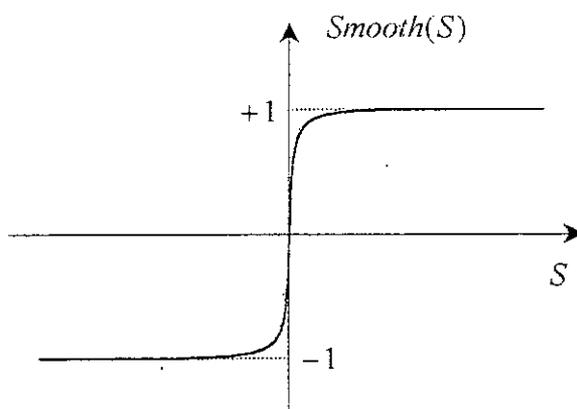


Figure C. 5 : Fonction « *Smooth* ».

ملخص :

تنقسم الدراسة المعروضة في هذه المذكرة الى قسمين اساسيين. القسم الاول يتعلق باعطاء نماذج وفق نظرية الاضطرابات المتميزة لماكنات ذات التيار المتناوب و هذا بتطبيق المثاربة الهندسية بواسطة دوائر Gerschgorin لفصل متغيرات الحالة السريعة و البطيئة. اما القسم الثاني فهو يعالج موضوع التحكم المتعدد السلالم الزمنية للماكنة الامترامنة و هذا بمزاوجة نظرية الاضطرابات المتميزة و طريقة التحكم بالانماط الانزلاقية. هذا التحكم مرفق بملاحظات لتحديد قيمة التدفقات المغناطيسية للماكنة و التي يصعب قياسها بواسطة اللواقط.

كلمات مفتاحية : نظرية الاضطرابات المتميزة، الانظمة اللاخطية ذات الاضطرابات المتميزة، ملاحظات لاخطية ذات تحكم بالانماط الانزلاقية، ماكنات ذات التيار المتناوب.

Abstract :

Works presented in our study can make the object of two big parts. The first, concern the set in standard singularly perturbed form for alternative current induction machines models. In this case, we applied the geometric approach based on Gerschgorin's circles method for the selection of slow and fast variables (geometrical multi-time-scale decomposition). The second part is consecrated to the problem of multi-time-scale control. In this part, we presented a new method of control that holds amount of the structural properties of the system. Thus, the set of laws of multi-time-scale control combines the singular perturbation method and the sliding mode technique. So, we developed a two-time scale control for a singularly perturbed induction machine. This control is provided of an non-linear sliding-mode flux observer.

Key Words : *Singular Perturbations Method; Non-linear Singularly Perturbed Systems; Non-linear Sliding Mode Observer; Alternative Current Machines.*

Résumé :

Les travaux présentés dans notre étude peuvent faire l'objet de deux grandes parties. La première, concerne la mise sous forme standard singulièrement perturbée de modèles des machines à courant alternatif, où nous avons appliqué l'approche géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin pour le découplage des variables lentes et rapides (décomposition géométrique multi-échelles de temps). La deuxième partie est consacrée au problème de contrôle multi-échelles de temps. Dans cette partie, nous avons présenté une nouvelle méthode de contrôle qui tient compte des propriétés structurelles du système. Ainsi, la mise en œuvre des lois de contrôle multiéchelles de temps combine la technique des perturbations singulières et la méthode de réglage par modes glissants. En effet, nous avons développé une commande à deux échelles de temps pour un modèle d'une machine asynchrone sous sa forme standard singulièrement perturbée. Cette commande est munie d'un observateur de type modes glissants pour l'observation des flux magnétiques non accessibles par de mesures.

Mots clés: *Technique des perturbations singulières; Systèmes nonlinéaires singulièrement perturbés; Observateur nonlinéaire de type modes glissants; Machines à courant alternatif.*