

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

Thèse de Magister

Présentée par

LEBIB Naïma

Ingénieur d'état en Génie Civil

Juin 1991

Pour obtenir le titre de

MAGISTER

en GENIE CIVIL

Thème

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

**ANALYSE DETERMINISTE ET NON DETERMINISTE
DES
SYSTEMES DYNAMIQUES A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE.**

Soutenue publiquement en Janvier 1996 devant le Jury composé de:

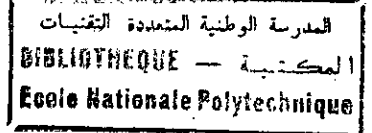
Président	: Mr B. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Rapporteur	: Mr M.K BERRAH	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs	: Mr S. BELKACEMI	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr M. BOUGHOUFALAH	Chargé de Recherche	E.N.P
	Mr M. DEMIDEM	Chargé de Recherche	E.N.P

DEDICACES

A ma mère, à mon père auxquels je dois tout . . .

Naïma.

SOMMAIRE



Page de garde.....	1
Dédicaces.....	2
Remerciements.....	3
SOMMAIRE.....	4
CHAPITRE I: INTRODUCTION.....	8
I.1: OBJECTIFS VISES	
I.2: PRESENTATION DU TRAVAIL	
CHAPITRE II: ETUDE DU MECANISME D'AMORTISSEMENT.....	12
II.1: NATURE DU MECANISME D'AMORTISSEMENT	
II.1.1: Amortissement par Dissipation Interne	
II.1.2: Amortissement par Radiation Externe	
II.2: MODELES MATHEMATIQUES DE L'AMORTISSEMENT MATERIEL	
II.2.1: Modèles Linéaires	
II.2.2: Modèles Non Linéaires	
II.3: COMPARAISON DE L'AMORTISSEMENT VISQUEUX LINEAIRE ET DE L'AMORTISSEMENT STRUCTURAL LINEAIRE	
CHAPITRE III: DISCUSSION: EFFETS DE L'AMORTISSEMENT SUR LA VIBRATION DES STRUCTURES.....	36

CHAPITRE IV: ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT
 CLASSIQUE..... 40

IV.1: INTRODUCTION

IV.2: ETUDE DYNAMIQUE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT CLASSIQUE

IV.3: CRITERES D'EXISTENCE DES MODES NORMAUX

IV.3.1: Série de Caughey

IV.3.2: Méthode Directe de Wilson-Penzien

IV.3.3: Critère De Fawzy

CHAPITRE V: ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT NON
 CLASSIQUE..... 53

V.1: ETUDE DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES COMPLEXES

V.1.1: Problème Quadratique aux Valeurs Propres

V.1.2: Problème Linéaire aux Valeurs Propres

V.2: PROCEDURES D'ANALYSE DES SYSTEMES A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

V.2.1: Introduction

V.2.2: Procédures d'Intégration Des Equations Modales Couplées

V.2.2.1: Méthode d'Intégration d'un Nombre Limité d'Equations Modales

V.2.2.2: Méthode d'Intégration d'un Nombre Limité d'Equations Modales avec
 Inclusion des Modes Supérieurs

V.2.3: Méthodes de Superposition Modale avec Modes Normaux

V.2.3.1: Introduction

V.2.3.2: Méthodes de Diagonalisation de Thomson et al.

V.2.3.3: Méthode de Biggs-Roesset

V.2.3.4: Autres Méthodes

V.2.3.5: Critères de Validité des Méthodes de Diagonalisation

a: Critère de Warburton et Soni

b: Critère de Hasselman

V.2.4: Méthodes de Superposition Modale Avec Modes Complexes

V.2.4.1: Introduction

V.2.4.2: Méthode de Déplacement du Mode

V.2.4.3: Méthode d'Accélération du Mode

V.2.4.4: Méthode de Correction Dynamique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE VI: ANALYSE NON DETERMINISTE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE..... 89

VI.1: INTRODUCTION

VI.2: GENERALITES SUR LES SEISMES

VI.2.1: Importance de l'Action Sismique

VI.2.2: Causes et Genèse des Séismes

VI.2.3: Propagation des Ondes Sismiques

VI.2.4: Enregistrement des Mouvements du Sol

VI.2.5: Mesure des Caractéristiques des Mouvements du Sol

VI.3: PROCESSUS ALEATOIRES: NOTIONS DE BASE

VI.3.1: Caractérisation d'une Variable Aléatoire Continue

VI.3.2: Distribution Conjointe de Plusieurs Variables Aléatoires Continues

VI.3.3: Espérance Mathématique

VI.3.4: Moments

VI.3.5: Théorème de la Limite Centrale

VI.3.6: Processus Aléatoires

VI.4: PROCEDURES D'ANALYSE NON DETERMINISTE DES SYSTEMES A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

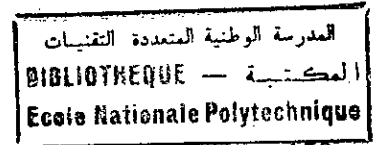
VI.4.1: Méthode de Décomposition Modale Basée sur Le Déplacement du Mode

VI.4.2: Statistiques du Pic de la Réponse à une Excitation Gaussienne

VI.4.3: Méthode Modalo-Spectrale Basée sur Le Déplacement du Mode

VI.4.4: Méthode de Décomposition Modale Basée sur l'Accélération du Mode

VI.4.5: Méthode Modalo-Spectrale Basée sur l'Accélération du Mode



CHAPITRE VII: EXPERIMENTATION NUMERIQUE: EXCITATION

DETERMINISTE..... 150

VII.1: INTRODUCTION

VII.2: SIMULATION NUMERIQUE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES STATIONNAIRES

VII.3: PRESENTATION DES STRUCTURES ETUDIEES

VII.4: ETUDE PARAMETRIQUE PORTANT SUR LES CARACTERISTIQUES PROPRES DE
VIBRATION

VI.4.1: Interprétation des Résultats

VII.5: ETUDE PARAMETRIQUE PORTANT SUR LA REPOSE DYNAMIQUE DETERMINISTE

VII.5.1: Description De l'Etude Paramétrique

VII.5.2: Interprétation des Résultats

CHAPITRE VIII: EXPERIMENTATION NUMERIQUE: EXCITATION NON

DETERMINISTE..... 202

VIII.1: Description de l'Etude Paramétrique

VIII.2: Interprétation des Résultats

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS FUTURES..... 228

REFERENCES..... 233

APPENDICE..... 237

Chapitre I

INTRODUCTION

I.1: OBJECTIFS VISES

S'il est vrai que la littérature spécialisée consacrée à l'analyse des systèmes structuraux est bien étoffée, il n'en demeure pas moins que celle relative à l'analyse des structures dynamiques dont l'amortissement est caractérisé par sa non proportionnalité, est relativement limitée.

Aussi, à cause de la complexité apparente du problème, convient-on le plus souvent de supposer hypothétiquement, que l'amortissement des structures étudiées est classique, dans un souci de simplification. Bien que parfois justifiée, une telle simplification, n'est cependant point admise s'agissant de certains systèmes présentant des particularités structurales, leur conférant un caractère non classique notable de l'amortissement.

Aussi conçoit-on aisément, dans ces conditions, qu'une analyse plus rigoureuse s'impose, notamment dans le cadre d'une conception parasismique.

En outre, l'incidence de la non proportionnalité de l'amortissement sur le comportement dynamique des structures, constitue indéniablement, un domaine de recherche très actif. D'ailleurs, les efforts de recherche sont actuellement orientés vers ce domaine pour mieux cerner le problème qui est étroitement lié, entre autres, à l'interaction sol-structure, fluide-structure, ainsi que l'interaction entre les systèmes primaires et les systèmes secondaires.

A cet effet, la présente recherche, a été consacrée, à l'analyse des

systemes dynamiques à amortissement non classique. De plus, deux modes de définition de l'excitation dynamique fondamentalement différents ont été considérés. Il s'agit d'excitations déterministes et non déterministes.

L'étude théorique a été complétée par une analyse numérique dans le but d'examiner concrètement, les effets de l'amortissement non classique sur les caractéristiques de certaines structures dynamiques, aussi bien en vibrations libres qu'en vibrations forcées.

1.2: PRESENTATION DU TRAVAIL

Le mouvement des structures soumises à des forces variables dans le temps, dépend intimement des propriétés d'amortissement, c-a-d de la dissipation d'énergie. A cet effet, La caractérisation de l'amortissement à introduire dans le calcul de ces structures a été depuis longtemps un sujet de recherches poussées; en particulier, lorsqu'il s'agissait de structures stratégiques, d'intérêt économique, et social considérable, telles que les ouvrages d'art, les barrages, les centrales nucléaires, les immeubles de grande hauteur, etc... En effet, les mécanismes de déperdition d'énergie qui se manifestent lors de la réponse des structures à des chargements dynamiques obéissent à des lois complexes et relativement méconnues. D'autre part, il est sans contredit que le phénomène d'amortissement joue un rôle clé dans l'évolution de la réponse structurale. C'est donc par l'intérêt que revêt le phénomène d'amortissement que nous avons entrepris ce modeste travail de recherche, qui se veut donc une mise en évidence de quelques aspects inhérents à l'amortissement.

Il est vrai, que ce n'est pas en si peu de pages que l'on pourrait exposer tout ce qui est lié au "phénomène amortissement" et de ses

conséquences sur la vibration des structures. Néanmoins, le contenu de cette thèse permet de porter à la connaissance de notre communauté scientifique des éléments permettant une meilleure lecture et compréhension de ce phénomène, dont l'importance liée à la vibration des structures est indiscutable .

Ce chapitre introductif offre donc, une vue d'ensemble sur le contenu de la thèse. En effet, le chapitre II a été consacré à la présentation des modèles mécaniques permettant, la représentation de l'amortissement, en dynamique des structures(DDS). En premier lieu, l'amortissement est décrit en tant que phénomène rhéologique, avec mise en évidence de son rôle et sa complexité. En second lieu, vient la représentation des modèles les plus communément utilisés en DDS à savoir le modèle d'amortissement visqueux linéaire, ainsi que le modèle d'amortissement hystérétique linéaire. D'autres modèles, certains sophistiqués mais précis, d'autres simples mais moins performants sont passés en revue, dans le seul souci de compléter l'étude.

Une discussion est alors présentée, mettant en relief les effets de l'amortissement sur la vibration des structures portant, notamment, sur les caractéristiques propres de vibration et introduisant l'amortissement non classique et ses spécificités, ainsi que son impact sur les caractéristiques vibratoires.

Le chapitre suivant consiste en un rappel des principales méthodes d'analyse des systèmes dynamiques à plusieurs degrés de liberté, ainsi que les critères que doivent remplir ces derniers afin de posséder des modes normaux classiques.

Comme suite logique à ce chapitre vient celui traitant des procédures d'analyse des systèmes qui, justement, ne remplissent pas les critères suscités. Il s'agit évidemment des systèmes à amortissement non classique. En effet, les techniques d'intégration des équations couplées sont

explicitées, quelques approches approximatives faisant usage des modes normaux sont passées en revue, ainsi que les critères validant leur application, enfin des procédures plus exactes spécifiques à l'analyse des systèmes à amortissement non classique sont exposées, en l'occurrence nous citerons les méthodes de superposition modale avec modes complexes sous deux formulations différentes (celles basées sur le déplacement du mode et celles basées sur l'accélération du mode).

En réalité, les excitations auxquelles sont soumis les systèmes structuraux sont le plus souvent non déterministes, il était donc impératif de consacrer un chapitre à l'exposition des principales procédures d'analyse des systèmes à amortissement non proportionnel lorsque l'excitation est aléatoire. Ainsi, après avoir mis l'accent sur l'intérêt d'une analyse non déterministe en dynamique des structures, une première partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude des spécificités de l'action sismique. De même l'introduction de quelques notions de vibrations aléatoires s'avérait incontournable, dans le but de présenter la caractérisation probabiliste de la réponse dynamique, enfin vint l'exposé des procédures d'analyse non déterministe des systèmes à amortissement non classique, encore une fois deux alternatives ont été proposées; d'une part celles basées sur le déplacement du mode et d'autre part celles basées sur l'accélération du mode. Pour chacune d'elles, deux formulations s'offrent selon que l'excitation soit définie par sa fonction de densité spectrale ou alors par son spectre de réponse.

En dernier lieu, et du fait que les techniques proposées ne peuvent être appréciées qu'une fois mises en pratique, les deux derniers chapitres ont été conçus à cet effet, dans le seul souci de compléter l'étude théorique. Ainsi une expérimentation numérique mettant en lumière certaines facettes relatives à une analyse dynamique des systèmes à amortissement non classique a été élaborée.

Chapitre II

ETUDE DU MECANISME D'AMORTISSEMENT

II.1: INTRODUCTION

Le comportement des matériaux composites et non composites ainsi que les assemblages structuraux, n'est jamais parfaitement élastique. Cette inélasticité se traduit, sous chargement cyclique, par une dissipation d'énergie. La propriété de perte d'énergie est identifiée par le terme: amortissement.

Théoriquement, un système non amorti pourrait faire l'objet de vibrations libres qui persistent indéfiniment. Ceci ayant lieu sans qu'aucune force extérieure ne lui soit appliquée.

Cependant, une telle vibration sans décroissance d'amplitude est irréalisable. En effet, la présence des forces d'amortissement cause une dissipation d'énergie qui réduit progressivement l'amplitude de vibration jusqu'à l'arrêt du mouvement. Cet arrêt est atteint lorsque l'énergie initialement emmagasinée dans le système se trouve complètement dissipée. Par conséquent, le phénomène d'échange continu entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, avec l'énergie mécanique totale demeurant constante, n'est réalisable que pour un système conservatif idéal.

Un système non conservatif, est de ce fait caractérisé par la présence de forces d'amortissement qui provoquent la dissipation d'une partie de son énergie. En général, ces forces d'amortissement ont une magnitude faible

devant celle des forces inertielles et des forces élastiques.

Toutefois, dans certaines circonstances, ces faibles forces d'amortissement peuvent avoir une influence considérable sur la vibration des structures. En effet, l'amortissement est, d'une part, responsable de la décroissance des vibrations libres, et d'autre part il justifie l'atténuation de la réponse des systèmes vibratoires excités à la résonance. L'amortissement est aussi d'une importance capitale dans l'établissement des conditions de stabilité neutre des systèmes non conservatifs.

II.2: NATURE DU MECANISME D'AMORTISSEMENT

L'amortissement provient de la déperdition d'énergie d'un système vibratoire. Cette déperdition est causée par différents mécanismes dont la dissipation d'énergie à l'intérieur du système, dépendant exclusivement du matériau spécifique, et la transmission d'énergie à l'extérieur du système par le biais de divers phénomènes de radiation.

Les mesures d'amortissement sont en général réalisées pour des oscillations cycliques ou presque cycliques. Elles sont obtenues en comparant l'énergie perdue par cycle W , à l'énergie potentielle V emmagasinée dans le système durant ce cycle. Dans ce but, un facteur de déperdition η est défini par $\eta = \frac{W}{4\pi V}$. Soulignons, que dans la plupart

des systèmes dynamiques l'amortissement est faible. En pratique les valeurs de η varient entre 10^{-5} et $2 \cdot 10^{-1}$. En général, ce facteur η dépend, aussi bien de l'amplitude que de la fréquence de l'oscillation.

II.2.1: Amortissement par Dissipation Interne

Cet amortissement est inhérent aux matériaux structuraux, Il est

également appelé amortissement matériel, et est causé par une combinaison de plusieurs mécanismes physiques dépendant des matériaux constitutifs. S'agissant des métaux, ces mécanismes incluent la thermoélectricité, la relaxation, etc...

Néanmoins, concernant les non métaux, ces mécanismes sont très peu connus [5].

II.2.2: Amortissement par Radiation Externe

La dissipation d'énergie peut également se faire via les liaisons des différents éléments constituant la structure. La radiation d'énergie vers le milieu extérieur est aussi une autre source de dissipation.

De plus, la vibration d'une structure peut être considérablement affectée par les caractéristiques du fluide environnant (exemple l'air, l'eau ou d'autres gaz et liquides). De ce fait, les fréquences naturelles et les configurations modales peuvent subir d'importants changements [4].

II.3: MODELES MATHEMATIQUES DE L'AMORTISSEMENT MATERIEL

Ce paragraphe, est une discussion relative aux nombreux modèles mathématiques proposés afin de représenter le phénomène de l'amortissement dans les matériaux solides. L'accent est mis sur l'utilité de ces modèles en analyse dynamique des structures.

Le but de développer des modèles mathématiques simulant le comportement rhéologique des solides, est de permettre l'obtention de résultats réalistes suite à l'analyse mathématique des structures compliquées sous des conditions variables de chargement. Par conséquent, ces modèles sont sélectionnés de manière à réaliser un bon compromis entre réalité physique et aisance de formulation mathématique.

Notons, qu'il existe deux types de modèles d'amortissement. les modèles linéaires et les modèles non linéaires. Cependant, la plupart des travaux de recherches publiés insistent, pour plusieurs raisons, sur les modèles linéaires d'amortissement. L'une des raisons est la précision des analyses linéaires pour les faibles contraintes. Une autre raison est que les analyses linéaires sont plus économiques que les analyses non linéaires. Nous examinerons dans la suite du paragraphe, les différents modèles d'amortissement existants.

II.3.1: Modèles Linéaires

De nombreux modèles linéaires existent. Ils se différencient par le nombre de leurs paramètres. Toutefois, nous nous limiterons aux modèles les plus connus.

II.3.1.1: Modèles à un Paramètre

Les modèles à paramètre unique présentés ci-après, sont les modèles mathématiques les plus simples pour des systèmes rhéologiques.

a: Ressort Idéalisé

Le modèle sans pertes est un ressort exhibant une force élastique linéairement proportionnelle au déplacement et dont l'amortissement est supposé nul.

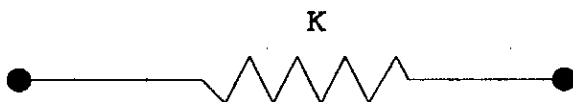


Fig. II.1: Le ressort Idéalisé

Ce modèle s'avère inadéquat pour la représentation des systèmes physiques réels, étant donné que, d'une part ce dernier ne peut permettre la décroissance de la vibration libre une fois entamée, et que d'autre part ce modèle ne permet pas d'atteindre le régime permanent lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale à la résonance. S'ajoute à cela le fait que la réponse de ce modèle à une excitation aléatoire stationnaire dont le spectre inclût la fréquence propre de vibration du système, s'avère être un processus aléatoire non stationnaire. Toutefois, l'introduction d'un amortisseur linéaire idéal permet de remédier à ces déficiences.

b: Amortisseur Idéalisé

Ce modèle produit une force d'amortissement linéairement proportionnelle à la vitesse .

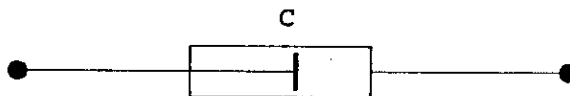


Fig. II.2: L'amortisseur Idéalisé

Manifestement, aucun de ces deux modèles idéaux ne peut simuler le comportement réel des matériaux.

II.3.1.2: Modèles à Deux Paramètres

a: Modèle de Maxwell

Ce modèle consiste en un ressort et un amortisseur en série mécanique

et constitue une bonne approximation du comportement d'un liquide viscoélastique. En revanche, Le modèle de *Maxwell* n'est pas approprié pour simuler le comportement d'un solide viscoélastique.

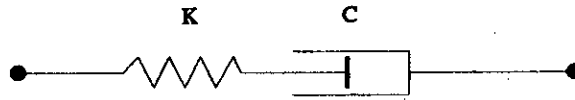


Fig. II.3: Le modèle de *Maxwell*

b: Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de *Kelvin-Voigt* représente la première approximation du comportement d'un solide viscoélastique, constitué d'un ressort en parallèle avec un amortisseur, schématisé dans la figure (II.4).

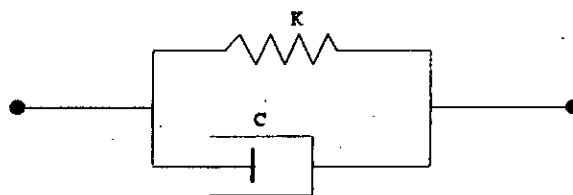


Fig. II.4: Le modèle de *Kelvin-Voigt*

Le modèle de *Kelvin-Voigt* est le modèle le plus simple, permettant une représentation en quantité complexe, une fois soumis à un mouvement sinusoïdale.

Pour illustrer ceci, écrivons l'équation différentielle gouvernant le mouvement d'un système SDOF (single-degree-of freedom), consistant en une masse attachée à un élément *Kelvin-Voigt* (voir fig. II.5), soumis à une excitation sinusoïdale:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \tilde{f} e^{i\omega t} \quad (\text{II.3.1.2.1})$$

où m est la masse, c le coefficient d'amortissement visqueux, k le coefficient de rigidité, \tilde{f} l'amplitude de la force excitatrice, ω la fréquence circulaire de la force excitatrice. x, \dot{x}, \ddot{x} correspondant respectivement au déplacement, à la vitesse et à l'accélération.

La solution permanente de l'équation (II.3.1.2.1) est la suivante:

$$x = \tilde{x} e^{i(\omega t - \phi)} = \tilde{f} [(k - m \omega^2) + i \omega c]^{-1} e^{i\omega t} \quad (\text{II.3.1.2.2})$$

où ϕ est l'angle de déphasage entre la réponse x et la force excitatrice f et \tilde{x} est l'amplitude du déplacement.

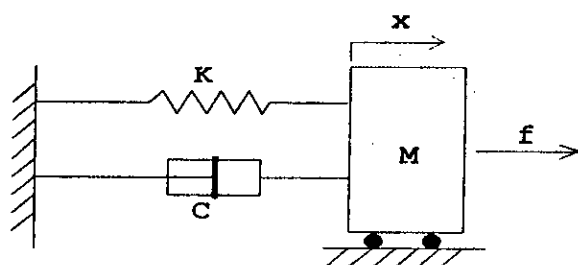


Fig. II.5:

Ainsi, la force d'amortissement est donnée par:

$$f_d = c\dot{x} = i\omega c \bar{x} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (\text{II.3.1.2.3})$$

L'énergie W dissipée par cycle dans le dashpot soumis au mouvement sinusoïdal est:

$$W = \oint f_d dx = \int_0^{2\pi/\omega} f_d \dot{x} dt = \pi c \bar{x}^2 |\omega| \quad (\text{II.3.1.2.4})$$

L'énergie potentielle maximale enregistrée dans le ressort durant un cycle est:

$$V = \frac{1}{2} k \bar{x}^2 \quad (\text{II.3.1.2.5})$$

Nous pouvons donc déterminer le facteur de déperdition (ou facteur de perte) de cet amortisseur idéal par:

$$\eta = \frac{c|\omega|}{2k} \quad (\text{II.3.1.2.6})$$

En définissant le pourcentage d'amortissement critique ξ par:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (\text{II.3.1.2.7})$$

Nous obtenons:

$$\eta = \xi \frac{|\omega|}{\omega_n} \quad (\text{II.3.1.2.8})$$

Avec $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ la fréquence naturelle non amortie .

Par conséquent, à la résonance le facteur de déperdition est identique au % d'amortissement critique ($\eta_n = \xi$)

Le modèle de *Kelvin-Voigt* est aussi connu sous le nom "modèle d'amortissement visqueux linéaire", c'est aussi le modèle le plus utilisé en pratique.

c: Modèle à Dépendance Fréquentielle

D'après l'expression (II.3.1.2.4), le modèle visqueux linéaire exhibe une énergie dissipée par cycle, à forte dépendance fréquentielle.

Toutefois, les observations faites en 1927, par *Kimball* et *Lovell* ([2]dans[5]) ont permis de conclure que la plupart des matériaux en engineering exhibaient une énergie dissipée par cycle en contradiction avec l'expression (II.3.1.2.4). En effet, cette énergie était proportionnelle à l'amplitude du déplacement \bar{x}^2 , mais indépendante de la fréquence ω

$$W = C'_d \bar{x}^2 \quad (\text{II.3.1.2.9})$$

Un peu plus tard (1935), *Wegel* et *Walther* ([3]dans[5]) confirmèrent cette idée.

En 1950, *Lazan* ([1,4]dans[5]) démontra aussi que la constante C'_d était pratiquement indépendante de la fréquence pour des contraintes en dessous de la limite de fatigue des matériaux.

Ainsi, l'égalisation de l'énergie dissipée par cycle dans le matériau de *Kimball-Lovell* (II.3.1.2.9) et celle du dashpot de l'équation (II.3.1.2.4) a permis d'obtenir la relation suivante:

$$C'_d = \pi c \omega \quad (\text{II.3.1.2.10})$$

Toutefois, l'exploitation des observations de *Kimball-Lovell* en analyse dynamique des structures, nécessitait une expression concise de la force d'amortissement f_d . Cette expression fût formulée en premier lieu par *Collar* ([5] dans [5]). Ce dernier en combinant les équations (II.3.1.2.3) et (II.3.1.2.9) obtint l'expression de la force d'amortissement à dépendance fréquentielle suivante:

$$f_d = (b/\omega) \dot{x} \quad (\text{II.3.1.2.11})$$

Avec:

$$b = (C_d'/\pi) \quad (\text{II.3.1.2.12})$$

Le type d'amortissement représenté par l'équation (II.3.1.2.10) est dit: "*amortissement à dépendance fréquentielle*", dès lors que le coefficient d'amortissement usuel c est remplacé par la quantité (b/ω) .

d: Modèles à Rigidité Complexe

Ces modèles sont obtenus en regroupant les termes de rigidité et d'amortissement en un terme unique appelé: "*rigidité complexe*".

Ainsi, le modèle de *Kelvin-Voigt* à rigidité complexe est le suivant:

$$\bar{k} = k + i\omega c \quad (\text{II.3.1.2.13})$$

Tandis que le modèle de *Kimball-Lovell* à rigidité complexe est obtenu à partir de (II.3.1.2.11), son expression est donc:

$$\bar{k}' = k + ib \quad (\text{II.3.1.2.14})$$

On note que k et b sont supposés indépendants de la fréquence.

Une autre alternative à l'équation (II.3.1.2.14) a été fournie par *Myklestad* ([9]dans[5]) en 1952 sous la formulation:

$$\bar{k}'' = c_1 e^{im} \quad (\text{II.3.1.2.15})$$

où c_1 et m sont des constantes.

Bien que les travaux originaux de *Kimball* et *Lovell*, étaient basés sur des données obtenues durant un mouvement sinusoïdal permanent, le modèle représenté par les formules (II.3.1.2.13), (II.3.1.2.14), (II.3.1.2.15) a été également appliqué à des vibrations libres avec des expressions analogues.

En résumé, trois différentes versions de l'amortissement matériel à dépendance fréquentielle ont été discutées :

$$m \ddot{x} + (b/\omega) \dot{x} + k x = 0 \quad (a)$$

$$m \ddot{x} + (k + ib) x = 0 \quad (b) \quad (II.3.1.2.16)$$

$$m \ddot{x} + C_1 e^{im} x = 0 \quad (c)$$

Ces modèles ont cependant été sujets à controverse, pour plusieurs raisons :

En effet, en plus de l'interprétation équivoque de ω dans (II.3.1.2.16a), cette équation ne peut remplir la condition de causalité des systèmes physiques réels.

En outre, les équations (II.3.1.2.16b) et (II.3.1.2.16c) sont à coefficients complexes, ce qui physiquement est ambigu. De plus, les solutions sont des fonctions exponentielles complexes dont ni la partie réelle, ni la partie imaginaire seule ne constitue une solution.

Enfin, aucun de ces modèles ne peut être simulé numériquement.

La vibration forcée avec excitation sinusoïdale peut aussi être formulée grâce aux équations (II.3.1.2.16a), (II.3.1.2.16b) et (II.3.1.2.16c).

L'expression la plus usuelle est la suivante :

$$m \ddot{x} + (k+ib) x = \tilde{f} e^{i\omega t} \quad (II.3.1.2.17)$$

qui est une équation gouvernante très souvent utilisée avec le concept "*amortissement hystérétique linéaire*" dit aussi "*amortissement structural linéaire*".

II.3.1.3: Modèles à Plus de Deux Paramètres

a: Modèles à Trois Paramètres

Afin d'outrepasser les déficiences des modèles de *Kelvin-Voigt* et celui de *Maxwell*, ces derniers ont été combinés de différentes manières pour aboutir à des modèles à trois paramètres illustrés dans les figures (II.6.a) (II.6.b).

Ces deux représentations sont dites: "*solide linéaire standard*" ou "*matériau linéaire standard*" ou encore "*modèle linéaire du corps viscoélastique*".

Signalons toutefois, que très peu de matériaux ont été caractérisés par l'utilisation du "*solide linéaire standard*".

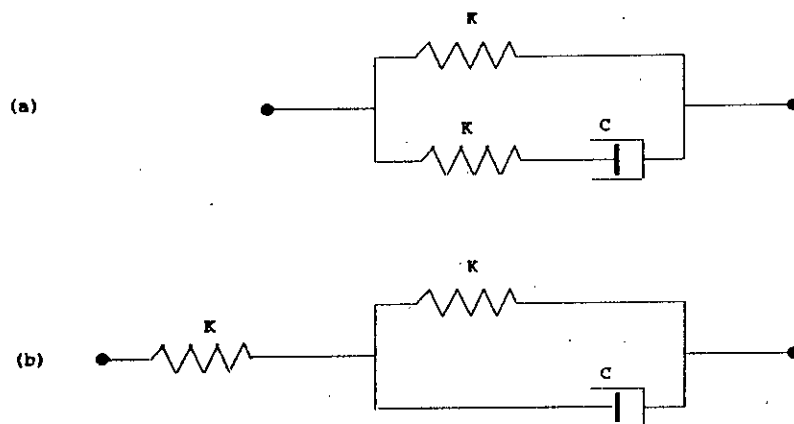


Fig. II.6: Les modèles à trois paramètres

b: Modèles Linéaires Généralisés

Manifestement, à partir des modèles à trois paramètres, on peut

obtenir des modèles à quatre paramètres ou plus. En poursuivant ce processus, deux modèles généralisés bien connus ont été obtenus: les modèles généralisés de *Maxwell* et ceux de *Kelvin-Voigt* illustrés respectivement dans les figures (II.7) et (II.8).

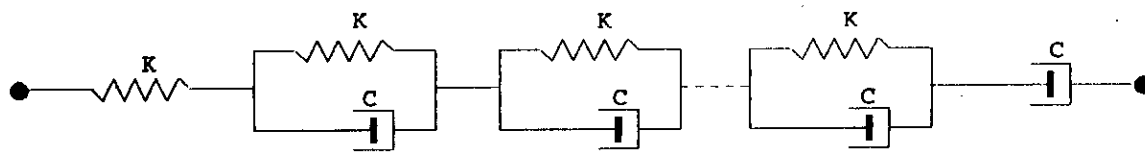


Fig. II.7: Le modèle généralisé de *Kelvin-Voigt*

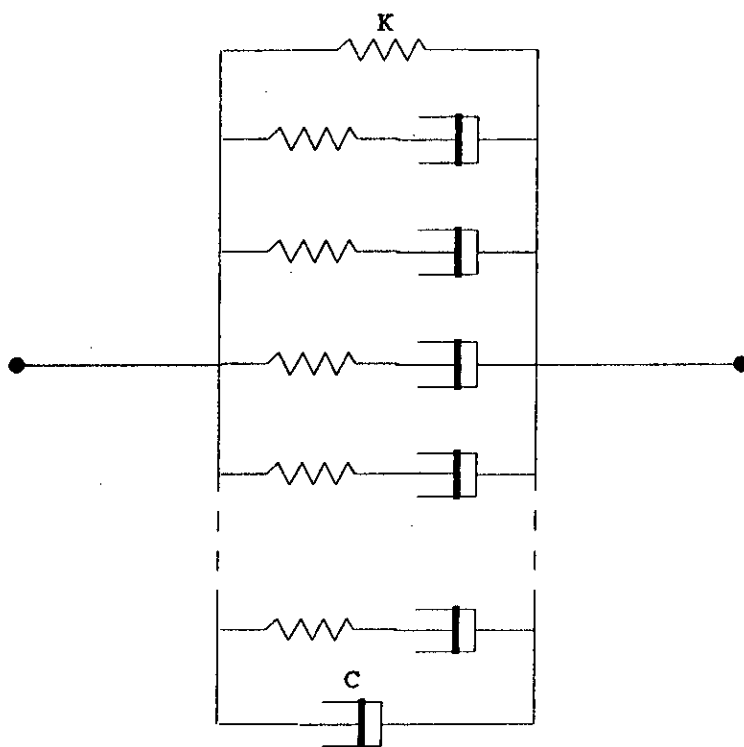


Fig. II.8: Le modèle généralisé de *Maxwell*

Malheureusement, la complexité de ces deux modèles a limité leur utilisation aussi bien expérimentalement qu'analytiquement. C'est pour cette raison, qu'une recherche soutenue de modèles simples est poursuivie. Néanmoins, ces modèles doivent représenter le comportement des matériaux réels de manière satisfaisante.

c: Modèle de Biot

Ce modèle est quelque peu similaire au modèle généralisé de *Maxwell*. Dans ce modèle le nombre d'éléments de *Voigt* peut augmenter sans limite de telle manière que f_d puisse s'exprimer par:

$$f_d = g_1 \int_{t_1}^t E_i[-\varepsilon(t-\tau)] (dx/d\tau) d\tau \quad (\text{II.3.1.3.1})$$

où τ est une variable muette, ε et g_1 sont les paramètres du modèle et $E_i(x)$ est l'intégrale exponentielle :

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{-x} (e^{-\xi}/\xi) d\xi$$

Soulignons, que le modèle de *Biot* fût étudié par *Caughey* ([12] dans [5]), aussi bien en vibrations libres qu'en vibrations forcées, suite à quoi l'importante conclusion suivante fût formulée :

Si le rapport $(\omega/\xi) > 10$, l'énergie dissipée par cycle dans le modèle de *Biot* est presque indépendant de la fréquence et de cette façon dépend essentiellement du carré de l'amplitude du déplacement. Notons que Malgré sa performance, relativement aux autres modèles, le modèle de *Biot* est peu utilisé en dynamique des structures à cause de sa complexité.

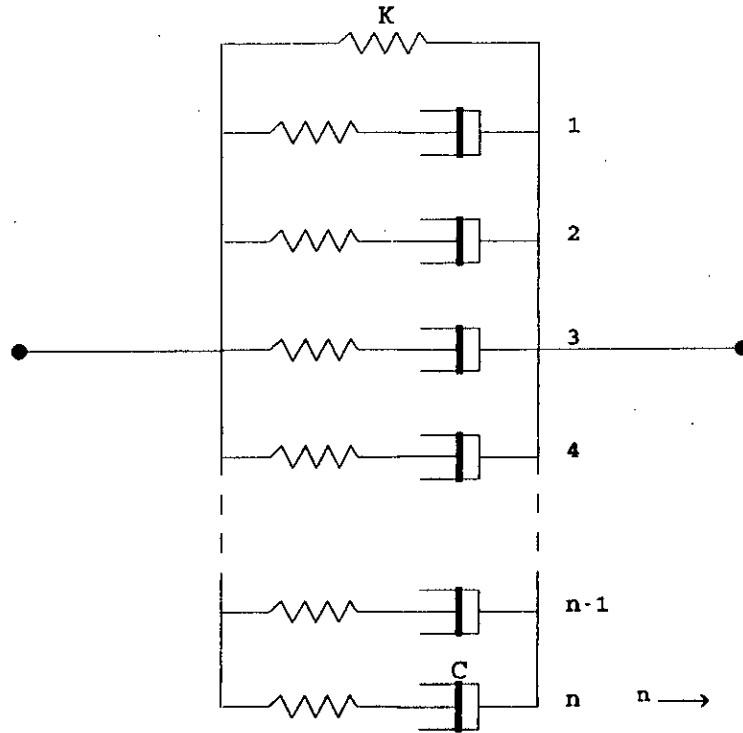


Fig. II.9: Le modèle généralisé de *Biot*

II.3.2: Modèles non Linéaires

S'il est vrai que de nombreux modèles non linéaires sont proposés afin de permettre une meilleure correspondance entre théorie et pratique, il n'en demeure pas moins que, précisément en raison de cette nature non linéaire, tous ces modèles sont trop compliqués pour être utilisés en analyse dynamique des structures.

Un des modèles non linéaires a été proposé par *Reid* [5] sous la formulation suivante :

$$f_d = b |\dot{x}/\dot{x}| \dot{x} \quad (\text{II.3.2.1})$$

L'équation de mouvement libre dans ce cas est donnée par:

$$m \ddot{x} + b |\dot{x}/\dot{x}| \dot{x} + k x = 0 \quad (\text{II.3.2.2})$$

La force d'amortissement (II.3.2.1) conduit à une équation différentielle (II.3.2.2) non linéaire à cause de la présence du terme $|\dot{x}/\dot{x}|$.

II.4: COMPARAISON DE L'AMORTISSEMENT VISQUEUX LINÉAIRE ET DE L'AMORTISSEMENT STRUCTURAL LINÉAIRE

En vertu de l'importance que revêtent les amortissements linéaires visqueux et structural, une étude comparative est entreprise dans ce qui suit afin de mettre en évidence les différences fondamentales entre ces deux modèles.

II.4.1: Amortissement Visqueux Linéaire

Le modèle d'amortissement visqueux est très familier en dynamique des structures, la cause en est sa simplicité mathématique plutôt que sa convenance physique.

Examinons les principales caractéristiques de ce type d'amortissement dit aussi "*amortissement idéal linéaire*".

Lorsque la force excitatrice dans la figure (II.10) est de la forme $f = \tilde{F} \sin(\omega t)$, la réponse permanente s'exprime par:

$$x = \tilde{x} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{II.4.1.1})$$

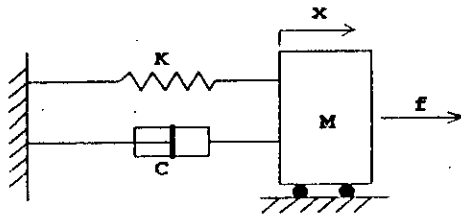


Fig. II.10

L'énergie dissipée par cycle est:

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} c(dx/dt)(dx/dt) dt = \pi c \bar{x}^2 |\omega| \quad (\text{II.4.1.2})$$

Le pic de l'énergie potentielle emmagasinée dans le ressort en un cycle s'exprime par:

$$V = \frac{1}{2} k \bar{x}^2 \quad (\text{II.4.1.3})$$

Le facteur de perte de l'amortisseur idéal présent dans le système en figure (II.9) est alors:

$$\eta = W/(4\pi V) = \frac{c|\omega|}{2k} \quad (\text{II.4.1.4})$$

Notons que, dans la plupart des applications à amortissement faible, l'effet de ce dernier est particulièrement sensible à la résonance ou au voisinage de la résonance.

Par ailleurs, ces effets peuvent être exprimés en fonction du facteur de perte à la résonance ($\omega = \omega_n$)

$$\eta_n = \frac{c \omega_n}{2k} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (\text{II.4.1.5})$$

En effet, la vibration libre du système considéré en figure (II.9) peut être formulée ainsi:

$$x(t) = x_0 e^{-\eta_n \omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi_0) \quad (\text{II.4.1.6})$$

où $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega_n \sqrt{1 - \eta_n^2}$ est la fréquence amortie à la résonance.

L'amplitude x_0 ainsi que le déphasage ϕ_0 dépendent des conditions initiales.

D'autre part, le taux de décroissance de la courbe enveloppe de la vibration libre dépend de η_n , ceci est démontré par l'expression du décrétement logarithmique:

$$\delta = \text{Log} \left[\frac{x(t)}{x(t + 2\pi/\omega_d)} \right] = 2\pi\eta_n \frac{\omega_n}{\omega_d} = 2\pi \frac{\eta_n}{\sqrt{1 - \eta_n^2}} \quad (\text{II.4.1.7})$$

Enfin, en vibration forcée, la réponse est donnée par l'expression (II.4.1.1) dont l'amplitude \tilde{x} dépend aussi bien du rapport ($\beta = \omega/\omega_n$) que du facteur de déperdition à la résonance:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{f}}{k} \times \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\eta_n\beta)^2}} \quad (\text{II.4.1.8})$$

Rappelons que pour de faibles amortissements [12], l'amplitude de la réponse est substantiellement indépendante de l'amortissement excepté au voisinage de la résonance ($\omega = \omega_n$). A ce niveau la réponse dépend du facteur de déperdition η_n d'une manière sensible.

Après avoir examiné le rôle fondamental que joue l'amortissement au voisinage de la résonance, notamment dans les systèmes vibratoires faiblement amortis, notons la forte dépendance fréquentielle qui caractérise le modèle d'amortissement idéal visqueux et qui est mise en évidence par l'expression: $\eta = \frac{c|\omega|}{2k}$

Néanmoins, en pratique les facteurs de déperdition correspondant aux mécanismes d'amortissement réels, n'obéissent guère à cette relation (voir § II.3.1.2). Malgré cela, ce concept d'amortissement visqueux linéaire équivalent est souvent utilisé pour modéliser l'amortissement des systèmes physiques réels. Ceci est dû essentiellement à sa relative simplicité mathématique ainsi qu'aux résultats satisfaisants qu'il fournit au voisinage de la résonance.

Le dashpot linéaire équivalent, est sélectionné de manière à ce que son facteur de déperdition soit le même que celui du système réel amorti, lorsque ce dernier est en résonance. Dès lors, si le système réel est faiblement amorti, son comportement est fidèlement représenté par le modèle équivalent.

Effectivement, bien qu'au niveau de la plupart des fréquences, le modèle exhibe un amortissement différent de celui recherché, la réponse dynamique du système est très peu affectée si son amortissement est faible [14]

Par ailleurs, en raison de ce qui a été démontré précédemment (voir (II.4.1.7) et (II.4.1.8)), le taux de décroissance de l'oscillation libre ainsi que l'amplitude de la réponse peuvent être estimés correctement par le modèle équivalent si le facteur de déperdition du système réel est atteint à la résonance [14].

Cette procédure peut aussi servir à modéliser l'amortissement des systèmes à plusieurs DDL. Un dashpot visqueux équivalent est par conséquent, attribué à chaque mode naturel, de sorte que le facteur de déperdition du dashpot atteint celui du système réel vibrant dans ce mode à la fréquence de résonance de ce dernier. Cette procédure néglige néanmoins, le couplage inter-modal éventuel causé par l'amortissement.

II.4.2: Dashpot à Dépendance Fréquentielle

Lorsque la fréquence à laquelle l'amortissement devient important est

connue d'avance, il est souvent convenable de modéliser les faibles amortissements par un dashpot idéal équivalent comme il a été décrit dans le paragraphe précédent. Cependant, la difficulté survient en l'absence de données concernant l'amortisseur physique en action, ainsi que le mouvement prévu du système, vu que la force d'amortissement en dépend.

Dans de telles circonstances, un modèle d'amortissement plus fiable est exigé, du moment que la fréquence à laquelle l'amortissement sera critique n'est pas connu à priori.

Afin de décrire ce modèle dit "*modèle à dépendance fréquentielle*", le recours à la transformée de *Fourier* s'impose permettant ainsi le passage au domaine fréquentiel [12,14].

La transformée de *Fourier* $X(\omega)$ de l'histoire temporelle $x(t)$ est définie par:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{II.4.2.1})$$

La transformée de *Fourier* inverse permet de retrouver l'histoire temporelle $x(t)$:

$$x(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{II.4.2.2})$$

Rappelons que le dashpot idéal s'exprime dans le domaine temporel par la relation :

$$f_d = c \frac{dx}{dt} \quad (\text{II.4.2.3})$$

Cette relation peut être transformée dans le domaine fréquentielle de la manière suivante:

$$F_d(\omega) = i\omega c X(\omega) \quad (\text{II.4.2.4})$$

où $F_d(\omega)$ est la transformée de *Fourier* de la force d'amortissement $f_d(t)$.

L'équation (II.4.2.4) peut être interprétée par la relation entre les amplitudes complexes de la force et du déplacement durant l'oscillation cyclique à la fréquence ω .

Comme il a été décrit auparavant pour un dashpot idéal, le paramètre c est constant. Le facteur de déperdition est par conséquent donné par l'équation (II.4.1.4). Cette dernière peut aussi être utilisée afin de définir un coefficient d'amortissement à dépendance fréquentielle.

$$c(\omega) = \frac{2k \eta(\omega)}{|\omega|} \quad (\text{II.4.2.5})$$

Par ailleurs, les facteurs de déperdition associés aux mécanismes d'amortissement réels, étant souvent mesurés sous des oscillations cycliques ou presque cycliques, il s'en suit que l'équation (II.4.2.4) peut être généralisée de manière à insérer le coefficient de dépendance fréquentielle (II.4.2.5) afin d'obtenir:

$$\begin{aligned} F_d(\omega) &= 2i \frac{\omega}{|\omega|} k \eta(\omega) X(\omega) \\ &= 2i k \eta(\omega) \text{Sgn}(\omega) X(\omega) \end{aligned} \quad (\text{II.4.2.6})$$

où $\text{Sgn}(\omega)$ désigne la fonction signe de ω définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega < 0 \quad \text{sgn}(\omega) = -1 \\ \omega = 0 \quad \text{Sgn}(\omega) = 0 \\ \omega > 0 \quad \text{Sgn}(\omega) = +1 \end{array} \right\}$$

L'équation (II.4.2.6) décrit le comportement d'un modèle analytique très utile, le dashpot idéal à dépendance fréquentielle.

Notons que la définition est faite dans le domaine fréquentiel. En effet une expression de la forme:

$$m \ddot{x} + c(\omega) \dot{x} + k x = f \quad (\text{II.4.2.7})$$

formulée dans le domaine temporelle n'est valable que si $c(\omega)$

est une constante appropriée à une fréquence donnée ω .

D'ailleurs, il a été démontré par *Scanlan* [42] que si $c(\omega)$ prend une valeur appropriée à la fréquence résonante $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, le résultat au

voisinage de cette fréquence sera acceptable.

En réalité, il n'existe pas de constante c unique appropriée pour une réponse couvrant une large bande de fréquences.

Par conséquent, le coefficient d'amortissement $c(\omega)$ ne peut être supposé comme une fonction variable que dans le domaine fréquentiel.

Afin d'étudier un système dont l'amortissement est à dépendance fréquentielle, nous serons conduits à rechercher la solution de l'équation transformée de (II.4.2.7):

$$-\omega^2 m X(\omega) + F_d(\omega) + k X(\omega) = F(\omega)$$

Avec $F_d(\omega)$ donnée par l'équation (II.4.2.6)

Ainsi, l'expression précédente devient:

$$-\omega^2 m X(\omega) + 2ki \eta(\omega) \text{Sgn}(\omega) X(\omega) + kX(\omega) = F(\omega)$$

ou alors:

$$(-\omega^2 m + k [1 + 2i\eta(\omega) \text{Sgn}(\omega)]) X(\omega) = F(\omega) \quad (\text{II.4.2.8})$$

Signalons que pour pouvoir simuler des mécanismes d'amortissement physiquement réalisables, il est impératif que les modèles d'amortissement à dépendance fréquentielle répondent à certains critères.

En effet, le facteur de déperdition $\eta(\omega)$ de même que le facteur d'amortissement $c(\omega)$, doivent être réels, non négatifs et fonctions de ω , afin de pouvoir représenter des mécanismes de perte d'énergie.

S'ajoute à cela une exigence considérablement plus subtile qu'est la

causalité, stipulant que la réponse ne doit en aucun cas précéder l'excitation.

La nature non causale, d'un cas particulier d'amortissement à dépendance fréquentielle, représenté par l'amortissement hystérétique linéaire à été démontré par *Crandall* [14]. Ce modèle est décrit dans le paragraphe suivant.

II.4.3: Amortissement Hystérétique Linéaire

L'amortissement hystérétique linéaire ou structural est très largement employé, et consiste en un facteur de perte η_0 constant indépendant de la fréquence. Sous cette hypothèse le coefficient d'amortissement $c(\omega)$ s'exprime par:

$$c(\omega) = \frac{2k \eta_0}{|\omega|} = \frac{2k \eta_0 \operatorname{Sgn}(\omega)}{\omega} \quad (\text{II.4.3.1})$$

La formulation de l'équation de mouvement dans le domaine fréquentiel est la suivante :

$$\{-m \omega^2 + k[1 + 2i \eta_0 \operatorname{Sgn}(\omega)]\} X(\omega) = F(\omega) \quad (\text{II.4.3.2})$$

(La fonction $\operatorname{Sgn}(\omega)$ est en général positive sauf si des domaines de fréquences doublement infinis sont utilisés)

L'un des inconvénients de l'amortissement structural est la difficulté de l'exprimer dans le domaine temporel.

En effet, l'équation (II.4.3.2) ne peut être transformée dans le domaine temporel que si le facteur de déperdition η est constant pour n'importe quelle fréquence, ce qui physiquement est irréalisable.

La solution ne peut donc être considérée comme valide, en dehors de son application pour la détermination de la réponse x à la fréquence ω , pour

laquelle η a été sélectionné.

Une forme particulière qui est "acceptable" dans le domaine temporel est la suivante :

$$m \ddot{x} + k[1+2i\eta]x = f_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.4.3.3})$$

avec:

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} ; \quad x = x_0 e^{i\omega t}$$

Cette formulation a cependant été contestée par *Crandall*.

En effet, en supposant x réel, $f = \delta(t)$ (fonction de *Dirac*)

et η constante pour toutes les fréquences, *Crandall* [14] a démontré une anomalie inhérente à ce modèle, consistant en une réponse précédant l'input.

Enfin, il est noter qu'il n'existe pas d'amortissement réalisable dont le facteur de déperdition η soit strictement indépendant de la fréquence. En revanche, plusieurs mécanismes présentent des facteurs de perte demeurant constants sur certaines plages fréquentielles.

En conclusion, aussi bien l'amortissement visqueux linéaire que l'amortissement structural linéaire, sont caractérisés par de sérieux inconvénients et présentent des domaines d'applicabilité restreints. De plus, il n'existe pas de modèles alliant à la fois simplicité mathématique et conformité physique.

Toutefois, le but de la modélisation étant de pouvoir reproduire à l'échelle macroscopique, les principaux effets de l'amortissement sur les structures, un compromis peut être consenti, aussi bien avec l'amortissement visqueux linéaire, qu'avec l'amortissement structural linéaire, ce qui justifie leur large utilisation en pratique.

Chapitre III

DISCUSSION:

EFFETS DE L'AMORTISSEMENT SUR LA VIBRATION DES STRUCTURES

Les mécanismes de déperdition d'énergie, qui se manifestent lors de la réponse d'une structure à des chargements dynamiques, sont complexes et donc difficiles à évaluer.

Pourtant, il est évident que l'amortissement a une influence majeure sur l'amplitude de la réponse, particulièrement dans le cas d'une excitation sismique. Par conséquent, une certaine forme d'amortissement doit être incluse dans la formulation mathématique gouvernant la vibration des structures.

Pour cette raison, l'hypothèse d'un amortissement visqueux, très convenable mathématiquement, est largement utilisée dans l'analyse dynamique classique des structures, procurant souvent des estimations raisonnables de la réponse.

Les structures linéaires non amorties possèdent naturellement des modes normaux de vibration. Ces derniers lorsqu'ils sont utilisés pour définir des coordonnées principales, assurent l'indépendance des équations de mouvement et facilitent l'obtention des solutions .

Cependant, dès que l'amortissement visqueux est pris en considération, la situation devient plus compliquée. Ainsi, si un système ayant N degrés de libertés est faiblement amorti, N "modes amortis" de vibration peuvent lui être attribués..

Manifestement, ces modes diffèrent des modes principaux du système, définis en l'absence de l'amortissement, mais dégènèrent en ces modes principaux lorsque l'amortissement s'annule.

Toutefois, sous certaines conditions les "modes amortis" de vibration sont les mêmes que les "modes principaux". Les équations de mouvement dans ce cas sont facilement découplées et peuvent être manipulées de la même manière que celles du système non amorti.

Un système dynamique dont les modes propres de vibration sont les mêmes que ses modes amortis est dit: "*système à amortissement classique*".

"*L'amortissement classique*" (proportionnel ou orthogonal) est de ce fait une distribution d'amortissement telle, qu'une transformation en coordonnées modales non amorties (principales, orthogonales ou normales) conduit à un découplage des équations de mouvement suite à la diagonalisation de la matrice d'amortissement généralisée \mathbf{c} de la structure, au même titre que les matrices de rigidité \mathbf{k} et de masse \mathbf{m} . Dans ce cas, la matrice d'amortissement \mathbf{c} est orthogonale par rapport aux modes propres de vibration.

Dans la plupart des systèmes structuraux, l'amortissement est faible dans le sens où sa nature précise ainsi que sa distribution sont peu important lors de l'analyse de la réponse dynamique. Dans de telles conditions, la distribution de l'amortissement est supposée classique. L'amortissement modal peut alors être spécifié en termes de pourcentage d'amortissement critique pour chaque coordonnée modale.

Néanmoins, pour que cette hypothèse d'amortissement modal indépendant soit valide, il est nécessaire qu'un degré raisonnable d'homogénéité dans les mécanismes de déperdition d'énergie existe à travers la structure. En effet, d'importantes variations entre les taux d'absorption d'énergie dans les matériaux des diverses parties constituant la structure, causeraient une différence considérable de distributions des forces

d'amortissement comparées à celles des forces élastiques et des forces inertielles durant la vibration libre.

Un mécanisme d'amortissement de ce type est dit: "*amortissement non proportionnel*" (non orthogonal ou non classique).

L'amortissement non classique est donc défini comme une forme d'amortissement visqueux linéaire introduisant un couplage entre les équations de mouvement en coordonnées modales non amorties. Un système dynamique dont l'amortissement est non classique possède, manifestement des modes propres de vibration qui sont différents de ses modes amortis.

Les systèmes à amortissement non classique rencontrés en pratique sont:

- Les systèmes d'interaction sol-structure
- Les systèmes d'interaction fluide-structure
- Les systèmes primaires-secondaires
- Les systèmes munis de dispositifs spéciaux d'absorption d'énergie.

Ainsi, lors de la détermination de la réponse d'une structure à des excitations transmises à travers le sol sous-jacent (séismes ou autres), il est souvent nécessaire de considérer les vibrations couplées de la structure et du sol.

En effet, même si la matrice d'amortissement de la structure à base fixe est orthogonale, (par rapport aux modes normaux de cette même structure à base fixe), l'amortissement dans le sol (particulièrement celui dû à la radiation) ayant souvent une magnitude différente de celle de la structure, il est pratiquement impossible que le système sol-structure satisfasse les conditions d'orthogonalité.

Un phénomène similaire se manifeste lors des vibrations couplées structure-fluide (exemple: plate-formes offshore).

D'autre part, dans la plupart des bâtiments civils ou industriels

tels que les systèmes d'installation d'énergie nucléaire et les immeubles de grande hauteur, on rencontre souvent des systèmes secondaires (piping, équipement, etc...) supportés par des systèmes primaires (plate-forme offshore, building, etc...). A cause de leur nature composée, ces systèmes combinés primaires-secondaires possèdent des caractéristiques qui ne sont pas courantes dans les structures usuelles.

En effet, en plus des effets de "tuning"^{*} et d'interaction, ces systèmes composés possèdent un amortissement non classique qui se manifeste malgré le fait que l'amortissement des deux sous-systèmes primaire et secondaire, pris individuellement, soit classique donnant ainsi naissance à des modes complexes de vibration.

De même lorsque des dissipateurs d'énergie (energy absorbers) sont installés dans des structures, les niveaux d'amortissement de ces dissipateurs sont en général très élevés, leur permettant d'assurer leur rôle de réduction de la vibration structurale.

Par conséquent, bien que la matrice d'amortissement de la structure, considérée seule, puisse satisfaire les conditions d'orthogonalité, celle du système obtenu en rajoutant les degrés de liberté relatifs aux absorbants, ne pourra vérifier ces conditions.

* "tuning": coïncidence de fréquences naturelles de deux sous-systèmes (primaire, secondaire) et qui provoquent des réponses résonantes du système secondaire (voir chapitre VII)

Chapitre IV

ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT CLASSIQUE

IV. 1: INTRODUCTION

L'analyse dynamique des structures usuelles, exige la résolution d'un grand nombre d'équations d'équilibre dynamique. S'agissant de chargements de courte durée et qui tendent à exciter de nombreux modes de vibration, les procédures d'intégration numériques pas à pas sont en général très efficaces. Cependant, pour des chargements de durée relativement longue tels que les séismes et qui par contre ont tendance à exciter un nombre réduit de modes, la procédure de superposition modale est l'approche la plus appropriée. La différence essentielle entre ces deux approches est que contrairement à l'intégration directe, la superposition modale exige qu'un changement de base soit opéré, avant de procéder à l'intégration temporelle des équations d'équilibre.

En effet, le passage de la base des coordonnées physiques originelles vers la base des vecteurs propres (par exemple), permet de transformer les équations d'équilibre en une forme assurant une intégration numérique plus efficace.

La première étape de la méthode de superposition modale, consiste à modéliser la structure en un système ayant un nombre fini de DDL (degrés de liberté). Les matrices de masse et de rigidité sont alors évaluées ainsi

que le vecteur force (chargement dynamique), dans le système de coordonnées discrètes.

Une fois les configurations modales de la vibration non amortie déterminées [2,3,38], les équations de mouvement sont découplées par une transformation en ces coordonnées modales.

Ainsi, la réponse dynamique est estimée pour chaque coordonnée séparément. Cette technique permet donc d'exprimer la réponse du système MDOF (multi-degree-of-freedom) par une combinaison linéaire de ses réponses modales.

Deux versions de cette technique existent:

1-La version histoire temporelle, selon laquelle les réponses modales sont évaluées comme fonction du temps et combinées par la suite pour fournir l'histoire temporelle de la réponse du système.

2-La version spectre de réponse qui exige la détermination des valeurs maximales des réponses modales, souvent à partir du spectre de réponse de l'excitation considérée, la réponse maximale du système est alors estimée par une combinaison appropriée des réponses modales maximales d'où son nom "*approche modalo-spectrale*".

Cette approche modale qui est plus communément utilisée en pratique, est particulièrement avantageuse, si la réponse de la structure est dominée par la contribution d'une fraction relativement faible des modes inférieurs, étant donné que seuls ces modes significatifs seront pris en considération lors de la superposition. Par conséquent, l'efficacité de cette approche relativement à l'intégration directe dépend en grande partie du nombre de modes à inclure dans l'analyse. Ce nombre étant en général défini par le contenu fréquentiel de l'excitation. D'autre part, la variante spectre de réponse qui permet quant à elle, d'identifier et de considérer les termes dominants de la solution est particulièrement utile pour une estimation rapide des valeurs maximales de la réponse du système.

Une supposition de base pour cette méthode, est que l'amortissement

ne cause aucun couplage entre les équations modales. Dans de telles circonstances l'amortissement peut, plutôt que d'être défini dans le système de coordonnées originales, être représenté d'une manière adéquate par des pourcentages d'amortissement visqueux, spécifiés pour chaque composante de la réponse modale.

Pour les raisons qui viennent d'être évoquées, la suite de ce chapitre, est consacrée en une présentation succincte de la méthode de superposition modale classique (version histoire temporelle), pour l'étude des systèmes MDOF caractérisés par un amortissement proportionnel.

IV.2: ETUDE CLASSIQUE DES SYSTEMES MDOF AMORTIS

Considérons une structure à N DDL soumise à une excitation sismique. Sous forme matricielle les équations d'équilibre dynamique de cette structure peuvent être exprimées comme suit:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = -\mathbf{m} \mathbf{r} \ddot{x}_g(t) \quad (\text{IV.2.1})$$

où: $\ddot{x}_g(t)$ est l'accélération du sol

$\mathbf{m}, \mathbf{c}, \mathbf{k}$ sont respectivement les matrices de masse,

d'amortissement et de rigidité de la structure

$\mathbf{x}(t)$: vecteur déplacement relatif de la structure

\mathbf{r} : vecteur influence reliant les mouvements du sol aux DDL de la structure.

Le changement de base, évoqué plus haut, permettant la transformation des équations d'équilibre en une forme plus effective pour l'intégration numérique est réalisé grâce à la résolution de ces équations en vibration libre non amortie.

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.2.2})$$

En posant comme postulat que la solution de l'équation précédente est de la forme:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega (t - t_0) \quad (\text{IV.2.3})$$

où $\boldsymbol{\phi}$ est un vecteur d'ordre n , t_0 une constante temporelle et ω la fréquence de vibration (rad/sec) du vecteur $\boldsymbol{\phi}$, et en substituant (IV.2.3) dans (IV.2.2), nous obtenons la formulation du problème aux valeurs propres généralisé:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\phi} \quad (\text{IV.2.4})$$

Les configurations modales $\boldsymbol{\phi}_i$, et les fréquences naturelles $\omega_i, i=1,2,\dots,N$, relatives au système non amorti sont évidemment, déterminées à partir de la résolution du problème aux valeurs propres précédent.

Le vecteur déplacement $\mathbf{x}(t)$ est alors exprimé en fonction de la matrice modale Φ et du vecteur des coordonnées modales non amorties \mathbf{u} selon la relation :

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{u} \quad (\text{IV.2.5})$$

avec:

$$\Phi = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N] \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{Bmatrix}$$

Ainsi en substituant (IV.2.5) dans (IV.2.1) et en prémultipliant par la transposée de la matrice modale Φ^T , nous obtenons:

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi \ddot{\mathbf{u}} + \Phi^T \mathbf{c} \Phi \dot{\mathbf{u}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{u} = -\Phi^T \mathbf{m} \mathbf{r} \ddot{x}_g(t) \quad (\text{IV.2.6})$$

L'amortissement du système est supposé classique, par conséquent la matrice

d'amortissement σ est orthogonale par rapport à la matrice modale Φ au même titre que les matrices \mathbf{k} et \mathbf{m} . Il s'en suit que les équations de mouvement du système sont découplées en N équations modales indépendantes (IV.2.6).

La ième équation modale a pour expression :

$$\ddot{u}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = -\Gamma_i \ddot{x}_g(t) \quad (\text{IV.2.7})$$

où: $\Gamma_i = (\Phi_i^T \mathbf{m} \mathbf{x}) / M_i$: le facteur de participation modale

$\xi_i = (\Phi_i^T \sigma \Phi_i) / M_i$: pourcentage d'amortissement critique modal
estimé

$M_i = \Phi_i^T \mathbf{m} \Phi_i$: masse modale

La solution homogène de l'équation (IV.2.7) étant de la forme $\exp(\lambda_i(t))$ avec $\lambda_i = -\xi_i \omega_i \pm i\omega_{Di}$, $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$.

Pour une excitation $\ddot{x}_g(t)$ et des conditions initiales de repos la solution est définie par le produit de convolution suivant:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\frac{\Gamma_i}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \exp[-\xi_i \omega_i (t-\tau)] \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \\ &= -\Gamma_i h_i(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.8})$$

dans cette équation $h_i(t)$ est l'intégrale de *Duhamel* dont l'expression est:

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_{Di}} \int_0^t \exp[-\xi_i \omega_i (t-\tau)] \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (\text{IV.2.9})$$

Le vecteur déplacement $\mathbf{x}(t)$ est obtenu par superposition modale d'après la relation (IV.2.5):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \phi_i u_i \quad (\text{IV.2.10})$$

En général la réponse désirée $R(t)$ est une combinaison linéaire des composantes du vecteur déplacement nodal $\mathbf{x}(t)$:

$$R(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \psi_i h_i(t) \quad (\text{IV.2.11})$$

où: \mathbf{p} : vecteur de d'ordre N

$\psi_i = \mathbf{q}^T \phi_i \Gamma_i$: facteur de participation modale
effectif.

La méthode de superposition modale exposée ci dessus ne peut s'appliquer à un système à amortissement non proportionnel, car un tel système ne possède pas de modes normaux classiques assurant l'orthogonalité de sa matrice d'amortissement et permettant ainsi le découplage des équations modales, dans cette optique, il serait intéressant d'examiner les critères que doivent remplir les systèmes amortis afin de posséder des modes normaux classiques.

IV.3: CRITERES D'EXISTENCE DES MODES NORMAUX

Il est bien connu que les systèmes dynamiques linéaires non amortis, possèdent des modes normaux, et que dans chaque mode normal, les diverses parties de la structure vibrent en phase. Toutefois, cette propriété peut ne pas être vérifiée pour les systèmes amortis qui ne possèdent pas de modes normaux classiques, sauf si certaines conditions sont vérifiées. En effet, *Rayleigh* a montré que si la matrice d'amortissement \mathbf{c} est une combinaison linéaire des matrices de masse \mathbf{m} et rigidité \mathbf{k} , alors les modes normaux classiques existent. Il n'est cependant pas exigé que la

matrice \mathbf{c} soit restreinte à cette forme, comme cela a été démontré par Caughey [10]. Alors que *Wilson* et *Penzien* [54], ont développé une expression concise de la forme la plus générale de la matrice \mathbf{c} qui puisse être diagonalisée par une transformation en coordonnées normales. Enfin, un critère d'existence des modes normaux a été formulé par *Fawzy* [20], fournissant une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de la matrice \mathbf{c} relativement aux modes normaux.

IV.3.1: Série de Caughey

La forme la plus générale d'une matrice d'amortissement visqueux ayant des propriétés d'orthogonalité, a été développée à l'origine par *Caughey* sous l'expression suivante:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}^{1/2} \left\{ \sum_{r=0}^{r=N-1} a_{rs} (\mathbf{m}^{-1/2} \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1/2})^{r/s} \right\} \mathbf{m}^{1/2} \quad (\text{IV.3.1.1})$$

Avec $s=1,2,3,\dots$ paramètres arbitraires et a_{rs} coefficients numériques.

En particulier si $s=1$, alors cette formulation devient:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{r=0}^{N-1} a_r (\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k})^r \quad (\text{IV.3.1.2})$$

Pour évaluer les constantes a_r , il est nécessaire de les exprimer en fonction des % d'amortissement critique des modes individuels.

En posant pour le mode j :

$$\Phi_j^T \mathbf{m} \Phi_j = M_j \quad (\text{IV.3.1.3})$$

et

$$\Phi_j^T \mathbf{c} \Phi_j = 2\xi_j \omega_j M_j = C_j \quad (\text{IV.3.1.4})$$

et en substituant (IV.3.1.2) dans (IV.3.1.4) nous obtenons:

$$C_j = \sum_{r=0}^{r=n-1} a_r M_j \omega_j^{2r} = 2 M_j \omega_j \xi_j \quad (\text{IV.3.1.5})$$

On en déduit les expressions des pourcentages (%) d'amortissement critiques modaux par la formulation:

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0}{\omega_j} + a_1 \omega_j + a_2 \omega_j^3 + \dots + a_{N-1} \omega_j^{2N-3} \right\} \quad (\text{IV.3.1.6})$$

$j=1, 2, \dots, N$

Si les % d'amortissement critique sont spécifiés pour chaque mode j , les constantes a_r ($r=0, 1, \dots, N-1$), peuvent être déterminées à partir de l'équation (IV.3.1.6).

La matrice d'amortissement est alors évaluée moyennant la formulation (IV.3.1.2).

Il convient de noter, que si l'amortissement n'est spécifié qu'en un nombre limité de modes, alors la série définie dans l'équation (IV.3.1.6) est tronquée à un nombre de termes égal à celui des modes dont les % d'amortissement critique sont spécifiés.

Cette procédure présente toutefois de sérieuses difficultés numériques, lorsque le nombre de DDL augmente, ce qui compromet son applicabilité. Ces difficultés sont dues à l'augmentation rapide des valeurs numériques correspondant aux termes ω_j^i dans l'équation (IV.3.1.6) lorsque i augmente pour atteindre sa valeur maximale $2N-3$.

Il est à noter que l'amortissement de *Rayleigh* est donné par les deux premiers termes de l'équation (IV.3.1.2):

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (\text{IV.3.1.7})$$

Dans cette expression les coefficients numériques a_0 et a_1 sont choisis de

manière à satisfaire aux % d'amortissement attribués à deux fréquences sélectionnées. Ceci grâce à la transformation modale suivante :

$$\Phi^T c \Phi = a_0 \Phi^T m \Phi + a_1 \Phi^T k \Phi \quad (\text{IV.3.1.8})$$

qui fournit des termes diagonaux de la forme

$$2\xi_j \omega_j = a_0 + a_1 \omega_j^2 \quad (\text{IV.3.1.9})$$

Ainsi :

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_j} + a_1 \omega_j \right) \quad (\text{IV.3.1.10})$$

En attribuant des valeurs de ξ_j , à deux modes arbitraires $j=j_1$ et $j=j_2$, nous aboutissons à un système à deux équations et deux inconnues, à partir duquel les coefficients a_0 et a_1 peuvent être déterminés. L'inconvénient majeur de l'amortissement de Rayleigh est que les modes en dessous de j_1 et ceux au dessus de j_2 sont fortement amortis, alors que les modes entre j_1 et j_2 peuvent être sérieusement sous amortis (voir Fig. IV.1).

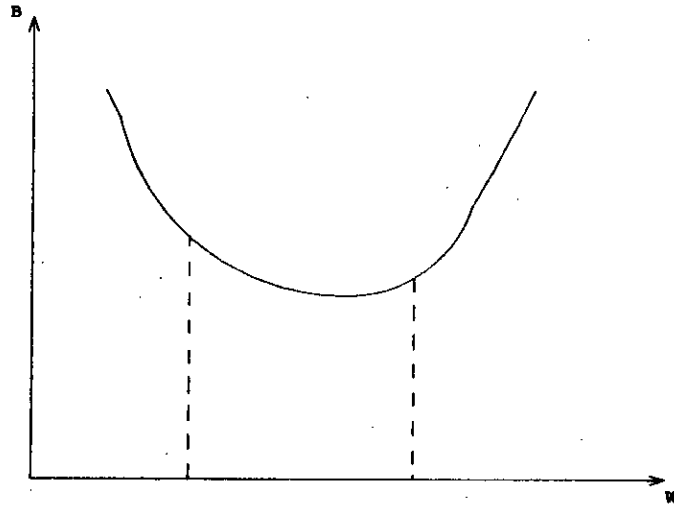


Fig. IV.1:

IV.3.2: Méthode Directe de Wilson-Penzien

Wilson et *Penzien* [54] ont présenté une procédure directe de détermination de la matrice d'amortissement, vérifiant les conditions d'orthogonalité. L'avantage de cette procédure est qu'elle évite les difficultés numériques de la série de *Caughey*.

Pour cela considérons les équations suivantes :

$C = \Phi^T c \Phi$:matrice d'amortissement généralisée

$M = \Phi^T m \Phi$:matrice masse généralisée

Des manipulations matricielles simples nous permettent d'obtenir :

$$c = \Phi^{T-1} C \Phi^{-1}. \quad (\text{IV.3.2.1})$$

$$\Phi^{T-1} = m \Phi M^{-1} \quad (\text{IV.3.2.2})$$

$$\Phi^{-1} = M^{-1} \Phi^T m \quad (\text{IV.3.2.3})$$

En substituant les équations (IV.3.2.2) et (IV.3.2.3) dans l'équation (IV.3.2.1) nous obtenons:

$$c = \theta \beta \theta^T \quad (\text{IV.3.2.4})$$

La matrice θ est définie par :

$$\theta = m \Phi \quad (\text{IV.3.2.5})$$

La matrice β est diagonale dont les termes sont définis par:

$$\beta_j = 2 \frac{\xi_j \omega_j}{M_j} \quad (\text{IV.3.2.6})$$

Une forme alternative à l'équation (IV.3.2.4) est une sommation des matrices d'amortissement modales C_j , définie comme suit:

$$c = \sum_{j=1}^N C_j \quad (\text{IV.3.2.7})$$

où C_j est une matrice causant un amortissement dans le mode r seulement et qui peut être calculée directement à partir des matrices θ_j selon la relation :

$$C_j = \beta_j \theta_j \theta_j^T \quad (\text{IV.3.2.8})$$

En conclusion, la méthode directe de *Wilson-Penzien* est à la fois plus convenable et moins compromise numériquement que la série de *Caughey*. En fait, si l'amortissement est spécifié en un nombre limité de modes alors, la série de *Caughey* peut être adoptée sans difficultés, néanmoins, l'approche directe est plus recommandée si cet amortissement doit être contrôlé en un grand nombre de modes.

IV.3.3: Critère de Fawzy

La condition d'orthogonalité de la matrice d'amortissement est exprimée mathématiquement par:

$$\Phi^T \mathbf{c} \Phi \text{ matrice diagonale}$$

D'après ce qui a précédé, si la matrice \mathbf{c} a une forme telle que spécifiée par *Caughey* ou encore par *Wilson* et *Penzien*, cette condition se trouve automatiquement vérifiée, toutefois aucune des formulations susmentionnées n'est nécessaire pour assurer l'orthogonalité de la matrice \mathbf{c} . L'existence d'une condition à la fois nécessaire et suffisante peut donc se poser. Cette condition existe effectivement, ayant été fournie par *Fawzy* [20] sous la formulation suivante:

Une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de la matrice \mathbf{c} (par rapport aux modes non amortis) est la symétrie du produit matriciel $\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c}$.

La preuve est présentée dans ce qui suit:

En supposant que les modes non amortis sont orthonormalisés par rapport à la matrice masse il vient:

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} ; \quad \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Omega^2$$

avec Ω la matrice spectrale diagonale.

Soit Λ la matrice d'amortissement généralisée $\Lambda = \Phi^T \mathbf{c} \Phi$.

Les matrices \mathbf{k} et \mathbf{m} étant définies positives en général et la matrice Φ non singulière nous aurons:

$$\mathbf{m}^{-1} = \Phi \Phi^T \quad \mathbf{k} = (\Phi^T)^{-1} \Omega^2 \Phi^{-1} \quad \mathbf{c} = (\Phi^T)^{-1} \Lambda \Phi^{-1} \quad (\text{IV.3.3.1})$$

ainsi :

$$\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c} = (\Phi^T)^{-1} \Omega^2 \Lambda \Phi^{-1} \quad (\text{IV.3.3.2})$$

D'autre part :

$$\mathbf{c} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} = (\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c})^T = (\Phi^T)^{-1} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Omega}^2 \Phi^{-1} \quad (\text{IV.3.3.3})$$

Il vient donc que pour que le produit $\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c}$ soit symétrique, il faut et il suffit que:

$$\mathbf{\Omega}^2 \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Omega}^2 \quad (\text{IV.3.3.4})$$

La matrice $\mathbf{\Omega}^2$ étant diagonale, l'égalité précédente aura lieu si et seulement si la matrice $\mathbf{\Lambda}$ est diagonale.

Nous ne manquerons pas de signaler, que le critère de *Fawzy* présente l'important avantage, de pouvoir être vérifié sans pour autant exiger la disponibilité des modes propres de la structure. De plus, cette vérification peut être faite pour n'importe quel système, dès lors que la matrice \mathbf{m} est souvent diagonale et les matrices \mathbf{k} et \mathbf{c} sont à bande étroite. Il n'en demeure pas moins, que ce critère exige la disponibilité de la matrice \mathbf{c} sous forme explicite ce qui cependant, n'est pas toujours garantie.

Chapitre V

ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

V.1: ETUDE DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES COMPLEXES

Les équations de mouvement des systèmes structuraux ayant des matrices d'amortissement non classique, ne pouvant être diagonalisées par une transformation modale classique, peuvent toujours être découplées, si la technique de superposition modale est généralisée de manière à inclure les modes et fréquences complexes du système amorti.

Cependant, une telle généralisation élimine certains avantages inhérents à l'analyse modale classique dès lors qu'elle nécessite l'utilisation de l'algèbre complexe, ainsi que des algorithmes de résolution des problèmes aux valeurs propres quadratiques spéciaux.

Cette alternative présente néanmoins, un grand intérêt théorique en raison de son utilisation dans l'investigation des caractéristiques dynamiques des systèmes mécaniques (relativement simples)[31].

En supposant que $\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{c}$ sont respectivement les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système à amortissement non classique étudié.

L'équation de mouvement est définie par:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (\text{V.1.1})$$

\mathbf{p} : vecteur chargement $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

La vibration libre est alors caractérisée par l'équation homogène suivante:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (\text{V.1.2})$$

La formulation du problème aux valeurs propres peut être faite selon deux procédés différents, quadratique ou linéaire. Ces deux formulations sont exposées ci dessous:

V.1.1: Problème Quadratique Aux Valeurs Propres

Il s'agit d'abord de choisir une solution harmonique de l'équation homogène (V.1.2). Ce choix peut aussi se faire selon deux alternatives:

$$x = \phi e^{i\mu t} \text{ ou } x = \phi e^{\lambda t} \text{ avec } \lambda = i\mu$$

La première expression a été utilisée par *Kausel* [31], la seconde par *Hurty et Rubenstein* [24] ainsi que par *Foss* [21].

Dans cette première formulation nous choisissons une fonction de la forme: $x = \phi e^{i\mu t}$; $i = \sqrt{-1}$.

En substituant cette solution dans l'équation homogène, nous obtenons:

$$(-\mu^2 m + i\mu c + k) \phi = 0 \quad (\text{V.1.1.1})$$

qui est un problème quadratique aux valeurs propres en μ , dont les vecteurs propres sont ϕ .

Si on note $\bar{\phi}$ le transposé du conjugué du vecteur ϕ et en supposant que les matrices m, c, k sont réelles, symétriques et que m est définie positive:

Les produits suivants a,b,c seront des nombres réels tels que:

$$\bar{\phi} m \phi = a ; \bar{\phi} c \phi = b ; \bar{\phi} k \phi = c \quad (\text{V.1.1.2})$$

a est en plus strictement positif

En prémultipliant (V.1.1.1) par $\bar{\Phi}$ nous obtenons:

$$-\mu^2 a + i\mu b + c = 0 \quad (\text{V.1.1.3})$$

Les quotients de *Rayleigh* étant définis par :

$$p = 1/2 \frac{\bar{\Phi} c \Phi}{\bar{\Phi} m \Phi} \quad q^2 = \frac{\bar{\Phi} k \Phi}{\bar{\Phi} m \Phi} \quad (\text{V.1.1.4})$$

Ainsi la division de l'équation (V.1.1.3) par (-a) donne:

$$\mu^2 - 2ip\mu - q^2 = 0 \quad (\text{V.1.1.5})$$

Il s'en suit qu'une paire de nombres réels (p_j, q_j) existe pour chaque solution $\Phi = \Phi_j$ donnée par:

$$p_j = 1/2 \frac{\bar{\Phi}_j c \Phi_j}{\bar{\Phi}_j m \Phi_j} \quad q_j^2 = \frac{\bar{\Phi}_j k \Phi_j}{\bar{\Phi}_j m \Phi_j}$$

La solution de l'équation (V.1.1.5) avec la paire (p_j, q_j) conduit alors à la valeur propre $\mu = \mu_j$ donnée par:

$$\mu = ip \pm \sqrt{q^2 - p^2}$$

Dans le cas particulier d'un amortissement classique et donc d'une matrice modale non amortie Φ qui diagonalise la matrice d'amortissement, nous obtenons des modes réels $\Phi_j = y_j$.

Les quotients de *Rayleigh* deviennent: $p_j = \xi_j \omega_j$, $q_j^2 = \omega_j^2$.

où ω_j est la fréquence non amortie correspondant au jème mode considéré et ξ_j son taux d'amortissement visqueux.

Pour cette situation particulière, les valeurs propres complexes sont de la forme :

$$\mu = \omega_j (\pm\sqrt{1-\xi_j^2} + i\xi_j) = \omega_{Dj} (\pm 1 + i\frac{\xi_j}{\sqrt{1-\xi_j^2}}) \quad (\text{V.1.1.6})$$

La partie réelle de cette valeur propre représente à la fréquence amortie $\omega_{Dj} = \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}$ du mode j idéalisé comme un système à un DDL.

Dans le cas d'un amortissement non classique, la matrice modale Φ ne peut diagonaliser la matrice \mathbf{c} , mais nous pouvons toujours avoir une idée sur la nature de la solution de l'équation (V.1.1.5), en interprétant les quotients de *Rayleigh*.

En effet, si nous considérons les deux problèmes réels aux valeurs propres suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \mathbf{y}_j &= \omega_j^2 \mathbf{m} \mathbf{y}_j \\ \mathbf{c} \mathbf{z}_j &= 2 \varepsilon_j \mathbf{m} \mathbf{z}_j \end{aligned} \quad (\text{V.1.1.7})$$

Les valeurs propres minimales et maximales étant: $\omega_1, \omega_N, \varepsilon_1, \varepsilon_N$, le théorème de limitation (enclosure theorem) nous procure des bornes pour les quotients de *Rayleigh*.

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\leq q^2 \leq \omega_N^2 \\ \varepsilon_1 &\leq p \leq \varepsilon_N \end{aligned}$$

$$\frac{\mathbf{y}_1^T \mathbf{k} \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{m} \mathbf{y}_1} \leq \frac{\mathbf{y}_j^T \mathbf{k} \mathbf{y}_j}{\mathbf{y}_j^T \mathbf{m} \mathbf{y}_j} \leq \frac{\mathbf{y}_N^T \mathbf{k} \mathbf{y}_N}{\mathbf{y}_N^T \mathbf{m} \mathbf{y}_N}$$

c-a-d:

$$\frac{\mathbf{z}_1^T \mathbf{c} \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1^T \mathbf{m} \mathbf{z}_1} \leq \frac{\mathbf{z}_j^T \mathbf{c} \mathbf{z}_j}{\mathbf{z}_j^T \mathbf{m} \mathbf{z}_j} \leq \frac{\mathbf{z}_N^T \mathbf{c} \mathbf{z}_N}{\mathbf{z}_N^T \mathbf{m} \mathbf{z}_N}$$

En général, $\Phi_j \neq \mathbf{y}_j \neq \mathbf{z}_j$, par conséquent des prédictions sur les

valeurs relatives des quotients de *Rayleigh* ne peuvent être faites à priori. Cependant, le lieu géométrique des valeurs p et q est représenté par la région rectangulaire dans la figure suivante:

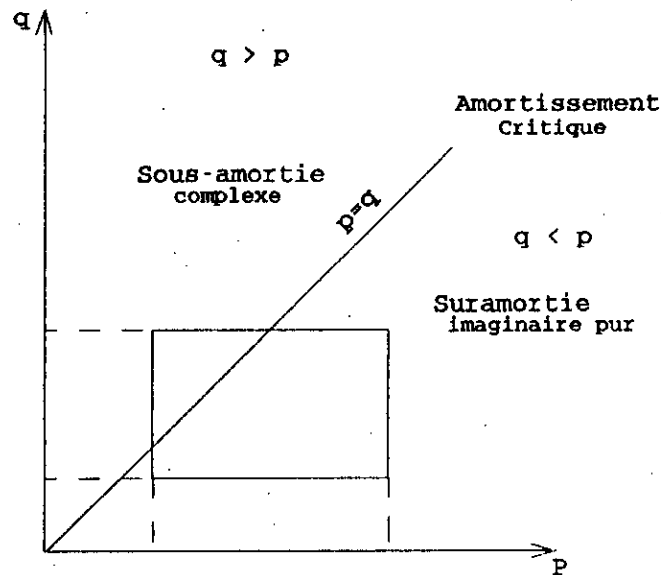


Fig. V.1:

Selon que le point (p,q) soit au dessus ou en dessous de la ligne à 45° , les oscillations seront soit sous-amorties soit suramorties.

Les quotients de *Rayleigh* avec modes non amortis constituent une première estimation de ces deux paramètres.

Afin de formuler la solution en vibration libre de manière complète, on note que le vecteur ϕ^σ (conjugué de ϕ) satisfait la même équation quadratique (V.1.1.1) que le vecteur ϕ . Ceci étant car ces deux vecteurs ϕ et ϕ^σ produisent les mêmes scalaires a, b, c .

Ainsi les valeurs de a, b, c données par ϕ^σ sont:

$$a = \phi^T m \phi^\sigma = (\phi^T m \phi^\sigma)^T = \overline{\phi} m \phi$$

$$b = \phi^T c \phi^\sigma = (\phi^T c \phi^\sigma)^T = \overline{\phi} c \phi$$

$$c = \phi^T k \phi^\sigma = (\phi^T k \phi^\sigma)^T = \overline{\phi} k \phi$$

Il en découle que si μ est complexe, les vecteurs propres solutions de l'équation quadratique (V.1.1.1) sont des paires de complexes conjugués.

La solution complète du problème aux valeurs propres quadratique est $\mu_1 = ip+r$ et $\mu_2 = ip-r$, et les vecteurs propres correspondants sont respectivement ϕ et ϕ^σ . Ceci étant vrai si $r = \sqrt{q^2 - p^2} > 0$.

En revanche, si r est nul ou purement imaginaire ($p \geq q$), la valeur propre est purement imaginaire tandis que le vecteur propre correspondant est réel.

Examinons la vibration libre de la structure considérée dans le cas d'un mode sous-amorti (valeurs propres complexes) :

$$x = \alpha_1 \phi e^{i\mu_1 t} + \alpha_2 \phi^\sigma e^{i\mu_2 t} \quad (\text{V.1.1.8})$$

α_1 et α_2 étant des constantes d'intégration qui sont égales, car la réponse doit être réelle :

$$x = \alpha_1 \phi e^{i(ip+r)t} + \alpha_2 \phi^\sigma e^{i(ip-r)t}$$

$$x = \alpha (\phi e^{irt} + \phi^\sigma e^{-irt}) e^{-pt}$$

$$x = 2 \alpha \operatorname{Re}[\phi e^{irt}] e^{-pt}$$

En posant :

$$\phi = \begin{bmatrix} a_1 e^{i\theta_1} \\ a_2 e^{i\theta_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N e^{i\theta_N} \end{bmatrix} \quad (\text{V.1.1.9})$$

(a_i, θ_i) étant respectivement le module et le déphasage de la composante i lorsque le mode ϕ est excité.

Nous aurons alors :

$$\mathbf{x} = 2 \alpha \operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} \left[\begin{matrix} a_1 e^{i\theta_1} \\ a_2 e^{i\theta_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N e^{i\theta_N} \end{matrix} \right] e^{irt} \end{matrix} \right\} e^{-pt}$$

$$\mathbf{x} = 2\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix} e^{-pt} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + rt) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos(\theta_N + rt) \end{bmatrix} \quad (\text{V.1.1.10})$$

Ainsi d'après l'équation (V.1.1.10) chaque masse exécute une vibration harmonique de fréquence r et dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps. De plus, les composantes modales sont complexes par conséquent, ces masses ne vibrent pas en phase.

Le triplet $q, r, p/q$ peuvent être respectivement interprétés par la fréquence ω , la fréquence amortie et le % d'amortissement critique du mode complexe (en général ces caractéristiques sont différentes de celles des modes non amortis).

V.1.2: Problème Linéaire Aux Valeurs Propres

Le problème aux valeurs propres formulé par (V.1.2) peut aussi être résolu en transformant le système initial à N équations différentielles du second ordre, en un système à $2N$ équations différentielles du premier ordre, comme cela a été suggéré par *Foss* [21] ou encore par *Hurty* et *Rubenstein* [24].

Ceci est obtenu en rajoutant l'une des équations triviales suivantes :

$$\mathbf{k} \mathbf{x} - \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{V.1.2.1})$$

ou bien:

$$m \ddot{x} - m \dot{x} = 0 \quad (\text{V.1.2.2})$$

qui combinées avec l'équation (V.1.2) donnent comme première alternative:

$$\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{V.1.2.3})$$

et comme seconde alternative:

$$\begin{bmatrix} c & m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{V.1.2.4})$$

Ces équations en vibrations libres peuvent être formulées grâce au vecteur d'état $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ comme suit:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{V.1.2.5})$$

Un choix de solution de la forme $\mathbf{x} = \phi e^{\lambda t}$ conduit à un problème linéaire aux valeurs propres formulé comme suit:

$$\lambda \mathbf{A} \mathbf{v} = -\mathbf{B} \mathbf{v} \quad (\text{V.1.2.6})$$

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont réelles et symétriques d'ordre $2N \times 2N$, par conséquent, plusieurs techniques et propriétés des problèmes aux valeurs propres linéaires s'appliquent à ce cas.

Cependant, les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} n'étant pas définies positives, il s'en suit que les valeurs propres ne sont pas nécessairement réelles ($\lambda = i\mu$).

Les solutions relatives au mode r sont de la forme $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \phi_r \\ \lambda_r \phi_r \end{bmatrix}$ avec

$(\phi_r, \lambda_r \phi_r)$ correspondant respectivement aux vecteurs déplacement et vitesse.

La résolution de ce problème aux valeurs propres procure $2N$ valeurs propres complexes ainsi qu'un nombre correspondant de vecteurs propres.

Les valeurs complexes sont accompagnées de leurs conjuguées. Cependant, certaines valeurs propres peuvent être réelles.

Une paire de complexes conjugués correspond à un mode sous-amorti présentant des différences de phase entre les composantes (masses) de la structure, maintenues dans ce mode en vibration libre.

Une valeur propre réelle et le vecteur propre correspondant sont associés à un mode dont l'amortissement est supérieur ou égal à l'amortissement critique. De telle sorte qu'en vibrations libres le système maintient sa configuration durant la décroissance sans osciller.

Il est à remarquer que les solutions obtenues dépendent exclusivement du choix de la solution "essai", $\mathbf{x} = \phi e^{\lambda t}$ ou $\mathbf{x} = \phi e^{i\mu t}$.

En effet, un choix $\mathbf{x} = \phi e^{i\mu t}$, procurera des valeurs propres complexes lorsqu'il s'agit d'un mode sous-amorti ou bien des valeurs propres purement imaginaires dans le cas où l'amortissement du mode considéré est critique ou surcritique.

Les vecteurs propres d'un système sont orthogonaux par rapport aux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} . Ces relations d'orthogonalité peuvent être obtenues en considérant deux modes différents r et s , ces modes vérifient la condition (V.1.2.6), par conséquent:

$$\begin{aligned} \lambda_r \mathbf{A} \mathbf{V}_r &= -\mathbf{B} \mathbf{V}_r & (a) \\ \lambda_s \mathbf{A} \mathbf{V}_s &= -\mathbf{B} \mathbf{V}_s & (b) \end{aligned} \tag{V.1.2.7}$$

En prémultipliant ces deux équations respectivement par les vecteurs transposés \mathbf{V}_s^T et \mathbf{V}_r^T nous aurons:

$$\begin{aligned} \lambda_r \mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r &= -\mathbf{V}_s^T \mathbf{B} \mathbf{V}_r & (a) \\ \lambda_s \mathbf{V}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_s &= -\mathbf{V}_r^T \mathbf{B} \mathbf{V}_s & (b) \end{aligned} \tag{V.1.2.8}$$

En transposant les deux membres de l'égalité (V.1.2.8.b), la symétrie des matrices \mathbf{V}_s^T et \mathbf{V}_r^T nous permet d'obtenir :

$$\lambda_s \mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = -\mathbf{V}_s^T \mathbf{B} \mathbf{V}_r \quad (\text{V.1.2.9})$$

En soustrayant les équations (V.1.2.8.a) et (V.1.2.9) nous aurons :

$$(\lambda_r - \lambda_s) \mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 0 \quad (\text{V.1.2.10})$$

Les valeurs propres λ_r et λ_s étant différentes pour deux modes distincts, l'équation (V.1.2.10) fournit la relation d'orthogonalité par rapport à la matrice \mathbf{B} reliant les vecteurs propres \mathbf{V}_r et \mathbf{V}_s .

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 0 ; \quad r \neq s \quad (\text{V.1.2.11})$$

L'équation (V.1.2.9) fournit la condition d'orthogonalité par rapport à la matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{B} \mathbf{V}_r = 0 ; \quad r \neq s \quad (\text{V.1.2.12})$$

Pour un système sous-amorti ces conditions d'orthogonalité s'appliquent aussi à deux vecteurs propres complexes conjugués \mathbf{V}_r et \mathbf{V}_r^c , associés à un mode unique et dont les valeurs propres sont respectivement λ_r et λ_r^c .

La prémultiplication de (V.1.2.7.a) par le vecteur $(\mathbf{V}_r^c)^T = \overline{\mathbf{V}_r}$ donne:

$$\lambda_r \overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{A} \mathbf{V}_r = -\overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{B} \mathbf{V}_r \quad (\text{V.1.2.13})$$

Or λ_r est complexe alors que les produits $(\overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{A} \mathbf{V}_r, \overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{B} \mathbf{V}_r)$ sont réels ce qui implique:

$$\overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 0 , \quad \overline{\mathbf{V}_r} \mathbf{B} \mathbf{V}_r = 0 \quad (\text{V.1.2.14})$$

En résumé, un système à amortissement linéaire visqueux proportionnel vibre librement selon des modes découplés, dont les configurations sont similaires à celles des modes normaux du système non amorti. La seule différence est que les amplitudes du système amorti décroissent exponentiellement avec le temps, et d'une manière uniforme tout au long du système. Ces modes de vibration se distinguent par une distribution spatiale de points nodaux stationnaires.

Un système à amortissement linéaire visqueux mais non proportionnel peut aussi vibrer librement selon des "modes" non couplés. Dans chacun de ces modes, les différentes composantes (masses) du système subissent un mouvement amorti exponentiellement, à la même fréquence mais selon des angles de déphasage différents. Dans ce dernier cas, les noeuds (s'ils peuvent être appelés ainsi) ne sont pas stationnaires.

Pour illustrer ceci, prenons l'exemple d'une structure à plusieurs DDL. Dans le cas où son amortissement est classique, il existera dans cette structure certaines positions (variant d'un mode à un autre) qui ne vibrent pas du tout. Ceux ci correspondent aux points stationnaires du système. Lorsque cette structure est sujette à des chargements dynamiques dont la fréquence dominante est au voisinage d'une fréquence naturelle donnée, le point stationnaire correspondant à ce mode ne bougera que très faiblement.

Par contre, si l'amortissement de cette structure est non classique, les points stationnaires n'existeront pas.

V.2: PROCEDURES D'ANALYSE DES SYSTEMES A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

V.2.1: Introduction:

Lorsque l'amortissement d'un système dynamique est non classique, ses

équations de mouvement ne peuvent être découplées par une transformation modale classique (en modes non amortis). Par conséquent, la réponse du système devra être obtenue en intégrant ces équations simultanément. Les techniques d'intégration pas à pas existent à cet effet [3]. Néanmoins, il est plus intéressant d'intégrer quelques équations couplées en coordonnées principales plutôt que de le faire pour le système couplé original [11].

Des approches approximatives existent aussi pour l'étude de ce type de système où les modes normaux peuvent toujours être utilisés.

Dans l'approche la plus communément adoptée, les termes extra diagonaux de la matrice d'amortissement généralisée, représentant le couplage modal, sont complètement ignorés, alors que les termes diagonaux sont utilisés afin d'estimer les taux d'amortissement modaux [47].

Dans d'autres approches, ces taux d'amortissement sont évalués par pondération [40].

Cependant, ces procédures de simplification ne s'appliquent pas à tous les types de systèmes. Dans ce cadre, certains auteurs [52] considèrent les conditions selon lesquelles l'omission des termes extra diagonaux de la matrice d'amortissement transformée serait admissible.

Une alternative à l'utilisation des modes naturels non amortis, lors de l'analyse des systèmes non classiques, est l'utilisation des modes amortis [21]. Celle-ci assure le découplage des coordonnées généralisées sans recours à une approximation de la matrice d'amortissement transformée. L'inconvénient de cette technique réside dans l'évaluation et la manipulation de ces modes amortis qui nécessite le recours à l'algèbre complexe.

Cependant, récemment cette méthode de superposition modale généralisée (avec modes complexes) a gagné l'intérêt de la communauté des ingénieurs praticiens. Mieux encore, elle est reconnue comme étant une technique puissante et économique destinée à l'analyse des problèmes à large échelle.

Nous citons son utilisation pour l'étude des systèmes primaires-secondaires [28, 35], ainsi que son adoption par *Jennings et Bielak* [30] pour une application à un problème d'interaction sol-structure.

V.2.2: Procédure d'Intégration des Equations Modales Couplées

V.2.2.1: Méthode d'Intégration d'un Nombre Limité d'Equations Modales

La procédure standard d'analyse des structures à amortissement non classique est l'intégration directe des équations couplées exprimées dans le système de coordonnées discrètes originales. L'inconvénient majeur en est la nécessité d'inclure toutes les équations de mouvement dans l'analyse étant donné, qu'aucune des coordonnées discrètes ne peut être supposée d'importance négligeable par rapport à la réponse dynamique. Par conséquent, ce procédé s'avère onéreux à cause de l'effort de calcul considérable exigé lors de l'analyse dynamique des systèmes ayant des centaines de DDL.

Afin d'éviter les inconvénients des méthodes d'intégration directe, *Clough et Mojtahedi* [11] exploitèrent les avantages de la transformation en modes normaux pour l'analyse des structures non classiques sujettes à des excitations sismiques.

Selon *Clough et al.* [11], la réponse sismique étant dominée par la contribution de basses fréquences, la transformation en coordonnées modales non amorties, peut être limitée aux modes inférieurs. Les équations modales couplées obtenues sont alors intégrées simultanément, la tâche est cependant très simplifiée par rapport à l'intégration directe des équations couplées initiales.

Il convient de noter cependant, que la troncature modale peut être une source d'erreurs importantes dans certains cas.

Dans cette optique *Duncan et Taylor* [19] investiguèrent l'effet du couplage modal dans les systèmes à amortissement non classique et prouvèrent que des erreurs significatives pouvaient se manifester si l'analyse dynamique de tels systèmes était basée sur un ensemble tronqué de modes, même si le couplage entre ces modes était pris en compte lors de la résolution (comme cela est le cas dans la méthode de *Clough et Mojtahedi* [11]).

La cause en est qu'un couplage notable peut exister, par exemple, entre le mode fondamental et un mode supérieur, dont la contribution peut être négligée en l'absence du couplage par amortissement.

V.2.2.2: Méthodes d'Intégration d'un Nombre Limité d'Equations Modales avec Inclusion des Modes Supérieurs

La méthode proposée est une extension de celle de *Clough et Mojtahedi* [11]. En effet, l'intégration d'un ensemble tronqué d'équations modales couplées telle que proposée dans [11], s'avère contestable surtout lorsque la réponse recherchée est en termes de contraintes.

Ceci étant dû d'une part à l'effet dit de "*missing mass*" (masse manquante) causé par la troncature modale, et d'autre part au couplage modal existant entre les modes considérés lors de l'analyse, et les modes supérieurs omis. Ce dernier effet est particulier aux systèmes à amortissement non classique.

Dans les systèmes à amortissement classique, l'effet de "*missing mass*" est automatiquement résolu par rajout de la contribution quasistatique des modes supérieurs. Ceci étant la base de l'approche "*accélération du mode*" [23, 34].

Une procédure similaire appliquée à l'étude des systèmes à amortissement non classique, après transformation en coordonnées modales non amorties, impliquerait l'omission du couplage entre les modes inférieurs et les modes supérieurs, causé par l'amortissement.

Une telle méthode a été proposée par *Kulkarni* et *Ng* [33] et est exposée dans ce qui suit.

Les équations de mouvement d'un système à N ddl soumis à une excitation sismique $\ddot{x}_g(t)$ étant:

$$m \ddot{\mathbf{x}} + c \dot{\mathbf{x}} + k \mathbf{x} = -m \mathbf{r} \ddot{x}_g(t) \quad (\text{V.2.2.2.1})$$

\mathbf{r} : est un vecteur correspondant aux déplacements statiques de chaque DDL provoqué par le déplacement statique unitaire du support dans la direction du séisme.

si Φ est la matrice modale normalisée par rapport à la matrice de masse.

$\gamma_j = \Phi_j^T m \mathbf{r}$: jème facteur de participation modale.

$\mathbf{x}_j = \Phi_j q_j$: contribution du jème mode au vecteur déplacement

En notant que:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \gamma_j \quad (\text{V.2.2.2.2})$$

Nous obtenons:

$$m \sum_{j=1}^N \ddot{\mathbf{x}}_j + c \sum_{j=1}^N \dot{\mathbf{x}}_j + k \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j = -\sum_{j=1}^N m \Phi_j \gamma_j \ddot{x}_g(t)$$

Dans le cas des systèmes à amortissement classique, les équations modales sont découplées et nous permettent d'écrire:

$$m \ddot{\mathbf{x}}_j + c \dot{\mathbf{x}}_j + k \mathbf{x}_j = -m \Phi_j \gamma_j \ddot{x}_g \quad (\text{V.2.2.2.3})$$

Cette équation représente la réponse de la structure dans le jème mode de vibration.

Un tel découplage n'est cependant pas possible, pour un système à amortissement non classique.

Dans la procédure de *Kulkarni et al.*, la réponse totale \mathbf{x} est obtenue en superposant les réponses \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' dans le domaine temporel.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'' \quad (\text{V.2.2.2.4})$$

Avec $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ définies par:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{N'} \phi_j q_j ; \quad \mathbf{x}'' = \sum_{j=N'+1}^N \phi_j q_j \quad (\text{V.2.2.2.5})$$

N' est le nombre de modes dont la fréquence est en dessous de la fréquence limite (*cut-off frequency*, en général fixée à 33hz), au delà de cette fréquence seule la résistance élastique est d'importance notable.

\mathbf{x}' et \mathbf{x}'' sont respectivement les réponses correspondant à l'ensemble des modes inférieurs et l'ensemble des modes supérieurs, obtenues indépendamment les unes des autres.

Cette supposition nous permet de remplacer les équations (V.2.2.2.2) par deux ensembles d'équations indépendantes:

$$m \ddot{\mathbf{x}}' + c \dot{\mathbf{x}}' + k \mathbf{x}' = - \sum_{j=1}^{N'} m \phi_j \gamma_j \ddot{x}_g \quad (\text{V.2.2.2.6})$$

et

$$m \ddot{\mathbf{x}}'' + c \dot{\mathbf{x}}'' + k \mathbf{x}'' = - \sum_{j=N'+1}^N m \phi_j \gamma_j \ddot{x}_g \quad (\text{V.2.2.2.7})$$

En posant:

$$\mathbf{x}' = \Phi' \mathbf{q}' \quad (\text{V.2.2.2.8})$$

Φ' :matrice des N' premières configurations modales.

\mathbf{q}' :vecteur correspondant au N' coordonnées modales.

A partir de (V.2.2.2.6) nous obtenons:

$$\Phi' m \Phi \ddot{q}' + \Phi' c \Phi' \dot{q}' + \Phi' k \Phi' q' = -\Phi' \sum_{j=1}^{N'} m \Phi_j \gamma_j \ddot{x}_g \quad (\text{V.2.2.2.9})$$

L'intégration directe de ces équations modales couplées permet d'obtenir q' et par conséquent x' . Ceci est l'essence de l'approche de *Clough et Mojtahedi* [11]. Cependant une différence subtile réside dans le fait que l'équation (V.2.2.2.9) à droite du signe égale contient le terme $\sum_{j=1}^{N'} \Phi_j \gamma_j$

au lieu du terme r .

L'équation (V.2.2.2.7) est alors résolue en ignorant aussi bien les forces d'amortissement que les forces inertielles afin d'obtenir:

$$x'' = -k^{-1} m r_x \ddot{x}_g \quad (\text{V.2.2.2.10})$$

où:

$$r_x = r - \sum_{j=1}^{N'} \Phi_j \gamma_j \quad (\text{V.2.2.2.11})$$

Les réponses x' et x'' sont sommées algébriquement pour chaque pas de temps.

La technique exposée, est attrayante pour les ingénieurs praticiens en raison de sa simplicité ainsi que de sa facilité d'exécution. Un autre avantage de cette méthode est que contrairement aux autres méthodes [25], celle-ci fournit une meilleure interprétation physique des contributions respectives des modes supérieurs et des modes inférieurs dans la réponse globale.

V.2.3: Méthodes Approximatives de Superposition Modale avec Modes Normaux

V.2.3.1: Introduction:

La méthode de superposition modale classique est sans nul doute la plus attractive en analyse dynamique particulièrement en analyse sismique des structures, à cause de ses nombreux avantages dont le découplage des équations différentielles gouvernant le comportement dynamique des systèmes, ainsi que l'effort moindre fourni lors de la détermination de la réponse dynamique étant donnée la possibilité de superposer un ensemble tronqué d'équations modales découplées.

Néanmoins, cette méthode classique n'est applicable que pour des systèmes dynamiques dont la matrice d'amortissement est orthogonale par rapport à la matrice modale non amortie.

Dans le but d'élargir l'applicabilité de cette méthode aux systèmes à amortissement non classique, les recherches ont été centrées sur les différentes manières d'approximer la matrice d'amortissement de ces systèmes par une matrice proportionnelle équivalente.

L'approche la plus commune consiste à diagonaliser la matrice d'amortissement transformée. Dans ce cadre, plusieurs méthodes ont été proposées [11,15,37,47].

Parmi ces méthodes, dites de diagonalisation ou méthodes approximatives, la plus courante consiste à ignorer les éléments extra-diagonaux. Toutefois, la validité de cette simplification mathématique nécessite certaines justifications physiques. Ce problème a suscité l'intérêt de certains auteurs dont *Warburton et Soni* [52], ainsi que *Hasselmann* [52].

V.2.3.2: Méthodes Approximatives de Diagonalisation de Thomson et al.

La diagonalisation de la matrice d'amortissement transformée doit être réalisée sur une certaine base. Dans ce contexte, une étude numérique a été réalisée par *Thomson et al.* [47], qui consiste en une comparaison de trois bases d'estimation des matrices transformées diagonales.

Dans la première méthode, les équations de mouvement sont normalisées par la matrice modale non amortie, la matrice transformée obtenue est diagonalisée en retenant ses termes diagonaux, tandis que ses termes extra-diagonaux sont ignorés. Il s'agit donc du procédé le plus simple et le plus trivial.

Dans la seconde méthode la matrice d'amortissement transformée diagonale est établie par un algorithme d'optimisation qui minimise la moyenne du carré de l'erreur sur la réponse fréquentielle.

Enfin, dans la dernière méthode la matrice d'amortissement diagonale est déterminée à partir de l'équation différentielle normalisée en égalisant, en coordonnées modales, les pics des systèmes couplés et non couplés.

En comparant ces trois méthodes proposées, il s'avère que leur performance est dans cet ordre 2-3-1.

Néanmoins, vu la complexité de la seconde méthode, ainsi que les différences infimes dans les réponses résultantes, il semblerait justifié d'adopter aussi bien la première que la troisième méthode pour diagonaliser la matrice d'amortissement.

V.2.3.3: Méthode de Biggs-Roesset:

Les systèmes interagissant avec le sol, (exemple: structure reposant sur une fondation déformable), sont caractérisés par leur hétérogénéité,

qui se traduit par une différence considérable entre les propriétés d'amortissement des différentes parties du système combiné.

Ainsi, la valeur de l'amortissement varie sensiblement entre le sol et la structure. De plus, alors que l'amortissement est de type visqueux dans certaines parties du système sol-structure, il est de type hystérétique dans d'autres.

Cette variation de l'amortissement aussi bien en magnitude qu'en nature, confère un caractère non classique à l'amortissement du système d'interaction sol-structure.

Toutefois, à cause de ses avantages pratiques, il est souvent souhaité d'adopter la méthode de superposition modale classique pour l'analyse dynamique de ce type de systèmes, d'où vient la nécessité d'attribuer un amortissement critique équivalent à chaque mode.

Dans ce cadre, une règle d'amortissement pondéré a été proposée par *Biggs et Roesset* [40], permettant d'estimer les pourcentages d'amortissement critiques modaux.

Ces derniers ont été déterminés selon la procédure suivante:

Considérons un système d'interaction sol-structure, dont les fréquences naturelles sont ω_i et les configurations modales orthonormalisées ϕ_i .

Si nous notons Δ_{ij} la déformation modale du ressort j lorsque le système se déforme selon la configuration ϕ_i .

Une excitation harmonique permanente de fréquence Ω étant supposée, le vecteur déplacement du système dans le mode i est alors:

$$x = A \phi_i \sin(\Omega t + \theta)$$

L'énergie de déformation maximale peut s'exprimer par:

$$ES_i = A^2 \sum_j \frac{1}{2} k_j \Delta_{ij}^2$$

L'énergie dissipée par cycle de vibration est:

$$Ed_i = 2\pi A^2 \left(\Omega \sum_j k_j \xi_j \frac{1}{\omega_j} \Delta_{ij}^2 + \sum_j k_j D_j \Delta_{ij}^2 \right)$$

La première sommation représente la dissipation visqueuse de l'énergie.

La seconde sommation représente les pertes hystérétiques.

Ainsi, un rapport d'énergie ($ER_i = Ed_i/ES_i$) peut être défini pour le mode i

par:

$$ER_i = 4\pi\Omega \frac{\sum_j k_j \xi_j \frac{1}{\omega_j} \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2} + 4\pi \frac{\sum_j k_j D_j \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2} \quad (V.2.3.3.1)$$

En associant à chaque mode i un taux d'amortissement hystérétique D'_i et un

% d'amortissement critique visqueux ξ'_i , à la fréquence ω_i nous obtenons :

$$ER_i = 4\pi \xi'_i \frac{\Omega}{\omega_i} + 4\pi D'_i \quad (V.2.3.3.2)$$

En égalisant les expressions (V.2.3.3.1) et (V.2.3.3.2), nous aboutissons à:

$$\xi'_i = \frac{\sum_j \xi_j \frac{\omega_i}{\omega_j} k_j \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2} \quad (a) \quad (V.2.3.3.3)$$

$$D'_i = \frac{\sum_j D_j k_j \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2} \quad (b)$$

Par conséquent, si les modes normaux existent, chaque mode sera caractérisé par ses taux d'amortissement visqueux et hystérésique donnés respectivement par les formules (V.2.3.3.3.a) et (V.2.3.3.3.b).

Pour un oscillateur à un DDL (tel que représenté par une équation modale), le fait d'interchanger son taux d'amortissement hystérétique D par une fraction d'amortissement visqueux $\xi = D$, ne causera qu'une différence négligeable sur sa réponse. Pour chaque mode i nous pouvons donc associer

un pourcentage d'amortissement visqueux équivalent ξ_{ieq} :

$$\xi_{ieq} = \frac{\sum_j (\xi_j \frac{\omega_i}{\omega_j} + D_j) k_j \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2}$$

En posant $ES_{ij} = \frac{1}{2} k_j \Delta_{ij}^2 A^2$; l'énergie de déformation maximale dans le ressort j , sous une excitation périodique lorsque la configuration considérée est celle du mode i , il vient:

$$\begin{aligned} \xi_{ieq} &= \frac{\sum_j (\xi_j \frac{\omega_i}{\omega_j} + D_j) ES_{ij}}{\sum_j ES_{ij}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sum_j ER_{ij} ES_{ij}}{\sum_j ES_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (V.2.3.3.4)$$

Cette formule peut être interprétée comme suit:

Le rapport d'énergie dans chaque mode à la résonance ($\Omega = \omega_i$), est une moyenne pondérée des rapports d'énergies dans chaque composante du système à cette même fréquence, les facteurs de pondération étant les termes ES_{ij} .

Dans la méthode de *Biggs-Roesset*, les configurations modales du système non amorti sont utilisées, pour transformer les équations de mouvement. Les équations modales obtenues sont supposées être découplées et un % d'amortissement pondéré déterminé selon (V.2.3.3.4) est attribué à chaque mode. Il s'agit donc d'une méthode indirecte de diagonalisation de la matrice d'amortissement transformée.

V.2.3.4: Autres Méthodes de Diagonalisation

Deux autres méthodes d'analyse modale ont été présentées par

Ozguven [37] et *Cronin* [15]. Ces méthodes permettent la détermination de la réponse approximative des systèmes à amortissement non proportionnel excités harmoniquement à la résonance.

La méthode de *Ozguven* [37] qui est une approche modale dite "*méthode du mode unique*", consiste à découpler les équations de mouvement des systèmes à amortissement non classique au niveau d'une fréquence naturelle non amortie.

La réponse totale est alors approximée par la réponse modale la plus proche de la fréquence d'excitation.

D'autre part, lors de la superposition modale non couplée, les éléments extra-diagonaux de la matrice \mathbf{c} transformée sont ignorés permettant ainsi la superposition des réponses modales.

Cette méthode est plus convenable pour l'analyse dynamique des structures mécaniques avec amortisseurs vibrationnels, de type hystérétique, mais s'applique aussi à d'autres problèmes avec amortissement non proportionnel, pourvu que la magnitude de l'amortissement soit modérée et que les modes normaux soient convenablement séparés.

Contrairement à cette dernière approche, celle proposée par *Cronin* [15], présente une bonne performance au niveau des régions de résonance lorsque les fréquences naturelles sont très proches.

V.2.3.5: Critères de Validité des Méthodes de Diagonalisation

a: Critère de Warburton et Soni

La réponse d'un système non proportionnel peut être déterminée par la méthode modale classique, si les termes extra-diagonaux de la matrice d'amortissement transformée sont annulés, comme cela a été indiqué antérieurement. Néanmoins, cette procédure de diagonalisation peut conduire à des erreurs significatives.

Afin d'évaluer ces erreurs, *Warburton et Soni* [52] étudièrent différents systèmes MDOF, sujets à des excitations de type variable (harmonique, périodique, aléatoire) et dont l'amortissement varie aussi bien en magnitude qu'en distribution.

A partir de cette étude, une condition limite concernant les taux d'amortissement modaux correspondant aux modes dominants, a été formulée en fonction des fréquences naturelles et des éléments de la matrice transformée.

Cette condition est:

$$\xi_r < \varepsilon \left| \frac{C_{rx}}{2C_{rs}} \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_r^2} - 1 \right) \right|_{\min s} \quad (\text{V.2.3.4.1})$$

Pour $s = 1, 2, \dots, N$ et $s \neq r$.

Ainsi, le minimum de l'expression entre valeurs absolues est recherché pour différentes valeurs de la variable s ($s=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$).

où:

ξ_r : % d'amortissement critique du mode r dominant considéré

C_{ij} : élément de la matrice c transformée $C = \Phi^T c \Phi$

La vérification de (V.2.3.4.1) ne doit se faire que pour les modes inférieurs dont les réponses résonantes sont significatives (modes dominants). Si cette condition est satisfaite, la procédure approximative de diagonalisation ne causera pas d'erreurs excessives sur la réponse recherchée.

Bien qu'étant basé sur une analyse approximative de la réponse d'un système soumis à un excitation harmonique, ce critère reste valable si l'excitation est apériodique ou aléatoire.

Dans les exemples traités par *Warburton et Soni*, le paramètre ε ayant été choisi égal à 0.05, le % d'erreur maximal atteint l'ordre de 10%.

Manifestement, si une plus grande précision est exigée, une valeur plus faible doit être attribuée à ϵ . Néanmoins, l'amortissement structural n'étant en pratique qu'approché, une faible valeur de ϵ , qui limiterait le domaine d'applicabilité de cette procédure approximative, est à éviter.

Si ce critère n'est pas satisfait, des techniques plus complexes doivent être utilisées entre autres, celles de *Thomson et al.* [47], le facteur de correction de *Cronin* [15] ou alors la méthode recommandée par *Clough et Mojtahedi* [11].

b: Critère de Hasselman

Une approche différente fût utilisée par *Hasselman* [52], dans le but de développer un critère qui doit être satisfait afin que le couplage modal puisse être négligé. La formulation de ce critère est la suivante:

$$\left[\frac{2 \xi_r}{\left(\frac{\omega_B^2}{\omega_r^2} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}} < 1$$

où:

$$\frac{\omega_B}{\omega_r} > 1, \quad \frac{C_{rB}}{C_{rr}} \leq 1$$

Warburton et Soni, contestèrent les suppositions restrictives sur lesquelles le développement du critère de *Hasselman* est basé, à savoir que les éléments extra diagonaux de la matrice \mathbf{c} transformée sont inférieurs ou à la limite égaux aux éléments diagonaux. *Warburton et Soni* justifiaient leurs propos en fournissant des preuves numériques [52].

V.2.4: Méthodes de Superposition Modale avec Modes Complexes

V.2.4.1: Introduction

Actuellement, la superposition modale peut être effectuée selon deux alternatives: la première étant basée sur le déplacement du mode et la seconde sur l'accélération du mode.

La méthode d'accélération du mode (MAM) est une procédure qui tient compte d'une solution pseudo-statique, prenant en considération la flexibilité des modes éliminés dans la méthode conventionnelle dite *méthode de déplacement du mode* (MDM).

Une des premières versions de la MAM fût suggérée par *Maddox* [34], alors que *Hansteen et Bell* [23], présentèrent une comparaison des fonctions de transfert déterminées par la MAM et la MDM. *Cornwell et al.* [13] réalisèrent une étude comparative de l'effet du taux d'amortissement et la fréquence du chargement sur la précision relative des deux méthodes susmentionnées. *Salmon* [41], quant à lui utilisa la MAM pour une analyse spectrale de la réponse. L'analyse de l'histoire temporelle basée sur cette même procédure a été réalisée aussi bien pour les systèmes à amortissement classique [13], que pour les systèmes à amortissement non classique [48].

Une autre méthode de superposition modale a été proposée par *Borino et Muscolino* [6], sous deux formulations différentes *incrémentale* et *intégrale*. Cette procédure dite: *Méthode de correction dynamique* (DCM), est obtenue en sommant une réponse *pseudo-statique* qui est la solution des équations différentielles d'équilibre, et une *correction dynamique* évaluée par le biais d'un nombre réduit de modes.

Les trois méthodes susmentionnées (MDM, MAM, DCM) existent sous deux versions différentes. Une version classique faisant usage des modes normaux non amortis pour l'analyse dynamique des systèmes à amortissement

proportionnel, et une version généralisée avec prise en compte des modes amortis complexes, dans le cadre de l'étude des systèmes à amortissement non proportionnel [6,48].

Dans ce qui suit la version généralisée de ces trois méthodes est exposée.

V.2.4.2: Méthode de Déplacement du Mode

Les équations de mouvement d'un système structural à amortissement visqueux étant:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = p f(t) \quad (V.2.4.2.1)$$

Notons que pour simplifier le vecteur force est supposé à variation temporelle unique $f(t)$, commune à toutes ses composantes.

D'après la technique suggérée par Foss [21] pour l'analyse des systèmes à amortissement non classique, des solutions modales découplées peuvent être obtenues, si les N équations du second ordre (V.2.4.2.1), sont transformées en $2N$ équations du premier ordre par introduction du vecteur d'état:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (V.2.4.2.2)$$

La formulation devient:

$$\begin{bmatrix} c & m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (V.2.4.2.3)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants sont déterminés à partir de la forme homogène des équations (V.2.4.2.3) soit:

$$\lambda_r \begin{bmatrix} c & m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \lambda_r \phi_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \lambda_r \phi_x \end{bmatrix} = 0$$

$$r=1, 2, \dots, 2N$$

Les solutions $(\lambda_r, \hat{\Phi}_r)$ avec $\hat{\Phi}_r = \begin{bmatrix} \Phi_r \\ \lambda_r \Phi_r \end{bmatrix}$, sont en général des paires de complexes conjugués.

Les conditions d'orthogonalité peuvent alors être formulées pour deux modes différents (Φ_r, Φ_s) , dont les valeurs propres complexes sont respectivement (λ_r, λ_s) , par :

$$[\Phi_r^T \quad \lambda_r \Phi_r^T] \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_s \\ \lambda_s \Phi_s \end{bmatrix} = \alpha_r \delta_{rs} \quad (\text{V.2.4.2.4})$$

$$[\Phi_r^T \quad \lambda_r \Phi_r^T] \begin{bmatrix} c & m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_s \\ \lambda_s \Phi_s \end{bmatrix} = \frac{\alpha_r}{\lambda_s} \delta_{rs} \quad (\text{V.2.4.2.5})$$

Avec $r \neq s$ et δ_{rs} : symbole de *Kronecker*.

Pour un système à amortissement classique les équations (V.2.4.2.1) ont été réduites à N équations modales découplées, grâce à une transformation en coordonnées normales non amorties (voir paragraphe IV.2). De même pour un système à amortissement classique, ces équations peuvent toujours être transformées en 2N équations modales découplées par simple usage des coordonnées modales amorties q_i obtenues à partir de la transformation $V = \hat{\Phi} q$

où :

$$\hat{\Phi} = [\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{2N}] \quad \hat{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \lambda_i \Phi_i \end{bmatrix}$$

et

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{2N} \end{bmatrix}$$

Le vecteur réponse \mathbf{V} peut aussi être exprimé par la relation :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{q} = \sum_{s=1}^{s=2N} q_s \begin{bmatrix} \phi_s \\ \lambda_s \phi_s \end{bmatrix} \quad (\text{V.2.4.2.6})$$

où, q_s sont les coordonnées généralisées.

En substituant dans (V.2.4.2.3) le vecteur \mathbf{V} par son expression (V.2.4.2.6) et en prémultipliant par $[\phi_r^T \ \lambda_r \phi_r^T]$ $r=1, \dots, 2N$, nous aboutissons à un ensemble de $2N$ équations découplées:

$$\dot{q}_r - \lambda_r q_r = \frac{\lambda_r}{\alpha_r} \phi_r^T \mathbf{P} f(t) \quad r=1, \dots, 2N \quad (\text{V.2.4.2.7})$$

dont les solutions sont:

$$q_r = \lambda_r \left(\frac{\phi_r^T \mathbf{P}}{\alpha_r} \right) \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (\text{V.2.4.2.8})$$

$r=1, \dots, 2N$

Le vecteur réponse est alors obtenu par superposition modale:

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^{2N} q_r \phi_r \quad (\text{V.2.4.2.9})$$

Dans cette somme, les contributions modales étant additionnées par paires de complexes conjugués, la réponse est par conséquent réelle.

L'un des avantages de la méthode de superposition modale est que souvent un nombre limité de modes inférieurs sont excités et doivent donc être inclus dans l'analyse.

Ainsi, si la réponse est recherchée en fonction d'un nombre réduit ($m < 2N$) de modes inférieurs (basses fréquences), la matrice modale Φ est

tronquée après m colonnes, de même que le vecteur de coordonnées modales \mathbf{q} .

La réponse tronquée est alors :

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^m \phi_r q_r \quad (\text{V.2.4.2.10})$$

Le vecteur chargement dynamique est obtenu par:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^m q_r \mathbf{k} \phi_r \quad (\text{V.2.4.2.11})$$

Les expressions (V.2.4.10) et (V.2.4.11) donnent, la réponse formulée selon la technique de superposition modale dite: *méthode de déplacement du mode avec modes amortis* (MDM).

En dynamique des structures, il est bien connu que les déplacements peuvent être obtenus avec une bonne précision s'ils sont évalués en ne tenant compte que de la contribution dynamique d'un nombre réduit de modes inférieurs. En revanche, les contraintes résultantes obtenues avec le même nombre de modes peuvent être d'une bien moindre précision.

V.2.4.3: Méthode d'Accélération du Mode

Une alternative à la méthode conventionnelle décrite ci-dessus existe comme cela a été indiqué précédemment. Celle ci associe à la réponse modale obtenue au moyen de la MDM, une réponse modale quasistatique qui tient compte de la flexibilité des modes restants. Ceci étant car, bien que pour les fréquences élevées la contribution des termes de vitesse et d'accélération à la réponse nodale soit négligeable, la réponse de ces

modes supérieurs peut être approchée grâce à une analyse quasistatique.

Nous exposons dans ce qui suit cette technique telle que présentée par *Traill et Nash* [48].

Si la solution en coordonnées généralisées (V.2.4.2.8), est intégrée par partie avant l'évaluation du vecteur chargement dynamique nous aurons:

$$q_r = \left(\frac{\phi_r^T P}{\alpha_r} \right) \left\{ -f(t) + f(0) e^{\lambda_r t} + \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} \dot{f}(\tau) d\tau \right\}$$

Le vecteur déplacement est alors donné par:

$$x = \sum_{r=1}^m \left(\frac{-\phi_r^T P}{\alpha_r} \right) \phi_r f(t) + \sum_{r=1}^m \left(\frac{\phi_r^T P}{\alpha_r} \right) \phi_r \left\{ f(0) e^{\lambda_r t} + \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (\text{v.2.4.3.1})$$

La première somme est une approximation tronquée du déplacement du système, les forces extérieures étant supposées appliquées statiquement. En voici la démonstration:

D'après l'équation (V.2.4.2.7), dans le cas statique les coordonnées généralisées sont données par:

$$q_r = -\frac{\phi_r^T P f(t)}{\alpha_r} \quad (\text{V.2.4.3.2})$$

Il s'en suit que le vecteur déplacement statique x_{st} peut être exprimé

selon deux formulations d'après l'équation (V.2.4.2.1)

$$x_{st} = k^{-1} P f(t) \quad (\text{V.2.4.3.3})$$

et d'après les équations (V.2.4.2.9) et (V.2.4.3.1)

$$\mathbf{x}_{st} = \sum_{r=1}^{2N} q_r \phi_r = - \sum_{r=1}^{r=2N} \frac{-\phi_r^T \mathbf{p} \phi_r f(t)}{\alpha_r}$$

Ainsi le remplacement, dans (V.2.4.3.1), de la somme tronquée par la somme complète (V.2.4.3.3), conduit à l'expression suivante du vecteur déplacement:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{p} f(t) + \sum_{r=1}^m \left(\frac{\phi_r^T \mathbf{p}}{\alpha_r} \right) \phi_r \left\{ f(0) e^{\lambda_r t} + \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\}$$

Le vecteur force dynamique est alors obtenu en prémultipliant par \mathbf{k} .

$$\mathbf{f} = \mathbf{p} f(t) + \sum_{r=1}^m \left(\frac{\phi_r^T \mathbf{p}}{\alpha_r} \right) \mathbf{k} \phi_r \left\{ f(0) e^{\lambda_r t} + \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\}$$

Ces expressions correspondent à la méthode dite: *méthode d'accélération du mode avec modes amortis* (MAM), ou alors, *méthode de sommation des forces* (MSF) [48].

V.2.4.4: Méthode de Correction du Mode

La réponse modale des systèmes à amortissement non classique a été formulée par *Borino et Muscolino* [6], selon deux techniques différentes: intégrale et incrémentale. Ces derniers proposèrent aussi une nouvelle méthode de superposition modale dite: *méthode de correction dynamique* (DCM). La forme intégrale de cette méthode est exposée dans ce paragraphe. Les équations de mouvement d'un système étant toujours données par :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{p}(t) \quad (\text{V.2.4.3.1})$$

Si \mathbf{x} est exprimé en coordonnées modales par :

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i q_i(t) \quad (\text{V.2.4.3.2})$$

La transformation en coordonnées modales non amorties fournit :

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Lambda \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{p}(t)$$

Avec :

Φ : matrice modale orthonormalisée .

Ω : matrice diagonale dont les éléments sont les fréquences circulaires naturelles ω_i

Λ : matrice d'amortissement modale généralisée

L'amortissement du système étant non classique, la matrice Λ n'est pas diagonale.

Pour l'évaluation de la réponse modale, un vecteur d'état de dimension $2N$ est donc utilisé. Les équations modales sous forme réduite peuvent s'exprimer par :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{W} \mathbf{g}(t) \quad (\text{V.2.4.3.3})$$

où \mathbf{y} est le vecteur d'état de $2N$ variables modales

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t)$$

\mathbf{I} : matrice identité $N \times N$

L'expression de la réponse sous forme intégrale est la suivante :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_o(t) + \mathbf{y}_p(t) \quad (\text{V.2.4.3.4})$$

$\mathbf{y}_p(t)$: est la solution particulière de l'équation (V.2.4.3.3)

$\mathbf{y}_o(t)$: est le vecteur déplacement correctif représentant

l'effet des conditions initiales.

$$\mathbf{y}_o(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{I} \quad (\text{V.2.4.3.5})$$

\mathbf{I} : est un vecteur constant dépendant des conditions initiales à $t=t_0$.

$\mathbf{E}(t)$: matrice représentant la solution homogène de l'équation (V.2.4.3.3)

Les kème et (k+1)ème colonnes de la matrice $\mathbf{E}(t)$ sont données

par:

$$E_k(t) = e_{2,k}(t) \psi_k - e_{1,k}(t) \chi_k$$

$$E_{k+1}(t) = e_{2,k}(t) \psi_k + e_{1,k}(t) \chi_k$$

ψ_k et χ_k sont respectivement les parties réelles et imaginaires du kème vecteur propre de la matrice \mathbf{D} .

$$e_{1,k}(t) = \exp(\beta_k t) \sin \gamma_k t$$

$$e_{2,k}(t) = \exp(\beta_k t) \cos \gamma_k t$$

où β_k et γ_k sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la kème valeur propre associée au kème vecteur propre.

Le vecteur \mathbf{I} est estimé au moyen des équations (V.2.4.3.4) et (V.2.4.3.5) à l'instant $t=t_0$.

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}(t_0)^{-1} [\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_p(t_0)] \quad (\text{V.2.4.3.6})$$

En substituant l'équation (V.2.4.3.6) dans (V.2.4.3.5), la réponse totale devient :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Theta}(t-t_0) [\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_p(t_0)] + \mathbf{y}_p(t) \quad (\text{V.2.4.3.7})$$

où $\mathbf{y}(t_0)$: représente le vecteur déplacement dépendant des conditions initiales.

$$\mathbf{\Theta}(t-t_0) = \mathbf{E}(t) \mathbf{E}(t_0)^{-1}$$

$\mathbf{\Theta}$: est une matrice d'ordre $2N \times 2N$.

L'équation (V.2.4.3.7) donne l'expression de la réponse modale, lorsque la solution particulière $\mathbf{y}_p(t)$ est connue.

La réponse modale est alors obtenue grâce à l'équation (V.2.4.3.2).

Si la réponse est tronquée après m modes, son expression approximée \mathbf{x}^a sera donnée par:

$$\mathbf{x}^a(t) = \bar{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

$\bar{\Phi}$: matrice modale tronquée après m colonnes.

$\bar{\mathbf{q}}(t)$: vecteur modal tronqué.

Sachant que les signes "-" et "a" signifient respectivement modes tronqués et solution approximative.

Le vecteur d'état des variables modales aura la forme:

$$\mathbf{v}^a(t) = \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{y}}(t) \quad (\text{V.2.4.3.8})$$

avec :

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^a(t) \\ \dot{\mathbf{x}}^a(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi $\bar{\mathbf{y}}(t)$ est le vecteur d'état modal estimé à partir de l'équation (V.2.4.3.7), lorsque un nombre tronqué de modes est pris en compte.

En substituant $\bar{\mathbf{y}}(t)$ dans l'équation (V.2.4.3.8), nous obtenons:

$$\mathbf{v}^a(t) = \bar{\mathbf{P}} \bar{\Theta}(t-t_0) [\bar{\mathbf{y}}(t_0) - \bar{\mathbf{y}}_p(t_0)] + \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{y}}_p(t) \quad (\text{V.2.4.3.9})$$

Le dernier terme de cette expression (V.2.4.3.8) est la solution particulière nodale approximative.

Une solution plus exacte sera obtenue en substituant ce dernier terme par

le vecteur d'état représentant la solution particulière exacte.

$$\mathbf{v}_p(t) = [\mathbf{x}_p^T(t) \quad \dot{\mathbf{x}}_p^T(t)]$$

$\mathbf{x}_p(t)$ et $\dot{\mathbf{x}}_p(t)$ sont respectivement les solutions particulières de l'équation (V.2.4.3.1) et sa différentiation par rapport au temps.

La nouvelle formulation de la réponse modale approximative $\mathbf{v}^a(t)$ est:

$$\mathbf{v}^a(t) = \mathbf{v}_p(t) + \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{\Theta}} (t-t_0) [\bar{\mathbf{y}}(t_0) - \bar{\mathbf{y}}_p(t_0)] \quad (\text{V.2.4.3.10})$$

Le principe de correction dynamique est mis en évidence grâce à l'équation (V.2.4.3.10). Ce principe stipule que la réponse modale dynamique à l'instant t est la somme d'une réponse pseudostatique $\mathbf{v}_p(t)$, qui dépend du chargement dynamique à l'instant t et d'une correction dynamique $\mathbf{v}_c^a(t)$, qui tient compte de la solution dynamique causée par le chargement entre les instants $t=t_0$ et t , estimée en utilisant un nombre réduit de modes.

$$\mathbf{v}^a(t) = \mathbf{v}_p(t) + \mathbf{v}_c^a(t) \quad (\text{V.2.4.3.11})$$

En appliquant cette procédure dite: *méthode de correction dynamique*, $\mathbf{v}_c^a(t)$ est approchée en utilisant un nombre réduit de modes alors que $\mathbf{v}_p(t)$ est estimée directement au moyen de l'équation (V.2.4.3.1):

Dés lors que l'effort de calcul investi dans la technique proposée, est du même ordre que celui investi dans les autres méthodes (MAM et MDM), et que de surcroît sa précision est meilleure, la DCM est vivement recommandée pour les calculs pratiques [6].

Chapitre VI

ANALYSE NON DETERMINISTE DES SYSTEMES MDOF A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

VI.1: INTRODUCTION

Jusque là, nous nous sommes penchés sur l'analyse des systèmes linéaires soumis à des excitations, dont l'évolution temporelle était supposée parfaitement connue, dites *excitations déterministes*. Celles ci pouvant être des fonctions périodiques ou apériodiques, s'exprimant analytiquement ou bien représentées à partir d'un ensemble de données. Cependant, dans tous les cas, ces fonctions sont établies d'une manière unique.

Dés lors que l'excitation est déterministe, la réponse l'est aussi.

Toutefois, physiquement, les forces excitatrices ne sont pas toujours connues, elles sont au mieux prédictibles, ces prédictions étant basées sur des données expérimentales.

Evidemment, une excitation estimée n'est pas déterministe. En fait, il n'y a aucun moyen garantissant la réalisation d'une telle excitation. Il est aussi évident que dans ces circonstances, l'incertitude de l'excitation se répercutant sur la réponse, celle ci ne peut être mieux évaluée que l'excitation n'est prédite.

L'existence de cette classe de problèmes (structures sujettes à des excitations *non déterministes*), dont l'analyse dynamique ne peut être formulée sous sa forme déterministe traditionnelle, par suite de la connaissance

imparfaite des forces excitatrices, a nécessité l'apparition d'une nouvelle discipline, alliant d'une part *la théorie des processus et champs aléatoires* et d'autre part *la dynamique des structures*, à laquelle fût attribué le nom "*vibrations aléatoires*".

En effet, grâce à cette théorie, la caractérisation des excitations *aléatoires (non déterministes ou stochastiques)*, ainsi que des réponses correspondantes, est faite au travers de leurs propriétés statistiques.

Cette classe de problèmes, concerne notamment :

- Les bâtiments soumis à l'action du vent.
- Les plates-formes offshore sous l'action de la houle.
- Les constructions sujettes à des excitations sismiques.

De ce fait, les chargements dynamiques aléatoires agissant sur les systèmes structuraux, peuvent provenir d'une panoplie de mécanismes source incluant, le vent, la houle, etc...

Toutefois, aux yeux de l'ingénieur en structures, le type d'input dynamique d'importance primordiale, est sans nul doute celui induit par les séismes.

Pour les raisons qui viennent d'être évoquées, le présent chapitre a été consacré à la prédiction des caractéristiques statistiques de la réponse dynamique d'un système soumis à une excitation aléatoire, dont les propriétés statistiques sont supposées connues. Ce système, étant en outre caractérisé par un amortissement non classique.

Quoique le but principal du présent chapitre, soit la présentation des procédures d'analyse non déterministe des systèmes dynamiques à amortissement non classique, certains aspects inhérents au caractère aléatoire de l'excitation sismique et à l'estimation des caractéristiques statistiques de la réponse sont passés en revue.

Ainsi, le second paragraphe est consacré à une étude succincte de l'action sismique et de sa spécificité et celle des mécanismes généraux qu'elle met en jeu.

De plus, la théorie des vibrations aléatoires étant la base d'une analyse probabiliste en dynamique des structures, les notions fondamentales relatives à la caractérisation des processus aléatoires sont évoquées au paragraphe suivant.

VI.2: GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉISMES

VI.2.1: Importance de l'Action Sismique

L'importance du problème sismique, résulte en grande partie, des conséquences catastrophiques que peut avoir un séisme violent sur une région à dense population.

Ainsi, l'établissement d'un projet de construction parasismique rationnel, exige de la part de l'ingénieur l'acquisition préalable d'un minimum de connaissances concernant, les caractéristiques spécifiques de l'action sismique, les mécanismes généraux suivants lesquels, cette dernière produit ses effets, et ceux par lesquels les structures peuvent s'en défendre notamment en ce qui concerne les transferts, les échanges et les dissipations d'énergies.

L'étude détaillée des séismes et des mécanismes sismiques est évidemment du ressort de *la sismologie*, de ce fait l'ingénieur en génie-sismique doit appréhender le problème sismique d'un point de vue différent de celui du séismologue.

En effet, les séismologues focalisent leur attention principalement sur les effets globaux ou de grande étendue des séismes et ne sont concernés par conséquent, que par les mouvements de très faibles amplitudes qui ne provoquent pas de réponses significatives.

A contrario, les ingénieurs doivent s'intéresser essentiellement aux effets locaux des séismes importants provoquant des mouvements forts du sol

et induisant en conséquence des endommagements structuraux.

VI.2.2: Causes et Genèse des Séismes

En terme scientifique, on désigne le tremblement de terre par *secousse tellurique* ou, le plus souvent par "*séisme*", qui est un mot d'origine grecque "*seismos*" signifiant mouvement.

Les séismes dans leur quasi-totalité sont dûs à des causes tectoniques. En effet, la confrontation des plaques continentales et océaniques, se fait l'une par rapport à l'autre par glissement, par compression, par écartement ou par plongement.

Ces divers mouvements, provoquent aux frontières des plaques plissements, fracturations et fissurations, donnant naissance à divers types de failles géologiques, qui sous l'effet de fortes contraintes se bloquent jusqu'au seuil de rupture, et c'est le séisme.

L'une des failles les plus actives et les plus étudiées du monde est la fameuse faille de *San Andrea* située le long de la côte Californienne. S'agissant de l'Afrique du nord en général et de l'Atlas Tellien en particulier, l'intensité des déformations tectoniques, liée à l'activité sismique, dépend étroitement des mouvements de convergence de la plaque Afrique par rapport à la plaque Eurasie. Ce taux de convergence, ayant été estimé à un centimètre par an. A titre d'exemple, le séisme d'El Asnam du 10 Octobre 1980 a généré une faille d'environ 40 km de long.

L'hypocentre ou foyer est le nom attribué à l'endroit où se produit le séisme. Tandis que l'épicentre est la zone de la surface terrestre la plus proche du foyer.

VI.2.3: Propagation des Ondes Sismiques

Le séisme qui est le résultat de la libération soudaine d'une quantité d'énergie à partir de l'intérieur de la croûte terrestre, se manifeste par un jeu de failles et par une vibration violente du sol due à la propagation d'ondes élastiques dans toutes les directions à partir du foyer.

La séismologie classique, consiste en l'étude de la propagation de ces ondes élastiques à travers le sol, grâce à l'analyse des enregistrements sismiques. Cette analyse révèle l'existence de plusieurs types d'ondes qui arrivent successivement à la station d'observation.

a: Ondes Primaires ou Longitudinales P

Arrivant, comme leur nom l'indique, en premier lieu et sont de type longitudinal du fait qu'elles correspondent à des mouvements en compression et dilatation alternés de même direction que celle de la propagation d'onde. Ces ondes se propagent avec une vitesse de 7 à 8 km/s et s'accompagnent d'un changement de volume. Elles sont mieux marquées sur l'enregistrement vertical.

b: Les Ondes Secondaires ou Transversales S

Ces ondes arrivent en deuxième position, avec une vitesse de 4 à 5 km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, provoquant un cisaillement sans changement de volume. Elles se remarquent mieux sur les enregistrements horizontaux, ce sont les plus destructives.

c: Les Ondes Longues ou de Surface

Ces ondes sont les dernières arrivées et peuvent être aussi bien de type longitudinal que transversal. Ces ondes se génèrent et circulent en surface, contrairement aux deux premiers types appelées aussi ondes de volume.

En effet, les ondes de volume en se propageant vers la surface du sol, rencontrent des hétérogénéités, des surfaces de discontinuités ou la surface libre. En heurtant ces surfaces, ces ondes sont partiellement réfléchies et réfractées et donnent naissance à des ondes de surface.

On distingue principalement:

** Les ondes R ou Ondes de Rayleigh*

Ce sont des ondes pour lesquelles, les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement est semblable au mouvement de la houle et entraîne aussi bien des compressions (ou tractions) que des cisaillements dans le sol.

** Les ondes Q ou ondes de Love*

Ce sont des ondes pour lesquelles, les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculairement à la direction de propagation, elles engendrent des contraintes de cisaillement.

- Distance épiscoptrale

L'analyse des enregistrements d'un séisme par plusieurs stations, montre que la distance entre l'épicentre et chaque station dite " *distance épiscoptrale* " par rapport à la station, est fonction de la différence de temps d'arrivée des ondes P et S à la station.

VI.2.4: Enregistrement des Mouvements du Sol

L'étude du mouvement vibratoire engendré par un séisme comporte deux volets:

- Le premier concerne la recherche fondamentale touchant à la séismologie, dont le but est de rattacher la vibration à sa répartition spatiale (foyer, magnitude et propagation d'ondes dans la croûte terrestre). Cette science fait usage du *sismographe*

-Le deuxième volet. relève de l'étude de l'accélération des mouvements forts, qui constitue l'une des bases de l'approche relative à l'évaluation du risque sismique et également un paramètre primordial du génie sismique dans le cadre de l'évaluation de la sécurité des constructions (bâtiments, barrages, centrales nucléaires...), ce volet nécessite le recours à un appareil sensible aux mouvements forts, *l'accélérographe*.

a: Le sismographe

L'enregistrement des différentes ondes sismiques, est assuré par un instrument très sensible aux mouvements du sol appelé *sismomètre*. Les *sismogrammes* (graphiques obtenus par enregistrement), permettent la détermination de la magnitude, de l'épicentre, de la profondeur focale et du mécanisme au foyer.

b: L'accélérographe

Dans les études en génie parasismique, il est capital de bien connaître les caractéristiques générales des mouvements auxquels pourront être soumises les constructions. Ceci, nécessite l'enregistrement des mouvements sismiques à proximité des épicentres associés aux séismes importants.

Pour ce faire, des instruments pouvant mesurer les mouvements forts du sol ont été conçus et développés connus sous le nom d'accélérographes. Ces derniers permettent l'enregistrement des séismes violents très proches. Contrairement au sismomètre, qui lui est en permanence à l'écoute de tous les mouvements de la terre, *l'accéléromètre* ne se déclenche que si le mouvement du sol dépasse le seuil de réglage (1% de la gravité par exemple). La version la plus répandue est connue sous le nom d'*accélérographe "strong motion"* (mouvement fort).

Les appareils sont tous équipés de deux accéléromètres horizontaux (nord-sud et est-ouest) et un accéléromètre vertical.

Les enregistrements obtenus ou *accélérogrammes* sont utilisés afin de déterminer (le pic maximum d'accélération, la durée du mouvement pour un seuil de déclenchement donné, et le contenu fréquentiel du mouvement ou spectre de réponse).

Un réseau d'accélérographes, comprend aussi bien des instruments en champs libre (sol) que placés dans des structures importantes tels que (bâtiments, barrages, ponts...).

Signalons, que le réseau algérien d'accélérographes est actuellement géré et entretenu par le *Centre National de Recherche Appliquée en Génie Parasismique* (C.G.S), alors que le réseau sismologique est géré et entretenu par le *Centre de Recherche en Astrophysique, Astronomie et Géologie* (C.R.A.A.G).

VI.2.5: Mesure des Caractéristiques des Mouvements du Sol

L'aspect primordial que revêtent les séismes, aux yeux d'un ingénieur en génie sismique, ce sont les effets qu'ils peuvent avoir sur les structures. Entre autres, les contraintes, des déformations, ainsi que le degré d'endommagement qu'ils peuvent causer. De ce fait, la mesure la plus importante du point de vue sismologique est la quantité d'énergie de déformations dégagée à la source désignée par *la magnitude*. Cependant, la magnitude d'un séisme ne suffit pas pour indiquer si un dommage structural peut avoir lieu, étant donné que la distance séparant la structure de la source a une importance considérable sur l'amplitude de sa réponse. D'où l'intérêt de ce que l'on désigne par *l'intensité sismique*. Vu l'importance de ces caractéristiques par rapport à une excitation sismique, ces dernières sont brièvement définies dans ce paragraphe.

a: Intensité macrosismique

Les effets d'un séisme en un lieu donné (effets mécaniques, psychologiques), peuvent être évalués d'une manière qualitative, selon une échelle d'*intensité macrosismique* (basée sur l'observation directe sans l'aide d'appareils) dont les degrés correspondent à des effets croissants, définis à l'aide de descriptions conventionnelles.

Il existe plusieurs échelles d'intensité, dans lesquelles un numéro est assigné à chaque groupe caractéristique d'effets. Ces effets sont le plus souvent noté de I à XII. Les plus récentes sont *l'échelle Internationale Mercalli Modifiée* et la version mise au point en 1964 par *Medvedev, Sponheuer* et *Karnik*, dite *échelle MSK*.

Ces estimations, bien que subjectives sont toutefois très utiles pour l'évaluation de l'importance d'un tremblement de terre en l'absence d'enregistrements.

b: Magnitude

Afin de classer les séismes en fonction de leurs énergies globales libérées au foyer, *Richter* (1935) a défini une nouvelle échelle de 9 degrés conventionnels en introduisant la notion de magnitude.

Par définition, la magnitude est le logarithme (base 10) de l'amplitude maximale, mesurée en micromètres ($10^{-6}m$), par un séismographe de type *Wood-Anderson*, corrigée à une distance de 100 Km.

Cette magnitude M a été reliée empiriquement à la quantité d'énergie dégagée E par la formule:

$$\text{Log}E = 11,8 + 1,5M \quad (\text{VI.2.5.1})$$

La magnitude est par conséquent, une caractéristique intrinsèque de la secousse tellurique. En effet, à chaque séisme correspond une magnitude,

contrairement à l'intensité macrosismique, qui elle est fonction de l'énergie au foyer et de la distance par rapport à l'épicentre.

VI.3: PROCESSUS ALÉATOIRES: NOTIONS DE BASE

VI.3.1: Caractérisation d'une Variable Aléatoire Continue

Pour la plupart des phénomènes physiques intéressant l'ingénieur, le résultat d'une expérience aléatoire consiste en une valeur numérique. Par conséquent, un phénomène aléatoire peut être représenté par un nombre aléatoire x , dont la valeur dépend du résultat de l'essai.

x est une fonction définie sur l'ensemble Ω des résultats possibles du phénomène. $x=x(r)$ $r \in \Omega$, la variable x est appelée variable aléatoire.

Une variable aléatoire continue est décrite par sa *fonction de distribution cumulative* $F_x(x)$, qui représente la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire (abréviation: VA) soient inférieures ou égales à x .

$$F_x(x) = P[X \leq x] \quad (\text{VI.3.1.1})$$

La fonction de distribution cumulative (FDC) est par définition monotone, non décroissante et satisfait les relations suivantes:

$$F_x(-\infty) = 0 \quad F_x(+\infty) = 1 \quad (\text{VI.3.1.2})$$

Alternativement, une VA continue, peut être décrite par sa *fonction de densité de probabilité* (FDP).

$$P_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad (\text{VI.3.1.3})$$

La fonction FDC étant non décroissante, il s'en suit que la FDP est non négative et vérifie la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x) dx = 1 \quad (\text{VI.3.1.4})$$

La FDC est exprimée par:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x P_X(y) dy \quad (\text{VI.3.1.5})$$

VI.3.2: Distribution Conjointe de Plusieurs Variables Aléatoires Continues

Le comportement conjoint de deux VA X_1 et X_2 est décrit par la *fonction de distribution cumulative conjointe* $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ qui représente la probabilité suivante :

$$F_{X_1, X_2} = P[(X_1 \leq x_1) \wedge (X_2 \leq x_2)] = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} P_{X_1, X_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (\text{VI.3.2.1})$$

La *densité de probabilité conjointe* s'en déduit par:

$$P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1, X_2}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{VI.3.2.2})$$

La *fonction de distribution cumulative marginale* d'une seule variable, s'obtient en remplaçant la limite supérieure d'intégration sur l'autre variable par l'infini, par exemple:

$$F_{X_1}(x_1) = P[X_1 \leq x_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{x_1} P_{X_1, X_2}(y_1, y_2) dy_1 \quad (\text{VI.3.2.3})$$

$$P_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \quad (\text{VI.3.2.4})$$

Il est évident que la densité conjointe $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ contient plus

d'informations que les densités marginales $(P_{X_1}(x_1), P_{X_2}(x_2))$, puisque ces dernières s'en déduisent par intégration partielle.

Le concept se généralise à plus de deux VA:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \dots \cap (X_n \leq x_n)] \quad (\text{VI.3.2.5})$$

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_n} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{VI.3.2.6})$$

Si les VA sont mutuellement indépendantes :

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad (\text{VI.3.2.7})$$

VI.3.3: Espérance Mathématique

L'espérance mathématique ou moyenne d'ensemble d'une VA est définie par:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx \quad (\text{VI.3.3.1})$$

Pour autant que cette intégrale existe, si $y=f(x)$ est une fonction de la VA X , son espérance mathématique peut être calculée sans détermination préalable de sa densité de probabilité:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} Y P_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P_X(x) dx \quad (\text{VI.3.3.2})$$

VI.3.4: Moments

Les moments d'une ou plusieurs VA sont définis comme les espérances mathématiques des différentes puissances de ces VA.

Pour une seule variable, le moment (initial) d'ordre n est défini par:

$$E[X^n] \quad (\text{VI.3.4.1})$$

Pour deux variables, le moment conjoint d'ordre $(m+n)$ des variables X et Y est:

$$E[X^m Y^n] \quad (\text{VI.3.4.2})$$

Si l'on pose, $m_x = E[X]$:

Le n-ième moment central de la VA X est défini par:

$$E[(X-m_x)^n] \quad (\text{VI.3.4.3})$$

De même, le $(m+n)$ -ième moment central conjoint de deux variables X et Y est défini par:

$$E[(X-m_x)^m (Y-m_y)^n] \quad (\text{VI.3.4.4})$$

Les moments centraux d'ordre 2 portent respectivement les noms de :
variance (cas d'une seule VA).

$$E[(x-m_x)^2] = E[X^2] - m_x^2 = \sigma_x^2 \quad (\text{VI.3.4.6})$$

et de *covariance* (cas de deux VA).

$$E[(x-m_x)(y-m_y)] = E[XY] - m_x m_y = \sigma_{xy}^2 \quad (\text{VI.3.4.6})$$

Dont la valeur normalisée porte le nom de *coefficient de corrélation*:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{VI.3.4.7})$$

Pour des variables aléatoires réelles, les coefficients de corrélation vérifient: $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Deux variables sont linéairement indépendantes ou non corrélées si leur variance est nulle.

VI.3.5: Théorème de la Limite Centrale

Ce théorème établit que sous certaines conditions, la distribution d'une somme de variables aléatoires indépendantes est, à la limite, *Gaussienne*.

Soient x_i des VA indépendantes, identiquement distribuées, alors la distribution de la variable aléatoire définie par $Y_i = \sum_{i=1}^N X_i$ approche lorsque

N tend vers l'infini, une distribution dont la densité est la suivante:

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (\text{VI.3.5.1})$$

(m_y, σ_y) représentant respectivement la *moyenne* et l'*écart type* de la VA Y ($\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$).

La VA Y suit donc la distribution d'une loi normale de paramètres (m_y, σ_y^2) . On note: $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$

VI.3.6: Processus Aléatoires

En considérant une expérience aléatoire, dont les résultats ne sont plus comme pour les VA aléatoires, des nombres, mais des fonctions d'une ou plusieurs paramètres, on définit des *processus aléatoires*.

En effet, un processus aléatoire est une famille paramétrée de VA. Dans le cas de plusieurs paramètres, on parle de *champs aléatoire*.

Pour une valeur particulière du paramètre, la valeur du processus aléatoire constitue une VA et dépend du résultat du phénomène aléatoire considéré; pour un résultat spécifique du phénomène (*réalisation* ou

échantillon), c'est une fonction du paramètre.

Prenons l'exemple des enregistrements sismiques en un lieu donné (accélération du sol), dans ce cas le processus aléatoire est l'ensemble complet des échantillons (enregistrements sismiques reflétant l'histoire du séisme dans le lieu considéré). Dans cet exemple le paramètre est le temps, on obtient ainsi, une famille de fonctions du temps.

Si on fixe le temps, on obtient une VA. On définit ainsi n VA $X_1=X(t_1), X_2=X(t_2), \dots, X_n=X(t_n)$.

VI.3.6.1: Caractérisation d'un Processus Aléatoire

a: Densité de probabilité:

Un processus aléatoire peut être spécifié par ses densités de probabilité d'ordres croissants suivantes:

La première densité:

$$P_X(x, t) = P_X(x(t))$$

fournit la densité de probabilité de la VA $x(t)$ pour chaque valeur fixée de t , elle ne reflète cependant pas la dépendance mutuelle des ordonnées de la fonction aléatoire. Celle ci est décrite moyennant les densités d'ordre supérieurs.

$$P_X(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_X(X(t_1), X(t_2))$$

$$P_X(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

La caractérisation complète, dans le sens probabiliste, du processus stochastique est faite grâce à sa fonction de densité de probabilité conjointe $P_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$.

Toutefois, pour une grande classe de problèmes, il suffit d'établir les deux premières fonctions $P_X(x(t)) \forall t$ et $P_X(x(t_1), x(t_2)) \forall (t_1, t_2)$.

b: Moments

Un processus aléatoire peut être spécifié alternativement par ses moments, comme suit:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x, t) dx$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{VI.3.6.1.1})$$

Les premiers moments sont d'une importance pratique considérable et ont reçu des notations particulières :

La moyenne:

$$m_x(t) = E[X(t)] \quad (\text{VI.3.6.1.2})$$

La fonction d'autocorrélation:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{VI.3.6.1.3})$$

La fonction d'autocovariance est définie par:

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_{x_1})(X(t_2) - m_{x_2})]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{x_1})(x(t_2) - m_{x_2}) P_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{VI.3.6.1.4})$$

avec $m_{x_1} = m_x(t_1)$ $m_{x_2} = m_x(t_2)$

Comme pour les VA, des *coefficients de corrélation* peuvent être définis par:

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)} \quad (\text{VI.3.6.1.5})$$

avec $(\sigma_x(t_1), \sigma_x(t_2))$ définissant respectivement les écarts types des VA $x(t_1)$ et $x(t_2)$.

$$\sigma_x(t_1) = \sqrt{E[(X(t_1) - m_{x_1})^2]} \quad \sigma_x(t_2) = \sqrt{E[(X(t_2) - m_{x_2})^2]} \quad (\text{VI.3.6.1.6})$$

En considérant deux processus différents, on définit :

La fonction de *inter-corrélation*:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (\text{VI.3.6.1.7})$$

La fonction de *inter-covariance*:

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_{x_1})(Y(t_2) - m_{y_2})] \quad (\text{VI.3.6.1.8})$$

avec: $m_{x_1} = m_x(t_1)$ $m_{y_2} = m_y(t_2)$

Les *coefficients de corrélation*:

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} \quad (\text{VI.3.6.1.9})$$

VI.3.6.2: Processus Stationnaires

Un processus est *stationnaire*, si toutes ses distributions sont invariantes vis à vis d'une translation dans le temps.

Ceci implique que:

$$P_X(x, t) = P_X(x, t+a)$$

$$P_X(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_X(x_1, t_1+a; x_2, t_2+a) \quad (\text{VI.3.6.2.1})$$

$$P_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P_X(x_1, t_1+a; x_2, t_2+a; \dots; x_n, t_n+a)$$

La densité de probabilité du 1er ordre est indépendante du temps, les densités d'ordres supérieurs, ne sont fonction que de la différence entre les instants considérés, sans égard pour l'origine des temps.

Pour être *strictement stationnaire*, un processus ne doit avoir ni début ni fin.

Il s'en suit que:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx = m_X = \text{Cte} \quad (\text{VI.3.6.2.2})$$

$E[X(t)]$ est donc indépendante du temps, pour un processus stationnaire.

La moyenne de la valeur carrée est aussi indépendante du temps:

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_X(x) dx = S_X \quad (\text{VI.3.6.2.3})$$

De même pour un tel processus, la variance est indépendante du temps, en effet:

$$E[(X(t) - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 P_X(x) dx = \sigma_X^2 \quad (\text{VI.3.6.2.4})$$

Les fonctions d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et d'autocovariance $\Gamma_X(\tau)$ sont aussi indépendantes du temps et ne dépendent que de la différence τ entre les instants considérés, en effet:

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) = R_X(\tau) \quad (\text{VI.3.6.2.5})$$

$$E[(X(t_1) - m_X)(X(t_2) - m_X)] = \Gamma_{XX}(x_1, t_1; x_2, t_2) = \Gamma_{XX}(\tau) = \Gamma_X(\tau) \quad (\text{VI.3.6.2.6})$$

a: Propriétés des fonctions $R_X(\tau)$ et $\Gamma_X(\tau)$

La fonction d'autocorrélation a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} R(0) &= E[X^2] = S_X \\ R_X(-\tau) &= R_X(\tau) \\ |R_X(\tau)| &\leq R_X(0) = S_X \end{aligned} \quad (\text{VI.3.6.2.7})$$

Les propriétés de la fonction d'autocovariance sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\Gamma_X(-\tau) &= \Gamma_X(\tau) \\ \Gamma_X(\tau) &= R_X(\tau) - m_X^2 \\ |\Gamma_X(\tau)| &\leq \Gamma_X(0) = \sigma_X^2\end{aligned}\tag{VI.3.6.2.8}$$

Il s'en suit que la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire $R_X(\tau)$ est réelle, paire et atteint son maximum à l'origine ($\tau=0$). La fonction d'autocovariance possède les mêmes propriétés.

b: Moyenne Temporelle, Théorème d'ergodicité

Considérons un processus stationnaire $x(t)$, sa moyenne temporelle est définie par:

$$S = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \langle x(t) \rangle_T\tag{VI.3.6.2.9}$$

Un processus est dit ergodique dans la moyenne si:

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle_T\tag{VI.3.6.2.10}$$

Un processus est dit ergodique dans la corrélation si:

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t)X(t+\tau) \rangle_T\tag{VI.3.6.2.11}$$

La propriété d'ergodicité permet donc de remplacer la moyenne d'ensemble par les moyennes temporelles sur une réalisation (échantillon) unique du processus. Pratiquement, chaque réalisation est complètement représentative de l'ensemble des échantillons constituant le processus aléatoire.

VI.3.6.3: Décomposition Spectrale d'un Processus Aléatoire

a: Transformée de Fourier

Soit une fonction réelle $h(t)$, sa transformée de Fourier est définie par:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (\text{VI.3.6.3.1})$$

$H(\omega)$ constitue une décomposition harmonique de la fonction considérée.

L'existence de (VI.3.6.3.1) est garantie si $h(t)$ est absolument intégrable, c-a-d si l'intégrale suivante correspond à une valeur finie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (\text{VI.3.6.3.2})$$

Ceci constitue cependant, une condition trop restrictive et il faut signaler que cette notion peut être étendue à des fonctions ne satisfaisant pas la condition (VI.3.6.3.2).

La transformée inverse est définie par :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{VI.3.6.3.3})$$

$h(t)$ et $H(\omega)$ constituent une paire de transformées de Fourier, pour exprimer ceci la notation suivante est utilisée:

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega) \quad (\text{VI.3.6.3.4})$$

La notion de transformée de *Fourier* sera utilisée, afin de définir la décomposition spectrale d'un processus stochastique stationnaire $X(t)$.

b: La fonction de densité spectrale

Intuitivement, il n'est pas possible de considérer la transformée de Fourier d'un processus stochastique stationnaire $x(t)$, car un échantillon d'un tel processus ne s'annule pas à l'infini, il ne vérifie donc pas la condition d'absolue intégrabilité. Pour cela, la notion de densité spectrale $S_x(\omega)$ a été introduite, qui est définie par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{VI.3.6.3.5})$$

Cette relation s'inverse sous la forme :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{VI.3.6.3.6})$$

Les relations (VI.3.6.3.5) et (VI.3.6.3.6) sont connues sous le nom de "*Théorème de Wiener-Khintchine*".

$(R_x(\tau), S_x(\tau))$ constituent donc une paire de transformées de Fourier :

Pour $\tau=0$, nous obtenons :

$$R_x(0) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (\text{VI.3.6.3.7})$$

En raison de ce qui vient d'être présenté, la fonction de densité spectrale est une mesure de la distribution dans le domaine fréquentiel, de la moyenne de la valeur carrée $E[x^2]$.

La densité spectrale donne aussi une indication sur la décomposition spectrale du signal $x(t)$.

En effet, en considérant la transformée de Fourier tronquée d'un processus stationnaire $x(t)$:

$$\bar{X}(\omega, T) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{VI.3.6.3.8})$$

Il a été démontré que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E [|\bar{X}(\omega, T)|^2] = S_x(\omega) \quad (\text{VI.3.6.3.9})$$

avec:

$$\bar{X}(\omega, T) \sim X(t)$$

Cette équation définit $S_{xx}(\omega)$ comme la limite d'une fonction non négative, par conséquent $S_{xx}(\omega) \geq 0$

L'analyse de *Fourier* portera donc sur la fonction d'autocorrélation du processus stationnaire $X(t)$ et non pas sur un échantillon de ce processus. Pour un signal réel, la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ étant réelle et paire il en est de même pour la fonction de densité spectrale $S_x(\omega)$.

c: Quelques exemples de processus

** Processus White Noise (bruit blanc)*

Un *white noise* est défini par une fonction de densité spectrale constante:

$$S_{xx}(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (\text{VI.3.6.3.10})$$

Sa fonction d'autocorrélation est définie par la fonction de *Dirac*:

$$R_{xx}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (\text{VI.3.6.3.11})$$

** Processus Wide-Band (bande large)*

Un processus *Wide-Band* est caractérisé par une fonction de densité spectrale recevant la contribution d'une large frange de fréquences.

*** Processus Narrow-Band (bande étroite)**

Un tel processus, est à contrario spécifié par une fonction de densité spectrale ne recevant que la contribution d'une frange limitée de fréquences.

**d: Fonctions d'autocorrélation et densité spectrale
des processus stochastiques dérivés**

Soit un processus stochastique stationnaire $x(t)$:

Sa dérivée première est définie par $\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$

Sa dérivée seconde est définie par $\ddot{X}(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2}$

Les fonctions d'autocorrélation des processus dérivés sont données par:

$$R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = R_{\dot{X}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} [R_X(\tau)] \quad (\text{VI.3.6.3.12})$$

$$R_{\ddot{X}\ddot{X}}(\tau) = R_{\ddot{X}}(\tau) = -\frac{d^4}{d\tau^4} [R_X(\tau)] \quad (\text{VI.3.6.3.13})$$

Les fonctions de densité spectrale des processus dérivés sont alors données par:

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (\text{VI.3.6.3.14})$$

$$S_{\ddot{X}}(\omega) = \omega^4 S_X(\omega) \quad (\text{VI.3.6.3.15})$$

e: La fonction de densité spectrale unilatérale

La fonction de densité spectrale unilatérale $G_X(f)$ est définie par:

$$\int_0^{+\infty} G_X(f) df = E[X^2] \quad (\text{VI.3.6.3.16})$$

avec $f = \frac{\omega}{2\pi}$: fréquence(HZ)

La relation entre $S_x(\omega)$ et $G_x(f)$ est :

$$G_x(f) = 4\pi S_x(2\pi f) \quad (\text{VI.3.6.3.17})$$

f: Caractérisation de deux processus stochastiques stationnaires

On peut définir aussi la densité spectrale croisée de deux processus aléatoires.

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux processus stationnaires stochastiques réelles, leur fonction de cross-densité spectrale (inter-densité spectrale) est définie par:

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{VI.3.6.3.18})$$

$S_{XY}(\omega)$ est généralement complexe et satisfait la relation:

$$S_{XY}(\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)} \quad (\text{où '-' signifie complexe conjugué})$$

$R_{XY}(\tau)$ est la fonction de cross-corrélation (inter-corrélation) des processus aléatoires stationnaires $x(t)$ et $y(t)$:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{VI.3.6.3.19})$$

$R_{XY}(\tau)$ est une fonction réelle indépendante du temps, vérifiant la relation: $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$

VI.4: PROCÉDURES D'ANALYSE NON DETERMINISTE DES SYSTEMES A AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

VI.4.1: Méthode de Décomposition Modale Basée sur le Déplacement du Mode

Cette partie concerne l'étude de la réponse stationnaire d'un système MDOF linéaire à amortissement non classique, soumis à une excitation stationnaire, Gaussienne. Dans ce but une procédure de décomposition modale basée sur les valeurs et vecteurs propres complexes du système amorti est développée, permettant de déduire les expressions générales des *moments spectraux* de la réponse.

Ces expressions sont fonction des moments *modaux cross-spectraux* et tiennent compte explicitement de la corrélation entre les réponses modales. Elles sont applicables pour des structures dont le caractère non classique de l'amortissement est significatif et dont les fréquences propres sont très proches. D'autre part, la réponse à un input white noise est aussi étudiée en détail, vu l'importance que revêt ce type d'excitation. Enfin, une caractérisation probabiliste de la réponse de la structure est réalisée en fonction des moments spectraux, ces derniers permettant d'évaluer entre autre la moyenne, la variance et la distribution du pic de la réponse de la structure sur une durée spécifiée.

a: Réponse à une excitation à la base dans le domaine temporel

En reprenant la structure étudiée dans le chapitre IV, mais en supposant cette fois ci que son amortissement est non proportionnel, il est évident que la méthode de décomposition modale exposée dans ce chapitre ne peut être adoptée. L'approche mathématique classique [24], permettant la résolution des

équations de mouvement de ce type de structure, consiste évidemment à les formuler en $2N$ équations modales du 1er ordre, comme il a été spécifié dans les chapitres précédents.

Nous obtenons alors:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{g} \dot{x}_g(t) \quad (\text{VI.4.1.1})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} \mathbf{r} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.4.1.2})$$

Le problème aux valeurs propres correspondant est évidemment formulé ainsi:

$$\mathbf{B} \hat{\Phi}_i = -\lambda_i \mathbf{A} \hat{\Phi}_i \quad (\text{VI.4.1.3})$$

Dans le but de faire une comparaison avec le cas classique traité dans le chapitre IV, une notation ayant déjà été utilisée par *Singh* [44] est introduite.

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_i \pm i \omega_{Di} \quad (\text{VI.4.1.4})$$

où $\omega_i, \omega_{Di}, \xi_i$ sont déterminés par:

$$\omega_i = |\lambda_i|, \quad \xi_i = -\text{Re}(\lambda_i) / |\lambda_i|, \quad \omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (\text{VI.4.1.5})$$

ω_i et ξ_i sont respectivement les fréquences et pourcentages d'amortissement critique modaux du système.

Les valeurs complexes des composantes d'une configuration modale, conduisent bien sûr, en vibration libre, à différents angles de déphasage pour les DDL du système.

Nous rappelons que, les équations (VI.4.1.1) sont transformées en $2N$ équations modales découplées, qui se manifestent par paires de conjugués, grâce aux coordonnées modales \mathbf{q} obtenues par la transformation suivante:

$$\mathbf{y} = \hat{\Phi} \mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \hat{\Phi} = [\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_{2N}]$$

La i -ème équation modale est alors :

$$A_i \dot{q}_i + B_i q_i = \Phi_i^T g \ddot{x}_g(t) \quad (\text{VI.4.1.6})$$

ou alternativement:

$$\dot{q}_i - \lambda_i q_i = r_i \ddot{x}_g(t) \quad (\text{VI.4.1.7})$$

où:

$$A_i = \Phi_i^T A \Phi_i \quad (\text{a})$$

$$B_i = \Phi_i^T B \Phi_i = -\lambda_i A_i \quad (\text{b}) \quad (\text{VI.4.1.8})$$

$$r_i = \Phi_i^T g / A_i = -\Phi_i^T M r / A_i \quad (\text{c})$$

La solution est bien sûre l'intégrale suivante qui est analogue à l'équation (IV.2.5) pour un système à amortissement classique.

$$q_i = r_i \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (\text{VI.4.1.9})$$

En combinant les quantités de réponse modale comme dans le cas classique, nous obtenons:

$$\begin{aligned} R(t) &= P^T x = \sum_{i=1}^{2N} P^T \Phi_i q_i \\ &= \sum_{i=1}^{2N} b_i \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (\text{VI.4.1.10})$$

où :

$$b_i = P^T \Phi_i r_i \quad (\text{VI.4.1.11})$$

Rappelons, qu'en raison du fait que les quantités b_i et λ_i se produisent par paires de complexes conjugués, la réponse $R(t)$ est toujours réelle.

Il est à noter que b_i est en général complexe, cependant si le système est à amortissement classique, b_i est purement imaginaire.

En fait, pour un tel système (voir chapitre IV) A_i s'exprime par:

$$A_i = -\frac{B_i}{\lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_i} [\Phi_i^T K \Phi_i - \lambda_i^2 \Phi_i^T M \Phi_i] = \left(\begin{array}{c} \omega_i^2 - \lambda_i^2 \\ -\lambda_i \end{array} \right) M_i$$

En substituant l'équation (VI.4.1.4) dans l'expression ci dessus b_i sera donné par:

$$b_i = \frac{(P^T \Phi_i) (\Phi_i^T M r)}{\pm 2i \omega_{Di} M_i} = \pm i \frac{\Psi_i}{2\omega_{Di}} \quad (\text{VI.4.1.12})$$

L'équation (VI.4.1.12) donne l'expression de b_i dans le cas classique.

Jusqu'ici, l'analyse n'a été qu'une reprise de ce qui a été exposé dans les chapitres précédents, traitant du cas déterministe et que l'on retrouve dans la plupart des ouvrages classiques [24]. Toutefois, le traitement de ces équations a été réalisé différemment par les chercheurs. Ainsi, *Singh* [44] utilisa une *méthode d'analyse directe*. Cette dernière conduit à un ensemble de quatre équations simultanées, permettant la détermination de la fonction de densité spectrale (FDS) de la réponse à une excitation aléatoire stationnaire.

Igusa et al. [26] quand à eux optèrent pour l'*intégrale de Duhamel* afin d'exprimer ces équations. Notre choix s'est fixé sur cette dernière technique, qui s'avère être très souple permettant d'obtenir des expressions plus directes et plus simples de la FDS et des moments spectraux.

En exploitant le fait que b_i et λ_i se manifestent par paires de complexes conjugués et en posant $b_i = \bar{b}_{i+N}$ et $\lambda_i = \bar{\lambda}_{i+N}$ (où la barre signifie complexe conjugué), l'équation (VI.4.1.10) peut s'écrire:

$$R(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ b_i \int_0^t \bar{x}_g(\tau) \exp[(-\xi_i \omega_i + i\omega_{Di})(t-\tau)] d\tau + \bar{b}_i \int_0^t x_g(\tau) \exp[(-\xi_i \omega_i - i\omega_{Di})(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (\text{VI.4.1.13})$$

ou encore :

$$R(t) = 2 \sum_{i=1}^N \left\{ -Im(b_i) \int_0^t \dot{x}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin[\omega_{Di}(t-\tau)] d\tau + \right. \\ \left. Re(b_i) \int_0^t \dot{x}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \cos[\omega_{Di}(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (VI.4.1.14)$$

Dans l'expression précédente, les termes Im et Re signifient respectivement partie réelle et partie imaginaire des quantités considérées.

Dans le cas particulier d'un amortissement classique, il a été signalé que b_i est purement imaginaire, ainsi seul le premier terme d'intégrale apparaissant dans l'équation (VI.4.1.14) subsiste, ce qui nous ramène à ce qui a été déterminé dans le chapitre IV (voir équation IV.2.8).

Tandis que dans le cas général d'un amortissement non classique, une seconde intégrale en termes de cosinus apparaît dans l'équation (VI.4.1.14), qui est due aux différences de phases existant dans les configurations modales complexes.

Il est évident, que la première intégrale peut être exprimée directement en fonction de l'intégrale de Duhamel, la seconde intégrale par contre, nécessite l'utilisation de la dérivée de l'intégrale de Duhamel comme indiqué dans l'équation suivante:

$$\dot{h}_i(t) = \int_0^t \dot{x}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \cos[\omega_{Di}(t-\tau)] d\tau - \xi_i \omega_i h_i(t) \quad (VI.4.1.15)$$

En substituant (VI.4.1.15) dans (VI.4.1.14) nous obtenons:

$$R(t) = 2 \sum_{i=1}^N \left\{ -Im(b_i) [\omega_{Di} h_i(t)] + Re(b_i) [\dot{h}_i(t) + \xi_i \omega_i h_i(t)] \right\} \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ a_i h_i(t) + c_i \dot{h}_i(t) \right\} \quad (VI.4.1.16)$$

avec:

$$a_i = -2\text{Re}(b_i \bar{\lambda}_i) \quad c_i = 2\text{Re}(b_i) \quad (\text{VI.4.1.17})$$

Notons, que cette formulation est plus simple que l'expression précédente, donnée par l'équation (VI.4.1.14). Elle peut être rapidement évaluée dans le domaine temporel, sous l'hypothèse d'une excitation déterministe, grâce à des méthodes numériques permettant le calcul de $h_i(t)$ et $\dot{h}_i(t)$ [12]. Par ailleurs, cette formulation est aussi très convenable pour une analyse en vibrations aléatoires, comme il sera démontré ultérieurement.

Rappelons que dans le cas classique, $b_i = i\psi_i/2\omega_{D_i}$ ainsi $c_i=0$ et $a_i=\psi_i$ par conséquent l'équation (VI.4.1.16) se réduit à l'équation (IV.2.11 classique)

b: Réponse à une excitation sismique dans le domaine fréquentiel

Notre but étant une étude non déterministe, supposons en premier lieu que l'excitation $\dot{x}_g(t)$ est spécifiée par sa fonction de densité spectrale unilatérale $G_0(\omega)$. Nous nous proposons dans ce qui suit, de déterminer la fonction d'autocorrélation $A_{RR}(\tau)$ ainsi que la FDS $G_{RR}(\omega)$ de la réponse. En effet, si le mouvement du sol est un processus aléatoire stationnaire, la fonction d'autocorrélation de la réponse stationnaire $R(t)$ est donnée par:

$$A_{RR}(\tau) = E[R(t) \cdot R(t+\tau)] \quad (\text{VI.4.1.18})$$

Rappelons que si, $A_{ij}(\tau) = E[h_i(t) \cdot h_j(t+\tau)]$ représente les fonctions de cross-corrélation de $h_i(t)$ et $h_j(t)$ alors:

$$E[h_i(t) \cdot \dot{h}_j(t+\tau)] = A'_{ij}(\tau) \quad (a)$$

$$E[\dot{h}_i(t) \cdot h_j(t+\tau)] = -A'_{ij}(\tau) \quad (b) \quad (VI.4.1.19)$$

$$E[\dot{h}_i(t) \cdot \dot{h}_j(t+\tau)] = -A''_{ij}(\tau) \quad (c)$$

où (') signifie différentiation par rapport à τ :

La fonction d'autocorrélation se réduit à:

$$A_{RR}(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [a_i a_j A_{ij}(\tau) + a_i c_j A'_{ij}(\tau) - a_j c_i A'_{ij}(\tau) - c_i c_j A''_{ij}(\tau)] \quad (VI.4.1.20)$$

Afin de définir la FDS de la réponse, les transformées de Fourier des expressions ci dessus doivent être déterminées. La cross-densité spectrale de $h_i(t)$ et $h_j(t)$, notée $G_{ij}(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction de cross-corrélation $A_{ij}(\tau)$, son expression est donc:

$$G_{ij}(\omega) = G_0(\omega) H_i(\omega) \bar{H}_j(\omega) \quad (VI.4.1.21)$$

où $H_i(\omega)$ est la fonction de transfert d'un oscillateur de fréquence ω_i et dont le % d'amortissement critique est ξ_i :

$$H_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\omega} \quad (VI.4.1.22)$$

Les paires de transformées de Fourier $(i\omega G_{ij}(\omega), A'_{ij}(\tau))$, $(-\omega^2 G_{ij}(\omega), A''_{ij}(\tau))$ découlent des propriétés de base de l'analyse de Fourier.

La FDS de la réponse $R(t)$ est obtenue en déterminant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $A_{RR}(\tau)$:

$$G_{RR}(\omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_{ij} + i\omega D_{ij} + \omega^2 E_{ij}] G_{ij}(\omega) \quad (VI.4.1.23)$$

où les coefficients C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} sont définis par:

$$C_{ij} = a_i a_j, \quad D_{ij} = (a_i c_j - a_j c_i), \quad E_{ij} = c_i c_j \quad (\text{VI.4.1.24})$$

L'équation (VI.4.1.23) représente une généralisation de la FDS d'un système à amortissement classique. Pour preuve, examinons de près ces équations lorsqu'il s'agit d'un système à amortissement classique.

Tel que démontré précédemment les coefficients b_j dans ce cas particulier sont purement imaginaires, il s'en suit que $c_i = c_j = 0$ et $D_{ij} = E_{ij} = 0$.

Les coefficients restants C_{ij} s'expriment par $C_{ij} = \psi_i \psi_j$.

Ainsi l'équation (VI.4.1.23) se réduit à la FDS d'un système à amortissement classique [12,36]:

$$G_{RR}(\omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_i \psi_j G_{ij}(\omega) \quad (\text{VI.4.1.25})$$

Notons, que la différence entre l'expression précédente et celle donnée par l'équation (VI.4.1.22), réside dans l'apparition de termes additifs, dûs à l'effet du déphasage entre les réponses modales.

c: Moments spectraux de la réponse

Comme il a été mentionné en introduction, la plupart des mesures statistiques de la réponse ayant un intérêt pratique en engineering, sont obtenues en fonction des premiers moments spectraux S_m , pour $m=0,1,2$ et 4.

Rappelons que les *moments spectraux* s'expriment en fonction de la FDS $G_{RR}(\omega)$ par l'expression:

$$S_m = \int_0^{\infty} \omega^m G_{RR}(\omega) d\omega \quad m=0,1,\dots \quad (\text{VI.4.1.26})$$

Ainsi en substituant l'équation (VI.4.1.23) dans l'intégrale de l'équation

(VI.4.1.26), l'expression suivante du m-ième moment spectral est obtenue:

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{ C_{ij} \operatorname{Re}(S_{m,ij}) - D_{ij} \operatorname{Im}(S_{m+1,ij}) + E_{ij} \operatorname{Re}(S_{m+2,ij}) \} \quad (\text{VI.4.1.27})$$

où:

$$S_{m,ij} = \int_0^{\infty} \omega^m G_{ij}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \omega^m G_0(\omega) H_i(\omega) \bar{H}_j(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.1.28})$$

qui sont les *moments cross-spectraux* associés à $h_i(t)$ et $h_j(t)$.

Par ailleurs, dans le cas classique: $D_{ij}=E_{ij}=0$, il s'en suit que l'équation (VI.4.1.27) se réduit à:

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_i \psi_j \operatorname{Re}(S_{m,ij}) \quad (\text{VI.4.1.29})$$

qui est la même formulation que celle dérivée par *Der Kiureghian* [8].

Par conséquent, les moments d'ordres supérieurs apparus dans l'équation (VI.4.1.27) résultent des déphasages existant dans les vecteurs propres complexes causés par l'amortissement non classique.

** Convergence des termes d'ordres supérieurs dans les moments spectraux*

Dans ce qui suit, nous allons aborder le problème de convergence de l'intégrale apparaissant dans l'équation (VI.4.1.27).

Effectivement, dans certains cas, cette intégrale peut ne pas exister, comme cela a été discuté par *Der Kiureghian et al.* [27]. Si la fonction de densité spectrale FDS est à bande limitée, en d'autres termes, si une fréquence limite ω_0 existe de telle façon que $G_0(\omega)$ s'annule pour toutes les fréquences au delà de ω_0 , il est évident que l'intégrale exprimant les moments cross-spectraux dans l'équation (VI.4.1.28) converge pour toutes les valeurs positives de m . Par conséquent, le moment spectral S_m peut être déterminé pour n'importe quel ordre.

Cependant, plusieurs FDS théoriques ne sont pas à bande limitée, or pour les fréquences élevées, les termes $H_i(\omega)$ et $\overline{H_j}(\omega)$ ont le comportement suivant:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega^m H_i(\omega) \overline{H_j}(\omega)) &\rightarrow \omega^{m-4} & (a) & \quad (\text{VI.4.1.30}) \\ \text{Im}(\omega^m H_i(\omega) \overline{H_j}(\omega)) &\rightarrow \omega^{m-5} & (b) & \end{aligned}$$

Dés lors que la quantité à intégrer, doit être d'ordre inférieur à ω^{-1} (pour des fréquences élevées) afin d'assurer la convergence, il s'en suit que l'intégrale de $S_{m,ij}$ converge si $G_0(\omega)$ est d'ordre inférieur à $\omega^{-(m-3)}$ quand $\omega \rightarrow \infty$.

Afin d'expliciter ceci, prenons l'exemple d'un bruit blanc dont la FDS G_0 est évidemment constante. Dans ce cas les termes $S_{m,ij}$ ne convergent que pour $m < 3$.

Par conséquent, pour un tel input, les moments spectraux définis par l'équation (VI.4.1.27) n'existent que pour $m=0$.

En revanche, pour les systèmes à amortissement classique, les moments S_m existent pour $m=0, 1, 2$, en raison du fait que ces derniers ne font intervenir que les termes $S_{m,ij}$.

Or, intuitivement, si $m=m_0$ est l'ordre existant le plus élevé pour les moments cross-spectraux $S_{m,ij}$, alors m_0 doit obligatoirement être l'ordre le plus élevé des moments spectraux S_m , aussi bien pour le cas classique que pour le cas non classique.

Dans le but de prouver ce qui vient d'être avancé, reformulons l'équation (VI.4.1.27) comme suit:

$$\begin{aligned} S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{ C_{ij} \text{Re}(S_{m,ij}) - D_{ij} \text{Im}(S_{m+1,ij}) \} + \\ \int_0^{\infty} \text{Re} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij} \omega^{m+2} G_{ij}(\omega) \right) d\omega \end{aligned} \quad (\text{VI.4.1.31})$$

or si $S_{m,ij}$ existe alors $Im(S_{m+1,ij})$ existe aussi, d'après les équations (VI.4.1.30a) et (VI.4.1.30b). Ainsi seul le dernier terme de l'équation (VI.4.1.31) doit être modifié afin d'assurer la convergence. Ce problème a été traité en détail par *Igusa et al.* [27].

La solution consiste à introduire une expression modifiée de la FDS $G'_{ij}(\omega)$ définie par:

$$G'_{ij}(\omega) = \begin{cases} G_{ij}(\omega) - \omega^{-4}G_0(\omega) & \omega \geq \omega_0 \\ G_{ij}(\omega) & 0 \leq \omega \leq \omega_0 \end{cases} \quad (\text{VI.4.1.32})$$

où ω_0 est une fréquence arbitraire positive.

Ce qui conduit à une expression modifiée du moment cross-spectral:

$$S'_{m,ij} = \int_0^{\infty} \omega^m G'_{ij}(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.1.33})$$

Afin de définir l'expression modifiée de S_m , nous devons exprimer $S'_{m+2,ij}$ grâce à l'équation (VI.4.1.33).

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij} Re(S'_{m+2,ij}) + \int_{\omega_0}^{\infty} Re(\omega^{m-2} G_0(\omega)) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij} d\omega \quad (\text{VI.4.1.34})$$

Partant du fait que $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij} = \sum_{i=1}^N C_i \sum_{j=1}^N C_j = 0$ (voir [27])

La dernière intégrale dans l'équation (VI.4.1.34) est nulle, ainsi, l'expression restante étant convergente, le moment cross-spectral $S'_{m+2,ij}$ est bien défini.

L'expression finale du moment spectral S_m est alors:

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{ C_{ij} Re(S_{m,ij}) - D_{ij} Im(S_{m+1,ij}) + E_{ij} Re(S'_{m+2,ij}) \} \quad (\text{VI.4.1.35})$$

L'expression (VI.4.1.35), existe pour les mêmes valeurs de m que celle relative aux systèmes à amortissement classique (VI.4.1.29).

Notons la similitude des expressions données par les équations (VI.4.1.27) et (VI.4.1.35).

Dans ce qui va suivre, les expressions précédentes seront utilisées, sachant que les moments modifiés (dotés d'un prime), ne doivent être utilisés que si les moments non modifiés n'existent pas.

L'évaluation des moments spectraux S_m , implique deux problèmes relativement indépendants, d'une part le calcul des coefficients E_{1j}, D_{1j}, C_{1j} et d'autre part la détermination des moments cross-spectraux $S_{m,1j}$.

Le premier problème relevant de la dynamique, est concerné par les propriétés du système structural.

Le second problème relevant, du domaine des vibrations aléatoires, est concerné par les propriétés de l'excitation de même que les fréquences et les taux d'amortissement du système.

Pour tout processus d'input stationnaire dont la densité spectrale FDS est $G_0(\omega)$, les intégrales dans les équations (VI.4.1.33) et (VI.4.1.28) peuvent être calculées soit par la méthode des résidus ou les fractions partielles ou encore par intégration numérique.

d: Réponse à un input bruit blanc

Le bruit blanc (purement aléatoire), caractérisé par une FDS G_0 constante et constituant une idéalisation très intéressante dans l'étude de la réponse des systèmes linéaires, est étudié dans la plupart des ouvrages de vibrations aléatoires [36,38]. Ce bruit a aussi été choisi, comme cas spécial pour l'évaluation de la réponse structurale par *Igusa et al.* [27], vu la simplicité d'interprétation des résultats d'analyse pour un tel input, comparés à ceux obtenus pour un input quelconque.

En utilisant la méthode des résidus et les fractions partielles, les expressions des moments cross-spectraux nécessaires à la détermination des trois premiers moments spectraux S_0, S_1, S_2 relatifs au processus de réponse ont été déterminés par *Igusa et al.* [27].

Soulignons que les moments d'ordre plus élevé que S_2 , n'existent pas pour un input bruit blanc en raison des démonstrations précédentes.

Les moments cross-spectraux de la réponse à un input bruit blanc dont la FDS est G_0 ont été présentés dans la référence [27]. Si les % d'amortissement sont suffisamment faibles, les expressions relatives aux cross-moments peuvent être convenablement approximées.

Ces approximations sont présentées dans ce qui suit :

$$Re(S_{0,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} [\omega_i \xi_i + \omega_j \xi_j] \quad (VI.4.1.36)(a)$$

$$Re(S_{1,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left[\frac{1}{4} (\omega_i + \omega_j)^2 (\xi_i + \xi_j) - \frac{1}{2\pi} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \log \frac{\omega_i}{\omega_j} \right] \quad (b)$$

$$Im(S_{1,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left[\frac{-\omega_i^2 + \omega_j^2}{2} \right] \quad (c)$$

$$Re(S_{2,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} [\omega_i \xi_j + \omega_j \xi_i] \omega_i \omega_j \quad (d)$$

$$Im(S_{2,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left[\frac{1}{4} (-\omega_i^2 + \omega_j^2) (\omega_i + \omega_j) - \frac{\omega_i \omega_j}{\pi} (\omega_i \xi_j + \omega_j \xi_i) \log \frac{\omega_i}{\omega_j} \right] \quad (e)$$

$$Re(S'_{3,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left\{ \frac{1}{4} [-\omega_j^4 \xi_j + 2\omega_j^3 \omega_i \xi_i + 3\omega_i^2 \omega_j^2 (\xi_i + \xi_j) + 2\omega_i^3 \omega_j \xi_j - \omega_i^4 \xi_i] + \frac{1}{4\pi} [-\omega_i^4 + \omega_j^4] \log \frac{\omega_i}{\omega_j} \right\} \quad (f)$$

$$\text{Im}(S_{3,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left[\frac{\omega_j^4 - \omega_i^4}{4} \right] \quad (g)$$

$$\text{Re}(S'_{4,ij}) = \frac{2\pi G_0}{K_{ij}} \left[\frac{\omega_i \xi_i}{2} (\omega_j^4 + 2\omega_i^2 \omega_j^2 - \omega_i^4) + \frac{\omega_j \xi_j}{2} (-\omega_j^4 + 2\omega_i^2 \omega_j^2 + \omega_i^4) \right] \quad (h)$$

$$\text{avec } K_{ij} = (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4\omega_i \omega_j (\omega_i \xi_i + \omega_j \xi_j) (\omega_i \xi_j + \omega_j \xi_i)$$

Notons, que les expressions $\text{Re}(S_0, ij)$, $\text{Re}(S_1, ij)$ et $\text{Re}(S_2, ij)$ ont été précédemment fournies par *Der Kiureghian* [16] pour des systèmes à amortissement classique, du moment que seuls ces moments cross-spectraux sont nécessaires pour évaluer S_0, S_1, S_2 pour de tels systèmes.

De même les résultats relatifs à $\text{Re}(S_{0,ii})$, $\text{Re}(S_{1,ii})$ et $\text{Re}(S_{2,ii})$ ont été utilisés au paravant [16].

Néanmoins, les résultats restants sont exclusivement réservés aux systèmes à amortissement non classique.

Dans l'analyse qui vient d'être exposée, l'accent est mis sur les expressions des moments spectraux S_m , relatifs à la réponse stationnaire $R(t)$, en vertu du fait que la plupart des quantités de réponse ayant une certaine importance en engineering, peuvent être exprimées en fonction des premiers moments spectraux [49].

Par exemple S_0 et S_2 sont respectivement les espérances du carré de la réponse et sa dérivée par rapport au temps [12].

Plusieurs autres quantités de réponse sont exprimées en fonction des moments spectraux.

Ainsi la fréquence moyenne du processus de réponse est donnée par $\bar{\omega} = \sqrt{(S_2/S_0)}$.

Le facteur de forme mesurant la largeur de bande de la FDS de la réponse est

$$\text{exprimé par } \delta = \sqrt{1 - \frac{S_1^2}{S_0 S_2}}$$

S_0, S_1, S_2 décrivent aussi plusieurs propriétés du processus enveloppe [39].

L'étude du processus enveloppe a permis de déduire les expressions relatives à la distribution du pic de la réponse sur une durée limitée [50], ainsi que sa moyenne et sa variance [16].

Ces expressions ont aussi été exploitées pour définir la méthode spectre de réponse pour l'étude des systèmes à amortissement non classique [27] qui sera exposée ultérieurement. Avant de décrire l'approche spectre de réponse, il serait intéressant d'introduire quelques notions de base relatives à la description statistique du pic de la réponse d'une structure soumise à une excitation Gaussienne.

VI.4.2: Statistiques du Pic de la Réponse à une Excitation Gaussienne

En vibration aléatoire, si une structure linéaire est soumise à une excitation *Gaussienne* de moyenne nulle, sa réponse sera aussi un processus *Gaussien* de moyenne nulle [38]. *Vanmarcke* [50] a exprimé la distribution du premier passage d'un seuil donné, pour un tel processus, en fonction de ses trois premiers moments spectraux:

En utilisant la formulation de *Vanmarcke*, la distribution cumulative du pic de la valeur absolue de la réponse sur une durée τ défini par:

$$R_\tau = \max_{\tau} |R(t)| \quad (\text{VI.4.2.1})$$

peut être exprimée ainsi:

$$F_{R_\tau}(r) = [1 - \exp(-s^2/2)] \exp\left[-v\tau \frac{1 - \exp[-\sqrt{(\pi/2)} \delta_e s]}{\exp[(s^2/2) - 1]}\right], \quad r > 0 \quad (\text{VI.4.2.2})$$

Dans cette expression $s = r/\sigma_R = r/\sqrt{S_0}$ est un seuil normalisé ou une valeur réduite du seuil.

Le taux moyen des passages par zéro du processus est défini par:

$$v = \frac{\sigma_{\dot{R}}}{\pi \sigma_R} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{S_2}{S_0}} \quad (\text{VI.4.2.3})$$

avec:

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{S_1^2}{S_0 S_2}}, \quad \delta_e = \delta^{1,2} \quad (\text{VI.4.2.4})$$

δ est le facteur de forme de la densité spectrale de la réponse et dont la valeur varie entre 0 et 1 (une faible valeur de δ marque un processus en bande étroite).

La moyenne et l'écart type de R_τ sont en général obtenus respectivement par les relations :

$$\bar{R}_\tau = p \sigma_R \quad (\text{VI.4.2.5})$$

et

$$\sigma_{R_\tau} = q \sigma_R \quad (\text{VI.4.1.6})$$

où p et q sont les facteurs de pic qui s'expriment en fonction des moments spectraux sur une durée τ par les formules suivantes:

$$p = \sqrt{2 \text{Ln}(v_e \tau)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \text{Ln}(v_e \tau)}} \quad (\text{VI.4.2.7})$$

$$q = \frac{1.2}{\sqrt{2 \text{Ln}(v_e \tau)}} - \frac{5.4}{13 + (2 \text{Ln}(v_e \tau))^{3.2}} \quad (\text{VI.4.2.8})$$

où:

$$v_0 \tau = \left\{ \begin{array}{ll} \max(2.1, 2 \delta v \tau) & 0 < \delta \leq 0.1 \\ (1.63 \delta^{0.45} - 0.38) v \tau & 0.1 < \delta \leq 0.69 \\ v \tau & 0.69 < \delta \leq 1 \end{array} \right\} \quad (\text{VI.4.2.9})$$

$v_0 \tau$ est le taux équivalent des passages par zéro statistiquement indépendants.

Des résultats similaires à ceux mentionnés ci dessus s'appliquent à un oscillateur simple dont la fréquence ω_i et l'amortissement ξ_i sont ceux correspondant au mode i et dont la réponse est $S_i(t)$, il suffit alors de remplacer R par S_i et S_m par $S_{m,ii}$ dans chacune des équations (VI.4.2.1)-(VI.4.2.4).

Les paramètres v, δ, p, q seront respectivement notés v_i, δ_i, p_i, q_i pour cet oscillateur de caractéristiques (ω_i, ξ_i) dans la suite de l'analyse.

Des formules simplifiées sont cependant valides pour la réponse d'un oscillateur simple, soumis à un input de FDS arbitraire pourvu que certaines conditions soient vérifiées.

Ainsi, il a été démontré par *Vanmarcke* [50] et *Der Kiureghian* [16] que le taux

moyen de passage par zéro $v_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{S_{2,ii}}{S_{0,ii}}}$, de même que le facteur de forme

$$\delta_i = \sqrt{1 - \frac{S_{1,ii}^2}{S_{0,ii} S_{2,ii}}}, \text{ correspondant à un oscillateur de paramètres } (\omega_i, \xi_i)$$

sont peu sensibles à la forme de la FDS de l'input, pourvu que ce dernier soit à bande large, et que la fréquence de l'oscillateur soit proche des fréquences de l'input.

Dans ces conditions v_i et δ_i basés sur un input bruit blanc, constituent une bonne approximation à celles correspondant à la réponse d'un oscillateur de

mêmes caractéristiques (ω_i, ξ_i) et soumis à un input Wide-Band dont la FDS est de forme arbitraire.

Les résultats fournis pour un input bruit blanc sont:

$$v_i = \frac{\omega_i}{\pi} \quad (\text{VI.4.2.10})$$

$$\delta_i = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \right)^2 \right]^{1/2} \sim 2\sqrt{\frac{\xi_i}{\pi}} \quad (\text{VI.4.2.11})$$

(La dernière approximation étant valide pour de faibles amortissements).

Ces expressions seront donc utilisées dans les équations (VI.4.2.7)-(VI.4.2.9), afin d'estimer les facteurs de pic p_i et q_i correspondant à un oscillateur simple dont les caractéristiques (ξ_i, ω_i) sont celles du mode i .

VI.4.3: Méthode Modalo-Spectrale Basée sur le Déplacement du Mode

Dans certaines applications, telles qu'en génie-parasismique, la spécification de l'excitation par sa FDS, s'avère être une méthode peu convenable. Effectivement, une description plus avantageuse est celle basée sur le *spectre de réponse moyen (spectre de design, spectre de calcul)*.

Le spectre de réponse, représente les caractéristiques spectrales d'un ensemble de mouvements du sol, occasionnés par les séismes qui sont supposés se produire dans un site donné, et procure pour cela un meilleur "outil de travail" permettant de définir l'input de design nécessaire à l'analyse des structures.

En pratique, la description de l'input en termes de spectre de réponse est préférée lors du calcul dynamique des structures pour plusieurs raisons. La raison principale en est peut être la "tradition"; ainsi la plupart des spécifications et codes structuraux existants sont basés sur la technique du

spectre de réponse, qui est très appréciée par la communauté des ingénieurs praticiens.

Une autre raison est qu'il est plus convenable de générer des spectres de réponse de design, plutôt que des densités spectrales à partir des données disponibles.

Enfin, dans le but de déterminer certaines quantités critiques de la réponse comme la moyenne du pic de la réponse, une formulation basée sur le spectre de réponse moyen s'avère être plus simple du point de vue calcul que celle basée sur la FDS.

Pour les raisons qui viennent d'être évoquées, la technique de superposition modale avec modes complexes a été avantageusement exploitée, afin de développer des méthodes spectrales appliquées à des systèmes à amortissement non proportionnel, nous citons entre autres, celles proposées par *Singh* [44], *Igusa et Der Kiureghian* [27], *Villaverde* [51], *Yang et al.* [55].

Le but de ce paragraphe est donc, d'exposer une méthode de décomposition modale permettant d'évaluer la réponse d'un système MDOF à amortissement non classique dont l'input (excitation) est un processus Gaussien, stationnaire à bande large et de moyenne nulle spécifié par son spectre de réponse moyen. La technique proposée est particulièrement utile en génie parasismique, où la description du mouvement du sol est souvent faite grâce à des spectres de réponse. Pour l'appliquer, il est nécessaire de vérifier la validité des suppositions de base de cette méthode relativement aux excitations sismiques. Il s'avère impératif, de vérifier d'une part que le mouvement du sol est un processus Gaussien, stationnaire dont la FDS est à bande large et d'autre part que la réponse de la structure linéaire est aussi un processus stationnaire. En effet, bien que les séismes induits par le mouvement du sol soient normalement non stationnaires, leur phase forte est souvent caractérisée par sa quasistationnarité, de plus la réponse pic se manifeste généralement durant cette phase.

Il semble donc raisonnable, dans le but de développer une méthode modalo-spectrale, de supposer que le processus est stationnaire.

Aussi, la supposition d'une excitation Gaussienne est acceptable sur la base du *théorème de la limite centrale*, du fait que le mouvement sismique résulte de superposition d'un grand nombre d'impulsions arrivant d'une d'une manière aléatoire dans le temps.

Par ailleurs, les enregistrements des mouvements du sol ont permis de vérifier la supposition concernant la largeur de bande des mouvements sismiques, qui s'avère être le plus souvent acceptable.

Finalement, l'hypothèse de stationnarité de la réponse a été validée sous certaines conditions. En effet, en vertu du fait que la réponse d'un oscillateur, pas très faiblement amorti, à un input à bande large atteint la stationnarité après quelques cycles, on admet que, le processus de réponse est stationnaire pour des structures dont la période fondamentale est plusieurs fois plus faible que la durée de la phase forte du mouvement du sol.

Ainsi, Le spectre de réponse étant une description incomplète de l'input, la méthode développée est nécessairement approximative, rappelons que sa précision est meilleure si l'input est un processus à large bande fréquentielle, dont la durée de stationnarité est longue (plusieurs fois plus longue que celle de la période fondamentale de la structure étudiée) et si de plus, les modes significatifs de vibration sont contenus dans la bande fréquentielle de l'excitation.

Afin de développer cette approche modalo-spectrale, nous introduisons les coefficient suivants:

$$\rho_{m,ij} = \frac{Re(S_{m,ij})}{\sqrt{S_{m,ii}S_{m,jj}}} \quad (VI.4.3.1)$$

$$\rho'_{m,ij} = \frac{Re(S'_{m,ij})}{\sqrt{S'_{m,ii}S'_{m,jj}}} \quad (VI.4.3.2)$$

$$\eta_{m,ij} = \frac{Im(S_{m,ij})}{\sqrt{S_{m,ii}S_{m,jj}}} \quad (VI.4.3.3)$$

Nous notons que $\rho_{0,ij}, \rho_{2,ij}, \rho_{4,ij}$ représentent respectivement les coefficients de corrélation entre les paires suivantes $(h_i(t), h_j(t)), (\dot{h}_i(t), \dot{h}_j(t))$ et $(\ddot{h}_i(t), \ddot{h}_j(t))$.

L'introduction de ces coefficients permet de réécrire l'équation (VI.4.1.3.3) sous la forme :

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ C_{ij} \rho_{m,ij} W_{m,ij} - D_{ij} \eta_{m+1,ij} W_{m+1,ij} + E_{ij} \rho'_{m+2,ij} W'_{m+2,ij} \right\} \sqrt{S_{0,ii} S_{0,jj}} \quad (\text{VI.4.3.4})$$

où:

$$W_{m,ij} = \frac{\sqrt{S_{m,ii} S_{m,jj}}}{\sqrt{S_{0,ii} S_{0,jj}}} \quad (\text{VI.4.3.5})$$

$$W'_{m,ij} = \frac{\sqrt{S'_{m,ii} S'_{m,jj}}}{\sqrt{S_{0,ii} S_{0,jj}}} \quad (\text{VI.4.3.6})$$

Deux types d'approximations sont aussi introduites :

La première approximation, consiste à déterminer des expressions approchées des coefficients $\rho_{m,ij}, \eta_{m,ij}, W_{m,ij}$ qui sont fonctions des paramètres du système et indépendantes de l'excitation.

Selon la procédure développée dans la référence [16], pour de faibles amortissements et des modes proches, des approximations du 1er ordre ont été utilisées à la place des formules exactes. Ces expressions sont d'une précision raisonnable pour des valeurs d'amortissement pouvant aller jusqu'à $\xi_i = 0.20$. Bien qu'étant basées sur un input bruit blanc, ces approximations restent cependant valables pour un input à large bande fréquentielle (exemple: excitation de type sismique), à condition que les amortissements modaux soient faibles et que les fréquences modales soient contenues dans la bande fréquentielle dominante de l'excitation.

Ces résultats sont:

$$\rho_{0,ij} \approx R_{ij} [4\xi_a + \xi_d \omega_d / \omega_a] \quad (a)(VI.4.3.7)$$

$$\rho_{1,ij} \approx R_{ij} [4\xi_a - 2\omega_d^2 / (\omega_a^2 \pi)] \quad (b)$$

$$\rho_{2,ij} \approx R_{ij} [4\xi_a - \xi_d \omega_d / \omega_a] \quad (c)$$

$$\text{où: } \omega_a = (\omega_i + \omega_j) / 2 \quad \xi_a = (\xi_i + \xi_j) / 2 \quad \omega_d = \omega_i - \omega_j \quad \xi_d = \xi_i - \xi_j$$

$$R_{ij} = \omega_a^2 \sqrt{\xi_i \xi_j} / [\omega_d^2 + 4\omega_a^2 \xi_a^2]$$

Les formules approximatives suivantes qui sont propres à l'amortissement non classique ont été proposées par *Igusa et al* [27] et basées sur les résultats (VI.4.1.35a)-(VI.4.1.35h)

$$\rho'_{3,ij} \approx R_{ij} [4\xi_a + \omega_d^2 / (\omega_a^2 \pi)] \quad (a)(VI.4.3.8)$$

$$\rho'_{4,ij} \approx \rho_{0,ij} \quad (b)$$

Avec:

$$\eta_{m,ij} = 2R_{ij} \frac{\omega_d}{\omega_a} \quad (VI.4.3.9)$$

$$W_{m,ij} = \left\{ \begin{array}{l} (\omega_i \omega_j)^{m/2} \\ (\omega_i \omega_j)^{m/2} \left[\left(1 - \frac{2\xi_i}{\pi}\right) \left(1 - \frac{2\xi_j}{\pi}\right) \right]^{1/2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ pair} \\ m \text{ impair} \end{array} \quad (VI.4.3.10)$$

La seconde approximation appliquée à l'équation (VI.4.3.10) consiste à estimer les moments spectraux $S_{0,ij}$ en fonction du spectre de réponse de l'input.

Supposons que, $\bar{S}_\tau(\omega, \xi)$ représente la valeur moyenne du maximum de la valeur absolue de la réponse d'un oscillateur sur une durée τ de sa réponse stationnaire, lorsqu'il est soumis à des excitations stationnaires $x_g(t)$, où ω et ξ sont respectivement la fréquence et le coefficient d'amortissement de l'oscillateur.

La fonction $\bar{S}_\tau(\omega, \xi)$ dont les variables sont ω et ξ , est définie comme le spectre de réponse moyen associé à l'input $x_g(t)$ sur une durée τ .

A partir de la définition du spectre de réponse moyen, il est clair que pour $\omega = \omega_i$ et $\xi = \xi_i$, $\bar{S}_\tau(\omega_i, \xi_i)$ est la moyenne du maximum de la valeur absolue de la réponse $S_i(t)$ d'un oscillateur.

Ainsi l'ordonnée du spectre de réponse moyen peut s'exprimer en fonction du moment spectrale $S_{0,ii}$ par la relation:

$$\bar{S}_{i\tau} = \bar{S}_\tau(\omega_i, \xi_i) = p_i \sqrt{S_{0,ii}} \quad (\text{VI.4.3.11})$$

où p_i est le facteur de pic associé au i -ème mode.

En substituant l'expression précédente dans l'équation (VI.4.3.4) pour $m=0,1,2$ nous obtenons:

$$S_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ C_{ij} p_{m,ij} W_{m,ij} - D_{ij} \eta_{m+1,ij} W_{m+1,ij} + E_{ij} p_{m+2,ij} W_{m+2,ij} \right\} \frac{\bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau}}{p_i p_j} \quad (\text{VI.4.3.12})$$

De cette manière, nous pouvons déduire les moments spectraux du processus de réponse.

L'équation (VI.4.3.12), procure donc une règle de superposition modale relative aux moments spectraux de la réponse, qui s'exprime directement en fonction des ordonnées du spectre de réponse. Cette expression nécessite le calcul des facteurs de pic p_i calculés à partir de l'équation (VI.4.2.7), dans laquelle les paramètres (v_i, δ_i) sont respectivement approchés par les équations (VI.4.2.10) et (VI.4.2.11).

Ces moments sont utilisés, pour évaluer la distribution cumulative du pic de la réponse, ou les autres propriétés statistiques de la réponse, tel qu'indiqué antérieurement dans les équations (VI.4.2.2)-(VI.4.2.6)

Il nous est donc possible d'obtenir:

L'écart type de la réponse $R(t)$:

$$\sigma_R = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \frac{\bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau}}{P_i P_j} \right\}^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.13})$$

L'écart type de la dérivée de la réponse par rapport au temps $\dot{R}(t)$:

$$\sigma_{\dot{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij} - D_{ij} \eta'_{3,ij} W'_{3,ij} + E_{ij} \rho'_{4,ij} W'_{4,ij}] \frac{\bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau}}{P_i P_j} \right\}^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.14})$$

La moyenne du pic de la réponse:

$$\begin{aligned} \bar{R}_\tau &= p \sigma_R \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{p^2}{P_i P_j} [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{VI.4.3.15})$$

L'écart type du pic de la réponse:

$$\begin{aligned} \sigma_{R_\tau} &= q \sigma_R \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q^2}{P_i P_j} [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{VI.4.3.16})$$

Dans les deux dernières équations, p et q représentent les facteurs de pic de la réponse et qui sont déterminés à partir des équations (VI.4.2.7) (VI.4.2.8) en fonction des paramètres, taux moyen des passages par zéro v (VI.4.2.3) et le facteur de forme δ (VI.4.2.4) relatifs au processus de réponse.

Une autre quantité d'intérêt pratique est la fréquence moyenne de la réponse exprimée par $\bar{\omega}$ et calculée comme suit:

$$\bar{\omega} = \pi v = \frac{\sigma_{\dot{R}}}{\sigma_R} \quad (\text{VI.4.3.17})$$

Comme il a été démontré dans plusieurs travaux [17], les facteurs de pic

varient faiblement en fonction de la fréquence, de ce fait pour la plupart des structures dynamiques, les rapports p/p_i tendent à se rapprocher de l'unité. La précision des relations précédentes sera donc peu affectée si ces rapports sont éliminés. Cette simplification conduit à l'expression suivante relative à la moyenne du pic de la réponse:

$$\bar{R}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.18})$$

En examinant de près cette équation, nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une généralisation de la *méthode CQC (complet quadratic combination)* relative aux systèmes à amortissement classique introduite dans les références [17,53].

****Comparaison des propriétés statistiques des réponses obtenues pour les cas classique et non classique***

Après avoir passé en revue les propriétés statistiques de la réponse d'un système dynamique caractérisé par un amortissement non classique, il serait intéressant de comparer ces propriétés avec celles obtenues sous l'hypothèse d'un amortissement classique.

Suite à ce qui a été évoqué dans les paragraphes précédents, si le système dynamique considéré est classique (caractérisé par un amortissement proportionnel) nous aurons:

$$D_{ij} = E_{ij} = 0 \quad C_{ij} = \psi_i \psi_j$$

En posant que la moyenne de la réponse maximale du mode i $\bar{R}_{i\tau}$

s'exprime par:

$$\bar{R}_{i\tau} = \psi_i \bar{S}_{i\tau} = \psi_i \bar{S}_\tau(\omega_i, \xi_i) \quad (\text{VI.4.3.19})$$

Nous pouvons formuler les caractéristiques statistiques de la réponse comme suit:

L'écart type de la réponse:

$$\sigma_R = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_i p_j} \rho_{0,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.20})$$

L'écart type de la dérivée par rapport au temps de la réponse:

$$\sigma_{\dot{R}} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\omega_i \omega_j}{p_i p_j} \rho_{2,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.21})$$

La moyenne du pic de la réponse:

$$\bar{R}_\tau = p \sigma_R = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{p^2}{p_i p_j} \rho_{0,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.22})$$

L'approximation $p/p_i=1$ nous permet d'obtenir les expressions simplifiées suivantes:

La moyenne du pic de la réponse:

$$\bar{R}_\tau \approx \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{0,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.23})$$

L'écart type du pic de la réponse:

$$\sigma_{R_\tau} = q \sigma_R = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q^2}{p_i p_j} \rho_{0,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.24})$$

La fréquence moyenne de la réponse est alors:

$$\bar{\omega} = \pi v = \frac{\sigma_{\dot{R}}}{\sigma_R} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\omega_i \omega_j}{p_i p_j} \rho_{2,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_i p_j} \rho_{0,ij} \bar{R}_{i\tau} \bar{R}_{j\tau}} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.25})$$

Toutes ces équations sont analogues à celles obtenues dans les travaux traitant le cas des systèmes à amortissement classique [17].

Une autre simplification peut aussi être faite dans le cas classique. En effet, pour des structures dont les fréquences sont très éloignées, les termes $\rho_{m,ij}$ s'annulent, ainsi tous les cross-termes présents dans les expressions précédentes peuvent être négligés. Ceci reste vrai lorsque les fréquences modales vérifient l'inéquation suivante:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} < \frac{0.2}{(\xi_i + \xi_j + 0.2)} \quad (\text{VI.4.3.26})$$

Ce qui correspond à $\rho_{m,ij} < 0.1$ [16]

En particulier la moyenne du pic de la réponse se simplifie à l'expression suivante:

$$\bar{R}_r = \left(\sum_{i=1}^N (\bar{R}_{ir})^2 \right)^{1/2} \quad (\text{VI.4.3.27})$$

Connue sous le nom, *régle de combinaison modale SRSS (square root of sum of squares)*, qui n'est donc valable que pour des structures à amortissement classique dont les fréquences modales sont très éloignées les unes des autres. Il est donc évident, que dans le cas non classique une telle combinaison modale conduirait à des résultats erronés.

Les considérations développées ci dessus, étayées par l'étude comparative ont permis de mettre en évidence, dans le cadre d'une analyse non déterministe, l'intérêt que revêt une étude de superposition modale généralisée (avec modes complexes), principalement lorsqu'il s'agit d'une structure dynamique dont le caractère non classique de l'amortissement est significatif. En effet, une étude conventionnelle (avec modes normaux) entreprise dans ce dernier cas, compromettrait inévitablement la rigueur de l'analyse.

VI.4.4: Méthode de Décomposition Modale Basée sur l'Accélération du Mode

Afin de compléter l'étude entreprise, pour l'analyse non déterministe des systèmes à amortissement non classique, les deux paragraphes suivants, sont consacrés au développement d'une approche alternative à celle basée sur le déplacement du mode, inspirée des travaux de *Singh et Mc Cown* [46]. Il convient de rappeler pour mémoire, que l'avantage principal de l'approche proposée est l'élimination de l'effet "missing mass" provoqué par la troncature modale (voir § V.2.4.3).

Pour cela, réécrivons les équations de mouvement d'une structure à N DDL à amortissement non classique, soumise à une excitation sismique induite par le mouvement du sol.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{g} \ddot{X}_g(t) \quad (\text{VI.4.4.1})$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{g}, \mathbf{y}$ sont tels que définis dans les paragraphes précédents.

Le problème aux valeurs propres correspondant étant:

$$\mathbf{B} \Phi_j = -\lambda_j \mathbf{A} \Phi_j \quad j=1, \dots, 2N \quad (\text{VI.4.4.2})$$

La solution de l'équation (VI.4.4.2) consiste évidemment en N paires de valeurs et vecteurs propres complexes. Ces vecteurs propres formant une base d'un espace à 2N dimension, dans lequel le vecteur d'état peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces vecteurs propres:

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{j=2N} \Phi_j \alpha_j \quad (\text{VI.4.4.3})$$

Rappelons qu'après substitution de l'équation (VI.4.4.3) dans (VI.4.4.1) et prémultiplication par Φ_j^T ainsi que l'utilisation des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres, nous aboutissons aux 2N équations découplées suivantes:

$$\dot{q}_j - \lambda_j q_j = r_j \ddot{x}_g(t) \quad j=1, \dots, 2N \quad (\text{VI.4.4.4})$$

avec:

$$r_j = -\phi_j^T M r / \phi_j^T A \phi_j \quad j=1, \dots, 2N \quad (\text{VI.4.4.5})$$

En supposant des conditions initiales de repos, la solution de l'équation (VI.4.4.4) est évidemment de la forme:

$$q_j = \int_0^t r_j \ddot{x}_g(\tau) e^{\lambda_j(t-\tau)} d\tau \quad (\text{VI.4.4.6})$$

Considérons une quantité de réponse qui soit une combinaison linéaire des déplacements modaux:

$$R(t) = \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j q_j \quad (\text{VI.4.4.7})$$

ζ_j représentant la réponse modale de la quantité de réponse considérée. Cette réponse modale est obtenue par simple transformation linéaire du vecteur propre modal ϕ_j .

$$\zeta_j = p^T \phi_j \quad (\text{VI.4.4.8})$$

Dans les analyses précédentes [26,44], l'équation (VI.4.4.6) a été directement utilisée afin d'obtenir la réponse $R(t)$, d'où le nom de l'approche "méthode de déplacement du mode".

La réponse $R(t)$ peut aussi être exprimée en une forme alternative par le biais de l'équation (VI.4.4.4) [46].

$$R(t) = \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j \left[-\frac{r_j}{\lambda_j} \ddot{x}_g(t) + \frac{1}{\lambda_j} \dot{q}_j \right] \quad (\text{VI.4.4.9})$$

Le terme \dot{q}_j dans l'équation (VI.4.4.9) inclut aussi bien la vitesse modale que l'accélération modale. Le nom "méthode d'accélération du mode" a été

inspiré du fait que l'accélération modale joue un rôle plus important que la vitesse modale.

La réponse de design d'un input stochastique stationnaire, peut évidemment, être obtenue en amplifiant la moyenne d'ensemble du carré de la réponse, le coefficient d'amplification étant le facteur de pic [50].

Ainsi, notre objectif est de déterminer l'espérance du carré de la réponse considérée $R(t)$.

L'équation (VI.4.4.9) nous permet d'exprimer la fonction d'autocorrélation comme suit:

$$E[R(t_1)R(t_2)] = \sum_j^{2N} \sum_k^{2N} \frac{\zeta_j \zeta_k}{\lambda_j \lambda_k} \{ r_j r_k E[\ddot{x}_g(t_1)\ddot{x}_g(t_2)] - r_j E[\ddot{x}_g(t_1)\dot{q}_k(t_2)] - r_k E[\dot{q}_j(t_1)\ddot{x}_g(t_2)] + E[\dot{q}_j(t_1)\dot{q}_k(t_2)] \} \quad (\text{VI.4.4.10})$$

Nous devons évaluer chacun des termes de l'équation (VI.4.4.10).

En effet, l'espérance dans le premier terme peut être exprimée par le biais de la fonction de densité spectrale unilatérale de l'accélération du sol $G_0(\omega)$.

$$E[\ddot{x}_g(t_1)\ddot{x}_g(t_2)] = \int_0^{+\infty} G_0(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (\text{VI.4.4.11})$$

Les valeurs espérées dans les deux termes suivants de l'équation (VI.4.4.10), représentent la cross-corrélation entre les coordonnées principales et l'accélération du sol.

En prenant en considération la stationnarité de la réponse, nous aboutissons à:

$$E[\ddot{x}_g(t_1)\dot{q}_k(t_2)] = r_k \int_0^{+\infty} \frac{i\omega}{(i\omega + \lambda_k)} G_g(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (\text{VI.4.4.12})$$

$$E[\dot{q}_j(t_1)\ddot{x}_g(t_2)] = r_j \int_0^{+\infty} \frac{i\omega}{(i\omega - \lambda_j)} G_g(\omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (\text{VI.4.4.13})$$

Le 4-ième terme peut s'écrire, après quelques simplifications, sous la forme:

$$E[\dot{q}_j(t_1) \dot{q}_k(t_2)] = r_j r_k \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(i\omega - \lambda_j)(-i\omega - \lambda_k)} G_0(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (\text{VI.4.4.14})$$

Les équations (VI.4.4.11), (VI.4.4.12), (VI.4.4.13) et (VI.4.4.14) définissent la fonction d'autocorrélation du processus stationnaire $R(t)$ dans l'équation (VI.4.4.10).

L'espérance du carré de la réponse est obtenue en posant $t_1 = t_2 = t$

$$E[R^2(t)] = \sum_j^{2N} \sum_k^{2N} \frac{z_j z_k}{\lambda_j \lambda_k} \int_0^{+\infty} G_0(\omega) \times \left\{ 1 - \frac{i\omega}{i\omega + \lambda_k} - \frac{i\omega}{i\omega - \lambda_j} + \frac{\omega^2}{(i\omega - \lambda_j)(-i\omega - \lambda_k)} \right\} d\omega \quad (\text{VI.4.4.15})$$

où:

$$z_j = \zeta_j r_j \quad z_k = \zeta_k r_k \quad (\text{VI.4.4.16})$$

Dans ce qui suit, la réponse est subdivisée en une partie *pseudo-statique* et une partie *dynamique*. La partie pseudo-statique est calculée par une analyse statique de la structure sous l'action de forces d'inertie induites par une accélération unité du sol appliquée statiquement.

La partie dynamique dépend bien sûr des caractéristiques dynamiques de la structure définies en fonction des caractéristiques modales à valeurs complexes.

La corrélation entre les composantes pseudo-statiques et dynamiques est considérée en particulier.

* Terme pseudo-statique T_1

Le premier terme T_1 dans l'équation (VI.4.4.15) ayant une signification spéciale est explicité, étant donné que:

$$T_1 = \sum_{j=1}^{2N} \left(\frac{I_j \zeta_j}{\lambda_j} \right)^2 E[\dot{x}_g^2(t)] \quad (\text{VI.4.4.18})$$

Ce terme T_1 être obtenu par une analyse statique simple.

En considérant la solution du problème statique suivant:

$$K x_s = M r \quad (\text{VI.4.4.19})$$

Le terme à droite de l'équation (VI.4.4.19) représente les forces d'inertie dues à une accélération de magnitude unité appliquée dans la direction de l'excitation.

Suite à certaines manipulations mathématiques (voir [46]), nous aboutissons à l'expression suivante de la réponse pseudo-statique:

$$R_s = \sum_{k=1}^{2N} \frac{I_k \zeta_k}{\lambda_k} = \sum_k \frac{z_k}{\lambda_k} \quad (\text{VI.4.4.20})$$

Ainsi:

$$T_1 = R_s^2 E[\dot{x}_g^2(t)] \quad (\text{VI.4.4.21})$$

** Termes T_2 et T_3 :*

Afin d'obtenir les termes T_2 et T_3 définis par:

$$T_2 = \sum_j \frac{z_j}{\lambda_j} \sum_k \int_0^{+\infty} \frac{z_k(i\omega)}{\lambda_k(-i\omega + \lambda_k)} G_0(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.4.22})$$

$$T_3 = \sum_j \sum_k \frac{z_j z_k}{\lambda_j \lambda_k} \int_0^{+\infty} \frac{-i\omega}{i\omega - \lambda_j} G_0(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.4.23})$$

Nous devons expliciter les valeurs propres λ_k en fonction des fréquences ω_k et des taux d'amortissement ξ_k :

$$\lambda_k = -\xi_k \omega_k + i \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} \quad (\text{VI.4.4.24})$$

Nous devons aussi définir les termes:

$$g_k = z_k \bar{\lambda}_k + \bar{z}_k \lambda_k, \quad h_k = z_k \bar{\lambda}_k^2 + \bar{z}_k \lambda_k^2 \quad (\text{VI.4.4.25})$$

où le symbole "barre" au dessus d'une quantité indique son complexe conjugué. Suite à certaines simplifications, nous obtenons:

$$T_2 + T_3 = 2S_B \sum_k^N \int_0^{+\infty} \{ \omega^2 (g_k \omega_k^2 + 2h_k \omega_k \xi_k) - \omega^4 g_k \} H_k^2(\omega) G_0(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.4.26})$$

où $H_k(\omega)$ est la fonction de transfert d'un oscillateur simple de caractéristiques ξ_k et ω_k définie par:

$$H_k(\omega) = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2) + i2\xi_k \omega_k \omega} \quad (\text{VI.4.4.27})$$

*Terme T_4 :

Le terme T_4 est défini par:

$$T_4 = \sum_j^{2N} \sum_k^{2N} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(i\omega - \lambda_j)(-i\omega - \lambda_k)} G_0(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.4.28})$$

La double sommation précédente peut être écrite sous la forme:

$$T_{jk} = \sum_j^N T_{jj} + \sum_j^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (T_{jk} + T_{kj}) \quad (\text{VI.4.4.29})$$

où:

$$T_{jj} = \sum_j^N \frac{1}{\omega_j^4} (h_j^2 + \omega_j^2 g_j^2) |H_j|^2 \quad (\text{VI.4.4.30})$$

Par fractions partielles, nous aboutissons à l'expression suivante:

$$T_{jk} + T_{kj} = \frac{2}{\omega_j^2 \omega_k^2} [(A_1 + A_2 \omega^2) |H_j(\omega)|^2 + (A_3 + A_4 \omega^2) |H_k(\omega)|^2] \quad (\text{VI.4.4.31})$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 relatifs aux fractions partielles sont définis en appendice.

En utilisant les équations (VI.4.4.21), (VI.4.4.26), (VI.4.4.29) et (VI.4.4.31) l'espérance du carré de la réponse $R(t)$ peut être écrite sous la forme:

$$E[R^2(t)] = R_s^2 E[\ddot{x}_g^2(t)] + 2R_s \sum_k^N [\omega_k g_k + 2h_k \omega_k \xi_k I_2(\omega_k) - g_k I_4(\omega_k)] / \omega_k^2 + \sum_k^N [g_k^2 I_4(\omega_k) + h_k^2 I_2(\omega_k)] / \omega_k^4 \quad (\text{VI.4.4.32})$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \frac{2}{\omega_j^2 \omega_k^2} [A_1 I_2(\omega_j) + A_2 I_4(\omega_j) + A_3 I_2(\omega_k) + A_4 I_4(\omega_k)]$$

où:

$$I_2(\omega_j) = \int_0^{+\infty} \omega^2 |H_j(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega \quad (\text{VI.4.4.33})$$

$$I_4(\omega_j) = \int_0^{+\infty} \omega^4 |H_j(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega$$

Les intégrales fréquentielles (I_2, I_4) sont respectivement les espérances des carrés de la vitesse relative et de l'accélération relative de la réponse d'un oscillateur dont les paramètres sont ω_k et ξ_k et qui est soumis à un mouvement du sol caractérisé par la fonction de densité spectrale $G_0(\omega)$.

L'équation (VI.4.4.32) donne, donc l'expression de l'espérance du carré de la réponse en fonction de l'espérance du carré de l'accélération du sol, et des espérances $I_2(\omega_k), I_4(\omega_k)$ relatives aux réponses modales.

A cause des caractéristiques particulières de ces réponses modales, cette expression basée sur l'accélération du mode est plus efficace qu'une expression similaire basée sur le déplacement du mode [44].

La raison en est que, pour les modes dont les fréquences sont plus élevées que

celles de l'input, les espérances du carré de leurs accélérations relatives sont suffisamment faibles pour pouvoir être négligées sans pour cela affecter la réponse recherchée d'une manière significative, ce qui n'est cependant pas le cas s'agissant de l'approche basée sur le déplacement. En effet, cette dernière, tient compte des espérances des déplacements relatifs, qui ne sont pas assez insignifiants pour pouvoir être omis, même pour des fréquences élevées.

En conclusion, la réponse structurale peut être calculée plus précisément grâce à l'approche basée sur l'accélération du mode. Cette dernière supplante l'approche conventionnelle, en offrant l'avantage supplémentaire d'utiliser un nombre moindre de modes lors de la superposition modale.

Evidemment l'expression (VI.4.4.32) peut être utilisée pour obtenir la *réponse de design* ** d'une structure, à amortissement non classique, soumise à une excitation sismique caractérisée par sa fonction de densité spectrale. Pour les fonctions de densité spectrale communément utilisées de type *Kanai-Tajimi* les intégrales précédentes (VI.4.4.17), (VI.4.4.33) peuvent être déterminées par la méthode des résidus.

VI.4.5: Approche Modalo-Spectrale Basée sur l'Accélération du Mode

Le but du présent paragraphe, est le développement d'une approche modalo-spectrale basée sur l'accélération du mode permettant d'estimer la *réponse de design* d'une structure linéaire à amortissement non classique.

** *Réponse de design*: voir définition § VI.4.5

Pour cela l'équation (VI.4.4.32) est exploitée. En effet, la réponse de design étant une amplification de l'espérance du carré de la réponse, elle est obtenue comme suit:

$$R_d^2 = E[R^2(t)] \times p_r^2 \quad (\text{VI.4.5.1})$$

avec p_R représentant le facteur de pic de la réponse considérée.

Les espérances du carré des vitesses et des accélérations relatives modales ($I_2(\omega_k), I_4(\omega_k)$) peuvent être obtenues à partir des spectres de vitesse et d'accélération relatives.

$$\begin{aligned} I_2(\omega_k) &= R_v^2(\omega_k) / p_v^2 \\ I_4(\omega_k) &= R_a^2(\omega_k) / p_a^2 \end{aligned} \quad (\text{VI.4.5.2})$$

(p_v, p_a) représentent les facteurs de pic associés respectivement à la vitesse relative et à l'accélération relative d'un oscillateur de paramètres (ω_k, ξ_k).

L'espérance du carré de l'accélération du sol peut aussi être obtenue en fonction de l'accélération maximale du sol A_g et de son facteur de pic p_g

$$E[\dot{x}_g^2(t)] = A_g^2 / p_g^2 \quad (\text{VI.4.5.3})$$

Ainsi l'expression de la réponse de design devient:

$$\begin{aligned} R_d^2 &= p_R^2 \left\{ S_s^2 \frac{A_g^2}{p_g^2} + S_s \sum_k^N \left[\frac{2\omega_k^2 g_k + 4h_k \xi_k \omega_k}{\omega_k^2} \frac{R_v^2(\omega_k)}{p_v^2} - 2 \frac{g_k}{\omega_k^2} \frac{R_a^2(\omega_k)}{p_a^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_k^N \left[\frac{g_k^2}{\omega_k^4} \frac{R_a^2(\omega_k)}{p_a^2} + \frac{h_k^2}{\omega_k^4} \frac{R_v^2(\omega_k)}{p_v^2} \right] \right\} \quad (\text{VI.4.5.4}) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \frac{2}{\omega_j^2 \omega_k^2} \left[A_1 \frac{R_v^2(\omega_j)}{p_v^2} + A_2 \frac{R_a^2(\omega_j)}{p_a^2} + A_3 \frac{R_v^2(\omega_k)}{p_v^2} + A_4 \frac{R_a^2(\omega_k)}{p_a^2} \right] \end{aligned}$$

L'équation (VI.4.5.4) définit la méthode modalo-spectrale basée sur l'accélération du mode. Cette approche, exige que l'excitation sismique soit

définie par ses spectres d'accélération et de vitesse relatives.

Il convient d'observer, que les valeurs des vitesses relatives ainsi que celles des accélérations relatives fournies par les spectres sont faibles pour des fréquences modales élevées, il s'en suit que les termes associés aux fréquences élevées, présents dans l'expression précédente, peuvent être omis sans pour autant causer d'importantes erreurs sur la réponse, ce qui n'est cependant pas le cas dans l'approche modalo-spectrale basée sur le déplacement du mode, qui nécessite l'utilisation du spectre de déplacement relatif.

Signalons, que la performance de l'approche modalo- spectrale a favorisé son exploitation par bon nombre d'auteurs, dans l'analyse des systèmes composés primaires-secondaires (voir [1],[7],[28],[45]) .

Chapitre VII

EXPERIMENTATION NUMERIQUE: EXCITATION DETERMINISTE

VII.1 INTRODUCTION

En considérant le fait que, la spécification de la nature et l'importance de l'amortissement dans les structures est sujette à de considérables incertitudes, l'hypothèse d'un amortissement classique peut être une approximation justifiée dans bon nombre d'applications pratiques.

Il existe cependant certaines situations, où une analyse plus rigoureuse s'impose. Rappelons, que deux situations souvent rencontrées font ressortir le caractère non classique prononcé de l'amortissement, en l'occurrence les systèmes d'interaction sol-structure ainsi que les systèmes composés primaire-secondaire (P-S).

Il s'avère, cependant que les méthodes d'analyse classique antérieurement exposées (chapitre VI), peuvent s'adapter aux deux catégories de systèmes à amortissement non proportionnel suscités, dans certaines circonstances, et constituent éventuellement une alternative aux méthodes exactes dites à modes complexes. C'est dans cet esprit que, la présente expérimentation numérique a été initiée et se veut donc une tentative de mise en évidence des conditions favorisant l'acuité du caractère non classique de l'amortissement, à travers une analyse paramétrique à deux volets.

En effet, il est bien connu qu'une analyse de dynamique des structures s'articule principalement autour de deux étapes, aussi importante l'une que

l'autre, à savoir:

- * l'étude aux valeurs propres et
- * l'étude de la réponse dynamique (en termes de déplacements ou d'efforts).

L'analyse paramétrique entreprise, concerne justement les deux étapes susmentionnées. Le but étant de bien cerner les différences existant entre une étude classique et une étude non classique et par la même occasion, mettre en évidence l'importance de ces différences lorsque certaines caractéristiques du système dynamique varient. Soulignons, que lors de cette analyse dynamique, les structures sont soumises à des excitations simulées numériquement, pour cela il s'avère nécessaire de décrire brièvement la simulation numérique des processus stochastiques.

VII.2: SIMULATION NUMERIQUE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES STATIONNAIRES

La modélisation du mouvement du sol, a été réalisée selon la représentation spectrale présentée par SHINOZUKA *et al.* [43], destinée à la simulation des processus stochastiques stationnaires.

Selon cette procédure, un processus stochastique stationnaire $\tilde{X}_0(t)$, de moyenne nulle peut être simulé par la série suivante, lorsque N tend vers l'infini:

$$\tilde{X}_0(t) = 2 \sum_{j=1}^N \sqrt{S_X(\omega_j) \Delta\omega} \cos(\omega_j t + \theta_j) \quad (\text{VII.2.1})$$

où $S_X(\omega_j)$ est le densité spectrale de $\tilde{X}_0(t)$ évaluée à la fréquence ω_j ($\omega_j = j\Delta\omega$; $j=1, \dots, N$) où $\Delta\omega$ est l'incrément fréquentiel.

Le nombre N est choisi de manière à ce que la borne supérieure de fréquence $\omega_\sigma = N \Delta\omega$

(upper cut-off frequency), soit une fréquence limite au delà de laquelle, la densité spectrale $S_x(\omega_j)$ est supposée être nulle.

θ_j sont des angles de déphasage aléatoires indépendants uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$.

En vertu du théorème de la limite centrale, le processus simulé est à la limite Gaussien, lorsque N devient important.

Signalons que l'algorithme de la Fast Fourier Transform (FFT), a été adopté afin de générer plus rapidement et plus précisément les fonctions $\ddot{X}_0(t)$ exprimées par la série précédente (VII.2.1).

L'excitation sismique induite par le mouvement du sol, étant en fait non stationnaire, il est donc impératif d'introduire cette non stationnarité, par le biais d'une fonction $\alpha(t)$, afin d'obtenir une représentation plus réaliste des accélérogrammes actuels.

L'accélération du sol $\ddot{X}_g(t)$ s'exprimera alors par:

$$\ddot{X}_g(t) = \alpha(t) \ddot{X}_0(t) \quad (\text{VII.2.2})$$

où $\alpha(t)$ est une fonction enveloppe.

Plusieurs type de fonctions $\alpha(t)$ ont été suggérées dans la littérature, afin d'introduire la non stationnarité en amplitude de l'accélération du sol. Une forme possible est:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (t/t_1)^2 && \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ \alpha(t) &= 1 && \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \alpha(t) &= \exp[-\beta(t-t_2)] && \text{pour } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{VII.2.3})$$

t_1 , t_2 et β sont sélectionnés de manière à représenter fidèlement la forme et la durée de l'accélération du sol.

Lorsque $\alpha(t) = 1$, l'accélération du sol est un processus aléatoire stationnaire.

L'expression finale de l'accélération du sol est:

$$\ddot{X}_g(t) = 2\alpha(t) \sum_{j=1, \dots, N}^N \sqrt{S_{\ddot{X}}(\omega_j) \Delta\omega} \cos(\omega_j t + \theta_j) \quad (\text{VII.2.4})$$

Notons que pour un ensemble donné de nombres aléatoires θ_j ($j = 1, \dots, N$), l'équation (VII.2.4) représente un échantillon de l'histoire temporelle de l'accélération du sol $\ddot{X}_g(t)$.

VII.3: PRESENTATION DES STRUCTURES ETUDIEES

Lors de cette étude, les structures considérées sont de type P-S. La structure primaire consiste en une structure à deux degrés de liberté (2 DDL), supportant une structure secondaire, constituée dans notre cas d'un équipement léger à 1 DDL que nous désignons par oscillateur.

-S'agissant du premier type de structure étudié (illustré en figure (VII.A.1.a), dont les caractéristiques de masse et de rigidité du système primaire sont $K_1=K_2=19379 \text{ kN/m}$, $m_1=m_2=30 \text{ t}$, les études paramétriques seront initiées en faisant varier aussi bien la distribution de l'amortissement du système primaire que l'amortissement de l'équipement.

Ainsi donc, pour ce qui est de ce type, deux catégories de structures seront considérées:

- * La première, caractérisée par une structure primaire à amortissement classique.

- * La seconde, caractérisée par une structure primaire à amortissement non classique.

En effet tel qu'il a été spécifié dans le chapitre VI, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure donnée soit à amortissement

classique, a été fournie par Fawzy [20] sous la formulation:

$$k m^{-1} c = c m^{-1} k \quad (\text{VII.3.1})$$

Concernant notre structure primaire, cette condition conduit à:

$$\frac{C_1}{K_1} = \frac{C_2}{K_2}$$

La proportionnalité de l'amortissement du système primaire est donc garantie par une distribution uniforme de l'amortissement sur les deux étages de la structure. Ainsi, la première catégorie de structures est caractérisée par une distribution uniforme de l'amortissement sur toute la structure c'est à dire $C_1 = C_2$, à laquelle nous ferons référence par "structure 1".

En revanche, la seconde catégorie, est constituée de structures dont l'amortissement est non uniformément distribué.

Ainsi, en premier lieu tout l'amortissement du système primaire représenté sur la figure (VII.A.1.a) est concentré au niveau de l'étage inférieur, ce qui signifie: $C_1 = 246.8 \text{ kN/m/sec}$, $C_2 = 0$, ces structures seront désignées par "structure 2".

En second lieu, l'amortissement de la structure entière est concentré au niveau de l'étage supérieur, ce qui implique: $C_1 = 0$, $C_2 = 246.8 \text{ kN/m/sec}$, nous nous référerons à ces dernières par "structure 3".

-Le second type de structures étudié diffère substantiellement de celui décrit jusque là, étant donné qu'il s'agit d'un système combiné Fondation - Structure Primaire - Structure Secondaire (voir figure VII.A.1.b), dont les caractéristiques sont reportées dans le tableau.

Tableau 1: Caractéristiques physiques

des systèmes à base fixe

Sous Systèmes	Masse (t)	Rigidité (Kn/m)	Amortissement(Kn/m/sec)
Equipement	0.1	variable	variable
Structure	200.0	11000.0	91.6
	200.0	11000.0	91.6
Fondation	600.0	82100.0	4210.06

En effet la fondation de la structure considérée est caractérisée par un amortissement qui diffère considérablement aussi bien de celui de la structure primaire que de celui de la structure secondaire. Par conséquent, le caractère non classique de l'amortissement du système composé est significatif.

Rappelons, que les systèmes P-S de par leur nature composée, possèdent en plus du caractère non proportionnel de l'amortissement, des spécificités qui les différencient des systèmes ordinaires en l'occurrence:

* l'*interaction* qui est une caractéristique résultant du feed-back entre les mouvements de la structure S et de la structure P. conséquence de la nature couplée de leurs équations de mouvement.

* le "*tuning*", qui est un phénomène résultant de la coïncidence des fréquences naturelles de deux sous-systèmes (P-S), provoquant ainsi des réponses résonnantes du système secondaire.

Par conséquent, dans le cas d'une structure secondaire constituée d'un oscillateur unique (équipement), le "*tuning*" se manifeste lorsque la fréquence naturelle de ce dernier coïncide avec une ou plusieurs fréquences de la structure primaire.

- Les travaux antérieurs sur les systèmes P-S. ont montré que l'effet de l'amortissement non classique est prépondérant dans des conditions de tuning. Pour cette raison, lors de nos études paramétriques cet effet de tuning est investigué en fixant la fréquence de l'oscillateur ω_0 à la fréquence fondamentale de la structure primaire, s'agissant du premier type de structure. Tandis que pour le second type les deux premiers modes de tuning sont considérés.

- Par ailleurs, l'effet d'interaction entre les structures P-S est lié au rapport de masse $RM=m_0/m_1$ (masse de l'oscillateur sur une masse représentative du système primaire). Cette interaction est d'autant plus importante que ce rapport est élevé (supérieur à 10^{-4}). A cet effet trois rapports de masses sont suggérés ($RM=10^{-2}$, $RM=10^{-3}$, $RM=10^{-4}$).

- Enfin, la magnitude de l'amortissement de la structure secondaire a un impact certain sur les caractéristiques propres de la structure composée P-S, pour cette raison le pourcentage d'amortissement critique de l'oscillateur ξ_0 est varié lors des études paramétriques.

Il est évident que les systèmes P-S étudiés sont à amortissement non proportionnel, il existe cependant, pour une fréquence donnée de l'oscillateur, une valeur limite ("critique") du pourcentage d'amortissement critique de ce dernier notée ξ_{cr} , qui conduit à un système composé P-S caractérisé par un amortissement classique.

Vu l'intérêt de cette valeur "critique" dans l'interprétation des résultats obtenus, nous présentons dans ce qui suit la démarche à suivre afin de l'évaluer pour chaque type de structure.

- 1er type de structure:

S'agissant de ce cas, il s'avère nécessaire de considérer chaque catégorie de structure à part:

* Ainsi, concernant la 1ère catégorie de structures, tel qu'il a été précédemment spécifié, le caractère classique de l'amortissement est garanti par la vérification de la condition de *Fawzy* pour la structure globale $KM^{-1}C=CM^{-1}K$, qui nécessite la vérification des égalités $\frac{K_1}{C_1} = \frac{K_2}{C_2} = \frac{K_e}{C_e}$.

De ce fait, lorsque la fréquence de l'oscillateur coïncide avec la fréquence fondamentale de la structure primaire, l'amortissement du système composé P-S est classique si: $\xi_{cr} = 5\%$

* Pour la seconde catégorie, nous ne pouvons définir qu'un pourcentage d'amortissement critique approximatif noté ξ'_{cr} , en traitant le système primaire tel un système équivalent à amortissement classique. Un tel système pseudo-classique est obtenu à partir du système primaire originel en négligeant les éléments extra-diagonaux de la matrice d'amortissement généralisée $\Phi_P^T C_P \Phi_P$.

où C_P : est la matrice d'amortissement du système primaire (P)

Φ_P : est la matrice modale non amortie orthonormalisée du système P.

Ainsi le jème pourcentage d'amortissement critique modal équivalent du système primaire est obtenu sous la forme suivante:

$$\xi'_j = \frac{\Phi_j^T C_P \Phi_j}{2\omega_j} \quad (\text{VII.3.2})$$

où: $\Phi_j^T C_P \Phi_j$: est le jème terme diagonal de la matrice d'amortissement généralisée du système primaire.

ω_j : est la jème fréquence modale non amortie.

Finalement, ξ'_{cr} est obtenu à partir du % d'amortissement critique équivalent du système primaire.

Il vient donc que pour la structure 2 ($C_1=246.8kN/m/sec$, $C_2=0$, $\xi'_c=7\%$).

S'agissant de la structure 3 ($C_1=0$, $C_2=246.8kN/m/sec$, $\xi'_{cr}=2.8\%$).

- 2ème type de structure:

L'approche précédente nous permet aussi de déterminer les valeurs limites ξ'_{cr} associées aux deux premiers modes de tuning du second type de structure:

Premier mode de tuning $\omega_e=0.7Hz$, $\xi'_{cr}=3\%$

Second mode de tuning $\omega_e=1.75Hz$, $\xi'_{cr}=14.5\%$

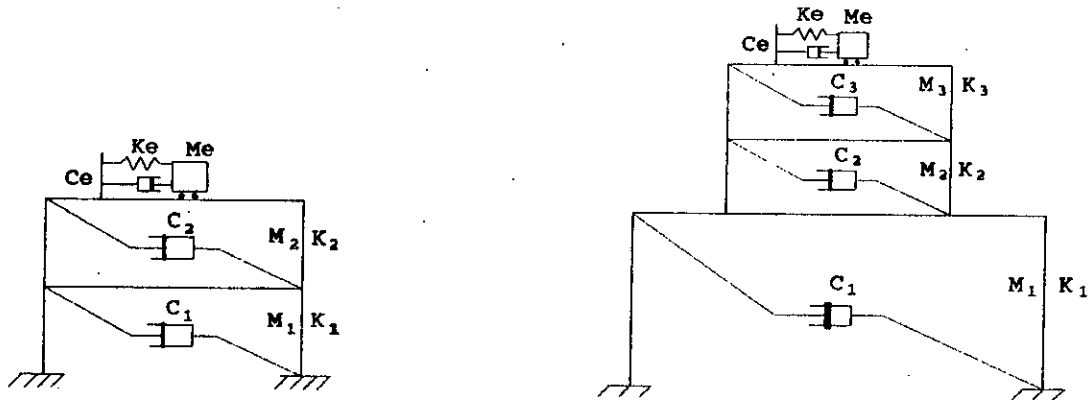


Fig.VII.A.1: (a) Structure Primaire à deux DDL supportant un équipement à un DDL
(b) Fondation-Structure-Equipement

VII.4: ETUDE PARAMETRIQUE CONCERNANT LES CARACTERISTIQUES PROPRES DE VIBRATION

Nous nous proposons dans cette section d'examiner la sensibilité des caractéristiques propres de vibration des structures décrites ci dessus.

lorsque certaines propriétés physiques de la structure secondaire varient.

En reprenant l'expression des équations de mouvement d'une structure à N DDL soumise à une excitation sismique $\ddot{X}_g(t)$, nous avons:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m r \ddot{X}_g(t) \quad (\text{VII.4.1})$$

La reformulation de l'équation précédente en 2N équations du premier ordre fournit:

$$A \dot{y} + B y = g \ddot{X}_g(t) \quad (\text{VII.4.2})$$

Lors de cette première analyse paramétrique, nous nous proposons d'examiner de près les solutions du problème aux valeurs propres suivant:

$$B \hat{\Phi}_1 = \lambda_1 A \hat{\Phi}_1 \quad (\text{VII.4.3})$$

où

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \lambda_1 \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.4.4})$$

avec

$$\lambda_1 = -\xi_1 \omega_1 \pm i \omega_{D1} \quad (\text{VII.4.5})$$

Les vecteurs et valeurs propres Φ_1 , λ_1 se manifestent bien sûr par paires de complexes conjugués, nous suggérons de subdiviser les vecteurs propres Φ_1 en leurs composantes réelles et imaginaires comme cela a été fait pour les valeurs propres, selon l'expression suivante:

$$\Phi_1 = \text{Re}(\Phi_1) + i \text{Im}(\Phi_1) \quad (\text{VII.4.6})$$

Signalons que les parties réelles et les parties imaginaires des vecteurs propres sont représentées sur des figures indépendantes.

L'analyse classique, quant à elle, suppose évidemment l'orthogonalité de la matrice c relativement à la matrice des vecteurs propres déterminée suite

à la résolution du problème aux valeurs propres suivant:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (\text{VII.4.7})$$

VII.4.1: Interprétation des Résultats

A/ Structure 1:

En premier lieu, nous considérons la structure illustrée en figure (VII.A.1.a), avec $c_1=c_2=123.4\text{kN/m/sec}$.

Rappelons que la fréquence de l'oscillateur est fixée à la fréquence fondamentale non amortie de la structure primaire, il s'en suit que $\xi_{cr}=5\%$.

a/ Composantes Réelles des Vecteurs Propres

S'agissant de ces composantes, nous remarquons que lorsque $RM=10^{-2}$, celles-ci sont correctement estimées par l'approche classique pour $\xi_o < \xi_{cr}$, ceci étant valable pour les trois modes de vibration illustrés sur la figure (VII.A.2).

En revanche, dès que ξ_o dépasse ξ_{cr} , nous assistons à une surestimation excessive de ces composantes réelles par l'approche classique qui atteint 900% de la valeur exacte.

En effet, il apparaît clairement, que lorsque ξ_o s'éloigne de ξ_{cr} , la composante réelle diminue sensiblement, réalité qui ne peut être mise en évidence par l'approximation classique. En effet cette approche basée sur le fait que l'amortissement n'influe pas sur les configurations propres, procure la même allure quelle que soit la valeur prise par ξ_o .

Notons cependant, la similitude parfaite entre les deux approches, s'agissant le 3ème mode de vibration.

En supposant, cette fois ci que le rapport de masse RM chute à 10^{-4} , la figure (VII.A.3) illustre clairement que le caractère non classique de la structure devient plus significatif, étant donné que contrairement au 1er rapport de masse, cette fois ci les deux modes inférieurs sont sensiblement affectés lorsque ξ_o s'éloigne de ξ_{cr} , aussi bien par valeurs inférieures que par valeurs supérieures.

En effet, nous remarquons sur cette figure que souvent l'approche classique surévalue excessivement la partie réelle, qui en réalité diminue au fur et à mesure que ξ_o s'éloigne de ξ_{cr} jusqu'à s'annuler.

b/ Composantes Imaginaires des Vecteurs Propres

Rappelons que l'approche classique appliquée à l'étude d'un système à amortissement non proportionnel, consiste à supposer que ces vecteurs propres sont réels. Il s'agit donc, d'observer l'évolution des composantes imaginaires des vecteurs propres obtenus à partir de l'équation (VII.4.3), lorsque le % d'amortissement de l'oscillateur change et que sa masse varie aussi.

Contrairement aux composantes réelles, les composantes imaginaires, sont sensibles au caractère non classique de la structure pour les trois modes de vibration (voir fig. VII.A.4).

Effectivement, ces composantes se démarquent de zéro, pour n'importe quelle valeur prise par ξ_o . Notons, cependant que lorsque ξ_o se rapproche de ξ_{cr} , ces composantes imaginaires diminuent jusqu'à s'annuler ce qui justifie l'approximation classique dans ces conditions (voir $\xi_o=4\%$). Signalons aussi que toutes ces remarques sont valables pour les deux rapports de masse (voir fig. VII.A.5).

c/ Fréquences et pourcentages d'amortissement critique modaux

Cette partie concerne la comparaison des fréquences propres et des pourcentages d'amortissement critique modaux exacts d'une structure à amortissement non classique avec ceux calculés approximativement, sous l'hypothèse d'un amortissement proportionnel de la structure.

En effet, une étude classique permet à partir de l'équation (VII.4.7) de déterminer les fréquences propres approximatives, ainsi que les pourcentages d'amortissement critique modaux comme suit:

$$\xi_j = \frac{\phi_j^T c \phi_j}{2 (\phi_j^T m \phi_j) \omega_j} \quad (\text{VII.4.1.1})$$

où: ϕ_j : est le jème mode propre de vibration

$\phi_j^T c \phi_j$: est le jème élément de la matrice amortissement généralisée supposée diagonale.

$\phi_j^T m \phi_j$: est le jème élément de la matrice masse généralisée.

ω_j : est la jème fréquence propre.

Tandis qu'une analyse exacte permet d'obtenir les fréquences et pourcentages d'amortissement critiques par le biais des formules suivantes:

$$\omega_j = |\lambda_j| \text{ et } \xi_j = -\frac{\text{Re}(\lambda_j)}{|\lambda_j|} \quad (\text{VII.4.1.2})$$

Il apparait clairement sur la figure (VII.A.6) que les fréquences modales sont pratiquement insensibles à la variation de l'amortissement de l'oscillateur notamment pour RM faible. L'approximation des fréquences modales semble donc justifiée.

S'agissant des pourcentages d'amortissement critiques modaux, la figure (VII.A.7) fait ressortir clairement que les approximations classiques ne sont valables qu'au voisinage de ξ_{cr} .

En effet, notons que contrairement à l'approche classique qui procure des taux d'amortissement modaux pratiquement confondus (modes 1 et 2), un calcul exact révèle des valeurs sensiblement différentes. S'ajoute à cela, le fait que la différence des résultats par rapport aux valeurs exactes est d'autant plus importante que le rapport de masse est faible.

A titre d'exemple, une sous-estimation considérable est observée sur le taux d'amortissement du mode 2 (37,5% pour $\xi_e=0.20$), à contrario, une surestimation excessive est notée pour le mode 1 (atteignant 150% pour $\xi_e=0.20$).

B/ Fondation-Structure-Equipement

Nous enchaînons, sur l'analyse du second type de structure (fig. VII.A.1.b), pour lequel nous ne considérons que le 2ème mode de tuning.

a/ Composantes Réelles des Vecteurs Propres

Nous ne manquerons pas de signaler, que la composante réelle du 1er mode de vibration est correctement estimée par l'approche classique, contrairement aux autres modes qui sont très affectés par l'approximation. En effet, s'agissant du mode 3, nous remarquons que l'approche classique sur-évalue considérablement la composante réelle, qui en réalité est très faible et a tendance à s'annuler lorsque ξ_e s'éloigne de ξ'_{cr} . L'approximation classique peut aussi conduire à une sous-estimation excessive de la composante réelle (voir 2ème mode fig. VII.A.8)

b/ Composantes Imaginaires des Vecteurs Propres

La figure suivante (VII.A.9) montre clairement, qu'une approche classique n'est nullement recommandée lorsque le caractère non classique de la structure étudiée est important.

Effectivement, ces illustrations sont révélatrices des erreurs commises par une analyse approchée qui omet complètement les composantes imaginaires des vecteurs propres, significatives dans ce cas.

c/ Fréquences Propres et Pourcentages d'Amortissement Critique Modaux

Les deux premières courbes sur la figure (VII.A.10) illustrent la justesse de l'approche classique à évaluer les fréquences relatives aux deux modes inférieurs, contrairement à celles relatives aux modes supérieurs.

Les deux dernières courbes sur cette même figure (VII.A.10), confirment que l'approche classique peut tantôt sous-estimer, tantôt surestimer les % d'amortissement critiques modaux.

VII.5: ETUDE PARAMETRIQUE PORTANT SUR LA REPONSE DYNAMIQUE DETERMINISTE

Il a été largement explicité dans le chapitre précédent, qu'il y'a lieu de distinguer entre deux analyses dynamiques fondamentalement différentes l'une de l'autre, cette distinction étant inhérente au mode de définition de l'excitation dynamique. En effet, rappelons pour mémoire que si l'évolution dans le temps du chargement dynamique est connue, une analyse déterministe s'applique parfaitement, dans le cas contraire, une analyse stochastique s'impose. Ainsi, vu l'importance du "*mode de définition de l'excitation sismique*", il nous a semblé justifié de mener une expérimentation numérique portant sur la réponse dynamique de certains systèmes à amortissement non proportionnel selon les deux approches suscitées. Les principaux résultats auxquels a abouti cette expérimentation numérique dans le cadre d'une analyse déterministe sont repris dans cette section. Le dernier chapitre est en revanche consacré à la présentation des résultats relatifs à l'analyse non déterministe.

VII.5.1: Description de l'Etude Paramétrique

En effet, l'excitation dynamique est supposée parfaitement définie, il s'en suit que les procédures exposées dans le chapitre V peuvent s'appliquer, nous nous limiterons cependant à la méthode de superposition modale basée sur le déplacement du mode (MDM). Signalons que notre choix s'est porté sur la formulation de *Igusa et al.* [26]:

$$R(t) = \sum_{i=1}^N (a_i h_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)) \quad (\text{VII.5.1.1})$$

Les coefficients a_i et c_i ayant déjà été définis par:

$$a_i = -2\text{Re}(b_i \bar{\lambda}_i), \quad c_i = 2\text{Re}(b_i) \quad (\text{VII.5.1.2})$$

Dans cette équation, h_i est l'intégrale de *Duhamel*, alors que $\dot{h}_i(t)$ est sa dérivée par rapport au temps.

Rappelons que:

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_{D_i}} \int_0^t \ddot{X}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i} (t-\tau) dt \quad (\text{VII.5.1.3})$$

et

$$\dot{h}_i(t) = \int_0^t \ddot{X}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \cos \omega_{D_i} (t-\tau) dt - \xi_i \omega_i h_i(t) \quad (\text{VII.5.1.4})$$

Les expressions de h_i et $\dot{h}_i(t)$ sont déterminées par intégration numérique.

Notre but étant, bien sûr, de réaliser une étude comparative avec l'approche classique déterministe, une expression classique de la réponse s'impose.

Manifestement, l'approche classique triviale, consiste à découpler les équations de mouvement du second ordre (VII.4.1), grâce aux vecteurs propres

du système non amorti, en négligeant ainsi les éléments extra-diagonaux de la matrice $\Phi^T C \Phi$, de telle manière que la formulation précédente se simplifie ainsi:

$$R(t) = \sum_{i=1}^N \psi_i h_i(t) \quad (\text{VII.5.1.5})$$

avec:

$$\psi_i = \alpha^T \phi_i \frac{\phi_i^T m r}{\phi_i^T m \phi_i} \quad (\text{VII.5.1.6})$$

Il est bien évident, que les méthodes de superposition modale résumées ci-avant, et qui seront exploitées pour l'évaluation de la réponse structurale, exigent l'analyse de l'histoire temporelle de l'excitation, d'où l'intérêt de la simulation numérique, moyen efficace permettant de générer des accélérogrammes artificiels.

Ainsi donc, les excitations sismiques auxquelles seront soumises les structures étudiées ont été simulées numériquement selon le procédé succinctement décrit dans le paragraphe (§ VII.2).

La forme de la densité spectrale choisie est celle de *KANAI-TAJIMI* modifiée:

$$S_R(\omega) = \frac{1 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1 - (\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2} \frac{\omega/\omega_0^4}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\xi_0^2(\omega/\omega_0)^2} S_0 \quad (\text{VII.5.1.7})$$

où ξ_g , ω_g , ξ_0 , ω_0 sont des paramètres dépendant des caractéristiques et de l'intensité du séisme en un site particulier.

S'agissant, de la simulation numérique, nous avons opté pour un nombre de points d'échantillonnage de $2^{11} = 2048$ et pour un incrément de temps $\Delta t = 0.01 \text{sec}$, ainsi donc la durée de l'histoire temporelle de l'excitation sismique a été fixée à $T = 20.48 \text{sec}$. Notons, que le phénomène d'"aliasing" [43] a été évité par ce choix de paramètres, étant donné que la fréquence critique dite (Nyquist frequency) définie par $f_c = 1/2\Delta t$ est dans

notre cas égale à 50Hz dépassant de très loin la fréquence dominante de l'excitation.

Les paramètres définissant la fonction $\alpha(t)$ du modèle ont été choisis tels que $t_1=3\text{sec}$, $t_2=13\text{sec}$ et $\beta=0.26$.

Il s'en suit que les accélérogrammes obtenus représentent des séismes dont la durée de la phase forte est située entre 3sec et 13sec.

L'étude qui va suivre concerne la réponse de la structure secondaire (qui n'est autre que le déplacement relatif de l'oscillateur par rapport à son point d'attache), à travers l'analyse de son histoire temporelle ainsi que son spectre de plancher (voir plus loin définition), de plus une investigation portera sur les effets du "tuning", de l'interaction ainsi que de la largeur de bande de l'excitation sur cette réponse.

Manifestement, la largeur de bande de l'excitation a un impact certain sur la réponse structurale, pour cela nous avons opté pour deux types d'inputs sismiques, d'une part un input à large bande fréquentielle (Wide-Band) et d'autre part un input à bande étroite (Narrow-Band).

Pour chaque type d'input un accélérogramme unique a été généré artificiellement selon le procédé décrit plus haut.

Les filtres de la densité spectrale ont été choisis comme suit:

$$\begin{array}{ll} \omega_g = 2.5 * 2\pi & \omega_0 = 0.25 * 2\pi \\ \xi_g = 0.6 & \xi_0 = 0.6 \end{array} \quad \text{Pour l'input WIDE-BAND}$$

et

$$\begin{array}{ll} \omega_g = 0.8 * 2\pi & \omega_0 = 0.08 * 2\pi \\ \xi_g = 0.2 & \xi_0 = 0.6 \end{array} \quad \text{Pour l'input NARROW-BAND}$$

VII.5.1.2: Interprétation Des Résultats

A/ Structure 1:

* Excitation sismique à large bande fréquentielle

Considérons d'abord la structure¹ soumise à l'excitation sismique wide band illustrée en figure (VII.B.1) .

a/ Histoire Temporelle

Tout d'abord, nous envisageons de suivre l'évolution temporelle de la réponse de l'oscillateur sous l'effet de l'amplification de son amortissement. Notons que la fréquence de l'oscillateur a été fixée à la fréquence fondamentale de la structure primaire ($\omega_e = 2.5Hz$). sa masse a aussi été maintenue constante ($RM = 10^{-4}$). Il apparait clairement sur la figure (VII.B.2) que pour $\xi_e \ll \xi_{cr}$, la solution exacte constitue une enveloppe de la solution approximative (principalement durant la phase de vibration caractérisée par des amplitudes très élevées), ceci traduisant une sous estimation considérable de la réponse par l'approche classique.

En revanche, nous pouvons nettement voir, que lorsque ξ_e atteint $\xi_{cr} = 5\%$ les deux courbes ne peuvent être distinguées l'une de l'autre, ceci prouvant l'exactitude de l'approche classique au niveau de cette valeur critique.

Notre but, étant en autres d'apprécier l'incidence de la masse de l'oscillateur sur l'allure de ces courbes, nous fixons donc le paramètre ξ_e .

La figure (VII.B.3) montre distinctement que plus le rapport de masse diminue, plus les courbes s'éloignent l'une de l'autre. Notons que pour $RM = 10^{-4}$, cette distinction évolue avec le temps. En d'autres termes, l'approche classique sous estime de plus en plus la réponse. En effet, alors qu'en réalité la

réponse de l'oscillateur s'atténue très faiblement (l'oscillateur étant très peu amorti $\xi_e = 0.25\%$), l'approche classique laisse croire, que cette réponse s'estompe progressivement jusqu'à s'annuler, ce qui constitue une déformation de la réalité.

Il est indéniable, que l'entité la plus importante d'un point de vue pratique, sur cette histoire temporelle est la réponse maximale, il semble donc judicieux, de suivre l'évolution de cette réponse maximale lorsque ξ_e varie.

Afin de mieux quantifier la différence entre les résultats fournis par les deux approches, les erreurs relatives sont systématiquement calculées.

La figure (VII.B.4) montre clairement, l'incapacité de l'approche classique à approcher la réponse structurale maximale pour des valeurs de ξ_e très faibles par rapport à $\xi_{cr} = 5\%$. Effectivement, le calcul d'erreur révèle une sous estimation de la réponse atteignant un maximum de l'ordre de 40%, ces erreurs s'atténuent au fur et à mesure que ξ_e se rapproche de ξ_{cr} , jusqu'à s'annuler, à ce niveau, pour réaugmenter progressivement au delà de cette valeur critique.

b/ Contribution de Termes dans l'Evaluation de la Réponse

Dans ce qui suit nous allons nous pencher sur un aspect non moins important, il s'agit d'une comparaison des formulations mathématiques (VII.5.1.1) et (VII.5.1.5). En effet, il est clair d'après ces expressions, que l'approximation classique de la réponse se déduit de la formule exacte

par simple omission de la seconde sommation soit $\sum_{i=1}^N C_i \dot{h}_i(t)$. Ainsi, il serait

intéressant de comparer la contribution de chacun des termes $\sum_{i=1}^N a_i h_i(t)$ et $\sum_{i=1}^N c_i \dot{h}_i(t)$

dans l'évaluation de la réponse globale $R(t)$, afin de mieux apprécier l'erreur commise lors de l'approximation classique et par la même occasion situer le domaine de validité d'une telle approximation.

Les résultats rassemblés dans la figure (VII.B.5), révèlent nettement la prééminence des termes $\sum_{i=1}^N a_i h_i(t)$ lorsque ξ_0 se rapproche de ξ_{cr} , ce qui

justifie l'exactitude de l'approche classique dans ce domaine étant donné l'insignifiance des termes omis. Au delà de cette borne critique, une situation contraire s'établit, du moment que cette fois ci les termes $\sum_{i=1}^N c_i \dot{h}_i(t)$ permettent l'évaluation exacte de la réponse globale. Il est donc

sans contredit qu'ignorer ces termes dans ces conditions, conduirait à une estimation erronée de la réponse.

c/ Spectre de Plancher

Après avoir analysé l'évolution de la réponse maximale de l'oscillateur pour une fréquence unique (la fréquence du tuning), il convient de considérer l'incidence de la variation de la fréquence de cet oscillateur sur sa réponse maximale.

Dans cette optique, l'analyse paramétrique qui va suivre, consiste en une comparaison des "spectres de plancher" fournis par les deux approches exacte et approximative.

Ainsi, une définition succincte de cette notion de "spectre de plancher" s'impose pour la présentation de la suite des résultats obtenus. En effet, pour une structure donnée, soumise à une excitation à la base, le spectre de plancher conventionnel est l'ensemble des réponses maximales d'un oscillateur de fréquence et de % d'amortissement variables, attaché à un point donné (plancher) de la structure.

Il est à noter, que les spectres de plancher, sont utilisés pour la conception para-sismique des équipements, qui sont modélisés tels des oscillateurs à un DDL avec un point d'attache unique sur la structure primaire.

Pour mieux voir, considérons une structure linéaire à N DDL (structure primaire), le spectre de plancher associé au kème DDL (c-a-d kème plancher) est généré par l'analyse du système composé à (N+1) DDL, qui consiste en cette structure à laquelle est associé un oscillateur simple à 1 DDL de fréquence ω_o variable, attaché au kème DDL.

Pour une sélection donnée de la paire (ω_o, ξ_o) , le spectre de plancher est le pic de la réponse de l'oscillateur (c-a-d le (n+1)-ième DDL du système composé).

Dans le but de mieux analyser l'effet de l'amortissement non classique, sur la réponse dynamique, nous envisageons d'examiner la variation du spectre de plancher lorsque les caractéristiques de l'oscillateur varient (ξ_o, m_o) .

En premier lieu, la masse de l'oscillateur est fixée ($RM=10^{-4}$), comme illustré dans les figures (VII.B.6.a) et (VII.B.6.b). Une fois encore, les erreurs relatives sont systématiquement représentées sur les courbes à droite.

Nous notons que lorsque $\xi_o \ll 5\%$, les réponses classiques s'éloignent distinctement de la solution exacte (remarquer une sous-estimation de 36% pour $\omega_o=2.5Hz$). En revanche une similitude parfaite entre les deux approches est observée pour $\xi_o=5\%$, au delà de cette valeur une démarcation progressive se fait sentir (atteignant 85% pour $\xi_o=0.20$).

Manifestement, l'augmentation de ξ_o a pour conséquence l'atténuation des amplitudes des réponses. En effet, nous constatons une réduction de 91% du pic situé au niveau de la fréquence de tuning. Une autre conséquence est le déplacement du pic de $\omega_o=2.5Hz$ à $\omega_o=0.5Hz$.

Ces faits marquants, ne sont cependant nullement reflétés par l'approche classique. En effet, lorsque ξ_o varie de 0 à 1%, le spectre approché est caractérisé par la prédominance de la fréquence $\omega_o = 2.25 \text{ Hz}$. Cette prédominance, se manifestant plus nettement lorsque ξ_o dépasse 10%. De surcroît, un pic additif fait son apparition au delà de la fréquence de tuning, tandis que cette dernière constitue un minimum local.

Le second aspect à analyser, est l'effet de la variation de masse de l'oscillateur sur le spectre de plancher. Afin de mieux visualiser cet effet, les spectres de plancher déterminés pour trois rapports de masse ($RM1=10^{-2}$, $RM2=10^{-3}$ et $RM3=10^{-4}$), sont représentés sur une figure unique (Fig VII.B.7). Les courbes de référence montrent clairement, que l'interaction (l'augmentation du rapport de masse), a pour effet de réduire la réponse. Cette réduction n'est cependant appréciable qu'aux alentours de la fréquence de tuning. En effet pour $\xi_o = 0.00$, une réduction du pic de 62% est constatée lorsque RM passe de 10^{-2} à 10^{-4} .

Les deux premières courbes sur la figure (VII.B.7) révèlent aussi, que les spectres approchés (courbes discontinues) se distinguent plus nettement des spectres de référence lorsque le rapport de masse diminue. D'ailleurs, le calcul d'erreurs, prouve qu'au niveau de la fréquence de tuning, le % d'erreur double de valeur lorsque RM passe de 10^{-2} à 10^{-4} . Ceci démontre que l'interaction a pour effet de d'atténuer le caractère non classique de l'amortissement. Cette même figure, révèle aussi que l'amplification de l'amortissement réduit considérablement l'effet d'interaction. Ceci apparaît à travers l'estimation de la réduction du pic lorsque ξ_o augmente. En effet, cette réduction qui est de 62% pour $\xi_o = 0.00$ chute à moins de 8% lorsque ξ_o atteint 0.20.

Ceci étant, l'examen des courbes approchées, contredit ces observations.

principalement, lorsque ξ_e dépasse ξ_{cr} . En effet, les spectres approchés laissent croire que l'interaction est d'autant plus importante que l'est ξ_e , ceci à travers l'apparition de deux pics (inexistants en réalité), dont les amplitudes chutent, respectivement, de 37% et 31% lorsque RM passe de 10^{-2} à 10^{-4} .

Il ressort des observations précédentes, l'intérêt que joue le % d'amortissement critique $\xi_{cr}=5\%$ et qui constitue une borne délimitant deux comportements différents (voir opposés) de la réponse structurale.

Les résultats fournis plus haut, permettent aussi de conclure que les réponses fournies par l'approche classique s'écartent de plus en plus de la solution exacte lorsque ξ_e s'éloigne de ξ_{cr} .

Il est aussi évident, que plus le rapport de masse est faible, plus les courbes se démarquent des solutions de référence, ce qui prouve que le fait de négliger les termes extradiagonaux de la matrice $\Phi^T C \Phi$, influe significativement sur l'évaluation de la réponse.

Sur toute ces figures, les plages fréquentielles en dessous et au dessus de ω_e , illustrent l'évolution de la réponse de l'oscillateur lorsque ce dernier n'est pas réglé à la fréquence fondamentale de la structure ("*detuned oscillator*"). En effet, la similitude des courbes fournies par les deux approches prouve que l'amortissement non classique n'est préjudiciable qu'en cas de tuning.

*** Excitation à bande fréquentielle étroite**

Cette fois-ci, l'excitation est supposée à faible contenu fréquentiel (voir illustration en figure VII.B.8).

Les histoires temporelles illustrées en figures (VII.B.9) et (VII.B.10) révèlent des évolutions qualitativement similaires à celles de l'input

précédent, malgré la chute considérable des amplitudes, qui est une conséquence de la réduction de largeur de bande de l'excitation.

La démarcation notable des courbes approchées par rapport aux courbes exactes notamment lorsque $\xi_0 \ll \xi_{cr}$, $RM=10^{-4}$, confirme l'importance de la fréquence fondamentale, même étant située en dehors de la frange prédominante.

La figure (VII.B.11) montre clairement, que malgré la chute des amplitudes de la réponse structurale au niveau de la fréquence de tuning, l'écart entre les deux approches classique et approximative reste constant, ce qui est distinctement prouvé par le calcul d'erreur qui montre une similitude parfaite entre les erreurs relatives des deux inputs W-B et N-B.

Une fois encore les spectres de plancher (VII.B.6) sont révélateurs de l'intérêt de la fréquence de tuning. En effet, notons la concordance parfaite entre les deux approches classique et approximative aux alentours du pic situé non loin de la fréquence prédominante de l'excitation quelle que soit la valeur de ξ_0 .

B/ Fondation-Structure-Equipement :

Nous poursuivons cette analyse déterministe par l'étude du système composé Fondation-Structure-Equipement (VII.A.1.b).

a/ Histoire temporelle

S'agissant des histoires temporelles, illustrées en figures (VII.B.13), notre choix s'est porté sur deux fréquences proches des deux modes inférieurs de vibration. Pour chaque mode de tuning le % ξ_0 a été fixé à une valeur significative. Ces illustrations font nettement ressortir la surévaluation excessive de la réponse par l'approximation classique, particulièrement au niveau des pics.

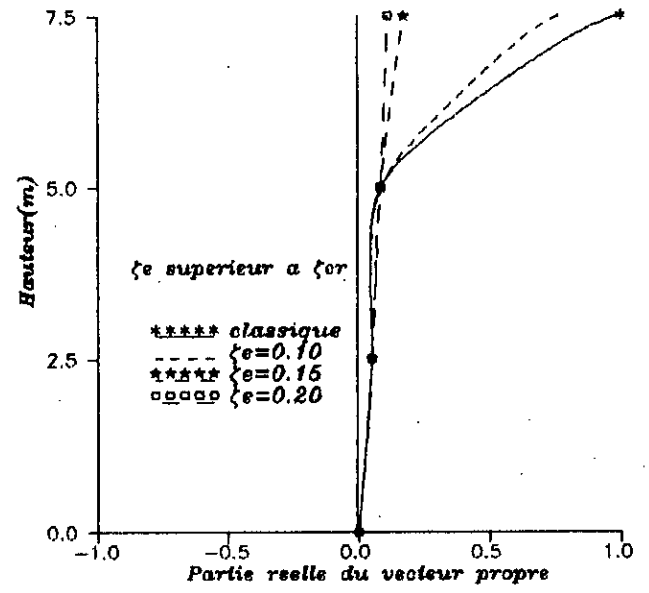
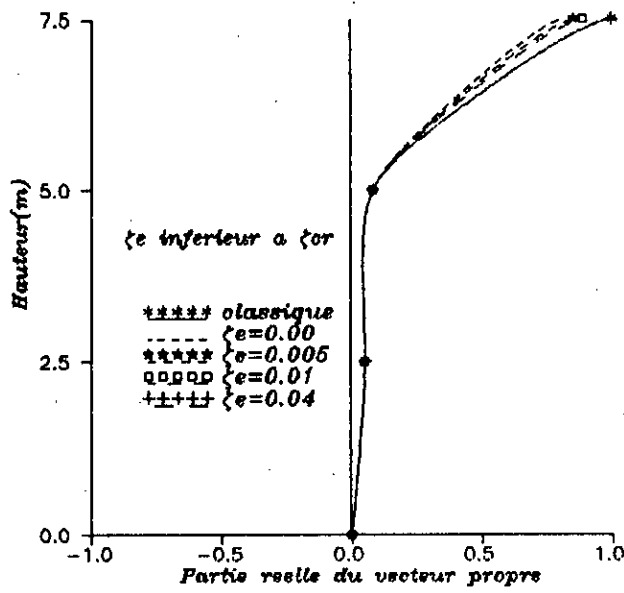
Une fois de plus la représentation des réponses maximales en fonction

de ξ_0 (VII.B.14), révèle l'existence d'une borne critique pour chaque mode de tuning au niveau de laquelle l'erreur est infime. S'agissant du 1er mode de tuning cette borne critique se situe aux environs de 3%, au delà de laquelle l'erreur augmente linéairement. Une situation inverse est observée pour le second mode de tuning, du moment que cette fois ci ξ'_{cr} est proche de 15%, ce qui explique les surestimations excessives par l'approche classique pour ξ_0 faible. Toutes ces constatations confirment la thèse du % d'amortissement critique limite équivalent conduisant à un système composé Fondation-Structure-Equipement pseudo-classique (voir chapitre § VII.3).

b/ Spectres de plancher

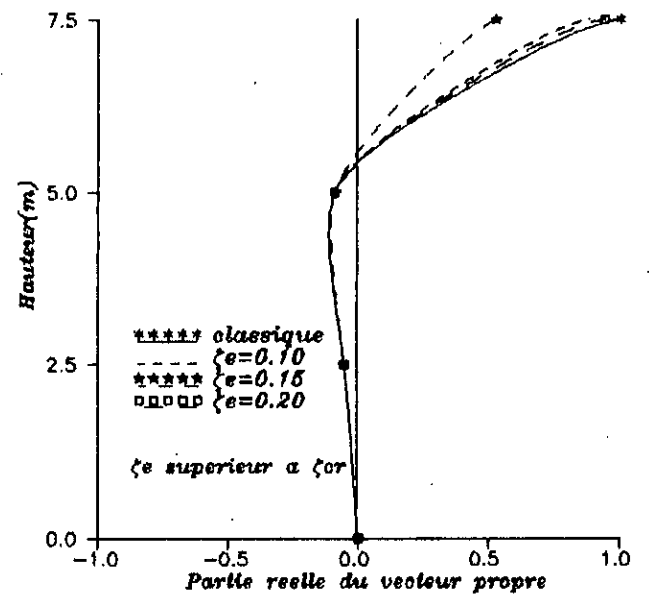
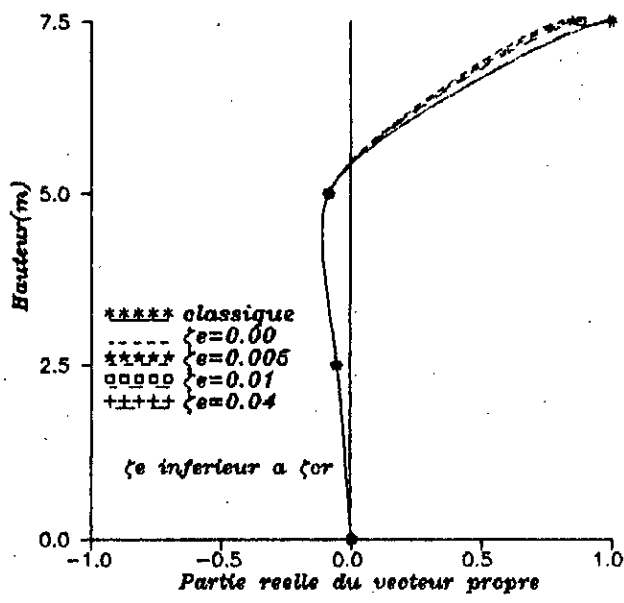
En observant les spectres de plancher présentés en figures (VII.B.15), nous constatons la présence d'un pic très élevé au niveau de la fréquence fondamentale. Un second pic beaucoup plus faible et plus large est observé aux environs du second mode de tuning, mettant en évidence une situation de tuning multiple (*multiple tuning*), qui se traduit par un chevauchement des pics associés aux deux modes supérieurs de la structure primaire à base fixe.

La comparaison des courbes fournies par les deux approches confirme, que selon qu'il s'agisse du 1er ou des modes supérieurs de tuning, l'approximation classique est préconisée au voisinage de la valeur critique ξ'_{cr} du mode considéré. Au delà ou en deçà de cette borne, cependant, les résultats erronés fournis réaffirment l'inefficacité de cette approche, en dehors de son domaine de validité, à évaluer correctement la réponse structurale.



2eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-2

2eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-2



3eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-2

3eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-2

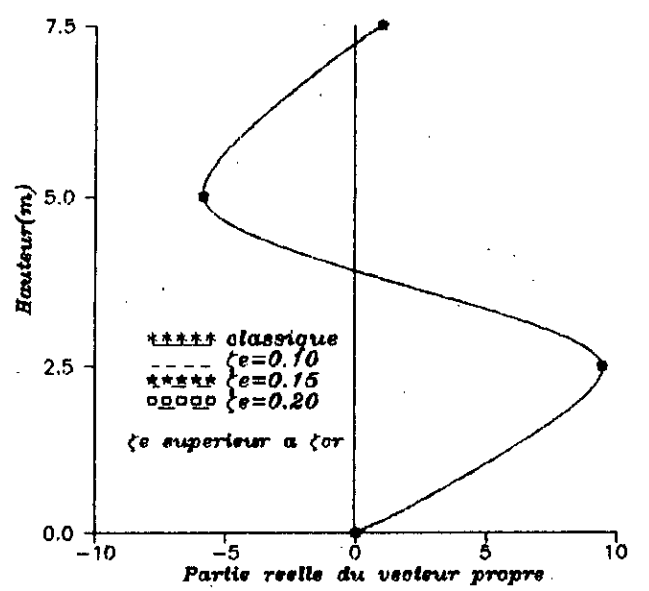
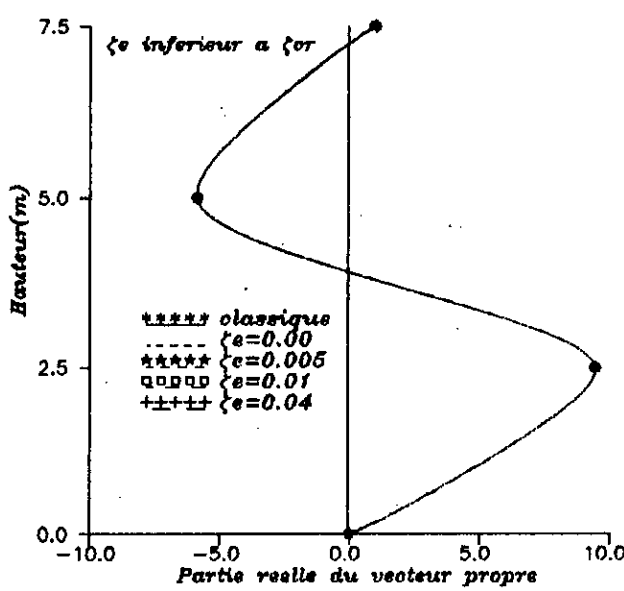
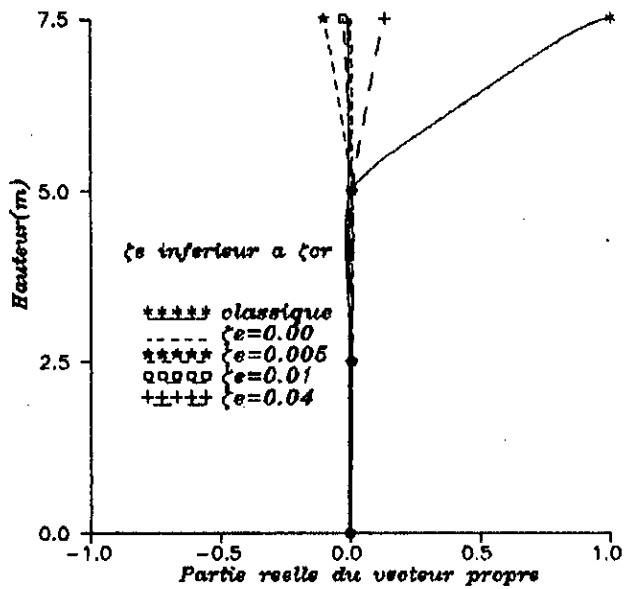
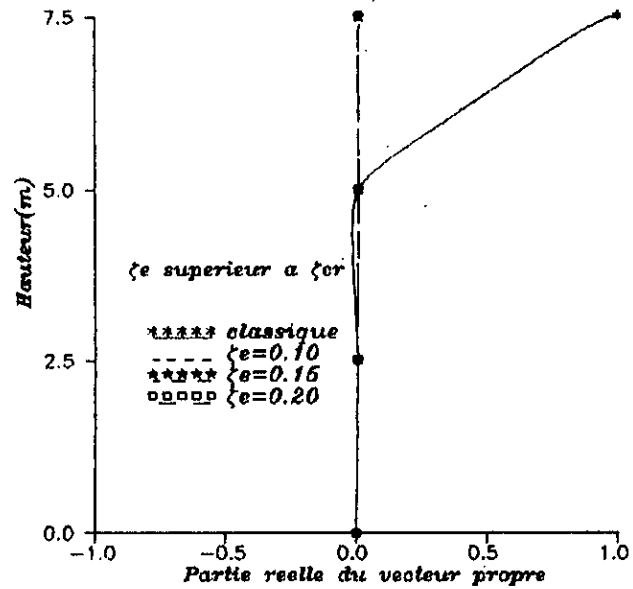


Fig VII.A.2: Comparaison des composantes réelles des vecteurs propres évalués selon les deux approches classique et non classique
STRUCTURE1: RM=10E-2

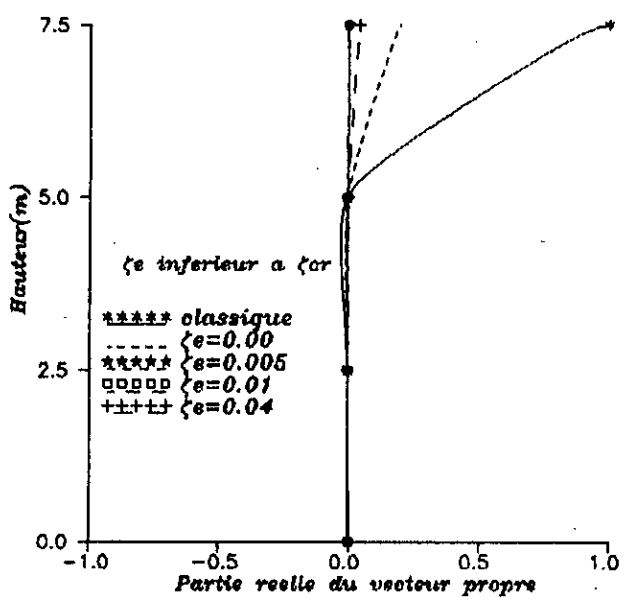
1er MODE DE VIBRATION: RM=10E-4



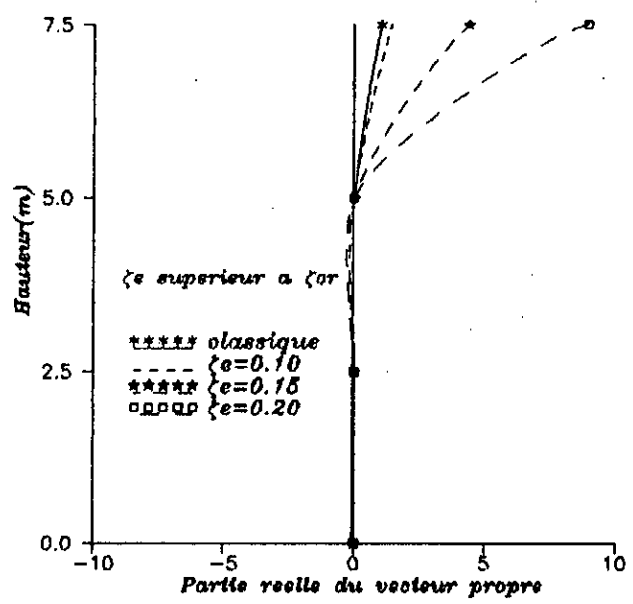
1er MODE DE VIBRATION: RM=10E-4



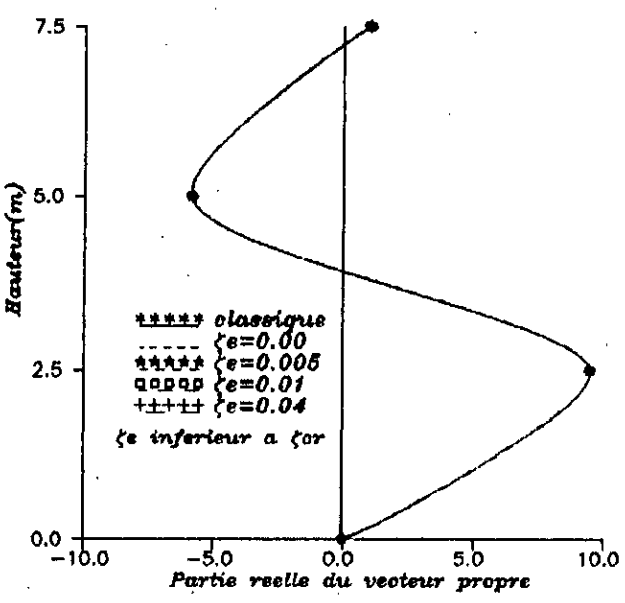
2eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-4



2eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-4



3eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-4



3eme MODE DE VIBRATION: RM=10E-4

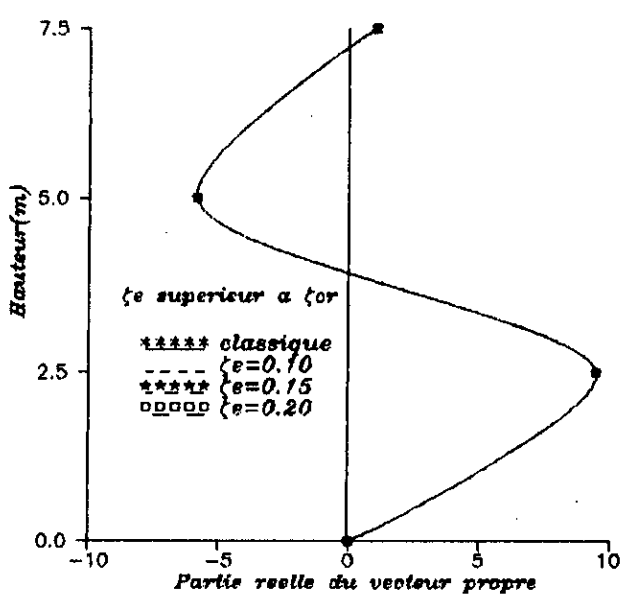
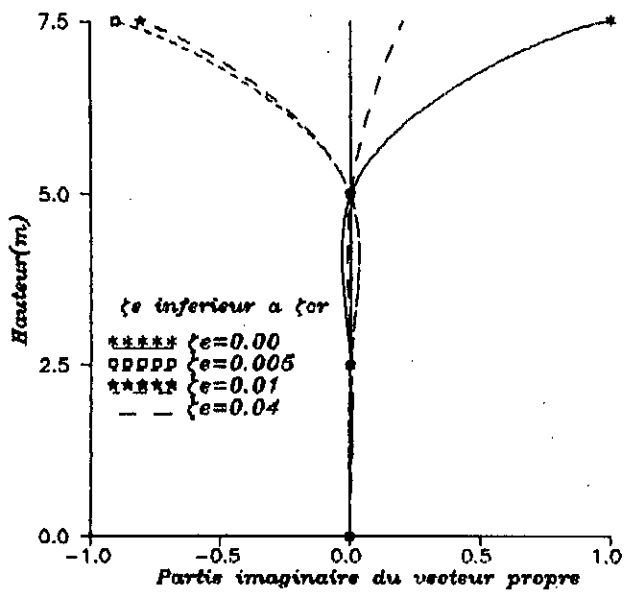
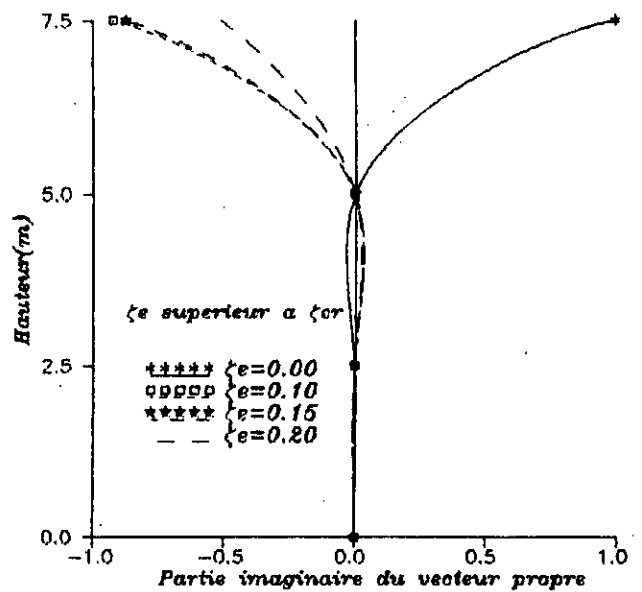


Fig VII.A.3: Comparaison des composantes réelles des vecteurs propres évaluées selon les deux approches classique et non classique
STRUCTURE1: RM=10E-4

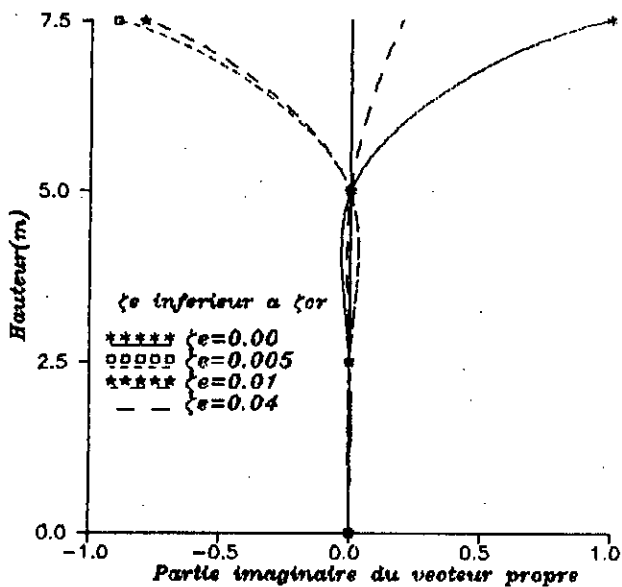
1er MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$



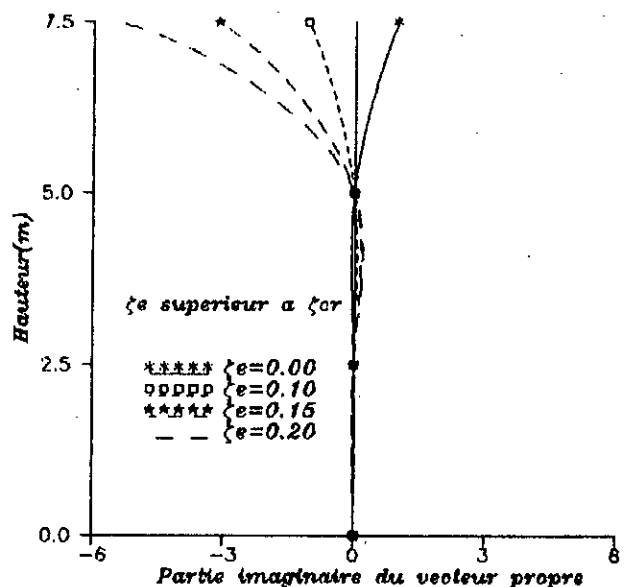
1er MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$



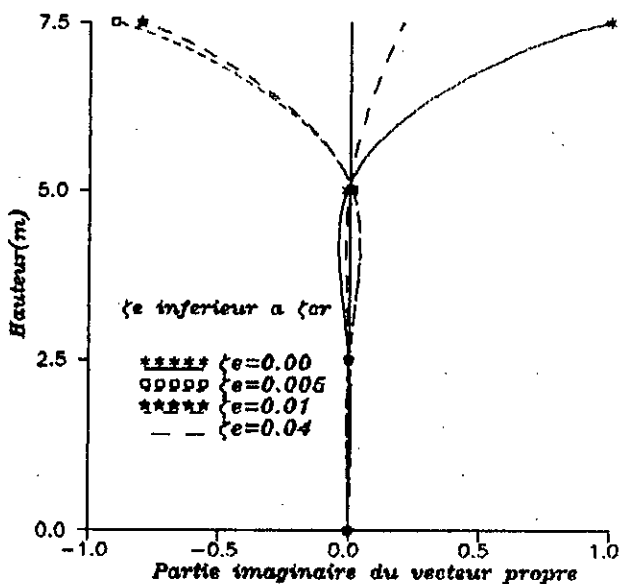
2eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$



2eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$



3eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$



3eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-2$

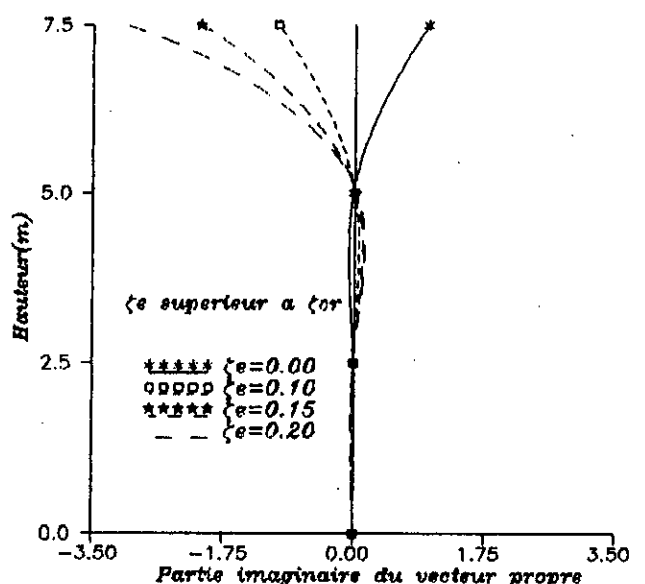
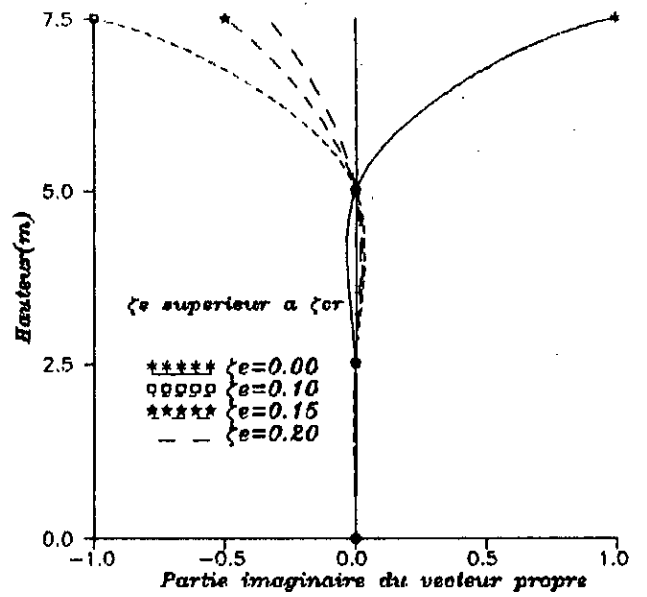
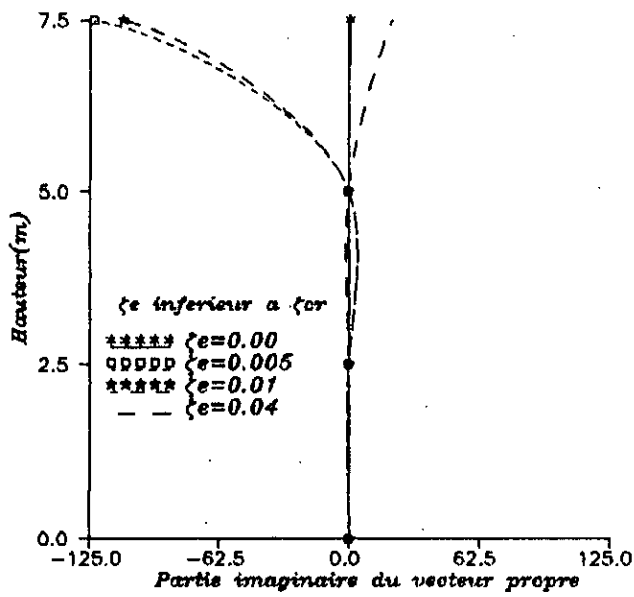
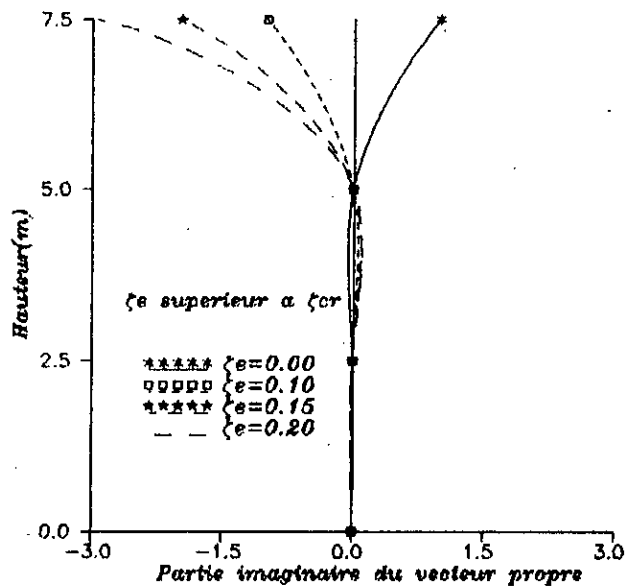
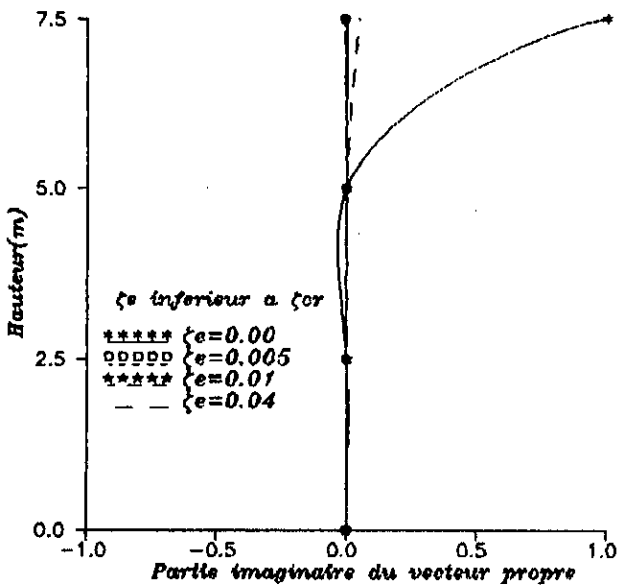


Fig VII.A.4: Comparaison des composantes imaginaires des vecteurs propres évalués selon les deux approches classique et non classique
STRUCTURE1: $RM=10E-2$



2eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-4$

2eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-4$



3eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-4$

3eme MODE DE VIBRATION: $RM=10E-4$

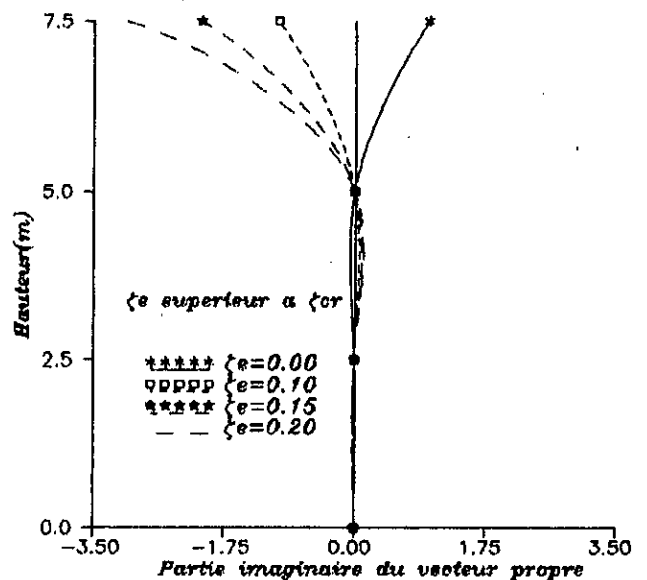
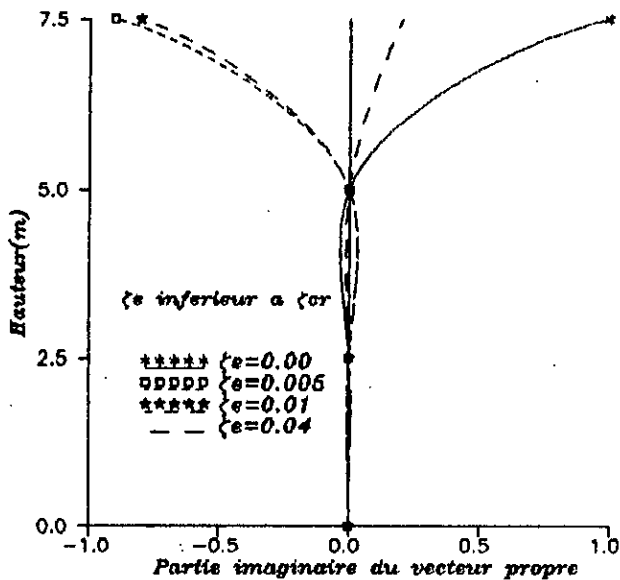


Fig VII.A.5: Comparaison des composantes imaginaires des vecteurs propres évalués selon les deux approches classique et non classique
STRUCTURE1: $RM=10E-4$

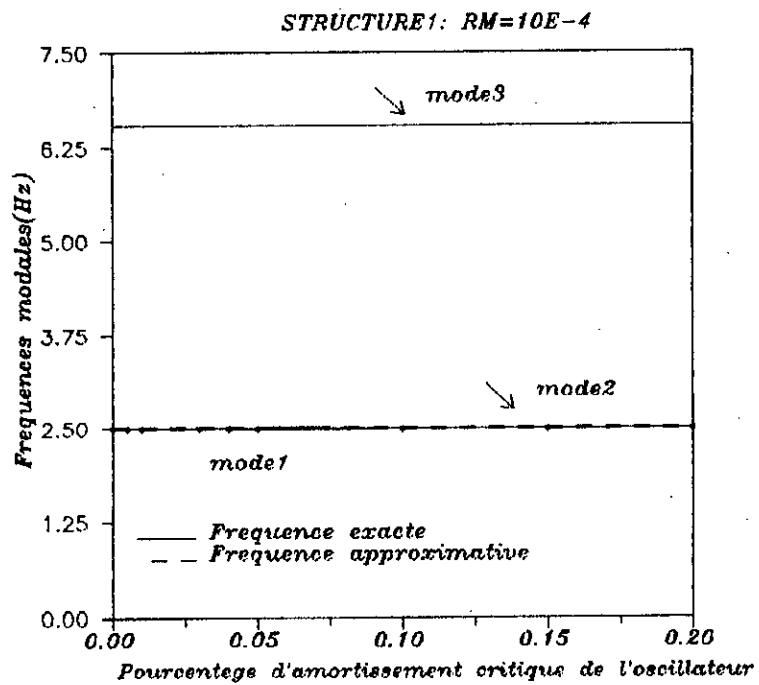
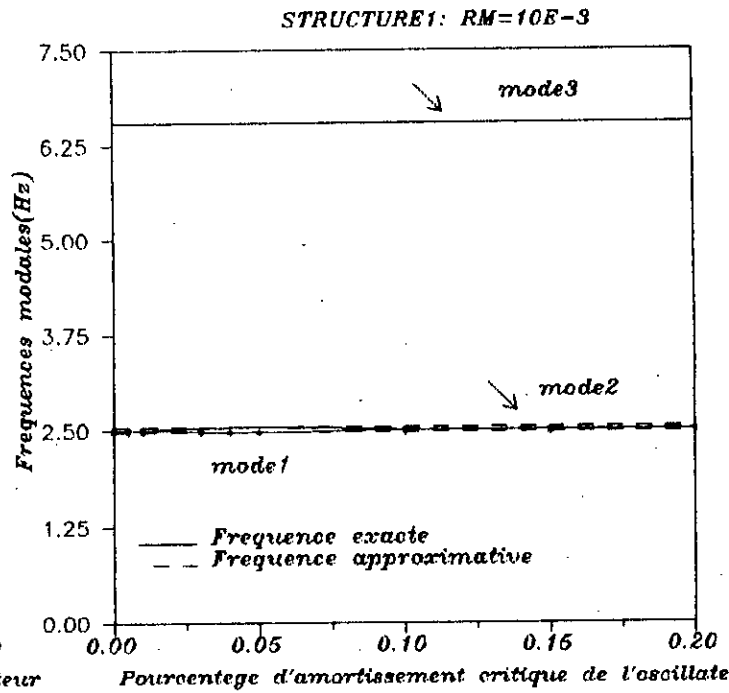
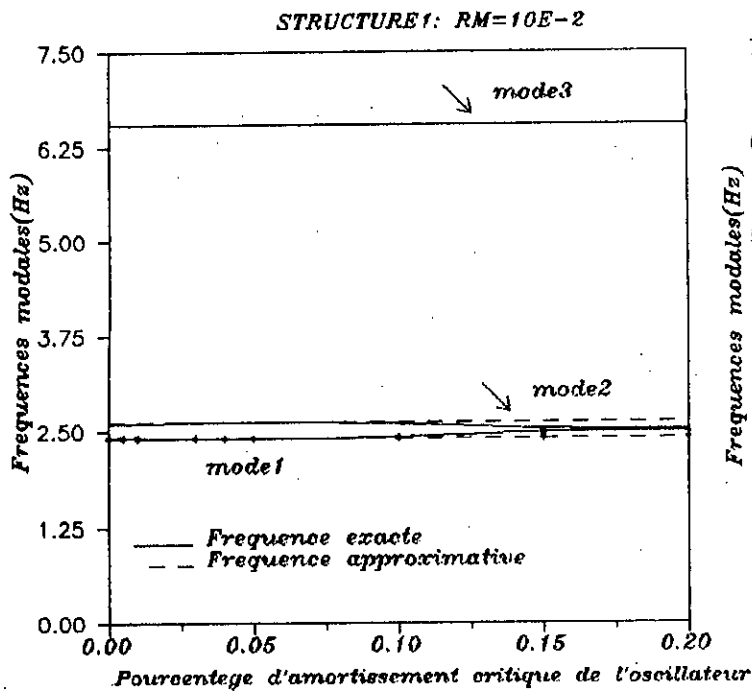


Fig VII.A.6: Comparaison des frequences modales evaluees selon les deux approches classique et non classique Structure1 (1er mode de tuning)

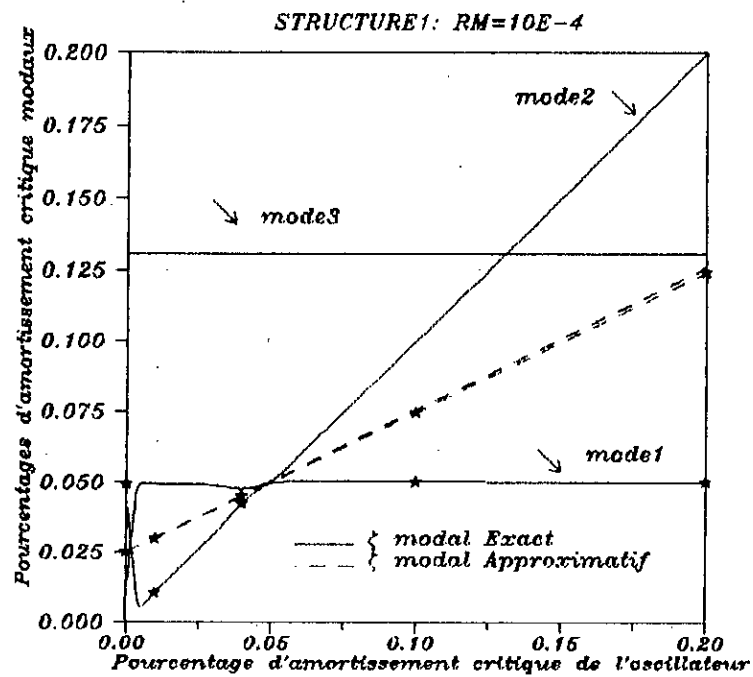
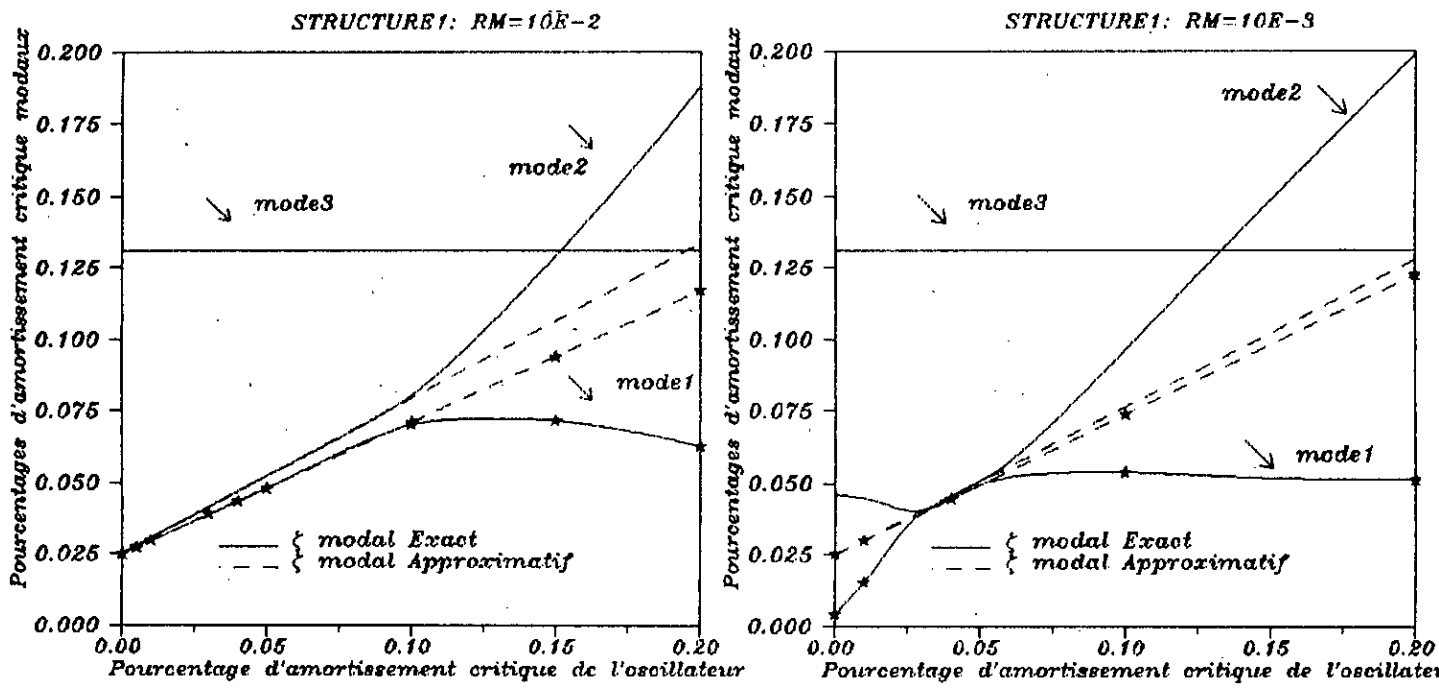
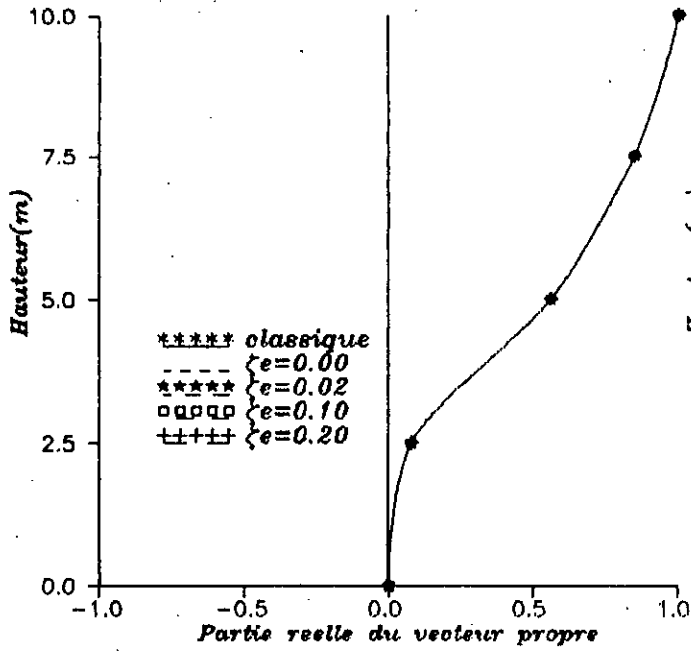
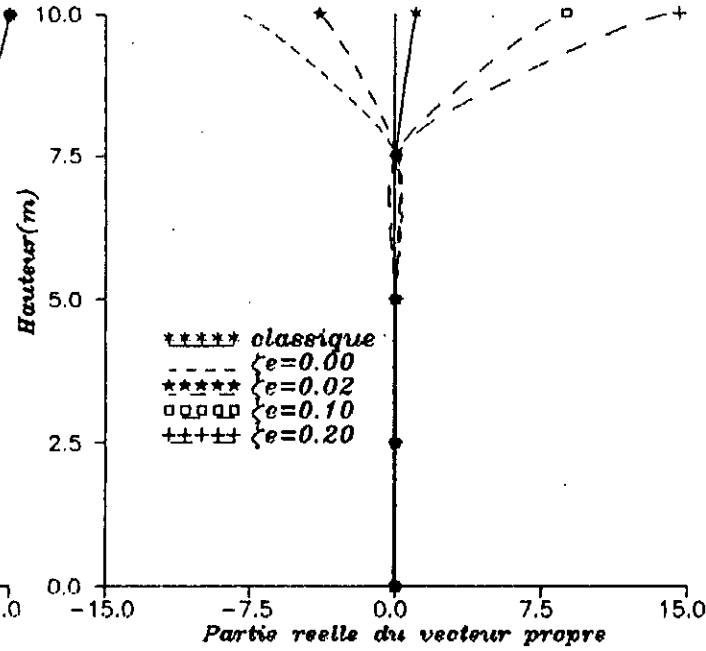


Fig VII.A.7: Comparaison des pourcentages d'amortissement critique modaux évalués selon les deux approches classique et non classique

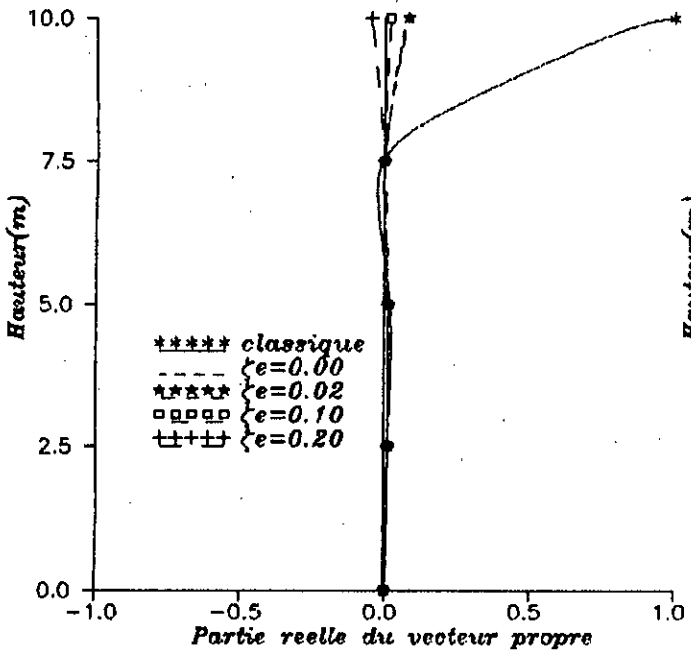
1er MODE DE VIBRATION



2eme MODE DE VIBRATION



3eme MODE DE VIBRATION



4eme MODE DE VIBRATION

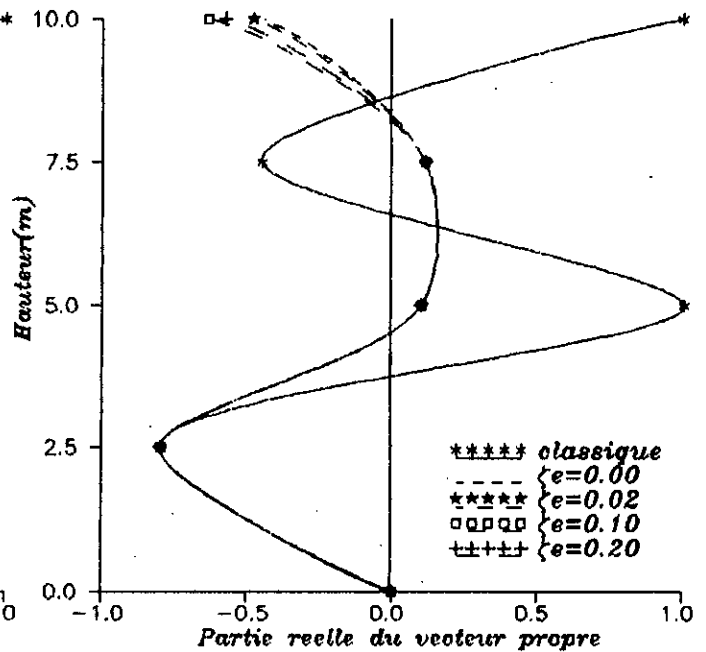


Fig VII.A.8: Comparaison des composantes réelles des vecteurs propres évalués selon les deux approches classique et non classique Fondation-Structure-Equipement (2eme mode de tuning)

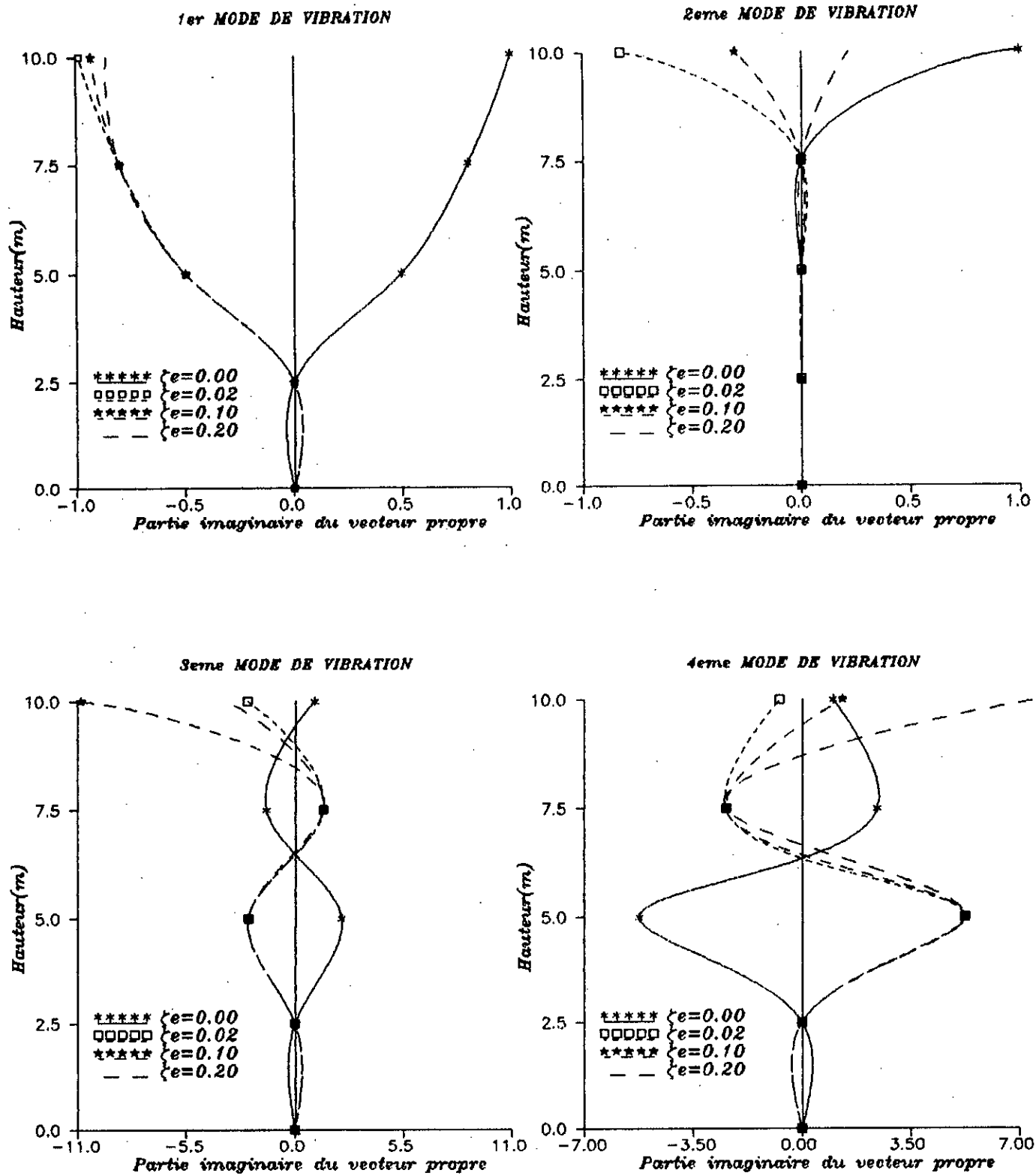
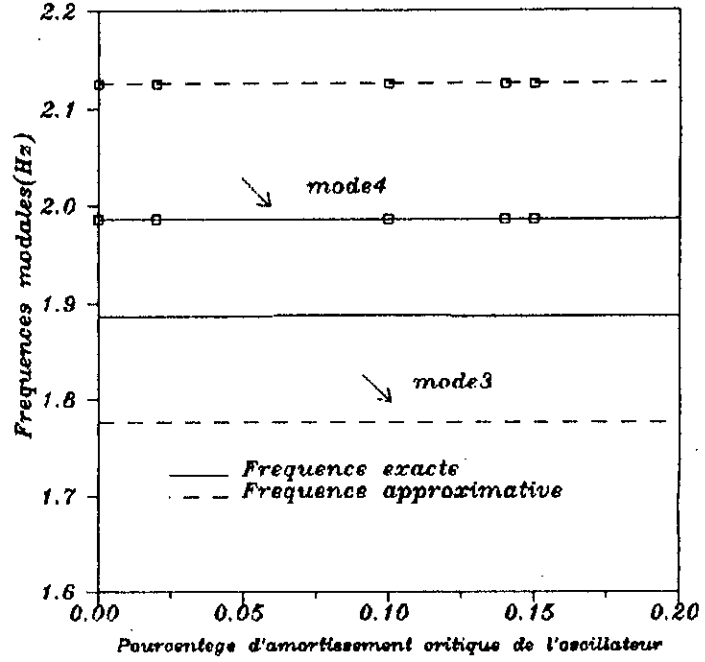
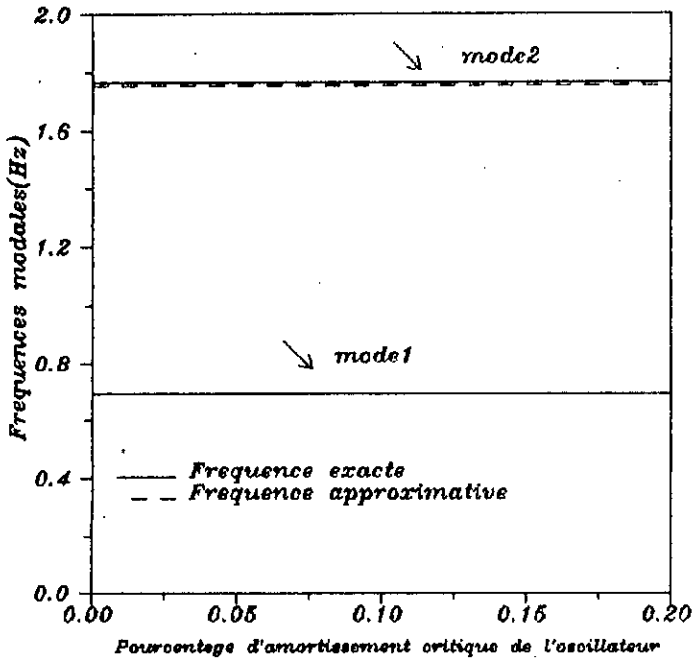


Fig VII.A.9: Comparaison des composantes imaginaires des vecteurs propres évaluées selon les deux approches classique et non classique Fondation-Structure-Equipement (2eme mode de tuning)

* comparaison des frequences modales



* Comparaison des pourcentages d'amortissement critiques modaux

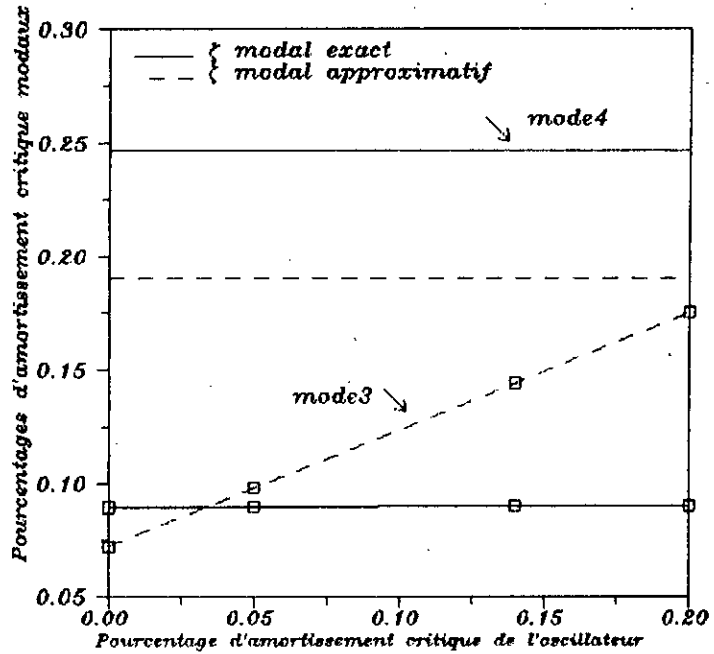
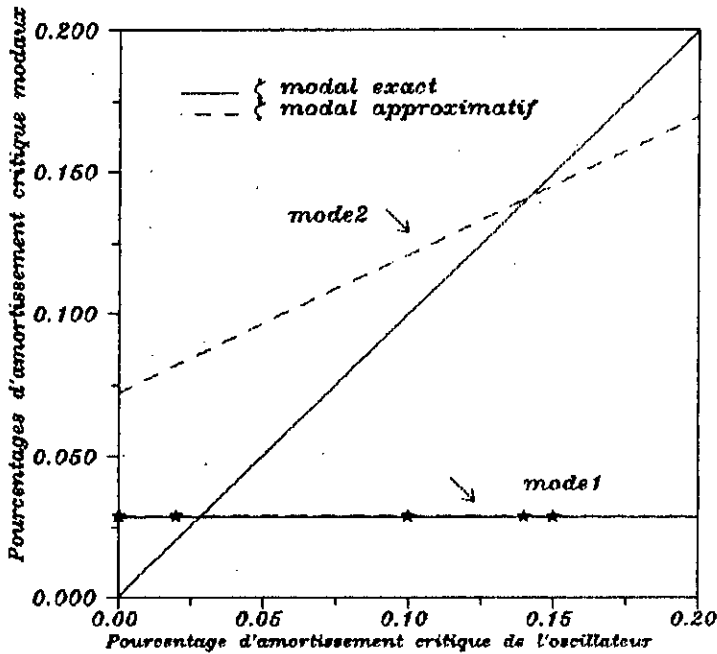
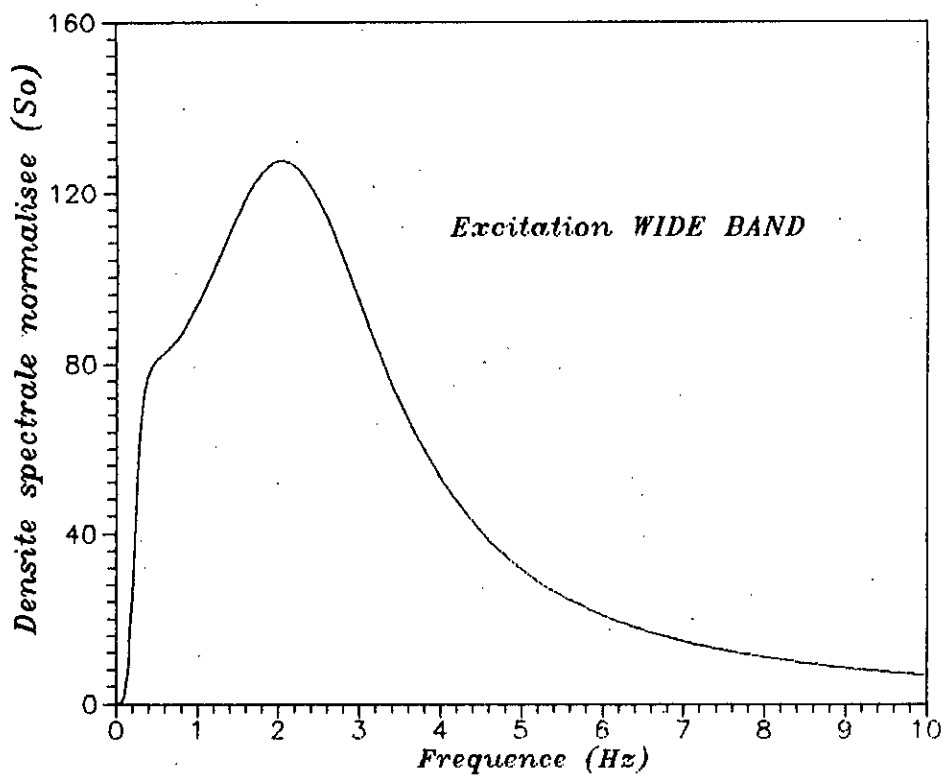


Fig VII.A.10: Comparaison des frequences et pourcentages d'amortissement modaux evalues selon les deux approches classique et approximative Fondation-Structure-Equipement (2eme mode de tuning)



Densité spectrale de l'excitation WIDE BAND

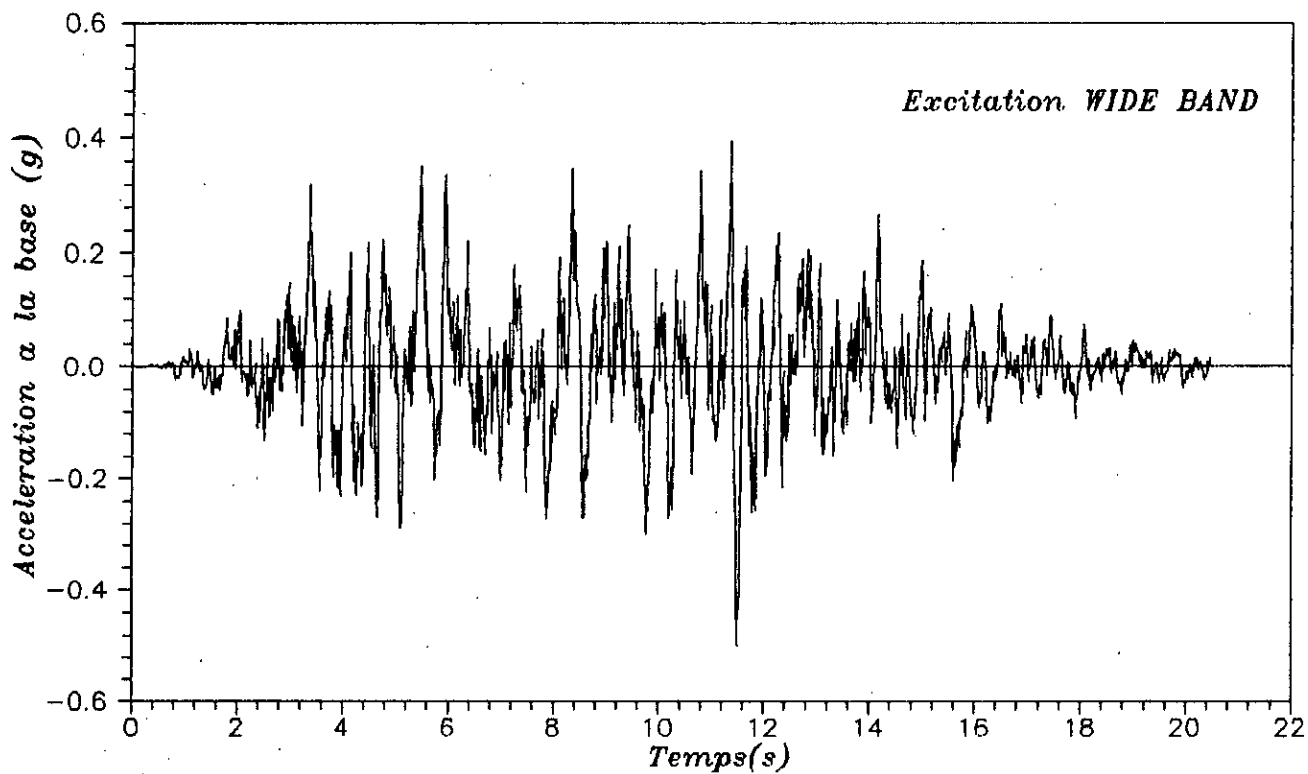


Fig VII.B.1: Echantillon de l'excitation sismique wide band simulée

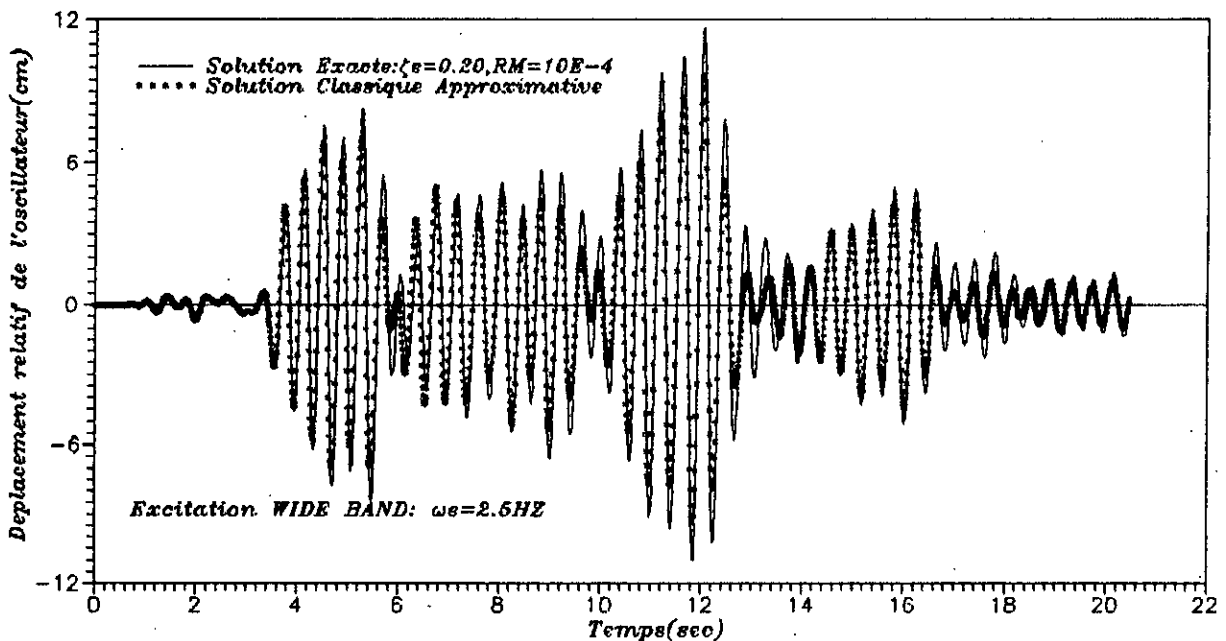
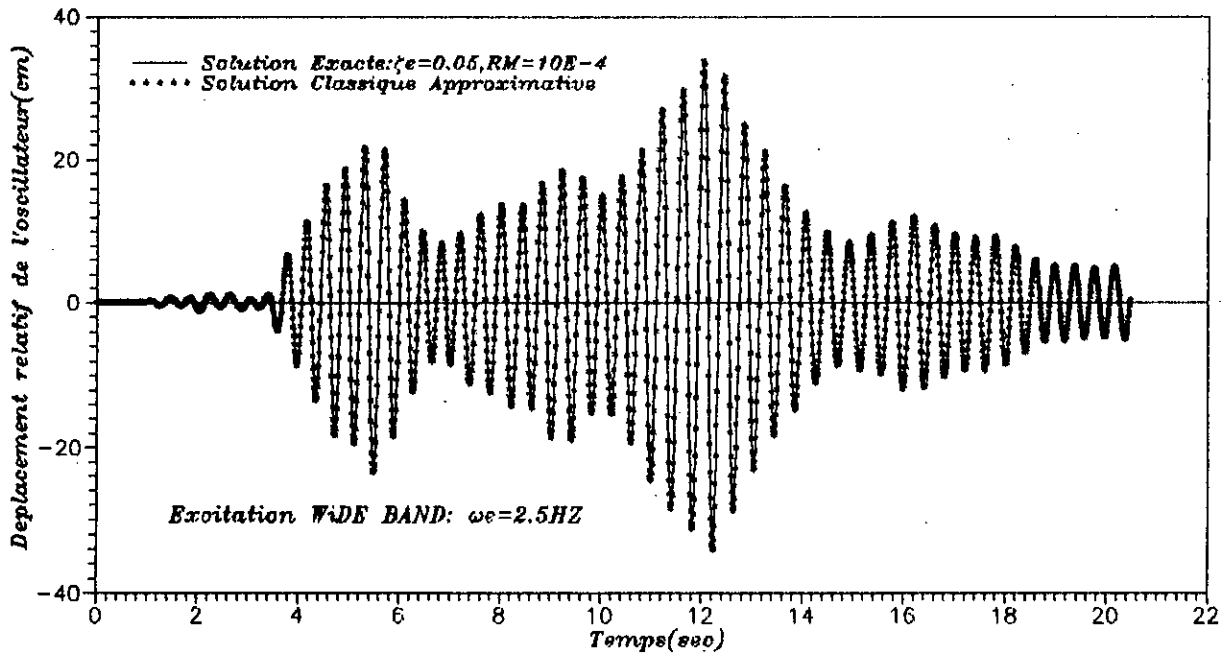
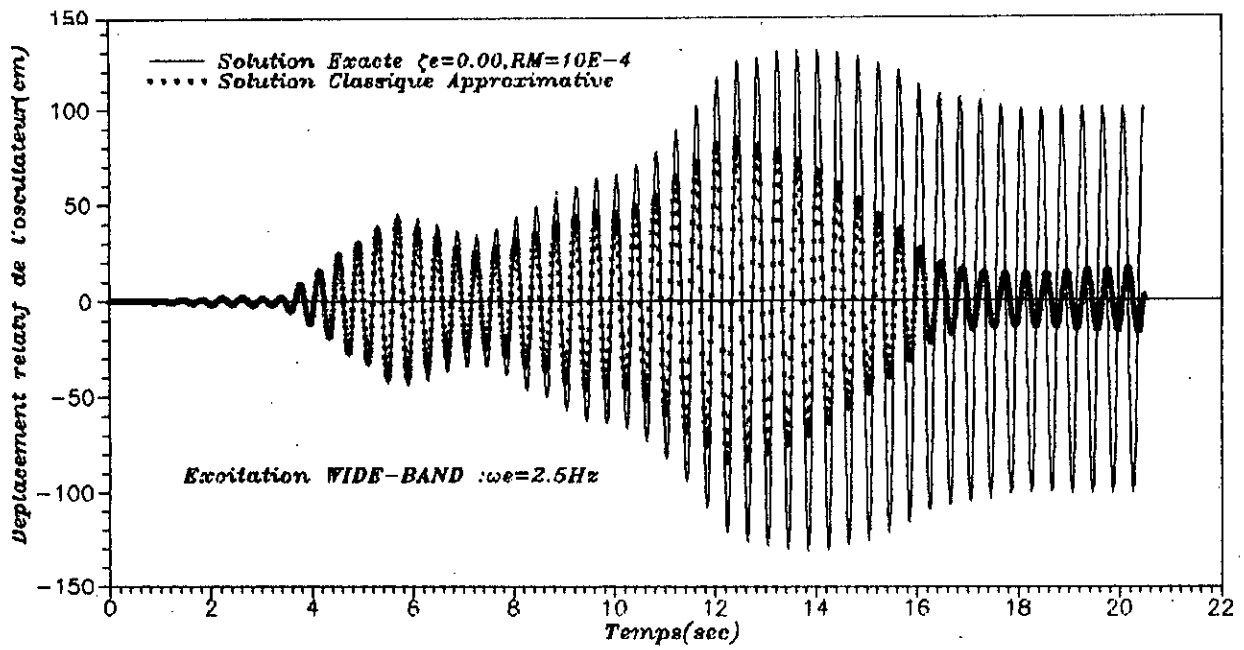


Fig VII.B.2: Variation de l'histoire temporelle de la reponse de l'oscillateur en fonction de son amortissement (1er mode de tuning)
 Excitation WIDE BAND

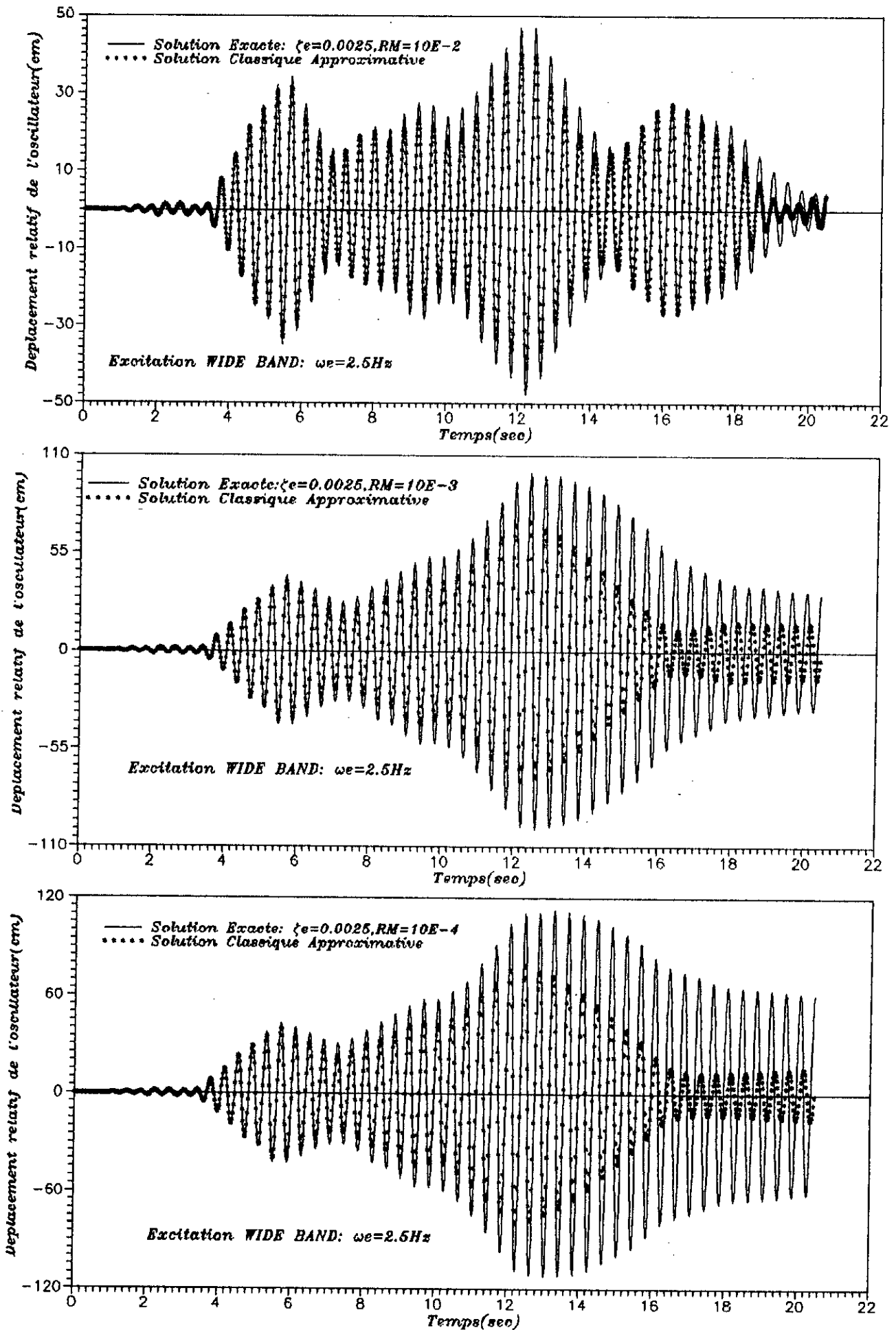


Fig VII.B.3: Variation de l'histoire temporelle de la reponse de l'oscillateur en fonction de sa masse (1er mode de tuning)
 Excitation WIDE BAND

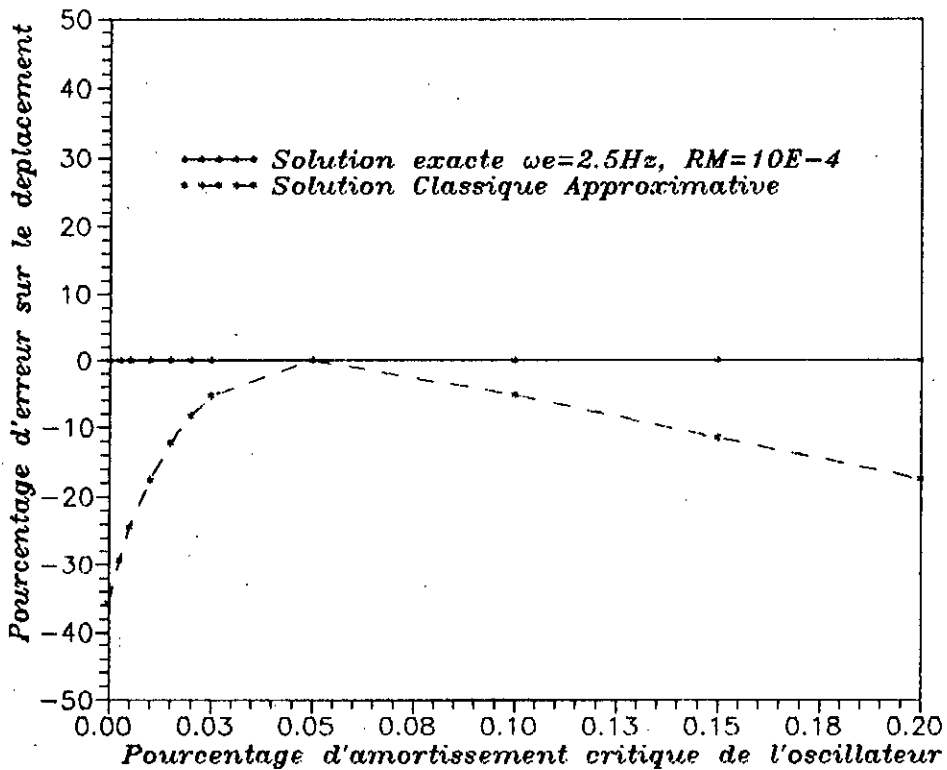
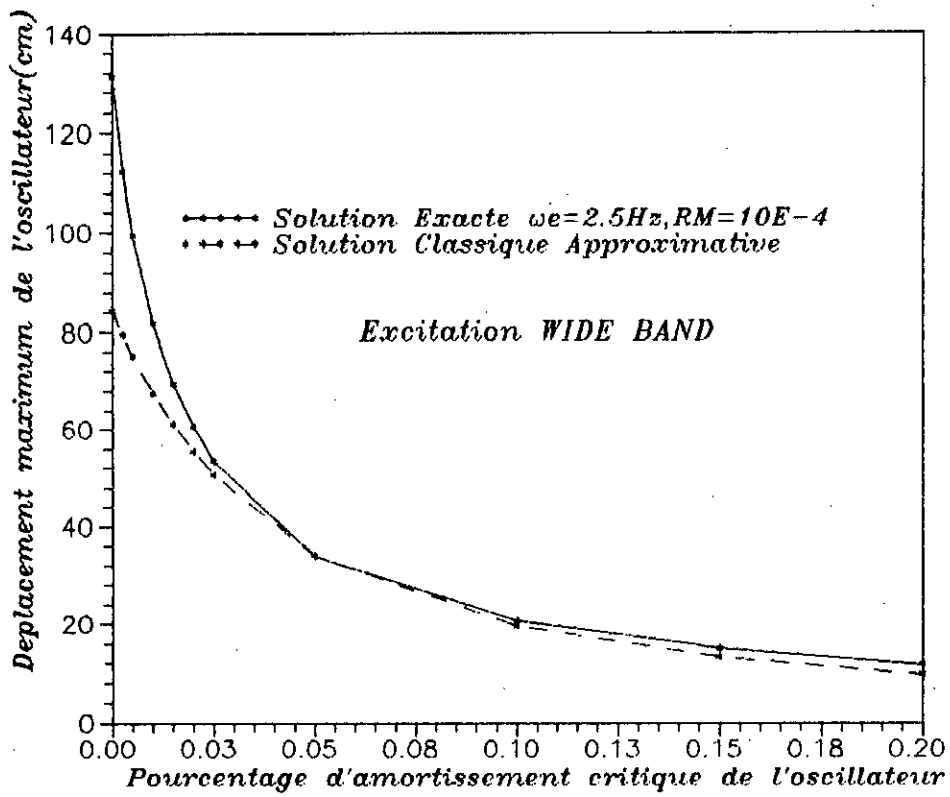


Fig VII.B.4: Evolution de la reponse maximale de l'oscillateur en fonction de son amortissement (1er mode de tuning) Excitation WIDE BAND

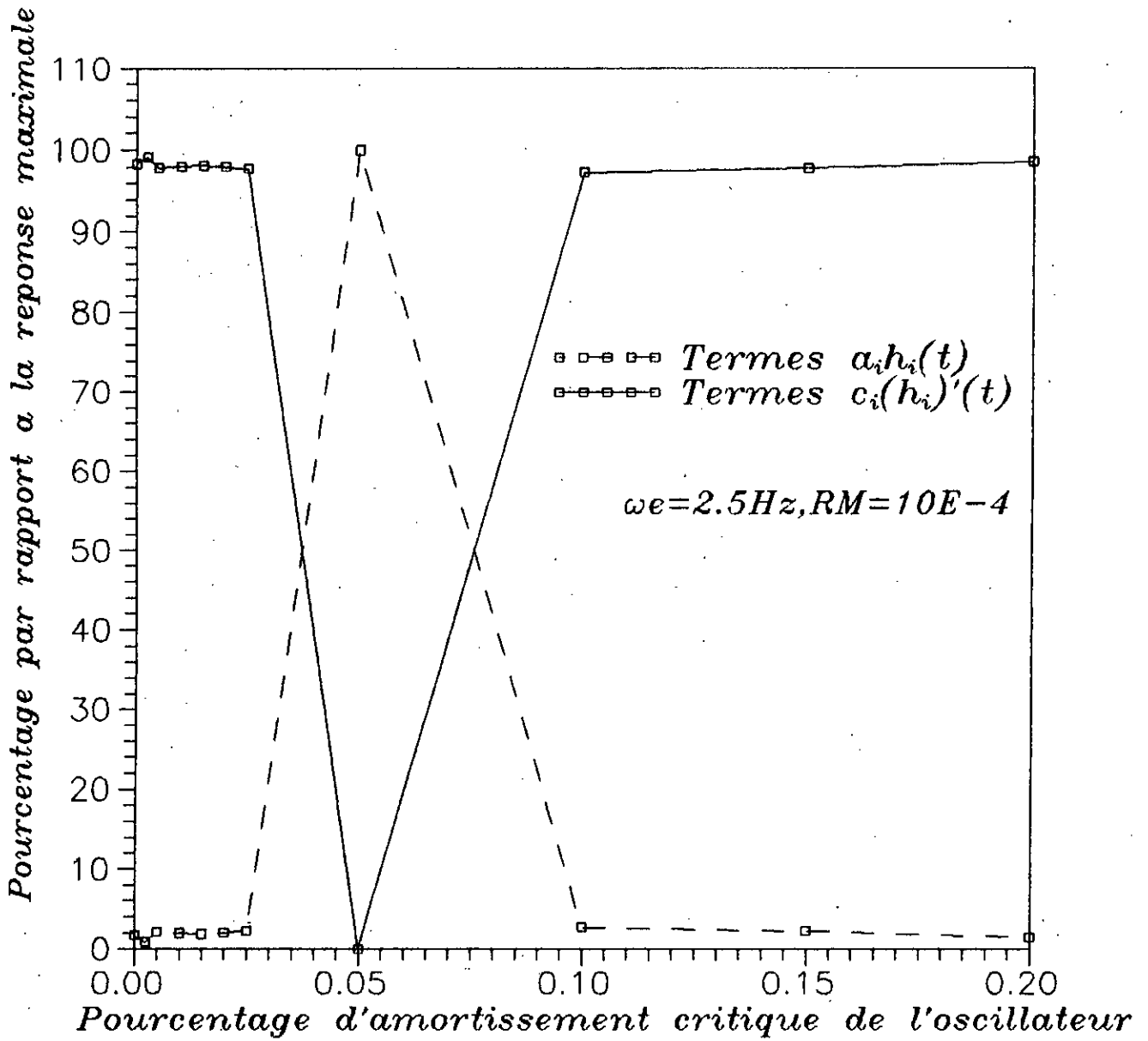


Fig VII.B.5: Contribution de termes dans l'évaluation de la reponse maximale (1er mode de tuning)
 Excitation WIDE BAND

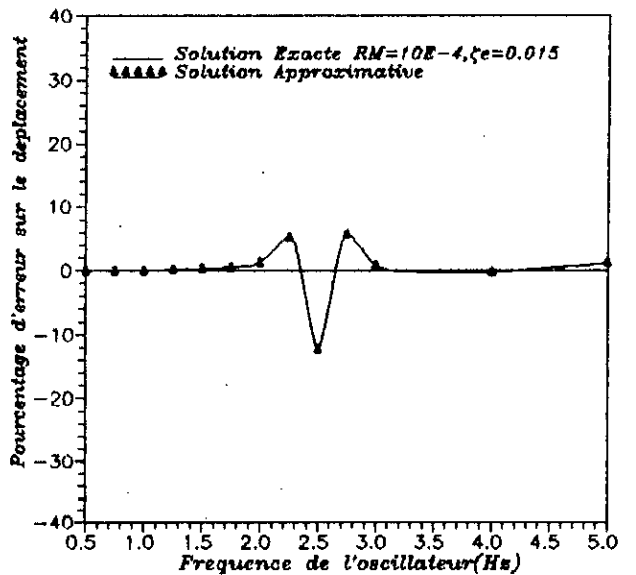
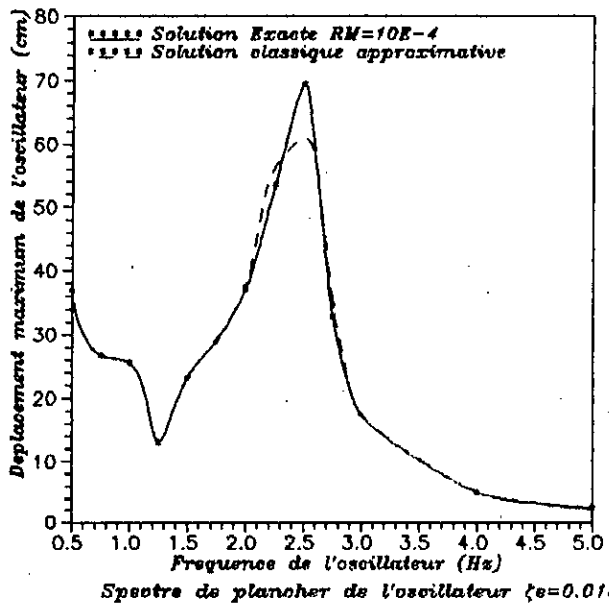
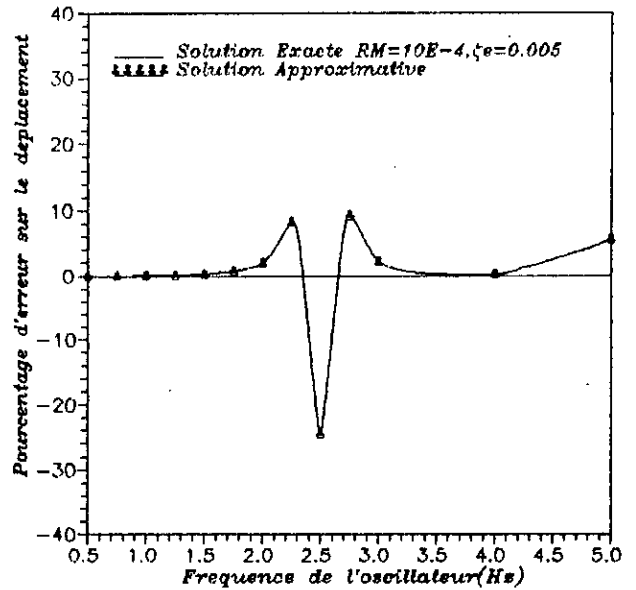
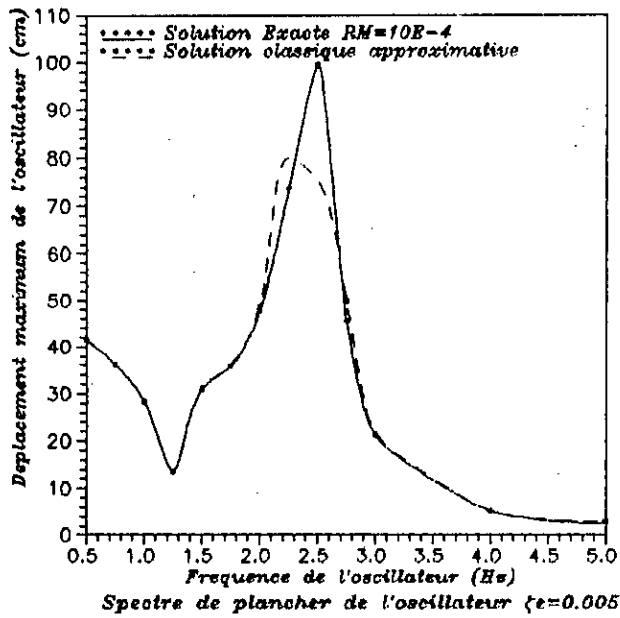
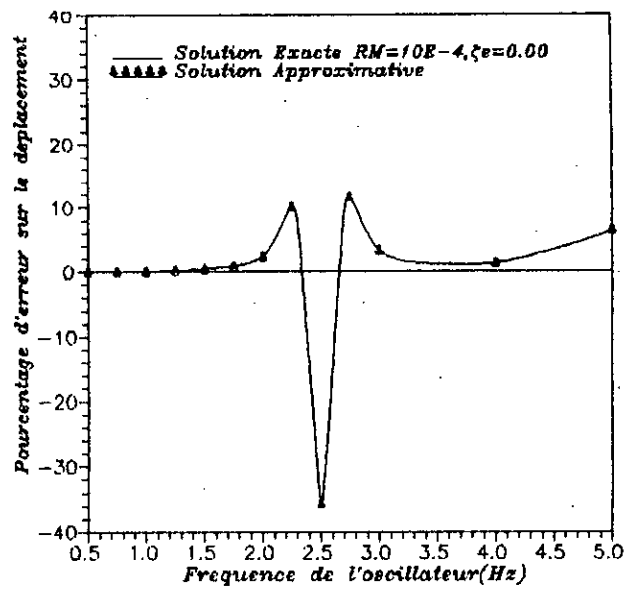
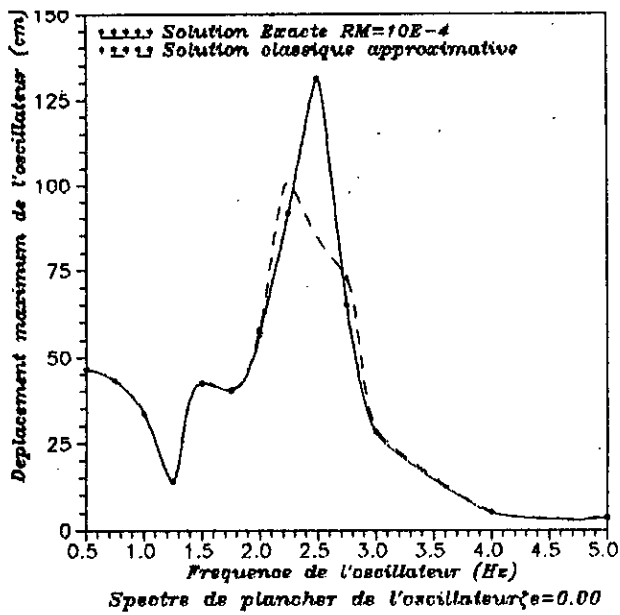


Fig VII.B.6.a: Effet de la variation de l'amortissement de l'oscillateur sur son spectre de plancher
Excitation WIDE BAND

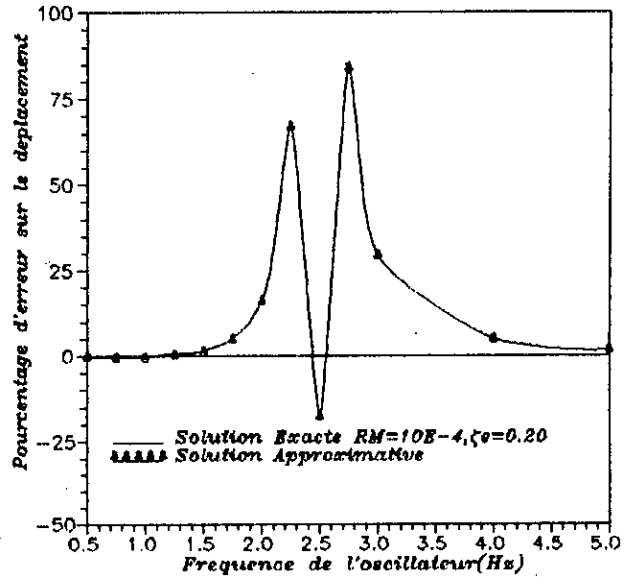
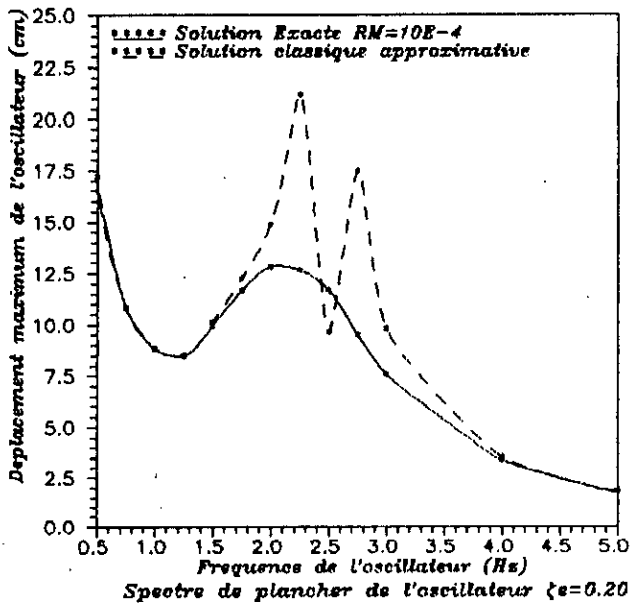
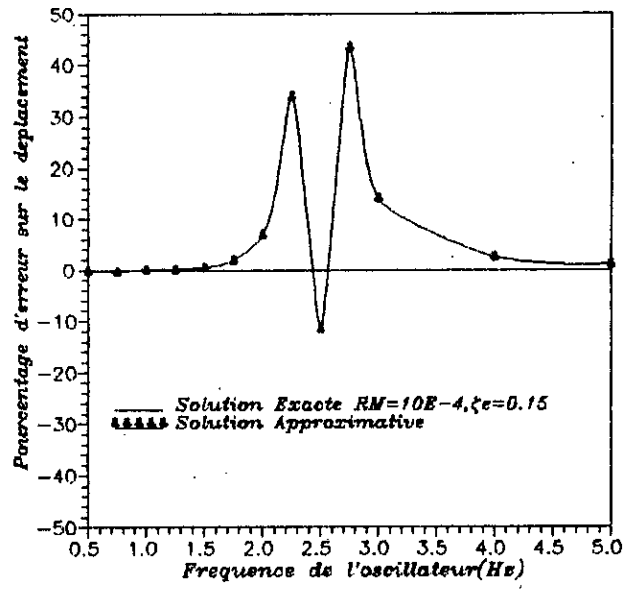
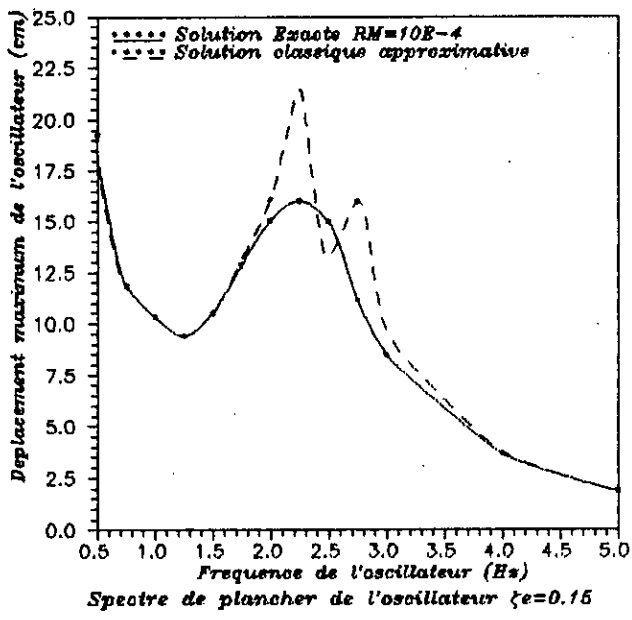
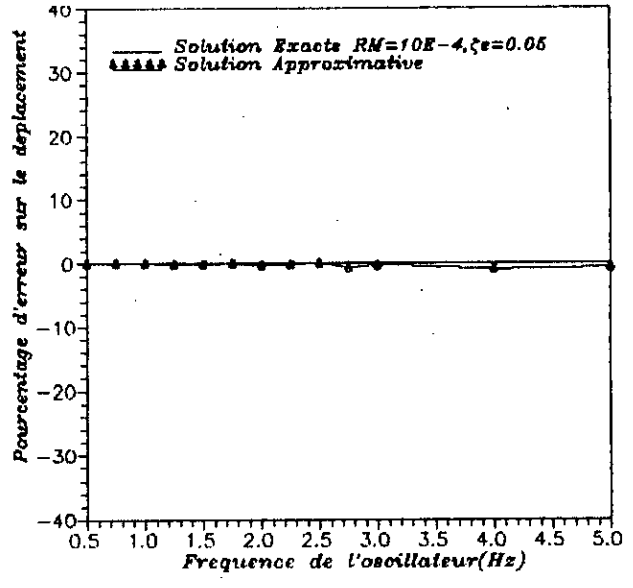
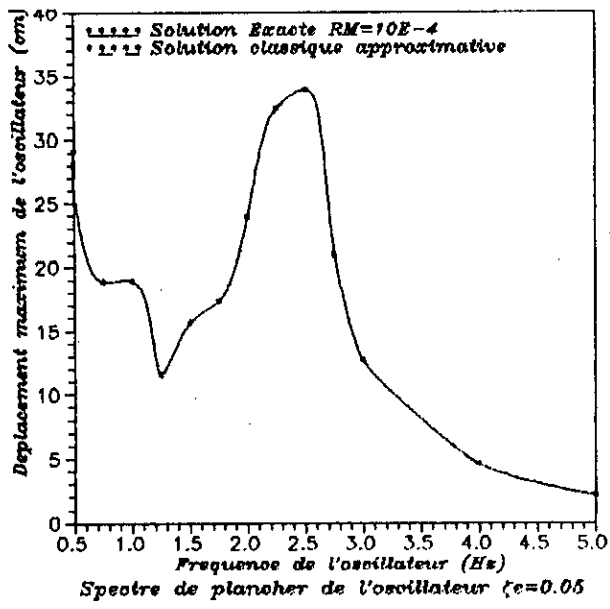
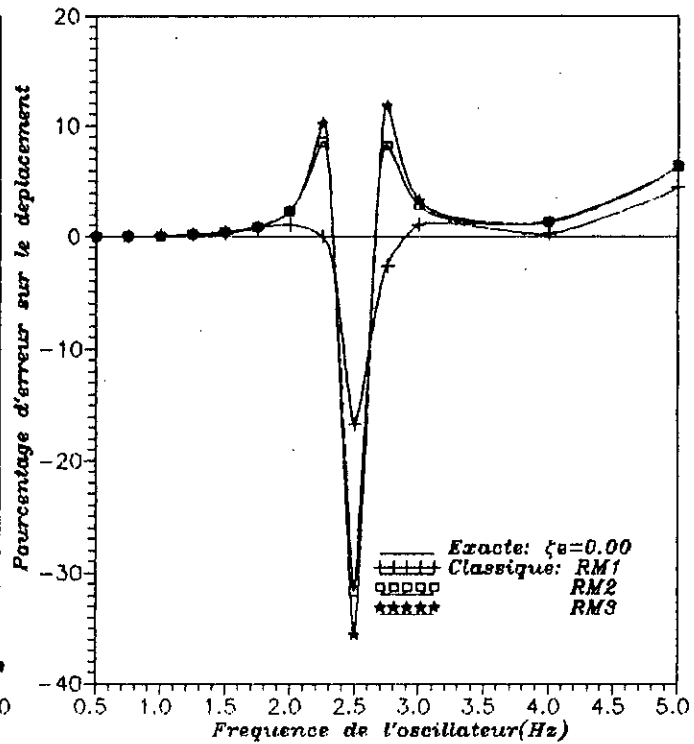
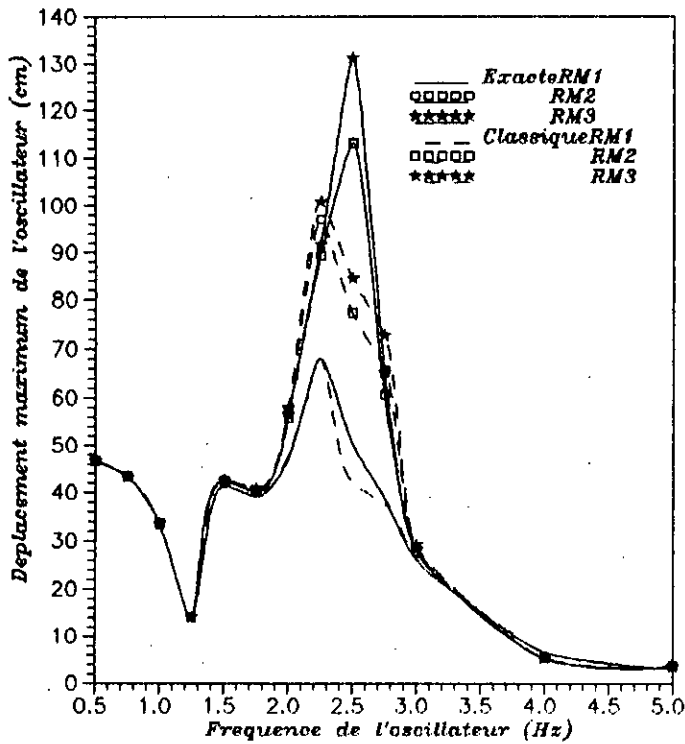
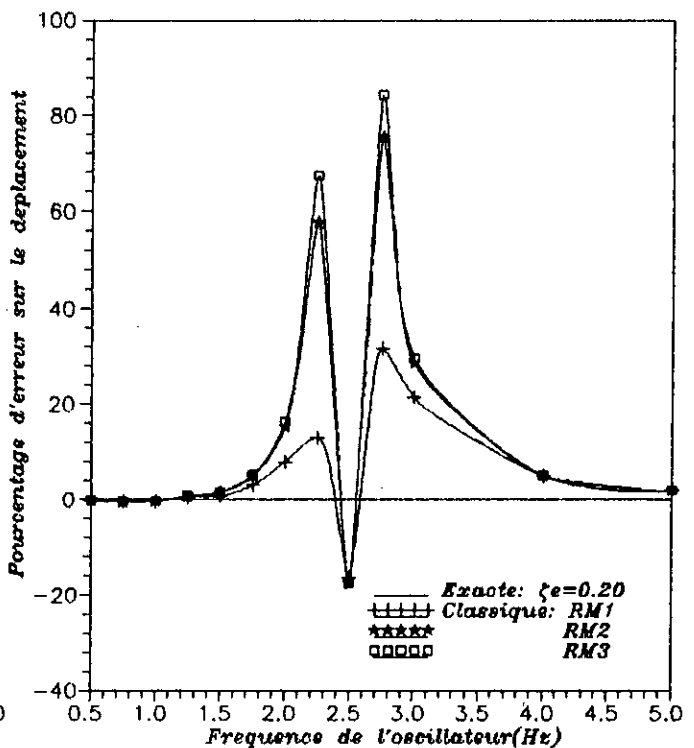
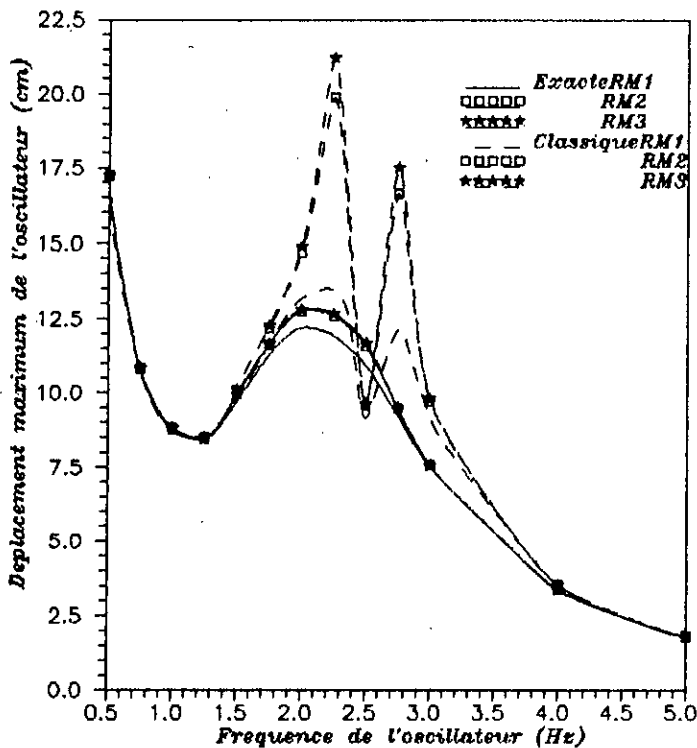


Fig VII.B.6.b: Effet de la variation de l'amortissement de l'oscillateur sur son spectre de plancher
Excitation WIDE BAND

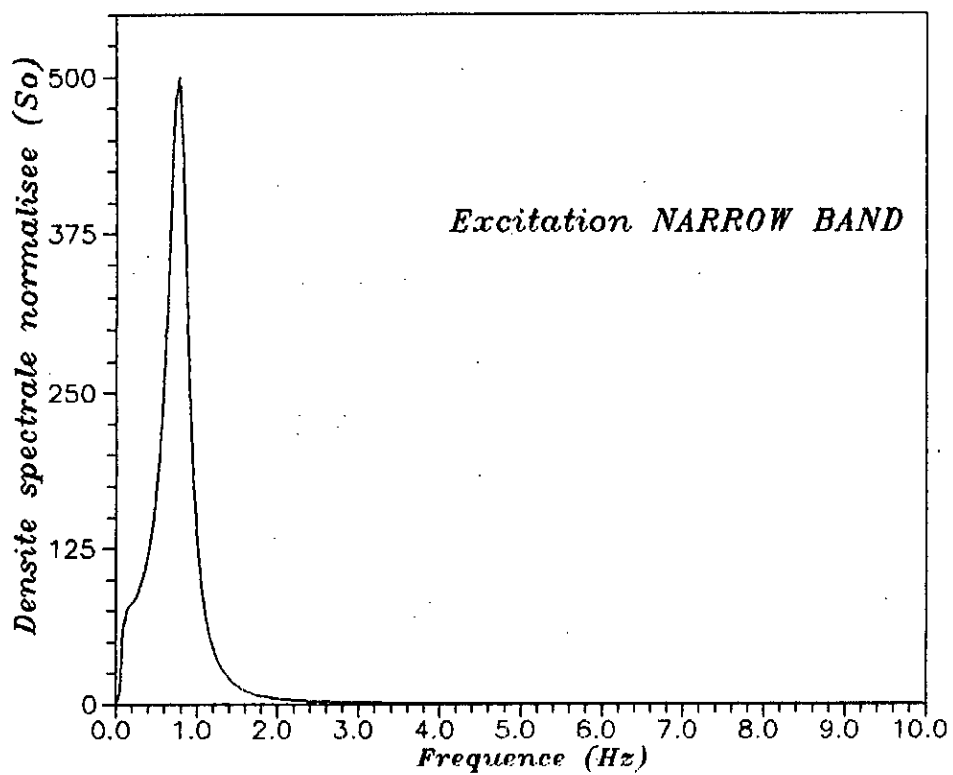


Spectre de Plancher de l'oscillateur: $\zeta e=0.00$



Spectre de Plancher de l'oscillateur: $\zeta e=0.20$

Fig VII.B.7: Incidence de l'amortissement de l'oscillateur sur l'effet d'interaction
Excitation WIDE BAND



Densité spectrale de l'excitation NARROW BAND

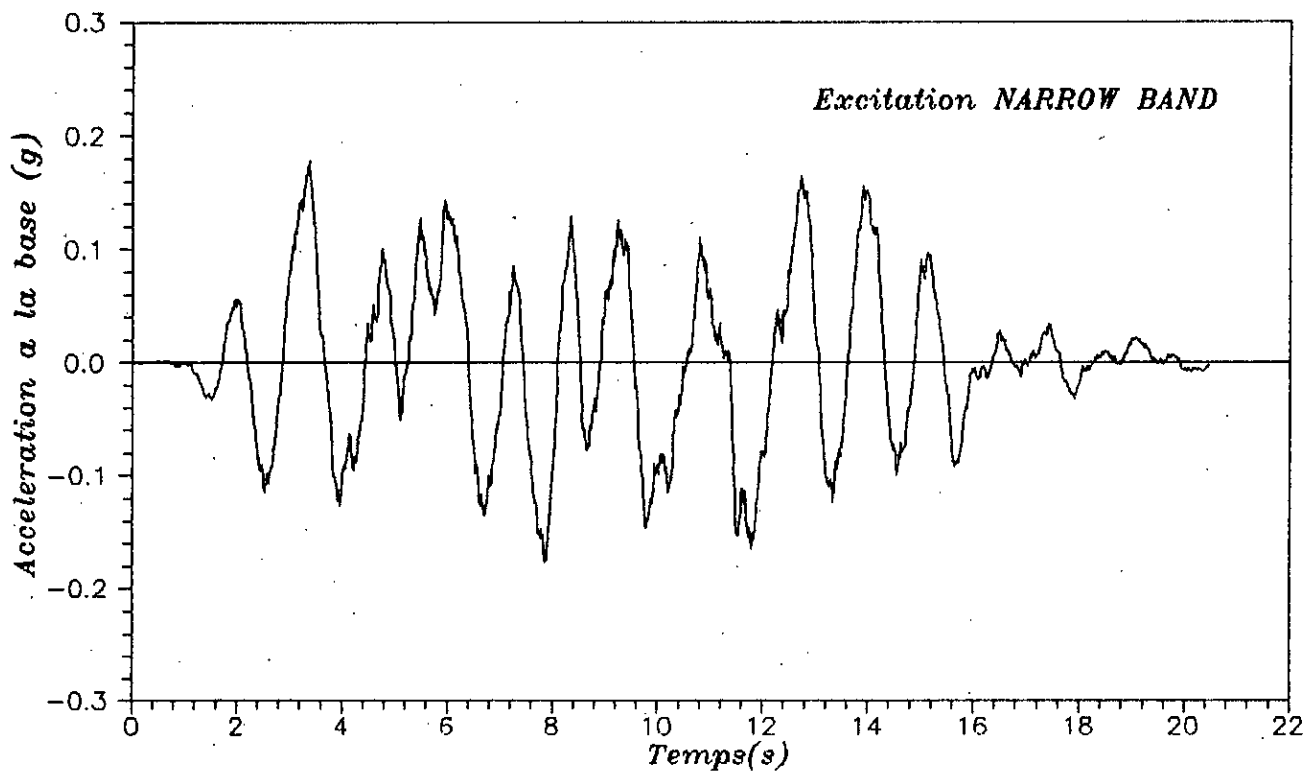


Fig VII.B.8: Echantillon de l'excitation sismique narrow band simulée

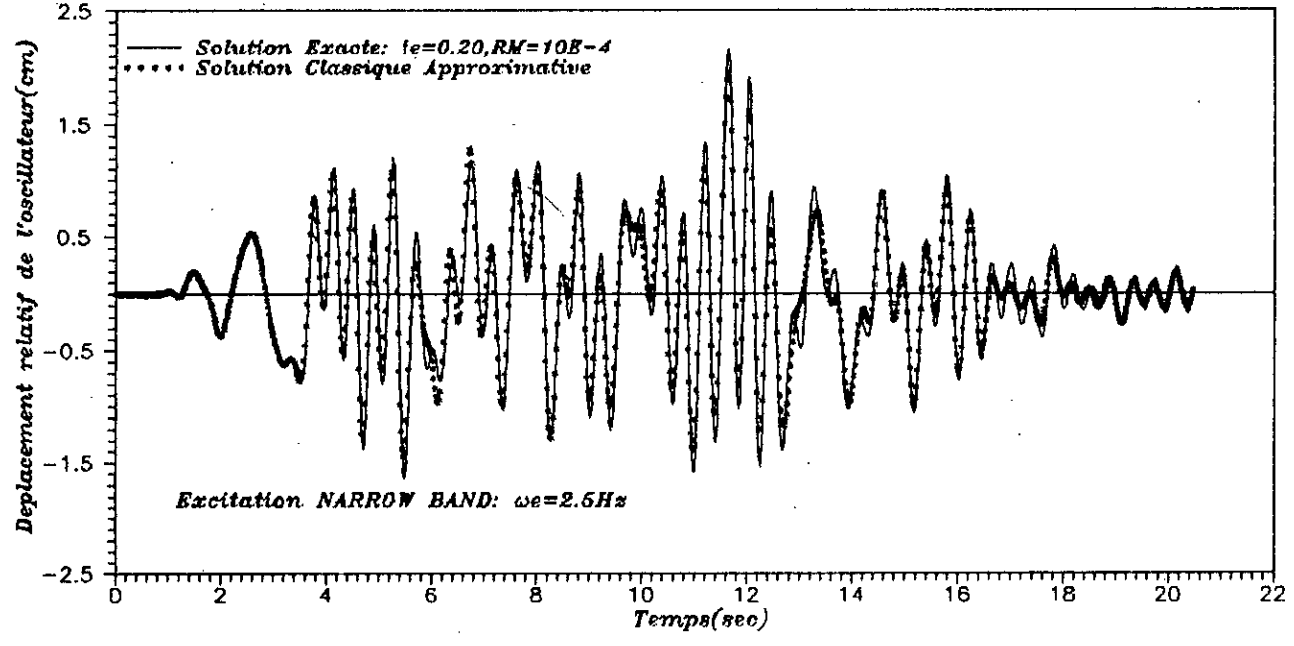
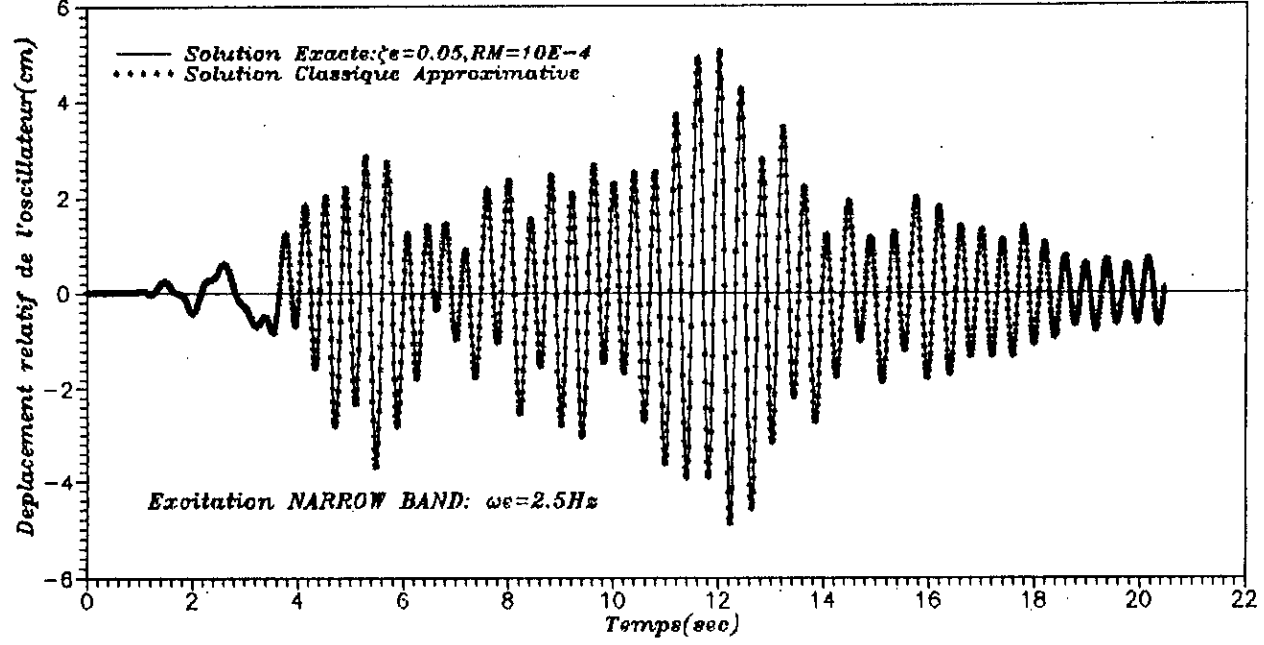
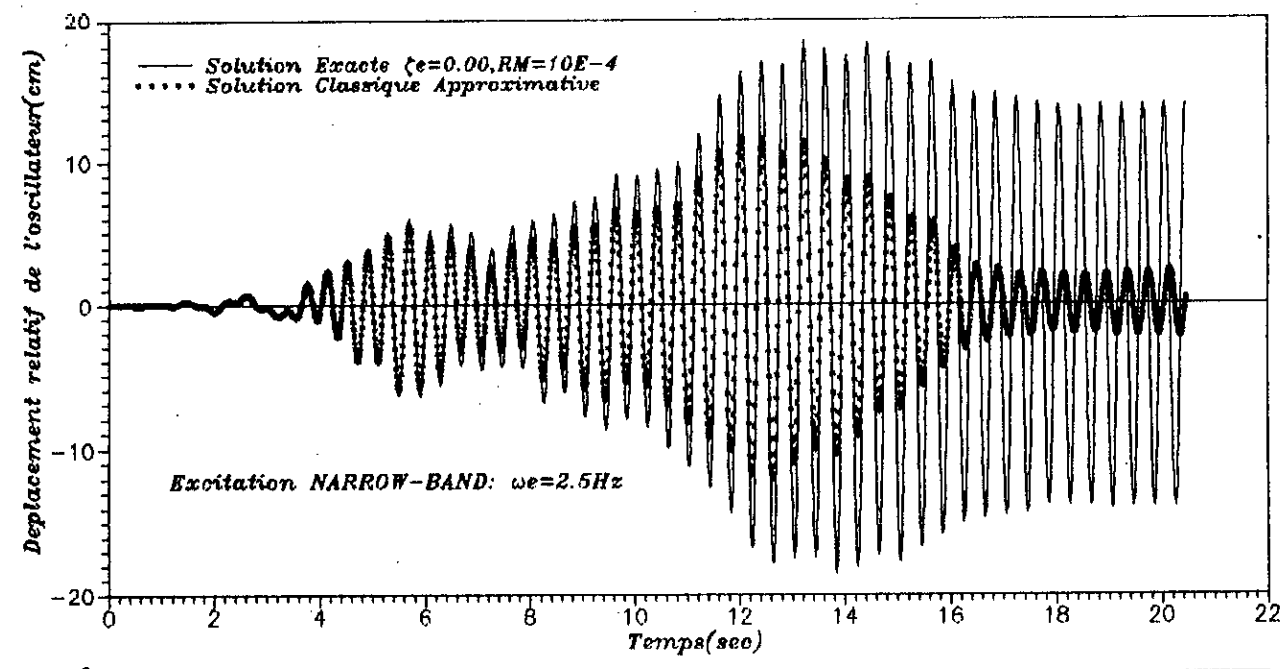


Fig VII.B.9: Variation de l'histoire temporelle de la reponse de l'oscillateur en fonction de son amortissement (1er mode de tuning)
Excitation NARROW-BAND

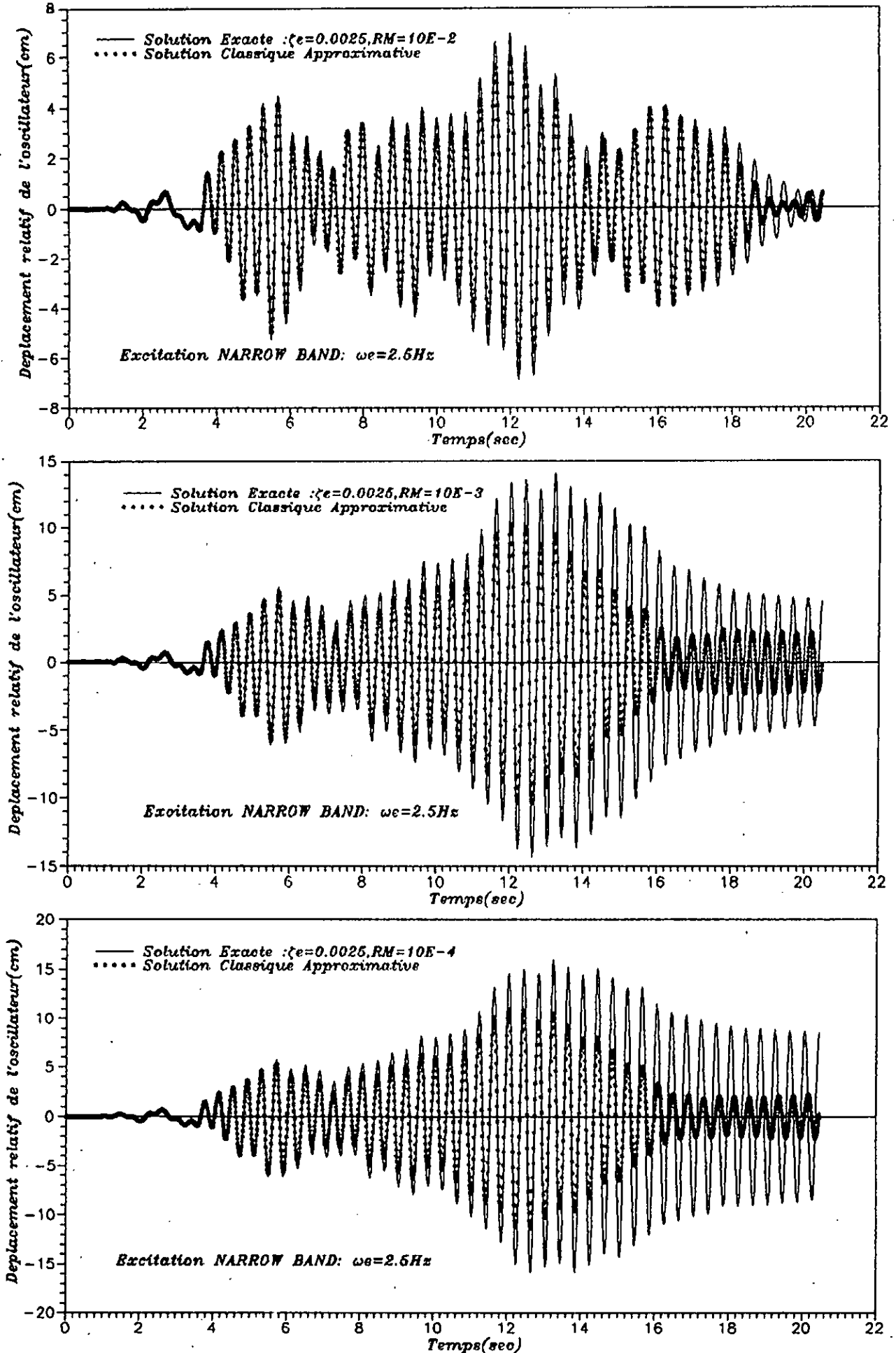


Fig VII.B.10: Variation de l'histoire temporelle de la reponse de l'oscillateur en fonction de sa masse (1er mode de tuning)
 Excitation NARROW-BAND

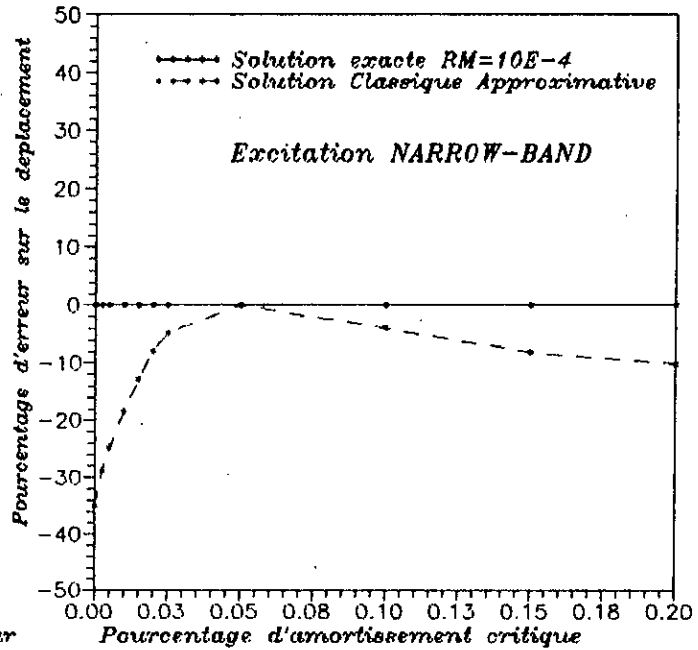
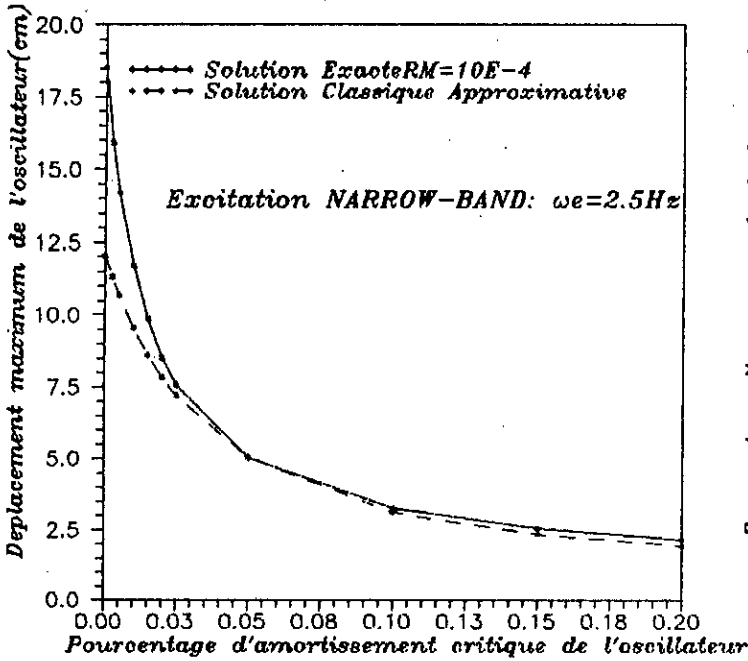
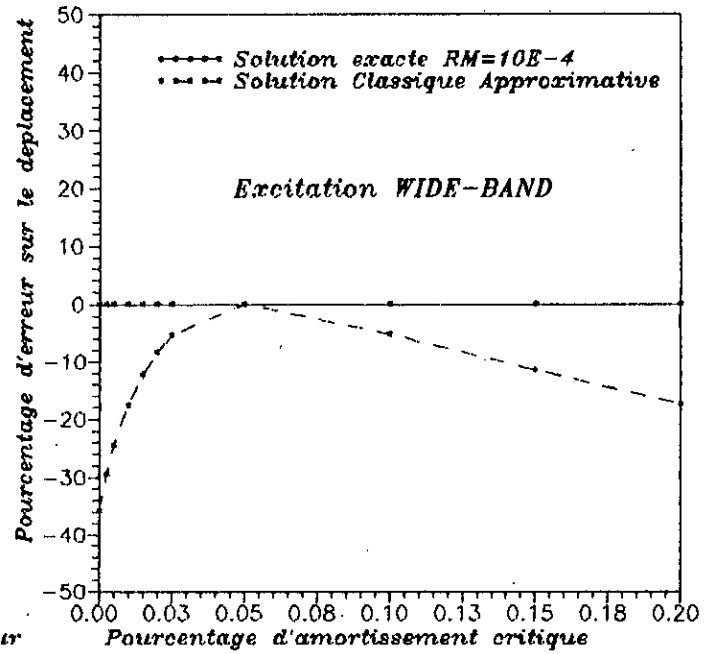
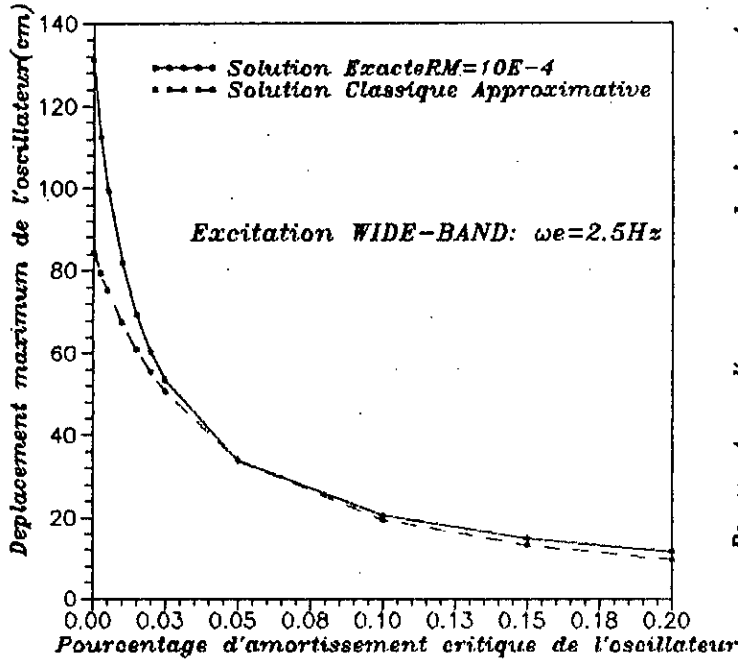


Fig VII.B.11: Comparaison de la reponse maximale de l'oscillateur pour deux types d'excitation WIDE BAND et NARROW BAND (1er mode de tuning)

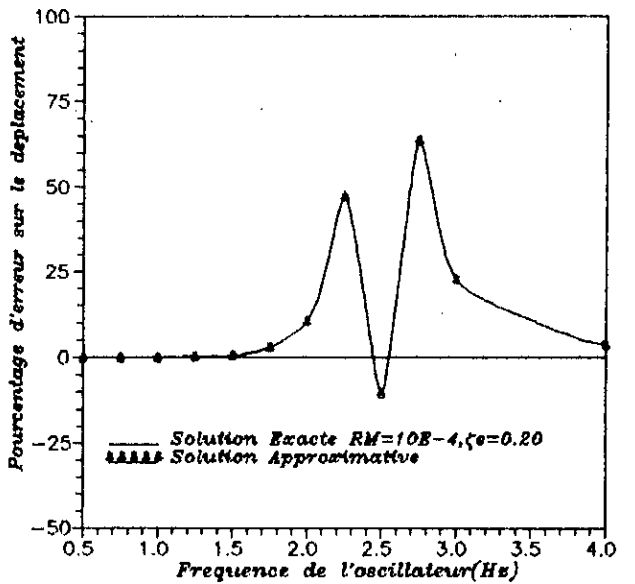
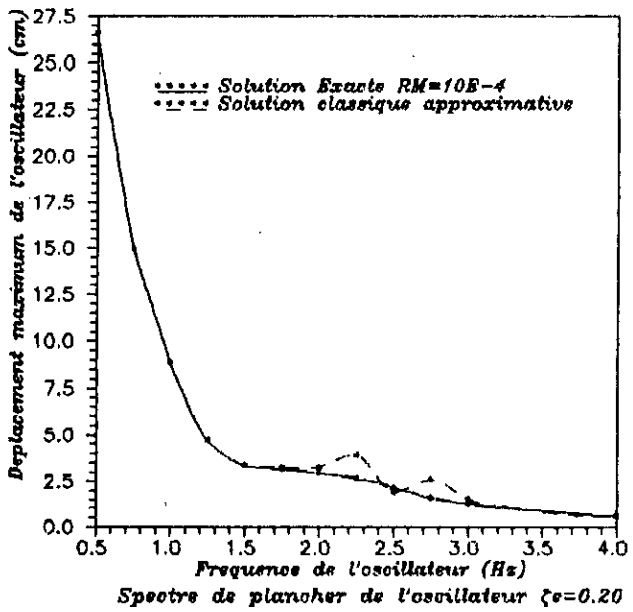
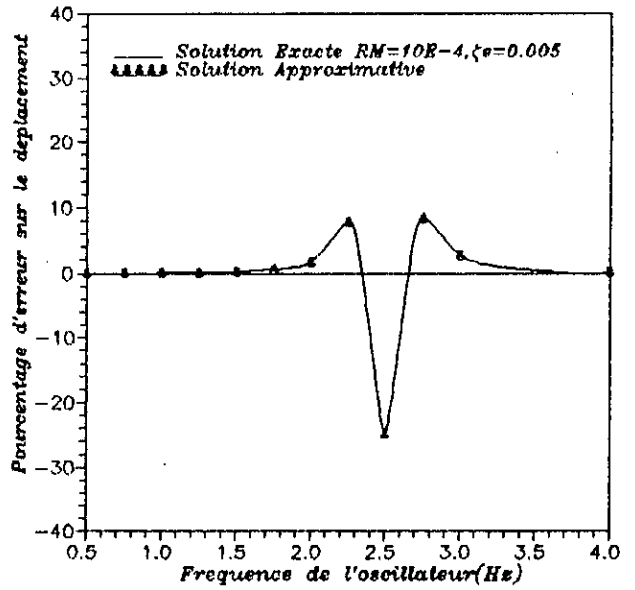
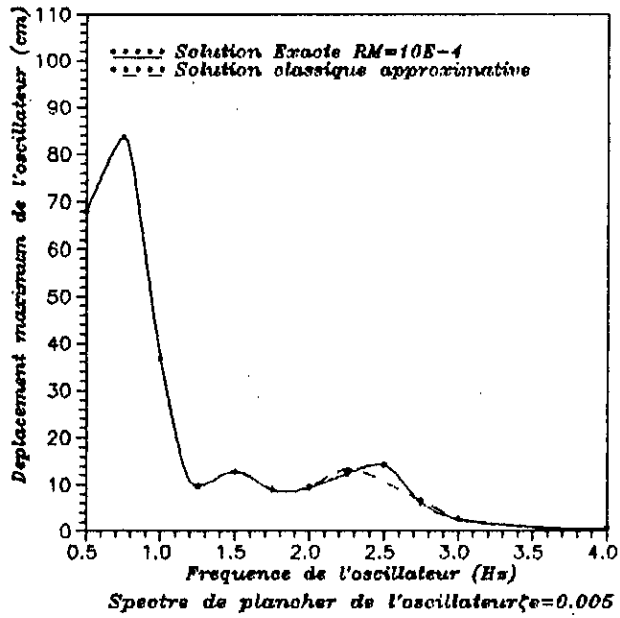
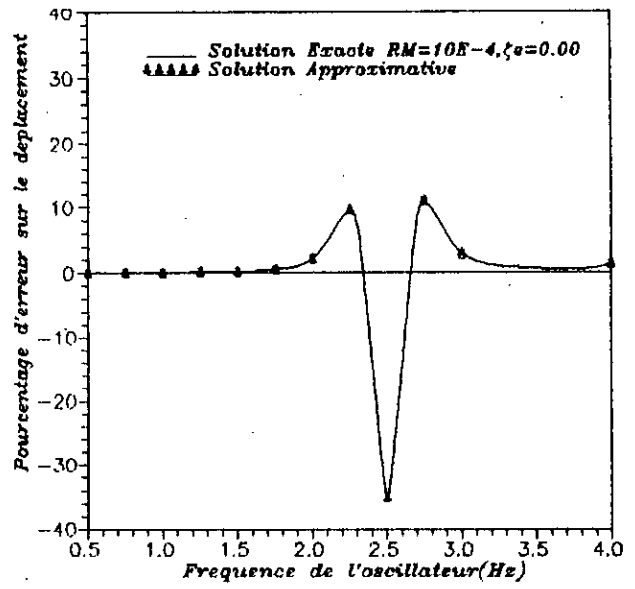
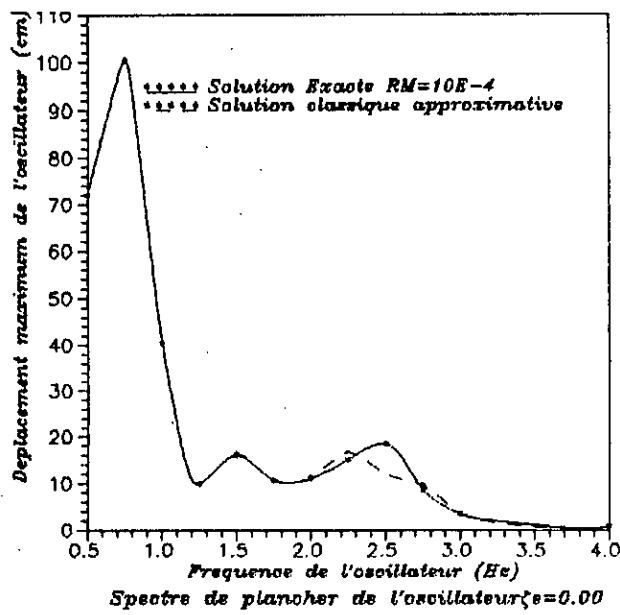
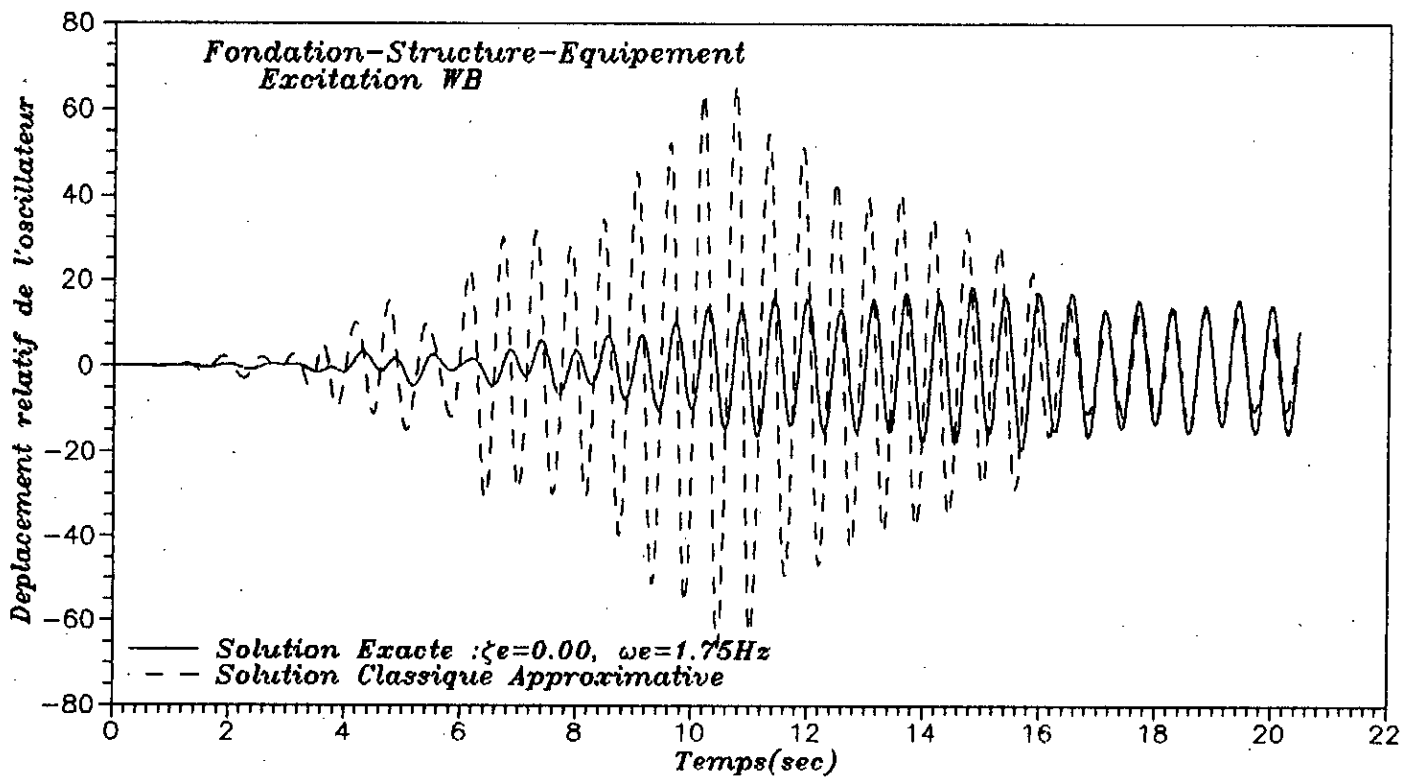
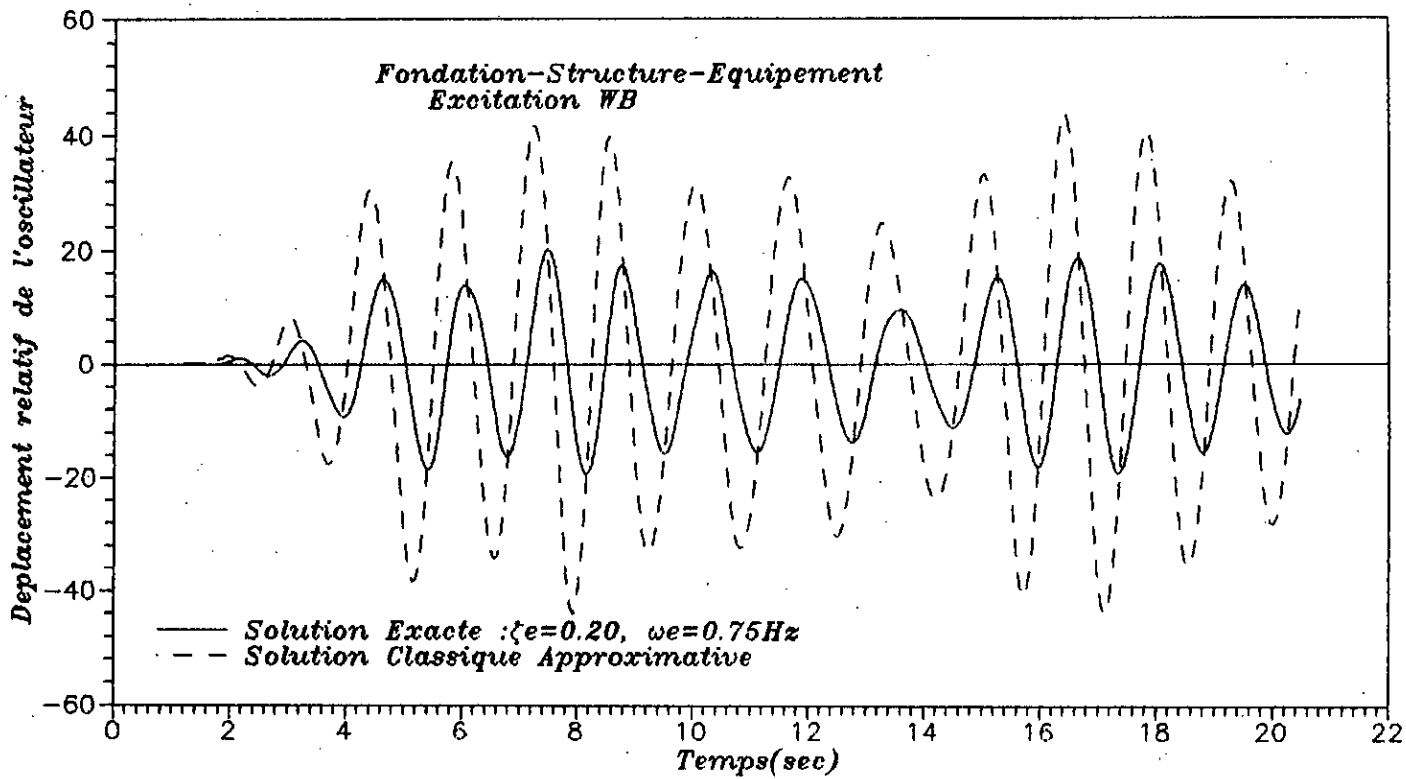


Fig VII.B.12: Effet de la variation de l'amortissement de l'oscillateur sur son spectre de plancher (1er mode de tuning)
Excitation NARROW BAND



**Fig VII.B.13: Evolution de l'histoire temporelle de la reponse
del'oscillateur pour deux modes de tuning
Fondation-Structure-Equipement: Excitation Wide-band**

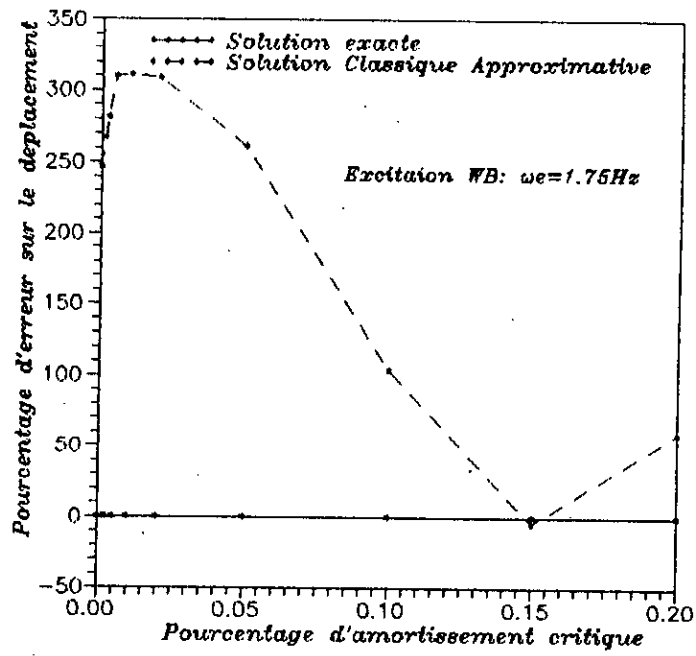
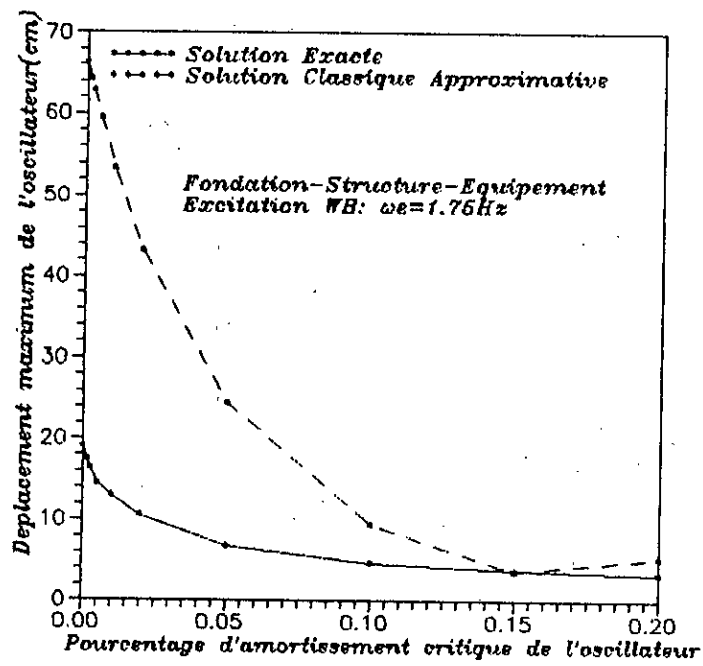
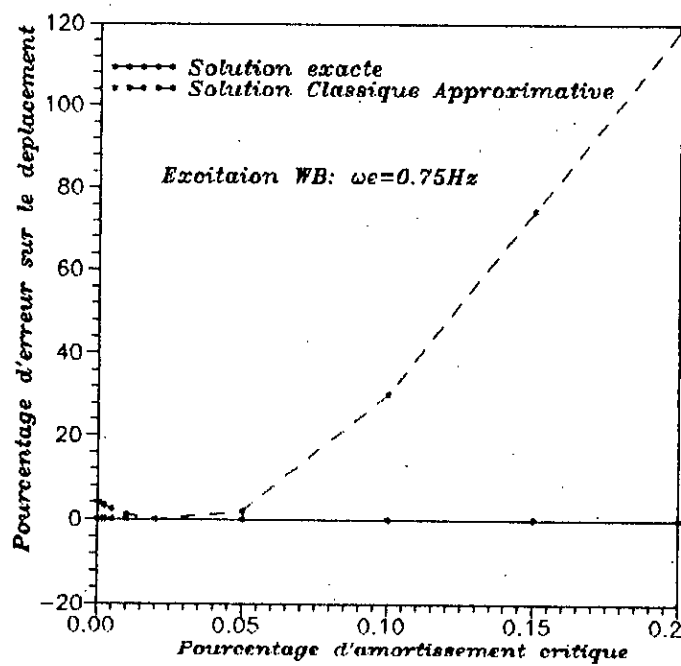
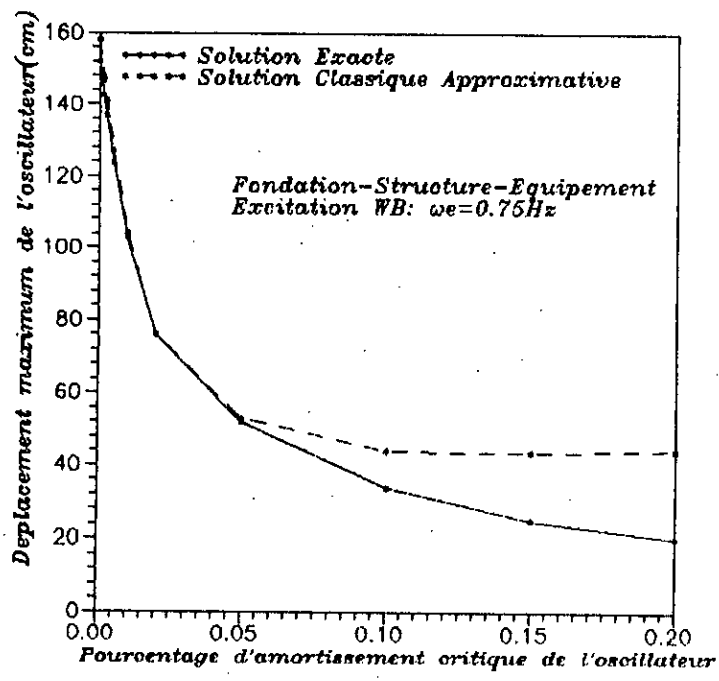


Fig VII.B.14: Evolution de la reponse maximale de l'oscillateur fonction de son amortissement pour deux modes de tuning
Fondation-Structure-Equipement: Excitation WIDE-BAND

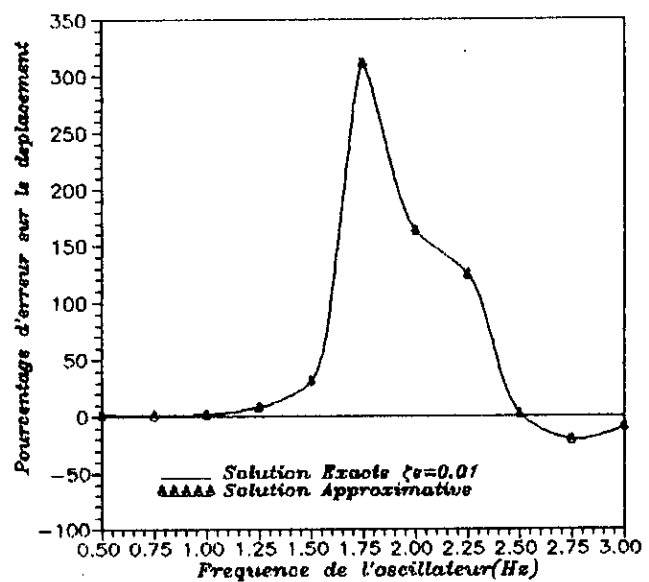
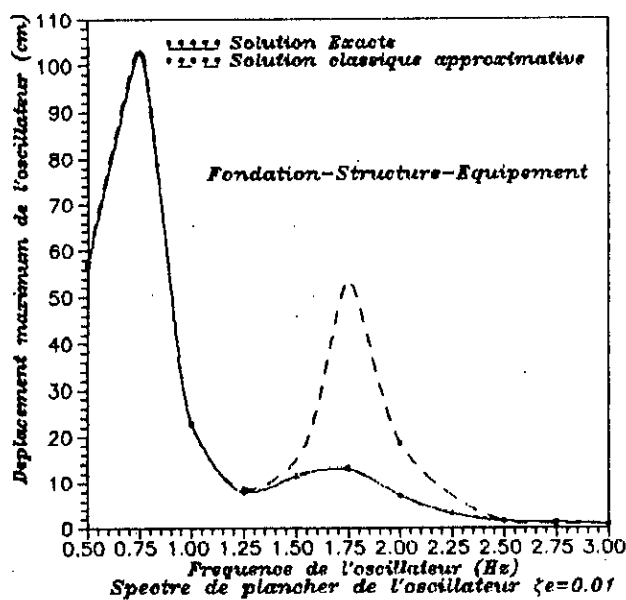
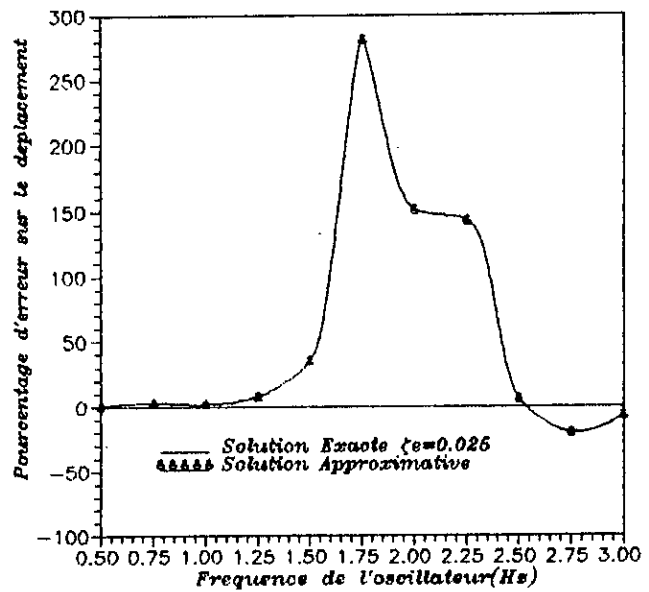
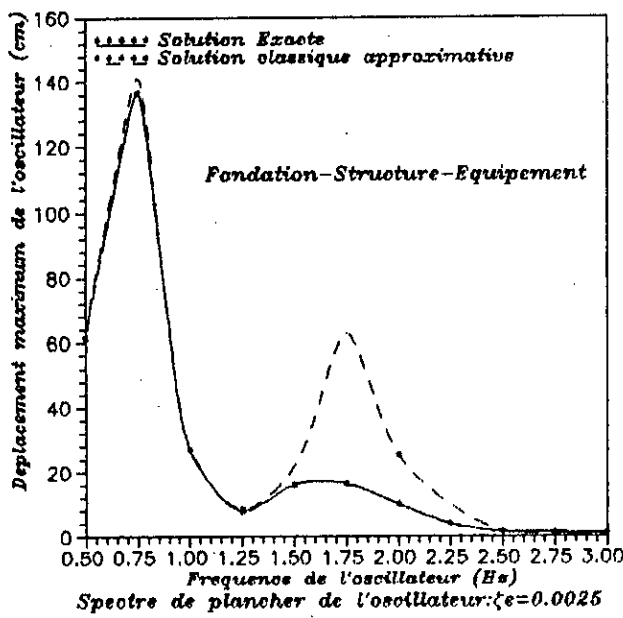
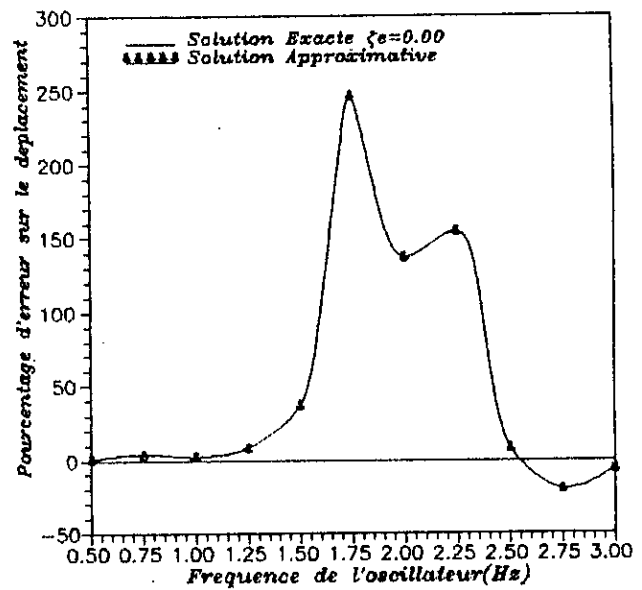
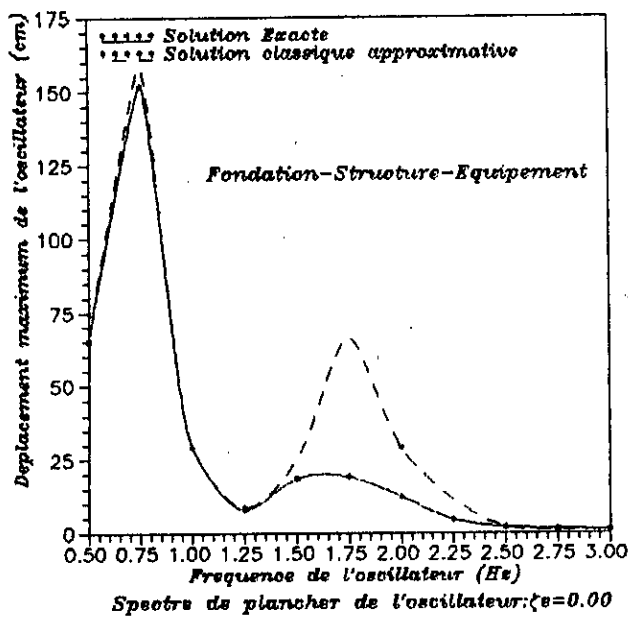


Fig VII.B.15.a: Effet de la Variation de l'amortissement de l'oscillateur sur son spectre de plancher
Fondation-Structure-Equipement: Excitation WIDE-BAND

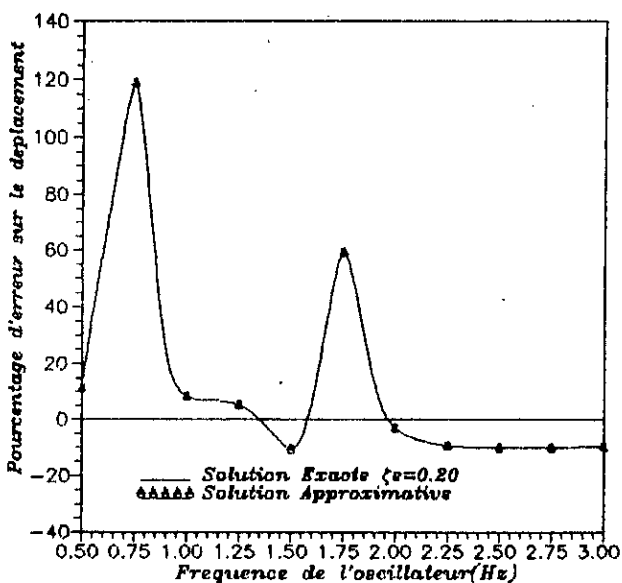
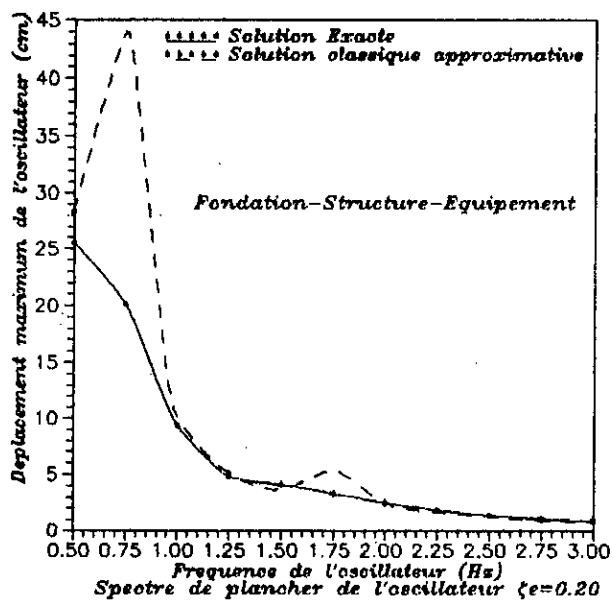
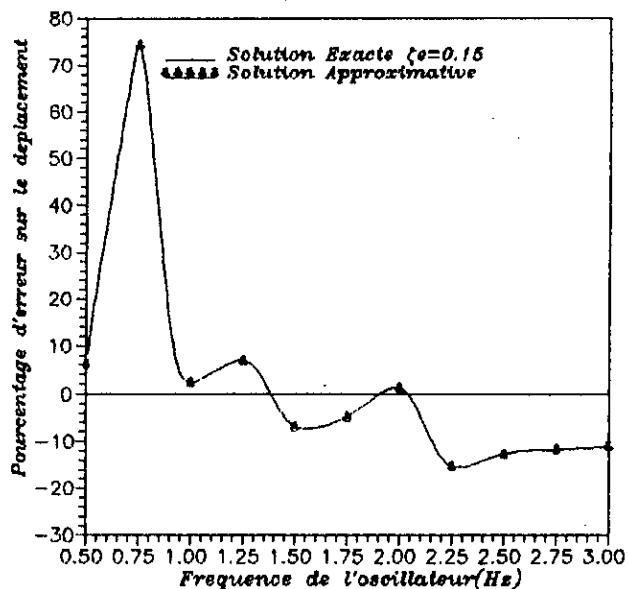
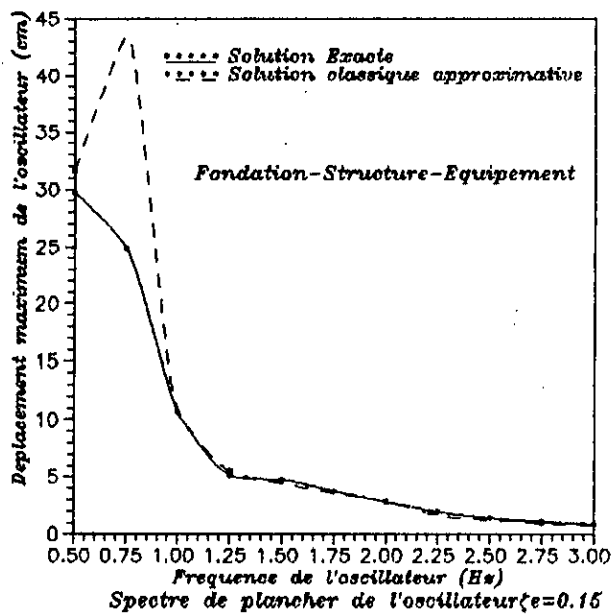
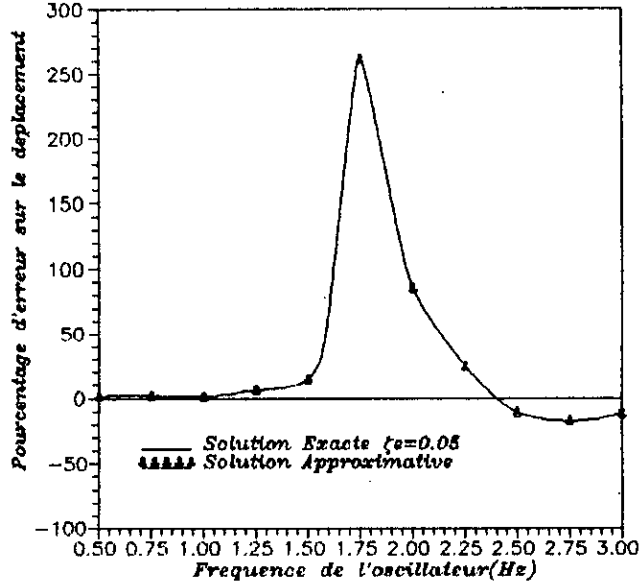
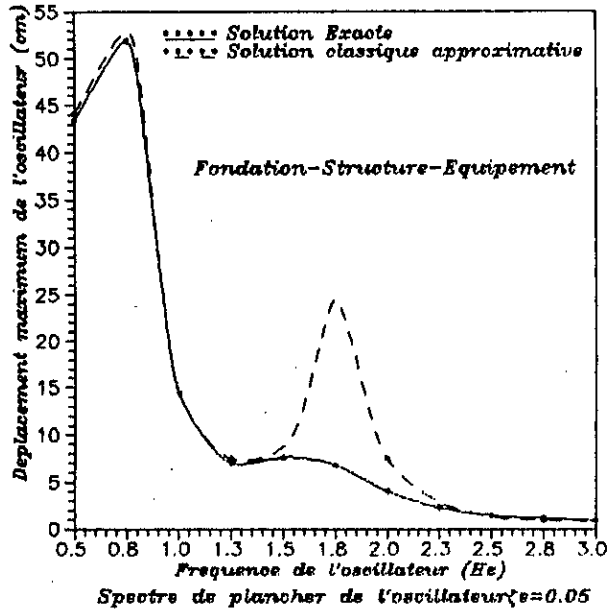


Fig VII.B.15.b: Effet de la variation de l'amortissement de l'oscillateur sur son spectre de plancher
Fondation-Structure-Equipement: Excitation WIDE BAND

Chapitre VIII

EXPERIMENTATION NUMERIQUE: EXCITATION NON DETERMINISTE

Dans l'intention de mettre en pratique certaines approches d'analyse stochastique des systèmes à amortissement non proportionnel exposées dans le chapitre VI, nous enchaînons, comme prévu, sur une analyse probabiliste de la réponse structurale.

En effet en supposant que l'excitation $\ddot{X}_g(t)$, à laquelle sont soumises les structures étudiées dans le chapitre précédent, est un processus aléatoire stationnaire caractérisé par sa fonction de densité spectrale unilatérale $G_0(\omega)$, la moyenne, l'écart type ainsi que la fréquence moyenne du pic de la réponse ont été exprimés en fonction des trois premiers moments spectraux par le biais des facteurs de pic (voir chapitre VI). Rappelons que la moyenne du pic de la réponse $R(t)$, s'exprime en fonction du moment spectral d'ordre 0 (S_0) comme suit:

$$R_t = p \sqrt{S_0} \quad (\text{VIII.1})$$

où p est le facteur de pic du processus de réponse (voir formule VI.4.2.7)

S_0 est la moyenne du carré de la réponse $R(t)$:

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [c_{ij} \operatorname{Re}(S_{0,ij}) - D_{ij} \operatorname{Im}(S_{1,ij}) + E_{ij} \operatorname{Re}(S_{1,ij})] \quad (\text{VIII.2})$$

Les termes figurant dans cette équation ont été définis dans le chapitre VI.

Le développement précédent est la base de l'approche modalo-spectrale qui peut être adoptée lorsque l'excitation est spécifiée par son spectre de réponse.

En effet, dans ce cas, S_0 s'exprime ainsi:

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(C_{ij} \rho_{0,ij} W_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij} \right) \frac{\bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau}}{P_i P_j} \quad (\text{VIII.3})$$

où les coefficients $\rho_{0,ij}$, $\eta_{0,ij}$, et $W_{0,ij}$ sont définis par les formules (VI.4.3.1)-(VI.4.3.6).

$\bar{S}_{i\tau}$ et P_i sont respectivement les ordonnées du spectre de réponse du sol et les facteurs de pic associés au ième mode.

Si l'input est un processus WIDE-BAND et si les modes significatifs de vibration de la structure étudiée sont contenus dans la frange fréquentielle dominante de cette excitation, alors les coefficients $\rho_{0,ij}$, $\eta_{0,ij}$, et $W_{0,ij}$ sont approchés par les expressions (VI.4.3.7)-(VI.4.3.10)

La moyenne du pic de la réponse s'exprime alors par:

$$\bar{R}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{P^2}{P_i P_j} [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.4})$$

L'expression du pic de la réponse par la méthode de combinaison modale CQC généralisée est :

$$\bar{R}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_{ij} \rho_{0,ij} - D_{ij} \eta_{1,ij} W_{1,ij} + E_{ij} \rho_{2,ij} W_{2,ij}] \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.5})$$

Il est clair que, l'hypothèse de proportionnalité de l'amortissement structural, conduit à une simplification des formulations précédentes .
En effet la formulation de S_0 devient:

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_i \psi_j \operatorname{Re}(S_{0,ij}) \quad (\text{VIII.6})$$

L'identification de l'excitation par son spectre de réponse moyen, permet de reformuler S_0 comme suit:

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\psi_i \psi_j \rho_{0,ij} w_{0,ij}] \frac{\bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j,\tau}}{P_i P_j} \quad (\text{VIII.7})$$

La moyenne du pic de la réponse se simplifie ainsi:

$$\bar{R}_\tau = p\sigma_R = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{p^2}{P_i P_j} \rho_{0,ij} \psi_i \psi_j \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.8})$$

Ces expressions sont les versions approchées de la méthode modalo-spectrale:

La méthode de combinaison modale CQC a pour expression:

$$\bar{R}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{0,ij} \psi_i \psi_j \bar{S}_{i\tau} \bar{S}_{j\tau} \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.9})$$

tandis que la méthode de combinaison modale SRSS est:

$$\bar{R}_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^N (\psi_i \bar{S}_{i\tau})^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.10})$$

VIII.1: DESCRIPTION DE L'ETUDE PARAMETRIQUE

Le but de l'analyse paramétrique suivante est de comparer les spectres de plancher, générés selon les différentes méthodes exposées ci-dessus.

-La première étape consiste donc, à déterminer les coefficients E_{1j}, D_{1j}, C_{1j} , suite à la résolution du problème aux valeurs propres (VII.4.3).

-L'étape suivante concerne l'évaluation de l'ordonnée du spectre de plancher pour une sélection donnée de la paire (ω_o, ξ_o) , qui consiste en la moyenne du pic de la réponse de l'oscillateur (déplacement relatif par rapport à son point d'attache).

Contrairement aux méthodes de superposition modale adoptées lors de l'analyse déterministe, les méthodes modalo-spectrales qui seront exploitées ci-après, offrent l'avantage de n'exiger que le spectre de réponse de l'excitation.

Pour cela 20 accélérogrammes artificiels ont été générés, ainsi que les spectres de déplacement correspondants.

Enfin, "un spectre de calcul" devant être représentatif d'un ensemble de mouvements du sol supposés se produire dans un site donné, un "spectre moyen de déplacement du sol" a été évalué grâce à l'ensemble de ces spectres.

Un échantillon de ces spectres de déplacement a été reporté en figure (VIII.1).

VIII.2: INTERPRETATION DES RÉSULTATS

A/ 1er type de structure :

Nous envisageons en premier lieu de nous intéresser à la structure 1. En effet, nous pouvons remarquer sur la figure (VIII.2), que la méthode modalo-spectrale non classique (MS non classique) approche la solution exacte avec un % d'erreurs variant de -16% à 26%. En contre partie, la MS classique sous estime la réponse invariablement. Effectivement, une sous évaluation considérable de plus de 46% est observée (pour $\xi_o=0.00$ et $RM=10^{-4}$).

Par ailleurs, la comparaison de la CQC généralisée avec la version classique de cette dernière assure de meilleurs résultats. En effet, la CQC non classique surestime la réponse avec un taux presque invariable de l'ordre de 10%.

a/ Spectres de plancher

S'agissant des spectres de plancher représentés en figure (VIII.3), une sous-évaluation significative de la réponse par la MS classique est notée, toujours au niveau fréquence de tuning, (atteignant 46% de la solution exacte). Les mêmes remarques peuvent être réitérées s'agissant de la CQC (voir figure VIII.4).

La figure suivante (VIII.5) offre une preuve de l'incapacité de la méthode de combinaison modale SRSS, à estimer la réponse exacte même lorsque le système globale est à amortissement classique. En effet, remarquer les surestimations excessives de la réponse, au niveau de la fréquence de tuning, dépassant 1000%. Une preuve que le tuning donne naissance à des fréquences modales très proches et fortement corrélées, et que de plus ces corrélations sont de valeurs négatives. Il s'en suit que l'omission de ces corrélations inter-modales par la SRSS provoque une surestimation irréaliste de la réponse.

b/ Effet d'Interaction

La figure (VIII.6), réaffirme que le caractère non classique est favorisé par l'atténuation de l'effet d'interaction. En effet, cette dernière illustre clairement une amplification du taux d'erreur de 77% lorsque RM passe de 10^{-2} à 10^{-4} . Une preuve de plus est fournie par la figure suivante (VIII.7) relative aux méthodes CQC, qui laisse ressortir une amplification du taux de sous estimation de 160%, lorsque le rapport de masse se réduit.

c/ Contribution de Termes dans l'Evaluation de $E[R(t)^2]$

Par analogie à ce qui a été réalisé lors de l'étude déterministe, il serait intéressant de se pencher de plus près sur l'estimation de certains termes qui contribuent à l'évaluation de la moyenne du carré de la réponse, du moment que cette entité est indispensable pour la détermination de la moyenne du pic de la réponse (voir équation VIII.1).

En effet, l'expression mathématique de $E[R(t)^2]$ (voir équation VIII.2), révèle l'existence de trois séries de termes. En revanche, la formule classique (VIII.6), ne présente qu'une seule série de termes.

Notre but est donc justement, d'estimer la contribution de chacun de ces termes dans l'évaluation de S_0 , afin de mieux apprécier la différence entre les deux approches classique et non classique. Ces termes sont:

$$C_{ij} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}(S_{0,ij}) , D_{ij} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \operatorname{Im}(S_{1,ij}) , E_{ij} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}(S_{2,ij})$$

En effet, la figure (VIII.8) confirme l'incapacité de l'approximation classique à approcher la moyenne du pic de la réponse lorsque le caractère non classique de l'amortissement est significatif, ce qui dans notre cas se traduit par un équipement dont le % d'amortissement critique ξ_0 est loin de $\xi_{cr}=5\%$. En revanche, un argument de plus est fourni quant à la justesse d'une telle approximation au voisinage de ξ_{cr} vu la prédominance des termes en C_{ij} .

d/ Effet de la Distribution de l'Amortissement dans la Structure Primaire

Afin de mieux distinguer l'effet de la distribution de l'amortissement sur la réponse structurale, nous rassemblons dans les mêmes figures,

les résultats obtenus par les trois structures décrites dans le paragraphe VII.3, qui ne diffèrent que par le mode de distribution de l'amortissement dans la structure primaire (Structures 1, 2 et 3).

Comme prévu, les figures (VIII.9) confirment l'impact significatif du mode de distribution de l'amortissement sur le caractère non classique de l'amortissement. Ces illustrations permettent entre autres d'affirmer que le second mode de distribution est le plus critique. Les figures suivantes (VIII.10), illustrant l'incidence de la distribution de l'amortissement sur les spectres de plancher, confirment l'acuité du caractère non classique de l'amortissement de la structure 2.

Tandis qu'une preuve de plus est fournie sur l'inefficacité de la méthode SRSS à approcher la solution exacte, particulièrement en cas de tuning (voir figures (VIII.9.b) et (VIII.10.b)).

B/ Fondation-Structure-Equipement :

Nous enchaînons cette analyse non déterministe par l'étude du système composé Fondation-Structure-Equipement.

Les illustrations présentées en figures (VIII.11) et (VIII.12) montrent l'évolution de la moyenne du pic du déplacement relatif de l'oscillateur, selon les deux approches classique et non classique.

Notons que la méthode SRSS a été délibérément omise du fait que nous estimons que l'incapacité d'une telle méthode de combinaison modale à analyser ce genre de structures a été amplement prouvée.

D'une manière générale, nous pouvons certifier que, l'approche classique est déconseillée en dehors de son domaine de validité qui dans notre cas est intimement lié au % d'amortissement critique limite ξ'_{cr} relatif au mode de tuning considéré. En l'occurrence $\xi_0 = 3\%$ pour le premier mode de tuning et $\xi_0 = 15\%$ pour le second mode. Ce qui justifie les erreurs considérables

fournies par les méthodes classiques lorsque $\xi_0 \gg \xi'_{cr}$ s'agissant du 1er mode et lorsque $\xi_0 \ll \xi'_{cr}$ pour le 2ème mode de tuning.

Enfin, nous achevons cette analyse paramétrique, en renforçant les conclusions précédentes par une estimation des termes permettant l'évaluation de la moyenne du carré de la réponse. En effet, les conclusions faites jusque là peuvent être clairement interprétées par les courbes illustrées en figure (VIII.13), qui sont révélatrices de la prédominance des termes en E_{1j} lorsque le caractère non classique de la structure est significatif, dans le cas contraire les termes en C_{1j} à eux seuls assurent l'évolution correcte de la moyenne du pic de la réponse étant donné que les termes restants sont insignifiants (E_{1j}, D_{1j}).

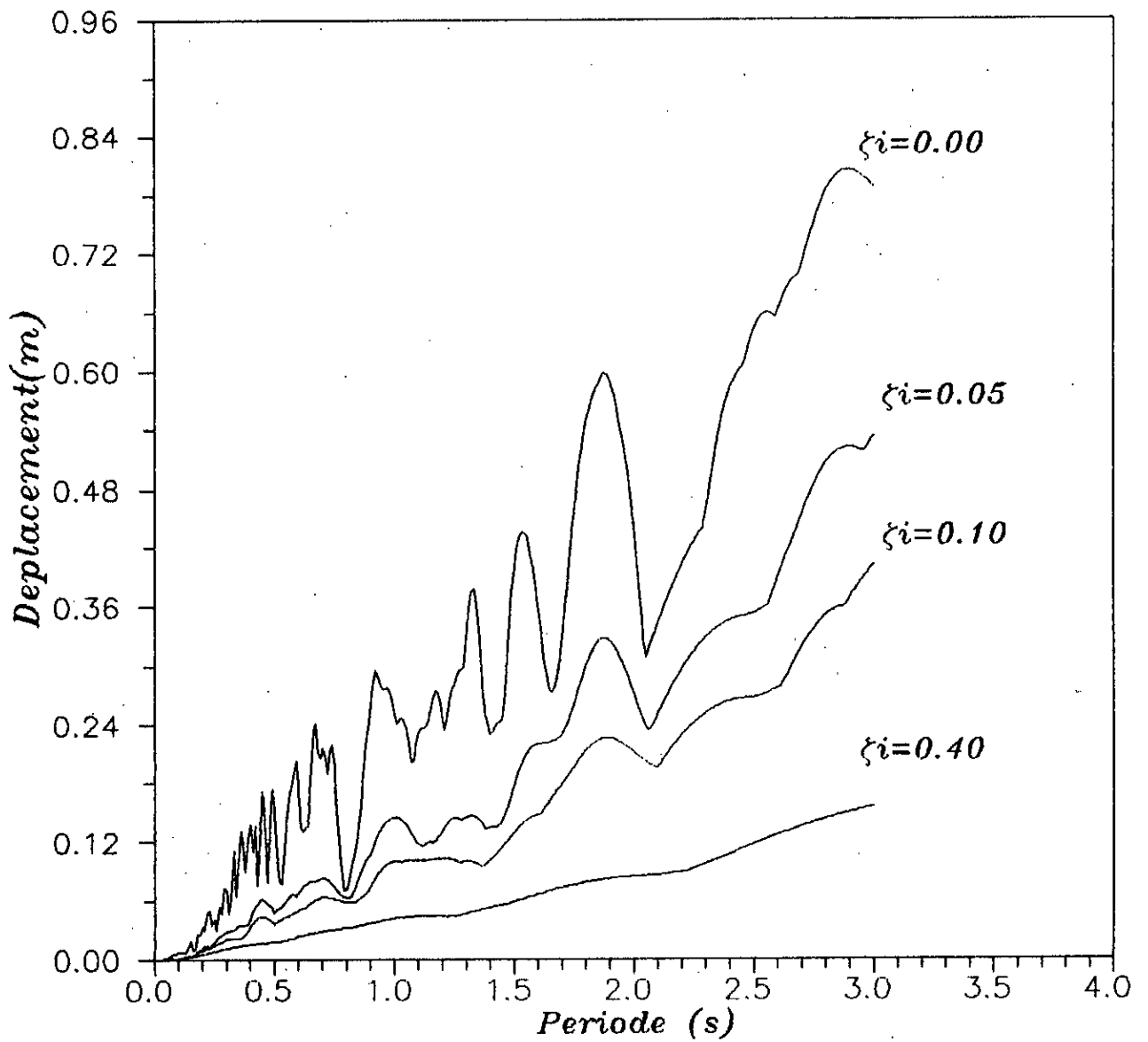


Fig. VIII.1: Spectre de déplacement de l'excitation sismique wide band simulée

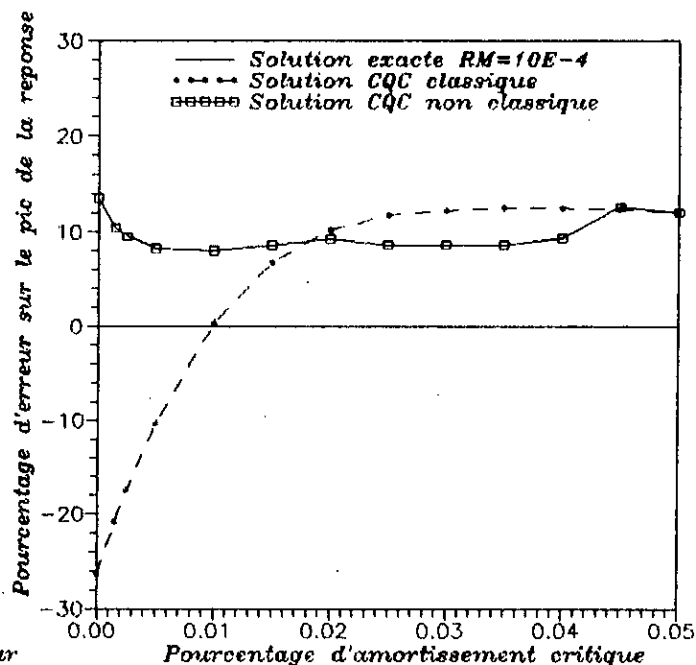
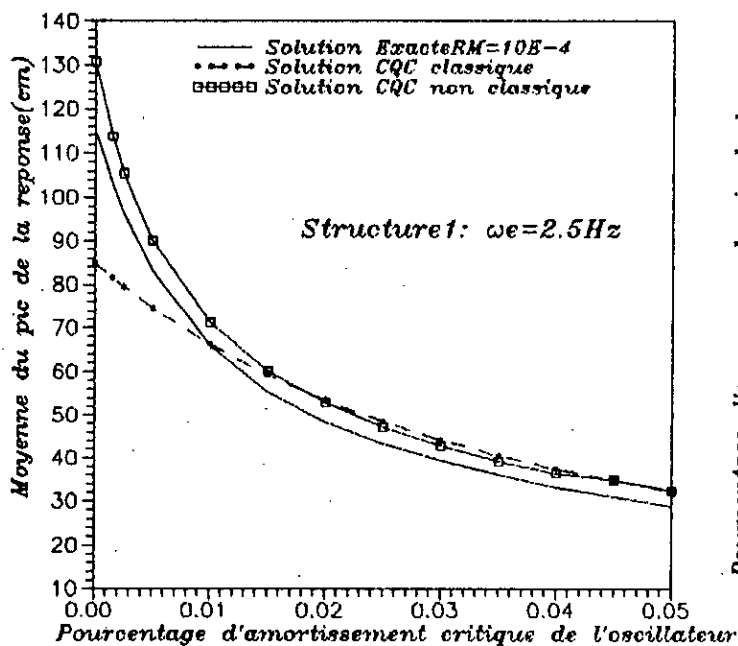
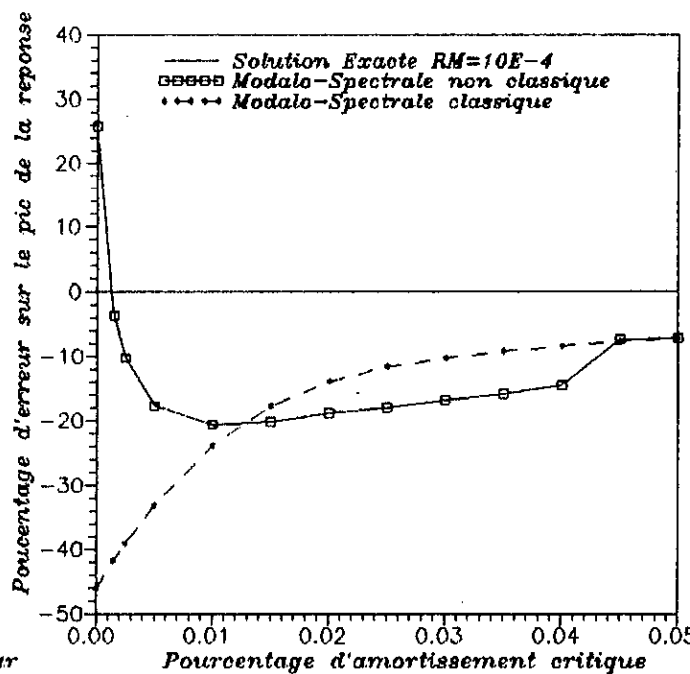
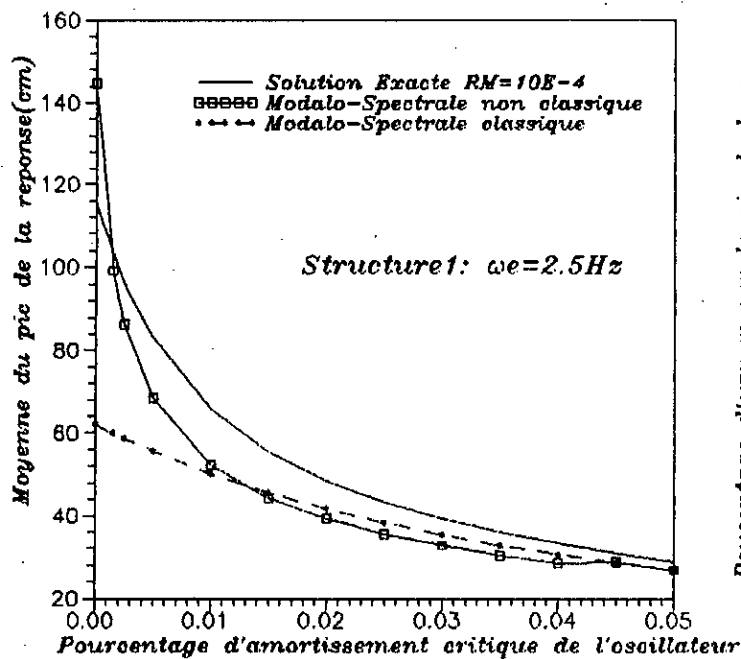


Fig. VIII.2: Evolution du pic de la reponse de l'oscillateur en fonction de son amortissement selon les deux approches classique et non classique (1er mode de tuning)
Structure 1

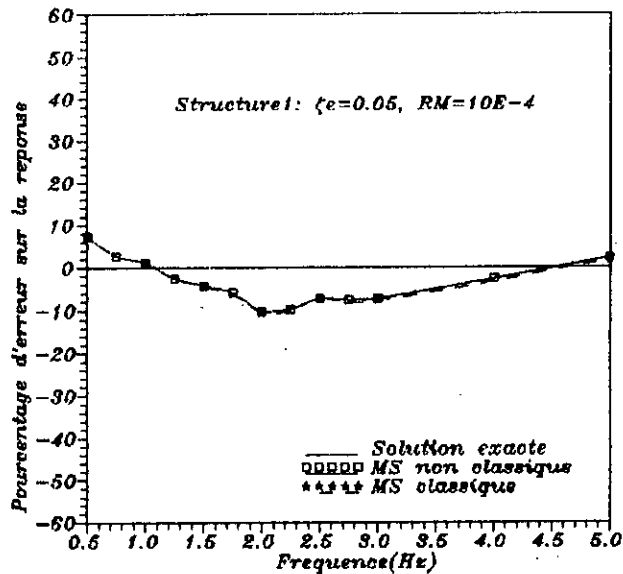
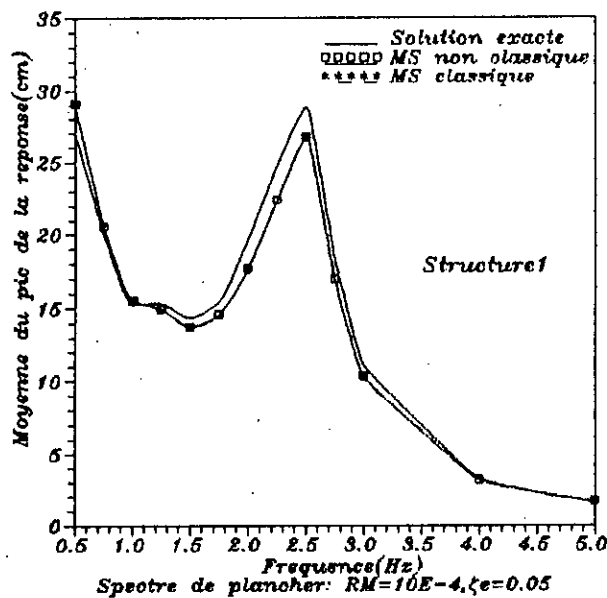
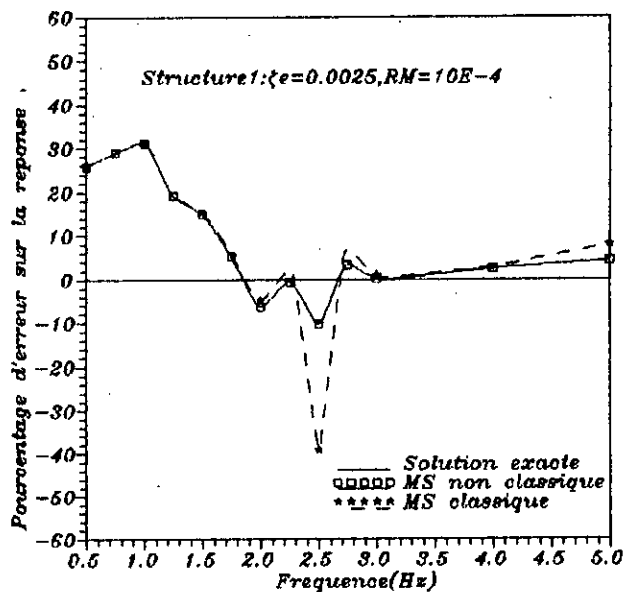
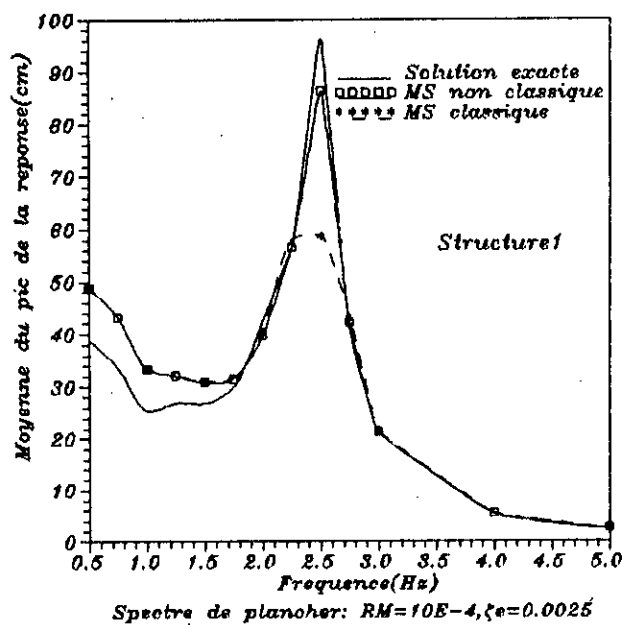
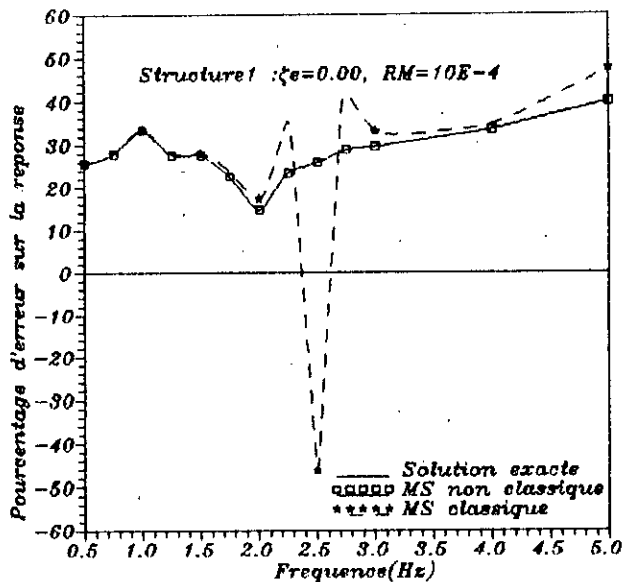
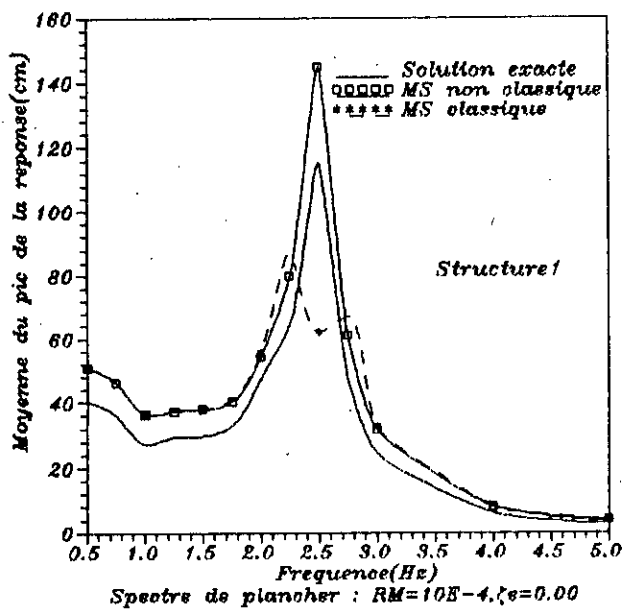


Fig. VIII.3: Comparaison des spectres de plancher évalués selon les méthodes modalo-spectrales: Structure 1

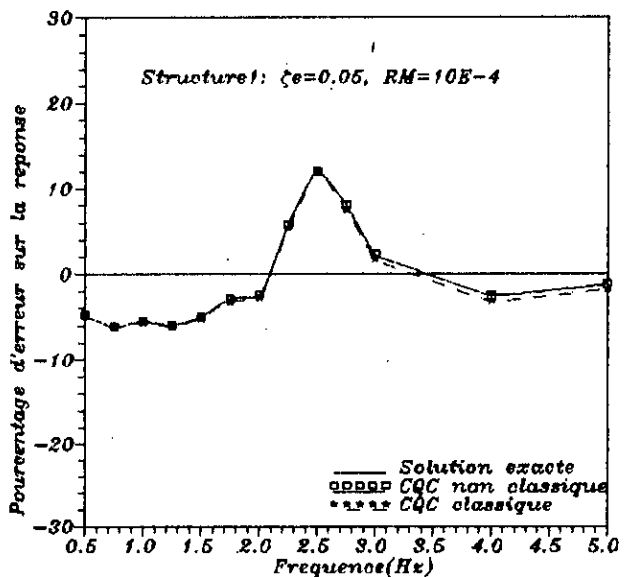
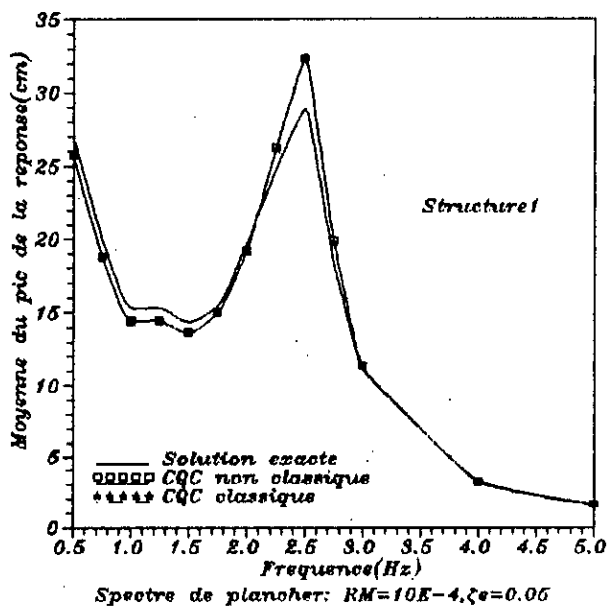
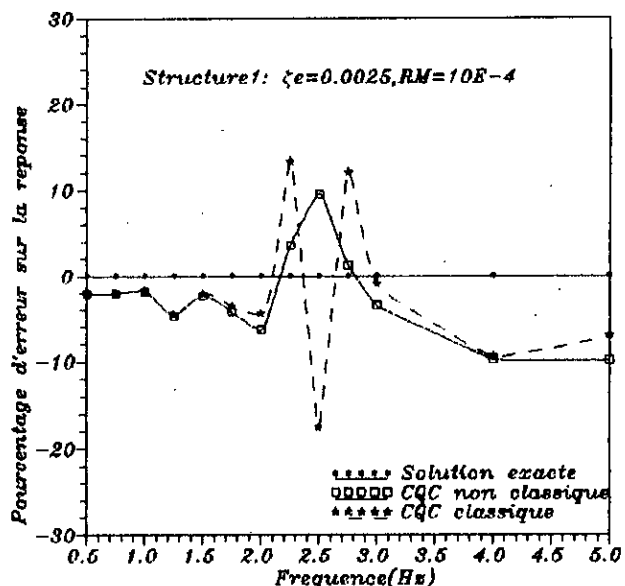
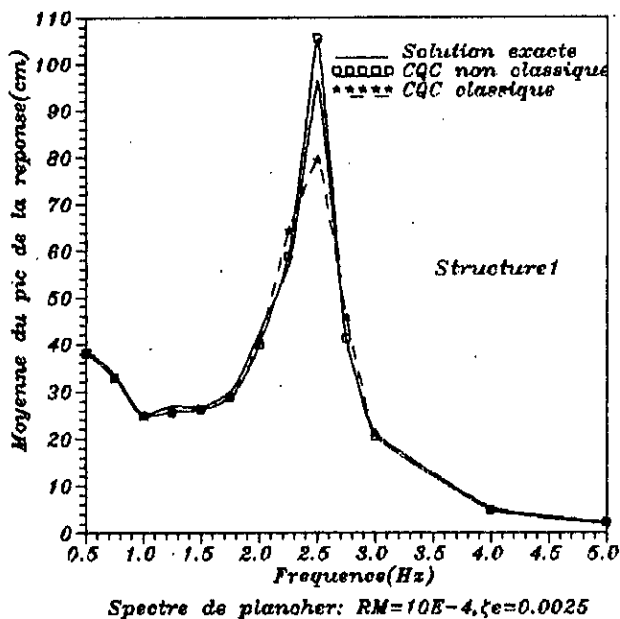
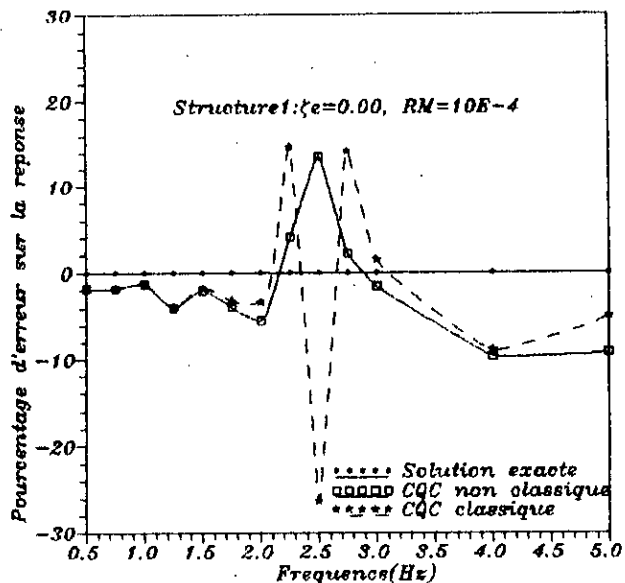
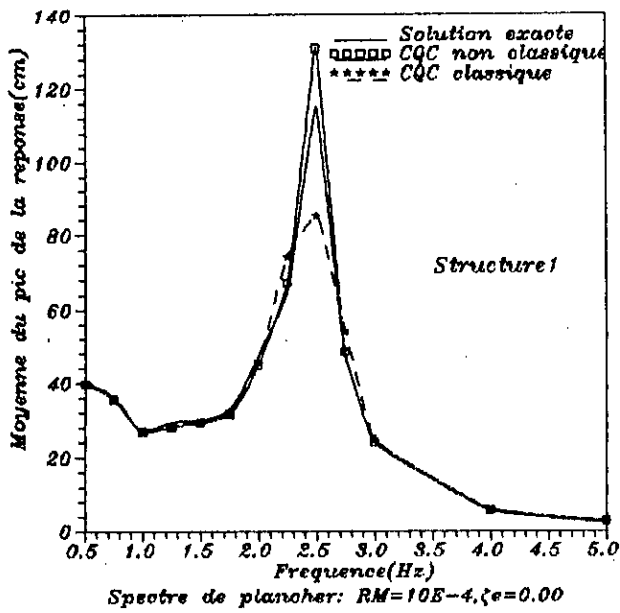


Fig. VIII.4: Comparaison des spectres de plancher évalués selon les méthodes de combinaison modale CQC: Structure 1

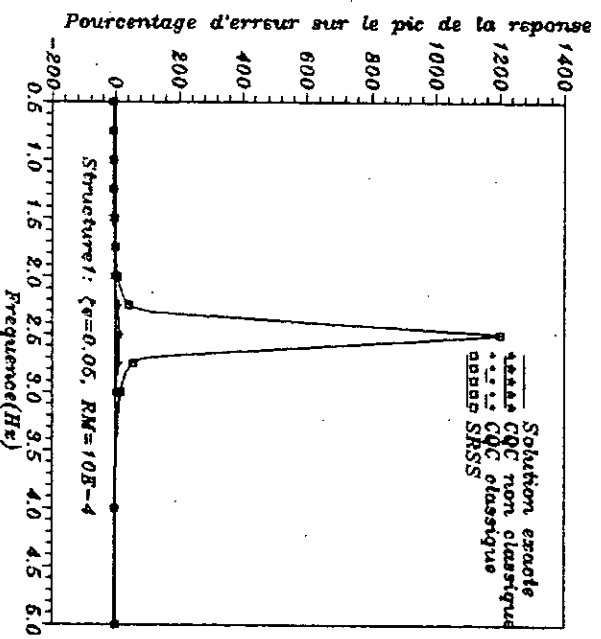
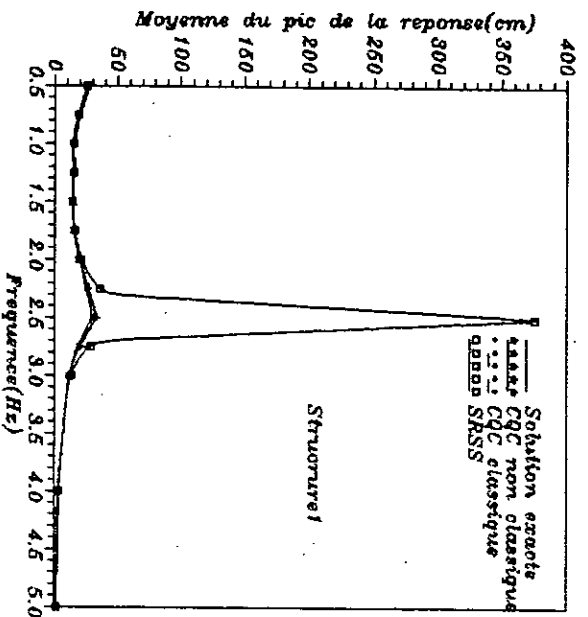
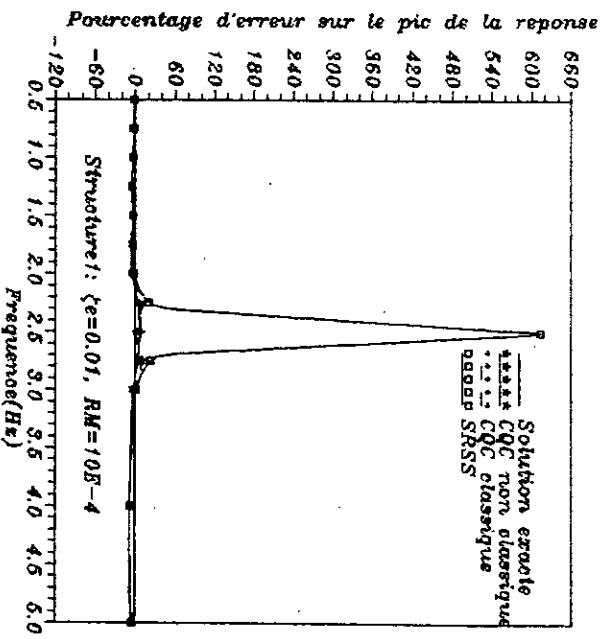
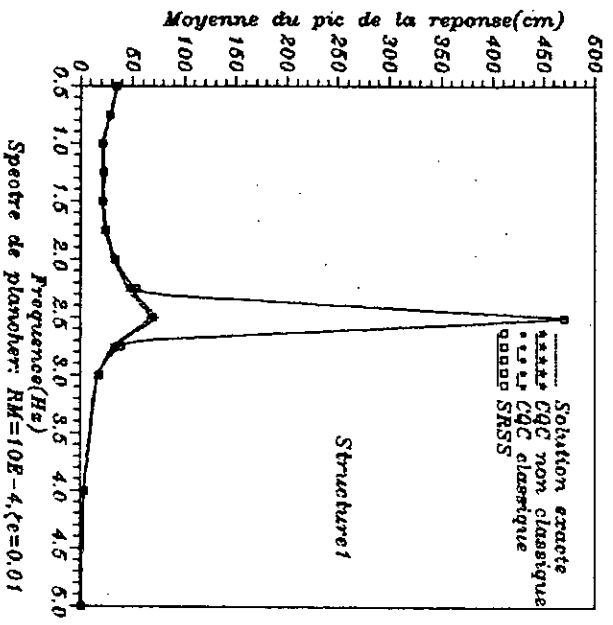
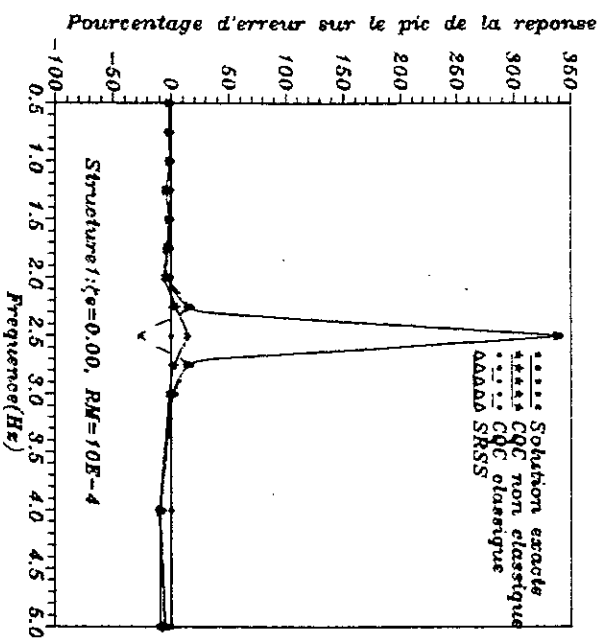
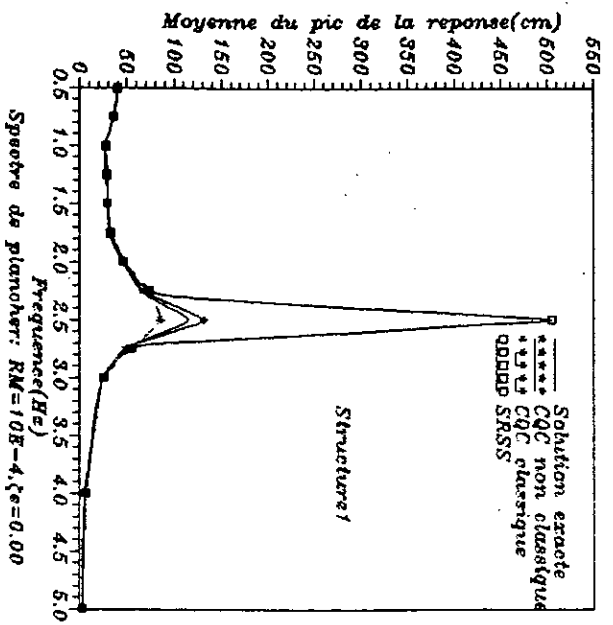
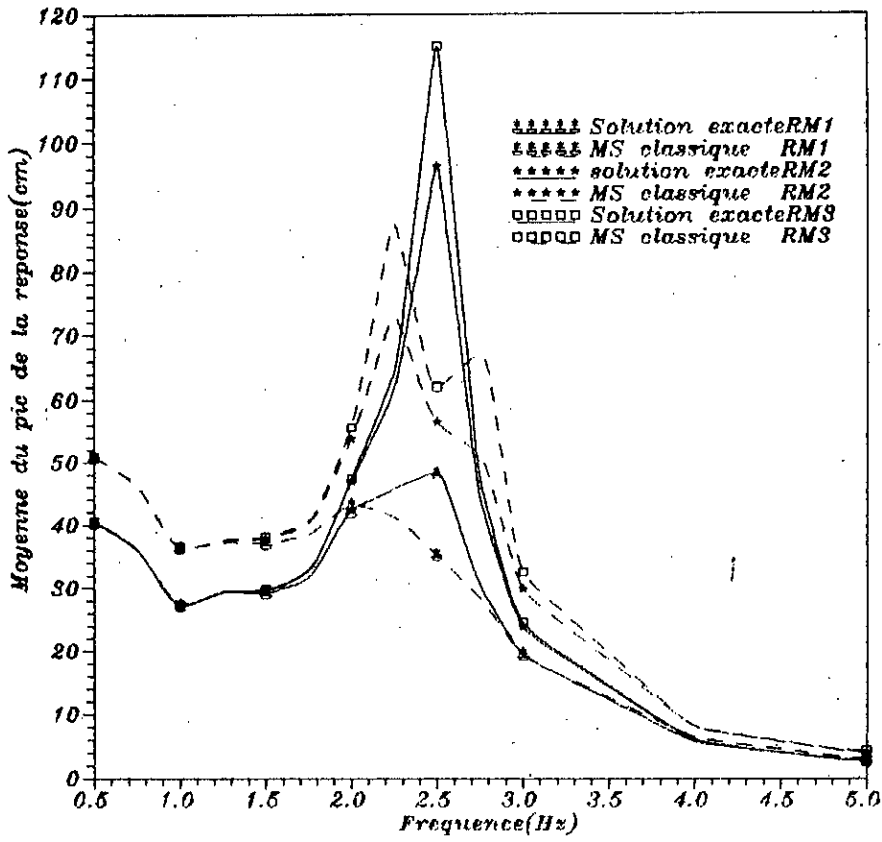


Fig. VIII.5: Evaluation des spectres de plancher selon la methode de combinaison modale SRSS et comparaison avec les autres methodes Structure 1



Spectre de plancher de la structure 1: $\zeta e=0.00$

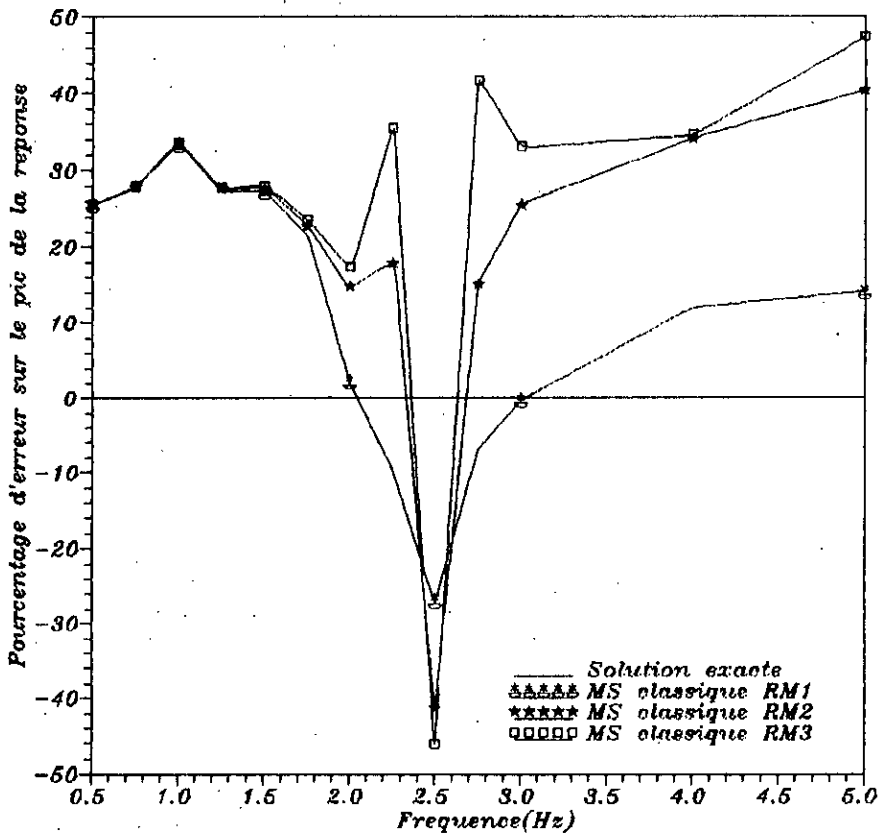
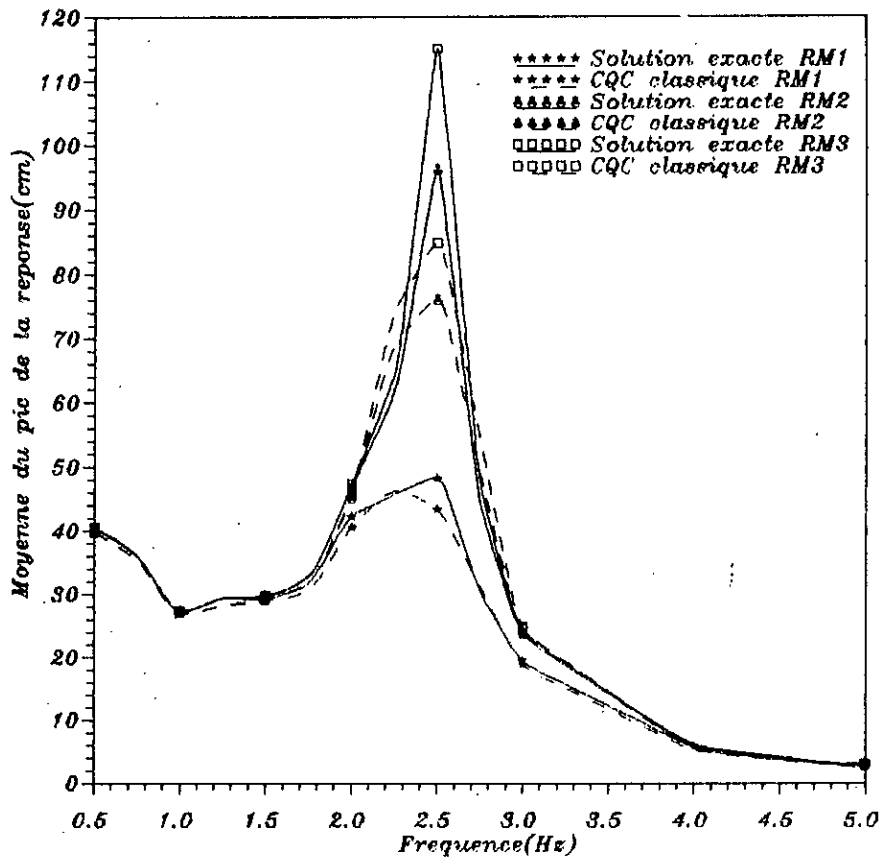


Fig. VIII.6: Effet de l'interaction sur les spectres de plancher évalués selon les méthodes modalo-spectrales
Structure 1: $\zeta e=0.00$



Spectre de plancher: structure 1, $\zeta_e=0.00$

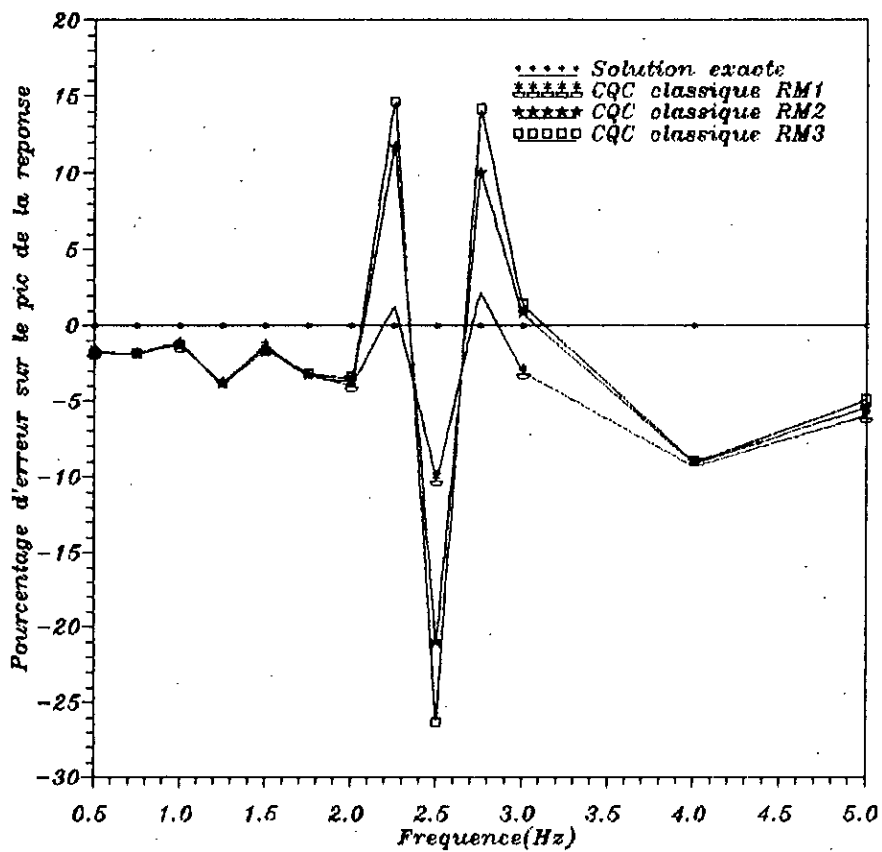


Fig. VIII.7: Effet de l'interaction sur les spectres de plancher
evalues selon les methodes de combinaison modale CQC
Structure 1: $\zeta_e=0.00$

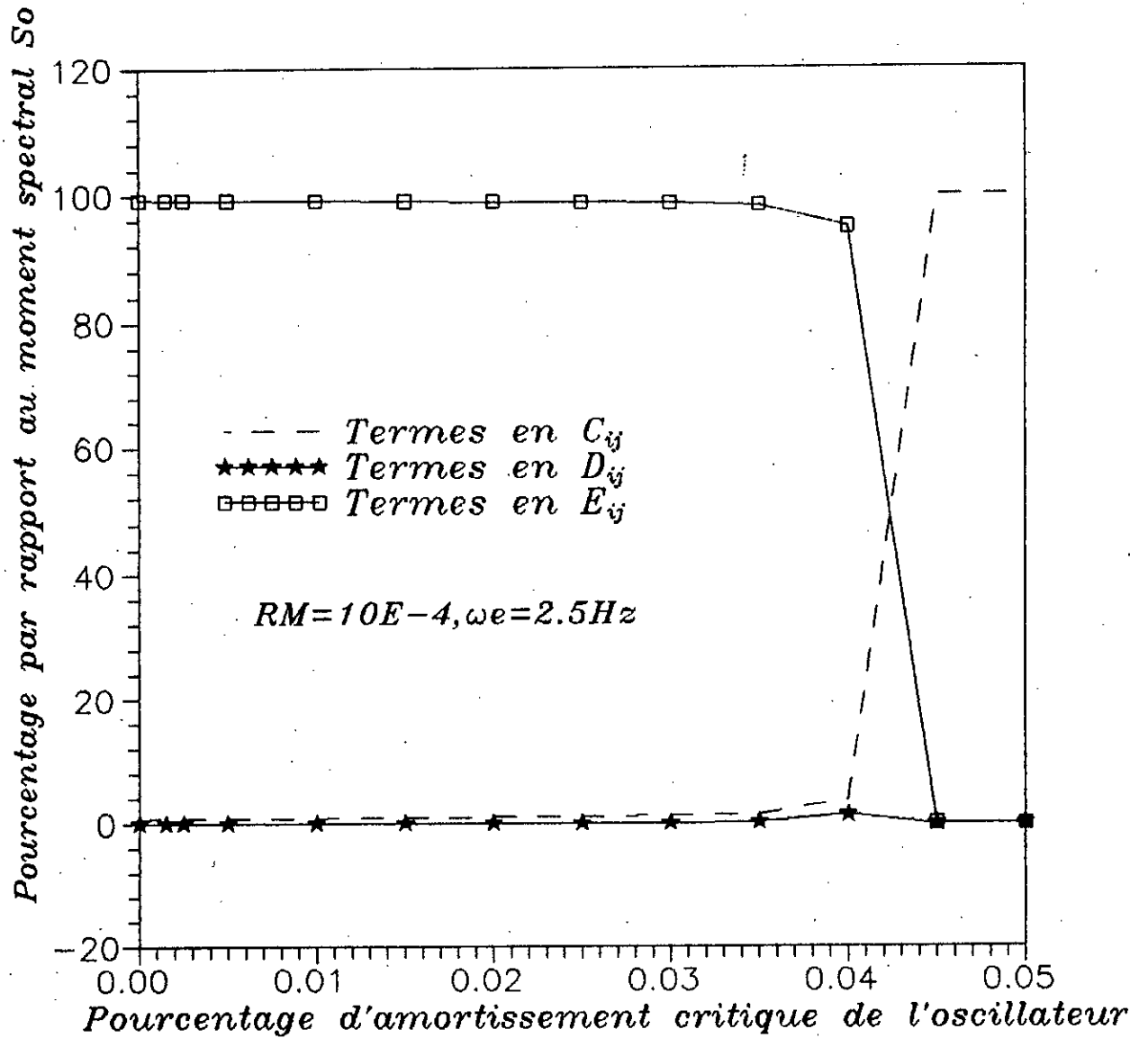


Fig. VIII.8: Contribution de termes dans l'évaluation de la moyenne du carré de la reponse Structure1: 1er mode de tuning

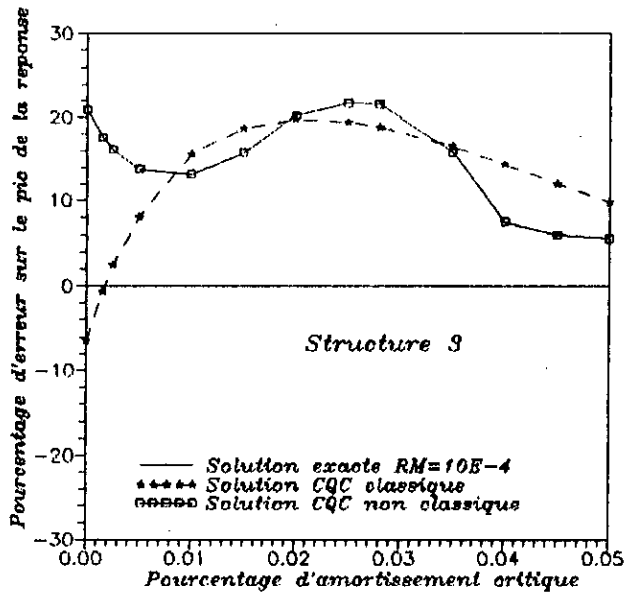
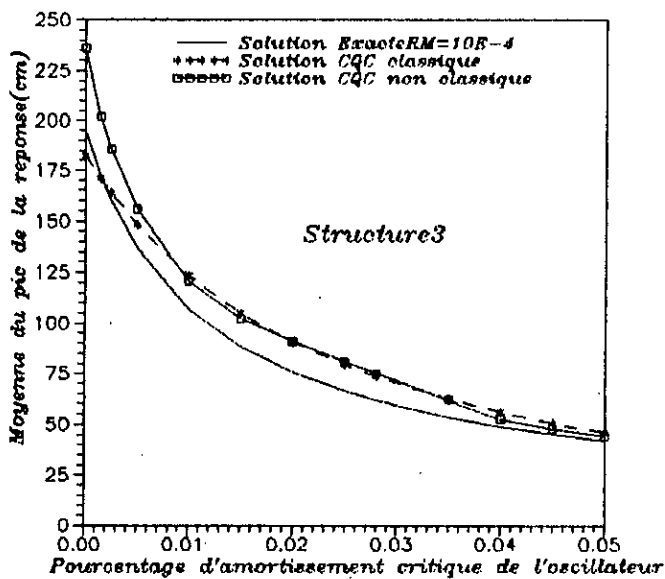
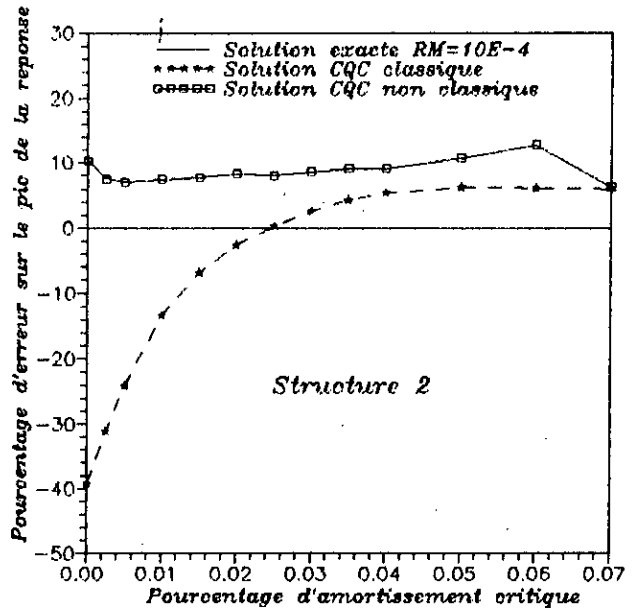
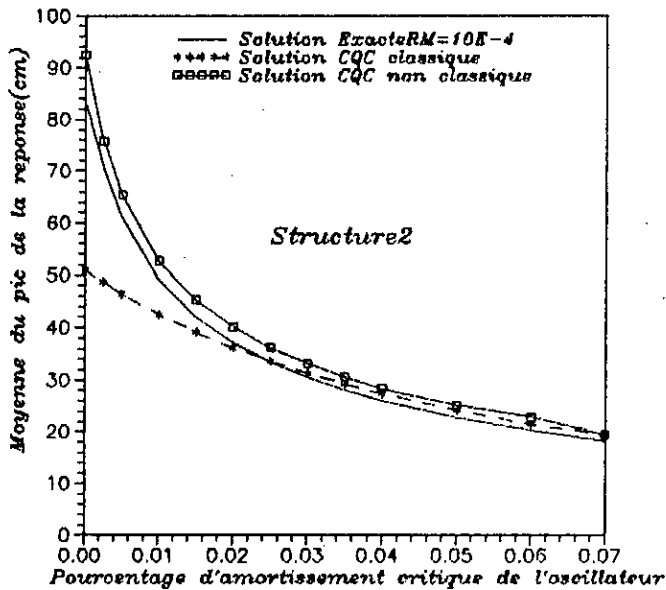
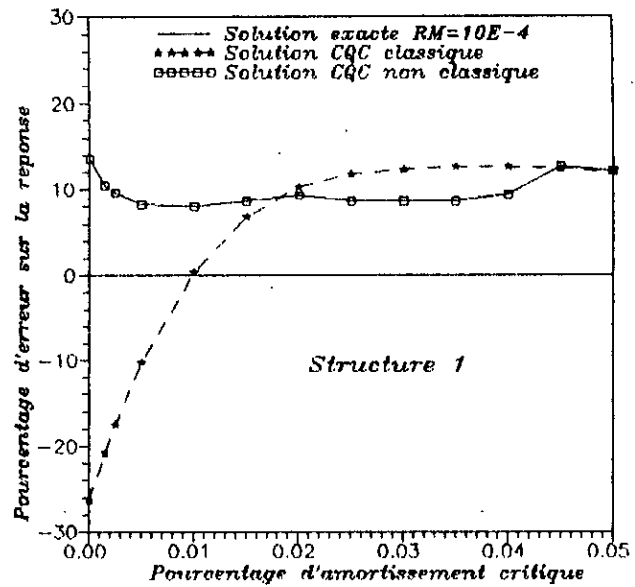
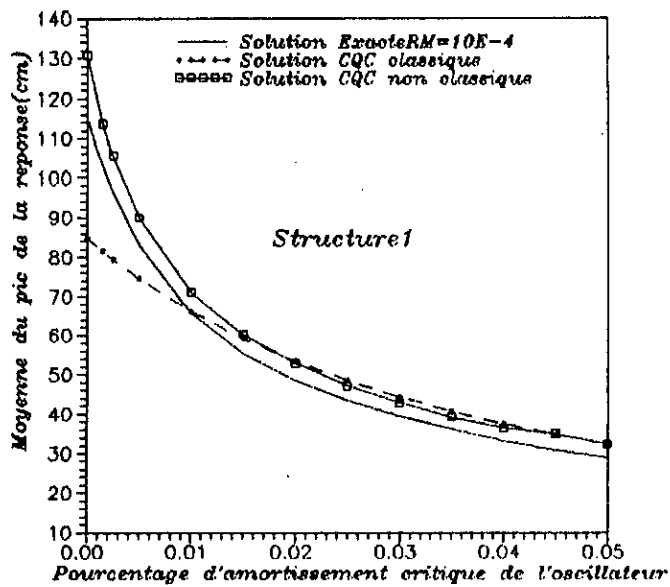


Fig. VIII.9.a: Effet de la distribution de l'amortissement dans la structure primaire sur l'évolution de la réponse pic de l'oscillateur
Méthodes de combinaison modale CQC (1er mode de tuning)

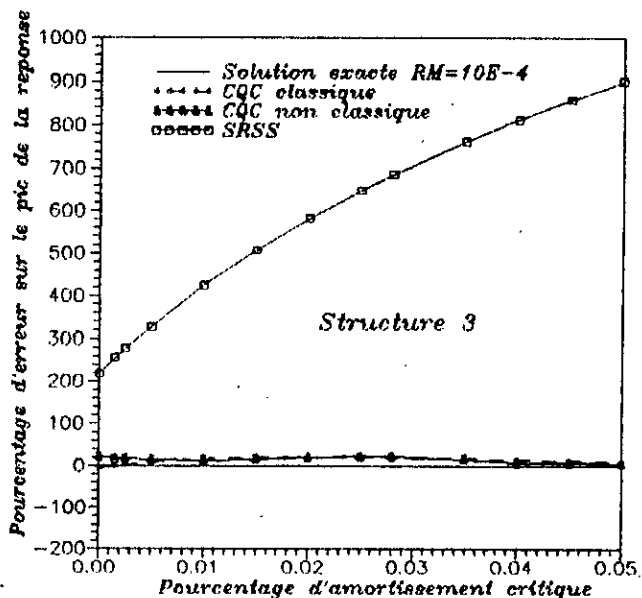
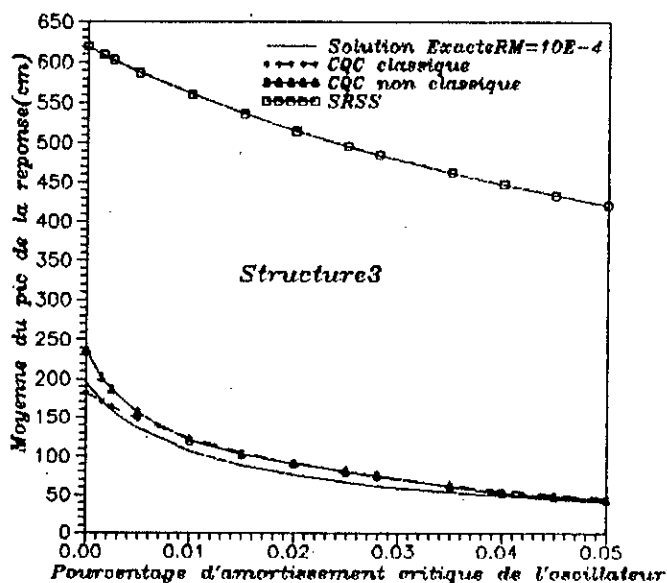
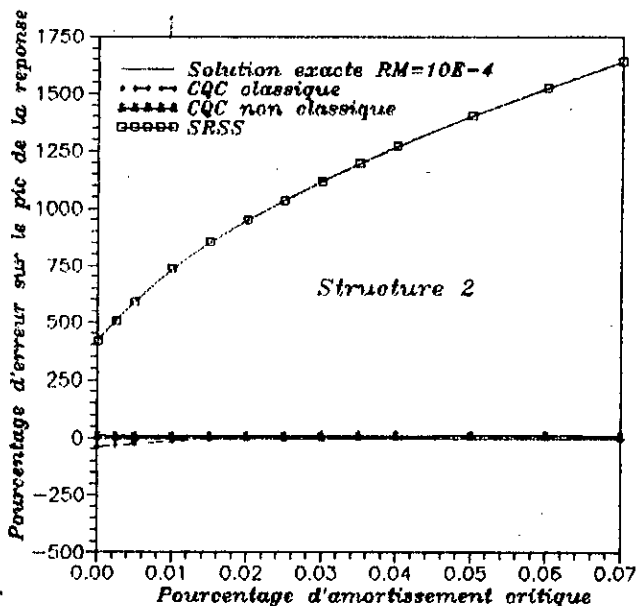
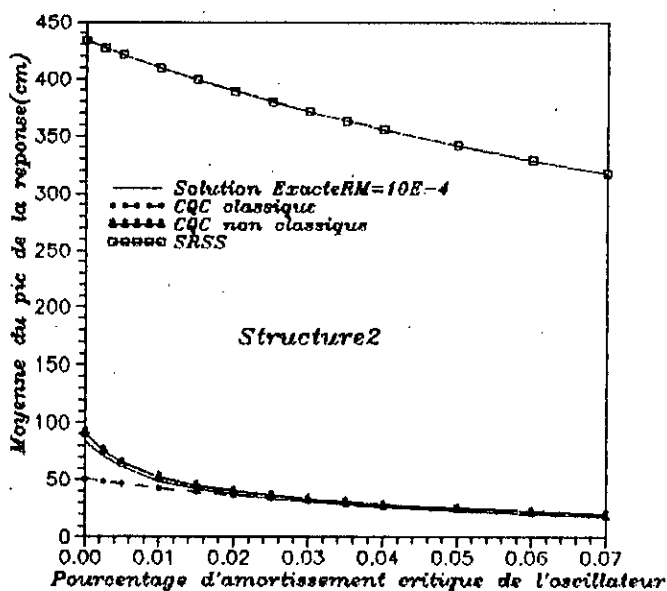
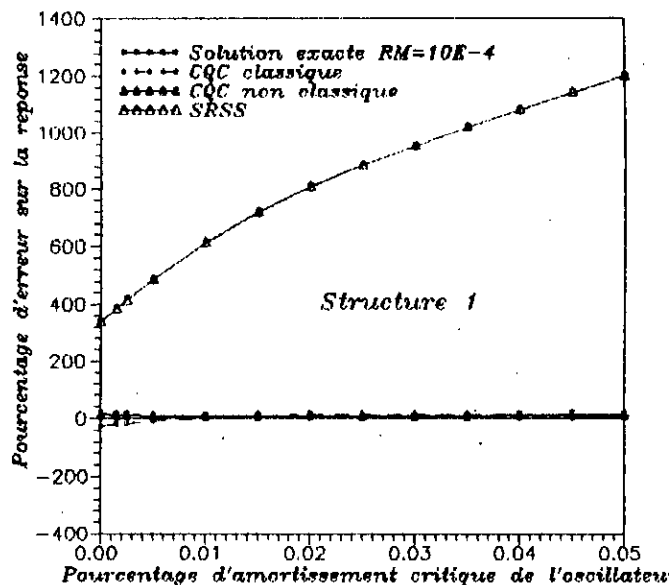
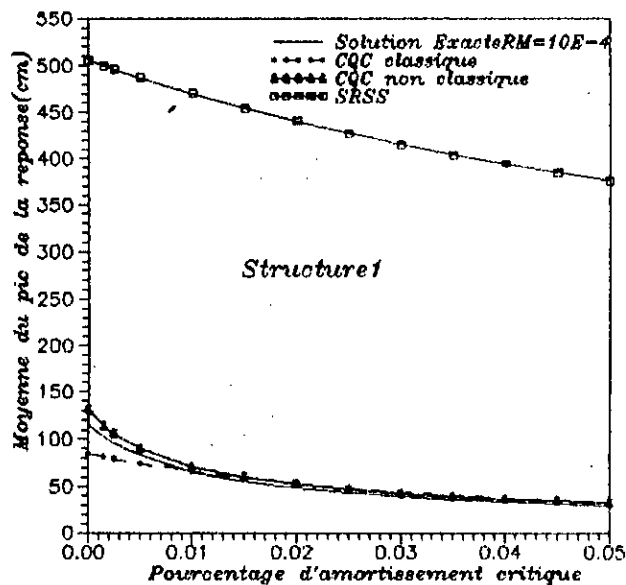
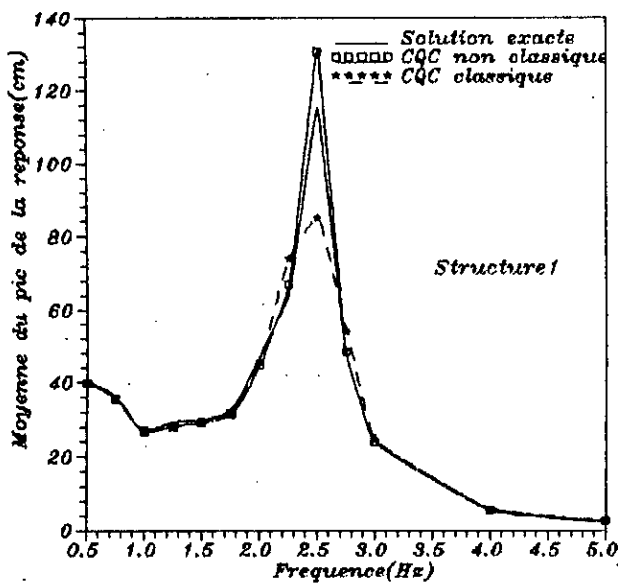
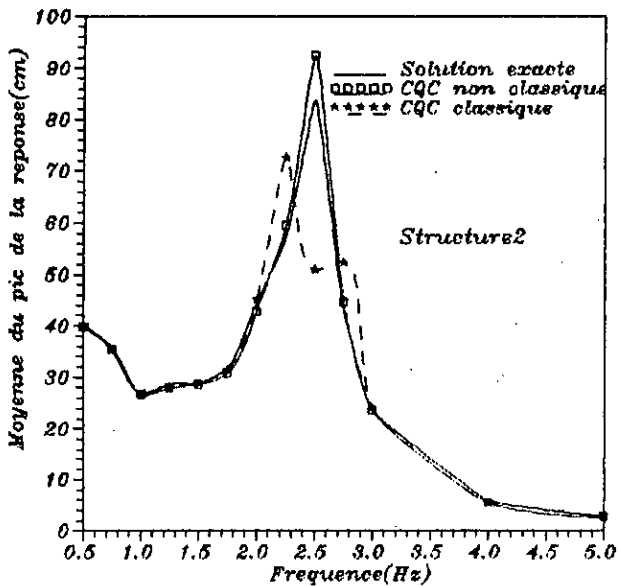
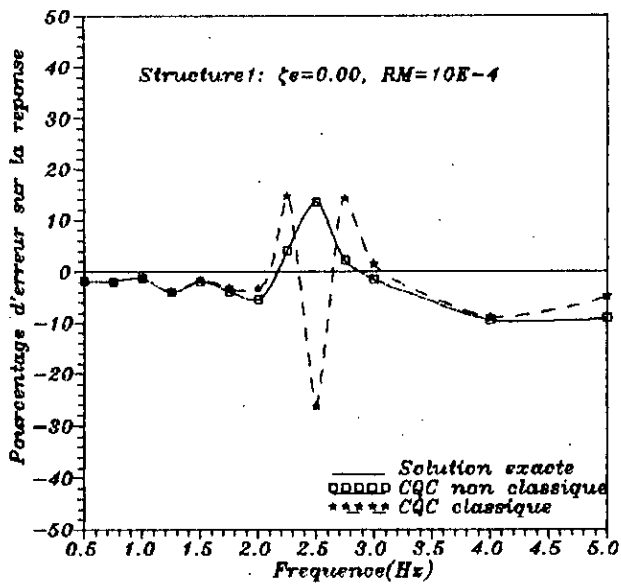


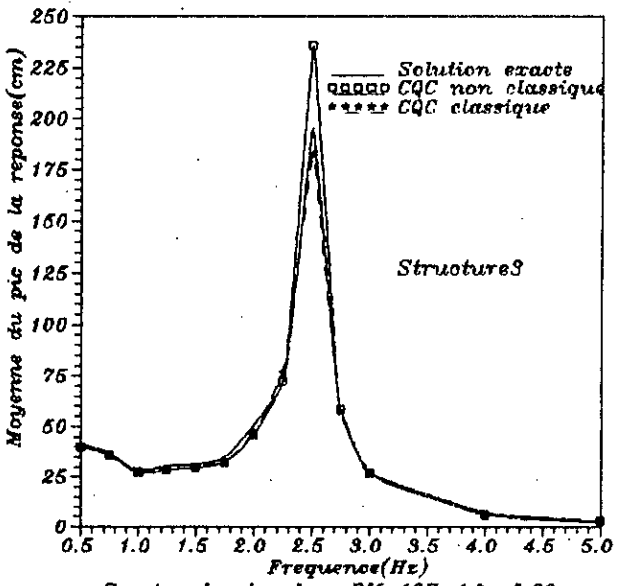
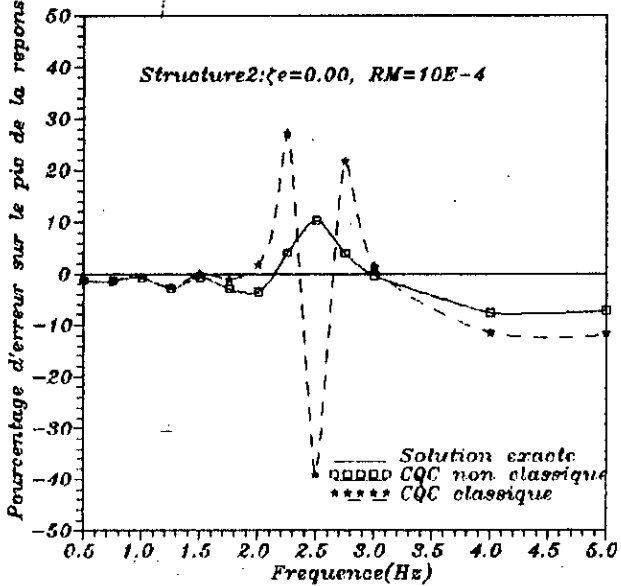
Fig. VIII.9.b: Effet de la distribution de l'amortissement dans la structure primaire sur l'évolution de la réponse pic de l'oscillateur. Méthodes de combinaison modale CQC et SRSS (1er mode de tuning)



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$

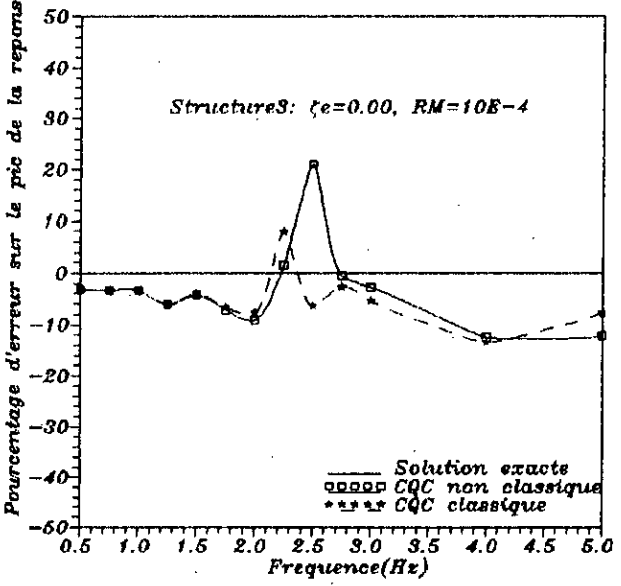
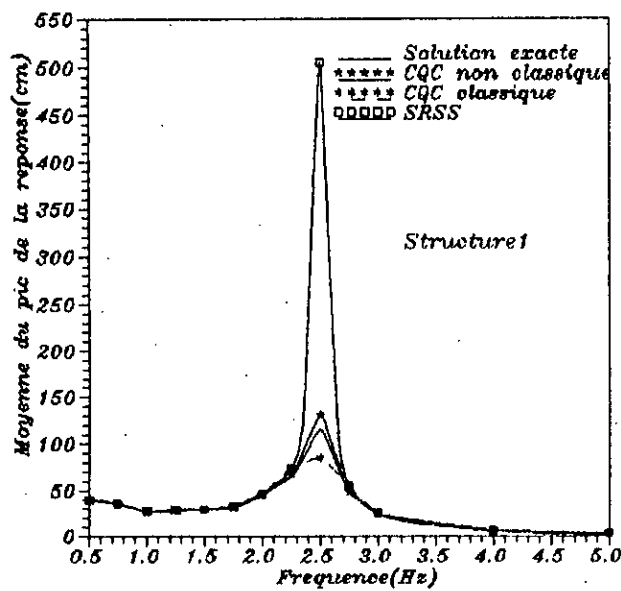
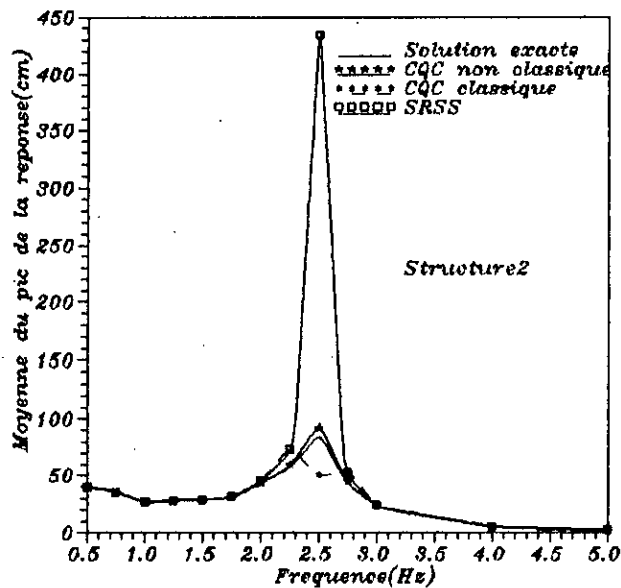
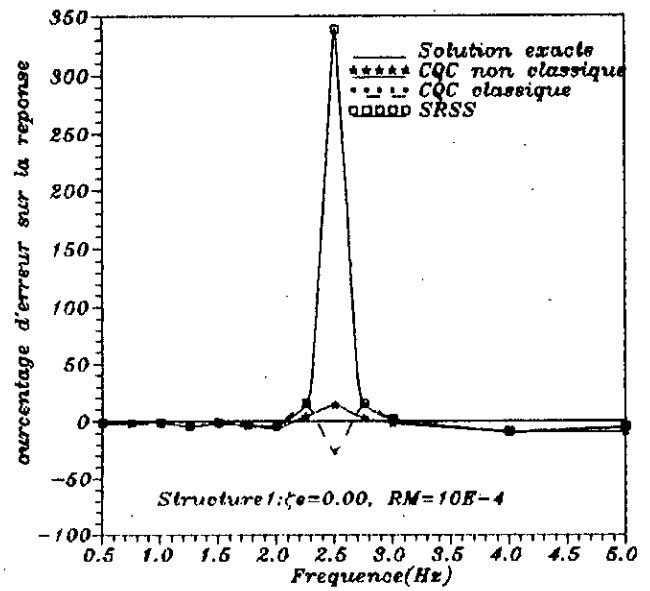


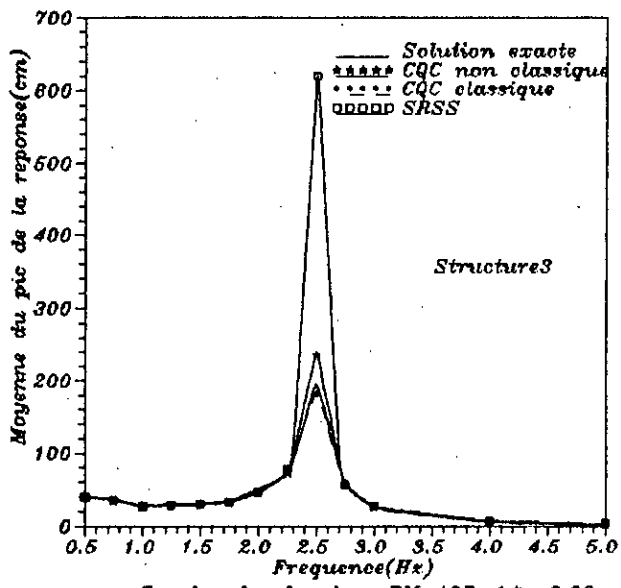
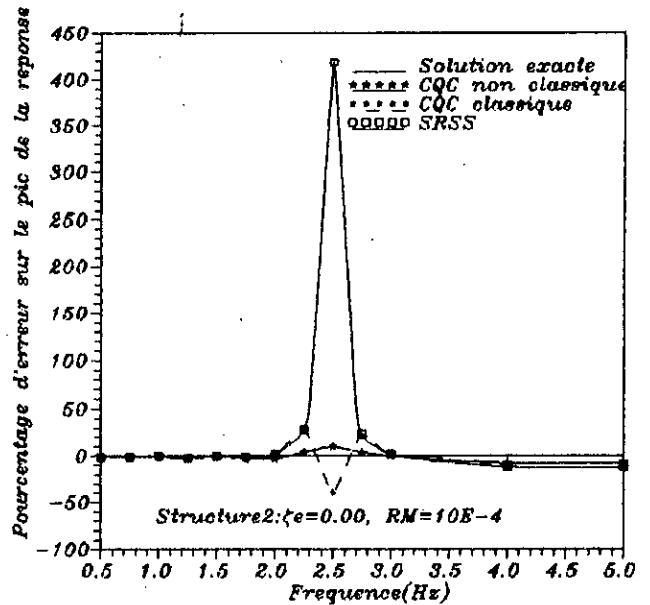
Fig. VIII.10.a: Effet de la distribution de l'amortissement sur l'évaluation des spectres de plancher par les méthodes de combinaison modale CQC



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$



Spectre de plancher: $RM=10E-4, \zeta e=0.00$

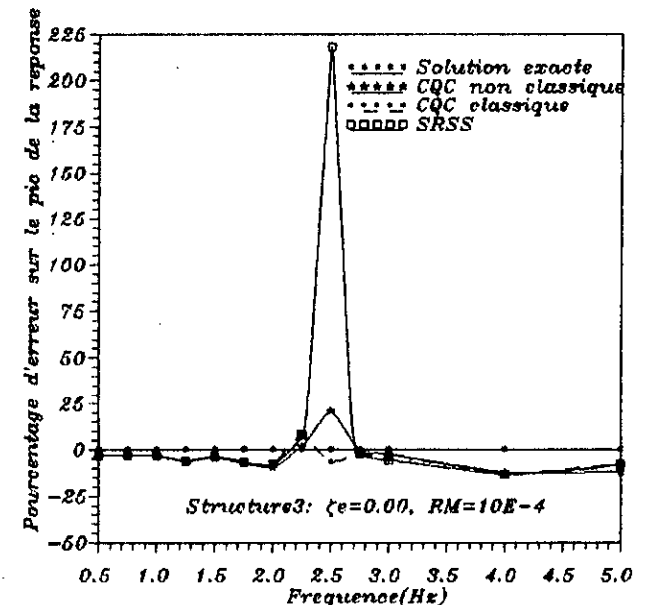


Fig. VIII.10.b: Effet de la distribution de l'amortissement dans la structure primaire sur l'evaluation des spectres de plancher par les methodes de combinaison modale CQC et SRSS

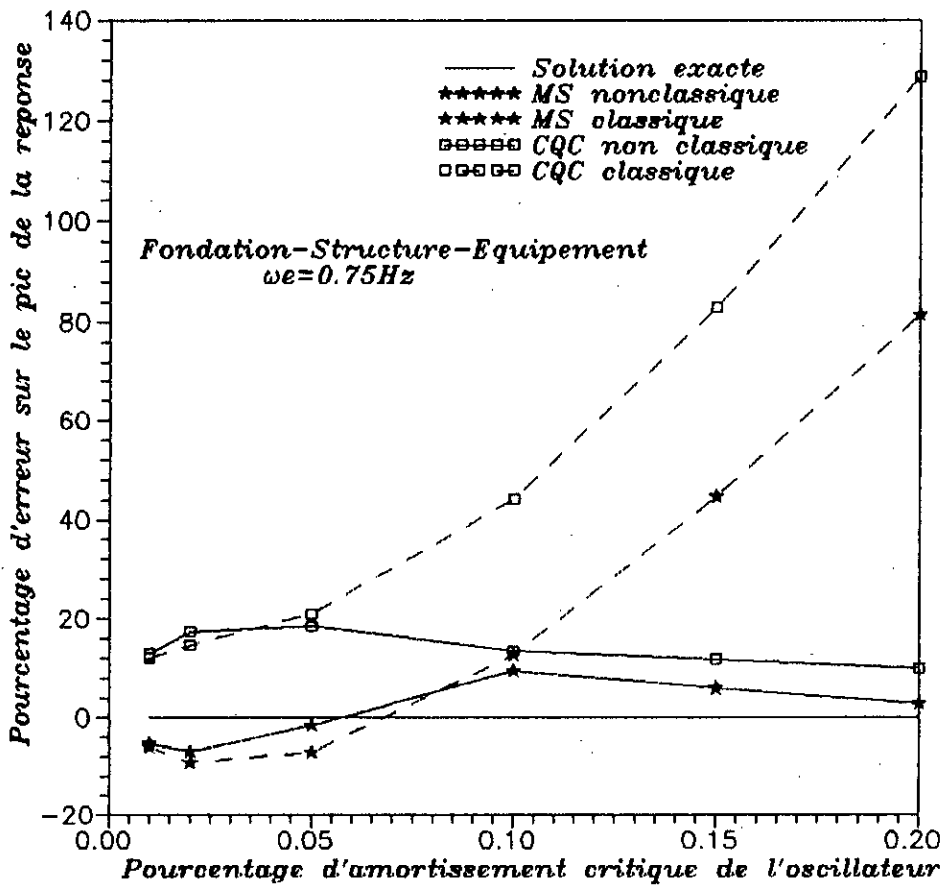
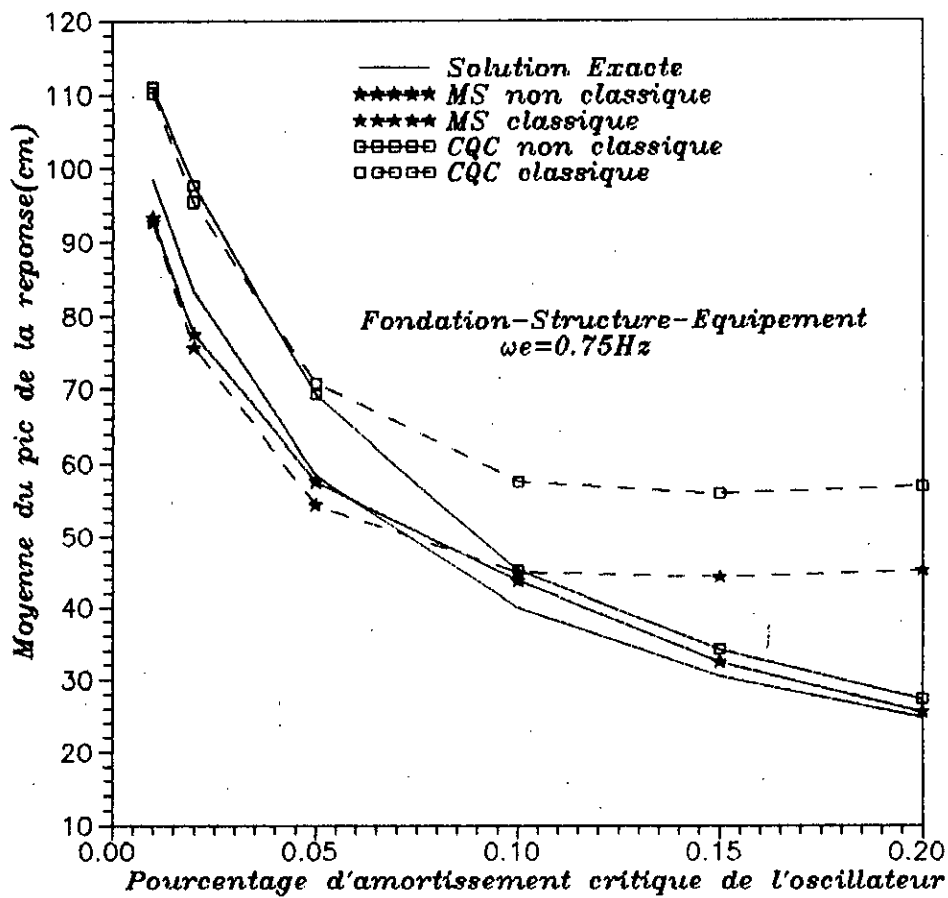


Fig. VIII.11.a: Variation du pic de la reponse de l'oscillateur en fonction de son amortissement (1er mode de tuning)
Fondation-Structure-Equipement

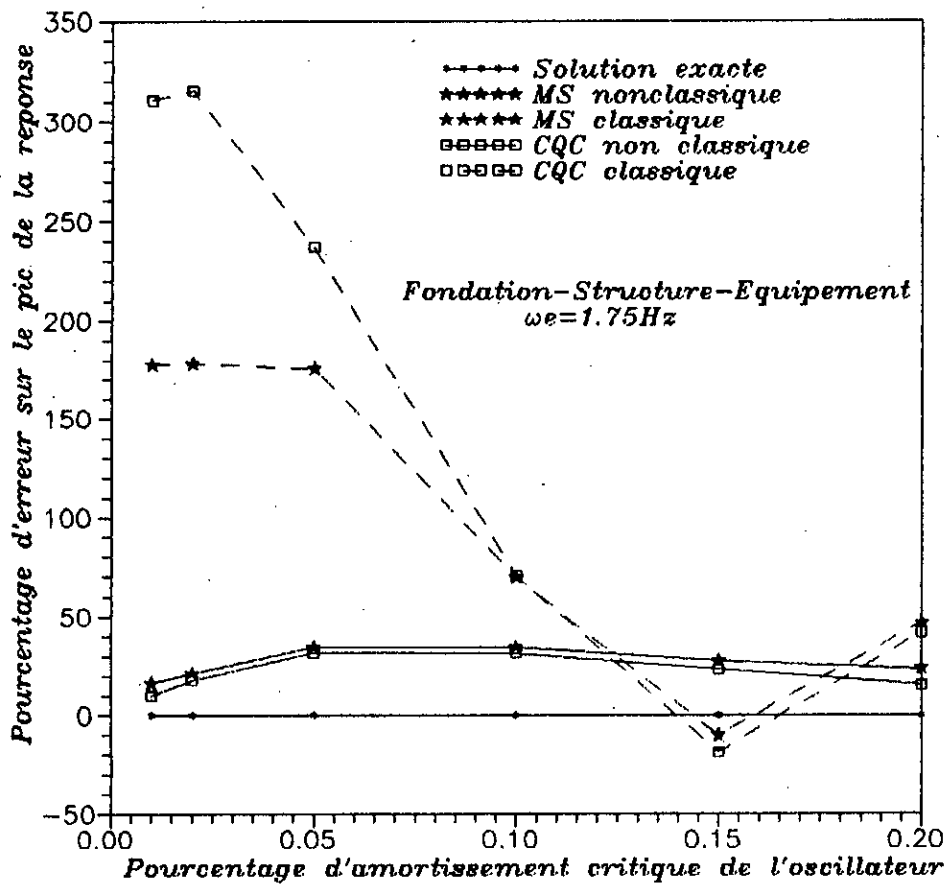
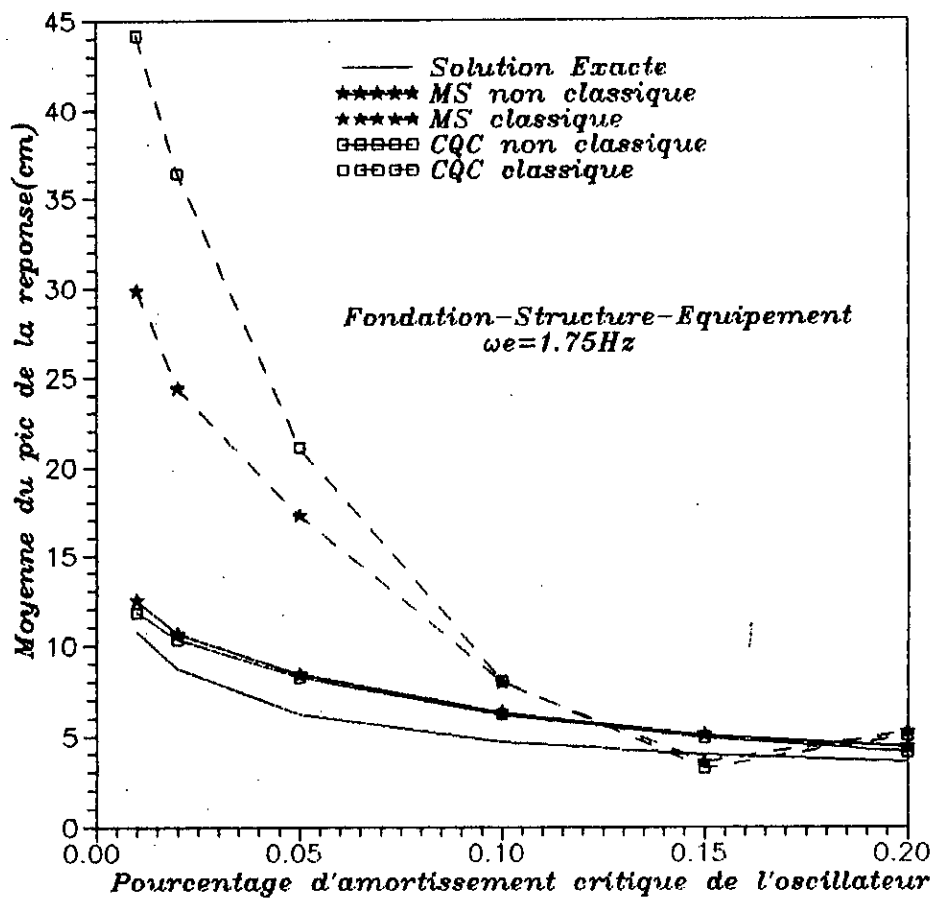
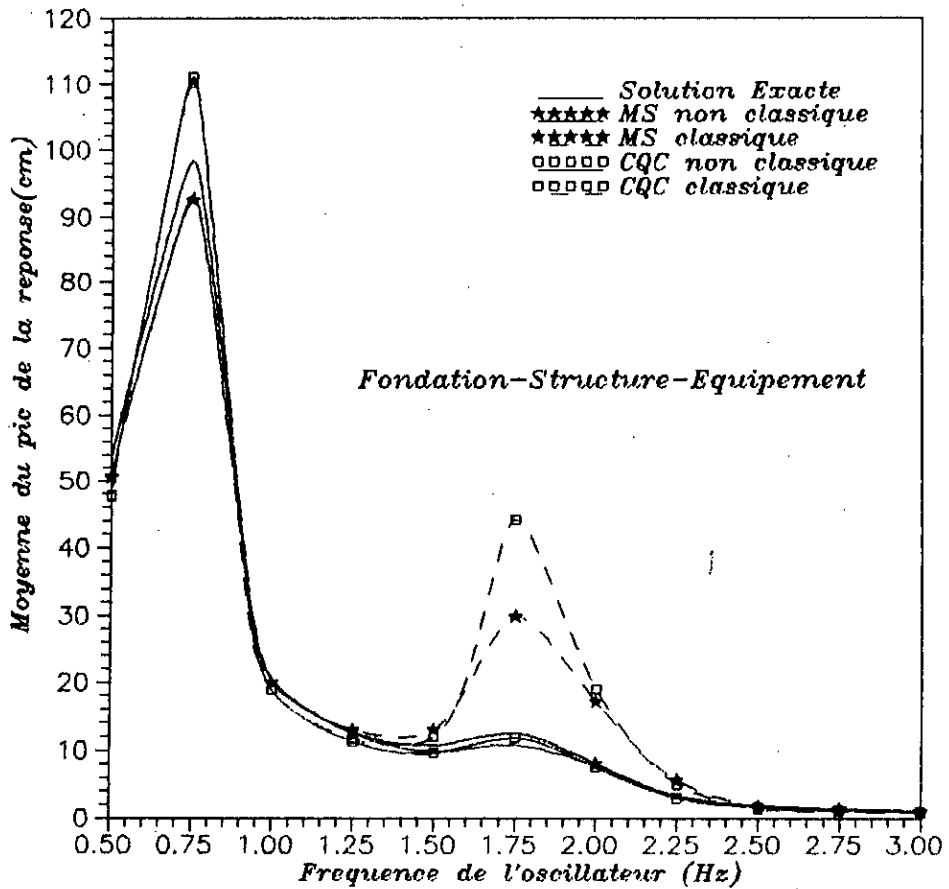


Fig. VIII.11.b: Variation du pic de la reponse de l'oscillateur en fonction de son amortissement (2eme mode de tuning)
Fondation-Structure-Equipement



Spectre de plancher de l'oscillateur $\zeta_e=0.01$

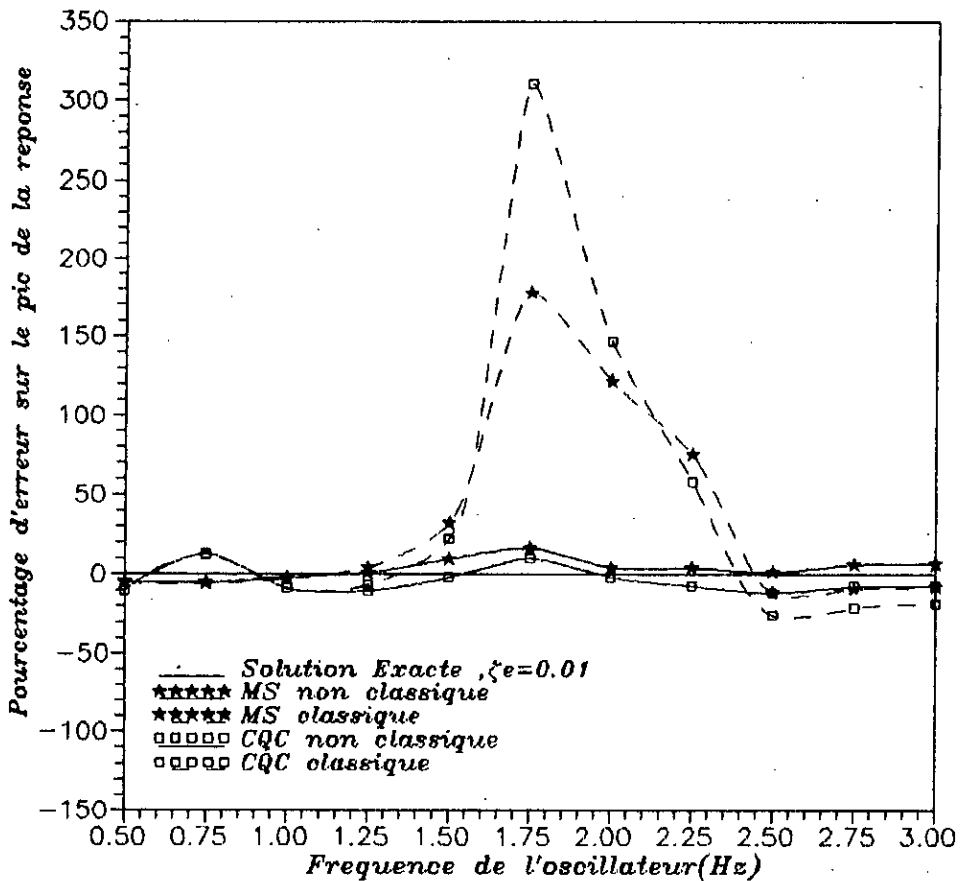
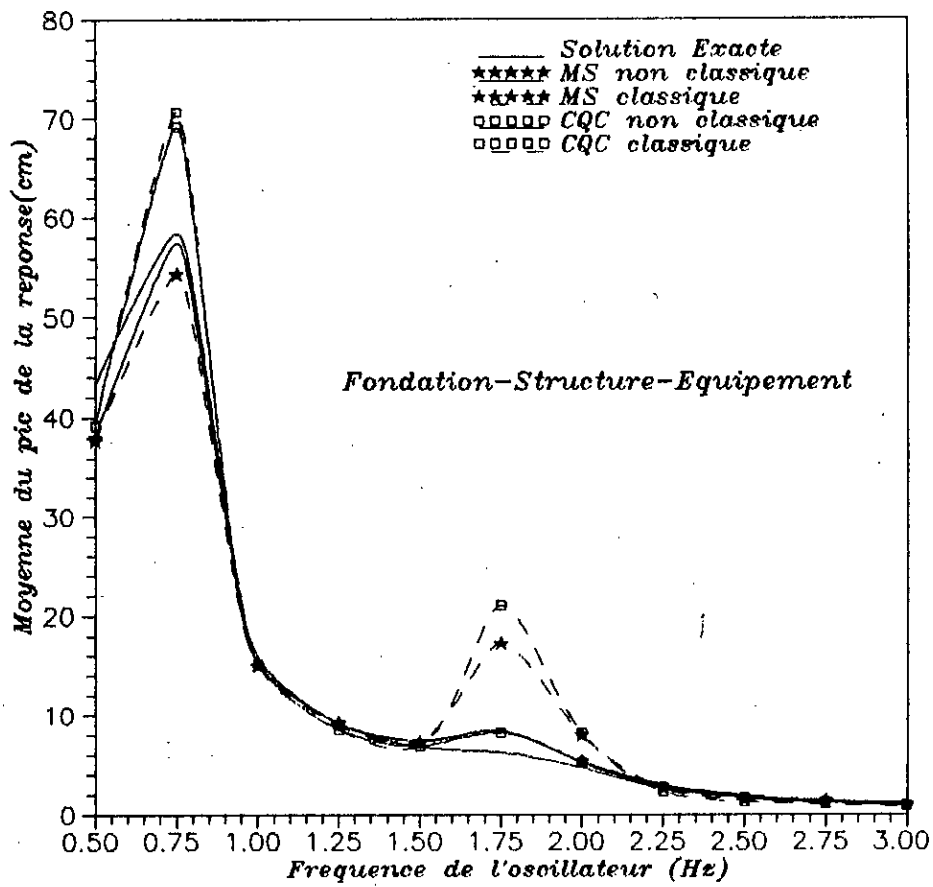
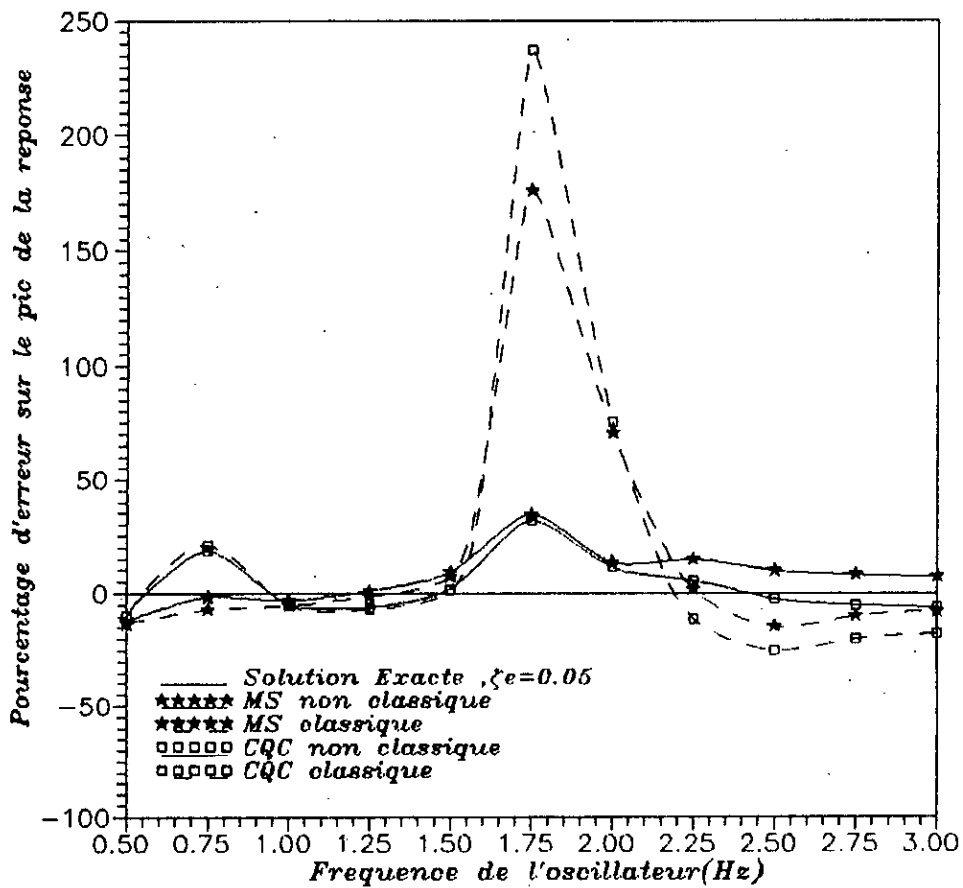


Fig. VIII.12.a: Comparaison des spectres de plancher évalués selon les approches classique et non classique: $\zeta_e=0.01$
Fondation-Structure - Equipement



Spectre de plancher de l'oscillateur, $\zeta_e=0.05$



*Fig. VIII.12.b: Comparaison des spectres de plancher évalués selon les approches classique et non classique: $\zeta_e=0.05$
Fondation-Structure-Equipement*

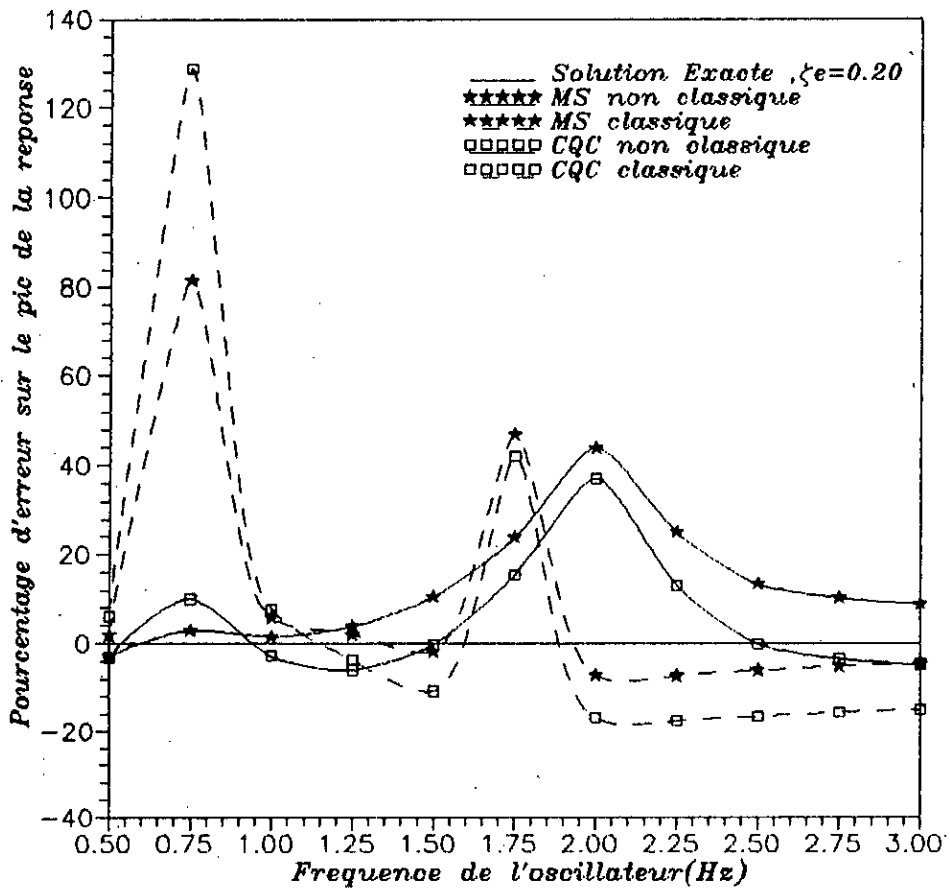
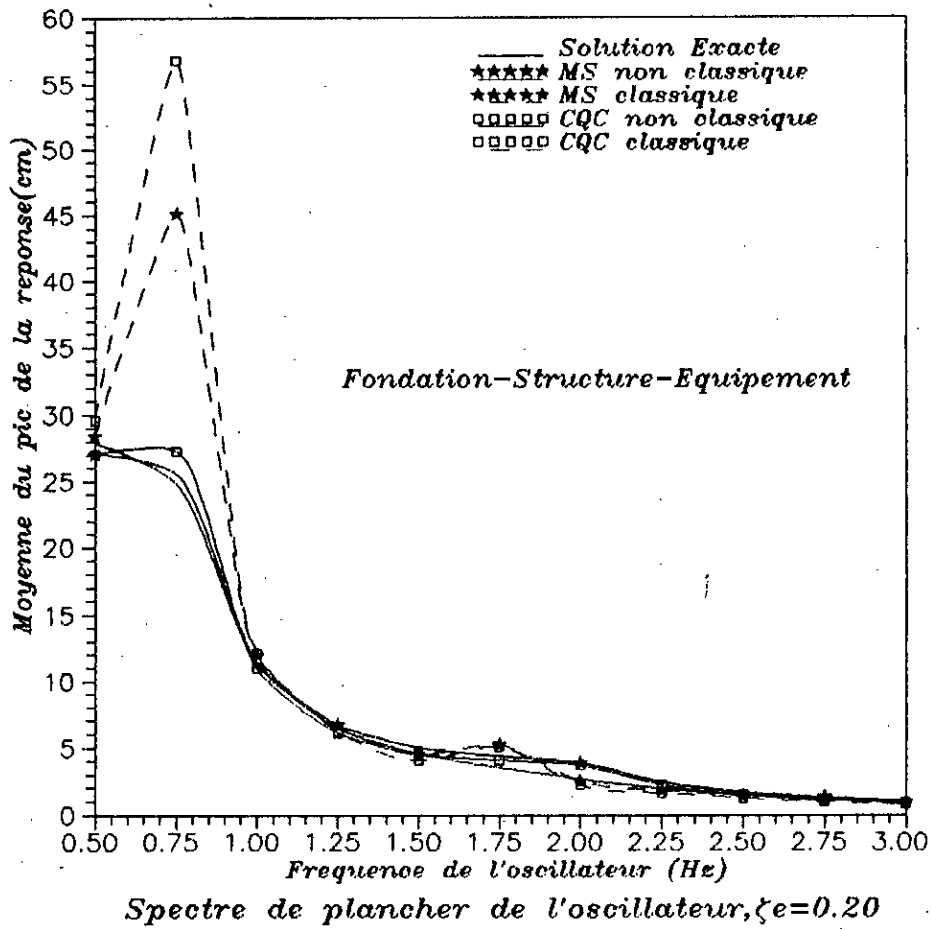


Fig. VIII.12.c: Comparaison des spectres de planchers évalués selon les approches classique et non classique; $\zeta e=0.20$
 Fondation-Structure-Equipement

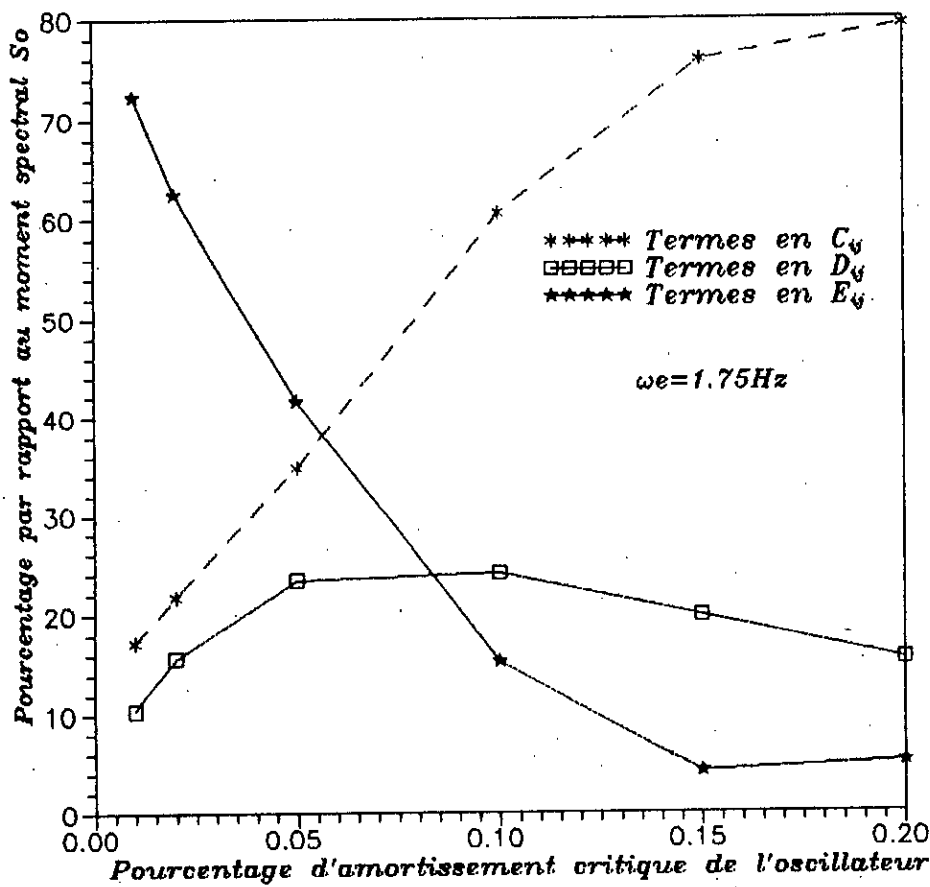
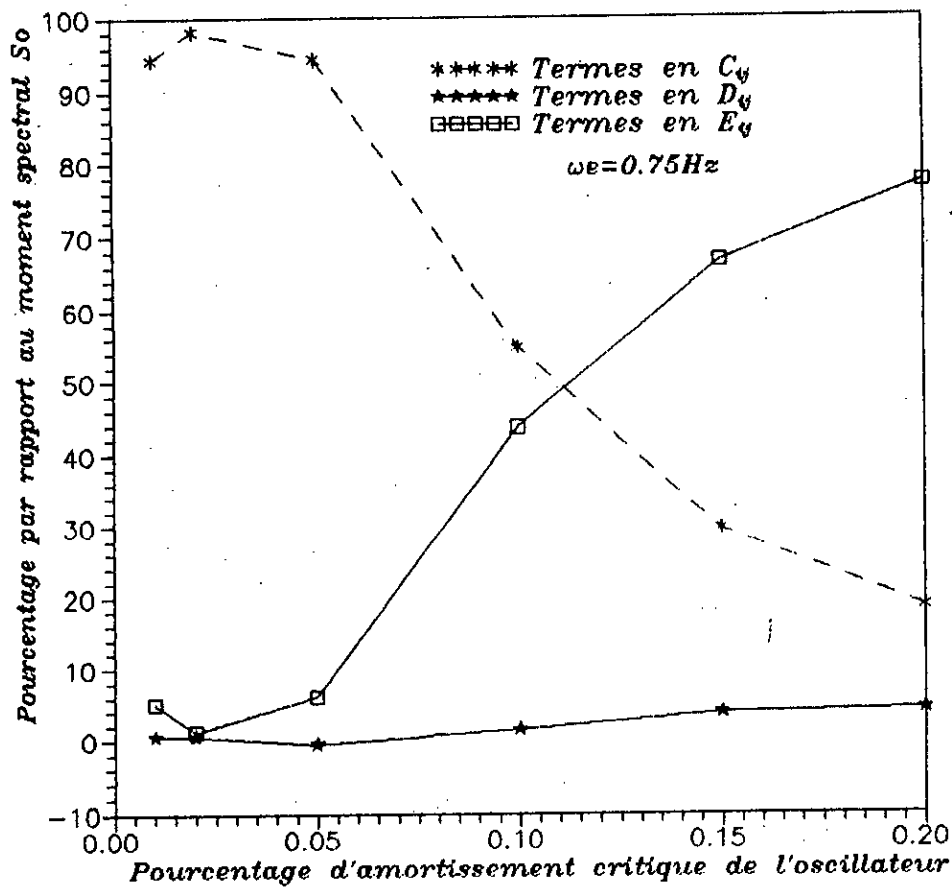


Fig. VIII.13: Contribution de termes dans l'évaluation de la moyenne du carré de la réponse pour deux modes de tuning Fondation-Structure-Equipement

CONCLUSIONS

&

RECOMMANDATIONS FUTURES

Nous n'achèverons pas ce travail avant d'émettre quelques conclusions dont certaines restent cependant particulières aux structures étudiées lors de l'expérimentation numérique, notamment les structures P-S.

En effet, l'étude entreprise étayée par la modeste investigation numérique a permis de faire ressortir l'intérêt certain que revêt une analyse généralisée (avec modes complexes), principalement dans le cadre d'une conception parasismique rigoureuse des structures dynamiques dont le caractère non classique de l'amortissement est prononcé.

Effectivement, l'expérimentation numérique a permis de mettre en évidence l'importance de certains facteurs relatifs à la structure dynamique étudiée pour délimiter le domaine de validité d'une approche classique, en dehors duquel une telle approximation pourrait compromettre sérieusement la rigueur de l'analyse.

Tout d'abord, l'étude comparative faite sur les caractéristiques propres de vibration, aussi modeste soit elle, est d'un intérêt particulier, étant donné qu'elle nous a permis de mieux cerner les différences existant entre une étude aux valeurs propres classique et une étude non classique.

Effectivement, bien que les fréquences propres semblent être correctement

estimées par l'approche classique, cependant, les % d'amortissement modaux le sont moins. Tantôt, à cause d'une sous estimation, tantôt à cause d'une surestimation, l'approche classique, souvent, n'assure pas une évaluation correcte des % d'amortissement critiques modaux.

S'agissant des vecteurs propres, nous avons pu nous rendre compte, que plus le caractère non classique de la structure est significatif plus les composantes réelles des vecteurs propres estimées selon l'approche classique se démarquent de celles évaluées selon l'approche exacte. De plus, contrairement, à ce que l'on suppose classiquement, les composantes imaginaires ne sont pas nulles et deviennent de plus en plus importantes à mesure que le caractère non classique de l'amortissement l'est, ceci se répercutera sans nul doute sur l'évaluation de la réponse structurale.

S'agissant de l'expérimentation numérique portant sur la réponse dynamique, nous disons que, d'une façon générale, cette analyse nous a permis, entre autres, de nous familiariser avec le calcul des spectres de plancher, qui constituent un outil efficace dans le design sismique, et par la même occasion de nous intéresser au phénomène du "tuning", dont l'intérêt considérable lors d'une étude non classique a été prouvé.

Il est sans contredit, que cette investigation a confirmé, que lors de l'étude des structures à amortissement non classique, l'entité la plus importante, à prendre en considération, est évidemment, le taux d'amortissement limite (ξ_{cr}), qui est le seul % d'amortissement critique de la structure secondaire qui conduit à une structure composée P-S à amortissement classique ou pseudo-classique. En effet, cette valeur fournit une borne limite d'importance cruciale, au voisinage de laquelle, il a été amplement prouvé qu'une étude classique est très préconisée. En revanche, loin de cette borne critique, l'analyse doit impérativement inclure le caractère non classique de l'amortissement dont l'effet devient prépondérant.

En effet, les études paramétriques réalisées, ont fourni des arguments probants affirmant, que dans ces circonstances, une analyse classique est préjudiciable, du fait qu'elle conduit inéluctablement, à des résultats erronés, soit en surestimant exagérément la réponse structurale, ou alors en la sous évaluant considérablement. Il a été cependant démontré, que toutes ces constatations, restent valables dans des situations de tuning. Effectivement, en dehors des fréquences de tuning, l'approximation classique est justifiée.

Nous ne manquerons pas de signaler, l'impact non moins important, de l'interaction sur la réponse structurale. En effet, il a été prouvé que l'interaction entre les structures P et S réduit considérablement la réponse de la structure secondaire, et par la même occasion atténue l'acuité du caractère non classique de l'amortissement.

Lors de cette investigation numérique, l'importance de la distribution de l'amortissement dans la structure primaire a également été clairement prouvée. Effectivement, l'étude comparative réalisée sur des structures qui ne différaient que par le mode de distribution de l'amortissement dans la structure primaire a permis d'affirmer que le mode de distribution influe considérablement sur la réponse structurale, toujours dans des conditions de tuning.

Toutes ces constatations sont évidemment valables indépendamment du mode de définition de l'excitation (déterministe ou non déterministe). Cependant nous ne manquerons pas de souligner, qu'en offrant la possibilité de suivre l'évolution de la réponse structurale sur toute l'histoire temporelle, l'étude déterministe permet une meilleure visualisation de la différence entre les deux approches classique et non classique.

De plus, la considération de deux inputs (lors de l'expérimentation déterministe), se distinguant par leur contenu fréquentiel, en l'occurrence l'input Wide-band et l'input narrow-band, a permis de constater que malgré

le changement des amplitudes des réponses causé par la réduction de la largeur de bande de l'excitation, l'acuité du caractère non classique de l'amortissement structural reste toujours liée aux mêmes facteurs à savoir la fréquence de tuning, l'amortissement critique ξ_{cr} ainsi que le rapport de masse RM.

Soulignons aussi que, les méthodes de combinaison modale procurent des procédés numériquement efficaces, évitant l'analyse de l'histoire temporelle, du fait que ces derniers (procédés), permettent de générer entre autres des spectres de plancher, directement en fonction des propriétés du système composé P-S et du spectre de réponse de l'excitation du sol.

D'autre part, les surestimations excessives fournies, par une méthode de combinaison modale classique telle que la SRSS, affirment sans équivoque, qu'une telle méthode approchée est déconseillée pour une analyse rigoureuse de structures à amortissement non classique, et même pour l'analyse des structures classiques dont la corrélation inter-modale est significative.

Nous concluons ce modeste travail en disant que, l'étude de la vibration des structures en général, et de la vibration des structures à amortissement non classique en particulier constitue un domaine d'investigation à la fois riche et passionnant, et ce n'est pas pour nous soumettre à une coutume, mais plutôt convaincus par l'intérêt que revêt ce type de recherches pour l'ingénieur en génie civil, que nous terminons sur ces quelques recommandations pour des travaux futurs.

En effet, le travail de recherche que nous avons réalisé, était basé sur une hypothèse stipulant que le mouvement du sol auquel est soumise la structure dynamique est uniforme. En d'autres termes, la même excitation sismique est supposée agir simultanément, au niveau de tous les points d'appuis de cette structure. Il s'avère cependant que cette hypothèse n'est

point justifiée lorsqu'il s'agit de structures étendues. A cet effet, il nous semble très intéressant, de considérer cette variabilité spatiale du mouvement sismique lors de l'analyse des structures à amortissement non classique.

Rajoutons que, lors de notre étude paramétrique, nous nous sommes limités à des systèmes secondaires à un degré de liberté, liés à des systèmes primaires par un point d'attache unique. Nous proposons donc par la même occasion de se pencher sur l'analyse des systèmes primaires à plusieurs degrés de liberté, connectés à des systèmes secondaires par plusieurs points d'attaches (multiply supported secondary systems).

REFERENCES

- [1] Asfura.A. and Der Kiureghian.A.. "Floor Response Spectrum Method for Seismic Analysis of Multiply Supported Secondary Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, 1986, pp.245-265.
- [2] Bathe,K. and Wilson,E.L., "Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics ", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.6, 1973, pp.213-226.
- [3] Bathe,K. and Wilson,E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, 1976.
- [4] Berrah,M.K., "Vibrations of Damped Structures". Master's thesis. Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U.S.A, 1987.
- [5] Bert,C.W., "An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques ", *Journal of Sound and Vibration*. Vol.29, 1973, pp.129-153.
- [6] Borino,G. and Muscolino,G., "Mode Superposition Methods in Dynamic Analysis of Classically and Non-Classically Damped Linear Systems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, 1986, pp.705-717.
- [7] Burdisso,R.A. and Singh,M.P., "Multiply Supported Secondary Systems Part I : Response Spectrum Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.15, 1987, pp.53-72.
- [8] Burdisso,R.A. and Singh,M.P., "Seismic Analysis of Multiply Supported Secondary Systems with Dynamic Interaction Effects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.15, 1987, pp.1005-1022.
- [9] Capra,A. et Davidovici,V., "calcul dynamique des structures en zone sismique", Editions Eyrolles, Paris, France, 1982.
- [10] Caughey,T.K.. "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.27, 1960, pp.269-271.
- [11] Clough,R.W. and Mojtahedi,S., "Earthquake Response Analysis Considering Non Proportional Damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.4, 1976, pp.489-496.
- [12] Clough,R.W. and Penzien,J.. "Dynamics of Structures". Mac Graw-Hill Inc.. New York, U.S.A ,1975.
- [13] Cornwell,R.E., Craig,R.R. and Johnson,C.P.." On the Application of the Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11, 1983, pp.679-688.

- [14] Crandall, S.H., "The Role of Damping in Vibration Theory". Journal of Sound and Vibration, Vol.11, 1970, pp.3-18.
- [15] Cronin, D.L., "Approximation for Determining Harmonically Excited Response of Non Classically Damped Systems". Journal of Engineering for Industry, Transaction of ASME, Vol.98B, 1976, pp.43-47.
- [16] Der Kiureghian, A., "Structural Response to Stationary Excitation". Journal of Engineering Mechanics Division, Vol.106, 1980, pp.1195-1213.
- [17] Der Kiureghian, A., "A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.9, 1981, pp.419-435.
- [18] Der Kiureghian, A., Sackman, J.L. and Nour-Omid, B., "Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Response to Stochastic input". Journal of Engineering Mechanics Division, Vol.109, 1983, pp.90-110.
- [19] Duncan, P.E. and Taylor, R.E., "A Note on the Dynamic Analysis of Non Proportionally Damped Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, 1979, pp.99-105.
- [20] Fawzy, I., "A Theorem on the Free Vibration of Damped Systems". Journal of Applied Mechanics, 1977, pp.132-134
- [21] Foss, K.A., "Coordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, Vol.125, 1985, pp.361-364.
- [22] Gladwell, I. and Hanson, P.M., "Some Error Bounds and Numerical Experiments in Modal Methods for Dynamics of Systems", Journal of Engineering Mechanics Division, Vol.12, 1984, pp.9-36.
- [23] Hansteeen, O.E. and Bell, K., "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis In Structural Dynamics". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, 1979, pp.405-411.
- [24] Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F., "Dynamics of Structures", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1964.
- [25] Ibrahimbegovic, A., Chen, H., Wilson, E.L. and Taylor, R., "Ritz Method For Dynamic Analysis of Large Discrete Linear Systems With Non Proportional Damping", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, 1990, pp.877-889.
- [26] Igusa, T., Der Kiureghian, A. and Sackman, J., "Modal Decomposition Method for stationary Response of Non Classically Damped Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.12, 1984, pp.121-136.
- [27] Igusa, T. and Der Kiureghian, A., "Dynamic Analysis of Multiply Tuned Arbitrarily Supported Secondary Systems", Technical Report N° UCB/EERC 83/07, 1983.
- [28] Igusa, T. and Der Kiureghian, A., "Generation of Floor Response Spectra Including Oscillator-Structure Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.13, 1985, pp.661-667.

- [29] Jeary ,A.P., "Damping in Tall Buildings - A Mechanism and A Predictor ", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.14, 1986, pp.733-750.
- [30] Jennings ,P.C. and Bielak,J., "Dynamics of Building Soil Interaction". Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.63, 1973, pp.9-48.
- [31] Kausel,E., "Unpublished Notes on Damping in Multi-Degree of Freedom Systems", Massachusetts Institute of Technologie.
- [32] Kausel,E., "Unpublished Notes on Viscous Vs Hysteretic Damping", Massachusetts Institute of Technologie.
- [33] Kulkarni,S.M. and Ng,S.F., "Inclusion of Higher Modes in the Analysis of Non Classically Damped Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.21, 1992, pp.543-549.
- [34] Maddox,N.R., "On the Number of Modes Necessary for Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analysis", Journal of Applied Mechanics , Vol.42, 1975, pp.516-517.
- [35] Muscolino,G., "Dynamic Response of Multiply Connected Primary-Secondary Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, 1990, pp.205-216.
- [36] Newland,D.E., "An introduction to Random Vibration and Spectral Analysis", Long-Man Inc., New York, U.S.A, 1984.
- [37] Ozguven,H.N, " Modal analysis of Non_Proportionally Damped Mechanical Structures", ASME paper 81-DET-75, pp.1-8, 1981.
- [38] Peters,G., Wilkinson,J.H., " $AX = \lambda BX$ and the Generalized Eigenproblem", SIAM Journal of Numerical Analysis", Vol.7, 1970, pp.479-492.
- [39] Preumont,A., "Vibrations Aléatoires et Analyse Spéctrale", Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse, 1990.
- [40] Roesset,J.M., Whitman,R.V. and Dobry,R., "Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction", Structural Division Journal, Vol.99, 1973, pp.399-415.
- [41] Salmonte,A.J., "Considerations On The Residual Contribution In Modal Analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, 1982, pp.295-304.
- [42] Scanlan,R.H, "Linear Damping Models and Causality in Vibrations ", Journal of Structural Vibration, Vol.13, 1970, pp.499-509.
- [43] Shinozuka,M., Deodatis,G. and Harada,T., "Digital Simulation of Seismic Ground Motion", Technical Report NCEER 87-0017, 1987.
- [44] Singh,M.P., "Seismic Response by SRSS for Non Proportional Damping", Journal of Engineering Mechanics Division, Vol.106, 1980, pp.1405-1419.
- [45] Sing,M.P. and Burdisso,R.A., "Multiply Supported Secondary Systems PartII: Seismic Inputs", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.15, 1987, pp.73-90.

- [46] Singh, M.P. and Mc Cown, B.E., "Mode Acceleration-Based Response Spectrum Approach for Non Classically Damped Structures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.5, 1986, pp.226-233.
- [47] Thomson, W.T., Calkins, T. and Carvani, P., "A Numerical Study of Damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.3, 1974, pp.97-103.
- [48] Traill-Nash, R.W., "Modal Methods in the Dynamics of The Systems with Non Classical Damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.4, 1981, pp.153-169.
- [49] Vanmarcke, E.H., "Properties of Spectral Moments with Applications to Random Vibration", *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol.98, 1972, pp.425-446.
- [50] Vanmarcke, E.H., "On the Distribution of the First Passage Time for Normal Stationary Random Processes", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.42, 1975, pp.215-220.
- [51] Villaverde, R., "Rosenblueth's Modal Combination Rule for Systems with Non Classical Damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.16, 1988, pp.315-328
- [52] Warburton, G.B. and Soni, S.R., "Errors in Response Calculations for Non classically Damped Structures", *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol.5, 1977, pp.365-376.
- [53] Wilson, E.L., Der Kiureghian, A. and Bayo, P., "A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9, 1981, pp.187-194
- [54] Wilson, E.L. and Penzien, J., "Evaluation of Orthogonal Damping Matrices", *Journal of Numerical Methods in Engineering*", Vol.4, 1972, pp.5-10.
- [55] Yang, J.N., Sarkani, S. and Long, F.X., "A response Spectrum Approach for Analysis of Non Classically Damped Structures", *Technical Report NCEER 88-0020*, 1988.

APPENDICE

Les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 relatifs aux fractions partielles, apparus dans les équations (VI.4.4.31), (VI.4.4.32) et (VI.4.5.4), sont obtenus suite à la résolution du système d'équations suivant:

$$\mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{W} \quad (1)$$

Les éléments de \mathbf{V}, \mathbf{a} et \mathbf{W} sont définis comme suit:

$$\begin{aligned} V(1,1) &= V(1,3) = V(4,2) = V(4,4) = 0 \\ V(2,2) &= V(3,1) = 2\omega_k^2 (2\xi_k^2 - 1) \\ V(2,4) &= V(3,3) = 2\omega_j^2 (2\xi_j^2 - 1) \\ V(4,1) &= \omega_k^2 ; V(4,3) = \omega_j^4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^T = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \} \quad (3)$$

$$\mathbf{W}^T = \{ W_1, W_2, W_3, W_4 \} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= g_i g_k \\ W_2 &= h_j h_k - g_j g_k (\omega_j + \omega_k)^2 - 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k g_j g_k - h_i g_k - h_k g_j \\ W_3 &= g_j g_k \omega_j^2 \omega_k^2 - h_j h_k (\omega_j^2 + \omega_k^2) + 4\xi_j \xi_k \omega_j \omega_k h_j h_k \\ &\quad + (h_j g_k - h_k g_j) (2\xi_j \omega_k^2 - 2\xi_k \omega_k \omega_j^2) \\ W_4 &= h_j h_k \omega_j^2 \omega_k^2 \end{aligned} \quad (5)$$