

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*Département de Génie Civil*

**THESE DE MAGISTER**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE المكتبة  
Presentée par  
Ecole Nationale Polytechnique  
**BOUDAA Souad**

*Ingénieur d'Etat en Génie Civil  
de l'Ecole Nationale Polytechnique*

*Pour obtenir le titre de*

**MAGISTER**

*en Génie Civil*

*THEME*

**INVESTIGATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT NON  
LINEAIRE DES PROBLEMES DE CONTACT FRICTIONNEL  
PAR UNE TECHNIQUE DE COUPLAGE ELEMENTS DE  
FRONTIERE FINIS - ELEMENTS DE FRONTIERE INFINIS**

*Soutenue publiquement le 17 juin 1998 devant le jury d'examen:*

Président	: Mr A. BALI	Professeur	E.N.P
Rapporteurs	: Mr M. DEMIDEM	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr T. MESSAFER	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs:	Mr M.K. BERRAH	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr Y. BELKACEMI	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr R. MANAA	Chargé de Cours	E.N.P

## ملخص

تشكل عملية تمثيل شروط التماس في مسائل التأثير المتبادل بين التربة و الهيكل، و إوالة الصخور طور متمم في التحليل الكلي للهيكل المدروس من جهة، و من جهة أخرى، هدف يسعى إلى التعبير الأمثل عن سلوكه الحقيقي، بدونها لا نأمل نتائج مرضية.

في هذا الإطار، استعملت طريقة عناصر الحدود لدراسة مسائل التماس بالإحتكاك ذات مجالات مختصة بإمتداد إلى ما لا نهاية. لهذا الغرض، استعملت عناصر الحدود الغير المنتهية في صياغة معادلات التكامل في الحدود لتمثيل سلوك الكتلة في ما لا نهاية، مع الأخذ بعين الإعتبار احتمال اللدونة تحت مستوى معين من الحمولة. لهذا نقتراح نظام عد للإحتكاك-إنفصال الحد الفاصل مقرون بمرونة و لدونة الكتلة، و قد كانت نتائج النموذج على الأمثلة المدروسة مقنعة.

## RESUME

La modélisation des conditions de contact dans certains problèmes de l'interaction sol-structure et de la mécanique des roches, constitue une phase intégrante dans l'analyse globale de la structure étudiée d'une part, et d'autre part, un objectif qui vise à refléter au mieux son comportement réel sans quoi, on ne saurait prétendre à des résultats satisfaisants.

Dans ce cadre, la méthode des éléments de frontière a été utilisée dans l'étude des problèmes de contact avec frottement ayant des domaines caractérisés par une extension à l'infini. A ce titre, les éléments de frontière infinis ont été utilisés dans la formulation des équations intégrales aux frontières pour modéliser le comportement du massif à l'infini, en prenant en considération la possibilité d'une plastification sous un certain niveau de chargement.

Un algorithme de frottement-décollement d'interface couplé avec l'élastoplasticité du massif est alors présenté. Les performances du modèle sur les exemples traités sont concluantes.

## ABSTRACT

The modelisation of contact conditions in certain soil-structure interaction and rock mechanic problems constitutes an intergrant phasis in the global analysis of the studied structure in one hand, and in the other, an objective which aims to reflect at best its real behaviour otherwise, we can't intend satisfactory results.

In this context, the boundary element method has been used for the study of contact problems with friction whose domains are characterized by an infinite extension. So, infinite boundary elements has been used to model the behaviour of the massive at infinite, taking into account the possibility of a plastification under a certain level of loading.

An algorithm of friction-separation of the interface coupled with the elastoplasticity of the massive is presented. The performances of the model over the exemples traitéd are conclusive.

## *Dédicaces*

À ma mère, à mon père auxquels je dois tout,  
à mes seconds parents pour leur générosité exemplaire,  
à mon fiancé, mes frères et soeurs.

*Pouad...*

## **REMERCIEMENTS**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

A l'issue de ce travail, j'exprime mes remerciements à Monsieur Tahar MESSAFER Directeur de thèse pour avoir bien voulu proposer le sujet qui a fait l'objet de mon travail de Magister.

J'exprime aussi ma profonde gratitude et ma reconnaissance à Monsieur Mustapha DEMIDEM, Chargé de Cours à l'Ecole Nationale Polytechnique et co-Directeur de thèse, pour avoir accepté de me diriger, ainsi que pour son soutien et son aide efficaces et éclairés qui ont permis la réalisation de ce travail.

Je tiens également à remercier vivement et à exprimer ma reconnaissance, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter d'examiner et de juger ce travail, à :

Monsieur Abderahim BALI, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique et président du jury de soutenance.

Monsieur Mounir Khaled BERRAH, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique.

Monsieur Yacine BELKACEMI, Chargé de Cours à l'Ecole Nationale Polytechnique.

Monsieur Réda MANAA, Chargé de Cours à l'Ecole Nationale Polytechnique.

J'adresse également mes remerciements les plus chaleureux et exprime ma gratitude au personnel de la bibliothèque, particulièrement à Mesdemoiselles Sabina OUAZIA, Houria BENRAMDANI, Malika MEZNI et Ghania ALI SAHRAOUI pour l'immense service qu'elles m'ont rendu en me permettant, si gentilement, de consulter toute la documentation disponible au niveau de la bibliothèque.

Je ne saurais oublier de remercier sincèrement et chaleureusement mes amis pour leur disponibilité à m'aider et pour leur soutien moral, particulièrement à Mesdemoiselles Fouzia DJAALALI, Cherifa CHERFA et Nalma LEBIB.

Aussi, je remercie vivement les responsables et personnel du centre de calcul de l'E.N.P. pour leur constante serviabilité.

De même, je remercie les post-graduants de la D.E.R. pour l'ambiance de travail favorable et pour leur disponibilité à me venir en aide.

Dans le souci de n'oublier personne, que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

<b>Introduction générale</b> . . . . .	1
<b>Chapitre I: Recherche bibliographique</b> . . . . .	4
I.1. Introduction . . . . .	4
I.2. Etudes rencontrées sur le problème de contact et sur le couplage avec les éléments de frontière infinis . . . . .	4
I.3. Etudes rencontrées sur le comportement non-linéaire des matériaux . . . . .	7
<b>Chapitre II: Analyse des problèmes de contact adhérent par la méthode des équations intégrales aux frontières.</b> . . . . .	9
II.1. Introduction . . . . .	9
II.2. Formulation théorique de la méthode . . . . .	10
II.2.1. Equations Caractéristiques et Conditions aux limites . . . . .	10
II.2.2. Solution Fondamentale . . . . .	11
II.2.3. Equation Intégrale . . . . .	12
II.2.3.1. Méthodes Directes et Indirectes . . . . .	12
II.2.3.2. Identité de Somigliana . . . . .	13
II.2.3.3. Equation Intégrale de Frontière . . . . .	14
II.3. Traitement Numérique pour un Problème Homogène . . . . .	15
II.3.1. Discrétisation de la frontière . . . . .	15
II.3.2. Forme Discrétisée de l'Equation Intégrale de Frontière . . . . .	17
II.3.3. Calcul des Intégrales . . . . .	17
II.3.3.1. Les Intégrales Régulières . . . . .	18
II.3.3.2. Les Intégrales Singulières . . . . .	18
II.3.3.3. Déplacement de Corps Rigide . . . . .	18
II.3.4. Construction du Système d'Equations . . . . .	19
II.3.5. Calcul des Contraintes et des Déplacements aux Points Intérieurs . . . . .	19
II.3.6. Calcul des Contraintes et des Déplacements sur les Points de la Frontière . . . . .	20
II.4. Extension du code uni-zone à la résolution des problèmes multizones avec adhérence parfaite . . . . .	21
II.4.1. Principe adopté . . . . .	22
II.4.2. Organisation du Programme multizone . . . . .	23
II.4.2.1. Ecriture de l'équation intégrale de frontière par zone . . . . .	23
II.4.2.2. Prise en compte des conditions imposées à la frontière . . . . .	23
II.4.2.3. Prise en compte des conditions de continuité et d'équilibre de l'interface - Interfaçage direct . . . . .	24
II.4.2.4. Résolution du système linéaire . . . . .	24
II.4.2.5. Calcul aux points intérieurs . . . . .	24
II.4.3. Algorithme du programme multizone . . . . .	25
<b>Chapitre III: Analyse des problèmes de contact non-parfaitement adhérent par la méthode des équations intégrales aux frontières</b> . . . . .	28
III.1. Introduction . . . . .	28
III.2. Types d'éléments de contact utilisés . . . . .	28
III.3. Etude dans le cas de l'interface en contact libre . . . . .	29
III.3.1. La surface de contact dépend du taux de charge . . . . .	29
III.3.2. La surface de contact ne dépend pas du	

	taux de charge: . . . . .	
III.3.3.	Algorithmie . . . . .	
III.3.3.1.	Présentation générale de la méthode . . . . .	
III.3.3.2.	Choix d'une hypothèse de départ . . . . .	
III.3.3.3.	Collocation et construction du système primaire . . . . .	
III.3.3.4.	Conditions de contact à l'interface . . . . .	
III.3.3.5.	Analyse des tensions d'interface et critères de convergence . . . . .	
III.3.3.6.	Modification des hypothèses . . . . .	
<b>Chapitre IV: Formulation de l'élément de frontière infini pour des problèmes à extension non bornée . . . . .</b>		
IV.1.	Position du problème . . . . .	
IV.2.	Etude de la convergence des intégrales . . . . .	
IV.2.1.	Domaine d'intégration . . . . .	
IV.2.2.	Convergence des intégrales . . . . .	
IV.2.3.	Comportement des fonctions déplacement et tension . . . . .	
IV.3.	Traitement numérique . . . . .	
IV.3.1.	Définition des points de contrôle et fonctions de forme . . . . .	
IV.3.1.1.	Les segments finis "classiques" . . . . .	
IV.3.1.2.	Les segments semi-infinis . . . . .	
IV.3.2.	Points de collocation . . . . .	
IV.3.3.	Intégration . . . . .	
IV.3.3.1.	Les segments de type "classique" ( $n^{\circ} 1 \text{ à } \frac{N-5}{2}$ ) . . . . .	
IV.3.3.2.	Les segments "extrêmes" ( $n^{\circ} \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}$ ) . . . . .	
IV.3.3.3.	Les segments "semi-infinis" proprement dits . . . . .	
IV.3.4.	Déplacement de corps rigide . . . . .	
IV.4.	Conclusion . . . . .	
<b>Chapitre V: Formulation de la méthode des équations intégrales aux frontières pour l'analyse non-linéaire du comportement matériel . . . . .</b>		
V.1.	Introduction . . . . .	
V.2.	Quelques modèles inélastiques . . . . .	
V.2.1.	Comportement élastique parfaitement plastique . . . . .	
V.2.2.	Ecrouissage d'un matériau . . . . .	
V.2.3.	Comportement de non-tension . . . . .	
V.3.	Equations différentielles gouvernantes . . . . .	
V.4.	Formulation intégrale de frontière . . . . .	
V.5.	Calcul aux points internes . . . . .	
V.6.	Formulations éléments de frontière alternatives . . . . .	
V.6.1.	Formulation en déformation initiale . . . . .	
V.6.2.	Formulation en contrainte initiale . . . . .	
V.6.3.	Formulation en tractions et en forces de volume fictives . . . . .	
V.7.	Choix et justification de la formulation en contrainte initiale . . . . .	
V.8.	Discrétisation des équations intégrales . . . . .	
V.9.	Intégrations sur les cellules internes . . . . .	

V.10. Relations contraintes-déformations élastoplastiques générales . . . . .	59
V.11. Technique itérative incrémentale en contrainte initiale	61
* Algorithmie . . . . .	62
<b>Chapitre VI: Analyse du problème de contact avec prise en compte du comportement élastoplastique du massif . . . . .</b>	<b>64</b>
VI.1. Introduction . . . . .	64
VI.2. Problème de contact couplé avec l'élastoplasticité du massif . . . . .	64
VI.2.1. Equation intégrale aux frontières incrémentale pour un problème de contact . . . . .	65
VI.2.2. Relations incrémentales pour les modes de contact . . . . .	66
VI.2.3. Détermination du pas de charge . . . . .	67
VI.3. Processus de résolution itératif incrémental . . . . .	68
<b>Chapitre VII: Applications . . . . .</b>	<b>73</b>
VII.1. Exemple 1: Inclusion circulaire dans une plaque infinie sollicitée en traction uniaxiale . . . . .	73
VII.1.1. Validation du modèle . . . . .	75
VII.1.2. Influence du coefficient de frottement de l'interface . . . . .	76
VII.1.3. Répartition des contraintes périphériques . . . . .	77
VII.2. Exemple 2: Inclusion circulaire dans une plaque infinie sollicitée en compression uniaxiale . . . . .	78
VII.2.1. Influence du coefficient de frottement sur le comportement de l'interface . . . . .	78
VII.2.1.1. Répartition des différents états d'interface . . . . .	81
VII.2.1.2. Contraintes radiales sur l'interface . . . . .	81
VII.2.1.3. Contraintes périphériques dans la plaque le long de l'interface . . . . .	81
VII.2.1.4. Contraintes périphériques dans l'inclusion le long de l'interface . . . . .	82
VII.2.2. Influence du rapport des rigidités plaque-inclusion . . . . .	82
Conclusions . . . . .	83
VII.3. Traitement des domaines à extension non-bornée par éléments de frontière infinis . . . . .	84
VII.3.1. Exemple 1: Quart d'un tunnel. Comparaison des résultats dans le cas du problème à contour ouvert avec ceux du contour fermé . . . . .	84
VII.3.1.1. Résultats et interprétations . . . . .	87
VII.3.1.2. Tests de convergence . . . . .	88
VII.3.2. Exemple 2: Charge concentrée sur un sol . . . . .	90
VII.3.2.1. Résultats et interprétations . . . . .	91
VII.3.2.2. Emplacement de l'élément de frontière infini . . . . .	92
VII.3.2.3. Répartition des contraintes . . . . .	93
VII.3.3. Exemple 3: Charge répartie sur un sol . . . . .	94
VII.3.3.1. Résultats et interprétations . . . . .	95
VII.3.3.2. Tests de convergence . . . . .	96

Sommaire

VII.3.3.3. Répartition des contraintes . . . . . 9

VII.4. Etude d'un pieu sollicité par une charge horizontale . 9

    VII.4.1. Calcul des contraintes et des déplacements dans  
            le cas élastique linéaire . . . . . 9

    VII.4.2. Etude de l'effet de forme . . . . . 10

    VII.4.3. Etude de l'effet de la plasticité du massif . . 10

        VII.4.3.1. Estimation de la réaction ultime . . . . 10

        VII.4.3.2. Effet de la plasticité au voisinage  
                du pieu . . . . . 10

        VII.4.3.3. Influence de la qualité de l'interface . 10

VII.5. Charge concentrée sur une fondation rigide reposant sur  
    un sol élastoplastique . . . . . 10

    \* Résultats et interprétations . . . . . 11

VII.6. Charge répartie sur une fondation rigide reposant sur  
    un sol élastoplastique . . . . . 11

    \* Résultats et interprétations . . . . . 11

Conclusion générale . . . . . 11

Annexe 1 . . . . . 12

Annexe 2 . . . . . 12

Annexe 3 . . . . . 12

Références bibliographiques . . . . . 12



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## **Introduction Générale**

La complexité du mécanisme des ouvrages de Génie Civil provient en grande partie de la juxtaposition d'éléments de construction dont les matériaux constitutifs sont très différents les uns des autres. Si le comportement d'une partie homogène est de mieux en mieux cerné grâce à des études expérimentales et des modélisations numériques élaborées, le projecteur se trouve souvent démuni lorsqu'il doit lier, au stade du calcul de la sécurité, ces différentes parties entre elles, et il procède alors à leur étude séparément, en leur imposant des conditions aux limites peu réalistes.

Si l'on recherche les points faibles de la structure, on constate qu'ils sont localisés, d'une part au niveau des liaisons entre matériaux, et d'autre part au voisinage immédiat des singularités de forme, telles que les angles; cavités ou fissures sièges de forte concentration de contraintes.

La modélisation des conditions de contact dans certains problèmes de l'interaction sol-structure et de la mécanique des roches, constitue donc une phase intégrante dans l'analyse globale de la structure étudiée d'une part, et d'autre part, un objectif qui vise à refléter au mieux son comportement réel, sans quoi, on ne saurait prétendre à des résultats satisfaisants.

Au cours de ces dernières décennies, ces problèmes ont pu être résolus grâce à l'apparition des supercalculateurs et à la maîtrise des méthodes numériques. Parmi ces méthodes, on trouve en premier lieu la méthode des éléments finis, puis celle des éléments de frontière.

Cette dernière consiste à transformer les équations d'état, qui décrivent le comportement des fonctions inconnues à l'intérieur et sur le contour d'un domaine, en équation intégrale reliant les inconnues et certaines de leurs dérivées sur la surface. La résolution de cette équation permet d'obtenir les déplacements et les tensions sur la frontière. Une simple intégration sur la surface permet alors de connaître les déplacements et les contraintes en tout point intérieur du domaine.

Un algorithme d'éléments de frontière résolvant les problèmes de contact bidimensionnels avec frottement est alors présenté. La procédure de résolution utilise les fonctions de forme de l'élément afin de distribuer la géométrie, les tractions et les déplacements sur chaque élément de contact. Les conditions

de contact sont appliquées sur chaque noeud de la zone concernée. Les équations, celles qui décrivent la mise en équation d'un problème traité par la méthode des équations intégrales concernant des corps en contact, sont couplées par l'utilisation des conditions aux limites de type contact au niveau de l'interface, sans qu'aucune variable supplémentaire ne soit introduite dans la matrice solution.

Par ailleurs, et en vue d'appliquer l'algorithme établi à la résolution de problèmes d'interaction sol-structure, les éléments de frontière infinis sont introduits dans la formulation des équations intégrales aux frontières pour modéliser le comportement du massif lorsque les frontières s'étendent à l'infini. On évite ainsi la troncature du maillage éléments de frontière à une très grande distance, et une meilleure précision des résultats est alors obtenue.

Le cas de comportement élastique qui se justifie dans un grand nombre de problèmes doit être abandonné lorsque le développement de zones plastiques est important au voisinage d'une singularité. Donc, la mise au point d'un algorithme de frottement-décollement d'interface couplé avec l'élastoplasticité du massif s'impose.

Ainsi, l'objet du présent travail est de montrer les possibilités offertes par la méthode des équations intégrales aux frontières dans le cadre de l'étude des problèmes de contact avec frottement, ayant des domaines caractérisés par des extensions non bornées. A ce titre, les éléments de frontière infinis ont été utilisés dans la formulation des équations intégrales aux frontières pour simuler le comportement du massif à l'infini. Une éventuelle plastification du massif sous un certain niveau de chargement est prise en considération.

La présente thèse comprend plusieurs chapitres:

Dans le premier chapitre, on fait un tour d'horizon sur les différentes techniques qui ont été utilisées dans ce contexte à travers les diverses références bibliographiques citées.

Dans le deuxième chapitre, on présente "l'outil équations intégrales aux frontières", et on montre le développement du code uni-zone établi pour la résolution des problèmes homogènes, en vue de l'étude du problème de contact avec la condition d'adhérence parfaite entre les différentes zones.

Dans le troisième chapitre, on fait une extension des intégrales aux frontières aux traitements des interfaces non parfaitement adhérentes, l'interface de contact est alors régie par la loi de frottement de type Coulomb.

Dans le quatrième chapitre, on présente la formulation des éléments de frontière infinis. Ces éléments sont utilisés pour modéliser les extensions non bornées.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation de la formulation équations intégrales pour l'analyse non linéaire du comportement matériel.

Dans le sixième chapitre, on procède au couplage du problème de contact avec l'élastoplasticité du massif. Un processus de résolution itératif incrémental est alors présenté.

L'ensemble de ces développements trouve un intéressant champ d'application dans le septième chapitre, nous étudions alors le problème de contact d'une inclusion dans une plaque infinie avec deux cas différents de chargement: en traction et en compression uniaxiales.

L'introduction des éléments de frontière infinis dans le code de calcul est validée par le biais de trois exemples, à savoir: le problème d'un tunnel soumis à une pression uniforme; celui d'un sol sollicité par une charge concentrée; puis par une charge répartie.

L'efficacité de l'algorithme du contact couplé avec l'élastoplasticité du massif est montré à travers l'exemple de l'interaction sol-pieu sollicité par une charge horizontale, ainsi que celui de la fondation rigide sur un sol élastoplastique pour les deux cas de charges: concentrée et répartie.

## **Chapitre I**

# **Recherche Bibliographique**

### *1.1. Introduction:*

La simulation des conditions de contact est un problème très intéressant de la mécanique des sols et de la mécanique des roches. Dans le cas d'un problème de contact entre deux ou plusieurs couches différentes de sol (interface d'un remblai et du sol de fondation) par exemple, on ne peut se permettre de négliger le décollement et le frottement sur l'interface de contact. Ainsi, avec l'avènement des grands calculateurs et le développement des méthodes numériques, plusieurs chercheurs ont mis au point des algorithmes permettant la résolution des problèmes de contact.

L'introduction des éléments de frontière infinis s'avère indispensable pour la modélisation des problèmes à extension infinie tels que ceux rencontrés en géotechnique. La difficulté de représenter le domaine à un champ lointain est ainsi soulevée.

La méthode des éléments de frontière a été appliquée à un large champ de problèmes de contact de corps élastiques avec frottement. L'extension aux matériaux élastoplastiques obéissant à différents critères de rupture avec leur règles d'écoulement a été aussi étudiée et discutée par plusieurs auteurs.

On donne ci après un aperçu sur les principaux travaux rencontrés dans la littérature.

### *1.2. Etudes rencontrées sur le problème de contact et sur le couplage avec les éléments de frontière infinis:*

Dans les problèmes d'interaction sol-structure, sol-sol la charge est transmise par contact entre les différentes composantes. La connaissance des contraintes et des déformations développées le long du contact entre ces composantes s'avère d'une importance pratique considérable.

La méthode des éléments finis a été utilisée intensivement dans la résolution du problème de contact.

L'une de ses premières applications a été celle de Goodman et al.<sup>32</sup> (1968): ils ont simulé le contact par un élément de massif spécial de longueur  $L$  et d'épaisseur nulle. Cet élément est muni de deux rigidités normale  $K_n$  et de cisaillement  $K_s$ , ce qui leur permet de mieux simuler les fissures des roches.

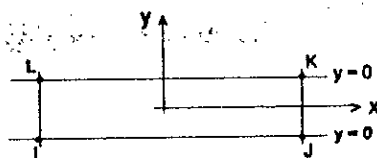


Figure 1.1: Élément de contact de Goodman et al.

On cite aussi le travail de Wilson et Parson<sup>54</sup> (1970): Ces derniers ont utilisé une approche élément fini indirecte dans laquelle les conditions de contact ont été formulées par des équations auxiliaires.

Plus tard, Chan et Tuba<sup>20,21</sup> (1971) ont étendu cette méthode aux problèmes de contact avec frottement. Ils ont exposé la théorie et ont fait la validation de leur approche.

Les travaux de Goodman et al.<sup>32</sup> ont été complétés par Goodman et Dubois<sup>30</sup> (1972) par une loi de dilatance qui permet de bien représenter quelques types de fracture fermées des roches.

Une formulation basée sur les matrices de flexibilité a été étudiée par Francavilla et Zienkiewicz<sup>25</sup> (1975): Elle permet de résoudre différents problèmes de contact, néanmoins, elle requiert une connaissance a priori sur le type de contact.

Enfin, Goodman et John<sup>31</sup> (1977) ont développé le modèle de Goodman et Dubois<sup>30</sup> moyennant la notion de rigidité rotationnelle, évaluée en considérant le moment de rotation quand les noeuds I et J sont fixés et que la force est appliquée au noeud K ou L.

Hungr et Coates<sup>33</sup> (1978), en se servant du modèle de Goodman et al.<sup>31,32</sup> (1968,1977), ont étudié les déformations des joints et leurs relations avec le tassement des fondations sur du rocher fracturé.

Les plus récentes applications de la méthode des éléments finis aux problèmes de contact peuvent être classées en trois grandes catégories d'approches:

- La méthode du multiplicateur de Lagrange (Chen et Tsai<sup>22</sup>).
- La méthode des pénalités (Wriggers et al.<sup>55</sup>).
- La méthode mixte ou hybride (Pian et Kubomura<sup>45</sup>).

Il a été démontré pour un problème de contact considéré du point de vue numérique que le recours à une procédure solution de type frontière telle que la méthode des éléments de frontière (au lieu de celle de type domaine comme la méthode des éléments finis) s'avère plus commode pour l'analyse de ce type de problème. Ceci vient du fait que le contact en lui-même se trouve sur la frontière. Un autre avantage de l'analyse par éléments de frontière est

que les déplacements ainsi que les tractions sont obtenus directement comme une part de la solution.

Les premières applications de la méthode des éléments de frontière aux problèmes de contact ont été l'objet des études de Anderson<sup>1,2,3</sup> (1981,1982).

Plus tard, Paris et Garrido<sup>42</sup> (1985) et Karami<sup>35</sup> (1987) ont utilisé des éléments quadratiques continus et discontinus pour la résolution des problèmes de contact.

D'autres formulations de la méthode des équations intégrales pour les problèmes de contact ont été établies. A ce titre, Yagawa et al.<sup>56</sup> (1980) ont introduit une approche par fonction de pénalité pour l'analyse en mécanique de rupture.

Takahashi<sup>48</sup> (1991) a utilisé une approche par flexibilité pour résoudre le problème du contact élastique par la méthode des éléments de frontière.

Kwak et Lee<sup>37</sup> (1988) ont établi une formulation complémentaire du problème de contact frictionnel bidimensionnel par programmation mathématique.

Paris et Garrido<sup>43</sup> (1989) ont présenté une technique élément de frontière incrémentale permettant de traiter le problème de contact en présence de frottement. Les auteurs ont utilisés des éléments discontinus dans le but de rendre facile les applications des conditions de frontière et de contact.

Man et al.<sup>38</sup> (1993) ont traité le problème de contact avec frottement en considérant une modélisation spéciale permettant d'améliorer la précision des résultats. Ils ont aussi établi la technique de la charge incrémentale permettant de résoudre les problèmes de contact frictionnels<sup>39</sup>.

Par la suite, Paris et al.<sup>41</sup> (1995) ont proposé une procédure incrémentale itérative permettant de résoudre les problèmes de contact bidimensionnels sans frottement. L'interface de contact n'étant pas nécessairement discrétisée de la même façon pour les deux corps en contact.

Lorsque les frontières du massif s'étendent à l'infini, une nouvelle approche éléments de frontière a été établie: il s'agit là de la notion d'éléments de frontière infinis.

Watson<sup>53</sup> (1979) a introduit pour la première fois la méthodologie d'éléments infinis dans la formulation équations intégrales de frontière en élastostatique.

Plus tard, Beer et al.<sup>12</sup> (1987) ont présenté une méthode d'analyse efficace de l'état de contraintes et de déplacements tridimensionnel dans la roche ou la masse de sol, induit par les opérations de 'tunnelling'. La méthode



des éléments de frontière et le couplage éléments finis éléments de frontière ont été utilisés. Des éléments de frontière infinis spéciaux leur ont permis de modéliser les frontières à extension infinie.

Beer<sup>8</sup> (1983) a examiné l'influence de la troncature du maillage dans les domaines infinis sur la précision de la solution, il a proposé une méthode plus économique et plus précise pour l'analyse de tels problèmes.

Beer<sup>9</sup> (1983) a discuté aussi l'efficacité de l'implémentation d'une analyse combinée éléments finis-éléments de frontière. Une comparaison des résultats fournis par la méthode des éléments finis, par la méthode des éléments de frontière et par la méthode couplée a été faite.

Beer et Swoboda<sup>10</sup> (1987) ont discuté l'efficacité de l'implémentation de la méthode des éléments de frontière et des méthodes de couplage éléments finis éléments de frontière finis et infinis dans les problèmes de géotechnique.

Beer et Watson<sup>11</sup> (1989) ont proposé un article dans lequel ils ont donné le fond théorique et l'implémentation des éléments de frontière infinis avec beaucoup plus de détails qu'en référence<sup>53</sup>.

Bettess<sup>13</sup> (1992) a étudié les éléments infinis en conjonction avec les éléments finis pour simuler les frontières infinies. Des idées similaires ont trouvées leurs applications dans la méthode des éléments de frontière.

### *1.3. Etudes rencontrées sur le comportement non linéaire des matériaux:*

Lorsque le développement de zones plastiques devient important, on ne peut se permettre de négliger le comportement non linéaire du massif qui prend naissance généralement au voisinage des singularités. Plusieurs modèles ont été établis dans ce sens.

Desai et al.<sup>24</sup> (1984) ont traité le problème d'interaction sol-structure par des éléments solides de faibles épaisseurs en utilisant un modèle constitutif spécial.

Carol et al.<sup>16</sup> (1985) ont établi un nouveau modèle de joint élastoplastique.

Aubry et al.<sup>4</sup> (1985) ont traité le problème d'interaction sol structure sous une forme très générale.

Gens et al.<sup>27</sup> (1988), dans leur article, des éléments d'interface d'épaisseur nulle sont décrits. Une formulation éléments finis isoparamétriques est appliquée pour l'analyse bi et tridimensionnelle. Le comportement du matériau est supposé élastoplastique.

Les mêmes auteurs<sup>28</sup> (1989) ont présenté un article dans lequel une loi constitutive pour décrire le comportement mécanique des joints et des

interfaces a été établie.

Gens et al.<sup>29</sup> (1990) ont établi une loi constitutive élastoplastique permettant de décrire le comportement des joints rocheux.

Cescetto et Charlier<sup>18</sup> (1993) ont établi une approche originale pour la modélisation du contact unilatéral par la méthode des éléments finis.

Martin et Aliabadi<sup>40</sup> (1995) ont présenté une technique élément de frontière incrémentale pour les problèmes de contact élastoplastiques non conformes avec frottement moyennant une formulation déformation initiale. Le matériau est supposé obéir au critère de Von-Mises.

Qing-Hua Du et Zhen-Han Yao<sup>46</sup> (1990) dans leur article ont résumé brièvement la formulation de la méthode des éléments de frontière pour l'analyse des problèmes élastiques et élasto-plastiques, ils ont aussi introduit la méthode de 'subregening' en éléments de frontière et les techniques de couplage éléments de frontière-éléments finis.

Venturini et Brebbia<sup>51</sup> (1994) ont appliqué la méthode des équations intégrales de frontière aux problèmes de géotechnique tenant compte de la non-linéarité du comportement du matériau. Les résultats qu'ils ont obtenus, ont été comparés aux solutions théoriques et éléments finis.

## **Chapitre II**

# **Analyse des Problèmes de Contact Adhérent par la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières**

### II.1. Introduction:

Au cours des trois dernières décennies, la méthode des éléments finis a montré son efficacité pour résoudre les problèmes rencontrés par les ingénieurs dans les disciplines aussi variées que l'élasticité, la plasticité, la mécanique des fluides, les vibrations etc...

Néanmoins cette méthode présente un certain nombre d'inconvénients:

- la préparation et la vérification des données peuvent nécessiter un travail long et fastidieux,

- un problème se pose de façon quasi systématique en géotechnique et ne reçoit pas de réponse tout à fait satisfaisante, il s'agit là de la représentation des zones infinies. Le plus souvent l'infini est repoussé à une distance économiquement raisonnable du modèle où les chargements sont supposés n'introduire aucune perturbation. De surcroît, il est nécessaire de procéder à une discrétisation de l'intérieur du domaine.

La méthode des équations intégrales de frontière nous est parue comme pouvant répondre à ces limitations, grâce à ses différents avantages à savoir:

- la facilité de la conception des maillages, de la saisie des données géométriques d'un problème et des modifications de géométrie, la discrétisation ne portant que sur la frontière du domaine, en effet, l'utilisation d'une solution fondamentale, satisfaisant les équations de base à l'intérieur du domaine permet une résolution du problème sur la frontière, ce qui rend possible une définition de la géométrie en ne discrétisant que les frontières des zones. Ainsi, il est possible de connaître les contraintes et les déplacements en un point  $P$  intérieur au domaine par simple intégration de fonction d'influence entre  $P$  et les points de la frontière.

- le nombre d'inconnues mises en jeu est réduit, puisque celles-ci sont ramenées sur la frontière uniquement, d'où un gain de temps de calcul et d'occupation en mémoire.

- la précision des résultats est également meilleur, puisque les erreurs de discrétisation sont confinées à la frontière.

- son excellente performance pour des problèmes dont les frontières sont à l'infini.

Par ailleurs, la méthode des équations intégrales de frontières présente certains inconvénients:

- elle ne permet pas l'étude de matériaux dont les propriétés mécaniques varient de manière continue dans l'espace, la solution fondamentale n'étant pas disponible dans ce cas,

- en phase de mise au point des programmes, le contrôle des résultats

intermédiaires est plus complexe, en raison de systèmes fortement couplés, se traduisant par des matrices pleines. Cette difficulté est moindre en éléments finis, où l'on rencontre des matrices bandes. Les techniques de résolution de systèmes diagonaux habituellement utilisées en éléments finis sont ici inutilisables, mais cet inconvénient est compensé par la réduction du nombre d'inconnues,

- enfin, pour certaines intégrations, on rencontre des singularités qui sont particulièrement délicates à traiter.

## II.2. Formulation théorique de la méthode:

### II.2.1. Equations Caractéristiques et Conditions aux Limites:

En l'absence de forces de volume, l'équilibre d'un élément infiniment petit du domaine  $\Omega$  (figure 2.1) se traduit par la relation suivante:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.1)$$

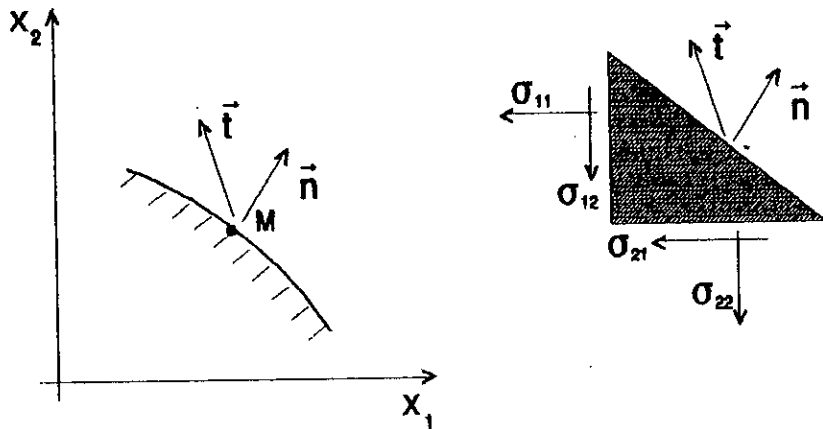


Figure 2.1: Equation d'équilibre sur un bord.

L'équation d'équilibre, traduite en termes de déplacements n'est autre que l'équation de Navier:

$$(\lambda + \mu) u_{j,i} + \mu u_{i,j} = 0 \quad (2.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  représentent les coefficients de Lamé.

Les conditions aux limites appliquées sur la frontière  $\Gamma$  peuvent être de deux types:

- déplacement imposé:  $u_i = \bar{u}_i$  sur  $\Gamma_u$
- tension imposée:  $t_i = \bar{t}_i$  sur  $\Gamma_t$

Les composantes du vecteur tension  $\vec{t}(t_1, t_2)$  s'exerçant en un point  $M$  de la surface de normale sortante  $\vec{n}$  s'expriment en fonction du tenseur de contraintes en ce point par:  $t_i = \sigma_{ij} n_j$

d'où en fonction des déplacements:

$$t_i = \lambda u_{k,k} n_i + \mu (u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) \quad (2.3)$$

Tout problème d'élasticité consiste donc à rechercher les déplacements  $u_i$  satisfaisant à la fois l'équation de Navier dans  $\Omega$  et les conditions aux limites sur  $\Gamma$ .

### II.2.2. Solution Fondamentale:

Le déplacement en  $P$  dû à une force unitaire  $\vec{e}(e_1, e_2)$  agissant en  $Q$  (figure 2.2) s'écrit:

$$u_i(P) = U_{ij}(P, Q) e_j(Q) \quad (2.4)$$

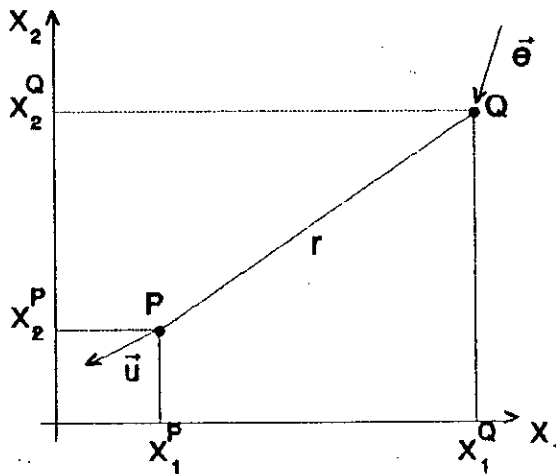


Figure 2.2: Influence d'une force concentrée appliquée en un point sur les déplacements d'un autre point.

expression dans laquelle  $U_{ij}(P, Q)$  représente le tenseur de Kelvin (ou encore tenseur de Green):

$$U_{ij}(P, Q) = U_{ij}(\vec{OP} - \vec{OQ}) = \frac{1 + \nu'}{4\pi E'(1 - \nu')} \left[ (3 - 4\nu') \delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_j^P - x_j^Q)}{r^2} \right] \quad (2.5)$$

avec:  $r^2 = (x_i^P - x_i^Q)^2$   
 $v' = v$  et  $E' = E$  en déformation plane  
 $v' = \frac{v}{1+v}$  et  $E' = E(1-v^2)$  en contrainte plane

L'expression de la tension  $\vec{i}(P)$ , créée en  $P$  sur une facette de normale extérieure  $\vec{n}$  par la force  $\vec{e}(Q)$  dérive de l'équation (2.3):

$$t_i(P) = T_{ij}(P, Q) e_j(Q) \quad (2.6)$$

avec:

$$T_{ij}(P, Q) = T_{ij}(\vec{OP} - \vec{OQ})$$

$$= \frac{1}{4\pi(1-v')r} \left[ n_k(P) \frac{x_k^P - x_k^Q}{r} \left\{ (1-2v') \delta_{ij} + 2 \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_j^P - x_j^Q)}{r^2} \right\} \right. \\ \left. + (1-2v') \left\{ n_i(P) \frac{x_j^P - x_j^Q}{r} - n_j(P) \frac{x_i^P - x_i^Q}{r} \right\} \right] \quad (2.7)$$

### II.2.3. Equation Intégrale:

#### II.2.3.1. Méthodes Directes et Indirectes:

Nous considérons maintenant un domaine  $\Omega$ . Le déplacement en un point peut s'obtenir en intégrant la solution fondamentale, pour des sollicitations appliquées sur la frontière du domaine. Nous distinguons deux catégories de méthodes: les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Dans les méthodes indirectes, les inconnues à la frontière sont des sources fictives n'ayant pas de signification physique, mais dont la connaissance permet de déduire les contraintes et déplacements dans le domaine par simple intégration sur le contour.

Dans les méthodes directes, les inconnues à la frontière sont les inconnues physiques du problème, c'est à dire les tensions et déplacements. C'est ce dernier type de problème que nous avons retenu, car il se prête mieux à l'étude d'interfaces dotées d'un comportement complexe. D'autre part la méthode directe présente, à nos yeux, l'avantage de faire intervenir des inconnues ayant une signification physique et donc d'être plus compréhensible.

II.2.3.2. Identité de Somigliana:

Si les forces de volume sont nulles, nous écrivons l'identité de Somigliana<sup>14</sup>, exprimant les déplacements en un point intérieur du domaine en fonction uniquement des déplacements et des tensions à la surface comme suit:

$$u_j(P) = \int_{\Gamma} U_{yj}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{yj}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.8)$$

Par dérivation de l'équation (2.8) suivant la loi de Hooke, l'obtention des contraintes en un point intérieur de  $\Omega$ , en fonctions des déplacements et tensions à la frontière est immédiate:

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} F_{ijk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.9)$$

avec les tenseurs:

$$D_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu) \left\{ \delta_{ij} \frac{(x_k^P - x_k^Q)}{r} - \delta_{ik} \frac{(x_j^P - x_j^Q)}{r} - \delta_{jk} \frac{(x_i^P - x_i^Q)}{r} \right\} - 2 \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_j^P - x_j^Q)(x_k^P - x_k^Q)}{r^3} \right] \quad (2.10)$$

$$F_{ijk}(P, Q) = \frac{E'}{4\pi(1-\nu^2)r^2} \left\{ n_s(Q) \frac{(x_s^P - x_s^Q)}{r} \left[ 2(1-2\nu) \delta_{ij} \frac{(x_k^P - x_k^Q)}{r} + 2\nu' \left( \delta_{ik} \frac{(x_j^P - x_j^Q)}{r} + \delta_{jk} \frac{(x_i^P - x_i^Q)}{r} \right) - 8 \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_j^P - x_j^Q)(x_k^P - x_k^Q)}{r^3} \right] \right. \\ \left. + n_i(Q) \left[ 2\nu' \frac{(x_j^P - x_j^Q)(x_k^P - x_k^Q)}{r^2} + (1-2\nu) \delta_{jk} \right] \right. \\ \left. + n_j(Q) \left[ 2\nu' \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_k^P - x_k^Q)}{r^2} + (1-2\nu) \delta_{ik} \right] \right. \\ \left. + n_k(Q) \left[ 2(1-2\nu) \frac{(x_i^P - x_i^Q)(x_j^P - x_j^Q)}{r^2} - (1-4\nu) \delta_{ij} \right] \right\} \quad (2.11)$$



II.2.3.3. Equation Intégrale de Frontière:

Faisons maintenant tendre le point  $P$  vers la frontière  $\Gamma$  (Figure 2.3). Les intégrales peuvent être décomposées en une partie régulière et une partie irrégulière.

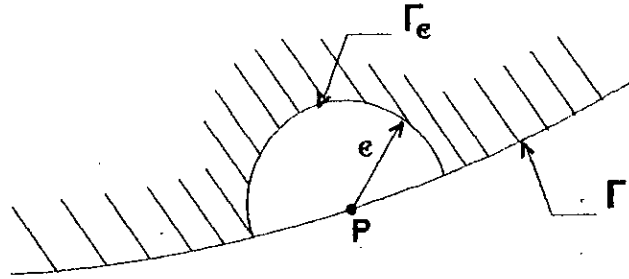


Figure 2.3: Point P sur la frontière du domaine.

ainsi par exemple:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (2.12)$$

on montre que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad (2.13)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \alpha_{ij} u_j(P) \quad (2.14)$$

$\alpha_{ij}$  est un tenseur prenant en compte l'existence d'un éventuel angle de frontière au point  $P$ . Si la frontière ne présente pas d'angle en ce point

$\alpha_{ij} = -\frac{1}{2} \delta_{ij}$ . Pour les autres cas, on trouvera les valeurs explicites  $\alpha_{ij}$  dans Banerjee et Butterfield<sup>6</sup> et Caperaa<sup>15</sup>, on obtient finalement l'équation intégrale de frontière:

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.15)$$

Le terme  $C_{ij}(P)$  encore appelé terme libre, prend la valeur  $+\frac{1}{2} \delta_{ij}$  dans le cas d'un problème intérieur présentant une frontière régulière en  $P$ .

Les développements précédents restent applicables aux problèmes pour lesquels le domaine  $\Omega$  est extérieur au contour  $\Gamma$ . Ceci permet notamment de traiter des cavités sous pressions dans un milieu infini, ou des trous dans des éléments de structure. Une précaution doit être prise pour le calcul de l

normale, laquelle doit "sortir" du matériau, et doit donc cette fois être dirigée vers l'intérieur du contour. Les termes  $\alpha_y$  changent et nous avons pour un contour régulier:  $\alpha_y = -\delta_y$

Il suffit donc de retrancher "1" au coefficient du terme libre dans l'équation intégrale de frontière.

### II.3. Traitement Numérique pour un Problème Homogène:

Le calcul des contraintes en tout point d'un solide nécessite au préalable la connaissance des tensions et des déplacements sur le contour, ce qui suppose avant tout, la détermination, en tout point de la frontière, des inconnues qui peuvent être:

- un déplacement si la tension correspondante est imposée,
- une tension si le déplacement correspondant est imposé.

Il est donc indispensable de procéder à une discrétisation de la frontière, permettant ainsi de poser le problème sous la forme d'un système d'équations algébriques.

#### II.3.1. Discrétisation de la frontière:

Les grandeurs caractéristiques d'un point  $P$  de la frontière, intervenant dans l'équation intégrale sont:

- les coordonnées  $x_i(P)$
- les déplacements  $u_i(P)$
- les tensions  $t_i(P)$

La frontière peut être discrétisée en éléments, chacun d'entre eux comprenant un ou plusieurs noeuds de contrôle pour lesquels sont définis les grandeurs  $x_i$ ,  $u_i$  et  $t_i$ .

Ainsi, par exemple, les coordonnées  $x_i(P)$  d'un point quelconque d'un élément peuvent être définies en fonction des coordonnées des points de contrôle au moyen de fonctions d'interpolation (Brebbia et al.<sup>14</sup>) constante (ordre 0), linéaire (ordre 1), quadratique (ordre 2), cubique (ordre 3)... On s'intéresse ici aux éléments à variation quadratique, qui permettent une approche plus fine des variations continues et donnent donc des résultats d'une meilleure précision.

Sur chaque élément est défini un système de coordonnées intrinsèques ( $\xi$ ) tel que:  $0 \leq \xi \leq 1$ . La figure 2.4 donne la position des noeuds dans l'élément.

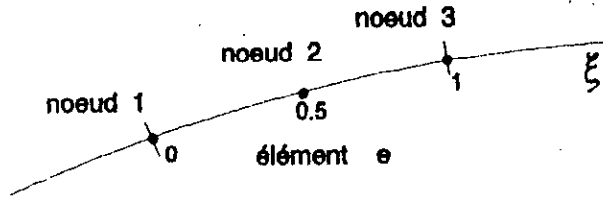


Figure 2.4: Coordonnées intrinsèques et noeuds de contrôle d'un élément de frontière.

Soit un point  $P$  de coordonnées intrinsèques  $\xi$ , appartenant à l'élément  $e$ . Les grandeurs au point  $P$  sont interpolées par les mêmes fonctions  $\phi^{(n)}$  (figure 2.5) de la manière suivante:

$$x_i(P) = x_i^e(\xi) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) x^n = \phi^T x^n \quad (2.16)$$

$$u_i(P) = u_i^e(\xi) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) u^n = \phi^T u^n \quad (2.17)$$

$$t_i(P) = t_i^e(\xi) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) t^n = \phi^T t^n \quad (2.18)$$

où  $x^n$ ,  $u^n$  et  $t^n$  sont respectivement les coordonnées, déplacements et tractions au niveau des noeuds.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2 \left( \xi - \frac{1}{2} \right) (\xi - 1) \\ \phi_2 &= -4 \xi (\xi - 1) \\ \phi_3 &= 2 \xi \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

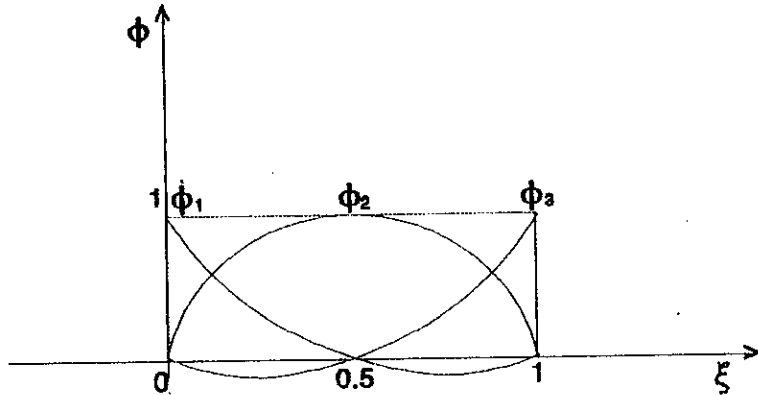


Figure 2.5: Fonctions de forme quadratiques.

Les coordonnées et les déplacements en tout noeud de contrôle 1 ou 3 sont communs aux deux éléments adjacents ' e - 1 ' et ' e + 1 '. Par contre pour les tensions, il est possible d'avoir des discontinuités d'un élément à l'autre comme le montre les exemples suivants (figure 2.6).



Figure 2.6: Discontinuité nécessitant un dédoublement des noeuds de contrôle de la tension.

Le cas du problème de discontinuité de la tension au niveau d'un coin est traité en détails par Wardle et Crotty<sup>52</sup> et plusieurs solutions sont proposées.

### II.3.2. Forme Discrétisée de l'Equation Intégrale de Frontière:

Les intégrales sur la frontière sont décomposées en une somme d'intégrales sur chacun des  $p$  éléments de frontière, on écrit alors:

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \sum_{e=1}^p \sum_{n=1}^3 G_{ij}^n(P) t_j^n - \sum_{e=1}^p \sum_{n=1}^3 H_{ij}^n(P) u_j^n \quad (2.20)$$

avec:

$$H_{ij}^n(P) = \int_0^1 T_{ij}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi \quad (2.21)$$

$$G_{ij}^n(P) = \int_0^1 U_{ij}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi \quad (2.22)$$

$J^e(\xi)$  désigne, pour l'élément ' e ', le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées intrinsèques:  $d\Gamma = J^e(\xi) d\xi$

### II.3.3. Calcul des Intégrales:

Les intégrales  $H_{ij}$  et  $G_{ij}$  n'admettent pas de formes analytiques exactes. Nous adoptons donc une technique d'intégration numérique. Deux cas sont à distinguer:

### II.3.3.1. Les Intégrales Régulières:

Si le point  $P$  (point source), pour lequel on écrit l'équation intégrale de frontière n'appartient pas à l'élément d'intégration, les intégrales sont régulières et nous utiliserons une quadrature de Gauss classique:

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^m A_i^m f(\xi_i^m) \quad (2.23)$$

$\xi_i^m$  et  $A_i^m$  sont respectivement les coordonnées et les fonctions "poids" associées aux  $m$  points de Gauss.

### II.3.3.2. Les Intégrales Singulières:

Si le point source  $P$  appartient à l'élément d'intégration, certaines intégrales deviennent infinies au voisinage de  $P$ . Deux cas sont à distinguer:

\* Si  $j \neq i$  (point source  $P$ ), l'intégrande garde une valeur finie, et les intégrales  $H_y(P)$  et  $G_y(P)$  sont calculées suivant la procédure classique décrite plus haut (quadrature de Gauss).

\* Si  $j = i$  (point source  $P$ ), pour le calcul de  $G_y$ , on utilise la formule de *Stroud* et *Secrest*<sup>4</sup>:

$$\int_0^1 f(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \approx \sum_{i=1}^m B_i^m f(\xi_i^m) \quad (2.24)$$

l'intégrale  $H_y$  n'est par contre pas définie. Cette difficulté ainsi que le calcul du terme libre  $C_y$  sont évités en considérant un déplacement de corps rigide.

### II.3.3.3. Déplacement de Corps Rigide:

Considérons deux translations successives de la structure suivant les deux axes  $x_1$  et  $x_2$ . Le système d'équations est écrit alors:

$$[H] \{u\} = \{0\} \quad (2.25)$$

Les déplacements de tous les points étant égaux dans une direction donnée, on peut donc écrire:

$$u_i \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Nous constatons que pour chaque ligne de la matrice  $[H]$ , la somme de tous les termes est égale à zéro. Connaissant tous les autres termes, nous pouvons

donc facilement en tirant la valeur du terme diagonal:

$$H_u = - \sum_{j=1}^n H_y (1 - \delta_{yj}) \quad (2.27)$$

Cette technique résout par la même occasion le problème du calcul du terme libre  $C_y$ .

### II.3.4. Construction du Système d'Equations:

Le point  $P$  pour lequel on écrit l'équation, encore appelé " point de collocation " occupe successivement tous les points du contour et deux équations du type (2.19) sont écrites à chaque fois, l'indice  $j$  prenant successivement les valeurs 1 et 2. En associant ces  $N$  blocs de deux équations, on crée ainsi un système d'équations linéaire de la forme:

$$[ H ] \{ u \} = [ G ] \{ t \} \quad (2.28)$$

Notons que, en raison d'éventuels dédoublements de noeuds en tension, la matrice  $[ G ]$  n'est pas nécessairement carrée.

#### \* Prise en compte des conditions aux limites et résolution:

Il reste à faire intervenir tous les termes  $u$  et  $t$  connus sur la frontière, à les multiplier par les coefficients  $H_y$  et  $G_y$  correspondants et à sommer ces vecteurs pour créer le "vecteur second membre" du système linéaire. Le système à résoudre s'écrit alors:

$$[ e ] \{ X \} = \{ f \} \quad (2.29)$$

Si les conditions aux limites du problème sont correctement posées, la matrice  $[ e ]$  est carrée et  $\{ X \}$  est un vecteur contenant les inconnues du problème qui sont, dans le cas général, un "mélange" de déplacements et de tensions.

La résolution du système linéaire est effectuée par la méthode de diagonalisation de Gauss.

### II.3.5. Calcul des Contraintes et des Déplacements aux Points Intérieurs:

Une fois les tensions et les déplacements sur la frontière sont déterminés, ceux-ci peuvent facilement se calculer en tout point  $P$  intérieur au domaine, à partir de l'identité de Somigliana (équation 2.8). La technique d'intégration sur chaque élément est identique à celle qui est exposée plus

haut (Quadrature de Gauss). Les contraintes se déduisent de la même manière que les déplacements, à partir des tenseurs calculés, on obtient:

$$u_j(P) = \sum_{e=1}^P \sum_{n=1}^3 t_j^n \int_0^1 U_{ij}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi - \sum_{e=1}^P \sum_{n=1}^3 u_j^n \int_0^1 T_{ij}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi \quad (2.30)$$

$$\sigma_{ij}(P) = \sum_{e=1}^P \sum_{n=1}^3 t_k^n \int_0^1 D_{ijk}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi - \sum_{e=1}^P \sum_{n=1}^3 u_k^n \int_0^1 F_{ijk}(P, Q(\xi)) \phi^n(\xi) J^e(\xi) d\xi \quad (2.31)$$

II.3.6. Calcul des Contraintes et des Déplacements sur des Points de la Frontière:

Les déplacements et les contraintes peuvent être connus en tout point de bord, par interpolation à partir des valeurs connues des déplacements et des tensions sur les noeuds.

- Déplacements:

$$u_i(P) = u_i^e(\xi) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) u_i^n \quad (2.32)$$

- Contraintes:

Ces dernières sont exprimées dans un repère local (voir figure 2.7).

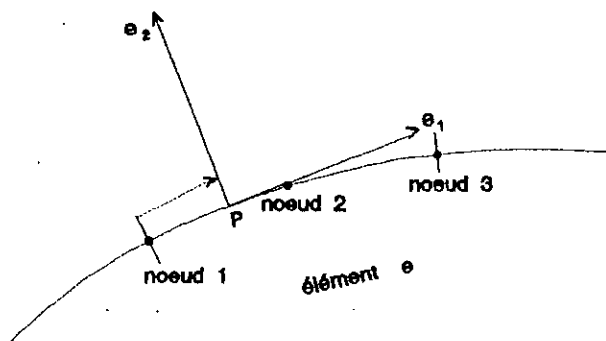


Figure 2.7: Coordonnée locale sur la frontière.

Chaque grandeur en coordonnée locale sera surmontée d'un symbole " ~ ". Notons  $e_i(e_{11}, e_{21})$  les vecteurs de base locale ( $i = 1$  : vecteur tangent,  $i = 2$

parfaite sur toute l'interface permet de proposer des zones décollées assez réalistes, en les assimilant aux parties tendues de l'interface.

### III.3.3.3. Collocation et construction du système primaire:

Soient deux corps homogènes, isotropes, linéaires et élastiques (K et L) en contact (figure 3.2).

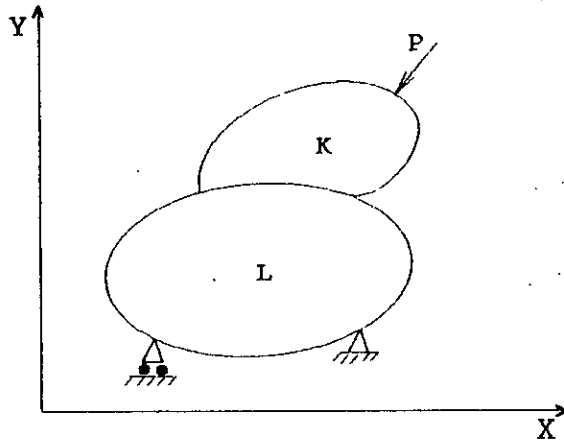


Figure 3.2: Système de coordonnées globales.

La déformation peut être décrite par deux équations intégrales couplées, une pour chaque corps, chacune d'entre elles faisant intervenir des noeuds de contrôle de déplacement et de tension qui lui sont propres. Pour la résolution numérique d'un problème de contact, chaque frontière est discrétisée séparément en un nombre d'éléments. Ceci produit les deux systèmes d'équations suivants:

$$\begin{aligned} [H]^K \{u\}^K &= [G]^K \{t\}^K \\ [H]^L \{u\}^L &= [G]^L \{t\}^L \end{aligned} \quad (3)$$

Les vecteurs  $\{u\}^{K,L}$  et  $\{t\}^{K,L}$  représentent respectivement les valeurs aux frontières des déplacements et des tractions. Cette première étape conduit à l'obtention des matrices  $[H]$  et  $[G]$ . Dans la zone de contact, les variations aux frontières du problème sont communes aux deux systèmes d'équations. Par conséquent, les équations correspondantes sont couplées et doivent être résolues simultanément et ce pour une combinaison donnée de la charge extérieure et des conditions de contact. Lorsque les conditions aux limites du problème sont posées, les équations du système sont arrangées de façon à ce que la forme matricielle finale du système d'équations devienne:



telles simplifications s'appliquent à des problèmes pour lesquels les deux solides sont parfaitement en contact avant chargement.

### III.3.3. Algorithmie:

#### III.3.3.1. Présentation générale de la méthode:

Lorsqu'il y a contact, celui-ci génère une partie de la frontière du domaine pour laquelle ni les déplacements, ni les efforts appliqués ne sont connus. La discrétisation par la méthode des équations intégrales de frontière est alors incapable de résoudre directement les équations. En effet, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Il faut faire recours à un traitement itératif dont la convergence est conditionnée par un algorithme basé sur les conditions de contact avec frottement.

Le traitement itératif nécessite une hypothèse de départ concernant la répartition des zones de contact adhérent, de glissement et de décollement. A partir de cette hypothèse nous effectuons le calcul qui permet de connaître les tensions sur l'interface. L'analyse de ces dernières fait apparaître des phénomènes non compatibles avec les caractéristiques du contact libre (apparition par exemple, de contraintes de traction dans l'interface). Ceci nous conduit à définir de nouvelles hypothèses tendant à corriger ces incompatibilités. Cette étape peut nécessiter une re-définition des points du maillage. Une telle démarche est répétée jusqu'à l'obtention d'un champ de contrainte satisfaisant en tout point de l'interface.

#### III.3.3.2. Choix d'une hypothèse de départ:

Au stade du fichier de données, il convient de préciser l'état de contact, pour chaque élément de l'interface. Ainsi un élément peut être supposé a priori:

- parfaitement adhérent,
- décollé,
- ou glissant avec frottement.

Dans ce dernier cas, il est en outre nécessaire de préciser le sens relatif du glissement d'une surface de contact par rapport à l'autre. Le noeud adjacent à deux éléments présentant des états de contact différents est obligatoirement dédoublé en tension.

Le choix d'hypothèses initiales proches de la réalité repose sur l'expérience acquise et peut dans certains cas s'avérer difficile. Pour des cas non-triviaux, un premier passage numérique avec condition d'adhérence

### III.3. Etude dans le cas de l'interface en contact libre:

Lorsque la zone de contact est connue au départ, un calcul classique suffit moyennant des conditions de continuité adaptées à l'interface. Dans le cas général, la surface de contact n'est pas connue. Il convient de distinguer deux cas selon que cette surface dépend du taux de charge ou non.

#### III.3.1. La surface de contact dépend du taux de charge:

Dans ce cas, la surface de contact est d'autant plus étendue que la charge appliquée est importante. L'augmentation de la charge modifie donc le mode de transmission des efforts, ce qui introduit des non linéarités.

Il est toujours fait appel à des techniques itératives incrémentales, que ce soit en éléments finis, qu'en équations intégrales. Partant d'une hypothèse au départ concernant les parties de contours initialement en contact, un accroissement de charge est appliqué, de manière à provoquer l'entrée en contact des éléments voisins initialement décollés. L'opération est répétée en prenant comme nouvelle hypothèse la nouvelle surface de contact, et ainsi jusqu'à l'obtention du taux de charge souhaité.

Les travaux portant sur l'application des méthodes intégrales à des problèmes de contact sont dus principalement à Andersson<sup>1,2</sup>. On trouve dans ces deux articles des exposés très détaillés de la méthode numérique utilisée pour traiter des problèmes tenant compte du frottement. La technique qui est retenue est incrémentale et peut se résumer comme suit:

Partant d'un état initial déchargé, pour lequel la répartition des zones de contact est supposée connue, le taux de charge est incrémenté d'un pas. On vérifie que l'analyse des déplacements ou tensions sur la frontière traduise le fait qu'un élément change d'état (par exemple une interpénétration des deux domaines sur un élément traduit le passage, pour cet élément là, d'un état décollé à un état de contact glissant). Le calcul est alors réitéré à partir de ces nouvelles conditions de contact. Le comportement est bien entendu supposé linéaire à l'intérieur de chaque pas de calcul.

#### III.3.2. La surface de contact ne dépend pas du taux de charge:

Dans ce cas le problème est linéaire et la répartition des zones de contact adhérentes, glissantes et décollées est la même quelque soit l'intensité du chargement. Un calcul itératif suffit pour déterminer cette répartition.

### III.1. Introduction:

Les développements que nous avons apportés au programme d'équations intégrales en vue de la prise en compte des conditions de non-adhérence, nous ont amenés à étudier les problèmes de passage, le long de l'interface, d'une condition de contact à une autre.

Notre objectif majeur est donc de montrer les bases d'un outil numérique pouvant prendre en compte les états suivants: contact adhérent, glissement avec frottement et décollement entre deux matériaux. La difficulté majeure réside dans le fait que les parties de contour correspondant à chacune de ces conditions ne sont pas connues a priori. Elles dépendent en effet du chargement et de la géométrie du problème, nous nous attacherons à établir une extension de la méthode des équations intégrales de frontière en vue de résoudre ce type de problème.

### III.2. Types d'éléments de contact utilisés:

Dans le cas d'un problème de contact avec interface non-parfaitement adhérente, on modélise l'interface par des éléments de type spécial appelés éléments de contact (figure 3.1).

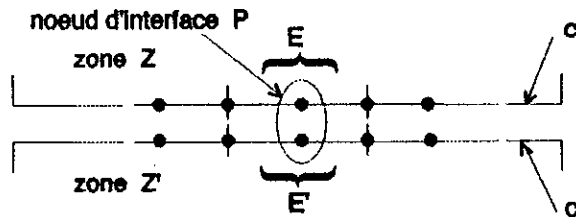


Figure 3.1: Élément d'interface.

Quatre noeuds de contrôle sont associés à ce point :

\* deux noeuds associés aux degrés de liberté (déplacement et traction) de la zone Z.

\* deux noeuds associés aux degrés de liberté (déplacement et traction) de la zone Z'.

Cette présentation nous permet de traiter trois types de liaisons possibles et de construire une bibliothèque des éléments:

- 1) éléments adhérents où les tensions et les déplacements sont continus.
- 2) éléments glissants où  $T = \gamma N \operatorname{tg} \varphi$ .
- 3) éléments décollés où les tensions sont imposées et nulles.

## **Chapitre III**

# **Analyse des Problèmes de Contact Non - Parfaitement Adhérent par la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières**

Main body of handwritten text, appearing to be a list or series of entries.

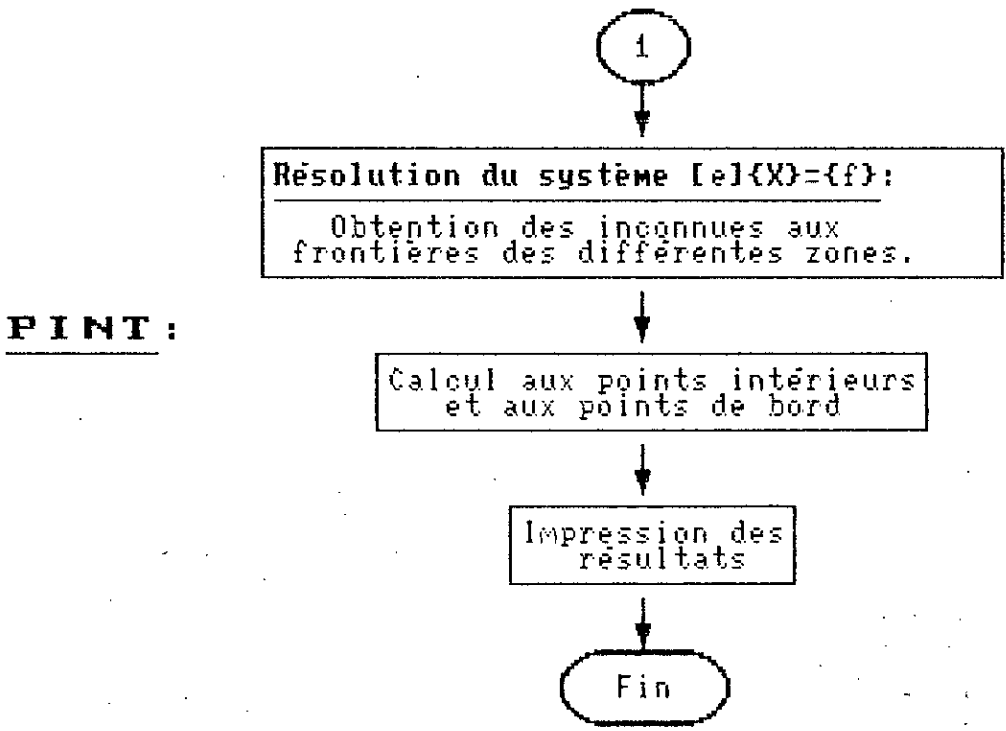


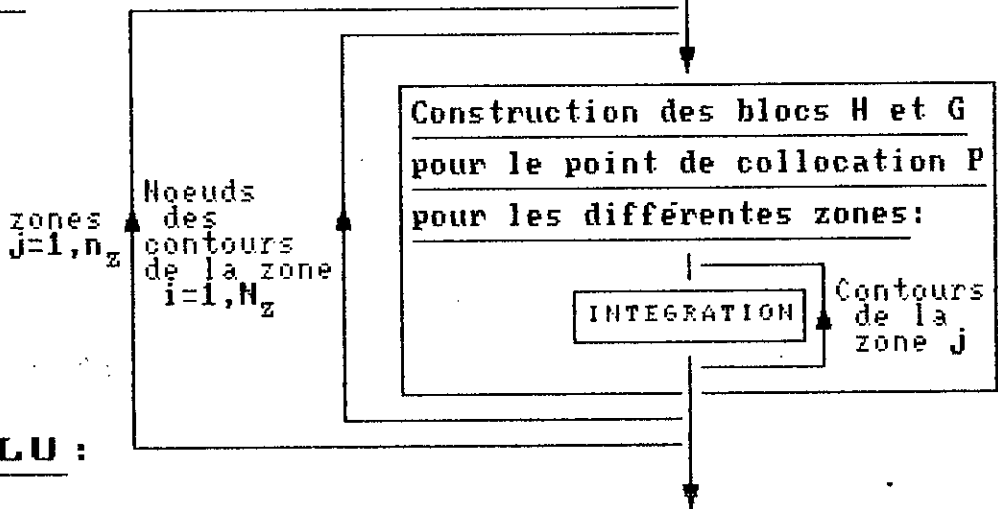
Figure 2.8: Organigramme sommaire du programme multizone.

**DONN :**

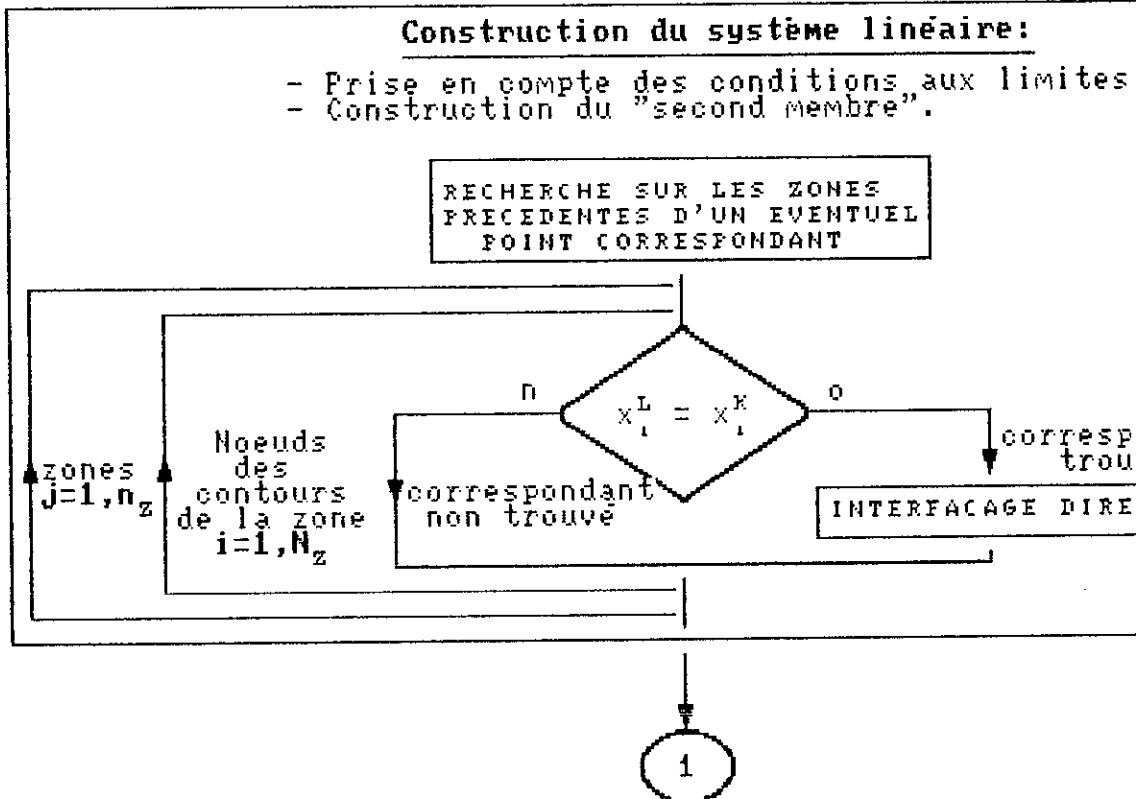
**Lecture des données par zone:**

- Maillage des frontières,
- Matériaux,
- Conditions aux limites,
- Points intérieurs et de bord.

**BEM :**



**SOLU :**



### II.4.3. Algorithme du programme multizone:

Les différentes étapes de calcul sont résumées dans l'organigramme présenté en figure 2.8.

En premier lieu, nous procédons à la saisie des données du problème (subroutine DONN), nous introduisons ainsi les coordonnées des noeuds de la frontière, les propriétés du matériau, les conditions aux limites et enfin les coordonnées des points intérieurs et de bord par zone.

La deuxième étape (subroutine BEM) est la construction des blocs  $[H]$  et  $[G]$ . Nous calculons alors les différents coefficients des matrices en intégrant sur les contours de la zone considérée.

La troisième étape (subroutine SOLU) est celle de la construction du système linéaire prêt à être résolu. Les conditions aux limites du problème sont posées et le second membre du système est calculé. Par la suite, nous faisons un test qui nous permet de trouver les noeuds communs aux différentes zones, et ainsi définir l'interface de contact. Nous appliquons alors la technique d'interfaçage direct décrite plus haut. Et enfin, nous procédons à la résolution du système d'équations par la méthode de substitution de Gauss.

La quatrième étape (subroutine PINT) consiste en le calcul des contraintes et des déplacements aux points internes et de bord choisis par zone. Enfin, les résultats trouvés sur la frontière et à l'intérieur du domaine sont imprimés.



$$[ e' ] \{ X' \} = \{ f \} \quad (2.39)$$

#### II.4.2.3. Prise en compte des conditions de continuité et d'équilibre de l'interface - Interfaçage direct:

La continuité entre deux zones peut se traduire de deux manières différentes:

Une première technique consisterait à écrire des équations supplémentaires égalant par exemple les inconnues  $u_i^{(k)}$  de la zone (k) et  $u_i^{(l)}$  de la zone (l) de deux points "en regard" des deux zones (k) et (l) en contact. Un tel choix aurait pour inconvénient d'augmenter considérablement la taille du système d'équations. Ainsi la dimension du système linéaire serait quasiment multipliée par deux pour un problème comportant peu de noeuds de contours extérieurs.

On opte pour une technique que nous appellerons "interfaçage direct" et qui consiste à réduire le nombre de colonnes de  $[ e' ]$  en déplaçant dans la matrice les coefficients liés à une inconnue déjà rencontrée. Ainsi certains "blocs" correspondants à l'équation intégrale de frontière sur une zone  $\Omega_l$  sont déplacés vers la gauche sur les mêmes colonnes que les coefficients de la partie de la zone  $\Omega_k$  adjacente ( $k > l$ ). Les inconnues  $u_i^k$  et  $t_i^l$  d'un point d'interface sont ainsi rendues communes aux deux zones. Le système d'équations réduit s'écrit alors:

$$[ e ] \{ X \} = \{ f \} \quad (2.40)$$

où  $[ e ]$  est une matrice carrée.

#### II.4.2.4. Résolution du système linéaire:

Nous utiliserons un algorithme classique, basé sur la méthode de substitution de Gauss.

#### II.4.2.5. Calcul aux points intérieurs:

L'intégration s'effectue sur l'ensemble des contours délimitants la zone à laquelle appartient le point de la même façon que dans un problème uni-zone (paragraphe II.3.5).

#### II.4.2. Organisation du Programme multizone:

Nous avons choisi de rendre indépendante la phase d'écriture de l'équation intégrale de frontière et la phase de prise en compte des conditions de continuité et d'équilibre aux interfaces. Ce choix est justifié comme suit:

- au stade de l'étude du problème multizone avec adhérence, nous envisageons déjà les extensions futures du programme au traitement de conditions de contact plus complexes (glissement et décollement). Ce comportement nécessite un traitement itératif pour lequel on peut être amené à faire varier les conditions de contact élément par élément. Découpler le calcul des intégrales de frontière de l'interfaçage (voir II.4.2.3) permet de ne pas répéter inutilement la première phase.

- le découplage de ces deux étapes présente également l'avantage de rendre les algorithmes beaucoup plus compréhensibles.

Les différentes étapes de calcul sont les suivantes:

##### II.4.2.1. Ecriture de l'équation intégrale de frontière par zone:

Les blocs (de deux lignes)  $[H]$  et  $[G]$  sont construits, le point de collocation  $P$  occupant successivement les noeuds des différents contours délimitant chaque zone. L'équation intégrale de frontière s'écrit donc, pour un point  $P$  de la frontière:

$$C_{ij}(P) u_j(P) = \sum_{e=1}^p \sum_{n=1}^3 G_{ij}^n(P) t_j^n - \sum_{e=1}^p \sum_{n=1}^3 H_{ij}^n(P) u_j^n \quad (2.38)$$

Lors de l'intégration sur un contour  $\Gamma_j$  délimitant une zone, la normale intervenant dans le calcul de la fonction noyau  $T_{ij}$  est dirigée vers l'extérieur du contour si la zone est intérieure à  $\Gamma_j$  (problème intérieur). Si le point de collocation appartient à un contour intérieur à la zone (problème extérieur), il faut comme dans le cas d'un problème uni-zone, retrancher une unité aux coefficients diagonaux de la matrice  $[H]$ .

##### II.4.2.2. Prise en compte des conditions imposées à la frontière:

Les coefficients liés à un déplacement (ou à une tension) connu sur la frontière sont multipliés par cette valeur imposée et le produit ainsi obtenu est ajouté au deuxième membre. Cette étape conduit à un système du type: où la matrice  $[e']$  n'est pas carrée.

continuité en déplacements et d'équilibre en tensions:

$$\begin{aligned}
 u_i^{(k)}(P) &= u_i^{(l)}(P) && P \text{ appartenant à } \Gamma_{kl} \\
 t_i^{(k)}(P) &= -t_i^{(l)}(P) && \text{et } i = 1, 2
 \end{aligned}$$

La notation "(k)" ou "(l)" indiquant que le déplacement ou la tension est propre à un point de la zone k ou l. Les déplacements et les tensions sur les interfaces sont évidemment des inconnues.

Le système d'équations est construit en écrivant l'équation intégrale de frontière pour chaque zone. Pour une zone  $\Omega_j$ , donnée, le point de collocation occupe successivement tous les noeuds du contour  $\Gamma_j$  délimitant la zone.

A chaque collocation sont écrites deux équations nécessitant des intégrations sur le contour  $\Gamma_j$ . Bien entendu, la construction de ce système doit tenir compte des relations de continuité et d'équilibre au droit de chaque interface.

#### II.4.1. Principe adopté:

L'étude des problèmes hétérogènes par zone ne présente aucune difficulté supplémentaire: il suffit de prendre, pour l'équation intégrale de chaque zone, les constantes élastiques correspondantes. On trouve assez peu de publications sur ce sujet. Citons les travaux de Tomlin et Butterfield<sup>50</sup> qui traitent des problèmes de sols, comprenant plusieurs couches de propriétés élastiques différentes. Aussi, Wardle et Crotty<sup>52</sup> présentent, en guise de validation, l'exemple d'une inclusion circulaire, dans un champ de compression omnidirectionnelle. Il suit l'exemple d'une excavation souterraine dans un milieu multizone, en tenant compte de l'existence de contraintes initiales.

Dans toutes les références citées, la prise en compte des équations de continuité et d'équilibre sur l'interface s'effectue implicitement au stade de l'écriture de l'équation intégrale de frontière, pour chaque point de collocation:

la première fois que le noeud P est rencontré lors des intégrations sur le contour d'une zone (k), les inconnues  $u_i^{(k)}$  et  $t_i^{(k)}$  correspondantes apparaissent explicitement comme telles. Par la suite, dans la phase de l'écriture de l'équation intégrale de frontière de la zone (l) d'ordre supérieur à (k), les coefficients associés aux inconnues du même point P sont directement placés dans les matrices [H] et [G], à la position déjà déterminée lors de la collocation sur la zone (k).

vecteur normal sortant). Leurs composantes se calculent numériquement par:

$$\begin{aligned}
 e_{1i} &= \frac{1}{|\bar{s}|} \sum_{n=1}^3 \phi'^n(\xi) x_i^n \\
 e_{2i} &= \pm \frac{1}{|\bar{s}|} \sum_{n=1}^3 \phi'^n(\xi) x_j^n \quad \text{avec } i \neq j
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Le signe " ± " dépend du type de problème intérieur ou extérieur.

$$s_i = \frac{dx_i}{d\xi} = \sum_{n=1}^3 \phi'^n(\xi) x_i^n
 \tag{2.34}$$

$\phi'$  : désigne la dérivée des fonctions de forme.

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{12}(P) &= t_i(P) e_{1i}(P) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) t_i^n e_{1i}(P) \\
 \bar{\sigma}_{22}(P) &= t_i(P) e_{2i}(P) = \sum_{n=1}^3 \phi^n(\xi) t_i^n e_{2i}(P)
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

La contrainte normale sur une facette perpendiculaire au contour se déduit de la loi de Hooke:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{(1 - \nu')} \left[ \frac{E'}{(1 + \nu')} \bar{\epsilon}_{11}(P) + \nu' \bar{\sigma}_{22}(P) \right]
 \tag{2.36}$$

La déformation au point  $P$  se calculant de la manière suivante:

$$\bar{\epsilon}_{11}(P) = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{1}{|\bar{s}|} \sum_{n=1}^3 \phi'^n(\xi) u_i^n e_{1i}
 \tag{2.37}$$

#### II.4. Extension du code uni-zone à la résolution des problèmes multizones avec adhérence parfaite:

Nous allons maintenant exposer un premier développement apporté au programme éléments de frontière, en vue de traiter des problèmes présentant plusieurs domaines constitués de matériaux différents.

Le domaine étudié est maintenant composé de  $n_z$  zones ayant des propriétés mécaniques différentes, mais homogènes intérieurement. Chaque zone  $\Omega_k$  est délimitée par un contour  $\Gamma_k$ . Une interface est une partie, ou totalité d'un contour, commune à deux zones, et sera notée avec deux indices correspondant aux numéros des zones en contact:  $\Gamma_H = \Gamma_k \cap \Gamma_l$

L'adhérence au niveau d'une interface  $\Gamma_H$  se traduit par les relations de

$$\begin{bmatrix} H_{nc}^K - G_{nc}^K & H_c^K - G_c^K & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H_c^L - G_c^L & H_{nc}^L - G_{nc}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f' \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Les indices "c" et "nc" correspondent respectivement à la zone de contact et de non contact. On obtient donc un système non-carré du type:

$$[ e' ] \{ X' \} = \{ f' \} \quad (3.3)$$

III.3.3.4. Conditions de contact à l'interface:

Considérons un point P appartenant à un élément d'interface (figure 3.3)

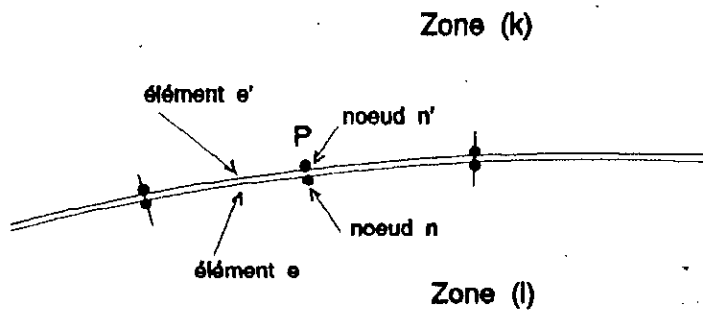


Figure 3.3: Elément d'interface.

A ce point correspond quatre degrés de liberté par zone selon les deux directions normale et tangentielle:

- deux déplacements
- et deux tensions.

Etudions successivement chacun des trois états de contact possibles:

a) l'élément est en contact adhérent:

Le contact adhérent est caractérisé par la continuité des déplacements et l'équilibre des tensions. Donc, si M appartient à  $\Gamma_{adh}$  :

$$\begin{cases} u_i^k(M) = u_i^l(M) \\ t_i^k(M) = -t_i^l(M) \end{cases} \quad i=1,2 \quad (\text{avec } t_t(M) < \mu t_n(M)) \quad (3.4)$$

Nous procédons alors à un interfaçage direct: les termes de la matrice [ e' ]

correspondants aux degrés de liberté des noeuds de la zone (l) sont déplacés vers la gauche sous ceux de la zone (k). Les inconnues  $u_i^{lk}$  et  $t_i^{lk}$  sont donc rendues communes aux deux zones.

*b) l'élément est décollé:*

Les tensions sont imposées et nulles. Donc, si M appartient à  $\Gamma_{dec}$  :

$$t_i^k(M) = t_i^l(M) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

Nous faisons donc disparaître les coefficients de la matrice  $[e']$  liés aux tensions de l'élément décollé.

*c) l'élément est en contact glissant:*

Les tensions exercées par un domaine sur l'autre sont inconnues et réciproques. On procède donc à un interfaçage direct en tension, pour ne garder que deux inconnues communes aux deux zones:  $t_i^{kl}$ ,  $i = 1, 2$ . Les déplacements présentent une discontinuité au droit de l'interface et il est nécessaire de conserver en inconnues les déplacements associés aux noeuds des deux zones.

Donc, à chaque élément glissant correspondent deux inconnues en tension et quatre inconnues en déplacement, pour seulement quatre équations de collocation (deux par zone). Deux équations supplémentaires caractérisant le glissement avec frottement sont alors écrites:

\* Continuité du déplacement normal:

$$n_i \cdot [u_i^k - u_i^l] = 0 \quad (3.6)$$

où  $n_i$  est la normale à l'interface,

. désigne le produit scalaire.

\* Tension en limite du cône de glissement:

La loi de Coulomb avec coefficient de frottement  $\mu = \text{tg } \varphi$  a été supposée. La tension tangentielle est liée à la tension normale par la relation:

$$t_t = \gamma t_n \text{tg } \varphi \quad (3.7)$$

avec  $\gamma = \pm 1$  suivant le sens du glissement relatif d'une zone par rapport à l'autre. D'où l'équation:

$$- n_2 \cdot t_1 + n_1 \cdot t_2 = \gamma \operatorname{tg} \varphi n_1 \cdot t_1 \quad (3.8)$$

Les termes  $n_i$  caractérisent la direction de la normale au contour au point considéré et sont calculés numériquement de la manière suivante:

$$\begin{aligned} n_1 &= \delta x_2 / \delta \xi = \sum_{n=1}^3 \phi^{(n)}(\xi) x_2^{(n)} \\ n_2 &= - \delta x_1 / \delta \xi = - \sum_{n=1}^3 \phi^{(n)}(\xi) x_1^{(n)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donc, si M appartient à  $\Gamma_{glis}$  :

$$\begin{cases} t_i^k(M) = \pm \mu t_n^k(M) \\ t_i^l(M) = \pm \mu t_n^l(M) \end{cases} \quad (3.10)$$

Un problème particulier se pose au point de passage d'un élément adhérent à un élément glissant. En fait, nous avons la continuité des déplacements en ce point; donc seulement deux inconnues en déplacement. Le noeud étant dédoublé en tension, nous avons donc quatre inconnues en tension:  $t_i(e)$  relatif à l'élément 'e' et  $t_i(e+1)$  relatif à l'élément 'e+1' ( $i=1, 2$ ).

Les six équations correspondantes sont:

- quatre équations de collocation (deux par zone),
- une équation du type  $t_i = \gamma t_n \operatorname{tg} \varphi$  pour le noeud du côté de l'élément glissant.
- une équation de continuité de la tension normale au niveau du dédoublement.

L'introduction de ces relations auxiliaires permet de réduire le nombre d'inconnues à quatre variables indépendantes en tout point de l'interface de contact. Le système d'équations devient carré, il s'écrit alors comme suit:

$$[e] \{X\} = \{f\} \quad (3.11)$$

La figure 3.4 fait la synthèse des différentes opérations effectuées lors de la prise en compte des conditions à l'interface.

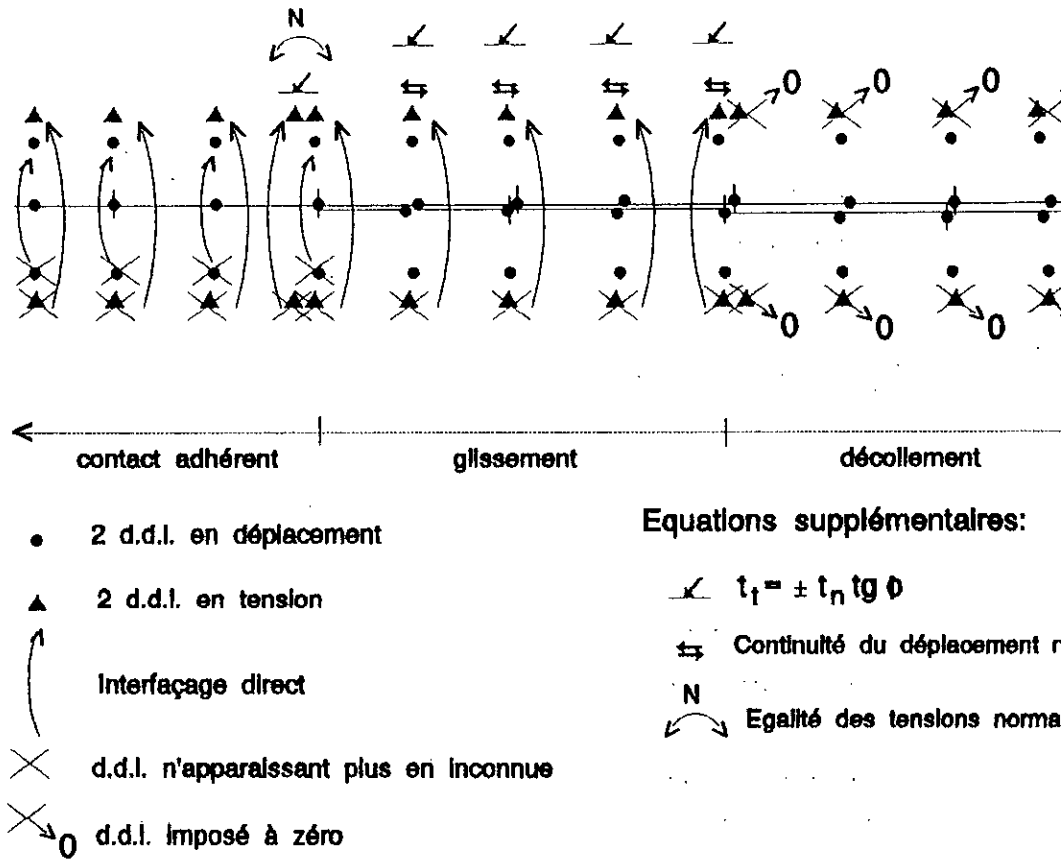


Figure 3.4: Traitement numérique d'un problème de contact libre: conditions aux limites sur l'interface.

### III.3.3.5. Analyse des tensions de l'interface et critères de convergence

La solution exacte d'un problème de contact libre entre deux matériaux présente deux caractéristiques supplémentaires dont nous n'avons pas tenu compte lors de l'écriture du système:

- A la limite entre le glissement et le décollement la tension est nulle.
- Il n'y a pas de discontinuité de la tension tangentielle à la limite entre adhérence et contact glissant.

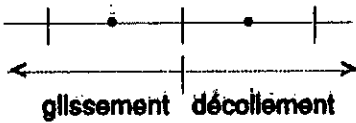
Ce sont ces deux conditions qui nous serviront de critères d'obtention de la solution exacte et qui permettront, après chaque itération de déterminer une évolution rationnelle des hypothèses. Les figures 3.5 et 3.6 résument le sens d'évolution de ces hypothèses en fonction de l'analyse des tensions de l'interface.



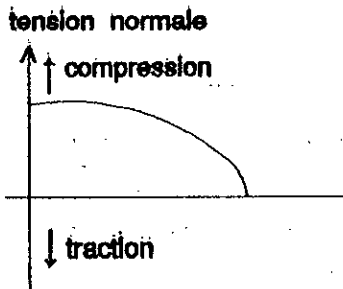
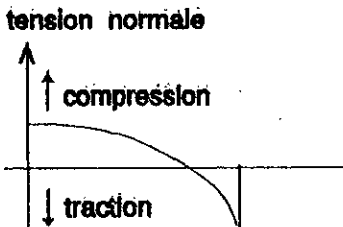
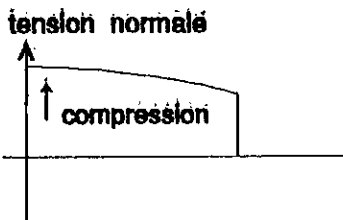
III.3.3.6. Modification des hypothèses:

Au stade actuel de l'étude du comportement du modèle, le choix au terme de chaque itération des nouveaux emplacements des points de changement des conditions de contact est laissé à l'initiative de l'utilisateur. Un nouveau maillage est alors créé, en faisant "glisser" les éléments le long du contour et la procédure de calcul est relancée.

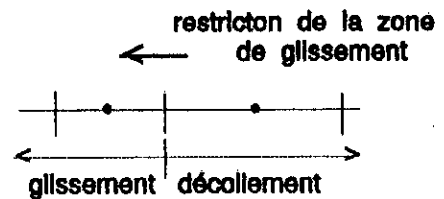
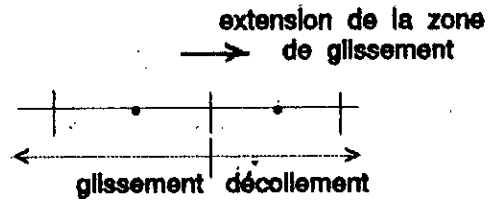
Hypothèse initiale :



Tension d'interface :



Evolution à adopter :



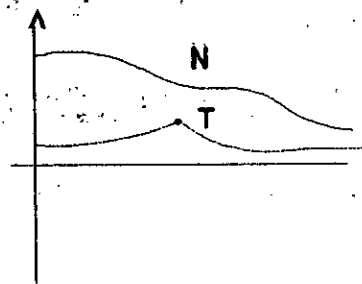
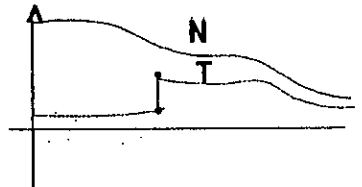
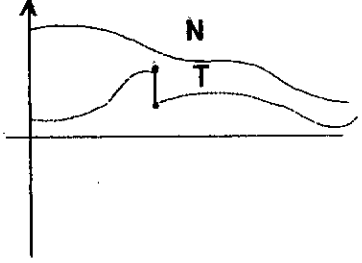
limite correcte de la zone de glissement

Figure 3.5: Choix des sens d'évolution pour l'obtention de la limite exacte de la zone de glissement.

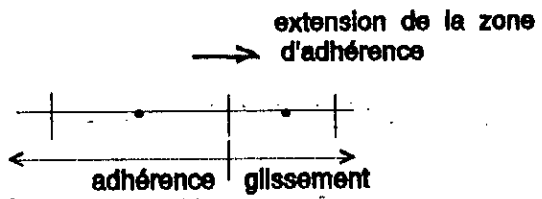
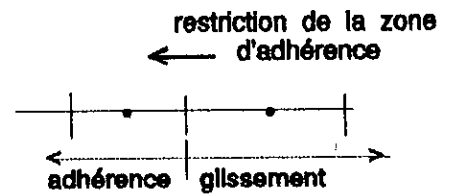
Hypothèse initiale :



Tension d'interface :



Evolution à adopter :



limite correcte de la zone d'adhérence

Figure 3.6: Choix des sens d'évolution pour l'obtention de la limite exacte adhérence-glissement.

## **Chapitre IV**

# **Formulation de l'Elément de Frontière Infini pour des Problèmes avec Extensions non Bornées**

#### IV.1 Position du problème:

Les programmes de calcul utilisés jusque là ne permettaient de traiter que le cas des domaines limités par un contour fermé. Or, dans le cadre de l'étude de l'interaction sol structure par exemple, il sera souvent nécessaire de modéliser le sol, loin des zones interfaciales étudiées. Pour cela, nous pouvons envisager deux techniques:

1° La partie "sol lointain" est modélisée par un domaine limité par un contour fermé, la fermeture intervient très loin de la zone étudiée (figure 4.1). On peut ainsi penser que l'influence des blocages nécessairement appliqués sur le sol est négligeable sur la zone interfaciale qui nous intéresse.

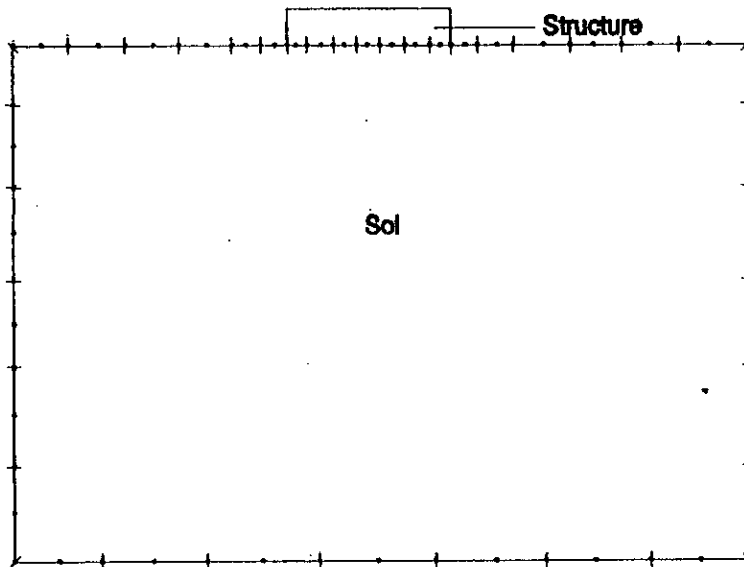


Figure 4.1: Représentation du sol avec contour fermé.

2° La partie "sol lointain" est modélisée par un domaine semi-infini, limité par un contour ouvert comportant des éléments de frontière infinis (figure 4.2). La deuxième technique présente plusieurs avantages par rapport à la première:

- Le nombre de noeuds étant moins important, on diminue donc le temps de calcul.
- Diminution du temps de préparation des données.
- Très nette amélioration de la précision des résultats, sous réserve d'un choix judicieux du mode d'extrapolation.

L'objet du présent chapitre est donc de mettre à jour les possibilités du calcul par équations intégrales sur des milieux présentant des frontières à extension infinie, et de montrer les développements apportés au code de

calcul.

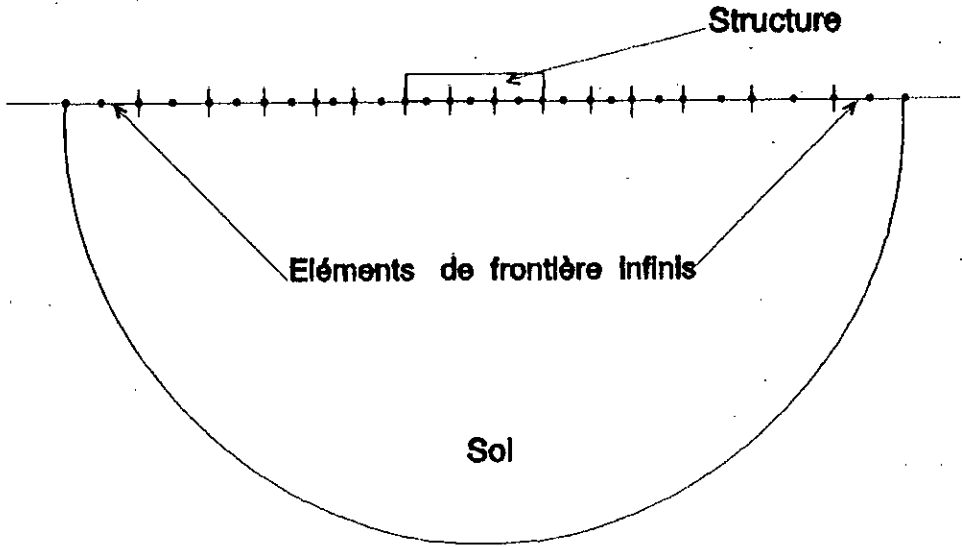


Figure 4.2: Représentation du sol avec contour ouvert.

IV.2. Etude de la convergence des intégrales:

IV.2.1. Domaine d'intégration:

Nous rappelons la forme générale de l'identité de Somigliana donnant le déplacement en un point P en fonction des déplacements et des tensions sur la frontière  $\Gamma$  (jusqu'ici fermée):

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) ds - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) ds \quad (4.1)$$

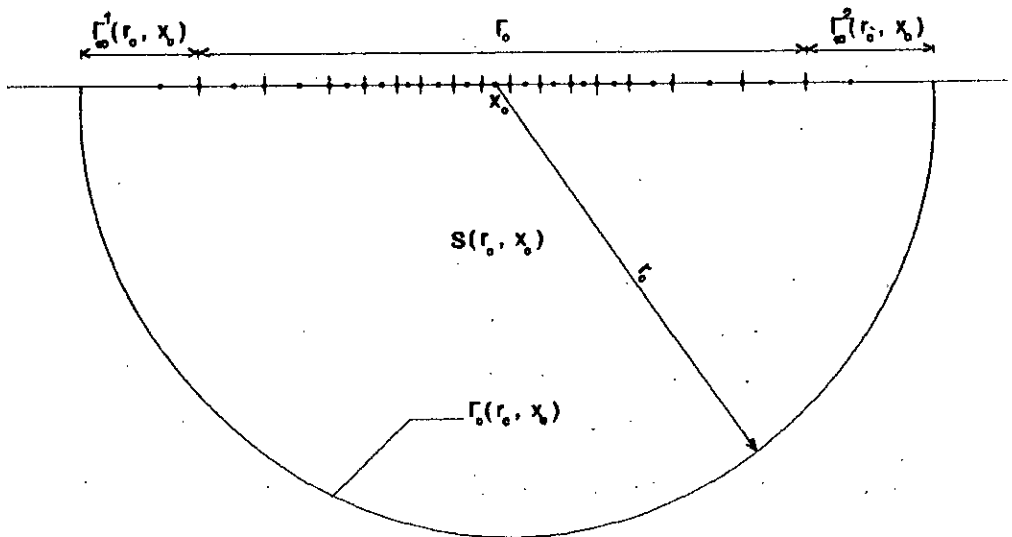


Figure 4.3: Domaine d'intégration.

Considérons la région notée  $\mathcal{S}(r_c, x_0)$ , limitée par la frontière  $\Gamma$  et un cercle de centre  $x_0$  et de rayon  $r_c$  (figure 4.3).  $x_0$  est un point qui appartient au domaine étudié, appelé point de référence. La frontière du domaine  $\mathcal{S}(r_c, x_0)$  peut s'écrire:

$$\Gamma(r_c, x_0) = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\infty}^1(r_c, x_0) \cup \Gamma_{\infty}^2(r_c, x_0) \cup \Gamma_c(r_c, x_0)$$

avec:  $\Gamma_0$  est la partie de la frontière  $\Gamma$  voisine de la zone étudiée (constituée d'éléments quadratiques de type classique).

$\Gamma_{\infty}^1(r_c, x_0)$ ,  $\Gamma_{\infty}^2(r_c, x_0)$  sont les éléments de frontière infinis.

$\Gamma_c(r_c, x_0)$  est l'arc de cercle de centre  $x_0$  et de rayon  $r_c$ .

#### IV.2.2. Convergence des intégrales:

Nous devons vérifier:

- d'une part que les intégrales sur les éléments infinis

$$\int_{\Gamma_{\infty}^1(r_c, x_0)} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) ds \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_{\infty}^2(r_c, x_0)} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) ds$$

tendent vers une limite finie lorsque  $r_c$  tend vers l'infini.

- d'autre part, ces intégrales sur  $\Gamma_c(r_c, x_0)$  doivent tendre vers une limite finie et connue lorsque  $r_c$  tend vers l'infini, sans quoi nous ne pourrions nous affranchir de l'intégration numérique sur l'arc de cercle.

Les études de convergence menées en annexe 1, montrent que ces intégrales tendent vers une limite finie lorsque  $r_c$  tend vers l'infini, sous réserve que les conditions suivantes soient vérifiées:

- \* pour les déplacements:  $u = o(r^\alpha \ln r)$  avec  $\alpha < 0$
- \* pour les tensions:  $t = o(r^\alpha)$  avec  $\alpha < -1$

#### IV.2.3. Comportement des fonctions déplacement et tension:

Pour savoir dans quelle mesure les intégrales convergent, il est nécessaire de connaître la tendance du déplacement  $u$  et de la tension  $t$  lorsque le rayon  $r$  tend vers l'infini.

Watson<sup>53</sup> admet que les contraintes varient en  $\frac{1}{r^2}$  et les déplacements en  $\frac{1}{r}$ , lorsque  $r$  devient infini. Cette hypothèse le conduit à adopter un mode d'extrapolation excessivement simple. Dans ce cas, on obtient:

$$\begin{cases} \sigma = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ u = o\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases} \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty$$

Les critères de convergence des intégrales sont alors satisfaits et le mode d'extrapolation est très facile à établir.

**IV.3. Traitement numérique:**

Tout comme dans le cas des domaines fermés, le contour est divisé en éléments quadratiques. Les deux éléments extrêmes de ce contour sont particuliers. Nous les appellerons par la suite "segments semi-infinis".

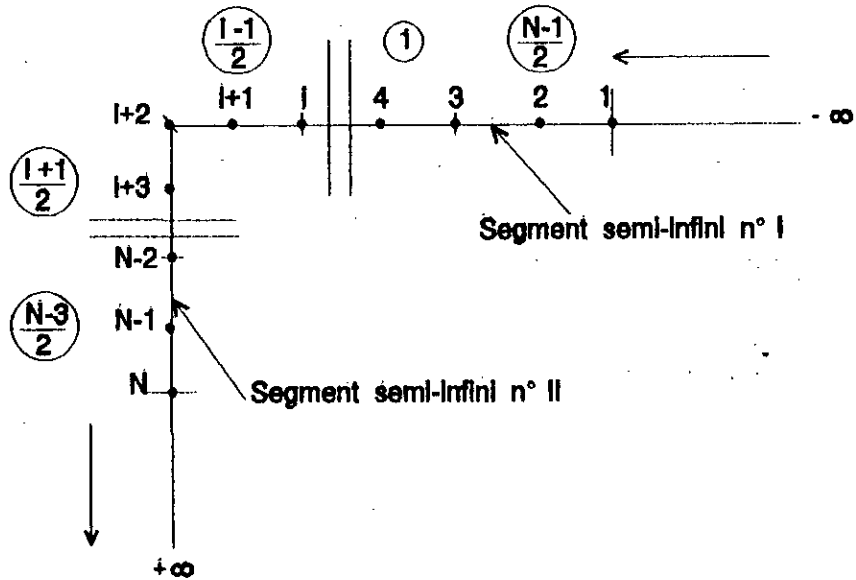


Figure 4.4: Discrétisation d'un milieu ayant des frontières à extension infinie.

**IV.3.1. Définition des points de contrôle et des fonctions de forme:**

**IV.3.1.1. Les segments finis "classiques":**

\* La géométrie: le segment fini comprend trois points de contrôle de la géométrie.

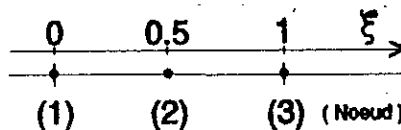


Figure 4.5: Coordonnée locale.

Les fonctions d'interpolation de la géométrie sont les fonctions quadratiques définies au chapitre II (équation 2.19).

**\* Les tensions et les déplacements:**

Ils ont les mêmes points de contrôle que la géométrie avec la possibilité de dédoublement des noeuds dans le cas des discontinuités de tension. Ils ont aussi les mêmes fonctions d'interpolation que la géométrie.

Donc, en ce qui concerne les segments finis, on retrouve exactement le même mode de traitement que pour les contours fermés.

**IV.3.1.2. Les segments semi-infinis:**

**\* Géométrie:** le segment semi-infini comprend trois points de contrôle de la géométrie. Les fonctions d'interpolation sont les mêmes que précédemment. Elles jouent également le rôle de fonctions d'extrapolation au delà du point n° N (segment II) et en deçà du point n° 1 (segment I).

La coordonnée intrinsèque  $\xi$  varie suivant le mode représenté ci-dessous.

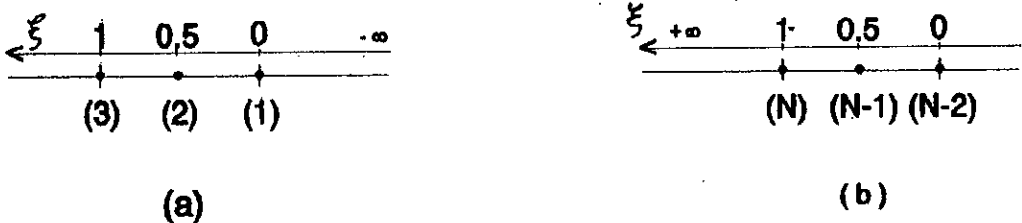


Figure 4.6: (a) Segment semi-infini n°I, (b) Segment semi-infini n°II

**\* Les déplacements et les tensions:**

Nous avons un seul point de contrôle des déplacements et des tensions pour chaque segment semi-infini: le point n° 3 pour le segment I et le point n° N-2 pour le segment II. Le choix des fonctions d'extrapolation dépend, bien entendu, de la nature du problème étudié. Ces fonctions doivent suivre au mieux les variations des tensions et des déplacements lorsqu'on s'éloigne de la zone de chargement.

Dans le cas du problème de sol, les déplacements décroissent en  $\frac{1}{r}$  et les tensions en  $\frac{1}{r^2}$  lorsqu'on s'éloigne de la zone de chargement.

Ceci nous amène à adopter les fonctions d'extrapolation suivantes:



pour la fonction déplacement:  $u_i(\xi) = u_i^z \frac{r(x_o, z)}{r(x_o, x)}$

et pour la fonction tension:  $t_i(\xi) = t_i^z \left( \frac{r(x_o, z)}{r(x_o, x)} \right)^2$

où  $u_i^z$  et  $t_i^z$  sont respectivement le déplacement et la tension au point de contrôle (noté z) dans la direction i.

$u_i(\xi)$  et  $t_i(\xi)$  sont le déplacement et la tension au point x du segment semi-infini de coordonnée intrinsèque  $\xi$ .

$x_o$  est un point appartenant à la zone étudiée encore appelé point de référence.

#### IV.3.2. Points de collocation:

Chaque point de contrôle (qu'il soit dédoublé ou non) apporte deux inconnues. Nous devons donc considérer N-4 points de collocation, ces points correspondront aux noeuds géométriques dont le numéro est compris entre 3 et N-2 (inclus). Les segments quadratiques sont numérotés en figure 4.4 par des chiffres entourés.

#### IV.3.3. Intégration:

##### IV.3.3.1. Les segments de type "classique" ( $n^{\circ} 1$ à $\frac{N-5}{2}$ ):

L'intégration sur ces éléments a déjà été programmée et ne pose aucun problème spécifique aux milieux aux frontières s'étendant à l'infini.

##### IV.3.3.2. Les segments "extrêmes" ( $n^{\circ} \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}$ ):

Ils sont constitués de la partie de contour comprise entre les trois points extrêmes: (1, 2, 3) ou (N-2, N-1, N).

L'intégration sur ces éléments suit exactement le même algorithme que celle sur les segments classiques, seul le calcul des fonctions de forme change: on utilise alors les fonctions d'extrapolation définies plus haut.

##### IV.3.3.3. Les segments "semi-infinis" proprement dits:

Ils sont constitués de la partie de contour située en deçà du premier noeud ou au delà du N<sup>ième</sup> noeud géométrique.

Afin de calculer ces intégrales sur les segments semi-infinis, nous utilisons la

quadrature de Gauss. Pour ce faire, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intervalle [0, 1], intervalle sur lequel les points de Gauss sont définis.

a) Segment n° I:

$$\text{Posons: } \xi = \frac{\eta-1}{\eta} \quad \text{nous vérifions: } \begin{cases} \eta: 0 \rightarrow 1 \\ \xi: -\infty \rightarrow 0 \end{cases}$$

On écrit donc l'intégrale comme suit:

$$\int_{s_0}^{\infty} U(s) \tau(s) ds = \int_{s_0}^{\infty} U(s) \tau^z \phi_{\infty}'(s) ds = \tau^z \int_0^1 U(s(\xi(\eta))) \phi_{\infty}'(s(\xi(\eta))) \frac{ds}{d\xi} \frac{d\xi}{d\eta} d\eta$$

Le Jacobien est:  $\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = JAC$  avec  $\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{\eta^2}$

En appliquant la quadrature de Gauss, on obtient:

$$\Delta G = \sum_{IG=1}^{NGP} U(s(\xi(\eta_{IG}))) \phi_{\infty}'(s(\xi(\eta_{IG}))) JAC \frac{1}{\eta_{IG}^2} W_{IG} \quad (4.2)$$

$IG$  : indice du point de Gauss,

$\eta_{IG}$  : position sur [0, 1] du point de Gauss  $IG$ ,

$W_{IG}$  : coefficient de Gauss correspondant au point  $IG$ .

La même démarche est suivie pour calculer  $\int_{s_0}^{\infty} T(s) u(s) ds$ .

b) Segment n° II:

$$\text{Posons: } \xi = \frac{\eta+1}{1-\eta} \quad \text{nous vérifions: } \begin{cases} \eta: 0 \rightarrow 1 \\ \xi: 1 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

En suivant la même démarche que précédemment, nous obtenons:

$$\Delta G = \sum_{IG=1}^{NGP} U(s(\xi(\eta_{IG}))) \phi_{\infty}''(s(\xi(\eta_{IG}))) JAC \frac{2}{(1-\eta_{IG})^2} W_{IG} \quad (4.3)$$

Ces termes  $\Delta G$  viennent s'ajouter aux termes du bloc  $GMT$  correspondant respectivement aux points de contrôle de la tension n°1 (point géométrique n°3) et n°  $NNT$  (point géométrique n°  $N-2$ ).

Le calcul des termes du bloc  $HMT$  est similaire avec une difficulté supplémentaire concernant le calcul du terme diagonal. En effet, tout comme

dans le cas des milieux finis, les intégrales  $\int_0^1 U_{ij}(P, Q) \phi(\xi) J(\xi) d\xi$  sont singulières lorsque le point P appartient à l'élément d'intégration. On contourne la difficulté en considérant un déplacement de corps rigide (ce qui évite également, de calculer le terme libre  $C_{ij}$ ).

#### IV.3.4. Déplacement de corps rigide:

Afin de calculer les termes diagonaux de la matrice [H], considérons pour chaque bloc HMT (correspondant à un point de collocation) un déplacement rigide d'ensemble du domaine.

a) Considérons un déplacement de corps rigide dans la direction

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \end{array} \right\} \forall Q, \quad t_1 = t_2 = 0, \quad \forall Q$$

Ceci conduit à:

$$\begin{aligned} HMT(i, 2ICOL-1) = & - \left\{ \sum_{j=1}^{NNU} (1 - I(j, ICOL)) HMT(i, 2j-1) \right. \\ & + (1 - I(1, ICOL)) \left[ \int_{\Gamma_1^I} T_{ij}(P, Q) \cdot 1 \cdot d\xi - \int_{\Gamma_1^I} T_{ij}(P, Q) \phi_{\infty}^I(\xi) d\xi \right] \\ & + (1 - I(NNU, ICOL)) \left[ \int_{\Gamma_N^II} T_{ij}(P, Q) \cdot 1 \cdot d\xi - \int_{\Gamma_N^II} T_{ij}(P, Q) \phi_{\infty}^{II}(P, Q) d\xi \right] \\ & \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}(r_{\epsilon}, x_0)} T_{ij}(P, Q(s)) ds \right\} \end{aligned}$$

avec:

$NSEG = \frac{N-5}{2}$  est le nombre de segments comportant des points de collocation.

$I(P, ISEG, C) = 1$  si P est confondu au point de collocation  $n^{\circ}C$  du segment  $n^{\circ}ISEG$ .

$I(P, ISEG, C) = 0$  dans le cas contraire,

Les intégrales sur les segments semi-infinis et segments extrêmes (notés  $\Gamma_1^I$  et  $\Gamma_N^II$ ) sont calculées en remplaçant la fonction d'extrapolation  $\phi_{\infty}$  par

en fait, garder la fonction d'extrapolation  $\phi_{\infty} = \frac{r(x_0, z)}{r(x_0, x)}$  reviendrait à imposer un

déplacement tendant vers zéro lorsque l'on s'éloigne de la zone étudiée,

est incompatible avec l'hypothèse de déplacement de corps rigide.

Le point de collocation a le numéro *ICOL*.

*NNU* est le nombre de noeuds de contrôle du déplacement ( $NNU = N-4$ ).

*b) Déplacement rigide dans la direction 2:*

Similairement, on trouve:

$$\begin{aligned}
 HMT(i, 2ICOL) = & - \sum_{j=1}^{NNU} (1 - I(j, ICOL)) HMT(i, 2j) \\
 & + (1 - I(1, ICOL)) \left[ \int_{\Gamma_c^I} T_{12}(P, Q) \cdot 1 \cdot d\xi - \int_{\Gamma_c^I} T_{12}(P, Q) \phi_{\infty}^I(\xi) d\xi \right] \\
 & + (1 - I(NNU, ICOL)) \left[ \int_{\Gamma_c^{II}} T_{12}(P, Q) \cdot 1 \cdot d\xi - \int_{\Gamma_c^{II}} T_{12}(P, Q) \phi_{\infty}^{II}(P, Q) d\xi \right] \\
 & + \lim_{r_c \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c(r_c, x_c)} T_{12}(P, Q(s)) ds \Bigg\} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

On détermine de cette manière les quatre termes diagonaux du bloc *HMT* :

$$\begin{bmatrix} HMT(1, 2ICOL-1) & HMT(1, 2ICOL) \\ HMT(2, 2ICOL-1) & HMT(2, 2ICOL) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A la somme des "autres termes *HMT*", on retranche la contribution des segments infinis (calculée avec fonction d'interpolation  $\phi_{\infty}$ ), on ajoute cette contribution avec fonctions d'extrapolation égales à 1, puis on ajoute la limite lorsque  $r_c$  tend vers l'infini de l'intégrale sur l'arc de cercle, encore appelée "intégrale azimutale". (Le calcul des quatres intégrales azimutales est donné en Annexe 2).

**IV.5. Conclusion:**

Nous avons montré que l'utilisation d'un contour ouvert pour la résolution, par équations intégrales, d'un problème d'élasticité plane dans un milieu pouvant avoir des extensions à l'infini, était possible, à condition toutefois de vérifier la décroissance en  $\frac{1}{r}$  pour le déplacement et en  $\frac{1}{r^2}$  pour la tension. Le maillage par contour ouvert est, ici, très avantageux, en effet, on a: - simplification de la préparation des données, - systèmes à résoudre moins lourds, - très nette amélioration des résultats.

## **Chapitre V**

# **Formulation de la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières pour l'Analyse non Linéaire du Comportement Matériel**

**V.1.Introduction:**

Dans la théorie de l'élasticité, le matériau possède deux caractères principaux: la reprise de la configuration non déformée (initiale) lorsqu'on omet les charges et la non dépendance des déformations de l'histoire du chargement ou du chemin de contrainte. En plasticité et anélasticité en général, ces deux caractères ne sont pas vérifiés.

La plasticité est définie comme une propriété qui permet au matériau de se déformer continuellement et en permanence sans rupture lorsque la limite élastique du matériau est dépassée. Des déformations résiduelles apparaissent donc lorsqu'on supprime la charge. De surcroît, la déformation finale dépend de l'histoire du chemin de contrainte suivi.

Le problème de la formulation des relations physiques décrivant le comportement d'un matériau durant la phase de plastification est un problème complexe. Cette complexité provient de la non-linéarité et de l'irréversibilité du processus de déformation.

**V.2.Quelques modèles inélastiques:**

Quelques diagrammes approximatés possibles sont considérés, ils permettent de représenter le comportement d'un spécimen sollicité en traction ou en compression simple.

**V.2.1.Comportement élastique parfaitement plastique:**

Le cas du matériau élastique parfaitement plastique est montré en figure 5.1.

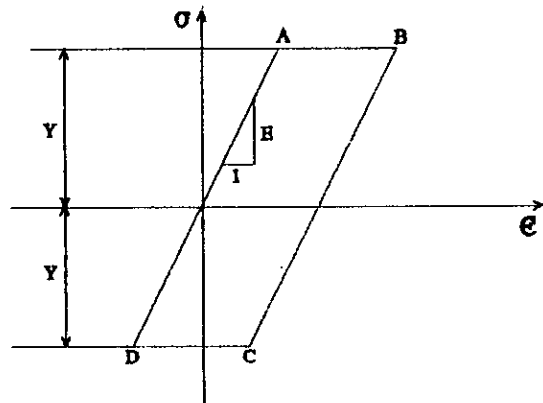


Figure 5.1: Diagramme contrainte-déformation uniaxiale d'un matériau élastique parfaitement plastique.

Le matériau passe par différentes phases:

- sur OA, on rencontre des déformations élastiques,
- sur AB, des déformations plastiques apparaissent sous contrainte de rupture constante,
- lorsqu'on décharge le spécimen, le point de contrainte va suivre la ligne BC parallèlement à OA, on remarque bien les déformations plastiques qui prennent naissance.
- En sollicitant le spécimen en compression, on atteint le point C pour lequel la contrainte égalise celle à la rupture par compression.
- Au delà du point C (chemin CD), le spécimen se déforme sous contrainte de rupture constante.

### V.2.2. Ecrouissage d'un matériau:

Une situation plus complexe a lieu lorsque les effets d'écrouissage positif ou négatif (endurcissement ou ramollissement) sont pris en compte. Ceci peut être montré en figure 5.2 où un écrouissage linéaire simplifié est représenté, celui-ci est caractérisé par le module constant  $E_T$ .

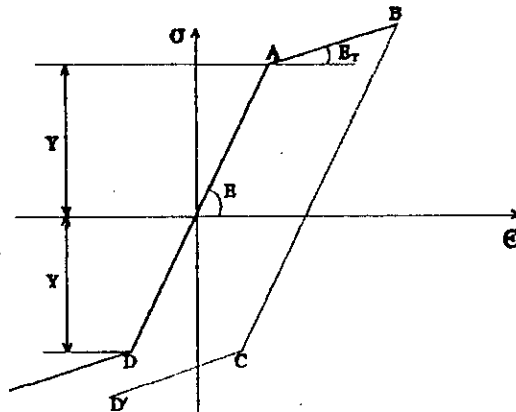


Figure 5.2: Diagramme contrainte déformation uniaxial de l'écrouissage d'un matériau.

Le matériau passe par les étapes suivantes:

Lorsqu'on charge le spécimen:

- OA phase élastique.
- AB écrouissage positif.

Lorsque le spécimen est déchargé:

- Le point de contrainte se déplace sur la ligne BC parallèlement à OA

induisant une déformation plastique résiduelle.

La contrainte de rupture compressive va dépendre de l'histoire des déformations précédentes. Ce phénomène est décrit en littérature<sup>6,14</sup> comme "effet de Baushinger".

La déformation totale est la somme d'une déformation élastique  $\epsilon^e$  et d'une déformation plastique  $\epsilon^p$ , soit:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad \text{avec} \quad \epsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

**V.2.3. Comportement de non-tension:**

Dans plusieurs applications pratiques, les matériaux tels que le béton et la roche peuvent être idéalisés comme étant capables de supporter seulement des contraintes de compression et se déforment sans aucune résistance à la traction. Une telle idéalisation est désignée communément dans la littérature<sup>48</sup> par un comportement de non-tension.

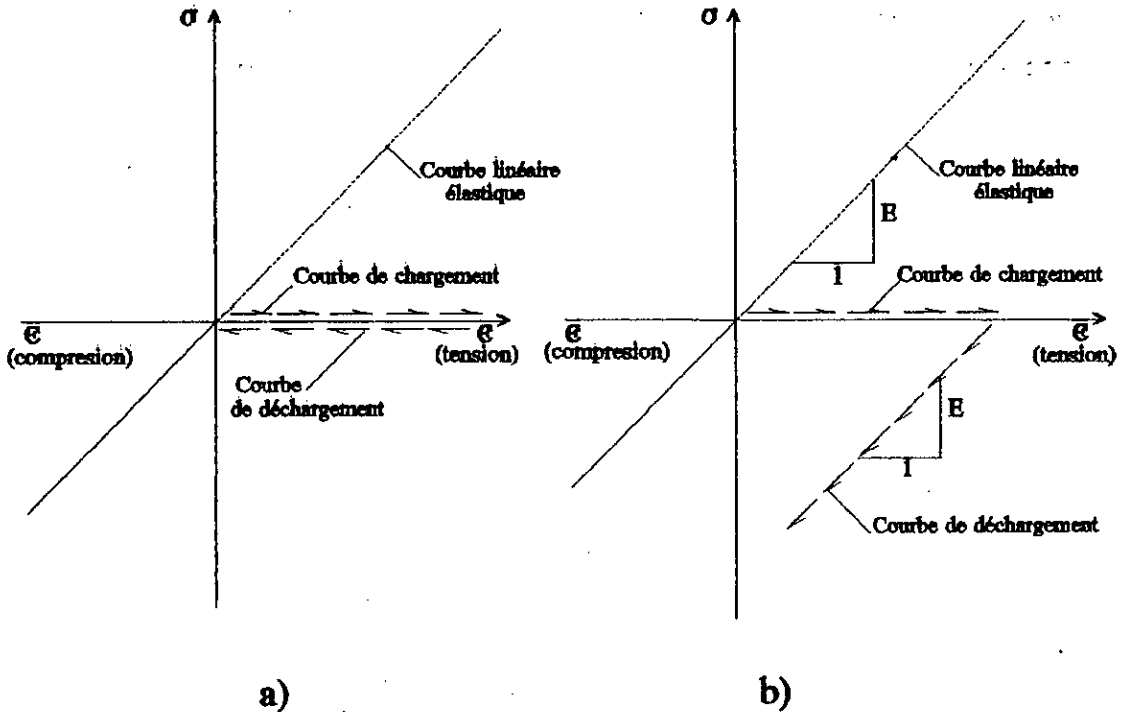


Figure 5.3: a) Comportement de non-tension élastique,  
 b) Comportement de non-tension plastique.

Deux cas sont à envisagés:

(i) Le matériau ne peut supporter aucune tension (figure 5.3.a). Le chargement et le déchargement pour une tension nulle apparaît le long de la ligne droite horizontale avec une autre ligne droite caractérisant la propriété élastique



linéaire de la compression. Le comportement du matériau est supposé élastique.  
 (ii) Il se comporte comme un matériau plastique pour la tension nulle. Ceci va produire un chemin de déchargement différent du premier (figure 5.3.b).

### V.3. Equations différentielles gouvernantes:

Dans le contexte de la théorie des faibles déformations, le taux de déformation totale est représenté par:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^a \quad (5.1)$$

où  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  et  $\dot{\epsilon}_{ij}^a$  sont respectivement les parties élastiques et inélastiques du tenseur de vitesse des déformations totales.

L'application de la loi de Hooke à la partie élastique du tenseur de vitesse des déformations totales conduit à l'expression des composantes de vitesse des contraintes suivante:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^a) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}) \delta_{ij} \quad (5.2)$$

dans laquelle  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{kk}^a$  est la vitesse des déformations de dilatation inélastiques. L'expression ci dessus peut être écrite en terme de contrainte initiale:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad (5.3)$$

où  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  représente les composantes des "contraintes initiales", on a:

$$\dot{\sigma}_{ij}^a = 2G \dot{\epsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon} \delta_{ij} \quad (5.4)$$

La forme étendue de l'équation de Navier et les conditions de frontière de traction sont exprimées par les relations suivantes:

$$\dot{u}_{jkk} + \frac{1}{1-2\nu} \dot{u}_{kkj} = 2 (\dot{\epsilon}_{yj}^a + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_j) - \frac{\dot{b}_j}{G} \quad (5.5)$$

$$\dot{P}_i + 2G (\dot{\epsilon}_{ij}^a n_j + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon} n_i) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{u}_{kk} n_i + G (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) n_j \quad (5.6)$$

Les expressions ci-dessus peuvent être écrites alternativement sous la forme suivante:

$$\dot{u}_{jkk} + \frac{1}{1-2\nu} \dot{u}_{kkj} = - \frac{\dot{b}_j}{G} \quad (5.7)$$

et 
$$\dot{P}_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{u}_{kk} n_i + G (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) n_j \quad (5.8)$$

où  $\dot{b}_j$  et  $\dot{P}_i$  sont respectivement les pseudo-forces de volume et les pseudo-tractions données par:

$$\dot{b}_j = \dot{b}_j - 2G (\dot{\epsilon}_{yj}^a + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_j) = \dot{b}_j - \dot{\sigma}_{yj}^a \quad (5.9)$$

$$\dot{P}_i = \dot{P}_i - 2G (\dot{\epsilon}_{ij}^a n_j + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon} n_i) = \dot{P}_i + \dot{\sigma}_{ij}^a n_j \quad (5.10)$$

avec:  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{11}^a + \dot{\epsilon}_{22}^a$  en déformation plane et  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{11}^a + \dot{\epsilon}_{22}^a + \dot{\epsilon}_{33}^a$  en contrainte plane,  $i, j, k = 1, 2$ .

#### V.4. Formulation intégrale de frontière:

Pour chaque charge unité  $\dot{e}_i$ , on peut écrire l'expression de l'équation intégrale de frontière comme suit:

$$C_{ij}(\xi) \dot{u}_i(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{P}_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{b}_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega} e_{jkl}^*(\xi, x) \dot{\sigma}_{jk}^a d\Omega(x) \quad (5.11)$$

La dernière intégrale de l'équation (5.11) est remplacée par  $\int_{\Omega} \sigma_{jkl}^*(\xi, x) \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega(x)$  pour la formulation en déformation initiale.

### V.5. Calcul aux points internes:

Pour le calcul des déplacements aux points internes, on utilise la relation suivante:

$$\dot{u}_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b}_j d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{jkl}^* \dot{\sigma}_{jk}^a d\Omega \quad (5.12)$$

Ces déplacements sont différenciés numériquement pour déterminer les contraintes, on écrit alors:

$$\dot{\sigma}_{ij} = G \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad (5.13)$$

La dérivation étant faite par rapport aux coordonnées du point chargé. Les trois premières intégrales de l'équation (5.12) sont différenciées de la même façon que dans le cas élastique, ces différenciations sont appliquées directement au tenseur de la solution fondamentale.

### V.6. Formulations éléments de frontière alternatives:

Il existe différentes formulations éléments de frontière utilisant les solutions fondamentales de Kelvin:

#### V.6.1. Formulation en déformation initiale:

La formulation en déformation initiale est écrite:

$$C_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b}_j d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jkl}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega \quad (5.14)$$

Les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation reliés à la solution fondamentale sont données en annexe 3.

Dans le cas d'un problème de déformation plane, les intégrales de vitesses des déformations inélastiques doivent prendre en considération le travail fourni par les contraintes dans la troisième direction ( $\sigma_{33}^* \dot{\epsilon}_{33}^a$ ). Celui-ci est facilement introduit en faisant la supposition particulière de l'incompressibilité des déformations inélastiques ( $\dot{\epsilon} = 0$ ). Ceci conduit à l'expression suivante:

$$C_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b}_j d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ijk}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega \quad (5.15)$$

dans laquelle:

$$\dot{\sigma}_{ijk}^* = \sigma_{ijk}^* + \frac{2\nu \delta_{jk} r_i}{4\pi(1-\nu)r} \quad (5.16)$$

Les vitesses des contraintes internes sont alors calculées par:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ijk}^* \dot{P}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ijk}^* \dot{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ijkl}^* \dot{\epsilon}_{kl}^a d\Omega + f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}^a) \quad (5.17)$$

avec:

$$\dot{\sigma}_{ijkl}^* = \sigma_{ijkl}^* + \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} [4\nu r_i r_j \delta_{kl} - 2\nu \delta_{ij} \delta_{kl}] \quad (5.18)$$

$$f_{ij} = -\frac{G}{4(1-\nu)} [2 \dot{\epsilon}_{ij}^a + (1-4\nu) \dot{\epsilon}_{kk}^a \delta_{ij}]$$

Pour les problèmes en contrainte plane, on utilise les équations (5.15) et (5.17) avec  $\dot{\sigma}_{ijk}^* = \sigma_{ijk}^*$ ,  $\dot{\sigma}_{ijkl}^* = \sigma_{ijkl}^*$ ,  $\nu$  est remplacé par  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$  dans tous les tenseurs (\*) et le terme libre est donné par:

$$f_{ij} = -\frac{G}{4(1-\bar{\nu})} [2 \dot{\epsilon}_{ij}^a + \dot{\epsilon}_{kk}^a \delta_{ij}]$$

#### V.6.2. Formulation en contrainte initiale:

Les formulations en contrainte et en déformation initiale sont équivalentes, en fait, les expressions (A3.1) et (A3.2) en annexe 3, nous permettent d'écrire:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} C_{jkrst} \epsilon_{rst}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega \quad (5.19)$$

Comme  $C_{jkrst} = C_{rstjk}$ , et de plus,  $C_{rstjk} \dot{\epsilon}_{jk}^a = \dot{\sigma}_{rst}^a$ , on a donc:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{jk}^a d\Omega \quad (5.20)$$

En conclusion, la formulation en contrainte initiale est équivalente à la formulation en déformation initiale.

Dans les deux cas (contrainte et déformation plane), les contraintes internes sont calculées par l'expression suivante:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} \dot{u}_{ijk}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{u}_{ijk}^* \dot{b}_j d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk}^* \dot{\sigma}_{kl} d\Omega + g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^a) \quad (5.21)$$

dans laquelle le terme libre est exprimé par:

$$g_{ij} = -\frac{1}{8(1-\nu)} [2\dot{\sigma}_{ij}^a + (1-4\nu) \dot{\sigma}_{kl}^a \delta_{ij}]$$

Il est important de noter que pour les déformations planes, les intégrales des contraintes initiales ne font pas intervenir le travail fourni par les contraintes dans la troisième direction et ne requièrent pas de supposition particulière concernant  $e_{ij}^a$  car  $e_{33l}^* = 0$  et l'effet de  $e_{33}^a$  est déjà inclus dans les composantes de  $\dot{\sigma}_{ij}^a$ .

Par conséquent, la formulation dans le cas de problème en contrainte plane est identique à celle en déformation plane à la seule différence  $\nu$  est remplacé par  $\bar{\nu}$ , ce qui représente un grand avantage de la formulation en contrainte initiale par rapport à la formulation en déformation initiale.

### V.6.3. Formulation en tractions et en forces de volume fictives:

La formulation en tractions et en forces de volume fictives est la suivante:

$$C_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b}_j d\Omega \quad (5.22)$$

où les expressions de  $\dot{b}_j$  et  $\dot{P}_j$  sont respectivement données par les équations (5.9) et (5.10).

Donc dans ce cas, la formulation inélastique ressemble à la formulation élastique de la technique éléments de frontière, seules les vitesses des tractions et des forces de volume sont fictives (dépendent des déformations inélastiques), les déplacements étant inchangés.

Les contraintes internes sont calculées par l'expression suivante:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} \dot{u}_{ijk}^* \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{u}_{ijk}^* \dot{b}_j d\Omega - C_{ijkl} \dot{e}_{kl} \quad (5.23)$$

La présente formulation manque de généralité par rapport aux deux premières, en effet, l'interpolation constante ne peut être utilisée (l'expression (5.9) contient des dérivations). Malgré cet inconvénient, la procédure reste comme même valide pour des interpolations d'ordre supérieur.

**V.7. Choix et justification de la formulation en contrainte initiale:**

Dans le processus de contrainte initiale, les contraintes sont réduites au niveau correct en introduisant une contrainte initiale  $\hat{\sigma}^a$ . Tandis que pour le processus de déformation initiale les déformations sont ajustées par une correction  $\hat{\epsilon}^a$ . Le premier processus (contrainte initiale) est plus avantageux quand les déformations augmentent rapidement avec l'augmentation des contraintes, ce cas est rencontré pour les matériaux présentant des ramollissements (softening materials). Le deuxième processus (déformation initiale) s'adapte particulièrement bien aux matériaux à grand verrouillage (locking materials). En outre, pour traiter un problème de déformation plane par la formulation déformation initiale, il faut tenir compte du travail fournit par les contraintes dans la troisième direction. Ceci ne peut être fait que par la supposition particulière de l'incompressibilité des déformations inélastiques, ce qui représente un grand inconvénient de la formulation en déformation initiale.

La formulation en tractions et en forces de volume fictives manque de généralité par rapport aux deux premières, en fait, son implémentation numérique ne peut être faite pour une interpolation constante.

Enfin, nous pouvons conclure que la formulation en contrainte initiale est la plus générale et la mieux adaptée pour le modèle sol étudié, ce qui justifie le choix de celle-ci dans notre implémentation numérique.

**V.8. Discrétisation des équations intégrales:**

Pour les intégrales de frontière, la discrétisation est identique à celle décrite au chapitre II (sections II.3.1 et II.3.2). Une attention particulière est accordée aux intégrales de domaine du terme inélastique, en effet, la partie du domaine où des déformations inélastiques prennent naissance, est discrétisée en cellules internes.

Les coordonnées cartésiennes  $x$  des points localisés à l'intérieur de chaque cellule  $\Omega$ , sont exprimées en fonction des coordonnées  $x^m$  des points définissant la géométrie de celle-ci par:

$$x = \bar{\Psi}^T x^m \tag{5.24}$$

où  $\bar{\Psi}$  représentent les fonctions d'interpolation.

Les vitesses des contraintes inélastiques sont elles aussi interpolées à l'intérieur de la cellule par la relation suivante:

$$\dot{\sigma}^{a(i)} = \bar{\phi}^T \dot{\sigma}^{a,n} \quad (5.25)$$

dans laquelle  $\bar{\phi}$  et  $\dot{\sigma}^{a,n}$  représentent respectivement les fonctions d'interpolation et les vitesses des contraintes inélastiques aux noeuds internes.

L'équation intégrale sous sa forme discrétisée pour le noeud de frontière  $\xi_i$  est la suivante:

$$C(\xi_i) \dot{u}(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} P^* \phi^T d\Gamma \right) \dot{u}^n = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} u^* \phi^T d\Gamma \right) \dot{P}^n + \sum_{j=1}^M \left( \int_{\Omega_j} e^* \bar{\phi}^T d\Omega \right) \dot{\sigma}^{a,n} \quad (5.26)$$

Les intégrales sur les cellules internes sont calculées en utilisant une quadrature numérique. L'application de l'équation (5.26) à tous les noeuds de la frontière nous permet d'écrire le système matriciel suivant:

$$H \dot{U} = G \dot{P} + Q \dot{\sigma}^a \quad (5.27)$$

Les matrices  $H$  et  $G$  sont les mêmes que celles obtenues en analyse élastique et  $Q$  est la matrice des intégrales des contraintes inélastiques.

Le calcul des vitesses des contraintes aux points intérieurs se fait par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\xi_i) = & \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} u^{i*} \phi^T d\Gamma \right) \dot{P}^n - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} P^{i*} \phi^T d\Gamma \right) \dot{u}^n \\ & + \sum_{j=1}^M \left( \int_{\Omega_j} e^{i*} \bar{\phi}^T d\Omega \right) \dot{\sigma}^{a,n} + C'(\xi_i) \dot{\sigma}^a(\xi_i) \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'équation (5.28) appliquée à tous les points internes conduit au système matriciel suivant:

$$\dot{\sigma} = G' \dot{P} - H' \dot{U} + (Q' + E') \dot{\sigma}^a \quad (5.29)$$

où  $E'$  est la matrice des termes libres  $g_{ij}$  et  $Q'$  est la matrice des intégrales des contraintes inélastiques. Les matrices  $H'$  et  $G'$  correspondent aux intégrales de frontière.

Pour un problème bien posé, un nombre suffisant de tractions et de déplacements est prescrit. Les systèmes d'équations (5.27) et (5.29) sont alors réordonnés pour donner:

$$A \dot{Y} = \dot{F} + Q \dot{\sigma}^a \quad (5.30)$$

$$\dot{\sigma} = -A' \dot{Y} + \dot{F}' + Q^* \dot{\sigma}^a \quad (5.31)$$

où  $Q^* = Q' + E'$ .

La contribution des valeurs prescrites est incluse dans les vecteurs  $\dot{F}$  et  $\dot{F}'$ .  
Finalement, on obtient les expressions suivantes:

$$\dot{Y} = R \dot{\sigma}^a + \dot{M} \quad (5.32)$$

$$\dot{\sigma} = S \dot{\sigma}^a + \dot{N} \quad (5.33)$$

où:  $R = A^{-1} Q$ ,  $\dot{M} = A^{-1} \dot{F}$   
 $S = Q^* - A' R$ , et  $\dot{N} = \dot{F}' - A' \dot{M}$

Remarquons que la solution élastique du problème est donnée par les vecteurs  $\dot{M}$  (sur la frontière) et  $\dot{N}$  (aux points internes).

### V.9. Intégration sur les cellules internes:

Considérons la cellule triangulaire montrée en figure 5.4.

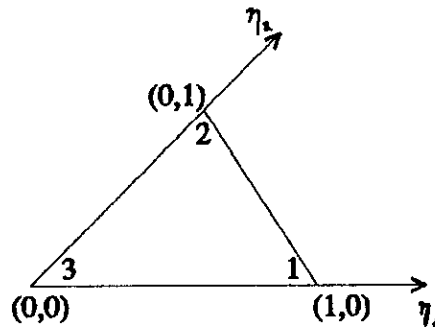


Figure 5.4: Cellule triangulaire - Définition du système de coordonnées intrinsèques  $(\eta_1, \eta_2)$

Les fonctions d'interpolation utilisées sont linéaires et sont exprimées dans le système de coordonnées homogènes  $(\eta_1, \eta_2)$  par:

$$\bar{\phi}^T = [ I \eta_1 \quad I \eta_2 \quad I \eta_3 ] \quad (5.34)$$

où  $\eta_3 = 1 - \eta_2 - \eta_1$  et  $I$  est la matrice identité d'ordre 3x3.  
La relation entre les coordonnées  $\eta_a$  et les coordonnées dans le système



cartésien  $(x_1, x_2)$  est la suivante:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Pour le calcul de la matrice  $Q$ , chaque cellule va contribuer avec une sous-matrice d'ordre  $2 \times 9$  ayant la forme suivante:

$$\begin{aligned} q &= \int_{\Omega_j} \mathbf{e}^* \phi^T d\Omega \\ &= \int_{\Omega_A} \{ [ \mathbf{e}^* \eta_1 \quad \mathbf{e}^* \eta_2 \quad \mathbf{e}^* \eta_3 ] \} d\Omega \end{aligned} \quad (5.36)$$

Les intégrales sur les cellules internes sont calculées en utilisant une quadrature numérique. Pour les cellules triangulaires, les formules d'intégration de Hammer<sup>14</sup> peuvent être utilisées:

$$\int_{\Omega_j} \mathbf{e}^* \bar{\phi}^T d\Omega = \sum_{k=1}^K |J| w_k ( \mathbf{e}^* \bar{\phi}^T )_k$$

où  $K$  est le nombre de points d'intégration,  $w_k$  est le facteur de pondération associé et  $|J|$  est le jacobien de la transformation au système de coordonnées homogènes  $(\eta_1, \eta_2)$ . Pour la cellule triangulaire  $|J|$  est égal au double de sa surface.

Le calcul de la matrice  $Q'$  est analogue à celui de la matrice  $Q$ , à la seule différence que chaque cellule contribue avec des sous-matrices d'ordre  $3 \times 9$  de la forme:

$$\begin{aligned} q' &= \int_{\Omega_j} \mathbf{e}'^* \bar{\phi}^T d\Omega \\ &= \int_{\Omega_A} \{ [ \mathbf{e}'^* \eta_1 \quad \mathbf{e}'^* \eta_2 \quad \mathbf{e}'^* \eta_3 ] \} d\Omega \end{aligned} \quad (5.37)$$

V.10. Relations contraintes-déformations élastoplastiques générales:

Pour les modèles à déformation élastoplastique, trois conditions doivent être posées:

(a) une relation élastique explicite entre contrainte et déformation avant naissance de la déformation élastoplastique (pré-rupture),

(b) un critère de rupture indiquant le niveau de contrainte pour lequel le flux plastique commence (rupture),

(c) une relation contrainte-déformation pour le comportement post-rupture.

La condition (a) a été discuté dans le chapitre II, donc, uniquement (b) et (c) sont considérées ici.

Le critère de rupture pour l'érouissage isotrope<sup>6,14</sup> s'énonce comme suit:

$$F(\sigma_{ij}, k) = 0 \tag{5.38}$$

où  $k$  est le paramètre du travail d'érouissage.

Ce critère donne la position instantanée de la surface de rupture dans l'espace de rupture  $n$  dimensionnel, il est indépendant de l'orientation du système de coordonnées utilisé et il peut s'écrire en fonction des trois invariants de contrainte:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{kk} \\ J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \tag{5.39}$$

avec:  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij}$

Un invariant de contrainte alternatif  $\alpha$  est utilisé à la place de  $J_3$ , celui-ci est exprimé par la relation suivante:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \alpha = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \leq \frac{\pi}{6} \tag{5.40}$$

\* Critères de rupture:

- Différents critères de rupture sont utilisés, selon le modèle étudié<sup>7,17</sup>:
- le critère de Tresca:  $2\sqrt{J_2} \cos \alpha - \sigma_o = 0$  essentiellement appliqué aux métaux,
  - le critère de Von-Mises:  $\sqrt{3 J_2} - \sigma_o = 0$  appliqué aux métaux et aux sols,
  - le critère de Mohr-Coulomb généralement appliqué aux sols:

$$\frac{I_1}{3} \sin \varphi' + \sqrt{J_2} \left( \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \varphi' \right) - c' \cos \varphi' = 0$$

où  $\varphi'$  et  $c'$  sont respectivement l'angle de frottement interne et la cohésion du matériau.

- le critère de Drucker-Prager:  $\alpha' I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0$  appliqué à la mécanique des roches et des sols,

avec  $\alpha' = \frac{2 \sin \varphi'}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi')}$  et  $k' = \frac{6 c' \cos \varphi'}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi')}$

Pour plus de pratique, l'équation (5.38) est écrite sous la forme:

$$F(\sigma_y, k) = f(\sigma_y) - \psi(k) = 0 \quad (5.41)$$

dans laquelle  $f(\sigma_y)$  est une fonction scalaire de  $\sigma_y$  et  $k$  est le paramètre d'érouissage qui représente le travail plastique total ( $k = w^p = \int \sigma_y d\epsilon_y^p$ ).

La relation contrainte-déformation pour le comportement post-rupture, est d'abord écrite sous la forme incrémentale suivante:

$$d\sigma_y = C_{yH} (d\epsilon_H - d\epsilon_H^p) \quad (5.42)$$

Dans le contexte de la plasticité associée<sup>7</sup>, le principe de normalité est décrit par:

$$d\epsilon_y^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad (5.43)$$

où  $d\lambda$  est un facteur de proportionnalité.

Lorsque la rupture plastique a lieu, les contraintes satisfont le critère de rupture, qui après différenciation donne:

$$dF = a_y d\sigma_y - \frac{d\psi}{dk} dk = 0 \quad (5.44)$$

où:  $a_y = \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}$

Moyennant le critère de rupture et le principe de normalité, on obtient la relation contrainte-déformation incrémentale suivante:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} de_{kl} \quad (5.45)$$

dans laquelle:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} \quad (5.46)$$

avec

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} a_{ij} \quad (5.47)$$

Pour l'application des relations ci-dessus à la formulation en contrainte initiale, la notation suivante est adoptée:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} de_{kl} \quad (5.48)$$

où  $d\sigma_{ij}^e$  sont les composantes des incréments de contraintes élastiques.

La relation contrainte déformation est alors écrite sous la forme suivante:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^e \quad (5.49)$$

Les incréments de contraintes totales sont donc calculés à partir de leurs incréments de contraintes élastiques correspondants. De plus, les incréments de contraintes initiales sont déterminés par la relation suivante:

$$d\sigma_{ij}^p = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij} = \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^e \quad (5.50)$$

Donc, sous forme matricielle, l'incrément de contrainte élastique  $d\sigma^e$  est calculé par une expression similaire à l'équation (5.32), il suffit de remplacer  $E'$  par  $\bar{E} = E' + I$  ( $I$  étant la matrice identité). Ceci donne:

$$d\sigma^e = G' dP - H' dU + Q^* d\sigma^p \quad (5.51)$$

avec:  $Q^* = Q' + \bar{E}$

#### V.11. Technique itérative incrémentale en contrainte initiale:

Dans notre étude, nous avons choisi d'utiliser la méthode des contraintes initiales pour résoudre le problème de la non-linéarité matérielle du massif. En effet, les équations dans la formulation en contrainte initiale sont plus

générales et ne requièrent pas de supposition supplémentaire. Le processus itératif incrémental est alors utilisé. Le critère de rupture que nous avons adopté est le critère de Mohr-Coulomb, celui-ci étant bien adapté au modèle sol étudié.

La charge à la première rupture est calculée en ajustant la solution élastique. Le processus incrémental commence à ce niveau de charge. Donc, pour les solutions élastoplastiques, on écrit pour un niveau de sollicitation:

$$\Delta Y = R \Delta \sigma^P + \Delta M \quad (5.52)$$

et

$$\Delta \sigma^e = S \Delta \sigma^P + \Delta N \quad (5.53)$$

avec  $R = A^{-1}Q$ ,  $S = Q^* - A' R$ .

Dans la procédure itérative incrémentale, l'incrément de charge est appliqué, le problème est d'abord supposé élastique, l'incrément de contrainte initiale  $\Delta \sigma^P$  est alors calculé et par la suite celui-ci doit être appliqué au corps, conduisant à une nouvelle distribution de la contrainte élastique. Cette opération génère de nouveau un champ de contrainte initiale, qui est utilisé une autre fois pour déterminer la distribution des contraintes élastiques et ainsi de suite.

L'itération est stoppée lorsque la contribution du dernier incrément de contrainte initiale peut être négligée. Une fois la convergence est atteinte pour tous les noeuds, la contrainte totale et les incréments de contraintes initiales sont cumulés.

Notons que les matrices  $R$  et  $S$  sont calculées une seule fois au début du processus en entier et ceci représente un gain de temps de calcul important.

\* *Algorithmie:*

La distribution des contraintes initiales n'est pas connue a priori, elle doit être obtenue par un processus itératif à chaque incrément de charge comme décrit ci-dessous:

(a) Nous supposons d'abord que les contraintes initiales sont nulles, nous calculons alors la solution élastique du problème.

(b) Ensuite, calcul de  $F(\{\sigma\})$  pour la contrainte totale atteinte en (a).

Si  $F < 0$ , le processus est élastique, donc pas d'itérations,  
si  $F > 0$ , la solution est ajustée telle que la cellule la plus contrainte est au  
point de rupture ( $F = 0$ ).

Les valeurs courantes des contraintes sont stockées en  $\{\sigma_1\}$ .

(c) Application d'un petit incrément de chargement, et calcul des  
incréments de contraintes élastiques dans toutes les cellules par la relation  
(5.53) pour la première itération et par la relation  $\{\Delta\sigma^e\} = [S] \{\Delta\sigma^p\}$  ailleurs.  
Calcul des valeurs de la contrainte totale équivalente par la relation  
 $\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\Delta\sigma^e\}$ .

Compilation d'une liste de cellules de rupture (pour lesquelles  $F = 0$ ).

Calcul des incréments de contraintes correctes  $\{\Delta\sigma\}$  dans les cellules  
élastoplastiques par la relation  $\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma^e\} - \frac{1}{\gamma'} [C] \{a\} \{a\}^T \{\Delta\sigma^e\}$ .

Calcul des incréments de contraintes initiales engendrées par l'équation  
 $\{\Delta\sigma^p\} = \{\Delta\sigma^e\} - \{\Delta\sigma\}$  comme première approximation.

Modifier l'histoire de contrainte pour les cellules en rupture:

$$\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\Delta\sigma\} \text{ et faire } \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}.$$

(d) Nous supposons l'incrément de charge nul.

Calcul de  $\{\Delta\sigma^e\} = [S] \{\Delta\sigma^p\}$ , où  $\{\Delta\sigma^p\}$  est l'incrément de contrainte initiale issu  
de l'étape (c).

Calcul des contraintes équivalentes en utilisant l'histoire de contrainte

$$\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\Delta\sigma^e\}.$$

Compilation d'une liste de cellules de rupture.

Calcul pour les cellules élastoplastiques des contraintes correctes par la  
relation  $\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma^e\} - \frac{1}{\gamma'} [C] \{a\} \{a\}^T \{\Delta\sigma^e\}$

Les contraintes initiales engendrées sont donc  $\{\Delta\sigma^p\} = \{\Delta\sigma^e\} - \{\Delta\sigma\}$ .

Modifier l'histoire de contrainte pour les cellules élastoplastiques

$$\{\sigma_2\} = \{\sigma_1\} + \{\Delta\sigma\} \text{ et faire } \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}.$$

(e) Tester les incréments de contraintes initiales s'ils sont inférieurs à  
une norme acceptable. Si oui, retourner à l'étape (c), sinon retourner à l'étape  
(d).

## **Chapitre VI**

# **Analyse des Problèmes de Contact avec prise en compte du Comportement Elastoplastique du Massif**

**VI.1: Introduction:**

Dans les problèmes d'interaction sol-structure, sol-sol, la charge est transmise par contact entre les différentes composantes. Des forces tangentiels sont développées dans la surface de contact dues à la présence de frottement. Ainsi, on ne peut se permettre de négliger le décollement et le glissement sur l'interface de contact.

Donc l'objet de cette partie du travail est, d'une part une adaptation de l'algorithme déjà établi pour le calcul du décollement et du frottement de manière à le rendre incrémental à chaque itération, et d'autre part dans le même cadre, le couplage avec la plasticité du massif, c'est à dire la prise en compte des corrections plastiques dans le massif pendant le calcul du frottement-décollement.

**VI.2. Problème de contact couplé avec l'élastoplasticité du massif:**

Dans le but de tenir compte de la probable plastification pouvant avoir lieu au niveau des zones de forte concentration de contrainte, nous avons pensé à introduire le comportement élastoplastique dans le massif. Ce comportement est régi par la loi d'écoulement de Mohr-Coulomb qui s'énonce comme-suit:

$$\frac{I_1}{3} \sin \varphi' + \sqrt{J_2} \left( \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \varphi' \right) - c' \cos \varphi' = 0 \quad (6.1)$$

Tous les points du massif qui vérifient ce critère sont plastifiés. Nous utiliserons alors l'algorithme incrémental itératif décrit précédemment pour corriger les contraintes et les déplacements en ces points.

Aussi, il nous a parut intéressant de coupler le problème du contact à l'élastoplasticité du massif. Donc, les conditions de contact au niveau de l'interface sont modifiées au fur et à mesure des itérations jusqu'à converger vers une solution satisfaisant à la fois les conditions d'interface et le critère de rupture.



VI.2.1. Equation intégrale aux frontières incrémentale pour un problème de contact:

Si  $\Delta P^i$  est un pas de charge incrémental discret appliqué au système initialement en équilibre, la réponse du système ainsi chargé va se traduire par de faibles perturbations au niveau des déplacements et des tractions partout sur la frontière pour donner un nouvel état d'équilibre. On définit alors les changements subits par les déplacements  $u_j$  et les tractions  $t_j$  par:

$$u^i = u^{i-1} + \Delta u^i \quad \text{et} \quad t^i = t^{i-1} + \Delta t^i$$

La charge extérieure discrète correspondante est définie par:

$$P^i = P^{i-1} + \Delta P^i$$

où,  $\Delta t_j^i$  et  $\Delta u_j^i$  sont respectivement les variations incrémentales des tractions et des déplacements dues à l'incrément de charge  $\Delta P^i$ . L'équation intégrale incrémentale est alors:

$$C_{ij}(u_j^{i-1} + \Delta u_j^i) + \int_s T_{ij}(u_j^{i-1} + \Delta u_j^i) ds = \int_s U_{ij}(t_j^{i-1} + \Delta t_j^i) ds \quad (6.2)$$

D'après le principe de superposition, une équation intégrale à variable  $\Delta$  (incrémentales) peut être obtenue:

$$C_{ij} \Delta u_j^i + \int_s T_{ij} \Delta u_j^i ds = \int_s U_{ij} \Delta t_j^i ds \quad (6.3)$$

La discrétisation des frontières des deux corps en contact  $K$  et  $L$ , et d'une partie du domaine  $L$  où les corrections plastiques sont effectuées, donne deux systèmes individuels d'équations en termes incrémentaux, on écrit alors:

$$\begin{aligned} [H]^K \{ \Delta u \}^K &= [G]^K \{ \Delta t \}^K \\ [H]^L \{ \Delta u \}^L &= [G]^L \{ \Delta t \}^L + [Q]^L \{ \Delta \sigma^p \}^L \end{aligned} \quad (6.4)$$

Les vecteurs  $\{ \Delta u \}^{KL}$  et  $\{ \Delta t \}^{KL}$  représentent respectivement les valeurs aux frontières incrémentales discrètes des déplacements et des tractions.

De la même façon que pour un problème homogène, la solution discrète du problème de contact est obtenue une fois les conditions aux frontières à l'extérieur de la zone de contact sont appliquées et à l'intérieur de la zone de contact sont exprimés par les conditions de contact à l'interface.

VI.2.2. Relations incrémentales pour les modes de contact:

Pour un problème de contact donné, la formulation est identique à celle décrite au chapitre III, à la différence que les tractions et les déplacements sont exprimés sous forme de quantités incrémentales et que le terme inélastique est rajouté pour le corps régit par un comportement non linéaire. Les déplacements et les tractions sont inconnus à l'intérieur de la zone de contact, ils sont donc rassemblés dans le vecteur  $\{\Delta Y\}$ .

Les conditions d'équilibre et de compatibilité apportent des équations additionnelles qui permettent la résolution du problème. Ces équations sont écrites en termes de quantités incrémentales  $(\Delta u, \Delta t)$ . Donc, à la  $i^{ème}$  itération, les tractions et les déplacements au niveau de la paire de noeuds  $(a, b)$  pour les différentes conditions de contact sont exprimés par les relations suivantes:

\* Mode d'adhérence:

$$\begin{aligned} \Delta(t_i^a)^i + \Delta(t_i^b)^i &= - [(t_i^a)^{i-1} + (t_i^b)^{i-1}] \\ \Delta(t_n^a)^i + \Delta(t_n^b)^i &= - [(t_n^a)^{i-1} + (t_n^b)^{i-1}] \\ \Delta(u_i^a)^i - \Delta(u_i^b)^i &= - [(u_i^a)^{i-1} - (u_i^b)^{i-1}] \\ \Delta(u_n^a)^i - \Delta(u_n^b)^i &= g_o - [(u_n^a)^{i-1} - (u_n^b)^{i-1}] = g_o^i \end{aligned} \quad (6.5)$$

\* Mode de glissement:

$$\begin{aligned} \Delta(t_i^a)^i + \Delta(t_i^b)^i &= - [(t_i^a)^{i-1} + (t_i^b)^{i-1}] \\ \Delta(t_n^a)^i + \Delta(t_n^b)^i &= - [(t_n^a)^{i-1} + (t_n^b)^{i-1}] \\ \Delta(u_n^a)^i - \Delta(u_n^b)^i &= g_o - [(u_n^a)^{i-1} - (u_n^b)^{i-1}] = g_o^i \\ \Delta(t_i^a)^i \pm \mu \Delta(t_n^b)^i &= - [(t_i^a)^{i-1} \pm \mu (t_n^a)^{i-1}] \end{aligned} \quad (6.6)$$

\* Mode de décollement ou séparation:

$$\begin{aligned} \Delta(t_i^a)^i + \Delta(t_i^b)^i &= - [(t_i^a)^{i-1} + (t_i^b)^{i-1}] \\ \Delta(t_n^a)^i + \Delta(t_n^b)^i &= - [(t_n^a)^{i-1} + (t_n^b)^{i-1}] \\ \Delta(t_i^a)^i &= - [(t_i^a)^{i-1}] \\ \Delta(t_n^a)^i &= - [(t_n^a)^{i-1}] \end{aligned} \quad (6.7)$$

$g_0$  étant la distance normale initiale entre la paire de noeuds  $(a, b)$ . Le mode de contact (adhérence, glissement ou décollement) est décrit uniquement pour le pas de charge courant. Ces conditions changent durant le processus de chargement telle que par exemple une région d'adhérence peut avoir subit une histoire de glissement et vice versa.

### VI.2.3. Détermination du pas de charge:

A chaque pas de charge, il faut garantir une traction normale nulle au niveau du coin de la zone de contact. Si après résolution, cette traction est positive (tension), donc, le pas de charge n'est pas suffisamment grand pour porter la paire de noeud en contact. Par contre, si cette traction est négative (compression), cela signifie que la charge appliquée est trop large. Donc, le pas de charge à appliquer doit être prédit en conséquence.

Man et al.<sup>39</sup> ont proposé une technique pour déterminer l'incrément de charge, cette technique consiste à appliquer un incrément de charge d'essai  $\Delta P_1$ , la valeur  $t_1$  pour la traction normale au niveau du coin de la zone de contact est alors obtenue. Par la suite, un autre incrément de charge  $\Delta P_2$  est appliqué et la valeur correspondante de la traction au niveau du coin est maintenant  $t_2$

Pour des incréments d'essais petits, le matériau peut être supposé linéaire élastique, et donc la courbe traction-charge est linéaire. Par conséquent, l'incrément de charge correct à appliquer pour garantir une traction nulle au niveau du coin est donné par l'expression suivante:

$$\Delta P^c = \Delta P_1 + t_1 \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{t_1 - t_2} \quad (6.8)$$

Cependant, dans le cas plastique, les suppositions ci-dessus ne sont plus toujours valides durant le pas de charge courant, et l'application de l'incrément de charge  $\Delta P^c$  donne une valeur de la traction au coin  $t_3$  qui est en général différente de zéro. Dans le but de corriger cette valeur, le pas de charge  $\Delta P^c$  est utilisé seulement comme point de départ pour la détermination itérative de l'incrément de charge correct  $\Delta P^{cp}$  correspondant à une traction nulle au niveau du coin de la zone de contact.

VI.3. Processus de résolution itératif incrémental:

Lorsque le nouveau pas de charge est appliqué, le mode de contact de la paire de noeuds voisine au coin passe de l'état de contact décollé au glissement devenant ainsi le nouveau coin de la zone de contact. Par la suite, le pas de charge  $\Delta P^e$  est déterminé par l'application successive des deux incréments de charge d'essai  $\Delta P_1$  et  $\Delta P_2$  et en faisant usage de l'équation (6.8).

Les modes de contact sont déterminés itérativement, et lorsqu'une violation des conditions de contact est détectée, ceux-ci sont changés. La vérification de l'état de contact de la paire de noeuds (a, b) est faite grâce aux tests montrés aux tableaux 1 et 2.

supposition	décision	
	décollement	contact
décollement	$(\Delta u_n^a + \Delta u_n^b)^i < g_o^{i-1}$	$(\Delta u_n^a + \Delta u_n^b)^i \geq g_o^{i-1}$
contact	$t_n^{i-1} + \Delta t_n^i \geq 0$	$t_n^{i-1} + \Delta t_n^i < 0$

Tableau 1: Tests sur les modes de contact.

supposition	décision	
	adhérence	glissement
adhérence	$ t_i^{i-1} + \Delta t_i^i  <  \mu(t_n^{i-1} + \Delta t_n^i) $	$ t_i^{i-1} + \Delta t_i^i  \geq  \mu(t_n^{i-1} + \Delta t_n^i) $
glissement	$(t_i^{i-1} + \Delta t_i^i)^b (\Delta u_i^a + \Delta u_i^b)^i > 0$	$(t_i^{i-1} + \Delta t_i^i)^b (\Delta u_i^a + \Delta u_i^b)^i \leq 0$

Tableau 2: Tests sur l'état de contact.

\* **Test 1:** Les décisions du tableau 1 sont utilisées pour garantir que les noeuds séparés ne se chevauchent pas et ne se touchent pas et que les noeuds en contact sont sollicités par des compressions. Il est à noter que la violation des conditions présentées au tableau 1 représente une incompatibilité géométrique et implique donc un réajustement du pas de charge  $\Delta P^i$ . Si les conditions du tableau 1 sont vérifiées, on passe aux tests du tableau 2.

\* **Test 2:** Le tableau 2 est utilisé pour examiner tous les noeuds dans la zone de contact pour des violations possibles des modes d'adhérence et de glissement. Si les modes de contact d'adhérence et de glissement sont violés,

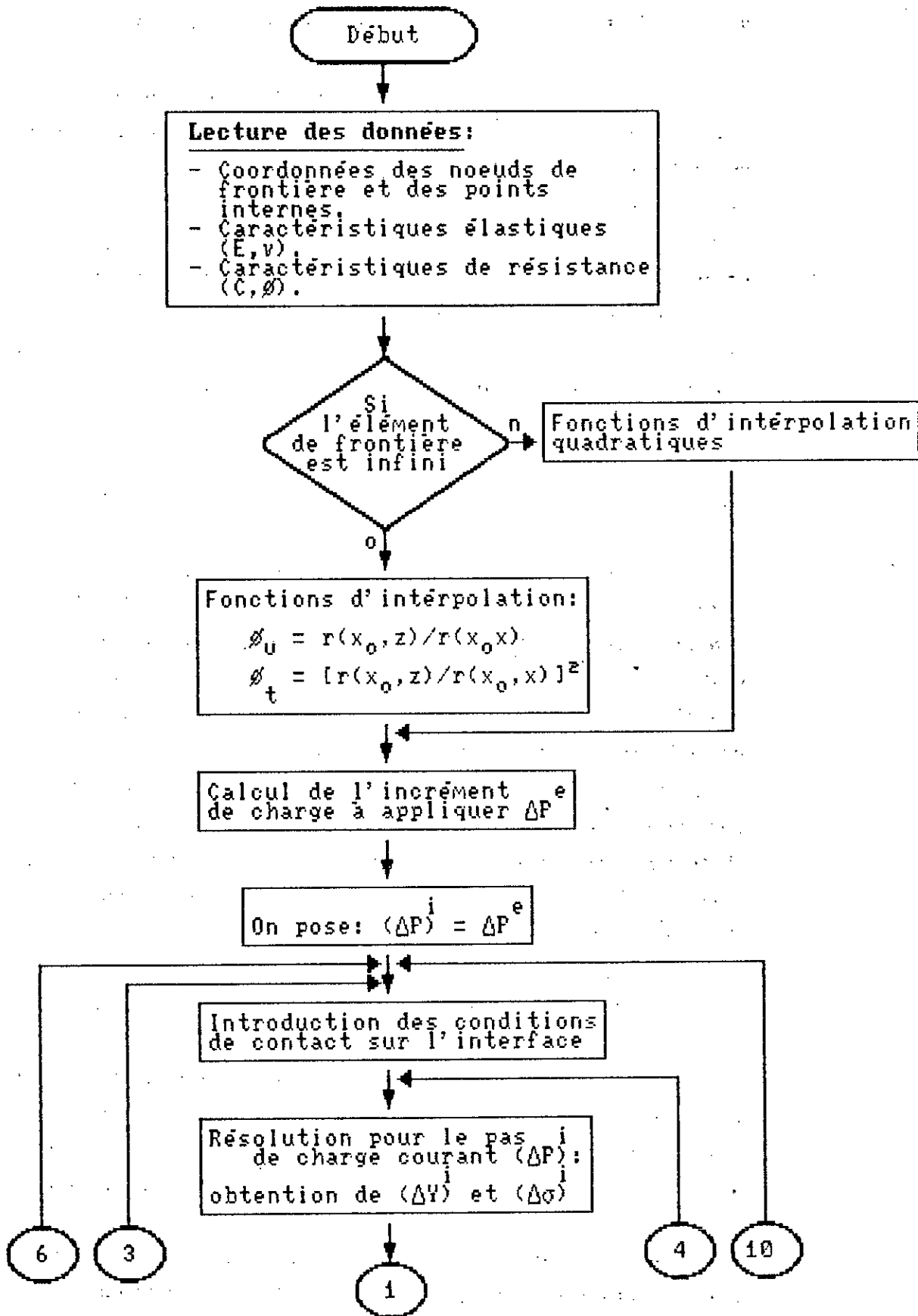
ceci implique que la continuité des tractions sur la région de contact n'est pas satisfaite, par conséquent, une redistribution des tractions est requise en ajustant la taille des régions d'adhérence et de glissement.

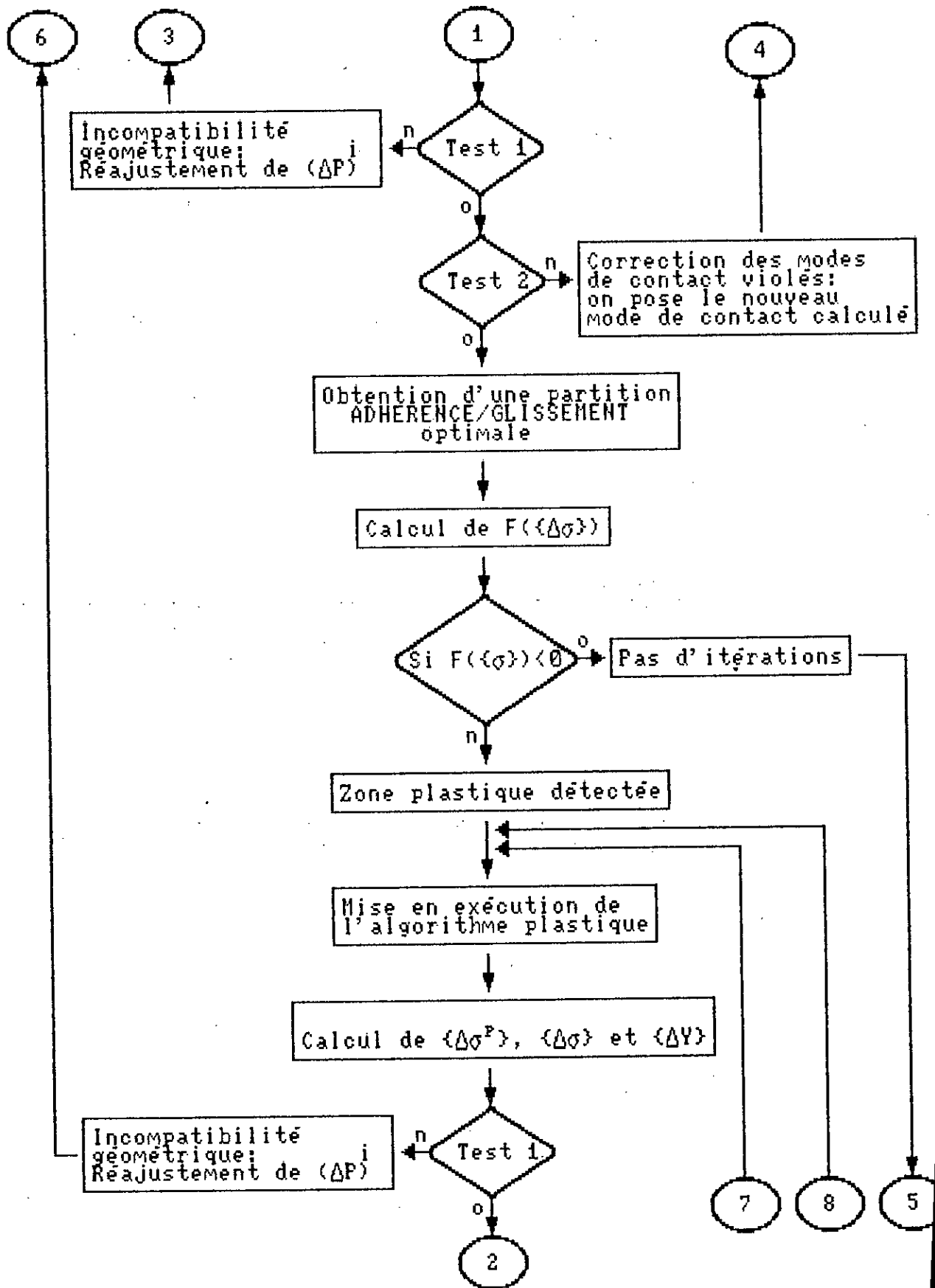
La détermination d'une partition adhérence/glissement optimale constitue donc un deuxième processus itératif dans la présente analyse numérique. A cette étape, si les conditions d'adhérence ou de glissement des paires de noeuds ne sont pas vérifiées alors, elles doivent être rectifiées en posant le nouveau mode de contact calculé. Ainsi, un mode de glissement violé est changé à une adhérence et un mode d'adhérence est changé à un glissement, en faisant attention dans cette situation à poser la force de frottement dans le sens opposé du déplacement relatif. Les solutions violées sont toujours rejetées et le problème est résolu pour les états de contact nouveaux et par la suite réexaminé en utilisant le même processus qu'avant, d'abord tableau 1, puis tableau 2. Les solutions du contact correspondant au pas de charge  $\Delta P^i$  sont acceptées si toutes les conditions sont satisfaites.

Une fois que les conditions de contact sont vérifiées et que la traction normale au niveau du coin est nulle, la solution élastique due au pas de charge courant est obtenue. Le critère de rupture est alors calculé pour toutes les cellules internes. Si une zone plastique est détectée, la procédure itérative pour déterminer les incréments des contraintes initiales (décrite précédemment) est mise en exécution. Ainsi, on détermine la traction au nouveau coin de la zone de contact (i.e.  $t_3$ ). Si  $t_3$  est positive, l'incrément de charge  $\Delta P^e$  doit être augmenté, sinon ( $t_3 < 0$ ),  $\Delta P^e$  doit être diminué, et ainsi de suite, jusqu'à converger vers une valeur correcte de  $\Delta P^{ep}$  qui correspond à une traction au coin nulle ( $t_3 = 0$ ). Les conditions de contact (6.5), (6.6) et (6.7) sont alors testées. Si une violation des conditions est détectée, celles-ci sont corrigées. Les quantités incrémentales sont calculées de nouveau, et la traction au coin de la zone de contact est comparée à zéro.

Une fois la convergence est atteinte pour les conditions de contact et pour l'algorithme plastique, la solution pour l'incrément de charge courant est obtenue et un nouveau pas de charge est permis. Le processus est terminé quand la zone maximale admissible est atteinte ou la charge maximale est appliquée.

L'organigramme définissant les différentes étapes suivies par le programme pour converger vers une solution acceptable est décrit en figure 6.1:





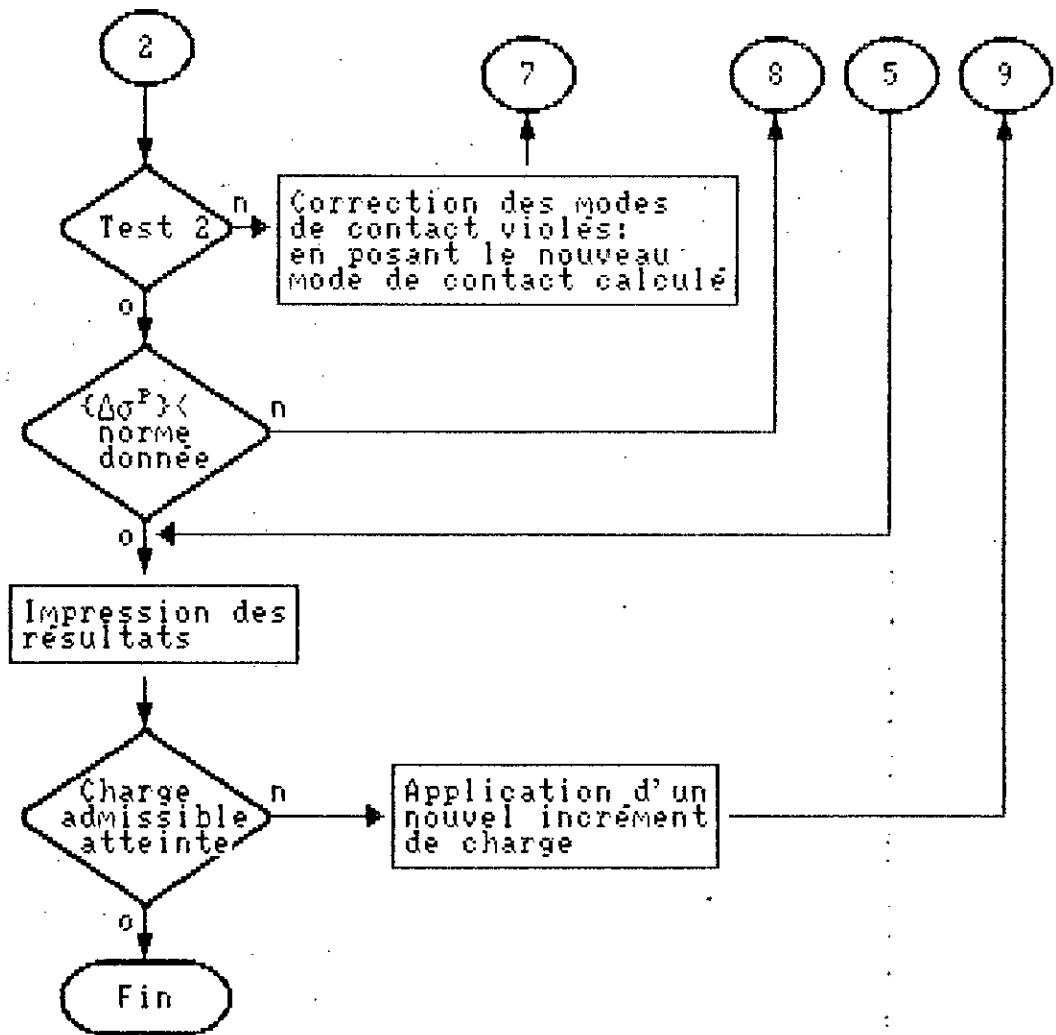


Figure 6.1: Organigramme sommaire de la résolution du problème de contact couplé avec l'élastoplasticité du massif.



## **Chapitre VII**

### **Applications**

### VII.1. Exemple 1: Inclusion circulaire dans une plaque infinie sollicitée en traction uniaxiale:

Les performances du modèle numérique éléments de frontière que nous avons proposé pour l'analyse des problèmes de contact ont été testées en étudiant le problème d'une inclusion circulaire en contact libre avec une plaque infinie sollicitée par une traction uniaxiale uniforme. Cet exemple représente un cas de problème de contact conforme pour lequel on cherche à déterminer les limites entre les différentes zones de contact et à mettre en évidence l'influence du frottement sur la répartition des tractions interfaciales.

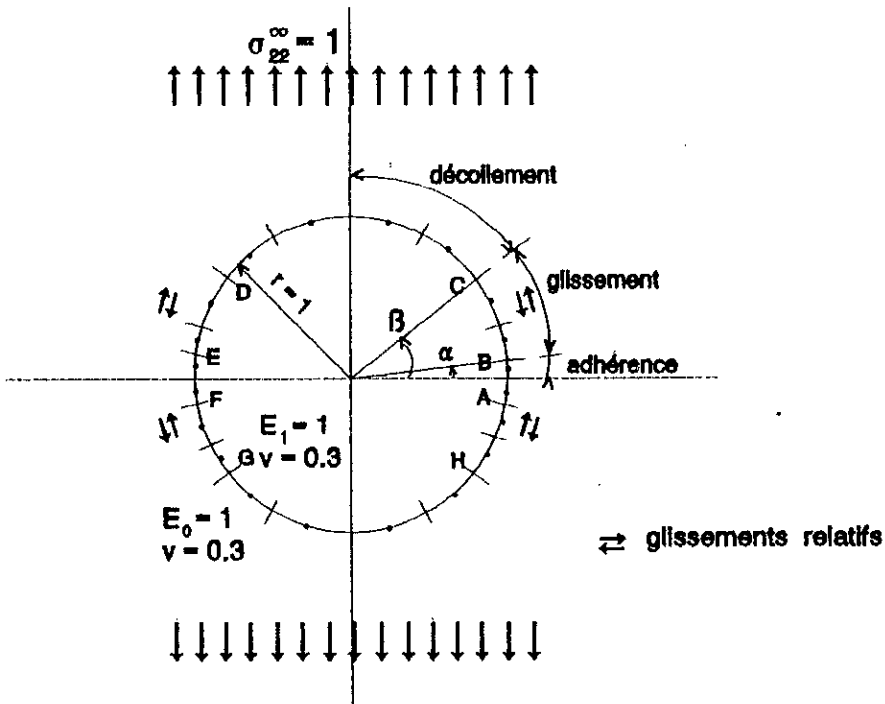


Figure 7.1: Maillage de l'interface plaque-inclusion

La plaque est sollicitée par une traction uniforme  $\sigma_{22}^{\infty}=1$ . Le même matériau est supposé pour la plaque et l'inclusion, soit  $E=1$  et  $\nu=0.3$ . Le coefficient de frottement de l'interface est  $\mu=1$ . Les dimensions de la plaque sont choisies telles que:  $\frac{H}{W}=2$ ,  $\frac{W}{r}=30$  et  $r=1$ , avec  $H$  et  $W$  sont respectivement la hauteur et la largeur de la plaque. Ces dimensions sont choisies pour représenter une plaque infinie telles que les solutions obtenues puissent être comparées aux solutions analytiques dues à Hussain et Pu<sup>34</sup>.

La plaque et l'inclusion sont discrétisées par respectivement 28 et 20 éléments de frontière quadratiques (figure 7.1).

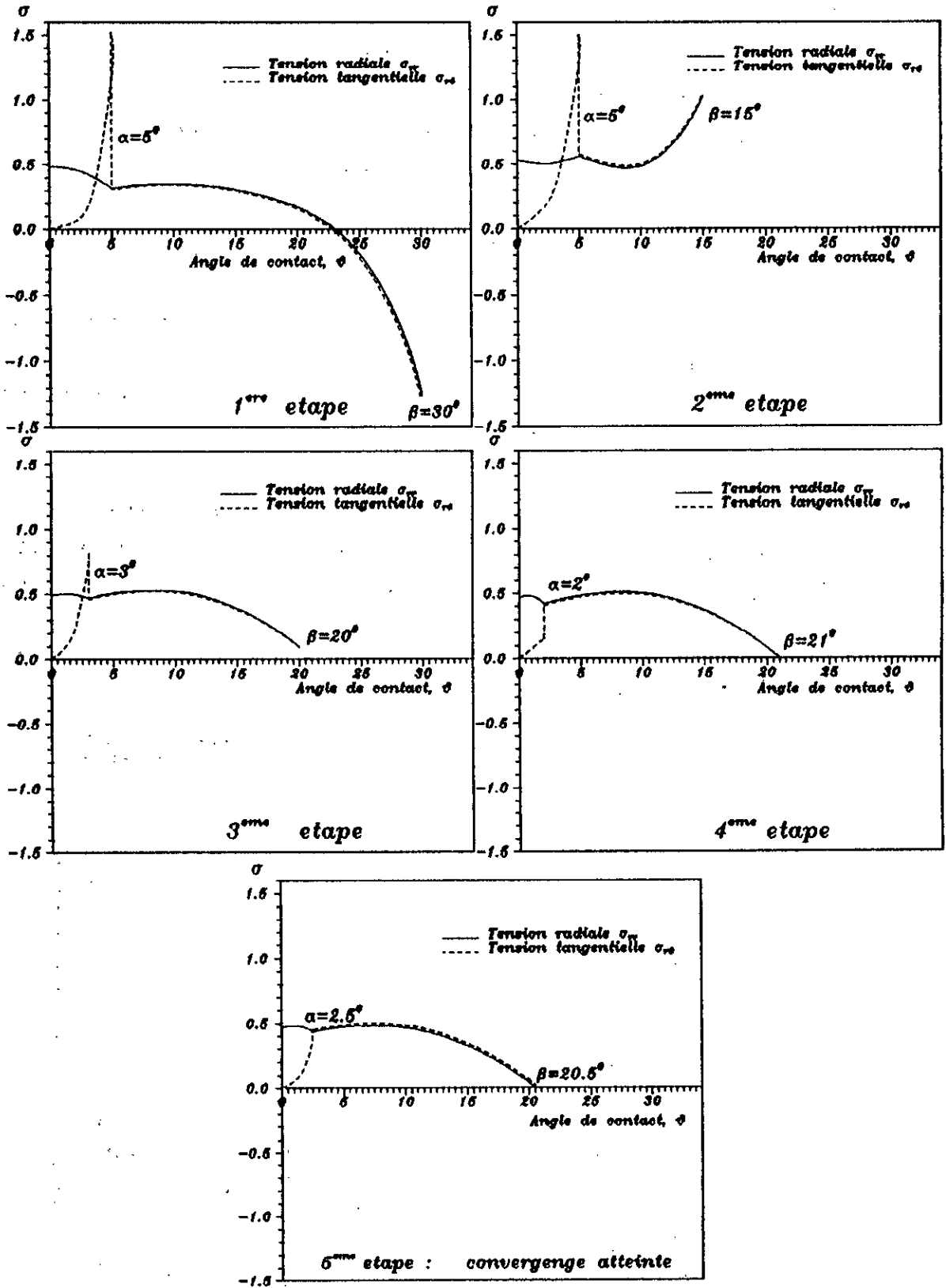


Figure 7.2: Un exemple des étapes successives pour le calcul itératif.

Comme hypothèse de départ sur le mode de contact, nous supposons que l'interface présente les zones interfaciales suivantes:

- AB et EF: en contact adhérent,
- BC, DE, FG, et HA: en contact glissant,
- CD et GH: en décollement.

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent respectivement les angles limites des zones de contact adhérent et de contact glissant (figure 7.1).

### VII.1.1. Validation du modèle:

La figure 7.2 représente la variation des tensions en fonction de l'angle de contact, on montre sur cette figure comment à partir d'une hypothèse de départ concernant les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , nous convergions en quelques itérations vers une solution acceptable.

La figure 7.3 montre la bonne corrélation entre les résultats numériques de la présente étude et la solution analytique de Hussain et Pu<sup>34</sup>. Cette validation porte sur la répartition des tensions normales et tangentielles le long du contour de l'inclusion.

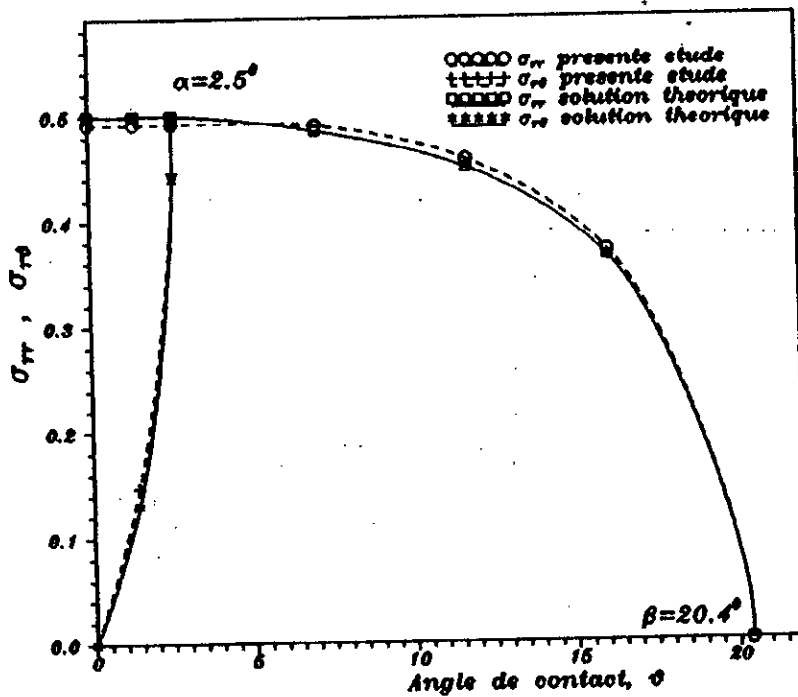


Figure 7.3: Tensions sur l'interface d'une inclusion en contact libre.

La contrainte  $\sigma_{rr}$  au point d'interface ( $\theta = 0$ ) est évaluée avec une erreur relative de 4,3%. Nous remarquons que cette valeur n'est pratiquement pas influencée par l'hypothèse sur l'angle  $\beta$ , bien que les contraintes en limite

du décollement soient très sensibles à cette dernière.

Nous pouvons conclure que, si le résultat qui nous intéresse est la tension radiale maximale, il ne sera pas nécessaire d'approcher l'angle  $\beta$  avec une très grande précision, ce qui nous permet de nous affranchir d'un certain nombre d'itérations. Les mêmes remarques peuvent être faites pour l'angle  $\alpha$ .

### VII.1.2. Influence du coefficient de frottement de l'interface:

Dans le but de mettre en évidence l'influence du coefficient de frottement sur le comportement de l'interface, nous avons représenté en figure 7.4 la distribution des tensions radiales et tangentielles sur l'interface de contact plaque-inclusion pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ . Nous constatons que l'angle de décollement  $\beta$  est voisin de  $20^\circ$  et ne dépend pratiquement pas du coefficient de frottement. La taille de la zone d'adhérence diminue avec ce dernier. Pour les valeurs de  $\mu$  communément rencontrées (inférieures à 1), la zone d'adhérence est très restreinte ( $\alpha < 2,5^\circ$ ).

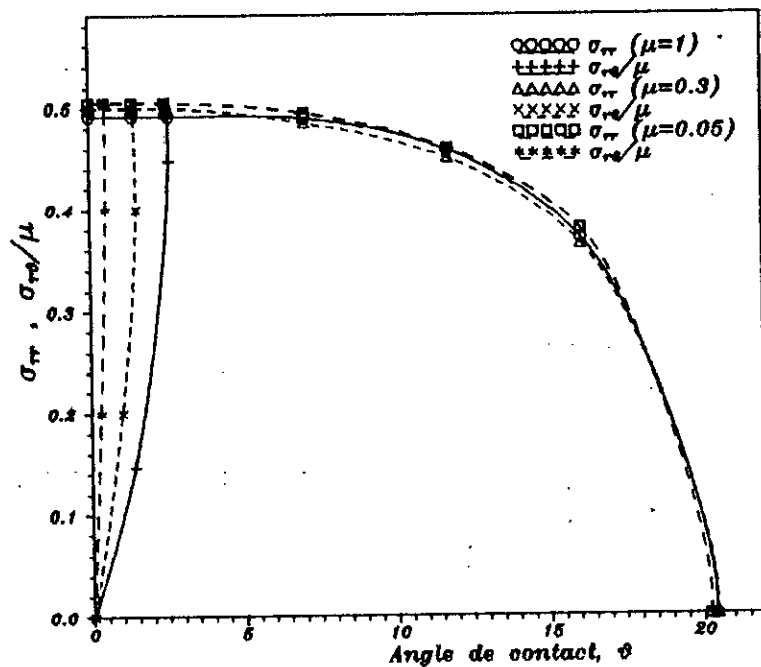


Figure 7.4: Repartition des tensions radiales et tangentielles sur l'interface de l'inclusion pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ .

### VII.1.3. Répartition des contraintes périphériques $\sigma_{\theta\theta}$ :

Sur la figure 7.5, nous représentons les répartitions des contraintes périphériques  $\sigma_{\theta\theta}$  obtenues sur la surface de la plaque et sur celle de l'inclusion. Nous constatons une discontinuité des contraintes périphériques au droit du noeud de dédoublement de tension situé entre le glissement et le décollement. Celle-ci est due aux imprécisions numériques liées à un très important gradient de contraintes tangentielles  $\sigma_{r\theta}$  en ce point.

Nous remarquons que le long de la zone de glissement, le gradient des contraintes périphériques est assez important. Près de la zone de contact adhérent,  $\sigma_{\theta\theta}$  diminue fortement dans la plaque, pour prendre une valeur voisine de 1. Dans la zone d'adhérence, une faible partie de l'inclusion contribue à la reprise de l'effort de traction, en étant entraînée par son contact frottant avec la plaque.

La comparaison des contraintes dans la plaque le long de la partie décollée de l'interface avec celles correspondant au cas d'un trou dans un milieu infini fait apparaître des comportements assez voisins (figure 7.5).

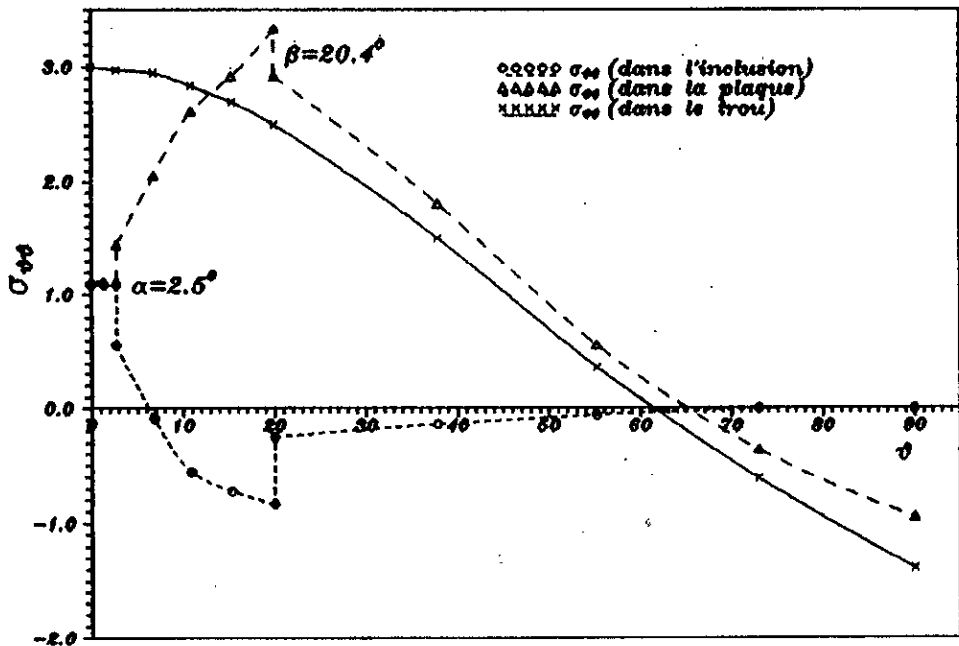


Figure 7.5: Répartition des contraintes périphériques sur l'interface de la plaque et de l'inclusion.

### VII.2. Exemple 2: Inclusion circulaire dans une plaque infinie sollicitée en compression uniaxiale:

La plaque dans ce cas est sollicitée par une compression uniforme  $\sigma_{22}^{\infty} = -1$ . Le maillage utilisé pour représenter la répartition des différents états sur l'interface est montré en figure 7.6.

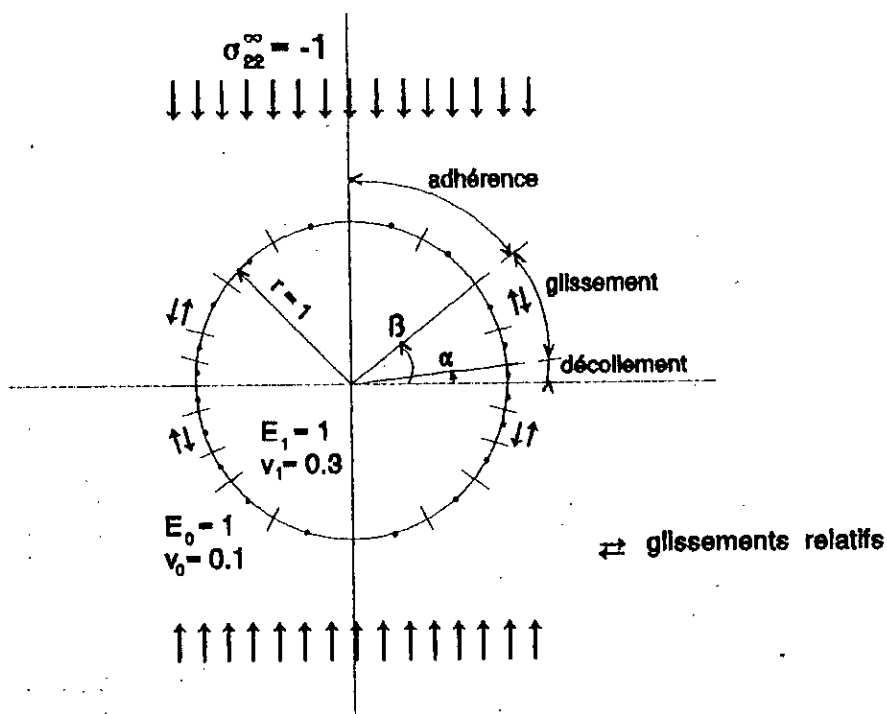


Figure 7.6: Maillage de l'interface plaque-inclusion

Ces hypothèses conduisent après recherche itérative des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , à des répartitions de tensions d'interface compatibles.

#### VII.2.1. Influence du coefficient de frottement sur le comportement de l'interface:

Les figures 7.7 et 7.8 montrent l'influence du coefficient de frottement sur les contraintes dans la plaque et l'inclusion le long de l'interface. Dans le but de faciliter l'interprétation des résultats, nous avons jugé bon d'étudier séparément chaque type de résultat.

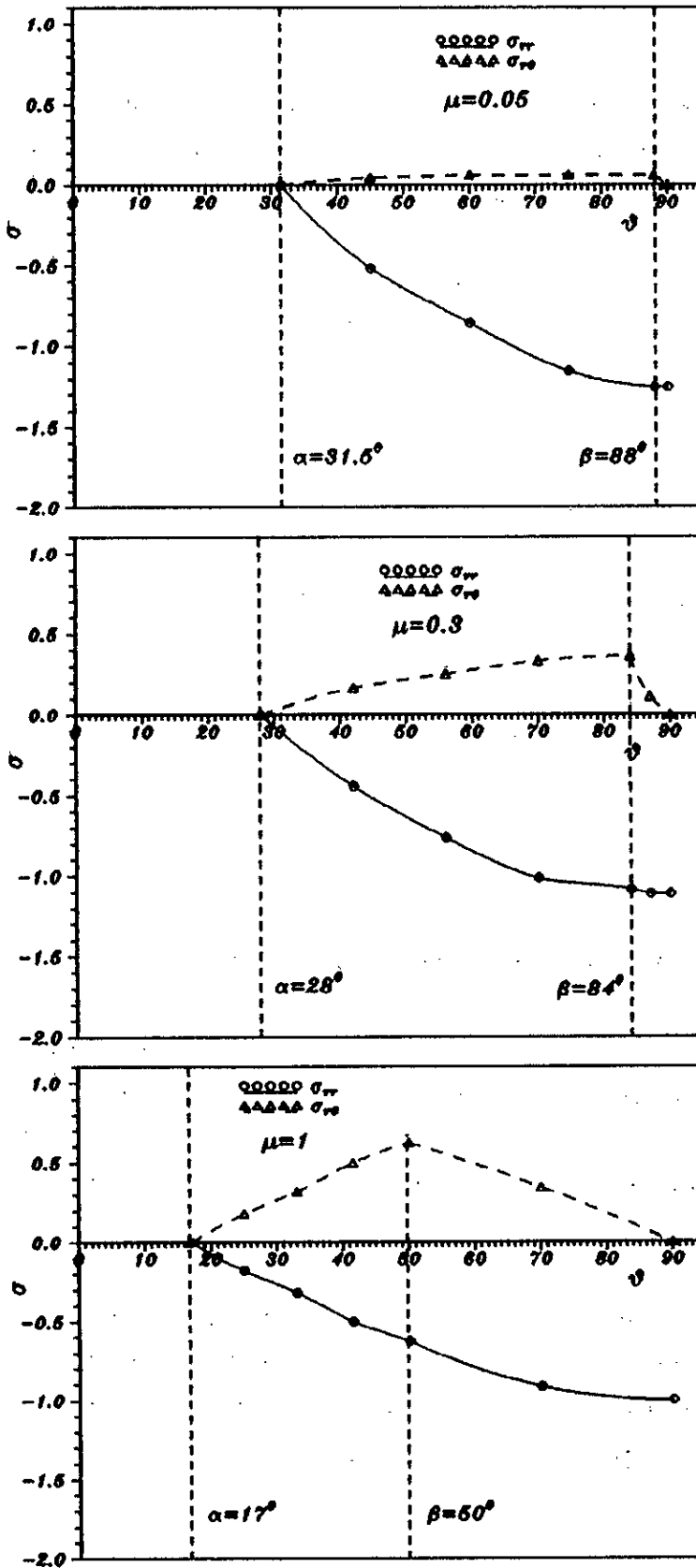


Figure 7.7: Repartition des tensions radiales et tangentielles sur l'interface pour différentes valeurs du coefficient de frottement.



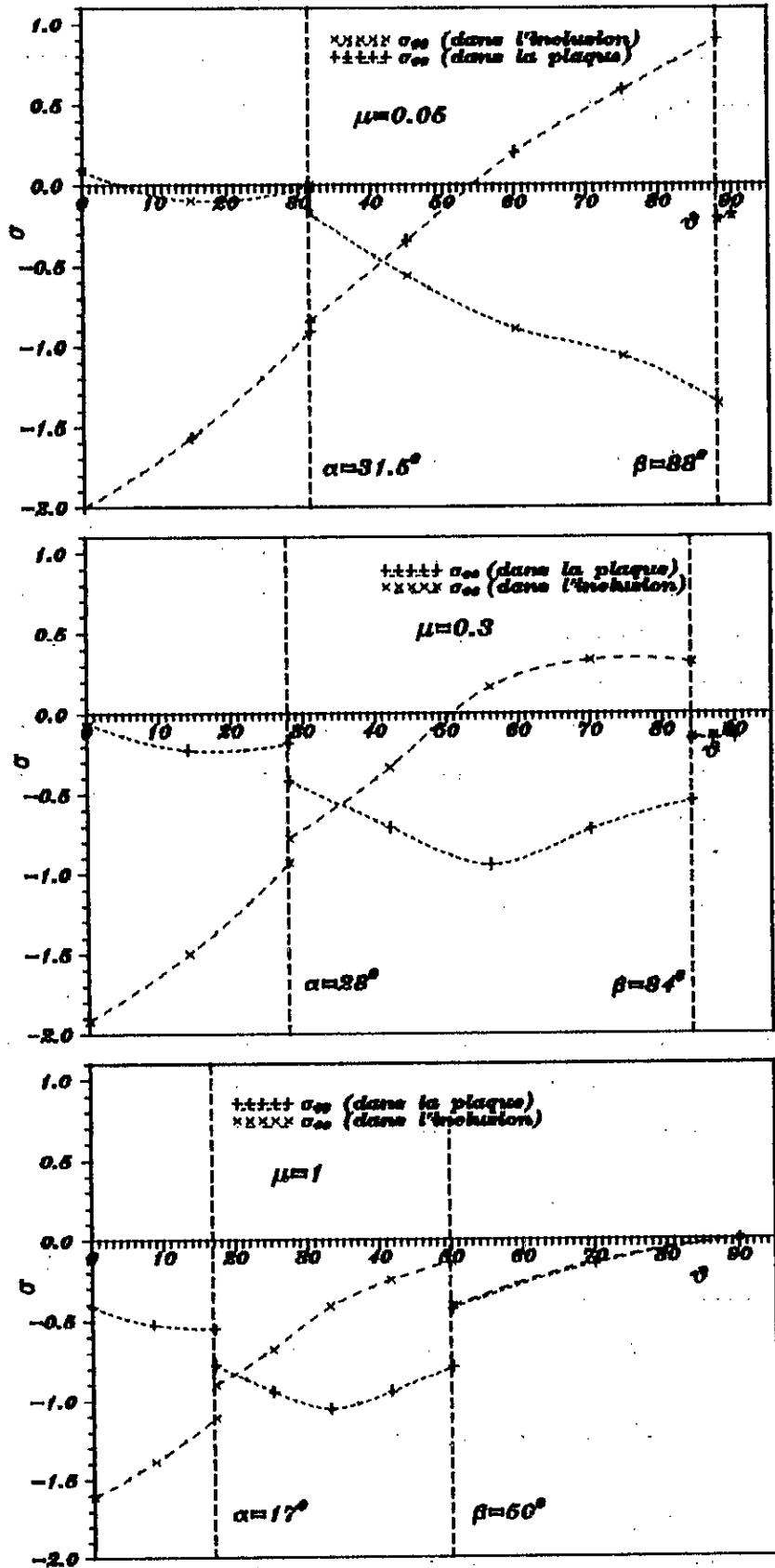


Figure 7.8: Répartition des contraintes périphériques sur l'interface pour différentes valeurs du coefficient de frottement.

### VII.2.1.1. Répartition des différents états d'interface:

Sur le tableau n°1, nous résumons les angles limites des zones de contact obtenus pour différentes valeurs du coefficient de frottement (figure 7.7):

	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.3$	$\mu = 1$
$\alpha$	31.5°	28°	17°
$\beta$	88°	84°	50°

Tableau n°1: Angles limites de glissement et de décollement.

Ces résultats mettent en évidence les points suivants:

L'étendue des zones de contact adhérent et de glissement dépend considérablement du coefficient de frottement.

Les zones de contact adhérent sont pratiquement inexistantes pour les faibles valeurs du coefficient de frottement, cependant, elles peuvent représenter près de la moitié de l'interface lorsque  $\mu = 1$ .

Les zones de décollement sont d'autant plus étendues que le coefficient de frottement est faible. Le comportement de l'interface se rapproche de celui du glissement parfait.

### VII.2.1.2. Contraintes radiales et tangentielles sur l'interface:

Elles sont représentées en figure 7.7, leurs valeurs maximales sont données dans le tableau n°2, ces valeurs sont toujours obtenues au voisinage de l'axe de chargement ( $\theta = 90^\circ$ ). Elles sont plus importantes pour de faibles valeurs du coefficient de frottement.

	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.3$	$\mu = 1$
$\sigma_{r_{max}}$	-1.25	-1.11	-0.99

Tableau n°2: Contraintes radiales maximales sur l'interface.

### VII.2.1.3 Contraintes périphériques dans la plaque le long de l'interface:

Leur étude est primordiale, car ce sont elles qui donnent lieu aux concentrations de contraintes maximales (voir figure 7.8). Dans le tableau n°3, nous regroupons ces valeurs:

	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.3$	$\mu = 1$
compression maximale $\sigma_{\theta\theta}$	-2.00	-1.89	-1.59
traction maximale $\sigma_{\theta\theta}$	0.90	0.31	0.00

Tableau n°3: Contraintes périphériques au bord du trou.

Nous remarquons que la compression est maximale au niveau des zones de décollement. L'amplification des contraintes est d'autant plus importante que le coefficient de frottement est faible.

Lorsque le coefficient de frottement est faible, une partie de la zone de glissement est tendue suivant une direction perpendiculaire à celle de la charge ( $\sigma_{\theta\theta} > 0$ ). Or cette zone est également comprimée parallèlement à la charge. Ce caractère peut être déterminant pour le comportement à la rupture du matériau.

#### VII.2.1.4. Contraintes périphériques dans l'inclusion le long de l'interface:

Sur la figure 7.8, nous remarquons que lorsque le coefficient de frottement de l'interface est très faible, les contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  dans l'inclusion sont très voisines des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  (figure 7.7), ceci tout le long de la zone de glissement. Donc, dans cette zone, l'inclusion subit un état de contraintes similaire à une compression omnidirectionnelle (telle que la pression hydrostatique). Cette compression est alors maximale près de l'axe de la charge.

#### VII.2.2. Influence du rapport des rigidités plaque-inclusion:

Sur la figure 7.9, nous représentons la répartition des contraintes radiales et tangentielles pour différentes valeurs du rapport des rigidités plaque-inclusion. Nous remarquons que l'étendue des zones de contact est faiblement influencée par ce rapport. D'autre part, nous constatons que l'amplification des contraintes est accrue avec celui-ci.

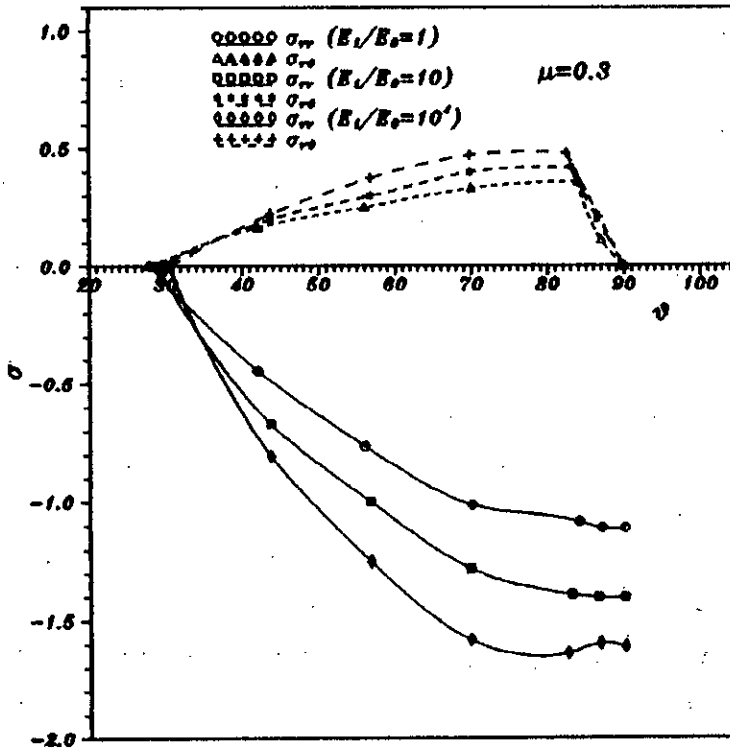


Figure 7.9: Repartition des tensions radiales et tangentielles sur l'interface pour différentes valeurs du rapport des rigidités plaque-inclusion.

Conclusions:

Nous pouvons conclure qu'en traction le comportement de l'inclusion en contact libre avec la plaque est voisin de celui d'un trou; alors qu'en compression, le comportement de l'interface dépend considérablement du coefficient de frottement et la répartition des zones de contact est très faiblement influencée par le rapport des rigidités.

Nous avons étudié le problème de contact dont l'interface est régie par la loi de frottement de Coulomb. Les bonnes performances du modèle ont été vérifiées à partir de la solution théorique. Les exemples traités montrent bien les perturbations du champ mécanique sous l'influence du mode de contact.

### VII.3. Traitement des domaines à extension non bornée par éléments de frontière infinis:

Dans le but d'étudier quelques exemples de problèmes d'interaction sol-structure, qui ne sont en fait que des problèmes de contact entre une structure et un massif de sol semi-infini, nous avons pensé d'abord à bien simuler le comportement du massif sol à l'infini. Pour ce faire, nous avons adapté notre programme élément de frontière en vue de traiter des problèmes avec extensions non bornées, en utilisant des éléments de frontière infinis. Les performances du modèle, aussi appelé modèle à contour ouvert, sont montrées à travers les exemples suivants:

#### VII.3.1. Exemple 1: Quart d'un tunnel. Comparaison des résultats dans le cas du problème à contour ouvert avec ceux du contour fermé

Considérons une ouverture circulaire dans un milieu infini. A l'intérieur de cette ouverture régne une pression uniforme  $p$  (figure 7.10).

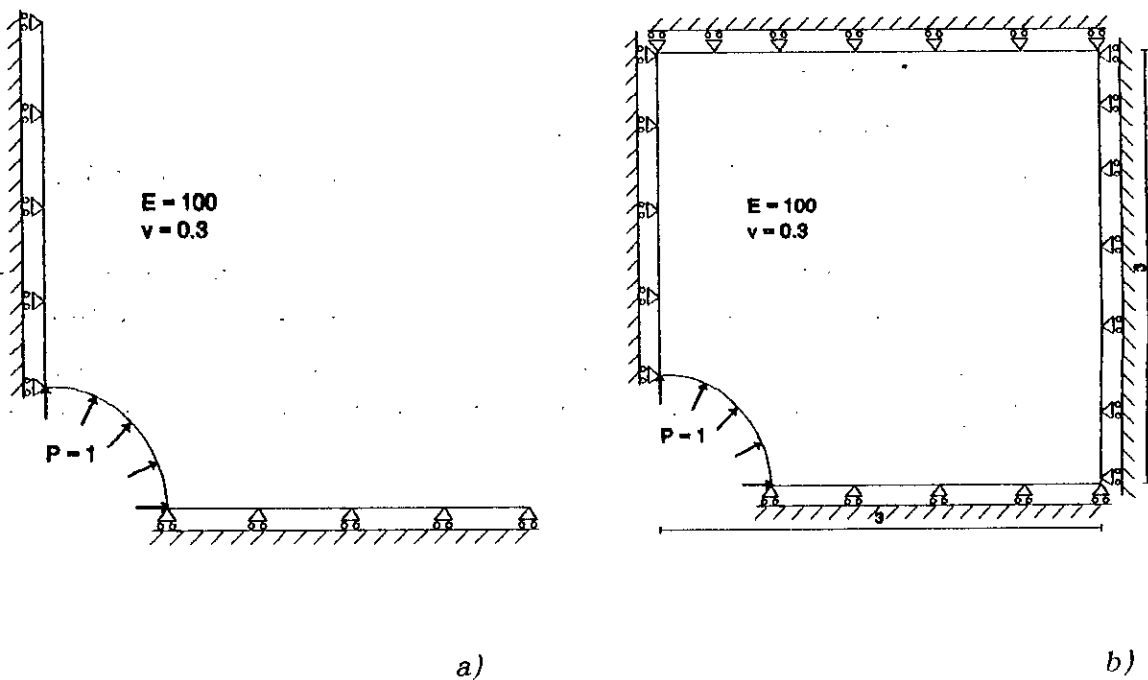


Figure 7.10: Schéma mécanique, a) contour ouvert, b) contour fermé.

Cet exemple présente l'avantage d'être un des rares cas de milieu infinis pour lequel l'on connait une solution analytique simple. Nous pouvons exprimer celle-ci de la manière suivante, en coordonnées polaires:

$$\text{Contraintes: } \begin{cases} \sigma_r = -p \frac{R^2}{r^2} \\ \sigma_\theta = p \frac{R^2}{r^2} \end{cases} \quad \text{Déplacements: } \begin{cases} u_r = \frac{p(1+\nu)}{E} \frac{R^2}{r} \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$

Ce type de problème peut être traité comme un problème extérieur. Afin de tester les performances du modèle à contour ouvert, nous considérons seulement un quart d'espace.

Par raison de symétrie, nous prenons comme conditions aux limites sur les axes:

- contrainte tangentielle nulle,
- déplacement  $u_\theta$  nul.

En vue de comparer les résultats, nous considérons deux différents schémas mécaniques: l'un à contour ouvert (figure 7.10.a) et l'autre à contour fermé (figure 7.10.b). Pour le modèle à contour fermé, les déplacements sont supposés être nuls à une distance de  $r=3$  du centre de l'ouverture.

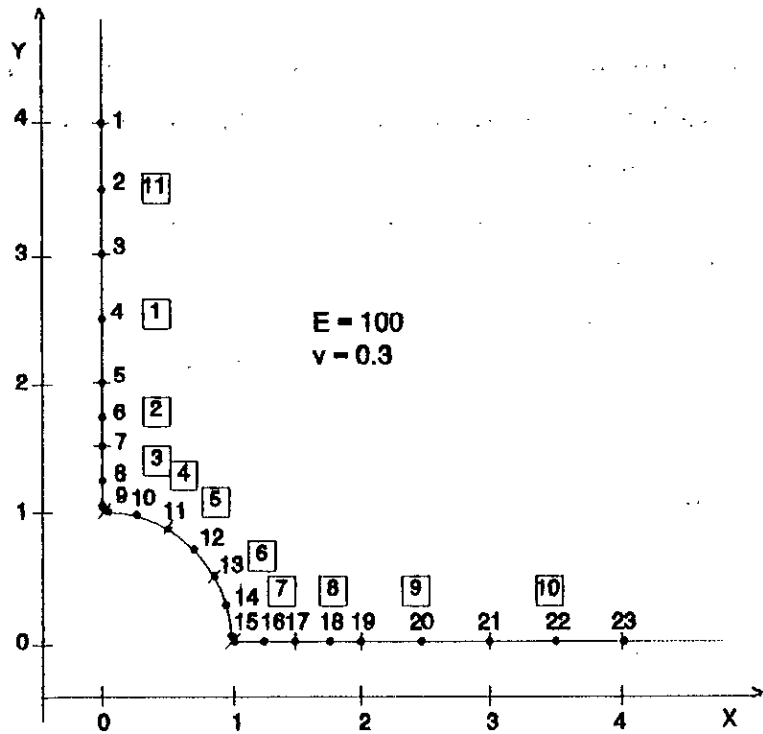
Les propriétés mécaniques du matériau sont:

Module de Young:  $E=100$

Coefficient de Poisson:  $\nu=0.3$

La pression qui agit sur le périmètre de l'ouverture est  $P=1$ .

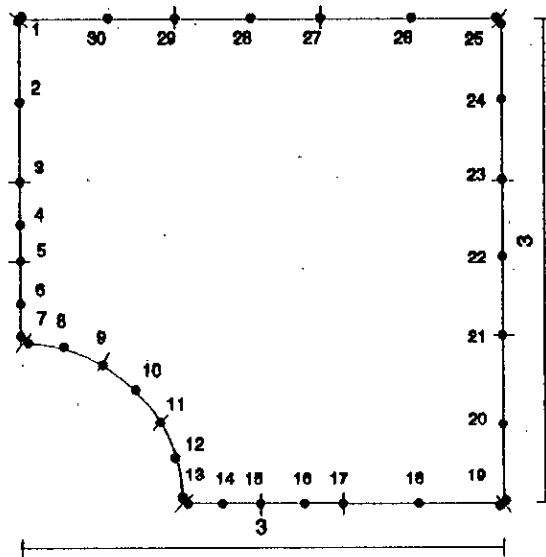
Dans le cas du modèle à contour ouvert, la frontière est discrétisée en 11 éléments de frontière quadratiques, 9 étant finis et 2 infinis (23 noeuds) (figure 7.11.a). D'autre part la frontière du modèle à contour fermé est discrétisée en 15 éléments de frontière quadratiques finis (30 noeuds) (figure 7.11.b).



1 : nœuds géométriques

□ : segments

a)



b)

Figure 7.11: Discretisation du quart du tunnel, a) contour ouvert, b) contour fermé.

VII.3.1.1. Résultats et interprétations:

Sur les figures 7.12 et 7.13, nous représentons respectivement les déplacements radiaux  $u_r$  et les contraintes  $\sigma_\theta$  en fonction de la distance  $r$  du centre de l'ouverture.

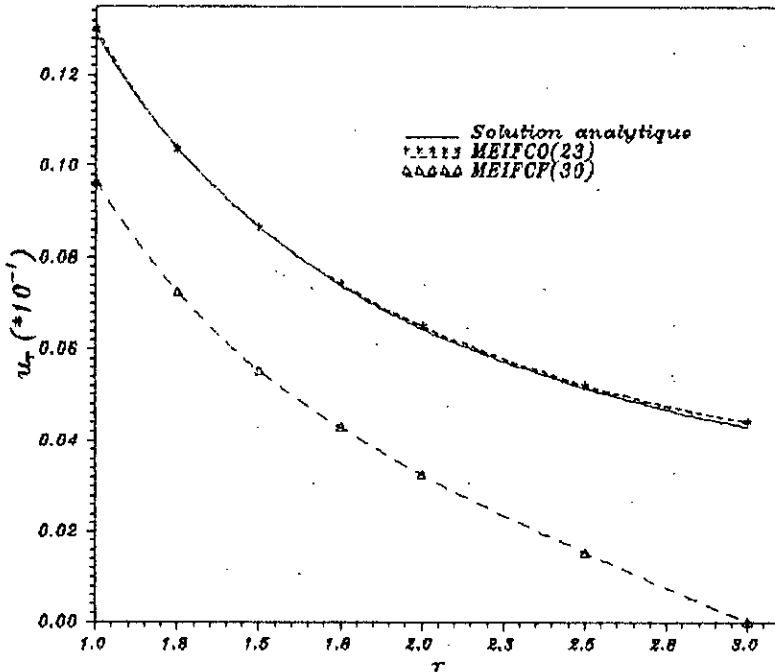


Figure 7.12: Déplacement radial  $u_r$

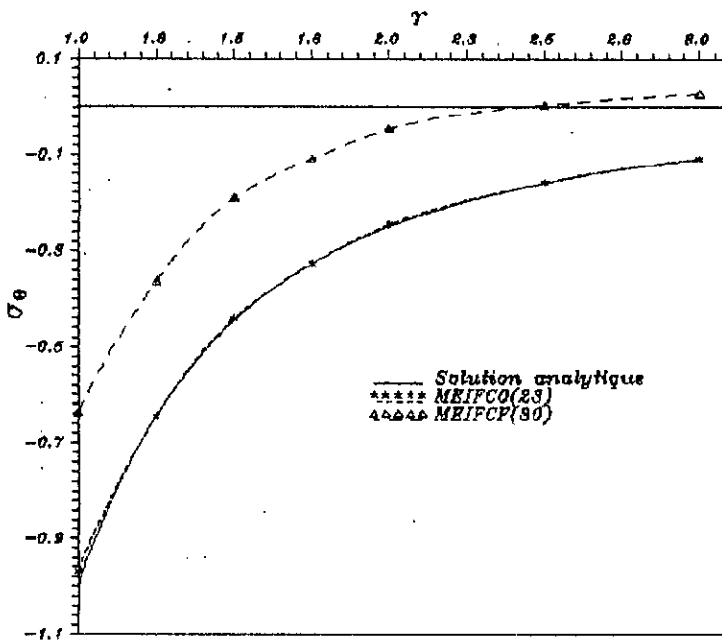


Figure 7.13: Contrainte  $\sigma_\theta$

Nous voyons clairement à travers ces figures la bonne concordance des



résultats dans le cas du schéma à contour ouvert (MEIFCO) avec la solution analytique. Par ailleurs, dans le cas du schéma à contour fermé (MEIFCF), l'hypothèse du déplacement nul à la distance  $r=3$  est absurde, en fait, le déplacement calculé à cette distance n'est pas négligeable. Donc, dans ce cas la précision des résultats est meilleur lorsqu'on éloigne l'étreinte rigide, ce qui implique une augmentation du nombre d'éléments du contour et donc du temps de calcul.

Nous pouvons conclure que les résultats obtenus avec le modèle à contour ouvert (MEIFCO) sont très satisfaisants. La comparaison avec un contour fermé (MEIFCF) donne un très net avantage au contour ouvert (MEIFCO).

Les formes de décroissance des déplacements  $\frac{1}{r}$  et des tensions  $\frac{1}{r^2}$  sont égales exactement aux modes d'extrapolation choisis, d'où la précision accrue des résultats.

#### VII.3.1.2. Tests de convergence:

Nous examinons dans ce qui suit l'influence de l'éloignement de l'étreinte rigide (dans le cas du contour fermé) et des éléments de frontière infinis (dans le cas du contour ouvert) sur la précision des résultats.

Pour l'étude de la convergence, un nombre suffisant d'analyses utilisant différents maillages et différentes distances de la frontière a été fait. Nous comparons alors le % d'erreur calculé pour le déplacement radial maximal d'une analyse avec une autre. A partir de ces résultats, nous traçons la courbe de variation de l'erreur relative en fonction de l'éloignement de la frontière.

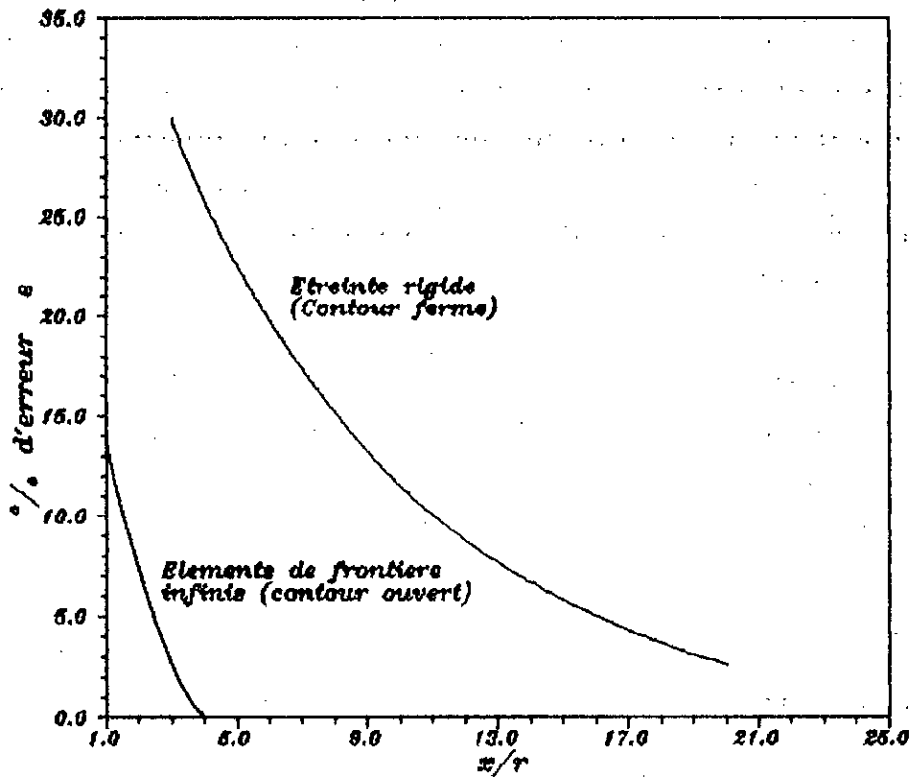


Figure 7.14: Variation de l'erreur relative en fonction de la distance normalisée.

La figure 7.14 montre que la convergence est plus rapide dans le cas d'utilisation d'éléments de frontière infinis. En effet, nous calculons un % d'erreur  $e = 1.6 \%$  avec une étreinte rigide située à une distance égale à  $20 r$ , la même précision est obtenue avec des éléments de frontière infinis placés à une distance de  $3 r$  seulement. Ce qui montre l'intérêt qu'apporte l'introduction d'éléments de frontière infinis dans la modélisation des domaines avec extensions infinies.

**VII.3.2. Exemple 2: Charge concentrée sur un sol.**

Dans cet exemple, nous considérons un sol de propriétés mécaniques  $E = 30 \text{ MPa}$  et  $\nu = 0.25$ , soumis à une charge concentrée  $P = 1 \text{ KN}$ .

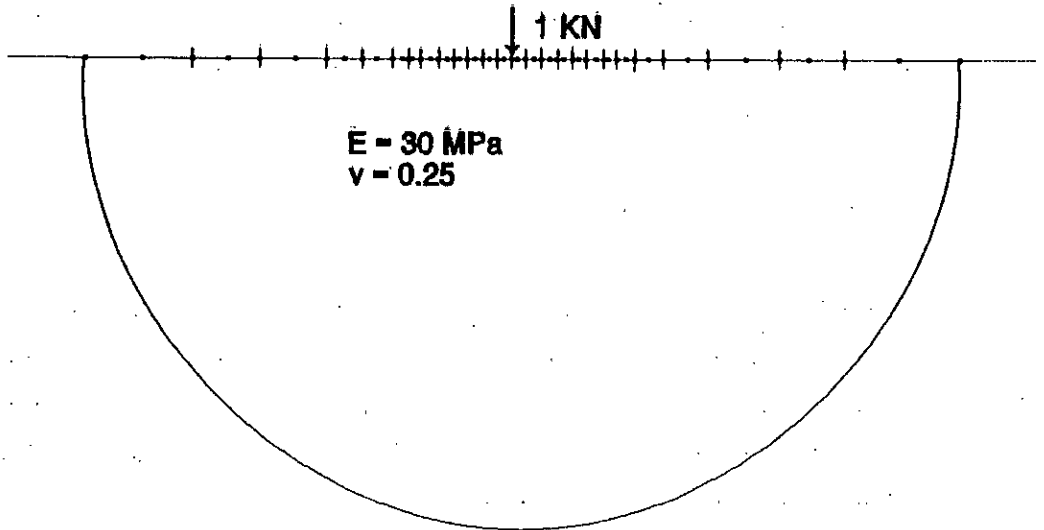


Figure 7.15: Charge concentrée sur le sol: Maillage utilisé dans le modèle à contour ouvert.

Nous avons étudié deux modèles éléments de frontière différents, l'un à contour ouvert en utilisant des éléments de frontière infinis (figure 7.15), et l'autre à contour fermé en utilisant des éléments de frontière finis (figure 7.16).

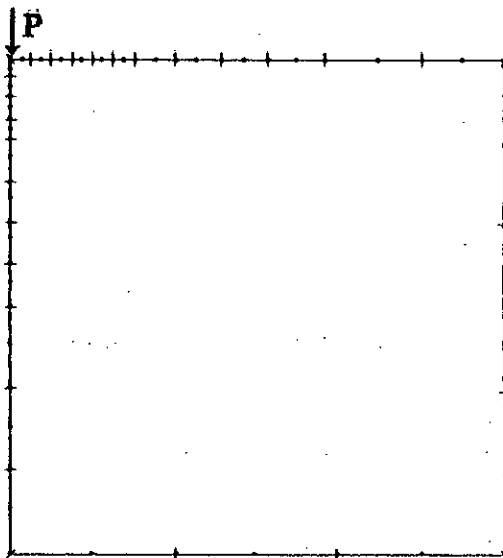


Figure 7.16: Charge concentrée sur un sol: Maillage utilisé dans le modèle à contour fermé

Pour le modèle à contour ouvert (figure 7.15), la frontière du domaine a été discrétisée par 24 éléments de frontière quadratiques finis encadrés par 2 éléments de frontière infinis, soit 53 noeuds (MEIFCO(53)).

Pour le modèle à contour fermé (figure 7.16), uniquement la moitié du domaine a été considérée (vue la symétrie du modèle). Nous avons utilisé 29 éléments de frontière quadratiques finis, soit 58 noeuds (MEIFCF(58)).

Les résultats de la présente étude ont été comparés à ceux obtenus par la solution analytique<sup>49</sup>.

### VII.3.2.1. Résultats et interprétations:

Dans le but de montrer la grande souplesse de la méthode des éléments de frontière, nous avons représenté les déplacements verticaux sur l'axe et en surface du sol respectivement en figure 7.17 et 7.18. Nous avons comparé les résultats obtenus par les différents modèles éléments de frontière avec ceux obtenus par la solution analytique<sup>49</sup>.

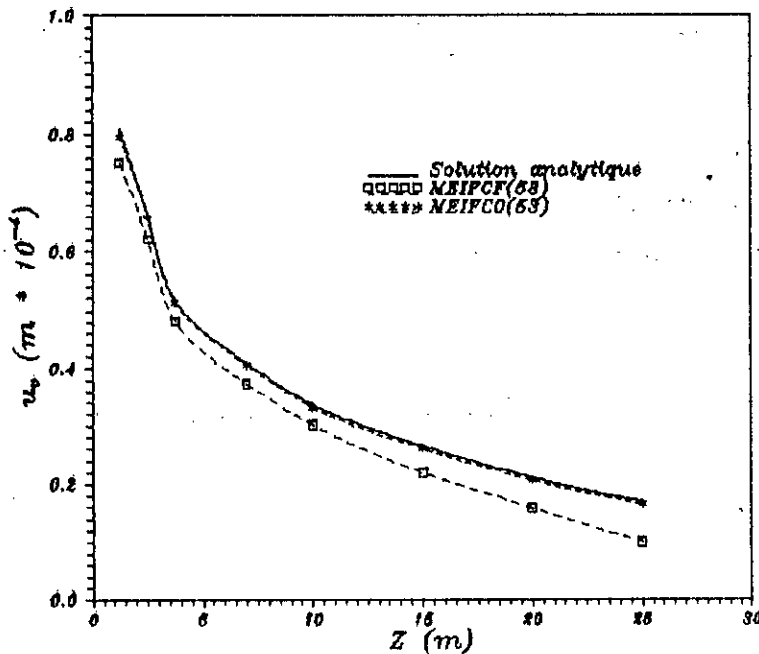


Figure 7.17: Déplacement vertical sur l'axe.

Nous remarquons que les résultats du maillage MEIFCO(53) sont beaucoup plus satisfaisants que ceux obtenus avec le maillage MEIFCF(58). En effet, avec le maillage MEIFCO(53), nous avons obtenu une meilleure précision, la solution est évaluée avec une erreur relative de 1,2 %. Ce qui montre, l'intérêt qu'apporte l'introduction des éléments de frontière infinis dans la modélisation des domaines à extension infinie.

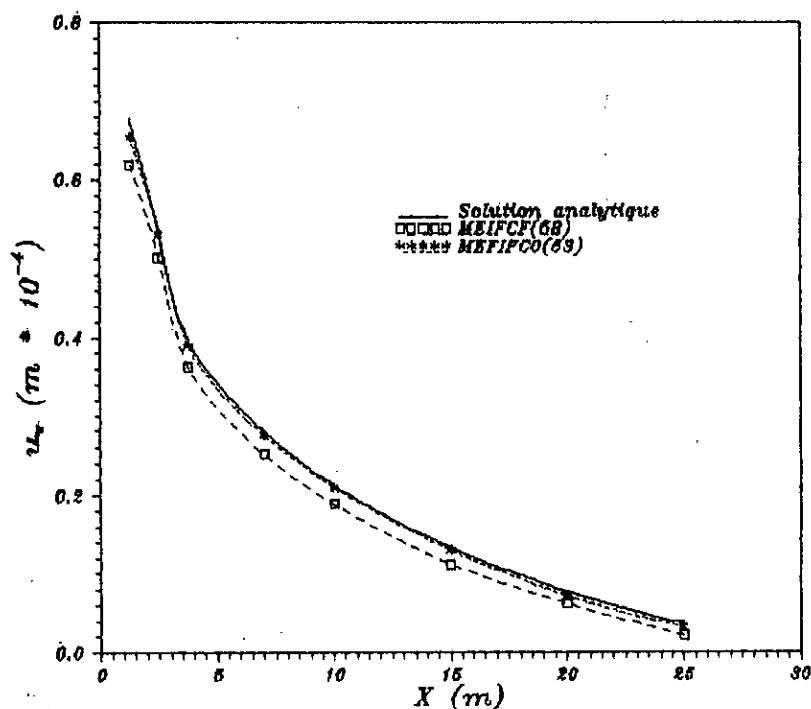


Figure 7.18: *Déplacement vertical en surface.*

L'analyse par la méthode des éléments de frontière avec contour fermé, à nécessité de discrétiser la frontière d'un domaine de dimensions  $6 \times 6 \text{ m}$  pour obtenir une précision relativement bonne. Par ailleurs, le même problème a pu être résolu avec le maillage éléments de frontière avec contour ouvert avec une discrétisation du demi-plan uniquement, le maillage ainsi utilisé s'étend à une distance de  $6 \text{ m}$  du chargement et nous permet d'avoir une précision meilleur.

### VII.3.2.2. *Emplacement de l'élément de frontière infini:*

Dans le but de savoir à quelle distance du chargement faut-il placé l'élément de frontière infini pour avoir une bonne précision des résultats, nous avons fait plusieurs tests et nous avons calculé le % d'erreur relative du déplacement vertical du point situé à une distance de  $1 \text{ m}$  de la charge pour différents emplacements de l'élément infini. Ceci nous a permis de tracer la courbe représentée en figure 7.19. Nous voyons à travers cette figure qu'une bonne précision est obtenue avec un élément de frontière infini placé à une distance de  $6 \text{ m}$  du chargement.

Nous concluons que le maillage éléments de frontière finis couplés avec des éléments de frontière infinis, nous garantit la précision et la rapidité de convergence des résultats.

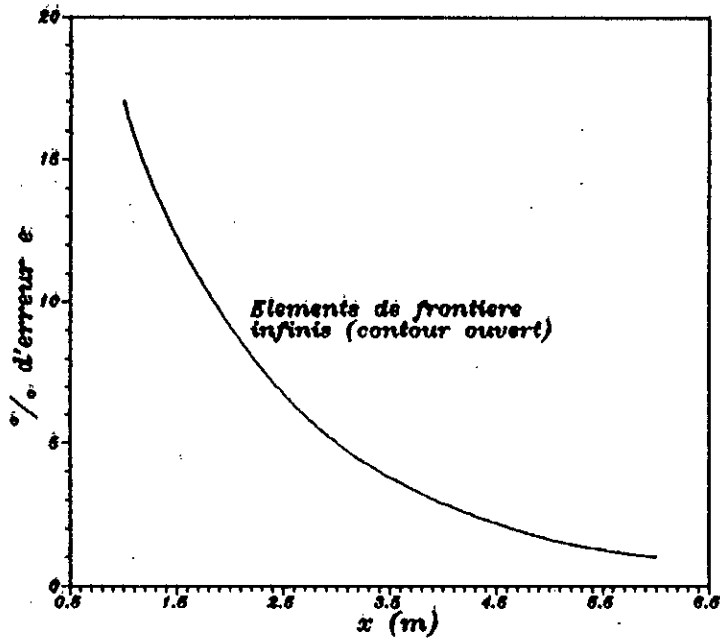


Figure 7.19: Erreur relative en fonction de la distance  $x$  a laquelle est place l'element de frontiere infini.

### VII.3.2.3. Répartition des contraintes:

Sur la figure 7.20, nous représentons la répartition des contraintes verticales en profondeur. Le modèle MEIFCO nous donne bonne satisfaction, en effet, une bonne concordance des résultats avec la solution analytique<sup>49</sup> est obtenue.

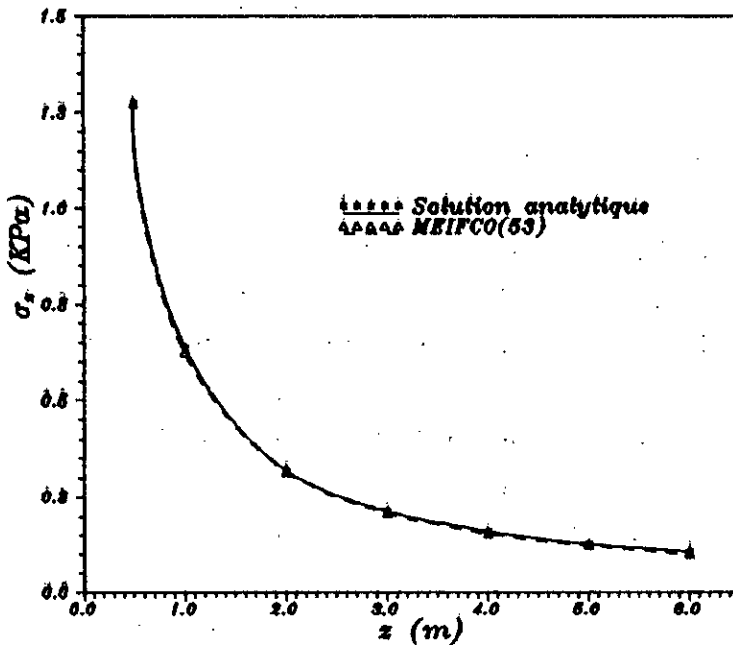


Figure 7.20: Répartition de la contrainte verticale en profondeur.

### VII.3.3. Exemple 3: Charge répartie sur un sol.

Le problème considéré dans ce cas est celui d'un sol sollicité en surface par une charge distribuée de 1 KN/ml sur une largeur de 20m. Le module de Young et le coefficient de Poisson ont pour valeurs respectives 30 MPa et 0.25.

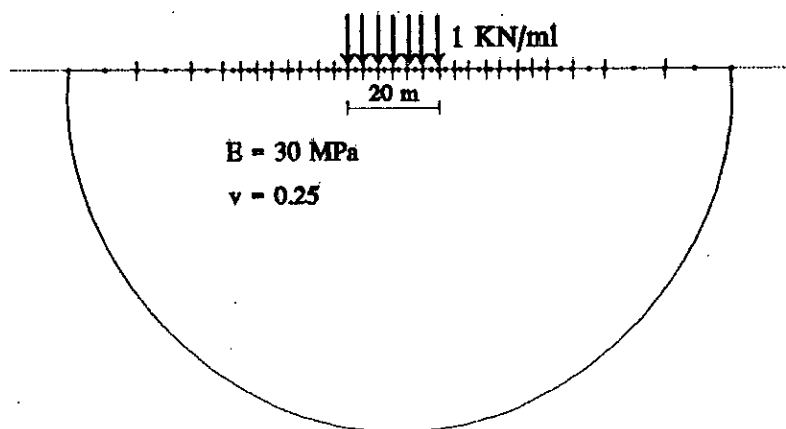


Figure 7.21: Charge répartie sur le sol: Maillage utilisé dans le modèle à contour ouvert.

Les différents maillages utilisés sont les suivants:

- 1) MEIFCO(57): 26 éléments de frontière quadratiques finis et 2 éléments de frontière infinis, soit 57 noeuds (figure 7.21).
- 2) MEIFCF(60): 30 éléments de frontière quadratiques finis, soit 60 noeuds (figure 7.22)

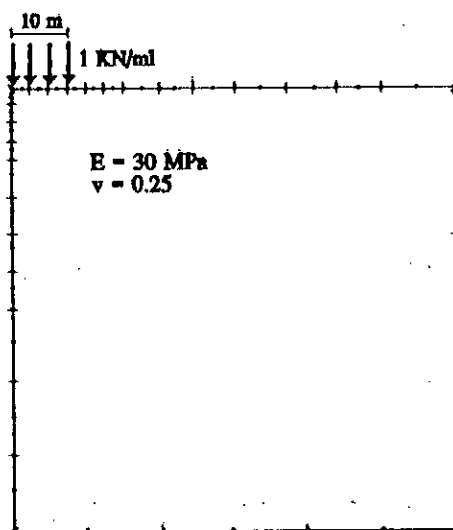


Figure 7.22: Charge répartie sur le sol: Maillage utilisé dans le modèle à contour fermé.

VII.3.3.1. Résultats et interprétations:

Pour montrer une autre fois, l'avantage qu'apporte le couplage des éléments de frontière infinis avec les éléments de frontière finis, nous avons comparé les résultats obtenus par le maillage MEIFCO(57) avec ceux obtenus par le maillage MEIFCF(60), ainsi qu'avec ceux donnés par la solution analytique<sup>49</sup>. Les déplacements verticaux sur l'axe et en surface sont représentés respectivement en figures 7.23 et 7.24.

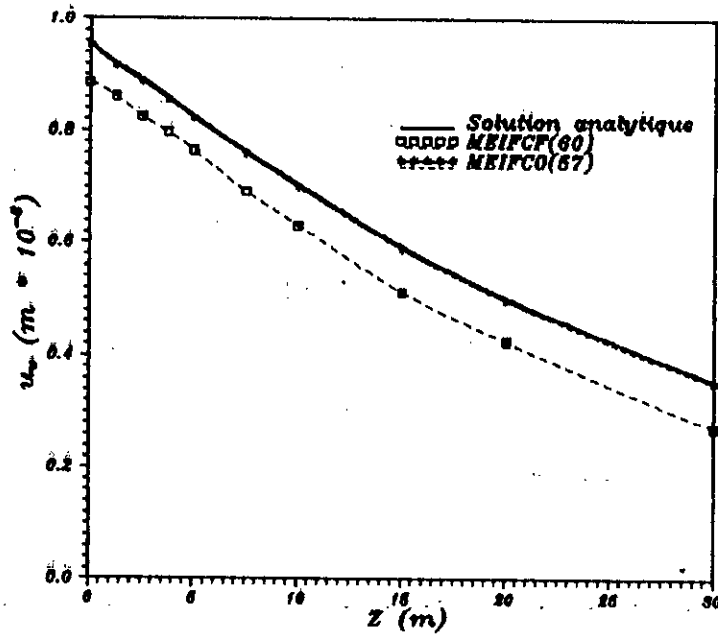


Figure 7.23: Déplacement vertical sur l'axe.

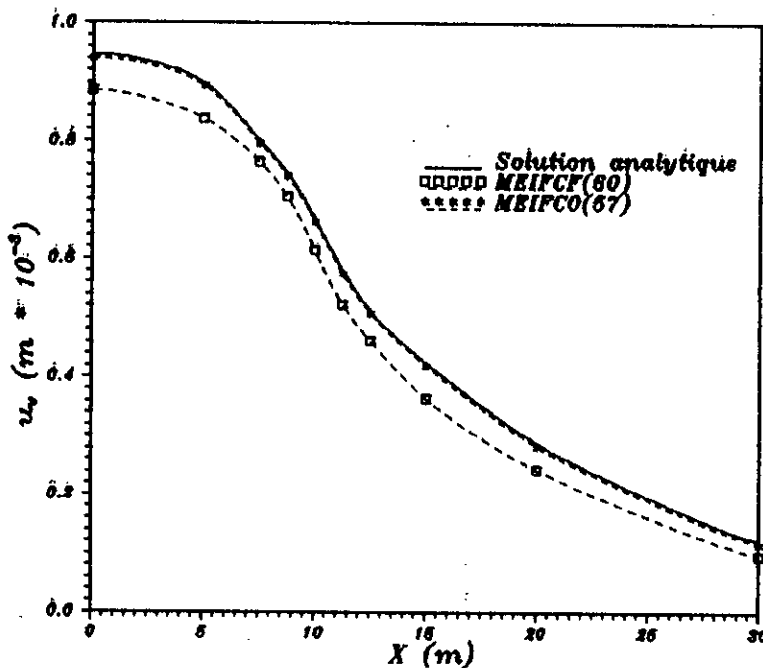


Figure 7.24: Déplacement vertical en surface.



Nous pouvons noter les points suivants:

Le maillage MEIFCF(60) donne une sous-estimation du déplacement sur l'axe et en surface. Ce sont les résultats du maillage par contour ouvert qui sont les plus voisins de la solution analytique. Les résultats donnés par le maillage MEIFCO(57) sont donc nettement meilleurs, l'erreur relative calculée n'est que de 1%. Ce qui montre la grande efficacité de la méthode des équations intégrales aux frontières, qui utilise des éléments de frontière infinis pour modéliser les extensions infinies.

### VII.3.3.2. Tests de convergence:

Pour définir à quelle distance faut-il placé l'élément de frontière infini telle que la précision des résultats soit acceptable, nous avons fait plusieurs tests, ce qui nous a permis de tracer en figure 7.25, la courbe représentant le pourcentage d'erreur sur le déplacement vertical maximal au point  $(x=0, z=0)$  en fonction de la distance normalisée  $\left(\frac{x}{B}\right)$ .

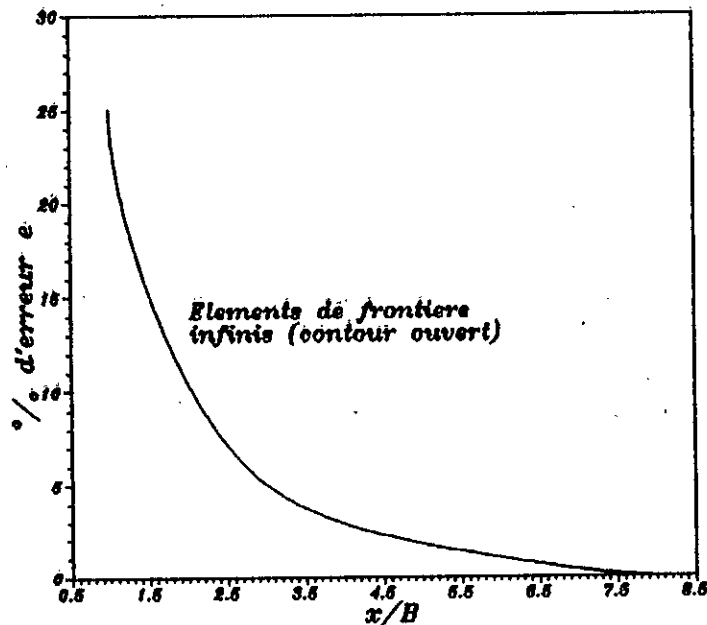


Figure 7.25: Erreur relative en fonction de la distance normalisée a laquelle est placé l'élément de frontière infini.

Nous voyons à travers cette figure que le pourcentage d'erreur diminue lorsqu'on éloigne l'élément de frontière infini. Nous notons une valeur de  $e=1\%$  pour  $\frac{x}{B} = 6$ . Ce pourcentage devient nul pour  $\frac{x}{B} = 8$ .

Nous pouvons conclure donc qu'avec un élément de frontière infini placé à une distance de 6 fois la demi largeur de la fondation, le calcul nous donne une très bonne précision des résultats.

### VII.3.3.3. Répartition des contraintes:

Nous représentons en figure 7.26 la répartition des contraintes verticales en profondeur. Nous remarquons une bonne concordance des résultats numériques avec la solution analytique<sup>49</sup>.

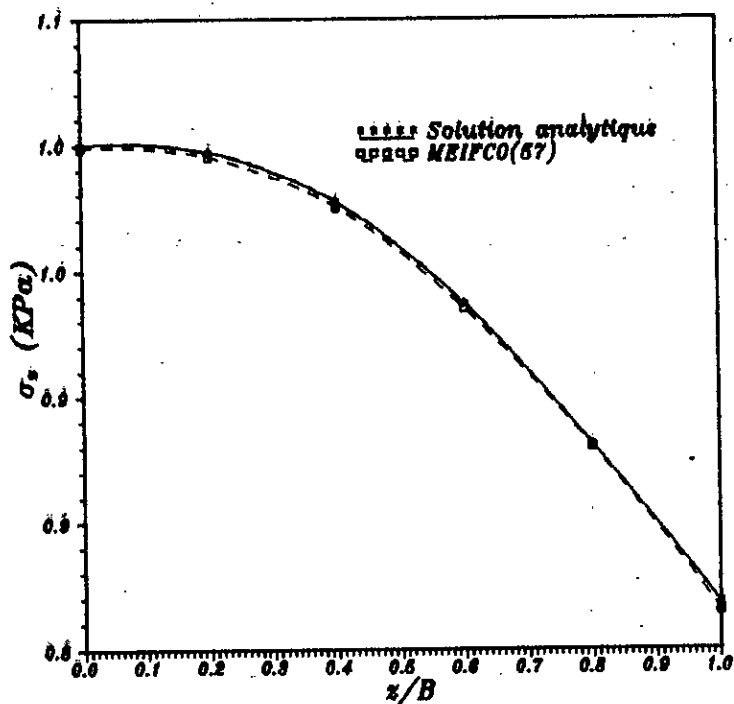


Figure 7.26: Répartition de la contrainte verticale en profondeur.

#### VII.4. Etude d'un pieu sollicité par une charge horizontale:

Nous étudions dans cet exemple le problème d'un pieu chargé horizontalement dans un milieu élastique et élastoplastique. Ce genre de problème est tridimensionnel et représente un cas d'étude complexe. En effet, il s'agit d'un problème où les mécanismes de sollicitations du sol font intervenir un nombre important de facteurs.

Le problème traité est ramené à un problème à deux dimensions, en considérant uniquement ce qui se passe dans une tranche de sol horizontale  $(r, \theta)$  et en négligeant l'interaction entre les différents niveaux<sup>5</sup>. Les influences de la forme de la section horizontale du pieu, de la plastification du sol autour du pieu et de l'état de l'interface de contact sol-pieu sont ici étudiées (en déformation plane).

Le modèle bidimensionnel du pieu circulaire est représenté en figure 7.27.

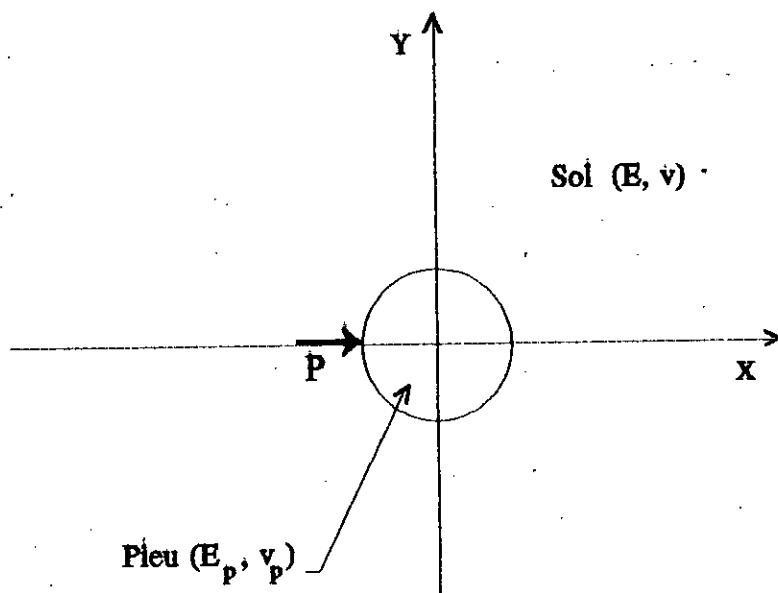


Figure 7.27: Modèle bidimensionnel d'un pieu circulaire.

Les données du problème sont les suivantes:

pour le pieu:  $E_p = 10^6 \text{ MPa}$ ,  $\nu_p = 0.33$ ,  $r_o = 0.5 \text{ m}$ .

pour le sol:  $E = 10^2 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.33$

$P = 1 \text{ MPa}$  est la charge par unité de longueur du pieu ou réaction du sol.

Le maillage éléments de frontière utilisé est représenté en figure 7.28. Vue la symétrie du modèle, seule la moitié du domaine sera considérée.

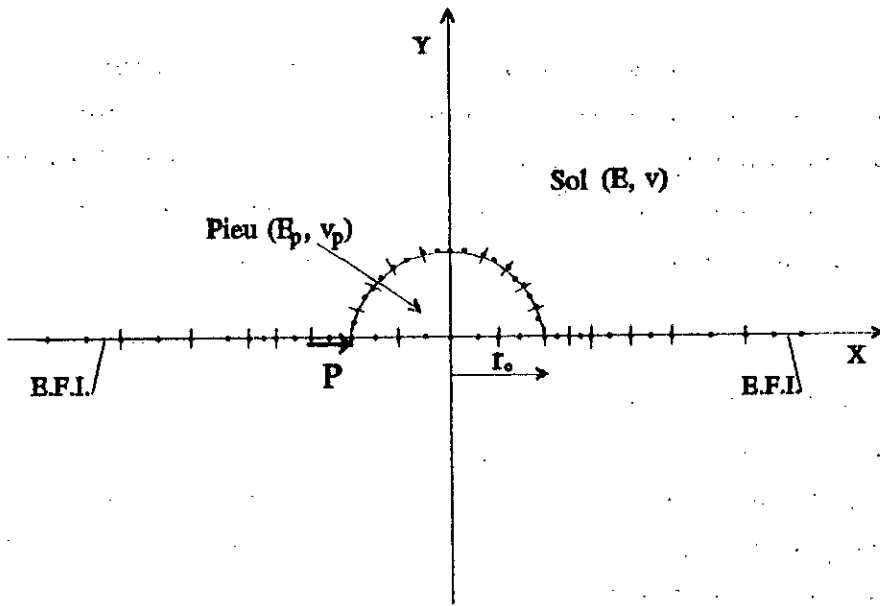


Figure 7.28: Maillage éléments de frontière de la section horizontale du modèle sol-pieu.

VII.4.1. Calcul des contraintes et des déplacements dans le cas élastique linéaire:

Les figures 7.29, 7.30 et 7.31 montrent respectivement les distributions des contraintes radiales  $\sigma_r$ , sur l'axe  $\theta=0$ , périphériques  $\sigma_\theta$  sur l'axe  $\theta=0$ , et de cisaillement  $\tau_{r\theta}$  sur l'axe  $\theta=\frac{\pi}{2}$ .

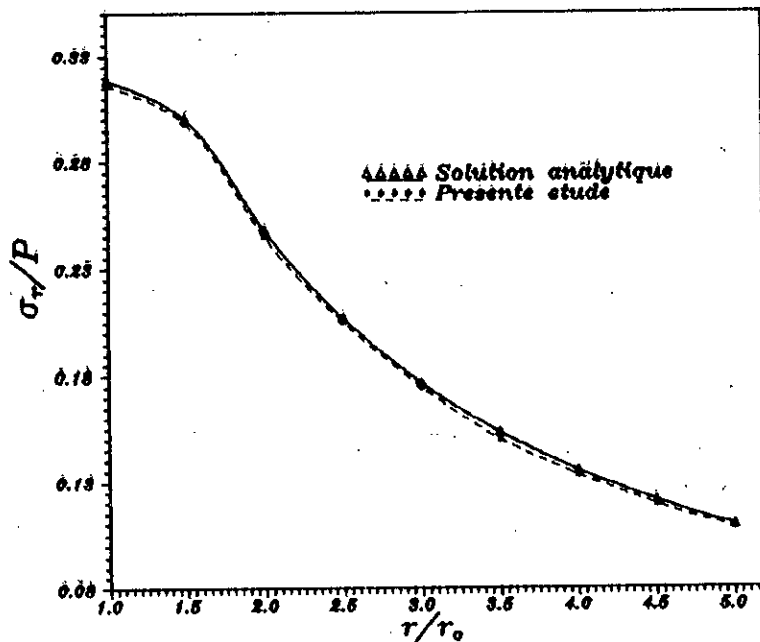


Figure 7.29: Distribution des contraintes radiales  $\sigma_r$  (sur l'axe  $\theta=0$ )

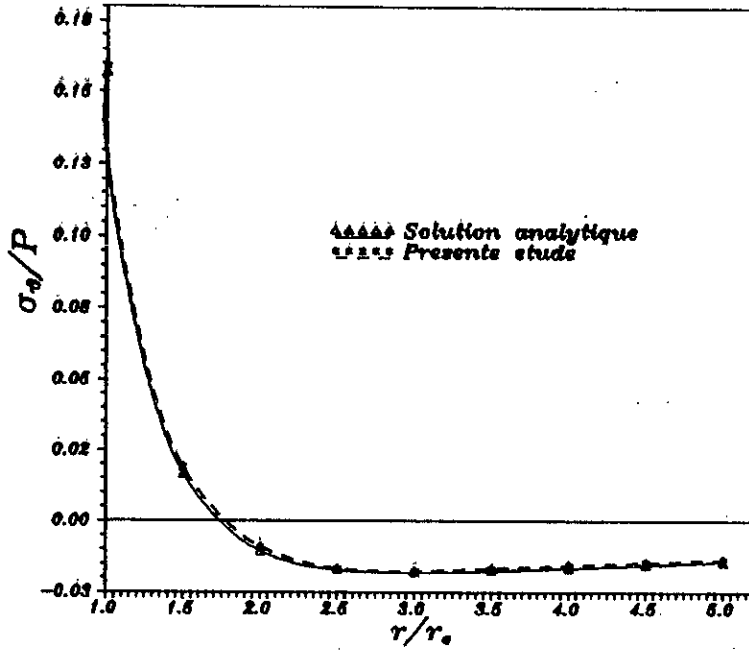


Figure 7.30: Distribution des contraintes peripheriques  $\sigma_\theta$  (sur l'axe  $\theta=0$ )

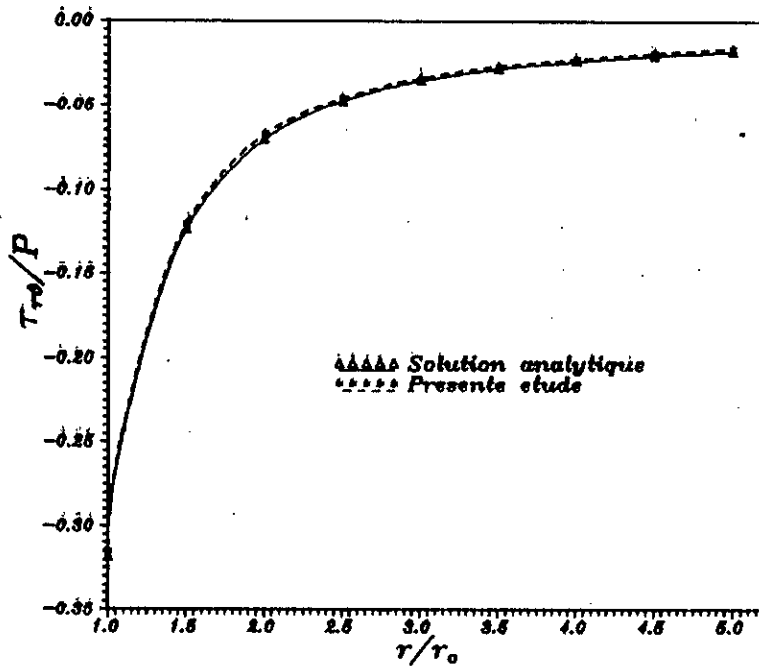


Figure 7.31: Distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_{r_0}$  (sur l'axe  $\theta = \pi/2$ )

Le déplacement radial sur l'axe  $\theta=0$  est représenté en figure 7.32. A travers ces figures, nous remarquons une bonne concordance entre nos résultats numériques et la solution analytique donnée par Baguelin et al.<sup>5</sup>.

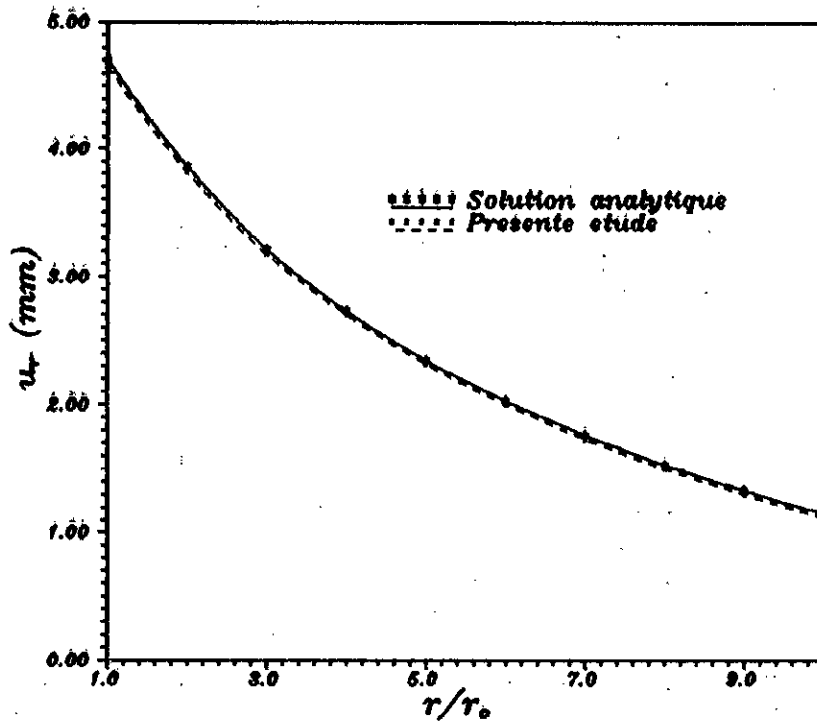


Figure 7.32: Répartition du déplacement radial  $u_r$  (sur l'axe  $\vartheta=0$ )

VII.4.2. Etude de l'effet de forme:

Dans le but d'étudier l'effet de forme, nous avons traité le problème avec différentes formes de sections: carrée ( $L/B = 1$ ), rectangulaire ( $L/B = 2$ ) avec  $B = 1m$ , et circulaire ( $r_0 = 0.5m$ ).

L'interface de contact sol-pieu est supposée dans ce cas parfaitement adhérente.

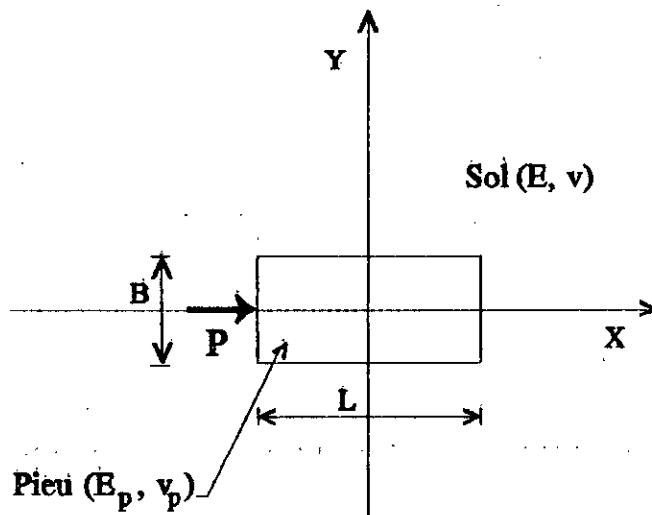


Figure 7.33: Modèle utilisé pour l'étude de l'effet de forme.

Les résultats obtenus nous ont permis de tracer les courbes de répartition des contraintes normales  $\sigma_x$  devant le pieu ou radiales  $\sigma_r$  suivant  $(ox)$  (figure 7.34), des contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$  sur le coté du pieu ou  $\tau_{r\theta}$  suivant  $(oy)$  (figure 7.35), et des déplacements normaux  $u_x$  ou radiaux  $u_r$  suivant  $(ox)$  (figure 7.36).

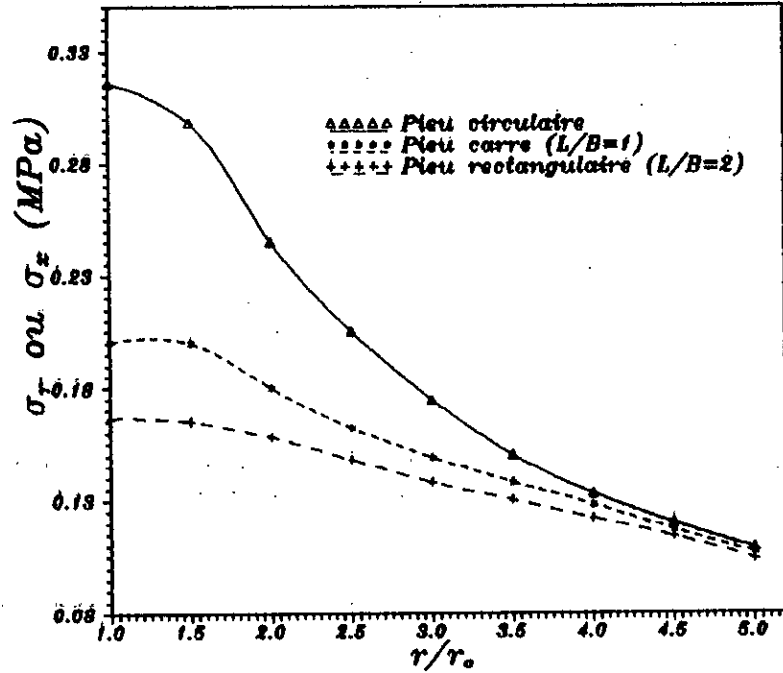


Figure 7.34: Contraintes normales  $\sigma_x$  ou radiales  $\sigma_r$  suivant l'axe  $(ox)$ .

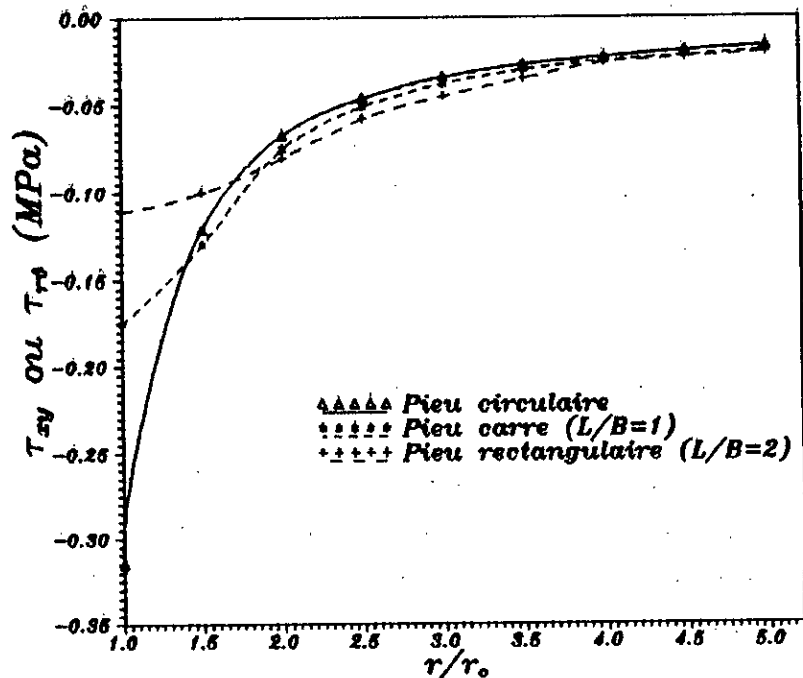


Figure 7.35: Contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  ou  $\tau_{r\theta}$  suivant l'axe  $(oy)$ .

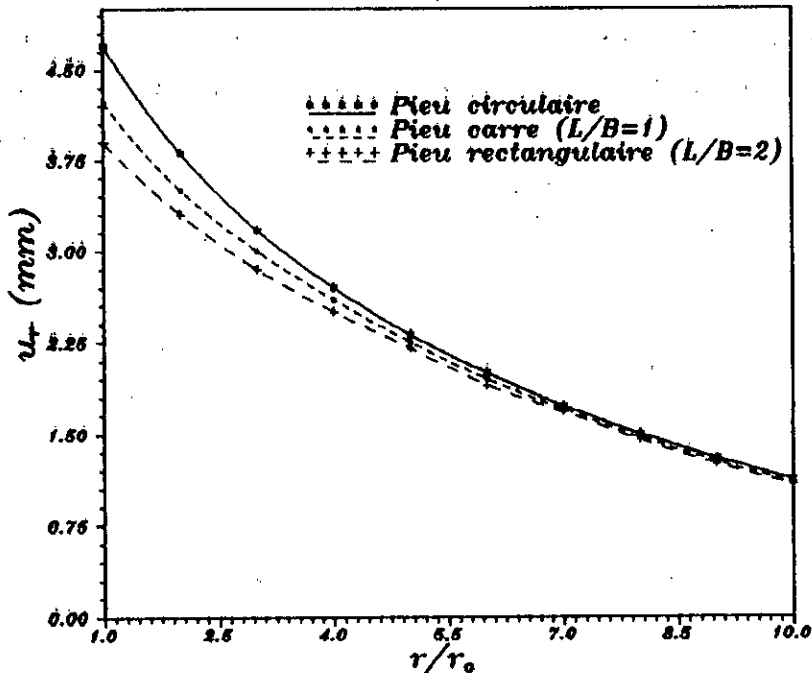


Figure 7.36: Déplacement normal  $u_z$  ou radial  $u_r$  suivant l'axe ( $oz$ ).

À travers les figures 7.34 et 7.35, nous remarquons que les valeurs des contraintes les plus élevées correspondent au cas du pieu circulaire. Ces valeurs diminuent lorsque le rapport  $L/B$  augmente. Cette dernière remarque est aussi valable pour les déplacements (figure 7.36). De plus, nous constatons que cet effet s'étend à une distance égale à environ deux fois la largeur de la section du pieu ( $x = 2B$ ).

Nous pouvons conclure donc que l'amplification des contraintes est accrue lorsque le rapport  $L/B$  diminue, de surcroît, l'effet de forme reste limité au voisinage de la section.

#### VII.4.3. Etude de l'effet de la plasticité du massif:

La résistance latérale limite au seul mouvement horizontal représente un paramètre important de l'analyse des pieux chargés latéralement. Si le sol est modélisé comme un matériau cohérent parfaitement plastique, le calcul de ce paramètre devient un problème de déformation plane dans la théorie de plasticité, en effet, la charge se calcule sur un long cylindre qui se déplace latéralement dans un milieu infini.

Randolph et Houlsby<sup>47</sup> ont établi l'expression de cette charge selon la



qualité de l'interface, leur étude a conduit aux résultats suivants:

$P_u = (6 + \pi) CD$  pour une interface parfaitement lisse,  
 et  $P_u = (4\sqrt{2} + 2\pi) CD$  pour une interface parfaitement rugueuse,  
 où  $C$  est la cohésion du sol et  $D$  est le diamètre du pieu.

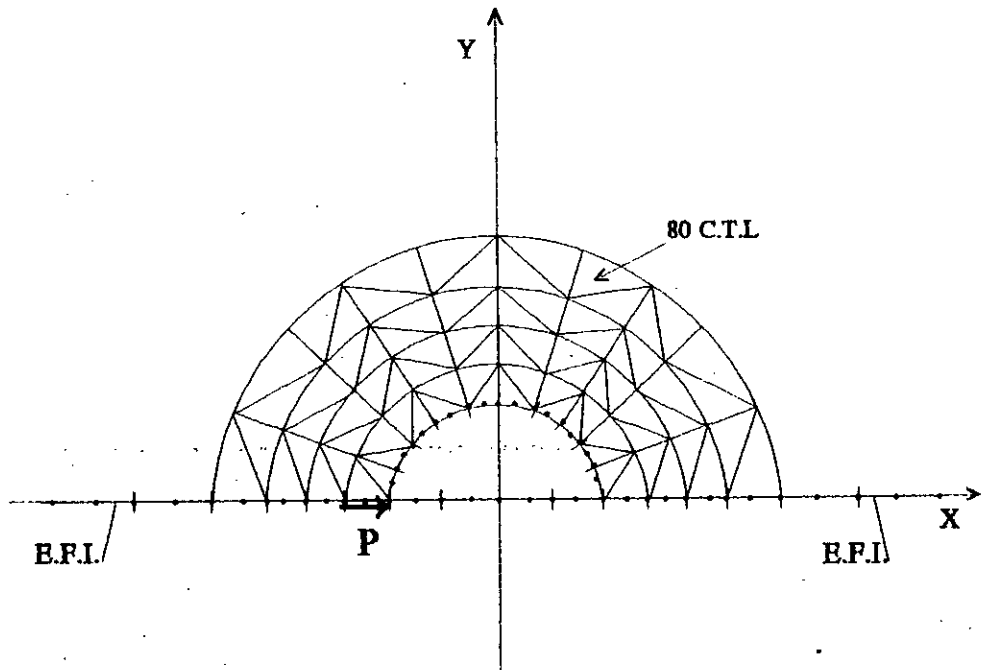


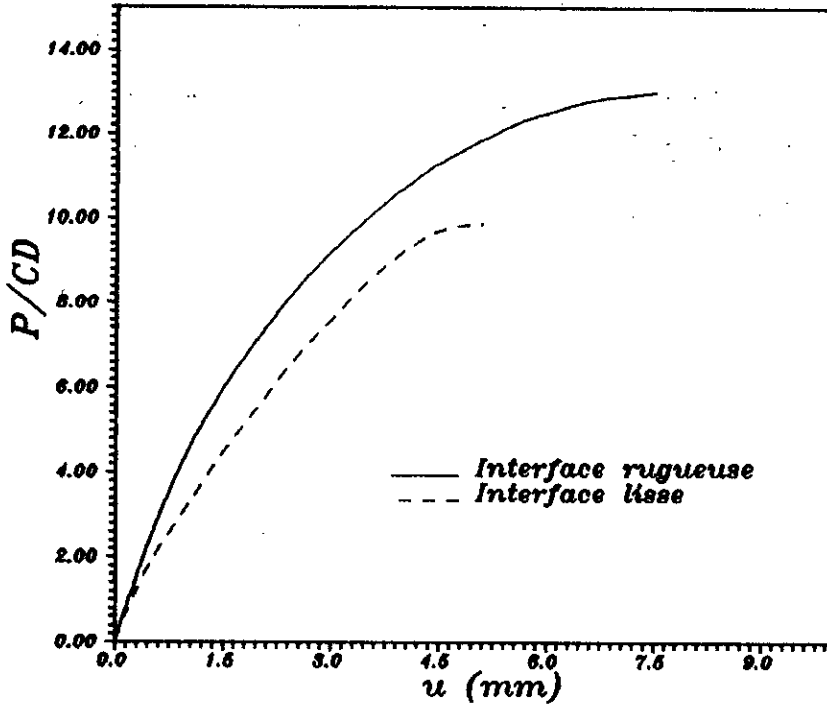
Figure 7.37: Maillage éléments de frontière utilisé.

Dans le but de tester les performances de notre modèle éléments de frontière, nous avons traité le problème de l'interaction sol-pieu non linéaire. Dans ce cas le sol est supposé avoir les caractéristiques de résistance suivantes:  $C=100 \text{ KPa}$  et  $\varphi=0^\circ$ . Le maillage utilisé est représenté en figure 7.37.

#### VII.4.3.1. Estimation de la réaction ultime:

Une première étape du calcul étant la détermination de la réaction ultime  $P_u$ . Sur la figure 7.38, nous représentons la variation du facteur de charge  $P_u/CD$  en fonction du déplacement latéral  $u_{ro}$  pour les deux cas d'interface de contact parfaitement lisse ( $\mu=0$ ) et parfaitement rugueuse ( $\mu=1$ ).

A travers la figure 7.38, nous constatons que la résistance limite ultime  $P_u$  ainsi que le déplacement latéral sont plus importants dans le cas d'une interface parfaitement rugueuse.



**Figure 7.38: Variation du facteur de charge en fonction du déplacement.**

Les facteurs de charge calculés sont respectivement 9,87 et 13 pour l'interface lisse et pour l'interface rugueuse. Ces résultats numériques, nous donnent bonne satisfaction, en effet, nous approchons les valeurs théoriques<sup>47</sup> avec une précision acceptable.

#### VII.4.3.2. Effet de la plasticité au voisinage du pieu:

Pour mettre en évidence l'influence de la plasticité sur le comportement du sol au voisinage du pieu, nous avons représenté en figure 7.39 la courbe de variation du déplacement radial  $u_r$ , en fonction de la distance normalisée  $r/r_0$  pour les deux cas de sol élastique et élastoplastique. Nous remarquons que le déplacement du sol est plus rigide dans le cas élastique.

Notons que l'effet de la plasticité du massif n'est ressenti que sur une distance d'environ 5 fois le rayon du pieu, au delà, le comportement du sol devient élastique, ce qui se traduit, sur la figure 7.39, par une superposition des deux courbes.

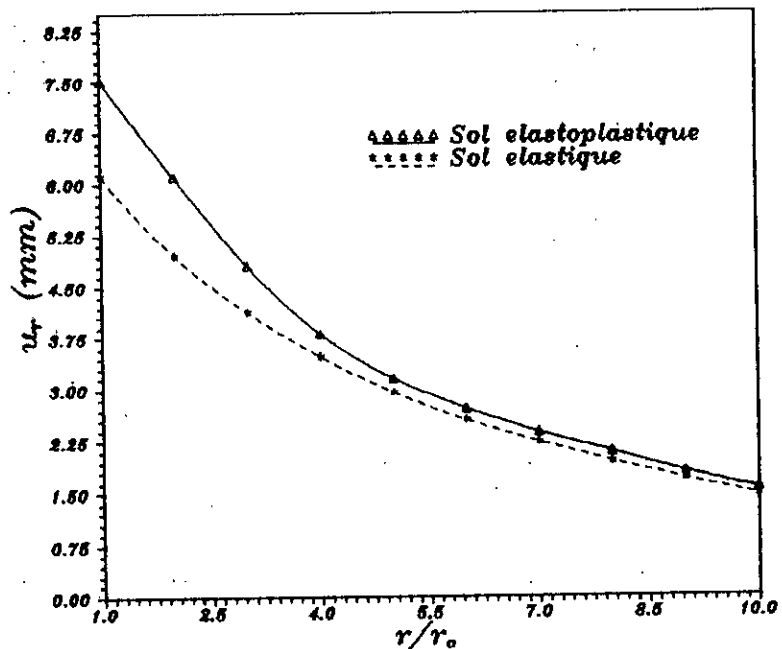


Figure 7.39: Déplacement radial  $u_r$  pour les cas: sol elastique et elastoplastique.

#### VII.4.4. Influence de la qualité de l'interface:

Les propriétés de l'interface jouent un rôle déterminant d'autant plus que cette dernière est la zone où apparaissent de fortes concentrations contraintes.

Toute perte d'adhérence sur l'interface peut transformer celle-ci en un 'point faible' et donc donner lieu à des comportements largement défavorables, ceci justifie ce qui va suivre.

La figure 7.40 montre l'influence du coefficient de frottement à l'interface sol-pieu sur la répartition des contraintes radiales  $\sigma_r$  et tangentielles  $\sigma_{r\theta}$  sur l'interface de contact.

Nous constatons que plus le coefficient de frottement est grand, plus l'étendue de la zone d'adhérence est importante. Par ailleurs, le décollement qui apparaît à l'arrière du pieu est plus favorisé lorsque le frottement est faible.

L'existence de frottement tend à faire diminuer notablement la pression radiale en avant du pieu, une partie de la charge étant reprise par les frottements tangentiels.

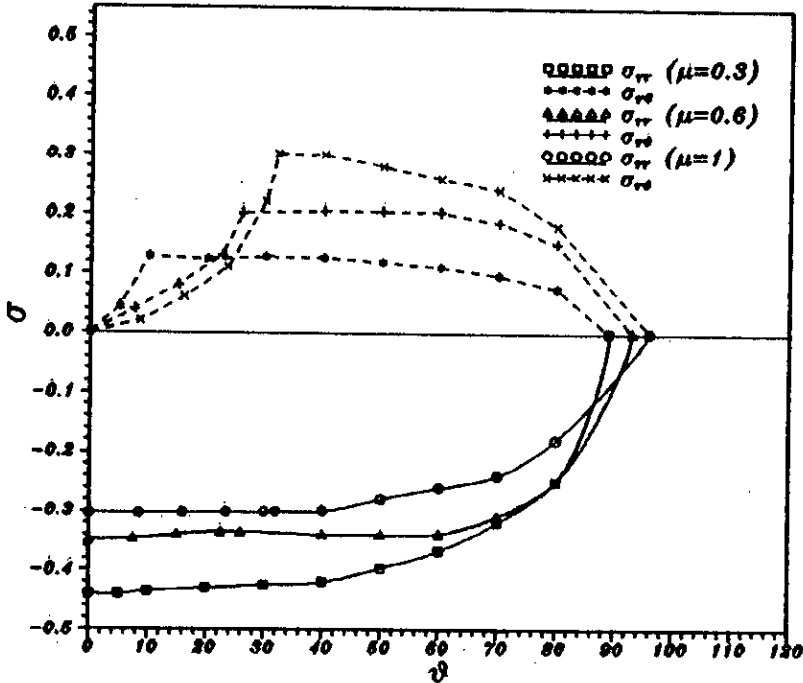


Figure 7.40: Distribution des contraintes radiales et tangentielles sur l'interface de contact sol-pieu pour différentes valeurs de  $\mu$ .

Sur la figure 7.41, on représente la répartition des contraintes périphériques  $\sigma_{\theta\theta}$ . Celles-ci dépendent considérablement du coefficient de frottement. Nous remarquons qu'elles sont nulles le long de la zone d'adhérence, ce qui s'explique par le fait que le sol est en contact parfait avec un matériau infiniment plus rigide. Dès qu'apparaît le glissement, la traction périphérique croît. Dans tous les cas, elle est maximale au voisinage de la limite glissement décollement.

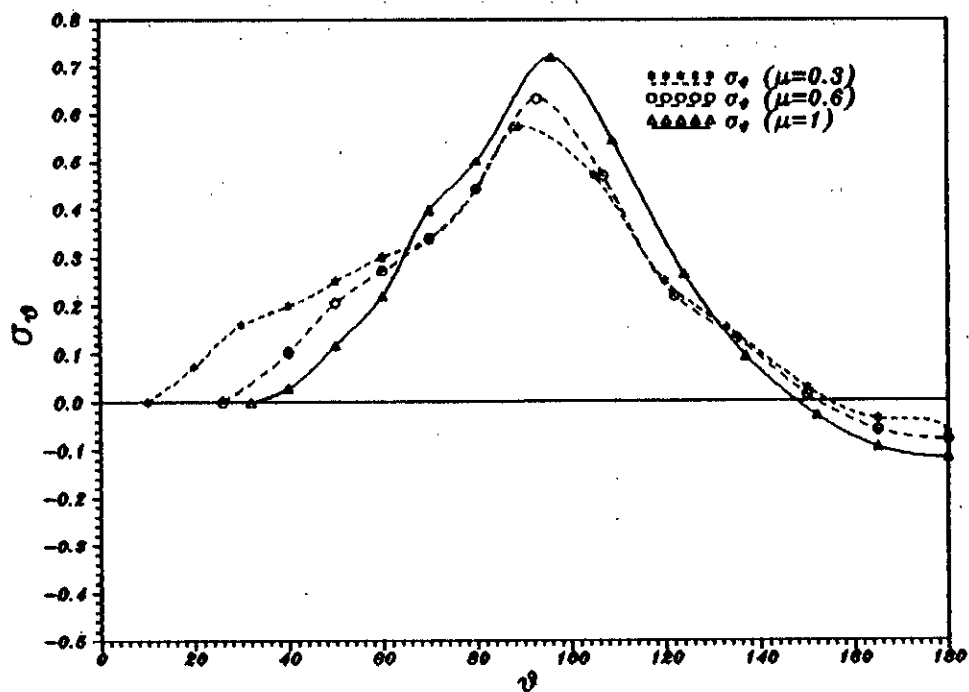


Figure 7.41: Distribution des contraintes peripheriques  $\sigma_\phi$  sur l'interface de contact sol-pieu pour différentes valeurs de  $\mu$ .

### VII.5. Charge concentrée sur une fondation rigide reposant sur un sol élastoplastique:

Nous étudions dans cet exemple le problème d'une fondation rigide sollicitée par une charge concentrée et reposant sur un demi espace élastoplastique.

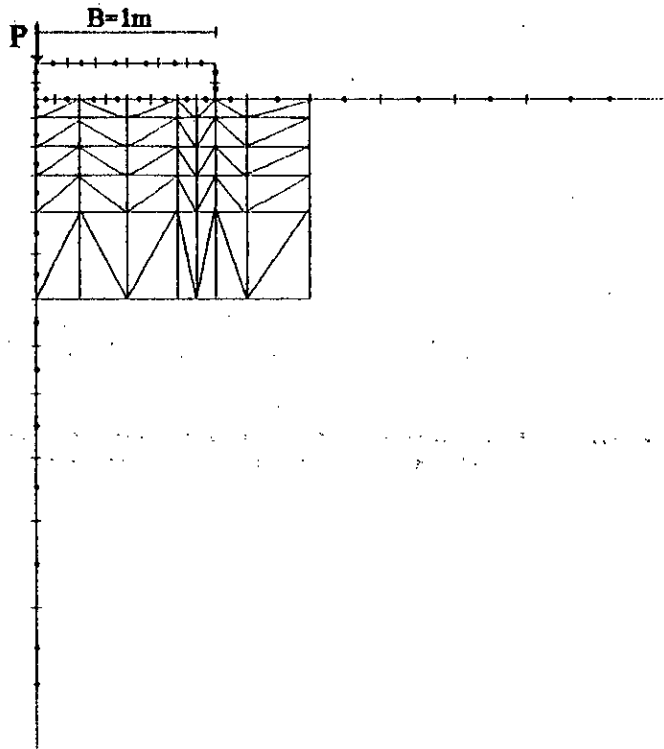


Figure 7.42: Fondation rigide sollicitée par une charge concentrée.  
Maillage utilisé

Le comportement de la fondation est supposé élastique très rigide avec:

$$E_f = 3.10^5 \text{ MPa} \text{ et } \nu_f = 0.25 .$$

Le demi-espace représente un sol élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr-Coulomb avec les caractéristiques mécaniques et de résistance suivantes:

$$E = 30 \text{ MPa} , \quad \nu = 0.3$$

$$\text{et } C = 30 \text{ KPa} , \quad \phi = 0^\circ .$$

La symétrie du modèle est ici exploitée, donc seule la moitié de celui-ci est considérée.

Le maillage utilisé consiste pour la fondation en 18 éléments de frontière

quadratiques dont 8 sont des éléments d'interface, et pour le sol en 24 éléments de frontière quadratiques finis encadrés par 2 éléments de frontière infinis. La partie du sol où on prévoit des corrections plastiques est discrétisée en 70 cellules triangulaires linéaires (figure 7.42).

**\* Résultats et interprétations:**

Dans le but de montrer l'influence du frottement interne du sol sur sa portance, nous avons traité le problème en considérant différents coefficients de frottement du sol, soit  $\varphi = 0^\circ$ ;  $5^\circ$ ;  $10^\circ$ . L'interface de contact est supposée parfaitement lisse ( $\mu = 0$ ).

Nous représentons sur la figure 7.43, la courbe charge-déplacement pour les différentes valeurs de  $\varphi$ .

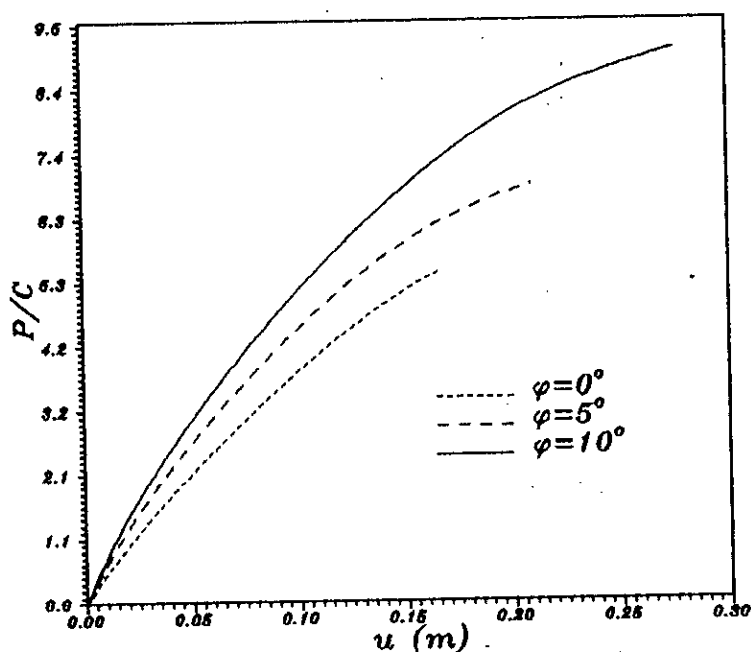


Figure 7.43: Courbe charge déplacement pour différentes valeurs de  $\varphi$ .

Les charges limites obtenues correspondent à des états de charge stationnaires avec une évolution continue des déplacements. Ce qui permet la prédiction de la rupture de manière évidente.

A travers cette figure, nous pouvons conclure que la capacité portante du sol varie dans le même sens que le frottement interne de celui-ci. D'où la nécessité de la bonne connaissance de ce paramètre pour une prédiction optimale de la charge à la rupture.

Nous considérons maintenant le cas d'un sol purement cohérent ( $\psi = 0^\circ$ ).

En vue de comparer les résultats, nous avons traité le problème pour des états d'interface différents: parfaitement lisse ( $\mu = 0$ ), parfaitement rugueuse ( $\mu = 1$ ) et en liaison parfaite. Les résultats obtenus nous ont permis de représenter la courbe de variation des déplacements verticaux en surface et en profondeur sur l'axe (figures 7.44 et 7.45).

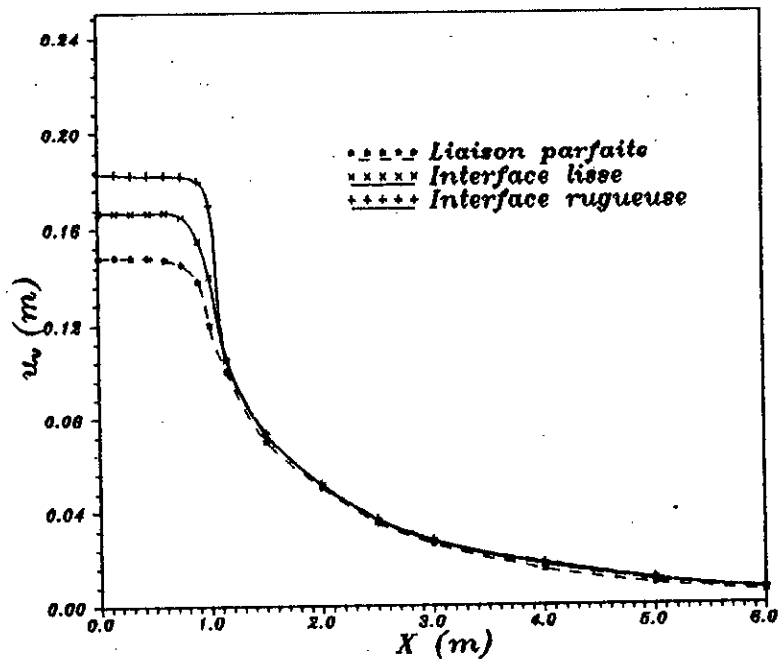


Figure 7.44: Déplacements verticaux en surface.

Les figures 7.44 et 7.45 montrent que la répartition des déplacements dépend de l'état de l'interface de contact. Les déplacements sous la fondation augmentent avec le coefficient de frottement de l'interface sol-fondation. Ces déplacements sont sous-estimés lorsqu'on suppose la liaison parfaite. Ce qui montre l'intérêt de la prise en compte de l'état de contact de l'interface.



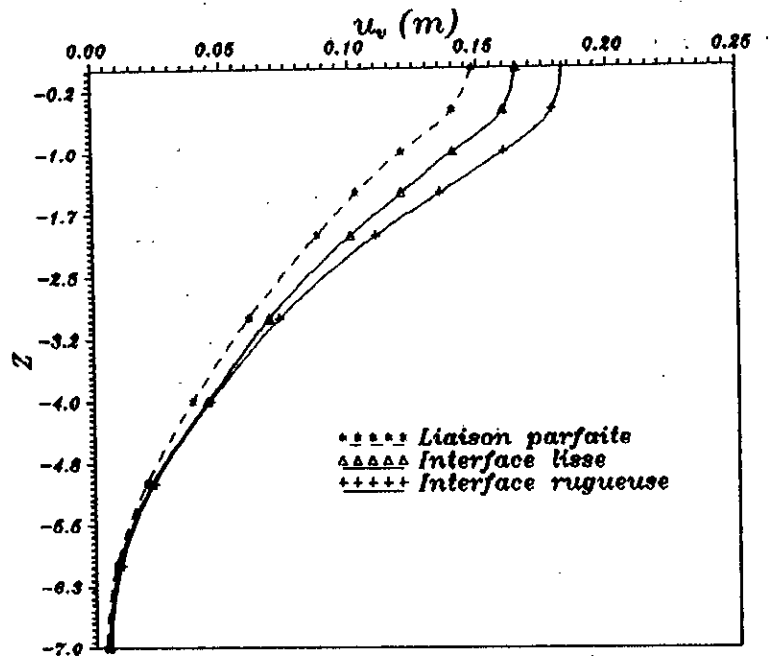


Figure 7.45: Déplacements verticaux en profondeur sur l'axe.

### VII.6. Charge répartie sur une fondation rigide reposant sur un sol élastoplastique:

Le problème de contact entre différentes structures représente un des plus importants sujets de la mécanique et du génie civil. L'interaction sol-structure s'avère donc un exemple intéressant à traiter.

Dans la majorité des cas, des forces tangentielles sont développées sur l'interface de contact. Ce qui est dû à la présence de frottement. Donc la qualité de l'interface influence le mode de transmission des efforts.

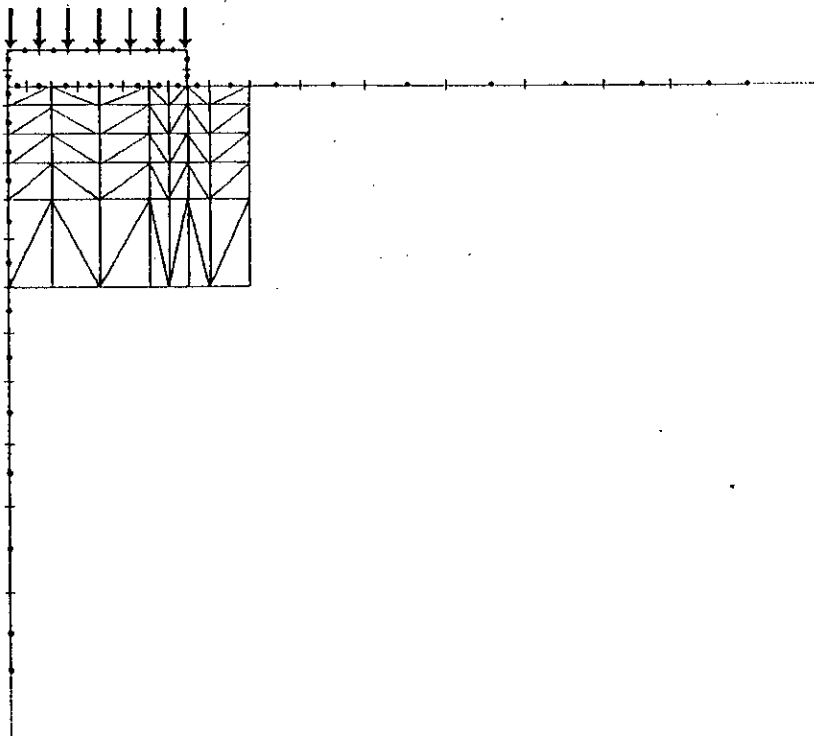


Figure 7.46: Charge répartie sur fondation rigide: Maillage utilisé.

Le problème de l'interaction sol-fondation est ici traité. Les caractéristiques des matériaux en contact sont les suivantes:

- pour la fondation, un comportement élastique très rigide est supposé avec:  $E_f = 3.10^5 \text{ MPa}$  et  $\nu_f = 0.25$

- le sol est considéré comme étant un matériau élastique parfaitement plastique, obéissant au critère de Mohr-Coulomb, avec les caractéristiques mécaniques  $E = 30 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$  et de résistance  $C = 30 \text{ KPa}$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

Vue la symétrie du problème, on ne considère que la moitié du modèle.

La fondation est discrétisée en 18 éléments quadratiques, dont 8 sont

des éléments d'interface, le sol en 27 éléments de frontière quadratiques finis et 2 éléments de frontière infinis. Le domaine du sol où le comportement plastique est attendu est discrétisé en 70 cellules triangulaires linéaires (figure 7.46).

**\* Résultats et interprétations:**

Sur la figure 7.47, nous représentons la courbe charge-déplacement vertical pour deux différents états d'interface: parfaitement lisse avec  $\mu=0$  et parfaitement rugueuse avec  $\mu=1$ . A travers cette figure, nous remarquons que la charge limite dans le cas de l'interface parfaitement rugueuse est supérieure à celle dans le cas de l'interface parfaitement lisse. Cette différence est due à la présence des forces de frottement qui contribuent à augmenter la capacité portante du sol.

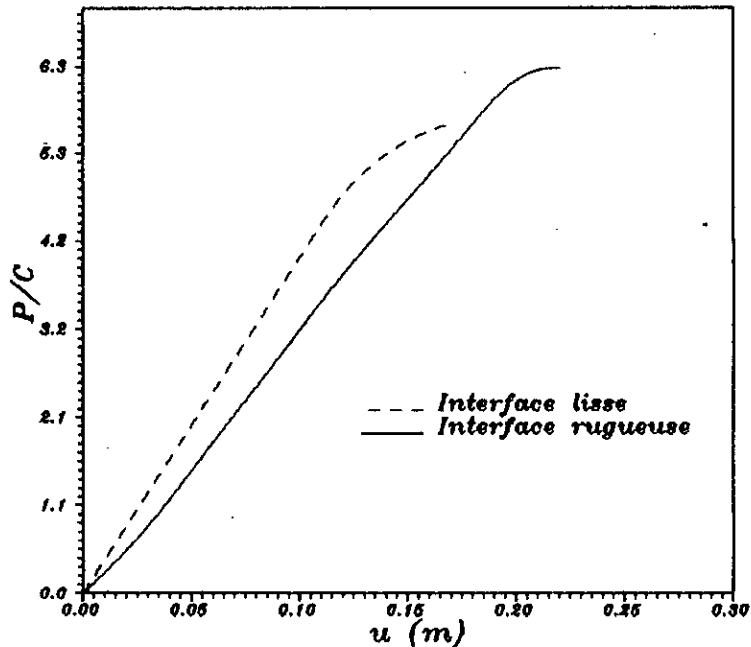


Figure 7.47: Courbe charge déplacement pour les deux états d'interface.

Pour des sols non pesant, et en prenant l'hypothèse du frottement nul au niveau de l'interface sol-fondation, la capacité portante du sol est exprimée par la relation suivante:

$$P = C N_c + q N_q$$

dans laquelle:

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \gamma^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

et  $N_c = (N_q - 1) \operatorname{ctg} \varphi$

$C$  et  $\varphi$  étant respectivement la cohésion et le coefficient de frottement du sol sous la fondation.

Philipponnat<sup>44</sup> a donné les valeurs théoriques de la charge limite pour les deux cas d'interface lisse et rugueuse. Nous avons:

$P = 5.14 C$  pour une interface lisse,

et  $P = 5.71 C$  pour une interface rugueuse.

En comparant nos valeurs numériques avec ces dernières, on trouve que la solution est approximée avec une erreur relative de 8,9 % dans le cas de l'interface lisse et de 10,2 % dans le cas de l'interface rugueuse. Ce qui est acceptable.

Sur les figures 7.48 et 7.49, nous représentons les courbes de variation du déplacement vertical respectivement en profondeur et en surface pour les deux états d'interface. Nous remarquons que les déplacements verticaux en profondeur et en surface sont plus favorisés dans le cas de l'interface rugueuse au voisinage de la fondation. On constate que cet effet s'estompe lorsqu'on s'éloigne de celle-ci.

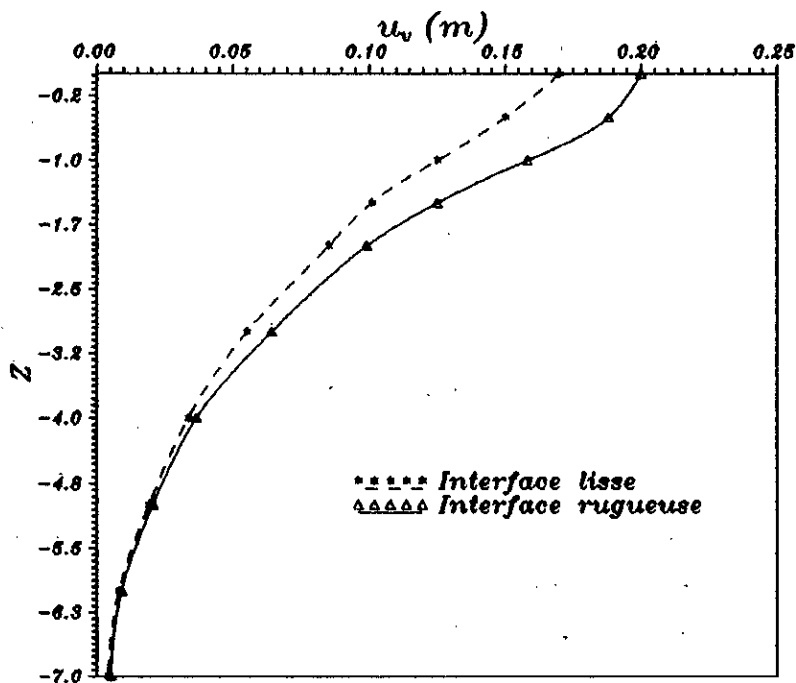


Figure 7.48: Variation du déplacement vertical en profondeur sur l'axe.

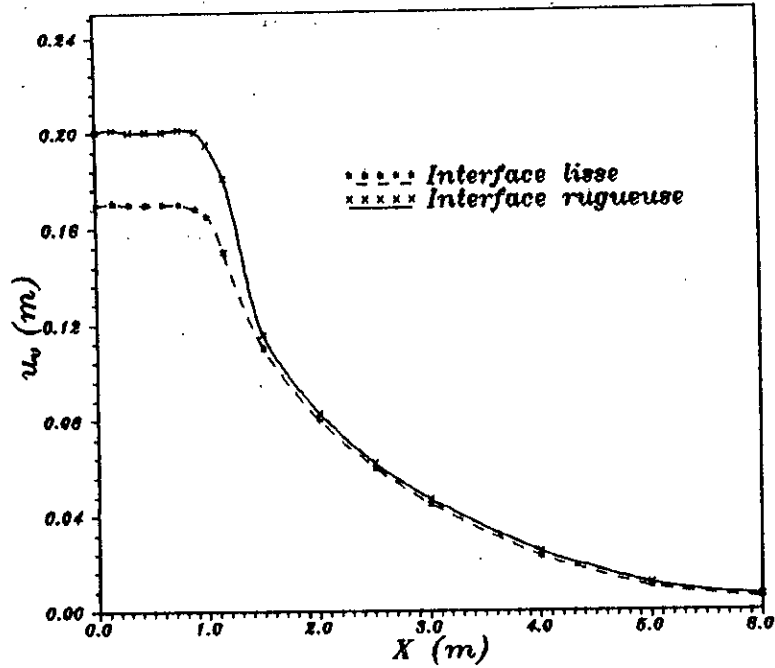


Figure 7.49: Variation du déplacement en surface.

On s'intéresse maintenant à la répartition des contraintes normales à l'interface sol-fondation pour différents états d'interface. Pour cela, nous représentons en figure 7.50, la répartition des contraintes normales sous la fondation pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ .

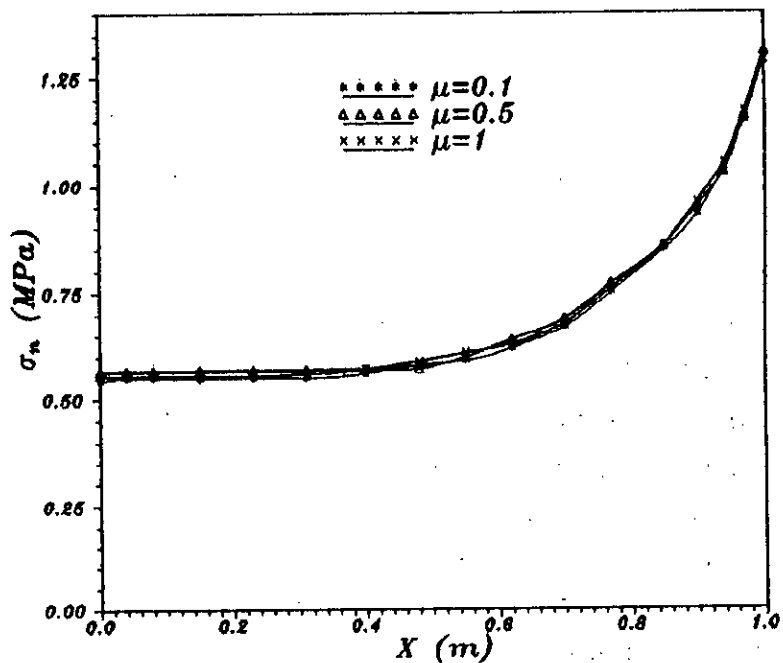


Figure 7.50: Répartition des contraintes normales à l'interface sol-fondation pour différentes valeurs de  $\mu$ .

A travers cette figure, nous remarquons que le coefficient de frottement de l'interface n'a pratiquement pas d'influence sur la répartition des pressions normales. Aussi, on constate une concentration de contraintes au niveau du coin de la fondation.

Pour voir comment évolue le phénomène de glissement au niveau de l'interface sol-fondation, nous représentons en figures 7.51 et 7.52 respectivement la répartition des contraintes tangentielles et des déplacements relatifs horizontaux en fonction de la distance  $x$  sous la fondation.

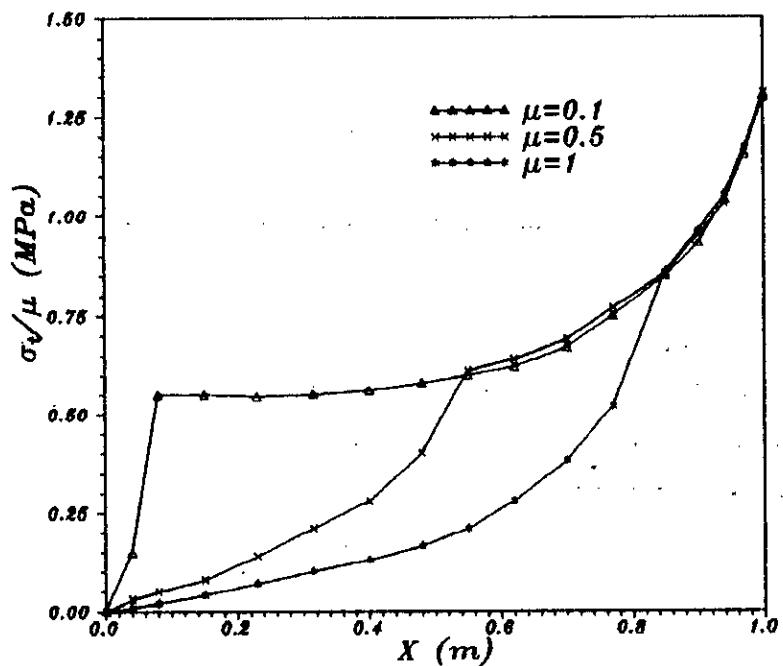


Figure 7.51: Contraintes tangentielles à l'interface sol-fondation pour différentes valeurs de  $\mu$ .

Ces figures montrent que le coefficient de frottement affecte principalement la taille de la zone d'adhérence qui augmente avec l'intensité de celui-ci. Les forces de cisaillement sont aussi très influencées par ce coefficient, elles sont maximales pour une interface parfaitement rugueuse. Nous remarquons aussi que les déplacements relatifs sous la fondation sont favorisés pour des faibles valeurs du coefficient de frottement, la taille de la zone d'adhérence est dans ce cas très réduite. Ils sont maximaux lorsque l'interface est parfaitement lisse (pas de frottement).

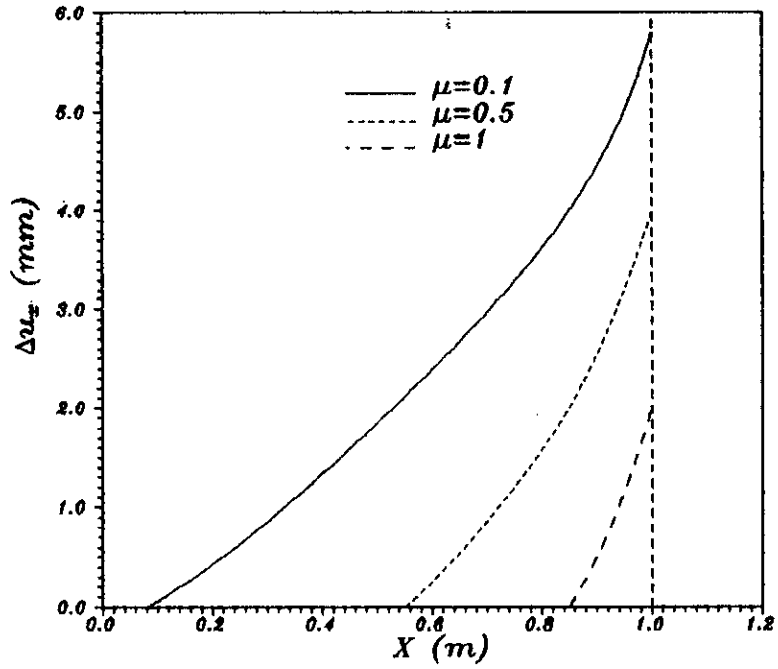


Figure 7.52: Repartition des déplacements relatifs horizontaux sous la fondation.

## **Conclusion Générale**



Au terme de l'étude effectuée au cours de ce travail, nous pouvons tirer les enseignements suivants:

La méthode des équations intégrales aux frontières, que nous avons utilisée pour la résolution du problème de contact frictionnel, nous a donné une entière satisfaction. En effet, elle constitue un outil de résolution à la fois fiable et convivial pour l'étude de ce genre de problème. Son essentiel "point fort" réside dans une souplesse de la définition des géométries par simple maillage des contours des domaines. Quelques programmes utilitaires de génération de maillage nous permettent de faire évoluer très rapidement les données géométriques des problèmes, sans une telle souplesse, le traitement itératif pour les conditions de contact non-parfaitement adhérentes ne pourrait être raisonnablement envisagé.

Nous avons montré par le biais des exemples étudiés, que la modélisation d'une surface de discontinuité selon sa nature et son mode de fonctionnement, nous permettait de rendre compte de son comportement réel, et que l'existence du frottement sur l'interface de contact influençait la répartition des modes de contact et des contraintes sur celle-ci, ce qui donne lieu à des perturbations du champ mécanique. Aussi, nous avons mis en évidence que la présence de frottement restreignait le mouvement de glissement dans la direction tangentielle à l'interface.

Les variables impliquées dans le modèle de frottement apparaissent explicitement dans la formulation de cette technique. A cet effet, nous pensons que la méthode des équations intégrales aux frontières devrait être largement utilisée.

Par ailleurs, et en vue d'une extension pour la résolution des problèmes d'interaction sol-structure, et d'une meilleure simulation des conditions de frontière à l'infini, les éléments de frontière infinis ont été introduits dans la formulation. Ainsi, la modélisation des extensions non bornées par des éléments de frontière infinis, nous a permis de nous affranchir de l'application des conditions de frontière "artificielles" qui entraîne une troncature du maillage, et aussi de réduire le nombre d'éléments requis pour une bonne représentation du modèle. A travers les exemples traités, l'influence des nouvelles conditions de frontière sur la précision des résultats a été examinée. Nous avons montré qu'une meilleure précision est alors obtenue, et les efforts

déployés au maillage et à l'introduction des données sont ainsi réduits.

Dans le but de qualifier d'outil de résolution général, il nous a paru essentiel de montrer l'applicabilité de la méthode des éléments de frontière aux problèmes de contact non linéaires. En effet, souvent les non linéarités apparaissent dans les idéalizations réalistes des problèmes pratiques. Comme les autres méthodes générales telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies, la méthode des éléments de frontière est capable de résoudre les équations différentielles non linéaires, tout en préservant son principal avantage qui est la réduction de la dimension du problème. En effet, la subdivision d'une partie du domaine en cellules internes n'implique pas une augmentation de l'ordre du système d'équations algébriques à résoudre.

Nous avons utilisé une procédure itérative incrémentale. La non-linéarité du problème due au comportement élastoplastique du massif sol est résolue par le biais de la formulation en contraintes initiales. Le critère de rupture que nous avons adopté est celui de Mohr-Coulomb. Ainsi, la prise en compte des corrections plastiques pendant le calcul du frottement-décollement était possible. Nous avons montrés l'influence de la qualité de l'interface sur la capacité portante du sol et sur la distribution des contraintes et des déplacements à l'interface, ainsi que sur la répartition des états de contact sur celle-ci. Aussi, nous avons examiné l'influence de la plasticité du sol au voisinage de la structure, les régions non linéaires étant confinées à des petites subrégions du domaine.

A travers les exemples traités, nous avons démontré les performances de l'algorithme proposé qui s'avère extrêmement utile pour la résolution des problèmes d'interaction sol-structure. Nous avons ainsi mis en lumière certains aspects du traitement des comportements non linéaires.

Enfin, les performances des modèles développés sont concluantes.

### *Perspectives*

Il serait intéressant de poursuivre la démarche décrite dans la présente thèse par d'éventuelles extensions. Nous proposons donc:

- Afin de cumuler les avantages des deux méthodes éléments finis et éléments de frontière, il serait intéressant de les coupler dans un modèle général. La méthode des éléments finis étant bien adaptée pour les matériaux à lois de comportement non linéaires et la méthode des éléments de frontière pour les zones présentant de fortes singularités.

- De généraliser le problème au cas de sollicitations dynamiques.
- De généraliser l'étude aux problèmes tridimensionnels.

## **Annexes**

## Annexe 1:

## Etude de la convergence des intégrales

A) Intégrations sur  $\Gamma_{\infty}$  :

Considérons le milieu semi-infini représenté ci-dessous:

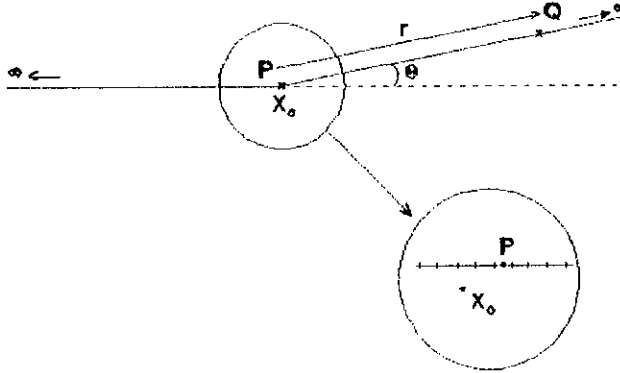


Figure A.1.1: Représentation d'un milieu semi-infini.

Le point Q est très loin des points de collocation ( $Q \in \Gamma_{\infty}$ ). Vis à vis de Q, on peut alors considérer que le point de référence  $x_0$  est confondu avec le point de collocation P.

$$U_y(P, Q) = \frac{1+\nu'}{4\pi E' (1-\nu')} \left[ (3-4\nu') \Delta_y \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]$$

$$= \frac{1+\nu'}{4\pi E' (1-\nu')} \left[ (3-4\nu') \Delta_y \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \frac{(x_i(Q)-x_i(P)) (x_j(Q)-x_j(P))}{r^2} \right]$$

$$\text{si } i=j=1 : U_y(P, Q) = \frac{1+\nu'}{4\pi E' (1-\nu')} \left[ (3-4\nu') \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \cos^2 \theta \right]$$

$$\text{si } i=j=2 : U_y(P, Q) = \frac{1+\nu'}{4\pi E' (1-\nu')} \left[ (3-4\nu') \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \sin^2 \theta \right]$$

$$\text{si } i \neq j : U_y(P, Q) = \frac{1+\nu'}{4\pi E' (1-\nu')} \sin \theta \cos \theta$$

Le terme  $U_y$  est donc de la forme  $A \operatorname{Ln} r + B(\theta)$ .

Or l'intégrale  $\int_{r_0}^{\infty} r^{\alpha} \operatorname{Ln} r \, dr$  converge si et seulement si:  $\alpha < -1$ .

$$(\text{primitive: } \frac{1}{\alpha+1} r^{\alpha+1} \operatorname{Ln} r - \frac{1}{(\alpha+1)^2} r^{\alpha+1})$$

Par conséquent, nous ne pourrions intégrer que si la tension est une fonction

en  $r^\alpha$  avec  $\alpha < -1$  (à l'infini).

$$T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-v')} \left[ (1-2v') \left\{ n_i \frac{x_j(Q)-x_j(P)}{r} - n_j \frac{x_i(Q)-x_i(P)}{r} \right\} + \left[ (1-2v') \Delta_{ij} + 2 \frac{(x_i(Q)-x_i(P))(x_j(Q)-x_j(P))}{r^2} \right] n_s \frac{x_s(Q)-x_s(P)}{r} \right]$$

$n_s \frac{x_s(Q)-x_s(P)}{r}$  est égal au produit scalaire  $\vec{n} \cdot \frac{\vec{PQ}}{|r|}$ , ce terme tend vers zéro lorsque Q s'éloigne.

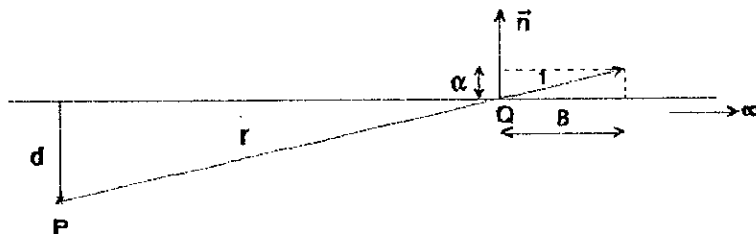


Figure A.1.2.:

$$\vec{n} \cdot \frac{\vec{PQ}}{|r|} = \pm \alpha = \pm \frac{d}{r}$$

si  $i \neq j$ , le terme  $n_i \frac{x_j(Q)-x_j(P)}{r} - n_j \frac{x_i(Q)-x_i(P)}{r}$  représente (au signe près)

la norme du produit vectoriel  $\vec{n} \wedge \frac{\vec{PQ}}{|r|}$ .

Ceci est égal à  $\pm 1.B = \pm \sqrt{1-\alpha^2} = \pm \sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}$ .

$$\text{si } i=j=1 : T_{ij}(P, Q) = -\frac{d}{4\pi(1-v')} \frac{1}{r^2} [(1-2v') + 2 \cos^2\theta]$$

$$\text{si } i=j=2 : T_{ij}(P, Q) = -\frac{d}{4\pi(1-v')} \frac{1}{r^2} [(1-2v') + 2 \sin^2\theta]$$

$$\text{si } i \neq j : T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-v')} \frac{1}{r} \left[ (1-2v') \sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2} + 2 \sin\theta \cos\theta \frac{d}{r} \right]$$

Dans le cas  $i \neq j$ , le terme  $T_{ij}$  est donc de la forme  $\frac{A}{r} \left( \frac{B(\theta)}{r^2} \right)$ .

Or l'intégrale  $\int_{r_0}^{\infty} \frac{A}{r} r^\alpha \ln r dr$  converge si et seulement si  $\alpha < 0$ . Donc, nous

ne pourrions intégrer que si le déplacement est une fonction en  $r^\alpha \ln r$  avec  $\alpha < 0$  (à l'infini).

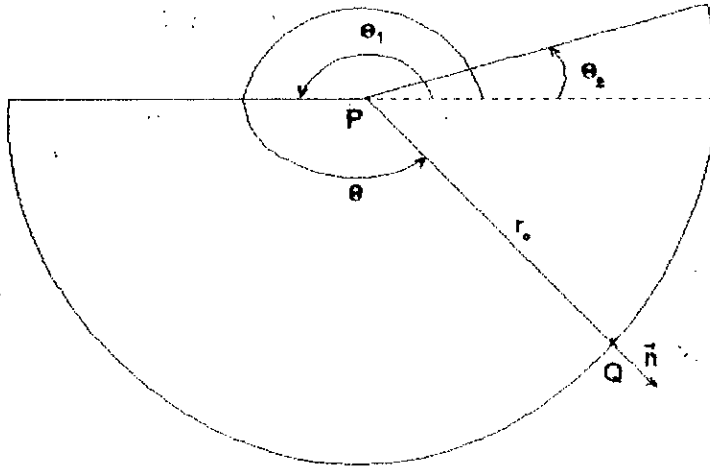
B) Intégration sur  $\Gamma_c$  :

Figure A.1.3.:

Les expressions de  $U_{ij}(P, Q)$  sont données ci-dessus, il faut seulement remplacer  $r$  par  $r_c$ . L'intégrale  $\int_{\Gamma_c} U_{ij}(P, Q) t_j ds$  tend vers une limite finie lorsque  $r_c$  tend vers l'infini, si et seulement si,  $t_j(Q)$  est une fonction en  $r^\alpha$ , avec  $\alpha < -1$  (à l'infini).

Pour  $T_{ij}(P, Q)$ , le produit scalaire est toujours égal à 1, car la normale  $\vec{n}$  est colinéaire avec le rayon  $r_c$  (voir figure A.1.3.), le produit vectoriel est donc nul, d'où:

$$\text{si } i=j=1 : T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi (1-\nu')} r_c [(1-2\nu') + 2 \cos^2\theta]$$

$$\text{si } i=j=2 : T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi (1-\nu')} r_c [(1-2\nu') + 2 \sin^2\theta]$$

$$\text{si } i \neq j : T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi (1-\nu')} r_c [2 \sin\theta \cos\theta]$$

$$\int_{\Gamma_c} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{A(\theta)}{r_c} u_j(Q) r_c d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A(\theta) u_j(Q) d\theta$$

Cette intégrale tend vers une limite finie lorsque  $r_c$  tend vers l'infini si et seulement si  $u_j(Q)$  est une fonction en  $r^\alpha \ln r$ , avec  $\alpha < 0$ .

Dans les deux cas, cette limite est égale à zéro.

## Annexe 2:

### Calcul des intégrales azimutales

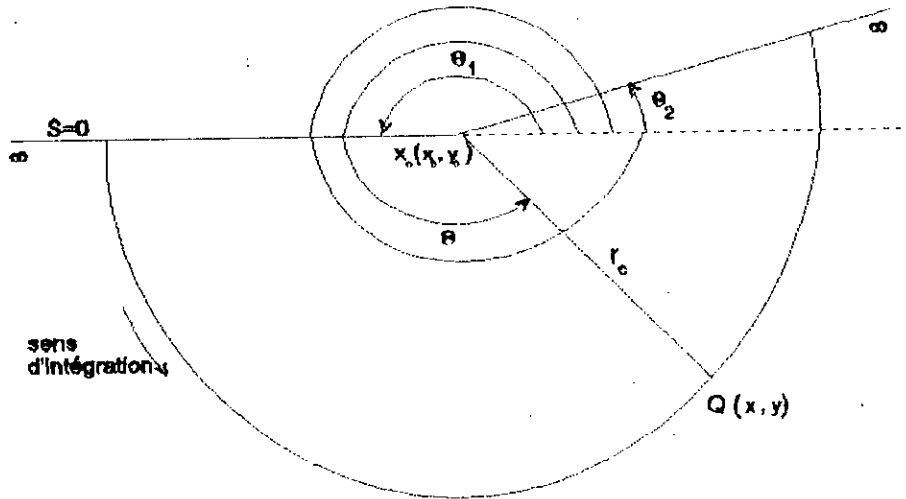


Figure A.2.1.:

Lorsque  $r_0 \rightarrow \infty$ , on peut considérer que tous les points de collocation sont confondus avec le point de référence  $x_0$  (vis à vis de l'intégration sur le cercle). On intègre systématiquement en suivant le contour dans le sens trigonométrique.

$i=1$  et  $j=1$ :

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c(r_0, x_0)} T_{11}(x_0, Q) ds \\
 &= \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int -\frac{1}{4\pi (1-\nu')} r \left\{ \left[ n_1 \frac{x-x_0}{r} + n_2 \frac{y-y_0}{r} \right] \left[ (1-2\nu') + \frac{2(x-x_0)^2}{r^2} \right] \right\} ds
 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \vec{n} \begin{cases} n_1 = \frac{x-x_0}{r} \\ n_2 = \frac{y-y_0}{r} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int -\frac{1}{4\pi (1-\nu') r_0} \left\{ \left[ \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{r_0^2} \right] \left[ (1-2\nu') + 2 \cos^2\theta \right] \right\} r_0 d\theta \\
 &= -\frac{1}{4\pi (1-\nu') r_0} \int \left\{ (1-2\nu') + 2 \cos^2\theta \right\} d\theta
 \end{aligned}$$



$$l_{11} = -\frac{1}{4\pi (1-v')} \left\{ \left[ (1-2v') \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \right\}$$

d'où:

$$l_{11} = -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{8\pi (1-v')} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \quad (\text{A.2.1})$$

$i=2$  et  $j=2$ :

$$\begin{aligned} l_{22} &= \lim_{r_c \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c(r_o, x_o)} T_{22}(x_o, Q) ds \\ &= \lim_{r_c \rightarrow \infty} \int -\frac{1}{4\pi (1-v')} r \left\{ \left[ n_1 \frac{x-x_o}{r} + n_2 \frac{y-y_o}{r} \right] \left[ (1-2v') + \frac{2(y-y_o)^2}{r^2} \right] \right\} ds \end{aligned}$$

Un calcul analogue au précédent conduit à:

$$l_{22} = -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{8\pi (1-v')} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \quad (\text{A.2.2})$$

$i=1$  et  $j=2$ :

$$\begin{aligned} l_{12} &= \lim_{r_c \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c(r_o, x_o)} T_{12}(x_o, Q) ds \\ &= \lim_{r_c \rightarrow \infty} \int -\frac{1}{4\pi (1-v')} r_c \left\{ 2 \frac{x-x_o}{r_c} \frac{y-y_o}{r_c} + (1-2v') \left[ \frac{(x-x_o)(y-y_o)}{r_c^2} - \frac{(y-y_o)(x-x_o)}{r_c^2} \right] \right\} r_o d\theta \\ &= -\frac{1}{4\pi (1-v')} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

d'où:

$$l_{12} = l_{21} = \frac{1}{8\pi (1-v')} (\cos 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \quad (\text{A.2.3})$$

Dans notre programme, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont calculés à partir des coordonnées des points du  $N-1$ <sup>ième</sup> et du  $N$ <sup>ième</sup> segments.

**Annexe 3:**  
**Tenseurs reliés à la solution**  
**fondamentale**

Les contraintes en un point Q dues à une charge unitaire appliquée au point  $\xi$  dans la direction  $i$  sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{jk}^*(\xi, x) = & - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu) (r_x \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_j \delta_{jk}) \\ & + 2 r_i r_j r_k \} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

Les déformations en ce point dues à la même charge unitaire appliquée au point  $\xi$  dans la direction  $i$  s'expriment comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{jk}^*(x, \xi) = & - \frac{1}{8\pi(1-\nu)Gr} \{ (1-2\nu) (r_x \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) \\ & - r_i \delta_{jk} + 2 r_i r_j r_k \} \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

Les dérivées des contraintes et des déformations reliées à la solution fondamentale s'expriment sous les formes respectives suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ijk}^* = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \{ 2(1-2\nu) (\delta_{ij} r_x r_k + \delta_{ik} r_j r_l) \\ & + 2\nu (\delta_{ik} r_j r_l + \delta_{jk} r_l r_j + \delta_{il} r_j r_k) \\ & - 8r_i r_j r_k r_l + (1-2\nu) (\delta_{ik} \delta_{ij} + \delta_{jk} \delta_{il}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \delta_{kl} \} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ijk}^* = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu) (\delta_{ik} \delta_{ij} + \delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \delta_{ij} r_x r_l) \\ & + 2\nu (\delta_{ik} r_j r_l + \delta_{jk} r_l r_j + \delta_{il} r_j r_k) \\ & + 2 \delta_{ik} r_j r_l - 8 r_i r_k r_l \} \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

## **Références Bibliographiques**

- [1] T.Andersson: 'The boundary element method applied to two-dimensional contact problems with friction'. *Proceeding of the 3<sup>rd</sup> Int. Sem. on advances in boundary elements methods, Irvine, California (Ed. C.A.Brebbia). Springer Verlag, 239-257, 1981.*
- [2] T.Andersson: 'The second generation boundary element contact program'. *Proceeding of the 4<sup>th</sup> Int. Sem. on BEM in engineering, Springer Verlag, Berlin, 1982.*
- [3] T.Andersson: 'Boundary elements in two-dimensional contact and friction'. *Diss. n°85, Linkoping Institute of Technology, 1982.*
- [4] D.Aubry, F.Chapel and J.M.Crepel: 'Interaction sol-structure linéaire sur un sol hétérogène'. *Génie parasismique (Ed. V.Davidovici), Chap. VI-2, 485-506, 1985.*
- [5] F.Baguelin, R.Frank and Y.H.Said: 'Theoretical study of lateral reaction mechanism of piles'. *Geotech., 27, 405-434, 1977.*
- [6] P.K.Banerjee and Butterfield: 'Boundary element methods in engineering science'. *1981*
- [7] A.Barbas et R.Frank: 'Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élastoplasticité'. *Rapport de recherche LPC n°116, 1982.*
- [8] G.Beer: "'Infinite domain" elements in finite element analysis of under ground excavations'. *Int. Jl. Num. Anal. Meth. Geomech. 7, 1-7, 1983.*
- [9] G.Beer: 'Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics'. *Int. Jl. Num. Meth. Eng., 19, 567-580. 1983.*
- [10] G.Beer and G.Swoboda: 'Application of advanced boundary element and coupled methods in geomechanics'. *Advanced boundary element methods, IUTAM Symposium San Antonio, Texas, 1987*
- [11] G.Beer and J.O.Watson: 'Infinite boundary elements'. *Int. Jl. Num. Meth. Eng., 28, 1233-1247, 1989.*
- [12] G.Beer, J.O.Watson and G.Swoboda: 'Three dimensional analysis of tunnels using infinite boundary elements'. *Compt. Geotech., 3, 37-58, 1987.*
- [13] P.Bettess: 'Infinite elements'. *Penshaw Press, Sunderland, UK. 1992. Boundary Elements XIV, Seville 1992.*
- [14] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles and L.C.Wrobel: 'Boundary element techniques. Theory and applications in engineering'. *Spring-Verlag, 1984.*
- [15] S.Caperaa: 'Modélisation des interfaces et des singularités dans les structures par couplage entre éléments finis et équations intégrales de frontière'. *Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 1985.*
- [16] I.Carol, A.Gens and E.E.Alonso: 'A three dimensional elastoplastic joint element', *Proc. Int. Symp. on fundamentals of rock joints /Bjërkliden/ 441-451, 1985.*
- [17] I.Carol, A.Gens and E.E.Alonso: 'Three dimensional model for rock joints',

- 2<sup>nd</sup> Int. Symp. on numerical models in geomechanics /Ghent/ pp.179-188, 1986.
- [18] S.Cescotto and R.Charlier: 'Frictional contact finite elements based on mixed variational principles'. *Int. Jl. Num. Meth. Eng.*, 36, 1681-1701, 1993.
- [19] K.S.Chan, P.Karasudhi and S.L.Lee: 'Force at a point in the interior of a layered elastic half space'. *Int. Jl. of Solids and struct.*, 10, 1179-1199, 1974.
- [20] C.H.Chan and I.S.Tuba: 'a finite element method for contact problems of solid bodies: I. Theory and validation'. *Int. J. Mech. Sci.* 13, 615-625, 1971.
- [21] C.H.Chan and I.S.Tuba: 'a finite element method for contact problems of solid bodies: Application to turbine blade fastenings'. *Int. J. Mech. Sci.* 13, 627-639, 1971.
- [22] W-H.Chen and P.Tsai: 'Finite element analysis of elastodynamic sliding contact problems with friction'. *Comput. Struct.* 22, 925-938, 1986.
- [23] J.H.Cheng and N.Kikuchi: 'An incremental constitutive relation for unilateral contact friction for large deformation analysis'. *Trans. ASME J. Appl. Mec.*, 52, n°3, 639-648, 1985.
- [24] C.S.Desai and al.: 'Thin-layer element for interfaces and joints'. *Int. Jl. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 6, 19-43, 1984.
- [25] A.Francavilla and O.C.Zienkiewicz: 'A note on numerical computation of elastic contact problems'. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9, 913-924, 1975.
- [26] J.Gaboussi, E.L.Wilson and J.Isenberg: 'Finite elements for rock joints and interfaces'. *Jl. Sl. Mech. Found. Div., ASCE*, 99, n°10, 1973.
- [27] A.Gens, I.Carol and E.E.Alonso: 'An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction'. *Comput. Geotech.*, 7, 133-148, 1988.
- [28] A.Gens, I.Carol and E.E.Alonso: 'Elasto-plastic model for joints and interfaces', *Computational plasticity-complas II /Barcelona/ (Ed. Eon et al.), Pineridge Press, 1251-1264, 1989.*
- [29] A.Gens, I.Carol and E.E.Alonso: 'A constitutive model for rock joints: formulation and numerical implementation', *Comput. Geotech.*, 9, 3-20, 1990.
- [30] R.E.Goodman and J.Dubois: 'Duplication of dilatancy in analysis of jointed rocks'. *A.S.C.E.*, 98, n°SM4, 1972.
- [31] R.E.Goodman and C.John: 'Finite element analysis for discontinuous rocks'. *Num. Meth. Geotech. Eng.*, Mc Graw Hill, 1977.
- [32] R.E.Goodman, R.L.Taylor and T.L.Brekke: 'A model for the mechanics of jointed rock'. *A.S.C.E.*, 94, n°SM3, 1968.
- [33] O.Hungr and D.F.Coates: 'Deformability of joints and its relation to foundation settlements'. *Canad. Geotech. Jl.*, n°15, 239-249, 1978.

- [34] M.A.Hussain and S.L.Pu: 'Slip phenomenon for a circular inclusion'. *Jl. Appl. Mech.*, 627-633, 1971.
- [35] G.Karami: 'A boundary element method for 2D contact problems'. *Ph.D. thesis., Mech. eng. dpt., Imperial college of science and technology, university of London, 1987.*
- [36] T.Kuppusamy, M.Zarco and R.Mosher: 'Soil structure interaction analysis by coupled BEM-FEM'. *Geotechnique et informatique*, 261-267, 1992.
- [37] B.M.Kwak and S.S.Lee: 'A complementary problem formulation for two-dimensional frictional contact problems'. *Comput. Struct.*, 28, n°4, 469-480, 1988.
- [38] K.W.Man, M.H.Aliabadi and D.P.Rooke: 'BEM frictional contact analysis: Modelling considerations'. *Eng. Anal. with boundary elements*, 11, 77-85, 1993.
- [39] K.W.Man, M.H.Aliabadi and D.P.Rooke: 'BEM frictional contact analysis: load incremental technique'. *Comput. Struct.*, 47, n°6, 893-905, 1993.
- [40] D.Martin and M.H.Aliabadi: 'Application of BEM to non-conforming elastoplastic contact problems'. *Contact mechanics II, computational techniques*, 312-321, 1995.
- [41] F.Paris, A.Blázquez and Canas: 'Contact problems with non-conforming discretizations using boundary element method'. *Comput. Struct.*, 57, n°5, 829-839, 1995.
- [42] F.Paris and J.A.Garrido: 'On the use of discontinuous elements in 2D contact problems'. *Boundary Element VII*, 13-27, 13-39, *Computational Mechanics Publications, Southampton, 1985.*
- [43] F.Paris and J.A.Garrido: 'an incremental procedure for friction contact problems with the boundary element method'. *Eng. Anal. with boundary elements*, 6, n°4, 1989. (*computational mechanics publication 1990*).
- [44] Philipponnat: 'Fondations et ouvrages en terre'. *Eds. Eyrolles, 1979.*
- [45] T.H.H.Pian and K.Kubomura: 'Formulation of contact problems by assumed stress hybrid elements'. *In non linear finite element Analysis in Structural Mechanics (Ed.W.Wunderlich et al.), Springer, Berlin, 1981.*
- [46] Qing-Hua Du and Zhen-Han Yao: 'Some applications of boundary element methods, boundary element-finite element coupling techniques in elastoplastic stress analysis'. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 3, n°3, 327-340, 1990.
- [47] M.F.Randolph and G.T.Housby: 'The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil'. *Geotechnique*, 34, 613-623, 1984.
- [48] S.Takahashi: 'Elastic contact analysis by boundary elements'. *Lecture Notes in Engineering (Ed. C.A.Brebbia et S.A.Orszag), Springer, 1991.*
- [49] S.Timoshenko and J.N. Goodier: 'Theory of elasticity'. *Mc Graw-Hill Book CO. New York, N.Y. 1970.*
- [50] G.R.Tomlin and R.Butterfield: 'Elastic analysis of zoned orthotropic

- continua'. *Proc. A.S.C.E., Em3*, 511-529, 1974.
- [51] W.S.Venturini and C.A.Brebbia: 'Chap.7 : Application in geomechanics, in Boundary element method XVI (ed. C.A.Brebbia)'. *Computational mechanics publications*, 1994.
- [52] L.J.Wardle and J.M.Crotty: 'Two dimensional boundary integral analysis for non-homogeneous mining applications'. *Recent advances in BEM*, 233-251, 1978.
- [53] J.O.Watson: 'Advanced implementation of the boundary element method for two and three dimensional elastostatics'. *Chap.3 in Developments in boundary elements methods, tome 1 (Eds. P.K.Banerjee and R.Butterfield, Applied science publishers*, 1979.
- [54] E.A.Wilson and B.Parson: 'Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacement'. *Int. JI. Num. Meth. Eng.*, 2, 384-395, 1970.
- [55] P.Wriggers, J.C.Simo and R.L.Taylor: 'Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems'. *Proc. NUMETA Conf., Swansea*, 1985.
- [56] G.Yagawa, H.Hirayama and Y.Ando: 'Contact analysis in crack mechanics using penalty function method'. *Numerical Methods in Fracture Mechanics (Ed.D.R.Jowen et A.R.Luxmoore)*. Pineridge Press, Swansea, 1980.