

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique



## Mémoire de Magister

Option : Construction Mécanique  
Ecole Doctorale : Mécanique et Ingénierie des Systèmes

## Thème

# Problème de déformation thermoélastique d'une plaque épaisse fissurée

Présenté par :

M<sup>elle</sup> GUERRACHE Fadila

Devant le jury :

Larbi Salah	Professeur, ENP Alger	Président
Rechak Said	Professeur, ENP Alger	Examineur
Si chaib Mohamed Ouali	Professeur, UMB Boumerdes	Examineur
Kebli Belkacem	Maitre de conférences A, ENP Alger	Rapporteur

*Année universitaire 2010 / 2011*

## ملخص

من خلال هذه المذكرة قمنا بدراسة مشكلة تشوه مطاطي- حراري لطبقة سميكة مرنة سمكها  $2h$ . تحتوى على شق دائري مركزي قطره  $R$  خالي من الرسوم. تتشوه بتأثير حقل حراري موحد  $T_0$  موجود داخل هذا الشق. يتم تدعيم حدود هذه الطبقة المرنة بصفيحتين صلبتين ثابتتين عازلتان للحرارة.

تحل مجموعة المعادلات التفاضلية المقابلة لتوازن المطاطي- الحراري باستعمال طريقة تحويل تكاملي لهانكيل. الشروط الحدودية المزدوجة ترجع حل المعادلات التفاضلية إلى حل اثنين من أزواج من المعادلات التكاملية المزدوجة واحدة للجزء الحراري و الأخرى للجزء مطاطي- حراري. باستخدام صيغ جيجوبوار ، تخفض بشكل فعال الحل التحليلية للمعادلات التكاملية المزدوجة إلى حل نظامين غير منتهيين من المعادلات الجبرية.

التشريد لسطح العادي للصدع يعرض علي شكل سلسلة متناسبة. باستخدام عكس تحويل تكاملي لهانكيل، نستنتج العبارات التحليلية لدرجة الحرارة، الإجهاد ، وكذلك عامل شدة الضغط. تعرض النتائج التحليلية والعديدية مع تمثيلها البياني متبوعة بالمناقشة.

**الكلمات المفتاحية:** مشاكل المحور، تصدع مطاطي حراري، طبقة سميكة مرنة ، شق دائري ،

تحويل تكاملي لهانكيل ، المعادلات التكاملية المزدوجة ، عامل الكثافة.

## Résumé

Nous traitons à travers ce mémoire le problème de la déformation thermoélastique, linéaire et statique. Le milieu élastique ayant une fissure circulaire de rayon  $R$  et occupant une plaque d'épaisseur  $2h$  se déforme sous l'effet d'un champ thermique uniforme.

La fissure est supposée libre de charges alors que les deux frontières  $z \pm h$  sont délimitées par deux plaques rigides, lisses et fixées. Ces dernières sont considérées comme isolés thermiquement. Le problème considéré est découpé en deux parties, l'une thermique et l'autre mécanique.

Les équations aux dérivées partielles du modèle thermoélastique sont résolues par la méthode de la *transformation de Hankel*. Les conditions aux limites mixtes permettent de ramener le problème étudié à deux systèmes couplés d'équations **intégrales duales**. Moyennant la *formule de développement de Gegenbauer*, ces dernières équations se réduisent à des systèmes d'équations algébriques linéaires infinies.

Par suite, la température est exprimée à l'aide des coefficients des systèmes algébriques sous forme d'une série appropriée. A l'aide de la *transformée inverse de Hankel*, on déduit l'expression analytique du déplacement, de la contrainte et du facteur d'intensité de contrainte. Ces expressions sont discutées, représentées et illustrées graphiquement.

*Mots clés : Problème axisymétrique, déformation thermoélastique, plaque élastique épaisse, fissure circulaire, transformation de Hankel, équations intégrales duales, facteur d'intensité de contrainte.*

## ***Abstract***

This work is to study the thermoelastic deformation problem of a cracked thick layer. The elastic medium occupying a layer of thickness  $2h$  deforms under the effect of a uniform thermal field located in the circular crack of radius  $R$ . The crack is supposed free of charges so that the borders are demarcated by two smooth and fixed rigid supports which are considered as thermal insulators.

The corresponding set of the nonhomogeneous thermoelastic equilibrium differential equations is solved by the *Hankel transforms method*. The mixed boundary conditions reduce the problem to the solution of two pairs of **dual integral equations**.

The both dual integral equations for the thermal and thermoelastic parts are effectively reduced, using *Gegenbauer's formulas*, to analytical solutions of the infinite system of simultaneous algebraic equations.

The normal surface displacements of the crack are expressed in appropriate series. We deduce, by using the *inverse integral transform*, the analytical expressions of the temperature, the normal displacement and stress as well as the stress intensity factor at the edge of the penny-shaped crack.

These quantities of physical interest are given analytically and represented graphically. A numerical application is considered with some concluding results with discussions.

**Key Words:** *Axisymmetric thermoelastic deformation, elastic layer, penny-shaped crack, Hankel integral transforms, dual integral equations, stress intensity factor.*

## *Dédicace*

*Avec beaucoup de sentiments, pleine de joie, je dédie ce travail à mes très chers parents, mon père Amer et surtout mille fois ma mère Houria..... Tous les mots ne sont pas suffisants pour les remercier.*

# Remerciement

Premièrement je remercie DIEU, pour m'avoir aider à réussir dans mes études, particulièrement à la réalisation de ce mémoire de magister.

■ Je tiens à remercier chaleureusement, du font du cœur : *Dr. Kebli Belkacem*, le directeur de ce mémoire, pour la disponibilité et la patience dont il fait preuve durant tout le temps qu'a duré ce travail, et je lui souhaité plus des succès dans la recherche.

■ Je tiens à remercier également tout les enseignants que j'ai eu l'honneur et le plaisir de rencontrer au cours de ma recherche au sein du laboratoire Energétique, Mécanique et Ingénierie de la Faculté des Sciences de l'Ingénieur de l'université de Boumerdes. Spécialement *Dr. Hachemi Madjid* et *Dr. Salistrou Mourad*. Je les remercie pour leurs conseils, leurs encouragements ainsi que pour m'avoir fait bénéficier de leurs compétences scientifiques qui m'ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de ce travail.

■ Mes remerciements sont aussi adressés à *Mr. Barkane Soleimane* pour son aide dans la réalisation des résultats de la partie numérique.

■ Je tiens à remercier *Dr. Rarbi* pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de soutenance. J'exprime aussi mes sincères remerciements à *Dr. Rachek* et *Dr. Si chaib* pour avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Ainsi qu'a toutes les personnes de l'école ENP et université de Boumerdes UMB ayant contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce mémoire de

magister.

*Guerrache Fadila*

# Nomenclature

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>1<sup>ère</sup> formule</i>
$f$	effort [N]	(1.I.1)
$C$	contrainte [MPa]	(1.I.1)
$dS$	surface [ $m^2$ ]	(1.I.1)
ABCD	facette de point M	
$n$	facettes	
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes[m]	
$(C_x, C_y, C_z)$	composantes de vecteur de contrainte $\vec{C}$	(1.I.2)
$(n_x, n_y, n_z)$	composantes de vecteur normale $\vec{n}$	(1.I.2)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	contraintes normales [MPa]	(1.I.2)
$\tau_x, \tau_y, \tau_z$	contraintes tangentiels [MPa]	(1.I.2)
ABC	facette de tétraèdre	
$[\Sigma]$	tenseur de contrainte	(1.I.3)
$u, v, w$	déplacements[m]	(1.I.4)
DB, DC, AB, AC, DA, OA	segments[m]	(1.I.4, 1.I.5, 1.I.6, 1.I.8)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	déformations	(1.I.6, 1.I.8, 1.I.9)
$[E']$	tenseur de déformation	(1.I.10)
$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques [m, rad, m]	(1.I.12)
$L_0$	longueur initiale d'une barre[m]	(1.I.16)
$F$	force [N]	(1.I.17)
$\Delta l$	allongement absolu[m]	(1.I.16)
$S_0$	section de barre [ $m^2$ ]	(1.I.17)
$L$	longueur de barre[m]	(1.I.18)
$E$	module d'Young ou module d'élasticité [MPa]	(1.I.18)
$\sigma_e$	limite élastique [MPa]	(1.I.20)
$F_e$	force élastique [N]	(1. I.20)
$\sigma_r$	limite de rupture [MPa]	
$\varepsilon_x$	déformation longitudinale	(1.I.21)
$\varepsilon_{\perp}$	déformation latérale	(1.I.22)
$\nu$	coefficient de Poisson	(1.I.23)
$G$	module de cisaillement [MPa]	(1.I.25)
$\delta_{nm}$	symbole de Kronecker	(1.I.28)
$\lambda$	coefficient de Lamé	(1.I.31)
$K$	module de rigidité [MPa]	(1.I.33)
$\rho'$	masse volumique [ $kg/m^3$ ]	(1.I.35)
$K_I, K_{II}, K_{III}$	facteur d'intensité de contrainte mode I, II, III [ $MPa \cdot m^{1/2}$ ]	(3.101)
$a, R$	rayon de la fissure[m]	(3.51)
$K_C$	ténacité [ $MPa \cdot m^{1/2}$ ]	
$T$	température [T ]	(1.III.1)
$q$	densité de flux de chaleur	(1.III.3)

$Q$	quantité de chaleur [ <b>J</b> ]	(1.III.3)
$\varphi$	flux de chaleur [ <b>W/m<sup>2</sup></b> ]	(1.III.3)
$\lambda'$	conductivité thermique du milieu [ <b>W/m.K</b> ]	(1.III.5)
$q \cdot$	densité volumique d'énergie générée [ <b>Wm<sup>-3</sup></b> ]	(1.III.14)
$C$	chaleur massique [ <b>J/kg.K</b> ]	(1.III.11)
$\alpha$	coefficient de dilatation thermique	(3.1)
$n, p, k, m$	constantes réelles	(2.I.1, 2.I.4, 2.I.10, 3.55)
$J_n(x)$	fonction de Bessel de première espèce	(2.I.17)
$Y_n(x)$	fonction de Bessel de seconde espèce	(2.I.39)
$H_n(x)$	transformation intégrale de Hankel d'ordre $n$	(3.27)
$h$	épaisseur de la couche [ <b>m</b> ]	(3.6)
$T_0$	température de référence	(3.8)
$\chi$	caractéristique de matériaux isotrope	(3.28)
$U, W$	déplacements	(3.34, 38)
$\alpha_n$	coefficient	(3.59)
$a_n$	coefficient thermique	(3.63)
$si$	fonction sinus intégrale	(3.68)
$ci$	fonction cosinus intégrale	(3.68)
$U_h, W_h$	solutions homogènes	(3.71, 3.72)
$U_p, W_p$	solutions particulières	(3.73, 3.74)
$\bar{\sigma}$	contrainte normale [ <b>MPa</b> ]	(3.82)
$\bar{\tau}$	contrainte cisaillement [ <b>MPa</b> ]	(3.83)
$\beta_n$	coefficient thermoélastique	(3.95)

## *Liste des figures*

<b>Figure 1.I.1.</b> Vecteur contrainte.....	9
<b>Figure 1.I.2.</b> Représentation des composantes du tenseur des contraintes.....	10
<b>Figure 1.I.3.</b> Equilibre d'un tétraèdre.....	11
<b>Figure 1.I.4.</b> Transformation géométrique de passage entre l'état initial et l'état final.....	12
<b>Figure 1.I.5.</b> Trajectoire d'une particule et affinité tangente.....	12
<b>Figure 1.I.6.</b> Déformation de deux vecteurs perpendiculaires.....	12
<b>Figure 1.I.7.</b> Déformation de AB et AC.....	13
<b>Figure 1.I.8.</b> Isolement d'un élément de volume en coordonnées cylindriques.....	14
<b>Figure 1.I.9.</b> Représentation simplifiée d'une machine d'essai de traction.....	16
<b>Figure 1.I.10.</b> Courbe contrainte – déformation.....	16
<b>Figure 1.I.11.</b> Essai de traction ou de compression.....	18
<b>Figure 1.II.1.</b> Fissure.....	23
<b>Figure 1.II.2.</b> Modes de fissuration.....	24
<b>Figure 1.II.3.</b> Ouverture et propagation d'une fissure.....	24
<b>Figure 1.II.4.</b> Fissure circulaire de rayon a.....	25
<b>Figure 1.III.1.</b> Gradient de la température.....	27
<b>Figure 1.III.2.</b> Conduction thermique.....	28
<b>Figure 1.III.3.</b> Transfert de chaleur unidimensionnel au travail d'un mur plan.....	28
<b>Figure 2.I.1.</b> Graphe de $J_0(x)$ et de $J_1(x)$ .....	34
<b>Figure 2.I.2.</b> Graphe de $J_0(x)$ et $Y_0(x)$ .....	35
<b>Figure 3.1.</b> Couche élastique contenant une fissure circulaire soumise à un champ thermique interne. Les frontières de surface sont délimitées par deux supports rigides et lisses.....	44
<b>Figure 3.2.</b> Distribution radiale de la température $\frac{t(r,0)}{T_0}$ pour différentes valeurs d'épaisseur de la couche h.....	54
<b>Figure 3.3.</b> Distribution radiale de déplacement normal $(w_z)_{z=0}$ .....	64
<b>Figure 3.4.</b> Distribution radiale de la contrainte normale $(\sigma_z)_{z=0}$ .....	64
<b>Figure 3.5.</b> Distribution radiale de la contrainte normale $(\sigma_z^*)_{z=h}$ .....	65
<b>Figure 3.6.</b> Distribution radiale de la contrainte normale $(\sigma_z^*)_{z=h/2}$ .....	65
<b>Figure 3.7.</b> Valeurs de facteur d'intensité de contrainte $K_I^*$ avec $R=1$ et $h=0.7, 1, 1.5, 2.5, 5, 10$ .....	67

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau 3.1.</b> Coefficient thermique $a_n$ .....	53
<b>Tableau 3.2.</b> Paramètres thermiques et élastiques d'acier moyen.....	62
<b>Tableau 3.3.</b> Coefficient thermoélastique $\beta_n$ pour $R=1$ et $h=0.7, 1, 1.1, 5$ .....	63
<b>Tableau 3.4.</b> Valeurs de coefficient thermoélastique $\beta_n$ pour $R=1$ et $h=2.5, 5, 10$ .....	66
<b>Tableau 3.5.</b> Valeurs de facteur d'intensité de contrainte $K_I^*$ avec $R=1$ et $h=0.7, 1, 1.5, 2.5, 5, 10$ .....	66

# Table des matières



*Remerciement*

*Résumé*

*Nomenclature*

*Liste de figures § Liste des tableaux*

<b>Introduction générale</b> .....	01
• <i>Synthèse bibliographique</i> .....	02
• <i>Description de problème</i> .....	06
• <i>Organisation du mémoire</i> .....	07

## *Chapitre 1. Rappels : Elasticité linéaire, Mécanique de la rupture*

*Transfert de chaleur*

<b>1. I. Rappel d'élasticité linéaire</b> .....	9
Introduction.....	9
<b>1. I. 1. Contrainte</b> .....	9
<b>1. I. 1. 1. Définition</b> .....	9
<b>1. I. 2. Tenseur des contraintes</b> .....	10
<b>1. I. 3. Déformation</b> .....	11
<b>1. I. 3. 1. Etat local de déformation</b> .....	11
<b>1. I. 3. 2. Les petites déformations</b> .....	12
<b>1. I. 4. Equation d'équilibre</b> .....	14
<b>1. I.5. Les modules élastiques</b> .....	15
<b>1. I.5.1. Le module d'élasticité</b> .....	15
<b>1. I.5.2. Coefficient de Poisson</b> .....	17
<b>1. I.5.3. Module d'élasticité de cisaillement</b> .....	18
<b>1. I.6. Les équations de l'élasticité</b> .....	19
<b>1. I.6.1. La loi de Hooke</b> .....	19
<b>1. I.6.1.1. Relation de Young</b> .....	19
<b>1. I.6.1.2. Relation de Lamé</b> .....	20
<b>1. I.6.1.3. Relations entre les modules</b> .....	20
<b>1. I.6.2. L'équation de Lamé</b> .....	20
<b>1. I.7. Techniques de résolution</b> .....	20
<b>1. I.7.1. Techniques de résolution analytique</b> .....	21
<b>1. I.7.1.1. Approche en déplacement</b> .....	21
<b>1. I.7.1.2. Approche en contrainte</b> .....	21
<b>1. I.7.2. Techniques de résolution numériques</b> .....	22

<b>1. II. Mécanique de la rupture</b> .....	23
Introduction.....	24
<b>1. II.1. Facteur d'intensité de contrainte</b> .....	24
<b>1. II.2. Condition d'amorçage</b> .....	25
<b>1. III. Rappel des transferts de chaleur</b> .....	26
Introduction.....	26
<b>1. III.1. Définitions</b> .....	26
<b>1. III.1.1. Champ de température</b> .....	26
<b>1. III.1.2. Gradient de température</b> .....	26
<b>1. III.1.3. Flux de chaleur</b> .....	27
<b>1. III.2. Transfert de chaleur par conduction</b> .....	28
<b>1. III.2.1. L'équation de la chaleur</b> .....	28
<b>Conclusion</b> .....	30

## ✚ **Chapitre 2. Rappels mathématiques**

<b>2. I. Fonction de Bessel</b> .....	31
Introduction.....	31
<b>2. I.1. L'équation différentielle de Bessel</b> .....	31
<b>2. I.1.1.1. Supposons n non entier</b> .....	31
<b>2. I.1.1.2. Supposons n entier ou nul</b> .....	32
<b>2. I.2. Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce</b> .....	35
<b>2. I.3. Les fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de <math>\pm \frac{1}{2}</math></b> .....	36
<b>2. I.4. Développements asymptotiques des fonctions de Bessel</b> .....	37
<b>2. II. Transformation de Hankel</b> .....	39
<b>2. II.1. Généralité</b> .....	39
<b>2. II.2. Définition</b> .....	40
<b>2. II.3. Transformées de Hankel d'ordre n</b> .....	40
<b>Conclusion</b> .....	42

## ✚ **Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité**

<b>Introduction</b> .....	43
<b>3.1. Formulation des équations de la thermoélasticité</b> .....	44
<b>3.1.1. Description du problème</b> .....	44
<b>3.1.2. Conditions limites du problème</b> .....	44
<b>3.1.3. Système d'équilibre thermoélastique du problème</b> .....	45
<b>3.2. Résolution le problème de la conduction thermique</b> .....	50
A. <i>Résultats numériques et discussion</i> .....	52
<b>Conclusion</b> .....	54
<b>3.3. Résolution du thermoélastique</b> .....	55
B. <i>Résultats numériques et discussion</i> .....	62
<b>Conclusion</b> .....	67
<b>Conclusion générale et perspective</b> .....	68
<b>Références Bibliographiques</b> .....	70
<b>Annexes</b> .....	73

## *Introduction générale*

Ces dernières années, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude des fissures dans des solides, qui sont produites pour de nombreuses raisons : comme des défauts dans les matériaux, des insuffisances dans la conception et déficiences dans la construction ou l'entretien, et à cause à des opérations de chargement ou de l'environnement.

La mécanique linéaire de la rupture peut être utilisée pour résoudre de nombreux problèmes pratiques de construction mécanique, tels que la ruine (l'effondrement) de la structure, la sélection des matériaux, la prévision de la durée de vie des structures et la définition des critères d'acceptation de défauts.

La défaillance des matériaux à usage industriel est presque toujours un événement indésirable, et ce, pour plusieurs raisons : elle peut mettre en danger des vies humaines, entraîner des pertes économiques et entraver la production de biens et de services.

La mécanique linéaire de la rupture, par exemple, est basée sur une procédure analytique qui relie le champ de contraintes au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et son orientation et, finalement aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure. On regroupe l'ensemble de ces méthodes sous deux types d'approches ; approches directes : elles font appel à la recherche de méthodes analytiques. Approches énergétiques : qui sont basées sur l'analyse énergétique du milieu contenant une fissure. On ne traitera ici que l'approche directe.

## ▪ *Synthèse bibliographie*

On se propose dans la première partie de ce mémoire une revue bibliographique succincte concernant la déformation élastique :

➤ *Lebedev et Ufliand* [1] ont étudié le problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique ayant une fissure circulaire dans le cas d'un encastrement lisse des frontières. Les contraintes et les déplacements sont exprimés à l'aide des *fonctions harmoniques* de *Neuber-Papkovich*. Le problème est alors ramené à la résolution d'une *équation intégrale de Fredholm* ayant un noyau continu et symétrique.

➤ Le travail examiné par *Makoto Sakamoto* [2] traite le problème axisymétrique d'une couche isotrope et élastique, contenant une fissure circulaire de rayon  $2a$  et subissant une pression interne et uniforme. Son étude considère le cas de surfaces libres de charges et le cas où les frontières du milieu élastique sont délimitées par deux plaques rigides et lisses. Ces problèmes aux conditions mixtes sont ramenés à un système des **équations intégrales duales**. Contrairement à la méthode classique, ces dernières équations intégrales sont réduites à un système d'équations algébriques infini. Ce qui a permis d'obtenir des expressions analytiques pour les déplacements et les contraintes en fonction des coefficients du système algébrique.

Les équations sont données sous forme d'intégrales. Ces dernières sont décomposées et calculées comme suit: la première partie est évaluée numériquement par la *règle de Simpson* avec  $\lambda_0 = 1500$  alors que dans la seconde intégrale on remplace la fonction par son expression asymptotique en tenant compte de l'équivalent à l'infini de *fonction de Bessel*.

Les effets de l'épaisseur de la couche élastique et des conditions aux limites sur le déplacement, la contrainte normale ainsi que sur le facteur d'intensité de contrainte ont été examinés.

Les calculs numériques ont été effectués dans les trois cas :  $h/a=0.7$ ,  $h/a=1$ ,  $h/a=1.5$  et  $a=1$ . Les résultats obtenus se résument comme suit :

- Pour avoir la convergence du système, il suffit de considérer les dix termes de la série ;

- Pour le premier cas I, le déplacement normal normalisé de la fissure augmente avec la diminution de l'épaisseur de la couche toutefois pour le second cas, le déplacement augmente avec l'épaisseur de la couche ;
- Dans le voisinage du bord de la fissure, la contrainte normale normalisée pour le premier cas augmente avec l'épaisseur de la couche ;
- Quand l'épaisseur de la couche devient grande, le facteur d'intensité de contrainte pour le cas I augmente mais diminue pour le cas II.

➤ Une solution analytique est présentée pour le cas d'un problème de contact axisymétrique d'une couche élastique soumise à une contrainte de traction uniforme appliquée sur une région circulaire a été proposée par *Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi* [3].

Les **équations intégrales duales** correspondantes sont obtenues à l'aide des conditions aux limites mixtes du problème. Par le même schéma que précédemment, la résolution de celles-ci se déduisent à partir d'un système algébrique infini.

Les effets de l'épaisseur de la couche, le coefficient de Poisson sur la contrainte et les distributions de déplacement sont discutées.

L'application numérique a été réalisée pour les cas :  $h/a=0.7$ ,  $h/a=1$ ,  $h/a=1.5$  et  $h/a=2$  ;  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\nu = 0.5$ . Les remarques correspondantes sont :

- Convergence en se limitant à huit termes du système ;
- le déplacement normalisé normal dans le trou augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche et la diminution du coefficient de Poisson du milieu élastique ;
- La remarque précédent reste valable pour le cas de la pression de contact ;
- L'augmentation du facteur d'intensité de contrainte normalisé est proportionnelle à l'augmentation de l'épaisseur de couche. Il atteint la valeur

$$k = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

pour le cas d'un demi-espace élastique.

➤ L'étude de *Sakamoto et Kobayashi* [4] est consacrée à la résolution du problème de l'action d'un poinçon rigide infini sur une couche élastique reposant sur une base rigide ayant un orifice circulaire. Le problème a été résolu par le même principe que leurs deux travaux antérieurs.

Les résultats numériques sont consacrés à l'effet de l'épaisseur de la couche et du rayon du trou circulaire sur les champs de contrainte. Les résultats des calculs sont donnés comme suit :

- La distribution du déplacement de la fissure et de la contrainte en fonction des variations de  $h/a$  ( $h/a=0.7$ ,  $h/a=1$ ,  $h/a=1.5$ ,  $h/a=2$  et  $h/a=3$ ). Le déplacement de la fissure augmente en fonction de  $h/a$  ;
- la contrainte de contact normalisée a une singularité polaire au bord de l'orifice;

Il a été constaté que la contrainte dans la zone de contact correspond à une compression. Celle-ci est proportionnelle au rapport  $h/a$ .

*Nous relatons dans ce qui suit quelques travaux concernant sur les problèmes de la déformation thermélastique :*

➤ Le travail d'Olesiak et Sneddon [5] examine l'étude de la distribution axisymétrique de la contrainte thermique dans un milieu élastique infini contenant une fissure.

La première étape consiste à déterminer la solution du système d'équilibre en déplacement. Par symétrie des conditions imposées et de la géométrie du domaine, le problème a été réduit au cas d'un milieu élastique semi-infini. Deux types de conditions thermique ont été examinés, le cas constant et le cas d'un *développement en série de Fourier-Bessel* du type  $\sum_m Q_m J_0(j_m a / r)$  où  $j_1 \dots j_m$  sont les *zéro positif de la fonction de Bessel*  $J_0(x)$ .

Ils ont considéré la distribution des contraintes engendrées par la prescription de la température sur la surface de la fissure. Le cas où la surface de la fissure est maintenue à une température constante a été discuté. Dans ce dernier cas, plus le rayon de la fissure est grand plus la distribution de la contrainte thermique est conséquente.

➤ L'article de Mahalanabis [6] donne la solution du problème de la thermo-élasticité pour un demi-espace lorsque la température est prescrite sur une zone circulaire. Les **équations intégrales duales** du problème ont été aussi réduites à une *équation intégrale de Fredholm*. Celle-ci a été étudiée à l'aide des résultats de Cooke.

Les contraintes et les déplacements ont été exprimés sous forme d'*intégrales double* rapidement convergentes.

➤ Le cas d'un solide isotrope, élastique et infini contenant une fissure plane extérieure a été examiné par *Das* [7]. Les deux cas suivants ont été considérés: les surfaces de la fissure ne sont pas chargées ou bien sont soumises à une température donnée.

Le premier cas les **équations intégrales duales** correspondantes ont été réduites à des équations intégrales du type *Abel*. Seconde cas les **équations intégrales duales** sont transformées à une équation *d'intégrale de Fredholm* [8].

➤ Le travail de *Dhaliwal* [9] propose la détermination de l'état d'équilibre des contraintes thermiques dans une couche élastique. La surface supérieure non chargée de la couche est soumise à un flux thermique le long d'une zone circulaire de rayon R sans charge alors que le reste est supposée être encastrée lisse.

La distribution de la température dans la couche est réduite à la résolution d'un système des **équations intégrales duales** transformé à une seule équation *d'intégrale de Fredholm*.

Les résultats numériques de distribution de la température dans la couche ont été obtenus à l'aide d'une intégration numérique en fonction de la variable radiale r dans l'intervalle [0, 1,4] en z dans le cas h =2,5.

La distribution de la température a été calculée dans la couche ainsi que les surfaces isochromatiques ont été construites pour des différentes épaisseurs.

➤ Un problème similaire a été aussi étudié par *Wadhawan* [10]. Les expressions de la température, des déplacements et des contraintes dans la couche élastique ont été obtenues par l'application de certains opérateurs différentiels en utilisant le *théorème de Mittag-Leffler*.

➤ Dans le travail de *Lal* [11] on s'est intéressé à la répartition des contraintes thermiques dans une couche élastique avec une face libre de charges et l'autre appuyée sur un support rigide sans frottements. La surface libre de la couche est soumise à un flux thermique donné sur une région annulaire alors la surface opposé est thermiquement isolée.

Les *équations intégrales triples* correspondantes sont réduites à un système d'équations algébriques linéaires et infinies dont la résolution numérique est effectuée comme suit : le premier terme de l'équation est intégré numériquement par la *règle de Simpson* avec  $\lambda_0 = 300$  avec le pas 0.2 ; le second terme est calculé en tenant compte de l'expression approximative de la *fonction de Bessel*.

- Par la méthode de la troncation, les choix considérés sont  $n=15$  dans le cas  $a/b < 0.2$  et  $n=10$  dans le cas  $a/b > 0.2$  ;
- Les distributions radiales de la température et le flux thermique sont présentés et illustrés graphiquement pour les cas  $a=1$ ,  $b=1.5$  et  $h=1$  ;
- Les résultats obtenus ont montré que le flux devient important avec l'augmentation de  $a/b$ .

➤ Le problème de déformation thermoélastique d'un solide infini affaibli par une fissure circulaire a été traité par *Abed-Halim et Elfalaky* [12]. Le solide homogène et isotrope est soumis à des champs de contraintes et à une température uniforme. Un système de coordonnées cylindriques est utilisé dans lequel la fissure est située le plan  $z=0$ . En outre, la fissure, occupant la région  $z=0$ ,  $0 < r < a$ , est soumise à une température prescrite et telle que la répartition des contraintes varie avec la distance radiale. Le problème considéré a été aussi résolu en utilisant la méthode de la *transformation de Hankel*.

Une solution analytique des **équations intégrales duales** du problème a été obtenue ainsi que l'inversion de la transformation intégrale.

Les différents graphes de la température, des déplacements et des contraintes ont été donnés graphiquement avec des conclusions correspondantes.

Il a été constaté que toutes les fonctions sont continues, ce qui montre la non propagation de la fissure puisque les contraintes imposées ne sont pas conséquentes.

➤ Dans un second travail étudiant le cas bidimensionnel, *Elfalaky et Abdel-Halim* [13] ont étudié le problème de déformation thermoélastique du milieu infini en mode I. Le matériau solide est supposé homogène et isotrope alors que la fissure est soumise à des champs thermique et mécanique. La résolution du problème a été effectuée à l'aide de la méthode de la *transformation de Fourier*. Le système des **équations intégrales duales** a été résolu analytiquement.

Les données physiques du problème ont été discutées et représentées graphiquement. Une conclusion similaire au travail précédant a conclu la résolution du problème étudié.

### ▪ *Description du problème*

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater les structures. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à la variation de la température  $\nabla T$  et au coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  du milieu élastique.

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors ce champ de déformation thermique ne générera pas de contraintes. Dans le cas contraire, ou si la structure est liée mécaniquement à l'extérieur (on parle alors de dilatation contrariée), alors des contraintes seront générées dans le solide.

Dans cette étude, nous considérons une couche élastique isotrope et homogène d'épaisseur  $2h$  affaiblie par une fissure circulaire de rayon  $R$ . La déformation du milieu est due à l'application d'un champ thermique uniforme  $T_0$  localisée au bord de la fissure. La fissure est supposée libre de charges alors que les frontières de la couche sont délimitées par deux supports lisses et rigides qui sont considérés comme des isolants thermiques.

Nous déterminons les solutions de l'équation de conduction thermique et du système d'équilibre non homogène par l'application de la *méthode de la transformation intégrale de Hankel*. Les conditions aux limites mixtes des deux problèmes sont données sous forme de deux systèmes couplés *d'équations intégrales duales*. Une procédure analytique de la solution se base sur les cas de l'élastostatique traités par Sakamoto [2] - [4].

La solution obtenue est calculée à partir d'un système d'équations algébriques infini on utilisant la *formule de développement de Gegenbauer de la fonction de Bessel*. Dans l'application numérique, nous donnons quelques conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la couche  $h$  et le rayon  $R$  de la fissure sur la distribution de la température, le déplacement, la contrainte normale et le facteur d'intensité de contrainte.

### ▪ *Organisation du mémoire*

Ce mémoire est structuré en une *introduction générale* contenant un état de l'art sur les travaux relatifs concernant les problèmes de déformations élastiques et thermoélastiques ainsi que trois chapitres et des références bibliographiques.

*Le premier chapitre* comprend trois parties. Dans la première partie, on donne quelques rappels sur l'élasticité linéaire. Des notions fondamentales sur la mécanique de la

rupture ont été développées dans la seconde partie. Un aperçu sur les transferts de chaleur dans la troisième partie a été résumé.

Un rappel mathématique sur les *fonctions de Bessel* est décrit dans la première partie du *second chapitre*. Les principes de *transformation de Hankel* sont présentés dans la seconde partie de ce chapitre.

Dans *le troisième chapitre*, représentant le noyau du mémoire, on résout le problème de déformation thermoélastique d'une couche épaisse fissurée par la *méthode de la transformation de Hankel*.

Finalement, se terminons ce mémoire par une *conclusion générale* qui illustre les principaux résultats obtenus à travers cette étude et une *perspective* sur les méthodes de résolution développées dans le sujet proposé.

Une *annexe* est jointe à ce mémoire pour décrire les calculs analytiques et les différents programmes numériques qu'on a appliqué pendant l'étude de ce problème.



## *Chapitre 1. Rappels*

1. I. Elasticité linéaire.....	09-22
1. II. Mécanique de la rupture.....	23-25
1. III. Transfert de chaleur.....	26-28
Conclusion.....	30

*Page*



## 1. I. Rappel d'élasticité linéaire

### Introduction

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'analyse de la rigidité des structures en terme de force et d'allongement ne permet pas de distinguer la contribution de la géométrie de celle, intrinsèque, du matériau.

Pour ce faire, il faut définir en tout point de la structure un état mécanique local indépendant de sa géométrie. La caractérisation de cet état local en terme de contrainte et de déformation. La relation entre ces grandeurs et leurs dérivées temporelles définissant la loi de comportement macroscopique.

L'étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont [14]:

- le tenseur des contraintes.
- le tenseur des déformations.

### 1. I. 1. Contrainte

#### 1. I. 1. 1. Définition

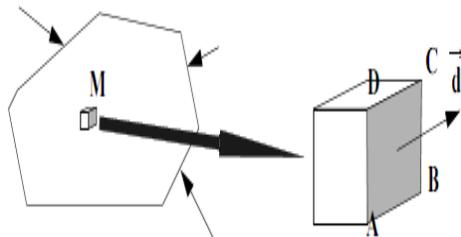


Figure 1.I.1.Représentation de vecteur contrainte.

Considérons une pièce soumise à un chargement quelconque figure 1.I.1. Considérons la face ABCD de surface  $dS$ . Sur cette face il s'exerce un effort  $\overline{df}$ . Le vecteur contrainte  $\overline{C}$  qui s'exerce en M sur la facette ABCD est défini de la façon suivante [15]:

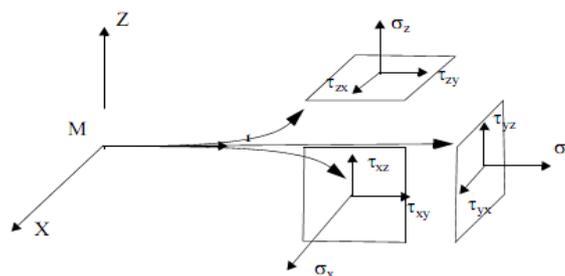
$$\overline{C} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\overline{df}}{ds} \tag{1.I.1}$$

**1. I. 2. Tenseur des contraintes**

Il est important de pouvoir disposer d'un outil pour caractériser complètement l'état des contraintes existant en un point donné. Cet outil est le *tenseur des contraintes*.

Considérons une pièce soumise à un chargement complexe et isolons un petit polyèdre comportant n facettes. Si les contraintes sont connues sur (n-1) facettes, en écrivant l'équilibre de cet élément, il est facile de déterminer la contrainte existant sur la facette numéro n. Le polyèdre comportant le moins de facettes est le tétraèdre (n=4).

Pour pouvoir déterminer, en un point, la contrainte sur une facette quelconque il suffit donc de connaître les contraintes, en ce point, sur 3 facettes. Pour faciliter les calculs nous considérerons les trois facettes ayant pour normales x, y, z. Sur ces facettes les composantes des contraintes ont les valeurs indiquées sur la figure 1.I.2.



**Figure 1.I.2. Représentation des composantes du tenseur des contraintes.**

Pour calculer la contrainte  $\overline{c}(c_x, c_x, c_x)$  relative à la facette ABC qui a pour normale  $\vec{n}(n_x, n_x, n_x)$  il suffit:

- d'isoler le tétraèdre représenté sur la figure 1.I.3.
- d'écrire l'équilibre.

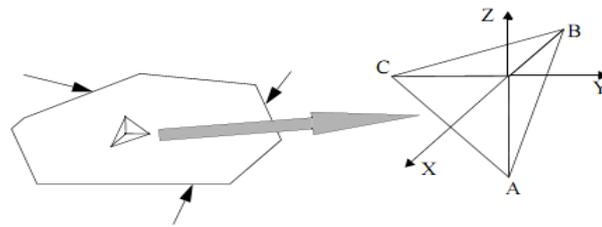


Figure 1.I.3. Equilibre d'un tétraèdre.

On obtient:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (1.I.2)$$

A partir de l'équation (1.I.2) on définit le tenseur des contraintes  $[\Sigma]$  :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.I.3)$$

### 1. I. 3. Déformation

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état initial avant application de la charge et un état final consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de forme local en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance [16].

#### 1. I. 3. 1. État local de déformation

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final se décompose en *translation*, *rotation* et *déformation*, cette dernière étant seule responsable du *changement de forme* du petit élément. Translation et rotation sont des mouvements de corps rigides qui traduisent les changements de position et d'orientation. Du point de vue de l'état final, rotation et déformation ne sont pas commutatives [17].

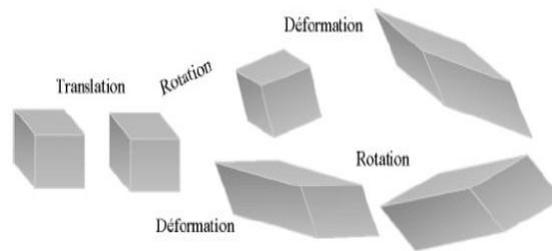


Figure 1.I.4. Transformation géométrique de passage entre l'état initial et l'état final.

1. I. 3. 2. Les petites déformations

La plupart des structures étant constituées de matériaux cristallins peu déformables travaillant en régime élastique, l'approximation des petites déformations est largement suffisante. Elle offre de plus l'avantage du principe de superposition.

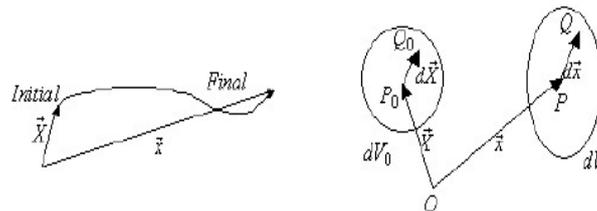


Figure 1.I.5. Trajectoire d'une particule et affinité tangente.

Considérons pour simplifier une structure plane qui se déforme dans son plan et représentons sur la structure initiale deux segments perpendiculaires AB et AC ayant pour longueurs respectives dx et dy.

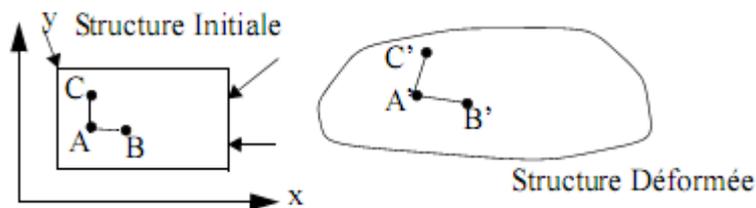


Figure 1.I.6. Déformation de deux vecteurs perpendiculaires.

Sous l'action d'efforts extérieurs cette structure se déforme et les points A, B, C deviennent les points A', B' et C'. Pour caractériser la déformation de la structure au point A, il suffit de connaître l'allongement des segments AB, AC et la variation de l'angle droit  $\hat{BAC}$ . Si le point A a pour déplacement  $\overline{DA}(u, v, w)$ , le point B a pour déplacement:

$$\overrightarrow{DB} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] \quad (1.I.4)$$

et le point C :

$$\overrightarrow{DC} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right] \quad (1.I.5)$$

Ramenons le point A' au point A ce qui revient à éliminer la translation.

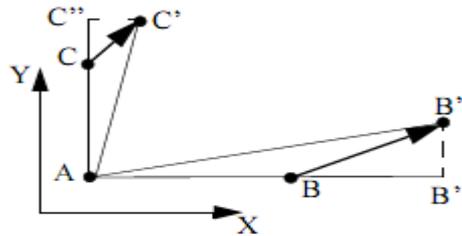


Figure 1.I.7. Déformation de AB et AC.

L'allongement relatif d'un vecteur initialement orienté dans la direction x est appelé  $\varepsilon_x$ .

Il vaut par définition:

$$\varepsilon_x = \frac{AB'}{AB} \quad (1.I.6)$$

En petites déformations on fait l'hypothèse suivante:

$$\varepsilon_x \approx \frac{AB''}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.I.7)$$

De la même façon on fait l'hypothèse que:

$$\varepsilon_y \approx \frac{AC''}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.I.8)$$

La variation de l'angle droit est définie par  $2 \varepsilon_{xy}$  :

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\pi}{2} - B'AC' \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.I.9}$$

On peut alors définir la matrice  $E'$  (1.I.10) et démontrer assez simplement que c'est un tenseur.  $E'$  est appelé le tenseur des déformations [18]:

$$[E'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.I.10}$$

Avec

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array}} \tag{1.I.11}$$

### 1. I. 4. Equation d'équilibre

- *Coordonnées cylindriques*

Pour déterminer les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques, considérons un élément infinitésimal autour du voisinage du point M de volume  $rd\theta dr dz$  comme indiqué sur la figure 1.I.8 [19]. Nous supposons qu'il n'est soumis à aucune force de volume.

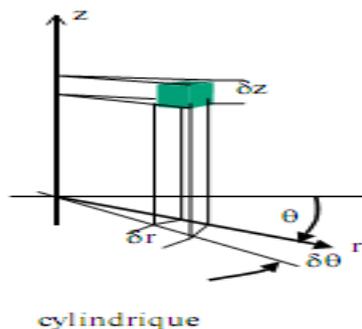


Figure 1.I.8. Isolement d'un élément de volume en coordonnées cylindriques.

Les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases} \quad (1.I.12)$$

○ *Coordonnées cartésiennes*

Les équations d'équilibre dans l'élément de volume en coordonnées cartésiennes, on négligeant les forces du volume s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.I.13)$$

Les équations (1.I.13) s'écrivent sous forme indicielle comme suit :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.I.14)$$

Lorsque l'on considérera les forces de volume on écrira :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.I.15)$$

### 1. I.5. Les modules élastiques

#### 1. I.5.1. Le module d'élasticité E

Considérons une barre d'acier doux de longueur initiale  $L_0$  et dont la section initiale  $S_0$  est constante sur la longueur  $L_0$ . Soumettons cette barre à une sollicitation de traction en lui appliquant à chaque extrémité un effort F [20]:

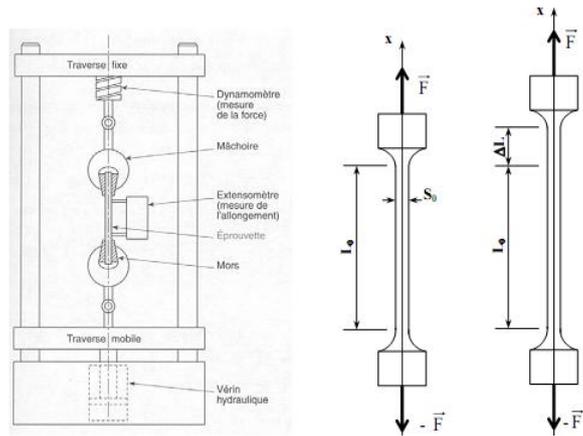


Figure 1.I.9. Représentation simplifiée d'une machine d'essai de traction.

On peut enregistrer à l'aide de comparateurs l'allongement  $\Delta L$  de l'éprouvette en fonction de l'intensité de l'effort  $F$ .  $\Delta L$  est appelé *l'allongement absolu*. Pour pouvoir comparer les caractéristiques mécaniques des matériaux, celles-ci doivent être établies indépendamment des sections  $S_0$  et longueurs  $L_0$  des éprouvettes.

Ainsi, on reporte sur un graphique :

\*en abscisse : *l'allongement relatif*

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{1.I.16}$$

$\varepsilon$  est sans unité puisque c'est le rapport de deux longueurs, en ordonnée : la contrainte  $\sigma$  est l'effort par unité de surface en  $\text{N/mm}^2$ , ou **MPa**.

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \tag{1.I.17}$$

On obtient alors la « courbe contrainte - déformation » du matériau de l'essai qui a l'allure suivante :

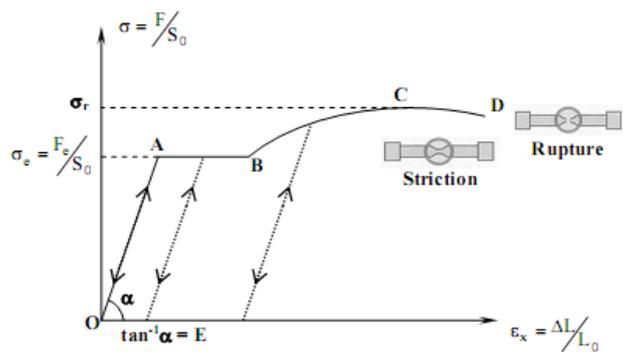


Figure 1.I.10. Courbe contrainte – déformation.

*Analyse de la courbe contrainte - déformation - Loi de Hooke.*

○ *Partie OA* : la déformation est proportionnelle à l'effort exercé (ou que l'allongement relatif est proportionnel à la contrainte). Dans cette zone, si on décharge l'éprouvette, elle revient à sa longueur initiale. On dit que le matériau a, dans cette phase, un *comportement élastique linéaire*.

Ceci se traduit par *la loi de Hooke* :

$$\frac{F}{S} = E \times \frac{\Delta L}{L} \quad (1.I.18)$$

ou

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (1.I.19)$$

$E$  est le *module d'Young*, ou *module d'élasticité longitudinal* ( $E_x$ ), du matériau et caractérise la rigidité du matériau est s'exprime en **MPa**.

Le point A marque la fin de la *zone élastique* de la courbe. La contrainte correspondante est appelée la *limite élasticité*.

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S} \quad (1.I.20)$$

○ *Partie AD* : au-delà du point A, on rentre dans le domaine des grandes déformations, le *domaine plastique*, où les allongements ne sont plus proportionnels aux efforts. A ce stade, si on décharge l'éprouvette, celle-ci ne retrouve pas sa longueur initiale, on constate un *allongement résiduel*, c'est-à-dire une *déformation permanente*.

○ *Entre A et B* : l'éprouvette s'allonge alors que l'intensité de la charge ne varie pratiquement pas, cette partie de la courbe est appelée « *palier plastique* ».

○ *Au-delà de B* : on observe un allongement important pour une faible augmentation de la contrainte. La courbe se relève jusqu'à un maximum C qui correspond à la *limite de rupture*  $\sigma_r$ . A ce stade, on observe une diminution de la section de la barre dans la zone où va se produire la rupture, c'est le *phénomène de striction*. Puis la rupture intervient (point D).

### 1. I.5.2. Coefficient de Poisson « $\nu$ »

Lors d'un essai de traction ou de compression sur une poutre, celle-ci subit une déformation longitudinale  $\varepsilon_x$ , respectivement un allongement ou un raccourcissement, mais

aussi une déformation latérale  $\varepsilon_{\perp}$  perpendiculairement à la direction de l'effort, respectivement une contraction ou une dilatation [21].

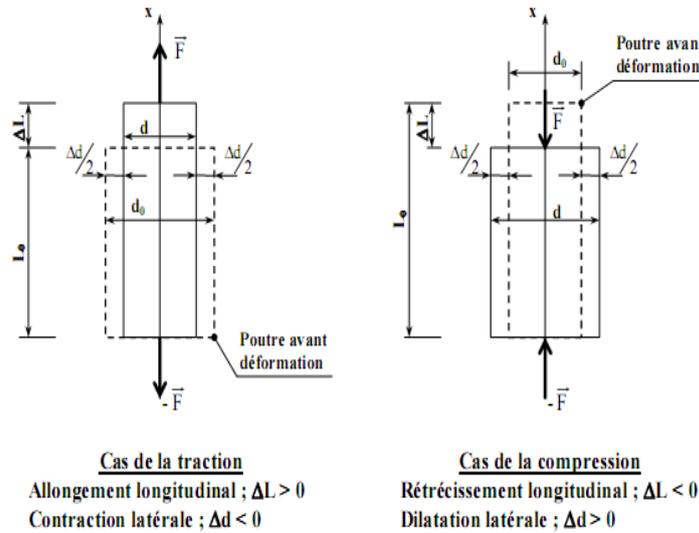


Figure 1.1.11. Essai de traction ou de compression.

Déformations longitudinale :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{1.1.21}$$

et transversale :

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d_0} \tag{1.1.22}$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est le rapport de ces deux déformations :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_x} \tag{1.1.23}$$

$\nu$  est compris entre 0.1 et 0.5 (0.3 pour les métaux et 0.15 pour les bétons).

### 1. I.5.3. Module d'élasticité de cisaillement «G »

Pour des matériaux ayant un comportement linéaire il existe par définition une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

Pour un *matériau isotrope* on peut montrer qu'il suffit de deux coefficients pour caractériser cette loi qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)) \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)) \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}
 \end{aligned}
 \tag{1.I.24}$$

$E$  est appelée *le module de Young* ou *module d'élasticité* et  $\nu$  le *coefficient de Poisson*.

La relation entre les contraintes de cisaillement et la distorsion angulaire est souvent écrite en utilisant le *module de cisaillement*  $G$  défini de la façon suivante:

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}
 \tag{1.I.25}$$

avec

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}
 \tag{1.I.26}$$

## 1. I.6. Les équations de l'élasticité

### 1. I.6.1. La loi de Hooke

#### 1. I.6.1.1. Relation de Young

A partir de la définition de  $E'$  et de  $\nu$ , la relation contrainte déformation s'écrit [22]:

$$\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{vmatrix}
 \tag{1.I.27}$$

Elle s'écrit dans un repère quelconque sous la forme de l'équation de Young:

$$E' \varepsilon_{ij} = -\nu \sigma_{kk} \delta_{ij} + (1 + \nu) \sigma_{ij} \quad (1.I.28)$$

**1. I.6.1.2. Relation de Lamé**

S'écrit:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (1.I.29)$$

**1. I.6.1.3. Relations entre les modules [23]**

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{premier coefficient de Lamé=Module de Coulomb} \quad (1.I.30)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{deuxième coefficient de Lamé} \quad (1.I.31)$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad \text{module d'Young ou module d'élasticité} \quad (1.I.32)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}G \quad \text{module de rigidité à la dilatation uniforme} \quad (1.I.33)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad \text{coefficient de Poisson} \quad (1.I.34)$$

**1. I.6.2. L'équation de Lamé**

L'équation de Lamé de l'élasticité linéaire isotrope en termes de champ de déplacement et  $\rho'$  est une masse volumique [24]:

$(\lambda + G) \text{Grad}(\text{Div} \vec{u}) + G \Delta \vec{u} + \rho' \vec{X} = \rho' \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$ $(\lambda + G) \text{Rot}(\text{Rot} \vec{u}) + (\lambda + 2G) \Delta \vec{u} + \rho' \vec{X} = \rho' \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$ $\frac{1}{1-2\nu} \text{Grad}(\text{Div} \vec{u}) + \Delta \vec{u} + \frac{\rho'}{G} \vec{X} = \frac{\rho'}{G} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$	(1.I.35)
--	----------

**1. I.7. Techniques de résolution**

- *Choix du système de coordonnées*

On peut résoudre les problèmes d'élasticité dans n'importe quel système de coordonnées. Mais les conditions aux limites peuvent avoir une forme plus ou moins compliquée suivant ce choix. On est généralement guidé par la forme du corps élastique

étudié. On choisit de préférence un système de coordonnées qui facilite l'écriture des conditions aux limites. Pour les problèmes axisymétriques, on choisit toujours un système de coordonnées dont l'une des coordonnées est l'angle  $\theta$  autour de l'axe d'axisymétrie [25].

- *Choix de la formulation*

Dans certains problèmes, on peut faire des hypothèses à priori sur la solution recherchée. Selon que ces hypothèses portent sur les contraintes ou sur les déformations, on choisit la formulation correspondante.

### ***1. I.7.1. Techniques de résolution analytique***

#### ***1. I.7.1.1. Approche en déplacement***

Le processus de résolution avec l'approche en déplacement est :

- postuler la forme du champ de déplacement ;
- vérifier les conditions limites en déplacements ;
- vérifier les équations dites de Lamé-Navier ;
- calculer les déformations, puis les contraintes ;
- vérifier les conditions limites en contrainte ;

Cette approche en déplacement est utilisée pour résoudre le *problème du cylindre sous pression*.

#### ***1. I.7.1.2. Approche en contrainte***

Le processus de résolution avec l'approche en contrainte est:

- postuler un champ de contrainte ;
- vérifier les conditions aux d'équilibre en volume ;
- vérifier les conditions aux limites en contrainte ;
- vérifier les équations dites de Beltrami-Michell ;
- calculer les déformations, puis les déplacements à partir des contraintes ;
- vérifier les conditions aux limites en déplacement ;

### 1. I.7.2. Techniques de résolution numériques

Les techniques analytiques sont vite dépassées lorsque le problème devient un peu complexe, il faut alors recourir à des approches numériques. On distingue trois grandes familles d'approches numériques pour la mécanique des milieux continus :

- ⊗ les éléments finis ;
- ⊗ les différences finies ;
- ⊗ les éléments de frontière ;

La *première approche* a le mérite d'être applicable quelle que soit la géométrie du milieu. Elle est donc utilisée pour tous les problèmes de mécanique faisant intervenir des géométries complexes (crash voiture, écoulement sanguin, étude vibratoire de fusée, design de puce électronique contre l'échauffement excessif, ...). Les codes industriels les plus connus sont : Samcef (le seul européen), Abaqus, Nastran et Ansys.

La méthode des *différences finies* nécessite des domaines de formes simples. Elle est particulièrement utilisée en météorologie (l'atmosphère a une forme simple) et pour l'étude d'écoulement.

Enfin, la méthode des *éléments frontières* permet la prise en compte simple d'un milieu infini ou semi-infini (mais ce milieu doit être linéaire).

## 1. II. Mécanique de la rupture

### Introduction

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude des fissures macroscopiques, la détermination des champs de contraintes et de déformations correspondants et l'établissement des données expérimentales permettant de déterminer la cinétique de propagation des défauts et leur taille critique au delà de laquelle, pour une sollicitation donnée.

Les mécanismes de rupture locale sont la *rupture fragile* et la *rupture ductile*. La rupture est caractérisée (au moins localement) par la séparation irréversible (généralement les liaisons chimiques rompues ne se rétablissent pas par suite de la présence inévitable de polluant) d'un milieu continu de part et d'autre d'une surface génératrice  $S$  [26]. La coupure ainsi créée est appelée *fissure* figure 1.II.1.

C'est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement. Le saut  $\left[ \vec{u} \right] = \vec{u}^+ - \vec{u}^-$  est le déplacement d'ouverture de la fissure.

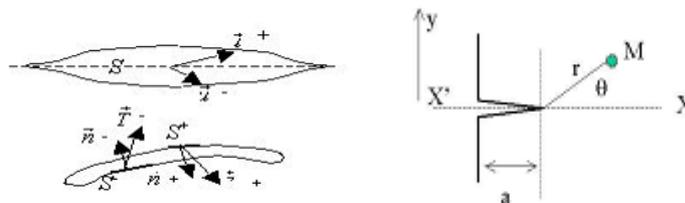
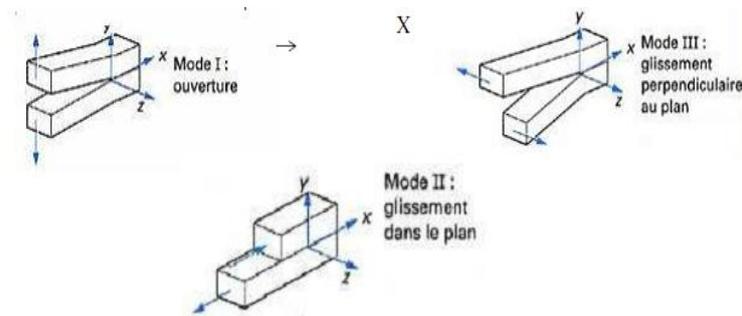


Figure 1.II.1. Fissure.

On distingue trois modes de rupture :

- **Mode I** : mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- **Mode II** : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.

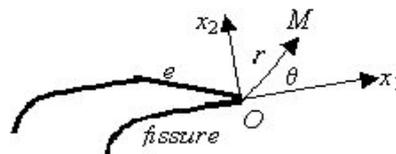
- **Mode III :** mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres la fissure sont parallèles au fond de la fissure, cf. figure 1. II.2.



**Figure 1.II.2. Modes de fissuration.**

Lors du chargement d'une pièce fissurée, on distingue deux phases [27]:

- ✓ *La phase d'ouverture* pendant laquelle, la fissure immobile s'ouvre, les lèvres s'écartant sans changement géométrique de la surface S. Cette phase se poursuit jusqu'à un chargement critique autorisant la fissure à se propager en s'agrandissant. A ce chargement critique correspond la condition d'amorçage.
- ✓ *La phase de propagation* Au delà du chargement critique d'amorçage, la fissure s'agrandit (avance) soit dans le plan tangent à S soit dans d'autres directions (branchement), c'est la phase de propagation qui pourra être contrôlée (propagation dite stable) ou non (propagation dite instable conduisant à la rupture brutale ou catastrophique).



**Figure 1.II.3. Ouverture et propagation d'une fissure.**

### 1. II.1. Facteur d'intensité de contrainte

On les appelle facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  respectivement en mode I, mode II et mode III. L'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure est proportionnelle à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure [28].

On les appelle aussi les facteurs de discontinuité des déplacements, caractérisent à la fois la géométrie du détail et de la fissure, et la nature des sollicitations, évaluation du facteur d'intensité de contrainte  $K$  en fonction du rayon du noyau  $r$ .  $K$  est le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur  $[K] = [\sigma] [L]^{1/2}$  et se mesure en  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  ou  $\text{Nm}^{-3/2}$ .

Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complètement les champs de contrainte ou déplacement dans la structure fissurée, considérée comme élastique inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nul des contraintes et des déplacements.

En mode I, L'expression générale de  $K_I$  est de la forme  $K_I = \gamma\sigma\sqrt{\pi a}$ .

**Quelques valeurs de  $K_I$**

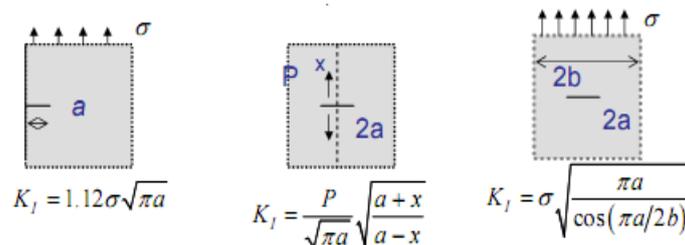


Figure 1.II.4. Fissure circulaire de rayon  $a$ .

**1. II.2. Condition d'amorçage**

La fissure progresse si l'énergie nécessaire pour faire avancer la fissure [pour rompre les liaisons atomiques, pour créer de la surface libre (tension superficielle)] est inférieure à l'énergie élastique de relaxation (l'avancement de la fissure libère de la matière qui se détend). Cela correspond en fait à un facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$  appelé *ténacité* dont l'unité de mesure est  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  [29].

Le critère de rupture, condition d'amorçage de la propagation de la fissure en mode d'ouverture s'écrit alors sous la forme simple:  $K = K_c$ .

### 1. III. Rappel des transferts de chaleur

#### Introduction

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

#### 1. III.1. Définitions

##### 1. III.1.1. Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température [30]:

$$T=f(x, y, z, t) \quad (1.III.1)$$

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé *champ de température*. Nous distinguerons deux cas :

- champ de température indépendant du temps : le régime est dit *permanent* ou *stationnaire*.
- évolution du champ de température avec le temps : le régime est dit *variable* ou *instationnaire*.

##### 1. III.1. 2. Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dit *surface isotherme*. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le *gradient de température* [31].

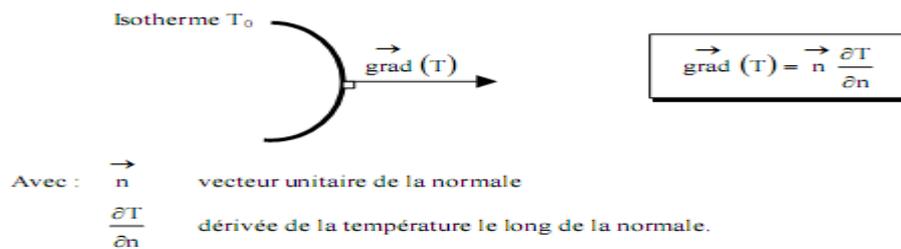


Figure 1 .III.1. Représentation de gradient de la température.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.III.2}$$

1. III.1.3. Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée *densité de flux de chaleur* :

$$q = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \tag{1.III.3}$$

où S est l'aire de la surface.

On appelle *flux de chaleur* la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \tag{1.III.4}$$

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de *Fourier* : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$q = -\lambda' \overrightarrow{\text{grad}}(T) \tag{1.III.5}$$

ou sous forme algébrique figure 1. III.2 :

$$\varphi = -\lambda' S \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.III.6}$$

avec

- $\varphi$  flux de chaleur transmis par conduction (W)
- $\lambda'$  conductivité thermique du milieu (W/m.K)
- x variation d'espace dans la direction du flux (m)

S aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

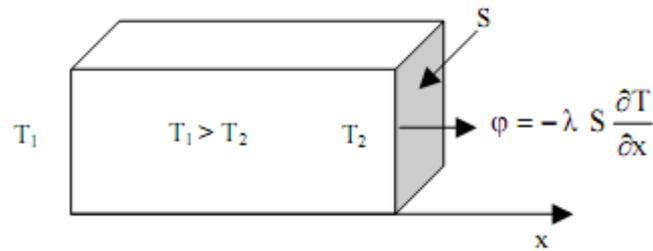


Figure 1. III.2. Conduction thermique.

1. III.2. Transfert de chaleur par conduction

1. III.2.1. L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan figure 1.III.3.

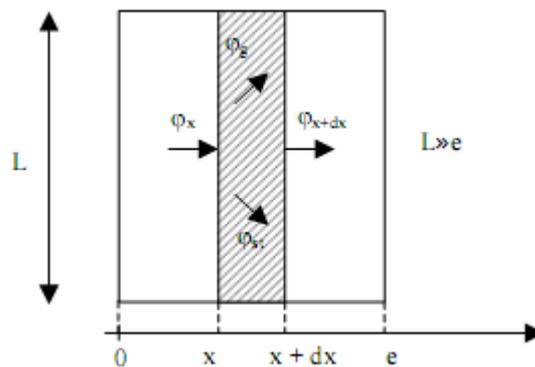


Figure 1.III.3. Transfert de chaleur unidimensionnel au travail d'un mur plan.

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \tag{1.III.7}$$

a :

$$\varphi_x = - \left( \lambda' S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x \tag{1.III.8}$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx \tag{1.III.9}$$

avec  $\dot{q}$  densité volumique d'énergie générée (W/m)

C chaleur massique (J/Kg. K)

$\rho''$  masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)

$$\varphi_{x+dx} = - \left( \lambda' S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} \quad (1.III.10)$$

$$\varphi_{st} = \rho C S dx \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.11)$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda'_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda'_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda'_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.12)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope :

$$\lambda'_x = \lambda'_y = \lambda'_z \quad (1.III.13)$$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système :

$$\dot{q} = 0 \quad (1.III.14)$$

c) Si le milieu est homogène,  $\lambda'$  n'est fonction que de T ;

Les hypothèses a)+b)+c) permettent d'écrire :

$$\lambda' \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda'}{dT} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.15)$$

d) Si de plus  $\lambda'$  est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.16)$$

Le rapport  $a = \frac{\lambda'}{\rho C}$  est appelé la *diffusivité thermique*.

e) En régime permanent, nous obtenons **l'équation de Laplace** :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.III.17)$$

Par ailleurs, les hypothèses a),c), et d) permettent d'écrire :

⊗ *équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda'} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.18)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de  $r$  et de  $t$ , l'équation (1.III.18) peut s'écrire sous forme simplifiée :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda'} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.III.19)$$

## *Conclusion*

Ce chapitre est consacré à des brefs rappels sur l'élasticité linéaire et les transferts de chaleur dans le but de bien définir le cadre de l'étude de ce travail.

On s'intéresse à l'état d'équilibre statique d'une couche élastique déformable où la déformation est due non seulement aux conditions mécaniques mais également aux élévations de la température. C'est le phénomène de la thermoélasticité.

La résolution d'un problème de la thermoélasticité ne diffère d'un problème d'élasticité que par la loi de comportement (le champ de température  $T$  est supposée connu). Ainsi, toutes les équations définissant un problème d'élasticité linéaire isotrope sont à résoudre.

On peut aussi considérer le problème de déformation thermoélastique comme un problème d'élasticité classique avec un chargement d'origine thermique supplémentaire qui s'exprime par un vecteur contrainte supplémentaire.

La thermoélasticité linéaire est caractérisée par deux constantes de Lamé :  $\lambda$  et  $G$  (module de cisaillement), le module d'élasticité  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  ainsi que par le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ .



## *Chapitre 2. Rappels mathématiques*

2. I. Fonction de Bessel.....	31-37
2. II. Transformation de Hankel.....	39-40
Conclusion.....	42

*Page*



## 2. I. Fonction de Bessel

### Introduction

Le laplacien de  $u$  noté par  $\nabla^2 u$  apparaît souvent dans de nombreuses équations aux dérivées partielles dans les domaines de la physique et de la technique. Le choix d'un système de coordonnées qui dépend de la nature du problème envisagé peut être important dans la recherche de la solution.

Les problèmes des valeurs aux limites s'écrivent en termes d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolus par de nombreuses méthodes. Parmi ces méthodes, on utilise les conditions aux limites la méthode de la *fonction de Bessel* [32].

### 2. I.1. L'équation différentielle de Bessel

Les fonctions de Bessel s'introduisent comme solutions de l'équation différentielle s'écrit [33] :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0, \quad n \text{ est une constante réelle} \quad (2.I.1)$$

qui est appelée équation différentielle de Bessel.

En cherchant une solution de la forme :

$$y(z) = z^r + c_1 z^{r+1} + \dots + c_p z^{r+p} + \dots \quad (2.I.2)$$

il apparaît que l'équation déterminante s'écrit :

$$F(r) = r(r-1) + r - n^2 = r^2 - n^2 = 0 \quad (2.I.3)$$

elle admet les racines :  $r_1 = +n, \quad r_2 = -n$

Divers cas peuvent se présenter :

#### 2. I.1.1.1. Supposons $n$ non entier

Il existe manifestement deux solutions de la forme :

$$y_{\pm}(z) = z^{\pm n} + c_1 z^{\pm n+1} + \dots + c_p z^{\pm n+p} + \dots \quad (2.I.4)$$

En portant (2.I.4) dans (2.I.1), on obtient :

$$z^2 \left[ \pm n(\pm n - 1)z^{\pm n - 2} + c_1(\pm n + 1)(\pm n)z^{\pm n + p} + c_p(\pm n + p - 1)z^{\pm n + p - 2} + \dots \right] \\ + z \left[ \pm n z^{\pm n - 1} + c_1(\pm n + 1)z^{\pm n} + \dots + c_p(\pm n + p)z^{\pm n + p} \dots \right] \\ + (z^2 - n^2) \left[ z^{\pm n} + c_2 z^{\pm n + 1} + \dots + c_p z^{\pm n + 1} + \dots \right] = 0 \quad (2.I.5)$$

il en résulte :

$$c_1(1 \pm 2n) = 0 \quad (2.I.6)$$

et la relation entre coefficients,

$$c_p \left[ (\pm n + p)^2 - n^2 \right] = p(p \pm 2n)c_p = -c_{p-2} \quad (2.I.7)$$

deux situations peuvent se présenter.

### a. 2n est non entier

L'équation (2.I.1) admet les deux solutions :

$$y_{+n}(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (2.I.8)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[ 1 + \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n-1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 2!(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)(n-2)\dots(n-p)} + \dots \right] \quad (2.I.9)$$

### b. 2n est un entier

L'équation (2.I.1) admet les deux solutions :

$$y_{+n}(z) = y_{\frac{2k+1}{2}}(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (2.I.10)$$

$$y_{+n}(z) = z^{\frac{2k+1}{2}} \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 1! \left( \frac{2k+1}{2} + 1 \right)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p! \left( \frac{2k+1}{2} + 1 \right) \dots \left( \frac{2k+1}{2} + p \right)} + \dots \right] \quad (2.I.11)$$

### 2. I.1.1.2. Supposons n entier ou nul

Si n est un entier positif ou nul, il existe manifestement une solution de la forme :

$$y_n(z) = z^n + C_1 z^{n+1} + C_2 z^{n+2} + \dots + C_p z^{n+p} + \dots \quad (2.I.12)$$

Correspondant à la plus grande des racines,  $r_2 = +n$ , de l'équation déterminante ; elle s'écrit :

$$y_n(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 1! \Gamma(n+1)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} 1! (n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (2.I.13)$$

Il résulte de cette discussion que l'équation de Bessel admet les deux solutions particulières:

$$y_{+n}(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n+1)} + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (2.I.14)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[ 1 + \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n-1)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)\dots(n-p)} + \dots \right] \quad (2.I.15)$$

où les développements convergent pour tout  $z$ , mais il est à noter que la seconde,  $y_{-n}(z)$  ne convient pas pour  $n$  entier positif. Envisageons la solution (2.I.14), et multiplions la par le coefficient  $\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ ,  $\Gamma(n)$  étant la fonction eulérienne de seconde espèce ; nous obtenons la

fonction :

$$\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} y_{+n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[ \frac{1}{\Gamma(n+1)} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{1! \Gamma(n+p+1)} + \dots \right] \quad (2.I.16)$$

dite fonction de *Bessel de première espèce d'ordre  $n$* , que l'on représente par la notation  $J_n(x)$  ; ainsi

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (2.I.17)$$

or ;

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (2.I.18)$$

Si  $n=0$ , devient:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (2.I.19)$$

La figure 2.I.1 représente le graphe de  $J_0(x)$  et de  $J_1(x)$ .

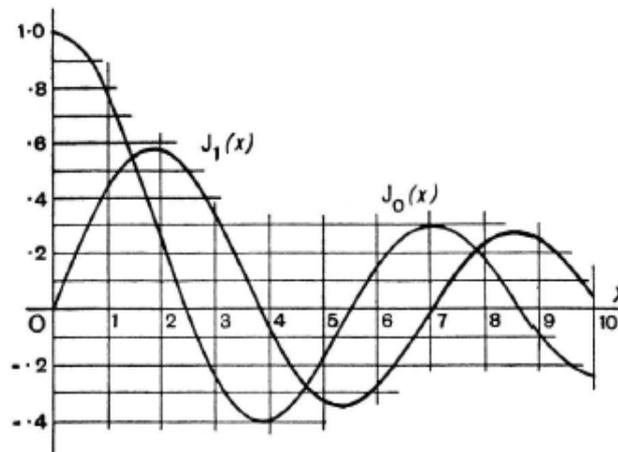


Figure 2.I.1. Graphe de  $J_0(x)$  et de  $J_1(x)$ .

Si  $n$  est un demi entier impair,  $J_n(x)$  peut être exprimé sous la forme de termes en sinus et cosinus.

Soit maintenant la solution (2.I.15), en la multipliant par  $\frac{2^n}{\Gamma(1-n)}$  ; on obtient :

$$\frac{2^n y_{-n}(z)}{\Gamma(1-n)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-n)} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{1!\Gamma(2-n)} + \dots + (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-n+1)} + \dots \right] \quad (2.I.20)$$

Cette fonction est la fonction de *Bessel de première espèce d'ordre*  $(-n)$  :

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-n+1)} \quad (2.I.21)$$

Notons que cette solution se déduit (2.I.17) en remplaçant  $n$  en  $(-n)$ , mais que pour  $n$  entier positif, nous n'avons pu l'obtenir en tant que solution de l'équation de Bessel développée en série de puissances de  $z$ .

Ceci peut d'ailleurs se justifier en remarquant que pour  $n$  entier positif, les fonctions  $J_n(z)$  et  $J_{-n}(z)$  et ne sont pas indépendantes ; d'une façon plus précise on a, dans cette hypothèse,

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (2.I.22)$$

ainsi que nous allons l'établir.

Soit :

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!\Gamma(p-n+1)} \quad (2.I.23)$$

avec n entier positif.

Nous avons pour  $p < n-1$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p-n+1)} \tag{2.I.24}$$

Posons  $p-n = k$  entier positif, nous obtenons :

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2k} \frac{(-1)^{n+k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \tag{2.I.25}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \tag{2.I.26}$$

$$= (-1)^n J_n(z)$$

La figure 2.I.2 représente le graphe de  $J_0(x)$  et  $y_0(x)$ . Notons que ces fonctions comme toutes les fonctions  $y_n(x)$  ou  $n > 0$ , ne sont pas bornées en  $x=0$ .

Si n est un demi entier impair,  $y_n(x)$  peut être exprimé en termes de fonctions trigonométriques.

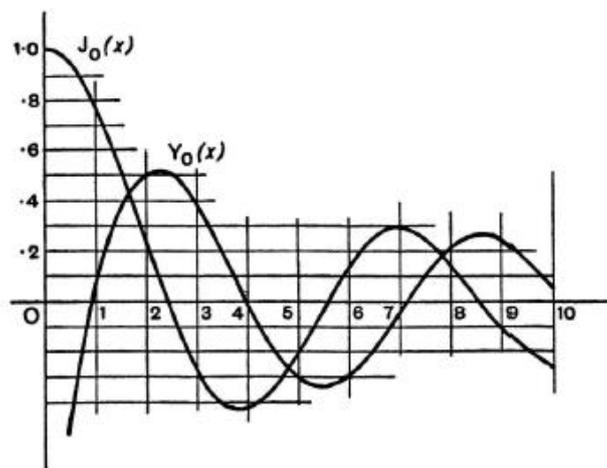


Figure 2.I.2. Graphe de  $J_0(x)$  et  $y_0(x)$ .

### 2. I.2. Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce

Nous allons établir la relation :

$$\frac{d}{dz} [z^{n+1} J_{n+1}(z)] = z^{n+1} J_n(z) \tag{2.I.27}$$

De l'expression générale de  $J_{n+1}(z)$ , on tire :

$$z^{n+1} J_{n+1}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+2+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \quad (2.I.28)$$

et il en résulte :

$$\frac{d}{dz} [z^{n+1} J_{n+1}(z)] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2(n+p+1) z^{2n+1+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \quad (2.I.29)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+1+2p}}{2^{n+2p} p!(n+p+1)} \quad (2.I.30)$$

De la même manière, on établit la relation :

$$\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (2.I.31)$$

### 2. I.3. Les fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de $\pm \frac{1}{2}$

Posons  $n = p \pm \frac{1}{2}$ , où  $p$  est un entier, nous allons montrer que les *fonctions de Bessel*

dont l'indice est de cette forme se relie aux fonctions trigonométriques.

Considérons la fonction:

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2z^{2p}}{(2p+1)!p!} \quad (2.I.32)$$

soit :

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (2.I.33)$$

Envisageons maintenant la fonction  $J_{-1/2}(z)$  :

$$z^{1/2} J_{-1/2}(z) = \frac{d}{dz} (z^{1/2} J_{1/2}(z)) \quad (2.I.34)$$

$$= \frac{d}{dz} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \quad (2.I.35)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \quad (2.I.36)$$

ainsi :

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos z \quad (2.I.37)$$

2. I.4. Développements asymptotiques des fonctions de Bessel

Les développements en série qui ont été donnés pour représenter les *fonctions de Bessel de première espèce*  $J_n(z)$ , ne permettent pas de connaître facilement l'allure de ces fonctions pour les grandes valeurs de la variable et la même remarque vaut pour les *fonctions de Bessel de seconde espèce*  $y_n(z)$ .

Signalons que l'on a pu donner des expressions asymptotiques de ces fonctions pour les grandes valeurs de  $z$  ; on a :

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.I.38}$$

$$y_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.I.39}$$

Revenons à l'expression générale des *fonctions de Bessel de première espèce* :

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p!(n+p+1)} \tag{2.I.40}$$

En utilisant des propriétés classiques de la fonction  $\Gamma$  nous allons montrer que l'on peut transformer la série représentée  $J_n(z)$  en une intégrale.

$$J_n(z) = \frac{2}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^p z^{2p}}{2^{2p} p \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \right\} \tag{2.I.41}$$

Par applications répétées de la formule  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , en définitive :

$$J_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \tag{2.I.42}$$

Envisageons maintenant la fonction:

$$\cos(z \cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(z \cos(\theta))^{2p}}{(2p)!} \tag{2.I.43}$$

où la série qui intervient est uniformément convergente par rapport à  $\theta$  quelle que soit sa valeur. Nous pouvons poser:

$$\sin^{2n}(\theta)\cos(z\cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta)}{(2p)!} \quad (2.I.44)$$

et la série qui figure au membre de droite est également uniformément convergente par rapport à  $\theta$ . Dans ces conditions, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\cos(z\cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2n}(\theta) d\theta \right) \quad (2.I.45)$$

$$J_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos(\theta)) \sin^{2n}(\theta) d\theta \quad (2.I.46)$$

## 2. II. Transformation de Hankel

### 2. II.1. Généralité

Cette transformation s'obtient de la transformation de Fourier bidimensionnelle suivante [34] :

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(\sigma x + \tau y)} dx dy \quad (2.II.1)$$

dans l'inverse est :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma, \tau) e^{i(\sigma x + \tau y)} d\sigma d\tau \quad (2.II.2)$$

Par passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -r \sin \varphi d\varphi \\ dy = r \cos \varphi d\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma = \rho \cos \theta \\ \tau = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\sigma = -\rho \sin \theta d\theta \\ d\tau = \rho \cos \theta d\theta \end{cases}$$

Les expressions précédentes (2.II.1) et (2.II.2), s'écrivent sous cette forme :

$$G_*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} g_*(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi \quad (2.II.3)$$

alors que:

$$g_*(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} G_*(\rho, \theta) e^{ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\theta \quad (2.II.4)$$

A) Supposons maintenant que :

$$g_*(r, \varphi) = e^{-in\varphi} g(r) \quad (2.II.5)$$

Posons dans la relation (2.II.3),  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$ , en tenant compte en suite de la

représentation intégrale de :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho(z \sin(\theta) - n\theta)} d\theta \quad (2.II.6)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (2.II.7)$$

on trouve :

$$G_*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\theta-\frac{\pi}{2}} g(r) e^{-in\varphi} e^{ir\rho \sin t} dt \quad (2.II.8)$$

$$= e^{-in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^\infty r dr g(r) J_n(r\rho) dr \quad (2.II.9)$$

$$G_n(\rho) = \int_0^\infty r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (2.II.10)$$

Si:  $G_n(\rho) = G_*(\rho, \theta) e^{in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$  (2.II.11)

**B)** la relation (2.II.3), s'écrit alors comme suit :

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i(n(\varphi-\theta-\frac{\pi}{2}))+r\rho \cos(\varphi-\theta)} d\theta \quad (2.II.12)$$

Effectuons ensuite le même changement de variable précédent, on aura:

$$g(r) = \int_0^\infty \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (2.II.13)$$

### 2. II.2. Définition

On appelle transformée de Hankel d'ordre n de la fonction g(r), la fonction  $G_n(\rho)$  donnée par :

$$G_n(\rho) = \int_0^\infty r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (2.II.14)$$

la fonction g(r) s'obtient de  $G_n(\rho)$  à l'aide de la transformée inverse donnée par :

$$g(r) = \int_0^\infty \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (2.II.15)$$

### 2. II.3. Les transformées de Hankel d'ordre n de ;

a)  $g'(r)$

b)  $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$

Rappelons tout d'abord quelques formules de la fonction  $J_n$  :

$$i. \quad \frac{\partial}{\partial r} J_n(r\rho) = \rho J_{n-1}(r\rho) - \frac{n}{r} J_n(r\rho) \quad (2.II.16)$$

$$ii. \quad J_n(r\rho) = \frac{r\rho}{2n} [J_{n-1}(r\rho) + J_{n+1}(r\rho)] \quad (2.II.17)$$

$$iii. \quad (n^2 - z^2) J_n(z) = z \frac{d}{dz} [z J'_n(z)] \quad (2.II.18)$$

Par suit on trouve :

*a) transformée de  $g'(r)$*

Calculons par l'intégrale par partie l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) \quad (2.II.19)$$

soit :

$$U = r J_n(r\rho) \Rightarrow dU = -(n-1) J_n(r\rho) + r \rho J_{n-1}(r\rho)$$

$$dV = g'(r) \Rightarrow V = g(r)$$

$$I = (n-1) \int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr - \rho \int_0^{\infty} r g(r) J_{n-1}(r\rho) dr \quad (2.II.20)$$

or,

$$\int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr = \frac{\rho}{2n} \left[ \int_0^{\infty} r g(r) J_{n-1}(r\rho) dr + \int_0^{\infty} r g(r) J_{n+1}(r\rho) dr \right] \quad (2.II.21)$$

Finalement la transformée d'ordre n de  $g'(r)$  est :

$$g'(r) = \frac{\rho}{2n} [(n-1) G_{n+1}(\rho) - (n+1) G_{n-1}(\rho)] \quad (2.II.22)$$

*b) Transformée de*

$$g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$$

Calculons par l'intégrale par partie l'intégrale suivante :

$$(II) = \int_0^{\infty} r g''(r) J_n(r\rho) dr \quad (2.II.23)$$

$$(II) = - \int_0^{\infty} g'(r) \frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)] \quad (2.II.24)$$

$$rJ_n(r\rho) \rightarrow \frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)]$$

$$g''(r) \rightarrow g'(r)$$

ce qui donne en suite :

$$\int_0^\infty r \left[ g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) \right] J_n(r\rho) dr = -\rho \int_0^\infty r g'(r) J_n'(r\rho) dr \quad (2.II.25)$$

à l'aide d'une l'intégrale par partie on trouve, la dernière expression s'écrit comme suit :

$$II = \rho \int_0^\infty g(r) \frac{d}{dr} [r\rho J_n'(r\rho)] dr \quad (2.II.26)$$

On utilisant la propriété (ii) on trouve:

$$II = \rho \int_0^\infty g(r) \frac{d}{\rho dr} [r\rho J_n'(r\rho)] dr \Rightarrow \int_0^\infty g(r) \frac{(n^2 - r^2 \rho^2)}{r} J_n(r\rho) dr \quad (2.II.27)$$

Finalement la transformée de  $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$  est :

$$\int_0^\infty r \left[ g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r) \right] J_n(r\rho) dr = -\rho^2 G_n(\rho) \quad (2.II.28)$$

## Conclusion

Dans le cas général on aura, grâce à des transformations mathématiques, à résoudre suffisamment de systèmes des équations différentielles correspondants à la loi de comportement d'élasticité. Dans la présente d'étude, la méthode de *la transformation de Hankel* a été choisie pour la résolution des équations aux dérivées partielles du système d'équilibre thermoélastique en coordonnées cylindriques.



*Chapitre 3. Formulation et résolution  
des équations de la thermoélasticité.....43-67*

*Page*

#### Introduction

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique admet une symétrie autour de l'axe vertical et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de symétrie.

Dans ce cas, la solution est axisymétrique. Si l'on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe de symétrie axiale, les dérivées des fonctions suivant l'angle polaire  $\theta$  sont nulles. On est donc ramené à un problème à deux variables  $(r, z)$ . Pour résoudre ce type de problèmes, on peut utiliser la formulation en contraintes ou la formulation en déplacements.

Si, à partir d'une température uniforme d'intensité  $T_0$ , une variation de température  $T - T_0$  est envisagée il y a lieu de tenir compte de la dilatation et de la variation des paramètres d'élasticité. En effet le module d'élasticité diminue lorsque la température augmente alors que le coefficient de Poisson augmente légèrement.

La dilatation, pouvant être souvent considérée comme isotrope, est caractérisée par le coefficient de dilatation  $\alpha$ . Elle joue de manière identique sur les trois composantes de déformations. Il suffit donc d'ajouter  $\alpha(T - T_0)$  à ces déformations qui deviennent des *déformations thermoélastiques* :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.1)$$

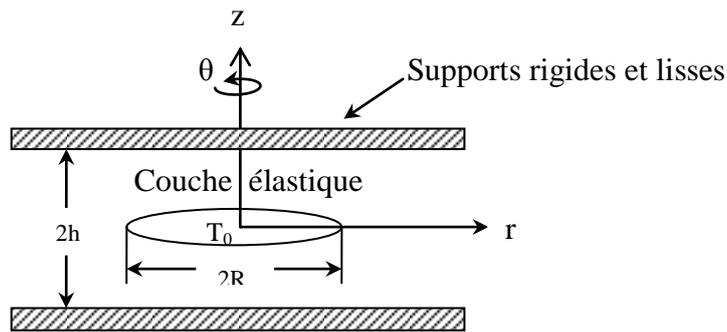
On peut également l'exprimer:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.2)$$

### 3.1. Formulation des équations de la thermoélasticité

#### 3.1.1. Description du problème

On considère une couche élastique infinie, homogène, isotrope et d'épaisseur  $2h$  contenant une fissure sous forme circulaire de rayon  $R$  subissant un champ thermique uniforme  $T_0$ . La fissure est supposée libre de charges alors que les frontières de la couche sont délimitées par deux supports lisses et rigides qui sont considérés comme des isolants thermiques, cf. figure 3.1.



**Figure 3.1. Couche élastique contenant une fissure circulaire soumise à un champ thermique interne. Les frontières du milieu sont délimitées par deux supports rigides et lisses.**

#### 3.1.2. Conditions aux limites du problème

Le problème présente une symétrie par rapport au plan médian, nous pouvons donc limiter notre étude à la demi-couche supérieure.

Les conditions aux limites élastiques du problème de déformation de la couche supérieure peuvent être décrites par les équations suivantes :

$$\left( \sigma_z \right)_{z=0} = 0, \quad 0 < r \leq R \quad (3.3)$$

$$\left( w_z \right)_{z=0} = 0, \quad R \leq r < \infty \quad (3.4)$$

$$\left( \tau_{rz} \right)_{z=0} = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (3.5)$$

$$\left( w_z \right)_{z=h} = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (3.6)$$

$$\left( \tau_{rz} \right)_{z=h} = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (3.7)$$

## Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité

### Résultats numériques et discussion

---

Les conditions aux limites thermiques imposées sont données :

En:  $z=0$

$$t=T_0, \quad r < R \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad r > R \quad (3.9)$$

En:  $z=h$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (3.10)$$

### 3.1.3. Système d'équilibre thermoélastique du problème

Les notations  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  correspondent aux composantes radiale et verticale du vecteur déplacement. Le coefficient de Poisson, le module de cisaillement et le coefficient de dilatation thermique linéaire du milieu élastique sont notés par  $\nu$ ,  $G$  et  $\alpha$ , respectivement.

Pour établir le système d'équilibre du problème mécanique, on utilise les trois systèmes d'équations suivants [35] :

➤ *l'équation de la loi de comportement*

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.11)$$

➤ *l'équation de cinématique (l'équation de Navier)*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.12)$$

➤ *l'équation d'équilibre*

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.13)$$

En injectant la loi de comportement et les équations de déformations dans les équations d'équilibres, on calcule la divergence du tenseur des contraintes.

On a successivement :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.14)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{ij,j} = \lambda (u_{k,k} \delta_{ij})_{,j} + G u_{i,jj} + G u_{j,ij} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.16)$$

$$= \lambda u_{j,ji} + G u_{i,jj} + G u_{j,ji} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.17)$$

Dans le membre de droite de cette dernière relation, le premier terme en facteur de  $\lambda$  n'est autre que le *gradient de la divergence* (comme le dernier en facteur de  $G$ ). Le second terme en fonction de  $G$  est le *Laplace vectoriel*.

On a donc :

$$\text{div} \vec{\sigma} = (\lambda + G) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + G \vec{\Delta} \vec{u} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (3.18)$$

En tenant compte du fait que :

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) - \overrightarrow{\text{rot rot}} \vec{u} \quad (3.19)$$

on obtient l'équation de *Navier* :

$$(\lambda + 2G) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) - G \text{rot} \vec{u} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} = 0 \quad (3.20)$$

Ce sont les équations en déplacements auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites (sur ces déplacements ou sur les contraintes).

$$(\lambda + 2G) \left[ u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right] - (\lambda + 3G) \frac{1}{r^2} v_{,\theta} + (\lambda + G) \left( \frac{1}{r} v_{,r\theta} + w_{,zr} \right) + G \left( \frac{1}{r^2} u_{,\theta\theta} + u_{,zz} \right) = E \frac{\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial t}{\partial r} \quad (3.21)$$

$$(\lambda + G) \frac{1}{r} (u_{,\theta\theta} + w_{,zz}) + (\lambda + 3G) \frac{1}{r^2} u_{,\theta} + (\lambda + 2G) \frac{1}{r^2} v_{,\theta\theta} + G \left( v_{,rr} + \frac{1}{r} v_{,r} - \frac{1}{r^2} v + v_{,zz} \right) = E \frac{\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial t}{\partial \theta} \quad (3.22)$$

$$(\lambda + G) \left( u_{,rz} + \frac{1}{r} u_{,z} + \frac{1}{r} v_{,\theta r} \right) + (\lambda + 2G) w_{,zz} + G \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) = E \frac{\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3.23)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

Dans un milieu tridimensionnel  $(u_r, 0, u_z)$  le système des équations d'équilibre dans le cas axisymétrique devient :

$$(\lambda + 2G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial w}{\partial z \partial r} + G \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = E \frac{\alpha}{1 - 2\nu} \frac{\partial t}{\partial r} \quad (3.24)$$

$$(\lambda + G) \left( \frac{\partial u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} + G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = E \frac{\alpha}{1 - 2\nu} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3.25)$$

En divisant les deux équations (3.24) et (3.25) par  $(\lambda + G)$  on aura:

$$2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} + \frac{\partial w}{\partial r \partial z} = 2(1 + \nu) \alpha \frac{\partial t}{\partial r} \quad (3.26)$$

$$(1 - 2\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 2(1 + \nu) \alpha \frac{\partial t}{\partial z} \quad (3.27)$$

Posons  $\chi = 3 - 4\nu$ .

Finalement le système des équations d'équilibre thermoélastique s'écrit :

$$(1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (-1 + \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial t}{\partial r} \quad (3.28)$$

$$(-1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (1 + \chi) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial z} \right] = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial t}{\partial r} \quad (3.29)$$

Le champ de température  $t$ , à l'état stationnaire et en l'absence de sources thermiques, vérifie l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (3.30)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

Par la *loi de Hooke*, les composants  $\sigma_{zz}$  et  $\tau_{rz}$  du tenseur des contraintes associées avec le champ de déplacement sont donnés:

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - (1+\nu) \alpha t \right] \quad (3.31)$$

et

$$\tau_{rz} = G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (3.32)$$

La transformation intégrale de Hankel d'ordre n [34] est définie comme:

$$H_n \{ f(\lambda) \} = \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (3.33)$$

$J_n(\lambda)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. Nous utilisons la *transformation de Hankel* d'ordre 0 et 1 sur les équations (3.28) et (3.29), respectivement [36].

Notons l'intégrale par

$$\int_0^{\infty} r u(r, z) J_1(\lambda r) d\lambda = U(\lambda, z) \quad (3.34)$$

On trouve :

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} J_1(\lambda r) d\lambda = U'' \quad (3.35)$$

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} - \frac{U(r, z)}{r^2} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = -\lambda^2 U \quad (3.36)$$

et

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z \partial r} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = \lambda U' \quad (3.37)$$

De même, posons

$$\int_0^{\infty} r w(r, z) J_1(\lambda r) d\lambda = W(\lambda, z) \quad (3.38)$$

Il vient que :

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial z^2} J_0(\lambda r) d\lambda = W'' \quad (3.39)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial w(r, z)}{\partial r \partial z} J_1(\lambda r) d\lambda = -\lambda W' \quad (3.40)$$

et

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = -\lambda^2 W \quad (3.41)$$

Si

$$\int_0^{\infty} r t(r, z) J_0(\lambda r) d\lambda = T(\lambda, z) \quad (3.42)$$

Alors on trouve :

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} J_1(\lambda r) d\lambda = -\lambda T(\lambda, z) \quad (3.43)$$

et

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} J_0(\lambda r) d\lambda = T'(\lambda, z) \quad (3.44)$$

Le système d'équilibre et l'équation de la conduction thermique sont alors les suivantes:

$$-\lambda^2 (1 + \chi)U + (-1 + \chi)U'' - 2\lambda W' = -4(1 + \nu)\alpha\lambda T \quad (3.45)$$

$$2\lambda U' - \lambda^2 (-1 + \chi)W + (1 + \chi)W'' = 4(1 + \nu)\alpha\lambda T' \quad (3.46)$$

et

$$T'' - \lambda^2 T = 0 \quad (3.47)$$

### 3.2. Résolution du problème de la conduction thermique

La solution d'équation (3.47) est du type:

$$T(\lambda, z) = A(\lambda)e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z} \quad (3.48)$$

ou  $A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  sont des fonctions de paramètre  $\lambda$  à être déterminées à partir des conditions aux limites du champ de température.

Ainsi, la température  $t$  s'écrit:

$$t(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\lambda)e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.49)$$

La condition aux limites (3.10) sera satisfaite si l'on prend:

$$B(\lambda) = e^{-2\lambda h} A(\lambda) \quad (3.50)$$

En substituant  $B$  dans l'équation (3.42), on obtient :

$$T(\lambda, z) = A(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{-2\lambda h}] \quad (3.51)$$

Ce qui donne:

$$t(r, z) = \int_0^{\infty} A(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{-2\lambda h + \lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.52)$$

La vérification des conditions aux limites mixtes conduites à des *équations intégrale duales*:

$$\int_0^{\infty} C(\lambda) H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = T_0, \quad r < R \quad (3.53)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > R \quad (3.54)$$

avec,

$$C(\lambda) = A(\lambda) (-1 + e^{-2\lambda h}) \quad (3.55)$$

et

$$H(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda h}}{-1 + e^{-2\lambda h}} \quad (3.56)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

Dans la résolution des **équations duales** précédentes nous avons utilisé la formule intégrale pour les *fonctions de Bessel* suivante : 6. 522 (11) [37]:

$$\int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda R/2) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda R/2) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{2n+1}(r/R)}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, n=0, 1, 2... \quad (3.57)$$

ou,

$$Z_n(\lambda) = J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda R/2) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda R/2) \quad (3.58)$$

Par suite, on cherche la solution des **équations intégrales duales** comme suit :

$$C(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda R/2) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda R/2) \quad (3.59)$$

Les coefficients  $\alpha_n$  inconnus sont à déterminer. La seconde équation (3.53) et (3.54) est automatique satisfaite.

Utilisons ensuite la *formule de Gegenbauer* suivante:

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos m\phi, (r = R \sin(\phi/2)) \quad (3.60)$$

où  $\delta_{0m}$  désigne le *symbole de Kronecker* (on dit aussi le *delta de Kronecker*) défini par :

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

et

$$X_m(\lambda) = J_m^2\left(\frac{\lambda R}{2}\right) \quad (3.61)$$

En substituant l'équation (3.59) dans l'équation (3.53), nous obtenons:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m\phi \int_0^{\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) H(\lambda) d\lambda = 1 \quad (3.62)$$

et

$$a_n = \frac{\alpha_n}{T_0} \quad (3.63)$$

## Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité

### Résultats numériques et discussion

---

Les coefficients du terme trigonométrique  $\cos m\phi$  des deux du côté de l'équation (3.62) sont égaux. Nous obtenons alors le système infini des équations simultanées pour déterminer les coefficients  $a_n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) H(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, m=0, 1, 2, \dots \quad (3.64)$$

#### A. Résultats numériques et discussion

Pour déterminer les coefficients inconnus  $a_n$ , nous devons résoudre le système infini de l'équation simultanée (3.64). A cet effet, nous évaluons les intégrales de l'équation (3.46). Mettons le coefficient  $A_{mn}$  de (3.64) sur la ligne de m-ème et la colonne n-ème dans la matrice des coefficients de l'équation (3.64). Ainsi:

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) H(\lambda) d\lambda \quad (3.65)$$

$A_{mn}$  peut être décomposé:

$$A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) H(\lambda) d\lambda + A'_{mn} \quad (3.66)$$

ou  $\lambda_0$  est suffisamment grande valeur et  $A'_{mn}$  est représenté par:

$$A'_{mn} = \int_{\lambda_0}^{\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) H(\lambda) d\lambda \quad (3.67)$$

L'équation (3.66) est calculée comme suit: la première intégrale du côté droit est évaluée numériquement par la *règle de Simpson* avec  $\lambda_0 = 1500$  alors que dans la seconde intégrale on remplace la fonction par son expression asymptotique en tenant compte de l'équivalent à l'infini de *fonction de Bessel* (voir l'annexe 4.I.1).

Par l'introduction des fonctions de sinus et cosinus si (x), ci (x) respectivement, la formule approximative est obtenue :

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda = \frac{-4}{\pi^2 R^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_0 R}{\lambda_0} - Rci(\lambda_0 R) - \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\lambda_0 R}{\lambda_0} - 2Rsi(2\lambda_0 R) \right] \right\} \quad (3.68)$$

ou,  $si(x)$  est la fonction sinus intégrale:

$$si(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (3.69)$$

et,  $ci(x)$  est la fonction cosinus intégrale:

$$ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (3.70)$$

La convergence des coefficients  $a_n$  est présentée dans le tableau 3.1. Même si la convergence  $a_n$  devient lente lorsque la valeur d'épaisseur de la couche augmente, il a été vérifié que 15 termes de la série sont suffisants pour obtenir le résultat souhaité.

n	$a_n$		
	h=0.7	h=1	h=1.5
00	-0.09537735538508	-0.13095350740930	-0.18702738092335
01	-0.01120797505087	-0.00754325220464	-0.00410428034129
02	0.00039135231665	0.00025154849404	0.00009034475220
03	0.00001114957278	-0.00000446057624	-0.00000166908656
04	-0.00000240950535	-0.00000006691904	0.00000012285625
05	0.00000025474438	0.00000019540556	0.00000024941455
06	0.00000032796463	0.00000042255539	0.00000058630484
07	0.00000064674032	0.00000084579790	0.00000117110344
08	0.00000121306541	0.00000158310652	0.00000219104828
09	0.00000209823576	0.00000273712513	0.00000378710884
10	0.00000345702376	0.00000450808404	0.00000623601169
11	0.00000542567392	0.00000707345112	0.00000978303360
12	0.00000821916366	0.00001071314918	0.00001481501292
13	0.00001204323894	0.00001569509606	0.00002170221591
14	0.00000727250231	0.00000947729047	0.00001310421638

**Tableau 3.1. Coefficient thermique  $a_n$ .**

## Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité

### Résultats numériques et discussion

---

La figure 3.2 montre la variation de la distribution radiale de la température dans le plan  $z = 0$  pour différentes valeurs de  $h$ . D'après les graphes, il est clair que la distribution de la température a une valeur maximale à la frontière de la fissure. Elle augmente aussi avec la diminution de l'épaisseur de la couche élastique.

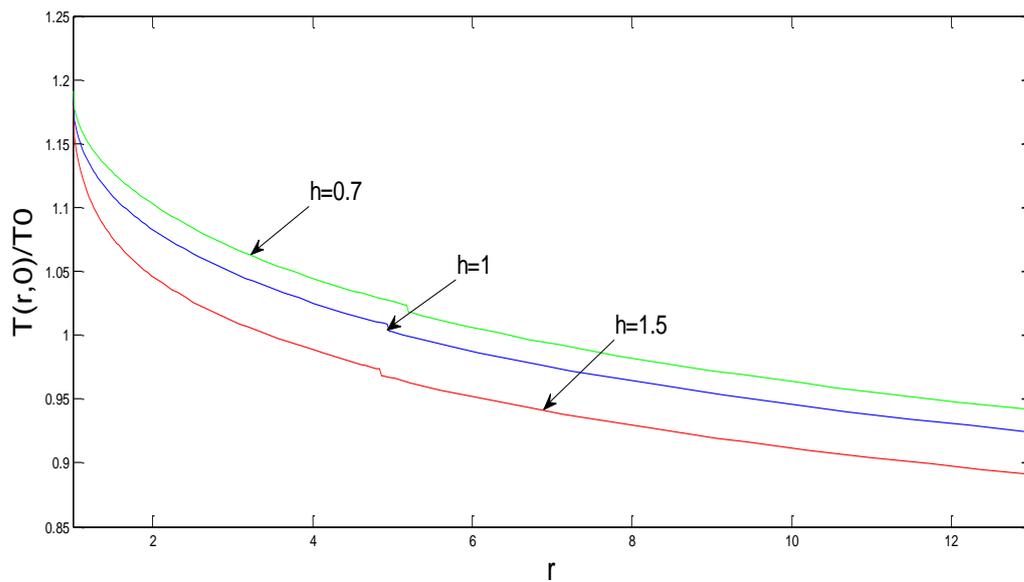


Figure 3.2. Distribution radiale de la température  $\frac{t(r,0)}{T_0}$  pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche  $h$ .

### Conclusion

La présence d'un champ thermique uniforme le long de la fissure a tendance à faire propager le champ thermique par *conduction*.

### 3.3. Résolution du problème thermoélastique

La solution du problème thermoélastique correspondant aux des équations (3.55) et (3.56), s'obtient sous la forme:

$$U = U_h + U_p, \quad W = W_h + W_p$$

$U_h, W_h$  sont la solution générale de d'équations l'homogène (3.55) et (3.56) alors que  $U_p, W_p$  sont les solutions particulières des équations non-homogènes (voir l'annexe 4.I.2). Elles sont données par ;

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (3.71)$$

$$W_h(\lambda, z) = \left[ (C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z) \right] e^{-\lambda z} - \left[ (C_2(\lambda) + C_3(\lambda) z) \right] e^{\lambda z} \quad (3.72)$$

et

$$U_p(\lambda, z) = 0 \quad (3.73)$$

$$W_p(\lambda, z) = -2(1+\nu) \frac{\alpha}{\lambda} \left[ A(\lambda) e^{-\lambda z} - B(\lambda) e^{\lambda z} \right] \quad (3.74)$$

La solution finale des *équations d'équilibre thermoélastique* (3.55) et (3.56) sont alors du type:

$$U(\lambda, Z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} - \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (3.75)$$

$$W(\lambda, Z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z - \frac{\alpha_0}{\lambda} A(\lambda) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) z + \frac{\alpha_0}{\lambda} B(\lambda) \right] e^{\lambda z} \quad (3.76)$$

où  $\alpha_0 = 2(1+\nu)\alpha$ . Les fonctions inconnues  $C_0(\lambda), C_1(\lambda), C_2(\lambda)$  et  $C_3(\lambda)$  doivent être déterminées à partir des conditions aux limites mixtes (3.4), (3.5), (3.7) et (3.50).

Remarquons que:

$$C_0(\lambda) = \frac{4C_3(\lambda) \left[ 1 - \nu(1+h) + (-1+\nu) e^{2\lambda h} \right] + \alpha_0 A(\lambda) \left( -e^{\lambda h} + e^{-2\lambda h} \right)}{2\lambda \left( -e^{\lambda h} + e^{-\lambda h} \right)} \quad (3.77)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$C_1(\lambda) = C_3(\lambda)e^{2\lambda h} \quad (3.78)$$

et

$$C_2(\lambda) = \frac{-4C_3(\lambda)(1-\nu+\lambda h)e^{\lambda h} + [4C_3(\lambda)(1-\nu) - \alpha_0 A(\lambda)]e^{-\lambda h} + \alpha_0 A(\lambda)e^{-3\lambda h}}{2\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \quad (3.79)$$

En substituant ces fonctions dans l'équation (3.75) et (3.76), en tenant compte de l'équation (3.48), la solution de l'équation (3.55) et (3.56) devient :

$$U(\lambda, z) = \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left\{ -2[1-2\nu + \lambda(z-2h)]e^{\lambda(z+h)} + [2C_3(\lambda)(1-2\nu + \lambda z) + \alpha_0 A(\lambda)]e^{\lambda(z-h)} \right. \\ \left. - \alpha_0 A(\lambda)[e^{\lambda(z-3h)} + e^{-\lambda(z+h)}] + [2C_3(\lambda)(1-2\nu + \lambda(-z+2h)) + \alpha_0 A(\lambda)]e^{-\lambda(z-h)} \right. \\ \left. + 2C_3(\lambda)[-1+2\nu + \lambda z] \right\} \quad (3.80)$$

$$W(\lambda, z) = \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda z} - e^{-\lambda z})} \left\{ 2C_3(\lambda)[(-2+2\nu + \lambda(z-2h))e^{\lambda(z+h)} + (2-2\nu + \lambda z)e^{-\lambda(z-3h)}] \right. \\ \left. + [2C_3(\lambda)(2-2\nu - \lambda z) + \alpha_0 A(\lambda)]e^{\lambda(z-h)} + \alpha_0 A(\lambda)[-e^{\lambda(z-3h)} + e^{-\lambda(z+h)}] \right. \\ \left. + [2C_3(\lambda)(-2+2\nu + \lambda(-z+2h)) - \alpha_0 A(\lambda)]e^{-\lambda(z-h)} \right\} \quad (3.81)$$

Appliquons ensuite la *transformée de Hankel* d'ordre 0 à l'équation (3.31) et de l'ordre de 1 à (3.32) et posons :

$$\bar{\sigma}(\lambda, z) = \int_0^{\infty} \lambda \sigma(r, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.82)$$

$$\bar{\tau}(\lambda, z) = \int_0^{\infty} \lambda \tau(r, z) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.83)$$

La transformé de contrainte normale et cisaillement a été donnée en terme de U, W et T par les expressions:

$$\bar{\sigma}(\lambda, z) = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)W' + \nu\lambda U - (1+\nu)\alpha T] \quad (3.84)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$\bar{\tau}(\lambda, z) = G(U' - \lambda W) \quad (3.85)$$

Les trois équations (3.80), (3.51) et (3.48) donnent alors :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\lambda, z) = \frac{2G}{(1-2\nu)(-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} & \left\{ 2 \left[ C_3(\lambda) \left( 1 + \lambda(z-2h) \left( -\frac{1}{2} + \nu \right) - \frac{\alpha_0 A(\lambda)}{4} \right) \right] e^{-\lambda(z-h)} - \frac{1}{2} \left[ 4C_3(\lambda) \left( -\frac{1}{2} + \nu \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( -(-1 + \lambda(z-2h)) e^{\lambda(z+h)} + (-1 + \lambda z) e^{\lambda(z-h)} + (1 + \lambda z) e^{-\lambda(z-3h)} \right) + \alpha_0 A(\lambda) \left( (-e^{\lambda(z-3h)} + e^{-\lambda(z+h)}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + e^{\lambda(z-h)} + (-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}) (e^{-\lambda h} - e^{-2\lambda h}) \right) \right] \right\} \quad (3.86) \end{aligned}$$

et

$$\bar{\tau}(\lambda, z) = \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left\{ 2\lambda G C_3(\lambda) \left[ -(z-2h) e^{\lambda(z+h)} + z(e^{\lambda(z-h)} - e^{-\lambda(z-3h)}) + (z-2h) e^{-\lambda(z-h)} \right] \right\} \quad (3.87)$$

Les *transformées inverses de Hankel* sont :

$$\sigma(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda \bar{\sigma}(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.88)$$

$$w(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda W(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.89)$$

La fonction inconnue  $C_3(\lambda)$  peut être déterminée par la substitution  $\sigma_z$  et  $w_z$  dans les conditions aux limites mixtes (3.3) et (3.4), ce qui donne les *équations intégrales duales* suivantes :

$$\frac{(\sigma_z)_{z=0}}{2G} = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), \quad r < R \quad (3.90)$$

$$(w_z)_{z=0} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > R \quad (3.91)$$

avec

$$p(\lambda) = \frac{e^{2\lambda h} - e^{-2\lambda h} + 4\lambda h}{e^{2\lambda h} + e^{-2\lambda h} - 2} \quad (3.92)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$\varphi(\lambda r) = 2C_3(\lambda)(-1+\nu)(1-e^{2\lambda h}) - \frac{\alpha_0 A(\lambda)}{2}(1-e^{-2\lambda h}) \quad (3.93)$$

et

$$f(r) = 2\alpha_0(1-\nu) \int_0^\infty \lambda A(\lambda)(1-e^{-2\lambda h}) \left[ \frac{p(\lambda)}{4(-1+\nu)} - \frac{1}{(-1+2\nu)(1-e^{2\lambda h})} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.94)$$

Les *équations intégrales duales* sont généralement transformées à des *équations intégrales de Fredholm*. Dans cette étude, une technique différente est utilisée. Le déplacement sur la surface de la fissure est exprimé en série de fonctions *Tchebychev* par :

$$(w_z)_{z=0} = \frac{4}{\pi R r} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n U_{2n+2} \left( \frac{r}{R} \right), 0 \leq r \leq R \quad (3.95)$$

où  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) sont des coefficients inconnus et  $U_{2n+2}(r/R)$  représente la fonction de *Tchebychev* de seconde espèce.

Introduisons maintenant une nouvelle fonction.

Si nous écrivons:

$$F_n(\lambda) = \lambda [Z_n(\lambda) - Z_{n+1}(\lambda)] \quad (3.96)$$

de la relation intégrale (3.57) nous constatons que:

$$\int_0^\infty F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{4}{\pi R r} U_{2n+2} \left( \frac{r}{R} \right), & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (3.97)$$

Par l'utilisation de l'équation (3.97), nous constatons que *l'inversion de l'équation de Hankel* de (3.91) et (3.95) donne:

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n F_n(\lambda) \quad (3.98)$$

En substituant l'équation (3.98) dans l'équation (3.90) et en utilisant la *formule de Gegenbauer*, on obtient:

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda = f(r) \quad (3.99)$$

Remarquons l'apparition des coefficients  $\cos(m\phi)$  dans les des deux côtés de l'équation (3.99). En prenant la différence entre le m-ième et les équations (m+2)-eme dans l'équation (3.99),

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) F_n(\lambda) [X_m(\lambda) - X_{m+2}(\lambda)] d\lambda = q(r) \quad (3.100)$$

on obtient le *système infini d'équations algébriques* suivant pour obtenir le coefficient  $\beta_n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n B_{mn} = q(\lambda) \quad (3.101)$$

avec

$$B_{mn} = \int_0^{\infty} p(\lambda) F_n(\lambda) Y_m(\lambda) d\lambda \quad (3.102)$$

$$q(\lambda) = 2\alpha_0 T_0 (-1 + \nu) \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X_m(\lambda) Z_n(\lambda)}{(-1 + e^{-4\lambda h})(1 - e^{2\lambda h})} \left[ \frac{(e^{2\lambda h} - e^{-2\lambda h} + 4\lambda h)}{2(-1 + \nu)} - \frac{(1 - e^{-2\lambda h})}{(-1 + 2\nu)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.103)$$

et

$$Y_m(\lambda) = \lambda [X_m(\lambda) - X_{m+2}(\lambda)], \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (3.104)$$

Si la valeur de  $\lambda$  est suffisamment grande, les limites des deux fonctions  $p(\lambda)$  et  $\lambda F_n(\lambda)$  sont les suivantes:

$$p(\lambda) \rightarrow 1 \quad (3.105)$$

et

$$\lambda F_n(\lambda) \rightarrow -\frac{8(1+n)}{\pi R^2} \cos \lambda R \quad (3.106)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

Par conséquent, la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$  sur la surface  $1 < r < \infty$  de la fissure pour peut être exprimée comme suit:

$$\begin{aligned} (\sigma_z^*)_{z=0} = (\sigma_z)_{z=0} \frac{(-1+\nu)}{G} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ + 2\alpha_0 T_0 (-1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda Z_n(\lambda) &\left[ \frac{p(\lambda)}{4(-1+\nu)} - \frac{1}{(1-2\nu)(-1+e^{2\lambda h})} \right] J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.107)$$

car  $0 < r < \infty$ , la contrainte  $(\sigma_z)_{z=h}$  sur la surface plane est donné par:

$$\begin{aligned} (\sigma_z^*)_{z=h} = (\sigma_z)_{z=h} \frac{(-1+\nu)}{G} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{2((1+\lambda h)e^{2\lambda h} + \lambda h - 1)}{(e^{3\lambda h} - 2e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda_0 \\ + \alpha_0 T_0 (-1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{\lambda Z_n(\lambda)}{(-1+e^{-2\lambda h})(-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} &\left[ \frac{(1-e^{-2\lambda h})(1+\lambda h)e^{2\lambda h} + \lambda h - 1}{(-1+\nu)(1-e^{2\lambda h})} \right. \\ \left. - \frac{(1-e^{-2\lambda h} + e^{-\lambda h} - e^{-3\lambda h})}{(-1+2\nu)} \right] &J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.108)$$

La contrainte  $(\sigma_z)_{z=h/2}$  on  $0 < r < \infty$  s'obtient:

$$\begin{aligned} (\sigma_z^*)_{z=h/2} = (\sigma_z)_{z=h/2} \frac{(-1+\nu)}{G} &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda \frac{2[L(\lambda)]}{(e^{3\lambda h} - 2e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda_0 &+ \alpha_0 T_0 (-1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{\lambda Z_n(\lambda)}{(-1+e^{-2\lambda h})(-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} \\ \times \left\{ \frac{(1-e^{-2\lambda h})[L(\lambda)]}{(-1+\nu)(1-e^{2\lambda h})} + \frac{e^{\frac{\lambda h}{2}} + e^{-\lambda h} - e^{-3\lambda h} + 2e^{-\frac{\lambda h}{2}} - e^{-\frac{5\lambda h}{2}} - e^{-\frac{3\lambda h}{2}}}{(-1+2\nu)} \right\} &J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.109)$$

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

---

avec

$$L(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) e^{\frac{5\lambda h}{2}} + \left(1 + \frac{3\lambda h}{2}\right) e^{\frac{3\lambda h}{2}} + \left(-1 + \frac{3\lambda h}{2}\right) e^{\frac{\lambda h}{2}} + \left(-1 + \frac{\lambda h}{2}\right) e^{-\frac{\lambda h}{2}} \quad (3.110)$$

Le *facteur d'intensité de contrainte* correspondant au mode I du problème fissuré est défini par:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow R^+} \sqrt{2\pi(r-R)} (\sigma_z)_{z=0} \quad (3.111)$$

Remarquons aussi que la température radiale dans le plan  $z=0$  si t'écrit sous la forme :

$$t(r,0) = \frac{1}{2\alpha(1+\nu)} \int_0^\infty \psi(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.112)$$

$$= \frac{1}{2\alpha(1+\nu)} \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \int_0^\infty J_{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.113)$$

or,

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) J_0(\lambda r) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{\pi \lambda R} \sin(\lambda R) \left(\frac{2}{\pi \lambda R}\right)^{1/2} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \quad (3.114)$$

Ce qui implique la convergence uniforme de l'intégrale. D'où sa continuité suivant r puisque la fonction sous le signe intégrale est continue suivant r et  $\lambda$ .

Ainsi :

$$\lim_{r \rightarrow R} (\sqrt{r-R}) t(r,0) = 0 \quad (3.115)$$

dou,

$$t(R,0) = 0 \quad (3.116)$$

En substituant l'équation (3.107) dans l'équation (3.111), on obtient une expression simple comme suit:

$$K_I^* = \frac{K_I(-1+\nu)}{G} = -\frac{8}{R^2 \sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^\infty \beta_n (1+n) \quad (3.117)$$

**B. Résultats numériques et discussion**

Pour déterminer les coefficients  $\beta_n$ , nous devons évaluer les intégrales  $B_{mn}$  de l'équation (3.102). Nous utilisons la décomposition suivante avec une valeur grande de  $\lambda_0$ .

$$B_{mn} = \int_0^{\infty} \left[ \{p(\lambda) - 1\} \right] Y_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda + \int_0^{\lambda_0} Y_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} Y_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda \quad (3.118)$$

Ensuite, la fonction  $p(\lambda)$  peut être évalué égal à un et  $Y_m(\lambda) F_n(\lambda)$  peut être asymptotiquement calculée comme suit:

$$Y_n(\lambda) F_n(\lambda) \rightarrow \frac{128(-1)^m (1+m)(1+n) \cos^2 \lambda R}{\pi^2 R^4 \lambda^2} \quad (3.119)$$

En substituant l'expression (3.119) dans la dernière intégrale de l'équation (3.118), on obtient:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} Y_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda = \frac{128(-1)^m (1+m)(1+n)}{\pi^2 R^3} \times \left\{ \frac{\cos^2 \lambda_0 R}{\lambda_0 R} + si(2\lambda_0 R) \right\} \quad (3.120)$$

Le premier terme du côté droit de la relation (3.118) est intégré numériquement par la *règle de Simpson*. Nous choisissons ici  $\lambda_0 = 1500$ . La convergence des coefficients  $\beta_n$  est présentée dans le tableau 3.3.

Nous avons choisi comme application l'acier dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 3.2. Même si la convergence des coefficients  $\beta_n$  devient lente lorsque la valeur de la hauteur  $h$  augmente, 15 termes de la série sont suffisants pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Température	Coefficient de dilatation thermique	Coefficient de Poisson
T (°C)	(K <sup>-1</sup> )	ν
100	18.8x10 <sup>-6</sup>	0.29

**Tableau 3.2. Paramètres thermiques et élastiques d'acier moyen.**

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité Résultats numériques et discussion

<b>n</b>	$\beta_n$		
	<b>h=0.7</b>	<b>h=1</b>	<b>h=1.5</b>
00	-0.60332541355660	-0.88031405929416	-1.25458098292781
01	-0.03039486076910	-0.01496555449005	-0.00394391668468
02	0.00169376973158	0.00087015047446	0.00037135150038
03	0.00008186198150	0.00010317141502	0.00017168827738
04	0.00007565176845	0.00010611751204	0.00014625914763
05	0.00006482186690	0.00008377572724	0.00011573235796
06	0.00005715213315	0.00007446842430	0.00010291029969
07	0.00004733851750	0.00006165513869	0.00008519767024
08	0.00004315343895	0.00005627887173	0.00007777755626
09	0.00003638698716	0.00004747148222	0.00006560786435
10	0.00003349364641	0.00004379736415	0.00006054294901
11	0.00002839808792	0.00003720677646	0.00005144270641
12	0.00002630467649	0.00003460750682	0.00004786855564
13	0.00002248393914	0.00002972951873	0.00004114288470
14	0.00002127713367	0.00002833457680	0.00003924090363

**Tableau 3.3. Coefficient thermoélastique  $\beta_n$  pour  $R=1$  et  $h=0.7, 1, 1.1, 5$ .**

La distribution radiale du déplacement normal sur le long de la surface de la fissure est indiquée sur la figure 3.3 pour  $0 \leq r \leq 1$  en fonction de  $h$ . Il est à noter que la valeur du déplacement  $(w_z)_{z=0}$  devient croissante avec le l'épaisseur de la couche  $h$ .

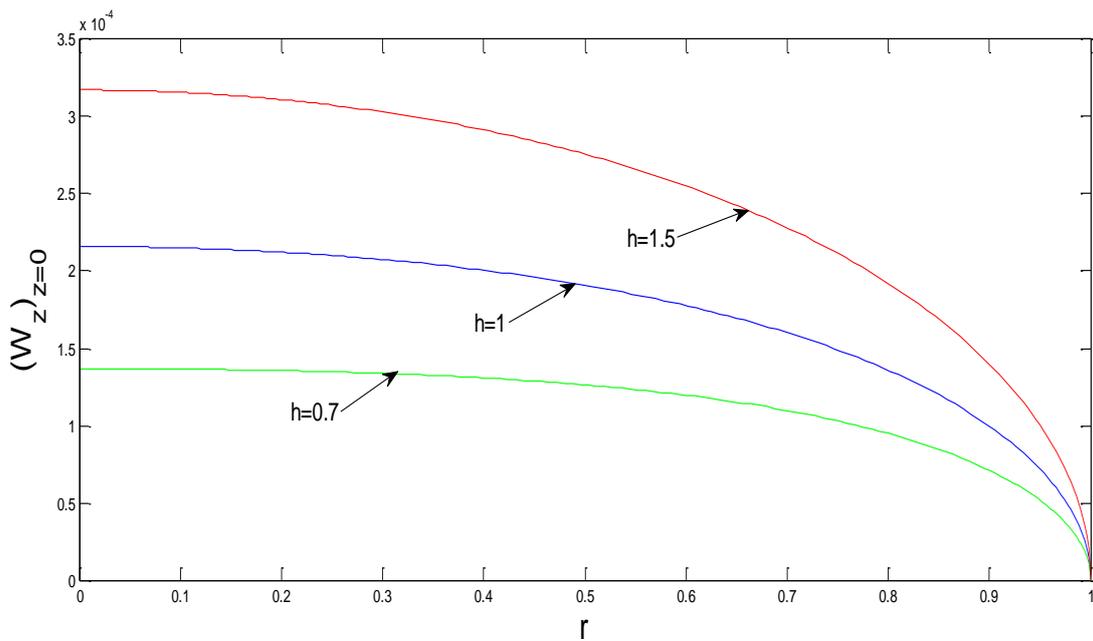


Figure 3.3. Distribution radiale de déplacement normal  $(w_z)_{z=0}$ .

La figure 3.4 montre la distribution radiale de la contrainte normale dans la région extérieure de la fissure pour  $1 < r$ . On remarque que la contrainte  $(\sigma_z)_{z=0}$  devient infinie dans le bord de la fissure. Elle diminue avec l'augmentation de  $h$  sur tout le plan de la fissure.

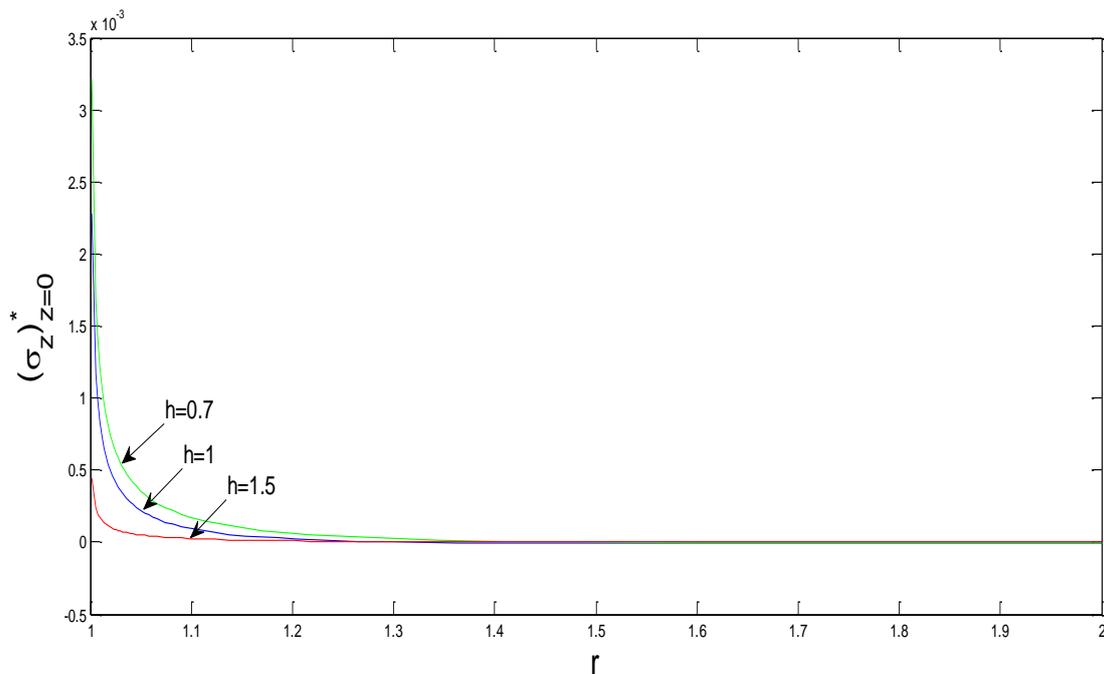


Figure 3.4. Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$ .

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité

#### Résultats numériques et discussion

La variation de la distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=h}$  pour différentes valeurs de  $h$  est indiquée sur la figure 3.5.

La distribution obtient sa valeur maximale au centre de la fissure. Le même comportement est remarqué pour le cas  $z = h/2$  comme indiqué sur la figure 3.6.

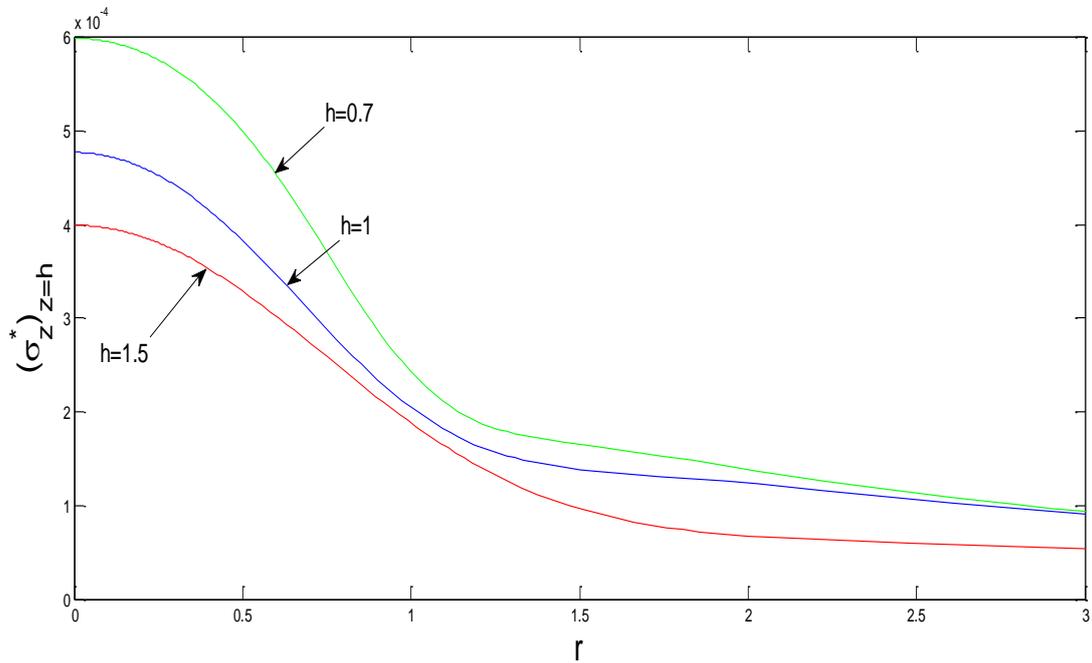


Figure 3.5. Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z^*)_{z=h}$ .

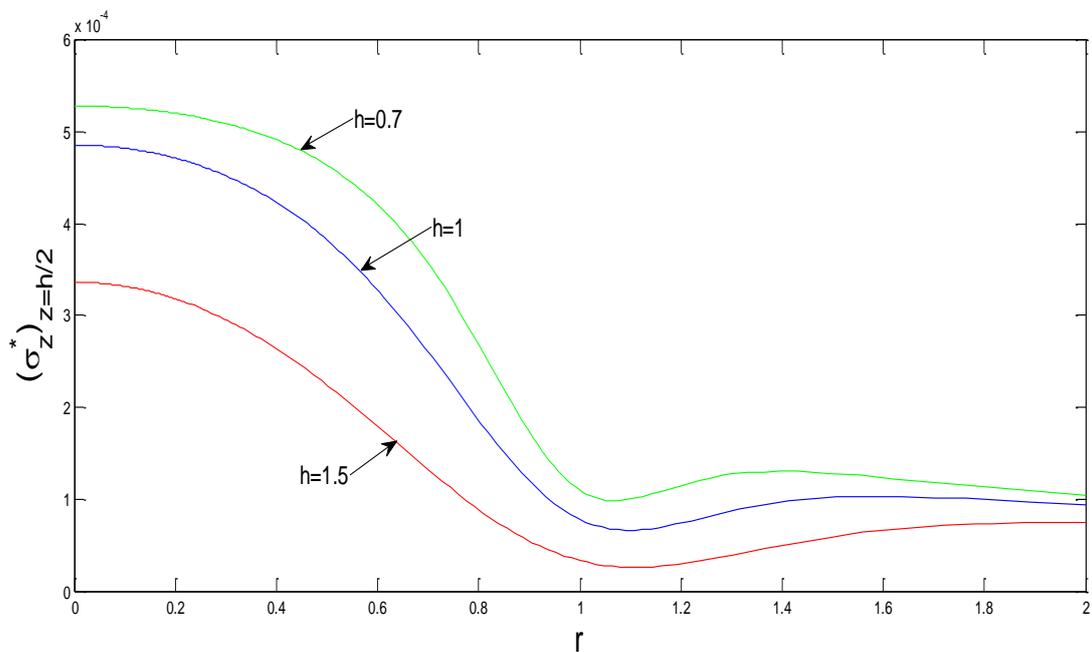


Figure 3.6. Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z^*)_{z=h/2}$ .

### Chapitre 3. Formulation et résolution des équations de la thermoélasticité

#### Résultats numériques et discussion

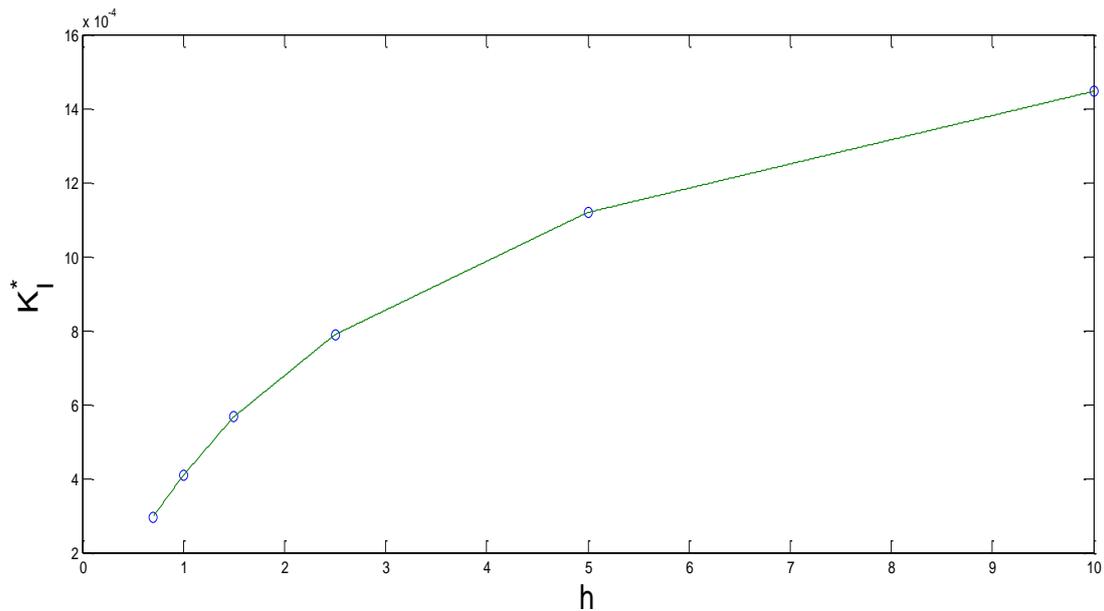
Les valeurs des coefficients  $\beta_n$  avec  $R = 1$  et  $h = 2.5, 5, 10$ , sont données dans le tableau 3.4. La variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $h$  est indiquée dans le tableau 3.5 ainsi que graphiquement sur la figure 3.7. On note, l'augmentation de contrainte lorsque l'épaisseur de la couche devient grande.

n	$\beta_n$		
	h=2.5	h=5	h=10
00	-1.76528194837721	-2.52088383538833	-3.27703119310757
01	0.00074377851390	0.00330305010810	0.00818553859180
02	0.00074796332216	0.00249833150088	0.00544911526409
03	0.00051995628661	0.00157724440503	0.00377960010088
04	0.00043486391673	0.00139875364086	0.00270393772816
05	0.00033539840239	0.00091376450855	0.00158535347275
06	0.00029023131219	0.00075965437952	0.00065956263204
07	0.00022445700293	0.00037480752896	-0.00012260723864
08	0.00018801895268	0.00021770949828	-0.00037486408605
09	0.00013386085675	-0.00005767733543	-0.00020691342528
10	0.00010029640428	-0.00009020153565	0.00015363770223
11	0.00005535336137	-0.00014599464924	0.00014590094354
12	0.00003051649324	0.00000015313554	-0.00005817787444
13	0.00000281119695	0.00004664944757	-0.00001967543213
14	-0.00000211996167	0.00012304647446	0.00012244811206

*Tableau 3.4. Coefficients thermoélastiques  $\beta_n$  pour  $R=1$  et  $h=2.5, 5, 10$ .*

h	0.7	1	1.5	2.5	5	10
$K_I^*$	$2.95 \times 10^{-4}$	$4.07 \times 10^{-4}$	$5.65 \times 10^{-4}$	$7.88 \times 10^{-4}$	$11.18 \times 10^{-4}$	$14.46 \times 10^{-4}$

*Tableau 3.5. Valeurs de facteur d'intensité de contrainte  $K_I^*$  avec  $R=1$  et  $h=0.7, 1, 1.5, 2.5, 5, 10$ .*



**Figure 3.7.** Valeurs du facteur d'intensité de contrainte  $K_I^*$  avec  $R=1$  et  $h=0.7, 1, 1.5, 2.5, 5, 10$ .

### **Conclusion**

Dans ce présent travail, nous avons présenté une étude correspondante à la déformation thermoélastique d'un milieu tridimensionnel élastique, isotrope et homogène. Les champs de contraintes et de déplacements sont déterminés analytiquement.

L'évolution thermoélastique du solide est alors décrite par des équations mécaniques (équilibre, lois de comportement) et les équations thermiques en vérifiant les conditions aux limites du problème. La solution analytique est basée sur l'utilisation de la méthode de la *transformation intégrale de Hankel*.

Les résultats de l'étude ont révélé les effets de l'épaisseur de la couche et du rayon de la fissure sur la distribution de la température, les déplacements, la contrainte normale et le facteur d'intensité de contrainte. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature [12] et [13].



<i>Conclusion générale et perspective</i> .....	68
<i>Références bibliographiques</i> .....	70
<i>Annexes</i> .....	73

*Page*



### *Conclusion générale et perspective*

Nous avons étudié un problème de déformation thermoélastique d'une plaque épaisse fissurée. La résolution basée sur une procédure analytique sur l'utilisation de la méthode de la *transformation intégrale de Hankel* ont été développées et utilisées quelle que soit la valeur de la couche.

La présence d'une fissure dans une plaque produit une concentration de la contrainte localisée au bord du trou. La fissure est soumise à un champ thermique uniforme qui permet de comprendre comment les matériaux réagissent aux conditions et aux variations de température, en plus de connaître les propriétés thermiques d'un large éventail de matériaux.

La solution analytique a été obtenue à l'aide des coefficients d'un système algébrique infini. La convergence du système infini est réalisée à partir des 15 premiers termes de la série.

Les résultats du mémoire se résument comme suit :

- La convergence des coefficients thermiques  $a_n$  et thermoélastiques  $\beta_n$  est plus rapide lorsque l'épaisseur de la couche est petite. Ces coefficients interviennent dans le calcul du facteur d'intensité de contrainte.
- La convergence des coefficients thermoélastiques  $\beta_n$  est plus rapide que celle des coefficients thermiques  $a_n$ .

L'analyse des graphes obtenus est résumée comme suit:

- La distribution radiale de la température atteint sa valeur maximale au bord de fissure alors que la température diminue lorsque l'épaisseur de couche diminue.
- Le déplacement normal le long de la surface de fissure devient croissant lorsque l'épaisseur de la couche est grande.

## Conclusion générale et perspective

---

- La contrainte normale dans le plan  $z = 0$  a une valeur infinie à sur la frontière de la fissure. Elle décroît lorsque l'épaisseur de la couche augmente.
- La distribution radiale de la contrainte normale dans la couche de surface pour le cas  $z = h, h/2$  atteint ses valeurs maximum au centre de la fissure. Elle diminue lorsque l'épaisseur de la couche augmente.
- Le facteur d'intensité de contrainte augmente proportionnellement avec l'épaisseur de la couche.

### *Perspective du travail réalisé*

La méthode analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante des problèmes de recherche. Nous envisageons d'étudier des problèmes de déformation thermoélastique dans le cas des conditions limites doublement mixtes. Ces problèmes peuvent être aussi traités pour le cas de matériau transversalement isotrope.

A titre d'indication, l'un des problèmes à résoudre par la méthode utilisée et le suivant :  
« Déformation thermoélastique par un poinçon rigide d'une couche reposant sur un appui ayant un orifice circulaire ».

## *Références bibliographiques*

- [1] N. N. Lebedev, Ia. S. Ufliand, "Axisymmetric contact problem for an elastic layer," *J. Appl. Math. And Mech.*, vol. 22, no. 3, pp. 422-450, 1958.
- [2] M. Sakamoto, "An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure," *JSME Int. J. Ser. A*, vol. 46, no. 1, pp. 27-36, 2003.
- [3] M. Sakamoto, K. Kobayashi, "The axisymmetric contact problem of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region," *Theor. Appl. Mech. Japan*, vol. 53, pp. 27-36, 2004.
- [4] M. Sakamoto, K. Kobayashi, "Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with a circular hole," *WIT Trans. Enging. Sci.*, vol. 49, pp. 279-286, 2005.
- [5] Z. Olesiak, I. N. Sneddon, "The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid constraining a penny-shaped crack," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 4, pp. 238-254, 1960.
- [6] R. K. Mahalanabis, "A mixed boundary value problem of thermoelasticity for a half space," *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* vol. 20, no. 1, pp. 127-134, 1967.
- [7] B. R. Das, "Some axially symmetric thermal stress distributions in elastic solids containing cracks-I, an external crack in an infinite solid," *Int. J. Enging Sci.*, vol. 9, no. 5, pp. 469-478, 1971.
- [8] R. Bhowmick, B. R. Das, "An axisymmetric steady-state thermoelastic problem of an external circular crack in an isotropic thick plate," *Proc. Indian Natn, Sci., Acad.* vol. 105, no. 4, pp. 445- 459 , 1995.
- [9] R. S. Dhaliwal, "The steady-state thermoelastic mixed boundary-value problem for the elastic layer," *J. Inst. Maths Applics*, vol. 7, pp. 295-302, 1971.
- [10] M. C. Wadhawan, "Steady state thermal stresses in an elastic layer," *Pure and Appl. Geophysics*, vol. 104, no. 1, pp. 513- 522, 1973.
- [11] M. Lal, "Thermal stresses due to prescribed flux of heat within a flat annular region in an elastic plate," *Proc. Indian Nutn. Sci., Acad.* 51, A, no. 2, pp .382-390, 1985.
- [12] A. Abdel-Halim, A. Elfalaky, "An internal penny-shaped crack problem in an infinite thermoelastic solid," *J. Appl. Sci. Research and Mech.*, vol. 1, no. 2, pp. 325-334, 2005.
- [13] A. Elfalaky, A. Abdel-Halim, "A mode I crack problem for an infinite space in thermoelasticity," *J. Appl. Sci.*, vol. 6, no. 3, pp. 598-606, 2006.
- [14] R. Fortunier, "Comportement mécanique des matériaux," *Ecole Nationale Supérieure des Mines*, Saint-Etienne cedex 2. <http://www.emse.fr/~fortunier/cours>.

- [15] H. D. BUI, “ Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux,” *Eyrolles, Paris*, pp. 229, 1993.
- [16] C. Wielgosz, “Résistance des matériaux,” *Ellipses, édition Marketing S A., Paris*, pp. 312, 1999.
- [17] J. C. Charmet, “Elasticité, plasticité, rupture,” *Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique, ESPCI*, <http://www.espci.fr / enseignement / download>.
- [18] D. François, A. Pineau, A. Zaoui, “Elasticité et plasticité,” *Hermès, Paris*, pp. 505, 1992.
- [19] J. Lemaitre, P. A. Boucard, F. Hild, “Résistance mécanique des solides,” *Dunod*, 2002.  
<http:// www.eyrolles.com >Science >Physique >Mécanique>.
- [20] Y. Quéré, “Physique des matériaux,” *Ellipses, Copyright*, pp. 463, 1988.
- [21] S. Timoshenko, “Résistance des matériaux,” *Dunod, Paris*, pp. 417, 1972.
- [22] J. Lemaitre, J. L. Chaboche, “Mécanique des matériaux solides,” *Dunod, BORDAS, Paris*, pp. 541, 1988.
- [23] J. P. Mercier, G. Zambelli, W. Kurz, “Introduction à la science des matériaux,” *Presses Polytechniques et universitaires, ROMANDES*, pp. 500, 2002.
- [24] D. François, A. Pineau, A. Zaoui, “Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact,” *Hermès, Paris*, pp. 489, 1991.
- [25] N. Moes, “Mécanique des milieux continus,” *Ecole centrale de Nantes*.  
[http://www.chireux .fr / mp / cours / mécanique\\_milieux\\_continus. pdf](http://www.chireux .fr / mp / cours / mécanique_milieux_continus. pdf).
- [26] N. Recho, “Rupture par fissuration des structures,” *Hermès, Paris*, pp. 349, 1995.
- [27] J. Zarzycki, “Propriétés mécaniques des verres,” *Université de Montpellier 2, Laboratoire des verres du C.N.R.S., France. Revue de physique appliquée*, pp.790-796, 1977.
- [28] A. Curnier, “Mécanique des solides et déformables cinématique, dynamique, énergétique,” *Presses Polytechniques et universités Romandes, Lausanne*, pp. 649, 2005.
- [29] Z. Soumahoro, “Etude du couplage thermomécanique dans la propagation dynamique de fissure,” *Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique*, pp. 124, 2005.
- [30] J. F. Sacadura , “Initiation aux transferts thermiques,” *Paris*, pp. 439, 1980.
- [31] Y. Jannot, “Transferts thermiques,” *Masson*. pp. 158, 2005.
- [32] M. R. Spiegel, “Analyse de Fourier,” *ISBN, Paris*, pp. 195, 1980.

- [33] M. Parodi, "Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur," *Société d'édition d'enseignement supérieur Sorbonne, Paris*, tome. 4, pp. 379, 1966.
- [34] S. I. Hayek, "Advanced mathematical methods in science and engineering," *Marcel Dekker, Inc., N. Y., Basel*, pp. 737, 2001.
- [35] B. R. Hetnarski, M. R. Eslami, "Thermal stresses. Advanced theory and applications, Solid mechanics and its applications," *Springer*, vol. 158, pp. 553, 2009.
- [36] R. M. Fee, "Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate," *Simon Fraser University*, 1974. <http://www.ir.lib.sfu.ca/bitstream/1892/4995/1/b13768396.pdf>.
- [37] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Table of integrals, series, and products," *Academic Press, N. Y.*, pp. 1221, 2007.

## Annexe 1

Le module d'élasticité de cisaillement se déduit donc facilement du module d'élasticité de traction E et du coefficient de Poisson tableau A.1.1.

matériau	température (degré C)	module d'Young (GPa)	coefficient de Poisson
Alliage d'aluminium AU4G	20	72	0,32
	200	66	0,325
	500	50	0,35
Alliage de titane Ti 4Al 4Mn	20	315	0,34
	200	115	0,34
Acier XC10	20	216	0,29
	200	205	0,30
	600	170	0,315
Fonte grise	20	100	0,29
Acier inoxydable austénitique 316	20	196	0,3
	200	170	
	700	131	
Aluminium (A5)	20	68	0,33
Bronze	20	130	0,34
	180	61	
Plexiglass	20	2,9	0,4
Araldite	20	3	0,4
Caoutchouc	20	0,002	0,5
verre-epoxy (sens long)	20	19	0,3
carbone-epoxy (sens long)	20	87,6	0,32
Béton	20	30	0,2
Granit	20	60	0,27
Pin sylvestre (sens long)	20	17	0,45
Pin sylvestre (sens trans.)	20	1	

*Tableau A.1.1. Caractéristiques d'élasticité des matériaux usuels.*

On trouvera dans le tableau A.1.2. Les valeurs de la conductivité thermique  $\lambda$  de certains matériaux parmi les plus courants.

Matériau	$\lambda$ (W m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )	Matériau	$\lambda$ (W m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Coton	0,059
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,027
Verre	0,78	Air	0,026

*Tableau A.1.2. Valeurs de la conduction thermique  $\lambda$ .*

Annexe 2

Ténacité  $K_C$  en  $MPa.m^{1/2}$  à l'ambiante tableau A.2.1.

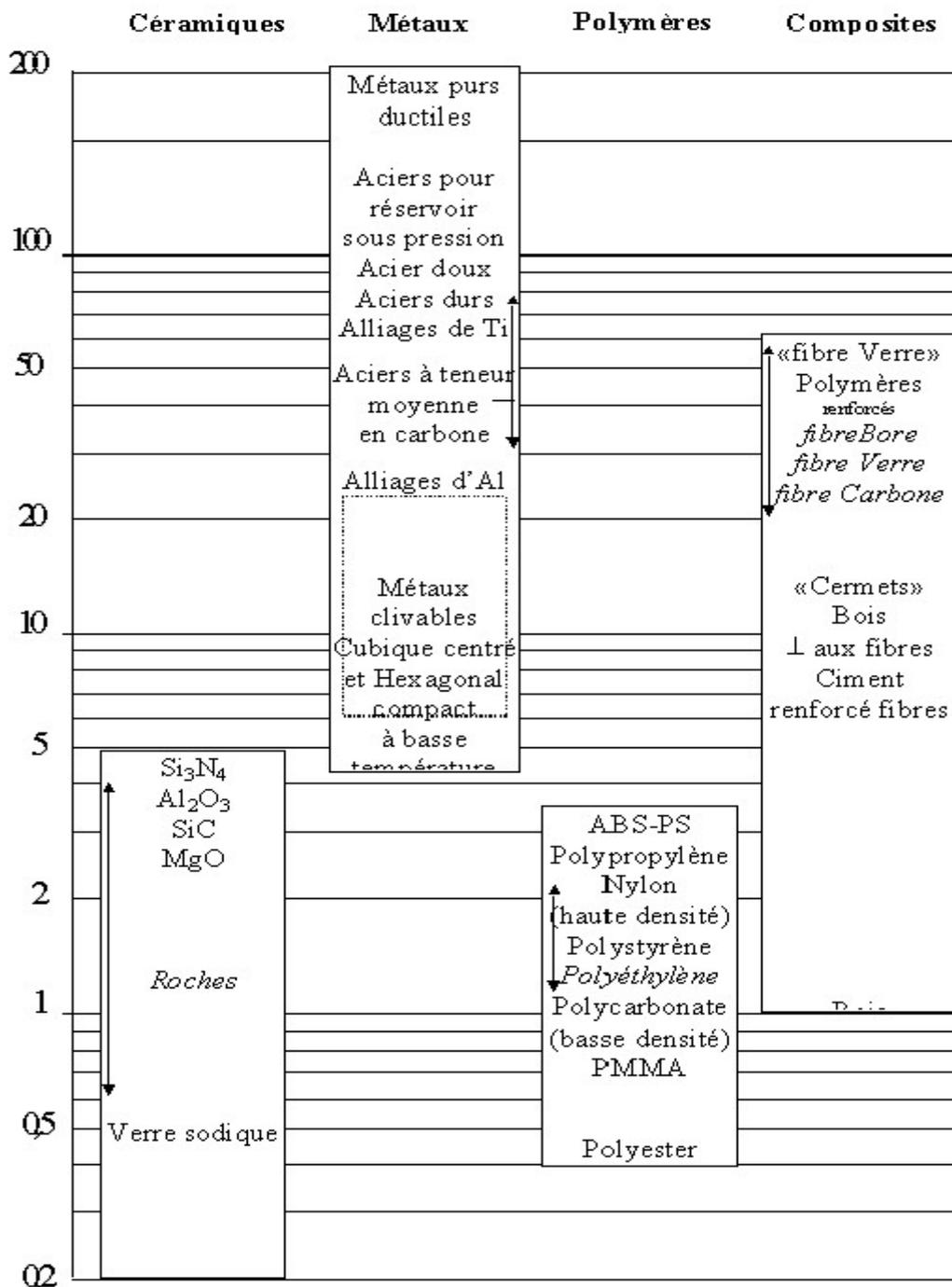


Tableau A.2.1. Ténacité  $K_C$  en  $MPa.m^{1/2}$  à l'ambiante.

Annexe 3

Tableau A.3.1 des valeurs de  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$ .

$x$ .	$J_0(x)$ .	$J_1(x)$ .
0	+1	0
1	+ .7652	+ .4401
2	+ .2239	+ .5767
2.405	0	+ .5191
3	- .2601	+ .3391
3.832	- .4028	0
4	- .3971	- .0660
5	- .1776	- .3276
5.520	0	- .3403
6	+ .1506	- .2767
7	+ .3001	- .0047
7.016	+ .3001	0
8	+ .1717	+ .2346
8.654	0	+ .2715
9	- .0903	+ .2453
10	- .2459	+ .0435
10.173	- .2497	0
11	- .1712	- .1768
11.792	0	- .2325
12	+ .0477	- .2234
13	+ .2069	- .0703
13.324	+ .2184	0
14	+ .1711	+ .1334
14.931	0	+ .2065

Tableau A.3.1. Les valeurs de  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$ .

Le tableau suivant donne la liste des quelques première racines positives de  $J_0(x)=0$ .  
 Les racines de valeur élevée différent, approximativement de  $\pi=3.145\dots$

	$J_0 = 0.$	$J_1 = 0.$	$J_2 = 0.$	$J_3 = 0.$	$J_4 = 0.$	$J_5 = 0.$
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218

Tableau A.3.2. Zéros des fonctions de Bessel.

## Annexe 4

### I. Calculs analytiques

*1. Expression asymptotique de  $X_m(\lambda)Z_n(\lambda)$  en tenant compte de l'équivalent à l'infini de fonction de Bessel.*

On a :

$$X_m(\lambda) = J_m^2\left(\frac{\lambda R}{2}\right) \quad (\text{A.4.I.1.1})$$

Si

$$J_m\left(\frac{\lambda R}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda R/2}\right)^{1/2} \left[ \cos\left(\left(\frac{\lambda R}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.4.I.1.2})$$

Donc

$$J_m^2\left(\frac{\lambda R}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda R/2}\right) \left[ \cos^2\left(\left(\frac{\lambda R}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.4.I.1.3})$$

Alors on trouve :

$$J_m^2\left(\frac{\lambda R}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda R}\right) \left[ 1 + \sin(\lambda R - n\pi) \right] \quad (\text{A.4.I.1.4})$$

Il vient que :

$$J_m^2\left(\frac{\lambda R}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi \lambda R}\right) \left[ 1 + (-1)^m \sin(\lambda R) \right] \quad (\text{A.4.I.1.5})$$

D'autre part,

$$Z_n(\lambda) = J_{n+1/2}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) J_{-(n+1/2)}\left(\frac{\lambda R}{2}\right) \quad (\text{A.4.I.1.6})$$

On suit les mêmes étapes que précédemment. On obtient l'expression asymptotique de  $Z_n$  suivante :

$$Z_n(\lambda) \rightarrow \frac{2}{\pi \lambda R} \sin(\lambda R) \quad (\text{A.4.I.1.7})$$

La fonction  $X_m(\lambda)Z_n(\lambda)$  peut être asymptotiquement calculée comme suit :

$$X_m(\lambda)Z_n(\lambda) \rightarrow \frac{4}{(\pi\lambda R)^2} \left[ \sin(\lambda R) + \frac{(-1)^m}{2}(1 - \cos(2\lambda R)) \right] \quad (\text{A.4.I.1.8})$$

Intégration  $\int_{\lambda_0}^{\infty} X_m(\lambda)Z_n(\lambda)d\lambda$  par l'introduction des fonctions de sinus et cosinus  $si(x)$ ,  $ci(x)$  respectivement, la formule approximative est obtenue :

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} X_m(\lambda)Z_n(\lambda)d\lambda = -\frac{4}{\pi^2 R^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_0 R}{\lambda_0} - Rci(\lambda_0 R) - \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\lambda_0 R}{\lambda_0} - 2Rsi(2\lambda_0 R) \right] \right\} \quad (\text{A.4.I.1.9})$$

## 2. Résolution de système d'équilibre thermoélastique du problème

$$-\lambda^2(1+\chi)U + (-1+\chi)U'' - 2\lambda W' = -4(1+\nu)\alpha\lambda T \quad (\text{A.4.I.2.1})$$

$$2\lambda U' - \lambda^2(-1+\chi)W + (1+\chi)W'' = 4(1+\nu)\alpha\lambda T' \quad (\text{A.4.I.2.2})$$

**A.** On cherche la solution homogène des équations (A.4.I.2.1) et (A.4.I.2.2) en utilisant les étapes suivantes :

En dérivant l'équation (A.4.I.2.2), on aura :

$$2\lambda U'' - \lambda^2(-1+\chi)W' + (1+\chi)W''' = 0 \quad (\text{A.4.I.2.3})$$

La dérivée seconde de l'équation (A.4.I.2.2) donne :

$$2\lambda^3 \frac{(1+\chi)}{(-1+\chi)} U + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1+\chi)} - (-1+\chi) \right] W' + (1+\chi)W''' = 0 \quad (\text{A.4.I.2.4})$$

On obtient la dérivée de l'équation (A.4.I.2.4) :

$$2\lambda^3 \frac{(1+\chi)}{(-1+\chi)} U' + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1+\chi)} - (-1+\chi) \right] W'' + (1+\chi)W^{IV} = 0 \quad (\text{A.4.I.2.5})$$

En éliminant l'expression de  $U'$  d'équation (A.4.I.2.2) on aura :

$$\lambda^2 \frac{(1+\chi)}{(-1+\chi)} \left[ \lambda^2 (-1+\chi)W - (1+\chi)W'' \right] + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1+\chi)} - (-1+\chi) \right] W'' + (1+\chi)W^{IV} = 0 \quad (\text{A.4.I.2.6})$$

On remarque que l'équation (A.4.I.2.5) s'écrit sous la forme :

$$W^{IV} - 2\lambda^2 W'' + \lambda^4 W = 0 \quad (\text{A.4.I.2.7})$$

L'équation (A.4.I.2.5) s'obtient de l'équation caractéristique  $p^4 - 2\lambda^2 W'' + \lambda^4 W = 0$ . Cette équation admet deux solutions doubles ainsi:

$$W_h(\lambda, z) = \left[ (C_0(\lambda) + C_1(\lambda)z) \right] e^{-\lambda z} + \left[ (C_2(\lambda) + C_3(\lambda)z) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.8})$$

Les dérivées de la fonction  $W$  sont :

$$W' = (-\lambda C_1 + C_2 - \lambda C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda C_3 + C_4 + \lambda C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.9})$$

$$W'' = (\lambda^2 C_1 - 2\lambda C_2 + \lambda^2 C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda^2 C_3 + 2\lambda C_4 + \lambda^2 C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.10})$$

$$W''' = (-\lambda^3 C_1 + 3\lambda^2 C_2 - \lambda^3 C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda^3 C_3 + 3\lambda^2 C_4 + \lambda^3 C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.11})$$

En injectant les expressions  $W$  et  $W''$  dans (A.4.I.2.4), on trouve la valeur  $U_h$  :

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.12})$$

Finalement, la solution homogène du **système d'équilibre thermoélastique** est donnée :

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.13})$$

$$W_h(\lambda, z) = \left[ (C_0(\lambda) + C_1(\lambda)z) \right] e^{-\lambda z} + \left[ (C_2(\lambda) + C_3(\lambda)z) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.4.I.2.14})$$

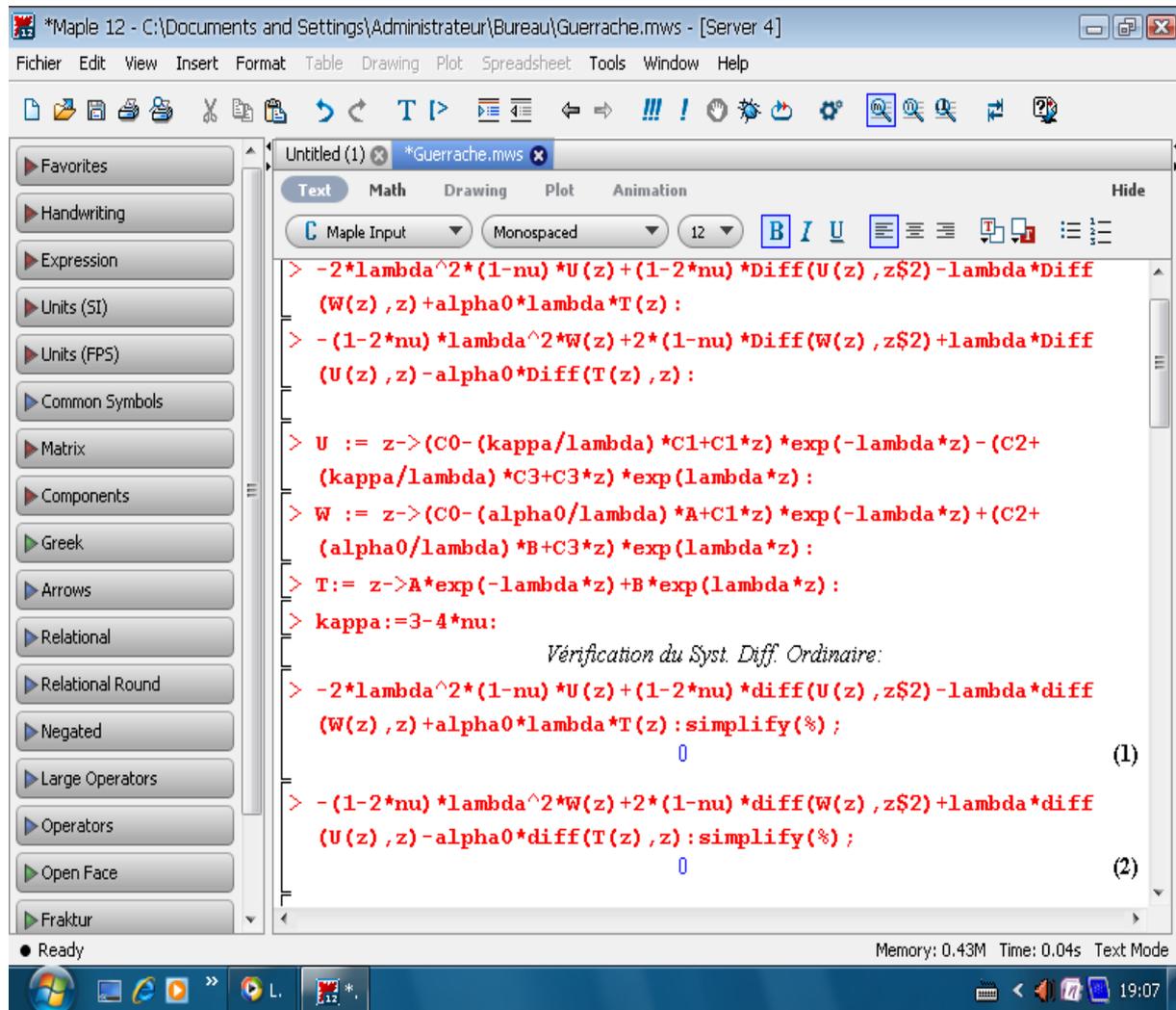
**B.** Cherchons la solution particulière du système d'équilibre thermoélastique

On suit les mêmes étapes que précédemment. On obtient la solution particulière du *système d'équilibre thermoélastique* suivante :

$$U_p(\lambda, z) = 0 \tag{A.4.I.2.15}$$

$$W_p(\lambda, z) = -2(1+\nu) \frac{\alpha}{\lambda} [A(\lambda)e^{-\lambda z} - B(\lambda)e^{\lambda z}] \tag{A.4.I.2.16}$$

**II. Programmes numériques**



> restart:

### Thermoelastic Layer (Axisymmetric Case):

```
> -2*lambda^2*(1-nu)*U(z)+(1-
2*nu)*Diff(U(z),z$2)+lambda*Diff(W(z),z)+alpha[0]*lambda*T(z):
> -(1-2*nu)*lambda^2*W(z)+2*(1-
nu)*Diff(W(z),z$2)+lambda*Diff(U(z),z)-alpha[0]*Diff(T(z),z):
```

```
> U := z->(C0-(kappa/lambda)*C1+C1*z)*exp(-lambda*z)-
(C2+(kappa/lambda)*C3+C3*z)*exp(lambda*z):
> W := z->(C0-(alpha[0]/lambda)*A+C1*z)*exp(-
lambda*z)+(C2+(alpha[0]/lambda)*B+C3*z)*exp(lambda*z):
> T:= z->A*exp(-lambda*z)+B*exp(lambda*z):
> kappa:=3-4*nu:
```

### Vérification du Syst. Diff. Ordinaire:

```
> -2*lambda^2*(1-nu)*U(z)+(1-2*nu)*diff(U(z),z$2)-
lambda*diff(W(z),z)+alpha[0]*lambda*T(z):simplify(%);
0
> -(1-2*nu)*lambda^2*W(z)+2*(1-
nu)*diff(W(z),z$2)+lambda*diff(U(z),z)-
alpha[0]*diff(T(z),z):simplify(%);
0
```

### Résolution du Système Algébrique (Penny-Shaped Crack):

```
> B:=A*exp(-2*lambda*h):
> eqn1 := W(h)=0:
> eqn2 := diff(U(h),h)-lambda*W(h)=0:
> eqn3 := diff(U(z),z)-lambda*W(z)=0:z:=0:
> s := solve({eqn1, eqn2, eqn3}, {C0,C1,C2}):
> assign(s):
> C0;
```

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \left( 8 e^{\lambda h} e^{-\lambda h} C3 + 16 (e^{\lambda h})^2 C3 v - 8 (e^{\lambda h})^2 C3 v^2 \right. \\
 & \quad - 2 v (e^{\lambda h})^2 \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - \lambda h (e^{-\lambda h})^2 \alpha_0 A \\
 & \quad + 2 e^{\lambda h} v e^{-\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 2 e^{\lambda h} e^{-\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} \\
 & \quad - 4 e^{\lambda h} e^{-\lambda h} \alpha_0 A + 4 e^{-\lambda h} \alpha_0 A v e^{\lambda h} - 8 C3 (e^{\lambda h})^2 \\
 & \quad + 4 (e^{-\lambda h})^2 \alpha_0 A - 8 e^{-\lambda h} e^{\lambda h} C3 h \lambda + 8 e^{-\lambda h} \lambda h e^{\lambda h} C3 v \\
 & \quad + e^{-\lambda h} \lambda h e^{\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 4 (e^{-\lambda h})^2 \alpha_0 A v \\
 & \quad + 2 (e^{\lambda h})^2 \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 16 e^{\lambda h} e^{-\lambda h} C3 v \\
 & \quad \left. + 8 e^{\lambda h} e^{-\lambda h} C3 v^2 \right) / \left( (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h} - v e^{\lambda h} \right. \\
 & \quad \left. + e^{-\lambda h} v) e^{-\lambda h} \lambda \right)
 \end{aligned}$$

> C1;

$$\frac{1}{4} \frac{-e^{-\lambda h} \alpha_0 A + e^{\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 4 C3 e^{\lambda h} + 4 e^{\lambda h} C3 v}{(-1 + v) e^{-\lambda h}}$$

> C2;

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left( -2 e^{\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 8 e^{\lambda h} C3 h \lambda - 16 e^{-\lambda h} C3 v \right. \\
 & \quad - 8 e^{\lambda h} C3 v^2 + 2 v e^{\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} - 2 v e^{-\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} \\
 & \quad + 8 e^{-\lambda h} C3 v^2 + 16 e^{\lambda h} C3 v - \lambda h e^{-\lambda h} \alpha_0 A \\
 & \quad + 8 \lambda h e^{\lambda h} C3 v + \lambda h e^{\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} + 2 e^{-\lambda h} \alpha_0 A e^{-2\lambda h} \\
 & \quad \left. - 8 C3 e^{\lambda h} + 8 e^{-\lambda h} C3 \right) / \left( \lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h} - v e^{\lambda h} \right. \\
 & \quad \left. + e^{-\lambda h} v) \right)
 \end{aligned}$$

> C00 := simplify( C0, 'symbolic' ); C000 := simplify( C00, 'size' ); simplify(C000-C0);

$$\begin{aligned}
 C000 := & \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} \left( (4 C3 (-1 + v) e^{2\lambda h} \right. \\
 & \quad \left. + e^{-2\lambda h} \alpha_0 A + (-4 v - 4 \lambda h + 4) C3 - \alpha_0 A \right) e^{\lambda h}
 \end{aligned}$$

0

> C11 := simplify( C1, 'symbolic' ); C111 := simplify( C11, 'size' ); simplify(C111-C1);

$$C111 := C3 e^{2\lambda h}$$

0

```
> C22 := simplify( C2, 'symbolic' ); C222 := simplify( C22,
'size' ); simplify(C222-C2);
```

$$C222 := \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( ((-4v + 4) C3 - \alpha_0 A) e^{-\lambda h} + e^{-3\lambda h} \alpha_0 A - 4 C3 e^{\lambda h} (1 - v + \lambda h) \right)$$

0

```
> unassign('z');
```

```
> U1 := simplify( U(z), 'symbolic' ); U2 := simplify( U1, 'size' );
```

$$U2 := \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( (((4h - 2z)\lambda - 4v + 2) C3 + \alpha_0 A) e^{-\lambda(-h+z)} + 2 C3 (2v - 1 + \lambda z) e^{-\lambda(-3h+z)} + ((2\lambda z + 2 - 4v) C3 + \alpha_0 A) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A - e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A - 2((-2h + z)\lambda + 1 - 2v) e^{\lambda(h+z)} C3 \right)$$

```
> W1 := simplify( W(z), 'symbolic' ); W2 := simplify( W1, 'size' );
```

$$W2 := \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( (((4h - 2z)\lambda + 4v - 4) C3 - \alpha_0 A) e^{-\lambda(-h+z)} + 2 C3 (-2v + \lambda z + 2) e^{-\lambda(-3h+z)} + ((-4v + 4 - 2\lambda z) C3 + \alpha_0 A) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A + e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A + 2((-2h + z)\lambda - 2 + 2v) e^{\lambda(h+z)} C3 \right)$$

```
> sigma := (2*G) / (1-2 *nu) * [(1-nu)*diff(W2, z) + nu*lambda*U2 - 1/2*alpha[0]*T];
```

$$\begin{aligned} \sigma := & \frac{1}{1-2v} \left( 2G \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( (1-v) \left( \right. \right. \right. \right. \\ & -2\lambda C3 e^{-\lambda(-h+z)} - \left. \left. \left( (4h-2z)\lambda + 4v - 4 \right) C3 \right. \right. \\ & - \alpha_0 A \left. \right) \lambda e^{-\lambda(-h+z)} + 2C3 \lambda e^{-\lambda(-3h+z)} - 2C3(-2v \\ & + \lambda z + 2) \lambda e^{-\lambda(-3h+z)} - 2\lambda C3 e^{\lambda(-h+z)} + \left. \left. \left( (-4v + 4 \right. \right. \right. \\ & - 2\lambda z) C3 + \alpha_0 A \left. \right) \lambda e^{\lambda(-h+z)} - \lambda e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A \\ & - \lambda e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A + 2\lambda e^{\lambda(h+z)} C3 + 2 \left( (-2h+z)\lambda - 2 \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. + 2v \right) \lambda e^{\lambda(h+z)} C3 \right) \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left( v \left( \left( (4h \right. \right. \right. \right. \\ & - 2z)\lambda - 4v + 2) C3 + \alpha_0 A \left. \right) e^{-\lambda(-h+z)} + 2C3(2v-1 \\ & + \lambda z) e^{-\lambda(-3h+z)} + \left. \left. \left( (2\lambda z + 2 - 4v) C3 \right. \right. \right. \\ & + \alpha_0 A \left. \right) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A - e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A \\ & \left. \left. \left. \left. \left. - 2 \left( (-2h+z)\lambda + 1 - 2v \right) e^{\lambda(h+z)} C3 \right) \right) \right) - \frac{1}{2} \alpha_0 T \right] \end{aligned}$$

```
> sigma1 := simplify( sigma, 'symbolic' ); sigma2 := simplify(
sigma1, 'size' );
```

$$\sigma_2 := -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 G \left[ \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 2 \left( (-2h+z) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) \lambda + \left( -\frac{1}{2} + v \right) C3 - \frac{1}{4} \alpha_0 A \right) e^{-\lambda(-h+z)} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 4(\lambda z + 1) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{-\lambda(-3h+z)} + \left( 4z C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) \lambda + (2-4v) C3 + \alpha_0 A \right) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A - e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A - 4(-1 + (-2h+z)\lambda) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{\lambda(h+z)} + \alpha_0 T(-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}) \right) \right] \right]$$

```
> sigma3 := simplify( sigma2, 'symbolic' ); sigma4 := simplify(
sigma3, 'size' );
```

$\sigma_4 :=$

$$-\frac{1}{-1+2v} \left( 2 \left[ \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 2 \left( (1 + (-2h+z)\lambda) \left( -\frac{1}{2} + v \right) C3 - \frac{1}{4} \alpha_0 A \right) e^{-\lambda(-h+z)} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 4(\lambda z + 1) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{-\lambda(-3h+z)} + \left( 4(-1 + \lambda z) \left( -\frac{1}{2} + v \right) C3 + \alpha_0 A \right) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A - e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A - 4(-1 + (-2h+z)\lambda) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{\lambda(h+z)} + \alpha_0 T(-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}) \right) \right] G \right)$$

```
> T:=A*(exp(-lambda*z)-exp(-2*lambda*h)):
> sigma4;
```

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 \left[ \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 2 \left( (1 + (-2h+z)\lambda \right) \left( -\frac{1}{2} \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \left. + v \right) C3 - \frac{1}{4} \alpha_0 A \right) e^{-\lambda(-h+z)} \right) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 4(\lambda z + 1) C3 \left( -\frac{1}{2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + v \right) e^{-\lambda(-3h+z)} + \left( 4(-1 + \lambda z) \left( -\frac{1}{2} + v \right) C3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \alpha_0 A \right) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A - e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A \right. \\
 & \quad \left. - 4(-1 + (-2h+z)\lambda) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{\lambda(h+z)} \right. \\
 & \quad \left. \left. + \alpha_0 A \left( e^{-\lambda z} - e^{-2\lambda h} \right) \left( -e^{\lambda h} + e^{-\lambda h} \right) \right] \right) G
 \end{aligned}$$

> tau[r,z] := G\*(diff(U2,z) - lambda\*W2);

$$\begin{aligned}
 \tau_{r,z} := G & \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( -2\lambda C3 e^{-\lambda(-h+z)} - \left( (4h \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2z) \lambda - 4v + 2) C3 + \alpha_0 A \right) \lambda e^{-\lambda(-h+z)} \right. \\
 & \quad \left. + 2 C3 \lambda e^{-\lambda(-3h+z)} - 2 C3 (2v - 1 + \lambda z) \lambda e^{-\lambda(-3h+z)} \right. \\
 & \quad \left. + 2\lambda C3 e^{\lambda(-h+z)} + \left( (2\lambda z + 2 - 4v) C3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \alpha_0 A \right) \lambda e^{\lambda(-h+z)} - \lambda e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A + \lambda e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A \right. \\
 & \quad \left. - 2\lambda e^{\lambda(h+z)} C3 - 2 \left( (-2h+z)\lambda + 1 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2v \right) \lambda e^{\lambda(h+z)} C3 \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left( \left( (4h \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2z) \lambda + 4v - 4) C3 - \alpha_0 A \right) e^{-\lambda(-h+z)} + 2 C3 (-2v \right. \\
 & \quad \left. + \lambda z + 2) e^{-\lambda(-3h+z)} + \left( (-4v + 4 - 2\lambda z) C3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \alpha_0 A \right) e^{\lambda(-h+z)} - e^{\lambda(-3h+z)} \alpha_0 A + e^{-\lambda(h+z)} \alpha_0 A \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left( (-2h+z)\lambda - 2 + 2v \right) e^{\lambda(h+z)} C3 \right)
 \end{aligned}$$

```
> tau1 := simplify( tau[r,z], 'symbolic' ); tau2 := simplify(
tau1, 'size' );
```

$$\tau_2 := -\frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 2\lambda C_3 \left( (-2h+z) e^{-\lambda(-h+z)} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-\lambda(-3h+z)} z + e^{\lambda(-h+z)} z - e^{\lambda(h+z)} (-2h+z) \right) G \right)$$

```
> z:=0:
```

```
> W2;
```

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})} \left( \left( (4\lambda h + 4v - 4) C_3 - \alpha_0 A \right) e^{\lambda h} \right. \\ \left. + 2 C_3 (-2v + 2) e^{3\lambda h} + \left( (-4v + 4) C_3 + \alpha_0 A \right) e^{-\lambda h} \right. \\ \left. - e^{-3\lambda h} \alpha_0 A + e^{-\lambda h} \alpha_0 A + 2(-2\lambda h - 2 + 2v) e^{\lambda h} C_3 \right)$$

```
> W3 := C3*2*((-
1+nu)*exp(3*lambda*h)+(alpha[0]*A*1/4*1/C3)*exp(-
3*lambda*h)+exp(-lambda*h)*((-1+nu)-alpha[0]*A*1/C3*1/2)-
2*exp(lambda*h)*(nu-1-alpha[0]*A*1/C3*1/8))/(lambda*(-
exp(lambda*h)+exp(-lambda*h))) ;
```

$$W_3 := \frac{1}{\lambda (-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})} \left( 2 C_3 \left( (-1+v) e^{3\lambda h} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{\alpha_0 A e^{-3\lambda h}}{C_3} + e^{-\lambda h} \left( -1+v - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A}{C_3} \right) - 2 e^{\lambda h} \left( v \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_0 A}{C_3} \right) \right) \right)$$

```
> simplify(W3-W2) ;
```

0

```
> sigma4;
```

$$-\frac{1}{-1+2v} \left( 2 \left[ \frac{2 \left( (1-2\lambda h) \left( -\frac{1}{2} + v \right) C_3 - \frac{1}{4} \alpha_0 A \right) e^{\lambda h}}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 4 C_3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{3\lambda h} + \left( -4 \left( \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. -\frac{1}{2} + v \right) C_3 + \alpha_0 A \right) e^{-\lambda h} - e^{-3\lambda h} \alpha_0 A - e^{-\lambda h} \alpha_0 A - 4 \left( \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. -1 - 2\lambda h \right) C_3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{\lambda h} + \alpha_0 A (1 - e^{-2\lambda h}) (-e^{\lambda h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-\lambda h}) \right) \right] G \right)$$

> sigma5:=simplify(sigma4);

σ5 :=

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 \left[ \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( 2 \left( -\frac{C3}{2} + C3 v \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + C3 h \lambda - 2 C3 \lambda h v - \frac{1}{4} \alpha_0 A \right) e^{\lambda h} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{-e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \left( -2 C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{3\lambda h} + \left( -C3 + 2 C3 v \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \alpha_0 A \right) e^{-\lambda h} + \frac{1}{2} e^{-3\lambda h} \alpha_0 A + \frac{1}{2} e^{-\lambda h} \alpha_0 A + 2 \left( -1 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 \lambda h \right) C3 \left( -\frac{1}{2} + v \right) e^{\lambda h} - \frac{1}{2} \alpha_0 A \left( 1 - e^{-2\lambda h} \right) \left( -e^{\lambda h} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + e^{-\lambda h} \right) \right] \right) G
 \end{aligned}$$

> simplify(sigma4-sigma5);

0

> sigma6:=-2\*C3\*[(-1+2\*nu)/(exp(lambda\*h)-exp(-lambda\*h))\*exp(3\*lambda\*h)+(-1/2\*exp(-3\*lambda\*h)\*alpha[0]\*A\*1/C3+(1-2\*nu)\*exp(-lambda\*h)+(-4\*lambda\*h+8\*lambda\*nu\*h+alpha[0]\*A/2\*1/C3)\*exp(lambda\*h)-1/2\*alpha[0]\*1/C3\*A\*(1-exp(-2\*lambda\*h))\*(exp(lambda\*h)-exp(-lambda\*h)))/(exp(lambda\*h)-exp(-lambda\*h))] \*G/(-1+2\*nu);

$$\begin{aligned}
 \sigma_6 := & -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 C3 \left[ \frac{(-1+2v) e^{3\lambda h}}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} + \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left( \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. -\frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A e^{-3\lambda h}}{C3} + (1-2v) e^{-\lambda h} + \left( -4\lambda h + 8\lambda h v \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A}{C3} \right) e^{\lambda h} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A (1 - e^{-2\lambda h}) (e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})}{C3} \right] \right) G
 \end{aligned}$$

> sigma7:= -2\*[(-C3\*exp(3\*lambda\*h)+2\*C3\*exp(3\*lambda\*h)\*nu-4\*exp(lambda\*h)\*C3\*h\*lambda+8\*exp(lambda\*h)\*lambda\*C3\*nu\*h-exp(-3\*lambda\*h)\*alpha[0]\*A+exp(-lambda\*h)\*C3-2\*exp(-lambda\*h)\*C3\*nu+exp(-lambda\*h)\*alpha[0]\*A)/(exp(lambda\*h)-exp(-lambda\*h))] \*G/(-1+2\*nu);

$$\sigma_7 := -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 \left[ \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left( -C_3 e^{3\lambda h} + 2 C_3 e^{3\lambda h} v \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 4 e^{\lambda h} C_3 h \lambda + 8 \lambda h e^{\lambda h} C_3 v - e^{-3\lambda h} \alpha_0 A + e^{-\lambda h} C_3 \right. \right. \\ \left. \left. - 2 e^{-\lambda h} C_3 v + e^{-\lambda h} \alpha_0 A \right) \right] G \right)$$

```
> sigma8:= -2*C3*G* [ (-1+2*nu)*exp(3*lambda*h)+4*lambda*h*(-
1+2*nu)* (exp(lambda*h) )-exp(-3*lambda*h)*alpha[0]*A*1/C3-exp(-
lambda*h)* (-1+2*nu-alpha[0]*A*1/C3) ) / (exp(lambda*h) -exp(-
lambda*h) ) ] / (-1+2*nu) ;
```

$$\sigma_8 := -\frac{1}{-1+2v} \left( 2 C_3 G \left[ \frac{1}{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}} \left( (-1+2v) e^{3\lambda h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \lambda h (-1+2v) e^{\lambda h} - \frac{\alpha_0 A e^{-3\lambda h}}{C_3} - e^{-\lambda h} \left( -1+2v \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_0 A}{C_3} \right) \right] \right)$$

```
> z:=h:
```

```
> W2;
```

$$\frac{1}{2} \left( (-2 \lambda h - 4 v + 4) C_3 - 2 C_3 (2 + \lambda h - 2 v) e^{(2\lambda h)} + (4 v + 2 \lambda h - 4) C_3 \right. \\ \left. - 2 C_3 e^{(2\lambda h)} (-\lambda h + 2 v - 2) \right) / (\lambda (-e^{(\lambda h)} + e^{(-\lambda h)}))$$

```
> W3 := C3*2* (-
1+nu)*exp(3*lambda*h) + (alpha[0]*A*1/4*1/C3)*exp(-
3*lambda*h) + exp(-lambda*h)* (-1+nu) - alpha[0]*A*1/C3*1/2) -
2*exp(lambda*h)* (nu-1-alpha[0]*A*1/C3*1/8) ) / (lambda* (-
exp(lambda*h) + exp(-lambda*h) ) ) ;
```

$$W_3 := 2 C_3 \left( (-1+v) e^{(3\lambda h)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_0 A e^{(-3\lambda h)}}{C_3} + e^{(-\lambda h)} \left( -1+v - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A}{C_3} \right) \right. \\ \left. - 2 e^{(\lambda h)} \left( v - 1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_0 A}{C_3} \right) \right) / (\lambda (-e^{(\lambda h)} + e^{(-\lambda h)}))$$

```
> simplify(W3-W2);
```

$$\frac{1}{2} \left( 4 e^{(3\lambda h)} C_3 - 4 e^{(3\lambda h)} C_3 v - e^{(-3\lambda h)} \alpha_0 A + 4 e^{(-\lambda h)} C_3 - 4 e^{(-\lambda h)} C_3 v \right. \\ \left. + 2 e^{(-\lambda h)} \alpha_0 A + 8 e^{(\lambda h)} C_3 v - 8 C_3 e^{(\lambda h)} - e^{(\lambda h)} \alpha_0 A \right) / (\lambda (e^{(\lambda h)} - e^{(-\lambda h)}))$$

```
> z:=h/2:
```

```
> W2;
```

$$\frac{1}{2} \left( \left( (3\lambda h + 4\nu - 4) C3 - \alpha_0 A \right) e^{\left(\frac{\lambda h}{2}\right)} - 4 C3 \left( \nu - 1 - \frac{\lambda h}{4} \right) e^{\left(\frac{5\lambda h}{2}\right)} \right. \\ \left. + \left( (-4\nu + 4 - \lambda h) C3 + \alpha_0 A \right) e^{\left(-\frac{\lambda h}{2}\right)} - e^{\left(-\frac{5\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A + e^{\left(-\frac{3\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A \right. \\ \left. + 4 C3 \left( -\frac{3\lambda h}{4} + \nu - 1 \right) e^{\left(\frac{3\lambda h}{2}\right)} \right) / (\lambda (e^{(\lambda h)} - e^{(-\lambda h)}))$$

> W3 := C3\*2\*( (-1+nu)\*exp(3\*lambda\*h) + (alpha[0]\*A\*1/4\*1/C3)\*exp(-3\*lambda\*h) + exp(-lambda\*h) \* ((-1+nu) - alpha[0]\*A\*1/C3\*1/2) - 2\*exp(lambda\*h) \* (nu-1-alpha[0]\*A\*1/C3\*1/8) ) / (lambda \* (-exp(lambda\*h) + exp(-lambda\*h))) ;

$$W3 := 2 C3 \left( (-1 + \nu) e^{(3\lambda h)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_0 A e^{(-3\lambda h)}}{C3} + e^{(-\lambda h)} \left( -1 + \nu - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 A}{C3} \right) \right. \\ \left. - 2 e^{(\lambda h)} \left( \nu - 1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha_0 A}{C3} \right) \right) / (\lambda (-e^{(\lambda h)} + e^{(-\lambda h)}))$$

> simplify(W3-W2) ;

$$\frac{1}{2} \left( 4 e^{(-\lambda h)} C3 \nu - 2 e^{(-\lambda h)} \alpha_0 A + e^{\left(-\frac{\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A - 4 e^{\left(-\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 \nu + 4 e^{(3\lambda h)} C3 \nu \right. \\ \left. + 4 C3 e^{\left(\frac{3\lambda h}{2}\right)} \nu + 4 C3 e^{\left(\frac{5\lambda h}{2}\right)} + 8 C3 e^{(\lambda h)} - 8 e^{(\lambda h)} C3 \nu + e^{\left(-\frac{3\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A \right. \\ \left. + 3 e^{\left(\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 h \lambda - 4 e^{(-\lambda h)} C3 - e^{\left(-\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 h \lambda - 4 C3 e^{\left(\frac{3\lambda h}{2}\right)} - e^{\left(-\frac{5\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A \right. \\ \left. - 4 e^{(3\lambda h)} C3 + e^{(-3\lambda h)} \alpha_0 A + e^{(\lambda h)} \alpha_0 A - 4 e^{\left(\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 + 4 e^{\left(-\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 \right. \\ \left. - 3 C3 e^{\left(\frac{3\lambda h}{2}\right)} \lambda h - 4 C3 e^{\left(\frac{5\lambda h}{2}\right)} \nu + 4 e^{\left(\frac{\lambda h}{2}\right)} C3 \nu - e^{\left(\frac{\lambda h}{2}\right)} \alpha_0 A + C3 e^{\left(\frac{5\lambda h}{2}\right)} \lambda h \right) \\ / (\lambda (e^{(\lambda h)} - e^{(-\lambda h)}))$$

## Annexe 5

### 5.1. Programme de calculs les coefficients thermiques $a_n$ .

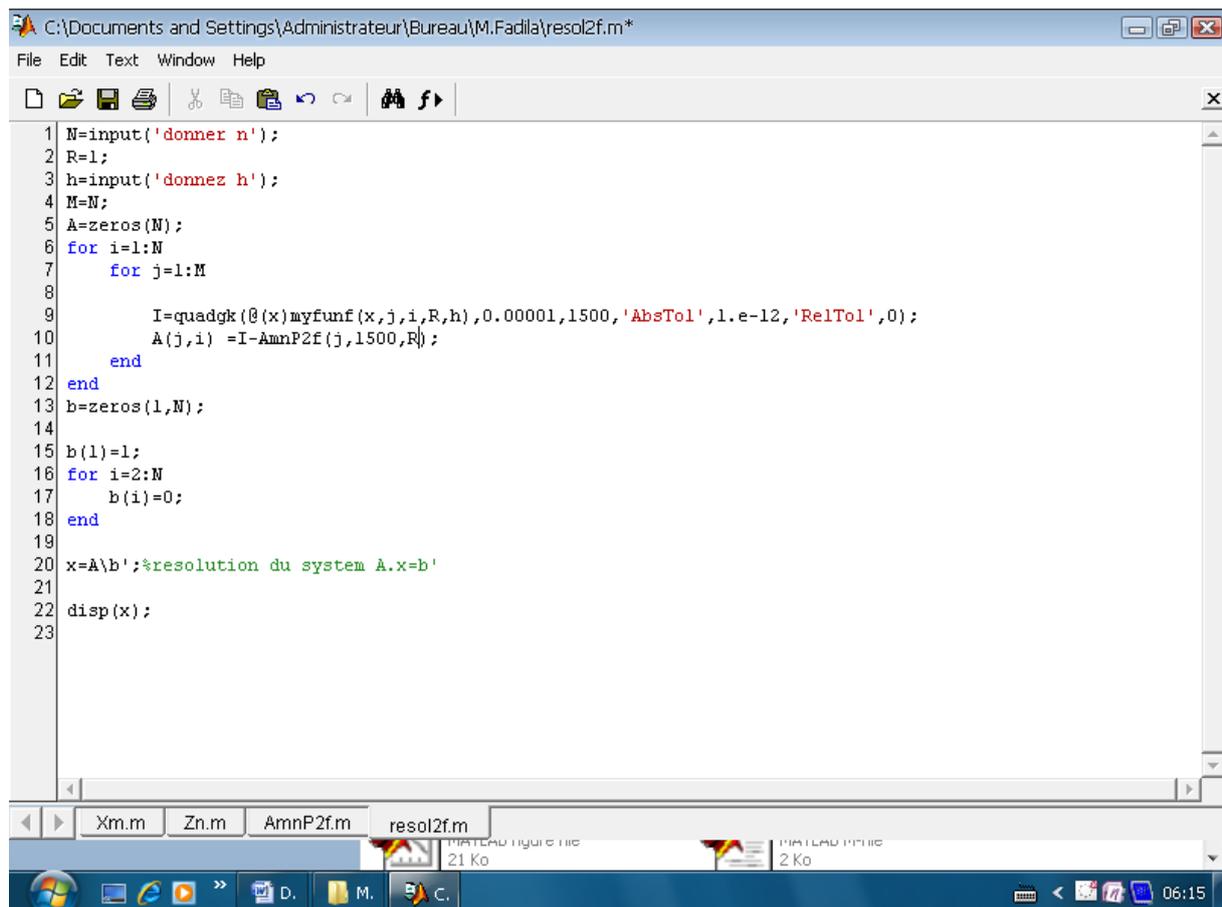
```
function [X]=Xm(c,m,x)  
X=(besselj(m,x.*c/2)).^2;
```

```
function [Z]=Zn(R,n,x)  
Z=besselj(n+0.5,x.*R/2).*besselj(-n-0.5,x.*R/2);
```

%cette fonction calcule la partie infinie de l'intégrale Amn (2 ème  
%partie)-estimation asymptotique du bessel function-

```
function [I]=AmnP2f(m,lb0,R)  
I=(4/((pi*R)^2))*((sin(lb0*R))/lb0-R*cosint(lb0*R)-(((-1)^m)/2)*((1-cos(2*lb0*R))/lb0-  
2*R*mfun('Ssi',2*lb0*R)));
```

%cette fonction calcule la partie infinie de l'intégrale Amn (2 ème  
%partie)-estimation asymptotique du bessel function-



```
C:\Documents and Settings\Administrateur\Bureau\M.Fadila\resol2f.m*  
File Edit Text Window Help  
1 N=input('donner n');  
2 R=1;  
3 h=input('donnez h');  
4 M=N;  
5 A=zeros(N);  
6 for i=1:N  
7     for j=1:M  
8  
9         I=quadgk(@(x)myFunf(x,j,i,R,h),0.00001,1500,'AbsTol',1.e-12,'RelTol',0);  
10        A(j,i) =I-AmnP2f(j,1500,R);  
11    end  
12 end  
13 b=zeros(1,N);  
14  
15 b(1)=1;  
16 for i=2:N  
17     b(i)=0;  
18 end  
19  
20 x=A\b';%resolution du system A.x=b'  
21  
22 disp(x);  
23
```

### 5.2. Programme de calculs les coefficients thermiques $\beta_n$ .

```
function y=ff1(x,m,n,R)
y=x.*((besselj(m,x.*R/2)).^2-(besselj(m+2,x.*R/2)).^2).*x.*(besselj(n+0.5,x.*R/2).*besselj(-
n-0.5,x.*R/2)-besselj(n+3/2,x.*R/2).*besselj(-n-3/2,x.*R/2));
```

```
function y=myfun2f(x,m,n,R,h)
y=((exp(2*x*h)-exp(-2*x*h)+4*x*h)/(exp(2*x*h)+exp(-2*x*h)-
2)).*x.*((besselj(m,x.*R/2)).^2-
(besselj(m+2,x.*R/2)).^2).*x.*(besselj(n+0.5,x.*R/2).*besselj(-n-0.5,x.*R/2)-
besselj(n+3/2,x.*R/2).*besselj(-n-3/2,x.*R/2));
```

%cette fonction calcule la partie infinie de l'intégrale Amn (2 ème  
%partie)-estimation asymptotique du bessel function-

```
function [I]=BmnP2(m,n,lb0,R)
I=((128*(-1)^m*(m+1)*(n+1))/(pi^2*R^3))*((1+cos(2*lb0*R))/(2*lb0*R)+sinint(2*lb0*R)-
pi/2);
```

The screenshot shows a MATLAB script editor window titled 'C:\Documents and Settings\Administrateur\Bureau\M.Fadila\resol\_ter\_elas.m'. The script contains the following code:

```
1 N=input('donner n');
2 M=N;
3 h=input('donner h');
4
5 A=zeros(N);
6 for i=1:N
7     for j=1:M
8         [I1,e] = quadgk(@(x)ff1(x,j-1,i-1,1),20,1500,'AbsTol',1.e-12,'RelTol',0);
9         I2=quadgk(@(x)myfun2f(x,j-1,i-1,1,h),0,20,'AbsTol',1.e-12,'RelTol',0);
10        A(j,i) =I1+I2+BmnP2(j-1,i-1,1500,1);
11    end
12 end
13 b=zeros(1,N);
14
15 for j=1:N
16     b(j)=B2M(j);
17 end
18
19 x=A\b';%resolution du system A.x=b'
20
21 disp(x);
22
```

The script uses the functions defined above to calculate the coefficients  $\beta_n$ . The window also shows a taskbar at the bottom with various icons and the system clock showing 06:31.