

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

Laboratoire de Commande des Processus



Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de

Magister

en **Automatique**

Option : **Robotique et Productique**

par

Hocine BENSLIMANE

Ingénieur d'Etat en Automatique de l'Université de Jijel

Intitulé

Commande Itérative des Systèmes Non Linéaires

Soutenu le : **13/05/2009** devant le Jury composé de :

H. CHEKIREB	Professeur à l'ENSP	Président
D. BOUKHETALA	Professeur à l'ENSP	Rapporteur
L. NEZLI	Maître de Conférences à l'ENSP	Examineur
B. HEMICI	Maître de Conférences à l'ENSP	Examineur
R. ILLOUL	Chargé de cours à l'ENSP	Examineur

Année 2008/2009

ملخص :

العمل المعروض في هذه المذكرة مخصص لتركيب قوانين التحكم التكيفي بالتمرن المتعاقب للأنظمة غير الخطية. يرهن انه من اجل نظام غير خطي معطى إذا وجد قانون تحكم تكيفي بواسطة تقنية ليونوف و دالة ليونوف تحقق بعض الشروط يمكننا إذن تمديد قانون التحكم التكيفي هذا إلى الأنظمة التكرارية التي تعمل في مجال زمني محدود. عرضنا مقارنة من المراجع تعتبر حالات النظام قابلة للقياس و بالارتكاز على هذه التقنية طورنا طريقة أخرى للأنظمة التي حالاتها غير قابلة للقياس و هذا بإضافة مراقب الحالات. تقنية أخرى طورناها كذلك للتحكم التكراري في الأذرع الآلية جربت بالمحاكاة على نموذج الذراع الآلي PUMA 560 في حالة انجازه لوظيفة متكررة.

كلمات مفتاحية : التحكم بواسطة التمرن المتعاقب التكيفي, الأنظمة الاخطية, تقنية ليونوف, التحكم التكيفي, الأذرع الآلية.

Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la synthèse de commandes adaptatives par apprentissage itératif pour les systèmes non linéaires. On montre, en se basant sur la théorie de Lyapunov, que si pour un système non linéaire donné, une commande adaptative pourra être synthétisée, il est alors possible d'étendre cette loi de commande adaptative aux systèmes répétitifs. Ceci est valable si certaines conditions sur la fonction de Lyapunov sont satisfaites. En premier lieu et sur la base de la littérature spécialisée, nous avons présenté une commande pour ces systèmes où ses états sont supposées accessibles. En s'inspirant de cette technique, nous avons proposé une autre méthode dédiée à ces systèmes où cette fois-ci les états sont supposées inaccessibles. Ceci est obtenu en combinant la commande adaptative avec un observateur d'état adaptative. Une seconde technique a été également développée pour les robots manipulateurs et validée par simulation dans le cas du robot PUMA560 exécutant une tâche répétitive.

Mots clé : commandes adaptatives par apprentissage itératif, systèmes non linéaires, technique de Lyapunov, commande adaptative, robots manipulateurs.

Abstract

This work deals with the adaptive iterative learning control design for uncertain nonlinear systems. It is shown that, for a given nonlinear system, if a Lyapunov based adaptive control law is available, and the Lyapunov function satisfies certain conditions, it is straightforward to extend the adaptive controller to handle repetitive systems operating over a finite time interval. In fact, an approach which considers the states available is presented. Based on this technique, we propose an other method based on adaptive observer for the systems where the states are not available. A second technique has been developed for repetitive control of uncertain robot manipulator and applied by simulation in the case of the robot PUMA 560 executing a repetitive task.

Key words: adaptive iterative learning control, nonlinear systems, Lyapunov technique, adaptive control, robot manipulator.

A mes parents

Remerciement

Avant tout je remercie Dieu, qui m'a permis d'accomplir ce travail dans de bonnes conditions. Et je remercie ma mère et mon père qui m'ont aidé et soutenu tout le long de mes études.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Commande des Processus (L.C.P) du département du Génie Electrique de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger sous la direction de Monsieur D. BOUKHETALA, Professeur à l'ENSP que je tiens à remercier pour la proposition du sujet, pour sa gentillesse, sa disponibilité et pour ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Je remercie tout les membres de mon jury pour leur présence afin de pouvoir juger de mon Travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à tous mes professeurs du laboratoire d'Automatique Mr TADJINE, Mr CHEKIREB, Mr BOUCHRIT, Mr BOUKHETELA, Mr BOUDJEMAA, Mr STIHI....pour Tout ce qu'ils m'ont appris....

Je remercie également tout personne m'ayant aidé ne serait- ce- que par une parole.

Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE	01
CHAPITRE 1. MOTIVATION ET POSITION DU PROBLEME	
1. Introduction	04
1.2. Définitions	05
1.2.1. Commande par apprentissage itératif en boucle ouverte	05
1.2.2. Commande par apprentissage itératif en boucle fermée	05
1.3. Premières lois de la Commande par apprentissage itératif	06
1.4. Commande par apprentissage itératif Linéaire pour les systèmes non linéaires	06
1.4.1. Synthèse optimale robuste	07
1.4.2. Analyse des performances	09
1.4.3. Anciens problèmes et nouvelles solutions	11
1.5. Commande par apprentissage itératif non Linéaire pour les systèmes non linéaires	12
1.5.1. Commande par apprentissage itératif Quasi optimal	13
1.5.2. Relaxation des conditions de l'initialisation identique	16
1.7. Conclusion	17
CHAPITRE 2. COMMANDE ADAPTATIVE PAR APPRENTISSAGE ITERATIF	
2.1. Introduction	18
2.2. Synthèse de la commande adaptative par apprentissage itératif	19
2.3. Remarque	26
2.4. Application sur une Classe de systèmes non linéaires	28
2.4.1. Synthèse de la commande par la technique du backstepping	28
2.4.2. Exemple illustrative	32
2.4.3. Résultats de simulation	33
2.5. Conclusion	34
CHAPITRE 3. COMMANDE ADAPTATIVE PAR APPRENTISSAGE ITERATIF AVEC OBSERVATEUR	
3.1. Introduction	35

3.2. Synthèse de la commande adaptative par apprentissage itératif à base d'observateur d'état	36
3.3. Application sur une Classe de systèmes non linéaires	45
3.3.1. Hypothèses	46
3.3.2. Synthèse de l'observateur adaptatif	46
3.3.3. Synthèse de la commande par la technique du backstepping	48
3.3.4. Exemple illustrative	55
3.3.5. Résultats de simulation	56
2.4. Conclusion	58
CHAPITRE 4. COMMANDE ADAPTATIVE PAR APPRENTISSAGE ITERATIF APPLIQUE AUX ROBOTS MANIPULATEURS	
4.1. Introduction	59
4.2. Robot manipulateur modèle et propriétés	60
4.3. Synthèse de la commande	63
4.3.1. Synthèse de la commande adaptative par apprentissage itératif	63
4.3.2. Erreur du système	65
4.3.3. Analyse de la stabilité	66
4.3.4. Loi de commande sans mesure des vitesses articulaires	74
4.4. Remarques	76
4.5. Résultats de simulation	76
4.5.1. Résultats de simulation avec mesure des vitesses articulaires	78
4.5.2. Résultats de simulation sans mesure des vitesses articulaires	83
4.6. Conclusion	87
CONCLUSION GENERALE	88
BIBLIOGRAPHIE	
ANNEXE	

Introduction Générale

L'automaticien dispose à l'heure actuelle d'une palette d'outils assez large pour lui permettre de résoudre de façon satisfaisante la plupart des problèmes simples de commande qu'il peut être amené à rencontrer. Cependant, des difficultés demeurent lorsqu'il s'agit de systèmes complexes, dont les paramètres varient dans le temps et qui comportent bien souvent des non linéarités. Pour ce type de système, une modélisation précise est difficile à obtenir et la loi de commande synthétisée peut conduire à un niveau de performance insuffisant.

Dans le cas de processus à fonctionnement répétitif, l'utilisation d'un contrôleur par apprentissage permet d'améliorer considérablement le niveau de performances globales car celui-ci apprend en permanence. Il parvient à compenser efficacement l'erreur de suivi de trajectoire et les effets des perturbations répétitives.

Après plus de deux décennies de recherche intensive, la commande par apprentissage itérative (CAI) est maintenant une technique de commande bien établie qui s'adapte aux systèmes qui sont répétitif par nature. En général, l'objectif de cette technique est de générer, de façon itérative, des entrées de commande conduisant à la poursuite parfaite pendant un intervalle de temps fini (voir, par exemple, Arimoto et Miyazaki, 1984 ; Arimoto, 1996 ; Bien et Xu, 1998 ; Chen et Wen, 1999 ; Qu et Xu, 2002 ; Tayebi, 2004).

Dans les années 90, une nouvelle approche de la CAI, appelée CAI adaptative, basé sur la théorie de Lyapunov, a été introduite pour surmonter certaines limitations de l'approche initial (Chien et Yao, 2004 ; French et Rogers, 2000 ; Ham, Qu et Kaloust, 1995 ; Ham, Qu et Johnson,

2001 ; Moore, 1999). Cette nouvelle méthodologie de synthèse fournit des outils puissants pour manipuler les systèmes complexes qui étaient difficiles à commander en utilisant les approches classiques. En fait, parmi les avantages de cette approche, on peut citer la relaxation de la condition de rajustement et la condition de Lipschitz et la capacité de traiter les systèmes avec degré relatif élevé. L'ajustement des paramètres de commandes peut être exécuté en fonction des itérations (Xu, 2002), en fonction du temps (French et Rogers, 2000), ou en combinant les deux (Qu et Xu, 2002).

Dans ce travail, nous présentons la formulation de CAI adaptative pour les systèmes non linéaires incertains introduite par (Tayebi et al 2007), et basé sur cette formulation nous avons introduit une formulation similaire mais dans notre cas les états de systèmes sont estimés par un observateur d'état. En fait, nous présentons une procédure systématique pour la synthèse de la CAI adaptative pour les systèmes non linéaires incertains basés sur l'existence d'une fonction de Lyapunov. La loi d'adaptation paramétrique est tout à fait générale dans le sens qu'elle dépend d'une certaine grandeur scalaire γ permettant de choisir le type désiré parmi les trois types d'adaptation discutés ci-dessous : une adaptation dans le domaine de temps pour $\gamma = 0$, une adaptation dans le domaine des itérations pour $\gamma = 1$, et une combinaison des deux pour $\gamma \in]0, 1[$.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres qui peuvent être résumé comme suit :

Le premier chapitre est dédié à la présentation de l'état de l'art de la commande par apprentissage itératif, les outils de l'analyse et de la synthèse.

Le deuxième chapitre concerne l'étude de la commande adaptative par apprentissage itératif, basé sur la technique de Lyapunov. La méthode présentée dans ce chapitre est plus générale que l'approche classique, dans le sens où elle permet de traiter une large classe de systèmes non linéaires en relaxant certaines conditions nécessaires à l'approche classique.

Dans le troisième chapitre, nous avons étendu la méthode, traitant les systèmes à états accessibles, au cas de systèmes à états supposés inaccessibles. Ceci est obtenu en synthétisant une commande avec un observateur.

Le chapitre quatrième est consacré à l'étude de la commande adaptative par apprentissage itératif appliquée en robotique. Dans ce chapitre, nous avons proposé une loi de commande adaptative par apprentissage itératif pour les robots exécutants des tâches répétitives. L'application de cette loi au robot PUMA 560 est effectuée par simulation.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale englobant les perspectives et les investigations futures à poursuivre.

Chapitre 1

Motivation et position du problème

1.1. Introduction

On se propose de synthétiser une commande afin d'assurer une poursuite de la trajectoire de référence, dans le cas d'un système à tâche répétitive. Une caractéristique commune de cette classe de problèmes de commande réside dans le fait que, la tâche doit être exécutée sur une période finie. Après un certain nombre d'itérations, Il faut que la trajectoire de référence soit suivie d'une façon parfaite, sachant que les itérations sont effectuées dans les mêmes conditions.

La plupart des méthodes de commandes existantes, y compris la commande adaptative ou la commande robuste, sont inappropriées pour cette classe de systèmes pour deux raisons. La première est que, ces méthodes de commandes sont caractérisées par la convergence asymptotique, ainsi on ne peut pas atteindre la poursuite idéale en un temps fini. La seconde raison, qui est la plus importante, cette classe de méthodes ne tient pas compte des informations issues des exécutions précédentes. Car pour ces méthodes conventionnelles, les performances ne peuvent pas être améliorées en fonction de la répétition des tâches. En effet, la commande par apprentissage itératif est apparue comme une alternative afin d'améliorer les performances du système au cours de la répétition de la tâche. Cette commande est caractérisée par l'utilisation de l'information issue des cycles précédents.

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions et notion de base sur la commande à apprentissage itératif, ainsi qu'une synthèse sur l'ensemble des méthodes et approches rencontrées dans la littérature.

1.2. Définitions :

1.2.1. Commande par apprentissage itératif en boucle ouverte

Une loi de commande par apprentissage itératif en boucle ouverte est donnée par

$$u_{k+1}(t) = g(u_k(t), e_k(t), t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

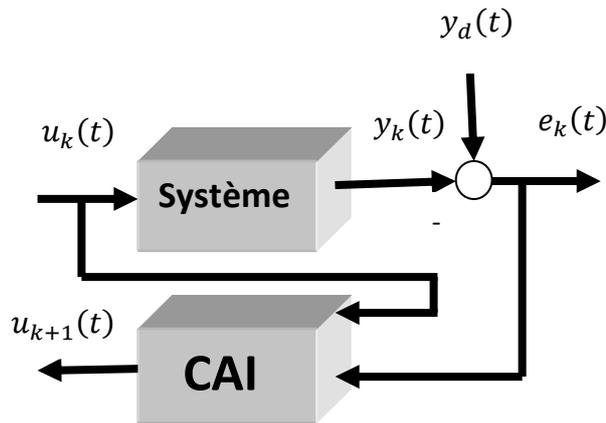


Fig. 1.1 schéma de la CAI en boucle ouverte

1.2.2. Commande par apprentissage itératif en boucle fermée

Une loi de commande par apprentissage itérative en boucle fermée est donnée par

$$u_{k+1} = g(u_k, e_{k+1}, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

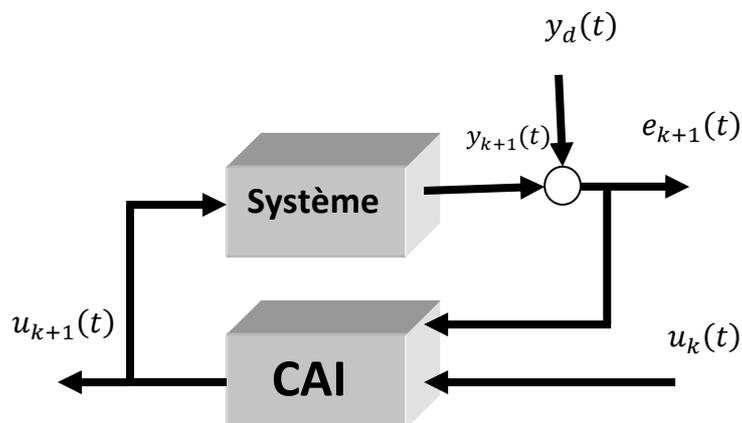


Fig. 1.2 schéma de la CAI en boucle fermée

1.3. Premières lois de la commande par apprentissage itératif

Les toutes premières lois d'apprentissage formant les bases théoriques sont issues des travaux émanant du domaine de la robotique. A l'époque des premières publications (Arimoto et al, 1984), l'objectif était de résoudre un problème spécifique à cette classe de systèmes non linéaires. À savoir l'amélioration de la précision du suivi de trajectoires des robots manipulateurs. Ainsi les deux premières lois développées sont

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} e_k(t) \quad (1.3)$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta_2 e_k(t) \quad (1.4)$$

La première loi d'apprentissage donnée par l'équation (1.3) exploite la dérivée de l'erreur, d'où son appellation de Type-D. Elle est à l'origine de nombreux articles, et a été déclinée en différentes variantes, comme les lois de type PD ou PID.

La deuxième loi (1.4) génère une loi de commande proportionnelle à l'erreur $e(t)$, d'où son appellation de Type-P. Mais son utilisation est moins générale que la précédente car elle est plus restrictive sur le système.

Ces deux lois d'apprentissage sont simples et faciles à implémenter dans un calculateur dès lors que les gains β_1 et β_2 sont constants.

1.4. Commande par apprentissage itératif linéaire pour les systèmes non linéaires :

On considère le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (1.5)$$

Où $t \in [0, T]$ et T étant la durée d'un cycle de l'exécution de la tâche. $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, f vecteur des fonctions linéaires, et g est une fonction non linéaire. L'objectif de la commande par apprentissage est de synthétiser une séquence de commande appropriée $u_k(t)$ telle que la sortie du système $y_k(t)$ s'approche à la trajectoire de référence $y_d(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Dans le premier article en CAI (Arimoto et al, 1984), est proposée la plus simple commande par apprentissage itératif, de type linéaire de premier ordre :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \beta e_k(t) \quad (1.6)$$

Où $e_k = y_d - y_k$, et β est un gain constant d'apprentissage. La commande initiale $u_0(t)$, $t \in [0, T]$ est mise à zéro ou initialisée par certain mécanisme de commande approprié. La condition de convergence est déterminée par la relation suivante :

$$\|u_{k+1}\|_\lambda \leq \|1 - \beta g_u\| \|u_k\|_\lambda, \quad \|1 - \beta g_u\| = \gamma < 1 \quad (1.7)$$

Avec $\|*\|_\lambda = \max_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|*\|$, et $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$. La condition de commandabilité est que le gain du système $g_u \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Avec choix propre du gain d'apprentissage, la condition de convergence (1.7) peut être vérifiée si l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ est connu *a priori*.

Il existe deux conditions indispensables dans la CAI de type linéaire :

- 1) $f(x(t), u(t), t)$ et $g(x(t), u(t), t)$ satisfont les conditions de continuité globale de Lipchitz par rapport à x et u .
- 2) Les conditions initiales sont identiques $y_d(0) = y_k(0)$.

Mathématiquement, il est connu que les conditions de continuité globale de Lipchitz garantissent l'existence et l'unicité de l'équation différentielle (1.5) pour n'importe quelle valeur initiale. Dans la théorie de la CAI, les conditions de continuité globale de Lipchitz sont d'une grande importance car elles conduisent au fait que si l'entrée d'un système est finie alors celui-ci ne peut diverger en un temps fini.

La condition de l'initialisation identique de la trajectoire réelle et de la trajectoire de référence, constitue une hypothèse fondamentale dans le développement des lois de CAI. Cette condition a été critiquée par les spécialistes dans le domaine car elle doit être vérifiée, si la poursuite souhaitée devrait être parfaite.

1.4.1. Synthèse optimale robuste :

La commande H_∞ est une synthèse systématique optimale robuste. Dans la synthèse robuste, la stabilité est favorisée au détriment des performances. Une synthèse optimale pure peut être sensible aux incertitudes du système, pour la CAI, nous avons besoin d'une synthèse optimale robuste. La tâche la plus délicate est de pouvoir synthétiser une CAI optimale robuste pour les systèmes non linéaires de la forme (1.5) Dans la plupart des développements théoriques des lois de commande non linéaires, il est fortement souhaité d'aboutir à une loi de

commande dont les coefficients de réglages et la synthèse peuvent être déterminés d'une manière systématique. Ceci constitue un problème difficile à résoudre pour les systèmes non linéaires. La tâche est fortement liée au choix de l'indice de performance (ou la fonction de coût) et le type d'incertitudes du système. Ici, le but est de synthétiser une CAI optimale robuste pour le système (1.5) afin de maximiser la vitesse de convergence sous une incertitude d'intervalle. La synthèse de la CAI peut être formulée en un problème d'optimisation min-max pour une solution systématique. L'opération maximum pour maximiser l'influence de l'incertitude du système, et l'opération minimum doit réduire au minimum le facteur d'apprentissage qui détermine la vitesse de convergence.

La vitesse de convergence est déterminée par la relation suivante :

$$\|u_{k+1}\|_{\lambda} \leq \gamma \|u_k\|_{\lambda} \quad (1.8)$$

La plus lente est donnée par $\|u_{k+1}\|_{\lambda} = \gamma \|u_k\|_{\lambda}$.

Définissons une équation caractéristique dans le domaine d'itération qui indique la vitesse de convergence

$$z - \gamma = z - \left\| 1 - \beta \frac{\partial g}{\partial u} \right\| = 0 \quad (1.9)$$

Plus γ est petit, plus la vitesse de convergence est rapide. Cependant la valeur de γ dépend du gain inconnu du système $\frac{\partial g}{\partial u}$ qui peut être non linéaire, incertain et variant dans l'intervalle $\mathcal{D} = [\alpha_1, \alpha_2]$. Le gain d'apprentissage β devrait être choisi de telle manière à rendre γ le plus petit en présence de l'incertitude d'intervalle.

Ce problème peut être formulé mathématiquement comme le problème min-max

$$J = \min_{\beta \in \mathbb{R}} \max_{g_u \in \mathcal{D}} \|1 - \beta g_u\|, \quad \mathcal{D} = [\alpha_1, \alpha_2] \quad (1.10)$$

Notons que l'opération min-max permet une synthèse robuste optimale, car l'opération minimum réalise une vitesse de convergence rapide en réduisant γ , et l'opération maximum considère le mauvais cas de la convergence d'apprentissage par maximisation de son influence à partir de g_u .

Pour généraliser la discussion à différents schémas de la CAI, le problème d'optimisation robuste, incluant (1.10) comme un cas particulier, est formulé comme suit:

$$J = \min_{\beta \in \mathbb{R}} \max_{g_u \in \mathcal{D}} \|p - \beta g_u\|, \quad p \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Le facteur de convergence de l'apprentissage ci-dessus $\|p - \beta g_u\|$ correspond au schéma d'apprentissage itératif suivant :

$$u_{k+1} = pu_k(t) + \beta e_k(t) \quad (1.12)$$

Où p est en général un facteur de pondération, qui peut être considéré aussi comme un facteur d'oubli quand $p \in]0, 1[$. La solution de (1.11) est donnée dans la proposition suivante.

Proposition (Xu et Tan, 2002)

Quand $\beta = \frac{2p}{\alpha_2 + \alpha_1}$, $J = \min_{\beta \in \mathbb{R}} \max_{g_u \in \mathcal{D}} \|1 - \beta g_u\|$ atteint son minimum pour γ^* donnée par :

$$\gamma^* = |p| \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \quad (1.13)$$

γ^* assure la plus rapide convergence de la réponse de la CAI. Pour accomplir l'apprentissage parfait, il est nécessaire que $p = 1$.

1.4.2. Analyse des performances :

La CAI permet d'atteindre la poursuite parfaite dans un intervalle de temps $[0, T]$, donc atteindre les performances souhaitées dans le domaine temporel. Donc, elle peut avoir un autre comportement selon l'axe des itérations. Il est bien connu qu'une séquence convergente peut produire une réponse inacceptable.

Dans la commande classique, les performances sont évaluées en terme de temps de stabilisation, dépassement, réponse oscillante, etc. Dans le domaine d'itération il est nécessaire de mesurer les performances d'une manière semblable. On doit évaluer un procédé d'itération en terme de la vitesse de convergence, erreur de poursuite maximum, et l'intervalle maximum de convergence monotonique. D'une manière générale, il est très difficile d'évaluer le

comportement d'un processus non linéaire, et il est encore plus dur pour la CAI où l'on doit évaluer les performances par rapport à l'axe du temps et par rapport à celui des itérations.

Le problème de la vitesse de convergence a été partiellement résolu en introduisant un nouveau facteur Q (Xu et Tan, 2002). Celui-ci a été, à l'origine utilisé pour évaluer l'algorithme des itérations dans l'analyse numérique. Au moyen du facteur Q et de la synthèse robuste optimale, nous pouvons quantifier la vitesse de convergence de l'apprentissage de divers schémas de la CAI. Nous exposons ci-dessous les résultats liés au facteur Q .

Dans un premier lieu, on se pose la question suivante : un schéma de CAI d'ordre supérieur peut-il l'emporter sur un CAI d'ordre inférieur? Depuis les premiers travaux concernant la CAI d'ordre supérieur (Bien et Huh, 1989), il était connu qu'une CAI d'ordre supérieur peut améliorer la vitesse d'apprentissage. Intuitivement, une CAI d'ordre supérieur, utilisant les informations sur la commande précédente et sur plus d'une itération, pourrait améliorer les performances de l'apprentissage du fait que plus d'informations sur la commande précédente est utilisée. Une simple combinaison linéaire de l'information sur la commande précédente ne peut produire aucune nouvelle information. Le plus important, pour une séquence convergente de la CAI, est que les dernières itérations soient plus précises. Une combinaison linéaire des itérations moins précises dégrade les performances.

Récemment, il a été montré qu'il n'existe pas de solution pour une CAI du 2^{ième} ordre discuté dans (Bien et Huh, 1989). La situation n'était pas claire jusqu'à ce que le concept du facteur Q et de la synthèse min-max aient été proposées. La conclusion (Xu et Tan, 2002) était que, la vitesse de convergence de la CAI d'ordre inférieure est toujours plus rapide que celle de l'ordre supérieur en termes de la norme pondérée.

Dans un second lieu, le résultat concerne les trois algorithmes de la CAI linéaire, de types Sécante et de Newton. L'évaluation quantifiée par le facteur Q nous indique cela, en introduisant un gain non-linéaire tel que la CAI de type Sécante ou Newton, la convergence de l'apprentissage peut être considérablement accéléré (Xu et Tan, 2003).

Récemment, l'influence dynamique du domaine de temps sur le processus d'itération a été exploité (Xu et Tan, 2002). Dans une telle circonstance, une dynamique divergente peut être

supprimée par la norme pondérée avec un facteur d'atténuation $e^{-\lambda t}$ suivant l'axe du temps, si λ est suffisamment grand.

Quelques questions se posent naturellement. La première est que le facteur λ n'est un paramètre du système ni un paramètre de synthèse mais, la convergence d'apprentissage en dépend. La seconde, que peut-il se produire si un faible λ est considéré pour la norme pondérée, ou en d'autres termes, quand l'influence de la dynamique n'est pas ignorée? La troisième, quel est l'influence maximale de la dynamique sur la convergence d'apprentissage et peut-on vraiment l'ignorer? La plupart des travaux sur la CAI ont terminé par la supposition que λ est suffisamment grand. Afin de faire le lien entre λ et le comportement dynamique du système, quelques travaux ont été réalisés pour quantifier λ , ce qui mène à plusieurs résultats intéressants (Xu et Tan, 2003).

Si nous employons $\|\cdot\|_\lambda$ (avec λ suffisamment grand) comme norme pour mesurer l'apprentissage, la convergence monotonique est garantie sur l'intervalle du temps $[0, T]$, cependant, si un petit λ est utilisé, la CAI peut seulement garantir la convergence monotonique sur $[0, T_1] \subset [0, T]$, selon la norme $\|\cdot\|_\lambda$. Un petit λ indique que l'évaluation des performances du système est plus restrictive. Il est possible de calculer le minimum de λ exigé pour produire la convergence monotonique sur $[0, T]$ évaluée par $\|\cdot\|_\lambda$. D'autre part, on peut considérer le cas extrême $\lambda \rightarrow 0$, qui mène à la norme suprême. On peut estimer l'intervalle maximum $[0, T_1]$ sur lequel l'apprentissage converge monotoniement selon la norme suprême $\|\cdot\|$.

Etant donné la relation entre les norme $\|\cdot\|_\lambda$ et $\|\cdot\|$, et le minimum λ , la limite maximum de d'erreur de poursuite peut être estimé par $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\lambda e^{\lambda T}$

1.4.3. Anciens problèmes et nouvelles solutions

La condition de continuité globale de Lipchitz et la condition de l'initialisation identique sont deux postulats fondamentaux qui créent la base de la CAI. Ces deux conditions limitent considérablement l'applicabilité de la CAI et encourtent souvent des critiques. Pouvons-nous nous dispenser de ces deux conditions? La réponse est non pour la CAI classique. La condition de continuité globale de Lipchitz empêche le système de commande de diverger, et la condition

de l'initialisation identique assure que la convergence de l'apprentissage peut être réalisée à partir du meilleur départ.

La CAI classique n'utilise pas la connaissance dynamique du système tel que $f(x(t), u(t), t)$, comme par exemple le schéma de la CAI de type linéaire (1.6). La seule connaissance utilisée du système est $g_u \in \mathcal{D}$, indépendamment de la non-linéarité, non-affine et la dynamique incertaine. Elle se concentre également sur une des tâches de commande les plus difficiles : la poursuite parfaite pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ en utilisant seulement la commande de sortie statique. Ainsi, nous ne pouvons pas être plus exigeant avec moins d'informations sur le système.

La seule manière de remédier à ces deux postulats est d'incorporer plus de connaissances sur le système dans la synthèse de la CAI. Comparativement, la condition de continuité globale de Lipchitz est plus facile à généraliser, et la condition de l'initialisation identique est liée à la répétitivité du système qui est plus fondamentale. Dans la prochaine section, nous démontrons comment synthétiser une CAI non linéaire en utilisant entièrement la connaissance dynamique du système.

1.5. Commande par apprentissage itératif non Linéaire pour les systèmes non linéaires

On considère le système dynamique non linéaire suivant :

$$\dot{x} = \theta x^2 + u, \quad x(0) = x_0 \quad (1.14)$$

Avec $\theta \in \mathbb{C}[0, T]$

Soit la trajectoire de référence $x_d(t)$, la loi de commande itérative non linéaire est donnée par

$$u_k(t) = -\hat{\theta}_k(t)x_k^2 - ke_k + \dot{x}_d(t) \quad (1.15)$$

Et la loi d'apprentissage paramétrique non linéaire est la suivante :

$$\hat{\theta}_k(t) = \hat{\theta}_{k-1}(t) + \beta x_k^2 e_k \quad (1.16)$$

Pour l'analyse de la convergence de l'apprentissage, la fonction de Lyapunov suivante est utilisée.

$$V_k = \frac{1}{2} e_k^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \varphi_k^2(\tau) d\tau \quad (1.17)$$

Où $\varphi_k = \theta - \hat{\theta}_k$, et $e_k = x_d - x_k$. On peut prouver que e_k tend vers zero lorsque $k \rightarrow \infty$

Ce type de la CAI basé sur la technique de Lyapunov est appelé aussi commande adaptative par apprentissage itératif.

1.5.1. Commande par apprentissage itératif Quasi optimal

Afin d'équilibrer les performances de la commande par rapport à l'effort de la commande, la commande optimale non linéaire a été le sujet actif des travaux de recherches considérables pendant ces dernières décennies. Par l'application de la programmation dynamique standard, la commande optimale peut être convertie en un problème de résolution de l'équation partielle connue sous le nom d'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Cependant, il y a deux obstacles dans la réalisation de la CAI optimale. Le premier est qu'il est difficile de trouver la commande optimale pour les systèmes non-linéaires généraux en raison de la difficulté de résoudre l'équation partielle non linéaire de HJB. En second lieu, la CAI par défaut est proposée pour manipuler les systèmes incertains.

Pour éviter le premier obstacle, une stratégie de commande sous-optimale a été proposée. Elle est basée sur la commande par la fonction de Lyapunov et la formule de Sontag (Primbs et al 1999), qui fournit les performances sous-optimale aussi bien que la stabilité selon l'horizon du temps pour une large classe de systèmes dynamiques non linéaires. Concernant le deuxième obstacle, nous supposons que la dynamique du système peut être séparée en deux parties, une partie nominale et une partie incertaine comme suit :

$$\dot{x}_k = f_k + \theta(t)x_k^2 + u_k \quad (1.18)$$

Avec $f_k = f(x_k, t)$ est une fonction connue considérée la comme partie nominale. La loi de commande sous-optimale sera synthétisée sur la base de la partie nominale du système

$$\dot{x}_k = f_k + u_k \quad (1.19)$$

La CAI et ainsi que le mécanisme d'adaptation sont utilisés afin de redresser la partie incertaine $\theta(t)x_k^2$.

Il convient de noter que f_k peut être facilement éliminé par l'incorporation d'un terme $-f_k$ dans l'entrée du système u_k . L'annulation est néanmoins d'une manière passive tandis que la synthèse optimale est d'une manière active, en utilisant la connaissance du système f_k . Par exemple, si $f_k = Ax_k$, nous pouvons construire en conséquence un contrôleur linéaire optimal quadratique. De plus, dans beaucoup de systèmes pratiques la partie nominale se compose d'un terme d'amortissement qui est, soit linéaire ou non linéaire, et qui a un effet stabilisant, si f_k est beaucoup plus petite que $\theta(t)x_k^2$, l'effet de l'optimalité peut être mineur. En effet, si le système est prédominé par la partie incertaine, d'autres méthodes de contrôle telles que la commande robuste, la commande adaptative ou la CAI devraient être employées au lieu de la commande optimale. Par contre, si la partie nominale est dominante, l'effet de l'optimalité devient évident. Souvent, dans la pratique on ne sait pas laquelle des deux parties est dominante, ce qui veut dire qu'il n'y a aucun mal de laisser coexister la CAI et la commande optimale.

Considérons un cas particulier $f_k = -x_k^3$ ce qui est un amortissement non linéaire. L'erreur dynamique à l'itération k est donnée comme suit.

$$\dot{e}_k = \dot{x}_d + x_k^3 - \theta(t)x_k^2 - u_k \quad (1.20)$$

La partie nominale de l'erreur dynamique est $\bar{f}_k = \dot{x}_d + x_k^3$. La fonction objective de la commande optimale est :

$$J = \inf_{u_k} \int_0^T [q(e_k) + u_k^2] dt \quad (1.21)$$

S'il est possible de résoudre l'équation de HJB suivante :

$$q(e_k) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V^*}{\partial e_k} \right)^2 + \frac{\partial V^*}{\partial e_k} \bar{f}_k = 0 \quad (1.22)$$

Pour trouver la valeur de la fonction V^* , la commande optimale est donnée comme suit :

$$u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial V^*}{\partial e_k}$$

Cependant, il n'est pas facile de résoudre l'équation de HJB. Par conséquent, la formule du Sontag est introduite pour fournir une solution sous-optimale au système non linéaire (1.20) comme suit :

$$u_{op,k} = \bar{f}_k + \sqrt{(\bar{f}_k)^2 + q(e_k)} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial V}{\partial e_k}\right) \quad (1.23)$$

Avec $\operatorname{sign}(\ast)$ est la fonction signum, et V est une fonction arbitraire de Lyapunov (en général fonction de Lyapunov de commande). On peut voir que l'idée de la commande sous-optimale, par la formule de Sontag, consiste à utiliser une fonction de Lyapunov V remplaçant la valeur de la fonction $V^* = \inf_{u_k} \int_0^T [q(e_k) + u_k^2] dt$ qui est difficile à résoudre à partir de l'équation de HJB. Il est également important de noter comment la partie nominale non linéaire \bar{f}_k est incorporée dans la loi de commande sous-optimale (1.23), qui n'est pas naturellement une simple élimination.

La CAI quasi optimale est simplement réalisée par une combinaison de la commande sous-optimale et la CAI sous une forme additive

$$u_k = u_{op,k} + u_{l,k}, \quad u_{l,k} = k e_k - \hat{\theta}_k(t) x_k^2, \quad \hat{\theta}_k(t) = \hat{\theta}_{k-1}(t) - x_k^2 e_k \quad (1.24)$$

Où $u_{l,k}$ est la partie d'apprentissage avec adaptation paramétrique.

Les performances dépendront du choix de la fonction de pondération $q(e_k)$. Un grand $q(e_k)$ implique plus de pénalité sur l'erreur de poursuite, ce qui conduit à un compromis entre la vitesse de convergence et les efforts de commande. Il offre dans la synthèse un degré de liberté supplémentaire, dans un sens comme le LQR, bien que le problème de commande soit plus difficile (Xu et Tan, 2001).

1.5.2. Relaxation de la condition d'initialisation identique :

Maintenant, nous revenons au problème le plus difficile, pouvons-nous enlever la condition de l'initialisation identique ? A partir de la théorie des équations différentielles, la condition initiale déterminera la trajectoire de la solution d'un système dynamique non linéaire. Une petite variation sur les conditions initiales peut conduire à une solution complètement différente. Un réajustement initial parfait exige que le système de commande soit équipé d'un mécanisme de réajustement précis, ce qui n'est pas toujours possible pour beaucoup de systèmes pratiques.

Notons que dans la CAI classique, l'objectif de la commande est la poursuite de la sortie et les variables d'états ne sont pas prises en considération. Dans la CAI non-linéaire, nous utilisons toutes les connaissances du système particulièrement concernant la dynamique des états. Ceci ouvre une nouvelle perspective, où la condition de l'initialisation identique est remplacée par une condition initiale moins restrictive (condition d'alignement). La condition d'alignement est simplement, l'état final de l'itération précédente devient l'état initial de l'itération actuelle.

Habituellement, la condition de l'initialisation identique implique le réajustement spatial et le réajustement temporel. Tandis que le réajustement du temps est naturel pour une tâche finie et répétée sur une période finie. Le rajustement spatial n'est pas un travail facile. Ce qui rajoute une difficulté supplémentaire dans l'implémentation.

Considérons une trajectoire de référence $x_d(t) \in C^1[0, T]$, qui forme un chemin spatial continu. Quand avons-nous besoin du rajustement spatial ? Il est nécessaire seulement quand le chemin spatial de la trajectoire de référence n'est pas complètement fermé, c.-à-d. $x_d(0) \neq x_d(T)$. Par exemple $x_d = t$, $t \in [0, 1]$. Dans une telle circonstance, une poursuite parfaite conduit à $x_k(T) = x_d(T) \neq x_d(0)$. Par conséquent, un mécanisme indépendant de la commande doit travailler convenablement entre les itérations consécutives afin de ramener l'état du système à la position initiale.

Pour n'importe quelle trajectoire fermée dans l'espace c.-à-d. $x_d(0) = x_d(T)$, nous pouvons employer la condition d'alignement et enlever la condition de réajustement spatiale.

1.8. Conclusion

Les méthodes de la CAI offrent deux degrés de liberté, l'un dans le domaine du temps et l'autre dans le domaine des itérations. Un CAI, évoluant seulement dans le domaine des itérations, évite la synthèse par rétroaction et les analyses de stabilité dans le domaine du temps. Mais la CAI résultante peut perdre la robustesse dans le domaine du temps. En incorporant la rétroaction dans la CAI, l'apprentissage est plus robuste dans le domaine du temps, mais il n'y a aucune garantie que les performances dans le domaine des itérations soient également améliorées par cette rétroaction.

Comme d'autres méthodologies de commande, il y a aussi de nombreux problèmes ouverts dans le domaine de la CAI. Certains problèmes concernant les propriétés géométriques du système tel que le degré relatif, la commande du système telle que l'optimalité dans le domaine du temps et le domaine d'itération. D'autres problèmes sont relatifs à l'implémentation, telle que le bruit de mesure, la saturation d'entrée, la zone morte, etc.

La CAI est un domaine de recherche relativement nouveau, et peut facilement s'intégrer à d'autres méthodes de commande sous la répétitivité du système comme le backstepping, commande optimale, commande adaptative, etc.

Commande adaptative par apprentissage itératif

2.1. Introduction

La commande par apprentissage itératif est maintenant une technique de commande bien adaptée aux systèmes qui sont répétitifs par nature. En général, l'objectif de cette technique est d'utiliser les informations des cycles précédents en vue d'améliorer les performances du système au prochain cycle d'exécution de la tâche.

La synthèse de la commande adaptative par apprentissage itératif pour les systèmes non-linéaires incertains est étudiée dans ce chapitre. En effet, si une loi de commande adaptative basée sur la technique de Lyapunov est disponible pour le système considéré et la fonction de Lyapunov satisfait certaines conditions, il est alors possible d'étendre la commande adaptative pour manipuler les systèmes répétitifs fonctionnant sur un intervalle de temps fini. Les erreurs de poursuite initiales à chaque itération sont, soit mises à zéro soit prises égales à l'erreur obtenue à la fin de l'itération précédente. Ensuite, nous appliquons cette technique sur une classe de systèmes commandés par la technique du backstepping.

2.2. Synthèses de la commande adaptative par apprentissage itératif

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t), \theta, t), \quad (2.1)$$

Où

$x_k \in \mathbb{R}^n$ Le vecteur des états (représente généralement la dynamique de l'erreur).

$u_k \in \mathbb{R}^m$ Le Vecteur de commande.

$\theta \in \mathbb{R}^p$ Le Vecteur de constantes inconnues.

$t \in [0, T]$ Le temps.

$k \in \mathbb{Z}_+$ L'indice des itérations.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$: Fonction non linéaire bornée sur $[0, T]$, lorsque $x_k(t)$ et $u_k(t)$ sont bornées sur $[0, T]$.

Supposons qu'on peut synthétiser une loi de commande sous la forme :

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g(x_k(t), \hat{\theta}_k(t), t) \\ \dot{\hat{\theta}}_k(t) &= h(x_k(t), t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Et qu'il existe une fonction définie positive de la forme :

$$\Phi(x_k, \tilde{\theta}_k) = V(x_k) + W(\tilde{\theta}_k) \quad (2.3)$$

Où V et W sont deux fonctions différentiables définies positives, satisfaisant

$$\dot{\Phi}(x_k, \tilde{\theta}_k) = L_f V_k + L_h W_k \leq -Y(x_k) \quad (2.4)$$

Avec $Y(x_k)$ une fonction définie positive, $\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \theta$ représente l'erreur d'estimation paramétrique, $L_f V \equiv \frac{dV}{dx_k} f$ et $L_h W \equiv \frac{dW}{d\tilde{\theta}_k} h$

Supposons que $h(x_k(t), t)$ est bornée sur $[0, T]$ pourvu que $x_k(t)$ soit bornée, et $W(\tilde{\theta}_k)$ satisfait les propriétés suivantes :

P₁)

$$\left\| \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 \leq \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_k \quad (2.5)$$

P₂)

$$W(\tilde{\theta}_k) - W(\tilde{\theta}_{k-1}) \leq -\Omega(\tilde{\theta}_k) + \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \bar{\theta}_k \quad (2.6)$$

Où $\Omega(\tilde{\theta}_k)$ est une fonction semi définie positive, et $\bar{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}$

Dans ce qui suit, nous utilisons la norme \mathcal{L}_{pe} définie comme suit :

$$\|x(t)\|_{pe} \triangleq \begin{cases} \left(\int_0^t \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, \infty[\\ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Où la norme de x est noter $\|x\|$ et t est le temps fini appartenant à $[0, T]$. On dit que $x \in \mathcal{L}_{pe}$ quant $\|x\|_{pe}$ existe. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1: (Tayebi (2007)) *considérons le système (2.1) en boucle fermée avec la commande adaptative par apprentissage itératif suivante :*

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g(x_k(t), \hat{\theta}_k(t), t) \\ (1 - \gamma)\dot{\hat{\theta}}_k(t) &= -\gamma\hat{\theta}_k(t) + \gamma\hat{\theta}_{k-1}(t) + h(x_k(t), t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec $\gamma \in [0, 1]$, $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$.

Pour $\gamma \in [0, 1]$, on pose $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T)$. Supposons que $x_k(0) = 0$ ou $x_k(0) = x_{k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, Alors :

- i) Pour $\gamma \in [0, 1]$, $x_k(t), \tilde{\theta}_k(t), u_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$
- ii) Pour $\gamma = 1$, $x_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\tilde{\theta}_k(t), u_k(t) \in \mathcal{L}_{2e}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Y(x_k(\tau)) d\tau = 0$. De plus, avec $x_k(0) = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$

Preuve

Premièrement, on démontre (i).

Considérons la fonction définie positive suivante :

$$\Psi(x_k, \tilde{\theta}_k) = V(x_k) + (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_k) \quad (2.8)$$

Dans ce que suit, les notations suivantes seront utilisées :

$$\Psi_k(t) \equiv \Psi(x_k(t), \tilde{\theta}_k(t)), \quad V_k(t) \equiv V_k(x_k(t)), \quad W_k(t) \equiv W_k(\tilde{\theta}_k)$$

La dérivation de (2.8) par rapport au temps compte tenu de (2.1)-(2.5), est donnée comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_k &= L_f V_k + (1 - \gamma) \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \dot{\tilde{\theta}}_k \\ &= L_f V_k + L_h W_k + \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1}) \\ &\leq -\Upsilon(x_k) + \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1}) \\ &\leq \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \tilde{\theta}_k + \gamma \tilde{\theta}_{k-1}) = -\gamma \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par l'utilisation de la propriété P₁, et une version simplifiée de l'inégalité de Yong c-à-d.

$$\frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_{k-1} \leq \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (2.10)$$

Compte tenu de (2.10), l'inégalité (2.9) devient:

$$\dot{\Psi}_k \leq -\gamma \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_k + \gamma \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 + \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (2.11a)$$

Compte tenu de (2.5)

$$\dot{\Psi}_k \leq \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (2.11b)$$

Puisque $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$ et $\hat{\theta}_0(0) = \hat{\theta}_{-1}(T)$, il est clair que $\Psi_0(t)$ est bornée. Par conséquent $x_0(t)$ et $\tilde{\theta}_0(t)$ sont bornés $\forall t \in [0, T]$

Maintenant, on utilise la fonction définie positive suivante :

$$\bar{\Psi}(x_k, \tilde{\theta}_k, t) = \Psi(x_k, \tilde{\theta}_k) + \gamma \int_0^t W(\tilde{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (2.12)$$

La différence entre $\bar{\Psi}_k$ et $\bar{\Psi}_{k-1}$ peut être évaluée comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) &= \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t) \\ &= \Psi_k - \Psi_{k-1} + \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.13a)$$

La substitution de (2.8) dans (2.13a) nous donne

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) = & V_k(t) - V_{k-1}(t) + (1 - \gamma)(W_k(t) - W_{k-1}(t)) \\ & + \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Après l'écriture de $V_k(t) + (1 - \gamma)(W_k(t))$ sous forme d'une intégrale dans (2.13b) nous avons trouvé

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) = & -V_{k-1}(t) - (1 - \gamma)W_{k-1} + V_k(0) + (1 - \gamma)W_k(0) \\ & + \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau + \int_0^t \left(L_f V_k + (1 - \gamma) \frac{\partial W_k}{\partial \bar{\theta}_k} \dot{\bar{\theta}}_k(\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.13c)$$

La substitution de (2.7) dans (2.13c) donne

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) = & -V_{k-1}(t) - (1 - \gamma)W_{k-1} + V_k(0) + (1 - \gamma)W_k(0) \\ & + \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau) - \frac{\partial W_k}{\partial \bar{\theta}_k} \bar{\theta}_k(\tau)) d\tau + \int_0^t (L_f V_k + L_h W_k) d\tau \end{aligned} \quad (2.13d)$$

D'après (2.6), (2.13d) devient

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) \leq & - \int_0^t \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau - \gamma \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau + V_k(0) - V_{k-1}(t) \\ & + (1 - \gamma)(W_k(0) - W_{k-1}(t)) \end{aligned} \quad (2.13e)$$

Du fait que $V_k(0) = 0$ (ou $V_k(0) = V_{k-1}(T)$ et $W_k(0) = W_{k-1}(T)$), l'inégalité (2.13e) devient :

$$\Delta \bar{\Psi}_k(T) \leq - \int_0^T \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau - \gamma \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \leq 0 \quad (2.14)$$

D'où, $\bar{\Psi}_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est bornée à cause de la bornitude de $\Psi_0(t)$ sur $[0, T]$, ce qui implique que $\Psi_k(T)$ et $\int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau$ sont bornées $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ce qui implique $\int_0^T \|\tilde{\theta}_k\|^2 d\tau$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque W est une fonction définie positive.

A partir de (2.11), dans le cas où $V_k(0) = V_{k-1}(T)$, on a :

$$\int_0^t \Psi_k(\tau) d\tau \leq \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\Psi_k(t) \leq \Psi_k(0) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}(\tau)\|^2 d\tau \leq \Psi_{k-1}(T) + \int_0^T \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau \quad (2.15)$$

Et dans le cas où $V_k(0) = 0$, on a

$$\Psi_k(t) \leq (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_k(0)) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\Psi_k(t) \leq (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_{k-1}(T)) + \int_0^T \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}(\tau)\|^2 d\tau \quad (2.16)$$

Ce qui implique que $\Psi_k(t)$ est borné $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$. Par conséquent $x_k(t), \tilde{\theta}_k(t), u_k(t)$ sont borées $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$,

A partir de (2.14), il est facile de montre que

$$\bar{\Psi}_k(T) = \bar{\Psi}_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta \bar{\Psi}_j(T) \leq \bar{\Psi}_0(T) - \sum_{j=1}^k \int_0^T \gamma(x_j(\tau)) d\tau - \gamma \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T \gamma(x_j(\tau)) d\tau + \gamma \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \leq \bar{\Psi}_0(T) - \bar{\Psi}_k(T) \leq \bar{\Psi}_0(T) \quad (2.18)$$

Puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, à partir de (2.18) on peut conclure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \gamma(x_k(\tau)) d\tau = 0. \quad (2.19)$$

Et dans le cas où $\gamma \neq 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (2.20)$$

Puisque $x_k(t), \tilde{\theta}_k(t), u_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, et $\dot{x}_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$ ce qui implique $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$,

Maintenant, on commence la démonstration de *ii*).

Considérons la fonction définie positive suivant :

$$\bar{\Psi}(x_k, \tilde{\theta}_k, t) = V(x_k) + \int_0^t W(\tilde{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (2.21)$$

Sa dérivé par rapport au temps peut être évalué comme suit :

$$\dot{\bar{\Psi}}_k(t) = \dot{V}_k(t) + W_k(t) = L_f V_k + W_k(t) - W_{k-1}(t) + W_{k-1}(t) \quad (2.22a)$$

D'après (2.6), (2.22a) devient

$$\dot{\bar{\Psi}}_k(t) \leq L_f V_k + -\Omega(\bar{\theta}_k) + \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \bar{\theta}_k + W_{k-1}(t) \quad (2.22b)$$

La substitution de (2.7) pour $\gamma = 1$ dans (2.22b) nous donne

$$\dot{\bar{\Psi}}_k(t) = L_f V_k + L_h W_k - \Omega(\bar{\theta}_k) + W_{k-1}(t) \quad (2.22c)$$

D'après (2.4), (2.22c) devient

$$= -Y(x_k) - \Omega(\bar{\theta}_k) + W_{k-1}(t) \leq W_{k-1}(t) \quad (2.22d)$$

Puisque $\hat{\theta}_{-1} = 0$, il est clair que $\hat{\theta}_0 = h(x_0(t), t)$. Puisque $x_0(t)$ est bornée, il est clair que $\hat{\theta}_0(t)$ est bornée. Donc, à partir de (2.22c), $\bar{\Psi}_0(t)$ est bornée $\forall t \in [0, T]$.

La différence entre $\bar{\Psi}_k(t)$ et $\bar{\Psi}_{k-1}(t)$ peut être évaluée comme suit :

$$\Delta \bar{\Psi}_k(t) = \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t) = V_k(t) - V_{k-1}(t) + \int_0^t (W_k(\tau) - W_{k-1}(\tau)) d\tau \quad (2.23a)$$

Après l'écriture de $V_k(t)$ sous forme d'un intégrale dans (2.23a) nous avons trouvé

$$\Delta \bar{\Psi}_k(t) = -V_{k-1}(t) + V_k(0) + \int_0^t L_f V_k(t) d\tau + \int_0^t (W_k(\tau) - W_{k-1}(\tau)) d\tau \quad (2.23b)$$

D'après (2.4) et (2.6), (2.23b) devient

$$\Delta \bar{\Psi}_k(t) \leq - \int_0^t Y(x_k(\tau)) d\tau - \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau - V_{k-1}(t) + V_k(0) \quad (2.23c)$$

Par l'utilisation du fait que $V_k(0) = 0$ (ou $V_k(0) = V_{k-1}(T)$), l'inégalité (2.23c) devient

$$\Delta \bar{\Psi}_k(T) \leq - \int_0^T \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau - \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \leq 0 \quad (2.24)$$

Ce qui implique que $\bar{\Psi}_k(T)$ est borné $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est bornée

Soit

$$\varpi_k(t) = \int_0^t W(\tilde{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (2.25)$$

Il est clair que, $\forall t \in [0, T]$,

$$\varpi_k(t) \leq \varpi_k(T) \leq \omega \leq \infty \quad (2.26)$$

Donc

$$\bar{\Psi}_k(t) = V_k(t) + \varpi_k(t) \leq V_k(t) + \omega \quad (2.27)$$

Ainsi

$$\bar{\Psi}_{k-1}(t) \leq V_{k-1}(t) + \omega \quad (2.28)$$

D'une autre façon :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) &= \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t) \\ &\leq - \int_0^t \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau - \gamma \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau + V_{k-1}(t) + V_k(0) \\ &\leq V_k(0) - V_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir de (2.28) et (2.29), on conclut que

$$\bar{\Psi}_k(t) \leq V_k(0) + \omega \quad (2.30)$$

- Cas 1 : $V_k(0) = V_{k-1}(T)$

Puisque $\bar{\Psi}_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il est clair que $V_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. D'où, à partir de (2.30) on peut conclure que $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$,

- Cas 2 : $V_k(0) = 0$

Il est clair que $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$, par conséquent, $x_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\tilde{\theta}_k(t)$, $u_k(t) \in \mathcal{L}_{2e}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$,

Nous avons aussi

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \leq \bar{\Psi}_0(T) - \bar{\Psi}_k(T) \quad (2.31)$$

Ce qui implique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (2.32)$$

Et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (2.33)$$

Maintenant, on va montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$, dans le cas où $x_k(0) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$,

Dans ce cas (2.23) devient

$$\Delta \bar{\Psi}_k(t) \leq -V_{k-1}(t) - \int_0^t \Upsilon(x_k(\tau)) d\tau - \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \leq 0 \quad (2.34)$$

Ce qui implique

$$\sum_{j=1}^k V_{j-1}(t) + \sum_{j=1}^k \int_0^t \Upsilon(x_j(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \leq \bar{\Psi}_0(t) - \bar{\Psi}_k(t) \leq \bar{\Psi}_0(t) \quad (2.35)$$

Puisque $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$, il est clair que $\lim_{t \rightarrow \infty} V_k(t) = 0$, ce qui implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$,

2.3. Remarques

Remarque 1

La loi d'adaptation paramétrique donnée par (2.7), est un mécanisme d'adaptation hybride combinant le domaine de temps avec le domaine des itérations pour $\gamma \in]0, 1[$. Dans le cas où $\gamma = 0$, la loi d'adaptation devient une adaptation purement dans le domaine du temps, et dans le cas où $\gamma = 1$ la loi d'adaptation devient une adaptation purement dans le domaine des itérations. Avec $\gamma \in [0, 1[$ on a garanti la bornitude de la norme infini de

l'erreur de poursuite et de l'entrée de commande et aussi la convergence de la norme infini de l'erreur de poursuite vers zéro. Avec $\gamma = 1$, on a garanti la bornitude de la norme deux de l'entrée de commande, la convergence de la norme deux de l'erreur de poursuite vers zéro si la condition de l'alignement est satisfaite, et la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro si la condition de *resetting* est satisfaite. Il est important de noter que dans le cas où une borne supérieure de paramètre θ est connue i.e., $\|\theta\| \leq \theta_m$ on peut garantir la bornitude de la norme infini de l'entrée de commande, avec $\gamma = 1$, par utilisation d'un mécanisme de projection dans la loi d'adaptation.

Remarque 2

Pour $\gamma = 1$ la propriété P_1 n'a pas été utilisée pour démontrer le théorème 1, de plus le vecteur des paramètres θ dans le système (2.1) peut être variant dans le temps. Pour $\gamma = 0$, les deux propriétés P_1 et P_2 n'ont été pas utilisées pour montrer le résultat du théorème 1.

Remarque 3

Dans le cas où $\gamma \in [0, 1[$ il est possible de garantir la convergence de l'estimation paramétrique vers zéro quand k tend vers l'infini, pour $t \in [0, T]$, si la loi de commande (2.2) garanti une certaine forme de l'excitation persistante (PE). Par contre, dans le cas où $\gamma = 1$ on ne peut pas garantir la convergence de l'erreur d'estimation paramétrique vers zéro quand k tend vers l'infini $\forall t \in [0, T]$.

Remarque 4

Il est bien connu dans la commande adaptative dans la majorité des cas les paramètres sont déviés à cause de bruit et des perturbations. Ce problème peut apparaitre dans l'application pratique si $\gamma = 0$. Plusieurs techniques sont proposées dans la littérature pour remédier à ce problème (e.g. zone mort, σ -modification, projection), la loi d'adaptation paramétrique (2.7), dans le cas où $\gamma \in]0, 1[$ contient un terme de σ -modification $\frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{\theta}_k$ ce que va aider à éliminer la déviation des paramètres dans une application pratique (Ioannou et al 1996).

Remarque 5

L'utilisation de l'adaptation purement dans le domaine des itérations ($\gamma = 1$), est avantageux pour l'application en temps réel, par ce que l'utilisation d'une intégration numérique approximative pour calculer $\hat{\theta}_k$ est évitée.

Remarque 6

Il est important de noter qu'avec $\gamma = 0$, nous avons besoin d'enregistrer seulement $\hat{\theta}_k(T)$ dans la mémoire au lieu de mémoriser $\hat{\theta}_k(t)$, $t \in [0, T]$. Cela contribue considérablement d'économiser l'espace mémoire utilisé dans les applications réelles.

Remarque 7

Dans le cas où $\gamma \in [0, 1[$, h permet la dépendance de $\hat{\theta}_k(t)$, c.-à-d. $h(x_k(t), \hat{\theta}_k(t), t)$. Dans le cas où $\gamma = 1$, h peut également permettre la dépendance de $\hat{\theta}_k(t)$ si nous supposons la loi d'adaptation suivante :

$$\hat{\theta}_k(t) = \hat{\theta}_{k-1}(t) + h(x_k(t), \hat{\theta}_k(t), t)$$

Avoir une solution unique $\hat{\theta}_k(t)$ bornée sur $[0, T]$ si $\hat{\theta}_{k-1}(t)$ et $x_k(t)$ sont bornées.

2.4. Application sur une Classe de systèmes non linéaires

On considère la classe des systèmes non linéaires de la forme suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) + \varphi_i^T(x_1, \dots, x_i)\theta \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n) + \varphi_n^T(x_1, \dots, x_n)\theta \end{cases} \quad (2.36)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ sont les états, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie mesurée, $u \in \mathbb{R}$ est la commande, et $\theta \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de paramètres inconnus. $\varphi_i(x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^p$ sont des fonctions non linéaires. On désire faire suivre la sortie $y = x_1$, le signal de référence y_r , où $y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(n)}$ sont supposées connues et uniformément bornées.

2.4.1. Conception de la commande par la technique du backstepping

En se basant sur la procédure du backstepping, on définit

$$z_1 = y - y_r \quad (2.37)$$

$$z_j = x_j - y_r^{(j-1)} - \alpha_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n \quad (2.38)$$

Etape 1. L'équation de l'erreur de poursuite z_1 obtenue à partir de (2.37) est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{y} - \dot{y}_r \\ &= x_2 + f_1(x_1) + \varphi_1^T(x_1)\theta - \dot{y}_r \\ &= x_2 - \dot{y}_r + f_1(x_1) + \varphi_1^T(x_1)\hat{\theta} - \varphi_1^T(x_1)\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Par substitution de (2.53) pour $j = 2$ dans (3.39) on trouve

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) + \varphi_1^T(x_1)\hat{\theta} - \varphi_1^T(x_1)\tilde{\theta} \quad (2.40)$$

Si on choisit la fonction stabilisante sous la forme suivante :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - f_1(x_1) - \varphi_1^T(x_1)\hat{\theta} \quad (2.41)$$

Alors, l'équation (2.40) devient sous la forme suivant :

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 - \varphi_1^T(x_1)\tilde{\theta} \quad (2.42)$$

Le terme $-\varphi_1^T(x_1)\tilde{\theta}$ détermine la première fonction de réglage

$$\tau_1 = \Gamma \varphi_1 z_1 \quad (2.43)$$

Etape 2. À partir de (2.38) pour $j = 2$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - y_r^{(2)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 \\ &= z_3 + \alpha_2 + f_2(x_1, x_2) + \varphi_2^T(x_1, x_2)\hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + f_1(x_1) + \varphi_1^T(x_1)\hat{\theta}) - \left(\varphi_2^T(x_1, x_2) - \varphi_1^T(x_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right) \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si on choisit la fonction stabilisante sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_2 z_2 - z_1 - f_2(x_1, x_2) - \left(\varphi_2^T(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T(x_1) \right) \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + f_1(x_1)) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \tau_2 \end{aligned}$$

Alors, l'équation (2.44) devient sous la forme suivante :

$$\dot{z}_2 = z_3 - c_2 z_2 - z_1 - \left(\varphi_2^T(x_1, x_2) - \varphi_1^T(x_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right) \tilde{\theta} \quad (2.45)$$

Le terme $-(\varphi_2^T(x_1, x_2) - \varphi_1^T(x_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}) \tilde{\theta}$ détermine la deuxième fonction de réglage

$$\tau_2 = \tau_1 + \left(\varphi_2^T(x_1, x_2) - \varphi_1^T(x_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right) z_2 \quad (2.46)$$

Etape j. à partir de (2.38) pour $j = 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \dot{x}_j - y_r^{(j)} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \dot{\hat{x}}_l \\ &= z_{j+1} + \alpha_j + f_j(x_1, \dots, x_j) + \varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) \hat{\theta} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \\ &\quad - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_l} (x_{l+1} + f_l(x_1, \dots, x_l) + \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \hat{\theta}) \\ &\quad - \left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Si on choisit la $j^{\text{ième}}$ fonction stabilisant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= -c_j z_j - z_{j-1} - f_j(x_1, \dots, x_j) - \left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) \hat{\theta} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{j-1} \left(\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} (x_{l+1} + f_l(x_1, \dots, x_l)) - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) z_j \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Alors, l'équation (2.47) devient sous la forme suivant :

$$\dot{z}_j = z_{j+1} - c_j z_j - z_{j-1} - \left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) \tilde{\theta} \quad (2.49)$$

Le terme $-\left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) \tilde{\theta}$ détermine la j^{ieme} fonction de réglage

$$\tau_j = \tau_{j-1} + \left(\varphi_j^T(x_1, \dots, x_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \varphi_l^T(x_1, \dots, x_l) \right) z_j \quad (2.50)$$

La commande u , qui permet d'atteindre les objectifs du synthétisée pour le système global, est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_n + y_r^{(n)} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma \tau_n \end{aligned} \quad (2.51)$$

La fonction candidate de Lyapunov pour le système et la commande synthétisée précédemment est donnée sous la forme suivante :

$$\Phi(z, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} z^T z + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma (\hat{\theta} - \theta) \quad (2.52)$$

Sa dérivé par rapport au temps satisfait

$$\dot{\Phi} = - \sum_{j=1}^n c_j z_j^2 \quad (2.53)$$

La fonction de Lyapunov Φ satisfait (2.4), et ainsi $\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \Gamma (\theta - \hat{\theta})$ satisfait les propriétés (2.5) et (2.6). Donc selon le **théorème 1** on peut appliquer la commande adaptative par apprentissage itératif sur cette classe de systèmes non linéaires si le système en exécution d'une tâche répétitive en un temps fini. Les conditions initiales à chaque itération doivent satisfaire

$$z_k(0) = 0 \quad \text{ou} \quad z_{k-1}(T) = z_k(0)$$

Selon le théorème 1. La commande adaptative par apprentissage itératif prend la forme suivant :

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \alpha_n(x_k(t), \hat{\theta}_k(t), t) + y_r^{(n)} \\ (1 - \gamma)\dot{\hat{\theta}}_k(t) &= -\gamma\hat{\theta}_k(t) + \gamma\hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma\tau_n(x_k(t), t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.4.2. Exemple illustratif

Pour montrer l'efficacité de la loi de commande présentée, on considère le système non linéaire suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + \cos(x_1) + (1 - \theta_1 \sin(x_1))x_2 + \theta_2 x_1^2 \end{cases} \quad (2.51)$$

Où $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ est un vecteur constant inconnu de dimension 2 et $\varphi_1 = 0$, $f_1 = 0$,

$\varphi_2 = [\sin(x_1)x_2, x_1^2]$, et $f_2 = \cos(x_1) + x_2$ sont des fonctions non linéaires.

Soit $y_r(t)$ la trajectoire de référence bornée deux fois différentiable.

En se basant sur la procédure du backstepping on définit

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_d \\ z_2 &= x_2 - y_r^{(1)} - \alpha_1 \end{aligned}$$

Selon le schéma de commande présenté précédemment les fonctions stabilisantes sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 z_1 \\ \alpha_2 &= -c_2 z_2 - z_1 - \varphi_2^T \hat{\theta} - f_2 - c_1 x_2 + c_1 \dot{y}_r \end{aligned}$$

La loi d'adaptation paramétrique

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \varphi_2 z_2$$

La commande adaptative

$$u = \alpha_2 + \ddot{y}_r$$

La commande par apprentissage itérative adaptative

$$\begin{aligned} u_k &= \alpha_{2,k} + \ddot{y}_r \\ (1 - \gamma)\dot{\hat{\theta}}_k(t) &= -\gamma\hat{\theta}_k(t) + \gamma\hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma\varphi_{2,k}z_{2,k} \end{aligned}$$

2.4.3. Résultats de la simulation

Nous avons simulé l'exemple précédent sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec les données suivantes : $y_r(t) = 3\sin(2\pi t)$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 3$, $c_1 = 10$, $c_2 = 25$ et $\Gamma = \text{diag}(1,1)$. Les figures ci-dessous montrent l'évolution de la sup-norme de l'erreur de poursuite et la norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique en fonction des itérations.

❖ Pour $\gamma = 0$

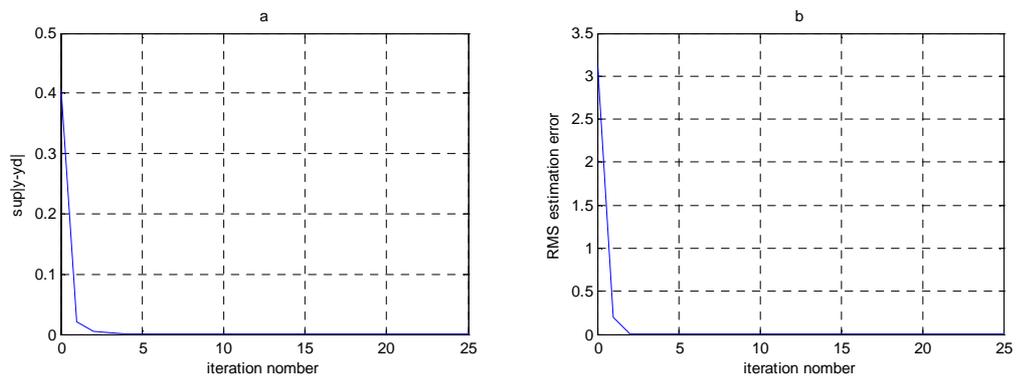


Fig. 2. (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique

❖ Pour $\gamma = 0.5$

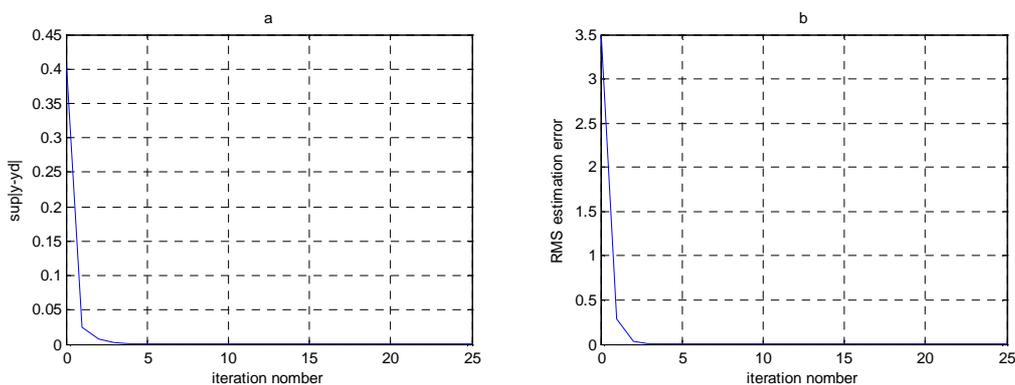


Fig. 2.3 (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique

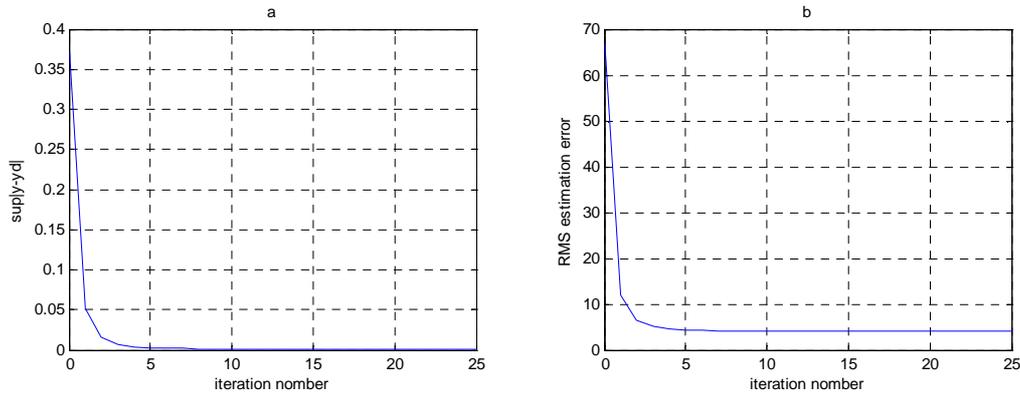
❖ Pour $\gamma = 1$ 

Fig. 2.4. (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique

$$RMS[\tilde{\theta}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\theta}\|^2 dt}$$

De la simulation, il apparaît clairement qu'à travers les itérations le comportement du système en poursuite s'améliore du fait que les erreurs de poursuite convergent vers zéro pour plus de 5 cycles. De plus, les paramètres estimés convergent vers les vrais paramètres sauf dans le cas où $\gamma = 1$, les estimés des paramètres ne convergent pas.

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une stratégie de synthèse de lois de commande adaptative par apprentissage itératif, pour les systèmes non linéaires incertains basés sur l'existence d'une fonction de Lyapunov pour le système en considération. En effet, si la loi de commande adaptative basée sur la technique de Lyapunov pourra être synthétisée et la fonction de Lyapunov satisfait certaines conditions, il est possible d'étendre la loi de commande adaptative standard à la loi de commande adaptative par apprentissage itératif. La loi d'adaptation paramétrique est tout à fait générale dans le sens qu'elle dépend d'une certaine grandeur scalaire permettant de choisir le type désiré parmi les trois types d'adaptation discutés ci-dessus, une adaptation dans le domaine de temps pour $\gamma = 0$, une adaptation dans le domaine des itérations pour $\gamma = 1$, et une combinaison des deux pour $\gamma \in]0, 1[$.

Commande adaptative par apprentissage itératif à base d'observateur

3.1. Introduction:

La commande par apprentissage itératif linéaire n'utilise pas le modèle dynamique du système. Par contre, dans la synthèse de la commande par apprentissage itératif non linéaire, nous utilisons le modèle dynamique du système, particulièrement la dynamique des états. Malheureusement, dans beaucoup de systèmes les états ne sont pas mesurables.

Afin de résoudre le problème de la non disponibilité du vecteur d'états, nous présentons la loi de commande adaptative par apprentissage itératif présentée dans le chapitre précédent, mais cette fois-ci, nous supposons que les états ne sont pas disponibles, d'où l'utilisation d'un observateur d'états pour les estimer. En utilisant la théorie de Lyapunov, la stabilité asymptotique du système en boucle fermée avec observateur sera démontrée.

Ensuite, nous appliquerons cette méthode sur une classe de systèmes non linéaires. En se basant sur les états estimés par un observateur adaptatif, nous synthétiserons la loi de commande par la procédure du backstepping.

3.2. Synthèse de commande adaptative par apprentissage itératif à base d'observateur :

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(t) &= F_1(x_k(t), u_k(t), \theta), \\ y_k(t) &= H(x_k(t)),\end{aligned}\tag{3.1}$$

Avec

$x_k \in \mathbb{R}^n$ Le vecteur d'état.

$u_k \in \mathbb{R}^m$ Le vecteur de commande.

$\theta \in \mathbb{R}^p$ Le vecteur de constantes inconnues.

$y_k \in \mathbb{R}^n$ Le vecteur des sorties

$t \in [0, T]$ Le temps.

$k \in \mathbb{Z}_+$ L'indice des itérations.

$F_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une Fonction non linéaire bornée sur $[0, T]$, lorsque $x_k(t)$ et $u_k(t)$ sont bornés sur $[0, T]$.

Si les états du système (3.1) sont observables, par conséquent ceux-ci peuvent être estimés, en considérant l'observateur défini tel que:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_k(t) &= F_2(\hat{x}_k(t), y_k(t), u_k(t), \hat{\theta}(t)), \\ \hat{y}_k(t) &= H(\hat{x}_k(t))\end{aligned}\tag{3.2}$$

Avec

$\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ Le vecteur des états estimés.

$u_k \in \mathbb{R}^m$ Le vecteur de commande.

$\hat{\theta}_k \in \mathbb{R}^p$ Le vecteur des estimés par la loi d'adaptation des constantes inconnues.

$\hat{y}_k \in \mathbb{R}^n$ Le vecteur des sorties estimées.

$t \in [0, T]$ Le temps.

$k \in \mathbb{Z}_+$ L'indice des itérations.

$F_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une Fonction non linéaire bornée sur $[0, T]$, lorsque $\hat{x}_k(t)$ et $u_k(t)$ sont bornées sur $[0, T]$.

La dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par

$$\dot{\tilde{x}}_k(t) = f_1(\tilde{x}_k(t), u_k(t), \theta, t),\tag{3.3}$$

La dynamique de l'erreur d'observation est donnée par

$$\dot{\tilde{x}}_k(t) = f_2(\bar{x}_k(t), \tilde{x}_k(t), y_k(t), u_k(t), \hat{\theta}(t), t), \quad (3.4)$$

Où $\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - x_d(t)$ et $\bar{x}_k(t) = \hat{x}_k(t) - x_k(t)$ sont respectivement l'erreur de poursuite et l'erreur d'observation.

Supposons qu'on peut synthétiser une loi de commande et une loi d'adaptation des paramètres sous la forme :

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g(\hat{x}_k(t), \hat{\theta}_k(t), t) \\ \dot{\hat{\theta}}_k(t) &= h(\hat{x}_k(t), t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

et qu'il existe une fonction définie positive de la forme :

$$\Phi(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k) = V_1(\tilde{x}_k) + V_2(\bar{x}_k) + W(\tilde{\theta}_k) \quad (3.6)$$

Où $\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \theta$ représente l'erreur d'estimation paramétrique et les fonctions V_1 , V_2 , et W sont différentiables définies positives, satisfaisant :

$$\dot{\Phi}(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k) = L_{f1}V_1 + L_{f2}V_2 + L_hW_k \leq -Y_1(\tilde{x}_k) - Y_2(\bar{x}_k) \quad (3.7)$$

Avec $Y_1(\tilde{x}_k)$ et $Y_2(\bar{x}_k)$ deux fonctions définies positives.

Supposons que $h(\hat{x}_k(t), t)$ est bornée sur $[0, T]$ et pour qu'il le soit il suffit que $x_k(t)$ soit bornée sur $[0, T]$, et $W(\tilde{\theta}_k)$ satisfait les propriétés suivantes :

P₁)

$$\left\| \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 \leq \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_k \quad (3.8)$$

P₂)

$$W(\tilde{\theta}_k) - W(\tilde{\theta}_{k-1}) \leq -\Omega(\bar{\theta}_k) + \frac{\partial W(\tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} \bar{\theta}_k \quad (3.9)$$

Où $\Omega(\bar{\theta}_k)$ est une fonction semi définie positive et $\bar{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}$.

Dans ce qui suit, nous utilisons la norme \mathcal{L}_{pe} définie comme suit :

$$\|x(t)\|_{pe} \triangleq \begin{cases} \left(\int_0^t \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, \infty[\\ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Où la norme de x est notée $\|x\|$ et t le temps fini appartenant à l'intervalle $[0, T]$. On dit que $x \in \mathcal{L}_{pe}$ quand $\|x\|_{pe}$ existe. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2

Considérons le système (3.1) et supposons que les états du système sont estimés par l'observateur (3.2), en boucle fermée avec la commande adaptative par apprentissage itératif suivante :

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g(\hat{x}_k(t), \hat{\theta}_k(t), t) \\ (1 - \gamma)\dot{\hat{\theta}}_k(t) &= -\gamma\hat{\theta}_k(t) + \gamma\hat{\theta}_{k-1}(t) + h(\hat{x}_k(t), t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Avec $\gamma \in [0, 1]$ et $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$.

Pour $\gamma \in [0, 1]$, on pose $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Supposons que $\tilde{x}_k(0) = 0$ ou $\tilde{x}_k(0) = \tilde{x}_{k-1}(T)$ et $\bar{x}_k(0) = 0$ ou $\bar{x}_k(0) = \bar{x}_{k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Alors :

- i) Si $\gamma \in [0, 1]$, $x_k(t)$, $\hat{x}_k(t)$, $\tilde{\theta}_k(t)$ et $u_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$, de plus $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0 \forall t \in [0, T]$
- ii) Si $\gamma = 1$, $\tilde{x}_k(t)$, $\bar{x}_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$ et $\tilde{\theta}_k(t), u_k(t) \in \mathcal{L}_{2e} \forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Y_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau = 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Y_2(\bar{x}_k(\tau)) d\tau = 0$.
de plus, avec $\tilde{x}_k(0) = 0$ et $\bar{x}_k(0) = 0$,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0 \forall t \in [0, T]$

Preuve

D'abord, nous allons prouver (i).

Considérons la fonction définie positive suivante :

$$\Psi(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k) = V_1(\tilde{x}_k) + V_2(\bar{x}_k) + (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_k) \quad (3.11)$$

Dans ce que suit, les notations suivantes seront utilisées

$$\Psi_k(t) \equiv \Psi(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k), \quad V_{1,k}(t) \equiv V_1(\tilde{x}_k), \quad V_{2,k}(t) \equiv V_2(\bar{x}_k), \quad W_k(t) \equiv W_k(\tilde{\theta}_k)$$

La dérivée de (3.11) par rapport au temps, compte tenu de (3.1)-(3.8), conduit à:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_k &= L_{f_1} V_{1,k} + L_{f_2} V_{2,k} + (1 - \gamma) \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \dot{\tilde{\theta}}_k \\ &= L_{f_1} V_{1,k} + L_{f_2} V_{2,k} + L_h W_k + \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1}) \\ &\leq -\gamma_1(\tilde{x}_k) - \gamma_2(\bar{x}_k) + \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1}) \\ &\leq \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (-\gamma \tilde{\theta}_k + \gamma \tilde{\theta}_{k-1}) = -\gamma \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par l'utilisation de la propriété P₁ et une version simplifiée de l'inégalité de Yong suivante :

$$\frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_{k-1} \leq \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (3.13)$$

Alors, l'inégalité (3.12) est modifiée telle que:

$$\dot{\Psi}_k \leq -\gamma \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \tilde{\theta}_k + \gamma \left\| \frac{\partial W_k}{\partial \tilde{\theta}_k} \right\|^2 + \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (3.14a)$$

Compte tenu de (2.5), il vient que

$$\dot{\Psi}_k \leq \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 \quad (3.14b)$$

Puisque $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$ et $\hat{\theta}_0(0) = \hat{\theta}_{-1}(T)$, il est clair que $\Psi_0(t)$ est bornée. Par conséquent $\tilde{x}_0(t)$, $\bar{x}_0(t)$ et $\tilde{\theta}_0(t)$ sont bornées $\forall t \in [0, T]$

Maintenant, on utilise la fonction définie positive suivante :

$$\bar{\Psi}(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k t) = \Psi(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \tilde{\theta}_k) + \gamma \int_0^t W(\tilde{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (3.15)$$

La différence entre $\bar{\Psi}_k$ et $\bar{\Psi}_{k-1}$ peut être évaluée comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\Psi}_k(t) &= \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t) \\
&= \Psi_k(t) - \Psi_{k-1}(t) + \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{3.16a}$$

La substitution de (3.11) dans (3.16a) donne

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\Psi}_k(t) &= V_{1,k}(t) - V_{1,k-1}(t) + V_{2,k}(t) - V_{2,k-1}(t) + (1 - \gamma)(W_k(t) - W_{k-1}(t)) \\
&+ \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{3.16b}$$

Dans l'expression (3.16b), l'écriture du terme $V_{1,k}(t) + V_{2,k}(t) + (1 - \gamma)(W_k(t))$ sous forme d'intégrale conduit à :

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\Psi}_k(t) &= -V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) - (1 - \gamma)W_{k-1} + V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) + (1 - \gamma)W_k(0) \\
&+ \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau)) d\tau + \int_0^t (L_{f_1}V_{1,k} + L_{f_2}V_{2,k} + (1 - \gamma) \frac{\partial W_k}{\partial \bar{\theta}_k} \dot{\bar{\theta}}_k(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{3.16c}$$

La substitution de (3.10) dans (2.16c) donne

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\Psi}_k(t) &= -V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) - (1 - \gamma)W_{k-1} + V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) + (1 - \gamma)W_k(0) \\
&+ \gamma \int_0^t (W_k(\tau) - W(\tau)_{k-1}(\tau) - \frac{\partial W_k}{\partial \bar{\theta}_k} \bar{\theta}_k(\tau)) d\tau + \int_0^t (L_{f_1}V_{1,k} + L_{f_2}V_{2,k} + L_h W_k) d\tau
\end{aligned} \tag{3.16d}$$

D'après (3.9), (3.16d) devient

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\Psi}_k(t) &\leq - \int_0^t \Upsilon_1(\bar{x}_j(\tau)) d\tau - \int_0^t \Upsilon_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau - \gamma \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \\
&+ V_{1,k}(0) - V_{1,k-1}(t) + V_{2,k}(0) - V_{2,k-1}(t) + (1 - \gamma)(W_k(0) - W_{k-1}(t)).
\end{aligned} \tag{3.16e}$$

Du fait que $V_{1,k}(0) = V_{2,k}(0) = 0$ (ou $V_{1,k}(0) = V_{1,k-1}(T)$, $V_{2,k}(0) = V_{2,k-1}(T)$) et $W_k(0) = W_{k-1}(T)$, l'inégalité (3.16) devient

$$\Delta \bar{\Psi}_k(T) \leq - \int_0^T \Upsilon_1(\bar{x}_j(\tau)) d\tau - \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau - \gamma \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \leq 0 \tag{3.17}$$

D'où, $\bar{\Psi}_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est bornée à cause de la bornitude de $\Psi_0(t)$ sur $[0, T]$. ce qui implique que $\Psi_k(T)$ et $\int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau$ sont bornées $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ce qui implique $\int_0^T \|\tilde{\theta}_k\|^2 d\tau$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque W est une fonction définie positive.

A partir de (3.14), dans le cas où $V_{1,k}(0) = V_{1,k-1}(T)$, $V_{2,k}(0) = V_{2,k-1}(T)$ nous avons

$$\int_0^t \dot{\Psi}_k(\tau) d\tau \leq \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau$$

$$\Psi_k(t) \leq \Psi_k(0) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau \leq \Psi_{k-1}(T) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau \quad (3.18)$$

Et dans le cas où $V_{1,k}(0) = V_{2,k}(0) = 0$ nous avons

$$\Psi_k(t) \leq (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_k(0)) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau$$

$$\Psi_k(t) \leq (1 - \gamma)W(\tilde{\theta}_{k-1}(T)) + \int_0^T \frac{\gamma}{4} \|\tilde{\theta}_{k-1}\|^2 d\tau \quad (3.19)$$

Ce qui implique que $\Psi_k(t)$ est borné $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$. Par conséquent $\tilde{x}_k(t)$, $\bar{x}_k(t)$, $\tilde{\theta}_k(t)$ et $u_k(t)$ sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$,

A partir de (3.17), il est facile de montrer que

$$\bar{\Psi}_k(T) = \bar{\Psi}_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta \bar{\Psi}_j(T)$$

$$\bar{\Psi}_k(T) \leq \bar{\Psi}_0(T) - \sum_{j=1}^k \int_0^T \left(\Upsilon_1(\tilde{x}_j(\tau)) + \Upsilon_2(\bar{x}_j(\tau)) \right) d\tau - \gamma \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T \Upsilon_1(\tilde{x}_j(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau + \gamma \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau$$

$$\leq \bar{\Psi}_0(T) - \bar{\Psi}_k(T) \leq \bar{\Psi}_0(T) \quad (3.21)$$

Puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est borné $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, à partir de (3.21) on peut conclure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T \Upsilon_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_k(\tau)) d\tau = 0. \quad (3.22)$$

Et dans le cas où $\gamma \neq 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (3.23)$$

Puisque $\tilde{x}_k(t), \bar{x}_k(t), \bar{\theta}_k(t)$ et $u_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$ et $\dot{\tilde{x}}_k(t), \dot{\bar{x}}_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$

Par conséquence $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0 \forall t \in [0, T]$.

Maintenant, nous allons commencer la démonstration de *ii*).

Considérons la fonction définie positive suivante :

$$\bar{\Psi}(\tilde{x}_k, \bar{x}_k, \bar{\theta}_k, t) = V_1(\tilde{x}_k) + V_2(\bar{x}_k) + \int_0^t W(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (3.24)$$

Sa dérivée par rapport au temps peut être évaluée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Psi}}_k(t) &= \dot{V}_{1,k}(t) + \dot{V}_{2,k}(t) + W_k(t) \\ &= L_{f_1} V_{1,k} + L_{f_2} V_{2,k} + W_k(t) - W_{k-1}(t) + W_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (3.25a)$$

D'après (3.9) et (3.25a) il vient

$$\dot{\bar{\Psi}}_k(t) \leq L_{f_1} V_{1,k} + L_{f_2} V_{2,k} - \Omega(\bar{\theta}_k) + \frac{\partial W(\bar{\theta}_k)}{\partial \bar{\theta}_k} \bar{\theta}_k + W_{k-1}(t) \quad (3.25b)$$

La substitution de (3.10) pour $\gamma = 1$ dans (3.25b) donne

$$= L_{f_1} V_{1,k} + L_{f_2} V_{2,k} + L_h W_k - \Omega(\bar{\theta}_k) + W_{k-1}(t) \quad (3.25c)$$

D'après (3.7), (3.25c) devient

$$\leq -\Upsilon_1(\tilde{x}_k) - \Upsilon_2(\bar{x}_k) - \Omega(\bar{\theta}_k) + W_{k-1}(t) \leq W_{k-1}(t) \quad (3.25d)$$

Puisque $\hat{\theta}_{-1} = 0$, il est clair que $\hat{\theta}_0 = h(\hat{x}_0(t), t)$. Puisque $\hat{x}_0(t)$ est bornée, il est clair que $\hat{\theta}_0(t)$ est bornée. Donc, à partir de (3.25d), il est clair que $\bar{\Psi}_0(t)$ est bornée $\forall t \in [0, T]$,

La différence entre $\bar{\Psi}_k$ et $\bar{\Psi}_{k-1}$ peut être évaluée comme suit :

$$\Delta\bar{\Psi}_k(t) = \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t)$$

$$\Delta\bar{\Psi}_k(t) = V_{1,k}(t) - V_{1,k-1}(t) + V_{2,k}(t) - V_{2,k-1}(t) + \int_0^t (W_k(\tau) - W_{k-1}(\tau)) d\tau \quad (3.26a)$$

Après l'écriture de $V_{1,k}(t) + V_{2,k}(t)$ sous forme d'une intégrale dans (3.26a) il vient :

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\Psi}_k(t) &= -V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) + V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) \\ &+ \int_0^t (L_{f_1} V_{1k} + L_{f_2} V_{2k}) d\tau + \int_0^t (W_k(\tau) - W_{k-1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.26b)$$

En exploitant (3.6) et (23.9), la relation (3.26b) devient

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\Psi}_k(t) &\leq - \int_0^t \Upsilon_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau - \int_0^t \Upsilon_1(\bar{x}_k(\tau)) - \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \\ &- V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) + V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) \end{aligned} \quad (3.26c)$$

Du fait que $V_{1,k}(0) = V_{2,k}(0) = 0$ ou $V_{1,k}(0) = V_{1,k-1}(T)$, $V_{2,k}(0) = V_{2,k-1}(T)$ aussi,

$$\Delta\bar{\Psi}_k(T) \leq - \int_0^T \Upsilon_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau - \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_k(\tau)) - \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \leq 0 \quad (3.27)$$

Ceci implique que $\bar{\Psi}_k(T)$ est borné pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $\bar{\Psi}_0(T)$ est bornée.

Soit

$$\varpi_k(t) = \int_0^t W(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau \quad (3.28)$$

Il est clair que, $\forall t \in [0, T]$,

$$\varpi_k(t) \leq \varpi_k(T) \leq \omega \leq \infty \quad (3.29)$$

Donc

$$\bar{\Psi}_k(t) = V_{1,k}(t) + V_{2,k}(t) + \varpi_k(t) \leq V_{1,k}(t) + V_{2,k}(t) + \omega \quad (3.30)$$

Ainsi

$$\bar{\Psi}_{k-1}(t) \leq V_{1,k-1}(t) + V_{2,k-1}(t) + \omega \quad (3.31)$$

D'une autre façon :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) &= \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k-1}(t) \\ &\leq - \int_0^t \Upsilon_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau - \int_0^t \Upsilon_2(\bar{x}_k(\tau)) - \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k) d\tau \\ &\quad - V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) + V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) \\ &\leq V_{1,k}(0) - V_{1,k-1}(t) + V_{2,k}(0) - V_{2,k-1}(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

A partir de (3.31) et (3.32), on peut conclure que

$$\bar{\Psi}_k(t) \leq V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) + \omega \quad (3.33)$$

- Cas 1 : $V_{1,k}(0) = V_{1,k-1}(T)$ et $V_{2,k}(0) = V_{2,k-1}(T)$

Puisque $\Psi_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il est clair que $V_{1,k}(T)$ et $V_{2,k}(T)$ sont bornées $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. D'où, à partir de (3.33) on peut conclure que $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$,

- Cas 2 : $V_{1,k}(0) = V_{2,k}(0) = 0$

Il est clair que $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$.

Par conséquent, $\tilde{x}_k(t), \bar{x}_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\tilde{\theta}_k(t), u_k(t) \in \mathcal{L}_{2e} \forall k \in \mathbb{Z}_+$, et $\forall t \in [0, T]$.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \int_0^T \Upsilon_1(\tilde{x}_j(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k \int_0^T \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \\ \leq \bar{\Psi}_0(T) - \bar{\Psi}_k(T) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ce qui implique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \Upsilon_1(\tilde{x}_k(\tau)) d\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \Upsilon_2(\bar{x}_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (3.35)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_k(\tau)) d\tau = 0 \quad (3.36)$$

Maintenant, Nous allons montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0 \forall t \in [0, T]$, dans le cas où $\tilde{x}_k(0) = 0$ et $\bar{x}_k(0) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. En effet, dans ce cas (3.26) conduit à

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi}_k(t) &\leq -V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) - \int_0^T \gamma_1(\tilde{x}_j(\tau)) d\tau - \int_0^T \gamma_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k V_{1,j-1}(t) + \sum_{j=1}^k \int_0^T \gamma_1(\tilde{x}_j(\tau)) d\tau + \sum_{j=1}^k V_{2,j-1}(t) + \sum_{j=1}^k \int_0^T \gamma_2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau \\ + \sum_{j=1}^k \int_0^t \Omega(\bar{\theta}_j(\tau)) d\tau \leq \bar{\Psi}_0(t) - \bar{\Psi}_k(t) \leq \bar{\Psi}_0(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Puisque $\bar{\Psi}_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$, il est clair que $\lim_{t \rightarrow \infty} V_{1,k}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_{2,k}(t) = 0$, ce qui implique $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

3.3. Application sur une classe de systèmes non linéaires

On considère la classe de systèmes non linéaires suivant (Yunfeng et al, 2005):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_{0,1} + \sum_i^p \varphi_{i,1}(y)\theta_i \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_{0,2} + \sum_i^p \varphi_{i,2}(y)\theta_i \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{\rho-1} &= x_\rho + \varphi_{0,\rho-1} + \sum_i^p \varphi_{i,\rho-1}(y)\theta_i \\
 \dot{x}_\rho &= x_{\rho+1} + \varphi_{0,\rho} + \sum_i^p \varphi_{i,\rho}(y)\theta_i + b_m\beta(y)u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= \varphi_{0,n} + \sum_i^p \varphi_{i,n}(y)\theta_i + b_0\beta(y)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ sont les états, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie mesurée, $u \in \mathbb{R}$ est la commande, $\beta(y)$ et $\varphi_{i,j}(y)$, $0 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$ sont des fonctions non linéaires, $\theta_1, \dots, \theta_p$ et b_0, \dots, b_m sont les paramètres constants inconnus. L'objectif de la commande est de faire suivre au signal de sortie $y(t)$ la référence donnée par $y_r(t)$.

3.3.1. Hypothèses

H1 : le signe de b_m est connu et aussi une constant positive b_{ml} est connu tel que

$$|b_m| \geq b_{ml} \geq 0$$

H2 : $\beta(y) \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$

H3 : le signal de référence $y_r(t)$ et ses premières $\rho = n - m$ dérivés sont connus et bornés

3.3.2. Synthèse de l'observateur adaptatif

L'équation (3.37) peut être réécrite sous la forme

$$\dot{x} = Ax + \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i(y)\theta_i + b\beta(y)u \tag{3.40}$$

$$y = c^T x \tag{3.41}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1) \times 1} \\ b_m \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\varphi_i(y) = [\varphi_{i,1} \ \varphi_{i,2} \ \dots \ \varphi_{i,n-1} \ \varphi_{i,n}]^T \quad (3.43)$$

Maintenant on représente un observateur adaptatif pour le système (3.39)-(3.43), identifie les paramètres inconnus et estime les états non mesurés. L'observateur adaptatif est donné par

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + k(y - \hat{y}) + \varphi_0 + \sum_i^p \varphi_i(y)\hat{\theta}_i + \hat{b}\beta(y)u + \sum_{i=1}^p \xi_i \hat{\theta}_i + \sum_{i=1}^m v_i \hat{b}_i \quad (3.44)$$

$$\hat{y} = c^T \hat{x} \quad (3.45)$$

Où $\xi_i = [\xi_{1,i} \ \dots \ \xi_{n,i}]^T \in \mathbb{R}^n$ et $v_i = [v_{1,i} \ \dots \ v_{n,i}]^T \in \mathbb{R}^n$ sont définies par les filtres suivants :

$$\dot{\xi}_i = A_0 \xi_i + \varphi_i(y), \quad 1 \leq i \leq p \quad (3.46)$$

$$\dot{v}_i = A_0 v_i + e_{n-i} \beta(y)u, \quad 0 \leq i \leq m \quad (3.47)$$

Où $A_0 = A - kc^T$. Le vecteur des gains k est choisit tel que A_0 est Hurwitz.

Le filtrage de $\varphi_i(y)$ et $e_{n-i}\beta(y)u$ dans (3.46) et (3.47) est introduit pour assurer la stabilité de l'observateur

A partir de (3.40) et (3.44), la dynamique de l'erreur des états $\tilde{x} = x - \hat{x}$ est donnée par

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} + \sum_{i=1}^p \varphi_i(y)\tilde{\theta}_i + \tilde{b}\beta(y)u - \sum_{i=1}^p \xi_i \hat{\theta}_i - \sum_{i=1}^m v_i \hat{b}_i \quad (3.48)$$

Noter que $\dot{\tilde{\theta}}_i = -\hat{\theta}_i$ et $\dot{\tilde{b}}_i = -\hat{b}_i$, on multiplie les deux membres de l'équation (4.46) et l'équation (4.47) par $\tilde{\theta}_i$ et \tilde{b}_i respectivement, on obtient

$$\sum_{i=1}^p \xi_i \tilde{\theta}_i = A_0 \sum_{i=1}^p \xi_i \tilde{\theta}_i + \sum_{i=1}^p \varphi_i(y) \tilde{\theta}_i \quad (3.49)$$

$$\sum_{i=0}^m \dot{v}_i \tilde{b}_i = A_0 \sum_{i=0}^m v_i \tilde{b}_i + \sum_{i=0}^m e_{n-i} \beta(y)u \tilde{b}_i \quad (3.50)$$

On définit

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{x} - \sum_{i=1}^p \xi_i \tilde{\theta}_i - \sum_{i=0}^m v_i \tilde{b}_i \quad (3.51a)$$

Sa dérivé de (3.51a) est donnée comme suit :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \dot{\tilde{x}} + \sum_{i=1}^p (\dot{\xi}_i \tilde{\theta}_i - \xi_i \dot{\tilde{\theta}}_i) + \sum_{i=0}^m (\dot{b}_i v_i - v_i \dot{\tilde{b}}_i) \quad (3.51b)$$

Par substitution de (3.48), (3.49) et (3.50) dans (3.51b), on trouve

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = A_0 \tilde{\varepsilon} \quad (3.52)$$

L'erreur de l'observation de la sortie est donnée par

$$y - \hat{y} = e_0(t) = c^T \tilde{x} = c^T \tilde{\varepsilon} - c^T \sum_{i=1}^p \xi_i \tilde{\theta}_i - c^T \sum_{i=0}^m v_i \tilde{b}_i \quad (3.53)$$

3.3.3. Synthèse de la commande par la technique du backstepping

En se basant sur la procédure du backstepping, on définit

$$z_1 = y - y_r \quad (3.54)$$

$$z_j = \hat{x}_j - y_r^{(j-1)} - \alpha_{j-1}, j = 2, \dots, \rho \quad (3.55)$$

Etape 1. L'équation de l'erreur de poursuite z_1 obtenue à partir de (3.54) est :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{y} - \dot{y}_r \\ &= x_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \theta_i - \dot{y}_r \\ &= \hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i - y_r^{(1)} + \tilde{x}_2 + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \tilde{\theta}_i \end{aligned} \quad (3.56)$$

A partir de (3.51), nous avons

$$\tilde{x}_2 = \tilde{\varepsilon}_2 + \sum_{i=1}^p \xi_{i,2} \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i \quad (3.57)$$

La substitution de (3.55) pour $j = 2$ et (3.57) dans (3.56), nous donne

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i + \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \varphi_{i,1}(y)) \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i + \tilde{\varepsilon}_2 \quad (3.58)$$

Si on choisit la 1^{ère} fonction stabilisante sous la forme suivante :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \varphi_{0,1} - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i \quad (3.59)$$

Alors

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 - d_1 z_1 + \delta \quad (3.60)$$

Où

$$\delta = \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \varphi_{i,1}(y)) \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i + \tilde{\varepsilon}_2$$

L'erreur paramétrique qui apparait dans le système de l'erreur d'observation (3.48) détermine la fonction de réglage initial τ_0 et ϑ_0

$$\tau_{i,0} = -\eta_i \xi_i^T c e_0 = -\eta_i \xi_{i,1} e_0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.61)$$

$$\vartheta_{i,0} = -\sigma_i v_i^T c e_0 = -\sigma_i v_{i,1} e_0, \quad i = 0, \dots, m \quad (3.62)$$

Pour la sélection de la première fonction de réglage, nous utilisons la fonction de réglage (3.61) (3.62) par l'augmentation avec un terme à partir de (3.58)

$$\tau_{i,1} = \tau_{i,0} + \omega_i z_1, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.63)$$

$$\vartheta_{i,1} = \vartheta_{i,0} + v_{i,2} z_1, \quad i = 0, \dots, m \quad (3.64)$$

Avec $\omega_i = \xi_{i,2} + \varphi_{i,1}(y)$

Etape 2. A partir de (3.55), pour $j = 2$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \hat{x}_2 - y_r^{(2)} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i} \hat{\theta}_i - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} \\ &= \hat{x}_3 + \varphi_{0,2} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2}(y) \hat{\theta}_i + k_2 e_0 - y_r^{(2)} + \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i}) \hat{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \hat{b}_i - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z_3 + \alpha_2 + \varphi_{0,2} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2}(y) \hat{\theta}_i + k_2 e_0 + \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i}) \eta_i \tau_{i,2} + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \sigma_i \vartheta_{i,2} \\
&- \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left(\hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i \right) + \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i}) (\dot{\hat{\theta}}_i - \eta_i \tau_{i,2}) \\
&+ \sum_{i=0}^m v_{i,2} (\dot{\hat{b}}_i - \sigma_i \vartheta_{i,2}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \delta
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Le terme $-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\sum_{i=1}^p \omega_i \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i)$ détermine la deuxième fonction de réglage

$$\tau_{i,2} = \tau_{i,1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \omega_i z_2, \quad i = 1, \dots, p \tag{3.66}$$

$$\vartheta_{i,2} = \vartheta_{i,1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} v_{i,2} z_2, \quad i = 0, \dots, m \tag{3.67}$$

Si on choisit la 2^{ème} fonction stabilisante sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= -c_2 z_2 - z_1 - \varphi_{0,2} - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2}(y) \hat{\theta}_i - k_2 e_0 - d_2 z_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} y_r^{(1)} \\
&+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \left(\hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i \right) - \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i}) \eta_i \tau_{i,2} - \sum_{i=0}^m v_{i,2} \sigma_i \vartheta_{i,2}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= z_3 - c_2 z_2 - z_1 - d_2 z_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \delta + \sum_{i=1}^p (\xi_{i,2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i}) (\dot{\hat{\theta}}_i - \eta_i \tau_{i,2}) \\
&+ \sum_{i=0}^m v_{i,2} (\dot{\hat{b}}_i - \sigma_i \vartheta_{i,2})
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Etape j. À partir de (3.55) $j = 3, \dots, \rho$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j &= \hat{x}_j - y_r^{(j)} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \dot{y} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \dot{\hat{x}}_l \\
&- \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \xi_{i,l}} \dot{\xi}_{i,l} - \sum_{i=0}^m \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial v_{i,l}} \dot{v}_{i,l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{x}_{j+1} + \varphi_{0,j} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,j}(y) \hat{\theta}_i + k_j e_0 + \sum_{i=1}^p \xi_{i,j} \hat{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,j} \hat{b}_i + \sigma_{j,\rho} \beta(y) u - y_r^{(j)} \\
&\quad - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} \hat{\theta}_i - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \left(\hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i + \delta \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} (\hat{x}_{l+1} + \varphi_{0,l} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,l}(y) \hat{\theta}_i + k_l e_0 + \sum_{i=1}^p \xi_{i,l} \hat{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,l} \hat{b}_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \xi_{i,l}} (-k_l \xi_{i,1} + \xi_{i,l+1} + \varphi_{i,l}) - \sum_{i=0}^m \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial v_{i,l}} (-k_2 v_{i,1} + v_{i,l+1}) \\
&= z_{j+1} + \alpha_j + \varphi_{0,j} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,j}(y) \hat{\theta}_i + \left(k_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} k_l \right) e_0 - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \left(\hat{x}_2 + \varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i \right) - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} (\hat{x}_{l+1} + \varphi_{0,l} + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,l}(y) \hat{\theta}_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \xi_{i,l}} (-k_l \xi_{i,1} + \xi_{i,l+1} + \varphi_{i,l}) - \sum_{i=0}^m \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial v_{i,l}} (-k_2 v_{i,1} + v_{i,l+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i \tau_{i,j} + \sum_{i=0}^m \left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) \sigma_i \vartheta_{i,j} \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \delta + \sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) (\hat{\theta}_i - \eta_i \tau_{i,j}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^m \left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) (\hat{b}_i - \sigma_i \vartheta_{i,j}) \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Avec $\sigma_{j,\rho} = 1$ pour $j = \rho$ et $\sigma_{j,\rho} = 0$ pour $j \neq \rho$.

Le terme $-\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} (\sum_{i=1}^p \omega_i \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i)$ détermine la $j^{\text{ième}}$ fonction de réglage pour $j = 2, \dots, \rho$

$$\tau_{i,j} = \tau_{i,j-1} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \omega_i z_j, \quad i = 1, \dots, p \tag{3.71}$$

$$\vartheta_{i,j} = \vartheta_{i,j-1} + \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} v_{i,2} z_j, \quad i = 0, \dots, m \tag{3.72}$$

La loi d'adaptation est donné come suit $\dot{\hat{\theta}}_i = \eta_i \tau_{i,\rho}$, $i = 1, \dots, p$ et $\dot{\hat{b}}_i = \sigma_i \vartheta_{i,\rho}$, $i = 0, \dots, m$

En tenant compte de (3.71) et (3.72)

$$\begin{aligned} & \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) (\dot{\hat{\theta}}_i - \eta_i \tau_{i,j}) \\ &= \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i (\tau_{i,\rho} - \tau_{i,j}) \\ &= - \sum_{o=j+1}^{\rho} \left(\left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial y} \omega_i z_o \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) (\dot{\hat{b}}_i - \sigma_i \vartheta_{i,j}) \\ &= - \sum_{o=j+1}^{\rho} \left(\left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) \sigma_i \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial y} v_{i,2} z_o \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pour $j = 3, \dots, \rho$, on définit

$$\begin{aligned} \sum_{o=j+1}^{\rho} \gamma_{2,o} z_o &= - \sum_{o=j+1}^{\rho} \left[\sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i \omega_i \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^m \left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) \sigma_i v_{i,2} \right] \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial y} z_o \end{aligned} \quad (3.75)$$

Pour $j = 2$, en compte tenu (3.69), on définit

$$\sum_{o=3}^{\rho} \gamma_{2,o} z_o = - \sum_{o=3}^{\rho} \left[\sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i} \right) \eta_i \omega_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \sigma_i v_{i,2} \right] \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial y} z_o \quad (3.76)$$

Si on choisit la $j^{\text{ième}}$ fonction stabilisante α_j comme suit

$$\alpha_j = -c_j z_j - z_{j-1} - \varphi_{0,j}(t) - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,j}(y) \hat{\theta}_i - \left(k_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} k_l \right) e_0$$

$$\begin{aligned}
& -d_j z_j \left(\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \right)^2 + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y_r^{(l-1)}} y_r^{(l)} + \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \left(\hat{x}_2 + \varphi_{0,1}(y) + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}(y) \hat{\theta}_i \right) \\
& + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} (\hat{x}_{l+1} + \varphi_{0,l}(y) + \sum_{i=1}^p \varphi_{i,l}(y) \hat{\theta}_i) \\
& + \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \xi_{i,l}} (-k_l \xi_{i,1} + \xi_{i,l+1} + \varphi_{i,l}(y)) + \sum_{i=0}^m \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial v_{i,l}} (-k_2 v_{i,1} + v_{i,l+1}) \\
& - \sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,j} - \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i \tau_{i,j} - \sum_{i=0}^m \left(v_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) \sigma_i \vartheta_{i,j} \\
& + \sum_{o=3}^p \left[\sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,o} - \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial \hat{\theta}_i} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial \hat{x}_l} \xi_{i,l} \right) \eta_i \omega_i + \sum_{i=0}^m \left(v_{i,o} - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial \hat{x}_l} v_{i,l} \right) \sigma_i v_{i,2} \right] \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} z_o \\
& + \left[\sum_{i=1}^p \left(\xi_{i,2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_i} \right) \eta_i \omega_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \sigma_i v_{i,2} \right] \frac{\partial \alpha_{o-1}}{\partial y} z_2 \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Pour l'étape final, on définit $z_{\rho+1} = 0$ et $\alpha_\rho = \hat{b}_m \beta(y) u + \hat{x}_{\rho+1} - y_r^{(\rho)}$. La dernière fonction stabilisante α_ρ est utilisée dans la loi de commande actuelle

$$u = \frac{1}{\hat{b}_m \beta(y)} \left(\alpha_\rho - \hat{x}_{\rho+1} + y_r^{(\rho)} \right) \tag{3.78}$$

Pour éviter la division par $\hat{b}_m(t)$ qui peut prendre la valeur zéro, on modifie la loi d'adaptation en prenant

$$\dot{\hat{b}}_m = \sigma_m(t) \vartheta_{m,\rho} \tag{3.79}$$

Où

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} \sigma_m^c & \text{si } 0 < b_{ml} < |\hat{b}_m| \text{ or } \{(|\hat{b}_m| = b_{ml})\} \text{ and } \{\vartheta_{m,\rho} \geq 0\} \\ 0 & \text{si ailleurs} \end{cases} \tag{3.80}$$

Où σ_m^c est une constante positive et supposons que $0 < b_{ml} < |\hat{b}_m|$, cette loi d'adaptation garantie que \hat{b}_m ne s'annule plus.

La dernière fonction de réglage est utilisée dans la loi d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \eta_i \tau_{i,\rho} = \eta_i \left(\omega_i z_i - \sum_{j=2}^p \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} \omega_i z_j - \xi_{i,1} e_0 \right), \text{ pour } i = 1, \dots, p \tag{3.81}$$

$$\hat{b}_i = \sigma_i \vartheta_{i,\rho} = \sigma_i \left(v_{i,2} z_1 - \sum_{j=2}^{\rho} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial y} v_{i,2} z_j - v_{i,1} e_0 \right), \text{ pour } i = 0, \dots, m \quad (3.82)$$

Par substitution (3.77) et (3.75) dans (3.70), le système d'erreur devient

$$\dot{z} = A_z(z, t)z + W \left(\tilde{\varepsilon}_2 + \sum_{i=1}^p \omega_i \tilde{\theta}_i + \sum_{i=0}^m v_{i,2} \tilde{b}_i \right) \quad (3.83)$$

Où la matrice système $A_z(z, t)$ possède une forme antisymétrique, pour $i \neq j$ donnée comme suit

$$A_z(z, t) = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & * & 1 + \gamma_{23} & \gamma_{24} & \dots & \gamma_{2\rho} \\ 0 & -1 - \gamma_{23} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -\gamma_{24} & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_{\rho-2,\rho} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\gamma_{2\rho} & \dots & \dots & -1 - \gamma_{\rho-1,\rho} & 1 + \gamma_{\rho-1,\rho} \\ & & & & & * \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

et

$$A_z + A_z^T = -2 \text{diag} \left[c_1 + d_1 \quad c_2 + d_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \quad \dots \quad c_\rho + d_\rho \left(\frac{\partial \alpha_{\rho-1}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.85)$$

La matrice W est donnée par

$$W^T = \left[1 \quad -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \quad \dots \quad -\frac{\partial \alpha_{\rho-1}}{\partial y} \right] \quad (3.86)$$

La fonction candidate de Lyapunov pour le système (3.83), (3.79), et (3.81-3.82) et (3.52) est

$$\Phi(z, \hat{\theta}, \varepsilon) = \frac{1}{2} z^T z + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2\eta_i} \tilde{\theta}_i^2 + \sum_{i=0}^m \frac{1}{2\sigma_i} \tilde{b}_i^2 + \left(\sum_{j=1}^{\rho} \frac{1}{8d_j} + \frac{1}{8} \right) \tilde{\varepsilon}^T P \tilde{\varepsilon} \quad (3.87)$$

Par considération de (3.85), (3.86), et puisque A_0 est stable, il existe une matrice définie positive P tel que $A_0 P + P A_0^T = -2I$. La dérivé de (3.87) par rapport au temps est :

$$\dot{\Phi} \leq - \sum_{j=1}^{\rho} c_j z_j^2$$

La fonction de Lyapunov Φ satisfait (3.5), et ainsi $\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \Gamma (\theta - \hat{\theta})$ satisfait les propriétés (3.6) et (3.7), donc selon le **théorème 2** on peut appliquer la commande adaptative par apprentissage itératif sur cette classe de systèmes non linéaires si le système est en exécution d'une tâche répétitive en un temps fini. Les conditions initiales à chaque itération doivent être satisfaites

$$z_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad z_{k-1}(T) = z_k(0) \quad \text{et} \quad \xi_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_k(0) = 0$$

Selon le théorème 2. La commande adaptative par apprentissage itératif est donnée par

$$u_k = \frac{1}{\hat{b}_{m,k}\beta(y_k)} \left(\alpha_{\rho,k} - \hat{x}_{\rho+1,k} + y_r^{(\rho)} \right) \quad (3.88)$$

Avec les lois d'adaptations

$$(1 - \gamma)\dot{\hat{\theta}}_{i,k} = -\gamma\hat{\theta}_{i,k}(t) + \gamma\hat{\theta}_{i,k-1}(t) + \eta_i \tau_{i,\rho,k} \quad (3.89)$$

$$(1 - \gamma)\dot{\hat{b}}_{i,k} = -\gamma\hat{b}_{i,k}(t) + \gamma\hat{b}_{i,k-1}(t) + \sigma_i \vartheta_{i,\rho,k} \quad (3.90)$$

3.3.4 Exemple illustratif

Pour montrer l'efficacité de la loi commande proposée par simulation, nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y + \theta_1 \cos(y) \\ \dot{x}_2 = u + \cos(y) + \theta_2 y^2 \end{cases} \quad (3.91)$$

$$y = x_1$$

Selon le schéma de l'observateur présenté nous définissons l'observateur suivant pour ce système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + y + \hat{\theta}_1 \cos(y) + \xi_{1,1}\dot{\hat{\theta}}_1 + \xi_{2,1}\dot{\hat{\theta}}_2 + k_1 e_0 \\ \dot{\hat{x}}_2 = u + \cos(y) + \hat{\theta}_2 y^2 + \xi_{1,2}\dot{\hat{\theta}}_1 + \xi_{2,2}\dot{\hat{\theta}}_2 + k_2 e_0 \end{cases} \quad (3.92)$$

Et le filtre

$$\dot{\xi}_1 = A_0 \xi_1 + [\cos(y) \ 0]^T, \quad (3.93)$$

$$\dot{\xi}_2 = A_0 \xi_2 + [0 \ x_1^2]^T, \quad (3.94)$$

Comme dans (3.54) et (3.55) on définit

$$z_1 = y - y_r$$

$$z_2 = \hat{x}_2 - y_r^{(1)} - \alpha_1,$$

Selon le schéma de commande présenté les fonctions stabilisantes pour le système (3.91) sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -c_1 z_1 - d_1 z_1 - y - \hat{\theta}_1 \cos(y) \\ \alpha_2 &= -c_2 z_2 - z_1 - \cos(y) - y^2 \hat{\theta}_2 - k_2 e_0 - d_2 z_2 (-c_1 - d_1 - 1 + \hat{\theta}_1 \sin(y))^2 \\ &\quad + (c_1 + d_1) \dot{y}_r + (-c_1 - d_1 - 1 + \hat{\theta}_1 \sin(y)) (\hat{x}_2 + y + \hat{\theta}_1 \cos(y)) \\ &\quad - (\xi_{1,2} + \cos(y)) \eta_1 \hat{\theta}_1 - \xi_{1,2} \eta_2 \hat{\theta}_2\end{aligned}$$

La loi d'adaptation paramétrique

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= \eta_1 \left((\xi_{1,2} + \cos(y)) z_1 - (-c_1 - d_1 - 1 + \hat{\theta}_1 \sin(y)) (\xi_{1,2} + \cos(y)) z_2 - \xi_{1,1} e_0 \right) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \eta_2 \left(\xi_{2,2} z_1 - (-c_1 - d_1 - 1 + \hat{\theta}_1 \sin(y)) \xi_{2,2} z_2 - \xi_{2,1} e_0 \right)\end{aligned}$$

La commande adaptative

$$u = \alpha_2 + \ddot{y}_r$$

Si le système (3.91) est en exécution d'une tâche répétitive nous appliquons la commande adaptative par apprentissage itératif suivant :

$$\begin{aligned}u_k &= \alpha_{2,k} + \ddot{y}_r \\ \dot{\hat{\theta}}_{1,k} &= -\gamma \hat{\theta}_{1,k}(t) + \gamma \hat{\theta}_{1,k-1}(t) + \eta_1 \left((\xi_{1,2,k} + \cos(y_k)) z_{1,k} - (-c_1 - d_1 - 1 - \hat{\theta}_{1,k} \sin(y_k)) (\xi_{1,2,k} + \cos(y_k)) z_{2,k} - \xi_{1,1} e_{0,k} \right) \\ \dot{\hat{\theta}}_{2,k} &= -\gamma \hat{\theta}_{2,k}(t) + \gamma \hat{\theta}_{2,k-1}(t) + \eta_2 \left((\xi_{2,2,k}) z_{1,k} - (-c_1 - d_1 - 1 - \hat{\theta}_{1,k} \sin(y_k)) (\xi_{2,2,k}) z_{2,k} - \xi_{2,1} e_{0,k} \right)\end{aligned}$$

3.3.5. Résultats de simulation

Nous avons simulé l'exemple avec $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 3$, et $y_r(t) = 3\sin(2\pi t)$ sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ et $c_1 = 1$, $c_2 = 10$, $d_1 = 10$, $d_2 = 10$, $k_1 = 145$, $k_2 = 175$. et avec les conditions initiales $x_{1,0}(0) = x_{2,0}(0) = 0$, $\hat{x}_{1,k}(0) = x_{1,k}(0)$, $\hat{x}_{2,k}(0) = x_{2,k}(0)$. Les figures suivantes montrent l'évolution de la sup-norme de l'erreur de poursuite et celle de l'erreur d'observation ainsi que la norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique en fonction des itérations.

❖ Pour $\gamma = 0$ avec $T_1 = 5$, $T_2 = 5$.

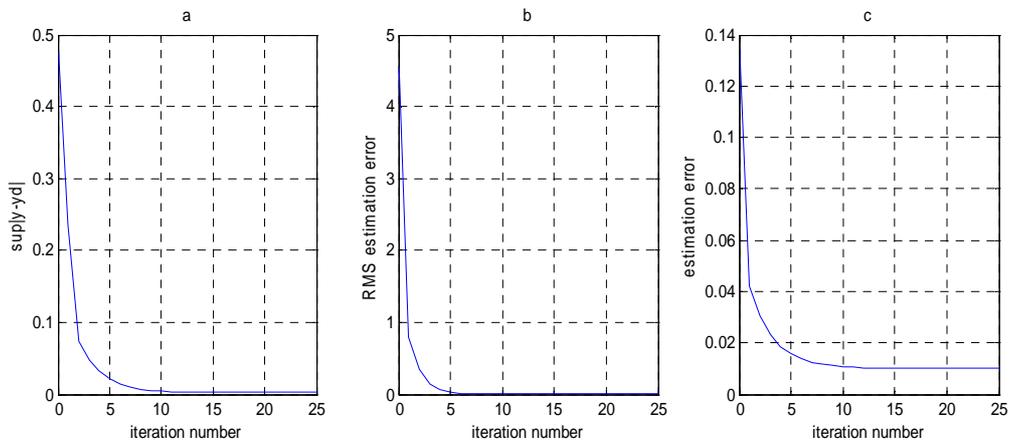


Fig. 3.1. (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique (c) Erreur d'estimation $\sup_{t \in [0,1]} e_k$

❖ Pour $\gamma = 0.5$ avec $T_1 = 5$, $T_2 = 5$.

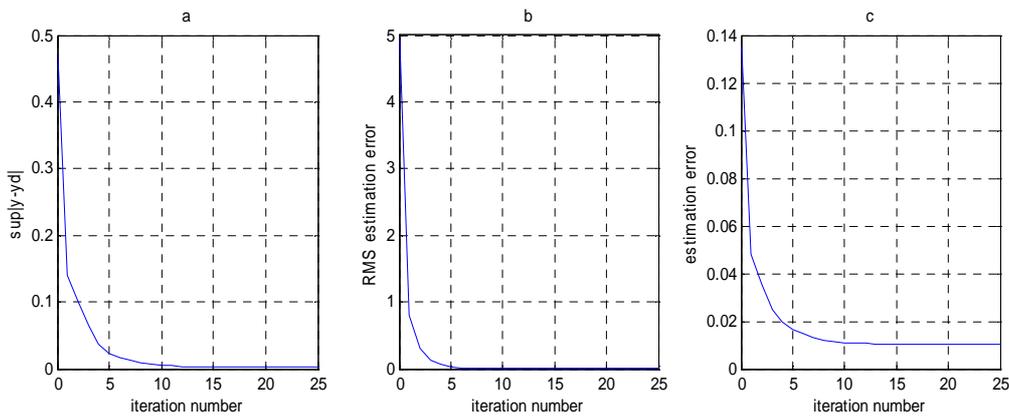


Fig. 3.2. (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique (c) Erreur d'estimation $\sup_{t \in [0,1]} e_k$

❖ Pour $\gamma = 1$ avec $T_1 = 0.001$, $T_2 = 0.05$.

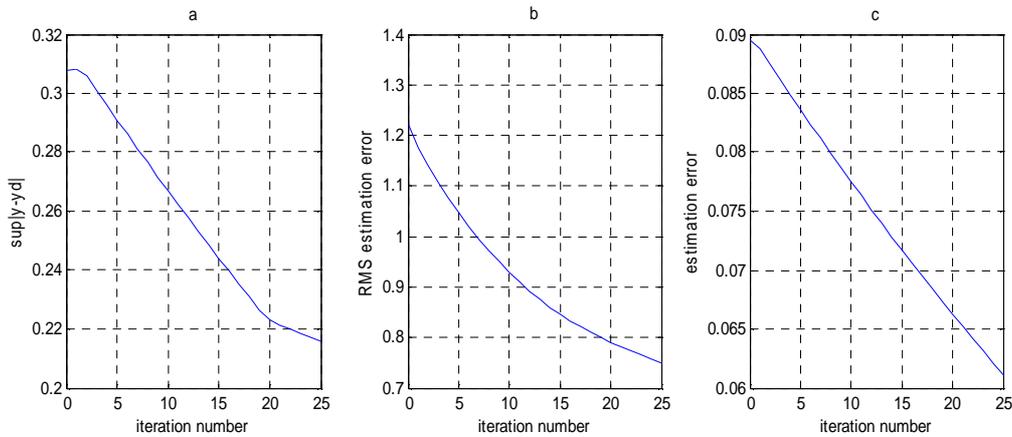


Fig. 3.3. (a) Erreur de poursuite $\sup_{t \in [0,1]} e_k$ (b) Norme RMS de l'erreur d'estimation paramétrique (c) Erreur d'estimation $\sup_{t \in [0,1]} e_k$

Les résultats présentés ci-dessus, sont ceux de la commande adaptative par apprentissage itératif avec observateur d'état. Selon les résultats de la simulation, il apparaît clairement qu'à travers les itérations le comportement du système en poursuite s'améliore, et les erreurs de poursuite sont bien moins importantes et aussi les estimations des paramètres convergent vers les vraies valeurs des paramètres sauf dans le cas où $\gamma = 1$ les estimés des paramètres ne convergent pas.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé la loi de CAI adaptative du chapitre précédent pour les systèmes non linéaires dont les variables d'états ne sont pas disponibles. Pour résoudre ce problème, nous avons ajouté un observateur d'états, dont le rôle est de fournir les états estimés. Utilisant la théorie de Lyapunov, nous avons démontré la stabilité du système global en boucle fermée, ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite et l'erreur d'observation.

Chapitre 4

Commande adaptative par apprentissage itératif des robots manipulateurs

4.1. Introduction

Habituellement, les robots manipulateurs sont utilisés pour exécuter des tâches répétitives. Dans ce cas, la trajectoire de référence est répétée sur un intervalle de temps donné. Donc, il devient intéressant de concevoir un régulateur capable d'utiliser les informations des cycles précédents en vue d'améliorer les performances du système à la prochaine exécution de la tâche.

Dans ce chapitre, nous présentons une loi de CAI adaptative pour la commande en poursuite de trajectoires des robots manipulateurs rigides en deux cas, avec mesures des vitesses articulaires, et sans mesures des vitesses articulaires. Utilisant les théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov, est démontrée la stabilité du système en boucle fermée pour les deux cas. L'implémentation de cette loi est effectuée pour le cas du robot PUMA 560.

4.2. Robot manipulateur modèle et propriétés

L'équation dynamique des robots manipulateurs est en générale de la forme suivante :

$$M(q_k(t))\ddot{q}_k(t) + C(q_k(t), \dot{q}_k(t))\dot{q}_k(t) + G(q_k(t)) + F\dot{q}_k(t) = \tau_k(t) \quad (4.1)$$

Avec

$q_k(t)$	Le vecteur des positions articulaires.
$\dot{q}_k(t)$	Le vecteur des vitesses articulaires.
$\ddot{q}_k(t)$	Le vecteur des accélérations articulaires.
$M(q_k(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matrice d'inertie.
$C(q_k(t), \dot{q}_k(t))\dot{q}_k(t) \in \mathbb{R}^n$	Le vecteur des forces ou couples de Coriolis et Centrifuge.
$G(q_k(t)) \in \mathbb{R}^n$	Le vecteur des forces ou couples dus aux forces Gravitationnelles.
$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matrice des coefficients de friction, constante, Diagonale et définie positive
$\tau(t) \in \mathbb{R}^n$	Le vecteur des forces ou couples de commande.
$k \in \mathbb{Z}_+$	Nombre d'itération.
$t \in [0, T]$	Le temps.

Pour la synthèse de la loi de la commande, nous avons besoin des propriétés suivantes, qui sont communes pour les robots manipulateurs (Arteaga, 2003):

Propriété 1

La matrice d'inertie $M(q_k(t))$ est symétrique, définie positive, et satisfait l'inégalité suivante:

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq x^T M(q_k(t))x \leq \lambda_M \|x\|^2, \quad \forall q_k, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

Avec $0 < \lambda_m < \lambda_M < \infty, \forall t \in [0, T]$, et $k \in \mathbb{Z}_+$.

Propriété 2

La matrice d'inertie $M(q_k(t))$ est symétrique, définie positive, et bornée :

$$0 < m_1 I_n \leq M(q_k(t)) \leq m_2 I_n, \quad (4.3)$$

Pour tout $q_k \in \mathbb{R}^n$, et $m_2 > m_1 > 0$.

Propriété 3

La matrice d'inertie, celle des forces centrifuges et la matrice des forces de Coriolis vérifient la relation d'antisymétrie :

$$x^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q_k) - C(q_k, \dot{q}_k) \right) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

où $\dot{M}(q_k)$ est la dérivée par rapport au temps de la matrice d'inertie.

Propriété 4

L'équation dynamique des robots manipulateurs (4.1) peut être réécrite comme suit :

$$M(q_k) \ddot{q}_k + C(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + G(q_k) + F \dot{q}_k = \tau_k = Y(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \theta \quad (4.5)$$

Où $Y(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est le regresseur et $\theta \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur constant des paramètres.

Propriété 5

La matrice des forces centrifuges et de Coriolis et le vecteur des forces gravitationnelles vérifient :

$$\|C(q_k, \dot{q}_k)\| \leq k_c \|\dot{q}_k\| \quad (4.6)$$

Avec $0 < k_c < \infty, \forall \dot{q}_k \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$, et $k \in \mathbb{Z}_+$

et

$$\|G(q_k)\| \leq k_G \quad (4.7)$$

Avec, $0 < k_G < \infty, \forall t \in [0, T]$, et $k \in \mathbb{Z}_+$.

Propriété 6

Le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis satisfait :

$$C(q_k, x)y = C(q_k, y)x \quad (4.8)$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

Ainsi, on a (Tayebi, 2007)

Hypothèse 1

Les trajectoires de référence sont réalisables pour le robot manipulateur considéré.

Hypothèse2

Les trajectoires désirées $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$, et $\ddot{q}_d(t)$, sont bornées $\forall t \in [0, T]$, et $k \in \mathbb{Z}_+$.

Hypothèse 3

Les conditions initiales doivent être satisfaites $\dot{q}_d(0) - \dot{q}_k(0) = q_d(0) - q_k(0) = 0$.

Pour faciliter ultérieurement l'analyse et la synthèse de la commande, on définit le vecteur des fonctions $\text{Tanh} (*) \in \mathbb{R}^n$ et $\text{Cos} (*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme suit (Zhang et al, 2000):

$$\text{Tanh}(z) = [\tanh(z_1), \dots, \tanh(z_n)]^T \quad (4.9)$$

et

$$\text{Cosh}(z) = \text{diag}\{\cosh(z_1), \dots, \cosh(z_n)\} \quad (4.10)$$

Avec, $z = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbb{R}^n$, et $\text{diag}\{*\}$ noté que la matrice est diagonale.

En se basant sur la définition (4.9), on peut montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tanh^2(\|z\|) &\leq \ln(\cosh(\|z\|)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(z_i)) \leq \|z\|^2 \end{aligned}$$

$$\tanh^2(\|z\|) \leq \|\text{Tanh}(z)\|^2 \leq \text{Tanh}(z)^T \text{Tanh}(z) \quad (4.11)$$

Hypothèse 4 (Zhang et al, 2000)

On suppose, pour tout $z, v \in \mathbb{R}^n$, qu'existent les constantes positives k_m, k_c , et k_g telles que

$$\begin{aligned}\|M(z) - M(v)\| &\leq k_m \|Tanh(z - v)\|, \\ \|G(z) - G(v)\| &\leq k_g \|Tanh(z - v)\|, \\ \|C(z, \dot{q}_k) - C(v, \dot{q}_k)\| &\leq k_c \|\dot{q}_k\| \|Tanh(z - v)\|.\end{aligned}\quad (4.12)$$

4.3. Synthèse de la commande

L'objectif est de synthétiser une loi de commande adaptative par apprentissage itératif $\tau_k(t)$, afin d'assurer la bornitude de $q_k(t)$, $\dot{q}_k(t)$, et $\ddot{q}_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $k \in \mathbb{Z}_+$ et la convergence de $q_k(t)$ vers la trajectoire de référence $q_d(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et k tend vers l'infini dans les deux cas, avec mesure des vitesses articulaires, et sans mesure des vitesses articulaires.

On définit l'erreur de poursuite de position e_k et l'erreur paramétrique $\tilde{\theta}_k$ comme suit :

$$e_k = q_d - q_k \quad (4.13)$$

$$\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \theta \quad (4.14)$$

Où $\tilde{\theta}_k \in \mathbb{R}^p$ représente l'erreur d'estimation paramétrique et $\hat{\theta}_k \in \mathbb{R}^p$ représente une estimation de θ définie en (4.5).

4.3.1. Synthèse de la commande adaptative par apprentissage itératif

La loi de commande est composée d'une loi d'adaptation de compensation désirée (DCAL) (Horowitz, 1990) en *feedforward* pour compenser l'effet des paramètres incertains et un terme non linéaire en *feedback* couplée avec un filtre dynamique non linéaire pour compenser le manque de mesures des vitesses articulaires et la différence entre la dynamique du système réel et le modèle estimé introduit comme un terme en *feedforward*.

Pour faciliter la synthèse de la commande, on introduit l'erreur de poursuite filtrée $\eta_k \in \mathbb{R}^n$ définie telle que:

$$\eta_k = \dot{e}_k + Tanh(e_k) + Tanh(e_{f,k}), \quad (4.15)$$

Où e_k et $\tanh(*)$ sont exprimés par (4.13) et (4.9) respectivement et, $e_{fk} \in \mathbb{R}^n$ est une variable auxiliaire à laquelle on impose la dynamique ci-dessous :

$$\dot{e}_{fk} = -\text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k) - K \text{Cosh}^2(e_{f,k}) \eta_k, \quad e_{fk}(0) = 0, \quad (4.16)$$

Où le scalaire positif K est un gain de commande et $\cosh(*)$ est exprimé par (4.10).

En se basant sur le système d'erreur développée ultérieurement et l'analyse de stabilité correspondante, on obtient, pour le système (4.1), la commande adaptative par apprentissage itératif exprimée par :

$$\tau_k(t) = Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \hat{\theta}_k - K \text{Cosh}^2(e_{f,k}) \text{Tanh}(e_k) + \text{Tanh}(e_k) \quad (4.17)$$

Où, K est le même gain de commande définie en (4.16) et, $\hat{\theta}_k$ est le vecteur des paramètres estimés généré par la loi d'adaptation suivante :

$$(1 - \gamma) \dot{\hat{\theta}}_k(t) = -\gamma \hat{\theta}_k(t) + \gamma \hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \eta_k \quad (4.18)$$

Où Γ est une matrice constante définie positive et $\gamma \in [0,1]$

Les valeurs initiales du vecteur des paramètres doivent satisfaire $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et, le vecteur des paramètres initiaux pour $k = 0$ est choisi $\hat{\theta}_0(t) = \theta_{ini}$, $\forall t \in [0, T]$, où θ_{ini} est un vecteur constant. En général, la loi d'adaptation (4.18) devient une loi d'adaptation purement dans le domaine de temps si $\gamma = 0$, une loi d'adaptation purement dans le domaine des itérations si $\gamma = 1$, et la combinaison des deux si $\gamma \in]0, 1[$. La figure suivante représente le schéma de la CAI adaptative pour les robots manipulateurs avec $\hat{\theta}_{k-1}$ représenté par $\hat{\theta}_{k-1}(t)$ et $t \in [0, T]$ dans le cas où $\gamma \in]0, 1[$, et par $\hat{\theta}_{k-1}(T)$ dans le cas où $\gamma = 0$.

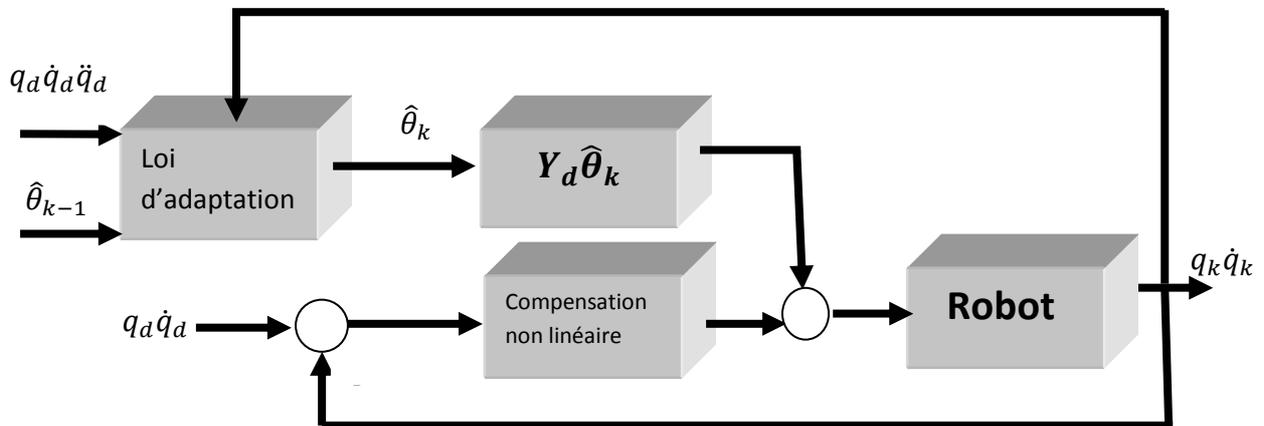


Fig. 4.1 schéma de la commande adaptative par apprentissage itératif

4.3.2. Erreur du système

On commence le développement par le calcul de l'erreur de poursuite filtrée en boucle ouverte. Pour cela, on dérive par rapport au temps (1.13), puis on multiplie les deux membres de l'équation par M_k et ensuite on remplace (4.1) par $M_k q_k$ dans l'expression résultante, ce qui donne :

$$\begin{aligned} M(q_k)\dot{\eta}_k &= M(q_k)\ddot{q}_d + C(q_k, \dot{q}_k)\dot{q}_k + G(q_k) + F\dot{q}_k - \tau \\ &+ M(q_k)\text{Cosh}^{-2}(e_k)\dot{e}_k \\ &+ M(q_k)\text{Cosh}^{-2}(e_{fk})\dot{e}_{fk} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Après l'addition et la soustraction de $Y_d\theta$ selon (4.5) au membre gauche de (4.19), on peut alors utiliser (4.13), (4.15), et (4.16) pour réécrire l'erreur dynamique en boucle ouverte pour η_k sous la forme suivante :

$$M(q_k)\dot{\eta}_k = -C(q_k, \dot{q}_k)\eta_k - KM(q_k)\eta_k + Y_d\theta + \chi + \tilde{Y} - \tau \quad (4.20)$$

Avec, $\chi(e_k, e_{f,k}, \eta_k, t)$, $\tilde{Y}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, t) \in \mathbb{R}^n$, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \chi &= M(q_k)\text{Cosh}^2(e_k)(\eta - \text{Tanh}(e_{fk}) + \text{Tanh}(e_k)) \\ &+ M(q_k)\text{Cosh}^2(e_{f,k})(-\text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k)) \\ &+ C(q_k, \dot{q}_d + \text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k))(\text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k)) \\ &+ C(q_k, \dot{q}_d)(\text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k)) \\ &- C(q_k, \eta_k)(\dot{q}_d + \text{Tanh}(e_{f,k}) + \text{Tanh}(e_k)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

et

$$\tilde{Y} = M(q_k)\ddot{q}_d + C(q_k, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_k) + F\dot{q}_k - Y\theta \quad (4.22)$$

Par substitution de (4.17) dans (4.20), l'erreur dynamique en boucle fermée pour η_k peut prendre la forme suivante:

$$\begin{aligned} M(q_k)\dot{\eta}_k &= -C(q_k, \dot{q}_k)\eta_k - KM(q_k)\eta_k - Y_d\tilde{\theta}_k + \tilde{Y} + \chi \\ &+ k\text{Cosh}^2(e_{f,k})\text{Tanh}(e_{fk}) - \text{Tanh}(e_k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Par l'exploitation du fait que, les trajectoires désirées sont bornées (propriétés 1 et 4) et les propriétés des fonctions hyperboliques, notons que $\chi(e_k, e_{fk}, \eta_k, t)$, de (4.21) peut être limitée comme suit :

$$\|\chi\| \leq \xi_1 \|x\| \quad (4.24)$$

Où ξ_1 est une constante positive dépendant des paramètres mécaniques et des trajectoires désirée et $x \in \mathbb{R}^{3n}$ est défini par

$$x = [\text{Tanh}(e_k)^T \quad \text{Tanh}(e_{f,k})^T \quad \eta^T]^T \quad (4.25)$$

Du fait que les trajectoires désirées sont bornées et vue la propriété 1, on peut montrer que $\tilde{Y}(e_k, e_{fk}, \eta_k, t)$ exprimée par (4.22) peut être limitée comme suit :

$$\|\tilde{Y}\| \leq \xi_2 \|x\| \quad (4.26)$$

où ξ_2 est une constante positive dépendant des paramètres mécaniques et des trajectoires désirées.

4.3.3. Analyse de stabilité

Dans cette section, nous allons donner les conditions de stabilité du système à commander. Pour cela nous annonçons le théorème suivant :

Théorème 3 *Considérons la dynamique du robot (4.1) en boucle fermée avec la commande adaptative par apprentissage itératif (4.17) et (4.18), nous avons :*

- i) Si $\gamma \in [0,1[$ alors, $e_k(t), \dot{e}_k(t), \tilde{\theta}_k(t), \tau_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, pour $k \in \mathbb{Z}_+$ et pour $t \in [0, T]$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$
- ii) Si $\gamma = 1$ alors, $e_k(t), \dot{e}_k(t) \in \mathcal{L}_{\infty e}$, $\tilde{\theta}_k(t), \tau_k(t) \in \mathcal{L}_{2e} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$. de plus, avec $e_k(0) = \dot{e}_k(0) = 0$, nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$

A condition que le gain K soit choisi comme suit :

$$K = \frac{1}{m_1} (1 + k_n (\xi_1 + \xi_2)^2) \quad (4.27)$$

Où m_1, ξ_1 , et ξ_2 sont des constantes positives dépendant des paramètres mécaniques et des trajectoires désirées avec

$$k_n > 1 \quad (4.28)$$

Preuve

1. Nous allons montrer (i),

Nous définissons tout d'abord la fonction de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned}
V(e_k, e_{fk}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) &= \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{i,k})) + \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{f,i,k})) \\
&+ \frac{1}{2} \eta_k^T M(q_k) \eta_k + \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Où $e_{i,k}$ et $e_{f,i,k}$ sont les $i^{\text{ièmes}}$ éléments des vecteurs e_k et $e_{f,k}$ définis en (4.15) et (4.16), respectivement.

La dérivée de (4.29) par rapport au temps conduit à l'expression de $\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k)$ donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_k, e_{fk}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) &= \text{Tanh}(e_k)^T \dot{e}_k + \text{Tanh}(e_{f,k})^T \dot{e}_{fk} + \eta_k^T M(q_k) \dot{\eta}_k \\
&+ \frac{1}{2} \eta_k^T \dot{M}(q_k) \eta_k + (1-\gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_k
\end{aligned} \tag{4.30}$$

On peut utiliser (4.15), (4.16), et (4.23) pour simplifier l'expression (4.30) de $\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) &= -\text{Tanh}(e_k)^T \text{Tanh}(e_k) - \text{Tanh}(e_{f,k})^T \text{Tanh}(e_{f,k}) \\
&+ \eta_k^T (\tilde{Y} + \chi) + k \eta_k^T M(q_k) \eta_k - \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k \\
&+ (1-\gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_k
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Tenant compte de (4.4), et après l'application de (4.24), (4.26), (4.2) et (4.27) pour réduire (4.31), nous pouvons alors écrire la borne supérieur de $\dot{V}(e_k, e_{fk}, \eta_k, \tilde{\theta}_k)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_k, e_{fk}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) &\leq -\|\text{Tanh}(e_k)\|^2 - \|\text{Tanh}(e_{fk})\|^2 - \|\eta_k\|^2 \\
&+ [(\xi_1 + \xi_2) \|x\| \|\eta_k\| - k_n (\xi_1 + \xi_2)^2 \|\eta_k\|^2] \\
&- \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k + (1-\gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_k
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Par l'application de l'argument de la *nonlinear damping* (Kokotovic, 1992) pour le terme entre crochets de la relation (4.32), la borne supérieure de $\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k)$ devient:

$$\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) \leq -\beta x_k^T x_k + \frac{1}{k_n} x_k^T x_k - \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k + (1 - \gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \hat{\theta}_k \quad (4.33)$$

Pour $k_n > 1$, la relation (4.33) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) \leq -\beta x_k^T x_k - \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k + (1 - \gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \hat{\theta}_k \quad (4.34)$$

L'utilisation de la loi d'adaptation (4.18) et le fait que $-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1} = -\gamma \tilde{\theta}_k + \gamma \tilde{\theta}_{k-1}$ nous permet de modifier l'inégalité (4.34) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) &= -\beta x_k^T x_k - \tilde{\theta}_k^T Y_d^T \eta_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} (-\gamma \hat{\theta}_k + \gamma \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma Y^T (q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \eta_k) \\ &= -\beta x_k^T x_k - \gamma \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k + \gamma \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} \\ &= -\beta x_k^T x_k + \frac{\gamma}{4} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \left(\tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1} \right)^T \Gamma^{-1} \left(\tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1} \right) \\ &\leq \frac{\gamma}{4} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Maintenant, on considère la première itération $k = 0$. Puisque $\hat{\theta}_{-1}(t)$ dans la loi d'adaptation (4.18) est égal à zéro, nous avons

$$\begin{aligned} V_0(0) &= \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{i0}(0))) + \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{fi0}(0))) \\ &+ \frac{1}{2} \eta_0(0) M(q_1) \eta_0(0) + \frac{(1-\gamma)}{2} \tilde{\theta}_0^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_0(0) \\ &= \frac{(1-\gamma)}{2} \theta^T \Gamma^{-1} \theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ceci implique que $V_0(0)$ est bornée selon l'hypothèse 2. La fonction de Lyapunov (4.29) à l'itération initiale satisfait

$$\dot{V}(e_0, e_{f,0}, \eta_0, \tilde{\theta}_0) \leq \frac{\gamma}{4} \theta^T \Gamma^{-1} \theta \quad (4.37)$$

Il est facile de conclure que $V_0(t), e_0(t), \dot{e}_0(t), \tilde{\theta}_0(t), \tau_0(t) \in L_{\infty e}[0, T]$.

En se basant sur ce résultat, nous allons prouver que la commande adaptative par apprentissage itératif (4.17) et (4.18) assure la bornitude de $e_k(T)$, $\dot{e}_k(T)$, $\hat{\theta}_k(T)$, $\int_0^T x_k^T x_k dt$, et $\int_0^T \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$. et $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T x_k dt = 0$

On considère la fonction définie positive suivante :

$$W_k(T) = \int_0^T \gamma \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k dt + \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(T) \quad (4.38)$$

La différence entre $W_k(T)$ et $W_{k-1}(T)$ peut être déterminée par l'utilisation de l'intégrale par partie en sachant que $\tilde{\theta}_k(0) = \tilde{\theta}_k(T)$

$$\begin{aligned} \Delta W_k(T) &= W_k(T) - W_{k-1}(T) \\ &= \int_0^T \frac{\gamma}{2} [\tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}] + \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(T) \\ &\quad - \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(T) \\ &= \int_0^T \frac{\gamma}{2} [\tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}] + \frac{1-\gamma}{2} \int_0^T \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_k dt \\ &\quad + \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(0) - \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(T) \\ &= \int_0^T \frac{\gamma}{2} [\tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}] + \int_0^T \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} [-\gamma \hat{\theta}_k(t) + \gamma \hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma Y_d^T \eta_k] dt \\ &= \int_0^T -\frac{\gamma}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) dt + \int_0^T \tilde{\theta}_k^T Y_d^T \eta_k dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

Maintenant, on introduit une autre fonction définie positive U_k exprimée par :

$$U(e_k, e_{fk}, \eta_k) = \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(e_{ik})) + \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(e_{fik})) + \frac{1}{2} \eta_k^T M(q_k) \eta_k \quad (4.40)$$

i.e., $V(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) = U(e_k, e_{f,k}, \eta_k) + (1-\gamma) \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k$.

La dérivée de U_k par rapport au temps satisfait l'inégalité

$$\dot{U}(e_k, e_{f,k}, \eta_k) \leq -\beta x_k^T x_k - \tilde{\theta}_k^T Y_d^T \eta_k \quad (4.41)$$

Selon le résultat trouvé en (4.34), l'intégration de (4.41) de 0 à T conduit à

$$U_k(T) - U_k(0) \leq -\int_0^T \beta x_k^T x_k dt - \int_0^T \tilde{\theta}_k^T Y_d^T \eta_k dt \quad (4.42)$$

Ce qui implique

$$\int_0^T \tilde{\theta}_k^T Y_d^T \eta_k dt \leq -U_k(T) - \int_0^T \beta x_k^T x_k dt \quad (4.43)$$

La substitution de (4.43) dans (4.39) donne :

$$\begin{aligned} \Delta W_k(T) &= W_k(T) - W_{k-1}(T) \\ &\leq -U_k(T) - \int_0^T \beta x_k^T x_k dt - \int_0^T \frac{\gamma}{2\beta} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) dt \\ &\leq -U_k(T) - \int_0^T \beta x_k^T x_k dt \leq 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

La bornitude de $W_k(T)$, $\int_0^T \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k dt$ et $\tilde{\theta}_k^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(T)$ est garantie $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, si $W_0(T)$ est bornée. De plus, l'équation (4.44) implique

$$U_k(T) + \int_0^T \beta x_k^T x_k dt \leq W_{k-1}(T) - W_k(T) \leq W_0(T) \quad (4.45)$$

Ce qui assure la bornitude de $U_k(T)$, $x_k(T)$, et $\int_0^T x_k^T x_k dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Notons que l'équation (4.44) donne aussi

$$\begin{aligned} W_k(T) &= W_0(T) + \sum_{j=2}^k \Delta W_j(T) \\ W_k(T) &\leq W_0(T) - \sum_{j=2}^k U_j(T) - \sum_{j=2}^k \int_0^T \beta x_j^T x_j dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ou par équivalence

$$\sum_{j=2}^k U_j(T) + \sum_{j=2}^k \int_0^T \beta x_k^T x_k dt \leq W_0(T) - W_k(T) \leq W_0(T) \quad (4.47)$$

A partir de (4.44), (4.45) et (4.47) on peut conclure que $e_k(T)$, $\dot{e}_k(T)$, $\hat{\theta}_k(T)$, $\int_0^T x_k^T x_k dt$, et $\int_0^T \tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k dt$ sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. De plus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T x_k dt = 0 \quad (4.48)$$

Dans la partie précédente de la démonstration, nous avons montré que tous les signaux internes de la première itération sont bornés, et que $e_k(T)$, $\dot{e}_k(T)$, $\hat{\theta}_k(T)$, ou par équivalence $e_k(0)$, $\dot{e}_k(0)$ et $\hat{\theta}_k(0)$ sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Dans ce qui suit, nous allons démontrer la bornitude de tous les signaux internes à chaque itération ainsi que la convergence de $e_k(t)$ et $\dot{e}_k(t)$.

On considère la fonction de Lyapunov $V_k(t)$ exprimée par (4.29), sa dérivée par rapport au temps satisfait (4.36). L'intégration de (4.36) de 0 à t pour $t \in [0, T]$, donne

$$\begin{aligned} V_k(t) &\leq V_k(0) + \int_0^t \frac{\gamma}{4} \tilde{\theta}_{k-1}^T(\tau) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(\tau) d\tau \\ &\leq V_k(0) + \int_0^T \frac{\gamma}{4} \tilde{\theta}_{k-1}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(t) dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

$V_k(0) = \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(0) = \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T(T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(T)$ et $\int_0^T \tilde{\theta}_{k-1}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}(t) dt$ sont bornées $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ comme montré précédemment. La bornitude de $V_k(t)$, $x_k(t)$, $\hat{\theta}_k(t)$, et $\tau_k(t)$ est garantie par (4.49) $\forall t \in [0, T]$ et $k \in \mathbb{Z}_+$. Maintenant, nous avons $x_k(t) \in L_{pe}[0, T]$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T x_k dt = 0 \quad (4.50)$$

Par conséquent, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, $\forall t \in [0, T]$.

Finalement, à partir de la définition donnée dans (4.25) on peut voir que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tanh(e_k) = 0$. Donc, avec les propriétés des fonctions hyperboliques et les définitions données en (4.15) et (4.16), on peut conclure que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k = 0$.

2. montrons (ii),

Soit la fonction définie positive suivante :

$$\Psi(e_k, e_{f,k}, \eta_k, \tilde{\theta}_k) = V_k(e_k, e_{f,k}, \eta_k) + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(\tau) d\tau \quad (4.51)$$

Le terme $V_k(e_k, e_{f,k}, \eta_k)$ dans (4.51) est choisi selon :

$$V_k(e_k, e_{f,k}, \eta_k) = \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{i,k})) + \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{f,i,k})) + \frac{1}{2} \eta_k^T M(q_k) \eta_k \quad (4.52)$$

La différence entre Ψ_k et Ψ_{k-1} est telle que :

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_k &= \Psi_k - \Psi_{k-1} \\ &= V_k - V_{k-1} + \frac{1}{2} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}) d\tau \\ &= V_k - V_{k-1} - \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \bar{\theta}_k - 2\bar{\theta}_k^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k) d\tau \end{aligned} \quad (4.53)$$

Avec $\bar{\theta}_k = \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}$.

On peut réécrire V_k sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_k(e_k, e_{f,k}, \eta_k) &= V_k(e_k(0), e_{f,k}(0), \eta_k(0)) \\ &+ \int_0^t (-\text{Tanh}(e_k)^T \text{Tanh}(e_k) - \text{Tanh}(e_{f,k})^T \text{Tanh}(e_{f,k}) + \eta_k^T (\tilde{Y} + \chi) \\ &+ k\eta_k^T M(q_k) \eta_k - \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k) d\tau \\ &\leq V_k(e_k(0), e_{f,k}(0), \eta_k(0)) - \int_0^t (\beta x_k^T x_k + \eta_k^T Y_d \tilde{\theta}_k) d\tau \end{aligned} \quad (4.54)$$

L'utilisation de (4.18), (4.54) et l'hypothèse 3, nous permet de réduire la relation (4.53) sous la forme suivante :

$$\Delta\Psi_k = -V_{k-1} - \frac{1}{2} \int_0^T (\eta_k^T Y_d \Gamma Y_d^T \eta_k + 2\beta x_k^T x_k) d\tau \leq 0 \quad (4.55)$$

Ceci montre que Ψ_k est une séquence décroissante. Donc, la bornitude de Ψ_0 implique celle de Ψ_k .

Dans le reste de la démonstration, nous allons montrer que $\Psi_0(t)$ est borné $\forall t \in [0, T]$. Ce qui implique la bornitude de x_k et $\int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_k(\tau) d\tau \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $t \forall t \in [0, T]$. Ensuite, nous montrons aussi la convergence de $e_k(t)$ et $\dot{e}_k(t)$.

Considérons (4.51) avec $k = 0$, la dérivée par rapport au temps de $\Psi_0(t)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\dot{\Psi}_0 \leq -(\beta x_0^T x_0 + \eta_0^T Y_d \tilde{\theta}_0) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_0^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_0 \quad (4.56)$$

Puisque $\hat{\theta}_{-1} = 0$, nous avons $\hat{\theta}_0(t) = \Gamma Y_d^T \eta_0$

$$\dot{\Psi}_0 \leq -\beta x_0^T x_0 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_0^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_0 - \theta^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_0 \quad (4.57)$$

Nous avons aussi $\tilde{\theta}_0^T \Gamma^{-1} \theta \leq \mu \|\tilde{\theta}_0^T \Gamma^{-1}\|^2 + \frac{1}{4\mu} \|\theta\|^2$ avec $\mu > 0$

Aussi, $\dot{\Psi}_0 \leq -\beta \|x_0\|^2 - \alpha \|\tilde{\theta}_0\|^2 - \frac{1}{4\mu} \|\theta\|^2 \leq 0$ ceci implique que $\Psi_0(t)$ est bornée sur $[0, T]$.

Concernant la convergence de $e_k(t)$ et $\dot{e}_k(t)$, On utilise la fonction Ψ_k qui peut être réécrite sous la forme $\Psi_k = \Psi_0 + \sum_{j=1}^k \Delta\Psi_j$. Donc, l'utilisation de (4.55), donne

$$\begin{aligned} \Psi_k &\leq \Psi_0 - \sum_{j=1}^k V_{j-1} \\ &\leq \Psi_0 - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{i,k-1})) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{f,i,k-1})) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \eta_{k-1}^T M(q_{k-1}) \eta_{k-1} \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{i,k-1})) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln(\text{Cosh}(e_{f,i,k-1})) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \eta_{k-1} M(q_{k-1}) \eta_{k-1} &\leq \Psi_0 - \Psi_k \\ &\leq \Psi_0 \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} e_{f,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0$, $\forall t \in [0, T]$, si Ψ_k est bornée. Selon les définitions données par (4.15) et (4.16) on peut déduire que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall t \in [0, T].$$

4.3.4. Loi de commande sans la mesure des vitesses articulaires

La plupart des schémas de la CAI adaptative proposés pour les robots manipulateurs supposent que les mesures de vitesses articulaires sont disponibles. Bien qu'il soit possible de mesurer les vitesses par l'utilisation des tachymètres ceci augmente les coûts et les signaux fournis peuvent être bruités. De plus, les encodeurs donnent des valeurs pour les positions articulaires suffisamment précises. Cependant, il est préférable d'estimer les vitesses articulaires par un observateur.

Dans ce qui suit, nous allons illustrer comment la loi de commande proposée dans la section précédente peut être modifiée pour la ramener dans une forme équivalente n'utilisant que la mesure des positions articulaires. Pour arriver à cet objectif, on définit la relation suivante :

$$y_i = [\text{Tanh}(e_{f,k})]_i = \tanh(e_{f,k,i}) \quad (4.59)$$

Selon l'identité hyperbolique standard :

$$\cosh^2(e_{f,k,i}) = \frac{1}{1 - \tanh^2(e_{f,k,i})} = \frac{1}{1 - y^2} \quad (4.60)$$

Avec y_i est le i^{ieme} élément de $y \in \mathbb{R}^n$

Maintenant, nous allons montrer que y_i peut être calculé sans mesurer les vitesses articulaires. Premièrement, notons que le filtre donné par (4.16) peut être réécrit en fonction des termes de la i^{ieme} composante comme suit:

$$\dot{e}_{ki} = -\tanh(e_{f,k,i}) + \tanh(e_{k,i}) - K \cosh^2(e_{f,k,i}) \eta_{k,i}$$

$$e_{f,k,i}(0) = (0) \quad (4.61)$$

Avec η_{ki} est le i^{ieme} élément du vecteur η_k défini en (4.16).

La substitution (4.61) et (4.60) dans l'expression résultante de la dérivée de (4.59) donne :

$$\begin{aligned} \dot{y}_{k,i} &= \cosh(e_{f,k,i})^2 \dot{e}_{fki} \\ &= -(1 - y^2) (y_{k,i} - \tanh(e_{k,i})) - K(\dot{e}_k + \tanh(e_{k,i}) + y_{k,i}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$y_{k,i}(0) = 0$$

On utilise directement (4.62) pour construire le filtre suivant, et ainsi calculer y_{ki} :

$$\dot{p}_{k,i} = -\left(1 - (1 - Ke_{k,i})^2\right) (p_{k,i} - Ke_{k,i} \tanh(e_{k,i})) - K(\tanh(e_{k,i}) + p_{k,i} - e_{k,i})$$

$$p_{ki}(0) = Ke_{ki}(0)$$

$$y_{k,i} = p_{k,i} - Ke_{k,i} \quad (4.63)$$

où $p_{k,i}$ est une variable auxiliaire permettant de calculer $y_{k,i}$ sans mesurer les vitesses articulaires.

Maintenant, nous illustrons comment les entrées de commande données par (4.17) et la loi d'adaptation donnée par (4.18), peuvent être calculées sans la mesure des vitesses articulaires.

Concernant la loi d'adaptation, on substitue η_k donnée par (4.15) dans (4.18) puis, par l'utilisation de l'intégrale par partie, on peut formuler une expression équivalente à (4.18) comme suit :

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)\hat{\theta}_k(t) &= -\gamma \int_0^t \hat{\theta}_k(\sigma) d\sigma + \gamma \int_0^t \hat{\theta}_{k-1}(\sigma) d\sigma + \Gamma Y_d^T(t) e_k(t) + \Gamma \int_0^t Y_d^T(\sigma) (\tanh(e_k) \\ &\quad + y_k(\sigma)) d\sigma - \Gamma \int_0^t \dot{Y}_d^T(\sigma) e_k(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.64)$$

Pour la loi de commande, la substitution de (4.59) et (4.60) dans (4.17) donne la i^{ieme} composante des entrées de commande sous la forme suivante :

$$\tau_{k,i} = (Y_d \hat{\theta})_{k,i} - K \frac{y_{k,i}}{1 - y_{k,i}^2} + \tanh(e_{k,i}) \quad (4.65)$$

où $\tau_{k,i}$ et $(Y_d \hat{\theta})_{k,i}$ sont les $i^{ièmes}$ éléments des vecteurs τ_k et $Y_d \hat{\theta}_k$ respectivement, $\hat{\theta}_k$ est calculée à partir de (4.64) et, $y_{k,i}$ est calculée à partir de (4.63).

4.5. Remarques

Remarque 1

Il est clair qu'à partir de (4.59) et (4.65) que $y_{k,i}$ doit être bornée comme suit $|y_{k,i}(t)| < 1 \forall t \in [0, T]$. On peut montrer que cette condition est toujours vérifiée. Premièrement, puisque $e_{f,k}(0) = 0$, on déduit à partir de (4.59) que $y_{k,i}(0) = 0$. Deuxièmement, à partir de la démonstration du théorème 3, nous avons $e_{f,k,i}(t) \in L_{\infty}$. Donc, on peut utiliser la définition donnée en (4.59) et les propriétés des fonctions hyperboliques pour montrer que $|y_{k,i}(t)| < 1 \forall t \in [0, T]$

Remarque 2

À partir de la démonstration de théorème 3, on sait que $\hat{\theta}_k(t) \in L_{\infty}$ et $e_k(t) \in L_{\infty}$. De plus, il est facile de voir que tout les signaux intervenant dans le schéma de commande donné par (4.63), (4.64) et (4.65) restent bornées (i.e., $p_{k,i}(t), \dot{p}_{k,i}(t), \hat{\theta}_{k,i}(t), \tau_{k,i}(t) \in L_{\infty}$).

4.6. Résultats de simulation

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de simulation de la commande par apprentissage itératif appliquée au robot manipulateur PUMA 560 en considérant les trois premières articulations.

Les valeurs des gains de synthèse K et Γ sont donnés dans le tableau suivant :

Valeur de γ	Avec mesures des vitesses		Sans mesures des vitesses	
Pour $\gamma = 0.0$	$K = 225$	$\Gamma = 30275I_{11 \times 11}$	$K = 100$	$\Gamma = 16275I_{11 \times 11}$
Pour $\gamma = 0.5$	$K = 225$	$\Gamma = 15275I_{11 \times 11}$	$K = 100$	$\Gamma = 06275I_{11 \times 11}$
Pour $\gamma = 1.0$	$K = 050$	$\Gamma = 00132I_{11 \times 11}$	$K = 170$	$\Gamma = 0065I_{11 \times 11}$

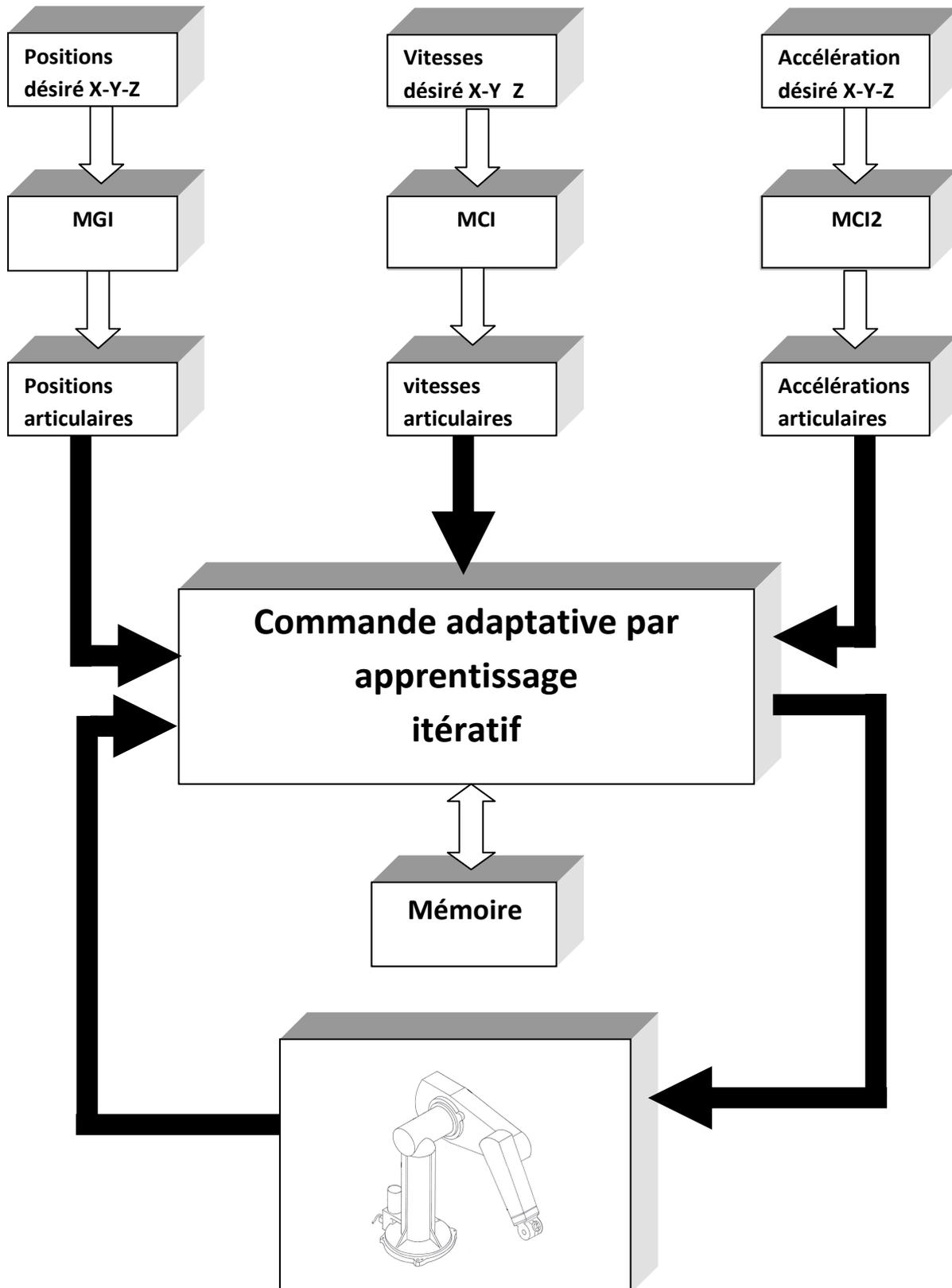


Fig. 4.2 Implementation de la commande adaptative par apprentissage itératif

La trajectoire de référence dans l'espace opérationnel est une ellipse inscrite dans le plan, elle est définie telle que : $x = 0.2 \sin(2\pi t)$ (m) $z = 0.25 \cos(2\pi t)$ (m) $y = 0.5$ (m) $t \in [0, 9]$ (s).

Les résultats des simulations sont donnés par les figures 4.3 à 4.25. Celles-ci montrent les normes supérieures des erreurs de poursuite en position des trois premières articulations du robot PUMA 560, les commandes appliqués, et les erreurs de poursuite après 1^{ière} itération et 50^{ième} itération. Les performances obtenues sont nettement supérieures à ceux obtenu après la 1^{er} itération.

Nous remarquons qu'à travers les itérations le comportement du robot en poursuite s'améliore, et les erreurs de poursuite sont bien moins importantes. Ceci montre l'efficacité de la commande adaptative par apprentissage itératif, avec mesure des vitesses articulaires et sans mesure des vitesses articulaires dans les cas où $\gamma = 0, 0.5$ et 1.

Nous constatons qu'à après la 50^{ième} itération la poursuite est satisfaisante du fait que les erreurs de poursuite deviennent très faibles.

Concernant la comparaison des performances entre le cas où les vitesses articulaires sont disponibles, et le cas où les vitesses articulaires ne sont pas disponibles, on peut dire que cette loi de commande conduit à des erreurs de poursuite faibles dans les deux cas.

4.6.1 Résultats de simulation avec mesure des vitesses articulaires

❖ Pour $\gamma = 0$

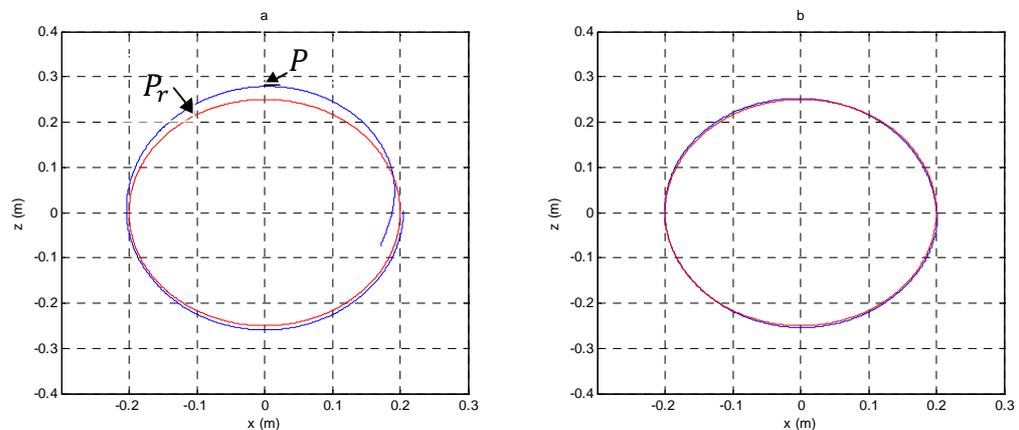


Fig. 4.3. Positions dans l'espace opérationnel (a) à l'itération 1. (b) à l'itération 50

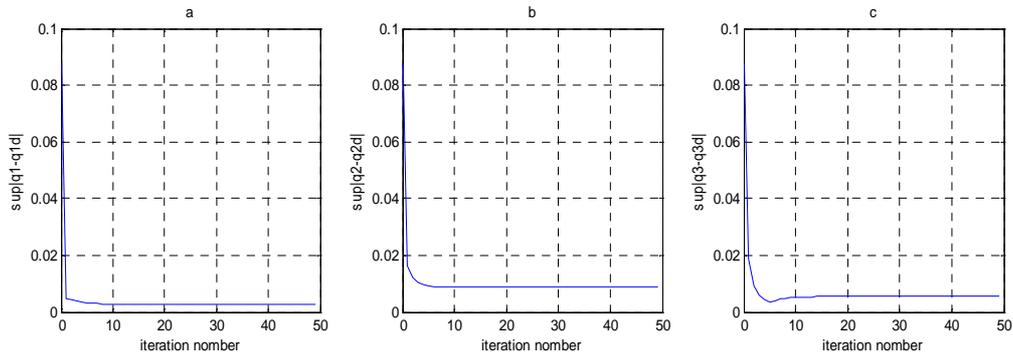


Fig. 4.4. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$ (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

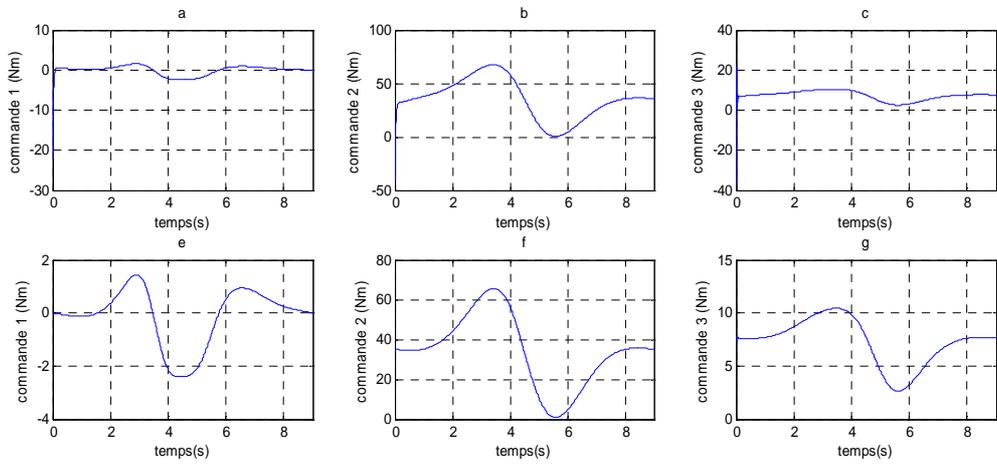


Fig. 4.5. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

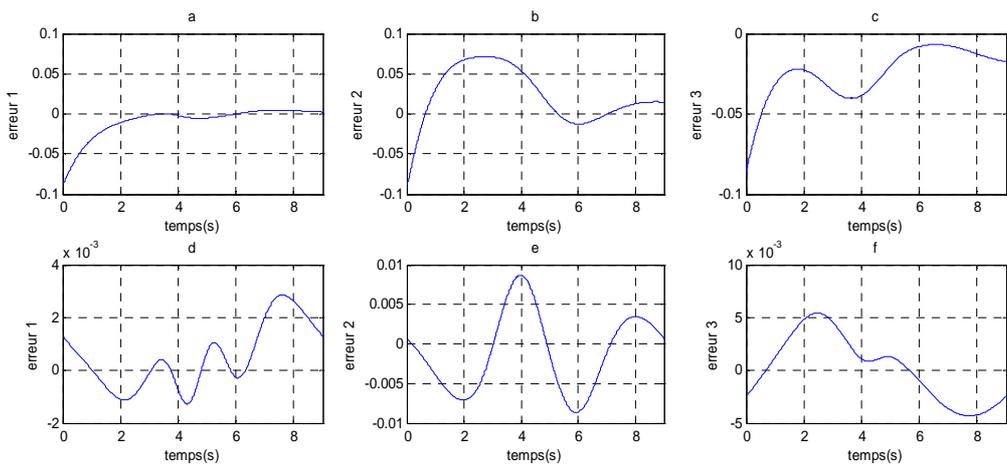


Fig. 4.6. Erreurs de poursuite, (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

❖ Pour $\gamma = 0.5$

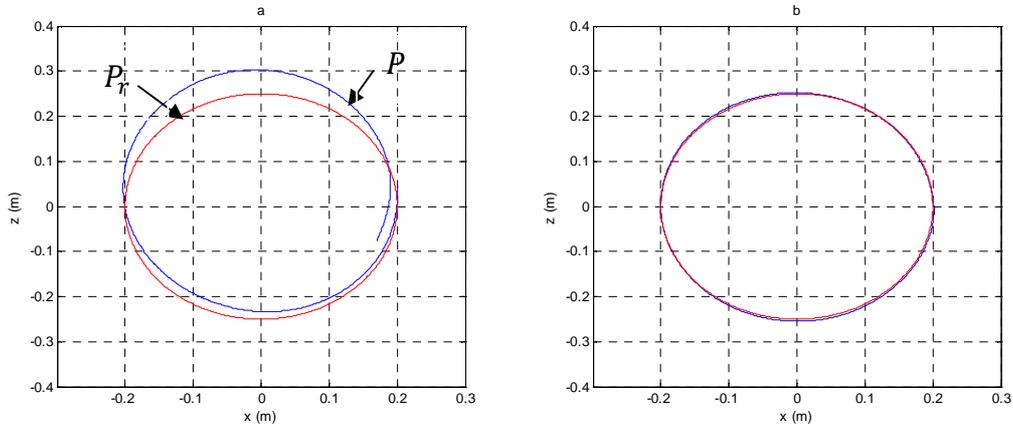


Fig. 4.7. Positions dans l'espace opérationnelle (a) à l'iteration 1. (b) à l'iteration 50

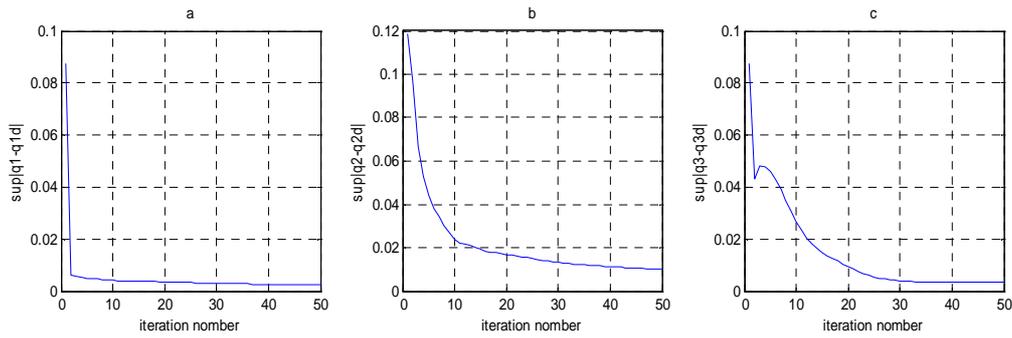


Fig. 4.8. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$ (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

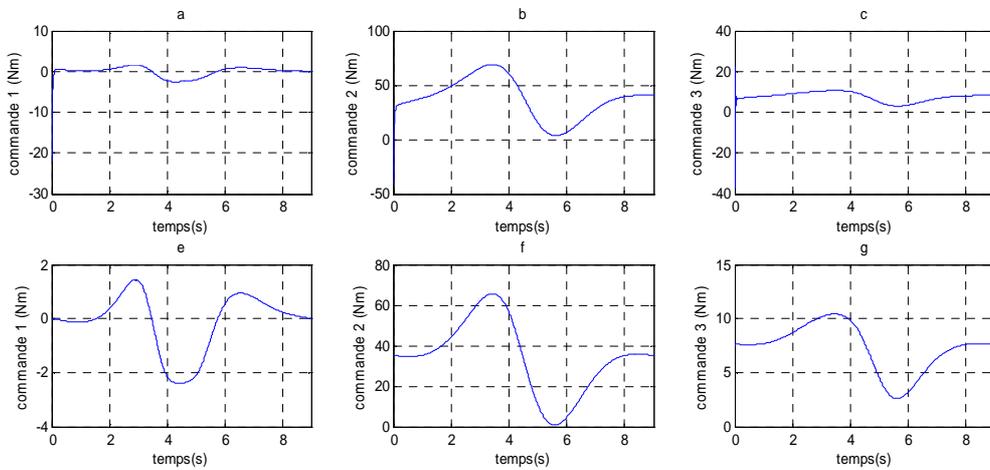


Fig. 4.9. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

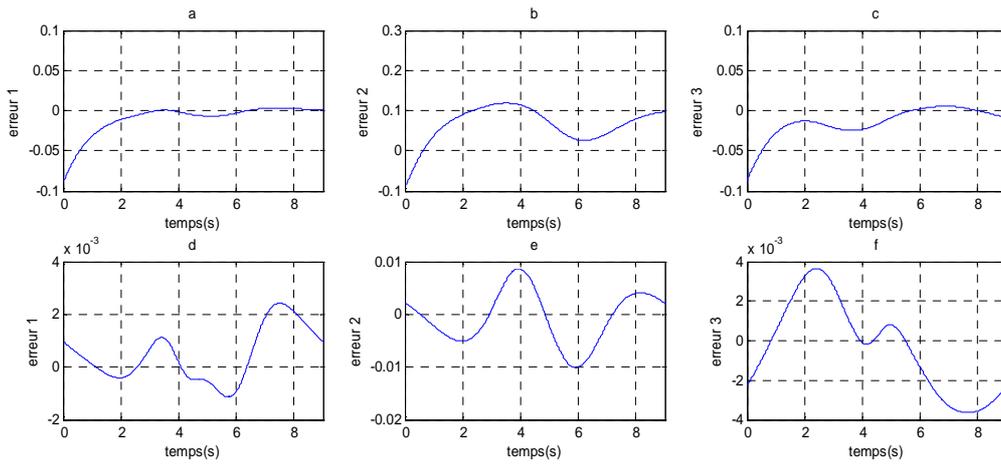


Fig. 4.10. Erreurs de poursuite. (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

❖ Pour $\gamma = 1$

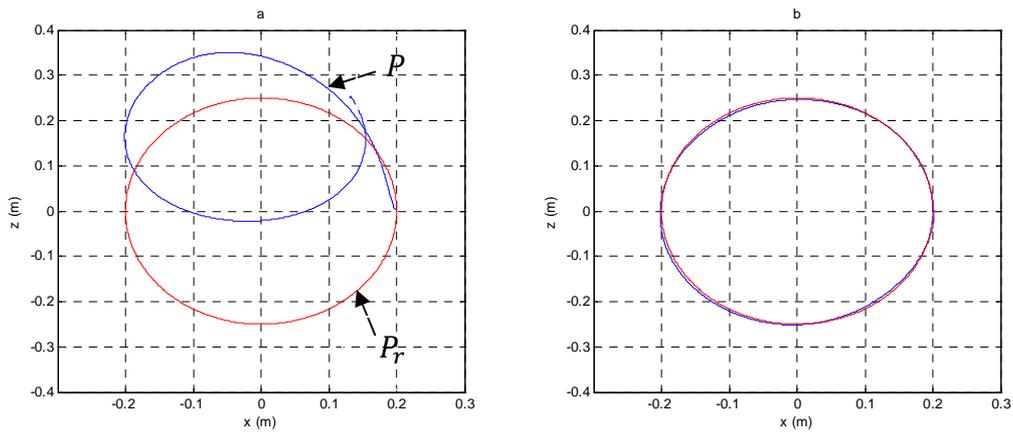


Fig. 4.11. Positions dans l'espace operationelle (a) à l'iteration 1. (b) à l'iteration 50

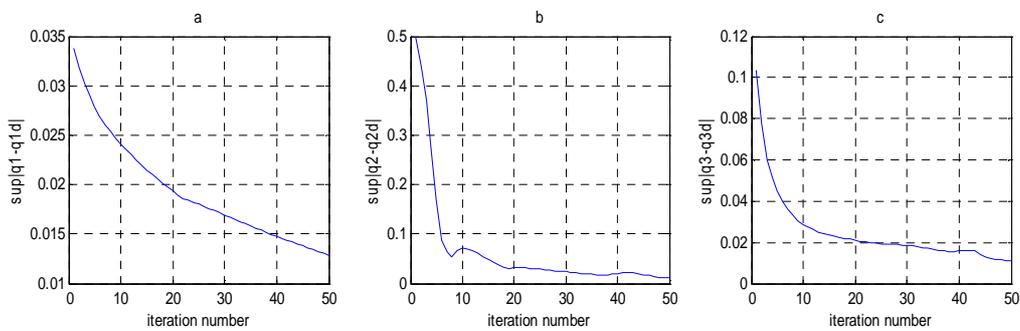


Fig. 4.12. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$ (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

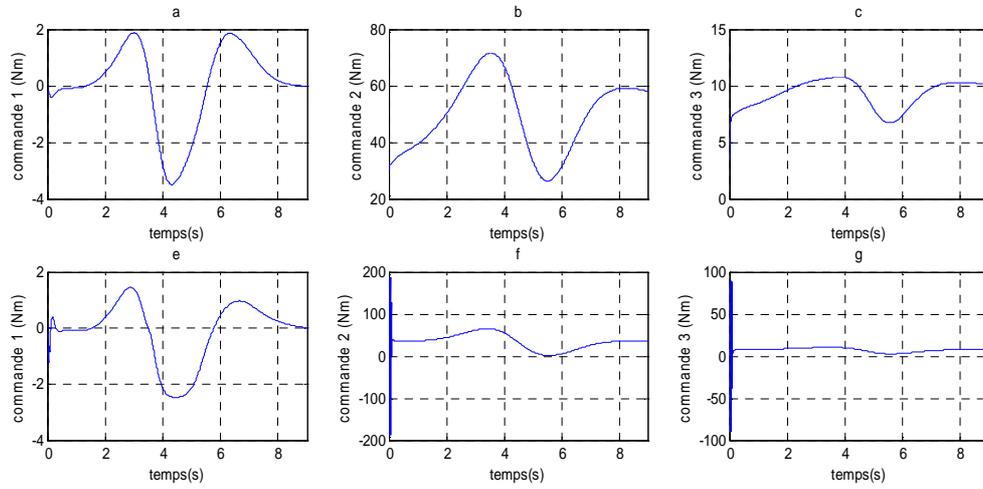


Fig. 4.13. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

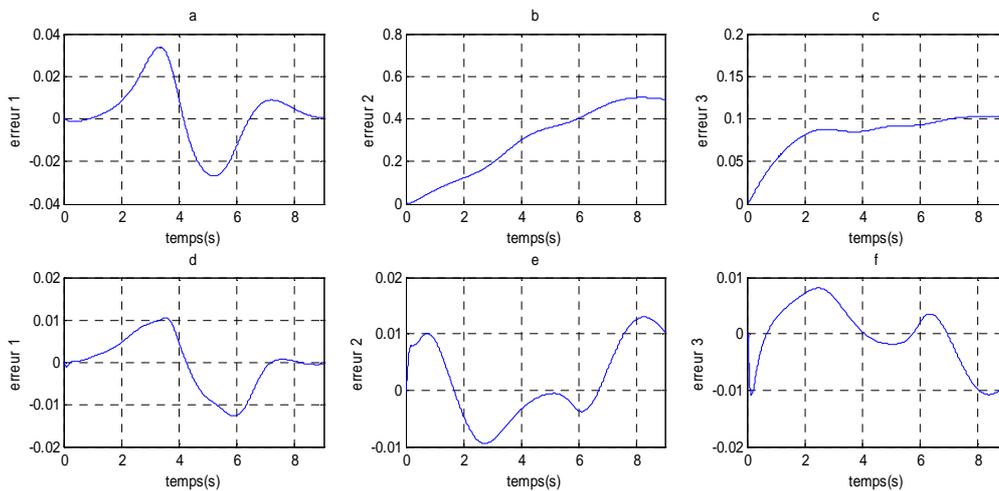


Fig. 4.14. Erreurs de poursuite. (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

4.6.2 Résultats de simulation sans mesure des vitesses articulaires

❖ Pour $\gamma = 0$

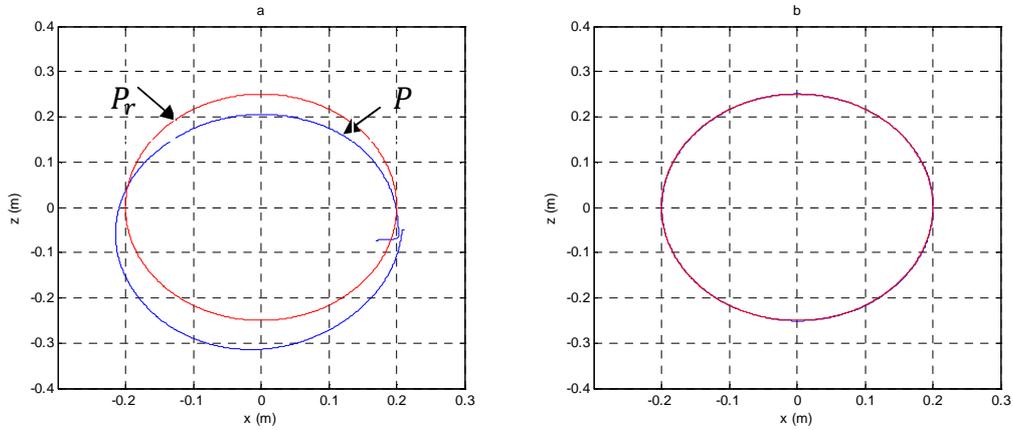


Fig. 4.15. Positions dans l'espace opérationnelle (a) à l'iteration 1. (b) à l'iteration 50

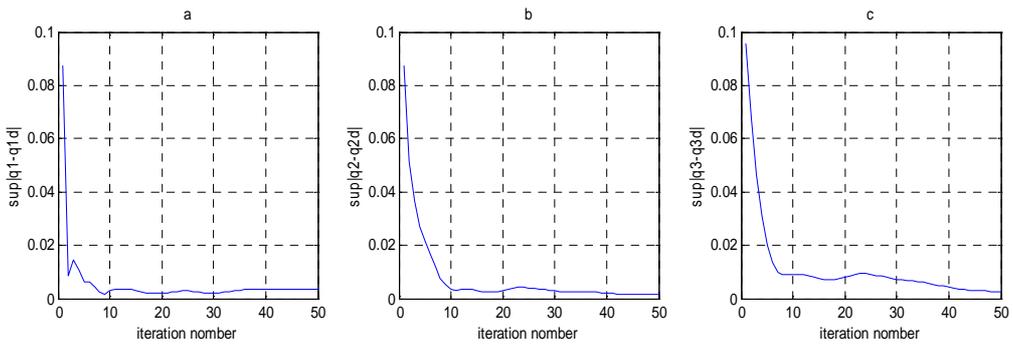


Fig. 4.16. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$. (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

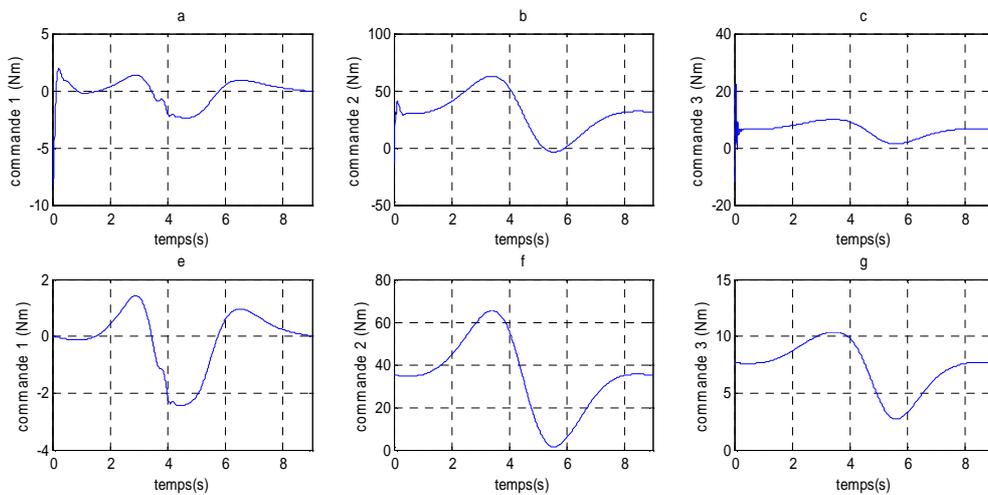


Fig. 4.17. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

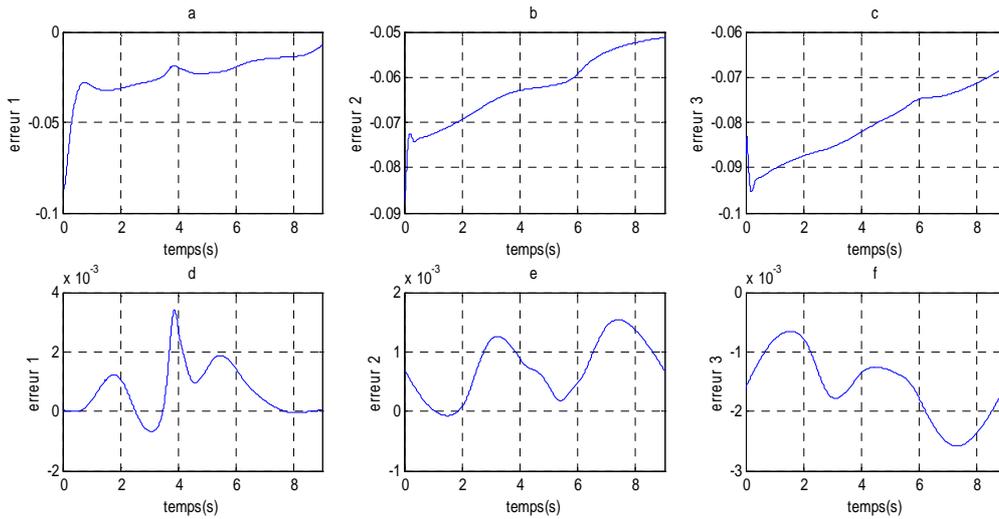


Fig. 4.18. Erreurs de poursuite, (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

❖ Pour $\gamma = 0.5$

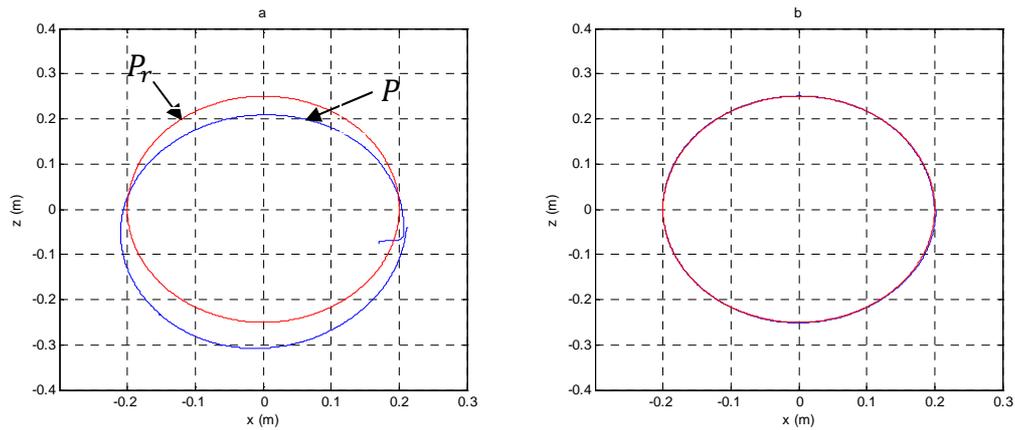


Fig. 4.19. Positions dans l'espace operationelle (a) à l'iteration 1. (b) à l'iteration 50

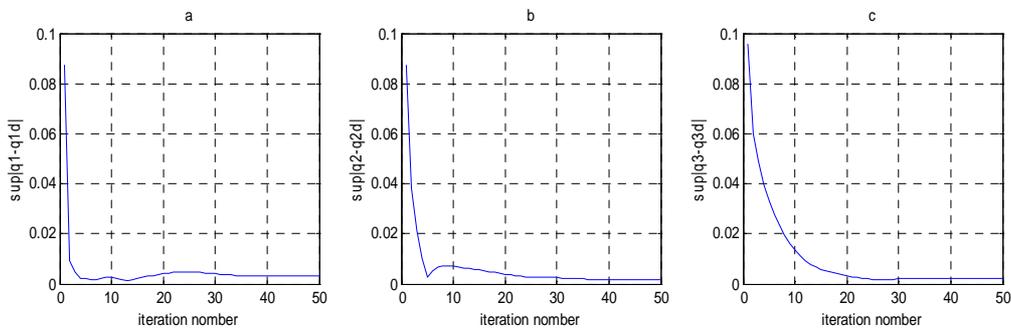


Fig. 4.20. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$. (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

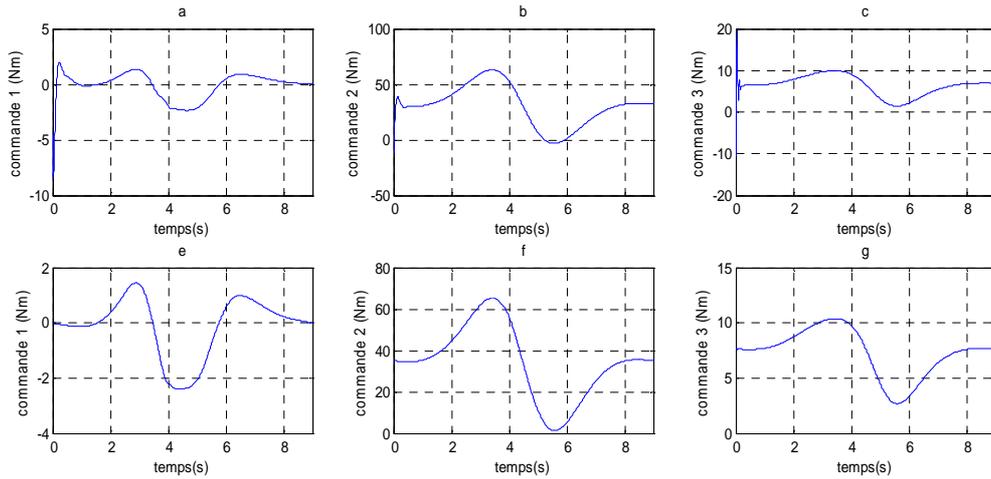


Fig. 4.21. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

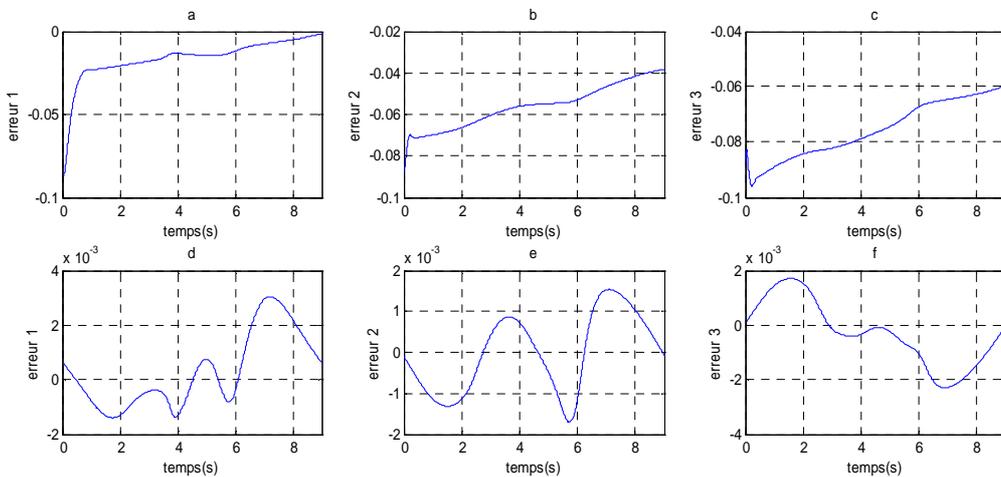


Fig. 4.22. Erreurs de poursuite, (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

❖ Pour $\gamma = 1$

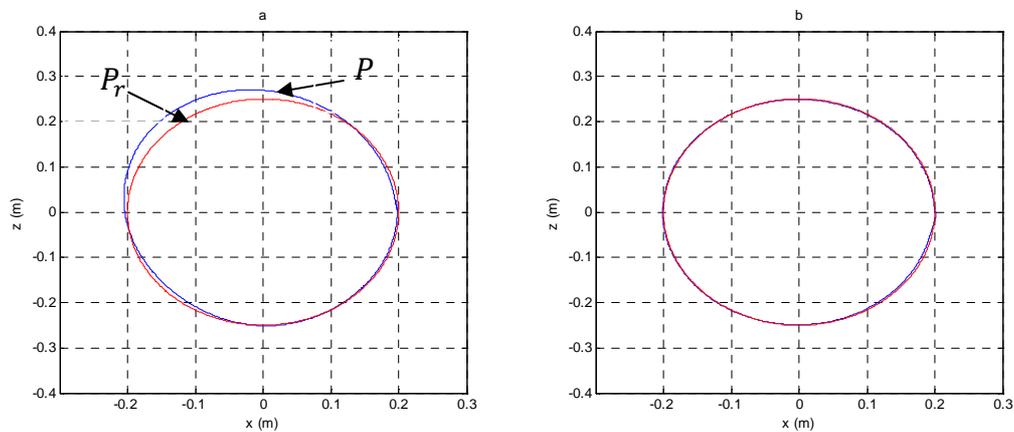


Fig. 4.23. Positions dans l'espace operationelle (a) à l'iteration 1. (b) à l'iteration 50

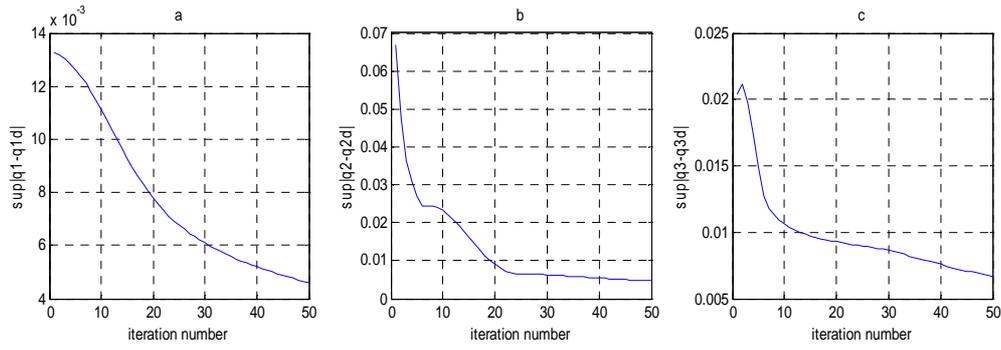


Fig. 4.24. Erreurs de poursuite (a) $\sup_{t \in [0,9]} e_{1,k}$. (b) $\sup_{t \in [0,9]} e_{2,k}$. (c) $\sup_{t \in [0,9]} e_{3,k}$

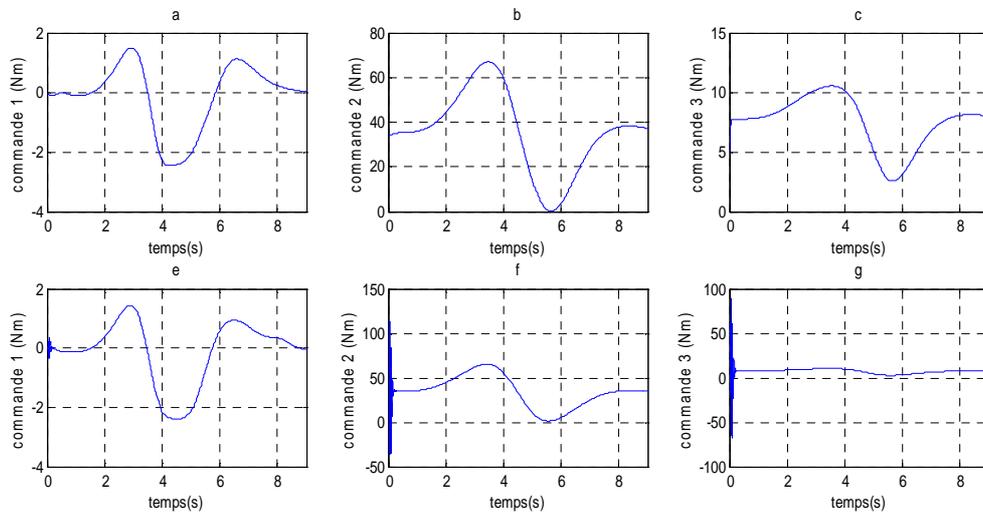


Fig. 4.25. Couples articulaires. (a-b-c) à l'iteration 1, (e-f-g) à l'iteration 50

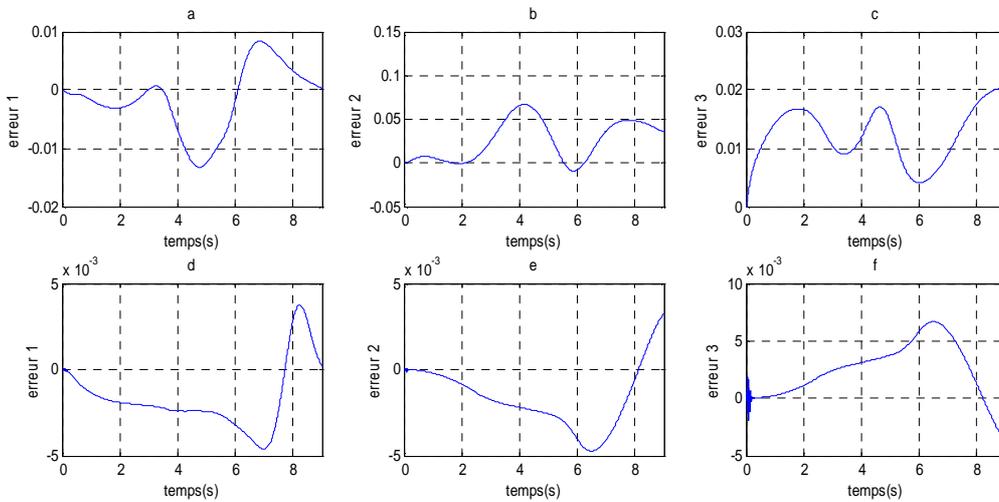


Fig. 4.26. Erreurs de poursuite. (a-b-c) à l'iteration 1, (d-e-f) à l'iteration 50

4.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné le modèle dynamique des robots manipulateurs et leurs propriétés structurelles. Ensuite, nous avons résolu le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs exécutant des tâches répétitives pour deux cas : avec la mesure des vitesses articulaires et, sans la mesure des vitesses articulaires. Ceci est obtenu en développant un schéma de commande adaptative par apprentissage itératif. Ce schéma est composé d'un terme en *feedforward* basé sur les trajectoires désirées pour compenser l'effet des paramètres incertains et, d'un terme en *feedback* couplé avec un filtre dynamique non linéaire pour compenser le manque de la mesure des vitesses articulaires et la différence entre la dynamique du système réel et le terme en *feedforward* basé sur les trajectoires désirées. La loi d'adaptation est basée sur les trajectoires désirées et dépend d'un paramètre permettant de choisir le type d'adaptation désirée. En utilisant les théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov, nous avons montré la stabilité du système en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite.

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail était de synthétiser des lois de commande adaptative par apprentissage itératif pour les systèmes non linéaires itératifs ainsi bien lorsque les états du système sont accessibles ou non. Cette méthode de commande consiste à trouver un mécanisme itératif adéquat permettant d'apprendre les informations des cycles précédents et exécutes progressivement le nouveau cycle, et par la suite améliorer la poursuite à travers les itérations.

Nous présentons une procédure systématique pour la synthèse de la CAI adaptative pour les systèmes non linéaires incertains basés sur l'existence d'une fonction de Lyapunov pour le système en question. En effet, si une loi de commande adaptative peut être synthétisée à l'aide de la technique de Lyapunov et si la fonction de Lyapunov satisfait certaines propriétés, nous avons montré que l'extension de la commande adaptative à la CAI adaptative est possible. La loi d'adaptation paramétrique résultante est tout à fait générale dans le sens où elle dépend d'une certaine grandeur scalaire γ permettant de choisir le type d'adaptation. En effet on distingue trois types d'adaptation. : adaptation dans le domaine du temps pour $\gamma = 0$, adaptation dans le domaine des itérations pour $\gamma = 1$ et, une combinaison des deux pour $\gamma \in]0, 1[$.

Deux schémas de la commande adaptative par apprentissage itératif ont été présentés pour les systèmes non linéaires incertains basés sur la technique de Lyapunov. Le premier est dédié aux systèmes ayant les états disponibles. Afin de résoudre le problème de la non disponibilité du vecteur d'état, nous avons inclus un observateur d'états au premier schéma. Les lois de commande présentées assurent la bornitude des signaux internes et la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite. Les résultats de simulation ont montré l'efficacité de ces

lois de commande et l'amélioration des performances du système en fonction du nombre de cycles d'exécution de la tâche.

La commande par apprentissage itératif a été étendue au cas des robots manipulateurs. Une loi de commande adaptative par apprentissage itératif est proposée pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs rigides. L'application de cette loi a été effectuée sur le modèle du robot PUMA 560.

A l'issue de ces travaux, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche parmi lesquelles nous citons :

- Mise en œuvre expérimentale des lois de commande développées sur un robot manipulateur
- Généralisation de l'étude des lois de commande proposées pour le cas discret.
- Généralisation de l'étude des lois de commande proposées au de la commande flou-adaptative et la commande neuro-adaptative.

Bibliographies

Arimoto, S., Kawamura, S., & Miyazaki, F. (1984). **Bettering operation of robots by learning.** Journal Robot. Syst., 1, 123-140.

Arimoto, S. (1996). **Control theory of non-linear mechanical systems.** Oxford Science Publications, Oxford, UK.

Berghuis, H., & nijmeijer, H. (1993). **A passivity approach to controller- observer design for robots.** IEEE Transaction on Robotic and Automation (9) 6, 740-754.

Berghuis, H., & nijmeijer, H. (1994). **robust control via linear estimated state feedback.** IEEE Transaction on Robotic and Automation (39) 10, 2159-2162.

Bien, Z., & Xu, J-X. (1998). **Iterative learning control: Analysis, Design, Integration and Applications.** Kluwer Academic Publishers, 1998.

Chen, Y., & Wen, C. (1999). **Iterative learning control: Convergence, Robustness and Applications.** Lecture notes in control and information sciences, Springer Verlag.

Chiang-Ju chien, & Chia-Yu Yao, (2004). **iterative learning of model reference adaptive controller for uncertain nonlinear systems with only output measurement.** Automatica, 40,855-864.

Chiang-Ju chie., & Tayebi A. (2007). **Futher results on adaptive iterative learning control of robot manipulator,** Automatica, 10.1016/j.

French, M., & Rogers, E. (2000). **Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique,** International Journal of Control. 73, 840-850.

Fang-Shing Chen, & Jung-Shan Lin. (2004). **Nonlinear backstepping design of robot manipulator with velocity estimation feedback .** 5th Asia Control Conference, 4, 452-455.

Ham, C., Qu, Z.H., & Kaloust, J.H. (1995). **Nonlinear learning control for a class of nonlinear systems based on Lyapunov's direct method.** In Proc. American Control Conference, Seattle, USA, 3024-3028.

Ham, C., Qu, Z., & R. Johnson, Z. (2001). **Nonlinear learning control for a class of nonlinear systems,** Automatica, 37, 419-428.

Ioannou, P. A., & Sun, J. (1996). **Robust adaptive control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Jian-Xin & Ying Tan. (2002). **A composite energy function-based iterative learning control with time varying parametric uncertainties**. IEEE Transaction on Automatic Control, 47, 0018-9286.

Jian-Xin XU. (2005). **Recent Advances in Iterative Learning Control**. Acta Automatica Sinica, 31, 132-142

Kananeko, K., & Horowitz, R. (1997). **Repetitive and adaptive control of robot manipulators with velocity estimation**. IEEE Transaction on Automatic Control, 13, 204-217.

Khalil W., & Dombre E. (1999). **Modélisation, Identification et commande des Robots**. 2^{ème} édition revue et augmentée, Hermès Science Publications, Paris.

Kokotovic P. (1992). **The Joy of Feedback Nonlinear and Adaptive**. IEEE Control Systems Magazine, 12, 7-17.

Krstic, M., Kanellakopoulos, I., & Kokotovic, P. (1995). **Nonlinear and adaptive control design**. Wiley-Interscience Publication, New York.

Marco A. Artraga. (2003). **robot control and parameter estimation with only joint position measurement**. automatica, 39, 67-73.

Moore, K.L. (1999). **Iterative Learning Control: An Expository Overview, Applied and Computational Controls**. Signal Processing, and Circuits, 1, 151-214.

Prabhakar R. Pagilla & Masayoshi Tomuzika. (2001). **An adaptive output feedback controller for robot arms: stability and experiments**. Automatica, 37, 983-995.

Primbs, V., Nevestic, V & Doyle, J. (1999) **Nonlinear optimal control : A control lyapunov function and receding horizon perspective**. Asian journal of control, 1, 14-24

Qu, Z., & Xu, J. (2002). **Asymptotic learning control for a class of cascaded nonlinear uncertain systems**. IEEE Transaction on Automatic Control, 47, 1369-1376.

Sadegh, N., & Horowitz, R. (1990) **stability and robustness analysis of a class of adaptive controller for robot manipulators**. Int. J. Robotic Res., 9, 74-92.

Slotine, J.J., & Li, W. (1991). **Applied nonlinear control**. Englewood chiffs , NJ: prentice-Hall.

Spong, M.W., & Vidyasagar, M. (1989). **Robot dynamic and control**. New York:Wiley.

Tayebi, A. (2004). **Adaptive iterative learning control for robot manipulators**. *Automatica*, 40, 1195-1203.

Tayebi, A., & Chien, C-J. (2006). **An adaptive iterative learning control framework for a class of uncertain nonlinear systems**. In proc. Of the 45th IEEE conference on decision and control. San Diego, California, USA, 5054-5059.

Tayebi, A., & Chien, C-J (2007) **A unified adaptive learning control framework for uncertain nonlinear systems**, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 52, 1907-1913.

Tayebi, A. (2002). **Observer-based iterative learning control for a class of time-varying nonlinear systems**. *IEEE Transaction on Circuit and systems*, 1, 452-455.

Xu, J-X. (2002). **The frontiers of iterative learning control—Part II**. *Journal of Systems, Control and Information*, 46, 233-243.

Xu, J-X., & Tan, Y. (2002) **Robust optimal design and convergence properties analyses of iterative learning control approaches**. *Automatica*, 38, 1687-1880

Xu, J-X., & Tan, Y. (2003) **Linear and nonlinear iterative learning control**. *Lecture notes in control and information sciences*, Springer Verlag.

Xu, J., & Yam, R. (2005). **On initial condition in iterative learning control**. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 50, 1349-1354.

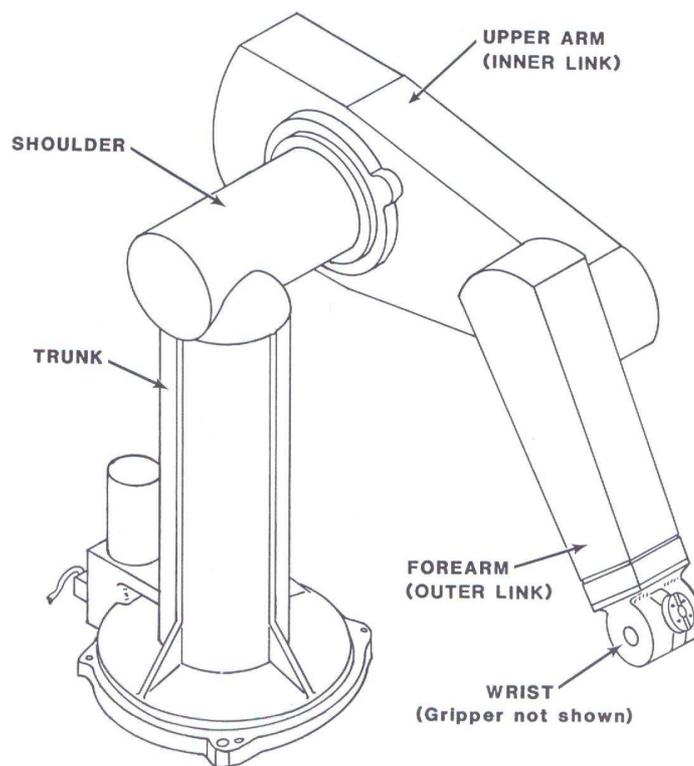
Yunfeng, Z., Yansheng, Y., & Jiali, D. (2005). **Tuning function-based adaptive observer backstepping control for parametric output feedback systems**. *Proc of the 13th IEEE, Mediterranean conference on control and automation*, 1155-1160.

Zhang, F., Dawson, D. M., de Queroz, M. S., & Dixon, W. E. (2000). **Global adaptive output feedback of robot manipulator**. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45, 0018-9286.

Annexe

A.1. Présentation du robot PUMA 560 :

Dans cette étude, nous avons utilisé un robot de type PUMA 560 en considérant uniquement les trois premières articulations rotoïdes q_1 , q_2 et q_3 .



A.2. Modèle dynamique du robot manipulateur PUMA 560 :

Le modèle dynamique des robots manipulateurs est généralement donné par une équation générale de la forme suivante :

$$M(q_k(t))\ddot{q}_k(t) + C(q_k(t), \dot{q}_k(t))\dot{q}_k(t) + G(q_k(t)) = \tau_k(t) \quad (\text{A.1})$$

Dans notre cas

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_9 \end{bmatrix}$$

$C(q, \dot{q})q$

$$= \begin{bmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2^2 + 2I_5 c_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + I_5 c_{23} \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1^2 - I_4 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - 0.5 I_4 s_3 \dot{q}_3^2 \\ (I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1^2 + 0.5 I_4 s_3 \dot{q}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{10} c_2 + I_{11} c_{23} \\ I_{11} c_{23} \end{bmatrix}$$

Avec

$$I_1 = I_{yy1} + I_{xx2} + I_{xx3} + m_2 d_2^2 + m_3 (d_3 - d_2)^2 + I_{M1} + m_t l_2^2$$

$$I_2 = I_{yy3} - I_{xx2} + m_3 s_3^2 + m_t l_3^2$$

$$I_3 = I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2 + m_2 s_2^2 + m_t l_2^2$$

$$I_4 = 2m_3 l_2 s_3 + 2m_t l_2 l_3$$

$$I_5 = m_3 s_3 (d_2 - d_3) + m_t l_3 l_2$$

$$I_6 = m_2 s_2 d_2 + m_3 l_2 (d_2 - d_3) + m_t l_2 l_2$$

$$I_7 = I_{zz2} + I_{zz3} + m_2 s_2^2 + m_3 (l_2^2 + s_3^2) + I_{M2} + m_t (l_2^2 + l_3^2)$$

$$I_8 = +I_{zz3} + m_3 s_3^2 + m_t l_3^2$$

$$I_9 = I_8 + I_{M3}$$

$$I_{10} = (m_3 l_2 + m_2 s_2)g$$

$$I_{11} = m_3 s_3 g$$

Masse des différentes liaisons

$$m_2 = 17.40 \text{ kg} \quad m_3 = 5.04 \text{ kg} \quad m_4 = 0.82 \text{ kg}$$

$$m_5 = 0.35 \text{ kg} \quad m_6 = 0.09 \text{ kg} \quad m_t = m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg}$$

Paramètres géométriques

$$a_2 = 0.4318 \text{ m} \quad a_3 = 0.0203 \text{ m} \quad d_2 = 0.2435 \text{ m}$$

$$d_3 = 0.0934 \text{ m} \quad d_4 = 0.4331 \text{ m} \quad l_E = 0.05625 \text{ m}$$

Couple maximal

L1: 97.6 N-m

L1: 186.4 N-m

L3: 89.4 N-m

Paramètres d'inertie

La liaison	$I_{xx} \text{ [kgm}^2\text{]}$	$I_{yy} \text{ [kgm}^2\text{]}$	$I_{zz} \text{ [kgm}^2\text{]}$	$I_{Mi} \text{ [kgm}^2\text{]}$
1	-		-	1.14
2	0.130	0.524	0.539	4.71
3	0.192	0.0154	0.212	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	0.200
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	0.179
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	0.193
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	

A.3. Modèle géométrique et cinématique du robot PUMA 560

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ c_3 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec, ${}^{i-1}T_i$ est la transformation homogène qui transforme le repère $i-1$ vers le repère i

En utilisant les propriétés des transformations homogènes, on obtient :

A.3.1. Modèle géométrique direct (MGD)

Le modèle géométrique directe exprime les positions opérationnelles en fonction des positions articulaires

$${}^0T_E = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_E = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Si la position d'un point arbitraire sur la liaison L_i est exprimée dans le repère $O_i - x_i y_i z_i$ par $P^{(i)} = (p_x^{(i)}, p_y^{(i)}, p_z^{(i)}, 1)^T$. Cette position peut être exprimée dans le repère $O_0 - x_0 y_0 z_0$ par:

$$P^{(0)} = (p_x^{(0)}, p_y^{(0)}, p_z^{(0)}, 1)^T = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{i-1}T_i P^{(i)} = T_i P^{(i)} \quad (A.3)$$

A.3.2. Modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse exprime les positions articulaires en fonction des positions opérationnelles

$$q_1 = \text{Atan2} \left(d_2 + d_3, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (d_2 + d_3)^2} \right) + \text{Atan2}(p_y, p_x)$$

$$k = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 + a_3^2 + (d_4 + l_E)^2 + (d_2 + d_3)^2 / (2a_2)$$

$$q_3 = \text{Atan2} \left(k, \sqrt{a_3^2 + (d_4 + l_E)^2 - k^2} \right) - \text{Atan2}(a_3, d_4 + l_E)$$

$$k_1 = (a_3 + a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y) (a_2 s_3 + d_4 + l_E) / (p_z^2 + (p_1 c_1 + p_2 s_1)^2)$$

$$k_2 = (a_2 c_3 + d_4 + l_E) p_z + (a_3 + a_2 c_3) (c_1 p_x + s_1 p_y) / (p_z^2 + (p_1 c_1 + p_2 s_1)^2)$$

$$q_2 = \text{Atan2}(k_1, k_2) - q_3$$

A.3.3. Modèle cinématique direct (MCD)

Le modèle cinématique directe exprime les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires

$$v^{(0)} = \frac{d}{dt} P^{(0)} = \sum_{j=1}^i \frac{dT_i}{dq_j} \dot{q}_j P^{(i)}$$

$$v^{(0)} = J\dot{q}$$

A.3.4. Modèle cinématique inverse (MCI)

Le modèle cinématique inverse exprime les vitesses articulaires en fonction des vitesses opérationnelles

$$\dot{q} = J^{-1}v^{(0)}$$

A.3.5. Modèle cinématique direct 2 (MCD2)

Le modèle cinématique directe exprime les accélérations opérationnelles en fonction des accélérations articulaires

$$a^{(0)} = J\dot{q} + J\ddot{q}$$

A.3.6. Modèle cinématique inverse 2 (MCI2)

Le modèle cinématique inverse exprime les accélérations articulaires en fonction des accélérations opérationnelles

$$\ddot{q} = J^{-1}(a^{(0)} - \dot{J}\dot{q})$$