



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'automatique
Laboratoire de Commande des Processus



THESE

En vue de l'obtention du titre de
Docteur en Sciences

en Génie Electrique
Option : Automatique

Présentée par :
BDIRINA EI Khansa
Magister en électronique de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila

Intitulée

Commande Prédictive avec Contraintes. Application aux Systèmes Non Linéaires.

Président	Mohamed TADJINE	Professeur, ENP
Rapporteurs	Mohamed Seghir BOUCHERIT	Professeur, ENP
	Ramdane HEDJAR	Professeur, U. KS Arabie Saoudite
Examineurs	Noureddine BALI	Professeur, USTHB
	Kamel GUESMI	Professeur, U. ZA Djelfa
	Said GROUNI	MCA, U. MB Boumerdès
Invité	Halim TLEMCANI	Professeur, U. YF Médéa

ENP 2016

شكر وتقدير

الحمد و الشكر لله الذي أمدني بالصحة و العافية و وفقني لإتمام هذه الرسالة
و الصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه
أجمعين.

إنطلاقاً من قوله تعالى : ﴿وَلَقَدْ آتَيْنَا لُقْمَانَ الْحِكْمَةَ أَنْ اشْكُرْ لِلَّهِ وَمَنْ يَشْكُرْ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ
لِنَفْسِهِ وَمَنْ كَفَرَ فَإِنَّ اللَّهَ غَنِيٌّ حَمِيدٌ﴾ الآية 12 من سورة لقمان

و من قول رسوله الكريم ﷺ ﴿لا يشكر الله من لا يشكر الناس﴾
و إيماناً بفضل الإعتراف بالجميل و تقديم الشكر و الإمتنان لأصحاب الفضل فإنه
لا يسعني بعد أن وفقني الله لإتمام هذه الرسالة إلا أن أتقدم بجزيل الشكر و التقدير
لكل من ساهم في إنجاز هذا العمل سواءاً بفكرة، توجيه، رأي، نصيحة أو دعم و
أخص بالذكر:

❖ مشرفي الفاضل البروفيسور **بوشريط مهاد** على قبوله الإشراف على هذه
الرسالة ومتابعته لها وعلى ما منحني من صدر واسع ونصح وإرشاد ساعد
على إتمام هذا العمل. أسأل الله أن يجزيه عني خير الجزاء.

❖ أستاذي و المشرف المساعد البروفيسور الفاضل **حجار رمضان** الذي ساهم
بشكل كبير في إتمام هذا العمل لما قدمه من معلومات و توجيهات كانت
أساساً لبدء و إنطلاق هذه الرسالة. فله مني جزيل الشكر و الإحترام.

كما أتقدم بجزيل الشكر لأعضاء لجنة المناقشة الكرام، كلاً من الأستاذ بالي نور
الدين، والأستاذ قاسمي كمال، الأستاذ قروني السعيد و الأستاذ تلمساني حلیم،
وذلك على تكرمهم بإعطائي من وقتهم للمشاركة في مناقشة هذه الدراسة.
و شكري موصول أيضاً لكل من ساندني من بعيد أو و قريب و أخص بالذكر
الأستاذة: بن عزوز فتيحة، جودي دلييلة، العقون منى و الطالبين نعيمي هلال و
مادني زينب.

الفشل نوعان: نوع يأتي من التفكير بدون فعل، ونوع يأتي من الفعل بدون تفكير.

جونتشارلز سالاك

والى والدي الكريمين

.....

TABLE DES MATIERES

Notations et abréviations

Liste des figures et des tableaux

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur la commande prédictive

I.1-Introduction.....	5
I.2-Généralités.....	6
I.2.1-La commande prédictive linéaire.....	6
I.2.2-La commande prédictive non linéaire.....	8
I.3- Principe de la commande prédictive.....	8
I.4-Eléments d'une commande prédictive.....	10
I.4.1-Modèle.....	11
I.4.2-Prédiction.....	11
I.4.3-Critère de performance.....	12
I.4.4-Contraintes.....	12
I.4.5-Paramètres de réglage.....	13
I.5-Domains d'application en industrie.....	14
I.6-Avantages et inconvénients de la commande prédictive.....	15
I.7-Conclusion.....	16

Chapitre II

Commande prédictive linéaire avec contraintes

II.1-Introduction.....	18
II.2-Les bases de la commande prédictive sous espace d'état.....	19
II.2.1-Modèle de prédiction avec intégrateur.....	19
II.2.2-Prédiction de sortie.....	20
II.2.3-Elaboration de la loi de commande.....	22
II.3-Commande prédictive MPC avec contraintes.....	23

II.3.1-Contraintes sur les incréments l'entrée.....	23
II.3.2-Contraintes sur l'entrée.....	24
II.3.3-Contraintes sur la sortie.....	25
II.3.4-Contraintes sur les variables d'état.....	25
II.4-Procédure de programmation quadratique de Hildreth	27
II.4.1-Optimisation sous contraintes d'égalité.....	27
II.4.2-Optimisation sous contraintes d'inégalité	28
II.4.2.1-Conditions de Kuhn Toker.....	29
II.4.2.2-La méthode primale-duale.....	29
II.4.3- Algorithme de Hildreth	30
II.5-Commande prédictive linéaire avec contraintes d'un chariot avec pendule inversé	31
II.6-Conclusion	37

Chapitre III

Commande prédictive non linéaire avec contraintes

III.1-Introduction.....	40
III.2-La commande prédictive non linéaire	41
III.2.1-Prédiction de la sortie	42
III.2.2-Développement du signal de référence	43
III.2.3-La commande prédictive non linéaire à un pas	44
III.2.4-La commande prédictive à horizon fini.....	44
III.3-Commande prédictive non linéaire à structure cascade	45
III.4-Commande prédictive non linéaire sous contraintes.....	47
III.4.1-Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée	47
III.4.2-Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur les variations d'entrée	48
III.4.3-Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur la sortie	48
III.4.4-Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur les variables d'état	48
III.5-Analyse de stabilité	49
III.6-Robustesse de la commande prédictive non linéaire	50
III.7-Conclusion.....	50

Chapitre IV

Applications

IV.1-Introduction.....	52
IV.2.-Commande prédictive avec contraintes de la chaise roulante.....	52
IV.2.1- Modèle de la chaise roulante.....	53
IV.2.2- Application de la loi de commande prédictive non linéaire avec contraintes à la chaise roulante électrique.....	56

IV.3-Commande prédictive avec contraintes de la MAS.....	62
IV.3.1-Modèle de la machine asynchrone	63
IV.3.2-Commande prédictive non linéaire à structure cascade de la MAS	66
IV.3.3-Commande prédictive non linéaire avec contraintes de la MAS.....	70
IV.4-Commande prédictive avec contraintes du bras manipulateur.....	74
IV.4.1-Commande prédictive par modèle dynamique.....	75
IV.4.2-Commande prédictive non linéaire avec contraintes du bras manipulateur à deux degrés.....	76
IV.5-Conclusion	82

Conclusion générale.....	85
---------------------------------	-----------

Références.....	87
------------------------	-----------

Annexes

Annexe A	94
Annexe B	98
Annexe C	100

Notations et abréviations

Symboles

- A, B, C, D Les matrices d'états pour le modèle augmenté
- C_e Couple électromagnétique donné par la relation suivante
- C_r Couple résistant dû aux frottement ainsi que la charge de la machine
- e Erreur de poursuite
- E Énergie cinétique totale du système
- $F(t)$ Force
- $[f, g](x)$ Crochet de lie
- g Gravité
- $G(q)$ Vecteur de forces gravitationnelles
- h Pas de prédiction de la sortie
- h_c Pas de prédiction de la commande
- h_E Pas de prédiction de la sortie de la boucle externe
- i_{as}, i_{bs}, i_{cs} Courants statoriques dans le repère (a,b,c)
- i_{ar}, i_{br}, i_{cr} Courants rotoriques dans le repère (a,b,c)
- i_{ds}, i_{qs} Courants statoriques dans le repère (d,q)
- i_{dr}, i_{qr} Courants rotoriques dans le repère (d,q)
- I_{CL} Centre de gravité de la charge du bras manipulateur
- I_L Inertie de la liaison terminal du bras manipulateur
- I_z Moment d'inertie de la chaise par rapport à l'axe z
- J Moment d'inertie totale ramené à l'arbre du moteur
- J_1 et J_2 Inertie des moteurs du bras manipulateur
- $J(.)$ Fonction coût
- lc Distance entre l'axe des roues arrières et le CDG de la chaise
- L Lagrangien du système
- L_1, L_2 Longeurs des deux corps rigides du bras manipulateur
- $L_f h(x)$ Drivée de lie
- L_r Inductance propre d'une phase rotorique
- L_s Inductance propre d'une phase statorique
- m Nombre de sortie
- m_1, m_2 Masses des deux corps rigides du bras manipulateur
- mp Masse du pendule
- m_L Masse d'inertie du bras manipulateur
- M Masse du chariot
- M_c Masse totale de la chaise roulante
- M_i Inductance cyclique mutuelle stator-rotor
- $M(q)$ Matrice est la matrice d'inertie
- n Ordre du système

- n_1 Ordre du système augmenté
- Nc Horizon de prédiction sur la commande
- Np Horizon de prédiction sur la sortie
- P Nombre de paires de pôles
- q Nombre d'entrée
- q_1, q_2 Angles des articulations du bras manipulateur
- Q, R, h_1, h_c Paramètres de réglage pour la commande prédictive à un pas
- r_i Degré relatif total
- \bar{R} Paramètre de réglage
- Rs, Rr Résistances statorique et rotorique
- \mathbf{R}_s Vecteur des données de consigne
- u Entrée du système
- v Vitesse linéaire
- v_{as}, v_{bs}, v_{cs} Tensions statoriques dans le repère (a,b,c)
- v_{ar}, v_{br}, v_{cr} Tensions rotoriques dans le repère (a,b,c)
- v_{ds}, v_{qs} Tensions statoriques dans le repère (d,q)
- $V(q, \dot{q})$ Matrice des forces centripètes et de Coriolis
- w Vitesse angulaire
- $w(k)$ Perturbation
- w_s, w_r Pulsations statorique et rotorique
- y Sortie du système
- $y_p, y(t + h)$ Sortie prédite
- y_{ref} Référence
- Δu Incréments de commande
- $\varepsilon(k)$ Séquence du bruit blanc de moyenne nulle
- ϕ Angle d'inclinaison de la pente
- $\varphi_{as}, \varphi_{bs}, \varphi_{cs}$ Flux statoriques dans le repère (a,b,c)
- $\varphi_{ar}, \varphi_{br}, \varphi_{cr}$ Flux rotoriques dans le repère (a, b,c)
- $\varphi_{ds}, \varphi_{qs}$ Flux statoriques dans le repère (d,q)
- $\varphi_{dr}, \varphi_{qr}$ Flux rotoriques dans le repère (d,q)
- τ Vecteur des couples
- $\theta(t)$ Position angulaire
- Ω Vitesse mécanique

Acronymes

- CARIMA Controlled Autoregressive Integrated Moving Average
- CPN Commande Prédictive Non linéaire
- CRHPC Constrained Receding Horizon Predictive Control
- DMC Dynamic Matrix Control
- DMC⁺ Dynamic Matrix Control Plus
- EHAC Extended Horizon Adaptive Control
- EPSAC Extended Prediction Self-Adaptive Control
- GPC Generalized Predictive Control
- HIECON Hierarchical Constraint Control

- IDCOM Identification and Command
- IDCOMM Identification and Command Multivariable
- LQG La Commande Linéaire Quadratique Gaussienne
- MPHC Model Predictive Heuristic Control
- MPC Model Predictive Control
- NPC Nonlinear Predictive Control
- NCGPC Nonlinear continuous-time generalized predictive control
- PCT Predictive Control Technology
- PFC Predictive Functional Control
- QDMC Quadratic Dynamic Matrix Control
- RMPCT Robust Multivariable Predictive Control Technology
- SMOC Shell Multivariable Optimization Control

Liste des figures et des tableaux

Figures

Fig. (I.1) Généalogie approximative des algorithmes de la MPC linéaire.....	7
Fig. (I.2) Principe de fonctionnement de la commande prédictive	9
Fig. (I.3) Application quotidienne de la commande prédictive	9
Fig. (I.4) Régulateur prédictif à base de modèle.....	10
Fig. (I.5) Modèle indépendant et recalé	11
Fig. (II.1) Commande prédictive avec contraintes.....	27
Fig. (II.2) Système chariot avec pendule inversé.....	31
Fig. (II.3) Résultats de simulation pour la commande prédictive sans contraintes	34
Fig. (II.4) Résultats de simulation de la commande prédictive avec contraintes d'état	35
Fig. (II.5) Résultats de simulation de la commande prédictive avec contraintes sur l'entrée, les incréments d'entrée, la sortie et l'état du système	36
Fig. (III.1) Schéma fonctionnel de l'élaboration de la loi de commande NCGPC	43
Fig. (III.2) Principe de la commande prédictive à un pas	44
Fig. (III.3) Principe de la commande prédictive à horizon fini.....	45
Fig. (III.4) Structure d'une commande prédictive en cascade	46
Fig. (IV. 1) Position de la chaise roulante électrique sur une pente.....	53
Fig. (IV.2) Chaise roulante dans le repère inertiel.....	54
Fig. (IV.3) Commande prédictive à un pas sans contraintes sur un plat.....	57
Fig. (IV.4) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée, sur un plat.....	58
Fig. (IV.5) Commande prédictive à horizon fini avec contraintes sur l'entrée sur un plat.....	59
Fig. (IV.6) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée, sur une pente $\phi = 10^\circ$	60
Fig. (IV.7) Commande prédictive à horizon fini avec contraintes sur l'entrée, sur une pente $\phi = 10^\circ$	61
Fig. (IV.8) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur la sortie.....	62
Fig. (IV.9) Modèle de Park de la MAS.....	65
Fig. (IV.10) Structure d'une commande prédictive cascade appliquée à MAS	67
Fig. (IV.11a) Commande prédictive non linéaire d'une MAS sans contraintes Performance de poursuite.....	70
Fig. (IV.11b) Commande prédictive non linéaire d'une MAS sans contraintes : Courants et tensions statoriques	71
Fig. (IV.12a) Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS : Performance de poursuite.....	72
Fig. (IV.12b) Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS : Courants et tensions statoriques.....	72
Fig. (IV.13a) Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS en présence d'une charge : Performance de poursuite.....	73

Fig. (IV.13b) Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS en présence d'une charge : Courants et tensions statoriques.....	74
Fig. (VI.14) Bras manipulateur à deux degrés de liberté	76
Fig. (VI.15) Commande prédictive à un pas sans contraintes	78
Fig. (VI.16) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée.....	79
Fig. (VI.17) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée.....	80
Fig. (VI.18) Commande prédictive à un pas avec contraintes sur les variations d'entrée.....	81
Fig. (VI.19) Commande par un régulateur PD.....	82

Tableaux

Tab. (I.1) Bilan des applications industrielles de la commande prédictive linéaire	16
Tab. (I.2) Bilan des applications industrielles de la commande prédictive non linéaire	17
Tab. (II.1) Paramètres du système chariot avec pendule inversé	38
Tab. (IV.1) Valeurs des paramètres du bras manipulateur	77

Introduction Générale

La conception d'un contrôleur donné dépend de la nature du système lui-même et de la qualité de son modèle dynamique. L'intérêt constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises. Les modèles résultants sont souvent non-linéaires et un grand nombre d'entre eux peut être commandés par les techniques de l'automatique linéaire [Sia, 91]. Ceci est possible lorsque le système non linéaire peut être linéarisé pour de petites variations autour d'un point de fonctionnement ou lorsque des simplifications sont introduites dans les modèles. Il existe cependant un certain nombre de systèmes, parmi lesquels on peut citer les moteurs à courant alternatif, les robots manipulateurs, les satellites, quelques réacteurs chimiques pour lesquels une modélisation linéaire n'est plus possible ni désirable. Pour cela plusieurs méthodes de commandes basées sur des modèles non linéaires ont été proposées et chacune d'elles dépend du degré des non-linéarités et de l'ordre du système considéré [Nijm, 90], [Slo, 91].

D'un autre côté le but principal de la commande des systèmes, est de pouvoir satisfaire les objectifs définis par le cahier des charges, de manière la plus performante possible. Il s'agit, par exemple, de contrôler certains signaux (de sortie) par actions sur d'autres signaux (d'entrée) de sorte qu'il soit possible de pouvoir satisfaire les objectifs en présence d'incertitudes et changements des caractéristiques du processus (modèle) et de restrictions sur les variables opérationnelles. Il s'agit là d'un problème pratique car bien des processus réels présentent ces caractéristiques. Entrent en compte des raisons de sécurité, d'environnement ou de propres limitations des capteurs, des limites sur les variables des processus. Tout ceci rend nécessaire de considérer des contraintes dans l'étape de conception et d'implantation du contrôleur pour obtenir une meilleure performance du système.

La synthèse de la commande sans prendre en compte les restrictions mentionnées peut écartier la réponse du système commandé de celle désirée.

Les travaux résumés dans cette thèse s'adressent à l'amélioration et l'application d'une loi de commande prédictive non linéaire en présence des contraintes.

Nous présentons deux techniques de la commande prédictive non linéaire en présence des contraintes, basées sur la minimisation d'un critère quadratique construit sur la prédiction de l'erreur entre la sortie choisie et la référence, jusqu'à un ordre fixé égal au degré relatif du système non linéaire considéré [Hed2, 00], [Pin, 95]. Notre objectif est d'assurer une poursuite asymptotique de trajectoire tout en respectant les contraintes imposées. Ces techniques, entre autres, permettent de traiter le problème de la poursuite de trajectoire sans aucune opération préalable de discrétisation. En effet, le modèle mathématique du système non

linéaire est considéré dans sa forme naturelle, autrement dit, dans le domaine continu. Les techniques font appel à des techniques de la géométrie différentielle. Le critère quadratique est construit sur l'erreur de prédiction, qu'elle, est bâtie sur la différence entre la sortie et la référence ce qui justifie le terme commande prédictive (optimale) ici invoqué. De plus, cette méthode est appliquée à un système non linéaire à temps continu, d'où l'appellation de commande prédictive (optimale) généralisée non linéaire à temps continu.

Les contraintes étudiées sont celles imposées sur les signaux d'entrée, sortie, variations d'entrée et les variables d'état. L'idée principale de la commande prédictive avec contraintes est de translater le problème avec contraintes à des inégalités linéaires en fonction du même paramètre qui est le signal de commande, ce qui conduit à minimiser un critère quadratique pour extraire la loi de commande.

La thèse est subdivisée en quatre chapitres :

Le premier chapitre donne quelques concepts de base sur la commande prédictive : généralités sur la commande prédictive, le principe, les étapes et les éléments de commande ainsi que les applications, les avantages et les inconvénients.

Dans le deuxième chapitre, nous intéressons à la commande prédictive linéaire sous espace état avec contraintes, où une loi de commande est développée en cas de contraintes sur les variables d'état [Bdir1, 2], [Bdir1, 15]. Cette dernière a été appliquée au système chariot avec pendule. L'objectif est de contrôler la position du chariot, en présence des diverses contraintes d'une façon permettant à maintenir le pendule en position d'équilibre.

Le troisième chapitre est consacré au développement de la commande prédictive non linéaire en présence des contraintes. Deux techniques de commande prédictive non linéaires ont été considérées : La commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini. Une version de cette loi pour la structure en cascade est donnée [Hed2, 00].

Dans le quatrième chapitre trois applications seront considérés afin de tester l'efficacité de cette loi de commande, dans la première application la vitesse linéaire et la position angulaire d'une chaise roulante sont contrôlées en présence des contraintes sur les signaux de couple, la vitesse linéaire et la position angulaire [Bdi, 14] [Bdi2, 15].

La deuxième application sera sur la machine asynchrone et dont la commande prédictive à structure cascade a été appliquée afin de commander la vitesse angulaire, le flux rotorique et le couple électromagnétique en présence des contraintes sur le signal tension de commande.

La dernière application est celle d'un bras manipulateur où les positions angulaires d'un bras manipulateur à deux degré de liberté ont été contrôlées en présence de contraintes sur le couple et ses variations [Bdi2, 12].

Finalement, la conclusion générale donne le bilan des solutions élaborées, dresse les résultats par rapport aux objectifs fixés et propos des perspectives pour la continuité de ce travail.

Chapitre I

I.1-Introduction	5
I.2-Généralités.....	6
I.2.1-La commande prédictive linéaire	6
I.2.2-La commande prédictive non linéaire	8
I.3-Principe de la commande prédictive	8
I.4-Eléments d'une commande prédictive	10
I.4.1-Modèle.....	11
I.4.2-Prédiction	11
I.4.3-Critère de performance.....	12
I.4.4-Contraintes	12
I.4.5-Paramètres de réglage	13
I.5-Domains d'application en industrie	14
I.6-Avantages et inconvénients de la commande prédictive.....	15
I.7-Conclusion.....	16

Chapitre I

Généralités sur la commande prédictive

I.1. INTRODUCTION

La commande prédictive ou la commande à horizon glissant fait partie de l'ensemble des techniques de commande avancées apparues au début des années 1960 dans le domaine de l'automatique afin de répondre à un réel besoin du monde industriel en terme de performances élevées des boucles d'asservissement des systèmes industriels complexes. Son principe de commande est basé sur la notion de prédiction du comportement de la dynamique des systèmes. Elle a fait ses débuts en 1962 suite aux travaux de Zadeh et Whalen, [Zad, 62] et s'est considérablement développée depuis, à la fois dans la communauté de la recherche en automatique et dans l'industrie particulièrement dans le secteur de la pétrochimie, suite aux travaux de Richalet *et al.* [Ric, 78].

La raison de ce succès peut être attribuée au fait que la commande prédictive est peut être la façon la plus générale de poser le problème de la commande de procédés dans le domaine temporel. En effet, sa formulation intègre des concepts tirés de la commande optimale, la commande stochastique, la commande des systèmes à temps mort, la commande avec modèle interne, la commande multivariable.

Ce chapitre a pour objectif de résumer les principes fédérant l'ensemble des techniques de commande prédictive, dont on présente tout d'abord un bref aperçu historique sur l'essor de cette loi de commande. Le principe de la commande prédictive, les bases de la stratégie de commande adoptée, ainsi que les éléments et les points clefs de sa mise en œuvre sont ensuite énoncés.

I.2. GENERALITES

I.2.1. Commande Prédictive Linéaire

La philosophie de la commande prédictive est régulièrement citée depuis la fin des années 60 par les spécialistes de la commande optimale. En 1962, les relations étroites entre le problème de contrôle optimal et la programmation linéaire ont été reconnues, en premier, par Zadeh et Whalen, [Zad, 62] voir dans [Gar, 89]. En 1963, Propoi propose une approche à horizon glissant qui est au cœur de tous les algorithmes de commande prédictive (MPC), [Pro, 63]. Elle sera connue ensuite, sous le nom de "Open-Loop Optimal Feedback", [Gar, 89]. En 1967, Lee et Markus [Lee, 67] proposent un algorithme très proche de la MPC, [Qin, 03]. Ainsi, la lecture de cette citation traduite de [Lee, 67] montre que l'idée était effectivement présente depuis relativement longtemps : « Une façon d'obtenir un bouclage à partir de la connaissance des solutions en boucle ouverte est de mesurer l'état courant du système et de calculer très rapidement la trajectoire optimale. La première portion de celle-ci est alors appliquée pendant une courte période à la fin de laquelle une nouvelle mesure est acquise et une nouvelle solution optimale est calculée. La procédure est ainsi répétée ». Mais ce n'est qu'au milieu des années 70 qu'elle a été mise en œuvre dans l'industrie grâce notamment à Richalet *et al*, qui ont développé le logiciel IDCOM (Identification-Commande) [Ric, 76]. Juste après de nombreuses catégories et dénominations de la commande prédictive ont été proposées. La liste ci-dessous propose un aperçu non exhaustif des plus connues :

- MPMC (Model Predictive Heuristic Control), [Ric, 78] connue ensuite sous le nom de MAC (Model Algorithmic Control). Cette approche, appliquée aux systèmes industriels multivariables, basée sur des prédictions sur un horizon temporel long, impose des trajectoires de référence pour les sorties et minimise la variance de l'erreur.
- DMC (Dynamic Matrix Control) proposée par Shell [Cut, 79], utilise l'incrément de commande à la place de la commande dans le critère de performance pour un horizon fini de prédiction; cet algorithme est appliqué aux systèmes multivariables linéaires sans contraintes; l'erreur de poursuite est minimisée en spécifiant le comportement futur des sorties; les commandes optimales sont calculées par la méthode des moindres carrés.
- EHAC (Extended Horizon Adaptive Control) [Yds, 84] : stratégie de commande prédictive pour les systèmes monovariables qui utilise des modèles Entrée/Sortie pour maintenir la sortie future (calculée via la résolution d'une équation diophantienne) le plus près possible de la consigne pendant une période donnée au-delà du retard pur du système.
- EPSAC (Extended Prediction Self-Adaptive Control) [Key, 85] introduit une commande constante pour un système non linéaire (en linéarisant le système) et utilise un prédicteur sous-optimal à la place de la résolution de l'équation diophantienne.

- GPC (Generalized Predictive Control) présentée dans Clark [Cla, 87]. Cette méthode la plus connue, basée sur un modèle de type CARIMA, introduit un horizon de prédiction sur la commande, agit conformément au principe de l'horizon fuyant et peut être appliquée aux systèmes à phase non minimale, aux systèmes instables en boucle ouverte, aux systèmes avec retards [Bdi3, 15].
- PFC (Predictive Functional Control) [Ric, 87] est un algorithme prédictif simple, utilisé surtout pour des systèmes SISO industriels rapides, s'avérant pratique pour l'ingénieur en permettant le réglage direct des paramètres (par exemple la constante de temps) associées au temps de montée.
- CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control) [Cla, 91] propose de prendre en compte des contraintes terminales sous forme d'égalité sur la sortie, sur un horizon fini au-delà de l'horizon de prédiction.
- MPC (Model Predictive Control) formulée dans l'espace d'état [Ric, 91] utilise le formalisme de la représentation d'état pour faciliter l'analyse de la stabilité et de la robustesse.

Toutes ces variantes de stratégies de commande prédictive sont aujourd'hui regroupées sous le terme générique MPC, illustrant ainsi le rôle fondamental du modèle. D'autres méthodes ont également été proposées et ont trouvé divers champs d'application notamment dans l'aérospatial, l'industrie du papier et la pétrochimie, [Gar, 89], [Qin, 03]. Une généalogie de quelques méthodes utilisées dans l'industrie est représentée en Fig(I.1).

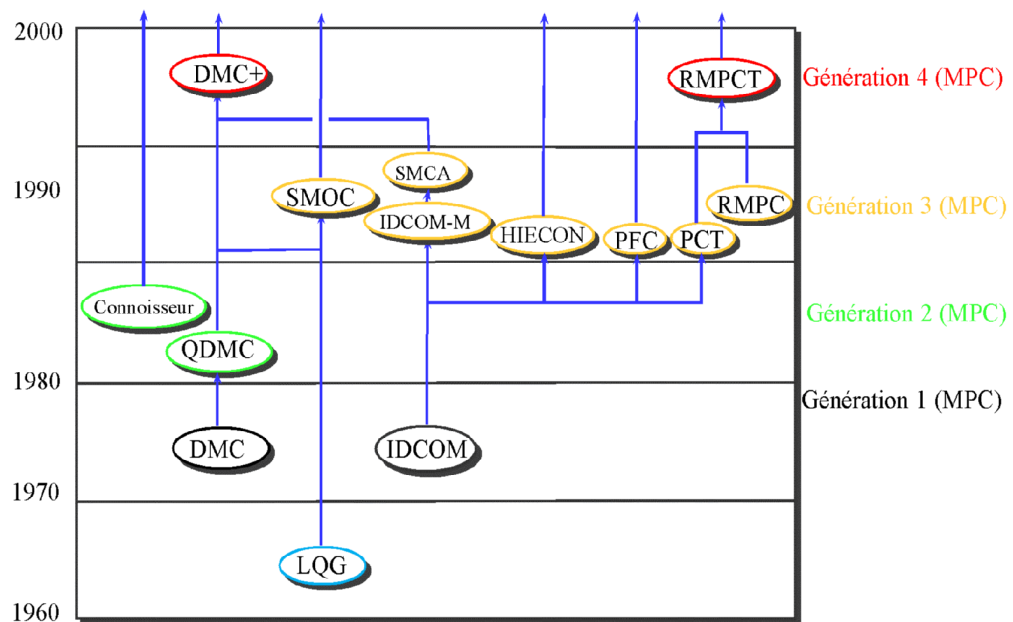


Fig (I.1) : Généalogie approximative des algorithmes de la MPC linéaire, tirée de [Qin 03]

I.2.2. La commande prédictive non linéaire

La commande prédictive non linéaire (CPN) est une technique de commande robuste, car pouvant fonctionner avec des incertitudes et perturbations sans directement les prendre en compte. Cette propriété vient du fait que la CPN est très proche de la commande optimale. Quelques résultats concernant la robustesse inhérente à la CPN instantanée sont donnés dans [Che, 82], [Mag, 97] et [May, 00]. D'autres méthodes prenant en compte directement les incertitudes et les perturbations sont basées sur la formulation min-max. Nous ne donnerons pas de détails sur ces méthodes de commande dont les principales sont :

- La CPN robuste qui résout un problème min-max en boucle ouverte, la CPN basée sur la commande H_∞ [Che, 97], [Lal, 94] et [Bla, 99].
- La CPN robuste qui utilise une optimisation "multi-objective", [Dar, 00], [Rus, 94].
- La CPN robuste à travers l'optimisation d'un contrôleur par retour d'état utilisé entre deux pas de calculs, [Kot, 96] et [Mag, 01].

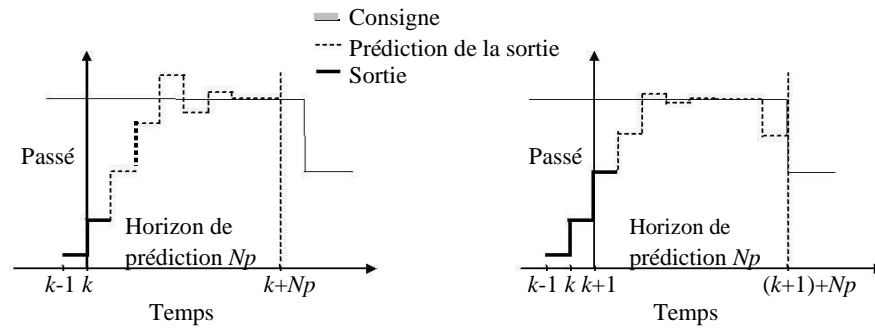
D'après Allgöwer et Findeisen, les points clés de la commande prédictive non linéaire (CPN) sont les suivants : [All, 04]

- Utilisation directe de modèles non linéaires pour la prédiction.
- Considération explicite des contraintes sur l'état et l'entrée.
- Minimisation "en ligne" d'une fonction coût définie.
- Comportement prédit généralement différent du comportement en boucle fermée.
- Nécessité d'une solution temps réel d'un problème de contrôle optimal en boucle ouverte pour l'application.
- Accessibilité des états du système à la mesure ou à l'estimation pour la prédiction.

I.3. PRINCIPE DE LA COMMANDE PREDICTIVE

La commande prédictive MPC représente un moyen relativement simple d'aborder une loi de commande dans le domaine temporel [Sto, 08] et a démontré, à travers de nombreuses applications, ses qualités liées à la régulation des systèmes multi-variables, des systèmes instables, des systèmes à retard, des systèmes non-linéaires, des systèmes à phase non minimale, des systèmes hybrides [Cam, 04]. Le principe « philosophique » de la commande prédictive est le suivant *Fig (I.2)*. Un modèle du processus permet dans un premier temps de prédire la sortie du système sur un horizon fini. Puis, à chaque instant, en minimisant un critère de performance sur cet horizon fini, une séquence de commande est obtenue dont seul le premier élément est appliqué au système [Bou, 06].

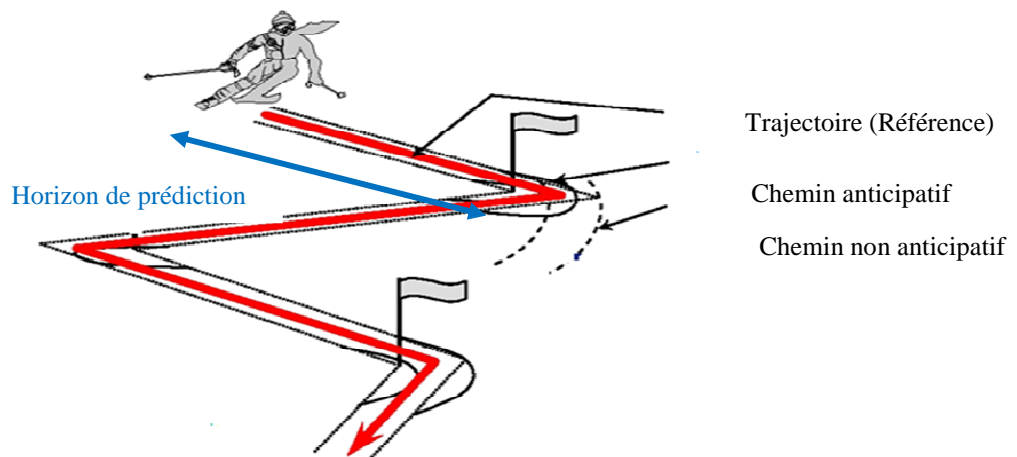
La même procédure est enfin reprise à la période d'échantillonnage suivante, selon le principe de l'horizon fuyant. Le but est de maintenir la sortie du système la plus près possible de la référence désirée, supposée connue sur l'horizon fini de prédiction de façon à mettre en évidence un certain caractère anticipatif.



Fig(I.2) : Principe de fonctionnement de la commande prédictive:
 Prédiction de la sortie à l'instant k sur un horizon fini (à gauche);
 Rétération à l'instant suivant (à droite)

La technique prédictive permet en fait de reproduire de façon théorique le comportement intuitif naturellement prédictif ou anticipatif de l'être humain [Sto, 08] en conduisant une voiture, en marchant, en faisant du ski, en respectant le budget alloué à certaines activités sur une période limitée, en traversant une rue...ect. Les skieurs par exemple, font une prédiction de la trajectoire à suivre sur un horizon fini, et élaborent les actions qui vont leur permettre de la suivre, et puis à chaque étape l'horizon de prédiction glisse avec eux. En utilisant des commandes classiques, les décisions sont réalisées à partir des erreurs passées entre la sortie et la consigne, et non des erreurs prédites Fig(I.3).

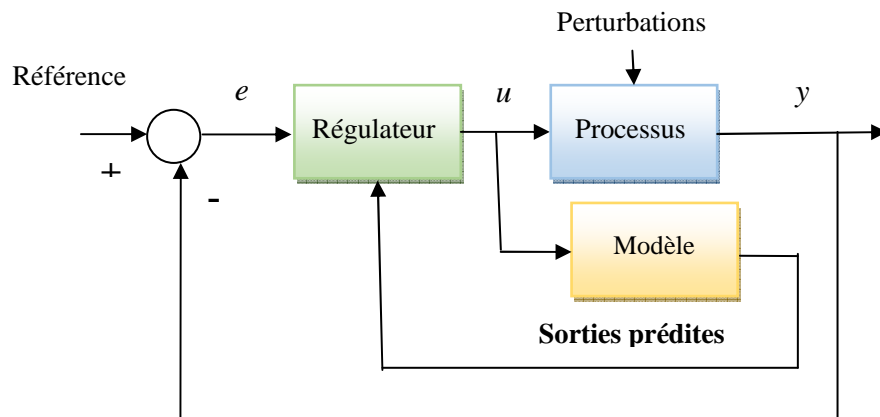
Or il apparaît clairement dans le cas du ski que la structure prédictive faisant intervenir des erreurs futures est fortement nécessaire, le cas contraire étant équivalent à skier en regardant à l'arrière pour réduire l'erreur entre la trajectoire désirée et la position réelle.



Fig(I.3) : Application quotidienne de la commande prédictive

Les étapes spécifiques à toutes les lois de la commande prédictive peuvent être classer comme suit [Bom, 08] :

1. A chaque instant présent, les sorties futures sont prédites (sur un horizon de taille N_p , dénommé horizon de prédiction sur la sortie) à l'aide d'un modèle de comportement du processus à commander. Ces prédictions sont notées $y_p(k+j/k)$, avec $j = 1, \dots, N_p$ pour indiquer la valeur de la sortie à l'instant $k+j$, calculée à l'instant k . Elles dépendent des valeurs connues jusqu'au temps k (entrées et sorties passées) et des commandes futures $u(k+j/k)$, $j = 0, \dots, N_c - 1$, N_c étant l'horizon de commande.
2. Les futurs signaux de commande $u(k+j/k)$, $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$ sont calculés (N_c est l'horizon de prédiction sur la commande) en optimisant un critère J (fonction coût) spécifié pour que le procédé soit aussi proche que possible de la trajectoire de référence $y_{ref}(k+j)$, tout en réduisant les efforts de la commande. Des contraintes sur la sortie et/ou sur la commande peuvent être également imposées.
3. Finalement, seul le premier élément $u(k/k)$ du vecteur du signal de commande optimale $u(k+j/k)$, $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$ est appliqué au système pendant le prochain temps d'échantillonnage et la résolution recommence avec l'étape 1 en prenant en compte les mesures actualisées $y(k+1)$ du procédé. Ceci est donc le caractère « boucle fermée » *Fig(1.4)* de l'approche. La commande $u(k+1/k+1)$ est en principe différente de $u(k+1/k)$ puisque de nouvelles informations ont pu être prises en compte. Ceci est connu comme le concept de l'horizon fuyant (ou glissant).



Fig(1.4) : Régulateur prédictif à base de modèle

I.4. ÉLÉMENTS D'UNE COMMANDE PREDICTIVE

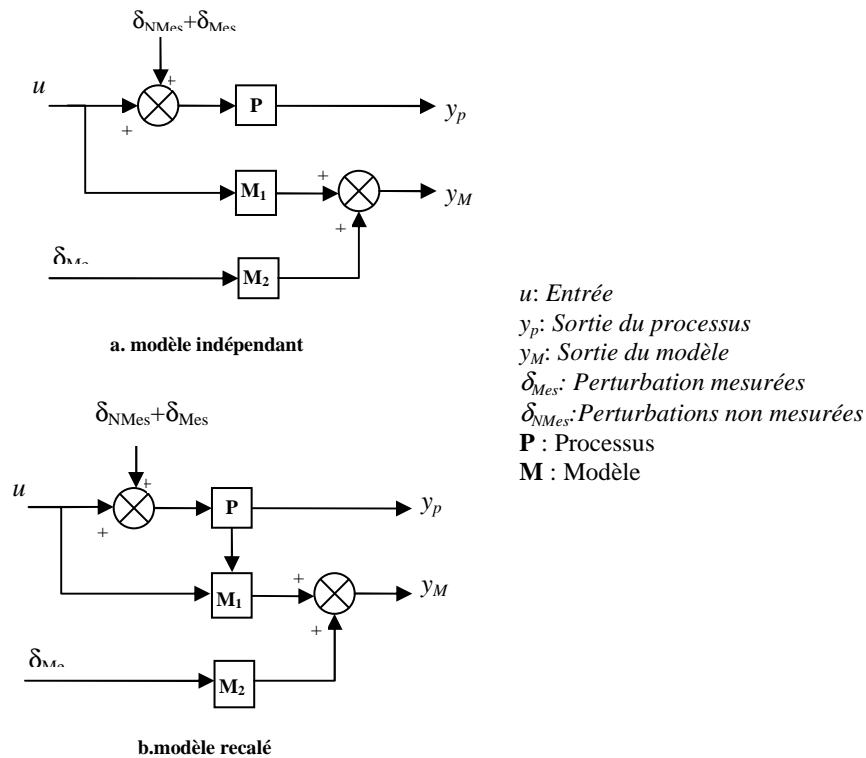
Tous les algorithmes de la commande prédictive possèdent les mêmes éléments et différentes options peuvent être considérées pour chaque élément, ce qui donne une multitude d'algorithmes. Ces éléments sont :

- Le modèle du système.
- Le critère de performance et l'algorithme d'optimisation.

I.4.1. Le modèle

Toutes les commandes prédictives utilisent un modèle analytique. Le terme " modèle" doit être pris dans son sens le plus large, puisque l'on ne va demander au modèle qu'une seule propriété, être capable de prédire le comportement du système sous l'effet d'une sollicitation connue. Le modèle est le plus souvent embarqué explicitement dans le calculateur de commande et pour cela dénommé modèle interne. Le choix de la structure du modèle dépend du processus et des spécifications de la commande. Il doit être capable de réaliser une prédiction véritable du comportement futur du processus, sous l'effet d'une action supposée connue dans l'avenir. Ce modèle peut être de connaissance ou de représentation, sa forme est ouverte. Il peut être mathématique, ou simplement logique, à base de règles, ou même être constitué d'une base de données expérimentales plus ou moins brute. Deux types fondamentaux de modèles internes existent [Ric, 14] :

- Modèles indépendants où la sortie du modèle interne n'est calculée qu'avec les entrées connues, mesurées, du processus.
- Modèles réaligés (ou recalés) où la sortie du modèle est calculée avec des sorties passées ou des variables internes du processus, mesurées ou estimées Fig(I.5).



Fig(I.5) : Modèle indépendant et recalé

I.4.2. Prédiction

Dans la commande prédictive, un modèle du système n'est pas utilisé pour la conception de la loi de commande, mais il est utilisé pour la prédiction des sorties futures du système .

Ces prédictions seront utilisées par la suite pour la détermination de la séquence de la variable de commande en résolvant un problème d'optimisation [Bou, 06].

I.4.3. Critère de performance (fonction objectif)

Le régulateur va calculer le signal de commandes sur un horizon futur limité de telle sorte que la sortie du processus soit dans le cas général aussi près que possible de la sortie prédite du processus soit dans le cas général aussi près que possible d'une référence spécifiée à l'avantage qui peut être soit directement la consigne soit toute autre fonction liée à la consigne. Ce calcul doit être fait en respectant un champ de contraintes. On va donc avoir à minimiser une certaine fonctionnelle de l'écart entre la sortie prédite par la commande recherchée et le comportement désiré. Ce peut être une simple résolution et dans ce cas le critère ne va porter que sur un nombre limité de points ou sur une fonctionnelle par exemple quadratique sur l'horizon de prédiction fini donné.

Ce problème de minimisation est très largement couvert par les mathématiques appliquées et se divise en deux grandes catégories: avec ou sans contraintes dans l'espace de décision. Dans le cas le plus élémentaire, le problème se réduit à trouver la commande qui fait passer la sortie du processus par un point fixé à un horizon glissant avec le temps, tout en respectant des contraintes sur la commande.

I.4.4. Contraintes

Les contraintes caractérisant les limitations physiques sur les variables du système, sont introduites pour éviter des changements brusques pour la commande. Pour certains systèmes des contraintes sur les sorties doivent être respectées pour des raisons économiques ou de sécurité. La première prise de conscience de l'importance des contraintes (dans les années 50) a eu comme résultat de l'analyse de leurs influence sur les lois de commande optimales [Kal, 60] en plein essor à cette époque. Les premières solutions méthodologiques ont élaboré des techniques d'adaptation de la loi sans contrainte de type « anti-windup ». Le succès pratique rencontré pour des problèmes ponctuels avait tout de même un caractère local et envisageait plutôt une diminution des écarts au régime à suivre. Les méthodes d'anti-windup sont restées très populaires parmi les praticiens, de sorte qu'il existe aujourd'hui des études les rassemblant dans une formulation unifiée [Kot, 94] qui permet leur utilisation d'une façon plus élaborée [Gla, 03] [Pen, 96]. Elles demeurent une formule consacrée pour la prise en compte des contraintes même si leurs détracteurs reprochent leur façon d'agir à posteriori. Une seconde étape de recherche accomplie dans le domaine des systèmes sous contraintes a débuté dans les années 90 et se poursuit actuellement [Goo, 04], [Hen, 95] et [Tar, 97], avec la prise en compte des contraintes lors de l'étape de synthèse. La recherche et ses résultats fructueux ont permis de nombreuses avancées dans des domaines associés à la problématique. Ainsi, les systèmes linéaires sous contraintes font appel à la théorie des ensembles invariants [Bla, 99], des systèmes linéaires par morceaux avec des répercussions sur la théorie des systèmes hybrides [Bem, 04] et de la stabilité par fonctions de Lyapunov non quadratiques. En général, ils ouvrent la voie à une possible adaptation des méthodes de l'automatique linéaire aux systèmes non linéaires. En fonction du modèle de prédiction

choisi et des objectifs de commande, différentes contraintes peuvent être ajoutées à la formulation de la commande prédictive [Ben, 09]. Parmi les plus usuelles on retrouve :

- Contraintes sur l'incrément d'entrée $\Delta u(k)$:

Les restrictions sur l'augmentation du signal de commande prennent une forme très simple, et peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité :

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u \leq \Delta u_{max} \quad (I.1)$$

- Contraintes sur l'entrée $u(k)$:

Les restrictions sur l'amplitude du signal de commande, assez fréquentes en pratique (pour prendre en compte, par exemple, des effets de saturation à forts signaux), peuvent s'exprimer au moyen de l'inégalité suivante :

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (I.2)$$

- Contraintes sur la sortie du système $y(k)$:

Il est fréquent de trouver comme spécification désirée dans les processus commandés que leur sortie se trouve dans une fourchette autour d'une trajectoire désirée, par exemple, dans les cas de poursuite d'un certain profil avec une certaine tolérance. Ce type de condition peut être introduite pour le système de commande forçant la sortie du système soit à tout moment comprise dans la bande constituée par la trajectoire indiquée plus ou moins la tolérance, ceci se traduit par une inégalité de la forme :

$$y_{min} \leq y \leq y_{max} \quad (I.3)$$

- Contraintes sur l'état du système $x(k)$:

Les états qui peuvent occuper un système décrit à l'aide d'un ensemble déterminé de variables dépendent des échanges qu'il a avec l'extérieur. On contrôlant ces échanges, on peut imposer par exemple à certaines combinaisons des variables d'état d'être limitées comme suit :

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad (I.4)$$

I.4.5. Paramètres de réglage

Pour les lois de commande classiques (de type PID par exemple), on retrouve comme paramètres de réglage l'amplification, le temps d'action intégrale, le temps d'action dérivée, ou des paramètres liés aux caractéristiques fréquentielles comme la bande passante, les marges de stabilité ...etc. Dans le cas des lois prédictives, les paramètres sont d'une toute autre nature de par la formulation temporelle des objectifs de commande. Enumérer tous les paramètres de réglage n'est pas chose aisée à cause de la multitude des approches prédictives existantes. Malgré tout, les paramètres de synthèse que l'on retrouve comme dénominateur commun de la majorité des stratégies existantes sont [Gra,04] :

- **Les horizons**

- ✓ de contrainte: qui décrivent explicitement les intervalles sur lesquels on prend en compte les restrictions physiques ou de performances.
- ✓ de prédiction: sur lesquels les performances du système asservi sont évaluées.

- ✓ de commande: qui expriment la liberté autorisée à chaque pas d'échantillonnage pour construire des séquences optimales en boucle ouverte.
 - **Les pondérations intervenant dans le critère de performance**
- ✓ sur les erreurs.
- ✓ sur l'effort de commande.
- ✓ sur l'évolution de la dynamique du système.
 - **Les paramètres terminaux**
- ✓ contraintes terminales.
- ✓ coûts terminaux.

1.5. DOMAINES D'APPLICATION EN INDUSTRIE

De toutes les commandes dites "avancées", la commande prédictive est la plus utilisée dans l'industrie, aussi bien pour les qualités techniques auxquelles elle doit ses performances que pour sa facilité de mise en œuvre. Son champ d'application s'étend à tous les domaines industriels, notamment aux cas où la régulation PID n'est pas efficace. Depuis les années 1970, la commande prédictive a été utilisée avec succès dans différentes applications industrielles et pour plusieurs champs d'activités. Selon [Qin, 03], cela concernent en 2003 plus de 4000 applications au total dans le monde (*tableau (1.1)* pour les approches linéaires et *tableau (1.2)* pour les approches non linéaires), sans rajouter les solutions locales développées en interne des entreprises. Les auteurs de cette étude concluent que la commande prédictive a prouvé ses performances au travers de nombreuses applications industrielles, qu'elle est toujours présente dans la majorité des domaines, et que pour des raisons différentes, deux secteurs industriels ont été les premiers intéressés et ont financé le développement de la méthode.

Area	Aspen Technology	Honeywell Hi-pec	Adersa	Invensys	Total	%
Raffinage	1200	480	280	25	1985	48.5
Pétrochimie	450	80	-	20	550	13.4
Chimie	100	20	3	21	144	3.5
Papier	18	50	-	-	68	1.7
Air et gaz	-	10	-	-	10	0.2
Métallurgie	8	6	7	16	37	0.9
Alimentaire	-	-	41	10	51	1.3
Polymère	17	-	-	-	17	0.4
Cuisson	-	-	42	3	45	1.1
Aérospatial	-	-	13	-	13	0.3
Automobile	-	-	7	-	7	0.2
Autre	40	50	1045	30	1165	28.5
Total	1833	696	1438	125	4096	100

Tableau(1.1) : Bilan des applications industrielles de la commande prédictive linéaire, en 2003 [Qin, 03].

En effet, même si la commande prédictive offre des nombreuses caractéristiques intéressantes, historiquement, seules deux entre elles ont joué un rôle déterminant: le domaine de la raffinerie et de la pétrochimie. Enfin, l'application de cette technique n'a cessé d'évoluer et de multiples avancées ont été réalisées dans des domaines plus variés par exemple les robots de chirurgie [Gin, 03].

Area	Adersa	Aspen Technology	Continental Controls	DOT Products	Pavillon Technologies	Total	%
Chimie	2		15		5	22	23.7
Polymère		1		5	15	21	22.6
Air et gaz			18			18	19.3
Raffinage					13	13	14
Alimentaire					9	9	9.7
Autres	1	5	3			9	9.7
Papier					1	1	1
Total	3	6	36	5	43	93	100

Tableau (I.2) : Bilan des applications industrielles de la commande prédictive non linéaire, en 2003 [Qin, 03].

I.6. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA COMMANDE PREDICTIVE

Les avantages les plus importants que le MPC présente par rapport aux autres méthodes sont les suivants [Gra, 04] :

- Il peut être employé pour contrôler une grande variété de processus, des systèmes avec un comportement relativement simple à d'autres qui présentent un comportement dynamique peu habituel comme ceux avec de grands retards, oscillant fortement, de phase non minimale ou instables.
- Il possède intrinsèquement la compensation de retard et la compensation par anticipation (feedforward) de perturbations mesurables.
- Il est particulièrement intéressant pour les ingénieurs n'ayant qu'une connaissance limitée en contrôle car les concepts sont très intuitifs et que le réglage est très simple.
- Les cas multivariables peuvent être facilement traités.
- Les contrôleurs linéaires résultants sont faciles à implanter.
- Le traitement des contraintes est conceptuellement simple et il peut être inclus systématiquement lors du processus de conception.
- Il est très pratique lorsque les consignes futures sont connues (en robotique ou pour les procédés discontinus).
- Il s'agit d'une méthodologie complètement ouverte dont les principes de base permettent des extensions futures.
- A ces observations, la possibilité d'étendre la méthodologie aux cas non linéaires et la prise en considération du modèle du procédé de façon explicite dans le contrôleur devraient être ajoutées.

A côté de tous ces avantages, restent quelques inconvénients associés [Gra, 04]. L'un d'eux est la charge nécessairement élevée de calcul: la résolution des algorithmes numériques en ligne nécessite un volume et un temps de calcul plus grands que ceux impliqués, par exemple, par la mise en œuvre de contrôleurs classiques de type PID.

Un autre inconvénient est dû au fait qu'il est nécessaire d'avoir un modèle approprié du processus. L'approche de commande prédictive est basée sur la connaissance d'un modèle et donc, les performances obtenues dépendront des écart existant entre le vrai processus et le modèle utilisé. Néanmoins, à l'heure actuelle, nombreux sont les travaux ainsi que le nombre d'applications des contrôleurs prédictifs fonctionnant avec succès dans l'industrie des processus.

Les avances technologiques et l'utilisation de l'ordinateur a permis l'implantation de techniques plus compliquées et sophistiquées, ce qui a permis le développement de l'approche MPC. Parmi les aspects qui ont permis le développement du MPC notons :

- Les techniques de modélisation et d'identification qui sont maintenant diverses et puissantes. Il est, en particulier, possible de travailler dans des environnements défavorables avec un rapport signal sur bruit faible.
- Les techniques de commande robuste permettent l'utilisation d'algorithmes MPC où est intégré un modèle d'incertitudes.
- Les calculateurs numériques sont chaque jour plus rapides et permettent l'exécution en ligne d'algorithmes plus complexes tels que ceux abordant l'optimisation avec des contraintes.

I.7. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur la commande prédictive : Principe de commande et les domaines d'application, en insistant sur ses particularités qui en font une méthode de commande particulièrement répandue dans la communauté automatique. Nous avons présenté le principe de la commande prédictive qui est très efficace et répandu dans le milieu industriel. La commande prédictive permet de résoudre selon le principe de l'horizon glissant les problèmes de commande optimale sur un horizon fini. Par sa description temporelle, elle facilite la prise en compte des limitations des systèmes physiques, autorise la formulation des spécifications en termes de contraintes sur la trajectoire prédite et donne la liberté d'imposer un comportement stable au système asservi par l'ajout de contraintes auxiliaires au sein du problèmes d'optimisation.

Dans le chapitre suivant, nous donnerons les détails de l'approche de commande prédictive sous espace d'état en présence des contraintes et dont on proposera un algorithme de commande, en cas des contraintes sur les variables d'état.

Chapitre II

II.1-Introduction.....	18
II.2-Les bases de la commande prédictive sous espace d'état	19
II.2.1-Modèle de prédiction avec intégrateur.....	19
II.2.2-Prédiction de sortie	20
II.2.3-Elaboration de la loi de commande	22
II.3-Commande prédictive MPC avec contraintes.....	23
II.3.1-Contraintes sur les incréments d'entrée.....	23
II.3.2-Contraintes sur l'entrée.....	24
II.3.3-Contraintes sur la sortie	25
II.3.4-Contraintes sur les variables d'état.....	25
II.4-Procédure de programmation quadratique de Hildreth.....	27
II.4.1-Optimisation sous contraintes d'égalité.....	27
II.4.2-Optimisation sous contraintes d'inégalité.....	28
II.4.2.1-Conditions de Kuhn Toker.....	29
II.4.2.2-La méthode primale-duale	29
II.4.3-Algorithmes de Hildreth	30
II.5-Commande prédictive linéaire avec contraintes d'un chariot avec pendule inversé.....	31
II.6-Conclusion	37

Chapitre II

Commande prédictive linéaire avec contraintes

II.1. INTRODUCTION

Le modèle de système joue un rôle central dans le correcteur, car le choix du modèle doit être capable de rendre compte de la dynamique du processus pour prédire précisément les sorties futures et aussi doit être simple à implémenter et à comprendre. Tous les algorithmes de la commande prédictive ne diffèrent entre eux que par le modèle utilisé pour représenter le procédé et les bruits, et par la fonction de coût à minimiser.

Les modèles les plus souvent considérés, sont ceux qui utilisent les réponses impulsionnelles ou indicielles. La réponse impulsionnelle du système est relativement simple à obtenir car elle requiert uniquement la mesure de la sortie lorsque le système est excité par une impulsion. L'autre modèle, qui se base sur la réponse indicielle du système, est obtenu à l'aide des sorties du système lorsque l'entrée est un échelon. D'un autre côté la description du procédé sous forme de fonction de transfert est la plus répandue, car elle permet de décrire un grand nombre des systèmes. Notons ici que la fonction de transfert est une relation entrée/sortie qui n'apporte aucune connaissance sur la structure interne d'un système. Au contraire, la représentation d'état contient des informations accessibles à la mesure et directement liées aux grandeurs physiques du système. Elle offre de ce fait des nouvelles possibilités en termes d'analyse et de commande des systèmes [Vac, 07].

La représentation d'état à les caractéristiques suivantes [Sia, 92] :

- Un système donné possède une infinité de représentation d'état,
- Les conditions initiales apparaissent explicitement par contre la fonction de transfert impose que les conditions initiales sont nulles,

- Les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice d'état,
- La possibilité de description des systèmes multivariables et des systèmes non linéaires,
- Elaboration de la commande en fonction des contraintes imposées.

Dans ce chapitre, nous d'écrivons la méthodologie de la commande prédictive sous espace d'état sans et avec contraintes, un exemple d'un système mécanique a été considéré, celui d'un chariot avec pendule inversé dont la commande prédictive a été appliquée en présence des contraintes pour contrôler la position du chariot et maintenir le pendule en position d'équilibre.

II.2. LES BASES DE COMMANDE PREDICTIVE SOUS ESPACE D'ETAT

II.2.1. Modèle de prédiction avec intégrateur

En partant des principes classiques de la théorie des systèmes linéaires, il est bien connu que pour une erreur stationnaire nulle, la fonction de transfert en boucle ouverte doit contenir un intégrateur. La plus simple façon d'obtenir cette garantie dans le contexte prédictif est de construire un modèle de prédiction en utilisant l'incrément de la commande qui contiendra l'intégrateur dans la chaîne directe [Wan, 09].

La représentation d'état d'un modèle discret, caractérisé par m entrées; q sorties ($q \leq m$) et n états peut être définie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_d w(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k) + D_m u(k) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où :

$x_m(k)$, $u(k)$ et $y(k)$ représentent respectivement les vecteurs d'état; d'entrée et de sortie du modèle considéré :

$$\begin{aligned} x_m(k) &= [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T, \\ u(k) &= [u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_m(k)]^T, \\ y(k) &= [y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_q(k)]^T \end{aligned}$$

A_m , B_m , C_m et D_m représentent les matrices d'états du modèle considéré et ont respectivement les dimensions: $n \times n$, $n \times m$, $q \times n$ et $D_m = 0$.

$w(k)$ est la perturbation, supposée être une séquence intégrée du bruit blanc et B_d une matrice liée aux perturbations. Cela signifie que l'entrée de perturbation $w(k)$ est liée à une séquence du bruit blanc de moyenne nulle $\varepsilon(k)$ par l'équation de différence :

$$w(k) - w(k-1) = \varepsilon(k) \quad (\text{II.2})$$

Si on voudrait augmenter le modèle (II.1), pour qu'il inclut dans sa représentation un intégrateur, on prend la récurrence, à partir de (II.1) et (II.2) :

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) + B_d \varepsilon(k) \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$$\begin{aligned}\Delta x_m(k+1) &= x_m(k+1) - x_m(k), \\ \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1).\end{aligned}$$

Notons que l'entrée dans ce modèle d'espace d'état est $\Delta u(k)$. La prochaine étape est de mettre la sortie $y(k)$ en fonction de $\Delta x_m(k)$. Pour cela on choisit un nouvel vecteur d'état : $x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)^T]^T$

L'équation de sortie peut s'écrire donc sous la forme suivante :

$$y(k+1) - y(k) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) + C_m B_d \varepsilon(k) \quad (\text{II.4})$$

La représentation d'état obtenue en fusionnant (II.3) et (II.4) est la suivante :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ C_m B_d \end{bmatrix}}^{B_\varepsilon} \varepsilon(k) \\ y(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Où :

- 0_m est une matrice nulle de dimension $q \times n$
- $I_{q \times q}$: matrice d'identité de dimension $q \times q$

L'équation (II.5) peut être donnée sous la forme :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B \Delta u(k) + B_\varepsilon \varepsilon(k) \\ y(k) &= C x(k)\end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Le triplet (A, B, C) est appelé "matrices du modèle augmenté" d'ordre $n_l = n + q$ ce qui sera utilisé dans la conception de la commande prédictive.

A noter que l'équation polynomiale caractéristique du modèle augmenté (II.6) est :

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I - A_m & o_m^T \\ -C_m A_m & (\lambda - 1) I_{q \times q} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^q \det(\lambda I - A_m) = 0\end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

A partir de (II.7) il est bien clair que les valeurs propres du modèle augmenté sont l'union des valeurs propres du modèle du système et les q valeurs propres : $\lambda = 1$. Cela signifie qu'il y a q intégrateurs incorporés dans le modèle de la conception augmentée. C'est le moyen que nous utilisons pour obtenir une action intégrale pour les systèmes MPC.

II.2 .2. Prédiction de la sortie

Supposons qu'à l'instant k_i , $k_i > 0$ le vecteur d'état $x(k_i)$ est disponible par mesure. La séquence de commande future est représentée par :

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1), \Delta u(k_i + 2), \dots \dots \dots, \Delta u(k_i + N_c - 1)$$

Où :

- N_c est l'horizon de prédiction sur la commande.

Avec une information $x(k_i)$ les variables d'état futures sont prédites pour un horizon de prédiction N_p telle que ($N_c \leq N_p$) :

$$x(k_i + 1/k_i), x(k_i + 2/k_i), \dots \dots \dots, x(k_i + N_p/k_i)$$

Sur la base du modèle (A, B, C) les variables d'état futures sont calculées d'une façon séquentielle en utilisant l'ensemble des séquences de commande :

$$\begin{aligned} x(k_i + 1/k_i) &= A x(k_i) + B \Delta u(k_i) + B_\varepsilon \varepsilon(k_i) \\ x(k_i + 2/k_i) &= A x(k_i + 1) + B \Delta u(k_i + 1) + B_\varepsilon \varepsilon(k_i + 1) \\ &= A^2 x(k_i) + A B \Delta u(k_i) + B \Delta u(k_i + 1) + A B_\varepsilon \varepsilon(k_i) + B_\varepsilon \varepsilon(k_i + 1) \\ &\vdots \\ x(k_i + N_p/k_i) &= A^{N_p} x(k_i) + A^{N_p-1} B \Delta u(k_i) + A^{N_p-2} B \Delta u(k_i + 1) + \dots \dots + \\ &\quad A^{N_p-N_c} B \Delta u(k_i + N_c - 1) + A^{N_p-1} B_\varepsilon \varepsilon(k_i) + A^{N_p-2} B_\varepsilon \varepsilon(k_i + 1) + \\ &\quad \dots B_\varepsilon \varepsilon(k_i + N_p - 1) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Puisque $\varepsilon(k)$ est une séquence de bruit blanc de moyenne nulle, les valeurs prédites au futur sont supposées nulles.

D'après la prédiction des états et pour simplifier les calculs, l'opérateur d'espérance est ignoré sans confusion, les sorties prédites peuvent être formulées en fonction des variables d'état et de la commande future $\Delta u(k + j)$, $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$:

$$\begin{aligned} y(k_i + 1/k_i) &= C A x(k_i) + C B \Delta u(k_i) \\ y(k_i + 2/k_i) &= C A^2 x(k_i) + C A B \Delta u(k_i) + C B \Delta u(k_i + 1) \\ &\vdots \\ y(k_i + N_p/k_i) &= C A^{N_p} x(k_i) + C A^{N_p-1} B \Delta u(k_i) + C A^{N_p-2} B \Delta u(k_i + 1) \\ &\quad + \dots + C A^{N_p-N_c} B \Delta u(k_i + N_c - 1) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

On définit les matrices :

$$\begin{aligned} Y &= [y(k_i + 1/k_i) \ y(k_i + 2/k_i) \ \dots \ y(k_i + N_p/k_i)]^T, \text{ de dimension } (N_p \times q); \\ \Delta U &= [\Delta u(k_i) \ \Delta u(k_i + 1) \ \Delta u(k_i + 2) \ \dots \ \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T, \text{ de dimension } (N_c \times m). \end{aligned}$$

En utilisant les équations (II.8) et (II.9) il est possible d'écrire le vecteur de prédictions des sorties sous une forme condensée comme il est indiqué :

$$Y = F_y x(k_i) + \Phi_y \Delta U \quad (\text{II.10})$$

Avec :

$$F_y = \begin{bmatrix} C A \\ C A^2 \\ C A^3 \\ \vdots \\ C A^{N_p} \end{bmatrix}; \quad \Phi_y = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2 B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C A^{N_p-1} B & C A^{N_p-2} B & C A^{N_p-3} B & \dots & C A^{N_p-N_c} B \end{bmatrix}$$

F_y est de dimension $(q N_p) \times n_l$ et Φ_y $(q N_p) \times (m N_c)$

II.2.3. Elaboration de la loi de commande

Pour une consigne $y_{ref}(k_i)$ donnée et dans un horizon de prédiction défini, avec :

$$y_{ref}(k_i) = [y_{ref_1}(k_i) \ y_{ref_2}(k_i) \ y_{ref_3}(k_i) \ \dots \ y_{ref_q}(k_i)]^T$$

L'objectif de la commande prédictive est d'obtenir une sortie le plus proche possible de cette consigne, cet objectif se traduit par la recherche du vecteur ΔU de telle sorte qu'une fonction d'erreur entre la consigne et la sortie prédite soit minimale.

En supposant que les données de consigne sont représentées par le vecteur R_s telle que :

$$R_s^T = \overbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}^{N_p} y_{ref}(k_i)$$

La fonction de coût J est défini par :

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (\text{II.11})$$

Dans cette fonction le premier terme à pour objectif de minimiser l'erreur entre la sortie prédite et la consigne tandis que le deuxième terme correspond aux considérations données pour les dimensions de ΔU afin de minimiser l'énergie [Wan, 09].

Où :

- \bar{R} est une matrice de m blocs et sa dimension égale à la dimension de $\Phi_y^T \Phi_y$, utilisée comme paramètre de réglage.

En remplaçant (II.10) dans (II.11), la solution optimale qui minimise J est :

$$\Delta U = (\Phi_y^T \Phi_y + \bar{R})^{-1} \Phi_y^T (R_s y_{ref}(k_i) - F_y x(k_i)) \quad (\text{II.12})$$

Selon le principe de l'horizon fuyant, seul le premier élément du vecteur ΔU est appliqué au système et les restes sont rejetés. Le premier élément de Δu peut être obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta u &= \overbrace{[I_m \ 0_m \ \dots \ 0_m]}^{N_c} (\Phi_y^T \Phi_y + \bar{R})^{-1} (\Phi_y^T \bar{R}_s y_{ref}(k_i) - \Phi_y^T F_y x(k_i)) \\ &= K_y y_{ref}(k_i) - K_{mpc} x(k_i)\end{aligned}\quad (II.13)$$

Où :

- $\bar{R}_s^T = \overbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}^{N_p}$
- I_m et 0_m sont respectivement la matrice d'identité et la matrice nulle de dimension $m \times m$,
- K_y est le premier élément de $(\Phi_y^T \Phi_y + \bar{R})^{-1} \Phi_y^T \bar{R}_s$,
- K_{mpc} est le premier ligne de $(\Phi_y^T \Phi_y + \bar{R})^{-1} \Phi_y^T F_y$.

L'équation (II.13) présente la forme standard de la commande par retour d'état dont K_{mpc} est le gain. Dans ce cas et d'après les équations (II.6) et (II.13), les valeurs propres en boucle fermée λ_p peuvent être calculées à partir de l'équation caractéristique :

$$[\lambda_p I - (A - BK_{mpc})] = 0 \quad (II.14)$$

II.3. COMMANDE PREDICTIVE MPC AVEC CONTRAINTES

En fonction du modèle de prédiction choisi et des objectifs de commande, différentes contraintes peuvent être ajoutées à la formulation de la commande prédictive [Ben, 09]. Parmi les plus usuelles on trouve :

- Contraintes sur l'incrément de la commande $\Delta u(k)$,
- Contraintes sur la commande $u(k)$,
- Contraintes sur la sortie du système $y(k)$,
- Contraintes sur l'état du système $x(k)$.

La clé de la commande prédictive avec contraintes est de reformuler les contraintes à des inégalités linéaires en fonction du même vecteur ΔU , comme celui ci est utilisé dans la conception de commande prédictive. Par conséquent, la loi de commande est élaborée en minimisant un critère quadratique avec contraintes sur le vecteur ΔU [Wan, 09].

II.3.1. Contraintes sur les incréments d'entrée

Les restrictions sur l'augmentation du signal de commande prennent une forme très simple, et peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité :

$$\Delta U_{min} \leq \Delta U \leq \Delta U_{max} \quad (II.15)$$

Avec ΔU_{min} et ΔU_{max} deux vecteurs avec N_c éléments, respectivement du valeur minimale des incréments Δu_{min} et maximale Δu_{max} .

L'inégalité (II.15) peut être réécrite :

$$\Delta U \leq \Delta U_{max} \quad (\text{II.16})$$

$$-\Delta U \leq -\Delta U_{min} \quad (\text{II.17})$$

Ou bien sous forme plus compacte :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix}}_{M_1} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta U_{min} \\ \Delta U_{max} \end{bmatrix}}_{N_1} \quad (\text{II.18})$$

Si les contraintes sont posées seulement sur le premier élément, les contraintes sur l'incrément s'écrivent sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta u_{min} \\ \Delta u_{max} \end{bmatrix}}_{N_1} \quad (\text{II.19})$$

II.3.2. Contraintes sur l'entrée

Les restrictions sur l'amplitude du signal de commande sont assez fréquentes en pratique (pour prendre en compte, par exemple, des effets de saturation à forts signaux), peuvent s'exprimer au moyen de l'inégalité suivante :

$$U_{min} \leq U \leq U_{max} \quad (\text{II.20})$$

Avec :

U_{min} et U_{max} deux vecteurs de N_c éléments qui contiennent respectivement les valeurs minimales u_{min} et maximales u_{max} de la commande.

Pour exprimer ces contraintes, la commande s'écrit en fonction de ΔU par :

$$\begin{bmatrix} u(k_i) \\ u(k_i + 1) \\ u(k_i + 2) \\ \vdots \\ u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{C_1} u(k_i - 1) + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ I & I & I & \dots & I \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i + 1) \\ \Delta u(k_i + 2) \\ \vdots \\ \Delta u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Donc les contraintes sur la commande peuvent être données :

$$-(C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) \leq -U_{min} \quad (\text{II.22})$$

$$(C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) \leq U_{max} \quad (\text{II.23})$$

Ou bien sous forme plus compacte :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}}_{M_2} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -U_{min} + C_1 u(k_i - 1) \\ U_{max} - C_1 u(k_i - 1) \end{bmatrix}}_{N_2} \quad (\text{II.24})$$

Si les contraintes sont posées seulement sur le premier élément, les contraintes sur la commande s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -u_{min} + u(k_i - 1) \\ u_{max} - u(k_i - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

II.3.3. Contraintes sur la sortie

Il est très fréquent de trouver comme spécification désirée dans les processus commandés que leur sortie se trouve dans une fourchette autour d'une trajectoire désirée, par exemple, dans les cas de poursuite d'un certain profil avec une certaine tolérance. Ce type de condition peut être introduite pour le système de commande forçant la sortie du système soit à tout moment comprise dans la bande constituée par la trajectoire indiquée plus ou moins la tolérance ceci se traduit par une inégalité de la forme :

$$Y_{min} \leq Y \leq Y_{max} \quad (\text{II.26})$$

Avec :

- Y_{min} et Y_{max} deux vecteurs de N_p éléments qui contiennent les valeurs minimales y_{min} et maximales y_{max} de la sortie.

En substituant par l'équation (II.10) :

$$Y_{min} \leq F_y x(k_i) + \Phi_y \Delta U \leq Y_{max} \quad (\text{II.27})$$

Alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Phi \\ \Phi \end{bmatrix}}_{M_3} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -Y_{min} + F x(k_i) \\ Y_{max} - F x(k_i) \end{bmatrix}}_{N_3} \quad (\text{II.28})$$

II.3.4. Contraintes sur les variables d'état [Bdi1, 12] [Bdi1, 15]

Dans ce cas les contraintes sont données par :

$$X_{min} \leq X \leq X_{max} \quad (\text{II.29})$$

Avec X_{min} et X_{max} deux vecteurs qui contiennent N_p éléments des valeurs minimales x_{min} et maximales x_{max} d'état. De la même manière, ces contraintes peuvent s'écrire en fonction de ΔU .

A partir de l'équation (II.3), les futures variables d'état sont calculées en utilisant successivement l'ensemble des futurs paramètres de contrôle :

$$\Delta x_m(k_i + 1|k_i) = A_m \Delta x_m(k_i) + B_m \Delta u(k_i)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_m(k_i + 2|k_i) &= A_m \Delta x_m(k_i + 1|k_i) + B_m \Delta u(k_i + 1) \\
 &= A_m^2 \Delta x_m(k_i) + A_m B_m \Delta u(k_i) + B_m \Delta u(k_i + 1) \\
 &\quad \vdots \\
 \Delta x_m(k_i + N_p|k_i) &= A_m^{N_p} \Delta x_m(k_i) + A_m^{N_p-1} B_m \Delta u(k_i) + \dots + \\
 &\quad A_m^{N_p-N_c} B_m \Delta u(k_i + N_c - 1)
 \end{aligned} \tag{II.30}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 X_n &= [x_m(k_i) \ x_m(k_i + 1) \ \dots \ x_m(k_i + N_p - 1)]^T, \\
 X_m &= [x_m(k_i + 1) \ x_m(k_i + 2) \ \dots \ x_m(k_i + N_p)]^T.
 \end{aligned}$$

Alors :

$$X_m = F_x \Delta x_m(k_i) + \Phi_x \Delta U + X_n \tag{II.31}$$

Avec :

$$F_x = \begin{bmatrix} A_m \\ A_m^2 \\ A_m^3 \\ \vdots \\ A_m^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi_x = \begin{bmatrix} B_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_m B_m & B_m & 0 & \dots & 0 \\ A_m^2 B_m & A_m B_m & B_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m^{N_p-1} B_m & A_m^{N_p-2} B_m & A_m^{N_p-3} B_m & \dots & A_m^{N_p-N_c} B_m \end{bmatrix}$$

En rappelant que :

$$\Delta U = [\Delta u(k_i) \ \Delta u(k_i + 1) \ \Delta u(k_i + 2) \ \dots \ \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T$$

Les contraintes doivent être décomposées en deux parties afin de tenir compte de la limite inférieure et la limite supérieure du signe opposé. A savoir, les contraintes sous forme de matrice sont donnés en utilisant (II.31) par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Phi_x \\ \Phi_x \end{bmatrix}}_{M_4} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -X_{\min} + F_x \Delta x_m(k_i) + X_n \\ X_{\max} - F_x \Delta x_m(k_i) - X_n \end{bmatrix}}_{N_4} \tag{II.32}$$

Finalement on peut regrouper toutes les contraintes sous :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}} \Delta U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}}_{\gamma} \tag{II.33}$$

M est une matrice qui représente les contraintes, avec un nombre de lignes égal au nombre des contraintes et le nombre de colonnes égal au dimension de ΔU . Une fois que le

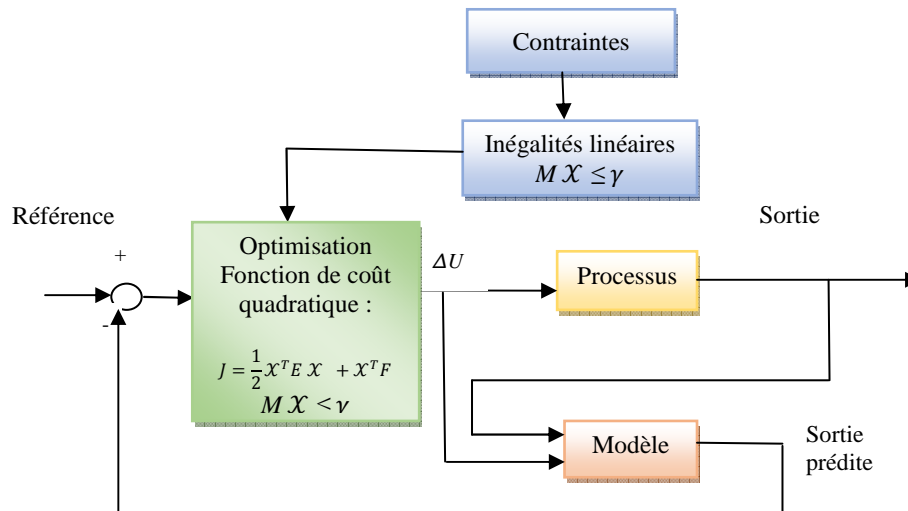
problème de la commande (II.11) avec contraintes (II.33) est traduit en une fonction quadratique sous la forme suivante :

$$J = \frac{1}{2} \mathcal{X}^T E \mathcal{X} + \mathcal{X}^T F \quad (\text{II.34})$$

$$\mathcal{M} \mathcal{X} \leq \gamma$$

➤ Où pour notre cas le variable \mathcal{X} présente le signal ΔU .

Un algorithme simple de programmation quadratique peut être utilisé pour trouver la loi de commande *Fig (II.1)*, dans ce travail la méthode de Hildreth [Lue, 84] est choisie.



Fig(II.1) : Commande prédictive avec contraintes

II.4. PROCEDURE DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE DE HILDRETH

II.4.1. Optimisation sous contraintes d'égalité

Les problèmes de programmation quadratique sont des problèmes d'optimisation où la fonction objective est quadratique et les contraintes sont linéaires.

La forme générale d'un problème d'optimisation quadratique sous contraintes peut être donnée par (II.34).

Telle que :

- E Matrice symétrique et défini positive,
- J Fonction objective,
- \mathcal{X} Variable de décision,

Le cas simple de programmation quadratique est de trouver la solution optimale avec contraintes d'égalité linéaire. Pour cet objective on utilise la méthode de Lagrange [Fle, 81]. Le multiplicateur de Lagrange est une méthode permettant de trouver les points stationnaires (maximum, minimum...) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous

contraintes. Donc on cherche à trouver le minimum de la fonction J parmi les points respectant une contrainte de type $\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma = 0$.

Pour ces objectifs on considère l'expression de Lagrange :

$$J = \frac{1}{2} \mathcal{X}^T E \mathcal{X} + \mathcal{X}^T F + \lambda^T (\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma) \quad (\text{II.35})$$

Les valeurs de \mathcal{X} et de λ qui minimisent J sont obtenues par :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathcal{X}} = E \mathcal{X} + F + \mathcal{M}^T \lambda = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = (\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma) = 0 \quad (\text{II.37})$$

Alors :

$$\lambda = -(\mathcal{M} E^{-1} \mathcal{M}^T)^{-1} (\gamma + \mathcal{M} E^{-1} F) \quad (\text{II.38})$$

$$\mathcal{X} = -E^{-1} (\mathcal{M}^T \lambda + F) \quad (\text{II.39})$$

Les éléments du vecteur λ sont les multiplicateurs de Lagrange .

Le vecteur \mathcal{X} peut s'écrire :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 - E^{-1} \mathcal{M}^T \lambda$$

Où :

$\mathcal{X}_0 = -E^{-1} F$ est la solution optimale globale qui minimise J sans contraintes et le deuxième terme est le terme de correction en présence des contraintes.

- Si les contraintes sont dépendantes, donc la matrice $(\mathcal{M} E^{-1} \mathcal{M}^T)$ n'est pas inversible et on n'a pas de solution [Fle, 81].
- Si le nombre de contraintes égale au nombre de variables de décision la solution est unique $\mathcal{X} = \mathcal{M}^{-1} \gamma$. Dans cette méthode le nombre des contraintes doit être inférieur ou égal au nombre des variables de décision.

II.4.2. Optimisation sous contraintes d'inégalité

Les contraintes d'inégalités sont les contraintes de type $\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma \leq 0$, on cherche à trouver le minimum de la fonction (II.34). Dans ce cas le nombre des contraintes peuvent être supérieur au nombre des variables de décision. Ces contraintes comportent deux types de contraintes actives et inactives.

Une inégalité $\mathcal{M}_i \mathcal{X} \leq \gamma_i$ est dite active si $\mathcal{M}_i \mathcal{X} = \gamma_i$ et inactive quand $\mathcal{M}_i \mathcal{X} < \gamma_i$.

Telle que :

- \mathcal{M}_i Indique la ligne i de la matrice \mathcal{M} ,
- γ_i Indique la ligne i du vecteur γ .

Pour résoudre le problème d'optimisation dans ce cas, la méthode de Kuhn –Tucker a été proposée [Fle, 81].

II.4.2.1. Conditions de kuhn-Tucker

En mathématiques, les conditions de Kuhn-Tucker ou conditions de Karush-Kuhn-Tucker permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalité.

Soient les conditions :

$$E \mathcal{X} + F + \mathcal{M}^T \lambda = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma \leq 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\lambda^T (\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma) = 0 \quad (\text{II.42})$$

$$\lambda \geq 0 \quad (\text{II.43})$$

Ces conditions peuvent s'écrire en forme plus simple :

$$E \mathcal{X} + F + \sum_{i \in S_{act}} \lambda_i \mathcal{M}_i^T = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$\mathcal{M}_i \mathcal{X} - \gamma_i = 0 \quad i \in S_{act} \quad (\text{II.45})$$

$$\mathcal{M}_i \mathcal{X} - \gamma_i < 0 \quad i \notin S_{act} \quad (\text{II.46})$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in S_{act} \quad (\text{II.47})$$

$$\lambda_i = 0 \quad i \notin S_{act} \quad (\text{II.48})$$

Où :

- S_{act} Ensemble des contraintes actives,
- $\mathcal{M}_i \mathcal{X} - \gamma_i = 0$ Égalité des contraintes actives,
- $\mathcal{M}_i \mathcal{X} - \gamma_i < 0$ inégalité des contraintes inactives.

Les multiplicateurs de Lagrange sont posés positifs pour les contraintes actives et nuls pour les contraintes inactives. Donc, si l'ensemble des contraintes actives est connue, la solution optimale de problème est :

$$\lambda_{act} = -(\mathcal{M}_{act} E^{-1} \mathcal{M}_{act}^T)^{-1} (\gamma_{act} + \mathcal{M}_{act} E^{-1} F) \quad (\text{II.49})$$

$$\mathcal{X} = -E^{-1} (\mathcal{M}_{act}^T \lambda_{act} + F) \quad (\text{II.50})$$

Où :

$\mathcal{M}_{act}, \gamma_{act}$: sont les contraintes actives et λ_{act} les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes.

II.4.2.2. La méthode d'optimisation primale-duale

Toutes les méthodes précédentes appartiennent au groupe de la méthode primale où les solutions sont basées sur la variable de décision (appelé variable primale dans la littérature). La méthode duale est employée pour identifier les contraintes inactives qu'ils seront éliminés dans la solution. Les multiplicateurs de Lagrange sont les variables duales dans ce cas. Cette méthode mènera aux procédures simples pour trouver les solutions optimales de problème de minimisation sous contraintes.

Le problème primal est équivalent à :

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{\mathcal{X}} \left[\frac{1}{2} \mathcal{X}^T E \mathcal{X} + \mathcal{X}^T F + \lambda^T (\mathcal{M} \mathcal{X} - \gamma) \right] \quad (\text{II.51})$$

La minimisation par rapport à \mathcal{X} est atteinte par :

$$\mathcal{X} = -E^{-1}(F + \mathcal{M}^T \lambda) \quad (\text{II.52})$$

Par substitution dans (II.52) on obtient le problème dual qui est un problème de programmation quadratique avec une variable de décision λ :

$$\begin{aligned} \max \\ \lambda \geq 0 \end{aligned} \left[-\frac{1}{2} \lambda^T H \lambda - \lambda^T K - \frac{1}{2} F^T E^{-1} F \right] \quad (\text{II.53})$$

Telle que :

$$H = \mathcal{M} E^{-1} \mathcal{M}^T \quad (\text{II.54})$$

$$K = \gamma + M E^{-1} F \quad (\text{II.55})$$

L'équation (II.53) est l'équivalente à :

$$\begin{aligned} \min \\ \lambda \geq 0 \end{aligned} \left[\frac{1}{2} \lambda^T H \lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2} \gamma^T E^{-1} \gamma \right] \quad (\text{II.56})$$

La solution de ce problème est plus simple, par rapport au problème primal. Donc la méthode duale consiste à la minimisation de la fonction objective :

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2} \lambda^T H \lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2} \gamma^T E^{-1} \gamma \\ \text{avec } \lambda_i \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont notés λ_{act} , les contraintes correspondant sont \mathcal{M}_{act} , γ_{act} et la variable primale est :

$$\mathcal{X} = -E^{-1} F - E^{-1} \mathcal{M}_{act}^T \lambda_{act} \quad (\text{II.58})$$

II.4.3. Algorithme de Hildreth

Cette procédure est un algorithme simple (Luenberger, 1969, Wismer et Chattergy, 1978) proposé pour résoudre le problème dual [Lue, 84]. Dans cet algorithme ayant obtenu un vecteur $\lambda \geq 0$, nous fixons notre attention sur un seul composant λ_i . La fonction J est considérée comme une fonction de λ_i , l'objectif est l'ajustement de λ_i pour réduire J au minimum, si cela exige $\lambda_i < 0$ on remplaçant λ_i par zéro. Puis, nous considérons les composantes prochaines $\lambda_{i+1} \dots \lambda_f$, f est le nombre des contraintes.

La méthode est exprimée explicitement comme suit :

$$\lambda_i^{m+1} = \max(0, \omega_i^{m+1}) \quad (\text{II.59})$$

$$\text{Avec : } \quad \omega_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ii}} [k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} \lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^f h_{ij} \lambda_j^m]$$

Où :

- h_{ij} L'élément (i, j) de la matrice $H = \mathcal{M}E^{-1}\mathcal{M}^T$,
- k_i L'élément i dans le vecteur $K = \gamma + ME^{-1}F$,
- m Le nombre de l'itération.

L'algorithme de programmation quadratique de Hildreth est basé sur une recherche élément par élément; donc il n'exige aucune inversion de matrice. En conséquence, si les contraintes actives sont linéairement indépendantes et leur nombre est inférieur ou égal au nombre des variables de décision, alors les variables duales convergent vers λ^* sinon les variables duales divergent.

La solution a été donnée par :

$$\mathcal{X} = -E^{-1}(F + \mathcal{M}^T\lambda^*) \quad (\text{II.60})$$

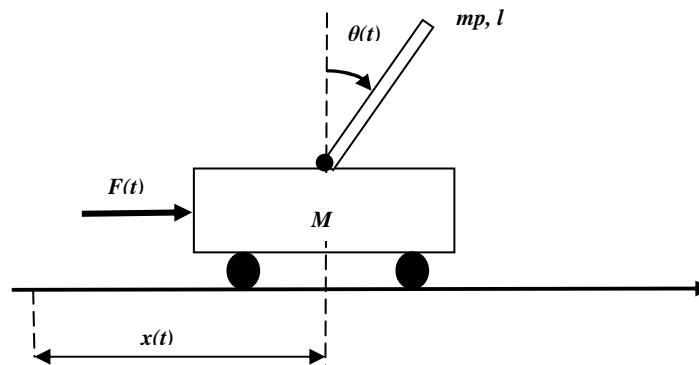
La solution principale peut être réécrite donc :

$$\mathcal{X} = -E^{-1}(\mathcal{M}_{act}^T\lambda_{act}^* + F) \quad (\text{II.61})$$

II.5. COMMANDE PREDICTIVE LINEAIRE AVEC CONTRAINTES D'UN CHARIOT AVEC PENDULE INVERSE

La présente application, est consacrée à l'application de la commande prédictive sous espace d'état, sans et avec contraintes sur le système mécanique chariot avec pendule inversé [Bdi, 10], [Gaw, 06]. Le choix de ce système est motivé par la complexité de son comportement dynamique. Il est souvent utilisé dans les laboratoires de recherche afin de valider les lois de commandes développées théoriquement [Wei, 95], [Yam, 89]. La complexité de ce système réside dans le fait que c'est un système non linéaire, instable et sous actionné c'est-à-dire avec une seule entrée on doit commander deux variables de sortie.

Le chariot avec pendule inversé est composé comme indique la *figure (II.2)* d'un chariot mobile en translation sur un axe horizontal et d'un pendule libre et fixé verticalement sur le chariot. En exerçant une force horizontale $F(t)$ sur le chariot, il résulte une translation de x mètres et une rotation de θ radian du pendule.



Fig(II.2) : Le système chariot avec pendule inversé

Le pendule du système est de longueur l et de masse mp dont l'axe de suspension est lié au chariot de masse M peut se déplacer sur un axe horizontal. Initialement, le système est au repos. En négligeant les frottements situés au niveau de l'axe de rotation et ceux dus au déplacement du chariot. Ce système à une entrée $F(t)$ et une sortie x , cette dernière est considérée comme la position du chariot.

Le Lagrangien de ce système est :

$$L = \frac{1}{2}mp \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta \right) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2} (1 - \cos\theta) \quad (\text{II.62})$$

Telle que :

- v : La vitesse du centre de gravité de la barre,
- J Le moment d'inertie de la barre.

Les équations de Lagrange de ce système sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q_2} \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

Où :

$$\triangleright q_1 = x, q_2 = \theta, F_{q_1} = F, F_{q_2} = 0.$$

En conséquence, les équations du mouvement régissant ce système sont :

$$\begin{cases} \left(\frac{mpl^2}{4} + J \right) \ddot{\theta} + \frac{mpl}{2} (\dot{x} \cos\theta + g \sin\theta) = 0 \\ (M + mp) \ddot{x} + \frac{mpl}{2} (\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) = F(t) \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

Si on se limite aux petites variations de θ autour du point d'équilibre correspondant à la position verticale de la barre, on peut linéariser les équations (II.63) :

$$\begin{cases} \left(\frac{mpl^2}{4} + J \right) \ddot{\theta} + \frac{mpl}{2} (\dot{x} + g\theta) = 0 \\ (M + mp) \ddot{x} + \frac{mpl}{2} \ddot{\theta} = F(t) \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Or, avec le moment d'inertie de la barre suspendue $J = \frac{ml^2}{12}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{mpl^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mpl}{2} (\dot{x} + g\theta) = 0 \\ (M + mp) \ddot{x} + \frac{mpl}{2} \ddot{\theta} = F(t) \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

En posant le vecteur d'état suivant: $X = [\theta; \dot{\theta}; x; \dot{x}]^T$
 Ce qui introduit la forme d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_3 \\ 0 \\ K_4 \end{bmatrix} F(t) \quad (\text{II.66})$$

$$Y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]X$$

Avec :

- $K_1 = \frac{-6g(M+mp)}{l(4M+mp)}$;
- $K_2 = \frac{3mpg}{4M+mp}$;
- $K_3 = \frac{-6}{l(4M+mp)}$;
- $K_4 = \frac{4}{4M+mp}$

Pour simuler le modèle précédent, les valeurs des paramètres utilisés sont données dans le tableau suivant [Djo, 08].

Paramètre	Unité	Description	Valeur
L	M	Longueur de pendule	0.5
M	Kg	La masse totale du pendule	0.1
M	Kg	Masse du chariot	1
G	N/Kg	La force d'attraction terrestre	9.81

Tableau II.1 : Paramètres du système chariot avec pendule inversé

Le système chariot avec pendule inversé est un système instable. Il est donc nécessaire d'introduire une commande pour le stabiliser. Pour cela nous proposons en premier temps l'utilisation de la commande prédictive MPC à base de modèle d'état sans contraintes [Bdi, 15] [Bdi, 10] dont notre objectif est la régulation et la poursuite d'une trajectoire de position désirée x .

Le système est discrétisé avec une période d'échantillonnage $T_e=0.1ms$ afin d'appliquer le MPC.

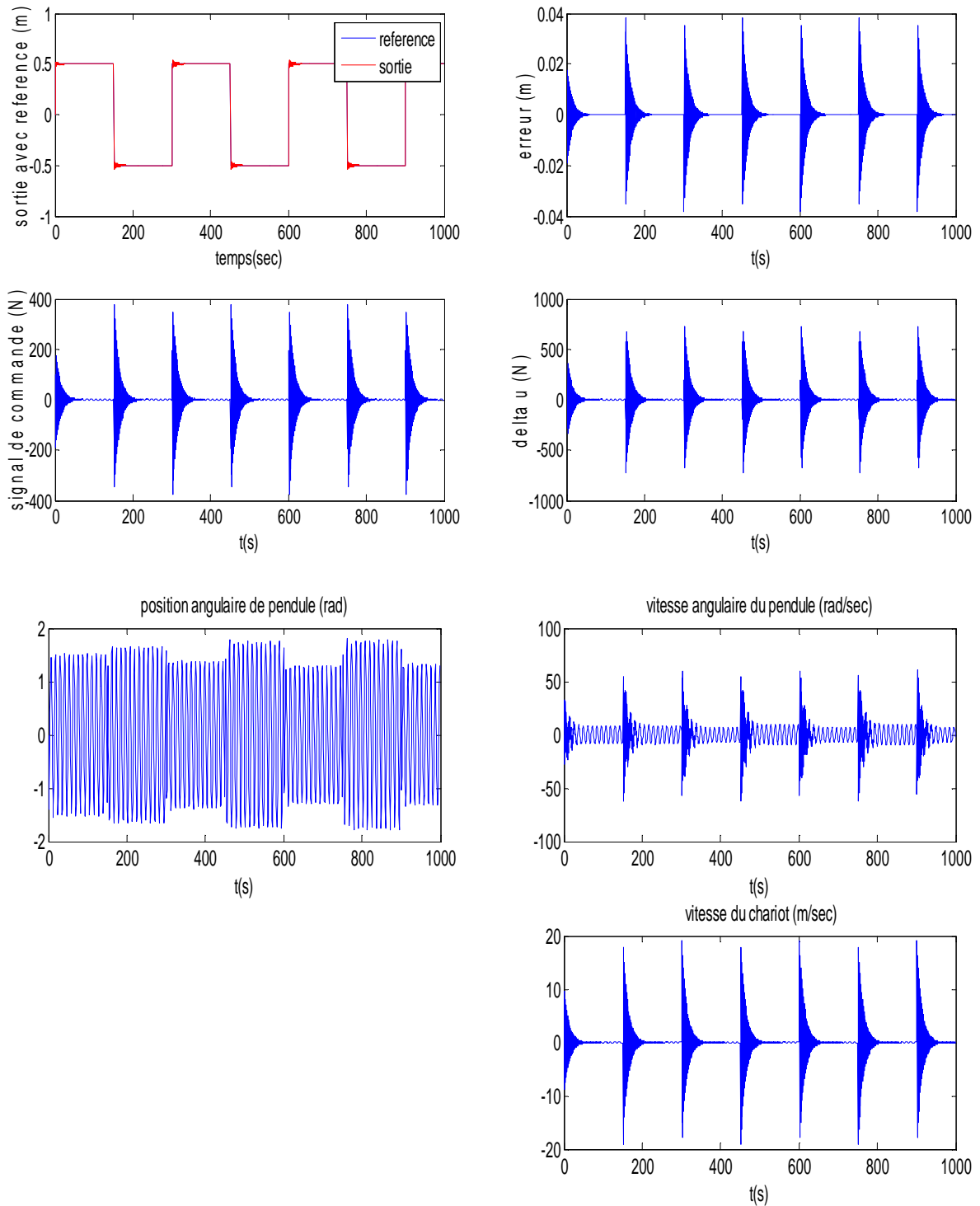


Fig (II.3) : Résultats de simulation pour la commande prédictive sans contraintes avec $N_p=15; N_c=14; R=10^{-30}$

La figure (II.3) montre l'efficacité de la commande prédictive en terme de poursuite de trajectoire souhaitée pour la position x , autrement il est bien clair que l'angle θ prend des grandes valeurs qui les éloigne de la position d'équilibre, ce qui nous amène à mettre en considération les contraintes du système, c'est l'objectif de la commande prédictive avec

contraintes, dont on désire trouver le signal de contrôle optimal qui satisfait le premier objectif de contrôle en présence de contraintes.

Les contraintes sont prises en compte sur les incréments d'entrée, l'entrée, la sortie et les variables de l'espace d'état [Bdi1, 15] tels que : L'angle du pendule, la vitesse du chariot et la vitesse du pendule. A noter ici que la contrainte d'angle est choisie de manière à tenir le pendule en position équilibrée (verticale).

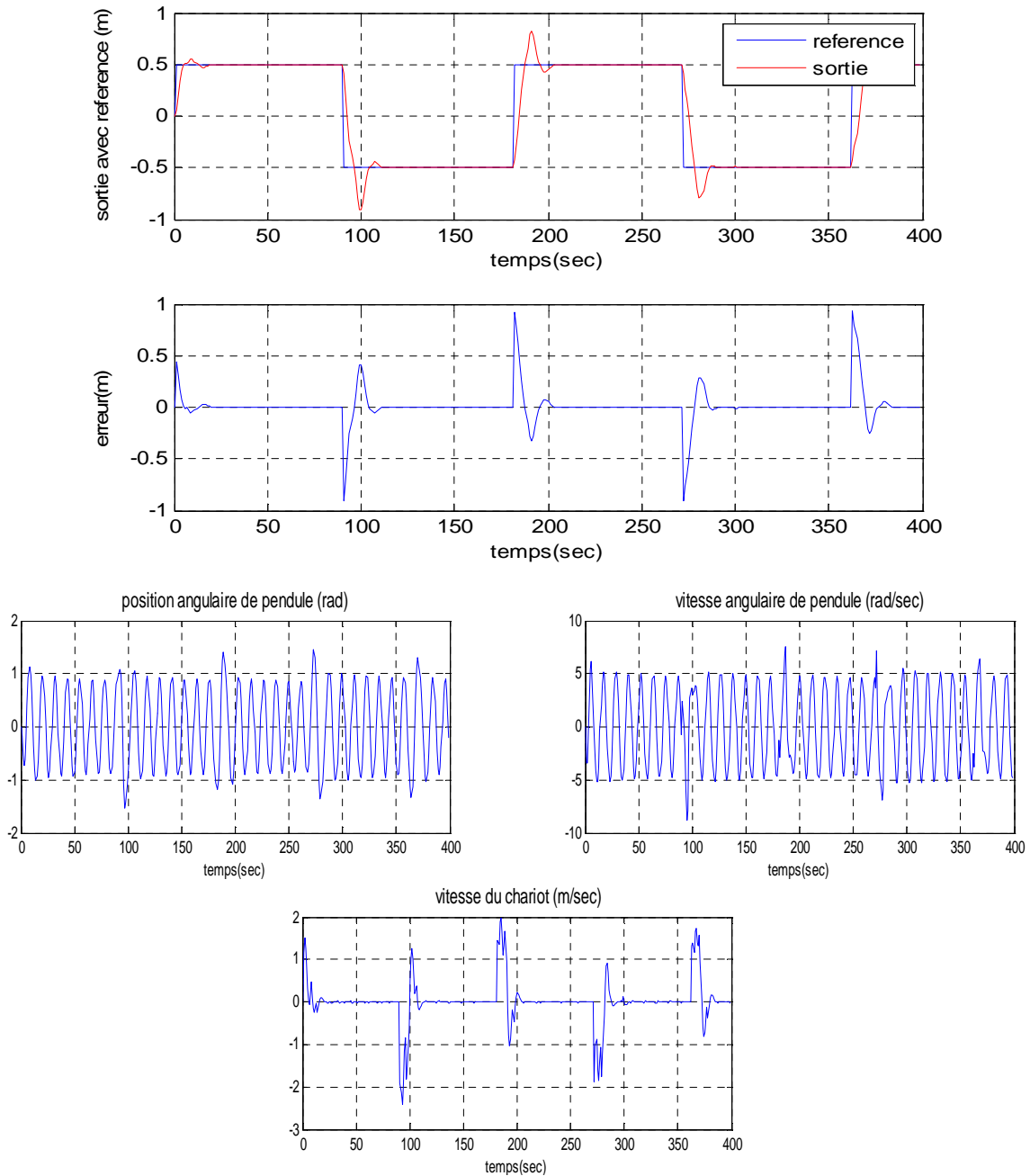


Fig (II.4) : Résultats de simulation de la commande prédictive avec contraintes d'état
 $N_p=6, N_c=4, R=e^{-6}, x_{min}=-x_{max}=[-1;-9;-0.6;-5]$

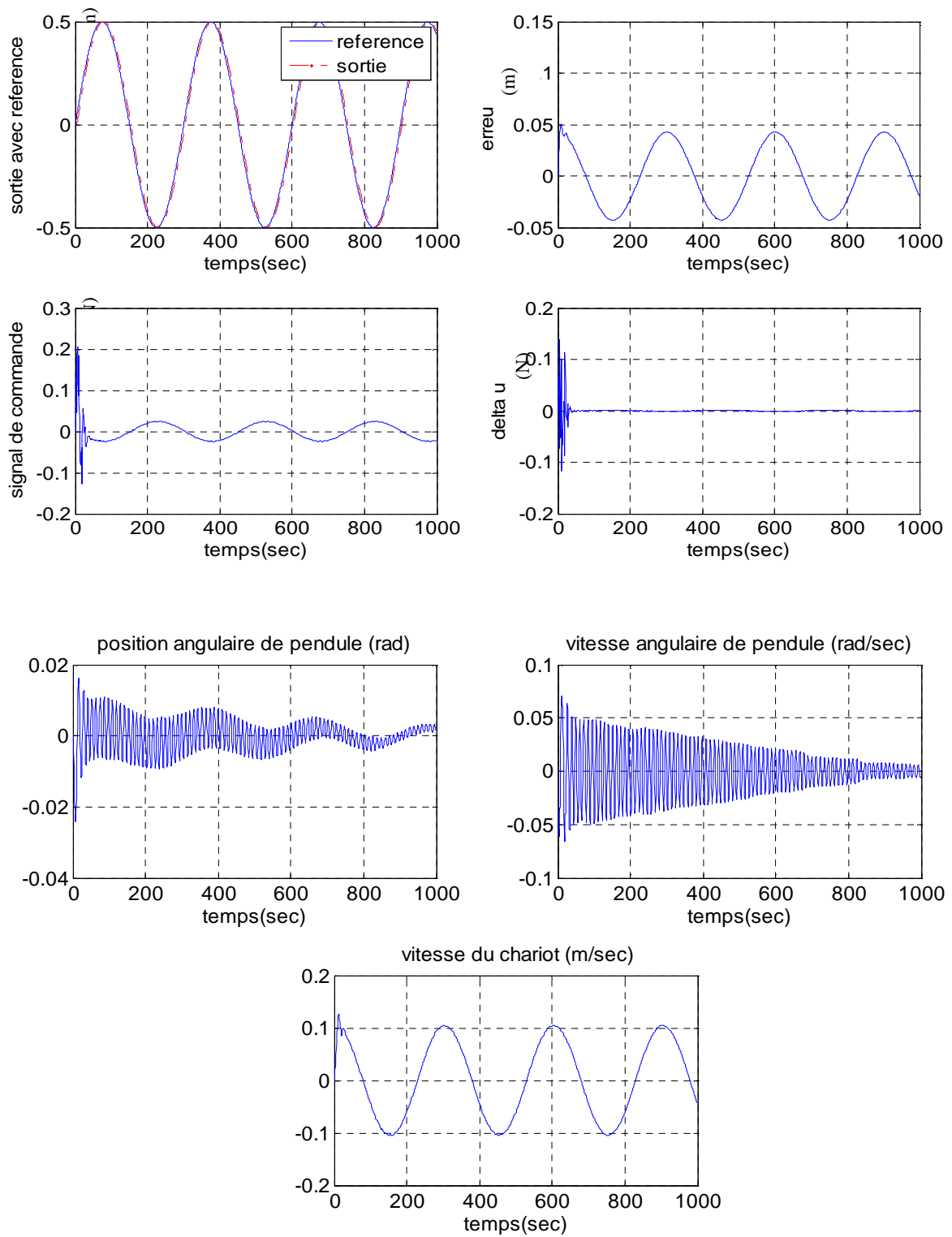


Fig (II.5) : Résultats de simulation de la commande prédictive avec contraintes sur l'entrée, les incréments d'entrée, la sortie et l'état du système $N_p=14, N_c=6, R=1$.

$$\Delta u_{max} = 0.5, \Delta u_{min} = -0.5; u_{max} = 5, u_{min} = -5; y_{min} = -0.5, \\ y_{max} = 0.5; X_{min} = -X_{min} = [-0.05 \quad -0.09 \quad -0.5 \quad -0.5]$$

Les figure (II.4) et (II.5) donnent les résultats d'application de la commande prédictive avec contraintes sur le système chariot avec pendule, où la commande prédictive trouve la solution optimale qui satisfait les contraintes imposées. La loi de commande est trouvée en résolvant le problème d'optimisation sous contrainte tout en minimisant la fonction objectif J (II.11), sous réserve des contraintes données par :

- L'équation (II.29) pour les résultats *Fig(II. 4)* où les contraintes sont imposées sur les variables d'état::

$$[-1;-9;-0.6;-5] \leq [\theta; \dot{\theta}; x; \dot{x}] \leq [1;9;0.6;5]$$

- L'équation (II.33) pour toutes les contraintes *Fig(II. 5)* :

$$\begin{aligned} -0.5 &\leq \Delta u \leq 0.5; \\ -5 &\leq u \leq 0.5; \\ -0.5 &\leq y_{min} \leq 0.5; \\ [-0.05; -0.09; -0.5; -0.5] &\leq [\theta; \dot{\theta}; x; \dot{x}] \leq [0.05; 0.09; 0.5; 0.5]. \end{aligned}$$

Les courbes obtenues montrent clairement l'efficacité du contrôleur prédictif avec contraintes en termes de :

- Poursuite de références où la trajectoire de la position du chariot est proche de la référence.
- Respect de toute les contraintes : d'entrée, des incréments d'entrée, de sortie et des variables d'état où il est très clair à partir des figures que leurs valeurs dans le cas de la commande prédictive avec contraintes restent dans les intervalles limités par les valeur minimales et maximales.
- Maintenir le pendule en position d'équilibre après avoir imposer une contrainte sur la position angulaire de pendule dans les contraintes d'état.

II.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre on a présenté la commande prédictive sous espace d'état avec contraintes où l'idée de base est de traduire les problèmes de contraintes à des inégalités linéaires puis les paramétrer en utilisant le même paramètre vecteur ΔU étant le seul vecteur utilisé dans la conception de la commande prédictive, la solution optimale est trouvée en résolvant un problème d'optimisation quadratique.

Cette loi de commande a été appliquée sur le système d'un chariot avec pendule inversé, vu ses applications intéressantes et sa complexité qui ont fait qu'il soit pris comme une plate forme d'essai et du test des performances et robustesses des loi de commande modernes.

L'objectif de MPC dans cet exemple, consiste à générer une loi de commande (force) qui permet de suivre une trajectoire de déplacement désirée (position du chariot) tout on gardant

le pendule à la position d'équilibre . Les contraintes ont été imposées sur le système tel que les incréments de force, la force, la vitesse du chariot et de pendule.

À travers les résultats de simulation effectuées sur le modèle linéarisé du système, nous pouvons constater que la commande prédictive MPC montre une bonne performance en poursuite de la trajectoire de référence d'une façon qui respecte toutes les contraintes imposées, surtout concernant les contraintes sur l'angle de pendule, où on a supposé que ce dernier est limité par des petites valeurs, ce qui permet de maintenir le pendule à la position d'équilibre.

Chapitre III

III.1.Introduction.....	40
III.2.La commande prédictive non linéaire.....	41
III.2.1.Prédiction de la sortie	42
III.2.2.Développement du signal de référence	43
III.2.3.Commande prédictive non linéaire à un pas	44
III.2.4.Commande prédictive à horizon fini	44
III.3.Commande prédictive non linéaire à structure en cascade	45
III.4.Commande prédictive non linéaire sous contraintes	47
III.4.1.Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée.....	47
III.4.2.Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur les variations d'entrée	48
III.4.3.Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur la sortie	48
III.4.4.Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur les variables d'état	48
III.5.Analyse de stabilité	49
III.6.Robustesse de la commande prédictive non linéaire	50
III.7.Conclusion	50

Chapitre III

Commande prédictive non linéaire avec contraintes

III.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de commande prédictive non linéaire CPN, basée sur la minimisation d'un critère quadratique construit sur la prédiction de l'erreur entre la sortie choisie et la référence, jusqu'à un ordre fixé égal au degré relatif du système non linéaire considéré [Hed2, 00]. Notre objectif est de faire une poursuite asymptotique de trajectoire. Cette méthode, entre autres, permet de traiter le problème de la poursuite de trajectoire sans aucune opération préalable de discrétisation. En effet, le modèle mathématique du système non linéaire est considéré dans sa forme naturelle, autrement dit, dans le domaine continu. La méthode fait appel à des techniques de la géométrie différentielle. Comme énoncé précédemment, le critère quadratique est construit sur l'erreur de prédiction, qui présente la différence entre le vecteur de sortie prédite et le vecteur de référence ce qui justifie le terme commande prédictive. De plus, cette méthode est appliquée à un système non linéaire à temps continu NPCG, d'où l'appellation de commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu.

Ce chapitre s'articule autour de deux axes principaux [Hed2, 00] : La commande prédictive à un pas [Pin, 95] dont laquelle en utilisant le développement de Taylor d'ordre r_i du signal de sortie et de référence, ou r_i est le degré relatif de la $i^{\text{ème}}$ sortie du système. La solution de la minimisation du critère quadratique établit la loi de commande. La deuxième technique est la commande prédictive à horizon fini qui est une extension de la commande GPC continue, développée par Dermirciolglu pour les systèmes linéaires [Dem, 91], où le critère quadratique sera minimisé sur un horizon fini et le problème d'optimisation en ligne sera contourné en utilisant l'approximation de Taylor.

Cette loi de commande est ensuite développée en présence des contraintes sur: l'entrée, les variations d'entrée, la sortie et les variables d'état. Concernant les contraintes, la meilleure solution pour extraire la loi de commande, consiste alors à considérer les contraintes depuis l'étape de synthèse, imposant ainsi leur présence au sein du problème d'optimisation. Cette façon de voir la commande prédictive sous contraintes engendre notamment la difficulté de mise en forme appropriée des contraintes induisant une forme linéaire utilisable par les programmes d'optimisation.

III.2. COMMANDE PREDICTIVE NON LINEAIRE

Soit un système non linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i(t) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où :

- $x \in R^n$: Vecteur d'état ,
- $y \in R^m$: Sortie
- $u \in R^m$: Signal de commande

Les fonctions $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont supposées être réelles et possèdent des dérivées partielles continues et m est le nombre des entrées.

La commande prédictive, consiste à élaborer une loi de commande, à partir de la minimisation d'un critère quadratique basé sur l'erreur de prédiction, dans le but de poursuivre un signal de référence $y_{ref}(t)$ tel que l'erreur entre la sortie et la référence tende asymptotiquement vers zéro.

Pour une meilleure clarté du travail , nous donnons quelques rappels sur les dérivées de Lie, le crochet de Lie. Notre objectif, tout au long de ce chapitre, est de traiter un problème de poursuite asymptotique de trajectoire tout en minimisant une fonction coût définie. Autrement dit, il s'agit de fixer un signal de référence $y_{ref}(t)$ et de faire tendre la sortie $y(t)$ vers $y_{ref}(t)$ en utilisant une loi de commande prédictive.

- Nous utilisons la notation standard des dérivées de Lie. Ainsi, pour une fonction donnée $h(x)$ dans R^n à valeurs réelles et un champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ dans R^n , la dérivée de Lie de $h(x)$ le long de $f(x)$ en $x \in R^n$ est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{III.2})$$

Avec :

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

- Crochet de Lie de f et h :

$$[f, h] = L_f h(x) - L_h f(x) \quad (\text{III.3})$$

- Le vecteur degré relatif du système est le vecteur $r=(r_1, r_2, \dots, r_m)^T$ ou r_j correspond à la première dérivée de y_j faisant apparaître explicitement la commande u dans l'expression [Laf, 96] :

$$y_j^{(r_j)} = L_f^{(r_j)} h_j + \sum_{i=1}^m (L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j) u_i \quad (\text{III.4})$$

III.2.1. Prédiction de la sortie

Le développement en série de Taylor de la sortie y à l'instant h jusqu'au degré relatif r_m est :

$$y(t+h) = \sum_{k=0}^{r_m} \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(t) + R(h^{r_m}) \quad (\text{III.5})$$

Où :

- t Instant présent,
- $t+h$ Instant futur,
- $h>0$ Horizon de prédiction,
- r_i Degré relatif de y_i .

Le terme $R(h^{r_m})$ représente les éléments d'ordre supérieur du développement qui, lorsqu'ils sont négligés, donnent l'équation suivante :

$$y(t+h) \approx \sum_{k=0}^{r_m} \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(t) \quad (\text{III.6})$$

Ou bien :

$$y(t+h) = y(t) + V_y(x, h) + \Lambda(h)W(x)u \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$V_y(x, h) = (v_1(x, h) \quad v_2(x, h) \quad \dots \quad v_m(x, h))^T,$$

- $v_i(x, h) = hL_f h_i(x) + \frac{h^2}{2!} L_f^2 h_i(x) + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} L_f^{r_i} h_i(x)$

$$\Lambda(h) = \text{diag} \left(\frac{h^{r_1}}{r_1!}, \frac{h^{r_2}}{r_2!}, \dots, \frac{h^{r_m}}{r_m!} \right),$$

$$W(x) = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_m)^T.$$

- $w_i(x) = (L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i(x) \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(x))$

III.2.2. Développement du signal de référence

Il en est de même pour la référence, nous supposons, dans cette étude, que la trajectoire de référence $y_{ref}(t)$ est connue. Par analogie au développement de la sortie, nous avons l'expression suivante pour le signal de référence :

$$y_{ref}(t+h) = y_{ref}(t) + d(t,h) \tag{III.8}$$

Où :

$$d(t,h) = (d_1(t,h) \quad d_2(t,h) \quad \dots \quad d_m(t,h))^T$$

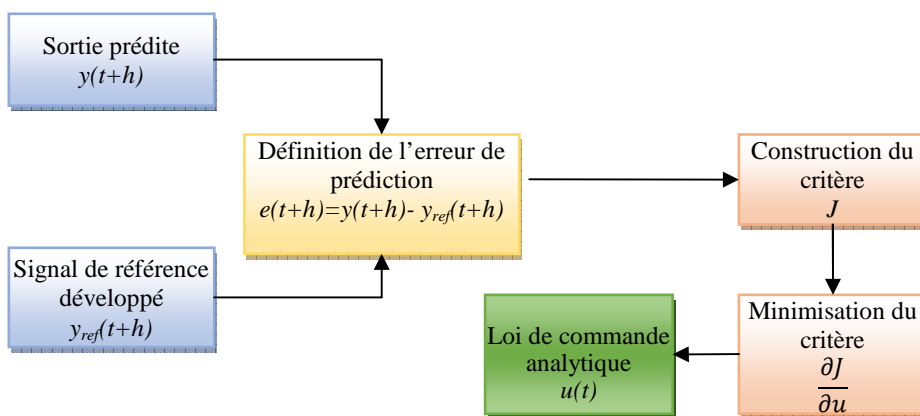
- $d_i(t,h) = h\dot{y}_{refi} + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_{refi} + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!}y_{refi}^{(r_i)}$

Notre but est de trouver une loi de commande telle que, la sortie y poursuive asymptotiquement, pour un horizon de prédiction fixé, le signal de référence y_{ref} , lorsque le temps t tend vers l'infini. Pour atteindre cet objectif, définissons l'erreur e telle que : $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$. Elle tendra vers zéro lorsque la sortie tend vers le signal de référence. Le développement de cette erreur est obtenu à partir des équations (III.7) et (III.8) précédentes. Soit $e(t+h)$ l'erreur de prédiction à l'instant $(t+h)$, définit comme suit :

$$e(t+h) = y(t+h) - y_{ref}(t+h) \tag{III.9}$$

L'élaboration de la loi de la commande NCGPC va se faire dans un but de poursuite asymptotique d'un signal de référence tout en minimisant un critère quadratique construit sur l'erreur de prédiction *Fig(III.1)*. Cependant, cette opération nécessite la vérification des assumptions suivantes, [Chen, 03] et [Chen, 01]

- La dynamique des zéros existe et est asymptotiquement stable,
- Tous les états sont mesurables,
- Le système étudié a un degré relatif bien défini,
- La sortie $y(t)$ et le signal de référence $y_{ref}(t)$ sont suffisamment plusieurs fois continument différentiables par rapport au temps [Nijm, 90].
-



Fig(III.1) : Schéma fonctionnel de l'élaboration de la loi de commande NCGPC

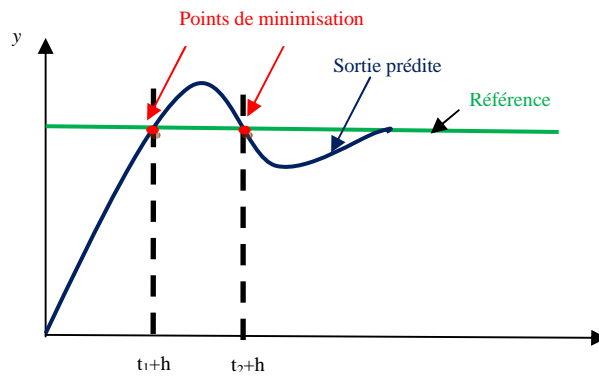
III.2.3. Commande prédictive non linéaire à un pas

Dans ce cas l'objectif de commande est d'exiger de la sortie du système d'atteindre une consigne (bien définie) à l'instant $(t+h)$ voir *Fig.(III.2)* tout en minimisant l'erreur de prédiction. Le critère à minimiser est la fonctionnelle suivante [Hed2, 00] :

$$J_1(y, y_{ref}, R, Q, u) = \frac{1}{2} \|y(t+h) - y_{ref}(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_R^2 \quad (III.10)$$

Où :

- $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice définie positive,
- $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice semi-définie positive.



Fig(III.2) : Principe de la CPN à un pas

La solution optimale est ensuite obtenue par minimisation du critère (III.10) pour le système non linéaire (III.1) par rapport au vecteur de commande :

$$u(t) = -[(\Lambda W)^T Q \Lambda W + R]^{-1} (\Lambda W)^T Q [e(t) + V_y(x, h) - d(t, x)] \quad (III.11)$$

III.2.4. Commande prédictive non linéaire à horizon fini

La commande prédictive à un pas cherche à coïncider la sortie du système avec la consigne aux instants $(t+h)$ seulement, une intégration de l'action intégrale permet de minimiser le critère (III.10) tout le long de l'intervalle $[t, t+h]$ *Fig(III.3)* ce qui permet d'améliorer les performances de cette loi de commande [Hed2, 00].

Le critère est :

$$J_2(y, y_{ref}, Q, R, u) = \frac{1}{2} \int_0^h \|y(t+T) - y_{ref}(t+T)\|_Q^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{hc} \|u(t+T)\|_R^2 dT \quad (III.12)$$

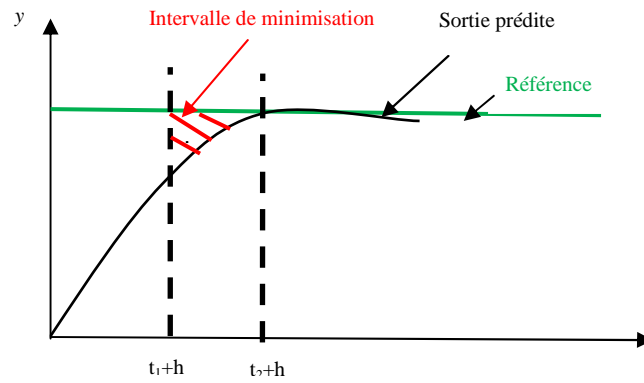


Fig.(III.3) : Principe de la CPN à horizon fini

Où :

- h et h_c sont respectivement les horizons de prédictions de l'erreur de poursuite et de commande.

Le signal de commande est constant le long de l'intervalle $[t, t+T]$

$$u(t + T) \approx u(t) \text{ avec } 0 \leq T \leq h_c \text{ et } h_c \ll h$$

Ainsi, la loi de commande est élaborée à partir de la minimisation du critère (III.12) par rapport à la commande u , d'où :

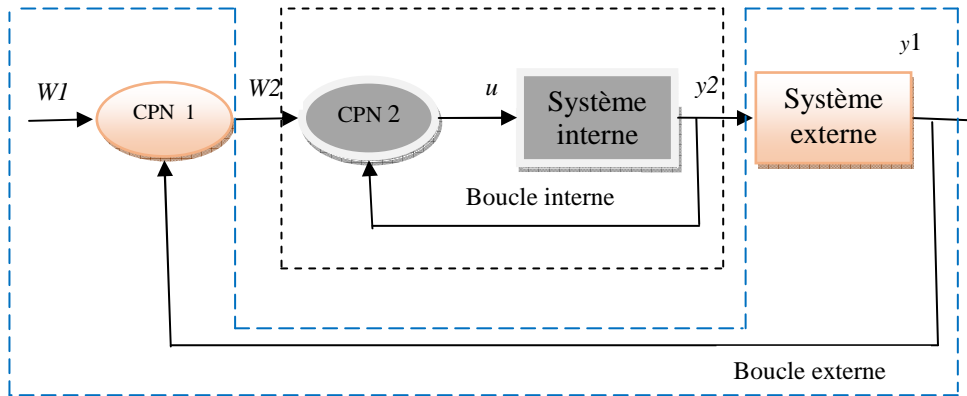
$$u(t) = -[W^T P(h)W + h_c R]^{-1} W^T [\Gamma(h)e(t) + H(x, h) - D(t, h)] \quad (III.13)$$

Où :

- $P(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q \Lambda(T) dT$;
- $\Gamma(h) = \int_0^h \Lambda(T) dT$;
- $H(x, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q V_y(x, T) dT$;
- $D(t, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q d(t, T) dT$.

III.3. COMMANDE PREDICTIVE NON LINEAIRE A STRUCTURE EN CASCADE [Hed1, 05]

Grâce à cette structure, plusieurs variables pourront être commandées en même temps. Pour simplifier la présentation, on n'envisagera ici qu'une structure à deux boucles Fig(III.4) : une boucle externe pour le contrôle de la sortie y_1 et une boucle interne comportant une dynamique plus rapide que la boucle externe pour le contrôle de la sortie y_2 , chaque boucle est corrigée par un algorithme de commande prédictive [Hed, 00], Pour la boucle interne, une loi de commande non linéaire est développée pour la poursuite de trajectoires de la boucle interne par la minimisation du critère de la commande CPN2. Ensuite, une loi de commande prédictive simple, pour la poursuite de la sortie y_1 est conçue pour extraire une loi de commande $W2$ qui présente la consigne de la sortie y_2 .



Fig(III.4) : Structure d'une commande prédictive en cascade

Avec :

- W_1 Consigne du système global;
- W_2 Consigne du système interne;
- u Commande appliquée sur le système;
- y_1 Sortie du système global;
- y_2 Sortie du système interne.

Dans ce cas les fonctions à minimiser sont définies comme suit :

- Les fonctions coût à minimiser pour la boucle interne (CPN2) dans la commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini sont définies respectivement par :

$$J_{11} = \frac{1}{2} \|y_2(t+h) - W_2(t+h)\|_{Q_{11}}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{R_{11}}^2 \quad (\text{III.14})$$

$$J_{21} = \frac{1}{2} \int_0^h \|y_2(t+T) - W_2(t+T)\|_{Q_{21}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|u(t)\|_{R_{21}}^2 dT \quad (\text{III.15})$$

- $Q_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie positive, $R_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie semi positives
- Pour la boucle externe l'objectif est la poursuite de la sortie y_1 avec sa référence désirée W_1 (CPN1). La fonction coût à minimiser est définie respectivement pour les deux techniques, à un pas et à horizon fini comme suit :

$$J_{12} = \frac{1}{2} \|y_1(t+h_E) - W_1(t+h_E)\|_{Q_{12}}^2 + \frac{1}{2} \|W_2(t)\|_{R_{12}}^2 \quad (\text{III.16})$$

$$J_{22} = \frac{1}{2} \int_0^{h_E} \|y_1(t+T) - W_1(t+T)\|_{Q_{22}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|W_2(t)\|_{R_{22}}^2 dT \quad (\text{III.17})$$

- q et r sont des scalaires positifs non nul, et h_E est l'horizon de prédiction de la sortie de la boucle externe.

III.4. COMMANDE PREDICTIVE NON LINEAIRE SOUS CONTRAINTES

De la même manière que la commande prédictive linéaire avec contraintes, une transformation des problèmes de contraintes à des inégalités linéaires en fonction du paramètre de commande u est requise, ce qui permet d'obtenir la de commande en résolvant un problème d'optimisation quadratique.

III.4.1. Contraintes sur l'entrée [Bdi, 14], [Bdi2, 12]

Les contraintes sur l'entrée (I.2) peuvent être exprimées par :

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} -U_{\min} \\ U_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Où :

- I est la matrice d'identité de dimension $m \times m$
- U_{\min} et U_{\max} deux vecteurs qui contiennent respectivement les valeurs minimales u_{\min} et maximales u_{\max} de la commande.

Les différentes méthodologies de la commande CPN permettent d'anticiper la violation des restrictions compte tenu de leur caractère prédictif.

En cas des contraintes sur la commande, les critères d'optimisation $J1$ et $J2$ donnés respectivement par (III.10) et (III.12) peuvent être s écrites sous forme quadratique (II.34) dont la variable $\mathcal{X} = u$ [Bdi, 13] et avec contraintes formulées sous la forme $M\mathcal{X} - \gamma \leq 0$, avec :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} -U_{\min} \\ U_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Les matrices E et F de la fonction coût quadratique (II.34) sont pour :

- La commande prédictive à un pas :

$$E = (\Lambda W)^T Q \Lambda W + R \quad (\text{III.21})$$

$$F = (\Lambda W)^T Q [e(t) + V_y(x, h) - d(t, x)] \quad (\text{III.22})$$

- La commande prédictive à horizon fini :

$$E = W^T P(h) W + h_c R \quad (\text{III.23})$$

$$F = W^T [\Gamma(h) e(t) + H(x, h) - D(t, h)] \quad (\text{III.24})$$

III.4.2. Contraintes sur les variations d'entrée

Dans ce cas on suppose que les variations de la commande sont limitées par :

$$dU_{min} \leq \frac{du}{dt} \leq dU_{max} \quad (III.25)$$

Donc :

$$dU_{min}t + ct1 \leq u \leq dU_{max}t + ct2 \quad (III.26)$$

- dU_{min} et dU_{max} deux vecteurs qui contiennent respectivement les valeurs minimales du_{min} et maximales du_{max} de la variation de commande
- $ct1$ et $ct2$ sont des constantes qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

III.4.3. Contraintes sur la sortie

A partir de l'équation de prédiction (III.7) les contraintes de sortie (I.3) peuvent être exprimées en fonction du signal de commande u par des inégalités linéaires comme suit :

$$(\Lambda(h)W(x))^{-1}(Y_{min} - y(t) - V_y(x, h)) \leq u \leq (\Lambda(h)W(x))^{-1}(Y_{max} - y(t) - V_y(x, h)) \quad (III.27)$$

III.4.4. Contraintes sur les variables d'état

Afin d'évaluer l'état du système (III.1) en fonction du signal de commande u , nous utilisons le développement de Taylor d'ordre r_i qui présente le degré relatif du i^{eme} élément du vecteur d'état x :

$$X(t + h) = X(t) + V_x(x, h) + \Xi(h)Z(x)u \quad (III.28)$$

Où :

$$V_x(x, h) = (v_1(x, h) \quad v_2(x, h) \quad \dots \quad v_n(x, h))^T$$

$$\triangleright v_i(x, h) = hf_i(x) + \frac{h^2}{2!}L_f f_i(x) + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!}L_f^{r_i-1} f_i(x);$$

$$\Xi(h) = \text{diag} \left(\frac{h^{r_1}}{r_1!}, \dots, \frac{h^{r_n}}{r_n!} \right);$$

$$Z(x) = (Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_n)^T.$$

$$\triangleright Z_i(x) = (L_{g1}L_f^{r_i-2} f_i, \dots, L_{gm}L_f^{r_i-2} f_i) \quad \text{pour } i=1, \dots, n$$

De la même manière, que les contraintes de sortie, les contraintes d'état (I.4) peuvent être données sous forme linéaire en fonction de la commande u , à partir de l'équation (III.28) par :

$$(\exists(h)Z(x))^{-1}(X_{min} - X(t) - V_x(x, h)) \leq u \leq (\exists(h)Z(x))^{-1}(X_{max} - X(t) - V_x(x, h)) \quad (\text{III.29})$$

Une fois que les contraintes imposées sont décrites sous forme d'équations linéaires en fonction de la même variable de commande, le problème est translaté à un simple critère quadratique avec contraintes.

III.5. ANALYSE DE STABILITE

Si on pose que on a pas de pénalité sur la commande ($R=0$)
Pour le cas commande prédictive non linéaire à un pas, l'équation de la loi de commande, (III.11) est :

$$u(t) = -(\Lambda W)^{-1}[e(t) + V_y(x, h) - d(t, x)] \quad (\text{III.30})$$

En remplace (III.30) dans (III.7), la i^{eme} sortie s'écrit :

$$y_i^{r_i} = L_f^{r_i} h_i - \frac{r_i!}{h^{r_i}} [e(t) + V_y(x, h) - d(t, x)] \quad (\text{III.31})$$

On remplaçant $d(t, x)$ et $V_y(x, h)$ par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{h^{r_i}}{r_i!} e_i^{r_i} + \frac{h^{r_i-1}}{(r_i-1)!} e_i^{r_i-1} + \dots + \frac{h^2}{2!} \ddot{e}_i + h\dot{e}_i + e_i = 0 \quad (\text{III.32})$$

D'après l'équation (III.32) , la loi de stabilité de la commande prédictive à un pas est donnée par le théorème suivant :

Théorème A [Pin, 95]

La loi de commande prédictive non linéaire calculée à partir du critère (III.10), linéarise et découple le système non linéaire (III.1) et permet une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence pour un degré relatif inférieur ou égal à quatre et pour $h>0$ et une matrice Q définie positive.

On peut vérifier que l'équation caractéristique (III.32) est stable pour $r_i \leq 4$ (par le critère de Routh), ce qui prouve le théorème A.

De la même manière que la commande à un pas, la loi de commande dans le cas de la commande prédictive à horizon fini, sans pondération ($R=0$) est donnée par :

$$u(t) = -W^{-1}P(h)^{-1}[\Gamma(h)e(t) + H(x, h) - D(t, h)] \quad (\text{III.33})$$

La i^{eme} sortie (On remplaçant (III.33) dans (III.7)) est :

$$y_i^{r_i} = L_f^{r_i} h_i - \frac{(2r_i+1)(r_i!)^2}{h^{(2r_i+1)}} \left[\frac{h^{r_i+1}}{(r_i+1)r_i!} e_i + \frac{h^{r_i+2}}{(r_i+2)r_i!} \ddot{e}_i + \dots + \frac{h^{2r_i}}{2r_i r_i! (r_i-1)!} e_i^{r_i-1} - \frac{h^{2r_i+1}}{(2r_i+1)(r_i!)^2} \mathcal{Y}_{ref}^{(r_i)} + \frac{h^{2r_i+1}}{(2r_i+1)(r_i!)^2} L_f^{r_i} h_i \right] \quad (\text{III.34})$$

et la dynamique de poursuite est :

$$\frac{(r_i+1)h^{r_i}}{(2r_i+1)r_i!} e_i^{r_i} + \frac{(r_i+1)h^{r_i-1}}{2r_i(r_i-1)!} e_i^{(r_i-1)} + \dots \dots \frac{(r_i+1)h}{(r_i+2)} e_i^{(1)} + e_i = 0 \quad (\text{III.35})$$

Théorème B [Pin, 95]

Soit h un réel positive et Q une matrice définie positive. La loi de commande prédictive non linéaire calculée à partir du critère (III.12), linéarise et découple le système non linéaire (III.1) et permet une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence si seulement si le degré relatif inférieur ou égal à cinq.

Ce théorème peut être vérifié en analysant la dynamique de poursuite (III.35), où une simple utilisation du critère de Routh montre que la stabilité de cette dernière est garantie pour $r_i \leq 5$.

III.6. ROBUSTESSE DE LA COMMANDE PREDICTIVE NON LINEAIRE

Les lois de la commande prédictive non linéaire développées dans ce chapitre, par construction même, robustes par rapport à la stabilité du système linéaire bouclé résultant. Cette robustesse est liée au degré relatif du système non linéaire considéré et à l'horizon de prédiction fixé par l'utilisateur [Dab, 10].

III.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, la commande prédictive non linéaire à temps continu a été présentée. Une propriété importante de cette technique est que l'optimisation est faite en ligne, puisque la loi de commande pour la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire est calculée une fois pour toute à partir de la minimisation du critère quadratique construit de l'erreur de prédiction entre le signal de référence et la sortie du système, ce qui fait en ligne, à noter ici que le développement de Taylor de a a été utilisée pour donner l'erreur de poursuite future $e(t+h)$. Aussi une autre propriété de cette technique de commande pour la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire est qu'en boucle fermée la stabilité est garantie pour les systèmes non linéaires de degré relatif inférieur ou égal à quatre. Deux types de commande non linéaire ont été présentés: la commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini. Ces techniques ont été ensuite développées en présence des contraintes où l'idée de commande dans ce cas est de transformer le problème avec contrainte à des égalités linéaires en fonction du même vecteur, celui de la commande comme étant le seul inconnu dans le critère quadratique.

Le chapitre suivant présente des applications de la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur la chaise roulante, la machine asynchrone et le bras manipulateur.

Chapitre IV

IV.1.Introduction	52
IV.2.Commande prédictive avec contraintes de la chaise roulante	52
IV.2.1.Modèle de la chaise roulante.....	53
IV.2.2.Application de la loi de Commande prédictive non linéaire avec contraintes à la chaise roulante électrique.....	56
IV.3.Commande prédictive avec contraintes de la MAS.....	62
IV.3.1.Modèle de la machine asynchrone.....	63
IV.3.2.Commande prédictive non linéaire à structure en cascade de la MAS.....	66
IV.3.3.Commande prédictive non linéaire avec contraintes de la MAS.....	70
IV.4.Commande prédictive avec contraintes du bras manipulateur.....	74
IV.4.1.Commande prédictive par modèle dynamique.....	75
IV.4.2.Commande prédictive non linéaire avec contraintes du bras manipulateur à deux degrés.....	76
IV.5.Conclusion.....	82

Chapitre IV

Applications

IV. 1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré aux applications des lois de la commande prédictive non linéaire avec contraintes, développées dans cette thèse. Les applications sont : La chaise roulante, la machine asynchrone et le bras manipulateur.

La première application a eu pour objectif le contrôle de la vitesse linéaire et de la position angulaire de la chaise roulante électrique avec contraintes sur l'entrée et la sortie. Nous abordons, dans cette application, une étude comparative entre les deux techniques mentionnées dans le chapitre passé (La commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini). Concernant la commande prédictive non linéaire à structure en cascade avec contrainte, la machine asynchrone est choisie. L'objectif est le contrôle du flux rotorique, couple électromagnétique et la vitesse mécanique, en présence des contraintes sur les tensions de commande. La dernière application est consacrée à l'application de la commande prédictive non linéaire avec contraintes au bras manipulateur, pour le contrôle des positions articulaires, en présence des contraintes sur le couple d'entrée et ses variations.

Une étude comparative entre la commande prédictive non linéaire sans contraintes et la commande prédictive avec contraintes est donnée pour chaque application.

IV. 2. COMMANDE PREDICTIVE AVEC CONTRAINTES DE LA CHAISE ROULANTE

Comme aide à la mobilité, les fauteuils roulants électriques sont fréquemment utilisés pour fournir aux personnes à mobilité réduite plus d'indépendance pour accéder à l'école, le travail et la communauté environnements.

Cependant la commande d'un tel système nécessite un niveau significatif de compétences, attention, jugement et de comportement approprié. L'enquête [Feh, 00] montre que près de la moitié des 200 participants ont été trouvés incapable de contrôler un fauteuil roulant

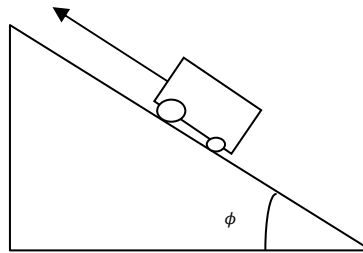
motorisé. En outre, autour de 85 000 accidents graves en fauteuil roulant sont survenus, et devrait tendance à augmenter [Coo, 06]. Afin d'adapter les utilisateurs de fauteuil roulant avec le confort et la sécurité, beaucoup de progrès ont été menées dans les dernières décennies tels que la commande par mode glissant, la commande adaptative, contrôle optimal et la commande prédictive.

Pour cette application, la loi de la commande prédictive non linéaire en présence de contraintes sur l'entrée et la sortie est appliquée pour contrôler la position angulaire et la vitesse linéaire d'un système de fauteuil roulant électrique [Dab, 10], que ce soit sur une pente, ou sur une surface plane tout en respectant les valeurs limitées d'amplitude des couples, la vitesse linéaire et la position angulaire.

IV.2.1. Modèle de la chaise roulante

Pour les besoins de notre étude, notre prototype réel est une chaise roulante électrique équipée de deux roues motrices indépendantes à l'arrière; chacune d'elle est pilotée par un moteur à courant continu, et de deux roues folles à l'avant [Dab, 10]. Les deux moteurs de la chaise sont identiques afin de lui assurer une trajectoire rectiligne, lorsqu'ils sont soumis à un couple identique, [Ony, 09].

Supposant que la chaise se déplaçant sur une pente donnée Fig (IV.1).



Fig(IV.1) : Position de la chaise roulante électrique sur une pente

Avec :

- x_g, y_g et z_g : Position du centre de gravité (CDG) de la chaise dans le repère inertiel (o, x, y, z) Fig(IV.2),
- \dot{x}_g, \dot{y}_g et \dot{z}_g : Vitesse du CDG de la chaise dans (o, x, y, z) ,
- θ et $\dot{\theta}$ Position et vitesse angulaires de chaise dans (o, x, y, z) ,
- v Vitesse linéaire,
- a, b, r Voir Fig(IV.2)
- M_c : Masse totale de la personne et de la chaise ($M_p + M_\omega$),
- I_z : Moment d'inertie de la chaise par rapport à l'axe z ,
- l_c Distance entre l'axe des roues arrières et le CDG de la chaise.
- ϕ est l'angle d'inclinaison de la pente, voir Fig (IV.1)

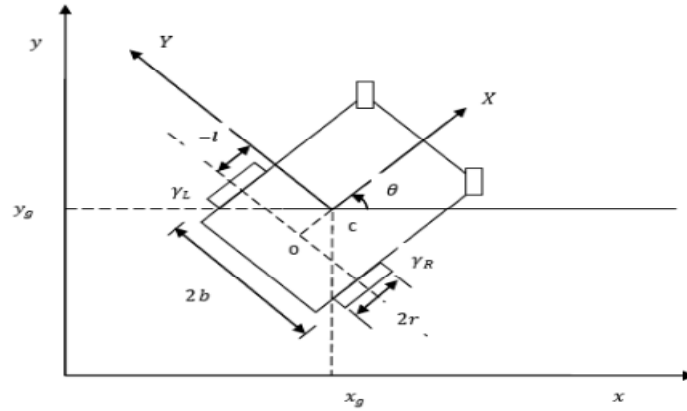


Fig (IV. 2) : Chaise roulante électrique dans le repère inertiel [Dab, 10].

Le modèle d'une chaise roulante sur une pente peut être donné par :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F_{qr} \quad (\text{IV.1})$$

Où :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = E(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (\text{IV.2})$$

La matrice $M(q)$ est la matrice d'inertie. Elle est symétrique, définie positive et est donnée par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_c & 0 & 0 & M_c l_c \cos\phi \sin\theta \\ 0 & M_c & 0 & -M_c l_c \cos\phi \cos\theta \\ 0 & 0 & M_c & 0 \\ M_c l_c \cos\phi \sin\theta & -M_c l_c \cos\phi \cos\theta & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

La matrice $V(q, \dot{q})$ est celle des forces centripètes et de Coriolis. Elle est telle que :

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M_c l_c \dot{\theta} \cos\phi \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & M_c l_c \dot{\theta} \cos\phi \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de forces gravitationnelles $G(q)$ est tel que :

$$G(q) = \begin{bmatrix} M_c g \sin\phi \cos\theta \\ M_c g \sin\phi \sin\theta \\ 0 \\ M_c g \sin\phi (y_g \cos\theta - x_g \sin\theta) \end{bmatrix}$$

Avec :

- λ is the vector of Lagrange multipliers.

$$\bullet \quad E(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta}{a} & \frac{\cos\theta}{a} \\ \frac{\sin\theta}{a} & \frac{\sin\theta}{a} \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & \frac{-b}{a} \end{bmatrix};$$

$$\bullet \quad A(q) = \begin{bmatrix} -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & \sin\phi & -l \\ \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \end{bmatrix};$$

- τ est le vecteur d'entrée des forces :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$$

- τ_R et τ_L sont respectivement les couples des roues droite et gauche.

De plus l'équation de la cinétique de la chaise roulante est donnée par :

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

$$s(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -l_c \cos\phi \sin\theta \\ \sin\theta & l_c \cos\phi \cos\theta \\ 0 & l_c \sin\phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- η est le vecteur des vitesses linéaire v et angulaire ω , $\eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$

La dérivation de (IV.3) par rapport au temps donne :

$$\ddot{q} = \dot{s}(q)\eta + s(q)\dot{\eta} \quad (\text{IV.4})$$

Où :

$$\dot{s}(q) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}l_c \cos\phi \cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta & \dot{\theta}l_c \cos\phi \sin\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remplaçons chacune des équations (IV.4) et (IV.3) par son expression dans l'équation (IV.2). Après simplifications, il vient le système non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\sin\phi \\ \frac{gM_c \sin\phi (y_g \cos\theta - x_g \sin\theta)}{M_c l_c^2 \cos^2\phi - I_z} \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{M_c r} & \frac{1}{M_c r} \\ \frac{b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos^2\phi)} & \frac{-b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos^2\phi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Supposons que le vecteur d'état $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ est choisi comme suit $x = (v \ \omega \ \theta)^T$

et celui de commande $u = \begin{pmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{pmatrix}$, l'espace d'état de notre système est peut être donc donné par :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{g M_c \sin \phi (y_g \cos x_3 - x_g \sin x_3)}{M_c l_c^2 \cos 2\phi - I_z} \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{M_c r} & \frac{1}{M_c r} \\ \frac{b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos 2\phi)} & \frac{-b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos 2\phi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \quad (\text{IV.6})$$

IV.2.2. Application de la loi de commande prédictive non linéaire avec contraintes à la chaise roulante

On désire appliquer la loi de commande prédictive à la chaise roulante électrique pour résoudre le problème de poursuite optimale des trajectoires de référence. On désiré dans ce cas que la chaise suit une trajectoire bien définie par le contrôle de la vitesse linéaire et la position angulaire, qui sont choisie comme variables de sortie. Cependant, le modèle de la chaise prend la forme de la représentation non linéaire (III.1), avec :

$$f(x) = \begin{pmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{g M_c \sin \phi (y_g \cos x_3 - x_g \sin x_3)}{M_c l_c^2 \cos 2\phi - I_z} \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad g(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{M_c r} & \frac{1}{M_c r} \\ \frac{b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos 2\phi)} & \frac{-b}{r(I_z - M_c l_c^2 \cos 2\phi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}$$

Le développement de Taylor des signaux de sortie de la chaise roulante, d'ordre $r_1=1$ pour la sortie y_1 et $r_2=2$ pour la sortie y_2 , est donné sous forme compact (III.7), et l'erreur est :

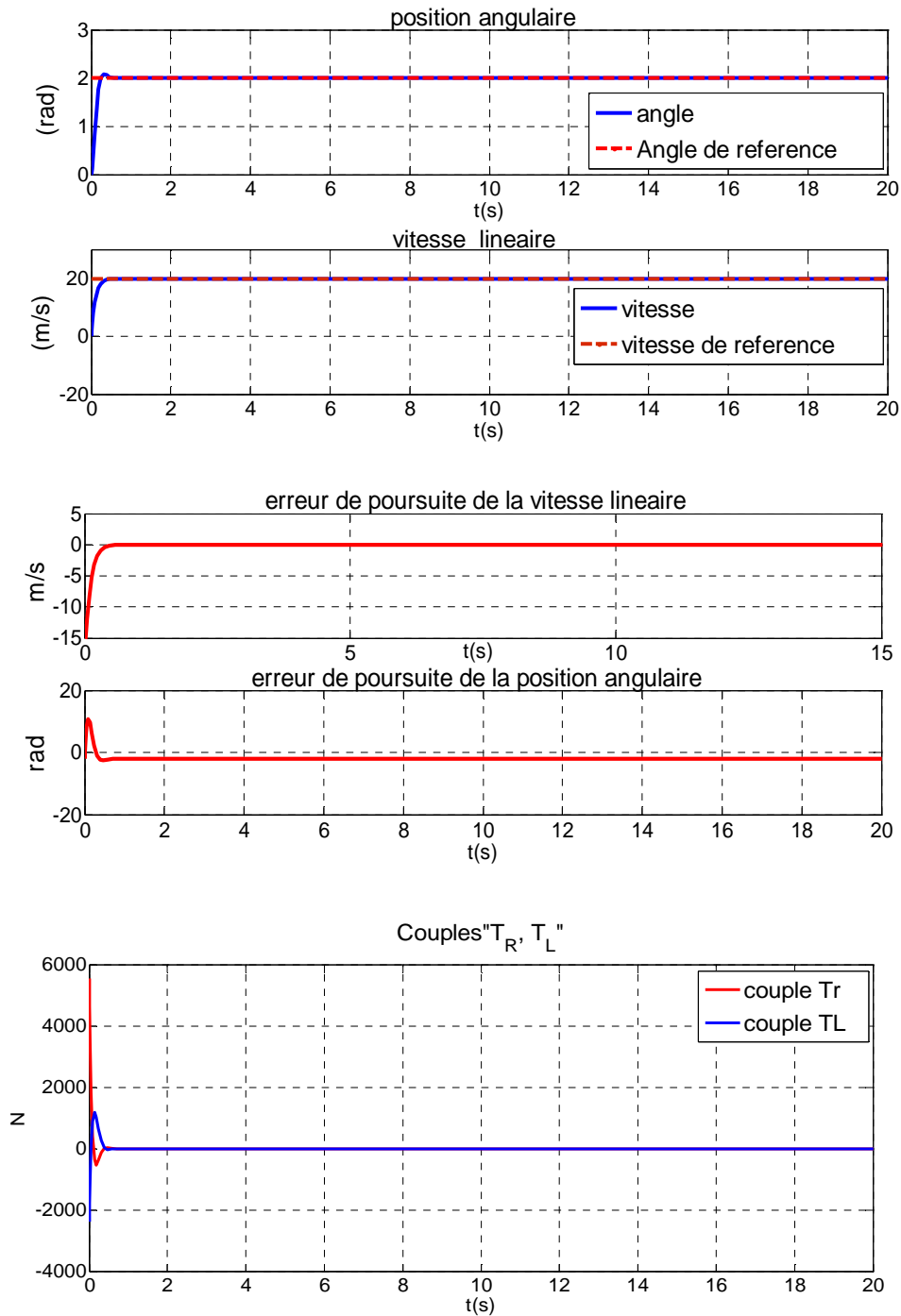
$$e(t+h) = e(t) + V_y(x, h) - d(t, h) + \Lambda(h)W(x)u \quad (\text{IV.7})$$

Où :

- $\Lambda(h) = \begin{vmatrix} h & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{2} \end{vmatrix};$
- $W(x) = \begin{vmatrix} L_{g1}L_f h_1 & L_{g2}L_f h_1 \\ L_{g1}L_f h_2 & L_{g2}L_f h_2 \end{vmatrix};$
- $V_y(x, t) = \begin{vmatrix} hL_f h_1 \\ hL_f h_2 + \frac{h^2}{2}L_f^2 h_2 \end{vmatrix};$
- $d(t, h) = \begin{vmatrix} h\ddot{y}_{ref1} \\ h\ddot{y}_{ref2} + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_{ref2} \end{vmatrix}.$

Les constantes du modèle dynamique de la chaise roulante ont les valeurs suivantes

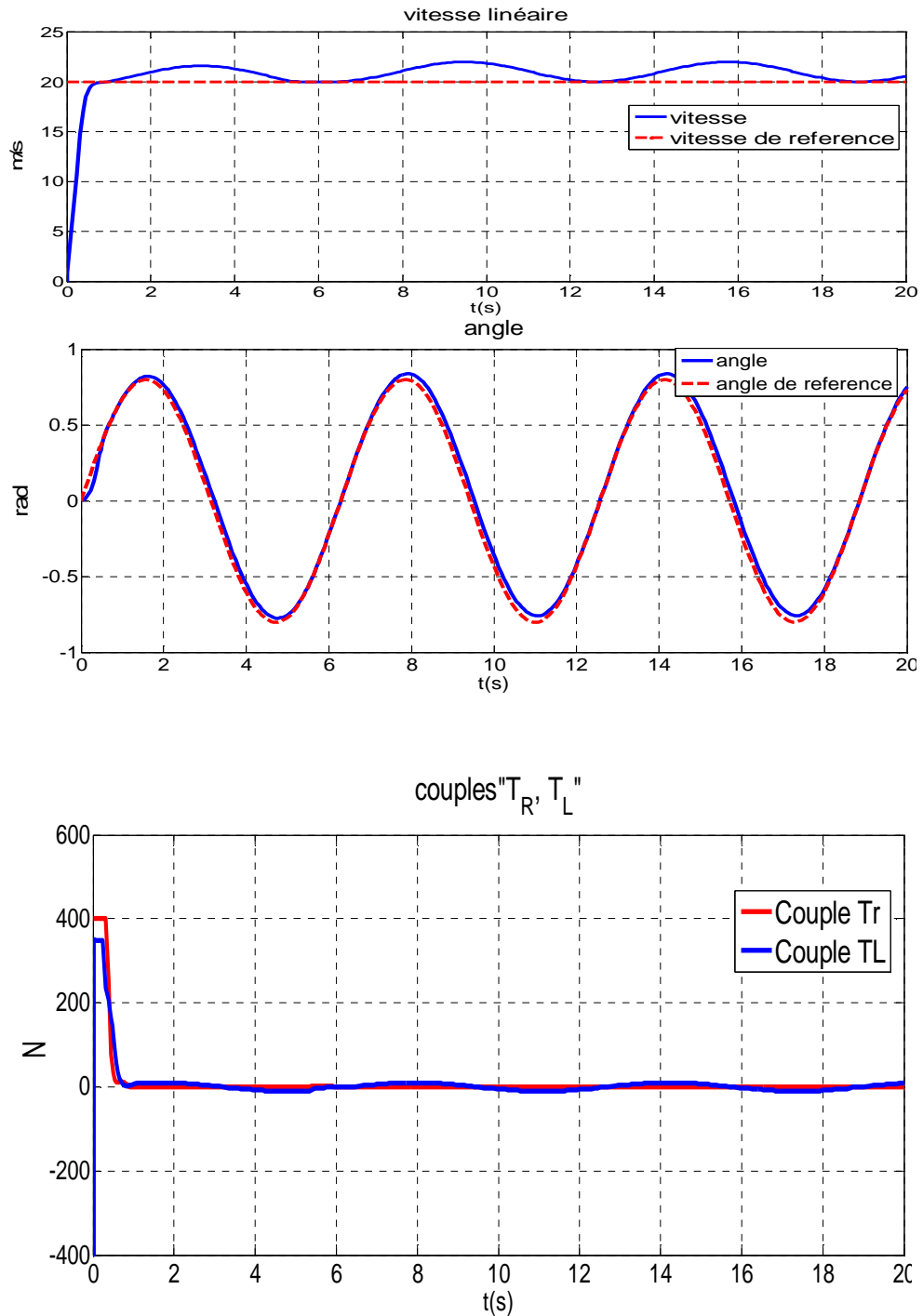
$$b = 0.35m, l = 0.25m, a = 0.2m, M = 80kg, I_z = 39.733kgm^2$$



Fig(IV.3) Commande prédictive à un pas sans contraintes sur un plat
 $h=0.1; R1=0.000001 * I2; Q1=1000000 * I2$

Dans la Fig (IV. 3), la commande prédictive non linéaire est appliquée au système chaise roulante afin de contrôler la vitesse linéaire et la position angulaire. Il apparaît que le comportement de la position angulaire de la chaise est très proche de la référence de la position angulaire, il apparaît également que la vitesse linéaire correspond à la trajectoire de référence de vitesse .

Mais dans ce cas, le couple appliqué prend des valeurs extrêmement grandes Fig(IV.3.c) qui peut représenter un véritable dommage pour la structure du fauteuil roulant et la sécurité d'utilisateur.



Fig(IV.4) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée sur un plat
 $u_{max}=[\tau_{Rmax}, \tau_{Lmax}] = [400;350]$; $u_{min}=[\tau_{Rmin}, \tau_{Lmin}] = [0;-400]$;
 $h=0.1$; $R1=0.000001*I2$; $Q1=1000000*I2$

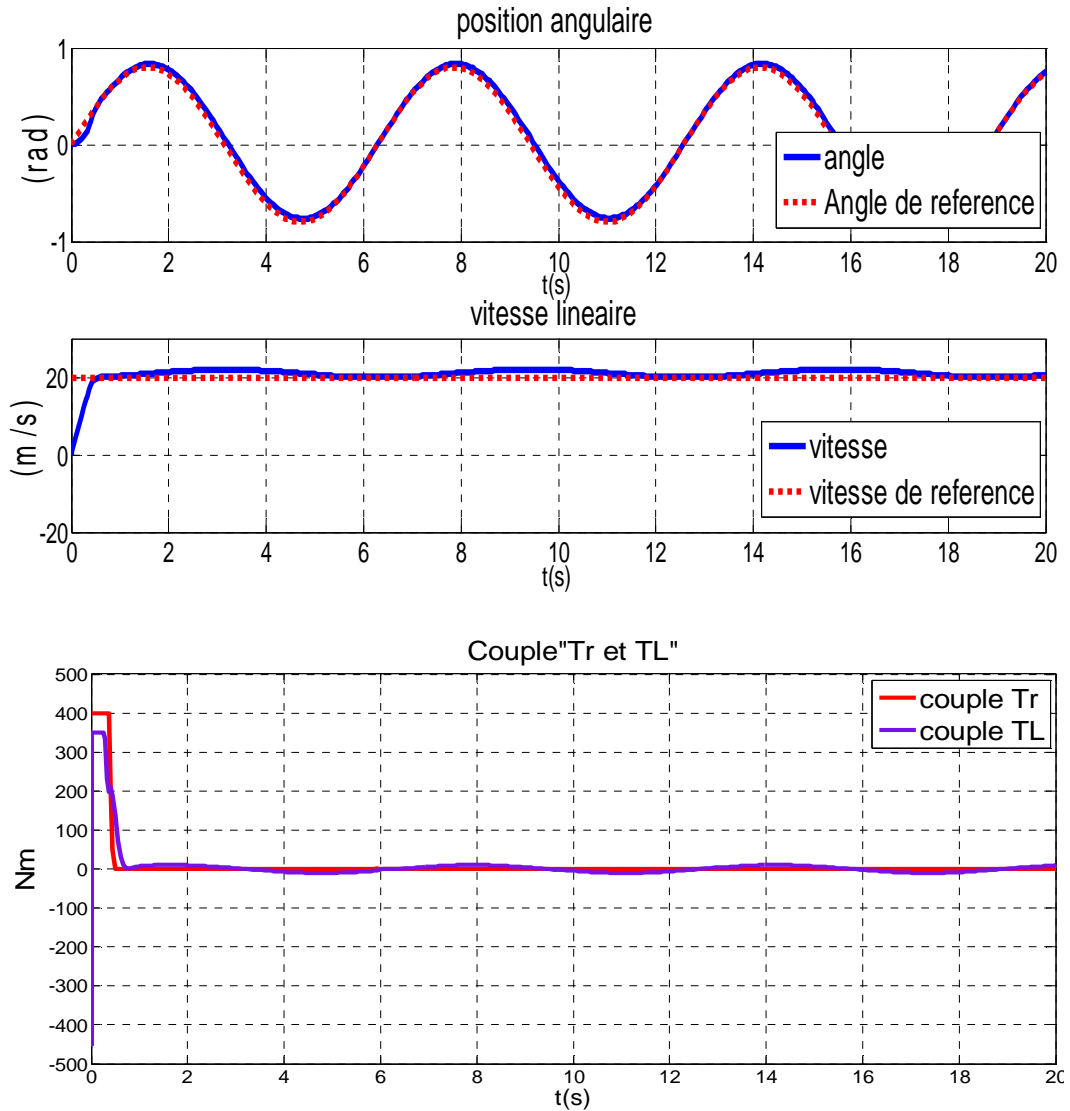


Fig (IV.5) : Commande prédictive à horizon fini avec contraintes sur l'entrée sur un plat

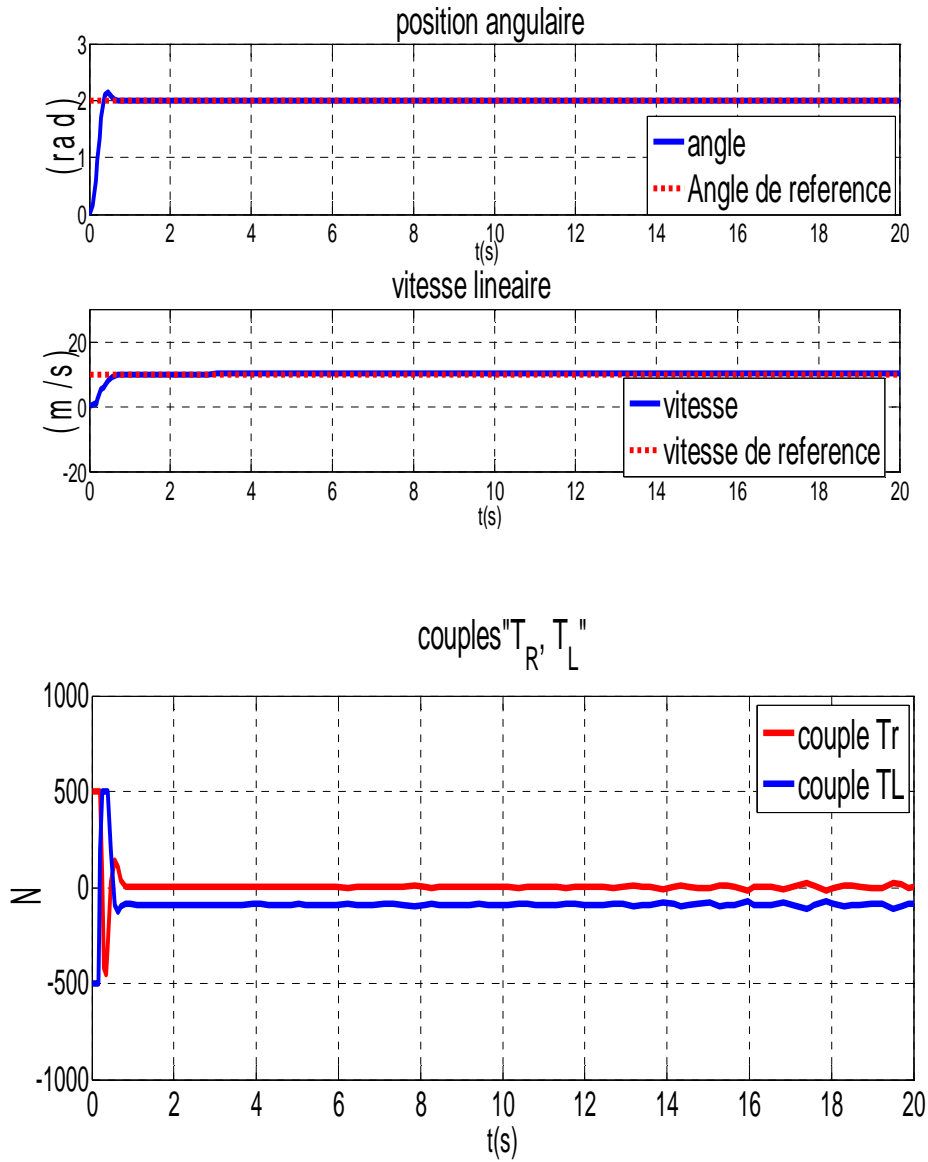
$$u_{max} = [\tau_{Rmax}, \tau_{Lmax}] = [400; 350]; u_{min} = [\tau_{Rmin}, \tau_{Lmin}] = [0; -400];$$

$$h=0.1; hc=0.0001*h; R=0.000001*I2; Q=1000000*I2;$$

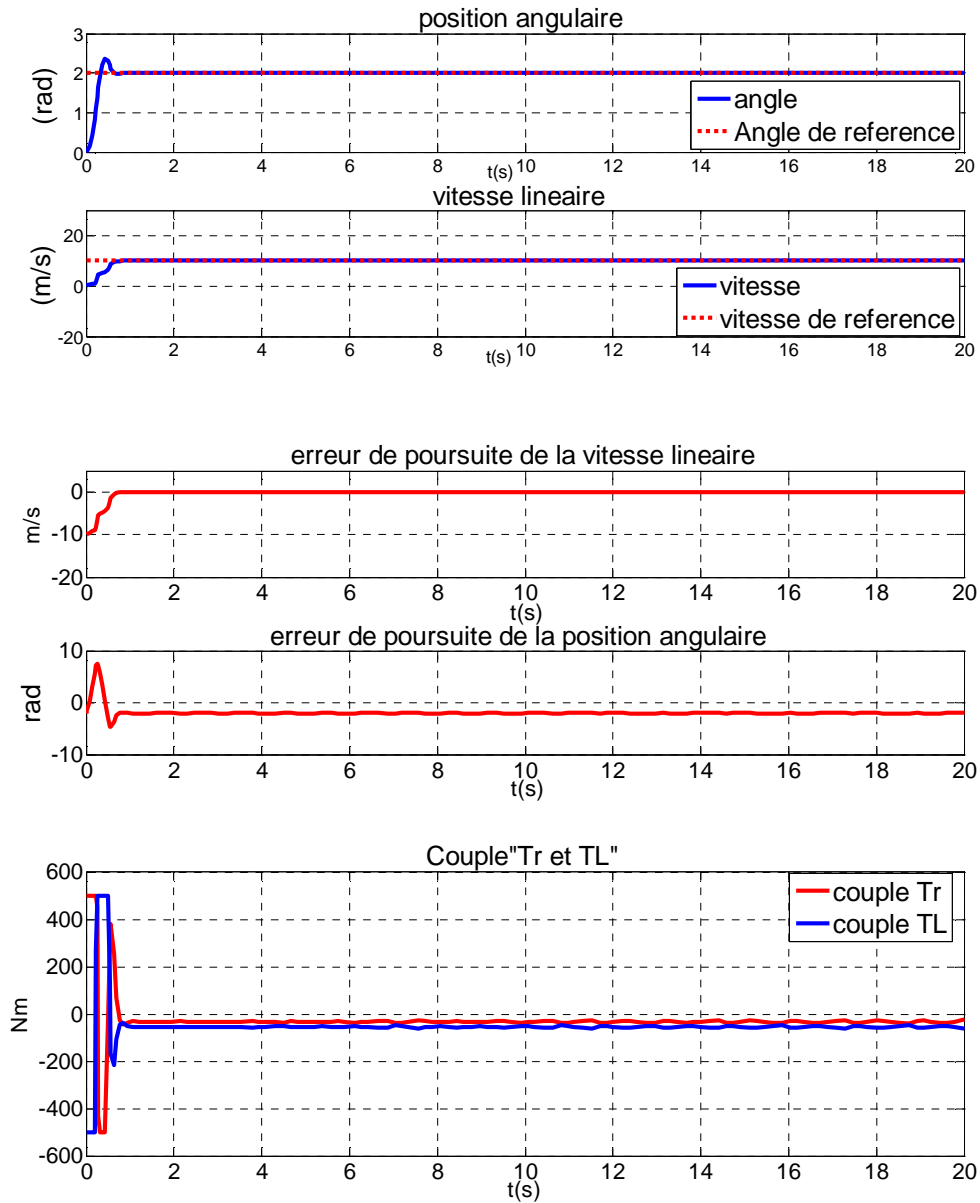
Les Figures Fig(IV.4) et Fig(IV.5) illustrent les résultats obtenus par l'application de la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée, sur une chaise roulante, où on a supposé que les couples sont limités par des valeurs max et min: $0 \leq \tau_R \leq 400$; $-400 \leq \tau_L \leq 350$.

Les deux techniques ont données une bonne performance de poursuite pour les deux signaux de sortie: vitesse linéaire et position, de plus la différence entre les deux techniques est clairement remarquable à partir des courbes de poursuite, spécialement celles de la vitesse linéaire, où les graphes de sortie coïncident. On a bien constaté que la commande prédictive à horizon fini donne des meilleurs performances que celles de la commande prédictive à un pas, ceci est justifié par la présence de l'action intégrale dans le critère de commande prédictive à horizon fini. De plus, les graphes des couples obtenus montrent

clairement que les valeurs de ces derniers restent toujours, le long de trajectoire, dans l'intervalle limité par une valeur maximale et minimale.



Fig(IV.6) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée, sur une pente $\phi = 10^\circ$
 $u_{max}=[\tau_{Rmax}, \tau_{Lmax}] = [500;500]$; $u_{min}=[\tau_{Rmin}, \tau_{Lmin}]= [-500;-500]$;
 $h=0.1$; $R1=0.000001*I2$; $Q1=1000000*I2$



Fig(IV.7) : Commande prédictive à horizon fini avec contraintes sur l'entrée, sur une pente $\phi = 10^\circ$

$$u_{max} = [\tau_{Rmax}, \tau_{Lmax}] = [500; 500]; u_{min} = [\tau_{Rmin}, \tau_{Lmin}] = [-500; -500];$$

$$h = 0.1; hc = 0.0001 * h; R = 0.000001 * I_2; Q = 1000000 * I_2;$$

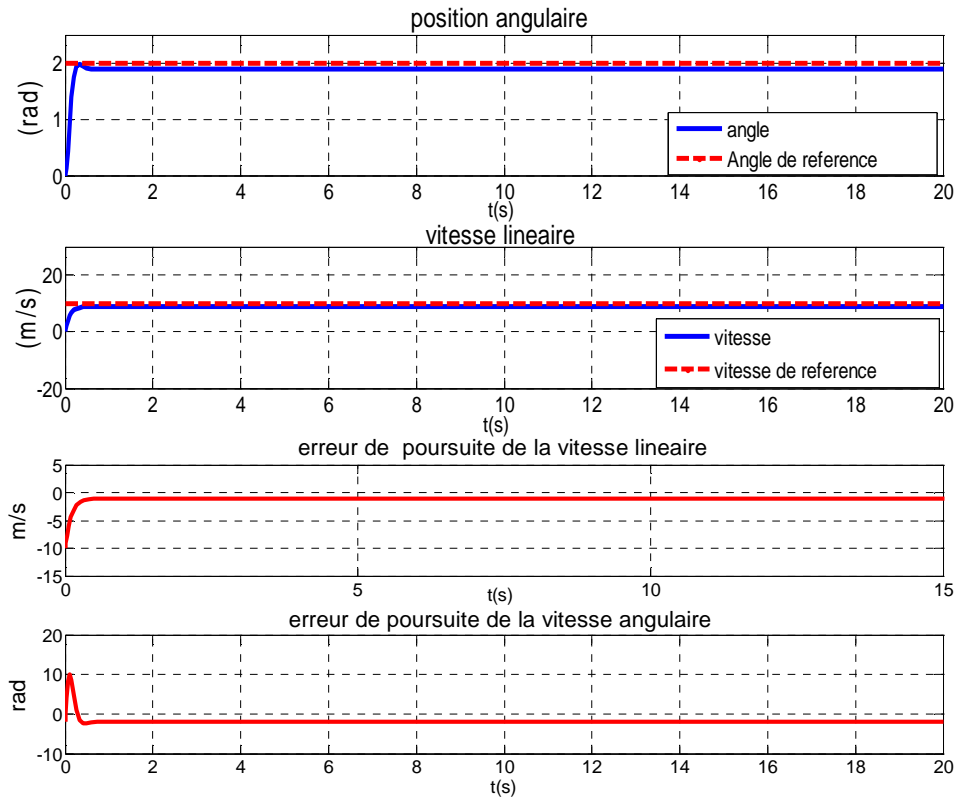
Les figures Fig(IV.6) et Fig(IV.7) donnent les résultats obtenus à partir de l'application des deux lois de commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée : la commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini, au système chaise roulante sur une pente.

Les résultats de simulation montrent clairement que le contrôleur des deux lois garde son efficacité, en termes de :

- Poursuite: où le comportement de la position angulaire de la chaise est proche de la référence de la position angulaire et la vitesse linéaire suit bien la trajectoire de

référence de vitesse, même si c'est le cas de la position dans une pente, ce qui prouve la robustesse de la commande prédictive non linéaire.

- Respect des contraintes sur l'entrée (Amplitude des couple), où il est très clair à partir des graphes des couples que la valeur de ces derniers restent toujours à l'intérieur de l'intervalle limité.



Fig(IV.8) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur la sortie

$$y_{max}=[v_{max}, \theta_{max}]=[9;1.9]; y_{min}=[v_{min}, \theta_{min}]=[-9;-1.9]$$

Dans la figure Fig(IV.8), la commande prédictive non linéaire avec contrainte de sortie a été appliquée pour la poursuite d'une trajectoire désirée de la chaise roulante, tout en respectant les contraintes de sortie, où on a imposé que les valeurs de la vitesse linéaire et la position angulaire sont limitées $-9 \leq v \leq 9$; $-1.9 \leq \theta \leq 1.9$.

Les résultats montrent l'efficacité de la commande prédictive non linéaire avec contrainte de sortie à respecter les contraintes données, où les valeurs de sortie restent à l'intérieur d'intervalle imposé, même si la référence désirée est hors cet intervalle.

IV.3. COMMANDE PREDICTIVE AVEC CONTRAINTES DE LA MAS

Les moteurs asynchrones triphasés sont des machines électriques extrêmement robustes, qui ne demandent que très peu d'entretien et sont fréquemment utilisées dans le secteur industriel. On les retrouve dans des applications très diverses telles que les ventilateurs, les pompes, des machines complexes modulaires, des machines exigeant du couple et de la

précision à très basse vitesse ainsi qu'une dynamique élevée et également pour des machines de forte puissance. Grâce à l'évolution de l'électronique de puissance et en raison du plus faible coût des moteurs asynchrones, nombre d'applications, qui utilisaient hier des moteurs à courant continu ou encore des moteurs synchrones, emploient aujourd'hui un moteur asynchrone associé à un variateur de vitesse.

Le comportement de ce moteur est celui d'un système non linéaire, sa dynamique est rapide, ses paramètres varient pendant le fonctionnement et il est sujet à des perturbations inconnues. Toutes ces caractéristiques rendent la commande de cette machine complexe. Par conséquent, la conservation de la nature non linéaire de la machine, la poursuite de trajectoires prédéterminées, le rejet de perturbations inconnues avec une réponse performante et le respect des contraintes sont les objectifs à satisfaire lors d'une mise en œuvre d'une stratégie de commande.

La commande prédictive, mentionnée auparavant, apparaît comme une alternative intéressante pour contrôler le moteur asynchrone et satisfaire les exigences souhaitées. L'intérêt de cette commande par rapport aux autres, par exemple à la commande par linéarisation entrée-sortie, est qu'elle peut être réalisée à partir du modèle de la machine ou à partir d'une technique de modélisation pour contourner les variations paramétriques. C'est la raison pour laquelle, la communauté des chercheurs en commande des machines s'est intéressée à l'application de la commande à modèle prédictif pour le contrôle du moteur asynchrone [Bar, 06], [Cip, 99], [Dum, 96], [Dum, 98], [Hed1, 00].

En [Bar, 06], [Cip, 99] et [Dum, 98], une commande prédictive généralisée (CPG) est appliquée à un modèle linéarisé de la machine. Le modèle de la machine peut être décomposé en une partie linéaire et une autre non linéaire [Maa, 00] [Maa, 99], par la suite, la commande CPG est appliquée à la partie linéaire. Une commande non linéaire prédictive multivariable, celle mentionnée dans ce travail, basée sur l'optimisation d'une fonction de coût définie sur un horizon, est appliquée à la commande de la machine [Hed1, 00] [Hed, 03].

Dans ce paragraphe on s'intéresse à appliquer cette loi de commande en présence des contraintes sur l'amplitude du signal d'entrée, qui est dans ce cas les tensions rotorique et statorique. Une version en cascade de la commande prédictive non linéaire est réalisée pour les sorties couple électromagnétique, norme du flux rotorique et vitesse mécanique, dont la boucle interne est représentée, pour le contrôle du couple et du flux. La boucle externe pour le contrôle de la vitesse.

IV.3.1. Modèle de la machine asynchrone

Une machine asynchrone à cage est constituée de deux parties, le stator et le rotor. Le stator, représente la partie statique de la machine. Il est constitué d'un circuit magnétique comportant de multiples encoches à l'intérieur desquelles sont bobinées trois enroulements formant les enroulements statoriques. Au centre de ce cylindre, on retrouve le rotor de la machine dont le circuit magnétique est composé de banes généralement en cuivre ou en aluminium coulé. Ces banes sont reliées entre elles à chaque extrémité par un anneau de

court-circuit. Notons que les banes sont légèrement inclinés pour éviter l'effet magnétique d'encoche du à la forte variation de reluctance qui perturbe le couple. Cette cage est traversée par l'arbre mécanique qui peut sortir ou non de chaque cotée.

Pour établir des relations simples entre les tensions d'alimentation du moteur et ses courants, il faut s'appuyer sur un certain nombre d'hypothèses :

- Parfaite symétrie de construction;
- Assimilation de la cage à un bobinage en court-circuit de même nombre de phases que le bobinage statorique;
- Répartition sinusoïdale, le long de l'entrefer, des champs magnétiques de chaque bobinage;
- Absence de saturation dans le circuit magnétique

A partir du loi de Faraday permet, la tension V peut être donnée en fonction du courant I par :

$$V = RI + \frac{d\varphi}{dt} \quad (IV.8)$$

Les équations des grandeurs liées au stator sont :

$$\begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_{as} \\ \varphi_{bs} \\ \varphi_{cs} \end{pmatrix} \quad (IV.9)$$

et celles au rotor :

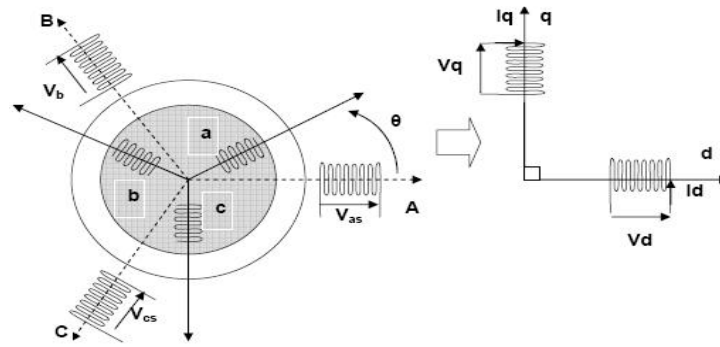
$$\begin{pmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{pmatrix} = R_r \begin{pmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_{ar} \\ \varphi_{br} \\ \varphi_{cr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (IV.10)$$

Où :

- v_{as}, v_{bs}, v_{cs} Tensions statoriques dans le repère (a,b,c),
- v_{ar}, v_{br}, v_{cr} Tensions rotoriques dans le repère (a,b,c),
- i_{as}, i_{bs}, i_{cs} Courants statoriques dans le repère (a,b,c),
- i_{ar}, i_{br}, i_{cr} Courants rotoriques dans le repère (a,b,c),
- R_s, R_r Résistances statorique et rotorique,
- $\varphi_{as}, \varphi_{bs}, \varphi_{cs}$ Flux statoriques dans le repère (a,b,c),
- $\varphi_{ar}, \varphi_{br}, \varphi_{cr}$ Flux rotoriques dans le repère (a, b,c).

La mise en équations de la machine asynchrone aboutit à un système de six équations différentielles à coefficients variables, la résolution de ce système est très difficile, d'où la nécessité de faire une transformation du système triphasé vers un système biphasé équivalent. Cette transformation doit conserver la puissance instantanée et la réciprocité des inductances mutuelles.

La transformation de Park est la plus utilisée pour l'élaboration du modèle de connaissance traduisant le comportement d'une machine asynchrone. Elle permet d'exprimer les grandeurs statoriques et rotoriques dans un repère biphasé tournant (d,q) Fig (IV.9)



Fig(IV.9) : Modèle de Park de la MAS

Les projections des équations du modèle (IV.9), (IV.10), sur les deux axes (d, q) du référentiel, permettent d’obtenir les équations de Park de la machine asynchrone :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} - \omega_s \varphi_{qs} + \frac{d\varphi_{ds}}{dt} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \omega_s \varphi_{ds} + \frac{d\varphi_{qs}}{dt} \\ 0 = R_r i_{dr} - \omega_r \varphi_{qr} + \frac{d\varphi_{dr}}{dt} \\ 0 = R_r i_{qr} + \omega_r \varphi_{dr} + \frac{d\varphi_{qr}}{dt} \end{cases} \quad (IV.11)$$

avec :

- ω_s et ω_r Pulsations statorique et rotorique,
- v_{ds}, v_{qs} Tensions statoriques dans le repère (d,q),
- i_{ds}, i_{qs} Courants statoriques dans le repère (d,q),
- i_{dr}, i_{qr} Courants rotoriques dans le repère (d,q),
- $\varphi_{ds}, \varphi_{qs}$ Flux statoriques dans le repère (d,q),
- $\varphi_{dr}, \varphi_{qr}$ Flux rotoriques dans le repère (d,q).

Egalement le modèle complet de la machine asynchrone comprend l’équation mécanique donnée par :

$$C_e - C_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (IV.12)$$

Où :

- J est le moment d’inertie totale ramené à l’arbre du moteur.
- C_e le couple électromagnétique donné par la relation suivante :

$$C_e = P \frac{M_i}{L_r} (\varphi_{dr} i_{qs} - \varphi_{dr} i_{qs}) \quad (IV.13)$$

- C_r le couple résistant dû aux frottement ainsi que la charge de la machine

$$C_r = f\Omega + T_L \quad (IV.14)$$

- Ω Vitesse mécanique donnée par $\frac{\omega}{P}$,
- P Nombre de paires de pôles,
- M_i Inductance cyclique mutuelle stator-rotor,

- L_r L'inductance propre d'une phase rotorique.

Pour des applications de commande, un choix approprié pour le vecteur d'état dépend de l'objectif de commande tracé ou à l'observation, selon le repère choisi, dans notre travail on a choisi le vecteur: $(i_{ds}i_{qs}\varphi_{dr}\varphi_{qr}\Omega)^T$.

D'un autre coté on a choisi comme sortie le couple électromagnétique et le flux rotorique :

$$\begin{cases} y_1(x) = h_1(x) = \frac{pMi}{L_r} (\varphi_{dr}I_{qs} - \varphi_{qr}I_{ds}) & \text{(IV.15)} \\ y_2(x) = h_2(x) = \varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2 & \text{(IV.16)} \end{cases}$$

Cependant le modèle d'état de la machine asynchrone dans un référentiel (d,q) fixe au stator ($\omega_s=0$), utilisant les équations (IV.11), (IV.12), (IV.13), (IV.14), est un système multivariable non linéaire d'ordre cinq donné sous forme condensée (III.1)

avec : $x = (x_1x_2x_3x_4x_5)^T = (i_{ds}i_{qs}\varphi_{dr}\varphi_{qr}\Omega)^T$, $u = (v_{ds} v_{qs})^T$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega L_s} \left(R_s + \frac{Mi}{L_r T_r} \right) x_1 + \omega_s x_2 + \frac{Mi}{\sigma L_s L_r T_r} x_3 + \frac{PMi}{\sigma L_s L_r} x_4 x_5 \\ -\omega_s x_1 - \frac{1}{\omega L_s} \left(R_s + \frac{Mi}{L_r T_r} \right) x_2 - \frac{PMi}{\sigma L_s L_r} x_3 x_5 + \frac{Mi}{\sigma L_s L_r T_r} x_4 \\ \frac{Mi}{T_r} x_1 - \frac{1}{T_r} x_3 + (\omega_s - P x_5) x_4 \\ \frac{Mi}{T_r} x_2 - (\omega_s - P x_5) x_3 - \frac{1}{T_r} x_4 \\ -P \frac{Mi}{j L_r} x_1 x_4 + P \frac{Mi}{j L_r} x_2 x_3 - \frac{f}{j} x_5 - \frac{1}{j} C_r \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pMi}{L_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4) \\ x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix}$$

Où :

- L_s : L'inductance propre d'une phase statorique,
- $\sigma = 1 - \frac{Mi^2}{L_s L_r}$ Coefficient de dispersion magnétique.

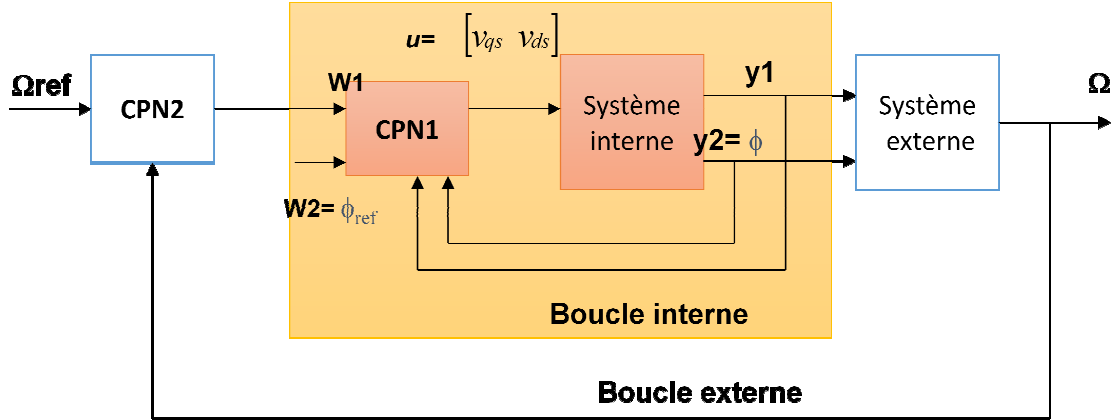
IV.3.2. Commande prédictive non linéaire à structure en cascade de la MAS

Pour le cas de la machine asynchrone, la commande prédictive non linéaire en cascade à pour but d'obtenir une structure permettant le contrôle simultané des trois variables: le couple électromagnétique, le flux rotorique et la vitesse mécanique .

Pour simplifier la présentation, on n'envisagera ici qu'une structure à deux boucles: une boucle externe pour le contrôle de la vitesse et une boucle interne comportant une dynamique plus rapide que la boucle externe pour le contrôle du couple et du flux *Fig (IV.10)* , chaque boucle est corrigée par un algorithme de commande prédictive [Hed, 04] [Hed, 05]. Pour la boucle interne, une loi de commande (tension v_{qs} et v_{ds}) non linéaire

multivariable est développée pour la poursuite des trajectoires de la boucle interne (couple et norme du flux) par la minimisation du critère $J1$ de la commande CP1.

Ensuite, une loi de commande prédictive simple, pour la poursuite de la vitesse mécanique est conçue pour extraire une loi de commande $W1$ qui présente la consigne interne du couple électromagnétique.



Fig(IV.10) : Structure d'une commande prédictive cascade appliquée à la MAS.

- W_1 Consigne interne du couple provenant de la commande CPN2,
- W_2 Consigne du système interne de flux y_2 ,
- W_3 La consigne de vitesse y_3 ,
- u Commande (tensions rotoriques) appliquée sur la MAS.

L'objectif de la boucle interne consiste à élaborer les tensions de commande v_{ds} et v_{qs} qui permettent aux sorties y_1 (couple électromagnétique) et y_2 (flux rotorique) du système de suivre les trajectoires de ses références (y_{ref1} , y_{ref2}) à l'instant $(t+h)$. Ainsi donc, l'erreur de poursuite future est donnée par :

$$e(t+h) = y(t+h) - y_{ref}(t+h) \tag{IV.17}$$

Avec :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } y_{ref} = \begin{pmatrix} y_{ref1} \\ y_{ref2} \end{pmatrix}$$

En utilisant le développement de Taylor d'ordre ($r_1=1$ et $r_2=2$) de $e(t+h)$, on obtient :

$$e(t+h) = e(t) + V_y(x,h) - d(t,h) + \Lambda(h)W(x)u \tag{IV.18}$$

Où :

$$W(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}L_f h_1 & L_{g2}L_f h_1 \\ L_{g1}L_f h_2 & L_{g2}L_f h_2 \end{bmatrix}; \quad \Lambda(h) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}; \quad V_y(x,t) = \begin{bmatrix} hL_f h_1 \\ hL_f h_2 + \frac{h^2}{2}L_f^2 h_2 \end{bmatrix}$$

$$d(t, h) = \begin{vmatrix} h\dot{y}_{ref1} \\ h\dot{y}_{ref2} + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_{ref2} \end{vmatrix}$$

Dans le cas de la commande prédictive à un pas, la fonction coût à minimiser pour la boucle interne d'une structure cascade, est définie par :

$$J_{11}(y, y_{ref}, R_{11}, Q_{11}, u) = \frac{1}{2} \|y(t+h) - y_{ref}(t+h)\|_{Q_{11}}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{R_{11}}^2 \quad (IV.19)$$

- Q_{11} et R_{11} sont les paramètres de réglage pour la boucle interne, où $Q_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie positive et $R_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie semi positives
- h est l'horizon de prédiction de la sortie y

Pour la boucle externe l'objectif est la poursuite de la vitesse Ω avec sa référence désirée Ω_{ref} . La fonction coût à minimiser est définie comme suit :

$$J_{12}(\Omega, \Omega_{ref}, R_{12}, Q_{12}, W_1) = \frac{1}{2} \|\Omega(t+h_v) - \Omega_{ref}(t+h_v)\|_{Q_{12}}^2 + \frac{1}{2} \|W_1(t)\|_{R_{12}}^2 \quad (IV.20)$$

- Q_{12} et R_{12} des scalaires positif sont les paramètres de réglage pour la boucle externe.
- h_v est l'horizon de prédiction de la vitesse mécanique.

Supposons que le couple y_1 suit la référence y_{ref1} , le modèle global de prédiction de la boucle externe en boucle fermée est calculé y compris le couple y_l et est donné par l'équation mécanique :

$$\Omega(s) = \frac{1}{Js+f} y_1(s) \Rightarrow \Omega(s) = \frac{\omega_0}{(Js+f)(s+\omega_0)} y_1(s) \quad (IV.21)$$

L'erreur de poursuite de la vitesse à l'instant $(t+h)$ est alors **[Hed2, 00]** :

$$e_v(t+h) = \Omega(t+h_v) - \Omega_{ref}(t+h_v) = e_v(t) + Z_v(t, h) - d_v(t, h) + \alpha(h)W_1 \quad (IV.22)$$

Où :

- $e_v(t) = \Omega(t) - \Omega_{ref}(t)$,
- $\alpha(h) = \frac{h^2}{2J} \omega_0$,
- $d_v(t, h) = h\dot{\Omega}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{\Omega}_{ref}(t)$,
- $Z_v(t, h) = \frac{hf}{J} \left(\frac{hf}{2J} - 1 \right) \Omega(t) + \frac{h}{J} \left(1 - \frac{h}{2} \left(\frac{f}{J} + \omega_0 \right) \right) y_{ref1}(t)$.

A partir de la minimisation J_{12} , on obtient :

- $W_2 = \varphi_{norm}$,
- $W_1 = -q_1 \alpha(h_v) \frac{e_v(t) + Z_v(h_v) - d_v(t, h_v)}{q_1 \alpha^2(h_v) + r_1}$.

Pour le cas de la commande prédictive cascade à horizon fini la structure est la même que dans la commande prédictive à un pas. Pour la boucle interne l'objectif consiste à élaborer les tensions de commande v_{ds} et v_{qs} qui permettent aux sorties y_1 et y_2 du système de suivre les trajectoires de référence (y_{ref1} , y_{ref2}) le long de l'intervalle $[0, h]$.

Ainsi, la fonction coût à minimiser pour la boucle interne est définie par :

$$J_{21}(y, y_{ref}, R_{21}, Q_{21}, u) = \frac{1}{2} \int_0^h \|y(t+T) - y_{ref}(t+T)\|_{Q_{21}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|u(t)\|_{R_{21}}^2 dT \quad (IV.23)$$

- $Q_{21} \in \mathbb{Q}_{21}$ et R_{21} sont les paramètres de réglage pour la boucle interne, où $Q_{21} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie positive et $R_{21} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie semi positives
- h_v et h_c sont les horizons de prédiction de la sortie $y(t)$ et de la commande respectivement.

Et la solution :

$$u(t) = -[W(x)^T M(h)W(x) + h_c R_2]^{-1} W(x)^T [K(h)e(t) + T(x, h)] \quad (IV.24)$$

Où :

- $M(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 \Lambda(T) dT$, $K(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 dT$,
- $T(x, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 (V_y(x, T) - d(t, T)) dT$.

Pour la boucle externe l'objectif est la poursuite de Ω avec sa référence désirée Ω_{ref} . La fonction coût à minimiser est définie comme suit :

$$J_{22}(\Omega, \Omega_{ref}, R_{22}, Q_{22}, W_1) = \frac{1}{2} \int_0^{h_v} \|\Omega(t+T) - \Omega_{ref}(t+T)\|_{Q_{22}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|W_1(t)\|_{R_{22}}^2 dT \quad (IV.25)$$

- Q_{22} et R_{22} sont des scalaires positifs non nul $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie positive, $R_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Matrice définie semi positives
- h_v et h_c sont les horizons de prédiction de la vitesse et de la commande respectivement.

A partir de la minimisation de J_{22} , on obtient [Hed, 00] :

- $W_2 = \varphi_{norm}$,
- $W_1 = -q_2 \frac{\beta(h_v)e_v(t) + \gamma(h_v)}{q_2 \lambda(h_v) + r_2 h_c}$,
- $\beta(h_v) = \int_0^{h_v} \alpha(T) dT$, $\gamma(h_v) = \int_0^{h_v} (Z_v(t, T) - d_v(t, T)) \alpha(T) dT$,
- $\lambda(h_v) = \int_0^{h_v} \alpha^2(T) dT$.

Avec :

- $e_v(t) = \Omega(t) - \Omega_{ref}(t)$, $\alpha(T) = \frac{T^2}{2J} \omega_0$,
- $d_v(t, T) = T \dot{\Omega}(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\Omega}_{ref}(t)$,
- $Z_v(t, T) = \frac{Tf}{J} \left(\frac{Tf}{2J} - 1 \right) \Omega(t) + \frac{T}{J} \left(1 - \frac{T}{2} \left(\frac{f}{J} + \omega_0 \right) \right) y_{ref1}(t)$.

IV.3.3. Commande prédictive non linéaire avec contraintes de la MAS

La machine à contrôler est une machine à induction de 1.5KW, [Hed,00], [Dum, 96] dont les paramètres sont : $R_s=4.85\Omega$; $R_r=3.805 \Omega$; $L_r=L_s=0.274H$; $M_{sr}=0.258H$; $p=2$; $J=0.031Kg.m^2$; ; $f=0.008Nm.s/rd$;

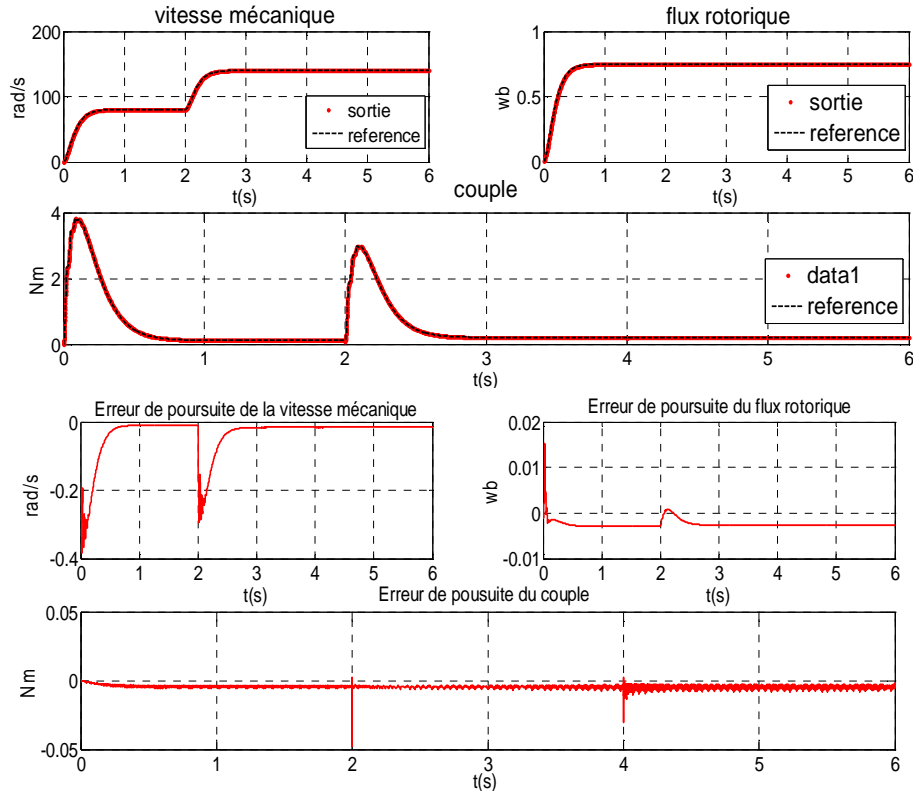
L'objectif dans cet exemple est l'extraction d'une loi de commande prédictive non linéaire [Bdi1, 11], [Bdi2, 11] cascade avec contraintes sur l'entrée, permettant la poursuite des trajectoires de référence: couple électromagnétique, flux rotorique et vitesse tout en respectant les valeurs limitées des tensions. Les trois modèles de référence correspondant aux systèmes interne et externe sont choisis comme suit [Hed, 00] :

- Pour le couple $y_1(t)$:
$$y_{ref1}(s) = \frac{\omega_0}{s+\omega_0} W_1(s), \omega_0 = 45rad/s$$
- Pour le flux $y_2(t)$:
$$y_{ref2}(s) = \frac{\omega_f^2}{s^2+2\xi_f s+\omega_f^2} W_2(s), \xi_f = 1, \omega_f = 15rad/s$$
- Pour la vitesse $y_3(t)$:
$$y_{ref3}(s) = \frac{\omega_v^2}{s^2+2\xi_v s+\omega_v^2} W_3(s) \quad \xi_v = 1, \omega_v = 10rad/s$$

Il a été considéré que le flux doit atteindre la valeur $W_2=0.75wb$ et que la vitesse :

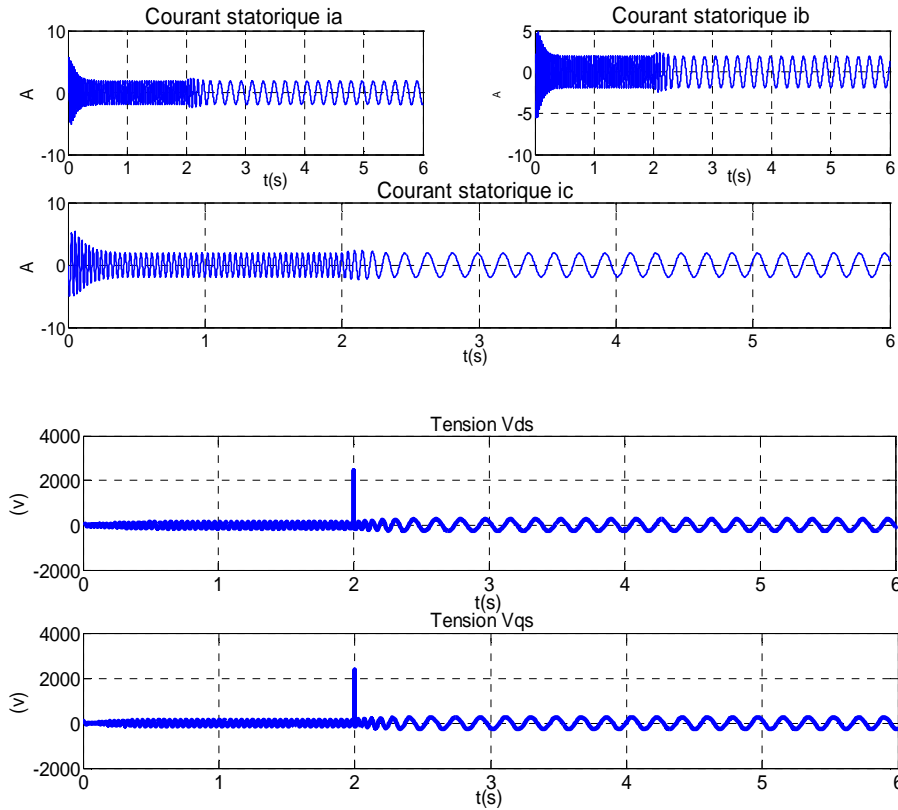
$$W_3 = \begin{cases} 70 & t \in [0,2] \\ 140 & t \in [2,6] \end{cases}$$

Les paramètres de réglage obtenus après une série d'essais sont : $R_{21}=0.00001*I_{2*2}$; $Q_{21}=10000*I_{2*2}$; $h=0.0004$; $Q_{22}=100$; $R_{22}=0.0001$; $h_v=0.0002$; $hc=h$



Fig(IV.11a) : Commande prédictive non linéaire d'une MAS sans contraintes :Performance de poursuite

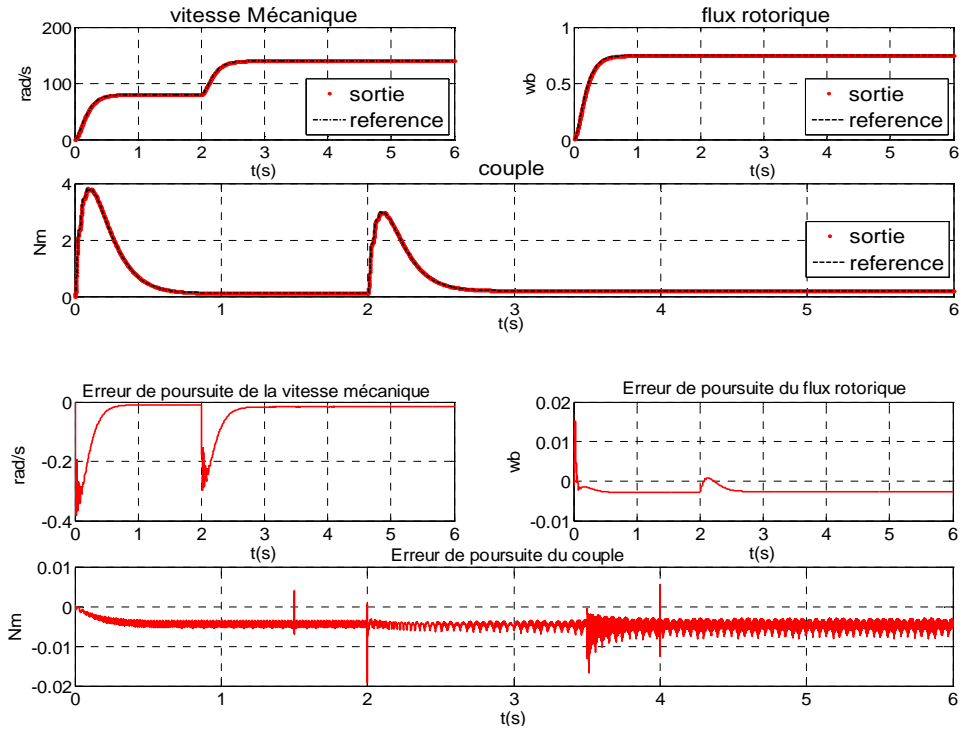
La figure *Fig(IV.11a)* illustre les graphes de poursuite résultants de l'application de la commande prédictive à horizon fini sans contraintes au MAS. on constate que les trois sorties contrôlées sous structure en cascade *Fig(IV. 10)* sont proches de leurs références.



Fig(IV.11b) : Commande prédictive non linéaire d'une MAS sans contraintes : Courants et tensions statoriques

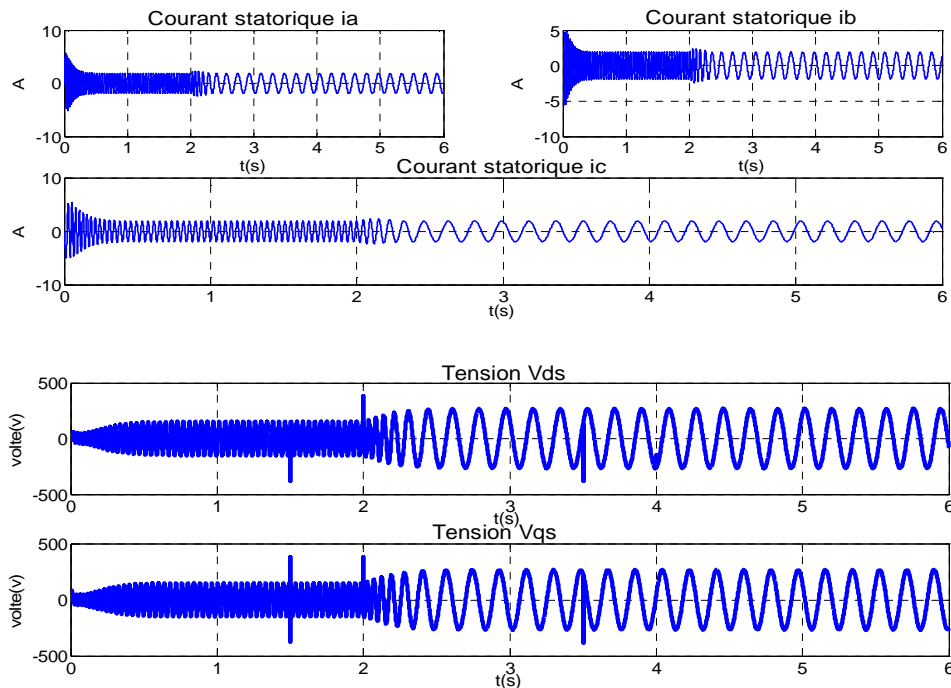
La figure *Fig(IV. 11b)* présente les courants et les tensions statoriques obtenus par la commande prédictive à horizon fini sans contraintes au MAS. Les graphes du courant sont périodiques, uniformes et se changent avec la vitesse ($t=2s$), et toutes leurs valeurs sont à l'intérieur des limites de saturation. Par contre, les graphes de tensions montrent la présence d'un pic important lors du changement de la vitesse ($t=2s$), ce qui provoque un grand risque pour la sécurité de la machine.

Afin d'éviter ce problème, la commande prédictive est appliquée avec contraintes sur la tension d'entrée dont en supposant que les tensions v_{qs} et v_{ds} sont limitées par l'intervalle $[-380v, 380v]$.



Fig(IV.12b) : Commande prédictive non linéaire à horizon fini avec contraintes sur l'entrée d'une MAS : Performance de poursuite

$$V_{max}=380; V_{min}=-380;$$

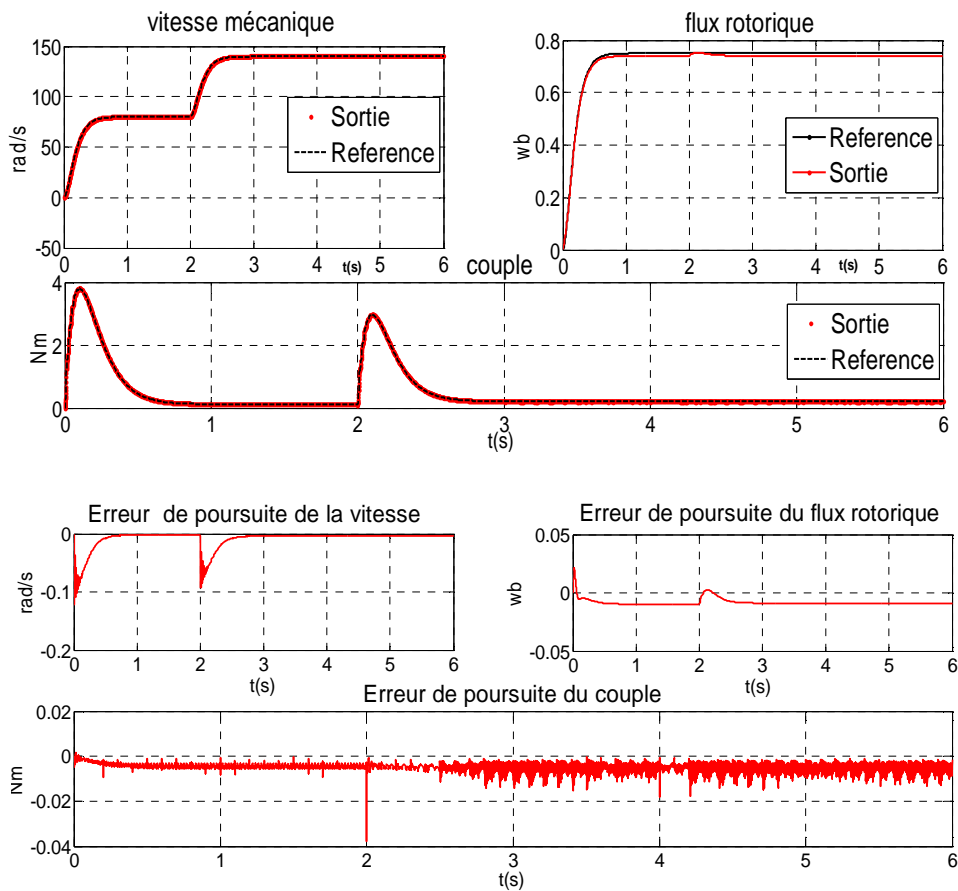


Fig(IV.12b) : Commande prédictive non linéaire à horizon fini avec contraintes sur l'entrée d'une MAS : Courants et tensions statoriques

$$V_{max}=380; V_{min}=-380;$$

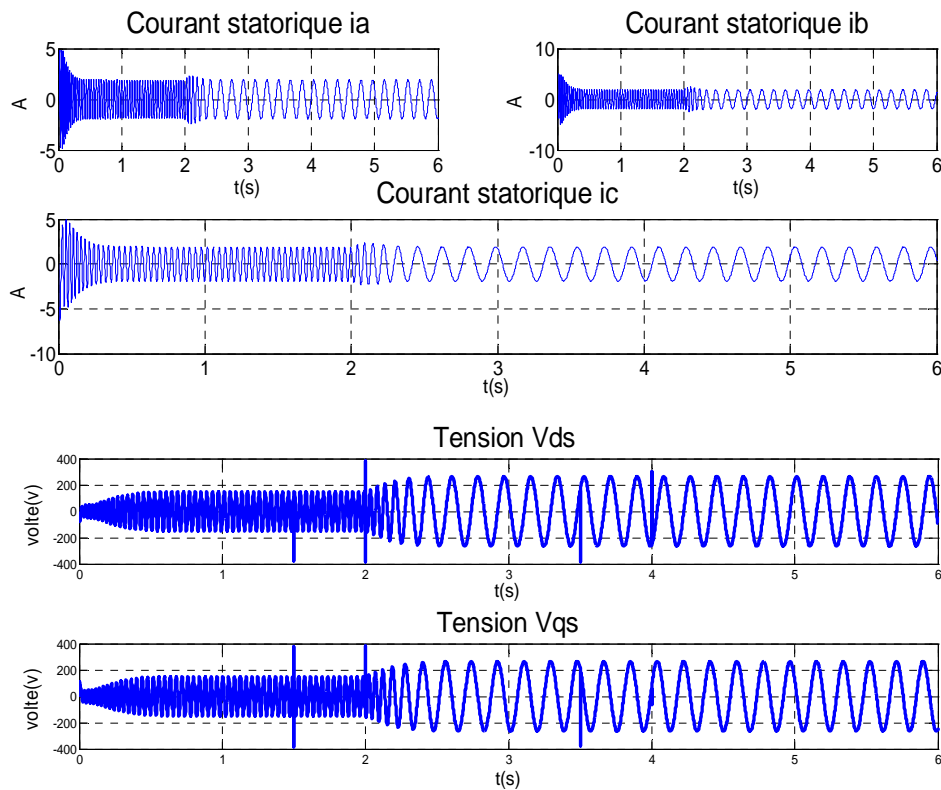
La figure Fig(IV.12) donne les résultats de simulation de l'application de la commande prédictive non linéaire à structure en cascade avec contraintes sur le signal d'entrée dont on a supposé que les tensions statoriques, sont limitées par les valeurs $V_{max}=380\text{v}$ et $V_{min}=-380\text{v}$ afin d'assurer la sécurité de la machine.

Les résultats montrent une bonne performance en terme de dynamique de poursuite pour toutes les sorties où les erreurs de poursuite tendent vers 0. Les courbes des tensions dans ce cas montrent clairement que ces dernières restent limitées par les valeurs V_{min} et V_{max} imposées au début du contrôle ce qui prouve l'efficacité de la commande prédictive non linéaire en terme de respect des contraintes.



Fig(IV.13 a) : Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS en présence de charge : Performance de poursuite

$$V_{max}=380; V_{min}=-380;$$



Fig(IV.13b) : Commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'une MAS en présence de charge : Courants et tensions statoriques

$$V_{max}=380; V_{min}=-380;$$

Dans la figure Fig(IV.13), un couple de charge $Cr= 7$ N/m a été introduit entre les instants 1.5s et 3.5s, les résultats montrent l'efficacité de la commande prédictive non linéaire vis à vis de la charge dont on constate que le couple $y1$, le flux $y2$ et la vitesse Ω suivent de près leurs références y_{ref1} , le flux de référence φ_{norm} , et la vitesse de référence Ω_{ref} . Dans les graphes de tension, on constate trois pics, dont le premier est due au changement de la vitesse à l'instant $t=2s$, les deux autres sont causés par l'introduction du couple de charge aux instants 1.5 et 3.5s. Autrement on remarque que toutes les valeurs de tensions même celles des trois pics, sont à l'intérieur de la zone limite par V_{max} et V_{min} .

IV.4. COMMANDE PREDICTIVE AVEC CONTRAINTES DU BRAS MANIPULATEUR

Les bras manipulateurs ont attiré de plus en plus l'attention des théoriciens de contrôle du robot et les utilisateurs de robots en raison de ses divers avantages potentiels. Cependant, leurs dynamiques non linéaires présentent un problème de contrôle difficile, car les approches traditionnelles de contrôle linéaires ne se appliquent pas facilement. Pendant un certain temps, la difficulté a été atténuée par le fait que les manipulateurs sont fortement orientés, ce qui réduit fortement les effets dynamiques et interactives entre les liens.

Pour cette application, la commande prédictive non linéaire à un pas va être appliquée pour calculer des solutions optimales pour contrôler les positions angulaires d'un bras manipulateur à deux degré de liberté fonctionnant dans le plan horizontal en présence des contraintes sur l'entrée, ce qui permet d'assurer la sécurité du robot tout en gardant les valeurs des couples dans un intervalle bien déterminé, de plus des contraintes sur les variations des signaux couple, vont être imposées afin d'éviter le problème de bruitage indésirable dans les signaux de couple.

IV.4.1. Commande prédictive par modèle dynamique

Le système robot est décrit par un modèle non linéaire [Hed2, 05], [Slo, 91] avec q les angles des articulations, τ étant les entrées conjointes, le modèle dynamique d'un bras manipulateur peut être généralement exprimé par une équation dynamique de la forme :

$$\ddot{q}(t) = -M(q)^{-1}(V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) + M(q)^{-1}\tau(t) \quad (\text{IV.26})$$

La commande prédictive est appliquée au bras manipulateur pour trouver une loi de commande du couple $\tau(t)$ qui résoudre le problème de poursuite d'une trajectoire de référence $q_{ref}(t)$, celle des positions articulaires, de telle sorte que l'erreur est réduit à l'instant $(t + h)$, h étant un incrément de temps représentant l'horizon de prédiction. L'erreur de poursuite au temps $(t + h)$ est définie par :

$$e(t + h) = q(t + h) - q_{ref}(t + h) \quad (\text{IV.27})$$

Le développement de Taylor de second ordre ($r_i = [2,2]$), donne :

$$q(t + h) = q(t) + h\dot{q}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}(t) \quad (\text{IV.28})$$

A partir des équations (IV.28), (IV.26), la sortie prédite à l'instant $(t+h)$ peut être réécrite sous la forme [Hed2, 00] :

$$q(t + h) = q(t) + C(q, \dot{q}, h) + \frac{h^2}{2}W(q)\tau(t) \quad (\text{IV.29})$$

Avec :

- $C(q, h\dot{q}, h) = h\dot{q}(t) - \frac{h^2}{2}M^{-1}(q)(V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))$
- $W(q) = M(q)^{-1}$

De la même façon, on applique le développement de Taylor d'ordre 2 au signal de référence signal $q_{ref}(t+h)$:

$$\begin{aligned} q_{ref}(t + h) &= q_{ref}(t) + h\dot{q}_{ref}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_{ref}(t) \\ &= q_{ref}(t) + d(t, h) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

La dynamique de poursuite à l'instant $(t + h)$ en fonction du couple peut être écrite alors :

$$e(t+h) = e(t) + C(q, \dot{q}, h) - d(t, h) + \frac{h^2}{2} W(q) \tau(t) \quad (\text{IV.31})$$

Le but de contrôle dans la commande prédictive à un pas est de trouver le signal du couple $\tau(t)$ qui fait coïncider la sortie $q(t)$ avec la référence $q_{\text{ref}}(t)$ au temps $(t+h)$, cela conduit alors à un critère d'optimisation de la forme :

$$J_1(e, \tau, h) = \frac{1}{2} e(t+h)^T Q e(t+h) + \frac{1}{2} \tau(t)^T R \tau(t) \quad (\text{IV.32})$$

Le signal de commande τ obtenu en minimisant le critère (IV.32), est donc :

$$\tau(t) = - \left[\frac{h^4}{2} W(q)^T Q W(q) + R \right]^{-1} \left(\frac{h^2}{2} W(q) \right)^T Q (e(t) + C(q, \dot{q}, h) - d(t, h)) \quad (\text{IV.33})$$

Dans le cas de la commande prédictive avec contraintes sur l'entrée, les matrices E et F de la fonction du coût quadratique (II.34) sont :

$$E = \frac{h^4}{2} W(q)^T Q W(q) + R$$

$$F = \left(\frac{h^2}{2} W(q) \right)^T Q (e(t) + C(q, \dot{q}, h) - d(t, h))$$

IV.4.2. Commande prédictive non linéaire avec contraintes du bras manipulateur à deux degrés

Considérons le bras manipulateur semblable à la Fig.(IV.14); le manipulateur est constitué de deux corps rigides de masses m_1 et m_2 , longueurs L_1 et L_2 . Les angles des articulations sont respectivement q_1 et q_2 et une masse d'inertie m_L de diamètre l_L .

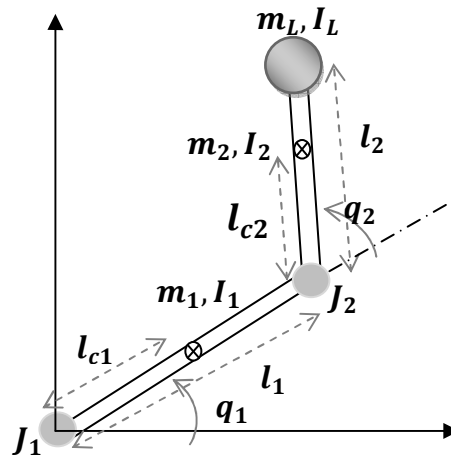


Fig (IV.14) : Bras manipulateur à deux degrés

Le modèle dynamique de ce système peut être donné par l'équation (IV.26) avec les variables [Hed, 02] :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= m_2 l_1^2 + m_1 l_1^2 + I_1 + I_2 + I_L + J_1 + 2(m_2 l_1 (l_{c2} + l_2) + m_1 l_1 (l_2 + l_{cl})) \cos q_2, \\
 m_{12} &= m_{21} = I_2 + I_1 + (m_2 l_1 (l_{c2} + l_2) + m_1 l_1 (l_2 + l_{cl})) \cos q_2, \\
 m_{22} &= I_2 + I_L + J_2, \\
 v_{11} &= -\dot{q}_2 (m_2 l_1 (l_{c2} + l_2) + m_1 l_1 (l_2 + l_{cl})) \sin q_2, \\
 v_{12} &= -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (m_2 l_1 (l_{c2} + l_2) + m_1 l_1 (l_2 + l_{cl})) \sin q_2, \\
 v_{21} &= \dot{q}_1 (m_2 l_1 (l_{c2} + l_2) + m_1 l_1 (l_2 + l_{cl})) \sin q_2, \\
 v_{22} &= 0, \\
 g_1 &= (m_1 (l_{cl} + l_1) + m_2 l_1 + m_L l_1) g \cos q_1 + (m_2 (l_{c2} + l_2) + m_L (l_2 + l_{cl})) g \cos(q_1 + q_2), \\
 g_2 &= (m_2 (l_{c2} + l_2) + m_L (l_2 + l_{cl})) g \cos(q_1 + q_2).
 \end{aligned}$$

J_1 et J_2 représentent l'inertie des moteurs.

Le tableau suivant représente les valeurs numériques des paramètres du manipulateur.

Axe 1	$l_1 = 0.45$ m	$m_1 =$ 100 Kg	$l_{c1} =$ 0.15 m	$I_1 =$ 6.25 Kg m ²	$J_1 =$ 4.77 Kg m ²
Axe 2	$l_2 = 0.20$ m	$m_2 =$ 25 Kg	$l_{c2} =$ 0.15 m	$I_2 =$ 0.61 Kg m ²	$J_2 = 3.58$ Kg m ²
		$m_L =$ 40 Kg	$l_{cl} =$ 0.15 m	$I_L = 7.68$ Kg m ²	

Tableau (IV.1) : Valeurs des paramètres du bras manipulateur [Hed2, 00]

Où :

- I_L est l'inertie de la liaison terminal (où l'inertie de la charge utile est inclus),
- l_{CL} est le centre de gravité de la charge.

Les signaux de référence choisis dans un temps continu sont : $q_{ref} = \begin{bmatrix} q_{ref1} \\ q_{ref2} \end{bmatrix}$

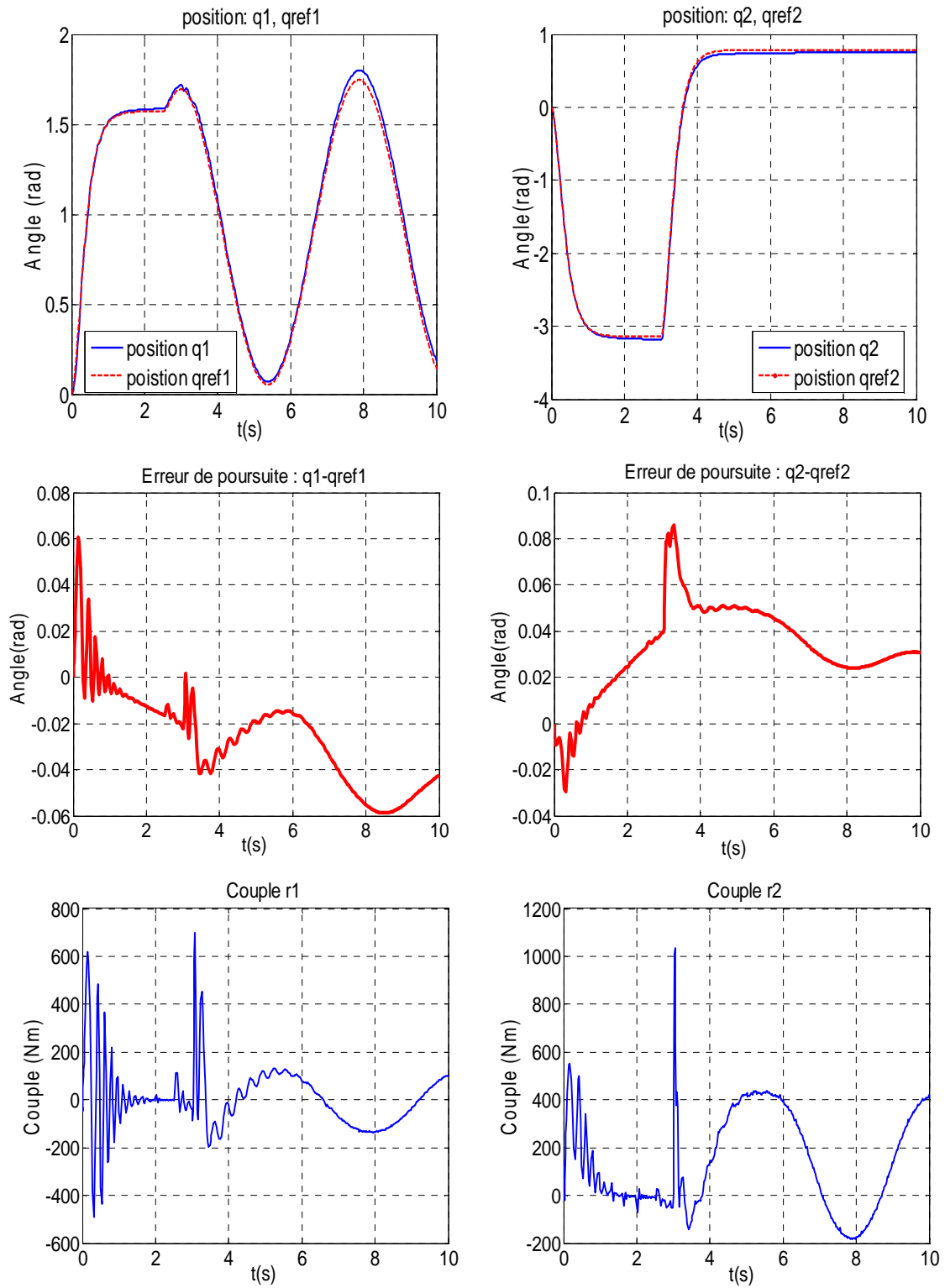
Où :

$$q_{refi}(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} r_i(s) \dots \dots i = 1,2 \quad (IV.34)$$

La commande prédictive non linéaire est appliquée pour la poursuite des trajectoires (les positions articulaires q_1 et q_2 suivantes [Hed, 02] :

$$r_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \ 0 \leq t \leq 2.5 \ s \\ 0.9(1 - \cos(1.26t)) & si \ t > 2.5 \ s \end{cases} \quad r_2(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & si \ 0 \leq t \leq 3 \ s \\ \frac{\pi}{4} & si \ t > 3 \ s \end{cases}$$

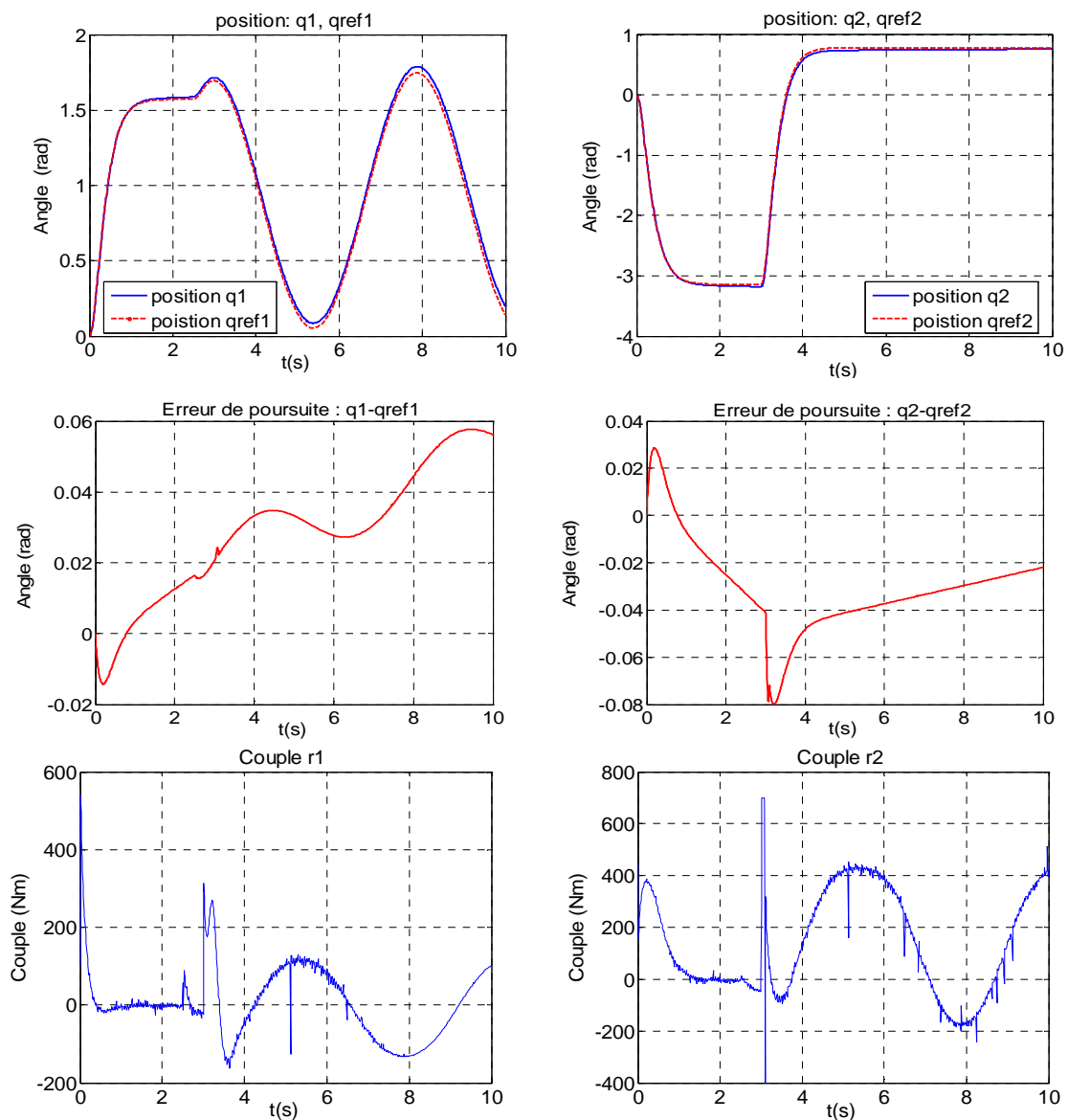
Les déplacements et les vitesses initiales sont toutes choisies nulles et les coefficient d'amortissement et de pulsation propre du filtre sont : $\xi=1$, $w_1=w_2=5\text{rad/s}$ et les paramètres de commande sont choisis $Q = 10^5 I$, $R = 10^{-12} I$ et h est fixé à 0,005.



Fig(IV.15) Commande prédictive à un pas sans contraintes

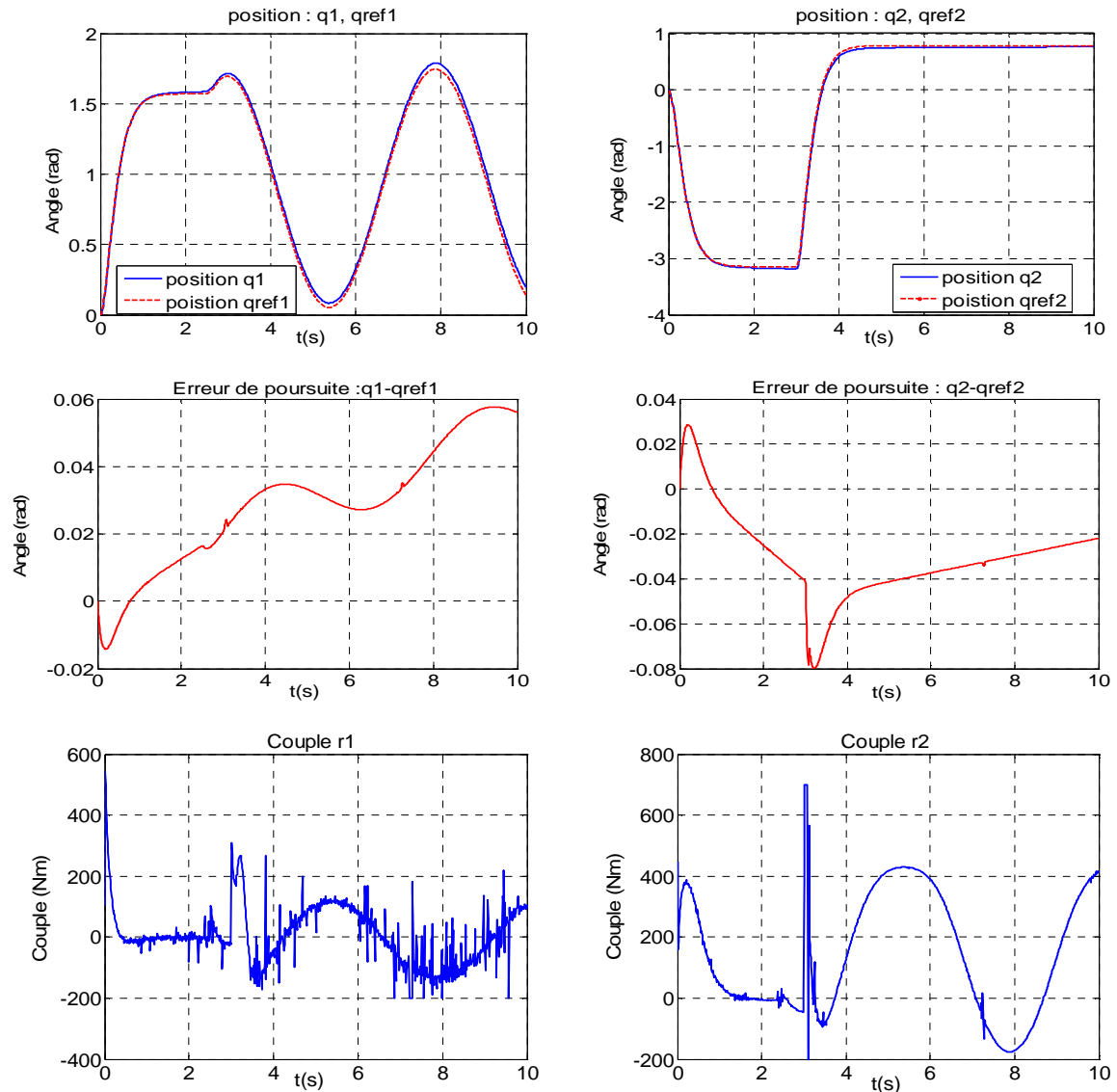
La Fig(IV.15) représente les résultats de simulation obtenus par l'application de la commande prédictive non linéaire sans contraintes à notre système [Bdi3, 12], celui d'un bras manipulateur à deux degrés: les positions angulaires ($q_1(t)$, $q_2(t)$), et leurs références ($q_{ref1}(t)$, $q_{ref2}(t)$), les signaux d'erreur de poursuite ainsi que les couples appliqués. A partir de ces graphes, on constate que les positions articulaires sont très proches des signaux de référence, par contre les signaux couples ont pris des grandes valeurs qui peuvent être supérieure à 900 (le cas du couple r_2). Afin d'éviter les grandes valeurs du signal couple et de garder la bonne poursuite de référence, la commande prédictive avec contraintes l'entrée est appliquée où les valeurs du couple sont supposées être limitées par une valeur maximale et une autre minimale :

- $-400 \leq \tau \leq 700$ pour le premier cas
- $-200 \leq \tau \leq 700$ pour le deuxième cas



Fig(IV.16) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée

Contraintes: $\tau_{max}=700Nm$, $\tau_{min}=-400Nm$

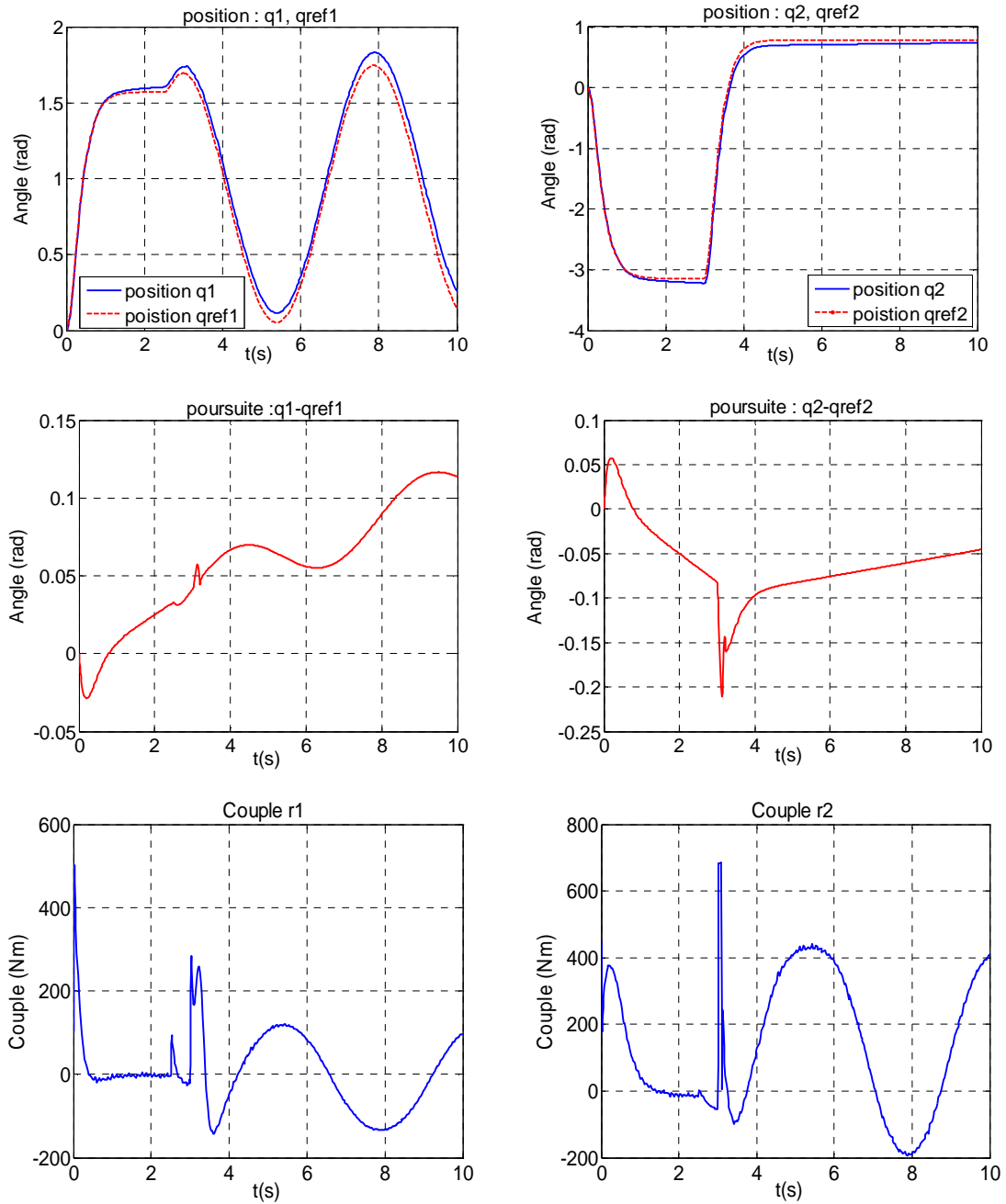


Fig(IV.17) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée

Contraintes: $\tau_{max}=700Nm$, $\tau_{min}=-200Nm$

Les résultats de simulation Fig (IV.16) et Fig(IV.17) montrent clairement l'efficacité de la commande prédictive à un pas avec contraintes sur l'entrée en termes de poursuite des trajectoires de référence (positions angulaire) et le respect des contraintes imposées (amplitude des couples) où il est très clair à partir des graphes du couple que la valeur de ce dernier, est toujours dans l'intervalle limité par la valeur maximale et minimale .

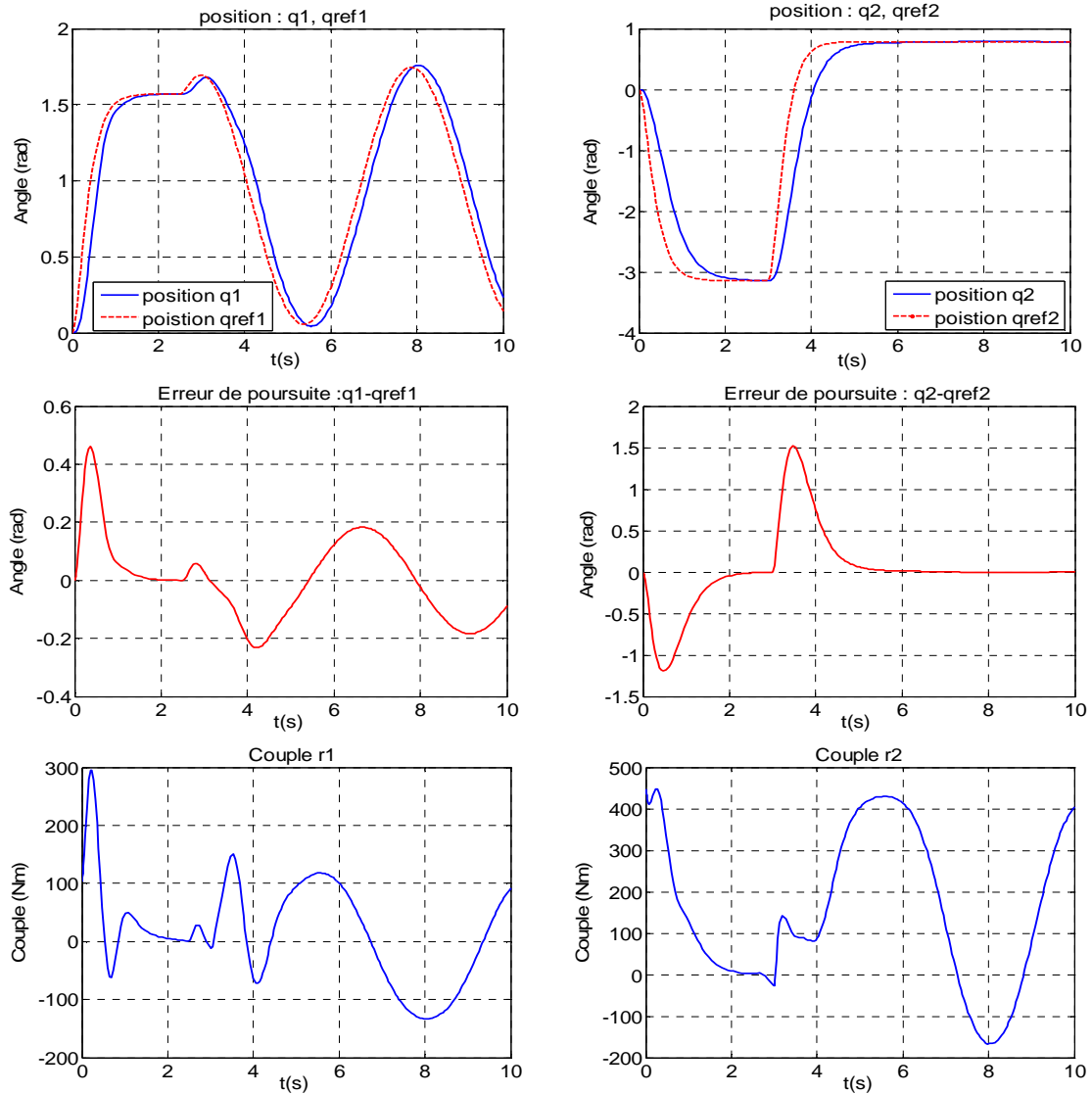
De plus les graphes du couple montrent la présence des ondulations dans le signal couple, ce qui peut être causé par des endommages au niveau des moteurs. Ce problème peut être résolu en imposant des contraintes sur les variations du couple.



Fig(IV.18) : Commande prédictive à un pas avec contraintes sur les variations d'entrée

$$\text{Contraintes } d\tau_{\max}=10\text{Nm}, d\tau_{\min}=-10\text{Nm}$$

Les résultats de Fig(IV.18) montrent l'importance d'inclure les contraintes sur les variations d'entrée dans le problème de commande pour éviter les variations brusques dans le signal couple, on peut constater d'après les courbes du couple l'absence des ondulations contrairement au cas sans contraintes.



Fig(IV.19) : Commande par un régulateur PD

La Fig(IV.19) représente la réponse au régulateur PD : la position angulaire de chaque articulation avec la référence, l'erreur de poursuite et les couples de commande appliqués aux articulations. A partir des courbes on constate l'absence des ondulation au niveau du signal couple, les valeurs de ce dernier ont pris des valeurs idéales pour la protection du système. Concernant les graphes de poursuite, les positions articulaires suivent les références mais avec certaine erreur, ce qui nous mène à donner l'avantage au commande prédictive.

IV.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre et afin de tester l'efficacité des lois de commande développées dans cette thèse, la commande prédictive non linéaire avec contraintes a été appliquée sur trois systèmes : La chaise roulante, la machine asynchrone et le bras manipulateur.

Pour la première application, la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée et la sortie a été appliquée à une chaise roulante électrique, sur une surface plane ou une pente, pour suivre une trajectoire prédéfinie. Ceci par le contrôle de la position angulaire et la vitesse linéaire en présence des contraintes sur l'amplitude des couples afin d'assurer la protection des moteurs de sorte à avoir une mobilité sûre des personnes handicapées. Les résultats de simulation ont clairement montré l'efficacité de cette approche en terme de suivi des références, où on a constaté une bonne poursuite des trajectoires de la position angulaire et de la vitesse linéaire dans les deux cas: plat ou une pente avec une préférence pour la commande prédictive à horizon fini. En outre les graphes du couple ont démontrés l'efficacité de cette loi de commande de garder les valeurs des couples à l'intérieur de l'intervalle limité par les valeurs minimales et maximales données. Même remarques pour le cas des contraintes de sortie, où ces dernières sont respectées même si leurs valeurs se trouvent à l'intérieur des trajectoires désirées.

Pour la deuxième application, la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée a été appliquée à une machine asynchrone triphasée à cage dont l'objectif est la poursuite des trajectoires prédéfinies pour le flux rotorique, le couple électromagnétique et la vitesse rotorique tout en respectant les contraintes sur l'entrée imposées. Afin de contrôler ces trois signaux en même temps, une structure cascade a été utilisée avec une commande multivariable pour les sorties couple électromagnétique et norme du flux rotorique, ce qui constitue la boucle interne, alors qu'une autre boucle externe est utilisée pour la commande de la vitesse. Les contraintes sur l'entrée sont imposées sur les tensions rotoriques d'une façon assurant la protection de la machine. Les résultats de simulations ont montré une bonne performance en terme de dynamique de poursuite des différentes trajectoires de référence flux rotorique, couple électromagnétique et la vitesse. Les résultats de simulation ont montré aussi l'efficacité de la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée d'extraire une loi de commande qui satisfait l'objectif de poursuite tout en respectant les valeurs des contraintes imposées, où les graphes ont bien illustré que les valeurs des tensions rotoriques restent toujours à l'intérieur de l'intervalle limité par la valeur maximale et minimale de la tension contrairement aux tensions obtenues par l'application de la commande prédictive non linéaire sans contraintes ou les valeurs des tensions ont pris des grandes valeurs ce qui peut provoquer la détérioration de la machine. Afin de tester la robustesse de la commande prédictive non linéaire avec contraintes sur l'entrée une couple de charge a été introduit, dont il a été constaté d'après les résultats que cette technique a gardé ses performances : Bon dynamique de poursuite, respect de contraintes.

Dans la dernière application, la commande prédictive avec contraintes, à été appliquée à un système hautement non linéaire, celui d'un bras manipulateur à deux degrés pour contrôler les positions d'articulations, la loi de commande est donnée à partir du modèle dynamique. Afin d'assurer la sécurité de ce système, des contraintes sont imposées, dont les contraintes sur l'entrée sont choisies pour la protection des moteurs. De plus les contraintes sur les variations des signaux couples sont mises on considération, cela fin de diminuer les ondulations indésirables pour un tel système. Les résultats de simulation ont bien prouvés la

capacité de la commande prédictive surtout en terme de respect des contraintes où les signaux bornés par un intervalle donné sont toujours à l'intérieur de ce dernier. Une étude comparative avec un régulateur PD montre de plus, l'efficacité de la commande prédictive par rapport à ceci à suivre les trajectoires désirées.

Conclusion Générale

Cette thèse porte sur la commande prédictive sous contraintes. Celle-ci et grâce à sa formulation temporelle, présente le cadre nécessaire pour la prise en compte explicite de ces contraintes lors de la phase de synthèse.

Deux approches ont été développées en présence des contraintes, la commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini. Une propriété importante de ces techniques est l'optimisation en ligne, puisque la loi de commande, générée pour la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire, est calculée une fois pour toute à partir de la minimisation du critère quadratique construit de l'erreur de prédiction entre le signal de référence et la sortie du système, ce qui fait en ligne. À noter ici que le développement de Taylor de a a été utilisée pour donner l'erreur de poursuite future $e(t+h)$. Aussi une autre propriété de cette technique de commande pour la résolution des problèmes de poursuite de trajectoire est qu'en boucle fermée la stabilité est garantie pour les systèmes non linéaires de degré relatif inférieur ou égal à quatre.

L'étude de cette loi de commande en présence des contraintes est justifiée par l'importance de ces dernières à garantir la sécurité et le bon fonctionnement du système. Dans ce travail les contraintes ont été mises sur l'entrée, les variations d'entrée, la sortie et les variables d'état. L'idée principale de la commande prédictive avec contraintes est de translater le problème de contraintes à des équations linéaires en fonction du signal de commande, étant le seul variable dans le critère à minimiser.

La commande prédictive avec contraintes a été améliorée et testée tout d'abord pour le cas linéaire, où la commande prédictive sous espace d'état est choisie parmi plusieurs techniques de commande prédictive linéaire. Ce choix est justifié par les caractéristiques et les informations contenues dans la représentation d'état. Cette loi de commande linéaire a été ensuite, améliorée en présence des contraintes d'état, et appliquée au système chariot avec pendule pour contrôler la position du chariot tout en gardant l'angle au position d'équilibre. Les résultats de simulation ont montré une bonne performance, soit pour la poursuite de trajectoire du chariot désirée, ou pour le respect de tout les contraintes imposées, ce qui maintien le pendule en position d'équilibre.

Concernant le cas de la commande prédictive non linéaire avec contraintes, le principe reste le même: translater les problèmes avec contraintes à des équations linéaire en fonction de la même variable, la loi de commande est donc extraite par la minimisation d'un critère quadratique avec contraintes.

Une première application de la commande prédictive non linéaire avec contraintes, cherche à contrôler la position angulaire et la vitesse linéaire d'une chaise roulante, les contraintes sont imposées sur le signal couple d'entrée et les signaux de sortie. La loi de

commande a été testée pour les cas de la chaise sur un plat ou une pente. Les résultats de la simulation étaient satisfaisants, la chaise a bien suivi les trajectoires désirées tout en gardant les valeurs des couples et des sorties à l'intérieur de l'intervalle limité.

La machine asynchrone a été prise comme une deuxième application, où la structure cascade a été appliquée afin de contrôler le flux rotorique, la vitesse et le couple électromagnétique, dans ce cas les contraintes sont imposées sur le signal de tension pour la protection de la machine. A partir des résultats de simulation, les signaux de flux rotorique, de la vitesse et du couple ont bien suivi les trajectoires désirées et les valeurs de tensions ont bien respecté les valeurs maximales et minimales imposées.

Dans la dernière application, la commande prédictive non linéaire a été appliquée à un bras manipulateur afin de commander les positions angulaires en présence des contraintes sur le signal couple et sur ses variations, cette dernière est choisie afin de limiter les ondulations dans le signal couple. Les résultats de simulation ont montré une performance en terme de poursuite où les positions angulaires ont bien suivi les trajectoires désirées tout en respectant les contraintes imposées soient celles imposées sur le signal couple de commande où les valeurs de ce dernier restent limitées par les contraintes imposées. Soient celles imposées sur les variations de couple dont on remarque à partir des graphes l'absence des ondulations.

À travers les résultats de simulation effectuées sur les différents exemples, nous pouvons constater que la commande prédictive avec contraintes montre une grande performance en termes de poursuite de la trajectoire de référence tout en respectant les contraintes données.

Finalement et du côté applicatif, il serait très intéressant d'embarquer, sur calculateur électronique, les lois de commande développées au cours de nos travaux sur les systèmes étudiés afin de juger de manière plus performante leurs caractéristiques.

Références

[All, 04] F. Allgöwer, R. Findeisen, Z. K. Nagy, "Nonlinear Model Predictive Control From Theory to Application", J. Chin. Inst. Chem. Engrs, Vol. 35, N^o. 3, pp. 299–315, 2004.

[Bar, 06] K. Barra, K. Benmahammed, "A new Extended Cascaded Predictive Control ECGPC of an Induction Motor Drive With Energy Saving", IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, Benalmaden, Espagne, 2006.

[Bdi, 10] K. Bdirina, D. Djoudi, "Predictive Control With Constraints of Inverted Pendulum", International Conference on Applied Mechanics, Materials, and Manufacturing, ICAMMM 2010, Sultanate Oman, 2010.

[Bdi1, 11] K. Bdirina, H. Naimi, R. Hedjar, "Commande Prédictive Non Linéaire à un pas de la Machine Asynchrone ", International Conference on Electronics and Oil ICEO'11, Ouargla, 2011.

[Bdi2, 11] K. Bdirina, R. Hedjar, H. Naimi, "Commande Prédictive A Horizon Fini de la Machine Asynchrone", Journées Nationales sur la Conception et L'optimisation en Electrotechnique, JNCO, Jijel, 2011.

[Bdi1, 12] K. Bdirina, D. Djoudi, M. Lagoun, "Linear predictive control with state variable constraints", The Sixth Global Conference on Power Control and optimization. AIP Conference Proceedings, Vol. 1499, pp. 182-186, 2012.

[Bdi2, 12] K. Bdirina, R. Hedjar, M. S. Boucherit, D. Djoudi, "Nonlinear Predictive Control with Input Constraints of Robot Manipulator", The 2nd International Conference on Systems and Control, ICSC 2012, Maroc, 2012.

[Bdi3, 12] K. Bdirina, R. Hedjar, M.S. Boucherit, D. Djoudi, D. Rabehi, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of two links robot Manipulators ", the 21st Edition of the International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, SPEEDAM2012, Italy, 2012

[Bdi, 13] K. Bdirina, D. Djoudi, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of Cart with Pendulum with Input Constraints", Recent Advances in Robotics and Mechatronics, RARM, Turkiye, 2013.

[Bdi, 14] **K. Bdirina**, M.S. Boucherit, R. Hedjar, D. Djoudi, H. Naimi, "Nonlinear Predictive Control with Input Constraints of Electrical Wheelchair", The Mediterranean Journal of Measurement and Control, Vol. 10, N°. 02, pp. 215-223, 2014.

[Bdi1, 15] **K. Bdirina**, R. Hedjar, M. S. Boucherit, "State Constrained Predictive Control of Cart with Inverted Pendulum", The 3rd Conference on Control, Engineering and Information technology CEIT, Tlemcen, 2015.

[Bdi2, 15] **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, H. Naimi, "Predictive Control for Trajectory Tracking of an Electrical Wheelchair", The 4th International Conference on Control and Systems, ICSC'2015, Tunisie, 2015.

[Bdi3, 15] B. Nail, **K. Bdirina**, A. Kouzou, A. Hfaifa, "Sliding Mode Control and Optimal GPC Algorithm for Coupled Tanks", the 3rd Conference on Control, Engineering and Information Technology CEIT, Tlemcen, 2015.

[Bem, 04] A. Bemporad, "Efficient Conversion of Mixed Logical Dynamical Systems into an Equivalent Piecewise Affine Form", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, N°.5, pp. 832-838, 2004.

[Ben, 09] H. Benlaoukli, "Méthodes Géométriques pour la Construction des Ensembles Invariants Application à la faisabilité des Lois de Commande Prédictive", Thèse de doctorat, Université Paris-sud 1, France, 2009.

[Bla, 99] R. Blauwkamp, T. Basar, "A Receding Horizon Approach to Robust Output Feedback Control for Nonlinear Systems", Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 5, pp. 4879-4884, 1999.

[Bom, 08] I. Bombard, B. Da Silva, P. Dufour, P. Laurent, J. Lieto, "Contrôle par Commande Prédictive d'un Procédé de Cuisson sous Infrarouge de Peintures en Poudre", Société Française de Thermique SFT, 2008.

[Bou, 06] P. Boucher, D. Dumur, "La commande prédictive: Avancées et perspectives", Traité IC2, Hermes, Paris, 2006.

[Cam, 98] E.F. Camacho, C. Bordons, "Model Predictive Control in the Process Industry", Springer, London, 1998.

[Che, 82] C. Chen, L. Shaw, "On receding Horizon Feedback Control", Automatica, Vol. 18, N°. 3, pp. 349-352, 1982.

[Che, 97] H. Chen, C. W. Scherer, F. Allgöwer, "A Game Theoretic Approach to Nonlinear Robust Receding Horizon Control of Constrained Systems", Proceedings of American Control Conference, 1997.

[Che, 01] W. H. Chen, "Analytic Predictive Controllers for Nonlinear Systems with Ill-Defined Relative Degree", IEE Proceedings Control Theory and Applications, Vol. 148, N^o. 1, 2001.

[Che, 03] W. H. Chen, "Optimal Control of Nonlinear systems A Predictive Control Approach", Automatica, Vol. 39, N^o. 1, pp. 633–641, 2003.

[Cip, 99] M. C. Ficarra, G. Griva, F. Profumo, "Adaptive Predictive Speed Controller for Induction Motor Drives", The 25th Annual Conference of the IEEE, Vol. 2, pp. 630-635. 1999.

[Cla, 87] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P. Stuffs, "Generalized Predictive Control I : The Basic Algorithm", Automatica, 1987.

[Cla, 91] D. W. Clarke, R. Scattolini, "Constrained Receding Horizon Predictive Control", IEE proceedings part D, Vol. 138, pp. 347-354, 1991.

[Coo, 06] R. A. Cooper, M. L. Boninger, D. M. Spaeth, D. Ding, G. Songfeng, M. Koontz, S. G. Fitzgerald, R. Cooper, A. Kelleher, and D. M. Collins, "Engineering Better Wheelchairs to Enhance Community Participation", Neural Systems and Rehabilitation Engineering, IEEE Transactions on, Vol. 14, pp. 438-455, 2006.

[Cut, 79] C. R. Cutler, B. L. Ramaker, "Dynamic Matrix Control : a Computer Control Algorithm", American Institute of Chemical Engineers AIChE Annual Meeting, Houston, Texas, 1979.

[Dab, 10] M. Marcelin Dabo, "Commande Prédictive Généralisée Non Linéaire à Temps Continu des Systèmes Complexes", Thèse doctorat, Université de Rouen, France, 2010.

[Dar, 00] J. Darlington, C. C. Pantelides, B. Rustem, B. A. Tanyi, "Decreasing the Sensitivity of Open-Loop optimal Solutions in Decision Making Under Uncertainty", European Journal of Operational Research, Vol. 121, N^o. 2, pp. 343–362, 2000.

[Dem, 91] H. Demircioglu, P. G. Gawthrop, "Continuous Time Generalized Predictive Control (GPC)", Automatica, Vol. 27, N^o. 1, pp. 55-74, 1991.

[Djo, 08] A. Djoudi, B. Tassadit, " Synthèse et application de lois de commande non linéaires sur un pendule inversé", Mèmoire de Magister, ENP, El-Harrach, Algérie 2008.

[Dum, 96] D. Dumer, P. Boucher, T. Kolb, "Application of Cascaded Constrained Receding Horizon Predictive Control to an Induction Machine", Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, Dearborn, IM, 1996.

[Dum, 98] D. Dumer, P. Boucher, J. Röder, "Design of an Open Architecture Structure for Implementation of Predictive Controllers for Motors Drives", Proceeding of the IEEE International Conference on Control Applications, Trieste, Italie, 1998.

- [Feh,00] L. Fehr, W. E. Langbein, and S. B. Skaar, "Adequacy of Power Wheelchair Control Interfaces for Persons with Severe Disabilities: A Clinical Survey", *Journal of Rehabilitation Research and Development*, Vol. 37, pp. 353-360, 2000.
- [Fle, 81] R. Fletcher, "Practical Methods of Optimization, Volume 2, Constrained Optimization", John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [Gar, 89] C. E. García, D. M. Prett, M. Morari, "Model Predictive Control Theory and Practice : a Survey", *Automatica*, Vol. 25, N^o. 3, pp. 335-348, 1989.
- [Gaw, 06] P. J. Gawthrop, L. Wang, "Intermittent Predictive Control of an Inverted Pendulum", *Control Engineering Practice*, 2006.
- [Gin, 03] R. Ginhoux, "Compensation des Mouvements Physiologiques en Chirurgie Robotisée par Commande Prédictive", Thèse de doctorat, Université du Languedoc, Montpellier II, France, 2003.
- [Gla, 03] A. H. Glattfelder, W. Schaufeldger, "Control Systems with Input and Output Constraints", Springer, 2003.
- [Goo, 04] G. C. Goodwin, M. M. Seron, J.A. De Dona, "Constrained Control and Estimation", Springer-Verlag, London, 2004.
- [Gra, 04] E. Granado, "Commande Prédictive à Base de Programmation Semi Définie", Thèse doctorat en automatique, INSA de Toulouse, 2004.
- [Hed1, 00] R. Hedjar, R. Toumi, P. Boucher, D. Dumur, " Cascaded Nonlinear Predictive Control of Induction Motor", *Proceedings of 9th IEEE conference on control and application*, Anchorage, 2000.
- [Hed2, 00] R. Hedjar, " Contribution à L'analyse et à la Synthèse de Commandes Adaptatives et Predictive. Application à un Processus Physique", Thèse Doctorat, USTHB, Algérie, 2000.
- [Hed, 02] R. Hedjar, R. Toumi, P. Boucher, D. Dumur, " Commande Prédictive non Linéaire d'un Robot Manipulateur Rigide", *Journal Européen des Systèmes Automatisés JESA*, Vol. 36, N^o. 6, pp. 845-863, 2002.
- [Hed, 03] R. Hedjar, R. Toumi, P. Boucher, D. Dumur, "Two Cascaded Nonlinear Predictive Controls of Induction Motor", *IEEE Conference on Control Applications*, Vol. 1, pp. 458-463, 2003, Istanbul, Turquie.
- [Hed, 04] R. Hedjar, R. Toumi, P. Boucher, D. Dumur, "End Point Constraints Nonlinear Predictive Control with Integral Action for Induction Motor", *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications Taiwan*, 2004.
- [Hed1, 05] R. Hedjar, P. Boucher, D. Dumur, "Robust Nonlinear Receding Horizon Control of Induction Motors", *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Seville, Spain*, 2005.

[Hed2, 05] R. Hedjar, P. Boucher, "Nonlinear receding Horizon Control of Rigid Link Robot Manipulators", International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 2, N^o. 1, pp. 15-24, 2005.

[Hen, 95] J. C. Hennes, "Discrete Time Constrained Linear Systems", Control and Dynamical Systems, Vol. 71, pp. 157-213, 1995.

[Kal, 60] R. E. Kalman, "Contributions to the Theory of Optimal Control", Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. 5, pp.102-119, 1960.

[Key, 85] R. M. C. Keyser, A. R. Van Cauwenberghe, "Extended Prediction Self-Adaptive Control", IFAC symposium on Identification and System Parameter Estimation, New York, 1985.

[Kot, 94] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, C. N. Nett, "A Unified Framework for the Study of Antiwindup Designs", Automatica, Vol. 30, pp. 1869–1883, 1994.

[Kot, 96] M. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari, " Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities", Automatica, Vol. 32, N^o. 10, pp. 1361–1379, 1996.

[Laf, 96] J. Lafontaine, " Introduction aux variétés différentielles", EDP Sciences, 1996.

[Lal, 94] S. Lall, K. Glover, " A Game Theoretic Approach to Moving Horizon Control", Oxford University Press, 1994.

[Lee, 67] E. B. Lee, L. Markus, " Foundations of Optimal Control Theory", Wiley, 1967.

[Lue, 84] D. G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Second Edition, Addison Wesley company, 1984.

[Maa, 99] M. K. Maaziz, P. Boucher, D. Dumur, "A new RST Cascaded Predictive Control Scheme for Induction Machines", Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications, Hawaii, USA, 1999.

[Maa, 00] M. Maaziz, "Commande Prédictive de Systèmes Non Linéaires Application à la Commande de Machines Asynchrones", Thèse doctorat, École Supérieure d'Électricité, France, 2000.

[Mag, 01] L. Magni, H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, "A Receding Horizon Approach to the Nonlinear H^∞ Control Problem", Automatica, Vol. 37, N^o. 5, pp. 429–435, 2001.

[Mag, 97] L. Magni, L. Sepulchre, "Stability Margins of Nonlinear Receding-Horizon Control Via Inverse Optimality", Systems and Control Letters, Vol. 32, pp. 241–245, 1997.

[May, 00] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, P. O. M. Scokaert, "Constrained Model Predictive Control Stability and Optimality", Automatica, Vol. 26, N^o. 6, pp. 789–814, 2000.

- [Nij, 90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer Verlag, New York, 1990.
- [Ony, 09] S. O. Onyango, Y. Hamam, M. Dabo, K. Djouani, G. Qi, "Dynamic Control of an Electrical Wheelchair on an Incline", Proceedings of the IEEE AFRICON, Nairobi, Kenya, 2009.
- [Pen, 96] Y. Peng, D. Vrančić, R. Hanus, "Anti-windup, Bumpless and Conditioned Transfer Techniques for PID Controllers", IEEE Control System Magazine, Vol. 16, pp. 48–57, 1996.
- [Pin, 95] L. Ping, "Optimal Predictive Control of Continuous Nonlinear Systems", International Journal of Control, Vol. 62, N^o. 2, pp. 121–146, 1995.
- [Pro, 63] A. I. Propoi, "Use of LP Methods for Synthesizing Sampled-data Automatic Systems", Automn Remote Control, Vol. 24, N^o. 7, pp. 837–844, 1963.
- [Qin, 03] S. J. Qin, T. A. Badgwell, "A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology", Control Engineering Practice, Vol. 11, pp. 733–764, 2003.
- [Ric, 91] N. L. Ricker, "Model Predictive Control : State of the Art", The 4th International Conference on Chemical Process Control, Texas, 271–296, 1991.
- [Ric, 76] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, J. Papon, "Algorithmic Control of Industrial Processes", Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, 1976.
- [Ric, 78] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, J. Papon, "Model Predictive Heuristic Control Application to Industrial Processes", Automatica, Vol. 14, pp. 413–428, 1978.
- [Ric, 87] J. Richalet, S. Abu El Ata, C. Arber, M. B Kuntze, A. Jacubasch, W. Schill, "Predictive Functional Control. Application to Fast and Accurate Robots", The 10th IFAC World Congress, Munich, 1987.
- [Ric, 14] J. Richalet, "Commande Prédictive", Technique de L'ingénieur, 2014, Référence 7425, 2014.
- [Rust, 94] B. Rustem, "Stochastic and Robust Control of Nonlinear Economic Systems", European Journal of Operational Research, Vol. 73, pp. 304–318, 1994.
- [Sia, 92] P. Siarry, "Automatique de Base", Edition Marketing, Paris, 1992.
- [Slo, 91] J. E. Slotine, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, 1991.
- [Sto, 08] C. Stoica, "Robustification de Lois de Commande Prédictives Multivariées", Thèse Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, France, 2008.
- [Tar, 97] S. Tarbouriech, G. Garcia, "Control of Uncertain Systems with Bound Inputs", Springer, 1997.

[Vac, 07] C. Vachier, "Représentation D'état et Commande dans L'espace D'état", Cours, UFR Sciences et Technologie, Université Paris XII-VAL de Marne, France, 2007.

[Wan, 09] L. Wang, "Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab", School of Electrical and Computer Engineering, RMIT University, edition Springer, Australia, 2009.

[Wei, 95] Q. F. Wei, W. P. Dayawansa, W.S. Levine, "Nonlinear Controller for an Inverted Pendulum Having Restricted Travel", Automatica, Vol. 31, 1995.

[Yam, 89] T. Yamakawa, "Stabilization of an Inverted Pendulum by High Speed Fuzzy Logic Controller Hardware System", Fuzzy Sets and Systems, 1989.

[Yds, 84] BE. Ydstie, "Extended Horizon Adaptive Control", The 9th IFAC World Congres, Vol. 7, pp 133-137, Budapaset, 1984.

[Zad, 62] L. A. Zadeh, B. H. Whalen, "On Optimal Control and Linear Programming", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 7, N^o. 4, pp. 45-46, 1962.

ANNEXE A

A.1-Modélisation de la Chaise roulante

Considérons la chaise roulante dans son ensemble comme un corps rigide, voir les figures Fig(IV.1) et Fig(IV.2).

Soit L le lagrangien de ce corps. Il est donné par :

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 + lM\dot{\theta}\cos\phi(\dot{x}_g\sin\theta - \dot{y}_g\cos\theta) - Mgsin\phi(x_g\cos\theta + y_g\sin\theta) \quad (A.1)$$

L'équation du mouvement peut donc être déduite à partir du lagrangien par la relation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{qr} \quad (A.2)$$

Où t représente le temps, q le vecteur de position de la chaise roulante, \dot{q} son vecteur vitesse et F_{qr} l'ensemble des forces qui s'appliquent au système. Les vecteurs q et \dot{q} sont donnés respectivement par :

$$q = \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

Calculons, à présent, les différents termes de l'équation de mouvement (A.2). Il vient :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_g} \quad \frac{\partial L}{\partial y_g} \quad \frac{\partial L}{\partial z_g} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \quad (A.4)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_g} = -Mgsin\phi\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial y_g} = -Mgsin\phi\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial z_g} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = lM\dot{\theta}\cos\phi(\dot{x}_g\cos\theta + \dot{y}_g\dot{\theta}\sin\theta) - Mgsin\phi(y_g\cos\theta - x_g\sin\theta) \end{cases} \quad (A.5)$$

Par analogie :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_g} = M\dot{x}_g + lM\dot{\theta}\cos\phi\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_g} = M\dot{y}_g - lM\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_g} = M\dot{z}_g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_z\dot{\theta} - lM\cos\phi(\dot{y}_g\cos\theta - \dot{x}_g\sin\theta) \end{cases} \quad (A.6)$$

D'où leurs dérivées premières par rapport au temps :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_g} \right) = M\ddot{x}_g + lM\cos\phi(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_g} \right) = M\ddot{y}_g - lM\cos\phi(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_g} \right) = M\ddot{z}_g \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_z\ddot{\theta} + lM\cos\phi(\dot{x}_g\sin\theta + \dot{x}_g\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}_g\dot{\theta}\sin\theta - \dot{y}_g\cos\theta) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Puisque l'équation du mouvement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_g} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_g} \\ \frac{\partial L}{\partial y_g} \\ \frac{\partial L}{\partial z_g} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{qr1} \\ F_{qr2} \\ F_{qr3} \\ F_{qr4} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Il vient :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_g + lM\cos\phi(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + Mg\sin\phi\cos\theta & = F_{qr1} \\ M\ddot{y}_g - lM\cos\phi(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + Mg\sin\phi\sin\theta & = F_{qr2} \\ M\ddot{z}_g & = F_{qr3} \\ I_z\ddot{\theta} + lM\cos\phi(\dot{x}_g\sin\theta + \dot{x}_g\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}_g\dot{\theta}\sin\theta - \dot{y}_g\cos\theta) - lM\dot{\theta}\cos\phi(\dot{x}_g\cos\theta + \dot{y}_g\sin\theta) \\ \quad + Mg\sin\phi(y_g\cos\theta - x_g\sin\theta) & = F_{qr4} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Ou, de manière équivalente :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F_{qr} \quad (\text{A.10})$$

La matrice $M(q)$ est la matrice d'inertie. Elle est symétrique, définie positive et est donnée par :

$$M(q) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & lM\cos\phi\sin\theta \\ 0 & M & 0 & -lM\cos\phi\cos\theta \\ 0 & 0 & M & 0 \\ lM\cos\phi\sin\theta & -lM\cos\phi\cos\theta & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

La matrice $V(q, \dot{q})$ est celle des forces centripètes et de Coriolis. Elle est telle que :

$$V(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & lM\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & lM\dot{\theta}\cos\phi\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de forces gravitationnelles $G(q)$ est tel que :

$$G(q) = \begin{pmatrix} Mg\sin\phi\cos\theta \\ Mg\sin\phi\sin\theta \\ 0 \\ Mg\sin\phi(y_g\cos\theta - x_g\sin\theta) \end{pmatrix}$$

Comme il est cité précédemment, les forces de frottement étant négligées dans cette étude, l'ensemble des forces qui s'appliquent à la chaise est composé, uniquement, des forces motrices F_m de la chaise et des forces générées par les contraintes non holonomes F_{cn} . Elles sont données par les relations suivantes :

$$F_m = E(q)\tau \text{ et } F_{cn} = A^T(q)\lambda \quad (\text{A.11})$$

Où :

$$E(q) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \\ \frac{\sin\theta}{r} & \frac{\sin\theta}{r} \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{r} & \frac{-b}{r} \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & \sin\phi & -l \\ \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur λ est celui des multiplicateurs de Lagrange.

Par ailleurs, l'équation de la cinétique de la chaise roulante est donnée par :

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (\text{A.12})$$

Où la matrice $S(q)$ est telle que :

$$s(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -l\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta & l\cos\phi\cos\theta \\ 0 & l\sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et le vecteur η des vitesses linéaire v et angulaire ω est donné par :

$$\eta = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

En dérivant l'équation (V.10) une fois par rapport au temps, il vient :

$$\ddot{q} = \dot{s}(q)\eta + s(q)\dot{\eta} \quad (\text{A.14})$$

Avec la matrice $\dot{s}(q)$ donnée par :

$$\dot{s}(q) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}l\cos\phi\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta & \dot{\theta}l\cos\phi\sin\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remplaçons chacune des équations (A.12) et (A.14) par son expression dans l'équation (A.10). Après simplifications, il vient le système non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\sin\phi \\ \frac{gM\sin\phi(y_g\cos\theta - x_g\sin\theta)}{Ml^2\cos^2\phi - I_z} \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{Mr} & \frac{1}{Mr} \\ \frac{b}{r(I_z - Ml^2\cos^2\phi)} & \frac{-b}{r(I_z - Ml^2\cos^2\phi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Supposons que le vecteur d'état $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ est choisi comme : $x = (v \ \omega \ \theta)^T$; $u = \begin{pmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{pmatrix}$

On représente (A.15) sous forme matricielle est donnée par :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -g \sin \phi \\ \frac{g M \sin \phi (y_g \cos x_3 - x_g \sin x_3)}{M l^2 \cos 2 \phi - I_z} \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{M r} & \frac{1}{M r} \\ \frac{b}{r(I_z - M l^2 \cos 2 \phi)} & \frac{-b}{r(I_z - M l^2 \cos 2 \phi)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \quad (\text{A.16})$$

A.2 Dérivées de Lie pour les sorties vitesse linéaire et la position angulaire

$$\begin{aligned} &\triangleright h_1 = x_1 \\ L_f h_1 &= -g \sin \phi; L_{g_1} L_f h_1 = \frac{1}{M r}; L_{g_2} L_f h_1 = \frac{1}{M r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\triangleright h_2 = x_3 \\ L_f h_2 &= x_2; L_f^2 h_2 = \frac{g M \sin \phi (y_g \cos x_3 - x_g \sin x_3)}{M l^2 \cos 2 \phi - I_z} \end{aligned}$$

$$L_{g_1} L_f h_2 = \frac{b}{r(I_z - M l^2 \cos 2 \phi)}; L_{g_2} L_f h_2 = \frac{-b}{r(I_z - M l^2 \cos 2 \phi)}$$

A.3-Les paramètres utilisés pour la chaise roulante électrique

Masse totale de la personne et de la chaise	M = 80kg
Moment d'inertie de la chaise par rapport à l'axe z	Iz = 39.733kgm ²
Dimensions de la chaise	b = 0.35m, l = 0.25m, r = 0.2m

ANNEXE B

B.1-Dérivées de Lie pour les sorties couple électromagnétique, norme du flux Rotorique et vitesse rotorique

$$\triangleright h_1 = \frac{PM}{L_r} (\varphi_{dr} I_{qs} - \varphi_{qr} I_{ds})$$

$$L_f h_1 = \frac{PM}{L_r} \left(\gamma + \frac{1}{T_r} \right) (\varphi_{qr} I_{ds} - \varphi_{dr} I_{qs}) - P\omega (\varphi_{dr} I_{ds} + \varphi_{qr} I_{qs}) - PK\omega (\varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2)$$

$$L_{g_1} L_f h_1 = -\frac{PM}{\sigma L_s L_r} \varphi_{qr} \quad ; \quad L_{g_2} L_f h_1 = \frac{PM}{\sigma L_s L_r} \varphi_{dr}$$

$$\triangleright h_2 = \varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2$$

$$L_f h_2 = \frac{2M}{T_r} (\varphi_{dr} I_{ds} + \varphi_{qr} I_{qs}) - \frac{2}{T_r} (\varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2)$$

$$L_f^2 h_2 = -\frac{2M}{T_r} \left(\gamma + \frac{3}{T_r} \right) (\varphi_{dr} I_{ds} + \varphi_{qr} I_{qs}) - \frac{2PM}{T_r} \omega (\varphi_{qr} I_{ds} - \varphi_{dr} I_{qs}) \\ + \frac{4 + 2MK}{T_r^2} (\varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2) + \frac{2M^2}{T_r^2} (I_{dr}^2 + I_{qr}^2)$$

$$L_{g_1} L_f h_2 = \frac{2M}{\sigma L_s L_r} \varphi_{dr} \quad ; \quad L_{g_2} L_f h_2 = \frac{2M}{\sigma L_s L_r} \varphi_{qr}$$

$$\triangleright h_3 = \omega$$

$$L_f h_3 = \frac{PM}{JL_r} (\varphi_{qr} I_{ds} - \varphi_{dr} I_{qs}) - \frac{f}{J} \omega - \frac{1}{J} C_r$$

$$L_f^2 h_3 = \frac{PM}{JL_r} \left(\gamma + \frac{1}{T_r} + \frac{f}{J} \right) (\varphi_{qr} I_{ds} - \varphi_{dr} I_{qs}) - \frac{P^2 MK}{JL_r} (\varphi_{dr}^2 + \varphi_{qr}^2) \\ - \frac{P^2 M}{JL_r} \omega (\varphi_{dr} I_{ds} + \varphi_{qr} I_{qs}) + \left(\frac{f}{J} \right)^2 \omega + \frac{f}{J^2} C_r$$

$$L_{g_1} L_f h_3 = -\frac{PM}{J\sigma L_s L_r} \varphi_{qr} \quad ; \quad L_{g_2} L_f h_3 = \frac{PM}{J\sigma L_s L_r} \varphi_{dr}$$

B.2.-Valeurs numérique de la machine asynchrone utilisée

Puissance nominale	1.5kw
Tension nominale	220v
Rendement nominale	0.78
Facteur de puissance nominale	0.8

Vitesse nominale	1420tr/mn
Fréquence nominale	50Hz
Courant nominale	3.64 A(y) et 6.31 A(Δ)
Resistance statorique	4.85 Ω
Resistance rotorique	3.805 Ω
Inductance cyclique statorique	0.274 H
Inductance cyclique rotorique	0.274 H
Inductance mutuelle statorique	0.258 H
Nombre de paires de pôles	2
Moment d'inertie	0.031 Kg.m ²
Coefficient de frottement	0.008 Nm.s/rd
Inductance de filtre	0.1 H
Capacité de filtre	250 μ F

ANNEXE C

C.1. Modèle dynamique

Le modèle dynamique d'un manipulateur à un rôle important dans l'analyse du comportement d'un manipulateur, pour la conception des méthodologies de commandes et pour la simulation du mouvement, qui permet de développer des améliorations aux stratégies de contrôle sans avoir besoin d'un manipulateur expérimental.

Dans la littérature on retrouve deux méthodes pour d'obtention des équations du mouvement d'un manipulateur dans l'espace articulaire, la formulation de Newton–Euler et celle de Lagrange ; dans le présent travail, on s'intéresse au formalisme de Lagrange. Le comportement dynamique d'un manipulateur est décrit par la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\tau = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (\text{C.1})$$

Avec :

- τ : vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement couples;
- q vecteur des positions articulaires;
- \dot{q} vecteur des vitesses articulaires;
- \ddot{q} vecteur des accélérations articulaires;
- f_e vecteurs représentant l'effort extérieur (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement

C.2. Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{C.2})$$

Avec :

- L lagrangien du système égale à $E-U$;
- E énergie cinétique totale du système ;
- U énergie potentielle totale du système.

C.2.1. Forme générale des équations dynamiques

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (\text{C.3})$$

Où A est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique, d'élément générique A_{ij} , appelée aussi matrice d'inertie du robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction des variables articulaires q .

L'énergie potentielle étant fonction des variables articulaires q , le couple τ peut s'écrire sous la forme :

$$\tau = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (C.4)$$

Avec :

- $C(q, \dot{q})\dot{q}$ vecteur de dimension $(n \times 1)$ représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges, tel que:

$$C\dot{q} = \dot{A}\dot{q} - \frac{\partial E}{\partial q} \quad (C.5)$$

- $G(q)$ vecteur des couples/forces de gravité.

Plusieurs formes sont possibles pour la matrice C . On peut, par exemple, calculer ses éléments à partir du symbole de Christoffel $c_{i,jk}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{i,jk} \dot{q}_k \\ C_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{array} \right. \quad (C.6)$$

Les éléments du vecteur G se calculent en écrivant :

$$g_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (C.7)$$

C.2.2. Le modèle dynamique du bras 2 DDL

L'énergie cinétique du système de la Fig (VI.1) est donnée par la relation :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (C.8)$$

Où E_j désigne l'énergie cinétique du corps c_j , qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} (\omega_j^T I_{c_j} \omega_j + m_j v_{c_j}^T v_{c_j}) \quad (C.9)$$

sachant que :

$$I_{c_j} = I_j - m_j l_{c_j}^2 \quad (C.10)$$

Alors :

$$E_j = \frac{1}{2} (\omega_j^T (I_j - m_j l_{c_j}^2) \omega_j + m_j v_{c_j}^T v_{c_j}) \quad (C.11)$$

Avec :

- I_{c_j} moment d'inertie du corps c_j autour de son centre de gravité;
- I_j moment d'inertie du corps c_j autour de l'origine du repère R_j ;
- v_{c_j} vitesse du centre de gravité du corps c_j ;
- l_{c_j} la distance entre le centre de gravité du corps c_j et l'origine du repère R_j .

Etant donné que :

$$v_{cj} = J_{vj} \dot{q} \quad \text{et} \quad \omega_j = J_{\omega j} \dot{q} \quad (\text{C.12})$$

Alors on à :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (J_{vj} \dot{q})^T (J_{vj} \dot{q}) + (J_{\omega} \dot{q})^T (I_j - m_j l_{cj}^2) (J_{\omega} \dot{q}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{j=1}^n m_j (J_{vj})^T J_{vj} + (J_{\omega})^T (I_j - m_j l_{cj}^2) J_{\omega} \right) \dot{q} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

De la forme :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (\text{C.14})$$

Alors :

$$A = \sum_{j=1}^n m_j (J_{vj})^T J_{vj} + (J_{\omega})^T (I_j - m_j l_{cj}^2) J_{\omega} \quad (\text{C.15})$$

On prend en compte les inerties des actionneurs J_j dans le modèle dynamique en prenant en compte l'énergie cinétique de l'actionneur j par un terme de la forme $\frac{1}{2} J_j \dot{q}_j^2$. Apres devant on déduit que l'élément A_{jj} de la matrice A doit être augmenté de J_j .

$$\begin{aligned} A &= m_1 \begin{pmatrix} -l_{c1} s q_1 & l_{c1} c q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_{c1} s q_1 & 0 \\ l_{c1} c q_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (I_1 - m_1 l_{c1}^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & m_2 \begin{pmatrix} -l_1 s q_1 - l_{c2} s(q_1 + q_2) & l_1 c q_1 + l_{c2} c(q_1 + q_2) \\ -l_{c2} s(q_1 + q_2) & l_{c2} c(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_1 s q_1 - l_{c2} s(q_1 + q_2) & -l_{c2} s(q_1 + q_2) \\ l_1 c q_1 + l_{c2} c(q_1 + q_2) & l_{c2} c(q_1 + q_2) \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (I_2 - m_2 l_{c2}^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_l \begin{pmatrix} -l_1 s q_1 - (l_2 + l_{cl}) s(q_1 + q_2) & l_1 c q_1 + (l_2 + l_{cl}) c(q_1 + q_2) \\ -(l_2 + l_{cl}) s(q_1 + q_2) & (l_2 + l_{cl}) c(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -l_1 s q_1 - (l_2 + l_{cl}) s(q_1 + q_2) & -(l_2 + l_{cl}) s(q_1 + q_2) \\ l_1 c q_1 + (l_2 + l_{cl}) c(q_1 + q_2) & (l_2 + l_{cl}) c(q_1 + q_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (I_l - m_l (l_2 + l_{cl})^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} A_{11} &= m_2 l_1^2 + m_l l_1^2 + I_1 + I_2 + I_l + J_1 + 2(m_2 l_1 l_{c2} + m_l l_1 (l_2 + l_{cl})) \cos q_2 \\ A_{12} &= A_{21} = I_2 + I_l + (m_2 l_1 l_{c2} + m_l l_1 (l_2 + l_{cl})) \cos q_2 \\ A_{22} &= I_2 + I_l + J_2 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Les symboles de *Christoffel* sont alors donnés comme ce qui suit :

$$c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \quad (\text{C.17})$$

On a :

$$\begin{aligned}
c_{111} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1} \right) = 0; \\
c_{112} = c_{121} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} \right) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 - m_L l_1 (l_2 + l_{cL}) \sin q_2; \\
c_{122} &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial A_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial q_1} \right) = -(m_2 l_1 l_{c2} + m_L l_1 (l_2 + l_{cL})) \sin q_2; \\
c_{211} &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial A_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} \right) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 + m_L l_1 (l_2 + l_{cL}) \sin q_2; \\
c_{221} = c_{212} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial q_1} \right) = 0; \\
c_{222} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial q_2} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Etant donné que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \tag{C.18}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -\dot{q}_2 (m_2 l_1 l_{c2} + m_L l_1 (l_2 + l_{cL})) \sin q_2; \\
c_{12} &= -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (m_2 l_1 l_{c2} + m_L l_1 (l_2 + l_{cL})) \sin q_2; \\
c_{21} &= \dot{q}_1 (m_2 l_1 l_{c2} + m_L l_1 (l_2 + l_{cL})) \sin q_2; \\
c_{22} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

L'énergie potentielle totale du manipulateur est simplement la somme des énergies potentielle de chaque corps j celle des corps :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j \tag{C.20}$$

Avec n: nombre des corps

$$\begin{cases} U_1 = m_1 g l_{c1} \sin q_1 \\ U_2 = m_2 g (l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ U_3 = m_3 g (l_1 \sin q_1 + (l_2 + l_{cL}) \sin(q_1 + q_2)) \end{cases} \tag{C.21}$$

Dans ce cas on a 3 corps donc :

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

A partir des équations (C.7)(C.20).et (C.21) on déduit les composants g_1 et g_2 du vecteur G :

$$g_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) g \cos q_1 + (m_2 l_{c2} + m_3 (l_2 + l_{cL})) g \cos(q_1 + q_2)$$

$$g_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = (m_2 l_{c2} + m_3 (l_2 + l_{cL})) g \cos(q_1 + q_2)$$
(C.22)

Explicitement les équations mathématiques gouvernant le mouvement peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \tau$$
(C.23)

ملخص الهدف من هذا البحث هو استخراج وتطبيق قانون الرقابة التنبؤية في ظل وجود معوقات. بعد دراسة حالة النظم الخطية باستخدام السيطرة التنبؤية في فضاء الحالة، اثنتين من تقنيات التحكم التنبؤية غير الخطية قدمتا التحكم التنبؤي ذو الخطوة والتحكم التنبؤي ذو الأفق المحدود. هذا وقد فرقت القيود على اشارات الدخول، تغييرات الدخول، الخروج ومتغيرات الحالة. لاختبار فعالية هذا القانون تمت دراسة أمثلة التطبيق التالية عربية مع بندول مقلوب بالنسبة للحالة الخطية، كرسي متحرك، ذراع مناور بالنسبة للحالة غير الخطية وآلة غير متزامنة للحالات غير الخطية ذات الهيكل المتتالي. هذا وقد اشارت نتائج المحاكاة فعالية هذا القانون من ناحية تتبع الاشارة المرجعية مع احترام القيود المفروقة.

كلمات مفاتيح : التحكم التنبؤي اللاخطي، القيود على المدخلات، القيود على اشارة الخروج، القيود على متغيرات الحالة، ذراع مناور، كرسي متحرك، آلة غير متزامنة، هيكل متتالي.

RESUME L'objectif de cette thèse est l'extraction et l'application d'une loi de commande prédictive en présence des contraintes. Après avoir étudié le cas des systèmes linéaires par la commande prédictive sous espace d'état, deux techniques de la commande prédictive non linéaire ont été présentées : La commande prédictive à pas et la commande prédictive à horizon fini. Les contraintes sont imposées sur les signaux de : Entrée, variation de l'entrée, sortie et les variables d'état. Afin de tester l'efficacité de cette loi, des exemples d'application ont été étudiés : Chariot avec pendule inversé pour le cas linéaire, chaise roulante, bras manipulateur pour le cas non linéaire et la machine asynchrone pour le cas non linéaire à structure cascade. les résultats de simulation ont montré l'efficacité de cette loi en terme de poursuite de référence tout en respectant les contraintes imposées.

Mots clé : Commande prédictive non linéaire, contraintes sur l'entrée, contraintes sur la sortie, contraintes sur les variables d'état, contraintes sur les incréments d'entrée, chaise roulante, bras manipulateur, machine asynchrone, structure cascade.

ABSTRACT The objective of this thesis is the extraction and the application of predictive control law in the presence of constraints. After studying the case of linear systems using predictive control in state space, two techniques of nonlinear predictive control were presented : The one step ahead predictive control and predictive control of finite horizon. The constraints are imposed on : Input, input changement, output and state variables variables. To test the effectiveness of this law, application examples were studied : Cart with an inverted pendulum for the linear case, Wheelchair, two links robot manipulator for the nonlinear case and the asynchronous machine for nonlinear case with cascade structure. Simulation results show the effectiveness of this law in term of reference tracking while respecting the constraints imposed.

Key words : Non linear predictive control, input constraints, output constraint, state space constraint, two links robot manipuleur, electrical wheelchair, asynchronous machine, cascade structure.

TRAVAUX & PUBLICATIONS

Publications

- **K. Bdirina**, M.S. Boucherit, R. Hedjar, D. Djoudi, H. Naimi, "Non linear Predictive Control with Input Constraints of Electrical Wheelchair", The Mediterranean Journal of Measurement and Control, Vol. 10, N° 02, 2014.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of cart with Pendulum », International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering IJ-STA, Vol. 6, N° 1, pp. 1724 –1733, 2012.
- **K. Bdirina**, D. Djoudi, M. Lagoun, "Linear Predictive Control with State Variable Constraints", American Institute of Physics, Vol. 1499, pp. 182-186, 2012

Communications

- **K. Bdirina**, D. Djoudi, "Predictive Control with Constraints of Inverted Pendulum ", International Conference on Applied Mechanics, Materials, and Manufacturing, ICAMMM 2010, Sultanate of Oman, December 13-15, 2010.
- **K. Bdirina**, H. Naimi, R. Hedjar, "Commande Prédicative Non Linéaire à un pas de la Machine Asynchrone", International Conference on Electronics and Oil ICEO'11, Ouargla, 2011.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, H. Naimi, "Commande Prédicative A Horizon Fini de la Machine Asynchrone", Journées Nationales sur la Conception et L'optimisation en Electrotechnique, JNCO, Jijel, 2011.
- **K. Bdirina**, H. Naimi, R. Hedjar, M.S. Boucherit, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of Cart with Pendulum" , the 12th International on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, STA2011, Tunisia, 2011.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, "Linear Predictive Control with State Variable », The 12th International on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, STA2011, Tunisia, 2011.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, D. Djoudi, "Nonlinear Predictive Control with Input Constraints of Robot Manipulator", the 2nd International Conference on Systems and Control, ICSC 2012, Maroc, 2012.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, D. Djoudi, D. Rabehi, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of Two Links Robot Manipulators ", The 21st Edition of the International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, SPEEDAM2012, Italy, 2012.
- **K. Bdirina**, D. Djoudi, "One Step Ahead Nonlinear Predictive Control of cart with pendulum with input constraints", Recent advances in Robotics and Mechatronics, RARM, Turkey, 2013.
- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M.S. Boucherit, H. Naimi, "Predictive Control for Trajectory Tracking of an Electrical Wheelchair", The 2nd International Conference on Systems and Control, ICSC 2015, Tunisia, 2015.

- **K. Bdirina**, R. Hedjar, M. S. Boucherit, " State Constrained predictive control of Cart with Inverted Pendulum", the 3rd conference on control, engineering and information technology CEIT, Tlemcen, 2015.
- B. Nail, **K. Bdirina**, A. Kouzou, A. Hfaifa, "Sliding Mode Control and Optimal GPC Algorithm for Coupled Tanks", the 3rd Conference on Control, Engineering and Information Technology CEIT, Tlemcen, 2015.