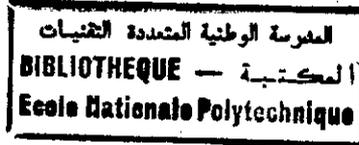


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



THESE DE MAGISTÈRE

Présentée par:

MEZAOUR Fadil

spécialité: Energétique

**ETUDE D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE
DANS UNE PRISE D'AIR A COMPRESSION
SUPERSONIQUE MIXTE**

Soutenue le: 09 Radjeb 1417 - 20 Novembre 1996

Devant le jury:

S. RECHAK	Professeur	E.N.P	Président
S. LARBI	Docteur	E.N.P	Examineur
M. BOUDJEMAA	C.C	E.N.P	Examineur
B. BENKOUSSAS	C.C	E.N.P	Rapporteur

1996

بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier MM A.GAHMOUSSE et B.BENKOUSSAS pour l'attention et les conseils qu'il m'ont constamment prodigués durant mon travail de recherche.. Mes remerciements vont aussi à monsieur le président et messieurs les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon modeste travail. Je n'oublierais pas mes amis MECHERI, MAHFOUDI et ZAIDI pour leurs constants encouragements.

الحمد لله

**ETUDE D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE DANS UNE PRISE D'AIR
A COMPRESSION SUPERSONIQUE MIXTE**

présenté par

MEZAOUR Fadil

sous la direction de:

B.BENKOUSSAS

ملخص:

نعرض في هذه الأطروحة بعد تقديم وجيز لمآخذ الهواء الفوق صوتية، دراسة لانسياب فوق صوتي حول مخروط دائري . ثم باستعمال طريقة المميزات، رسمنا أقصر مأخذ هواء، من نوع انضغاط فوق صوتي مختلط، الذي يسمح انضغاط مستقر دون تشكيل امواج صدمة و ذو فعالية عالية. اخيرا، قدمنا مأخذ الهواء الملائمة لعدد ماخ للانسباب و نصف زاوية رئيسية للمخروط معينين.

Abstract:

The study of a supersonic intake aircraft flow with mixed compression has been conducted. The Tayalor-Maccoll equation is solved by Runge-Kutta method for the first part of fluid flow. In the second part of the flow the characteristic method is used. By using this method the superior and inferior walls were sketched as short as possible in order to avoid a shock wave and have a stable compression with high efficiency.

Résumé:

Dans cette présente thèse après un exposé succinct sur les prises d'air supersoniques, nous avons tout d'abord résolue l'écoulement supersonique autour d'un cône ciculaire par la méthode de Runge-Kutta. Ensuite grâce à la méthode des caractéristiques nous avons tracé les parois supérieure et inférieure, les plus courtes possible, d'une prise d'air à compression supersonique mixte permettant d'avoir une compression stable et sans formation d'onde de choc par focalisation de ligne de Mach et une efficacité élevée.

Mots clés:

Choc conique, écoulement supersonique, efficacité, ligne de Mach, méthode des caractéristiques, méthode de Runge-Kutta, prise d'air.

Table des matières



Liste des notations	6
Introduction	8
Chapitre I Généralités sur les prises d'air supersoniques.....	10
1.1. Rôle des prises d'air	11
1.2. Efficacité	11
1.3. Différents types de prise d'air supersonique	12
1.3.1. Principe des compressions supersoniques externe et interne	12
1.3.2. Prises d'air à compression supersonique mixte	14
Chapitre II Résolution de la partie externe de l'écoulement (Onde de choc conique).....	16
2.1. Généralités	17
2.1.1. Célérité du son	17
2.1.2. Equation de Saint - Venant et vitesse critique et limite	17
2.2. Chocs obliques plans	19
2.2.1. Equations de conservation.....	19
2.2.2. Relation d'Hugoniot	20
2.2.3. Relation de Prandtl	21
2.2.4. Relations entre variables amont et aval	21
2.2.5. Variations d'entropie et de pression génératrice	22
2.2.6. Relations entre les composantes de la vitesse	22
2.3. Ondes de choc coniques	24
2.3.1. Equation de Taylor - Maccoll	24
2.3.2. Résolution de l'équation de Taylor - Maccoll	27
2.3.2.1. Méthode de Runge - Kutta	27
2.3.2.2. Résolution de l'équation de Taylor - Maccoll	29

2.3.3. Calcul de divers valeurs caractérisant l'écoulement ...

Chapitre III Résolution de la partie interne de l'écoulement (Méthode des caractéristiques)	33
3.1. Equations intrinsèques de l'écoulement	34
3.2. Méthode des caractéristiques pour un écoulement à deux dimensions	36
3.2.1. Construction du point courant	40
3.2.2. Calcul d'un point sur une frontière	42
3.2.3. Formation d'un choc par focalisation	43
3.3. Configuration de la prise d'air	43
3.4. Résolution de l'écoulement.....	44
3.4.1. Calcul d'un point sur la paroi supérieure	46
3.4.2 Calcul d'un point sur la paroi inférieure.....	47
3.5. Conclusion	48
Chapitre IV Programmation et Organigrammes	49
4.1. Intérêt du programme	50
4.2. Présentation des fonctions utilisées par le programme	50
4.3. Présentation des sous-routines	51
4.4. Organigrammes	52
Chapitre V Résultats et commentaires	61
5.1. Présentations des prises d'air tracées	62
5.2. l'efficacité	63
5.3. Constatation sur la compression externe	64
5.4. Constatation sur la compression interne	64
5.5. Conclusion	64
5.6. Profils des prises d'air	65
Conclusion générale	75
Bibliographie	76

Liste des notations

a [m/S]:	vitesse du son.
a^* [m/S]:	vitesse du son à l'état critique.
C_p [J/°K.Kg]:	chaleur spécifique à pression constante.
C_v [J/°K.Kg]:	chaleur spécifique à volume constant.
h [rd]:	pas
h [J/Kg]:	enthalpie spécifique.
(l,m,n):	système de coordonnées intrinsèques.
M :	nombre de Mach.
M_{col} :	nombre de Mach à la fin de la partie supersonique de la prise d'air.
P [P_a]:	pression.
r :	constante d'état du gaz.
(r, η):	système de coordonnées polaire.
S [J/°K.Kg]:	entropie spécifique.
T [°K]:	température.
u [m/S]:	composante de la vitesse de la particule fluide suivant (x).
v [m/S]:	composante de la vitesse de la particule fluide suivant (y).
V [m/S]:	vitesse de la particule fluide.
x :	axe parallèle à la vitesse à l'infini amont.
x [m]:	abscisse.
y :	axe perpendiculaire à x.
y [m]:	ordonnées
Z :	$\ln [P]$.
α [rd]:	angle de Mach.
β [rd]:	inclinaison du choc
γ :	C_p/C_v rapport des chaleurs spécifiques.
η :	efficacité.
η :	ligne de Mach.
θ [rd]:	inclinaison de la vitesse par rapport à x.
θ [rd]:	demi angle au sommet du cône.
ξ :	ligne de Mach.
ρ : [Kg/m ³]	masse volumique.

Indice:

- 0: état générateur.
- 1: en amont du choc.
- 2: en aval du choc.
- ∞ : à l'infini amont.
- l: état limite.
- n: composante normale au choc.
- r: composante suivant le rayon vecteur.
- t: composante tangente au choc.
- η : composante perpendiculaire au rayon vecteur.

Exposant:

- *: divisé par a^* .
- : divisé par V_1 .

Introduction

L'une des parties les plus importantes de l'aérodynamique supersonique interne des réacteurs est l'étude des prises d'air supersoniques. La prise d'air est un conduit destiné à capter l'air et à l'amener dans les meilleures conditions possibles, c'est à dire une vitesse faible une grande pression et une moindre distorsion, à l'entrée du compresseur pour un turbo - réacteur ou à l'entrée de la chambre de combustion pour un statoréacteur.

On pourrait penser que la prise d'air n'est pas indispensable pour alimenter le compresseur. En effet, on peut imaginer le compresseur captant directement l'air dont il a besoin. Mais le compresseur, en fonctionnement, établit à son entrée un nombre de Mach de l'ordre de 0.5.

La prise d'air à compression supersonique mixte (CSM) est la plus utilisée pour un nombre de Mach de vol supérieur à 2.5 ^[1]. Notre étude portera sur ce type de prise d'air. Cette prise d'air est composée d'un corps central conique au début et d'une carène permettant d'amener l'air au compresseur dans les conditions voulues.

La pointe conique du corps central pourra provoquer dans certaines conditions une onde de choc conique. En aval de celle-ci nous aurons une compression supersonique isentropique. La première partie de notre travail sera de résoudre cet écoulement conique étant donné le nombre de Mach M_1 , le demi - angle au sommet du cône θ_c et l'altitude du vol.

En aval de cet écoulement conique, la compression se poursuivra à l'intérieur du canal annulaire limité par la carène et le corps central. La deuxième partie de notre travail sera de déterminer la paroi supérieure (carène) et la paroi inférieure (corps central) les plus courtes possible permettant une compression isentropique de l'air et sans formation d'onde de choc incurvée dans l'écoulement. Cette compression se poursuivra jusqu'à un nombre de Mach M_{col} proche de 1, où il y aura une onde de choc droite qui nous permettra le passage au régime subsonique sans une grande perte de pression. Un diffuseur permettra de terminer le ralentissement jusqu'au nombre de Mach nécessaire au fonctionnement du compresseur.

Pour l'étude de la première partie nous aurons à résoudre une équation différentielle ordinaire non linéaire. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Pour l'étude de la deuxième partie l'écoulement à résoudre étant supersonique, nous utiliserons la méthode des caractéristiques.

Enfin, nous présenterons les résultats obtenus par le programme élaboré pour le traçage des parois de la prise d'air. Nous présenterons aussi les différents organigrammes des programmes et sous - programmes élaborés.

**CHAPITRE I:
GENERALITES SUR LES
PRISES D'AIR
SUPERSONIQUES**

1.1. Rôle des prises d'air

Les entrées d'air supersoniques ont pour objet de ralentir l'écoulement relatif de l'air en amont de la captation jusqu'à un certain nombre de Mach interne imposé par le fonctionnement des appareils qu'elles alimentent.

Ce nombre de Mach est généralement subsonique, comme le cas d'un turboréacteur ou d'un statoréacteur classique, mais peut exceptionnellement être supersonique s'il s'agit, par exemple, d'un statoréacteur classique, d'un statoréacteur à combustion supersonique^[1]. Dans le cas où le nombre de Mach interne est subsonique, la partie supersonique de l'entrée d'air aura pour rôle de ramener le nombre de Mach à une valeur proche de 1 (1.1 à 1.3) pour que le passage au régime subsonique se fasse à travers un choc droit. En aval de ce choc droit sera aménagé un diffuseur qui permettra d'atteindre le nombre de Mach interne voulu.

Le ralentissement désiré doit de plus tendre à certaines qualités: la meilleur efficacité possible, la moindre distorsion de l'écoulement interne, la moindre traînée externe, une marge de stabilité satisfaisante, des conditions structurales (variations de géométrie) et des modes de réglages (principes d'asservissement) acceptables.

1.2. Efficacité

L'efficacité d'une entrée d'air désigné par η est le rapport à $P_{0\infty}$, la pression génératrice en amont de la prise d'air, de la pression génératrice à l'entrée du moteur (compresseur ou chambre de combustion) P_{0d} .

$$\eta = \frac{P_{0d}}{P_{0\infty}}$$

Dans les prises d'air supersoniques les principales pertes sont dues aux ondes de choc. La recherche d'une efficacité élevée, c'est à dire de choc faible est un problème majeur des entrées d'air.

Pour les calculs d'avant - projet, une loi - type d'efficacité en fonction de M_∞ , nombre de Mach en amont de la prise d'air, a été proposée ^[1]. Cette loi qui correspond déjà à des entrées d'air très étudiées est:

$$\eta = \begin{cases} 1 & M_\infty \leq 1 \\ 1 - 0.075(M_\infty - 1)^{1.35} & 1 \leq M_\infty \leq 5 \\ 800(M_\infty^4 + 935)^{-1} & M_\infty \geq 5 \end{cases}$$

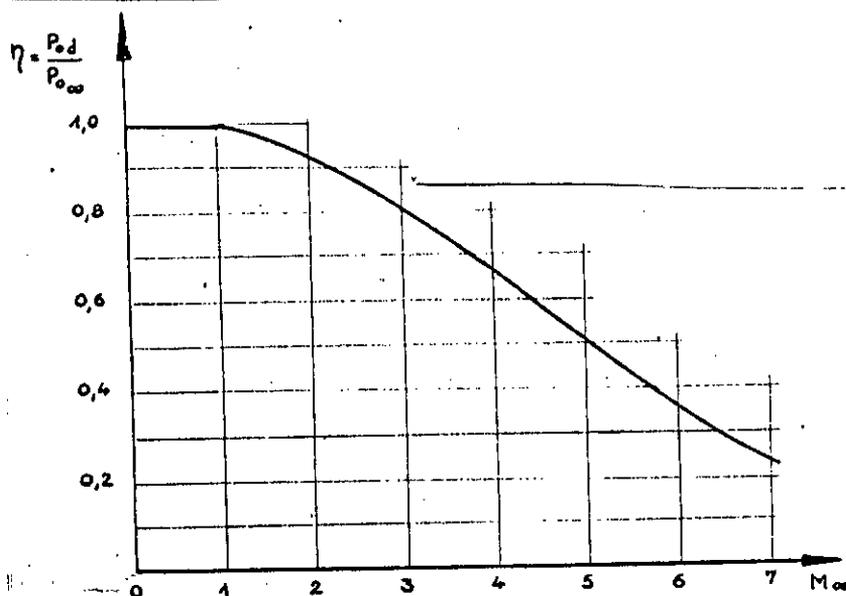


Fig 1.1 Loi type d'efficacité en fonction du nombre de Mach

1.3. Différents types de prise d'air supersonique

Il existe trois types de prises d'air supersoniques l'une à compression supersonique externe (CSE) utilisée pour les engins volants à un nombre de mach inférieur à 2,5, l'autre à compression supersonique interne (CSI) est utilisé sur certain combiné turbo-stato-réacteur et la dernière à compression supersonique mixte (CSM), qui est l'objet de ce travail, utilisée sur des engins volants à des nombres de Mach supérieur à 3..

1.3.1. Principes des compressions supersoniques externe et interne

On peut imaginer deux classes de solutions qui assureraient apparemment une compression isentropique au frottement près:

- L'une, à compression supersonique externe, sous la forme d'un profil émergeant progressif qui dévie l'écoulement en amont de l'entrée, et dont les ondes de compression se

focalisent sur la lèvre de la carène, le nombre de Mach étant ainsi ramené à l'unité dans la section effective, un diffuseur subsonique aménagé en aval assure le ralentissement subsonique sans formation d'aucun choc (fig 1.2)

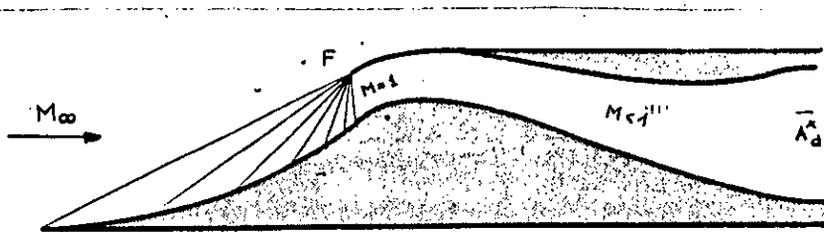


Fig 1.2 Compression supersonique externe

- L'autre solution, à compression supersonique interne, sous forme d'une tuyère inversée pour laquelle le nombre de Mach, ramené à l'unité de façon parfaite au col de la tuyère, devient subsonique en aval du col, à nouveau sans onde de choc (fig 1.3).

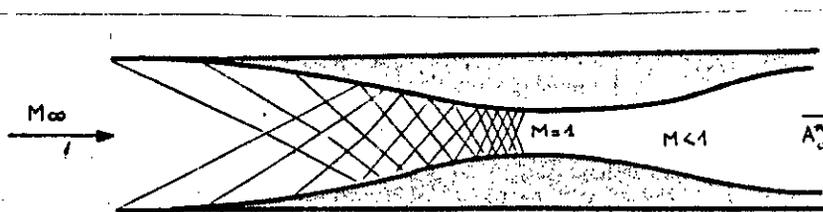


Fig 1.3 Compression supersonique interne

Les entrées d'air à CSE ne sont en fait utilisées que pour des nombres de Mach inférieurs à 2.5. Pour les nombres de Mach supérieurs à 2.5 en plus de la baisse d'efficacité apparaît un problème d'encombrement. Les entrées d'air à CSI ne sont en fait utilisées qu'en combinaison avec une compression supersonique externe. C'est ainsi que la meilleure formule pour une prise d'air supersonique avec un nombre de Mach supérieur à 2.5 sont les prises d'air à CSM.

1.3.2. Prises d'air à compression supersonique mixte

La forme usuelle d'une entrée d'air à CSM est représentée ci dessous (fig 1.4):

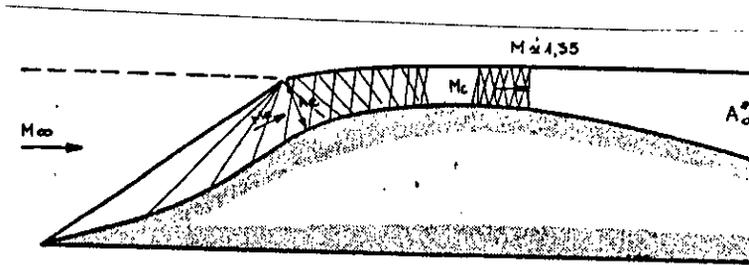


Fig 1.4 Compression supersonique mixte

Cette entrée est constituée d'une compression supersonique externe, d'un taux généralement inférieur à celui de la compression désirée. La compression se poursuit dans un canal supersonique incurvé. Lorsque cela est nécessaire, le passage au régime subsonique s'effectuera par un choc droit à un nombre de Mach de l'ordre de 1.3. Sinon l'écoulement sera ralenti jusqu'au nombre de Mach exigé à l'entrée de la chambre de combustion supersonique (fig 1.5).

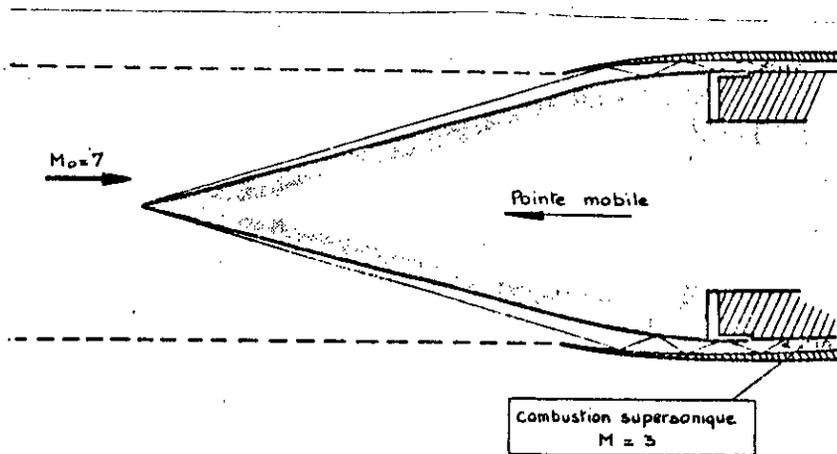


Fig 1.5 Entrée d'air pour statoréacteur à combustion supersonique

Le choix d'une forme particulière d'entrée d'air à compression supersonique mixte est évidemment assez difficile, étant donné le nombre de paramètres qui la définissent. La solution la plus pratique consiste à se donner l'angle au sommet du cône circulaire émergeant et le nombre de Mach de croisière. Ceci comme nous le verrons détermine la partie externe de la compression. Pour la partie interne c'est en se donnant une distribution régulière de pression sur les parois que nous pourrons les tracer en utilisant la méthode des caractéristiques. Cette distribution de pression pourrait être rejetée si elle provoque une distorsion de l'écoulement par formation de choc par focalisation. Ainsi nous pourrons chercher le meilleur compromis entre efficacité et encombrement (longueur des parois).

Pour le réglage en fonction du nombre de Mach des prises d'air à CSM de révolution, le profil comporte une pointe conique réglable par translation, que l'on fait sortir d'avantage à " Mach réduit ". La seconde partie du profil de compression supersonique et la première partie du diffuseur sont formées de volets multiples, ce qui constitue un profil réglable ^[1].

Pour l'étude de la partie supersonique d'une prise d'air axysymétrique à CSM on aura à étudier deux parties. La première étant l'écoulement supersonique autour d'un cône, cet écoulement est déterminé par le nombre de Mach à l'infini amont, la température et l'angle au sommet du cône. La deuxième partie étant l'écoulement dans le convergeant supersonique. Cet écoulement est déterminé par le nombre de Mach en amont du choc droit final au col ou le nombre de Mach à l'entrée de la chambre de combustion supersonique et par évidemment les données de l'écoulement à la fin de la première partie.

**CHAPITRE II:
RESOLUTION DE LA
PARTIE EXTERNE DE
L'ECOULEMENT
(ONDE DE CHOC CONIQUE)**

Les chocs sont considérés comme des discontinuités sans épaisseur traversées par un gaz parfait à chaleur massique constante. Partant des équations fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique, il est possible de relier simplement les vitesses et les propriétés physiques du gaz de part et d'autre d'une onde de choc oblique plane.

Dans le cas du choc conique formé par un cône circulaire placé sans incidence dans un écoulement supersonique, la direction immédiatement en aval n'est plus imposée à priori. Un calcul indirect basé sur les propriétés des chocs plan et de l'écoulement isentropique est nécessaire.

2.1. Généralités

2.1.1. Célérité du son

Moyennant les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement, on obtient:

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

a: célérité du son.

P: pression.

ρ : masse volumique.

P d'une façon générale dépend de deux variables ρ et S en prenant $dS = 0$.

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P}{\rho} \quad \left(\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}\right)$$

Pour un gaz parfait: $P = \rho r T$

$$a^2 = \gamma.r.T \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

T: température locale pour un fluide en mouvement.

r: constante d'état du gaz.

2.1.2. Equation de Saint - Venant, vitesse critique et limite

Moyennant l'équation de la conservation de quantité de mouvement, sans tenir compte de la viscosité, on obtient (régime permanent):

$$\frac{du^2}{2} + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

u: vitesse de la particule fluide.

C'est la forme différentielle de l'équation de Saint - Venant.

Pour une évolution isentropique le long d'une ligne de courant pour un gaz parfait:

On obtient:

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1)M^2 \frac{du}{u} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{du}{u} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

En intégrant (2.2) toujours avec l'hypothèse isentropique et gaz parfait, on obtient:

$$C_p T_0 = \frac{u^2}{2} + C_p T = \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = C : \text{constante} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

C'est la relation de Saint - Venant.

On atteint un point sonique ou " critique " de l'écoulement lorsque: $u = a = a^*$.

La constante $C = C_p T_0$ de l'équation (2.6) s'écrit:

$$C_p T_0 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \cdot a^{*2} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

On définit la vitesse non dimensionnelle M^* tel que:

$$M^* = \frac{u}{a^*} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

Elle est reliée à M par:

$$M^{*2} = \frac{M^2}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 + \frac{2}{\gamma + 1}} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ou bien:

$$M^2 = \frac{2M^{*2}}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)M^{*2}} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

On définit la vitesse limite V_1 comme étant la vitesse que prendrait le gaz en se détendant isentropiquement dans le vide. La relation entre V_1 et a^* est:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \cdot a^* \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

2.2. Chocs obliques plans

2.2.1. Equations de conservation

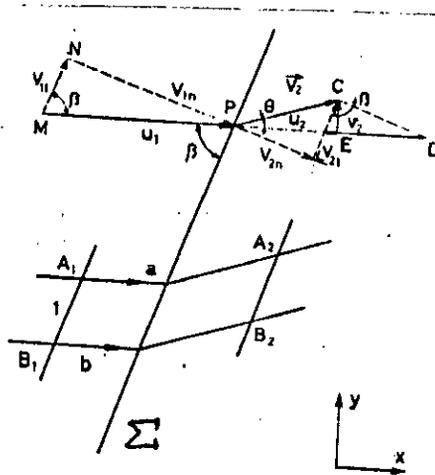


Fig 2.1 Choc oblique plan

\vec{V}_1 : vitesse du fluide en amont du choc Σ .

\vec{V}_2 : vitesse du fluide en aval du choc Σ .

\vec{V}_1 $\left\{ \begin{array}{l} V_{1n} \text{ composante de } \vec{V}_1 \text{ normale au choc} \\ V_{1t} \text{ composante de } \vec{V}_1 \text{ tangente au choc.} \end{array} \right.$

\vec{V}_2 $\left\{ \begin{array}{l} V_{2n} \text{ composante de } \vec{V}_2 \text{ normale au choc} \\ V_{2t} \text{ composante de } \vec{V}_2 \text{ tangente au choc.} \end{array} \right.$

\vec{V}_1 $\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ composante de } \vec{V}_1 \text{ suivant } x \\ v_1 \text{ composante de } \vec{V}_1 \text{ suivant } y. \end{array} \right.$

\vec{V}_2 $\left\{ \begin{array}{l} u_2 \text{ composante de } \vec{V}_2 \text{ suivant } x \\ v_2 \text{ composante de } \vec{V}_2 \text{ suivant } y. \end{array} \right.$

β : inclinaison du choc Σ .

θ : déviation de la vitesse en aval du choc Σ .

Nous avons les relations suivantes entre les deux systèmes de composantes:

$$V_{1n} = u_1 \sin \beta \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

$$V_{1t} = u_1 \cos \beta \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$V_{2n} = u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta = V_2 \sin(\beta - \theta) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

$$V_{2t} = u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

En appliquant les principes fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique (conservation) dans l'hypothèse d'un écoulement permanent et adiabatique d'un gaz parfait. On obtient:

* Conservation de masse:

$$m = \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

* Conservation de la quantité de mouvement:

Sur l'axe (n): normal au choc Σ .

$$P_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = P_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

$$V_{1t} = V_{2t} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

* Conservation de l'énergie:

En tenant compte de (2.16)

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_{01} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} = C_p T_{02} \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

ou

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot a^{*2} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

En introduisant les composantes de vitesses suivant n et t et tenant compte de (2.18), il vient:

$$\frac{V_{1n}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_{2n}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot a_n^{*2} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

où:

$$a_n^{*2} = a^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot V_{1t}^2 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

2.2.2. Relations d'Hugoniot

Moyennant les équation (2.16), (2.17), (2.20) il vient:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{P_2}{P_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{P_2}{P_1}} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

C'est la relation d'Hugoniot qui montre qu'à travers l'onde de choc l'évolution est irréversible.

Au moyen de l'équation (2.23) et selon le second principe de la thermodynamique, on peut montrer que nécessairement:

$$\frac{P_2}{P_1} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$$

et avec (2.16):

$$\frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$$

Donc une onde de choc est nécessairement une onde de compression et le fluide est ralenti en traversant la discontinuité.

2.2.3. Relation de Prandtl

En éliminant les pressions et masses volumiques entre les équations de conservation, nous obtenons:

$$V_{1n} \cdot V_{2n} = a_n^{*2} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

Avec (2.22), on obtient:

$$V_{1n} \cdot V_{2n} = a^* - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot V_{1t}^2 \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

C'est la relation Prandtl.

Moyennant la relation intégrale de Saint - Venant (2.6), on a:

$$V_{1n} (V_{1n} - V_{2n}) = \frac{2}{\gamma + 1} (V_{1n}^2 - a_1^2) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

qui est une autre forme de la relation de Prandtl.

2.2.4. Relations entre variables amont et aval

Les relations suivantes s'obtiennent à partir des équations du mouvement de (2.16) à (2.20) et des relations (2.12) à (2.15) existant entre les composantes des vitesses.

Calcul de $\frac{P_2}{P_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et M_2 en fonction de M_1 et β .

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left\{ M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right\} = \text{RPS}(M_1, \beta, \gamma) \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{\gamma - 1} \left\{ \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma - 1}{2} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} \left\{ M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma-1}{2} \right\} \dots\dots\dots(2.29)$$

$$M_2^2 = \frac{2 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2}} + \frac{M_1^2 \cos^2 \beta}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta} \dots\dots\dots(2.30)$$

Il existe aussi une relation entre M_1 , θ et β .

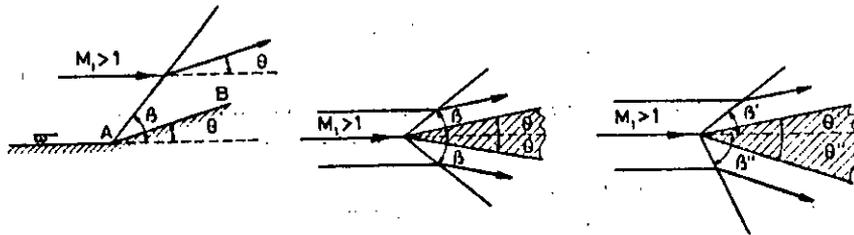


Fig 2.2

$$M_1 = \left[\sin^2 \beta - \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} \right]^{-1/2} = FEN(\beta, \theta, \gamma) \dots\dots\dots(2.31)$$

2.2.5. Variations d'entropie et de pression génératrice

On établit en tenant compte de l'adiabacité de l'écoulement:

$$\Delta S = C_V \ln \left[\frac{P_{01}}{P_{02}} \right]^{\gamma-1}$$

avec:

$$RPT(M, \beta, \gamma) = \frac{P_{01}}{P_{02}} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left[\frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \dots\dots\dots(2.32)$$

2.2.6. Relations entre les composantes de la vitesse

En remplaçant dans (2.25) V_{1n} , V_{2n} , V_{1t} par leurs expressions (2.12) à (2.14) il vient:

$$\text{tg}^2 \beta \{ a^{*2} - u_1 u_2 \} + u_1 v_2 \text{tg} \beta + a^{*2} - u_1^2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 0 \dots\dots\dots(2.33)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_{1n}}{V_{1t}} \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

En remplaçant $\operatorname{tg}\beta$ par sa valeur (2.34):

$$v_2^2 = \frac{(u_1 - u_2)^2 \cdot (u_1 u_2 - a^{*2})}{a^{*2} + \frac{2}{\gamma + 1} u_1^2 - u_1 u_2} \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

En introduisant les composantes adimensionnelles des vitesses:

$$\begin{cases} M_1^* = \frac{u_1}{a^*} & ; & M_2^* = \frac{V_2}{a^*} \\ u_2^* = \frac{u_2}{a^*} & ; & v_2^* = \frac{V_2}{a^*} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

(2.35) s'écrit:

$$v_2^{*2} = (M_1^* - u_2^*)^2 \left[\frac{M_1^* u_2^* - 1}{1 + \frac{2}{\gamma + 1} M_1^{*2} - M_1^* u_2^*} \right] \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

Le triangle MNP de la figure 2.1 permet d'écrire:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_{1n}}{V_{1t}} = \frac{V_{1n}}{V_{2t}} = \frac{V_{1n} \cdot V_{2n}}{V_{2t} \cdot V_{2n}} \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

où avec (2.25):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot V_{2t}^2}{V_{2t} \cdot V_{2n}} = \frac{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot V_{2t}^{*2}}{V_{2t}^* \cdot V_{2n}^*} \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

en introduisant:

$$\bar{V}_{2t} = \frac{V_{2t}}{V_1} \quad \text{et} \quad \bar{V}_{2n} = \frac{V_{2n}}{V_1} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

rappelant que:

$$V_1^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot a^{*2}$$

(2.38) s'écrira:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \bar{V}_{2t}^2}{\bar{V}_{2t} \cdot \bar{V}_{2n}} \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

2.3. Ondes de choc coniques

Dans ce paragraphe, nous étudions l'évolution d'un fluide compressible, initialement en mouvement uniforme à vitesse supersonique, lors de son passage à travers une surface de discontinuité en forme de cône à section circulaire dont l'axe est parallèle à la direction de l'écoulement amont.

Nous faisons à priori l'hypothèse d'un écoulement conique de révolution en aval du choc, c'est à dire d'un écoulement dans lequel la vitesse et les propriétés physiques du gaz sont constantes le long d'un rayon issu de la pointe du cône. Nous supposons également qu'il existe, en aval de ce choc conique, une surface de courant coaxiale en forme de cône circulaire qui sera considéré comme l'obstacle matériel produisant l'onde de choc. En pratique le problème consiste souvent à se donner le demi - angle au sommet θ_c du cône et le nombre de Mach M_1 de l'écoulement supersonique amont et à rechercher le demi - angle au sommet β_c du choc et les valeurs constantes des pressions, vitesses etc..., à la surface du cône. C'est ce problème que nous allons aborder.

L'intérêt de la solution du cône est qu'elle est applicable à la région du nez d'un corps axisymétrique quelconque à nez pointu et sert de base de départ pour l'application de méthodes telle que celle des caractéristiques.

Le problème des écoulements coniques est plus complexe que celui de l'écoulement à travers des ondes de choc obliques planes, car l'écoulement aval n'étant plus uniforme, l'angle de déviation du fluide à travers la discontinuité est différent de l'angle θ_c du cône solide et est inconnue à priori.

2.3.1. Equation de Taylor - Maccoll

Pour traiter analytiquement le problème de l'écoulement supersonique autour du cône, il nous faut non seulement des relations autour du cône, il faut non seulement des relations entre variable amont et aval de l'onde, mais également les équations de l'écoulement isentropique.

Ces équations sont les suivantes:

Equation d'Euler:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad \dots\dots\dots(2.41)$$

∇ : Opérateur nabla.

\vec{V} : vitesse de la particule fluide.

ρ : Masse volumique du fluide.

P: Pression.

En multipliant par \vec{V} :

$$\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla P \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

Equation de continuité:

$$\nabla \rho \vec{V} = 0$$

ou

$$\nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla P \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

Nous écrivons les équations avec le système de coordonnées r, η défini par la figure 2.3.

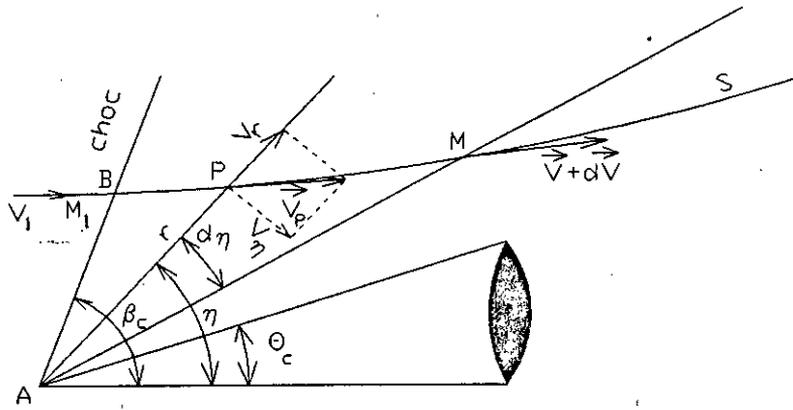


Fig 2.3

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \left[2V_r + V_\eta \cot g \eta + \frac{dV_\eta}{d\eta} \right] \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

Equation d'énergie: pour un écoulement isentropique nous avons la loi de Poisson:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

Irrotationalité:

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

ou dans le système r, η

$$V_\eta = \frac{dV_r}{d\eta} \dots\dots\dots (2.46)$$

Dans ces relations V_r, V_η sont les projections de la vitesse V parallèle et perpendiculaire au rayon SP incliné de l'angle η (fig 2.3). En désignant par θ l'inclinaison du vecteur vitesse par rapport à la direction de l'écoulement à l'infini amont, nous avons:

$$\begin{aligned} V_r &= V \cos(\eta - \theta) \\ V_\eta &= -V \sin(\eta - \theta) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.47)$$

Lorsque η varie de $d\eta$, la vitesse varie de la quantité:

$$d\vec{V} = (dV_r - V_\eta d\eta) \vec{I}_r + (dV_\eta + V_r d\eta) \vec{I}_\eta$$

ou avec (2.46)

$$d\vec{V} = (dV_\eta + V_r d\eta) \vec{I}_\eta$$

L'accélération vaut donc:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{dV_\eta}{dt} + V_r \frac{d\eta}{dt} \right] \vec{I}_\eta$$

où

$$dt = \frac{r}{V_\eta} d\eta$$

Que nous introduisons dans l'équation d'Euler sous la forme (2.42).

$$\frac{V_\eta^2}{r} \left[\frac{dV_\eta}{d\eta} + V_r \right] = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla P = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

Puisque $\vec{V} \cdot \vec{I}_\eta = V_\eta$

Remplaçons $\frac{dP}{d\rho}$ par a^2 et utilisons l'équation de continuité (2.43).

$$\frac{V_\eta^2}{r} \left[\frac{dV_\eta}{d\eta} + V_r \right] = a^2 \nabla \cdot \vec{V}$$

a: célérité local du son.

ou avec l'expression (2.44) de $\nabla \cdot \vec{V}$

$$V_n^2 \left[\frac{dV_n}{d\eta} + V_r \right] = a^2 \left[V_r + \frac{dV_n}{d\eta} + V_r + V_n \cot \eta \right] \quad \dots\dots\dots (2.49)$$

On montre à partir de (2.6) que:

$$a^2 = \frac{\gamma-1}{2} (V_1^2 - V^2) = \frac{\gamma-1}{2} (V_1^2 - V_r^2 - V_n^2) \quad \dots\dots\dots (2.50)$$

Remplaçons (2.50) dans (2.48):

$$\left[\frac{\gamma+1}{2} \cdot \bar{V}_r^2 - \frac{\gamma-1}{2} \cdot (1 - \bar{V}_r^2) \right] \bar{V}_r = (\gamma-1) \bar{V}_r (1 - \bar{V}_r^2) + \frac{\gamma-1}{2} \cdot (1 - \bar{V}_r^2) \bar{V}_r \cot \eta - \gamma \bar{V}_r \bar{V}_r^2 - \frac{\gamma-1}{2} \bar{V}_r^3 \cot \eta \quad \dots\dots\dots (2.51)$$

Où nous avons posé avec (2.46):

$$\bar{V}_r = \frac{V_r}{V_1} \quad ; \quad \bar{V}_n = \frac{V_n}{V_1} = \frac{d\bar{V}_r}{d\eta} = \bar{V}_r' \quad ; \quad \frac{d\bar{V}_n}{d\eta} = \frac{d^2\bar{V}_r}{d\eta^2} = \bar{V}_r''$$

Telle est l'équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre de Taylor - Maccoll dont la solution doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

Sur le cône $\bar{V}_n = 0$ ou avec (2.46)

$$\eta = \theta_c \quad \bar{V}_n = \bar{V}_r' = 0 \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

Sur le choc, la relation entre les composantes tangentielle et normale un choc doivent vérifier (2.40):

$$\text{tg} \eta = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \bar{V}_r^2}{\bar{V}_r \bar{V}_r'} \quad \dots\dots\dots (2.53)$$

L'équation de Taylor - Maccoll n'a pas de solution analytique qui satisfait aux conditions limites, une résolution numérique s'impose. Nous résoudrons cette équation par la méthode de Runge - Kutta.

2.3.2. Résolution de l'équation de Taylor - Maccoll

2.3.2.1. Méthode de Runge - Kutta

Soit d'une façon générale une équation différentielle ordinaire d'ordre 1:

$$y' = F(t, y)$$

avec la condition initiale (CI): $y(t_0) = a_0$.

La méthode de Runge - Kutta donne la valeur de $y(t_i+h)$ à partir $y(t_i)$ et cela en utilisant la relation récurrente suivante:

$$\begin{cases} \omega_1 = a_0 \\ \omega_{i+1} = \omega_i + \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \end{cases}$$

avec h: pas de la méthode.

$$\omega_i = y(t_i) \quad t_i = t_0 + (i-1)h$$

$$K_1 = h.F(t_i, h_i)$$

$$K_2 = h.F\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = h.F\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = h.F(t_i + h, \omega_i + K_3)$$

Soit maintenant, une équation différentielle d'ordre n avec n conditions initiales:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(t, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(0)}(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) \text{ données} \end{cases} \dots\dots\dots (2.54)$$

En effectuant le changement de variable:

$$y^{(0)} = u_0 ; y^{(1)} = u_1 ; \dots ; y^{(n-1)} = u_{n-1}$$

L'équation différentielle (2.54) d'ordre n peut s'écrire sous la forme d'un système de n équations différentielles d'ordre 1.

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = u_1(t) \quad \text{avec } u_0(t_0) \text{ donnée} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{du_{n-2}}{dt} = u_{n-1}(t) \quad \text{avec } u_{n-2}(t_0) \text{ donnée} \\ \frac{du_{n-1}}{dt} = F(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \quad \text{avec } u_{n-1}(t_0) \text{ donnée} \end{cases} \dots\dots\dots (2.55)$$

En appliquant la méthode de Runge - Kutta vue précédemment aux n équations de (2.55), on obtient:

$$\begin{cases} w_{j,i} = u_{j-1}(t_0) \quad j = 1, \dots, n \\ w_{j,i+1} = w_{j,i} + \frac{1}{6} \{K_{1,j} + 2K_{2,j} + 2K_{3,j} + K_{4,j}\} \end{cases} \dots\dots\dots (2.56)$$

avec: pour $1 \leq j \leq n-1$

$$K_{1,j} = h w_{j+1,i}$$

$$K_{2,j} = h \left[w_{j+1,i} + \frac{K_{1,j+1}}{2} \right]$$

$$K_{3,j} = h \left[w_{j+1,i} + \frac{K_{2,j+1}}{2} \right]$$

$$K_{4,j} = h \left[w_{j+1,i} + K_{3,j+1} \right]$$

pour $j = n$

$$K_{1,n} = hF(t_i, w_{1,i}, \dots, w_{k,i}, \dots, w_{n,i})$$

$$K_{2,n} = hF\left(t_i + \frac{h}{2}, w_{1,i} + \frac{1}{2}K_{1,1}, \dots, w_{k,i} + \frac{K_{1,k}}{2}, \dots, w_{n,i} + \frac{K_{1,n}}{2}\right)$$

$$K_{3,n} = hF\left(t_i + \frac{h}{2}, w_{1,i} + \frac{1}{2}K_{2,1}, \dots, w_{k,i} + \frac{K_{2,k}}{2}, \dots, w_{n,i} + \frac{K_{2,n}}{2}\right)$$

$$K_{4,n} = hF\left(t_i + h, w_{1,i} + K_{3,1}, \dots, w_{k,i} + K_{3,k}, \dots, w_{n,i} + K_{3,n}\right)$$

Ainsi nous avons put établir un algorithme de résolution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n , en effet en faisant varier i de 1 à ∞ la relation récurrente (2.56) nous donne à chaque i :

$$w_{j,i+1} = y^{(j-1)}(t_0 + (i-1)h)$$

2.3.2.2. Résolution de l'équation de Taylor - Maccoll

L'équation de Taylor - Maccoll (2.51) peut se mettre sous la forme suivante:

$$f'' = \frac{(\gamma - 1) \cdot f(1 - f^2) + \frac{\gamma - 1}{2} (1 - f^2) f' \cot \eta - \gamma f f'^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (f')^3 \cot \eta}{\left[\frac{\gamma + 1}{2} (f')^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (1 - f^2) \right]} \dots (2.57)$$

avec $f = \bar{V}_r$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

C'est à dire que l'équation à résoudre est de la forme:

$$f'' = F(\eta, f, f')$$

Avec les conditions:

$$\eta = \theta_c \quad f'(\theta_c) = 0$$

et $\eta = \theta_c$ $\quad \text{tg} \eta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1 - f^2}{f f'}$ (2.58)

On remarque tout d'abord que $f = \frac{V_r}{V_1}$ ne peut prendre de valeurs supérieures à 1.

Ensuite étant donné que l'écoulement est supersonique nous avons $V \geq a^*$ d'où :

$$a^* \leq V \leq V_1$$

$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{a^*}{V_1} \leq \frac{V}{V_1} \leq 1$$

Au point $\eta = \theta_c$ nous avons $V_r' = V_\eta = 0$ donc $V_r = V$ d'où :

$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \leq \frac{V}{V_1} = \frac{V_r}{V_1} = f(\theta_c) \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2.59)$$

Pour résoudre l'équation de Taylor - Maccoll, pour un demi angle au sommet du cône θ_c et un nombre de Mach M_1 à l'infini amont donnés, nous procédons ainsi :

1- On intègre l'équation (2.57), en prenant $f(\theta_c) = \alpha$ et $f'(\theta_c) = 0$, par la méthode de Runge - Kutta étape par étape en partant de la surface du cône. A chaque étape on calcule les valeurs de f et f' . Le calcul est poursuivi jusqu'à ce que la condition (2.58) soit satisfaisante par les valeurs trouvées de f et f' . Dans ce cas η a atteint la valeur β_c de l'inclinaison du choc.

2- Calcul de M_1' à partir de l'inclinaison de la vitesse en aval du choc et l'angle β_c du choc.

3- Si $M_1' = M_1$ l'équation est résolue par le couple (θ_c, M_1) .

Si $M_1' < M_1$, reprendre l'étape 1 avec $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$.

Si $M_1' > M_1$, reprendre l'étape 1 avec $\alpha = \frac{1}{2} \left[\alpha + \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right]$.

2.3.3. Calcul de divers valeurs caractérisant l'écoulement

L'équation de Taylor - Maccoll étant résolue, c'est toute la partie externe de la compression supersonique qui est déterminée. La partie interne de l'écoulement supersonique est résolue par la méthode des caractéristiques. Cette méthode fait intervenir d'autres propriétés de l'écoulement. Ces propriétés sont la pression locale P , l'inclinaison θ de la vitesse par rapport à l'axe centrale du cône et de l'entropie locale S . Pour cela nous devons déterminer ces propriétés pour la première partie de l'écoulement.

Soit un point quelconque de coordonnée (x_n, y_n) ceci correspond à $\eta = \text{Arg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$.

* L'inclinaison θ_N de la vitesse par rapport à l'axe (x):

$$\theta = \eta + \text{Arctg}\left\{\frac{f'}{f}\right\} \dots\dots\dots (2.60)$$

* L'entropie S_N :

L'écoulement en aval du choc conique est irrotationnel, donc isentropique. Ainsi l'entropie S_N ne dépendra que de l'inclinaison du choc β_c et de l'entropie à l'infini amont.

Les conditions à l'infini amont dépendent de l'altitude de vol. Un tableau dit "Standard atmosphère" ^[2] donne, selon l'altitude, la pression, la masse volumique et la température. Pour un écoulement supersonique à nombre de Mach M_1 et une altitude donné, nous aurons déterminé par le tableau sus - cité la pression local P_1 , la température locale T_1 et la masse volumique locale ρ_1 .

A partir de (2.6), on peut écrire:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{-1} = \text{RAP}(M, \gamma) \dots\dots\dots (2.61)$$

T_{01} : Température totale à l'infini amont.

et avec (2.45) on obtient:

$$\frac{P_1}{P_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \dots\dots\dots (2.62)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \dots\dots\dots (2.63)$$

P_{01} : Pression total à l'infini amont.

ρ_{01} : Masse volumique totale à l'infini amont.

On peut écrire que: $S_1 = C_v \ln(P_1 \rho_1^{-\gamma})$.

S_1 étant l'entropie à l'infini amont.

D'après (2.32): $S_2 - S_1 = \Delta S = C_v \ln\left[\frac{P_{01}}{P_{02}}\right]^{\gamma - 1}$

S_2 : Entropie locale en aval du choc, d'où $S_2 = S_N$.

$$S_N = S_1 + C_v \ln\left[\frac{P_{01}}{P_{02}}\right]^{\gamma - 1} \dots\dots\dots (2.64)$$

avec d'après (2.32): $\frac{P_{01}}{P_{02}} = \text{RPT}(M_1, \beta_c, \gamma)$

* La pression P_N : d'après (2.62).

$$\frac{P_N}{P_{02}} = [\text{RAP}(M_N, \gamma)]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad \dots\dots\dots (2.65)$$

M_N : nombre de Mach au point N.

Donc pour déterminer P_N , il suffit de déterminer M_N .

Au point N nous avons:

$$f^2(\eta) + f'^2(\eta) = \frac{V_r^2}{V_1^2} + \frac{V_\eta^2}{V_1^2} = \frac{V^2}{V_1^2}$$

et avec (2.11) on obtient:

$$\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{V^2}{a^{*2}} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = M_N^{*2} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$M_N^{*2} = \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} [f^2(\eta) + f'^2(\eta)]$$

et à partir de (2.10) on peut écrire:

$$M_N^2 = \frac{2M_N^{*2}}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_N^{*2}}$$

Ainsi par la relation (2.65) P_N est déterminée.

**CHAPITRE III:
RESOLUTION DE LA
PARTIE INTERNE DE
L'ECOULEMENT
(METHODE DES CARACTERISTIQUES)**

3.1. Equations intrinsèques de l'écoulement

Dans le cas d'un fluide parfait, c'est à dire sans viscosité, sans effets thermiques et sans relaxation chimique, les équations générales de l'écoulement permanent s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \rho \vec{V} &= 0 \\ (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= 0 \\ (\vec{V} \cdot \nabla) H &= (\vec{V} \cdot \nabla) S = 0 \\ H &= h_0 = h + \frac{V^2}{2}\end{aligned}$$

Il est commode d'écrire ces équations dans les coordonnées intrinsèques (ou naturelles) définies par les vecteurs unitaires l , m , n respectivement parallèle et perpendiculaires à la vitesse locale. On désignera par θ l'angle (x, V) de la vitesse avec une direction fixe x , et par φ l'angle du plan (x, V) avec une direction de référence y , perpendiculaire à x (voir figure 3.1).

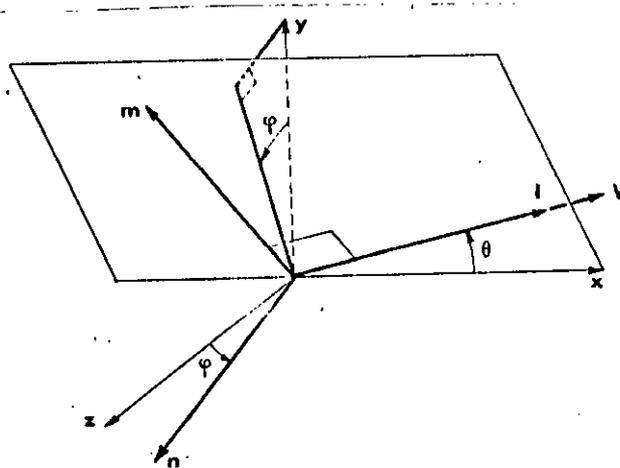


Fig 3.1 Coordonnées locales intrinsèques

Dans ces conditions, les équations générales prennent la forme suivante :

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial m} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial m} + \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial m} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\partial S}{\partial l} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

Dans lesquelles: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.402$

$$M = \frac{V}{a}$$

Log: logarithme Népérien.

Dans le cas particulier de l'écoulement plan, on a $\varphi \equiv 0$ de sorte que (3.1) et (3.2) prennent la forme:

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial m} = 0$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0$$

Si l'écoulement est de révolution, d'axe x et si r désigne la distance à l'axe, on a $\varphi \equiv \omega$ (angle du plan méridien avec y), de sorte que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$$

On peut écrire les équations générales des écoulements plans et des écoulements de révolution, sous la forme unique:

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial m} + j \frac{\sin \theta}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial m} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\partial S}{\partial l} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

- Pour l'écoulement plan $j = 0$.
- Pour l'écoulement de révolution $j = 1$.

3.2. Méthode des caractéristiques pour un écoulement à deux dimensions

L'écoulement étant supposé partout supersonique, on peut poser: $\sin \alpha = \frac{1}{M}$.

et écrire les équations (3.5) à (3.7) sous la forme:

$$(S_1) \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial l} + \frac{\partial \theta}{\partial m} = -j \frac{\sin \theta}{r} & \dots\dots\dots (3.5) \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial m} + \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0 & \dots\dots\dots (3.6) \\ \frac{\partial S}{\partial l} = 0 & \dots\dots\dots (3.7) \end{cases}$$

L'écoulement étant isoénergétique, on dispose de:

$$H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cte} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

On notera tout d'abord que si l'on connaît les grandeurs $Z = \text{Log} P$, θ , S en tout point Q de l'écoulement, celui-ci est complètement déterminé:

- θ fixe d'abord la direction du vecteur vitesse V .
- Les deux données thermodynamiques Z et S déterminent toutes les autres dont le nombre de Mach M .

Ceci posé, on suppose donnée une distribution initiale de Z , θ , S sur une courbe (L) plan, par exemple en fonction de l'abscisse curviligne λ sous la forme (voir figure 3.2).

$$Z = \bar{Z}(\lambda) \quad , \quad \theta = \bar{\theta}(\lambda) \quad , \quad S = \bar{S}(\lambda)$$

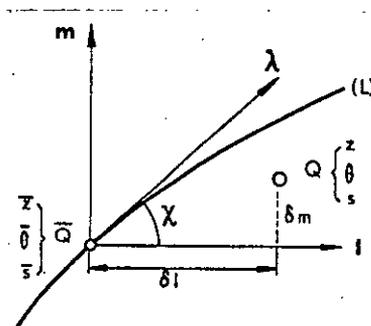


Fig 3.2 *Coordonnées locales sur la courbe portant la distribution initiale des données*

On se propose de déduire à l'aide du système (S1) les valeurs de (Z, θ, S) dans un domaine voisin de (L) :

La méthode générale de Cauchy consiste à définir chacune des fonctions inconnues par un développement limité au premier ordre, valable au voisinage de tout point $\bar{Q}(\lambda)$ et de la forme:

$$Z = \bar{Z}(\lambda) + \delta l \frac{\partial Z}{\partial l} + \delta m \frac{\partial Z}{\partial m}$$

où $\frac{\partial Z}{\partial l}$ et $\frac{\partial Z}{\partial m}$ représentent les valeurs des dérivées de Z calculées en \bar{Q} et $\delta l, \delta m$ les coordonnées d'un point quelconque Q voisin de \bar{Q} dans les axes locaux liés à \bar{Q} . Pour θ et S , on écrit deux développements analogues.

L'intégration se ramène alors au calcul des six dérivées $\frac{\partial Z}{\partial l}, \frac{\partial Z}{\partial m}, \frac{\partial \theta}{\partial l}, \frac{\partial \theta}{\partial m}, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial m}$ en tout point \bar{Q} de (L) .

Or, on ne dispose à cet effet que des trois relations linéaires (S1) où par hypothèse, les coefficients des dérivées inconnues sont donnés.

D'autre part, si χ désigne l'angle de la tangente à (L) en \bar{Q} avec l'axe l , la propriété du gradient permet d'écrire en ce point:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial l} + \sin \chi \frac{\partial}{\partial m}$$

Cette relation, appliquée en \bar{Q} à $\bar{Z}, \bar{\theta}, \bar{S}$ dont les dérivées suivant λ sont données, fournit trois autres conditions linéaires entre les six dérivées et comporte une solution et une seule.

On peut maintenant remarquer que les dérivées de S ne figurent que dans la troisième équation (S1), le calcul des dérivées se décompose en deux parties.

En ce qui concerne les dérivées de S , on a à résoudre:

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = \cos \chi \frac{\partial S}{\partial l} + \sin \chi \frac{\partial S}{\partial m}$$

Si χ est quelconque alors la solution est immédiate:

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial m} = \frac{1}{\sin \chi} \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda}$$

Mais si $\chi = 0$, c'est à dire si la courbe (L) est localement tangente à la ligne de courant,

- ou bien la distribution arbitraire de (L) satisfait en ce point à $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = 0$ et le problème est indéterminé.

- ou bien $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} \neq 0$ et le problème est impossible, puisqu'il y a incompatibilité entre la donnée sur (L) et l'équation générale.

On retiendra en particulier que le problème de Cauchy pour l'entropie sera indéterminé en tout point Q où (L) est tangente à la ligne de courant, pourvu que la distribution de \bar{S} en ce point satisfasse à $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = 0$, c'est à dire à l'équation générale. On dit que cette distribution est caractéristique pour S.

Considérons maintenant les deux premières équations de (S1) et cherchons s'il existe de même distributions caractéristiques pour \bar{Z} et $\bar{\theta}$. On a vu que le système à résoudre en générale s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & & & \\ 0 & \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma} & 1 & 0 \\ \cos \chi & \sin \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \chi & \sin \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial l} \\ \frac{\partial Z}{\partial m} \\ \frac{\partial \theta}{\partial l} \\ \frac{\partial \theta}{\partial m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \frac{\sin \theta}{r} \\ 0 \\ \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.9)$$

La direction caractéristique s'obtient en écrivant que le problème est impossible, c'est à dire que le déterminant principale est nul.

On trouve la condition:

$$\cos^2 \alpha \sin^2 \chi - \sin^2 \alpha \cos^2 \chi = 0$$

Soit: $\text{tg} \chi = \pm \text{tg} \alpha$

Les directions correspondantes sont donc les directions de Mach ξ et η qui font l'angle $-\alpha$ et $+\alpha$ avec la vitesse. Ces directions ne sont donc réelles qu'en supersonique.

De même que dans le cas du calcul de l'entropie, si la ligne (L) satisfait à l'une ou l'autre de ces conditions (tangentes à η ou ξ), le problème de Cauchy sera indéterminé si la distribution des données sur (L) est compatible avec les équations générales, sinon il sera impossible.

Pour obtenir cette condition, il suffit d'écrire ces équations en projection évidentes :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial l} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial m}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial l} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial m}$$

Multipliant (3.5) par $\sin \alpha$ et (3.6) par $\cos \alpha$, on obtient par addition puis par soustraction les deux relations:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -j \frac{\sin \alpha \sin \theta}{r}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -j \frac{\sin \alpha \sin \theta}{r}$$

On peut résumer ces résultats sous la forme suivante:

En chaque point d'un écoulement supersonique plan ($j = 0$) ou de révolution ($j = 1$) il existe trois directions caractéristiques l , η , ξ respectivement parallèles à la vitesse ou faisant avec elle les angles $+\alpha$ et $-\alpha$.

A chacune de ces directions est associée une combinaison linéaire des équations générales ne faisant intervenir que des dérivées suivant cette direction. On obtient le système (K):

$$(K) \begin{cases} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -j \frac{\sin \alpha \sin \theta}{r} \\ \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \text{Log} P}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -j \frac{\sin \alpha \sin \theta}{r} \\ \frac{\partial S}{\partial l} = 0 \end{cases}$$

Dans le champ d'écoulement les lignes tangentes en tout point à l sont les lignes de courant (l), les lignes tangentes aux vecteurs ξ et η sont les lignes de Mach ou caractéristiques (ξ) ou (η).

La méthode des caractéristiques consiste à utiliser ces propriétés pour procéder pas à pas à l'intégration de l'écoulement à partir des conditions initiales et compte tenu des conditions aux limites.

3.2.1. Construction du point courant (opération N)

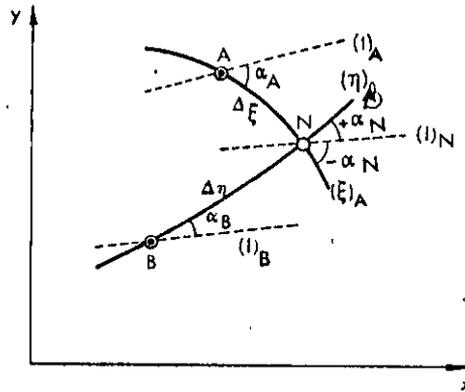


Fig 3.3. Construction du point courant . Opération N

Connaissant les points A et B, c'est à dire:

$$x_A, y_A, \theta_A, Z_A = \text{Log } P_A, S_A$$

$$x_B, y_B, \theta_B, Z_B = \text{Log } P_B, S_B$$

On se propose de calculer un nouveau point N:

$x_N, y_N, \theta_N, Z_N = \text{Log } P_N, S_N$, situé à l'intersection des deux lignes de Mach $(\xi)_A$ passant par A et $(\eta)_B$ passant par B.

On dispose à cet effet des équations de ces deux lignes:

$$y_N - y_A = \int_A^N \text{tg}(\theta - \alpha) dx \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

$$y_N - y_B = \int_B^N \text{tg}(\theta + \alpha) dx \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

Après discrétisation des intégrales (3.10) et (3.11) par la formule de la moyenne, on obtient:

$$y_N - y_A = [\text{tg}(\theta - \alpha)]_{AN} (x_N - x_A) \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

$$y_N - y_B = [\text{tg}(\theta + \alpha)]_{BN} (x_N - x_B) \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

L'indice ij définissant une moyenne arithmétique entre les valeurs des paramètres aux point i et j.

Ainsi à partir de (3.12) et (3.13) nous pouvons déterminer x_N et y_N , d'où l'on peut écrire.

$$\Delta \xi = \frac{y_N - y_A}{[\sin(\theta - \alpha)]_{AN}} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

$$\Delta\eta = \frac{y_N - y_B}{[\sin(\theta + \alpha)]_{BN}} \dots\dots\dots (3.15)$$

Ainsi les deux premières équations du système (K) peuvent être discrétisées comme suit:

$$\zeta_{BN}(Z_N - Z_B) + \theta_N - \theta_B = jJ_{BN}\Delta\eta \dots\dots\dots (3.16)$$

$$\zeta_{AN}(Z_N - Z_A) - \theta_N + \theta_A = jJ_{AN}\Delta\xi \dots\dots\dots (3.17)$$

avec: $\zeta = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\gamma}$ et $J = -\frac{\sin\alpha \sin\theta}{r}$

La troisième équation du système (K), dans le cas de notre étude, elle se réduit à $S = cte$ d'où $S_N = S_A = S_B$.

On conduit l'ensemble de ces calculs par itération, puisqu'à priori les données de N qui interviennent dans les coefficients des équations discrétisées sont inconnues (3.12) à (3.17). Un critère de convergence est fourni par la coïncidence à ϵ donné près, des valeurs θ_N et α_N obtenues avec les valeurs θ_N et α_N utilisées par les équations (3.12) à (3.17).

On remarquera qu'au cours des différentes étapes de calcul, nous avons été amenés à utiliser les valeurs de α angle de Mach au point A, B et N, dans ce qui suit nous allons

calculer le nombre de Mach $M = \frac{1}{\sin\alpha}$ à partir de Z, S et T_0 .

* Calcul de M à partir de Z, S et T_0 :

Soit l'équation (2.6):

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{V^2}{2}$$

T_0 : température totale de l'écoulement.

En divisant par $a^2 = \gamma r T$ vitesse locale du son:

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{2C_p T_0 - 2C_p T}{\gamma r T} = \frac{2C_p}{\gamma r} \frac{T_0}{T} - \frac{2C_p}{\gamma r}$$

$$M^2 = \frac{2C_p}{\gamma} \left[\frac{T_0}{rT} - \frac{1}{r} \right]$$

d'autre part: $S = C_v \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$ d'où $\frac{S}{C_v} = \gamma \text{Log} \frac{P}{\rho} + (1 - \gamma) \text{Log} P$

et avec $\frac{P}{\rho} = rT$ on aura $\gamma \ln rT = \frac{S}{C_v} + (\gamma - 1) \text{Log} P$

d'où $\ln rT = \frac{S}{C_p} + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \text{Log} P$

donc:

$$M^2 = \frac{2C_p}{\gamma} \left[\frac{T_0}{\text{Exp} \left[\frac{S}{C_p} + \frac{(\gamma-1)}{\gamma} Z \right]} - \frac{\gamma}{C_p(\gamma-1)} \right] = \text{FTHER}^2(T_0, \gamma, C_p, Z, S) \dots (3.19)$$

Ainsi connaissant Z et S en un point de l'écoulement nous pouvons calculer le nombre et l'angle de Mach M et α .

3.2.2. Calcul d'un point sur une frontière

La présence d'une frontière de l'écoulement met en défaut l'opération (N) dès que des points A et B devrait se situer hors du domaine d'intégration. La condition caractéristique est alors remplacée par la condition relative à la frontière: celle ci est généralement une ligne de courant le long de laquelle est imposé soit la direction (paroi solide) soit une condition de pression afin de déterminer la paroi donnant cette même pression.

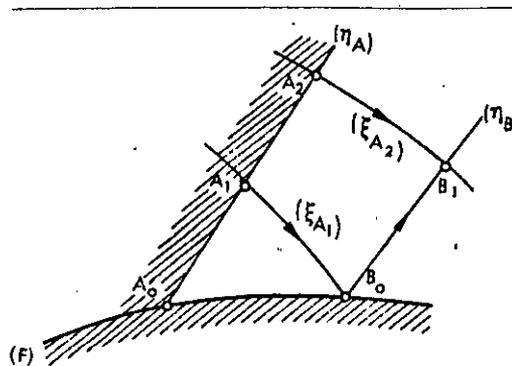


Fig 3.4. Calcul d'un point à la paroi solide d'un obstacle

On connaît A_0, A_1, A_2, \dots sur la caractéristique (η_A) issue d'un point A_0 de la frontière (F); la caractéristique (ξ_{A_1}) rencontre F en B_0 point inconnu. (F) étant une ligne de courant:

$$S_{B_0} = S_{A_0}$$

Enfin la condition de long (ξ_{A_1}) s'écrit:

$$\zeta_{A_1 B_0} (Z_{B_0} - Z_{A_1}) - \theta_{B_0} + \theta_{A_1} = j J_{A_1 B_0} \Delta \xi \dots (3.20)$$

Ainsi ou bien la paroi est donnée (θ_{B_0} donnée) ont déterminé Z_{B_0} , ou alors c'est la pression qui est donnée (Z_{B_0} donnée) ont déterminé alors θ_{B_0} c'est à dire la paroi:

3.2.3. Formation d'un choc par focalisation

Au cours de l'application de l'opération (N), cette construction tombe en défaut si deux lignes de Mach de la même famille se croisent (voir figure 3.5).

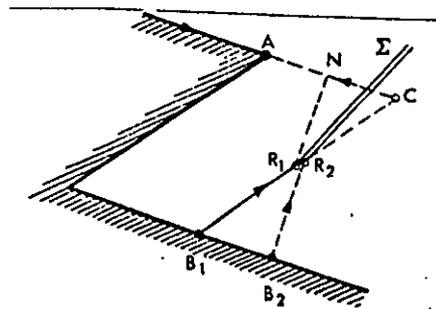


Fig 3.5 *Formation d'un choc par focalisation de lignes de Mach*

Dans ce cas, en effet le point N à déterminer à partir de B_2 et de C se trouve placé entre A et C dans le domaine d'écoulement déjà calculé; l'application formelle de l'opération (N) conduit donc à une double détermination. Ce phénomène correspond à l'apparition d'une onde de choc. Soit R (R_1, R_2) le point sera considéré comme un point double (R_1, R_2): les données de R_1 ayant été calculées par interpolation entre B_1 et C, fournissant l'état amont de R de l'onde de choc naissante (Σ). Ensuite moyennant les propriétés des chocs nous pourrons obtenir le point R_2 en aval du choc.

3.3. Configuration de la prise d'air

Le choix de la configuration de la prise d'air est dictée par notre souci de stabilité et d'une bonne efficacité η de la prise d'air à CSM. Pour une bonne stabilité il faudra avoir un écoulement irrotationnel et éviter la formation de choc par focalisation de ligne de Mach. Pour une bonne efficacité il faudra le moins de chocs possibles.

la configuration (voir figure 3.6) répond idéalement à notre souci d'efficacité et de stabilité. En effet cette configuration nous permet d'avoir un écoulement irrotationnel du fait que le choc AB n'est pas incurvé et les deux ondes de choc ne causent pas beaucoup de perte de pression totale.

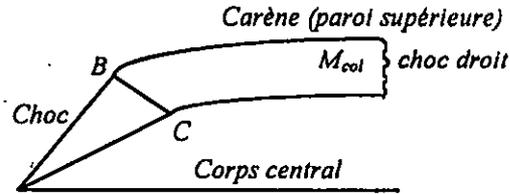


Fig 3.6 Configuration de la prise d'air

La première partie est le triangle curviligne (ABC). Dans cette partie le choc conique (AB) aboutit à la lèvre de la carène. L'inclinaison de la paroi supérieure au point B est égale à l'inclinaison de la vitesse de l'écoulement en aval du choc. Ainsi nous évitons la réflexion du choc. La ligne de Mach ξ (BC) sera déterminée pas à pas étant donnée qu'en amont de (BC) l'écoulement est résolu. Au delà de la ligne (BC) commence l'influence des parois supérieure et inférieure de la prise d'air, c'est la partie interne de l'écoulement (Aval de (BC)). Le but de cette partie est de déterminer le ralentissement de l'écoulement jusqu'au nombre de Mach M_{col} voulu. Il s'agit donc pour nous de déterminer pas à pas les parois supérieure et inférieure les plus courtes possible qui nous permettrais d'atteindre M_{col} , sans qu'il y ait formation d'onde de choc par focalisation de ligne de Mach.

3.4. Résolution de l'écoulement

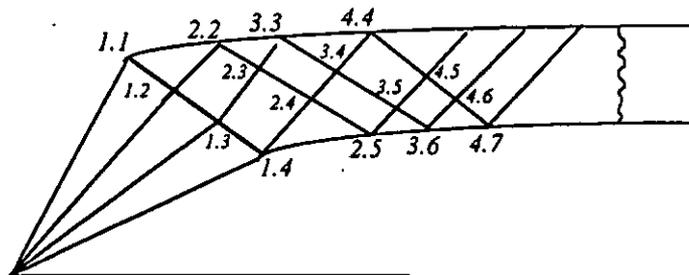


Fig 3.7 Réseaux des lignes de Mach

Pour résoudre l'écoulement interne, il nous faut d'abord déterminer la ligne de Mach (ξ) issue du point (1,1) séparant l'écoulement conique résolu et la deuxième partie de l'écoulement.

- Détermination de la ligne de Mach (ξ) se fera pas à pas à partir du point (1,1) en exploitant les résultats obtenues au chapitre II.

L'écoulement conique ayant été résolu avec un pas h le nombre de point à déterminer sur la ligne de Mach sera $NH = \frac{\beta_c - \theta_c}{h}$.

Soit le point A (1,I) appartenant à la ligne de Mach (ξ) déterminons le point B (1,I+1) appartenant à la ligne de Mach (ξ) aussi le point A est déterminé par $x_A, y_A, \theta_A, Z_A, S_A$ on doit déterminer le point B.

$$\eta_A = \text{Arctg} \frac{y_A}{x_A} \quad \text{d'où} \quad \eta_B = \text{Arctg} \frac{y_B}{x_B} = \eta_A - h$$

Donc nous avons $f(\eta_B)$ et $f'(\eta_B)$ et avec (2.60) à (2.65) on obtient: θ_B, Z_B, S_B .

Pour x_B et y_B nous avons:

$$y_B - y_A = \int_A^B \text{tg}(\theta - \alpha) dx = [\text{tg}(\theta - \alpha)]_A^B (x_B - x_A)$$

$$\frac{y_B}{x_B} \text{tg}(\eta_A - h) = \text{tg} \left(\text{Arctg} \left(\frac{y_A}{x_A} \right) - h \right)$$

A partir de ces deux équations on peut obtenir x_B et y_B . Ainsi le point B est entièrement déterminé.

Ce calcul de la ligne de Mach (BC) commence à partir du point (1,1).

$$\text{avec } X(1,1) = \frac{R_1}{\text{tg}(\beta_c)}$$

$$Y(1,1) = R_1$$

R_1 : rayon du débit capté.

Sur la figure 3.7 sur la ligne de Mach nous avons représenté quatre points (1,1); (1,2); (1,3); (1,4). Ceci pour la clarté de l'exposé. En réalité nous utiliserons un nombre plus important de point le nombre quatre correspond à NH.

Les points (I,I) $I = 1, NH$ sont situés sur la paroi supérieure.

Les points (I, NH+I-1) $I = 1, NH$ sont situés sur la paroi inférieure.

Les points (I,J) avec $I = 1, NH$; $J = I+1, NH+I-2$ sont les points internes de l'écoulement.

Le calcul de l'écoulement se fera dans l'ordre suivant:

$$I = 1, NH$$

$$J = I+1, NH + I - 1$$

pour NH = 4 cas de la figure 3.7 l'ordre est le suivant:

(2,2) ; (2,3) ; (2,4) ; (2,5) ; (3,3) ; (3,4) ; (3,5) ; (3,6) ; (4,4) ; (4,5) ; (4,6) ; (4,7).

Pour le calcul d'un point N (I,J) interne de l'écoulement, il se fera à partir de A (I,J-1) et B (J-1,I). Les calculs seront menées tel qu'exposé précédemment.

3.4.1. Calcul d'un point sur la paroi supérieure

Le calcul du point F (I,I) sur la paroi se fera à partir du point A (I-1,I-1) point précédent F sur la paroi et du point B (I-1,I) point précédent F sur la ligne de Mach η passant par F.

Equation de la paroi:

$$y_F - y_A = \int_A^F \text{tg}\theta dx = [\text{tg}\theta]_{AF} (x_F - x_A) \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

Equation de la ligne de Mach η :

$$y_F - y_B = \int_B^F \text{tg}(\theta + \alpha) dx = [\text{tg}(\theta + \alpha)]_{BF} (x_F - x_B) \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

Equation discrétisée sur la ligne de Mach η :

$$\zeta_{BF} (Z_F - Z_B) + \theta_F - \theta_B = j J_{BF} \Delta\eta \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

avec: $\zeta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma}$; $J = -\frac{\sin \alpha \sin \theta}{r}$ $r \equiv y$

$$\Delta\eta = \frac{y_F - y_B}{[\sin(\theta + \alpha)]_{BF}}$$

Etant donné que l'écoulement est isentropique nous avons: $S_F = S_A$.

Il nous faut maintenant se donner une distribution de pression sur la paroi, pour cela nous avons deux choix:

* Une distribution régulière de pression:

L'équation (2.19) nous permet d'écrire:

$$Z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \ln \left[\frac{T_0}{\frac{\gamma M^2}{C_p} + \frac{\gamma}{C_p (\gamma - 1)}} \right] - \frac{S}{C_p} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

$$Z = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M, S)$$

Ainsi en se fixant le nombre de Mach au col M_{col} on se fixe aussi Z_{col} :

$$Z_{col} = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M_{col}, S)$$

Donc une distribution régulière de pression sur la paroi supérieure s'écrit:

$$Z_F = Z(1,1) + \frac{X_F - X(1,1)}{L - X(1,1)} (Z_{col} - Z(1,1)) \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

L: longueur de la paroi supérieure.

* Une distribution régulière du nombre de Mach.

Il s'agit là de fixer M_F puis à l'aide de (3.21) de calculer Z_F .

$$M_F = M(1,1) + \frac{X_F - X(1,1)}{L - X(1,1)} (M_{col} - M(1,1)) \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

$$Z_F = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M_F, S)$$

Ainsi après avoir obtenu Z_F par une des deux méthodes suscitées on peut conduire l'ensemble de ces calculs par itération, puisqu'à priori les données en F qui interviennent dans les équations discrétisées sont inconnues. Le critère de convergence sera la coïncidence à ϵ près de θ_F et α_F utilisée avec θ_F et α_F obtenue après résolution des équations.

3.4.2. Calcul d'un point sur la paroi inférieure

Le calcul d'un point F (I,NH+I-1) se fera à partir du point A (I-1,NH+I-2) point précédent F sur la paroi et du point B (I,NH+I-2) point précédent F sur la ligne de Mach (ξ) passant par F.

Equation de la paroi:

$$y_F - y_A = \int_A^F \operatorname{tg}\theta dx = [\operatorname{tg}\theta]_{AF} (x_F - x_A) \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

Equation de la ligne de Mach ξ :

$$y_F - y_B = \int_B^F \operatorname{tg}(\theta - \alpha) dx = [\operatorname{tg}(\theta - \alpha)]_{BF} (x_F - x_B) \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

Equation discrétisée sur la ligne de Mach ξ :

$$\zeta_{BF} (Z_F - Z_B) - \theta_F + \theta_B = j J_{BF} \Delta\xi \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

$$\Delta\xi = \frac{y_F - y_B}{[\sin(\theta - \alpha)]_{BF}}$$

L'écoulement étant isentropique:

$$S_F = S_A$$

De la même façon que pour la paroi supérieure nous devons fixer une distribution de pression:

* Une distribution régulière de pression:

$$Z_F = Z(1, NH) + \frac{X_F - X(1, NH)}{L - X(1, NH)} (Z_{col} - Z(1, NH)) \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

avec $Z_{col} = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M_{col}, S)$

* Une distribution régulière du nombre de Mach:

$$M_F = M(1, NH) + \frac{X_F - X(1, NH)}{L - X(1, NH)} (M_{col} - M(1, NH)) \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

$$Z_F = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M_F, S)$$

En ayant Z_F on peut conduire l'ensemble de ces calculs par itération comme précédemment jusqu'à obtenir les données en F.

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode utilisée pour le traçage des parois supérieure et inférieure de la prise d'air supersonique à CSM en se fixant le nombre de Mach à l'infini amont M_1 et le nombre de Mach en amont du choc droit interne M_{col} et l'angle θ_c du cône circulaire. En effet en fixant M_1 , M_{col} et θ_c , on cherchera la prise d'air à CSM la plus courte nous permettant d'avoir une compression supersonique irrotationnelle et sans formation de choc incurvé.

**CHAPITRE IV:
PROGRAMMATION ET
ORGANIGRAMMES**

4.1. Intérêt du programme

Le programme élaboré permet à partir de l'altitude du vol Alt le nombre de Mach M_1 , le demi - angle au sommet du cône central et le nombre de Mach désiré au col de déterminer les parois supérieure et inférieure de la prise d'air à CSM adaptée à ces données, avec (L/R) minimum.

R: rayon du débit capté.

L: distance de la pointe conique au col.

Pour un statoréacteur à combustion supersonique le col correspond à l'entrée de la chambre de combustion. De plus ce programme permet d'avoir en tout point de l'écoulement supersonique toutes les valeurs caractérisant un écoulement compressible nombre de Mach, pression statique, inclinaison de la vitesse, ...

Pour présenter ce programme, nous définissons tout d'abord toutes les fonctions utilisées par le programme. Ensuite nous présentons les sous-routines utilisées par le programme principal. Enfin, nous donnerons l'organigramme du programme principal ainsi que ceux des sous-routines.

4.2. Présentations des fonctions utilisées par le programme

Toutes les fonctions utilisées par le programme ont été établies auparavant. Pour cela à chaque fonction nous donnerons sa référence alphanumérique.

$$M = FM4(M^*) \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\frac{T}{T_0} = RAP(M, \gamma) \quad \dots\dots\dots (2.61)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = RPS(M, \beta, \gamma) \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = RPT(M, \beta, \gamma) \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

$$M = FEN(\beta, \theta, \gamma) \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

$$M = FHER(T_0, \gamma, C_p, Z, S) \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

$$Z = FTZ(T_0, \gamma, C_p, M, S) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

4.3. Présentations des sousroutines

4.3.1. Sousroutine altitude

Cette sousroutine à partir de l'altitude du vol et du nombre de Mach M , nous fournit les données thermodynamiques à l'infini amont de l'écoulement. Cette sousroutine utilise un fichier de données donnant en fonction de l'altitude, les données thermodynamiques de l'air [2]. Ces données correspondent à la température statique, la pression statique et la masse volumique statique de l'écoulement à l'infini amont.

4.3.2. Sousroutine SUBMA

La sousroutine SUBMA résout l'équation de Taylor - Maccoll pour θ_c et M_1 donnée. Les résultats sont $f(\eta)$: $W(1,I)$, $f'(\eta)$: $W(2,I)$, $\beta_c \cdot V_9$ inclinaison du choc conique et δ : T_s inclinaison de la vitesse en aval du choc.

4.3.3. Sousroutine caractéristique

Cette sousroutine permet le calcul à partir des résultats de la sousroutine SUBMA toutes les caractéristiques de l'écoulement sur la ligne de Mach ξ issu du premier point de la paroi supérieure.

4.3.4. Sousroutine N

Cette sousroutine permet le calcul d'un point N à l'intérieur de l'écoulement à partir de deux points A et B amont situés respectivement sur la ligne de Mach ξ et η passant par N.

4.3.5. Sousroutine FEPS

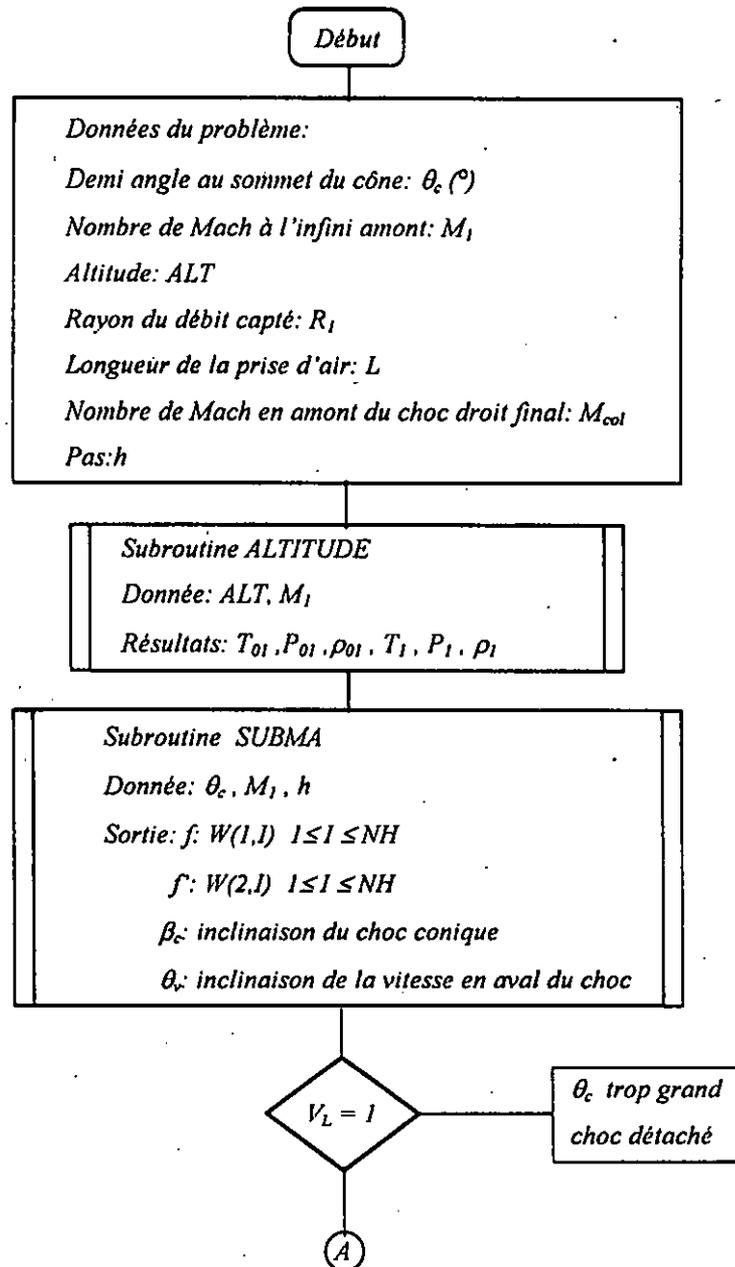
Cette sousroutine permet le calcul d'un point F sur la paroi supérieure à partir du point A situé sur la ligne de Mach η passant par F et du point B précédent F sur la paroi.

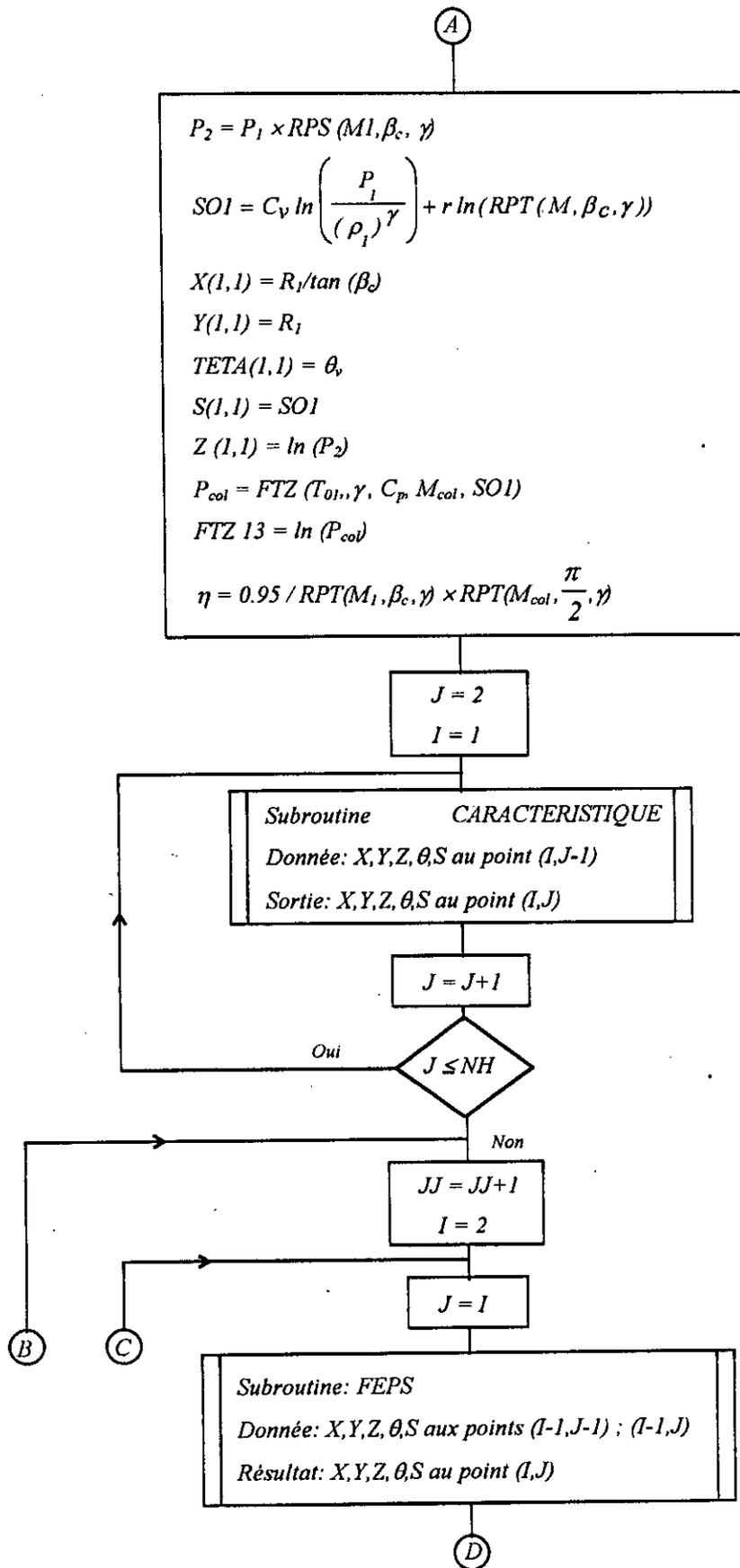
4.3.6. Sousroutine FEPI

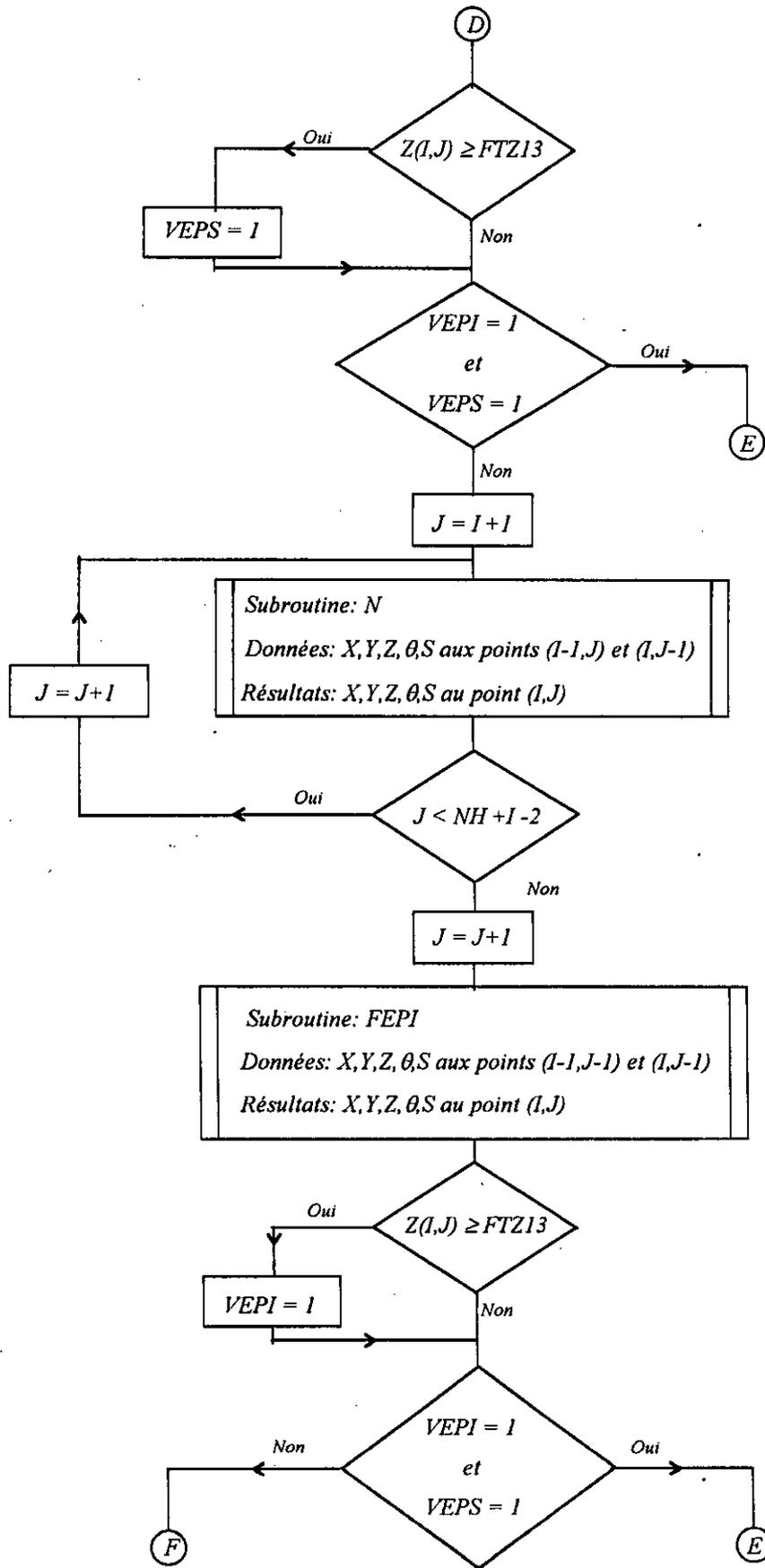
Cette sousroutine permet le calcul d'un point F sur la paroi inférieure à partir du point B situé sur la ligne de Mach ξ passant par F et du point A précédent F sur la paroi.

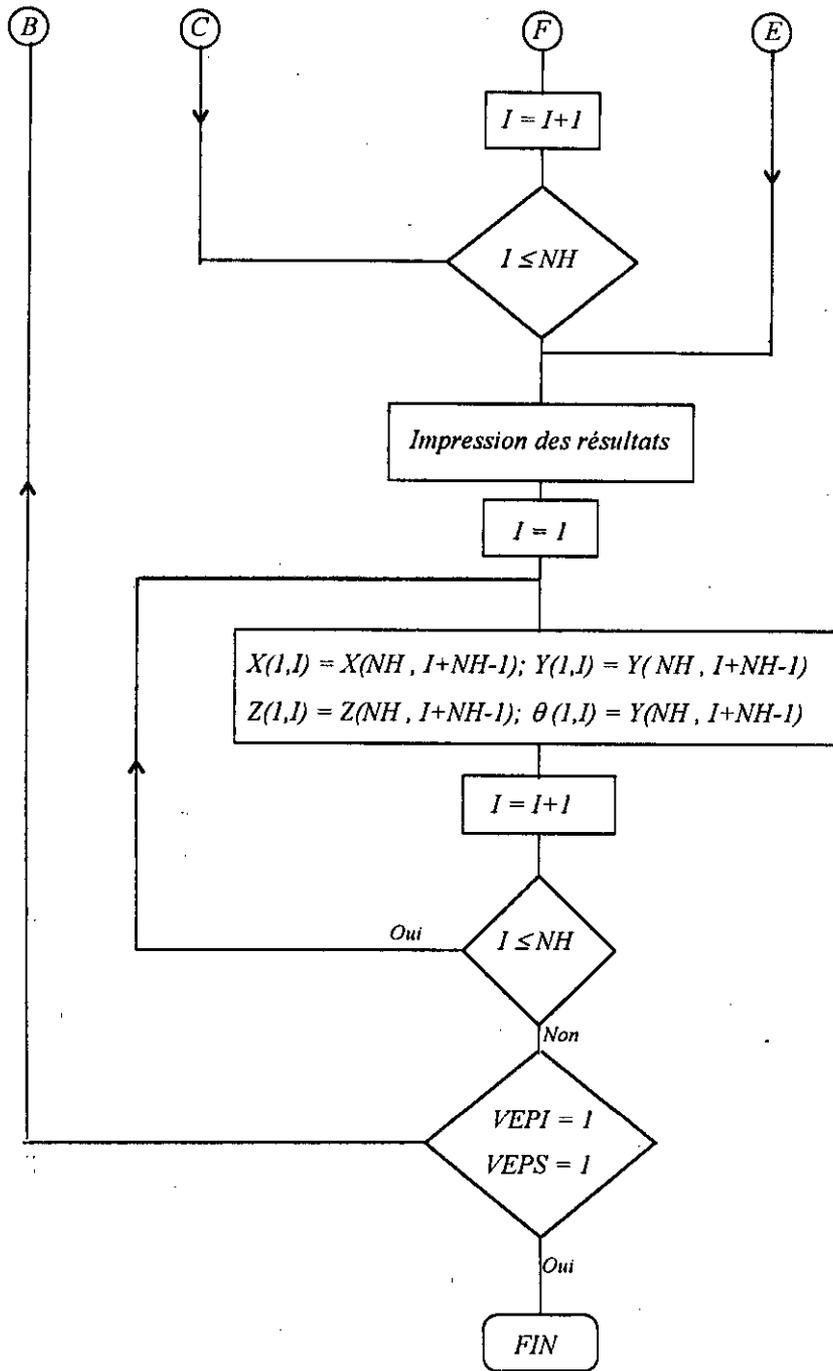
4.4. Organigrammes

4.4.1. Organigramme du programme principal

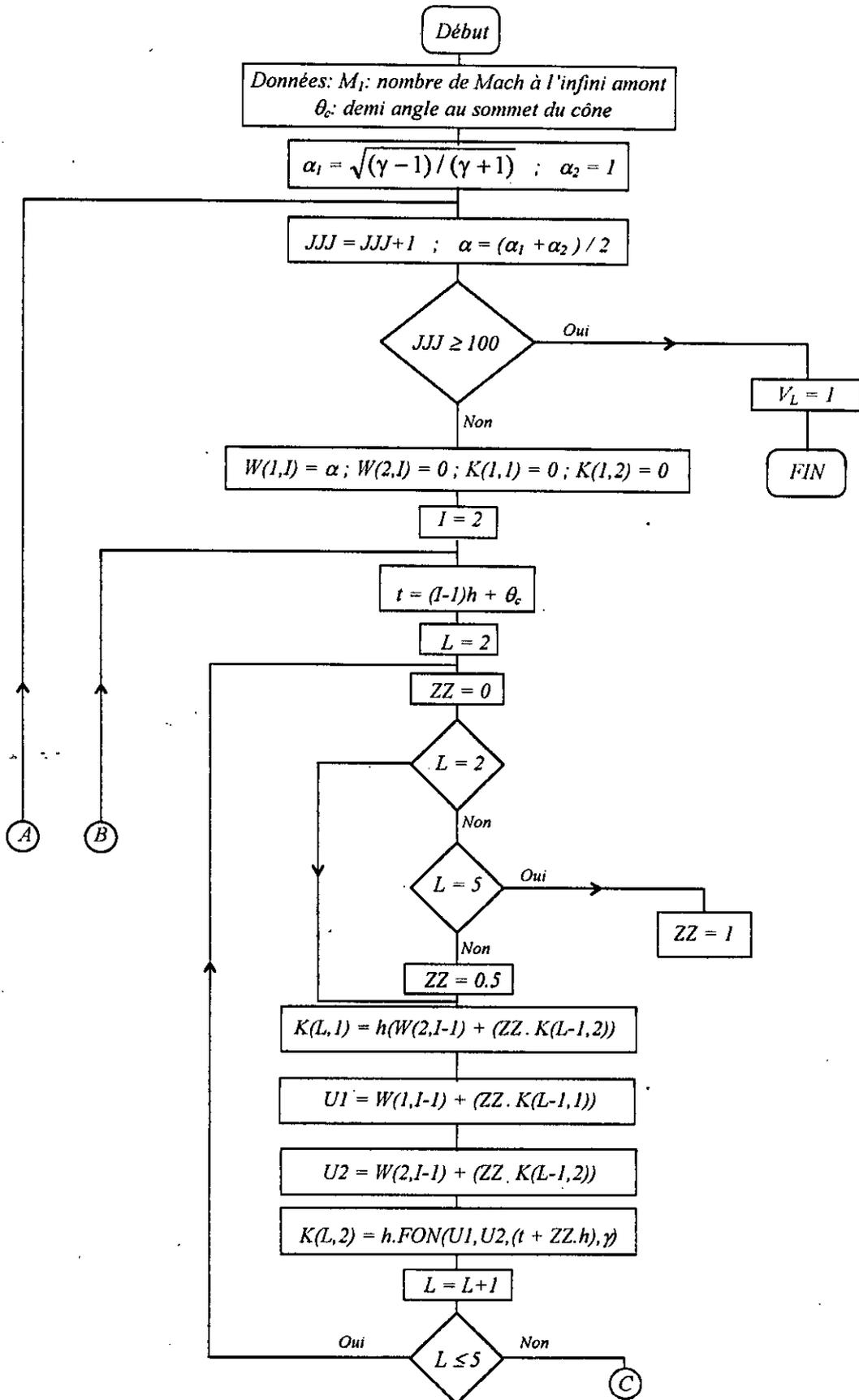


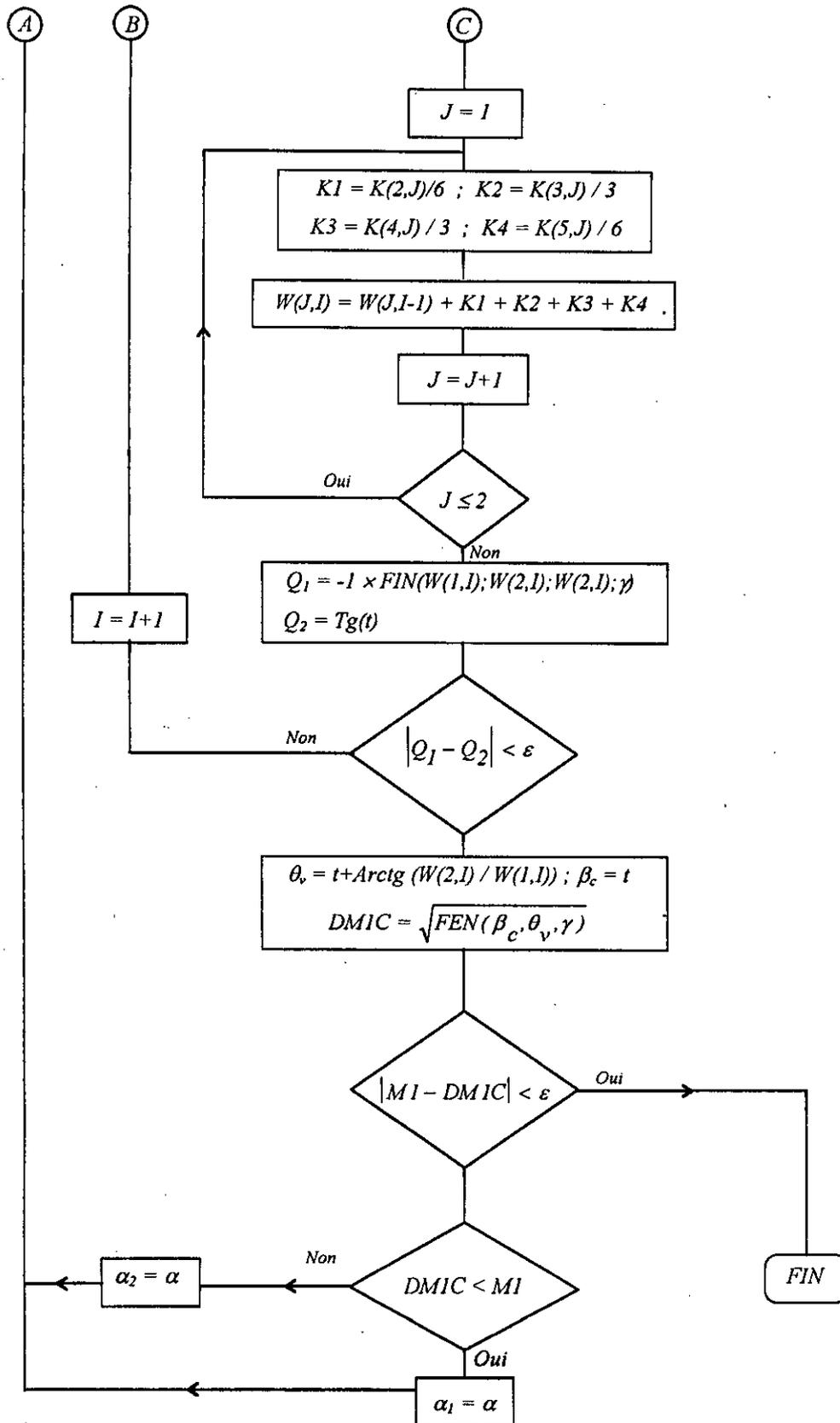




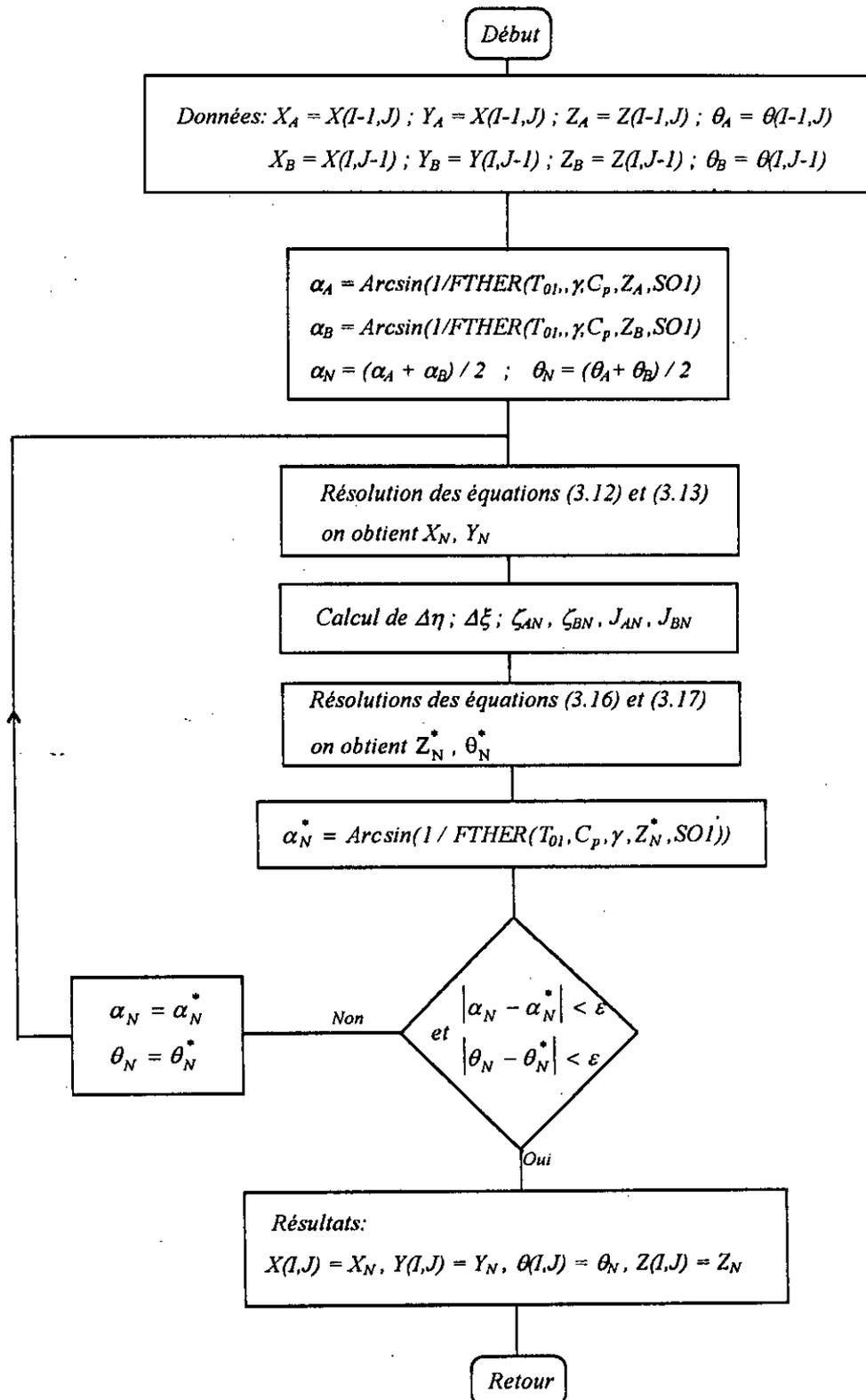


4.4.2. Organigramme de la subroutine SUBMA

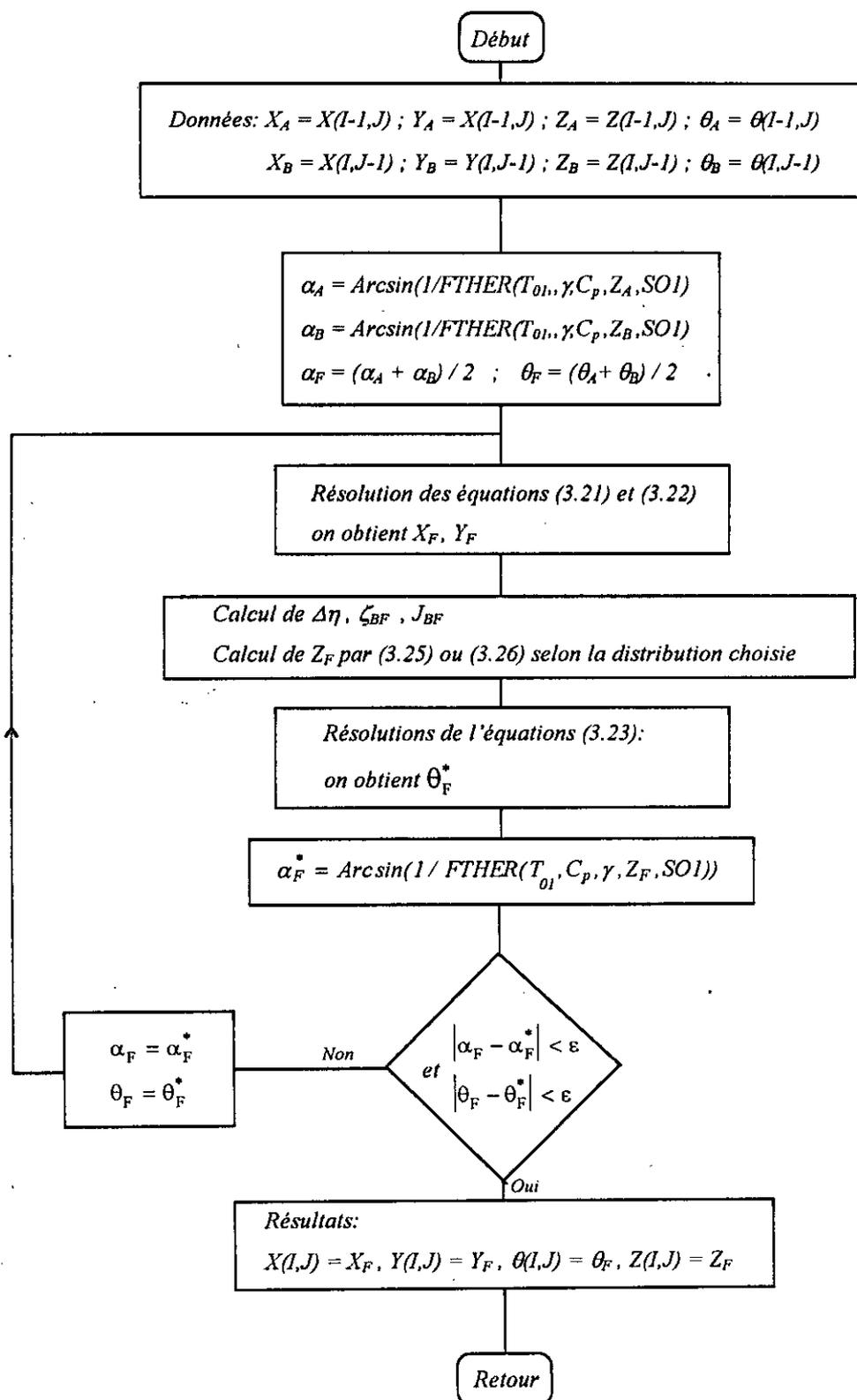




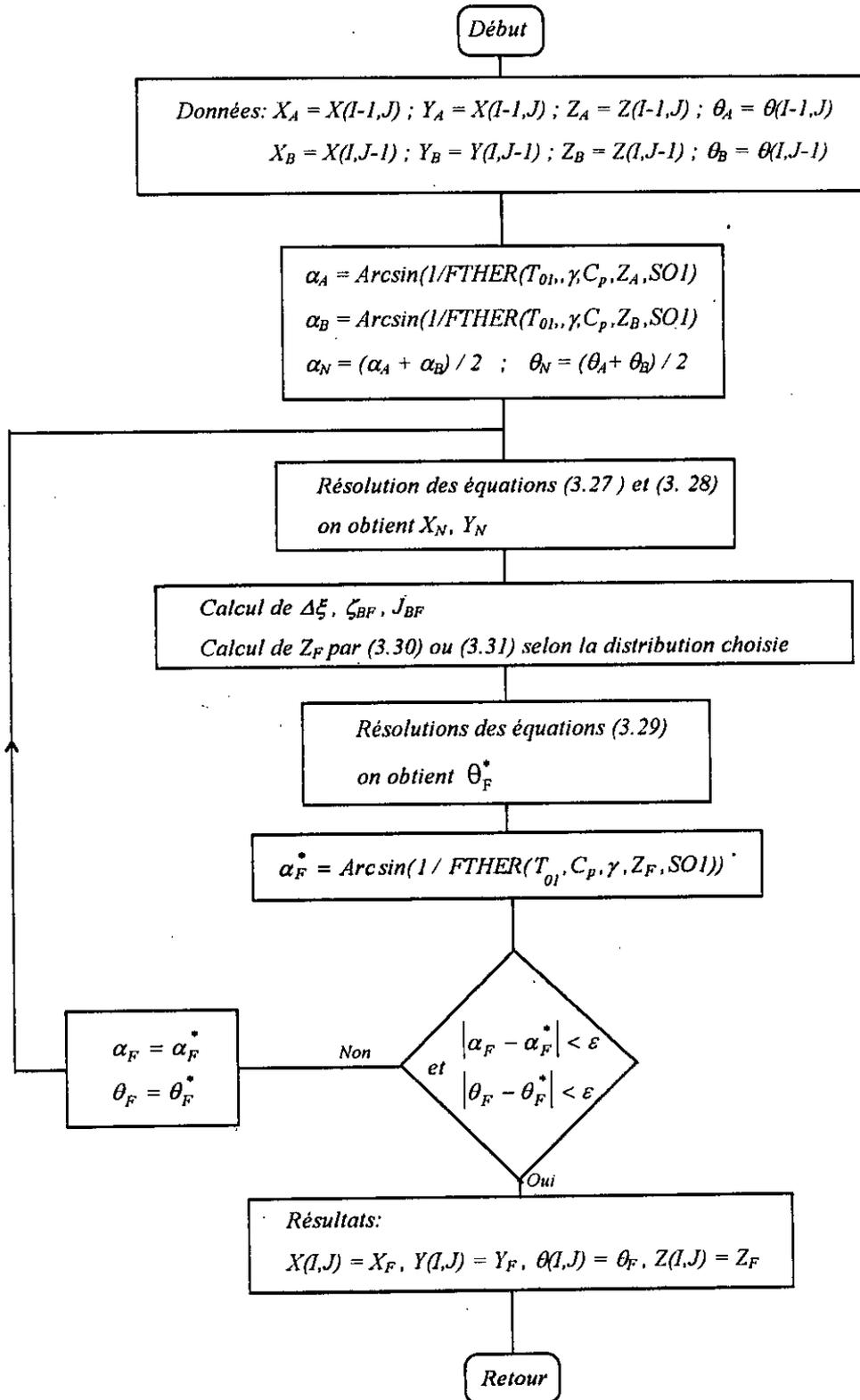
4.4.3. Organigramme de la subroutine N



4.4.4. Organigramme de la subroutine FEPS



4.4.5. Organigramme de la subroutine FEPI



**CHAPITRE V:
RESULTATS ET
COMMENTAIRES**

Le but principal de l'étude faite aux chapitres précédent, était le traçage des profils des prises d'air supersonique à CSM permettant une compression de l'air jusqu'à une valeur du nombre de Mach M_{col} . Pour cela nous avons élaboré un programme (décrit au chapitre IV) permettant le traçage des parois supérieure et inférieure de la prise d'air. Les prises d'air tracées par ce programme permettant une compression supersonique sans formation de choc incurvé.

5.1. Présentation des prises d'air tracées

Les prises d'air que nous avons présentés sont celles obtenues par le programme suscitée. Ces prises d'air adaptées au nombre de Mach M_1 avec un angle au sommet du cône θ et avec pour les huit premières prises d'air $M_{col} = 1.3$. La dernière prise d'air tracée permet une compression supersonique jusqu'à une valeur 3 du nombre de Mach, cette prise d'air est utilisée par les statoréacteurs à combustion supersonique. En plus du traçage des parois, on donne l'efficacité η et la longueur L de la prise d'air la plus petite possible sans qu'il ait de formation de choc par focalisation des lignes de Mach. Ces prises d'air correspondent à une distribution régulière de pression et avec le rayon de débit capté $R = 1$.

5.2. L'efficacité

Du point de vue théorique nous pourrions obtenir des prises d'air supersoniques d'efficacité $\eta = 1$. Le seul problème serait l'encombrement de tel prise d'air. En effet avec $\theta = 10^\circ$ (fig. 5.1 et fig. 5.3) nous obtenons respectivement pour un nombre de Mach M égal à 3 et 4 une efficacité η de 0.93 et 0.92, mais d'autre part les longueurs de ces prises d'air sont excessives donc inutilisable du point de vue pratique. Tandis que pour $\theta = 20^\circ$ (fig. 5.2 et fig. 5.4) on obtient des valeurs de l'efficacité plus basse, mais avec des longueurs L plus raisonnable. On remarquera que les longueurs acceptables du point de vue pratique correspondent à des valeurs de l'efficacité proche de ceux données par la loi type (fig. 1.1) de l'efficacité en fonction du nombre de Mach à l'infini amont. Pour des valeurs du nombre de Mach supérieur à 5 on constate que l'efficacité η de la prise d'air est inférieur à 0.5.

Pour cela, on aura recours dans ces cas à une combustion supersonique, ce qui nous permettra d'obtenir des efficacités η élevées. Pour $M = 7$ avec combustion supersonique à $M = 3$ on obtient une efficacité $\eta = 0.62$ (fig. 5.9).

5.3. Constatation sur la compression externe

L'angle au sommet du cône influe directement sur l'inclinaison du choc β donc sur la partie externe de la compression supersonique. Ainsi plus le choc est intense nous aurons une compression externe importante. Ainsi, si l'on veut diminuer la longueur de la prise d'air il suffira d'augmenter l'angle au sommet du cône θ , mais cela se fera au détriment de l'efficacité η .

Dans le tableau 5.1 nous présentons les caractéristiques de l'écoulement autour du cône pour les 9 prises tracées.

	M = 3		M = 4		M = 5		M = 6		M = 7
θ (°)	10	20	10	20	20	25	20	25	15
β (°)	21.5	29.4	17.6	26.5	25.0	30.2	24.1	29.4	18.32
δ (°)	3.2	12.5	4.68	14.4	15.5	20.3	16.2	20.9	12
M_A	2.86	2.40	3.67	2.97	3.43	2.97	3.83	3.25	4.88
M_B	2.73	2.30	3.54	2.89	3.35	2.92	3.76	3.20	4.80
η	0.93	0.87	0.92	0.76	0.62	0.46	0.48	0.32	0.62

Tab 5.1 Tableau récapitulatif

θ : angle au sommet du cône.

β : inclinaison du choc.

δ : inclinaison de la vitesse en aval du choc.

M_A : nombre de Mach en aval du choc.

M_B : nombre de Mach sur le cône.

η : efficacité.

Les valeurs présentées dans le tableau ci dessus comparées avec celles données par ⁽¹⁾sont identiques.

5.4. Constatation sur la compression interne

La compression interne est d'autant plus rapide en terme de longueur que la compression externe est importante. Ainsi, on remarquera que pour $\theta = 10^\circ$ (fig. 5.1 et fig. 5.3) les premières lignes de Mach occupent une longueur importante tandis que les dernières raidissent et occupent une longueur moins importante. Ce redressement des lignes de Mach est dû à la diminution du nombre de Mach puisque $\alpha = \text{Arcsin}\left\{\frac{1}{M}\right\}$, ainsi lorsque M tend vers 1, α tend vers $\frac{\pi}{2}$ ce qui explique ce raidissement.

Sur la figure 5.10 nous avons représenté la variation du nombre de Mach en fonction de $Z = \text{Log } P$ pour les 9 prises d'air tracées. On constate que la variation de M en fonction de Z est quasi linéaire, ceci explique le fait qu'une distribution régulière de Z ou M sur les parois donne pratiquement les mêmes résultats. C'est pour cette raison que nous avons représenté seulement les prises d'air obtenues avec des distributions régulières de pression.

5.5. Conclusion

On a pu constater qu'avec un angle au sommet du cône fixe, l'augmentation du nombre de Mach M_1 conduira à une prise d'air plus longue et moins efficace. Tandis que pour un nombre de Mach M_1 fixe l'augmentation de l'angle au sommet du cône θ conduira à une prise d'air plus courte mais moins efficace. Ainsi est mis en évidence l'antagonisme entre une bonne efficacité et un encombrement moindre de la prise d'air.

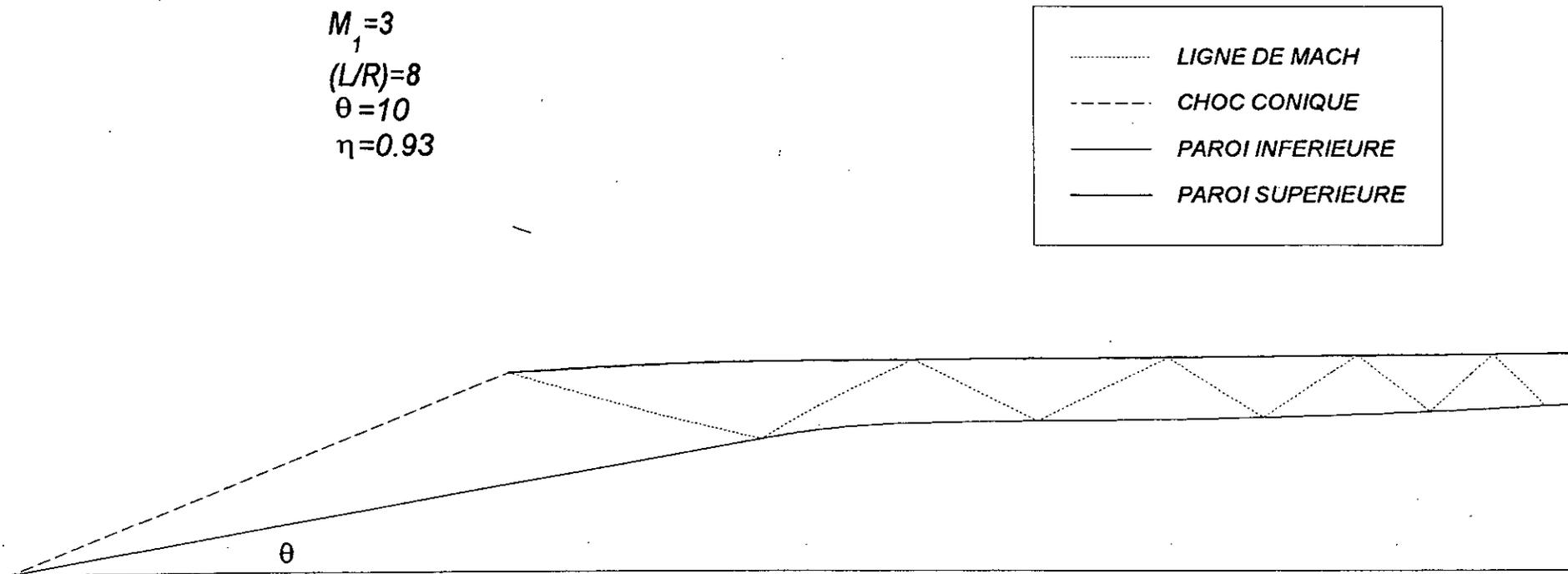


Fig.5.1: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

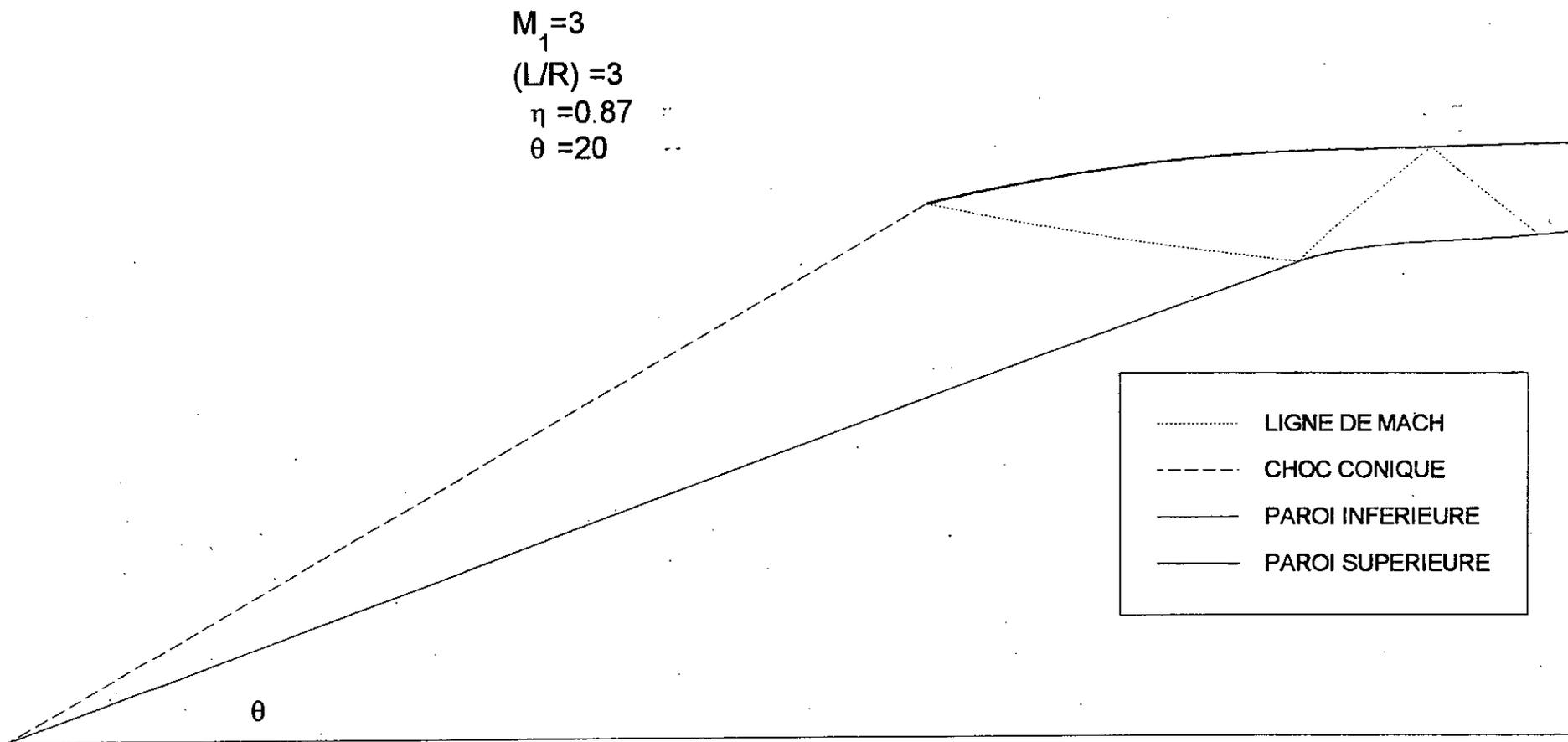


Fig.5.2: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

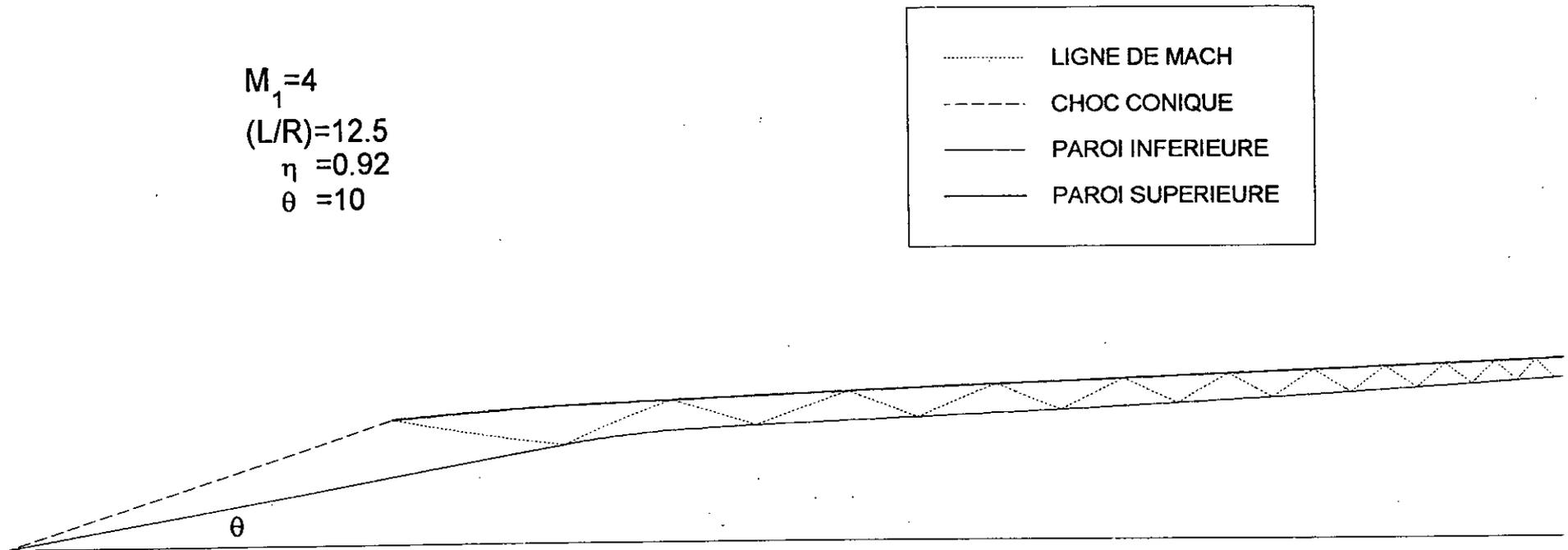


Fig.5.3: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

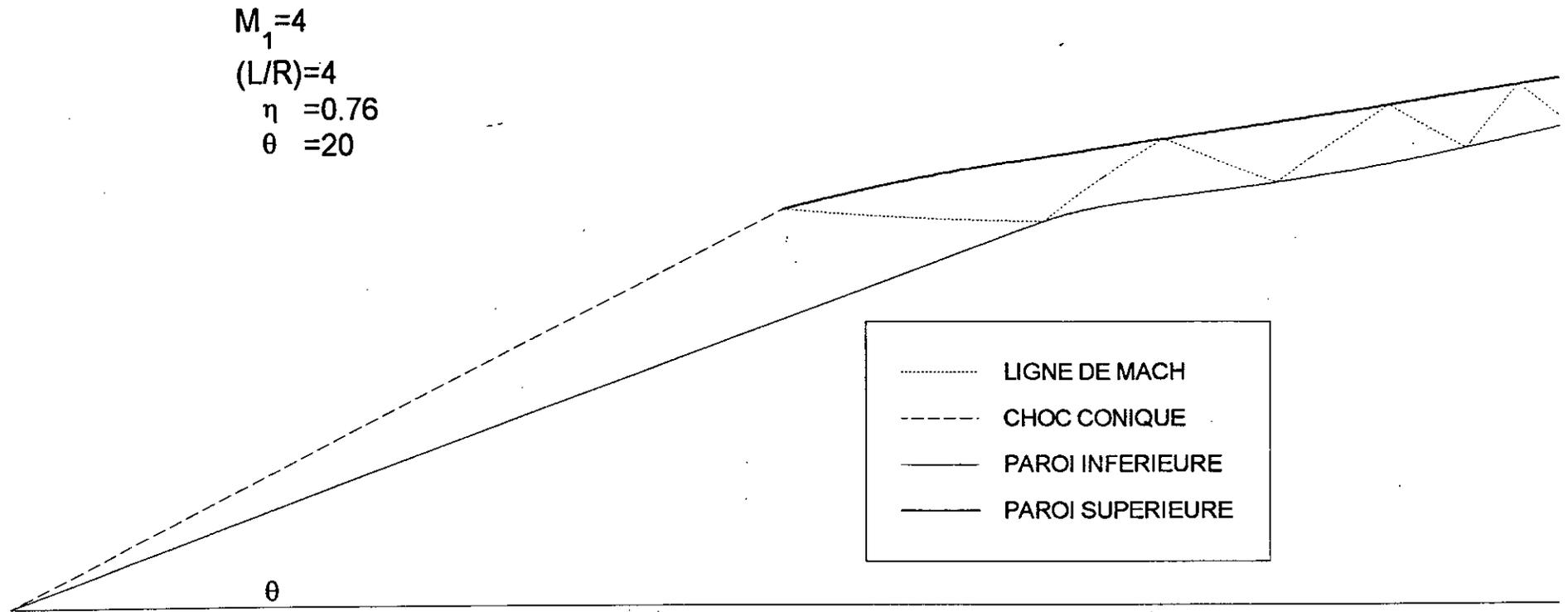


Fig.5.4: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

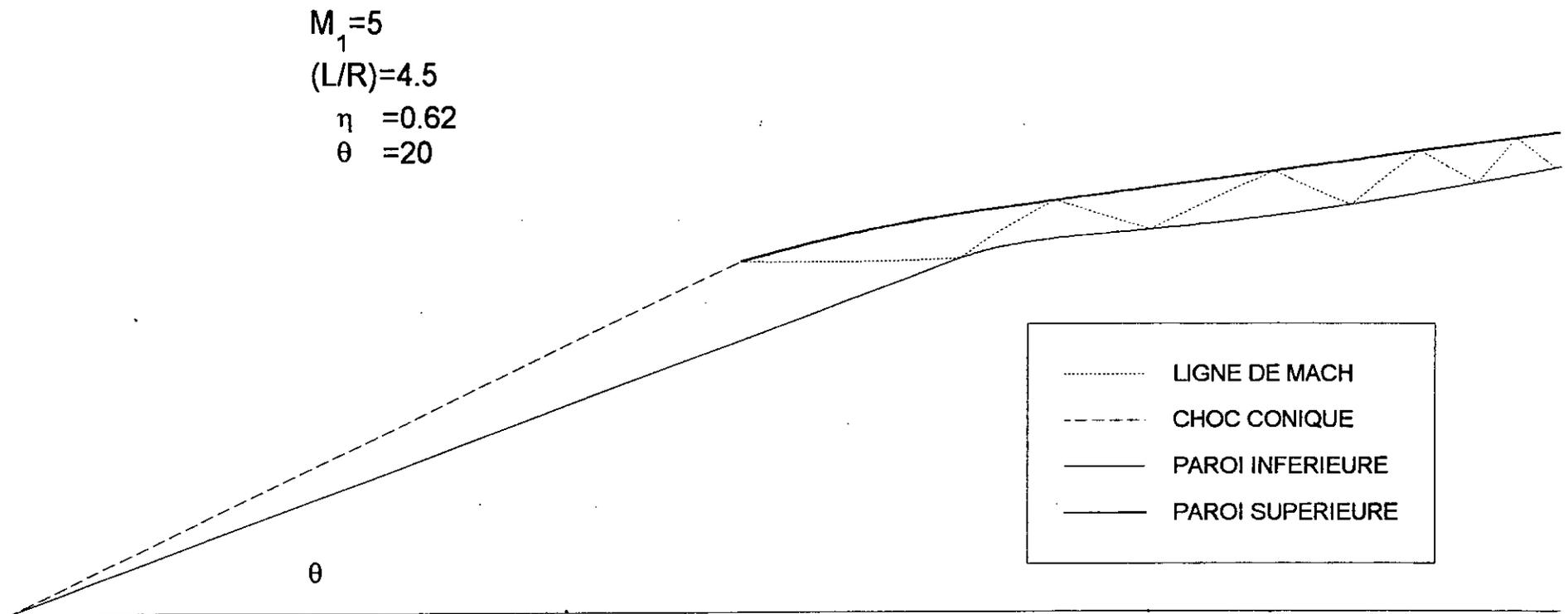


Fig.5.5: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

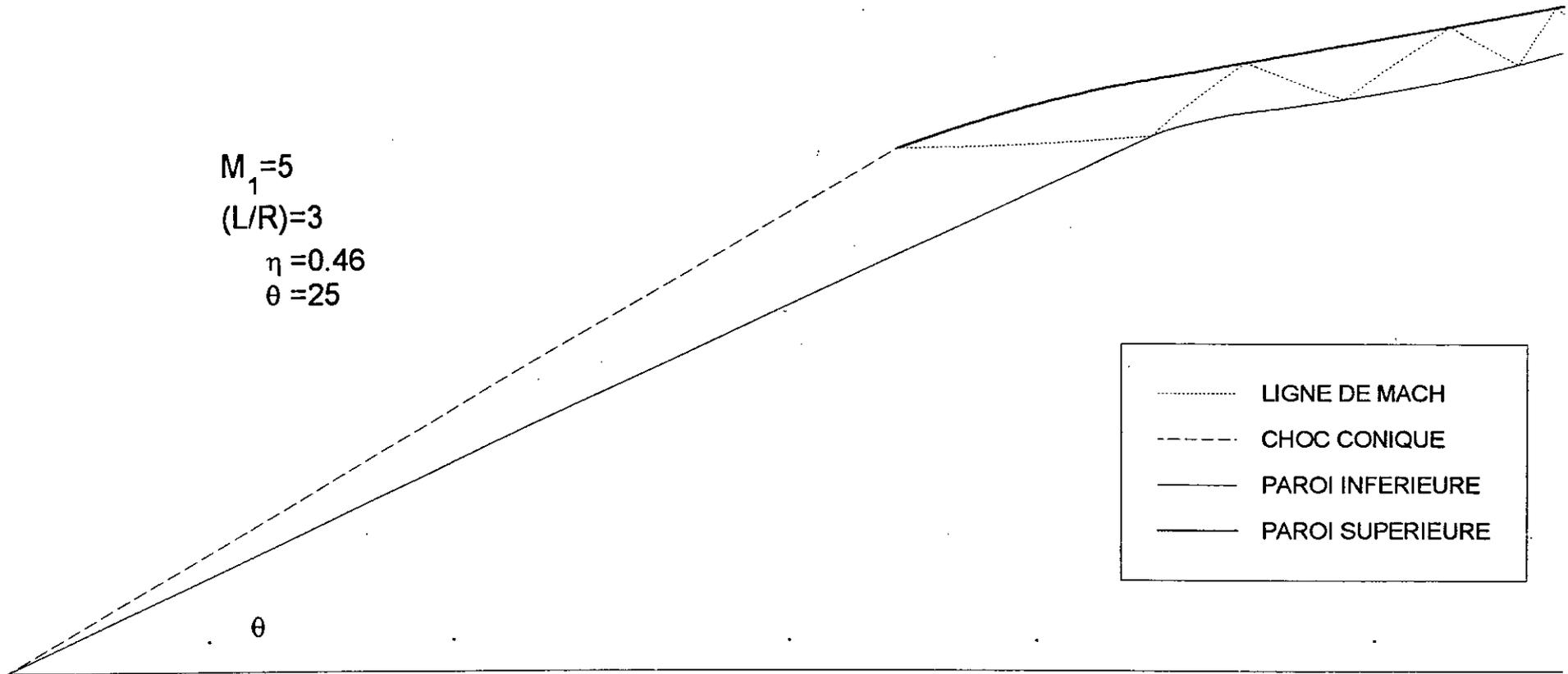


Fig.5.6: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

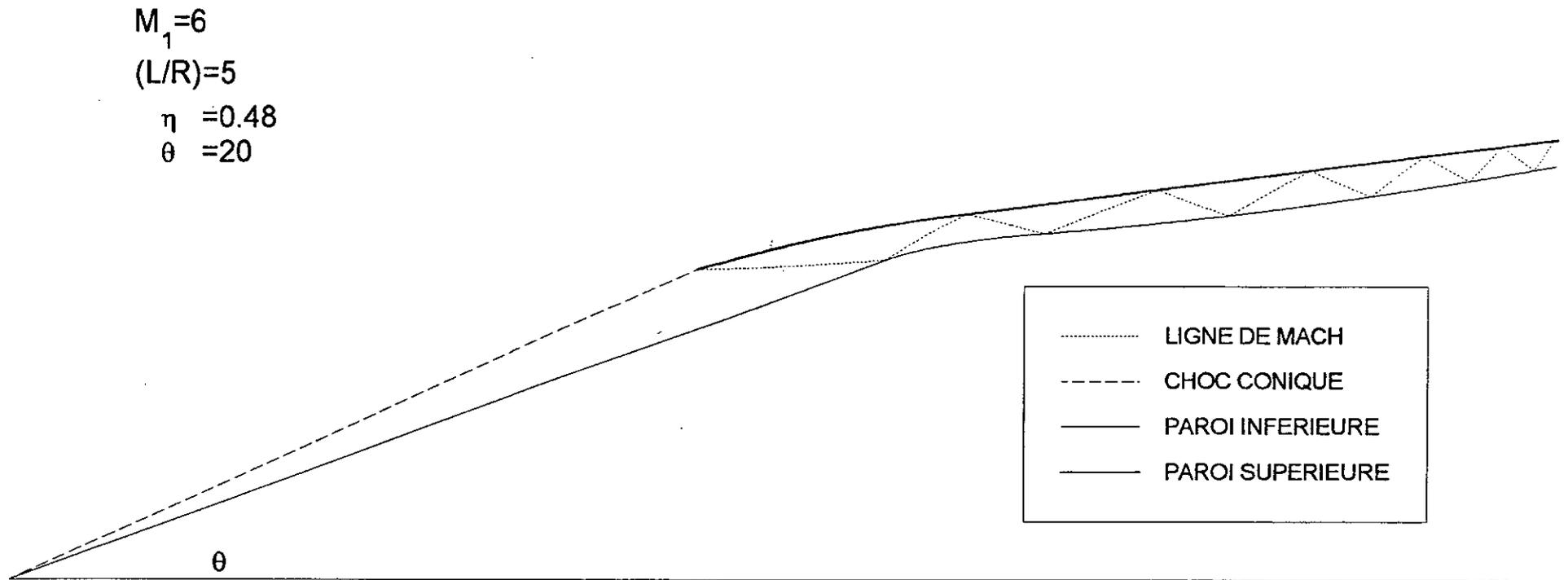


Fig.5.7: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

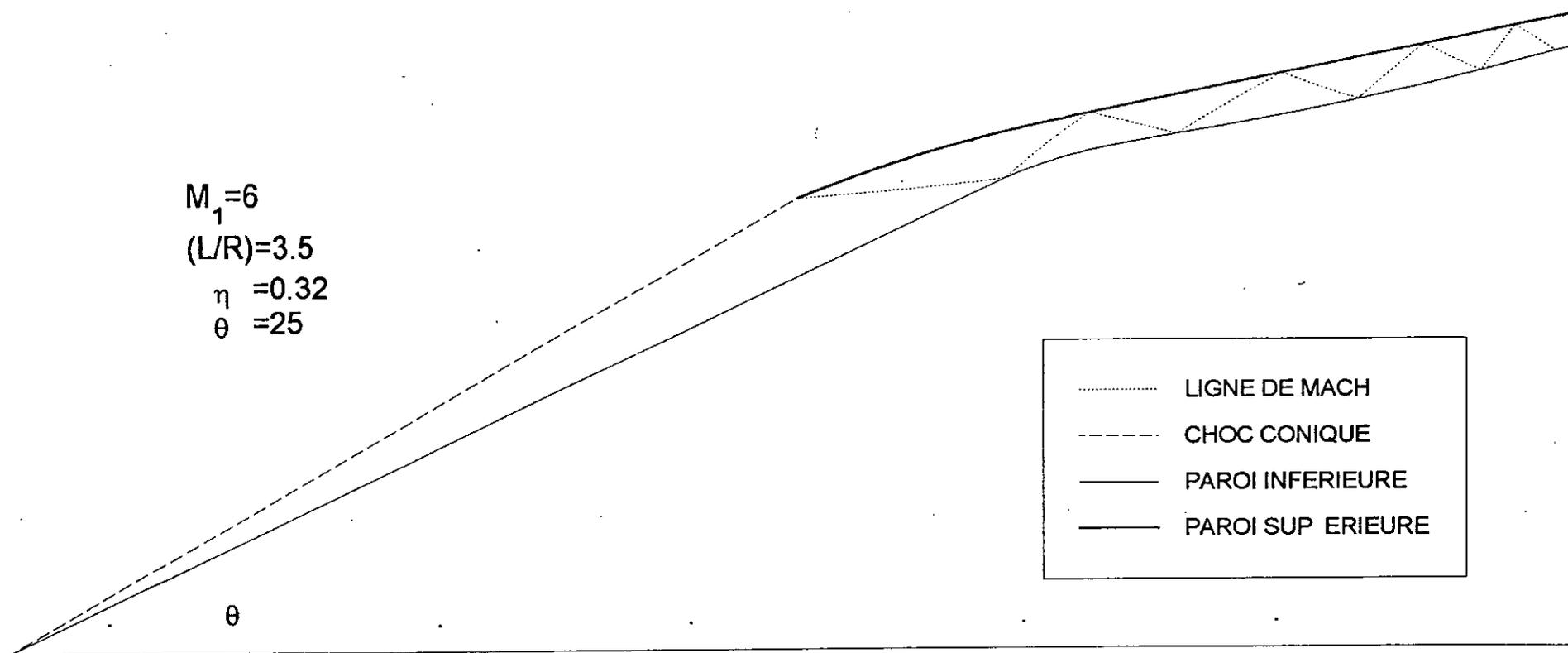


Fig.5.8: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM

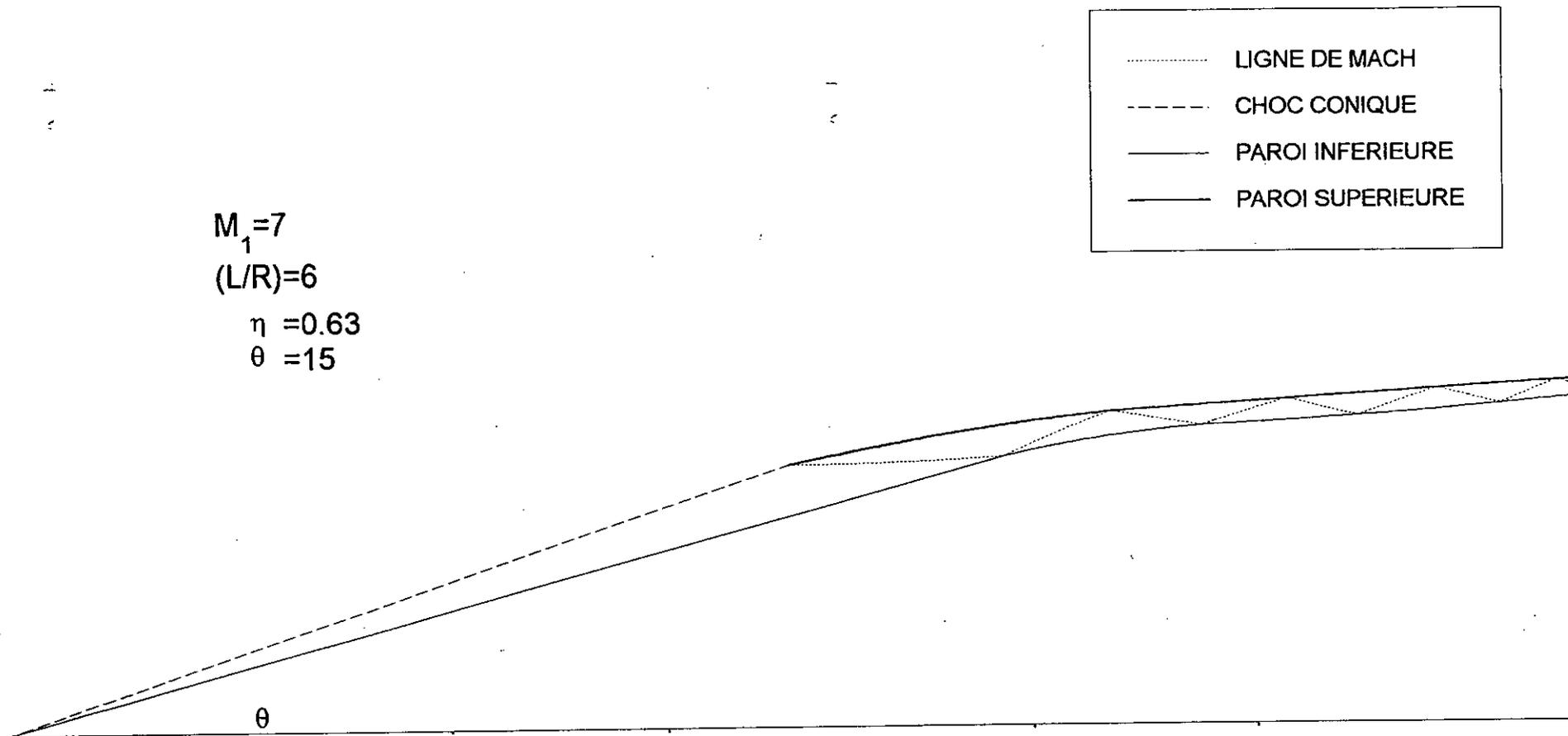


Fig.5.9: PROFIL DE LA PRISE D'AIR A CSM ADAPTEE AU NOMBRE DE MACH DE VOL M_1 ET AU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE θ POUR (L/R) MINIMUM AVEC COMBUSTION SUPERSONIQUE A NOMBRE DE MACH 3

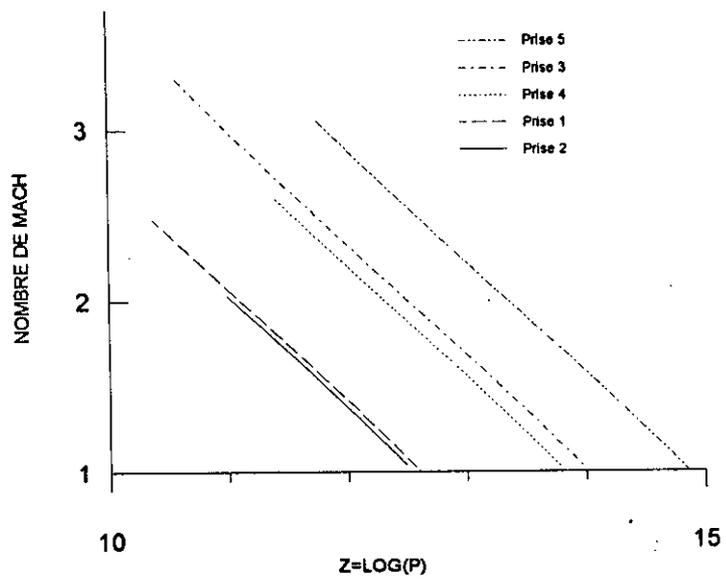
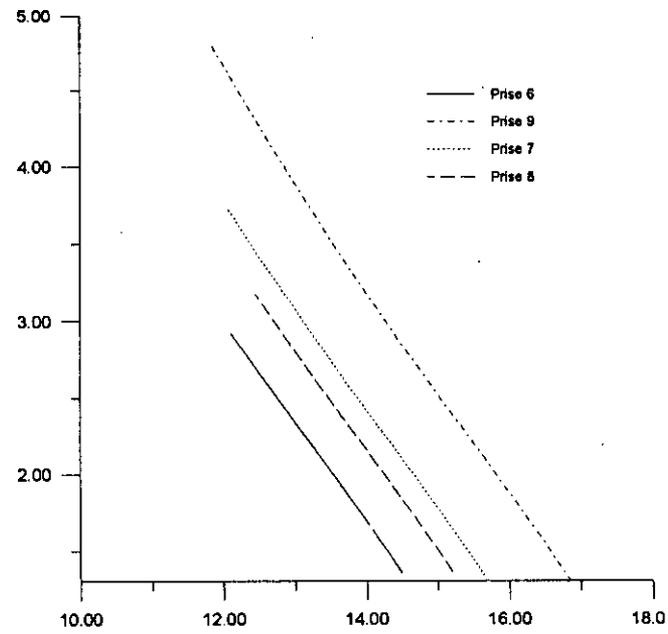


Fig.5.10: VARIATION DU NOMBRE DE MACH EN FONCTION DE Z POUR LES DIFFERENTS CAS ETUDIES

Conclusion générale

Dans la première partie de cette étude nous avons résolu l'écoulement d'un fluide compressible initialement en mouvement uniforme à vitesse supersonique, lors de son passage à travers un cône circulaire dont l'axe est parallèle à la direction de l'écoulement amont. Cette résolution pourrait servir de base de départ pour toute étude d'un écoulement supersonique autour d'un corps axisymétrique.

Dans la deuxième partie nous avons étudié l'écoulement interne à la prise d'air supersonique à CSM. Ainsi nous avons pu élaborer un programme permettant de tracer les parois de ces prises d'air adaptées au nombre de Mach M et un demi angle au sommet du cône. Nous avons eu à constater l'antagonisme entre une bonne efficacité et un moindre encombrement. Les résultats de ce programme pourraient être utilisés pour les calculs d'avant - projet. Nous avons eu à constater aussi l'équivalence entre une distribution régulière de pression et une distribution régulière du nombre de Mach sur les parois.

De nombreuses questions n'ont pas été abordées et qui seraient encore à considérer pour une étude complète du problème des prises d'air supersoniques, telle que l'adaptation de la prise d'air dans le cadre plus général de l'aérodynamique d'ensemble du fuseau moteur (turboréacteur ou statoréacteur) et de l'avion, les fonctionnements en incidence et dérapage, le fonctionnement à basse vitesse. Toutes interviennent à un stade plus ou moins avancé dans le choix capital des formes de la prise d'air et dans la définition du projet.

L'étude d'une prise d'air d'avion perfectionnée pour un vol de croisière en supersonique élevé est un travail qui demande des calculs d'avant projet et surtout d'essais en soufflerie considérable, un chiffre de 10.000 heures d'essais en souffleries, par exemple, est un ordre de grandeur déjà atteint pour plusieurs réalisations.

Bibliographie

- [1]: Jaumotte. A. L, Choc et onde de choc, Tome I et II, Masson et cie, Paris.
- [2]: Thompson. P. A, Compressible fluid dynamics, Mc Graw Hill, New - York.
- [3]: Shapiro. A. H, The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, Volume I, the Roland press company, New-York 1953.
- [4]: Gottlieb. J. J et Shi. Z. C, Random - choice - method for two - dimensional planar and axisymmetric steady supersonic flows, institute for aerospace studies, university of Toronto, UTIAS report n° 297, January 1986.
- [5]: Rebuffet. P, Aérodynamique expérimentale, Tome I et II, Dunod.
- [6]: Carrière. P, Aérodynamique interne des réacteurs - Première partie - Prise d'air -, Ecole nationale supérieure d'aéronautique et de l'Espace Toulouse.
- [7]: Carrière. P, Aérodynamique interne des réacteurs - Deuxième partie - Tuyères et jets - Ecole Nationale Supérieure d'Aéronautique et de l'Espace Toulouse.
- [8]: Cuvelier. C: Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieur, Tome 1 et 2, Presses polytechniques romandes.
- [9]: Ouziaux. R, Perrier. J, Mécanique des fluides appliquées, 3^{ème} édition, Dunod, 1978.
- [10]: Anderson. J. D, Fundamentals of aerodynamics, second edition, Mc Graw Hill, Inc.
- [11]: Leipmann, H. W and Roshko. A, Elements of gasdynamics, John Willey and sons, Inc, New - York, 1957.
- [12]: Peyret. R, Taylor. T. D, Computational methods for fluid flow, Springer - Verlag, New - York, 1983.
- [13]: Becker. E: Gas dynamics, Academic press, New - York, 1968.
- [14]: Zierep. J, Theoretical gas dynamics, Springer - Verlag, Berlin, 1978.
- [15]: Ferziger. J. H, Numerical methods for engineering application, J. Willey and sons, New - York, 1981.
- [16]: Harris. C. M, Cred. c. E, Shocks and vibration hand - book, Mc Graw Hill, New - York, 1976.

[17]: Vavra. M. H, Aero - thermodynamics and flow in turbomachines, J. Willey and sons, Inc, New - York.

[18]: Méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur 1^{er} et 2^{ème} congrés international, publié sous la direction de E. ABSI, Dunod, Paris, 1979 - 1980.

[19]: Revue: "Air et cosmos / Aviation international", n° 158, pp: 23 - 24.