

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département de Génie Mécanique**



**PROJET DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du Diplôme  
d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

**Thème**

**Torsion axisymétrique des milieux élastiques  
affaiblis par des fissures circulaires externes :**

**Milieu uni-couche**

**Proposé et Dirigé par :**  
**Pr. Belkacem KEBLI**

**Réalise par :**  
**Boubaker YOUNSI**

**Promotion : Juin 2014**

## ملخص:

نعرض في هذه المذكرة دراسة مسألة الالتواء المحوري التناظري لنصف فضاء مرن ومتجانس يحتوي على شق خارجي ذو شكل دائري، بحيث نطبق عليه دوران بواسطة قرص صلب مثبت على السطح.

لحل هذه المسألة وذلك من أجل تحديد حقل التشوه والاجهاد في مختلف المناطق نستعمل تحويل التكاملي لهنكل بعد بتطبيق الشروط الحدية المختلفة لهذه المسألة، نحصل جملة معادلات فريدهولم التكاملية. ولحل هذه الأخيرة نستعمل سلسلة كثير الحدود جاكوبي لنتحصل في الأخير على جملة معادلات جبرية وهكذا تمكنا من الحصول الى مختلف الحلول المتعلقة بالانتقال والتشوه والاجهاد وكذا قياس قيمة معامل تركيز الاجهاد في مستوي الشق والامر الذي يمكننا من تحديد متانة الجسم.

**كلمات مفتاحية:** التواء محوري تناظري، نصف فضاء مرن، معادلات فريدهولم التكاملية، معادلات التكاملية مزدوجة، معامل تركيز الاجهاد

## Résumé

Dans ce travail nous traitons le problème de torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique par un disque rigide, le milieu est affaibli par une fissure externe. Ce problème aux valeurs limites doublement mixte aux limites est résolu à l'aide de la transformation intégrale de *Hankel*, le problème est ramené à un système d'équations intégrales. Ce qui donne ensuite un système d'équations intégrales de *Fredholm*. On utilise des développements en série des polynômes de *Jacobi* pour résoudre le système. Les résultats de ce dernier système sont calculés numériquement. Certains résultats concernant le champ des déplacements et des contraintes, ainsi que le facteur d'intensité de contraintes au niveau de la fissure sont donnés analytiquement et interprétés graphiquement.

**Mots Clés :** Torsion axisymétrique, demi-espace élastique, Équations intégrales duales, Équations intégrales de Fredholm, Facteur d'intensité de contraintes.

## Abstract

In this work, we study the axisymmetric torsion problem on a half-space with external crack by a rigid disc. Using the Hankel integral transformation method, the mixed boundary-value problem is reduced to a system of dual integral equations. The solution of the corresponding Fredholm integral equations of the second kind is sought in the form of Jacobi polynomial expansion. The strain and stress results as well as stress intensity factor have been numerically obtained and graphically shown.

**Keywords:** Axisymmetric torsion, Elastic Half space, Dual integral equations, Fredholm integral equations, Stress Intensity Factor.

---

# Remerciements

---

*Je tiens à remercier en premier lieu ALLAH Le Tout Puissant, Qui m'a donné la force le courage et la volonté pour mener à bien ce modeste travail.*

*Au terme de ce travail, je tiens à remercier vivement le Professeur **KEBLI Belkacem** pour toute son soutien et ses conseils qu'il m'a donné pour l'achèvement de ce travail.*

*J'adresse mes remerciements a Dr **BELKACEMI Yacine** et Mr **AMMICHE Ali** qui ont bien voulu accepter d'examiner ce mémoire en lui accordant de l'intérêt.*

*Je veux aussi exprimer ma vive reconnaissance envers tous les enseignants de l'ENP, particulièrement ceux du département de Génie Mécanique.*

*Je remercie enfin, tous ceux qui, d'une quelconque façon, ont contribué à ce modeste travail.*

---

# Dédicaces

---

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère.

A ma sœur et mes frères .

A toute ma famille,

A mes collègues de ENP.

A tous mes amis.

---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la théorie de l'élasticité</b>	<b>4</b>
1 Définition . . . . .	4
2 Les concepts généraux de l'élasticité . . . . .	4
2.1 Les contraintes . . . . .	4
2.1.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle . . . . .	5
2.1.2 Tenseur des contraintes . . . . .	6
2.2 Déformations . . . . .	6
2.2.1 Tenseur des déformations . . . . .	6
3 Élasticité linéaire . . . . .	7
3.1 Problème axisymétrique . . . . .	7
4 Modules élastiques . . . . .	8
4.1 Module de Young . . . . .	8
4.2 Coefficient de Poisson . . . . .	8
4.3 Module de coulomb . . . . .	8
5 Équations de l'élasticité . . . . .	9
5.1 Loi de comportement - Loi de Hooke . . . . .	9
5.2 Équations supplémentaires en élasticité . . . . .	10
5.2.1 Équation de Navier . . . . .	10
5.2.2 Relations entre les contraintes et les déformations . . . . .	10
5.3 Équation d'équilibre en coordonnées cylindriques . . . . .	11
5.4 Torsion axisymétrique . . . . .	12
6 Mécanique de rupture . . . . .	12
6.1 Taux de restitution d'énergie . . . . .	13
6.2 Fissure et modes de rupture . . . . .	13
6.3 Facteurs d'intensité de contraintes . . . . .	14
7 Conclusion . . . . .	15

<b>2</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>16</b>
1	Fonctions spéciales . . . . .	16
1.1	Introduction . . . . .	16
1.2	Fonction Gamma . . . . .	16
1.3	Fonctions de Bessel . . . . .	17
1.3.1	Fonction de Bessel de première espèce . . . . .	17
1.3.2	Fonction de Bessel de seconde espèce . . . . .	18
1.3.3	Développements asymptotiques des fonctions de Bessel : . . . . .	18
1.3.4	Les propriétés de la fonction de Bessel . . . . .	19
1.3.5	Transformée de Hankel . . . . .	20
2	Les polynômes orthogonaux . . . . .	20
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Polynômes de Jacobi . . . . .	20
3	Méthodes d'intégration numérique . . . . .	21
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Méthode des trapèzes . . . . .	21
3.2.1	Méthode de Simpson . . . . .	22
4	Équations intégrales . . . . .	23
4.1	Introduction . . . . .	23
4.2	Équation de Fredholm . . . . .	23
4.2.1	Équation de première espèce . . . . .	23
4.2.2	Équation de seconde espèce . . . . .	23
4.3	Équation de Volterra . . . . .	23
4.3.1	Équation de première espèce . . . . .	24
4.3.2	Équation de seconde espèce . . . . .	24
4.4	Équations intégrales d'Abel . . . . .	24
5	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Formulation et résolution du problème</b>	<b>26</b>
1	Formulation de problème . . . . .	26
2	Résolution du problème . . . . .	27
2.1	Conditions limites du problème : . . . . .	27
2.2	Les équations duales en $J_1$ . . . . .	28
2.3	Réduction du système d'équations intégrales duales en $J_1$ à des équations intégrales de Fredholm . . . . .	29
2.4	Système d'équations intégrales de Fredholm . . . . .	30
2.5	Réduction du système algébrique . . . . .	32
3	Résolution numérique . . . . .	34
4	Expression des déplacement et contraintes . . . . .	37
5	Expression du facteur d'intensité de contrainte . . . . .	44
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>
	<b>A Annexes</b>	<b>50</b>

---

# Table des figures

---

1	Sih et Chen 1971 . . . . .	2
2	Pak 1991 . . . . .	2
3	Kebli et Merchiche 2011 . . . . .	3
1.1	Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte . . . . .	4
1.2	Facette n en M . . . . .	5
1.3	Vecteur contrainte sur la facette n en M . . . . .	5
1.4	Tenseur des contraintes . . . . .	6
1.5	Déformation élastique . . . . .	6
1.6	Diagramme déformation contrainte . . . . .	9
1.7	Coordonnées cylindriques. . . . .	11
1.8	Fissure . . . . .	13
1.9	Les modes de rupture . . . . .	14
2.1	Graphe de la fonction de Bessel de première espèce . . . . .	18
2.2	Graphes de la fonction de Bessel de seconde espèce . . . . .	18
2.3	Graphes de deux fonctions de Bessel premier et seconde espèce . . . . .	19
2.4	Méthode de trapèze . . . . .	21
3.1	Schéma représentant le problème . . . . .	26
3.2	Schéma représentant le problème avec les conditions aux limites . . . . .	27
3.3	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 0.5$ et $\frac{b}{a} = 0.5$ . . . . .	38
3.4	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 0.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	39
3.5	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 1$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	39
3.6	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 1.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	39
3.7	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 0.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	40
3.8	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 1$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	40
3.9	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$ avec $\frac{h}{a} = 1.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	40
3.10	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 0.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	41
3.11	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 1$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	41
3.12	Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 1.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	42
3.13	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 0.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	42

---

3.14	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 1$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	43
3.15	Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$ avec $\frac{h}{a} = 1.5$ et $\frac{b}{a} = 1.5$ . . . . .	43
3.16	Facteur d'intensité de contrainte en fonction de $h/a$ . . . . .	46
A.1	Coordonnées cylindriques. . . . .	52



---

# Liste des tableaux

---

1.1	Quelques valeurs critiques de $G$ . . . . .	13
3.1	Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=0.5$ . . . . .	35
3.2	Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=1$ . . . . .	35
3.3	Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=1.5$ . . . . .	36
3.4	Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ . . . . .	36

---

# Nomenclature

---

Notion	Signification	Unité
S	Surface	$m^2$
$F_i$	Force	$N$
G	Taux de restitution d'énergie	$j/m^2$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraints normales	$Pa$
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$	Contraints tangentiels	$Pa$
$\varepsilon_x, \gamma_{xy}$	Taux de déformation	-
$u_x, u_y, u_z$	Vecteur de déplacement	$mm$
$(r, \theta, z)$	Coordonnées cylindriques	$(mm, rad, mm)$
E	Module de Young	$Pa$
$\nu$	Coefficient de Poisson	-
$\mu$	Module de cisaillement	$Pa$
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Facture d'intensité de contraintes	$MPa.m^{1/2}$
$J_\nu(x)$	Fonction de Bessel 1 <sup>ere</sup> espèce	-
$Y_\nu(x)$	Fonction de Bessel 2 <sup>eme</sup> espèce	-
$\delta_{nm}$	Delta de Kronecker	-

---

# Introduction

---

Dans le domaine industriel, nous remarquons que des problèmes comme des défauts dans les matériaux, ont des insuffisances dans la conception et des déficiences dans la construction ou l'entretien, et de l'environnement. Ces problèmes créent un nouveau domaine dans la mécanique qui étudie la fissuration et les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure qui s'appelle **la mécanique linéaire de la rupture**.

La mécanique linéaire de la rupture peut être utilisée pour résoudre de nombreux problèmes pratiques de construction mécanique, tel que l'effondrement de la structure qui peut être améliorée par la sélection des matériaux, la prévision de la durée de vie des structures et la définition des critères d'acceptation de défauts.

Ceci est basé sur une procédure analytique qui relie le champ de contraintes au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et à son orientation, et aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Un des problèmes très importants en génie mécanique et dans les mathématiques appliquées est le problème de torsion d'un solide élastique. La torsion d'un milieu élastique par un poinçon rigide appliqué à la surface du milieu a été considérée la première fois par *Reissner* et *Sagoci* en (1944). Depuis, des contributions importantes ont également été apportées par *Rostovtsev*, *Collins*, *Sneddon*, et *Gladwell* [1] dans le domaine de l'analyse des contraintes dans les milieux élastiques. D'autres auteurs étudient également les milieux élastiques multicouches (*Erguven* 1991 [8]).

Citons quelques travaux des domaines élastiques fissurés ayant un lien direct avec notre étude de recherche :

## Sih et Chen 1971

*Sih* et *Chen* [14] ont étudié un milieu de quatre couches de différents matériaux ayant une fissure circulaire à l'interface des deux couches intérieures. Ce composé est examiné par une contrainte de torsion proche de la fissure circulaire.

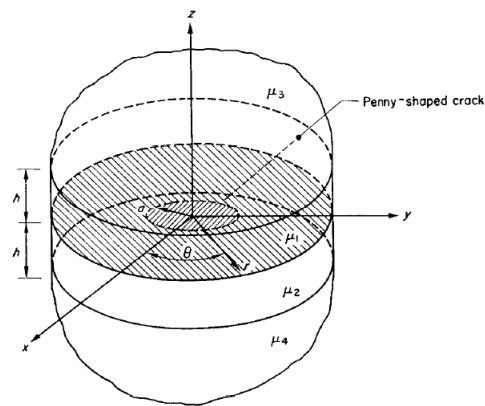


FIGURE 1 – Sih et Chen 1971

## Dhawan 1974

*Dhawan* [2] considère un demi-espace élastique qui occupe la région  $z \geq -h$ , dont la surface  $z = -h$  est libre de charges alors que la portion circulaire  $0 \leq r \leq b$  à laquelle adhère un disque rigide de rayon  $b$ . Il est supposé qu'une fissure de forme circulaire est présente dans la région  $0 \leq r \leq a$ ,  $z = 0$ . de plus il est considéré qu'un moment de torsion  $M$  est appliqué sur le disque rigide ce qui cause une rotation sur l'axe verticale  $z$  avec un angle  $\alpha$ .

## Pak 1991

*Pak* [3] traité un problème torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique, homogène et isotrope, par un disque rigide de rayon  $a$  qui est noyé à une profondeur  $d > 0$  le disque tourner autour de l'axe  $z$  d'un angle  $\theta$ .

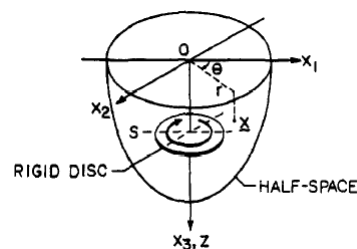


FIGURE 2 – Pak 1991

## Kebli et Merchiche 2011

Dans ce travail, il s'agit du problème de déformation d'une plaque élastique épaisse par la torsion d'un disque rigide adhésif. Une torsion d'angle  $\theta$  est appliquée au disque autour de son axe vertical. La plaque est fixée sur un appui rigide.

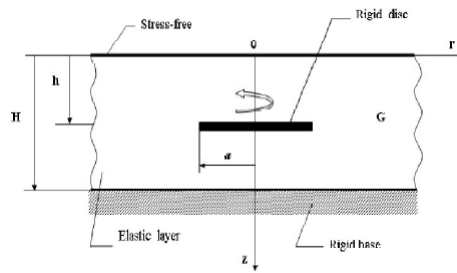


FIGURE 3 – Kebli et Merchiche 2011

Une méthode classique basée sur la transformation intégrale de Hankel a été appliquée dans les travaux précédents. Ces problèmes aux conditions limites mixtes sont réduits à un système d'équations intégrales duales. Ce qui ramène aussi les problèmes étudiés à des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Généralement, des solutions approximatives par la méthode itérative des séries entières sont obtenues pour ces dernières équations.

Dans notre travail, on considère un demi-espace élastique affaibli par une fissure externe circulaire. Ce milieu est soumis à une torsion axisymétrique par une disque rigide. La résolution de ce problème fait à l'aide de la méthode du transformée de Hankel, le système se réduit à un système d'équations intégrales duales. Alors se dernier ramené par la suite à un système d'équations intégrales de Fredholm. Pour la résolution de ce système en utilisant les équations d'Abel et avec la fonction de Bessel et les séries de polynômes de Jacobi nous trouvons un système d'équations algébriques qui permet d'obtenir les expressions analytiques pour les déplacements et les contraintes en fonction des coefficients du système algébrique.

Ce mémoire est structuré en une introduction générale contenant un état de l'art sur les travaux relatifs concernant les problèmes de torsion axisymétrique ainsi que trois chapitres et des références bibliographiques et annexe.

**Le premier chapitre** présente des éléments et des concepts généraux sur la théorie d'élasticité linéaire. Le système d'équilibre élastique a été établi dans le cas de la déformation axisymétrique. La loi de Hooke et les différents modules d'élasticité, et quelques notions sur la mécanique de rupture.

**le deuxième chapitre** contient les rappels mathématiques utilisés dans notre étude comme les fonctions spéciales, les équations intégrales et transformations intégrales et aussi les propriétés des fonctions de Bessel et des polynômes de Legendre.

**Le troisième chapitre** donne la résolution du problème étudié. Nous finirons par une conclusion sur le problème considéré.

# Chapitre 1

---

## Introduction à la théorie de l'élasticité

---

### 1 Définition

L'élasticité est la mécanique étudiant les corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables).

La mécanique étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués.

Les forces ou les moments s'exerçant sur un objet fait d'un matériau donné de forme donnée et de volume donné induisent des translations, rotations et des déformations (changement de forme et de volume).

La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation alors que l'élasticité s'intéresse exclusivement à l'étape de déformation (*Fig1.1*) [9].

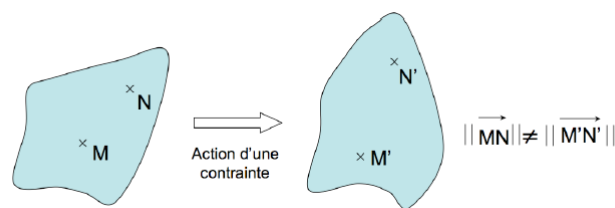


FIGURE 1.1 – Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

### 2 Les concepts généraux de l'élasticité

L'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un milieu soumis à des forces extérieures.

#### 2.1 Les contraintes

Considérons un point  $M$  de  $S$ . Soit  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $S$  entourant  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire en  $M$  à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de la partie  $A$ . Nous appellerons cet ensemble **facette**  $\vec{n}$  en  $M$  (*fig2.1*).

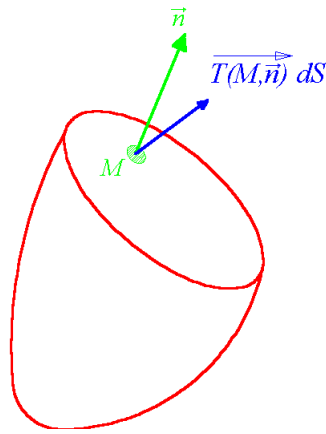


FIGURE 1.2 – Facette n en M

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en M**, la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (1.1)$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal ( $1Pa = 1N/m^2$ ) dans la pratique, on utilise souvent le méga pascal ( $1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$ ) [9].

### 2.1.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette (fig2.1).

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (1.2)$$

avec

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad (1.3)$$

$\sigma_n$  est la **contrainte normale** et  $\vec{\tau}_n$  est la **contrainte tangentielle**.

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) :

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2$$

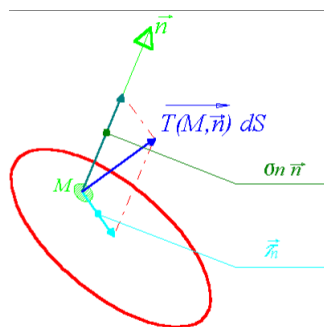


FIGURE 1.3 – Vecteur contrainte sur la facette n en M

### 2.1.2 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes sert à représenter les efforts intérieurs en un point matériel d'un milieu continu, on peut définir le tenseur des contraintes par la relation suivante (Fig2.2) :

$$T = \sigma n \tag{1.4}$$

Tel que

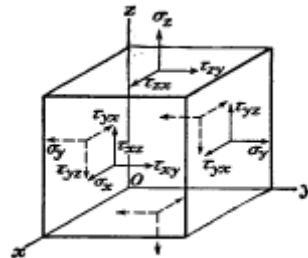


FIGURE 1.4 – Tenseur des contraintes

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

## 2.2 Déformations

En physique, l'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus.

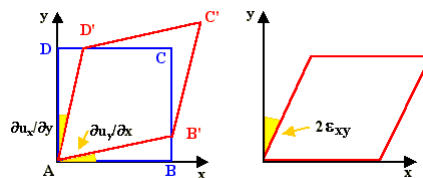


FIGURE 1.5 – Déformation élastique

Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée.

### 2.2.1 Tenseur des déformations

Dans le cas générale la déformation est définie par la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.6}$$

alors la tenseur des déformations est donné par :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$



## 3 Élasticité linéaire

Lorsqu'un corps est soumis à des contraintes externes, celui-ci subit des déformations qui dépendent de l'intensité de ces contraintes. Si ces dernières sont faibles, on observe expérimentalement que les déformations sont proportionnelles aux tensions appliquées. La constante de proportionnalité est une caractéristique du matériau et du type de déformation subi par celui-ci.

### Théorie

La théorie de l'élasticité linéaire isotrope repose sur trois hypothèses :

**la réversibilité** des déformations en fonction des contraintes dans un domaine de contrainte : les corps sont supposés parfaitement élastiques ;

**l'isotropie** du corps considéré : les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace ;

**la linéarité** : les corps sont supposés élastiques linéaires ; les déformations sont proportionnelles aux contraintes ; ces corps satisfont à la loi expérimentale de HOOKE.

Avec ces trois hypothèses, la déformation d'un élément de volume  $dv$  sous un état de tension quelconque, est la superposition de deux déformations fondamentales : **l'allongement et le glissement**

Cette discipline, née au XVII<sup>e</sup> siècle, possède aujourd'hui une base mathématique bien établie. Ce chapitre introduit les concepts du point de vue de l'ingénieur et joint la physique à la mécanique appliquée.

### 3.1 Problème axisymétrique

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphériques autour de l'axe de l'axisymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à  $\theta$  sont nulles. On est donc ramené à un problème à deux variables  $(r, z)$ .

Il convient de bien noter que bien que le problème soit à deux variables, ce n'est pas un problème d'élasticité plane, car ni le tenseur des contraintes, ni le tenseur des déformations ne sont des plans en générale.

## 4 Modules élastiques

### 4.1 Module de Young

Vers 1800, Young s'est intéressé à l'élasticité linéaire. En procédant à des essais de traction uni-axiale, il constate que la déformation  $\varepsilon$  selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte  $\sigma$  appliquée. Il a défini le coefficient de proportionnalité par la relation suivante [4] :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1.8)$$

Le module d'Young  $E$  a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente la contrainte qu'il faudrait appliquer pour obtenir une déformation unité soit doubler la longueur initiale. Aucun matériau ne correspond linéairement à une telle contrainte.

### 4.2 Coefficient de Poisson

Poisson a complété l'analyse en constatant que l'allongement  $\varepsilon_I$  dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement  $\varepsilon_{II}$  plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il a défini le coefficient positif de proportionnalité par [6] :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I} \quad (1.9)$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  fait partie des constantes élastiques. Il est compris entre  $-1$  et  $0,5$  :  $0,5$  est la valeur limite pour un corps chauffé devenant alors liquide (incompressible).

Les valeurs expérimentales obtenues pour un matériau quelconque sont souvent voisines de  $0,3$ .

Il faut signaler l'existence de matériaux à coefficient de Poisson voisin de zéro, et on a même pu réaliser artificiellement des matériaux à coefficient de Poisson négatif.

### 4.3 Module de coulomb

Coulomb a procédé à des essais de torsions (cisaillement pur) et constate que le glissement  $\gamma$  est proportionnel au cisaillement  $\tau$  appliqué. Il a défini le coefficient de proportionnalité

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.10)$$

Le module de Coulomb  $\mu$  a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa.

Pour un matériau isotrope on peut définir le module de cisaillement  $\mu$  en fonction de  $E$  et  $\nu$  par la relation suivante :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.11)$$

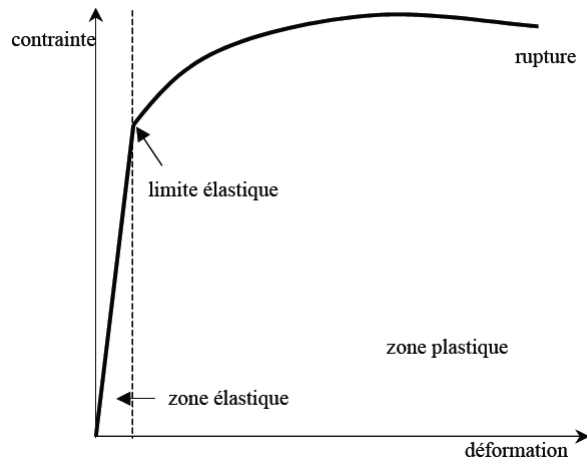


FIGURE 1.6 – Diagramme déformation contrainte

## 5 Équations de l'élasticité

### 5.1 Loi de comportement - Loi de Hooke

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte *fig*( 1.6). Alors pour ce cas on définit la relation entre la déformation et la contrainte comme suit :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.12)$$

ou  $\sigma$  : est la contrainte (en unité de pression),

$E$  : module de Young.

$\varepsilon$  : est l'allongement relatif (adimensionnel).

Dans le cas généralisé des matériaux isotrope, nous avons les relations suivants entre les modules élastiques :

–  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  Module de cisaillement ou premier coefficient de Lamé

–  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  Deuxième module de Lamé

–  $E$  Module de Young

–  $\nu$  coefficient de Poisson

La loi de comportement qui relie le tenseur de déformations et le tenseur des contraintes est donné par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (1.14)$$

On peut facilement constater avec ces relations que les bases principales de l'état de déformation et de l'état de contrainte sont confondues.

## 5.2 Équations supplémentaires en élasticité

Dans le cas général, nous aurons, grâce à la loi de comportement, suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité. Toutefois, nous serons face à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. Il peut être utile d'employer des équations complémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique : les équations de Navier et les équations de Airy.

### 5.2.1 Équation de Navier

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations s'équilibre en termes de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations – déplacements.

$$\operatorname{div}\sigma + f_v = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.15)$$

Avec  $f_v$  le champ des forces volumiques,  $\sigma$  tenseur de contrainte. Nous donnons l'expression de l'équation fondamentale de l'élasticité appelée aussi équation de Lamé-Navier sous la forme suivante [16] :

$$\mu\Delta u + (\mu + \lambda)\operatorname{grad}(\operatorname{div}u) = 0 \quad (1.16)$$

### 5.2.2 Relations entre les contraintes et les déformations

D'après la loi de comportement et les equation de Lamé-Navier on peut exprimer les contraintes en fonction des déformations, et aussi les déformations en fonction des déplacements par les relations [7] :

**contraintes-déformations :**

En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

Contraintes normales	Contraintes tangentielles	
$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_z \end{cases}$	$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \end{cases}$	(1.17)

avec  $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

Contrainte Normale	Contrainte Tangentiel	
$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \sigma_z = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_z \end{cases}$	$\begin{cases} \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta} \\ \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz} \\ \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \end{cases}$	(1.18)

avec  $\Theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$   
 et  $\lambda$  coefficient de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}\mu$$

**déformations-déplacements :**

En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{cases} \quad (1.19)$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} & 2\gamma_{zr} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{cases} \quad (1.20)$$

### 5.3 Équation d'équilibre en coordonnées cylindriques

Soit  $\Omega$  un élément volumique représenté sur la figure ( 2.1) soumis à une force volumique dont les composantes sont :  $F_r, F_\theta, F_z$ . Ces forces volumiques s'expriment en fonction des contraintes appliquées sur cette élément de volume.

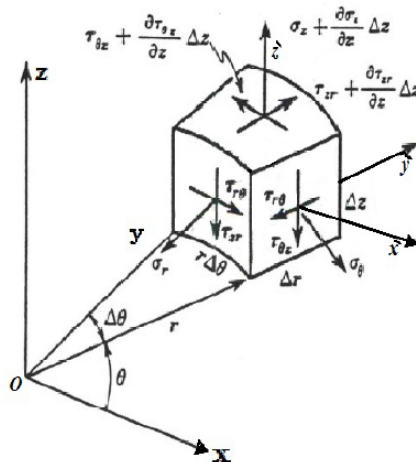


FIGURE 1.7 – Coordonnées cylindriques.

Le système d'équilibre de cette élément est :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} + F_\theta = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{r} + F_z = 0 \quad (1.23)$$

Utilisons les deux equations (eq.1.18), (eq.1.18) dans le système d'équilibre en contraintes pour trouver le système d'équilibre en déplacement :

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{F_r}{G} = 0 \quad (1.24)$$

$$\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{F_\theta}{G} = 0 \quad (1.25)$$

$$\Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{F_z}{G} = 0 \quad (1.26)$$

ou le laplacien en coordonnées cylindriques est :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

## 5.4 Torsion axisymétrique

Dans l'élasticité il y a plusieurs types d'applications (essais) comme **traction**, **flexion**, **torsion**. Dans le cas de la torsion axisymétrique et en l'absence des forces volumique, l'unique composante non nulle du vecteur de déplacement est  $u_\theta(r, z) \Rightarrow (u_r = u_z = 0)$ .

Alors l'équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1.27)$$

## 6 Mécanique de rupture

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude des fissures macroscopiques, la détermination des champs de contraintes et de déformations correspondants, et l'établissement des données expérimentales permettant de déterminer la cinétique de propagation des défauts et leur taille critique au delà de laquelle, pour une sollicitation donnée, la rupture instable se produit [4].

Les dates principales qui marquent le développement de la mécanique de la rupture sont 1920, lorsque Griffith montre que la rupture d'un milieu élastique-fragile peut être caractérisée par une variable globale, qui sera appelée plus tard le taux de restitution d'énergie, et aussi en 1956, lorsque, à partir de l'étude des singularités du champ de contrainte, Irwin introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes. Les années 1960-1980 sont celles de l'essor puis de la maturité de la mécanique de la rupture, avec en particulier les développements numériques et le traitement des problèmes non linéaires.

## 6.1 Taux de restitution d'énergie

Dans le cas où l'énergie cinétique est négligée, la puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface  $A$  est égale à la variation de l'énergie potentielle totale  $E_p$ , résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie liée aux forces extérieures. Cette contribution mécanique est appelée taux de restitution d'énergie. Elle peut se définir quel que soit le type de comportement. Son unité est le *joule*/ $m^2$  .

$$G = \frac{\partial E_p}{\partial A} \quad (1.28)$$

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant  $\gamma^s$  l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité :

$$\begin{aligned} \text{-propagation si :} & \quad G - 2\gamma^s \geq 0 \\ \text{-pas de propagation si :} & \quad G - 2\gamma^s < 0 \end{aligned}$$

Le tableau suivant représente quelque valeur critique de  $G$  :

matériau	valeur( $j/m^2$ )
verre, céramiques	10
résines fragiles	100-500
composites verre-résine	7000
alliages d'aluminium	20000
aciers $> T_{trans}$	10000
métaux purs	$10^5$ à $10^6$

TABLE 1.1 – Quelques valeurs critiques de  $G$

## 6.2 Fissure et modes de rupture

La rupture est caractérisée (au moins localement) par la séparation irréversible (généralement les liaisons chimiques rompues ne se rétablissent pas par suite de la présence inévitable de polluant) d'un milieu continu de part et d'autre d'une surface génératrice  $S$ . La coupure ainsi créée est appelée fissure figure (1.8)

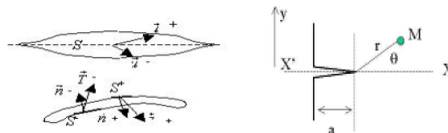


FIGURE 1.8 – Fissure

On distingue trois modes de rupture (*figure 1.9*)

**-Mode I :** mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.

**-Mode II** : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.

**-Mode III** : mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

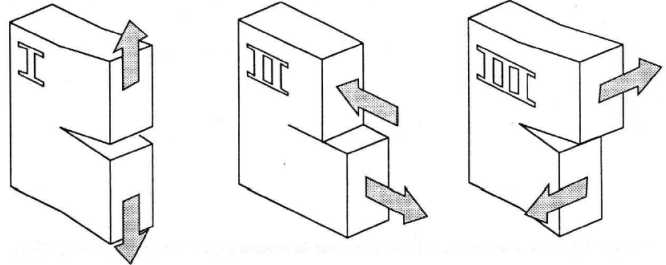


FIGURE 1.9 – Les modes de rupture

Lors du chargement d'une pièce fissurée, on distingue deux phases

- \* *La phase d'ouverture* pendant laquelle, la fissure immobile s'ouvre, les lèvres s'écartant sans changement géométrique de la surface  $S$ . Cette phase se poursuit jusqu'à un chargement critique autorisant la fissure à se propager en s'agrandissant. A ce chargement critique correspond la condition d'amorçage
- \* *La phase de propagation* au delà du chargement critique d'amorçage, la fissure s'agrandit (avance) soit dans le plan tangent à  $S$  soit dans d'autres directions (branchement), c'est la phase de propagation qui pourra être contrôlée (propagation dite stable) ou non (propagation dite instable conduisant à la rupture brutale ou catastrophique).

### 6.3 Facteurs d'intensité de contraintes

Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I, mode II et mode II sont notés respectivement  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$ . L'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure est proportionnelle à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure [8].

On les appelle aussi les facteurs de discontinuité des déplacements. Ils caractérisent à la fois la géométrie du détail et de la fissure, et la nature des sollicitations. L'évaluation du facteur d'intensité de contrainte  $K$  en fonction du rayon de la fissure  $r$ .  $K$  est le produit d'une contrainte par la racine carrée de la longueur  $[K] = [\sigma[L]^{1/2}]$  et se mesure en  $MPa.m^{1/2}$  ou  $Nm^{-3/2}$ .

#### Mode I

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0) \quad (1.29)$$

#### Mode II

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (1.30)$$

#### Mode III

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (1.31)$$



Dans les problèmes de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques. Dans le cas de l'inclusion d'un disque rigide d'épaisseur négligeable dans un demi-espace élastique, l'expression du facteur d'intensité de contrainte en mode III a été donnée comme suit :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \tau_{\theta z}(r, 0) \quad (1.32)$$

## 7 Conclusion

Ce chapitre contient des notions sur des lois de l'élasticité linéaire et de la mécanique de la rupture. Ces lois permettent de résoudre de nombreux problèmes en mécanique.

Les relations entre les modules d'élasticité, la loi de comportement et les équations de Lamé-Navier nous permettent d'obtenir les équations d'équilibre des problèmes traités. Alors que les lois de la mécanique de rupture nous donnent la relation entre les contraintes et les coefficients d'intensité de contrainte pour les trois mode de rupture.

## Chapitre 2

---

# Rappels mathématiques

---

## 1 Fonctions spéciales

### 1.1 Introduction

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre, sans que cette propriété soit exclusive. Ces fonctions sont toutefois très utiles, car elles apparaissent très souvent, dès que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants.

Les fonctions spéciales sont disponibles en programmation sous la forme de bibliothèques. Elles sont aussi définies, pour un grand nombre d'entre elles, dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica, Matlab...). Dans la suite de ce chapitre, nous allons définir quelques fonctions spéciales qui permettront la résolution de notre problématique.

### 1.2 Fonction Gamma

La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

Quand la partie réelle de  $z$  est strictement positive, ( $Re(z) > 0$ ), La formule d'Euler donne une expression de la fonction  $\Gamma$ . En intégrant par parties l'équation (2.1), on peut facilement montrer que :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

Cependant, nous pouvons évaluer l'intégrale pour certaines valeurs de  $z$ . pour une valeur de ( $z = 1$ ), on donne :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2.3)$$

Par récurrence on aura les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= (2)(1) = (1), \\ \Gamma(4) &= (3)(2) = (6), \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n!. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Avec cette définition, la fonction  $\Gamma$  apparaît comme un prolongement analytique de la fonction factorielle définie sur  $\mathbb{N}$ .

La formule suivante permet de relier la fonction entre les valeurs situées dans le demi-plan complexe où  $Re(z) > 1$  et celui où  $Re(z) < 1$  :

$$\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\Gamma(z) \sin(\pi z)} \tag{2.5}$$

### 1.3 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont définies de la manière suivante : considérons l'équation différentielle du second ordre :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{2.6}$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce :

La solution finie à l'origine et notée  $J_\nu(x)$  est appelée fonction de Bessel de première espèce et la seconde solution notée  $Y_\nu(x)$  est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce. avec la solution de 2.6 est définie par [12] :

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \tag{2.7}$$

avec  $C_1, C_2$  sont des constants arbitraires.

#### 1.3.1 Fonction de Bessel de première espèce

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$  peut être déterminée en utilisant un développement en série de puissance de la façon suivante[13] :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(1 - \frac{(x/2)^2}{1(1+\nu)} \left(1 - \frac{(x/2)^2}{2(2+\nu)} \left(1 - \frac{(x/2)^2}{3(3+\nu)} (1 - \dots)\right)\right)\right) \tag{2.8}$$

Notons que  $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)!$ , nous pouvons écrire :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! (\nu+k)!}$$

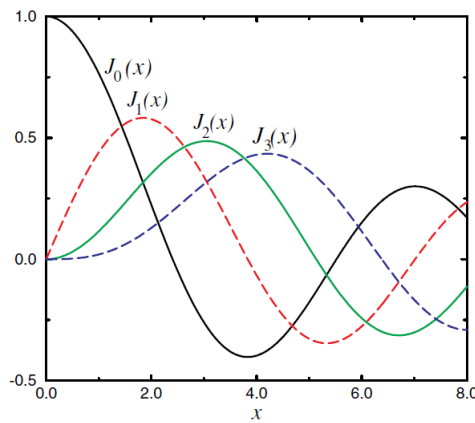


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction de Bessel de première espèce

### 1.3.2 Fonction de Bessel de seconde espèce

La fonction de Bessel de seconde espèce  $Y_\nu(x)$  et parfois dit la fonction de Weber ou fonction de Neumann (notée  $N_\nu(x)$ ) est liée à la fonction de Bessel de première espèce par la relation [13] :

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2.9)$$

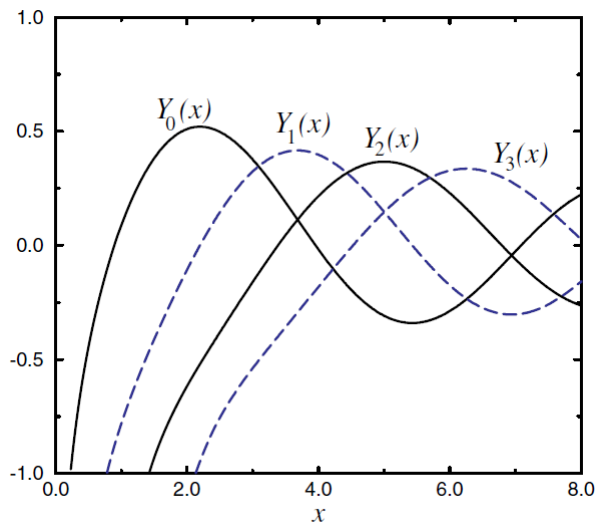


FIGURE 2.2 – Graphes de la fonction de Bessel de seconde espèce

Le graphe suivant (*fig 1.3.2*) représente les différentes fonctions de Bessel des deux espèces.

### 1.3.3 Développements asymptotiques des fonctions de Bessel :

Les développements en série qui ont été donnés pour représenter les fonctions de Bessel de première espèce  $J_\nu(x)$ , ne permettent pas de connaître facilement l'allure de ces fonctions pour les grandes valeurs de la variable et la même remarque vaut pour les fonctions de Bessel de seconde espèce  $Y_\nu(x)$ .

Signalons que l'on a pu donner des expressions asymptotiques de ces fonctions pour les grandes valeurs de  $x$  ; on a :

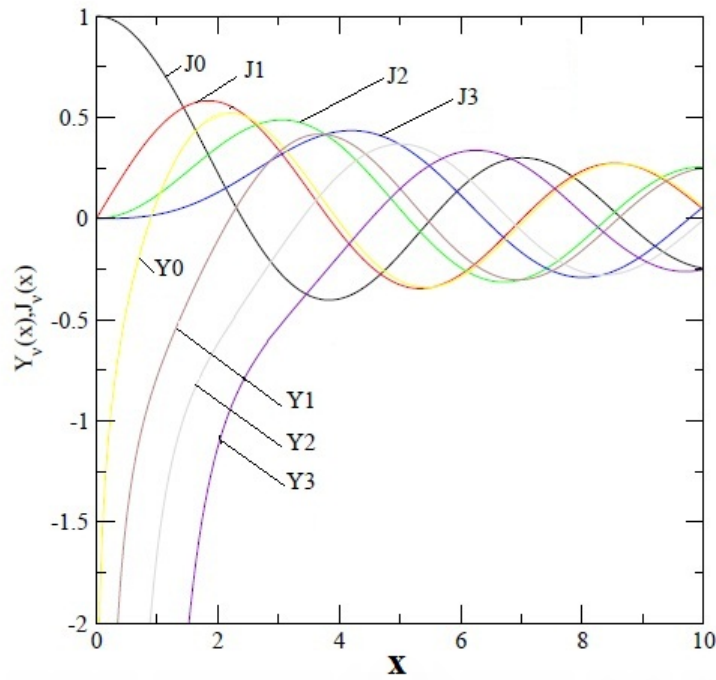


FIGURE 2.3 – Graphes de deux fonctions de Bessel premier et seconde espèce

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.10)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.11)$$

### 1.3.4 Les propriétés de la fonction de Bessel

-Quelque propriétés de la fonction de Bessel de première espèce :

- 1)  $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 2)  $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots;$
- 3)  $\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 4)  $\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 5)  $J'_0(x) = -J_1(x)$

-Quelque propriétés de la fonction de Bessel de seconde espèce :

- 1)  $Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z) - Y_{\nu-1}(z), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 2)  $Y'_{\nu+1}(z) = \frac{1}{2} [Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z)], \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 3)  $Y'_\nu(z) = Y_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} Y_\nu(z), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$
- 4)  $Y'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} Y_\nu(z) - Y_{\nu+1}(z), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$

### 1.3.5 Transformée de Hankel

Elle s'appelle aussi transformée de Fourier-Bessel, cette transformation développée par le mathématicien allemand Hermann Hankel (1839-1873), elle est basée sur la transformation bidimensionnelle de Fourier.

La transformée de Hankel générale pour les différent  $\nu$  est définie par :

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(z)J_\nu(kz)zdz \quad \nu \geq -\frac{1}{2} \quad (2.12)$$

où  $F_\nu$  est la fonction transformée et  $J_\nu(kz)$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$ .

Ainsi, la transformée inverse de Hankel  $F_\nu(k)$  est donnée comme suit :

$$f(z) = \int_0^\infty F_\nu(k)J_\nu(kz)kdk \quad (2.13)$$

## 2 Les polynômes orthogonaux

### 2.1 Introduction

Les familles de polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique en particulier au cours de la résolution de différentes équations comme les équations intégrales (Fredholm, Volterra) et les équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger). On connaît de nombreuses familles de polynômes orthogonaux, qui ont en commun un certain nombre de propriétés simples. C'est le cas des polynômes de Jacobi.

Commençons par introduire l'objet qui nous intéresse, les familles de polynômes orthogonaux. L'orthogonalité dans ce contexte est donnée par rapport à une fonctionnelle linéaire  $L$ .

Nous dirons que la famille de polynômes  $\{P_n(x)\}$ ,  $P_n \in C[x]$  de degré  $n$ , est une famille de polynôme orthogonaux, si  $L[P_n(x)P_m(x)] = h_n\delta_{nm}$  pour  $h_n \neq 0$ , [15]

ou

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\delta_{nm}$  est delta de Kronecker.

### 2.2 Polynômes de Jacobi

Soient  $\alpha, \beta > -1$ . Nous définissons les polynômes de Jacobi (nommés ainsi car c'est Jacobi qui les a introduits en 1859) [15] par l'équation suivante :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right) \quad (2.14)$$

Dans le cas où  $\alpha = \beta = 0$ , le polynôme de Jacobi se confond avec celui de Legendre défini par :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \quad x \in [-1, 1] \quad (2.15)$$

vérifiant la relation d'orthogonalité suivant :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & m = n \end{cases} \quad (2.16)$$

## 3 Méthodes d'intégration numérique

### 3.1 Introduction

A cause des intégrales délicats à calculer dans la résolution des problèmes mécanique nous avons besoins des méthodes simples et efficaces appelées : **Méthode d'intégration numérique**.

Ces méthodes donnent une approximation des valeurs de l'intégrale au sens de Riemann.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Les problèmes de quadrature (intégration) numérique se rencontrent lorsque la fonction  $f$  est continue mais n'a pas de primitive explicite connue, ou lorsque la fonction  $f$  n'est donnée que par un nombre fini de couples  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Une idée importante consiste à utiliser les méthodes d'interpolation polynomiale, puisque les primitives des fonctions polynômes sont faciles à calculer [11].

### 3.2 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction entre deux abscisses successives par une droite *Fig.2.4*, ce qui donne.

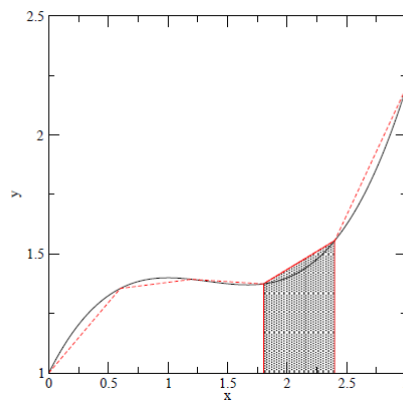


FIGURE 2.4 – Méthode de trapèze

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + O(h^5 f'') \quad (2.17)$$

Le terme d'erreur indique la qualité de l'évaluation de l'intégration et dépend de manière cubique du pas d'intégration ;  $f''$  se réfère à un point situé à l'intérieur de l'intervalle. Pour que cette méthode converge rapidement il est nécessaire de choisir un pas  $h$  inférieur à  $f''$ . A noter que cette formule devient exacte quand la fonction est un polynôme de degré 1 sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$ .

Sur l'intervalle  $[a; b]$ , on a

$$\int_a^b f(x) = h \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + O\left(\frac{(a-b)^3 f''}{N^2}\right) \quad (2.18)$$

ou on a utilisé que :  $h = \frac{(a-b)}{N}$

### 3.2.1 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à remplacer la fonction par un polynôme de degré 2 sur un intervalle constitué de trois abscisses consécutives.

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = h\left(\frac{1}{3}f_i + \frac{4}{3}f_{i+1} + \frac{1}{3}f_{i+2}\right) + O(h^5 f^{(4)}) \quad (2.19)$$

Il se trouve que cette formule est exacte jusqu'à des polynômes de degré 3 ce qui implique que l'erreur dépend de  $h$  à la puissance 5.

On peut aussi déterminer la formule à 4 points qui est aussi exacte pour les Polynômes de degré 3. Cette formule s'appelle aussi Simpson  $\frac{3}{8}$  à cause des coefficients du développement

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx = h\left(\frac{3}{8}f_i + \frac{9}{8}f_{i+1} + \frac{9}{8}f_{i+2} + \frac{3}{8}f_{i+3}\right) + O(h^5 f^{(4)}) \quad (2.20)$$

Sur un intervalle complet, en choisissant un nombre de points pair,  $N+1$ , c'est-à-dire  $N$  impair, la méthode de Simpson donne une estimation de l'intégrale sur l'intervalle  $[a; b]$ .

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_N + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (2f_{2i-1} + f_{2i-1})\right] + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (2.21)$$

La méthode de Simpson est donc de deux ordres de grandeur plus efficace que la méthode des trapèzes. Mais il est possible de mieux utiliser la méthode des trapèzes. Sachant que cette dernière méthode converge en  $1/N^2$ , on peut évaluer l'intégrale deux fois sur le même intervalle par la méthode des trapèzes ; la première fois avec  $N/2$  points et la seconde avec  $N$  points, puis en combinant les deux résultats de la manière suivante :

$$S_N = \frac{4}{3}T_N - \frac{1}{3}T_{\frac{N}{2}} \quad (2.22)$$



## 4 Équations intégrales

### 4.1 Introduction

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. On présente dans ce chapitre les différents types des équations intégrales, ainsi que quelques aperçus sur les méthodes de résolution des équations intégrales duales, cette résolution se ramène au problème de la recherche de solution d'un système linéaire.

### 4.2 Équation de Fredholm

Étudiées pour la première fois par le mathématicien Erik Ivar Fredholm (1866 – 1927), leurs principale caractéristique est que les bornes d'intégration sont constantes [13].

#### 4.2.1 Équation de première espèce

L'équation de Fredholm de première espèce est définie par la relation suivante :

$$g(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)dt \quad (2.23)$$

où  $f(s)$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer,  $g(t)$  est le terme de source et  $K(t, s)$  est appelé le noyau.

#### 4.2.2 Équation de seconde espèce

L'équation de Fredholm non-homogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)f(s)dt \quad (2.24)$$

où  $f(t)$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer.

Le terme de source est  $g(t)$ ,  $K(t, s)$  est appelé le noyau et  $\lambda$  est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire.

### 4.3 Équation de Volterra

De manière analogue aux équations de Fredholm, certaines équations intégrales ont été étudiées par le mathématicien italien Vito Volterra (1860–1940) [13].

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau  $K$  est tel que :

$$K(t, s) = 0 \quad s > t \quad (2.25)$$

Si l'une des limites d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra.

### 4.3.1 Équation de première espèce

L'équation de Volterra homogène de première espèce est définie par la relation suivante :

$$g(t) = \int_a^t K(t, s)f(s)dt \quad (2.26)$$

où  $f(s)$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer,  $g(t)$  est le terme de source et  $K(t, s)$  est appelé le noyau.

### 4.3.2 Équation de seconde espèce

De manière similaire, l'équation de Volterra de première espèce non-homogène s'écrit comme suit :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(s)dt \quad (2.27)$$

où  $f(t)$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer.

Le terme de source est  $g(t)$ ,  $K(t, s)$  est appelé le noyau et  $\lambda$  est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire.

Quelques équations intégrales de Volterra est leurs solutions [14]. Soit l'équation intégrale

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(t) - h(a)]^\alpha} dt = g(x), \quad a < x < b \quad (2.28)$$

ou  $0 < \alpha < 1$  et  $h$  est une fonction strictement croissante sur  $]a, b[$ .

La solution de cette équation est :

$$f(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{h'(r)g(r)}{[h(t) - h(r)]^{1-\alpha}} dr \quad a < t < b \quad (2.29)$$

## 4.4 Équations intégrales d'Abel

L'équation intégrale d'Abel, elle définie comme une solution de l'équation intégrale suivante :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[x^2 - t^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (2.30)$$

dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (2.31)$$

Dans un autre cas, l'équation :

$$\int_x^b \frac{f(t)}{[t^2 - x^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (2.32)$$

et sa solution :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (2.33)$$

## 5 Conclusion

L'étude des problèmes d'élasticité nécessite la connaissance de l'outil mathématique comme les fonctions spéciales et les équations intégrales. Cette base mathématique permet de simplifier la solution et d'obtenir analytiquement les expressions des déplacements et des contraintes ainsi que le facteur d'intensité de contraintes dans les problèmes de fissuration.

## Chapitre 3

# Formulation et résolution du problème

## 1 Formulation de problème

On considère la torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique par un disque rigide de rayon  $b$  en rotation d'un angle  $\omega$  autour de l'axe  $z$  à la distance  $z = -h$ , et est affaibli une fissure externe à  $z = 0$  de rayon  $a$  (*Figure 2.1*). Ce milieu élastique est considéré homogène et isotrope avec le module de cisaillement  $\mu$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . On choisit les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  comme un repère de référence, avec les vecteurs de déplacements  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$

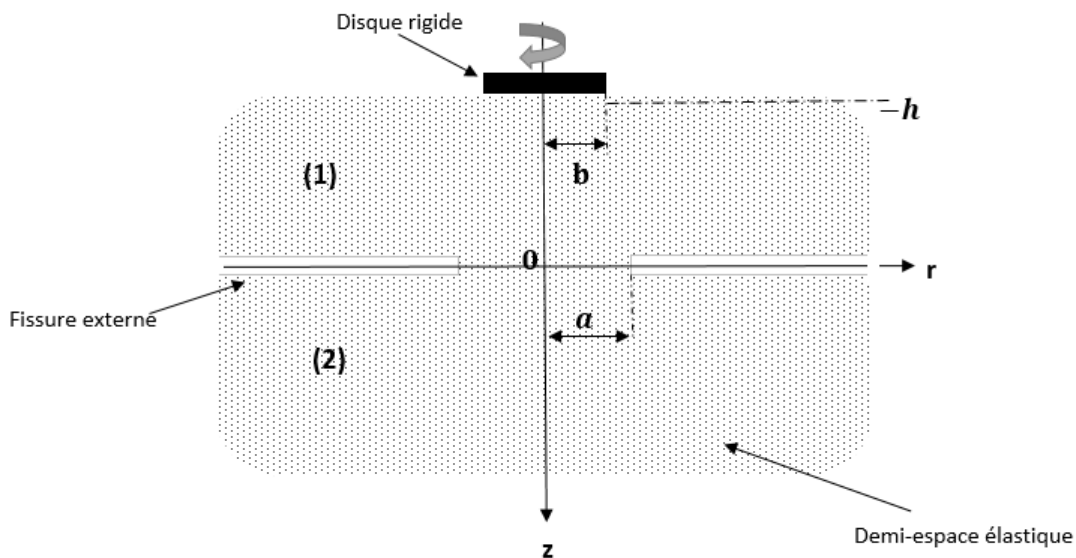


FIGURE 3.1 – Schéma représentant le problème

Comme dans le *Chapitre 1*, nous avons des problèmes axisymétriques dont la seule composante non nulle du vecteur de déplacement est la composante angulaire  $u_\theta$ , alors le

système d'équilibre définie par équation d'équilibre 1.28 :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0$$

Pour trouver les solutions de cette équation différentielle (1.28) on applique la transformation de Hankel on obtient les solutions suivant pour les deux domaines [13] :

$$u_\theta^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)] J_1(\lambda r) d\lambda \quad -h < z < 0 \quad (3.1)$$

$$u_\theta^{(2)}(r, z) = \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad z > 0 \quad (3.2)$$

avec  $J_1$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1, et  $A(\lambda), B(\lambda)$  et  $C(\lambda)$ , sont des fonctions à déterminer.

## 2 Résolution du problème

### 2.1 Conditions limites du problème :

Dans notre problème nous constatons qu'il y a plusieurs conditions aux limites et autres conditions de continuité essentiellement en  $z = -h$  et  $z = 0$ , les conditions sont :

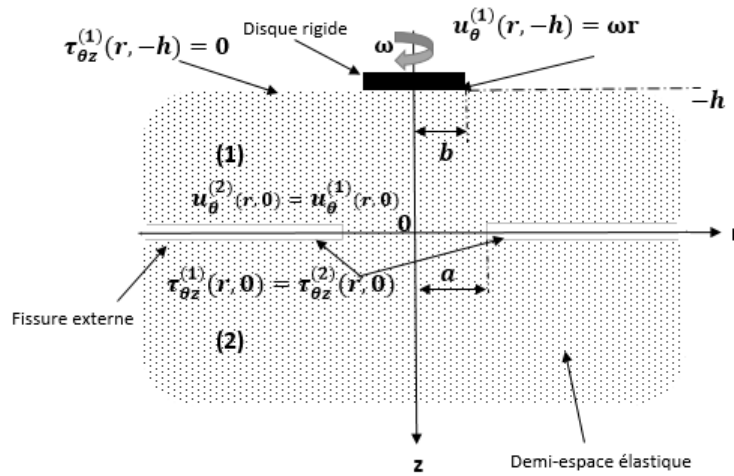


FIGURE 3.2 – Schéma représentant le problème avec les conditions aux limites

$$z = -h$$

$$i) u_\theta^{(1)}(r, -h) = \omega r \quad r < b$$

$$ii) \tau_{\theta z}^{(1)}(r, -h) = 0 \quad r > b$$

$$z = 0$$

$$iii) \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad r > a$$

et les conditions de continuité  $z = 0$

$$iv) \quad u_{\theta}^{(1)}(r, 0) - u_{\theta}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad r < a$$

$$v) \quad \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad r < a$$

## Les déplacements et les contraintes

D'après la Loi de Hooke la relation entre la contrainte tangentielle et le déplacement angulaire s'écrit sous la forme :

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \mu \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \quad (3.3)$$

En injectant ( 3.1) et ( 3.2) dans ( 3.3) on obtient la forme des contraintes pour les différents domaines sont :

:

$$D_1 = [-h, 0] \quad \begin{cases} u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\lambda)\cosh(\lambda z) + B(\lambda)\sinh(\lambda z)]J_1(\lambda r)d\lambda \\ \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = \mu \int_0^{\infty} \lambda[A(\lambda)\sinh(\lambda z) + B(\lambda)\cosh(\lambda z)]J_1(\lambda r)d\lambda \end{cases} \quad (3.4)$$

$$D_2 = [0, \infty[ \quad \begin{cases} u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \int_0^{\infty} C(\lambda)e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)d\lambda \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = -\mu \int_0^{\infty} \lambda C(\lambda)e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)d\lambda \end{cases} \quad (3.5)$$

## 2.2 Les équations duales en $J_1$

On remarque que dans les conditions (iii, v) les contraintes tangentielles sont égaux pour  $z = 0$  et  $r > 0$  :

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) &= \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) \\ \mu \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda &= -\mu \int_0^{\infty} \lambda C(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda \end{aligned}$$

on trouve

$$\Rightarrow B(\lambda) = -C(\lambda) \quad (3.6)$$

Alors on obtient :

$$\begin{cases} u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \int_0^{\infty} -B(\lambda)e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)d\lambda \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = G \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda)e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)d\lambda \end{cases}$$

d'où pour la condition (iv) on a

$$u_{\theta}^{(1)}(r, 0) - u_{\theta}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad 0 < r < a$$

et avec les autres conditions aux limites, on trouve le système d'équations duales en  $J_1$  définie par les quatre equations suivantes :

$$i) \quad \int_0^{\infty} [A(\lambda)\cosh(\lambda h) - B(\lambda)\sinh(\lambda h)]J_1(\lambda r)d\lambda = \omega r \quad 0 < r < b$$

$$ii) \quad \int_0^{\infty} \lambda[A(\lambda)\sinh(\lambda h) - B(\lambda)\cosh(\lambda h)]J_1(\lambda r)d\lambda = 0 \quad r > b$$

$$iii) \quad \int_0^{\infty} [A(\lambda) + B(\lambda)]J_1(\lambda r)d\lambda = 0 \quad 0 < r < a$$

$$iv) \quad \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda = 0 \quad r > a$$

## 2.3 Réduction du système d'équations intégrales duales en $J_1$ à des équations intégrales de Fredholm

Les équations homogènes (ii)(iv) seront satisfaites si :

$$B(\lambda) = \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.7)$$

$$A(\lambda) \sinh(\lambda h) - B(\lambda) \cosh(\lambda h) = \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.8)$$

avec  $\varphi(t)$  et  $\psi(t)$ , des fonctions auxiliaires .

On remplace l'équation (eq3.7) en (eq3.8) on trouve :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sinh(\lambda h)} \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt + \coth(\lambda h) \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.9)$$

à partir des equations (i) et (iii) on a

$$\begin{aligned} \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty \coth(\lambda h) J_1(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty \frac{1}{\sinh(\lambda h)} J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r \quad 0 < r < b \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty [\coth(\lambda h) + 1] J_1(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty \frac{1}{\sinh(\lambda h)} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad 0 < r < a \end{aligned} \quad (3.11)$$

En tenant compte de la relation intégrale comme suit :

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) \sin(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} & t < r \\ 0 & t > r \end{cases}$$

Alors pour l'équation (3.10) on fait l'addition et soustraction du terme suivant :

$$\begin{aligned} & - \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty [\coth(\lambda h) - 1] J_1(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{\sinh(\lambda h)} d\lambda = \omega r \quad 0 < r < b \end{aligned} \quad (3.12)$$

de la même manière pour l'équation (3.11)

$$\begin{aligned} & - 2 \int_0^b \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + \int_0^a \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_0^r \frac{2t\psi(t)}{\sqrt{r^2-t^2}} + \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty [\coth(\lambda h) - 1] J_1(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \int_0^\infty \frac{1}{\sinh(\lambda h)} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad 0 < r < a \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les deux dernières équations intégrales (eq3.12 – eq3.13) sont du type d'Abel(eq2.4.2) pour dont les solutions sont :

$$\int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2-t^2}} dt = g(t) \quad \Rightarrow \quad t\varphi = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{rg(r)}{\sqrt{t^2-r^2}} dr$$

Alors nous trouvons les equation suivantes :

$$\begin{aligned} t\psi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2}{\sqrt{t^2-r^2}} [\omega r - \int_0^b \psi(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \int_0^\infty [\coth(\lambda h) - 1] J_1(\lambda r) d\lambda \\ - \int_0^a \varphi(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{\sinh(\lambda h)} d\lambda] \quad 0 < r < b \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} -2t\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2}{\sqrt{t^2-r^2}} [\int_0^a \varphi(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \int_0^\infty [\coth(\lambda h) - 1] J_1(\lambda r) d\lambda \\ + \int_0^b \psi(\xi) \sin(\lambda \xi) d\xi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{\sinh(\lambda h)} d\lambda] \quad 0 < r < a \end{aligned} \quad (3.15)$$

## 2.4 Système d'équations intégrales de Fredholm

Pour obtenir le système d'équations intégrales de Fredholm, nous appliquons les relations suivantes dans l'équation (eq3.14)et(3.15).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{r^2-t^2}} dr = 2t^2 \\ \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2 J_1(\lambda r)}{\sqrt{r^2-t^2}} dr = t \sin(\lambda t) \end{cases}$$

Après les calculs on trouve :

$$\begin{cases} 2\varphi(t) + \int_0^a \varphi(\xi) K_1(t, \xi) d\xi + \int_0^b \psi(\xi) K_2(t, \xi) d\xi = 0 & t < a \\ \psi(t) + \int_0^a \varphi(\xi) K_2(t, \xi) d\xi + \int_0^b \psi(\xi) K_1(t, \xi) d\xi = \omega \frac{4t}{\pi} & t < b \end{cases} \quad (3.16)$$

avec  $K_1$ , et  $K_2$  les noyau de système défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} K_1(t, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\coth(\lambda) - 1] \sin(\lambda \xi) \sin(\lambda t) d\lambda \\ K_2(t, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sinh(\lambda h)} \sin(\lambda \xi) \sin(\lambda t) d\lambda \end{cases}$$



On a aussi la fonction de Bessel d'ordre  $\nu = \frac{1}{2}$  donnée par :

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sin(x)$$

C'est qui permet d'obtenir le système comme suit :

$$\begin{cases} K_1(t, \xi) = \sqrt{t\xi} \int_0^\infty \lambda [\coth(\lambda h) - 1] J_{\frac{1}{2}}(\lambda\xi) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) d\lambda \\ K_2(t, \xi) = \sqrt{t\xi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sinh(\lambda h)} J_{\frac{1}{2}}(\lambda\xi) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) d\lambda \end{cases}$$

Pour résoudre notre problème nous nous intéressons à la solution de l'équation (eq3.16). Ce là en effectuant un changement de variable pour obtenir un système avec les bornes d'intégrales  $[0, 1]$ . Ce changement permettra d'écrire cette dernière équation sous la forme d'un développement en série de polynômes de Jacobi.

Le changement de variable est :

$$\begin{cases} s = \frac{t}{a}, \frac{t}{b} \\ \delta = \frac{\xi}{a}, \frac{\xi}{b} \end{cases}$$

Donc le système d'équations de Fredholm devient :

$$\begin{cases} \Phi(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 \Phi(\delta) L_1(s, \delta) d\delta + \frac{1}{2} \int_0^1 \Psi(\delta) L_2(s, \delta) d\delta = 0 & s < 1 \\ \Psi(s) + \int_0^1 \Phi(\delta) L_3(s, \delta) d\delta + \int_0^1 \Psi(\delta) L_4(s, \delta) d\delta = \omega \frac{4bs}{\pi} & s < 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Avec les noyaux sont :

$$\begin{cases} L_1(s, \delta) = a \int_0^\infty \lambda [\coth(\lambda h) - 1] \sqrt{s\delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda as) J_{\frac{1}{2}}(\lambda a\delta) d\lambda \\ L_2(s, \delta) = \sqrt{ab} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sinh(\lambda h)} \sqrt{s\delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda as) J_{\frac{1}{2}}(\lambda b\delta) d\lambda \\ L_3(s, \delta) = \sqrt{ab} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sinh(\lambda h)} \sqrt{s\delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda bs) J_{\frac{1}{2}}(\lambda a\delta) d\lambda \\ L_4(s, \delta) = b \int_0^\infty \lambda [\coth(\lambda h) - 1] \sqrt{s\delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda bs) J_{\frac{1}{2}}(\lambda b\delta) d\lambda \end{cases}$$

## 2.5 Réduction du système algébrique

Dans le *chapitre 2* le polynôme de Jacobi représenté par  $P_n^{\alpha,\beta}$ , on prend  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$  avec le variable  $1 - 2x^2$ .

Donc le polynôme de Jacobi est  $P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2x^2)$ .

On pose :

$$\begin{cases} \Phi(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2x^2) \\ \Psi(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2x^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

ou  $\alpha_n$   $\beta_n$  sont des coefficients à déterminer.

En remplaçant (eq3.18) dans le système d'équations (eq3.17), on trouve :

$$\begin{cases} s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2s^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2\delta^2) L_1(s, \delta) d\delta \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2\delta^2) L_2(s, \delta) d\delta = 0 & s < 1 \\ s \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2s^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2\delta^2) L_3(s, \delta) d\delta \\ \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - 2\delta^2) L_4(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} \omega b s & s < 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

A cause de condition d'orthogonalité des polynômes de Jacobi on a [10] :

$$\int_0^1 x^2 P_n^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(1 - 2x^2) P_m^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(1 - 2x^2) dx = \begin{cases} 0 & n = m \\ \frac{1}{3 + 4m} & n \neq m \end{cases} \quad (3.20)$$

Remarquons ensuite que [10] :

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} P_n^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(1 - 2x^2) J_{\frac{1}{2}}(xy) dx = \frac{1}{y} J_{\frac{3}{2}+2n}(y) \quad (3.21)$$

D'après les deux intégrales précédentes, on multiplie le système d'équations (3.19) par  $P_m^{\frac{1}{2},0}(1 - 2s^2)$ . On trouve le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 s^2 P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) ds \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) L_1(s, \delta) d\delta \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) L_2(s, \delta) d\delta = 0 \quad s < 1 \\ \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^1 s^2 P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) ds \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) L_3(s, \delta) d\delta \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) L_4(s, \delta) d\delta \\ \quad = \frac{4}{\pi} \omega b \int_0^1 s^2 P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) ds \quad s < 1 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Nous pouvons réduire le dernier système à un système d'équations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_m}{3+4m} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Omega_{mn}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Omega_{mn}^{(2)} = 0 \\ \frac{\beta_m}{3+4m} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Omega_{mn}^{(3)} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Omega_{mn}^{(4)} = q_m \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Ou

$$q_m = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \omega b & m = 0 \\ 0 & m > 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} [\coth(\lambda h) - 1] J_{\frac{3}{2}+2n}(a\lambda) J_{\frac{3}{2}+2m}(a\lambda) d\lambda \\ \Omega_{mn}^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{-1}}{\sinh(\lambda h)} J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_{\frac{3}{2}+2m}(a\lambda) d\lambda \\ \Omega_{mn}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{-1}}{\sinh(\lambda h)} J_{\frac{3}{2}+2n}(a\lambda) J_{\frac{3}{2}+2m}(b\lambda) d\lambda \\ \Omega_{mn}^{(4)} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} [\coth(\lambda h) - 1] J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_{\frac{3}{2}+2m}(b\lambda) d\lambda \end{array} \right. \quad (3.24)$$

### 3 Résolution numérique

Pour résoudre notre problème, il faut donner les valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  à partir le système (3.23) pour les différentes valeurs de  $a, b$  et  $h$ .

On remarque que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\coth(\lambda h) - 1] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sinh(\lambda h)} \right) = 0$$

pour la convergence, les intégrales  $\Omega_{mn}^{(i)}$  se calculent numériquement en appliquant la formule de Simpson avec  $\lambda_0 = 1500$ .

Les tables suivantes (3.1),(3.2),(3.2) donnent les valeurs numériques de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ .

Nous pouvons remarquer que les deux suites précédentes convergent rapidement lorsque le rapport d'épaisseur  $h/a$  augmente et le rapport de disque  $b/a$  diminue. Cette convergence est suffisante pour calculer les déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte dans le milieu élastique.

Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=0.5$				
n	b/a=0.5		b/a=1.5	
	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	0.629162396678349	-0.013044779220368	1.906005755164498	-0.103117631103873
2	-0.003289538120805	-0.001100218172701	0.034972092875185	-0.190575598445693
3	-0.000570680634564	0.000004286042846	0.044004950659011	-0.129959151206447
4	-0.000043205167913	0.000001168595415	0.029780926823040	-0.037800289189318
5	0.000001236060745	-0.000000049364743	0.014027740665950	0.003688113871907
6	0.000000538280291	-0.00000000052296	0.004823454187613	0.006166764824544
7	0.000000024313731	0.000000000111914	0.001146551883185	0.000786705482492
8	-0.000000004659072	-0.000000000005167	0.000125216193546	-0.000941587275930
9	-0.000000000591449	-0.000000000000006	-0.000039175494503	-0.000412361967541
10	0.000000000020888	0.000000000000013	-0.000028852777808	0.000046727860977
11	0.000000000008730	-0.000000000000001	-0.000010086112568	0.000077694888405
12	0.000000000000257	0.000000000000000	-0.000001951940864	0.000008363021258
13	-0.000000000000098	0.000000000000000	0.000000196124868	-0.000012159777392
14	-0.000000000000009	-0.000000000000000	0.000000327724822	-0.000004278883732
15	0.000000000000001	0.000000000000000	0.000000124440150	0.000001224128927
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
40	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000002
41	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

TABLE 3.1 – Valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour  $h/a=0.5$

Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=1$				
n	b/a=0.5		b/a=1.5	
	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	0.636238291217592	-0.001824137520051	1.909906897746031	-0.026536258060542
2	-0.000081906719361	-0.000175705633217	0.001184496780253	-0.028083829759479
3	-0.000008730938479	-0.000005979159186	0.000756972124547	-0.012856662438322
4	-0.000000636867306	-0.000000041796680	0.000282033732225	-0.003436525380492
5	-0.000000034358660	0.000000002919779	0.000075743452881	-0.000477337049909
6	-0.000000001339119	0.000000000056236	0.000015447051286	0.000022734369588
7	-0.00000000029480	-0.00000000001711	0.000002407361829	0.000026663843323
8	0.000000000000500	-0.000000000000056	0.000000289352932	0.000005065061755
9	0.000000000000086	0.000000000000001	0.000000031479230	-0.000000143926348
10	0.000000000000004	0.000000000000000	0.000000004838378	-0.000000281017081
11	0.000000000000000	-0.000000000000000	0.000000000866803	-0.000000054432337
12	-0.000000000000000	-0.000000000000000	0.00000000049259	0.000000002378037
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
23	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
24	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
25	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

TABLE 3.2 – Valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour  $h/a=1$

Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $h/a=1.5$				
n	b/a=0.5		b/a=1.5	
	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	0.629162396678349	-0.013044779220368	0.636579631925761	-0.310615632283000
2	-0.003289538120805	-0.001100218172701	-0.000004705489248	-0.023151016090322
3	-0.000570680634564	0.000004286042846	-0.000000289597540	-0.000780356873032
4	-0.000043205167913	0.000001168595415	-0.000000013023625	-0.000015377207744
5	0.000001236060745	-0.000000049364743	-0.000000000474418	-0.000000147029231
6	0.000000538280291	-0.00000000052296	-0.000000000014611	0.000000001101769
7	0.000000024313731	0.000000000111914	-0.000000000000386	0.000000000059368
8	-0.000000004659072	-0.000000000005167	-0.000000000000009	0.000000000000693
9	-0.000000000591449	-0.000000000000006	-0.000000000000000	-0.000000000000006
10	0.000000000020888	0.000000000000013	-0.000000000000000	-0.000000000000000
11	0.000000000008730	-0.000000000000001	0.000000000000000	-0.000000000000000
12	0.000000000000257	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
13	-0.000000000000098	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
14	-0.000000000000009	-0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
15	0.000000000000001	0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000000

TABLE 3.3 – Valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour  $h/a=1.5$

Valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$				
n	h/a=2 et b/a=0.5		h/a=1 et b/a=1	
	$\alpha_n$	$\beta_n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	1.909846828853678	-0.002231144159096	1.272844307347079	-0.014903798010558
2	0.000002450589774	-0.001059380564003	0.000017332698400	-0.006557923310221
3	0.000000903023677	-0.000249451852583	0.000019985960246	-0.001142709401130
4	0.000000164323723	-0.000040901901620	0.000003088179753	-0.000087256865763
5	0.000000022499756	-0.000005132573178	0.000000190168666	0.000002407868316
6	0.000000002497868	-0.000000500321210	-0.000000003549620	0.000001079214527
7	0.000000000226650	-0.000000035427739	-0.000000000969304	0.000000049124214
8	0.000000000016177	-0.000000001195490	0.000000000061134	-0.000000009346471
9	0.000000000000778	0.000000000116070	0.000000000016873	-0.000000001191024
10	0.000000000000004	0.000000000026206	0.000000000000069	0.000000000041726
11	-0.000000000000004	0.00000000002686	-0.000000000000220	0.000000000017564
12	-0.000000000000000	0.00000000000150	-0.000000000000013	0.000000000000520
13	-0.000000000000000	-0.000000000000002	0.000000000000002	-0.000000000000197
14	0.000000000000000	-0.000000000000002	0.000000000000000	-0.000000000000018
15	0.000000000000000	-0.000000000000000	-0.000000000000000	0.000000000000002

TABLE 3.4 – Valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$

## 4 Expression des déplacement et contraintes

Déplacement et contrainte pour  $D_1 = [-h, 0]$

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(1)}(r, z) &= \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{\cosh(\lambda z)}{\sinh(\lambda h)} \right] J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [\cosh(\lambda z) \coth(\lambda h) + \sinh(\lambda z)] J_{\frac{3}{2}+2n}(a\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) &= \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} \left[ \frac{\cosh(\lambda z)}{\sinh(\lambda h)} \right] J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} [\cosh(\lambda z) \coth(\lambda h) + \sinh(\lambda z)] J_{\frac{3}{2}+2n}(a\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Déplacement et contrainte pour  $D_2 = [0, \infty[$

$$u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda z}}{\sqrt{\lambda}} J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \tag{3.27}$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda z} J_{\frac{3}{2}+2n}(b\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \tag{3.28}$$

donc pour tracer les graphes on fait un changement de variable pour que les résultats sera sans dimension on pose  $\rho = \frac{r}{a}$ ,  $\zeta = \frac{z}{a}$  et  $H = \frac{h}{a}$  alors les relations devient :

Déplacement et contrainte pour  $D_1 = [-h, 0]$

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(1)}(\rho, \zeta) &= \sqrt{\frac{\pi b}{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{\cosh(\lambda \zeta)}{\sinh(\lambda H)} \right] J_{\frac{3}{2}+2n}\left(\frac{b}{a}\lambda\right) J_1(\lambda \rho) d\lambda \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [\sinh(\lambda \zeta) + \cosh(\lambda \zeta) \coth(\lambda H)] J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda) J_1(\lambda \rho) d\lambda
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z}^{(1)}(\rho, \zeta) &= \sqrt{\frac{\pi b}{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} \left[ \frac{\cosh(\lambda \zeta)}{\sinh(\lambda H)} \right] J_{\frac{3}{2}+2n}\left(\frac{b}{a}\lambda\right) J_1(\lambda \rho) d\lambda \\
 &+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} [\cosh(\lambda \zeta) + \sinh(\lambda \zeta) \coth(\lambda H)] J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda) J_1(\lambda \rho) d\lambda
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Déplacement et contraintes pour  $D_2 = [0, \infty[$

$$u_{\theta}^{(2)}(\rho, \zeta) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\zeta}}{\sqrt{\lambda}} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda) J_1(\lambda\rho) d\lambda \quad (3.31)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(\rho, \zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda\zeta} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda) J_1(\lambda\rho) d\lambda \quad (3.32)$$

**Champs de déplacement et de contraintes pour le domaines  $D_1$**

Les graphes suivants représentent les champs des déplacements et les champs des contraintes dans le domaine  $-h < z < 0$ . Dans cette zone quand la valeur de  $\zeta$  augmente les déplacements et les contraintes augmentent jusqu'à la fissure, et on a aussi pour  $\rho > 1$  ils sont diminués .

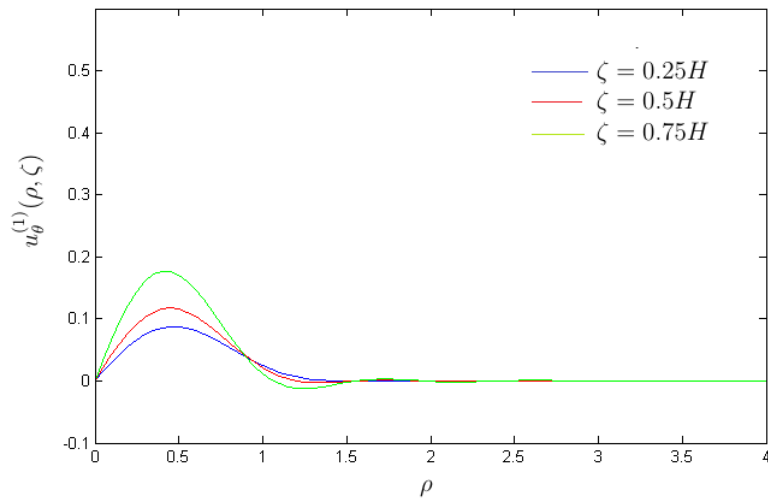


FIGURE 3.3 – Champ de déplacement  $u_{\theta}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 0.5$  et  $\frac{b}{a} = 0.5$



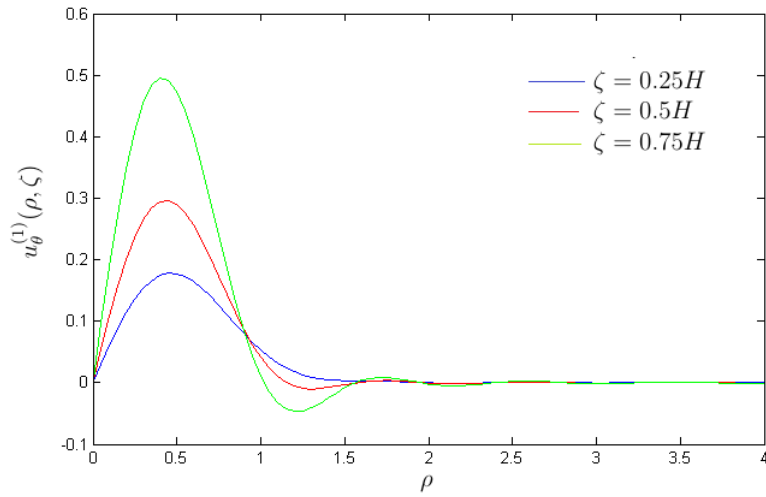


FIGURE 3.4 – Champ de déplacement  $u_{\theta}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 0.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

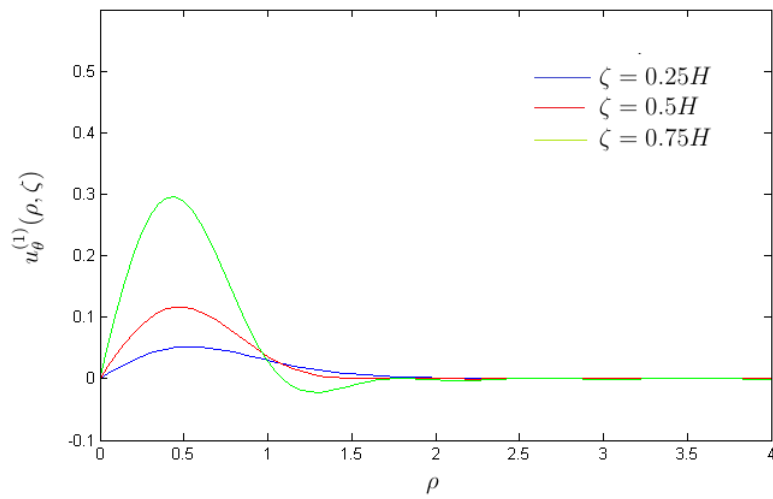


FIGURE 3.5 – Champ de déplacement  $u_{\theta}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

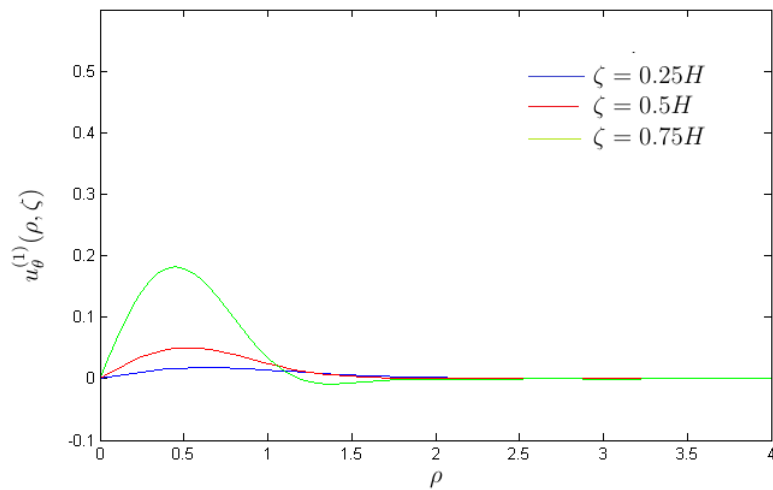


FIGURE 3.6 – Champ de déplacement  $u_{\theta}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

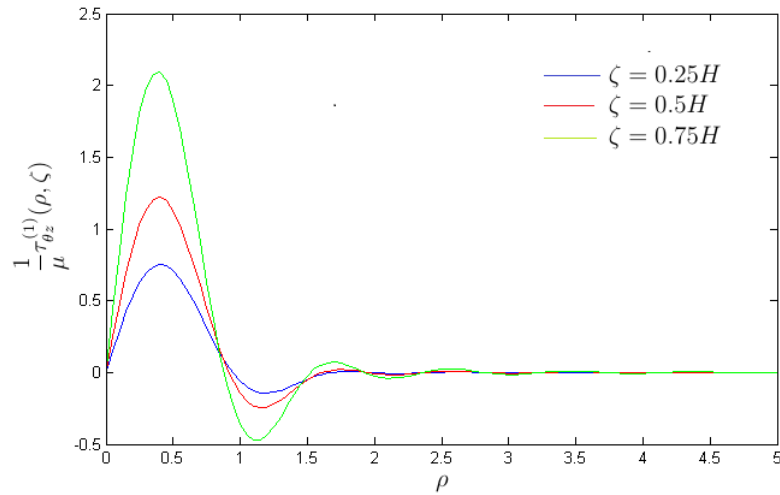


FIGURE 3.7 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 0.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

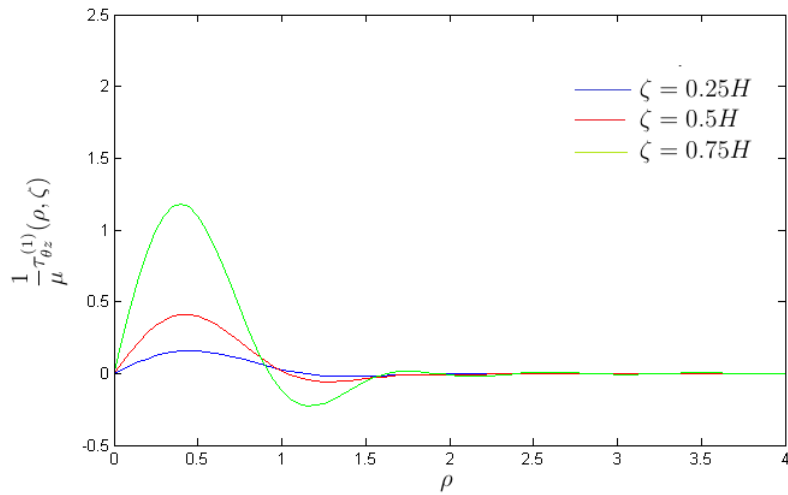


FIGURE 3.8 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

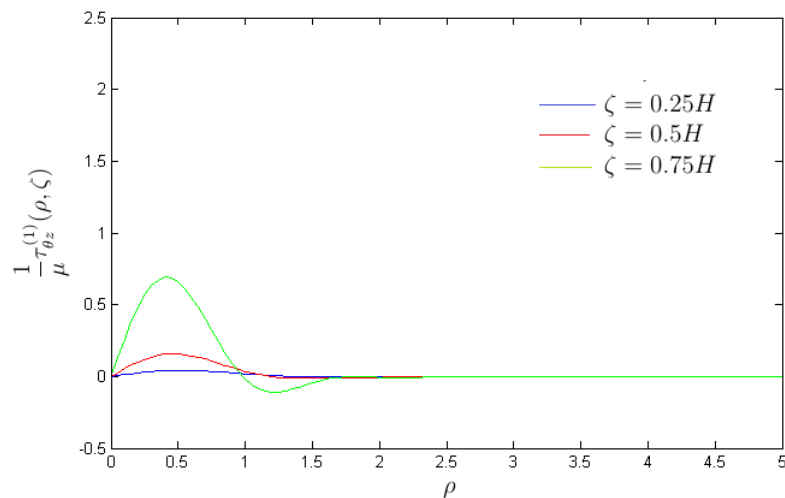


FIGURE 3.9 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(1)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

### Champs de déplacements et de contraintes pour le domaine $D_2$

Les graphes suivants représentent les champs des déplacements et les champs des contraintes dans le domaine  $\zeta > 0$ . On trouve dans ce domaine les déplacements et les contraintes sont maximales au voisinage de la fissure et si la valeur de  $\zeta$  augmente ils diminuent et on a aussi pour  $\rho > 1$  ils sont diminuents .

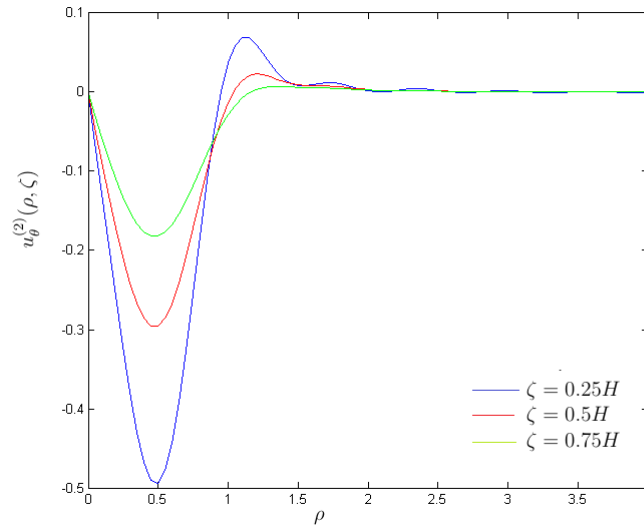


FIGURE 3.10 – Champ de déplacement  $u_\theta^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 0.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

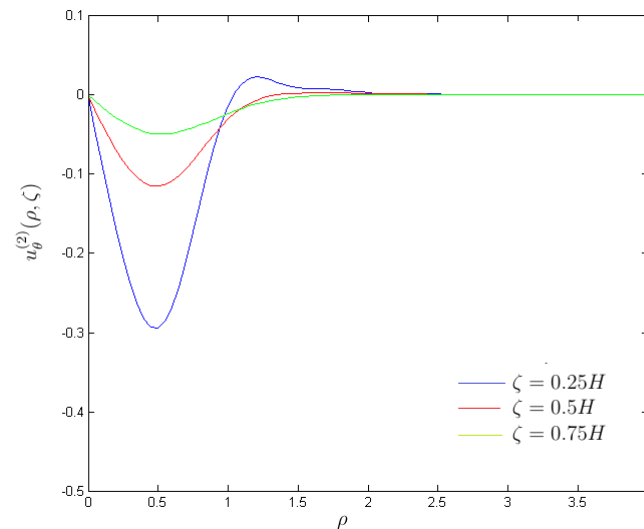


FIGURE 3.11 – Champ de déplacement  $u_\theta^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

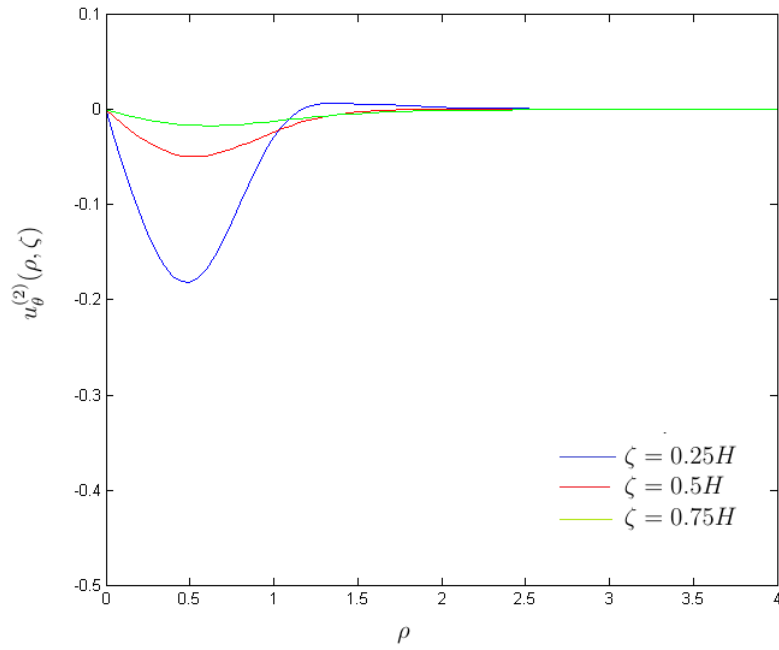


FIGURE 3.12 – Champ de déplacement  $u_{\theta}^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

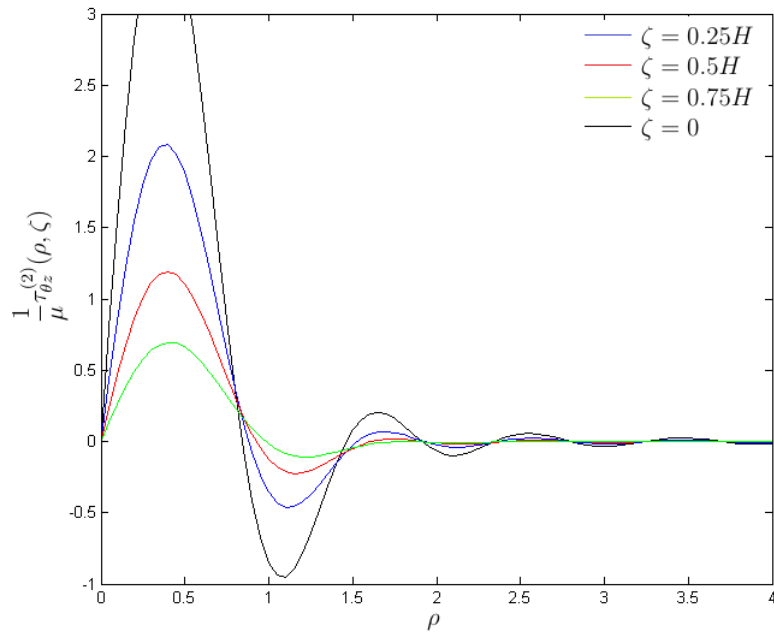


FIGURE 3.13 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 0.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

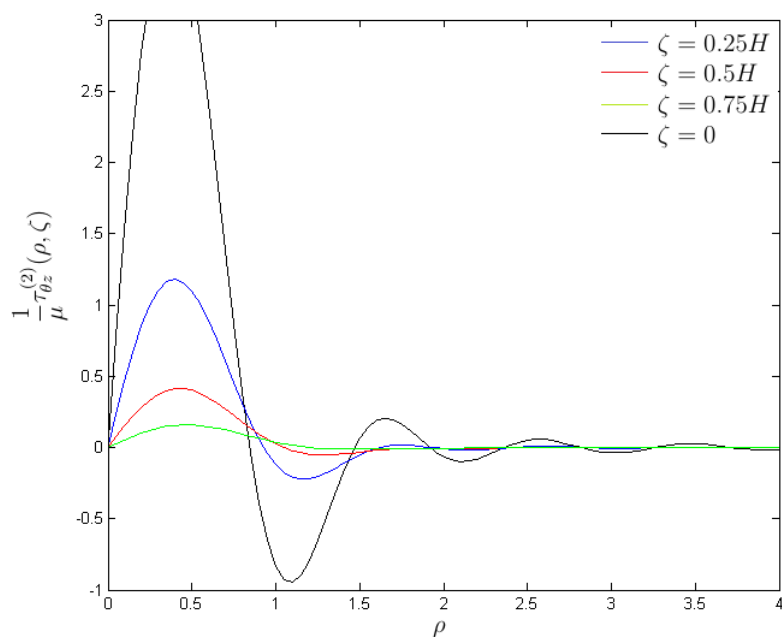


FIGURE 3.14 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

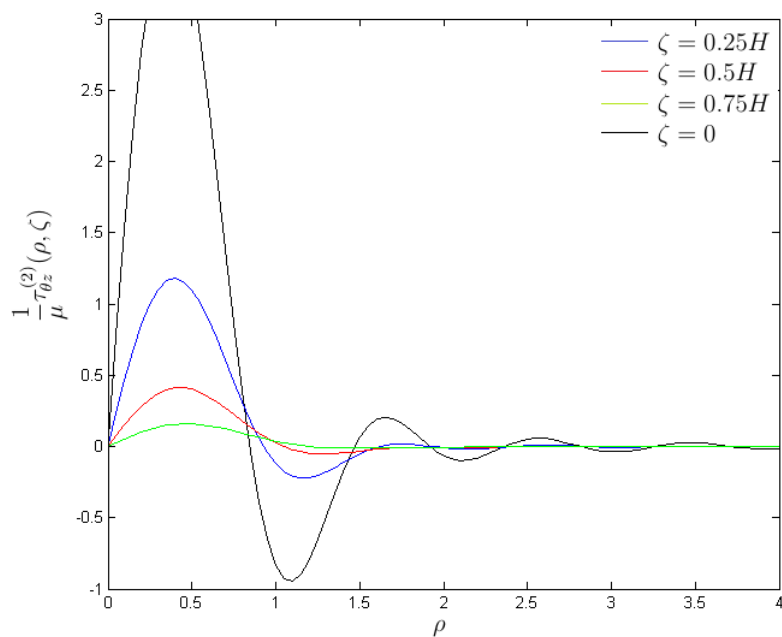


FIGURE 3.15 – Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^{(2)}$  avec  $\frac{h}{a} = 1.5$  et  $\frac{b}{a} = 1.5$

## 5 Expression du facteur d'intensité de contrainte

La quantité la plus intéressante dans le domaine pratique (particularité dans la mécanique de la rupture linéaire) est le facteur d'intensité de contrainte [10] qui est donné par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{a-r} \tau_{\theta}^{(2)}(r, 0) \quad (3.33)$$

où la contrainte de torsion dans la région 2 pour  $z = 0$  est :

$$\tau_{\theta}^{(2)}(r, 0) = \mu \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.34)$$

Pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{r \rightarrow a} \sqrt{a-r} \int_0^{\infty} I(\lambda, r) d\lambda$$

où :

$$I(\lambda, r) = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r)$$

on doit décomposer l'intégrale  $I(\lambda, r)$  comme suit :

$$\int_0^{\infty} I(\lambda, r) d\lambda = \int_0^{\infty} [I(\lambda, r) - H(\lambda, r)] d\lambda + \int_0^{\infty} H(\lambda, r) d\lambda$$

A cause de la convergence rapide de la première intégrale, il nous reste :

$$\int_0^{\infty} H(\lambda, r) d\lambda \simeq \int_{\lambda_0}^{\infty} G(\lambda, r) d\lambda$$

Donc on a

$$G(\lambda, r) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r)$$

En utilisant la formule asymptotique suivante de la fonction de Bessel de première espèce :

$$J_\nu(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.35)$$

On trouve :

$$\begin{cases} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) \simeq \sqrt{\frac{2}{a\lambda\pi}} (-1)^{n+1} \cos(\lambda a) \\ J_1(\lambda r) \simeq \sqrt{\frac{2}{r\lambda\pi}} \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (3.36)$$

On aura :

$$G(\lambda, r) = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda r a}} (-1)^{n+1} \cos(\lambda a) \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (3.37)$$

$$K_{III} = G \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{\frac{a-r}{r}} R(\lambda, r)$$

avec :

$$R(\lambda, r) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\lambda a) \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right) d\lambda$$

Remarquons aussi que :

$$M(\lambda, r) = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \cos\left(\lambda(a-r) + \frac{3\pi}{4}\right) d\lambda + \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \cos\left(\lambda(a+r) - \frac{3\pi}{4}\right) d\lambda$$

Utilisant les valeurs d'intégrale de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

on obtient :

$$R(\lambda, r) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a-r}} \quad (3.38)$$

Enfin nous trouvons l'expression du facteur d'intensité de contraintes :

$$K_{III} = -\sqrt{\frac{a}{8}}\mu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \quad (3.39)$$

Dans le graphe( 3.16) on trouve que le facteur d'intensité de contraintes augmente si le rapport  $\frac{h}{a}$  augmente jusqu'à une certaine valeur où il se stabilise. Cette augmentation se fait a cause la diminution de rayon de fissure  $a$ . Donc le milieu est très fragile au niveau de la fissure .

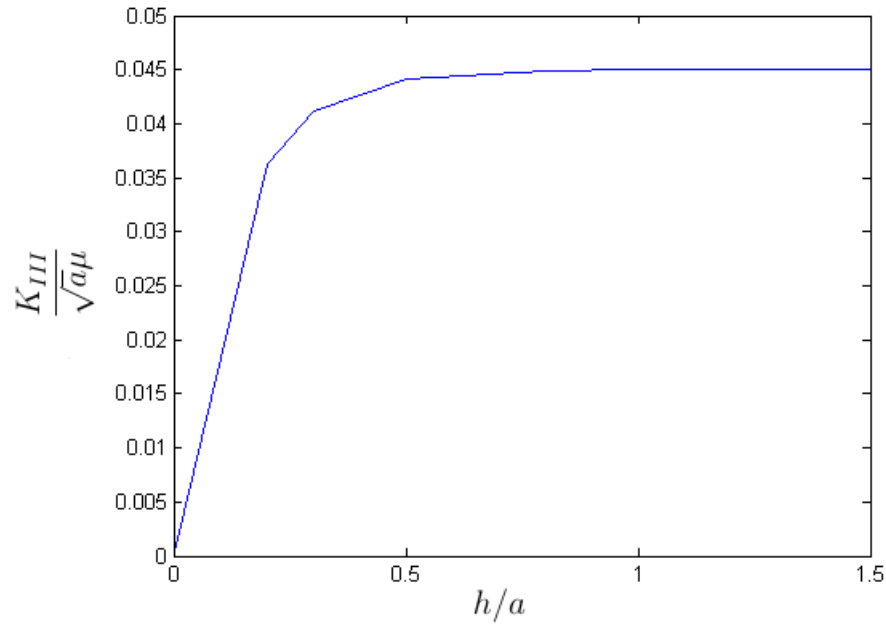


FIGURE 3.16 – Facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $h/a$



---

# Conclusion générale et perspectives

---

Nous avons étudié un problème de torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique isotrope, homogène par disque rigide ayant une fissure externe. La résolution est basée sur une procédure analytique sur l'utilisation de la méthode de la transformation intégrale de Hankel. En utilisant des développements en séries des polynômes de Jacobi, les solutions des équations intégrales de Fredholm correspondantes s'obtiennent par la résolution des systèmes algébriques infinis.

Les résultats de ce travail se résument comme suit :

- Plus le rapport  $\frac{h}{a}$  est grand la convergence des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  est rapide. Les déplacements et les contraintes décroissent avec l'augmentation de ce rapport.
- Les déplacements et les contraintes augmentent au voisinage de la fissure.
- Quand le rapport  $\frac{h}{a}$  augmente, le facteur d'intensité de contrainte augmente aussi.

## Perspectives

La méthode analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante de problèmes de recherche. Nous envisageons d'étudier des problèmes de torsion axisymétrique dans le cas des conditions limites doublement mixtes ou triplement mixte comme suit :

- Torsion d'un demi-espace affaibli par une fissure externe par un disque rigide : milieu bi-couche .

---

# Bibliographie

---

- [1] R. REISSNER, E et J. SAGOCI, H. F. *Forced torsion oscillations of an elastic half-space*. J. Appl. Phys, 15 1944.652.
- [2] G.K. DHAWAN. *The torsion of elastic half-space with penny-shaped crack*. Def. Sci. J. Vol.24, 1974.
- [3] R. PAK et J. SAPHORES. *Torsion of a rigid disc in a half-space*. Int. J. Engng Sci. Vol.29, 1991.
- [4] B. BARTHÉLÉMY. *Notions pratique de mécanique de la rupture*. Eyrolles, 1980.
- [5] S. TIMOSHENKO et J. GOODIER. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1970.
- [6] J.C. CHARMET. *Mécanique de solide et des matériaux*. Dunod, 2004.
- [7] B.KEBLI et M.MERCHICHE. *Axisymmetric Torsion of an Elastic Layer by an Adhered Rigid Disc*. Canadian Journal on Mechanical Sciences and Engineering Vol. 2 No. 6, 2011
- [8] M.ERGUVEN *Torsion of two bonded layers by a rigid disk*. Meccanica, 26 :117-123,1991.
- [9] Y.DEBNAR *Elasticité*. Institut Universitaire de Technologie du Mans 2006.
- [10] M. RAHMAN. *Integral equations and their applications*. WIT press, 2007.

- [11] P VIOT. *Méthodes d'analyse numérique*. Dunod, 2003.
- [12] F. BOWMAN. *Introduction to Bessel function*. Doverpublication Inc, 1985.
- [13] Dean G. DUFFY. *Mixed boundary value problems*. Chapman Hall/CRC, 2008.
- [14] G.C. SIH et E.P.CHEN. *Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area..* J. Franklin. Inst, 293 :251-261, 1971.
- [15] MAGALIE . *Polynôme orthogonaux et Polynôme de Macdonald* . Université du Québec A Montréal 2006.
- [16] M.AMESTOY et S.FOREST. *Mécanique des milieux continus*. Cours de l'école des mines de Paris, 2005.

## Chapitre A

---

# Annexes

---

### Quelques propriétés des fonctions gamma et beta

$$\int_0^1 r^{x-1}(1-r)^{y-1}dr = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.1})$$

avec  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^3}{t^2 - \xi^2} d\xi = \frac{2}{3}t^2 \quad (\text{A.2})$$

calcul de l'intégrale

$$J = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^2 J_1(\lambda\xi)}{t^2 - \xi^2} d\xi \quad (\text{A.3})$$

S'obtient en tenant compte de la formule (A2) [10] donnée par

$$\int_0^1 x^{\nu+1}(1-x)^\mu J_\nu(bx)dx = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(b)}{b^{\mu+1}}, \quad (b > 0, \nu > -1, \mu > -1) \quad (\text{A.4})$$

prenant ensuite  $\nu = 1, \mu = \frac{-1}{2}$  la relation A.4 devient

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} J_{\frac{3}{2}}(\lambda\xi) = \frac{1}{b} \left[ \frac{\sin(b)}{b} - \cos(b) \right]. \quad (\text{A.5})$$

finalement la relation A.3 nous donne

$$J = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^2 J_1(\lambda\xi)}{t^2 - \xi^2} d\xi = t \sin(\lambda t) \quad (\text{A.6})$$

**Le rapport d'orthogonalité des polynômes de Jacobi est**

$$\int_0^1 \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1-2x^2) P_m^{\alpha,\beta}(1-2x^2)}{2^{-2-\alpha-\beta} x^{-1-2\alpha} (1-x^2)^{-\beta}} dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (\alpha+\beta+2n+1)} \delta_{mn}, \quad (\text{A.7})$$

## Méthode de factorisation triangulaire (décomposition $LU$ )

La méthode consiste à décomposer la matrice  $A$  en un produit de deux matrices triangulaire  $L$  et  $U$ . Comme ce la nous permet-il de résoudre le système  $A.x = b$ , il suffit de remarquer que :

$$A.x = L.U.x = b \quad (\text{A.8})$$

Pour les éléments de  $L$  :

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad j < i, \quad i = 1, 2, 3... \quad (\text{A.9})$$

Pour les éléments de  $U$  :

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right], \quad i \leq j, \quad j = 1, 2, 3... \quad (\text{A.10})$$

et de poser  $U.x = y$ . La résolution du système linéaire se fait alors en deux étapes :

$$L.y = b \quad (\text{A.11})$$

$$L.x = y \quad (\text{A.12})$$

qui sont deux systèmes triangulaires. On utilise d'abord une descente triangulaire sur la matrice  $L$  pour obtenir  $y$  : -  $y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

- pour  $i = 2, 3, 4, \dots, n$  :

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k}{L_{ii}} \quad (\text{A.13})$$

et par suite une remontée triangulaire sur la matrice  $U$  pour obtenir la solution recherchée  $x$ . -  $u_{ii} = 1$  ;

-  $x_n = y_n$  ;

- pour  $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$  :

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k \quad (\text{A.14})$$

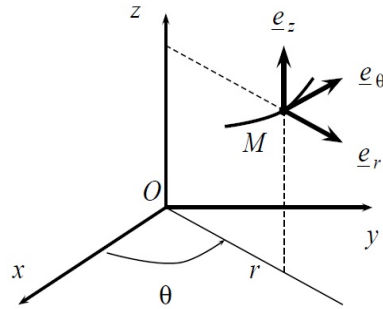


FIGURE A.1 – Coordonnées cylindriques.

## Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques

### Coordonnées cylindriques

#### Définition des coordonnées

$$OM = re_r + ze_z \quad (\text{A.15})$$

$$dM = dre_r + rd\theta e_\theta + dze_z \quad (\text{A.16})$$

$$e_r = \frac{\partial OM}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial OM}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial OM}{\partial z} \quad (\text{A.17})$$

#### Champ scalaire

champ scalaire

$$U(r, \theta, z) \quad (\text{A.18})$$

gradient

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} e_z \quad (\text{A.19})$$

Laplacien

$$\Delta = \text{div}(\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.20})$$

#### Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$U = u_r(r, \theta, z)e_r + u_\theta(r, \theta, z)e_\theta + u_z(r, \theta, z)e_z \quad (\text{A.21})$$

gradient

$$[\nabla U] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

divergence

$$\text{div}U = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.23})$$

Laplacien

$$\Delta U = \text{div}(\nabla U) = \left( \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial u_r}{r^2} \right) e_r + \left( \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{r^2} \right) e_\theta + \Delta u_z e_z \quad (\text{A.24})$$