

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger
Département Hydraulique

المدسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER

Présenté par :

MESSAOUDI Saïd
Ingénieur en hydraulique
Diplômé de l'E.N.P.

**ETUDE DE L'ENTRAINEMENT D'AIR DANS
LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE
(Canaux à forte pente)
APPLICATIONS AUX EVACUATEURS
DE CRUES**

Soutenu le 18 Janvier 1996 devant le jury :

Président	A. KETTAB	Maître de conférence (E.N.P.)
Examineur	M. BERKANI	Chargé de cours (E.N.P.)
Rapporteur	S. BENMAMAR	Chargé de cours (E.N.P.)
Membres	A. BILEK B. ACHOUR	Chargé de cours (E.N.P.) Chargé de cours (Biskra)
Invités	F. ZERFA Y. MOULOUDI	Chargé de cours (E.N.P.) Maître assistant (E.N.P.)

ملخص

تقترح هذه الأطروحة منهجية لحساب خصائص نوع جديد من الإنسيابات ذات السطح الحر و التي عموما ما تحدث في المجاري الشديدة الإنحدار، حيث يكون الإنسياب سريعا جدا. يتعلق الأمر بالإنسيابات المهوية أي المعرضة لجذب هوائي عبر سطحها الحر. و تتلخص هذه الدراسة في المراحل التالية :

- شرح لظاهرة الجذب الهوائي.
- تعيين نقطة بدء الجذب الهوائي في مجاري مفرغ الفيوض.
- تعريف عناصر التقريب لتشبيه هذا النوع الجديد بالإنسيابات المعروفة.
- دراسة خصائص الإنسياب المنتظم المهوي. (التركيز المتوسط للهواء ، ارتفاع الماء الصافي ...).
- دراسة الجريان المتغير تدريجيا المهوي بتطبيق معادلتني إنحفاظ الكتلة للهواء و الطاقة للماء.
- حل المعادلات التفاضلية المحصل عليها و تطبيقها لمجاري مفرغ الفيوض، متبوعة ببعض الإرشادات العملية.

كلمات مفتاح : التركيز الهوائي، الجذب الهوائي، الحث بالتكهف، الفرق المنتهي، عمق الماء الصافي، مفرغ الفيوض.

RESUME

Cette thèse propose une méthodologie de calcul des caractéristiques d'un nouveau type d'écoulement à surface libre qui se produit en général sur les coursters à forte pente, là où régnent des écoulements à très grande vitesse. Il s'agit des écoulements aérés c'est à dire sujets à un entraînement naturel d'air atmosphérique à travers leur surface libre. Cette étude se résume dans les étapes suivantes :

- * Explication phénoménologique de l'entraînement d'air.
- * Détermination du point de début d'entraînement d'air sur un courster.
- * Définition des paramètres d'approche à fin de faire la similitude avec les écoulements à surface libre classiques.
- * Etude des caractéristiques de l'écoulement uniforme aéré (concentration moyenne en air C_a , hauteur d'eau pure h_e).
- * Etude des écoulements graduellement variés aérés en appliquant les équations de conservation de masse pour l'air et d'énergie.
- * Résolution des équations différentielles obtenues et leur application au coursters d'évacuateurs de crues suivi de quelques recommandations pratiques.

Mots clés : concentration, entraînement d'air, érosion par cavitation, différences finies, profondeur d'eau pure, évacuateur de crues.

ABSTRACT

This thesis propose a computing methodology of a new type free surface flow characteristics wich happens in general, in steep slope chutes, where the velocities flows are very high. They are aereted flows, it means the ones with natural entrainment atmospheric air over their free surface.

This study is summarized in the following steps :

- * The phenomenal explanation of air entrainment.
- * The determination of the start air entrainment point on a chute.
- * The approached parameters definition in order to do the similarity with the classic free surface flows.
- * Uniform aereted flow characteristics (average air concentration C_a , the clear water depth h_e , ...).
- * The study of gradually varied aereted flows applying the continuity equation for the air phase and the energy equation.
- * The resolution of differential equations obtained and their application to spillways chutes followed by some practical recommendations.

Keywords : concentration, air entrainment, erosion by cavitation, finite difference, clear water depth, spillways.

Avant - propos

Cette étude vient désormais voir le jour pour essayer de combler, sûrement, un vide incontestable dans les connaissances de l'Ingénieur Hydraulicien, en ce sens qu'elle s'intéresse de près à une nouvelle classe d'écoulements à surface libre qui revêt un grand intérêt dans le projet des canaux à forte pente, appelés aussi coursiers.

Ce sont les écoulements aérés, c'est-à-dire ceux qui sont sujets à un entraînement d'air naturel à travers leur surface libre, conduisant ainsi à un mélange air-eau. Il s'agit donc d'écoulements à deux phases. Le phénomène d'entraînement d'air dans un écoulement sur un coursier est qualifié de naturel, étant donné qu'aucun appareil externe, tel un ventilateur, n'est nécessaire pour l'alimentation en air.

C'est pour moi un devoir agréable de remercier tous ceux qui ont contribué de différentes façons à la réalisation de ce modeste travail à commencer, bien sûr, par M^{elle} S. BENMAMAR à qui je destine ici, particulièrement, l'expression de mes sincères remerciements pour avoir accepté de me diriger pour mener à bien cette thèse. Les sentiments profondément humains qu'elle a su me témoigner ont été pour moi d'un apport moral certain.

Pour ses conseils utiles, ses critiques fructueuses, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier M^r MESAHLI qui m'a tantôt encouragé au long de la mise en place de cette étude et tantôt enrichi son contenu par ses interventions, Ô combien précieuses.

Je ne saurais oublier de remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant tous les cycles de mes études.

Ceci dit, je dédie ce fruit, après 20 ans de labeur à :

- Ceux que tous les superlatifs de la langue de Voltaire ne sauraient exprimer leur amour, leur bonhomie et leurs sacrifices ; mes parents.
- Tous les membres de ma famille (N., R., A., B., F., Am., O., Bo.)
- Tous mes collègues de la post - graduation.
- Tous les amis de mon entourage.

S. Messaoudi

17 août 1995

Avant-propos	
Sommaire	
Notations	
Introduction générale	1
Chapitre I : Entraînement d'air dans les écoulements à grandes vitesses	4
I.1/- Introduction	4
I.2/- Mécanisme de l'entraînement d'air	5
I.3/- Formation de l'entraînement d'air	5
I.3.1. Conditions d'apparition du phénomène	5
I.4/- Entraînement d'air et phénomène de cavitation	7
I.4.1. Cavitation et érosion par cavitation	7
I.4.2. Effet de l'air sur la cavitation	8
Conclusion	9
I.5/- Références	10
Chapitre II : Point d'inception	11
II.1/- Introduction	11
II.2/- Présentation	11
II.3/- Début de l'entraînement d'air sur un coursier	12
II.3.1. Point d'inception I	12
II.3.2. Commentaires	13
II.4/- Calcul de remous	15
II.4.1. Equation de la surface libre	15
II.4.2. Remarques	18
II.5/- Références	20
Chapitre III : Paramètres d'approche	21
III.1/- Introduction	21
III.2/- Concentration locale d'air	21
III.2.1. Sonde de mesure de concentration	21
III.2.2. Définition	22
III.3/- Profondeur d'eau pure	23
III.4/- Concentration d'air moyenne	23
III.5/- Vitesse moyenne d'eau	24
III.6/- Vitesse de référence U_{90}	24
III.7/- Relations intéressantes	25
Conclusion	26
III.8/- Références	26
Chapitre IV : Ecoulement uniforme aéré	27
IV.1/- Introduction	27
IV.2/- Concentration en air	27
IV.2.1. Distribution de la concentration en air	27
IV.2.2. Concentration en air moyenne	30
IV.3/- Profil de vitesses	33
IV.4/- Coefficient de perte de charge	36
IV.4.1. Coefficient de perte de charge d'un écoulement uniforme non aéré	36
IV.4.2. Coefficient de perte de charge d'un écoulement uniforme aéré	38
IV.4.2.1. Equation du mouvement	38
IV.4.2.2. Calcul de λ_a en fonction de la concentration d'équilibre	38
IV.4.2.3. Propriétés de l'écoulement uniforme aéré	40
IV.4.2.4. Application	41
Conclusion	42
IV.5/- Références	43

Chapitre V : Ecoulement graduellement varié aéré	45
V.1/- Introduction	45
V.2/- Equation de la conservation de la masse pour l'air	45
V.3/- Equation de la conservation de l'énergie	49
Conclusion	54
V.4/- Références	55
Chapitre VI : Implantation numérique	56
VI.1/- Introduction	56
VI.2/- Méthode des différences finies	56
VI.3/- Notation des opérateurs de différences finies	57
VI.4/- Approximations des dérivées en une dimension	58
VI.5/- Erreur de troncature et consistance	60
VI.6/- Détermination du point d'inception	61
VI.6.1. Discrétisation de l'équation différentielle de Bresse	61
VI.6.2. Intégration de l'équation différentielle de Bresse	62
VI.6.3. Calcul de la courbe de remous par la méthode de Bresse	63
VI.7/- Modélisation numérique des équations différentielles de l'écoulement graduellement varié aéré	64
VI.7.1. Concentration en air moyenne	65
VI.7.1.1. Discrétisation de l'équation de la conservation de la masse	65
VI.7.2. Profondeur d'eau pure	66
VI.7.2.1. Discrétisation de l'équation de la conservation de l'énergie	66
Conclusion	67
VI.8/- Références	68
Chapitre VII : Résolution et applications	69
VII.1/- Introduction	69
VII.A/- Description du programme	69
VII.A.1. Caractéristiques générales	69
VII.A.2. Fonctionnement du programme	70
VII.B/- Application aux coursiers larges	73
VII.B.1. Coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore (N.Z)	73
VII.B.1.1. Présentation	73
VII.B.1.2. Localisation du point d'inception	73
VII.B.1.3. Fonction d'entraînement d'air	75
VII.B.1.4. Concentration en air moyenne	77
VII.B.1.5. Concentration d'air et protection contre l'érosion par cavitation	79
VII.B.1.6. Profondeur du mélange	80
VII.B.2. Modèle réduit du laboratoire de Meishan	82
VII.B.2.1. Présentation	82
VII.B.2.2. Localisation du point d'inception	82
VII.B.2.3. Fonction d'entraînement d'air	82
VII.B.2.4. Entraînement d'air	83
VII.B.2.5. Concentration d'air et protection contre l'érosion par cavitation	84
VII.B.2.6. Profondeur du mélange	85
VII.2/- Recommandations pratiques	86
Conclusion	87
VII.3/- Références	88
Conclusion générale	90
Annexes	

NOTATIONS



Symbole	Unité (SI)	Signification
B	m	largeur du coursier
C	-	concentration en air définie comme le rapport du volume d'air sur le volume total.
C _m	-	concentration en air moyenne définie comme : (1 - C _m) Y ₉₀ = h.
C _l	-	concentration en air près du radier, à la limite supérieure de la couche limite de concentration
\bar{C}_u	-	concentration moyenne de l'écoulement uniforme aéré.
C*	-	concentration moyenne en air au point d'inception.
d _b	m	diamètre d'une bulle d'air.
D _h	m	diamètre hydraulique de l'écoulement non aéré.
D _{hc}	m	diamètre hydraulique de l'écoulement aéré.
\bar{E}_e	m	énergie spécifique moyenne.
E _f	watt/m	flux total de l'énergie spécifique.
F _r	-	nombre de Froude définie comme $F_r = \frac{U}{\sqrt{gh}}$
f	m/s	flux volumique local total.
f _a	m/s	flux volumique local d'air.
f _e	m/s	flux volumique local d'eau.
f _m	Kg/s/m ²	flux massique local total.
f _{ma}	Kg/s/m ²	flux massique local d'air.
f _{me}	Kg/s/m ²	flux massique local d'eau.
g	m/s ²	constante de gravité.
H	m	charge totale de l'écoulement non aéré.
H _e	m	charge totale de l'écoulement d'eau équivalent.
h	m	hauteur d'eau mesurée perpendiculairement au radier.
h _c	m	hauteur critique de l'écoulement.
h _e	m	profondeur d'eau pure équivalente.
h _{ec}	m	hauteur critique de l'écoulement d'eau pure équivalent
h _{eu}	m	hauteur normale de l'écoulement d'eau pure équivalent
h _i	m	profondeur de l'écoulement au point d'inception.
h _n	m	hauteur normale de l'écoulement non aéré.
H _S	m	différence de niveau d'eau en un point.
h*	m	hauteur d'eau au point d'inception.
h ₀	m	hauteur d'eau sur la crête du déversoir.
h'	m	pas de dérivation
i	-	pente de coursier définie par : i = sin α.

U_{90}	m/s	vitesse locale d'eau pour $y = y_{90}$.
V_e	m/s	vitesse d'entraînement d'air.
$(V_e)_0$	m/s	vitesse d'entraînement d'air pour un écoulement uniforme.
v'	m/s	ecart-type des fluctuations de la composante de vitesse dans la direction normale à l'écoulement.
x	m	abscisse d'une section par rapport au point d'inception.
x_I	m	abscisse du point d'inception par rapport à la crête.
x_{unif}	m	abscisse du début de l'écoulement uniforme aéré.
y_b	-	rapport de Bresse défini par : $y_b = \frac{h}{h_n}$
y	m	distance depuis la surface du coursier, mesurée perpendiculairement à la surface du coursier.
y_{90}	m	profondeur du mélange où $C = 90\%$.
y'	-	distance adimensionnelle $y = y / y_{90}$.
Z	m	coordonnée verticale positivement vers le haut.
α	-	pente du coursier.
α_a	-	coefficient de correction d'énergie cinétique de l'écoulement uniforme aéré.
α'_a	-	coefficient de correction d'énergie cinétique de l'écoulement graduellement varié aéré.
β, γ	-	constantes d'intégration pour la distribution de concentration en air.
λ	-	coefficient de perte de charge linéaire d'un écoulement sans entraînement d'air.
λ_a	-	coefficient de perte de charge linéaire d'un écoulement avec entraînement d'air.
δ	m	épaisseur de la couche limite de l'écoulement non aéré.
δ_{in}	m	épaisseur de la couche limite au point d'inception.
δ_l	m	épaisseur de la couche limite de concentration en air.
ϵ	-	précision de calcul d'un paramètre physique.
ρ_a	Kg/m ³	masse volumique d'air.
ρ_e	Kg/m ³	masse volumique d'eau.
ρ_m	Kg/m ³	masse volumique du mélange (air - eau).
ν	m ² /s	viscosité cinématique de l'eau.
σ	N/m	tension superficielle entre l'air et l'eau.
Δx	m	pas de discrétisation (espace entre deux noeuds).

Indices :

a	écoulement aéré.
e	écoulement d'eau.
u	écoulement uniforme.

i_c	-	penne critique de l'écoulement
J	-	penne de la ligne de charge.
J_e	-	penne de la ligne de charge de l'écoulement équivalent
k_S	m	hauteur de rugosité équivalente.
L	m	longueur du coursier mesurée à partir de la crête.
m	-	exposant de la loi puissance du profil des vitesses.
n	$m^{-1/3} s^{+1}$	coefficient de rugosité de Manning
P	-	nombre de stations de mesure.
Q	m^3/s	débit volumique de l'écoulement défini comme : $Q=U.S$.
q	m^2/s	débit par mètre de largeur.
Q_a	m^3/s	débit total d'air.
q_a	m^2/s	débit d'air par unité de largeur.
Q_e	m^3/s	débit total d'eau.
q_e	m^2/s	débit d'eau par unité de largeur.
q_{max}	m^2/s	débit d'eau maximal d'un coursier.
$q_{e,max}$	m^2/s	débit d'eau maximal résultant de l'aération de l'écoulement.
r	-	coefficient de corrélation.
Re	-	nombre de Reynolds : $Re = 4 \frac{U \cdot R_h}{\gamma_e}$
R_h	m	rayon hydraulique défini comme $R_h = \frac{S}{P}$
R_{he}	-	rayon hydraulique de l'écoulement d'eau équivalent.
S	m^2	section transversale de l'écoulement non aéré.
S_e	m^2	section mouillée de l'écoulement équivalent.
U	m/s	vitesse moyenne de l'écoulement défini : $U = \frac{Q}{S}$
u	-	solution exacte d'une fonction.
U_c	m/s	vitesse critique de l'écoulement d'eau équivalent.
U_a	m/s	vitesse locale de la phase air.
U_e	m/s	vitesse locale de la phase eau.
\bar{U}_e	m/s	vitesse d'eau moyenne de l'écoulement uniforme équivalent.
\bar{U}_{eu}	m/s	vitesse moyenne de l'écoulement uniforme aéré.
U_m	m/s	vitesse locale du mélange.
U_r	m/s	vitesse limite d'ascension d'une bulle d'air.
$(U_r)_u$	m/s	vitesse limite d'ascension d'une bulle d'air en écoulement uniforme aéré.
$U_{r,max}$	m/s	vitesse maximale sur un coursier de l'écoulement ordinaire.
$U_{e,max}$	m/s	vitesse maximale de l'écoulement aéré sur un coursier.

Introduction
générale

Introduction générale

Les barrages sont protégés des crues par un système de décharge appelé évacuateur de crues. Généralement il s'agit d'un évacuateur de crues dit de surface. Celui-ci est un déversoir situé en crête de barrage. Il comporte: 1/ une entrée 2/ un coursier et 3/ un système de dissipation d'énergie.

Lors de l'évacuation des débits de crues, on assiste à des écoulements à surface libre supercritiques ($F_r \gg 1$) induisant des pressions faibles qui sont à l'origine du phénomène d'érosion par cavitation.

En outre, une importante quantité d'air atmosphérique est entraînée à la surface libre par une multitude de vortex turbulents et irréguliers conduisant à un mélange air-eau s'écoulant sur le coursier. C'est le phénomène d'entraînement d'air et dans ce cas, on parle d'écoulement à surface libre aéré.

Cette étude porte sur cette quantité d'air entraînée superficiellement et qui est un paramètre important pour le dimensionnement des canaux. L'air augmente le volume de l'écoulement par diminution de la masse spécifique. Ceci doit être pris en compte pour le calcul de la hauteur des murs latéraux.

De plus, la présence d'air dans les écoulements à hautes vitesses permet de ralentir ou de prévenir les dommages dus à l'érosion par cavitation. Pour des vitesses d'écoulement atteignant 35m/s, une teneur en air entre 6 et 8% près de la paroi peut empêcher l'érosion par cavitation ([4] page 10).

Il est donc nécessaire voir impératif d'étudier les caractéristiques des écoulements à surface libre aérés sur les coursiers d'évacuateurs de crues, tout en essayant d'en tirer des solutions aux problèmes d'ordre pratique qui leurs sont liés.

Dans une première partie, on a voulu que le lecteur découvre ce phénomène nouveau qu'est l'entraînement d'air dans les écoulements à surface libre. Pour cela, on a consacré un chapitre de généralités dans lequel on peut lire une description phénoménologique de base (mécanisme, condition de formation...) nécessaire à la compréhension de ce phénomène et qui aidera

sûrement le lecteur dans le reste de cette étude.

Le chapitre II est consacré à la localisation du point à partir duquel l'air vient se mêler à l'eau de l'écoulement sur un coursier. Selon le chapitre précédent ce point représente le lieu d'intersection de la couche limite turbulente avec la surface libre. Au delà de ce point, l'écoulement est désormais qualifié d'aéré.

Après quoi, le chapitre III traite des paramètres d'approche (C , C_m , h_e , y_{90}) essentiels à l'étude des caractéristiques des écoulements aérés. La notion de concentration locale et moyenne en air sont ainsi introduites afin de définir une hauteur en eau pure équivalente qui permet par la suite de faire une similitude entre les écoulements classiquement connus et les écoulements à surface libre diphasiques.

Les paramètres de base définis au chapitre III sont utilisés au chapitre IV pour l'étude des caractéristiques de l'écoulement uniforme aéré. Ce dernier peut se produire à l'extrémité des longs coursiers prismatiques et est caractérisé par une quantité d'air transportée constante évaluée par une concentration moyenne dite d'équilibre notée \bar{C}_u .

Le chapitre V traite à son tour de l'écoulement graduellement varié aéré situé en générale à proximité du point de début de l'aération naturelle.

A l'inverse du précédent, cet écoulement est caractérisé par une concentration moyenne en air et une hauteur d'eau équivalente variables d'une section à l'autre.

Pour évaluer ces deux paramètres, on a appliqué l'équation de conservation de la masse pour la phase air et l'équation de conservation de l'énergie.

On obtient par la suite un système d'équations différentielles que l'on résoudra numériquement. La résolution de ce système est, en effet, faite numériquement au chapitre V à base d'un schéma aux différences finies associé à un pas de discrétisation constant et très réduit pour des raisons de consistance du modèle adopté.

Toutes les informations (formules, équations discrétisées,..) évoquées dans les chapitres précédents ont été résumés sous forme d'un programme élaboré en Fortran dont la description et l'organigramme sont exposés au chapitre VII.

Dans ce dernier, deux applications argumentées par des graphes ont été présentées. Il s'agit respectivement du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore (nouvelle Zelande) et du modèle réduit du laboratoire de Meishan (Chine). Les résultats théoriques issus du déroulement de notre programme sont comparés à ceux de l'expérimentation, analysés puis interprétés.

Enfin, pour clôturer, une conclusion générale sur tout le travail (recommandations pratiques, critiques, perspectives) est faite.

A noter finalement que chaque partie est suivie de ses références bibliographiques.

Chapitre 1

**Entraînement d'air dans les
écoulements à grandes
vitesses**

Entraînement d'air dans les écoulements à grandes vitesses

I - 1/- Introduction :

Les écoulements dans les canaux découverts sont caractérisés par la surface libre. En raison de la condition cinématique, la vitesse à l'interface eau - air est identique dans les deux fluides. Si la vitesse de surface de l'eau est faible et l'air stagnant, l'interface est bien définie. Par contre, si la vitesse de surface de l'eau est grande par rapport à la vitesse moyenne de l'air, on constate une surface d'eau rugueuse.

Une différence considérable des vitesses près d'une interface eau-air provoque un échange d'énergie. Plus particulièrement, des gouttes d'eau sont prises dans l'air et des bulles d'air peuvent être emprisonnées par l'eau. Par conséquent un mélange d'eau et d'air s'ensuit et on parle d'une aération superficielle de l'eau. C'est le phénomène d'entraînement d'air naturel.

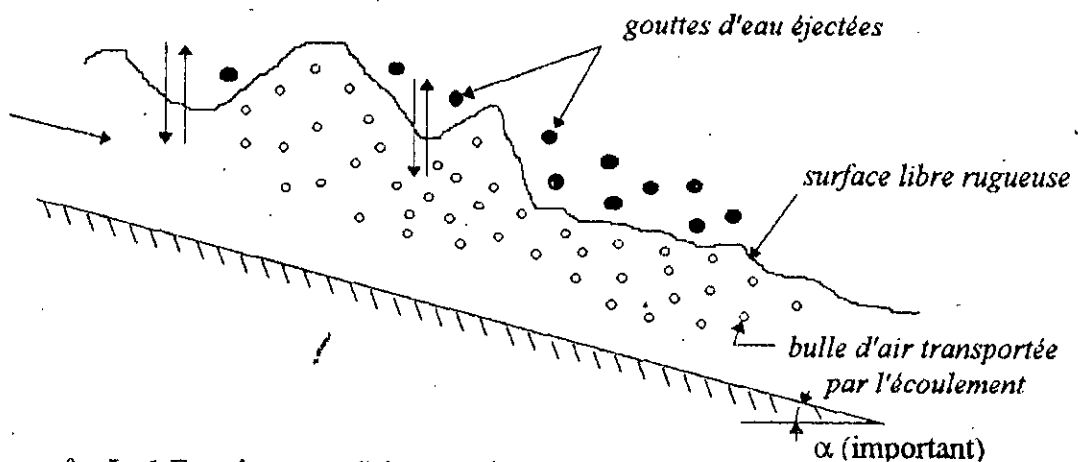


fig. I - 1 Entraînement d'air naturel sur un canal à forte pente.

↑ expulsion d'air (désaération) , ↓ entraînement d'air (aération)

La figure (I-1) ci-dessus représente un coursier d'évacuateur de crues où la vitesse d'eau est considérable pouvant atteindre parfois 50 m/s. Ce type de canaux est sujet à une aération superficielle dite continue.

L'entraînement d'air dans l'écoulement et l'expulsion des bulles d'air de l'eau se produisent en même temps. Par conséquent, il y a simultanément production de bulles d'air ; aération (\downarrow) et perte d'air ; désaération (\uparrow).

Dans des conditions bien définies, ce mécanisme peut être stable. Un tel écoulement d'un mélange eau - air est appelé écoulement uniforme aéré.

I - 2/- Mécanisme de l'entraînement d'air :

Une première description du mécanisme d'entraînement d'air fut présentée par Straub et Anderson [5]. Ils ont démontré que l'aération naturelle de l'écoulement commençait dans une zone où la couche limite atteignait la surface de l'eau. En conséquence, l'aération superficielle dépend beaucoup de l'intensité de la turbulence près de l'interface eau - air. La forte turbulence auprès de la surface libre de l'eau s'écoulant à grande vitesse cause l'entraînement de l'air dans l'eau.

En effet , les composantes latérales du vecteur vitesse peuvent devenir si grandes qu'elles arrivent à surmonter les forces de tension superficielle et la gravitation. Il en résulte une éjection de gouttes d'eau dans l'air, en retombant dans l'écoulement, la goutte " ouvre " la surface de l'eau, celle-ci se referme sous l'action de la tension superficielle. La goutte entraîne avec elle une bulle d'air qui se trouve emprisonnée dans l'écoulement.

L'air est ainsi réparti dans celui-ci par turbulence. Ce mécanisme d'entraînement d'air est représenté schématiquement sur la figure (I-2).

I - 3/- Formation de l'entraînement d'air :

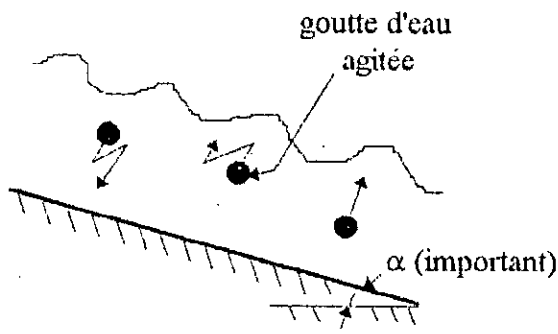
I.3.1. Conditions d'apparition du phénomène :

Le départ de l'écoulement aéré peut facilement être mis en évidence par " l'eau blanche".

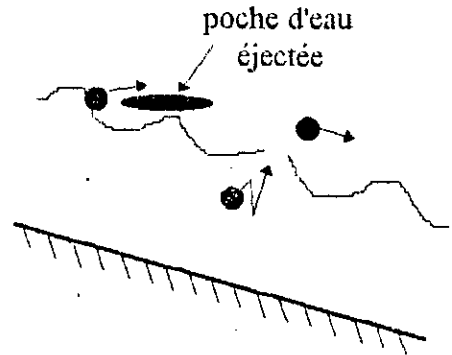
Pour que l'entraînement d'air se produise, Gangadhah et col [2] donnent deux conditions :

1) L'énergie cinétique des remous en surface doit être plus grande que l'énergie de tension superficielle pour que celle-ci ne puisse plus s'opposer aux échanges entre phase liquide et gazeuse.

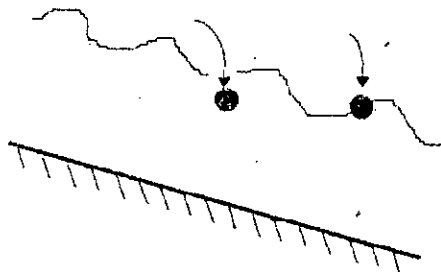
2) L'écoulement doit avoir atteint un état entièrement turbulent.



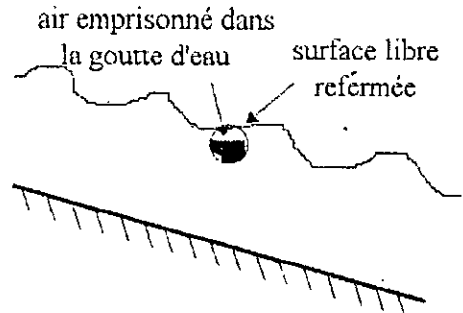
(a) - la haute turbulence crée des composantes latérales importantes



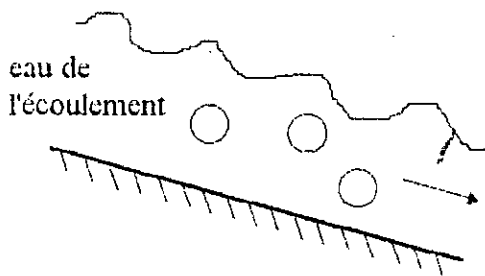
(b) - gouttes d'eau éjectées dans l'air



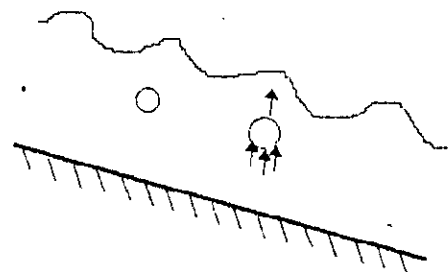
(c) - les gouttes d'eau, en retombant, ouvrent la surface libre



(d) - la surface libre se referme, emprisonne de l'air avec la goutte



(e) - transport de bulles d'air à l'intérieur de l'écoulement



(f) - bulles d'air ressortant de l'eau à cause de la poussée d'Archimède (désaération)

fig. I - 2 Mécanisme détaillé de l'entraînement d'air dans un écoulement à grande vitesse

Le phénomène d'aération apparaît donc lorsque le niveau de turbulence est suffisant pour compenser les forces de tension superficielle et la poussée d'Archimède, c'est-à-dire lorsque la fluctuation de la composante de vitesse, perpendiculaire à la surface libre est supérieure à la composante de la vitesse limite d'ascension des bulles d'air et à la résistance de la tension superficielle [1].

Ces conditions s'écrivent ;

$$v' > U_r \cdot \cos \alpha \quad \text{-----} \rightarrow \text{Condition du transport de la bulle d'air dans l'écoulement.}$$

$$\text{et } v' > \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho_e d_b}} \quad \text{-----} \rightarrow \text{Condition d'éjection de la goutte d'eau à travers la surface libre.}$$

où :

v' : fluctuation de la composante de la vitesse V définie par : $V = \bar{V} + v'$ (m/s)

U_r : vitesse limite d'ascension de la bulle d'air (m/s)

α : pente du coursier

σ : tension superficielle (N/m)

ρ_e : masse volumique de l'eau (Kg/m³)

d_b : diamètre de la bulle d'air (m)

I - 4/- Entraînement d'air et phénomène de cavitation :

I.4.1. cavitation et érosion par cavitation :

Si la pression dans un écoulement décroît jusqu'à la limite inférieure fixée par la pression de vapeur P_v , des particules d'eau s'évaporent à température ambiante.

L'eau perd son homogénéité et l'écoulement devient diphasique. Ce phénomène est appelé : Cavitation. Lorsque la pression augmente de nouveau au-dessus de la pression de vapeur, les bulles de vapeur deviennent instables et éclatent, produisant ainsi des micro-jets de vitesse élevée avec des pointes de pression très fortes et de très courte durée.

La cavitation en elle même n'est pas souvent dangereuse, à moins qu'elle ne se produisent près

des parois de l'écoulement. Ces pointes de pression sont comparables à un choc de pression équivalent à 10.000 m de hauteur d'eau et peuvent alors endommager la surface rigide par les phénomènes de fatigue et d'impact [3]. Le béton ou l'acier qui a subi une cavitation présente l'aspect d'un matériau soumis à une érosion c'est pourquoi on parle d'érosion par cavitation.

1.4.2. Effet de l'air sur la cavitation :

On doit empêcher par tous les moyens les dégâts par cavitation, car ceux-ci détériorent progressivement l'ouvrage. On peut le faire soit :

1- en éloignant les zones de cavitation des parois en profilant les surfaces pour empêcher les séparations dans l'écoulement dues aux irrégularités de surface. (voir figure)

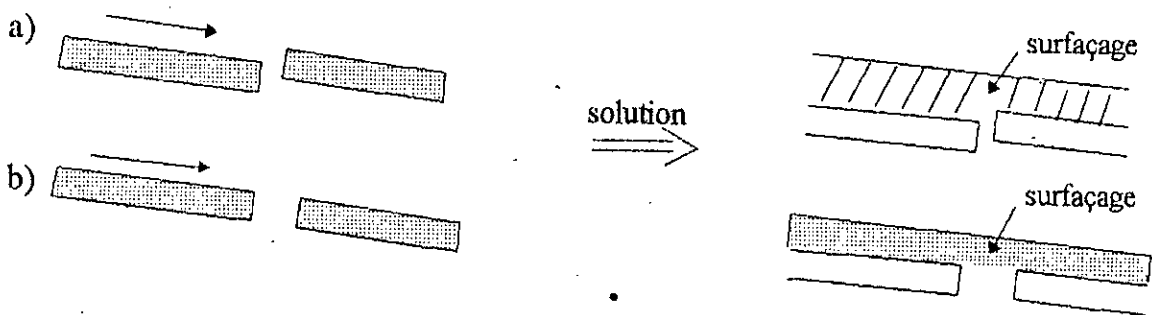


fig. I.3 : a) décrochement dû à un tassement local.

b) joint de béton.

fig. I.4 : surfaçage des irrégularités de surface.

2- en utilisant des matériaux résistant à la cavitation (bétons spéciaux à haute résistance, des revêtements d'acier ...). Ces solutions sont d'autant plus coûteuses que les surfaces de contact des coursiers d'évacuateurs de crues sont grandes.

Par ailleurs, ce type de protection est en outre dépendant des conditions de vieillissement des revêtements de surface.

Une autre méthode plus économique consiste à augmenter la compressibilité du fluide près de la surface du coursier en introduisant de l'air dans l'écoulement.

La présence d'air près des parois de l'écoulement agit comme un coussin permettant de réduire l'effet de l'éclatement des bulles d'air.

PETERKA [4], RUSSELL et SHEEHAN [6] étudièrent l'influence de l'air sur l'érosion par

cavitation de spécimen en béton, et leurs résultats indiquent que l'érosion par cavitation est fortement réduite si la concentration en air près de la surface du coursier est supérieure à 1 - 2% et l'érosion est stoppée pour des concentrations en air supérieures à 6 - 8%.

Remarque :

Si l'entraînement naturel d'air à la surface libre de l'écoulement s'avère insuffisant pour stopper les effets d'érosion par cavitation, alors une quantité additionnelle d'air doit être introduite artificiellement. Ceci est réalisé à l'aide de dispositifs de ventilation par le fond ou par les côtés appelés aérateurs.

Conclusion :

Dans le cas des écoulements à surface libre à grande vitesse qui sont les plus critiques à l'égard de la cavitation, une aération se produit naturellement lorsque toute la section est turbulente et le niveau de turbulence est suffisant pour que la tension superficielle ne puisse plus s'opposer aux échanges entre phases liquide et gazeuse.

A l'origine d'un coursier d'évacuateur la turbulence est pratiquement concentrée dans la couche limite de sorte que l'aération ne commence qu'à partir de l'endroit où cette couche atteint la surface libre.

En outre, les bulles d'air non dissoutes présentes dans un écoulement ont un effet bénéfique à l'égard de la cavitation.

Ces bulles d'air freinent le développement des pressions subatmosphériques et par augmentation de la compressibilité de l'eau, réduisent considérablement la violence des chocs qui accompagnent l'implosion des bulles de vapeurs.

N'est-il pas important, dans ces cas là, d'étudier le phénomène d'entraînement d'air naturel dans les écoulements à très grandes vitesses ! ?

I - 6/- Références :

[1] D.A, ERVINE, H.T, FALVEY,

" Behaviour of turbulent water jets in the atmosphere and in plunge pools "

Proc., Institution of civil Engineers, part 2 p. 295- 314 (1987).

[2] T. GANGADHARAI AH, N.S, LAKSHMAMA RAO

" Inception and Entrainement in self aerated flow "

journal of the hydraulics division, ASCE N° Hy 7 (juin 1970).

[3] W.H, HAGER

" spillways shockwaves and air Entrainement review and recommendations "

ICOLD bulletin, N° 81 (janvier 1992).

[4] A.J, PETERKA,

" the effect of entrained air on cavitation pilling "

V. IAHR congress minnesota 507 - 518 (1955).

[5] STRAUB et A.G, ANDERSON

" Experiments on self- aerated flow in open channels "

ASCE 125 P: 456 - 486 (1960).

[6] Comité international des grands barrages

Buletin N° 58 (1987).

Chapitre 2
Point d'inception

Point d'inception

II - 1/- Introduction :

Le but poursuivi dans ce chapitre est de localiser le point à partir duquel l'eau devient écumeuse sur le coursier d'un évacuateur de crues, autrement dit, le lieu à partir duquel l'air atmosphérique se mêle à l'eau de l'écoulement initialement pure.

A cet égard, deux équations seront présentées. Celle régissant le développement d'une couche limite turbulente à partir de la crête et l'équation différentielle de la surface libre.

Le point d'intersection vérifiant simultanément ces deux équations sera le point recherché et c'est le point d'inception.

II - 2/- Présentation :

Considérons par exemple un écoulement sur un coursier d'évacuateur de crues qui, rappelons le, est un écoulement typiquement à très grande vitesse et où les conditions d'aération superficielle sont toujours satisfaites.

L'entraînement d'air à la surface sur les coursiers peut s'expliquer en se reportant à la figure (II-1).

L'écoulement est initialement peu turbulent. A la sortie de la retenue, sur la crête de l'évacuateur, l'écoulement (non aéré) s'accélère. Cependant, une couche limitée turbulente se développe au long du radier, jusqu'à ce que la limite supérieure atteigne la surface libre. A partir de là, les vitesses des fluctuations turbulentes sont suffisamment importantes pour entraîner une certaine quantité d'air selon le mécanisme évoqué à la page 5, et un écoulement quasi-homogène eau - air se développe graduellement le long du coursier.

Dans cette zone d'accélération, l'écoulement est désigné sous le nom d'écoulement non uniforme. Si la géométrie et la rugosité du canal ne varient pas à l'aval, un écoulement aéré uniforme peut s'établir, ressemblant beaucoup à un écoulement uniforme classique. Dans cette zone, les distributions de la vitesse et de la teneur en air ne varient pas.

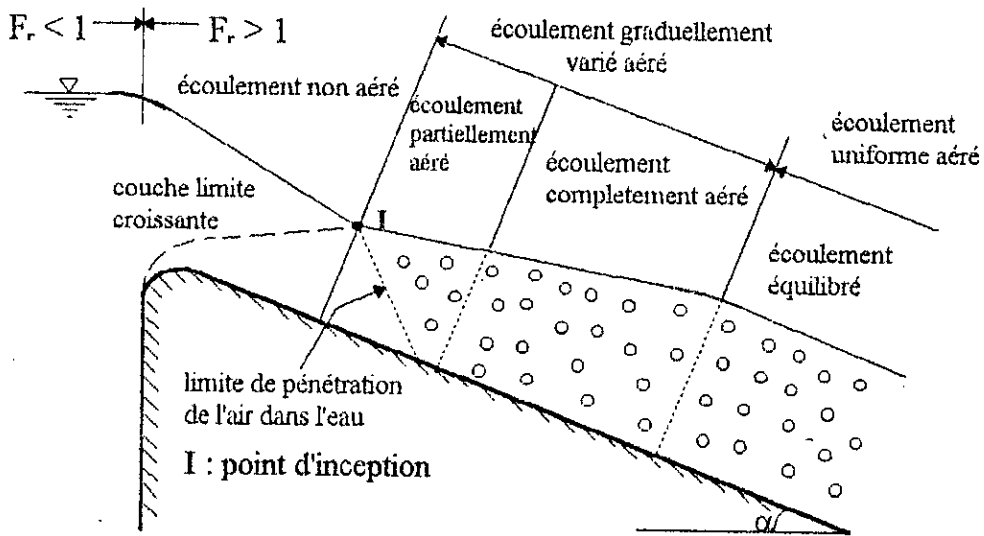


fig. II-1 Entraînement d'air dans un écoulement à surface libre sur un coursier d'évacuateur de crues de barrage.

II - 3/- Début de l'entraînement d'air sur un coursier :

II.3.1. Point d'inception I :

La première considération dans l'étude de l'entraînement d'air (auto - aération) est la localisation du point critique, qui est le point où l'aération commence.

Dans l'écoulement supercritique ($F_r > 1$) à forte pente la turbulence est pratiquement concentrée dans la couche limite, de sorte que l'aération naturelle ne commence qu'à partir de l'endroit où cette couche limite atteint la surface libre marquant ainsi le point d'inception, I, de l'entraînement d'air. (fig. II-2).

L'épaisseur de la couche limite $\delta = \delta(x)$, mesurée perpendiculairement par rapport au fond, croît de la valeur initiale à la crête vers l'aval (fig. II-2). Lorsqu'elle atteint la surface libre, l'épaisseur de cette couche devient égale à la hauteur d'eau ; $\delta (x_I) = h (x_I)$.

Wood et col [2] ont établi la formule suivante pour l'épaisseur δ de la couche limite :

$$\frac{\delta}{x} = 0,0212 \left(\frac{x}{H_s} \right)^{0,11} \cdot \left(\frac{x}{k_s} \right)^{-0,10} \quad (II - 1)$$

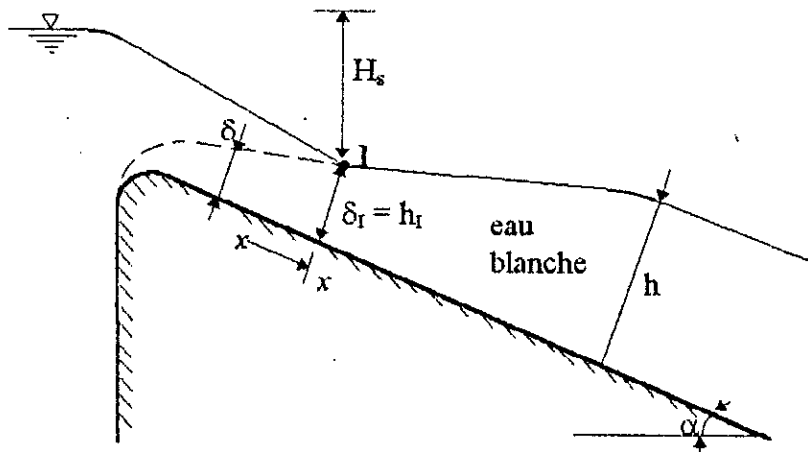


fig. II-2 Formation d'eau blanche sur un coursier

x : distance par rapport à la crête de l'évacuateur [m]

k_s : rugosité équivalente de sable [m]

H_s : différence de niveau d'eau entre le niveau du déversoir et le point d'inception I [m]

δ : épaisseur de la couche limite [m]

Sachant que le point de départ de l'entraînement d'air ($x = x_I$) survient lorsque la profondeur de l'écoulement h est égale à l'épaisseur de la couche limite δ , il en résulte que le profil de la surface libre doit être défini par un calcul de ligne de remous et l'équation (II-1) donnera $\delta(x_I)$.

II.3.2. Commentaires :

1/ L'équation (II-1) est applicable seulement pour des évacuateurs standards de forme quelconque à pente constante, pour des coursiers à peu près rectangulaires. [2]:

Elle est très utile car elle montre l'importance relative des facteurs influençant la croissance de la couche limite dans la région accélérée de l'écoulement.

Ainsi, la couche limite augmente presque linéairement avec la distance x , s'épaissit avec des rugosités plus grandes et est réduite par l'accélération de l'écoulement exprimée par H_s .

2/ En comparant la longueur L d'un coursier avec la distance x_I du point d'inception à partir de la crête, on peut distinguer deux cas possibles :

$L \leq x_I$: un tel coursier ne sera jamais sujet à un entraînement d'air naturel.

$L > x_I$: l'entraînement d'air apparaît et c'est le mélange eau - air qui s'écoule à l'aval du point d'inception.

Pour qu'il y ait autoaération (self - aération), il faut donc que la longueur du coursier soit très supérieure à la position du point d'inception mesuré par rapport à la crête de l'évacuateur.

3/ Pour un canal rectangulaire à pente α constante, le terme $\left(\frac{x}{H_s}\right)$ de l'équation (II-1) peut être remplacé par $\frac{1}{\sin\alpha}$, pour avoir ;

$$\frac{\delta}{x} = 0,0212 (\sin\alpha)^{-0,11} \cdot \left(\frac{x}{k_s}\right)^{-0,10} \quad (\text{II} - 2)$$

4/ Pour un canal rectangulaire, à pente graduellement variable, le taux de croissance de la couche limite peut être obtenu en utilisant la différentielle de l'équation (II-2) soit,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\delta}{x} \left[0,9 - 0,11 x \cotg\alpha \frac{d\alpha}{dx} \right] \quad (\text{II} - 3)$$

5/ Pour des canaux ayant des parois latérales légèrement convergentes ou divergentes à pente variable, wood [3] suggère d'utiliser la formulation de la relation suivante au lieu de l'équation (II-1), soit :

$$\frac{d\delta}{dx} = \delta \left[\frac{0,9}{x} - 0,11 \cotg\alpha \frac{d\alpha}{dx} - \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right] \quad (\text{II} - 4)$$

où B désigne la largeur du canal.

6/ Il est fort intéressant de penser aux techniques pratiques permettant d'accélérer le développement de la couche limite pour que le coursier de l'évacuateur bénéficie trop tôt de l'effet du phénomène de l'aération dans la protection contre l'érosion par cavitation. Ce développement peut se faire par une rugosité plus grande des parois.

Une rugosité artificiellement accentuée sur une certaine distance dans le tronçon de forte accélération à l'origine du coursier et dont la hauteur décroîtrait progressivement dans le sens de l'écoulement aurait peut-être des conséquences très positives à l'égard du problème de cavitation.

II - 4/- Calcul de Remous :

On se pose dans ce paragraphe de développer l'équation de la ligne d'eau qu'il faudrait résoudre entre la crête de l'évacuateur de crues et le point d'inception.

Pour cela, on considère un coursier prismatique où l'écoulement à surface libre est permanent, non uniforme presque rectiligne, parallèle et à pente non négligeable.

II.4.1. Equation de la surface libre :

Le problème qui se pose dans l'étude d'un écoulement graduellement varié est de déterminer la position et la forme de la surface libre pour un débit Q et une forme géométrique de section donnée.

Cette étude peut être faite à partir de l'équation de l'énergie (fig. II-3).

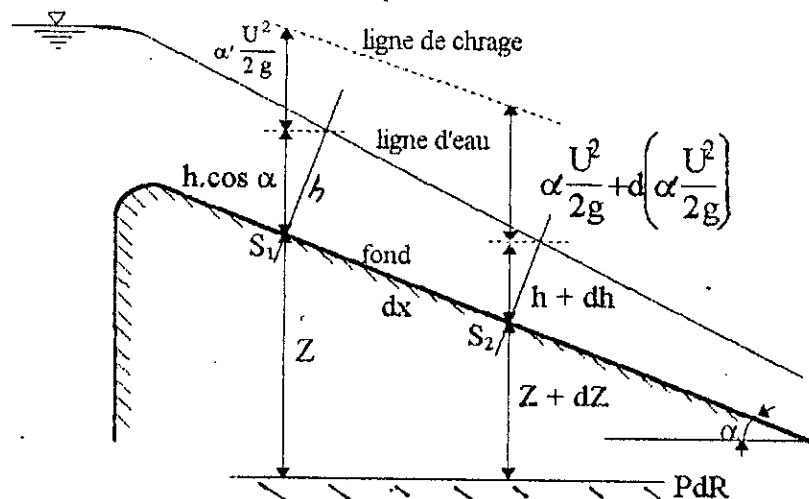


fig.II-3 Schéma pour l'équation de l'énergie entre deux sections

Soit :

$$Z + h \cos \alpha + \alpha' \frac{U^2}{2g} = H \tag{II - 5}$$

et l'équation de continuité

$$Q = U \cdot S \tag{II - 6}$$

Par dérivation par rapport à x, l'équation (II-5) devient :

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{d}{dx}(h \cos \alpha) + \frac{d}{dx} \left[\alpha' \frac{(Q/S)^2}{2g} \right] = \frac{dH}{dx} \quad (\text{II-7})$$

Cependant, par définition et en utilisant une relation de type Chezy :

$$\frac{dZ}{dx} = \sin \alpha = i \quad ; \quad \frac{dH}{dx} = -j = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h}$$

On écrit :

$$\frac{d}{dx} \left[\alpha' \frac{(Q/S)^2}{2g} \right] + \frac{d}{dx}(h \cos \alpha) - i = -j = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (\text{II-8})$$

Pour un coursier donné, les arguments C , S et R_h sont des fonctions de x et de h , tandis que i est une fonction de x .

L'équation (II-8) constitue une équation différentielle du premier ordre ; elle permet de déterminer la profondeur d'eau $h(x)$ en fonction de la distance x pour un débit Q donné.

Puisque le coursier est supposé prismatique, la section S n'est fonction que de la profondeur h , on exprime alors le premier terme de l'équation (II-8) :

$$\frac{d}{dx} \left[\alpha' \frac{Q^2}{2gS^2} \right] = \alpha' \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{S^3} \frac{dS}{dx} \right) = -\alpha' \frac{Q^2}{gS^3} \left(\frac{dS}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} \right) \quad (\text{II-8a})$$

$$\text{et } \frac{d}{dx}(h \cos \alpha) = \cos \alpha \frac{dh}{dx} = \sqrt{1-i^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{coursier à pente constante}) \quad (\text{II-8b})$$

On pose par définition $\frac{dS}{dh} = B$; ce qui donne :

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha' \frac{Q^2}{2gS^2} \right) = -\alpha' \frac{Q^2}{gS^3} \cdot B \cdot \frac{dh}{dx} \quad (\text{II-9})$$

L'équation différentielle (II-8) s'écrit par conséquent :

$$-\alpha' \frac{(Q/S)^2}{gS} B \frac{dh}{dx} + \sqrt{1-i^2} \frac{dh}{dx} - i = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (\text{II-10})$$

ou bien sous sa forme habituelle ;

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \alpha' \frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h}}{\sqrt{1 - i^2 - \alpha' \frac{(Q/S)^2}{g \cdot S/B}}} \quad (\text{II - 11})$$

Pour un coursier rectangulaire ($S = B \cdot h$) de grande largeur ($R_h \approx h$), l'équation précédente devient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \alpha' \frac{q^2}{C^2 h^3}}{\sqrt{1 - i^2 - \alpha' \frac{q^2}{g h^3}}} \quad (\text{II - 12})$$

où $q = \frac{Q}{B}$: Débit par unité de largeur.

A noter que pour le régime turbulent, le coefficient α' de correction de l'énergie cinétique tend vers 1. En écrivant que :

$$C^2 = \frac{8g}{\lambda} \quad (\text{II - 13})$$

λ étant le coefficient de perte de charge linéaire de Darcy - Weisbach, l'équation (II-12) prend la forme :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \alpha' \frac{q^2 \lambda}{8g h^3}}{\sqrt{1 - i^2 - \alpha' \frac{q^2}{g h^3}}} \quad (\text{II - 14})$$

où λ peut être calculé par la formule de Colebrook - White adapté aux écoulements à surface libre.

En exprimant le coefficient de Chezy C en fonction du coefficient de Manning n :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (\text{II - 15})$$

culaire à la surface du fond ; une constatation plus théorique que réelle.

3i/ La profondeur normale et la profondeur critique sont égales, $h_n = h_c$, si :

$$C^2 R_h i = g S / B$$

L'écoulement normale est critique. Ceci donne la définition pour la pente critique :

$$i = i_c = \frac{g S}{C^2 B R_h} \quad (\text{II - 19})$$

Pour un débit donné, un coursier est dit à forte pente si : $i > i_c$.

4i/- La profondeur normale est définie par :

$$h_n^3 = \frac{\alpha' q^2}{C^2 i} \quad (\text{II - 20})$$

- La profondeur critique est définie par :

$$h_c^3 = \frac{\alpha' q^2}{g \sqrt{1-i^2}} \quad (\text{II - 21})$$

Pour un écoulement turbulent, l'équation (II-12) s'écrit, pour un canal rectangulaire de largeur importante :

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \right) \cdot \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3} \quad (\text{II - 22})$$

Cette relation est connue sous le nom d'équation de BRESSE .

Finalement, l'intégration de l'équation (II-12) permet de tracer la forme de la surface libre (ligne d'eau) point par point depuis la crête jusqu'au point de début de l'entraînement d'air .

La résolution se fera, à priori , numériquement par un schéma simple aux différences finies. Les résultats obtenus seront comparés à ceux issus de la méthode analytique de Bresse exposée au chapitre IV. Pour chaque distance x_i comptée à partir de la crête, on calculera le tirant d'eau h_i que l'on comparera à l'épaisseur, δ_i , de la couche limite correspondante, calculée par l'équation (II-1) . L'égalité $h_i = \delta_i$ correspondra au point d'inception.

II - 5/- Références :

[1] W.H. HAGER et R.O. SINNIGER

" *Constructions hydrauliques écoulements stationnaires* "

Traité de Génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne,

Vol 15 page 25 (1989).

[2] I.R WOOD

" *General method of critical point on spillways* "

proc ASCE J. Hydraulic engineering 109 (1983)

[3] I.R WOOD

" *air water flow* "

Keynote address, IAHR Congress Melbourne, 18 - 29 (1985).

Chapitre 3
**Paramètres
d'approche**

III.2.2 Définition :

Dans toute la région de l'écoulement aéré, la concentration moyenne d'air locale C , est définie comme le volume d'air par unité de volume de mélange, mesurée par une sonde de conductivité.

$$C(y) = \frac{\text{Volume (air)}}{\text{Volume (air + eau)}} \quad \text{avec } 0 < C < 90\%$$

La double inégalité $0 < C(y) < 90\%$ est due au fait qu'une sonde de conductivité ne donne la concentration, C , que si la vitesse de l'eau est égale à la vitesse de la phase air, c'est-à-dire si les particules eau et air sont adhérentes [1].

Cette condition d'adhérence n'est toute fois satisfaite que dans le domaine compris entre les deux concentrations 0 et $C = 90\%$ (voir fig. III-1)

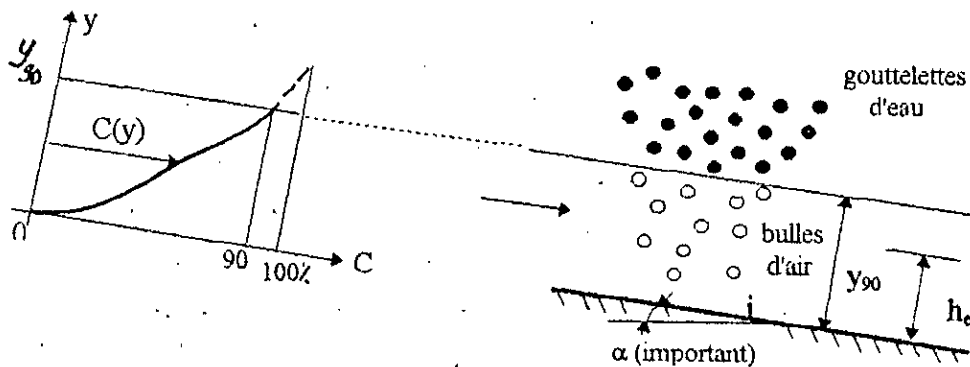


fig. III-1 Ecoulement avec entraînement d'air

On remarque deux régions :

1- gouttelettes d'eau dans l'air :

L'écoulement dans cette zone, est une projection aléatoire de gouttes d'eau dans l'air, et les vitesses de chacune des phases (eau - air) ne sont pas égales ($U_a \neq U_e$). Dans ce domaine, la mesure de concentration locale $C(y)$ est dénuée de tout sens à cause des erreurs. Par conséquent, la théorie du fluide homogène ne peut s'y appliquer.

2- Bulles d'air dans l'eau :

C'est le mélange d'air et d'eau qui s'écoule et les vitesses de chacune des phases sont égales

$(U_a / U_e) = 1$). C'est le domaine correspondant à une concentration comprise entre 0 et $C=90\%$ et dans lequel le modèle homogène peut être appliqué.

III - 3/- Profondeur d'eau pure :

Avec des écoulements formés d'un mélange eau-air, il devient difficile de définir la profondeur ; la surface apparaît souvent comme de l'eau blanche.

Pour pallier à cette difficulté, on introduit une profondeur caractéristique équivalente d'eau pure, h_e , de l'écoulement définie par :

$$h_e = \int_0^{y_{90}} (1-C) dy \quad (\text{III - 1})$$

où: C : Concentration locale d'air fonction de l'ordonnée y

y : Ordonnée perpendiculaire à l'axe du canal mesurée à partir du fond.

y_{90} : Profondeur du mélange eau-air où le concentration locale d'air est $C= 90\%$ (fig.III-1).

La profondeur h_e est utilisée pour représenter une profondeur moyenne de l'écoulement qui pourrait exister si tout l'air entraîné était déplacé au plus haut point en bas duquel l'eau est complètement pure.

Elle correspond donc à la profondeur de l'écoulement non aéré, pour un débit donné, avec une vitesse égale à celle de l'écoulement aéré réel. (fig. III-2)

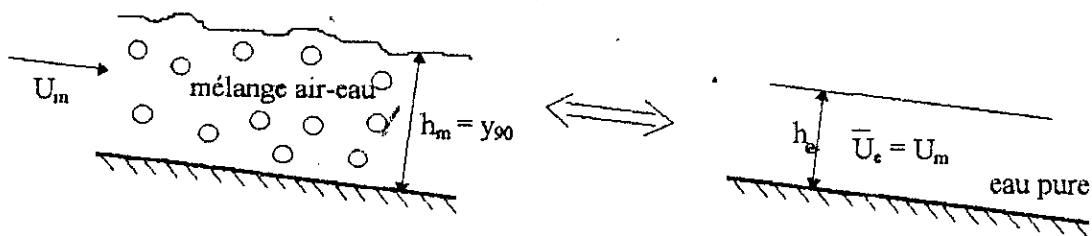


fig. III-2 Profondeur d'eau équivalente

III - 4/- Concentration moyenne d'air :

La concentration en air moyenne, prise sur la profondeur du mélange, désignée par C_m , peut être définie par l'équation suivante : (fig. III-3).

$$h_e = (1 - C_m) y_{90} \quad (III - 2)$$

avec:

$$C_m = \frac{1}{y_{90}} \int_0^{y_{90}} c(y) dy \quad (III - 2 a)$$

d'où en combinant les deux, on obtient :

$$C_m = \left(1 - \frac{h_e}{y_{90}}\right) \quad (III - 2b)$$

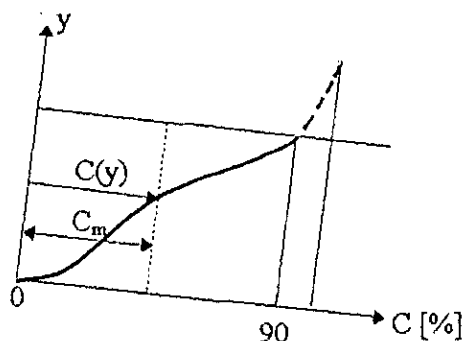


fig. III-3 Représentation de concentration moyenne en air

III - 5/- Vitesse moyenne d'eau :

La vitesse moyenne d'eau \bar{U}_e est définie par:

$$\bar{U}_e = \frac{q_e}{h} \quad (III - 3)$$

où: q_e : Débit d'eau pure par unité de largeur [m²/S]

h_e : Profondeur d'eau pure équivalente [m]

En combinant l'équation (III-3) avec l'équation (III-2) on obtient:

$$\bar{U}_e = \frac{q_e}{(1 - C_m) Y_{90}} \quad (III - 4)$$

III - 6/- Vitesse de référence U_{90} :

La vitesse caractéristique, U_{90} du mélange est définie comme celle où règne une concentration locale de $C = 90\%$. L'interface air-eau, définie pour 90% de concentration en air, coïncide avec la ligne de courant où le gradient de vitesse est maximum. [1]

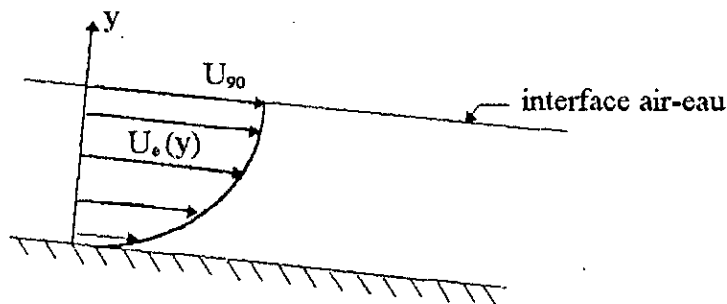


fig. III-4 Profil des vitesses transversales

III - 7/- Relations intéressantes :

Pour mieux comprendre la modélisation homogène, nous avons jugé nécessaire d'exposer en fin de cette partie, quelques relations fréquemment utilisées dans les études des écoulements diphasiques et qui sont une fois de plus adaptées à notre cas.

Les deux phases eau et air seront distinguées par les indices e et a respectivement.

a/ Le flux volumique :

Le symbole f est utilisé pour représenter le flux volumique exprimé en m/s. C'est un débit par unité de surface. Il est lié à la concentration en air locale par les expressions:

$$\text{pour l'eau:} \quad f_e = (1 - C) U_e \quad (\text{III - 5})$$

$$\text{pour l'air:} \quad f_a = C \cdot U_a \quad (\text{III - 6})$$

d'où le flux totale local :

$$f = f_e + f_a \quad (\text{III - 7})$$

b/ Débit volumique :

Il s'ensuit que le débit de chaque phase s'exprime par :

$$Q_e = \int f_e \cdot dS \quad (\text{III - 8})$$

$$Q_a = \int f_a \cdot dS \quad (\text{III - 9})$$

dS étant un élément de surface /

Dans notre cas, et pour un canal ou coursier rectangulaire, les débits par unité de largeur s'écrivent :

$$q_e = \int_0^{Y_{90}} (1 - C) U_e dy \quad (\text{III - 8 a})$$

et

$$q_a = \int_0^{Y_{90}} C U_a dy \quad (\text{III - 9 a})$$

Si le fluide est considéré homogène (ie : $U_e = U_a$), c'est -à-dire qu'il n'ya pas de glissement entre les deux phases lors de l'écoulement, alors on démontre aisément que :

$$\frac{q_e}{q_a} = \frac{1 - C_m}{C_m} \quad (\text{III - 10})$$

où C_m est définie par l'équation III-2a.

A noter que cette relation sera utilisée dans l'équation de conservation de masse pour la phase air. (Chapitre V).

c/ Flux de masse :

C'est un débit massique par unité de surface, noté en général par f_m .

Pour l'eau : $f_{me} = \rho_e (1 - C) U_e \quad (\text{III - 11})$

Pour l'air : $f_{ma} = \rho_a C U_a \quad (\text{III - 12})$

Le flux de masse total local est donc :

$$f_m = \rho_e (1 - C) U_e + \rho_a C U_a \quad (\text{III - 13})$$

Ainsi, la masse volumique moyenne du mélange est définie par :

$$\rho_m = \rho_e (1 - C) + \rho_a C \quad (\text{III - 14})$$

Conclusion :

En s'aidant des informations présentées dans ce chapitre, il serait possible d'étudier les propriétés et les effets du phénomène entraînement d'air sur les écoulements d'eau à grandes vitesses le long des coursiers à forte pente.

III - 8/- Références :

[1] H. CHANSON

" Velocity measurements within high velocity air water jets "

J. Hydraulic Engineering ASCE, Vol 31, N° 3, Décembre (1994).

Chapitre 4
**Ecoulement uniforme
aéré**

Écoulement uniforme aéré

IV - 1/- Introduction :

Dans un canal de pente et de rugosité constantes et dont la section transversale ne varie pas, l'écoulement aéré est dit uniforme ou d'équilibre si :

- la profondeur d'eau équivalente h_u , la profondeur de référence y_{90} , la concentration moyenne \bar{C}_u , les profils de concentration et de vitesse restent constants en toute section du canal (fig. IV-1).

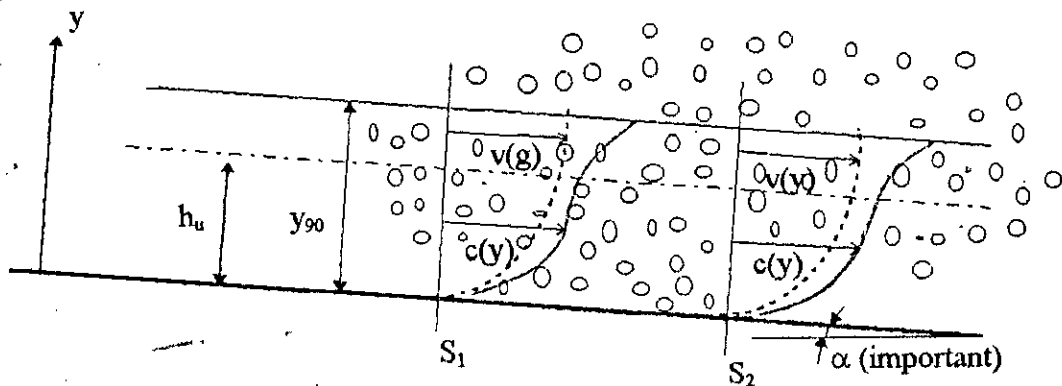


fig. IV-1 Écoulement uniforme aéré

Dans un tel écoulement, on peut distinguer deux équilibres à savoir:

- 1- Équilibre entre la force de Masse (gravité) et la force retardatrice (frottement).
- 2- La quantité d'air entraînée est égale à la quantité d'air expulsée.

L'écoulement uniforme aéré peut se produire asymptotiquement à l'extrémité des longs coursiers prismatiques.

IV - 2/- Concentration en air :

IV.2.1. Distribution de la concentration en air :

Straub et Anderson [11] ont publié une série complète de mesure de concentration en air dans un canal à pente variable, pour un écoulement uniforme, sujet à un entraînement d'air naturel à la surface libre.

Wood [13] analysa ces données et montra que les profils de distribution de la concentration en

air, sous la forme adimensionnelle $C = f(y / y_{90})$ (fig. IV-2), sont indépendants des conditions amonts (Débit, profondeur, rugosité ...) et sont fonctions de la pente du canal uniquement.

De plus, il développa un modèle simple pour représenter la diffusion de bulles d'air dans un écoulement turbulent, et montra que la distribution de concentration en air s'exprime par :

$$C = \frac{\beta}{\beta + e^{-\gamma \cos \alpha y'^2}} \tag{IV - 1}$$

où : α : pente du canal en degré .

y' : profondeur adimensionnelle définie par : $y' = \frac{y}{y_{90}}$

β et γ sont des constantes fonctions de la pente du canal et dont les valeurs sont reportées sur le tableau de l'annexe A. En particulier la constante γ est liée à l'angle α par la relation polynomiale (fig. IV-3)

$$\gamma \cos \alpha = 0,02 \alpha^2 - 0,244 \alpha + 9,38 \tag{IV - 2}$$

dans laquelle l'angle, α est exprimé en degré .

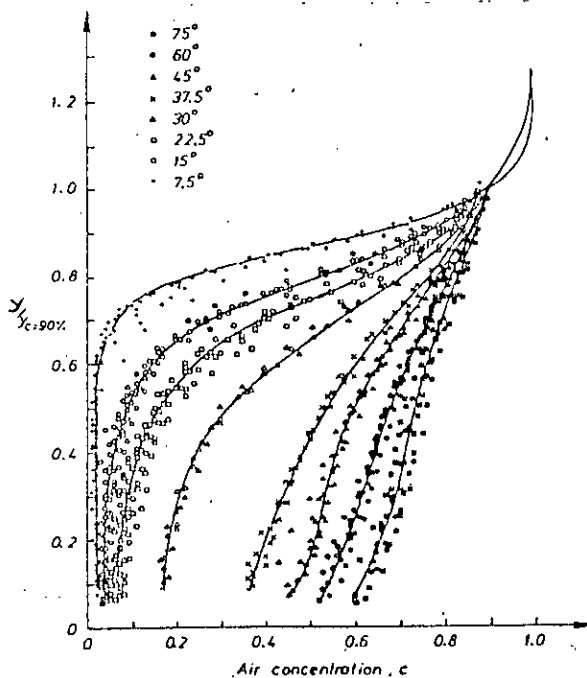


Fig. IV-2 Distribution de la concentration d'air de l'écoulement uniforme aéré [13]

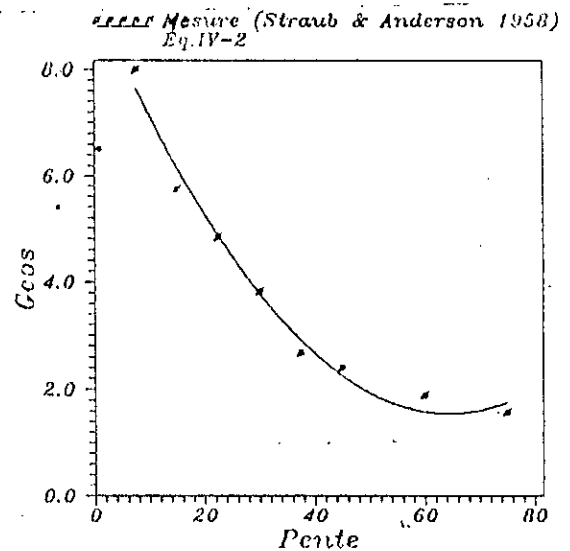


Fig IV-3 Estimation du coefficient Gamma en fonction de la pente du coursier.

En utilisant la condition au limite qui pour $y = 1$ correspond à $C = 0.9$, on déduit une relation simple entre les deux coefficients à savoir :

$$\beta = 9 \cdot e^{-\gamma \cos \alpha} \quad (\text{IV - 3})$$

Finalement, pour une pente donnée du canal, il devient possible de tracer le profil de concentration locale de l'écoulement uniforme aéré du moins loin de la paroi solide .

Près de la surface du coursier, les mesures de Cain [1] et Chanson [3] obtenues sur prototype et modèle divergent de l'équation (IV-1) et impliquent que la concentration locale en air tend vers zéro à la paroi solide ($C(y=0) = 0$) . Cette divergence peut se voir analytiquement en faisant tendre y vers 0 dans l'équation (IV-1). Ceci peut être confirmé graphiquement sur la figure (IV-2) par l'absence de toute information près de la paroi.

Par ailleurs, cette même divergence peut s'expliquer physiquement par la présence d'une couche limite de concentration en air mise en évidence par Chanson [3] .

En réexaminant les données expérimentales effectuées sur l'étude de la diffusion de micro-bulles d'air dans une couche limite turbulente, Chanson [5] a déduit que le profil de concentration en air dans la couche limite de concentration en air s'exprime par :

$$C = C_1 \cdot \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^{0.270} \quad (\text{IV - 4})$$

où : δ_1 : épaisseur de la couche limite de concentration en air.

C_1 : concentration en air à la limite supérieure de la couche limite de concentration en air. Pour des écoulements sur un coursier d'évacuateur de crues, la profondeur d'eau est largement supérieure à l'épaisseur δ_1 , et C_1 est égale : (annexe A)

$$C_1 = \lim_{y' \rightarrow 0} C(y') = \frac{\beta}{\beta + 1} \quad (\text{IV - 5})$$

Pour le calcul de C_1 , on peut soit utiliser les résultats de la constante β , soit l'estimer en adoptant les deux approximations suivantes : (fig. IV-4a,b)

$$C_1 = 1,25 \left(\frac{\pi}{180} \alpha \right)^3 \quad 0 \leq \alpha \leq 40^\circ \quad (IV - 6a)$$

$$C_1 = 0,397 \ln \alpha - 1,057 \quad 40^\circ < \alpha < 80^\circ \quad (IV - 6b)$$

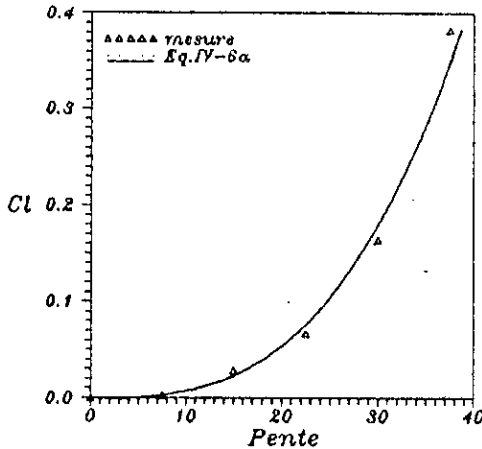


Fig:IV-4a Concentration en air a la limite supérieure de la couche limite de concentration en air en fonction de la pente du courcier.

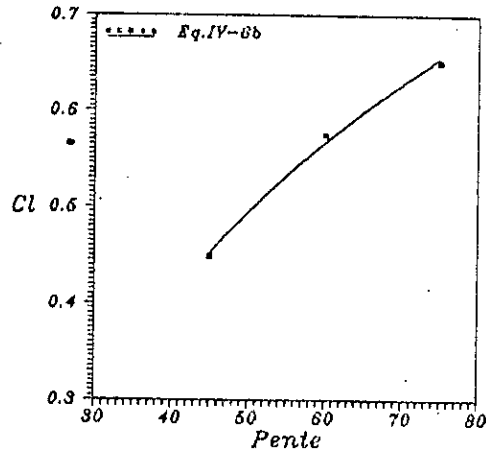
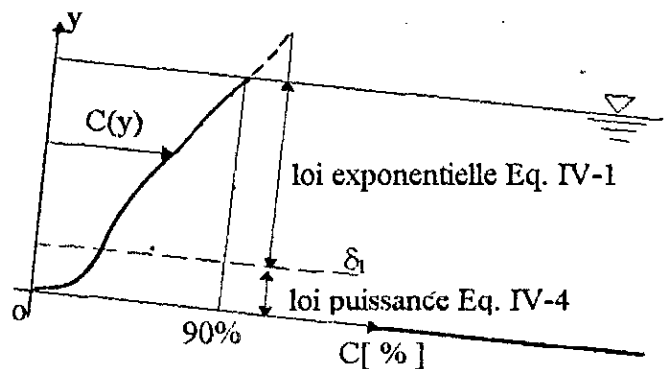


Fig:IV-4b Concentration en air a la limite supérieure de la couche limite de concentration en fonction de la pente du courcier.

En résumé, le modèle de Wood n'est valable donc qu'à l'extérieur de la couche limite de concentration en air alors qu'à l'intérieur de celle-ci la relation de Chanson prévaut. Par conséquent, deux régions sont à distinguer au niveau d'une section transversale de l'écoulement uniforme aéré (fig. IV-5).

- * près de la paroi solide $0 \leq y \leq \delta_1$
- * loin de la paroi solide $\delta_1 \leq y \leq y_{90}$

fig. IV-5 profil de concentration en air dans une section de l'écoulement uniforme aéré.



IV.2.2. Concentration moyenne en air :

L'analyse des mesures obtenues par Straub et Anderson montre que la concentration en air moyenne \bar{C}_u pour les écoulements uniformes définie par :

$$\bar{C}_u = \frac{1}{y_{90}} \int_0^{y_{90}} C(y) dy \quad (IV - 7)$$

est indépendante des conditions amonts (Débit, rugosité ...) et que \bar{C}_u est une fonction de la pente du canal uniquement. (Tab. 1, annexe A).

Les figures (IV-6a, b) présentent les résultats déduits des mesures de Straub et Anderson que l'on peut approcher par une relation simple entre la pente α et la concentration moyenne en air :

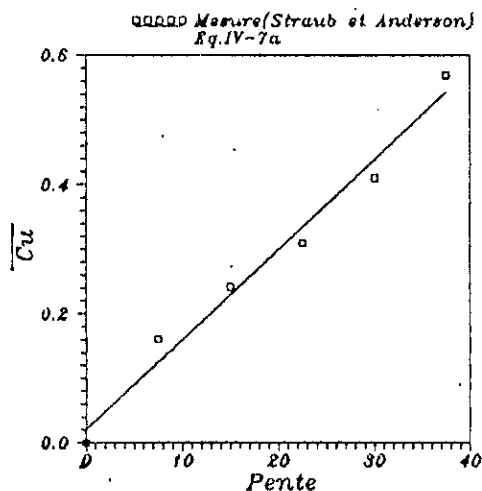


Fig. IV-8a. Concentration moyenne en air \bar{C}_u en fonction de la pente du coursier.

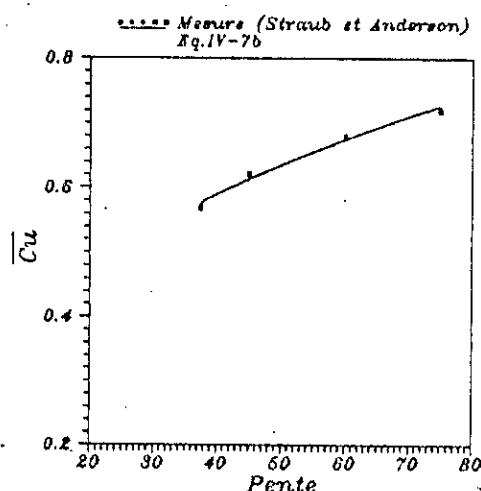


Fig. IV-8b. Concentration moyenne en air \bar{C}_u en fonction de la pente du coursier.

$$\bar{C}_u = 0,014 \alpha + 0,02 \quad 0 < \alpha < 37,5^\circ \quad (IV-7a)$$

$$\bar{C}_u = 0,172 \alpha^{0,334} \quad 37,5 \leq \alpha < 75^\circ \quad (IV-7b)$$

Knauss [9] a effectué des mesures sur les écoulements avec des rugosités importantes. (k_s entre 0,1 et 0,35 m) et avec des pentes de 6 à 34°.

Ces rugosités importantes induisent un écoulement fortement turbulent avec entraînement d'air. Ils indiquent que le taux d'aération exprimé en terme de concentration en air moyenne est :

$$\bar{C}_u = 1,44 \sin \alpha - 0,08 \quad (IV-7c)$$

Cette formule est proche des résultats de l'équation (IV-7) et est reportée sur la figure (IV-7a).

Une autre approximation des mesures de concentration moyennes d'air donne la relation générale suivante :

$$\bar{C}_u = 0,76 (\sin \alpha)^{0,75} \quad [\alpha] : \text{rad} \quad (IV-7d)$$

indiquant une augmentation presque linéaire de \bar{C}_u avec la pente du coursier (fig. IV-8).

Cette relation donne des résultats assez proches de ceux des deux précédentes et pourra

désormais être utilisée pour n'importe quelle valeur de α .

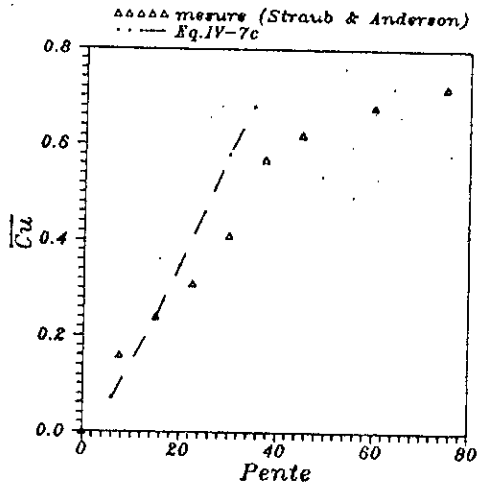


Fig. IV-7 Concentration moyenne en air C_u en fonction de la pente du coursier.

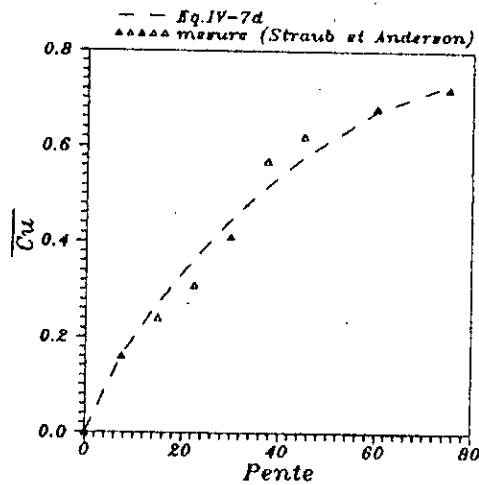


Fig. IV-8 Concentration moyenne en air C_u en fonction de la pente du coursier.

Remarques :

i/ il est très intéressant de voir comment varie le profil de concentration locale $C(y)$ en fonction de la concentration moyenne \bar{C}_u , notamment dans la zone de l'écoulement graduellement varié aéré. Pour cela, une relation du type $\varphi_1(\gamma \cos \alpha, \bar{C}_u) = 0$ s'avère nécessaire. En effet, la figure (IV-9) montre que les deux variables $\gamma \cos \alpha$ et \bar{C}_u sont liées par la relation logarithmique :

$$\gamma \cos \alpha = -4,03 \text{ Ln } \bar{C}_u + 0,31 \tag{IV - 8}$$

A noter que cette expression sera utilisée dans la troisième partie consacrée à l'étude de l'écoulement graduellement varié; dans le but de mettre en évidence les variations du profil de concentration locale d'une section à l'autre de l'écoulement.

En outre, pour mieux suivre l'évolution de la quantité d'air près de la paroi solide qui, rappelons-le, est responsable de la réduction considérable du phénomène d'érosion par cavitation conformément à la remarque expérimentale de PETERKA, RUSSEL et SHELMAN selon laquelle "une concentration en air près de la surface du coursier supérieure à 6 - 8% stoppe complètement l'érosion par cavitation".

Il est donc important de trouver l'expression du type $\varphi_2(C_1, \bar{C}_u) = 0$ régissant cette quantité d'air. La figure (IV-10) montre que la concentration près de la paroi, C_1 , peut être estimée en fonction de C_u par la relation polynomiale :

$$C_l = 0,006 - 0,30 \cdot \bar{C}_u + 1,66 \bar{C}_u^2 \tag{IV-9}$$

L'équation (IV-9) sera une fois de plus utilisée dans la région de l'écoulement graduellement varié aéré et ceci en remplaçant la concentration moyenne \bar{C}_u par la concentration moyenne C_m au niveau de chaque section transversale de l'écoulement . De cette manière, il sera possible de localiser toutes les sections critiques à l'égard du phénomène d'érosion par cavitation.

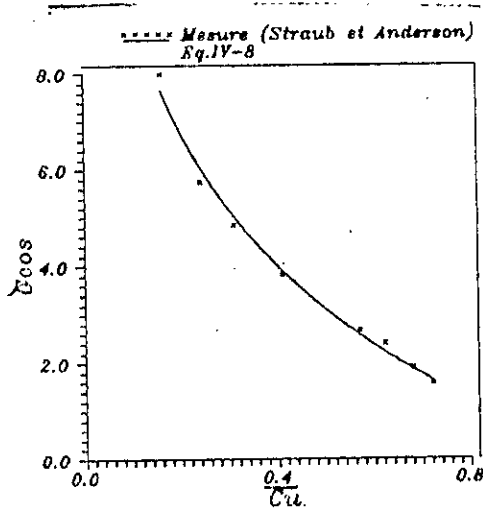


Fig:IV-9 Estimation du coefficient Gamma en fonction de la concentration C_u

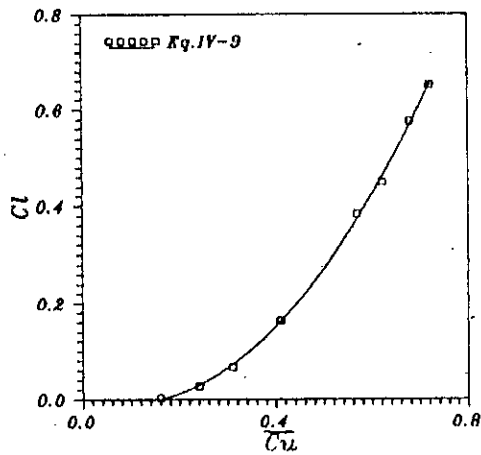


fig:IV-10 Concentration a la limite superieure de la couche limite de concentration en fonction de la concentration C_u

IV - 3/- Profil de vitesses :

L'écoulement du mélange air-eau a ses propres vitesses à savoir : la vitesse de l'eau U_e , la vitesse de l'air U_a et la vitesse du mélange U_m , définie par: [12].

$$U_m \rho_m = \rho_e U_e (1 - c) + \rho_a U_a c \tag{IV-10}$$

Dans la partie supérieure de l'écoulement air- eau, ($c > 90\%$) l'air est entraîné par la projection des gouttes d'eau dans l'atmosphère et les vitesses de chacune des deux phases ne sont plus égales ($U_a \ll U_e$).

Dans la majeure partie du mélange eau-air, ($0 \leq c \leq 90\%$) les bulles d'air sont entourées d'eau et à cause de leur densité relativement faible, leur vitesse en direction de l'écoulement le long du coursier est proche de la vitesse de l'eau pure ($U_a \cong U_e$).

En 1978, au barrage d'Aviémore (nouvelle Zélande), Cain [1] utilisa une sonde électronique bipoint donnant un signal au contact de l'eau et aucun au contact de l'air. Il plaça les deux

pointes de la sonde en ligne dans la direction de l'écoulement espacées d'une distance connue. Après quoi, il pouvait calculer la vitesse moyenne des interfaces air-eau à profondeur fixe.

Si la vitesse de ces interfaces est prise égale à celle de l'eau, alors la distribution des vitesses suit une loi puissance comme suggéré par Cain et Wood [2] telle que :

$$\frac{U_e}{U_{90}} = \left(\frac{y}{y_{90}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (\text{IV} - 11)$$

où : U_e : vitesse à une distance y de la surface du coursier [m / s]

U_{90} : vitesse de référence [m/s] pour $y = y_{90}$

m : exposant de la loi puissance, fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité .

Remarques :

1/ Les points expérimentaux dont dépend cette équation ont été obtenus pour des concentrations en air moyennes variant entre 0 et 50%. Il apparaît alors que le profil adimensionnel des vitesses est indépendant de la concentration en air.

Ce résultat à été obtenu dans une région d'écoulement lentement varié et comme il est indépendant de la concentration en air moyenne, Chanson [3] pense qu'il est raisonnable de supposer que ce résultat s'applique aussi à la région d'écoulement uniforme .

2/ Pour le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore ($k_s = 1\text{mm}$) et pour le modèle de l'évacuateur de crues du barrage de Clyde ($k_s = 0,1\text{mm}$), les mesures des profils de vitesses indiquent que l'exposant m est égale à 6. [4]

3/ En 1990, Chen [6] propose une relation théorique liant l'exposant m au coefficient de frottement de Darcy - Weisbach λ , telle que :

$$m = K \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad (\text{IV} - 12)$$

où : K : Constante universelle de Von Karman ($K=0,41$) .

Cette relation est assez intéressante car elle permet de généraliser l'équation (IV-11) et de voir

l'évolution du profil des vitesses transversales le long du coursier en chaque section de l'écoulement graduellement varié.

4/ La vitesse U_{90} se déduit en combinant l'équation (IV-11) avec l'équation de conservation de la masse pour la phase eau soit ;

$$q_e = \int_0^{y_{90}} (1-c) U_e(y) dy \quad (\text{IV-13})$$

pour avoir :

$$\frac{q_e}{y_{90} U_{90}} = \int_0^1 (1-c) y'^{\frac{1}{m}} dy' \quad (\text{IV-14})$$

Les valeurs théoriques du rapport $\frac{q_e}{y_{90} U_{90}}$ sont calculées numériquement par la méthode des trapèzes pour $m = 6$ et sont reportées en annexe A. Ces valeurs sont estimées analytiquement par la relation :

$$\frac{q_e}{y_{90} U_{90}} = -0,883 \bar{C}_u + 0,835 \quad (\text{IV-14a})$$

5/ Il est possible de définir un coefficient de correction de l'énergie cinétique α_a pour les écoulements uniformes aérés :

$$\alpha_a = \frac{\int_s (1-c) U_e^3 dS}{\bar{U}_e^3 \cdot S_e} \quad (\text{IV-15})$$

En tenant compte de la relation (IV-13), l'équation (IV-15) est réécrite en variable adimensionnelle y' comme suit :

$$\alpha_a = (1 - \bar{C}_u)^2 \frac{\int_0^1 (1-c) y'^{\frac{3}{m}} dy'}{\left[\int_0^1 (1-c) y'^{\frac{1}{m}} dy' \right]^3} \quad (\text{IV-15a})$$

où : C est évaluée à partir de l'équation (IV-1).

Les valeurs théoriques de α_a calculées numériquement pour $m = 6$ sont reportées aussi dans le

tableau de l'annexe A et sont approchées en fonction de la concentration d'équilibre par la relation :

$$\alpha_a = -2,360 \bar{C}_u^3 + 6,137 \bar{C}_u^2 - 3,620 \bar{C}_u + 1,810 \quad (\text{IV-15b})$$

IV - 4 Coefficient de perte de charge :

IV.4.1. Coefficient de perte de charge d'un écoulement uniforme non aéré :

Le coefficient de perte de charge linéaire de Darcy-Weisbach λ , pour un écoulement uniforme à surface libre non aéré peut être obtenu par la relation de Colebrook-White adaptée aux écoulements dans des canaux, et ceci en remplaçant le diamètre de la conduite par le diamètre hydraulique défini comme étant quatre fois le rapport de la section mouillée par le périmètre mouillé. ($D_h = 4 R_h$) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{k_s/R_h}{a_\lambda} + \frac{b_\lambda}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{IV - 16})$$

avec $12 < a_\lambda < 15$ et $0 < b_\lambda < 6$ et ceci pour des sections de formes différentes.

Pour un canal rectangulaire très large, on utilise en général [7] : $a_\lambda = 12$ et $b_\lambda = 3.4$.

En exprimant la vitesse de l'écoulement en fonction de λ par le biais de la relation (II-13), on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{K_s/R_h}{a_\lambda} + \frac{b_\lambda v}{8R_h \sqrt{2g R_h \sin \alpha}} \right) \quad (\text{IV - 17})$$

Pour un canal très large, cette relation prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left[\frac{k_s}{12h} + \frac{0,096 v}{h \sqrt{h \sin \alpha}} \right] \quad (\text{IV - 18})$$

Dans laquelle :

K_s : rugosité équivalente en sable (m); h : tirant d'eau (m)

α : pente du canal ($^\circ$); ν : viscosité cinématique de l'eau (m^2/s)

La solution des équations (IV-17) et (IV-18) n'est toute fois possible que par approximations successives.

Pour cela, on suggère de suivre la procédure suivante :

- a- estimer une profondeur h_0
- b- calculer ensuite R_{h_0} , k_s/R_{h_0} et la section $S = B h_0$
- c- calculer la vitesse moyenne par la relation : $U_1 = Q/S_0$
- d- estimer un coefficient λ_0
- e- calculer le nouveau coefficient λ_1 par la formule de Colebrook-White
- f- comparer λ_1 et λ_0

si $\lambda_1 \neq \lambda_0$: refaire les étapes e/ et f/ avec la valeur λ_1

si $\lambda_1 = \lambda_0$: calculer la vitesse moyenne par l'équation : $U_2 = \sqrt{\frac{8g}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{R_h \sin \alpha}$ (IV - 19)

g- comparer U_1 et U_2

si $U_1 \neq U_2$: refaire toutes les étapes ci-dessus

si $U_1 = U_2$: cela signifie qu'il s'agit bien de la bonne estimation de λ et que la hauteur h estimée à l'étape a- représente la hauteur normale de l'écoulement.

L'avantage de cette procédure réside donc dans le fait qu'elle permet de calculer λ et h_n à la fois. Il est à noter aussi que la solution λ sera utilisée dans l'évaluation de l'exposant m de la loi puissance selon la formulation de Chen:

Remarque:

Si la rugosité k_s est nulle, la relation (IV-18) se réduit à :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{3,4 v}{8 \sqrt{2g} h^3 \sin \alpha} \right) \quad (\text{IV - 18a})$$

valable pour les écoulements turbulents lisses.

si $R_e \longrightarrow +\infty$, elle devient :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left(\frac{k_s}{12h} \right) \quad \text{valable pour les écoulements complètement rugueux} \quad (\text{IV - 18b})$$

IV.4.2. Coefficient de perte de charge pour un écoulement uniforme aéré :

IV.4.2.1. Equation du mouvement :

Considérons un écoulement uniforme aéré. L'équation des moments conduit à l'équilibre entre la composante longitudinale de la force de gravité et la force de frottement et s'écrit :

$$\tau_o P_e = \rho_e g S_e \sin \alpha \quad (\text{IV} - 20)$$

où : P_e : périmètre mouillé défini comme : $P_e = B + 2 h_{eu}$

ρ_e : masse volumique de l'eau.

S_e : section mouillée de l'écoulement définie comme $S_e = B \cdot h_{eu}$.

τ_o : tension due aux forces de frottement agissant sur la surface (parois).

Par analogie aux écoulements à eau pure (sans air), la contrainte τ_o est définie par :

$$\tau_o = \frac{\lambda_a}{g} \rho_e \bar{U}_{eu}^2 \quad (\text{IV} - 21)$$

λ_a : coefficient de perte de charge de l'écoulement uniforme aéré.

\bar{U}_{eu} : vitesse moyenne de l'écoulement uniforme équivalent.

En combinant les équations (IV-20) et (IV-21), on obtient :

$$\bar{U}_{eu}^2 = \frac{8g}{\lambda_a} \cdot \frac{D_{He}}{4} \sin \alpha \quad (\text{IV} - 22)$$

où : D_{He} désigne le diamètre hydraulique défini comme : $D_{He} = \frac{4 S_e}{P_e}$.

Enfin, en écrivant la vitesse \bar{U}_{eu} en fonction du débit unitaire q_e , l'équation (IV-22) s'écrit:

$$\lambda_a = \frac{8g \sin \alpha h_{eu}^2}{q_e^2} \left(\frac{D_{He}}{4} \right) \quad (\text{IV} - 22a)$$

IV.4.2.2. Calcul de λ_a en fonction de la concentration d'équilibre :

Bien que, la présence d'air dans les écoulements à surface libre n'affecte pas les profils de

vitesses, Levin [10] et Killen [8] ont suggéré que la présence de bulles d'air dans la couche limite turbulente entraîne une réduction des contraintes de cisaillements et du coefficient de perte de charge. En utilisant les mesures obtenus avec les écoulements uniformes, Wood [13] a appliqué l'équation de conservation de l'énergie à des écoulements aérés.

Son analyse a montré que le coefficient de perte de charge diminue lorsque la concentration en air moyenne augmente ; Cette conclusion a été vérifiée avec des données expérimentales obtenues sur des modèles et prototypes de coursiers d'évacuateurs de crues à travers le monde (U.S.A, URSS, Yougoslavie, Indonésie, Australie, Autriche, ...) (fig. IV-11).

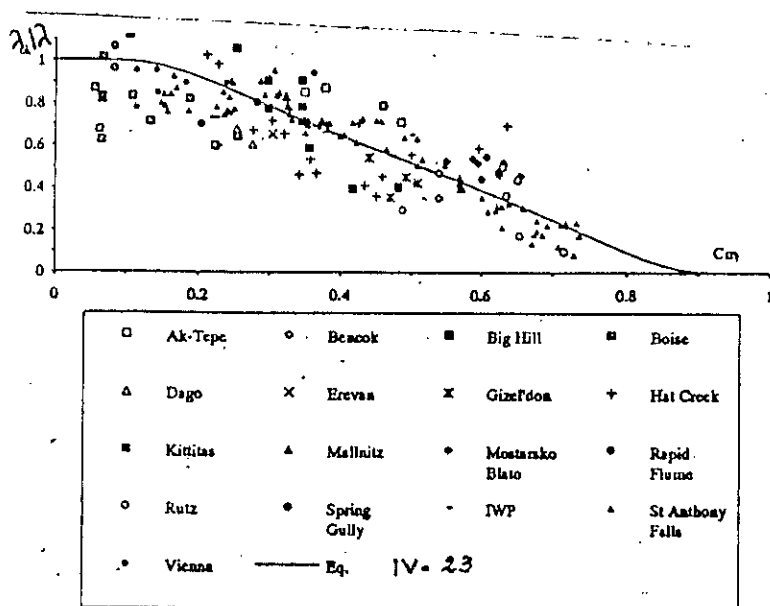


fig. IV-11 Réduction du coefficient de frottement sur des modèles et prototypes [5]

Pour l'ensemble de ces données, Chanson [5] a explicité la réduction du coefficient de perte de charge par la formule :

$$\frac{\lambda_a}{\lambda} = 0,5 \left[1 + \tanh \left(0,628 \cdot \frac{0,514 - \bar{C}_u}{\bar{C}_u (1 - \bar{C}_u)} \right) \right] \quad (IV - 23)$$

On notera que pour l'ensemble de ces données expérimentales, la rugosité relative $\frac{K_S}{D_{He}}$ est comprise entre 0,0003 et 0,04m et le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\bar{U}_e D_{He}}{\nu}$ est compris entre $5 \cdot 10^4$ et $3 \cdot 10^7$.

La figure (IV-11) montre que le coefficient de perte de charge décroît lorsque la concentration en air moyenne est supérieure à 20%. Pour $\bar{C}_u > 20\%$, la concentration en air près de la surface du coursier devient non nulle et des bulles d'air interagissent avec l'écoulement près de la paroi.

IV.4.2.3. Propriétés de l'écoulement uniforme aéré :

Dans le cas d'un canal très large, la vitesse de l'écoulement uniforme \bar{U}_{eu} et la profondeur normale h_{eu} sont déduites de l'équation de continuité et d'énergie.

En posant que : $R_h \cong h_{eu}$; $q_c = \bar{U}_c h_{eu}$

L'équation (IV-22) est réécrite :

$$\bar{U}_{eu}^3 = \frac{8g \sin \alpha}{\lambda_a} \cdot q_c \quad (IV - 24)$$

Sachant que la vitesse critique U_c , de l'écoulement équivalent en eau pure a pour expression :

$$U_c^3 = g \cdot q_c \quad (IV - 25)$$

On aboutit au rapport :

$$\frac{\bar{U}_{eu}}{U_c} = \sqrt[3]{\frac{8 \sin \alpha}{\lambda_a}} \quad (IV - 26)$$

Après quoi, on déduit que :

$$\frac{h_{eu}}{h_{ec}} = \sqrt[3]{\frac{\lambda_a}{8 \sin \alpha}} \quad (IV - 27)$$

h_{ec} : étant la profondeur critique de l'écoulement équivalent pour le même débit.

En combinant, cette fois-ci, les équations (IV-26) et (IV-27), la profondeur caractéristique $(y_{90})_u$ de l'écoulement uniforme s'obtient par la relation :

$$\frac{(y_{90})_u}{h_{ec}} = \sqrt[3]{\frac{\lambda_a}{8(1-\bar{C}_u)^3 \sin \alpha}} \quad (IV - 28)$$

La profondeur $(y_{90})_u$ tient en compte le gonflement de l'écoulement causé par le phénomène d'entraînement d'air et doit être utilisée pour le dimensionnement de la hauteur de murs latéraux

des coursiers d'évacuateurs de crues.

IV.4.2.4. Application :

Le phénomène de réduction du coefficient de perte de charge doit être pris en compte lors de la conception d'un coursier d'évacuateur de crues. Pour une hauteur de chute donnée la figure (IV-11) montre une réduction du coefficient de perte de charge, et donc un accroissement de la vitesse moyenne. Il serait donc envisageable d'accroître la capacité d'un coursier par une augmentation du débit maximal, résultant d'une réduction des pertes de charges.

Pour des aménagements de barrages de moyennes et hautes chutes, le débit maximal qu'un évacuateur de crues peut écouler, égale au produit de la vitesse maximale par la hauteur d'eau est :

$$q_{\max} = U_{\max} \cdot h \quad (\text{IV - 29})$$

La hauteur d'eau maximale est déterminée par la hauteur des bajoyers, et la vitesse maximale est déduite de la formule de Chezy ;

Pour un coursier de grande largeur, la vitesse maximale d'un écoulement uniforme avec entraînement d'air est :

$$U_{e\max} = \sqrt[3]{\frac{8g q_e \sin \alpha}{\lambda_a}} \quad (\text{IV - 30})$$

Considérons un écoulement uniforme, pour une même hauteur d'eau, h , l'augmentation du débit maximal, résultant de l'aération superficielle de l'écoulement peut être exprimée par :

$$\frac{q_{e\max}}{q_{\max}} = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\lambda_a}} > 1 \quad (\text{IV - 31})$$

où : q_{\max} est le débit maximal sans entraînement d'air et $q_{e\max}$ est le débit maximal avec aération de l'écoulement.

L'équation (IV-31) prédit l'augmentation du débit résultant de l'aération naturelle de l'écoulement pour une hauteur d'eau identique h , mais ne prend pas en compte l'augmentation du volume réel (gonflement) d'un écoulement aéré.

Si l'entraînement d'air à la surface est insuffisant pour augmenter la débitance d'un coursier, une quantité d'air additionnelle peut être introduite artificiellement à l'aide d'aérateurs.

Conclusion :

Pour un écoulement uniforme avec entraînement d'air, la géométrie du coursier (pente, rugosité, largeur) et le débit permettent de calculer toutes les caractéristiques de l'écoulement.

A partir de la pente coursier α , les équations (IV-7a) et (IV-7b) donnent une estimation de la concentration en air moyenne \bar{C}_u .

L'équation (IV-19) de Colebrook-White adoptée aux écoulements à surface libre fournit la valeur du coefficient de perte de charge λ , pour un écoulement sans aération naturelle.

Sachant λ , la relation (IV-23) donne immédiatement la valeur de λ_a , après quoi la prédiction de l'augmentation du débit résultant de l'aération de l'écoulement est déduite en utilisant l'équation (IV-31). La profondeur de référence h_{au} de l'écoulement uniforme est déduite aussitôt de l'équation (IV-27).

On déduit alors :

- * la profondeur caractéristique $(y_{90})_u$ du mélange ; équation (III-2) ou en utilisant l'équation (IV-28).
- * la vitesse moyenne de l'écoulement ; équation (III-3).
- * la vitesse de référence U_{90} ; équation (IV-14a).
- * après déterminations des deux coefficients(β et γ); équations (IV-2) et (IV-3), les profils de concentration en air
- * après estimation de la puissance m par l'équation (IV-12), les profils de vitesses; équations (IV-11)

IV - 5/- Références :

[1] P. Cain

" Measurements within self-Aerated flow on a large spillway "

P.H. D. thesis reference 78-18, University of Canterbury (nouvelle Zelande) (1978).

[2] P. Cain et I.R. Wood

" Measurements of self - Aerated flow on a spillway "

Journal of hydraulic Division, ASCE, 107, HY 11 (1981).

[3] H. Chanson

" A study of Air entrainment and Aeration Devices on a spillway Model "

Research report N° 88-8, University of Canterbury, (nouvelle Zelande) (1988).

[4] H. Chanson

" flow downstream of an aerator, aerator spacing "

Journal of hydraulic research IAHR Vol 27, N°4 (1989).

[5] H. Chanson

" Drag reduction in open channel flow by aeration and suspended load "

Journal of hydraulic reseach Vol 32, N° 1 (1994).

[6] C.L. Chen

" Unified theory on power laws for flow resistance "

Journal of hydraulic engineering Vol 116, N° 4 (Mars 1991).

[7] W.H. Graf

" Hydraulique fluviale " Tome I

Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, vol. 16,

Edition Eyrollds (Juillet 1993).

[8] J. M Killen

" *the surface characteristics of self - Aerated flow in steep channels* "

P.H.D thesis university of Minnesota, USA (1968).

[9] J. KNAUSS

" *Computation of Maximum discharge at over flow rockfill Dams (a comparison of different model test results* "

13th ICOLD Congress, New Delhi, Rapport 5 (1979).

[10] L. LEVIN

" *Quelques reflexions sur la mécanique de l'écoulement des mélanges d'eau et d'air* "

La Houille Blanche, N° 4 (septembre 1955).

[11] L. STRAUB et A. ANDERSON

" *Experiments on self - Aerated flow in open channels* "

Journal of hydraulic Division ASCE Vol 84, N° 7 (1960).

[12] G.B. WALLIS

" *One dimensional two- phase flow* "

Edition McGraw-Hill, U.S.A (19...).

[13] I.R. WOOD

" *Uniform region self - Aerated flow* "

Hydraulic Eng. ASCE, Vol 103, N° 3 (1983).

Chapitre 5

1. Ecoulement
graduellement varié
aéré

Écoulement graduellement varié aéré

V - 1/- Introduction :

Un écoulement à surface libre aéré est dit varié si les hypothèses du mouvement uniforme aéré ne sont pas réalisées, c'est-à-dire que : la concentration d'air moyenne C_m , le tirant d'eau pure h_e , la vitesse moyenne et la section mouillée varient d'une section transversale à une autre dans le canal.

Entre le point d'aération initiale et la zone d'aération uniforme se situe la zone non uniforme aéré, dans laquelle la concentration d'air moyenne $C_m(x)$ s'accroît de $C(x=0)=C_*$ à sa valeur maximale \bar{C}_v (figure II-1).

Cette zone peut être assimilée donc à un écoulement graduellement varié classique dans un canal, excepté que la concentration d'air moyenne et la densité sont des inconnues supplémentaires.

On se propose dans cette partie de déterminer la concentration en air moyenne $C_m(x)$ et la profondeur équivalente d'eau h_e correspondante en tout point d'un écoulement graduellement varié aéré en aval du point d'inception de l'entraînement d'air.

Pour cela, on appliquera respectivement l'équation de la conservation de la masse pour l'air et l'équation de la conservation d'énergie pour l'eau.

Hypothèses :

H1: Le taux d'entraînement d'air est faible, c'est-à-dire que la quantité d'air entraînée croît lentement le long du coursier.

H2: Une distribution de pression quasi- hydrostatique.

H3: Des variations graduelles (lentes) de la distribution des vitesses.

V - 2/- Equation de la conservation de la masse pour l'air :

L'équation de la conservation de la masse pour l'air entraîné dans l'écoulement prend en compte les fluctuations de vitesses turbulentes et des forces d'Archimède. Elle exprime la

différence entre la quantité d'air entraînée et la quantité d'air échappée simultanément, soit :

$$d Q_a = Q_a^{Ent} - Q_a^{ech} \tag{V-1}$$

Considérons une section de l'écoulement située à x mètres du point d'inception relativement au repère Oxy (figure V-1a), et faisons un déplacement élémentaire dx dans le sens de l'écoulement. La quantité d'air entraînée localement à travers la section dx. B exprimée en débit est donnée par : (figure V-1b)

$$Q_a^{ent} = V_e B dx \tag{V-1a}$$

où: V_e : vitesse locale d'entraînement d'air caractérisant l'action de la turbulence près de la surface libre.

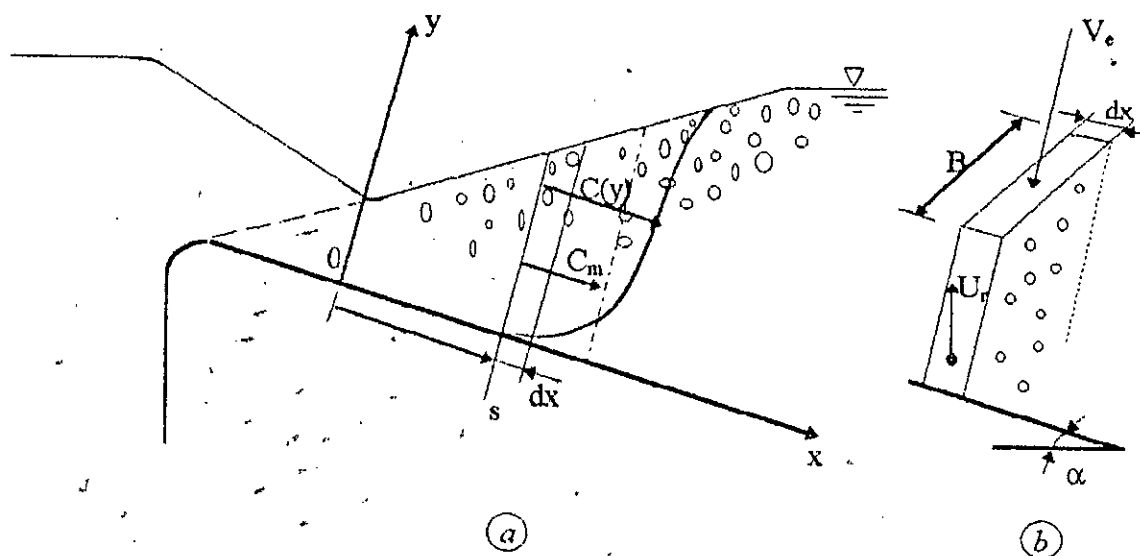


fig. V-1 Écoulement graduellement varié aéré sur le coursier d'un évacuateur de crues.

En outre, chaque bulle d'air susceptible de s'échapper de l'écoulement est sollicitée d'une vitesse d'échappement, selon l'axe perpendiculaire au radier du coursier, définie par :

$$V_{ech} = U_r \cos \alpha \tag{V-2}$$

où U_r est la vitesse limite d'ascension des bulles d'air.

Pour tenir compte de toutes les bulles d'air s'échappant de l'écoulement, le taux d'échappement est supposé proportionnel à la concentration moyenne locale d'air et est donné par :

$$Q_a^{ech} = C_m(x) \cdot U_r \cos \alpha B \cdot dx \tag{V-1b}$$

La variation locale du débit d'air q_a par unité de largeur est donc :

$$\frac{d q_a}{d x} = V_e - C_m U_r \cos \alpha \quad (V-3)$$

Pour un écoulement uniforme aéré, la limite de l'équation (V-3) est:

$$0 = (V_e)_u - \bar{C}_u (U_r)_u \cos \alpha \quad (V-4)$$

où $(V_e)_u$, $(U_r)_u$ et \bar{C}_u sont la vitesse d'entraînement d'air, la vitesse limite d'ascension des bulles d'air et la concentration en air moyenne pour un écoulement uniforme.

En tenant compte de l'équation (V-3) et en posant :

$$K_u = \frac{V_e}{(V_e)_u} \quad \text{et} \quad K_r = \frac{U_r}{(U_r)_u}$$

l'équation de conservation de la masse pour la phase air, combinée à l'équation (V-4), est réécrite:

$$\frac{d q_a}{d x} = (K_u \bar{C}_u - K_r C_m) (U_r)_u \cos \alpha \quad (V-5)$$

sachant que : $q_a = \frac{C_m}{1 - C_m} \cdot q_e$ et $q_e = \frac{Q_e}{B}$

On a :

$$\frac{d}{d x} \left(\frac{C_m}{1 - C_m} \right) q_e + \left(\frac{C_m}{1 - C_m} \right) \frac{d}{d x} \left(\frac{Q_e}{B} \right) = (K_u \bar{C}_u - K_r C_m) (U_r)_u \cos \alpha \quad (V-5a)$$

En remplaçant les deux relations :

$$\frac{d}{d x} \left(\frac{C_m}{1 - C_m} \right) = \frac{d C_m}{(1 - C_m)^2 d x} \quad \text{et} \quad \frac{d \left(\frac{Q_e}{B} \right)}{d x} = - \frac{q_e}{B} \cdot \frac{d B}{d x}$$

dans l'équation (V-5a) et en la multipliant ensuite par la quantité : $\frac{(1 - C_m)^2}{q_e}$

on aboutit à :

$$\frac{d C_m}{d x} = (1 - C_m) \left[\frac{(U_r)_u \cos \alpha}{q_e} (K_u \bar{C}_u - K_r C_m) (1 - C_m) + \frac{C_m}{B} \frac{d B}{d x} \right] \quad (V-6)$$

En supposant que les vitesses d'entraînement et d'ascension V_e et U_r pour les écoulements graduellement variés sont identiques à ceux de l'écoulement uniforme, on obtient :

$$\frac{d C_m}{d x} = (1 - C_m) \left[\frac{U_r \cos \alpha}{q_e} (\bar{C}_u - C_m) (1 - C_m) + \frac{C_m}{B} \frac{d B}{d x} \right] \quad (V-7)$$

Pour un canal de largeur constante, l'équation (V-7) prend la forme :

$$\frac{d C_m}{d x} = (1 - C_m)^2 (\bar{C}_u - C_m) \frac{U_r \cos \alpha}{q_e} \quad (V-7a)$$

La forme de cette équation indique que pour une concentration en air moyenne C_m inférieure à la concentration en air d'équilibre \bar{C}_u , l'écoulement est aéré. Par contre, lorsque la concentration en air moyenne est supérieure à la concentration en air d'équilibre, l'écoulement est désaéré.

Pour un canal à pente constante, la solution analytique de l'équation (V-7a) s'obtient en faisant la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{(1 - C_m(x))^2 (\bar{C}_u - C_m(x))} = \frac{K_1}{(\bar{C}_u - C_m)} + \frac{K_2}{(1 - C_m)} + \frac{K_3}{(1 - C_m)^2}$$

avec :

$$K_1 = \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)^2}, \quad K_2 = \frac{-1}{(1 - \bar{C}_u)^2}, \quad K_3 = \frac{-1}{(1 - \bar{C}_u)}$$

ainsi, l'équation (V-7a) prend la forme suivante :

$$\frac{K_1 \cdot d C_m}{(\bar{C}_u - C_m)} + \frac{K_2 \cdot d C_m}{(1 - C_m)} + \frac{K_3 \cdot d C_m}{(1 - C_m)^2} = \frac{U_r \cdot \cos \alpha}{q_e} \cdot d x \quad (V-7b)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\frac{1}{(1 - \bar{C}_u)^2} \ln \left(\frac{1 - C_m}{\bar{C}_u - C_m} \right) - \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)(1 - C_m)} = k x + K_0 \quad (V-8)$$

$$\text{où : } k = \frac{U_r \cos \alpha}{q_e}$$

La constante d'intégration K_0 est déterminée en utilisant la condition initiale au point d'inception $C_m(x=0) = C_*$ et est donnée par :

$$K_0 = \frac{1}{(1-\bar{C}_u)} \left[\frac{1}{1-\bar{C}_u} \ln \left(\frac{1-C_*}{\bar{C}_u-C_*} \right) - \frac{1}{1-C_*} \right] \quad (V-8a)$$

Finalement l'équation (V-7a) peut être réécrite en terme adimensionnel :

$$\frac{dC_m}{dx'} = \frac{U_r h_* \cos \alpha}{q_e} (\bar{C}_u - C_m)(1 - C_m)^2 \quad (V-9)$$

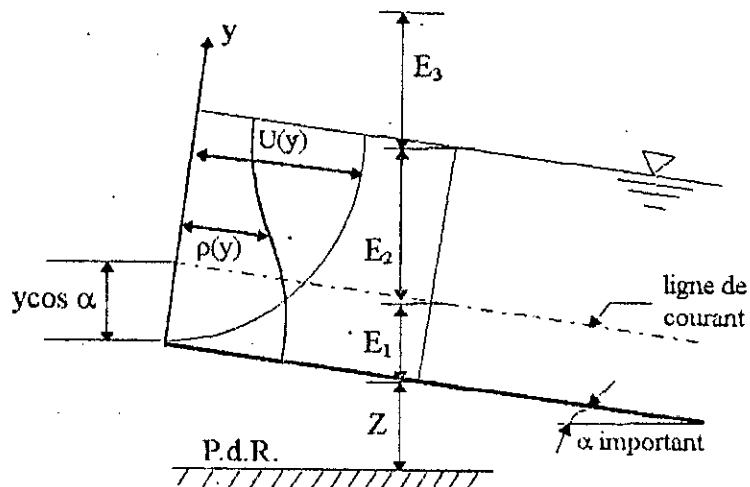
où : h_* est la profondeur de référence pour $x=0$, $x' = \frac{x}{h_*} U_r$ et q_e sont des constantes, et \bar{C}_u est une fonction de l'angle α seulement (chapitre IV).

L'équation (V-7a) est remarquable car elle permet de calculer la concentration en air moyenne C_m en fonction de la distance x au long du coursier indépendamment de la vitesse, de la rugosité et de la profondeur.

V - 3/- Equation de conservation de l'énergie :

L'équation de conservation de l'énergie est une simple extension de l'équation régissant l'écoulement graduellement varié classique (Eq. II-11) et est obtenue en considérant l'écoulement aéré comme s'il se faisait avec un fluide continu à masse volumique et à vitesse variables (fig. V-2)

fig. V-2 Ecoulement à surface libre avec variation de masse volumique et de vitesse.



Dans ce cas, l'équation d'énergie pour une ligne de courant située à une profondeur y au-dessus du radier est donnée par :

$$E(y) = y \cos \alpha + \frac{1}{\rho(y)g} \int_y^{y_{90}} \rho(y)g \cos \alpha dy + \frac{U_e^2(y)}{2g} \quad (\text{V-10})$$

Le flux total de l'énergie spécifique (watt/m) est donc :

$$E_f = \int_0^{y_{90}} \rho(y)g E(y) U_e(y) dy \quad (\text{V-11})$$

Il s'ensuit que l'énergie spécifique moyenne au niveau d'une section de l'écoulement est :

$$\bar{E}_S = \frac{E_f}{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e(y) dy} \quad (\text{V-12a})$$

dans laquelle le dénominateur désigne la puissance développée par l'écoulement au niveau d'une section. Compte tenu des relations (V-10) et (V-11), on a :

$$\bar{E}_S = \frac{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g \left[y \cos \alpha + \frac{1}{\rho(y)g} \int_y^{y_{90}} \rho(y)g \cos \alpha dy + \frac{U_e^2}{2g} \right] U_e dy}{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e dy} \quad (\text{V-12b})$$

En décomposant cette expression, on peut écrire :

$$\bar{E}_S = E_{s1} + E_{s2} + E_{s3} \quad \text{avec :}$$

$$E_{s1} = \frac{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g y \cos \alpha U_e dy}{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e dy}, \quad E_{s2} = \frac{\int_0^{y_{90}} \left[\int_y^{y_{90}} \rho(y)g \cos \alpha dy \right] U_e dy}{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e dy}$$

$$\text{et } E_{s3} = \frac{\frac{1}{2g} \int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e^3 dy}{\int_0^{y_{90}} \rho(y)g U_e dy}$$

En écrivant la masse volumique du mélange air-eau comme suit :

$$\rho(y) = \rho_e (1 - C(y)) \quad (\text{V-13})$$

les trois termes précédents s'écrivent respectivement :

$$E_{s1} = \cos\alpha \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)y U_e dy}{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy}, \quad E_{s2} = \cos\alpha \frac{\int_0^{y_{90}} \left[\int_0^{y_{90}} (1-C) dy \right] U_e dy}{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy} \quad \text{et} \quad E_{s3} = \frac{1}{2g} \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e^3 dy}{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy}$$

En supposant que le profil des vitesses vérifie :

$$q_e h_e = \int_0^{y_{90}} (1-C)y U_e dy \quad (\text{V-14})$$

et sachant que : $\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy = q_e = \bar{U}_e \cdot h_e$

on a alors :

$$E_{s1} = h_e \cos\alpha, \quad E_{s2} = \frac{\cos\alpha}{q_e} \int_0^{y_{90}} \left[\int_y^{y_{90}} (1-C) dy \right] U_e dy$$

$$E_{s3} = \frac{1}{2g} \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e^3 dy}{\bar{U}_e h_e} = \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e^3 dy}{\frac{1}{h_e} \bar{U}_e^3 h_e^3} \left(\frac{\bar{U}_e^2}{2g} \right) = \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e^3 dy}{\frac{1}{h_e^2} \left[\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy \right]^3} \left(\frac{\bar{U}_e^2}{2g} \right)$$

En posant que : $\alpha'_a = \frac{\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e^3 dy}{\frac{1}{h_e^2} \left[\int_0^{y_{90}} (1-C)U_e dy \right]^3}$ (coefficient de Coriolis) (V-15)

l'expression de l'énergie spécifique prend la forme :

$$\bar{E}_S = h_e \cos\alpha + \alpha'_a \frac{\bar{U}_e^2}{2g} + E_{s2} \quad (\text{V-16a})$$

Puisqu'en aval du point d'inception, le terme de pression hydrostatique est petit par rapport aux autres termes, l'énergie spécifique moyenne s'écrit approximativement :

$$\bar{E}_S = h_e \cos\alpha + \alpha'_a \frac{\bar{U}_e^2}{2g} \quad (\text{V-16b})$$

où : \bar{U}_e : vitesse moyenne d'eau équivalente, α : pente du canal.

h_e : hauteur d'eau équivalente.

Ainsi, cette équation nous fait rappeler l'expression de l'énergie spécifique au niveau d'une section de l'écoulement graduellement varié classique sauf que la hauteur d'eau est remplacée par la profondeur d'eau équivalente associée à l'écoulement aéré.

L'élévation de la ligne d'énergie totale est par conséquent égale à :

$$H_e = Z + h_e \cos \alpha + \alpha'_a \cdot \left(\frac{Q_e}{S_e} \right)^2 \frac{1}{2g} \quad (\text{V-17a})$$

où : Z est la côte du fond du coursier par rapport à un plan de référence fixe.

Pour un coursier de section rectangulaire, l'équation (V-17a) est réécrite :

$$H_e = Z + h_e \cos \alpha + \alpha'_a \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_e}{B h_e} \right)^2 \quad (\text{V-17b})$$

En dérivant l'équation (V-17a) par rapport à la coordonnée longitudinale x comptée à partir du point d'inception, on obtient :

$$\frac{dH_e}{dx} = \frac{dZ}{dx} + \cos \alpha \frac{dh_e}{dx} - h_e \sin \alpha \frac{d\alpha}{dx} - \frac{\alpha'_a}{g} \left(\frac{Q_e}{B h_e} \right)^2 \left[\frac{1}{h_e} \frac{dh_e}{dx} + \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right] \quad (\text{V-17c})$$

et en notant que :

$$\frac{dH_e}{dx} = -j_e \quad ; \quad \frac{dZ}{dx} = -\sin \alpha = -i \quad ; \quad q_e = \frac{Q_e}{B}$$

où : j_e désigne la pente de la ligne de charge de l'écoulement d'eau équivalent.

On a finalement :

$$\frac{dh_e}{dx} = \frac{i \left(1 + h_e \frac{d\alpha}{dx} \right) + \frac{\alpha'_a}{g} \frac{q_e^2}{h_e^2} \cdot \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} - j_e}{\sqrt{1-i^2} - \frac{\alpha'_a}{g} \cdot \frac{q_e^2}{h_e^3}} \quad (\text{V-18})$$

à noter que :

$$j_e = \frac{q_e^2 \cdot \lambda}{8gh_e^2} \left(\frac{4}{D_H} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_a}{\lambda} \right) \quad (\text{équation de Chezy exprimée en fonction de } \lambda_a) \quad (\text{V-18a})$$

avec : λ : Coefficient de perte de charge pour un écoulement non aéré.

λ_a : Coefficient de perte de charge pour un écoulement aéré.

L'équation (V-18) est une équation différentielle d'inconnue h_c où les valeurs locales de j_e et α'_a sont fonctions de la concentration en air moyenne C_m .

Remarques :

R1 : Le terme de pression hydrostatique a été négligé du fait qu'en aval du point d'inception, l'écoulement est très accéléré c'est-à-dire que les termes cinétiques l'emportent largement sur les termes de pressions ($E_{s3} \gg E_{s2}$).

R2 : Ecriture de α'_a en fonction de la concentration en air moyenne.

sachant que : $* h_c = (1 - C_m) y_{90}$, $* y' = y/y_{90}$

et en adoptant un profil puissance des vitesses, soit : $\frac{U_e}{U_{90}} = \left(\frac{y}{y_{90}}\right)^{\frac{1}{m}}$

la relation (V-15) devient :

$$\alpha'_a = (1 - C_m)^2 \frac{\int_0^1 (1 - C) y'^{\frac{3}{m}} dy'}{\left[\int_0^1 (1 - C) y'^{\frac{1}{m}} dy' \right]^3}$$

R3 : Les variations lentes des vitesses et des concentrations en air observées sur modèles et prototypes [1] suggèrent que les coefficients de perte de charge λ_a et de correction de l'énergie cinétique α'_a peuvent être utilisés comme en écoulement uniforme aéré en utilisant la valeur locale de la concentration, soit :

$$\frac{\lambda_a}{\lambda} = 0,5 \left[1 + \tanh \left(0,625 \frac{0,514 - C_m}{C_m (1 - C_m)} \right) \right] \quad (\text{V-18b})$$

et

$$\alpha'_a = -2,360 C_m^3 + 6,137 C_m^2 - 3,620 C_m + 1,810 \quad (\text{V-18c})$$

R4 : Pour le cas d'un canal de largeur et de pente constantes, l'équation (V-18) devient :

$$\frac{dh_e}{dx} = \frac{i - j_e}{h_e \sqrt{1 - i^2} - \frac{\alpha'_a}{g} q_e^2} \quad (\text{V-18d})$$

Si de plus, la largeur du canal est très importante devant le tirant d'eau ($h_e \ll B$) alors l'équation (V-18d) est réécrite :

$$\frac{dh_e}{dx} = \frac{h_e^3 i - A_1 \left(\frac{\lambda_a}{\lambda} \right) \cdot \lambda}{h_e^3 \sqrt{1 - i^2} - \alpha'_a A_2} \quad (\text{V-19})$$

où :

$$A_1 = \frac{q_e^2}{8g} ; \quad A_2 = \frac{q_e^2}{g}$$

On signale que le coefficient λ se calcule soit comme pour l'écoulement uniforme non aéré (chap. IV) et dans ce cas le coefficient de Chezy est constant, soit en utilisant l'équation (VI-17c) et dans ce cas le coefficient de Chezy est variable.

Conclusion :

Les équations (V-7) et (V-18) fournissent un système de deux équations différentielles à deux inconnues h_e et C_m , qui peut être résolu par une simple méthode numérique explicite en l'occurrence la méthode des différences finies.

La connaissance de la profondeur caractéristique h_e et de la concentration en air moyenne C_m permet de calculer en tout point :

- * la profondeur de mélange y_{90} (Eq. III-2)
- * le coefficient de perte de charge λ_a (Eq. V-18a)
- * la vitesse de référence V_{90} (Eq. IV-14a)
- * les constantes d'intégration β et γ pour chaque section de l'écoulement (Eq. IV-3 et IV-8)
- * les profils de vitesses et de concentrations en air
- * la concentration en air près de la paroi solide (Eq. IV-9)

Il est à signaler que les résultats qui seront obtenus dépendent critiqueusement des valeurs de la

vitesse d'ascension des bulles d'air variant en fonction du diamètre de ces dernières. [2]

De plus les équations (V-7) et (V-18) ne sont valides que pour des écoulements graduellement variés avec une distribution de pression quasi-hydrostatique.

Par ailleurs, l'équation (V-7) dépend aussi des coefficients K_e et K_r . Pour une première approximation, il convient d'utiliser $K_e = K_r = 1$.

V - 5/- Références :

[1] H. CHANSON

" Drag reduction in open channel flow by aeration and suspended load "

Journal of Hydraulic research, vol 32, N°1 (1994).

[2] R. COMOLET

" Vitesse d'ascension d'une bulle de gaz isolée dans un liquide un peu visqueux. "

Journal de mécanique appliquée, Vol 3 N°2 (1979).

[3] I. R WOOD

" Air water flows "

21 St IAHR Congress, Melbourne, Australia, Keynote address (Aout 1985).

Chapitre 6
Implantation
numérique

Implantation numérique

VI - 1/- Introduction :

Les sciences de l'Ingénieur permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations différentielles. Ces dernières ne fournissent pas d'informations directes pourront intéresser l'Ingénieur. Soit par exemple la concentration $C_m(x)$ et la profondeur du mélange eau-air Y_{90} de l'écoulement aéré.

Il existe cependant des techniques dites numériques associées à des conditions aux limites adéquates permettant de résoudre des équations différentielles plus ou moins complexes et d'en avoir une valeur approchée de chaque paramètre physique désiré. L'intérêt fondamental des méthodes numériques consiste à réduire une équation différentielle en une approximation de termes d'équation algébrique .

L'une des voies par laquelle cette réduction peut s'accomplir est : la méthode des différences finies. Les notions de base de cette méthode seront traitées au début de ce présent chapitre et seront ensuite utilisées dans la réduction en termes d'équations algébriques des équations (II-21), (V-7a) et (V-19).

VI - 2/- Méthodes des différences finies :

Parmi les ancienne méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations aux dérivées totales (resp: partielles), la méthode des différences finies peut s'adopter aux problèmes linéaires et non linéaires. Cette méthode est basée principalement sur les étapes suivantes :

VI.2.1. Discrétisation :

C'est l'identification d'un nombre fini de points à l'intérieur du domaine espace - temps à lequel on s'intéresse. Ces points sont appelés noeuds et c'est en ces positions que les approximations de la solution exacte sont calculées. La définition de la position de chaque noeud est dite étape de discrétisation.

VI.2.2. Approximation :

Ensuite, les dérivées figurant dans l'équation différentielle sont remplacées par des

approximations de différences finies. Ces dernières sont écrites en terme d'évaluations nodales de fonction inconnue. Cette étape appelée, d'approximation engendre une série d'équations algébriques avec des valeurs nodales discrètes comme inconnues.

Si l'opérateur différentiel d'origine est linéaire, le système algébrique résultant sera linéaire aussi, sinon les équations algébriques peuvent être non linéaires.

VI.2.3. Résolution :

La dernière étape entraîne la solution du système d'équations algébriques résultant associé aux conditions aux limites choisies.

La procédure décrite ci-dessus fournit une méthodologie de calcul d'une solution approchée. Celle-ci doit être démontrablement une bonne approximation de la solution exacte.

Cette considération conduit à se poser la question importante suivante :

Qu'est - ce - qu'on entend par " bonne approximation " ?

Soit u la solution exacte et U l'approximation par différence finie de U .

Puisque la définition de bonne approximation est toujours subjective, une définition mathématique générale peut être proposée comme :

$$\| u - U \| < \varepsilon \quad (VI - 1)$$

où : $\| \cdot \|$ désigne la norme et ε est choisi arbitrairement et suffisamment petit.

Voir qu'une solution est une bonne approximation n'est pas trivial parce que même si ε est donné, la solution exacte u est inconnue (si u était disponible, l'approximation donnée par U serait inutile).

Cela dit, les approximations adéquates nécessitent une analyse détaillée de chacune des trois étapes (discrétisation, approximation, résolution).

VI - 3/- Notation des opérateurs des différences finies :

Une série standard de symboles appelés opérateurs de différences finies est élaborée pour représenter les relations algébriques de base rencontrées dans les approximations par différences

finies. La plupart des opérateurs des différences sont définis comme suit : [1]

1- Opérateur de différence avant, Δ : $\Delta U_i = U_{i+1} - U_i$

2- Opérateur de différence arrière, ∇ : $\nabla U_i = U_i - U_{i-1}$

3- Opérateur de différence centrale, δ : $\delta U_i = U_{i+1/2} - U_{i-1/2}$

4- Opérateur moyen, μ : $\mu U_i = \frac{1}{2} \left(U_{i+\frac{1}{2}} + U_{i-\frac{1}{2}} \right)$

5- Opérateur d'affectation, E : $E U_i = U_{i+1}$

6- Opérateur d'identité, I : $I U_i = U_i$

VI - 4/- Approximations des dérivées en une dimension :

Soit la définition classique de la dérivée d'une fonction continu $u(x)$:

$$\frac{d u(x)}{d x} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{u(x+h') - u(x)}{h'} \quad (\text{VI-2})$$

Une approximation par différence finie de $\frac{d u}{d x}$ peut être vue telle que l'équation (VI-2) soit dépourvue du procédé de la limite. Donc une estimation de la dérivée $\frac{d u}{d x}$ peut être obtenue arithmétiquement par la fonction $u(x)$.

En outre, dans la méthode des différences finies, les positions x et $x+h'$ sont toujours choisies en coïncidence avec des points noeuds prédéterminés. Par conséquent, l'approximation par différences finies de la dérivée totale $\frac{d u}{d x}$ peut s'écrire :

$$\left. \frac{d u}{d x} \right|_{x_i} \cong \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{x_i+h - x_i} = \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} \quad (\text{VI-3a})$$

où : $u_i = u(x_i)$, $U_{i+1} = U(x_{i+1})$, x_i étant une position fixe et $x_{i+1} \cong x_i + h$. Les points x_i et x_{i+1} sont les points noeud.

Le membre de droite de l'équation (VI-3a) fournit une approximation par différences finies avant de (du/dx) évaluée au noeud x_i .

Plusieurs autres approximations possibles peuvent être trouvées, par exemple :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} \quad (\text{Différence arrière}) \quad (\text{VI-3b})$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\delta(\mu u_i)}{\delta(\mu x_i)} \quad (\text{Différence centrale}) \quad (\text{VI-3c})$$

où : x_{i-1} est le noeud gauche par rapport à x_i et $U_{i-1} = U(x_{i-1})$.

Ces différentes approximations sont illustrées géométriquement sur la figure (VI-1).

Des approximations similaires peuvent être écrites pour des dérivées d'ordre élevé. Par exemple, celle de la dérivée seconde de $u(x)$ s'écrit :

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} \cong \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} = \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad (\text{VI-6a})$$

où : $x_{i\pm 1/2}$ représente la position du point milieu de x_i et $x_{i\pm 1}$

Si l'espacement entre noeuds est constant soit : $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x$, l'équation (VI-6a) prend la forme :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \cong \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{VI-4b})$$

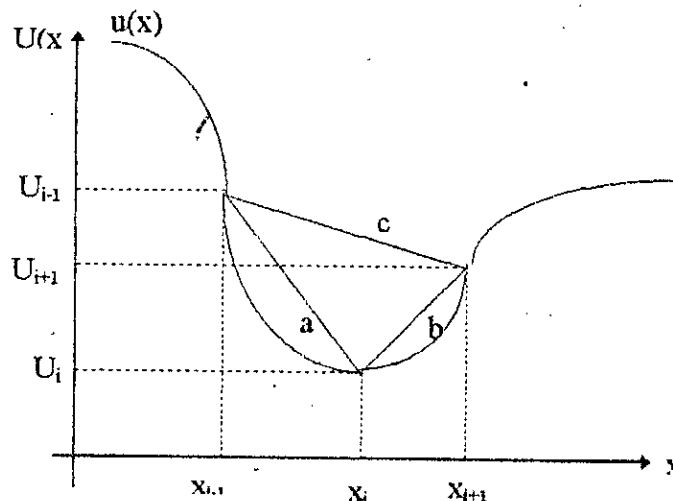


fig. VI-1 Interprétation géométrique des approximations par différences finies

VI - 5/- Erreur de troncature et consistance :

L'analyse d'approximation par différences finies peut se faire en considérant le développement de la série de Taylor en une dimension au voisinage du noeud x_i .

Soient x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , des points d'un intervalle $[a,b]$ sur lequel la fonction $U(x)$ est indéfiniment différentiable, on peut écrire :

$$U(x_{i+1}) = U_{i+1} = U_i + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} (x_{i+1} - x_i) + \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots \quad (\text{VI - 5a})$$

$$U(x_{i-1}) = U_{i-1} = U_i + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} (x_{i-1} - x_i) + \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} + \dots \quad (\text{VI - 5b})$$

La soustraction de U_i des deux membres de l'équation (VI-5a) donne :

$$U_{i+1} - U_i = \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} (x_{i+1} - x_i) + \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots$$

d'où

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} = \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} - \dots = \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} - \left(\frac{\Delta x_i}{2} \right) \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} - \dots \quad (\text{VI - 5c})$$

Une comparaison des équations (VI-3a) et (VI-5c) indique que l'approximation par différences finies néglige les termes :

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} - \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} = - \left(\frac{\Delta x_i}{2} \right) \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x_i} - \dots = E.T_{(a)} \quad (\text{VI - 6a})$$

L'approximation par différences finies tronque les séries (VI-5c), conduisant ainsi à l'erreur de troncature (E.T) définie comme étant la différence entre la dérivée première et son approximation par différences finies. L'équation (VI-6a) définit l'erreur de troncature, $E.T_{(a)}$, associée à l'approximation (VI-3a). (L'erreur de troncature est due aux termes d'ordre élevé dans la série de Taylor pouvant être négligés dans l'approximation par différences finies). Pour l'approximation (VI-3b) et (VI-3c), on peut écrire respectivement :

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_i} - \frac{\nabla U_i}{\nabla x_i} = E.T_{(b)} = \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} - \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (\text{VI-6b})$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x_i} - \frac{\delta(\mu u_i)}{\delta(\mu x_i)} = E.T_{(c)} = -\frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{d^3 u}{dx^3}\Big|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^4}{5!} \frac{d^5 u}{dx^5}\Big|_{x_i} \quad (\text{VI-6c})$$

où $E.T_{(b)}$ et $E.T_{(c)}$ désignent respectivement l'erreur de troncature associées aux approximations (VI-3b) et (VI-3c).

Lorsque l'espacement des noeuds, Δx , devient arbitrairement petit, l'expression de la différence finie devient proche de la dérivée; c'est son approximation.

Par conséquent, l'erreur de troncature doit disparaître lorsque $\Delta x \rightarrow 0$. Quand c'est le cas, l'approximation par différences finies est dite : consistante.

La consistance est définie donc par la condition :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} E.T = 0 \quad (\text{VI-7})$$

VI - 6/- Détermination du point d'inception :

On s'intéresse dans ce paragraphe à la localisation par deux méthodes du point de début d'entraînement d'air sur un coursier d'évacuateur de crues.

La première repose sur la discrétisation de l'équation (II-21) dite de Bresse à base d'un schéma numérique de différences finies utilisant, bien sûr, les approximations développées précédemment. Pour confirmer les résultats de celle-ci, on utilisera le procédé analytique de Bresse que l'on généralisera à l'occasion.

A noter enfin, que l'on raisonnera particulièrement pour un canal de grande largeur avec une pente constante importante.

VI.6.1. Discrétisation de l'équation différentielle de Bresse:

On rappelle à priori que l'équation différentielle de Bresse pour un canal à pente importante est donnée par:

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \right) \cdot \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \quad (\text{VI-8})$$

En adoptant une approximation par différences finies avant associé à un pas de discrétisation Δx constant et très petit, la dérivée totale du membre de gauche s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} \cong \frac{h_{j+1} - h_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta h_j}{\Delta x} \quad (\text{VI-9})$$

$$\text{d'où : } h_{j+1} - h_j = \Delta x \cdot \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \frac{h_j^3 - h_u^3}{h_j^3 - h_c^3}$$

$$\text{Donc : } h_{j+1} = h_j + \Delta x \cdot \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \frac{h_j^3 - h_u^3}{h_j^3 - h_c^3} \quad (\text{VI-10})$$

Cette équation algébrique doit être résolue en lui associant la condition initiale (section de contrôle) : $h_j(x=0) = h_0 = h_c$

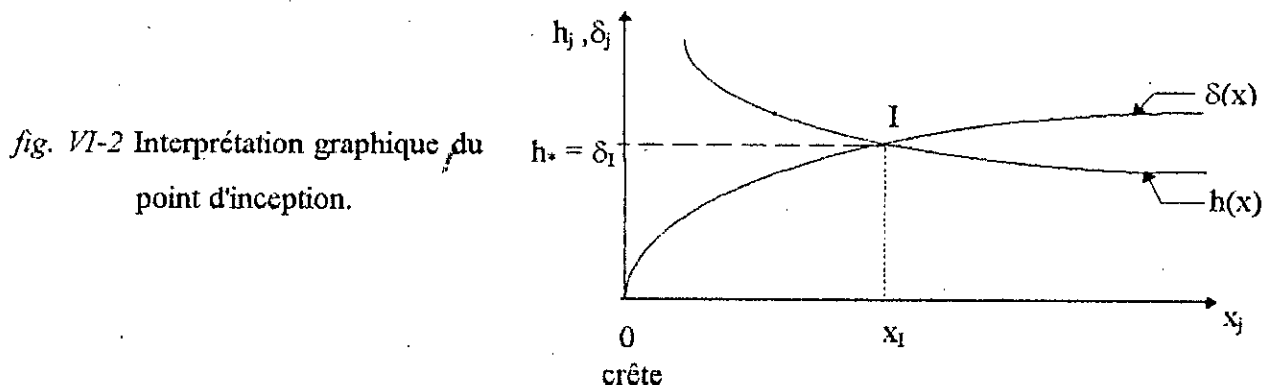
L'expression régissant le développement de la couche limite sous sa forme discrétisée est :

$$\delta_j = 0,012 \cdot i^{-0,11} \cdot k_s^{0,10} \cdot x_j^{0,9} \quad (\text{VI-11})$$

Chaque épaisseur δ_j est évaluée après avoir attribué à l'abscisse x_j une valeur déterminée.

La résolution du système composé des deux équations (VI-10) et (VI-11) conduira à la position du point d'inception.

Une autre réflexion, cette fois-ci, consiste à reporter sur un graphique les valeurs du tirant d'eau h_j et de l'épaisseur de la couche limite δ_j . Le point de début d'entraînement d'air correspond au point d'intersection des deux courbes (fig. VI-2)



VI.6.2. Intégration de l'équation différentielle de Bresse :

Pour intégrer l'équation (VI-3), on effectue la même analyse que celle de Bresse en considérant, cependant, que la pente du canal n'est pas faible.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \cdot \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \Rightarrow \frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \cdot dx = \frac{h^3 - h_c^3}{h^3 - h_n^3} \cdot dh$$

$$\frac{i dx}{\sqrt{1-i^2}} = \left[1 + \frac{h_n^3 - h_c^3}{h^3 - h_n^3} \right] dh = dh + \left[1 - \frac{h_c^3}{h_n^3} \right] \frac{dh}{\frac{h^3}{h_n^3} - 1} \quad (\text{VI-12a})$$

Posons : $\frac{h}{h_n} = y_B$

d'où : $dh = h_n dy_B$

Donc : $\frac{i}{\sqrt{1-i^2}} dx = h_n dy_B + h_n \left[1 - \frac{h_c^3}{h_n^3} \right] \frac{dy_B}{y_B^3 - 1}$ (VI-13)

Posons : $\Phi(y_B) = - \int \frac{dy_B}{y_B^3 - 1}$

En intégrant l'équation entre deux sections d'abscisses x_j et x_{j+1} à des profondeurs h_j et h_{j+1} , on a :

$$\frac{i}{\sqrt{1-i^2}} \cdot \frac{x_j - x_{j+1}}{h_n} = \frac{(h_j - h_{j+1})}{h_n} + \left(1 - \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^3 \right) \left[\Phi \left(\frac{h_{j+1}}{h_n} \right) - \Phi \left(\frac{h_j}{h_n} \right) \right] \quad (\text{VI-14})$$

avec l'intégrale de Bresse : [2]

$$\Phi(y_B) = \frac{1}{6} \cdot \text{Ln} \frac{y_B^2 + y_B + 1}{(y_B - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{arc cotg} \frac{2y_B + 1}{\sqrt{3}} \quad (\text{VI-15})$$

Bresse a d'ailleurs dressé une table qui donne la valeur de la fonction Φ pour les différentes valeurs de la variable y_B .

VI.6.3. Calcul de la courbe de remous par la méthode de Bresse :

Données : Le débit Q , la pente du coursier α , la rugosité équivalente k_s .

Étapes de calcul :

- On calcul d'abord h_c et h_n par les équations (II-19) et (II-20)
- On écrit la condition initiale relative à la section de contrôle (crête) $h(x=0) = h_0 = h_c$

- On utilise la relation (VI-15) pour calculer $\Phi\left(\frac{h_0}{h_n}\right)$
- On se donne une valeur arbitraire h_1 de la profondeur immédiatement proche de h_0 ($h_0 > h_1$)
- On utilise à nouveau l'équation (VI-15) pour évaluer $\Phi\left(\frac{h_1}{h_n}\right)$
- On porte toutes ces valeurs dans l'équation (VI-14) et on obtient $x_0 - x_1$, c'est-à-dire l'abscisse de la section de profondeur h_1 , comptée à partir de la crête de l'évacuateur.
- On recommence les mêmes calculs à partir de x_1 et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre de profondeurs calculées soit suffisant pour déterminer le point d'inception.

Remarques :

R1: La précision obtenue est d'autant plus meilleure que les abscisses x_0 et x_1 sont plus rapprochées, c'est-à-dire que la différence $|h_0 - h_1|$ est plus faible.

Cette remarque est impérative dans notre cas, surtout au voisinage de la crête.

R2: La ligne d'eau se calcule de l'amont (section de contrôle) vers l'aval à cause du régime torrentiel régnant entre la crête et le point d'inception.

VI - 7/- Modélisation numérique des équations différentielles de l'écoulement graduellement varié aéré :

Après avoir déterminé le tirant d'eau, h_* , au point de début du phénomène d'entraînement d'air, on se propose dans ce paragraphe de modéliser numériquement les deux équations différentielles de base (Eqs. VI-9 et VI-19) dont la résolution permet d'évaluer la concentration en air moyenne $C_m(x)$ et le tirant d'eau équivalent $h_c(x)$ le long de la région de l'écoulement graduellement varié.

Cette double information ($C_m(x)$, $h_c(x)$) est utilisée pour tirer le maximum de conclusions d'ordre pratique. On peut citer au passage :

- * les sections critiques à l'égard de l'érosion par cavitation.
- * Dimensionnement des parois latérales.

VI.7.1. Concentration en air moyenne :

Bien que l'équation (VI-7a) admet une solution analytique, on a préféré la résoudre numériquement par un schéma aux différences finies pour diverses raisons, en particulier :

la solution analytique (Eq. VI-8) ne fournit pas de réponse directe, c'est-à-dire la concentration $C_m(x)$ en chaque section de l'écoulement, à cause de sa complexité.

En effet, puisque pour déduire le paramètre $C_m(x)$ pour une seule section, il faut procéder par itérations sans toute fois avoir une idée précise sur l'ordre de grandeur de la concentration initiale à donner pour garantir une convergence rapide. Il serait raisonnable de procéder par voie numérique.

VI.7.1.1/ Dicrétisation de l'équation de la conservation de la masse pour l'air :

Pour contourner la contrainte analytique sous tous ses aspects, une approximation par différences finies arrières à été choisie. Pour assurer la consistance de ce modèle, on a adopté un pas de discrétisation constant et très réduit ($\Delta x \cong 10^{-3}$ m). Ainsi la solution numérique convergera fort probable vers la solution analytique.

On rappelle que l'équation différentielle d'inconnue $C_m(x)$, à vouloir discrétiser est la suivante :

$$\frac{d C_m(x)}{d x} = (1 - C_m(x))^2 (\bar{C}_u - C_m(x)) \frac{U_r \cos \alpha}{q_e} \quad (\text{VI-7a})$$

L'équation (VI-3b) permet d'écrire:

$$\frac{d C_m(x)}{d x} \cong \frac{C_{mj} - C_{mj-1}}{x_j - x_{j-1}} = (1 - C_{mj-1})^2 (\bar{C}_u - C_{mj-1}) \frac{U_r \cos \alpha}{q_e}$$

soit ;

$$C_{mj} = C_{mj-1} + \Delta x * (1 - C_{mj-1})^2 (\bar{C}_u - C_{mj-1}) \frac{U_r \cos \alpha}{q_e} \quad (\text{VI-16})$$

Cette équation exige, bien sûr, une concentration initiale C_* qui n'est que la concentration en air moyenne au point d'inception : $C_m(x=0) = C_*$, et une concentration limite due au terme $(\bar{C}_u - C_m)$ représenté par la concentration en air moyenne dans la région de l'écoulement uniforme; $C_m(x = x_{cnif}) = \bar{C}_u$. (fig VI-3)

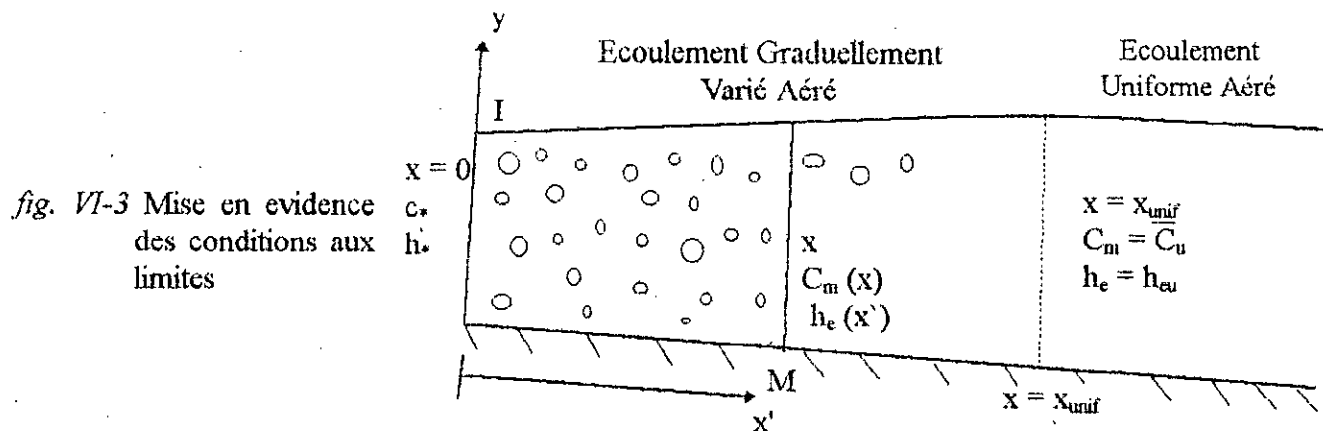


fig. VI-3 Mise en évidence des conditions aux limites

VI.7.2. Profondeur d'eau pure :

La connaissance de la profondeur d'eau pure équivalente $h_e(x)$ définie au chapitre III en chaque section de l'écoulement est d'une importance capitale surtout lorsqu'on sait que c'est un paramètre indispensable pour le calcul de la hauteur réelle du mélange air-eau.

Cette dernière, rappelons le, met en évidence le gonflement de la lame d'eau du à l'insufflation de l'air atmosphérique dans l'écoulement, et qui devra être pris en compte pour le dimensionnement des murs latéraux de tout coursier sujet à un entraînement d'air.

Ceci dit, on se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle (VI-19) conformément au même modèle numérique utilisé pour le calcul de la concentration moyenne.

VI.7.2.1/ Discretisation de l'équation de la conservation de l'énergie :

L'équation de la conservation de l'énergie pour un canal rectangulaire de grande largeur et de pente constante, développée au chapitre V, s'écrit :

$$\frac{dh_e(x)}{dx} = \frac{i h_e^3 - A_1 \left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right) \cdot \lambda}{\sqrt{1-i^2} \cdot h_e^3 - \alpha'_a A_2} \tag{VI-19}$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{q_e^2}{8g} \\ A_2 = \frac{q_e^2}{g} \end{cases}$$

L'approximation par différences finies arrières du terme $\frac{dh_e}{dx}$, transforme l'équation (VI-19) en:

$$h_{ej} = h_{ej-1} + \Delta x \frac{i h_{ej-1}^3 - A_1 \left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)_j \lambda_{j-1}}{\sqrt{1-i^2} * h_{ej-1}^3 - \alpha'_{aj} A_2} \quad (\text{VI-17})$$

Les termes implicites α'_{aj} , $\left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)_j$ et λ_{j-1} sont donnés respectivement par les relations ci-dessous :

$$\alpha_{aj} = -2,360 C_{mj}^3 + 6,137 C_{mj}^2 - 3,620 C_{mj} + 1,810 \quad (\text{VI-17a})$$

$$\left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)_j = 0,5 \left[1 + \tanh \left(0,625 \cdot \frac{0,514 - C_{mj}}{C_{mj} (1 - C_{mj})} \right) \right] \quad (\text{VI-17b})$$

$$\lambda_{j-1} = 0,25 \left[\log \left(\frac{0,0833 k_s}{h_{ej-1}} + \frac{0,096 v}{h_{ej-1} \sqrt{i h_{ej-1}}} \right) \right]^{-2} \quad (\text{VI-17c})$$

dans lesquelles la concentration C_{mj} est évaluée à chaque étape de calcul par l'équation discrétisée (VI-16).

A noter aussi que le processus de calcul, (VI-17) exige à son tour une hauteur h_{j-1} initiale :

$$h_{ej-1} (x=0) = h_* \quad (\text{VI-17d})$$

h_* : étant la hauteur d'eau au point d'inception évaluée au paragraphe (VI.6.3.).

La prise en compte de cette condition initiale et la combinaison de toutes les relations indiquées permettent de calculer la profondeur d'eau $h_e(x)$ en tout point de l'écoulement.

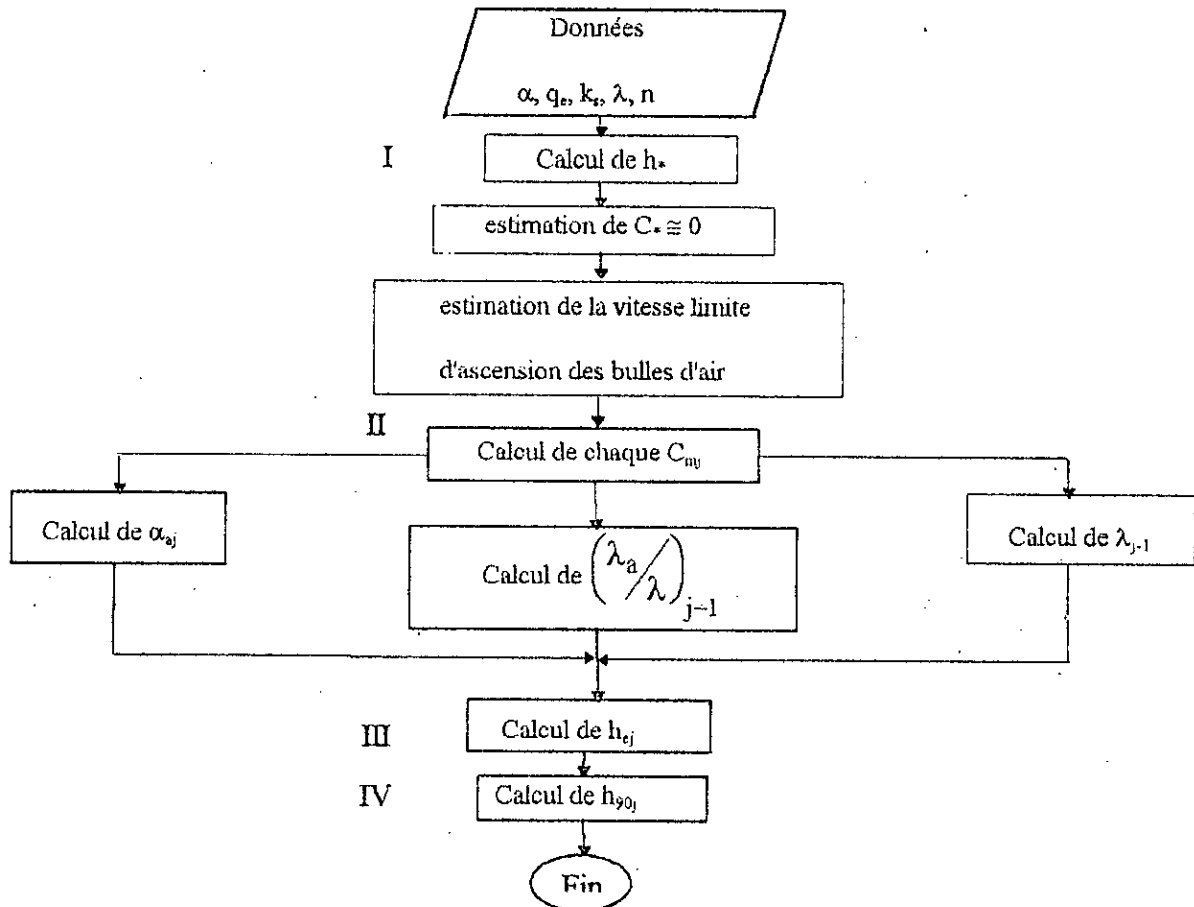
Par la suite la hauteur caractéristique du mélange se déduit par l'expression :

$$h_{90j} = \frac{h_{ej}}{1 - C_{mj}} \quad (\text{VI-18})$$

Conclusion :

Pour résumer une fois de plus les différentes étapes de calcul numérique, on présente

l'organigramme simplifié suivant :



Organigramme des étapes de calcul numérique

VI - 8/- Références :

[1] A . BANAT

" *Finit difference method* "

Polycopier de methodes numériques (1990).

[2] M . CARLIER

" *Hydraulique générale et appliquée* "

Edition Eyrollds, p. 374 (1980).

Chapitre 7
Résolution et
applications

Résolution et applications

VII - 1/- Introduction :

Pour le chercheur, l'outil informatique se révèle toujours intéressant pour la concrétisation des paramètres physiques de son étude. Cependant, la qualité de tout programme élaboré dépend de la facilité de son exécution donc de sa souplesse. Pour rendre cette présente étude opérationnelle, ce chapitre résume, complète et concrétise toutes les informations contenues dans les parties précédentes sous forme d'un programme informatique.

Toutes les formulations ainsi que toutes les équations discrétisées associées à des conditions aux limites ont été donc résolues, programmées puis utilisées à des cas pratiques.

Afin de mettre à l'épreuve la qualité des résultats issus du déroulement du programme évoqué ci-dessus, deux coursiers d'évacuateurs de crues sont considérés, à savoir :

- Evacuateur de crues d'Aviémore (nouvelle Zelande).
- Modèle réduit conçu dans le laboratoire de Meishan (Chine).

Une comparaison avec les résultats expérimentaux mettra en relief les critiques et les recommandations d'ordre pratique.

VII - A/- Description du programme :

VII.A.1. Caractéristiques générales :

Notre programme baptisé " aération naturelle " a été élaboré en langage FORTRAN 77 associé à un compilateur très rapide F77L3 installé sur un micro-ordinateur de type 486DX2-S.

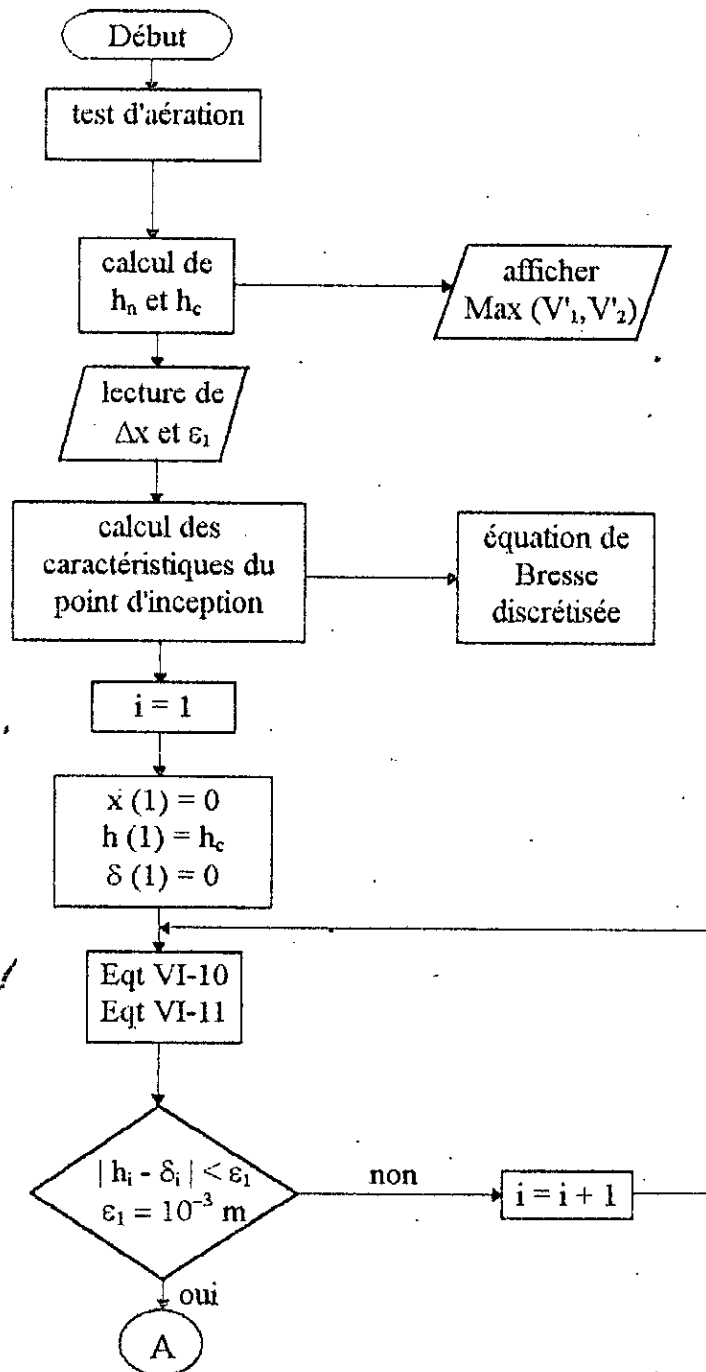
Doté de plusieurs menus orientant à chaque fois l'utilisateur, notre système est très facile à utiliser. En tenant compte des formulations proposées lors de l'étude théorique et numérique, il fournit une évaluation analytique des différents paramètres caractéristiques de l'écoulement aéré avec ses deux types. De cette manière, l'utilisateur pourra simuler plusieurs possibilités de coursiers sur ordinateur, avant même de lancer l'opération de réalisation de son projet.

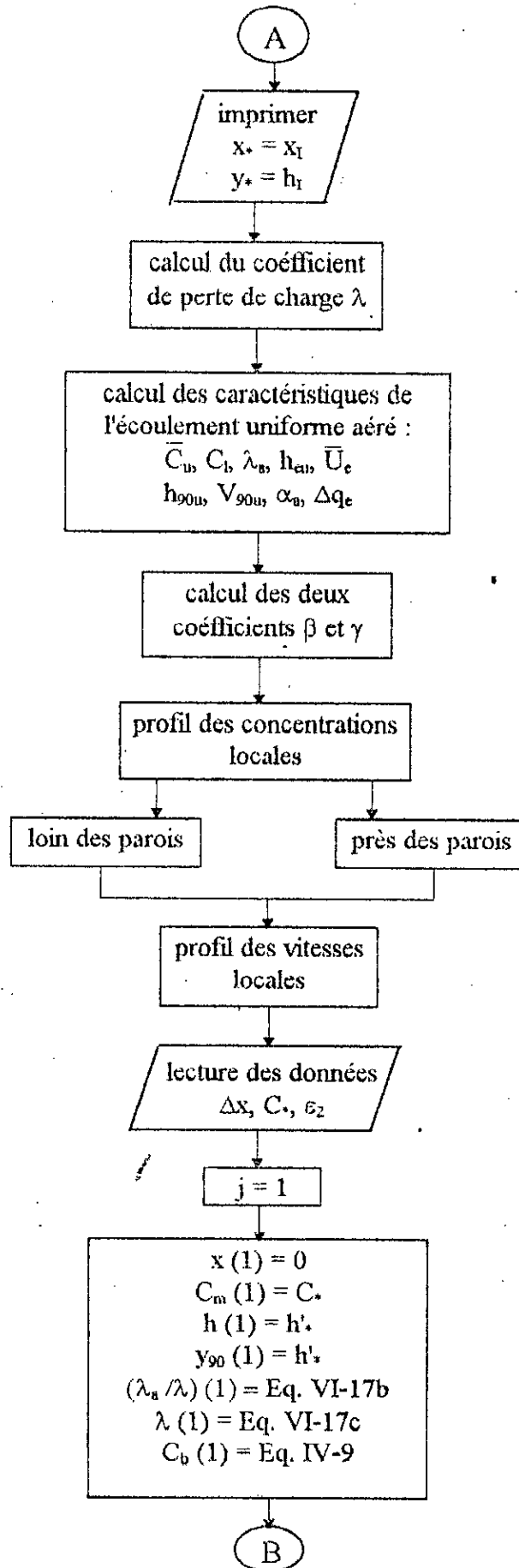
La souplesse de ce programme permet, par ailleurs, grâce à son caractère conversationnel

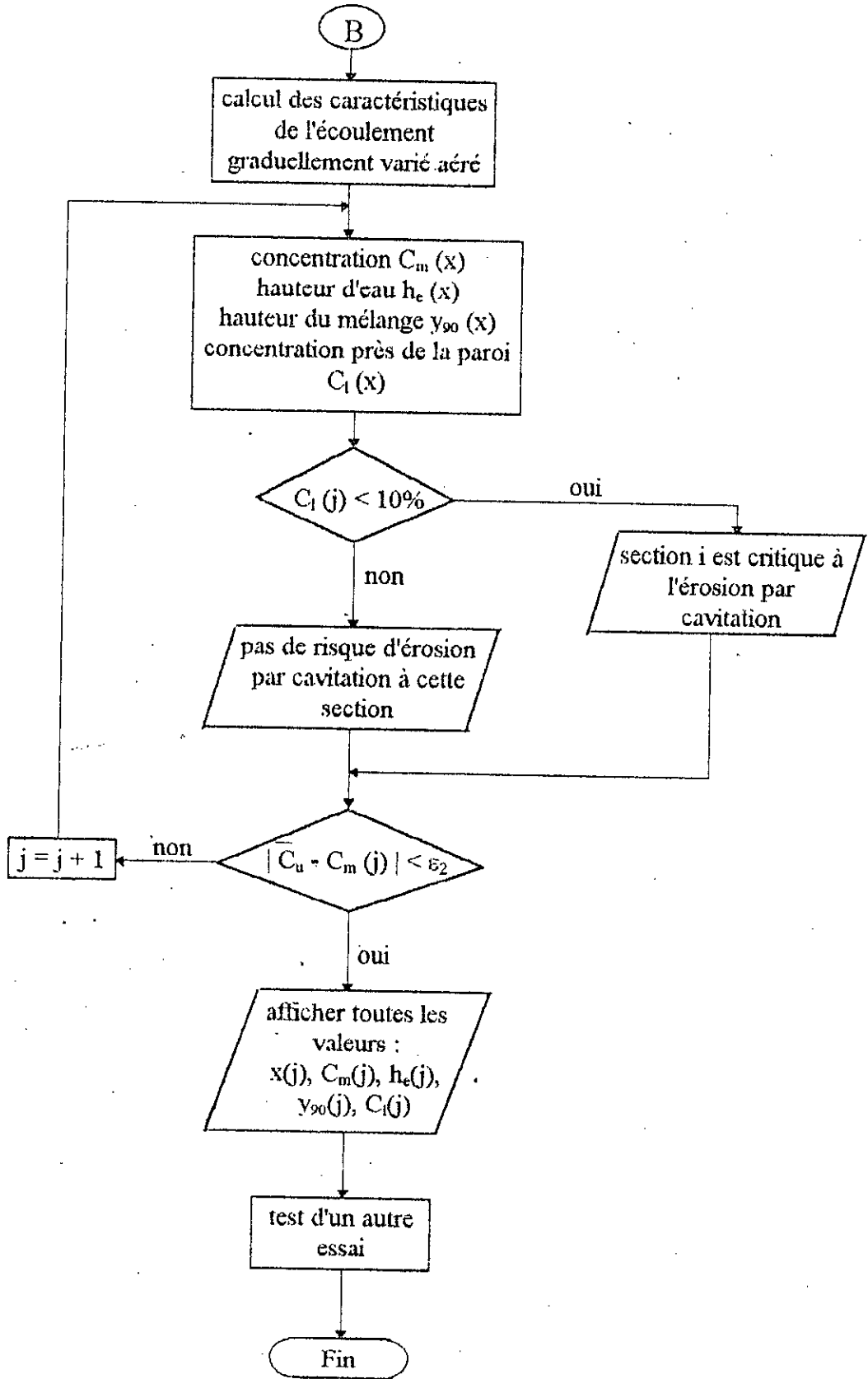
l'introduction de données par l'utilisateur en lui laissant une liberté de choix et la possibilité de faire d'autres essais pour une même étape de calcul sans forcément passer par les autres.

VII.A.2. Fonctionnement du programme :

Le fonctionnement du programme est mis en évidence par les principales étapes de calcul présentées sur l'organigramme suivant :







Organigramme général des étapes de calcul

VII - B/- Application aux coursiers larges :

VII.B.1. Coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore (N.Z) :

VII.B.1.1. Présentation :

Le coursier du prototype de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore situé en Nouvelle Zelande est un canal rectangulaire large de pente raide et constante. C'est sur ce coursier que CAIN, 1978, a effectué des mesures expérimentales sur le phénomène d'entraînement d'air. Ces caractéristiques se résument comme suit : [1]

* Pente : 45° , rugosité : $K_s = 1 \text{ mm}$ (béton de moyenne qualité), débits d'essai par unité de largeur : $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$ et $3,15 \text{ m}^2/\text{s}$.

Les mesures de concentrations moyennes et de hauteurs du mélange réalisées au niveau de cinq stations de mesure sont récapitulées dans le tableau 1 de l'annexe B.

VII.B.1.2. Localisation du point d'inception :

La position du point de début d'entraînement d'air sur le coursier d'Aviémore a été déterminé pour les débits unitaires $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$ et $q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$ respectivement.

L'intersection de la ligne d'eau calculée par l'équation (VI-10) et de la couche limite (Eq. VI-11) fournit le point d'inception, marquant le début du phénomène d'entraînement d'air sur ce coursier.

Ainsi, les deux figures (VII-1) et (VII-2) indiquent la position de ce point particulier par rapport à la crête du déversoir. Pour le débit $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$, ce point se situe à $x_i = 15,40 \text{ m}$ de la crête où la profondeur de l'écoulement est de $h_i = 0,170 \text{ m}$.

Par ailleurs, pour le débit $q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$, l'entraînement d'air ne commence qu'à partir de $x_i = 18,60 \text{ m}$ là où règne un tirant d'eau de $h_i = 0,187 \text{ m}$.

VII.B.1.2.1. Constatations et interprétation :

Pour une rugosité et une pente constante, le point du début du phénomène d'aération superficielle s'éloigne de la crête avec l'augmentation du débit déversé.

Du moment que la largeur est fixe, il est évident que lorsque le débit croit, les hauteurs d'eau en aval de la crête croient aussi. Sachant que l'épaisseur de la couche limite est très peu sensible aux variations du débit (Eq. VII-2), il s'en suit qu'un parcours supplémentaire est nécessaire pour voir enfin la lame d'eau se contracter suffisamment pour rejoindre la couche limite turbulente (fig. VII-1) donnant ainsi naissance à un nouveau phénomène hydraulique qui est l'entraînement d'air.

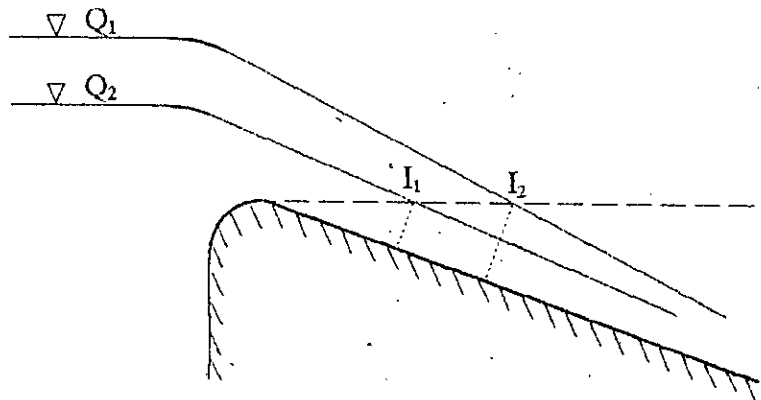


Fig. VII-1 Eloignement du point d'inception de la crête avec l'augmentation du débit déversé.

De cette façon, le point d'inception s'éloigne d'autant plus que le débit déversé croit. Dans ces cas là, le coursier bénéficierait moins de l'air atmosphérique pour contrer l'érosion par cavitation. Il s'en suit logiquement que plus le point d'inception est proche de la crête du déversoir et plus les dégâts d'érosion se verront amortir notamment dans les zones où les lignes de courant sont susceptibles de se courber.

- Il faut savoir qu'il est possible de calculer la position et la hauteur d'eau au point d'inception par un calcul analytique directe. Ceci se fait selon les étapes suivantes :
 - On calcule plusieurs épaisseurs de la couche limite δ_i , par l'équation (VI-11) pour différentes positions mesurées par rapport à la crête du déversoir.
 - On calcule en parallèle plusieurs tirant d'eau h_i (Eq. VI-10).
 - On en forme donc trois vecteurs; Positions, hauteurs et épaisseurs.
 - Par un programme, on compare les éléments des deux derniers vecteurs jusqu'à ce que la différence $|h_i - \delta_i|$ soit infiniment petite. En général, on peut se contenter seulement de

deux chiffres après la virgule soit :

$$| h_i - \delta_i | < 10^{-2} \text{ m}$$

- On affiche, enfin, les résultats finaux.

VII.B.1.3. Fonction d'entraînement d'air :

On se rappelle sûrement que l'intégration de l'équation (V-7a) a généré l'expression (V-8) dont le membre de gauche est une fonction de la concentration moyenne en air. Celle-ci est dite fonction d'entraînement. L'idée qui surgit consiste en première étape à remplacer chaque concentration expérimentale dans cette fonction afin de voir la nature de la liaison qui la lie éventuellement à la distance parcourue par l'écoulement aéré. Le degré de cette relation réciproque est d'emblée confirmé par le calcul du coefficient de corrélation défini par la formule:

$$r = \frac{\sigma_{XF}}{\sigma_X \cdot \sigma_F} \quad (\text{VII - 1})$$

avec dans notre cas :

$$\sigma_{XF} = \frac{1}{p} \sum_i x_i \cdot F_i - \bar{x} \cdot \bar{F} \quad (\text{VII - 1a})$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{p} \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (\text{VII - 1b})$$

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{p} \sum_i F_i^2 - \bar{F}^2 \quad (\text{VII - 1c})$$

p , \bar{x} et \bar{F} désignent respectivement le nombre de concentration moyenne en air expérimentale, la position moyenne des stations de mesure et la fonction d'entraînement moyenne correspondante.

On rappelle, comme même, que plus $r \rightarrow 1$ et plus les deux variables F_i , x_i sont liées par une relation de dépendance affine.

VII.B.1.3.1. Constatations et interprétations :

La figure (VII-3) montre que la relation entre la fonction d'entraînement $F(\text{Cm})$ et la distance x pour un débit unitaire de $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$ est une relation de dépendance affine

confirmée par un coefficient de corrélation $r = 0,996$. Cela signifie que la fonction $F(C_m)$ du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore est linéairement dépendante de la distance parcourue par l'écoulement aéré conformément à l'équation (V-8).

Dans le but d'avoir un ordre de grandeur de la vitesse limite d'ascension des bulles d'air, U_r , les points expérimentaux issus des stations de mesure 501 jusqu'à 505 ont été approchés par une droite ayant pour équation :

$$F(C_m) = 0,145 x + 0,710 \quad (\text{VII} - 2)$$

La comparaison des deux équations (V-2) et (VII-8) montre que pour ce débit, la vitesse d'ascension U_r est telle que :

$$U_r = \frac{0,145 \cdot q_e}{\cos \alpha} \approx 0,46 \text{ m/s}$$

Ce raisonnement permet d'estimer la valeur de la vitesse U_r , jusque là inconnue, sans avoir besoin de connaître l'ordre de grandeur du diamètre des bulles d'air s'échappant de l'écoulement.

La figure (VII-4) indique une fois de plus que le raisonnement déjà fait au chapitre V était visiblement plausible quant à la nature de la dépendance de la fonction d'entraînement avec la distance x . Il s'agit bien d'une liaison linéaire représentée par la droite d'équation :

$$F(C_m) = 0,083 x + 0,900 \quad (\text{VII} - 3)$$

Celle-ci indique, en outre, que pour ce débit, la vitesse limite d'ascension des bulles d'air lors de l'écoulement aéré est de :

$$U_r = \frac{0,083 \cdot q_e}{\cos \alpha} \approx 0,37 \text{ m/s}$$

La question qui s'impose à ce stade consiste à dire : Pourquoi cette diminution de la vitesse U_r ?

En se basant sur la proposition selon laquelle la vitesse limite d'ascension d'une bulle d'air augmente avec sa taille [2]. On peut apporter quelques éléments de réponse.

On sait que lorsque le débit augmente, le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente aussi. Il s'en suit que les contraintes de cisaillement entre les filets liquides augmentent à leur tour,

désagrégant ainsi les bulles d'air entraînées. En conséquence, cela veut dire que la taille maximale de ces bulles diminue. Après quoi leur mouvement ascendant se verra ralentir et c'est ce qui fait que leur vitesse d'ascension décroît.

VII.B.1.4. Concentration en air moyenne :

La variation de la concentration moyenne en air pour les deux débits $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$ et $q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$ a été mis en évidence sur les figures (VII-6) et (VII-7) respectivement. Les distances sont mesurées par rapport au point d'inception avec un pas d'intégration de $dx = 10^{-2} \text{ m}$ (1 cm).

a/- Débit unitaire : $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$.

En estimant une concentration initiale nulle ($C_* = 0$), la figure (VII-5) permet de voir que tous les points expérimentaux sont situés à l'intérieur du domaine limité par les deux courbes théoriques relatives aux vitesses limites d'ascensions des bulles d'air $0,40 \text{ m/s}$ et $0,50 \text{ m/s}$. Cette remarque suggère de se rapprocher de plus en plus des points expérimentaux d'autant plus que l'ordre de grandeur de la vitesse intermédiaire est disponible.

La figure (VII-6) montre que pour une vitesse $U_r = 0,46 \text{ m/s}$ préalablement estimée, les points expérimentaux coïncident assez bien avec les résultats théoriques issus de l'équation (VI-16).

On note par ailleurs que :

1- La quantité d'air entraînée varie plus lentement loin du point d'inception qu'à sa proximité, ceci est tout à fait normal puisque plus loin le phénomène d'autoaération tend à se stabiliser et à s'équilibrer.

2- Le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore n'est pas assez long pour qu'un régime d'équilibre s'établisse. La preuve c'est que pour atteindre la concentration du régime uniforme \bar{C}_u , il faut allouer à l'écoulement une longueur d'eau moins 180m, alors qu'en revanche ce coursier n'en fait qu'une cinquantaine de mètres (figure 8). Il est vrai que dans ce cas, l'écoulement uniforme aéré est dénué de tout sens physique. Néanmoins le calcul de ses caractéristiques est indispensable pour l'estimation des paramètres de l'écoulement qui le précède.

3- Pour une concentration initiale différente de zéro, la courbe théorique susceptible de

représenter le mieux les points expérimentaux ne correspondrait pas forcément à une vitesse exacte d'ascension de 0,46 m/s. C'est pourquoi, on réaffirme que tous les résultats théoriques dépendent critiqueusement des valeurs attribuées au couplet de paramètres (U_r , C_*). En général, on peut se contenter d'une concentration initiale $C_* = 0$.

Finalement, pour un débit $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$, la simulation de la figure (VII-6) régit bien l'évolution du phénomène d'entraînement d'air sur le coursier du barrage d'Aviémore. Afin d'éviter dorénavant de simuler plusieurs cas de courbes, il est conseillé de faire à priori le raisonnement du paragraphe VII.B.1.3. Une fois la vitesse limite d'ascension estimée, les étapes qui suivront se feront efficacement et avec un gain de temps sûr.

b/- Débit unitaire : $q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$.

Dans le but de détecter qu'elle est la courbe théorique représentant le mieux les points expérimentaux pour ce débit, la figure (VII-7) reprend les trois simulations relatives respectivement à $U_r = 0,30 \text{ m/s}$, $0,35 \text{ m/s}$ et $0,37 \text{ m/s}$. Elle confirme bien que la simulation la plus plausible parmi les trois est celle qui correspond une fois de plus, à la vitesse limite d'ascension estimée auparavant, c'est-à-dire à $U_r = 0,37 \text{ m/s}$ et ceci toujours pour une concentration moyenne nulle au point d'inception.

On note les constatations suivantes :

1- Les concentrations moyennes mesurées pour ce débit sont inférieures à celles relatives au premier débit. Cette remarque se justifie par deux arguments à savoir :

a- la position du point d'inception et

b- la longueur fixe du coursier.

Il est clair que plus le point d'inception est proche de la crête du déversoir et plus le phénomène d'aération naturelle se développe plus tôt pour prendre par la suite de l'ampleur le long du coursier. Du moment que la longueur du coursier est constante, cela signifie que pour un débit $q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$, le phénomène prend du retard par rapport au cas où le débit est $q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$.

2- Le premier point expérimental est loin de la courbe théorique représentée sur la figure (VII-10) pour deux raisons éventuelles :

* la station de mesure de ce point, en l'occurrence la station 501 située à 19 m de la crête, est très proche du point d'inception situé à 18,60 m et comme la concentration initiale a été estimée à $C_* = 0$, la différence s'est vu clairement sur la figure. Ceci nous ramène donc à dire que :

* le calcul du point d'inception a été surestimé. Il est raisonnable de croire que le point d'inception se trouve avant les 18,60 m pour admettre que la concentration C_m ait varié normalement jusqu'à la station de mesure où on a relevé le premier point contesté.

VII.B.1.5. Concentration d'air et protection contre l'érosion par cavitation :

On sait maintenant que la présence de l'air contribue efficacement et économiquement dans la réduction du phénomène d'érosion par cavitation. D'où l'idée de quantifier l'air entraîné, notamment près des parois solides, s'impose.

Les figures (VII-9) et (VII-10) mettent en évidence la variation de la quantité d'air près des parois du coursier déduite de la concentration en air moyenne par le biais de la relation (VI-9).

Pour le premier débit unitaire ($q_e = 2,23 \text{ m}^2/\text{s}$), on peut voir qu'au long des dix mètres mesurés par rapport au point d'inception, la concentration à la limite supérieure de la couche limite de concentration en air n'excède pas les 10% de garantie. Cela signifie que toutes les sections de cette région de l'écoulement aéré sont critiques à l'égard de la cavitation. En d'autre terme, cela veut dire que la quantité d'air entraînée dans ce domaine n'est, hélas, pas suffisante pour freiner les érosions susceptibles de se manifester. Dans ce cas, il faut penser à une aération artificielle qui consiste à apporter une quantité additionnelle en air par l'intermédiaire des aérateurs.

Ces derniers doivent être placés non seulement sur les dix mètres critiques mais aussi le long de la distance séparant la crête du point d'inception, soit en tout (10 + 15,40) m. L'air atmosphérique ne protège donc que 36,5% de la surface du coursier contre l'érosion par cavitation.

Pour le second débit unitaire ($q_e = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$), on remarque que la concentration limite, responsable de la protection contre l'érosion par cavitation, n'excède les 10% nécessaire qu'à partir du 14^{ème} mètre du point d'inception, soit quatre mètres de plus comparé au cas précédent. L'air insufflé dans cette région n'est donc pas suffisant pour contrer toute érosion éventuelle.

Donc l'autoaération n'assure contre l'érosion que les dix derniers mètres de ce coursier. C'est pourquoi, une fois de plus, il faut opter pour des aérateurs afin de remonter le taux d'air près des parois.

Avant d'opter directement pour des aérateurs qui peuvent revenir très chers si toute fois leur nombre est considérable, il est préconisé de penser à priori aux techniques pratiques et économiques permettant d'accélérer le développement de la couche limite afin de rapprocher, évidemment, le point d'inception le plus possible de la crête.

On peut citer par exemple :

- * Une rugosité artificiellement accentuée sur une certaine distance dans le tronçon de forte accélération à l'origine du coursier.
- * Des piles longues entre pertuis d'entrée éventuellement prolongées par des murs guideaux intermédiaires. [3]
- * "Les crêtes de coq" produites par des piles courtes.

Ainsi, l'autoaération commencera plutôt, prendra de l'ampleur et assurera une quantité d'air suffisante aux parois solides.

VII.B.1.6. Profondeur du mélange :

La hauteur du mélange air-eau est représentée sur les figures (VII-11) et (VII-12) pour chacun des deux débits unitaires évoqués auparavant.

Le calcul a concerné d'abord la surface libre de l'écoulement à eau pure équivalent (Eq. VI-17). Après quoi la hauteur y_{90} du mélange est déduite de la relation (VI-18). Les deux courbes sont reprises sur des figures afin de les comparer aux points expérimentaux.

La reproduction théorique $y_{90} = f(x)$ suit bien l'allure globale des points de mesures. Le gonflement de l'écoulement dû à la présence de l'air entraîné est mis en évidence par l'aire comprise entre les deux courbes.

Il est important de dire que ce type de courbe est d'une grande utilité pratique dans le sens où elle aident beaucoup le concepteur de coursier à avoir une idée sur la hauteur à devoir donner

aux murs latéraux, pour un débit fixé, afin d'éviter d'éventuel débordement de l'écoulement.

Dans notre cas, la hauteur maximale du mélange, pour les deux débits unitaires est légèrement inférieure à 30 cm. Cela signifie que les murs latéraux devront avoir au moins cette hauteur là.

On peut voir par ailleurs que :

1- Le premier débit génère des hauteurs de mélange supérieures à celles du second. Cette distinction est due à la différence des concentrations moyennes en air discutée au paragraphe VII.B.1.5. Plus celles-ci sont importantes et plus le gonflement sera de même.

2- Les deux courbes théoriques ont le même point de départ car la concentration au point initial de l'écoulement a été estimée nulle. Par conséquent, la hauteur du mélange vient se confondre à la hauteur d'eau pure.

3- Si l'écoulement n'était pas aéré en aval du point d'inception alors sa courbe de remous serait très proche de la courbe théorique issue de l'équation (VI-17) qui indique ici qu'il s'agit d'un axe hydraulique de type S_2 .

Remarques :

Ça aurait été très intéressant si on avait complété les figures (VII-11) et (VII-12) par la ligne d'eau totale qu'aurait donnée l'équation de Bresse en aval du point d'inception afin de pouvoir la comparer à la courbe qui lui est équivalent dans la région aérée. Le rapprochement ou l'éloignement réciproque des deux courbes indiquera le degré de cohérence d'avoir défini auparavant la notion de la hauteur d'eau équivalente h_e .

Dans le cas favorable d'une bonne similitude des deux lignes d'eau, on pourra s'en passer de l'équation (VI-17). Comment ?

Pour chaque tirant d'eau, évalué en aval du point de début du phénomène, par l'équation de Bresse, l'expression (VI-18) est utilisée pour déduire la hauteur du mélange et ainsi on aura calculé la profondeur du mélange par une deuxième méthode.

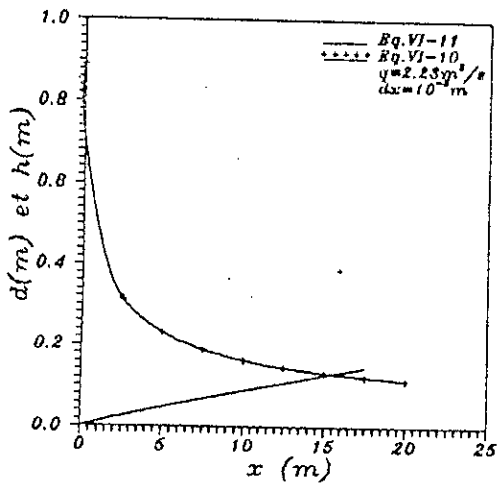


Fig. VII-1
Localisation du point d'inception sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore.

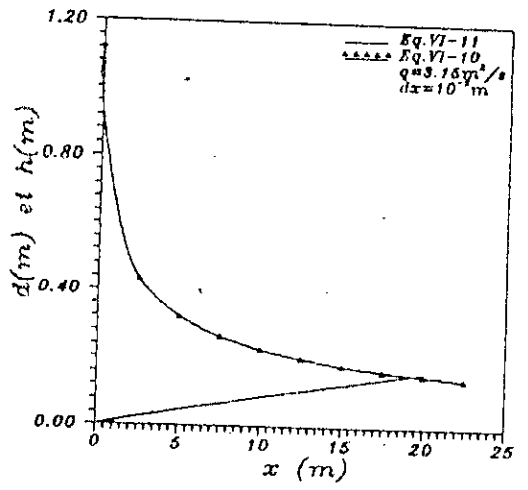


Fig. VII-2
Localisation du point d'inception sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore.

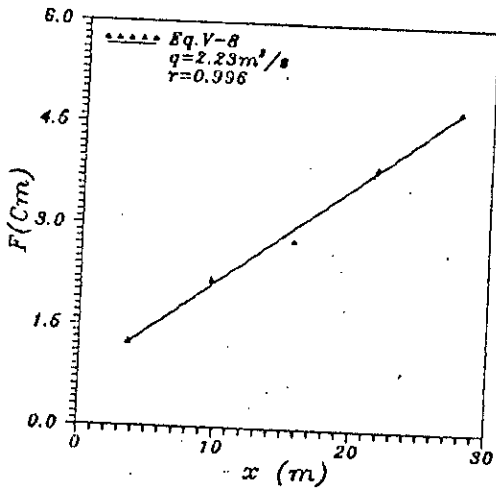


Fig. VII-3
Fonction de concentration du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore (Nouvelle Zelande)

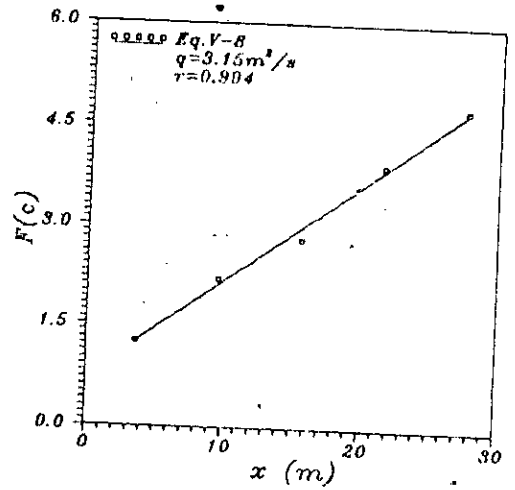


Fig. VII-4
Fonction de concentration du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

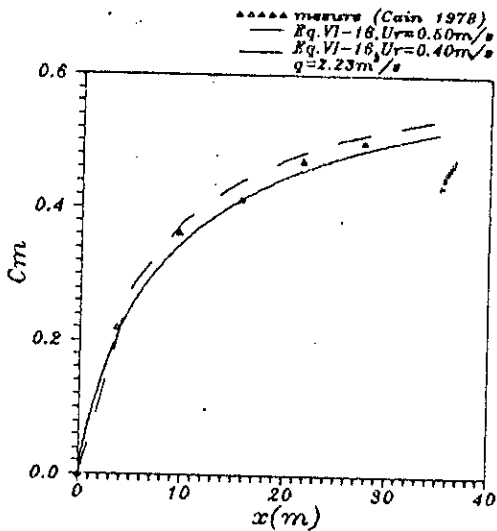


Fig. VII-5 Entrainement d'air sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

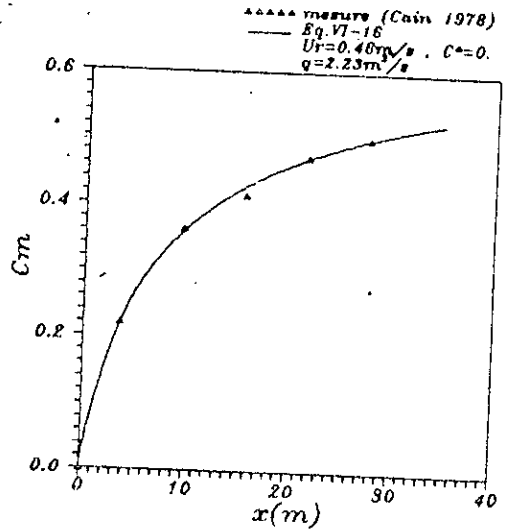


Fig. VII-6 Entrainement d'air sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

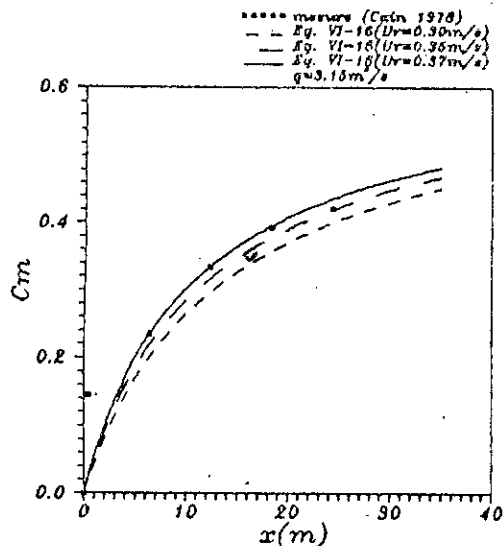


fig:VII-7 Entrainement d'air sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

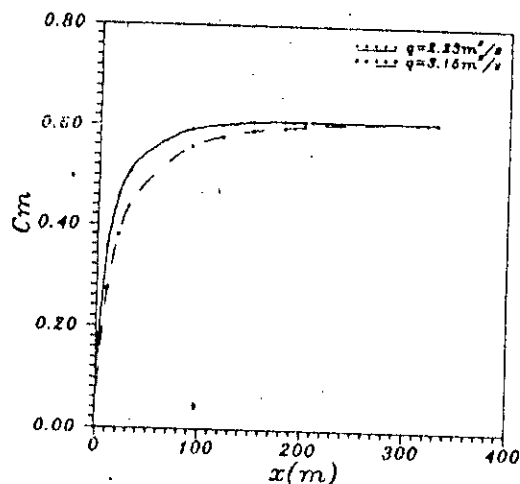


fig:VII-8 Mise en évidence de la région de l'écoulement uniforme aéré sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (N. Zelande)

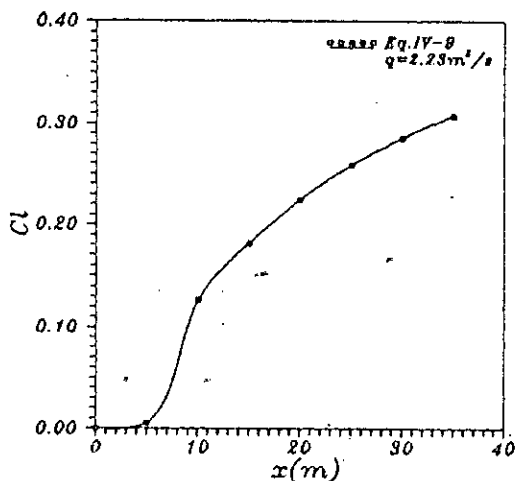


fig:VII-9 Variation de la quantité d'air pres des parois du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

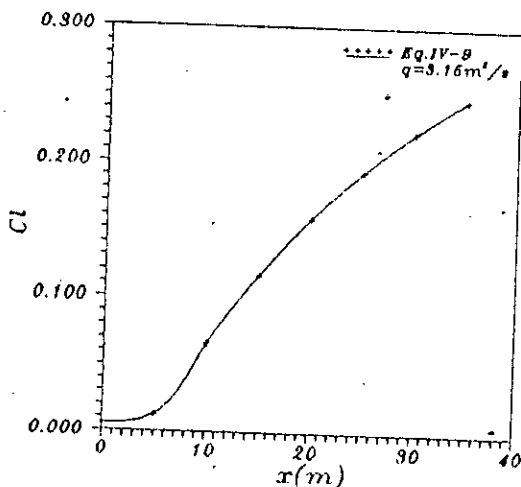


fig:VII-10 Variation de la quantité d'air pres des parois du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore.

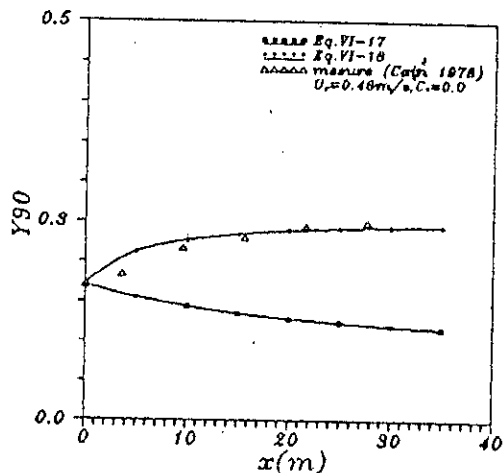


fig:VII-11 Hauteur de l'écoulement air-eau sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore. (Nouvelle Zelande)

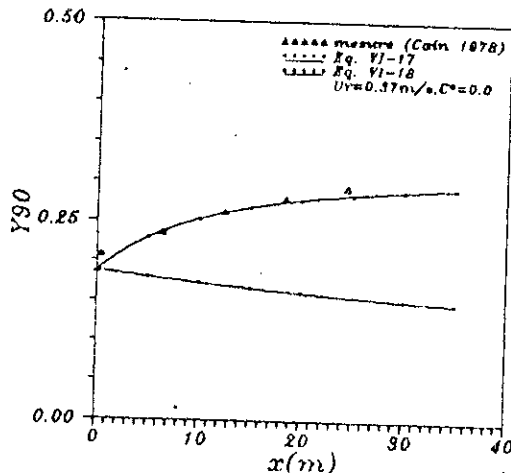


fig:VII-12 Hauteur de l'écoulement air-eau sur le coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore.

VII.B.2. Modèle réduit du laboratoire de Meishan :

VII.B.2.1. Présentation :

Il s'agit non pas d'un prototype comme ce fut le cas avant mais plutôt d'un modèle réduit de canal construit dans le laboratoire de recherche hydraulique de Meishan situé en Chine. C'est un canal large aussi, de section rectangulaire et de pente plus raide que celle du coursier de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviémore. Ces caractéristiques sont les suivantes : [4]

* Pente : $52,5^\circ$, * rugosité : $K_s = 0,07$ mm (béton lisse),

* Débit par mètre de largeur : $0,32$ m²/s.

les mesures d'entraînement d'air et de hauteur du mélange effectuées par XI dans la région de l'écoulement graduellement varié aéré sont reportées dans le tableau (B-2) de l'annexe B.

VII.B.2.2. Localisation du point d'inception :

En s'inspirant du même raisonnement évoqué au paragraphe VII.B.1.2. la figure (VII-13) montre que la couche limite turbulente, prenant naissance à proximité de la crête, n'atteint la surface libre de l'écoulement qu'après un parcours de $5,37$ m. Cela veut dire qu'au delà de cette distance, l'écoulement devient diphasique.

On peut lire sur le même graphe qu'au point d'inception la hauteur d'eau est de $0,038$ m. Cette valeur sera utilisée comme condition initiale pour la reproduction de la hauteur du mélange le long du coursier.

Il faut signaler aussi que le tracé de l'épaisseur de la couche limite au delà du point de début du phénomène d'aération est dénué de tout sens physique. Néanmoins, il a été maintenu pour voir seulement l'intersection des deux courbes. En outre, la ligne d'eau entre la crête et ce qui suit est un axe hydraulique de type S_2 c'est-à-dire un remous relatif à un canal de forte pente ($h_c > h_n$) partant d'un régime critique à l'amont et tendant asymptotiquement vers un régime normal à l'aval.

VII.B.2.3. Fonction d'entraînement :

La figure (VII-14) représente la variation de la fonction d'entraînement le long de

l'écoulement aéré. On rappelle aussi que les points symbolisés par des triangles sont obtenus en remplaçant chaque concentration moyenne en air du tableau 2 de l'annexe B dans le membre gauche de l'équation (V-8).

On voit clairement que la liaison entre la fonction d'entraînement et la distance mesurée par rapport au point d'inception est effectivement linéaire comme il a été déjà prédit par l'équation (V-8). D'ailleurs la valeur du coefficient de corrélation le confirme bien; $r = 0,992$.

La droite, ainsi représentée sur la même figure a pour équation :

$$F(C_m) = 0,350 x + 0,925 \quad (\text{VII} - 4)$$

Elle cache derrière elle une information précieuse qu'on a dévoilé précédemment. Il s'agit de l'estimation de la vitesse limite d'ascension des bulles d'air dans l'écoulement aéré. En utilisant le coefficient directeur de cette droite, et en tenant compte de la solution analytique (Eq. V-8), on peut affirmer quelle a été cette vitesse lors des expériences. En effet, les mesures faites par XI montrent que la vitesse d'ascension est approximativement égale à : $U_r \cong 0,18 \text{ m/s}$.

Ce résultat laisse penser que la taille des bulles observées sur modèle est plus réduite que celles qui s'échappent lors de l'écoulement aéré sur prototype.

VII.B.2.4. Entraînement d'air :

Après avoir repris sur la figure (VII-15) les points relatifs aux mesures expérimentales, l'intérêt s'est porté sur la recherche de la meilleure simulation possible du phénomène d'entraînement d'air observé sur ce canal.

Connaissant déjà la vitesse limite d'ascension des bulles d'air s'échappant de l'écoulement, la même figure reprend la courbe théorique résultant de l'équation (VI-16) pour une concentration initiale nulle. On remarque, hélas, que la combinaison (C_*, U_r) sous-estime le phénomène.

Après plusieurs essais sur machine (ordinateur), il s'est avéré que pour approcher le mieux le phénomène, il faut estimer une concentration au point d'inception égale à $C_* = 20\%$.

A cet égard, la figure (VII-16) vient confirmer ce choix selon lequel l'autoaération de ce canal est prématurément intense.

En conséquence, on peut voir que les dernières concentration moyennes sont proches l'une de l'autre. Ceci montre que l'entraînement d'air tend rapidement à s'équilibrer si toute fois il est intense dans sa phase primaire.

On peut se demander, peut-être, pourquoi c'est ainsi ?

Il est vrai que le phénomène d'autoaération d'un canal est tributaire de degré de turbulence de l'écoulement qui à son tour est lié à la pente du canal comme c'est le cas ici.

Avec une pente de $52,5^\circ$, la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique est certainement très intense, particulièrement dans la zone d'accélération située en général en amont du point d'inception. Cela signifie que juste en ce point l'écoulement non aéré dispose déjà d'assez d'énergie pour compenser les forces de tension superficielle qui ont pour rôle d'empêcher l'air de se mêler à l'eau. C'est ce qui explique la constatation signalée ci-dessus.

VII.B.2.5. Concentration d'air et protection contre l'érosion par cavitation :

La figure (VII-17) met en relief l'évolution de la quantité d'air près des parois solides le long de la région de l'écoulement aéré pour un débit d'eau de $0,32\text{m}^3/\text{s}$.

Il apparaît aussitôt que le taux en air nécessaire à la protection des parois contre l'érosion par cavitation est déjà satisfait après seulement deux mètres à compter du point de naissance du phénomène d'autoaération. Ceci est une conséquence directe de la prématurité du phénomène discutée juste avant. C'est pourquoi l'allure de la courbe ne présente pas de concavité vers les ordonnées positives comme ce fut le cas pour le coursier du barrage d'Aviémore. Tout calcul fait, l'air insufflé dans cet écoulement assure 54,2% des parois du canal. S'il y a lieu d'opter pour des aérateurs, il faudrait les placer évidemment le long des sept premiers mètres surtout là où les lignes de courant sont toujours courbes, c'est-à-dire au voisinage de la crête du déversoir.

Il est important de rappeler, finalement, que la quantité d'air entraînée naturellement ou par l'intermédiaire d'aérateurs n'a pas uniquement pour avantage la protection contre les érosions mais aussi l'amélioration de la débitance des évacuateurs de crues en raison de la réduction des contraintes de frottement mises en évidence par l'équation (IV-23).

VII.B.2.6. Profondeur du mélange :

La figure (VII-18) reprend à la fois deux courbes et un ensemble de points expérimentaux. La courbe inférieure représente la surface libre de l'écoulement d'eau équivalent inspiré de la définition de la profondeur h_e , alors que la seconde reproduit l'évaluation de la profondeur du mélange air-eau de l'écoulement diphasique le long du canal du laboratoire de Meishan.

Ainsi, on constate que la courbe théorique supérieure correspond parfaitement au phénomène observé et mesuré par XI dans sa phase primaire, alors que dans les derniers mètres elle y diverge en le sous-estimant. Pourquoi ?

Il ne faut pas oublier que cette simulation a été développée analytiquement sous l'hypothèse que les profondeurs doivent varier lentement d'une section à l'autre. D'ailleurs c'est la définition même d'un écoulement graduellement varié. Lorsque c'était le cas pour les premiers points, on a vu que la courbe les a bien approchés. En revanche pour les autres, notamment le 5^{ème} et le 6^{ème} point, cette hypothèse est bafouée et c'est ce qui a fait que la modélisation les a abandonnés.

Cette remarque montre l'aspect rugueux de la surface libre réelle d'un écoulement diphasique d'où la difficulté de la modéliser correctement. On rappelle aussi que l'aire comprise entre les deux courbes théoriques représente le gonflement qu'a subi cet écoulement après diffusion des bulles d'air. Pour chaque section, il est évalué en pourcentage par la relation :

$$G_f = \frac{Y_{90} - h_e}{Y_{90}} \times 100 \quad (\text{VII} - 5)$$

Par ailleurs, la figure (VII-17) indique au concepteur de coursier quelle serait la hauteur minimale nécessaire au dimensionnement des parois pour qu'il n'y ait pas débordement.

Par exemple, pour un débit de service $q_e = 0,32 \text{ m}^2/\text{s}$, cette hauteur est de : $h_{90\text{min}} \approx 60 \text{ cm}$.

Celle-ci peut être éventuellement majorée par une revanche de sécurité.

On voit bien maintenant l'importance d'une telle réflexion dans la phase de conception d'un projet d'évacuateur de crues.

Il suffit donc de simuler le phénomène sur ordinateur sans avoir besoin de construire des modèles réduits surtout en cas d'une enveloppe financière limitée.

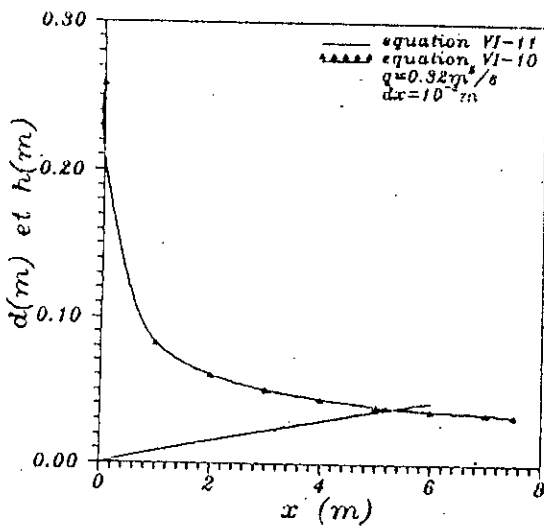


Fig:VII-13
 Localisation du point d'inception sur le modele reduit du laboratoire de Meishan.(CHINE)
 $(x_i=5.37 \text{ m}, h_i=0.038 \text{ m})$

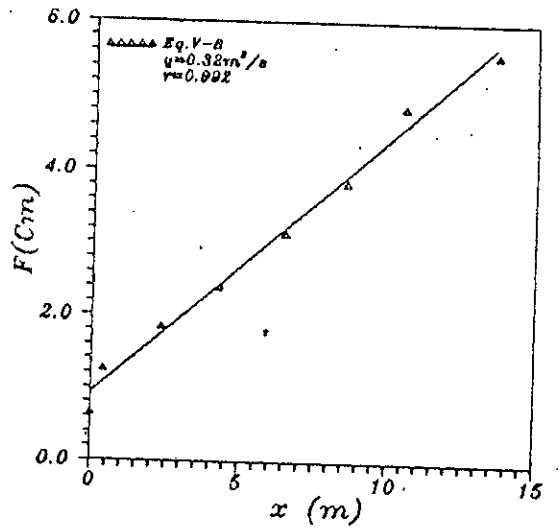


Fig:VII-14
 Fonction de concentration du modele reduit du laboratoire de meishan.(CHINE)

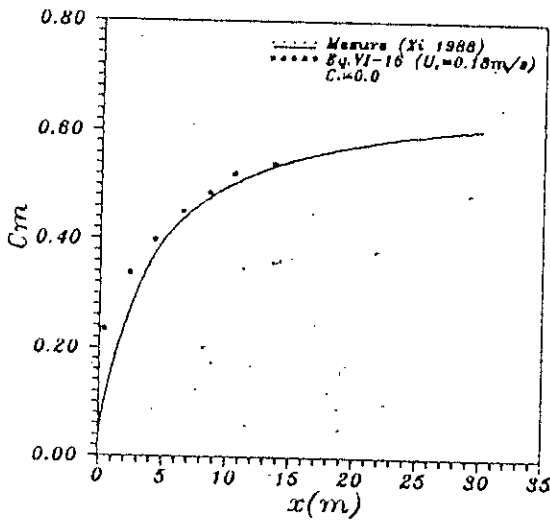


Fig:VII-15 Entrainement d'air sur le modele reduit du laboratoire de Meishan. (Chine)

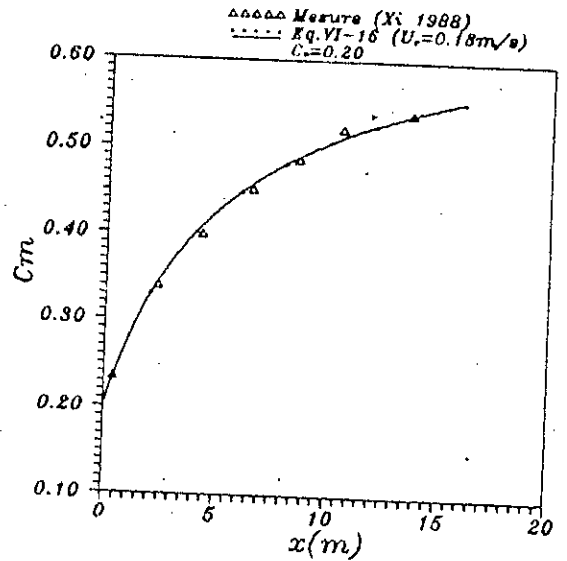


Fig:VII-16 Entrainement d'air sur le modele reduit du laboratoire de Meishan. (Chine)

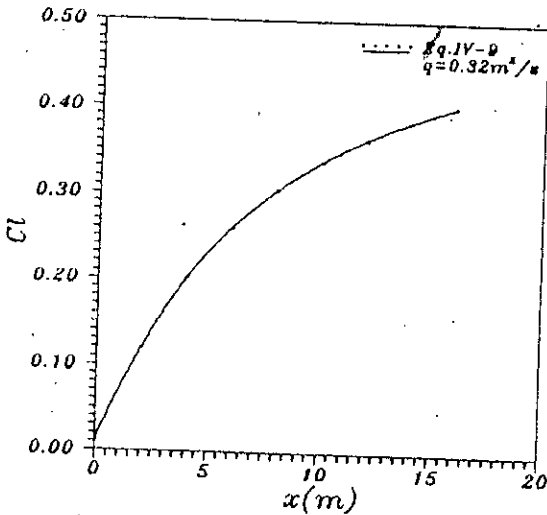


Fig:VII-18 Variation de la quantite d'air pres des parois du modele reduit du laboratoire de Meishan. (CHINE)

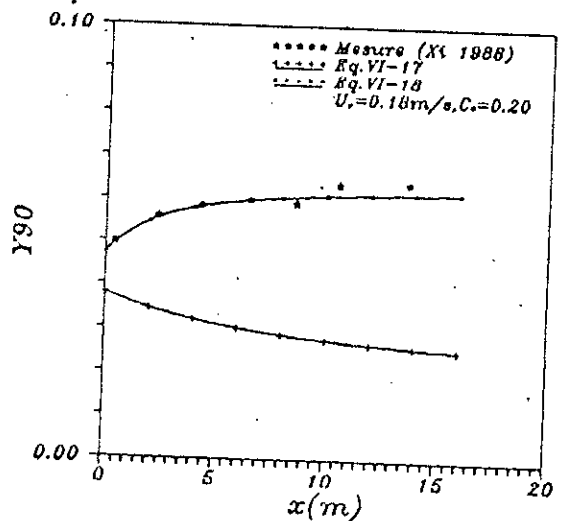


Fig:VII-18 Hauteur de l'ecoulement air-eau sur le modele reduit du laboratoire de Meishan.(CHINE)

VII - 2 /- Recommandations pratiques :

Avant de clôturer cette partie essentielle, on a jugé intéressant et utile de faire une synthèse de tout ce qui a été développé jusqu'à présent, sous forme d'une méthodologie générale ayant pour objectif d'éclairer et guider le concepteur de coursier dans ses études antérieures.

Du moment qu'elle implique le phénomène d'entraînement d'air dans le dimensionnement des coursiers, cette méthodologie devient très importante et se résume dans les étapes suivantes :

1- Enrichissement des données :

Cette étape consiste à fournir les informations préliminaires essentielles à tout calcul lié au dimensionnement de l'ouvrage en question. Il s'agit de :

a- la longueur et la pente du coursier :

En général, ces deux paramètres géométriques sont dictés par le relief du site. Leurs ordres de grandeurs sont donc disponibles pour ne pas dire imposés.

b- rugosité des parois du coursier :

La connaissance du type de matériaux prévu pour la construction permet d'avoir une idée sur sa rugosité équivalente; c'est à ce niveau que le concepteur doit penser déjà aux techniques de développement rapide de la couche limite. Parmi celles-ci une rugosité importante des parois en amont de l'évacuateur.

c- Débit maximal à évacuer :

Après une étude de laminage de crues, le concepteur est capable de connaître à priori le débit maximal que devra évacuer son ouvrage.

2- Localisation du point d'inception :

Connaissant la loi régissant le développement de la couche limite, la localisation du point de début du phénomène d'entraînement d'air est achevée par un calcul de la surface libre de l'écoulement dans sa phase d'accélération. Si le canal est large, ce calcul peut se faire par l'équation de Bresse.

S'il s'avère que le point d'intersection de la couche limite avec la surface libre est trop loin de la crête, le concepteur devra discuter la possibilité d'une variation éventuelle de la rugosité ou bien opter pour des " crêtes de coq ".

3- Simulation de l'écoulement aéré :

En se basant sur la présente étude, le concepteur pourra simuler plusieurs possibilités d'écoulements aérés sur un même coursier. ceci peut se faire en estimant à chaque fois le couplet de paramètres (C_* , U_r) et en utilisant les équations appropriées à cette fin. En général, l'approximation $C_* = 0$ suffit.

4- Dimensionnement :

Après les calculs de l'étape précédente, le concepteur se fixera les idées quant à :

- la hauteur minimale des parois latérales majorée par une revanche convenablement estimée.
- le sections critiques à l'égard de l'érosion par cavitation et ceci en utilisant la valeur minimale admissible pour éviter toute attaque, en l'occurrence 8 à 10%.

En outre, l'utilisation de la notion de la réduction des contraintes de frottement liée à la présence des bulles d'air dans l'écoulement, aidera le concepteur à prédire l'amélioration de la débitance du coursier de l'évacuateur de crues illustrée par l'équation (IV-31).

Finalement, si les simulations faites montrent que l'aération naturelle est insuffisante, alors le concepteur pourra opter pour une aération forcée.

Conclusion :

Avant de conclure cette étude, il s'avère nécessaire de résumer les différentes constatations et conclusions évoquées lors des développements faits jusqu'à présent. On cite :

- Plus le débit évacué croit et plus l'écoulement aéré s'éloigne de la crête du déversoir.
- Plus la rugosité du canal notamment au voisinage de la crête est importante et plus la couche limite se développe rapidement.
- Plus la pente du coursier est raide et plus le point d'inception converge vers la crête.

- Plus le coefficient de corrélation défini auparavant est proche de l'unité et plus la modélisation de l'écoulement aéré ainsi présentée est adéquate.
- Pour une pente fixe du canal, l'écoulement est d'autant plus aéré que le débit déversé est important.
- Lorsque la pente du coursier est très raide ($\alpha > 45^\circ$) les courants de l'écoulement sont accélérés générant une augmentation de la turbulence. Ainsi, la quantité d'air entraînée devient importante.
- Plus la teneur en air émulsionné dans une section est considérable et plus l'écoulement subit un gonflement important qu'il faudrait d'ailleurs tenir en compte dans le dimensionnement des murs latéraux.
- Lorsque la teneur en air émulsionné dans une section est significative sur le fond, alors :
 - 1- le développement des pressions subatmosphériques est freiné et par augmentation de la compressibilité de l'eau, les bulles d'air réduisent considérablement la violence des chocs accompagnant l'implosion des bulles de vapeur.
 - 2- La débitance du coursier est améliorée par le phénomène de réduction des contraintes de frottement contre les parois du à la présence de l'air.

VII - 3/- Références :

[1] P. Cain

" Measurements within self-aerated flow on a large spillway "

Research report N° 78-18

University of Conterbury (nouvelle - Zelande) (1978).

[2] R. Comolet

" sur le mouvement d'une bulle de gaz dans un liquide "

La houille blanche 34 (1), 31-42 (1979).

[3] Comité international des grands barrages

Buletin N°58 (1987).

[4] XI, Ruze

" Characteristics of self-aerated flow on steep chutes "

Proc, hyd symp on Hydr for High dames,

IAHR, Beijing, China 68 - 75 (1988).

Conclusion générale

Conclusion générale

Pour les écoulements à surface libre dans les canaux à forte pente, il est important de connaître la quantité d'air entraînée dans l'écoulement.

La présence d'air dans l'écoulement augmente son volume, réduit le coefficient de perte de charge. De plus, la présence de petites quantités d'air, proches du canal, permet de réduire ou de stopper les dommages dus à l'érosion par cavitation.

Pour des écoulements uniformes avec entraînement d'air, les caractéristiques complètes de l'écoulement se déduisent à partir de la pente du canal, du débit et du coefficient de perte de charge pour un écoulement non aéré.

Le profil de concentration en air est caractérisé par la présence d'une couche limite de concentration en air près des parois et qui a un rôle prédominant dans le mécanisme de réduction du coefficient de frottement.

Ce phénomène peut être appliqué pour accroître la vitesse maximale sur un canal à forte pente. Pour un écoulement graduellement varié, on a présenté une analyse simple, basée sur l'équation de conservation de la masse pour l'air et sur l'équation de conservation de l'énergie qui fournit deux équations différentielles que l'on a résolu numériquement à base d'un schéma aux différences finies.

Ces équations permettent désormais de simuler, en tout point, l'entraînement d'air aussi bien pour des prototypes que pour des modèles réduits en estimant le taux d'aération et la hauteur du mélange des écoulements aérés. /

Ceci dit, quand l'aération naturelle de l'écoulement à travers la surface libre est insuffisante, ou si l'érosion par cavitation peut se développer en amont du point d'inception de l'écoulement d'air, il est alors nécessaire d'installer des aérateurs.

Finalement, on tient à souhaiter à ce que :

* L'idée proposée au paragraphe VII-B-1-6 concernant le calcul de la hauteur du mélange utilisant l'équation de Bresse soit analysée et développée.

* Cette étude soit reprise en considérant la vitesse limite d'ascension comme variable le long de l'écoulement. Par exemple : $U_r(x) = a x$

* La présente étude soit généralisée aux canaux à pente et à largeur variables nécessaire aux exigences topographiques de quelques sites de barrages.

Annexes

Annexe A

Pente (degrés)	C_u (I)	β (II)	$\alpha \cdot \cos \alpha$ (II)	$\frac{q_c}{V_{90} Y_{90}}$ (III)	α' (III)	C_i (IV)
7,5	0,1608	0,003021	7,99952	0,694151	1,35332	0,003012
15	0,2411	0,028798	5,74469	0,615233	1,32078	0,027991
22,5	0,3100	0,071572	4,83428	0,559716	1,18420	0,066791
30,0	0,4104	0,196353	3,82506	0,47191	1,17540	0,16412
37,5	0,5693	0,620262	2,67484	0,338127	1,30502	0,38281
45,0	0,6222	0,815675	2,40096	0,303830	1,35314	0,44924
60	0,6799	1,353931	1,89421	0,242366	1,50787	0,57517
75	0,7209	1,864181	1,574440	0,206669	1,4669	0,65086

Tab. 1- Ecoulements uniformes : grandeurs caractéristiques des distributions de concentrations en air et de vitesses.

Notes : (I) Mesures de Straub et Anderson (1958)

(II) Calculés à partir des mesures de STRAUB et ANDERSON

(III) Calculés numériquement pour $m=6$

(IV) Calculés par l'équation IV-5

Intégration d'une fonction par la méthode des trapèzes (pour la remarque II)

Soit une fonction $y = f(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$, l'intégrale :

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

représente l'air comprise entre la courbe représentative $f(x)$, l'axe des abscisses et les verticales d'abscisses a et b .

Si l'intervalle $[a,b]$ est décomposé en segments de longueur dx , l'aire S peut être définie comme étant égale à la somme des aires partielles dS .

Pour dx suffisamment petit, dS peut être calculée par :

$$dS = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \cdot dx$$

$$\frac{q_c}{V_{90} Y_{90}} = -0,882876 \bar{C}_u + 0,84128$$

Annexe B

Table des mesures

I- Coursier de l'évacuateur de crues du barrage "Aviémore" (N-Zélande) :

Pente : 45° $k_s = 1 \text{ mm}$ $K_r \text{ (Strickler)} = 70$						
Station	501	502	503	504	505	
X (m)	19	25	31	37	43	
C_m	0,217	0,363	0,414	0,472	0,50	$q_e = 2,23$ m^2/s
$Y_{90} \text{ (m)}$	0,184	0,218	0,23	0,244	0,254	
C_m	0,145	0,234	0,333	0,392	0,421	$q_e = 3,15$ m^2/s
$Y_{90} \text{ (m)}$	0,217	0,246	0,273	0,290	0,305	

Tab. 1: Concentration en air moyennes et hauteurs du mélange.

Note : X(m) : Position de la station de mesure par rapport à la crête.

II- Modèle réduit du laboratoire de Meishan (Chine) :

$q_e = 0,32 \text{ m}^2/\text{s}$ $k_s = 0,07 \text{ mm}$ Pente = $52,5^\circ$ $K_r = 90$ (Béton lisse)							
X (m)	5,80	7,70	9,70	12,00	14,00	16,00	19,00
C_m	0,235	0,340	0,40	0,452	0,487	0,522	0,540
$Y_{90} \text{ (m)}$	0,05	0,056	0,0585	0,060	0,0594	0,0638	0,0641

Tab. 2 : concentrations en air moyennes et hauteurs du mélange.