

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département de Génie Civil**

BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**THESE DE MAGISTER**

Présentée par:

*Salah BOUZIANE*

Ingénieur d'Etat en Génie Civil diplômé de l'E.N.P

**TITRE**

**MODELISATION NON LINEAIRE DU  
COMPORTEMENT DU SOL PAR  
COUPLAGE  
ELEMENTS FINIS-ELEMENTS D'INTERFACES  
ET ELEMENTS INFINIS**

Soutenue le 24 Avril 1996 devant le Jury composé de:

Président	: Mr B. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Directeur de thèse	: Mr T. MESSAFER	Maître de Conférences	E.N.P
Examineurs	: Mr S. BELKACEMI	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr M.K. BERRAH	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr M. DEMIDEM	Chargé de Cours	E.N.P

تقترح نموذج للتأثير المتبادل بين التربة والهيكـل والذي يأخذ بعين الإعتبار كل من: السلوك غير الخطي للتربة، شروط الإلتقاء عند الحد الفاصل بين التربة والهيكـل، وتغير خواص التربة مع العمق وكذلك سلوك التربة عند ما لا نهاية.

هذا النموذج الرياضي استعمل لدراسة بعض التطبيقات المهمة التي تمس بالتأثير المتبادل بين التربة والهيكـل مثل: تنبؤ قوى الإنهيار وتشوهات الأساسات.

**الكلمات الرئيسية:** النموذج - التأثير المتبادل بين التربة والهيكـل - العناصر المتناهية - العناصر غير المتناهية - الحد الفاصل - السلوك غير الخطي.

## ABSTRACT:

Model for soil-structure interaction is presented. This model take into account: the nonlinear behaviour of soil. The contact conditions at soil-structure interface and the variation of soil's characteristics with depth as well as behaviour of soil at infinity.

This numerical model has been validated by treating some important problems of soil-structure interaction like the prediction of collapse loads and deformations of foundations..

**Key words:** Modelling - soil-structure interaction - interface - finite elements - infinite elements - nonlinear behaviour.

## RESUME:

Nous présentons une modélisation de l'interaction sol-structure qui tient compte du comportement non-linéaire du sol, des conditions de contact à l'interface sol-structure, de la variation des caractéristiques du sol avec la profondeur et du comportement du sol à l'infini.

Ce modèle numérique a été validé par les applications que nous avons traitées. Ces applications touchent des problèmes très intéressants de l'interaction sol-structure tels que: la prédiction des charges de rupture et l'estimation des tassements des fondations.

**Mots clés:** Modélisation - Interaction sol-structure - Interface - Eléments finis - Eléments infinis - Comportement non linéaire.

## DEDICACE

*Je dédie ce modeste travail à:  
mes très chers parents,  
mes soeurs et frères,  
tous ceux qui me sont chers.*

S. BOUZIANE

## ***REMERCIEMENTS***

Qu'il me soit permis d'adresser, tout d'abord, mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur **T. MESSAFER**, Maître de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, qui m'a proposé ce thème de recherche, pour l'intérêt constant qu'il a manifesté, pour l'aide permanente qu'il m'a prodiguée et les conseils précieux qu'il a donnés tout au long de ce travail malgré l'éloignement géographique.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur **B. TILIOUINE**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, pour ses conseils.

Messieurs **S. BELKACEMI**, **M.K. BERRAH**, Maîtres de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique et Monsieur **M. DEMIDEM**, chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer au jury. Je leur doit beaucoup pour ma formation. Je les remercie chaleureusement.

Je veux aussi exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, ainsi qu'à l'ensemble du personnel du Centre de Calcul et de la Bibliothèque de l'Ecole Nationale Polytechnique, pour leurs serviabilités exemplaires.



2.5 Couplage éléments finis-éléments infinis.	31
2.5.1 Introduction.	31
2.5.2 Implémentation des éléments infinis.	32
2.6 Conclusion.	35

### Chapitre 3: ETUDE DES INTERFACES

3.1 Introduction	37
3.2 Classification des interfaces.	37
3.2.1 Définition.	37
3.2.2 Classification des interfaces.	39
1) Les interfaces du premier type.	39
2) Les interfaces du deuxième type.	39
3.3 Méthodes d'analyse des problèmes d'interfaces.	39
3.3.1 Méthodes utilisant une relation limite en contraintes.	39
3.3.2 Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface.	41
1) Analyse globale.	42
2) Analyse locale.	43
3.4 Formulation d'une loi de comportement.	44
3.4.1 Formulation élastoplastique.	45
a) Rappels.	45
b) Expression générale de la matrice de comportement.	46
3.5 Modes de déformation des interfaces.	49
3.6 Choix du modèle pour l'interface.	51
3.6.1 Elément d'interface des couches fines.	52
3.7 Conclusion.	55

### Chapitre 4: ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES SOLS

4.1 Introduction.	57
4.2 Comportement élastoplastique.	58

4.2.1 Généralités.	58
4.2.2 Critères de plasticité.	60
4.2.2.1 Critère de Tresca.	61
4.2.2.2 Critère de Mohr-Coulomb.	61
4.2.2.3 Critère de Von Mises.	62
4.2.2.4 Critère de Drucker et Prager.	64
4.2.2.5 Critère parabolique.	65
4.3 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires.	66
4.3.1 Introduction.	66
4.3.2 Méthode incrémentale.	66
4.3.3 Méthode itérative.	67
a) Méthode de rigidité constante.	68
b) Méthode de rigidité variable.	68
4.3.4 Méthode mixte.	69
4.4 Conclusion.	71
<b>Chapitre 5: IMPLEMENTATION NUMERIQUE</b>	
5.1 Introduction.	73
5.2 Présentation de la structure générale du programme.	73
5.2.1 Type d'élément.	74
5.2.1.1 Élément fini.	74
5.2.1.2 Élément infini.	74
5.2.1.3 Élément d'interface.	75
5.2.2 Intégration numérique.	75
5.2.3 Critère de rupture.	76
5.2.4 Méthode de résolution non-linéaire utilisée	79
5.2.5 Organigrammes générales.	81
<b>Chapitre 6: APPLICATIONS</b>	
6.1 Exemple 1: Un demi-espace élastique soumis à une charge concentrée.	89
6.1.1 Conditions d'axisymétrie.	89
6.1.2 Conditions de déformation plane.	91
6.1.2.1 Expérimentation numérique.	92

6.2 Exemple 2: Fondation flexible sur un sol élastoplastique.	94
6.2.1 Résultats et Interprétations	94
6.2.1.1 Influence du rapport E/c.	96
6.3 Exemple 3: Fondation rigide sur un sol élastique.	98
a) Fondation circulaire.	98
b) Fondation filante.	99
6.3.1 Résultats et Interprétations.	99
6.3.1.1 Influence de la rigidité de l'interface.	102
6.3.1.2 Analyse de la non-homogénéité du sol.	103
6.4 Exemple 4: Fondation rigide sur un sol élastoplastique.	105
6.4.1 Résultats et Interprétations.	106
6.4.1.1 Influence de rigidité du sol.	109
6.5 Exemple 5: Fondation rigide sur un bicouche de sol élastique.	112
6.5.1 Résultats et Interprétations.	113
6.6 Exemple 6: Fondation flexible sur un bicouche de sol élastoplastique.	117
<b>Chapitre 7: CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS</b>	
7.1 Conclusions.	122
7.2 Recommandations.	123
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	125

**Chapitre 1**  
**ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

## Chapitre 1

### **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

#### 1.1 INTRODUCTION GENERALE

Le calcul d'un ouvrage tenant compte de l'influence de l'interaction sol-structure nécessite le choix d'un modèle adéquat qui représente d'une manière aussi proche que possible le comportement de la structure et du sol vis-à-vis de l'action des charges extérieures.

Pour obtenir ce modèle, il faut prendre en compte:

- Le comportement non-linéaire du sol de la fondation.
- Les conditions de liaison à l'interface sol-structure.
- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur.
- Le comportement du sol à l'infini.

En tenant compte de ces conditions, le problème est difficile à résoudre par les méthodes classiques, il faut faire appel aux méthodes d'analyse modernes. Parmi les méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure, on peut distinguer les méthodes globales, les méthodes des sous-structures et les méthodes hybrides [50]. Chacune d'elles correspond à une schématisation du modèle sol-structure.

Les méthodes globales sont celles conduisant à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure. Elles sont susceptibles d'appréhender les comportements non-linéaires dûs à la loi de comportement d'un des matériaux (le sol le plus souvent) ou aux interfaces sol-structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leurs fondations).

la méthode des éléments finis est l'une des méthodes globales la plus utilisée. Un des avantages principaux de cette méthode est sa capacité de prendre en compte les hétérogénéités résultant soit de la variation des caractéristiques du sol, soit d'une non linéarité plus prononcée pour certaines zones (angles des fondations). Elle s'applique parfaitement aux milieux hétérogènes. C'est le cas d'ailleurs pour les systèmes sol-structure.

Toutefois, quelques problèmes se posent lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse de l'interaction sol-structure, tels que ceux relatifs aux conditions aux limites qui sont généralement imposées sur une frontière arbitraire. Ainsi que, les dimensions géométriques du problème qui sont importantes, ce qui nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis pour modéliser le système .

Pour surmonter ces difficultés, liées à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour les domaines non-bornés, de nombreuses méthodes ont été proposées. Dans certains cas, une condition aux limites exacte est introduite et couplée au domaine de calcul par éléments finis [67]. Une autre méthode plus efficace consiste à utiliser le concept des éléments infinis, qui a été introduite initialement par Bettess [10].

Un autre problème rencontré lors de la modélisation de l'interaction sol-structure est celui de la simulation des conditions de contacts sol-structure. Sous l'effet des charges extérieures, des mouvements relatifs tels que le glissement et le décollement apparaissent à l'interface sol-structure.

Pour une analyse plus correcte de ces problèmes, des éléments d'interface ont été proposés par différents chercheurs, pour la modélisation des zones de contacts sol-structure avec la prise en considération des mouvements relatifs existant aux interfaces de contacts.

L'objet de ce travail est de proposer une modélisation de l'interaction sol-structure qui tient compte en même temps du comportement non-linéaire du sol, des conditions de contacts à l'interface sol-structure , du comportement du sol à l'infini et de la variation des caractéristiques du sol avec la profondeur.

Le modèle numérique proposé est utilisé ensuite pour analyser des problèmes d'interaction sol-structure très intéressants, à savoir la prédiction des charges de rupture et l'estimation des tassements des fondations rigides et flexibles reposant sur des sols homogènes et hétérogènes.

## 1.2 PRESENTATION DE LA THESE

La présente étude est organisée en sept chapitres présentés comme suit:

Le premier chapitre présente une brève introduction situant le problème abordé et définissant les objectifs de la recherche, ainsi qu'une synthèse bibliographique sur les différentes formulations des éléments finis et les éléments d'interface et leur utilisation dans la résolution des problèmes statiques linéaires et non-linéaires.

Le deuxième chapitre est destiné à présenter une formulation incrémentale des équations gouvernantes d'un domaine infini, ainsi que la méthode des éléments finis et celle des éléments finis qui vont servir à faire le couplage.

la base de l'étude des interfaces et les différentes méthodes d'analyse des problèmes de contact, ainsi que le choix effectué pour la modélisation des interfaces sont détaillées au troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du comportement non linéaire des sols. Les critères classiques de plasticité et les différentes techniques de résolution des problèmes non-linéaires sont présentés dans ce chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons les programmes élaborés dans le cadre de cette étude.

Le sixième chapitre présente un certain nombre d'applications. Les exemples choisis, au nombre de six, touchent des problèmes très intéressants de l'interaction sol-structure.

Au septième chapitre, sont présentés les conclusions et les recommandations pour les travaux futurs.

### 1.3 SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

#### 1.3.1 Aperçu historique sur les éléments infinis:

La formulation des éléments infinis est basée essentiellement sur l'extension du domaine des éléments finis, ce qui entraîne l'obtention d'un domaine non-borné. Cela nécessite d'une part le bon choix des fonctions de forme et d'autre part les moyens d'intégration numérique sur un domaine infini.

En se basant sur cette idée, plusieurs chercheurs ont commencé dès 1973 à proposer des formulations de ces éléments.

Ungless et Anderson [2] ont construit le premier élément infini. La formulation de cet élément est basée sur l'utilisation d'une variation de la forme  $\left(\frac{1}{1+r}\right)$  dans la direction radiale. Ce travail a fait l'objet d'une thèse de Master, mais il n'a été publié qu'en 1977 [2].

Cependant, le premier travail publié sur ce type d'éléments était celui de Zienkiewicz et Bettess en 1975 [64]. La formulation originale des éléments infinis a été décrite dans les deux articles publiés par Bettess [10-11]. Dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini. Les fonctions de forme sont donc multipliées par des fonctions décroissantes (decay functions) et qui sont choisies suivant le type de problème étudié. Dans le cas de problèmes d'ondes périodiques, ces fonctions comprennent des termes d'ondes [10],[64].

Les autres formulations de ces éléments ont suivi deux principaux axes de développement: le premier est basé sur certaines transformations de l'élément d'un domaine borné à un domaine infini. Le deuxième type de formulation consiste à utiliser des fonctions décroissantes en liaison avec les fonctions de forme ordinaires.

Comme il a été expliqué précédemment Ungless et Anderson [2] ont utilisé un terme de la forme  $\left(\frac{1}{1+r}\right)$  pour des problèmes élastiques 3D. Medina [47] adopte la même approche, pour la résolution des problèmes d'axisymétrie.

Beer et Meek [8] ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme  $\left(\frac{1}{1-\xi}\right)$  et qui transforme le domaine  $\xi$  fini en un domaine  $x$  infini. Ils ont aussi utilisé la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre sur le domaine borné  $\xi$ .

L'approche de Pissanetzky [51] est similaire à celle de Beer et Meek, mais elle nécessite une intégration numérique sur un domaine infini, ce qui implique une modification des abscisses et des poids de Gauss-Legendre.

Zienkiewicz [65-66] a utilisé une nouvelle approche basée sur deux types de transformations: la première pour l'interpolation de la géométrie et la deuxième pour l'interpolation des variables inconnues. L'avantage de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de Gauss-Legendre.

Lynn et Hadid [43] ont utilisé une interpolation de type Lagrange, mais en termes de la variable  $\left(\frac{1}{r}\right)$ , avec  $r$  le rayon à partir du centre du domaine.

Curnier [18] a proposé une procédure simple pour obtenir un élément infini statique, à partir d'un élément fini isoparamétrique linéaire en utilisant deux approches. La première est basée sur des fonctions de forme ascendantes et la deuxième sur des fonctions de forme descendantes.

En 1983, Bando [5] a utilisé une nouvelle formulation des éléments infinis pour l'analyse des excavations. Cette formulation est basée sur la transformation de l'élément d'un domaine infini à un domaine fini.

En 1984, Marques et Owen [45-46] ont publié plusieurs articles sur ces éléments. Ils ont utilisé l'élément de Zienkiewicz en élasto-viscoplasticité.

En 1985, Rajapalske et Karasudhi [52] ont publié un article sur l'utilisation des éléments infinis élastostatiques, pour les domaines semi-infinis multicouches. Dans la même année, Kumar [36] a publié un article où il a proposé une nouvelle formulation de ces éléments. Dans cette formulation, il a utilisé des fonctions de forme ascendantes, avec différentes formes décroissantes  $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ .

En 1986, Zhang et al. [12] ont appliqué ces éléments pour l'analyse des contraintes dans les barrages poids. Kumar a utilisé les éléments infinis pour l'analyse des chaussées flexibles [37] et les excavations souterraines [38].

En 1987, Kumar [39] a étendu son analyse concernant les excavations souterraines pour le cas anisotrope et non homogène. Dans la même année, Zhao et al. [12] ont analysé une fondation élastique plane et une arche de la fondation d'un barrage.

En 1988, Kumar [40] a publié plusieurs détails concernant l'utilisation de son élément infini pour les milieux non homogènes et anisotropes.

En 1989, Zhang et al. [62] ont continué l'application des éléments infinis pour les problèmes de fondation de barrages.

### 1.3.2 Eléments d'interface: Revue et Critiques

La simulation des conditions de contact est un problème très intéressant de la mécanique des sols et de la mécanique des roches, qu'il s'agisse d'un problème de contact entre deux couches différentes de sol, de fissures dans les masses rocheuses ou contact sol-structure. On ne peut se permettre alors de négliger les mouvements relatifs aux interfaces de contacts.

Ainsi, ces dernières années, nombreux sont les chercheurs qui ont proposé des éléments d'interface pour le traitement des problèmes de contact:

Parmi les éléments d'interface utilisés dans les problèmes de l'interaction sol-structure celui proposé par Goodman, Taylor et Brekke [31]. La formulation de cet élément est basée sur les déplacements nodaux relatifs de l'élément solide qui entoure l'élément d'interface. Pour un cas bidimensionnel, la relation contrainte-déplacement a pour expression:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r \\ u_r \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} v_r \\ u_r \end{Bmatrix}$$

Avec:

$\sigma_n, \tau$  : contraintes normale et de cisaillement (resp.);

$K_n, K_s$  : raideurs normale et tangentielle (resp.);

$v_x, u_x$  : déplacements relatifs normal et tangentiel (resp.).

Zienkiewicz et al. [63], ont utilisé la formulation des éléments finis isoparamétriques pour un élément d'interface, qui est traité comme un élément solide.

J. Ghaboussi, E.L. Wilson et J. Isenberg [30] ont utilisé un élément de massif pour lequel les déplacements relatifs servent comme degrés de liberté pour la formulation de la matrice de rigidité.

G.N. Pande et K.G. Sharma [49] s'inspirant des travaux de Zienkiewicz et al. [63] et Ghaboussi et al. [30], ont développé et programmé un élément isoparamétrique parabolique de contact à huit noeuds.

O. Hungr et D.F. Coates [33] qui, en se servant du modèle de R.E. Goodman et al. [31], ont étudié la déformabilité des joints et leur relation avec les tassements des fondations sur rocher fracturé.

Katoma [35] a proposé un élément d'interface à partir du principe des travaux virtuels modifié par des conditions appropriées. Plusieurs modes de déformation de l'interface sont incorporés dans cette formulation.

L.R. Herrman [32] a dédoublé les points de contact et a munit chaque élément à deux noeuds de deux ressorts, un tangentiel et l'autre normal à la direction de contact, qui contrôlent le glissement et le décollement entre les deux milieux.

Les éléments cités ci-dessus ont été utilisés dans les problèmes de l'interaction sol-structure par plusieurs chercheurs. Dans la plus part de ces travaux, le comportement tangentiel est simulé comme non-linéaire élastique ou plastique. La raideur tangentielle est évaluée comme étant le module tangent et cela à partir des tests de cisaillement direct.

En se basant sur la supposition que les milieux sol et structure ne se chevauchent pas à l'interface, de très grandes valeurs ont été attribuées à la raideur normale. Toutefois, il n'y a pas une base logique pour l'adoption d'une telle valeur, parce que la détermination de cette valeur nécessite a priori une étude paramétrique. De plus, dans plusieurs problèmes, cette formulation peut donner des résultats satisfaisants dans un état collé et un état de glissement. Pour les autres modes de déformation, comme le décollement, les résultats obtenus sont peu fiables.

L'idée d'utiliser les éléments des couches fines (T.L.E) pour simuler le comportement des interfaces, apparaît logique parce qu'ils permettent de tenir compte de plusieurs modes de déformation. Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont utilisé des éléments d'interface des couches fines. Citons principalement les travaux de C.S. Desai et al. [20-23], qui ont utilisé l'élément d'interface des couches fines pour étudier les problèmes d'interaction statique et dynamique sol-structure.

## **Chapitre 2**

### **COUPLAGE**

### **ELEMENTS FINIS - ELEMENTS INFINIS**

# **Chapitre 2**

## **COUPLAGE ELEMENTS FINIS - ELEMENTS INFINIS**

### 2.1 INTRODUCTION

Dans la modélisation de n'importe quel problème de géomécanique qui tient compte de l'interaction sol-structure, le milieu sol est représenté comme une région soit infinie soit semi-infinie.

Une méthode d'approximation de ces problèmes consiste à remplacer la condition aux limites à l'infini par une condition aux limites sur une frontière finie, mais située à une grande distance du chargement. La question qui se pose lors de l'utilisation d'une telle méthode est qu'est ce qu'une grande distance? Il est clair que des erreurs significatives se produisent si la frontière n'est pas placée assez loin. D'un autre côté, si nous la plaçons trop loin, nous allons introduire un grand nombre d'éléments pour modéliser une partie importante du domaine.

Pour surmonter ces difficultés, liés à la présence des domaines infinis, de nombreuses méthodes ont été proposées. Dans certaines approches, une condition aux limites exacte est introduite et couplée au domaine de calcul par éléments finis [67].

Cependant, la méthode la plus efficace consiste à utiliser le concept d'élément infini qui a été initialement introduite par Bettess en 1977 [10].

Dans cette méthode, les éléments finis classiques sont couplés à des éléments infinis qui modélisent d'une façon satisfaisante le comportement à l'infini du matériau.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une formulation incrémentale des équations gouvernantes d'un domaine infini, ainsi que la méthode des éléments finis et celle des éléments infinis qui vont servir à faire le couplage.

## 2.2 FORMULATION INCREMENTALE POUR UN DOMAINE INFINI

En supposant des petits déplacements et une non-linéarité matérielle uniquement, le principe des déplacements virtuels qui stipule que si une structure en équilibre est soumise à un déplacement virtuel, le travail des actions extérieures est égal à l'énergie des déformations virtuelles internes:

$$\int_V {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (2.1)$$

Cette équation est satisfaite à l'équilibre de la configuration  $(t+\Delta t)$ . Toutes les quantités physiques de l'équation (2.1) sont données par rapport au système de coordonnées cartésien stationnaire  $(x, y, z)$ .

${}^{t+\Delta t}R$  est le travail virtuel externe à l'équilibre de la configuration  $(t+\Delta t)$ , qui est donné par l'expression:

$${}^{t+\Delta t}R = \int_A {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S dA + \int_V {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i dV \quad (2.2)$$

avec:

${}^{t+\Delta t}f_i^S$  : vecteur forces de surface.

${}^{t+\Delta t}f_i^B$  : vecteur forces de volume.

Pour un domaine non borné, le volume  $V$  dans l'équation (2.1) représente la région intérieure dans la Figure 2.1.

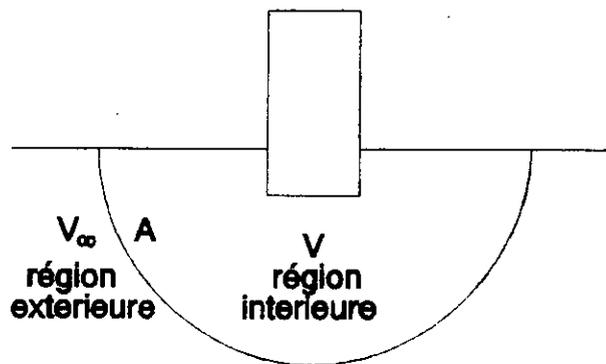


Figure 2.1: Domaine infini

Pour la région extérieure, le principe des déplacements virtuels donne (en supposant que le champ des déplacements est nul à l'infini):

$$\int_A (- {}^{t+\Delta t} f_i^s) \delta u_i^s dA = \int_{V_\infty} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.3)$$

L'intégrale de volume dans l'expression (2.3) représente la contribution statique de la région infinie. Pour la modélisation de cette région on va utiliser des éléments infinis.

En combinant les équations (2.1) et (2.3), on obtient l'équation gouvernante d'un système infini:

$$\int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i dV - \int_{V_\infty} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$$

Ce qui implique que:

$$\int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV + \int_{V_\infty} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i dV$$

Donc, l'équation gouvernante d'un domaine infini est donnée par:

$$\int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV + \int_{V_\infty} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R_1 \quad (2.4)$$

En introduisant le tenseur des propriétés matérielles incrémental  $D_{ijrs}$ , on obtient la version incrémentale de l'équation (2.4):

$$\int_{V+V_\infty} D_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R_1 - \int_{V+V_\infty} {}^t \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.5)$$

Sous forme matricielle, l'équation (2.5) s'écrit pour un élément fini sous la forme suivante:

$$K \Delta U = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F \quad (2.6)$$

Avec:

$K$  : matrice de rigidité élémentaire;

$\Delta U$  : vecteur des déplacements nodaux incrémentaux;

${}^{(t+\Delta t)}R$  : vecteur forces nodales extérieures;

${}^tF$  : vecteur forces nodales équivalentes aux contraintes de l'élément.

Les intégrales de l'équation (2.5) sont approximées comme suit:

- L'intégrale:  $\int_{V_e} D_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta e_{ij} dV$  par:

$$K \Delta U = \left[ \int_{V_e} B^T D B dV \right] \Delta U \quad (2.7)$$

-L'intégrale:  $\int_{V_e} {}^t\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$  par:

$${}^tF = \int_{V_e} B^T \sigma dV \quad (2.8)$$

Avec:

$B$  : matrice de transformation déformations-déplacements.

$\sigma$  : vecteur contraintes.

En assemblant les contributions de chaque élément, on obtient l'équation incrémentale gouvernante d'un domaine non borné.

La résolution de l'équation (2.6) est faite en utilisant l'une des méthodes exposées dans le chapitre 4.

## 2.3 METHODE DES ELEMENTS FINIS

### 2.3.1 Introduction:

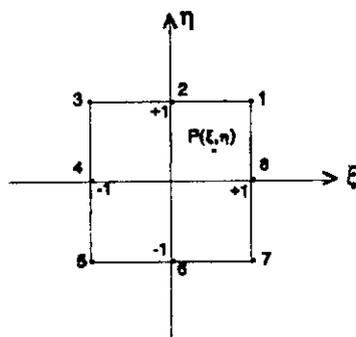
Le concept de la méthode des éléments finis est originalement introduit pour l'analyse structurale par Turner et al. [60], Argyris et Kelsey [3] au milieu des années 50. Le nom éléments finis a été utilisé pour la première fois dans un article publié par Clough [17] en 1960.

la MEF a connu par la suite une progression générale rapide, et elle est devenue maintenant la plus utilisée dans l'analyse des structures. la famille des éléments isoparamétriques est introduite pour la première fois par Taig[58] et Irons [34]. L'élément est appelé isoparamétrique parce que la même fonction d'interpolation utilisée pour définir la variation des déplacements dans l'élément est aussi utilisé pour définir la géométrie de l'élément.

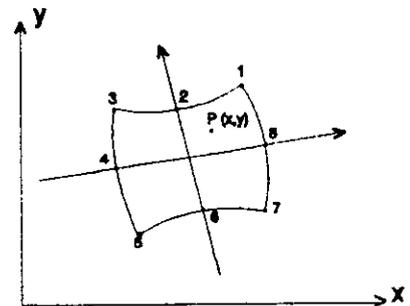
Dans ce qui suit nous nous sommes particulièrement intéressés à la présentation de l'élément isoparamétrique à 8 noeuds (parce que c'est cet élément qui va être couplé à un élément infini).

### 2.3.2 Élément isoparamétrique à huit noeuds:

#### 2.3.2.1 Transformation géométrique:



Plan naturel  
Élément parent



Plan physique  
Élément isoparamétrique

Figure 2.2: Élément isoparamétrique à huit noeuds.

La transformation définissant la forme géométrique de l'élément isoparamétrique, lie tout point  $P(x, y)$  à un point  $P'(\xi, \eta)$  de l'élément parent.

Cette transformation doit répondre aux conditions suivantes:

1) La transformation doit être bi-univoque. Les points  $P$  et  $P'$  forment des couples. Le déterminant du Jacobien de la transformation ne peut être nul ou infini (pour tout point  $P'(\xi, \eta)$  de l'élément parent).

2) La transformation doit être définie univoquement par les coordonnées  $x_i, y_i$  des huit noeuds de l'élément isoparamétrique.

3) Si  $P'$  coïncide avec un noeud de l'élément parent, le point  $P$  correspondant est le noeud de même numéro de l'élément isoparamétrique.

Donc:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (2.9)$$

Les fonctions de forme  $N_i(\xi, \eta)$  sont données par:

. Coins (1,3,5,7):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad (2.10)$$

. Milieux (2,4,6,8):

$$\begin{cases} \xi_i = 0 \rightarrow N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \\ \eta_i = 0 \rightarrow N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour satisfaire à la condition (3), on doit avoir:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad i=1,8; j=1,8 \quad (2.12)$$

### 2.3.2.2 Interpolation du champ de déplacements:

Le champ de déplacements  $\{U\}$  en tout point  $P$  de l'élément isoparamétrique est donné par:

$$\{U\} = [N]\{d\} \quad (2.13)$$

ou explicitement:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad (2.14)$$

La définition de la transformation géométrique et la définition de l'interpolation du champ des déplacements se basent:

a) sur les mêmes noeuds.

b) sur les mêmes fonctions de forme  $N_i(\xi, \eta)$ .

Cela justifie l'appellation d'élément isoparamétrique.

### 2.3.2.3 Calcul des propriétés de l'élément isoparamétrique:

#### a) Matrice de rigidité:

La matrice de rigidité est donnée par:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (2.15)$$

avec:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

b) Forces généralisées: En utilisant le principe des travaux virtuels, on trouve le vecteur  $\{F_o^B\}$  des forces généralisées équivalentes à une force  $\{f^B\}$  répartie par unité de volume sur l'élément.

On a:

$$\{F_o^B\} = \int_V [N]^t \{f^B\} dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^t \{f^B\} |J| d\xi d\eta \quad (2.16)$$

De même pour les forces de surface:

$$\{F_o^B\} = \int_S [N]^t \{f^S\} ds = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^t \{f^S\} |J| d\xi d\eta \quad (2.17)$$

## 2.4 ELEMENTS INFINIS

### 2.4.1 Introduction:

L'application directe de la méthode des éléments finis à un domaine infini oblige à considérer une infinité d'éléments bornés. Le problème n'est donc pas adapté à une résolution numérique. Mais rien n'empêche de considérer des éléments non bornés, pourvu que les quantités intégrées restent finies. Le choix des fonctions de base devra respecter deux critères:

- Les fonctions doivent être proches de la solution afin d'assurer la convergence.
- Ces fonctions doivent conduire à des intégrales finies sur le domaine considéré.

Nous obtenons ainsi la notion d'éléments infinis.

### 2.4.2 Formulation des éléments infinis:

Dans la formulation des éléments finis, deux types de transformations sont utilisées: la première pour l'interpolation de la géométrie (des coordonnées) et la deuxième pour l'interpolation des déplacements. Ces deux types de transformations sont encore utilisées pour la formulation des éléments infinis.

Il existe deux approches pour la formulation des éléments infinis:

- Approche directe.
- Approche inverse.

#### 2.4.2.1 Approche directe:

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée (Figure 2.3).

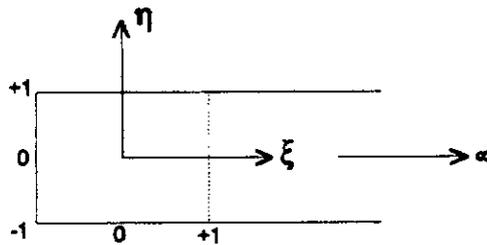


Figure 2.3: Géométrie de l'élément infini.

Les variables inconnues sont exprimées en termes de fonctions de forme descendantes "descent-shape functions" et qui tendent vers zéro à l'infini (Bettess [10]; Lynn et Hadid [43]).

Les fonctions de forme de l'élément infini sont données par l'expression:

$$M_i(\xi, \eta) = f_i(\xi, \eta) N_i(\xi, \eta) \quad (2.18)$$

Avec:

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme standard.

$f_i(\xi, \eta)$  : sont des fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme de l'élément infini.

Le rôle de la fonction décroissante  $f_i(\xi, \eta)$  est d'assurer que le comportement de l'élément soit une bonne réflexion du sens physique du problème.

La fonction décroissante  $f_i(\xi, \eta)$  doit être égale à l'unité en chaque noeud:

$$f_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \quad (2.19)$$

Les dérivées des fonctions de forme de l'élément infini peuvent être facilement obtenues en utilisant la règle de la dérivation en chaîne:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} f_i + N_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} f_i \end{cases} \quad (2.20)$$

Généralement deux types de fonctions décroissantes  $f_i(\xi, \eta)$  sont utilisées:

- Fonctions exponentielles décroissantes.
- Fractions rationnelles décroissantes.

**a) Fonctions exponentielles décroissantes:**

La première fonction qui a été utilisée est:  $\exp(-x)$ . Elle a l'avantage de tendre vers zéro à l'infini plus rapidement qu'un autre polynôme. Elle domine le comportement à l'infini et assure la convergence vers zéro quand  $x$  augmente.

La forme générale de ces fonctions, dans la direction  $\xi$  positive est:

$$f_1(\xi, \eta) = \exp[(\xi_1 - \xi)/L] \quad (2.21)$$

L'introduction de  $\xi_1$  assure que la fonction  $f_1(\xi, \eta)$  vérifie la condition (2.19).

$L$  est une longueur qui détermine le taux de décroissance.

#### b) Fractions rationnelles décroissantes:

Ce type de fonctions prend généralement la forme suivante:

$$f_1(\xi) = \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (2.22)$$

Avec:

$\xi_0$  : est la coordonnée d'un point (origine) qui se trouve à l'extérieur de l'élément infini.

La valeur de  $n$  doit être supérieure à la plus grande puissance de  $\xi$  contenue dans les fonctions  $N_1(\xi, \eta)$ . Cela assure que lorsque  $\xi$  tend vers l'infini, la fonction  $M$  tend vers  $\frac{1}{\xi}$ .

L'inconvénient principal de l'approche directe est qu'elle nécessite l'utilisation d'une intégration numérique sur un domaine semi-infini.

#### 2.4.2.2 Approche inverse:

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu. Des fonctions de forme ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique et qui sont singulières à l'extrémité du plan naturel  $\xi = +1$ .

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel, ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

Des exemples de cette catégorie de fonctions de forme ascendantes "ascent-shape functions " ont été données par:

Zienkiewicz et al. [65-66], Marque et Owen [45], Kumar [36], Selvadurai et Gopal [55], Schrefler et Simoni [54], Simoni et Schrefler [56].

L'avantage principal de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de Gauss-Legendre, utilisés pour un élément fini.

Dans la présente étude nous nous intéresserons à l'approche inverse pour sa facilité d'implémentation.

Dans ce qui suit nous allons développer le principe de construction des fonctions de forme ascendantes (Fonctions de transformation).

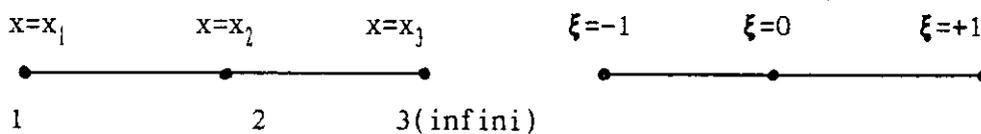
#### 2.4.2.2.1 Principe de construction de la fonction de transformation:

##### a) Cas unidimensionnel:

Commençons par une transformation unidimensionnelle le long d'une ligne (1-2-3) dont la direction coïncide avec l'axe des x (Figure 2.4).

Considérons la fonction suivante:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \left( \frac{-2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) x_2 \quad (2.23)$$



(a) Représentation globale

(b) Représentation locale

Figure 2.4: Elément infini unidimensionnel.

Nous remarquons que:

$$\begin{aligned}\xi &= 0 \Rightarrow x = x_2 \\ \xi &= -1 \Rightarrow x = x_1 \\ \xi &= +1 \Rightarrow x = \infty\end{aligned}$$

De plus on a:

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \quad (2.24)$$

En résolvant l'équation (2.23) en  $\xi$ , on trouve:

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - 2x_1 + x_2} = 1 - \frac{2(x_2 - x_1)}{x - 2x_1 + x_2} \quad (2.25)$$

Avec une valeur:  $x_2 = 2x_1$ , l'équation (2.25) devient:

$$\xi = 1 - \frac{2x_1}{x} \quad (2.26)$$

Donc, une transformation est établie entre un domaine infini  $x$  et un domaine fini  $\xi$ .

L'étape suivante est de voir en quelle forme polynomiale dans le domaine fini  $\xi$ , est transformée à un domaine non borné  $x$ .

Si, par exemple, la fonction inconnue  $u$  est approchée par une fonction de la forme polynomiale suivante:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots \quad (2.27)$$

Par substitution de la valeur de  $\xi$  dans l'équation (2.27), nous obtenons un développement en série de la forme:

$$u = C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \dots \quad (2.28)$$

Avec:

$C_i$  : sont des coefficients quelconques. Pour assurer que  $u$  tend vers zéro à l'infini,  $C_0$  doit être égale à zéro ( $C_0=0$ ).

$r$  : est la distance radiale mesurée à partir de l'origine (ou pôle).

Donc la convergence est obtenue avec cet élément lorsque le degré du développement polynomial augmente.

**Remarques:**

1) la condition:  $x_2 = 2x_1$  implique que le noeud du milieu (noeud 2) doit être placé à une distance égale à deux fois celle du noeud 1.

2) Dans cette approche, la formulation des éléments infinis dépend du type de la fonction décroissante utilisée  $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{\sqrt{r}} \dots\right)$ .

3) La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne droite dans l'espace  $(x, y, z)$  donne:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^2 N_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^2 N_i z_i \end{cases}$$

avec:

$N_i$  sont les transformations infinies à une dimension.

b) Cas bidimensionnel:

La généralisation de cette formulation pour les cas 2D et 3D est nécessaire. Il est facile de voir que cette généralisation est réalisée en faisant le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en  $\eta$  (direction finie).

Donc les fonctions de forme sont données par:

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi) N_i(\eta) \quad (2.29)$$

Avec:

$N_i(\xi)$  : transformation infinie à une dimension.

$N_i(\eta)$  : fonction de forme standard en  $\eta$  .

$M_i(\xi, \eta)$  : fonction de forme de l'élément infini.

Considérons l'élément 2D suivant:

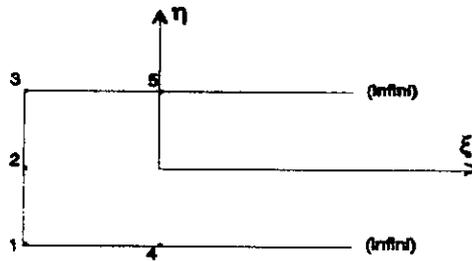


Figure 2.5: Élément infini à 5 noeuds.

Si on considère des fonctions décroissantes de type  $\left(\frac{1}{r}\right)$ , alors les fonctions de transformation sont données par:

$$M_1(\xi, \eta) = N_1(\xi) N_1(\eta) = \left[ \frac{-2\xi}{(1-\xi)} \right] \left[ \frac{-\eta(1-\eta)}{2} \right] = \frac{\xi\eta(1-\eta)}{1-\xi}$$

$$M_2(\xi, \eta) = N_1(\xi) N_2(\eta) = \left[ \frac{-2\xi}{(1-\xi)} \right] [(1-\eta^2)] = \frac{-2\xi(1-\eta^2)}{1-\xi}$$

$$M_3(\xi, \eta) = N_1(\xi) N_3(\eta) = \left[ \frac{-2\xi}{(1-\xi)} \right] \left[ \frac{\eta(1+\eta)}{2} \right] = \frac{-\xi\eta(1+\eta)}{1-\xi}$$

$$M_4(\xi, \eta) = N_2(\xi) N_4(\eta) = \left[ \frac{(1+\xi)}{(1-\xi)} \right] \left[ \frac{(1-\eta)}{2} \right] = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(1-\xi)}$$

$$M_5(\xi, \eta) = N_2(\xi) N_5(\eta) = \left[ \frac{(1+\xi)}{(1-\xi)} \right] \left[ \frac{(1+\eta)}{2} \right] = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2(1-\xi)}$$

Donc la fonction de transformation pour le cas bidimensionnel (suivant l'axe des  $x$ ) s'écrit sous la forme:

$$x = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) x_i \quad (2.30)$$

Nous remarquons que:

$$\sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) = 1 \quad (2.31)$$

La transformation inverse de la fonction donnée par l'équation (2.30) est:

$$\xi = 1 - \frac{(-x_1 - x_3 + x_4 + x_5) - \eta(x_4 - x_1 + x_3 - x_5)}{x + (-x_1 - x_3 + \frac{x_4 + x_5}{2}) + \eta(x_1 - \frac{x_4}{2} - x_3 + \frac{x_5}{2})} \quad (2.32)$$

Avec les valeurs:  $x_5 = 2x_3$  et  $x_4 = 2x_1$ , l'équation (2.32) se réduit à:

$$\xi = 1 - \frac{(x_1 + x_3) + \eta(-x_1 + x_3)}{x} \quad (2.33)$$

La transformation donnée par l'équation (2.33) est analogue à la transformation unidimensionnelle exprimée par l'équation (2.26).

L'équation (2.33) peut être réarrangée comme suit:

$$x = \frac{(x_1 + x_3) + \eta(-x_1 + x_3)}{(1 - \xi)} \quad (2.34)$$

La transformation donnée par l'équation (2.34) permet le passage d'un domaine infini  $x$  à un domaine fini  $\xi$ , comme le montre le tableau-1-:

$\xi$	$\eta$	$x$
+1	-1	infini
	0	infini
	+1	infini
0	-1	$x = 2x_1 (=x_4)$
	+1	$x = 2x_3 (=x_5)$
-1	-1	$x = x_1$
	0	$x = \frac{(x_1 + x_3)}{2} = x_2$
	+1	$x = x_3$

Tableau-1-: Transformation de l'équation (2.34).

#### 2.4.3 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini:

Considérons l'élément infini à 5 noeuds donné par la figure (2.5). La transformation géométrique qui permet le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales, s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (2.35)$$

Avec:

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de transformation de l'élément infini données précédemment.

L'interpolation du champ de déplacements des éléments infinis est donnée en termes des déplacements nodaux des noeuds situés à une distance finie. En supposant que les déplacements tendent vers zéro à l'infini, l'élément infini à 5 noeuds peut être considéré comme un élément quadrilatère à 8 noeuds dont le champ de déplacements, sur la face  $\xi=+1$ , est nul.

Donc, les fonctions d'interpolation de l'élément infini sont obtenues directement à partir des celles correspondantes aux mêmes noeuds de l'élément fini.

Le champ de déplacements en tout point de l'élément est donné par:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v = \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad (2.36)$$

Avec:

$N_i(\xi, \eta)$  : fonctions de forme standard de l'élément fini.

La matrice de rigidité de l'élément infini est donnée par:

$$[K^e] = \int_V [B]^t [D] [B] dV \quad (2.37)$$

ou encore:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (2.38)$$

Pour un cas de déformation plane, on a:

$$(e) = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_1^5 N_i(\xi, \eta) u_i \\ \sum_1^5 N_i(\xi, \eta) v_i \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne:

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Donc:

$$\{e\} = [B] \{d\}$$

Avec:

$[B]$  : matrice de transformation déformations-déplacements.

De plus:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Avec:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Pour un élément infini, les fonctions de transformation  $M_i(\xi, \eta)$  sont différentes des fonctions d'interpolation  $N_i(\xi, \eta)$  :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) y_i \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_1^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i ; & \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_1^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_1^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i ; & \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_1^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{cases} \quad (2.42)$$

Donc, la matrice Jacobienne  $[J]$  pour un élément infini est donnée par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^5 \frac{\partial M_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^5 \frac{\partial M_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^5 \frac{\partial M_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^5 \frac{\partial M_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

## 2.5 COUPLAGE ELEMENTS FINIS-ELEMENTS INFINIS

### 2.5.1 Introduction:

Dans de nombreux problèmes de géomécanique, nous nous trouvons en présence de domaines infinis où semi-infinis. Un exemple simple est donné, celui d'un domaine semi-infini soumis à une charge ponctuelle centrée, illustrée par la figure (2.6).

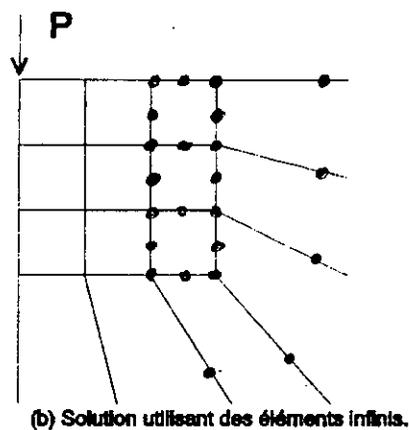
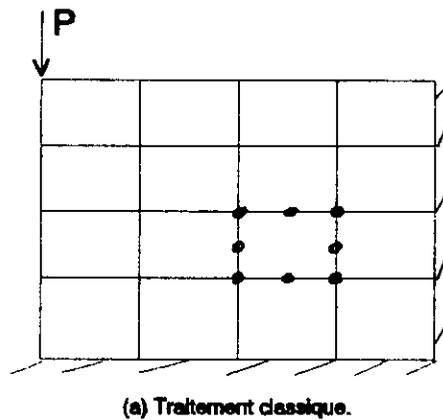


Figure 2.6: Domaine semi-infini soumis à une charge concentrée.

La question qui se pose est le choix d'une méthode de résolution de ces problèmes. La première réponse intuitive est celle que nous avons illustré sur la figure 2.6(a) et qui consiste à imposer des déplacements nuls sur une frontière arbitraire. Cela pose le problème du choix de cette frontière finie.

Une méthode plus efficace consiste à coupler les éléments finis standards à des éléments infinis (Figure 2.6(b)). Cette méthode modélise d'une façon satisfaisante le comportement du matériau à l'infini.

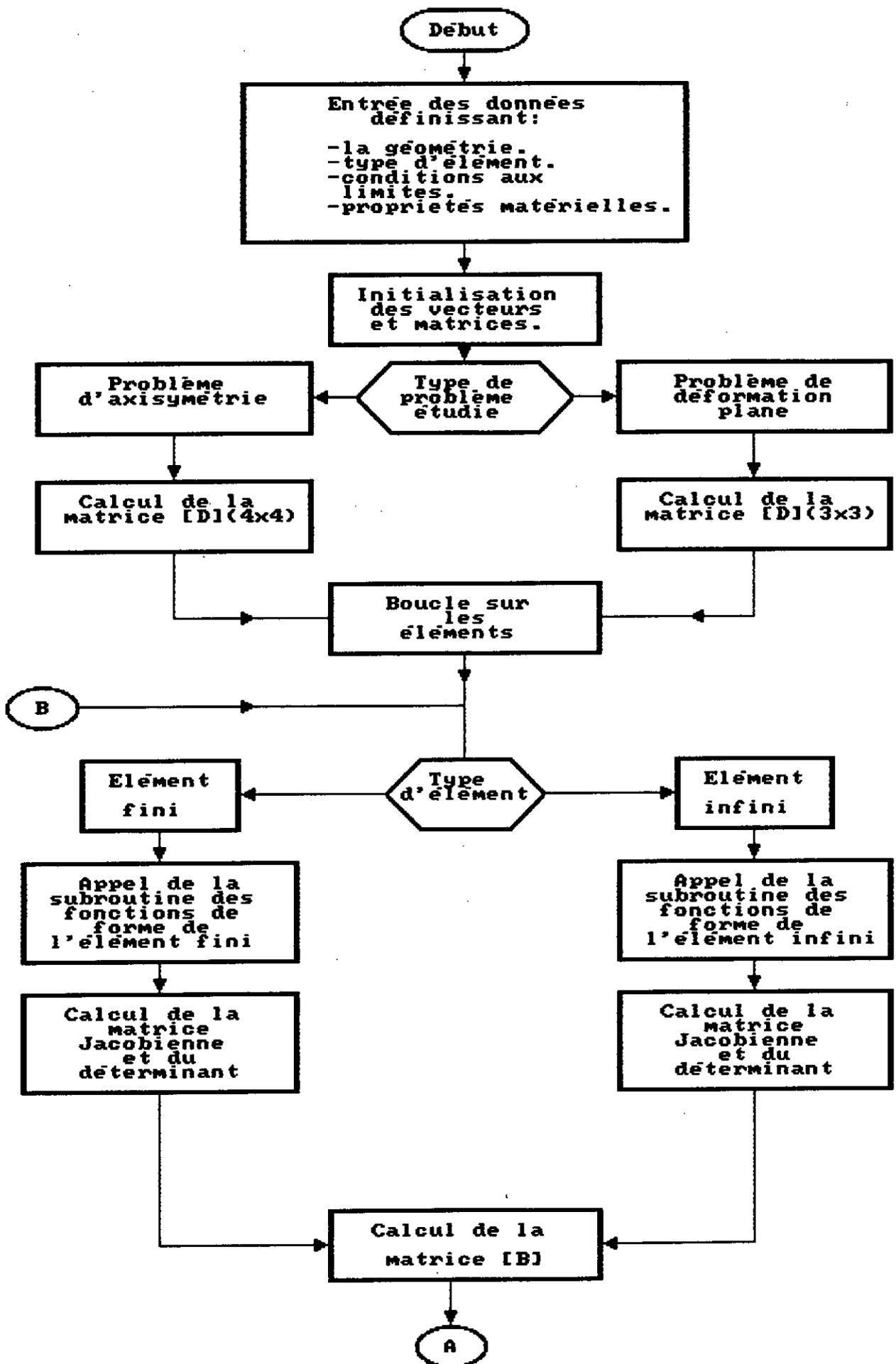
### 2.5.2 Implémentation des éléments infinis:

On sait maintenant que la matrice de rigidité de l'élément infini, obtenue par l'approche inverse, peut être évaluée par la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre. Cette technique d'intégration numérique est aussi utilisée pour le calcul des propriétés des éléments finis, mais avec un ordre d'intégration qui peut être différent de celui d'un élément infini. Pour cette raison, l'élément infini peut être implémenté dans un programme d'éléments finis avec de petites modifications.

Il est à noter que lors du calcul des propriétés de ces nouveaux éléments, il n'y a que la matrice Jacobienne qui diffère des formules classiques. C'est donc la seule modification à apporter au programme éléments finis.

Dans la présente étude, des éléments finis isoparamétriques à 8 noeuds sont couplés à des éléments infinis à 5 noeuds. Les éléments finis sont utilisés pour modéliser la structure et une partie du sol. Pour l'autre partie, des éléments infinis sont utilisés comme le montre la figure (2.6).

L'organigramme suivant (Figure 2.7) présente le programme du couplage éléments finis-éléments infinis pour les problèmes d'axisymétrie et déformation plane.



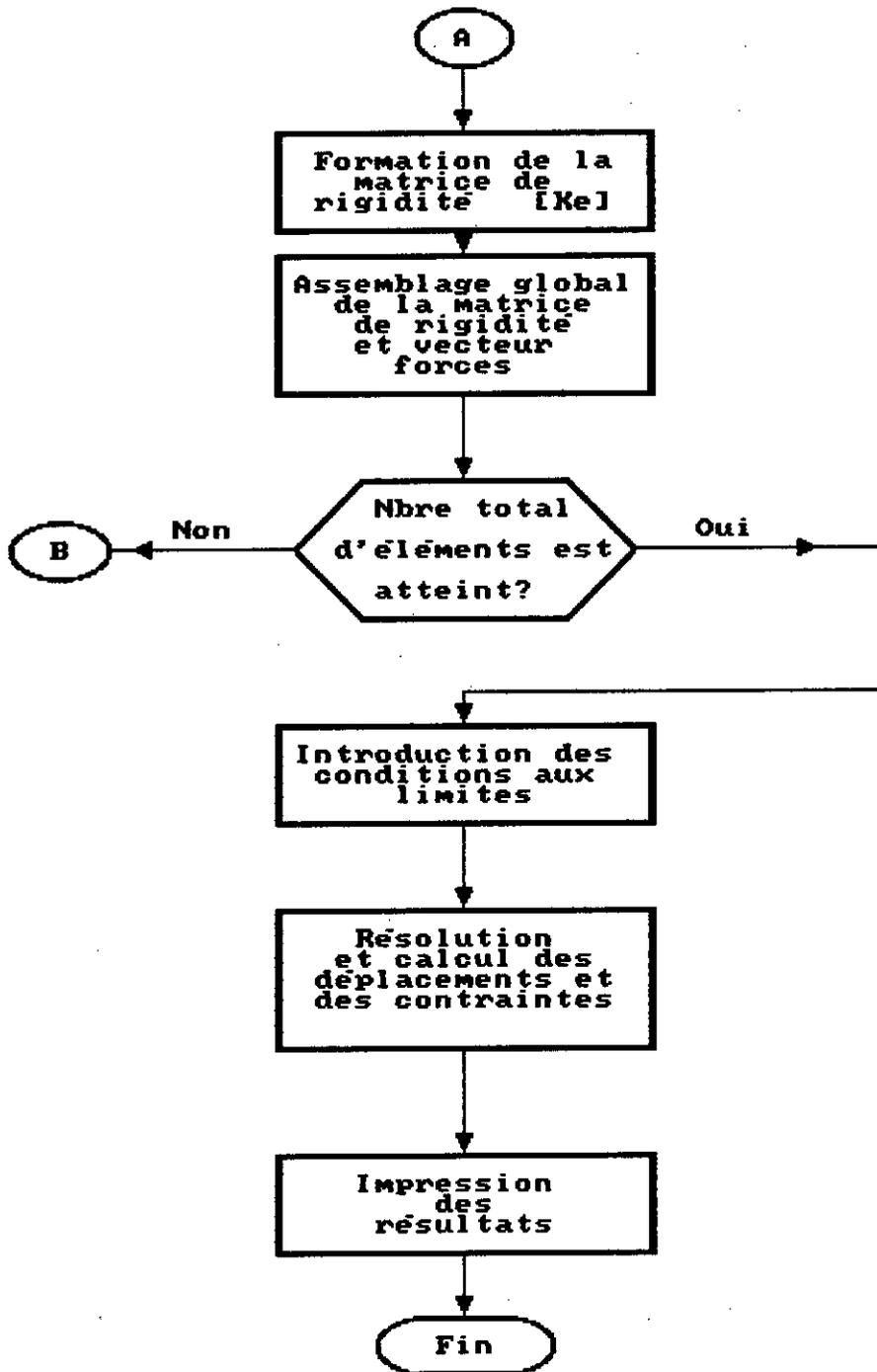


Figure 2.7: Implémentation des éléments infinis.

## 2.6 CONCLUSION

L'utilisation du couplage éléments finis-éléments infinis permet de modéliser de façon très satisfaisante le comportement à l'infini des domaines non bornés. Les éléments infinis, obtenus par l'approche inverse, sont faciles à implémenter dans un programme éléments finis. Ils sont très efficaces pour le traitement des problèmes d'interaction sol-structure. Le modèle éléments finis-éléments infinis permet d'améliorer la précision et la convergence des résultats avec un nombre réduit d'éléments comparé à un modèle éléments finis.

Dans la présente étude, des éléments finis à 8 noeuds sont couplés à des éléments infinis à 5 noeuds.

## ***Chapitre 3***

### ***ETUDE DES INTERFACES***

# **Chapitre 3**

## **ETUDE DES INTERFACES**

### **3.1 INTRODUCTION**

Les désordres observés sur un ouvrage de génie civil existant, trouvent souvent leur origine dans les phénomènes locaux, qui mettent en évidence des points faibles de cet ouvrage. Ces zones critiques sont situés essentiellement au niveau des liaisons entre matériaux ou interfaces.

Souvent l'analyse des systèmes sol-structure sous l'effet des charges extérieures est faite en supposant qu'il y a une liaison parfaite entre le sol et la structure, pendant toute les étapes de chargement.

Bien que, cette supposition simplifie généralement la procédure d'analyse et peut mettre en évidence l'effet de l'interaction sol-structure. Cependant, elle reste limitée parce que les mouvements relatifs existants au niveau des interfaces ne sont pas inclus dans cette analyse. Ainsi, pour une analyse plus correcte de ces problèmes, on doit tenir compte de ces mouvements relatifs.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la base de l'étude des interfaces et préciser enfin le choix effectué pour la modélisation des interfaces.

### **3.2 CLASSIFICATION DES INTERFACES**

#### **3.2.1 Définition:**

L'interface est la zone de contact entre deux matériaux, c'est à dire le siège des liaisons entre deux solides ( $S_1, S_2$ ) (Figure 3.1).

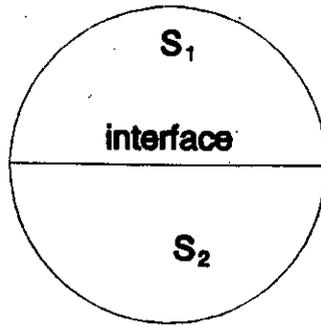


Figure 3.1: Définition de l'interface

Sur le plan mécanique, l'existence du contact se caractérise par certaines relations entre les composantes normales ( $\sigma_n$ ) et tangentielles ( $\tau$ ) de la contrainte s'exerçant sur une facette portée par la surface moyenne.

Associé à cet état de contrainte, apparaît ce que nous désignons par un déplacement relatif des points  $M_1$  et  $M_2$  appartenant respectivement au solide  $S_1$  et  $S_2$  (Figure 3.2) dans les directions tangentielle et normale.  $M_1$  et  $M_2$  ont initialement les mêmes coordonnées.

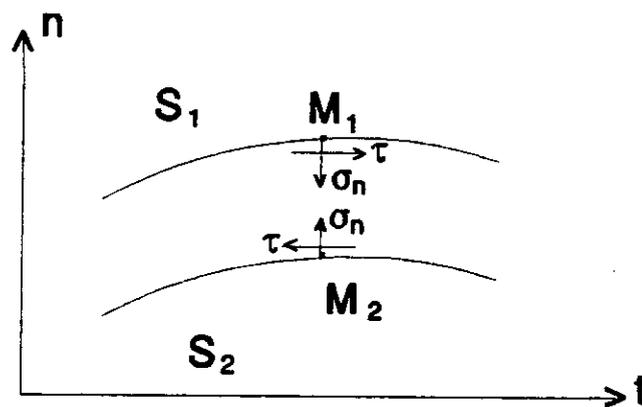


Figure 3.2: Etat de contrainte à l'interface

### 3.2.2 Classification des interfaces:

Cette classification des interfaces est basée sur l'importance des zones perturbées.

Nous distinguons:

#### 1) Les interfaces de premier type:

Pour lesquelles l'essentiel des déformations observées au cours des sollicitations est concentré au voisinage immédiat de la surface limite. A ce type d'interface correspondent les contacts secs entre solides de rigidité élevée présentant un défaut de structure, comme les joints des massifs rocheux.

#### 2) Les interfaces du deuxième type:

Pour lesquelles on assiste au développement de zones non élastiques importantes. Comme exemples correspondants à ce type d'interfaces, on cite: l'interaction sol-structure, les contacts entre milieux de rigidités très différentes.

### 3.3 METHODES D'ANALYSE DES PROBLEMES D'INTERFACES

L'analyse numérique de problèmes comportant des interfaces s'est développé en Génie-Civil, essentiellement en mécanique des roches et dans le cadre de l'interaction sol-structure. Les études proposées par différents auteurs appartiennent à l'une des deux approches suivantes: méthodes utilisant une relation limite en contraintes et méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface.

#### 3.3.1 Méthodes utilisant une relation limite en contraintes:

Ces méthodes sont basées sur le partitionnement de l'interface à partir d'une relation limite exprimée en termes de contraintes.

Leur hypothèse de base est que l'interface ne peut se trouver que dans un nombre fini d'états: collé, décollé ou frottant.

Si on considère que la relation qui traduit la rupture de l'interface est de type Coulomb, c'est à dire:

$$|\tau| = c + \sigma_n \operatorname{tg}\phi$$

avec:

$c$  : cohésion;

$\phi$  : angle de frottement.

L'interface, caractérisée par un certain nombre de points de contact, est partitionnée en fonction de l'état de liaison en chacun de ces points.

$|\tau| < c + \sigma_n \operatorname{tg}\phi$  exprime une liaison totale (état collé).

$\sigma_n = 0$  traduit un décollement.

$|\tau| = c + \sigma_n \operatorname{tg}\phi$  exprime le glissement.

Dans ce type d'approches, on cite les travaux de R. Frank et al. [6], qui ont proposé le dédoublement des noeuds le long de la discontinuité et l'association de chaque noeud du solide  $S_1$  avec son double du solide  $S_2$  pour former un élément de contact (Figure 3.3).

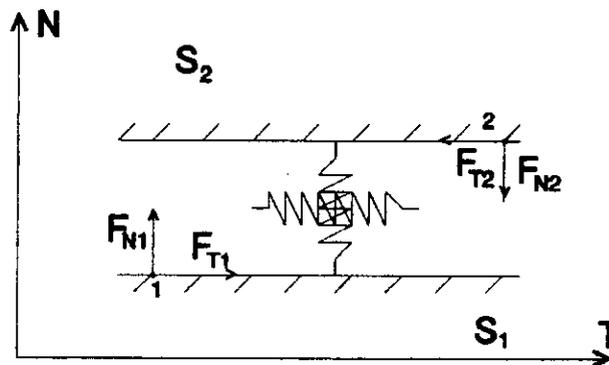


Figure 3.3: Elément de contact

Suivant l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité de déplacements. Ainsi, pour les éléments de contact qu'on considère comme liés, on impose la continuité des déplacements suivant les axes locaux  $T$  et  $N$ , pour les éléments considérés en état de décollement,

on n'impose aucune continuité de déplacements, et enfin, pour les éléments qui glissent on impose seulement la continuité des déplacements suivant l'axe  $N$ .

Pour imposer la continuité de déplacement souhaitée dans une direction, on introduit entre les deux points qui forment l'élément un ressort de grande rigidité.

### 3.3.2 Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface:

Dans ces méthodes, l'interface est assimilée à un matériau fictif, nous définissons donc sa loi de comportement comme la relation entre les contraintes et les déplacements relatifs associés en un point de l'interface.

Cette loi, non-linéaire dans le cas général, peut s'exprimer sous une forme matricielle et incrémentale:

$$\begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{tt} & C_{tn} \\ C_{nt} & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}$$

Soit:

$$\{d\sigma\} = [C] \{ds\}$$

Avec:

$[C]$  : matrice de comportement de l'interface;

$\{d\sigma\}$  : vecteur contraintes de l'interface;

$\{ds\}$  : vecteur déplacements relatifs de l'interface.

Les termes  $C_{tn}$  et  $C_{nt}$  de la matrice de comportement traduisent un couplage éventuel entre le cisaillement et la traction (compression) du plan de l'interface.

Deux approches peuvent être suivies pour l'établissement d'une loi de comportement de l'interface:

- Analyse globale.
- Analyse locale.

### 1) Analyse globale:

Pour introduire la notion de l'analyse globale, considérons l'exemple de la liaison entre deux blocs rocheux par un joint rempli d'un matériau intermédiaire (Figure 3.4).

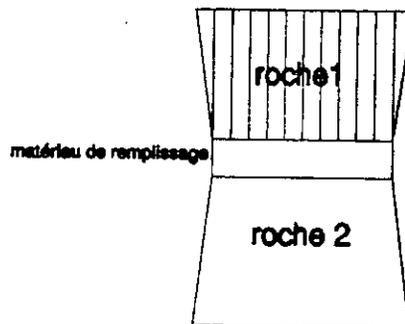


Figure 3.4: Analyse globale

Dans un premier temps, on peut considérer qu'il s'agit d'un double problème d'interface: le contact roche1-matériau de remplissage et le contact matériau-roche2. Pour la modélisation du problème, on doit disposer d'une part des caractéristiques de chacune des deux liaisons et d'autre part des propriétés du matériau de remplissage. Des difficultés expérimentales évidentes surgissent alors, si le joint est mince et le matériau hétérogène, ce qui est le cas courant.

Pour déterminer expérimentalement ces propriétés, il faut pratiquer des essais sur un échantillon de la zone interfaciale de dimension suffisante pour qu'à chacune de ses extrémités, on retrouve les matériaux 1 et 2 respectivement.

Le problème majeur est le choix de la taille de cet échantillon qui doit être effectué pour obtenir une bonne représentativité de l'interface.

Dans le cas des liaisons très hétérogènes, il faut procéder à une recherche par étapes, à partir de plusieurs dimensions. Pour chaque longueur

testée, le profil géométrique est caractérisé, et on retient la dimension à partir de laquelle les moyennes des paramètres utilisés ne varient pratiquement pas.

Le terme d'analyse globale désigne donc le procédé qui consiste à construire la loi de comportement de l'interface à partir du comportement d'un échantillon représentatif [14].

## 2) Analyse locale:

En considérant le même exemple précédent et en observant de plus près l'interface, on découvre une hétérogénéité de plus en plus importante: vides, parties en contact frottant. L'hétérogénéité de forme des aspérités peut être compliquée par l'hétérogénéité du matériau (Figure 3.5).

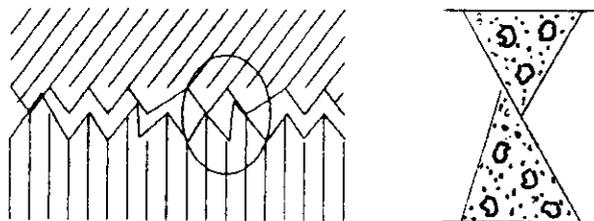


Figure 3.5: Analyse locale

L'analyse locale consiste à étudier l'interface à l'échelle des aspérités, échelle à laquelle on ne peut effectuer de mesure de déplacements.

Cette voie complète la précédente. En effet, si l'analyse globale conduit à l'établissement d'une loi d'ensemble, elle ne permet pas de préciser la part des différentes caractéristiques physiques sur les paramètres de cette loi, et elle aboutit souvent à une expérimentation lourde. L'étude détaillée de ces caractéristiques doit permettre, cas par cas, d'épargner certaines mesures et de les remplacer par des formulations [14].

### 3.4 FORMULATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT

La loi rhéologique d'un matériau est la relation liant la réponse de ce matériau à une sollicitation, par exemple la déformation subie à l'état de contrainte appliqué.

Si on admet le principe du déterminisme, il existe une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  liant la réponse  $r(t)$  à l'instant  $t$  à toute l'histoire de la sollicitation  $s(t)$  de l'origine des temps  $t_0$  au temps  $t$  :

$$r(t) = \mathcal{F}s(t)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  étant dans le cas général impossible à expliciter, il faut faire appel à la procédure de linéarisation, qui aboutit à une formulation de type incrémental. Si on applique une petite sollicitation  $d\sigma$  pendant un incrément de temps  $dt$  à un échantillon ayant subi une certaine histoire. La petite réponse  $de$  est liée à  $d\sigma$  et à  $dt$  par une fonction  $R$  :

$$R(d\sigma, de, dt) = 0$$

La fonction  $R$  dépend des états de contrainte ancien et actuel. Si cette fonction relie des quantités infiniment petites, il est possible d'en donner un développement limité au premier ordre et d'écrire:

$$de = M \cdot d\sigma + M' \cdot dt$$

La réponse à une sollicitation infiniment rapide ( $dt=0$ ), se traduit par la seule partie élasto-plastique de la loi. Par la suite, nous ne considérons pas la partie visqueuse  $M'$  et nous écrivons l'équation précédente sous la forme:

$$d\sigma = C de$$

Cette loi devient, dans le cas des interfaces, sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

soit:

$$\{d\sigma\} = [C] \{ds\}$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter une formulation élastoplastique de la matrice de comportement de l'interface.

### 3.4.1 Formulation élastoplastique:

#### a) Rappels:

La théorie de la plasticité est fondée sur la décomposition de l'incrément de déformation  $\{de\}$  en une partie élastique (réversible) et une partie plastique (irréversible):

$$\{de\} = \{de\}^e + \{de\}^p$$

L'apparition de cette déformation plastique est liée à la notion de critère de plasticité qui s'écrit:

$$F(\{\sigma\}, K) = 0$$

avec:

$K$  : paramètre d'écrouissage;

$\{\sigma\}$  : vecteur contrainte;

$F$  : fonction de charge.

La surface  $F(\{\sigma\}, K) = C$  est la surface de charge (dans l'espace des contraintes).

S'il existe une fonction  $G(\{\sigma\}, K)$  telle que :

$$de_p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (3.2)$$

avec:

$d\lambda$  : scalaire positif;

$G$  : potentiel plastique.

La représentation  $G(\{\sigma\}, K) = 0$  est une surface telle que le vecteur  $\{de\}^p$  lui est normal. Lorsque  $F$  est différente de  $G$ , le matériau est dit "non standard", on distingue une fonction d'écoulement et une fonction potentiel. La relation (3.2) traduit la loi de normalité relative à la fonction potentiel. Si  $F$  et  $G$  sont confondues, la plasticité est standard.

b) Expression générale de la matrice de comportement:

Nous nous plaçons dans le cas le plus général, cas de la plasticité non standard.

Le vecteur déplacement relatif se décompose en:

$$\{ds\} = \{ds\}^e + \{ds\}^p \quad (3.3)$$

avec:

$$\{ds\}^e = [C_e]^{-1} \{d\sigma\}$$

Il est vérifié expérimentalement que le couplage entre déplacements normal et tangentiel est associé à des déplacements relatifs irréversibles [14].

La matrice élastique a donc pour expression:

$$[C_e] = \begin{bmatrix} [C_{tt}] & 0 \\ 0 & [C_{nn}] \end{bmatrix}$$

avec:

$[C_{nn}]$  : composante normale.

$[C_{tt}]$  : composante tangentielle.

Appliquons la loi de normalité à partir d'un potentiel plastique  $G$  dont nous supposons pour le moment qu'il existe:

$$\{ds\}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma}$$

De l'équation (3.3), on peut tirer:

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.5)$$

En multipliant les deux membres de (3.5) par  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e]$ , on a:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] \{ds\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] d\lambda \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.6)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \{d\} &= [C_e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \\ \{\bar{d}\} &= [C_e] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \\ \{B\} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \end{aligned}$$

On aboutit à :

$$\{d\}^T \{ds\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + d\lambda \cdot B \quad (3.7)$$

Au cours des déplacements plastiques:  $F(\{\sigma\}, K) = 0$

Donc :

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial K} dK = 0 \quad (\text{condition de consistance})$$

Posons :

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial K} dK$$

Alors :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = A d\lambda \quad (3.8)$$

De l'équation (3.7), on obtient :

$$\{d\}^T \{ds\} = A \cdot d\lambda + B \cdot d\lambda = (A+B) \cdot d\lambda \quad (3.9)$$

Cette dernière équation nous donne :

$$d\lambda = \frac{1}{(A+B)} \cdot \{d\}^T \{ds\} \quad (3.10)$$

En substituant l'équation (3.10) dans l'équation (3.5) :

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + \frac{1}{(A+B)} \{d\}^T \{ds\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.11)$$

Et comme:

$$\left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} = [C_e]^{-1} \{\bar{d}\}$$

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + \frac{1}{(A+B)} \{d\}^T \{ds\} [C_e]^{-1} \{\bar{d}\}$$

Donc:

$$[C_e] \{ds\} = \{d\sigma\} + \frac{1}{(A+B)} \{d\}^T \{ds\} \{\bar{d}\}$$

En remarquant que la quantité  $\{d\}^T \{ds\}$  est un scalaire:

$$\{d\sigma\} = [C_e] \{ds\} - \frac{1}{(A+B)} [C_e]^{-1} \{\bar{d}\} \{d\}^T \{ds\} \quad (3.12)$$

D'où:

$$\{d\sigma\} = \left[ [C_e] - \frac{1}{(A+B)} \{\bar{d}\} \{d\}^T \right] \{ds\} \quad (3.13)$$

Soit:

$$\{d\sigma\} = \{ [C_e] - [C_p] \} \{ds\} \quad (3.14)$$

Avec:

$$[C_p] = \frac{1}{(A+B)} \{\bar{d}\} \{d\}^T$$

Il reste à expliciter les termes de  $[C_p]$  :

$$B = [C_{tt}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} + [C_{nn}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\} \quad (3.15)$$

et:

$$\{\bar{d}\} \{d\}^T = \begin{bmatrix} [C_{tt}] & 0 \\ 0 & [C_{nn}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \begin{bmatrix} [C_{tt}] & 0 \\ 0 & [C_{nn}] \end{bmatrix}$$

Finalement, l'expression générale de  $[C_p]$  est:

$$[C_p] = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} [C_{tt}]^2 \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} & [C_{tt}] [C_{nn}] \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \frac{\partial G}{\partial \tau} \\ [C_{tt}] [C_{nn}] \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} & [C_{nn}]^2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

avec:

$$H = A + [C_{tt}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} + [C_{nn}] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\}$$

### 3.5 MODES DE DEFORMATION DES INTERFACES

Comme il a été mentionné précédemment, les interfaces entre sol et structure subissent des mouvements relatifs. Les modes de déformation possibles sont :

#### a) Etat collé:

Dans ce cas on a une continuité des déplacements dans les deux directions  $(\tau, \sigma_n)$  (Figure 3.6(a)).

Pour cet état on a :

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 \\ |\tau| < R_c \end{cases}$$

Avec:

$R_c$  : résistance au cisaillement de l'interface.

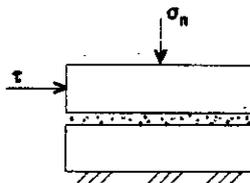


Figure 3.6(a): Etat collé

**b) Glissement:**

Dans ce mode de déformation, on a une continuité des déplacements dans la direction tangentielle, avec un contact maintenu entre les deux solides (Figure 3.6(b)).

Pour un état de glissement on a:

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 \\ |\tau| \geq R_c \end{cases}$$

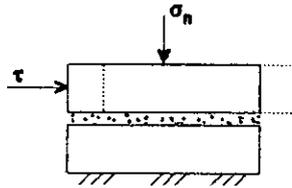


Figure 3.6(b): Glissement

**c) Décollement:**

Ce mode de déformation est caractérisé par une discontinuité des déplacements dans les deux directions ( $\tau, \sigma_n$ ) (Figure 3.6(c)).

Pour un état de décollement

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 \\ |\tau| < R_c \end{cases} \quad \text{sur la surface } A_c$$

$$\begin{cases} \sigma_n \leq 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \quad \text{sur la surface } A - A_c$$

Avec:

$A$  : surface totale.

$A_c$  : surface de contact.

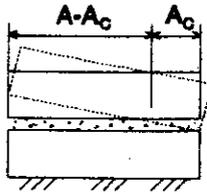


Figure 3.6(c): Décollement

d) Passage d'un état décollé à un état collé:

Dans ce mode de déformation (Figure 3.6(d)), on a:

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 \\ \tau = 0 \end{cases}$$

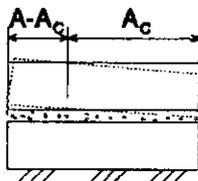


Figure 3.6(d): Passage d'un état décollé à un état collé

### 3.6 CHOIX DU MODELE POUR L'INTERFACE

Il existe deux approches pour le traitement des interfaces: la première traite les interfaces comme un problème direct de compatibilité. Les exigences de compatibilité sont imposées exactement par le biais des multiplicateurs de Lagrange ou approximativement par le biais des fonctions de pénalité. La deuxième approche utilise le concept physique des éléments d'interfaces. Dans cette approche, une équation reliant les contraintes de contact aux déplacements relatifs est utilisée.

Dans cette étude, la deuxième approche est adoptée, ceci vu que l'élément d'interface peut être introduit dans un programme d'éléments finis sans la nécessité d'introduire d'autres fonctions spéciales comme les multiplicateurs de Lagrange ou les fonctions de pénalité.

Au niveau de la modélisation, notre choix est orienté vers les éléments d'interface des couches fines qui permettent de tenir compte de plusieurs modes de déformation. De plus, ces dernières années, plusieurs études [20-23], ont montré la satisfaction des résultats obtenus, en utilisant ces éléments d'interfaces pour les problèmes d'interaction sol-structure 2D et 3D.

Dans ce qui suit nous allons présenter l'élément d'interface des couches fines.

### 3.6.1 Elément d'interface des couches fines (Thin-layer interface element):

Cet élément est traité comme les autres éléments solides, mais avec une matrice de comportement différente:

$$[C]_f = \begin{bmatrix} [C_{nn}] & [C_{nt}] \\ [C_{tn}] & [C_{tt}] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Avec:

$[C_{nn}]$  : la composante normale.

$[C_{tt}]$  : la composante tangentielle.

$[C_{tn}]$  : représente l'effet du couplage entre le comportement normal et tangentiel.

Dans la formulation de cet élément d'interface, l'hypothèse de base est la suivante: le comportement au voisinage de l'interface entraîne une zone fine d'épaisseur supérieur à zéro.

Et comme l'interface est entourée par des matériaux différents (sol et structure), les propriétés normales de l'interface durant la déformation doivent dépendre:

- de la zone interfaciale;
- de l'état de contrainte;
- des propriétés des éléments solides, qui entourent l'interface.

En se basant sur ces considérations, la raideur normale peut s'exprimer sous la forme:

$$[C_n]_i = [C_n(\alpha^i; \beta^g; \gamma^{st})] \quad (3.18)$$

Avec:

$\alpha^i$  : les propriétés de l'interface.

$\beta^g$  : les propriétés du sol.

$\gamma^{st}$  : les propriétés de la structure.

Donc on peut mettre  $[C_n]_i$  sous la forme:

$$[C_n]_i = \lambda_1 [C_n^i] + \lambda_2 [C_n^g] + \lambda_3 [C_n^{st}] \quad (3.19)$$

Avec:

$[C_n]_i$  : composante normale de l'élément d'interface des couches fines.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  : facteurs de participation ayant des valeurs variant entre 0 et 1.

Afin de simplifier, on peut supposer que:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Ceci implique que la composante normale est influencée seulement par le comportement normal de l'interface.

La composante tangentielle (de cisaillement) est obtenue à partir de l'essai de cisaillement direct (Figure 3.7).

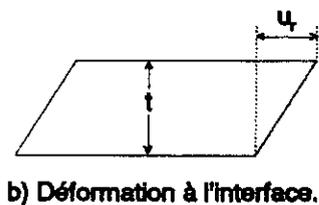
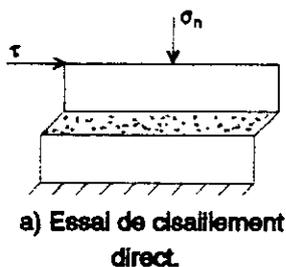


Figure 3.7: Comportement à l'interface

Dans cette étude la composante  $[C_{\tau\tau}]$  est de taille  $1 \times 1$ . Elle est composée du module de cisaillement  $G$  de l'interface.

On a:

$$\gamma = \frac{u_r}{t} \quad (3.20)$$

Le module de cisaillement est donné par:

$$G = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial u_r} t \quad (3.21)$$

où:

$$G_i = G(\sigma_n, \tau, u_r) = \frac{\partial [\tau(\sigma_n, u_r)]}{\partial u_r} t \Big|_{\sigma_n} \quad (3.22)$$

Avec:

$t$  : épaisseur de l'interface.

$u_r$  : déplacement relatif.

L'implémentation de cet élément dans une procédure d'éléments finis nécessite une expression explicite de l'équation (3.22). Dans la présente étude, une forme polynomiale de la fonction liant la contrainte de cisaillement  $\tau$  aux déplacements relatifs de l'interface  $u_r$ , est utilisée:

$$\tau = \alpha_1 + \alpha_2 u_r + \alpha_3 u_r^2 \quad (3.23)$$

Avec:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : sont des coefficients déterminés à partir des essais de laboratoire.

L'élément d'interface des couches fines peut être formulé en le supposant ayant un comportement:

- Soit linéaire élastique.
- Soit non-linéaire élastique.
- Soit élastoplastique.

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'interface est donnée par:

$$[K]_i = \int_V [B]^t [C^{ep}] [B] dV \quad (3.24)$$

Avec:

$[B]$  : matrice de transformation de l'élément d'interface.

$[C^{ep}]$  : matrice de comportement.

Pour un comportement linéaire élastique, la matrice de comportement s'écrit sous la forme:

$$[C^e]_i = \begin{bmatrix} [C_{nn}] & 0 \\ 0 & [C_{tt}] \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Pour un cas élastoplastique, la matrice de comportement a la forme suivante:

$$[C^{ep}]_i = [C^e]_i - [C^p]_i \quad (3.26)$$

La matrice  $[C^p]_i$  est déterminée en se basant sur un critère de rupture de la théorie de plasticité. Dans cette étude le critère de Mohr-Coulomb est utilisé avec une fonction de charge  $F$  et un potentiel plastique  $G$ .

### 3.7 CONCLUSION

La méthode retenue dans ce travail, pour l'étude des interfaces, est celle utilisant une loi de comportement de l'interface. Au niveau de la modélisation, notre choix est orienté vers l'élément d'interface des couches fines pour les raisons suivantes:

- Possibilité de tenir compte des différents modes de déformation.
- Satisfaction des résultats obtenus en utilisant cet élément dans l'analyse de l'interaction sol-structure [20-23].
- Facilité d'implémentation de cet élément dans un programme d'éléments finis.

## **Chapitre 4**

# **ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES SOLS**

# **Chapitre 4**

## **ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES SOLS**

### **4.1 INTRODUCTION**

La mécanique des sols repose bien souvent sur des approximations en ce qui concerne le comportement du matériau et ceci pour les deux aspects qu'elle examine, à savoir, schématiquement la capacité portante et le tassement. Ainsi, fait-on l'hypothèse d'un comportement rigide plastique pour le premier et souvent l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire pour le second.

Cette manière unique de voir est de plus en plus remise en question pour plusieurs raisons:

- Les sols ont un comportement plus complexe, qu'il apparait nécessaire, de plus de suivre tout le long de la déformation.

Ainsi, fait-on appel de plus en plus à des modèles élasto-plastiques plus ou moins élaborés, ou à des modèles visco-élastiques, voire visco-élastoplastiques.

- L'apparition et le développement de méthodes numériques puissantes, telle que la méthode des éléments finis, qui permettent de modéliser tout le milieu.

- L'augmentation formidable des moyens de calcul, avec la naissance et le développement continu des ordinateurs modernes, sans laquelle les modèles de comportement complexe des sols et la MEF n'auraient pas pu voir le jour.

L'utilisation de la MEF en MDS est cependant particulièrement compliquée. D'une part, il est nécessaire parfois de prendre en compte des comportements du massif du sol très élaboré, avec éventuellement de grandes déformations. D'autre part, ayant la plus part du temps affaire à des problèmes d'interaction sol-structure ou sol-sol, on doit modéliser correctement les surfaces de contact [6].

Dans ce chapitre, nous allons faire le point des connaissances actuelles sur le comportement élastoplastique, puis on va présenter les différentes méthodes de résolution des problèmes non linéaires.

## 4.2 COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

### 4.2.1 Généralités

Un corps est dit avoir un comportement élastoplastique quand au delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations réversibles (élastiques) mais aussi des déformations irréversibles (plastiques), et que ces déformations et les contraintes obéissent à des lois bien précises. Notons que la considération d'un corps élastoplastique se fait en excluant l'influence du paramètre temps.

Pour un comportement élastoplastique, on écrit:

$$de = de^e + de^p \quad (4.1)$$

Avec:

- $de$  : les déformations totales;
- $de^e$  : les déformations élastiques;
- $de^p$  : les déformations plastiques.

Considérons maintenant la courbe de la figure 4.1 qui représente les résultats d'un essai de compression uniaxial:

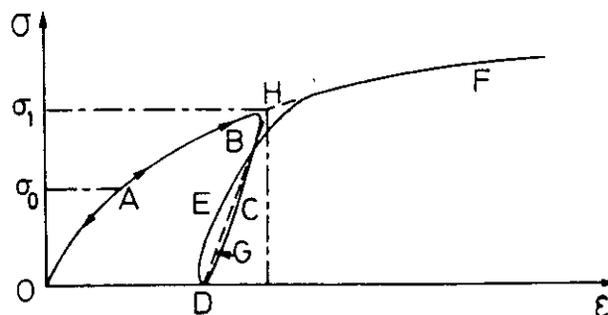


Figure 4.1: Essai de compression simple du sol

Le long du chemin OA, le comportement est élastique, c'est à dire quand on décharge on revient en O. Le point A, point limite au delà duquel on a plus le comportement élastique correspond à une contrainte caractéristique dite seuil de plasticité initiale ou limite élastique. Après l'avoir franchi et si étant au point B, par exemple on décharge, la courbe ne sera pas BAO mais BCD. La déformation qui reste OD est une déformation irréversible dite plastique. On est donc entré dans le domaine plastique. Si on recharge, le chemin sera DEF, F étant le prolongement du chemin OAB. Il rejoint alors la courbe du premier chargement.

On peut assimiler en général la courbe BCDEF à la droite DGH et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité est alors le point H qui est plus élevé que le précédent. Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle écrouissage.

D'une façon plus générale et pour les cas 3D le seuil de plasticité est remplacé par une fonction  $F$  dite "fonction de charge" ou critère de plasticité telle que:

Si  $F < 0$  on est dans le domaine élastique.

Si  $F = 0$  on est dans le domaine plastique.

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes-déformations une surface dite communément en mécanique des sols "surface d'état limite" dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe dite "courbe d'état limite".

L'allure de la courbe  $(\sigma, \epsilon)$  donnée dans la figure 4.1 est valable pour un écrouissage positif.

Il y a des matériaux qui sous un certain chemin de charge et au delà d'un certain pic présente un ramollissement, ou écrouissage négatif (Figure 4.2).

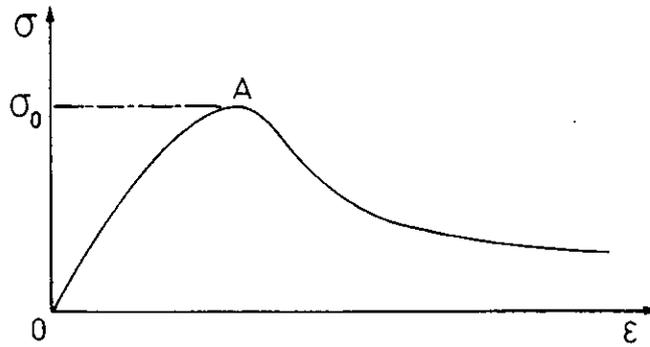


Figure 4.2: Courbe contrainte-déformation avec écrouissage négatif.

Le matériau pour lequel on ne peut jamais dépasser le premier seuil de plasticité (pas d'écrouissage), donc pour lequel avec une contrainte  $\sigma_0$  on peut avoir un allongement illimité, est dit parfaitement plastique (Figure 4.3).

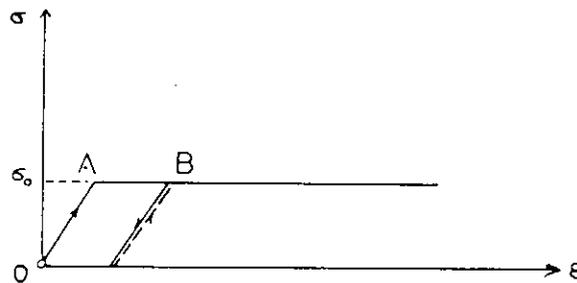


Figure 4.3: Matériau parfaitement plastique

#### 4.4.2 Critères de plasticité

Un critère de plasticité est une fonction des contraintes, éventuellement écrouissable avec les déformations. Ce critère ne peut être dépassé en aucun point. Lorsqu'il est atteint, débutent les déformations irréversibles ou plastiques. Les déformations sont, elles, régies par une loi dite loi d'écoulement.

Plusieurs critères de plasticité parfaite ont été initialement développés pour les métaux et ensuite étaient utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

#### 4.2.2.1 Critère de Tresca:

Tresca (1864), après des essais sur du plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite. On peut donc écrire:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K \quad (4.2)$$

où:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  et  $K$  une constante (cohésion dans le cas d'un sol)

Remarquons que la contrainte principale intermédiaire ne joue aucun rôle.

Dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la surface définie par la fonction de charge est un prisme d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  à base hexagonale régulière (Figures 4.4.a et 4.4.b).

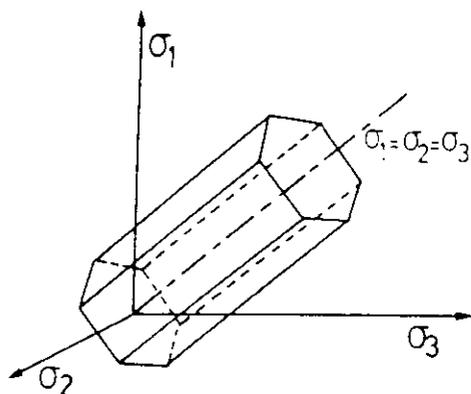


Figure 4.4.a:  
Représentation du critère de  
Tresca dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

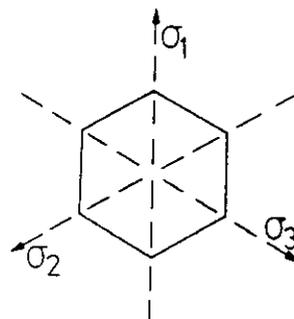


Figure 4.4.b:  
Section du prisme par le  
plan  $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

#### 4.2.2.2 Critère de Mohr-Coulomb:

Le critère de Mohr-Coulomb est couramment utilisé, surtout pour les sols possédant les deux composantes de la résistance de cisaillement  $(c, \phi)$ .

En termes de contraintes principales, ce critère s'écrit:

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin\phi - c \cos\phi = 0 \quad (4.3)$$

avec:

$\sigma_1, \sigma_3$  : sont les contraintes principales extrêmes;

$\phi$  : l'angle de frottement;

$c$  : la cohésion

Dans l'espace des contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la surface définie par la fonction de charge est une pyramide de base hexagonale et d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (Figure 4.5.a et 4.5.b).

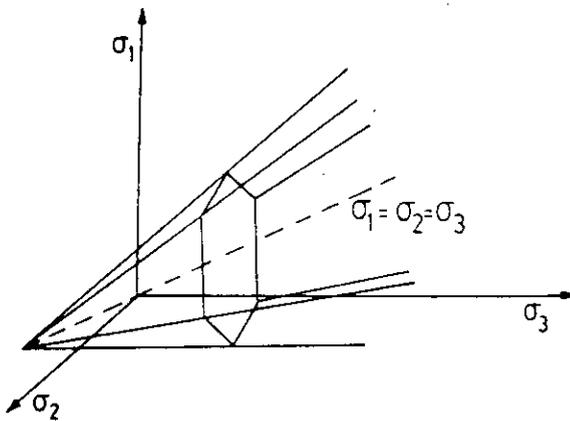


Figure 4.5.a:  
Critère de Mohr-Coulomb dans  
l'espace des contraintes.

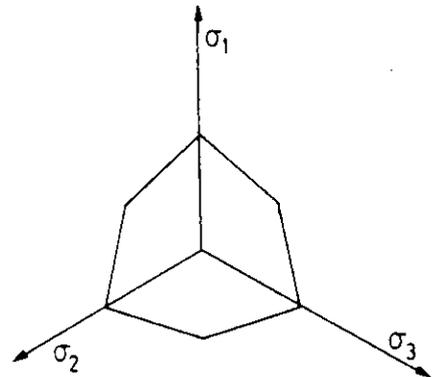


Figure 4.5.b:  
Section de la pyramide par  
plan  $\pi$ .

#### 4.2.2.3 Critère de Von Mises:

Pour tenir compte de la contrainte principale intermédiaire, Von Mises(1913) proposa l'idée suivante: la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur déviatorique  $J_2'$  atteint une valeur limite, c'est à dire:

$$F = J_2' - K^2 = 0 \quad (4.4)$$

ou

$$F = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - K^2 = 0 \quad (4.5)$$

où  $K$  est une constante.

On peut remarquer que dans le cas du cisaillement simple plan ( $\sigma_1 = -\sigma_2, \sigma_3 = 0$ ), on a :

$$J_2' = \sigma^2 = K^2 \quad (4.6)$$

Donc la constante  $K$  représente la contrainte maximale admissible au cisaillement simple.

Dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la surface définie par la fonction de charge est un cylindre de révolution d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Sa section par le plan  $\pi$  est un cercle dont le rayon est  $K\sqrt{2}$  (Figures 4.6.a et 4.6.b).

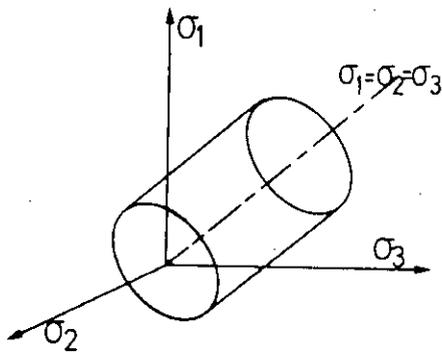


Figure 4.6.a:  
Représentation du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes.

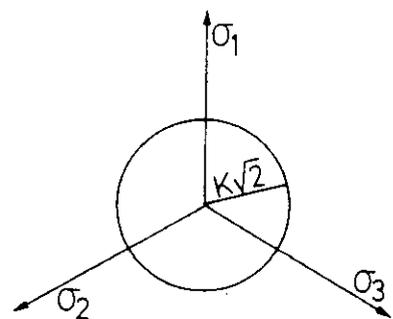


Figure 4.6.b:  
Section du cylindre par le plan  $\pi$ .

#### 4.2.2.4 Critère de Drucker-Prager:

Drucker et Prager(1952) ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes  $J_1$  et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes  $J_2'$ .

Sa fonction de charge est donnée par l'expression:

$$F = J_2'^{\frac{1}{2}} - K - \alpha J_1 = 0 \quad (4.7)$$

Avec:

$\alpha, K$  sont des constantes.

La surface représentative du critère dans l'espace des contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . (Figure 4.7).

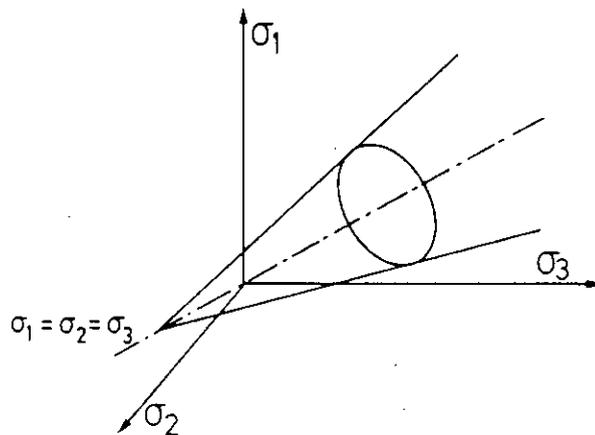


Figure 4.7: Critère de Drucker-Prager dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Si:  $\alpha = 0$ , le critère de Drucker-Prager est le critère de Von Mises et le cône devient un cylindre.

#### 4.2.2.5 Critère parabolique:

Il est exprimé par l'équation:

$$F = J_2' - \frac{R_C - R_T}{3} J_1 - \frac{R_C R_T}{3} = 0 \quad (4.8)$$

Avec:

$R_C$  et  $R_T$  sont les résistances en compression simple et traction simple.

On vérifie que si:  $R_C = R_T$  on trouve le critère de Von Mises.

Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite est une parabololoïde d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (Figure 4.8.a). La courbe intrinsèque (tangente aux cercles de Mohr, obtenue en faisant  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ ) est une parabole dans le plan  $(\tau, \sigma)$  (Figure 4.8.b).

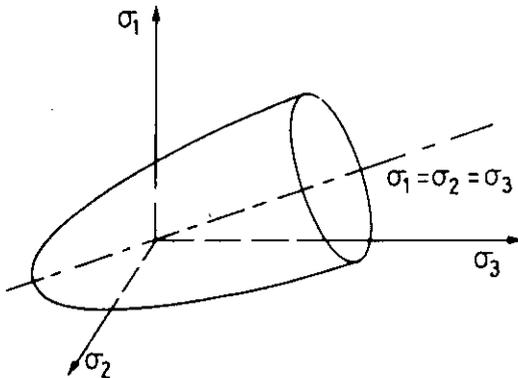


Figure 4.8.a:  
Critère parabolique dans  
l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

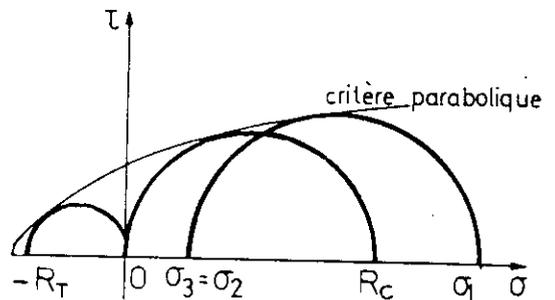


Figure 4.8.b:  
Critère parabolique dans  
le plan  $(\tau, \sigma)$  lorsque:  
 $(\sigma_2 = \sigma_3)$

## 4.3 METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES NON-LINEAIRES

### 4.3.1 Introduction:

Il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution des systèmes non linéaires. Les problèmes non linéaires sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non linéaires sont respectées pour certaines tolérances.

Pour les problèmes de non linéarité matérielle uniquement, la relation entre contrainte et déformation est supposée être de la forme:

$$F(\sigma, \epsilon) = 0 \quad (4.9)$$

La matrice de rigidité élémentaire est fonction des propriétés matérielles et peut être écrite comme suit:

$$[K] = K(\sigma, \epsilon) \quad (4.10)$$

Les forces nodales externes  $\{P\}$  peuvent être exprimées par:

$$\{P\} = [K] \{U\} \quad (4.11)$$

Il existe trois méthodes de résolution du système (4.11) (système non linéaire), à savoir [42]:

- a) la méthode incrémentale
- b) la méthode itérative
- c) la méthode mixte

### 4.3.2 Méthode incrémentale:

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision des vecteurs chargement en plusieurs incréments. Durant chaque incrément de charge, l'équation

$$\{P\} = [K] \{U\} \quad (4.12)$$

est supposée être linéaire avec une valeur constante de  $[K]$  déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment.

Le processus est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itérations dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément.

L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement.

L'inconvénient majeur est la difficulté de la prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision (Figure 4.9).

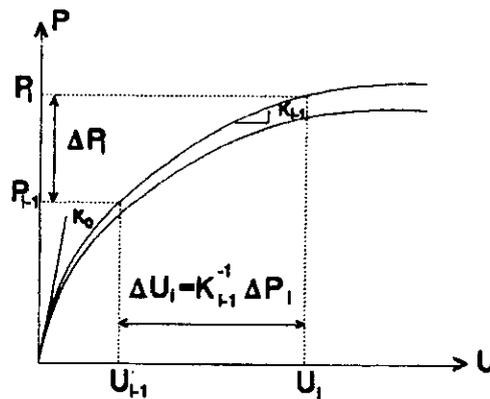


Figure 4.9: Méthode incrémentale

#### 4.3.3 Méthode itérative:

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales internes équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance.

Généralement, la matrice de rigidité peut rester constante ou bien varier durant le processus itératif. On distingue donc deux méthodes pour le processus itératif, à savoir:

a) **Méthode de rigidité constante:** Dans cette méthode la rigidité initiale linéaire est utilisée pour chaque étape dans l'analyse. Cette méthode possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois (Figure 4.10.a).

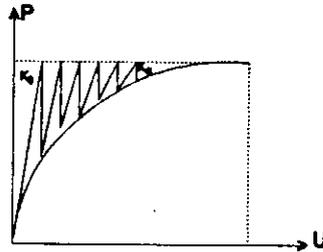


Figure 4.10.a: Procédure de rigidité constante

b) **Méthode de rigidité variable:** Dans cette méthode, la méthode de Newton-Raphson ou sa version modifiée est utilisée. Dans la méthode de Newton-Raphson complète, la matrice de rigidité tangente est actualisée et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Ce processus peut être particulièrement très lent si les incréments de charge relativement petits sont utilisés (Figure 4.10.b et 4.10.c).

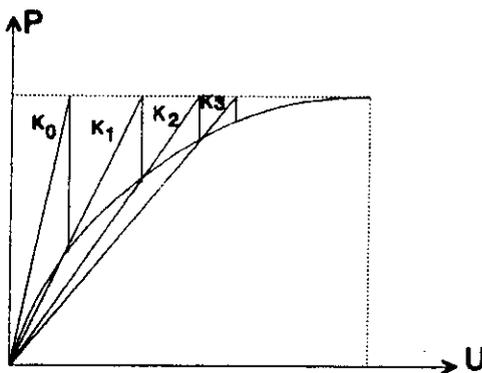


Figure 4.10.b:  
Procédure de rigidité variable.  
-Approche du module sécant-

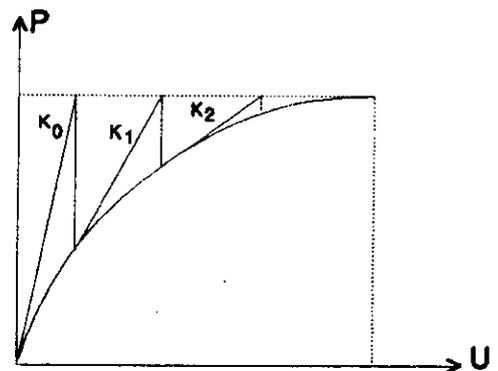


Figure 4.10.c:  
Procédure de rigidité variable.  
-Approche du module tangent-

#### 4.3.4 Méthode mixte:

les méthodes mixtes sont une combinaison des deux méthodes citées précédemment. Le chargement est appliqué par incrément et la solution dans chaque étape de chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et elle est la plus utilisée. La figure 4.11 montre les différentes approches de la procédure mixte.

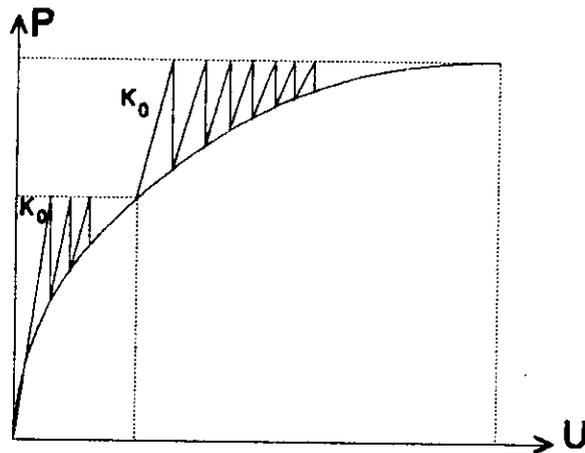


Figure 4.11.a: Procédure de rigidité constante

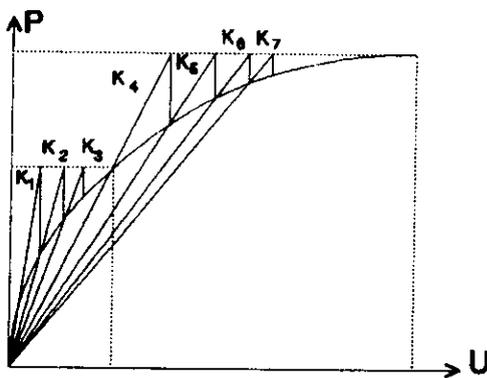


Figure 4.11.b:  
Procédure de rigidité  
variable -Approche du  
module sécant-.

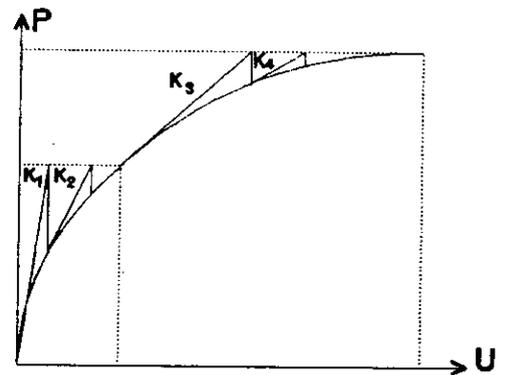


Figure 4.11.c:  
Procédure de rigidité  
variable -Approche du  
module tangent-.

Figure 4.11: Méthode mixte

Dans la présente étude, on a utilisé la méthode mixte (procédure de rigidité constante).

Les étapes de base de cette méthode sont:

1) Appliquer un incrément de charge  $\Delta P_i$  pour un contrôle du chargement ou un incrément de déplacement  $\Delta U_i$  pour un contrôle de déplacements, et calculer la première valeur du déplacement incrémental.

2) Calculer les incréments de déformations  $\Delta e_i$  et de contraintes  $\Delta \sigma_i$ .

3) Calculer les contraintes totales par addition des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta \sigma$$

4) Contrôler l'état de contraintes contre le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Si le critère est violé, les contraintes sont conduites à la surface de charge.

5) Trouver les forces nodales équivalentes dues à  $\sigma_i$ . Calculer la force non équilibrée. Cette étape est l'étape d'élimination des forces résiduelles.

6) Contrôler le critère de convergence. Si le critère de convergence est satisfait, donc appliquer un nouvel incrément de charge ou de déplacement et répéter toutes les étapes précédentes. Sinon, passer à l'itération suivante, et répéter le processus (à partir de la deuxième étape) jusqu'à ce que les conditions de convergence soient satisfaites.

#### 4.4 CONCLUSION

La méthode mixte est la mieux adoptée pour la résolution des problèmes non linéaires parce qu'elle combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative.

Dans la présente étude, la méthode mixte (procédure de rigidité constante) est utilisée et le critère de rupture choisi pour le sol est celui de Mohr-Coulomb. Ce choix du critère de rupture est justifié par les résultats expérimentaux obtenus par Wu et al., Kirpatrick [19] sur le sol, qui indiquent que le critère de Mohr-Coulomb donne pour le sol une meilleure représentation que les autres critères.

**Chapitre 5**

**IMPLEMENTATION NUMERIQUE**

# **Chapitre 5**

## **IMPLEMENTATION NUMERIQUE**

### **5.1 INTRODUCTION**

En se basant sur la formulation des différents éléments (élément fini, élément infini et élément d'interface) décrite dans les chapitres précédents, on a élaboré un programme de calcul en langage Fortran.

Ce programme permet la résolution des problèmes linéaires et non-linéaires de l'interaction sol-structure en utilisant un modèle qui couple ces différents éléments. Il traite les problèmes linéaires dans les conditions d'axisymétrie et de déformation plane, et les problèmes non-linéaires dans les conditions de déformation plane.

Dans ce chapitre nous allons donner les grandes lignes nécessaires à la compréhension du programme élaboré, ainsi que la structure générale de ce programme.

### **5.2 PRESENTATION DE LA STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME**

Dans l'implémentation d'un programme, on peut distinguer deux parties essentielles:

- Module de génération des données.
- Module de résolution et d'exploitation des résultats.

Les données sont construites principalement d'informations sur les éléments (type d'élément, nombre), sur les noeuds (nombre de noeuds total, conditions d'appuis, conditions de chargement) et les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.

### 5.2.1 Type d'élément:

#### 5.2.1.1 Elément fini:

L'élément fini utilisé est l'élément isoparamétrique à 8 noeuds et à 16 degrés de liberté (Figure 5.1).

L'ordre d'intégration de cet élément est de 3x3 pour une formulation déformation plane et de 2x2 pour des conditions d'axisymétrie.

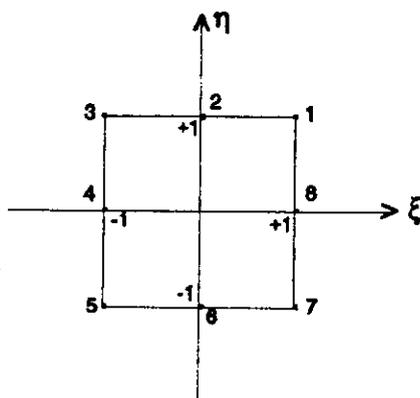


Figure 5.1: Elément fini à huit noeuds.

#### 5.2.1.2 Elément infini:

C'est un élément infini à 5 noeuds [36], et à 10 degrés de liberté (Figure 5.2).

L'ordre d'intégration de cet élément est de 2x2 pour des conditions d'axisymétrie et déformation plane.

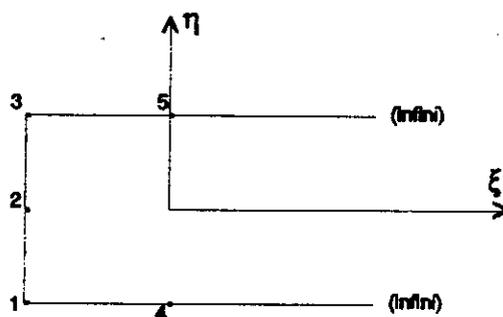


Figure 5.2: Elément infini à 5 noeuds.

### 5.2.1.3 Elément d'interface:

Dans cette étude on a utilisé l'élément d'interface des couches fines, c'est un élément à 8 noeuds d'épaisseur  $t$  (Figure 5.3).

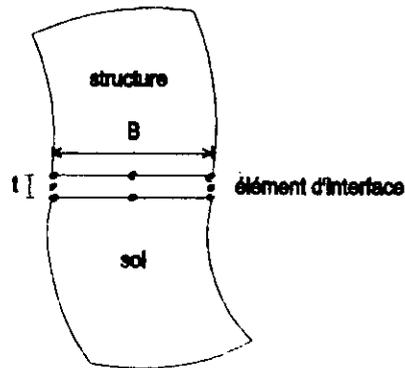


Figure 5.3: Elément d'interface

Selon Desai et al. [20-23], l'élément d'interface des couches fines donne des résultats satisfaisants pour des faibles valeurs du rapport  $\frac{t}{B}$ .

Dans cette étude, l'épaisseur de l'élément d'interface est choisi de tel manière à avoir:

$$0,01 \leq \frac{t}{B} \leq 0,1 \quad (5.1)$$

### 5.2.2 Intégration numérique:

On a vu que dans la formulation des éléments infinis, il est possible de trouver une transformation qui permet le passage d'un domaine infini (plan physique) à un domaine fini (plan naturel). Le calcul des matrices élémentaires de l'élément infini fait intervenir des intégrales sur un domaine borné de type:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.2)$$

Donc, la matrice de rigidité de l'élément infini, donnée par:

$$K = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T D B |J| d\xi d\eta \quad (5.3)$$

peut être évaluée par une méthode d'intégration numérique similaire à celle utilisée pour un élément fini.

Dans la présente étude, la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre est utilisée pour l'évaluation des matrices élémentaires des éléments finis et infinis.

### 5.2.3 Critère de rupture:

Le critère de rupture utilisé dans la présente étude pour le sol et les interfaces est celui de Mohr-Coulomb, ceci pour les raisons citées dans la conclusion du chapitre 4.

Dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , ce critère prend la forme d'une pyramide de base hexagonale. L'irrégularité de ce critère est due au fait que la deuxième contrainte principale  $\sigma_2$  n'est pas prise en compte.

En termes de contraintes principales, ce critère s'écrit:

$$F = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin\phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c \cos\phi = 0 \quad (5.4)$$

Pour définir un point de contrainte de coordonnées  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  dans l'espace des contraintes principales, il est souvent plus intéressant d'utiliser les invariants  $(s, t, \theta)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \frac{1}{3} \text{Arcsin} \left( \frac{-3\sqrt{6}J_3}{t^3} \right) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Avec:

$$J_3 = S_x S_y S_z - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$$

et:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3} \\ S_y = \frac{(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x)}{3} \\ S_z = \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{3} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  sont les éléments du tenseur contrainte dans le repère cartésien  $(x, y, z)$ .

Comme le montre la figure (5.4) :

$s$  : représente la distance à partir de l'origine au plan  $\pi$  qui contient le point contrainte.

$t$  : représente la distance radiale du point contrainte à partir de la diagonale de l'espace.

$\theta$  : l'angle qui mesure la position du point contrainte avec le plan  $\pi$ .

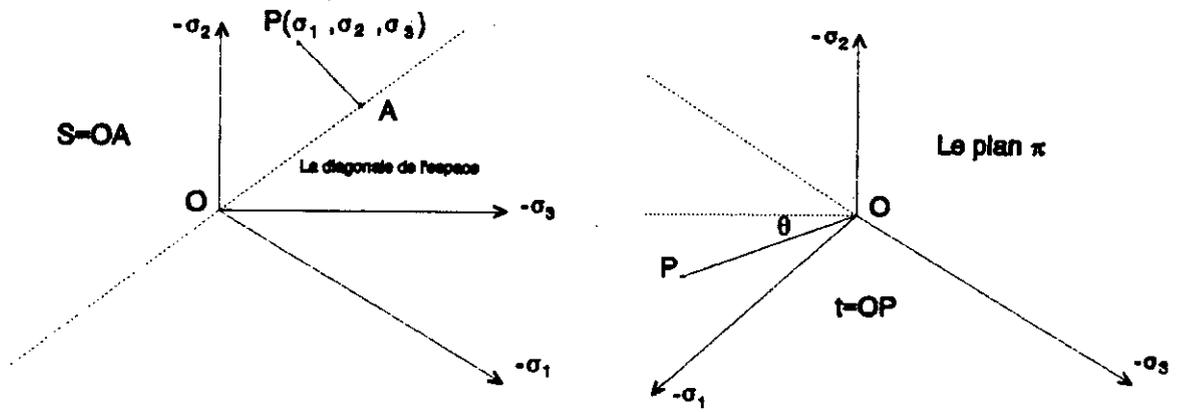


Figure 5.4: Espace des contraintes principales.

La relation entre les contraintes principales et les invariants  $(s, t, \theta)$  est:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{s}{\sqrt{3}} + t\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sigma_2 = \frac{s}{\sqrt{3}} + t\sqrt{\frac{2}{3}} \sin\theta \\ \sigma_3 = \frac{s}{\sqrt{3}} + t\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (5.7)$$

Substituant  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  dans l'équation (5.4), la fonction  $F$  devient:

$$F = \frac{s}{\sqrt{3}} \sin\phi + t\sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin\theta \sin\phi}{3} \right) - c \cos\phi \quad (5.8)$$

#### 5.2.4 Méthode de résolution non-linéaire utilisée:

Compte-tenu du caractère des lois de comportement du sol et des interfaces, il est indispensable de faire appel à une technique de résolution de problème non-linéaire. Dans cette étude, on a utilisé une méthode mixte, c.a.d: un processus itératif et incrémental avec une matrice de rigidité constante. Dans cette méthode, la non-linéarité est introduite par une modification itérative du vecteur chargement. La matrice de rigidité globale est formée une seule fois. L'application de la charge (où déplacement) est faite d'une manière incrémentale car il n'est possible d'appliquer une linéarisation que sur des évolutions suffisamment petites à partir d'un état de contrainte connu.

La convergence est atteinte quand les contraintes générées par le vecteur charges satisfont le critère de rupture de Mohr-Coulomb avec une certaine tolérance.

Le vecteur charges à chaque itération contient: les charges extérieures appliquées et les forces de rééquilibrage (ou charges de volume) auto-équilibrées. Les forces de rééquilibrage ont le rôle de redistribuer l'écart entre la charge appliquée et la charge réellement équilibrée par l'état de déformation trouvé.

Donc, pour chaque incrément de chargement où déplacement, le système d'équations:

$$K\Delta U^i = \Delta P^i \quad (5.9)$$

doit être solutionné pour obtenir l'incrément de déplacement  $\Delta U^i$  où  $i$  représente le numéro d'itération.

L'incrément de déplacement de l'élément permet d'obtenir l'incrément de déformation:

$$\Delta \epsilon^i = B\Delta U^i \quad (5.10)$$

Supposons qu'on est dans le domaine plastique, donc les déformations contiennent deux composantes, l'une élastique et l'autre plastique:

$$\Delta \mathbf{e}^i = (\Delta \mathbf{e}^e + \Delta \mathbf{e}^p)^i \quad (5.11)$$

L'incrément de déformation obtenu permet de calculer l'incrément de contrainte à partir de la relation contrainte-déformation. Ces incréments de contraintes calculés sont additionnés aux contraintes de l'incrément de charge précédent. Les contraintes obtenues sont substituées dans le critère de rupture de Mohr-Coulomb.

Si la redistribution des contraintes est nécessaire, on procède à un changement du vecteur chargement incrémental  $\Delta \mathbf{P}^i$  dans l'équation (5.8).

Généralement ce vecteur contient deux types de charges:

$$\Delta \mathbf{P}^i = \Delta \mathbf{P}_a + \Delta \mathbf{P}_b^i \quad (5.12)$$

Avec:

$\Delta \mathbf{P}_a$  : l'incrément du chargement appliqué actuellement.

$\Delta \mathbf{P}_b^i$  : le vecteur charges de volume (forces de rééquilibrage) et qui varie d'une itération à une autre.

Deux méthodes sont utilisées pour la génération des forces de rééquilibrage (charges de volume) à savoir: la méthode des déformations initiales (méthode viscoplastique) et la méthode des contraintes initiales. Ces deux techniques ont été décrites par Smith [57] et Zienkiewicz [68].

La méthode viscoplastique proposée par Zienkiewicz et Corneau [57], permet au matériau de supporter des contraintes, pour lesquelles le critère de rupture est violé pendant de petites périodes de temps. Le dépassement du critère de rupture, et qui signifie que la valeur de la fonction  $F$  est positive, est une partie intégrante de la méthode.

Dans la méthode des contraintes initiales, une relation explicite entre les incréments de contraintes et les incréments de déformations est utilisée:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \Delta \mathbf{e} \quad (5.13)$$

Cette équation est analogue à la relation contrainte-déformation de l'élasticité linéaire et dans laquelle la matrice élastique constante  $\mathbf{D}^e$  est remplacée par une matrice contrainte-déformation élasto-plastique  $\mathbf{D}^{ep}$ .

La matrice  $D^{ep}$  est donnée par:

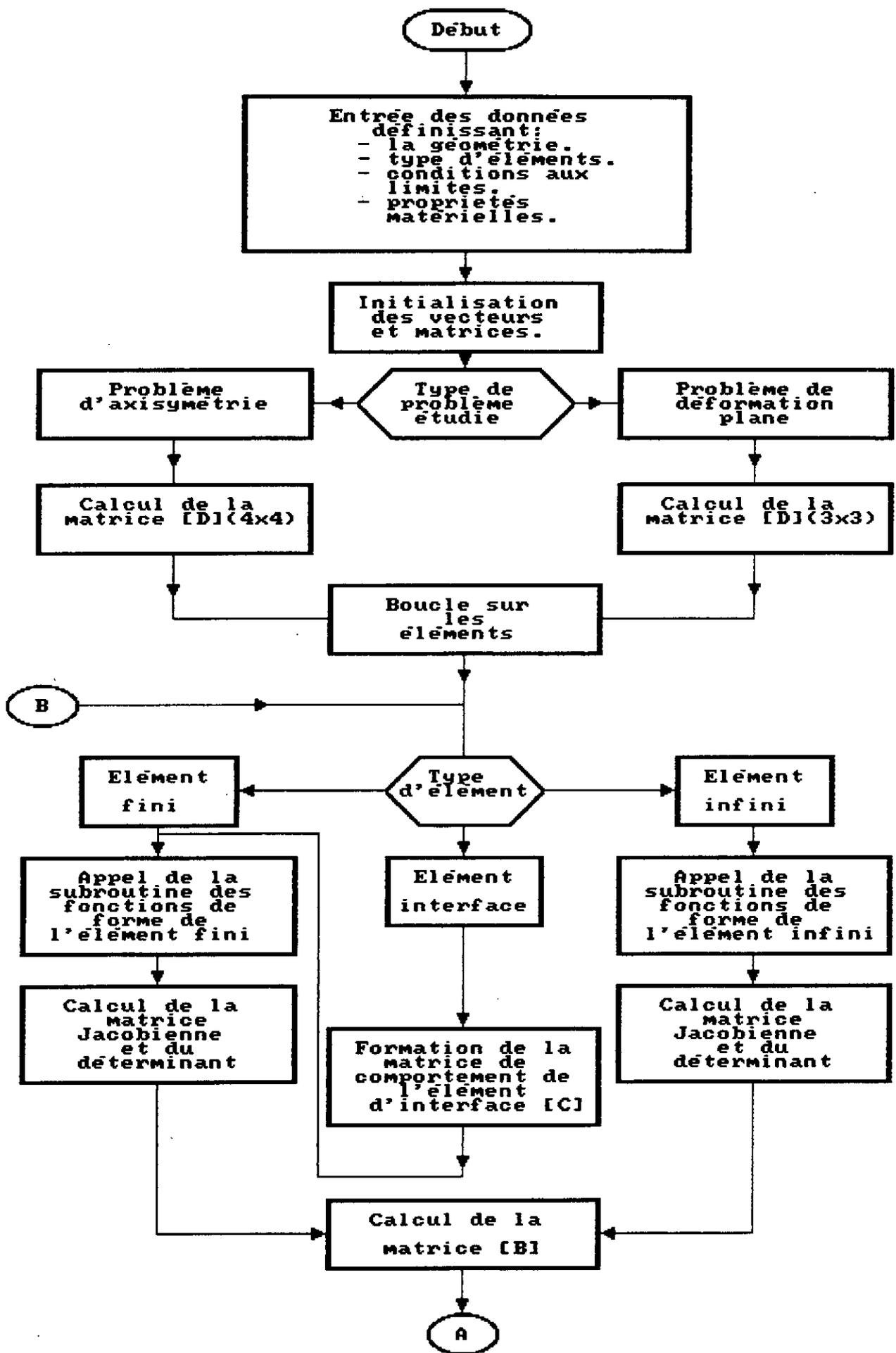
$$D^{ep} = D^e - D^p \quad (5.14)$$

Avec:

$D^p$  : matrice contrainte-déformation plastique.

#### 5.2.5 Organigrammes générales:

Les organigrammes nécessaires pour visualiser la structure générale du programme dans les cas, linéaire et non-linéaire, sont représentés sur les Figures (5.5) et (5.6).



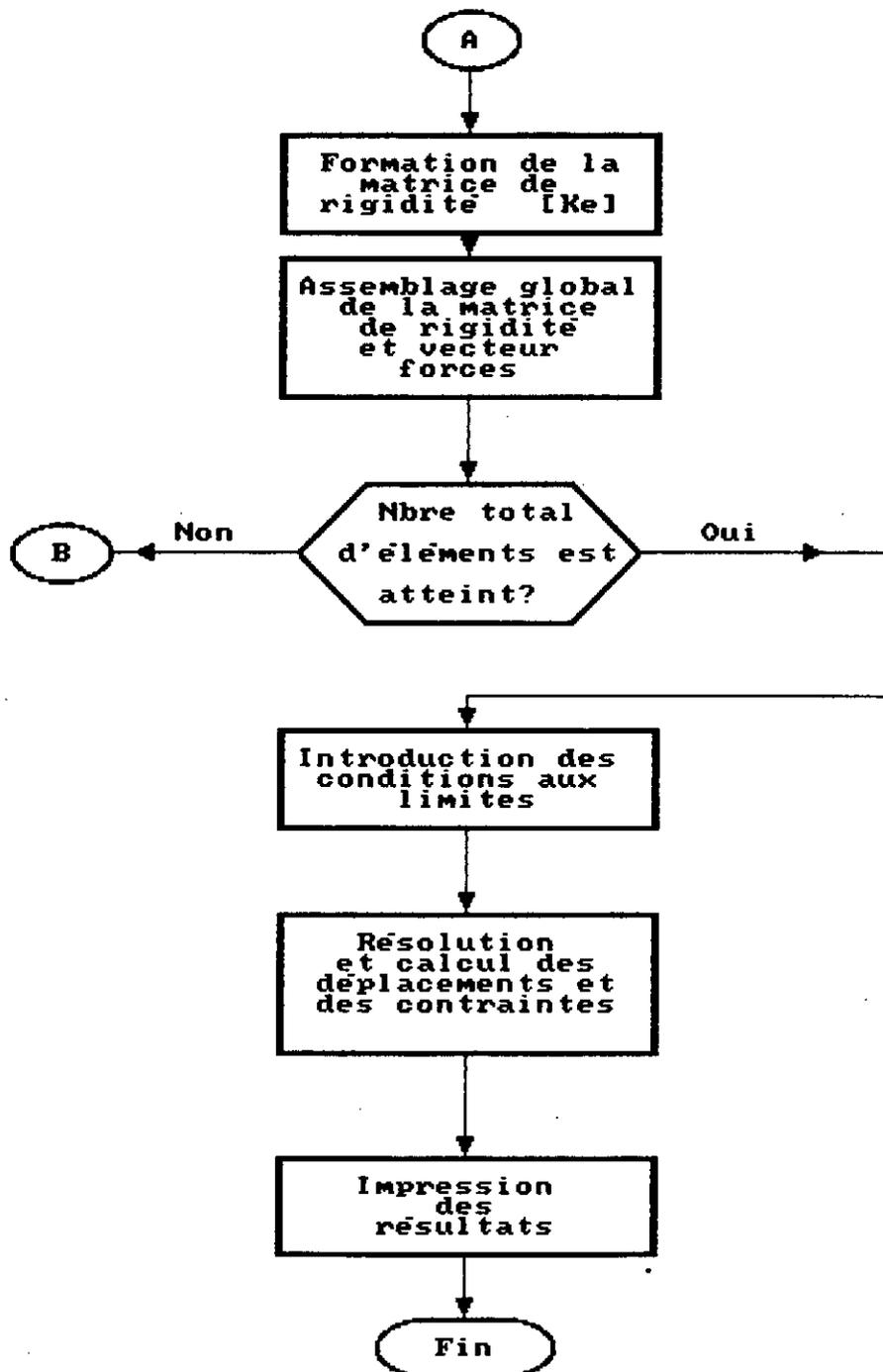
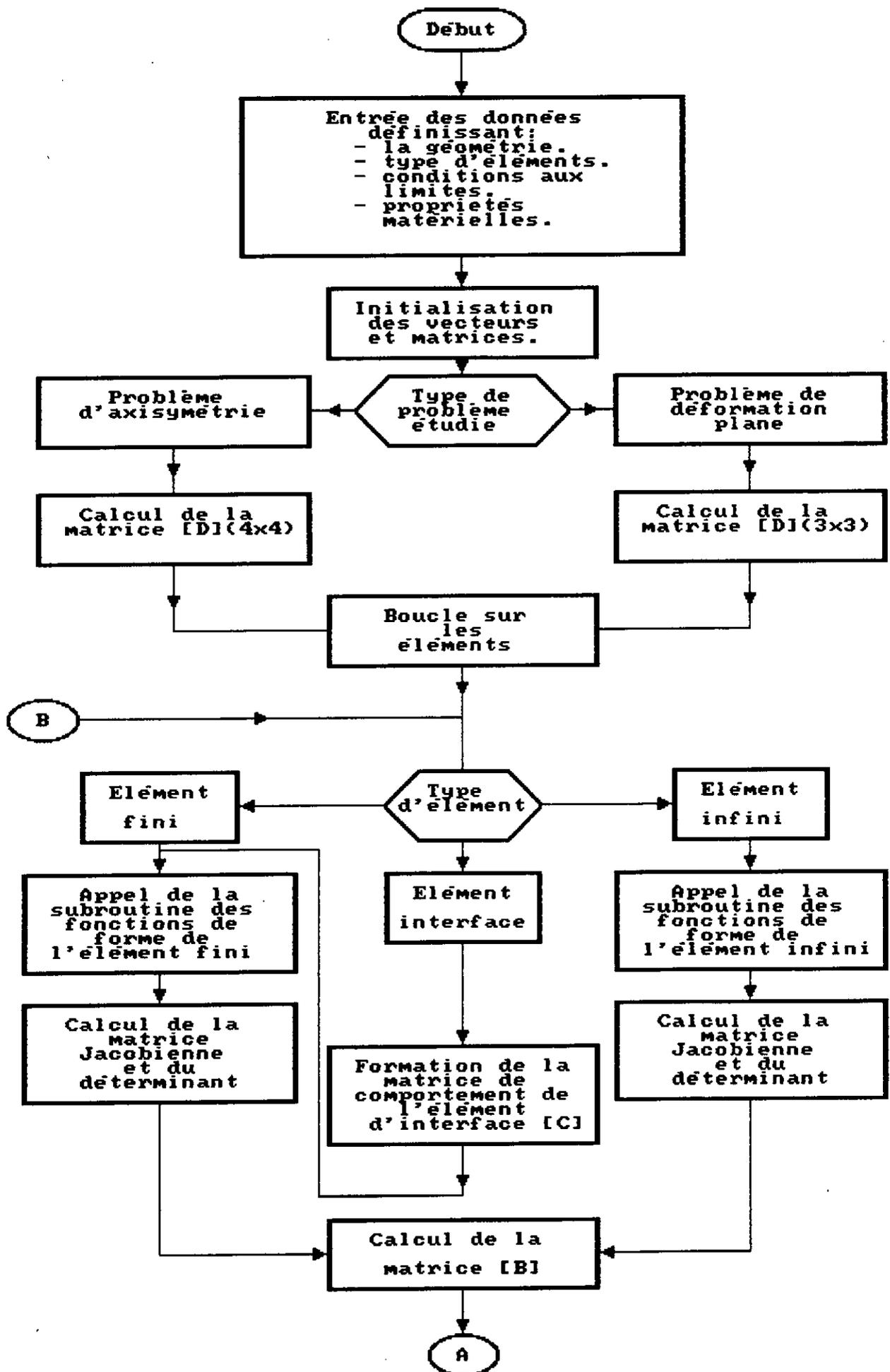
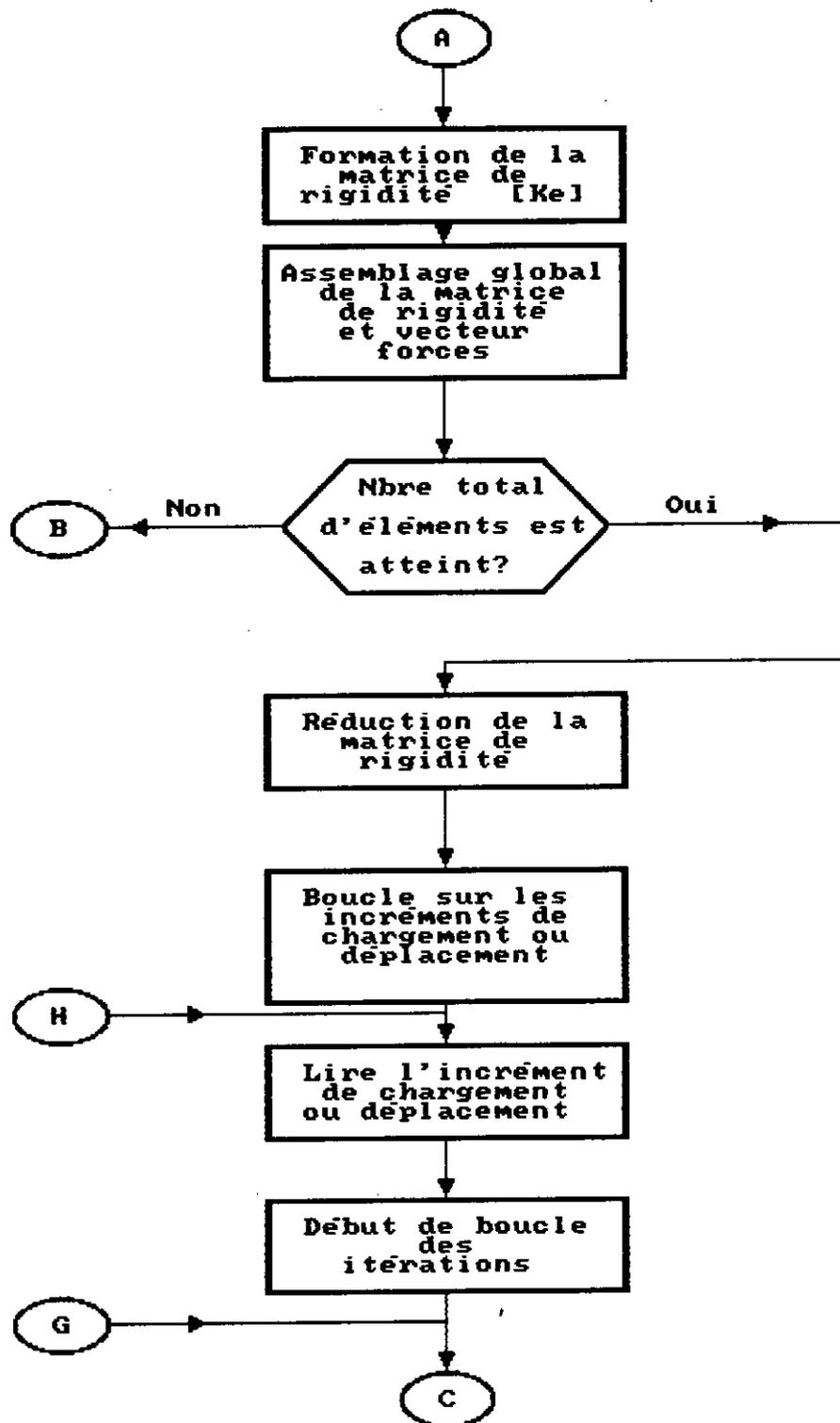
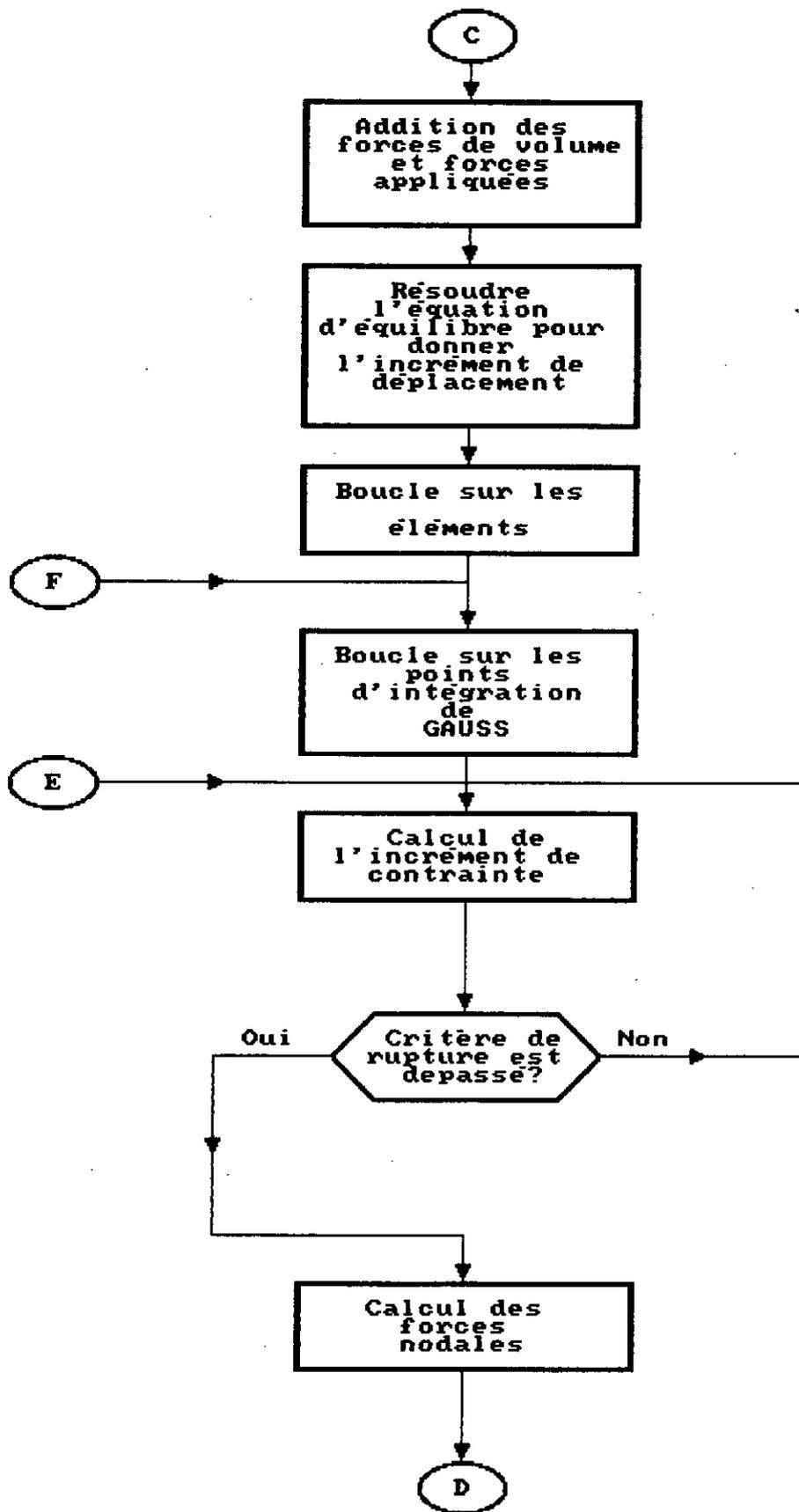


Figure 5.5: Organigramme général:  
 - Cas de comportement linéaire.







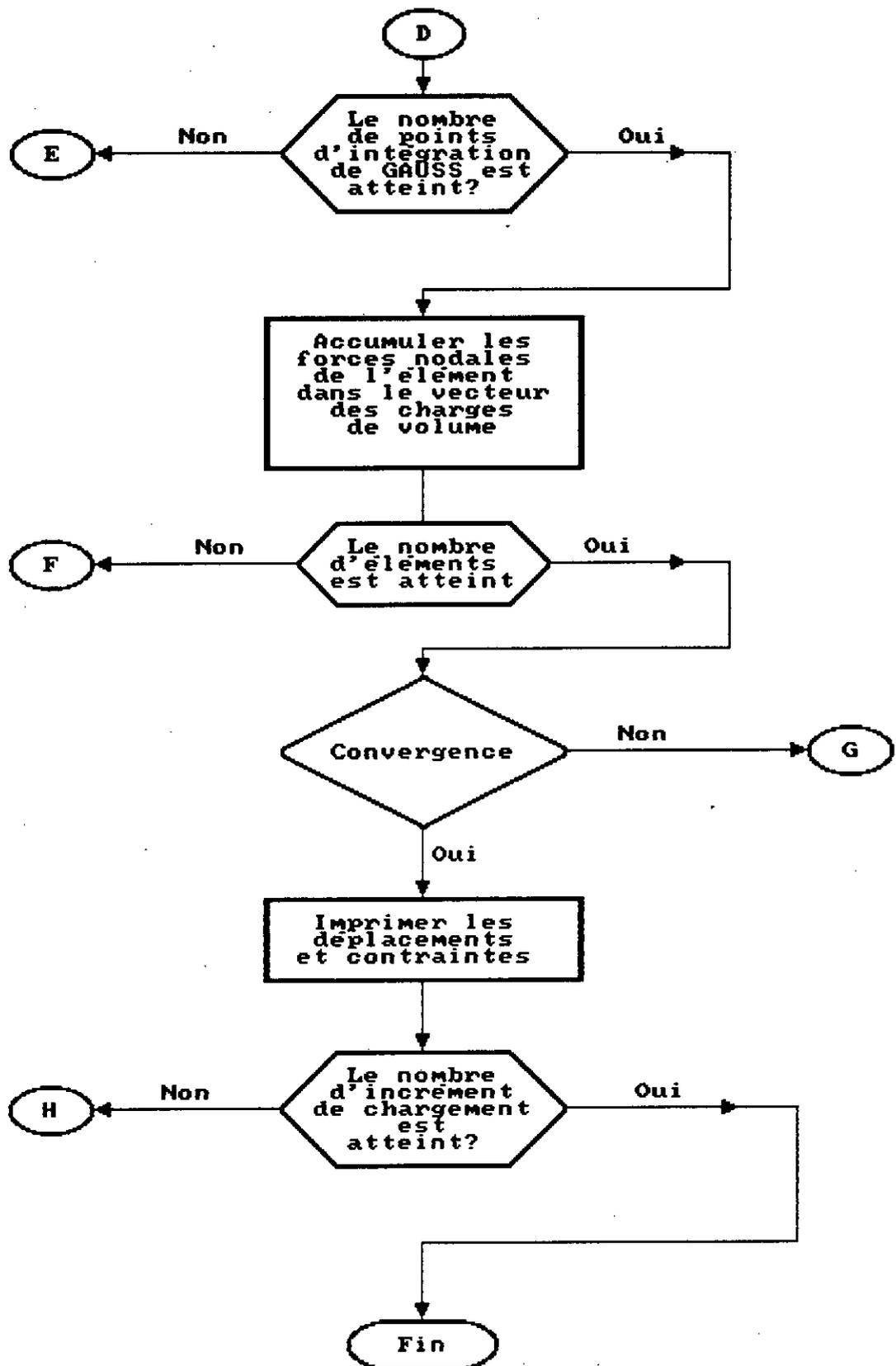


Figure 5.6: Organigramme général:  
- Cas de comportement non-linéaire.

## ***Chapitre 6***

# **APPLICATIONS**

# Chapitre 6

## APPLICATIONS

### 6.1 Exemple 1: Un demi-espace élastique soumis à une charge concentrée

Pour tester l'efficacité du modèle proposé (couplage éléments finis-éléments infinis), on a traité un problème simple d'un demi-espace élastique soumis à une charge concentrée dans les conditions d'axisymétrie et de déformation plane (Figure 6.1(a)). Une expérimentation numérique est faite à la fin de cet exemple, pour mettre en évidence la précision et la rapidité de convergence des résultats obtenus en utilisant un couplage éléments finis-éléments infinis.

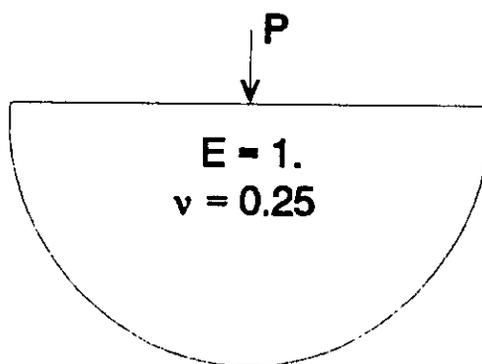


Figure 6.1(a): Un demi-espace élastique soumis à une charge concentrée

#### 6.1.1 Conditions d'axisymétrie:

Le demi-espace élastique est soumis à une charge ponctuelle (problème de Boussinesq "point load")  $P = \frac{\pi}{4}$ .

Le maillage utilisé contient 16 éléments finis isoparamétriques à 8 noeuds et 8 éléments infinis à 5 noeuds (Figure 6.1(b)).

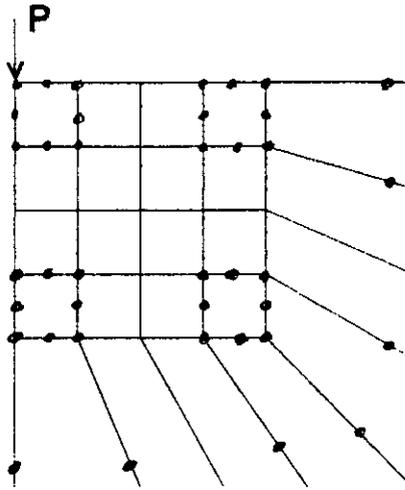


Figure 6.1(b): Maillage éléments finis-éléments infinis.

Les résultats obtenus en utilisant le modèle proposé, nous a permis de tracer la variation des déplacements verticaux et contraintes verticales le long de l'axe de chargement (Figures 6.2 et 6.3).

Les Figures 6.2 et 6.3 montrent les excellents résultats obtenus avec des éléments infinis comparés à ceux de la solution analytique [4].

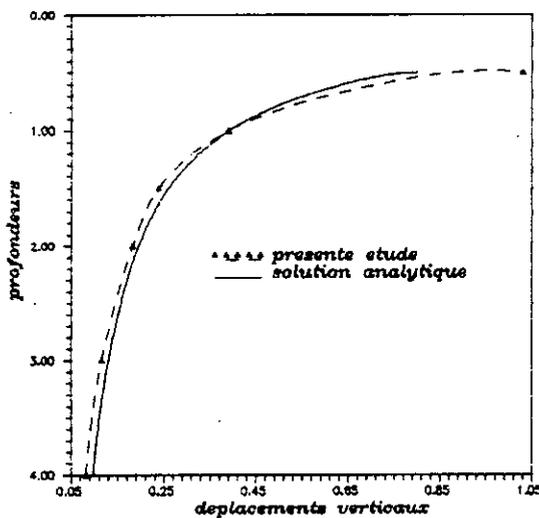


Figure 6.2:  
déplacements verticaux le long  
de l'axe de chargement  
(point load)

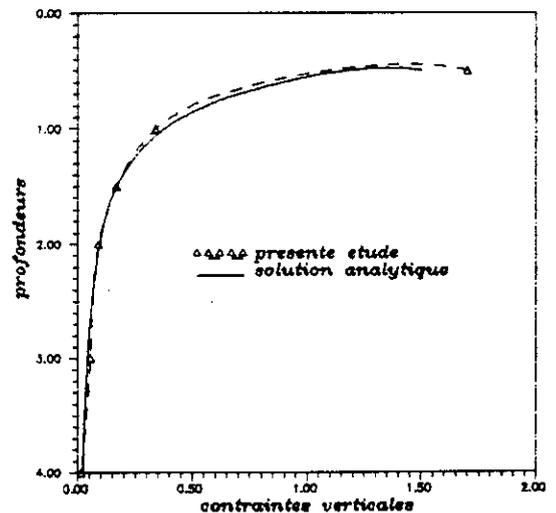


Figure 6.3:  
contraintes verticales le  
long de l'axe de chargement  
(point load)

### 6.1.2 Conditions de déformation plane:

Le demi-espace élastique est soumis à une charge répartie le long de l'axe des y (line load)  $P = \frac{\pi}{4}$ .

Dans ce cas, le problème a été traité en utilisant:

- Un modèle éléments finis, qui contient 9 éléments isoparamétriques à 8 noeuds (40 points nodaux).
- Un modèle éléments finis-éléments infinis, qui contient 4 éléments finis et 4 éléments infinis (26 points nodaux), comme le montre la figure 6.4

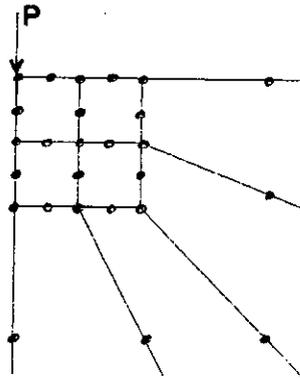


Figure 6.4: Maillage éléments finis-éléments infinis

Sur la Figure 6.5, nous présentons la variation des déplacements verticaux le long de l'axe de chargement.

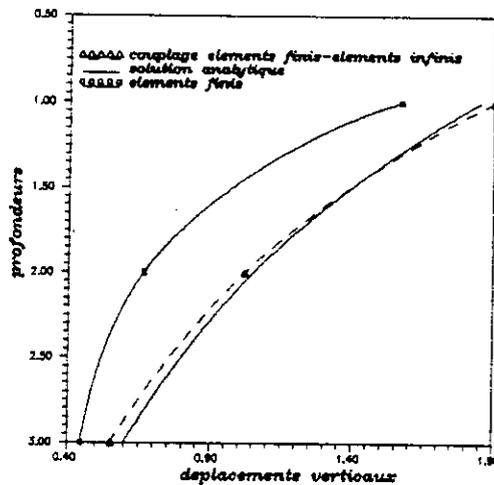


Figure 6.5: Déplacements verticaux le long de l'axe de chargement(line load)

Notons les écarts importants entre les solutions obtenues en utilisant un déplacement imposé (modèle éléments finis) et celles calculées avec des éléments infinis. La figure (6.5) montre aussi les excellents résultats obtenus en utilisant le couplage éléments finis-éléments infinis comparés à ceux de la solution analytique [59].

### 6.1.2.1 Expérimentation numérique:

L'objectif de cette expérimentation est d'évaluer la précision et la rapidité de convergence des résultats d'un modèle éléments finis-éléments infinis. Dans cette expérimentation, plusieurs maillages par éléments finis et par couplage éléments finis-éléments infinis, sont utilisés.

Pour évaluer la précision des solutions numériques des deux modèles, les tassements à une profondeur  $Z=2$  sous l'axe du chargement  $P$ , ont été comparés avec la solution analytique correspondante [59].

La figure (6.6) montre la variation des erreurs relatives, dans le tassement à une profondeur  $Z=2$  sous l'axe du chargement  $P$ , en fonction du nombre d'éléments utilisés dans les deux types de maillages.

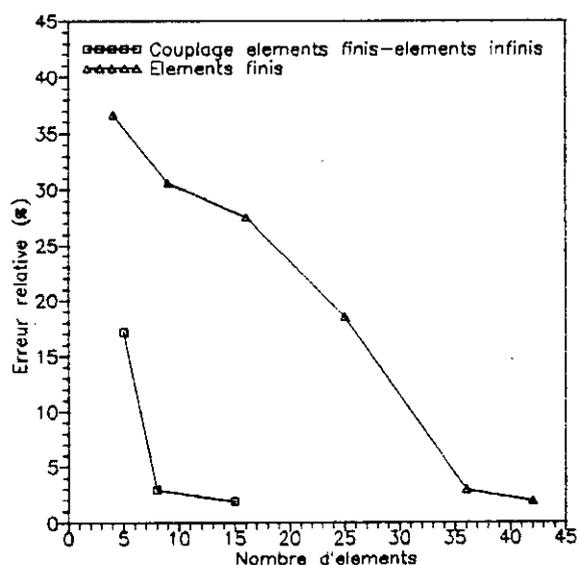


Figure 6.6: Variation des erreurs relatives dans le tassement à  $Z=2$  sous l'axe du chargement en fonction du nombre d'éléments utilisés.

Il apparait nettement que les résultats obtenus, en utilisant un couplage éléments finis-éléments infinis, sont plus précis que ceux donnés par un modèle éléments finis.

La figure (6.6) montre que pour un modèle éléments finis-éléments infinis, l'erreur relative passe de 17,14% avec 5 éléments (17 points nodaux) à 2,9% avec 8 éléments (26 points nodaux), ce qui met en évidence la rapidité de convergence vers la solution exacte de ce modèle avec un nombre réduit d'éléments.

De plus, on note que des erreurs significatives, dans les résultats obtenus par un modèle éléments finis, se produisent si le maillage contient un nombre d'éléments inférieur à 25.

Nous remarquons aussi qu'avec un maillage éléments finis-éléments infinis à 9 éléments, on a presque la même erreur (2,9%) obtenue par un maillage à 36 éléments finis.

Enfin, on peut dire que la précision et la rapidité de convergence des résultats peuvent être améliorées par l'introduction des éléments infinis, qui modélisent d'une façon très satisfaisante le comportement du matériau à l'infini.

## 6.2 Exemple 2: Fondation flexible sur un sol élasto-plastique

L'analyse de la déformation plane des fondations flexibles sous l'effet d'une charge uniforme est présentée ici. Le sol est discrétisé en tenant compte de plusieurs avantages tel que la symétrie.

Des éléments infinis sont utilisés pour modéliser le comportement du sol à l'infini. Le maillage utilisé contient 20 éléments finis et 9 éléments infinis (89 points nodaux) comme le montre la figure 6.7.

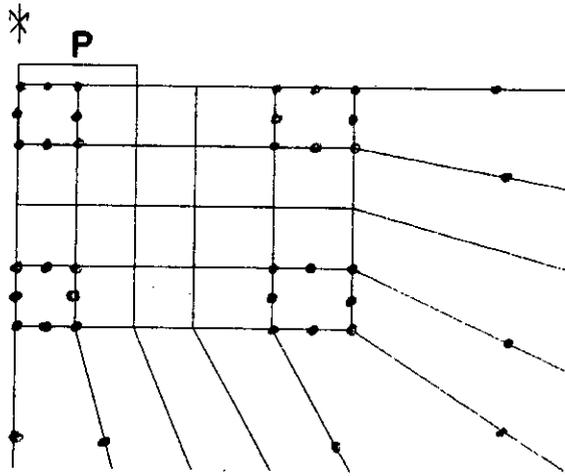


Figure 6.7: Fondation flexible sur un sol élastoplastique.

Le sol est considéré comme étant un matériau linéaire élastique-parfaitement plastique, obéissant au critère de Mohr-Coulomb avec les caractéristiques suivantes:

$$\begin{cases} E=10^5 \text{ kN/m}^2 \\ c=100 \text{ kN/m}^2 \\ \phi=0^\circ \\ \nu=0,3 \end{cases}$$

### 6.2.1 Résultats et Interprétations

La figure (6.8) montre les déplacements verticaux du point "A" (centre de la fondation) suivant les valeurs de  $\frac{P}{c}$ . donnés par la présente étude et ceux obtenus par Smith et Griffiths [57], qui ont utilisé la méthode des éléments finis avec 121 points nodaux (32 éléments isoparamétriques à 8 noeuds).

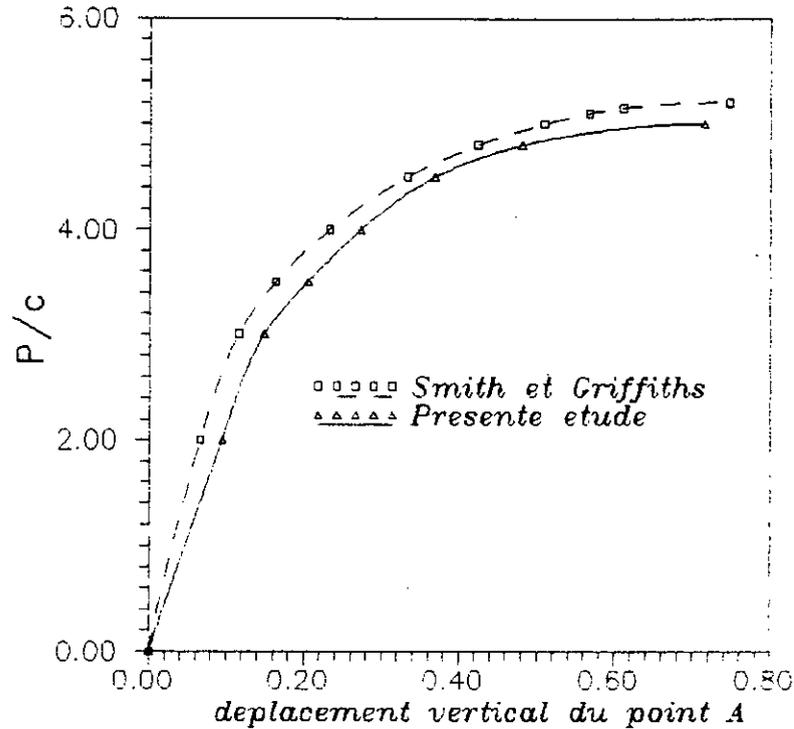


Figure 6.8: Déplacement vertical du centre de la fondation.

La charge limite obtenue en utilisant le modèle proposé est  $\frac{P}{c} = 5$  et qui est très proche de la valeur théorique donnée par Prandtl [1]:  $\frac{P}{c} = (\pi + 2) = 5.14$ . On remarque aussi que le modèle proposé permet la prédiction de la rupture d'une manière évidente (Figure 6.8).

Nous appelons charge limite la pression pour laquelle la zone plastique n'est plus contenue par des zones élastiques, ce qui nous permet d'évaluer le coefficient de capacité portante (charge limite)  $N_c$  en fonction de l'angle de frottement  $\phi$ . Pour cela on considère la même fondation superficielle de longueur:  $B=2m$  sur un sol non pesant ( $\gamma=0$ ), avec  $c=100\text{ kN/m}^2$ ;  $E=10^5\text{ kN/m}^2$ ;  $\nu=0.3$ . pour différentes valeurs de l'angle de frottement  $\phi=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ .

La variation de  $N_c$  en fonction de l'angle de frottement  $\phi$  est représentée sur la figure (6.9).

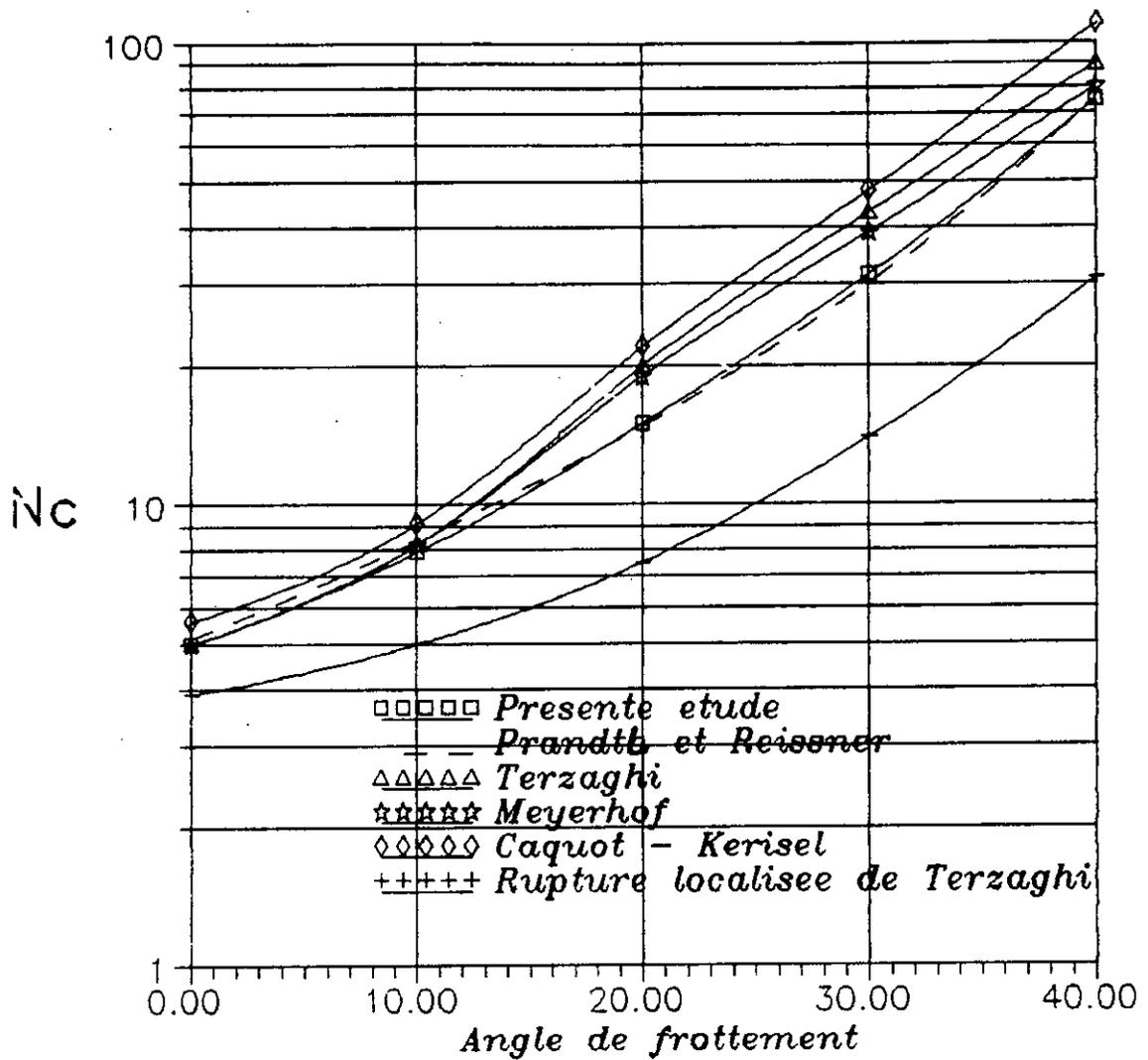


Figure 6.9: Variation de  $N_c$  en fonction de l'angle de frottement  $\phi$ .

La courbe (6.9) montre la satisfaction des résultats obtenus en utilisant des éléments infinis comparés à ceux obtenus par Prandtl et Reissner [1], Terzaghi, Meyerhof et Caquot-Kerisel [53].

### 6.2.1.1 Influence du rapport $\frac{E}{C}$ :

Des tests numériques ont été fait pour une fondation flexible soumis à une charge uniforme et reposant sur un sol purement cohésif (argile) avec différentes valeurs du rapport  $\frac{E}{C}$ .

La figure (6.10) montre la courbe charge-déflexion pour plusieurs valeurs du rapport  $\frac{E}{c}$ .

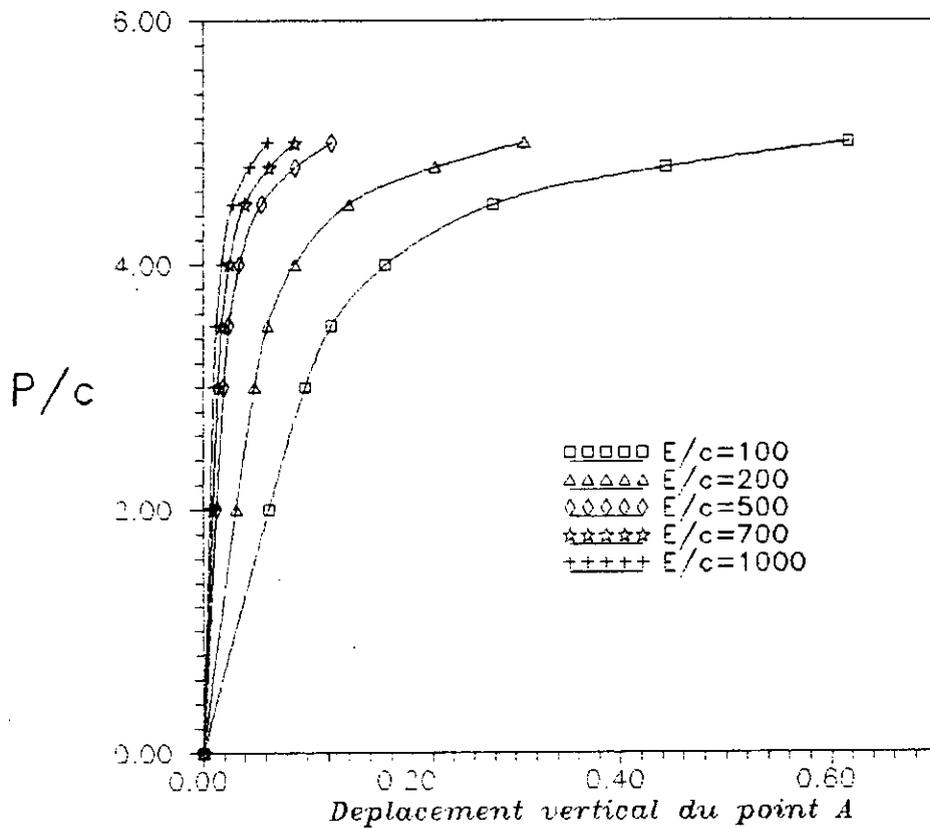


Figure 6.10: Courbe charge-déplacement vertical différentes valeurs de  $\frac{E}{c}$ .

Notons que pour toutes les valeurs du rapport  $\frac{E}{c}$ , la charge limite converge vers la valeur théorique donnée par Prandtl [1]:  $P = (\pi+2)c = 5.14c$ .

Nous remarquons aussi que pour des grandes valeurs du rapport  $\frac{E}{c}$ , la déformation du sol n'a pratiquement pas d'influence sur la réponse charge-déflexion de la fondation même au voisinage de la charge limite (figure 6.10).

### 6.3 Exemple 3: Fondation rigide sur un sol élastique

Dans cet exemple, le problème de fondation rigide reposant sur un sol élastique est analysé avec et sans modélisation de l'interface sol-fondation.

Ce problème a été traité dans les conditions d'axisymétrie (fondation circulaire) et de déformation plane (fondation filante) (Figure 6.11(a)).

Une analyse de l'influence de la rigidité de l'interface et de la non-homogénéité du sol sur les tassements de la fondation et du sol, est faite à la fin de cet exemple.

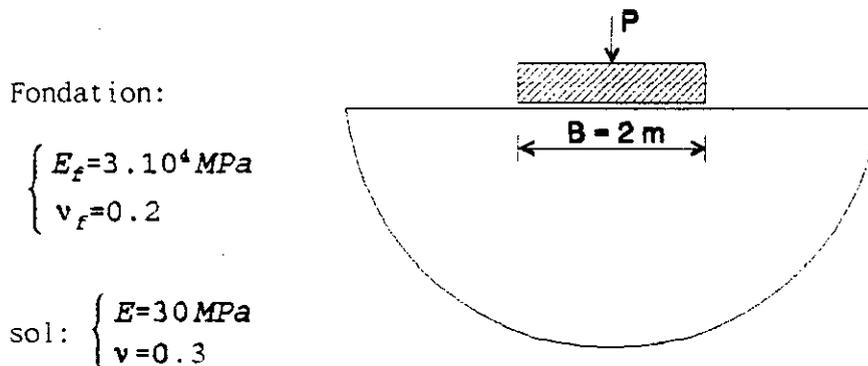


Figure 6.11(a): Fondation rigide sur un sol élastique.

#### a) Fondation circulaire:

Une fondation circulaire de rayon  $R=1\text{ m}$  reposant un sol élastique est soumis à une charge concentrée  $P=1\text{ MN}$ .

Le maillage utilisé contient 17 éléments finis, 8 éléments infinis et des éléments d'interface le long de la zone de contact entre le sol et la fondation (Figure 6.11(b)).

Comme les propriétés de l'élément d'interface ne sont pas bien connues (à défaut d'expérience), des valeurs similaires à celles utilisées par Desai et al.[23] ont été employées dans cette étude.

Les caractéristiques de l'élément d'interface, qui correspondent à un sol compressible, sont données par:

$$\begin{cases} E_i = 10 \text{ MPa} \\ \nu_i = 0.3 \\ G_i = 10 \text{ kPa} \\ e_i = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

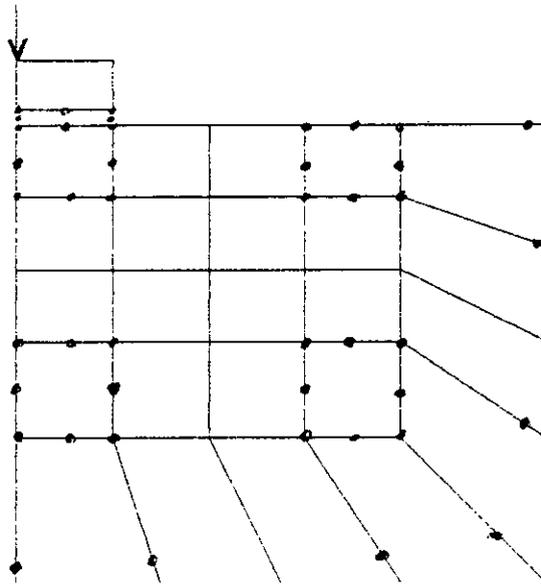


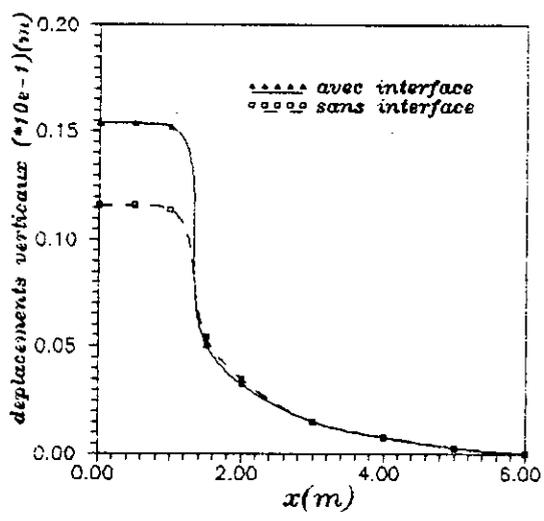
Figure 6.11(b): Maillage éléments finis-éléments infinis.

#### b) Fondation filante:

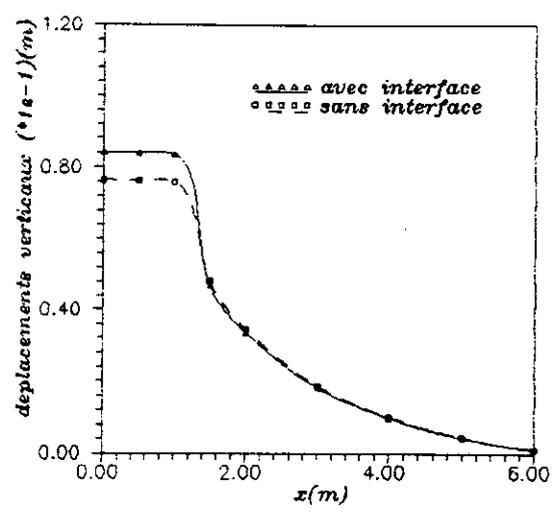
Le maillage et les propriétés des différents éléments utilisés précédemment pour la fondation circulaire, sont employés pour l'analyse d'une fondation filante reposant sur un sol élastique et soumis à une charge  $P = 1 \text{ MN/ml}$ .

#### 6.3.1 Résultats et Interprétations

Les résultats obtenus nous ont permis de tracer la variation des déplacements verticaux en surface et le long de l'axe du chargement pour les deux cas: fondation circulaire et fondation filante (Figure 6.12 et 6.13).

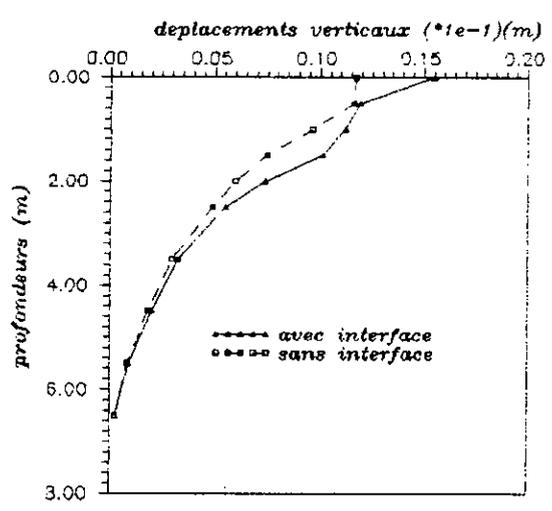


(a) Fondation circulaire.

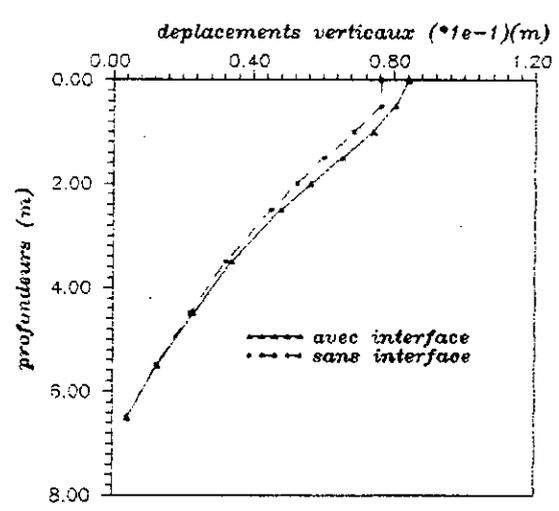


(b) Fondation filante.

Figure 6.12: Variation des déplacements verticaux en surface.



(a) Fondation circulaire.



(b) Fondation filante.

Figure 6.13: Variation des déplacements verticaux le long de l'axe de la fondation.

Les déplacements verticaux obtenus, en utilisant des éléments d'interface, sont plus importants que ceux obtenus sans modélisation de l'interface. Cela est due d'une part à la différence de répartition des pressions de contact sous la fondation (Figure 6.14) et d'autre part à la déformation de la couche fine compressible (interface).

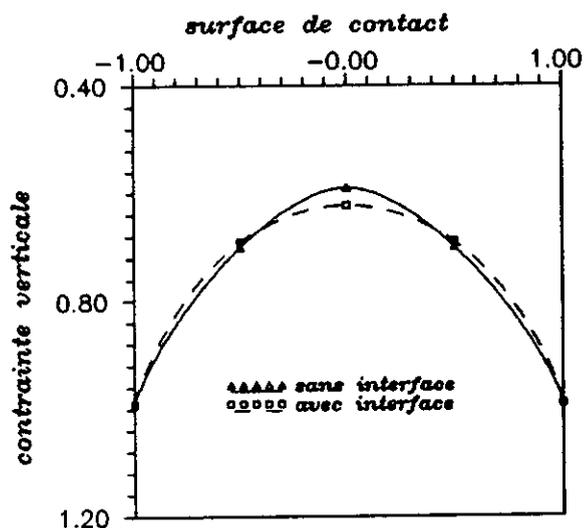


Figure 6.14: Répartition des contraintes verticales sous la fondation.

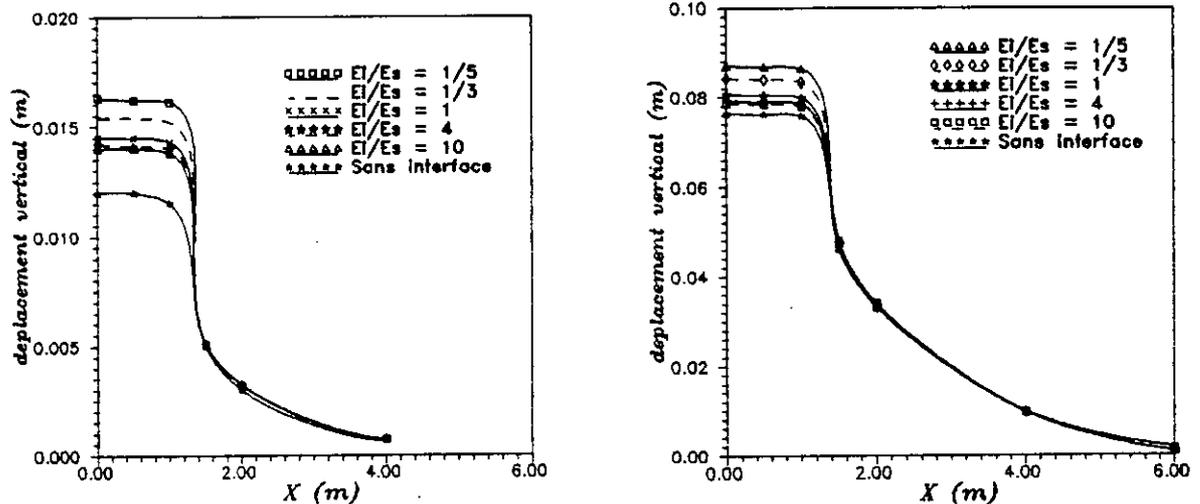
La différence de distribution des pressions de contact est due à une diminution de la rigidité de la fondation, provoquée par la présence d'une couche fine compressible (interface) qui a des caractéristiques différentes de celles du sol et de la fondation.

Il est à noter que les déplacements verticaux sous la fondation sont constants (Figure 6.12). De plus, on remarque une concentration des contraintes verticales au voisinage du coin de la fondation (Figure 6.14). Ces résultats sont en bonne corrélation avec la solution théorique.

### 6.3.1.1 Influence de la rigidité de l'interface:

Une expérimentation numérique est faite, pour mettre en évidence l'influence de la rigidité de l'interface sur la réponse du système sol-fondation. Dans cette expérimentation, les rigidités de la fondation et du sol sont maintenues constantes et on a varié la rigidité de l'interface.

Les tassements en surface obtenus avec différentes valeurs de la rigidité de l'interface, sont illustrés sur les figures 6.17(a) et 6.17(b).



(a) Fondation circulaire

(b) Fondation filante

Figure 6.17: Déplacements verticaux en surface.

Les figures 6.17(a) et 6.17(b) montrent que le tassement de la fondation diminue quand la rigidité de l'interface augmente. Cette diminution dépend plus de la déformation de la couche fine (Interface). Notons que chaque fois on augmente la rigidité de l'interface, la couche de contact devient moins compressible et sa déformation diminue (tend vers zéro). Ceci entraîne une diminution des tassements de la fondation, qui vont tendre vers les résultats obtenus "sans interface" (Figure 6.17).

Pour voir clairement l'influence de la rigidité de l'interface sur les tassements de la fondation, on a tracé la variation des tassements du sol en fonction de la profondeur, sans intégration de l'interface (Figure 6.17(c)).

Notons que, pour différentes valeurs de la rigidité de l'interface, les courbes des tassements du sol en profondeur sont très rapprochées, comme le montre la figure 6.17(c).

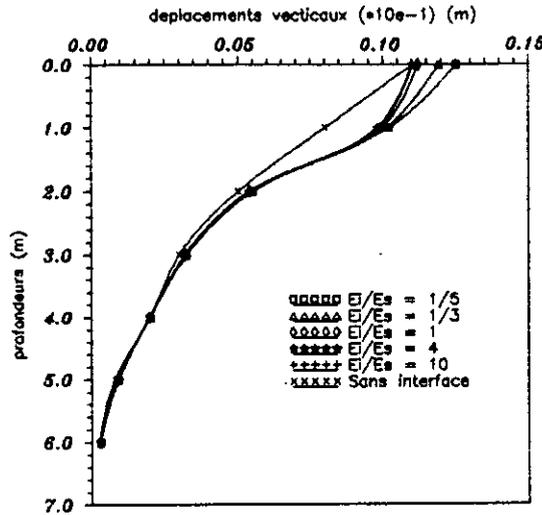


Figure 6.17(c): Variation des tassements du sol en fonction de la profondeur (Sans intégration de l'interface).

Lorsque le rapport  $E_1/E_a$  augmente, le système fondation-interface va agir comme un bloc rigide. Dans ce cas, le tassement de la fondation dépend seulement du tassement du sol, puisque la déformation de l'interface va tendre vers zéro.

Enfin, on peut dire que cette différence des tassements est due d'une part à la déformation de l'interface et d'autre part à une modification du mode de transmission des efforts, qui provoque un changement de la distribution des pressions de contact sous la fondation.

### 6.3.1.2 Analyse de la non-homogénéité du sol:

La rigidité des sols augmente généralement avec la profondeur. Une forme générale de cette variation est donnée par l'équation suivante [13]:

$$E = E_0 Z^m$$

Avec:

$E$  : Module d'élasticité.

$E_0$  : Module d'élasticité à la surface libre quand  $m=0$  .

$Z$  : La profondeur (sous la surface libre).

$m$  : Paramètre de la non-homogénéité.

Un demi-espace homogène et isotrope est obtenu quand  $m=0$  . Pour  $m=1$  , la variation de  $E$  est linéaire:

$$E = E_0 Z$$

Dans cet exemple, nous allons étudier l'influence de la variation du module d'élasticité sur le comportement du système sol-fondation. Pour cela, on a traité le même exemple (fondation circulaire, fondation filante) pour les deux cas:  $m=0, m=1$  (Figure 6.15).

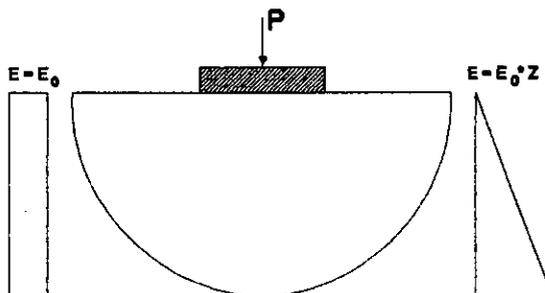
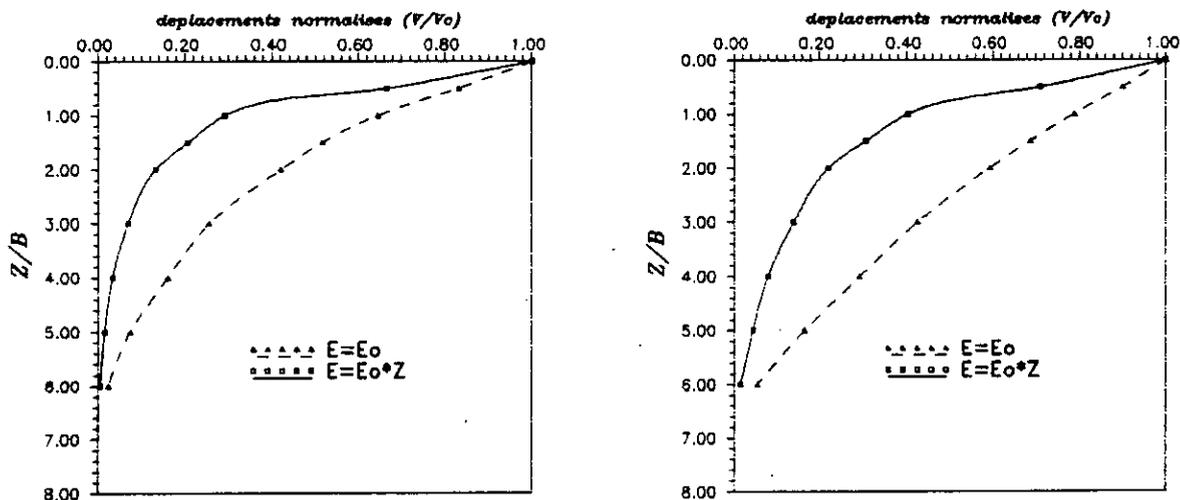


Figure 6.15: Fondation rigide sur un sol élastique ( $m=0, m=1$ ) .

Les figures 6.16(a) et 6.16(b) donnent les tassements normalisés ( $V/V_c$ ) du sol le long de l'axe de la fondation.



(a) Fondation circulaire

(b) Fondation filante

Figure 6.16: Variation des déplacements normalisés du sol en fonction de la profondeur.

Notons que pour le cas d'une rigidité constante, le taux de réduction des tassements est presque le même sur toute la profondeur. Cependant, pour le cas d'une rigidité qui augmente avec la profondeur, le taux de réduction diminue avec cette dernière ( $Z$ ).

On constate aussi qu'il y a une réduction plus rapide des tassements du sol après un mètre de profondeur pour le cas:  $E=E_0$ , comparée à celle du cas:  $E=E_0 Z$ .

#### 6.4 Exemple 4: Fondation rigide sur un sol élastoplastique

Le problème considéré dans cet exemple est celui d'une fondation filante rigide, reposant sur un sol purement cohésif et soumis à une charge verticale  $P$ .

Dans cet exemple, nous allons étudier le comportement du système sol-fondation pour les deux cas suivants:

- 1) Comportement non-linéaire du sol avec une liaison parfaite à l'interface sol-fondation.
- 2) Comportement non-linéaire du sol avec des éléments d'interface non-linéaires.

Dans ce problème, on a utilisé un contrôle de déplacements. Des incréments de déplacements verticaux uniformes  $\Delta U = 4 \cdot 10^{-4} m$  sont appliqués à la surface de la fondation et un processus, incrémental et itératif, est suivi jusqu'à la rupture, avec les mêmes incréments de déplacements. Le critère de rupture utilisé pour le sol et l'interface est celui de Mohr-Coulomb.

Le maillage utilisé contient 20 éléments finis, 9 éléments infinis et des éléments d'interface le long de la zone de contact dans le deuxième cas (Figure 6.18).

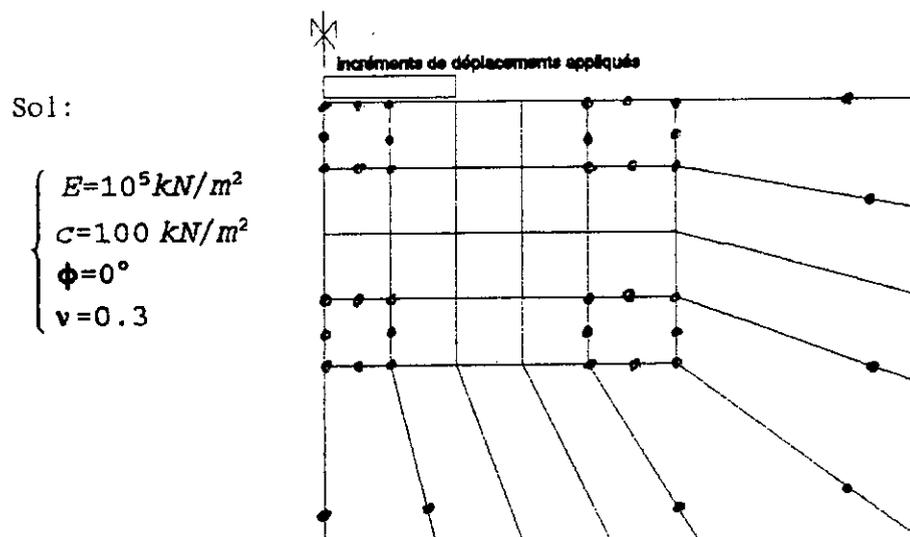


Figure 6.18: Fondation rigide sur un sol purement cohésif.

Les caractéristiques des éléments d'interface, qui correspondent à un sol non cohésif, sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_i = 50 \text{ kN/m}^2 \\ E_i = 10^4 \text{ kN/m}^2 \\ c_i = 0 \\ \phi_i = 30^\circ \\ e_i = 5 \text{ cm} \\ \nu_i = 0.3 \end{array} \right.$$

#### 6.4.1 Résultats et Interprétations

La figure (6.19) montre que la capacité portante augmente quand la rigidité de la fondation diminue. Cette augmentation est associée à un grand tassement avant la rupture.

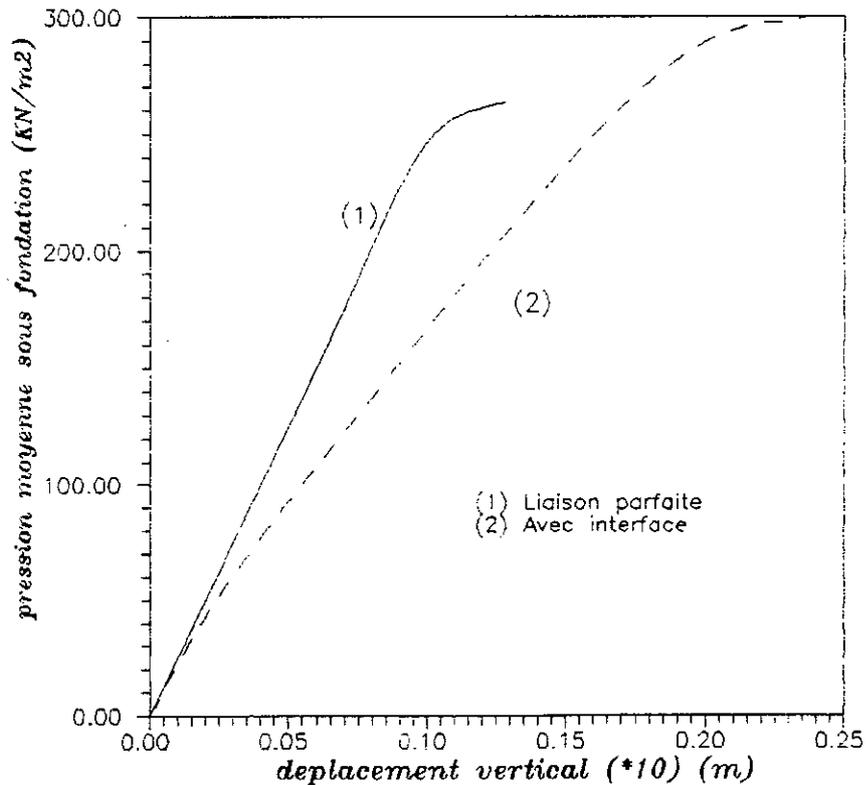


Figure 6.19: Courbe pression moyenne-tassement pour une fondation rigide sur un sol purement cohésif.

Ce phénomène peut être attribué à la différence de la distribution des pressions de contact sous la fondation, qui résulte du développement progressif de la rupture.

La distribution des pressions de contact sous une fondation rigide (le cas 1)(Figure 6.20) montre une grande concentration des contraintes au voisinage du coin de la fondation.

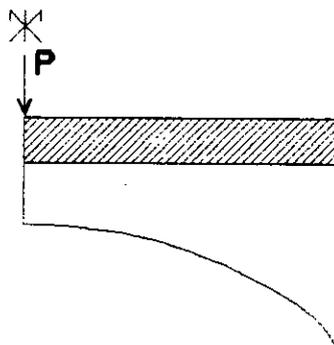


Figure 6.20: Pressions de contact sous une fondation rigide.

Pour une fondation flexible (le cas 2), les pressions de contact sont presque uniformes (Figure 6.21). On note aussi la présence d'une petite concentration des contraintes au voisinage du coin de la fondation.

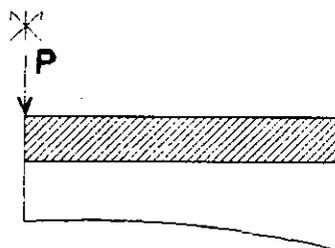


Figure 6.21: Pressions de contact sous une fondation flexible.

Dans les deux cas, l'équilibre vertical nécessite que la résultante des pressions de contact soit égale à la force  $P$ .

Pour une valeur donnée de  $P$ , on note l'existence d'une forte concentration de contraintes au voisinage du coin de la fondation rigide. Quand  $P$  augmente, la pression de contact après qu'elle atteint la résistance maximale, elle s'approche graduellement de la résistance résiduelle.

Inversement, la fondation flexible génère des petites concentrations de contraintes, qui résultent avec la rupture gouvernée par la résistance maximale du sol et qui est approximativement uniforme.

L'énergie nécessaire pour atteindre une résistance maximale uniforme est accompagnée d'une capacité portante plus importante pour une fondation flexible, comparée à celle d'une fondation rigide.

La figure (6.22) montre les déplacements normalisés en fonction de la profondeur, le long de l'axe de la fondation.

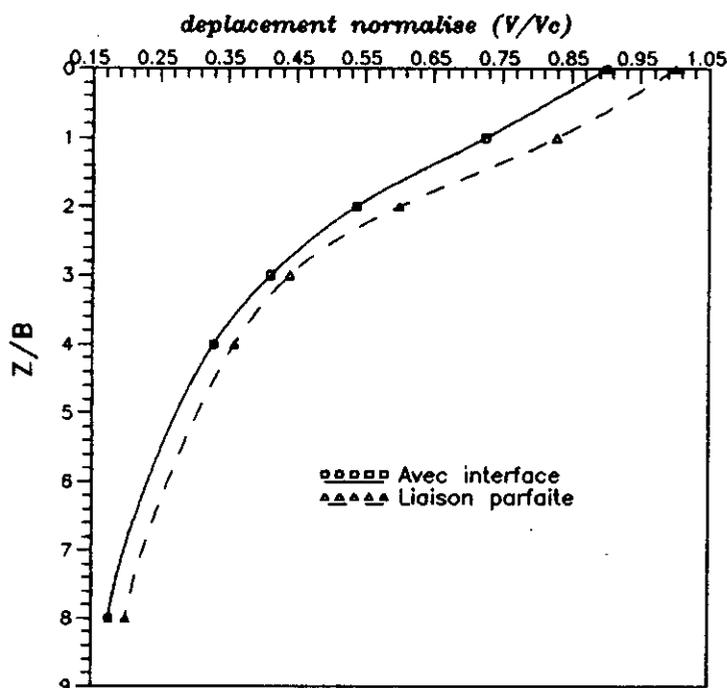


Figure 6.22: Variation des déplacements normalisés du sol en fonction de la profondeur.

On note que les déplacements obtenus en modélisant la zone de contact sont plus importants. Cela est due à la différence des distributions des contraintes sous la fondation et à la déformation de l'interface.

En effet, le fait d'augmenter la charge appliquée, la surface de contact devient plus étendue. Cette augmentation de la charge modifie le mode de transmission des efforts, ce qui entraîne un changement de la répartition des pressions de contact sous la fondation.

On remarque aussi que le taux de réduction des tassements avec la profondeur est le même pour les deux cas.

#### 6.4.1.1 Influence de la rigidité du sol:

Généralement le sol a des caractéristiques variables avec la profondeur. Pour mettre en évidence l'influence de cette variation sur la valeur de la charge limite, on a pris la même fondation rigide sur un bicouche de sol purement cohésif, dont les caractéristiques sont données sur la figure 6.23:

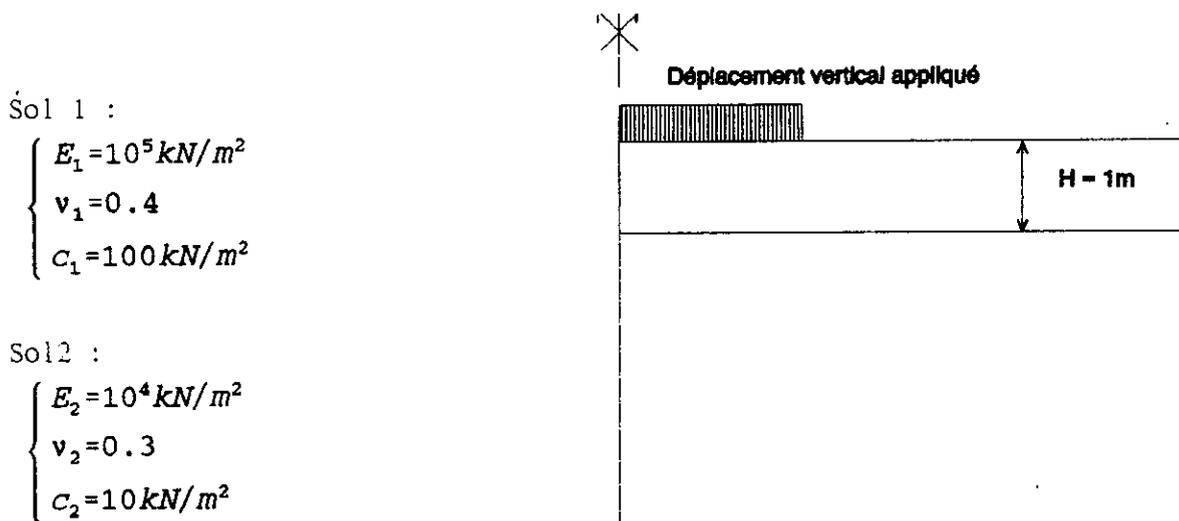


Figure 6.23: Fondation rigide sur un bicouche de sol purement cohésif.

Un contrôle de déplacements est utilisé avec un incrément de déplacement  $\Delta U = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , pour traiter les deux cas suivants:

- Couche supérieure plus résistante  $\left( \frac{c_s}{c_i} = \frac{c_1}{c_2} = 10 \right)$ .
- Couche inférieure plus résistante  $\left( \frac{c_s}{c_i} = \frac{c_2}{c_1} = 0.1 \right)$ .

La figure (6.24) montre la courbe pression moyenne-déplacement vertical du centre de la fondation.

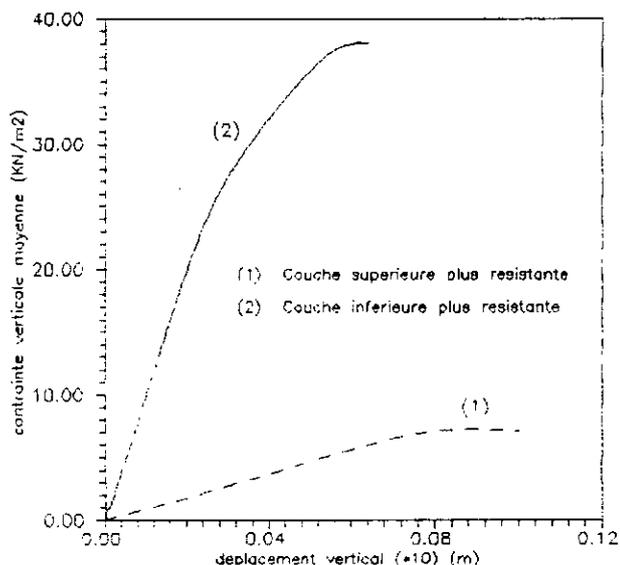
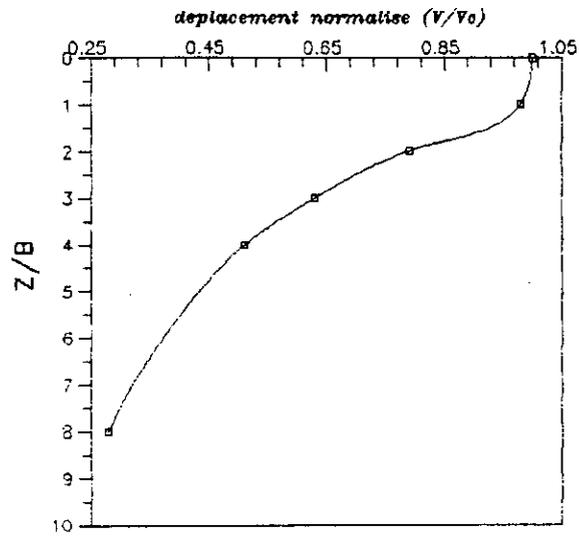


Figure 6.24: Courbe contrainte verticale-tassement pour une fondation rigide sur un bicouche de sol purement cohésif.

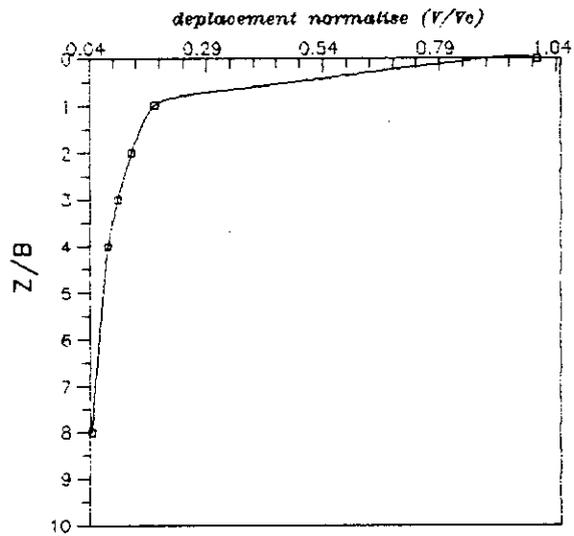
La figure (6.24) montre que la charge limite augmente de 79% et le tassement à la rupture est réduit de 44% si la couche inférieure est plus résistante que la couche supérieure comparé au cas inverse. Cela est due à la hauteur importante de la couche inférieure (la couche la plus résistante).

La figure (6.25) montre les déplacements normalisés en fonction de la profondeur pour les deux cas.

On note d'une part la différence, entre les champs de déplacements à la rupture et d'autre part entre les taux de réduction des tassements en profondeur pour les deux cas.



(a) couche superieure plus resistente



(b) couche inferieure plus resistente

Figure 6.25: Variation des déplacements normalisés en fonction de la profondeur.

### 6.5 Exemple 5: Fondation rigide sur un bicouche de sol élastique

Les sollicitations que les structures imposent au sol et les déformations que ce dernier enregistre modifient souvent l'état d'équilibre structural et crée des efforts nouveaux dont il est difficile de prévoir l'importance lors du dimensionnement initial des pièces constituant les structures: ce sont les problèmes de tassement qui entraînent des désordres dans les ouvrages aériens nouvellement construits et parfois par contre dans les ouvrages existants: fissurations des immeubles, des barrages.

Dans cet exemple, on considère un radier de grande longueur de largeur  $B=10m$  et d'épaisseur  $e=1m$  supportant une charge normale uniforme  $P=1 \text{ bar}$ . Ce radier en béton de module d'Young  $E_f=200.000bars$  et de coefficient de poisson  $\nu_f=0.3$  est placé sur un bicouche de sol élastique. La couche supérieure à pour hauteur  $H_1=3m$ . Ces deux couches ont pour coefficient de poisson:  $\nu_1=\nu_2=0.3$  (Figure 6.26).

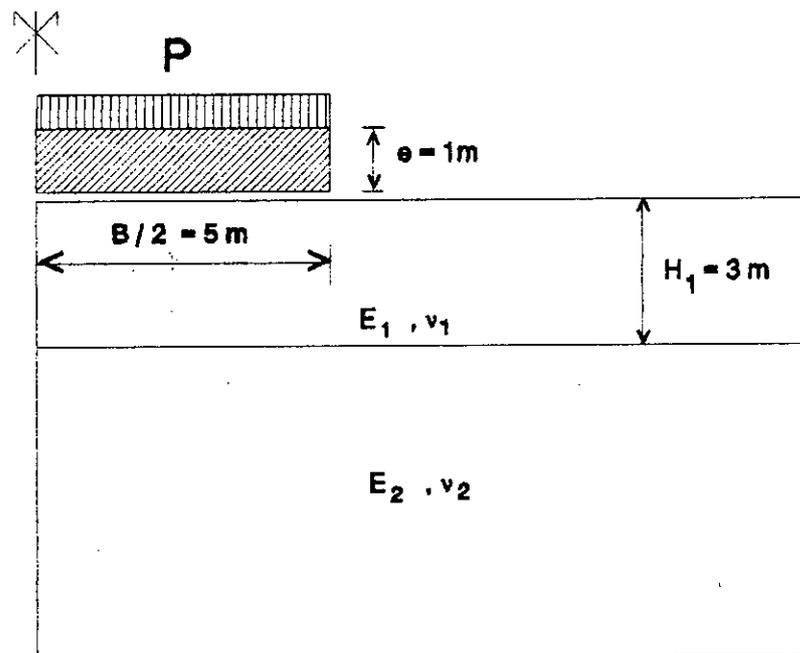


Figure 6.26: Radier de grande longueur sur un bicouche de sol.

Le maillage utilisé contient 40 éléments finis, 8 éléments infinis et 5 éléments d'interface le long de la zone de contact entre la couche supérieure et le radier.

Ces éléments d'interface ont les caractéristiques suivantes:

$$\begin{cases} E_i=10bars \\ \nu_i=0.3 \\ G_i=4bars \\ e_i=4cm \end{cases}$$

### 6.5.1 Résultats et Interprétations

Dans le but de tester l'efficacité du modèle numérique proposé pour le calcul des tassements des fondations sur des sols hétérogènes, on a fixé la valeur de la rigidité de la couche supérieure:  $E_1=10bars$  et on a varié celle de couche inférieure:  $E_2=20,50,100bars$ .

Les tassements du centre de la fondation obtenus par la présente étude et celui donné par la solution analytique Bescond, B. et al [9] pour différentes valeurs du rapport  $E_1/E_2$  . sont donnés par le tableau-1-.

$E_1/E_2$	La présente étude (m)	Bescond et al [9]
0.5	0.380	0.390
0.2	0.281	0.280
0.1	0.242	0.241

Tableau -1-: Tassement du centre de la fondation en fonction du rapport  $E_1/E_2$  .

Le tableau-1- montre la bonne concordance entre les résultats obtenus en utilisant le modèle proposé et ceux donnés par la solution analytique de Bescond, B. et al [9].

Les figures (6.27) et (6.28) montrent la variation des déplacements en surface et en profondeur.

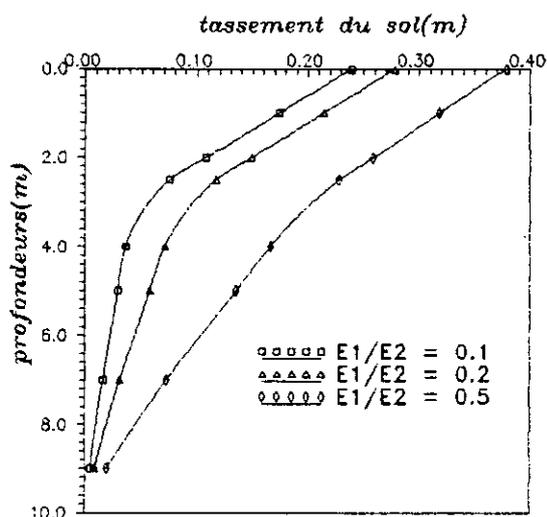


Figure 6.27: Tassement du sol le long de l'axe de la fondation.

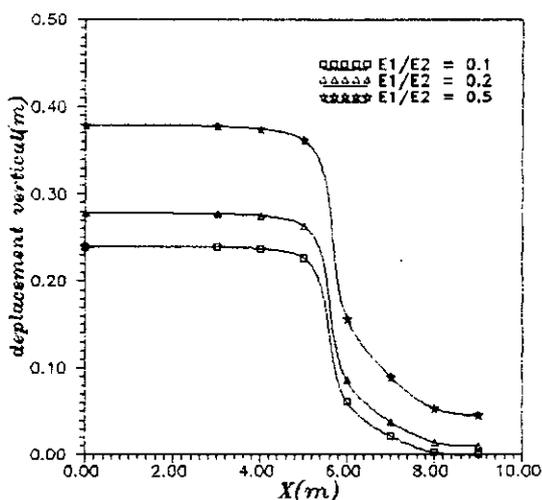
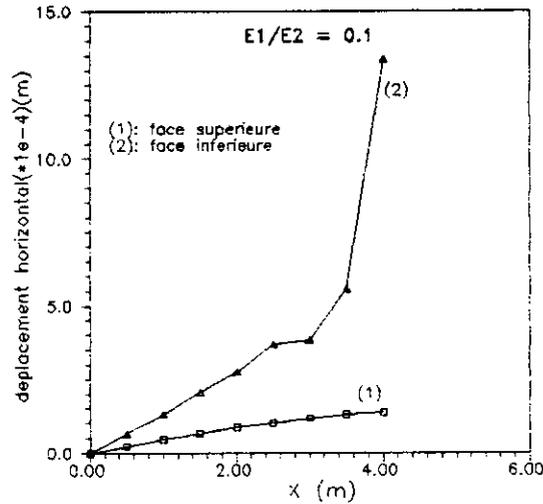


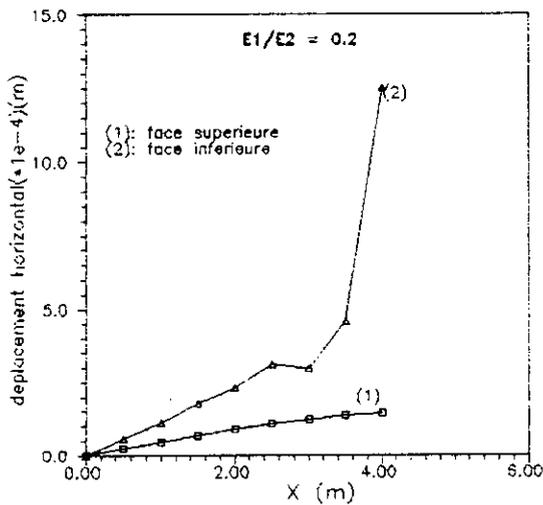
Figure 6.28: Tassement du sol en surface.

On note que chaque fois la rigidité de la couche inférieure diminue, le tassement du radier augmente et le taux de réduction des tassements du sol en surface et en profondeur devient plus important.

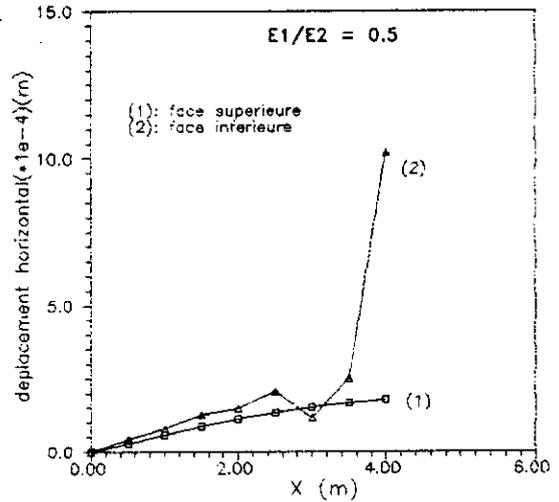
Pour voir de plus près le mouvement à l'interface, on a tracé la variation des déplacements horizontaux des deux faces de l'interface le long de la zone de contact couche supérieure-fondation (Figure 6.29).



(a)



(b)



(c)

Figure 6.29: Déplacements horizontaux des deux faces de l'interface sol-fondation.

La figure (6.29) montre la différence du champ de déplacements horizontaux sur les deux faces de la zone de contact. Cela prouve qu'il y a des mouvements relatifs (glissement) à l'interface sol-fondation.

On note aussi que chaque fois on s'approche du coin de la fondation, on remarque une perturbation du champ de déplacements. Donc, le coin de la fondation représente un point spécial ou le champ de déplacement devient singulier. On voit ce phénomène plus clairement dans les problèmes non-linéaire ou on assiste au développement des points singuliers aux coins de la fondation.

Tels points singuliers sont presque rencontrés dans tous les problèmes d'interaction sol-structure et qui entraînent un changement des conditions aux frontières autour des coins de la fondation.

## 6.6 Exemple 6: Fondation flexible sur un bicouche de sol élastoplastique

La plus part des méthodes de prédiction des charges de rupture reposent sur l'hypothèse que le sol est homogène dans toute la zone de cisaillement. Dans le cas contraire, ces méthodes ne sont plus utilisables directement. La zone de cisaillement se trouve modifiée: elle s'étale en traversant la couche la moins résistante et se rétrécit dans le matériau le plus résistant.

Ces méthodes sont souvent basées sur l'équation de capacité portante de Terzaghi [1]:

$$PL = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + c N_c + \gamma D N_q \quad (6.1)$$

Avec:

$\gamma$  : poids volumique du sol.

$B$  : longueur de la fondation.

$D$  : enfoncement de la fondation.

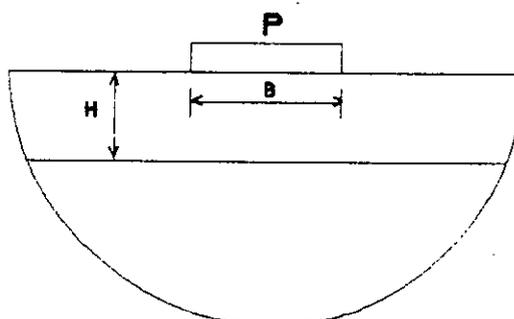
$c$  : la cohésion du sol.

$N_c, N_q, N_\gamma$  : les coefficients de capacité portante, qui sont fonction de l'angle de frottement.

Dans cet exemple, nous allons analyser le problème de fondation flexible soumis à une charge uniforme et reposant sur un bicouche d'argile dont les caractéristiques sont données sur la figure 6.30(a).

Sol 1:

$$\begin{cases} E_1 = 10^5 \text{ kN/m}^2 \\ c_1 = 100 \text{ kN/m}^2 \\ \nu_1 = 0.45 \end{cases}$$



Sol 2:

$$\begin{cases} E_2 = 10^4 \text{ kN/m}^2 \\ c_2 = 10 \text{ kN/m}^2 \\ \nu_2 = 0.3 \end{cases}$$

Figure 6.30: Fondation rigide sur un bicouche d'argile.

Un contrôle de charges est utilisé par l'application des incréments de charges à la surface de la fondation. Un processus, incrémental et itératif, est suivi jusqu'à la rupture avec des incréments du chargement décroissantes.

On note que seul le terme de cohésion, de la capacité portante, est considéré dans ce problème.

Le maillage utilisé contient 30 éléments finis et 11 éléments infinis (Figure 6.30(b)).

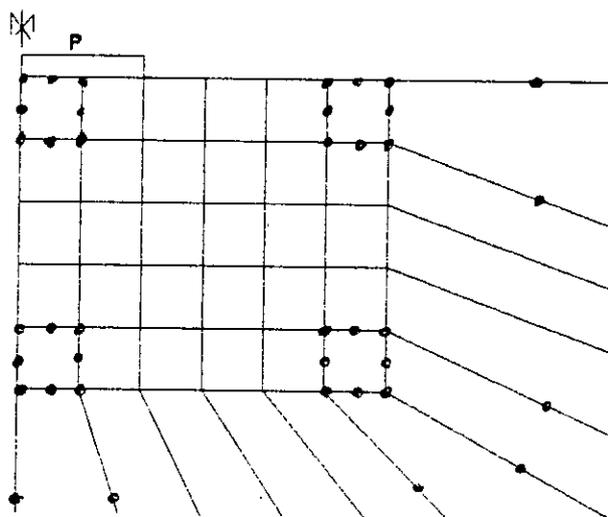
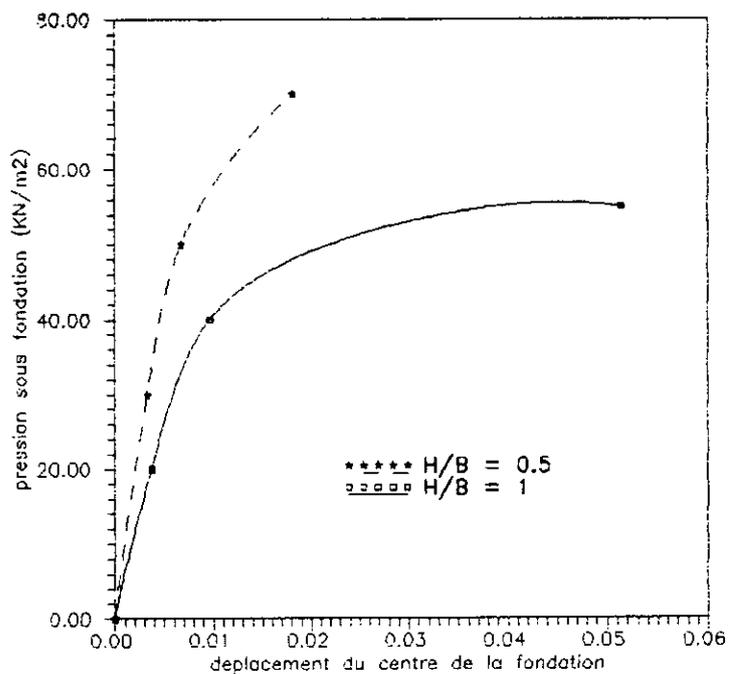


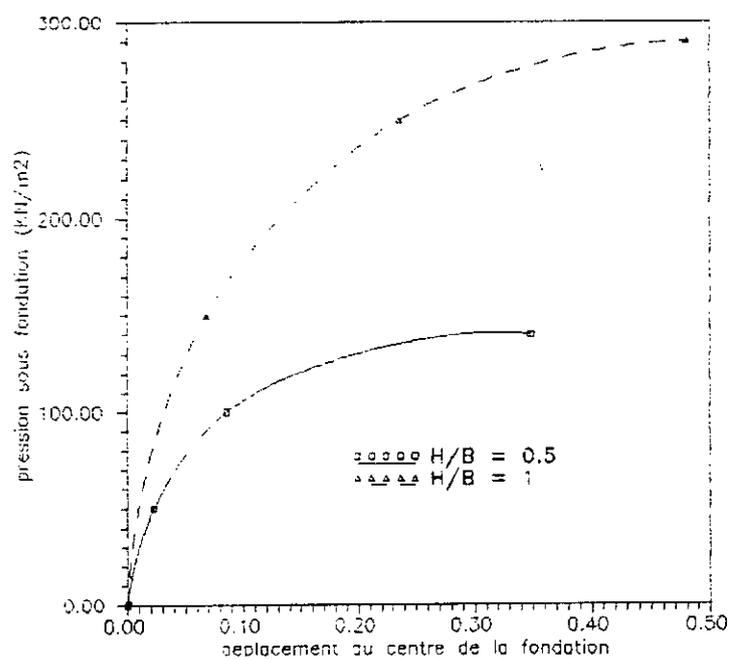
Figure 6.30(b): Maillage éléments finis-éléments infinis.

La figure (6.31) montre la courbe pression sous fondation-tassement du sol pour les deux cas suivants:

- 1) Couche inférieure plus résistante.
- 2) Couche supérieure plus résistante.



(a) Couche inférieure plus résistante.



(b) Couche supérieure plus résistante.

Figure 6.31: Courbe pression sous fondation-tassement du bicouche d'argile.

les résultats indiqués sur la figure (6.31) montrent que lorsque la couche supérieure est plus résistante que la couche inférieure, la charge limite augmente avec l'épaisseur de la première. Lorsque la couche inférieure est plus résistante, la charge limite varié en raison inverse de l'épaisseur de la couche supérieure.

La figure (6.32) donne la variation des déplacements normalisés en fonction de la profondeur pour les deux cas.

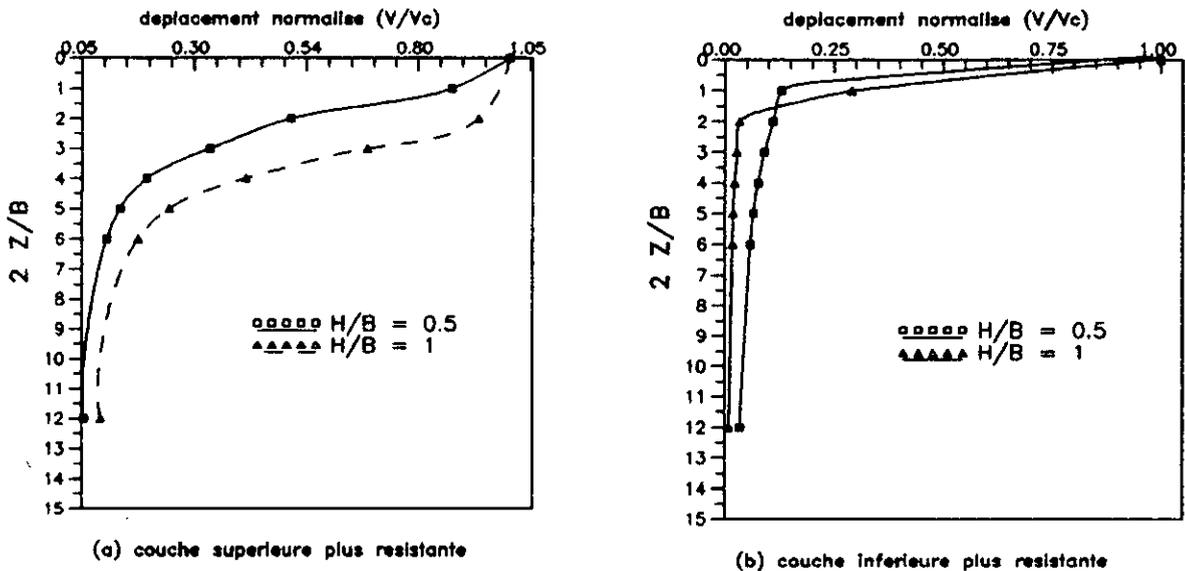


Figure 6.32: Variation des déplacements normalisés en fonction de la profondeur.

Notons que lorsque la couche supérieure est plus résistante, le taux de réduction des tassements avec la profondeur de la couche inférieure est directement proportionnel à l'épaisseur de la première. Mais, lorsque la couche inférieure est plus résistante, le taux de réduction des tassements de cette dernière avec la profondeur est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche supérieure.

## *Chapitre 7*

# **CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS**

# **Chapitre 7**

## **CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS**

### **7.1 CONCLUSIONS**

Nous venons de présenter une modélisation de l'interaction sol-structure qui tient compte en même temps du comportement non linéaire du sol de la fondation, des conditions de liaisons à l'interface sol-structure, de la variation des caractéristiques du sol avec la profondeur et du comportement du sol à l'infini. Ce modèle numérique a été validé par les résultats des exemples que nous venons de traiter.

Le choix de la méthode des éléments finis permet d'aborder des problèmes très généraux sans faire des hypothèses simplificatrices. Elle est susceptible de prendre en compte les comportements non linéaires dû à la loi de comportement du sol ou aux interfaces sol-structures.

Les problèmes liés à l'utilisation des éléments finis pour les domaines non bornés ont été résolu grâce aux éléments infinis, qui modélisent d'une façon très satisfaisante le comportement du sol à l'infini.

Pour être très proche de la réalité l'interface sol-structure a été modélisé par des éléments d'interface des couches fines, qui tiennent en compte les mouvements relatifs existants à l'interface.

L'efficacité du modèle numérique proposé est mise en évidence par le traitement des problèmes d'interaction sol-structures très importants, à savoir la prédiction des charges de ruptures et l'estimation des tassements des fondations rigides et flexibles reposant sur des sols homogènes et hétérogènes.

A travers la présente étude nous avons pu aboutir au conclusions suivantes :

1) Il a été observer que la rapidité de convergence et la précision des résultats peuvent être améliorés par l'introduction des éléments infinis.

2) Les résultats obtenus en utilisant un modèle éléments finis-éléments infinis, sont plus précis et convergent rapidement vers la solution exacte avec un nombre réduit d'éléments comparé à un modèle éléments finis.

3) L'emplacement des éléments infinis doit être choisi de manière à obtenir la précision nécessaire.

4) Pour les problèmes non linéaires, l'emplacement des éléments infinis doit prendre en considération l'étendu prévu des zones de la non linéarité.

5) Le cas d'un comportement élastique des interfaces qui se justifie dans un certain nombre de problèmes, doit être abandonné lorsque le développement des zones plastiques est important au voisinage de l'interface sol-structure.

6) Le modèle proposé permet la prédiction de la rupture d'une manière évidente sur les courbes charges-déflexion.

7) Les coins des fondations représentent des points singuliers, où la direction du champ des déformations n'est pas clairement définie. De tels points singuliers entraînent des changements des conditions aux limites autour des coins des fondations.

8) Pour des grandes valeurs du rapport  $E/c$  d'un sol purement cohésif (argile), la déformation de ce dernier n'a pratiquement pas d'influence sur la réponse charge-déplacement de la fondation.

9) La charge limite augmente quand la rigidité de la fondation diminue. Cette augmentation est associée à un grand tassement avant la rupture.

## 7.2 RECOMMANDATIONS

Nos recommandations pour les travaux futurs sont:

1) Généralisation des éléments infinis utilisés dans le modèle proposé pour les problèmes dynamiques. Cette généralisation peut se faire en utilisant l'une des deux approches suivantes: l'approche de Lysmer et Kuhlemeyer [44] ou l'approche modifiée de White et al [61].

2) L'utilisation d'un autre modèle élastoplastique pour le sol qui reflète mieux son comportement réel. Nous pouvons suggérer à titre d'exemple: le modèle cam clay, le modèle de cap.

3) L'extension du modèle présenté:

- Aux problèmes d'interaction dynamique sol-structure.
- Aux problèmes tridimensionnels.

# ***BIBLIOGRAPHIE***

# **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Aleksandar, S., Vesic, F., "Analysis of ultimate loads of shallow foundations", J. Soil Mech. And Found. Div., ASCE, vol. 99 (Sm1), pp 45-73 (1973).
- [2] Anderson, D.L and Ungless, R.L, "Infinite finite elements", Int. Symp., Innovative Num. Anal. Appl. Eng. Sci. France (1977).
- [3] Argyris, J.H and Kelsey, G. "Energy theorems and structural analysis", Butter Worth (1960) (Collection of papers published in Air craft Eng. in 1954 and 1955).
- [4] Atkinson, J.H, "Foundations and slopes: An Introduction to applications of critical State Soil mechanics", Mc Graw Hill, Maidenhead (1981).
- [5] Bando, K., "New Numerical technique using infinite elements for excavation problems", Kajima corporation IPC, Internal Report (1983).
- [6] Barbas. A., Frank, R., "Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'elastoplasticité", Rapport de recherche N° 116 Laboratoire central des ponts et chaussées (1982).
- [7] Bathe, K.J, "Finite element Procedures in Engineering analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey (1982).
- [8] Beer, G. and Meek, J.L, "Infinite domain elements", Int. J. Num. Meth. Eng. 17(1), pp 43-52 (1981).
- [9] Bescond. B., Bottero, A. et Touzot, G., "Fondations sur sols bicouches table de calcul des tassements", les P.U.Q, Eyrolles (1974).
- [10] Bettess, P., "Infinite elements", Int. J. Num. Meth. Eng. 11, pp 53-64 (1977).

- [11] Bettess, P., "More on infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 15, pp 1613-1626 (1980).
- [12] Bettess, P. and Bettess, J.A, "Infinite elements for dynamic problems", *Eng. Comp.* 8, pp 99-124 (1991).
- [13] Booker, J.R, Balaam, N.P and Davis, E.H, "The behaviour of elastic non-homogeneous halfspace", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 9, pp 353-381 (1985).
- [14] Caperaa, S., "Modélisation des interfaces et des singularités dans les structures par couplage éléments finis et équation intégrales de frontières" thèse de doctorat d'état, université de Limoges, France, (1985).
- [15] Carol, I. and Alonso, E.E., "A new joint element for the analysis of fractured rock", 5th. *Int. Conf. Rock Mech.* Melbourne (Australia), pp 147-151 (1983).
- [16] Carol, I., Gens, A. and Alonso, E.E., "A three dimensional elastoplastic joint element", *Int. Symp.Fundam. of rock joints*, Bjorkliden, pp 441-451, (1985).
- [17] Clough, R.W., "The finite element method in plane stress analysis", *Proc. 2nd. Conf. on electronic computation*, ASCE, New York, pp 345-377 (1960).
- [18] Curnier, A., "A static infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 19, 1479-1488 (1983).
- [19] Gerrad, C.M., "Background to mathematical modelling in geomechanics: The roles of fabric and stress history" Chap.2 in Gudehus, G.(Ed), *Finite Elements in Geomechanics*, Wiley, Chichester (1977).
- [20] Desai, C.S., and E.C Drumm, "Determination of parameters of a model for the cyclic behaviour of interfaces", *Earth. Eng. Struct. Dyn.* Vol. (4), 1-18 (1986).

- [21] Desai, C.S., E.C Drumm and M.M Zaman, "Cyclic testing and modelling of interfaces", J. geotech. Eng. Div. ASCE 110, 793-815 (1985).
- [22] Desai, C.S., M.M Zaman and E.C Drumm, "An interface model for dynamic soil-structure interaction", J. geotech. Eng. Div., ASCE, 110, 1257-1273 (1984).
- [23] Desai, C.S., M.M Zaman, J.G Lighter, and H.J Siriwardane, "Thin layer element for interfaces and joints", Int. J. numer. analy. methods in geomech. 8, 19,-43 (1984).
- [24] Dhatt, G. et Touzot, G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", 2ème édition, Maloine S.A. Editeur Paris (1984).
- [25] Donida, G. and R. Bernetti, "Finite element approximation of dynamic problems for semi-infinite solids in elasticity", comp. Struct. Vol. 41. N° 4, pp 835-842, (1991).
- [26] Donida, G. R. Brushi and R. Bernetti, "Infinite elements in problems of geomechanics", comp. Struct. Vol. 29, N° 1, pp 63-67, (1988).
- [27] Gens, A., I. Carol and E. E. Alonso, "An interface element formulation for the analysis of soil - reinforcement interaction", computers and geotechnics, 7, pp 133-151, (1988).
- [28] Gens, A., I. Carol and E. E. Alonso, "Elasto-plastic model for joints and interfaces", 2nd Int. conf. on computational Plasticity, Barcelona, 2, pp 1251-1264 (1989).
- [29] Gens, A., I. Carol and E. E Alonso. "A constitutive model for rock joints formulation and numerical implementation", Computers Geotechnics, 9, pp 3-20, (1990).

- [30] Ghaboussi, J., E. L. Wilson, and J. Iseberg, "'Finite element for rock joints and interfaces", J. Soil mech. and Found. Div. ASCE, 99, (SM10) (1973).
- [31] Goodman, R. E., R. L. Taylor and T. L. Brekke, "A model for the mechanics of jointed rock", J. soil Mech. and Found. Div. ASCE, 94, (SM3), (1968).
- [32] Herrman, L. R., "Finite element analysis of contact problems", J. Eng. Mech. Div., ASCE, 104, (EM5), 1043-1057 (1978).
- [33] Hungr, O., Coates, D. F., "Deformability of joints and its relation to rock foundation settlements", Canadian Geotechnical journal, 15, 239-249 (1978).
- [34] Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method", J.A.I.A.A.. vol. 14, pp 2035-2037 (1966).
- [35] Katoma, M. G., "A simple contact - friction interface element with applications to buried culvert", Proc., symp. on Impl. of Computer Procedures and stress - strain laws in Geotech. eng. Chicago, Illinois, vol. 1, 45-63 (1981).
- [36] Kumar, P., "Static infinite element formulation", J. struct. Eng. 111, 2355-2372 (1985).
- [37] Kumar, P., "Analusis of flexible pavements using finite and infinite elements", Austr. Road Res., 16, 18-24 (1986).
- [38] Kumar, P., "Numerical modelling criterion for the analysis of underground openings using infinite elements", App. Math. modelling, 10, 357-366 (1986).
- [39] Kumar, P., "Stress concentration due to under ground excavation in cross-anistropic and non-homogeneous elastic half space", Comp. Struct., 25, 687-694 (1987).

- [40] Kumar, P., "Non-homogeneous and cross anisotropic infinite elements", *Comp. Struct.* 28, 327-333 (1988).
- [41] Leshchinsky, D., and G. F. Marcozzi, "Bearing capacity of shallow Foundations: Rigid versus flexible Models", *J. Geot. Eng.*, Vol. 116, N°11, pp 1750-1756 (1990).
- [42] Lourdjane, S., "Analyse non-lineaire des dalles en béton armé par la méthode des éléments finis multicouches", thèse de Magistère, Ecole nationale polytechnique, ALGER, ALGERIE (1994).
- [43] Lynn, P. P. and Hadid, H. A. "Infinite elements with  $1/r^k$  type decay", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17, (3), pp 347-355 (1981).
- [44] Lysmer, J. and Kuhlemeyer, "Finite dynamic model for infinite media", *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 95, pp 859-877 (1969).
- [45] Marques, J.M.M.C et Owen, D. R. L., "Infinite elements in quasi-static materially non linear problems", *Comp. Struct.*, 18, pp 739-751 (1984).
- [46] Marques, J. M. M. C et Owen, D. R. L., "Implicit-explicit time integration in quasistatic elastoviscoplasticity using finite and infinite elements", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 42, pp 167-182 (1984).
- [47] Medina, F., "An Axisymmetric infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17, pp 1177-1185 (1981).
- [48] Medina. F. and R. L. Taylor, "Finite element technique for Problems of unbounded domains", *Int. J. Num. meth. Eng.*, 19, 1209-1226 (1983).
- [49] Pande G. N., Sharma, K. G., "on joint interface elements and associated problems of numerical ill-conditioning", *Int. J. Num. Analy. Meth. in geomech.*, Vol. 3, 293-300, (1979).
- [50] Pecker, A., "Dynamique des sols", press de l'ENPC Paris (1984)

- [51] Pissanetzky, S., "An infinite element and formula for numerical quadrature over an infinite interval", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19, 913-928 (1983).
- [52] Rajapalske, R. K. N. D. and Karasudhi, P., "Elastostatic infinite elements for layered half spaces", *J. Eng. Meth.* 111, 1144-1158 (1985).
- [53] Ricard, A., "Etude des massifs à comportement non-linéaire Application aux problèmes de génie civil", *Rapport de Recherche N°44*, Laboratoire des Ponts et chaussées (1975).
- [54] Schrefler, B. A., and Simoni, L., "Non-isothermal consolidation of unbounded porous media using mapped infinite elements", *Comm. Appl. Num. Meth.*, 3, 445-452 (1987).
- [55] Selvadurai, A. P. S., and Gopal. K. R. "Consolidation analysis of the screw plate test", *Pro. 39th canadian Geotech. Conference*, Ottawa, Canada, 167-178 (1986).
- [56] Simoni, L., and schrefler, B. A. "Mapped infinite elements in soil consolidation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 24, 513-527 (1987).
- [57] Smith, I. M. and Griffiths, D. V.. "Programming the finite element method", John Wiley, Chichester (1992).
- [58] Taig, I. G., "Structural analysis by matrix displacement method", *Eng. elastic Aviation Report N°S017*, (1961).
- [59] Timoshenko, S. and Goodier, J. N., "theory of elasticity", McGraw-Hill Book CO., New york, N. Y. (1970).
- [60] Turner, M. J., Clough, R. W., Marlin, H. C. and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex Structures", *J. Aero. sci*, Vol. 23, pp 805-823 (1956).

- [61] White, W., Valliappan, S. and Lee, I. K., "unified boundary for finite dynamic models", J. Eng. Mech. Div., ASCE 103, pp 949-964 (1977).
- [62] Zhang, C., Song, C., Wong, G. and Jim, F., "3-D infinite Boundary elements simulation of monolithic dam foundation", Commun. Appl. Num. Meth., 5, pp 389-400 (1989).
- [63] Zienkiewicz, O. C. and al. "Analysis of non linear problems with particular reference to jointed rock systems", Proc. 2nd Int. Conf. Society of rock Mech., Belgrade, Vol. 3, pp 501-509 (1970).
- [64] Zienkiewicz, O. C. and Bettess, P. "Infinite elements in the study of fluid structure interaction problems", Proc. 2nd Int. Symp. on Comp. methods Appl. Sci. Versailles (1975).
- [65] Zienkiewicz, O. C. Bettess, P., Chian, T. C. and Emson, C. "Numerical methods for unbounded field problems and a new infinite element formulation" Computational fluid Dynamics, Hermosa, Albuquerque pp 115-148 (1981).
- [66] Zienkiewicz, O. C., Emson, C. and Bettess, P. "A novel Boundary infinite element", Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 393-404 (1983).
- [67] Zienkiewicz, O.C, Kelly, D.W and Bettess, P. "The coupling of the finite element and boundary solution procedures", Int., J., Num. Meth. Eng., 11, pp 355-375 ,(1977).
- [68] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The finite element Method", 4th Edn, Mc Graw. Hill, Maidenhead (1989).