



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Electrique
Laboratoire de Commande des processus



Thèse de Doctorat en Sciences

Option : Automatique

Présentée par :

Rachedi Meryam

Magister en Electronique de l'ENP

Modélisation et Commande Robuste de Robots Parallèles: Application au Robot Delta

Membres du jury

Président :	Mohamed Seghir Boucherit	Professeur à l'ENP
Directeurs de thèse :	Boualem HEMICI	MCA à l'ENP
	Mohamed Bouri	Dr à l'EPFL (Lausanne, Suisse)
Examineurs :	Mohamed Tadjine	Professeur à l'ENP
	Redouane Toumi	Professeur à l'USTHB
	Noureddine Bali	Professeur à l'USTHB
	Abdelouaheb Hassam	MCA à l'Université de Sétif

ENP 2016

ملخص

إن الهدف الذي ترمي إليه هذه الأطروحة هو اقتراح قانون تحكم قوي من أجل تحسين أداء آلي مواز سريع و دقيق. فتم تطوير تطبيق على الآلي دلتا المحرك مباشرة لدى 3 درجات من الحرية. التحكم H_{∞} المقترح، صمم عن طريق نهج الحساسية المختلطة، حيث يأخذ بعين الاعتبار كل من مصفوفات الحساسية S و الحساسية المتكاملة T . يتطلب تنفيذ هذا التحكم ثلاث خطوات : في البداية، تطوير نموذج ديناميكي معاكس يعتمد فقط على المتغيرات المفصلية للآلي، ثم إنشاء الخطية المماسية للنموذج حول نقطة تشغيل ذات موقع جيد في مساحة العمل للآلي، وفي الأخير، تصميم التحكم القوي على أساس النموذج الخطي وبإختيار مناسب لمصفوفات الترجيح. هذا التحكم سوف يقارن إلى تحكمات كلاسيكية أخرى مستخدمة في علم الآلة وكذلك مع التحكم الكلاسيكي المثالي الخطي الرباعي الغوسي (LQG أو H_2). سوف نعتبر مخططين للتحكم: مع وبدون دمج النموذج الديناميكي المعاكس للآلي (عزم الدوران البيهيهي). أختبرت مسارات معقدة للإلتقاط والوضع بديناميكيات مختلفة. ولقد عرضت نتائج المحاكاة والتجريبية.

كلمات البحث : الأليات الموازية، التحكم القوي، الخطية المماسية.

Abstract

The aim of this work is to propose a linear robust control law, to improve the performances of a fast and accurate parallel robot. An application is performed on the 3DOF direct drive parallel Delta robot. The proposed H_{∞} controller is designed by the mixed sensitivity approach in which the sensitivity function matrix S and the complementary sensitivity function matrix T are taken into account. Its implementation requires three important steps; first, the development of an inverse dynamic model depending only on the joint parameters of the robot, then, a tangential linearization of this model around an operating point well located in the workspace of the robot, and finally the design of robust controller based on the linear model and a suitable choice of frequency weighting matrices. This controller is compared to other decentralized controllers conventionally used in robotics and to the classical optimal Linear Quadratic Gaussian controller (LQG or H_2). Two control schemes are considered; with and without the incorporation the inverse dynamic model of the robot (a priori torque). Complex trajectories of pick and place are tested with different dynamics. Simulation and experimental results are illustrated.

Keywords: Parallel robots, Robust control, tangential linearization

Résumé

Le but de ce travail est de proposer une loi de commande robuste linéaire, en vue d'améliorer les performances d'un robot parallèle rapide et précis. Une application est développée sur le robot Delta à actionnement direct à 3ddl. Le contrôleur H_{∞} proposé est synthétisé par l'approche de sensibilité mixte où les matrices de sensibilité S et de sensibilité complémentaires T sont prises en compte. Sa mise en œuvre exige trois étapes importantes; d'abord, le développement d'un modèle dynamique inverse dépendant uniquement des paramètres articulaires du robot, ensuite, une linéarisation tangentielle de ce modèle autour d'un point de fonctionnement bien situé dans l'espace de travail du robot, et enfin la synthèse du contrôleur robuste sur la base de ce modèle linéaire et par un choix convenable des matrices de pondérations. Ce contrôleur est comparé à d'autres commandes décentralisées classiquement utilisées en robotique et à la commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG ou H_2). Deux schémas de commandes sont envisagés; avec et sans l'incorporation du modèle dynamique inverse du robot (couple a priori). Des trajectoires complexes de prise et dépose sont testées à différentes dynamiques. Des résultats de simulation et expérimentaux sont présentés.

Mots clés: Robots parallèles, commande robuste, linéarisation tangentielle.

A mes chers parents

A mon cher mari Zineddine

A mes très chers enfants Rafik et Sofia

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire de Commande des Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (ENP) et au Laboratoire des systèmes Robotiques (LSRO) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Je remercie Monsieur Boualem Hemici, Maître de Conférences à l'ENP et directeur de ma thèse, pour son aide, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis la réalisation de ce travail. Je témoigne toute ma gratitude à Docteur Mohamed Bouri, Chef de groupe au laboratoire LSRO de l'EPFL, également directeur de ma thèse, pour son soutien constant, sa disponibilité et sa contribution scientifique durant toutes ces années et aussi pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire (LSRO) et mis à ma disposition les moyens nécessaires pour le bon accomplissement de ce travail.

Je remercie mon organisme employeur, l'Université des Sciences et de Technologie Houari Boumediene (USTHB) et plus particulièrement la Faculté d'Electronique et Informatique (FEI) d'avoir financé mes stages et conférences, sans cette aide financière, ce travail n'aurait jamais abouti.

Je remercie Monsieur Mohamed Seghir Boucherit, Professeur à l'ENP d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance. J'exprime ma vive reconnaissance à Messieurs Mohamed Tadjine, Professeur à l'ENP, Redouane Toumi, Professeur à l'USTHB, Noureddine Bali, Professeur à l'USTHB et Abdelouaheb Hassam, Maître de Conférences à l'université de Sétif d'avoir accepté d'être examinateurs de ce travail.

Mes profonds remerciements s'adressent à ma famille, d'abord à mes chers parents qui n'ont jamais cessé de m'encourager et de me soutenir et enfin à mon mari et mes enfants Rafik et Sofia qui grâce à leurs sacrifices et leurs patiences ce travail a pu voir le jour.

Table des matières

Remerciements.....	iii
Table des matières.....	iv
Notations et Symboles.....	vii
Liste des figures.....	ix
Liste des tableaux.....	xii
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Etat de l'art	
1.1 Généralités sur les robots parallèles.....	7
1.1.1 Définition.....	7
1.1.2 Historique.....	7
1.1.3 Avantages et inconvénients des robots parallèles.....	14
1.2 Modélisation dynamique des robots parallèles.....	14
1.3 Commande des robots parallèles.....	15
1.3.1 Commandes classiques PD ou PID.....	16
1.3.2 Commandes basées sur le modèle dynamique du robot.....	16
1.3.3 Commandes adaptatives.....	17
1.3.4 Commandes robustes H_∞	18
1.3.5 Autres méthodes de commande.....	18
1.4 Conclusion.....	18
Chapitre 2 : Modélisation et linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta	
2.1 Introduction.....	20

2.2	Description du robot Delta à entraînement direct.....	20
2.3	Modèle dynamique du robot Delta à entraînement direct.....	22
2.3.1	Introduction.....	22
2.3.2	Méthode de Newton – Euler.....	23
2.3.3	Modélisation dynamique.....	23
2.4	Modèle dynamique inverse dépendant des variables articulaires.....	31
2.5	Linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta.....	32
2.5.1	Détermination du modèle dynamique forme espace d'état.....	32
2.5.2	Linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement.....	33
2.6	Analyse dynamique des modèles linéaires tangents et validation.....	35
2.6.1	Introduction.....	35
2.6.2	Définition du nombre de conditionnement.....	35
2.6.3	Analyse dynamique des modèles linéaires tangents.....	36
2.6.4	Interprétations.....	38
2.6.5	Modèle linéaire du robot Delta.....	39
2.6.6	Validation du modèle linéaire.....	40
2.7	Conclusion.....	41

Chapitre 3 : Concepts de base de la commande robuste H_∞

3.1	Etat de l'art.....	44
3.1.1	Introduction.....	44
3.1.2	Le problème de commande optimal H_∞ et H_2 « Standard ».....	44
3.1.3	Résolution du problème de commande H_∞ standard.....	46
3.2	Notions élémentaires sur la robustesse.....	46
3.2.1	Introduction.....	46
3.2.2	Incertitudes d'un système.....	47
3.2.3	Stabilités d'un système.....	48
3.3	Etude de la robustesse et des performances d'un système asservi.....	51
3.3.1	Robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées.....	52
3.3.2	Performances.....	53
3.3.3	Bilan obtenu et « Loop shaping ».....	54
3.3.4	Synthèse H_∞ par sensibilité mixte.....	56
3.4	Problème de sensibilité mixte de Kwakernaak.....	56
3.4.1	Principe.....	56
3.4.2	Augmentation du procédé.....	57
3.5	Résolution du problème H_∞ standard par l'algorithme de « Glover-Doyle ».....	58
3.6	Résolution du problème standard par la commande H_2 (LQG).....	60
3.7	Conclusion.....	61

Chapitre 4 : Commande robuste du robot Delta

4.1	Introduction.....	63
4.2	Synthèse d'une commande PID.....	63
4.3	Synthèse d'une commande PD avec incorporation du MDI du robot (couple a priori Γ_a).....	64
4.4	Synthèse d'une commande par découplage non linéaire (Commande dynamique).....	66
4.5	Synthèse des contrôleurs linéaires centralisés: commande robuste H_∞ et commande H_2	67
4.5.1	Contrôleur robuste H_∞	67
4.5.2	Synthèse du contrôleur centralisé H_2	70
4.6	Implémentation des lois de commande et simulation.....	70

Table des matières

4.6.1 Introduction.....	70
4.6.2 Comparaison des performances des contrôleurs utilisés sans le couple a priori.....	71
4.6.3 Comparaison des performances des contrôleurs utilisés avec l'a priori du couple.....	78
4.7 Conclusion.....	87
Chapitre 5 : Implémentation expérimentale du contrôleur H_∞ sur le robot Delta	
5.1 Introduction.....	90
5.2 Expérimentation en temps réel pour la détermination du contrôleur H_∞ avec les meilleures performances.....	90
5.3 Evaluation des performances du contrôleur en augmentant la dynamique du mouvement.....	94
5.4 Les limites de performance du contrôleur.....	97
5.5 Tests de Robustesse.....	104
5.6 Conclusion.....	107
Conclusion générale.....	108
Publications réalisées dans le cadre de cette thèse.....	111
Références bibliographiques.....	112
Annexe A : Modèles géométriques direct et inverse du robot Delta.....	119
Annexe B : Valeurs singulières, norme H_∞ et norme H_2.....	123
Annexe C : Résolution du problème H_∞ standard.....	125

Notations et symboles

\mathbf{A}	: Matrice (nxn) d'inertie du robot.
\mathbf{A}^T	: transposé de la matrice \mathbf{A} .
\mathbf{A}^*	: transposé conjugué de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^{-1}	: inverse de \mathbf{A} .
$\ \mathbf{A}\ _\infty$: norme H_∞ de \mathbf{A} .
$\ \mathbf{A}\ _2$: norme H_2 de \mathbf{A} .
BIBO	: entrée bornée, sortie bornée.
\mathcal{C}	: ensemble des nombres complexes.
CD	: Commande Dynamique.
ddl.	: degrés de liberté.
MDD	: Modèle dynamique direct.
MGD	: Modèle géométrique direct.
MGI	: Modèle géométrique inverse.
MDI	: Modèle dynamique inverse.
MIMO	: système à entrée et sortie multiples.
m	: dimension de l'espace opérationnel ($m \leq 6$ et $m \leq n$).
n	: nombre de degré de liberté du robot qui représente également la dimension de l'espace articulaire.
PID	: Proportionnel, Intégral, Dérivé.
PD	: Proportionnel, Dérivé.
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$: vecteurs (n) des positions, vitesses et accélérations généralisées dans l'espace articulaire.
\mathcal{R}	: ensemble des nombres réels.
RP	: Robots parallèles.
\mathbf{S}	: matrice de sensibilité.

\mathbf{T}	: matrice de sensibilité complémentaire.
sup	: valeur supérieure.
$\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}$: vecteurs (dimensions $m=n$) des positions, vitesses et accélérations généralisées (translations) dans l'espace opérationnel pour le cas du robot Delta.
$\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$: coordonnées articulaires en rotation (cas du robot Delta).
Γ	: vecteur (n) des forces généralisées (couple) dans l'espace Articulaire
Γ_a	: couple a priori
$\lambda(\mathbf{A})$: valeurs propres de \mathbf{A} .
$\rho(\mathbf{A})$: rayon spectral de \mathbf{A} .
$\sigma(\mathbf{A})$: vecteur des valeurs singulières de \mathbf{A} .
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$: la plus grande valeur singulière de \mathbf{A} .
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$: la plus petite valeur singulière de \mathbf{A} .
$\sigma_i(\mathbf{A})$: la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de \mathbf{A} .
$\gamma(\mathbf{G})$: le nombre de conditionnement d'un procédé linéaire \mathbf{G} .

Liste des figures

Figure A	: Le robot Delta à actionnement direct.....	3
Figure 1.1	: Architectures de robots [Kha].....	7
Figure 1.2	: Un des premiers robots parallèles, inventé en 1928 [Gwi].....	8
Figure 1.3	: Un robot parallèle à cinq barres inventé en 1934[Pol].....	8
Figure 1.4	: Plate forme de Gough [Mer4].....	9
Figure 1.5	: Plate forme de Stewart [Jin].....	9
Figure 1.6	: Les applications de la plateforme de Stewart par Hexcel Corporation (a) série R (b) série P [Jin].....	10
Figure 1.7	: Le premier robot Delta développé à base d'engrenage [Cla3].....	10
Figure 1.8	: Schéma du robot Delta [Cla3].....	11
Figure 1.9	: Schéma du robot Delta à 3ddl à entraînement direct	11
Figure 1.10	: FlexPicker de chez ABB (version industrielle du robot Delta) [Cor].....	12
Figure 1.11	: Le Delta linéaire.....	12
Figure 1.12	: Les robots parallèles développés par LIRMM : (a): Le H4; (b): Le I4L; (c): Le I4R; (d): Le Par4.....	13
Figure 1.13	: Les robots Adept Quattro pour la prise et dépose des chocolats (Adept) [Bri].....	13
Figure 1.14	: Le SurgiScope, un robot Delta portant un microscope de 70 Kg (Isis France) [Bri].....	14
Figure 2.1	: Le robot Delta.....	21
Figure 2.2	: Espace de travail du robot Delta.....	22
Figure 2.3	: Vue du dessus de la base du Delta.....	24
Figure 2-4	: Paramètres géométriques du robot Delta [Cod2].....	25
Figure 2-5	: Chaîne cinématique dans le repère R_i	26
Figure 2.6	: Isolation d'un avant-bras.....	27
Figure 2.7	: Isolation de la nacelle.....	28
Figure 2.8	: Isolation d'un des trois bras du robot Delta.....	29
Figure 2.9	: Une section de l'espace de travail du robot.....	36
Figure 2.10	: Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points:	

M_h, M_m et M_b	37
Figure 2.11 : Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points: P_h, P_m et P_b	37
Figure 2.12 : Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points: D_h, D_m et D_b	37
Figure 2.13 : Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points: E_h, E_m et E_b	38
Figure 2.14 : Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points: F_h, F_m et F_b	38
Figure 2.15 : Validation du modèle linéaire.....	41
Figure 2.16 : Evolutions temporelles des positions articulaires du modèle linéaire et du robot (Axes : 1,2 et 3).....	41
Figure 3.1 : Modèle standard.....	45
Figure 3.2 : Modèle standard avec perturbation Δ	46
Figure 3.3 : Le principal modèle de perturbation.....	47
Figure 3.4 : Les différentes présentations des incertitudes d'un système bouclé.....	48
Figure 3.5 : Système MIMO avec entrée-sortie.....	48
Figure 3.6a : Boucle de Contre réaction.....	49
Figure 3.6b : Boucle de contre réaction avec l'ajout d'une entrée et d'une sortie interne.....	49
Figure 3.7 : Le principal modèle de perturbation avec rajout des entrées-sorties	49
Figure 3.8 : Le principal modèle de perturbation avec contrôleur K (Problème Standard).....	51
Figure 3.9 : Schéma de régulation.....	51
Figure 3.10 : Schéma de régulation avec erreur de modèle en sortie.....	52
Figure 3.11 : Schéma standard.....	53
Figure 3.12 : Loop shaping multivariable.....	55
Figure 3.13 : Bloc de diagramme d'un système de commande multi-variable.....	56
Figure 3.14 : Problème pondéré de sensibilité et de sensibilité complémentaire.....	58
Figure 3.15 : Problème standard.....	58
Figure 4.1 : Contrôleur PID.....	64
Figure 4.2 : Commande PD avec couple a priori.....	64
Figure 4.3 : Commande dynamique pour un mouvement complètement spécifié... ..	67
Figure 4.4 : Schéma de commande H_∞ centralisée.....	69
Figure 4.5 : Schéma de commande H_∞ avec couple à priori Γ_a	70
Figure 4.6 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Temps de parcours=0.5s).....	72
Figure 4.7 : Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Temps de parcours =0.5s).....	72
Figure 4.8 : Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Temps de parcours=0.5s).....	73
Figure 4.9 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Temps de parcours=0.28s).....	73
Figure 4.10 : Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Temps de parcours=0.28s).....	73
Figure 4.11 : Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Temps de parcours=0.28s).....	74
Figure 4.12 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s).....	75

Liste des figures

Figure 4.13 : Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s).....	75
Figure 4.14 : Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Acc. =5G, vitesse = 0.65m/s).....	76
Figure 4.15: Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1 m/s).....	76
Figure 4.16: Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1m/s).....	76
Figure 4.17 : Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Acc. =12G, vitesse = 1m/s).....	77
Figure 4.18 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s).....	80
Figure 4.19: Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s).....	80
Figure 4.20: Entrées de commande (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H_∞ avec CA. (Acc. =5G, vitesse = 0.65m/s).....	81
Figure 4.21 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1m/s).....	81
Figure 4.22 : Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1m/s).....	82
Figure 4.23 : Entrées de commande (a):Commande Dynamique; (b) Commande PD avec CA; (c): Commande H_∞ avec CA (Acc. =12G, vitesse = 1m/s).....	82
Figure 4.24 : Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s).....	83
Figure 4.25 : Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s).....	83
Figure 4.26 : Entrées de commande (a): Commande Dynamique ; (b) : Commande PD avec CA; (c): Commande H_∞ avec CA (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s.....	84
Figure 4.27 : Erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 100g (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s).....	85
Figure 4.28 : Entrées de commande en présence d'une perturbation paramétrique de 100g. (a): Commande Dynamique ; (b) Commande PD avec CA; (c) Commande H_∞ avec CA. (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s).....	85
Figure 4.29 : Erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 200g (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s).....	86
Figure 4.30 : Entrées de commande en présence d'une perturbation paramétrique de 200g (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H_∞ avec CA. (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s).....	86
Figure 5.1 : Trajectoire désirée expérimentale, (a): Espace cartésien, (b): Espace articulaire.....	91
Figure 5.2 : Tracé des valeurs singulières de S et T pour le contrôleur H_∞ , (a): B = 110 rad/s, (b): B = 208 rad/s, (c) : B=390 rad/s.	92
Figure 5.3 : Trajectoires de poursuite expérimentales obtenues par les contrôleurs H_∞ , synthétisés en élargissant la bande passante (Acc =5G).....	93
Figure 5.4 : Erreurs de poursuite expérimentales obtenues par les contrôleurs H_∞ , Synthétisés en élargissant la bande passante (Acc. =5G).....	93
Figure 5.5 : Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 1G.....	94

Liste des figures

Figure 5.6 : Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 5.....	95
Figure 5.7 : Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 12G.....	96
Figure 5.8 : Suivi de trajectoire de la position initiale à la position finale pour la pire articulation (articulation 1); (a): Acc. =1G ; (b): Acc.=5G; (c): Acc.=12G.....	97
Figure 5.9 : Trajectoires expérimentales désirées de 10 G distantes du point M.....	98
Figure 5.10: Vue de dessus des points du test dans l'espace de travail.....	98
Figure 5.11: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point de fonctionnement M ($x=y= 0$; $z = -395.5\text{mm}$).....	99
Figure 5.12: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₁ ($x= - 125 \text{ mm}$, $y = 0$, $z = -395.5 \text{ mm}$).....	99
Figure 5.13: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₂ ($x= - 150 \text{ mm}$, $y=0$, $z = - 395.5 \text{ mm}$).....	100
Figure 5.14: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₃ ($x= 125 \text{ mm}$, $y=0$, $z = -395.5 \text{ mm}$).....	100
Figure 5.15: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₄ ($x= 150 \text{ mm}$, $y=0$, $z = -395.5 \text{ mm}$).....	101
Figure 5.16: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₅ ($x = 0 \text{ mm}$, $y = -125\text{mm}$, $z = -395.5 \text{ mm}$).....	101
Figure 5.17: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₆ ($x = 0 \text{ mm}$, $y = -150 \text{ mm}$, $z = - 395.5 \text{ mm}$).....	102
Figure 5.18: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₇ ($x = 0 \text{ mm}$, $y = 125 \text{ mm}$, $z = - 395.5 \text{ mm}$).....	102
Figure 5.19: Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P ₈ ($x = 0 \text{ mm}$, $y = 150 \text{ mm}$, $z = - 395.5 \text{ mm}$).....	103
Figure 5.20: La nacelle du robot Delta avec une masse additionnelle de 150g.....	104
Figure 5.21: Erreurs de poursuite expérimentales en présence d'une perturbation paramétrique (Accélération 12Ge).....	105
Figure 5.22: Couples de commandes expérimentaux en présence d'une perturbation paramétrique pour une accélération de 12G; (a): contrôleur H_{∞} ; (b): Contrôleur PID.	106
Figure 5.23: Erreurs expérimentales du régime permanent en présence d'une perturbation paramétrique (a) Contrôleur H_{∞} ; (b) Contrôleur PID.....	106
Figure 5.24: Couples de commande expérimentaux en présence d'une perturbation paramétrique; (a): contrôleur H_{∞} ; (b): contrôleur PID.....	106

Liste des tableaux

Tableau 2.1: Les paramètres du robot.....	21
Tableau 2.2: Caractéristiques dynamiques des modèles linéaires tangents.....	39
Tableau 4.1: Comparaison des performances des commandes H_∞ , H_2 et PID sans l'a priori du couple.....	78
Tableau 4.2: Comparaison des performances des commandes CD, H_∞ et PD avec couple a priori.....	85
Tableau 4.3: Comparaison des performances des commandes CD, H_∞ et PD avec couple a priori et masses additionnelles.....	87
Tableau 5.1: Les caractéristiques des trois contrôleurs synthétisés.....	92
Tableau 5.2: Comparaison des performances des contrôleurs H_∞ et PID pour différentes accélérations (Articulation 1).....	97
Tableau 5.3: Comparaison des performances des contrôleurs H_∞ et PID pour différentes trajectoires verticales de 10G distantes du point M.....	103
Tableau 5.4: Comparaison des performances des contrôleurs H_∞ et PID en présence d'une perturbation paramétrique.....	105

Introduction générale

Généralités

Depuis le début des années 1990, les robots parallèles ont été largement utilisés dans l'industrie et plus particulièrement en industrie agro-alimentaire pour l'emballage. La rigidité mécanique élevée de ces structures a également intéressé les fabricants de machines-outils. Plusieurs travaux de recherche et applications ont été développés dans ce domaine au cours des deux dernières décennies. En effet, ces robots combinent une grande rigidité, vitesse et précision par rapport aux robots anthropomorphes sériels.

Le robot Delta est considéré dans ce travail. A cause de sa simplicité, il est l'un des plus importants robots parallèles industrialisés. Jusqu'à ce jour, plus de 6000 robots Delta sont commercialisés autour du monde par différentes compagnies bien établies (Bosch Packaging Technology Switzerland, ABB, Fanuc, Force dimension, Asyrl, CIPOSA...).

Ce concept a été développé par Reymond Clavel de l'EPFL (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) en 1985 [Cla1] pour une application industrielle de prise et dépose (pick and place) à dynamique très élevée. Il réussit à développer le premier robot parallèle Delta à quatre degrés de liberté. L'élimination des engrenages entre les actionneurs et les bras a permis d'engendrer le robot Delta à actionnement direct [Cod1]. Il est moins bruyant, plus rigide et sa structure contient moins de composants.

La commande des structures à entraînement direct est plus complexe, car l'élimination de l'étage de réduction rend les actionneurs directement sensibles aux variations de l'inertie de la structure et le couplage entre les axes.

La plupart des contrôleurs industriels utilisent uniquement les contrôleurs PID décentralisés avec des gains constants, estimant que le modèle dynamique du robot est linéaire et découplé. Le dimensionnement de ces gains de régulation est réalisé par expérimentation. Ces méthodes offrent la facilité de mise en œuvre et la réduction des coûts.

D'un autre côté, en utilisant de simples contrôleurs mono-axes (contrôleurs décentralisés), les performances de poursuite sont limitées, en particulier pour les fortes accélérations ou quand il ya un changement dans la charge transportée (correspondant à une perturbation paramétrique). Dans ce cas, des contrôleurs plus avancés sont nécessaires.

La commande robuste H_∞ linéaire est devenue, dans la dernière décennie, une méthode très efficace pour contrôler les processus non linéaires où la robustesse et les performances sont exigées en même temps. Contrairement à la commande classique Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG ou H_2), cette technique ne considère pas uniquement les perturbations additives, mais elle considère que le système peut lui-même être soumis à des incertitudes, ce qui lui a permis de traiter aussi bien les systèmes non linéaires ou des systèmes linéaires soumis à des incertitudes non linéaires.

Dans différents travaux précédents [Sag1] [Sag2] [Axe], des robots industriels sériels ont été considérés, les modèles dynamiques non linéaires de ces robots sont linéarisés et les contrôleurs sont conçus sur la base de ces modèles linéaires. Les non-linéarités négligées sont considérées comme des incertitudes non structurées ou des perturbations. Les contrôleurs H_∞ synthétisés par l'approche de sensibilité mixte ou par la méthode de «Loop Shaping» [Zho1][Zho2] ont abouti à des performances très satisfaisantes par rapports aux contrôleurs conventionnels classiques (PID ou PD).

Dans la littérature, peu de travaux ont envisagé ces techniques de contrôle avancées pour commander les robots parallèles. Dans [Dou1], une méthode d'identification linéaire a été proposée pour déterminer un modèle linéaire pour stabiliser une plate forme à 2 ddl. Un contrôleur H_∞ par la méthode de «loop shaping» est synthétisé sur la base de ce modèle linéaire. Il a été montré par expérimentation et simulations que les performances et la robustesse du contrôleur sont satisfaisantes.

Objectifs de la thèse

S'inscrivant dans cette recherche globale sur l'amélioration constante de la précision et de l'exploitation au mieux la dynamique des robots parallèles, notre travail porte sur la modélisation dynamique et la commande de ces structures parallèles. Ainsi le but de ce travail est de proposer quelques contributions pour la commande et l'amélioration des performances des robots parallèles.

Une application est développée sur le robot Delta à actionnement direct à 3ddl du Laboratoire de systèmes robotiques (LSRO) à l'EPFL (Figure A). Il s'agit d'un robot capable de positionner un objet dans un espace à trois dimensions. Ces trois degrés de liberté répondent aux exigences pour des applications industrielles complexes de prise et dépose.

Le contrôleur H_∞ proposé est conçu par l'approche de sensibilité mixte développé par H. Kawakernaak [Kwa1] [Kwa2]. C'est un régulateur de position centralisé, il prend en considération les effets de couplage entre les axes du robot et permet d'obtenir un bon compromis Robustesse/Performance par un choix convenable des fonctions de pondération fréquentielles.

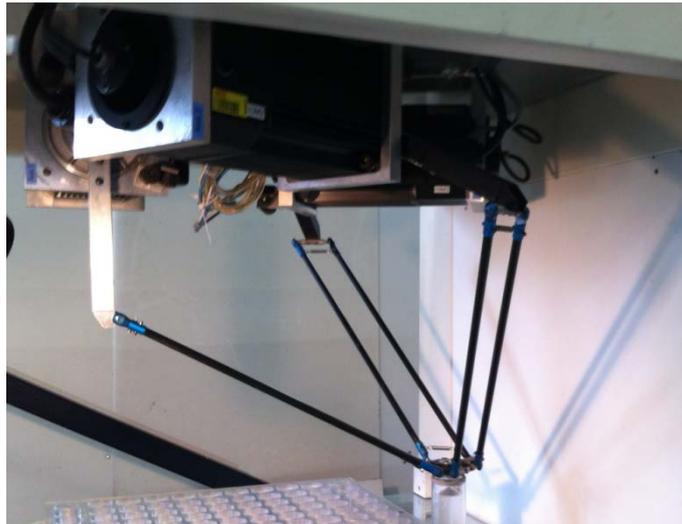


Figure A Le robot Delta à actionnement direct à 3 ddl

Il est défini dans l'espace articulaire du robot et sa mise en œuvre exige trois étapes importantes:

- La détermination d'un modèle dynamique inverse dépendant uniquement des paramètres articulaires du robot,
- La linéarisation tangentielle de ce modèle par rapport à un point de fonctionnement bien situé dans l'espace de travail du robot,
- La synthèse du contrôleur robuste sur la base de ce modèle linéaire et par un choix convenable des matrices de pondérations fréquentielles afin de réaliser les spécifications de robustesse et de performance.

Ce contrôleur est comparé à d'autres contrôleurs de position décentralisés classiquement utilisés en robotique. Parmi ces contrôleurs, on peut citer le PID classique sans le couple a priori, le PD avec couple a priori et la commande par découplage non linéaire (commande dynamique). Il est important de noter que pour ces méthodes classiques proposées, les gains des contrôleurs sont obtenus par des algorithmes bien appropriés basés sur le modèle dynamique du robot Delta, ils vont être ajustés par la suite lors de la phase de simulation ou d'expérimentation [Kel][Kha].

Afin de distinguer l'efficacité de cette technique de synthèse par rapport à la commande optimale classique LQG ou H_2 , un contrôleur H_2 est aussi synthétisé sur la base du modèle linéaire développé pour le robot Delta.

Contributions

Les contributions essentielles de cette recherche peuvent être résumées en six points:

- Développement d'un modèle dynamique inverse pour le robot Delta qui ne dépend que des variables articulaires [Rac1]. Ce modèle permet d'implémenter les techniques de commandes classiques utilisées pour les robots sériels (PD, PID, Commande dynamique...). En effet, le modèle dynamique inverse de Codourey [Cod1] a la particularité de dépendre non seulement des variables articulaires, mais aussi de la cinématique de l'organe terminal.

- Le développement d'une méthode systématique et analytique pour la linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta: cela ouvre l'opportunité d'utiliser les lois existantes de contrôle robuste linéaire [Rac5].
- Une analyse du comportement dynamique du robot Delta dans tout son espace de travail grâce à la détermination de plusieurs modèles linéaires tangents à des points de fonctionnement répartis uniformément dans cet espace.
- Implémentation de plusieurs lois de commandes classiques très utilisées en robotique pour les robots sériels et qui ne sont pas encore utilisées pour le robot Delta [Rac3][Rac4].
- Proposition d'une méthode pour la sélection des paramètres des pondérations fréquentielles, basée sur une analyse fréquentielle de la bande passante du système en boucle fermée [Rac3].
- Et enfin, l'implémentation du contrôleur multi-variable H_∞ en hardware sur le robot Delta à 3ddl. Le contrôleur est synthétisé sur la base du modèle linéaire [Rac5].

La contribution essentielle de ce travail réside surtout sur le fait d'avoir adapté une théorie de commande robuste sur un processus industriel réel et de l'avoir rendu systématique et pratique.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée en cinq chapitres et une conclusion:

Dans le premier chapitre, nous allons présenter un état de l'art sur les robots parallèles. Dans une première partie, nous définissons ce que c'est un mécanisme parallèle, l'historique de l'apparition des différentes structures parallèles jusqu'à la naissance du premier robot rapide Delta dédié pour les opérations industrielles de prise et dépose. Nous verrons aussi les différentes variantes de cette structure, son évolution et ses multitudes applications dans le domaine industriel, nous exposerons aussi les avantages et inconvénients des mécanismes parallèles par rapport à leurs homologues; les robots sériels. Dans la seconde partie, nous citerons les travaux de recherche rencontrés dans la littérature concernant les différentes méthodes utilisées pour la modélisation dynamique des robots parallèles. Un tour d'horizon sur les différentes méthodes d'asservissement des mécanismes parallèles est exposé dans la troisième partie et enfin, nous terminerons le chapitre par une conclusion.

Dans le second chapitre, nous allons faire une présentation et une description du robot Delta, à 3 ddl et à entraînement direct, utilisé dans ce travail de thèse pour implémenter les différentes lois de commande proposées. Une modélisation dynamique du modèle non linéaire est effectuée par la méthode de Newton-Euler et suivie par une linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement. Une analyse dynamique est proposée dans tout l'espace de travail du robot, elle a permis d'aboutir au modèle linéaire qui permettra de faire la synthèse d'une loi de commande robuste linéaire. Ce modèle est validé avec le modèle non linéaire du robot Delta représenté sous SimMechanics.

Ce chapitre présente les concepts de base de la commande robuste linéaire H_∞ . L'analyse de la stabilité et de la robustesse d'un système, soumis à des incertitudes, est exposée et le théorème des petits gains sur lequel repose le problème de commande H_∞ est défini. En choisissant des pondérations fréquentielles bien appropriées, les

problèmes de performance et de robustesse d'un système asservi sont ramenés à un unique problème qui est le problème "H ∞ standard". Les pondérations fréquentielles permettent de réaliser aussi ce qu'on appelle la conformation de boucle "loop shaping". Le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak est étudié, c'est un cas particulier du problème H ∞ standard. Il permet de minimiser en même temps la matrice de sensibilité **S** et de sensibilité complémentaire **T** du système bouclé. Pour la résolution du problème H ∞ standard, une version simplifiée de l'algorithme de Glover-Doyle est présentée. A titre comparatif, nous présenterons aussi, la résolution du modèle standard par la commande linéaire non robuste H $_2$ (LQG).

Le chapitre quatre présente la synthèse et l'implémentation de la commande robuste H ∞ pour le robot Delta à trois degrés de liberté. Les performances obtenues par ce contrôleur sont comparées à celles des autres contrôleurs classiques utilisés en robotique [Rac1], [Rac2], [Rac3], [Rac4]. Le contrôleur H ∞ est synthétisé par l'approche de sensibilité mixte où la matrice de sensibilité **S** et la matrice de sensibilité complémentaire **T** sont prises en compte. Le modèle linéaire du robot Delta obtenu par linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement, développé au chapitre 2, est augmenté par les matrices de pondération fréquentielle. Les paramètres de ces dernières sont graduellement ajustés dans le but d'élargir le maximum possible la bande passante du système bouclé; c'est-à-dire pour avoir les meilleures performances tout en préservant la stabilité robuste du système en boucle fermée. Le contrôleur H ∞ est synthétisé sur la base de l'algorithme de Glover-Doyle. Le contrôleur synthétisé H ∞ , élargissant le maximum possible la bande passante est implémenté dans le schéma de commande du robot Delta représenté par son modèle sous SimMechanics. Deux schémas de commande sont envisagés; sans et avec l'incorporation du modèle dynamique inverse du robot (couple a priori). Pour le premier cas, les résultats de simulation obtenus sont comparés à ceux d'un autre contrôleur linéaire non robuste H $_2$ et à un contrôleur classique PID. Dans le second cas, le contrôleur H ∞ utilisé avec le couple a priori est comparé a deux autres stratégies, classiquement utilisées en robotique et qui incorporent le MDI dans leurs schémas de commande, il s'agit de la commande PD avec couple a priori et la commande par découplage non linéaire (Commande dynamique).

Le but principal du chapitre cinq est l'implémentation expérimentale du contrôleur H ∞ sur le robot Delta à 3ddl, disponible au laboratoire LSRO de l'EPFL [Rac5]. Le contrôleur utilisé sans le couple a priori est comparé au contrôleur classique PID. Les différents tests expérimentaux effectués ont permis d'évaluer les performances et la robustesse de ce contrôleur.

Etat de l'art

Dans ce chapitre, nous allons présenter un état de l'art sur les robots parallèles. Dans une première partie, nous définissons ce que c'est un mécanisme parallèle, l'historique de l'apparition des différentes structures parallèles jusqu'à la naissance du premier robot rapide Delta dédié pour les opérations industrielles de prise et dépose. Nous verrons aussi les différentes variantes de cette structure, son évolution et ses multitudes applications dans le domaine industriel, nous exposerons aussi les avantages et inconvénients des mécanismes parallèles par rapport à leurs homologues; les robots sériels. Dans la deuxième partie, nous citerons les travaux de recherche rencontrés dans la littérature concernant les différentes méthodes utilisées pour la modélisation dynamique des robots parallèles. Un tour d'horizon sur les différentes méthodes d'asservissement des mécanismes parallèles est exposé dans la troisième partie et enfin, nous terminerons le chapitre par une conclusion.

Sommaire

- 1.1 Généralités sur les robots parallèles
- 1.2 Modélisation dynamique des robots parallèles
- 1.3 Commande des robots parallèles
- 1.4 Conclusion.

1.1 Généralités sur les robots parallèles

1.1.1 Définition

Un robot parallèle (RP) (appelé manipulateur parallèle, ou machine à cinématique parallèle quand il est utilisé en tant que machine-outil) est un mécanisme de chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par l'intermédiaire de plusieurs chaînes cinématiques indépendantes parallèles [Kha][Jin]. Cette définition générale permet de le différencier d'un manipulateur sériel qui est composé d'une seule chaîne cinématique entre la base et l'organe terminal. L'association de ces deux types de structure permet de construire des structures dites hybrides (Figure 1.1). L'organe terminal fait référence à l'interface permettant au manipulateur d'interagir avec son environnement (pince, outil, torche à souder...). Pour les robots parallèles, l'élément du robot sur lequel est fixé l'organe terminal est généralement appelé plate-forme mobile ou nacelle. Ce dernier terme sera utilisé dans la suite de notre travail [Cor].

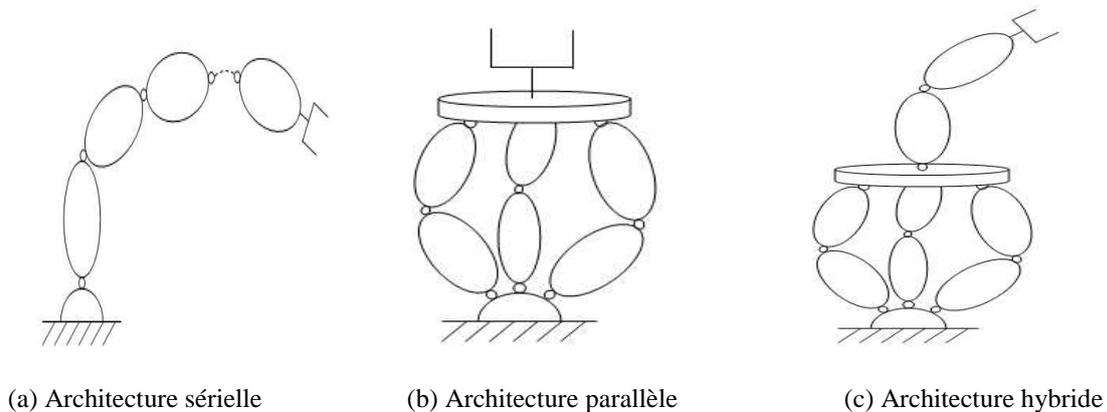


Figure 1.1 - Architectures de robots [Kha]

1.1.2 Historique

Les travaux théoriques sur les mécanismes parallèles remontent à plusieurs siècles quand les géomètres français et anglais étaient particulièrement intéressés par les polyèdres [Mer1][Mer2][Mer3][Mer4]. Cependant, un des premiers robots parallèles a été conçu par James E. Gwinnett, un agriculteur aux États-Unis, pour lequel il a déposé un brevet en 1928 [Gwi]. Son invention était une plate-forme à mouvement sphérique à 3 degrés de liberté (ddl) pour une utilisation dans les salles de cinéma (Figure 1.2).

En 1934, Willard L. G. Pollard a déposé un brevet pour une machine de pulvérisation de peinture [Pol]. L'invention comporte un système de commande et un manipulateur. Le système de commande se compose de films perforés, et le manipulateur est essentiellement un robot à cinq barres (Figure 1.3).

En 1947 Gough [Gou] a établi les principes de base d'un mécanisme cinématique avec une structure en boucle fermée (Figure 1.4) qui permet le positionnement et l'orientation d'une plate-forme mobile afin de tester l'usure des pneus.

En 1965, Stewart [Ste] a suggéré l'utilisation d'une telle structure pour les simulateurs de vol et le mécanisme Gough est parfois appelé plate-forme de Stewart (Figure 1.5).

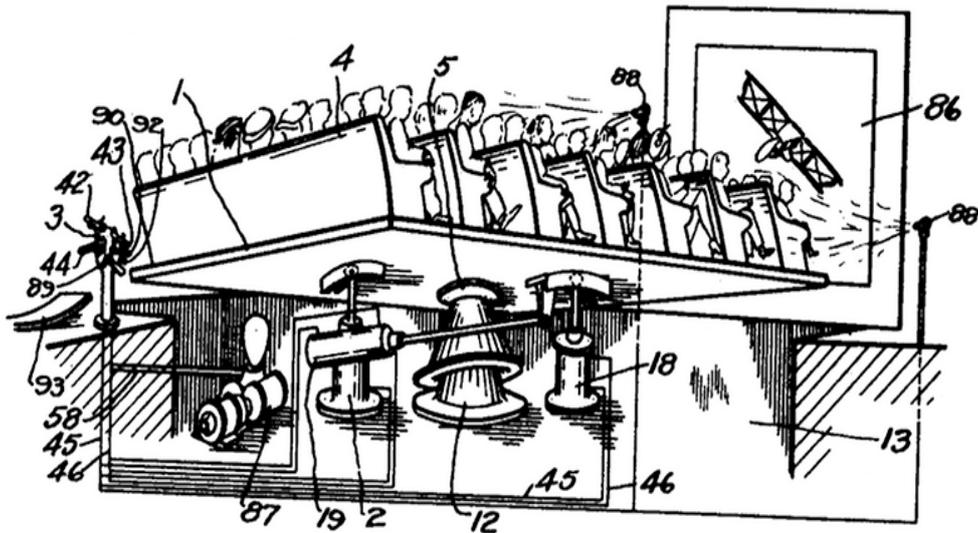


Figure 1.2. Un des premiers robots parallèles, inventé en 1928 [Gwi]

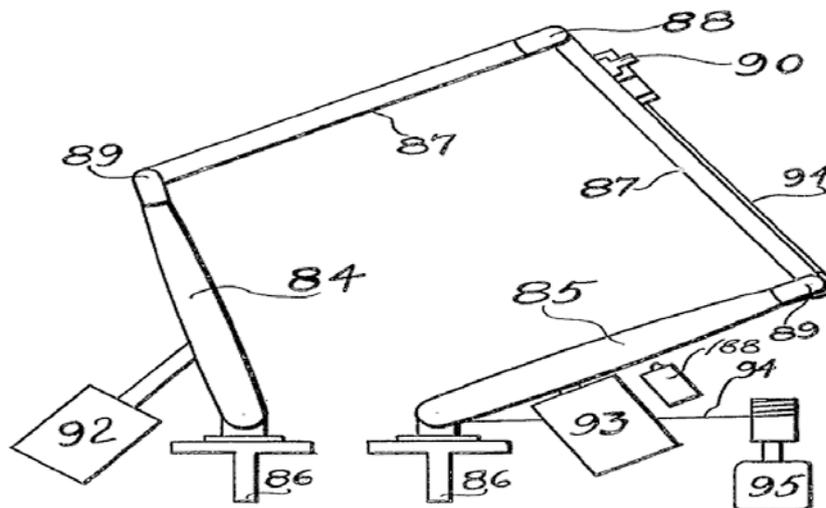


Figure 1.3. Un robot parallèle à cinq barres inventé en 1934 [Pol].

Sur la base de la structure de la plate-forme de Stewart, Hexcel Corporation a développé les robots de la série R (Figure 1.6a) pour des applications biomédicales et les robots de la série P (Figure 1.6b) pour des applications industrielles, telles que le soudage, l'ébavurage et le fraisage [Jin].

L'autre événement majeur de la robotique parallèle est l'invention du premier robot parallèle léger, le robot Delta, par le professeur Clavel en 1985 à l'EPFL (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) [Cla1]. L'objectif recherché est le déplacement de pièces légères à cadence élevée; les applications visées sont dans les domaines du conditionnement dans le secteur alimentaire, la dépalettisation et la palettisation au début ou à la fin d'une chaîne d'assemblage, le montage de composants mécaniques ou électriques sur des platines ou des circuits imprimés [Cla2]. Le premier robot Delta développé est à quatre degrés de liberté (Figure 1.7), avec une structure mobile comportant les originalités suivantes:

- Les trois premiers degrés de liberté forment un parallélogramme de l'espace à structure parallèle,

- Le maintien des orientations de l'élément mobile (la nacelle) est assuré de façon totalement passive par la disposition cinématique (sans nécessiter de capteur, de contrôleur, ni d'apport d'énergie),
- Tous les moteurs sont fixés sur le bâti,
- L'inertie totale est très faible.

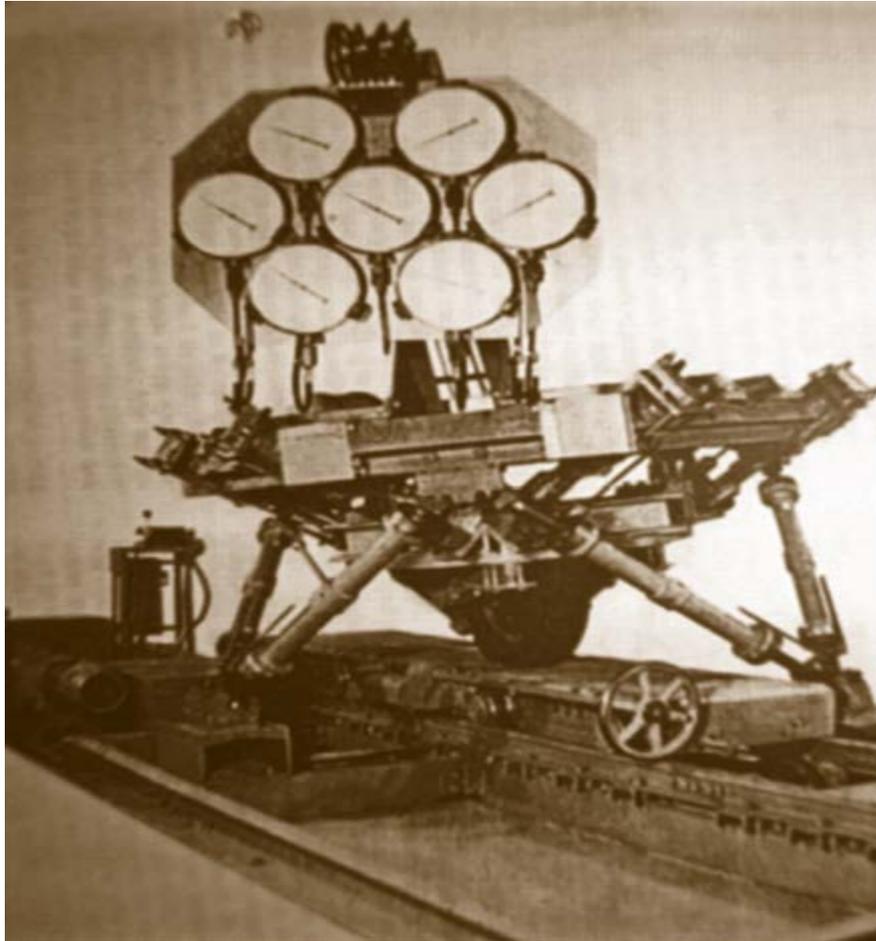


Figure 1.4. Plate forme de Gough [Mer4]

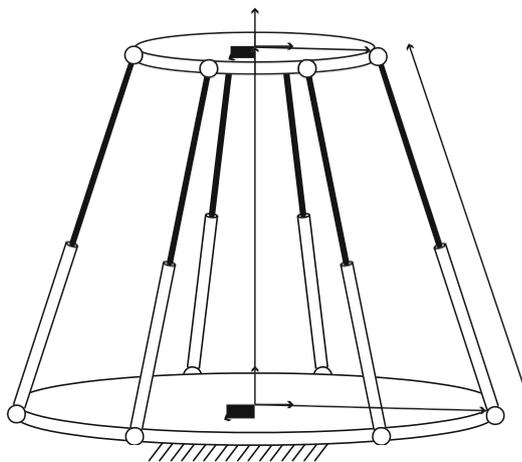


Figure 1.5 Plate forme de Steward [Jin]

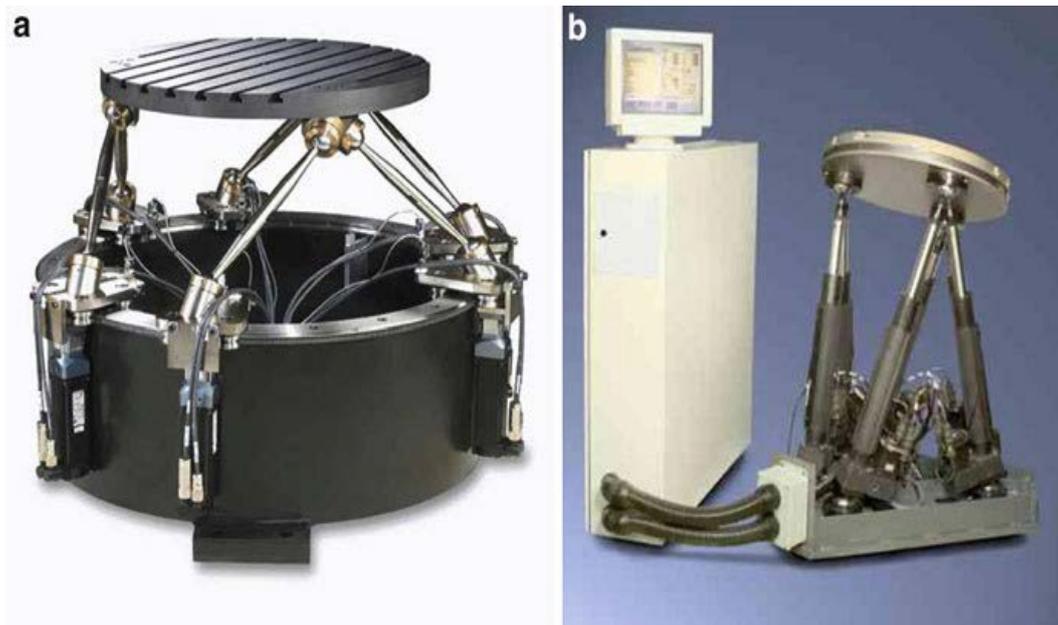


Figure 1.6 Les applications de la plateforme de Stewart par Hexcel Corporation (a) série R (b) série P [Jin]

L'idée de base derrière la conception du robot Delta est l'utilisation des parallélogrammes. Un parallélogramme permet une articulation de sortie à rester dans une orientation fixe par rapport à une articulation d'entrée. L'utilisation de ces trois parallélogrammes restreint complètement l'orientation de la plate-forme mobile qui reste uniquement en translation selon les trois degrés de liberté. Les liaisons d'entrée des trois parallélogrammes sont montées en rotation sur des leviers par des articulations rotoïdes. Les liaisons pivots des leviers rotatifs sont actionnées de deux manières différentes: avec rotation (DC ou AC servo) avec des moteurs ou des actionneurs linéaires. Enfin, une quatrième jambe est utilisée pour transmettre un mouvement rotatif de la base à un effecteur monté sur la plate-forme mobile (Figure 1.8).



Figure 1.7 Le premier robot Delta développé à base d'engrenage [Cla3]

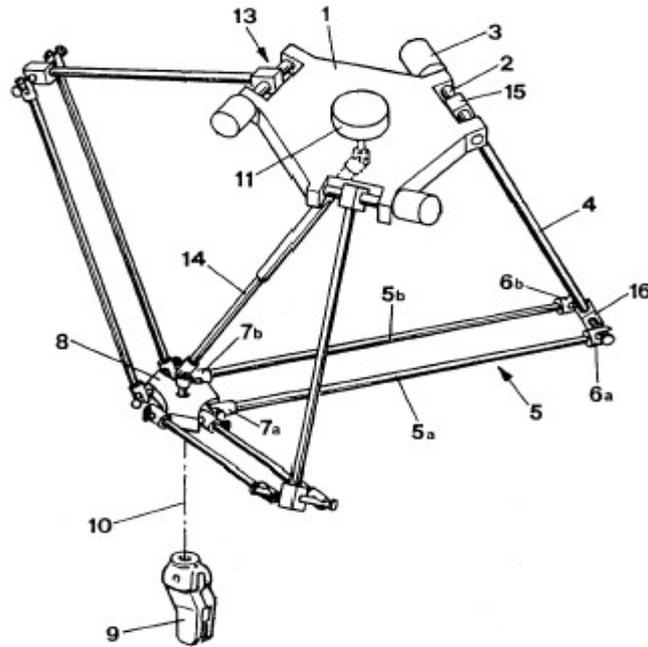


Figure 1.8 Schéma du robot Delta [Cla3]

Pour améliorer la précision et la vitesse du robot Delta, Alain Codourey [Cod1][Cod2] a réalisé un robot Delta à 3ddl et à entraînement direct, c'est-à-dire, sans engrenages entre les actionneurs et les bras. Les avantages de cette construction sont principalement l'élimination du jeu et l'absence de frottement, il a moins de composants et il est moins bruyant (Figure 1.9).

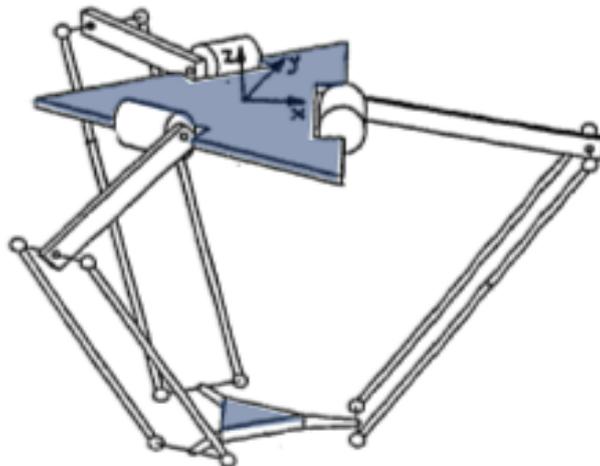


Figure 1.9 Schéma du robot Delta à 3ddl à entraînement direct

L'utilisation d'actionneurs montés à la base et des articulations de faibles masses permettent à la nacelle de réaliser des accélérations jusqu'à 50G (G: force de gravité, elle est égale à 9.8m/s^2) dans les environnements expérimentaux et 12G dans les applications industrielles. Cela rend le robot Delta un candidat idéal pour les opérations de prise et dépose des objets légers (de 10 gr à 1 kg) (Figure 1.10).

Le Delta linéaire est une autre version du robot Delta pour lequel les actionneurs rotatifs sont remplacés par des actionneurs linéaires [Cla1] (Figure 1.11). Il est parfois appelé Linapod ou Triaglidle. L'Orthoglidle fait aussi partie des robots Delta à actionneurs linéaires [Cha].



Figure 1.10 FlexPicker de chez ABB (version industrielle du robot Delta) [Cor]

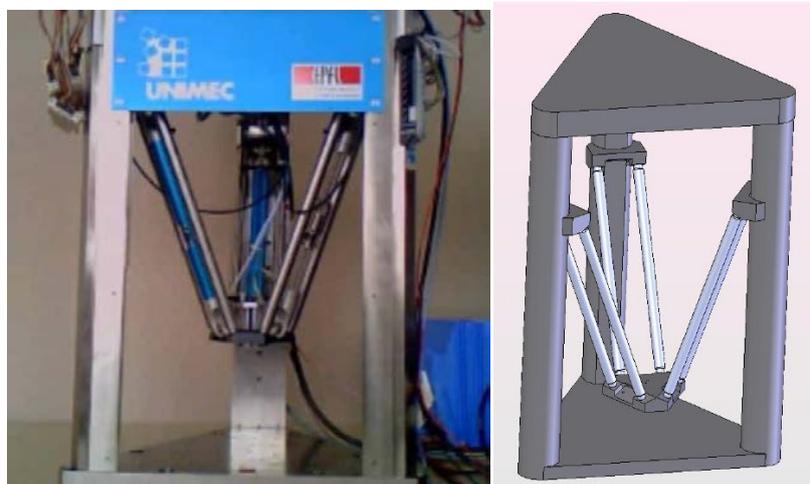


Figure 1.11 Le Delta linéaire

En se basant sur la même architecture du robot Delta de Clavel, une famille de robots parallèles à 4 degrés de liberté est développée par LIRMM¹. Il s'agit du H4 [Pie], I4L [Kru1], le I4R [Kru2] et Par 4 [Nab] (Figure 1.12). L'architecture de ces robots diffère seulement au niveau de la nacelle et au niveau de l'actionnement des bras (le premier élément de la chaîne cinématique lié à la base). Le H4, le I4R et le Par4 sont à actionneurs rotatifs. Le I4L est à actionneurs linéaires [Dal].

Aujourd'hui, le robot Delta est utilisé dans plusieurs applications telles que:

- prise et dépose (pick and place) dans l'industrie alimentaire et l'industrie pharmaceutique (Figure 1.13),
- environnement médical (Figure 1.14),
- les systèmes de mesure (mesure de précision de quelques nanomètres pour le Delta Cube développé par le laboratoire de robotique de l'EPFL),
- les systèmes de micro positionnement.

¹ Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Micro-électronique de Montpellier, France

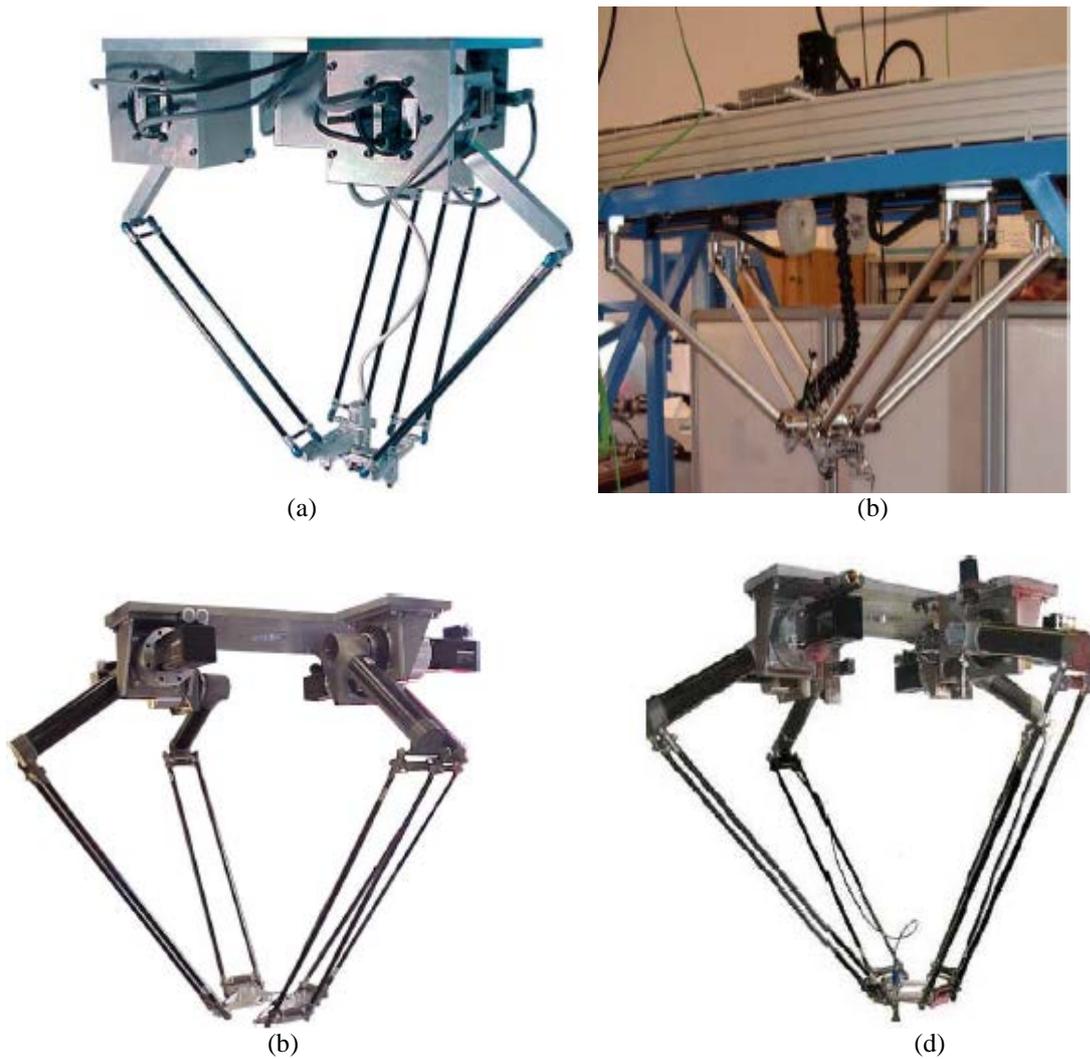


Figure 1.12 Les robots parallèles développés par LIRMM. (a): Le H4; (b): Le I4L; (c): Le I4R; (d): Le Par4.



Figure 1.13 Les robots Adept Quattro pour la prise et dépose des chocolats (Adept) [Bri]



Figure 1.14 Le SurgiScope, un robot Delta portant un microscope de 70 Kg (Isis France) [Bri]

1.1.3 Avantages et inconvénients des robots parallèles

1.1.3.1 Avantages

Comparé à un robot sériel, chaque membre d'un RP a tendance à être plus simple et plus court, donc plus rigide, et les moteurs sont montés intentionnellement près de la base afin de réduire la masse en mouvement. Par conséquent, les RP présentent les avantages suivants:

- Une rigidité élevée parce que la charge externe est partagée par plusieurs jambes,
- Accélération et vitesse élevées en raison du faible moment d'inertie de la structure mobile,
- Une plus grande précision puisque la fabrication des articulations et les erreurs d'assemblage ne seront jamais accumulées sur l'extrémité de l'effecteur,
- Des capacités de force élevées, vu que la force de sortie est apportée par plusieurs actionneurs fonctionnant en parallèle.

1.1.3.2 Inconvénients

Les inconvénients d'un RP résident dans son volume d'espace de travail limité en raison de l'architecture parallèle et il y a souvent des singularités. De plus, du fait de la fermeture des chaînes cinématiques, un mouvement d'une jambe entraîne le mouvement des autres. Par conséquent, un fort couplage existe entre les mouvements des chaînes cinématiques. Par contre, la succession des chaînes cinématiques, dans le cas d'un robot sériel, lui offre un bon espace de travail. Cependant, les recherches actuelles s'orientent vers l'exploitation des avantages des robots parallèles qui sont en plein essor dans le monde industriel [Dal].

1.2 Modélisation dynamique des robots parallèles

Un état de l'art sur les différents travaux de recherche effectués pour la modélisation des RP est détaillé dans le livre de S. Briot et W. Khalil [Bri]. Dans ce qui suit, nous ne citerons que quelques références qui ont traité le sujet.

Les travaux sur la modélisation dynamique des RP ont commencé avec l'analyse dynamique de la plate forme de Stewart [Fis][Hof]. Ces études traitaient principalement soit les problèmes d'oscillation ou les problèmes de la dynamique inverse dans des formalismes très simples. Plus tard, d'autres travaux ont présenté des analyses plus

élaborées pour résoudre le problème de la modélisation dynamique des RP, en utilisant des formalismes mécaniques différents. Lee et Shah [Lee], Geng et al. [Gen], Bhattacharya et al. [Bha], Abdellatif et Heimann [Abd] et Miller [Mil] utilisent le formalisme Lagrange-Euler. Le principe des travaux virtuels a été utilisé par Codourey et Burdet [Cod3] et Tsai [Tsa]. D'un autre côté, les équations de Newton-Euler ont été utilisées par Sugimoto [Sug], Gosselin [Gos], Dasgupta et Choudhury [Das].

1.3 Commande des robots parallèles

Ces deux dernières décennies, les robots parallèles ont attiré l'attention à la fois des académiciens et des industriels, en raison de leurs performances lors de la manipulation à grande vitesse et de leurs hautes précisions. Ces performances proviennent de leur structure parallèle, composée par plusieurs chaînes cinématiques. Cependant, sa complexité présente quelques inconvénients, comme un espace de travail réduit, présence de singularités ou des cinématiques et des dynamiques très couplées.

Afin de réduire l'effet de ces inconvénients, une conception mécanique optimisée, une sélection d'actionneur adéquate et une loi de commande propre qui permet d'exploiter toutes les capacités du système mécatronique sont exigées [Zub][Li-Q]. Vu la similitude de la structure des équations cinématiques et dynamiques entre les robots sériels et parallèles, la plupart des lois de commandes classiques développées pour les robots à chaînes sériels s'appliquent également pour les mécanismes parallèles. Dans le domaine industriel, la commande la plus utilisée pour les robots parallèles est la commande classique type PID (ou PD) décentralisée c'est-à-dire le modèle du robot est considéré comme linéaire et découplé [Mer 3]. L'avantage principal de cette méthode est l'implémentation facile et le faible coût en calcul. Les paramètres du contrôleur sont réglés expérimentalement en minimisant au maximum l'erreur de suivi de trajectoire. L'inconvénient majeur de cette méthode est la présence de pics dans la réponse temporelle du robot et la dégradation des performances dans les mouvements rapides.

Afin d'éviter ce problème, l'incorporation du modèle dynamique inverse dans les schémas de commande du robot est devenue nécessaire. Ce dernier a pour rôle de calculer le couple a priori nécessaire pour chaque articulation. D'où l'apparition des schémas de commande PID ou PD avec couple a priori, la commande par découplage non linéaire et les commandes prédictives. Ces méthodes ont permis d'améliorer d'une manière considérable le suivi de trajectoire des robots, même dans le cas des dynamiques élevées. Leurs seuls inconvénients, est que le modèle dynamique utilisé doit être assez précis et les paramètres du modèle ne doivent pas être soumis à des incertitudes.

Dans le domaine de la recherche, des techniques de commande avancées utilisées pour les robots sériels sont aussi testées sur les robots parallèles et plusieurs travaux de recherche sont publiés dans ce domaine.

Dans cette section, nous ferons un rapide tour d'horizon des différentes commandes existantes dans la littérature. La liste présentée n'est pas complète, étant donné que les travaux de recherche sur la commande des robots parallèles sont en pleine expansion. Nous n'allons pas présenter les détails techniques concernant ces méthodes, car certaines d'entre elles vont être explicitées dans le chapitre 4 portant sur la commande du robot Delta.

Dans la littérature, nous avons retrouvé différents types de commandes utilisés pour le contrôle des structures parallèles.

- Commandes classiques PD ou PID
- Commandes basées sur le modèle dynamique du robot :

- Commande PID et PD avec couple a priori
 - Commande par découplage non linéaire ou Commande Dynamique
 - Commande prédictive fonctionnelle
- Commande adaptative
 - Commande robuste H_∞
 - Autres méthodes de commande

Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus peuvent être implémentées dans l'espace articulaire ou dans l'espace opérationnel. Dans ce dernier cas, les modèles géométriques et différentiels (et leurs dérivées) interviennent dans les schémas de commande [Rey-L].

En plus de notre contribution, voici quelques références de la littérature concernant ces différents types de commande.

1.3.1 Commandes classiques PD ou PID

Dans une commande classique, qui est celle de presque tous les robots industriels actuels, le modèle du robot est considéré comme constitué de n axes linéaires découplés. Chaque axe est alors contrôlé par un régulateur PID propre (ou PD) [Cod1][Ste-B1] [Ste-B2][Sto]. On parle de contrôleur décentralisé.

Dans Manic et al. [Man], un contrôleur PID classique décentralisé a été synthétisé pour le robot parallèle Isoglid3.

Dans Quyang et al. [Quy], une version non linéaire du contrôleur PD a été utilisée pour commander un robot manipulateur à 2 ddl.

Dans le but d'améliorer les performances du suivi de trajectoire d'un robot parallèle redondant à 2ddl, Li et al. [Li-Y] propose un PID à base de réseau de neurones. Les résultats de simulation obtenus sont comparés à ceux d'un contrôleur classique PD.

1.3.2 Commandes basées sur le modèle dynamique du robot

Lorsque l'application exige des évolutions rapides du robot, une grande précision lors du mouvement, il est nécessaire de concevoir un système de commande plus sophistiqué qui prenne en compte tout ou partie des forces d'interaction dynamiques [Cod1].

L'idée d'incorporer le modèle dynamique inverse du robot (couple a priori) dans le schéma de commande [Kho] permet de calculer les couples nécessaires à chaque articulation pour suivre la trajectoire désirée. En appliquant le couple calculé à chaque articulation, la trajectoire va être suivie sans erreur si le modèle du robot est exact et s'il n'y a pas de perturbation extérieure. Une boucle de contre réaction est introduite car le modèle n'est jamais parfait.

1.3.2.1 Commande PD ou PID avec couple a priori

La commande PD (ou PID) avec couple a priori, appelée aussi commande PD augmentée, est un système de contrôle qui utilise le modèle dynamique inverse du robot (couple a priori) pour renforcer le contrôleur PD. Une analyse de cette approche montre que le terme de commande a priori a pour rôle de déplacer le point de fonctionnement du régulateur, de façon non-linéaire, et de considérer le système comme linéaire et découplé [Cod1].

Cette approche a été introduite initialement pour les robots sériels. Une analyse de la stabilité en boucle fermée a été développée par Kelly et al. [Kel] et Reyes et al. [Rey-F]. Cette méthode a été par la suite largement utilisée pour les robots parallèles. Dans la thèse de Codourey [Cod1], cette commande est appliquée pour le robot Delta à

entraînement direct à 3 ddl. Les résultats expérimentaux obtenus sont comparés à ceux; d'un régulateur PD simple, un régulateur PD avec commande a priori d'accélération et enfin à un régulateur PD avec commande a priori anticipée du couple.

Dans [Che], des résultats expérimentaux ont été présentés pour une comparaison entre un régulateur PD avec une compensation de gravité désirée, un PD avec couple a priori et un régulateur PD avec commande a priori anticipée du couple.

M. Bennehar et al. [Ben] ont proposé un contrôleur PD avec commande a priori anticipée du couple pour surmonter le phénomène des forces internes d'un robot parallèle redondant à 3ddl. Les couples de commande résultants ont été projetés en utilisant une matrice jacobienne pour réduire les forces internes qui peuvent nuire à la structure mécanique du robot. Des résultats expérimentaux satisfaisants ont été obtenus.

1.3.2.2 Commande par découplage non linéaire (Commande Dynamique)

La commande par découplage non linéaire, appelée aussi "Commande Dynamique" est une méthode basée sur le modèle dynamique du système. Le modèle dynamique inverse est incorporé dans la boucle de rétroaction afin d'obtenir en même temps la linéarisation et le découplage [Pau][He-F]. Il a été montré que cette technique présente de meilleures performances que les approches de rétroaction locales si le modèle est suffisamment précis. Cependant, il est difficile d'y parvenir, si le système est en présence d'incertitudes paramétriques. Une comparaison entre la commande par découplage non linéaire et la commande PD avec couple a priori est présentée dans [Yan] et [Par].

1.3.2.3 Commande prédictive fonctionnelle

La commande prédictive fonctionnelle est basée sur la prédiction du comportement futur du système à partir du modèle interne. Les propriétés de cette stratégie en font une excellente candidate pour les systèmes à dynamique rapide dès lors que l'on est capable d'en donner un modèle linéaire représentant son comportement dynamique [Viv1]. Dans [Viv2], Vivas et Pognet appliquent cette commande sur le robot parallèle à 4 dll (Par4). Les résultats expérimentaux obtenus sont comparés à ceux d'une commande classique PID et à la commande par découplage non linéaire.

1.3.3 Commande adaptative

Dans Castañeda et al. [Cas], un contrôleur adaptatif a été mis en œuvre pour résoudre le problème de suivi de trajectoire pour le robot Delta. Le contrôleur est testé expérimentalement en temps réel et en simulation numérique. La commande adaptative a été conçue en utilisant une variante de la structure de rejet de perturbation active. Le régulateur adaptatif a été complété par l'algorithme d'identification non paramétrique, le moindre carré moyen, pour estimer la perturbation. Les résultats de simulation et expérimentaux étaient obtenus lorsque le contrôleur est implémenté en temps réel. Au moins deux trajectoires de référence différentes ont été proposées et ils ont été suivis avec succès par les angles d'articulation du robot réel. Les expériences étaient suffisantes pour montrer les performances supérieures du contrôleur proposé par rapport à celles du contrôleur classique PID (avec couple a priori).

Dans Cazalilla et al. [Caz], un schéma de commande adaptatif est implémenté pour un manipulateur parallèle à 3 ddl. Le contrôleur repose sur un modèle dynamique avec un nouveau paramètre pertinent permettant d'étudier les cas où les incertitudes affectent: (1) les paramètres du corps rigide, (2) les paramètres de frottement, (3) les dynamiques de l'actionneur, et (4) la combinaison de ses derniers. Les simulations et les expériences vérifient les performances du contrôleur proposé. Le système de contrôle

est implémenté sur l'environnement de programmation modulaire "Open Software Robot Control (OROCOS)". Enfin, un dispositif expérimental évalue la performance du contrôleur lorsque le robot manipule une charge utile.

1.3.4 Commande robuste H_∞

Les travaux de recherche concernant l'application de la commande robuste H_∞ sur les robots parallèles sont malheureusement pas très nombreux. Les publications les plus importantes rencontrées dans la littérature sont:

Dans Iqbal et al. [Iqb], une méthode d'identification linéaire est proposée pour établir un modèle linéaire pour la plate forme stabilisée à 2ddl. Un contrôleur H_∞ est synthétisé par la méthode de « Loop-shaping » sur la base de ce modèle linéaire. Des résultats de simulation et expérimentaux ont montré que les performances et la robustesse du contrôleur sont satisfaisants.

Dans Douat et al. [Dou1], Pour minimiser les vibrations indésirables du robot parallèle Par 2 aux positions d'arrêts, un contrôleur réduit est synthétisé par la technique de H_∞ loop-shaping. Le modèle linéaire est obtenu par une procédure d'identification.

Dans la thèse de Douat [Dou2], Deux contrôleurs robustes H_∞ sont synthétisés et comparés pour minimiser les vibrations indésirables du Par2, il s'agit du: H_∞ à sensibilité mixte et H_∞ « Loop Shaping ». La robustesse des contrôleurs est ensuite testée pour différentes trajectoires et conditions de charge. Des résultats de simulations et expérimentaux sont présentés pour comparer l'efficacité des contrôleurs.

1.3.5 Autres méthodes de commande

Ces dernières années, d'autres méthodes de commande ont été développées pour les robots parallèles, que ça soit dans le domaine opérationnel ou articulaire. Parmi ces méthodes on peut citer: la commande par mode glissant [Qu-S] [Guo], la commande par réseaux de neurones [Jia], la commande par logique floue [Zha] et la commande neuronale floue [Tol].

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques généralités sur les robots parallèles; une définition, un bref historique qui nous a permis de remonter jusqu'au robot Delta à entraînement direct, objet de notre travail de recherche. Nous avons présenté les avantages et les inconvénients des structures parallèles afin d'explicitier leurs complexités lors de la modélisation et la commande. Et enfin, nous avons présenté un état de l'art sur les différentes méthodes de modélisation dynamique et commande des robots parallèles. Dans le prochain chapitre, une modélisation dynamique du robot Delta à entraînement direct à 3ddl sera présentée par la méthode de Newton-Euler. Le modèle dynamique inverse obtenu va subir une linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement pour pouvoir implémenter les lois de commande linéaires. Une analyse dynamique des modèles linéaires tangents sera proposée suivie d'une validation du modèle linéaire sélectionné pour la synthèse de la loi de commande robuste H_∞ .

Modélisation et linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta

Dans ce chapitre, nous allons faire une présentation et une description du robot Delta, à 3 ddl et à entraînement direct, utilisé dans ce travail de thèse pour implémenter les différentes lois de commande proposées. Une modélisation dynamique du modèle non linéaire est effectuée par la méthode de Newton-Euler et suivie par une linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement. Une analyse dynamique est proposée dans tout l'espace de travail du robot, elle a permis d'aboutir au modèle linéaire. Ce dernier est validé par le modèle non linéaire du robot Delta représenté sous SimMechanics¹.

Sommaire

- 2.1 Introduction
- 2.2 Description du robot Delta à entraînement direct
- 2.3 Modèle dynamique du robot Delta à entraînement direct
- 2.4 Modèle dynamique inverse dépendant des variables articulaires
- 2.5 Linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta
- 2.6 Analyse dynamique des modèles linéaires tangents et validation
- 2.7 Conclusion

¹ Toolbox de Matlab pour la modélisation des structures mécaniques.

2.1 Introduction

La modélisation d'un système est une phase très importante pour la synthèse d'une loi de commande. Il est donc important de sélectionner la méthode de modélisation qui permet de réaliser le modèle le plus efficace pour une implémentation en temps réel.

Pour le robot parallèle Delta, A cause de l'interdépendance des variables articulaires, le problème est beaucoup plus complexe. Le modèle numérique présenté par Clavel [Cla2] basé sur la méthode de d'Alembert n'est pas optimal pour une utilisation en temps réel en raison de son temps de calcul élevé. Une formulation mathématique simplifiée a été développée par Codourey [Cod1] basée sur la méthode de Newton-Euler.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter les caractéristiques géométriques du robot parallèle Delta à entraînement direct, objet de notre travail de thèse. La méthode utilisée pour la modélisation dynamique du robot est celle de Newton Euler, développée par Codourey dans [Cod1]. Le modèle dynamique inverse obtenu se distingue des modèles traditionnels par une formulation dépendant non seulement des variables articulaires, mais aussi de la cinématique de l'organe terminal. Afin de pouvoir appliquer les lois de commandes classiques utilisées en robotique, nous allons développer à partir du modèle de Codourey, un modèle dynamique inverse qui ne sera fonction que des variables articulaires du robot. Pour implémenter les lois de commande linéaires; commande robuste H_∞ et commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG ou H_2), un modèle dynamique direct du robot Delta sera développé dans l'espace d'état puis une linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement sera effectuée sur ce dernier. Nous terminerons ce chapitre par une analyse dynamique des modèles linéaires tangents obtenus par linéarisation tangentielle autour de différents points de fonctionnements répartis uniformément dans tout l'espace de travail du robot. Cette étude nous permettra de sélectionner le modèle linéaire le plus approprié pour la synthèse d'une loi de commande robuste pour le robot Delta. Ce modèle sera validé par le modèle non-linéaire du robot représenté sous SimMechanics.

2.2 Description du robot Delta à entraînement direct

Figure 2.1 montre la cinématique du robot parallèle Delta à entraînement direct. Ce robot à trois degrés de liberté consiste essentiellement à trois chaînes cinématiques identiques (une série d'un bras (1) et d'un avant bras (2)). L'avant bras est composé lui-même par deux barres parallèles. Les chaînes cinématiques agencées en un 120° sont toutes fermées sur la base (5) à travers la plate forme mobile (3), appelée aussi "nacelle". Les moteurs (4) sont fixes sur la base.

Une des choses les plus importantes dans ce robot est que la combinaison de ces trois mouvements génère trois mouvements de translation de la plate forme mobile. Tableau 2.1 résume les paramètres du robot de l'EPFL utilisé dans notre travail et nos expériences. Des solutions pour le modèle géométrique direct et inverse sont présentées dans l'annexe A.

L'espace de travail du robot est la portion de l'espace qui peut être atteinte par son effecteur (l'effecteur de l'outil). Il est déterminé par l'intersection des volumes réalisés par les trois chaînes cinématiques constituant le Delta, obtenus de façon indépendante. En prenant en considération les limitations mécaniques des articulations sphériques au niveau du coude et de l'effecteur et en évitant aussi les singularités du Delta [Cla1], l'espace de travail obtenu peut être réduit à un cylindre d'axe z ayant les dimensions indiquées sur Figure 2.2.

Tableau 2.1 Les paramètres du robot

Paramètres	Notation	Valeurs	Unités
Longeur du Bras	L_A	240	mm
Longeur de l'Avant-Bras	L_B	480	mm
Diamètre de la Base	D_B	180	mm
Diamètre de la Nacelle	D_n	30	mm
Couple Nominal du Moteur	Γ_n	10	N.m
Couple Maximal du Moteur	Γ_{max}	20	N.m
Masse de la Nacelle	m_n	0.3815	Kg
Masse du Bras	m_{bs}	0.1093	Kg
Masse de la Rotule	m_r	0.0163	Kg
Masse du parallélogramme	m_{ab}	0.085	Kg
Masse totale du Bras	m_b	0.2209	Kg
Inertie du Moteur	I_m	18.10^{-4}	$Kg.m^2$

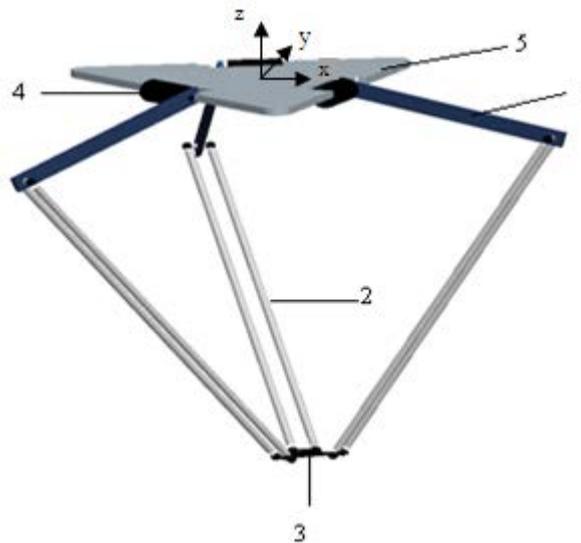


Figure 2.1 Le robot Delta

Les paramètres du cylindre sont fonction des paramètres géométriques du prototype utilisé [Cla2].

- Diamètre du cylindre: $D = 617$ mm.
- Hauteur du cylindre: $H = 214.5$ mm.
- Limite supérieure de l'espace de travail: $Z_h = -297.4$ mm.
- Limite inférieure de l'espace de travail: $Z_b = -511.9$ mm.

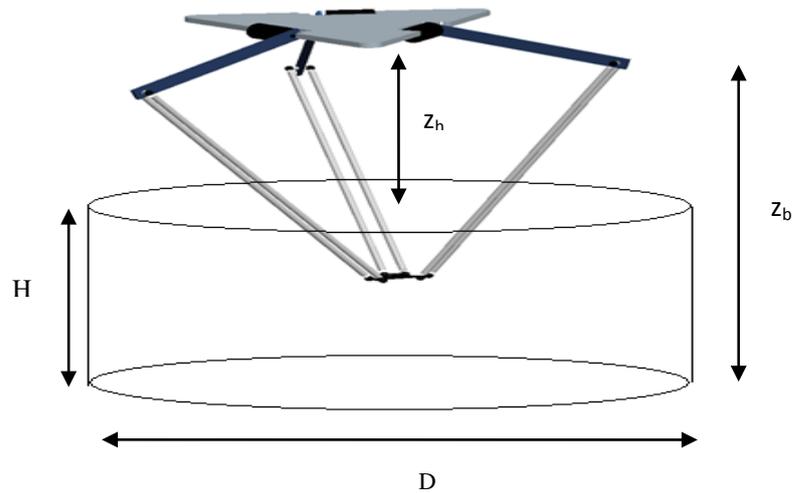


Figure 2.2: Espace de travail du robot Delta

2.3 Modèle dynamique du robot Delta à entraînement direct

2.3.1 Introduction

Un robot est un système physique en mouvement, il est caractérisé par deux types de modèles dynamiques: le modèle dynamique direct (MDD) et le modèle dynamique inverse (MDI).

Le MDD, permet de déterminer le mouvement de l'organe terminal lorsqu'on applique un certain couple sur les articulations. Il est utilisé dans les schémas de commande pour simuler le comportement dynamique du robot.

Le MDI, par opposition, exprime le couple (ou force) Γ que chaque actionneur doit fournir pour obtenir le déplacement désiré de l'organe terminal du robot. L'expression de ces couples est non-linéaire et dépend des positions \mathbf{q} , vitesses $\dot{\mathbf{q}}$ et accélérations $\ddot{\mathbf{q}}$ de chacune des articulations du robot, soit:

$$\Gamma = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

La connaissance du modèle dynamique inverse est très intéressante en pratique. En effet, comme ce dernier permet de déterminer les couples nécessaires pour un mouvement désiré, il permet d'une part de dimensionner les actionneurs au plus près de la réalité, mais surtout peut être utilisé par le système d'asservissement pour améliorer les performances lors du suivi d'une trajectoire. Dans ce cas, une formulation permettant son évaluation en temps réel doit être développée.

Le modèle dynamique d'un robot est directement dépendant des lois de la mécanique classique. Plusieurs méthodes existent pour l'établir. Les plus connues :

- **Méthode de Newton – Euler:** Elle décrit le comportement d'un système en termes de forces et de moments. Ce formalisme est basé sur les lois de la dynamique appliquée à chaque solide du système séparément.
- **Méthode de Lagrange:** Elle décrit le comportement d'un système en termes de travail et d'énergie. Ce formalisme est basé sur une conservation énergétique du système au cours du mouvement et se calcule dans l'espace des paramètres.

- **Méthode de d'Alembert:** Elle est basée sur la notion de travail virtuel. Cette méthode a été utilisée par Clavel [Cla2] pour la modélisation du robot Delta.

2.3.2 Méthode de Newton-Euler

Chaque composant d'un robot peut être considéré comme un corps rigide. Son mouvement peut être décomposé en un mouvement de translation et de rotation autour de son centre de masse. La méthode consiste à:

- 1- Ecrire les équations définissant les vitesses et accélérations angulaires et linéaires de chaque segment.
- 2- Ecrire les équations décrivant les forces et les moments de force exercés sur les segments successifs.

Les équations de Newton-Euler permettent donc de décrire la dynamique combinée de translation et de rotation d'un corps rigide. Si on prend un repère dont l'origine coïncide avec le centre de masse du corps :

- L'équation de Newton nous donne:

$$\sum_i F_i = m \cdot a_c \quad (2.2)$$

Avec : F_i : Forces agissant sur la structure,

m : Masse du corps,

a_c : accélération de son centre de masse.

L'équation d'Euler est utilisée pour obtenir l'accélération angulaire, soit :

$$\sum_i M_i = I_c \dot{\omega}_c + \omega_c \wedge (I_c \cdot \omega_c) \quad (2.3)$$

Avec M_i : Couples agissant sur le centre de masse

I_c : tenseur d'inertie du corps lié à un repère solidaire du centre de masse,

ω_c : vitesse angulaire du corps rigide,

$\dot{\omega}_c$: accélération angulaire du corps rigide.

Le premier terme de l'équation (2.3) correspond à l'effet de l'accélération angulaire alors que le deuxième résulte des variations de direction du vecteur vitesse. Ce dernier terme est généralement connu sous le nom de « couple gyroscopique ».

La méthode de Newton-Euler doit être appliquée sur chaque solide composant le système. Cela est fait par l'isolation du solide et la prise en compte des efforts de liaison ce qui permet de garder au final la validité du système complet.

2.3.3 Modélisation dynamique

L'utilisation de la méthode de Newton-Euler pour la détermination du modèle dynamique du robot Delta exige l'isolation de chaque solide qui compose le système. Cela se fait en introduisant les forces de liaisons nécessaires entre les solides.

2.3.3.1 Paramétrisation du système et référentiels

En raison de la symétrie ternaire du robot Delta, il sera possible par la suite de traiter chaque chaîne cinématique i indépendamment en attribuant à chacune un référentiel $R_i (O_i, x_i, y_i, z_i)$ (Figure 2.3). Le référentiel de base $R(O, x, y, z)$ est placé au

centre de la base fixe du robot, son axe z est vertical et son axe x est dans le plan de l'un des bras. Les référentiels R_i sont disposés de la même manière, pour chacun des bras i . Ils sont séparés du référentiel de base R d'un angle θ_i autour de l'axe z et ont même origine ($O_i = O$). La matrice de passage du référentiel de base R à chacun des référentiels R_i est alors donnée par l'équation (2.4):

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

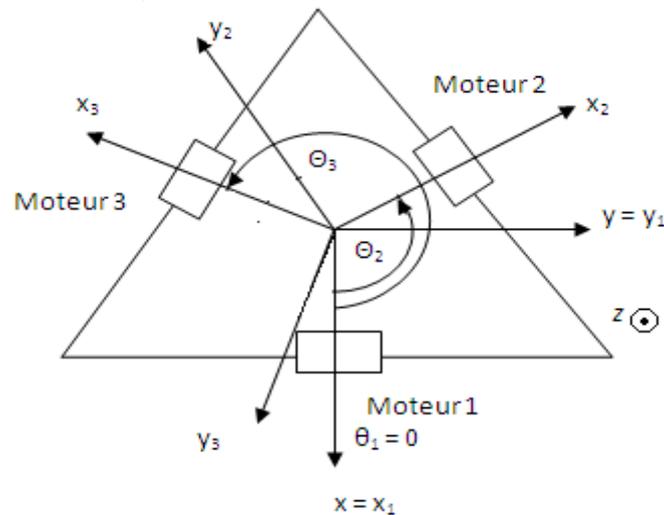


Figure 2.3: Vue du dessus de la base du Delta

2.3.3.2 Paramètre géométriques

Dans chacun des référentiels R_i , on peut alors représenter le bras i selon la Figure 2.4. Les paramètres de la structure sont :

- R_A : distance entre le centre de la base ($O_i = O$) et l'axe de rotation du bras
- R_B : distance entre le centre de la nacelle (P_i) et l'axe de liaison inférieur du Parallélogramme (B_i)
- L_A : longueur du bras
- L_B : longueur de l'avant-bras
- $R = R_A - R_B$. Ceci permettra, par la suite, de simplifier la représentation géométrique.
- α_i : angle entre le bras i et l'axe du référentiel R_i . Par convention, il est défini positif lorsque le bras se situe du côté de la nacelle.
- β_i : angle entre le plan du parallélogramme et le plan horizontal, mesuré dans un plan vertical
- γ_i : angle entre le plan vertical π_i et une tige du parallélogramme i .

2.3.3.3 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices pour l'établissement du modèle sont donc :

- La masse de l'avant bras m_{ab} (barres parallèles) est répartie à ses deux extrémités selon la proportion suivante ($0 < r < 1$) [Cod1] :
 - $r.m_{ab}$ sur sa partie supérieure (coude)
 - $(1-r).m_{ab}$ sur sa partie inférieure (nacelle)

- Le moment d'inertie des avant-bras est négligé
- Les frottements sont négligés

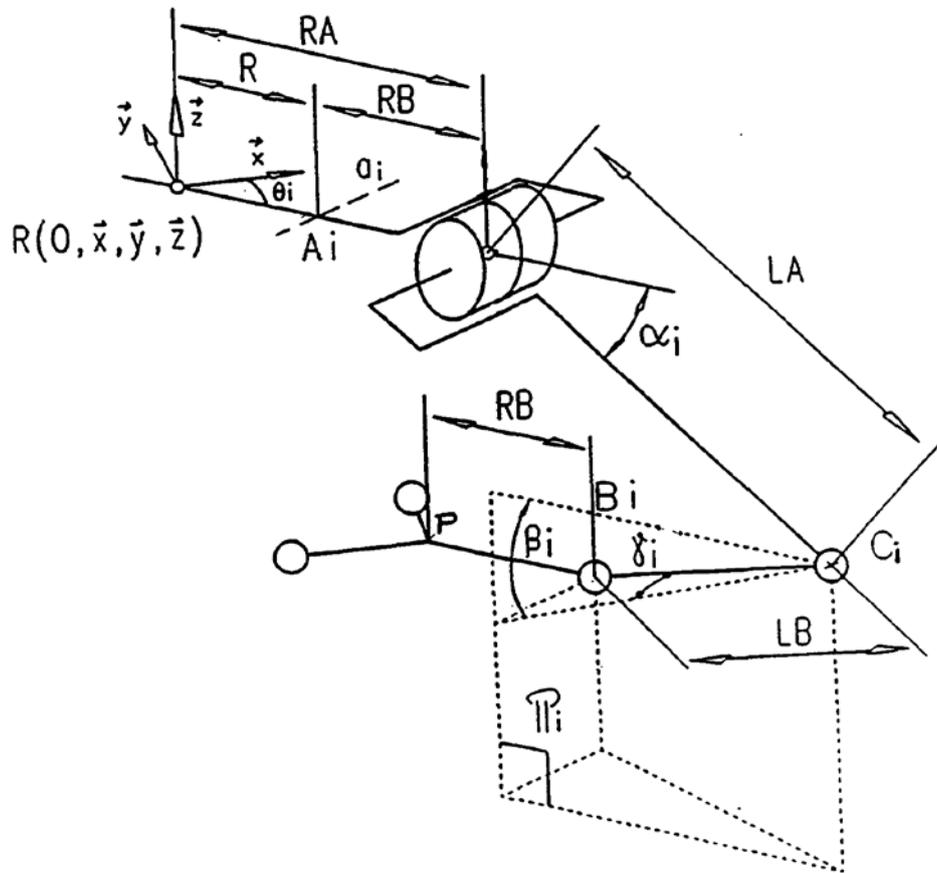


Figure 2-4 : Paramètres géométriques du robot Delta [Cod2]

2.3.3.4 Modèle dynamique simplifié du robot Delta

En tenant compte des hypothèses simplificatrices ci-dessus, le modèle dynamique du robot Delta est établi d'une façon simple. Chaque parallélogramme peut être remplacé par une tige sans masse comme représenté dans la Figure 2.5.

- Vecteur directeur du bras:

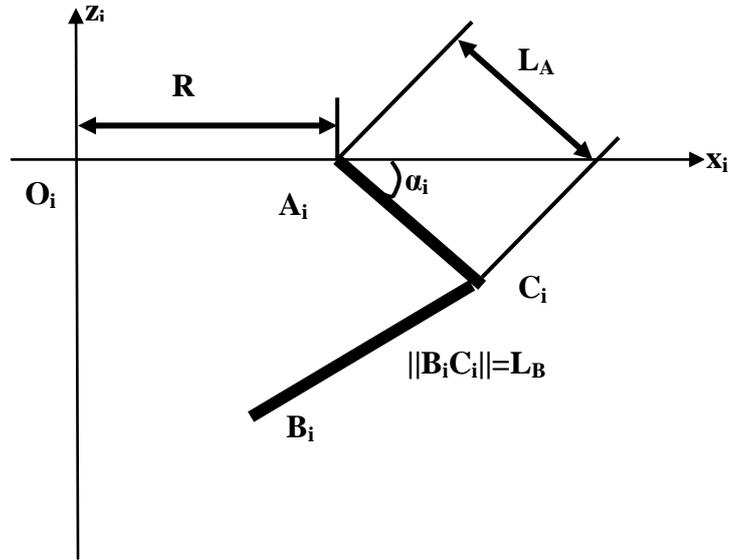
$$\overrightarrow{A_i C_i} = \begin{bmatrix} L_A \cdot \cos \alpha_i \\ 0 \\ -L_A \cdot \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Vecteur directeur de l'avant bras:

$$\overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{B_i O_i} + \overrightarrow{O_i A_i} + \overrightarrow{A_i C_i} \quad (2.6)$$

$$\overrightarrow{B_i C_i} = - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_A \cdot \cos \alpha_i \\ 0 \\ -L_A \cdot \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Où $(x_i \ y_i \ z_i)^T$ est le vecteur exprimant les coordonnées de la nacelle dans le repère R_i .


 Figure 2-5 : Chaîne cinématique dans le repère R_i

soit:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

On obtient donc pour le vecteur $\overrightarrow{B_i C_i}$ dans le repère R_i :

$$\mathbf{R}_{i\overrightarrow{B_i C_i}} = \begin{pmatrix} -x \cdot \cos\theta_i - y \cdot \sin\theta_i + R + L_A \cdot \cos\alpha_i \\ x \cdot \sin\theta_i - y \cdot \cos\theta_i \\ -z - L_A \cdot \sin\alpha_i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Vecteur directeur des avant-bras dans le repère R :

Dans le repère R , le vecteur directeur de chacun des avant-bras est donné par:

$$\mathbf{R}_{\overrightarrow{B_i C_i}} = \begin{pmatrix} (L_A \cdot \cos\alpha_i + R) \cdot \cos\theta_i - x \\ (L_A \cdot \cos\alpha_i + R) \cdot \sin\theta_i - y \\ -L_A \cdot \sin\alpha_i - z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Application de la loi de Newton sur les avant-bras

L'isolation de l'avant bras dont on considère la masse et l'inertie nulle nous donne alors la Figure 2.6.

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{hi} = \vec{0} \quad (2.11)$$

Les deux forces \vec{F}_i et \vec{F}_{hi} sont donc de sens opposées et dans la direction $\mathbf{B_i C_i}$ de l'avant-bras.

$$\vec{F}_i = F_i \cdot \frac{\overrightarrow{B_i C_i}}{|\overrightarrow{B_i C_i}|} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_i = F_i \cdot \frac{\overrightarrow{B_i C_i}}{L_B} = F_i \frac{\mathbf{R}_{\overrightarrow{B_i C_i}}}{L_B} = F_i \mathbf{V}_{F_i}$$

$$\vec{v}_{F_i} = \frac{R_{B_i C_i}}{L_B} = \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_B} [(L_A \cdot \cos \alpha_i + R) \cdot \cos \theta_i - x] \\ \frac{1}{L_B} [(L_A \cdot \cos \alpha_i + R) \cdot \sin \theta_i - y] \\ \frac{1}{L_B} [-L_A \cdot \sin \alpha_i - z] \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

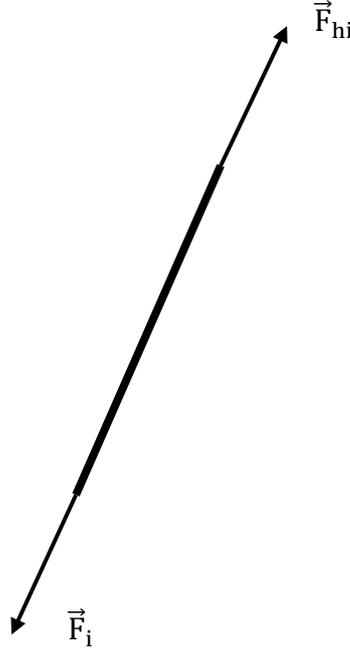


Figure 2.6 : Isolation d'un avant-bras

Donc l'expression de la force \vec{F}_i est:

$$\vec{F}_i = F_i \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Application de la loi de Newton sur la nacelle

On isole la nacelle et on ajoute les forces de liaison \vec{F}_i (Figure 2.7). De part la conception du robot Delta (système de barres parallèles), la nacelle ne peut faire que des mouvements de translation dans l'espace opérationnel. Les équations de Newton-Euler se réduisent donc aux équations de la dynamique de translation (équations de Newton). Dans le référentiel R, on obtient alors:

$$-\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i + \vec{g}_n = m_n \cdot \vec{\ddot{X}} \quad (2.14)$$

Avec :

- \vec{F}_i : Forces de liaison entre la nacelle et les avant-bras, exprimés dans le référentiel R.
- $\vec{g}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_n g \end{pmatrix}$: Force de gravité agissant sur la nacelle.
- m_n : masse totale de la nacelle, y compris la masse transportée et la masse des avant-bras rapportée sur la nacelle.
- g : Accélération terrestre,

- $\vec{\ddot{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$: accélération de la nacelle exprimée dans le repère R.

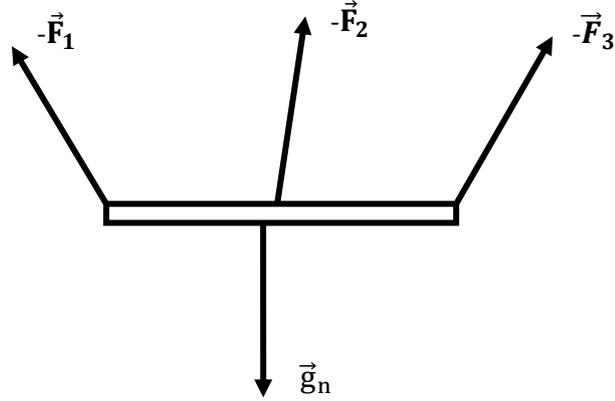


Figure 2.7: Isolation de la nacelle

En remplaçant l'expression (2.13) dans (2.14), on obtient:

$$F_1 \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \\ v_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_n \cdot \ddot{x} \\ -m_n \cdot \ddot{y} \\ m_n [-g - \ddot{z}] \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) peut être exprimée selon l'expression de l'équation (2.16)

$$V \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

avec:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_n \cdot \ddot{x} \\ -m_n \cdot \ddot{y} \\ m_n [-g - \ddot{z}] \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

et

$$V = \begin{pmatrix} v_{x1} & v_{x2} & v_{x3} \\ v_{y1} & v_{y2} & v_{y3} \\ v_{z1} & v_{z2} & v_{z3} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = Q \cdot M \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

avec :

$$Q = \frac{1}{-v_{x3}v_{y2}v_{z1} + v_{x2}v_{y3}v_{z1} + v_{x3}v_{y1}v_{z2} - v_{x1}v_{y3}v_{z2} - v_{x2}v_{y1}v_{z3} + v_{x1}v_{y2}v_{z3}} \quad (2.20)$$

et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_{y2}v_{z3} - v_{y3}v_{z2} & -v_{x2}v_{z3} + v_{x3}v_{z2} & -v_{x2}v_{z3} + v_{x3}v_{z2} \\ -v_{y1}v_{z3} + v_{y3}v_{z1} & v_{x1}v_{z3} - v_{x3}v_{z1} & -v_{x1}v_{y3} + v_{x3}v_{y1} \\ v_{y1}v_{z2} - v_{y2}v_{z1} & -v_{x1}v_{z2} + v_{x2}v_{z1} & v_{x1}v_{y2} - v_{x2}v_{y1} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

En remplaçant l'équation (2.17) dans (2.19), on obtient l'équation (2.22):

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_m \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{G}_n \quad (2.22)$$

avec:

$$\mathbf{K}_m = -m_n \cdot Q \cdot \mathbf{M} \quad (2.23)$$

et

$$\mathbf{G}_n = m_n \cdot Q \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Application de la loi d'Euler sur chacun des bras

La Figure (2.8) montre l'isolation du bras rattaché à l'arbre de l'actionneur.

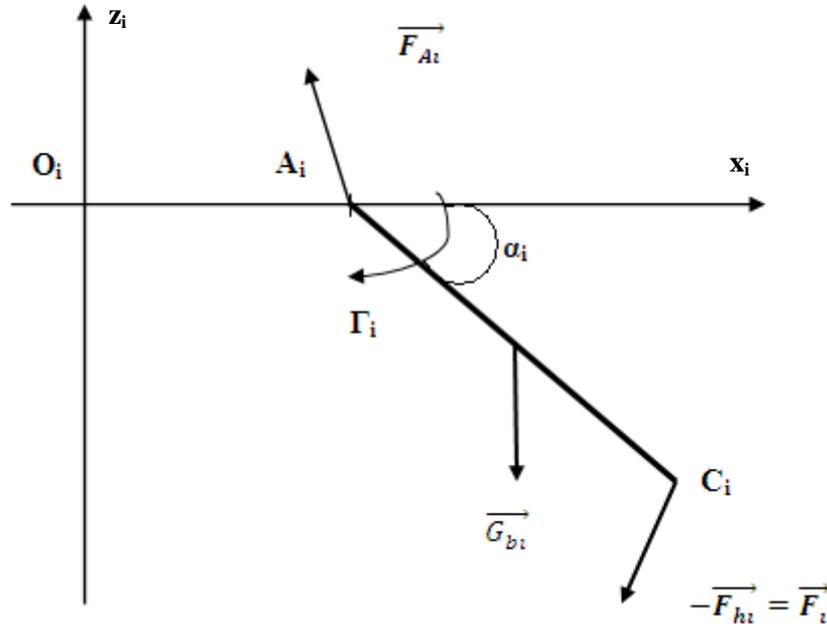


Figure 2.8 Isolation d'un des trois bras du robot Delta

En se plaçant maintenant dans le référentiel R_i lié à chacun des bras, on peut calculer le couple moteur en utilisant l'équation d'Euler:

$$\overrightarrow{A_i C_i} \wedge \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{r_{A_i G_{bi}}} \wedge \overrightarrow{G_{bi}} + \overrightarrow{F_i} = I_{bi} \cdot \overrightarrow{\ddot{\alpha}_i} \quad (2.25)$$

avec:

$\overrightarrow{r_{A_i G_{bi}}}$: vecteur exprimant la position du centre de gravité du bras i.

$\overrightarrow{G_{bi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_b g \end{pmatrix}$: forces de gravité du bras i exprimée dans le référentiel R_i .

m_b : masse totale du bras, y compris la masse des avant-bras rapportée

$\overrightarrow{F_i}$: couple autour du point A_i .

I_{bi} : Inertie du bras autour du point A_i .

$\overrightarrow{\ddot{\alpha}_i}$: accélération angulaire du bras i.

Le vecteur vitesse de rotation du bras est toujours dans la même direction donc le terme de couple gyroscopique est nul et il n'intervient pas dans l'équation (2.25).

$$\overrightarrow{A_i C_i} = \begin{pmatrix} L_A \cdot \cos \alpha_i \\ 0 \\ -L_A \cdot \sin \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_{A_i G_{bi}}} = \begin{pmatrix} r_{Gb} \cdot \cos \alpha_i \\ 0 \\ -r_{Gb} \cdot \sin \alpha_i \end{pmatrix}$$

avec,

r_{Gb} : distance entre le point A_i et le centre de gravité du bras i

Dans le repère R_i , l'expression de la force $\overrightarrow{F_i}$ devient :

$$\overrightarrow{F_i} = F_i \begin{pmatrix} \frac{1}{L_B} [L_A \cdot \cos \alpha_i + R - x_i] \\ -\frac{y_i}{L_B} \\ \frac{1}{L_B} [L_A \cdot \sin \alpha_i + z_i] \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Alors, on obtient les expressions suivantes pour les produits vectoriels $\overrightarrow{A_i C_i} \wedge \overrightarrow{F_i}$ et

$$\overrightarrow{r_{A_i G_{bi}}} \wedge \overrightarrow{G_{bi}}$$

$$\overrightarrow{A_i C_i} \wedge \overrightarrow{F_i} = \begin{pmatrix} -\frac{L_A}{L_B} \cdot \sin \alpha_i \cdot F_i \cdot y_i \\ \frac{L_A}{L_B} F_i \cdot [z_i \cdot \cos \alpha_i - (R - x_i) \cdot \sin \alpha_i] \\ -\frac{L_A}{L_B} \cos \alpha_i \cdot F_i \cdot y_i \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\overrightarrow{r_{A_i G_{bi}}} \wedge \overrightarrow{G_{bi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{Gb} \cdot m_b \cdot g \cdot \cos \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

De l'équation (2.25), seul le couple autour de l'axe y nous intéresse, puisqu'il s'agit du couple moteur. Donc l'équation (2.25) devient:

$$\Gamma_{yi} = I_{byi} \cdot \ddot{\alpha}_i - F_i \cdot \frac{L_A}{L_B} [z_i \cdot \cos \alpha_i - (R - x_i) \cdot \sin \alpha_i] - r_{Gb} \cdot m_b \cdot g \cdot \cos \alpha_i \quad (2.29)$$

Où le couple Γ_{yi} est défini positif selon la règle du tire-bouchon avec :

I_{byi} : inertie du bras i autour du point A_i

x_i, z_i : coordonnées de la nacelle exprimées dans le repère R_i

En mettant l'équation (2.29) sous forme vectorielle, on obtient :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_b \ddot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}_b \quad (2.30)$$

$$\text{avec : } \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{y1} \\ \Gamma_{y2} \\ \Gamma_{y3} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \\ \ddot{\alpha}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_b = \begin{pmatrix} I_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{b3} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K} = \frac{L_A}{L_B} \cdot \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

avec:

$$K_i = z_i \cdot \cos \alpha_i - (R - x_i) \cdot \sin \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G}_b = \begin{pmatrix} r_{Gb} m_b g \cos \alpha_1 \\ r_{Gb} m_b g \cos \alpha_2 \\ r_{Gb} m_b g \cos \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

En remplaçant l'équation (2.22) dans (2.30), on obtient:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_b \ddot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}_m \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{G}_n - \mathbf{G}_b \quad (2.35)$$

2.4 Modèle dynamique inverse dépendant des variables articulaires

L'équation (2.35) représente le modèle dynamique inverse du robot Delta, cette équation est une fonction de l'accélération articulaire de chacun des bras, mais aussi de l'accélération de la nacelle. Elle ne pourra pas être utilisée par les algorithmes de commande classiques (la commande par découplage non linéaire ou la commande PD avec a priori du couple). Donc, il est nécessaire de développer un modèle dynamique inverse qui ne sera fonction que des variables articulaires du robot.

Pour cela, il faut déterminer la relation entre $\ddot{\mathbf{X}}$ et $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$. Cette dernière peut être obtenue à partir du MGD (Annexe A) : $\mathbf{X} = f(\boldsymbol{\alpha})$.

La dérivée par rapport au temps de l'équation du MGD conduit au modèle cinématique du robot:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial fx}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial fx}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial fx}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial fy}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial fy}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial fy}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial fz}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial fz}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial fz}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.36)$$

\mathbf{J} : est le Jacobien du robot.

Une seconde dérivée par rapport au temps de l'équation (2.36) donne :

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2 + \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} \quad (2.37)$$

avec: $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2 = [\dot{\alpha}_1^2 \quad \dot{\alpha}_2^2 \quad \dot{\alpha}_3^2]^T$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} = [\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_3 \quad \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3]^T$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_2} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_2} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_2} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_3} \right) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_3} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fx}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_3} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fy}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_1} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_3} \right) & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial fz}{\partial \alpha_2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Remplaçant l'équation (2.37) dans l'équation (2.35), nous obtenons:

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{I}_b - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{J}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2 - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} + \mathbf{K}\mathbf{G}_n - \mathbf{G}_b \quad (2.40)$$

Le terme $(\mathbf{I}_b - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{J})$ est la matrice d'inertie du robot Delta. Les termes $\mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2$ et $\mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}$ sont respectivement les effets des forces centrifuges et de Coriolis.

L'équation (2.40), est le modèle dynamique inverse du robot Delta, elle est fonction uniquement des variables articulaires du robot.

2.5 Linéarisation tangentielle du modèle dynamique du robot Delta

Dans cette section, nous allons développer à partir de l'équation (2.40), un modèle dynamique direct non linéaire forme espace d'état, en effectuant un choix convenable des variables d'état. Une linéarisation tangentielle de ce modèle autour d'un point de fonctionnement permet d'obtenir le modèle dynamique linéaire du robot Delta.

2.5.1 Détermination du modèle dynamique non linéaire forme espace d'état

A partir de l'équation (2.40), nous pouvons écrire:

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{K}\mathbf{K}_m (\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2 + \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}) - \mathbf{K}\mathbf{G}_n + \mathbf{G}_b + \boldsymbol{\Gamma}] \quad (2.41)$$

avec, $\mathbf{A} = (\mathbf{I}_b - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{J})$

Les variables d'état du système sont choisies comme suit: $x_{s1} = \alpha_1$; $x_{s2} = \alpha_2$;

$x_{s3} = \alpha_3$;

$x_{s4} = \dot{\alpha}_1$; $x_{s5} = \dot{\alpha}_2$; $x_{s6} = \dot{\alpha}_3$.

Soit \mathbf{x}_s , le vecteur d'état du système et \mathbf{u} le vecteur de commande:

$$\mathbf{x}_s = [x_{s1} \ x_2 \ x_{s3} \ x_{s4} \ x_{s5} \ x_{s6}]^T, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3]^T$$

Equation (2.41) devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s1} \\ \dot{x}_{s2} \\ \dot{x}_{s3} \\ \dot{x}_{s4} \\ \dot{x}_{s5} \\ \dot{x}_{s6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s4} \\ x_{s5} \\ x_{s6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_5(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_6(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s4} \\ x_{s5} \\ x_{s6} \\ f_4(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_5(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_6(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \quad (2.42)$$

avec,

$$\begin{bmatrix} f_4(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_5(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ f_6(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{K}\mathbf{K}_m (\mathbf{D}\dot{x}_{si}^2 + \mathbf{E}\dot{x}_{sij}) - \mathbf{K}G_n + G_b + \mathbf{u}] \quad (2.43)$$

$$\dot{x}_{si}^2 = [\dot{x}_{s1}^2 \ \dot{x}_{s2}^2 \ \dot{x}_{s3}^2]^T \quad \text{et} \quad \dot{x}_{sij} = [\dot{x}_{s1}\dot{x}_{s2} \ \dot{x}_{s1}\dot{x}_{s3} \ \dot{x}_{s2}\dot{x}_{s3}]^T$$

Le modèle dynamique du robot Delta dans l'espace d'état est donc :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ est la matrice d'observation du système.}$$

2.5.2 Linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement

L'équation (2.44) est la représentation du modèle dynamique direct du robot Delta dans l'espace d'état. Cette équation est non linéaire, l'objectif est de la linéariser autour d'un point de fonctionnement. En effet, pour synthétiser une loi de commande robuste H_∞ par l'approche de sensibilité mixte, le modèle dynamique du système doit être linéaire et représenté dans l'espace d'état par ses matrices (A, B et C). Pour cette raison là, nous devons déterminer un modèle linéaire par une linéarisation tangentielle du système représenté par l'équation (2.44), autour d'un point de fonctionnement $(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}})$.

La linéarisation de l'équation (2.44) autour d'un point $(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}})$, nous donne:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{B}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y}_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\text{avec, } \begin{cases} \mathbf{A} = \frac{\partial f_s(\bar{x}_s, \bar{u})}{\partial x_s} \\ \mathbf{B} = \frac{\partial f_s(\bar{x}_s, \bar{u})}{\partial u} \end{cases}$$

Le point de fonctionnement (\bar{x}_s, \bar{u}) correspond à la condition d'équilibre: $f_s(\bar{x}_s, \bar{u}) = 0$. Donc, ceci conduit au système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \mathbf{A}(x_s - \bar{x}_s) + \mathbf{B}(u - \bar{u}) \\ y_s = \bar{y}_s + \mathbf{C}(x_s - \bar{x}_s) \end{cases} \quad (2.46)$$

Posons: $\tilde{u} = u - \bar{u}, \tilde{x} = x_s - \bar{x}_s$ et $\tilde{y} = y_s - \bar{y}_s$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \mathbf{C}\tilde{x} \end{cases} \quad (2.47)$$

Les matrices A et B de ce système linéarisé autour du point de fonctionnement (\bar{x}_s, \bar{u}) sont:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_{s1}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_4}{\partial x_{s2}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_4}{\partial x_{s3}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_{s1}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_5}{\partial x_{s2}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_5}{\partial x_{s3}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_{s1}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_6}{\partial x_{s2}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_6}{\partial x_{s3}}(\bar{x}_s, \bar{u}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_4}{\partial u_2}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_4}{\partial u_3}(\bar{x}_s, \bar{u}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_5}{\partial u_2}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_5}{\partial u_3}(\bar{x}_s, \bar{u}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial u_1}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_6}{\partial u_2}(\bar{x}_s, \bar{u}) & \frac{\partial f_6}{\partial u_3}(\bar{x}_s, \bar{u}) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pour $x_s = \bar{x}_s$ et $u = \bar{u}$, l'équation (2.47) implique:

$$\bar{\dot{x}}_s = 0 \quad (2.50)$$

donc:

$$\begin{cases} \bar{\dot{x}}_{s1} = \bar{x}_{s4} = 0 \\ \bar{\dot{x}}_{s2} = \bar{x}_{s5} = 0 \\ \bar{\dot{x}}_{s3} = \bar{x}_{s6} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

et, $\bar{\mathbf{x}}_s = [\bar{x}_{s1} \quad \bar{x}_{s2} \quad \bar{x}_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

Pour avoir: $\mathbf{f}_s(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}) = 0$, il suffit que:

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1} \left[\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{K}}_m \left(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{x}}_{si}^2 + \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{x}}_{sij} \right) - \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{G}}_n + \bar{\mathbf{G}}_b + \bar{\mathbf{u}} \right] = 0 \quad (2.52)$$

$\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{G}}_n, \bar{\mathbf{G}}_b, \bar{\mathbf{K}}_m, \bar{\mathbf{D}}$ et $\bar{\mathbf{E}}$: sont respectivement les matrices $\mathbf{K}, \mathbf{G}_n, \mathbf{G}_b, \mathbf{K}_m, \mathbf{D}$ et \mathbf{E} calculées pour le point $\bar{\mathbf{x}}_s$.

A cause de l'équation (2.51), $\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{K}}_m \left(\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{x}}_{si}^2 + \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{x}}_{sij} \right) = 0$. L'équation (2.52) devient:

$$\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{G}}_n + \bar{\mathbf{G}}_b = 0 \quad (2.53)$$

Le vecteur point de fonctionnement est donc donné par:

$$(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}) = ([\bar{x}_{s1} \quad \bar{x}_{s2} \quad \bar{x}_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{G}}_n - \bar{\mathbf{G}}_b) \quad (2.54)$$

2.6 Analyse dynamique des modèles linéaires tangents et validation

2.6.1 Introduction

Il est important de remarquer que le modèle linéaire utilisé pour le calcul de la loi de commande linéaire est fonction du choix du point de fonctionnement dans l'espace de travail du robot et l'objectif qu'on voudrait atteindre est de synthétiser une commande robuste, performante et qui permet un bon suivi de trajectoire quelle que soit l'emplacement de l'outil du robot dans l'espace de travail, c'est-à-dire quel que soit son éloignement par rapport au point de fonctionnement.

Le but de cette section, est de choisir le point de fonctionnement le plus approprié pour réaliser les objectifs cités précédemment. On propose alors la méthode suivante:

- Etudier le comportement dynamique du robot Delta dans son espace de travail total, en faisant une analyse dynamique de plusieurs modèles linéaires tangents à des points de fonctionnement répartis uniformément dans la totalité de l'espace de travail du robot.
- Relever les caractéristiques des différents modèles linéaires en faisant le tracé de leurs valeurs singulières maximales et minimales respectives puis on calculera le nombre de conditionnement [Sko1]. En effet, ce nombre permet de mesurer l'écart entre la valeur singulière maximale et minimale du modèle. Plus cet écart est élevé (plus grand que 1) plus le système est difficile à commander, ce qui signifie que le gain du procédé est fortement dépendant de la direction des entrées.
- Cette étude est complétée par le calcul des valeurs propres des différents modèles linéaires. Ceci nous permettra d'observer la nature des pôles et de distinguer le type d'instabilité de chaque modèle linéaire par rapport à la position de son point de fonctionnement dans l'espace de travail du robot.

2.6.2 Définition du nombre de conditionnement [Sko1]

Le nombre de conditionnement d'un système MIMO est le rapport entre la valeur singulière maximale et minimale:

$$\gamma(G(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}(G(j\omega))}{\underline{\sigma}(G(j\omega))} \quad (2.55)$$

$\bar{\sigma}(G)$ et $\underline{\sigma}(G)$ représentent respectivement la valeur singulière maximale et minimale du procédé.

Plus ce nombre est élevé (plus grand que 1), plus le système est difficile à commander: on dit qu'il est mal conditionné, ce qui signifie que le gain du procédé est fortement dépendant de la direction des entrées. La difficulté de commander les systèmes ayant un nombre de conditionnement élevé est due à la présence des incertitudes dans le modèle du procédé. Ces incertitudes ont plusieurs origines:

- les dynamiques négligées lors de la linéarisation,
- la variation des paramètres du modèle linéaire, due aux non linéarités ou aux changements des conditions de fonctionnement,
- et enfin à l'augmentation de l'effet de couplage.

2.6.3 Analyse dynamique des modèles linéaires tangents

Pour faire l'analyse dynamique des différents modèles linéaires tangents obtenus par linéarisation tangentielles autour de plusieurs points de fonctionnement répartis d'une manière uniforme dans tout l'espace de travail du robot Delta, nous avons considérés trois sections horizontales du cylindre représentant le volume de travail du robot. Ces dernières sont situées à différentes hauteurs; en haut du cylindre ($z = -347.4\text{mm}$), au milieu du cylindre ($z = -395.5\text{ mm}$) et enfin en bas du cylindre ($z = -511.9\text{mm}$). Pour chaque section, nous avons considéré cinq points sur l'axe x . Deux points sur la frontière de l'espace de travail (E et F), un point au centre du cercle (M) sur l'axe z , et deux autres points (P et D) situés de part et d'autre de M à une distance de 125mm. Ceci est explicité dans Figure 2.9. A cause de la symétrie ternaire du robot, les points sur l'axe y ne sont pas considérés car ils conduisent aux mêmes résultats que ceux de l'axe x .

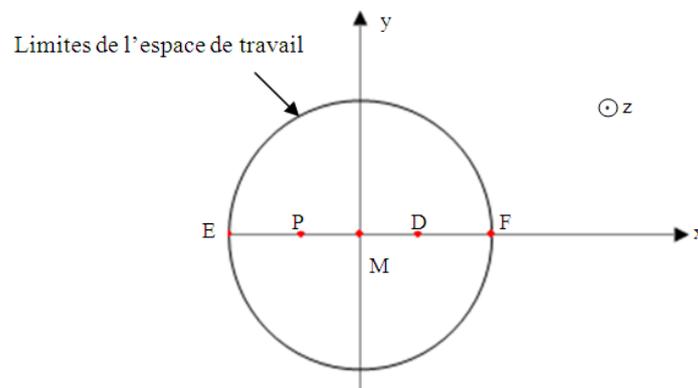


Figure 2.9. Une section de l'espace de travail du robot

Dans ce qui suit, nous allons donner ces différentes notations pour les différents points considérés dans l'espace de travail du robot:

- E_h, P_h, M_h, D_h et F_h sont les points qui appartiennent à la section située en haut de l'espace de travail du robot à une hauteur $z = -347.4\text{ mm}$,
- E_m, P_m, M_m, D_m et F_m sont les points qui appartiennent à la section située au milieu de l'espace de travail du robot à une hauteur $z = -395.5\text{ mm}$,
- E_b, P_b, M_b, D_b et F_b sont les points qui appartiennent à la section située en bas de l'espace de travail du robot à une hauteur $z = -511.9\text{ mm}$.

Les figures ci-dessous représentent le tracé des valeurs singulières (maximale et minimale) des différents modèles linéaires tangents obtenus.

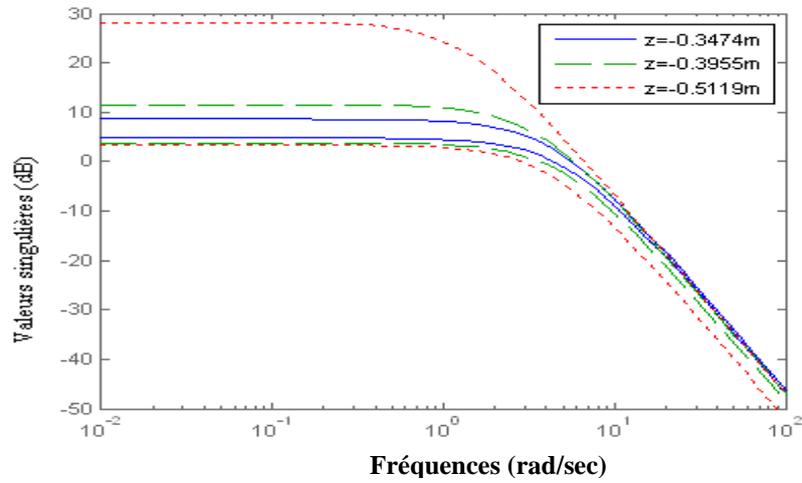


Figure 2.10 Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points : M_h , M_m et M_b

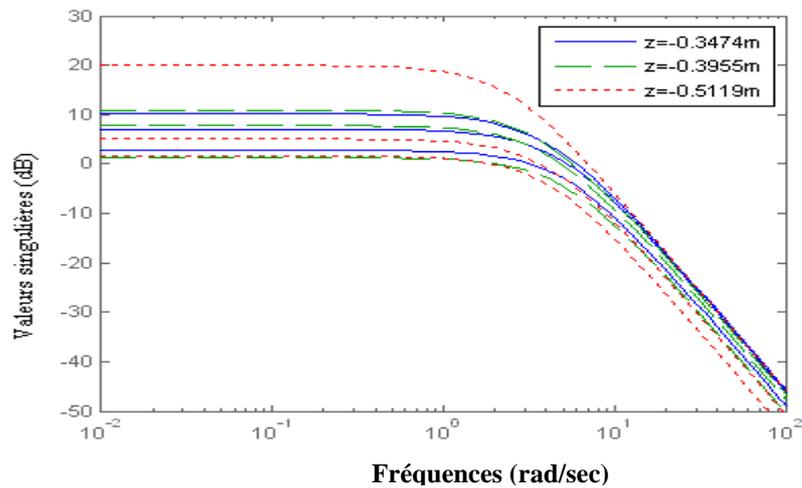


Figure 2.11. Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points : P_h , P_m et P_b

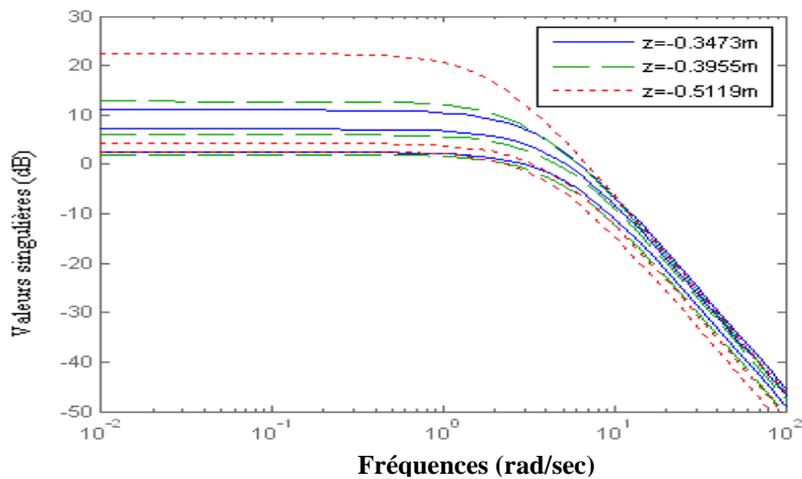


Figure 2.12 Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points : D_h , D_m et D_b

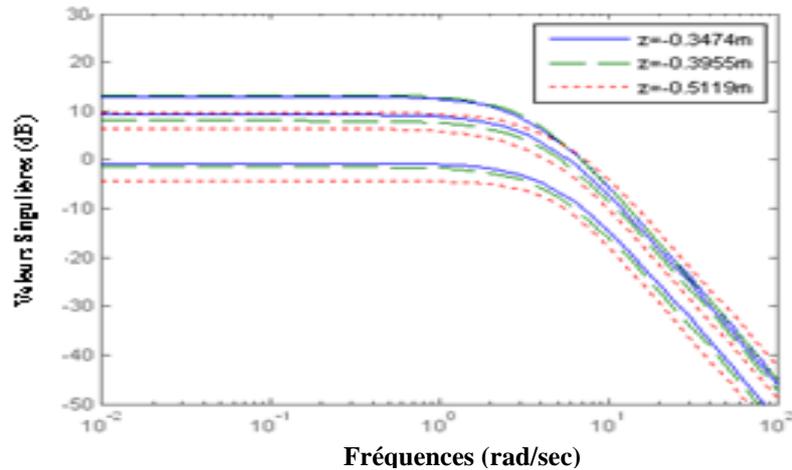


Figure 2.13. Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points : E_h , E_m et E_b

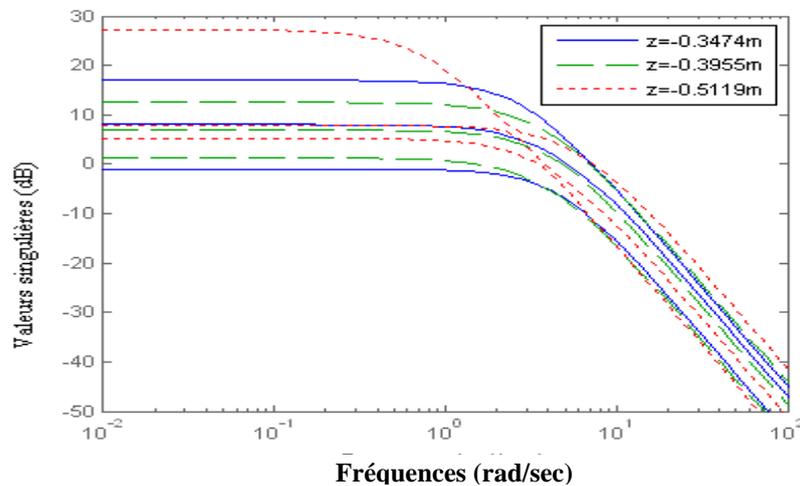


Figure 2.14. Tracé des valeurs singulières des modèles linéaires tangents aux points : F_h , F_m et F_b

Le Tableau 2.2 résume les caractéristiques dynamiques de chaque modèle linéaire tangent.

2.6.4 Interprétations

Considérant les modèles linéaires tangents aux points de fonctionnement situés sur l'axe z ; M_h , M_m et M_b , le tracé des valeurs singulières maximales et minimales de leurs modèles linéaires tangents respectifs est représenté par Figure 2.10.

On remarque que le nombre de conditionnement devient de plus en plus important en descendant vers le bas du cylindre. En effet, le nombre de conditionnement du modèle linéaire tangent à un point de fonctionnement situé sur l'axe z à une hauteur de -0.5119m (M_b), est relativement beaucoup plus élevé ($\gamma(G) = 17.57$) que ceux des modèles linéaires tangents à des points de fonctionnement situés respectivement sur l'axe z à des hauteurs de -0.3474m (M_h) et -0.3955m (M_m). Ceci est aussi vérifié pour tous les modèles linéaires tangents à des points de fonctionnement situés en bas du cylindre représentant l'espace de travail du robot (P_b , D_b , E_b et F_b). Donc il est nécessaire d'éviter de choisir des points de fonctionnement situés en bas de l'espace de travail du robot.

Pour les sections situées au milieu et en haut du cylindre, on peut constater que plus le point de fonctionnement est distant de l'axe z, plus l'écart entre les valeurs singulières maximale et minimale augmente. Ceci est vérifié par le nombre de conditionnement (Voir Tableau 2.2). Ceci peut être expliqué par le fait que plus on s'éloigne de l'axe z du cylindre représentant l'espace du travail du robot Delta plus l'effet de couplage entre les trois axes du robot devient important.

On peut noter aussi, que plus on s'éloigne de l'axe z, plus l'instabilité du modèle linéaire devient oscillatoire. Les valeurs propres des modèles linéaires tangents à des points de fonctionnement situés sur la frontière de l'espace de travail ont des parties imaginaires très élevées, ce qui rend le système plus difficile à commander ($E_h, E_m, E_b, F_h, F_m, F_b$).

Donc d'après les résultats obtenus précédemment, on peut noter qu'il est important d'éviter de prendre des points de fonctionnement situés en bas du cylindre de l'espace de travail du robot, car l'écart entre les valeurs singulières maximale et minimale est très important ce qui implique que les modèles linéaires tangents à ces points sont mal conditionnés et donc difficiles à commander. Aussi, on évitera de choisir un point de fonctionnement très distant de l'axe z, car plus en s'éloigne de cet axe, plus l'instabilité du modèle linéaire tangent devient oscillatoire ce qui est aussi déconseillé.

Pour une trajectoire de prise et dépose le long de l'axe x, il est judicieux de choisir un point de fonctionnement situé sur l'axe z au milieu du cylindre représentant l'espace de travail du robot. Nous avons opté pour un point de fonctionnement situé sur l'axe z à une hauteur $h = -0.3955m$ (M_m). Pour ce point, on peut remarquer que l'écart entre les valeurs singulières maximale et minimale est relativement petit ($\gamma(G) = 2.42$) et il présente une instabilité apériodique.

Tableau 2.2 Caractéristiques dynamiques des modèles linéaires tangents

Points de fonctionnement		$\gamma(G)$	Valeurs propres	Type d'instabilité
z = -0.3474m	$M_h : x = 0$	1.55	$\pm 4.30; \pm 5.13; \pm 5.13$	Instabilité apériodique
	$P_h : x = -0.125m$	2.33	$\pm 4.16; \pm 4.94; \pm 4.72$	Instabilité apériodique
	$D_h : x = 0.125 m$	2.68	$\pm 4.20 \pm 0.38i; \pm 5.24$	Instabilité oscillatoire
	$E_h : x = -0.3085m$	4.83	$\pm 4.12 \pm 0.97i; \pm 4.20$	Instabilité oscillatoire
	$F_h : x = 0.3085m$	7.68	$\pm 3.14 \pm 1.22i; \pm 4.24$	Instabilité oscillatoire
z = -0.3955m	$M_m : x = 0$	2.42	$\pm 3.46; \pm 4.9; \pm 4.9$	Instabilité apériodique
	$P_m : x = -0.125m$	3.0	$\pm 5.01, \pm 3.75; \pm 4.10$	Instabilité apériodique
	$D_m : x = 0.125m$	3.45	$\pm 3.64; \pm 4.22; \pm 4.9$	Instabilité apériodique
	$E_m : x = -0.3085m$	5.5	$\pm 3.91 \pm 1.78i; \pm 4.24$	Instabilité oscillatoire
	$F_m : x = 0.3085m$	3.64	$\pm 3.78 \pm 1.18i; \pm 3.81$	Instabilité oscillatoire
z = -0.5119m	$M_b : x = 0$	17.57	$\pm 1.34; \pm 4.94; \pm 4.94$	Instabilité apériodique
	$P_b : x = -0.125m$	8.29	$\pm 3.03 \pm 0.23i; \pm 4.05$	Instabilité oscillatoire
	$D_b : x = 0.125m$	9.86	$\pm 3.89; 2.07; \pm 3.99$	Instabilité apériodique
	$E_b : x = -0.3085m$	5	$\pm 4.54 \pm 1.89i; \pm 4.17$	Instabilité oscillatoire
	$F_b : x = 0.3085m$	12.55	$\pm 4.76 \pm 0.55i; \pm 0.80$	Instabilité oscillatoire

2.6.5 Modèle linéaire du robot Delta

Le programme qui détermine le modèle linéaire du robot Delta dans l'espace d'état a été développé sous Matlab (m-file script): "linear_Delta.m". Il utilise comme variables d'entrées les trois positions articulaires (c'est-à-dire le vecteur \bar{x}), et comme

variables de sortie les matrices (**A**, **B** et **C**) de la représentation d'état. Le vecteur $\bar{\mathbf{u}}$ est calculé par l'équation (2.54).

Le point de fonctionnement M est donc sélectionné sur l'axe z à une hauteur ($z=395.5\text{mm}$), approximativement à la mi-hauteur du cylindre représentant l'espace de travail du robot Delta. Pour ce point, les paramètres du modèle correspondant sont comme suit:

$$\bar{\mathbf{u}} = [0.85 \ 0.85 \ 0.85]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20.019 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 20.019 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 20.019 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 53.84 & 15.13 & 15.13 \\ 15.13 & 53.84 & 15.13 \\ 15.13 & 15.13 & 53.84 \end{bmatrix}$$

2.6.6 Validation du modèle linéaire

Pour valider le modèle linéaire établi précédemment, une comparaison autour du point de fonctionnement est effectuée entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire du robot Delta. Pour cela, un modèle mécanique multi-corps du robot Delta sous **SimMechanics** est utilisé pour simuler son comportement cinématique et dynamique, il utilise les paramètres réels du robot et prend en considération les capteurs et les actionneurs en terme de résolution, discrétisation et les capacités de puissance des actionneurs.

Des échelons variant de 10% autour du point de fonctionnement ont été appliquées aux entrées des deux modèles pour un temps de simulation de 10 ms. Ceci est illustré par Figure 2.15 [Cho]. Figure 2.16 compare l'évolution temporelle des positions articulaires du modèle linéaire avec celles du robot.

D'après cette figure, on voit bien que le comportement dynamique du modèle linéaire suit correctement celui du modèle non linéaire pour une variation du signal d'entrée. L'erreur statique entre les deux modèles peut être réduite en modifiant légèrement la valeur du couple $\bar{\mathbf{u}}$.

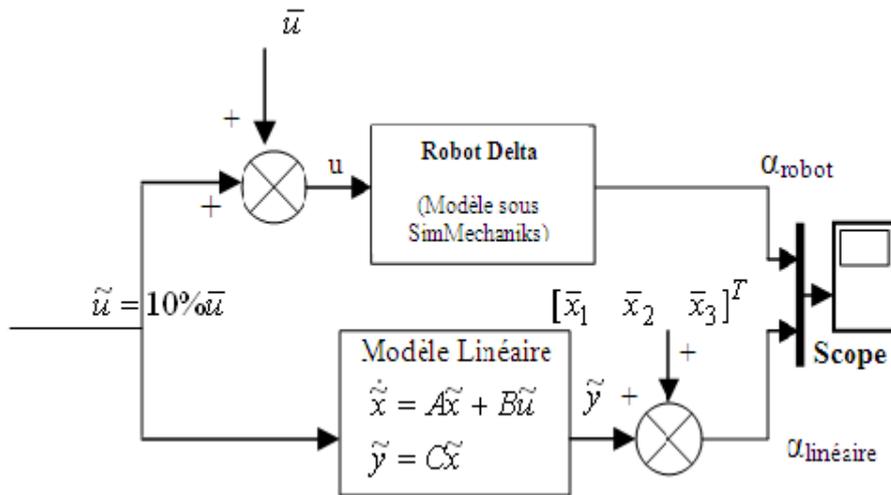


Figure 2.15 Validation du modèle linéaire

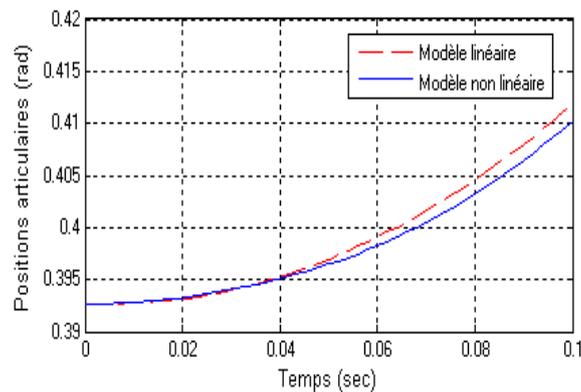


Figure 2.16 Evolutions temporelles des positions articulaires du modèle linéaire et du robot (Axes : 1,2 et 3)

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les caractéristiques géométriques du robot Delta à entraînement direct qui sera utilisé pour valider nos résultats de simulation et expérimentaux. Puis une modélisation dynamique a été effectuée selon la méthode de Newton Euler. Le modèle dynamique inverse obtenu est celui de Codourey [Cod1], sa formulation mathématique est simple et il se caractérise par le fait qu'il dépend non seulement des variables articulaires mais aussi de la cinématique de l'organe terminal. Sur la base de ce modèle, nous avons développé un modèle dynamique inverse du robot Delta qui ne dépend que des variables articulaires. En effet, ce modèle sera utile pour implémenter les algorithmes de commande classiques très utilisés en robotique, tels que la commande par découplage non linéaire, commande PD avec a priori du couple etc...

Dans le but d'appliquer la loi de commande robuste linéaire sur le robot Delta, nous avons développé un modèle dynamique direct dans l'espace d'état en effectuant un choix convenable des variables d'état. Sur ce modèle, nous avons effectué une linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement. Nous avons obtenu un modèle linéaire représenté dans l'espace d'état. Une étude dynamique a été effectuée sur un ensemble de points de fonctionnement répartis sur la totalité de l'espace de travail du robot Delta. Elle a abouti à un choix d'un modèle linéaire tangent à un point de fonctionnement M se trouvant au milieu de l'axe z du cylindre représentant l'espace

de travail du robot. Ce modèle a été validé avec le modèle du robot Delta sous SimMechanics. Sur la base de ce modèle linéaire des contrôleurs H_∞ et H_2 seront synthétisés, mais avant d'arriver à cette phase, il est important de présenter les principes de base de la commande robuste, ce qui fera l'objet du prochain chapitre.

Concepts de base de la commande Robuste H_∞

Ce chapitre présente les concepts de base de la commande robuste linéaire H_∞ . L'analyse de la stabilité et de la robustesse d'un système, soumis à des incertitudes, est exposée et le théorème des petits gains sur lequel repose le problème de commande H_∞ est défini. En choisissant des pondérations fréquentielles bien appropriées, les problèmes de performance et de robustesse d'un système asservi sont ramenés à un unique problème qui est le problème " H_∞ standard". Les pondérations fréquentielles permettent de réaliser aussi ce qu'on appelle la conformation de boucle "loop shaping". Le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak est étudié, c'est un cas particulier du problème H_∞ standard. Il permet de minimiser en même temps la matrice de sensibilité S et de sensibilité complémentaire T du système bouclé. Pour la résolution du problème H_∞ standard, une version simplifiée de l'algorithme de Glover-Doyle est présentée. A titre comparatif, nous présenterons aussi, la résolution du modèle standard par la commande linéaire non robuste H_2 (LQG).

Sommaire

- 3.1 Etat de l'art
- 3.2 Notions élémentaires sur la robustesse
- 3.3 Etude de la robustesse et des performances d'un système asservi
- 3.4 Problème de sensibilité mixte de Kwakernaak
- 3.5 Résolution du problème H_∞ standard par l'algorithme de « Glover-Doyle »
- 3.6 Résolution du problème standard par la commande H_2

3.1 Etat de l'art

3.1.1 Introduction

Dans la plupart des problèmes de commande, l'objectif central est d'atteindre et de maintenir la stabilité et certaines performances malgré les perturbations ou incertitudes souvent pénalisantes du système à commander. Une commande est dite robuste quant elle présente de bonnes marges de stabilité, c'est-à-dire une faible sensibilité à des incertitudes, ou à des variations du processus par rapport à son modèle nominal.

Dans un contexte théorique plus strict, on ne saurait parler de robustesse sans avoir défini d'une part un critère d'évaluation des propriétés dont on souhaite la robustesse (parmi lesquelles, au premier rang, la stabilité) et d'autre part la classe des incertitudes ou variations possibles. La théorie de la robustesse est donc quantitative et déductive [Lar] à partir de données quantifiées sur les domaines d'incertitudes et les performances souhaitées, on doit pouvoir effectuer la synthèse de lois de commande satisfaisant les spécifications souhaitées.

L'approche classique qui était utilisée vers les années 1960 était la théorie linéaire quadratique gaussienne LQG, ou théorie H_2 [Fri][Ber]. Dans cette approche, les incertitudes étaient des perturbations additives modélisées comme des bruits blancs gaussiens possédant des covariances fixes.

Le contrôleur LQG garantissait la stabilité en boucle fermée et des performances satisfaisantes en présence de ces perturbations. Le problème majeur de cette approche est le manque de traitement des incertitudes dans le procédé lui-même. En admettant que les bruits additifs, la théorie stochastique ignore cette importante issue pratique: les incertitudes dans le procédé lui-même sont particulièrement critiques dans les problèmes de commande. C'est dans ce contexte que se situe la commande robuste H_∞ .

Rappelons que la norme H_∞ d'une matrice de transfert d'un système, correspond au pire cas de l'amplification des signaux d'entrée, c'est-à-dire le cas où l'amplification est maximale.

Dans un système de commande, la norme H_∞ se présente comme un moyen très approprié pour évaluer aussi bien le niveau des incertitudes que le gain des entrées de perturbations vers les erreurs de sortie. Elle est donc appliquée principalement quant le système est soumis à des signaux de perturbations et à des incertitudes propres à lui.

Cette théorie a été introduite pour la première fois par Zames en 1981 [Zam1][Zam2]. Il a considéré le problème de minimisation de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité d'un système SISO. Il a montré aussi que les incertitudes du procédé réduisent la capacité de la contre réaction pour minimiser la sensibilité. Ce travail a été développé par la suite par Francis et Zames en 1984 dans [Fra1] et [Fra2], ils ont montré que cette théorie permet de traiter le problème de robustesse d'une manière plus directe que les autres méthodes d'optimisation. Elle a été étendue alors à d'autres problèmes de commande.

3.1.2 Le problème de commande optimale H_∞ et H_2 « Standard »

Ce problème concerne le bloc de diagramme suivant:

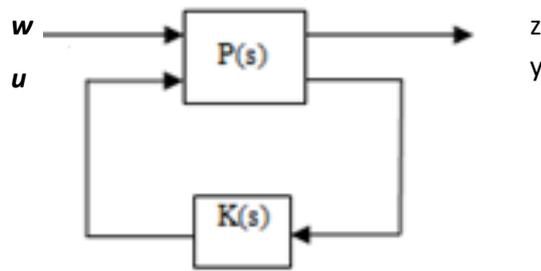


Figure 3.1 Modèle standard

Où " w " représente les perturbations externes, " y " est la mesure accessible pour le contrôleur, " u " est la sortie du contrôleur et " z " est le signal d'erreur qu'on souhaiterait garder petit. La matrice des fonctions de transfert \mathbf{P} ne représente pas seulement le procédé conventionnel mais aussi les fonctions poids, incluses pour spécifier les performances souhaitées.

Le problème de commande optimale H_∞ est donc: la synthèse d'un contrôleur stabilisant \mathbf{K} , de sorte que la matrice de transfert de " w " vers " z " ($\mathbf{T}_{zw}(\mathbf{P},\mathbf{K})$) est stable intérieurement et sa norme infinie est plus petite ou égale à 1.

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \leq 1$$

avec,

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{T}_{zw}(j\omega))$$

où, $\bar{\sigma}$ représente la valeur singulière maximale de \mathbf{T}_{zw}

Le contrôleur H_∞ minimise donc, le maximum du gain d'énergie ($\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$), alors que le contrôleur H_2 minimise la valeur moyenne du gain ($\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$), à travers toutes les fréquences ω .

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(\mathbf{T}_{zw}^*(j\omega)\mathbf{T}_{zw}(j\omega)) d\omega \right)^{1/2}$$

La propriété importante de la commande H_∞ vient de l'application du théorème des petits gains, qui fait que lorsque $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \leq 1$, le système avec le bloc de diagramme de la Figure 3.2 reste stable pour toute incertitude Δ stable, respectant la condition de norme suivante:

$$\|\Delta\|_\infty < 1$$

Ces types d'incertitudes sont appelés "**incertitudes non structurées**", elles sont dues aux dynamiques non modélisées en hautes fréquences, les non linéarités négligées, etc...

Ce résultat de stabilité robuste représente la principale motivation du développement des différentes méthodes H_∞ .

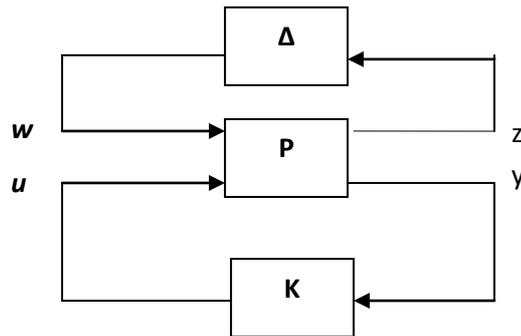


Figure 3.2 Modèle standard avec perturbation Δ

3.1.3 Résolution du problème de commande H_∞ standard

Le problème de résolution H_∞ standard est un problème mathématique bien défini, il a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Initialement, les recherches ont été effectuées dans le domaine fréquentiel, utilisant les fonctions analytiques et les méthodes de la théorie des opérateurs. Parmi ces approches on peut citer, la théorie "Modèle Matching"[Fra3], la théorie de l'interpolation [Fra4] la théorie polynomiale [Tsy][Kwa1] et enfin la théorie de la factorisation "J- spectrale" [Gre1][Gre2]. Malheureusement, les approches fréquentielles standards pour H_∞ , dans le cas des systèmes MIMO, ont rencontré des obstacles mathématiques et computationnels plus significatifs que pour la théorie LQG (H_2).

La difficulté de la méthodologie du domaine fréquentiel a conduit les investigateurs dans le domaine de la commande optimale H_∞ , à s'intéresser au domaine temporel et à l'utilisation des résultats de la théorie de commande optimale classique. L'avantage de cette approche, est qu'elle permet des techniques de synthèse simples.

La résolution du problème H_∞ standard général a progressé d'une manière très importante en 1988 avec l'algorithme de Glover Doyle [Glo1][Glo2] [Glo3] qui donne une solution très proche de la commande LQG (H_2). Elle se base sur la résolution des équations de Riccati.

Une autre approche pour la résolution du problème H_∞ standard est apparue plus récemment. C'est la méthode par inégalité matricielle affine (LMI). Cette méthode a l'avantage de faire une relaxation de certaines hypothèses nécessaires à la résolution par les équations de Riccati au prix d'une complexité algorithmique accrue [Iwa][Gah].

Les détails de la méthodologie de la commande H_∞ peuvent être trouvés dans les livres de Zhou [Zho1][Zhou2], de Skogested et Postlethwaite [Sko2], de Duc et Font [Duc] ou encore dans les références suivantes : [Yed], [[Tsa-M] et [Hal].

3.2 Notions élémentaires sur la robustesse

3.2.1 Introduction

Lors de la modélisation d'un processus physique, des approximations mathématiques sont toujours considérées pour pouvoir le mettre sous forme d'équations mathématiques. Aussi, la plus part des méthodes de synthèse de commande exigent à ce que le modèle du procédé considéré soit simplifié; linéarisation du modèle par rapport à un point de fonctionnement, négliger les dynamiques du système en hautes fréquences,

celles des capteurs ou actionneurs...etc. Ainsi, on peut dire que les paramètres du modèle considéré sont toujours soumis à des incertitudes.

Une commande est dite robuste lorsqu'elle assure la stabilité et un bon niveau de performance malgré la présence des incertitudes dans le système lui-même. Dans ce qui suit, on s'intéresse particulièrement à la stabilité robuste des systèmes soumis à des incertitudes. Ces dernières sont classées selon deux types:

- **Les incertitudes non structurées** qui provoquent des changements importants dans la dynamique du système (dynamiques non modélisées en hautes fréquences, les non linéarités négligées, idéalisation des éléments de commande...etc.). Elles sont caractérisées par une certaine condition de gain.
- **Les incertitudes structurées** qui affectent la connaissance de certains paramètres physiques généralement bien localisés (masses, inerties, centre de gravité...etc.). Elles sont dotées d'une certaine structure.

Dans la suite de notre travail, nous verrons les différentes présentations des incertitudes d'un procédé. Nous expliciterons la notion de stabilité interne d'un système soumis à des incertitudes non structurées puis nous donnerons la définition du théorème des petits gains sur lequel est fondée la théorie de la commande robuste H_∞ .

3.2.2 Incertitudes d'un système

3.2.2.1 Le principal modèle de perturbation

La Figure 3.3 montre le bloc de diagramme du principal modèle de perturbation.

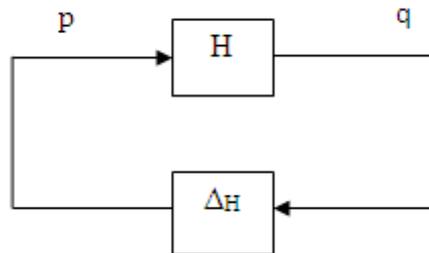


Figure 3.3 Le principal modèle de perturbation

- Le bloc "H" est le système dont on veut étudier la robustesse.
- Le bloc " Δ_H " représente une perturbation de la dynamique du système.

Le gain en boucle ouverte L d'un système est soumis à deux types de perturbation

3.2.2.2 Le modèle de perturbation additive:

Il est représenté par Figure 3.4a. Le gain de boucle est perturbé de L à $L + \Delta_L$.

On a :

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = -\mathbf{S} \quad (3.1)$$

$$\Delta_H = \Delta_L \quad (3.2)$$

\mathbf{S} : représente la fonction de sensibilité.

3.2.2.3 Le modèle de perturbation multiplicative:

Il est représenté par Figure 3.4b. Le gain de boucle est perturbé de L à $(\mathbf{I} + \Delta_L).\mathbf{L}$

On a:

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L} = -\mathbf{T} \quad (3.3)$$

$$\Delta_{\mathbf{H}} = \Delta_{\mathbf{L}} \quad (3.4)$$

\mathbf{T} : représente la fonction de sensibilité complémentaire.

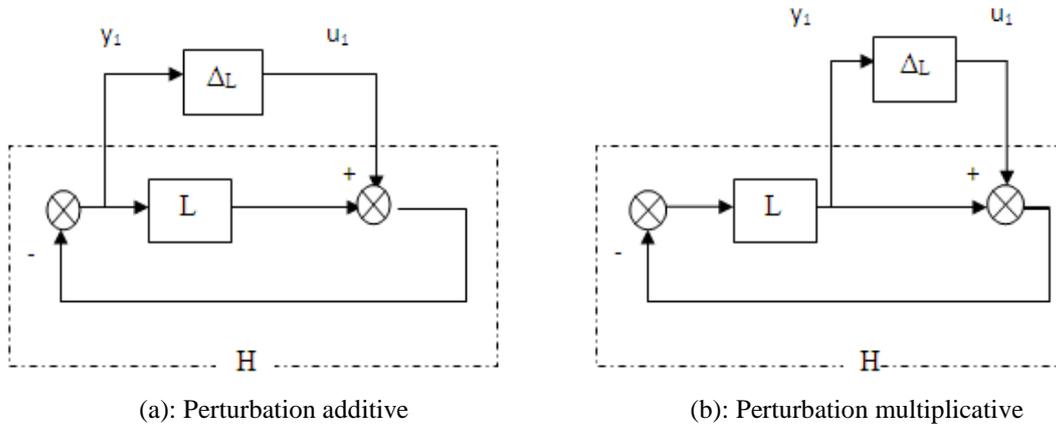


Figure 3.4 Les différentes présentations des incertitudes d'un système bouclé

3.2.3 Stabilités d'un système

3.2.3.1 Stabilité BIBO (Bound Input, Bound Output)

Considérons le système **MIMO** de la Figure 3.5 avec la fonction de transfert linéaire Φ . Le système est stable en sens **BIBO**, si pour toute entrée bornée u , on obtient une sortie bornée y (entrée bornée- sortie bornée).

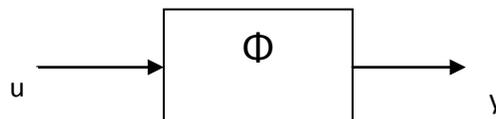


Fig. 3.5 Système MIMO avec entrée-sortie

3.2.3.2 Stabilité Interne

Pour les systèmes constitués d'interconnexion de plusieurs sous-systèmes, on dit que le système est **stable intérieurement** si chaque sous système de l'interconnexion est stable au sens **BIBO** [Mor].

Considérons la boucle de contre réaction de la Figure 3.6a qui n'a pas d'entrée sortie externe. L'ajout d'une entrée interne v et une sortie correspondante ω , aboutit au diagramme de la Figure 3.6b.

Par définition, le système est dit stable intérieurement si le système d'entrée v et de sortie ω est stable au sens **BIBO**. Une autre définition de la stabilité interne est donnée par le théorème des petits gains et qui représente le résultat fondamental de la stabilité robuste:

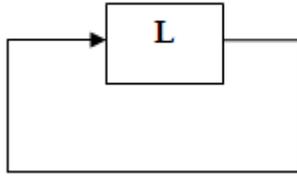


Figure 3.6a Boucle de Contre réaction

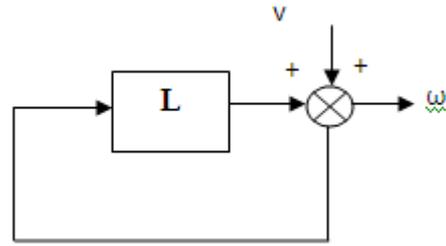


Figure 3.6b Boucle de contre réaction avec l'ajout d'une entrée et d'une sortie interne.

- **Théorème des petits gains:** [Mor][Kwa3]

Dans la boucle de contre réaction de la Figure 3.6a, L est supposé stable au sens **BIBO**. La condition suffisante pour que la boucle de contre réaction soit stable intérieurement est que:

$$\|L\|_\infty < 1 \quad (3.5)$$

Le théorème des petits gains est une condition suffisante pour la stabilité interne.

3.2.3.3 Stabilité robuste du principal modèle de perturbation

Soit à étudier la stabilité interne du principal modèle de perturbation de la Figure 3.3 Le système est supposé stable à l'état nominal, c'est-à-dire qu'il est intérieurement stable si $\Delta_H = 0$. La perturbation Δ_H est supposée stable au sens BIBO. L'introduction des entrées et des sorties internes conduit à la Figure 3.7.

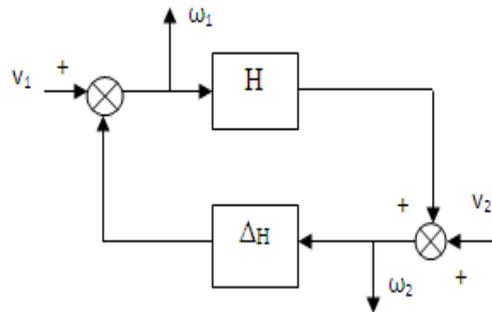


Figure 3.7 Le principal modèle de perturbation avec rajout des entrées-sorties

D'après la Figure 3.7, on peut écrire:

$$\omega_1 = \Delta_H H \omega_1 + v_1 + \Delta_H v_2 \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = H \Delta_H \omega_2 + H v_1 + v_2 \quad (3.7)$$

D'après le théorème des petits gains, les équations (3.6) et (3.7) ont des solutions ω_1 et ω_2 bornées pour toutes entrées v_1 et v_2 bornées si et seulement si les deux inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\|\Delta_H H\|_\infty < 1 \quad (3.8)$$

$$\|H \Delta_H\|_\infty < 1 \quad (3.9)$$

Or,

$$\|\Delta_{\mathbf{H}}\mathbf{H}\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{H}(j\omega)\Delta_{\mathbf{H}}(j\omega)) \quad (3.10)$$

et,

$$\bar{\sigma}(\mathbf{H}(j\omega)\Delta_{\mathbf{H}}(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{H}(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(\Delta_{\mathbf{H}}(j\omega)) \quad (3.11)$$

donc,

$$\bar{\sigma}(\Delta_{\mathbf{H}}(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathbf{H}(j\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.12)$$

L'inégalité (3.12) est une condition suffisante pour la stabilité interne du système perturbé.

Une autre façon pour reformuler les conditions (3.8) et (3.9), est de les remplacer par la condition suffisante:

$$\|\Delta_{\mathbf{H}}\|_\infty \|\mathbf{H}\|_\infty < 1 \quad (3.13)$$

La condition (3.13) est rendue nécessaire et suffisante si les perturbations satisfont l'inégalité suivante:

$$\|\Delta_{\mathbf{H}}\|_\infty \leq 1 \quad (3.14)$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste est:

$$\|\mathbf{H}\|_\infty < 1 \quad (3.15)$$

Cette condition nécessaire et suffisante, représente le résultat fondamental de la stabilité robuste des systèmes soumis à des perturbations non structurées vérifiant la condition de norme (3.14).

3.2.3.4 Stabilité du principal modèle de perturbation avec contrôleur \mathbf{K} (Problème H_∞ standard)

La Figure 3.8, représente le schéma du principal modèle de perturbation avec contrôleur \mathbf{K} . L'application du théorème des petits gains sur ce schéma de commande revient à:

Déterminer le contrôleur \mathbf{K} qui stabilise intérieurement le transfert $\mathbf{T}_{y_1 u_1}$ de u_1 vers y_1 (noté \mathbf{H} précédemment) et réalise la condition de norme: $\|\mathbf{T}_{y_1 u_1}\|_\infty < 1$, pour toutes incertitudes Δ respectant la condition de norme suivante:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1.$$

Ce problème de stabilité robuste est nommé : « **Problème H_∞ standard** », il est fondé sur le théorème des petits gains.

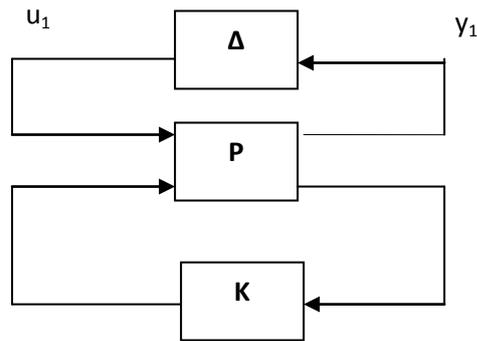


Figure 3.8 Le principal modèle de perturbation avec contrôleur K (Problème Standard)

3.3 Etude de la robustesse et des performances d'un système asservi

Dans ce qui suit, nous allons définir les différents transferts d'un système de commande, puis nous allons montrer que les problèmes de performance d'un système asservi peuvent être traités de la même manière que le problème de stabilité robuste. Donc le problème d'optimisation H_∞ standard prend en charge aussi bien les problèmes de robustesse que les problèmes de performance. Considérons le schéma de régulation multi-variable de la Figure 3.9.

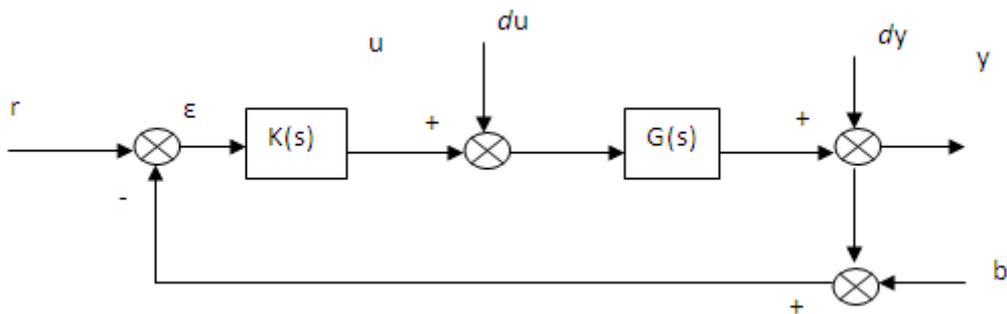


Figure 3.9 Schéma de régulation

avec;

r : signal de référence,

du : perturbation de la commande,

y : signal de sortie,

dy : perturbation de la sortie,

b : bruit de mesure,

u : signal de commande,

ϵ : erreur de suivi.

On suppose que les différents signaux considérés ont la même dimension n .

D'après la Figure 3.9, on peut écrire:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{r} - \mathbf{b}) + \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{S}\mathbf{d}\mathbf{y} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{d}\mathbf{y} - \mathbf{b}) - \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{d}\mathbf{u} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{d}\mathbf{y} - \mathbf{b}) - \mathbf{T}_e\mathbf{d}\mathbf{u} \quad (3.18)$$

avec;

$\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$: Fonction de sensibilité,

$\mathbf{T} = \mathbf{L}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$: Fonction de sensibilité complémentaire,

$\mathbf{T}_e = \mathbf{K}\mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1}$: Fonction de sensibilité complémentaire en entrée,

$\mathbf{L} = \mathbf{G}\mathbf{K}$: Gain de boucle en sortie,

\mathbf{I} : Matrice d'identité.

Les deux fonctions \mathbf{S} et \mathbf{T} vérifient la relation suivante:

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (3.19)$$

3.3.1 Robustesse vis à vis des dynamiques négligées

Pour simplifier l'étude, nous allons négliger les perturbations additives et nous allons envisager le cas d'une erreur multiplicative sur le modèle \mathbf{G} de sorte qu'on ait:

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{G} \quad (3.20)$$

On suppose que $\tilde{\mathbf{G}}$ a le même nombre de pôles instables que \mathbf{G} .

\mathbf{E} est l'erreur multiplicative, elle est supposée stable. On suppose qu'il existe une matrice de fonction \mathbf{W}_1 stable tel que:

$$\mathbf{E} = \Delta \mathbf{W}_1 \quad (3.21)$$

avec,

$$\|\Delta\|_\infty < 1 \quad (3.22)$$

Le schéma de régulation de la Figure 3.9 se met alors sous la forme de la Figure 3.10. Ce schéma peut se mettre sous la forme standard indiquée par la Figure 3.11. Le système \mathbf{P} ci-dessous, est appelé le système augmenté, il contient le système \mathbf{G} et la matrice de fonction de pondération \mathbf{W}_1 . Sa matrice de transfert pour le cas étudié:

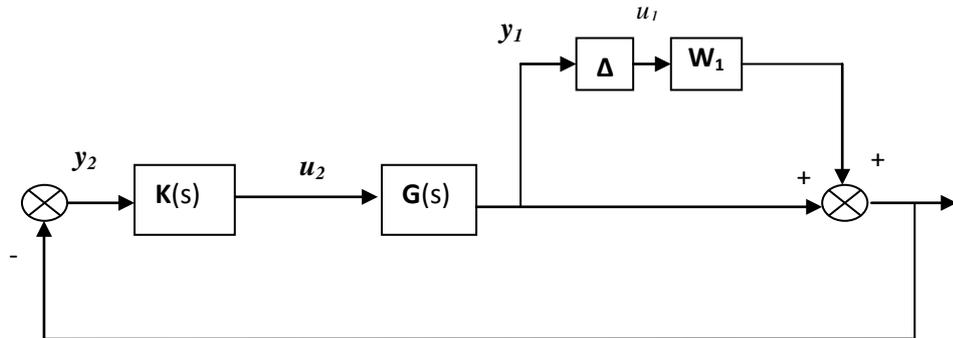


Figure 3.10 Schéma de régulation avec erreur de modèle en sortie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ -\mathbf{W}_1\mathbf{I} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

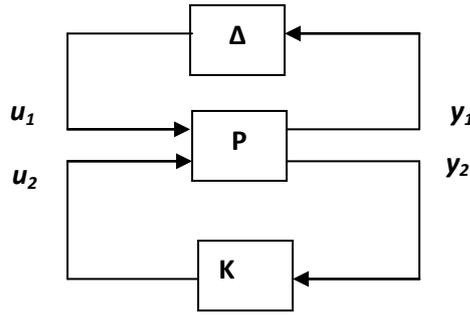


Figure 3.11 Schéma standard

Soit $\mathbf{T}_{y_1u_1}(\mathbf{P}, \mathbf{K})$, la transformation linéaire fractionnaire basse de \mathbf{P} et \mathbf{K} et $\mathbf{T}_{y_2u_2}(\mathbf{P}, \Delta)$ la transformation linéaire fractionnaire haute de \mathbf{P} et Δ .

$$\mathbf{T}_{y_1u_1}(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = -\mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{W}_1 = -\mathbf{W}_1\mathbf{T} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{T}_{y_2u_2}(\mathbf{P}, \Delta) = -(\mathbf{W}_1\Delta + \mathbf{I})\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{G}} \quad (3.25)$$

Appliquons le théorème des petits gains sur le problème standard représenté par Figure 3.11 [Bou]: On suppose que \mathbf{K} stabilise $\mathbf{T}_{y_2u_2}(\mathbf{P}, \mathbf{0})$, alors \mathbf{K} stabilise $\mathbf{T}_{y_2u_2}(\mathbf{P}, \Delta)$ pour toutes incertitudes Δ vérifiant la condition de norme (3.22), ssi : $\|\mathbf{T}_{y_1u_1}\|_\infty < 1$.

C'est-à-dire;

$$\|\mathbf{W}_1\mathbf{T}\|_\infty < 1 \quad (3.26)$$

La condition (3.26), représente la condition de stabilité robuste.

3.3.2 Performances

3.3.2.1 Rejet des perturbations en sortie

Atténuer les perturbations en sortie revient à minimiser la matrice de sensibilité \mathbf{S} . On suppose l'existence d'une matrice de fonction de pondération \mathbf{W}_2 telle que l'atténuation des perturbations est correctement effectuée si:

$$\|\mathbf{W}_2\mathbf{S}\|_\infty < 1 \quad (3.27)$$

3.3.2.2 Poursuite du signal de référence:

La poursuite idéale de la référence \mathbf{r} par la sortie \mathbf{y} , revient à minimiser la matrice de sensibilité \mathbf{S} . Cette condition rejoint donc celle du rejet des perturbations en sortie.

3.3.2.3 Atténuation de l'effet de "du" sur y

La perturbation "du" n'affecte pas très gravement \mathbf{y} , si la norme H_∞ de la matrice de transfert \mathbf{GS} est faible aux fréquences où agit cette perturbation. On définit, une matrice de transfert stable \mathbf{W}_3 , telle que l'effet de "du" sur \mathbf{y} soit suffisamment atténué si:

$$\|\mathbf{W}_3\mathbf{SG}\|_\infty < 1 \quad (3.28)$$

3.3.2.4 Atténuation de l'effet de \mathbf{b} sur \mathbf{u}

Pour éviter la fatigue des actionneurs, le bruit de mesure \mathbf{b} ne doit pas provoquer des agitations excessives de la commande \mathbf{u} . Donc, il est nécessaire de réduire la norme de la matrice \mathbf{KS} aux fréquences où agit le bruit de mesure \mathbf{b} . Il faut définir une nouvelle matrice \mathbf{W}_4 , telle que l'effet du bruit de mesure \mathbf{b} sur \mathbf{u} soit convenablement atténué, d'où:

$$\|\mathbf{W}_4 \mathbf{KS}\|_\infty < 1 \quad (3.29)$$

3.3.3 Bilan obtenu et "Loop shaping"

Pour assurer une bonne robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées, la condition (3.26) doit être assurée. En choisissant le même poids sur chaque composante:

$$\mathbf{W}_1(s) = W_{11}(s)\mathbf{I} \quad (3.30)$$

La condition (3.26) est vérifiée si:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(s)) < \frac{1}{|W_{11}(s)|} \quad (3.31)$$

Où $|W_{11}(s)|$ est un majorant de l'erreur multiplicative du modèle.

En hautes fréquences, nous avons; $\mathbf{T}(s) \approx \mathbf{L}(s)$, donc la condition (3.31) devient:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{L}(s)) < \frac{1}{|W_{11}(s)|} \quad (3.32)$$

Pour assurer un bon rejet de perturbation en sortie et un bon suivi de trajectoire de référence, la condition (3.27) doit être assurée. En choisissant le même poids sur chaque composante: $\mathbf{W}_2(s) = W_{22}(s)\mathbf{I}$, la condition (3.27) est vérifiée si:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(s)) < \frac{1}{|W_{22}(s)|} \quad (3.33)$$

En basse fréquences, nous avons: $\mathbf{S}(s) \approx \mathbf{L}^{-1}(s)$, c'est-à-dire:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{L}(s)) \approx \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathbf{S}(s))} \quad (3.34)$$

Alors la condition (3.33) est équivalente à:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{L}(s)) > |W_{22}(s)| \quad (3.35)$$

Les deux inégalités (3.32) et (3.35) traduisent le "Loop shaping" multivariable représenté par la Figure 3.12. Cette dernière illustre le compromis Robustesse/Performance qui doit être pris en considération lors de la synthèse de la loi de commande: toute augmentation des valeurs singulières améliore les performances en basses fréquences mais peut entraîner l'instabilité. Le meilleur compromis implique qu'au voisinage de la fréquence de coupure, les valeurs singulières $\bar{\sigma}(\mathbf{L}(s))$ et $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(s))$ soient assez proches l'une de l'autre.

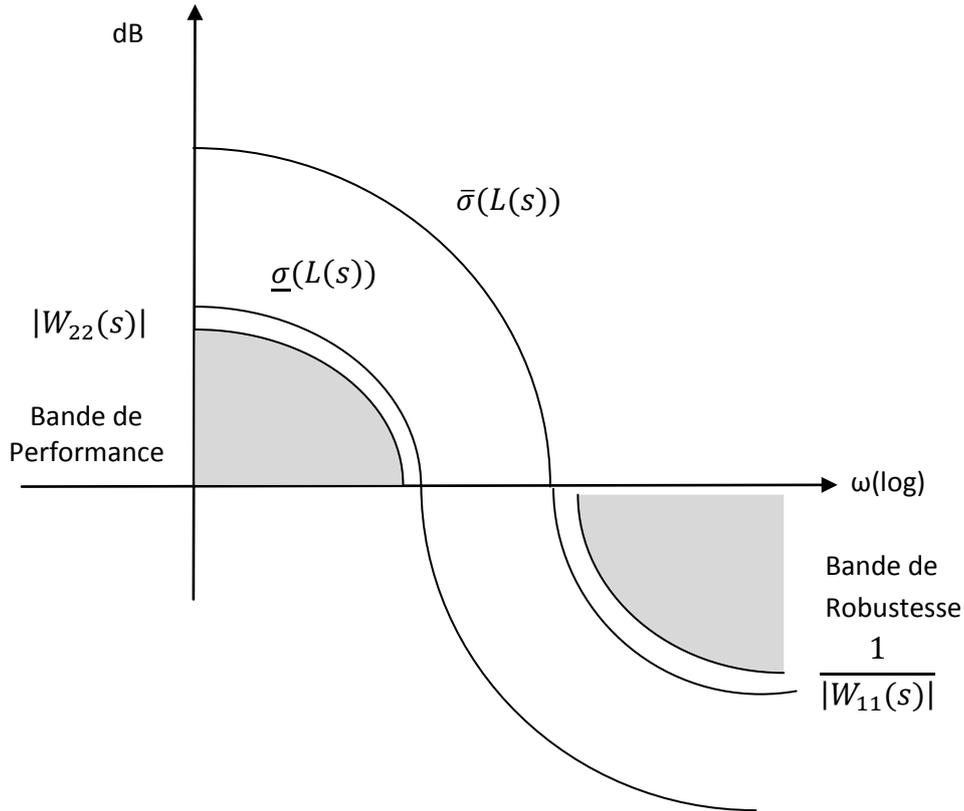


Figure 3.12 Loop shaping multivariable

Il est à noter que ce "Loop shaping" est nécessaire, mais non suffisant car il reste à vérifier les conditions (3.28) et (3.29).

La condition (3.28) impose à réaliser un "Loop shaping" dépendant de \mathbf{G} . En effet, si le gain de \mathbf{G} présente un pic de résonance, l'absence de simplification du pôle correspondant impose que le gain de \mathbf{L} ait le même pic de résonance.

Aux fréquences hautes, la condition (3.29) impose à ce que:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{K}(s)) < \frac{1}{|W_{44}(s)|} \quad (3.36)$$

avec, $\mathbf{W}_4 = W_{44}\mathbf{I}$

Elle se traduit donc par une limitation du gain du régulateur dans les hautes fréquences.

La synthèse d'un contrôleur H_∞ par la méthode du "Loop shaping" développée par McFarlène et Glover [Mcf], fondée sur la factorisation copremière de la matrice \mathbf{G} est une méthode très intéressante car elle permet de réaliser un "Loop shaping" multivariable respectant la condition de non simplification des pôles oscillants peu amortis de \mathbf{G} par les zéros de \mathbf{K} , ainsi que la condition de limitation du gain de \mathbf{K} dans les hautes fréquences.

3.3.4 Synthèse H_∞ par sensibilité mixte

L'étude faite précédemment sur la stabilité robuste et les performances d'un système asservi a abouti aux quatre inégalités suivantes:

$$\|W_1 T\|_\infty < 1 ; \|W_2 S\|_\infty < 1 ; \|W_3 S G\|_\infty < 1 \text{ et } \|W_4 K S\|_\infty < 1$$

Il est possible de les regrouper en un unique problème, représenté par la condition de norme suivante:

$$\|T_{y1u1}\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} W_1 T \\ W_2 S \\ W_3 S G \\ W_4 K S \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (3.37)$$

Ce problème est appelé : le **problème de sensibilité mixte** car il englobe en même temps le problème de stabilité robuste et les problèmes de performance. Le schéma de la Figure 3.7 peut être ramené à un schéma standard et l'objectif serait de déterminer le contrôleur K stabilisant intérieurement le transfert T_{y1u1} et assurant l'inégalité (3.37).

Pour simplifier l'étude, on va considérer dans la suite de notre travail, le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak [Kwa2][Kwa3][Kwa4] qui considère uniquement le problème de minimisation des matrices de sensibilité et de sensibilité complémentaire S et T . Ceci sera réalisé en effectuant un choix convenable des matrices de pondération fréquentielle placées dans des endroits particuliers sur le schéma de commande. Ce schéma a l'avantage d'être à la fois simple tout en permettant de résoudre la majeure partie des problèmes rencontrés en commande. C'est cette méthode qui sera utilisée dans la suite de notre travail pour faire la synthèse d'un contrôleur robuste pour le Robot Delta.

3.4 Problème de sensibilité mixte de Kwakernaak

3.4.1 Principe

Considérant le système multi-variable en boucle fermée de la Figure 3.13.

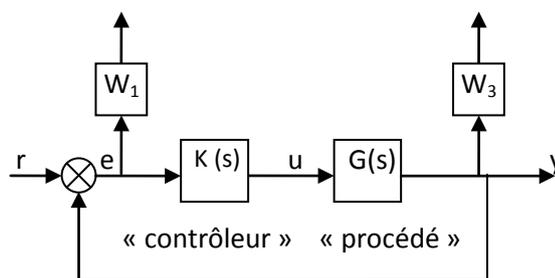


Figure 3.13 Bloc de diagramme d'un système de commande multi-variable

Pour prendre en considération les spécifications de performance, la contrainte (3.38) est imposée à la matrice de sensibilité S (représentant le transfert de r vers e).

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (3.38)$$

$|\mathbf{W}_1^{-1}(j\omega)|$ est la contrainte pour le suivi de consigne. Une matrice de sensibilité faible implique une erreur de suivi de trajectoire petite; donc de meilleures performances.

Pour garantir la stabilité robuste du système en présence des incertitudes multiplicatives du modèle, la contrainte suivante est imposée.

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) < |\mathbf{W}_3^{-1}(j\omega)| \quad (3.39)$$

$\mathbf{T}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}$, représente la matrice de sensibilité complémentaire (transfert de r vers y) et $|\mathbf{W}_3^{-1}(j\omega)|$ représente une mesure anticipative de la plus grande incertitude du système.

Pour la stabilité robuste la matrice de sensibilité complémentaire \mathbf{T} doit être mise petite dans la zone de fréquence où le modèle d'incertitude est large. A cause de la complémentarité de \mathbf{S} et \mathbf{T} , ($\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I}$), ces matrices ne peuvent pas être mises petites aux mêmes fréquences. Donc, l'objectif est de synthétiser un contrôleur avec un large gain aux basses fréquences (de 0 vers une bande passante B) ce qui permet d'avoir \mathbf{S} faible dans cette région, et un gain faible en dehors de cette zone ce qui conduit à un \mathbf{T} petit en hautes fréquences.

Donc on peut dire que le compromis Robustesse/Performance est obtenu par un choix convenable des matrices de fonction de pondération \mathbf{W}_1 and \mathbf{W}_3 .

3.4.2 Augmentation du procédé

Les contraintes (3.38) et (3.39) peuvent être réduites à une spécification unique de norme infinie:

$$\|\mathbf{T}_{y_1u_1}\|_\infty \leq 1 \quad (3.40)$$

Où,

$$\mathbf{T}_{y_1u_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_3\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Notons que la condition (3.40), appelée le **problème de sensibilité mixte**, implique automatiquement les conditions (3.38) et (3.39). Le problème peut être ainsi reformulé sous la forme standard représentée par Figure 3.14 et Figure 3.15. \mathbf{P} est le système augmenté, il contient le procédé \mathbf{G} et les matrices poids \mathbf{W}_i . Ce formalisme sert à étudier le transfert entre u_1 , les entrées exogènes (ici c'est le signal de consigne r) et y_1 (les sorties à contrôler).

Le problème H_∞ standard est défini comme suit : Pour un système augmenté \mathbf{P} ; il faut déterminer un contrôleur stabilisant \mathbf{K} de façon à ce que la fonction de transfert en boucle fermée $\mathbf{T}_{y_1u_1}$ soit stable intérieurement et sa norme infinie inférieure ou égale à 1 ($\|\mathbf{T}_{y_1u_1}\|_\infty \leq 1$).

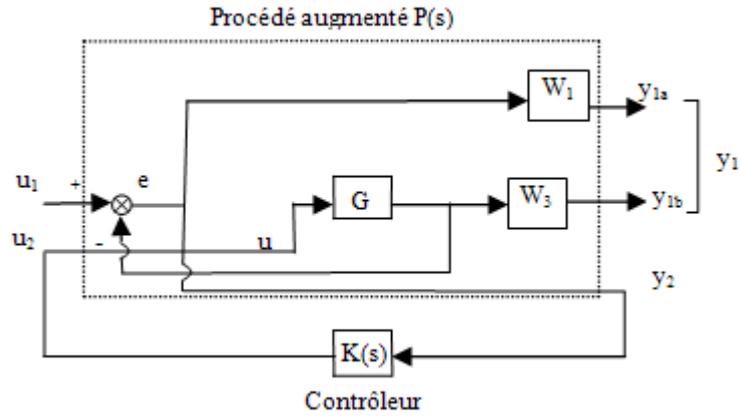


Figure 3.14 Problème pondéré de sensibilité et de sensibilité complémentaire

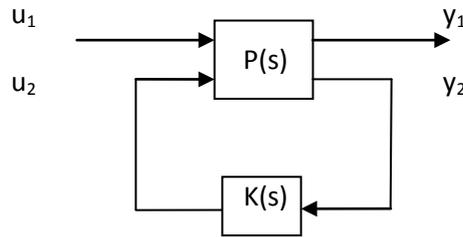


Figure 3.15 Problème standard

3.5 Résolution du problème H_∞ standard par l'algorithme de « Glover-Doyle »

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème H_∞ standard. Celle proposée par Glover-Doyle [Glo2], fondée sur une approche variable d'état, semble être une des mieux adaptées numériquement à la résolution de problème de grande taille.

Afin de mettre en évidence le principe de base de la méthode de résolution du problème H_∞ standard de Glover Doyle, nous allons présenter une version simplifiée de l'algorithme. La version complète est donnée dans l'annexe D.

Le problème H_∞ standard est de trouver une famille de régulateurs K stabilisant le système augmenté P , et tel que:

$$\|T_{y_1 u_1}\|_\infty \leq 1 \quad (3.42)$$

Le système augmenté de la Figure 3.15 s'écrit:

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Notations:

- m_1 le nombre d'entrées exogènes
- p_1 le nombre de sortie régulées
- m_2 le nombre de commandes

- p_2 le nombre de mesures

Hypothèses :

La résolution du problème, par la méthode de Glover-Doyle n'est possible que sous les cinq hypothèses suivantes:

- $H_1 : (\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ sont stabilisables,
- $H_2 : (\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$ et $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ sont détectables,
- $H_3 : \mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{D}_{12}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}]$
- $H_4 : \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
- $H_5 : \mathbf{D}_{11} = 0, \mathbf{D}_{22} = 0.$

Remarque :

Pour \mathbf{D}_{11} et \mathbf{D}_{22} différent de zéro, l'algorithme est donné dans l'annexe D.

Le calcul de régulateur à retour de sortie nécessite la résolution des 2 équations de Riccati suivantes :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1)^T \mathbf{X} + \mathbf{X} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1) + \mathbf{X} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{C}}_1^T \check{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{C}_1) \mathbf{Y} + \mathbf{Y} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{C}_2)^T + \mathbf{Y} (\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{B}}_1^T = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{D}_{21}) \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{12}^T) \mathbf{C}_1 \quad (3.47)$$

Sous les hypothèses « H_1 - H_5 » précédemment énoncées, il existe un correcteur $\mathbf{K}(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure l'inégalité (3.42), si et seulement si:

- $\mathbf{X} \geq 0, \mathbf{Y} \geq 0$
- Le rayon spectral : $\rho(\mathbf{X}\mathbf{Y}) < 1$

La famille de contrôleurs \mathbf{K} est donnée par:

$$\mathbf{K} = T(\mathbf{J}, \mathbf{Q}) \quad (3.48)$$

pour un \mathbf{Q} arbitraire, stable, propre et vérifiant la condition de norme suivante:

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty < 1 \quad (3.49)$$

$T(\mathbf{J}, \mathbf{Q})$, transformation linéaire fractionnaire basse de \mathbf{J} et \mathbf{Q} , avec:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{Z} \mathbf{H} (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}) & -\mathbf{Z} \mathbf{H} & \mathbf{Z} (\mathbf{B}_2 + \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_{12}) \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{Y} \mathbf{C}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T) \quad (3.52)$$

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{Y} \mathbf{X})^{-1} \quad (3.53)$$

3.6 Résolution du problème standard par la commande H_2 (LQG)

Soit le schéma standard de la Figure 3.13, le problème du contrôle optimal H_2 est défini comme suit: Chercher un contrôleur stabilisant \mathbf{K} pour le système augmenté \mathbf{P} de sorte que la norme H_2 de la fonction de transfert de la boucle fermée $\mathbf{T}_{y_1 u_1}$ soit minimisée:

$$\min_{\mathbf{K}} \|\mathbf{T}_{y_1 u_1}\|_2 = \min_{\mathbf{K}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{trace}(\mathbf{T}_{y_1 u_1}^*(j\omega) \mathbf{T}_{y_1 u_1}(j\omega)) d\omega \right)^{1/2} \quad (3.54)$$

Ce problème est équivalent à celui de la commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG), avec un indice de performance [Chi][Fri]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{LQG} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{D}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} dt \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

et des bruits blancs \mathbf{v} et \mathbf{w} corrélés, entrant le système via le canal $[\mathbf{B}_1 \ \mathbf{D}_{21}]^T$ et ayant la jointe fonction de corrélation:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) & \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{W} \end{bmatrix} \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T \\ \mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Le contrôleur optimal $\mathbf{K}(s)$ de H_2 est donc réalisable à la manière LQG, avec les matrices gains de contrôle et de d'observation respectives : $\bar{\mathbf{G}}$ et $\bar{\mathbf{K}}$.

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{S}) = (\mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1) \quad (3.57)$$

où $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}^T$ et satisfait l'équation de algébrique de Riccati:

$$\bar{\mathbf{M}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{M}} - (\bar{\mathbf{M}} \mathbf{B}_2 + \mathbf{S}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}_2^T \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{S}^T) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{P} \mathbf{C}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T) \quad (3.59)$$

où $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^T$ et satisfait l'équation algébrique de Riccati:

$$\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}}^T - (\bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_2^T + \mathbf{X}) \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{C}_2 \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{X}^T) + \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

Le contrôleur optimal final H_2 a donc la forme familière suivante:

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2\bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{D}_{22}\bar{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Limitations:

- 1) \mathbf{D}_{11} doit être égal à zéro, sinon le problème de la commande optimale est mal posé.
- 2) \mathbf{D}_{12} et \mathbf{D}_{12}^T doivent avoir des rangs égaux aux nombres de leurs colonnes respectives.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par un état de l'art sur la commande robuste H_∞ . Il nous a permis d'explicitier les objectifs de cette stratégie de commande, de la comparer à la méthodologie de commande optimale classique LQG ou H_2 et enfin de citer les différents travaux de recherche entrepris pour la résolution du problème H_∞ standard. Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à l'analyse de la stabilité et de la robustesse d'un système, nous avons défini les différents types d'incertitudes d'un système, nous avons rappelé quelques notions élémentaires de la stabilité et de la robustesse et présenté le théorème de la stabilité interne « **Théorème des petits gains** » sur lequel repose la commande robuste H_∞ . Quelques matrices de transferts qui permettent d'analyser la robustesse et les performances d'un système asservi sont définies. Nous avons montré que toutes les spécifications de robustesse et de performance d'un système asservi peuvent être assurées par un choix convenable des gabarits fréquentiels qui permettant de réaliser ce qu'on appelle la conformation de boucle le « **loop shaping** ». Les problèmes de robustesse et de performance sont alors ramenés à un unique problème appelé: le **problème H_∞ standard**. Le problème de **sensibilité mixte de Kwakernaak** est un cas particulier du problème standard car il permet de simplifier le problème et de minimiser uniquement les matrices de sensibilité **S** et **T** et il réalise ce qu'on appelle le meilleur **Compromis Robustesse/Performances**. La résolution du problème standard par la méthode de Glover- Doyle est exposée. Sous certaines hypothèses citées précédemment, l'algorithme donne une solution dans l'espace d'état très proche de celle de la commande **Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)** ou contrôleur H_2 . De ce fait, à titre comparatif, nous avons présenté une résolution du problème standard par la commande H_2 .

Dans le prochain chapitre, nous allons appliquer cette stratégie de commande linéaire sur le robot Delta à entraînement direct. Son modèle dynamique étant fortement non linéaire, peut constituer un très bon exemple pour mettre en évidence la robustesse de cette commande pour traiter aussi bien les systèmes non linéaires que les systèmes linéaires. A titre comparatif, nous allons la comparer à la commande classique linéaire quadratique H_2 et à d'autres commandes classiques largement utilisées en robotique.

Commande robuste du robot Delta

Ce chapitre présente la synthèse et l'implémentation de la commande robuste H_∞ pour le robot Delta à trois degrés de liberté. Les performances obtenues par ce contrôleur sont comparées à celles des autres contrôleurs classiques utilisés en robotique [Rac1], [Rac2], [Rac3], [Rac4]. Le contrôleur H_∞ est synthétisé par l'approche de sensibilité mixte où la matrice de sensibilité \mathbf{S} et la matrice de sensibilité complémentaire \mathbf{T} sont prises en compte. Le modèle linéaire du robot Delta obtenu par linéarisation tangentielle autour d'un point de fonctionnement, développé au chapitre 2, est augmenté par les matrices de pondération fréquentielle. Les paramètres de ces dernières sont graduellement ajustés dans le but d'élargir le maximum possible la bande passante du système bouclé; c'est-à-dire pour avoir les meilleures performances tout en préservant la stabilité robuste du système en boucle fermée.

Le contrôleur H_∞ est synthétisé sur la base de l'algorithme de Glover-Doyle. Le contrôleur synthétisé H_∞ , élargissant le maximum possible la bande passante est implémenté dans le schéma de commande du robot Delta représenté par son modèle sous SimMechanics. Deux schémas de commande sont envisagés; sans et avec l'incorporation du modèle dynamique inverse du robot (couple a priori). Pour le premier cas, les résultats de simulations obtenus sont comparés à ceux d'un autre contrôleur linéaire non robuste H_2 et à un contrôleur classique PID. Dans le second cas, le contrôleur H_∞ utilisé avec le couple a priori est comparé a deux autre stratégies, classiquement utilisées en robotique et qui incorporent le MDI dans leurs schémas de commande, il s'agit de la commande PD avec couple a priori et la commande par découplage non linéaire (Commande dynamique).

Sommaire

4.1 Introduction

4.2 Synthèse d'une commande PID

4.3 Synthèse d'une commande PD avec incorporation du MDI du robot (Couple a priori: Γ_a)

4.4 Synthèse d'une commande par découplage non linéaire (Commande Dynamique)

4.5 Synthèse des contrôleurs linéaires centralisés: Commande robuste H_∞ et commande H_2

4.6 Implémentation des lois de commande et simulation

4.7 Conclusion

4.1 Introduction

Dans le but de synthétiser un contrôleur H_∞ pour le robot Delta par l'approche de sensibilité mixte, un modèle dynamique linéaire tangent autour d'un point de fonctionnement a été développé dans le chapitre 2. Le point de fonctionnement a été choisi sur l'axe z , à une hauteur ($z = -0.395\text{m}$), c'est-à-dire au milieu du cylindre représentant l'espace de travail du robot. En effet, l'analyse dynamique présentée précédemment a montré que les non linéarités et l'effet de couplage dans cette zone sont moins importants.

La synthèse d'un contrôleur H_∞ par l'approche de sensibilité mixte, présenté au chapitre 3, nécessite un choix judicieux des matrices de pondération fréquentielle, car ces dernières permettent de réaliser le meilleur compromis entre les spécifications de robustesse et de performance.

Dans ce chapitre, un contrôleur H_∞ est synthétisé et implémenté dans le schéma de commande du robot Delta représenté par son modèle sous Simmechanics. Les différentes étapes de synthèse sont explicitées et nous présenterons notre approche pour sélectionner les paramètres de synthèse du contrôleur en se basant sur une analyse fréquentielle des matrices de pondération.

Dans le but d'analyser les performances et la robustesse de la commande H_∞ sur le robot Delta, nous allons la comparer aux différentes méthodes classiques utilisées en robotique [Rac1][Rac2][Rac3][Rac4].

Tout d'abord, les deux commandes linéaires robustes H_∞ et H_2 sont comparées à la commande classique décentralisée PID largement utilisée dans le domaine industriel. Le but, est de comparer les performances de ces différentes lois de commandes de position qui n'incorporent pas le modèle dynamique inverse du robot dans leurs schémas de commande. Pour cela, deux trajectoires de référence définies dans l'espace opérationnel du robot sont utilisées pour la prise et dépose; une trajectoire rectangulaire point à point avec une vitesse de transition nulle aux points de transition et une demi-ellipse avec un profil de position parabolique et les différentes trajectoires sont utilisées à différentes dynamiques.

Dans une seconde phase, et dans le but d'améliorer les performances du contrôleur H_∞ , il est utilisé en association avec l'a priori du couple, c'est-à-dire, on incorpore dans le schéma de commande H_∞ , le modèle dynamique inverse du robot Delta. En effet, cette méthode a déjà été utilisée par J. De Cuyper et al. dans [Cuy1][Cuy2] pour améliorer les performances de poursuite d'un banc d'essai d'automobile. L'analyse de la stabilité et de la convergence en boucle fermée a été démontrée.

Les performances et la robustesse du contrôleur H_∞ , utilisé en association avec le couple a priori, sont comparées à celles des deux contrôleurs classiques basés modèles; la commande par découplage non linéaire (commande dynamique) et le contrôleur PD avec couple a priori. Une demi-ellipse à différentes cadences est utilisée comme trajectoire de référence dans l'espace opérationnel.

4.2 Synthèse d'une commande PID

Les commandes de type PID sont implantées dans tous les contrôleurs de robots industriels actuels. Le système est considéré comme un système linéaire et chacune de

ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants [Viv1][Viv2]. Le schéma de commande est représenté par la Figure 4.1.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_p(\boldsymbol{\alpha}_d - \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{K}_v(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d - \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{K}_i \int (\boldsymbol{\alpha}_d - \boldsymbol{\alpha}) d\tau \quad (4.1)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ représentent les positions et vitesses courantes dans l'espace articulaire, $\boldsymbol{\alpha}_d$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d$ les positions et vitesses désirées et \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_v et \mathbf{K}_i sont des matrices diagonales définies positives, de dimension $(n \times n)$, représentant les gains proportionnels K_{pi} , dérivés K_{vi} et intégraux K_{ii} de chaque articulation i .

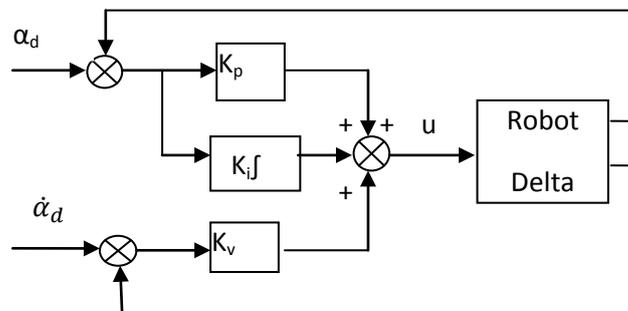


Figure 4.1 Contrôleur PID

La solution la plus courante en robotique consiste à choisir les gains de façon à obtenir un pôle triple réel négatif, ce qui donne une réponse la plus rapide possible sans oscillations. On en déduit alors les valeurs de gains de l'articulation i [Kha]:

$$K_{pi} = 3a_{ii} \omega_i^2; K_{vi} = 3a_{ii} \omega_i; K_{ii} = a_{ii} \omega_i^3, \quad i = 1..3.$$

ω_i : une pulsation choisie inférieure à la fréquence de résonance ω_{ri}

$a_{ii} = A^{i \max}$ désigne la valeur maximale de l'élément A^{ii} de la matrice d'inertie du robot.

4.3 Synthèse d'une commande PD avec incorporation du MDI du robot (Couple a priori: Γ_a)

Pour le cas du robot Delta, les mouvements sont très rapides et précis, il est donc nécessaire de concevoir un contrôleur plus complexe prenant en considération les forces d'interaction dynamiques. L'idée est d'utiliser le modèle dynamique complet du robot comme commande à priori [Kel] [Rey-F][Cod1]. Le modèle dynamique inverse permet de calculer les couples nécessaires à chaque articulation pour suivre la trajectoire désirée. Le modèle dynamique inverse est utilisé en association avec une boucle de contre réaction constituée de n régulateurs Proportionnels Dérivés (PD) indépendants. Le schéma de commande est illustré par la Figure 4.2.

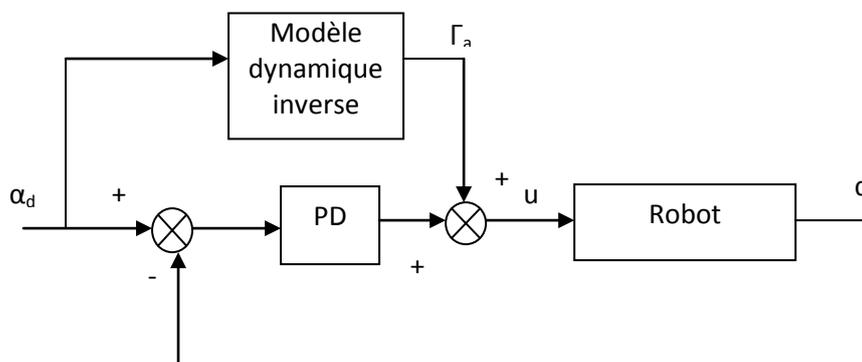


Figure 4.2 Commande PD avec couple a priori.

D'après la Figure 4.2, la commande u appliquée au robot est donnée par l'expression suivante:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\boldsymbol{\alpha}_d - \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{K}_d(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d - \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \boldsymbol{\Gamma}_a \quad (4.2)$$

Où \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_v sont les matrices diagonales des gains de contre-réaction et $\boldsymbol{\Gamma}_a$ est le couple a priori (modèle dynamique inverse du robot).

Dans le chapitre 2, nous avons développé un modèle dynamique inverse du robot Delta qui ne dépend que des variables articulaires, il est déterminé par l'expression suivante:

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{I}_b - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{J})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^2 - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} + \mathbf{K}\mathbf{G}_n - \mathbf{G}_b \quad (4.3)$$

Afin de pouvoir synthétiser un contrôleur PD avec couple a priori, selon la méthode de Kelly et al. [Kel] et Reyes et al. [Rey-F], l'équation (4.3) doit être mise sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (4.4)$$

avec,

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_b - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{J} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = -\mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{D} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}\mathbf{K}_m\mathbf{E} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{K}\mathbf{G}_n - \mathbf{G}_b \quad (4.7)$$

Le couple a priori $\boldsymbol{\Gamma}_a$ est calculé en fonction du mouvement désiré dans le domaine articulaire. A partir de l'équation (4.4), on peut écrire:

$$\boldsymbol{\Gamma}_a = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_d)\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_d + \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_d)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d + \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}_d) \quad (4.8)$$

où, $\boldsymbol{\alpha}_d$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d$ et $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_d$ sont respectivement les positions, vitesses et accélérations désirées dans l'espace articulaire.

L'équation (4.2) devient alors:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p(\boldsymbol{\alpha}_d - \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{K}_d(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d - \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_d)\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_d + \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_d)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d + \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}_d) \quad (4.9)$$

L'analyse de la stabilité de l'équation (4.9) a été illustrée dans [Kel]. En résumé, sous la condition que le modèle dynamique du robot est exact, et si les matrices symétriques définies positives \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_d sont sélectionnées de sorte que:

$$\lambda_M\{K_p\} > c_1 = k_A\|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_d\|_M + k_{c_2}\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d\|_M^2 + k_g \quad (4.10)$$

$$\lambda_m\{K_d\} > \frac{[c_1 + 2[k_{c_1}\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d\|_M]]^2}{4[\lambda_m\{K_p\} - c_1]} + \lambda_M\{A\} \quad (4.11)$$

alors l'erreur de position ($\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\alpha}_d - \boldsymbol{\alpha}$) s'annule asymptotiquement dans un sens local, c'est-à-dire, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$, au moins pour des erreurs de position et de vitesse initiales suffisamment petites.

avec,

- $\lambda_m(A)$ et $\lambda_M(A)$: représentent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique définie positive bornée $A(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. La norme d'un vecteur x est définie comme : $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

$$k_A \geq n^2 (\max_{i,j,k,\alpha} \left| \frac{\partial A_{ij}(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right|), \quad (4.12)$$

$$k_{c_1} \geq n^2 (\max_{i,j,k,\alpha} |C_{kij}(\alpha)|), \quad (4.13)$$

$$k_{c_2} \geq n^3 (\max_{i,j,k,l,\alpha} \left| \frac{\partial C_{kij}(\alpha)}{\partial \alpha_l} \right|), \quad (4.14)$$

$$k_g \geq n (\max_{i,j,\alpha} \left| \frac{\partial g_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|) \quad (4.15)$$

- n :étant le nombre de degré de liberté du robot.
- $A_{ij}(\alpha)$ est l'élément-ij de la matrice $A(\alpha)$, $C_{kij}(\alpha)$ est le symbole ijk de Christoffel et $g_i(\alpha)$ est l'élément i du vecteur $g(\alpha)$.

4.4 Synthèse d'une Commande par découplage non linéaire (Commande Dynamique)

La commande par découplage non linéaire connue aussi sous le nom de commande dynamique est basée sur l'utilisation du modèle dynamique inverse du robot de façon à prendre en compte les forces d'interaction dynamique du mécanisme, ce qui fait de cette stratégie une méthodologie intéressante pour les applications en robotique où la précision et la rapidité sont des caractéristiques importantes à respecter. Elle assure le découplage et la linéarisation des équations du modèle ayant pour effet une réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot.

L'implémentation de cette méthode exige le calcul du modèle dynamique en ligne ce qui nécessite un temps de calcul important pour la commande.

Cette approche est basée sur la transformation par retour d'état du problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. Dans le cas de robots manipulateurs rigides, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est en général égal au nombre de variables articulaires et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée Γ du système en fonction du vecteur d'état $(\alpha, \dot{\alpha})$ et de $\ddot{\alpha}$.

A partir de l'équation (4.3), les équations dynamiques non linéaires du robot peuvent être exprimées comme suit :

$$\Gamma = A(\alpha)\ddot{\alpha} + H(\alpha, \dot{\alpha}) \quad (4.16)$$

$A(\alpha) = (I_b - KK_m J)$; est la matrice d'inertie du robot Delta et,

$$H(\alpha, \dot{\alpha}) = -KK_m D \dot{\alpha}_i^2 - KK_m E \dot{\alpha}_{ij} + KG_n - G_b \quad (4.17)$$

Soit \hat{A} et \hat{H} , les estimations respectives de A et H, si on choisit une commande tel que u :

$$u = \hat{A}(\alpha)w(t) + \hat{H}(\alpha, \dot{\alpha}) \quad (4.18)$$

Si modèle est supposé parfait, le système est commandé par l'équation:

$$\ddot{\alpha} = w(t) \quad (4.19)$$

où, w est le nouveau vecteur d'entrée de commande. Le problème se réduit donc au schéma de commande classique de la dynamique inverse de n systèmes linéaires, invariants, découplé et de second ordre (double intégrateurs).

Si le mouvement désiré est complètement spécifié, le vecteur $w(t)$ est calculé selon l'équation suivante:

$$w(t) = \ddot{\alpha}_d + K_d(\dot{\alpha}_d - \dot{\alpha}) + K_p(\alpha_d - \alpha) \quad (4.20)$$

où, α_d , $\dot{\alpha}_d$ et $\ddot{\alpha}_d$ sont respectivement les positions, vitesse et accélération désirées dans l'espace articulaire et K_p et K_d sont des matrices diagonales définies positives de dimension $(n \times n)$.

Figure 4.3 montre le schéma de commande de la commande dynamique dans le cas d'un mouvement complètement spécifié.

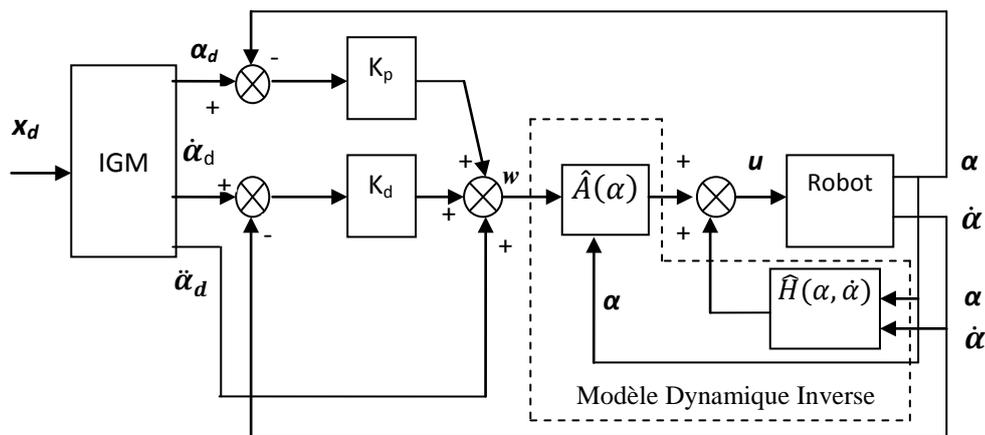


Figure 4.3: Commande dynamique pour un mouvement complètement spécifié

- X_d : représente les coordonnées de la trajectoire désirée dans l'espace cartésien. Le modèle géométrique inverse donne les coordonnées de la trajectoire désirée dans l'espace articulaire.
- Les gains K_{pi} et K_{di} sont choisis pour imposer à l'erreur de l'axe i la dynamique désirée d'amortissement ζ_i (choisi généralement égal à 1 pour avoir une réponse sans dépassement) et de pulsation ω_i quelle que soit la configuration du robot, selon les équations [Kha]:

$$K_{pi} = \omega_i^2; K_{di} = 2 \zeta_i \omega_i, \quad i = 1..3.$$

4.5 Synthèse des contrôleurs linéaires centralisés: Commande robuste H_∞ et commande H_2

4.5.1 Contrôleur robuste H_∞

Pour synthétiser un contrôleur H_∞ pour le robot Delta, par la méthode de sensibilité mixte, nous procédons comme suit:

- Le modèle linéaire tangent (A , B , C , D), développé dans le chapitre 2, est augmenté par les matrices poids W_1 et W_3 sélectionnés de façon à obtenir les meilleures performances et robustesse.
- Un programme (Hinf_synt_Delta.m) est développé dans Matlab pour synthétiser le contrôleur H_∞ , il utilise l'algorithme de Glover-Doyle général présenté dans l'annexe C.

- Le contrôleur H_∞ synthétisé ($\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$) est implémenté dans le schéma de commande du robot Delta représenté par son modèle sous SimMechanics.

4.5.1.1 Choix des matrices de pondération

La synthèse du contrôleur H_∞ est basée sur le modèle linéaire du procédé, utilisant le principe de sensibilité mixte où les matrices de sensibilité \mathbf{S} et de sensibilité complémentaires \mathbf{T} sont prises en compte. Les amplitudes de $|\mathbf{W}_1^{-1}(j\omega)|$ et $|\mathbf{W}_3^{-1}(j\omega)|$ représentent les bornes limites supérieures désirées des valeurs singulières maximales de \mathbf{S} et \mathbf{T} . Donc, le compromis robustesse/performance est réalisé par un choix judicieux de \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_3 .

Pour que l'erreur de suivi de trajectoire soit basse, \mathbf{S} doit être mis petit aux basses fréquences, ce qui veut dire que chaque composante de $\mathbf{W}_1(s)$ doit être un filtre passe-bas [Jau]. En choisissant le même poids sur chaque composante: $\mathbf{W}_1(s) = W_{11}(s)\mathbf{I}$, avec:

$$W_{11}(s) = \frac{s+a}{K(s+b)} \quad (4.21)$$

tel que: ($a > b$) et ($K > \sqrt{2}$). Cette fonction a un gain de -3dB à la pulsation:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2a^2 - K^2b^2}{K^2 - 2}} \quad (4.22)$$

Il faut noter que plus a est plus grand que b et K petit, plus la bande passante est large.

Avec : $\|\mathbf{T}_{y1u1}\|_\infty \leq 1$, nous avons donc:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \leq \frac{1}{|W_{11}(j\omega)|} \quad (4.23)$$

Le choix de cette fonction poids est crucial pour notre synthèse car il est directement lié aux choix des performances suivantes :

- Marge de module de $M = (1/K)$,
- Erreur statique de $\varepsilon = (Kb/a)$
- Bande passante:

$$B > \omega_c \quad (4.24)$$

Dans le but d'obtenir une large bande passante B en boucle fermée (c'est-à-dire un meilleur temps de réponse), ω_c doit être fixée aussi large que possible.

La matrice de fonction $\mathbf{W}_3(s)$ exige au gain de transfert \mathbf{T} de décroître en hautes fréquences avec une certaine pente (roll off). En effet, dans cette zone de fréquence le modèle d'incertitude est large. Une descente rapide du gain en hautes fréquences (-40dB/decade au moins) assure une certaine robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées.

En choisissant, le même poids à chaque composante: $\mathbf{W}_3(s) = W_{33}(s)\mathbf{I}$ et:

$$W_{33}(s) = \frac{s^2}{k} \quad (4.25)$$

Le gain de transfert de \mathbf{T} décroît en hautes fréquences avec un roll off de (-40dB/decade).

La fonction $(1/W_{33})$ a un gain de -3 dB à la pulsation $\omega_T = \sqrt{k\sqrt{2}}$. Il est à noter que plus k est grand plus large est la bande passante. Avec: $\|\mathbf{T}_{y1u1}\|_{\infty} \leq 1$, nous avons alors:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \leq \frac{1}{|W_{33}(j\omega)|} = \left| \frac{k}{s^2} \right| \quad (4.26)$$

A cause de l'inégalité (4.26), la bande passante B du gain de transfert de \mathbf{T} doit satisfaire cette condition:

$$B < \omega_T = \sqrt{k\sqrt{2}} \quad (4.27)$$

A cause de la complémentarité de \mathbf{S} et \mathbf{T} ($\mathbf{S}+\mathbf{T}=\mathbf{I}$), la bande passante B du système en boucle fermée doit satisfaire les deux inégalités (4.24) et (4.27) et ceci conduit à:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2a^2 - K^2b^2}{K^2 - 2}} < B < \omega_T = \sqrt{k\sqrt{2}} \quad (4.28)$$

Comme nous l'avons noté précédemment, ω_c et ω_T doivent être aussi larges que possible. Donc, durant la synthèse du contrôleur H_{∞} , nous devons agir sur les paramètres a , b , K et k des fonctions poids W_{11} et W_{33} pour élargir le maximum possible la bande passante du système en boucle fermée tout en préservant la stabilité robuste. Pour des raisons de sécurité, la synthèse du contrôleur commence avec des performances modérées, ce qui évite une réaction forte du robot. **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** Par la suite, les performances seront progressivement serrées en élargissant graduellement la bande passante de la boucle fermée.

4.5.1.2 Schéma de commande H_{∞} centralisé sans incorporation du couple a priori

A partir du modèle linéaire tangent (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) du robot Delta et des matrices poids \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_3 , nous développons, un programme Matlab (Hinf_synt_Delta.m) qui calcule les paramètres (\mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c , \mathbf{D}_c) du contrôleur $\mathbf{K}_{H_{\infty}}$ synthétisé dans l'espace d'état. Le programme vérifie la stabilité du contrôleur et du système en boucle fermée en calculant leurs valeurs propres. Le tracé des valeurs singulières de \mathbf{S} et \mathbf{T} avec leurs fonctions poids respectives $1/W_{11}$ et $1/W_{33}$ montrent si les spécifications de robustesse et de performance sont réalisées. Le contrôleur synthétisé $\mathbf{K}_{H_{\infty}}$ obtenu est implémenté dans le schéma de commande centralisé représenté par la Figure 4.4.

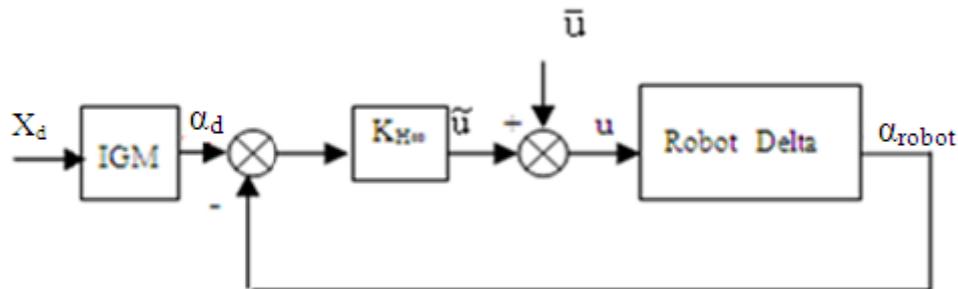


Figure 4.4: Schéma de commande H_{∞} centralisée

\mathbf{X}_d : représente la trajectoire désirée dans l'espace opérationnel. Le modèle géométrique inverse (\mathbf{IGM}) donne les coordonnées articulaires désirées correspondantes

4.5.1.2 Schéma de commande H_{∞} avec couple a priori Γ_a

Pour le schéma de commande H_{∞} avec l'a priori du couple, on remplace \bar{u} par le couple a priori Γ_a , le schéma de commande obtenu est représenté par la Figure 4.5:

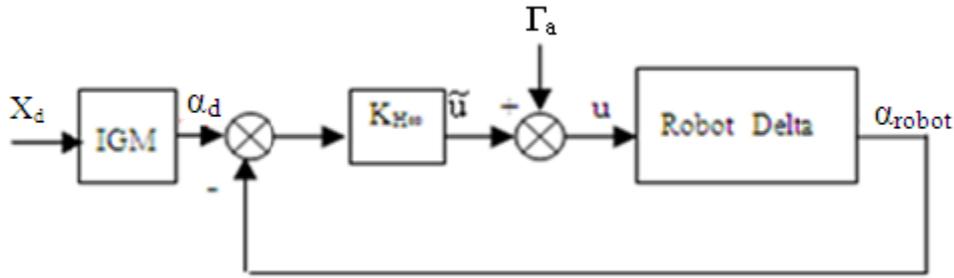


Figure 4.5 Schéma de commande H_∞ avec couple à priori Γ_a

La commande totale est

$$u = \tilde{u} + \Gamma_a \quad (4.29)$$

\tilde{u} : représente la sortie du contrôleur H_∞ .

4.5.2 Synthèse du contrôleur centralisé H_2

Les étapes de synthèse du contrôleur H_2 pour le robot Delta sont identiques à celles de la commande H_∞ . Seulement, pour la résolution du problème standard, on utilise l'algorithme H_2 (LQG), présenté au chapitre 3. Le schéma de commande est le même que celui de H_∞ , représenté par la Figure 4.4, on remplace K_{H_∞} par K_{H_2} .

4.6 Implémentation des lois de commande et simulation

4.6.1 Introduction

Dans le but d'analyser les performances et la robustesse de la commande robuste H_∞ sur le robot rapide parallèle Delta à entraînement direct disponible au Laboratoire de Robotique de l'EPFL, elle a été comparée aux différentes lois de commande classiques, présentées précédemment. Cette évaluation a été effectuée avec des trajectoires cartésiennes complexes très utilisées en industrie pour la prise et dépose, telles que la demi-ellipse et la trajectoire rectangulaire.

Dans un premier temps, nous avons considéré les schémas de commande qui n'incorporent pas le modèle dynamique inverse du robot, c'est-à-dire sans l'a priori du couple. Donc, le contrôleur H_∞ a été comparé uniquement au contrôleur classique PID sans l'a priori du couple et au contrôleur linéaire H_2 .

Dans une seconde phase, on incorpore le modèle dynamique inverse dans le schéma de commande du robot Delta. Le but recherché est d'améliorer les performances du contrôleur robuste H_∞ . Dans cette étape, la commande H_∞ utilisée avec l'a priori du couple est comparée à la commande PD avec couple a priori et à la commande par découplage non linéaire (commande dynamique), car ces deux dernières incorporent le modèle dynamique inverse du robot (couple a priori) dans leurs schémas de commande. Nous n'avons pas considérée dans cette étape, un contrôleur H_2 avec couple a priori car les performances obtenues par ce dernier sont très inférieures à celles du H_∞ .

Les valeurs de paramètres des contrôleurs ont été réglées selon les formules présentées précédemment. Les lois de commande ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab/Simulink. Ces essais en simulation ont permis de déterminer une première approximation du réglage des différents paramètres des contrôleurs.

4.6.2 Comparaison des performances des contrôleurs utilisés sans le couple a priori

Les performances de H_∞ , H_2 et PID sont comparées successivement sur une trajectoire de prise et dépose rectangulaire constituée de trois segments de droite puis sur une demi-ellipse avec un profil de position parabolique.

4.6.2.1 Réglage du PID

La fréquence de résonance est évaluée à environ (60rad/sec), ω_i est choisie à (50rad/sec). Aussi $a_m = 0.03 \text{ N.m/s}^2$. Les valeurs des gains du PID obtenus sont ajustées dans un premier temps lors de la phase de simulation puis un deuxième réglage est effectué pendant les essais expérimentaux. On trouve alors:

$$K_{pi} = 3a_m \omega_i^2 = 225;$$

$$K_{vi} = 3a_m \omega_i = 4.5;$$

$$\forall i \in 1..3$$

$$K_{ii} = a_m \omega_{ii}^3 = 3750.$$

4.6.2.2 Réglage du contrôleur H_∞

Les fonctions de pondération utilisées pour la synthèse du contrôleur H_∞ sont celles qui conduisent à la plus petite erreur de suivi de trajectoire tout en préservant la stabilité robuste du système en boucle fermée. Elles ont été obtenues par simulation puis ajustées lors des tests réels (expérimentaux). Cette partie sera détaillée dans le prochain chapitre qui présente les résultats expérimentaux.

Les fonctions de pondérations utilisées pour la synthèse du contrôleur H_∞ sont donc:

$$W_{11}(s) = \frac{7}{1000} \left(\frac{s + 10^4}{s + 10^{-4}} \right)$$

$$W_{33}(s) = \frac{0.0005s^3 + s^2}{800000}$$

En effet, ces fonctions de pondération permettent d'élargir la bande passante de la boucle fermée jusqu'à 390rad/sec. On ne peut aller au-delà de cette bande car on risque une réaction brusque du robot [Rac5].

4.6.2.3 Réglage du contrôleur H_2

Les meilleures performances du contrôleur H_2 ont été obtenues avec les mêmes fonctions de pondération que celles de la commande H_∞ .

4.6.2.4 Trajectoire rectangulaire

Deux dynamiques de mouvement sont considérées:

- Une trajectoire avec un temps de parcours de 0.5s;
- Une trajectoire avec un temps de parcours 0.28s.

a) Trajectoire rectangulaire à 0.5s

Pour la trajectoire avec un temps de parcours de 0.5s. Les résultats de simulation sont représentés de la Figure 4.6 à la Figure 4. 8.

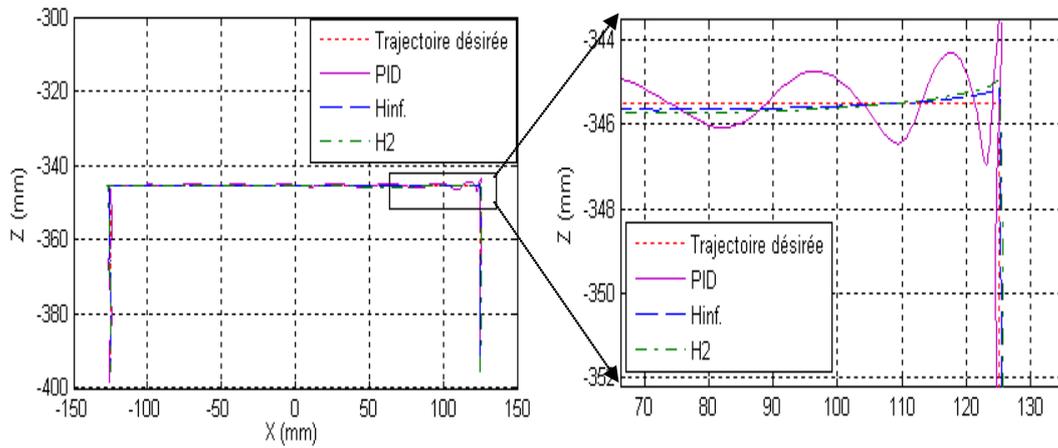


Figure 4.6 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Temps de parcours=0.5s)

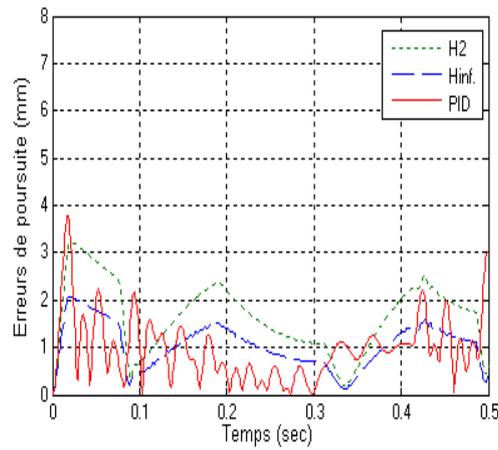
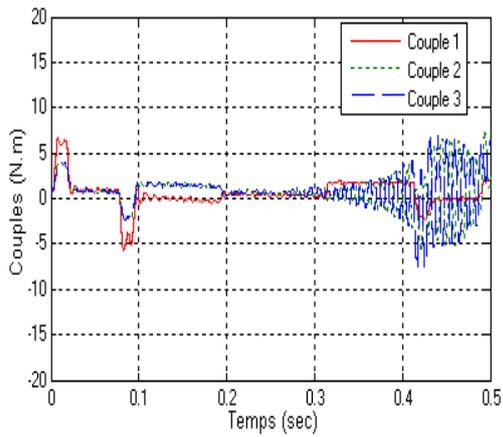
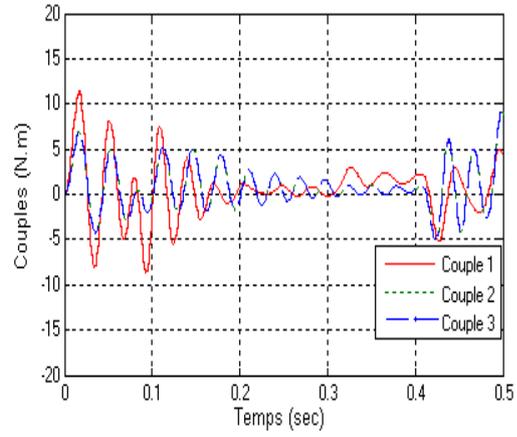


Figure 4.7 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Temps de parcours =0.5s)



(a)



(b)

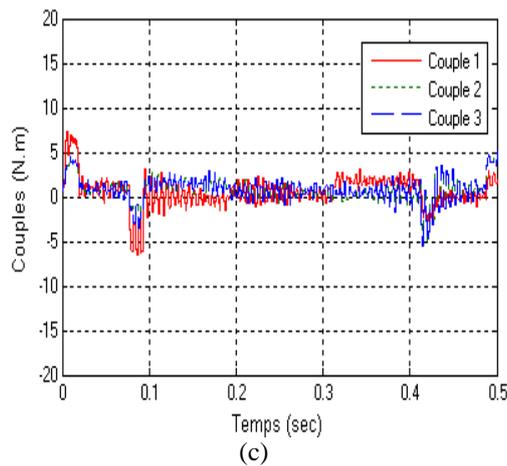


Figure 4.8 Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Temps de parcours=0.5s)

b) Trajectoire rectangulaire à 0.28s

On augmente la dynamique du mouvement jusqu'à ce qu'on atteigne un temps de parcours de 0.28s, on obtient les résultats de simulation suivants:

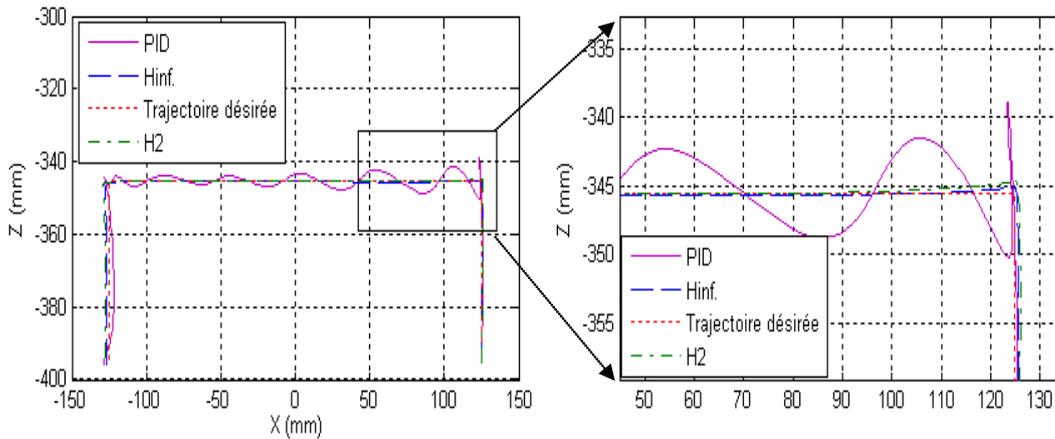


Figure 4.9 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Temps de parcours=0.28s)

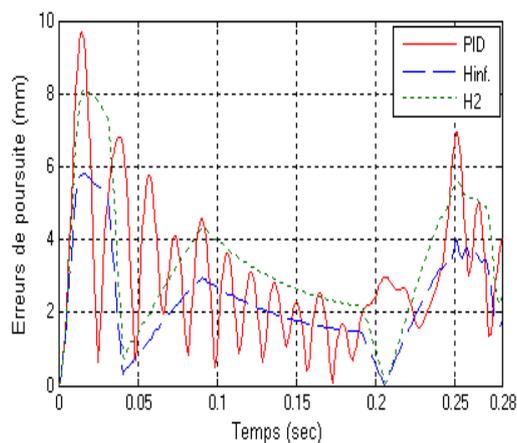


Figure 4.10 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Temps de parcours=0.28s)

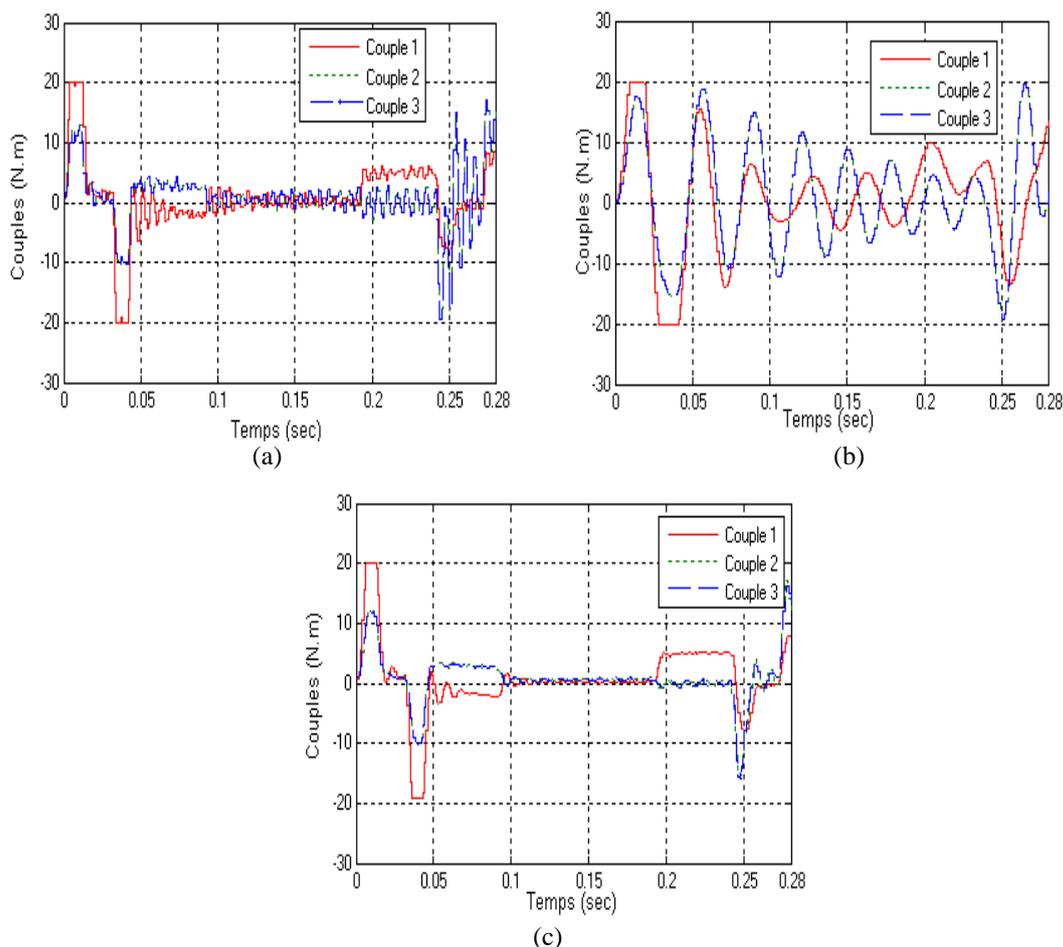


Figure 4.11 Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Temps de parcours=0.28s)

D'après les résultats de simulation obtenus, nous pouvons remarquer que l'erreur de suivi de la trajectoire pour la commande H_∞ est nettement plus petite que celles des deux autres commandes; H_2 et PID. On peut constater aussi que les couples de commande sollicités pour la commande H_∞ sont moins importants que ceux des deux autres. Pour la commande H_2 , on remarque que la commande entre 0.3s et 0.5s est bruitée et très oscillatoire ce qui peut être très néfaste pour les actionneurs.

Pour les trois commandes, on peut aussi remarquer une dégradation importante des performances quand la dynamique du mouvement est augmentée [Rac1]. Les couples sollicités atteignent la saturation (20N.m) et l'erreur de poursuite augmente considérablement. Sachant que les opérations de prise et dépose nécessitent des dynamiques élevées tout en préservant la précision, on peut dire que la trajectoire rectangulaire point à point n'est pas très adaptée pour les opérations de prise et dépose.

4.6.2.5 Trajectoire demi-ellipse

Pour pallier au problème précédent, nous allons tester un autre type de trajectoire très utilisée en robotique pour la prise et dépose; il s'agit d'une demi-ellipse avec un profil de position parabolique. On considère deux dynamiques de mouvement:

- Une trajectoire avec une accélération de 5G et une vitesse de 0.65m/s ce qui correspond à un temps de parcours de 0.5s;

- Une trajectoire avec une accélération de 12G et une vitesse de 1m/s ce qui correspond à un temps de parcours de 0.28s;
- Les résultats de simulation sont représentés de la Figure 4.12 à la Figure 4.17.

a) Demi-ellipse à 5G et 0.65m/s

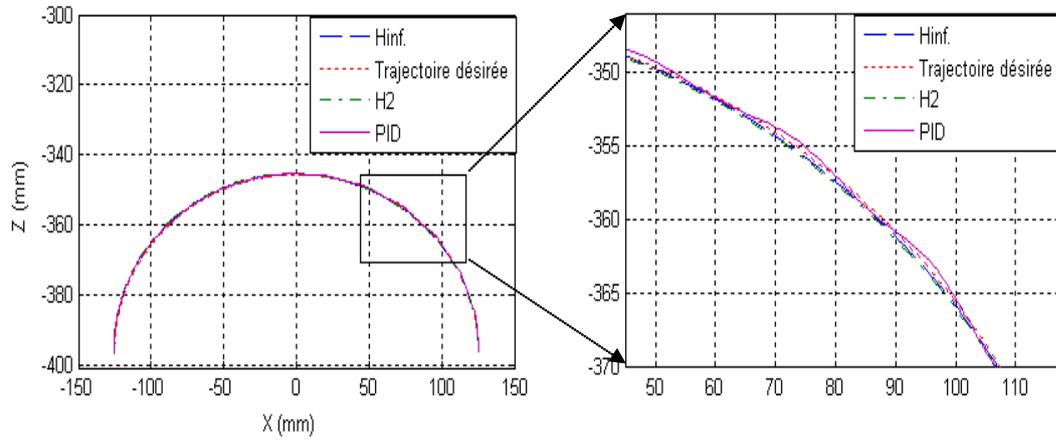


Figure 4.12 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s)

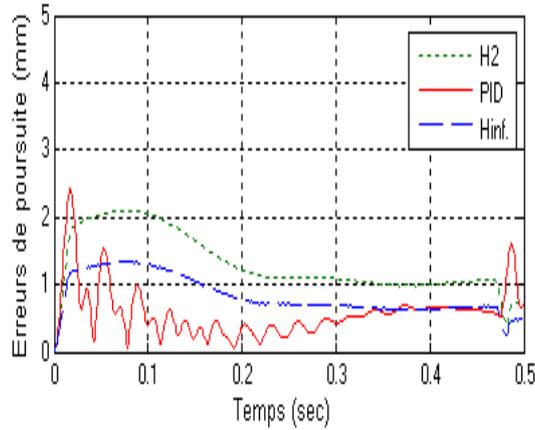
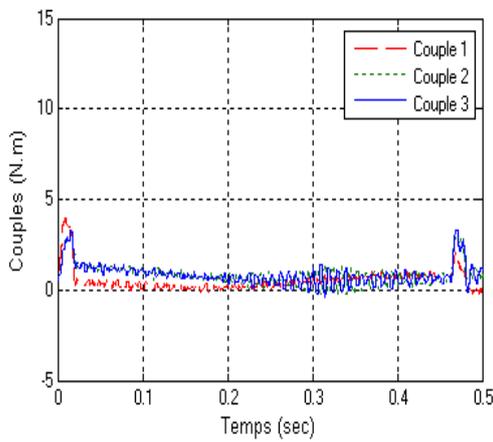
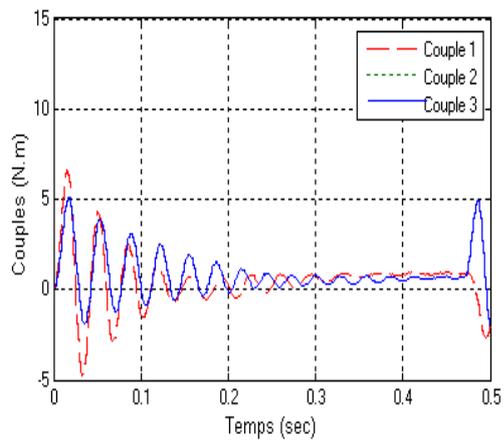


Figure 4.13 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s)



(a)



(b)

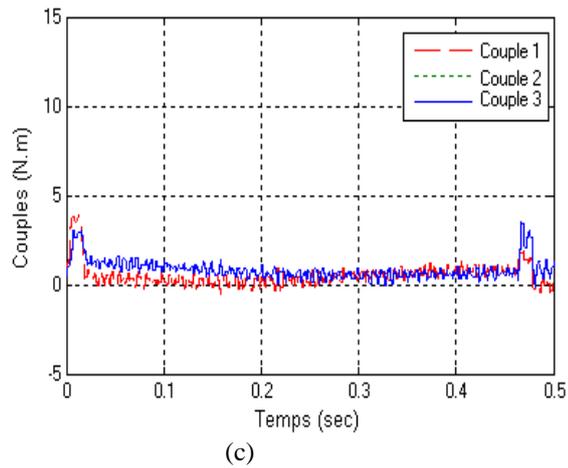


Fig. 4.14 Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞
(Acc. = 5G, vitesse = 0.65m/s)

b) Demi-ellipse à 12G et 1m/s

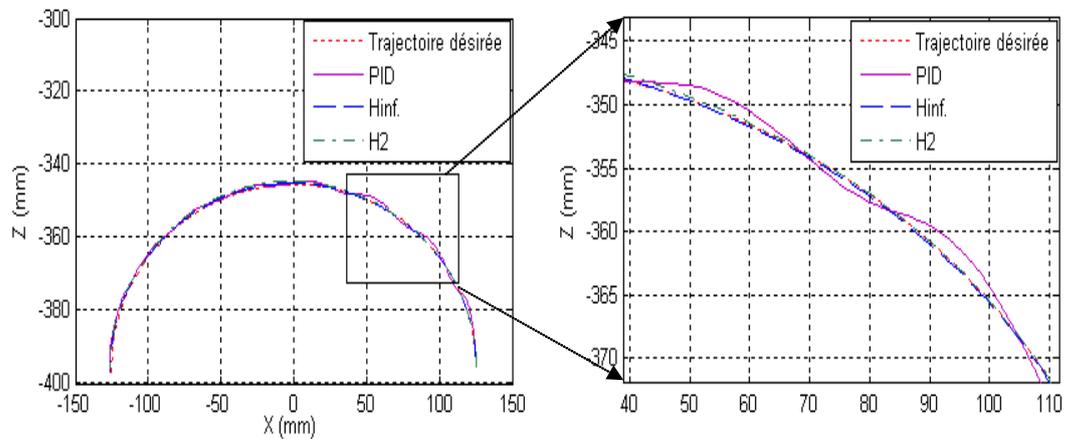


Figure 4.15 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1 m/s)

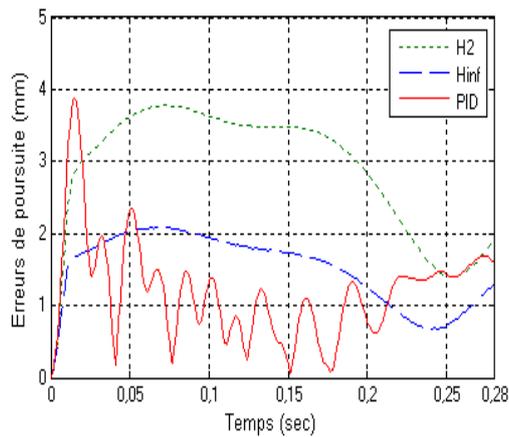


Figure 4.16 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1 m/s)

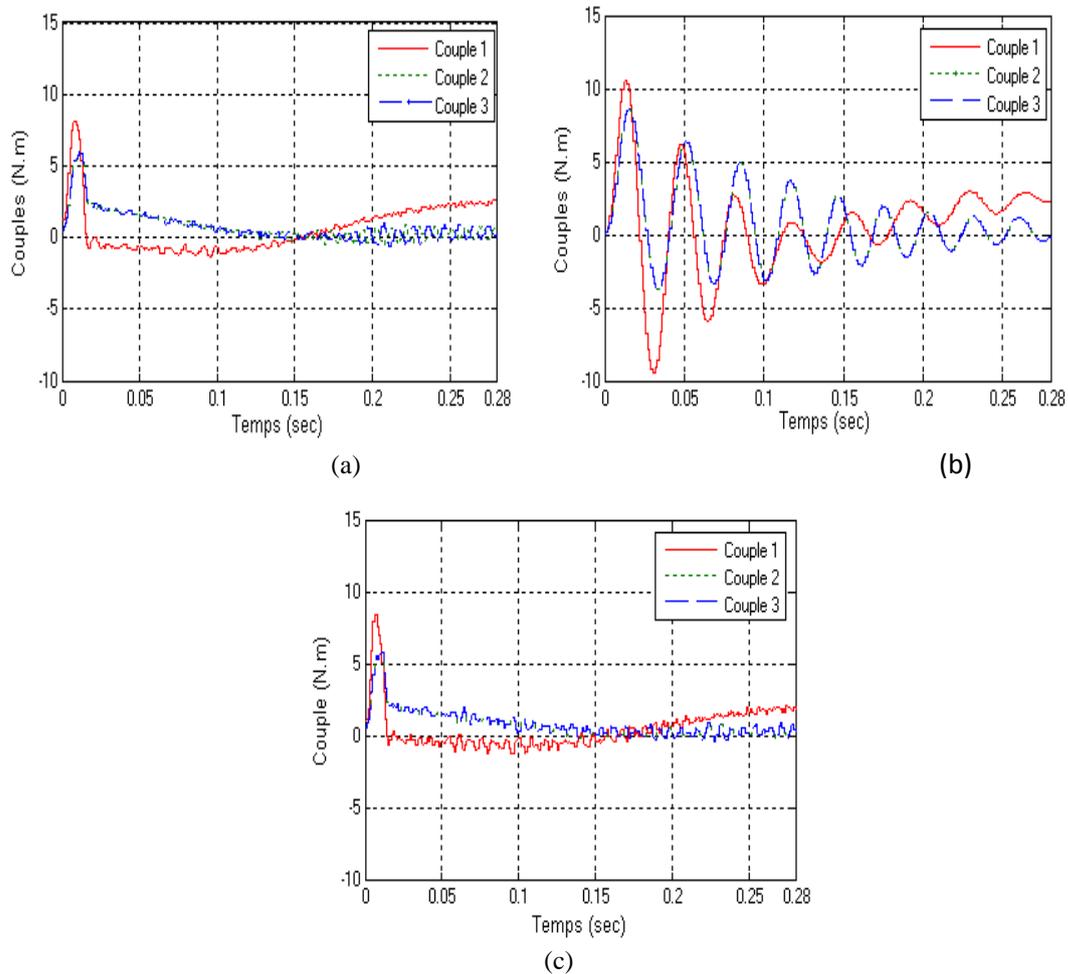


Figure 4.17 Entrées de commande (a): Commande H_2 ; (b): Commande PID ; (c): Commande H_∞ (Acc. =12G, vitesse = 1m/s)

4.6.2.6 Analyse quantitative des résultats

Pour la trajectoire demi-ellipse et pour les deux dynamiques de mouvements utilisés, on peut constater une amélioration importante des performances des trois commandes par rapport aux performances obtenues pour une trajectoire rectangulaire. L'erreur de suivi de trajectoire est plus petite et les couples de commandes sont moins importants. Ceci est évident car la distance du trajet pour la demi-ellipse est plus courte.

On peut aussi remarquer que les performances de H_∞ restent supérieures à celles des deux autres commandes. Les résultats de simulation obtenus dans cette section sont résumés dans le Tableau 4.1.

Le tableau ci-dessous montre bien que l'erreur max et l'erreur de fin de positionnement de H_∞ sont nettement plus petites que celles des deux autres commandes. L'erreur de poursuite maximale et l'erreur de fin de positionnement de H_∞ sont plus petites que celles de H_2 et de PID, dans tous les cas de figures présentés. Et on sait que dans les opérations de prise et dépose en robotique, ces erreurs doivent être minimisées au maximum pour obtenir la précision désirée. On peut par contre noter que le RMS de PID pour la trajectoire demi-ellipse de 12G et à la vitesse 1m/s est plus petit que celui de H_∞ .

Tableau 4.1: Comparaison des performances des commandes H_∞ , H_2 et PID sans l'a priori du couple

Commandes		H_∞			H_2			PID		
Performances		Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)
5G 0.65m/s	Traj. Rect.	2.1	0.5	1.15	3.23	0.62	1.81	3.78	3.03	1.17
	Traj. Demi-ellipse	1.33	0.5	0.88	2.1	0.74	1.38	2.42	0.74	0.7
12G 1m/s	Traj. Rect.	5.78	1.78	2.64	8.07	2.42	3.8	9.69	4	3.6
	Traj. Demi-ellipse	2.09	1.29	1.58	3.77	1.91	3.03	3.87	1.62	1.38

Pour la commande H_2 les résultats de simulation sont beaucoup moins satisfaisants que ceux de H_∞ [Rac2]. L'erreur maximale et le RMS sont très importants. Ce résultat est prévisible, car n'oublions pas que cette commande est conçue principalement pour minimiser l'erreur moyenne des entrées de perturbation du système vers les sorties à contrôler et ne prend pas en considération les variations des paramètres du système.

On peut constater aussi que les résultats de simulation obtenus pour la trajectoire rectangulaire point à point sont moins satisfaisants que ceux de la demi-ellipse, pour les trois commandes considérées. Les couples d'entrée sont plus importants et atteignent la saturation pour une la trajectoire avec un temps de parcours de 0.28s. Ceci se comprend aisément, car le trajet est plus long et les accélérations obtenues sont plus grandes que celles de la trajectoire de demi-ellipse. Ceci explique pourquoi les trajectoires demi-ellipse sont plus intéressantes pour les opérations de prise et dépose; elles sont exécutées en un temps plus petit et produisent des erreurs dynamiques plus petites [Rac1].

4.6.2.7 Conclusion

Les résultats de simulation présentés dans cette section montrent que la commande H_∞ , implémenté sur le robot Delta sans l'incorporation du modèle dynamique inverse, présente de meilleures performances que la commande classique décentralisée PID, très utilisée dans les robots industriels. Aussi, comme c'était prévu, lors de la synthèse de la commande H_2 , les résultats de simulation de cette dernière sont beaucoup moins satisfaisants que ceux de H_∞ , vu les simplifications considérées sur le modèle augmenté et le critère de minimisation utilisé.

L'augmentation de la dynamique du mouvement a montré une dégradation des performances de la commande H_∞ , utilisé sans l'incorporation du MDI du robot. Au delà d'une accélération de 12 G et une vitesse de 1m/s, l'erreur maximale de suivi de trajectoire et l'erreur de fin de positionnement deviennent très importantes, ce qui n'est pas toléré pour les opérations de prise et dépose. Donc l'incorporation du MDI dans le schéma de commande du robot devient nécessaire, car il permet de calculer les couples nécessaires à chaque articulation pour suivre la trajectoire désirée.

4.6.3 Synthèse des lois de commande avec l'a priori du couple Γ_a

4.6.3.1 Introduction

Dans le but d'améliorer les performances de la commande H_∞ , implémenté sur le robot Delta, il est nécessaire d'incorporer le MDI, c'est-à-dire le couple a priori Γ_a , dans son schéma de commande. En effet, ce dernier a pour rôle de déplacer le point de fonctionnement du contrôleur, de façon non linéaire, et de considérer localement le système comme linéaire et découplé [Cod1].

Le contrôleur ainsi obtenu est comparé aux deux contrôleurs classiques basés modèles présentés précédemment: le contrôleur PD avec couple a priori et le contrôleur par découplage non linéaire [Rac3][Rac4].

La trajectoire de référence utilisée est la demi-ellipse puisque elle donne de meilleures performances que la trajectoire rectangulaire.

L'objectif visé est d'atteindre des dynamiques très élevées, jusqu'à trois allés retour de la nacelle par seconde ce qui revient à un temps de parcours de 0.153s tout en préservant des performances satisfaisantes.

4.6.3.2 Réglage du contrôleur PD avec couple a priori

Pour calculer les paramètres du contrôleur PD avec a priori du couple, nous suivons la procédure de synthèse indiquée dans le paragraphe 4.3.

- 1- Calculons les paramètres de synthèse: k_A , k_{c_1} , k_{c_2} et k_g en utilisant les équations (4.12) à (4.15) du paragraphe 4.3.

En utilisant les valeurs numériques du Tableau 2.1 du chapitre 2, on trouve:

$$\begin{aligned} k_A = 0.06: & & k_{C1} = 0.36 \\ k_{C2} = 1.08: & & k_g = 1.8 \\ \lambda_M(A) = 0.025 & & \end{aligned}$$

- 2- Utilisons les deux équations (4.10) et (4.11) pour calculer les paramètres du contrôleur K_p et K_d :

Pour la trajectoire de référence désirée,

$$\|\dot{\alpha}_d\|_M = 6.25 \text{ rad/s} \text{ et } \|\ddot{\alpha}_d\|_M = 645 \text{ rad/s}^2.$$

On trouve finalement:

$$\begin{aligned} \lambda_M\{K_p\} &> c_1 = 82 \\ \lambda_m\{K_d\} &> 2.45 \end{aligned}$$

- 3- Les paramètres du contrôleur sont ajustés par simulation et deviennent:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{500, 500, 500\} \\ K_d &= \text{diag}\{4.4, 4.4, 4.4\}. \end{aligned}$$

4.6.3.3 Réglage du contrôleur par découplage non linéaire

La procédure de synthèse et le schéma de commande sont indiqués dans le paragraphe 4.4. Les valeurs à choisir pour régler la commande par découplage non linéaire sont la pulsation ω_j et le facteur d'amortissement ζ_j . Pour $\omega_j = 50 \text{ rad/s}$ et le facteur ζ_j égal à 1 pour éviter des dépassements et selon les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} K_{pi} &= \omega_i^2 \\ K_{di} &= 2 \zeta_i \omega_i \end{aligned}$$

Les valeurs du contrôleur sont fixés après avoir été ajustés par simulation à:

$$K_{pi} = 10000$$

$$K_{di} = 100.$$

4.6.3.4 Performances

Les performances de H_∞ en association avec le couple a priori (CA), du contrôleur PD avec CA et de la commande dynamique (CD) sont comparées sur une trajectoire de référence demi-ellipse. La dynamique du mouvement est augmentée graduellement jusqu'à atteindre une accélération de 15G et une vitesse de 2.05m/s, ce qui équivaut à un temps de parcours de 0.153s, c'est à dire cela revient à trois aller-retour de la nacelle par seconde.

Les Figures 4.18, 4.21 et 4.24 montrent les réponses obtenues avec un zoom sur un secteur de la trajectoire, les Figures 4.19, 4.22 et 4.25 montrent les erreurs de poursuite pour chaque dynamique et les courbes 4.20, 4.23 et 4.26 montrent les couples de commande appliqués au robot.

Les résultats de simulation obtenus pour les trois dynamiques de mouvement sont résumés dans le Tableau 4.2.

a) Demi-ellipse à 5G et 0.65m/s

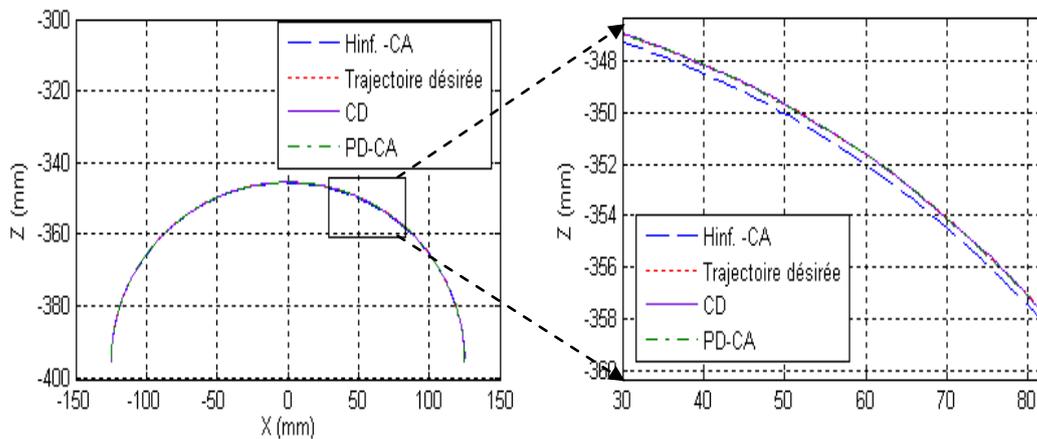


Figure 4.18 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s)

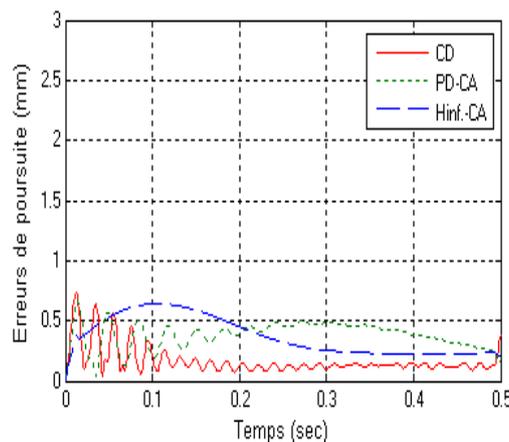


Figure 4.19 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 5G, vitesse = 0.65m/s)

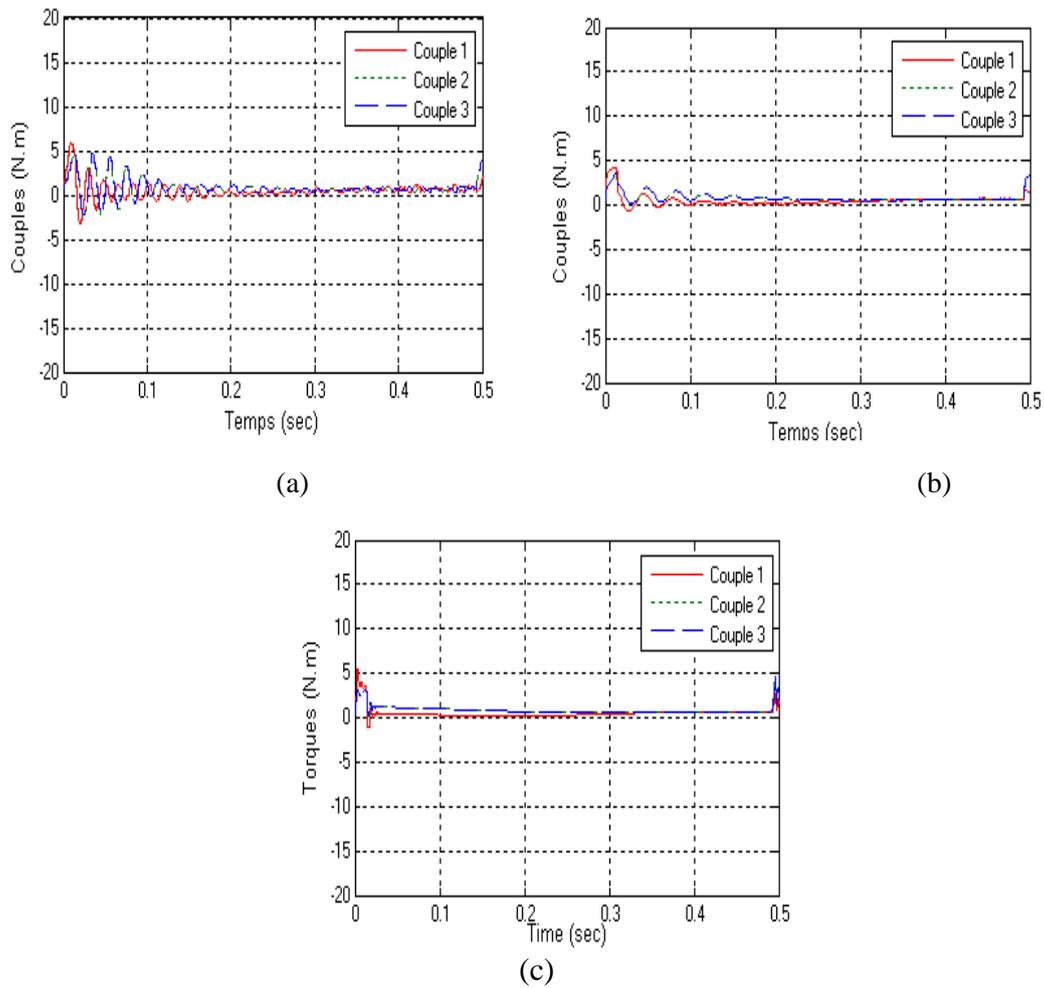


Figure 4.20 Entrées de commande (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H^∞ avec CA. (Acc. = 5G, vitesse = 0.65m/s)

b) Demi-ellipse à 12G et 1m/s

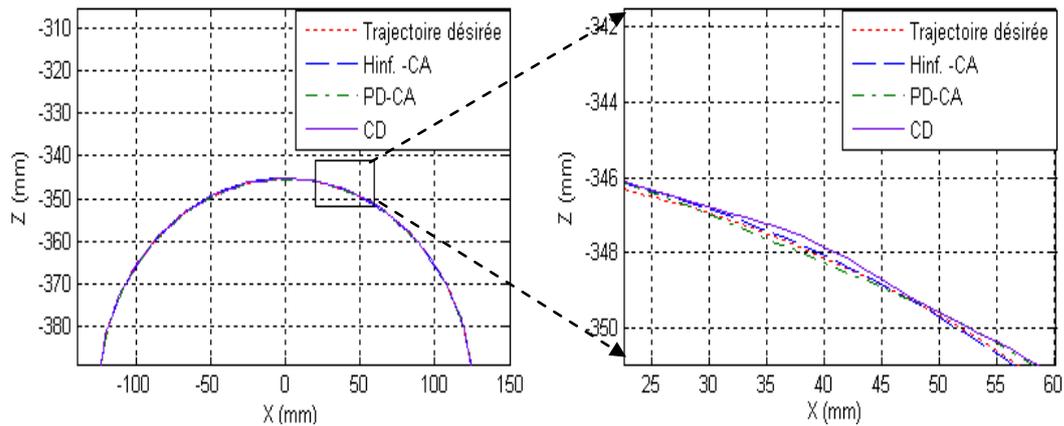


Figure 4.21 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1m/s)

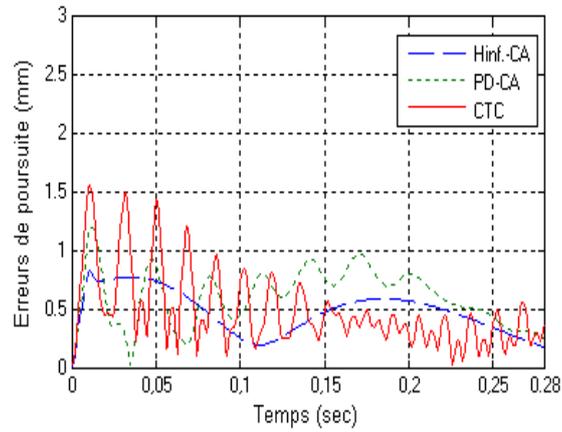


Figure 4.22 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 12G, vitesse = 1 m/s)

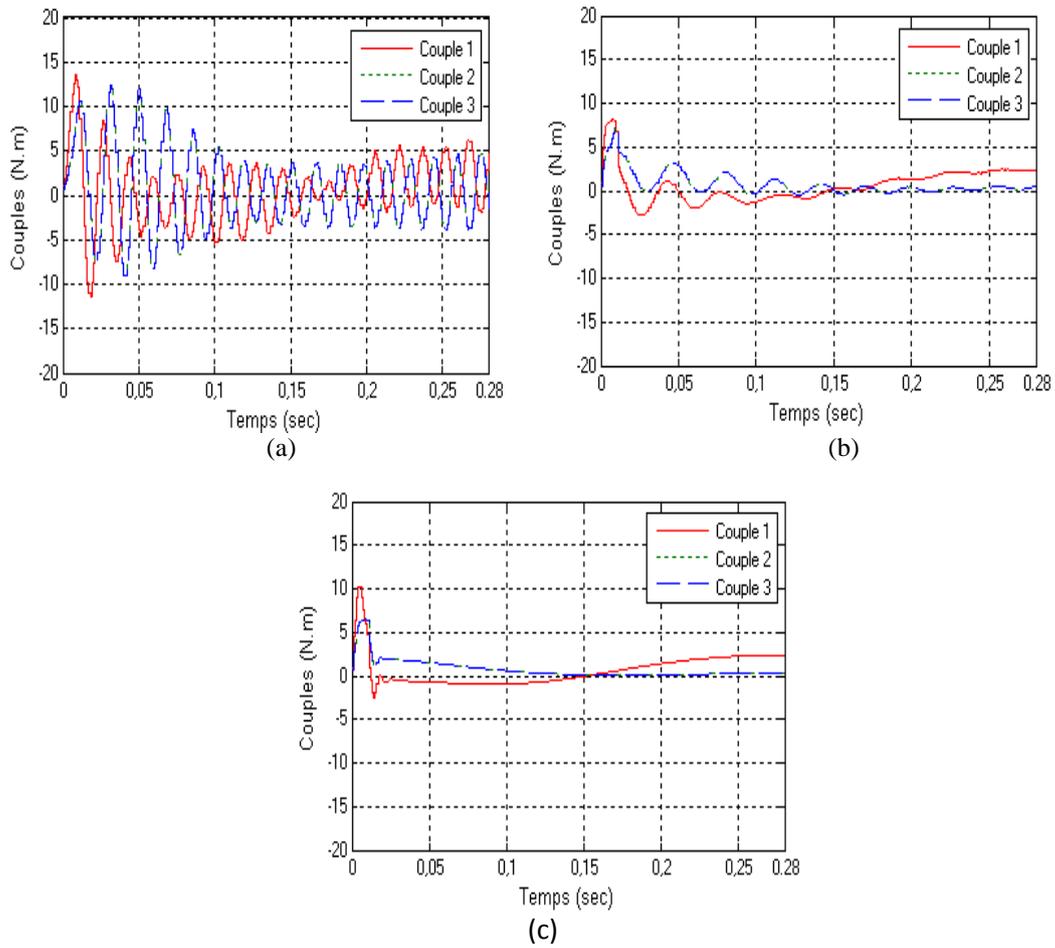


Figure 4.23 Entrées de commande (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H^∞ avec CA. (Acc. =12G, vitesse = 1m/s)

c) Demi-ellipse à 15G et 2.05m/s

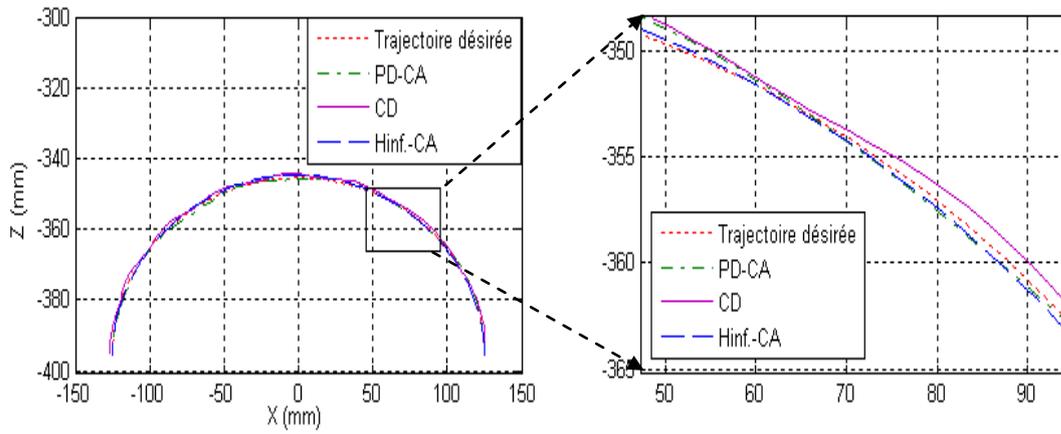


Figure 4.24 Suivi de trajectoire pour les trois commandes (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s)

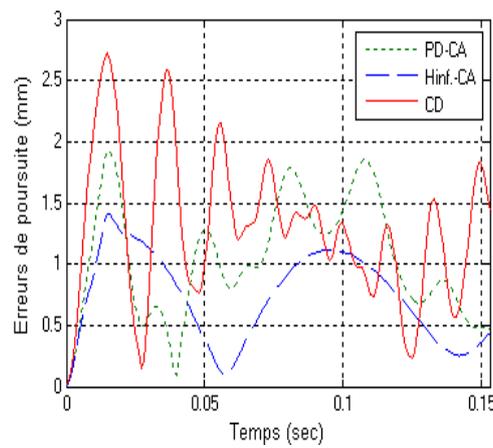
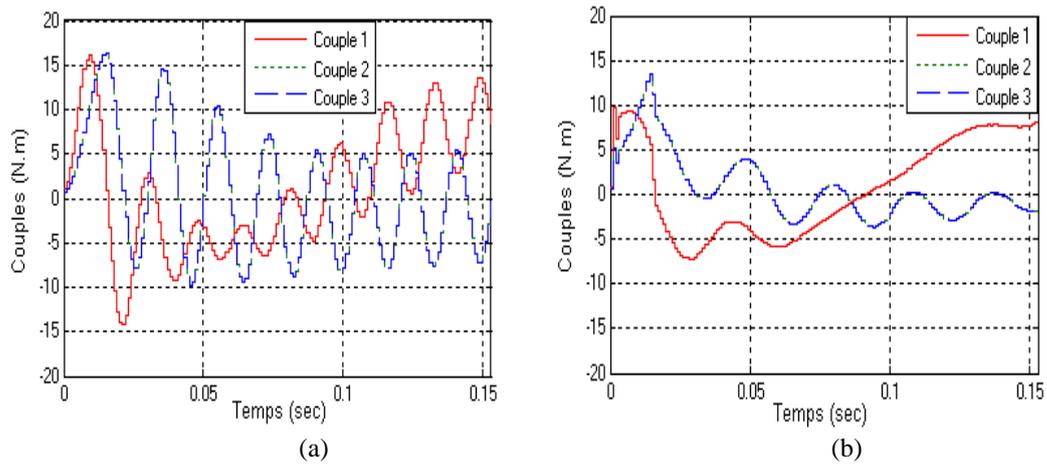


Figure 4.25 Erreurs de poursuite pour les trois commandes (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s)



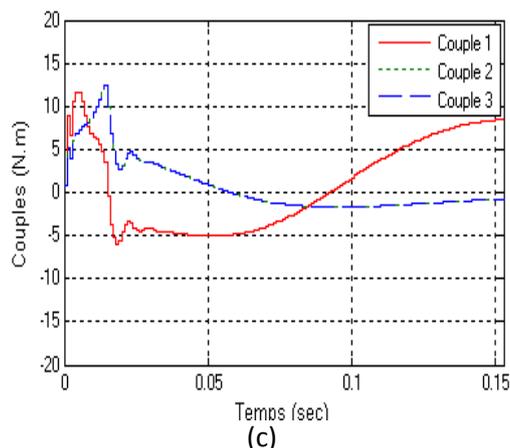


Figure 4.26 Entrées de commande (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H^∞ avec CA. (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s)

Tableau 4.2: Comparaison des performances des commandes CD, H^∞ et PD avec couple a priori

Commandes	H^∞ avec CA			Commande Dynamique			PD avec CA		
	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)
5G - 0.65m/s	0.64	0.2	0.4	0.73	0.38	0.2	0.66	0.16	0.4
12G - 1m/s	0.8	0.22	0.51	1.54	0.38	0.57	1.18	0.25	0.64
15G - 2.05m/s	1.41	0.41	0.82	2.72	1.41	1.42	1.92	0.46	1.14

En comparant les résultats de simulation de H^∞ à ceux du PD et du CD, on peut voir que pour une accélération de 5G et 0.65m/s, les performances des trois commandes sont très proches. L'erreur maximale de H^∞ est respectivement de 97% et 87% que celles du PD et du CD. L'erreur de fin de positionnement du PD est meilleure que celles des deux autres commandes et représente respectivement 80% et 42% que celles du H^∞ et du CD. Par contre, le RMS du CD est de 50% que celui du H^∞ et du PD. On peut constater aussi, que les couples de commande du CD sont d'amplitudes plus élevées que ceux des deux autres commandes. Mais en augmentant la dynamique du mouvement, les performances de H^∞ deviennent meilleures que celles du PD et du CD. L'erreur maximale de H^∞ est respectivement de 68% et 52% que celles du PD et du CD, son erreur de fin de positionnement est respectivement de 88% et 58% que celles du PD et du CD et enfin son RMS est respectivement de 80% et 90% que ceux du PD et du CD. Les couples de commande du CD deviennent de plus en plus oscillatoires et d'amplitudes plus élevées que ceux des deux autres commandes. Les performances de H^∞ sont toujours meilleures que celles des deux autres, quand la dynamique du mouvement augmente jusqu'à une accélération de 15G et une vitesse de 2.05m/s. L'erreur maximale de H^∞ représente respectivement de 73% et 52% que celles du PD et du CD, l'erreur de fin de positionnement est respectivement de 90% et 30% que celles du PD et du CD et le RMS de H^∞ est respectivement de 72% et 58% que ceux du PD et du CD. Les couples de commande du CD sont de plus en plus oscillatoires et d'amplitudes plus élevées que celles des deux autres commandes.

4.6.3.5 Robustesse

Pour les tests de robustesse, des perturbations paramétriques sont introduites par des masses additionnelles sur la nacelle du robot Delta. Deux masses de 100g et 200g sont testées successivement. La demi-ellipse utilisée comme trajectoire de référence est à une accélération de 15G et à une vitesse de 2.05 m/s.

a) Perturbation paramétrique de 100g

La Figure 4.27 montre les erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 100g et la Figure 4.28 montre les couples de commandes appliqués au robot.

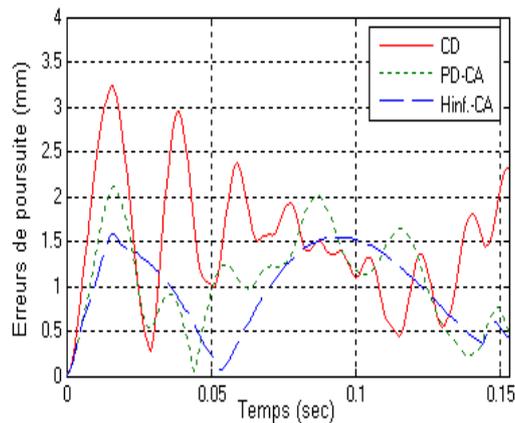


Figure 4.27 Erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 100g (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s)

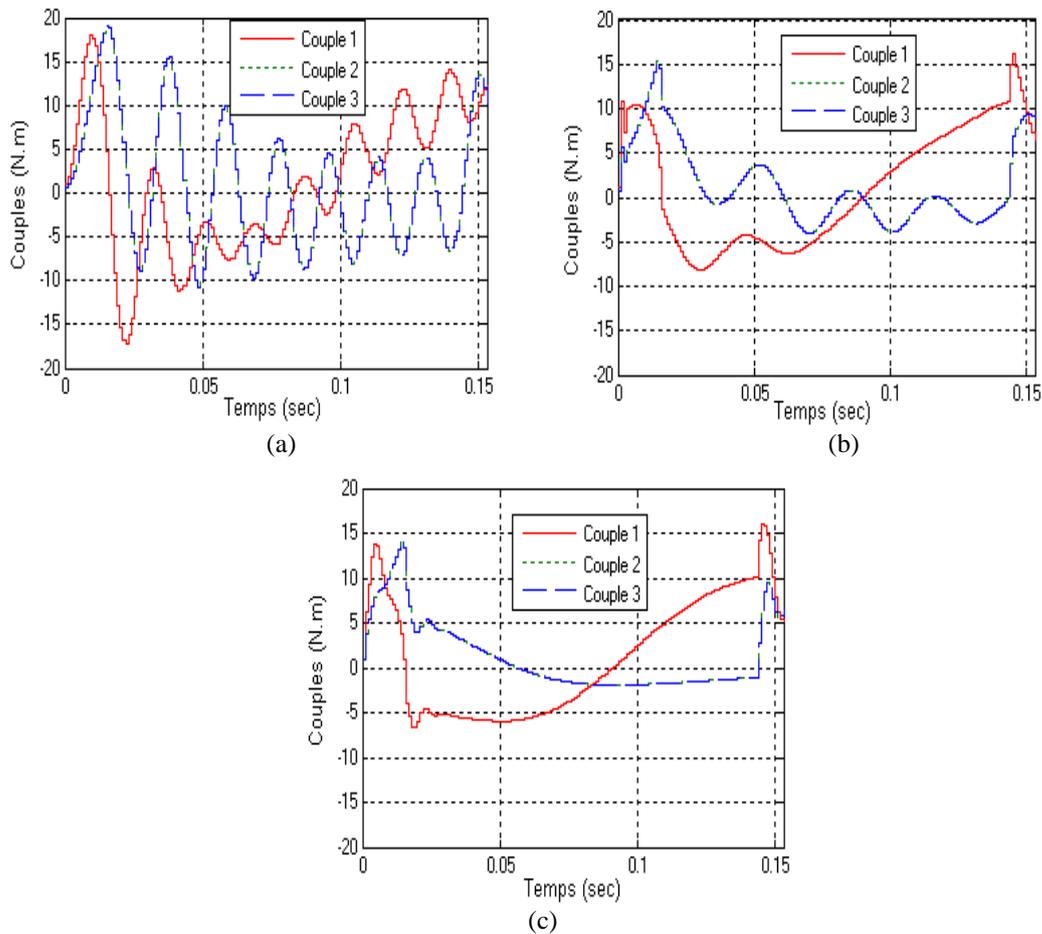


Figure 4.28 Entrées de commande en présence d'une perturbation paramétrique de 100g. (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H_{∞} avec CA. (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s).

b) Perturbation paramétrique de 200g

La Figure 4.29 montre les erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 200g et la Figure 4.30 montre les couples de commandes appliqués au robot.

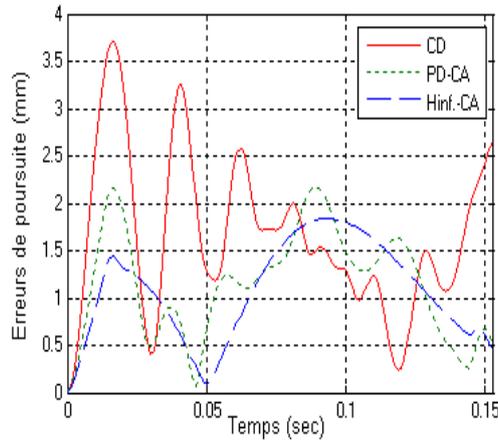


Figure 4.29 Erreurs de poursuite en présence d'une perturbation paramétrique de 200g (Acc.= 15G, vitesse = 2.05m/s)

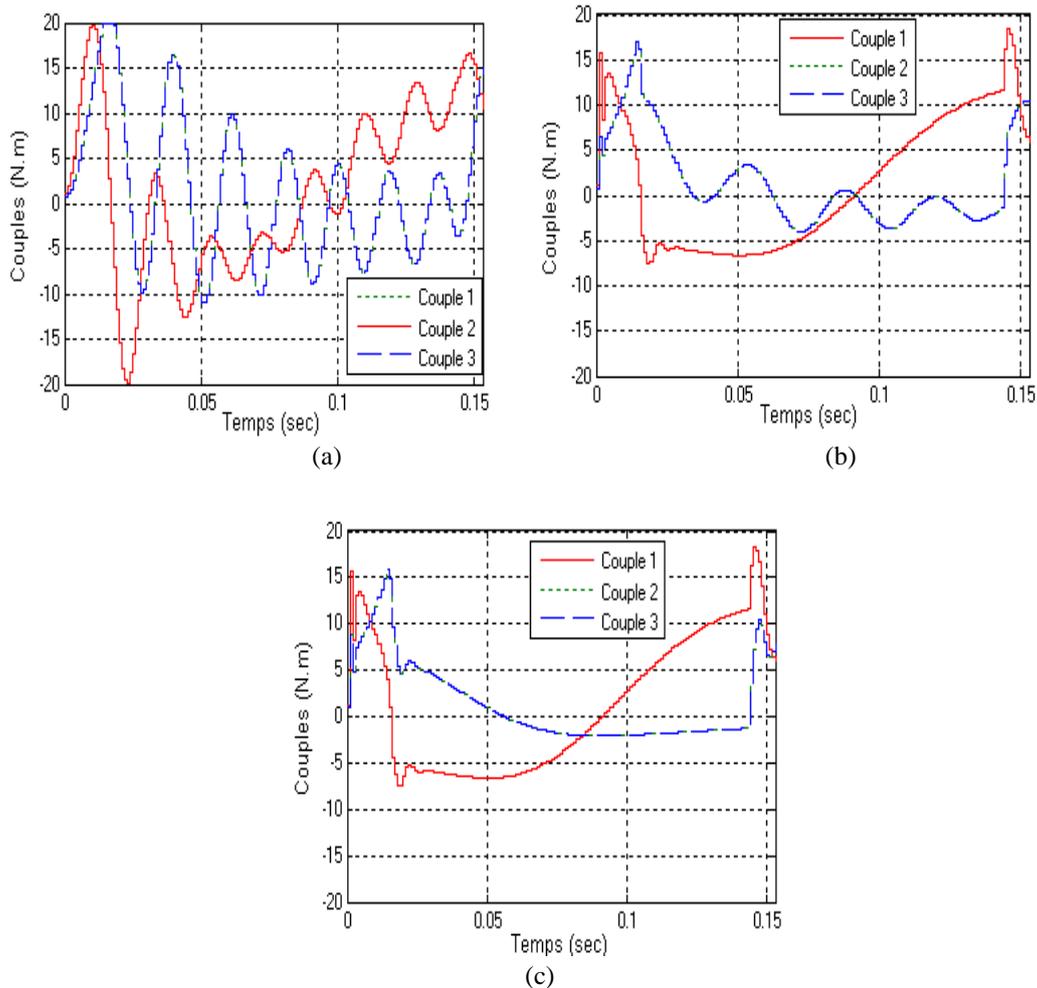


Figure 4.30 Entrées de commande en présence d'une perturbation paramétrique de 200g. (a): Commande Dynamique ; (b): Commande PD avec CA; (c): Commande H_{∞} avec CA. (Acc. =15G, vitesse = 2.05m/s)

Le Tableau 4.3 résume les performances obtenues par H_∞ , CD et PD en présence des perturbations paramétriques.

Tableau 4.3: Comparaison des performances des commandes CD, H_∞ et PD avec couple a priori et masses additionnelles

Commandes	H_∞ avec CA			Commande Dynamique (CD)			PD avec CA		
	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)	Err. Max (mm)	Err. Pos. (mm)	RMS (mm)
100g	1.58	0.45	1.06	3.23	2.33	1.65	2.11	0.47	1.19
200g	1.83	0.46	1.2	3.69	2.75	1.85	2.2	0.51	1.27

Les résultats de simulation obtenus ci-dessus montre qu'en présence des perturbations paramétriques, les performances du contrôleur H_∞ sont nettement meilleures que celles du CD et du PD. Pour une masse de 100g, l'erreur de poursuite maximale est respectivement de 75% et 49% que celles du PD et du CD. L'erreur de fin de positionnement de H_∞ est respectivement de 95% et 19% que celles du PD et du CD et le RMS de H_∞ est respectivement de 89% et 64% que celui du PD et du CD. Les couples de commande de H_∞ sont d'amplitudes plus faibles et moins oscillatoires que celles des deux autres.

Pour une masse de 200g, l'erreur de poursuite maximale de H_∞ est respectivement de 83% et 49% que celles du PD et du CD. L'erreur de fin de positionnement de H_∞ est respectivement de 90% et 17% que celles du PD et du CD et le RMS de H_∞ est respectivement de 94% et 65% que celui du PD et du CD. Les couples de commande du PD et du CD deviennent de plus en plus oscillatoires et d'amplitudes plus élevées que celles du H_∞ . Ils atteignent la saturation pour la commande CD.

4.6.3.6 Conclusion

Les résultats de simulation ont prouvé que la commande H_∞ utilisée en association avec l'a priori du couple présente les meilleures performances par rapport à la commande PD avec couple a priori et le contrôleur CD. L'analyse quantitative montre que le suivi de trajectoire pour H_∞ est plus précis et plus robuste que celui des deux autres commandes pour tout les cas de figures.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons synthétisé un contrôleur robuste H_∞ pour le robot Delta par l'approche de sensibilité mixte. Cette méthode impose un choix judicieux des matrices de fonction de pondération afin d'obtenir un meilleur compromis Robustesse /Performance. La méthode utilisée était d'agir sur les paramètres de ces fonction afin d'élargir le maximum possible la bande passante du système en boucle fermée tout en préservant la stabilité robuste en boucle fermée.

Dans un premier temps, ce contrôleur à été implémenté dans le schéma de commande du robot Delta, représenté par son modèle sous SimMechanics, sans l'incorporation du modèle dynamique inverse du robot. Deux trajectoires complexes de prise et dépose ont été testées; une trajectoire rectangulaire point à point et une demi ellipse avec un profil de position parabolique. Les résultats de simulation obtenus ont été comparés à un contrôleur classique PID largement utilisé en industrie et à un contrôleur H_2 synthétisé aussi par l'approche de sensibilité mixte. Les performances

du contrôleur H_∞ sont plus intéressantes que celles des deux autres commandes. Aussi, on peut dire que pour un même temps de parcours, les performances obtenues par la trajectoire demi ellipse sont meilleures que celles de la trajectoire rectangulaire. Les couples de commandes obtenus par la trajectoire rectangulaire atteignent la saturation, ce qui est néfaste pour les actionneurs du robot.

Afin d'améliorer les performances du contrôleur H_∞ , nous avons incorporé dans le schéma de commande, le modèle dynamique inverse non linéaire du robot Delta, c'est-à-dire le couple à priori. Nous avons utilisé la demi-ellipse comme trajectoire de référence, car elle est mieux adaptée pour les opérations de prise et dépose. Pour évaluer les performances du contrôleur obtenu, nous l'avons comparé à deux contrôleurs basés modèles très utilisés en robotique; il s'agit du contrôleur PD avec couple a priori et le contrôleur par découplage non linéaire ou le contrôleur dynamique (CD). Les résultats de simulation obtenus et l'analyse quantitative présenté ont montré que le contrôleur H_∞ était beaucoup plus performant et robuste que les deux autres contrôleurs.

Implémentation expérimentale du contrôleur H_∞ sur le robot Delta

Le but principal de ce chapitre est l'implémentation expérimentale du contrôleur H_∞ sur le robot Delta à 3ddl, disponible au laboratoire LSRO de l'EPFL [Rac5]. Le contrôleur utilisé sans le couple a priori est comparé au contrôleur classique PID. Les différents tests expérimentaux effectués ont permis d'évaluer les performances et la robustesse de ce contrôleur.

Sommaire

- 5.1 Introduction
- 5.2 Expérimentation en temps réel pour la détermination du contrôleur H_∞ avec les meilleures performances
- 5.3 Evaluation des performances du contrôleur en augmentant la dynamique du mouvement.
- 5.4 Les limites de performance du contrôleur
- 5.5 Tests de Robustesse
- 5.6 Conclusion

5.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux de la commande robuste H_∞ implémentée sur le robot Delta Heureka à actionnement direct. Ce robot est disponible au Laboratoire des Systèmes Robotiques (LSRO) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). La commande H_∞ est implémentée sur le robot Delta, sans l'incorporation du modèle dynamique inverse, et comparée à la commande classique PID [Rac5].

Le système de commande est implémenté sur un PC (Core Duo 2,1 Ghz) qui est exécuté sous Windows XP et une extension en temps réel (RTX de Interval Zero Inc.) [Bou1][Bou2].

Les expériences ont été menées à ces fins:

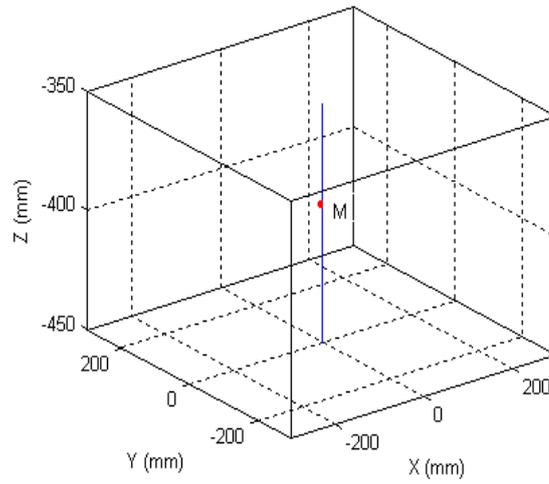
- Déterminer le contrôleur H_∞ qui donne les meilleures performances (erreur de poursuite minimale) tout en préservant une bonne marge de stabilité. Ceci est réalisé en élargissant graduellement la bande passante de la boucle fermée.
- Comparer les performances du contrôleur H_∞ obtenu dans le premier test à celles du contrôleur conventionnel PID en augmentant la dynamique du mouvement (accélération).
- Etudier les limites de performance du contrôleur pour des trajectoires verticales distantes du point de fonctionnement M .
- Evaluer la robustesse du contrôleur en ajoutant une charge supplémentaire à la nacelle du robot.

Dans chaque cas, la nacelle du robot doit se déplacer d'une certaine position cartésienne initiale (x_{di}, y_{di}, z_{di}) , vers une position cartésienne finale désirée (x_{df}, y_{df}, z_{df}) et retourne à la position initiale (x_{di}, y_{di}, z_{di}) après un temps de pause, concluant le cycle.

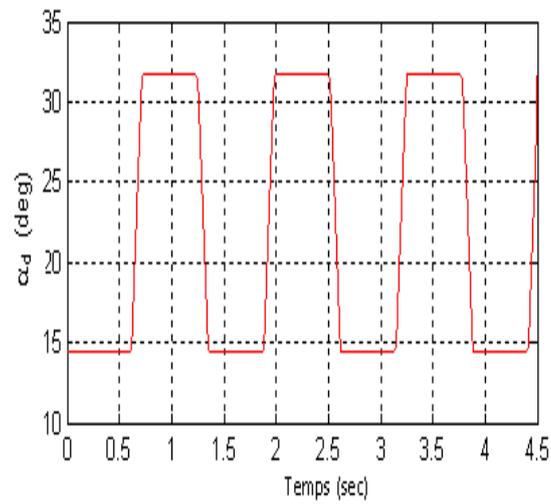
5.2 Expérimentation en temps réel pour la détermination du contrôleur H_∞ avec les meilleures performances

Dans nos expériences, nous avons utilisé une trajectoire de 100 mm, le long de l'axe z . Elle démarre d'une position initiale $(0, 0, -350 \text{ mm})$ jusqu'à une position finale $(0, 0, -450 \text{ mm})$ et retourne à la position initiale après un temps de pause de 500 ms. Le point de fonctionnement M $(0, 0, -395.5 \text{ mm})$ est situé au milieu de cette trajectoire. Ce cycle est répété cinq fois avec une accélération de 5G et un temps d'échantillonnage de 1 ms. Ceci est illustré dans la Figure 5.1.

A cet effet, trois contrôleurs H_∞ ont été synthétisés successivement et implémentés dans le système de commande en temps réel. La bande passante du système en boucle fermée est augmentée graduellement de 110rad/s jusqu'à 390 rad/s. Les paramètres utilisés pour les trois contrôleurs synthétisés sont donnés dans le Tableau 5.1 et les tracés correspondants des valeurs singulières des matrices \mathbf{S} et \mathbf{T} avec leurs respectives fonctions de pondération sont illustrés dans la Figure 5.2.

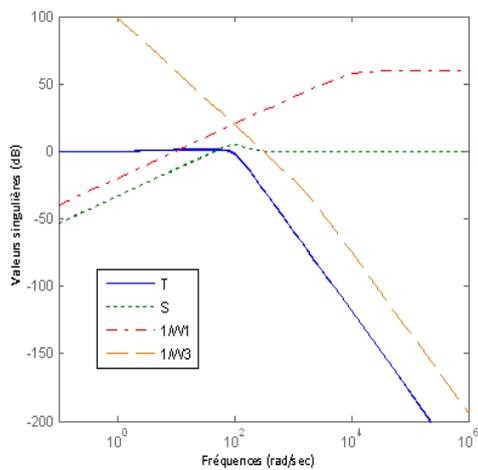


(a)

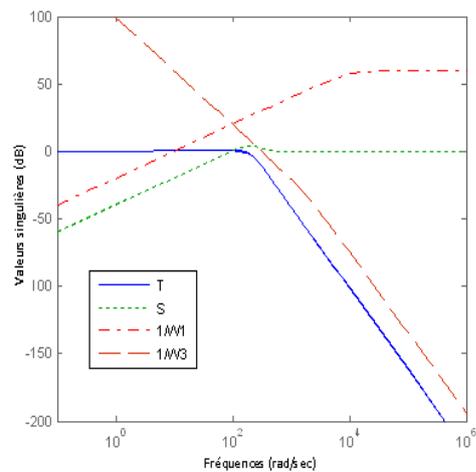


(b)

Fig. 5.1 Trajectoire désirée expérimentale, (a): Espace cartésien, (b): Espace articulaire.



(a)



(b)

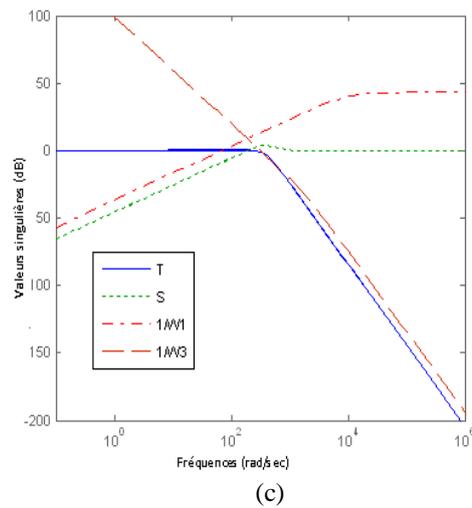
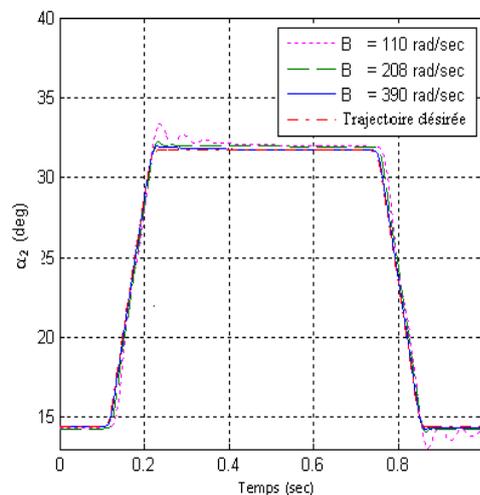
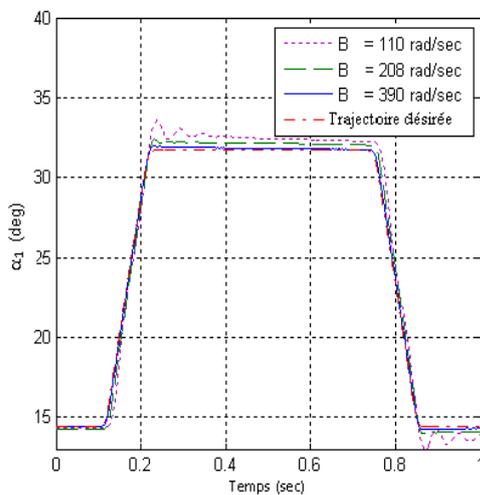


Figure 5.2 Tracé des valeurs singulières de S et T pour le contrôleur H_∞ , (a): $B = 110$ rad/s, (b): $B = 208$ rad/s, (c) : $B=390$ rad/s.

Tableau 5.1 Les caractéristiques des trois contrôleurs synthétisés

	W_{11}	W_{33}	Bande passante
Contrôleur 1	$W_{11}(s) = \frac{1}{1000} \left(\frac{s + 10^4}{s + 10^{-4}} \right)$	$W_{33}(s) = \frac{0.0005s^3 + s^2}{100000}$	110 rad/sec
Contrôleur 2	$W_{11}(s) = \frac{1}{1000} \left(\frac{s + 10^4}{s + 10^{-4}} \right)$	$W_{33}(s) = \frac{0.0005s^3 + s^2}{800000}$	208 rad/sec
Contrôleur 3	$W_{11}(s) = \frac{7}{1000} \left(\frac{s + 10^4}{s + 10^{-4}} \right)$	$W_{33}(s) = \frac{0.0005s^3 + s^2}{800000}$	390 rad/sec

Les résultats expérimentaux obtenus pour les trois contrôleurs sont représentés dans Figure 5.3 et Figure 5.4.



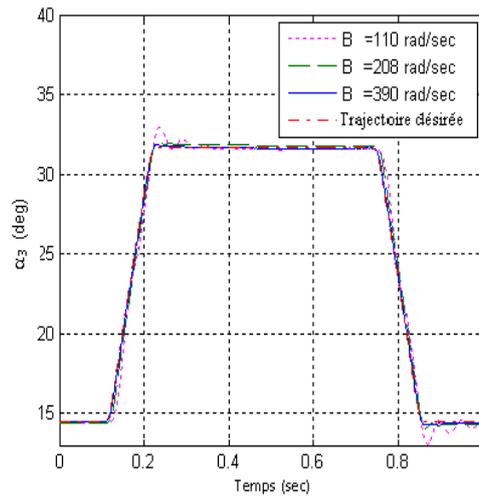


Figure 5.3 Trajectoires de poursuite expérimentales obtenues par les contrôleurs H_∞ synthétisés en élargissant la bande passante (Acc =5G).

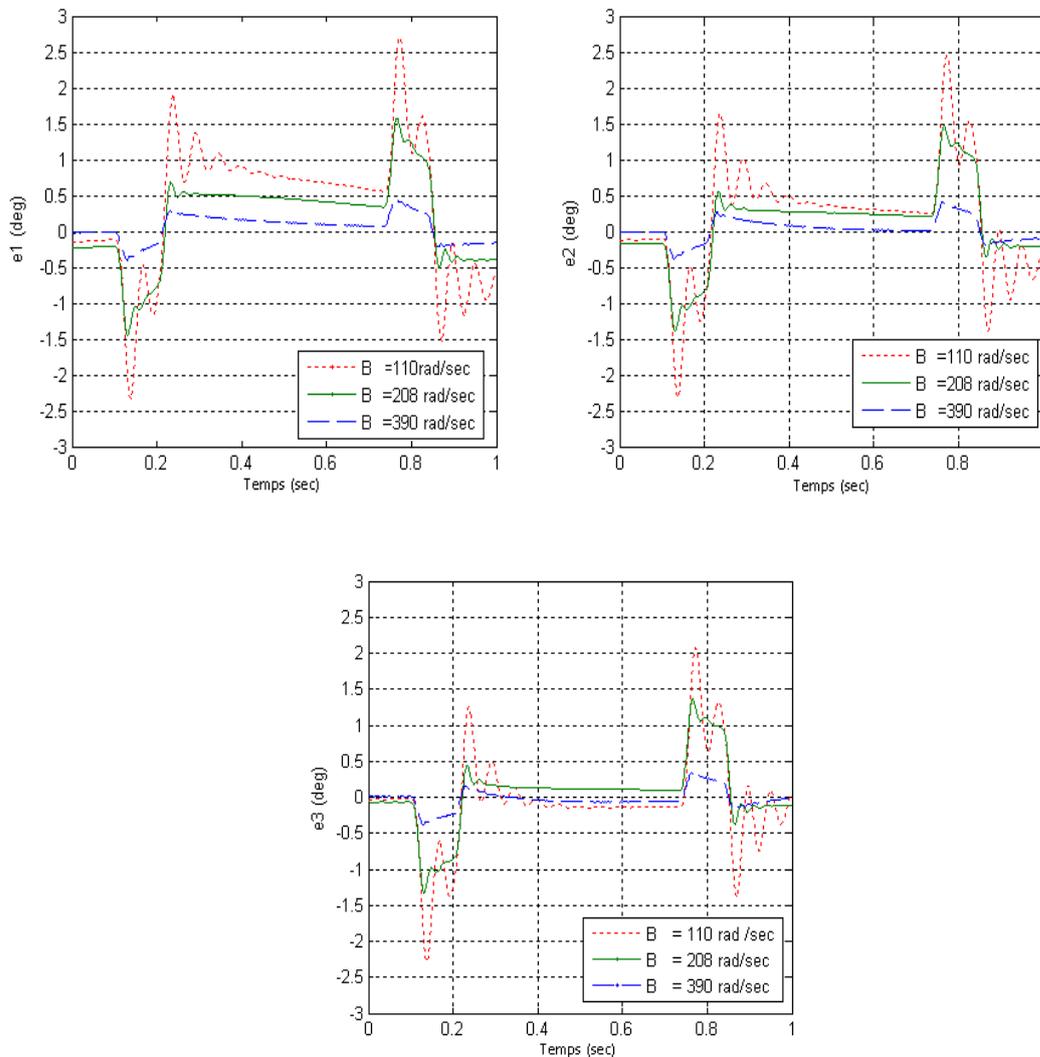


Figure 5.4 Erreurs de poursuite expérimentales obtenues par les contrôleurs H_∞ synthétisés en élargissant la bande passante (Acc. =5G).

Les résultats expérimentaux montrent clairement que les meilleures performances sont obtenues évidemment par le troisième contrôleur H_∞ correspondant à la plus large bande passante de 390 rad/sec.

En effet, nous remarquons dans Figure 5.2 c que les valeurs singulières des matrices de fonction S et T de ce contrôleur sont respectivement très proches à leurs spécifications respectives $1/W_{11}$ et $1/W_{33}$ que celles des deux premiers contrôleurs.

Pour préserver la stabilité robuste, les performances ne peuvent pas être encore augmentées. Donc, dans ce qui suit le troisième contrôleur correspondant à la bande passante de 390 rad/sec est sélectionné pour les autres tests.

5.3 Evaluation des performances du contrôleur en augmentant la dynamique du mouvement.

Le contrôleur correspondant à la bande passante de 390 rad/s est implémenté dans le système de commande. L'accélération du mouvement est augmenté jusqu'à 12G. Les résultats expérimentaux obtenus pour le contrôleur H_∞ sont comparés à ceux du contrôleur PID. Nous utilisons la même trajectoire que celle du premier test.

Les résultats expérimentaux représentés de Figure 5.5 à Figure 5.7 ont été obtenus respectivement avec les accélérations 1G, 5G et 12G.

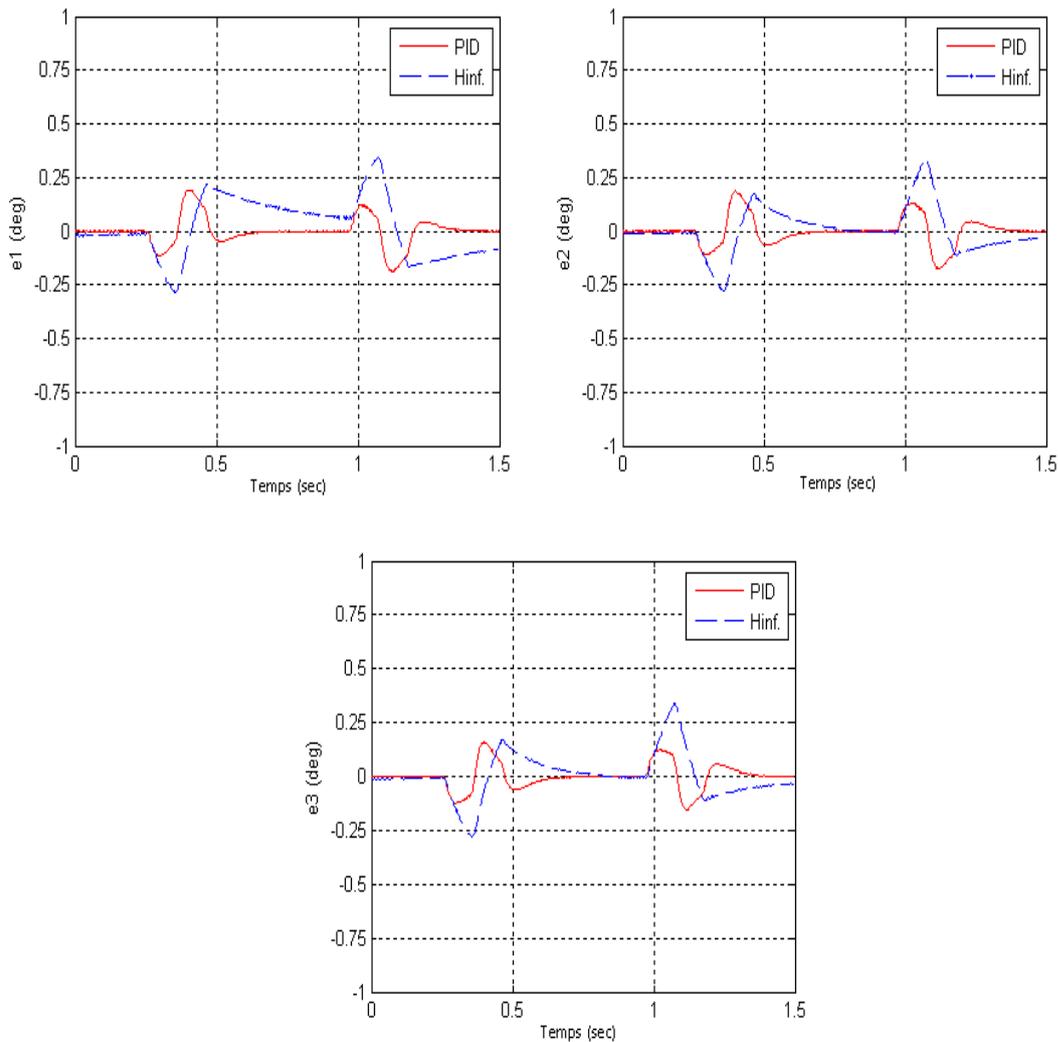


Figure 5.5. Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 1G

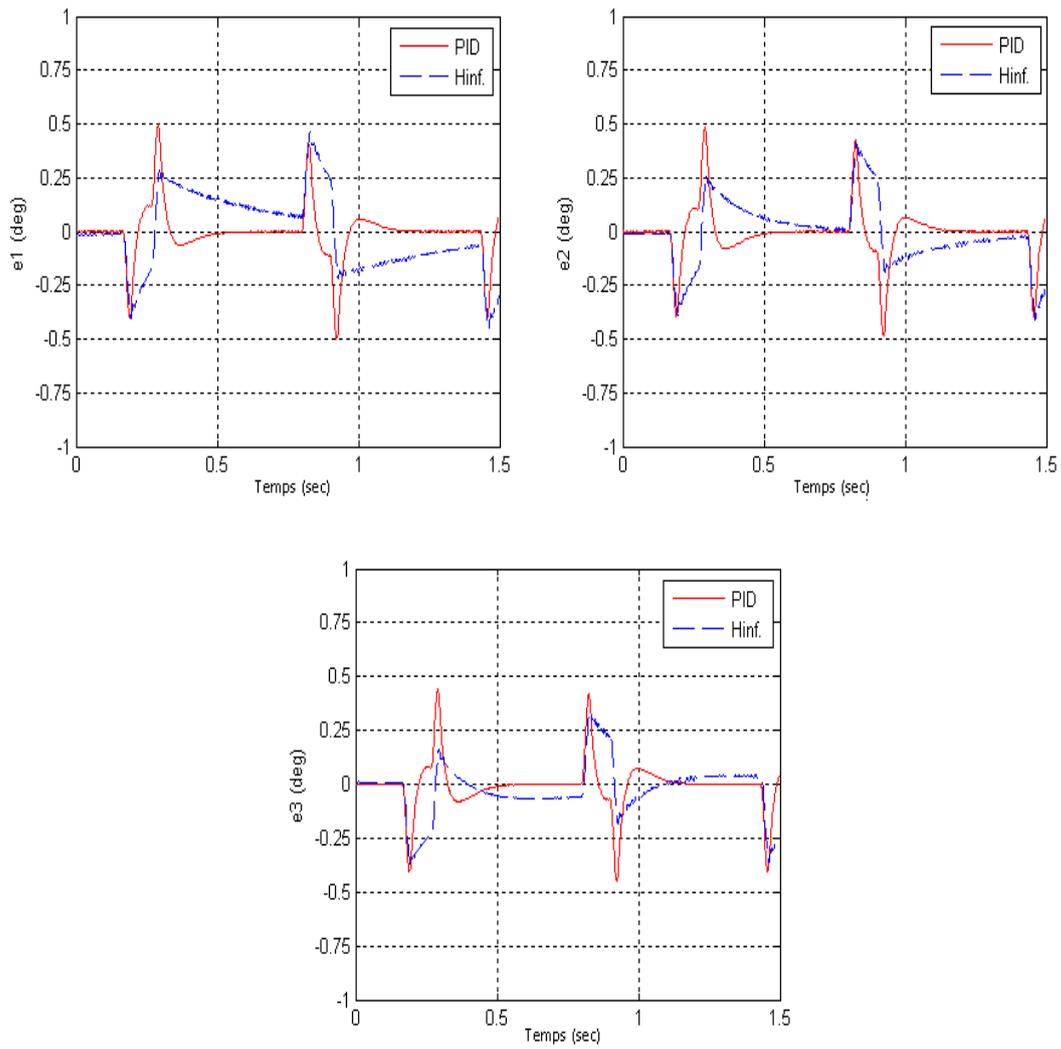
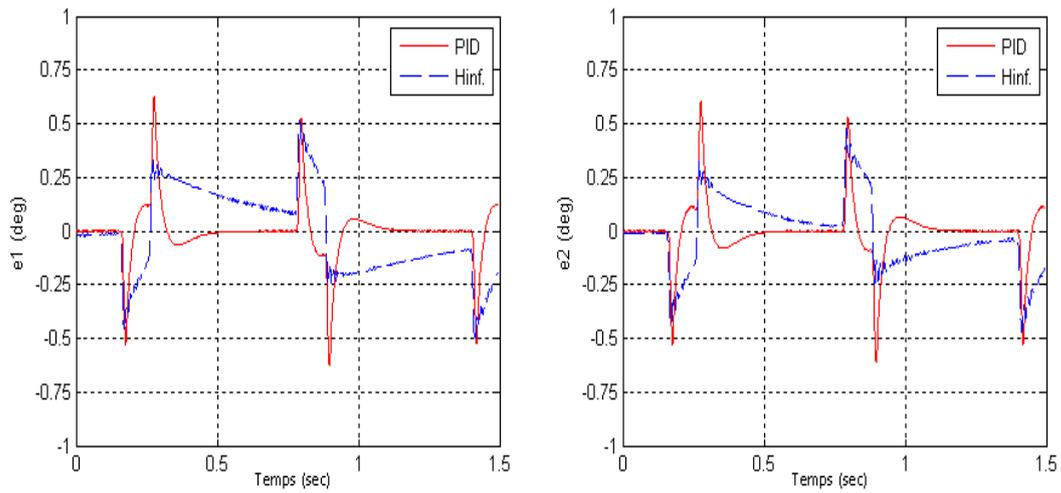


Figure 5.6. Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 5G



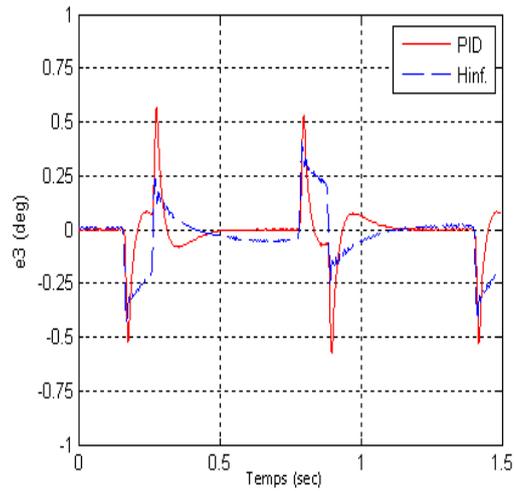
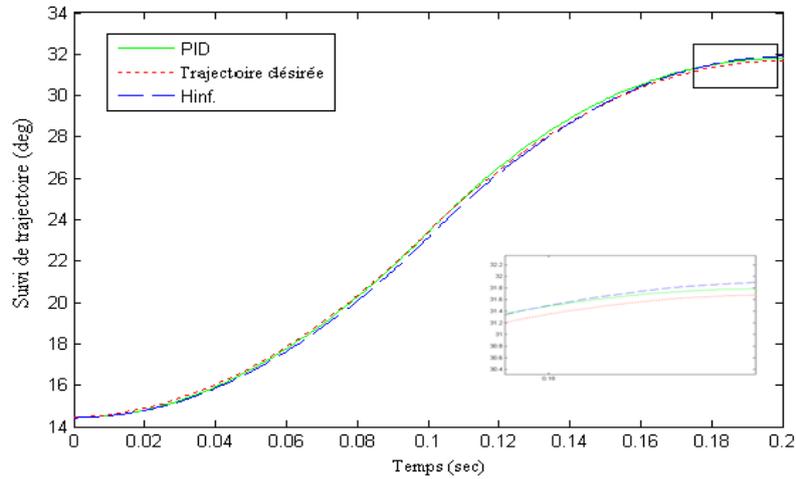
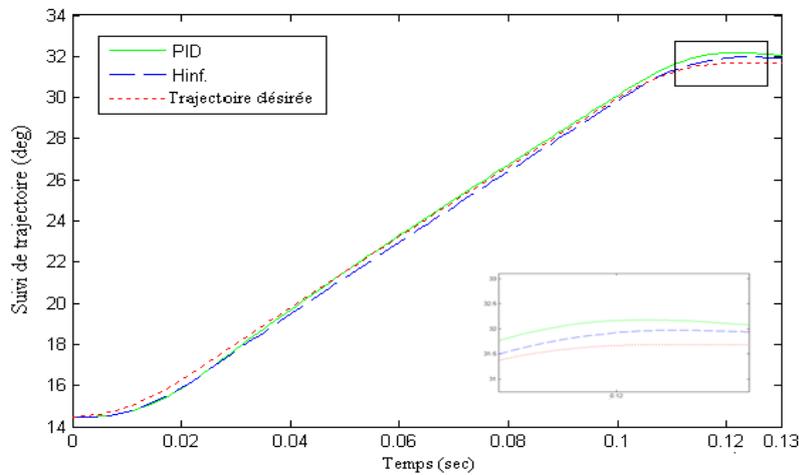


Figure 5.7. Erreurs de poursuite expérimentales pour une accélération de 12G

Les trajectoires de poursuite de la pire articulation (articulation 1) à différentes accélérations (1G, 5G et 12G) de la position initiale à la position finale sont illustrées par Figure 5.8.



(a)



(b)

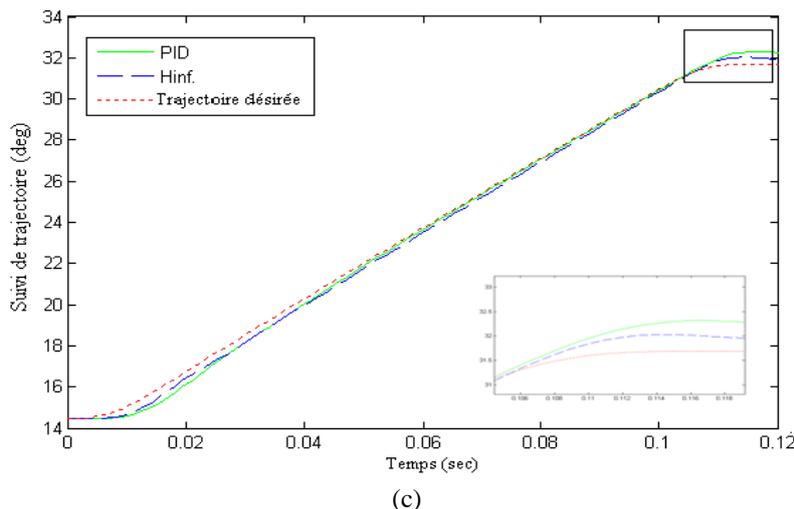


Figure 5.8 Suivi de trajectoire de la position initiale à la position finale pour la pire articulation (articulation 1); (a): Acc. =1G ; (b): Acc.=5G; (c): Acc.=12G.

Tableau 5.2 résume les performances obtenues par les deux contrôleurs pour la pire articulation (Articulation 1).

Tableau 5.2 Comparaison des performances des contrôleurs H_∞ et PID pour différentes accélérations (Articulation 1)

Performances	Contrôleur H_∞			Contrôleur PID		
	1Ge	5Ge	12Ge	1Ge	5Ge	12Ge
Max $ e_1 $	0.34°	0.46°	0.5°	0.18°	0.5°	0.625°
Erreurs de fin de positionnement (Articulation 1)	0.19°	0.28°	0.34°	0.11°	0.46°	0.50°

En comparant les résultats expérimentaux du contrôleur H_∞ avec ceux du PID, nous pouvons constater que pour une accélération de 1G, les performances du PID sont meilleures que celles du H_∞ . L'erreur de poursuite maximale et l'erreur de fin de positionnement du PID sont respectivement 53% et 57% de celles du H_∞ . Mais, en augmentant les accélérations, les performances du H_∞ deviennent meilleures que celles du PID. A 5G, l'erreur de poursuite maximale et l'erreur de fin de positionnement du H_∞ deviennent respectivement 92% et 61% de celles du PID. Les performances du H_∞ sont plus intéressantes que celles du PID à 12G, car ses erreurs de poursuite maximale et de fin de positionnement sont respectivement 80% et 68% de celles du PID.

5.4 Les limites de performance du contrôleur

Dans cette section, nous allons tester les limites de performance du contrôleur H_∞ quand on s'éloigne graduellement du point de fonctionnement M ($x = 0$, $y = 0$, $z = -395.5\text{mm}$).

Considérons la section horizontale de l'espace de travail du robot Delta contenant le point M, située à une hauteur $z = -395.5\text{ mm}$ (le milieu du cylindre représentant l'espace de travail du robot Delta). La trajectoire verticale de 10 G utilisée précédemment va être graduellement éloignée du point de fonctionnement M, en passant successivement à travers les points situés sur l'axe x ou y comme le montre la Figure 5.9. Pour des raisons de sécurité et pour éviter une réaction forte du robot, le test

expérimental est effectué uniquement pour les trajectoires qui passent par les points représentés dans le Figure 5.10, c'est-à-dire, les trajectoires n'iront pas jusqu'à la limite de l'espace de travail du robot.

Pour comparer les performances des différentes trajectoires, nous commençons le test avec la trajectoire passant par le point de fonctionnement M (le long de l'axe z). Dans chaque cas, les performances du contrôleur H_∞ sont comparées à celles du PID.

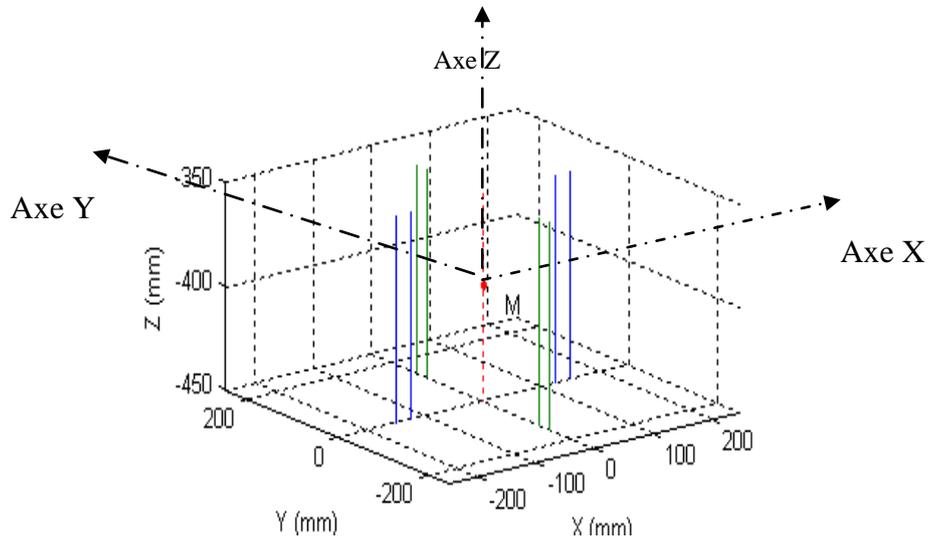


Figure 5.9: Trajectoires expérimentales désirées de 10 G distantes du point M

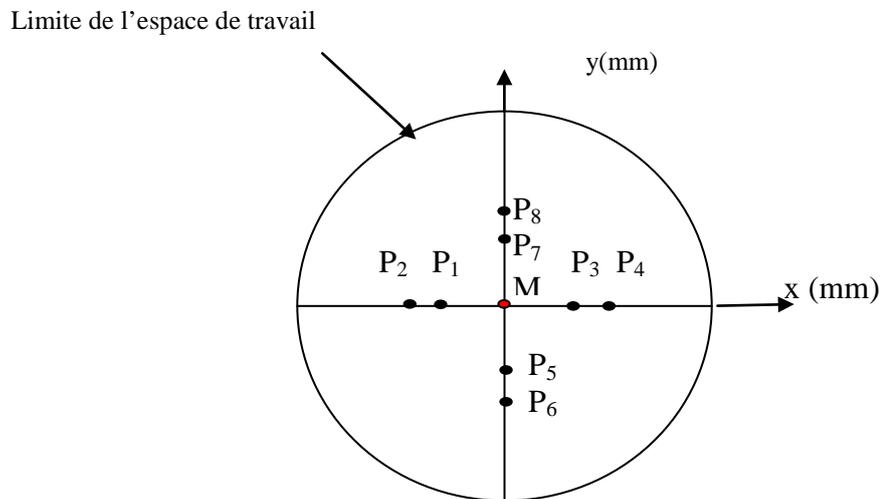


Figure 5.10 Vue de dessus des points du test dans l'espace de travail

Les résultats expérimentaux donnent les erreurs de poursuite suivantes:

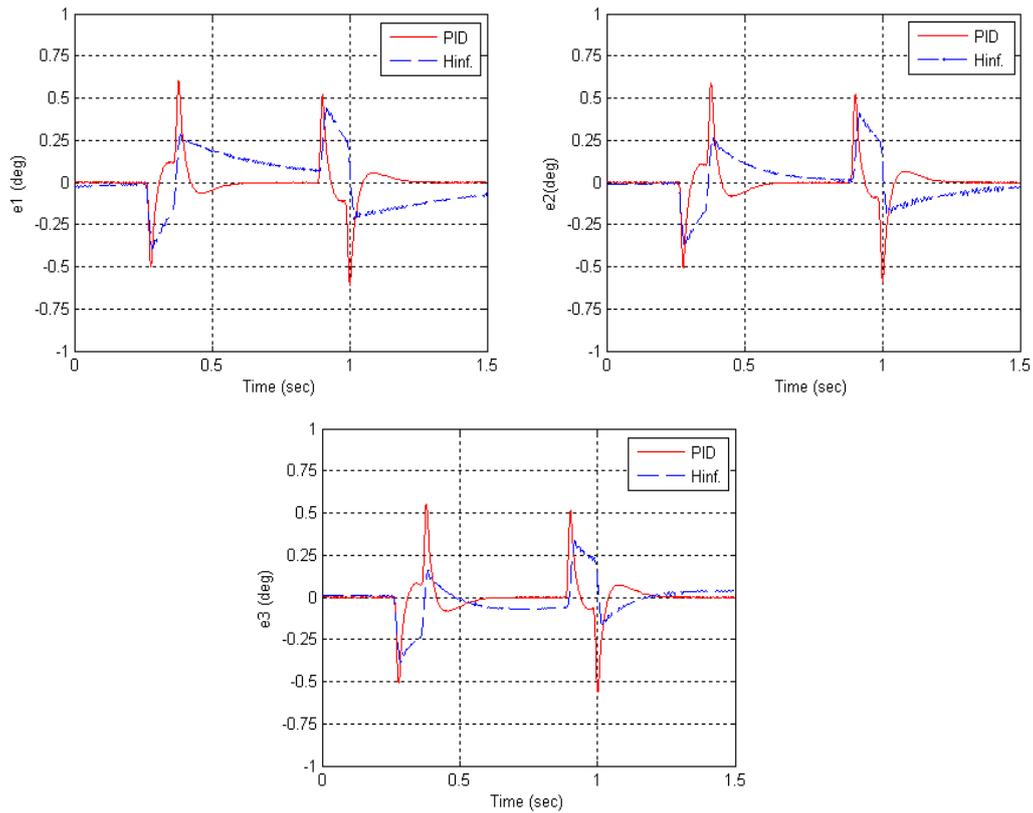


Figure 5.11 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point de fonctionnement M ($x=y=0$; $z=-395.5\text{mm}$)

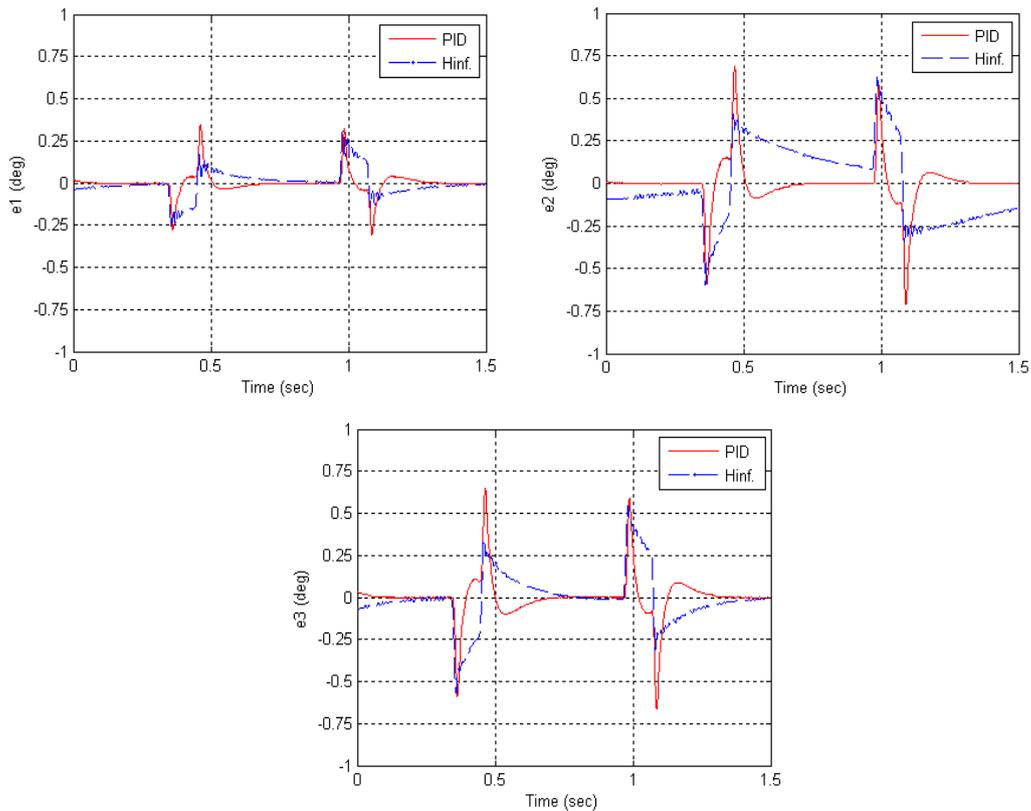


Figure 5.12 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_1 ($x=-125\text{ mm}$, $y=0$, $z=-395.5\text{ mm}$)

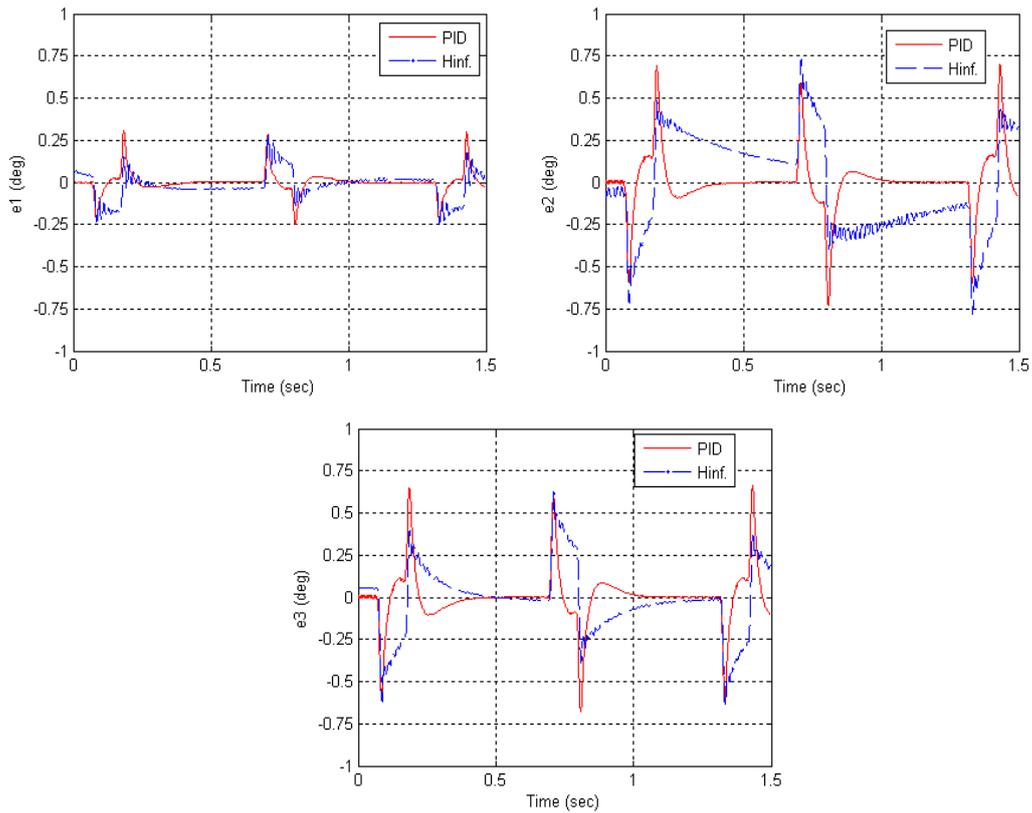


Figure 5.13 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_2 ($x = -150$ mm, $y=0$, $z = -395.5$ mm)

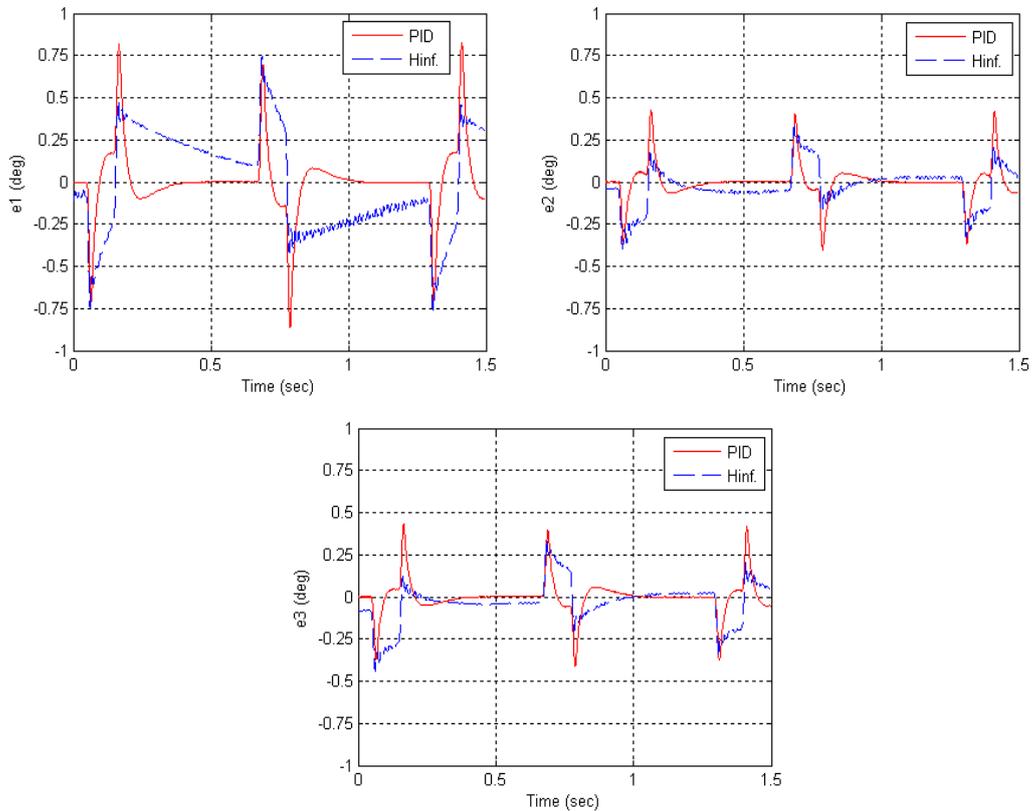


Figure 5.14 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_3 ($x = 125$ mm, $y=0$, $z = -395.5$ mm)

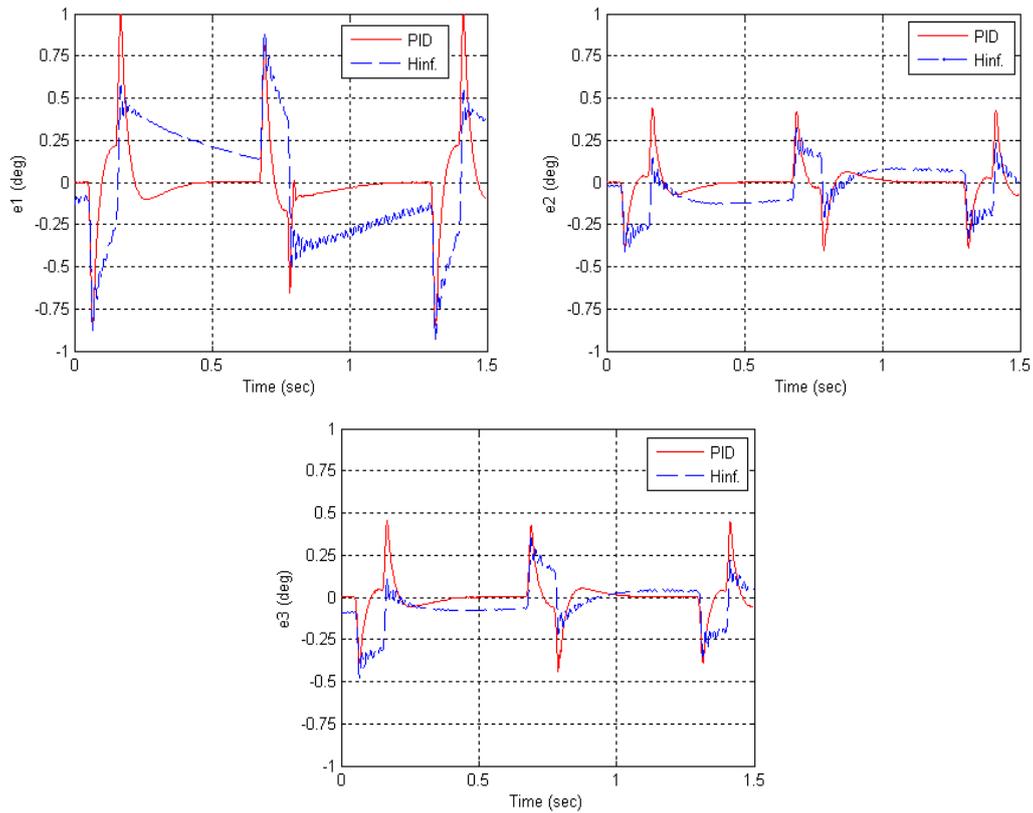


Figure 5.15 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_4 ($x=150$ mm, $y=0$, $z=-395.5$ mm)

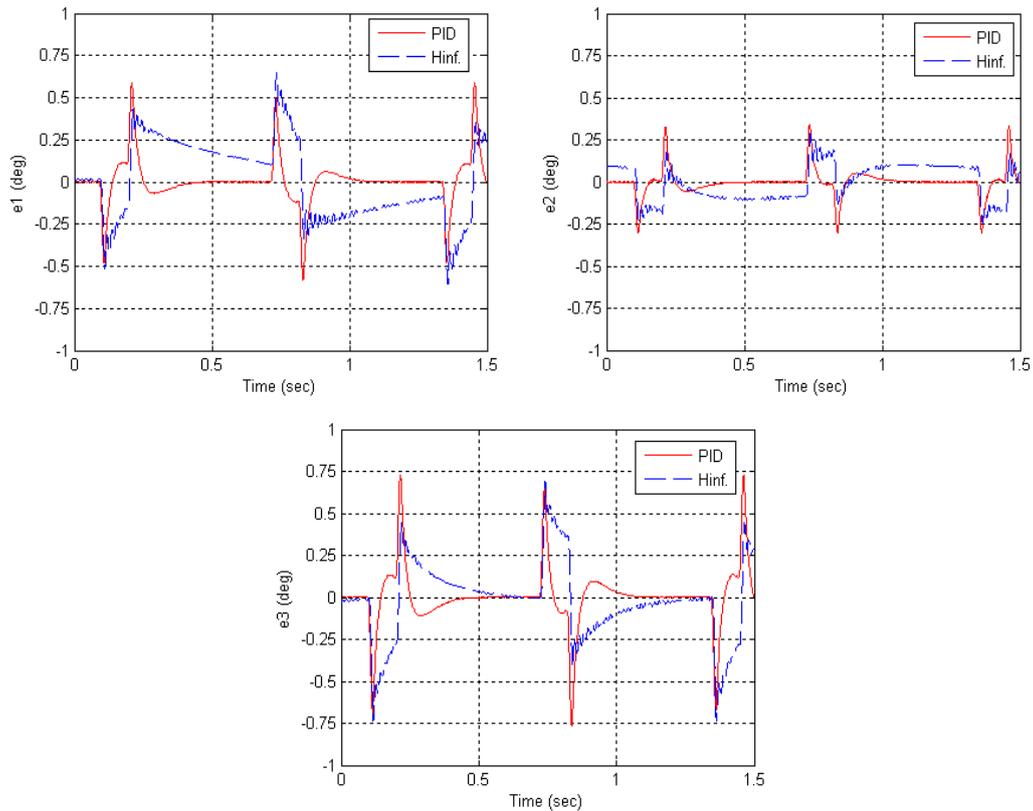


Figure 5.16 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_5 ($x=0$ mm, $y=-125$ mm, $z=-395.5$ mm)

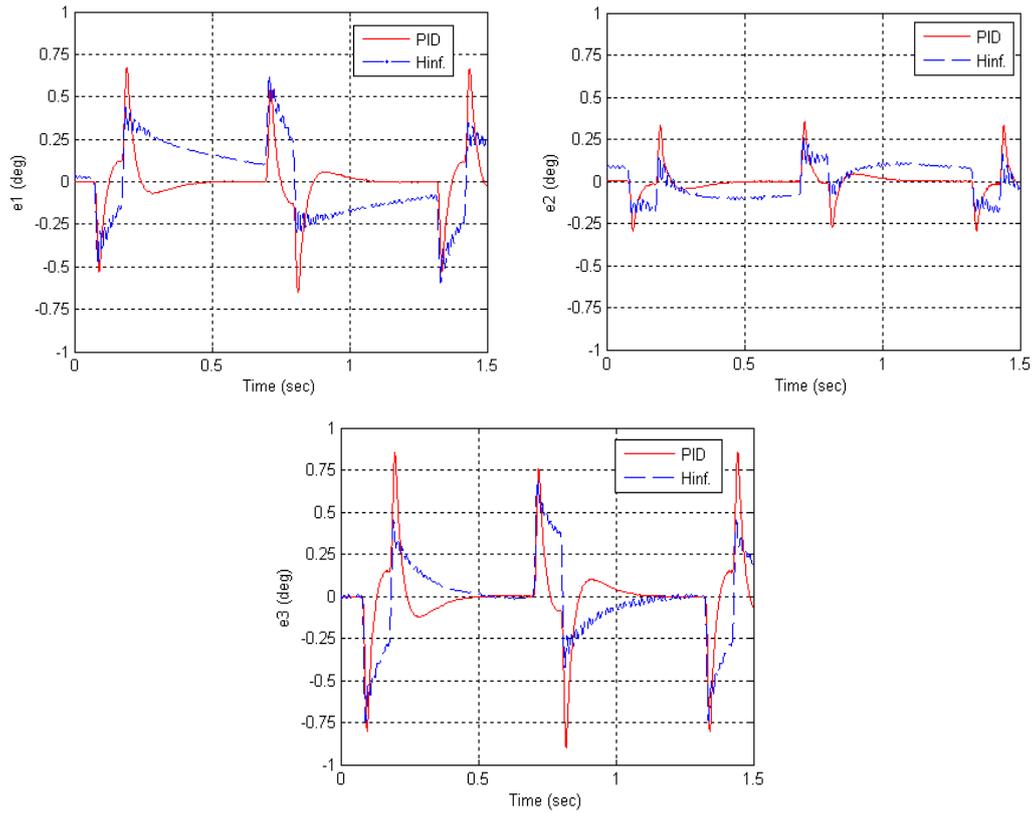


Figure 5.17 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_6 ($x = 0$ mm, $y = -150$ mm, $z = -395.5$ mm)

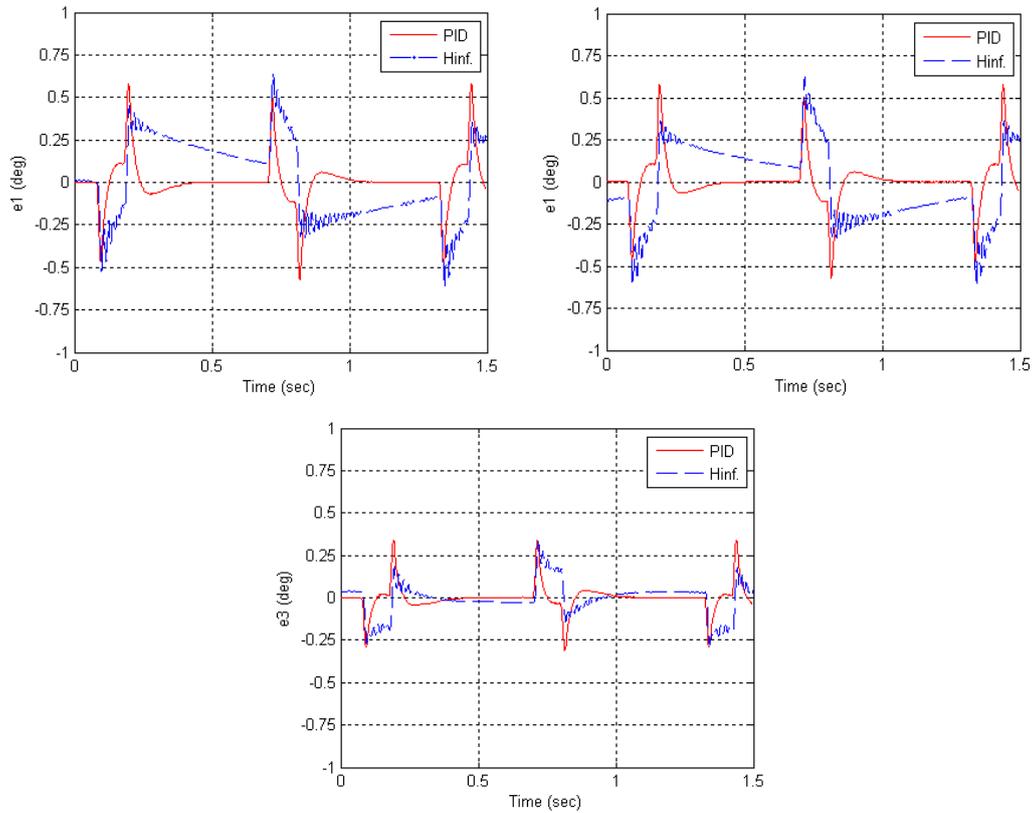


Figure 5.18 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_7 ($x = 0$ mm, $y = 125$ mm, $z = -395.5$ mm)

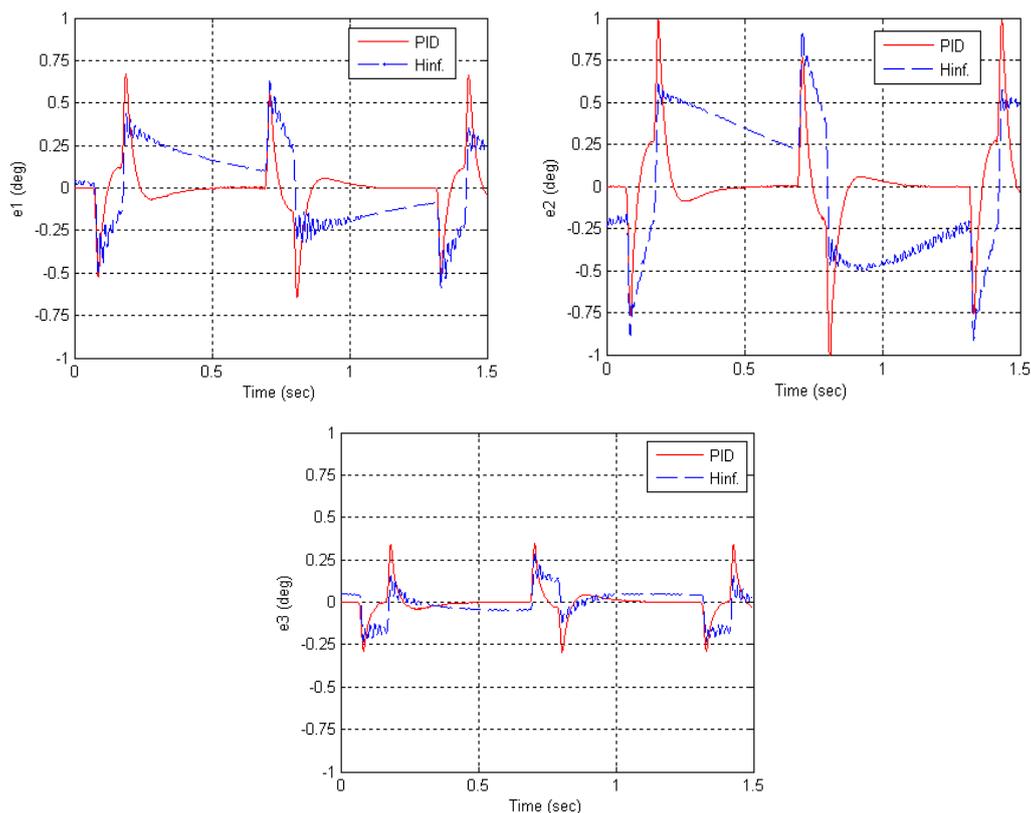


Figure 5.19 Erreurs de poursuite expérimentales pour la trajectoire de 10 G passant par le point P_8 ($x = 0$ mm, $y = 150$ mm, $z = -395.5$ mm)

Les résultats expérimentaux obtenus sont résumés dans le Tableau 5.3

Table 5.3: Comparaison des performances des contrôleurs H_∞ et PID pour différentes trajectoires verticales de 10G distantes du point M.

Points de Test	Contrôleur H_∞			Contrôleur PID		
	Err. Max. (Art1)	Err. Max. (Art2)	Err. Max. (Art3)	Err. Max. (Art1)	Err. Max. (Art2)	Err. Max. (Art3)
M	$[-0,37^\circ, 0,4^\circ]$	$[-0,3^\circ, 0,37^\circ]$	$[-0,3^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,55^\circ, 0,55^\circ]$
P_1	$[-0,25^\circ, 0,27^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,62^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,3^\circ, 0,3^\circ]$	$[0,72^\circ, 0,72^\circ]$	$[0,62^\circ, 0,62^\circ]$
P_2	$[-0,2^\circ, 0,25^\circ]$	$[-0,75^\circ, 0,72^\circ]$	$[-0,62^\circ, 0,62^\circ]$	$[-0,25^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,72^\circ, 0,72^\circ]$	$[-0,68^\circ, 0,625^\circ]$
P_3	$[-0,75^\circ, 0,75^\circ]$	$[-0,35^\circ, 0,28^\circ]$	$[-0,4^\circ, 0,29^\circ]$	$[-0,82^\circ, 0,82^\circ]$	$[-0,35^\circ, 0,4^\circ]$	$[-0,4^\circ, 0,4^\circ]$
P_4	$[-0,9^\circ, 0,87^\circ]$	$[-0,37^\circ, 0,28^\circ]$	$[-0,42^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,9^\circ, 1^\circ]$	$[-0,37^\circ, 0,4^\circ]$	$[-0,42^\circ, 0,42^\circ]$
P_5	$[-0,6^\circ, 0,625^\circ]$	$[-0,2^\circ, 0,25^\circ]$	$[-0,75^\circ, 0,7^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,3^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,75^\circ, 0,75^\circ]$
P_6	$[-0,58^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,15^\circ, 0,25^\circ]$	$[-0,75^\circ, 0,65^\circ]$	$[-0,625^\circ, 0,68^\circ]$	$[-0,25^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,87^\circ, 0,85^\circ]$
P_7	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,6^\circ, 0,6^\circ]$	$[-0,25^\circ, 0,3^\circ]$	$[-0,58^\circ, 0,625^\circ]$	$[-0,55^\circ, 0,55^\circ]$	$[-0,28^\circ, 0,3^\circ]$
P_8	$[-0,6^\circ, 0,62^\circ]$	$[-0,87^\circ, 0,87^\circ]$	$[-0,2^\circ, 0,27^\circ]$	$[-0,625^\circ, 0,7^\circ]$	$[-1^\circ, 1^\circ]$	$[-0,28^\circ, 0,35^\circ]$

Pour les différents tests envisagés, on peut voir que lorsque la trajectoire se déplace loin du point de fonctionnement M, les erreurs de poursuite du contrôleur H_∞ restent inférieures à celles du PID. Cependant, on peut observer la convergence rapide des erreurs de poursuite vers la valeur 0° , pour le contrôleur PID grâce à son action intégrale.

Pour les deux contrôleurs étudiés et pour la trajectoire utilisée, nous ne pouvons pas continuer le test jusqu'à la limite de l'espace de travail du robot Delta, car la dégradation des performances devient plus importante et on risque de provoquer des mouvements brusques du robot. En effet, les effets de couplage entre les axes et les nonlinéarités du modèle dynamique deviennent plus importants quand on s'éloigne de

l'axe z du robot. Ceci a été explicité au chapitre 2, lors de l'analyse dynamique du robot Delta dans tout son espace de travail.

5.5 Tests de robustesse

Pour évaluer la robustesse des contrôleurs H_{∞} et PID, une perturbation paramétrique est introduite par une masse additionnelle de 150 g sur la nacelle du robot Delta. Ce test est illustré par la Figure 5.20.



Figure 5.20 La nacelle du robot Delta avec une masse additionnelle de 150g

Deux tests expérimentaux sont considérés:

- Nous utilisons la même trajectoire que ci-dessus avec une accélération de 12G. Les résultats expérimentaux sont représentés dans Figure 5.21 et 5.22.
- La rigidité du positionnement est testé en mode de régulation autour d'une position donnée du régime permanent. Figure 5.23 et Figure 5.24 montrent les erreurs du régime permanent pour les trois actionneurs et les couples de commande pour chaque contrôleur.

Pour le premier test, en présence de la perturbation paramétrique, l'erreur de poursuite maximale et l'erreur de fin de positionnement pour la pire articulation (Articulation 1) du contrôleur H_{∞} sont respectivement 85% et 65% de celles du PID. Les couples de commande du PID sont plus bruités mais légèrement plus petits en amplitude que ceux du H_{∞} .

Pour le second test, en présence de la perturbation paramétrique, Figure 5.23 montre que les erreurs du régime permanent des trois actionneurs du PID présentent des

Chapitre 5: Implémentation expérimentale du contrôleur H^∞ sur le robot Delta

oscillations plus élevées comparées à celles du H^∞ . Figure 5.24 montre que les couples de commande du PID sont plus bruités que ceux du H^∞ . Le Tableau 5.4 résume les performances des deux contrôleurs en présence de la perturbation paramétrique en calculant le RMS des erreurs du régime permanent.

Tableau 5.4 Comparaison des performances des contrôleurs H^∞ et PID en présence d'une perturbation paramétrique

Performances	Contrôleur H^∞			Contrôleur PID		
	Art. 1	Art. 2	Art. 3	Art. 1	Art. 2	Art. 3
Erreurs RMS	0.002°	0.003°	0.001°	0.006°	0.005°	0.005°

Comme nous pouvons le constater, le RMS de l'erreur du H^∞ est beaucoup plus petit que celui du PID. Pour la pire articulation, il ne dépasse pas les 60% du PID.

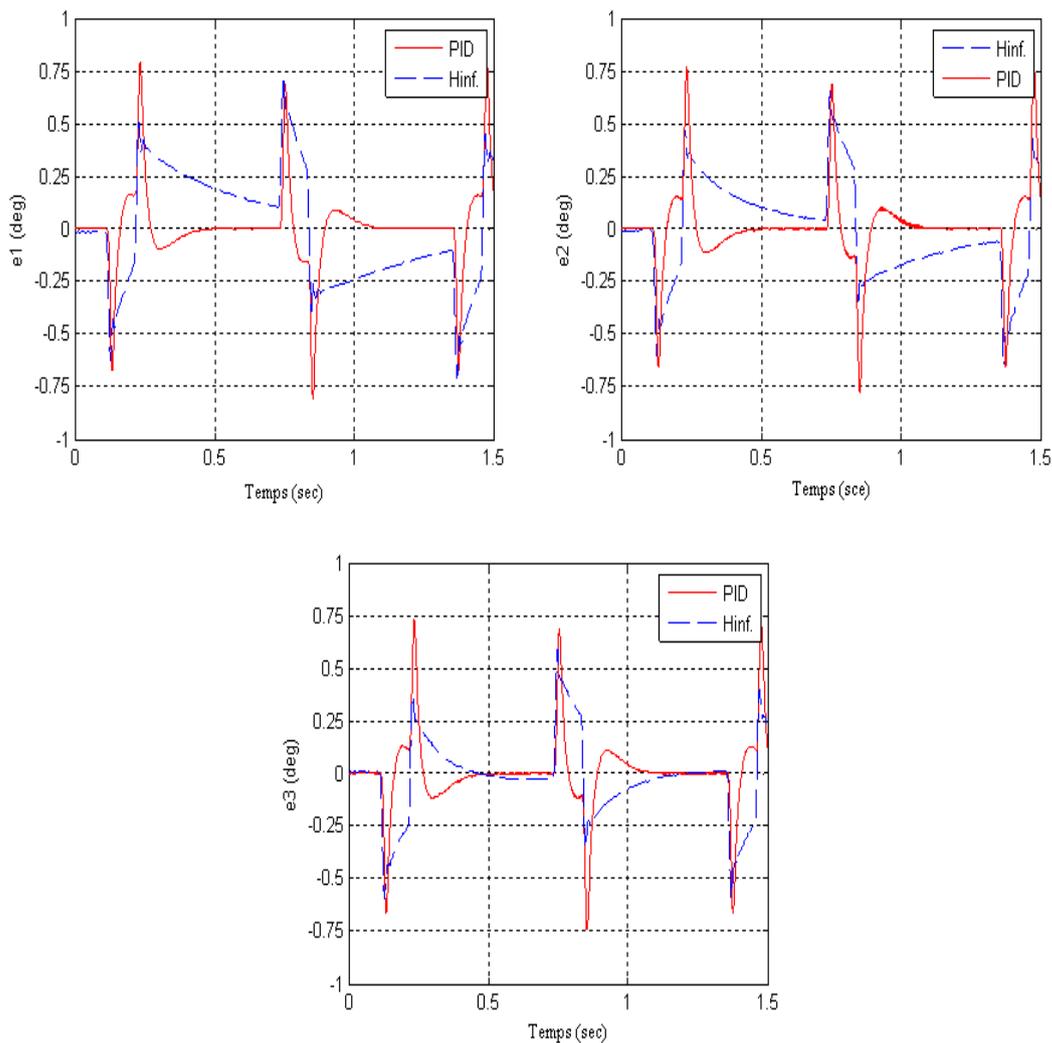


Figure 5.21. Erreurs de poursuite expérimentales en présence d'une perturbation paramétrique (Accélération 12G).

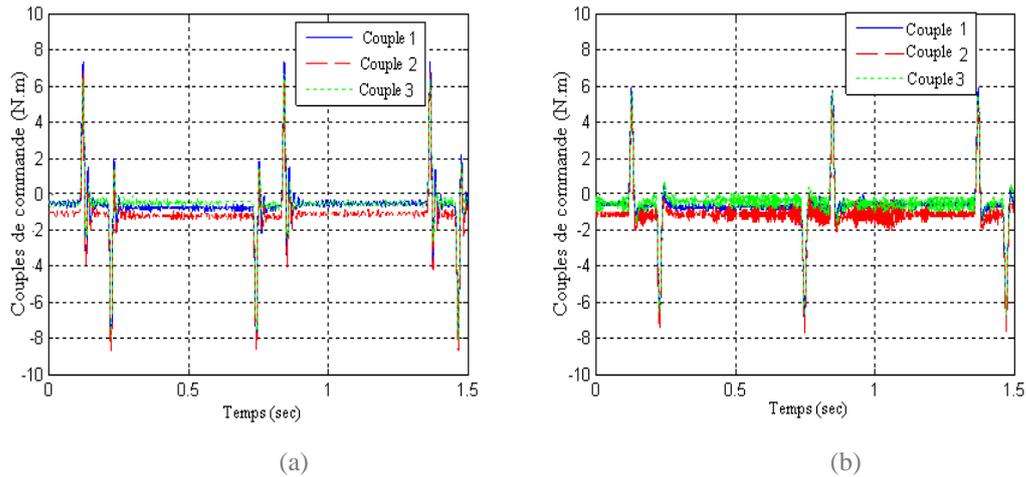


Figure 5.22. Couples de commandes expérimentaux en présence d'une perturbation paramétrique pour une accélération de 12G; (a): contrôleur H_∞ ; (b): Contrôleur PID

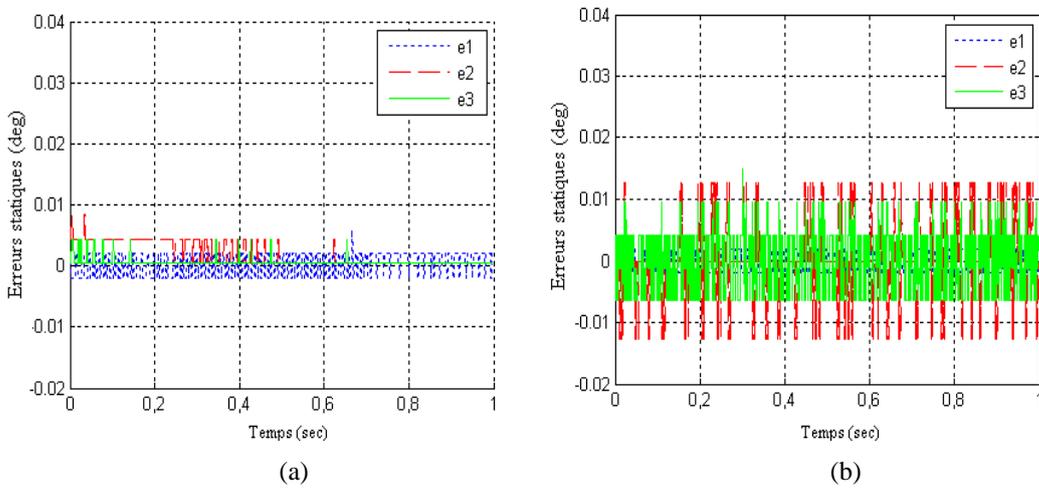


Figure 5.23 Erreurs expérimentales du régime permanent en présence d'une perturbation paramétrique (a) Contrôleur H_∞ ; (b) Contrôleur PID.

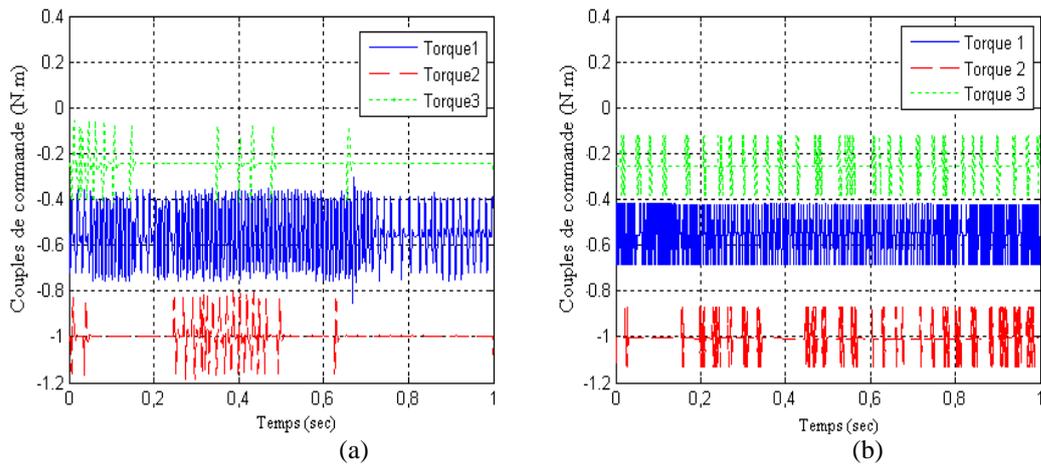


Figure 5.24 Couples de commande expérimentaux en présence d'une perturbation paramétrique; (a): contrôleur H_∞ ; (b): contrôleur PID.

5.6 Conclusion

Les résultats expérimentaux prouvent la faisabilité de l'implémentation du contrôleur H_∞ en Hardware. Les meilleures performances sont obtenues avec le contrôleur correspondant à la plus grande bande passante de 390 rad/s. Les performances de suivi de trajectoire expérimentales montrent que les performances du PID comparées à celles du H_∞ diminuent quand la dynamique du mouvement augmente. En effet, à 12G, l'erreur de poursuite maximale et l'erreur de fin de positionnement du contrôleur H_∞ deviennent respectivement 80% et 60% du PID. Les erreurs de poursuite maximales pour le contrôleur H_∞ augmentent pour des trajectoires expérimentales verticales distantes du point de fonctionnement, mais elles restent plus petites que celles du PID. En présence d'une perturbation paramétrique, les tests de robustesse expérimentaux prouvent que le contrôleur H_∞ est plus robuste que le PID. Le RMS de l'erreur du régime permanent de H_∞ ne dépasse pas 60% de celui du PID.

Conclusion générale

Conclusion

Dans ce manuscrit de thèse, nous avons présenté les travaux de recherche réalisés dans le contexte de la modélisation et la commande robuste d'un robot parallèle et plus précisément nous nous sommes intéressés au robot Delta à 3 ddl. Outre la synthèse d'une loi de commande robuste H_∞ , nous avons étudié, à titre comparatif, d'autres approches de commande classiques utilisées pour les robots sériels et nous les avons adaptées au robot parallèle Delta.

Nos contributions concernant ce travail de recherche peuvent être résumées en ces points:

Pour la modélisation du robot Delta, un modèle dynamique inverse a été développé à partir du modèle dynamique inverse de Codourey [Cod1], il a la particularité d'être fonction que des paramètres articulaires du robot [Rac1][Rac5]. Ce modèle a permis aussi de déterminer un modèle dynamique direct non linéaire dans l'espace d'état en effectuant un choix convenable des variables d'état. La linéarisation tangentielle de ce dernier par rapport à un point de fonctionnement a généré les expressions analytiques d'un modèle dynamique direct linéaire qui est fonction de la position du point de repos dans l'espace de travail du robot. Le modèle linéaire a été validé par simulation et par expérimentation. Les différentes formes de modèle dynamique développées dans cette thèse ouvrent une opportunité pour l'application de nouvelles stratégies de commande pour le robot Delta.

La linéarisation tangentielle a permis de faire aussi une analyse dynamique du comportement du Delta dans tout son espace de travail. Cette analyse est très intéressante pour le choix du point de fonctionnement, de type de commande et de

l'emplacement de la trajectoire de déplacement de la nacelle dans l'espace de travail du robot.

Une commande H_∞ par l'approche de sensibilité mixte est synthétisée sur la base du modèle linéaire du Delta. Nos contributions par rapport à cette approche est l'analyse fréquentielle que nous avons développé et qui a permis de limiter la bande passante du système en boucle fermée entre deux fréquences qui sont fonctions des paramètres des fonctions de pondération [Rac3][Rac5]. Ces limites imposées sur la bande passante permettent de sélectionner les paramètres des pondérations fréquentielles qui élargissent le maximum possible cette bande c'est-à-dire pour avoir les meilleures performances tout en préservant la stabilité robuste du système en boucle fermée. Grâce à cette analyse, nous avons pu déterminer expérimentalement le contrôleur H_∞ qui donne les meilleures performances pour le robot Delta.

Dans ce travail de thèse, nous avons envisagé, pour la partie simulation, deux schémas de commande H_∞ ; avec et sans le couple a priori. Pour le premier cas, nous avons effectué une comparaison des performances de H_∞ avec des contrôleurs qui n'incorporent pas le MDI dans leurs schémas de commande. On a choisi le PID qui est très utilisé dans les robots industriels mais ses performances étaient inférieures à celles de H_∞ et un autre contrôleur linéaire H_2 (LQG) dont les étapes de synthèse sont les mêmes que celles de H_∞ mais lors de la résolution du problème standard, il minimise l'énergie moyenne (norme H_2) de la matrice de gain des entrées de perturbation vers les erreurs de sortie à travers toutes les fréquences. Le contrôleur H_∞ , en minimisant l'amplification maximale des signaux d'entrée (le pire cas) a donné des performances beaucoup plus intéressantes que celles de H_2 en termes de suivi de trajectoire [Rac2]. Par contre, nous avons constaté une dégradation importante des performances du H_∞ lors de l'augmentation de la dynamique du mouvement, d'où l'idée d'utiliser le H_∞ en association avec le couple a priori. Le contrôleur obtenu est comparé à deux autres contrôleurs très utilisés en robotique et qui incorporent le MDI dans leurs schémas de commande; il s'agit de la commande par découplage non linéaire [Rac4] et la commande PD avec couple a priori. Les résultats de simulation obtenus ont montré d'une manière générale que le contrôleur H_∞ en association avec la couple a priori était plus performant et plus robuste que les deux autres contrôleurs classiques.

En dernière partie de cette thèse, une implémentation hardware du contrôleur H_∞ sur le robot Delta de l'EPFL a été effectuée [Rac5]. Nous nous sommes limités au cas du contrôleur H_∞ sans l'association du couple a priori. Nos objectifs étaient d'évaluer ses performances expérimentalement et les comparer à celles du contrôleur classique PID en termes de performance et de robustesse. Les résultats expérimentaux ont confirmé que le contrôleur H_∞ présentait un grand potentiel par rapport au PID, surtout lorsque la dynamique du mouvement est élevée et lorsque le système est en présence d'incertitudes paramétriques.

Perspectives

Les perspectives que l'on peut envisager à moyen terme pour compléter les travaux entrepris dans cette thèse, concernent en premier lieu la partie expérimentale, elles peuvent être résumées en ces points:

- Envisager des trajectoires de prise et dépose plus complexes, telle que la trajectoire demi-ellipse utilisée en simulation.

Conclusion générale

- Associer le couple a priori avec le contrôleur H_∞ pour améliorer ses performances surtout lorsqu'on s'éloigne du point de fonctionnement.
- A titre comparatif, implémenter expérimentalement les contrôleurs non linéaires basés modèles, c'est-à-dire la commande par découplage non linéaire et la commande PD avec couple a priori.

Concernant la commande H_∞ ,

- Il est important de développer une méthode de réglage automatique des paramètres des fonctions de pondération qui permettra l'implémentation systématique du contrôleur dans n'importe quel robot industriel parallèle.
- Envisager un contrôleur robuste H_∞ multi-modèles, multi-objectifs pour améliorer la fin de positionnement du contrôleur et aussi surtout pour avoir la possibilité d'effectuer des trajectoires qui peuvent aller jusqu'à la limite de l'espace de travail du robot [Sen].
- Envisager la méthodologie de commande H_∞ nonlinéaire pour le robot Delta. En effet, dans A. Siqueira et al. [Siq], on montre que cette technique garantit une atténuation des perturbations des couples sur les positions articulaires. Deux approches fondamentales de cette commande sont considérées ; la première est basée sur la théorie des jeux et la seconde est basée sur les techniques des systèmes linéaires à paramètres variables (LPV).

Publications réalisées dans le cadre de cette thèse

Publication internationale dans un journal:

- [Rac5] M. Rachedi, B. Hemici and M. Bouri “Design of an H_∞ controller for the delta robot: experimental results”, *Advanced Robotics*, Taylor and Francis, vol. 29, Issue 18, pp. 1165-1181, Doi: 10.1080/01691864.2015.1046924, July 2015.

Conférences internationales:

- [Rac1] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, “Application of an H_∞ control strategy to the parallel Delta,” *IEEE Conference on communications, Computing and Control Application, CCCA’12*, pp. 1-6, Marseille, December 2012.
- [Rac2] M. Rachedi, B. Hemici and M. Bouri, “Application of the Mixed Sensitivity Problem H_∞ and H_2 to the parallel Delta,” *The 3rd International Conference on system and Control, ICSC’2012*, IEEE conference, pp. 484-489, Algiers, October 2013.
- [Rac3] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, “ H_∞ feedback control for parallel mechanism and application to Delta Robot,” *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, (MED’2014)*, IEEE conference, pp. 1476-1481, Palermo-Italy, June 2014.
- [Rac4] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, « Robust control of parallel robot », *The 17th International Conference on Advanced Robotics (ICAR 2015)*, IEEE conference, pp. 428-433, Istanbul, Turkey, July 2015.

Références bibliographiques

- [Abd] H. Abdellatif and B. Heimann, “Computational efficient inverse dynamics of 6-dof fully parallel manipulators by using the lagrangian formalism,” *Mechanism and Machine Theory*, 44(1), 192–207, 2009.
- [Asa] H. Asada, K. Youcef-Toumi, “Direct-Drive Robots, Theory and Practice,” The MIT Press, 1987.
- [Axe] P. Axesson, A. Helmersson and M. Norrlöf, “ H_∞ controller design methods applied to one joint of a flexible industrial manipulators,” Technical report from automatic control of Linköpings University; 2013.
- [Ben] M. Bennehar, A. Chemori S. Krut and F. Pierrot, “Continuous Closed Form Trajectories Generation and Control of Redundantly Actuated Parallel Kinematic Manipulators,” *Multi-Conference on Systems, Signal and Devices (SSD)*, 2014 11th International, 2014.
- [Ber] D.S. Bernstein and W.M. Haddad, “LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach,” pp. 293-304, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 34, n°. 3, Mars 1989.
- [Bha] S. Bhattacharya., D. Nenchev and M. Uchiyama, “A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator”. *Mechanism and Machine Theory*, 33(7), 957–964. 1998.
- [Boe] C.R. Boer, L.M. Tosatti et K.S. Smith, “Parallel Kinematic Machines: Theoretical Aspects and Industrial Requirements,” Springer-Verlag, 1999.
- [Bou] H. Bourles et F. Aïoun, “ Approche H_∞ et μ -synthèse,” *Ecole d’été d’Automatique de Grenoble*, 1993.
- [Bou1] M. Bouri, R. Clavel, M. Y. Zerrouki, W. Maeder, Towards a new Delta robot: an inverted Delta, , *International Symposium on Robotics*, Paris, France, 2004.
- [Bou2] M. Bouri, R. Clavel, A Windows PC based robot controller: An open architecture. *International Symposium on Robotics*, Tokyo, Japan, 2005.

- [Bri] S. Briot and W. Khalil, “Dynamics of Parallel Robots: From Rigid Bodies to Flexible Elements,” *Mechanisms and Machine Science*, Springer, 2015
- [Cas] L. A. Castañeda, A. Luviano- Juárez, and I. Chairez, “ Robust Trajectory Tracking of a Delta Robot Through Adaptive Active Disturbance Rejection Control,” *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 23, n° 4, July 2015.
- [Caz] J. Casalilla, M. Vallès, V. Mata, M. Diaz-Rodrigues and A. Valera, “ Adaptive control of a 3-DOF parallel manipulator considering handling and relevant parameter models,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 30 , pp. 468-477, Elsevier, 2014.
- [Cha] D. Chablat et P. Wenger, “ A new three-DOF parallel mechanism: milling machine applications,” *Proc. of the Parallel Kinematics Seminar (PKS’00)*, Chemnitz, Germany, 2000.
- [Che] H. Cheng, “Dynamics and Control of Parallel Manipulators with Redundant Actuation,” thèse de Doctorat, université de Hong Kong de science et technology 2001.
- [Chi] R.Y. Chiang and M.G. Safonov, “ Robust – Control toolbox,” For use with Matlab, users guide. The Math Works, Inc. June 1988.
- [Cho] S.E. Chouak, “Modélisation et commande d’un procédé d’extrusion réactive,” Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1, 2004.
- [Cla1] R. Clavel, “Device for the movement and positioning of an element in space,” US Patent, N°. 4,976,582, December 11, 1990.
- [Cla2] R. Clavel, “Conception d’un robot parallèle rapide à 4degré de liberté,” Thèse de Doctorat (EPFL), 1991.
- [Cla3] R. Clavel, “Delta, a fast robot with parallel geometry,” *Proc. Of the 18th Int. Symp. On Industrial Robots (ISIR)*. Berlin, Springer-Verlag, pp. 91-100.
- [Cla4] R. Clavel, P. Pham, B. Lorent, B. Le Gall, M. Bouri., New Variants of Delta Robots and Double-Tilt Platform for Assembly, Invited paper, *Proceedings of Robotic Systems for Assembly, 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562*, Braunschweig April 28-29, 2008.
- [Cod1] A. Codourey, “Contribution à la commande des robots rapides et précis, application au robot Delta à entraînement direct,” thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 1991.
- [Cod2] A. Codourey, “Dynamic modeling of parallel robots for computed-torque. Control implementation,” *The International Journal of Robotic Research*, vol, 17, N°12, December 1998, pp, 1325 – 1336.
- [Cod3] A. Codourey and E. Burdet, “A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robot,” In *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 1997)* (pp. 1612–1619). Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- [Cor] D. Corbel, “ Contribution à l’amélioration de la précision des robots parallèles,” thèse de Doctorat, université Montpellier 2, 2008.
- [Cuy1] J. De Cuyper, J. Swevers, M. Verhaegen and P. Sas , “ H_∞ feedback control for signal tracking on a 4 poster in the automotive industry,” In: *Processing of the International Seminar on Modal Analysis (ISMA 25)*. Leuven: Belgium; 2000.
- [Cuy2] J. De Cuyper, M. Verhaegen and J. Swevers, “Off-line feed forward and H_∞ feedback control on a vibration,” *Control Engineering Practice*, vol. 11, February 2003.

- [Das] B. Dasgupta and P. Choudhury, "A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, 34(6), 801–824, 1999.
- [Duc] G. Duc and S. Font, "Commande H_∞ et μ -Analyse : des Outils pour la Robustesse," Editions Hermès, 1998.
- [Dou1] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia and M. Michelin, "Identification and Vibration Attenuation for the Parallel Robot Par 2," *Control Systems technology*, IEEE Transactions on (Volume 22, Issue 1), Jan 2014.
- [Dou2] L.R. Douat, « Identification et commande pour l'atténuation des vibrations du robot parallèle Par2, » Thèse de Doctorat, INSA, Toulouse, 2011.
- [Fra1] B.A. Francis and G. Zames, "On H_∞ -Optimal Sensitivity theory for SISO Feedback Systems," pp. 9-16, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, n°1, January 1984.
- [Fra2] B.A. Francis, J.W. Helton and G. Zames, " H_∞ - Optimal feedback controllers for Linear Multivariable Systems," pp. 888-900, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, 1984
- [Fra3] B.A. Francis, « A course in H_∞ Control Theory," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, 1987.
- [Fra4] B.A. Francis and J.C. Doyle, "Linear Control Theory with an H_∞ Optimality Criterion," *SIAM J, Control and Optimization* , pp. 815-844, vol. 25, n° 4, 1987.
- [Fic] E. Fichter, "A Stewart platform based manipulator: General theory and practical construction". *The International Journal of Robotics Research*, 5(2), 157–181, 1986.
- [Fri] Friedland, "Control System Design: an introduction to state space methods," New York: Mac Graw-Hill; 1987.
- [Gah] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *Int. J. of Robust and non linear Control*, vol. 4, pp. 1994.
- [Gen] Z. Geng, S. Haynes, J. Lee et R. Carrol, "On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms". *Robotics and Autonomous Systems*, 9, 237–254. 1992.
- [Glo1] K. Glover, "Robust Stabilization of Linear Multivariable systems: relatins to approximation," pp. 741-766, *Int. J. Control*, vol. 43, n°3, 1986.
- [Glo2] K. Glover and J. C. Doyle, "State – Space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ - Norm bound and relations to risk sensitivity," *PP. 167-172, System & Control letters* 11, 1988.
- [Glo3] K. Glover, D.J.N. Limbeer, J.C. Doyle, E.M. Kasenally and M.G.Safonov, "A Characterization of all Solutions to the four Block General Distance Problem," pp. 283-324, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, n° 2, March 1991.
- [Gos] C. Gosselin, "Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of parallel manipulators ," In *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (pp. 883–889). NY, USA.
- [Gou] V.E.Gough, "Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance," 1956-1957. *Proc. Auto Div. Inst.Mech. Eng.*
- [Gre1] M. Green, K. Glover , D. Lemebeer et J.C. Doyle, "A J – Spectral Factorization : Approach to H_∞ - Control," pp. 1350-1371, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 28, n°6, November 1990.
- [Gre2] M. Green, " H_∞ Controller Synthesis by J- Lossles Coprime Factorization," pp. 522-547, *SIAM J. Control and Optimization* , vol. 30, n°3, May 1992.

- [Guo] G. Gugin, D. Qinqi, and W. Wei, “ Sliding mode control of parallel robot by optimizing gain based on RBF neural network,” Control Conference (CCC), 2012 31st Chinese, 2012.
- [Gwi] J.E.Gwinnett, "Amusement device", Brevet américain No. 1 789 680, 20 janvier 1931.
- [Hal] K. Halbaoui, D. Boukhattala and F. Boudjema, “Introduction to Robust Control Techniques,” Publisher Intech, 2011.
- [He-F] J. F. He, H. Z. Jiang, D.C. Cong, Z.M. Ye and J. W. Han, “A survey on control of Parallel Manipulator,” Trans. Tech. Publication, Switzerland; 2007.
- [Hof] R. Hoffman & M. Hoffman, “Vibrational modes of an aircraft simulator motion system,” In Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms (pp. 603–606). Montreal, 1979.
- [Hus] M. Huser, M. Tschudi, D. Keiffer, A. Teklits, M. Bouri, R. Clavel, M. O. Demareux, Device For Moving And Positioning An Object In Space, , reference WO2012152559, Bosch Packaging Technology.
- [Iqb] S. I. Iqbal, A.I. Bhatti, M. Akhtar and S. Ullah, “Design and robustness Evaluation of an H_{∞} loop shaping controller for a 2 DOF Stabilized platform,” Proceeding of the European Control Conference, Kos, Greece, 2007.
- [Iwa] T. Iwasaki et R.E. Skelton, “All controllers for the general H_{∞} control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas,” pp. 1307-1317, Automatica, vol. 30, n°8, 1994.
- [Jau] L. Jaulin L, “Représentation d’état pour la modélisation et la commande des systèmes,” Coll. Automatique de base, London: Hermes; 2005.
- [Jia] Z. H. Jia and T. Ishida, “Trajectory tracking control of industrial robot manipulators using a neural network controller,” Systems Man and Cybernetics, IEEE International Conference, 2007.
- [Jin] Y. Jin, H.Chanal and F. Paccot, “Parallel Robots,” A.Y.C. Nee (ed.), Handbook of Manufacturing Engineering and Technology, Springer-Verlag London 2015.
- [Kel] R. Kelly and R. Salgado, “PD Control with Computed Feedforward of Robot Manipulators: A design Procedure,” IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 10. N°4, August 1994.
- [Kha] W. Khalil and E. Dombre, “Modeling identification and control of robots,” Hermes Penton Ltd. 2002.
- [Kho] P. Khosla, “ Real-Time Control and Identification of Direct-Drive Manipulators,” these de Doctorat, Carnegie Mellon Université, Pittsburg, 1986.
- [Kru1] S. Krut, “Contribution à l’Etude des Robots Parallèles Légers, 3T-1R et 3T-2R, à Forts Débattements Angulaires,” thèse de Doctorat, Université Montpellier II, France, Novembre 2003.
- [Kru2] S. Krut, V. Nabat, O. Company and F. Pierrot, “ A high speed parallel robot for Scara motions,” In IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA’04, New Orleans, USA, April 2004.
- [Kwa1] H. Kwakernaak, “ A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of Multivariable feedback systems,” pp. 117-156, Int. J. Control, vol. 44, n°1, 1986.
- [Kwa2] H. Kwakernaak, “ Robust Control and H_{∞} - optimization- Tutorial Paper,” pp. 225-273, Automatica, vol. 29, n° 2, 1993.
- [Kwa3] H. Kwakernaak, “ Robust Control – Mixed – Sensitivity Optimization,” Ecole d’Eté d’Automatique de Grenoble, septembre 1993.
- [Kwa4] H. Kwakernaak, “Mixed sensitivity design,” In: 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain: IFAC; 2002.

- [Lar] P. Larminat, “Méthodes élémentaires pour la commande robuste,” Ecole d’été d’Automatique de Grenoble, Septembre 1993.
- [Lee] K. Lee and D. Shah, “Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator”. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 4(3), 361–368. 1988.
- [Li-Q] Q. Li and F.X. Wu, “Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach,” *Mechatronics* 14 , pp 947–964, Elsevier, 2004.
- [Li-Y] Y. Li, J.Y. Wang and Z. Chen, “Research on trajectory tracking of a parallel robot based on neural network PID control,” *Automation and Logistics, ICAL 2008, Qingdao, IEEE International Conference.*
- [Man] S. S. Manic, M. Maties and M. Balan, “Kinematics analysis, design, and control of an Isoglid3, parallel robot (ig(3pr),” In: *Proc. 34 Annual Conference of the IEEE Industrila Electronics Society*, pp. 1265-1275. 2008.
- [Mer1] J.P. Merlet, “Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis,” *International Journal of Robotics research*, 3:221–236. 2004.
- [Mer2] J.P. Merlet, “Computing the worst case accuracy of a PKM over a workspace or a trajectory,” *Proc. of the Parallel Kinematics Seminar (PKS’06)*, pages 83–96, Chemnitz, Germany. 2006.
- [Mer3] J.P. Merlet, “Parallel Robots,” Springer, 2006.
- [Mer4] J.P. Merlet and G. Clément, “ Parallel Mechanism and Robots”, Springer Handbook of Robotics, pp. 269-285, 2008.
- [Mil] K. Miller, “Optimal design and modeling of spatial parallel manipulators,” *The International Journal of Robotics Research*, 23(2), 127–140, 2004.
- [Mor] M. Morari and E. Zafiriou, “ Robust Process Control,” Printice Hall International, Inc. 1989.
- [Nab] V. Nabat, O. Company, S. Krut, M. Rodriguez and F. Pierrot, “ Par4: Very high speed parallel robot for pick and place,” In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and systems, IROS’05, Alberta, Canada, August 2005.*
- [Par] F. C. Park, “Parallel Robots,” *Encyclopedia of Systems and Control*, Springer-Verlag London 2015.
- [Pau] R.P. Paul, “Technical Report AIM-177,” Stanford Artificial Intelligence Laboratory 1972.
- [Pie] F. Pierrot and O. Company, “H4: A new family of 4-dof parallel robots,” In *IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, AIM’99, Atlanta, Georgia, USA, September 1999.*
- [Qu-S] S.C. Qu and Y.J. Wang, “ Discrete Sliding Mode Control for a parallel Robot,” *Machine Learning and Cybernetics, 2006 International Conference; IEEE Conference Publications*, 2006.
- [Quy] P. R. Quayang, W. J. Zhang, and F. X. Wu, “Nonlinear PD control for trajectory tracking with consideration of the design for control methodology,” in *Proc. IEEE Conf. Robot. Autom.*, pp. 4126-4131, 2002.
- [Pol] W.L.V. Pollard, "Position controlling apparatus," US Patent No. 2,286,571, June 16, 1942.
- [Rac1] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, “Application of an H_∞ control strategy to the parallel Delta,” *IEEE Conference on communications, Computing and Control Application, CCCA’12, Marseille, December 2012.*
- [Rac2] M. Rachedi, B. Hemici and M. Bouri, “Application of the Mixed Sensitivity Problem H_∞ and H_2 to the parallel Delta,” *The 3rd International Conference on system and Control, ICSC’2012, Algiers, October 2013.*

- [Rac3] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, “ H_{∞} feedback control for parallel mechanism and application to Delta Robot,” 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, (MED’2014), IEEE conference. Palermo-Italy, June 2014.
- [Rac4] M. Rachedi, M. Bouri and B. Hemici, « Robust control of parallel robot », The 17th International Conference on Advanced Robotics (ICAR 2015), Istanbul, Turkey, July 2015.
- [Rac5] M. Rachedi, B. Hemici and M. Bouri “Design of an H_{∞} controller for the delta robot: experimental results”, Advanced Robotics, Taylor and Francis, vol. 29, Issue 18, pp. 1165-1181, July 2015.
- [Rey-L] L.E. Rey, “ Environnement pour la conception de commandes de robots,” thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [Rey-F] F. Reyes and R. Kelly, “Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm.” *Mechatronics* 11, Elsevier Science Ltd, pp 267-282. 2001.
- [Sag1] H.G. Sage, M.F. De Mathelin and E. Ostertag, “Robust control of robot manipulators: a survey,” *Int. J. Control*, pp. 1498–1522, 1999.
- [Sag2] H.G. Sage, M.F. De Mathelin, G. Abba, J.A. Gangloff and E. Osterlag, “Nonlinear optimization of robust H_{∞} controllers for industrial robot manipulators,” In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robot Automation*; Albuquerque, NM. pp. 2352–2357, April 1997.
- [Sen] O. Sename, P. Gaspar and J. Bokor, “ Robust Control and Linear Parameter Varying Approaches: Application to Vehicule Dynamics,” Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Sug] K. Sugimoto, “Computational scheme for dynamic analysis of parallel manipulators,” *ASME Journal of Mechanics, Transmission and Automation in Design*, 111, 29–33, 1989.
- [Sko1] S. Skogestad, M. Morari and J.C. Doyle, “Robust Control of Ill-Conditioned Plants: High-Purity Distillation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, n°12, December 1988.
- [Sko2] S. Skogestad and I. Postlethwaite, “ Multivariable Feedback Control,” John Wiley and Sons, 1996.
- [Siq] A.G. Siqueira, M.H. Terra and M. Bergerman, “ Robust Control of Robots, Fault Tolerant Approaches,” Springer-Verlag, 2011.
- [Ste-B1] B. S. Stevens, “ Control Characterisation and Optimisation of Fast industrial Robots (an Application to the direct drive Delta parallel robot,” thèse de Doctorat n° 1362, EPFL, CH-Lausanne, 1996.
- [Ste-B2] B. S. Stevens, “Control Characterisation and Optimisation of Fast industrial Robots (an Application to the direct drive Delta parallel robot,” thèse de Doctorat n° 1362, EPFL, CH-Lausanne, 1996.
- [Ste-D] D. Stewart, “ A platform with 6 degrees of freedom,” *Proc. Inst. Mech. Eng.* 180, pp. 371-386 (1965).
- [Sto] J. J. Stoline and W. Li, “Applied Nonlinear Control,” Prentice-Hall, 1991.
- [Tol] S. F. Toloue, M.R Akbarzadek and M. Jalaeian, “ Position tracking of a 3-PSP parallel robot using dynamic growing interval type-2 fuzzy neural control,” *Applied Soft Computing*, Volume 37, Esvier, 2015.
- [Tsa] L. Tsai, “Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 122, 3–9, 2000.
- [Tsa-M] M.C. Tsai and D.W. Gu, “ Robust and Optimal Control: A two-port Framework Approach,” Springer-Verlag, London 2014.

- [Tsc] M. Tschudi, M. Bouri, F. Cosandier, R. Clavel, Development of an inclined motors Delta Direct Drive robot: comparison study, 43rd Intl. Symp. on Robotics (ISR2012), Taipei, Taiwan, Aug. 29-31, 2012.
- [Tsy] Y.Z. Tsytkin, “Synthesis of Optimal Control Systems for non – minimum phase plants,”, pp. 291-296, int. Systems SCI, vol.23, n° 2, 1992.
- [Viv1] O.A. Vivas, “Contribution à l’identification et à la commande des robots parallèles,” thèse de Doctorat. Université Montpellier II, 10 Novembre 2004.
- [Viv2] O.A. Vivas Alban and P. Poignet, “Predictive functional control of parallel robot,” Control Engineering Practice 13, 863-874, 2005.
- [Yan] Z. Yang, J. Wu, J. MEI, J. Gao and T. Huang, “Mechatronic Model Based Computed Torque Control of Parallel Manipulator,” International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 5, N°1, 2008.
- [Yed] R. K. Yedavalli, “Robust Control of Uncertain Dynamic systems, A linear State Space Approach,” Springer Science+Business Media LLC, 2014.
- [Zha] J. Zhang, C. Lian, R. Gao and L. Shi, “3-Degree-of-Freedom Parallel Robot Control Bazed Fuzzy Theory,” Intelligent Human-Machine Systems and Cyberntics (IHMSC), 2nd International Conference, 2010.
- [Zam1] G. Zames, “On the Input – Output Stability of time varing nonlinear feedback systems-Pat I: Conditions using concepts of loop gain, conicity positivity,” pp. 228-238, IEEE Transaction on Control , vol. 11, 1966.
- [Zam2] G. Zames, “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Inverses,” pp. 301-319, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 26, n° 2, Avril 1981.
- [Zub] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, Charles Pinto, and J. Corra2, “Robust Model Based Predictive Control for Trajectory Tracking of Parallel Robots,” New Advances in Mechanisms, Transmissions and Applications, 341 Mechanisms and Machine Science 17, Springer Science+Business Media Dordrect 2014.
- [Zho1] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover, “Robust and Optimal Control,” Prentice Hall, 1996.
- [Zho2] K. Zhou, “Essentials of robust Control,” Prentice Hall, New Jersey, 1998.

Modèle géométrique direct et inverse du robot Delta

Les modèles géométriques direct et inverse que nous allons présenter sont ceux de Codourey et Clavel [Cod1][Cla1].

A.1 Modèle géométrique inverse [Cod1]

Le but du modèle géométrique inverse est de calculer les angles $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en connaissant la position (x_0, y_0, z_0) de la nacelle. En travaillant dans les repères R_i , on peut calculer chacun des angles α indépendamment. Dans le repère R_i , la position de la nacelle est donnée par la relation:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Les avant-bras décrivent depuis la position $B_i = (x_0, y_0, z_0)$ de la nacelle dans le repère R_i une sphère de rayon L_B , ce qui nous donne l'équation (A.1). Le bras, centré en $(R, 0, 0)$ décrit un cercle de rayon L_A (équation (A.2)). Le point d'intersection entre la sphère (A.1) et le cercle (A.2) se trouve dans le plan $y = 0$ (équation (A.3)).

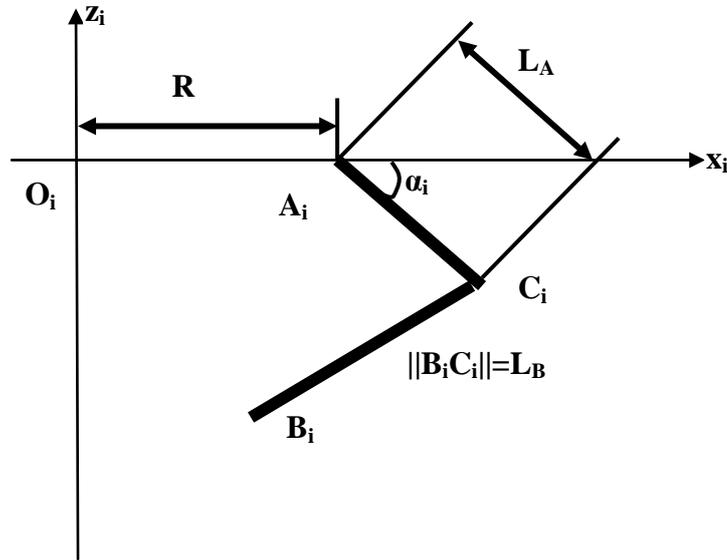


Figure A.1 Bras et avant-bras dans le repère R_i

On obtient ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues permettant de calculer les coordonnées du point C_i (Figure A.1):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = L_B^2 \quad (\text{A.1})$$

$$(x - R)^2 + z^2 = L_A^2 \quad (\text{A.2})$$

$$y = 0 \quad (\text{A.3})$$

On peut résoudre ce système d'équation en remplaçant (A.3) dans (A.1), puis en effectuant la soustraction de cette nouvelle équation avec (A.2). Ceci nous donne:

$$x(2x_0 - 2R) + 2z_0z = L_A^2 - L_B^2 - R^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (\text{A.4})$$

En posant: $A = L_A^2 - L_B^2 - R^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$
et $B = 2x_0 - 2R$

on trouve:

$$z = \frac{A - Bx}{2z_0} \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant dans (A.2), on trouve, après quelques opérations:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{avec: } a = 4z_0^2 + B^2$$

$$b = 4Rz_0^2 + AB$$

$$c = A^2 + 4R^2z_0^2 - 4z_0^2L_A^2$$

On vérifie que a ne passe jamais par zéro. Et si on veut rester dans le volume de travail, z_0 n'est jamais égal à zéro, et ainsi, a est toujours positif.

Les équations (A.6) et (A.5) nous donnent le point d'intersection de la sphère avec le cercle, c'est-à-dire la position du coude C_i dans le repère R_i . Dans l'équation (A.6), seule la solution avec le signe positif est retenue, car elle seule donne un résultat compris dans le volume de travail du robot.

Ainsi, on trouve pour α (défini positif vers le bas):

$$\alpha_i = -\arcsin\left(\frac{z}{L_A}\right) \quad (\text{A.7})$$

A.2 Modèle géométrique direct [Cla1]

Le modèle géométrique direct est celui de Clavel [Cla1] et a été repris par Codourey [Cod1].

En posant:

$$D_i = -L_B^2 + L_A^2 + R^2 + 2RL_A \cos \alpha_i$$

$$E_i = 2(R + L_A \cos \alpha_i) \cos \theta_i$$

$$F_i = 2L_A \sin \alpha_i$$

$$H_1 = E_1G_2 - E_1G_3 - E_2G_1 + E_2G_3 + E_3G_1 - E_3G_2$$

$$H_2 = -E_1F_2 + E_1F_3 + E_2F_1 - E_2F_3 - E_3F_1 + E_3F_2$$

$$H_3 = -E_1D_2 + E_1D_3 + E_2D_1 - E_2D_3 - E_3D_1 + E_3D_2$$

$$H_4 = F_1D_2 - F_1D_3 - F_2D_1 + F_2D_3 + F_3D_1 - F_3D_2$$

$$H_5 = -F_1G_2 + F_1G_3 + F_2G_1 - F_2G_3 - F_3G_1 + F_3G_2$$

alors:

$$x = z \frac{H_5}{H_2} + \frac{H_4}{H_2} \quad (\text{A.8})$$

$$y = z \frac{H_1}{H_2} + \frac{H_3}{H_2} \quad (\text{A.9})$$

et:

$$z = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LQ}}{2L} \quad (\text{A.10})$$

avec:

$$L = \frac{H_5^2 + H_1^2}{H_2^2} + 1 \quad (\text{A.11})$$

$$M = 2 \frac{H_5 H_4 + H_1 H_3}{H_2^2} - \frac{H_5 E_1 + H_1 F_1}{H_2} - G_1 \quad (\text{A.12})$$

$$Q = \frac{H_4^2 + H_3^2}{H_2^2} - \frac{H_4 E_1 + H_3 F_1}{H_2} - G_1 \quad (\text{A.13})$$

On choisit la solution avec le signe moins pour l'équation (A.10).

Valeurs singulières, norme H_2 et norme H_∞

B.1 Valeurs singulières

Les valeurs singulières σ_i d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, de rang r , sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A , ordonnées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$:

$$\sigma_i[A] = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad (\text{B.1})$$

où $[\cdot]^*$ est le transposé conjugué.

Si $r < n$, alors, il ya $n-r$ valeurs singulières réelles, c.a.d: $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n$.

Il existe deux matrices unitaires $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que:

$$A = U \Sigma V^* = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \quad (\text{B.2})$$

où $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. Ceci est appelé la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice A . La plus grande valeur singulière σ_1 est noté généralement:

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1 \quad (\text{B.3})$$

Si A est une matrice carré $n \times n$, alors la $n^{\text{ème}}$ valeur singulière (c.à.d., la plus petite valeur singulière) est noté:

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n \quad (\text{B.4})$$

Quelques propriétés utiles des valeurs singulières

- a) $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A)$
- b) si A^{-1} existe, $\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$
- c) si A^{-1} existe, $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$
- d) $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A)$
- e) $\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- f) $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$
- g) $\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A + E) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E)$
- h) $\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}([A \ B]) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$
- i) $\max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{i,j}|$
- j) $\sum_i^n \sigma_i^2 = \text{trace}(AA^*)$

B.2 Normes H_2 et norme H_∞

Pour une fonction de transfert $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, stable, la norme H_2 et la norme H_∞ en termes de valeurs singulières $\sigma_i(j\omega)$ de $\mathbf{G}(j\omega)$ dépendent de la fréquence:

Norme H_2 :

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_i(j\omega))^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (\text{B.5})$$

Norme H_∞ :

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \quad (\text{B.6})$$

Résolution du problème H_∞ standard

C –1 Formulation du problème:

Soit le système linéaire décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t) \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}_2(t) \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}_2(t) \quad (\text{C.3})$$

avec;

$\mathbf{u}_1(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$: est le vecteur des entrées de perturbation,

$\mathbf{u}_2(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$: est le vecteur des entrées de commande,

$\mathbf{y}_1(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$: est le vecteur des erreurs,

$\mathbf{y}_2(t) \in \mathbf{R}^{p_2}$: est le vecteur des observations,

$\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$: est le vecteur d'état.

La fonction de transfert est définie comme suit

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2] =$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (\text{C.4})$$

Hypothèses :

La résolution du problème, par la méthode de Glover-Doyle [Glo2] n'est possible que sous les cinq hypothèses suivantes :

- H_1 : $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ est stabilisable, $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ et $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$ sont détectables
- H_2 : $\text{rang}(\mathbf{D}_{12}) = m_2$ et $\text{rang}(\mathbf{D}_{21}) = p_2$, ($p_1 \geq m_2$, $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{P}_{12}(\infty)$, $m_1 \geq p_2$, $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{P}_{21}(\infty)$).
- H_3 : $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix} = n + m_2, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$
- H_4 : $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix} = n + p_2, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$
- H_5 : $\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1111} & \mathbf{D}_{1112} \\ \mathbf{D}_{1121} & \mathbf{D}_{1122} \end{bmatrix}$

$\begin{array}{c} \leftarrow \rightarrow \\ m_1 - p_2 \end{array}$

$\begin{array}{c} \leftarrow \rightarrow \\ p_2 \end{array}$

Pour un contrôleur linéaire avec la fonction de transfert $\mathbf{K}(s)$ connecté de y_2 à u_2 , la fonction de transfert de u_1 vers y_1 est la transformation fractionnaire basse $\mathbf{T}_{y_1 u_1}$:

$$\mathbf{T}_{y_1 u_1} = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{21} \quad (\text{C.5})$$

L'algorithme de Glover-Doyle donne une paramétrisation dans l'espace d'état de tous les contrôleurs stabilisants \mathbf{K} vérifiant la condition de norme suivante:

$$\|\mathbf{T}_{y_1 u_1}\|_{\infty} \leq \gamma \quad (\text{C.6})$$

pour un γ préspecifié.

C -2 Caractérisation de toutes les solutions:

Dans cette section, on donne une caractérisation dans l'espace d'état de tous les contrôleurs stabilisants $\mathbf{K}(s)$ vérifiant la condition de norme (C.6).

Définissons:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_{1.}^* \mathbf{D}_{1.} - \begin{pmatrix} \gamma^2 \mathbf{I}_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

où, $\mathbf{D}_{1.} = [\mathbf{D}_{11} \quad \mathbf{D}_{12}]$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{D}_{.1} \mathbf{D}_{.1}^* - \begin{pmatrix} \gamma^2 \mathbf{I}_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\text{où, } \mathbf{D}_{.1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

Soit, \mathbf{X}_∞ et \mathbf{Y}_∞ les solutions des équations de Riccati suivantes:

$$\mathbf{X}_\infty = Ric \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C}_1^* \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{C}_1^* \mathbf{D}_{.1} \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{D}_{.1}^* \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{B}^*] \right\} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{Y}_\infty = Ric \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & 0 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^* & -\mathbf{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{C}^* \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{.1}^* \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} [\mathbf{D}_{.1} \mathbf{B}_1^* \quad \mathbf{C}] \right\} \quad (\text{C.11})$$

Définissons alors:

$$\mathbf{F} = \begin{matrix} (m_1 - p_2) \Downarrow \\ p_2 \quad \Downarrow \\ m_2 \quad \Downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} \\ \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{R}^{-1} [\mathbf{D}_{.1}^* \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{B}^* \mathbf{X}_\infty] \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = -[\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{.1}^* \quad \mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}^*] \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ (\rho_1 - m_2) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1 \end{matrix}$$

Théorème C.1

Pour que le système décrit par (C.1) à (C.3) et satisfaisant les hypothèses (H_1) à (H_5) :

- a) Il existe un contrôleur \mathbf{K} stabilisant le système intérieurement de sorte que (C.6) soit vérifiée ssi:
 - (i) $\gamma > \text{Max}(\bar{\sigma}[D_{1121}, D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1121}^*, D_{1121}^*])$ et
 - (ii) Il existe $\mathbf{X}_\infty \geq 0$ et $\mathbf{Y}_\infty \geq 0$ satisfaisant respectivement (C.10) et (C.11) et tel que: $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$.
- b) Si toutes les conditions de (a) sont vérifiées, alors les contrôleurs \mathbf{K} stables intérieurement et satisfaisants la condition (C.6) sont donnés par:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}(\mathbf{J}, \mathbf{Q}) \quad (\text{C.14})$$

\mathbf{T} étant la transformation fractionnaire basse entre \mathbf{J} et \mathbf{Q} . Pour un $\mathbf{Q} \in \mathbf{RH}_\infty$ arbitraire et tel que:

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma \quad (\text{C.15})$$

et,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{B}}_2 \\ \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{D}}_{11} & \hat{\mathbf{D}}_{12} \\ \hat{\mathbf{C}}_2 & \hat{\mathbf{D}}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{11} = -\mathbf{D}_{1121} \mathbf{D}_{1111}^* (\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{1111} \mathbf{D}_{1111}^*)^{-1} \mathbf{D}_{1112} - \mathbf{D}_{1122} \quad (\text{C.17})$$

$\hat{\mathbf{D}}_{12} \in \mathbf{R}^{m^2 \times m^2}$ et $\hat{\mathbf{D}}_{21} \in \mathbf{R}^{p^2 \times p^2}$ sont des matrices tels que:

$$\hat{\mathbf{D}}_{12} \hat{\mathbf{D}}_{12}^* = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{1121} (\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{1111} \mathbf{D}_{1111}^*)^{-1} \mathbf{D}_{1121}^* \quad (\text{C.18})$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{21}\widehat{\mathbf{D}}_{21}^* = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{1111}^*(\gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}_{1111}\mathbf{D}_{1111}^*)^{-1}\mathbf{D}_{1112} \quad (\text{C.19})$$

et,

$$\widehat{\mathbf{B}}_2 = (\mathbf{B}_2 + \mathbf{H}_{12})\widehat{\mathbf{D}}_{12} \quad (\text{C.20})$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_2 = -\widehat{\mathbf{D}}_{21}(\mathbf{C}_2 + \mathbf{F}_{12})\mathbf{Z} \quad (\text{C.21})$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_1 = -\mathbf{H}_2 + \widehat{\mathbf{B}}_2\widehat{\mathbf{D}}_{21}^{-1}\widehat{\mathbf{D}}_{11} \quad (\text{C.22})$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{F}_2\mathbf{Z} + \widehat{\mathbf{D}}_{11}\widehat{\mathbf{D}}_{21}^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_2 \quad (\text{C.23})$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C} + \widehat{\mathbf{B}}_2\widehat{\mathbf{D}}_{12}^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_1 \quad (\text{C.24})$$

où,

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \gamma^2\mathbf{Y}_\infty\mathbf{X}_\infty) \quad (\text{C.25})$$