



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

M0035/99A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Hydraulique

Mémoire de Magister

Spécialité HYDRAULIQUE

Présenté par

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

OUKACHA MEBAREK

INTITULE

SIMULATION NUMERIQUE BIDIMENSIONNELLE
DES MECANISMES D'ECHANGES
THERMIQUES ET MASSIQUES
DANS LES MILIEUX CAPILLARO-POREUX

Soutenu le 04 décembre 1999 devant le Jury composé de :

Président :	Mr. BALI A.	Professeur à L'ENP
Rapporteurs :	Mr. LARBI S.	Docteur & chargé de cours à L'ENP
	Mr. BELHANECHÉ H.	Docteur & chargé de cours à L'ENP
Examineurs :	Mr. BILEK A.	Docteur & chargé de cours à L'ENP
	M ^{elle} . BENMAMAR S.	Chargée de cours à L'ENP
	Mr. BENZIADA S.	Chargé de cours à L'ENP

RESUME

Le travail présenté dans cette thèse, consiste en une simulation numérique bidimensionnelle des transferts couplés d'humidité et de chaleur dans les milieux capillaro-poreux. En utilisant le modèle de *Philip-De Vries* et résolu par la méthode des éléments finis, plusieurs cas de figures sont simulés. Notamment en système fermé et en système semi-ouvert. Les résultats numériques sont validés par comparaison à des mesures expérimentales 1-D et à des résultats numériques d'autres auteurs à 2-D.

Mots clés : Transfert couplé de chaleur et de masse, milieu poreux, teneur en humidité, gradient thermique, capillarité, thermomigration, conductivité thermique, flux de masse et de chaleur, modèle de *Philip-De Vries*, éléments finis, méthode de *Galerkin*, simulation numérique 2-D.

ABSTRACT

The work presented in this thesis is a bidimensional numerical simulation of simultaneous heat and moisture transfer in capillary-porous media. By means of the *Philip-De Vries* model and solved by the finite element method, various cases are simulated. Namely in closed system and semi-open system. The optioned results are validated by comparing them with experimental measures (1D) and with numerical results of other authors (2D).

Key Words : Coupled heat and mass transfer, porous medium, moisture content, temperature gradient, capillarity, moisture migration, thermal conductivity, heat and mass flux, *Philip-De Vries* model, finite element, *GALERKIN's* method, two-dimensional numerical simulation.

ملخص

العمل المقدم في هذه الأطروحة ء يتمثل في دراسة محاكات عددية ثنائية الابعاد ء للتحويلات المزدوجة للحرارة و الرطوبة في الاوساط المسامية-الشاعرية ء باستعمال النموذج الرياضي فيليب دفري و المحل بواسطة طريقة العناصر المنتهية ء عدة حالات درست. لا سيما في الجمل المغلقة و النصف مفتوحة. قورنت نتائج المحاكات بنتائج تجريبية (احادية البعد) و نتائج عددية ثنائية الابعاد للاثبات دقة النتائج المحصل عليها.

كلمات مفتاحية : تحويل مزدوج للحرارة و المادة ء وسط مسامي ء كمية الرطوبة ء الشاعرية ء المحرة الحرارية ء ناقلية الحرارة ء تدفق الحرارة و المادة ء العناصر المنتهية ء طريقة كالركين ء نموذج فيليب دفري ء محاكات عددية ثنائية الابعاد.

REMERCIEMENTS



Le travail présenté dans cette thèse est le fruit de la collaboration entre nous et plusieurs autres personnes. Qui, de par leurs conseils et l'assistance amicale, ont constitué pour nous, non seulement de sincères encouragements, mais également une aide précieuse et indispensable, nous tenons ici à leurs exprimer notre profonde reconnaissance.

En premier lieu, Monsieur LARBI SALAH, Docteur et chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Algérie (Département génie mécanique), Directeur de cette thèse et Monsieur BELHANECHÉ HACENE, Docteur et chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Algérie (Département génie mécanique), Codirecteur de cette thèse, dont le dynamisme scientifique et la compétence nous ont été, d'un grand apport au cours de la réalisation de cette étude, sans oublier leur disponibilité à tout moment et leur haute compréhension affichée face à toute contrainte personnelle tout au long de cette période.

Monsieur SEGHIR ABD-EL-GHANI, Magister en Hydraulique à l'Ecole Nationale Polytechnique, dont les conseils très précieux sur l'utilisation de la méthode des éléments finis ont été déterminant pour conduire à terme la partie programmation.

Nous tenons également à remercier cordialement l'ensemble du personnel de la bibliothèque de l'école, messieurs SALAH, KRIMO, OURARI etc., pour leur compétence, leur patience et leur serviabilité.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué à notre formation durant ces longues années en particulier les enseignants du département hydraulique avec une pensée spéciale à ceux assurant les cours de post-graduation.

Sans oublier le président et les membres du jury, qui ont accepté de juger ce modeste travail.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX	3
1-1. CARACTERISTIQUES DES MILIEUX POREUX	4
1-1-1. Caractéristiques géométriques	4
1-1-2. Méthodes de mesure des propriétés structurales	6
1-1-3. Caractéristiques statistiques	7
1-2. PROPRIETES THERMOPHYSIQUES DES MILIEUX POREUX	8
1-2-1. Conductivité thermique équivalente	8
1-2-2. Quantification de la conductivité thermique équivalente	8
1-2-3. Capacité thermique équivalente	11
1-3. PHENOMENES DE TRANSFERTS ET FIXATION D'HUMIDITE	12
1-3-1. Adsorption physique	13
1-3-2. La capillarité	14
1-3-3. La condensation	15
CHAPITRE 2 : MODELISATION MATHEMATIQUE DES PHENOMENES DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX	16
2-1. ECHELLES DE DESCRIPTION ET CONCEPT DE VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF (VER)	17
2-1-1. Le concept de volume élémentaire représentatif (VER)	17
2-1-2. Grandeurs et lois macroscopiques	19
2-2. MODELE MATHEMATIQUE UTILISE	20
2-2-1. Equations de bilan	21
2-2-2. Equations de fermeture	22
2-3. MODELES PHYSIQUES ET CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES	25
2-3-1. Conditions aux limites associées	25
2-3-2. Conditions initiales	27
2-3-3. Remarque importante	27

CHAPITRE 3 : RESOLUTION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES	
ELEMENTS FINIS	28
3-1. PRESENTATION SOMMAIRE DE LA METHODOLOGIE DE RESOLUTION	29
3-3-1. Notes préliminaires	29
3-1-2. Méthode des résidus pondérés	29
3-1-3. Formulations intégrales	30
3-1-4. Approximation des formulations intégrales	31
3-1-5. Notion d'élément de référence	33
3-1-6. Problèmes non linéaires et instationnaires	37
3-1-7. Convergence et erreur d'approximation	37
3-2. APPLICATION DE LA MEF AUX EQUATIONS DU PROBLEME ETUDIE	38
3-2-1. Formulations intégrales et méthode de Galerkin	38
3-2-2. Discrétisation par éléments finis	39
3-2-3. Résolution du système global	43
3-2-4. Propriétés des matrices globales et méthode de stockage	44
3-3. ORGANIGRAMME GENERAL	45
CHAPITRE 4 : RESULTATS ET DISCUSSION	48
4-1. ETUDE DE LA THERMOMIGRATION	49
4-2. ETUDE DE LA CONDENSATION	51
4-2-1. Résultats de simulation (2-D)	52
4-2-2. Comparaison expérience-calcul numérique	53
4-2-3. Densités de flux massiques et thermiques	53
4-3. ETUDE DE L'EVAPORATION	67
4-3-1. Résultats et commentaires	67
4-3-2. Confrontation expérience-simulation numérique	67
4-3-3. Densités de flux de masse et de chaleur	68
4-4. CONCLUSION	68
CONCLUSION GENERALE	73
ANNEXE A : RAPPORTS MASSIQUES ET VOLUMIQUES	75
ANNEXE B : CONSTRUCTION DU MODELE MATHEMATIQUE	77
ANNEXE C : ELEMENT DE REFERENCE ET INTEGRATION NUMERIQUE	82
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	86

NOMENCLATURE

Notation	Définition et unité
A_s	surface spécifique [m^{-1}]
C	chaleur spécifique à pression constante [$J Kg^{-1} K^{-1}$]
D^*	diffusivité massique apparente de la vapeur d'eau au sein du milieu poreux [$m^2 \cdot s^{-1}$]
D_{ω}, D_T	respectivement, diffusivité massique isotherme [$m^2 \cdot s^{-1}$] et non isotherme [$m^2 \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$]
D_p	diffusivité massique associée au transfert de masse dû au ∇P [$m^2 \cdot s^{-1} \cdot Pa^{-1}$]
D_G	diffusivité massique associée au transfert de masse dû à la gravité [$m^2 \cdot s^{-1}$]
D	diamètre de la cellule expérimentale [m]
d	échelle de longueur microscopique, diamètre moyen des pores [m]
g	accélération due à la pesanteur [ms^{-2}]
h_m	coefficient d'échange massique [ms^{-1}]
J	le jacobien [-]
L	échelle de longueur macroscopique [m]
L	longueur de la cellule expérimentale [m]
L_c	longueur moyenne des lignes de courant [m]
K, k	respectivement, conductivité hydraulique [ms^{-1}] et perméabilité effective [m^2]
M_a, M_v	masses molaires de l'air et de la vapeur du liquide [$g \text{ mol}^{-1}$]
$M(t)$	loi d'évolution des masses d'eau condensées ou évaporées en fonction du temps [Kg]
$\dot{m}(t)$	densité de flux de masse traversant la frontière ouverte (loi empirique) [$Kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$]
N	fonction d'interpolation ou de forme [-]
N_x, N_z	respectivement, les nombres de subdivisions suivant la direction x et z [-]
NNE	nombre de nœuds par élément [-]
NET, NNT	respectivement, nombre d'éléments total et le nombre de nœuds total [-]
P	pression totale de la phase gazeuse [Pa]
P_c, P_ℓ	respectivement, pression capillaire et pression dans le liquide [Pa]
P_a, P_v	respectivement, pression de l'air sec et pression partielle de la vapeur [Pa]
P_{vs}	pression de vapeur saturante [Pa]
R	constante universelle des gaz parfaits [$J K^{-1} \text{ mol}^{-1}$]
T	température [$^{\circ}C$]
T_0	température initiale [$^{\circ}C$]
T_1, T_2	respectivement, les températures à la première et à la deuxième face de la cellule [$^{\circ}C$]
T_s	température à la surface de contact air ambiant-milieu poreux [$^{\circ}C$]
t	variable temps [s]
\bar{U}, U	respectivement, vitesse de filtration [ms^{-1}] et fonction inconnue [-]
x, y, z	coordonnés cartésiens [m]

Symboles grecs

ε	porosité effective [%]
ε_t	porosité totale [%]
τ	tortuosité [-]
τ^c	transformation géométrique [-]
μ, ν	respectivement, la viscosité dynamique [$\text{Kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$] et cinématique [m^2s^{-1}]
Γ	frontière du domaine Ω [m]
Γ^c	portion de frontière appartenant à l'élément Ω^c [m]
Ω	domaine géométrique [m^2]
Ω^c	sous domaine ou élément [m^2]
Ω^r	élément de référence [m^2]
λ^*	conductivité thermique équivalente du milieu poreux [$\text{w.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]
λ_s	conductivité thermique de la matrice solide [$\text{w.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]
λ_f	conductivité de la phase fluide [$\text{w.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]
ϕ	fonction de pondération [-]
Φ_q	densité de flux de chaleur [w m^{-2}]
$\vec{\Phi}_{qc}$	vecteur densité de flux de chaleur conductif [w m^{-2}]
Φ_m	densité de flux de masse [$\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$]
Φ_ℓ	densité de flux d'humidité en phase liquide [$\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$]
Φ_v	densité de flux d'humidité en phase vapeur (transporté par diffusion) [$\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$]
φ	humidité relative [%]
θ	teneur volumique [%]
ρ	masse volumique [Kg. m^{-3}]
ρ_o	masse volumique apparente du milieu poreux à l'état sec [Kg. m^{-3}]
ρ^*	masse volumique équivalente du milieu poreux à l'état humide [Kg. m^{-3}]
ψ	succion [m]
ω	teneur pondérale (ou massique) [%]
Δh_v	enthalpie massique de changement de phase [J. Kg]
ξ, η, ζ	coordonnées de références [-]
∇	opérateur mathématique Nabla ($\nabla = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}^T$) [m^{-1}]

Indices

a	air sec
g	gaz
ℓ	liquide
s	solide
v	vapeur
(^t)	transposée

INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements à deux phases fluides en milieu poreux sous l'influence de faibles gradients thermiques, jouent un rôle extrêmement important dans différents secteurs d'activité industrielle ou situation naturelle. Il en est ainsi dans les échanges d'humidité entre le sol et l'atmosphère par suite des variations de température journalière et saisonnière de la surface, mais également dans certains domaines techniques tel que la récupération secondaire du pétrole, l'isolation thermique, l'adaptation des sols aux cultures, où les phénomènes de transferts sont simulés de façon naturelle ou artificielle par des gradients thermiques.

Vu à l'échelle que nous appelons « **microscopique** » des pores, le comportement des fluides est décrit par les lois classiques de la mécanique. Néanmoins la complexité du phénomène ne provient pas de ces lois physiques que l'on peut considérer comme bien connues, mais de la difficulté que l'on a pour caractériser la géométrie des interfaces (fluide-fluide, solide-fluide). Pour palier cette difficulté, on est conduit à définir de nouvelles grandeurs dites « **macroscopiques** » à une échelle suffisamment grande par rapport à l'échelle des pores, pour éviter le problème posé par leur géométrie, et suffisamment petite par rapport à l'échelle du milieu poreux, pour leur conférer un caractère local.

Mis en évidence par *Bouyoucos* [10] en 1915, puis par *Lebedeff* [36] en 1927, les transferts d'humidité induits par des gradients de température en milieu poreux, ont par la suite faits l'objet de nombreux travaux [16, 50] afin de préciser la nature des flux (liquide et/ou vapeur) dans les processus de transferts. Jusqu'en 1948, il était cependant extrêmement difficile de se prononcer quant à la nature de ces flux.

Le caractère contradictoire de certaines conclusions [16, 36, 50] devait être levé dans les années cinquante [5, 7, 8] par *Gurr, Marshall* et *Hutton* [31] puis par *Luikov* [37] et *Philip-De Vries* [19] dont les travaux ont permis de proposer une modélisation mathématique prenant en considération la coexistence des phases liquide et vapeur au sein du milieu poreux.

L'étude expérimentale des processus réels de transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux pose énormément de difficultés à cause du caractère bidimensionnel voire même tridimensionnel de la répartition spatio-temporelle des champs thermiques et hydriques et les difficultés de mesures liés aux techniques expérimentales employées [15]. Ainsi, le recours à la simulation numérique de ces phénomènes devient une nécessité impérative.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité des études déjà entreprises [15, 27, 34, 45] sur le sujet. *Crausse* [15] et *Larbi*[34], à travers une étude expérimentale sur un milieu capillaro-poreux et une simulation numérique utilisant les modèles mathématiques de *Luikov* [37] et *Philip-De Vries* [19] à une dimension d'espace, ont constaté qu'à partir d'une certaine teneur en eau (supérieure à 4 %), les résultats numériques et expérimentaux ne coïncidaient pas ; ils ont attribué cette différence à l'influence de la gravité. *Prat* [45] et *Firdaous* [27], sur la base d'une étude numérique bidimensionnelle en système fermé ont montré l'influence de la gravité sur la répartition des champs thermiques et hydriques en milieu capillaro-poreux préalablement mouillé et suivant le rapport du diamètre de la cellule expérimentale employée par *Crausse* [15] à sa longueur, le problème peut présenter un aspect mono ou bidimensionnel.

Le travail présenté dans ce mémoire, vise à mettre en évidence certains aspects internes des mécanismes de transferts à deux dimensions d'espace, en système fermé et semi-ouvert. Les résultats obtenus sont validés par comparaison à des résultats expérimentaux à une dimension d'espace (*Crausse [15], Larbi [34]*) ; et à des résultats numériques à deux dimensions d'espace (*Prat [45]*).

Le développement de ce travail est effectué dans le cadre d'une présentation qui s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'état de connaissance des milieux poreux, concernant en particulier la caractérisation géométrique et physique et d'exposer de manière brève les phénomènes de transfert en milieu poreux et les mécanismes de fixation d'humidité ;

Le deuxième chapitre est relatif à la modélisation mathématique des phénomènes de transfert en milieu poreux. Après la mise en évidence des difficultés géométriques et physiques pour justifier l'utilisation d'une description macroscopique basée sur un certain nombre d'hypothèses, on développe le modèle mathématique utilisé et les conditions initiales et aux limites associées aux différents modèles physiques considérés.

Le troisième chapitre traite de la résolution numérique par la méthode des éléments finis du modèle mathématique utilisé en raison du caractère couplé et non linéaire des équations aux dérivées partielles dont il est constitué ;

Dans le quatrième et dernier chapitre, on présente les résultats de simulation numérique et leur confrontation face à d'autres résultats numériques et expérimentaux obtenus par d'autres auteurs et suivie d'une discussion et critique. On procède à la simulation de trois situations physiques en l'occurrence : la thermomigration, la condensation et l'évaporation en vue d'étendre l'étude d'appréciation et de validité du modèle théorique utilisé.

Enfin une conclusion générale pour clore notre étude, où nous donnons les résultats et les enseignements essentiels à retenir à travers notre étude ainsi que les prolongements éventuels du sujet traité.

Nous avons jugé utile de reporter en annexes les détails et le développement de certaines notions. Pour cela la définition des différentes grandeurs volumiques et massiques est renvoyée à l'annexe A, les détails de la construction du modèle mathématique sont exposés en annexe B et en fin la présentation de l'élément utilisé pour la discrétisation du domaine de résolution et de la méthode d'intégration numérique utilisée implicitement en chapitre 3, font l'objet de l'annexe C.

On désigne communément par milieu poreux un solide de forme compliquée délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. La partie solide appelée aussi, matrice, peut être déformable mais doit avoir une certaine cohésion, ce qui exclut de notre définition les lits fluidisés constitués de particules solides tenues en suspension sous l'effet d'un écoulement du fluide interstitiel.

D'une très grande diversité, aussi bien structurale (forme et taille des grains et des pores de la matrice) que de nature (propriétés physico-chimiques des matériaux constitutifs) ou d'échelles spatiales (plusieurs dizaines de kilomètres cubes pour les gisements d'hydrocarbures et les nappes d'eau souterraines, à quelques millimètres cubes pour certains membranes filtrantes), les milieux poreux occupent une large place et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Ils sont le sujet de plusieurs disciplines scientifiques et branches d'Engineering, telles que :

Sciences de la terre, la médecine, la biochimie, la mécanique des sols, l'hydrologie, agronomie, l'hydraulique souterraine, l'hydrogéologie, le génie pétrolier, le génie civil, le génie thermique, le génie chimique, et bien d'autres. Aussi, la connaissance de leurs propriétés revêt-elle une grande importance.

Nous allons donner dans les paragraphes qui suivent, quelques éléments d'information concernant la caractérisation géométrique des milieux poreux, ainsi que leurs principales propriétés physiques. Par ailleurs, nous aborderons brièvement certains phénomènes physiques se manifestant en leur sein et/ou résultants de leur interaction avec l'environnement extérieur.

1-1. CARACTERISATION DES MILIEUX POREUX

Mis en face de la réalité d'un milieu poreux, l'esprit peut s'effrayer d'abord de la tâche à entreprendre. Ces millions de grains et la variété inépuisable de leurs formes et de leurs dimensions, le réseau compliqué de leurs interstices, où mille détours possibles s'offrent au cheminement d'un fluide, semblent défier les ressources de la description.

Mais cette richesse n'est qu'apparente, cette diversité superficielle donne bientôt une impression de monotonie profonde : ce sont toujours les mêmes grains, les mêmes pores, qui se répètent indéfiniment, identique à eux-mêmes, en dépit de variations insignifiantes.

Ayant reconnu cela, la raison empirique se met au travail. Laquelle ramène le problème à quelques grandeurs moyennes, déterminées expérimentalement en utilisant des moyens et techniques spécifiques. Se sont ces grandeurs qui sont pratiquement utilisées pour décrire ou refléter la géométrie d'un milieu poreux donné [39].

Mais avant de passer en revue ces grandeurs, on rappelle que la matrice solide (ou squelette) d'un milieu poreux peut se présenter sous deux formes [9]:

- **Forme non consolidée** : la matrice solide est alors formée de grains ou de fibres non soudées entre eux (graviers, sables, limons, billes de verre et d'acier, matériaux divers ...).
- **Forme consolidée** : dans ce cas, la matrice solide compacte ne peut pas se diviser en grains ou fibres (roches calcaires, grès, argiles, bois, céramiques, tissus végétaux et animaux ...).

1-1-1. Caractéristiques géométriques [2, 9, 32]

a) La porosité : se définit comme étant le rapport du volume des vides au volume apparent du milieu poreux. On distingue :

- **La porosité totale** : tient compte des cavités inaccessibles (pores fermés) dans le solide. Elle est définie par :

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\text{masse volumique apparente de l'échantillon}}{\text{masse volumique du matériau constitutif}} \quad [\%] \quad (1.1)$$

- **La porosité effective (ou efficace)** : appelée aussi porosité accessible ne prend en considération que les pores interconnectés à travers lesquels s'effectue l'écoulement des masses fluides, exprimée par :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessibles}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad [\%] \quad (1.2)$$

La porosité, de manière générale est un indice du volume relatif des pores au sein du milieu poreux. Il est à noter que dans tous les cas, la porosité ne donne aucun renseignement sur la distribution des pores qui est, en elle-même une propriété importante, elle sera examinée postérieurement.

b) La surface spécifique : se définit comme le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solide-pores (a_{sp}) au volume de l'échantillon (V_t).

$$A_s = \frac{a_{sp}}{V_t} [L^{-1}] \quad (1.3)$$

La surface spécifique dépend aussi bien de la taille des particules solide que de leur forme. Elle varie beaucoup d'un milieu poreux à un autre (voir tableau 1), et est d'autant plus grande que le milieu est plus divisé. Elle est d'un intérêt primordial, car de nombreuses propriétés des milieux poreux sont liées aux phénomènes interfaciaux, notamment, l'adsorption.

c) La tortuosité : C'est une grandeur adimensionnelle, définie par la relation :

$$\tau = \left(\frac{L_c}{L} \right)^2 \quad (1.4)$$

où :

- L_c , longueur moyenne des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon,
- L , longueur de celui-ci.

Cette grandeur caractérisant la structure du milieu poreux, influence directement les capacités d'écoulement des fluides à travers ce dernier (perméabilité, diffusion moléculaire de la vapeur).

Il est à signaler que la porosité, la surface spécifique et la tortuosité appelés paramètres structuraux, dépendent fortement de l'arrangement et de la taille des grains. Dans le tableau 1, sont donnés des ordres de grandeurs de ces paramètres pour quelques matériaux poreux.

Aux paramètres structuraux s'ajoutent, les grandeurs exprimants les rapports volumiques et massiques dans les quels se trouvent les différents constituants d'un milieu poreux (matrice solide et système fluide). Elles sont reportées en annexe (A).

Tableau 1 : Paramètres structuraux de certains matériaux poreux (d'après [44]).

Matériau	Porosité ϵ	Surface spécifique $A_s [m^{-1}]$	Perméabilité intrinsèque $k [m^2]$
Ardoise en poudre	0.56 à 0.66	7×10^5 à 8.9×10^5	4.9×10^{-14} à 1.2×10^{-13}
Catalyseur granulaire	0.45	5.6×10^7	-
Charbon	0.02 à 0.12	-	-
Béton standard	0.02 à 0.07	-	-
Fibre de verre	0.88 à 0.93	56×10^3 à 77×10^3	-
Cuir	0.56 à 0.59	1.2×10^6 à 1.6×10^6	9.5×10^{-14} à 1.2×10^{-13}
Calcaire (dolomite)	0.04 à 0.10	-	2.0×10^{-15} à 4.5×10^{-14}
Sable	0.37 à 0.50	15×10^3 à 22×10^3	2.0×10^{-11} à 1.8×10^{-10}
Grès	0.08 à 0.38	-	5.0×10^{-16} à 3.0×10^{-12}
Sol	0.43 à 0.54	-	2.9×10^{-13} à 1.4×10^{-11}
Lits de billes sphériques	0.36 à 0.43	-	-

1-1-2. Méthodes de mesure des propriétés structurales [2]

Il n'est pas question ici de présenter en détail toutes les techniques et méthodes de mesure existantes, il s'agit là d'un domaine hautement spécialisé et largement vaste. Nous nous limiterons seulement à présenter brièvement le principe de base de quelques méthodes et techniques parmi les plus typiques.

A) Mesure de la porosité

Par définition, l'évaluation de la porosité nécessite la détermination de deux ou trois volumes : le volume total de l'échantillon poreux (V_t) ; son volume des pores (V_v) et le volume de sa matrice solide (V_s).

Il existe de nombreuses méthodes de mesure basées sur la détermination de ces volumes, appelées méthodes directes. Elles diffèrent, par la manière dont ces volumes sont déterminés par chacune d'entre elles. D'autres méthodes sont aussi utilisées, basées sur la mesure de certaines propriétés de l'espace poreux, telle que, la capacité d'absorption de particules radioactives. Ces méthodes sont qualifiées, de méthodes indirectes.

Parmi les méthodes directes on peut citer :

A-1) Méthode d'injection de mercure : utilisée pour déterminer (V_t) et (V_v). L'échantillon est placé dans une enceinte remplie jusqu'à un certain niveau par du mercure, avec un volume d'air donné et à une pression donnée. Le volume de mercure déplacé par l'échantillon donne (V_t). Quand la pression du mercure est augmentée par le biais d'une pompe volumétrique, le mercure pénètre dans l'espace des pores de l'échantillon.

Par augmentation graduelle de la pression, il est possible de déterminer le volume total des pores (V_v). En général, la méthode est à éviter pour les milieux de faible perméabilité, car de très fortes pressions sont alors nécessaires.

A-2) Méthode par imbibition : l'échantillon poreux est immergé sous vide dans un fluide mouillant qui pénètre dans l'espace des pores. L'échantillon est pesé avant et après imbibition. La différence des poids divisée par la masse volumique du fluide permet de calculer le volume des pores.

Comme exemple de méthode indirecte, on peut citer, celle basée sur l'absorption de particules radioactives par un fluide (liquide ou gaz) saturant l'échantillon poreux.

Norel (1967) a développé une méthode à partir de ce principe. La radiation incidente provient d'une source radioactive à base de prométhéum (P_m^{147}). Quand elle atteint une cible formée par du Samarium, cela conduit à l'émission de particules (α). Le fluide absorbant est du Xénon, qui est un gaz inerte avec une grande capacité d'absorption.

La porosité est obtenue par l'expression :

$$\varepsilon = (\ln N_1 - \ln N_2) / \mu_{Xe} \cdot L \quad (1.5)$$

où :

μ_{Xe} , le coefficient d'absorption linéaire du Xénon ; L, l'épaisseur de l'échantillon et N_1 , N_2 respectivement la teneur totale en radiation lorsque l'échantillon est sec et avec l'échantillon saturé en Xénon.

B) Mesure de la surface spécifique [2, 9, 32]

Bien évidemment la surface spécifique des milieux poreux naturels ne peut être déterminée que par des méthodes indirectes. Nous présentons brièvement le principe de deux types de méthodes :

B-1) Les méthodes d'adsorption de gaz : elles sont basées sur l'adsorption de gaz ou de vapeur par la surface solide. L'aire de la surface solide est déterminée suivant la quantité de gaz adsorbé sur celle-ci, en supposant que le gaz couvre entièrement la surface du solide par un film monomoléculaire de façon uniforme.

B-2) Méthodes basées sur l'écoulement d'un fluide : ce type de méthodes suggère une relation entre la perméabilité du milieu et sa surface spécifique. En utilisant cette relation, il est possible d'obtenir la valeur de la surface spécifique suite à la détermination expérimentale de la perméabilité du milieu.

C) Tortuosité

Il n'existe pas de méthodes directes de détermination de cette caractéristique. Pour certains milieux à structure simple, la valeur de ce paramètre peut être calculée analytiquement.

1-1-3. Caractéristiques statistiques

a) Distribution de dimension des grains

Dans le cas des milieux poreux non consolidés on peut détruire facilement le milieu et opérer un classement des dimensions des particules (ou grains) qui le composent. Cette opération est appelée analyse granulométrique.

La séparation des particules par groupes de tailles est généralement effectuée par tamisage au travers de tamis calibrés. Pour séparer et classer des particules plus fines, la méthode la plus souvent utilisée est celle de la sédimentation. Après dispersion de l'échantillon de milieu poreux dans une suspension aqueuse, on mesure la vitesse de sédimentation des particules, cette dernière est liée à la taille de la particule (loi de *Stokes*).

Si l'on porte sur un diagramme les proportions en poids des grains qui passent à travers un tamis déterminé auquel on attribuera un diamètre équivalent (d). On dira alors, pour simplifier, que le diagramme appelé "*courbe granulométrique*" représente la proportion de grains dont le diamètre est inférieur à (d).

On pourra ainsi, définir grâce à l'analyse granulométrique : la taille moyenne, la taille médiane, variance, dissymétrie, aplatissement, etc. Ces grandeurs sont fort utiles aussi bien pour distinguer que pour caractériser les différents milieux.

b) Distribution de dimension des pores

Cette caractérisation, est particulièrement utile dans le cas de milieux consolidés, pour lesquels on ne peut pas établir de distribution de taille de particules. Ici encore, la définition de dimension de pore sera précisée conventionnellement. Elle consistera à identifier cette dimension en chaque point de l'espace des pores, au diamètre, δ , de la sphère de plus grand diamètre contenant ce point et entièrement inscrite dans le pore.

Ainsi par l'affectation d'un diamètre de pore pour chaque point de l'espace poreux, la distribution de taille de pores peut être définie en déterminant la fraction, α , du volume de pore total, V_v , ayant un diamètre de pore compris entre δ et $\delta + d\delta$. Pour cette distribution :

$$\int_0^{\infty} \alpha(\delta) d\delta = 1 \quad (1.6)$$

La représentation graphique résultante décrivant la distribution de la taille des pores est appelée "*courbe porosimétrique*". Sur une courbe porosimétrique type, on distingue parfois : les macropores de diamètre équivalent (d) supérieur ou égal à 300 μm , les micropores de diamètre équivalent compris entre 0.05 et 300 μm et les nanopores de diamètre équivalent inférieur ou égal à 0.05 μm .

1-2. PROPRIETES THERMOPHYSIQUES DES MILIEUX POREUX

Si les grandeurs structurales précitées conditionnent de manière remarquable l'écoulement des masses fluides à l'intérieur d'un milieu poreux, les propriétés thermophysiques, quant à elles portent leur influence sur les transferts thermiques et les échanges d'énergie entre les différents constituants. On traitera ici, essentiellement de la conductivité thermique et de la capacité thermique des milieux poreux non saturés, lesquelles caractérisent le comportement thermique de toute structure poreuse.

1-2-1. Conductivité thermique équivalente (ou apparente)

Elle traduit la conductivité thermique globale du milieu poreux multiphasique. C'est une propriété d'une très grande importance, en particulier lorsque le mode de transfert de chaleur dominant au sein du milieu poreux est la conduction (ce qui est le cas souvent en pratique). Dans ce cas précis, la densité de flux de chaleur, $\vec{\Phi}_{qc}$, est exprimée par la loi de *Fourier* pour les milieux homogènes :

$$\vec{\Phi}_{qc} = -\lambda^* \nabla T \quad (1.7)$$

où :

λ^* , Conductivité thermique équivalente du milieu poreux [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$];
 ∇T , Gradient thermique [K.m^{-1}].

La conductivité thermique équivalente λ^* , dépend implicitement des conductivités thermiques des phases solide et fluide constituant le milieu poreux, des fractions volumiques de ces phases et de la structure de la matrice solide.

Krischer et *Kröll* [33] ont montré que l'accroissement de la conductivité thermique en milieu poreux est dû aux mécanismes d'évaporation-condensation.

Dans le contexte réel, le couplage masse-chaleur est fortement influant sur la variation de la conductivité équivalente.

1-2-2. Quantification de la conductivité thermique équivalente

Si la voie expérimentale est privilégiée, il n'en demeure pas moins qu'une abondante littérature de détermination théorique existe [1, 9, 15, 18, 23, 28, 43].

A) Détermination théorique

Des modèles géométriques et statistiques ou de corrélations empiriques existent dans la littérature [9, 15, 28]. Ils sont souvent des formulations plus au moins explicites de λ^* en fonction des conductivités thermiques des phases en présence et notamment de la porosité.

Parmi les modèles les plus usuels, on peut citer : les modèles série et parallèle.

$$\text{Modèle série : } \frac{\lambda^*}{\lambda_f} = \frac{\lambda_s/\lambda_f}{\varepsilon \lambda_s/\lambda_f + 1 - \varepsilon} \quad (1.8)$$

$$\text{Modèle parallèle : } \frac{\lambda^*}{\lambda_f} = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\lambda_s}{\lambda_f} \quad (1.9)$$

Où : λ_s , la conductivité thermique de la matrice solide ;
 λ_f , la conductivité de la phase fluide.

Il convient de souligner cependant que l'exploitation des modèles théoriques, doit se faire avec précaution, et que, en toutes circonstances, il faut d'abord s'assurer qu'ils sont bien applicables aux situations et aux milieux considérés. Par ailleurs, λ^* est sensible aux variations de température (mais l'influence de celle-ci peut être considérée négligeable dans une certaine plage de températures). La présence dans l'espace poreux d'une phase gazeuse rend λ^* dépendante également de la pression.

Suite à ces dernières remarques, le recours à la détermination expérimentale est généralement indispensable, pour une évaluation précise et fiable de cette grandeur [9].

B) Détermination expérimentale

Pour mesurer cette grandeur, *Crausse* [15], a utilisé un conductivimètre à cylindres coaxiaux schématisé en figure (1.1). Le principe de base de cet appareil est comme suit :

Un milieu poreux est placé dans l'espace annulaire déterminé par deux cylindres métallique coaxiaux. Un flux de chaleur constant est dissipé au sein du cylindre intérieur par l'intermédiaire d'une résistance chauffante incorporée. La surface du cylindre extérieur est maintenue à température constante à l'aide d'un bain thermostaté, dans lequel est placé le conductivimètre.

L'équilibre thermique est atteint lorsque l'écart de température ΔT , de part et d'autre de l'espace annulaire est constant. Par ailleurs, l'isolation thermique des extrémités de la cellule est assurée par deux embouts en makrolon. Dans le cas de deux cylindres coaxiaux, la loi de *Fourier* permet de déterminer la conductivité thermique λ^* par la relation (régime permanent établi) :

$$\lambda^* = \frac{\Phi_q \cdot \ln(R_1/R_2)}{2\pi L \Delta T} \quad (1.10)$$

où : Φ_q , puissance thermique dissipée dans le cylindre intérieur ;

R_1, R_2 , rayons des cylindres respectivement intérieur et extérieur ($R_1 = 1 \text{ cm}, R_2 = 2.2 \text{ cm}$) ;

L , hauteur de la cellule ($L = 20 \text{ cm}$).

Les températures sont mesurées à l'aide de thermocouples cuivre-constantan, reliés à un enregistreur. La puissance dissipée dans le conductivimètre est évaluée à l'aide d'un ampèremètre et d'un voltmètre.

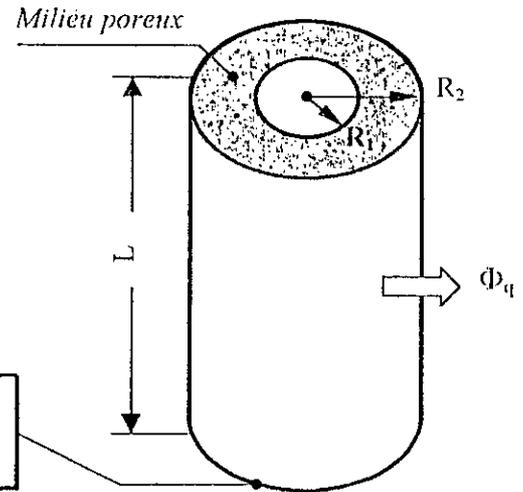


Figure 1.1 : Schéma d'un conductivimètre à cylindres coaxiaux [15].

C) Influence de l'humidité sur la conductivité thermique

La figure 1.2, illustre l'évolution typique de la conductivité thermique équivalente en fonction de la teneur en humidité, du sable quartzéux (courbe 1), de l'argile (courbe 2) et de la tourbe (courbe 3) [21].

Une grande différence entre les conductivités thermiques des différents milieux poreux considérés est observée ; elle met en évidence le rôle essentiel que joue la nature de la matrice solide sur la valeur de λ^* .

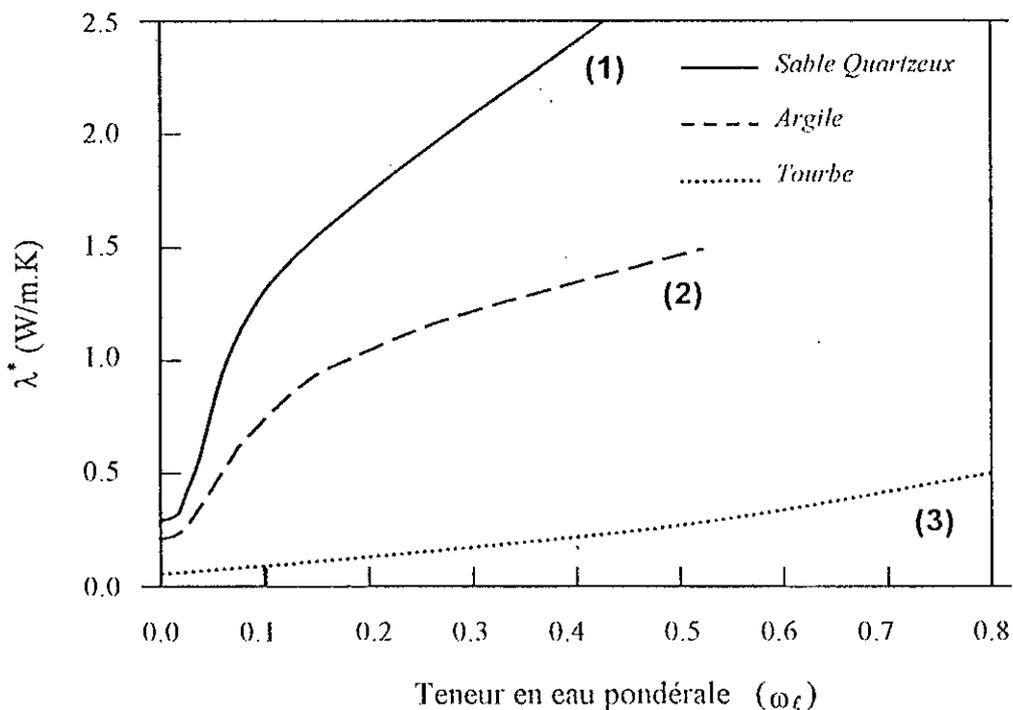


Figure 1.2 : Variation de la conductivité thermique apparente en fonction de la teneur en eau pour différents milieux poreux naturels [21].

Par ailleurs, pour un même milieu poreux une variation sensible de la conductivité thermique équivalente en fonction de la teneur en humidité est enregistrée. Cette constatation met en exergue l'influence de la présence de l'humidité au sein d'un milieu poreux sur la valeur de sa conductivité thermique et par conséquent sur son comportement thermique.

La tendance générale des courbes (1) et (2) (milieux minéraux) de la figure 1.2, peut être expliquée qualitativement comme suit :

Lorsque le milieu est totalement sec, le flux de chaleur passe principalement à travers les grains, mais doit également traverser l'air remplissant les vides entre les grains et autour de leurs points de contact (figure 1.3.a).

Aux très faibles teneurs en eau, les particules du milieu poreux, sont couvertes par des couches d'eau adsorbée (non montrés dans la figure 1.3). L'épaisseur de ces couches augmente avec l'augmentation de la teneur en eau.

A une certaine teneur en eau, il commence à se former des anneaux d'eau liquide autour des points de contact entre les grains ; ce qui conduit alors, à la formation d'interfaces courbes entre l'air et l'eau (figure 1.3.b). A partir de là, la conductivité thermique augmente rapidement avec l'augmentation de ω_t jusqu'à l'extension des anneaux liquides et l'occupation par l'eau de la majorité de l'espace poreux (figure 1.3.c).

Quand ω_t augmente encore au point où la totalité des pores seront remplis par l'eau, le milieu se sature en eau. Ceci est reflété par une faible augmentation de la conductivité thermique du milieu avec ω_t .

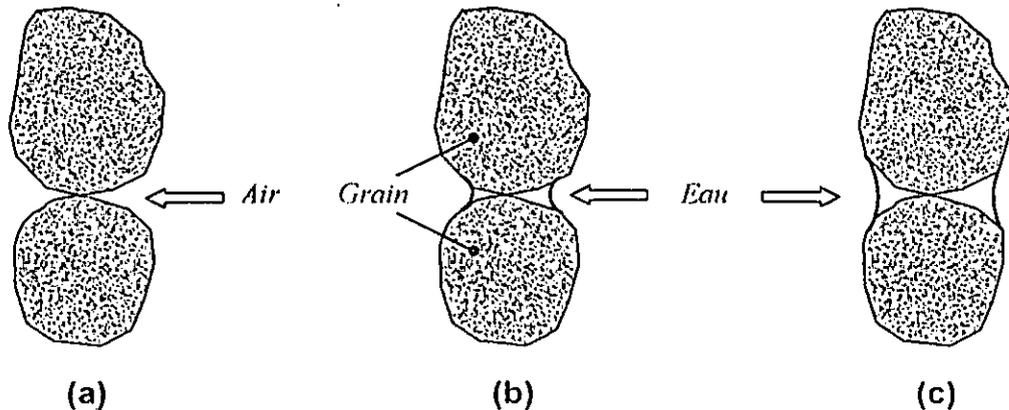


Figure 1.3 : Formation d'anneaux d'eau autour des points de contacts des grains solides [21].

1-2-2. Capacité thermique (volumique) équivalente [12]

La capacité thermique volumique équivalente, est déterminée pour un milieu poreux par l'addition des capacités thermiques des différentes phases le constituant compte tenu de la propriété d'additivité de l'enthalpie. Elle est exprimée par :

$$(\rho C)^* = \rho_o C_s + \rho_t \theta_t C_t + \rho_E \theta_E C_E \quad (1.11)$$

où : θ_ℓ , θ_g représentent respectivement, la teneur volumique en liquide et en gaz ; ρ_i , les masses volumiques des phases (i) (ρ_o , la masse volumique apparente du milieu poreux sec) ; C_i , les chaleurs spécifiques à pression constante des phases (i) ; $i = s, \ell, g$, indices correspondant respectivement aux phases solide, liquide et gaz ; $(\rho C)^*$, la capacité thermique équivalente du milieu poreux.

Avec : $\theta_\ell = \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell$ et $\theta_g = \frac{\rho_o}{\rho_g} \omega_g$ (voir annexe A) on arrive à :

$$(\rho C)^* = \rho_o (C_s + \omega_\ell C_\ell + \omega_g C_g) \quad (1.12)$$

Des valeurs indicatives de la masse volumique, de la capacité thermique et de la conductivité thermique de certaines substances sont données dans le tableau 2. Il est à remarquer que la contribution de l'air aux caractéristiques thermiques est négligeable.

Tableau 2 : Valeurs indicatives de certaines propriétés [21].

Substance	Masse volumique (Kg .m ⁻³)	Capacité thermique (J.m ⁻³ .K ⁻¹)	Conductivité thermique (w.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Quartz	2.66 × 10 ³	2.0 × 10 ⁶	8.8
Autres minéraux	2.65 × 10 ³	2.0 × 10 ⁶	2.9
Matière organique	1.30 × 10 ³	2.5 × 10 ⁶	0.25
Eau (à 10°C)	1.00 × 10 ³	4.2 × 10 ⁶	0.57
Glace (à 0°C)	0.92 × 10 ³	1.9 × 10 ⁶	2.2
Air (à 10°C)	1.25	1.25 × 10 ³	0.025

1-3. PHENOMENES DE TRANSFERTS ET FIXATION D'HUMIDITE

Dans de nombreuses situations naturelles et processus industriels, les milieux poreux sont le siège de phénomènes de transferts de masse et de chaleur, en raison de l'évolution des conditions thermodynamiques du, ou des fluides saturant l'espace des pores, ou provoqué par des modifications aux limites sur les frontières du domaine limitant le milieu poreux (en interaction avec l'environnement extérieur). Ce double transfert peut donner lieu à plusieurs phénomènes physiques notamment, le changement de phase en l'occurrence liquide ↔ vapeur traduisant une évaporation ou une condensation.

Dans ce qui suit, nous porterons notre attention sur le problème de fixation de l'humidité au sein d'une structure poreuse qui constitue une appréciation du transfert de masse. La fixation de l'humidité dans les milieux poreux, résulte principalement de l'action plus ou moins conjointe de trois mécanismes physiques fondamentaux. Il s'agit de l'*adsorption physique*, de la *condensation* et de la *capillarité* [4, 11, 17].

Toutefois, il convient d'ajouter, lorsque le milieu est susceptible de réagir chimiquement, " le mécanisme de fixation chimique ou osmétique " [11] en l'occurrence l'*adsorption chimique*. Ce dernier mécanisme de fixation n'intervient pas dans le cadre de la présente étude, car on admet par hypothèse, qu'il n'ya pas de réaction chimique entre le matériau solide constituant la structure poreuse et l'humidité (vapeur ou liquide) avec laquelle cette structure est mise en contact.

L'importance relative du rôle de chacun des mécanismes fondamentaux de fixation sur la masse d'humidité fixée dépend quant à elle de divers paramètres : caractéristiques structurales du milieu, nature de la phase aqueuse avec laquelle le matériau est mis en contact (vapeur ou liquide) et les conditions thermodynamiques (pression et température) auxquelles il se trouve soumis [5, 28].

1-3-1. Adsorption physique

Les molécules de vapeur sont fixées sous la forme de films sur la surface interne des pores. Les films moléculaires ainsi formés se trouvent alors en équilibre avec la vapeur dans des conditions parfois très différentes des conditions thermodynamiques classiques. Ce qui a pour effet de modifier la pression de vapeur d'équilibre et l'enthalpie de changement de phase comme indiqué par les équations suivantes [5, 9, 28] :

- La pression de vapeur d'équilibre P_v est reliée à la pression de vapeur saturante P_{vs} par :

$$P_v = P_{vs}(T) \varphi(\omega_\ell, T) \quad (1.13)$$

où : φ , désigne l'humidité relative.

La figure (1.3) [5, 28], représente une courbe d'adsorption type. Elle reflète l'évolution de la teneur en eau pondérale (ω) d'un échantillon de milieu poreux en fonction de l'humidité relative (φ) de l'air auquel est mis en contact cet échantillon (avec T constante).

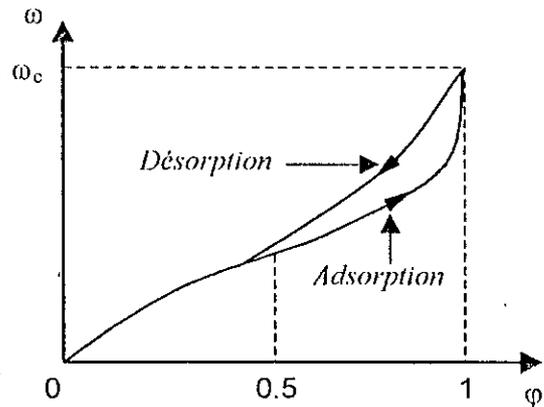


Figure 1.3 : Courbe d'adsorption type

La relation, $\varphi(\omega)$, n'est pas univoque car, elle présente un effet d'hystérésis, suivant qu'elle est obtenue par valeurs croissantes (courbe de sorption) ou décroissantes (courbe de désorption) de la teneur en eau.

Dans le domaine de la condensation capillaire ($\varphi \in [0.5, 1]$), on a d'après la théorie de Kelvin :

$$\varphi = \exp\left(-\frac{P_c M_v}{\rho_\ell T R}\right) \quad (1.14)$$

où : P_c , la pression capillaire ; R , la constante universelle des gaz parfaits ; M_v , masse molaire de la vapeur ; T , température et ρ_ℓ , masse volumique du liquide.

D'où l'équation (1.12) s'explique comme suit :

$$P_v = P_{vs} \cdot \exp\left(-\frac{P_c M_v}{\rho_\ell T R}\right) \quad (1.15)$$

- *Equation de Clausius-Clapeyron* : elle donne l'expression de l'enthalpie massique de changement de phase en fonction de la pression :

$$\Delta h_v = -\frac{R}{M_v} \frac{d(\ln \varphi)}{d(1/T)} \quad (1.16)$$

Cependant, il est à préciser que la teneur en humidité maximale (ω_c), qui peut être fixée dans un milieu poreux par ce mécanisme est en règle générale, très faible devant la teneur en humidité correspondant à la saturation complète.

A partir de la situation d'équilibre hygroscopique où : $\phi = 1$, l'accroissement de la teneur en humidité ne peut alors se poursuivre que s'il ya un apport d'eau en masse. Deux mécanismes peuvent concourir à cela : la capillarité et la condensation de la vapeur sursaturée.

1-3-2. La capillarité

Elle intervient lorsque la structure poreuse est mise en contact avec une phase liquide. Sans entrer dans une analyse détaillée des phénomènes complexes de mouillabilité, l'expérience montre que lorsqu'un liquide présente un comportement mouillant vis-à-vis d'un solide, il a tendance à s'étaler naturellement le long de sa surface.

En milieu poreux, cette affinité conduit à la formation d'interfaces courbes entre le liquide et la vapeur dans les pores, elle entraîne également l'existence d'une différence de pression entre les phases et l'envahissement spontané de l'espace des pores par la phase mouillante liquide. La différence de pression entre les phases, appelée " *pression capillaire* " désigné par, P_c , s'exprime conventionnellement par la différence entre la pression dans le fluide non mouillant gazeux, P_g , en l'occurrence de l'air humide et la pression dans le fluide mouillant liquide, P_ℓ , soit [5,9] :

$$P_c = P_g - P_\ell \quad (1.17)$$

Dans de nombreux cas, la pression capillaire est remplacée par une autre variable, Ψ , la succion, à laquelle elle se trouve reliée par l'expression :

$$P_c = -\rho_\ell g \Psi \quad (1.18)$$

avec : g , accélération due à la pesanteur.

En milieu poreux, P_c est une fonction de la température et de la quantité de liquide ω_ℓ occupant l'espace des pores, elle n'est généralement déterminée avec précision que par voie expérimentale [2, 15].

Dans un processus isotherme, la pression capillaire varie en fonction de ω_ℓ comme le montre la figure (1.4). Elle s'annule pour une teneur en eau qui est la teneur en eau de saturation $\omega_{\ell s}$, pour laquelle tous les pores sont remplis, et croît de façon continue lorsque ω_ℓ diminue de $\omega_{\ell s}$ à ω_c . Comme dans le domaine d'adsorption correspondant à la manifestation des effets de condensation capillaire, les courbes $P_c(\omega_\ell)$ présentent des effets d'hystérésis [13, 22], qui peuvent être extrêmement marqués entre drainage (ω_ℓ décroissante) et imbibition (ω_ℓ croissante) [5].

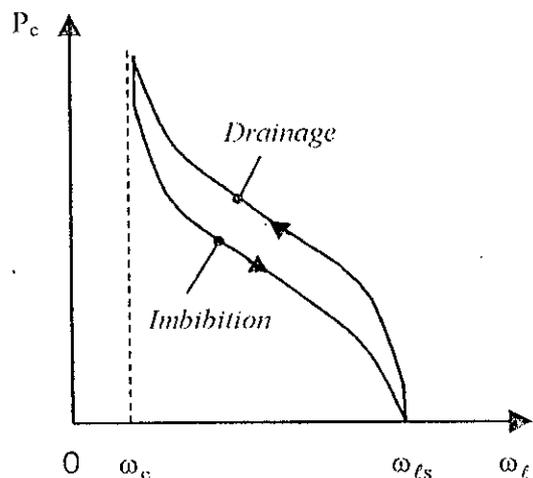


Figure 1.4 : Courbe $P_c(\omega_\ell)$ [5].

Remarques :

- L'effet d'hystérésis observé dans les courbes d'adsorption et de pression capillaire, accompagne l'évacuation et la remise en place de l'humidité contenue dans les pores d'un milieu poreux. Cet effet est dû à la géométrie particulière et complexe de l'espace poreux, il est un autre phénomène très remarquable caractérisant les milieux poreux non saturés.
- Lorsque la capillarité est le mécanisme dominant de fixation d'humidité, le matériau est dit *capillaro-poreux*. Par contre lorsque le mécanisme de fixation dominant est l'adsorption, le matériau est dit *hygroscopique*. Néanmoins, la quantité d'humidité fixée par adsorption même pour les matériaux ayant un comportement réputé hygroscopique, reste généralement faible comparée à la quantité d'humidité correspondant au remplissage de tous les pores (saturation complète) [5].

1-3-3. La condensation [5, 34, 35]

Pour illustrer de manière simple, ce phénomène, considérons une paroi poreuse dont l'une des faces est rendue étanche à la vapeur d'eau. imaginons que cette paroi est en équilibre hygroscopique, T_o étant sa température, $P_{vo} < P_{vso}$, la pression de la vapeur dans l'espace des pores (P_{vso} étant la pression de vapeur saturante correspondant à T_o) (Figure 1.3.a) et supposons que par suite d'un refroidissement de la face imperméable (en la portant à un température $T_c < T_o$), un régime thermique stationnaire, caractérisé par une variation de température $T_o \rightarrow T_c$, s'établit.

Si la courbe de pression de vapeur saturante correspondant à cette nouvelle distribution de température se situe, en certains points de la paroi, en dessous de la valeur P_{vo} , il est bien évident que l'on aura condensation (figure 1.3.b). La masse d'eau liquide ainsi formée proviendra, d'une part, de la condensation de la vapeur initialement en place dans ce domaine et d'autre part, de la condensation d'une partie du flux d'humidité, en phase vapeur Φ_v , s'écoulant vers les zones froides par diffusion moléculaire.

Par ailleurs, il se produit un écoulement de l'eau liquide par capillarité résultant de la condensation de la vapeur d'eau en sens inverse de Φ_v , traduisant un flux d'humidité, en phase liquide Φ_l .

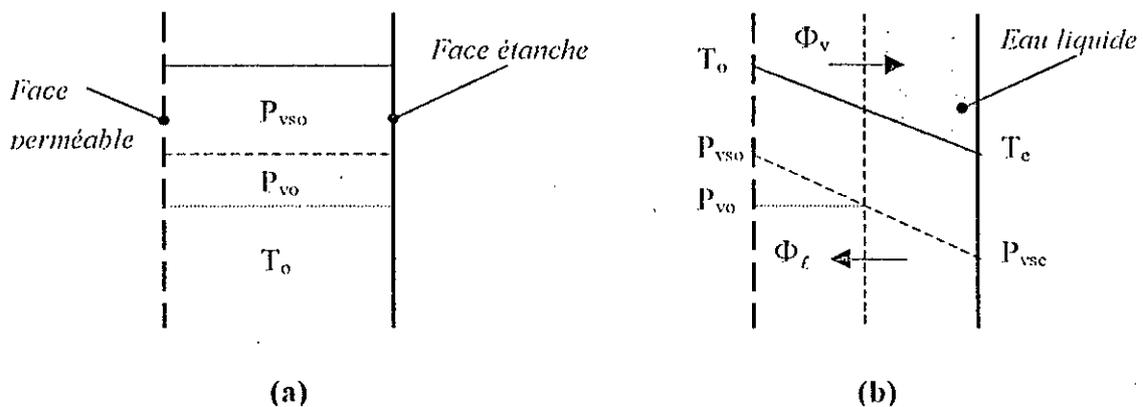


Figure 1.4 : Phénomène de condensation dans une paroi poreuse.

La description mathématique des phénomènes qui se déroulent au sein d'un milieu poreux, notamment, écoulements et phénomènes de transferts, est en principe réalisable à l'aide des équations microscopiques de la thermodynamique des milieux continus. La détermination du champ des différentes variables (pression, température, etc.) en tout point de chacune des phases en place devrait, à priori, pouvoir être effectuée aussi.

Ceci est justifié par le fait que les dimensions géométriques des pores et des fractions de la phase solide comprises entre pores, ont généralement des valeurs largement supérieures aux dimensions moléculaires. Par conséquent, chaque phase peut être considérée comme un milieu continu et le milieu poreux comme un ensemble de milieux continus étroitement imbriqués.

Cependant, la complexité géométrique de l'espace des pores et la distribution des phases au sein du milieu est telle qu'en général on est dans l'incapacité de décrire avec précision la géométrie des surfaces limitant les phases. En conséquence, les équations microscopiques s'avèrent d'une utilité très limitée, puisque la définition de leur domaine géométrique de résolution est rendue pratiquement impossible.

C'est pourquoi, il est légitime d'essayer de décrire les phénomènes, non plus à l'échelle des pores (niveau microscopique) mais à une échelle plus en accord avec nos moyens d'observation du milieu, en l'occurrence l'échelle macroscopique.

Le changement d'échelle, est souvent effectué par la définition d'un volume élémentaire représentatif noté VER (qui sera précisé ultérieurement), conduisant à l'établissement d'une équivalence entre milieu dispersé réel et un milieu continu fictif.

Dans cette nouvelle échelle, les phénomènes sont décrits en moyenne par des équations dont les variables et les paramètres sont représentatifs des variables et paramètres physiques moyens au sein du milieu continu équivalent. Tout ce qui vient d'être énoncé jusqu'ici, constitue le fondement de la modélisation mathématique en milieu poreux.

2-1. ECHELLES DE DESCRIPTION ET CONCEPT DE VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF (VER)

Un milieu poreux est de nature hétérogène. Ainsi, on est de plus en plus confronté à des notions telles que : échelle *microscopique*, échelle *macroscopique* et même échelle *mégascopique* [2]. Les niveaux de description attachés à ces différentes échelles sont respectivement :

- *Niveau microscopique* → échelle des pores et des grains, à l'intérieur de la quelle les grandeurs locales ou microscopiques peuvent largement varier,
- *Niveau macroscopique* → échelle du (VER) (échelle du milieu poreux), où les grandeurs moyennes peuvent être considérées sensiblement constantes (milieu homogène),
- *Niveau mégascopique* → échelle des systèmes géologiques (aquifère).

Ce dernier niveau sort du cadre de la présente étude. Dans ce qui suit nous tenterons de préciser la procédure de passage du niveau microscopique au niveau macroscopique.

2-1-1. Le concept de volume élémentaire représentatif (VER)

Nous avons déjà mentionné que le passage du niveau de description microscopique au niveau macroscopique, s'effectue par le biais du volume élémentaire représentatif [2, 7, 38], volume qui doit être suffisamment grand pour lisser l'effet des hétérogénéités locales microscopiques et suffisamment petit pour que toute grandeur définie sur cette base conserve un caractère local vis-à-vis du domaine occupé par le milieu poreux considéré. Autrement dit, si (d) représente l'échelle de longueur de la microstructure (diamètre moyen des pores par exemple) et (L) l'échelle de longueur du milieu poreux, sa propre échelle (r_o) doit satisfaire les conditions suivantes : $d \ll r_o \ll L$ (cf. figure 2.1).

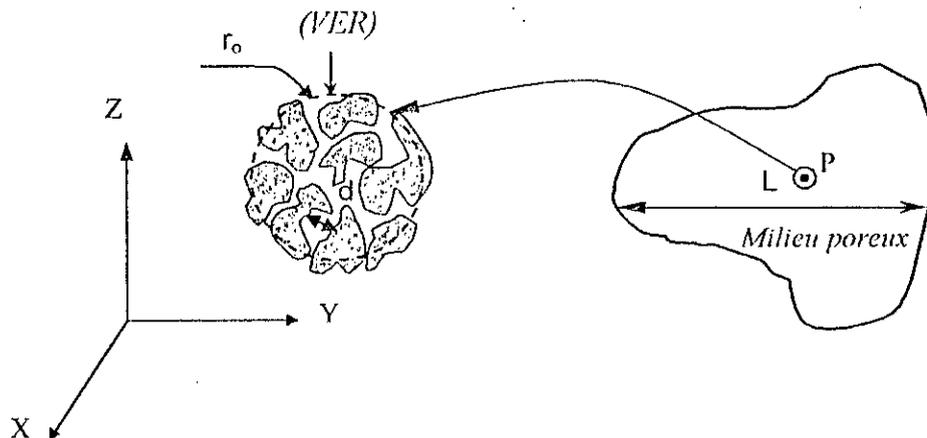


Figure 2.1 : Volume élémentaire représentatif.

Pour mieux comprendre le concept du VER, nous allons déterminer le VER associé à une grandeur physique de base en l'occurrence la porosité [2].

Soit P un point mathématique situé à l'intérieur d'un domaine occupé par un milieu poreux. Considérons un volume ΔV_i (ayant une forme sphérique), beaucoup plus grand qu'un pore ou un grain et centré en P .

Pour ce volume on peut déterminer le rapport :

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon_i(\Delta V_i) = (\Delta V_v)_i / \Delta V_i \quad (2.1)$$

où : $(\Delta V_v)_i$ est le volume de l'espace des vides contenu dans ΔV_i .

En répétant la même procédure plusieurs fois, une séquence de valeurs $\varepsilon_i(\Delta V_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ peut être obtenue par diminution graduelle de la taille de ΔV_i centré autour de P :

$\Delta V_1 > \Delta V_2 > \Delta V_3 \dots$ etc. La figure 2.2, illustre la représentation graphique résultante [2].

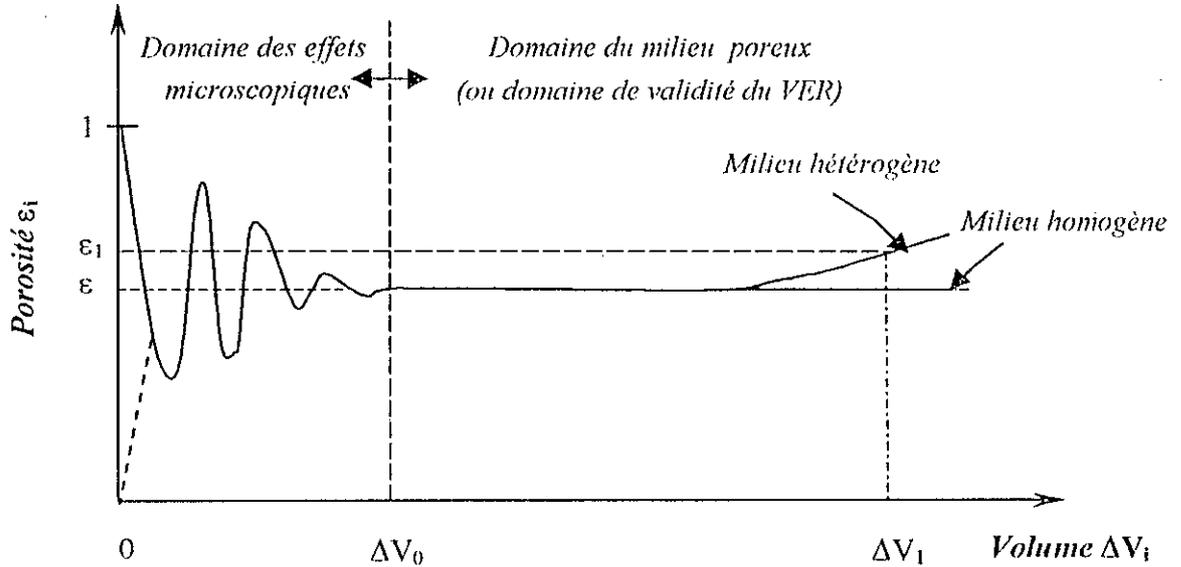


Figure 2.2 : Détermination de la porosité et du VER associé [2].

Pour les grandes valeurs de ΔV_i , le rapport ε_i peut subir des variations graduelles lorsque ΔV_i diminue, spécialement quand le domaine considéré est hétérogène. Au-dessous d'une certaine valeur de ΔV_i , dépendant de la distance de P par rapport aux frontières de l'hétérogénéité. Ces variations ou fluctuations tendent à disparaître, laissant seulement des fluctuations de faibles amplitudes qui sont dues à la distribution aléatoire des dimensions des pores au voisinage de P . Cependant, au-dessous d'une certaine valeur ΔV_0 , on observe soudainement de fortes fluctuations dans le rapport ε_i . Ceci se produit au moment où les dimensions de ΔV_i se rapproches de ceux du pore.

La porosité du milieu $\varepsilon(P)$ au point P est définie comme étant la limite du rapport ε_i lorsque ΔV_i tend vers ΔV_0 :

$$\varepsilon(P) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \varepsilon_i \{ \Delta V_i(P) \} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \frac{(\Delta V_v)_i(P)}{\Delta V_i(P)} \quad (2.2)$$

Pour les valeurs de $\Delta V_i < \Delta V_0$, on doit considérer la présence effective de pores et de particules solides. A ce niveau d'observation ce n'est pas une seule valeur qui peut représentée la porosité au point P .

Le volume ΔV_0 est, par conséquent le volume élémentaire représentatif (VER) ou bien le point matériel (ou physique) du milieu poreux au point mathématique P .

De la définition du VER, il s'ensuit que ces dimensions sont, tel que le fait d'ajouter ou de soustraire un ou plusieurs pores, n'a pas d'influence significative sur la valeur de ε . Nous devons admettre que ΔV_0 et ΔV_v varient légèrement au voisinage de P. D'où :

$$\varepsilon(P) = \lim_{P' \rightarrow P} \varepsilon(P') \quad (2.3)$$

Ceci signifie que, ε est une fonction continue de la position P à l'intérieur du milieu poreux.

Ainsi, par l'introduction du concept du VER associé à la porosité, nous avons remplacé le milieu dispersé réel par un milieu continu fictif, dans lequel nous pouvons attribuer des valeurs pour n'importe quelle propriété (soit du milieu ou des fluides contenus dans les pores) en tout point mathématique appartenant à celui-ci.

Remarque

Le fait de dire : un VER associé à la porosité, suppose qu'on peut définir d'autres VER associés à d'autres propriétés (éventuellement différents entre eux). En pratique on considère uniquement le VER dont le caractère de représentativité s'étend à l'ensemble des propriétés et grandeurs définies au sein du milieu poreux considéré.

2-1-2. Grandeurs et Lois Macroscopiques

La détermination des grandeurs et lois macroscopiques à partir de celles du niveau microscopique, est basée sur le même principe, celui qui consiste à définir un opérateur de prise de moyenne et un domaine conférant aux grandeurs macroscopiques un sens physique et aux lois, la forme générale des lois de conservation. Par application de ce principe la procédure à suivre consiste à obtenir la description macroscopique par *prise de moyenne volumique* des grandeurs et équations microscopiques sur le volume élémentaire représentatif [2, 7, 9, 38, 46].

Pour toute grandeur (vitesse, masse volumique, ...) microscopique noté \bullet la moyenne volumique est définie par [9] :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \bullet \, dV \quad (2.4)$$

Les moyennes volumiques des opérateurs de dérivations spatiale ∇ et temporelle $\partial/\partial t$ appliqués à cette grandeur par [9] :

$$\langle \nabla \bullet \rangle = \nabla \langle \bullet \rangle + \frac{1}{\Delta V_0} \int_{A_{\alpha i}} \bullet \, \vec{n}_{\alpha i} \, dA \quad (2.5)$$

et

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \bullet \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \bullet \rangle - \frac{1}{\Delta V_0} \int_{A_{\alpha i}} \bullet \, \vec{W} \cdot \vec{n}_{\alpha i} \, dA \quad (2.6)$$

Avec : $A_{\alpha i}$, surface séparant dans ΔV_0 les phases α et i ; \vec{W} , vecteur vitesse de déplacement des points d'interface $A_{\alpha i}$, lorsque celle-ci varie (milieu déformable, écoulements multiphasiques) et $\vec{n}_{\alpha i}$, vecteur normal à l'interface $A_{\alpha i}$ orienté de la phase α vers la phase i .

En guise de conclusion aux deux sections précédentes (2-1 et 2-2) on peut dire que :

- La description mathématique des phénomènes en milieu poreux doit se faire impérativement par des équations macroscopiques. On évite ainsi, d'avoir à spécifier la configuration individuelle de chaque phase et leur résolution ne nécessite, que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières du milieu poreux.
- Dans cette description, la complexité géométrique de la matrice et de l'espace des pores se trouve incluse dans les coefficients des équations macroscopiques traduisant, au sein du VER, les interactions entre phases. Il convient de souligner toutefois que pour fermer le système, ces coefficients doivent être préalablement déterminés par voie expérimentale, numérique ou théorique [8, 9].

Les équations utilisées pour décrire, les transferts de chaleur et d'humidité en milieu poreux et faisant intervenir les effets de couplage entre transfert de masse et de chaleur, ont été établies en 1957 par *Philip & De Vries* [19] et par *Luikov* en 1958 [37].

Les équations résultantes ont été justifiées rationnellement par *Whitaker* (1977) [51] par l'utilisation d'une approche dans laquelle, les équations de bilan macroscopiques sont obtenues par la prise de moyenne des équations de bilan microscopiques sur un volume représentatif (VER). Cette modélisation s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses et de restrictions qui doivent être satisfaites. Elles concernent la matrice solide, les fluides dans les pores et les conditions thermodynamiques reniantes.

2-2. MODELE MATHEMATIQUE UTILISE

Outre la prise en considération des différents mécanismes physiques mis en jeu, le modèle de *Philip & De Vries* [19], fait intervenir les effets de couplage entre transfert de masse et transfert de chaleur. Il constitue ainsi, le modèle dont le niveau de description des phénomènes est le plus complet jusqu'à présent [5].

C'est le modèle pour lequel nous avons opter pour conduire notre étude, aussi bien pour l'analyse que pour l'interprétation des résultats expérimentaux.

L'élaboration de ce modèle repose sur les hypothèses suivantes [51] :

On suppose que le milieu poreux est un système triphasique constitué de la matrice solide, d'une phase liquide monoconstituant (de l'eau) et d'une phase gazeuse. Cette dernière est formée soit de la vapeur du liquide, soit d'un mélange binaire : vapeur du liquide + gaz neutre (dans ce qui suit typiquement de l'air sec). On admet également que les phases fluides ne réagissent pas chimiquement avec la matrice solide et que les effets radiatifs sont négligeables.

A ces hypothèses, qui correspondent à la majorité des situations rencontrées en pratique, s'ajoute d'autres hypothèses simplificatrices et un ensemble de restrictions dont :

- * La matrice solide constituant le milieu poreux est indéformable, homogène et isotrope ;
- * L'enthalpie des différentes phases est indépendante de la pression ;
- * Les différentes phases sont continues et en équilibre thermodynamique local ;
- * La masse volumique de la phase liquide est constante ;

- * La phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits ;
- * La pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante ;
- * Les phénomènes de gel-dégel et d'ébullition sont exclus ;
- * Le travail des forces de compression et de dissipation visqueuse est négligeable ;
- * La diffusion de vapeur est du type moléculaire ;
- * Le transfert de chaleur par convection est négligeable ;
- * Les phénomènes d'hystérésis ne sont pas pris en compte.

Dans ce cadre bien défini, les équations permettant de décrire les phénomènes sont comme suit [8, 9] :

2-2-1. EQUATIONS DE BILAN

A) Equations de conservation des masses fluides

$$* \text{ En phase liquide } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_o \omega_\ell) + \nabla \cdot (\rho_\ell \bar{U}_\ell) = \dot{m} \quad (2.7.a)$$

$$* \text{ En phase gazeuse } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_o \omega_g) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{U}_g) = -\dot{m} \quad (2.7.b)$$

$$- \text{ vapeur } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_o \omega_v) + \nabla \cdot (\rho_v \bar{U}_g + \bar{\Phi}_v) = -\dot{m} \quad (2.7.c)$$

$$- \text{ air sec } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_o \omega_a) + \nabla \cdot (\rho_a \bar{U}_g - \bar{\Phi}_v) = 0 \quad (2.7.d)$$

B) Equation de conservation de l'énergie

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_\ell C_\ell \bar{U}_\ell + \rho_g C_g \bar{U}_g) \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \bar{\Phi}_{qc} - \Delta h_v \dot{m} \quad (2.8)$$

Où : t , le temps ; ω_i , teneurs massiques ; ∇ , l'opérateur mathématique Nabla ($\nabla = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}^T$) ; \bar{U}_i , vecteurs vitesse de filtration ; $\bar{\Phi}_v$, densité de flux massique de diffusion des constituants air et vapeur de la phase gazeuse ; \dot{m} , taux de changement de phase ; T , la température ; $\bar{\Phi}_{qc}$, vecteur de densité de flux thermique macroscopique par conduction ; Δh_v , l'enthalpie massique de changement de phase ; $i = s, \ell, g, v, a$: indices correspondant respectivement au solide, au liquide, au gaz, à la vapeur et à l'air sec.

Dans les équations de bilan (équations 2.7 et 2.8) [8] :

- les premiers termes représentent le taux de changement temporel de masse ou d'énergie thermique ;
- les seconds termes représentent la masse convective ou l'énergie de transport ;
- les troisièmes termes (éventuels) représentent la masse diffusée ou l'énergie conductive et,
- les quatrièmes termes (éventuels) représentent la masse ou l'énergie créée (ou consommée) par le processus de changement de phase.

2-2-2. EQUATIONS DE FERMETURE

La fermeture du système formé par les équations (2.7) & (2.8) requiert la connaissance :

- 1- Des lois phénoménologiques pour obtenir \bar{U}_ℓ ; \bar{U}_g ; $\bar{\Phi}_v$ et $\bar{\Phi}_{qc}$
- 2- Des lois ou équations d'états des différentes phases.
- 3- Des équations complémentaires gouvernant les conditions d'équilibre entre phases.

Les expressions des équations de fermeture sont respectivement :

a) Lois de Darcy polyphasique (bilan de quantité de mouvement)

$$\bar{U}_\ell = -\frac{\bar{k}_\ell}{\mu_\ell} \cdot (\nabla P_\ell - \rho_\ell \vec{g}) \quad (2.9)$$

$$\bar{U}_g = -\frac{\bar{k}_g}{\mu_g} \cdot (\nabla P - \rho_g \vec{g}) \quad (2.10)$$

Les deux équations ci-dessus, communément appelées équations de *Darcy* généralisées [38], décrivent l'écoulement simultané des deux phases fluides (liquide et gaz) dans l'espace des pores (écoulement polyphasique en milieu poreux non saturé).

Avec : \bar{k}_ℓ et \bar{k}_v , tenseurs des perméabilités effectives respectivement liquidé et gazeuse ; P, pression totale du gaz ; P_ℓ , pression dans le liquide ; μ_ℓ et μ_g , viscosité dynamique respectivement du liquide et du gaz.

b) Lois de diffusion macroscopiques – Lois de transfert

– Densité de flux de masse due à la diffusion moléculaire (Loi de Fick)

$$\bar{\Phi}_v = -\rho_g \bar{D}^* \cdot \nabla (\rho_v / \rho_g) \quad (2.11)$$

– Densité de flux de chaleur due à la conduction (Loi de Fourier)

$$\bar{\Phi}_{qc} = -\bar{\lambda}^* \cdot \nabla T \quad (2.12)$$

Avec : \bar{D}^* , tenseur de diffusivité massique apparente de la vapeur d'eau au sein du milieu poreux et $\bar{\lambda}^*$, tenseur de la conductivité thermique équivalente.

c) Equations d'état

La phase gazeuse est par hypothèse assimilée à un gaz parfait d'où :

$$\text{et } \begin{cases} P = P_a + P_v = \rho_a \frac{R}{M_a} T + \rho_v \frac{R}{M_v} T \\ \rho_g = \rho_a + \rho_v \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec : M_a et M_v masses molaires de l'air et de la vapeur du liquide, R constante universelle des gaz parfaits.

d) Equations complémentaires

- *Pression capillaire :*
$$P_c = P - P_\ell = -\rho_\ell g \psi(\omega_\ell, T) \quad (2.14)$$

- *Equation de Kelvin (dans le domaine de la condensation capillaire):*

$$P_v = P_{vs} \cdot \exp\left(-\frac{P_c M_v}{\rho_\ell T R}\right) \quad (2.15)$$

- *Equation de Clausius-Clapeyron :*
$$\Delta h_v = -\frac{R}{M_v} \frac{d(\ln \varphi)}{d(1/T)} \quad (2.16)$$

- *Contrainte sur le volume des vides :*
$$\varepsilon = \rho_\ell + \rho_g \quad (2.17)$$

- *Equations d'évolution des propriétés physiques :*

$$\mu_\ell(T); \mu_g(T); C_i(T); \Delta h_v(T, \omega_\ell) \quad (2.18)$$

En combinant les équations (2.7) à (2.18) et en choisissant la température T , La teneur massique en liquide ω_ℓ et la pression de la phase gazeuse P comme variables indépendantes, le système d'équations précédent se réduit aux trois équations aux dérivées partielles non linéaires couplées ci-dessous (la construction de ces 3 équations est détaillée en Annexe.B) :

❖ Bilan de masse

$$\frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \underbrace{\alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \xi \frac{\partial T}{\partial t}}_{(a)} = \nabla \cdot \left(\underbrace{\overline{\overline{D_{\omega_\ell}}} \cdot \nabla \omega_\ell}_{(b)} + \underbrace{\overline{\overline{D_T}} \cdot \nabla T}_{(c)} + \underbrace{\overline{\overline{D_P}} \cdot \nabla P}_{(d)} + \underbrace{\overline{\overline{D_G}} \cdot \nabla Z}_{(e)} \right) \quad (2.19)$$

❖ Bilan d'énergie

$$\begin{aligned} (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\overline{\overline{\lambda}}^* \cdot \nabla T \right) + \underbrace{\rho_o C_\ell \left(\overline{\overline{D_{\omega_\ell}}} \cdot \nabla \omega_\ell + \overline{\overline{D_T}} \cdot \nabla T + \overline{\overline{D_P}} \cdot \nabla P + \overline{\overline{D_G}} \cdot \nabla Z \right)}_{(f)} \cdot \nabla T \\ + \underbrace{\rho_o C_g \left(\overline{\overline{D_{P_g}}} \cdot \nabla P \right)}_{(g)} \cdot \nabla T \\ + \rho_o \Delta h_v \underbrace{\left(\nabla \cdot \left(\overline{\overline{D_{\omega_\ell}}} \cdot \nabla \omega_\ell + \overline{\overline{D_T}} \cdot \nabla T + \overline{\overline{D_P}} \cdot \nabla P \right) - \alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} - \xi \frac{\partial T}{\partial t} \right)}_{(h)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

❖ Equation de la pression

$$\gamma \frac{\partial P}{\partial t} - \delta \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} - \zeta \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\overline{\overline{D_{\omega_\ell}}} \cdot \nabla \omega_\ell + \overline{\overline{D_T}} \cdot \nabla T + \overline{\overline{D_P}} \cdot \nabla P \right) \quad (2.21)$$

Les termes qui apparaissent dans les équations (2.19) et (2.20) représentent :

- (a) le taux de variation de la masse de vapeur $\frac{\partial \omega_v}{\partial t}$ exprimée en équivalent liquide ;
- (b) et (c) les densités de flux massique totales (liquide + vapeur) dues aux gradients de pression capillaire, de pression partielle de vapeur et de pression totale ;
- (d) et (e) les densités de flux massique totales dues au gradient de pression dans la phase gazeuse et à la force de gravité ;
- (f) et (g) respectivement, le transport d'énergie convective associé à l'écoulement des phases liquide et gazeuse ;
- (h) la consommation ou la production d'énergie due au changement de phase.

Dans les équations (2.19), (2.20) et (2.21) les tenseurs :

$\overline{\overline{D_\omega}} = \overline{\overline{D_{\omega_\ell}}} + \overline{\overline{D_{\omega_v}}}$, $\overline{\overline{D_T}} = \overline{\overline{D_{T_\ell}}} + \overline{\overline{D_{T_v}}}$ sont respectivement appelés diffusivités massiques isotherme et non isotherme (D_{ω_ℓ} (resp. D_{ω_v}) diffusivité massique isotherme du liquide (resp. de la vapeur) et (D_{T_ℓ} (resp. D_{T_v}) diffusivité massique non isotherme du liquide (resp. de la vapeur); $\overline{\overline{D_P}} = \overline{\overline{D_{P_\ell}}} + \overline{\overline{D_{P_v}}}$, $\overline{\overline{D_G}}$ sont les diffusivités massiques associées au transfert de masse dû respectivement au gradient de pression totale de la phase gazeuse et à la gravité.

Lorsque l'on considère que le milieu poreux, est homogène et isotrope, l'ensemble des tenseurs qui apparaissent dans ces équations se réduisent à des scalaires appelés souvent coefficients de transfert.

Les coefficients : α , ξ , γ , δ , ζ sont des fonctions explicites de k_ℓ , k_g , P_c , D^* , φ et des propriétés thermophysiques des phases : μ_ℓ , μ_g , ρ_ℓ , ρ_v . Par conséquent, ils dépendent de ω_ℓ , T et P . Les expressions des différents coefficients sont explicités en annexe B.

Le système formé par les équations (2.19) à (2.21) doit être résolu numériquement en raison du caractère fortement non linéaire et couplé des équations.

L'estimation numérique des coefficients de transfert et l'étude de sensibilité du modèle général aux variations de paramètres [5, 15, 34], montre que les phénomènes de transferts en milieu capillaro-poreux à pression atmosphérique et aux faibles températures (en dessous du point d'ébullition de l'eau) plusieurs hypothèses peuvent être utilisées pour simplifier les équations de transfert de chaleur et de masse. Ces hypothèses sont :

- a) la pression totale P est supposée constante ($\nabla P = \vec{0}$) ;
- b) les termes $\alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t}$ et $\xi \frac{\partial T}{\partial t}$ correspondant au taux de changement temporel de la masse en phase vapeur dans l'équation de bilan massique (2.19), sont supposés négligeables en comparaison au taux de changement temporel de la masse en phase liquide, $\omega_\ell \approx \omega$, ($\omega = \omega_\ell + \omega_v$) ;
- c) les termes d'énergie convective de la phase liquide et gazeuse sont supposés négligeables dans l'équation de bilan énergétique (équation (2.20)).

Dans ces conditions, le modèle utilisé [5, 19, 20, 45], se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \nabla \cdot (D_m \nabla \omega + D_T \nabla T + D_G \nabla z) \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\left\{ \lambda^* + \rho_o \Delta h_v D_{T_v} \right\} \nabla T + \left\{ \rho_o \Delta h_v D_{\omega_v} \right\} \nabla \omega \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans cette description théorique, trois mécanismes sont responsables du mouvement d'humidité : la capillarité et la force de gravité pour le transfert de masse en phase liquide et la diffusion moléculaire pour le transfert en phase vapeur. Quant au transfert de chaleur, il dépend principalement de la conduction et du changement de phase, le transfert convectif, associé à l'écoulement des phases fluides, est généralement négligeable.

Le modèle (2.22) a déjà fait l'objet de plusieurs études d'évaluation dans différentes situations (*Recan* [6, 48], *Prat* [45], *Larbi* [34, 35], *Slimani* [49], *Guellatti* [30], *Mittiche* [42],...), mais le plus souvent, évalué pour des domaines ou systèmes physiques semi-ouverts, considérés unidimensionnels et peu d'études sont consacrées au cas d'un domaine bidimensionnel, dont nous pouvons citer l'étude de *Prat* [45], mais néanmoins elle est limitée à un système fermé.

Dans la suite, notre tâche consistera à tester le modèle en question sur des systèmes semi-ouverts à deux dimensions d'espace, dans le but d'enrichir l'étude de validité et son extension aux systèmes bidimensionnels.

2-3. MODELES PHYSIQUES ET CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES

Nous considérons dans notre étude les modèles physiques employés par *Crausse* [15] et *Larbi* [34] compte tenu de la banque de données expérimentale fournie par ces auteurs.

- **Modèle 1** (*Crausse* [15]) : Etude de la thermomigration (système fermé) ;
- **Modèle 2** (*Larbi* [34]) : Etude de la condensation (système semi-ouvert) ;
- **Modèle 3** (*Crausse* [15]) : Etude d'évaporation (système semi-ouvert).

Les trois modèles sont constitués par un échantillon de milieu poreux mis en place par compactage dans une cellule cylindrique en plexiglas de diamètre D et de longueur L . Le milieu poreux en question est un sable quartzeux de granulométrie $100 \mu\text{m} < d < 125 \mu\text{m}$ et dont les propriétés thermophysiques et les coefficients de transfert ont été déterminés au moyen d'expériences spécifiques et font partie d'une banque de données établie par *Crausse*.

2-3-1. Conditions aux limites associées

Pour le premier modèle physique, la cellule contenant le milieu poreux est placée horizontalement (cf. figure 2.3). Ses deux extrémités sont maintenues à des températures constantes, en $(x = 0)$, $T = T_1 = 55^\circ \text{C}$ et en $(x = L)$, $T = T_2 = 21^\circ \text{C}$. Les parois en $(x = 0)$ et $(x = L)$, sont des surfaces imperméables et la surface latérale est de plus adiabatique.

Pour le deuxième modèle, la cellule est placée horizontalement mais ouverte à l'une de ses extrémités (cf. figure 2.4). L'extrémité ouverte en $(x = 0)$ est en contact avec une atmosphère humide de température $T = T_s = T_1 = 30^\circ \text{C}$. L'autre extrémité en $(x = L)$ est fermée par une surface imperméable maintenue à température constante $T = T_2 = 10^\circ \text{C}$.

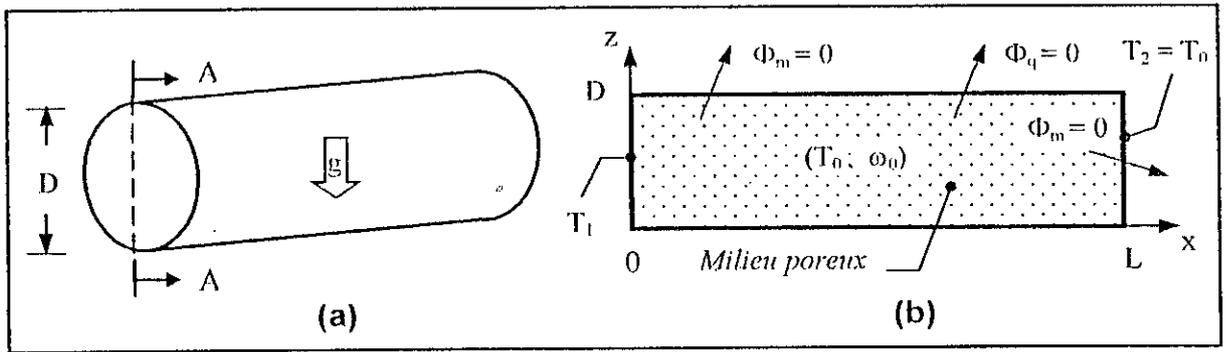


Figure 2.3 : Modèle physique N° 1
 (a) : Cellule expérimentale.
 (b) : Section A-A.

Figure 2.4 : Modèle physique N° 2

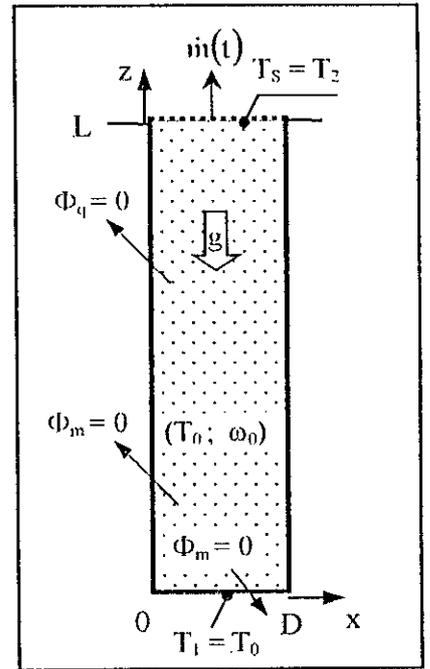
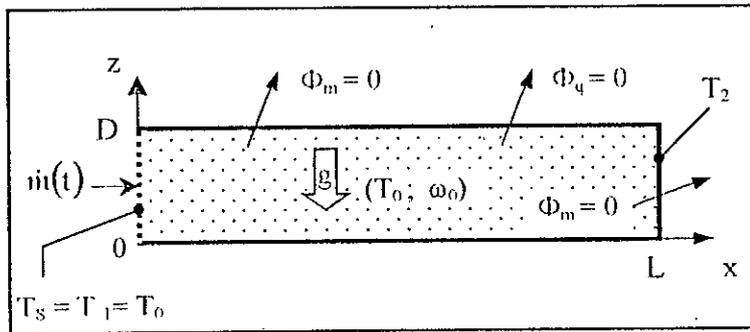


Figure 2.5 : Modèle physique N° 3

Ce qui s'exprime mathématiquement par :

a) Conditions sur la frontière x pour $t > 0$

$$x = 0 \quad (0 < z < D) \quad \begin{cases} \Phi_m = \frac{h_m}{\rho_o} (c_s - c_\infty) = \frac{1}{\rho_o} \dot{m}(t) \\ T = T_1 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$x = L \quad (0 < z < D) \quad \begin{cases} \Phi_m = 0 \\ T = T_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{Avec : } \dot{m}(t) = \frac{d}{dt} (m(t)) = \frac{1}{S} \cdot \frac{d}{dt} (M(t)) = \frac{4}{\pi D^2} \cdot \frac{d}{dt} (M(t)) \quad (2.25)$$

où : h_m , coefficient d'échange massique ; c_s , c_∞ , respectivement, la concentration de vapeur d'eau à l'interface, milieu poreux - milieu externe et dans l'air ; $\dot{m}(t)$, la densité de flux de masse traversant la section de la cellule, S à la frontière ouverte ; Φ_m , la densité de flux de masse ; $M(t)$, loi d'évolution des masses d'eau condensées ou évaporées en fonction du temps.

Bien entendu pour le premier modèle (système fermé) : $\dot{m}(t) = 0$.

b) Conditions sur la frontière z pour t > 0

$$z = 0 \text{ et } z = D \ (0 < x < L) \quad \begin{cases} \Phi_m = 0 \\ \Phi_q = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Enfin pour le 3^{ème} modèle, la cellule cette fois-ci est placée verticalement. Son extrémité inférieure (en z = 0) est imperméable et maintenue à température constante, T=T₁=20,5° C. L'extrémité supérieure (en z = L) est en contact avec de l'air sec dont la température T = T_s(t) = T₂. La surface latérale de la cellule est imperméable et adiabatique.

Où : T_s, la température à la surface de contact milieu poreux et l'air atmosphérique qui varie dans le temps (mais atteint rapidement 35°C), elle est mesurée expérimentalement [48].

Par conséquent on a :

c) Conditions sur la frontière z pour t > 0

$$z = 0 \ (0 < x < D) \quad \begin{cases} \Phi_m = 0 \\ T = T_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$z = L \ (0 < x < D) \quad \begin{cases} \Phi_m = -\frac{h_m}{\rho_o} (c_s - c_\infty) = -\frac{1}{\rho_o} \dot{m}(t) \\ T = T_s = T_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

d) Conditions sur la frontière x pour t > 0

$$x = 0 \text{ et } x = D \ (0 < z < L) \quad \begin{cases} \Phi_m = 0 \\ \Phi_q = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

2-3-2. Conditions initiales (t = 0)

Les conditions initiales relatives à la teneur en eau et à la température, imposent une répartition uniforme sur tout le domaine occupé par le milieu poreux de ces grandeurs à t = 0 :

- pour le premier modèle : ω(0) = ω₀ = 7 % puis 11.2 % et finalement 14.2 % ;
- pour le second modèle : ω(0) = ω₀ = 0.02 % (milieu sec) ;
- pour le troisième modèle : ω(0) = ω₀ = 3 % (milieu relativement humide) ;
- pour le premier modèle : T(0) = T₀ = T₂ et pour les modèles 2 et 3 : T(0) = T₀ = T₁.

2-3-3. Remarque importante

Pour les modèles 2 et 3, la détermination du coefficient d'échange massique passe nécessairement par une étude de l'écoulement externe [46] (via la résolution des équations des couches limites, dynamique et thermique). Compte tenu de la complexité d'une telle étude, nous avons choisi une procédure semi-empirique consistant à imposer un flux de masse $\dot{m}(t)$ déduit de l'expérience (Crausse [15], Larbi [34]). Dont l'expression est de la forme :

$$\frac{1}{\rho_o} \dot{m}(t) = a t^b \quad (2.30)$$

Où : a et b sont des coefficients obtenus par lissage des données expérimentales.

CHAPITRE
3

RESOLUTION NUMERIQUE
PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS

Pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles gouvernant un phénomène physique, l'ingénieur a à sa disposition un éventail de méthodes numériques qui s'approprient plus ou moins à un type d'équations donné.

Parmi les méthodes les plus répandues on peut citer : la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis.

La méthode la plus couramment utilisée est la méthode des éléments finis, elle est actuellement en pleine extension et voit son utilisation s'élargir à de nouveaux domaines d'applications ouvrant ainsi des horizons prometteurs et contribue à l'occasion à la progression des recherches.

Cette dynamique observée est due principalement à l'avènement d'ordinateurs de grande capacité mémoire associé à une rapidité impressionnante de traitement de données (des millions d'opérations par seconde).

Bien que sa mise en œuvre soit difficile, la programmation de cette méthode a connu quelques améliorations et facilités.

Les nouvelles versions des logiciels de programmation (en langage de programmation FORTRAN en particulier) beaucoup plus souples ainsi qu'une abondante documentation où certains sous programmes généraux peuvent être carrément intégrés et utilisés par un programme principal, ceci contribue considérablement à avantager le choix d'une telle méthode [3].

Pour résoudre un système d'équations aux dérivées partielles sur un certain domaine, cette méthode consiste d'abord à décomposer ce domaine en domaines élémentaires appelés éléments finis, sur lesquels on se donne le type de variation de la (les) fonction(s) inconnue(s). Le passage à une formulation intégrale permet ensuite de se ramener à la résolution d'un système algébrique.

Dans ce chapitre, il sera question de la résolution numérique par la méthode des éléments finis des équations aux dérivées partielles préétablies, régissant les phénomènes de transfert en milieu poreux.

3-1. PRESENTATION SOMMAIRE DE LA METHODOLOGIE DE RESOLUTION

3-1-1. Notes Préliminaires [25, 26, 40, 53]

- La méthode des éléments finis discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème.
- La méthode des résidus pondérés qui, en utilisant des fonctions de pondération, permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale. L'intégration par parties fournit des formulations intégrales modifiées ce qui réduit quelque peu la difficulté du problème.
- La méthode des résidus pondérés fournit selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales.
- La méthode des paramètres indéterminés consiste à remplacer, dans la formulation choisie, les fonctions inconnues par des approximations de type interpolation qui dépendent d'un nombre fini de paramètres.

Cette méthode devient la méthode des éléments finis (MEF), lorsque nous utilisons l'approximation par éléments finis :

$$U = \sum_{i=1}^n N_i U_i \quad (3.1)$$

avec les propriétés :

$$N_i(X_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (3.2)$$

où : U : est une fonction inconnue ;

U_i : valeur de la fonction (U) au point d'interpolation (i) de coordonnées $x_i(x_i, y_i, z_i)$;

N_i : fonction d'interpolation ;

n : nombre de points ou de nœuds d'interpolation.

Nous obtenons ainsi une expression discrétisée d'une formulation intégrale qui constitue le système d'équations algébriques conduisant à la solution approchée.

3-1-2. Méthode des résidus pondérés

Avant d'exposer la méthode des résidus pondérés [25, 53], nous allons tout d'abord posé correctement le problème à résoudre sous une forme générale et typique.

Le plus souvent le comportement d'un système physique (continu) est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles ou intégral-différentielles associé à des conditions aux limites en espace et/ou en temps.

En termes de formalisme mathématique, on cherche une fonction (U) qui satisfait un certain nombre d'équations (différentielles) :

$$A(U) = \begin{Bmatrix} A_1(U) \\ A_2(U) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.3.a)$$

dans un domaine Ω (volume, surface,...), ainsi que des conditions aux limites :

$$B(U) = \begin{Bmatrix} B_1(U) \\ B_2(U) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.3.b)$$

sur le bord (contour) Γ du domaine (cf. figure 3.1).

La fonction cherchée peut être une quantité scalaire ou peut représenter un vecteur à plusieurs composantes (vecteur vitesses par exemple). De la même façon, il peut n'y avoir qu'une seule équation différentielle ou un système de telles équations.

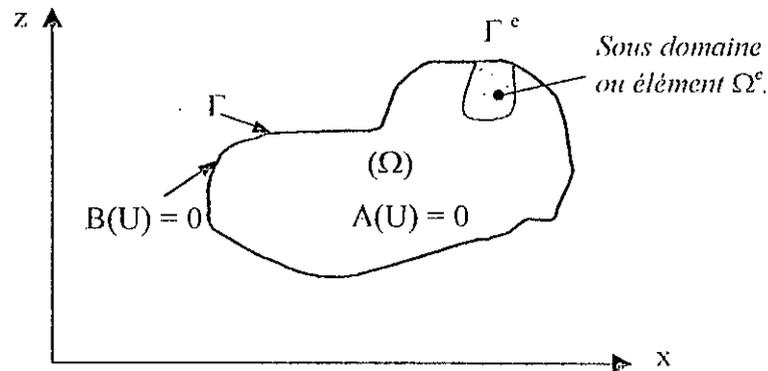


Figure 3.1 : Le domaine Ω et la frontière Γ

3-1-3. Formulations intégrales

Partant du fait qu'il est impératif que l'ensemble des équations (3.3.a) soit vérifié en chaque point du domaine Ω , il s'ensuit que :

$$\int_{\Omega} \phi^T A(U) d\Omega \equiv \int_{\Omega} [\phi_1 A_1(U) + \phi_2 A_2(U) + \dots] d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

avec : $\phi^T = \langle \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \rangle$

où : ϕ est un ensemble de fonctions (de pondération) arbitraires, en nombre égal au nombre d'équations (ou de composantes de U) en jeu.

En plus on peut affirmer que si (3.4) est satisfaite pour tout ϕ , les équations (3.3.a) sont satisfaites en tout point du domaine. Si nous désirons par ailleurs satisfaire les conditions aux limites (3.3.b) nous devons, soit assurer ces conditions par le choix d'une fonction U_{Γ} , soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \bar{\phi}^T B(U) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma} [\bar{\phi}_1 B_1(U) + \bar{\phi}_2 B_2(U) + \dots] d\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

pour tout ensemble de fonctions $\bar{\phi}$.

En effet, la formulation intégrale :

$$\int_{\Omega} \phi^T A(U) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\phi}^T B(U) d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

est satisfaite pour tous ϕ et $\bar{\phi}$ si et seulement si les équations (3.3.a) et les conditions aux limites (3.3.b) sont vérifiées à la fois.

Cependant, certaines restrictions sur les familles aux quelles peuvent appartenir ϕ et $\bar{\phi}$ ou U sont à imposées. En général, nous chercherons à éviter des fonctions qui rendent infini tout terme intégral.

Ainsi, dans (3.6) nous limitons notre choix aux fonctions ϕ et $\bar{\phi}$ univoques et à valeurs finies, sans restreindre la validité des propositions précédentes.

Pour ce qui est des fonctions U , les restrictions dépendent de l'ordre des différentiations présentes dans $A(U)$ (ou $B(U)$).

Afin de diminuer les conditions imposées aux fonctions admissibles U (ordre de différentiation), dans de nombreux cas il est possible d'effectuer une intégration par parties de la forme intégrale (3.6) en utilisant le théorème de *Green* [53]. Ce qui nous conduit à une forme intégrale dite faible :

$$W(U) = \int_{\Omega} C(\phi)^T D(U) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\phi)^T F(U) d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

Où les opérateurs D et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé que A et B . Ainsi, l'ordre maximum des dérivées de U qui apparaissent dans (3.6) diminue. Les conditions de dérivabilité de U sont donc moins fortes. En contre partie, des dérivées de ϕ et $\bar{\phi}$ apparaissent. Donc les conditions de dérivabilité de ϕ et $\bar{\phi}$ augmentent.

3-1-4. Approximation des Formulations intégrales (Discrétisation)

Pour obtenir une solution approchée U , d'une fonction exacte \hat{U} , la méthode des éléments finis (qui est une méthode d'approximation) cherchera la solution sous la forme :

$$\hat{U} \equiv U = \sum_{i=1}^n N_i U_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \quad (3.8)$$

où les N_i sont des fonctions de forme écrites en fonction des variables indépendantes (telles que les coordonnées x, y, z) et tous, ou la plupart des paramètres U_i sont inconnus.

La substitution de la fonction inconnue par son expression approchée, exprimée par le développement (3.8) dans l'une des formes intégrales (3.6) ou (3.7) conduirait en fait à une approximation.

D'où, l'impossibilité de satisfaire à la fois les équations et les conditions aux limites de façon rigoureuse. Les équations (3.6) ou (3.7) se traduisent alors par un système d'équations algébriques, qui permettent de déterminer les paramètres U_i .

Pour (3.6) on a :

$$\int_{\Omega} \phi^T A(\mathbf{NU}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\phi}^T B(\mathbf{NU}) d\Gamma = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} C(\phi)^T D(\mathbf{NU}) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\phi)^T F(\mathbf{NU}) d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

Si nous remarquons que $A(\mathbf{NU})$ représente le résidu (ou l'erreur), obtenu en remplaçant dans l'équation (3.3.a), U par son expression approchée et que $B(\mathbf{NU})$ est le résidu des conditions aux limites (3.3.b), alors nous constatons que l'équation (3.9) est une intégrale pondérée de ces résidus. C'est pour cette raison que la procédure développée en haut s'appelle : *méthode des résidus pondérés* [53].

Il est clair que pratiquement n'importe quel ensemble de fonctions indépendantes, ϕ_i peut être choisi comme pondération, et selon le choix fait, la méthode recevra un nom différent. A titre d'exemple on peut citer [25, 53]:

a) Méthode de collocation par points

Où : $\phi_i = \delta_i$ avec δ_i est telle que pour $x \neq x_i, y \neq y_i$ (x_i, y_i coordonnées du point de collocation) : $\phi_i = 0$, mais $\int_{\Omega} \phi_i d\Omega = 1$ (I matrice identité).

Cette méthode équivaut à annuler le résidu en n points du domaine.

b) Méthode de collocation par sous domaines

$\phi_i = 1$, dans Ω^i (sous domaine) et zéro partout ailleurs. Cela revient à rendre nulle l'intégrale de l'erreur sur la partie spécifiée du domaine.

c) Méthode des moindres carrés :

$\phi_i = A(\mathbf{NU}) = R$ (Résidu). Cette méthode consiste à minimiser l'expression :

$$\pi = \int_{\Omega} R \cdot R d\Omega, \text{ par rapport aux paramètres } U_1, U_2, \dots, U_n.$$

d) Méthode de Galerkin

Les fonctions ϕ sont constituées par l'ensemble des variations δU (appelée aussi perturbation sur U) des fonctions U .

$$\phi \equiv \delta U = \delta(\mathbf{NU}_i) = \mathbf{N}\{\delta U_i\} \text{ pour tout } \delta U_i \quad (i = 1, n)$$

Comme nous le verrons plus loin, cette méthode conduit fréquemment (mais pas toujours) à des matrices symétriques. Pour cette raison entre autres, nous l'adopterons exclusivement dans la suite de notre étude.

Le nom de « *résidus pondérés* » est bien entendu beaucoup plus ancien que celui de méthode des éléments finis. Ce dernier est surtout utilisé quand les fonctions de base N dans l'expression (3.8) ont un support localisé (autour d'un élément) mais la méthode générale est identique. Cette classe de méthodes conduit toujours à des équations qui sont sous forme intégrale, donc que nous pouvons obtenir par sommation sur les différents sous domaines.

Nous choisirons par conséquent d'englober toutes les méthodes de résidus pondérés sous le nom de méthode d'éléments finis généralisées [53].

Nous utiliserons une transformation τ^e linéaire par rapport aux coordonnées $\{X_n\}$ des nœuds géométriques de l'élément réel (Ω^e) :

$$\tau^e : \xi \rightarrow \mathbf{X}(\xi) = [\overline{\mathbf{N}}(\xi)] \{X_n\} \quad (3.14)$$

d'où, pour chacune des coordonnées de l'élément quadrilatéral de la figure 3.2 on a :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \overline{\mathbf{N}}(\xi, \eta) \rangle \{x_n\} \\ z(\xi, \eta) = \langle \overline{\mathbf{N}}(\xi, \eta) \rangle \{z_n\} \end{cases} \quad (3.15)$$

où : $\overline{\mathbf{N}}$, désigne les fonctions de transformation géométrique qui se confondent avec les fonctions d'interpolation ou de forme (N) lorsque l'élément est isoparamétrique (c'est ce qui sera considéré dans la suite de l'étude).

Grâce à la transformation géométrique τ^e , nous remplaçons la définition analytique de chaque élément (Ω^e) dans l'espace des \mathbf{X} par la définition analytique plus simple de son élément de référence (Ω^r) dans l'espace des ξ .

Par la suite, nous travaillerons systématiquement dans l'espace des ξ et nous utiliserons des fonctions $U(\xi)$ à la place des fonctions $U(\mathbf{X})$ [53]. La relation entre ξ et \mathbf{X} étant définie par (3.14), les fonctions $U(\xi)$ et $U(\mathbf{X})$ sont différentes mais prennent la même valeur en des points qui se correspondent dans la transformation. Nous avons : $U(\mathbf{X}) = U(\mathbf{X}(\xi))$.

3.1.5.1- Approximation sur un élément de référence

Considérons sur un le domaine Ω un ensemble de (NNT) nœuds d'interpolation ou géométriques de coordonnées X_i , sur chaque élément Ω^e nous utilisons une approximation de type éléments finis :

$$U(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{NNE} N_n U_n = \langle \mathbf{N}(\mathbf{X}) \rangle \{U_n\} \quad (3.16)$$

où : \mathbf{X} , appartient à Ω^e ; U_n , la valeur de la fonction inconnue U au nœud d'interpolation (n) ou variable nodale ; $\mathbf{N}(\mathbf{X})$, les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$U(\xi) = \langle \mathbf{N}(\xi) \rangle \{U_n\} \quad (3.17)$$

où : ξ , appartient à Ω^r ; U_n , la valeur de la fonction inconnue U au nœud d'interpolation (n) ; $\mathbf{N}(\xi)$, les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence Ω^r .

Remarques :

En général, les fonctions $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ ne sont utilisées que pour des éléments simples. Elles sont le plus souvent remplacées par les fonctions $\mathbf{N}(\xi)$ où ξ et \mathbf{X} sont liés par la transformation τ^e définie par la relation (3.14).

Dans l'expression (3.16), les fonctions $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ dépendent des coordonnées des nœuds de l'élément et sont donc différentes pour chaque élément. Par contre, dans (3.17), les fonctions $\mathbf{N}(\xi)$ sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel. Les mêmes fonctions $\mathbf{N}(\xi)$ peuvent donc être utilisées pour tous les éléments possédant le même élément de référence.

3.1.5.2- Dérivation et formulation intégrale [25]

Dans ce qui suit nous allons montrer comment transformer les dérivées et les intégrales écrites en fonction des coordonnées réelles pour les exprimer en fonction des coordonnées de références par le biais du jacobien de l'élément réel.

a) Transformation d'une dérivée

Les équations (3.3.a) sont écrites sur le domaine réel Ω , donc sur les éléments réels Ω^e , elles font intervenir des fonctions inconnues U et leurs dérivées en \mathbf{X} : $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial^2 \mathbf{X}}$, etc.

Suite à notre adoption systématique de l'élément de référence comme sous domaine de résolution de ces équations, il est impératif que toutes les expressions qui impliquent des dérivées de U en x, y, z seront transformées en dérivées en ξ, η, ζ grâce à la matrice de transformation dite, matrice *Jacobienne* [\mathbf{J}].

En nous limitons aux dérivées premières, pour calculer les dérivées en ξ d'une fonction à partir de ses dérivées en \mathbf{X} , nous utilisons la dérivation en chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (3.18)$$

ce qu'on note :

$$\{\partial_{,\xi}\} = [\mathbf{J}] \{\partial_{,x}\} \quad (3.19)$$

Où, [\mathbf{J}] est la matrice Jacobienne de transformation géométrique de coordonnées.

Les termes de [\mathbf{J}] sont obtenus d'après (3.18) par dérivation par rapport à ξ de la relation (3.14) développée comme :

$$\langle x \ y \ z \rangle = \langle \mathbf{N}(\xi) \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}] \quad (3.20)$$

avec : $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$ les coordonnées x, y, z des nœuds de l'élément. la matrice jacobienne s'écrit :

$$[\mathbf{J}] = \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \\ \partial/\partial \zeta \end{Bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \mathbf{N}_{,\eta} \rangle \\ \langle \mathbf{N}_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} & \{y_n\} & \{z_n\} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

(3 × NNE) (NNE × 3)

Pour exprimer les dérivées dans l'élément physique réel en fonction des dérivées dans le l'élément de référence, il suffit de multiplier l'inverse de la matrice jacobienne $[J]$ par le vecteur des dérivées dans le plan de référence $\{\partial_{,\xi}\}$ d'où :

$$\{\partial_{,x}\} = [J]^{-1} \{\partial_{,\xi}\} \quad (3.22)$$

b) Transformation d'une intégrale :

Le changement de variables (3.14) permet de passer de l'intégration d'une fonction $F(X)$ sur l'élément réel Ω^e à une intégration formulée plus simplement sur l'élément de référence Ω^r on a [] :

$$\int_{\Omega^e} F(X) dx dy dz = \int_{\Omega^r} F(X(\xi)) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.23)$$

où : $\det(J)$, représente le déterminant de la matrice jacobienne $[J]$.

Dans le cas de l'exemple de la figure (3.2) (élément quadrilatéral à quatre nœuds) on aura à faire à des intégrales de surface avec : $d\Omega^e \equiv dx dz$ et des intégrales de contour $d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ qu'il faudrait exprimer en fonction des coordonnées de référence :

On peut aussi écrire que : $dx dz = \det(J) d\xi d\eta$.

Pour ce qui est de l'intégration sur le contour Γ lequel correspond à une arête de l'élément, elle se fait suivant une variable (ξ ou η).

A titre d'exemple, sur l'arête ayant pour équation : $\xi = 1$ on a :

$$\begin{cases} x = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{x_n\} \\ z = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{z_n\} \end{cases} \quad (3.24)$$

D'où : $\int_{x_j}^{x_k} F(x, z) d\Gamma = \int_{x_j}^{x_k} F(x, z) \sqrt{dx^2 + dz^2}$ devient :

$$\int_{-1}^1 F(\eta) \sqrt{\left(\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=1} \{x_n\} d\eta \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=1} \{z_n\} d\eta \right)^2} = \int_{-1}^1 F(\eta) J_s d\eta \quad (3.25)$$

avec :

$$J_s = \sqrt{x_{,n}^2 \Big|_{\xi=1} + z_{,n}^2 \Big|_{\xi=1}} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=1} \{x_n\} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=1} \{z_n\} \right)^2} \quad (3.26)$$

En utilisant la même procédure développée en haut on pourra transformer les intégrales de contour sur chacun des bords éventuellement frontière de l'élément.

3.1.6- Problèmes non linéaires et instationnaires

A. Origines des non-linéarités [25, 52]

Des non-linéarités apparaissent dans la formulation de problèmes physiques principalement pour deux raisons :

- 1) Les paramètres physiques supposés indépendants de U dans un modèle linéaire deviennent des fonctions de U . C'est par exemple le cas dans les écoulements non newtoniens, dans les écoulements en milieux poreux non saturés [14,26, 52] ;
- 2) Des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de U . C'est le cas des équations de *Navier et Stokes* [24, 26], et de *Saint-Venant*. La recherche de la solution se fait de manière itérative. La majorité des algorithmes conduisent à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération.

B. Instationnarité

Lorsque le problème étudié est de type évolutif, des dérivées par rapport au temps apparaissent dans les équations $\left(\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t} ; \ddot{U} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} ; \dots \right)$.

La résolution d'un tel problème consiste à trouver un ensemble de fonctions $\{U(t)\}$ qui satisfont aux équations différentielles du problème à tout instant t , ainsi que les conditions initiales imposées à $t = t_0$.

Une des méthodes utilisée consiste à construire numériquement, à partir de la valeur initiale $\{U(t_0)\} = \{U_0\}$, une suite de valeurs de solution aux instants successifs [25] : $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + n\Delta t$: $\{U(t_0)\} \rightarrow \{U(t_0 + \Delta t)\} \rightarrow \{U(t_0 + 2\Delta t)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{U(t_0 + n\Delta t)\}$

Cette méthode utilise des approximations des dérivées \dot{U} et \ddot{U} de type différences finies.

3.1.7- Convergence et erreur d'approximation

Nous avons déjà signalé que l'obtention d'une solution approchée par un développement de la fonction inconnue U sur une base de fonctions de forme est soumis à certaines restrictions pour que les différentes intégrales qui interviennent soient calculables.

De manière très pratique, pour obtenir une solution approchée avec une précision donnée (au sens physique), nous avons deux procédures qui s'offrent à nous [53] :

- Diminuer la dimension h des éléments (appelée convergence h) successivement jusqu'à aboutir à un maillage optimal (qui peut être non homogène). Cette procédure est appelée, raffinement adaptatif du maillage représentant le domaine entier Ω .
- D'un autre côté, nous pouvons également fixer une fois pour toute la taille des éléments, et faire converger l'approximation vers la solution exacte en augmentant le degré p des polynômes dans chaque élément et par l'introduction de nouveaux nœuds dans ces éléments. Cela s'appelle la convergence p .

3-2. APPLICATION DE LA MEF AUX EQUATIONS DU PROBLEME ETUDIE

Le modèle mathématique de *Philip & De Vries* [19, 20], gouvernant les transferts simultanés de chaleur et d'humidité en milieu poreux, établi au chapitre deux (équations 2.22), est composé de deux équations aux dérivées partielles couplées et non linéaires de type parabolique. Afin de simplifier l'écriture des équations (2.22), posons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \dot{\omega} \quad ; \quad D_m = M \quad ; \quad D_T \quad ; \quad D_G = S \\ (\rho C)^* &= R \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T} \quad ; \quad \rho_o \Delta h_v D_{T_v} = E \quad ; \quad \lambda^* + \rho_o \Delta h_v D_{m_v} = Q \end{aligned}$$

D'où, le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \nabla \cdot (M \nabla \omega + D \nabla T + S \nabla z) \\ R \dot{T} = \nabla \cdot (E \nabla \omega + Q \nabla T) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec : ∇ , désigne l'opérateur mathématique « Nabla », défini dans notre cas (étude bidimensionnelle) par : $\nabla = \{\partial/\partial x ; \partial/\partial z\}^T$.

3-2-1. Formulations intégrales et méthode de Galerkin

Ecrivons la formulation intégrale du système (3.27) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \phi_1 \dot{\omega} d\Omega - \int_{\Omega} \phi_1 \nabla \cdot (M \nabla \omega + D \nabla T + S \nabla z) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \phi_2 R \dot{T} d\Omega - \int_{\Omega} \phi_2 \nabla \cdot (E \nabla \omega + Q \nabla T) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Nous optons pour une formulation intégrale de type *Galerkin* [25, 53], par conséquent les fonctions de pondération sont :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \delta \omega \\ \phi_2 &= \delta T \end{aligned} \quad (3.29)$$

où : $\delta \omega$ et δT , sont des variations arbitraires des fonctions inconnues ω et T .

Par ailleurs, l'intégration par parties en utilisant le théorème de *Green* [25, 53], de la formulation (3.28), nous conduit à la formulation intégrale qualifiée de faible qui s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta \omega \dot{\omega} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta \omega \cdot (M \nabla \omega + D \nabla T + S \nabla z) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \omega \left(M \frac{\partial \omega}{\partial n} + D \frac{\partial T}{\partial n} + S \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\Gamma \\ \int_{\Omega} \delta T R \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta T \cdot (E \nabla \omega + Q \nabla T) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta T \left(E \frac{\partial \omega}{\partial n} + Q \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma \end{cases} \quad (3.30)$$

Où : n , est la dimension spatiale (x ou z) normale à la portion de frontière, Γ considérée.

Les seconds membres des deux équations du système (3.30) s'identifient, respectivement, à la condition aux limites de densité de flux de masse qu'on note : Φ_m^{Γ} (dans la première équation) et à la densité de flux de chaleur qu'on note Φ_q^{Γ} : (dans la première équation) à travers la frontière Γ limitant le domaine Ω .

3-2-2. Discrétisation par éléments finis

a) Discrétisation du domaine

Le domaine de résolution (Ω) est un espace bidimensionnel de forme rectangulaire de dimensions $L \times D$. En vu d'une discrétisation par éléments finis de la formulation (3.30), le domaine de résolution associé est préalablement subdivisé en sous domaines ou éléments.

L'élément le plus adéquat, au regard des équations à résoudre (ordre de dérivabilité) et de la géométrie du domaine physique est, l'élément quadrilatéral à quatre nœuds (figure 3.3).

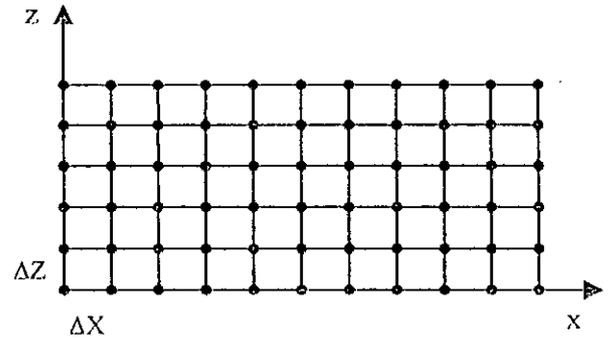


Figure 3.3 : Discrétisation en éléments quadrilatéraux du domaine étudié.

b) Discrétisation de la formulation intégrale faible

Le domaine de résolution (Ω) des intégrales (3.30) étant discrétisé, chacune de ces intégrales est à remplacer par une somme d'intégrales sur chaque élément :

$$W = \sum_{e=1}^{NET} W^e \quad (3.31)$$

avec : NET, nombre d'éléments total pour reconstitué le domaine Ω ;

e, indice relatif à l'élément Ω^e .

Pour calculer chaque intégrale élémentaire W^e , nous utilisons une approximation par éléments finis de ω , T , $\delta\omega$ et de δT , sur chaque éléments Ω^e :

$$\omega^e = \langle N \rangle \{ \omega_n \} = N \omega_n \quad ; \quad \delta\omega^e = \langle N \rangle \{ \delta\omega_n \} = N \delta\omega_n \quad ;$$

$$T^e = \langle N \rangle \{ T_n \} = N T_n \quad ; \quad \delta T^e = \langle N \rangle \{ \delta T_n \} = N \delta T_n$$

On peut aussi écrire que : $\dot{\omega}^e = \langle N \rangle \{ \dot{\omega}_n \} = N \dot{\omega}_n \quad ; \quad \dot{T}^e = \langle N \rangle \{ \dot{T}_n \} = N \dot{T}_n$

En substituant ces expressions dans (3.30), on aura pour l'élément « e » les intégrales élémentaires discrétisées suivantes :

$$\begin{aligned} W_1^e &= \int_{\Omega^e} N \delta\omega_n N \dot{\omega}_n d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \nabla(N \delta\omega_n) \cdot (M \nabla(N \omega_n) + D \nabla(N T_n) + S \nabla z) d\Omega^e \\ &= \int_{\Gamma^e} N \delta\omega_n \left(M \frac{\partial}{\partial n} (N \delta\omega_n) + D \frac{\partial}{\partial n} (N T_n) + S \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\Gamma^e \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} W_2^e &= \int_{\Omega^e} N \delta T_n R N \dot{T}_n d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \nabla(N \delta T_n) \cdot (E \nabla(N \omega_n) + Q \nabla(N T_n)) d\Omega^e \\ &= \int_{\Gamma^e} N \delta T_n \left(E \frac{\partial}{\partial n} (N \omega_n) + Q \frac{\partial}{\partial n} (N T_n) \right) d\Gamma^e \end{aligned} \quad (3.33)$$

D'après les propriétés de l'analyse vectorielle on a :

$$\delta\omega^e = \mathbf{N}\delta\omega_n = (\delta\omega_n)^T \mathbf{N}^T \quad \text{et} \quad \delta T^e = \mathbf{N}\delta T_n = (\delta T_n)^T \mathbf{N}^T \quad (3.34)$$

où : L'indice (T), désigne la transposée du vecteur.

En tenant compte de (3.34), et sachant que $\omega_n, \dot{\omega}_n, T_n, \dot{T}_n, \delta\omega_n$ et δT_n sont des valeurs nodales (définies aux nœuds), on peut les faire sortir de l'intégrale.

De même, $\omega_n, \delta\omega_n, \delta T_n$ et T_n sont indépendants du gradient ∇ , on peut ainsi simplifier par $\delta\omega_n^T$ dans W_1^e et par δT_n^T dans W_2^e . Finalement on arrive à :

$$W_1^e = \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega^e \right] \dot{\omega}_n + \left[\int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{M} \nabla \mathbf{N} d\Omega^e \right] \omega_n + \left[\int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{D} \nabla \mathbf{N} d\Omega^e \right] T_n + \left\{ \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{S} \nabla z d\Omega^e \right\} = \Phi_m^{r^e} \quad (3.35.a)$$

$$W_2^e = \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{R} \mathbf{N} d\Omega^e \right] \dot{T}_n + \left[\int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{N} d\Omega^e \right] \omega_n + \left[\int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{Q} \nabla \mathbf{N} d\Omega^e \right] T_n = \Phi_q^{r^e} \quad (3.35.b)$$

Où : $\Phi_m^{r^e}$ et $\Phi_q^{r^e}$ représentent respectivement, les conditions de densité de flux de masse et de chaleur au niveau de la portion de frontière Γ^e . Elles sont explicitées par :

$$\Phi_m^{r^e} = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{M} (\partial \mathbf{N} / \partial n) d\Gamma^e \cdot \omega_n + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{D} (\partial \mathbf{N} / \partial n) d\Gamma^e \cdot T_n + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{S} (\partial z / \partial n) d\Gamma^e \quad (3.36.a)$$

$$\Phi_q^{r^e} = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{E} (\partial \mathbf{N} / \partial n) d\Gamma^e \cdot \omega_n + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{Q} (\partial \mathbf{N} / \partial n) d\Gamma^e \cdot T_n \quad (3.36.b)$$

On remarque que le système (3.35) ne fait intervenir en réalité que trois types d'intégrales :

$$I_1(G) = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{G} \mathbf{N} d\Omega^e \quad (3.37.a)$$

$$I_2(G) = \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{G} \nabla \mathbf{N} d\Omega^e \quad (3.37.b)$$

$$I_3(G) = \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^T \mathbf{G} \nabla z d\Omega^e \quad (3.37.c)$$

Où : G , est un coefficient qui peut prendre les valeurs des coefficients qui apparaissent dans le système (3.35) c'est-à-dire R, M, D, S, E, Q .

Soit, en supposant que G varie linéairement sur l'élément (e) :

$$G^e = \sum_{n=1}^{NNE} N_n G_n \quad (3.38)$$

avec : $G_n = G_n(\omega_n, T_n)$, valeur du coefficient G au nœud n ,

N_n est la $n^{\text{ième}}$ composante des fonctions d'interpolation (ou fonctions de forme).

D'où :

$$I_1(G) = \int_{\Omega^e} \left(\sum_{n=1}^{NNE} N_n G_n \right) N^T N \, d\Omega^e = \sum_{n=1}^{NNE} \left(G_n \int_{\Omega^e} N_n N^T N \, d\Omega^e \right) \quad (3.39.a)$$

De même, pour $I_2(G)$ et $I_3(G)$:

$$I_2(G) = \int_{\Omega^e} \left(\sum_{n=1}^{NNE} N_n G_n \right) \nabla N^T \nabla N \, d\Omega^e = \sum_{n=1}^{NNE} \left(G_n \int_{\Omega^e} N_n \nabla N^T \nabla N \, d\Omega^e \right) \quad (3.39.b)$$

$$I_3(G) = \int_{\Omega^e} \left(\sum_{n=1}^{NNE} N_n G_n \right) \nabla N^T \nabla z \, d\Omega^e = \sum_{n=1}^{NNE} \left(G_n \int_{\Omega^e} N_n \nabla N^T \nabla z \, d\Omega^e \right) \quad (3.39.c)$$

L'évaluation de ces intégrales conduit à la construction des matrices élémentaires du système (3.35).

Remarques :

Il apparaît clairement que le développement de $N^T N$ dans (3.39.a) et $\nabla N^T \nabla N$ dans (3.39.b) conduit à des matrices élémentaires symétriques de dimension $(NNE \times NNE)$. C'est la conséquence de la méthode de Galerkin [25, 53]. Par contre, l'équation (3.39.c) représente un vecteur (colonne) de NNE éléments.

La réécriture du système (3.35) en utilisant les intégrales types (3.39) donne :

$$\begin{aligned} [I_1(l)]\dot{\omega}_n + [I_2(M)]\omega_n + [I_2(D)]T_n + \{I_3(S)\} &= \{\Phi_m^{l^e}\} \\ [I_1(R)]\dot{T}_n + [I_2(E)]\omega_n + [I_2(Q)]T_n &= \{\Phi_q^{l^e}\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Afin de simplifier l'écriture de (3.40), on pose :

$$\begin{aligned} [I_1(l)] &= a_1 ; \quad [I_2(M)] = b_1 ; \quad [I_2(D)] = c_1 ; \quad \{\Phi_m^{l^e}\} - \{I_3(S)\} = f_1 \\ [I_1(R)] &= a_2 ; \quad [I_2(E)] = b_2 ; \quad [I_2(Q)] = c_2 ; \quad \{\Phi_q^{l^e}\} = f_2 \end{aligned}$$

d'où, le système (3.40) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} a_1 \dot{\omega}_n + b_1 \omega_n + c_1 T_n &= f_1 \\ a_2 \dot{T}_n + b_2 \omega_n + c_2 T_n &= f_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

c) Calcul des intégrales discrétisées

Par l'utilisation des notions développées au § (3.1.5) concernant l'élément de référence, les intégrales (3.39) sont reformulées sur l'élément de référence comme :

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{G}) = \sum_{n=1}^{\text{NNE}} \left(\mathbf{G}_n \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_n \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \right) \quad (3.42.a)$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{G}) = \sum_{n=1}^{\text{NNE}} \left(\mathbf{G}_n \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_n \nabla \mathbf{N}^T [\mathbf{J}^{-1}]^T [\mathbf{J}^{-1}] \nabla \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \right) \quad (3.42.b)$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{G}) = \sum_{n=1}^{\text{NNE}} \left(\mathbf{G}_n \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_n \nabla \mathbf{N}^T [\mathbf{J}^{-1}]^T \nabla_Z \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \right) \quad (3.42.c)$$

Dans le système (3.42), les fonctions de forme \mathbf{N} sont écrites en fonction des coordonnées de référence. Elles sont données en annexe (C) pour l'élément quadrilatéral à quatre nœuds utilisé.

En raison de la complexité des expressions intégrales (3.42), leur calcul est effectué numériquement par la méthode d'intégration de *Gauss* [25]. Cette méthode consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme pondérée des valeurs de la fonction en certains points, appelés points d'intégration. L'annexe (C) donnera les détails de la méthode.

d) Forme globale et technique d'assemblage

Le système (3.41) est relatif à un sous domaine Ω^e , la construction du système global relatif à tout le domaine Ω par sommation est une opération appelée « *assemblage* ».

Le système global s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\omega}_n + \mathbf{C}_1 \mathbf{T}_n &= \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{T}}_n + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\omega}_n + \mathbf{C}_2 \mathbf{T}_n &= \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

L'obtention du système global (3.43) revient à assembler toute matrice globale $[\mathbf{A}]$ à partir de ces matrices élémentaires $[\mathbf{a}]$ et tout vecteur global $\{\mathbf{F}\}$ à partir de ces vecteurs élémentaires $\{\mathbf{f}\}$. La démarche générale suivante [25] décrit les étapes à suivre pour effectuer l'opération d'assemblage d'une matrice et d'un vecteur :

1. Initialiser les termes de $[\mathbf{A}]$ et de $\{\mathbf{F}\}$ à zéro (\mathbf{A} est de dimension $\text{NNT} \times \text{NNT}$ et \mathbf{F} a NNT éléments).
2. Pour chaque élément « \mathbf{e} » :
 - Ajouter chaque terme a_{ij} de sa matrice élémentaire au terme A_{IJ} de la matrice globale :

$$A_{IJ} = A_{IJ} + a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, \text{NNE} \text{ et } j = 1, 2, \dots, \text{NNE})$$

avec : $I = \text{Connec}(i)$ et $J = \text{Connec}(j)$

Où, Connec , est une table de connectivité qui donne la numérotation globale I d'un

nœud du maillage appartenant à l'élément e à partir de sa numérotation locale i au niveau de l'élément considéré.

- Ajouter chaque terme f_i du vecteur élémentaire au terme F_I du vecteur global :

$$F_I = F_I + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, NNE)$$

où : $I = \text{Connec}(i)$.

Remarque : On constate qu'en réalité le calcul des matrices élémentaires (respectivement vecteurs élémentaires) et l'opération d'assemblage pour construire les matrices globales (respectivement vecteurs globaux) s'effectuent simultanément.

3-2-3. Résolution du système global

La dérivée par rapport au temps \dot{U} ($\dot{U} = \dot{\omega}; \dot{T}$) est discrétisée par un schéma aux différences finies implicite comme suit [48] :

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} \quad (3.44)$$

Où : U^m , valeur de U à l'instant $(m \cdot \Delta t)$ et Δt , le pas de temps (variable).

Le système (3.43) étant non linéaire (coefficient G en fonction des inconnues du problème : ω et T) d'où, la nécessité de le linéariser par l'évaluation des coefficients à l'instant $(m + \theta) \times \Delta t$. Où, $\theta \in [0, 1]$ soit :

$$U^{m+\theta} = \theta U^{m+1} + (1 - \theta) U^m \quad (3.45)$$

Le schéma implicite centré de *Crank-Nickolson* [26], pour lequel, $\theta = 0.5$ est utilisé.

Le système (3.43) s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} A_1^{m+\theta} + \theta B_1^{m+\theta} \right) \omega^{m+1} &= \left(\frac{1}{\Delta t} A_1^{m+\theta} - (1 - \theta) B_1^{m+\theta} \right) \omega^m + (F_1^{m+\theta} - C_1^{m+\theta} T^{m+\theta}) \\ \left(\frac{1}{\Delta t} A_2^{m+\theta} + \theta C_2^{m+\theta} \right) T^{m+1} &= \left(\frac{1}{\Delta t} A_2^{m+\theta} - (1 - \theta) C_2^{m+\theta} \right) T^m + (F_2^{m+\theta} - B_2^{m+\theta} \omega^{m+\theta}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Le schéma de linéarisation (3.45) utilisé fait intervenir les valeurs du coefficient G (avec $G = R, M, D, S, E, Q$) à l'instant $(m + \theta) \Delta t$. Ces valeurs sont calculées par l'expression :

$$G(\omega, T) = \theta G(\omega^{m+1}, T^{m+1}) + (1 - \theta) G(\omega^m, T^m) \quad (3.47)$$

Finalement, le système algébrique à résoudre se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} A_1 \omega &= B_1 \\ A_2 T &= B_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ce sont deux systèmes d'équations algébriques, l'un en ω et l'autre en T . Ils sont résolus successivement par la méthode directe d'élimination de *Gauss* en se basant sur l'approximation successive de Newton [29, 41, 45, 48] tel que la solution est obtenue lorsque la différence entre deux estimations successives est inférieure à une valeur donnée.

Il est à noter que dans l'expression de linéarisation (3.45), U^{m+1} est calculé au préalable par un schéma de prévision basé sur extrapolation linéaire à partir des solutions des deux instants précédents [48] :

$$U^{m+1} = U^m + \frac{\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}} (U^m - U^{m-1}) \quad (3.49)$$

où : Δt_{m-1} et Δt_m , les pas de temps relatifs respectivement au calcul de U^m et de U^{m+1} .

3.2.4- Propriétés des matrices globales et méthode de stockage

a) Structure : Les matrices globales résultantes de l'opération d'assemblage comportent un grand nombre d'éléments nuls. Ces matrices ont une structure bande (figure 3.4) reflétant là une caractéristique importante de la méthode des éléments finis [25, 53].

Du moment que les matrices du double système à résoudre (3.48) sont construites à la base des matrices globales du système (3.43) en vu du système (3.46), ces matrices conservent par conséquent la structure bande.

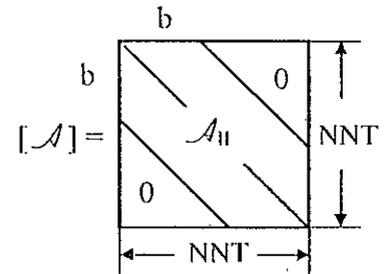


Figure 3.4 : Structure bande des matrices globales.

Il faut noter que la largeur de bande « b » dépend directement de l'ordre de numérotation des nœuds. Bien que le nombre de termes non nuls de $[A]$ reste invariant, la largeur de bande peut varier considérablement avec l'ordre de numérotation des nœuds.

Réduire au minimum la largeur de bande permet des économies conséquentes tant au niveau du stockage des matrices que de la résolution du système d'équations. La règle très pratique, souvent utilisée [25] consiste à minimiser la différence des numéros des nœuds appartenant à un même élément. La figure (3.5) illustre la numérotation des nœuds et des éléments utilisés.

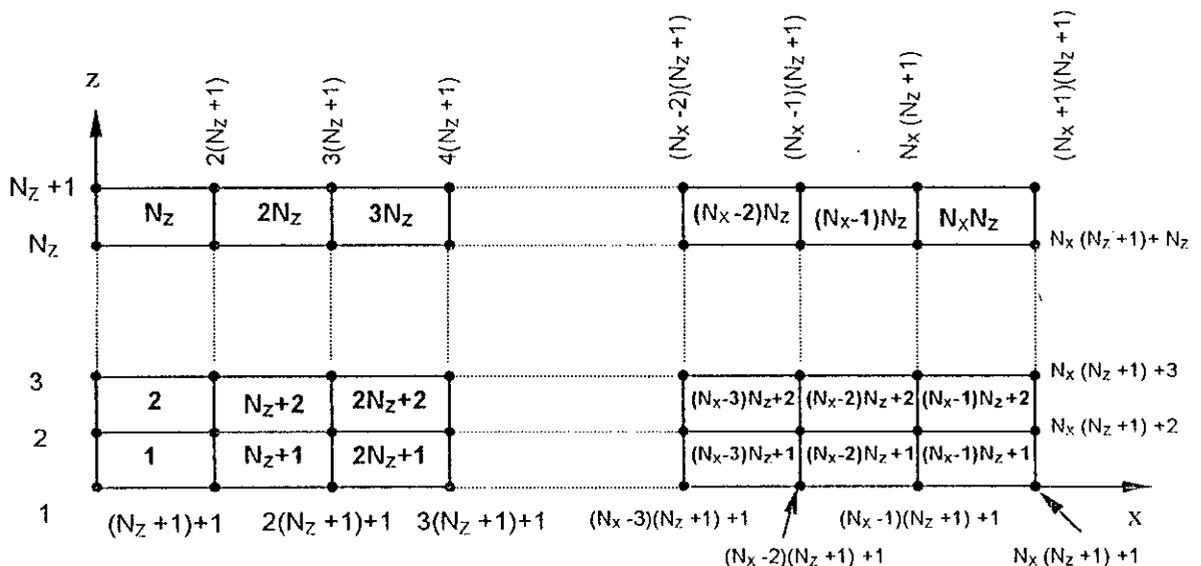


Figure 3.5 : Ordre de numérotation des nœuds et des éléments pour une discrétisation par des éléments quadrilatéraux.

Dans ce cas :

- La largeur de bande peut être définie comme étant la plus grande différence des numéros attribués aux nœuds appartenants au même élément. Elle est donnée par :

$$b = \{(N_z + 1) + 2\} - 1 = N_z + 2 \text{ (élément } N^o 1)$$

- Le nombre de nœuds total : $NNT = (N_x + 1) (N_z + 1)$.
- Le nombre d'éléments total : $NET = N_x \times N_z$

Avec : N_x, N_z sont respectivement les nombres de subdivisions suivant les directions x et z.

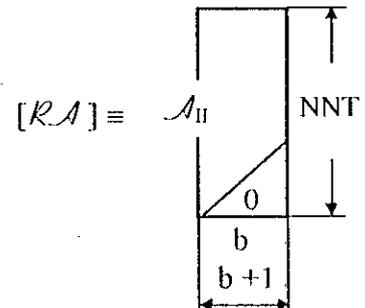
Remarques :

Il est à rappeler que les matrices élémentaires sont symétriques et l'assemblage de celles-ci n'enlève pas cette propriété aux matrices globales, bien au contraire la symétrie est transmise. Par conséquent les matrices globales sont finalement symétriques bandes.

b) Stockage [25]

Suite aux remarques ci-dessus, nous stockons la matrice « redressée » dans une table \mathcal{RA} de dimension réduite $NNT \times (b + 1)$ au lieu de $NNT \times NNT$ (figure 3.6).

$$\mathcal{A}_{II} \equiv \mathcal{R} \mathcal{A}_{ij} \text{ si } \begin{cases} i = I \\ j = J - 1 + 1 \\ J \geq 1 \end{cases}$$

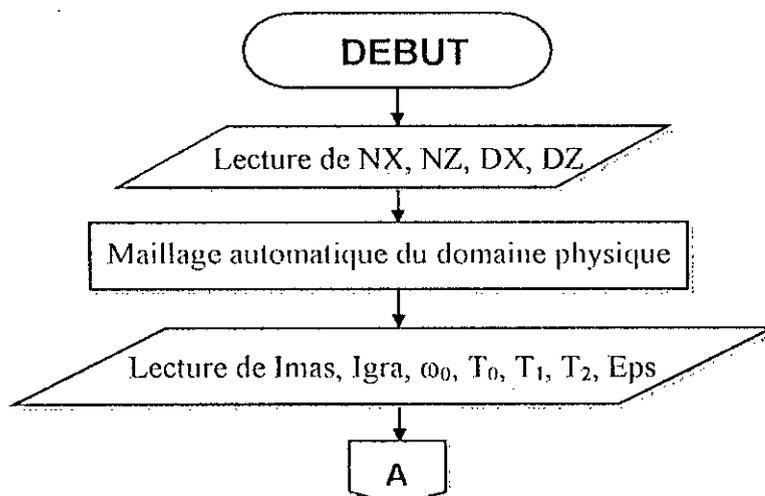


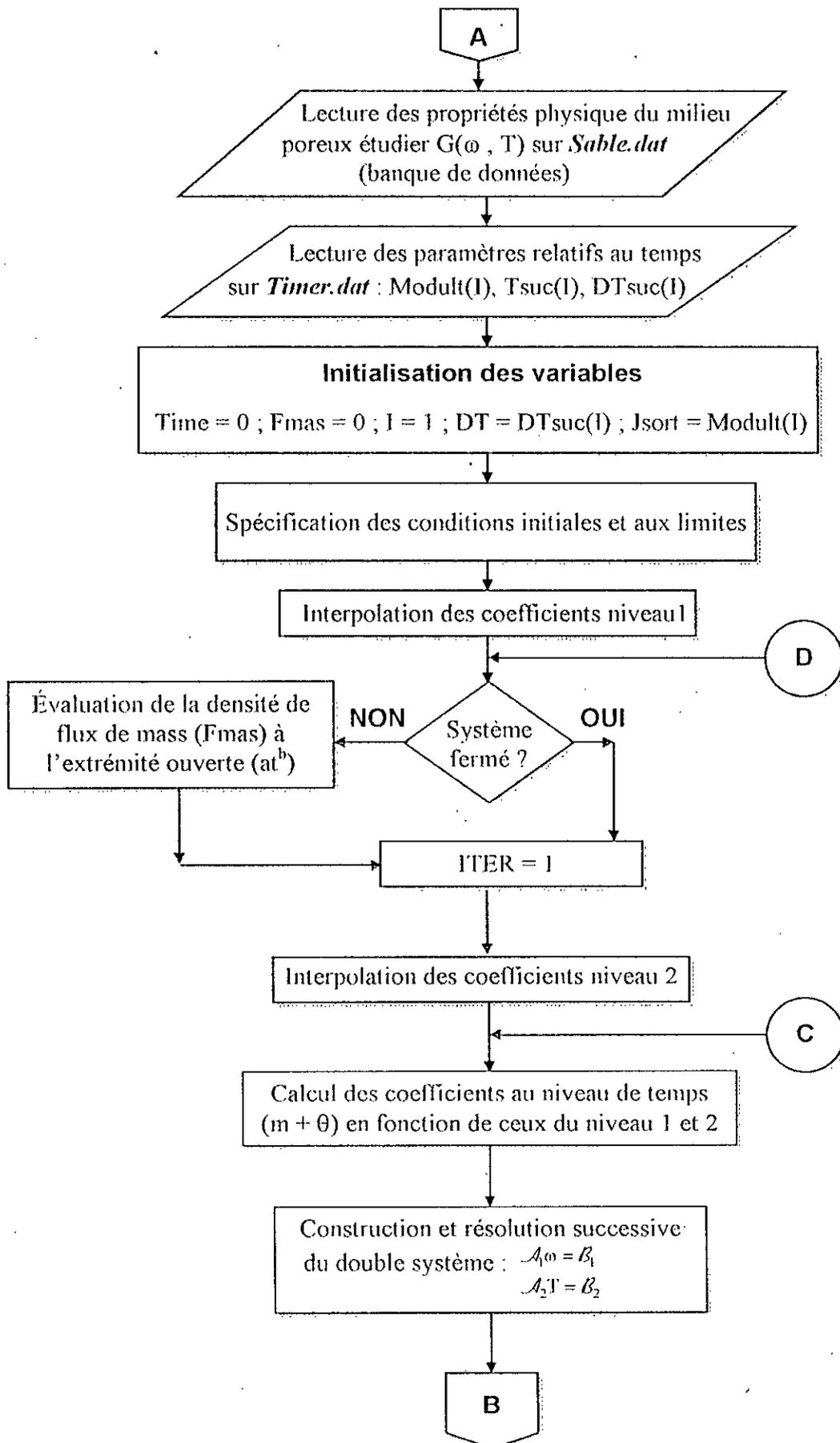
Il faut stocker : $NNT \times (b + 1)$ mots réels, incluant $b \times (b + 1)/2$ valeurs nulles inutiles.

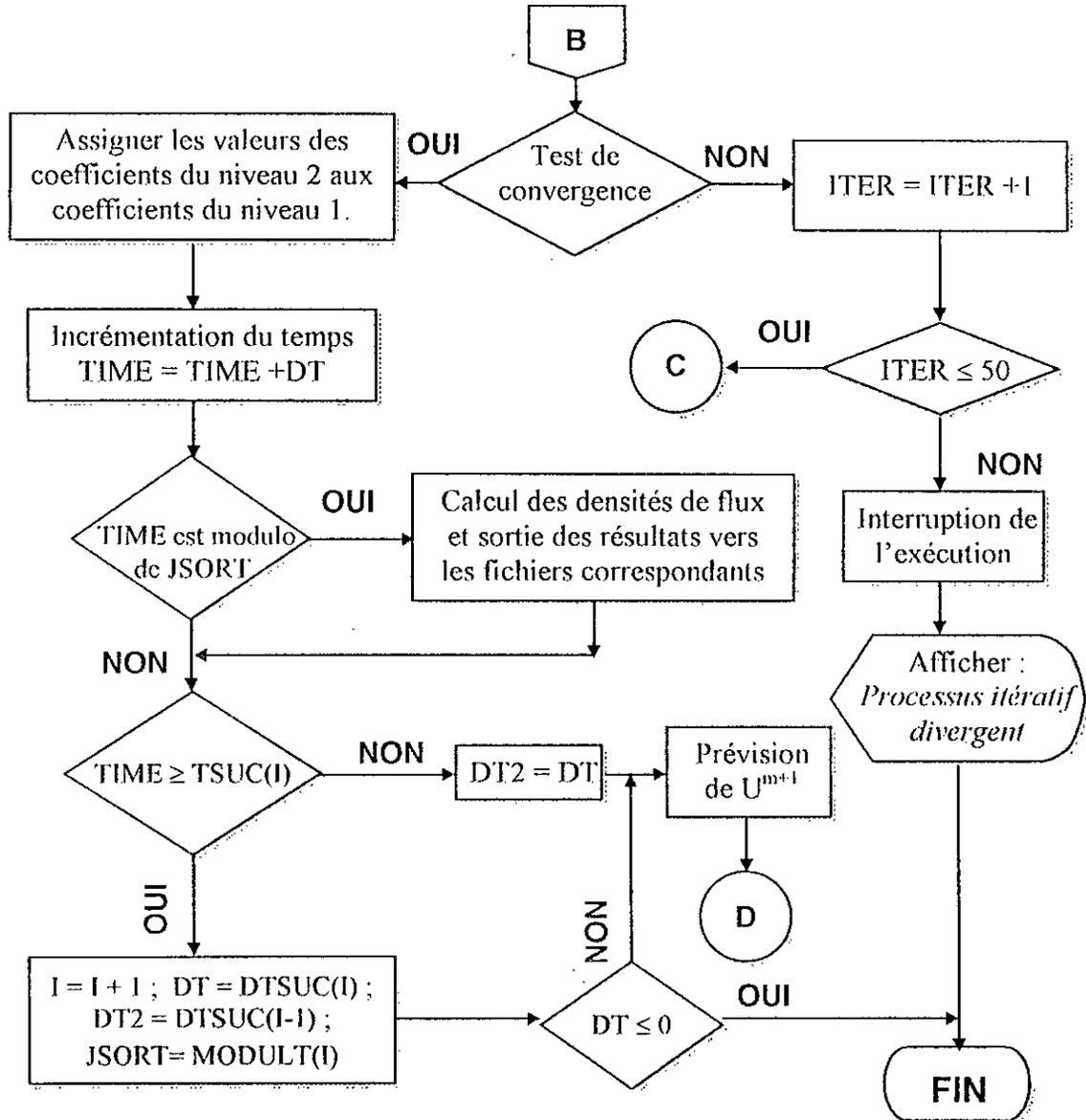
Figure 3.6 : Stockage d'une matrice bande symétrique.

En contre partie, des avantages d'économies qu'offre cette procédure de stockage, il est nécessaire d'adopter la méthode de résolution (méthode de *Gauss*) à la matrice effectivement utilisée (matrice rectangulaire).

3.3- ORGANIGRAMME GENERAL







NOMENCLATURE UTILISEE

DX, DZ : pas d'espace suivant x (Δx) et suivant z (Δz) (qui peuvent être choisis variables) ;
Time : variable temps (t) ; **DT** : pas de temps en cours (Δt) ; **DT2** : pas de temps à l'itération précédente ; **DTSUC(I)** : série de valeurs du pas de temps à choisir successivement ; **TSUC(I)** : série d'intervalles de temps [**TSUC(I-1)** , **TSUC(I)**] dans lesquels le pas de temps, **DT = Dtsuc(I)** successivement ; **Modult(I)** : série de valeurs choisis sur chaque intervalle **TSUC(I)** de façon que Time soit modulo de **Modult(I)** et que prend successivement la variable, **Jsort**, pour tester la sortie des résultats au non en fonction de **Time** ;
Imas : si le système a simulé est fermé, **Imas=0** et si, il est un système semi-ouvert, **Imas=1** ;
Igra : si **Igra = 0**, la gravité est négligée et si **Igra = 1**, la gravité est prise en considération ;
Eps : erreur relative admise entre deux itérations successives ;
ITER : incrément de la boucle d'itération.

*P*our passer concrètement à la résolution du modèle mathématique utilisé, nous avons développé un code de calcul basé sur le modèle numérique correspondant décrit au chapitre précédent.

Ce code de calcul, de par les possibilités qu'il offre pour traiter les systèmes bidimensionnels semi-ouverts et fermés (pouvant facilement s'étendre aux systèmes ouverts) ainsi que sa capacité d'effectuer une étude sur l'influence d'un terme donné du modèle mathématique, constitue un outil de simulation efficace et puissant.

Notre tâche dans ce qui suit consiste à tester le modèle de Philip & De Vries [19], sur des systèmes physiques déjà étudiés expérimentalement (cf. chapitre 2) en vue d'examiner essentiellement la validité du modèle théorique utilisé dans sa version bidimensionnel et les avantages éventuels d'une telle étude.

Par conséquent, nous traiterons successivement (cf. chapitre 2) :

- Le système fermé, qui, en plus de résultats expérimentaux fournis par Crausse [15], on dispose de résultats numériques en 2-d obtenus par Prat [45] et à ce titre, cette application constitue une première validation de notre code de calcul.
- La simulation bidimensionnelle de deux systèmes semi-ouverts, l'un en situation de condensation et l'autre en situation d'évaporation.

Cependant, nous tenons à faire immédiatement une remarque importante concernant le mode opératoire utilisé lors des études expérimentales.

En effet, lors des investigations expérimentales menées par les différents auteurs (Crausse [15], Larbi [34] et autres), le mode de mesure des profils d'humidité vu les techniques disponibles, consistait à découper l'échantillon du milieu poreux en tranches d'environ "un centimètre" et de les pesées. Donc, la teneur en humidité mesurée n'est en réalité, qu'une valeur moyenne relative à la tranche considérée.

Dans l'objectif de comparer nos résultats de simulation (bidimensionnels) aux résultats expérimentaux (ponctuels) nous avons doté le code calcul d'une procédure où est calculée la valeur moyenne des grandeurs déterminées (température et teneur en humidité pondérale), aux nœuds situés sur la même section droite (suivant le diamètre de la cellule) pour obtenir un profil monodimensionnel.

4-1. ETUDE DE LA THERMOMIGRATION

Moyennant le premier modèle physique (cf. Chapitre 2) avec, $L = 35$ cm et $D = 5$ cm, ($L/D = 7$) on a réalisé des simulations pour trois valeurs de la teneur en humidité initiale : $\omega_0 = 7\%$, 11.2% et 14.2% . Les résultats obtenus sont illustrés par les figures 4.1, 4.2, 4.4 et 4.5. La figure 4.1, représente la distribution bidimensionnelle de la teneur en humidité et de la température le long de la cellule en régime transitoire ($t = 1$ h) et en figure 4.2, la distribution en régime permanent pour une teneur en humidité initiale, $\omega_0 = 11.2\%$.

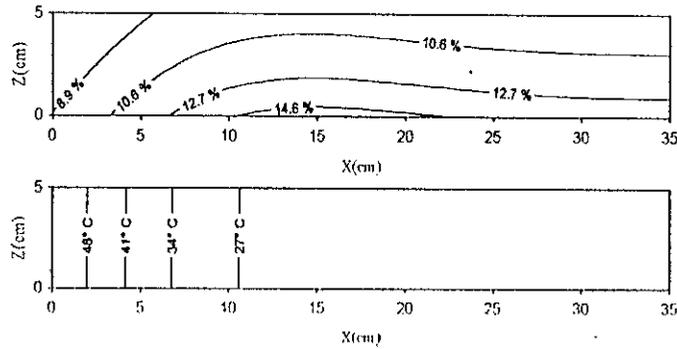


Figure 4.1 : Distribution de l'humidité et de la température (Pour $t = 1$ heure, $\omega_0 = 11.2\%$ et $T_0 = 21^\circ\text{C}$)

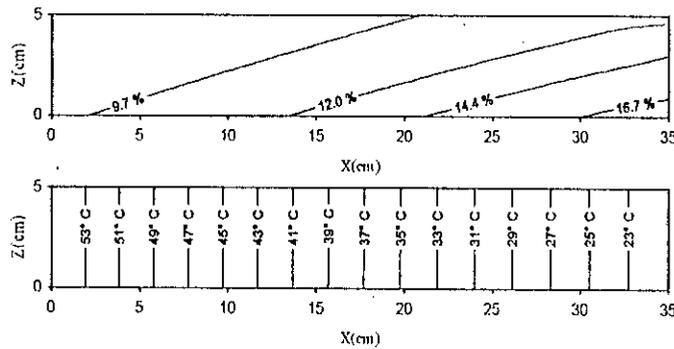


Figure 4.2 : Distribution de l'humidité et de la température (Régime permanent, $\omega_0 = 11.2\%$ et $T_0 = 21^\circ\text{C}$)

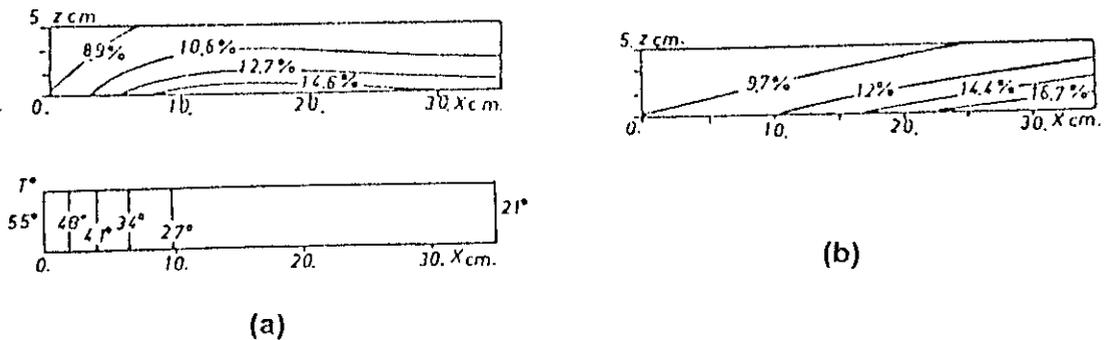


Figure 4.3 : Résultats de Prat ($\omega_0 = 11.2\%$ et $T_0 = 21^\circ\text{C}$)

- (a) distribution de l'humidité et de la température à $t = 1$ h
- (b) distribution de l'humidité en régime permanent

Ces résultats en 2-D, comparés à ceux obtenus par *Prat [45]*, par voie numérique (cf. figure 4.3) dans les mêmes conditions, présentent une bonne concordance. Grâce à ces représentations (figure 4.1 et 4.2), on observe l'aspect bidimensionnel des lignes d'égale humidité, induit par l'action combinée d'un mouvement d'humidité vertical dû à l'effet de gravité et d'un mouvement horizontal dû au gradient thermique.

Cet aspect en régime transitoire (figure 4.1), présente une stratification (plus ou moins) horizontale des lignes d'égale humidité dans les zones où le gradient thermique est encore très faible, voir nul (à une légère distance de la face chaude). Il est marqué par un mouvement vertical mettant en évidence la prédominance de la force gravitaire. Par contre dans les zones où le gradient thermique est appréciable, les lignes d'égale humidité, sont inclinées traduisant l'entrée en action d'un transfert de chaleur dans le sens de l'horizontale.

En régime permanent (figure 4.2), les isothermes indiquent un gradient thermique sensiblement constant sur toute la longueur de la cellule et l'ensemble des lignes d'égaux humidité, sont inclinées.

L'orientation des lignes d'égaux humidité s'explique comme suit : la combinaison de l'action verticale de la gravité et de l'action horizontale du gradient thermique sur la redistribution de l'humidité conduit à une action résultante de sens intermédiaire perpendiculaire aux lignes d'égale humidité comme c'est le cas en cinématique des fluides où le vecteur vitesse est perpendiculaire aux lignes équipotentielles en régime permanent.

La confrontation de nos résultats numériques (en valeurs moyennes) et ceux obtenus par la voie expérimentale (monodimensionnel), est illustrée sur la figure 4.4 en ce qui concerne le régime transitoire (pour seulement $\omega_0 = 11.2\%$) et sur la figure 4.5 en ce qui concerne le régime permanent pour les trois variantes de teneurs en humidité initiales.

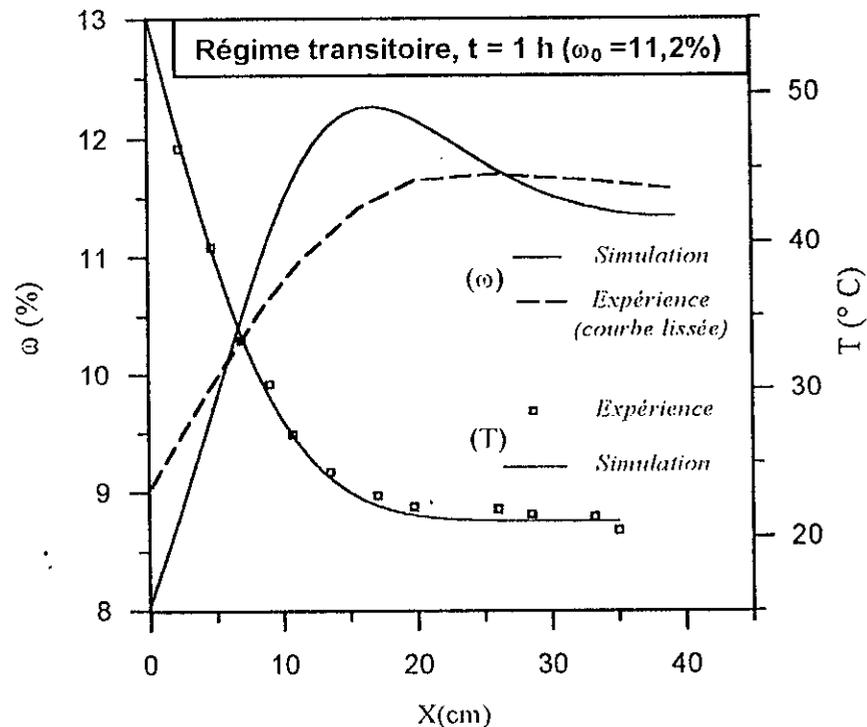


Figure 4.4 : Comparaison expérience [15] – simulation
($t = 1$ heure, $\omega_0 = 11.2\%$ et $T_0 = 21^\circ\text{C}$)

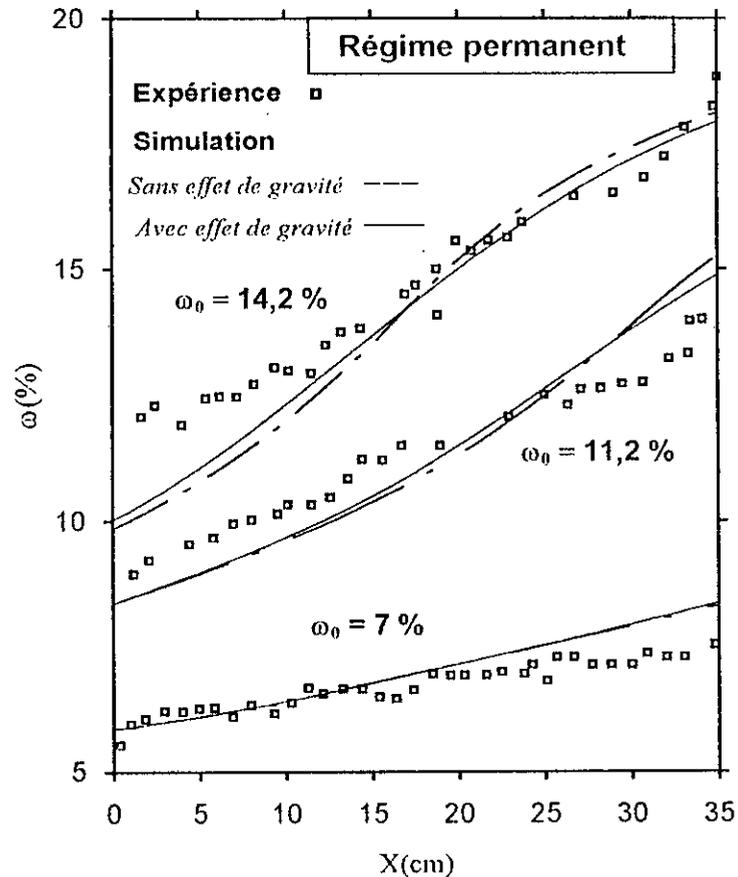


Figure 4.5 : Comparaison expérience [15] – simulation (Régime permanent)

La lecture qui se dégage avec force de cette confrontation, marque une très large représentativité de la réalité physique par le modèle théorique utilisé et ce, pour l'ensemble des conditions choisies ($\omega_0 = 7\%$, $11,2\%$ et $14,2\%$).

La figure 4.5, où sont représentés les résultats de simulation avec et sans prise en considération de l'effet de gravité démontre que l'effet de la gravité est d'autant plus important, que la teneur en humidité initiale, est plus élevée et que lorsque, $\omega_0 = 7\%$, l'effet de la gravité est négligeable. En conséquence cette valeur constitue une limite inférieure au-delà de laquelle l'effet de gravité apparaît pour le milieu poreux étudié.

4-2. ETUDE DE LA CONDENSATION

Le phénomène de condensation résultant d'une diffusion d'air humide à travers un milieu poreux initialement sec, a fait l'objet d'une étude expérimentale réalisée par Larbi [34] en 1990. Outre, l'étude expérimentale, l'auteur a procédé à des simulations numériques du phénomène étudié, grâce à un code de calcul basé sur la résolution du modèle mathématique, Philip & De Vries [48] à une dimension d'espace.

L'inconvénient de cette étude complémentaire (simulation numérique) est, qu'elle ne peut pas prendre en considération l'effet de gravité, car celui-ci est dirigé verticalement, alors que la dimension d'espace suivant laquelle l'étude est réalisée, est horizontale.

Par voie de conséquence, il est nécessaire d'utiliser un code de calcul en 2-D, qui pourra prendre en charge l'effet de la gravité dans ce cas précis.

Pour cela, nous avons simulé le phénomène de condensation en 2-D, en employant le second modèle physique (cf. chapitre 2) dont les dimensions géométriques sont : $L = 20$ cm et $D = 5$ cm ($L/D = 4$). La densité de flux de masse corrélée est formulée par :

$$\frac{\dot{m}(t)}{\rho_0} = 2.414635 \cdot 10^{-9} t^{-0.155235} \quad (4.1)$$

4-2-1. Résultats de simulation (en 2-D)

Les figures 4.6 à 4.17, représentent les distributions bidimensionnelles de la teneur en humidité et de la température, respectivement au bout de 4, 9, 16, 24, 30, 40, 44, 50, 62 et 135 jours ainsi qu'une extrapolation numérique à 6 et 9 mois. On a par ailleurs représenté en figures 4.18 et 4.19 les profils thermiques suivant la dimension x de façon à mieux observer les variations de la température car, la représentation bidimensionnelle du champ thermique montre qu'elle est monodimensionnelle (cf. figures énoncées précédemment).

Nous tenons tout d'abord à attirer l'attention du lecteur que la représentation des lignes d'égale humidité, dans les figures précitées, obéit à une échelle variable. Ce choix est dicté par le fait que le milieu poreux est partagé en deux zones remarquables : l'une, sèche caractérisée par de très faibles teneurs en humidité, une autre zone humide avec une humidité relativement importante.

Par conséquent, avec un tel choix on pourra à la fois observer les variations de très faibles valeurs d'humidité que des fortes valeurs.

On constate à première vue que les lignes d'égale humidité restent des droites verticales indiquant la prédominance de la force motrice due au gradient thermique et ce, jusqu'à $t = 40$ jours où, on observe de légères déformations des lignes ayant une valeur supérieure à 3.8 % d'humidité pondérale, situées très proches de la face froide en ($x = 20$ cm)(cf. figure 4.12).

Le lecteur peut observer des déformations (importantes) des lignes d'égaux humidité situées tout près de la face ouverte, elles sont dues à l'interaction de la diffusion de vapeur et les frontières latérales. En réalité leurs valeurs numériques sont insignifiantes relativement à celles de la zone humide et ne sauraient être décelées si ce n'est le choix d'une échelle adaptée et sensible à toute variation aussi faible soit-elle.

Pas loin de cette position, il s'est formé une zone humide au cours du temps, suite au processus de condensation de la vapeur diffusée, conduisant à la formation d'eau en masse, c'est-à-dire, apparition d'une phase liquide. Celle-ci envahit progressivement le milieu par capillarité.

Par ailleurs, on peut noter qu'en dehors de cette zone humide de faible étendue, dans laquelle la saturation varie largement, le reste du milieu est encore relativement sec (il est le siège d'un transfert de masse par diffusion de la vapeur d'eau).

Au-delà de 40 jours (cf. figures 4.13 à 4.17), la condensation de la vapeur, l'accumulation d'eau liquide et par conséquent l'envahissement du milieu par les quantités d'eau liquide (par capillarité) font que la zone humide s'étend de plus en plus avec un maximum situé toujours à la face fermée.

En complément de ces observations et concernant l'autre grandeur de base en l'occurrence la température qui est en relation directe avec les différents mécanismes mis en jeu, on observe :

Après les premiers quatre (4) jours (cf. figure 4.6), alors qu'initialement la température été de 30° C dans tout le milieu, on arrive à une distribution des isothermes sensiblement linéaire ($\nabla T \cong 1^{\circ}\text{C} \cdot \text{cm}^{-1}$ sur toute la longueur de la cellule), résultat d'un processus de refroidissement graduel (cf. figure 4.18).

Par la suite une autre étape du phénomène commence de façon progressive, conduisant à l'extension de la zone froide accompagnant l'envahissement du milieu par l'eau liquide mettant ainsi en évidence le couplage masse-chaleur. L'aspect thermique s'observe plus aisément sur les figures représentant les profils de température (cf. figures 4.18 et 4.19).

Les conséquences immédiates de ceci, est l'accélération du processus de condensation du moment que les conditions thermodynamique sont de plus en plus favorables. C'est d'ailleurs, ce qui explique les fortes teneurs en eau observées à la limite de la face froide en particulier.

4-2-2. Comparaison expérience-calcul numérique

Les figures 4.20 à 4.24 illustrent la comparaison entre les résultats expérimentaux de *Larbi* [34] et nos résultats numériques concernant les profils d'humidité, respectivement, pour 4 et 9 jours, 16 et 24 jours, 30 et 40 jours, 44 et 50 jours et finalement pour 62 et 135 jours (4,5 mois).

Cette comparaison s'avère globalement satisfaisante. Néanmoins, si, l'aspect qualitatif, montre une cohérence tout à fait remarquable entre la réalité physique et la simulation numérique, l'aspect quantitatif, quant à lui, présente des écarts non négligeables au niveau des valeurs maximales d'humidité en $x = 20$ cm.

Comme le montre la figure 4.25 (qui illustre une étude d'influence de la gravité sur le profil hydrique en fonction du temps), la gravité n'influence guère le phénomène physique tel que suggéré par *Larbi* [34] en explication aux écarts observés. Mais ils peuvent être attribués au fait que les coefficients physiques aient été déterminés à partir d'expériences spécifiques [15] indépendantes du système physique simulé.

Ce résultat est quelque peu prévisible, puisque déjà, lors de l'étude de la thermomigration on a conclu que la gravité est négligeable en dessous de 7 % d'humidité pondérale (initiale), alors que la valeur maximale de la teneur en eau de l'ensemble des résultats, numériques et expérimentaux confondus ne dépassent les 7 % dans tout le milieu.

4-2-3. Densités de flux massiques et thermiques

Compte tenu de l'accord plutôt satisfaisant (quoiqu'il en soit) qui ressort de l'étude comparative précédente, il est intéressant d'exploiter le code de calcul pour déterminer les densités de flux massiques et thermiques en vue d'analyser en détail les mécanismes physiques mis en jeu et leur importance relative dans le développement du processus de condensation.

Dans cette optique, nous allons examiner l'évolution des vecteurs de flux globaux (massiques et thermiques), ainsi que les principaux termes apparaissant dans leurs expressions. Il faut signaler tout de suite qu'il s'agit d'analyser les représentations graphiques des modules de ces vecteurs, c'est-à-dire une grandeur scalaire.

Par ailleurs, pour une meilleure observation des variations bidimensionnelles de cette grandeur, on a opté pour des représentations en trois dimensions, i.e. les deux dimensions spatiales (x et z) et le module du vecteur de densité de flux considéré comme 3^{ème} dimension.

Ainsi, on a représenté l'évolution des densités de flux en fonction du temps (pour $t = 4, 16, 30, 62$ et 135 jours) sur les figures 4.26 à 4.31, respectivement, de la masses en phase liquide, de la masse en phase vapeur, de la masse totale, de la chaleur due au changement de phase, de la chaleur due à la conduction et finalement de la chaleur totale.

4-2-3-1. Densités de flux de masse

La figure 4.26, représentant l'évolution en fonction du temps de la distribution de la densité de flux de masse en phase liquide montre que celle-ci est pratiquement nulle dans la zone d'adsorption (zone sèche) puis croît et atteint son maximum dans la zone de condensation (près de la face froide en $x = 20$ cm). Cette croissance au cours du temps, met en évidence la tendance des quantités d'eau condensées à envahir par capillarité le milieu poreux depuis la face froide.

D'après la figure 4.27, on constate qu'à $t = 4$ jours la densité de flux de masse en phase vapeur est linéaire et décroissante puis au-delà, on observe une valeur quasi-constante (en dépit de variations au niveau de la section d'entrée en $x = 0$, dues à l'interaction de la diffusion de vapeur avec les parois latérales) tout au long de la partie sèche, puis des variations dans la zone humide.

Suite à l'extension de la zone humide au cours du temps et au bout de 135 jours, on s'aperçoit qu'il s'est formé deux paliers, l'un avec de faibles valeurs recouvrant la zone sèche et l'autre avec de fortes valeurs recouvrant la zone humide.

La densité de flux de masse totale (liquide + vapeur) (cf. figure 4.28), est le résultat de la combinaison des flux élémentaires en phase liquide et en phase vapeur qui agissent en sens opposés. Elle est toujours nulle au niveau de la face imperméable en $x = 20$ cm, comme indiqué dans les conditions aux limitées (cf. chapitre 2). Ceci est le résultat de la compétition entre la condensation de la vapeur et de la succion capillaire agissant sur le fluide condensé comme il est commenté par *Larbi [34]*.

4-2-3-2. Densités de flux de chaleur

La densité de flux de chaleur due au changement de phase (cf. figure 4.29) est proportionnelle à la densité de flux de masse en phase vapeur (avec : $\rho_o \Delta h_v$ comme coefficient de proportionnalité). La comparaison quantitative entre la densité de chaleur due au changement de phase et la densité de flux de chaleur due à la conduction (cf. figure 4.30) montre une prédominance du transfert conductif de la chaleur.

Les effets conjoints de changement de phase et d'évolution de la conductivité thermique apparente du milieu poreux conduisent à une croissance significative de la densité de flux de chaleur totale transmise (cf. figure 4.31).

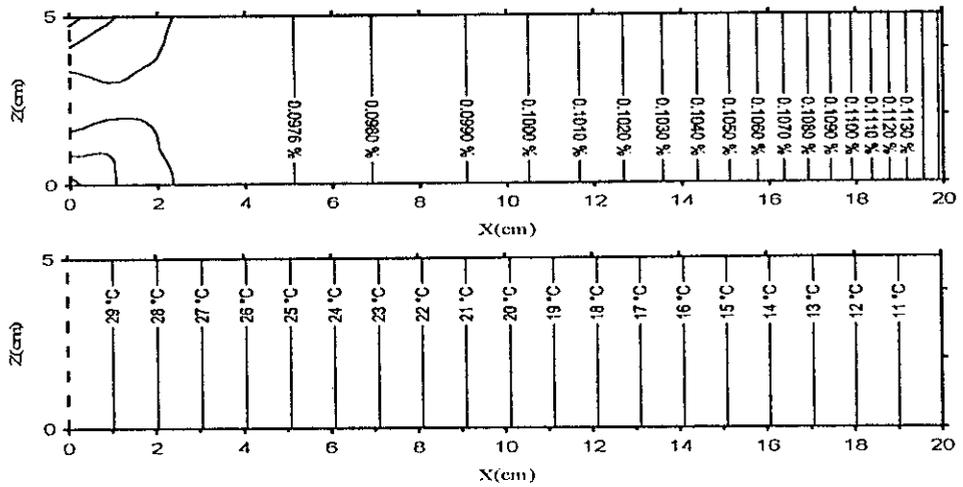


Figure 4.6 : Distribution de l'humidité et de la température après 4 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02\%$)

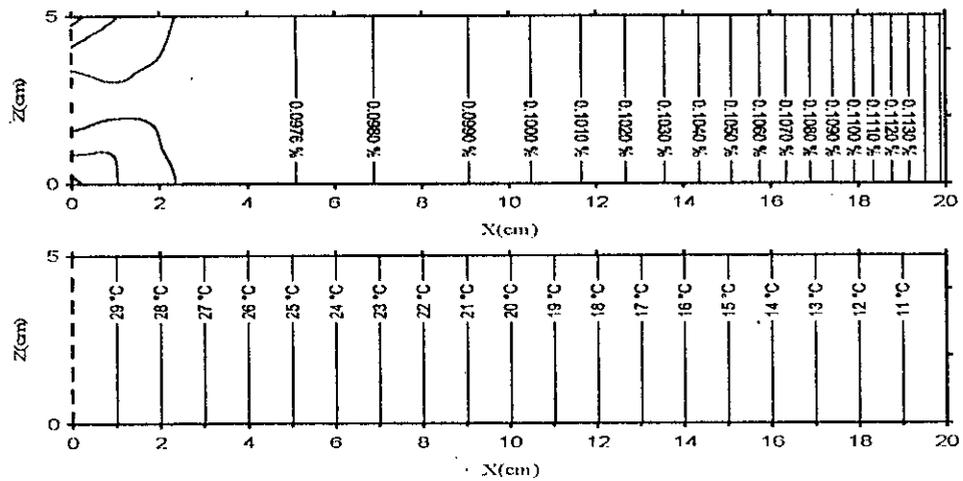


Figure 4.7 : Distribution de l'humidité et de la température après 9 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02\%$)

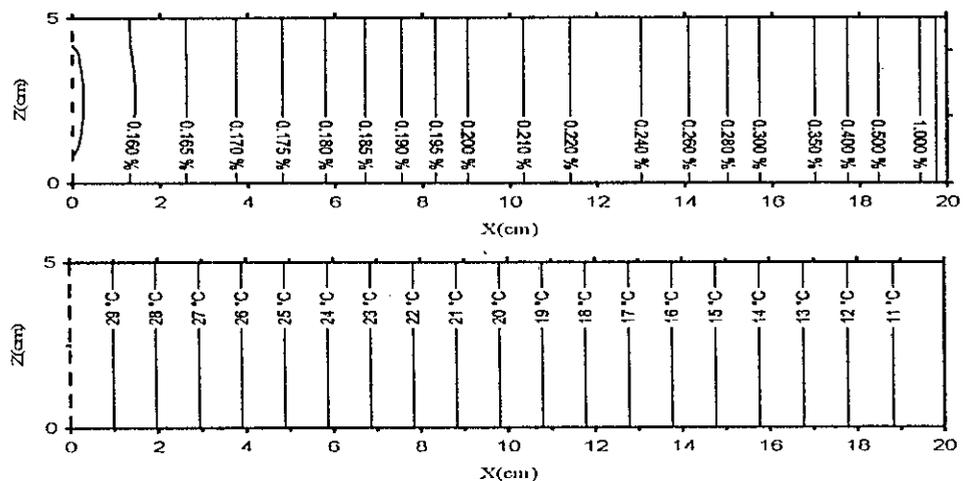


Figure 4.8 : Distribution de l'humidité et de la température après 16 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02\%$)

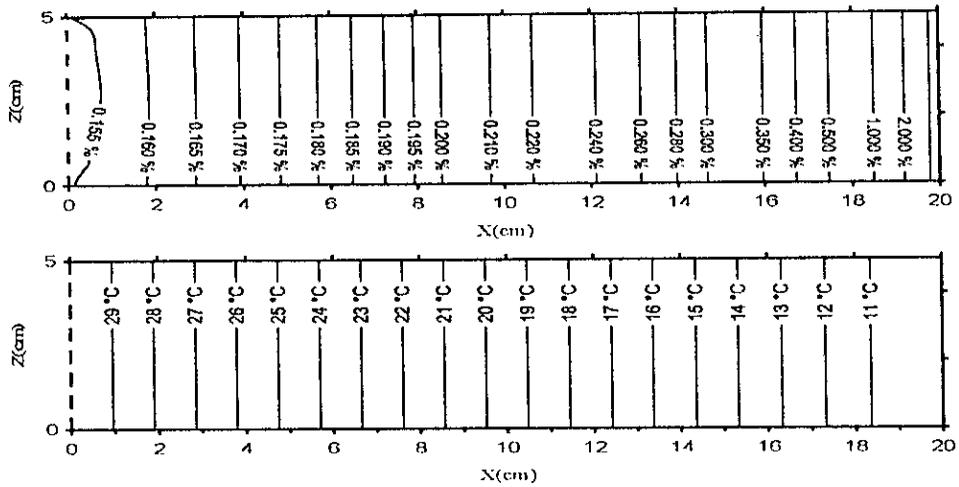


Figure 4.9 : Distribution de l'humidité et de la température après 24 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

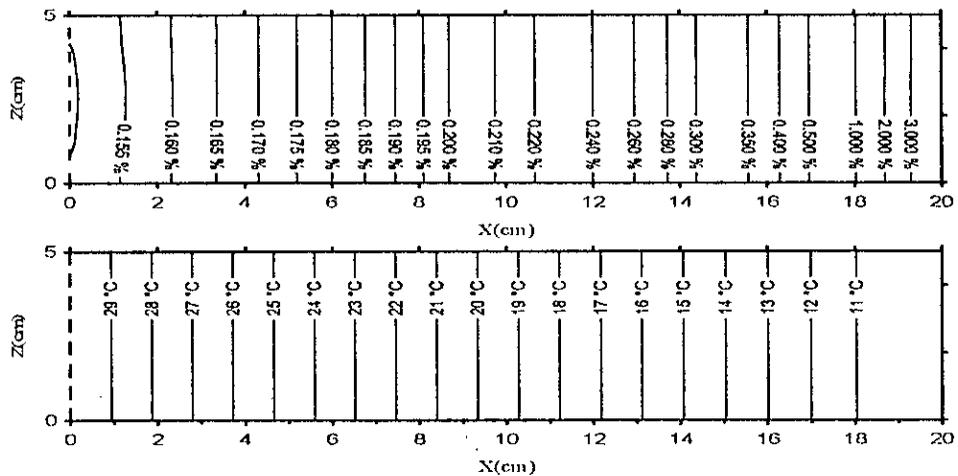


Figure 4.10 : Distribution de l'humidité et de la température après 30 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

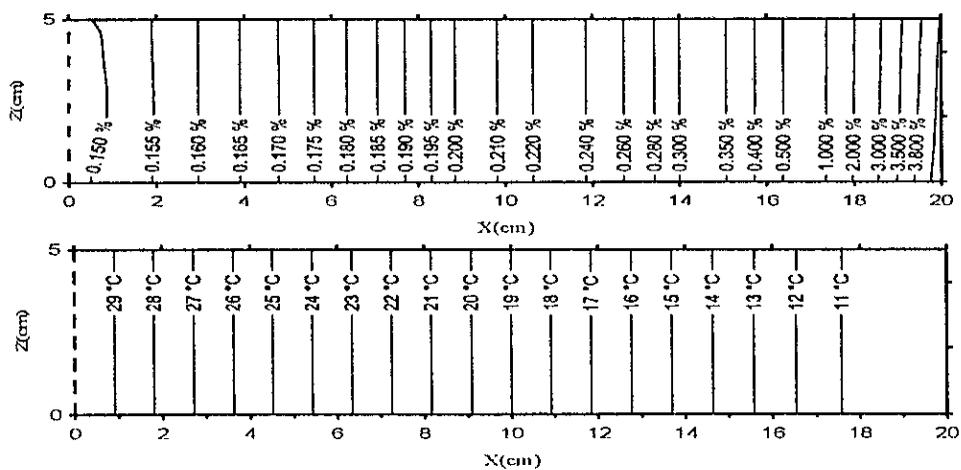


Figure 4.11 : Distribution de l'humidité et de la température après 40 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

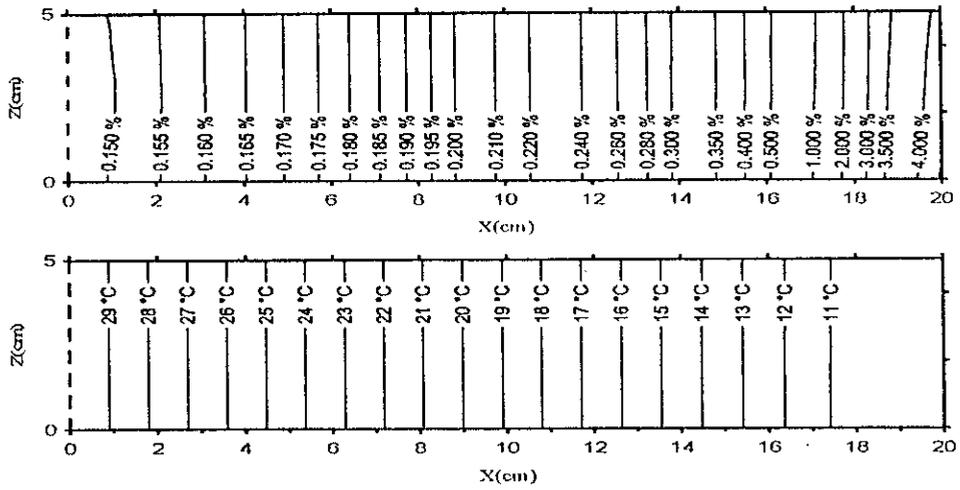


Figure 4.12 : Distribution de l'humidité et de la température après 44 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

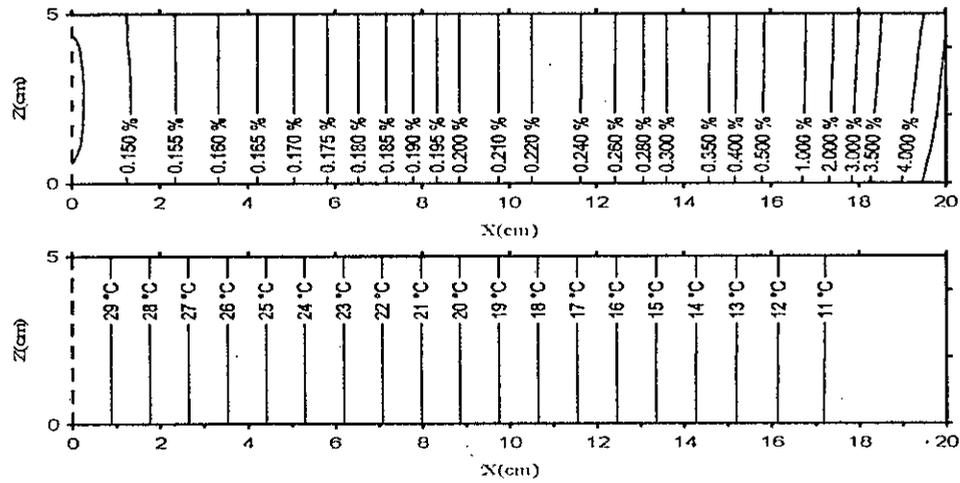


Figure 4.13 : Distribution de l'humidité et de la température après 50 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

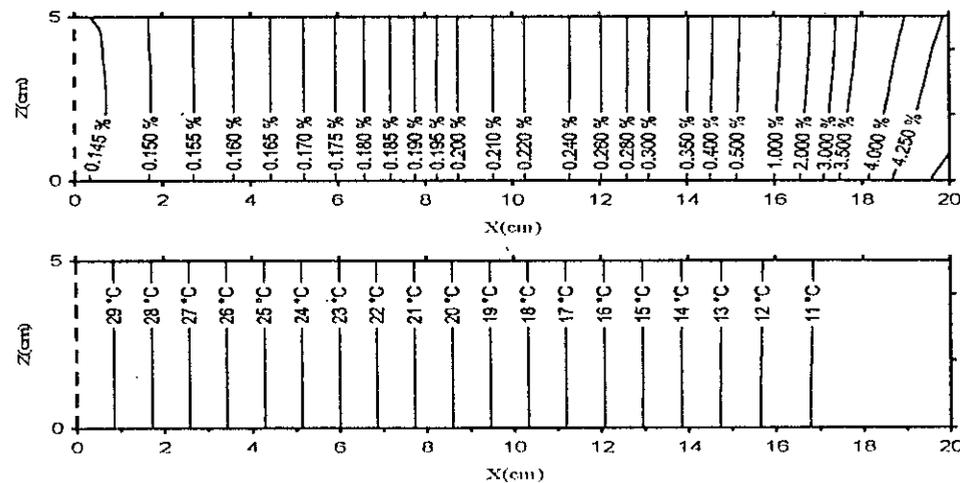


Figure 4.14 : Distribution de l'humidité et de la température après 62 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

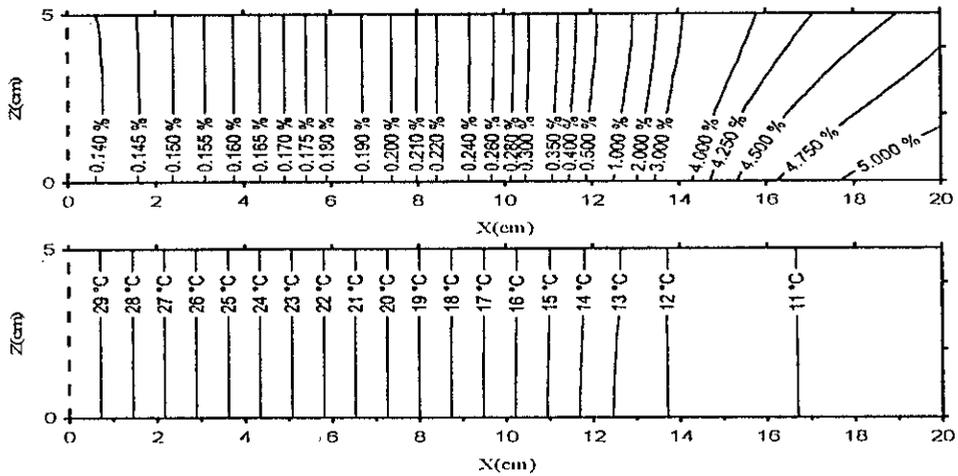


Figure 4.15 : Distribution de l'humidité et de la température après 135 jours ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

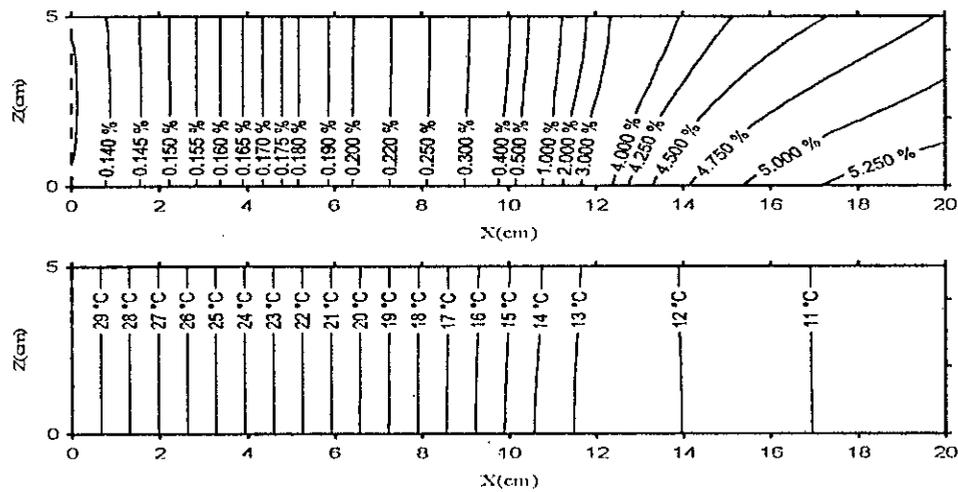


Figure 4.16 : Distribution de l'humidité et de la température après 6 mois ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

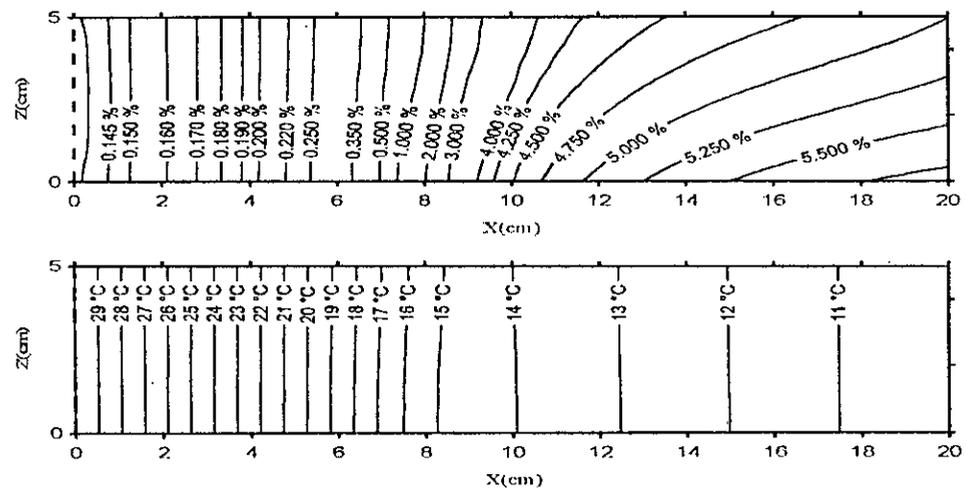


Figure 4.17 : Distribution de l'humidité et de la température après 9 mois ($T_0 = 30^\circ \text{C}$ et $\omega_0 = 0.02 \%$)

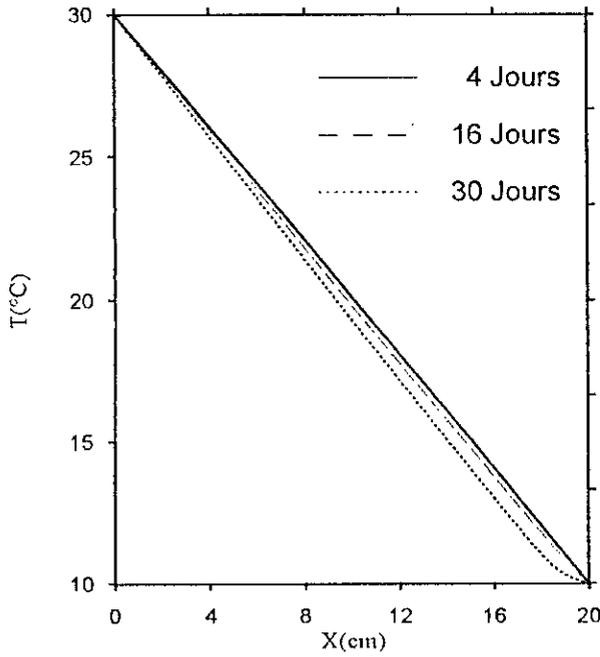


Fig. 4.18 : Profil thermique en fonction du temps
($t = 4, 16$ et 30 jours ; $T_0 = 30^\circ \text{C}$)

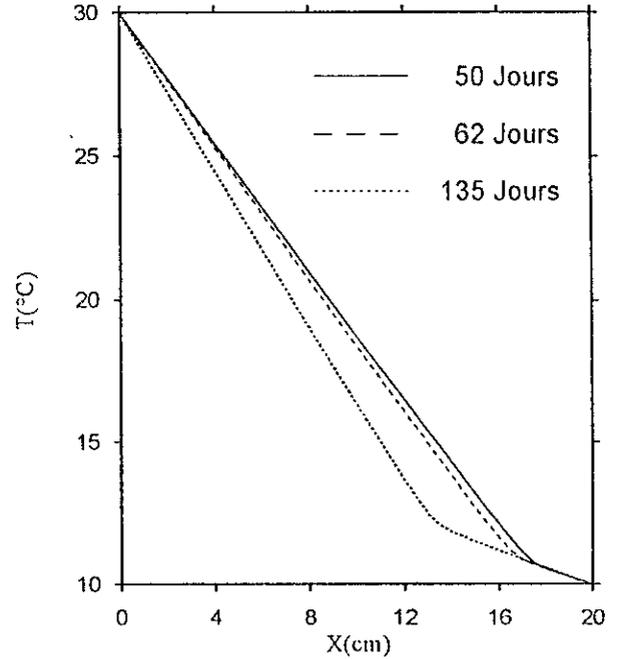


Fig. 4.19 : Profil thermique en fonction du temps
($t = 50, 62$ et 135 jours ; $T_0 = 30^\circ \text{C}$)

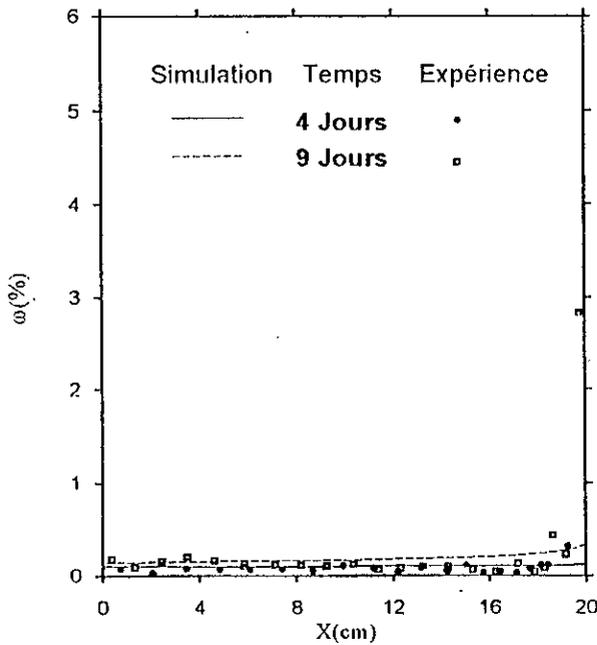


Fig. 4.20 : Comparaison expérience-calcul des profils hydriques
 $t = 4$ et 9 j ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

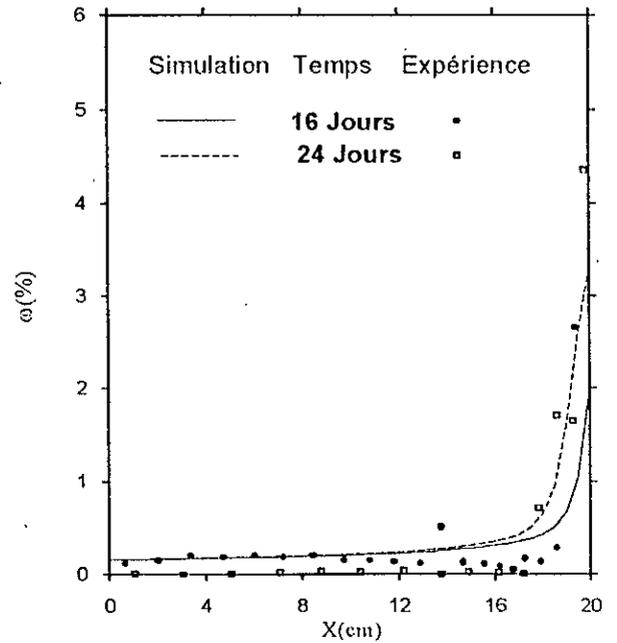


Fig. 4.21 : Comparaison expérience-calcul des profils hydriques
 $t = 16$ et 24 j ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

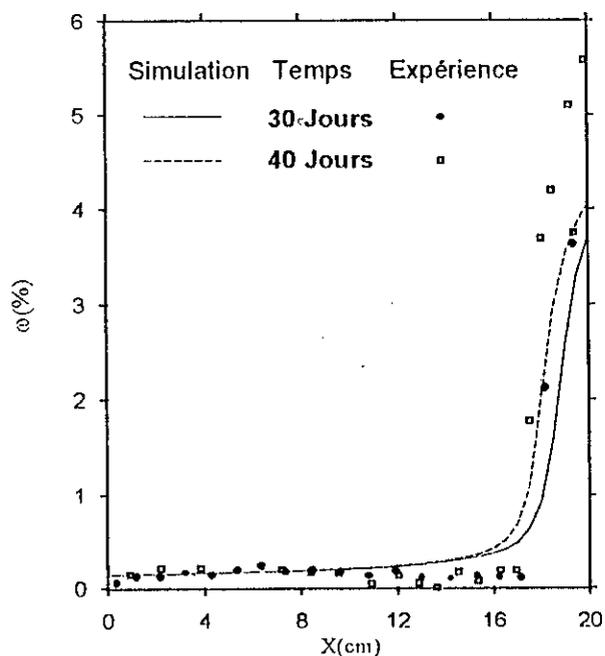


Fig. 4.22 : Comparaison expérience-calcul des profils hydriques
 t = 30 et 40 j ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

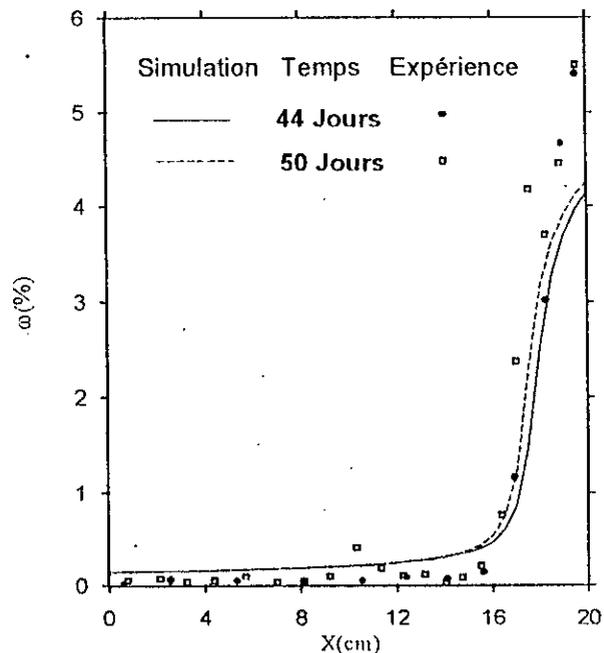


Fig. 4.23 : Comparaison expérience-calcul des profils hydriques
 t = 44 et 50 j ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

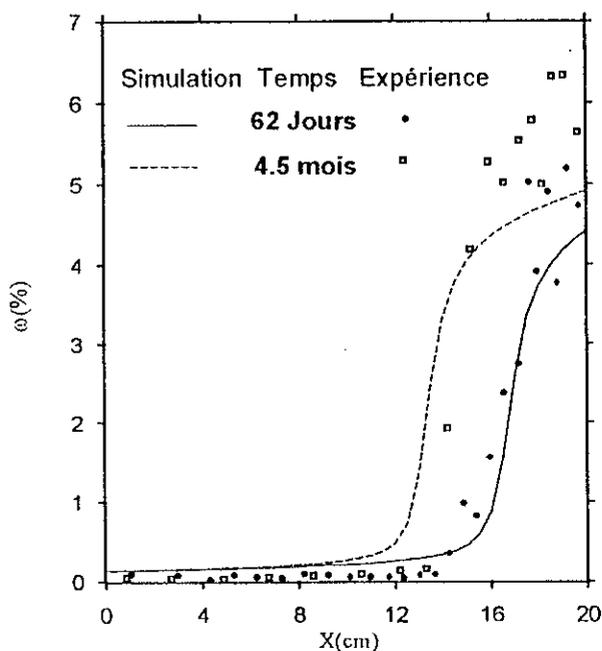


Fig. 4.24 : Comparaison expérience-calcul des profils hydriques
 t = 62 et 135 j ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

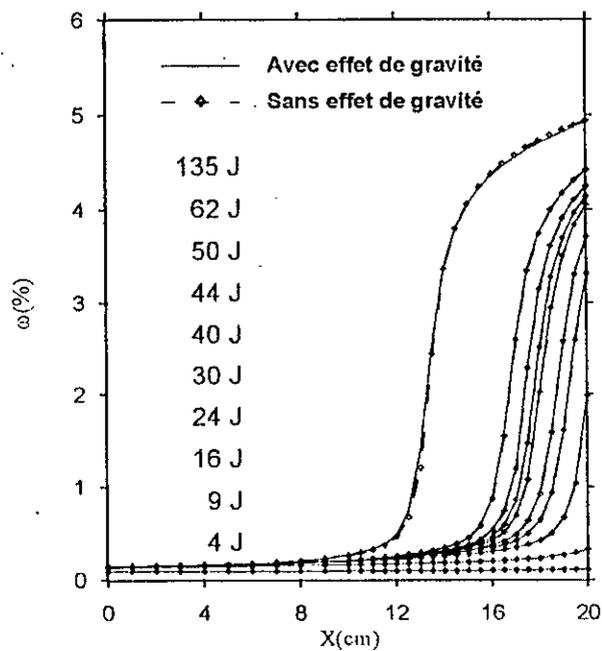


Fig. 4.25 : Etude de l'influence de la gravité sur les profils hydriques en fonction du temps ($T_0 = 30^\circ \text{C}$, $\omega_0 = 0.02 \%$)

Figure 4.26 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse en phase liquide en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

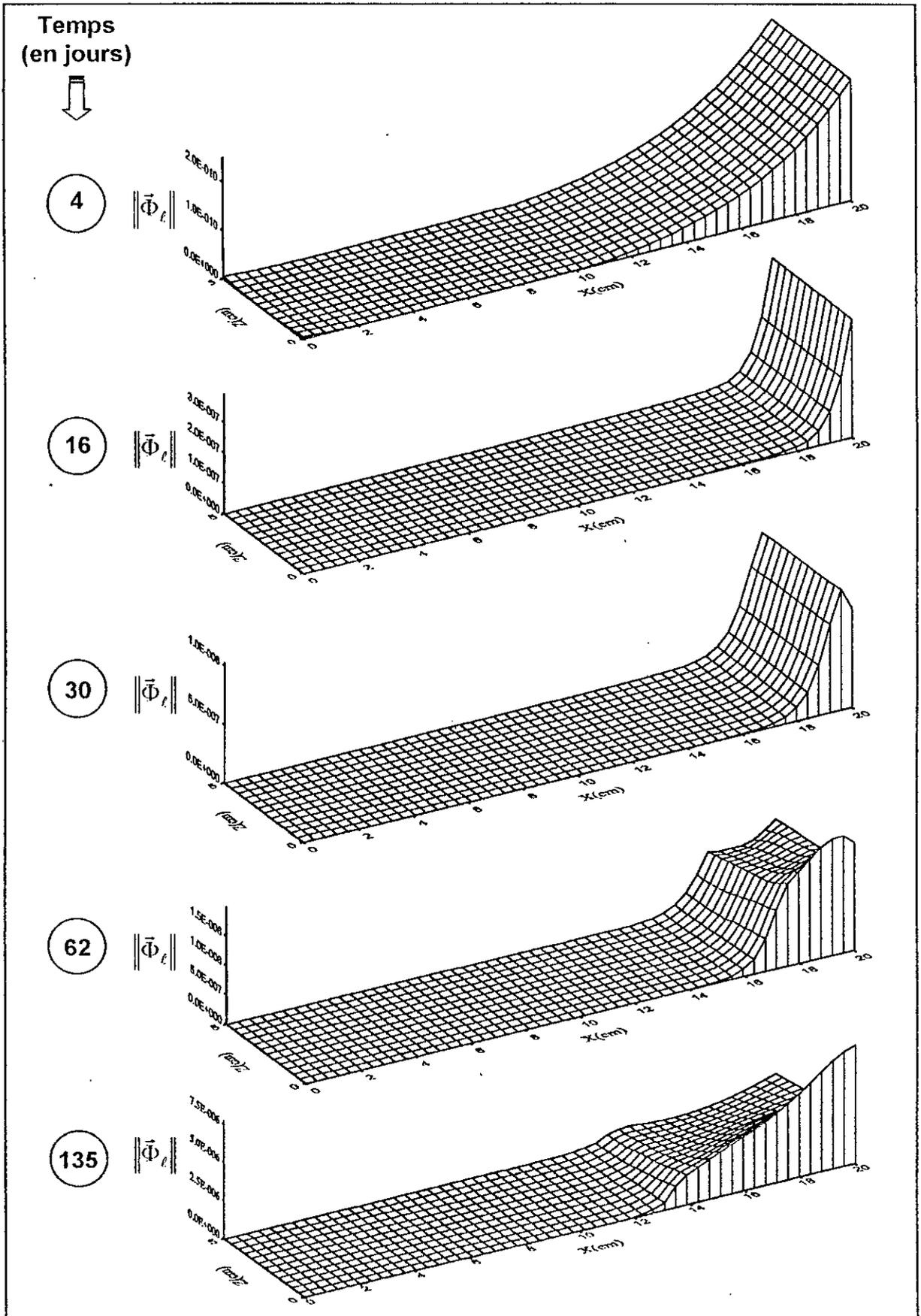


Figure 4.27 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse en phase vapeur en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

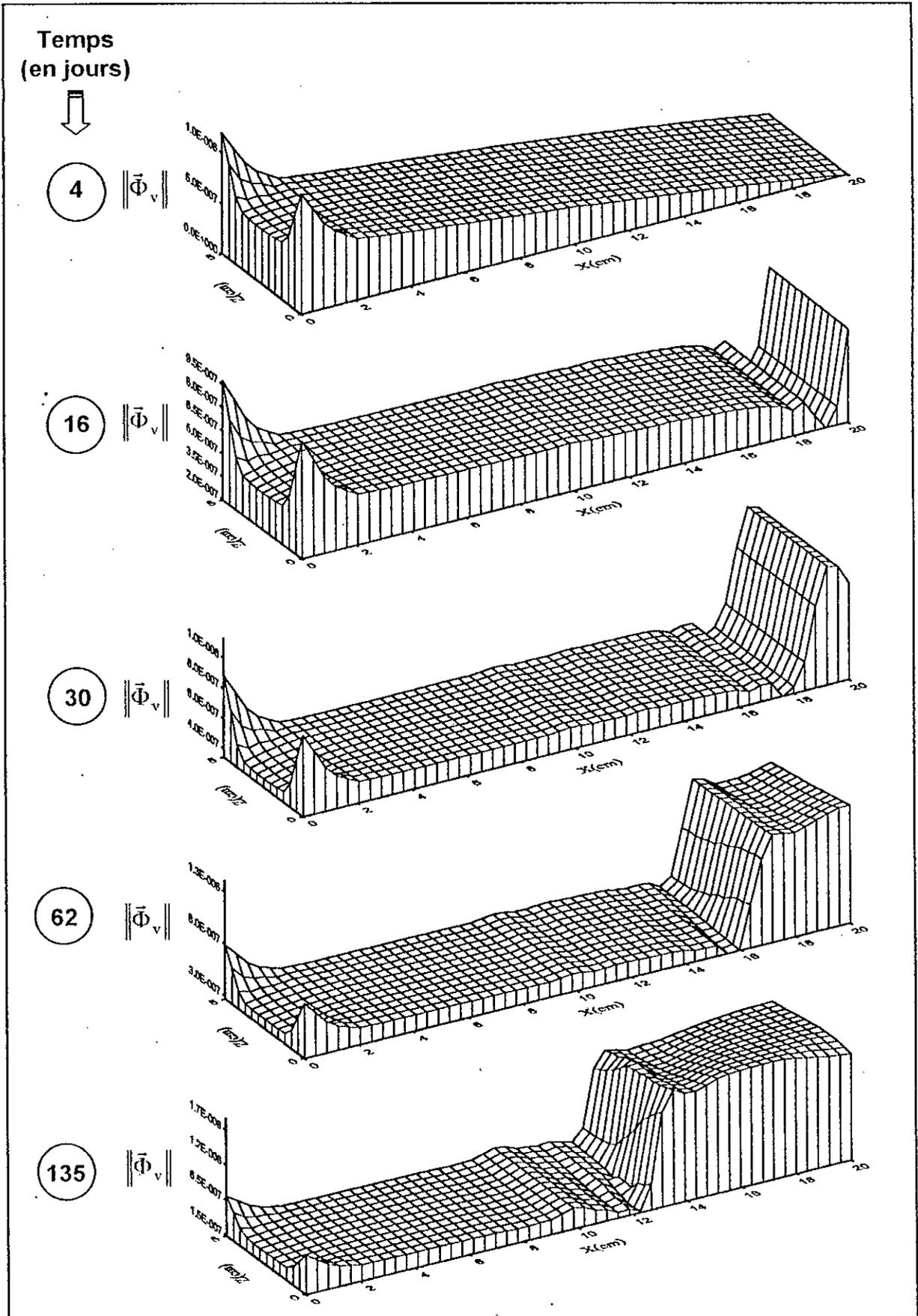


Figure 4.28 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse totale en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

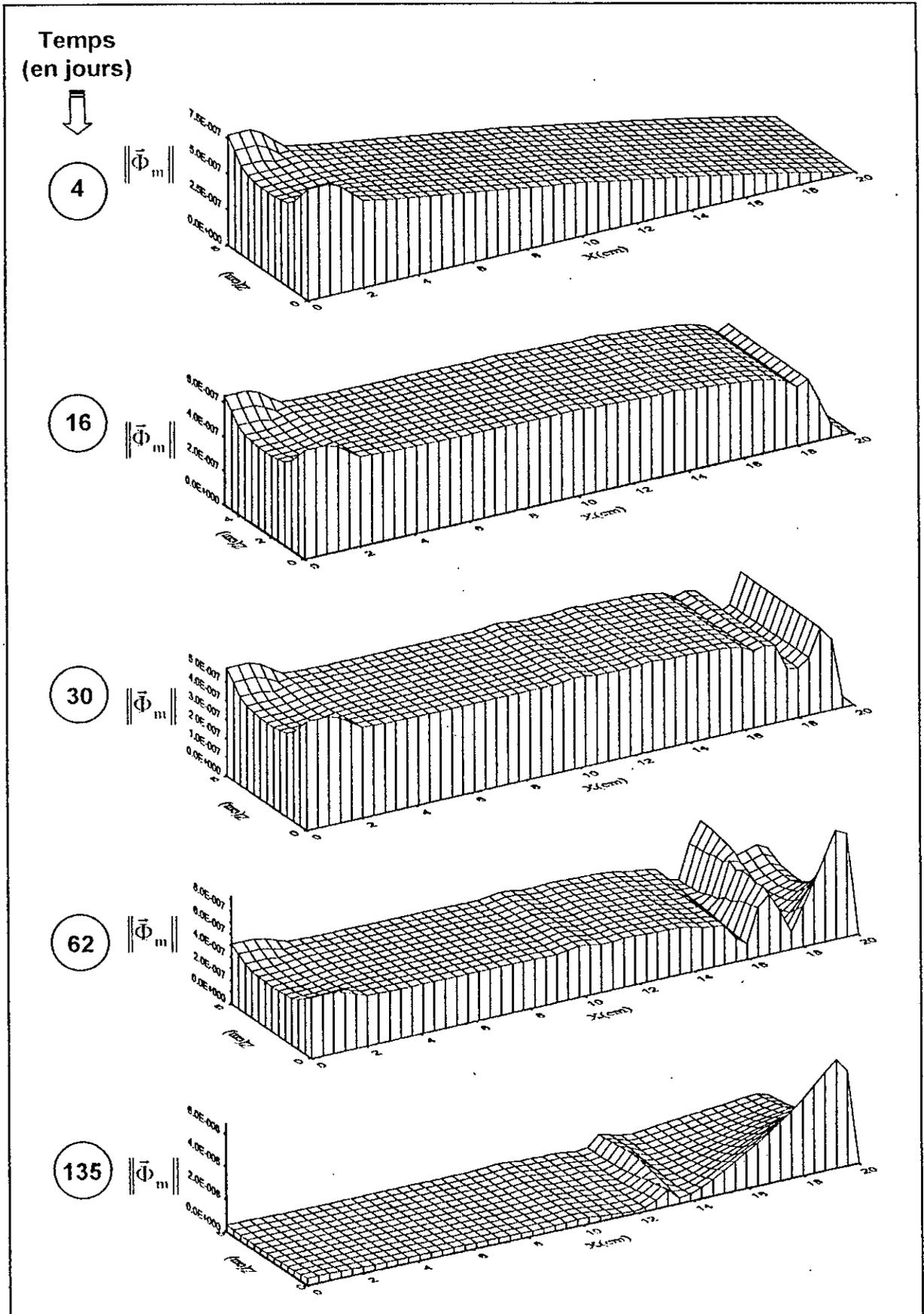


Figure 4.29 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur due au changement de phase en fonction du temps (en $w m^{-2}$).

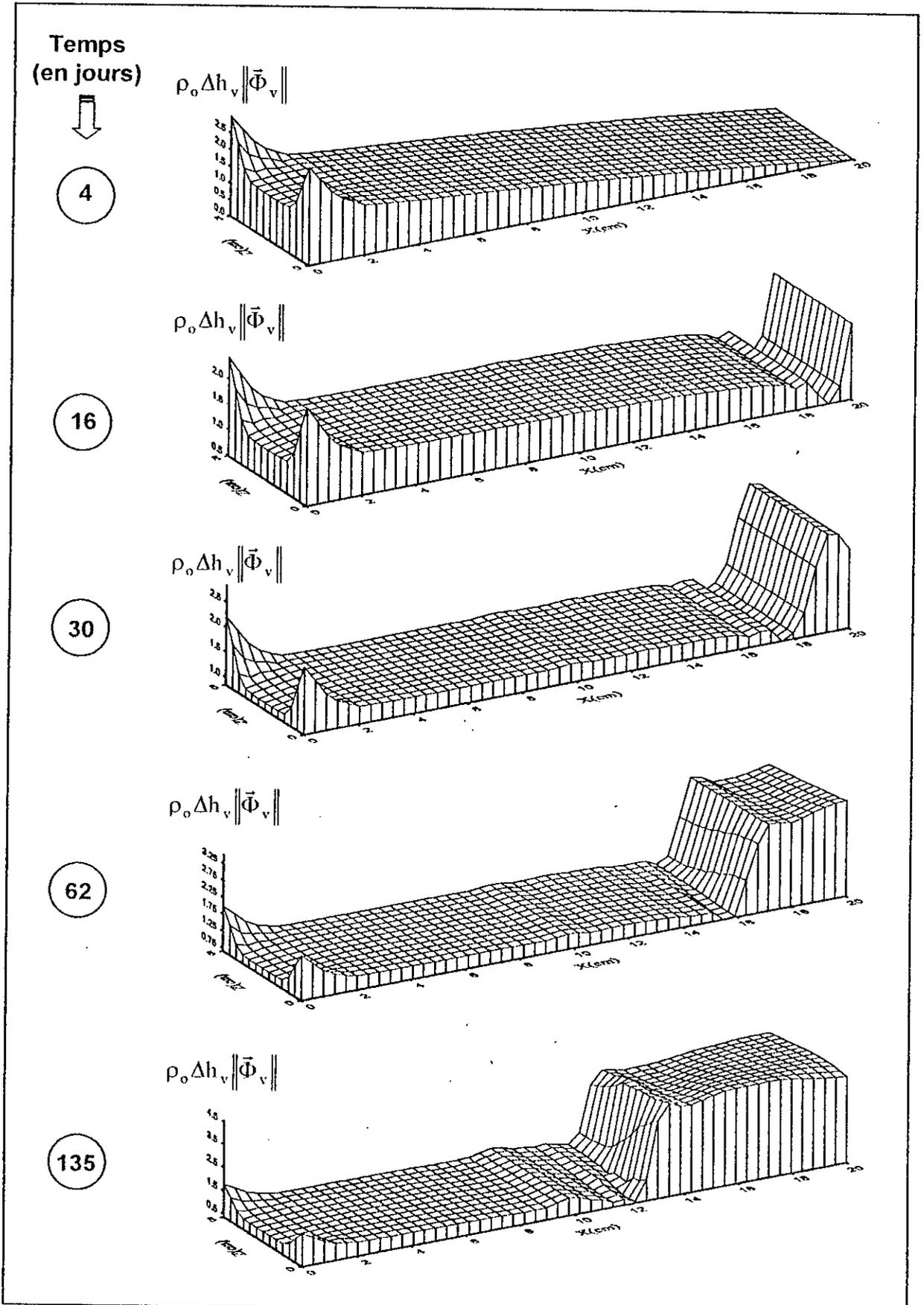


Figure 4.30 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur due à la conduction en fonction du temps (en $w m^{-2}$).

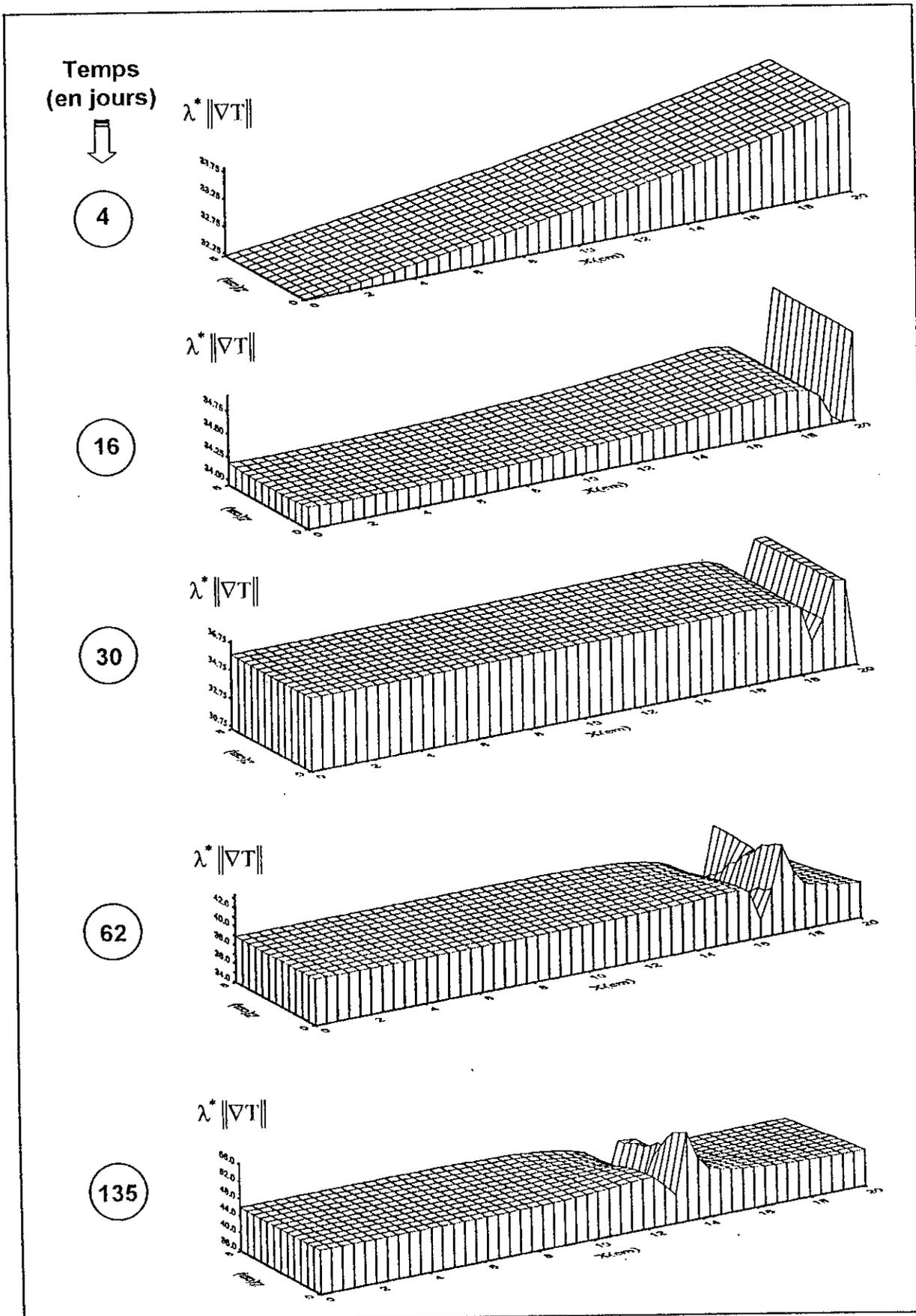
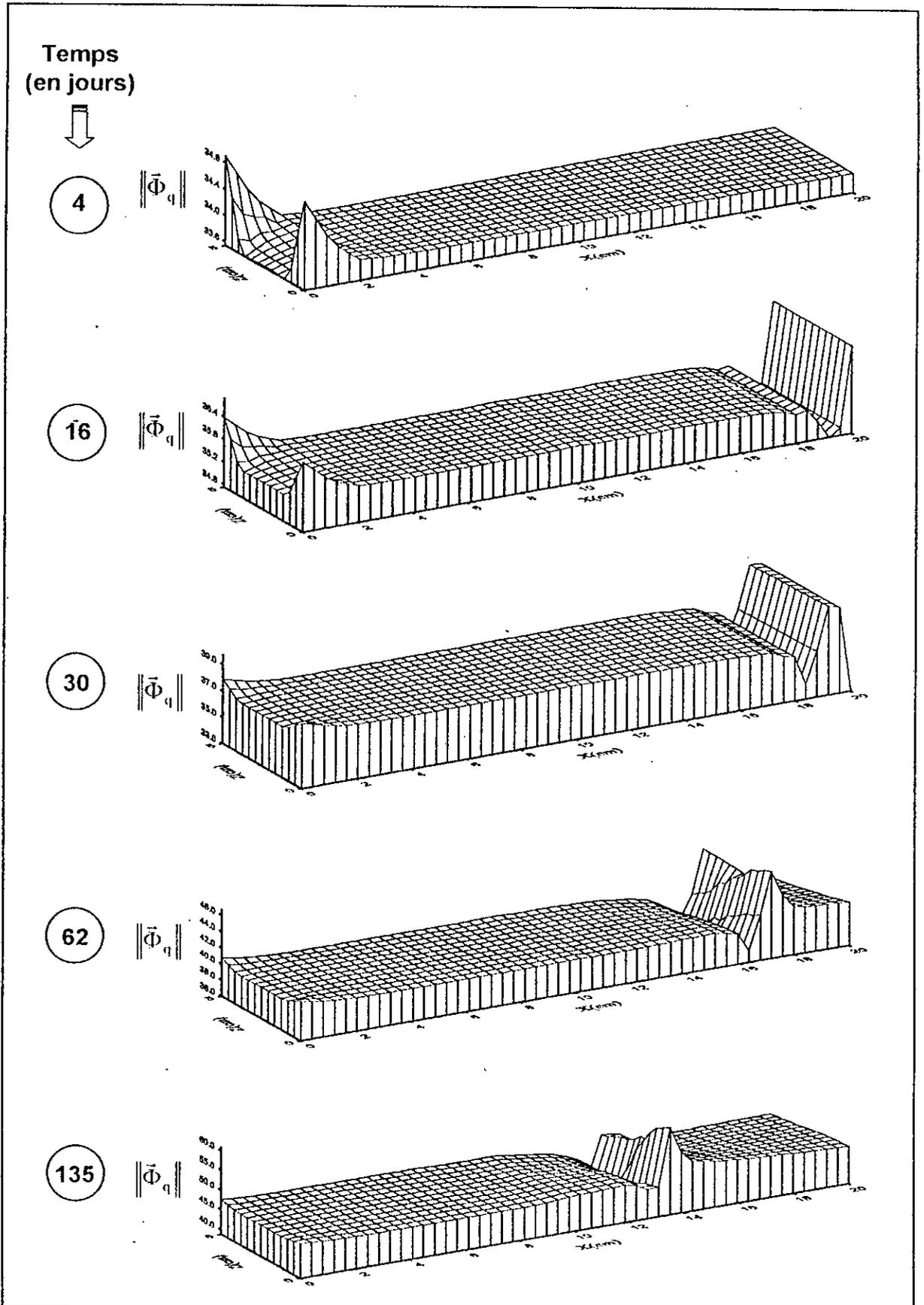


Figure 4.31 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur totale en fonction du temps (en $w m^{-2}$).



4-3. ETUDE DE L'EVAPORATION

On s'intéresse ici, à simuler numériquement en particulier le phénomène d'évaporation étudié expérimentalement par *Crausse* (1983) [15], qui a employé le troisième modèle physique (cf. chapitre 2), pour réaliser cette étude. L'évaporation s'effectue à partir de la surface supérieure de la cellule, en contact avec l'atmosphère et disposée verticalement ($L = 35$ cm, $D = 5$ cm, $L/D = 7$), dont la loi semi-empirique de la densité de flux de masse d'eau évaporée en fonction du temps a pour expression :

$$\dot{m}(t) = 4.0086677 \cdot 10^{-4} t^{-0.38776} \quad (4.2)$$

4-3-1. Résultats et commentaires

La figure 4.32, regroupe les résultats numériques obtenus, concernant les distributions d'humidité, relatives à $t = 7, 14$ et 34 jours. En figure 4.33, on a représenté l'évolution du profil thermique le long du milieu poreux au cours du temps qui permet une meilleure observation de la variation de la température du moment que les isothermes ne présentent des variations que dans un seul sens, ce qui est dû aux conditions aux limites sur la frontière latérale (frontière adiabatique). Ceci est d'ailleurs le cas des études précédentes.

Il y a lieu de constater que les lignes d'égales humidité (figure 4.32) sont toutes des droites horizontales traduisant un déplacement unidirectionnel d'humidité. Ceci s'explique d'une part par les dimensions géométriques de la cellule (un rapport hauteur-largeur égal à 7) et d'autre part par le fait que le gradient thermique imposé et le vecteur gravité, sont colinéaires et agissent dans la le même sens.

Par ailleurs, on observe le développement d'une zone sèche à la partie supérieure de la cellule caractérisée par une teneur en humidité très faible. Par contre, dans la partie inférieure il s'est développé une zone humide ($\omega > \omega_0$) au fil des jours. Cette zone humide est le résultat de l'augmentation de la teneur en humidité, due au transfert de l'humidité en phase vapeur suite au réchauffement graduelle qui gagne de plus en plus le milieu poreux à partir de la partie supérieure (voir figure 4.33) ainsi qu'à l'action de la gravité qui prend le relais pour maintenir cette humidité transférée au fond de la cellule, créant par conséquent les conditions favorables à une condensation originale.

On observe aussi, une troisième zone intermédiaire, dans laquelle la teneur en humidité est sensiblement constante et égale à la teneur initiale ω_0 de 3 %. Cette dernière zone se rétrécit en fonction du temps au détriment des deux autres zones. C'est d'ailleurs, se qui explique la cassure et le changement de pente observés dans les profils thermiques (cf. figure 4.33) marquant une limite d'influence des deux zones en compétition.

4-3-2. Confrontation Expérience-Simulation numérique

La comparaison entre le profil hydrique obtenu par simulation numérique et celui obtenu par la mesure expérimentale [15] est reportée sur les figures 4.34 à 4.36, respectivement pour 7, 14 et 34 jours. Dans cette comparaison on a procédé aussi à une étude d'influence de la gravité.

Les mêmes observations que celles énoncées lors de l'étude de la condensation relative à la confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques sont aussi valables dans l'actuelle étude. La description théorique utilisée est encore une autre fois satisfaisante.

Concernant l'influence de la gravité et comme le montre les figures 4.34 à 4.36, elle ne peut être négligée dans l'évolution du phénomène, en particulier à long terme en raison de la position verticale de la cellule.

4-3-3. Densités de flux de masse et de chaleur

Pour une analyse physique plus détaillée du phénomène d'évaporation considéré, on présente et on commente ici, les distributions des densités de flux de masse et de chaleur (on se limite aux distributions de 7 et 34 jours).

4-3-3-1. Densités de flux de masse : Les figures 4.37 et 4.38, représentant respectivement les distributions des densités de flux de masse en phase liquide et en phase vapeur pour, $t = 7$ et 34 jours, montrent que dans la zone sèche les mouvements d'humidité dans le milieu s'effectuent uniquement en phase vapeur. Ces mouvements se composent en réalité en deux : une diffusion de vapeur ascendante due à la demande évaporative et d'un mouvement de sens opposé due au gradient thermique imposé. Ce second mouvement qui petit à petit, fait accroître la teneur en humidité dans la partie inférieure (zone humide), ce qui engendre un écoulement en phase liquide (cf. fig. 4.37) due à la pesanteur. Ceci signifie qu'il y a eu condensation et que la zone humide est le siège d'un transfert de masse diphasique.

De manière globale et comme le montre la représentation des densités de flux de masse totale (cf. figure 4.39), la cinétique des transferts massiques est plus importante dans la zone sèche aux premiers jours, mais après 34 jours elle se stabilise et devient constante au niveau de cette zone. Par contre elle augmente largement dans la zone humide pour atteindre son maximum à une faible distance du fond, avant de s'annuler à la paroi imperméable de celui-ci.

4-3-3-2. Densités de flux de chaleur : Les figures 4.40 à 4.42 illustrent les distributions des densités de flux de chaleur respectivement due au changement de phase, à la conduction et totale.

Ces figures indiquent le couplage qui existe entre transfert de chaleur et transfert de masse. La chaleur transportée par conduction à travers la zone sèche est en partie utilisée pour vaporiser l'eau. La vapeur ainsi formée, diffuse vers le haut et vers le bas.

On remarque que les différentes densités de flux de chaleur ont une tendance à la baisse quantitative en raison de la chute de la conductivité thermique apparente suite à l'évacuation de l'humidité irréversible vers l'atmosphère par évaporation sans oublier que le mode de transfert de chaleur essentiel est la conduction et qu'elle est à l'origine du phénomène d'évaporation au sein du milieu poreux.

4-4. CONCLUSION

La description théorique de *Philip & De Vries [19]*, des transferts simultanés d'humidité et de chaleur en milieu capillaro-poreux en situations diverses et extrêmes se révèle une approche acceptable de la réalité physique d'une complexité reconnue.

Notre modeste contribution à travers la présente étude (en particulier le passage effectuer à deux dimensions d'espace) constitue à présent un acquis et un pas de plus dans l'étude du phénomène d'une manière générale et dans son volet numérique en particulier.

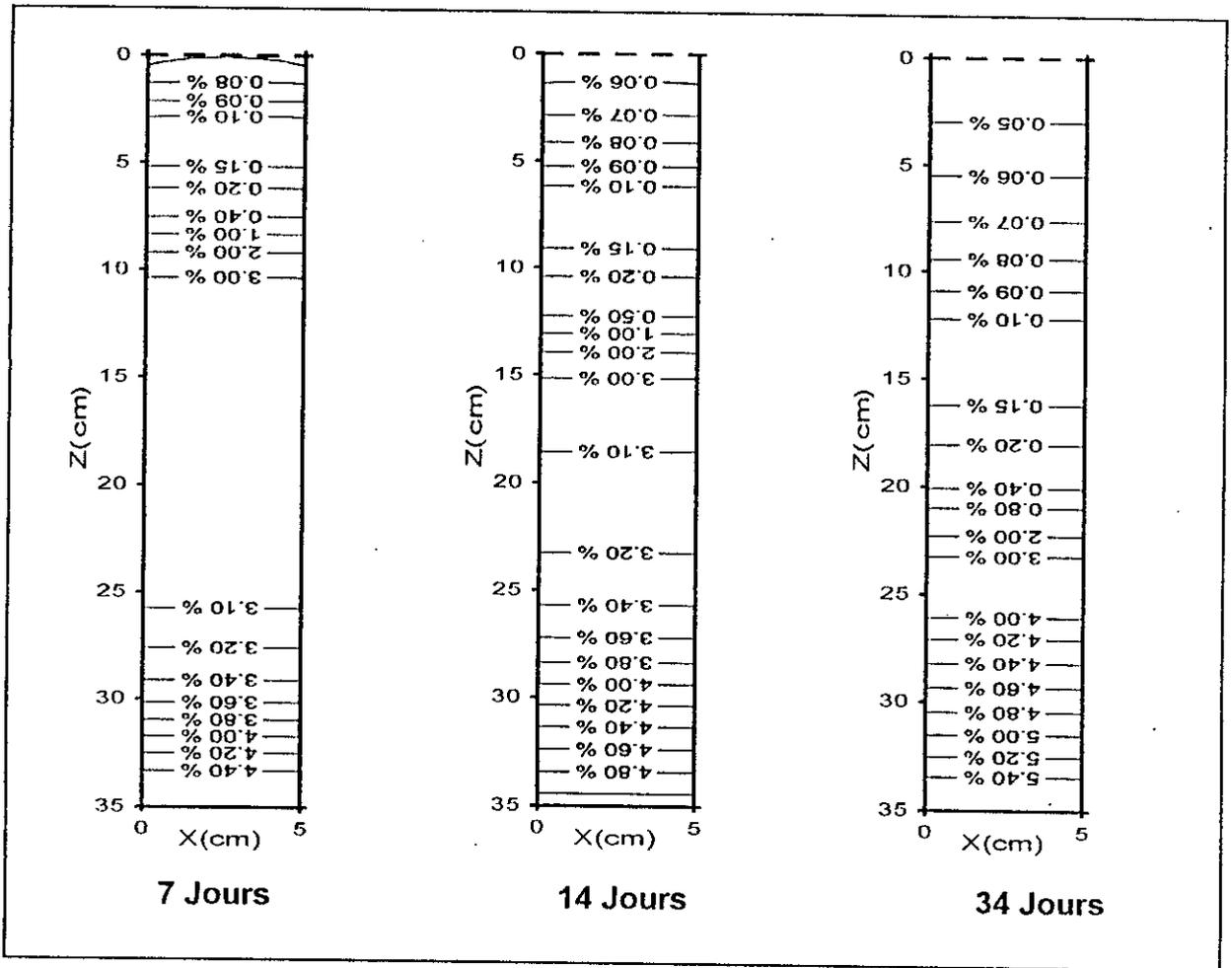


Figure 4.32 : Evolution de la distribution de l'humidité en fonction du temps ($t = 7, 14$ et 34 jours ; $\omega_0 = 3\%$, $T_0 = 20.5^\circ\text{C}$)

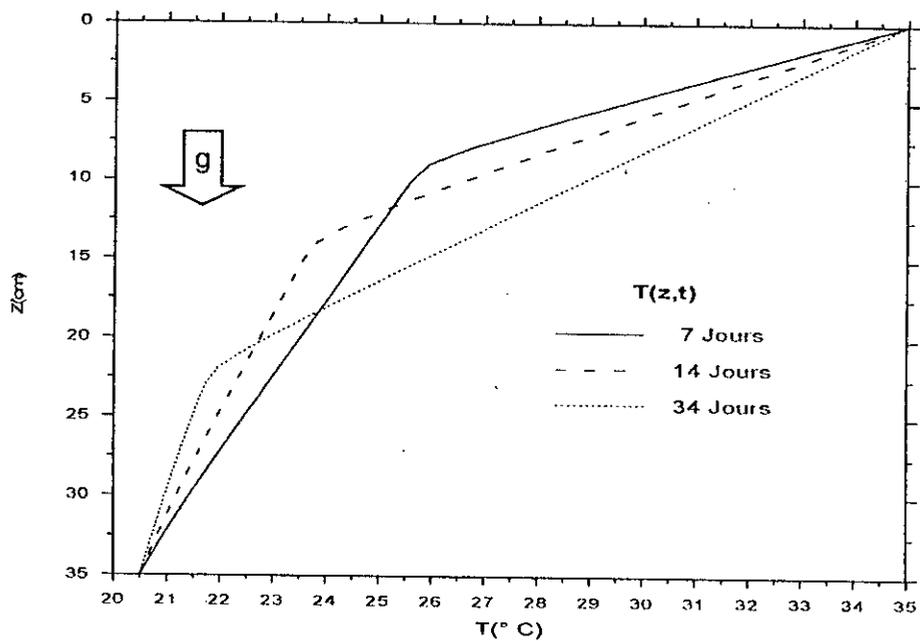


Figure 4.33 : Evolution du profil thermique en fonction du temps ($T_0 = 20.5^\circ\text{C}$)

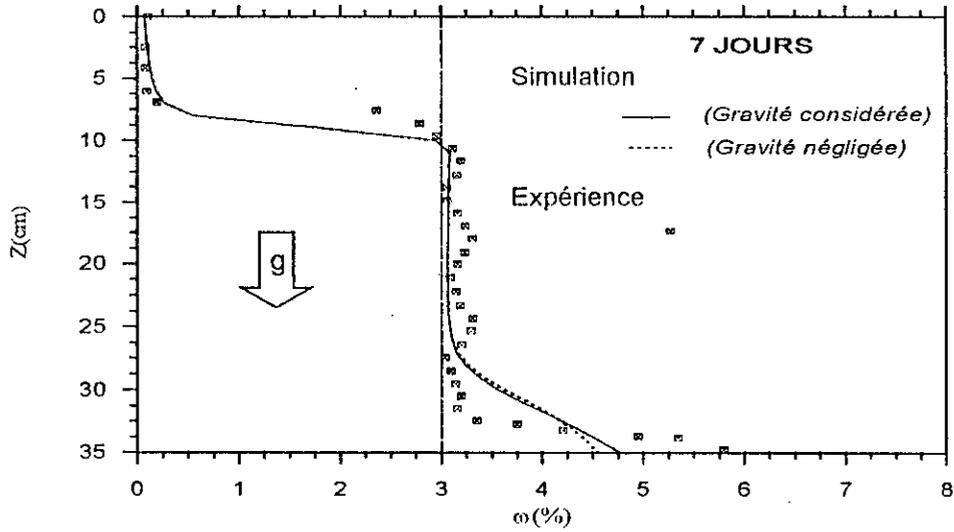


Figure 4.34 : Comparaison expérience-calcul pour $t = 7$ jours ($\omega_0 = 3 \%$)

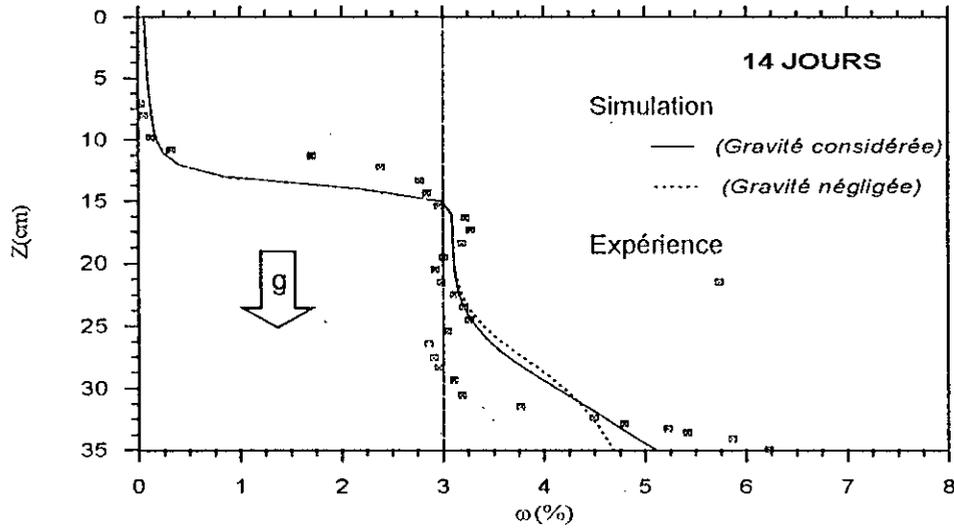


Figure 4.35 : Comparaison expérience-calcul pour $t = 14$ jours ($\omega_0 = 3 \%$)

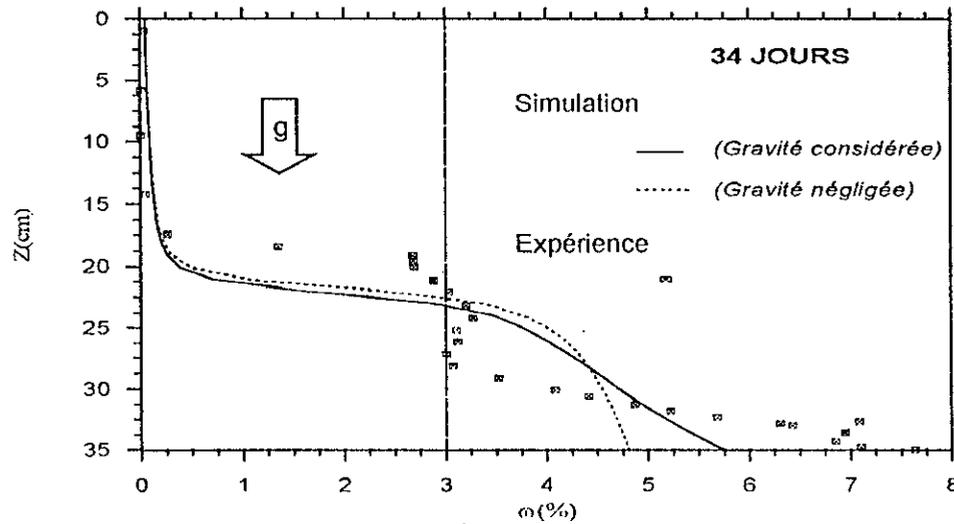


Figure 4.36 : Comparaison expérience-calcul pour $t = 34$ jours ($\omega_0 = 3 \%$)

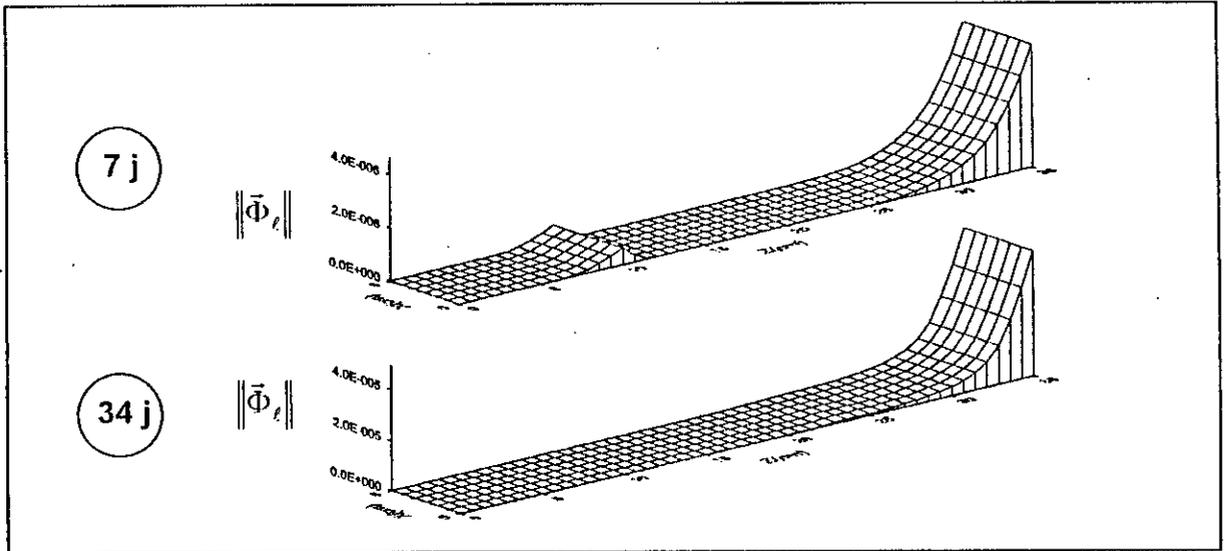


Figure 4.37 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse en phase liquide en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

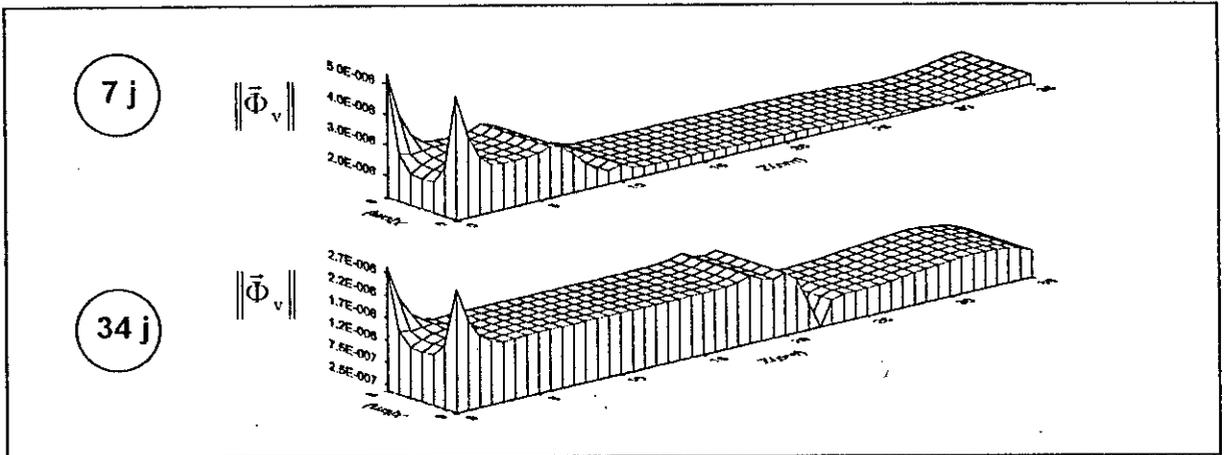


Figure 4.38 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse en phase vapeur en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

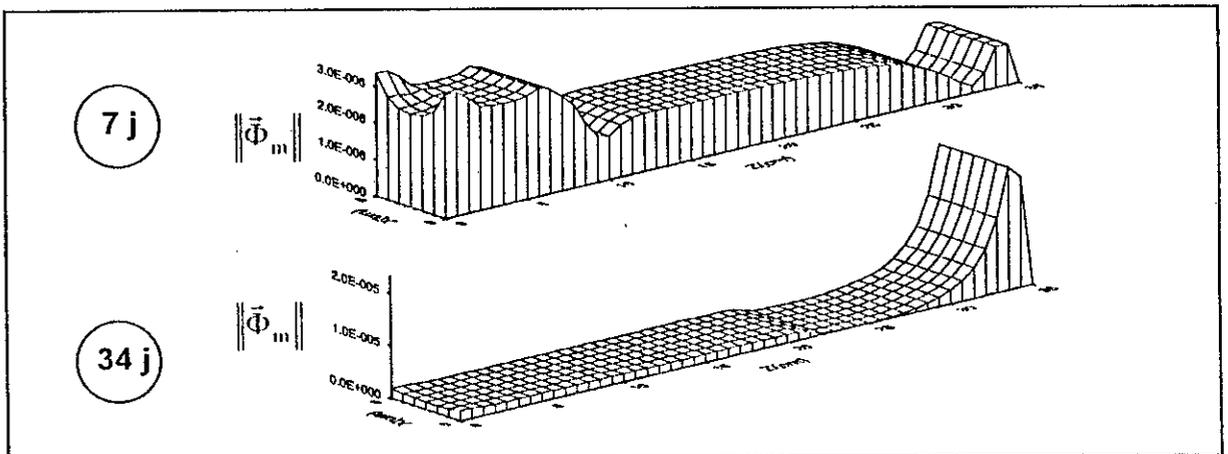


Figure 4.39 : Evolution de la distribution de la densité de flux de masse totale en fonction du temps (en $\text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$).

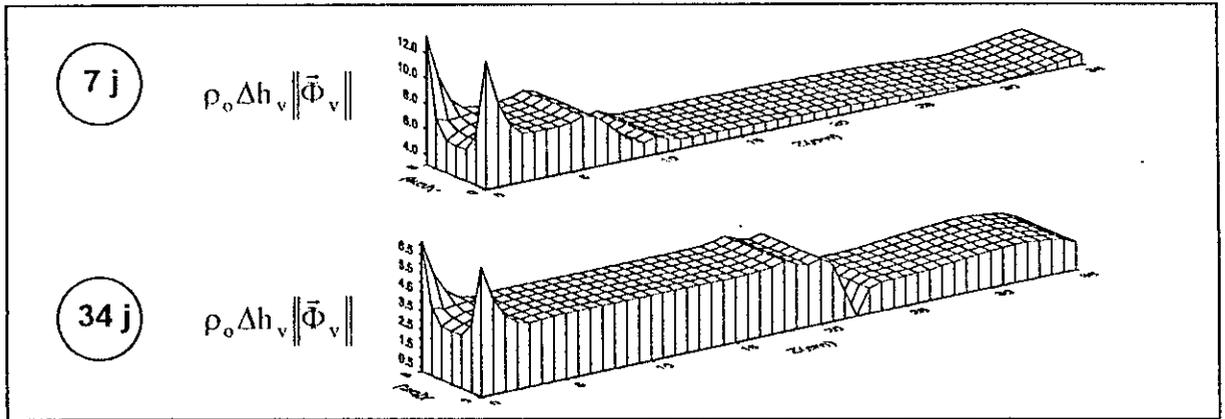


Figure 4.40 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur due au changement de phase en fonction du temps (en $w m^{-2}$).

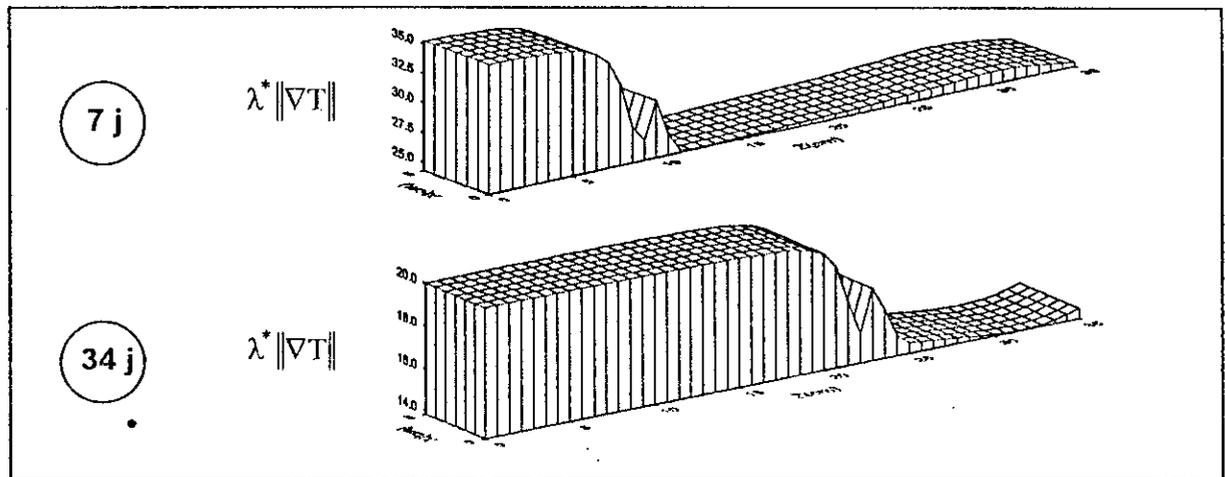


Figure 4.41 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur due à la conduction en fonction du temps (en $w m^{-2}$).

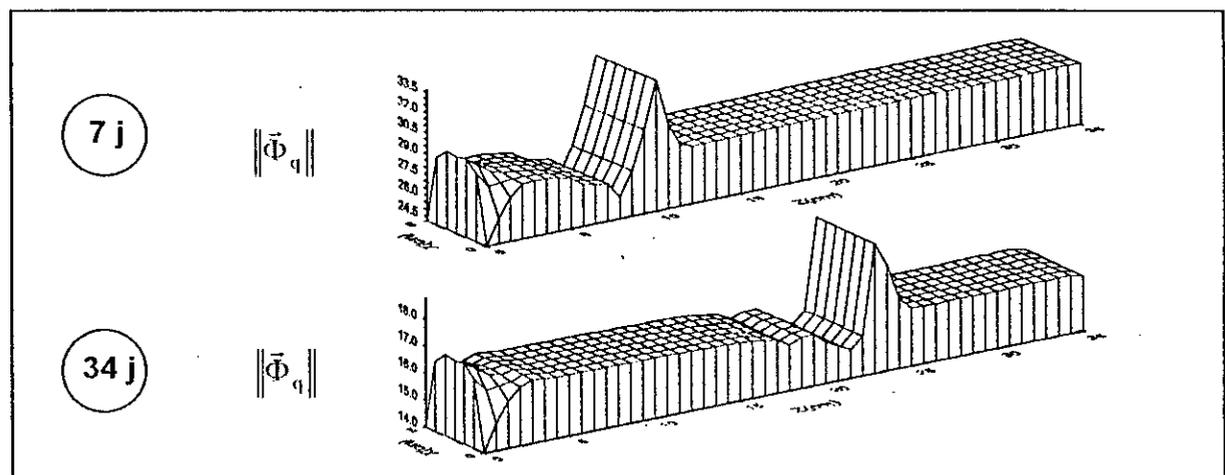


Figure 4.42 : Evolution de la distribution de la densité de flux de chaleur totale en fonction du temps (en $w m^{-2}$).

CONCLUSION GENERALE

Pour cerner de façon exhaustive que possible, le sujet traité dans cette thèse, en l'occurrence la détermination des champs hydriques et des champs thermiques associés en fonction du temps dans différents systèmes physiques en s'appuyant sur la description théorique due à *Philip & De Vries* [19], des transferts couplés de masse et de chaleur en milieu poreux, on a été amené à adopter la stratégie suivante :

- Présentation de l'état de connaissance relatif aux milieux poreux (cf. chapitre 1) où on a défini entre autre, les principales grandeurs géométriques et physiques servants comme outil de description et de caractérisation normalisé des milieux poreux. Leur rôle important et leur incidence directe sur l'évolution des phénomènes de transferts qui se développent au sein du milieu poreux ont été mis en évidence.
- Description mathématique des phénomènes de transfert en milieu poreux (cf. chapitre 2). Dans cette étape nous avons exposé les difficultés géométriques (relatives à l'espace poreux) et physiques rencontrées pour réaliser une telle tâche, pour convenir en fin à l'utilisation d'une modélisation à une échelle macroscopique et en se fixant un cadre de validité relatif aux hypothèses simplificatrices considérées (notre choix effectif est le modèle de *Philip-De Vries*).
- Résolution numérique par la méthode des éléments finis du modèle mathématique associé aux conditions initiales et aux limites imposées (cf. chapitre 3), Vu le caractère couplé et fortement non linéaire des équations qui composent le modèle mathématique utilisé.
- Tester le modèle numérique bidimensionnel résultant de l'étape précédente sur des systèmes de milieu poreux en situations spécifiques très variées en vue d'examiner sa validité face à la réalité physique.

Le bilan obtenu à travers cette étude est globalement positif et confirme une fiabilité satisfaisante du modèle théorique, *Philip & De Vries* (simplifié). La considération du modèle avec deux dimensions d'espace, a montré que le modèle en monodimensionnel éclipsé une réalité physique bidimensionnelle, pourtant constatée par *Crausse et Larbi*. Par ailleurs, on a pu constater certaines remarques qu'on résume comme suit :

- L'influence de la gravité est négligeable tant que la teneur en humidité est faible (à titre indicatif, au-dessous de 7 %), mais si la cellule est posée verticalement, la gravité ne peut être négligée malgré une humidité initiale faible.
- Si la distribution de l'humidité peut présenter un aspect bidimensionnel, celle de la température peut toujours être considérée monodimensionnelle en vue des conditions aux limites imposées.

- Le transfert de chaleur dû au changement de phase est faible devant celui dû à la conduction.
- Concernant le volet numérique on signale que malgré la technique d'assemblage utilisée et l'exploitation efficace de la structure symétrique et bande des matrices globales, le temps d'exécution (temps machine) reste très important (de l'ordre de 5 à 7 heures selon le modèle physique considéré sur un Pentium, 133 Mhz et 16 Mo de Ram).

Pour terminer et en guise de propositions pour les suites éventuelles du sujet on suggère ceci :

- Extension en tridimensionnel et aux systèmes ouverts ;
- Réaliser l'étude de raccordement entre écoulement externe (frontière (es) ouvertes (es)) et le milieu poreux afin de prendre en charge le phénomène de façon complète.



RAPPORTS MASSIQUES & VOLUMIQUES

Il est question dans cette annexe de la définition des relations massiques et volumiques entre les différents constituants d'un milieu poreux. On admet, dans ce qui suit que le milieu poreux considéré est un système triphasique constitué de la matrice solide, d'une phase liquide monoconstituant et d'une phase gazeuse (de la vapeur du liquide + de l'air sec).

Diverses grandeurs reliant les volumes et masses des trois phases peuvent être définies [9, 15, 33].

A-1. MASSES VOLUMIQUES [Kg/m³]

A-1-1. Masse volumique des grains solides $\rho_s = \frac{m_s}{V_s}$ (A-1)

A-1-2. Masse volumique de la phase liquide $\rho_\ell = \frac{m_\ell}{V_\ell}$ (A-2)

A-1-3. Masse volumique de la phase gazeuse $\rho_g = \frac{m_g}{V_g}$ (A-3)

A-1-4. Masse volumique de la vapeur du liquide $\rho_v = \frac{m_v}{V_g}$ (A-4)

A-1-5. Masse volumique de l'air sec $\rho_a = \frac{m_a}{V_g}$ (A-5)

A-1-6. Masse volumique apparente à l'état sec $\rho_o = \frac{m_s}{V_t}$ (A-6)

A-1-7. Masse volumique équivalente à l'état humide $\rho^* = \frac{m_t}{V_t}$ (A-7)

Où :

- m_s, V_s : respectivement, la masse et le volume de la phase solide ;
- m_ℓ, V_ℓ : respectivement, la masse et le volume de la phase liquide ;
- m_g, V_g : respectivement, la masse et le volume de la phase gazeuse ;
- m_v, m_a : respectivement, la masse de la vapeur et de l'air sec ;
- m_t, V_t : respectivement, la masse et le volume total du matériau poreux.

Avec : $m_g = m_v + m_a$; $m_t = m_s + m_\ell + m_g$ et $V_t = V_g + V_s + V_\ell$

A-2. TENEURS EN HUMIDITE

A-2-1. Teneur en humidité volumique [%]

a) En phase liquide $\theta_\ell = \frac{V_\ell}{V_t}$ (A-8)

b) En phase gazeuse (vapeur) $\theta_v = \frac{V_g}{V_t}$ (A-9)

A-2-2. Teneur en humidité massique ou pondérale [%]

a) En phase liquide $\omega_\ell = \frac{m_\ell}{m_s}$ (A-10)

b) En phase vapeur $\omega_v = \frac{m_v}{m_s}$ (A-11)

Avec la teneur totale en humidité (liquide + vapeur) : ... $\omega = \omega_\ell + \omega_v$ (A-12)

A-2-3. Teneur massique ou pondérale en gaz [%]

$$\omega_g = \frac{m_g}{m_s} \quad (A-13)$$

A-2-4. Teneur massique ou pondérale en air sec [%]

$$\omega_a = \frac{m_a}{m_s} \quad (A-14)$$

A-2-5. Taux de saturation [%]

C'est la fraction du volume des vides (V_v), occupée par la phase liquide. Il a pour expression :

$$S_\ell = \frac{V_\ell}{V_v} = \frac{V_\ell}{V_\ell + V_g} \quad (A-15)$$

Ces différentes grandeurs sont reliées entre elles par les relations suivantes :

$$\rho_o = \rho_s (1 - \epsilon) \quad (A-16)$$

$$\rho_g = \rho_v + \rho_a \quad (A-17)$$

$$\epsilon = \theta_\ell + \theta_g \quad (A-18)$$

$$\theta_\ell = \epsilon S_\ell \quad (A-19)$$

$$\theta_\ell = \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \quad (A-20)$$

$$\theta_g = \frac{\rho_o}{\rho_g} \omega_g = \epsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \quad (A-21)$$

Avec :
$$\omega_g = \frac{\rho_g}{\rho_o} \left(\epsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \quad (A-22)$$

L'addition des deux équations (2.7.a et 2.7.c) conduit à l'équation de masse globale. Par ailleurs en utilisant les équations (2.9, 2.10, 2.11, 2.12 et 2.14) pour exprimer \bar{U}_ℓ ; \bar{U}_g ; $\bar{\Phi}_v$, $\bar{\Phi}_{qc}$, P_ℓ et l'équation (2.7.d) pour exprimer P , et en choisissant la température, la teneur massique en liquide et la pression totale de la phase gazeuse comme variables indépendantes, on arrive à réduire le système de (2.7) à (2.18) à trois équations aux dérivées partielles couplées et non linéaires.

La première équation représente le bilan de masse global, la deuxième équation représente le bilan d'énergie et la troisième représente l'équation de l'évolution de la pression gazeuse. Dans ce qui suit nous allons construire ces trois équations par combinaison des équations (2.7) à (2.18).

A- BILAN MASSIQUE GLOBAL :

A.1. Bilan massique en phase liquide (Développement de l'équation (2.7.a))

En utilisant l'équation (2.9) et en exprimant P_b , moyennant l'équation (2.14) on obtient :

$$\rho_\ell \bar{U}_\ell = -\frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \cdot (\nabla P + \rho_\ell g \nabla \psi + \rho_\ell g \nabla z) \quad (B.1)$$

avec : $\nu_\ell = \frac{\mu_\ell}{\rho_\ell}$, ν_ℓ désigne la viscosité cinématique du liquide ;

$\bar{g} = -g \nabla z$ où le signe (-) signifie que l'axe des z est dirigé vers le haut contrairement au sens du vecteur de la gravité (\bar{g}) qui lui, est naturellement dirigé vers le bas.

De plus : $\psi = \psi(\omega_\ell, T)$

$$\text{d'où :} \quad \nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega_\ell} \right)_T \nabla \omega_\ell + \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\omega_\ell} \nabla T \quad (B.2)$$

par conséquent :

$$\rho_\ell \bar{U}_\ell = - \left(\rho_\ell g \frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega_\ell} \right) \nabla \omega_\ell + \rho_\ell g \frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \nabla T + \frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \cdot \nabla P + \rho_\ell g \frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \cdot \nabla z \right) \quad (B.3)$$

Soit en posant : $\bar{K} = \frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \bar{g}$ (\bar{K} s'identifie à la conductivité hydraulique) et en notant :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\omega_\ell} &= \frac{\rho_\ell}{\rho_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega_\ell} \right) \bar{K} ; \quad \bar{D}_{T_\ell} = \frac{\rho_\ell}{\rho_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \bar{K} ; \quad \bar{D}_{P_\ell} = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\bar{k}_\ell}{\nu_\ell} \right) \text{ et } \bar{D}_G = \frac{\rho_\ell}{\rho_o} \bar{K}. \\ \rho_\ell \bar{U}_\ell &= -\rho_o \left(\bar{D}_{\omega_\ell} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_\ell} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_\ell} \cdot \nabla P + \bar{D}_G \cdot \nabla Z \right) \end{aligned} \quad (B.4)$$

En simplifiant par ρ_o (sachant que c'est une grandeur constante par hypothèse), l'équation (2.7.a) aura finalement comme expression :

$$\frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\bar{D}_{\omega_\ell} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_\ell} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_\ell} \cdot \nabla P + \bar{D}_G \cdot \nabla Z \right) + \dot{m} / \rho_o \quad (B.5)$$

A.2. Bilan massique en phase vapeur (Développement des différents termes de (2.7.c))

En utilisant l'équation (2.10) on arrive à :

$$\rho_v \bar{U}_g = - \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{\bar{k}_g}{\nu_g} \cdot (\nabla P - \rho_g \bar{g}) = - \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{\bar{k}_g}{\nu_g} \cdot \nabla P \quad (B.6)$$

avec : $\mu_g = \rho_g \nu_g$, (ν_g désigne la viscosité cinématique de la phase gazeuse) et que les effets dus à la gravité ont été légitimement négligés pour le gaz.

D'après l'équation (2.11) et sachant que le rapport (ρ_v / ρ_g) est fonction de ω_ℓ , T et de P selon les équations d'état (2.13), $\bar{\Phi}_v$, aura pour expression :

$$\bar{\Phi}_v = \rho_g \bar{D}^* \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) = -\rho_g \bar{D}^* \cdot \left(\frac{\partial(\rho_v / \rho_g)}{\partial \omega_\ell} \nabla \omega_\ell + \frac{\partial(\rho_v / \rho_g)}{\partial T} \nabla T + \frac{\partial(\rho_v / \rho_g)}{\partial P} \nabla P \right) \quad (B.7)$$

Le premier terme de l'équation (2.7.c) : $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o \omega_v)$ représente le taux de la masse vapeur qu'il faudrait exprimée en équivalent liquide. Cette opération nécessite tout d'abord d'exprimer ω_v en fonction de la variable indépendante ω_ℓ .

On a la relation suivante qui relie la teneur massique en phase gazeuse à la teneur en massique en phase liquide :

$$\omega_g = \frac{\rho_g}{\rho_o} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \quad (B.8)$$

$$\text{D'où : } \omega_v = \frac{\rho_v}{\rho_o} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \quad (B.9)$$

$$\text{On pose : } \frac{\rho_g}{\rho_o} \bar{D}^* \cdot \frac{\partial(\rho_v / \rho_g)}{\partial \omega_\ell} = \bar{D}_{\omega_v} ; \quad \frac{\rho_g}{\rho_o} \bar{D}^* \cdot \frac{\partial(\rho_v / \rho_g)}{\partial T} = \bar{D}_{T_v} \text{ et}$$

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\rho_v}{\rho_g} \frac{\bar{k}_g}{v_g} + \frac{\rho_g}{\rho_o} \bar{D}^* \cdot \frac{\partial(\rho_v/\rho_g)}{\partial P} = \bar{D}_{P_v}$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial \omega_v}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\bar{D}_{\omega_v} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_v} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_v} \cdot \nabla P \right) = -\dot{m}/\rho_o \quad (\text{B.10})$$

En utilisant l'expression (B.9) et la loi des gaz parfaits (2.13) ainsi que les coefficients \bar{D}_{ω_v} et \bar{D}_{T_v} on arrive à :

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial t} = \left(\frac{\bar{D}_{\omega_v} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right)}{\bar{D}^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_\ell} \right) \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\bar{D}_{T_v}}{\bar{D}^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{1}{T} \frac{\rho_v}{\rho_o} \right) \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \xi \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\bar{D}_{\omega_v} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_v} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_v} \cdot \nabla P \right) = -\dot{m}/\rho_o \quad (\text{B.11})$$

$$\text{Avec : } \alpha = \left(\frac{\bar{D}_{\omega_v} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right)}{\bar{D}^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_\ell} \right) \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\bar{D}_{T_v}}{\bar{D}^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{1}{T} \frac{\rho_v}{\rho_o} \right)$$

A.3. Equation de masse globale

La sommation des deux équations de conservation de la masse en phase liquide (B.5) et en phase vapeur (B.11) nous donne l'équation de conservation de la masse globale :

$$\frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \underbrace{\alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} + \xi \frac{\partial T}{\partial t}}_{(a)} = \nabla \cdot \left(\underbrace{\bar{D}_{\omega} \cdot \nabla \omega_\ell}_{(b)} + \underbrace{\bar{D}_T \cdot \nabla T}_{(c)} + \underbrace{\bar{D}_P \cdot \nabla P}_{(d)} + \underbrace{\bar{D}_G \cdot \nabla Z}_{(c)} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\text{avec : } \bar{D}_\omega = \bar{D}_{\omega_l} + \bar{D}_{\omega_v} ; \bar{D}_T = \bar{D}_{T_l} + \bar{D}_{T_v} \quad \text{et} \quad \bar{D}_P = \bar{D}_P + \bar{D}_{P_v}$$

B- EQUATION DE CONSERVATION D'ENERGIE (Développement des différents termes de l'équation (2.8))

A partir de l'équation (B.6) on déduit que :

$$\rho_g \vec{U}_g = - \frac{\bar{k}_g}{v_g} \cdot \nabla P = - \rho_o \bar{D}_{P_g} \cdot \nabla P \quad (\text{B.13})$$

$$\text{avec : } \bar{D}_{P_g} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\bar{k}_g}{v_g}$$

En introduisant les termes développés dans les équations (B.4) et (B.13) et en utilisant l'équation (2.12) pour exprimer, Φ_q , ainsi que l'équation (B.11) pour exprimer \bar{m} , on aboutit à l'expression finale de l'équation de conservation d'énergie :

$$\begin{aligned} (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} = & \nabla \cdot \left(\bar{\lambda}^* \cdot \nabla T \right) + \rho_o C_\ell \left(\bar{D}_{\omega_\ell} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_\ell} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_\ell} \cdot \nabla P + \bar{D}_G \cdot \nabla Z \right) \cdot \nabla T \\ & + \rho_o C_g \left(\bar{D}_{P_g} \cdot \nabla P \right) \cdot \nabla T \\ & + \rho_o \Delta h_v \left(\nabla \cdot \left(\bar{D}_{\omega_v} \cdot \nabla \omega_\ell + \bar{D}_{T_v} \cdot \nabla T + \bar{D}_{P_v} \cdot \nabla P \right) - \alpha \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} - \xi \frac{\partial T}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (B.14)$$

C- EQUATION D'EVOLUTION DE LA PRESSION (Développement des différents termes de l'équation (2.7.d)) :

A partir de l'équation (B.6) et en utilisant l'équation d'état (2.13) on déduit que :

$$\rho_a \bar{U}_g = - \frac{\rho_a \bar{k}_g}{\rho_g v_g} \cdot \nabla P = - \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{\bar{k}_g}{v_g} \cdot \nabla P \quad (B.15)$$

D'après l'équation (B.8) on a :

$$\omega_a = \frac{\rho_a}{\rho_o} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \quad (B.16)$$

D'où :

$$\frac{\partial \omega_a}{\partial t} = \frac{1}{\rho_o} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \frac{\partial \rho_a}{\partial t} - \frac{\rho_a}{\rho_\ell} \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} \quad (B.17)$$

Grâce aux équations d'état (2.13) on a : $\rho_a = \frac{M_a}{RT} P_a = \frac{M_a}{RT} (P - P_v)$

D'où :

$$\frac{\partial \omega_a}{\partial t} = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left[\left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \left(\frac{\partial P_v}{\partial \omega_\ell} \right) \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} - \left(\left(\frac{\partial P_v}{\partial T} \right) + \frac{(P - P_v)}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} (P - P_v) \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} \right]$$

Soit en utilisant l'équation (B.7) qui développe $\bar{\Phi}_v$ et en posant :

$$\bar{D}_{P_a} = \frac{1}{\rho_o} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{\bar{k}_g}{v_g} - \bar{D} \frac{\rho_g}{\rho_o} \frac{\partial (\rho_v / \rho_g)}{\partial P} ;$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) ;$$

$$\delta = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\partial P_v}{\partial \omega_\ell} + \frac{\rho_o}{\rho_\ell \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right)} (P - P_v) \right) \text{ et}$$

$$\zeta = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} + \frac{P - P_v}{T} \right),$$

l'équation (2.7.d) après simplification par ρ_o , est finalement comme suit :

$$\gamma \frac{\partial P}{\partial t} - \delta \frac{\partial \omega_\ell}{\partial t} - \zeta \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\overline{\overline{D_{\omega_v}}} \cdot \nabla \omega_\ell + \overline{\overline{D_{T_v}}} \cdot \nabla T + \overline{\overline{D_{P_a}}} \cdot \nabla P \right) \quad (\text{B.18})$$

Nous résumons ci-après la définition des différents coefficients du système d'équations (2.19), (2.20) et (2.21) (avec prise en considération de l'hypothèse que le milieu est homogène et isotope i.e. que tout les tenseurs se réduisent à des scalaires) :

$$D_G = \frac{\rho_\ell}{\rho_o} K \text{ avec } K = \frac{k_\ell}{v_\ell} \text{ ;}$$

$$D_P = D_{P_r} + D_{P_v} \text{ avec } D_{P_r} = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{k_\ell}{v_\ell} \right) \text{ et } D_{P_v} = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{k_g}{v_g} + D^* \left(\frac{\rho_g}{\rho_o} \right) \frac{\partial (\rho_v / \rho_g)}{\partial P} ;$$

$$D_T = D_{T_r} + D_{T_v} \text{ avec } D_{T_r} = K \left(\frac{\rho_\ell}{\rho_o} \right) \frac{\partial \psi}{\partial T} \text{ et } D_{T_v} = D^* \left(\frac{\rho_g}{\rho_o} \right) \frac{\partial (\rho_v / \rho_g)}{\partial T} ;$$

$$D_\omega = D_{\omega_r} + D_{\omega_v} \text{ avec } D_{\omega_r} = K \left(\frac{\rho_\ell}{\rho_o} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \omega_\ell} \text{ et } D_{\omega_v} = D^* \left(\frac{\rho_g}{\rho_o} \right) \frac{\partial (\rho_v / \rho_g)}{\partial \omega_\ell} ;$$

$$D_{P_a} = \frac{1}{\rho_o} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \frac{k_g}{v_g} - D^* \frac{\rho_g}{\rho_o} \frac{\partial (\rho_v / \rho_g)}{\partial P} ; \quad \overline{\overline{D_{P_g}}} = \frac{1}{\rho_o} \frac{k_g}{v_g} ;$$

$$\alpha = \left(\frac{D_{\omega_v} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right)}{D^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{\rho_v}{\rho_\ell} \right) ; \quad \xi = \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{D_{T_v}}{D^* \frac{P}{P - P_v}} - \frac{1}{T} \frac{\rho_v}{\rho_o} \right) ;$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) ; \quad \delta = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\partial P_v}{\partial \omega_\ell} + \frac{\rho_o}{\rho_\ell \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right)} (P - P_v) \right) ;$$

$$\zeta = \frac{1}{\rho_o} \frac{M_a}{RT} \left(\varepsilon - \frac{\rho_o}{\rho_\ell} \omega_\ell \right) \left(\frac{\partial P_v}{\partial T} + \frac{P - P_v}{T} \right) ;$$

C-1. ELEMENT QUADRILATERAL A QUATRE NŒUDS

Nous présentons dans ce paragraphe, les fonctions de forme et leurs dérivées, relatives à l'élément quadrilatéral à quatre nœuds (cf. fig. C.1), pour lequel, il est à signaler que les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont confondus (élément isoparamétrique).

Les fonctions de forme et leurs dérivées [25]

$$\mathbf{N} = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle$$

$$\text{avec : } N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) ; \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) ; \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\text{et : } \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \langle (-1+\eta) \quad (1-\eta) \quad (1+\eta) \quad (-1-\eta) \rangle$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \langle (-1+\xi) \quad (-1-\xi) \quad (1+\xi) \quad (1-\xi) \rangle$$

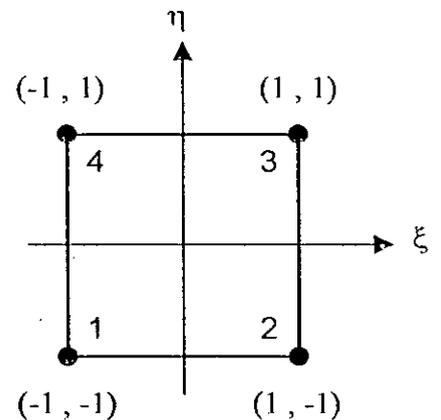


Figure C.1 : Élément quadrilatéral à quatre nœuds.

C-2. INTEGRATION NUMERIQUE

La méthode des éléments finis conduit à des matrices et vecteurs élémentaires dont les éléments se présentent sous forme d'intégrales à une, deux ou trois dimensions, définies sur l'élément réel Ω^e . Ces mêmes intégrales sont systématiquement transformées en des intégrales plus simples sur l'élément de référence Ω^r .

Néanmoins, cette dernière opération ne mène pas pour autant à des expressions qu'on peut intégrer explicitement, elles sont souvent constituées de termes polynomiaux ou des fractions rationnelles compliquées. Par conséquent, on est contraint d'utiliser une méthode numérique d'intégration pour évaluer ces intégrales. L'une des méthodes les plus indiquées et reconnue pour sa haute précision en utilisant un nombre relativement réduit de points d'intégration, est la méthode de **Gauss** [25].

Dans ce qui suit, il sera question de la présentation de cette méthode pour l'intégration numérique à une et deux dimensions sur l'élément de référence étudié.

Les bornes d'intégration en coordonnées de référence sont :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (C.1)$$

C-2-1. Méthode de GAUSS

C-2-1-1. Intégration à une dimension

Le principe de la méthode de **Gauss** consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction polynomiale $f(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration de coordonnées ξ_i :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^r W_i f(\xi_i) \quad (C.2)$$

où : ξ_i , sont les coordonnées des r points d'intégration ;

W_i , sont les coefficients de pondération correspondants, appelés aussi « poids ».

Les $2r$ coefficients en l'occurrence : les r poids W_i et les r abscisses ξ_i sont choisis de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2r - 1$:

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (C.3)$$

La détermination des $2r$ coefficients a_i ($i = 1, 2, \dots, 2r$) de l'expression (C.3) s'effectue sous les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ -1 < \xi_i < 1 \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, r \quad (C.4)$$

A titre d'exemple si on a à intégrer un polynôme d'ordre 3 on utilise 2 points d'intégration seulement, c'est-à-dire : $r = 2$; la condition : $m \leq 2r - 1$ ce qui implique que $m \leq 3$ est vérifiée pour $m = 3$. Dans ce cas les poids et les coordonnées des points d'intégrations sont [25] :

$$W_1 = W_2 = 1 ; \xi_1 = -\xi_2 = 1/\sqrt{3} \quad (C.5)$$

Dans le tableau C.1, on présente [25] les poids W_i et les coordonnées ξ_i pour l'intégration à 1, 2, 3 et 4 points sur un élément linéaire à deux nœuds de coordonnées : $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$.

Tableau C.1 : Intégration numérique de Gauss à une dimension [25].

r	ξ_i	W_i	m
1	0	2	1
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	3
3	0 $\pm \sqrt{3/5}$	8/9 5/9	5
4	$\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$	7

2.2.2- Intégration à deux dimensions

L'extension de la méthode de Gauss à deux dimensions peut se faire à partir du principe de la méthode à une dimension. On trouve dans la littérature deux catégories de méthodes : les méthodes produit et les méthodes directes.

a) Méthode produit : l'intégration à deux dimensions revient à utiliser dans chaque direction ξ et η une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons r_1 points dans le sens ξ et r_2 points dans le sens η , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en ξ d'ordre $(2r_1 - 1)$ et d'un polynôme en η d'ordre $(2r_2 - 1)$:

$$\iint_{\Omega'} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (C.6)$$

b) Méthode directe : La méthode directe propose une autre éventualité pour étendre la méthode de Gauss à deux dimensions, elle est formulée comme suit :

$$\iint_{\Omega'} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r W_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (C.7)$$

Cette catégorie de méthode intègre exactement tous les monômes d'ordre m :

$$\xi^i \eta^j \text{ tels que } i + j \leq m$$

2.2.3- Intégration sur les éléments à deux dimensions (éléments carrés)

La méthode « produit » a pour expression :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (C.8)$$

où : W_i, W_j sont les coefficients donnés dans le tableau C.1 ;
 ξ_i, η_j sont les coordonnées des points d'intégration.

On présente Dans le tableau C.2 quelques formules basées sur la méthode directe :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r W_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (C.9)$$

Tableau C.2 : Formules directes d'Intégration sur un élément carré [25].

Ordre m	Nombre de points r	Coordonnées		Poids
		ξ_i	η_i	W_i
2	3	$\sqrt{2/3}$	0	4/3
		$-1/\sqrt{6}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	4/3
2	3	1	1	4/7
		-5/9	2/9	27/14
		1/3	-2/3	3/2
3	4	± 1	0	2/3
		0	$\pm 1/\sqrt{2}$	4/3
5	7	0	0	8/7
		0	$\pm \sqrt{14/15}$	20/63
		$\pm \sqrt{3/5}$	$\pm \sqrt{3/5}$	20/36

Références bibliographiques

- [1] AZIZI S., MOYNE C. et DEGIOVANNI A. (1988) " Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides – I. Expérimentation " Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 31, No. 11, pp. 2305-2317, 1988.
- [2] BEAR J. (1972) "Dynamics of fluids in porous media" American Elsevier Publishing Company.
- [3] BERBBIA C.A., FERRANTE A. J. (1979) " Computational Methods for the Solution of Engineering Problems " 2nd edition, Pentech Press.
- [4] BORIES S. (1982) "Principes physiques de l'évaporation. Transfert de chaleur et de masse entre un matériau poreux et l'atmosphère. Humidité dans les bâtiments " Collège International des Sciences de la construction pp. 53-71.
- [5] BORIES S. (1984) "Transfert de chaleur et de masse dans les matériaux. Analyse et critique des différents modèles mathématiques utilisés " Collège Int. des Sci. de la construction pp. 13-31.
- [6] BORIES S., BACON G., RECAN M. (1984) " Experimental and numerical study of coupled heat and mass transfer in porous materials " Proceedings of fourth international drying symposium Vol. 1, pp. 159-164. Kyoto international conference hall, Kyoto Japan IDS'84.
- [7] BORIES S. (1985) " Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans le sous-sol " LA HOUILLE BLANCHE No 3/ 4-1985. pp. 211-219.
- [8] BORIES S. (1991) " Fundamentals of Drying Capillary-Porous Bodies " S. Kakaç et al. (eds.). Convective Heat and Mass transfer in porous media, pp. 391-434. © 1991 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [9] BORIES S. et PRAT M. (1996) " Transfert de chaleur dans les milieux poreux " © Techniques de l'Ingénieur, traité Génie énergétique, B 8 250.
- [10] BOUYOUCOS G. (1915) " Effect of temperature on the movement of water vapor and capillary moisture in soils " J. Agricultural and research, Vol. 5, pp. 141-172.
- [11] BRUNAUER S., EMMETT P.H. and TALLER E. (1938) " Adsorption of Gases in Multimolecular Layers " J. Amer. Chem. Soc. Vol. 60, pp. 309-319.
- [12] BURGER A., RECORDON E., BOVET D., COTTON L., SAUGY B. (1984) " Thermique des nappes souterraines " Presses Polytechniques Romandes.
- [13] CHILDS E.C. (1972) " Concepts of soil water phenomena " Soil Science Vol. 113, N°4, pp. 216-253.
- [14] COOK R.D., MALKUS D.S. and PLESHA M.E. (1989) " Concepts and applications of finite element analysis " 3rd edition, John Wiley & Sons. Inc.
- [15] CRAUSSE P. (1983) " Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé " Thèse de Doctorat es-science I.N.P de Toulouse.
- [16] CRONEY D. and COLEMAN O. (1948) " Soil thermodynamics applied to movement of moisture in toad foundations " Seventh Int. Congress for applied mechanics, proceedings, Vol. 3, pp. 163-177.

- [17] DEFAY R., PRIGOGINE I., BELLEMANS A. and EVERETT D.H. (1966) " Surface tension and adsorption " Langmans, London.
- [18] DEGIOVANNI A. et MOYNE C. (1987) "Conductivité thermique de matériaux poreux humides : Evaluation théorique et possibilité de mesure" *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol.30, N°11, pp. 2225-2245.
- [19] DE VRIES D.A. and PHILIP J.R. (1957) " Moisture movement in porous materials under temperature gradients " *Trans. Amc. Geoph. Union*, Vol. 38 N° 2, pp. 222-232.
- [20] DE VRIES D.A. (1958) " Simultaneous Transfer of Heat and Moisture in Porous Media " *Trans. Amc. Geoph. Union*, Vol. 39, pp. 909-916.
- [21] DE VRIES D.A. and AFGAN W.H. (1975) " Heat and mass Transfer in the biosphere -I. Transfer processes in plant environment " *Scripta Book Company, Washington D.C.*
- [22] DE VRIES D.A. (1987) " The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited " *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 30, N° 7, pp. 1343-1350.
- [23] DE VRIES D.A. (1952) " The thermal conductivity of granular materials " *Annexe 1952 -I- Bull. Inst. Intern. du Froid*, pp. 115-131 (1952).
- [24] DHATT G. (1992) " Modélisation des Fluides par Eléments Finis " Université de Technologie de Compiègne Division Modèles Numériques en Mécanique, Département de Génie Mécanique.
- [25] DHATT G. et TOUZOT G. (1984) " Une présentation de la méthode des éléments finis " Deuxième édition, Maloine S.A Editeur.
- [26] EUVRARD D. (1990) " Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, Différences finies, Eléments finis, Méthode des singularités " 2nd édition Masson, Paris.
- [27] FIRDAOUSS M. ; MABSATE M. (1987) " Influence des facteurs de forme sur la thermomigration bidimensionnelle dans les milieux poreux non saturés " *Journées Internationales de thermique*, Vol. 1, pp. 185-188.
- [28] GHALLEB K. (1972) " Migration de l'humidité en milieu poreux non saturé sous l'influence de faibles gradients thermiques " Thèse de troisième cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse.
- [29] GOURDIN A. et BOUMAHRAT M. (1991) " Méthodes Numériques Appliquées " Office des Publications Universitaires Alger.
- [30] GUELLATI A. (1997) " Analyse des aspects massiques et thermiques dans les milieux poreux en régime diffusionnel pure " Thèse de Magister, E.N.P. département de génie mécanique.
- [31] GURR C.G., MARSHALL T.J. and HUTTON J.T. (1952) " Movement of water in soil due to a temperature gradient " *Soil Science*, Vol. 74, pp. 335-345.
- [32] HILLEL A. (1988) " L'eau et le sol. Principes et processus physiques " Université Catholique de Louvain. Unité du génie Rural. Collection PEDASUPS.
- [33] KRISCHER O. und KRÖLL K. (1963) " Die wissenschaftliche grunddalagen der trocknungstechnik " Springer, Berlin.
- [34] LARBI S. (1990) " Quelques aspects de la physique des transferts en milieu poreux lors d'un processus d'humidification par condensation " Thèse de Doctorat, I.N.P. de Toulouse.

- [35] LARBI S., BACON G. et BORIES S.A (1995) " Diffusion d'air humide avec condensation de vapeur d'eau en milieu poreux " *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 38, No. 13, pp. 2411-2426.
- [36] LEBEDEFF A.F. (1927) " The movement of ground and soils waters " *First International Congress of Soil science, Proceedings*, Vol. 1, P.P. 459-494.
- [37] LUIKOV A.V (1966) " Heat and mass transfer in capillary porous bodies " Pergamon Press.
- [38] MARLE C.M (1984) " Les écoulements polyphasiques en milieu poreux : de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique " *Annales des mines Mai-Juin 1984*.
- [39] MATHERON G. (1967) "Eléments pour une théorie des milieux poreux" © Masson et C^{ie} Paris.
- [40] MATTEW N.O., SADIKU S.A (1992) " Numerical Techniques in Electromagnetic "CRC Press, Inc.
- [41] MATHEWS J.H. (1992) " Numerical methods for Mathematics, Science and Engineering " 2nd edition, Prentice-Hall Inter. Editions.
- [42] MITICHE EI-HOCINE (1997) " Etude fondamentale d'un mécanisme d'humidification par condensation en milieu poreux " Thèse de Magister, Centre Universitaire de Médéa spécialité énergétique.
- [43] MOYNE C., BATSALE J.C. et DEGIOVANNI A. (1988) " Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides -II. Théorie " *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 31, No. 11, pp. 2319-2330.
- [44] NIELD D.A. et BEJAN A. (1992) " Convection in porous media " Springer Verlag, New York.
- [45] PRAT M. (1986) " Analysis of experiments of moisture migration caused by temperature differences in unsaturated porous medium by means of two-dimensional numerical simulation " *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, N° 7, pp. 1033-1039.
- [46] PRAT M. (1989) "Modélisation des transferts en milieux poreux changement d'échelle et conditions aux limites" Thèse de Doctorat es-sciences physiques. I.N.P. de Toulouse.
- [47] PRESS W.H, LANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. (1989) " Numerical Recipes The Art of Scientific " Cambridge University Press.
- [48] RECAN M. (1982) " Simulation numérique du comportement thermique d'un sol nu. Application à l'étude de l'évaporation par télédétection " Thèse de Docteur-Ingénieur. Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [49] SLIMANI B. (1994) " Modélisation mathématique des mécanismes de transfert en milieu poreux Application au processus de condensation " Mémoire de Fin d'Etudes. Ecole Nationale Polytechnique, Département Génie Mécanique.
- [50] SMITH W.D. (1943) " Thermal transfer of moisture in soils" *American Geophysical Union Transactions*, Vol. 24, p.p. 511-523.
- [51] WHITAKER S. (1977) " Simultaneous Heat, Mass, and Momentum Transfer in Porous Media : A Theory of Drying " *Adv. In Heat Transfer*, Vol. 13 P.P. 119-200.
- [52] ZIENKIEWICZ O.C and TAYLOR R.L. (1987) " The Finite Element Method " 4th Edition Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics and Non-linearity. Mc Graw Hill.
- [53] ZIENKIEWICZ O.C et TAYLOR R.L. (1991) " La Méthode des Eléments Finis " 4^{ème} Edition Vol.1 (Traduit de l'anglais), Edition afnor.