

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE**



**Département du Génie Electrique
Spécialité Automatique**



Projet de fin d'études

**En vue de l'obtention du diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Automatique**

THÈME

**Commandes hybrides d'un système non linéaire
sous actionné
Simulation et expérimentation**

**Présenté par :
Habiba KHAMMAR
Safa TLIBA**

**Proposé et dirigé par :
Prof. D. BOUKHETALA
Prof. F. BOUDJEMA**

Juin 2009

**Laboratoire de Commande des Processus
Ecole Nationale Polytechnique, 10, AV. Hassen Badi, El-Harrach, Algérie**

المخلص : يتطرق هذا العمل إلى التحكم الهجين للأنظمة اللاخطية المشغلة داخليا، المطبقة على نموذج النواس المقلوب المتمثل في عربة متحركة تحمل نواس في حركة دورانية على مجال 360° . في هذا الصدد يتم تطبيق طريقة التحكم الهجين، الذي يسمح في مرحلة أولى بسحب النواس إلى وضعه المقلوب مع احترام حدود تنقل العربة، عن طريق التحكم بواسطة تقليص الطاقة، وذلك بإتباع منهجين : الأول يتمثل في التحكم عن طريق الانزلاق، و الثاني بواسطة التحكم عن طريق المنطق الضبابي. في مرحلة ثانية يتم تطبيق رجوع الهيئة الأمثل، الذي يسمح للنواس بالوصول إلى وضعية التوازن الغير مستقر و البقاء فيها. أخيرا سنختبر النتائج المتحصل عليها على النموذج الحقيقي RG-IPS40 لنتحقق من نجاعة طرق التحكم المتبعة في هذا العمل.

الكلمات المفتاحية : النواس المقلوب، التحكم الهجين، التحكم بواسطة تقليص الطاقة، نمط الانزلاق، التحكم الغامض، رجوع الهيئة الأمثل.

Résumé : Le présent travail porte sur la commande hybride d'un système non linéaire sous actionné. Celle-ci prend pour application le système du pendule inversé consistant en un chariot mobile en translation supportant un pendule en rotation libre, cette plate-forme doit permettre une rotation de 360° .

A cet effet, une commande hybride est mise en œuvre, celle-ci permet dans un premier temps, de ramener le pendule inversé vers sa position inversée tout en respectant les limites de la course du chariot et ceci par le biais d'une commande à énergie minimale. Cette commande est approchée de deux manières, la première étant la commande par mode de glissement et la seconde étant la commande par logique floue.

Dans un second temps, un retour d'état optimal est appliqué assurant ainsi la stabilisation et le maintien du pendule autour de son point d'équilibre instable.

Enfin, les commandes synthétisées sont mises à l'épreuve par implémentation sur la maquette RG-IPS40.

Mots clés : Pendule inversé, commande hybride, commande à énergie minimale, mode de glissement, commande floue, retour d'état optimal.

Abstract: This work deals with the hybrid control of a non linear under-actuated system. This method is applied on an inverted pendulum system consisting of a mobile cart in translation supporting a rod in free rotation. This platform has to permit a rotation of 360° .

For this purpose, a hybrid control is used, this method allow at first to balance the pendulum till it reaches its inverted position while respecting the limitation of the cart displacement. This purpose is achieved using a swing up controller. Two approaches of this control technique are considered, the first is through sliding mode control and the second is through fuzzy logic control. Secondly, an optimal state feedback is applied which maintains and stabilizes this way the pendulum at its unstable equilibrium point.

Finally, synthesized controllers are put in the tested through implementation on the plant RG-IPS40.

Key words: Inverted pendulum, hybrid control, swing up control, sliding mode, fuzzy control, optimal state feedback.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à exprimer nos sincères remerciements à nos promoteurs

Monsieur **D. BOUKHETALA**, Professeur à l'ENP et Monsieur **F. BOUDJEMA**, Professeur à l'ENP d'avoir accepté de nous encadrer et de nous avoir éclairé jusqu'à l'aboutissement de ce travail. Qu'ils trouvent ici, le témoignage de notre profonde gratitude et reconnaissance.

Nous remercions les membres de jury nous faisant honneur par leur participation à l'examen de ce travail.

Nous tenons également à remercier l'ensemble de nos enseignants d'Automatique pour le précieux savoir qu'ils nous ont prodigué.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail voie le jour.

Dédicaces

A mes chers parents

A ma chère sœur Wafaa

A mes chers frères Hichem et Merouane

A mon adorable petite nièce Sarah

A mon très cher époux Hichem

A ma famille

A ma belle famille

A mon amie de toujours Safa

A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

Habiba

Dédicaces

A mes chers parents,

A ma chère grand-mère,

A mes chères sœurs Sameh, Amel et Soumia,

A mon frère Rami,

A mes adorables neveux,

A mes chères tantes,

A mes chers cousins Nabil et Ferial,

A ma meilleure amie Habiba,

A tous mes proches,

A tous ceux qui sont chers à mon cœur.

A ceux que j'aime et qui m'aiment

Safa

Sommaire

Introduction générale

Chapitre I : Présentation de la maquette du pendule inversé

Introduction	1
I.1 Constitution du banc d'essai	4
I.1.1 Composants mécaniques	5
I.1.2 Composants électriques	5
I.1.3 Processeur de signal numérique (DSP).....	7
I.1.3.a La fonction DSP de la RG-DSPIO01	7
I.1.3.b Disposition des pates de la carte RG-DSPIO01	8
I.1.4 Câblage	9
I.2 Présentation du logiciel de simulation	10
I.2.1 CEMTool	10
I.2.2 SIMTool	10
I.2.3 AUTOTool	11
I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé.....	12
I.3.1. En médecine	12
I.3.2 En robotique	12
I.3.3 Dans l'aérospatiale	13
I.3.4. Dans la recherche	14
Conclusion	14

Chapitre II : Modélisation du pendule inversé simple

Introduction	16
II.1 Description du pendule inversé	16
II.2 Modélisation du pendule inversé.....	17
II.2.1 Avec la force F comme signal d'entrée	17
II.2.2 Avec la tension V comme signal d'entrée	20
II.3 Simulation en boucle ouverte	22
II.3.1 Simulation du système libre	22
II.3.2 Simulation du système forcé	23

Conclusion	23
------------------	----

Chapitre III : Rappels théoriques

Introduction	28
III.1 L'observateur d'état	28
III.2 Commande linéaire quadratique	30
III.2.1 Commande LQ à horizon fini	30
III.2.2 Commande LQ à horizon infini	32
III.2.3 Robustesse de la commande LQ	33
III.2.4 Choix des pondérations	34
III.3 Commande par mode de glissement	34
III.3.1 Généralités sur la théorie du contrôle par mode de glissement	35
III.3.1.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande	35
III.3.1.2 Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état	36
III.3.1.3 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la commande équivalente	37
III.3.2 Principe de la commande à structure variable	38
III.3.2.1 Condition d'existence du régime glissant	38
III.3.2.2 Le mode non glissant	39
III.3.2.2.a Approche directe	40
III.3.2.2.b Approche de LYAPUNOV	40
III.4 Commande par logique floue	41
III.4.1 Notions de base sur la logique floue	41
III.4.2 Notions de base sur la commande par logique floue.....	44
III.4.2.1 Contrôleur flou	44
III.4.2.2 Types de régulateurs flous	45
Conclusion	46

Chapitre IV : Synthèse des lois de commandes

Introduction	48
IV.1 Commande par mode de glissement	48
IV.2 Commande à énergie minimale.....	52
IV.2.1 Stratégie adoptée	52
IV.2.2 Synthèse de la commande linéaire	52

IV.2.2.1 Linéarisation	52
IV.2.2.2 Synthèse de la commande LQ	53
IV.2.3 Synthèse de l'observateur	54
IV.2.4 Synthèse de la commande non linéaire	55
IV.2.4.1 Première approche	55
IV.2.4.1 Deuxième approche	63
IV.3 Commande par logique floue	63
IV.3.1 Commande à énergie minimale	63
IV.3.2 Commande stabilisante	63
Fig IV.27 Fonctions d'appartenance des entrées pour la commande floue stabilisante.....	63
IV.3.3 Commande floue combinée avec la commande linéaire quadratique	63
Conclusion	63

Chapitre V: Implémentation et résultats expérimentaux

Introduction	84
III.1 Considérations pratiques	84
III.2 Résultats expérimentaux	84
Conclusion	86

Conclusion générale

Bibliographie

Liste des figures

Fig I.1 Maquette du pendule inversé	4
Fig I.2 Composants électriques du système	6
Fig I.3 Diagramme de la RG-DSPIO01	8
Fig I.4 Schéma de câblage de la maquette	9
Fig I.5 Fenêtre de commande de l'environnement de développement CEMTool.....	10
Fig I.6 La plate forme de simulation SIMTool.....	11
Fig I.7 Principe générale de fonctionnement.....	11
Fig I.8 Calcul des contraintes	12
Fig I.9 : Le robot BIPED et sa représentation 3D	13
Fig I.10 : Le robot JOE et sa représentation 3D	13
Fig I.11 : Pendule gyroskopique inversé.	14
Fig II.1 Schéma du pendule inversé	16
Fig II.2 Forces agissant sur le simple pendule inversé	17
Fig II.3 Résultats de simulation du système en boucle ouverte.....	22
Fig II.4 Résultats de simulation du système en boucle ouverte.....	23
Fig III.1 Structure de la commande avec synthèse d'un observateur de Luenberger	30
Fig III.2 Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande	35
Fig III.3 Structure de régulation par commutation au niveau d'une contre réaction.....	36
Fig III.4 Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.....	37
Fig III.5 Trajectoire de l'état vis-à-vis de la surface de glissement.....	40
Fig III.6 Architecture générale d'un contrôleur flou	45
Fig IV.1 Simulation du système commandé par mode de glissement.....	50
Fig IV.2 Simulation du système commandé par mode de glissement.....	51
Fig IV.3 Diagramme de commande du pendule à deux zones de commande.	57
Fig IV.4 Simulation du système commandé par la commande à énergie minimale.....	58
Fig IV.5 Diagramme de commande du pendule à trois zones de commande.....	59
Fig IV.6 Stabilisation du pendule par la première approche	60
Fig IV.7 Stabilisation avec rejet de perturbation	60
Fig IV.8 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$	61
Fig IV.9 Poursuite d'un signal sinusoïdal avec rejet de perturbation.....	61
Fig IV.10 Stabilisation avec introduction d'une variation paramétrique sur $m +10\%$	62

Fig IV.11 Stabilisation avec introduction d'une variation paramétrique sur m -10%	62
Fig IV.12 Rejet de perturbation avec variation paramétrique sur m de +10%	63
Fig IV.13 Suivi de trajectoire avec variation paramétrique sur m de +10%	63
Fig IV.14 Stabilisation du pendule par la deuxième approche.....	66
Fig IV.15 Stabilisation avec rejet de perturbation.....	67
Fig IV.16 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$	67
Fig IV.17 Poursuite avec rejet de perturbation.....	68
Fig IV.18 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de +10%	68
Fig IV.19 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de -10%	69
Fig IV.20 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique sur m de +10%	69
Fig IV.21 Suivi de trajectoire avec variation paramétrique sur m de +10%	70
Fig IV.22 (a) Représentation des forces appliquées sur le pendule. (b) L'effet du travail du système.	71
Fig IV.23 Stratégie de la commande à énergie minimale.....	72
Fig IV.24 Fonctions d'appartenance pour θ et $\dot{\theta}$	73
Fig IV.25 Fonctions d'appartenance pour la commande.....	73
Fig IV.26 La réponse du système	74
Fig IV.27 Fonctions d'appartenance des entrées pour la commande floue stabilisante	75
Fig IV.28 Fonctions d'appartenance pour la commande stabilisante.....	75
Fig IV.29 Simulation de la stabilisation par commande floue	77
Fig IV.30 Stabilisation du pendule inversé	78
Fig IV.31 Stabilisation avec rejet de perturbation.....	78
Fig IV.32 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$	79
Fig IV.33 Poursuite avec rejet de perturbation.....	79
Fig IV.34 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de +10%	80
Fig IV.35 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de -10%	80
Fig IV.36 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique sur m de +10%	81
Fig IV.37 Poursuite de trajectoire avec une variation paramétrique sur m de +10%	81
Fig V.1 Stabilisation du pendule inversé.....	87
Fig V.2 Stabilisation avec rejet de perturbation	87
Fig V.3 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$	88
Fig V.4 Poursuite d'un signal carré de fréquence $f=0.1 \text{ Hz}$	88
Fig V.5 Poursuite avec rejet de perturbation	89
Fig V.7 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de -66%	89
Fig V.9 Stabilisation du pendule inversé.....	90

Fig V.11 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$	90
Fig V.13 Poursuite avec rejet de perturbation	91
Fig V.15 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de -66%	91

Liste des tableaux

Tableau I.1 Boutons de la partie électrique du système	6
Tableau I.2 : Spécifications techniques du système	7
Tableau I.3 Spécifications DSP de la RG-DSPIO01	8
Tableau I.4 Disposition des pattes du port	9
Table IV.1 Table des règles pour l'algorithme d'oscillation.....	73
Table IV.2 Table des règles pour l'algorithme de stabilisation	76

Introduction générale

Le pendule inversé a fait l'objet d'une grande discussion tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites.

Il est en outre très utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes : c'est un système non linéaire, sous actionné, couplé, intrinsèquement instable et il possède plusieurs implications pratiques.

C'est dans ce cadre que se situe le travail que nous présentons dans ce mémoire. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la commande hybride du fait que celle-ci nous permet de commander le pendule inversé sur 360° . En effet, dans une première phase on se doit de mettre en œuvre une commande non linéaire dans l'optique de redresser le pendule ; et dans une seconde phase on envisage de synthétiser une commande linéaire qui n'opère que sur la zone supérieure.

Nous organisons ce manuscrit en cinq chapitres, comme suit :

Chapitre I : Nous y présentons le banc d'essai dont nous disposons au laboratoire ainsi que l'environnement de développement et la plate forme de simulation l'accompagnant. Nous concluons ce chapitre en présentant l'intérêt de l'étude des pendules inversés.

Chapitre II : Consacré à la modélisation analytique du système objet de notre étude. Le modèle ainsi obtenu sera utilisé pour permettre la simulation du système. Les critères de commandabilité et d'observabilité non linéaires y sont également abordés.

Chapitre III : Dans lequel on introduit les notions fondamentales ayant trait aux outils et aux commandes dont nous avons besoin.

Chapitre IV : Représente le cœur de cette étude, en effet, nous y synthétisons les commandes que nous appliquons au pendule inversé. En l'occurrence la commande optimale linéaire quadratique opérant au voisinage du zéro ainsi que deux types de commandes permettant le redressement du pendule ; la première est constituée d'une commande par mode

de glissement pour laquelle nous proposons deux surfaces ; la première surface a pour philosophie la minimisation de l'énergie du pendule, quant à la seconde, elle propose la minimisation de la somme de l'énergie du pendule et du chariot.

Le second type de commande permettant le balancement du pendule est la commande par logique floue. La mise au point de cette dernière découle du même principe de minimisation de l'énergie du pendule, mais approché d'une manière plus intuitive propre au raisonnement flou. A la fin de la synthèse de chaque type de commande, nous présentons les résultats de simulation du système commandé mis à l'épreuve de perturbations et de variations paramétriques, chose qui nous permettra d'évaluer les performances et la robustesse de ces commandes.

Chapitre V : Portant sur l'implémentation des commandes synthétisées dans le précédent chapitre, nous y exposons les résultats expérimentaux obtenus.

Enfin, Nous finissons ce mémoire par une conclusion générale dans laquelle est présentée notre méthodologie de travail, ainsi qu'une suggestion pour les travaux à venir sans oublier les difficultés rencontrées.

Chapitre I

Présentation de la maquette du pendule inversé

Introduction :

Avant d'entamer notre étude portant sur la synthèse et l'implémentation de commandes sur le pendule inversé, il convient de présenter la maquette sur laquelle on validera nos algorithmes de contrôle. Nous présenterons ensuite l'intérêt de l'étude des différents types de pendules et ce que les résultats de ces études peuvent avoir comme application dans plusieurs domaines allant de la robotique à la médecine jusqu'à l'aérospatial.

I.1 Constitution du banc d'essai : [1]



Fig I.1 Maquette du pendule inversé

La maquette du pendule inversé dont on dispose au laboratoire (LCP) est composée des éléments suivants :

- Un chariot mobile de masse M en translation sur un rail horizontal, entraîné par un moteur AC piloté en tension. Un capteur fournit une image en tension de la position du chariot le long de cet axe horizontal.

- Le chariot supporte une barre de masse négligeable, avec à son bout une masse m . La barre est articulée par une liaison pivot, mobile entre deux butées angulaires. Un capteur fournit une image en tension de l'angle de la barre par rapport à une référence supposée verticale.

Soit :

l : La distance entre l'axe de rotation de la tige et le centre de gravité du pendule et la masse du pendule.

θ : L'angle entre le pendule et la verticale.

x : La position du chariot par rapport à l'origine.

y : La position de la masse m par rapport à l'origine.

L'angle θ est identifié par le biais d'un encodeur connecté au pendule, tandis que la position x du chariot est identifiée grâce à un encodeur connecté au moteur.

Le pendule inversé ayant deux sorties (l'angle θ et la position x) et une seule entrée (la force linéaire F), il est considéré comme un système sous-actionné. Ce qui rend sa commande extrêmement délicate.

I.1.1 Composants mécaniques :

Le procédé utilisé en laboratoire comprend les composants mécaniques figurant sur la figure **I.1**. Ajoutés à ceux la :

- Un encodeur de détection de l'angle θ .
- Un encodeur de détection de la position x .

Le système opère, donc comme suit :

L'énergie rotative du moteur est transmise au chariot à travers la vis à bille. Elle est alors convertie en un mouvement linéaire que l'encodeur connecté au moteur détecte. La position x du chariot est alors évaluée.

L'encodeur connecté à la tige détecte quant à lui l'angle θ . La valeur de celle-ci est alors à son tour évaluée.

I.1.2 Composants électriques :

La partie électrique jointe au procédé est composé d'un panneau de control constitué des boutons suivants :

- MOVE : sert à déclencher le moteur.
- LED : sert à visualiser l'état des différentes opérations
- MODE : sert à choisir de commander le moteur manuellement (MANUAL) ou par le biais de CEMTOOL

Si le bouton MODE indique MANUAL, on peut faire fonctionner le moteur en appuyant sur les boutons du panneau MOVE.

Si le bouton MODE indique CEMTool, le contrôle du pendule se fait alors par le biais de ce dernier.



Fig I.2 Composants électriques du système

Tableau I.1 Boutons de la partie électrique du système

Composants		Fonction
LED	READY	S'allume quand le système est opérationnel
	LIMIT	S'allume quand le chariot atteint la limite de sa course à droite ou à gauche
	INITIALIZE	S'allume pendant l'initialisation du système
	CEMTool	S'allume quand le système est contrôlé par CEMTool
MOVE	LEFT	Se translate vers la gauche avec MODE en MANUAL
	INITIALIZE	Initialisation du système
	RIGHT	Se translate vers la droite avec MODE en MANUAL
MODE	MANUAL/CEMTool	Choix du mode manuel ou CEMTool
CEMTool		Connecteur 25P (à connecter à l'interface RG-IO)
POWER		Alimente le procédé

Les spécifications mécaniques et électriques de notre système sont détaillées sur le tableau ci-dessous (*Tableau I.2*) :

Tableau I.2 : Spécifications techniques du système [1]

Caractéristique		Valeur
Spécifications Mécaniques	W×L×H (mm)	1300×200×250 (mm)
	Longueur du pendule	400 mm
	Poids du pendule	0.2 Kg
	Poids du chariot	1 Kg
	Déplacement	900 mm
	Pas de la vis à bille	12.7 mm
Spécifications électriques	Tension de sortie du moteur	24 V, 60 W
	Vitesse maximale du moteur	3800 tr/mn
	Impulsions de l'encodeur	4000 impulsions (×4)
	Tension d'entrée du moteur	0 ~ 5V

I.1.3 Processeur de signal numérique (DSP) :

Le processeur de signal numérique (ou Digital Signal Processor en anglais) a une architecture optimisée pour effectuer des calculs complexes en un coup d'horloge, mais aussi à accéder très facilement à un grand nombre d'entrées-sorties (numériques ou analogiques).

C'est pour quoi, le programme de commande que l'on développe sous la plate forme de simulation « SIMTool », est implémenté sur une carte DSP (TMS320C32).

Cette implémentation ne s'effectue qu'après avoir généré le code 'c' du programme en question par le biais de l'outil « AUTOTool ».

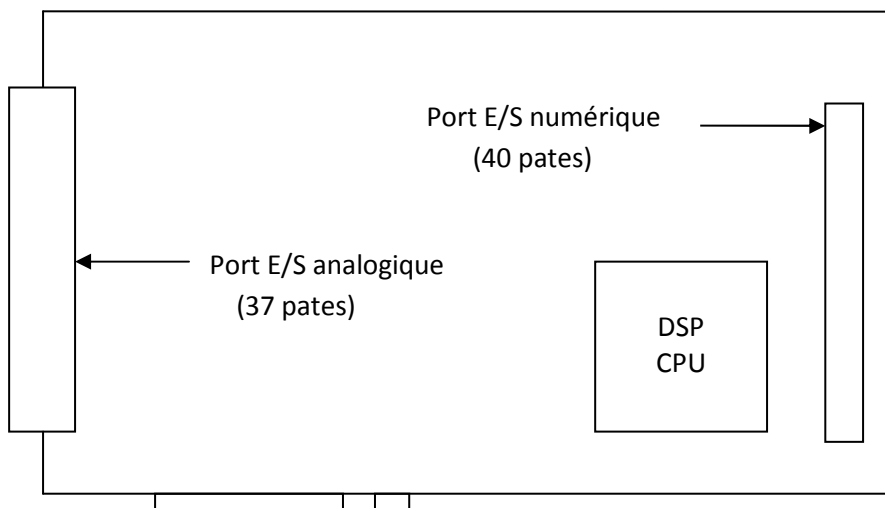
Dans ce paragraphe, nous verrons plus en détail la structure de la carte DSP, ses entrées/sorties avec les différentes fonctionnalités qui leur sont associées.

I.1.3.a La fonction DSP de la RG-DSPIO01 :

La RG-DSPIO01 permet des opérations rapides et une simulation en temps réel en utilisant la fonction DSP. Cette simulation exécute le contrôle du pendule à travers la simulation temps réel qui utilise la DSP et la fonction E/S de la RG-DSPIO01 au même temps.

Tableau I.3 Spécifications DSP de la RG-DSPIO01

Division		RG-DSPIO01
Processeur	Processeur principal	TMS320C32
	Fréquence	60 Mhz
Mémoire	ROM	128 Kb
	SRAM	128 Kb (ou 512 Kb)
	SRAM rapide	256 Kb
Communication Série	Contrôleur	Z85C30
	Nombre de portes	1
Interface		PCI BUS

I.1.3.b Disposition des pates de la carte RG-DSPIO01 :**Fig I.3 Diagramme de la RG-DSPIO01**

Les ports d'E/S analogique et numérique sont des ports qui se connectent au dispositif externe. Dans notre cas, la maquette est connectée sur le port analogique étant donné qu'elle reçoit et transmet des données analogiques en l'occurrence des tensions émanant des capteurs ou du calculateur.

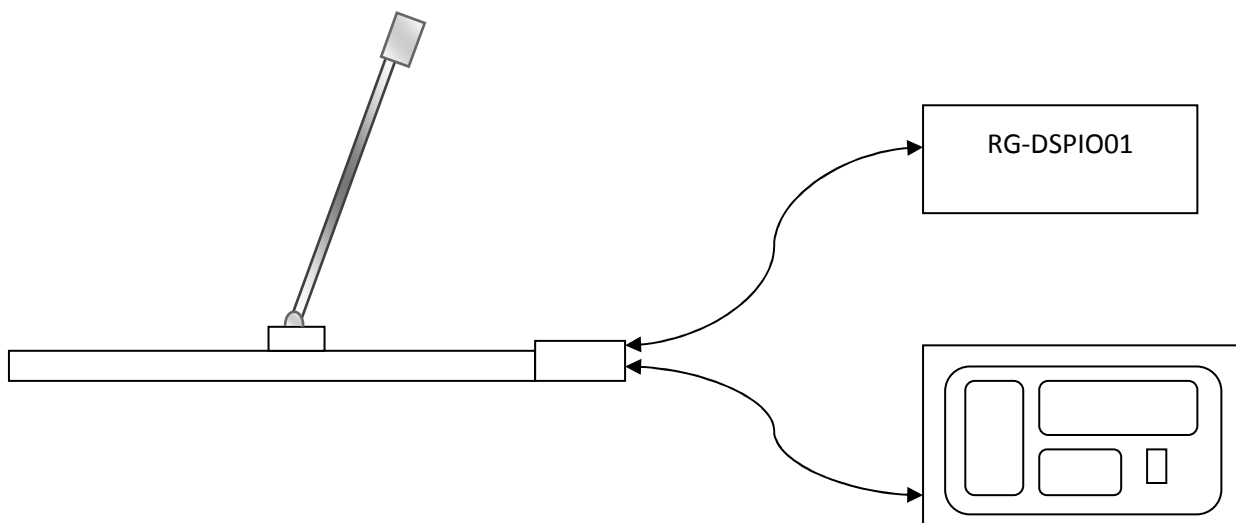
Etant donné qu'on s'intéresse au port d'E/S analogique, nous présentons sur le tableau ci-dessous la description de chaque pin de celui-ci.

Tableau I.4 Disposition des pattes du port d'E/S Analogique de la RG-DSPIO01

No.	Symbole	Remarques	No.	Symbole	Remarques
1	AOUT0	AO ch0	20	AOUT1	AO ch1
2	AOUT2	AO ch0	21	AOUT3	AO ch3
3	AGND	Analog GND	22	AIN0	AI ch0
4	AIN1	AI ch1	23	AIN2	AI ch2
5	AIN3	AI ch3	24	AIN4	AI ch4
6	AIN5	AI ch5	25	AIN6	AI ch6
7	AIN7	AI ch7	26	ENCOXB-	Ch0 B-
8	ENCOXB+	Ch0 B+	27	ENCOXA-	Ch0 A-
9	ENCOXA+	Ch0 A+	28	ENC0YB-	Ch1 B-
10	ENC0YB+	Ch1 B+	29	ENC0YA-	Ch1 A-
11	ENC0YA+	Ch1 A+	30	ENC1XB-	Ch2 B-
12	ENC1XB+	Ch2 B+	31	ENC1XB-	Ch2 A-
13	ENC1XA+	Ch2 A+	32	ENC1YB-	Ch3 B-
14	ENC1YB+	Ch3 B+	33	ENC1YB-	Ch3 B-
15	ENC1YA+	Ch3 A+	34	DGND	Digital GND
16	PWM1	PWM ch1	35	PWM2	PWM ch2
17	DGND	Digital GND	36	VCC	+5V
18	AGND	Analog GND	37	-15V	-15V
19	+15V	+15V			

I.1.4 Câblage :

Afin de contrôler notre système, on doit effectuer tout d'abord le câblage représenté sur le schéma ci-dessous:

**Fig I.4 Schéma de câblage de la maquette**

- Un câble 25p-25p connecte la maquette à la partie puissance (Fig I.2)
- Un câble 25p-37p connecte la maquette à la RG-DSPIO01.

I.2 Présentation du logiciel de simulation:

I.2.1 CEMTool :

CEMTool est l'environnement de développement livré avec la maquette du pendule inversé dont on dispose.

C'est un environnement de calcul numérique matriciel. CEMTool présente un mode de compatibilité, qui permet de lancer les programmes développés sous cet environnement sous MATLAB. Il possède deux modes (CEM & M mode) suivant la syntaxe; les extensions de ceux-ci sont respectivement (.cem & .m).

Le mode « cem » est pour les utilisateurs habitués à travailler avec le langage C, tandis que le mode « m » est pour ceux plus habitués à travailler avec matlab.

Après le lancement de CEMTool, une fenêtre de commande s'exécute permettant à l'utilisateur de taper une commande quelconque obéissant à la syntaxe de CEMTool.

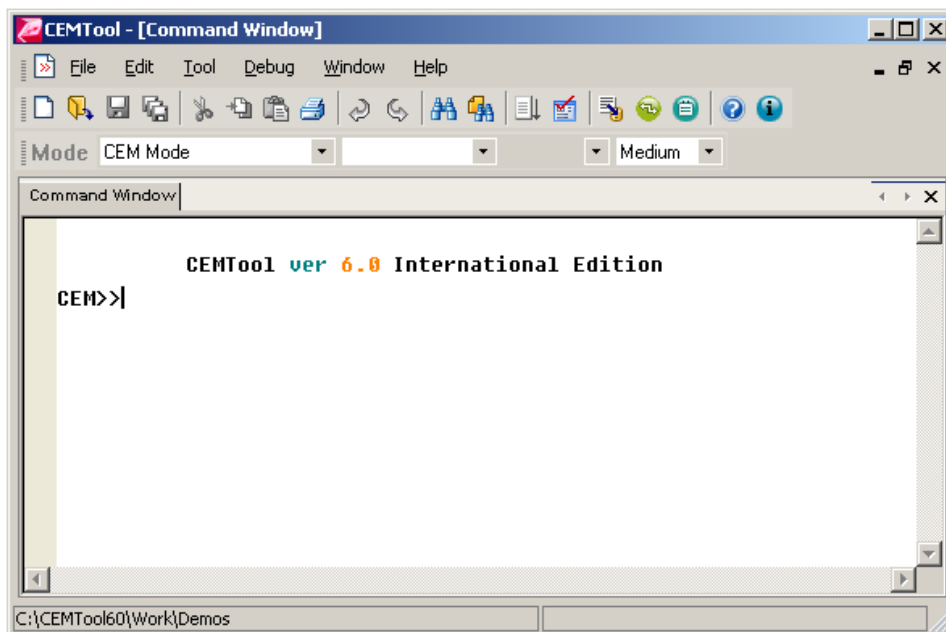


Fig I.5 Fenêtre de commande de l'environnement de développement CEMTool

I.2.2 SIMTool :

C'est une *plate-forme* de simulation multi-domaine et de modélisation de systèmes dynamiques. Il fournit un environnement graphique et un ensemble de bibliothèques contenant des blocs de modélisation qui permettent le design précis, la simulation, l'implémentation et le contrôle de système.

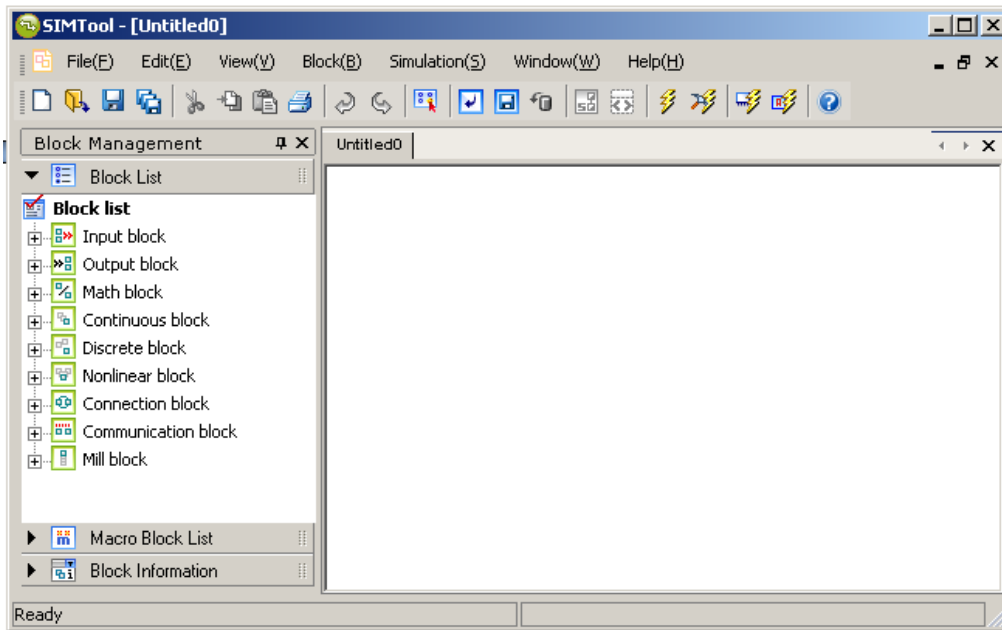


Fig I.6 La plate forme de simulation SIMTool

I.2.3 AUTOTool :

C'est un outil très important, permettant la génération automatique du code C à partir du schéma bloc conçu sur SIMTool, sa compilation ainsi que son transfert vers la carte DSP.

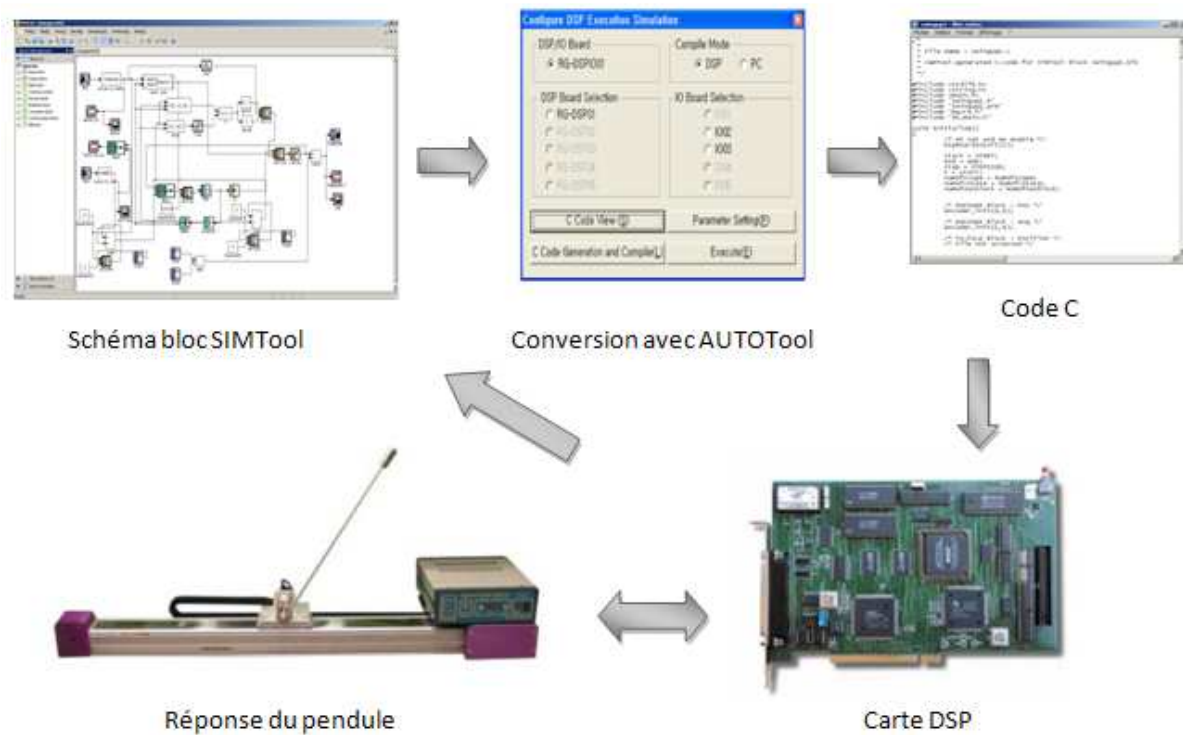


Fig I.7 Principe générale de fonctionnement

I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé: [2]

L'importance de l'étude du pendule inversé est illustrée à partir des exemples d'application cités ci-dessous :

I.3.1. En médecine :

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, dont les deux axes de rotations principales sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses (remplacement chirurgical d'un organe ; la pièce ou l'appareil de remplacement : prothèse dentaire) pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle de double pendule inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse, comme le montre la figure suivante.

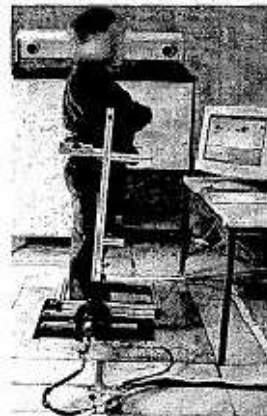


Fig I.8 Calcul des contraintes

Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupés. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

I.3.2 En robotique :

Dans le même ordre d'idée, un robot est vu comme un pendule inversé. Pour maintenir le robot en équilibre il suffit de stabiliser le pendule inversé correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations. A l'occasion,

nous citons quelques exemples des robots qui sont déjà étudiés et conçus à base de ce principe:

- *Le robot BIPED* : peut se présenter par deux doubles pendules inversés en série, dont les deux pendules sont couplés par une tige avec deux articulations.

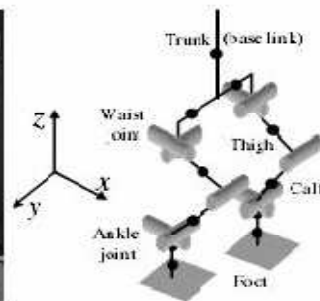
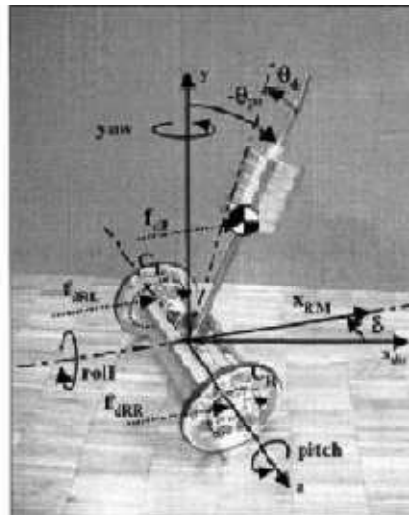


Fig. 1. Overview of "Tonask" Fig. 2. 3D-model

Fig I.9 : Le robot BIPED et sa représentation 3D

- *Le robot JOE* : Il est vu comme un pendule inversé simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues.



Robot JOE

Vue d'un JOE

Fig I.10 : Le robot JOE et sa représentation 3D

I.3.3 Dans l'aérospatiale :

Dans ce domaine aussi, l'étude des pendules inversés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fusées...etc.

- *Pour stabiliser l'attitude d'un satellite par les actionneurs gyroscopiques :*

Les actionneurs gyroscopiques également appelés girodynes (CMG : Control Moment Gyro) constituent de nouveaux systèmes d'actionneurs qui permettent de générer des couples

dynamiques de commande de basculement d'attitude d'un satellite. L'expérience consiste à le rappeler vers la position d'équilibre (instable), il est donc vu comme un pendule inversé.



Fig I.11 : Pendule gyroskopique inversé.

· *Pour le lancement des fusées :*

Lors de son lancement, une fusée est vue comme un pendule inversé simple, donc il faut maintenir sa position verticale par rapport à la terre et pour cela, des moteurs à propulsion sont installés dans les deux cotés de la fusée (gauche et droite).

I.3.4. Dans la recherche :

Vu sa complexité, le pendule inversé est considéré comme l'un des meilleurs systèmes pour tester des lois de commande modernes.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons décrit le banc d'essai dont on dispose au laboratoire (RG-IPS40) avec sa partie électrique et mécanique, la plate forme de simulation SIMTool et l'environnement de développement CEMTool, tous deux fournis avec la maquette.

Nous avons ensuite présenté l'intérêt de l'étude de ce système et les différentes applications qu'il a dans différents domaines.

Enfin, dans l'objectif de ramener le pendule dans sa position inversée, nous allons synthétiser plusieurs commandes et les implémenter sur le système réel. Ceci fera l'objet des prochains chapitres.

Chapitre II

Modélisation du pendule inversé

Introduction :

Avant d'entamer le problème de commande du pendule inversé, une modélisation de celui-ci s'impose. Pour ce faire, nous allons nous baser sur les équations de Newton pour établir les relations entre les différentes grandeurs physiques du système. L'ensemble de ces relations constitue le modèle de connaissance sur lequel on s'appuiera lors de la synthèse de commandes dans les chapitres qui suivront. Ensuite, nous mettrons le modèle non linéaire obtenu sous sa forme d'état. Et pour mieux cerner les besoins en matière de commande, nous verrons à la fin de ce chapitre le comportement et les caractéristiques du système en boucle ouverte.

II.1 Description du pendule inversé :

Tout comme on l'a vu dans le chapitre précédent, notre système est constitué des éléments suivants :

- Un chariot de masse M mobile sur un plan horizontal ;
- Une tige de masse négligeable avec à son bout une masse m , reliée au chariot par une liaison pivot.

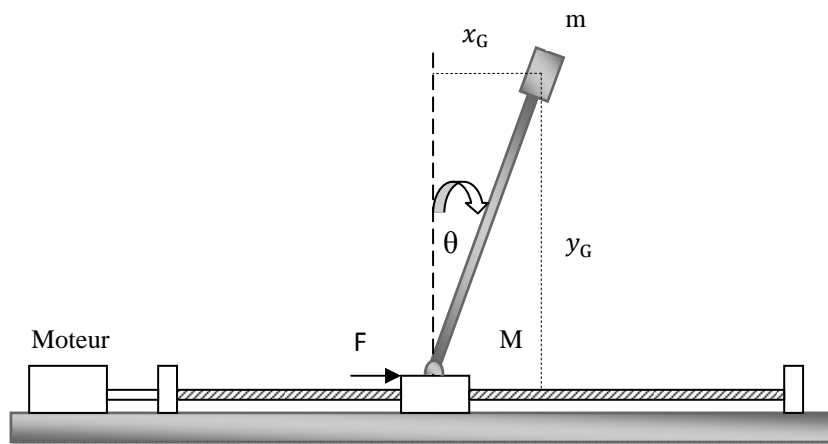


Fig II.1 Schéma du pendule inversé

L'application d'une force F sur le chariot induira un déplacement x de celui-ci sur l'axe horizontal et une rotation d'un angle θ de la tige.

II.2 Modélisation du pendule inversé:

II.2.1 Avec la force F comme signal d'entrée: [3][4]

Les forces appliquées sur le pendule sont représentées sur la figure ci-dessous (**Fig II.2**) :

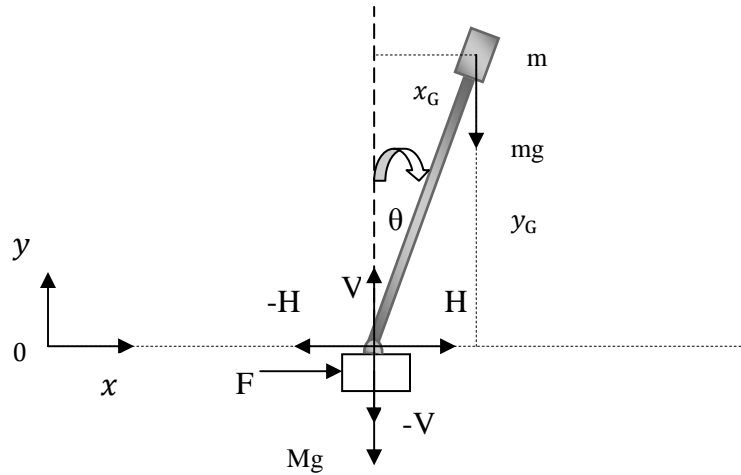


Fig II.2 Forces agissant sur le pendule inversé

Où :

$H = H(t)$: force de réaction horizontale au niveau de la liaison pivot.

$V = V(t)$: force de réaction verticale au niveau de la liaison pivot.

H étant la force horizontale appliquée par le chariot sur le pendule, tandis que $-H$ est la force horizontale appliquée par le pendule sur le chariot.

Les mêmes conventions sont appliquées sur les forces verticales V et $-V$.

x et y sont les coordonnées du plan fixe non rotationnel x - y .

$\theta(t)$: Déplacement angulaire du pendule de la position verticale.

M : Masse du chariot.

m : Masse du pendule.

l : Longueur de la tige.

La force appliquée sur le chariot est décrite par la force F .

On modélise les frottements entre le chariot et les rails par :

$$f_c = -\mu_c \dot{x} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

μ_c : Coefficient de frottement du chariot.

Soit (x_G, y_G) les coordonnées du centre de gravité du pendule, alors on a :

$$x_G = x + l \sin \theta \quad (\text{II.2})$$

$$y_G = l \cos \theta \quad (\text{II.3})$$

L'équation décrivant le mouvement de rotation du pendule autour de son centre de gravité est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton; la somme des moments par rapport au centre de gravité du pendule nous donne :

$$V l \sin \theta - H l \cos \theta = 0 \quad (\text{II.4})$$

L'équation décrivant le mouvement horizontale du centre de gravité du pendule est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton sur l'axe des abscisses :

$$m \frac{d^2(x + l \sin(\theta))}{dt^2} = H \quad (\text{II.5})$$

En développant cette équation on obtient:

$$m(\ddot{x} + l[-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta)]) = H \quad (\text{II.6})$$

L'équation décrivant le mouvement vertical du centre de gravité du pendule est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton sur l'axe des ordonnées :

$$m \frac{d^2(l \cos(\theta))}{dt^2} = V - mg \quad (\text{II.7})$$

En développant cette équation on obtient:

$$ml(-\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - \ddot{\theta} \sin(\theta)) = V - mg \quad (\text{II.8})$$

Et pour finir on applique la seconde loi de Newton sur le chariot :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F - H - f_c \quad (\text{II.9})$$

En remplaçant l'équation (II.9) dans l'équation (II.6) on obtient :

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f_c = u - M\ddot{x} \quad (\text{II.10})$$

Maintenant on remplace les équations (II.9) et (II.10) dans (II.1) on obtient :

$$(mg - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \sin(\theta))l\sin(\theta) + f_c l \cos(\theta) - (F - M\ddot{x})l \cos(\theta) = 0 \quad (\text{II.11})$$

Après remplacement de $F - M\ddot{x}$ de l'équation (II.11) dans l'équation (II.12) et après simplification, on obtient :

$$mglsin(\theta) - ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos(\theta) = 0 \quad (\text{II.12})$$

On pose : $a = \frac{1}{m+M}$

L'équation (II.11) devient :

$$\ddot{x} = -mal\ddot{\theta} \cos(\theta) + mal\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - af_c + aF \quad (\text{II.13})$$

En remplaçant l'équation (II.14) dans l'équation (II.13), on obtient :

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin(\theta) - \frac{mla\dot{\theta}^2 \sin(2\theta)}{2} + af_c \cos(\theta) - a\cos(\theta)F}{l(1-ma \cos^2(\theta))} \quad (\text{II.14})$$

On pose le vecteur d'état X : $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$

tel que : $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$, $x_4 = \dot{x}$.

En exploitant l'expression de f_c donnée par l'équation (II.1), on représente l'équation (II.15) dans l'espace d'état comme suit :

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \frac{g\sin(x_1) - mlax_2^2 \sin(2x_1)/2 - a\mu_c x_4 \cos(x_1)}{l(1-ma \cos^2(x_1))} - \frac{a\cos(x_1)}{l(1-ma \cos^2(x_1))} F \quad (\text{II.15})$$

Remplaçons à présent $\ddot{\theta}$ obtenue dans l'équation (II.13) dans l'équation (II.14), on obtient alors :

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = \frac{ax_2^2 \sin(x_1)ml - \frac{mag \sin(2x_1)}{2} - abx_4}{1 - ma \cos^2(x_1)} + \frac{a}{1 - ma \cos^2(x_1)} F \quad (\text{II.16})$$

Au final, nous obtenons la représentation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1) - mlax_2^2 \sin(2x_1)/2 - a\mu_c x_4 \cos(x_1)}{l(1 - ma \cos^2(x_1))} \\ x_4 \\ \frac{ax_2^2 \sin(x_1)ml - \frac{mag \sin(2x_1)}{2} - abx_4}{1 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \cos(x_1)}{l(1 - ma \cos^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{a}{1 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} F \quad (\text{II.17})$$

II.2.2 Avec la tension V comme signal d'entrée : [5]

Dans la modélisation présentée plus haut, F représente la force générée par le servomoteur asynchrone. Cette même force est l'image de la tension V fournie par le moteur. Afin d'établir le modèle du système avec la tension V comme signal d'entrée, il convient de faire un bref rappel sur les différentes relations courant/tension/couple/force dont on dispose.

Ω , étant le couple généré par le moteur, son expression est donnée par la relation suivante :

$$\Omega = K_m i \quad (\text{II.18})$$

Avec :

i : Courant électrique entrant dans le moteur.

K_m : Constante de couple.

L'expression qui relie le couple Ω et la force F est la suivante :

$$F = \frac{2\pi\Omega}{r} = \frac{2\pi K_m i}{r} \quad (\text{II.19})$$

Avec :

r : Pas de la vis à bille.

L'expression qui relie la tension de sortie du moteur V et le courant électrique i est donnée par la formule suivante :

$$V = Ri + K_b \dot{\psi} \quad (\text{II.20})$$

Avec :

$\dot{\psi}$: Vitesse angulaire du moteur.

D'autre part, la relation entre la vitesse angulaire du moteur et la vitesse du chariot est donnée par :

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi}{r} \dot{x} \quad (\text{II.21})$$

Alors, la formule (II.20) devient comme suit :

$$V = Ri + \frac{2\pi K_b}{r} \dot{x} \quad (\text{II.22})$$

De l'expression (II.22), on tire l'expression du courant i :

$$i = \frac{V}{R} - \frac{2\pi K_b}{Rr} \dot{x} \quad (\text{II.23})$$

En remplaçant i par son expression dans l'équation (II.19), on retrouve l'expression de la force F en fonction de la tension V :

$$F = \frac{2\pi K_m}{Rr} \left(V - \frac{2\pi K_b}{r} \dot{x} \right) = F_v V - (F_r - b) \dot{x} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$$F_v = \frac{2\pi K_m}{Rr} \quad (\text{II.25})$$

$$F_r = b + \left(\frac{2\pi}{r} \right)^2 \frac{K_m K_b}{R} \quad (\text{II.26})$$

En remplaçant F par son expression dans la représentation d'état faite plus haut (Eq II.17), on obtient la nouvelle représentation d'état avec V comme signal d'entrée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1) - \frac{m l a x_2^2 \sin(2x_1)}{2} + a b x_4 \cos(x_1)}{l(1 - m a \cos^2(x_1))} \\ x_4 \\ \frac{a x_2^2 \sin(x_1) m l - \frac{m a g \sin(2x_1)}{2} - a b x_4}{1 - m a \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \cos(x_1)}{l(1 - m a \cos^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{a}{1 - m a \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} (F_v V - (F_r - b) \dot{x}) \quad (\text{II.27})$$

Enfin, nous obtenons la représentation d'état du système suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1) - \frac{m l a x_2^2 \sin(2x_1)}{2} + F_r a x_4 \cos(x_1)}{l(1 - m a \cos^2(x_1))} \\ x_4 \\ \frac{a x_2^2 \sin(x_1) m l - \frac{m a g \sin(2x_1)}{2} - F_r a x_4}{1 - m a \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a F_v \cos(x_1)}{l(1 - m a \cos^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{a F_v}{1 - m a \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} V \quad (\text{II.28})$$

II.3 Simulation en boucle ouverte :

II.3.1 Simulation du système libre :

On procède à la simulation du système en boucle ouverte en décalant celui ci de son point d'équilibre instable $X = (0,0,0,0)^T$.

L'observation faite sur la figure II.3 indique que le système est instable. En effet, Une fois sa position d'équilibre supérieure quittée, il n'y revient jamais.

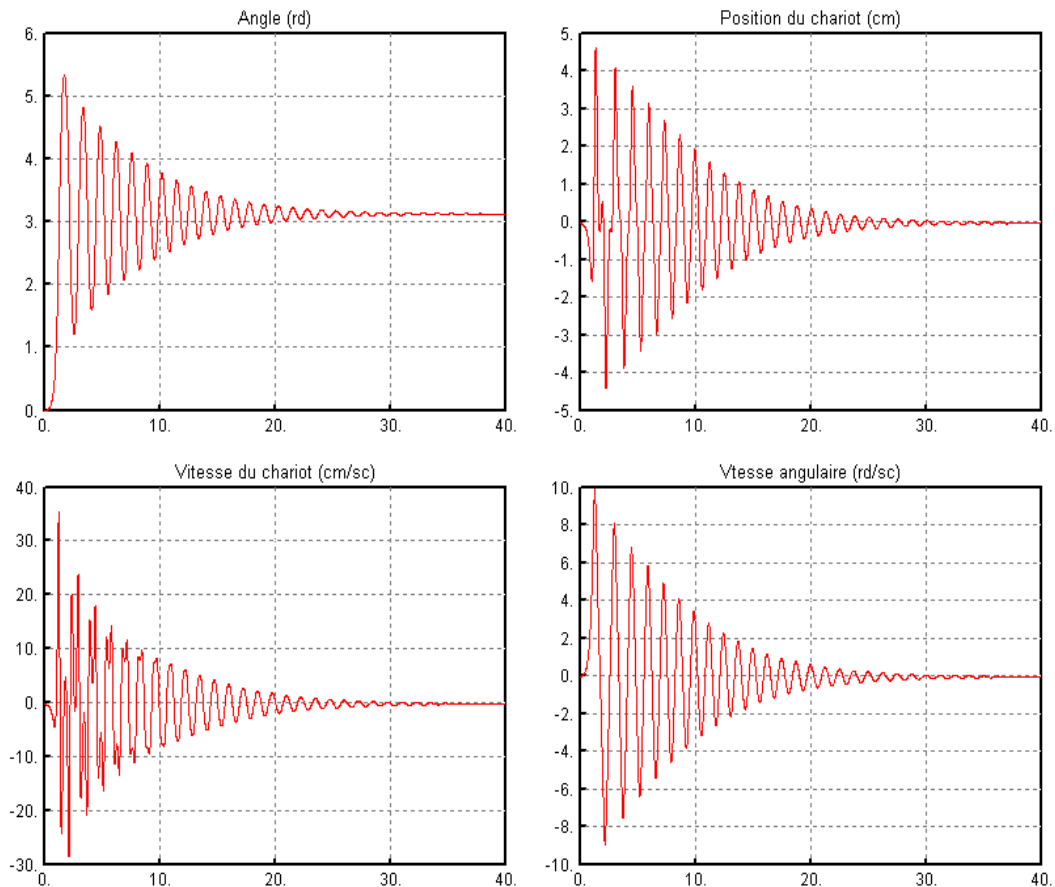


Fig II.3 Résultats de simulation du système en boucle ouverte

$$(x_1 = 0.01, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, V = 0)$$

II.3.2 Simulation du système forcé :

On excite à présent le système par un échelon d'amplitude $V=1V$. Le système oscille jusqu'à atteindre sa position d'équilibre stable $\theta = \pi$ rd (Fig II.4).

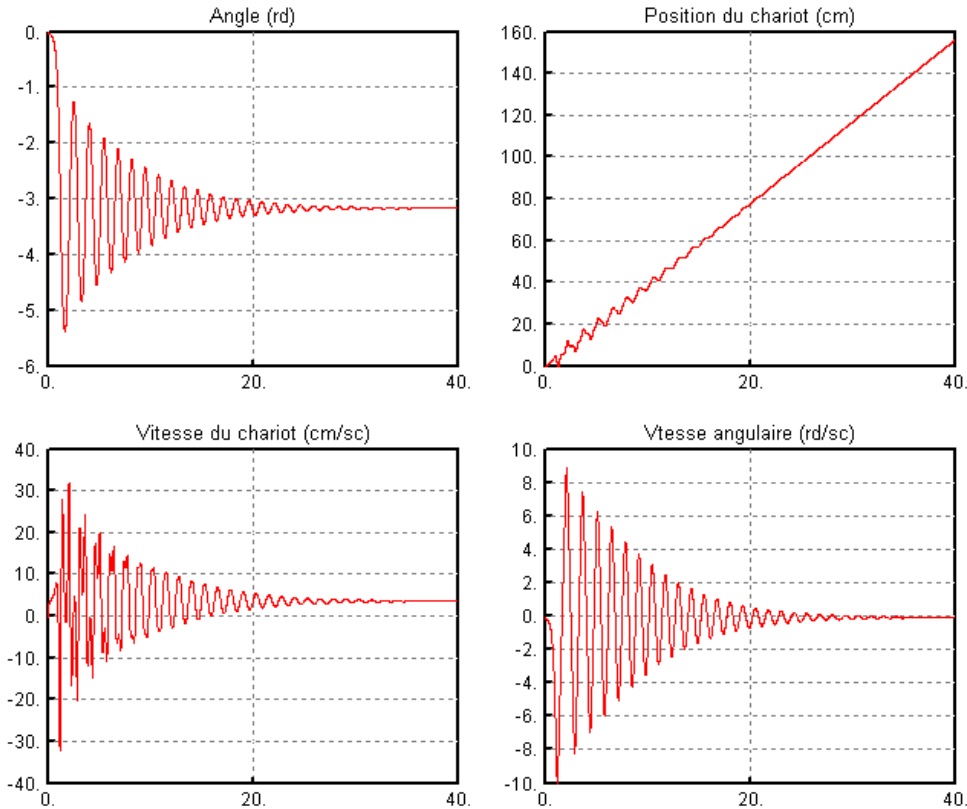


Fig II.4 Résultats de simulation du système en boucle ouverte

$$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, V = 1)$$

Les résultats de simulation montrent que la position dans laquelle on voudrait maintenir notre système, à savoir $X = [0, 0, 0, 0]^T$ est un point d'équilibre instable.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons établi les relations générales qui régissent le fonctionnement du pendule inversé en exploitant la théorie de la mécanique Newtonienne. Le modèle obtenu nous a permis de mettre en évidence l'aspect non linéaire du système.

La simulation en boucle ouverte a permis de constater que la position d'équilibre supérieure est une position d'équilibre instable, en écartant de peu le pendule de cette position il n'y revient jamais. Ainsi, découle la nécessité de l'insertion d'une commande stabilisante pour ce système contraignant.

Chapitre III

Rappels théoriques

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons introduire des rappels théoriques sur les différents outils dont nous aurons besoin lors de la synthèse de commande. En l'occurrence l'observateur d'état dont on aura besoin pour la restitution du vecteur d'état, la commande linéaire quadratique qu'on mettra en œuvre lors de la phase de stabilisation du pendule, la commande par mode de glissement qui nous servira lors de la phase du balancement du pendule et enfin la commande par logique floue, très utilisée pour commander les systèmes non linéaires.

III.1 L'observateur d'état : [7]

Il arrive souvent que toutes les variables d'état d'un système ne soient pas accessibles à la mesure. Dans ce cas, l'implémentation directe de la commande $u = Kx(t)$ est impossible. L'idée est donc de reconstruire l'état $x(t)$ à partir des informations disponibles, c'est-à-dire la sortie $y(t)$ et la commande $u(t)$. On utilise pour cela un système dynamique permettant d'approximer $x(t)$: un observateur. On parle également de reconstituteur, d'estimateur, de filtre...

- **Définition:**

On appelle observateur du système LTI un opérateur qui génère une approximation de la variable $z(t) = T x(t)$ sous la forme :

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = F\hat{z}(t) + Ly(t) + Ju(t) \quad (\text{III.1})$$

Où $u(t)$ est la commande et $y(t)$ la sortie.

Si $z(t)$ et $x(t)$ ont même dimension, l'observateur est dit complet (tout l'état est estimé).

On choisit $T = I$ ($z=x$) et $\hat{z}(t) = \hat{x}(t)$

Si $\dim(z) < \dim(x)$ alors l'observateur est dit d'ordre réduit.

Notre objectif principale lors du calcul de l'observateur est d'assurer la convergence de $\hat{z}(t)$ vers $z(t)$, c'est-à-dire vérifier que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}(t) = z(t) \quad \forall u(t), \forall x(t_0) \quad (\text{III.2})$$

Ce qui revient à vérifier que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall u(t), \forall x(t_0) \quad (\text{III.3})$$

Avec : $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ est l'erreur d'observation.

Soit un système linéaire écrit sous sa forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Soit l'observateur d'état suivant :

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = F\hat{z}(t) + Ly(t) + Ju(t) \quad (\text{III.5})$$

Dans notre cas on s'intéresse à observer tout le vecteur d'état qui est le plus simple à synthétiser, on aura donc l'erreur d'observation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{z}(t) \quad (\text{III.6})$$

Ayant comme équation dynamique :

$$\dot{e}(t) = (A - LC - F)x(t) + (B - J)U + Fe(t) \quad (\text{III.7})$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

L'erreur d'observation sera alors :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (\text{III.9})$$

L : est le gain de l'observation.

▪ **Remarques :**

- Les valeurs propres de la matrice $A-LC$ sont ajustées pour que la dynamique soit beaucoup plus rapide que la dynamique du système réel.
- L'observateur est constitué de deux parties :
 - Un simulateur du système réel caractérisé par les matrices $(A;B;C)$, ayant comme entrées u et y et comme sortie \hat{y} .

- Un correcteur réalisant une contre-réaction fonction de l'écart entre la sortie y et son estimée \hat{y} . Ce correcteur permet d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation de l'état.

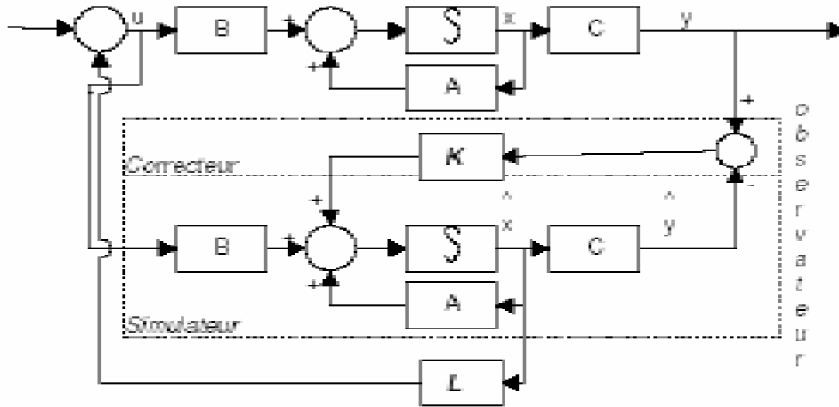


Fig III.1 Structure de la commande avec synthèse d'un observateur de Luenberger

III.2 Commande linéaire quadratique : [8]

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour Linear Quadratic Regulator. Cette commande n'est rien d'autre qu'un retour d'état calculé de manière à minimiser un critère quadratique.

III.2.1 Commande LQ à horizon fini :

Soit le problème de la commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{III.10}$$

Avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \tag{III.11}$$

Les matrices Q, R et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0$.

L'hamiltonien s'écrit alors comme suit :

$$H(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \tag{III.12}$$

L'hamiltonien, vérifie les conditions suivantes :

- Equation de l'état adjoint

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (\text{III.13})$$

- Condition de transversalité

$$p(t_f) = Sx_f \quad (\text{III.14})$$

- Absence de contraintes sur la commande

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \quad (\text{III.15})$$

De la, on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (\text{III.16})$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (\text{III.17})$$

On déduit alors le système matriciel appelé *système hamiltonien* :

$$\frac{d \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}{dx} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Ecrivons $p = P(t)x$, avec la condition finale $P(t_f) = S$. On aura alors l'équation suivante :

$$\dot{p} = -(A^T(t)P(t) + Q(t))x \quad (\text{III.19})$$

$$\text{Avec : } \dot{p} = \dot{P}x + P\dot{x} \quad (\text{III.20})$$

Des équations précédentes, on déduit :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (\text{III.21})$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\text{avec la condition finale : } P(t_f) = S. \quad (\text{III.23})$$

On montre que la condition :

$$x^T (\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (\text{III.24})$$

S'écrit aussi sous cette forme:

$$\frac{d(x^T P x)}{dt} + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (\text{III.25})$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (\text{III.26})$$

S'écrit alors comme suit :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} (x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d(x^T P x)}{dt} dt) \quad (\text{III.27})$$

Soit, avec la condition de transversalité : $S = P(t_f)$ (III.28)

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_0^T P(t_0) x_0 \quad (\text{III.29})$$

Le minimum du critère est alors :

$$\tilde{J}(x_0) = J_0(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} x_0^T P(t_0) x_0 \quad (\text{III.30})$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -K(t)x$ avec :

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (\text{III.31})$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, K varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A , B , Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $P(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

III.2.2 Commande LQ à horizon infini :

Intéressons nous ici au cas du système LTV précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (\text{III.32})$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $K(t)$ tel que les valeurs propres de $A-BK$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Kx$, où K est exprimé par l'équation :

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (\text{III.33})$$

Et où P vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{III.34})$$

III.2.3 Robustesse de la commande LQ :

○ Différence de retour :

A partir de l'équation de Riccati, faisons apparaître les termes $sI - A$ en ajoutant $PsI - sAI$ où I est la matrice unité :

$$P(sI - A) - (sI - A^T)P + PBR^{-1}B^T P = Q \quad (\text{III.35})$$

Multiplions à droite par $(sI - A)^{-1}B$ et à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}PB + B^T P(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \quad (\text{III.36})$$

En notant qu'on a $B^T P = RK$ et $PB = K^T R$, on obtient :

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R + RK(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \quad (\text{III.37})$$

○ **Marges de stabilité :**

Reprenons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec $s = j\omega$

et en notant $H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$.

On obtient alors pour tout ω :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) = R + H(j\omega)^H QH(j\omega) \quad (\text{III.38})$$

où : M^H est le hermitcien de M, c'est-à-dire le conjugué transposé. On en déduit alors l'intégralité de Kalman :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) \geq R \quad (\text{III.39})$$

Restreignons nous au cas où $R = \rho I$ et factorisons Q en $Q = L^T L$, on aura alors :

$$\sigma_i(I + KH(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i \left((I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)) \right)} = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2(LH(j\omega))} \geq 1 \quad (\text{III.40})$$

où λ_i représente la $i^{\text{ème}}$ valeur propre. En monovariante, ce résultat s'interprète facilement sur le lieu de Nyquist, comme le fait que la distance au point -1 est toujours supérieure à 1. Ainsi, la commande LQ présente la propriété de robustesse suivante : sa marge de module est égale à 1. On en déduit ainsi les intervalles dans lesquels le gain et la phase peuvent varier :

- Gain]0.5; +∞[
- Phase]-60°; +60°[

III.2.4 Choix des pondérations :

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangée le gain K . En effet, soit P solution de l'équation de Riccati et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\hat{Q} = \lambda Q$ et $\hat{R} = \lambda R$. On vérifie que $\hat{P} = \lambda P$ est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\hat{K} = -\hat{R}^{-1} B^T \hat{P} = -R B^T P = K \quad (\text{III.41})$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de n scalaires pour l'état et de p scalaires pour la commande.

III.3 Commande par mode de glissement :

Les lois de commande classiques sont pertinentes dans le cas des systèmes linéaires, mais à cause de leur faible robustesse, elles perdent de leur efficacité une fois appliquées sur des systèmes non linéaires. Les lois de commande dites à structure variable remédient à ce problème. L'algorithme de commande par mode de glissement est classifié dans les systèmes de contrôle à structure variable CSV (ou **VSS : Variable Structure System** dans la littérature anglo-saxonne). Cette technique est basée sur le principe qu'il est plus facile de commander un système de *1er* ordre que de commander un système du *nième* ordre, qu'il soit linéaire ou non. Le principe de ce type de système à structure variable consiste à amener, quelles que soient les conditions initiales, le point représentatif de l'évolution du système sur une hyper surface de l'espace de phase (représentant un ensemble de relations, statiques, entre les variables d'état). La surface considérée est alors désignée comme étant la *surface de glissement ou de commutation*. Le comportement dynamique résultant, appelé régime glissant idéal, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface. L'avantage d'obtenir un tel comportement est double : d'un côté, on a une réduction de l'ordre du système, et d'autre part, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes directions que les entrées (*matching perturbations*). [9]

III.3.1 Généralités sur la théorie du contrôle par mode de glissement :

Dans les systèmes à structure variable utilisant la commande par mode de glissement, on peut trouver trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes. La première correspond à la structure la plus simple où la commutation a lieu au niveau de l'organe de commande lui même. On l'appellera, structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre-réaction d'état.

Et enfin, la dernière structure est une structure par commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la "commande équivalente". Cette dernière structure est retenue pour la suite de notre étude.

III.3.1.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande : [10]

Le schéma d'une structure par commutation au niveau de l'organe de commande est donné sur la figure III.2. Cette structure de commande est la plus classique et la plus utilisée.

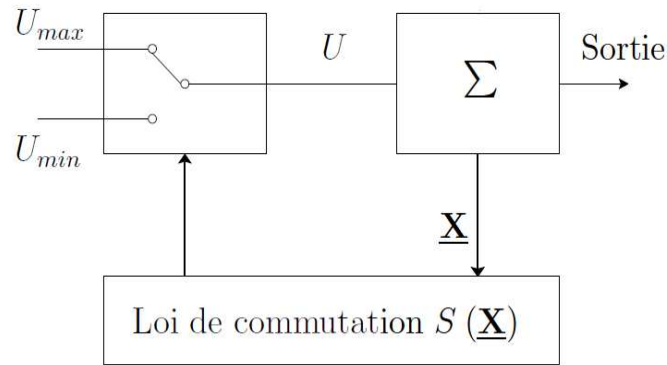


Fig III.2 Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande

Dans ce cas, l'organe de commande doit être conçu de sorte que la grandeur de commande U ne prenne que les deux valeurs constantes u_{min} ou u_{max} . La commutation entre ces deux valeurs est imposée par la loi de commutation selon :

$$\begin{cases} u = u_{max} & \text{pour } S(X) > 0 \\ u = u_{min} & \text{pour } S(X) < 0 \end{cases}$$

La commutation a lieu à une fréquence très élevée (théoriquement infiniment élevée) de sorte que le système de réglage travaille en mode de glissement. Le comportement dynamique du système est alors déterminé par l'expression : $S(X)=0$.

III.3.1.2 Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état : [10]

Elle est décrite par le schéma de la figure III.3, cette structure est moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande.

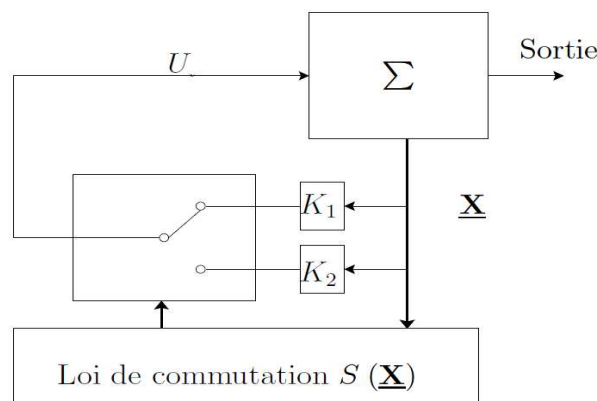


Fig III.3 Structure de régulation par commutation au niveau d'une contre réaction

Dans cette structure le comportement dynamique du système est décrit par son vecteur d'état mis en contre réaction soit par le vecteur ligne K_1 ou par le vecteur ligne K_2 , selon la position d'un commutateur. Le choix de la contre réaction se fait à l'aide de la loi de commutation $S(X)$ également en fonction du vecteur d'état. On a :

$$\begin{cases} u = -K_1 X & \text{pour } S(X) > 0 \\ u = -K_2 X & \text{pour } S(X) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Avec une stratégie de commande (loi de commutation) adéquate, on peut obtenir un phénomène transitoire stable et bien amorti même si les deux contre réactions d'état donnent un comportement instable ou à la limite de stabilité.

III.3.1.3 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la commande équivalente : [11]

Une telle structure dont le principe est montré sur la figure III.4, présente un réel avantage. Elle permet de prépositionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent. L'organe de commande est beaucoup moins sollicité, mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait de l'expression de cette commande équivalente.

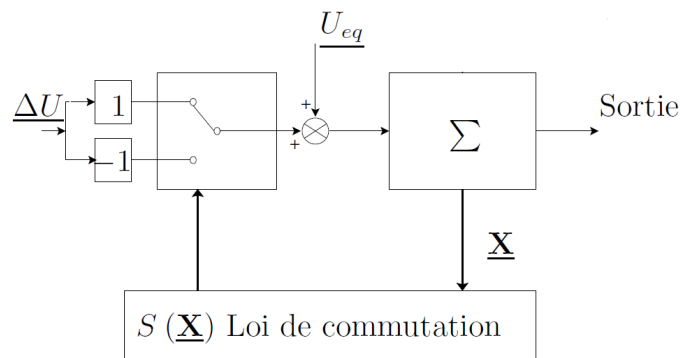


Fig III.4 Structure de régulation par ajout de la commande équivalente

C'est cette dernière structure qu'on va adopter pour la stabilisation du pendule inversé, de par sa constitution très simple permettant de moins solliciter la commande et l'ajout de la commande équivalente qui va nous permettre de prépositionner le système dans un état désiré permanent et stable et de jouer ensuite sur le terme de commutation pour assurer la convergence vers cet état et pour y rester ensuite.

III.3.2 Principe de la commande à structure variable : [12]

Le choix de la surface de glissement concerne le nombre de surfaces nécessaires ainsi que la forme de ces dernières, ces deux facteurs sont fonction de l'application et l'objectif visé.

Soit le système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X, t) + g(X, t) \quad (\text{III.43})$$

f, g : fonctions non linéaires du vecteur d'état décrivant l'évolution du système au cours du temps.

X : Le vecteur d'état.

Il faut choisir m surfaces de glissement pour un vecteur u de dimension m . En ce qui concerne la forme de la surface, deux possibilités se présentent, soit dans le plan de phase ou dans l'espace d'état. Dans le premier cas, la fonction de commutation est une fonction scalaire, telle que la variable à régler glisse sur cette surface pour atteindre l'origine du plan de phase. Ainsi la surface $S(x)$ représente le comportement dynamique désiré du système.

Par contre dans le cas du traitement dans l'espace d'état, on trouve la méthode connue par « loi de commutation par retour d'état ». Celle-ci utilise les concepts de la commande par retour d'état pour synthétiser la loi de commutation, la loi de commutation est donnée par la forme suivante : $S(x, t) = K X(t)$

Où : K est une matrice de gain.

Il est à noter que dans le cas où on n'a qu'une seule commande comme pour le pendule inversé, on ne peut avoir qu'une seule surface de glissement et K sera un vecteur ligne.

III.3.2.1 Condition d'existence du régime glissant :

On cherche à vérifier si le système a un comportement dynamique unique quand $S(X)=0$. Pour ce faire, on étudiera la méthode développée par FILIPPOV. Elle constitue une théorie mathématique systématique pour les équations différentielles avec discontinuités.

On suppose que la trajectoire d'état atteint l'hypersurface de glissement à l'instant t_0 et qu'un mode glissant existe pour $t \geq t_0$

Cela implique que:

$$\begin{cases} s(X) = 0 \\ \dot{s}(X) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit après substitution de \dot{x} à écrire :

$$\frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} [f(X, t) + g(X, t)u_{eq}] = 0 \quad (\text{III.44})$$

Où : u_{eq} est la *commande équivalente* qui résout l'équation. Cette commande étant supposée connue et introduite dans l'équation du modèle, on obtient alors le modèle du comportement du système sur la surface de glissement en supposant que la condition initiale $X(t_0)$ vérifie $S(X(t_0)) = 0$

Le calcul de la commande équivalente est possible si $\frac{\partial s}{\partial x} g(X, t)$ est inversible pour tout t et X .

Alors :

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} g(X, t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(X, t) \quad (\text{III.45})$$

Ainsi, pour $S(X(t_0)) = 0$, le modèle du système sur la surface de glissement est:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [I - g(X, t) \left[\frac{\partial s}{\partial x} g(X, t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x}] f(X, t) \\ S(X) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Il est aisé de constater que les dynamiques du système en mode glissant sont d'ordre inférieur au système original. Cette réduction d'ordre est aisément explicable par le nombre de variables d'état contraintes par la relation $S(X) = 0$. [13]

III.3.2.2 Le mode non glissant :

Le mode préliminaire au mode glissant, partant d'une condition initiale quelconque pour atteindre la surface de glissement est appelé « *attractivité* » ou *mode non glissant*, (*reaching mode* en anglais). La définition complète de ce mode nécessite la définition d'une *condition d'attractivité* ainsi que la définition de la loi de commande non linéaire et de sa structure.

La condition d'attractivité est en fait la condition sous laquelle le mode de glissement existe et sous laquelle la trajectoire d'état va effectivement atteindre la surface de glissement en un temps fini. Deux types de conditions d'accès à la surface de glissement sont présentés.

III.3.2.2.a Approche directe :

Cette approche est la plus ancienne, elle a été proposée par EMILYANOV et UTKIN. Elle est globale mais ne garantit pas en revanche un temps d'accès fini.

$$\begin{cases} \dot{S}(X) < 0 & \text{pour } S(X) > 0 \\ \dot{S}(X) > 0 & \text{pour } S(X) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Cette condition est toutefois difficile à utiliser pour faire la synthèse de la loi de commande, Particulièrement dans le cas d'un système multi entrées.

III.3.2.2.b Approche de LYAPUNOV :

Il s'agit de formuler une fonction scalaire définie positive $V(X) > 0$ pour les variable d'état du système, et de choisir la loi de commutation qui fera décroître cette fonction. Elle est utilisée pour estimer les performances de la commande, l'étude de la robustesse, et pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires, $\dot{V}(X) < 0$ pour $V(X) > 0$.

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(X) = \frac{1}{2} S(X)^2 \quad (\text{III.48})$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative.

$$\text{Ceci est vérifié si :} \quad S(X)\dot{S}(X) < 0 \quad (\text{III.49})$$

Cette équation explique que le carré de la distance vers la surface, mesurée par $S(X)^2$, diminue tout le temps, contraignant ainsi la trajectoire du système à se diriger vers la surface des deux cotés. Cette condition de convergence suppose un régime de glissement idéal.

Dans le cas d'un régime glissant pratique, la condition de convergence prend la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S(X)^2 \leq -k |S(X)| \quad (\text{III.50})$$

Où k est une constante, qui définira le temps de convergence vers la surface de glissement.

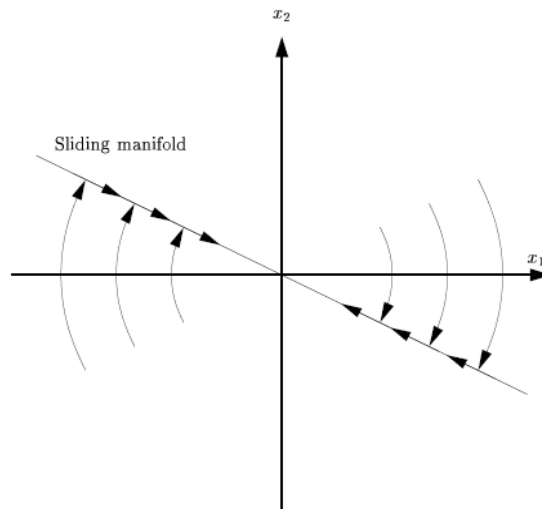


Fig III.5 Trajectoire de l'état vis-à-vis de la surface de glissement

III.4 Commande par logique floue :

Les méthodes de réglage conventionnelles se basent sur une modélisation adéquate du système et un traitement analytique à l'aide de fonction de transfert ou d'équations d'état. Par contre le réglage par logique floue donne une approche plutôt intuitive, permettant d'inclure les expériences acquises par les opérateurs.

Cette approche a suscité beaucoup d'intérêt dans le domaine du contrôle. Cela est justifié par la robustesse des commandes basées sur les principes de la logique floue, vu que celles-ci ne dépendent pas de la modélisation analytique du système, ce qui les rend insensibles aux erreurs de modélisation. C'est justement pour ces raisons qu'on s'intéresse dans ce chapitre à élaborer une commande par logique floue pour stabiliser le pendule inversé. On commencera d'abord par présenter les concepts de la logique floue et de la commande par la logique floue, puis on s'intéressera à appliquer ces principes sur notre système.

III.4.1 Notions de base sur la logique floue : [14]

Dans cette partie, nous allons voir les concepts de la théorie de la logique floue nécessaires pour la conception des régulateurs flous.

- **Ensemble flou :**

Soit X une collection continue ou discrète d'objets dénotés $\{X\}$, X est appelé univers de discours et x représente l'élément générique de X .

Un ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept d'ensemble ordinaire dont la fonction d'appartenance prend seulement deux valeurs $\{0,1\}$ (ensemble booléen).

Ainsi sur un univers de discours X , un sous ensemble flou A est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, alors l'ensemble flou A dans X est défini par l'ensemble des paires (élément générique, degrés d'appartenance).

$$A = \{(x, \mu_x(x)) / x \in X\} \quad (\text{III.51})$$

▪ **Variables linguistiques :**

La description d'une certaine situation, d'un phénomène ou d'un procédé contient en général des expressions linguistiques (floues), comme : *chaud, froid, grand, petit, ...etc.*

Les expressions de ce genre forment les valeurs d'une variable linguistique, qu'on appelle valeurs floues qu'on peut représenter par des fonctions d'appartenance.

▪ **Fonction d'appartenance:** [15]

Afin de permettre un traitement numérique des variables linguistiques dans la prise de décisions sur ordinateur, une définition des variables linguistiques à l'aide de fonctions d'appartenance s'impose. Dans ce contexte, on associe à chaque valeur de la variable linguistique une fonction d'appartenance désignée par $\mu_A(x)$ où x est la variable linguistique, tandis que A indique l'ensemble concerné. Une valeur précise de $\mu_A(x)$, sera désignée par le degré ou le facteur d'appartenance. Il est à noter que l'ensemble des éléments de x pour lesquels $\mu_A(x) > 0$, est appelé support de A . On va citer seulement les fonctions d'appartenance qu'on va utiliser pour notre commande et qui sont :

- **Fonction triangulaire :**

Elle est définie par trois paramètres $\{a, b, c\}$, qui déterminent les coordonnées des trois sommets.

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (\text{III.52})$$

- **Fonction trapézoïdale :**

Elle est définie par quatre paramètres {a, b, c, d }

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (\text{III.53})$$

▪ **Raisonnement flou:**

Les ensembles flous et la théorie des possibilités sont des éléments importants de la représentation des connaissances imparfaitement définies. Pour raisonner sur de telles connaissances, la logique classique ne suffit pas. On utilise la logique floue lorsque les connaissances sont imprécises, vagues et éventuellement incertaines. Voici quelques définitions utilisées :

Soit x une variable linguistique et A une caractéristique :

➤ **Définition 1 : (proposition)**

Une proposition floue est définie à partir d'une variable linguistique (x, T(x), X) par la qualification : " x est A ".

➤ **Définition 2 : (conjonction)**

La conjonction de deux propositions floues est réalisée par l'opérateur ET par exemple : " x1 est A1 ET x2 est A2 ".

➤ **Définition 3 : (disjonction)**

La disjonction de deux propositions floues est réalisée par l'opérateur OU par exemple : " x1 est A1 OU x2 est A2 ".

➤ **Définition 4 : (implication)**

L'implication entre deux propositions floues définit aussi une proposition floue que l'on peut exprimer par : " x1 est A1 ALORS x2 est A2 ".

Plus généralement, on peut construire des propositions floues par conjonction, disjonction ou implication portant sur des propositions floues élémentaires.

➤ **Définition 5 : (règle floue)**

Une règle floue est une proposition floue utilisant une implication entre deux propositions floues quelconques. Par exemple :

’’ SI x_1 est A_1 ET x_2 est A_2 ALORS x_3 est A_3 ’’

où : ’’ x_1 est A_1 ET x_2 est A_2 ’’ est la prémisse de la règle
et ’’ x_3 est A_3 ’’ est sa conclusion.

En utilisant les règles de composition d’inférence, nous pouvons formaliser une procédure d’inférence, appelé raisonnement flou sur l’ensemble des règles (Si-Alors).

III.4.2 Notions de base sur la commande par logique floue: [14]

La commande par logique floue est le domaine dans lequel il existe le plus de réalisation effective, en particulier industrielle. Son but est de traiter des problèmes de commande de processus, le plus souvent à partir des connaissances des experts.

III.4.2.1 Contrôleur flou :

La configuration de base d’un contrôleur flou (Fig IV.1) comprend les éléments suivants :

✓ **Fuzzification**

C’est la partie du contrôleur flou chargée de convertir les grandeurs physiques en variables linguistiques.

✓ **Base de règles**

Elle contient les définitions des termes utilisés dans la commande et l’ensemble des règles caractérisant la cible de la commande et décrivant la conduite de l’expert.

✓ **Inférence**

L’inférence transforme à l’aide du jeu de règles (en manipulant la base de règles). La partie floue issue de la fuzzification en une nouvelle partie floue qui caractérise la sortie du contrôleur.

✓ **Défuzzification**

La défuzzification consiste à convertir la partie floue issue de l’inférence en une grandeur physique.

Plusieurs stratégies de défuzzification sont utilisées:

- *Méthode du maximum :*

La commande est égale à la valeur dont le degré d'appartenance est le plus fort.

- *Méthode de la moyenne des maximas :*

La commande sera égale à la moyenne des valeurs dont le degré d'appartenance est maximal.

- *Méthode du centre de gravité:*

C'est la méthode la plus utilisée dans les contrôleurs flous. Dans celle-ci la commande sera égale au centre de gravité de l'ensemble flou de sortie, on obtient donc pour :

- Univers de discours discret :

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)} \quad (\text{III.53})$$

- univers de discours continu :

$$C = \frac{\int x \mu_A dx}{\int \mu_A dx} \quad (\text{III.54})$$

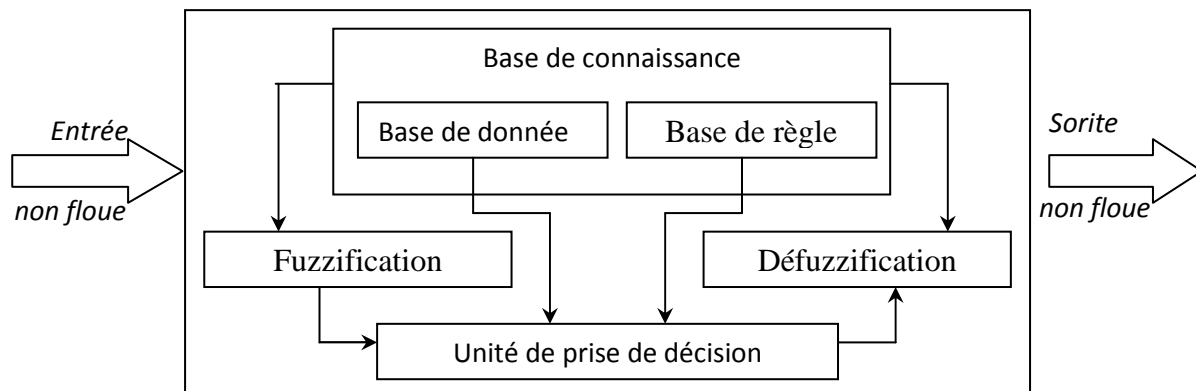


Fig III.6 Architecture générale d'un contrôleur flou

III.4.2.2 Types de régulateurs flous :

Il existe plusieurs types de régulateurs flous, qui diffèrent de par leur mécanisme d'inférence utilisé, on en cite: régulateur de *Mamdani*, de *Sugeno*, ... etc.

▪ Régulateur de type Mamdani:

Mamdani fut le premier à utiliser la logique floue pour la synthèse de commande. Il utilise le minimum comme opérateur de jonction et l'implication pour représenter le graphe flou associé à chaque règle et l'opérateur maximum pour l'agrégation.

Dans la règle i :

Si x_1 est A_1 et ... et x_n est A_n Alors y est B^i

où B^i sont des sous ensembles flous. Les B^i forment en général une partition de l'univers de sortie.

▪ **Régulateur de type Sugeno :**

Dans les régulateurs de ce type, les conclusions des règles ne sont symboliques (i.e. représentées par des sous ensembles flous) mais une fonction des entrées, par exemple : $b_i = f(x_1, \dots, x_n)$

où $f(\cdot)$ est généralement une fonction polynomiale.

Et la sortie du régulateur est donnée par :

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) * b^i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)} \quad (\text{III.55})$$

Où les α_i sont les valeurs de vérité de chaque règle pour $i=1$ à n .

Notons que la sortie donnée par le régulateur est en fait la variation du signal de commande.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons vu les notions de base concernant l'observateur d'état, la commande linéaire quadratique, la commande par mode de glissement et la commande par logique floue.

Dans la section abordant l'observateur d'état, nous avons montré comment synthétiser celui-ci de manière à ce que l'erreur d'observation tende vers zéro, assurant ainsi une information pertinente sur les états.

Nous avons ensuite vu que la commande optimale ayant le critère quadratique pour index de performance nous permet une commande par retour d'état tout en minimisant l'énergie de la commande, du déplacement linéaire du chariot et du déplacement angulaire suivant des pondérations que l'on établit en définissant les matrices Q et R . Elle présente un champ d'opération considérable de -60° à 60° .

Nous avons également présenté la commande par mode de glissement, la philosophie sur laquelle elle repose ainsi que ses différents types. Cette stratégie de commande s'appuie sur un principe simple mais qui néanmoins a prouvé son efficacité dans le domaine du non linéaire.

Enfin, nous avons présenté les principes de la logique floue ainsi que ceux de la commande par logique floue. Celle-ci, ne se basant pas sur le modèle du système mais plutôt sur l'expertise des opérateurs et sur la capacité de prévoir le comportement du système, elle présente donc, de la robustesse par rapport aux variations paramétriques. Néanmoins, elle a le défaut de ne pas pouvoir prévoir la stabilité du système commandé.

Dans le chapitre qui suit, nous présenterons la synthèse de l'observateur et des types de commandes citées dans ce chapitre.

Chapitre IV

Synthèse des lois de commandes

Introduction :

Ce chapitre a pour objectif de synthétiser les lois de commande qu'on désire appliquer sur le pendule inversé.

Nous allons en l'occurrence synthétiser le retour d'état glissant qui comme on le verra témoignera de son insuffisance par rapport aux objectifs qu'on s'est fixé.

On va alors axer notre développement sur la commande à minimum d'énergie qu'en mettra en oeuvre lorsque le pendule est dans sa position d'équilibre stable, cette commande permettra le balancement du pendule jusqu'à ce que celui ci se redresse.

On approchera cette commande en proposant deux surfaces de glissement, la première aura pour stratégie de minimiser l'énergie du pendule seule, quant à la seconde elle proposera de minimiser l'énergie du pendule et du chariot.

Enfin, afin de maintenir le pendule dans sa position inversée, nous allons synthétiser une commande optimale linéaire quadratique, qui comme, on l'a vu dans le chapitre précédent, est susceptible d'être efficace et assez robuste.

IV.1 Commande par mode de glissement :

Rappelons que notre système est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U \quad (\text{IV.1})$$

Telle que : $X = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ (IV.2)

On va redéfinir le vecteur d'état de manière à avoir : $X = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ (IV.3)

Ce qui nous donnera : $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} U$ (IV.4)

$$\dot{X}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = f_1(x_3, x_4) \quad (\text{IV.5})$$

$$\dot{X}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + BU \quad (\text{IV.6})$$

Afin d'atteindre l'objectif de stabilisation du pendule inversé la surface de glissement est choisie telle que [16] :

$$S = K X = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_1 X_1 + K_2 X_2 \quad (\text{IV.7})$$

Où : $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$, avec k_1, k_2, k_3 et k_4 constantes positives.

La surface de glissement peut alors être exprimée comme suit :

$$\dot{S} = K_1 f_1(x_3, x_4) + K_2 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + K_2 BU \quad (\text{IV.8})$$

On définit la fonction de Lyapunov de la sorte :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (\text{IV.9})$$

En dérivant V en fonction du temps, on obtient :

$$\dot{V} = S[K_1 f_1(x_3, x_4) + K_2 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + K_2 BU] \quad (\text{IV.10})$$

Afin de vérifier la condition d'attractivité U doit être choisie comme suit :

$$U = \frac{-1}{K_2 B} (K_1 f_1 + K_2 f_2) - \frac{k}{C_2 B} \text{sign}(s) \quad k > 0 \quad (\text{IV.11})$$

Où:

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

En remplaçant U dans \dot{V} on obtient :

$$\dot{V} = S[K_1 f_1(x_3, x_4) + K_2 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + K_2 B \left[\frac{-1}{K_2 B} (K_1 f_1 + K_2 f_2) - \frac{k}{C_2 B} \text{sign}(s) \right]] \quad (\text{IV.13})$$

Au final on aura :

$$\dot{V} = -k|s| < 0 \quad \text{pour } s \neq 0 \text{ et } k > 0 \quad (\text{IV.14})$$

D'après le théorème de stabilité de Lyapunov, on atteint la surface de glissement $S = 0$, en un temps fini. Une fois que cela est vérifié la dynamique désirée du système en boucle fermée est obtenue.

Il suffit donc de bien choisir les constantes k_1, k_2, k_3 et k_4 pour assurer la convergence de θ et x sur la surface de glissement, chose qui assurera l'objectif de notre commande.

Après des calculs empiriques, notre choix de paramètres s'est arrêté sur :

$$k_1 = 1.8, k_2 = 0.7, k_3 = 0.02, k_4 = 0.01 \text{ et } k = 0.05.$$

▪ **Simulation :**

La simulation pour 45° donne :

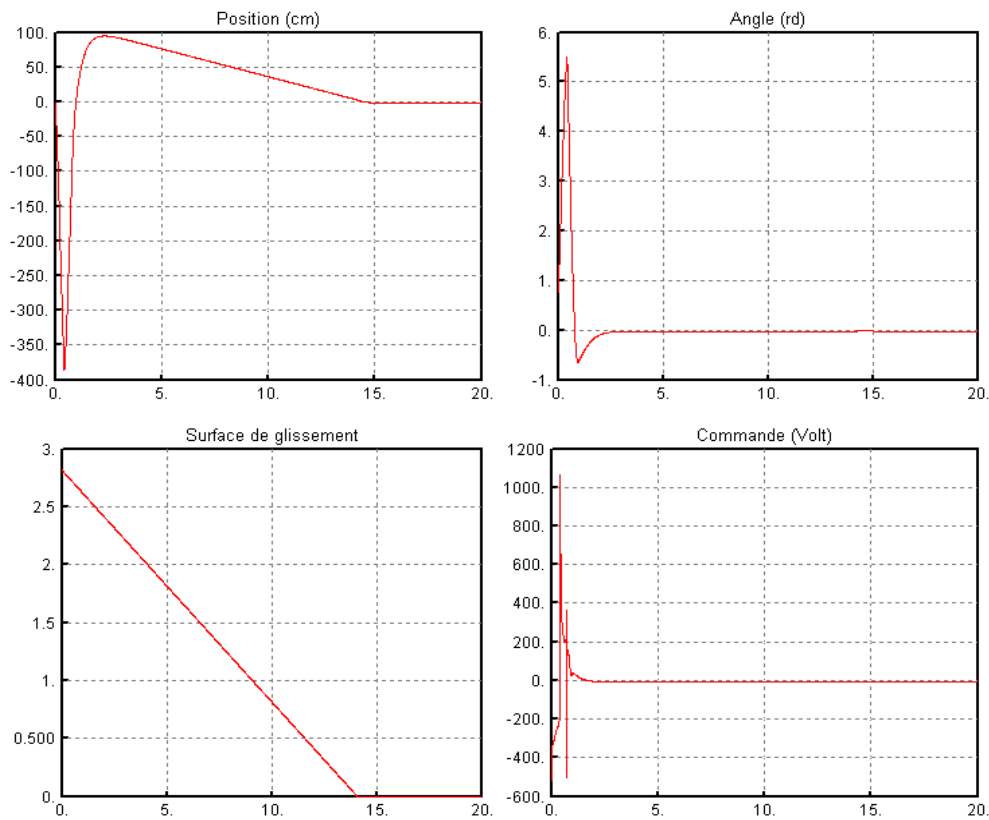


Fig IV.1 Simulation du système commandé par mode de glissement

$$(x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$$

On remarque que la commande est très énergétique et le dépassement très important.

On cherche alors à connaître l'intervalle en termes d'angle sur lequel peut opérer cette commande, tout en respectant les restrictions pratiques, à savoir la limitation en tension et la course du chariot.

Après tâtonnement, nous nous arrêtons sur l'angle 15° . La réponse du système à cet angle initial est représentée sur la figure IV.2.

Nous remarquerons qu'en effet pour cet angle les limites du système sont respectées.

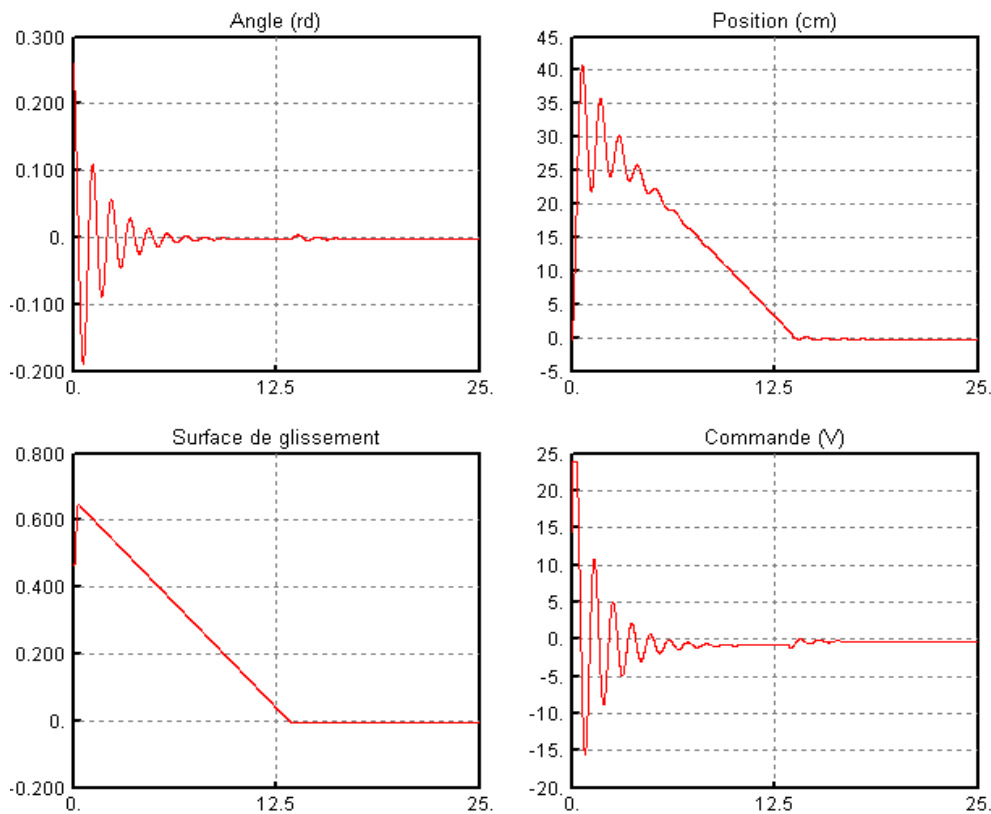


Fig IV.2 Simulation du système commandé par mode de glissement

$$(x_1 = \frac{\pi}{12}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$$

Notre objectif est de permettre une stabilisation du pendule sur 360° , cela demanderait beaucoup d'énergie, sans oublier le fait qu'on a une limite de déplacement de $\pm 45 \text{ cm}$ à respecter et une énergie de commande limitée à $\pm 24V$. Une solution consiste à pomper de l'énergie petit à petit pour permettre de soulever le pendule de la position inférieure vers la position supérieure puis utiliser une commande stabilisante.

IV.2 Commande à énergie minimale:

IV.2.1 Stratégie adoptée :

Avant d'aborder la commande, il est judicieux de souligner que les capteurs mis à notre disposition sont uniquement ceux donnant la position du chariot x et l'angle du pendule θ .

Il en découle que pour obtenir une information concernant les deux autres états, à savoir la vitesse linéaire \dot{x} et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, on se doit de synthétiser un observateur d'état.

Quant à la stratégie de contrôle que nous avons adoptée, elle est axée autour de deux parties : [5][17][23]

- 1- Balancer le pendule par le biais d'une commande non linéaire jusqu'à atteindre le voisinage de $\theta \sim 0$
- 2- Maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable par le biais d'une commande optimale linéaire quadratique agissant dans la zone linéaire.

Pour cause de commodité, nous commençons par synthétiser la commande linéaire. Pour ce faire, procédons à la linéarisation du système obtenu lors de la représentation d'état faite dans le précédent chapitre (Eq II.28).

IV.2.2 Synthèse de la commande linéaire :

IV.2.2.1 Linéarisation :

En linéarisant l'équation d'état (II.28), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BV \\ Y = CX \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{aMl} & 0 & 0 & \frac{F_r}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & -\frac{F_r}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_v}{Ml} \\ 0 \\ \frac{F_v}{M} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

IV.2.2.2 Synthèse de la commande LQ :

On prend comme index de performance, le critère linéaire quadratique J tel que : [4][5]

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + V^T R V) dt \quad (\text{IV.17})$$

Avec :

Q : Matrice de pondération définie positive.

R : Scalaire positif, pondère l'énergie de la commande V .

X : Vecteur d'état.

V : Signal de commande en tension.

En minimisant l'index de performance, on assure une stabilisation du vecteur d'état X donc on atteint l'objectif de commande et on minimise également l'énergie de la commande V .

Le signal de commande V optimal qui minimise l'index de performance indiqué dans l'équation (IV.3) est donné par l'expression suivante:

$$V_{opt} = -R^{-1}B^T P X(t) \quad (\text{IV.18})$$

Avec :

P : Solution de l'équation de Riccati

On prend pour matrices de pondérations, les matrices Q et R suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

$$R = 0.5 \quad (\text{IV.20})$$

Les pôles du régulateur sont donc :

$$Pôles = (-11.3086 \quad -5.5948 \quad -5.1381 - 0.4119i \quad -5.1381 + 0.4119i)^T \quad (\text{IV.21})$$

Le vecteur $X(t)$ dans l'équation (IV.4) suppose que tous les éléments du vecteur d'état sont disponibles. Or comme cité précédemment nous n'avons à notre disposition que le capteur de position linéaire du chariot et le capteur de position angulaire du pendule.

On se doit donc de faire une synthèse d'un observateur nous permettant d'avoir accès à tout le vecteur d'état.

IV.2.3 Synthèse de l'observateur:

L'observateur devant avoir une dynamique plus rapide que celle du régulateur. On place donc ses pôles plus à gauche que ceux du régulateur sur le plan de phase.

On impose les pôles suivants à l'observateur :

$$pôles_{OB} = (-68 \quad -69 \quad -70 \quad -71)^T \quad (IV.22)$$

D'où on obtient le gain de l'observateur L suivant :

$$L = \begin{bmatrix} 137 & 0 \\ 4722 & 50 \\ 0 & 128 \\ -192 & 3296 \end{bmatrix} \quad (IV.23)$$

Notre observateur sera donc défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A_o \hat{X} + BV + Ly \\ \hat{y} = \hat{X} \end{cases} \quad (IV.24)$$

Avec :

$$A_o = A - LC = \begin{pmatrix} -137 & 1 & 0 & 0 \\ -4692 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & -128 & 1 \\ -4 & 0 & -128 & 1 \end{pmatrix} \quad (IV.25)$$

$$y = \begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} \quad (IV.26)$$

$$\text{Sachant que notre observateur a pour entrée le vecteur } u_{OB} = \begin{pmatrix} V \\ \theta \\ x \end{pmatrix}. \quad (IV.27)$$

On implémente notre observateur sur SIMTool dans un bloc « state space » ayant pour paramètres :

$$A_o, B_o = [B \ L], C_o = I_4, D_o = \text{zeros}(4,3) \quad (\text{IV.28})$$

On obtient alors un observateur plein qui nous renseigne sur tous les états du vecteur X .

IV.2.4 Synthèse de la commande non linéaire :

Pour synthétiser la commande non linéaire ; Nous retiendrons deux approches du fait de l'efficacité qu'elles présentent. La première prendra en considération l'énergie potentielle du pendule tandis que la deuxième tiendra compte du déplacement et de la vitesse du chariot en plus de l'énergie potentielle.

IV.2.4.1 Première approche : [18][19][20][23]

Rappelons que l'énergie potentielle du pendule est la suivante :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (\text{IV.29})$$

On veut ramener le pendule à la position supérieure où l'énergie est nulle, pour cela on choisit la surface de glissement comme suit :

$$S = E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (\text{IV.30})$$

On atteint notre objectif lorsque cette surface s'annule.

On définit la fonction de Lyapunov de la sorte :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (\text{IV.31})$$

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad (\text{IV.32})$$

Où :

$$\dot{S} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (\text{IV.33})$$

$$\dot{S} = ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} - g\sin(\theta)) \quad (\text{IV.34})$$

Rappelons que :

$$\cos(\theta) \ddot{x} = g \sin(\theta) - l\ddot{\theta} \quad (\text{IV.35})$$

Ce qui donne :

$$\dot{S} = -ml\dot{\theta} \cos(\theta) \ddot{x} \quad (\text{IV.36})$$

Afin de vérifier la condition d'attractivité , on doit avoir :

$$\text{sign}(\ddot{x}) = -\text{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta)) \quad (\text{IV.37})$$

D'autre part on a :

$$\ddot{x} = \frac{[F - mg \sin(\theta) \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - b\dot{x}]}{m \sin^2(\theta) + M} \quad (\text{IV.38})$$

On va prendre la commande comme suit :

$$F = (-k \text{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta)) + mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + b\dot{x}) \text{ tel que } k > 0 \quad (\text{IV.39})$$

On aura donc :

$$\ddot{x} = \frac{-k \text{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta))}{m \sin^2(\theta) + M} \quad (\text{IV.40})$$

$m \sin^2(\theta) + M$ est positif, donc la commande telle choisie nous permet d'avoir

$$\text{sign}(\ddot{x}) = -k \text{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta)) \quad (\text{IV.41})$$

Rappelons que la relation entre la force appliquée sur le chariot et la tension de sortie du moteur est la suivante :

$$F = \frac{2\pi K_m}{r} \frac{K_m}{R} (V - \frac{2\pi K_b}{r} \dot{x}) \quad (\text{IV.42})$$

Au final, la commande s'écrit comme suit :

$$V = \frac{(-k \text{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta)) + mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + F_r \dot{x})}{F_v} \quad (\text{IV.43})$$

Où :

$$F_v = \frac{2\pi K_m}{r R} \quad (\text{IV.44})$$

$$F_r = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 \frac{K_m K_b}{R} + b \quad (\text{IV.45})$$

Après plusieurs essais k est choisi comme : $k=50$. (IV.46)

Cette commande ne sera utilisée que pour ramener le pendule à une position supérieure avec le minimum d'énergie possible mais elle ne permet pas de stabiliser le pendule c'est pour cela qu'on va utiliser la commande linéaire quadratique que nous avons synthétisée précédemment. On utilise une loi de commutation appropriée entre les deux commandes, dans notre cas on applique la commutation quand l'angle du pendule atteint $\pm 20^\circ$

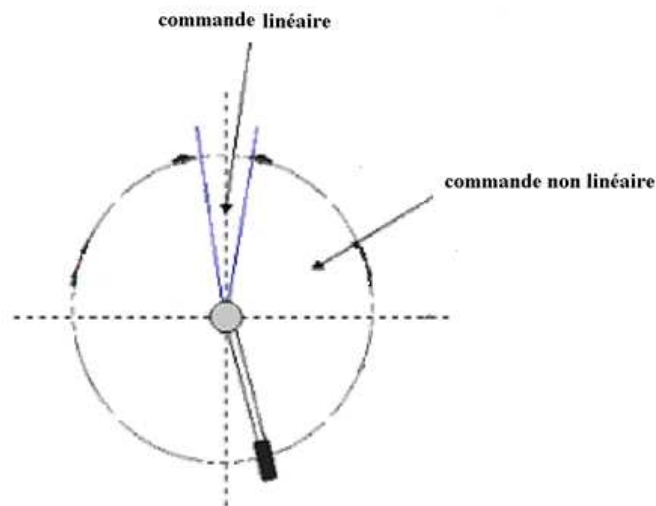


Fig IV.3 Diagramme de commande du pendule à deux zones de commande.

▪ **Simulation :**

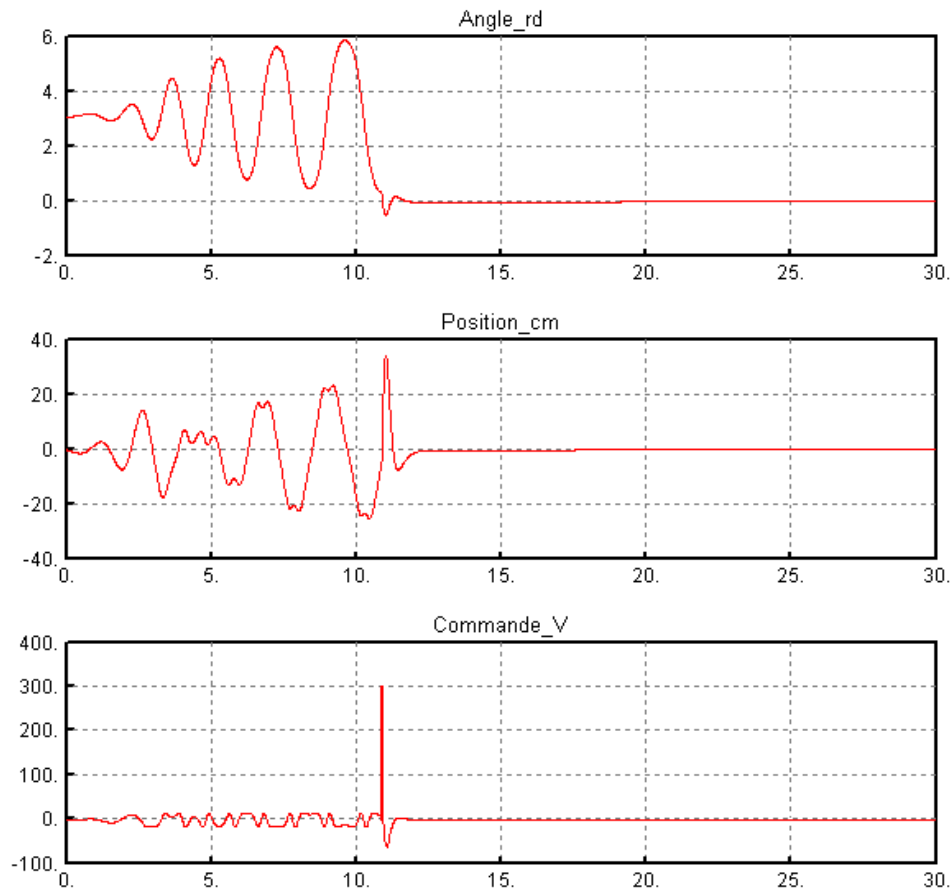


Fig IV.4 Simulation du système commandé par la commande à énergie minimale

$$(x_1 = 0.99\pi, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$$

On constate des graphes ci-dessus que notre commande arrive à stabiliser le pendule inversé. En effet elle a pu le ramener de sa position d'équilibre stable à sa position d'équilibre instable et l'y maintenir. Elle a en outre permis de stabiliser le déplacement du chariot en le ramenant à sa position initiale. Néanmoins, elle ne répond pas à toutes les restrictions du système, notamment celle de la tension. En effet, on constate un pic important de tension lors de la commutation entre les deux commandes. Etant donné que le pendule arrive à la position supérieure avec une énergie assez importante, la commande quadratique doit fournir autant d'énergie pour neutraliser le pendule et le maintenir dans sa position supérieure.

Pour remédier à ce problème, on effectue le pompage d'énergie (le balancement du pendule) en deux étapes :

- On fournit une énergie assez importante à la commande lorsque le pendule est à la moitié inférieure du plan.

- On fournit une énergie beaucoup plus réduite lorsque le pendule atteint la moitié supérieure du plan.

Ceci permettra de réduire la vitesse angulaire du pendule et par voie de conséquence de réduire l'énergie de celui-ci et ainsi garantir un passage en souplesse de la commande à énergie minimale vers la commande linéaire quadratique.

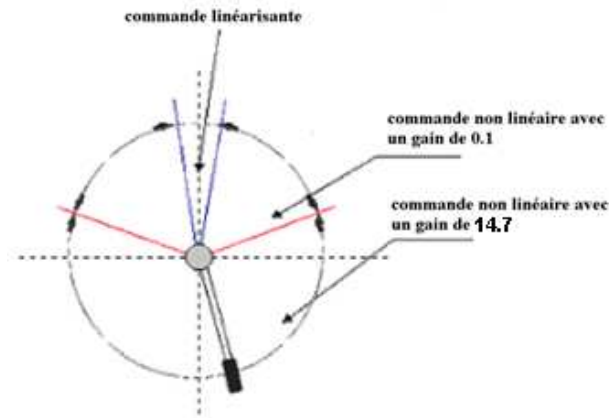


Fig IV.5 Diagramme de commande du pendule à trois zones de commande.

La commande s'écrira donc comme suit :

$$V = G \frac{(-k \operatorname{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta)) + mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + F_r \dot{x})}{F_v} \quad (\text{IV.47})$$

$$G : \text{est un gain donnée par : } \begin{cases} 14.7 & \text{si } \cos(\theta) < 0.4 \\ 0.1 & \text{si } \cos(\theta) \geq 0.4 \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

▪ Simulations:

On constate sur les simulations présentées ci-dessous (Fig IV.6 – Fig IV.13) que la commande redresse le pendule assez rapidement (en 7 secondes). Elle présente en outre, de la robustesse face aux perturbations et aux erreurs de modélisation mais également de bonnes performances en termes de poursuite de trajectoire. Cette commande satisfait aux objectifs qu'on s'est fixé tout en respectant toutes les clauses du cahier des charges, à savoir :

- Stabilisation de l'angle θ en un temps fini.
- Stabilisation de x en un temps fini et en respectant les restrictions sur le déplacement du chariot ($-40 \text{ cm} < x < 40 \text{ cm}$)

- Commande à énergie finie, respectant la limitation du moteur ($-24 V < V < 24 V$).

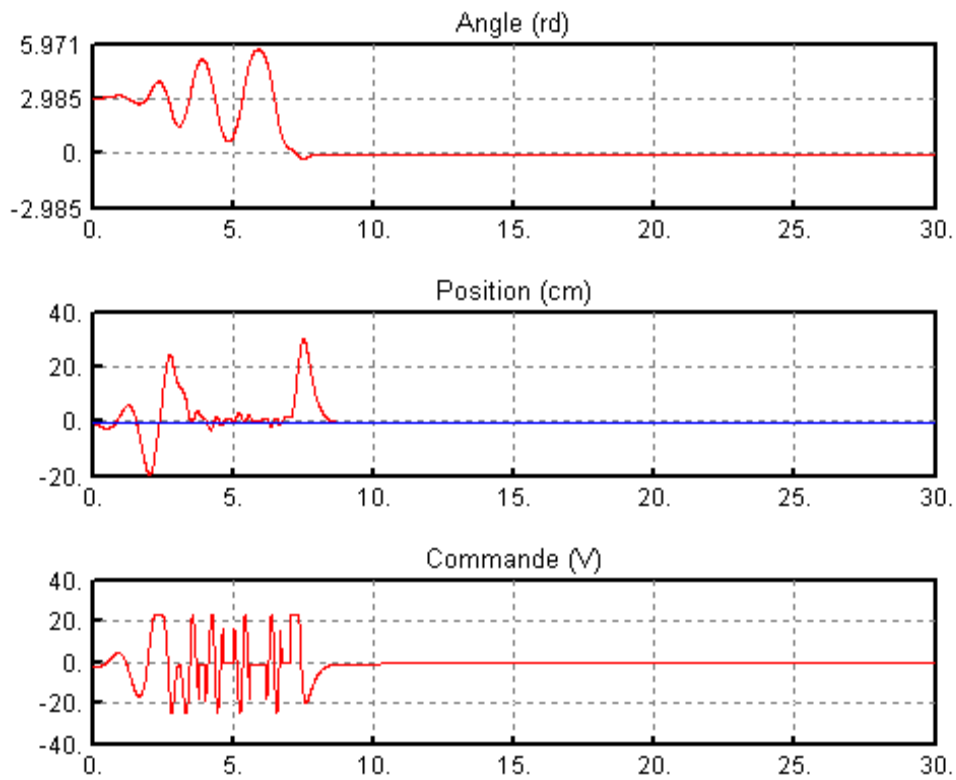


Fig IV.6 Stabilisation du pendule par la première approche

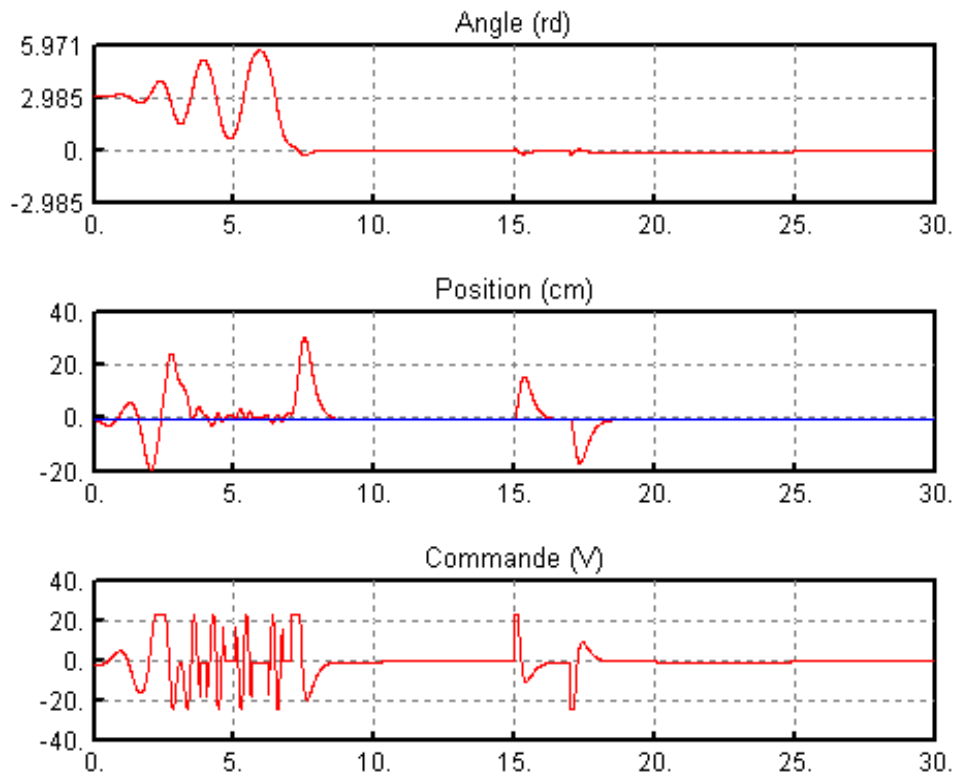


Fig IV.7 Stabilisation avec rejet de perturbation

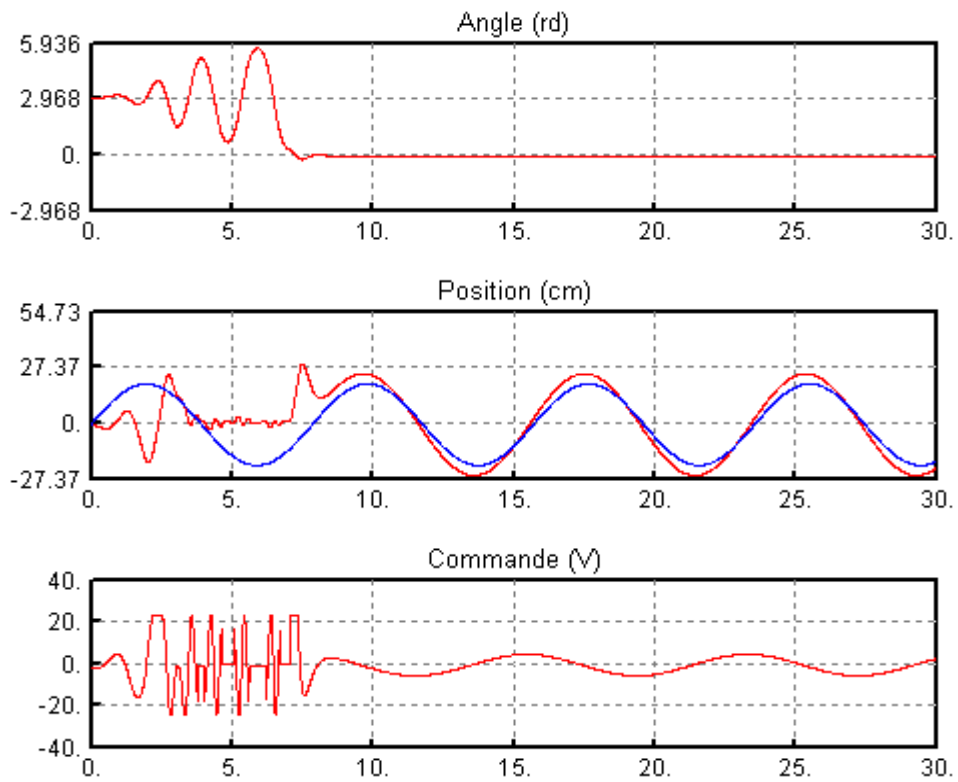


Fig IV.8 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8$ rd/s

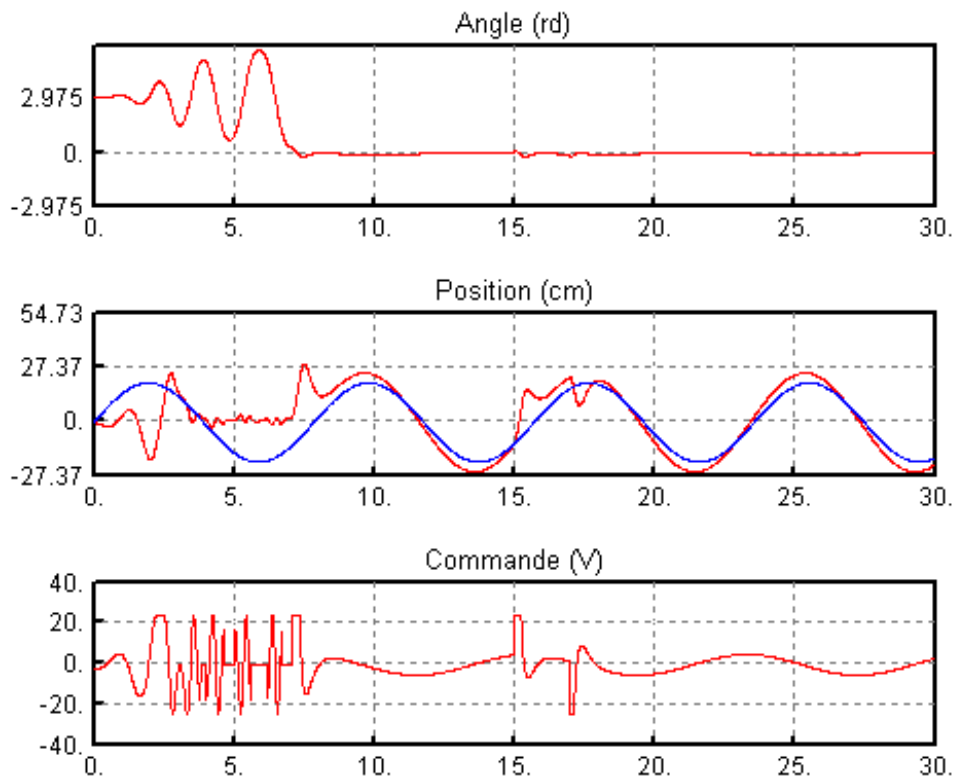


Fig IV.9 Poursuite d'un signal sinusoïdal avec rejet de perturbation

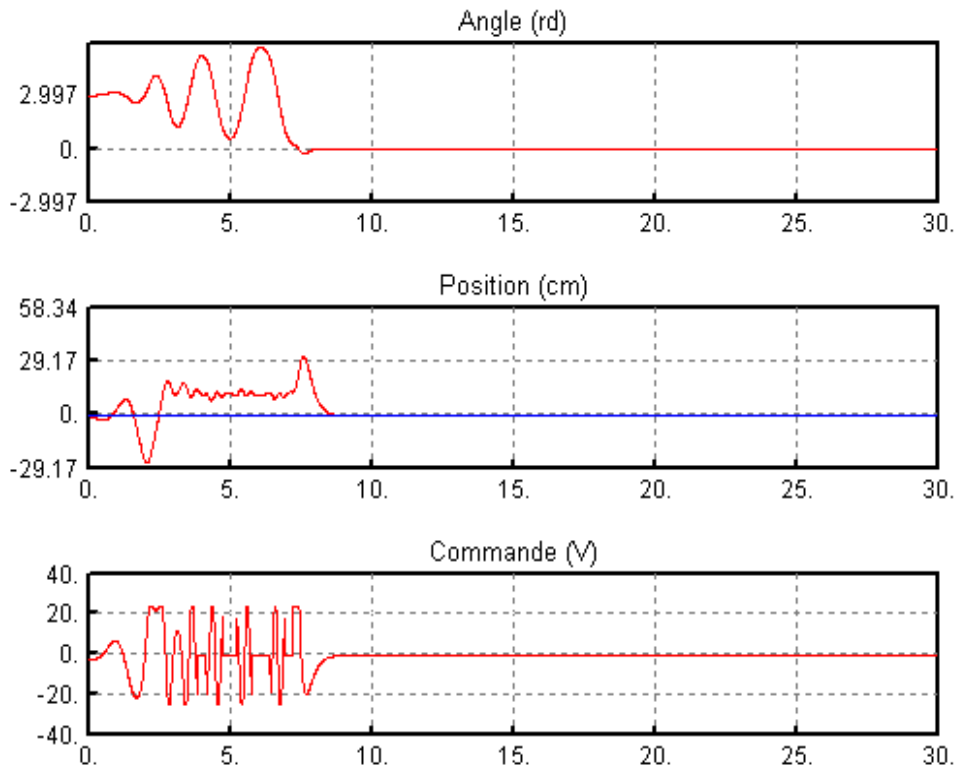


Fig IV.10 Stabilisation avec introduction d'une variation paramétrique sur $m +10\%$

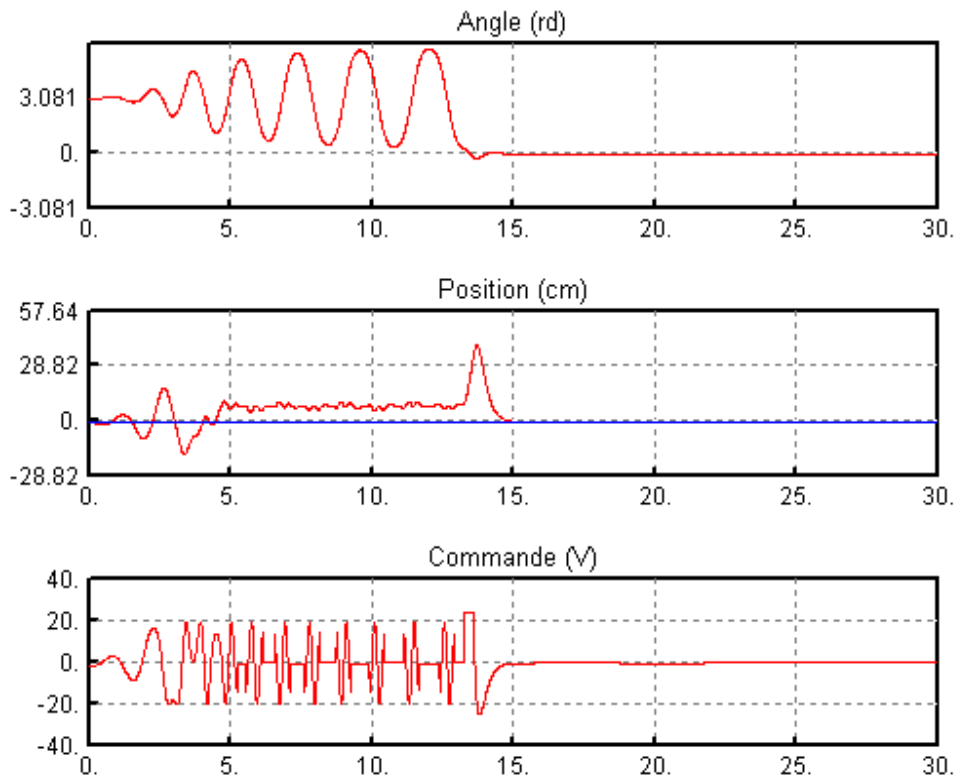


Fig IV.11 Stabilisation avec introduction d'une variation paramétrique sur $m -10\%$

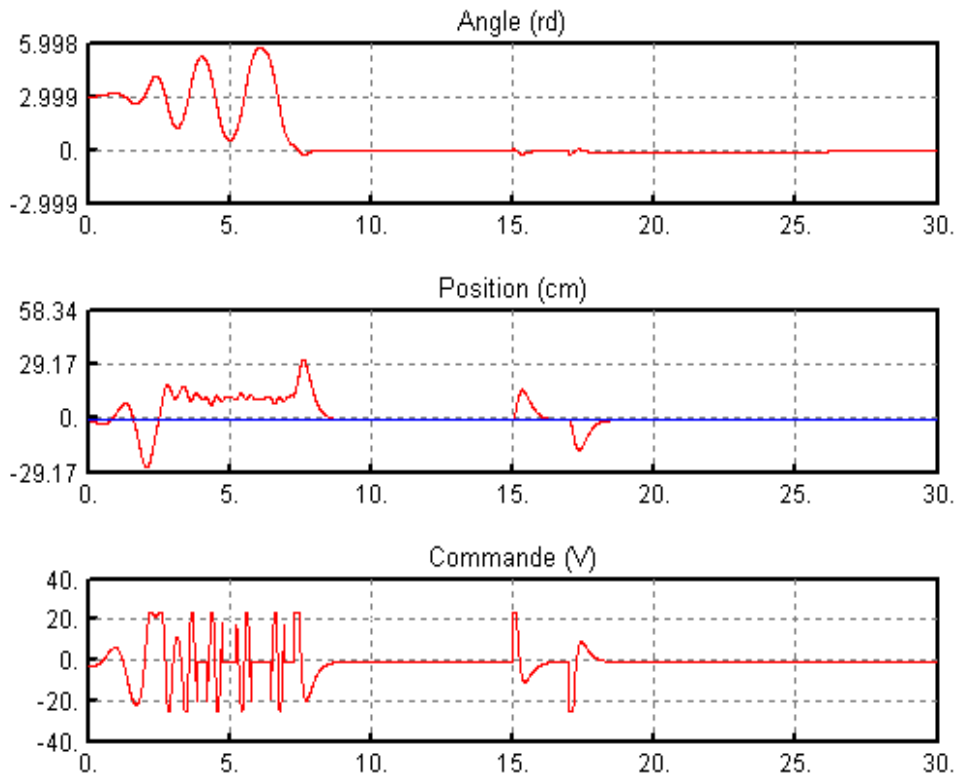


Fig IV.12 Rejet de perturbation avec variation paramétrique sur m de +10%

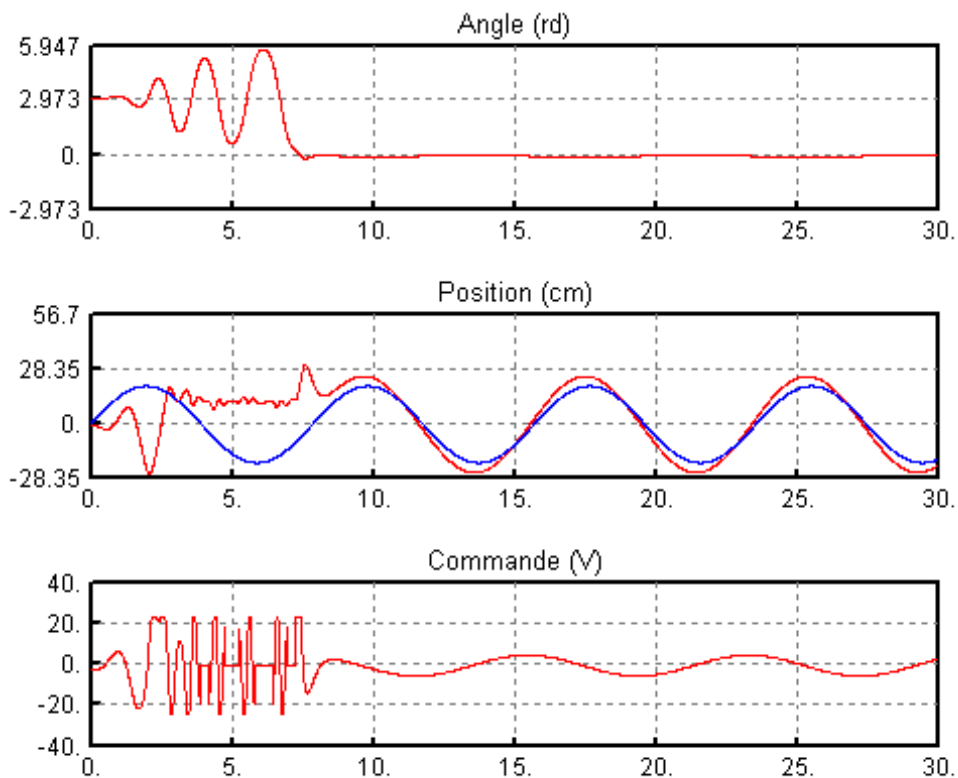


Fig IV.13 Suivi de trajectoire avec variation paramétrique sur m de +10%

IV.2.4.1 Deuxième approche : [21]

Dans cette section, nous allons adopter la même stratégie de commande que celle adoptée plus haut, mais en augmentant la surface de glissement de sorte à prendre en considération le déplacement et la vitesse du chariot, chose qui nous permettra de minimiser le déplacement du chariot lors de la phase du balancement du pendule. La surface de glissement sera donc :

$$S = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos(\theta) - 1) + \frac{1}{2}ml(x^2 + \dot{x}^2) \quad (\text{IV.49})$$

On définit la fonction de Lyapunov de la sorte :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (\text{IV.50})$$

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad (\text{IV.51})$$

Où :

$$\dot{S} = ml(\dot{\theta}(l\ddot{\theta} - g\sin(\theta)) + x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) \quad (\text{IV.52})$$

Sans oublier qu'on a :

$$l\ddot{\theta} - g\sin(\theta) = -\ddot{x}\cos(\theta) \quad (\text{IV.53})$$

Ce qui donne :

$$\dot{S} = ml(-\dot{\theta}\cos(\theta)\ddot{x} + x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) \quad (\text{IV.54})$$

Notre stratégie de contrôle se base sur l'accélération du chariot, cela s'exprime du fait qu'on considère : $u = \ddot{x}$. (IV.55)

En remplaçant \ddot{x} par u on aura :

$$\dot{S} = ml((\dot{x} - \dot{\theta}\cos(\theta))u + x\dot{x}) \quad (\text{IV.56})$$

Afin de vérifier la condition d'attractivité on doit avoir :

$$S\dot{S} < 0 \quad (\text{IV.57})$$

Cela est vérifié en prenant la commande suivante :

$$u = \frac{k \operatorname{sign}(S) + x\dot{x}}{\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x}} \quad (\text{IV.58})$$

Cette expression présente une singularité lorsque :

$$\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x} = 0 \quad (\text{IV.59})$$

Afin d'éviter cette singularité, on définit ε tel que :

$$\begin{cases} u = \frac{k \operatorname{sign}(S) + x\dot{x}}{\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x}} & \text{si } |\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x}| > \varepsilon \\ u = \frac{k \operatorname{sign}(S) + x\dot{x}}{\varepsilon \operatorname{sign}(\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x})} & \text{si } |\dot{\theta} \cos(\theta) - x\dot{x}| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.60})$$

k : est une constante positive qui représente le gain de la commande.

Sans oublier la relation entre la force appliquée sur le chariot et la tension de sortie du moteur:

$$F = \frac{2\pi K_m}{r R} (V - \frac{2\pi K_b}{r} \dot{x}) \quad (\text{IV.61})$$

En remplaçant F , $\ddot{\theta}$ et $\ddot{x} = u$ dans :

$$F = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - b\dot{x} \quad (\text{IV.62})$$

On obtient l'expression de la tension de commande:

$$V = G \frac{(M+m \sin^2(\theta))u + mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + F_r \dot{x}}{F_v} \quad (\text{IV.63})$$

Avec :

$$\begin{cases} G = 12 & \text{si } \cos(\theta) < 0.4 \\ G = 0.21 & \text{si } \cos(\theta) \geq 0.4 \end{cases} \quad (\text{IV.64})$$

▪ Simulations:

On constate sur les simulations du système présentées ci-dessous (Fig IV.14 – Fig IV.21) que cette deuxième approche tout comme la première atteint l'objectif de commande avec de très bonnes performances en termes de poursuite. Elle se caractérise également par de

la robustesse face aux perturbations et aux variations paramétriques. Enfin, elle est implémentable vu qu'elle vérifie toutes les clauses du cahier des charges, à savoir :

- Stabilisation de l'angle θ en un temps fini.
- Stabilisation de x en un temps fini et en respectant les restrictions sur le déplacement du chariot ($-40 \text{ cm} < x < 40 \text{ cm}$)
- Commande à énergie finie, respectant la limitation du moteur ($-24 \text{ V} < V < 24 \text{ V}$).

Il est à noter, que les principales différences entre les résultats des deux approches ne sont constatées que lors de l'expérimentation.

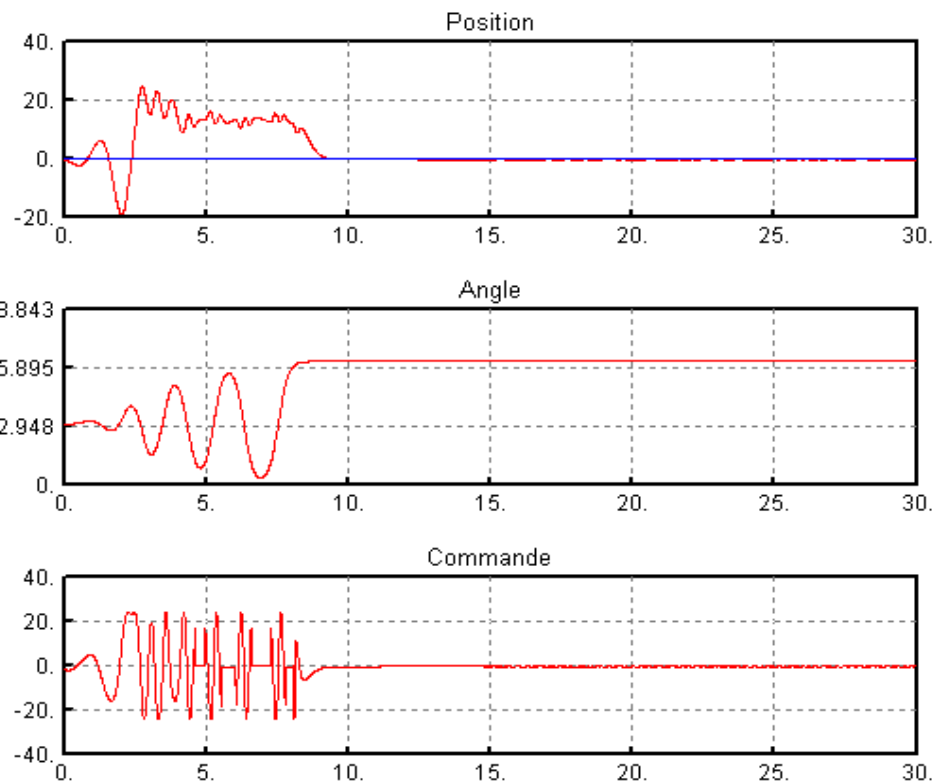


Fig IV.14 Stabilisation du pendule par la deuxième approche

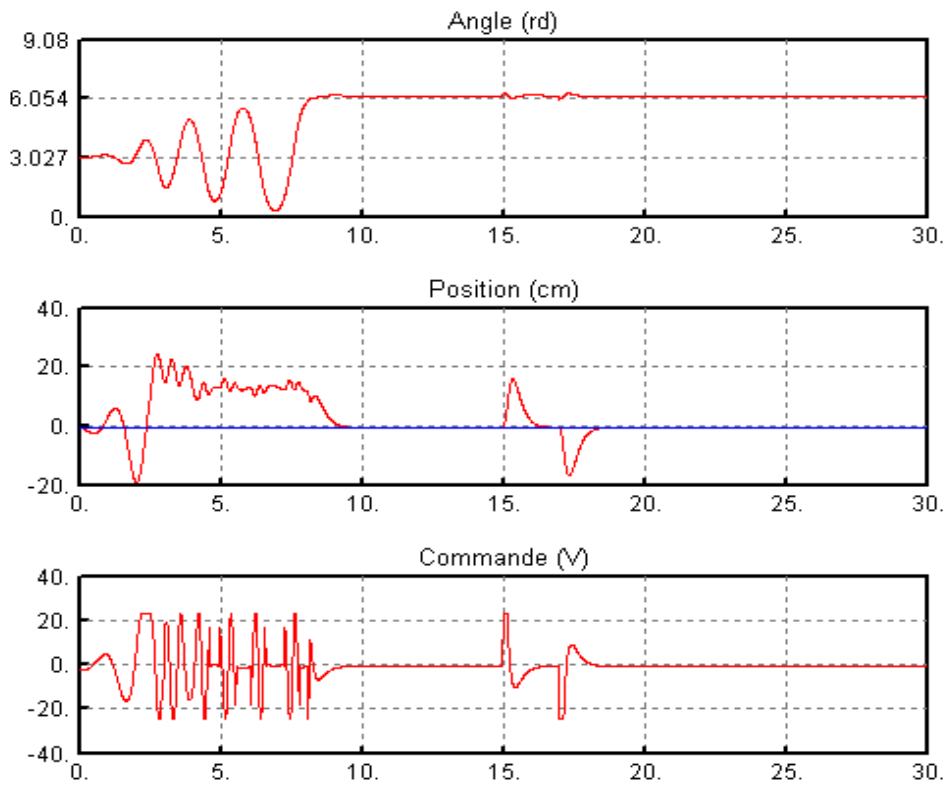


Fig IV.15 Stabilisation avec rejet de perturbation

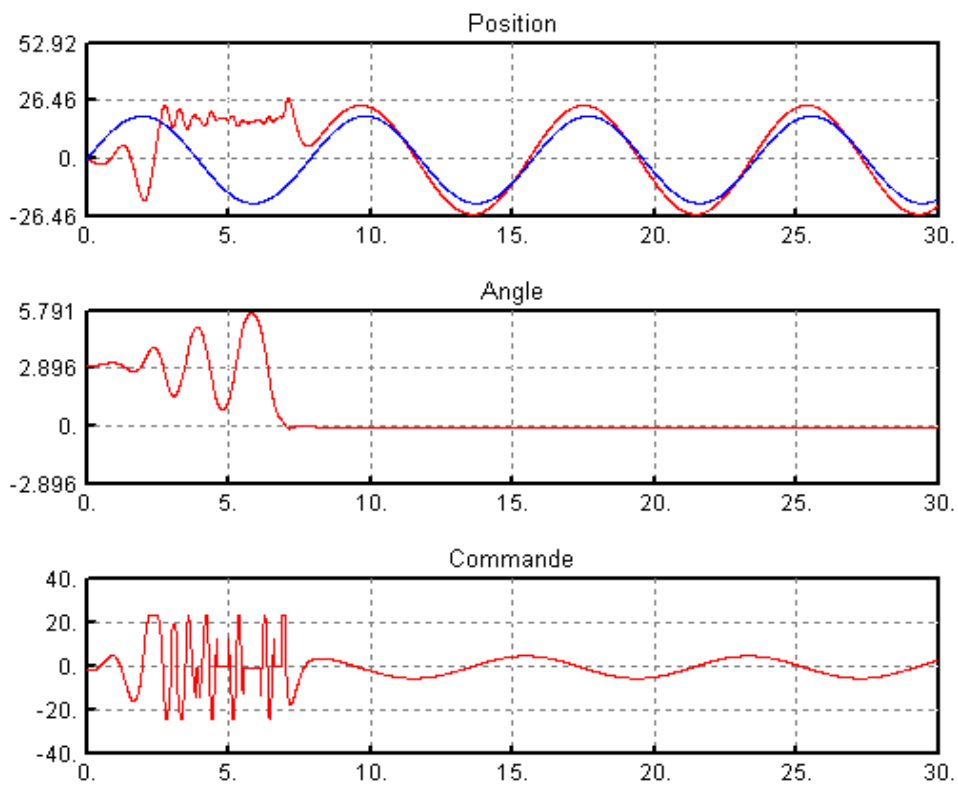


Fig IV.16 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8$ rd/s

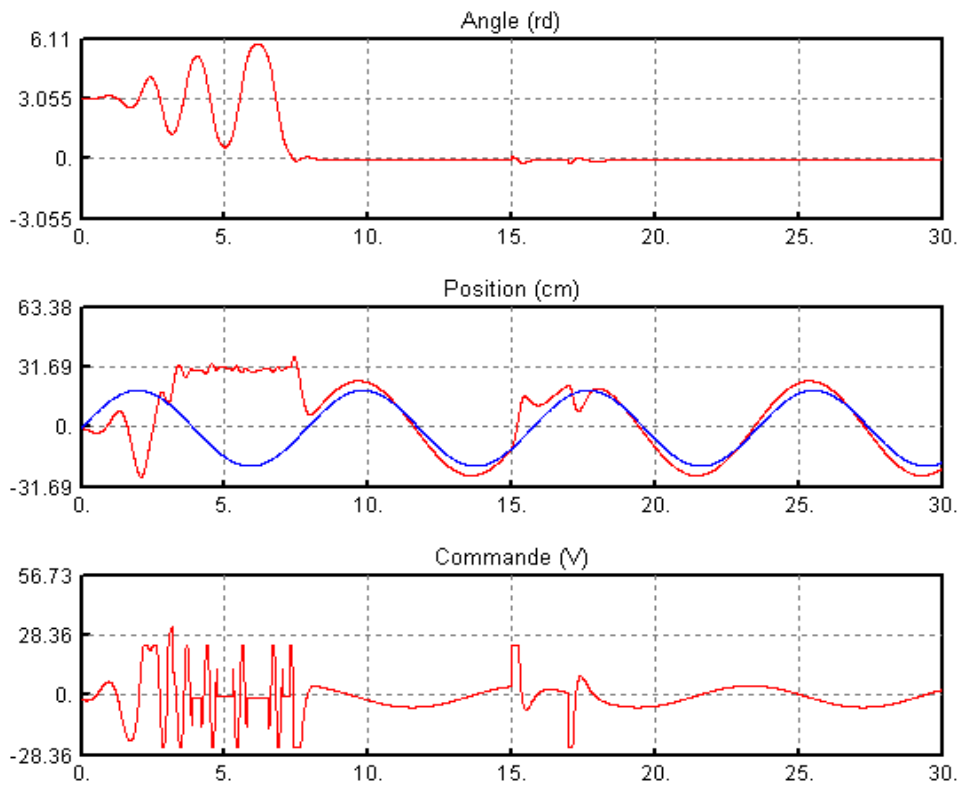


Fig IV.17 Poursuite avec rejet de perturbation

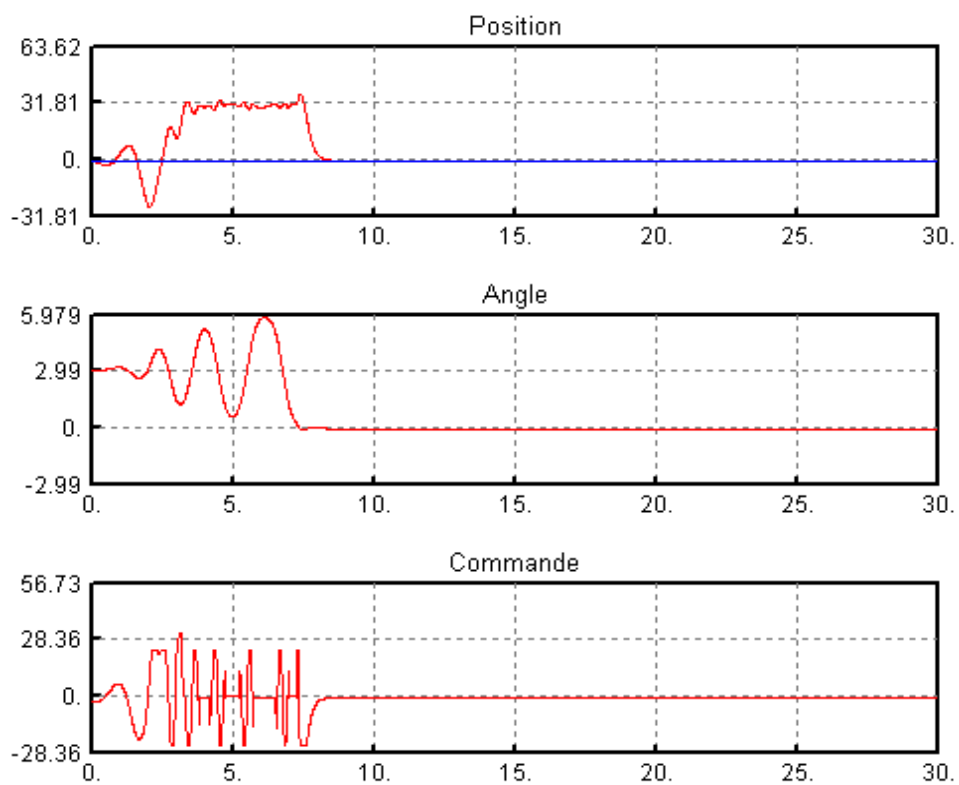


Fig IV.18 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de +10%

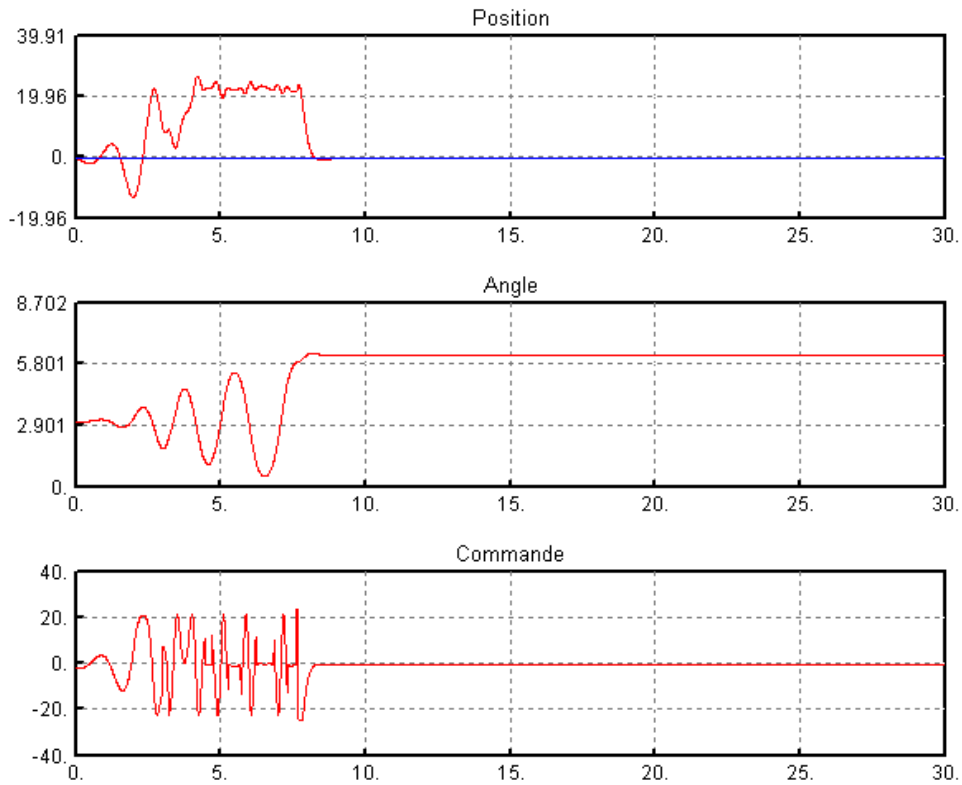


Fig IV.19 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de -10%

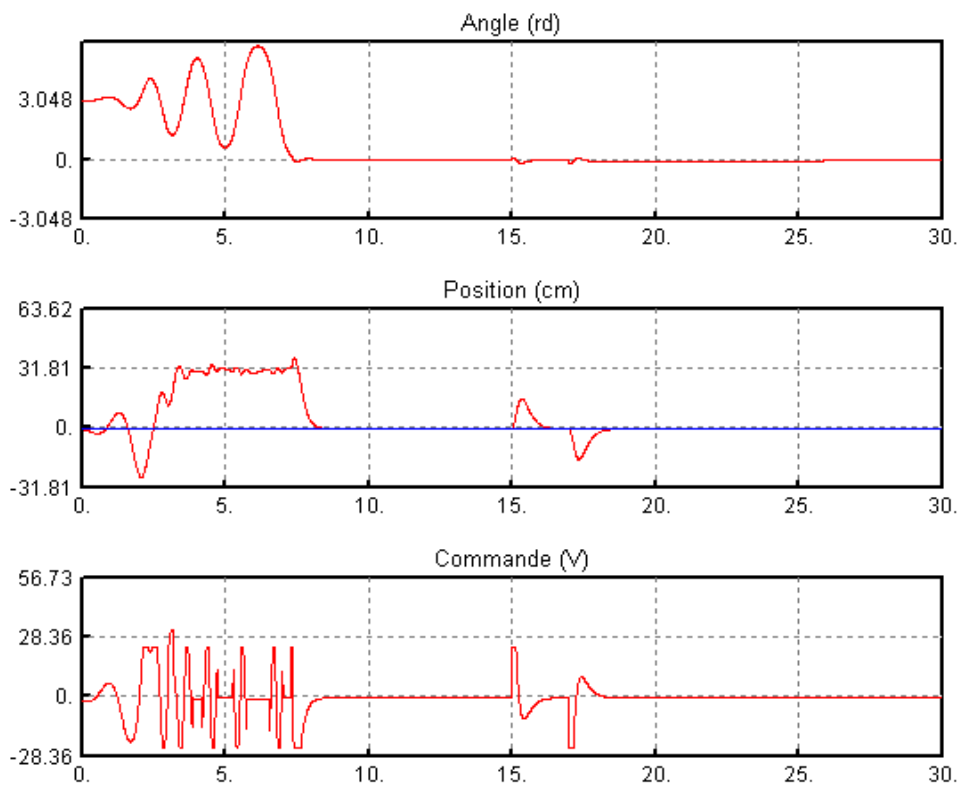


Fig IV.20 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique sur m de +10%

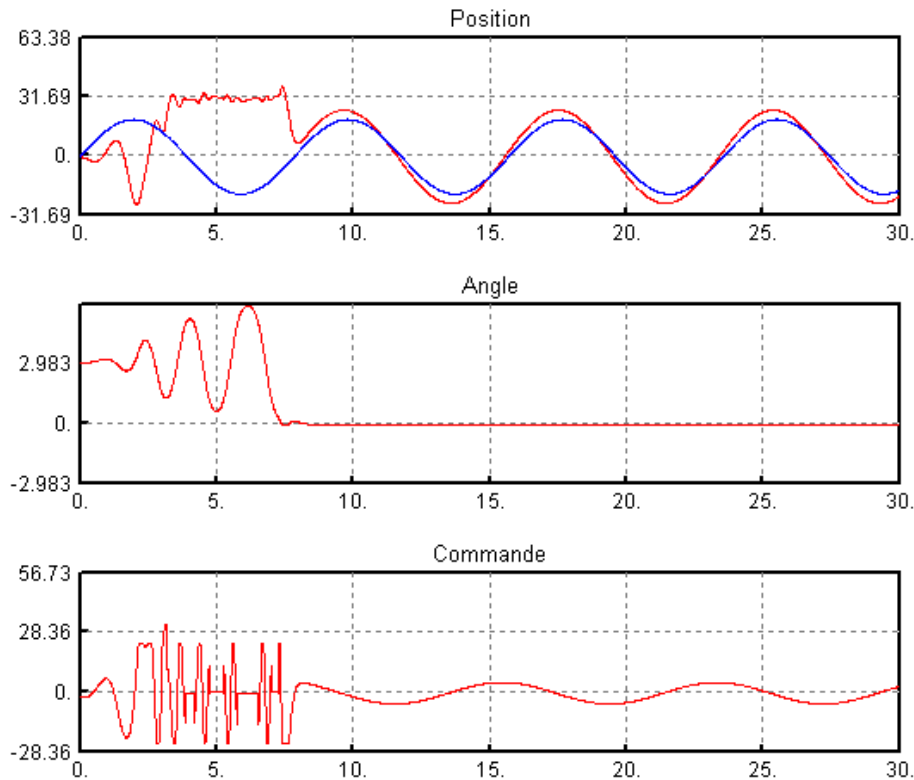


Fig IV.21 Suivi de trajectoire avec variation paramétrique sur m de +10%

IV.3 Commande par logique floue :

On a pu constater l'efficacité de la commande hybride (Commande à minimum d'énergie combinée à la commande linéaire quadratique) dans le chapitre précédent, rappelons que ça nous a permis de minimiser l'énergie de la commande et de vérifier les performances désirées. Dans ce qui suit, c'est cette approche qu'on essaiera de mettre en œuvre mais en utilisant la commande floue, ce qui, rappelons nous, apportera de la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation d'une part et des bruits externes et internes d'autre part.

IV.3.1 Commande à énergie minimale : [22]

Dans cette étude, une stratégie de mouvement de chariot a été déterminée pour balancer le pendule. Elle est basée sur l'effet d'une accélération donnée. La stratégie de base consiste à déplacer le chariot dans un tel mouvement que l'énergie est progressivement pompée au pendule. Ce qu'on va explorer dans ce qui suit est le principe suivi afin de fournir l'énergie appropriée au pendule suivant la zone dans laquelle il se trouve.

On montre le modèle du pendule basé sur l'approche Newtonienne dans la figure IV.8 a. Les éléments écrits en gras sont des vecteurs, les autres sont des scalaires.

Les forces appliquées sur le pendule sont :

$$\mathbf{F}_r = F_r(\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) \quad (\text{IV.65})$$

$$\mathbf{F}_g = -mg \mathbf{j} \quad (\text{IV.66})$$

En utilisant les lois de Newton F_r sera donnée par :

$$F_r = m(\sin\theta\ddot{x} + l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \quad (\text{IV.67})$$

En utilisant l'expression de F_r le travail est exprimé par :

$$\delta W = \mathbf{F}_r * \partial x = F_r \sin\theta \partial x = m(\sin^2\theta\ddot{x} + \sin\theta l \dot{\theta}^2 + g \sin\theta \cos\theta)\partial x \quad (\text{IV.68})$$

Le terme $\sin^2\theta\ddot{x}$ dans cette équation est très important, car il exprime l'effet du travail pour une accélération, donné à n'importe quel angle. La simulation de ce terme en fonction de l'angle est représentée dans la figure IV.22 b. On remarque que pour un angle proche de $\pm 90^\circ$, le travail est maximum, par contre pour un angle proche de 0° le travail tend à s'annuler. On remarque également que le travail est positif quand l'accélération et le déplacement sont du même signe. Dans ce cas l'énergie est ajoutée au système.

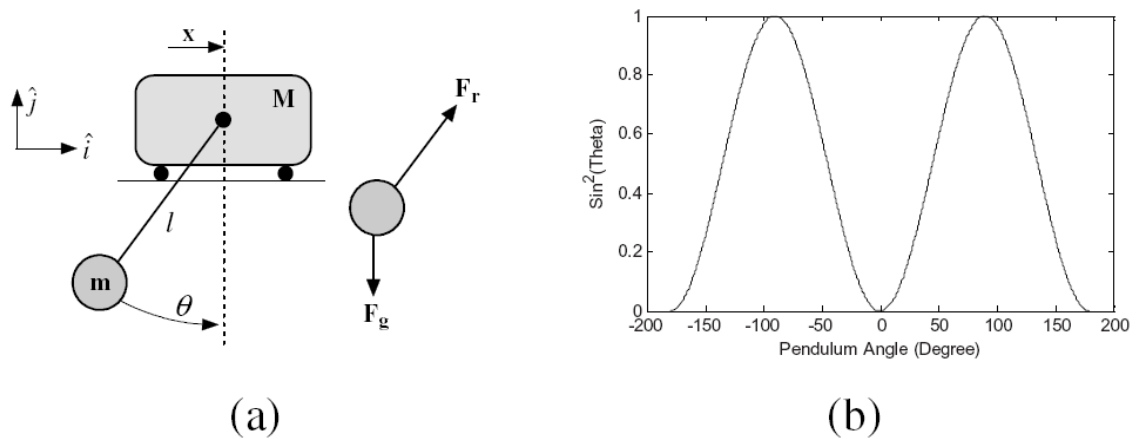


Fig IV.22 (a) Représentation des forces appliquées sur le pendule. (b) L'effet du travail du système.

En considérant l'effet du travail du système, une stratégie pour la trajectoire du chariot basée sur l'angle du pendule est établie. Pour maximiser le travail positif agissant sur le pendule, on doit augmenter l'accélération du chariot quand l'angle est au voisinage de $\pm 90^\circ$

et ceci dans la fin d'obtenir un transfert maximum d'énergie. Par contre au voisinage de 0° où le travail est minimal, on procède à la décélération du chariot vu que dans cette partie le transfert d'énergie est minimal.

Les zones d'accélération et de décélération sont représentées sur la figure IV.23. Le chariot doit être accéléré quand le pendule est dans la **zone I**, il doit être décéléré quand le pendule est dans la **zone II**, et il doit attendre pendant que le pendule atteigne son point maximum dans la **zone III**. Ce processus est répété jusqu'à ce que le pendule atteigne sa position inversée.

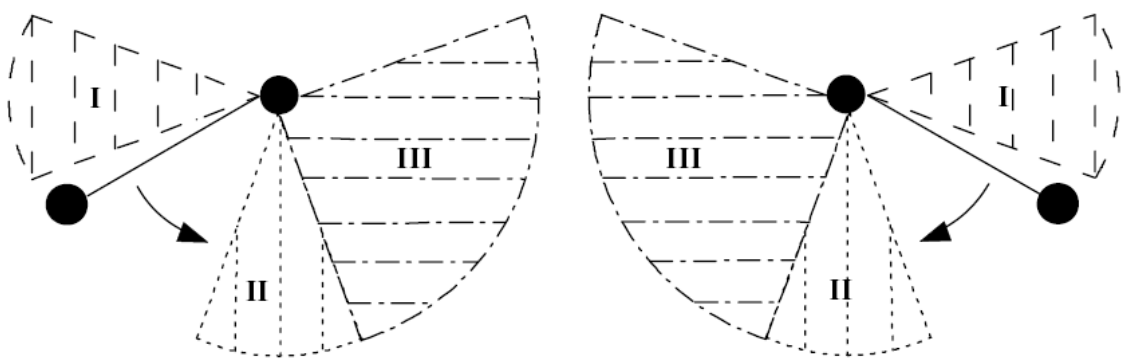


Fig IV.23 Stratégie de la commande à énergie minimale.

Au final, pour ramener le pendule près de sa position inversée avec une vitesse angulaire faible, le mouvement du chariot doit être graduellement réduit.

Ces règles sont assez facilement traduites en règles floues afin d'obtenir notre régulateur. Pour cela on va définir deux variables d'entrée qui sont l'erreur sur l'angle $e\theta$ et l'erreur sur la vitesse angulaire $e\dot{\theta}$. Le système a une trajectoire de chariot limitée mais elle est suffisante pour appliquer notre stratégie de contrôle. On définit également sept fonctions d'appartenances pour l'angle, et trois pour la vitesse angulaire. Ces fonctions d'appartenances sont présentées dans la figure IV.10, la base des règles est donnée dans la table IV.1 et les fonctions d'appartenances de la commande sont montrées dans la figure IV.11.

La réponse du système est donnée dans la figure IV.6. Le pendule est ramené de sa position inférieure vers celle supérieure en environ 19 s.

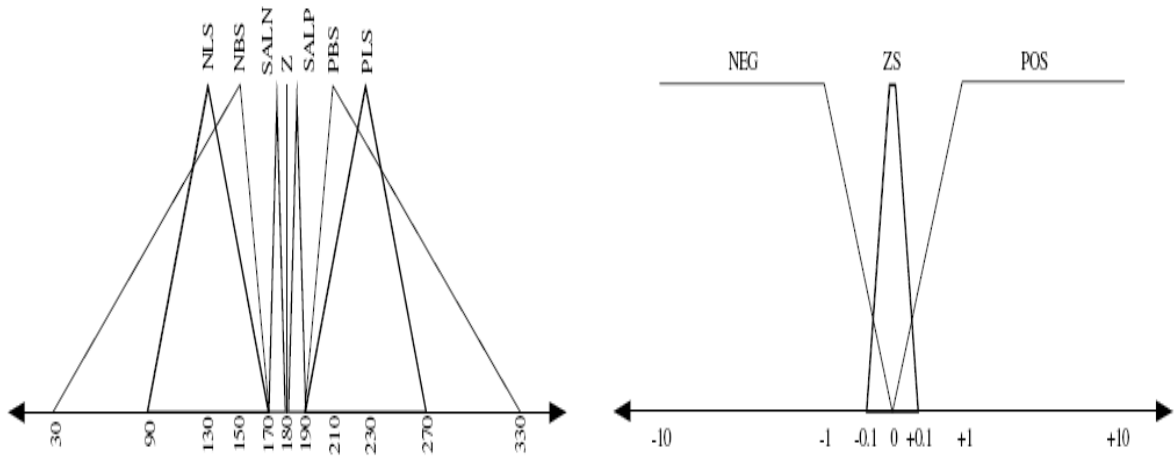


Fig IV.24 Fonctions d'appartenance pour θ et $\dot{\theta}$

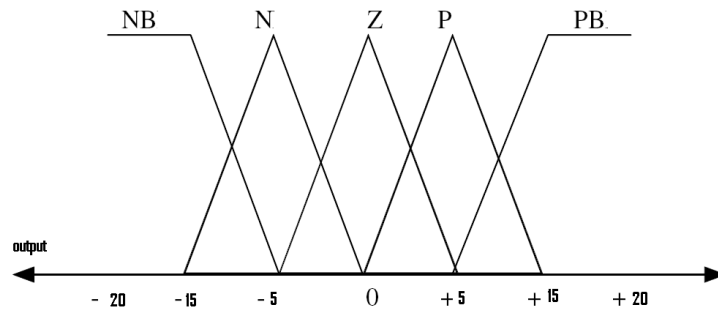


Fig IV.25 Fonctions d'appartenance pour la commande

Table IV.1 Table des règles pour l'algorithme d'oscillation

$e\theta$ \ $e\dot{\theta}$	NLS	NBS	SALN	Z	SALP	PBS	PLS
NEG					P	Z	PB
ZE		NS	EZ	P	PB	NB	NS
POS	NB						

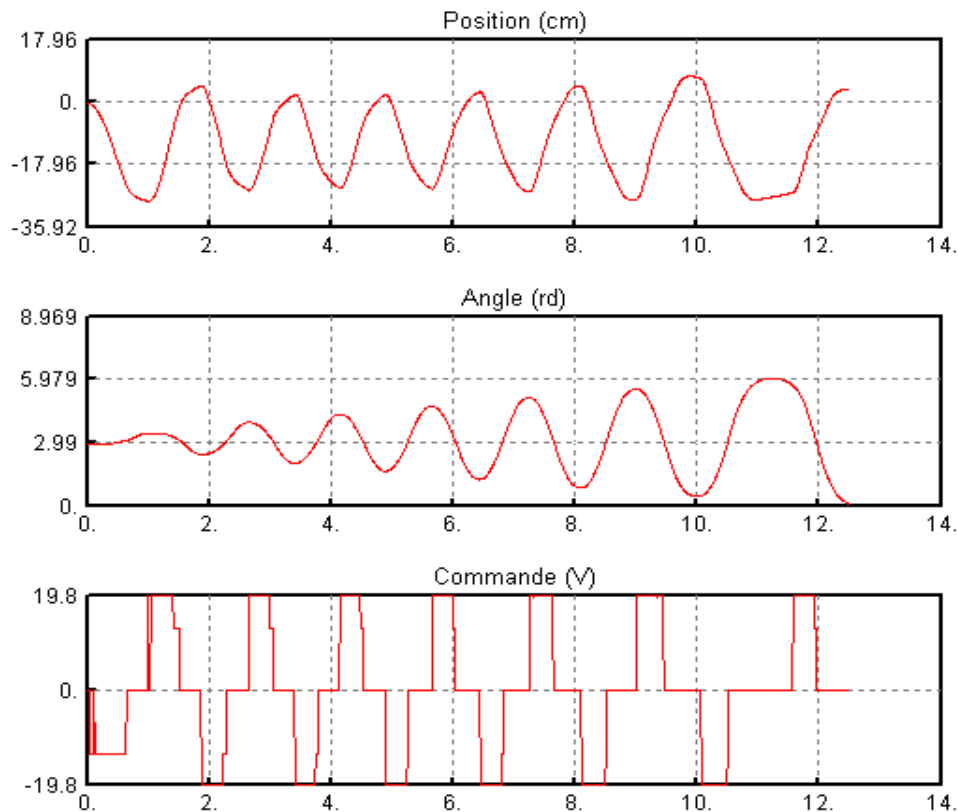


Fig IV.26 La réponse du système

IV.3.2 Commande stabilisante: [6]

Pour assurer la stabilisation de l'angle du pendule et de la position du chariot en même temps, on prendra un régulateur flou du type Mamdani ayant pour entrées : l'angle θ , la vitesse angulaire du pendule $\dot{\theta}$, le déplacement du chariot x et la vitesse \dot{x} . Les formes des fonctions d'appartenance choisies sont : la forme triangulaire ainsi que la forme trapézoïdale qui sont les plus utilisées.

Pour la stabilisation du pendule inversé les règles floues sont assez facile à élaborer, le principe est le suivant : si l'angle et la vitesse angulaire sont de signe différent le pendule a tendance à se stabiliser tout seul. S'ils sont de même signe, on applique une force ayant le même signe que celle de l'angle. Reste à trouver la meilleure amplitude de la commande à appliquer. Le même principe est considéré pour le déplacement et la vitesse du chariot.

Les fonctions d'appartenances de l'entrée du régulateur sont représentées sur la figure IV.27, la base de règles est donnée dans la table IV.2 et les fonctions d'appartenances de la commande sont représentées sur la figure IV.28.

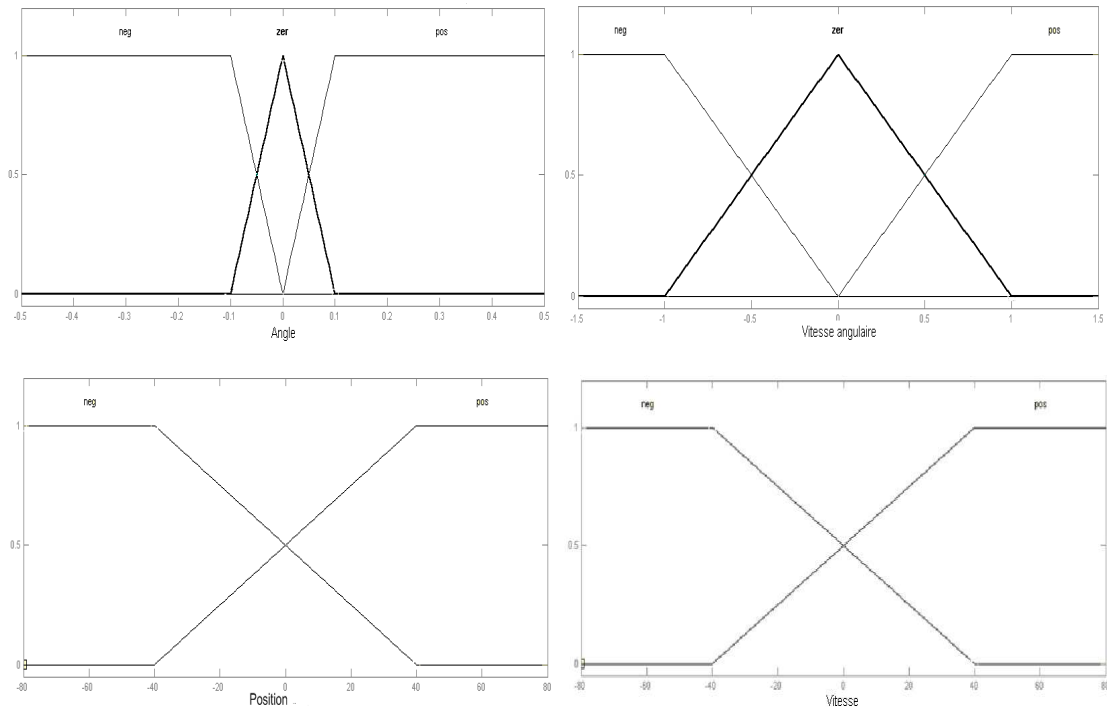


Fig IV.27 Fonctions d'appartenance des entrées pour la commande floue stabilisante

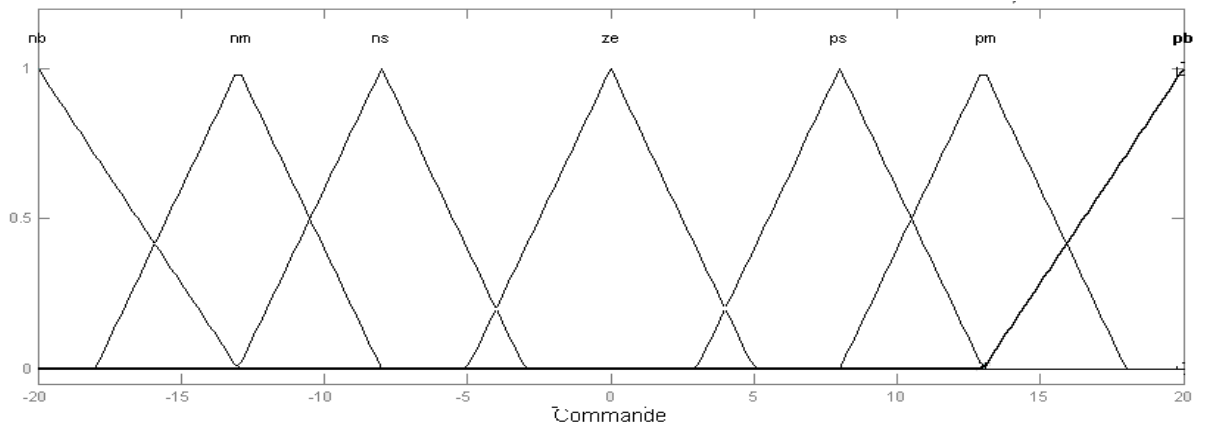


Fig IV.28 Fonctions d'appartenance pour la commande stabilisante

Table IV.2 Table des règles pour l'algorithme de stabilisation

- Pour x et \dot{x} négatifs :

$\dot{\theta}$ θ	NEG	ZE	POS
NEG	NB	NM	NS
ZE	NM	NS	ZE
POS	NS	ZE	PS

- Pour x négatif et \dot{x} positif :

$\dot{\theta}$ θ	NEG	ZE	POS
NEG	NM	NS	NB
ZE	NS	ZE	PS
POS	ZE	PS	PM

- Pour x et \dot{x} positifs :

$\dot{\theta}$ θ	NEG	ZE	POS
NEG	NS	ZE	PS
ZE	ZE	PS	PM
POS	PS	PM	PB

- Pour x positif et \dot{x} négatif :

$\dot{\theta}$ θ	NEG	ZE	POS
NEG	NB	NM	NS
ZE	NM	NS	ZE
POS	NS	ZE	PS

▪ Simulation:

On constate sur la simulation présentée ci-dessous (Fig IV.29), que cette commande bien qu'assurant l'objectif de stabilisation, elle est considérablement lente par rapport à la commande LQ.

Néanmoins, son défaut majeur réside dans le dépassement que présente la tension atteignant un pic de 50V ce qui est au delà des capacités du système.

Pour remédier au problème de la limitation de la tension de commande, on appliquera le retour d'état optimal mis au point dans la section précédente afin de stabiliser le pendule et on combinera cette commande avec la commande à énergie minimale floue.

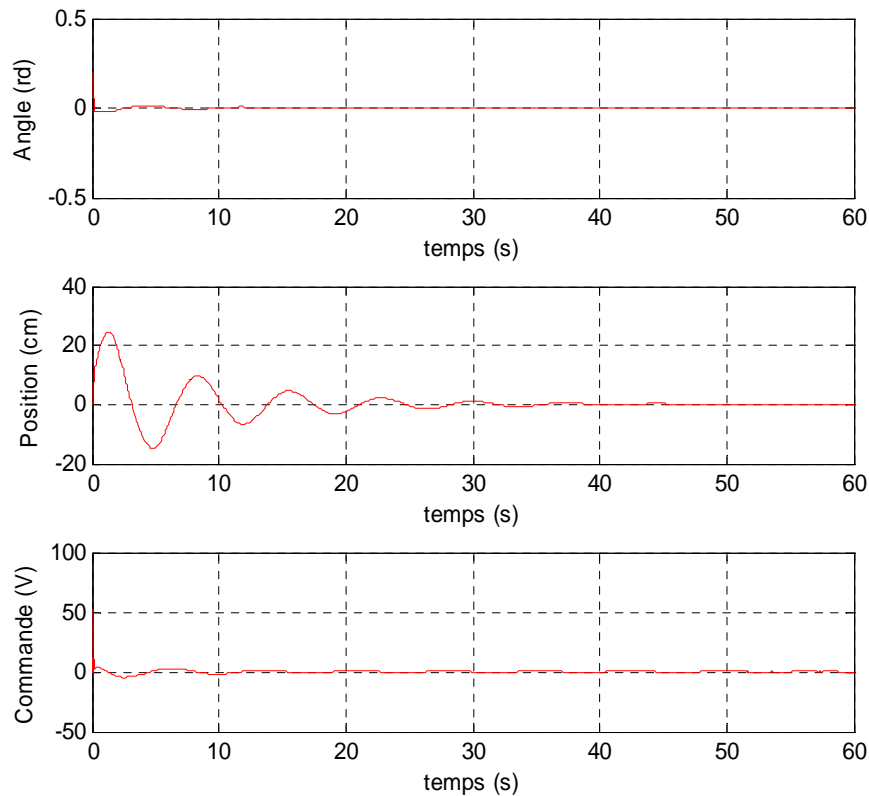


Fig IV.29 Simulation de la stabilisation par commande floue

IV.3.3 Commande floue combinée avec la commande linéaire quadratique :

On constate sur les simulations présentées ci-dessous (Fig IV.30 – Fig IV.37) que la commande par logique floue basée sur le principe de minimum d'énergie assure le balancement du pendule et sa convergence vers la zone linéaire. Dans cette zone, la commande linéaire quadratique prend le relais. Cette phase s'effectue en douceur, avec juste un léger pic en tension qui ne nuit en rien au cahier des charges. Le temps de réponse est du même ordre de grandeur que celui des commandes par mode de glissement développées précédemment. On remarque en outre que la commande présente moins de chahutement que celui obtenu lors de la commande par mode de glissement, ce qui est moins éprouvant pour l'actionneur.

De plus, Cette commande comme escompté, présente de la robustesse face aux variations paramétriques en l'occurrence la variation de la masse m . Elle manifeste de très bonnes performances en termes de poursuite de trajectoire et est robuste face aux perturbations que l'on fait subir au système lorsqu'il est en régime établi.

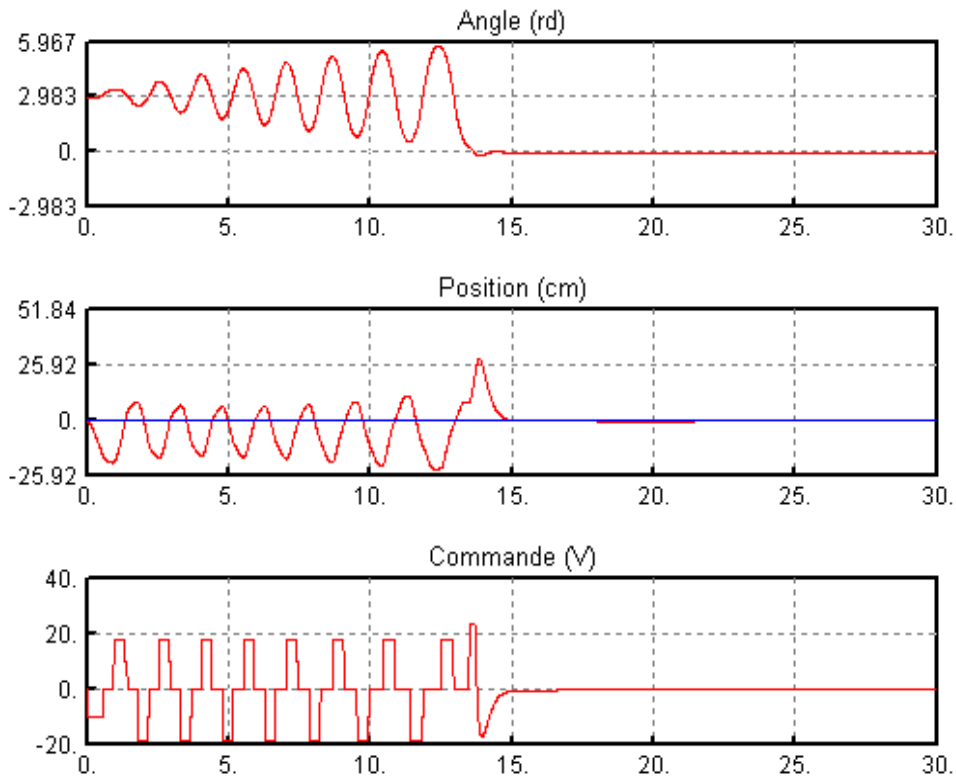


Fig IV.30 Stabilisation du pendule inversé

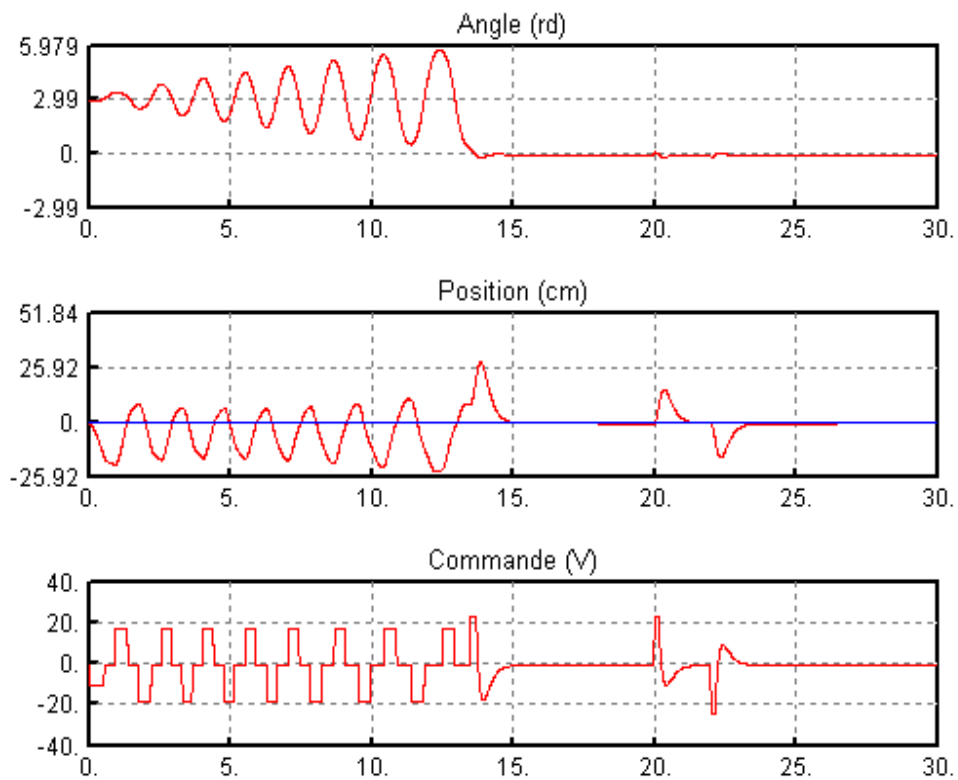


Fig IV.31 Stabilisation avec rejet de perturbation

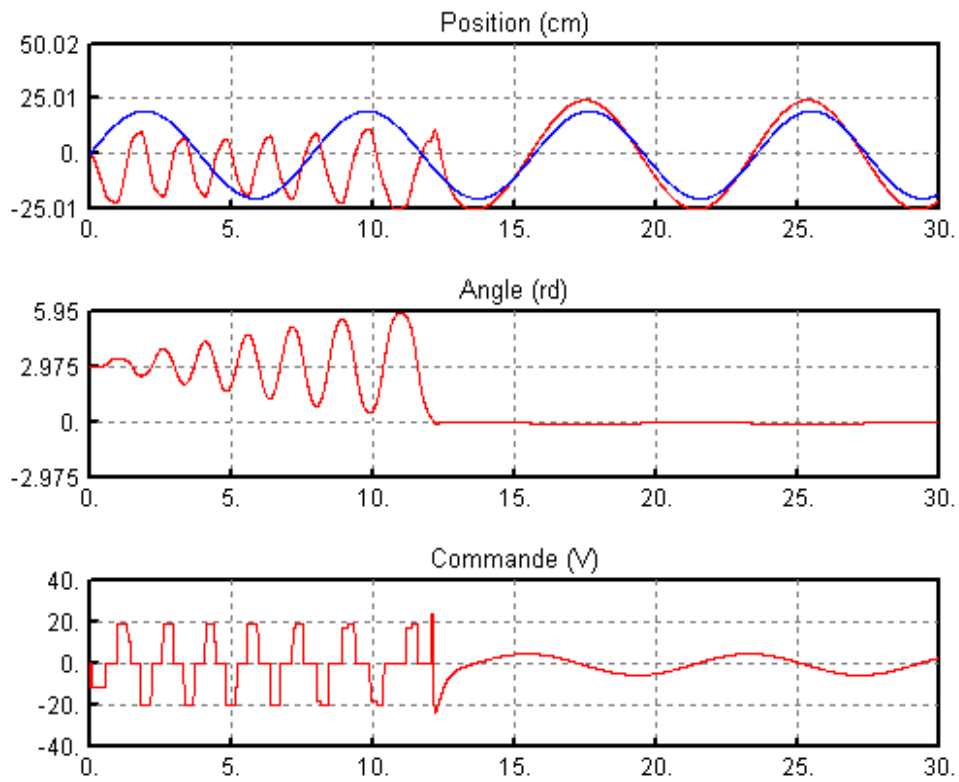


Fig IV.32 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$

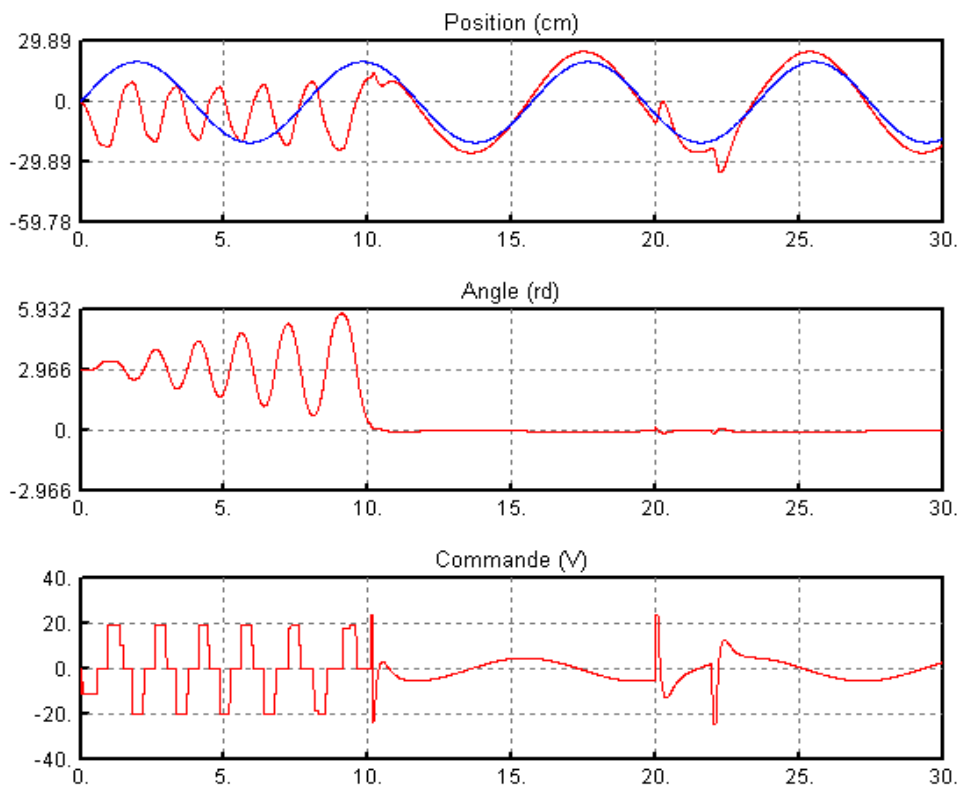


Fig IV.33 Poursuite avec rejet de perturbation

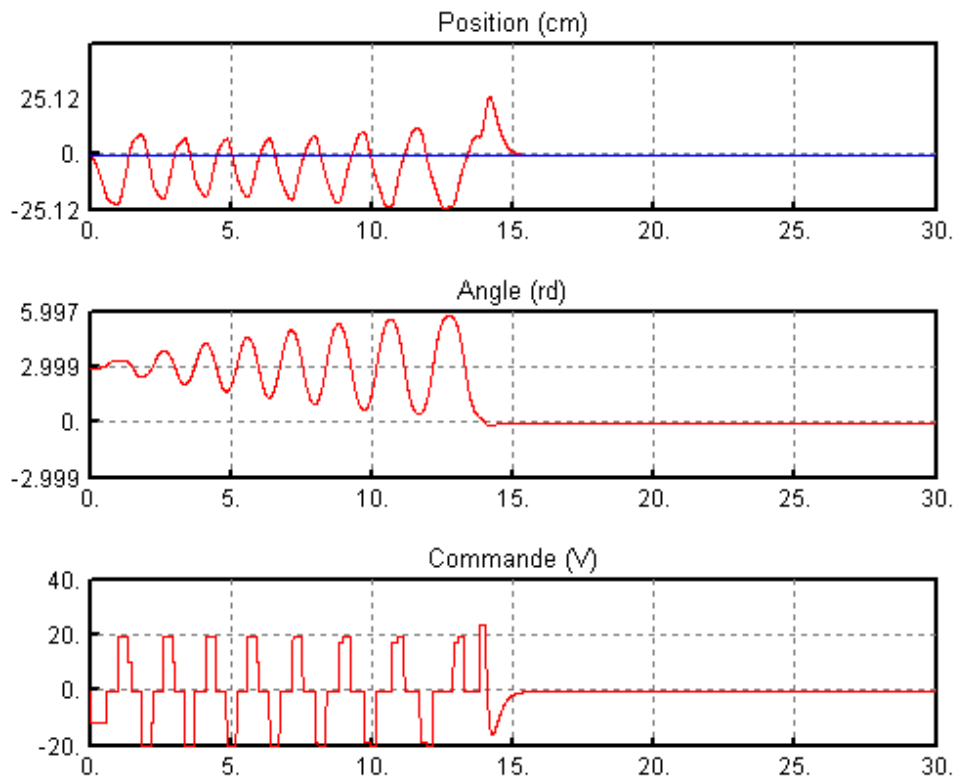


Fig IV.34 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de +10%

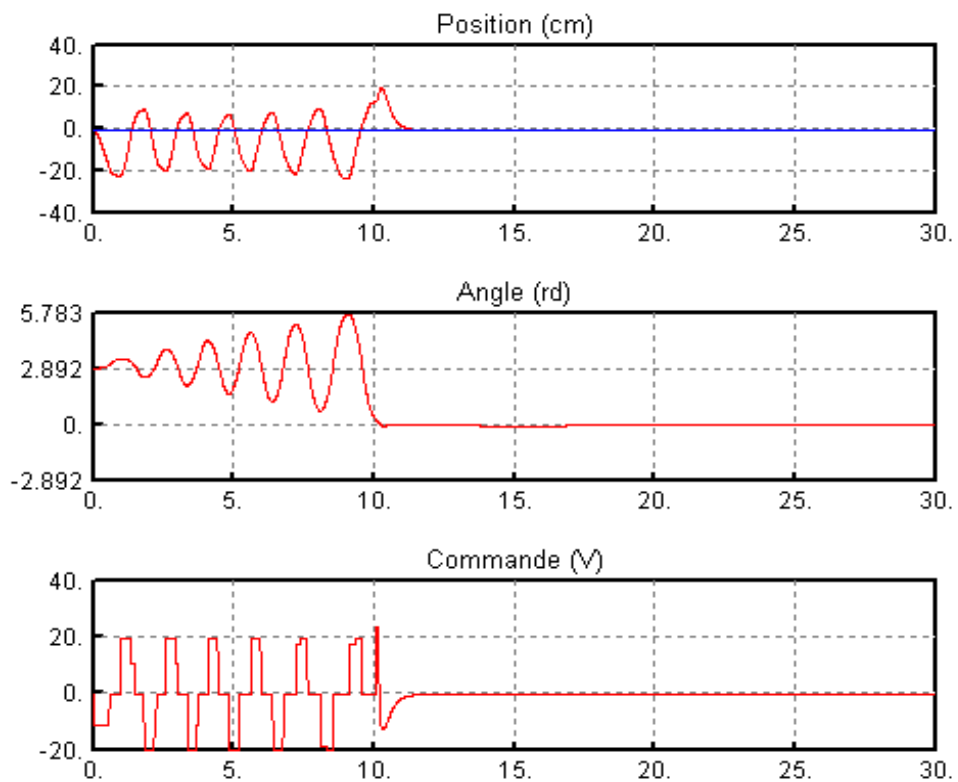


Fig IV.35 Stabilisation avec une variation paramétrique sur m de -10%

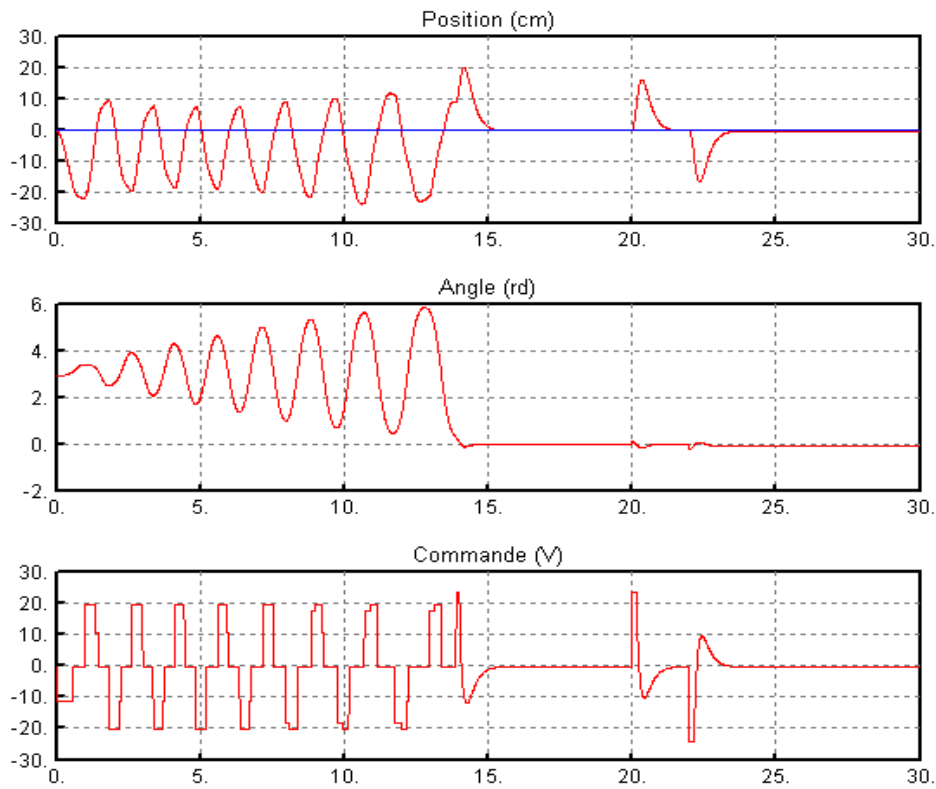


Fig IV.36 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique sur m de +10%

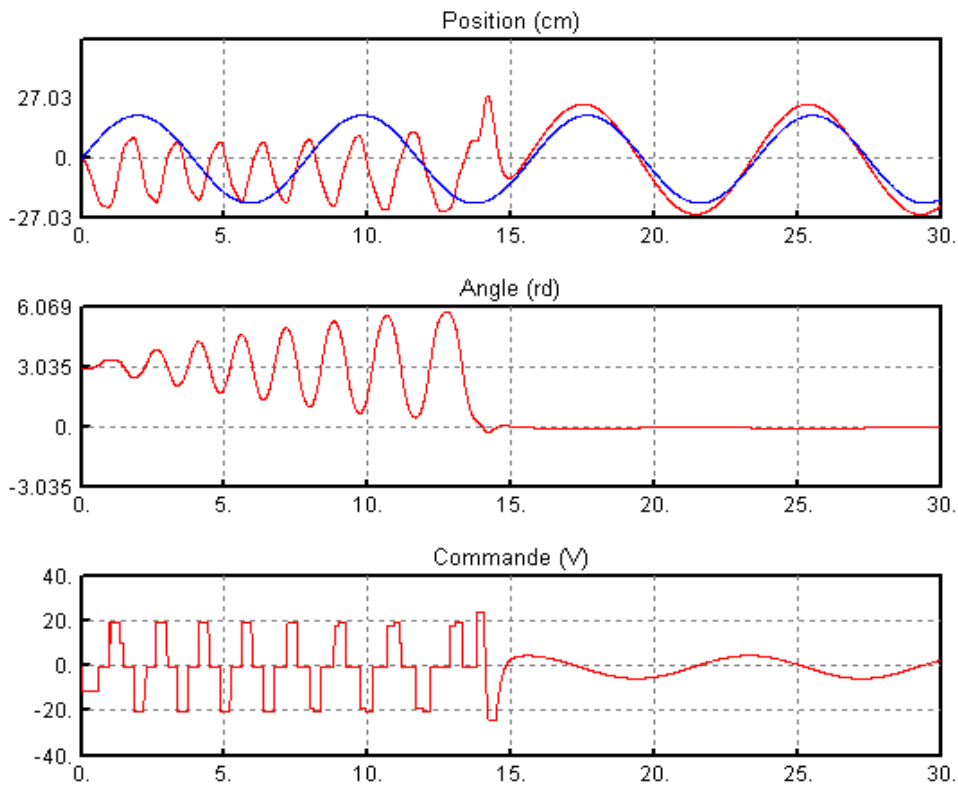


Fig IV.37 Poursuite de trajectoire avec une variation paramétrique sur m de +10%

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons effectué la synthèse de la commande par mode de glissement permettant le balancement du pendule. Nous avons traité cette commande par deux approches, dans la première on a pris l'énergie du pendule comme surface de glissement, ce qui nous a permis d'atteindre l'objectif de commande avec de bonnes performances. Dans la seconde, nous avons augmenté cette surface par une expression traduisant l'énergie du chariot, ce qui aura comme effet lors de l'expérimentation de réduire le déplacement de celui-ci lors de la phase du balancement du pendule. Cette commande possède des performances similaires à celle de la commande précédente ; les différences principales ne seront constatées que lors de l'expérimentation comme nous le traiterons dans le prochain chapitre.

Lors de la mise au point de cette commande, nous avons également constaté l'importance de la pondération de la commande permettant le balancement. En effet, il faut fournir une énergie relativement grande lorsque le pendule est dans le demi plan bas puis une énergie plus basse afin de le faire parvenir en douceur dans le voisinage où la commande linéaire opère.

Enfin, nous avons appliqué ces mêmes raisonnements en mettant en œuvre la commande par logique floue. Celle-ci s'est révélée efficace avec une commande présentant beaucoup moins de chahutement que les précédentes.

Chapitre V

Implémentation et résultats expérimentaux

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons exposer les résultats expérimentaux obtenus lors de l'implémentation de la commande hybride sur la maquette du pendule inversé.

Nous allons également démontrer le caractère robuste que manifeste notre commande à la fois par rapport aux variations paramétriques, que par rapport aux perturbations que le système peut subir lors du régime établi.

III.1 Considérations pratiques :

Les capteurs dont on dispose sur la maquette sont des encodeurs incrémentaux ; D'où pour obtenir les valeurs de l'angle θ et de la position x , on rajoute des blocs de conversion qui permettent de traduire le nombre de pulse en valeur exploitable ayant pour unité le radian et le centimètre respectivement.

Afin d'augmenter la résolution des capteurs, on multiplie chaque entrée dans le bloc de configuration disponible sur SIMTool par 4, chose qui fera augmenter la précision des informations collectées par les capteurs.

En vue de respecter la limite de tension indiquée sur le manuel accompagnant le pendule, on soumet la commande synthétisée à une limitation sous forme d'une fonction saturation qui a pour valeur minimale $-24V$ et pour valeur maximale $+24V$.

On choisit la fréquence d'échantillonnage de manière à ce que celle-ci soit plus petite que celle nécessaire pour le calcul et assez grande de manière à approcher le comportement continu de la commande. La période d'échantillonnage retenue pour l'implémentation est de : $T_{\text{échantillonnage}} = 0.001s$.

Une fois ces précautions prises, on peut effectuer la génération du code 'c' et l'envoi du programme sur la carte DSP. Nous serons dès lors prêts à visualiser les résultats expérimentaux.

III.2 Résultats expérimentaux :

Lors de l'implémentation, on a du adapter l'algorithme de commande afin d'obtenir les résultats désirés, en l'occurrence le gain de la commande non linéaire.

Après plusieurs essais expérimentaux, notre choix s'est arrêté sur les gains suivants :

- Pour la première approche :

$$\begin{cases} G = 2 & \text{si } \cos(\theta) < 0.4 \\ G = 0.1 & \text{si } \cos(\theta) \geq 0.4 \end{cases}$$

- Pour la deuxième approche :

$$\begin{cases} G = 2.65 & \text{si } \cos(\theta) < 0.4 \\ G = 0.21 & \text{si } \cos(\theta) \geq 0.4 \end{cases}$$

Les figures (V.1) et (V.9) montrent que l'objectif de commande est réalisé, par le biais des deux approches proposées. Seulement, en utilisant la première approche, on remarque que le nombre de balancement nécessaires pour que le pendule atteigne la zone linéaire est de 10 balancements et ceci s'effectue en un temps de 16 secondes.

Alors qu'en utilisant la seconde surface ou ce que nous avons appelé 'deuxième approche', les balancements nécessaires du pendule sont au nombre de 8 et le pendule atteint la zone linéaire en un délai de 13 secondes.

Aussi, il est à constater qu'en mettant en œuvre la première surface de glissement ne prenant en compte que l'énergie du pendule, le chariot a tendance à se déplacer et ainsi s'éloigner de son point d'équilibre $x=0$, jusqu'à ce que le pendule se redresse et atteigne la zone linéaire, dans notre cas ceci s'effectue en une distance de 35cm.

Alors qu'avec la seconde approche, le pendule se déplace moins. En effet, il n'a besoin que de 25 cm pour atteindre la zone linéaire. Néanmoins, nous constatons un pic de déplacement qui a pour valeur 35cm. Celui-ci n'a lieu que lorsque la commande linéaire opère et ceci à cause de l'énergie dont celle-ci fournit lors de la prise de relais entre les deux commandes.

Les figures (V.2) et (V.10) montrent la robustesse des deux commandes en termes de rejet de perturbation. En effet, en soumettant le pendule à plusieurs perturbations, sous forme de force appliquée sur la masse du pendule, celui-ci se redresse rapidement et le chariot rejoint sa position initiale en rejetant ainsi la perturbation.

Les figures (V.3), (V.4), (V.11) et (V.12) reflètent la performance des commandes en termes de poursuite de trajectoire linéaire sinusoïdale et carrée respectivement. On constate une très bonne poursuite et l'angle du pendule reste quasiment inchangé.

Les figures (V.5) et (V.13) démontrent la robustesse des deux commandes en rejet de perturbation même en cas de poursuite de trajectoire.

Dans les figures (V.6), (V.7), (V.8), (V.14), (V.15) et (V.16), sont exposés les résultats obtenus lorsqu'on a soumis le système à des perturbations avec introduction d'une variation paramétrique en l'occurrence la variation de la masse de +34% et -66% respectivement. Le système manifeste une très bonne robustesse par rapport aux variations paramétriques et reste robuste en termes de rejet de perturbation.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats expérimentaux qu'a donnés la commande hybride avec les deux versions que nous en avons données. Nous avons vu que celle-ci manifeste de très bonnes performances et une très bonne robustesse, tout en respectant toutes les clauses du cahier des charges imposé par les restrictions pratiques.

Il demeure, néanmoins, très intéressant d'implémenter la commande par logique floue basée sur le même raisonnement sur lequel est fondée la commande implémentée dans ce chapitre. En effet, celle-ci présente d'excellentes performances comme nous avons pu le constater lors de la section traitant de la simulation de cette commande.

Dans ce travail, nous n'avons pas eu l'occasion de le faire, nous ramenons cela aux insuffisances que présente l'environnement de développement sur lequel on a travaillé.

Nous recommandons donc, la mise en place d'un nouvel environnement de développement plus flexible, communiquant avec la carte DSP.

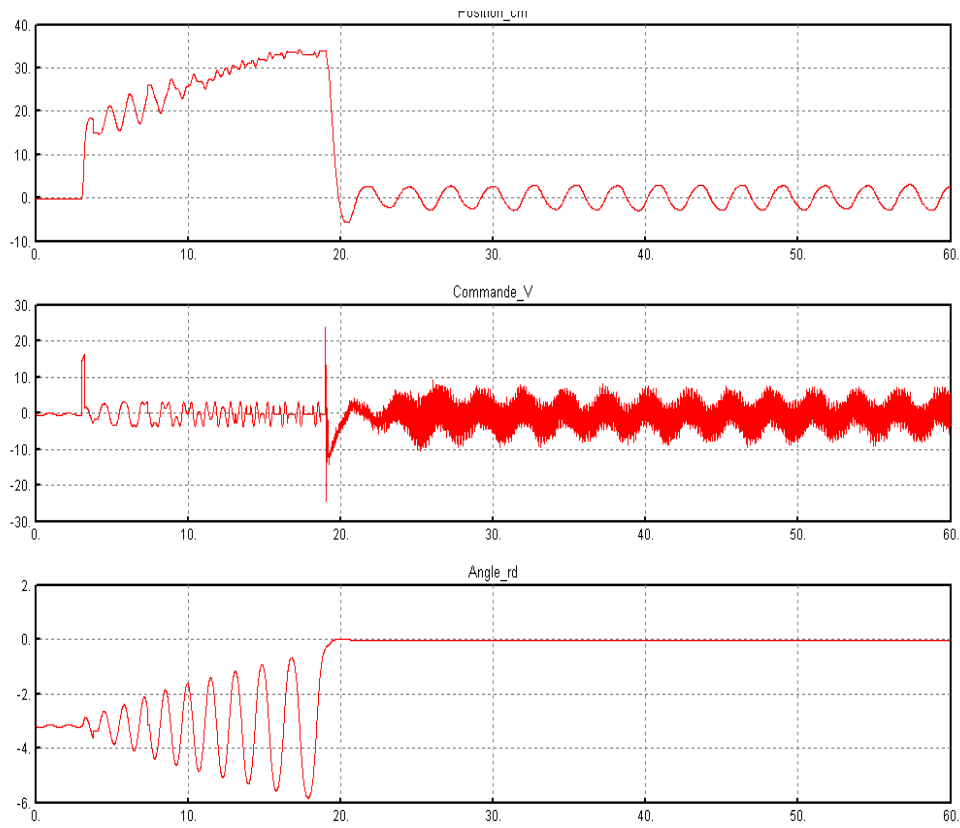


Fig V.1 Stabilisation du pendule inversé

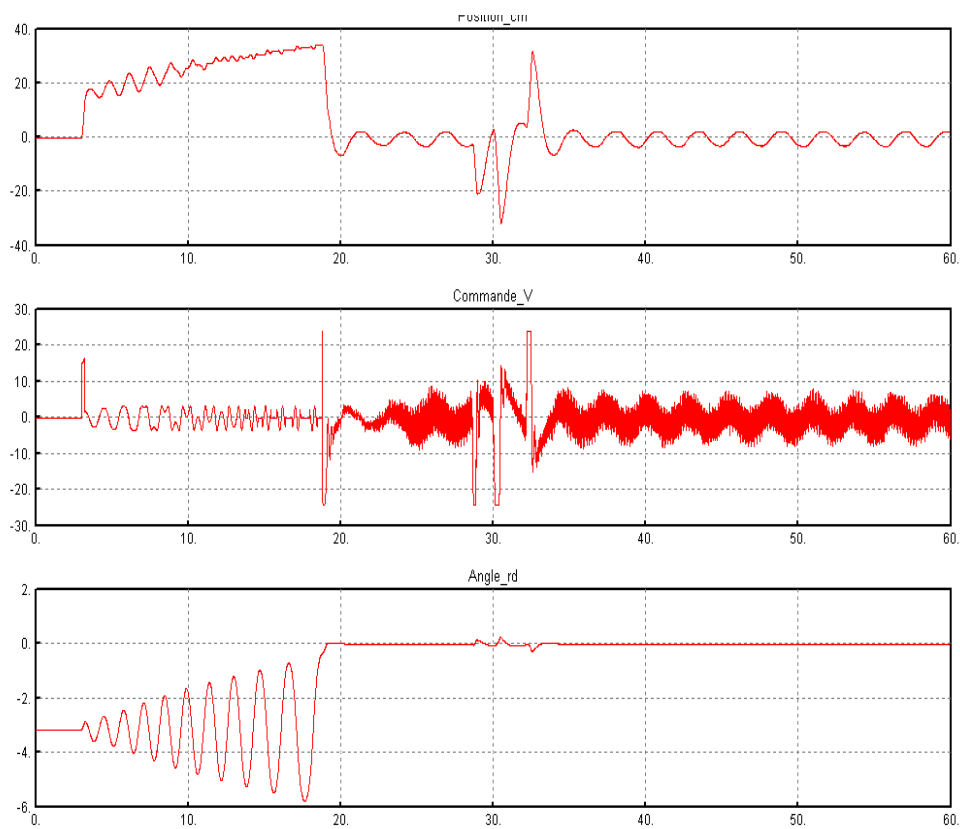


Fig V.2 Stabilisation avec rejet de perturbation

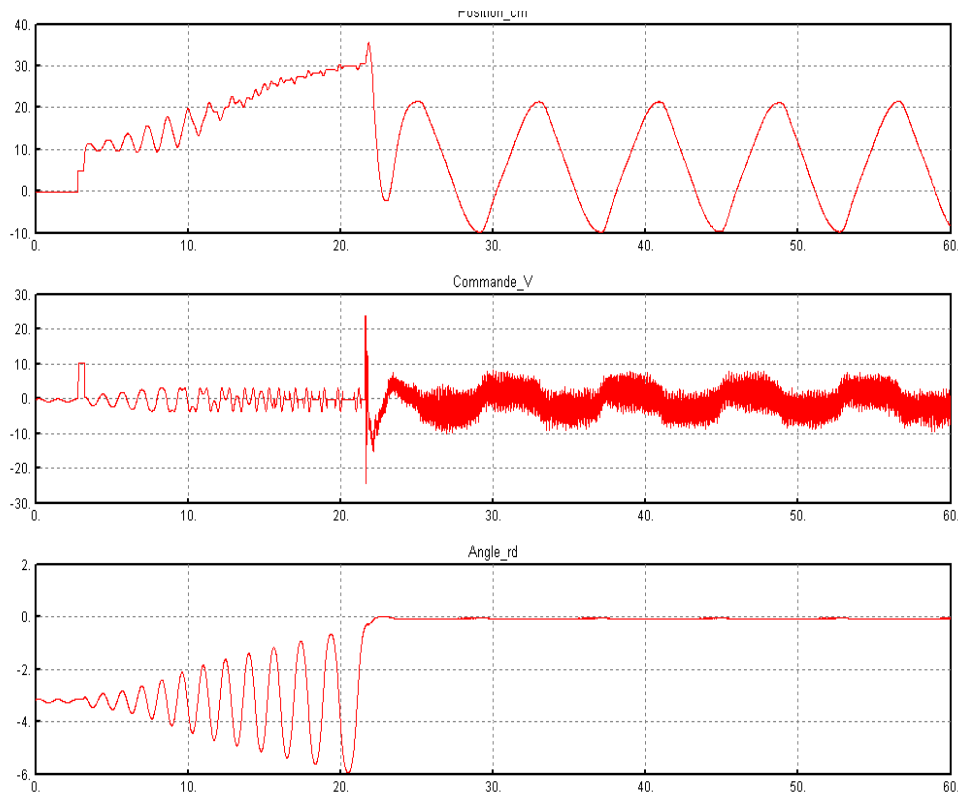


Fig V.3 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8$ rd/s

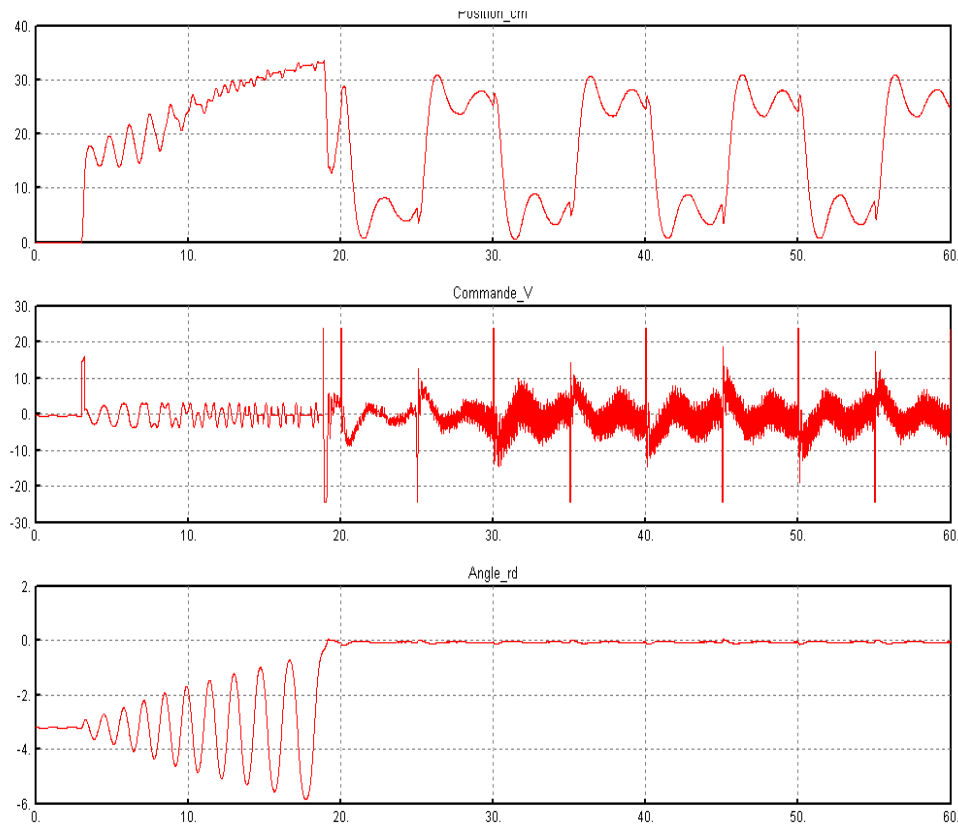


Fig V.4 Poursuite d'un signal carré de fréquence $f=0.1$ Hz

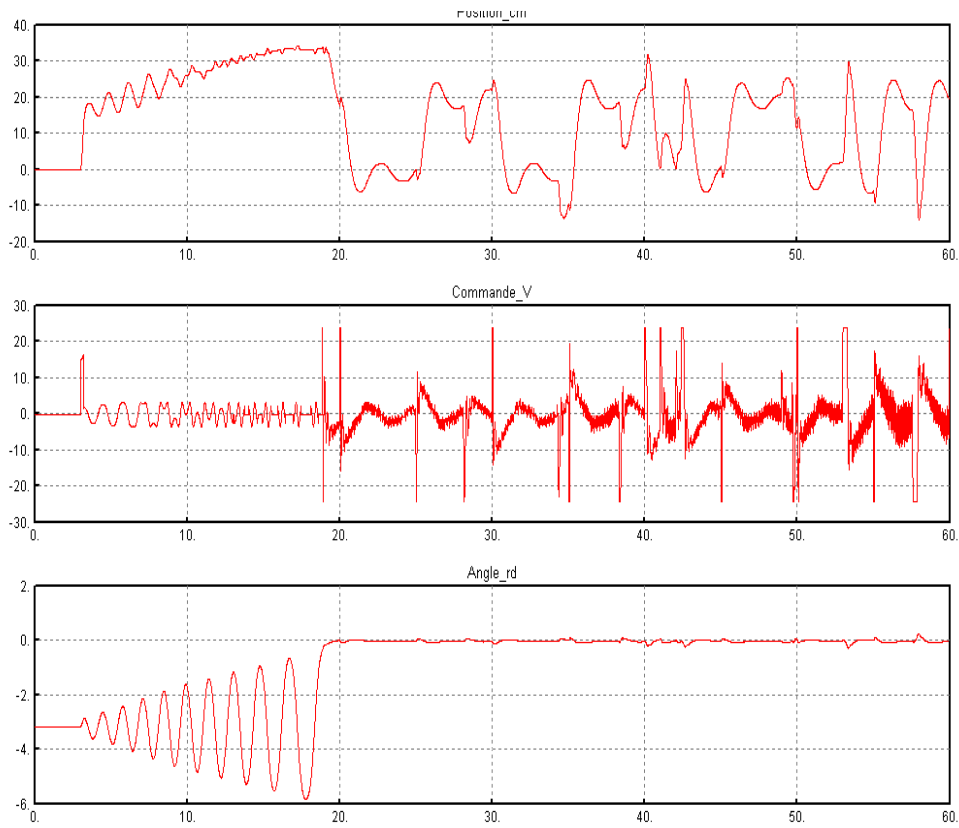


Fig V.5 Poursuite avec rejet de perturbation

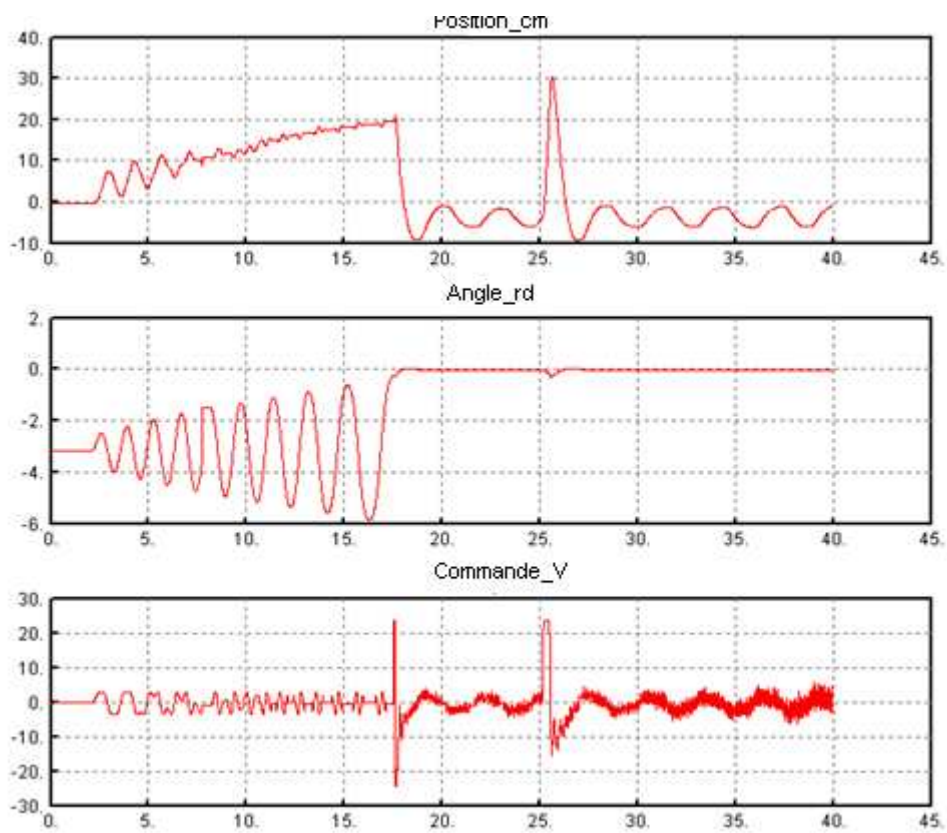


Fig V.6 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de +34%

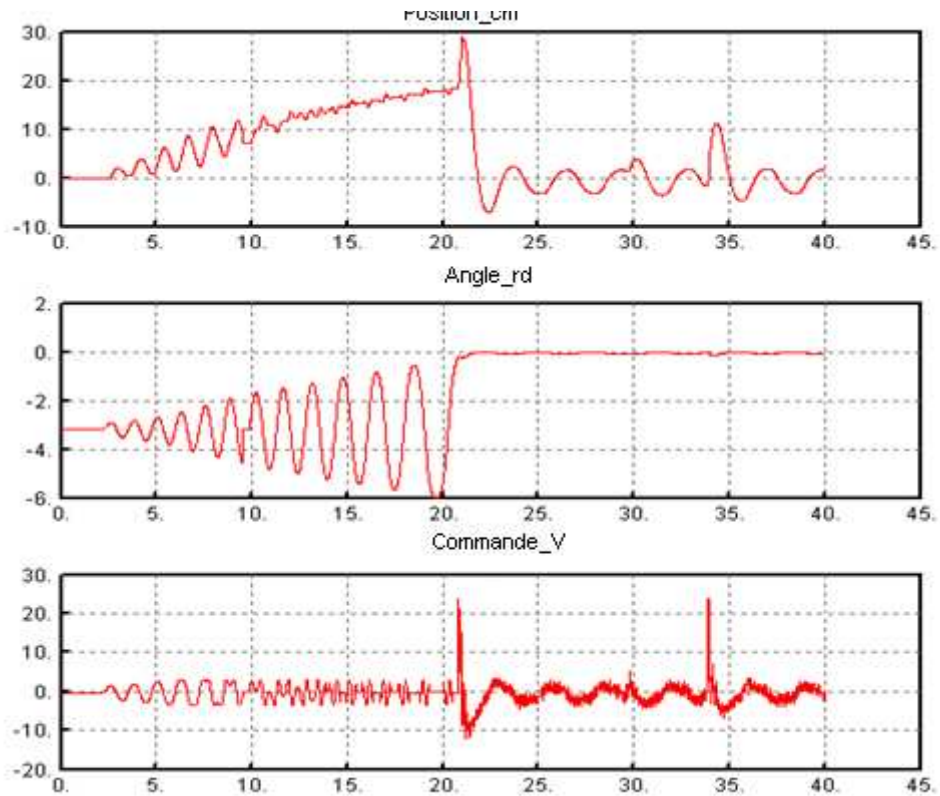


Fig V.7 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de -66%

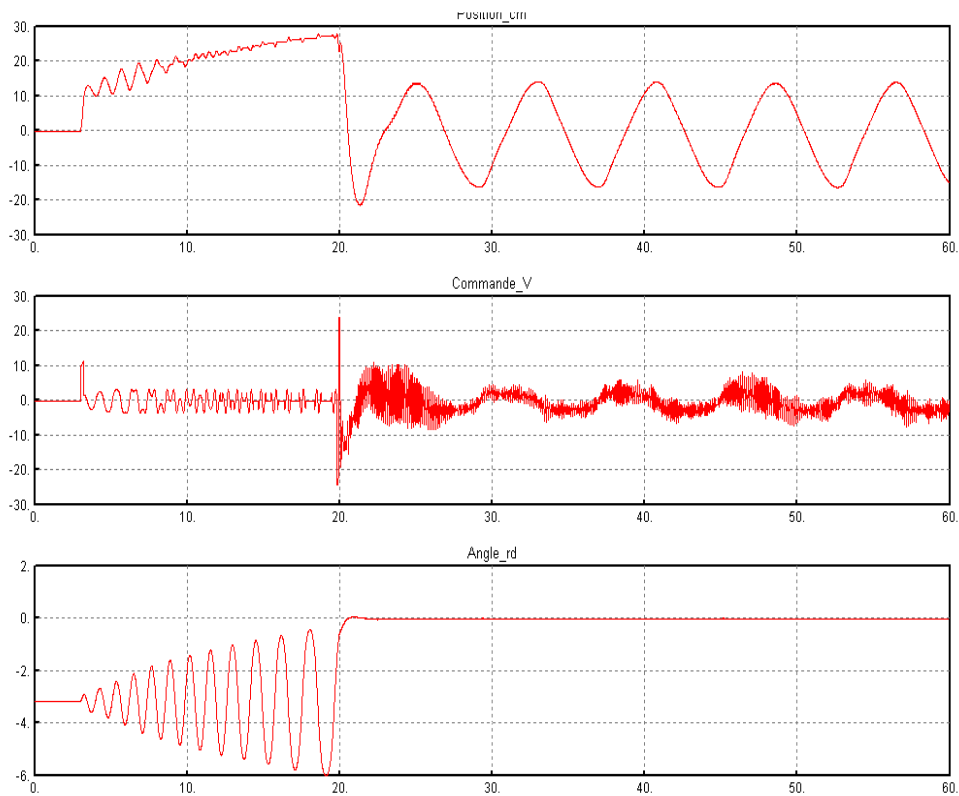


Fig V.8 Poursuite de trajectoire avec variation paramétrique de -100%

Deuxième approche :

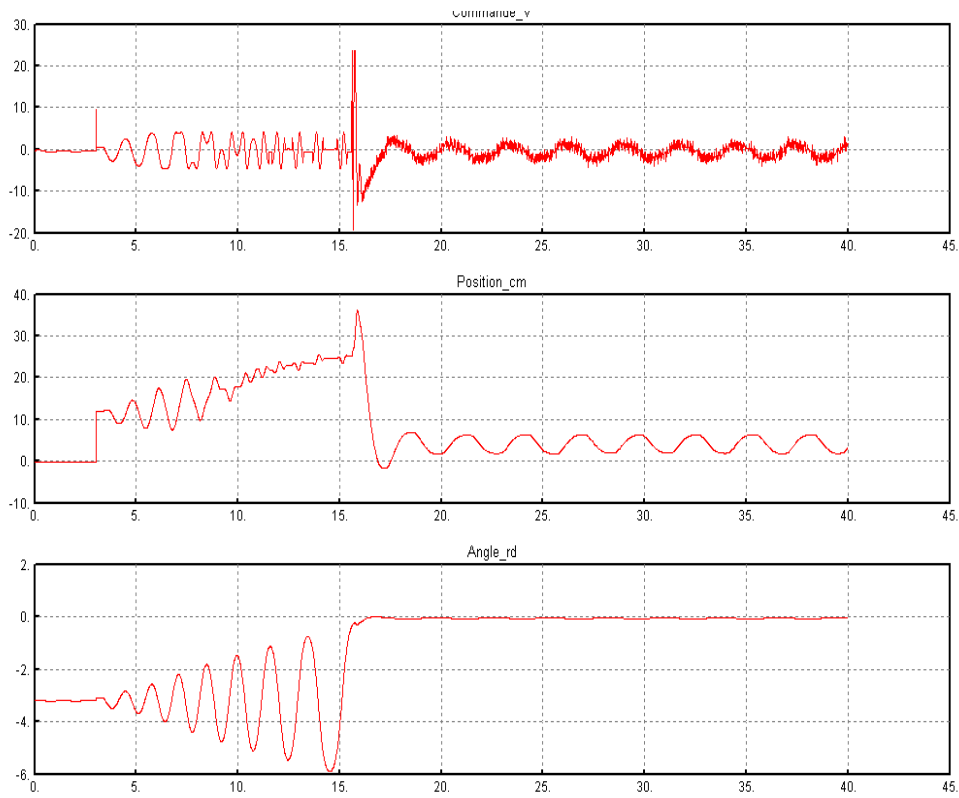


Fig V.9 Stabilisation du pendule inversé

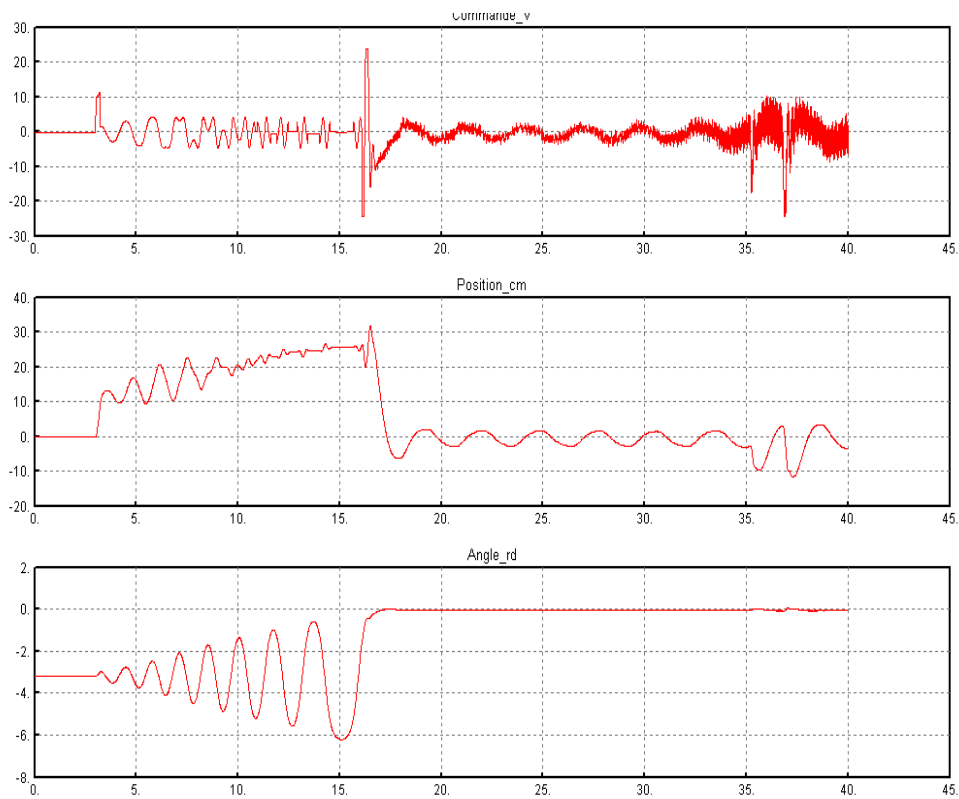


Fig V.10 Stabilisation avec rejet de perturbation

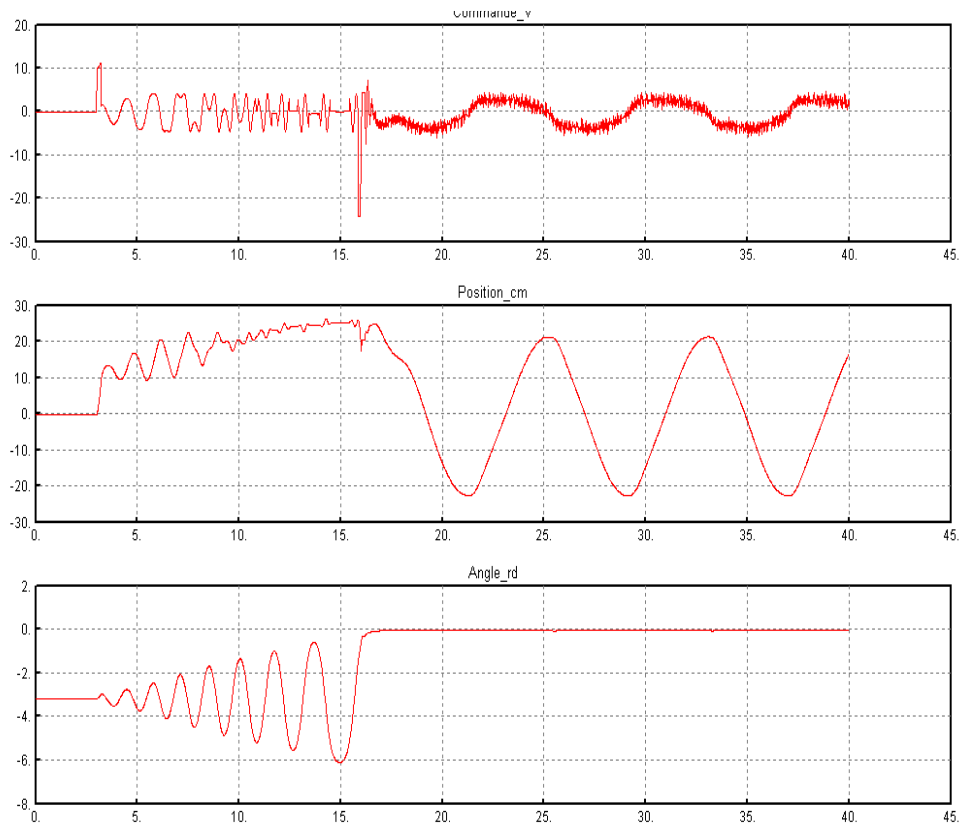


Fig V.11 Poursuite d'un signal sinusoïdal de fréquence $f=0.8 \text{ rd/s}$

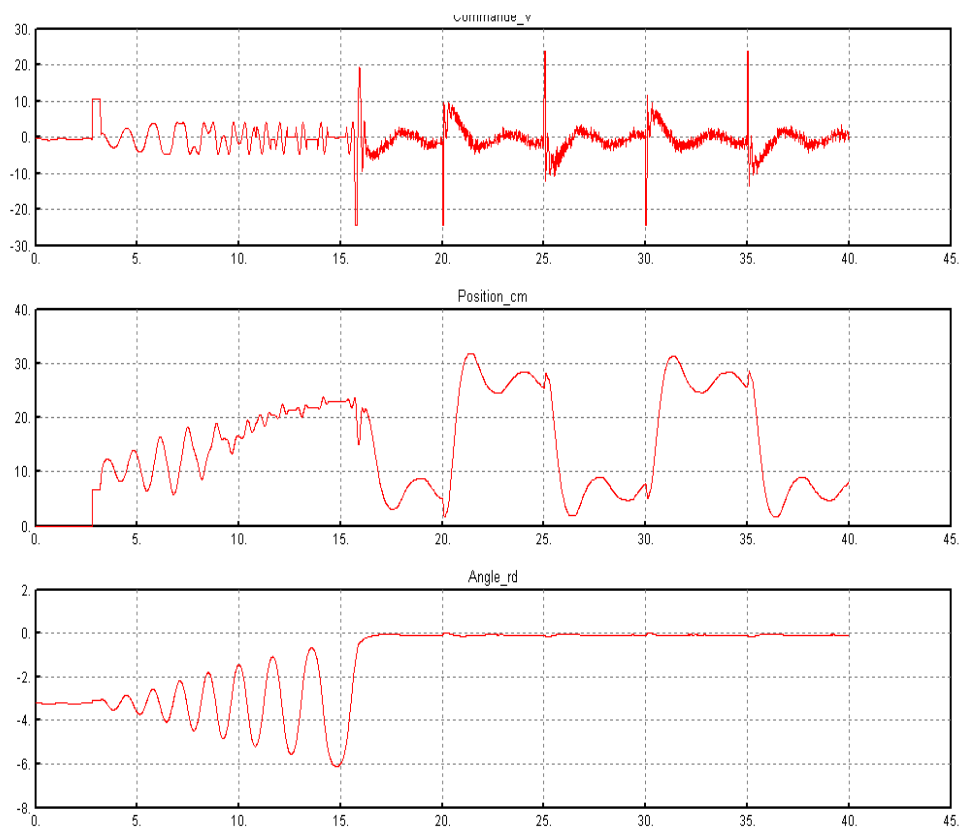


Fig V.12 Poursuite d'un signal carré de fréquence $f=0.1 \text{ Hz}$

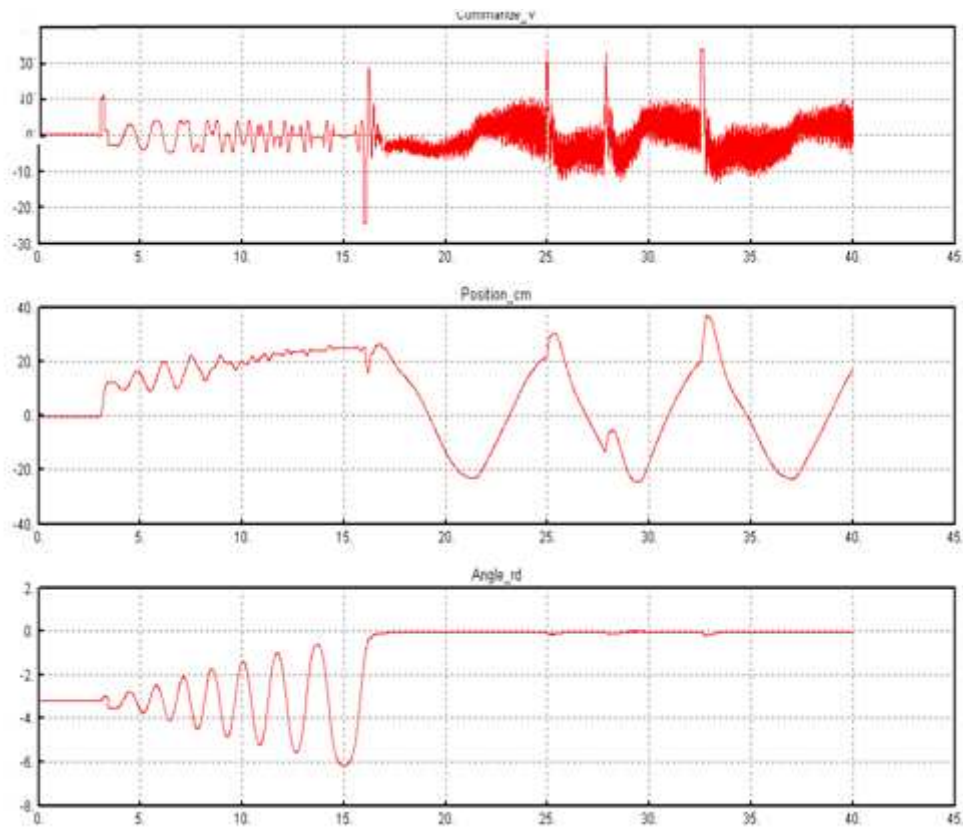


Fig V.13 Poursuite avec rejet de perturbation

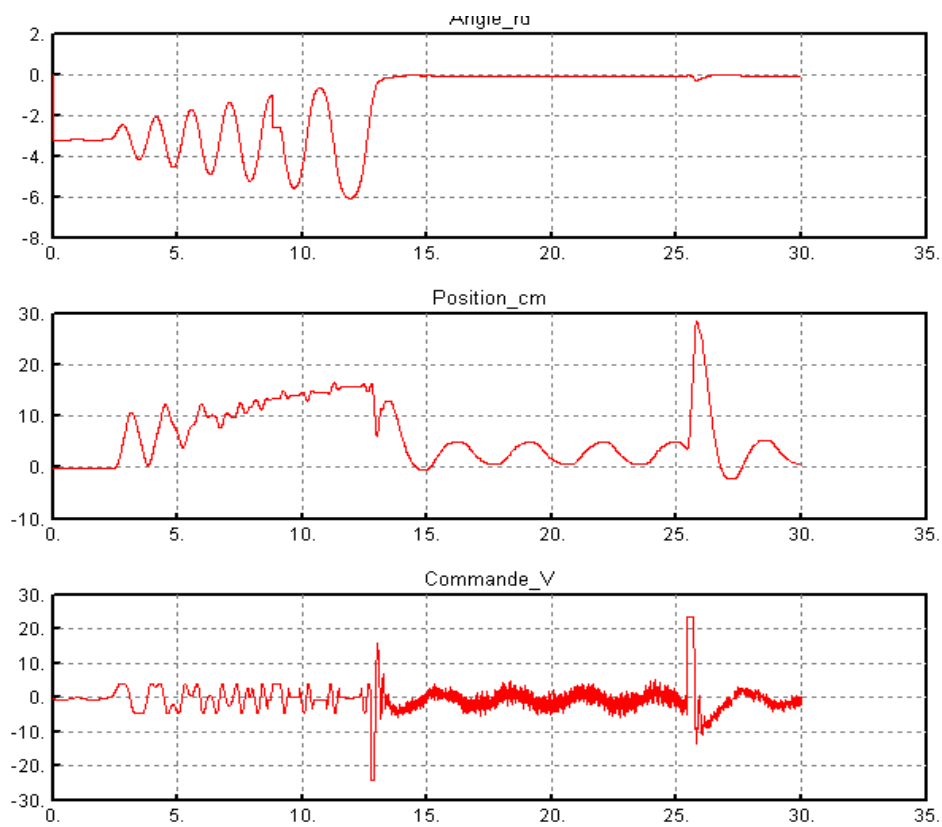


Fig V.14 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de +34%

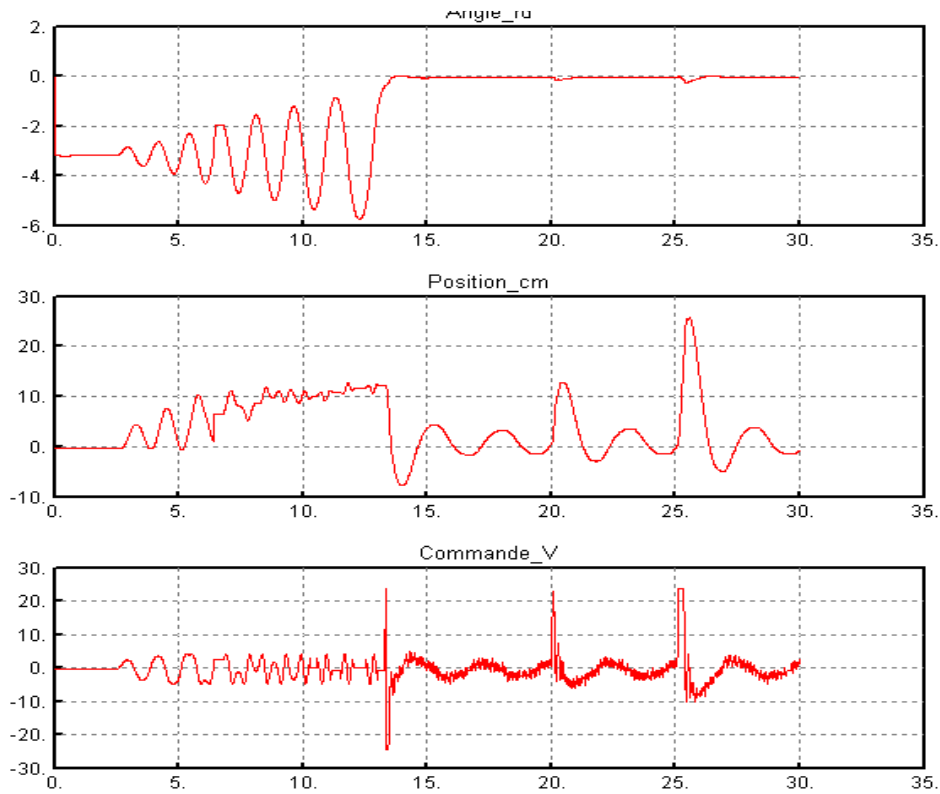


Fig V.15 Rejet de perturbation avec une variation paramétrique de -66%

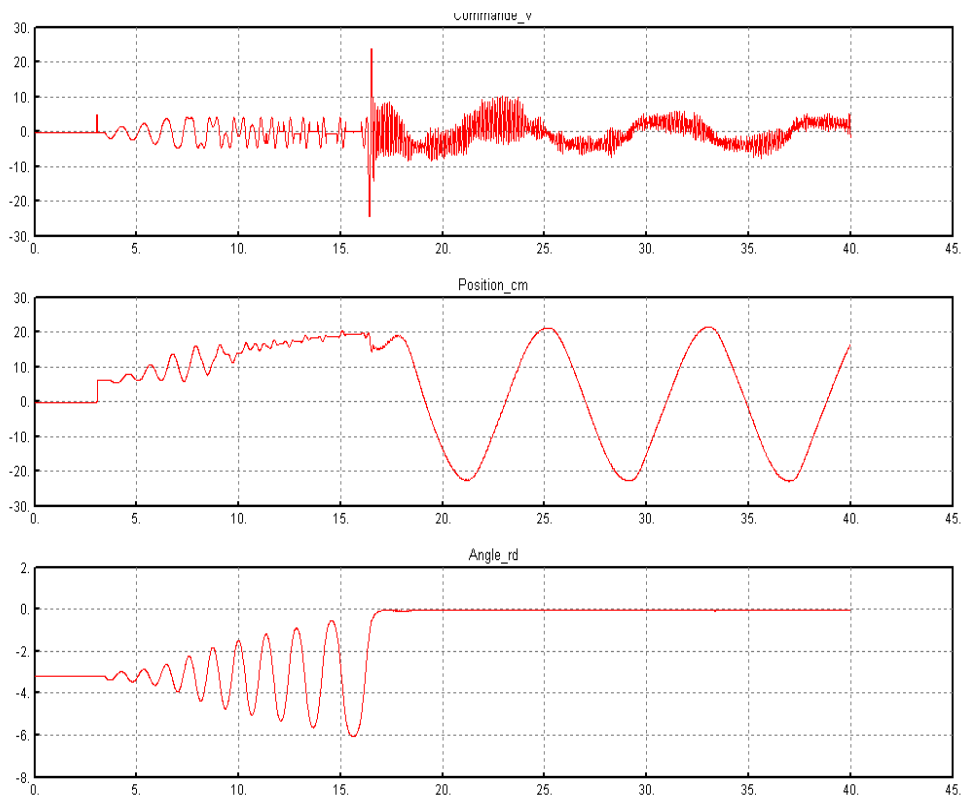


Fig V.16 Poursuite de trajectoire avec variation paramétrique de -100% (tige seule)

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à l'étude de lois de commande hybride et à l'application de celles-ci sur le système non linéaire sous actionné qu'est le pendule inversé.

Pour y parvenir, nous avons été amenés à explorer les constituants de ce système et à comprendre son fonctionnement, c'est ce qui a fait l'objet du début de ce manuscrit.

Nous avons ensuite du présenter la modélisation du système objet de notre étude, étape cruciale pour l'étude que nous avons envisagée de faire. Cette modélisation s'est faite en s'appuyant sur la mécanique Newtonienne et sur les relations régissant le fonctionnement du moteur servant pour actionneur dans notre boucle de commande.

A l'étape de synthèse de commande, nous avons au départ exploité le champ de travail des commandes opérant seules, puis nous avons proposé de les combiner en des commandes hybrides permettant d'atteindre l'objectif de commande à savoir le redressement et le maintien du pendule dans sa position inversée.

La commande par mode de glissement avec ses deux versions proposées, appliquée à la maquette reste insensible aux incertitudes de modélisation et aux perturbations externes, elle redresse le pendule avec de très bonnes performances.

La commande floue que nous avons synthétisée manifeste, comme escompté, une très bonne robustesse face aux erreurs de modélisations et aux perturbations, mais malheureusement nous n'avons pu l'appliquer sur le banc d'essai dont nous disposons, nous remettons cela aux insuffisances que manifeste l'environnement de développement accompagnant la maquette.

C'est pour cela que nous proposons comme perspective des travaux à venir d'adapter un environnement de développement plus performant et offrant plus de flexibilité à l'utilisateur.

Enfin, étant donné que le pendule inversé est considéré comme la plate forme de validation par excellence, il serait intéressant d'y implémenter d'autres lois de commandes et ainsi effectuer la comparaison entre elles une fois mises à l'épreuve.

Bibliographie

- [1] Manual of the *Inverted Pendulum Designer*, RealGain Co., Ltd.
- [2] DJOUDI Abdelhak, BENABDALLAH Tassadit, *Synthèse et application de lois de commande non linéaires sur un pendule inversé*, PFE ENSP, 2008.
- [3] Stanislaw H. Zak, *Systems and Control*, School of Electrical and Computer Engineering Purdue University. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2003.
- [4] S. McGilvray, *Self-Erecting Inverted Pendulum: Swing up and Stabilization Control*, IEEE Contest Paper, 2002.
- [5] Johnny Lam, *Control of an Inverted Pendulum*, Dept. of Electrical & Computer Engineering, University of California, U.S.A, 2004.
- [6] T.M OULD ABDOU, *Commande par mode de glissement floue avec observateur: application à différents pendules inversés*, thèse Magister, ENSP, 2006.
- [7] M.Chadli, *Commande de systèmes linéaires*, École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique (ESIEE), France, 2006.
- [8] Edouard Laroche, Bernard Bayle, *Commande Optimale*, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, 2009.
- [9] A. Boubakir , F. Boudjema , C. Boubzakir , N. Ikhlef, *Loi de Commande par Mode de Glissement avec Une Surface de Glissement Non Linéaire Appliquée au Système Hydraulique à Réservoirs Couplés*, 4th International Conference on Computer Integrated Manufacturing CIP'2007.
- [10] H. Buhler - *Réglage par mode de glissement*, Presses Polytechniques Romandes, EPFL, Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse, 1986.
- [11] Paul-Etienne VIDAL- *Commande non-linéaire d'une machine asynchrone à double alimentation*, thèse de Doctorat soutenue à L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE, France, 2004.
- [12] J.J.E Slotine and Lee, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, USA, 1991
- [13] W. Perruquetti, J.P. Barbot - *Sliding Mode Control in Engineering*, CRC Press, 2002.
- [14] H. Bühler, *Réglage par logique floue*, Presses polytechnique et université, 1994.

- [15] M. Jimshidi, *Fuzzy logic and control*, Printice Hall, USA, 1993.
- [16] Y. Zhang, W.T. Ang, J. Jin, S. Zhang, Z. Man, *Nonlinear Adaptive Sliding Mode Control*.
- [17] B. Srinivasan 1, P. Huguenin, D. Bonvin, *Global stabilization of an inverted pendulum Control strategy and experimental verification*, Automatica 45,265_269, 2009.
- [18] Marvin Bugeja, *Non-Linear Swing-Up and Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System*, EUROCON, Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [19] K. J. Åströmand, K. Furuta; *Swinging up a pendulum by energy control*, IFAC 13th World Congress, San Francisco, California, 1996.
- [20] K.Yoshida, *Swing-Up control of an inverted pendulum by energy-based methods*, department of electronic and control engineering shimane university 690-8504 Japan.
- [21] Akira Inoue Yusuke Otani, Takuya Kurokami and Yoichi Hirashima, *A swingup control of an inverted pendulum with cart position control*, NTCC 2001.
- [22] Selcuk Kizir, Zafer Bingul, and Cuneyt Oysu, *Fuzzy Control of a Real Time Inverted Pendulum System*, Kocaeli University, Department of Mechatronics Engineering,41380, Kocaeli, Turkey, 2008.
- [23] D.Liberzon, *Switching in systems and control*, Birkhäuser, 2003