

REPUBLIQUE ALGERIENNE  
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

THESE DE MAGISTER  
INTITULEE

CONTRIBUTION A L'ETUDE BIDIMENSIONNELLE  
DE LA DISPERSION DE POLLUANTS DANS  
LES MILIEUX A DECOUVERT PAR LA  
METHODE SIMPLE MODIFIEE DE PATANKAR

Proposée par :

M<sup>r</sup> RENE KAHAWITA

Dirigée par :

M<sup>r</sup> BILEK AMMAR

Presentée par :

M<sup>lle</sup> LAROUI DAHBIA

## Sommaire

Ce mémoire est une contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux fluides à ciel ouvert /rivières, estuaires, mer, etc...

En premier lieu nous avons simulé les écoulements à surface libre non permanents bidimensionnels à partir des équations de Saint-Venant.

Nous parlons donc du modèle Hydrodynamique, dont le but est de définir les champs de vitesse et de profondeur à partir des données appliquées aux modèles réduits décrits dans la littérature.

Par la suite, nous avons utilisé les résultats de ce modèle pour la résolution de l'équation de transport de polluants pour différents cas de rejets (rejet constant en un point, rejet en un point variant avec le temps, rejet plan, rejet à une certaine distance de l'entrée du canal, rejet au niveau de la paroi etc...).

La méthode numérique utilisée "l'algorithme simple modifié" s'inspire dans son orientation générale de celle proposée par **Patankar** et **Spalding** (1972) pour la résolution de problèmes en Mécanique des fluides et en transfert de chaleur [11].

Ce schéma, par sa stabilité et par son efficacité du point de vue temps de traitement, constitue une alternative intéressante, en particulier dans le cas où une simulation à long terme s'impose, en écoulement quasi-permanent, et / ou graduellement varié.

تعتبر هذه المذكرة مساهمة لدراسة ثنائية البعد عن تشتت الملوثات داخل الاوساط السائلة في الهواء الطلق / أنهار؛ بحار؛ الخ...

في بداية الأمر قمنا بتصنع السيلان أو الجريان في مسافة حرة غير مستقرة ثنائية البعد عن طريق معادلات سان قان؛ و بالتالي نهدف الى النموذج الهيدروديناميكي؛ والغرض منه هو تعريف مجالات السرعة والعمق عن طريق معطيات تطبيقية لنماذج مختصرة مذكورة في الادب.

بعد ذلك قمنا باستعمال نتائج هذا النموذج لحل معادلة تنقل الملوثات في مختلف حالات الطرح (طرح ثابت في نقطة واحدة؛ طرح متغير مع الزمن في نقطة واحدة؛ طرح مستوي؛ طرح من مسافة معينة؛ الخ...).

ان الطريقة العددية المستعملة أي اللوغاريتم البسيط المتغير مستوحى عموما من الطريقة التي فرضها بنتكار و اسبلديج لحل المشكل من ناحية ميكانيكية السوائل و تنقل الحرارة على السواء.

ان هذا المخطط في استقراره و في فعاليته من وجهة النظر لزمان المعالجة يشكل تناوبا هاما؛ لا سيما في حالة افتراض تصنع على المدى البعيد في سيلان تقريبا مستقرا أو تدريجيا متغيرا. ان تحويل معادلات النموذج الى شكل خطي يسمح بحلهم بالتثليث.

## REMERCIEMENTS ET DEDICACES

*À l'instant où je publie ce mémoire, ma pensée s'érige vers les êtres les plus chers: mes parents, mes soeurs, frères, mes neveux et nièces.*

*Je tiens à remercier:*

- *Mr Kerbachi de m' avoir fait l'honneur de présider le jury.*
- *Les membres de jury d' avoir accepté d' examiner cette étude.*
- *Mon directeur de recherche Mr Bilek Ammar pour son aide précieuse et ses conseils fructueux tout au long de l'accomplissement de ce travail.*
- *Mon copromoteur Mr René Kahawita pour son aide le long de mon séjour à l'école polytechnique de Montréal.*
- *Mes amis du groupe thermique de l'école polytechnique de Montréal Mr Benyedder Réda et Mr Hammache Agiz pour leur conseil et leur aide.*
- *Les membres du centre de calcul de Montréal et ceux de SONELGAZ Mr Youmbai et Mr Bouanika pour leur aide et soutien.*
- *Mon chef de département Mr Kinane pour m' avoir autorisé à accéder aux matériels informatique de la structure.*
- *Mes amis(es) et collègues de SONELGAZ Mr Bouena, Melle Abi, Mme Benaféri, Mr Habchi, Mr Yadel, Melle Hamana, Melle Souag, Mr Madi et Mr Zadi pour leur aide et soutien.*
- *Mme Zouakou, Mr Boumghar, Mr Benhamza, Mr Choudak de KDL de SONELGAZ pour m' avoir autorisé à accéder au Matériel informatique de leur structure.*
- *Tous les professeurs et tous mes amis(es) qui m'ont soutenu ou aidé le long de l'accomplissement de ce projet.*

*Et enfin, je me remercie pour mon courage d' avoir accompli ce projet dans des conditions pénibles.*

## Table des matières

	Page
Sommaire .....	iv
Abstract .....	vi
Remerciements et dedicaces .....	viii
Liste des figures .....	xiii
Liste des symboles .....	xvi
Liste des tableaux .....	xv
1 Introduction .....	1
2 Etude bibliographique .....	4
2.1 Modèle Hydrodynamique .....	4
2.2 Modèle "Transport" .....	10
3 Equations de base .....	14
3.1 Modèle Hydrodynamique .....	14
3.2 Modèle "Transport" .....	17
4 Modèle "Transport" .....	18
4.1 Analyse du phénomène physique de la dispersion et détermination de l'équation de base du modèle .....	18
4.2 Choix des paramètres de dispersion $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ .....	27
4.3 Conclusion .....	33

<b>5</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>35</b>
5.1	Intégration des équations de <b>Navier-Stockes</b> suivant la profondeur .....	35
5.2	Intégration de l'équation de transport suivant la profondeur .....	42
<b>6</b>	<b>Développement de la méthode utilisée</b>	<b>45</b>
6.1	Méthode du volume de contrôle .....	45
6.2	Discrétisation de la 1 <sup>ère</sup> et la 2 <sup>ème</sup> équation de <b>Saint -Venant</b> .....	47
6.2.1	Schéma d'interpolation sur $\varphi$ .....	57
6.3	Combinaison de la 1 <sup>ère</sup> et de la 3 <sup>ème</sup> équation de <b>Saint-Venant</b> après leur discrétisation .	59
6.4	Equation de correction de la profondeur .....	62
6.4.1	Détermination des vraies valeurs des vitesses .....	62
6.4.2	Formulation de l'équation de correction de la profondeur .....	66
6.5	Choix du schéma d'interpolation .....	68
6.6	Critère d'arrêt .....	71
6.7	Remarques générales .....	72
6.8	Conditions initiales et aux frontières .....	74
6.9	Application de la méthode au modèle "transport" ....	80
6.9.1	Discrétisation de l'équation de transport ...	80
6.9.2	Critère d'arrêt .....	83
6.9.3	Conditions initiales et aux frontières .....	84
6.10	Méthode de résolution par ligne et sens de balayage (Formulation de la matrice tridiagonale) .....	87
6.11	Résolution du système: (Algorithme simple modifié de <b>Patankar</b> ) .....	90
6.12	Moyens utilisés .....	93

7	Essais et interprétation des résultats	94
7.0	Introduction .....	94
7.1	Modèle Hydrodynamique .....	96
7.2	Modèle "Transport" .....	115
8	Conclusion .....	143
9	Liste de références .....	145
10	Annexe (organigramme) .....	151

## Liste des figures

	page
3.1. Définition du système d'axes .....	15
6.1. Différents volume de contrôle .....	46
6.2. Volume de contrôle et disposition des noeuds .....	49
6.3. Conditions aux frontières fermées .....	77
6.4. Conditions aux frontières ouvertes .....	79

### 7.h. Modèle Hydrodynamique

-Cas d'un canal simple avec coefficient de diffusion  
turbulente différent de zéro .

7.h.1. Representation des profils de vitesses .....	100
selon x et y en fonction de y pour chaque 10 pas et la profondeur totale en fonction de x pour y=1.5m à l'instant t=95s	
a) profile de $u=f(y)$ b) profile de $v=f(y)$ c) profile de $H=f(x)$	
7.h.2. Representation des profils de vitesses .....	101
selon x et y en fonction de y pour chaque 10 pas et la profondeur totale en fonction de x pour y=1.5m à l'instant t=225s .	
a) profile de $u=f(y)$ b) profile de $v=f(y)$ c) profile de $H=f(x)$	



- 7.h.3. Representation des profiles de vitesses ..... 102  
 selon  $x$  et  $y$  en fonction de  $y$  pour chaque 10 pas et la  
 profondeur totale en fonction de  $x$  pour  $y=1.5m$  à l'instant  
 $t=350s$
- a) profile de  $u=f(y)$   
 b) profile de  $v=f(y)$   
 c) profile de  $H=f(x)$
- 7.h.4. Representation des profiles de vitesses ..... 103  
 selon  $x$  et  $y$  en fonction de  $y$  pour chaque 10 pas et la  
 profondeur totale en fonction de  $x$  pour  $y=1.5m$  à l'instant  
 $t=550s$
- a) profile de  $u=f(y)$   
 b) profile de  $v=f(y)$   
 c) profile de  $H=f(x)$
- 7.h.5. Representation des profiles de vitesses ..... 104  
 selon  $x$  et  $y$  en fonction de  $y$  pour chaque 10 pas et la  
 profondeur totale en fonction de  $x$  pour  $y=1.5m$  à l'instant  
 $t=650s$
- a) profile de  $u=f(y)$   
 b) profile de  $v=f(y)$   
 c) profile de  $H=f(x)$
- Cas d'un canal simple avec coefficient de viscosité nul.
- 7.h.6. Representation du profile de  $u$  en fonction ..... 105  
 de  $y$  pour chaque 10 pas et la profondeur en fonction de  $x$   
 pour  $y=0.9m$  à l'instant  $t=100s$
- 7.h.7. Representation du profile de  $u$  en fonction ..... 106  
 de  $y$  pour chaque 10 pas et la profondeur  $H$  en fonction de  $x$   
 pour  $y=0.9m$  à l'instant  $t=300s$

-Cas d'un canal comportant un obstacle avec coefficient de viscosité différent de zéro.

- 7.h.8. Representation du champs de vitesses ..... 107  
 à l'instant  $t=200s$  dans le cas où l'obstacle est au niveau de la 2<sup>ème</sup> rive.
- 7.h.9. Representation du champs de vitesses ..... 108  
 à l'instant  $t=350s$  dans le cas où l'obstacle est au niveau de la 2<sup>ème</sup> rive.
- 7.h.10. Representation du champs de vitesses ..... 109  
 à l'instant  $t=400s$  dans le cas où l'obstacle est au niveau de la 2<sup>ème</sup> rive.
- 7.h.11. Representation du champs de vitesses ..... 110  
 à l'instant  $t=200s$  dans le cas où l'obstacle est au niveau de la 1<sup>ère</sup> rive.
- 7.h.12. Representation du champs de vitesses ..... 111  
 à l'instant  $t=350s$  dans le cas où l'obstacle est au niveau de la 1<sup>ère</sup> rive.
- 7.h.13. Representation du champs de vitesses ..... 112  
 à l'instant  $t=100s$  dans le cas où le canal est sans obstacle.
- 7.h.14. Representation du champs de vitesses ..... 113  
 à l'instant  $t=500s$  dans le cas où le canal est sans obstacle.
- 7.h.15. Representation du champs de vitesses ..... 114  
 à l'instant  $t=600s$  dans le cas où le canal est sans obstacle.

## Liste des figures

	page
<b>7.t.    Modèle "transport"</b>	
7.t.1. Représentation d'un nuage pour un rejet ..... constant à l'entrée du canal à $t=505s$ et $t=800s$ et pour $\varepsilon_y=0.00096m^2/s$ et $\varepsilon_x=0.08m^2/s$ .	117
7.t.2. Représentation du nuage pour un rejet ..... constant à l'entrée du canal à $t=505s$ et pour différents coefficients de dispersion (0.001; 0.01; 0.05).	118
7.t.3. Idem que 7.t.2 pour $t=550s$ .....	119
7.t.4. Idem que 7.t.2 pour $t=800s$ .....	120
7.t.5. Représentation du nuage pour un rejet ..... plan sur une certaine largeur du canal à $t=505s$ et $t=800s$ et pour $\varepsilon_y=0.00096m^2/s$ et $\varepsilon_x=0.08m^2/s$ .	121
7.t.6. Représentation du nuage pour un rejet ..... plan sur une certaine largeur du canal à $t=505s$ et pour différents coefficients de dispersion (0.001; 0.01; 0.05).	122
7.t.7. Idem que 7.t.6 pour $t=550s$ .....	123
7.t.8. Idem que 7.t.6 pour $t=800s$ .....	121
7.t.9. Représentation du nuage pour un rejet ..... variant dans le temps à $t=505s$ et $t=800s$ et pour $\varepsilon_y=0.00096m^2/s$ et $\varepsilon_x=0.08m^2/s$ .	124
7.t.10. Représentation du nuage pour un rejet ..... variant dans le temps à $t=510s$ et pour différents coefficients de dispersion (0.001; 0.05).	124

7.t.11. Idem que 7.t.10 pour $t=550s$ .....	125
7.t.12. Idem que 7.t.10 pour $t=800s$ .....	125
7.t.13. Représentation du nuage pour un rejet .....	126
au niveau de la paroi à $t=505s$ et pour différents coefficients de dispersion (0.001; 0.01).	
7.t.14. Idem que 7.t.13 pour $t=540s$ .....	126
7.t.15. Idem que 7.t.13 pour $t=600s$ .....	127
7.t.16. Idem que 7.t.13 pour $t=900s$ .....	128
7.t.17. Variation de la concentration de polluants .....	129
en fonction du temps pour différentes position à l'aval du rejet:	
a) Rejet en un point constant à l'entrée du canal.	
b) Rejet plan sur une certaine largeur du canal.	
7.t.18. Variation de la concentration de polluants .....	130
en fonction du temps pour différentes position à l'aval du rejet, dans le cas d'un rejet en un point variant dans le temps.	
7.t.19. Variation de la concentration de polluants .....	131
en fonction de $y$ à la position $x=1.2m$ à l'aval du rejet et dans le cas d'un rejet en un point constant à l'entrée du canal.	
7.t.20. Variation de la concentration de polluants .....	132
en fonction de $y$ à la position $x=1.2m$ et $x=5m$ à l'aval du rejet pour différents instant et dans le cas d'un rejet en un point constant à l'entrée du canal.	
a) coefficients de dispersion = $0.001m^2/s$ .	
b) coefficients de dispersion = $0.05m^2/s$ .	
7.t.21. Variation de la concentration de polluants .....	133
en fonction de $x$ à $t=600s$ et pour différents coefficients de dispersion: dans le cas d'un rejet en un point constant à l'entrée du canal.	

- 7.t.22. Variation de la concentration de polluants ..... **134**  
 en fonction de  $y$  à la position  $x=1.2m$  à l'aval du rejet pour différents instant et dans le cas d'un rejet plan sur une certaine largeur du canal.  
 a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
 b) coefficients de dispersion =  $0.05m^2/s$ .
- 7.t.23. Variation de la concentration de polluants ..... **135**  
 en fonction de  $y$  à la position  $x=1.2m$  et  $x=5m$  à l'aval du rejet pour différents instant et dans le cas d'un rejet plan sur une certaine largeur du canal.  
 a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
 b) coefficients de dispersion =  $0.05m^2/s$ .
- 7.t.24. Variation de la concentration de polluants ..... **136**  
 en fonction de  $x$  à  $t=550s$  et pour différents coefficients de dispersion: dans le cas d'un rejet plan sur une certaine largeur du canal.
- 7.t.25. Variation de la concentration de polluants ..... **137**  
 en fonction de  $y$  à la position  $x=1.2m$  à l'aval du rejet pour différents instants et dans le cas d'un rejet en un point variant dans le temps.  
 a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
 b) coefficients de dispersion =  $0.05m^2/s$ .
- 7.t.26. Variation de la concentration de polluants ..... **138**  
 en fonction de  $y$  à la position  $x=2.5m$  et  $x=5m$  à l'aval du rejet pour différents instants et dans le cas d'un rejet en un point variant dans le temps.  
 a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
 b) coefficients de dispersion =  $0.05m^2/s$ .
- 7.t.27. Variation de la concentration de polluants ..... **139**  
 en fonction de  $x$  aux instants  $t=550s$ ,  $t=700s$  et  $t=800s$  dans le cas d'un rejet en un point variant dans le temps.  
 a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
 b) coefficients de dispersion =  $0.05m^2/s$ .

- 7.t.28. Variation de la concentration de polluants ..... 140  
en fonction de  $x$  aux instants  $t=505s$ ,  $t=510s$  et  $t=520s$  dans  
le cas d'un rejet en un point constant à l'entrée du canal.
- 7.t.29. Variation de la concentration de polluants ..... 141  
en fonction de  $y$  à la position  $x=6m$  à l'aval du rejet aux  
instants  $t=505s$ ;  $t=510s$  et  $t=530s$  dans le cas d'un rejet au  
niveau de la paroi.  
a) coefficients de dispersion =  $0.001m^2/s$ .  
b) coefficients de dispersion =  $0.01m^2/s$ .
- 7.t.30. Variation de la concentration de polluants ..... 142  
en fonction de  $x$  aux instants  $t=505s$ ;  $t=510s$  et  $t=530s$  dans  
le cas d'un rejet en un point constant au niveau de la  
paroi.

### Liste des symboles

- A : section transversale,  $m^2$ .  
 b : largeur du cours d'eau, m.  
 C : coefficient de **Chezy**  
 c : concentration du polluant, ppb.  
 Conmax : critère d'arrêt du processus itératif.  
 $c^o$  : concentration de polluant à l'itération précédente, ppb.  
 $c'$  : composante fluctuante de la concentration, ppb.  
 d : profondeur locale, m.  
 f : coefficient de Coriolis.  
 g : accélération de la pesanteur,  $m/s^2$ .  
 H : profondeur totale ( $H=\tau+h$ ), m.  
 h : côte du fond par rapport au datum, m.  
 $H^o$  : profondeur totale à l'itération précédente, m.  
 itermax : itération maximum.  
 Imax, Jmax : nombre de points selon x et y respectivement.  
 k : constante de Von-Karman.  
 L : caractéristique de la longueur.  
 P : pression, bar.  
 $S_f$  : pente de frottement, càd le gradient d'énergie.  
 $S_i$   $i= x, y$  : pente du canal.  
 $\pm \Sigma S_k$  : sources ou puisards.

- $t$  : temps, s.  
 $T_{max}$  : temps maximum, s.  
 $\Delta t$  : pas de temps, s.  
 $\vec{v}$  : vecteur vitesse de composantes  $u, v, w$  respectivement suivant  $x, y, z$ .  
 $u^*, v^*$  : valeurs estimées de  $u, v$ , m/s.  
 $u^o, v^o$  : valeurs de  $u$  et  $v$  à l'itération précédente, m/s.  
 $\bar{u}, \bar{v}$  : vitesses moyennées sur la profondeur suivant  $x, y$  respectivement, m/s.  
 $U_*$  : vitesse de cisaillement, m/s.  
 $u', v', w'$  : fluctuations des vitesses suivant  $x, y, z$  respectivement, m/s.  
 $\vec{w}$  : vitesse du vent.  
 $x, y, z$  : coordonnées cartésiennes.  
 $\Delta x, \Delta y$  : pas de distance, m.  
 $\delta x, \delta y$  : distance d'un point de discrétisation à la paroi du volume de contrôle correspondant, m.  
 $\rho$  : masse volumique,  $kg/m^3$ .  
 $\mu$  : viscosité dynamique,  $kg/m.s$ .  
 $\nu$  : viscosité cinématique,  $m^2/s$ .  
 $\alpha_1$  : coefficient de sous-relaxation des vitesses.  
 $\alpha_2$  : coefficient de sous-relaxation de la correction de la côte de la surface libre.  
 $\tau^*$  : côte de la surface libre estimée, m.



- $\tau$  : côte de la surface libre par rapport au datum, m.  
 $\tau^o$  : côte de la surface libre à l'itération précédente, m.  
 $\tau''$  : correction de la côte de la surface libre, m.  
 $\varphi$  : scalaire prenant les valeurs (u), (v), ( $\tau''$ ), (c).  
 $\tau_{wx}, \tau_{wy}$  : contraintes du vent, N/m<sup>2</sup>.  
 $\tau_{bx}, \tau_{by}$  : contraintes du fond, N/m<sup>2</sup>.  
 $\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z$  : coefficients de diffusion turbulente respectivement, suivant x, y, z, m<sup>2</sup>/s.  
 $\varepsilon_m$  : coefficient de diffusion moléculaire, m<sup>2</sup>/s.  
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : coefficients de dispersion suivant x, y, z respectivement, m<sup>2</sup>/s.  
 $\eta$  : coefficient de rugosité.

indices

- e, E : interface et nœud Est  
 n, N : interface et nœud Nord  
 s, S : interface et nœud Sud  
 w, W : interface et nœud Ouest

Liste des tableaux

page

7.1 Essais effectués sur modèle Hydrodynamique.....	98
---	----

## Chapitre 1

### Introduction.

De nos jours, la pollution constitue l'une des préoccupations majeures des pays industrialisés. Néanmoins, l'inquiétude gagne peu à peu même les autres pays, notamment ceux dits "en voie de développement" à tel point qu'un sommet mondial regroupant de nombreux chefs d'état ainsi que les représentants de presque tous les pays, s'est tenu récemment au Brésil pour débattre de ce fléau. En effet, les rejets des zones industrielles et les rejets domestiques des grandes agglomérations sont rarement traités, sans doute un peu par négligence, mais surtout parce que le coût des investissements liés à la mise en place des installations nécessaires est très élevé. La tendance généralement observée est celle qui consiste à déverser les polluants dans les rivières et / ou les cours d'eau se trouvant à proximité. Par ailleurs, il est faussement admis qu'étant donné qu'il y'a écoulement de l'eau dans une rivière, la pollution, et donc son degré de nuisance, n'apparaît pas dangereuse.

Pourtant, suite à de nombreuses analyses, on a constaté que ces cours d'eaux sujets à des rejets, contiennent suffisamment de polluants dont le taux de concentration peut parfois avoir des conséquences graves. C'est pourquoi, aujourd'hui, de nombreux pays se sont dotés de normes plus ou moins sévères qui fixent les seuils de pollution à ne pas dépasser.

C'est dans ce cadre que notre travail s'inscrit. Il se donne comme objectif l'étude de la dispersion d'une substance dans un environnement aquatique, à écoulement non permanent, soumis à l'influence du transport fluide et aux processus de dispersion associés.

La substance peut être un polluant de n'importe quel type: conservatif ou non, organique ou non, sel, fluide chaud, sédiment en suspension, phosphore organique, nitrogène ou autres.

Différentes modélisations peuvent être utilisées:

- les modèles réduits : ils reproduisent les mouvements des eaux avec précision, mais les effets d'échelle rendent difficile la manipulation des différents phénomènes qui sont en interaction.

- les modèles analogiques : les tensions électriques sont considérées analogues aux variables physiques étudiées. Le coût de l'élaboration du modèle d'un système compliqué serait onéreux et la précision très faible.

- Le modèle mathématique : il reste l'instrument le plus efficace et le moins coûteux. Il présente plusieurs avantages, en particulier l'absence des effets d'échelle et la possibilité de reproduire le phénomène naturel d'une manière précise, connaissant la géométrie du prototype et les lois physiques.

Le modèle mathématique consiste en la résolution d'un ensemble d'équations décrivant le comportement dynamique du processus physique. Ces équations peuvent être résolues en utilisant des techniques analytiques ou numériques.

En général, l'application des techniques analytiques est limitée aux cas ayant une géométrie très simple.

En revanche, le nombre de problèmes résolus numériquement ne cesse, d'augmenter ces dernières années avec l'arrivée sur le marché d'ordinateurs de plus en plus performants; les résultats obtenus sont très intéressants tant du point de vue pratique que du point de vue économique.

Pour notre étude, nous avons opté pour un modèle mathématique qui consiste à résoudre les équations de Saint-Venant et transport par la méthode simple modifiée de **Patankar**.

## Chapitre 2

### Etude bibliographique

#### 2.1. Modèle Hydrodynamique

Ces dernières années, trois classes de méthodes numériques ont été développées pour résoudre des équations aux dérivées partielles décrivant un phénomène physique quelconque :

- la méthode des éléments finis (F.E.M) ;
- la méthode des caractéristiques ;
- la méthode des différences finies (F.D.M) .

Mais c'est la méthode des différences finies qui est la plus utilisée dans la majorité des modèles industriels. Différents schémas aux différences finies ont été proposés dans la littérature pour la modélisation des écoulements dans des rivières ou canaux.

##### 2.1.1. Schémas explicites

Ils sont simples à mettre en oeuvre, mais ils sont soumis à une condition de stabilité sévère, en l'occurrence le critère de courant de **Friederichs-Lewy** (CFL). Ce dernier impose une valeur maximum du pas de temps par rapport au pas de distance. Citons quelques schémas explicites appliqués à l'écoulement à surface libre:

## 1. Schéma diffusif [1]

L'opérateur d'espace est centré et l'opérateur de temps est décentré en avant. Mais l'étude de la stabilité du schéma montre que quel que soit le pas d'espace et de temps, les schémas construits à l'aide de ces opérateurs sont instables. Pour remédier à ces instabilités, le schéma diffusif a été développé en gardant l'opérateur d'espace centré et en introduisant un opérateur de temps différent.

## 2. Méthode de LEAP -FROG [1]

Cette méthode a été utilisée pour résoudre les équations des ondes (équations de Saint-Venant 1-D). Elle approxime les dérivées avec une précision du second ordre dans l'espace et le temps.

Citons d'autres exemples pour les cas unidimensionnels :

travaux de Mahmood et Yevjevich [1], Abbott [1], et ceux de Cunge, et al [1].

### 2.1.2. Schémas implicites

Ces schémas implicites ne comportent pas de restriction sur le pas de temps, mais sont, par contre, plus compliqués à traduire en langage de programmation. Dans ce cas, et uniquement pour des considérations de précision, on s'astreindra à une certaine limite dans le choix du pas de temps.

Le schéma de Preissman [2] a connu une multitude d'applications. Il se présente sous une forme implicite-explicite, dépendant d'un facteur de pondération.

Trois schémas implicites sont considérés comme fondamentaux dans la modélisation industrielle:

### 1. Le schéma de Vasiliev [3]

Il a été développé en 1963 par un ensemble de chercheurs à l'Institut d'Hydrodynamique de NOVOSIBIRSK (URSS). Ce schéma est dit "fully implicite". Les variables d'écoulement sont calculées au même point.

### 2. Le schéma Gunaratnam-Perkins [3]

Ce schéma est une approximation de différences finies des équations d'écoulement écrite dans une forme caractéristique linéarisée homogène. Ce schéma est dit "fully implicite". D'autres schémas implicites ont été utilisés avec succès en unidimensionnel notamment ceux de Amien (1968), Amien et Fang (1970)

### 3. Schéma de Vreugdenhil [4]

Ce schéma a été proposé par Abott et Ionescu en (1967) de l'Institut d'Hydraulique et d'Environnement de Delft; et décrit par la suite par Vreugdenhil [4] du même Institut. Les variables d'écoulement à déterminer sont calculées en différents points d'une grille décalée.

Cette liste n'est sans doute pas exhaustive, mais elle permet de souligner l'intérêt suscité pour le développement des schémas numériques en Hydraulique. On constate que le choix des méthodes est en somme relativement restreint en ce qui concerne les écoulements bidimensionnels non permanents. Pour ces cas, la méthode des caractéristiques devient complexe.



Elle a toutefois été exploitée avec succès par **Katapodes et Strelkoff** [5] pour un problème de bris de barrage.

Pour ces mêmes cas, la méthode ADI (Alternate Direction Implicit Method) de **Peaceman et Rachford** [6] limite habilement le coût des résolutions, car elle évite l'inversion de matrice. Elle n'est pas inconditionnellement stable quand elle est appliquée à un cas réel.

Exemple : calcul de courant de marée avec une bathymétrie réelle. Le calcul échoue pour les nombres de courant compris entre 3 et 5. Ceci est expliqué par le fait qu'elle a été développée pour les problèmes elliptiques indépendants du temps. Plusieurs versions du schéma ADI ont été utilisées, citons par exemple le schéma de **Leendertse** [4] et celui de **Leonard** [7] qui a connu un succès appréciable.

Le modèle Cythère développé récemment à **ELECTRICITE DE FRANCE "EDF"** par **Benque, et al** [8] s'avère également digne de mention. Ce schéma fait appel à la technique des pas fractionnaires où :

- la convection est traitée par la méthode des caractéristiques.
- la diffusion et l'onde de propagation est traitées respectivement par la méthode des différences finies implicite et la méthode ADI.

Il est utilisé d'une part pour vaincre certaines difficultés, comme les oscillations parasites et les atténuations numériques artificielles dues au traitement inadéquat des termes de convection non linéaire des équations de **Saint-Venant**, et d'autre part pour pallier une faible reproduction de l'onde de propagation quand on emploie des pas de temps importants.

Un algorithme à pas fractionnaire basé sur le schéma de **Mac-Cormack** [9] a été développé avec succès par **García et Kahawita (1986)** pour les écoulements transitoires bidimensionnels.

Le schéma de **Mac-Cormack** est une méthode à pas fractionnaires où un opérateur de différences finies est divisé en des séquences plus simples. Un tel procédé de division réduit le calcul durant chaque pas de temps.

Il établit un second ordre de précision dans l'espace et le temps. Afin d'intégrer numériquement les équations du modèle, la région d'intérêt a été recouverte avec une grille de calcul où toutes les variables dépendantes sont définies à chaque cellule centrale (fully dense grid). Les bons résultats donnés par ce schéma prouvent son efficacité et peut donc être exploité dans le calcul Hydraulique.

**Wang et Kahawita [10]** ont appliqué la technique d'intégration "Cubic-spline" aux équations Hydrodynamiques intégrées sur la largeur. Cette alternative devient très intéressante dans le cas où l'objet de recherche nécessite la détermination de la répartition des paramètres sur la profondeur.

L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for pressure linked equations) développé par **Patankar et Spalding [11]** a été largement utilisé pour la solution de problèmes en Mécanique des Fluides et notamment en transfert de chaleur.

Citons quelques cas :

- Résolution du problème de la couche limite (3-D) [12];
- Etude de la convection naturelle dans une cavité partitionnée [13].

Dans le cadre du présent travail, la méthode de **Patankar** a été modifiée de façon à l'adopter à la résolution des équations de **Saint-Venant** et de l'équation de transport intégrées sur la profondeur.

On constate donc, qu'à l'instar de la technologie informatique l'évolution des méthodes numériques constitue un tournant important dans le domaine de l'ingénierie, notamment en Hydraulique.

## 2.2. Modèle "transport"

Pour décrire le phénomène de dispersion de polluants dans les rivières, trois principales approches sont utilisées:

- La première est l'approche classique. Elle a été développée par **Fischer** [14] lequel s'est basé sur le travail original de **Taylor** [15]. L'équation de diffusion-convection unidimensionnelle est résolue pour des conditions aux limites appropriées. Expérimentalement, **Fischer** a montré que cette solution fournit une description raisonnable du phénomène de dispersion dans un canal réel à trois dimensions. Dans un premier temps (période convective), le mélange se fait latéralement. Ensuite, la variation de la concentration a lieu seulement le long de la rivière.

- La seconde approche **Bath, et al** [16], décrit la dispersion d'un polluant dans un cours d'eau en utilisant une méthode similaire à celle utilisée dans l'analyse de la séparation des constituants d'un mélange.

- La troisième approche **Neely, et al** [17] utilise un artifice qui consiste à diviser la rivière en compartiments séparés fictivement, chaque compartiment s'écoulant dans l'autre.

Un travail analytique basé sur l'approche classique de **Fischer** a été utilisé par **Chapman** [18] pour représenter le comportement de la dispersion de polluants dans une rivière dont la vitesse moyenne locale, le taux d'écoulement et les caractéristiques de dispersion varient le long de la rivière.

Comme pour le modèle Hydrodynamique, les méthodes de résolution par différences finies se répartissent en méthodes explicites et méthodes implicites. C'est à la base de ces méthodes qu'ont été élaborés les schémas explicites, implicites et semi-implicites.

L'usage du schéma explicite pour l'intégration de l'équation de transport (1-D) dans le cas d'un écoulement permanent ( $u=cte$ ) nécessite la satisfaction, simultanée de deux conditions de stabilité. Les critères portent sur le pas de temps, le pas d'espace et le coefficient de diffusion.

Citons deux schémas explicites appliqués dans ce cas: le schéma aux différences finies de **Backward** et le schéma de **Fromm's** [19]. Une comparaison des résultats donnés par la solution analytique et le schéma de **Backward** qui contient une diffusion numérique considérable due à la faible valeur de  $(u\Delta t/\Delta x)$ , montre que ce schéma ne peut décrire le processus convectif-diffusif pour un nombre de Peclet supérieur à 10. En revanche, une augmentation de la valeur  $(u\Delta t/\Delta x)$  réduit la diffusion numérique et donc l'écart entre les résultats analytiques et numériques. La comparaison des résultats entre le schéma de **Fromm's** et la solution analytique montre que le schéma réduit la diffusion numérique et peut donc décrire le processus convectif-diffusif jusqu'à un nombre de Peclet égal à 100. Les modèles unidimensionnels supposent que le mélange de polluant est complet à travers les sections du cours d'eau. Voici à titre indicatif, quelques uns de ces modèles: **Fukuoka et Sayre** [20], **Valentine et wood** [21], **Beltaos** [22], **Terragni et Salomone** [23], **Chapman** [24], **Koussis, et al** [25], **Beer et young** [26], **Bribe et Rutherford** [27].

...Cependant, excepté pour les très petits cours d'eau, il a été montré par **El Hadi, et al [28]** que le mélange de polluant à travers la section transversale n'est accompli que si celui-ci a parcouru une longue distance à l'aval du point de rejet. C'est pourquoi les modèles bidimensionnels sont nécessaires pour simuler les concentrations dans une étendue intermédiaire. Ces modèles peuvent être classés selon que le polluant injecté est stable ou instable. Les exemples de ce type incluent les travaux de **Siemons [29], Akhtal [30], et MC. Corquodale, et al [31]**, qui ont été développés pour des canaux droits et les modèles de **Yotsukura et Sayre [32], Lau et Krishnappan [33], Somlyody [34], Gowda [35]**, qui utilisent le concept de tube de cours d'eau pour représenter les rivières non uniformes et à profils en zigzag.

Des modèles à état non permanent pour les canaux droits ont été développés par **Verboom [36], Holly [37], et Onishi [38]. Harden et Shen [39]**, ont élaboré également un modèle de mélange basé sur une combinaison des deux schémas implicites et explicites. Malheureusement, seuls deux de ces modèles ont été vérifiés pour le cas d'injection continue de contaminant en raison de la rareté des données expérimentales. Ces vérifications ont été décrites par **Holly et Nerat [40]** et **Harden et Shen [39]**. **Verboom [41]** a montré que la méthode à pas de temps fractionnaires est appropriée pour résoudre l'équation de transport.

**Luk et Lau [42]** ont développé un modèle bidimensionnel de dispersion de polluants dans les canaux naturels, il est aussi basé sur le concept des tubes de cours d'eau (modèle Mabocost).

Ce modèle élimine certaines difficultés telles que :

- l'incapacité de traiter les canaux en zigzag;
- l'absence du terme de source.

Un autre modèle aux différences finies **Quickest** [43] a été utilisé avec succès pour résoudre l'équation de transport (2-D). Il apparaît dans plusieurs travaux traitant des modèles de turbulence et des modèles sur l'Environnement. Ce schéma est explicite, l'erreur de troncature arrive jusqu'au 3<sup>ème</sup> ordre pour les dérivées spatiales et temporelles.

Le schéma semi-implicite de **Patankar** [11] utilisé dans la présente étude pour résoudre les équations du modèle Hydrodynamique a été appliqué avec succès pour la résolution de l'équation du modèle de transport.

## Chapitre 3

### Equations de base

#### 3.1. Modèle Hydrodynamique

Les notions fondamentales et les hypothèses utilisées dans la modélisation des écoulements dans les rivières sont formulées dans les équations d'écoulement à surface libre non permanent [1].

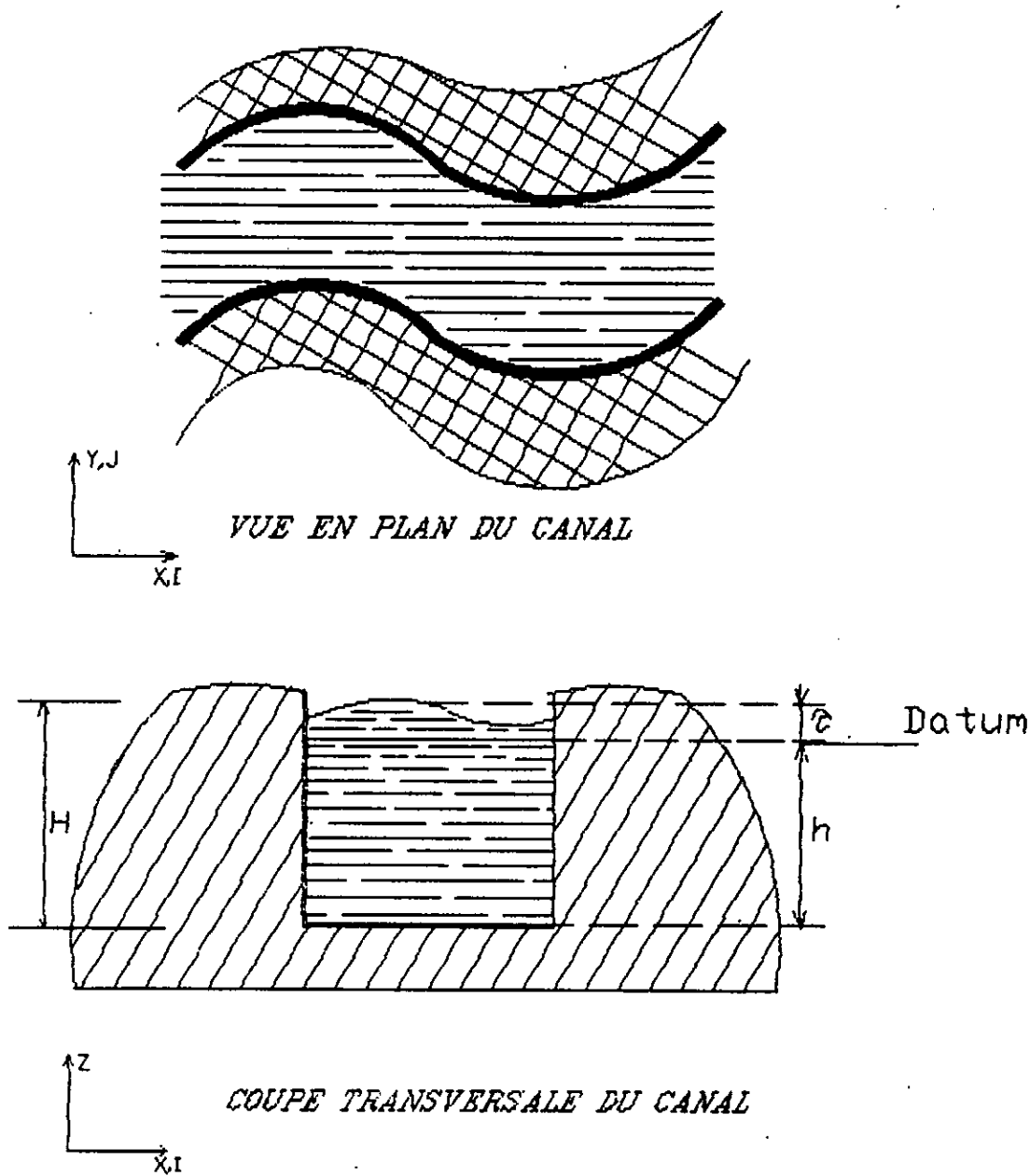
Les hypothèses suivantes ont été retenues :

- la pression est distribuée hydrostatiquement sur la profondeur, car l'accélération verticale est négligeable devant l'accélération de la pesanteur;
- dans les équations de mouvement, la variation de la masse volumique de l'eau est négligée, cette hypothèse permet la résolution des équations du mouvement indépendamment de l'équation de transport de polluants;
- les effets de frottement limite et la turbulence ont été considérés analogues à ceux des lois d'écoulement permanent.

Nous avons négligé également les termes suivants :

- l'évaporation;
- l'infiltration;
- la contribution de l'écoulement latéral à la quantité de mouvement, excepté quand de larges quantités d'eau sont introduites;
- les effets de Coriolis et de marée.





*FIG 3.1 DEFINITION DU SYSTEME D'AXES*

Les équations de **Saint-Venant** constituent le modèle Hydrodynamique.

Elles proviennent de l'intégration sur la profondeur des équations de **Navier-Stokes** (3-D) et de l'équation de conservation de la masse.

Ce modèle permet de reproduire les conditions existantes exprimées en termes de champ de vitesse  $u$  et  $v$  et de la profondeur  $H$  à partir de conditions initiales et aux limites connues, et à partir des données nécessaires exigées.

Les équations de base du modèle Hydrodynamique sont :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0 \quad (3.1)$$

- Equations de conservation de la quantité de mouvement :

( équations de Navier-Stokes tridimensionnelles ).

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = fv - \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) = -fu - \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w) + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) = fw - \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$

### 3.2. Modèle "transport"

L'étape suivante porte sur l'étude des phénomènes physiques de la dispersion de polluants dans les rivières et l'élaboration de l'équation de transport pour déterminer la concentration pour n'importe quelle condition aux limites et initiales. Nous considérons à l'origine que la longueur de la lame d'eau est beaucoup plus grande que son épaisseur, le polluant se trouvant alors complètement mélangé sur la profondeur dans un temps relativement court [3]. Par conséquent, la distribution de la concentration dans la direction verticale devient uniforme très rapidement, longtemps avant que l'uniformité dans la direction horizontale soit atteinte.

Il est donc raisonnable d'intégrer cette équation de transport sur la profondeur [3]. L'étude aboutit à l'élaboration de l'équation de convection-diffusion bidimensionnelle qui constitue le modèle de transport.

L'équation de base du modèle "transport" est :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(cw) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \pm S_k \quad (3.5)$$

## Chapitre 4

### Modèle "transport"

#### 4.1. Analyse du phénomène physique de la dispersion et détermination de l'équation de base du modèle

Pour mieux comprendre le phénomène physique de dispersion de polluants dans les rivières ou les milieux à découvert, considérons un traceur comme polluant conservatif qui vient d'être émis à partir d'un point  $p$ . Ceci est simplement équivalent à un grand nombre de particules rejetées instantanément du point  $p$  dans une rivière à écoulement non permanent. Il y a formation d'un panache qui s'étend et qui se meut vers l'aval.

La description de ce phénomène physiquement et mathématiquement est liée à plusieurs mécanismes décrits ci-dessous, voir [3].

#### \* Diffusion moléculaire :

Les matières polluantes diffusent dans le fluide neutre même si celui-ci est au repos selon la loi établie par **Fick**. Le flux est proportionnel au gradient de concentration.

Mathématiquement, la loi de **Fick** à trois dimensions pour un fluide au repos s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_m \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_m \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_m \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

La concentration est exprimée comme étant le rapport du volume d'une substance au volume de mélange ou comme un rapport des masses.

$\epsilon_m$  est le coefficient de diffusion moléculaire. Ce coefficient est très faible. Il constitue une propriété du fluide (température, pression, etc ...) et du polluant et non une propriété dynamique de l'écoulement. Par conséquent  $\epsilon_m$  est une quantité connue.

**\* Diffusion convective :**

Cependant, quand le fluide est en mouvement, il est régi de façon dominante par les effets de frottements paroi-liquide et par le frottement du vent résultant, en majorité des gradients de vitesse. C'est un écoulement dans lequel les forces de cisaillement internes sont générées par les couches liquides s'écoulant à différentes vitesses. Il ya alors convection différentielle.

L'équation (4.1) devient (4.2).

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) + \frac{\partial}{\partial y}(vc) + \frac{\partial}{\partial z}(wc) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_m \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_m \frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon_m \frac{\partial c}{\partial z}\right) \quad (4.2)$$

Quand l'eau s'écoule, en régime turbulent, c'est à dire que le nombre de **Reynolds** est supérieur à 2000, un autre phénomène apparait: la diffusion turbulente.

**\* Diffusion turbulente.**

C'est au niveau de ce processus que les particules fluides individuelles sont sujettes à des fluctuations aléatoires de vitesse, leurs trajectoires varient autour du champ d'écoulement.

On aura donc une diffusion verticale qui tend à mélanger la matière polluante sur toute la profondeur et une diffusion horizontale qui tend à mélanger la matière polluante sur toute sa largeur et longueur.

La description mathématique de ce processus de dispersion est basée sur une théorie semi-empirique qui prend en compte la conservation du polluant.

En un point donné, le champ des vitesses se décompose en deux parties :

- la vitesse moyenne sur le temps ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ )
- et les fluctuations de vitesses ( $u', v', w'$ ) dont la moyenne est nulle.

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned} \tag{4.2a}$$

Le mouvement des particules marquées peut être considéré comme sujet à trois influences :

- diffusion moléculaire;
- vitesse moyenne par rapport au temps;
- fluctuations des vitesses turbulentes.

La diffusion moléculaire peut être négligée dans la modélisation de transport dans les rivières. Le champ de vitesse, moyenné par rapport au temps, est ordinairement connu ou estimé.

La principale difficulté est liée au transport dû aux fluctuations des vitesses turbulentes observées seulement dans les écoulements turbulents qui, eux, se calculent difficilement et ceci pour la raison suivante : le spectre de l'écoulement est très étalé, c'est à dire qu'une grande variété d'échelles de phénomènes intervient. En particulier, les phénomènes à petite échelle, qui, par effet cumulatif, finissent par influencer sur les phénomènes à grande échelle.

Pour calculer un tel écoulement, il faudrait un ordinateur beaucoup plus puissant que ceux disponibles actuellement sur le marché. Afin de décrire le transport turbulent du champ d'écoulement moyen, nous exprimerons la concentration en chaque point comme la somme de la valeur moyennée par rapport au temps et de sa composante fluctuante.

$$c = \bar{c} + c' \quad (4.2b)$$

En substituant cette définition ainsi que les termes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dans l'équation (4.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{c} + c') + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} + c')(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{c} + c')(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{c} + c')(\bar{w} + w') = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c} + c') \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_m \frac{\partial}{\partial y} (\bar{c} + c') \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_m \frac{\partial}{\partial z} (\bar{c} + c') \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

En pratique, on ne procède pas à la résolution numérique directe de l'équation de transport pour des nombres de **Reynolds** élevés, on considère seulement l'équation moyenne (moyenne temporelle) faisant intervenir des moments de différents ordres ( $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$ ) : , u', v', w' étant des fluctuations de vitesses.

Cette équation ne peut être résolue sans ajouter des relations empiriques appelées "lois de fermeture".

La moyenne de (4.3) donne après transformations

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{c} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{c} \bar{w}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \overline{u'c'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} - \overline{v'c'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} - \overline{w'c'} \right) \quad (4.4)$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} c dt; \quad \bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt; \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v dt; \quad \bar{w} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} w dt.$$

les termes :

$\overline{u'c'}$ ,  $\overline{v'c'}$ ,  $\overline{w'c'}$  représentent le transport turbulent.



La théorie de **Taylor** stipule que le transport turbulent peut être décrit d'une manière analogue à la diffusion moléculaire.

$$\begin{aligned}\overline{u'c} &= -\tilde{\varepsilon}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \\ \overline{v'c} &= -\tilde{\varepsilon}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \\ \overline{w'c} &= -\tilde{\varepsilon}_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}\end{aligned}\tag{4.4a}$$

Le signe (-) indique que la diffusion arrive dans la direction de la baisse de la concentration.

Tenant compte de la théorie de **Taylor** (4.4a) dans l'équation (4.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{c}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{c}\bar{w}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \tilde{\varepsilon}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \tilde{\varepsilon}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{4.5}$$

où

$\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z$  : représentent les coefficients de diffusion turbulente.

Ces coefficients peuvent être évalués si nous avons une estimation semi-empirique des termes

$$\overline{u'c'}, \overline{v'c'}, \overline{w'c'}$$

Cette évaluation s'appuie sur les concepts de base de **Prandtl**.

Nous pouvons donc écrire l'équation de transport pour une substance donnée dans le champ de vitesse à trois dimensions par :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{c}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{c}\bar{w}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\epsilon}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\epsilon}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\epsilon}_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}\right)$$

Pour simplifier l'écriture remplaçons  $\bar{c}$  par  $c$ ,  $\bar{u}$  par  $u$ ,  $\bar{v}$  par  $v$  et  $\bar{w}$  par  $w$  nous aurons :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(cw) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z}\right) \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) ne peut être appliquée que si les polluants sont conservatifs (exemples: sulfates, chlorures, etc..), c'ad que les concentrations changent seulement par dilution, sinon nous devrions ajouter un terme à l'équation (4.6) appelé terme de source ou puisard ( $\pm S_k$ ). Ce terme représente le taux de production (ou de destruction) par des agents extérieurs intervenant au sein du système.

Dans la plupart des problèmes pratiques, les apports extérieurs se font aux frontières et, dans ce cas ils interviennent dans les conditions aux limites et non dans  $\pm S_k$ ; ou bien ils se font dans un intervalle de temps relativement court, quasi instantanément, et dans ce cas, ils interviennent dans les conditions initiales et non dans l'équation. nous supposons dans la suite qu'il en est ainsi et nous prendrons  $\pm S_k = 0$ .

D'où l'équation généralisée de convection-diffusion tridimensionnelle :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c u) + \frac{\partial}{\partial y}(c v) + \frac{\partial}{\partial z}(c w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\varepsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\varepsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\varepsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \pm S_k \quad (4.7)$$

l'expression

$$\left( \tilde{\varepsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} - cu \right) \text{ est le flux dû à la dispersion.}$$

Les constituants sont transférés par dispersion de la zone de hautes concentrations à la zone de faibles concentrations, les coefficients

$(\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z)$  dépendent de l'amplitude et de la fréquence de marée.

Les termes  $(cu, cv, cw)$  sont les flux convectifs causés par le mouvement de l'eau contenant le constituant; beaucoup de réactions affectent la diminution ou l'augmentation de concentration des constituants.

La relation entre les transports convectif et diffusif est exprimé par le nombre de **Peclet**.

$$P_e = \frac{Lu}{\varepsilon} \quad (4.7a)$$

Si le transport convectif dépasse le transport diffusif le nombre de **Peclet** est grand; dans le cas contraire, le nombre de Peclet est faible.

$(S_k)$  : est le terme de source, il peut être une constante ou une fonction de la concentration de polluants.

Bien que tous les systèmes physiques réels soient à trois dimensions, une précision suffisante peut être obtenue dans plusieurs types de rivières par une modélisation unidimensionnelle ou bidimensionnelle.

Les modèles unidimensionnels (1-D) supposent un mélange complet dans les directions verticale et latérale.

Les modèles bidimensionnels (2-D) supposent un mélange latéral, comme dans les estuaires stratifiés ou un mélange vertical comme dans les rivières relativement peu profondes et larges.

Par la suite, on utilisera le 2<sup>ème</sup> type de modèles bidimensionnels.

On considère que la longueur de la lame d'eau est beaucoup plus grande que sa profondeur (marée, lame d'eau des crues), le polluant devient dans ce cas complètement mélangé sur la profondeur dans un temps relativement court. Par conséquent, la distribution de la concentration dans la direction verticale devient uniforme très rapidement, bien avant que l'uniformité dans la direction horizontale soit atteinte. Il est donc raisonnable d'intégrer (4.7) sur la profondeur.

On notera que le mélange dans une rivière, spécialement le mélange transversal, est influencé par l'écoulement hélicoïdal secondaire qui ne peut, bien sûr, être représenté sans prendre en compte la composante de la vitesse verticale.

#### 4.2. Choix des paramètres de dispersion $\epsilon_x$ , $\epsilon_y$ , $\epsilon_z$

Le transport de polluant est décrit par l'équation de convection-diffusion (4.8) [voir chap 5] celle-ci est fonction des coefficients de mélange  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  qui, à leur tour, sont fonctions de plusieurs paramètres hydrauliques tels que le type de canal, sa largeur, sa profondeur, sa rugosité et les conditions d'écoulement.

De nombreuses expériences ont été faites pour déterminer ces coefficients; nous citerons, à titre d'exemple, les cas des canaux artificiels et des cours d'eau réels [45].

##### 4.2.1. Cas idéal d'un canal uniforme, infiniment large de profondeur constante

Dans le cas d'un canal uniforme, la turbulence est homogène et stationnaire; si, en plus, la largeur du canal est importante, alors celle-ci ne jouera aucun rôle. L'échelle de longueur importante est la profondeur.

Le coefficient de mélange turbulent est le produit de l'échelle de longueur lagrangienne par l'intensité de turbulence.

Des essais effectués par Mr Laufer et d'autres ont montré que l'intensité de la turbulence est proportionnelle à l'effort de cisaillement sur le mur. Celui-ci étant exprimé par la vitesse de cisaillement  $U_*$ , le coefficient de mélange est donc proportionnel à  $dU_*$ .

Il y aura un coefficient de mélange transversal et un coefficient de mélange longitudinal parce que la présence des conditions aux limites horizontales, à la surface et au fond signifie que la turbulence ne sera pas isotrope.

- Coefficient de mélange vertical  $\epsilon_z$ :

D'après **Elder**, le coefficient de mélange pour ce type de canal dérive du profil logarithmique des vitesses, d'où :

$$\epsilon_z = k d U_* \left( \frac{z}{d} \right) \left[ 1 - \left( \frac{z}{d} \right) \right] \quad (4.9)$$

Ce coefficient décrit le transport de masse et de quantité de mouvement, ceci a été vérifié par **Reynolds** qui stipule que ce coefficient peut être utilisé pour le transport de masse, il a été vérifié par **Jobson et Sayre (1970)**. Moyennant ce coefficient sur la profondeur et prenant  $k=0.4$ , on obtient :

$$\epsilon_z = 0.067 d U_* \quad (4.9a)$$

Ce résultat est similaire à d'autres trouvés dans une large fourchette d'écoulements. Par exemple, **Csanady (1976)** donne une valeur moyenne de  $\epsilon_z$ .

$$\epsilon_z = 0.05 d U_* \quad (4.9b)$$

- Coefficient de mélange transversal  $\epsilon_y$ :

Il n'ya pas de profil de vitesses transversal dans un canal infiniment large et uniforme. Ainsi, il n'est pas possible d'établir une analogie transversale avec l'équation (4.9). C'est pourquoi, on se réfère aux valeurs expérimentales données par des chercheurs.

$$\epsilon_y = 0.15 d U_* \quad (4.10)$$

Plusieurs expériences faites par des chercheurs tels que **Okeye (1970)**, **Lau et Krishnappan (1970)** ont donné lieu à des résultats contradictoires. Ainsi le mieux que nous pouvons dire pour des raisons pratiques, est que les résultats donnés par l'équation (4.10) pourraient être corrects à 50% près dans les canaux rectangulaires.

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y \pm 50\% \quad (4.10a)$$

**- Coefficient de mélange longitudinal  $\varepsilon_x$ :**

La turbulence cause le mélange longitudinal presque au même taux que le mélange transversal car il existe un manque égal de limite pour empêcher le mouvement.

La dispersion longitudinale peut être due au cisaillement de vitesse transversale résultant de la circulation secondaire.

Le mélange longitudinal provoqué par les remous turbulents n'est généralement pas important car le coefficient de cisaillement de l'écoulement causé par le gradient de vitesse est beaucoup plus grand que le coefficient de mélange causé par la turbulence.

Les taux de mélange turbulent n'ont pas été mesurés par les expériences de dispersion de colorant à cause de la difficulté de séparer les effets de fluctuations turbulentes longitudinales des effets dus au cisaillement de l'écoulement.

D'après **Elder**, le coefficient de dispersion peut s'écrire:

$$\varepsilon_x = 5.93 dU_* \quad (4.11)$$

#### 4.2.2. Mélange dans les canaux irréguliers et les cours d'eau naturels:

Les canaux irréguliers diffèrent des canaux uniformes par trois aspects importants:

- La profondeur varie de façon irrégulière;
- le canal peut devenir courbe;
- il peut y avoir des grandes irrégularités sur les murs tels que les arêtes ou les points sortants .

Nous allons donner ci-après la méthode de calcul des coefficients pour ce type de canaux.

##### - Coefficient de mélange vertical $\epsilon_z$ :

Aucun de ces facteurs ne doit avoir une grande influence sur le mélange vertical car l'échelle des mouvements verticaux est limitée par la profondeur locale.

On peut donc utiliser l'équation (4.9) pour exprimer le mélange vertical.

$$\epsilon_z = k d U_* \left( \frac{z}{d} \right) \left[ 1 - \left( \frac{z}{d} \right) \right] \quad (4.9)$$

On ne connaît pas d'expérience sur le mélange vertical dans un écoulement à profondeur variable, mais il n'y a pas de raison pour que la pratique usuelle ne soit pas adéquate.



**- Coefficient de mélange transversal  $\epsilon_y$ :**

Le taux de mélange transversal est largement affecté par les irrégularités du canal car elles sont capables de générer une large variété de mouvements transversaux.

Des expériences ont été faites par plusieurs chercheurs tels que: **Yotsukura, et al (1970), Holly et Abraham (1973), Fischer** et autres sur des canaux à ciel ouvert avec certaines géométries différentes. Ces expériences ont montré que plus le canal est largement affecté par les irrégularités plus  $\epsilon_y/dU^*$  est grand.

$$\frac{\epsilon_y}{dU^*} \cong 0,6 \pm 50\% \quad (4.12)$$

On peut avoir de plus grandes valeurs de  $\epsilon_y/dU^*$  si le canal a des courbures aiguës ou bien des changements rapides de géométrie.

Mais les chercheurs ne spécifient pas exactement ce qu'ils entendent par "rapide". Aussi, faut-il faire preuve de prudence et recourir aux expériences in situ.

**- Coefficient de mélange longitudinal  $\epsilon_x$**

Après le mélange adéquat d'un effluent à travers la section transversale, l'étape finale dans le processus de mélange est la réduction des gradients longitudinaux par la dispersion longitudinale.

Si la quantité d'effluent est constante et est rejetée dans une rivière dont le débit est constant alors la dispersion est négligeable.

Il y a des cas où la dispersion longitudinale est importante, le cas le plus immédiatement apparent est le déversement accidentel de polluants.

Plusieurs observations ont été faites sur ce coefficient de mélange longitudinal. Selon **Elder** le coefficient de dispersion longitudinale est :

$$\varepsilon_x = 5.93 \text{ du}_* \quad (4.13)$$

La plus grande valeur observée par **Yotsukura, et al (1970)** est :

$$\varepsilon_x = 7500 \text{ du}_* \quad (4.14)$$

Dans la rivière de Missouri, la plus petite valeur observée dans le canal de Yuma ; dans l'Arizona par **Schuster (1965)** est :

$$\varepsilon_x = 8.6 \text{ du}_* \quad (4.15)$$

Les expériences faites par **Fischer (1966, 1967)** ont montré que le résultat d'**Elder** n'est pas applicable aux cours d'eau réels du fait qu'il a utilisé le profil vertical de vitesse (4.16) pour la détermination du coefficient de dispersion longitudinale au lieu du profil transversal (4.17).

$$u(z) = \bar{u} + \left(\frac{U_*}{k}\right) \left\{ 1 + L_n \left[ \left( \frac{z+d}{d} \right) \right] \right\} \quad (4.16)$$

$$\bar{u}_z(y) = \frac{1}{d(y)} \int_{-d(y)}^0 u(y, z) dz \quad (4.17)$$

$\bar{u}_z(y)$  : est le profil de vitesse étendu sur la largeur du cours d'eau  
(b)

$u(z)$  : est le profil de vitesse utilisé dans l'analyse d'**Elder**, étendu seulement sur la profondeur d'écoulement.

Une estimation quantitative du coefficient de dispersion dans les cours d'eau réels peut être obtenue en négligeant le profil vertical

### 4.3 CONCLUSION

1. On peut dire que l'interaction entre les mécanismes de diffusion turbulente et la convection différentielle s'exprime par le terme de dispersion.

Nous pouvons définir trois domaines ou champs physiques de dispersion:

- La première zone au niveau de laquelle la quantité de mouvement initiale et la poussée gouvernent le mélange initial. Il s'agit de la zone généralement proche du rejet dans laquelle le mélange se réalise sur toute la profondeur. Cette zone constitue le champ proche;

- La zone entre le champ proche et le point aval : c'est au niveau de cette zone que la tâche occupe toute la section d'écoulement. Ce point se trouve en général assez loin du rejet, la dispersion à un caractère bidimensionnel;

- La dernière zone où le mélange dans la section transversale est achevé. Le processus de dispersion longitudinale de cisaillement de l'écoulement fait disparaître les gradients longitudinaux causés par le changement dans les affluents ou le débit de la rivière.

2. Il ressort des relations  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  que le frottement de l'eau contre les limites solides est responsable de la turbulence et cause la diffusion.

3. Dans les écoulements non continus, l'action du vent, l'irrégularité des rives d'un cours d'eau et ses courbures augmentent la dispersion longitudinale. Les expressions théoriques des coefficients de dispersion n'incluant pas certains de ces effets fourniront des valeurs minimales.

4. Dans les cours d'eau naturels, la largeur est plus grande que la profondeur, le coefficient de mélange vertical est donc négligeable par rapport aux coefficients transversal et longitudinal.

Ceci est vérifié par l'expression du temps de mélange qui est proportionnel au carré de la longueur divisé par le coefficient de mélange. C'est pour cela que l'on a supposé l'effluent uniformément distribué suivant la verticale ou, en d'autres termes, on a analysé la dispersion bidimensionnelle en intégrant les équations de **Navier-Stokes** tridimensionnelles et l'équation de convection-diffusion sur la profondeur.

## Chapitre 5

### Formulation du problème

#### 5.1 Intégration des équations de Navier-Stokes suivant la profondeur

L'intégration de (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) sur la profondeur constitue les équations de Saint-Venant qui gouvernent les écoulements bidimensionnels à surface libre sur la base des hypothèses du chapitre 3.

L'intégration de ces équations sur la profondeur se fait en utilisant la règle de dérivation sous le signe "somme", soit :

$$G(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} u \, dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} \, dz + \left[ u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - u(-h) \frac{\partial (-h)}{\partial t} \right]$$

et en considérant en outre les conditions cinématiques à la surface et au fond.

Pour  $z = \tau$  ; on a l'équation de la surface libre:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + v(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} = w(\tau)$$

Pour  $z = -h$ ; on a l'équation du fond:

$$u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(-h) \frac{\partial h}{\partial y} = -w(-h)$$

### 5.1.1. Intégration de la loi de conservation de la masse

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

En utilisant la règle de dérivation sous le signe "somme" nous pouvons écrire :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} u dz - \left( u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - u(-h) \frac{\partial (-h)}{\partial x} \right) \right] +$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} v dz - \left( v(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - v(-h) \frac{\partial (-h)}{\partial y} \right) \right] + w(\tau) - w(-h)$$

l'écoulement est moyennement permanent; nous définissons les vitesses moyennes comme suit :

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} u dz; \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} v dz; \quad \bar{w} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} w dz$$

En tenant compte des conditions cinématiques déjà citées, l'équation intégrée devient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uH) + \frac{\partial}{\partial y} (vH) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uH) + \frac{\partial}{\partial y} (vH) = 0 \quad (5.1.1)$$

car  $(\partial h / \partial t) = 0$  (la côte du fond est invariable dans le temps)

### 5.1.2. Intégration de la 1ère équation de Navier-Stockes

Commençons par intégrer le premier membre de l'équation (3.2).

Posons :

$$A = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(wu).$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} Adz &= \int_{-h}^{\tau} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) \right] dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} u dz - \left( u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - u(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} u^2 dz - \left( u^2(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - u^2(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} uv dz - \left( u(\tau) v(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - u(-h) v(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) + (uw)_{\tau} - (uw)_{-h} \end{aligned}$$

En introduisant les conditions cinématiques, après arrangement nous obtenons :

$$\int_{-h}^{\tau} Adz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} uv dz \quad (5.2.1)$$

Sachant que :

$$u = (u - \bar{u}) + \bar{u} \quad \text{d'où} \quad u^2 = (u - \bar{u})^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})$$

$$\text{et } (u - \bar{u})(v - \bar{v}) = uv - u\bar{v} - \bar{u}v + \bar{u}\bar{v} \quad \text{d'où}$$

$$uv = (u - \bar{u})(v - \bar{v}) + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}\bar{v}$$

Remplaçant les termes  $u^2$  et  $uv$  par leur expression dans l'équation (5.2.1), nous obtenons finalement :

$$\int_{-h}^{\tau} A dz = \frac{\partial}{\partial t} (H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} (u - \bar{u})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} (u - \bar{u})(v - \bar{v}) dz.$$

Faisons la même chose pour le second membre de (3.2). Les contraintes dans le fluide ont été notées par  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ .

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} + \rho \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Intégrons sur la profondeur les termes de contraintes de façon similaire au premier membre de la même équation. On obtient après réarrangement :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}) \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} \tau_{xy} dz - \left[ \tau_{xx}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - \tau_{xz}(\tau) \right] + \left[ \tau_{xx}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \tau_{xy}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} - \tau_{xz}(-h) \right]$$

Les termes à l'intérieur des crochets peuvent être interprétés comme étant les composantes du tenseur de l'effort dans les plans de la surface libre et du fond. Ceci peut être expliqué en considérant un système d'axes de coordonnées  $x', y', z'$ , l'axe des  $z'$  étant normal à la surface de l'eau.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \tau}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$



La transformation du tenseur de contraintes montre alors que :

$$\begin{aligned}\tau_{y'z'} &= -\tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau_{yz} \\ \tau_{x'z'} &= -\tau_{xx} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau_{xz}\end{aligned}$$

Définissons la contrainte du vent et la contrainte du fond par :

$$\begin{aligned}\tau_{wx} &= (\tau_{x'z'})_s & \tau_{bx} &= (\tau_{x'z'})_b \\ & \text{et} & & \\ \tau_{wy} &= (\tau_{y'z'})_s & \tau_{by} &= (\tau_{y'z'})_b\end{aligned}$$

L'intégration de l'équation (3.2) donne finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{u}\bar{v}) = fH\bar{v} - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (HT_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (HT_{xy})$$

(5.2.2)

où les contraintes effectives dans le plan vertical sont définies par :

$$\begin{aligned}T_{xx} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left\{ 2\rho\vartheta \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} - \rho(u - \bar{u})^2 \right\} dz \\ T_{xy} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left\{ \rho\vartheta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho(u - \bar{u})(v - \bar{v}) \right\} dz \\ T_{yy} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left\{ 2\rho\vartheta \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \overline{v'^2} - \rho(v - \bar{v})^2 \right\} dz\end{aligned}$$

Pour ce qui est des contraintes du vent, elles sont fonction de la vitesse du vent, pour ce qui est de la contrainte du fond, elle est généralement donnée par :

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

$$\tau_{by} = \frac{\rho g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

L'équation (3.2) intégrée devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{u}\bar{v}) = fH\bar{v} - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(HT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{xy}) \right)$$

(5.2.3)

De la même façon on intègre la 2<sup>ème</sup> équation de **Navier-Stokes** (3.3) sur la profondeur pour aboutir à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}^2) = -fH\bar{u} - gH \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(HT_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{yy}) \right)$$

(5.2.4)

**J. Kuipers et C.B. Vreugdenhil** (1973) ont introduit la viscosité turbulente  $\varepsilon$  pour une profondeur constante  $H$  afin de prendre en compte les termes de contraintes effectives comme suit [44] :

$$\frac{1}{\rho H} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(HT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{xy}) \right] = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

et

$$\frac{1}{\rho H} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(HT_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{yy}) \right] = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Les différents termes apparaissant dans les équations de **Saint-Venant** correspondent respectivement :

- à l'accélération locale de l'écoulement, c'est-à-dire la variation locale de la quantité de mouvement avec le temps ;
- au transport de quantité de mouvement par convection ; c'est-à-dire l'accélération spatiale ;
- à la force de Coriolis ;
- à la composante du poids et au gradient de pression ;
- à la contrainte du vent ;
- au frottement eau-sol ;
  
- aux contraintes effectives : celles-ci englobent les contraintes de **Reynolds**, les contraintes visqueuses et le transfert de quantité de mouvement causé par l'écart entre la vitesse locale  $(u,v)$  et la vitesse moyenne  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

## 5.2 Intégration de l'équation de transport suivant la profondeur

Intégrons l'équation (4.7) sur la profondeur.

Le premier membre donne :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(cw) \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} cdz - \left[ c(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - c(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} cu dz - \left[ cu(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - cu(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} cv dz - \left[ cv(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - cv(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right] + cw(\tau) - cw(-h)$$

posons :

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} u dz; \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} v dz; \quad \bar{c} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} c dz$$

En considérant en outre les conditions cinématiques à la surface et au fond, le premier membre intégré de l'équation (4.7) donne :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) + \frac{\partial}{\partial y}(vc) + \frac{\partial}{\partial z}(wc) \right) dz = \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{c}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{c}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{c}\bar{v}).$$

L'intégration du second membre de l'équation (4.7) donne :

$$\int_{-h}^{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \pm S_k \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} cdz \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x c(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x c(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \right] - \left[ \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} cdz \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y c(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y c(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) \right] - \left[ \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right] + \left[ \left( \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)_{\tau} - \left( \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)_{-h} \right] \pm \Sigma S_k H$$

Sachant que  $H = h + \tau$  et en considérant en plus les conditions cinématiques à la surface et au fond, l'intégration du second membre de l'équation (4.7) donne :

$$\int_{-h}^{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \pm S_k \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x H \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y H \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \pm S_k H.$$

L'équation de convection-diffusion intégrée sur la profondeur s'écrit finalement comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (H \bar{c}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \bar{c}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v} \bar{c}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x H \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y H \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \pm S_k H \quad (4.8)$$

Pour simplifier l'écriture on pose :  $\bar{c} = c$  ,  $\bar{u} = u$  ,  $\bar{v} = v$ , donc (4.8) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Hc) + \frac{\partial}{\partial x} (Huc) + \frac{\partial}{\partial y} (Hvc) = \frac{\partial}{\partial x} \left( H \epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \pm S_k H$$

où  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  : sont les coefficients de mélange empiriques qui ne doivent pas être confondus avec les diffusivités turbulentes

$\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\epsilon}_y, \tilde{\epsilon}_z$  de l'équation (4.7).

En général les coefficients  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  sont beaucoup plus grands que

$\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\epsilon}_y, \tilde{\epsilon}_z$ , puisqu'ils comprennent la dispersion due à la convection

différentielle. Donc le transport convectif différentiel et la diffusion turbulente sont combinés dans les termes de diffusion.

Le phénomène de convection éloigne une partie de polluant par rapport à une autre grâce à la non uniformité des vitesses dans la section. Ce phénomène de "convection différentielle" est plus efficace que la turbulence dans la dispersion de polluant.

## Chapitre 6

### Développement de la méthode utilisée

#### 6.1 Méthode du volume de contrôle

Elle consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre de volumes élémentaires tel qu'il y ait un volume de contrôle autour de chaque grille-point.

Les équations aux dérivées partielles du modèle sont linéarisées à l'aide d'un changement de variables proposé par **Patankar [11]**, et mettant en évidence le flux convectif et le flux diffusif. L'avantage de présenter les équations sous une forme linéaire particulière tient au fait qu'on peut les résoudre implicitement par diagonalisation d'une matrice tridiagonale.

Les équations sont intégrées sur chaque volume de contrôle en utilisant un maillage décalé, c'est à dire que les paramètres  $u$ ,  $v$  et  $H$  sont calculés en des endroits différents. Les volumes de contrôle ainsi obtenus sont différents selon chacun des cas tel qu'illustré à la figure 6.1.

Le choix du maillage déphasé permet le calcul de la dénivellation de la surface libre, qui se fait à partir des différences de pression hydrostatiques établies aux parois du volume de contrôle, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des interpolations. Il en va de même pour les vitesses aux parois qui interviennent dans le calcul de la correction de la profondeur à travers l'équation de continuité.

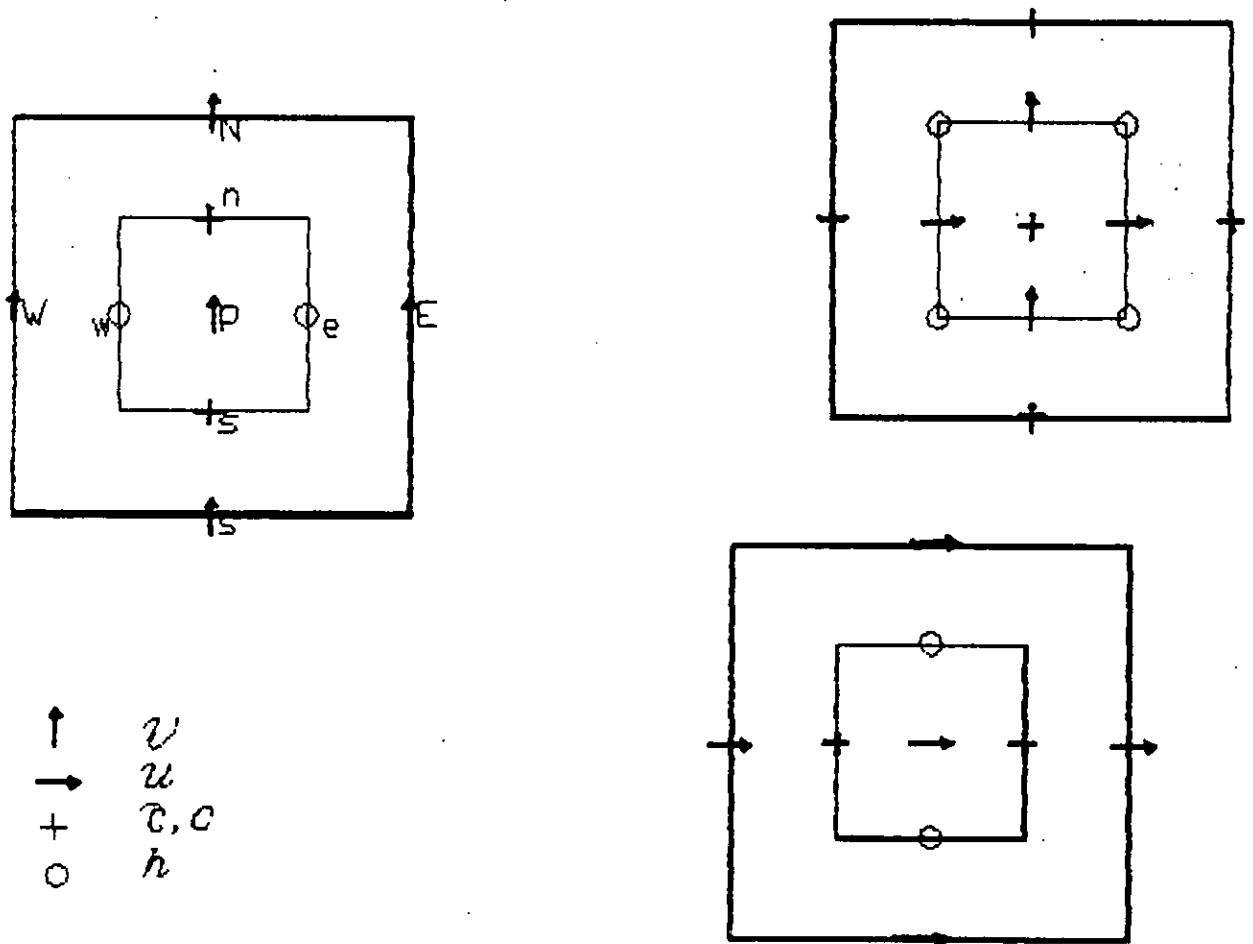


FIG 6.1 DIFFERENTS VOLUMES DE CONTROLE



Le calcul des coefficients de chacune des variables à déterminer est fait à l'aide de schémas d'interpolation.

Nous considérons que  $\Delta x = \Delta y = \delta x = \delta y$ . Ceci n'est pas nécessaire pour garantir la validité du schéma mais contribuera à alléger la dérivation des équations.

La caractéristique la plus spécifique de cette formulation est que la solution résultante impliquera que l'intégrale de conservation des quantités telles que masse, quantité de mouvement et l'équation de transport est exactement satisfaite sur n'importe quel groupe de volumes de contrôles et sur tout le domaine de calcul.

## 6.2 Discrétisation de la 1<sup>ère</sup> et de la 2<sup>ème</sup> équation de Saint-Venant

La première équation de Saint-Venant s'écrit:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0 \quad (6.1)$$

L'intégration de l'équation (6.1) sur le volume de contrôle  $v_c$  donne:

$$\int_{v_c} \frac{\partial H}{\partial t} dV + \int_{v_c} \frac{\partial}{\partial x}(uH) dV + \int_{v_c} \frac{\partial}{\partial y}(vH) dV = 0$$

Remplaçons l'intégrale de volume par une intégrale de surface  
(application du théorème de **Gauss**)

$$\frac{(H_p - H_p^0)}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y + [uH]_e - uH_w ] \Delta y + [vH]_n - vH_s ] \Delta x = 0 \quad (6.2)$$

Multiplions l'équation (6.2) par  $(\phi_p)$ .

$$\frac{(H_p - H_p^0)}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \cdot \phi_p + [uH]_e - uH_w ] \Delta y \phi_p + [vH]_n - vH_s ] \Delta x \phi_p = 0$$

L'expression peut s'écrire aussi sous la forme:

$$\frac{(H_p - H_p^0)}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \cdot \phi_p + F_e \phi_p - F_w \phi_p + F_n \phi_p - F_s \phi_p = 0 \quad (6.3)$$

où F est le changement de variable proposé par **Patankar** [11]

F: est constant sur la face du volume de contrôle et

$$F_i = \int_{\text{face } i} F_i$$

avec:

$$F_e = U_e H_e \Delta y$$

$$F_n = V_n H_n \Delta x$$

$$F_w = U_w H_w \Delta y$$

$$F_s = V_s H_s \Delta x$$

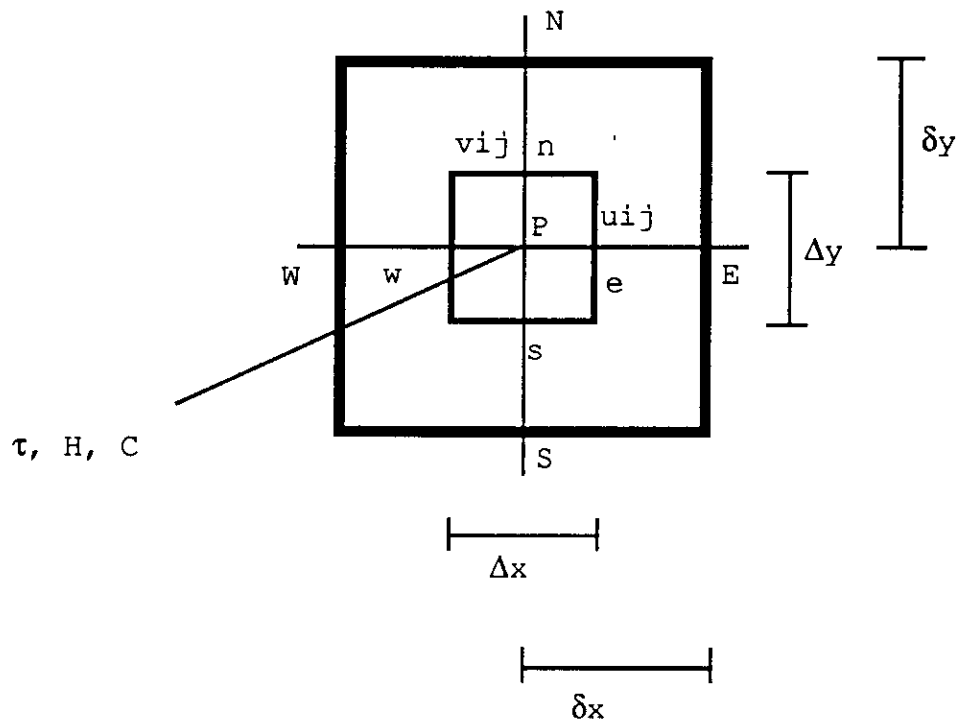


Fig 6.2 : volume de contrôle et disposition des noeuds.

La deuxième équation de Saint-Venant s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(uH) + \frac{\partial}{\partial x}(uuH) + \frac{\partial}{\partial y}(uvH) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x}(uH) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y}(uH) \right) - gH \frac{\partial H}{\partial x} + gH (S_x - S_{fx}) + fvH + \frac{\tau wx}{\rho} \quad (6.4)$$

Les équations de Saint-Venant peuvent être écrites sous la forme linéaire suivante:

$$a_p \varphi_p = a_e \varphi_e + a_w \varphi_w + a_n \varphi_n + a_s \varphi_s + S_q - gH \frac{\partial \tau}{\partial q}$$

q désignera l'une des coordonnées x, ou y

**\*. Linéarisation de l'équation (6.4)**

- Linéarisation du terme de source:

Considérons le terme de source  $S_x$  de l'équation (6.4) en supposant que  $-gH(\delta\tau/\delta x)$  est déjà retranché.

$$S_x = -gH \frac{\partial H}{\partial x} + gH(S_x - S_{fx}) + fvH + \frac{\tau wx}{\rho} \quad (6.4a)$$

Remplaçons  $S_x$  et  $S_{fx}$  par leurs expressions dans l'équation (6.4a)

avec:

$$S_x = \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$S_{fx} = \eta^2 u \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{H_3^4}$$

$$S_x = -gH \frac{\partial}{\partial x} (h + \tau) + gH \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \eta^2 u \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{H_3^4} \right) + fvH + \frac{\tau wx}{\rho}$$

$$S_x = -g \eta^2 u \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{H_3^4} + fvH + \frac{\tau wx}{\rho} ; \text{ le terme } -gH(\delta\tau/\delta x) \text{ est déjà retranché}$$

$S_x$  s'écrit donc:

$$S_x = S_{px} \cdot \varphi_{px} + S_c$$

avec:

$$S_{px} = -g \eta^2 u \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{H_3^4} \quad \text{et} \quad S_{cx} = fvH + \frac{\tau wx}{\rho} \quad \varphi_{px} = U$$

-Linéarisation des termes de convection (l'équation (6.4))

$$\frac{\partial}{\partial t}(uH) + \frac{\partial}{\partial x}(uuH) + \frac{\partial}{\partial y}(uvH) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_x \frac{\partial}{\partial x}(uH)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_y \frac{\partial}{\partial y}(uH)\right) - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + S_x$$

Considérons un scalaire  $\phi$  pouvant prendre soit les valeurs  $u$ ,  $v$ , soit la valeur de la concentration de polluant  $c$ .

Commençons par remplacer  $u$  par  $\phi$ .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi H) + \frac{\partial}{\partial x}(u\phi H) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi v H) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_x \frac{\partial}{\partial x}(\phi H)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_y \frac{\partial}{\partial y}(\phi H)\right) - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + S_x$$

l'expression peut s'écrire aussi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi H) + \frac{\partial}{\partial x}(u\phi H) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi v H) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_x \left(H \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \phi\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} H + \frac{\partial H}{\partial y} \phi\right)\right) - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + S_x$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi H) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\phi H - \epsilon_x H \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi v H - \epsilon_y H \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = -gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + S_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_x \cdot \phi \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_y \cdot \phi \frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

(6.5)

on pose selon Patankar [11].

$$\Sigma_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon_x \phi \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon_y \phi \frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$J_x = u \phi H - \epsilon_x H \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$J_y = v \phi H - \epsilon_y H \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$D_x = \frac{H \epsilon_x}{\delta x} \cdot \delta y$$

$$D_y = \frac{H \epsilon_y}{\delta y} \cdot \delta x$$

$$F = \xi H \quad \text{où } \xi = u, \text{ ou } v$$

$$G = \frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{où } q = x, \text{ ou } y$$

(6.5a)

Il est utile de considérer un flux total  $J$  qui combine le flux de convection  $u\varphi H$  et le flux de diffusion  $H\epsilon_x(\partial\varphi/\partial x)$ , l'équation (6.5) devient après transformation.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi H) + \frac{\partial}{\partial x}(J_x) + \frac{\partial}{\partial y}(J_y) = -gH\frac{\partial\tau}{\partial x} + S_x + \Sigma_x \quad (6.6)$$

écrivons l'expression de  $\Sigma_x$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_x \varphi) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \epsilon_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_y \varphi) \frac{\partial H}{\partial y} \\ \Sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \cdot \varphi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \cdot \varphi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

posons:  $(\delta^2 H / \delta x^2) = 0$ ; c'ad la variation linéaire du second ordre de  $H$  dans la direction  $x$  entre  $w$  et  $e$  est nulle.

d'où:

$$\Sigma_x = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (\epsilon_x \varphi) + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \epsilon_x) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \epsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_y \varphi) \frac{\partial H}{\partial y}$$

L'intégration de l'équation (6.6) sur le volume de contrôle, centré en  $u$ , est effectuée en remplaçant l'intégrale de volume par une intégrale de surface (application du théorème de **Gauss**).

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi H) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x}(J_x) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y}(J_y) dV = - \int_{vc} gH \frac{\partial\tau}{\partial x} dV + \int_{vc} S_x dV + \int_{vc} \Sigma_x dV.$$

$$J_i = \int_{\text{face } i} J_{x,y} \quad \text{où } J_{x,y}: \text{ est considéré constant sur la face du volume de contrôle.}$$

L'indice "o" indique qu'il s'agit de la valeur au début du pas de temps.

Nous obtenons:

$$[\varphi H]_p - \varphi H_p^o \left] \frac{\delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = -gH_p (\tau_e - \tau_w) \Delta y + S_x \cdot \delta x \Delta y + \int_{vc} \Sigma_x dV \quad (6.7)$$

étant donné que  $\delta x = \delta y = \Delta x = \Delta y$  la dérivation des équations (6.7) devient:

$$[\varphi H]_p - \varphi H_p^o \left] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = -gH_p (\tau_e - \tau_w) \Delta y + S_x \cdot \Delta x \Delta y + \int_{vc} \Sigma_x dV$$

Soustrayons l'équation (6.3) de (6.7)

$$\begin{aligned} H_p^o (\varphi_p - \varphi_p^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \varphi_p) - (J_w - F_w \varphi_p) + (J_n - F_n \varphi_p) - (J_s - F_s \varphi_p) = \\ -gH_p (\tau_e - \tau_w) \Delta y + S_x \Delta x \Delta y + \int_{vc} \Sigma_x dV \end{aligned}$$

ou encore en écrivant pour la face e:

$$J_e - F_e \varphi_p = a_E (\varphi_E - \varphi_p)$$

Cette égalité demande un certain développement que nous omettons ici pour alléger le texte, précisons simplement que cette expression traduit le fait que la valeur du flux global à la frontière e est une moyenne pondérée des vitesses en amont et en aval de la frontière en question.

Procédons de la même façon pour les autres faces nous aurons :

$$\begin{aligned}
 J_w - F_w \varphi_p &= a_w (\varphi_w - \varphi_p) \\
 J_n - F_n \varphi_p &= a_n (\varphi_n - \varphi_p) \\
 J_s - F_s \varphi_p &= a_s (\varphi_s - \varphi_p)
 \end{aligned}
 \tag{6.7a}$$

évaluons maintenant l'intégrale de  $\Sigma_x$  sur le volume de contrôle :

$$\begin{aligned}
 \int_{vc} \Sigma_x dV &= \int_{vc} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \varepsilon_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) dV \\
 &= \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) G_x dV + \int_{vc} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \varepsilon_y) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) G_y dV \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) G_x \right]_e - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) G_x \right]_w + \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \varepsilon_y) \right]_n - \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} (\varphi \varepsilon_y) \right]_s + \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) G_y \right]_n - \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) G_y \right]_s
 \end{aligned}$$

derivée seconde  
nulle en n et s

d'où :

$$\int_{vc} \Sigma_x dV = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) G_x \right]_e - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \varepsilon_x) G_x \right]_w + \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) G_y \right]_n - \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \varepsilon_y) G_y \right]_s$$

Selon **Patel et Markos [46]**, la pratique courante est d'interpoler sur  $\varepsilon$  par différence centrée.

Certaines variables, entre autres les vitesses aux faces du volume de contrôle, doivent être évaluées également par interpolation.

Dans le cas général où le volume de contrôle n'est pas centré en P, on devra utiliser des techniques appropriées (moyenne harmonique, notamment).



Ici, nous avons choisi un maillage bisymétrique et procédé par interpolation linéaire en tenant compte des hypothèses imposées: variation linéaire de H entre deux points.

Nous obtenons la 1<sup>ère</sup> équation linéarisée qui est la combinaison de la 1<sup>ère</sup> et de la 2<sup>ème</sup> équation de Saint-Venant discrétisée.

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b + g H_p (\tau_w - \tau_e) \Delta_y \quad (6.8)$$

Les coefficients ai obéissent aux relations suivantes:

$$a_E = a''_E + G_e \varepsilon_E$$

$$a_W = a''_W + G_w \varepsilon_W$$

$$a_N = a''_N + G_n \varepsilon_N$$

$$a_S = a''_S + G_s \varepsilon_S$$

$$a_p = a''_E + a''_W + a''_N + a''_S + (G_e + G_w) \varepsilon_{xp} + (G_n + G_s) \varepsilon_{yp} + H_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_{px} \Delta x \Delta y$$

$$b = H_p^0 \varphi_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + S_{cx} \Delta x \Delta y$$

où

$$a''_E = D_e [A(|p_e|)] + [-F_e, 0]$$

$$a''_W = D_w [A(|p_w|)] + [F_w, 0]$$

$$a''_N = D_n [A(|p_n|)] + [-F_n, 0]$$

$$a''_S = D_s [A(|p_s|)] + [F_s, 0]$$

et  $A(|p_i|)$ : est une fonction d'interpolation.

Cette fonction est basée sur la valeur absolue du nombre de Peclet  $P_i$  et  $[A1,A2]$  symbolise la plus grande valeur entre  $A1$  et  $A2$  (fonction  $Amax1$  en fortran).

Notons que le nombre de Peclet est défini par :

$$P_i = \frac{uL}{\varepsilon} = \frac{F}{D}$$

où  $D$  et  $F$  sont respectivement la diffusivité et le débit massique pour chacun des faces du volume.

Ces quantités sont définies comme suit:

$$D_e = \varepsilon_e H_e \Delta y / \Delta x$$

$$F_e = u_e H_e \Delta y$$

$$D_w = \varepsilon_w H_w \Delta y / \Delta x$$

$$F_w = u_w H_w \Delta y$$

$$D_n = \varepsilon_n H_n \Delta x / \Delta y$$

$$F_n = v_n H_n \Delta x$$

$$D_s = \varepsilon_s H_s \Delta x / \Delta y$$

$$F_s = v_s H_s \Delta x$$

$$P_e = F_e / D_e ; P_w = F_w / D_w ; P_n = F_n / D_n ; P_s = F_s / D_s$$

### 6.2.1. Schéma d'interpolation sur $\varphi$

A(P) : est une fonction d'interpolation donnée (voir 6.2.2)

$$A(P) = A(|P|) + \text{Max}(-P, 0)$$

Trouvons une fonction  $a$  décrivant la relation entre, d'une part le flux total (flux diffusif + convectif) entre deux nœuds adjacents et d'autre part l'écart entre ces nœuds :  $\varphi_i - \varphi_{i+1}$

Partons de la relation de Patankar.

$$J_x = u\varphi H - H\epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Divisons cette équation par  $D_x$ , nous obtenons :

$$J_x^* = \frac{J_x}{D_x} = \left[ \frac{u\varphi}{\epsilon_x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \Delta x$$

$J_x^*$  : pseudo-flux.

ou encore :

$$J_x^* = P_x \cdot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \left( \frac{x}{\delta} \right)}$$

avec  $P_x$  : nombre de Peclet adimensionnel.

A partir du cas unidimensionnel (direction  $x$ ), nous avons :

$$\begin{aligned} J_x^* &= P(\alpha\varphi_i + (1-\alpha)\varphi_{i+1}) - \beta(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \\ J_x^* &= \varphi_i(P\alpha + \beta) + [P(1-\alpha) - \beta]\varphi_{i+1} \\ &= B\varphi_i - A\varphi_{i+1} \end{aligned}$$

où

$$B = P\alpha + \beta$$

$$\text{d'où : } B = A + P$$

$$A = P\alpha + \beta - P$$

$\alpha$  et  $\beta = f(p)$  et  $0 < \alpha < 1$ , puisque  $\varphi$  doit avoir une valeur comprise entre  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients de proportionnalité respectivement pour les termes de convection  $p\varphi$  et de diffusion  $d\varphi/d(x/\delta)$  où  $\delta = \Delta x$

ainsi :

$$J_x^* = (A + P)\varphi_i - A\varphi_{i+1}$$

$$J_x^* = A(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + P\varphi_i$$

$$\Rightarrow J_x^* - P\varphi_i = A(\varphi_i - \varphi_{i+1})$$

comme  $P=F/D$  et  $J_x^*=J/D$ .

$$\text{alors : } J_x^* - P\varphi_i = J/D - (F/D)\varphi_i = (1/D)[J - F\varphi_i]$$

$$= A(\varphi_i - \varphi_{i+1})$$

où  $A$  est donné par  $A(|P|) + \max(-P, 0)$

$$\text{soit } a = D.A = D.A(|P|) + \max(-P*D, 0)$$

$$= D.A(|P|) + \max(-F, 0)$$

Finalement :

$$J - F\varphi_i = D.A(\varphi_i - \varphi_{i+1})$$

$$J - F\varphi_i = a(\varphi_i - \varphi_{i+1}).$$

### 6.3. Combinaison de la 1<sup>ère</sup> et de la 3<sup>ème</sup> équation de Saint-Venant après leur discrétisation

-Processus de linéarisation de la 3<sup>ème</sup> équation de Saint-Venant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(vH) + \frac{\partial}{\partial x}(u v H) + \frac{\partial}{\partial y}(v v H) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} (vH) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y} (vH) \right) + S_y - gH \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (6.9)$$

Remplaçons dans cette expression v par  $\varphi$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi H) + \frac{\partial}{\partial x}(u \varphi H) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi v H) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} H + \frac{\partial H}{\partial x} \varphi \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} H + \frac{\partial H}{\partial y} \varphi \right) \right) + S_y - gH \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

où encore :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi H) + \frac{\partial}{\partial x}(J_x) + \frac{\partial}{\partial y}(J_y) = -gH \frac{\partial \tau}{\partial y} + S_y + \Sigma_y \quad (6.10)$$

en introduisant les variations de Patankar (6.10a) dans (6.9)

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \varphi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \varphi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ J_x &= u \varphi H - H \epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ J_y &= v \varphi H - H \epsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ D_x &= \frac{H \epsilon_x \delta y}{\delta x} \\ D_y &= \frac{H \epsilon_y \delta x}{\delta y} \\ G &= \frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{où } q = x, \text{ ou } y \\ F &= \xi H \quad \text{où } \xi = u, \text{ ou } v \end{aligned} \quad (6.10a)$$

Il est utile de considérer un flux total J qui combine le flux de convection  $u\phi H$  et le flux de diffusion  $H\epsilon_x \partial\phi/\partial x$

avec :

$$S_y = S_{cy} + S_{py} \cdot \phi_{py}$$

$$S_{py} = S_{px} = -g\eta \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{H_3^{\frac{1}{3}}}$$

Intégrons l'équation (6.10) sur le volume de contrôle centré en v on aura :

$$(\phi_p H_p - \phi_p H_p) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - J_w) + (J_n - J_s) = -gH_p(\tau_n - \tau_s) \Delta x + \int_{Vc} \Sigma_y + S_y \Delta x \Delta y \quad (6.11)$$

la 1ère équation de **Saint-Venant** intégrée sur  $V_c$  donne :

$$\phi_p (H_p - H_p) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e \phi_p - F_w \phi_p + F_n \phi_p - F_s \phi_p = 0 \quad (6.3)$$

Faisons la différence des deux équations (6.11) et (6.3) en procédant de la même façon qu'en (6.2)

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_y + gH_p(\tau_s - \tau_n) \Delta x \quad (6.12)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_p &= v \\ b_y &= H_p \phi_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + S_{cy} \Delta x \Delta y \\ S_{cy} &= -fu + \frac{\tau_{wy}}{\rho} \end{aligned}$$

$$a_p = a''_E + a''_W + a''_N + a''_S + (G_e + G_w) \epsilon_{xp} + (G_n + G_s) \epsilon_{yp} + H_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_{py} \Delta x \Delta y$$

où :

$$a''_E = D_e [A(|P_e|)] + [-F_e, 0]$$

$$a''_W = D_w [A(|P_w|)] + [F_w, 0]$$

$$a''_N = D_n [A(|P_n|)] + [-F_n, 0]$$

$$a''_S = D_s [A(|P_s|)] + [F_s, 0]$$

et

$$a_E = a''_E + G_e \varepsilon_{xE}$$

$$a_W = a''_W + G_w \varepsilon_{xW}$$

$$a_N = a''_N + G_n \varepsilon_{yN}$$

$$a_S = a''_S + G_s \varepsilon_{yS}$$

#### 6.4. Equation de correction de la profondeur

##### 6.4.1. Détermination des vraies valeurs des vitesses

Jusqu'à présent nous avons utilisé une procédure visant à définir les vitesses dans le champ d'écoulement.

Les vitesses  $u$ ,  $v$  sont donc successivement calculées par les équations (6.8) et (6.12), en tout point et ce à partir des paramètres prévalant au pas de temps précédent.

Ces paramètres sont  $u$ ,  $v$  et  $H$ . L'étape suivante consiste à calculer la correction appliquée au champ de profondeur  $H$  à chaque étape de temps.

Il reste à déterminer la vraie valeur de la côte de la surface libre  $\tau$  corrigé vu que la bathymétrie par rapport au datum  $h$  est une donnée du problème.

Les équations utilisées pour déterminer la correction de la profondeur sont :

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b_x + gH_p (\tau_w - \tau_e) \Delta y \quad (6.8)$$

où  $\varphi_p = u$

et

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b_y + gH_p (\tau_s - \tau_n) \Delta x \quad (6.12)$$

où  $\varphi_p = v$

Posons :

$$\sum a_{ad} \varphi_{ad} = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S$$



Les coefficients adjacents  $a_{ad}$  sont interprétés comme termes d'influences combinées de la convection et de la diffusion aux faces du volume de contrôle.

Les profondeurs n'étant pas connues, les équations déjà citées (6.8) et (6.12) ne peuvent conduire au calcul des valeurs exactes des vitesses.

nous utilisons une valeur estimée de la côte de la surface libre  $\tau = \tau^*$  ce qui donne les valeurs estimées des vitesses  $\varphi = \varphi^*$ . Les équations (6.8) et (6.12) deviennent :

$$a_p \varphi_{px}^* = \sum a_{ad x} \varphi_{ad x}^* + b_x + gH_p^* (\tau_w^* - \tau_s^*) \Delta y \quad (6.8a)$$

$$a_p \varphi_{py}^* = \sum a_{ad y} \varphi_{ad y}^* + b_y + gH_p^* (\tau_s^* - \tau_w^*) \Delta x \quad (6.12a)$$

Il faut donc déterminer la valeur exacte de la côte de la surface libre  $\tau$ , qui, avec les vitesses corrigées peut vérifier l'équation de continuité.

Ceci revient à dire que l'on cherche la correction à donner à la côte de la surface libre estimée  $\tau^*$  pour obtenir la côte exacte de la surface libre  $\tau$ , cette correction est notée  $\tau''$ .

$$\tau = \tau^* + \tau'' \quad (6.13)$$

Le changement de profondeur entraîne le changement de vitesse. De la même façon, la valeur de la vitesse corrigée s'écrit :

$$\varphi = \varphi^* + \varphi'' \quad (6.14)$$

$\varphi$  : peut être u ou v

Soustrayons (6.8) de (6.8a) nous obtenons :

$$a_p \phi_p'' = \sum a_{ad} \phi_{ad}'' + g\Delta y [H_p(\tau_w - \tau_d) - H_p^*(\tau_w^* - \tau_d^*)] \quad (6.15)$$

De la même façon soustrayons (6.12) de (6.12a)

nous obtenons :

$$a_p \phi_p'' = \sum a_{ad} \phi_{ad}'' + g\Delta x [H_p(\tau_s - \tau_r) - H_p^*(\tau_s^* - \tau_r^*)] \quad (6.16)$$

Considérons alors deux points importants :

- une approximation sur  $H_p$  de sorte que  $H_p = H_p^*$  ;
- pour la suite du cheminement, nous allons abandonner l'expression des termes adjacents  $\sum a_{ad} \phi_{ad}''$ .

**\*) Approximation sur  $H_p$  :**

Nous avons pu considérer cette approximation en supposant que le datum est situé près de la surface libre et que l'erreur faite sur  $H_p$  est négligeable par rapport à celle faite sur  $\tau$ . Ceci peut sembler restrictif, mais il n'en est rien, car il faut interpréter ce geste comme un artifice permettant d'éviter une impasse dans le développement mathématique.

**\*) Termes des coefficients adjacents :  $\sum a_{ad} \phi_{ad}''$**

Nous n'avons pas tenu compte du terme faisant intervenir l'influence des paramètres adjacents, même si celle-ci n'est sans doute pas négligeable.

Si nous l'avions retenu, il eut alors fallu l'exprimer en termes de correction de la profondeur et de vitesses aux points adjacents  $\phi_{ad}$ . Ces derniers faisant intervenir leurs voisins et ainsi de suite.

Si nous avons tenu compte des paramètres de tout le champ, l'équation obtenue serait devenue pratiquement inutilisable.

Ceci revient à dire qu'il eût fallu solutionner le système comprenant les équations (1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant**, 2<sup>ème</sup> équation de **Saint-Venant**, 3<sup>ème</sup> équation de **Saint-Venant**) en bloc. Contrairement à ce que nous proposons de faire en optant pour une méthode itérative, le terme  $\sum a_{ad} \varphi_{ad}$  marque une influence implicite de la correction de la profondeur sur la vitesse. Le fait de la négliger marque le caractère semi-implicite de la méthode en faisant les deux approximations. Les équations (6.15) et (6.16) deviennent :

$$a_p \varphi_p'' = g H_p^* (\tau_w'' - \tau_d'') \Delta y \quad \text{d'où :}$$

$$\varphi_p = \varphi_p^* + \frac{g H_p^*}{a_p} (\tau_w'' - \tau_d'') \Delta y \quad (6.17)$$

$$a_p \varphi_p'' = g H_p^* (\tau_s'' - \tau_d'') \Delta x \quad \text{d'où :}$$

$$\varphi_p = \varphi_p^* + \frac{g H_p^*}{a_p} (\tau_s'' - \tau_d'') \Delta x \quad (6.18)$$

Les vitesses corrigées à déterminer u et v suivant x et y s'écrivent respectivement :

$$\varphi_p = \varphi_p^* + g H_p^* \frac{\Delta y}{a_p} (\tau_w'' - \tau_d'')$$

$$\varphi_p = \varphi_p^* + g H_p^* \frac{\Delta x}{a_p} (\tau_s'' - \tau_d'')$$

#### 6.4.2. Formulation de l'équation de correction de la profondeur

C'est la 1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant** que nous transformons en équation de correction de la profondeur .

La 1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant** s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H) + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0$$

en posant :

$$H = h + \tau$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h + \tau) + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0$$

comme  $(\partial h / \partial t) = 0$

il s'ensuit :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0$$

Intégrons cette équation sur le volume de contrôle :

$$(\tau_p - \tau_p^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [uH]_e - [uH]_w \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x} + [vH]_n - [vH]_s \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta y} = 0$$

ou encore :

$$(\tau_p - \tau_p^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [uH]_e - [uH]_w \Delta y + [vH]_n - [vH]_s \Delta x = 0 \quad (6.19)$$

De la même façon qu'en (6.17) et (6.18) nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned}
 u_e &= u^*_e + d_e (\tau''_p - \tau''_E) \\
 u_w &= u^*_w + d_w (\tau''_w - \tau''_p) \\
 v_n &= v^*_n + d_n (\tau''_p - \tau''_N) \\
 v_s &= v^*_s + d_s (\tau''_s - \tau''_p)
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

où

$$d_e = g H_c^* \frac{\Delta y}{a_e}; \quad d_w = g H_w^* \frac{\Delta y}{a_w}; \quad d_n = g H_n^* \frac{\Delta x}{a_n}; \quad d_s = g H_s^* \frac{\Delta x}{a_s}.$$

Portons les relations (6.20) dans (6.19) il vient :

$$\begin{aligned}
 (\tau_p - \tau_p^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [u_c^* H_c + d_e H_c (\tau_p'' - \tau_p'')] \Delta y - [u_w^* H_w + d_w H_w (\tau_w'' - \tau_p'')] \Delta y \\
 + [v_n^* H_n + d_n H_n (\tau_p'' - \tau_n'')] \Delta x - [v_s^* H_s + d_s H_s (\tau_s'' - \tau_p'')] \Delta x = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.21a}$$

après arrangement des termes, nous pouvons présenter l'équation (6.21a) sous la forme linéarisée suivante :

$$a_p \tau''_p = a_E \tau''_E + a_w \tau''_w + a_N \tau''_N + a_S \tau''_S + b
 \tag{6.21}$$

où  $a_p = a_E + a_w + a_N + a_S$

$$a_E = H_e d_e \Delta y$$

$$a_w = H_w d_w \Delta y$$

$$a_N = H_n d_n \Delta x$$

$$a_S = H_s d_s \Delta x$$

$$b = (\tau_p^0 - \tau_p) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (u_w^* H_w - u_c^* H_c) \Delta y + (v_s^* H_s - v_n^* H_n) \Delta x$$

## 6.5. Choix du schéma d'interpolation

Le schéma d'interpolation de la fonction  $A(|p_1|)$  revêt une importance capitale pour la convergence de la solution. Cette fonction sert à évaluer les coefficients  $a_1$  aux interfaces. Plusieurs schémas ont été proposés :

### a) Schéma aux différences centrées :

Pour ce schéma, la fonction  $A(|p_1|)$  est donnée par

$$A(|p_1|) = 1 - 0.5 |p_1|$$

Il a été montré (Patankar 1980) que ce schéma peut induire des résultats non physiques dès que les vitesses dépassent un certain seuil .

En effet, lorsque le flux de convection dépasse le flux de diffusion, les coefficients  $a_1$  peuvent devenir négatifs et conduire à une solution erronée. Pour remédier à ce problème, deux possibilités se présentent :

- utiliser un maillage plus fin de façon à réduire le nombre de Peclet;
- utiliser une fonction d'interpolation plus adaptée.

Etant donné que nous voulons développer un algorithme capable de donner une solution acceptable, même en utilisant un maillage grossier, la deuxième solution paraît convenir le mieux à nos besoins.

**b) Schéma hybride :**

Ce schéma est donné par l'expression :

$$A(|p_1|) = \text{MAX} (0, 1 - 0.5|p_1|)$$

Il a été développé par Spalding en (1972) .

Ce schéma est d'une assez bonne approximation par rapport au schéma exponentiel qui présente l'inconvénient d'être trop coûteux.

**c) Schéma exponentiel :**

Il est donné par l'expression :

$$A(|p_1|) = |p_1| / [\exp (|p_1|) - 1]$$

Ce schéma garantit une solution exacte pour n'importe quelle valeur du nombre de Peclet et pour n'importe quel nombre de points.

En dépit de son exactitude, il n'est pas largement utilisé parce que son calcul est très coûteux et requiert beaucoup de temps de traitement informatique de plus, ce schéma n'est pas exact pour les situations à deux et à trois dimensions.

**d) Schéma Power-Law :**

Ce schéma est donné par :

$$A(|p_1|) = \text{Max} (0, (1 - 0.1|p_1|)^5)$$

Il a été développé par Patankar en (1979). Bien que quelque peu plus compliqué que le schéma hybride, les expressions de Power-Law ne sont pas coûteuses, et fournissent une bonne représentation du comportement exponentiel.

Il existe d'autres fonctions d'interpolation, nous citerons, à titre d'exemple, le schéma Upwind ( $A(|p_i|) = 1$ )

Nous ne retiendrons pour la présente étude que quatre schémas : différences centrées, Upwind, hybride, Power-Law.

Ces schémas seront introduits dans une subroutine qui sera appelée chaque fois qu'on fait le calcul des coefficients  $a_i$ .



## 6.6. Critère d'arrêt

Nous remarquons que le terme  $b$  de correction de la profondeur (équation 6.21) peut être obtenu en multipliant la 1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant** intégrée sur le volume de contrôle par  $(-1)$  évaluée en termes de vitesses estimées.

$$(-1) * (\tau_p - \tau_p^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [u^* H)_e - u^* H)_w] \Delta y + [v^* H)_n - v^* H)_s] \Delta x = 0$$

Pour  $b=0$  les vitesses estimées  $u^*$ ,  $v^*$ , conjointement avec le terme  $(\tau_p - \tau_p^0) \Delta x \Delta y / \Delta t$ , satisfont la 1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant** et aucune correction sur la profondeur n'est nécessaire. La valeur de  $b$  fait office du résidu, et on déclare dans ce cas qu'il ya convergence.

Il s'ensuit alors que  $\sum |b|$  constitue un excellent choix du critère d'arrêt du processus itératif.

L'algorithme utilisé dans le programme pour la vérification de l'équation de continuité est comme suit :

-On suppose une valeur faible  $con_{max}$  qui est le critère d'arrêt du processus itératif.

$t = t_0$

$k = 1, Iter_{max}$  (avec  $iter_{max}$ : nombre d'itérations maximum)

-On calcule  $b$  en tout point. (càd  $\sum |b|$ )

si  $\sum |b| < con_{max}$ , la condition de convergence est vérifiée

-On passe au pas de temps suivant. On remplace donc.

$u^0$  par  $u$ ,  $v^0$  par  $v$ ,  $H^0$  par  $H$

sinon on incrémente sur  $k$  jusqu'à ce que  $t = t_{max}$  (avec  $t_{max}$  : le temps maximum)

$u^0$ ,  $v^0$ ,  $H^0$ ,  $\tau^0$  étant les valeurs de  $u$ ,  $v$ ,  $H$ ,  $\tau$  au pas de temps précédent.

## 6.7. Remarques générales

### (\*) Non linéarité et sous-relaxation

Toutes les équations à résoudre sont linéaires et de forme générale

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + B$$

$\phi_p$  : peut être  $u$ ,  $v$ ,  $\tau$ ,  $c$ .

Les coefficients  $a_p$ ,  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $B$  peuvent dépendre des variables à déterminer  $\phi$ .

Chaque solution est définie comme une itération. Au commencement de chaque itération, les coefficients sont évalués en utilisant les valeurs de  $\phi$  obtenues dans l'itération précédente.

En passant d'une itération à une autre, le changement dans les coefficients de cette équation résulte d'un changement dans les valeurs de  $\phi$ .

Il peut en résulter une faible convergence ou même une divergence. Pour moduler le changement dans les solutions consécutives de  $\phi$ , et donc améliorer la convergence, une sous-relaxation est introduite.

Patankar introduit une sous-relaxation dans les équations du modèle à travers  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ( $\alpha_1$  : coefficient de sous-relaxation de vitesses et  $\alpha_2$  : coefficient de sous-relaxation de la correction de la côte de la surface libre).

L'utilisation des facteurs de relaxation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est une condition essentielle de convergence.

**(\*\*) Sous-relaxation des vitesses**

Nous modifions les équations (2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> équations de **Saint-Venant** discretisées) de la façon suivante :

$$\frac{a_p \varphi_p}{\alpha_1} = \sum a_{ad} \varphi_{ad} + b_x + g H_p (\tau_w - \tau_e) \Delta y + \left( \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \right) a_p \varphi_p^* \quad (6.22)$$

$$\frac{a_p \varphi_p}{\alpha_1} = \sum a_{ad} \varphi_{ad} + b_y + g H_p (\tau_s - \tau_n) \Delta x + \left( \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \right) a_p \varphi_p^* \quad (6.23)$$

$\varphi_p^*$  : valeur des vitesses à l'itération précédente.

**Patankar** recommande la sous-relaxation dans les équations de **Saint-Venant** discrétisées en prenant  $\alpha_1=0.5$

En général, on a  $0 < \alpha_1 < 1$

Quand  $\alpha_1$  est égal à l'unité, aucune sous-relaxation n'est effectuée.

**(\*\*\*) Sous-relaxation de la côte de la surface libre**

Initialement, nous donnons une valeur estimée de la côte de la surface libre pour calculer la vraie valeur; on ajoute à la valeur estimée, une valeur sous-relaxée de la correction de la côte comme suit :

$$\tau = \tau^* + \alpha_2 * \tau'' \quad (6.24)$$

$\alpha_2$  : facteur de sous-relaxation  $0.55 < \alpha_2 < 0.75$

on peut réduire  $\tau''$  du facteur  $\alpha_2^2$  pour la prochaine itération.

## 6.8. Conditions initiales et aux frontières

### 6.8.1 Conditions initiales

Les conditions initiales ou encore les conditions à l'itération précédente, portent sur  $u$ ,  $v$  et  $H$  c'est à dire, vitesses et profondeur.

Dans le cas général, on ne connaît pas ces conditions surtout en bidimensionnel. On sait toutefois que du fait de la nature hyperbolique des équations, les conditions permanentes ( $\partial/\partial t = 0$ ) ne dépendent pas des conditions initiales.

Ces variables sont souvent inconnues, à priori. L'expérience est donc nécessaire pour spécifier physiquement les valeurs réelles dans les applications d'ingénierie.

$$u^0(x, y, 0) = 0$$

$$v^0(x, y, 0) = 0$$

$$H^0(x, y, 0) = C_1$$

$C_1$  est une valeur arbitraire positive constante pour tout le domaine de calcul.

### 6.8.2 Conditions aux frontières

On distingue essentiellement deux types de frontières : fermées et ouvertes.

#### (\*) Frontières fermées (voir fig 6.3)

Il s'agit des frontières telles que rives ou murs auxquels sont imposées trois conditions :

a) Les deux composantes de la vitesse sont nulles sur toutes les parois solides, c'est à dire que nous appliquons la condition d'adhérence pour la composante tangentielle et la condition d'imperméabilité pour la composante normale.

$$u = v = 0.$$

La condition aux frontières dans le cas de  $u$  repose sur la relation entre la vitesse près de la paroi et la vitesse virtuelle extérieure au champ d'écoulement.

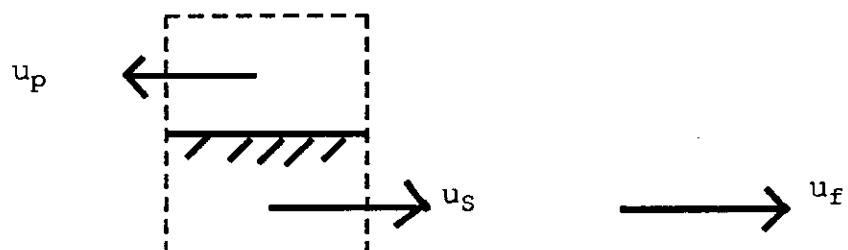
Dans la 2<sup>ème</sup> équation de **Saint-Venant** discrétisée, le coefficient faisant intervenir la vitesse à l'intérieur du domaine est évaluée à la paroi.

Il s'ensuit que toute hypothèse relative aux vitesses tangentielles ne prend effet qu'à la condition de supposer une valeur non nulle pour  $\varepsilon$ .

**- Frontière avec vitesse suivant  $x$  nulle.**

Vu l'utilisation d'un maillage décalé, la frontière physique du système se superposera avec le volume de contrôle sur un côté et le coupera sur le côté perpendiculaire.

Cas de la 2<sup>ème</sup> rive



Nous définirons un volume de contrôle supplémentaire où est spécifié une vitesse opposée à celle qui se situe immédiatement à l'intérieur du domaine.

$$u_f = (u_p + u_s)/2 = 0 \implies u_p = -u_s$$

Cette condition n'est vérifiée que si :

$$a_p = 1, a_s = -1 \text{ et } 0 \text{ pour les autres coefficients.}$$

$a_p, a_s$  sont les coefficients de la 2<sup>ème</sup> équation de **Saint-Venant** discrétisée (équation 6.16).

Même procédure pour la 1<sup>e</sup> rive mais au lieu d'avoir les conditions déjà citées on obtient :

$$a_p = 1.0$$

$$a_N = -1.0 \text{ et } 0 \text{ pour les autres coefficients.}$$

**- Frontières avec vitesse suivant y nulle :**

Il n'est pas nécessaire d'interpoler les vitesses suivant y, celle-ci sont nulles à la paroi .

$$a_p = 1 \text{ et } 0 \text{ pour les autres coefficients.}$$

$a_p$  sont les coefficients de la 3<sup>ème</sup> équation de Saint-Venant discretisée (6.17).

b) La pente de la surface libre dans la direction perpendiculaire à la paroi est nulle

c) Les composantes de la vitesse dans la direction parallèle à la paroi sont définies à la distance  $(\Delta x/2)$  de la frontière.

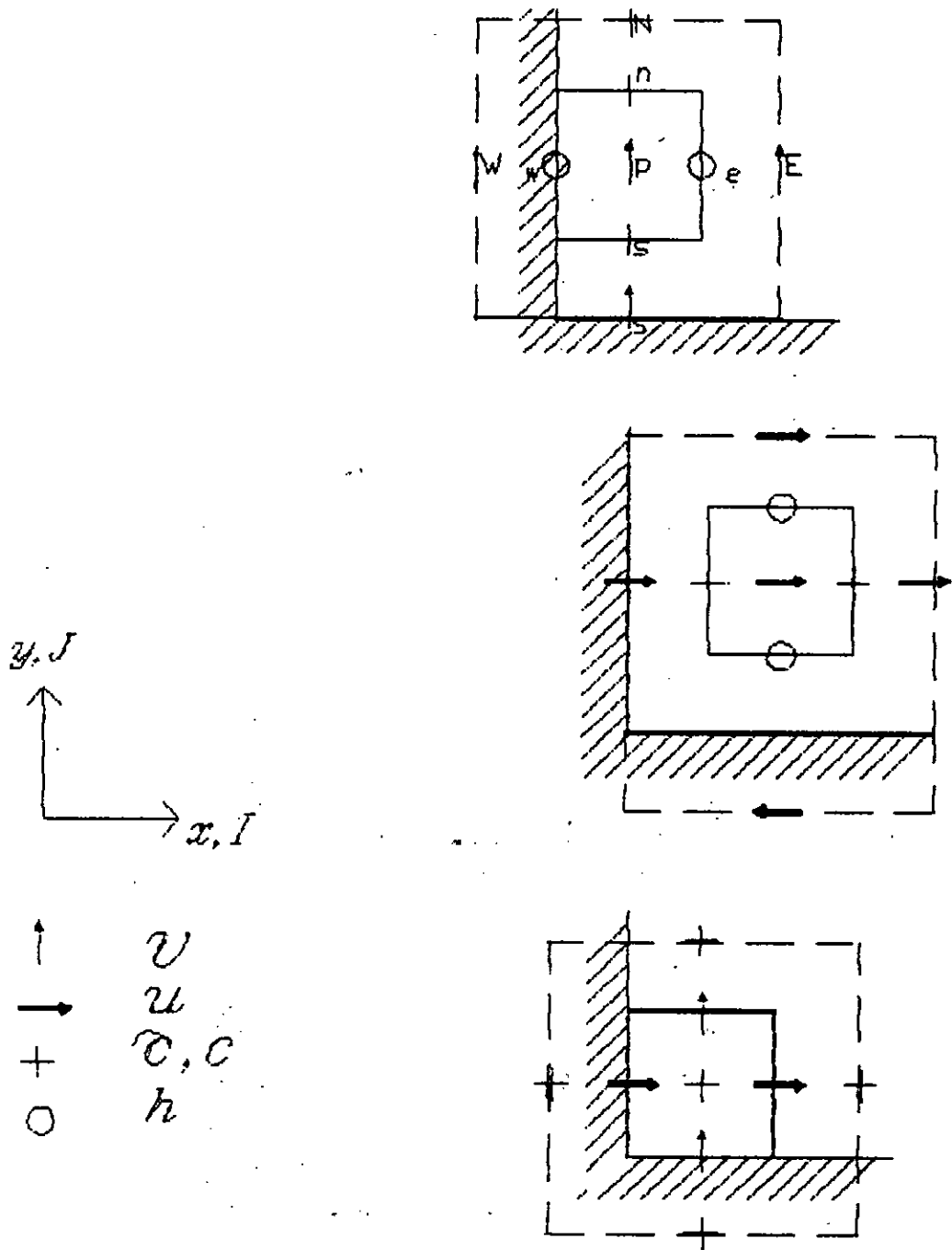


FIG 6.3 CONDITIONS AUX FRONTIERES FERMEES

### (\*) Frontières ouvertes

On considère ici les entrées et les sorties du canal. Le régime d'écoulement est le critère principal pour le choix des conditions à imposer, celles-ci portent sur les paramètres de vitesses et de hauteurs ou sur une fonction des deux.

Parmi les conditions possibles pour  $u$ ,  $v$ ,  $H$  et  $\tau$  on a :

- dérivée première nulle;
- dérivée seconde nulle;
- débit connu  $Q = f(t)$ ;
- vitesse connue.

A celles-ci s'ajoutent les conditions de symétrie dont la déduction est triviale et qui, le cas échéant, permettent une économie appréciable de temps de traitement (voir fig 6.4).

**Stocker [47]**, **Daubert et Gaffe [48]** et **Verboom et al [49]** ont étudié, par l'analyse fonctionnelle, le problème de la spécification des conditions aux frontières ouvertes pour la solution des équations Hydrodynamiques intégrées sur la profondeur.

Ils sont arrivés à la conclusion qu'en bidimensionnel, pour les écoulements sous-critiques ou écoulements torrentiels ( $Fr > 1$ ), on doit imposer deux conditions à l'entrée et une seule à la sortie.

Les écoulements supercritiques ou de type fluvial ( $Fr < 1$ ) nécessitent la détermination de trois conditions à l'entrée seulement.



conditions d'entrée

conditions de sortie

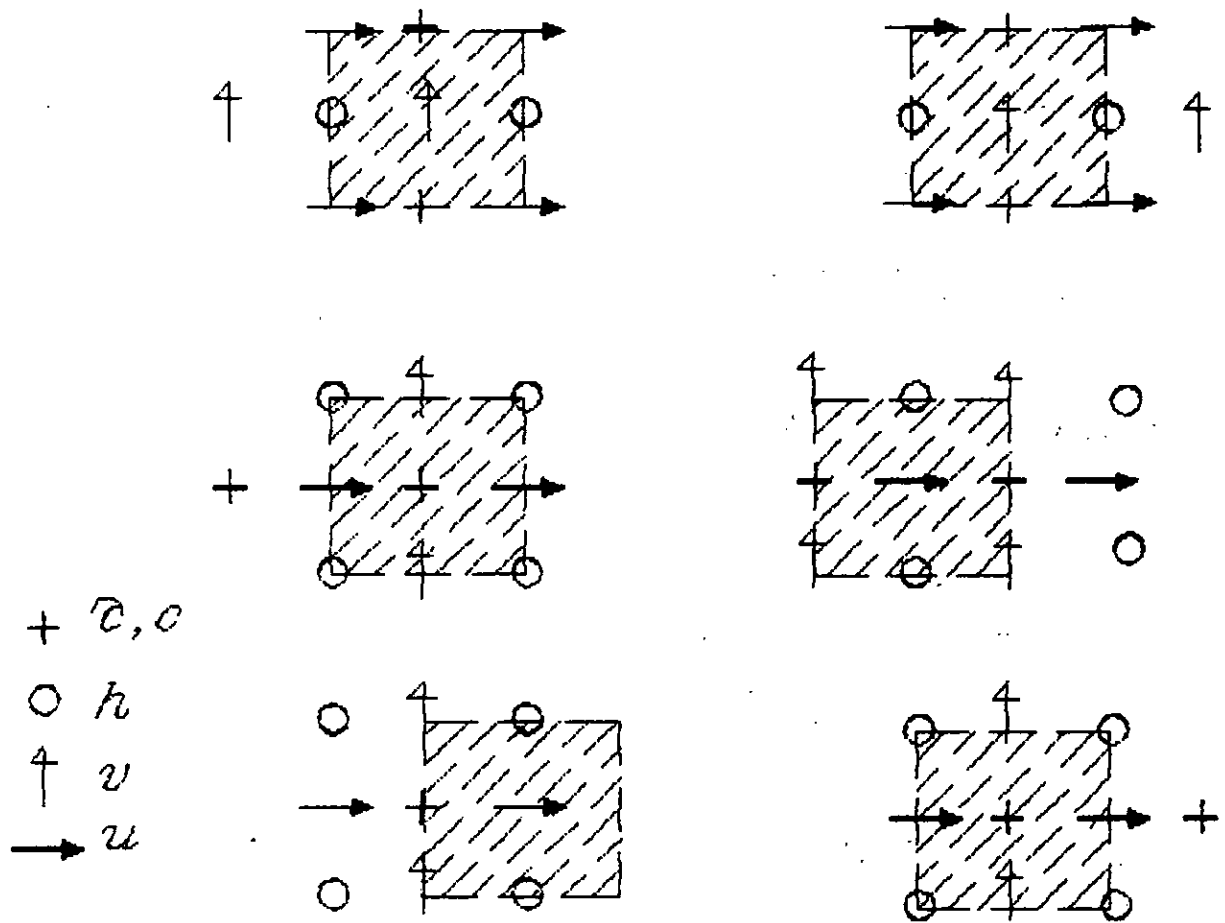


FIG 6.4 CONDITIONS AUX FRONTIERES OUVERTES

## 6.9. Application de la méthode au modèle "transport"

### 6.9.1. Discrétisation de l'équation transport

Nous combinons l'équation de transport à la 1ère équation de Saint-Venant discrétisée.

L'équation du modèle transport s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(Hc) + \frac{\partial}{\partial x}(uc H) + \frac{\partial}{\partial y}(vc H) = \frac{\partial}{\partial x} \left( H \epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \pm \Sigma S_k \cdot H \quad (6.25)$$

Nous commençons par linéariser l'équation du modèle.

Nous remplaçons donc  $c$  par  $\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi H) + \frac{\partial}{\partial y}(v\varphi H) = \frac{\partial}{\partial x} \left( H \epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \epsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \pm \Sigma S_k \cdot H \quad (6.26)$$

Selon Patankar posons :

$$J_x = u \varphi H - H \epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$J_y = v \varphi H - H \epsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$D_x = H \epsilon_x \delta y / \delta x \quad (6.26a)$$

$$D_y = H \epsilon_y \delta x / \delta y$$

$$F = \xi H \text{ où } \xi = u, \text{ ou } v$$

Remplaçons les expressions de (6.26a) dans (6.26)

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(J_x) + \frac{\partial}{\partial y}(J_y) = \pm \Sigma S_k \cdot H \quad (6.27)$$

Intégrons l'égalité (6.27) sur le volume de contrôle, nous obtenons:

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (H \varphi) + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y} (J_y) = \int_{vc} \pm \Sigma S_k \cdot H$$

$$[(\varphi H)_p - (\varphi H)_p^0] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - J_w) + (J_n - J_s) = H \cdot S \Delta x \Delta y \quad (6.28)$$

La 1<sup>ère</sup> équation de **Saint-Venant** intégrée sur le volume de contrôle, puis multiplié par  $\varphi_p$  (concentration de polluant en tout point P).

$$\varphi_p (H_p - H_p^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e \varphi_p - F_w \varphi_p + F_n \varphi_p - F_s \varphi_p = 0 \quad (6.29)$$

Soustrayons maintenant l'équation de transport intégrée sur le V.C (6.28) de l'équation de continuité intégrée sur le V.C (6.29) on obtient :

$$H_p^0 (\varphi_p - \varphi_p^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \varphi_p) - (J_w - F_w \varphi_p) + (J_n - F_n \varphi_p) - (J_s - F_s \varphi_p) = H S \Delta x \Delta y$$

$$(6.30)$$

où :

$$F_e = U_e H_e \Delta y$$

$$F_w = U_w H_w \Delta y$$

$$F_n = V_n H_n \Delta x$$

$$F_s = V_s H_s \Delta x$$

Nous avons démontré dans le modèle Hydrodynamique que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 J_e - F_e \varphi_p &= a_E (\varphi_p - \varphi_E) \\
 J_w - F_w \varphi_p &= a_W (\varphi_W - \varphi_p) \\
 J_n - F_n \varphi_p &= a_N (\varphi_p - \varphi_N) \\
 J_s - F_s \varphi_p &= a_S (\varphi_S - \varphi_p)
 \end{aligned}
 \tag{6.30a}$$

Remplaçons les équations (6.30a) dans (6.30) nous obtenons :

$$H_p^o (\varphi_p - \varphi_p^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E (\varphi_p - \varphi_E) - a_W (\varphi_W - \varphi_p) + a_N (\varphi_p - \varphi_N) - a_S (\varphi_S - \varphi_p) = H (S_c + S_p \cdot \varphi_p) \Delta x \Delta y.$$

Après transformation nous aurons :

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + B
 \tag{6.31}$$

Nous avons l'équation de transport discrétisée où :

$$a_p = H_p^o \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_E + a_W + a_N + a_S - H \cdot S_p \Delta x \Delta y$$

$$B = H_p^o \varphi_p^o \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + H \cdot S_c \Delta x \Delta y.$$

avec :

$$a_E = D_e A(|p_e|) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w A(|p_w|) + [F_w, 0]$$

$$a_N = D_n A(|p_n|) + [-F_n, 0]$$

$$a_S = D_s A(|p_s|) + [F_s, 0]$$

et

$$D_e = H_e \epsilon_e \Delta y / \Delta x$$

$$D_w = H_w \epsilon_w \Delta y / \Delta x$$

$$D_n = H_n \epsilon_n \Delta x / \Delta y$$

$$D_s = H_s \epsilon_s \Delta x / \Delta y$$

$$P_e = F_e / D_e; P_w = F_w / D_w; P_n = F_n / D_n; P_s = F_s / D_s.$$

$$F_e = U_e H_e \Delta y; F_w = U_w H_w \Delta y; F_n = V_n H_n \Delta x; F_s = V_s H_s \Delta x.$$

#### Remarque

- le terme de source a été linéarisé, son expression est :

$$S = S_c + \phi_p \cdot S_p$$

( $\phi_p$  : concentration du polluant au point P).

- Si on considère que S est indépendant de la concentration de polluant, on peut écrire cette condition.

$$S_p = 0 \text{ d'où } S = S_c.$$

Dans ce cas, l'équation peut être résolue implicitement en disposant les termes de façon à obtenir une matrice tridiagonale.

#### **6.9.2. Critère d'arrêt**

Le critère d'arrêt du processus itératif repose sur la valeur du taux de convergence.

Le seuil de convergence a été considéré atteint lorsque deux itérations successives résultaient en une variation d'au plus 1% du paramètre de la concentration, et ce pour chacun des volumes de contrôle.

### 6.9.3. Conditions initiales et aux frontières

#### a) Conditions initiales

Les conditions initiales portent sur la concentration du polluant .  
à  $t = 0$  où à l'itération précédente on supposait une valeur  
constante ou nulle de la concentration du polluant.

Nous pouvons donc écrire :

$$c(x, y, 0) = c^0.$$

#### b) Conditions aux frontières

Nous distinguons essentiellement deux types de frontières comme pour  
le modèle Hydrodynamique.

- fermées (les rives)
- ouvertes (condition d'entrée et condition de sortie)

##### b.1) Frontières fermées :

Nous avons considéré la condition d'imperméabilité sur la  
concentration au niveau des rives, c'est à dire qu'aucun transfert  
ne se fait de part et d'autre des rives.

Nous pouvons donc écrire :

$$\partial c / \partial y |_{\text{rive1}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial c / \partial y |_{\text{rive2}} = 0$$

pour la 1<sup>e</sup> rive :

$$\partial c / \partial y |_{\text{rive1}} = 0 \quad \implies \quad (c_p - c_N) / \Delta y = 0$$

d'où :

$$a_p = 1, \quad a_N = 1 \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{pour les autres coefficients.}$$

pour la 2<sup>e</sup> rive :

$$\partial c / \partial y |_{\text{rive2}} = 0 \Rightarrow (c_p - c_s) / \Delta y = 0$$

d'où :

$a_p = 1$ ,  $a_s = 1$  et 0 pour les autres coefficients.

## b.2) Frontières ouvertes

### b.2.1. Condition d'entrée

Différents cas peuvent se présenter :

- flux de concentration nul, avec terme de source nul;
- flux de concentration nul, avec terme de source non nul;
- une concentration constante, ou une concentration variant avec le temps.

1<sup>er</sup> cas :

- flux de concentration nul, avec terme de source nul :

$$\partial c / \partial x |_{\text{entrée}} = 0 \Rightarrow (c_E - c_p) / \Delta x = 0$$

d'où :

$a_p = 1$ ;  $a_E = 1$  et 0 pour les autres coefficients.

Cette équation signifie que les concentrations sont égales de part et d'autre de l'entrée.

2<sup>ème</sup> cas :

- flux de concentration nul, avec terme de source non nul :

$$\partial c / \partial x |_{\text{entrée}} = b \Rightarrow (c_E - c_p) / \Delta x = b$$

d'où :

$$a_p = 1; \quad B = -b\Delta x. \\ a_E = 1$$

3<sup>ème</sup> cas :

- la concentration est prise soit constante, soit variant en fonction du temps.

### b.2.2. condition de sortie

Différents cas se présentent :

- le flux de concentration est nul et le terme de source nul;
- le flux de concentration est nul, mais le terme de source ne l'est pas.

1<sup>er</sup> cas :

On suppose le flux de concentration à la sortie nul, c'est à dire que la dérivée première de la concentration par rapport à x est nulle.

Dans ce cas, les concentrations sont égales de part et d'autre de la frontière.

$$\partial c / \partial x |_{\text{sortie}} = 0 \implies (c_p - c_w) / \Delta x = 0$$

d'où :

$a_p = 1$ ;  $a_w = 1$  et 0 pour les autres coefficients.

2<sup>ème</sup> cas :

$$\partial c / \partial x |_{\text{sortie}} = b \implies c_p = c_w + b \Delta x$$

d'où :

$$a_p = 1; \quad a_w = 1; \quad B = b \Delta x$$



## 6.10. Méthode de résolution par ligne et sens de balayage

### (Formulation de la matrice tridiagonale)

Pour les équations de **Saint-Venant**, de correction de la profondeur, et transport, les valeurs des paramètres sont évaluées à partir des valeurs à l'itération précédente. En utilisant la méthode de résolution par lignes, on effectue le balayage rive-rive comme s'il s'agissait d'un cas unidimensionnel, le balayage s'effectuant d'Ouest en Est.

Soit  $\phi_w$  une valeur fraîchement définie et  $\phi^*_E$  la valeur provenant de l'itération précédente.

L'intérêt d'une méthode par ligne tient au fait que l'information que constitue l'ensemble des conditions aux frontières est répercutée immédiatement dans tout le domaine.

Nous obtiendrons une matrice tridiagonale qui va être résolue par l'algorithme de **Thomas** ou la méthode de TDMA [11].

La TDMA nécessite un stockage et un temps de calcul proportionnel seulement à  $N$  (nombre total de points), plus tôt qu'à  $N^2$  ou  $N^3$ .

La formulation de la matrice tridiagonale de l'équation discrétisée de **Saint-Venant** s'écrit :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w + a_N \phi_N + a_S \phi_S + B$$

Nous appliquons cette équation à tous les points du maillage comme suit :

$$i = 3, j = 2$$

$$a_p \phi_p^{(1)} = a_E \phi_E^{(0)} + a_w \phi_w^{(1)} (\text{condition d'entrée}) + a_N \phi_N^{(1)} + a_S \phi_S^{(1)} (\text{condition aux limites}) + B_1$$



$$\left[ \begin{array}{l} (a_w \varphi_w)_1^{(1)} + a_E \varphi_E)_1^{(0)} + B_1 \\ (a_w \varphi_w)_2^{(1)} + a_E \varphi_E)_2^{(0)} + B_2 \\ \dots \\ (a_w \varphi_w)_{n-1}^{(1)} + a_E \varphi_E)_{n-1}^{(0)} + B_{n-1} \\ (a_w \varphi_w)_n^{(1)} + a_E \varphi_E)_n^{(0)} + B_n \end{array} \right]$$

où  $\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \dots, \varphi_{pn}$  constituent les inconnues du système.

## 6.11. Résolution du système

### (Algorithme simple modifié de Patankar)

Les principales étapes de l'algorithme simple modifié de **Patankar** sont les suivantes :

1°) Lecture des données numériques et physiques;

2°) Lecture des données du problème (données hydrauliques);

3°) Appel à la subroutine des coefficients de l'équation (6.8); les coefficients à l'itération zéro sont obtenus à partir des valeurs estimées du champ de vitesses et de la profondeur. Ces valeurs peuvent être obtenues à partir de l'expérience déjà acquise dans le domaine ou tout simplement en posant des vitesses nulles partout et initialiser la profondeur pour tout le domaine;

4°) Calcul de la vitesse  $u$  en tout point par la méthode TDMA; en appliquant l'équation (6.8);

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_x + gH_p (\tau_w - \tau_e) \Delta y \quad (6.8)$$

5°) Appel à la subroutine des coefficients de l'équation (6.12).

6°) Calcul de la vitesse  $(v)$  en tout point par la méthode de TDMA en appliquant l'équation (6.12)

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_y + gH_p (\tau_s - \tau_n) \Delta x \quad (6.12)$$

7°) Appel à la subroutine des coefficients de correction de la côte de la surface libre de l'équation (6.21)

8°) Calcul de la correction à donner à la côte de la surface libre  $\tau''$ , en appliquant l'équation (6.21)

$$a_p \tau''_p = a_E \tau''_E + a_W \tau''_W + a_N \tau''_N + a_S \tau''_S + b \quad (6.21)$$

9°) Appel à la subroutine de calcul des vraies valeurs des vitesses et de la côte de surface libre en se basant sur les équations suivantes:

$$\tau = \tau'' + \tau^* \quad (6.13)$$

$$u = u^* + g (H_p/a_p) \Delta y (\tau''_w - \tau''_e) \quad (6.17)$$

$$v = v^* + g (H_p/a_p) \Delta x (\tau''_s - \tau''_n) \quad (6.18)$$

10°) Lorsque l'équation de continuité (6.19) est vérifiée pour chaque volume de contrôle, cette équation est satisfaite et le 1<sup>er</sup> pas de temps est complété.

$$b = (\tau^o_p - \tau_p) \Delta x \Delta y / \Delta t + [u^* H]_w - u^* H_e] \Delta y + [v^* H]_s - v^* H_n] \Delta x \quad (6.19)$$

Nous remplaçons les valeurs précédentes des vitesses et des profondeurs par les dernières valeurs calculées.

$$u^o = u$$

$$v^o = v$$

$$\tau^o = \tau$$

11°) Connaissant les vraies valeurs des vitesses et la côte de la surface libre en tout point pour chaque pas de temps, nous passons au modèle "Transport".

12°) Appel à la subroutine de calcul des coefficients de concentration de polluants en tout point en utilisant l'équation (6.31)

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + B \quad (6.31)$$

13°) Appel à la TDMA pour le calcul de la concentration de polluant en tout point

$$c^o = c$$

14°) Fin (voir organigramme en annexe).

## 6.12 Moyens utilisés

- 1- L'ordinateur utilisé est l' IBM ES9000 dont le système d'exploitation est le MVS/ESA;
- 2- le programme a été élaboré en Fortran 77;
- 3- le logiciel grapher a été utilisé pour la représentation des courbes;
- 4- un programme en turbopascal a été utilisé et adapté au logiciel DAO (dessin assisté par ordinateur) pour la représentation des champs de points;
- 5- un programme en turbo C a été utilisé pour la représentation des champs de vitesses.

## Chapitre 7

### Essais et interprétation des résultats

#### 7.0 Introduction

Un programme non testé est aussi inutile qu'un appareil de mesure non calibré. Ainsi, et dans le but d'obtenir d'une part les résultats les plus fiables possibles et vérifier d'autre part la stabilité du schéma, nous avons soumis nos modèles à de nombreux essais visant à en évaluer le comportement, à savoir:

- 1° nous avons vérifié que la solution convergée est indépendante des valeurs initiales ou supposées;
- 2° l'orientation du système de coordonnées relatives à un problème physique est arbitraire;
- 3° le processus de résolution des équations linéarisées par ligne nous a fourni l'assurance d'une symétrie parfaite par rapport à l'axe longitudinal;
- 4° l'augmentation du nombre de points selon  $x$  et  $y$  accélère la convergence;
- 5° le choix des coefficients de sous-relaxation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  jouent un rôle important dans l'accélération de la convergence.

Nous avons donc effectué sur nos modèles des essais qui existent dans la littérature.



Ce sont des problèmes classiques qui ont fait l'objet de recherches pendant de nombreuses années et peuvent donc être pris comme référence.

Dans ce qui suit, nous allons décrire certains cas d'essais que nous avons effectué. Dans une première étape nous aborderons le modèle Hydrodynamique. Ensuite, nous présenterons le modèle "Transport" qui utilisera les résultats du 1<sup>er</sup> modèle.

## 7.1 Modèle Hydrodynamique

### 7.1.1 Cas d'un canal rectangulaire

Le premier exemple de simulation que nous présentons est celui d'un écoulement non permanent dans un canal rectangulaire. Les données que nous utilisons sont celles des essais effectués sur les modèles réduits connus dans la littérature tels/l'essai Fischer (1967b), l'essai Sayre et Chang (1968), l'essai Lau et Krishnappan (1977), l'essai Okeye (1970) et d'autres que nous ne citerons pas ici.

Comme conditions initiales nous avons imposé une vitesse constante égale à la vitesse à l'entrée et une profondeur constante sur tout le champ d'écoulement. Pour les conditions aux frontières, nous avons spécifié à l'entrée un débit unitaire (débit/unité de largeur).

Pour les autres paramètres, une dérivée première nulle a été imposée, voir tableau 7.1, fig 6.4 et fig 6.3.

Ces essais peuvent être effectués pour les différents schémas d'interpolation cités au chapitre (6.5) et aussi pour différentes valeurs de coefficients de diffusion.

Au cours de ces essais, nous avons constaté que le choix des pas faibles et le bon choix des coefficients de sous-relaxation augmentait la convergence, le cas  $\alpha_1=0.5$  et  $\alpha_2=0.8$  donne de très bons résultats.

Pour le cas de l'essai Sayre et Chang la représentation des profils des vitesses  $u$ ,  $v$  en fonction de  $y$  pour chaque 10 pas selon  $x$  et la profondeur totale en fonction de  $x$  pour un temps fixe est donnée dans les figures 7h1, 7h2, 7h3, 7h4 et 7h5.

A partir de ces résultats, nous pouvons dire que l'écoulement correspond bien à celui que nous nous attendions à obtenir:

- présence d'une bonne symétrie par rapport à l'axe longitudinal;
- les vitesses diminuent au niveau des rives le long du canal du fait de la couche limite.

A partir de  $t=500s$ ; il y'a tendance vers l'état permanent.

Les mêmes essais ont été effectués pour le coefficient de viscosité nul.

A partir des résultats obtenus, nous pouvons déduire que la diminution importante du coefficient de diffusion entraîne la réalisation d'un écoulement uniforme, aucune variation des conditions initiales n'a été notée pour les vitesses et les profondeurs, donc aucune diffusion numérique n'a été observée pour ce problème voir les figures 7h6 et 7h7.

#### 7.1.2 Cas d'un canal comportant un obstacle

Le deuxième exemple de simulation hydrodynamique que nous présentons est celui d'un écoulement non permanent dans un canal comportant un obstacle (pile, batardeau, digue, etc...).

Il s'agit de vérifier le comportement du modèle Hydrodynamique dans un cas où les termes non linéaires sont importants.

Compte tenu de la convergence, suivie de la divergence rapide du champ de vitesses, les données que nous utilisons sont celles du tableau 7.1.

Ces essais peuvent être effectués pour différents schémas d'interpolation cités au chapitre (6.5) mais également pour différentes valeurs des coefficients de diffusion turbulente.

Il est utile de noter qu'à l'aide d'une astuce proposée par Patankar (1978) et mise en application par plusieurs chercheurs (Jetli et al (1986), TM. Nguyen (1989) etc...), nous avons pu tenir compte de la conduction dans l'obstacle sans toutefois modifier le schéma numérique. Il s'agit d'imposer aux noeuds situés dans la région solide une forte valeur de viscosité ( $\nu=10^{35}$ ) ce qui induit une vitesse presque nulle dans cette région ( $u=v=10^{-35}$ ).

**TAB 7.1 : ESSAIS EFFECTUES SUR MODELE HYDRODYNAMIQUE**

ESSAIS	RUGOSITE	LARGEUR DU CANAL (cm)	LONGUEUR DU CANAL (cm)	SCHEMA D'INTERPOLATION	CONMAX	I max J max	$\Delta t, T \text{ max}$ (s)	CONDITIONS INITIALES
FISCHER (1967 b)	LISSE (0,01)	1800	5400	POWER Law	0,0025	255,85	5,2000	$U^\circ = 0,660 \text{ m/s}$ $V^\circ = 0 \text{ m/s}$ $H^\circ = 0,683 \text{ m}$
SAYRE ET CHANG (1968)	LISSE (0,01)	300	1200	"	"	50,28	"	$U^\circ = 0,371 \text{ m/s}$ $V^\circ = 0 \text{ m/s}$ $H^\circ = 0,371 \text{ m}$
OKOYE (1970)	PIERRE (0,025)	110	550	"	"	50,13	"	$U^\circ = 0,428 \text{ m/s}$ $V^\circ = 0 \text{ m/s}$ $H^\circ = 0,171 \text{ m}$
LAU AND KRISHNAPPAN (1977)	LISSE (0,01)	60	300	"	"	50,13	"	$U^\circ = 0,337 \text{ m/s}$ $V^\circ = 0 \text{ m/s}$ $H^\circ = 0,05 \text{ m}$

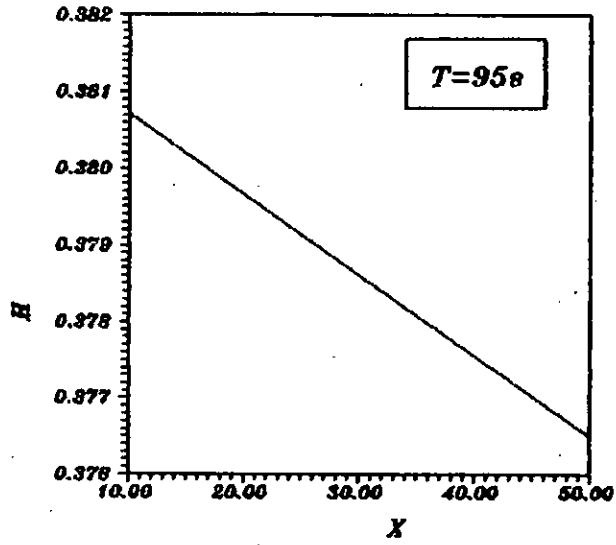
Les figures 7h8, 7h9, 7h10, 7h11, 7h12, 7h13, 7h14 et 7h15 représentent les champs de vitesses résultant dans trois cas suivants :

- Canal avec obstacle au niveau de la 2<sup>ème</sup> rive ;
- Canal avec obstacle au niveau de la 1<sup>ère</sup> rive ;
- Canal simple sans obstacle.

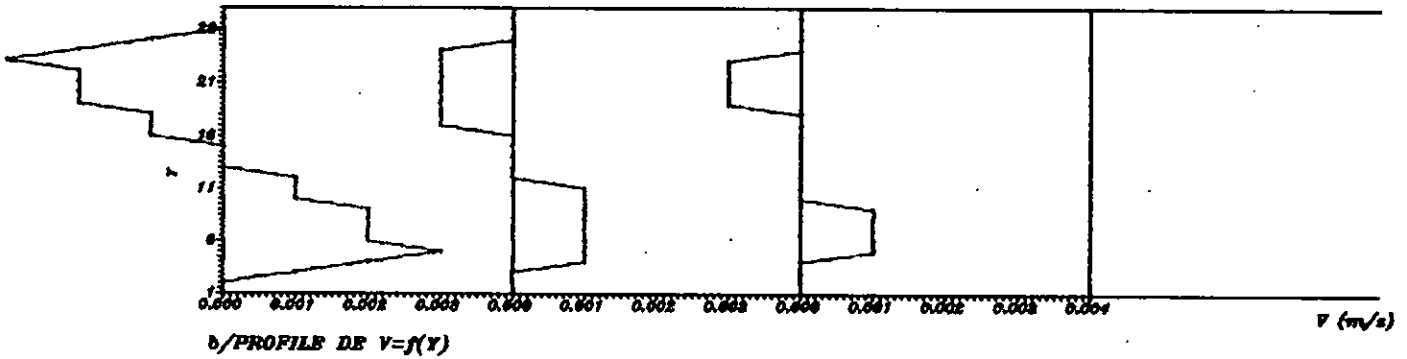
A partir de ces figures nous pouvons dire :

- que les vitesses diminuent au niveau des rives le long du canal du fait de la couche limite ;
- qu'à l'aval de l'obstacle il y'a formation d'un tourbillon de faible vitesse qui disparaît en s'éloignant de celui-ci.

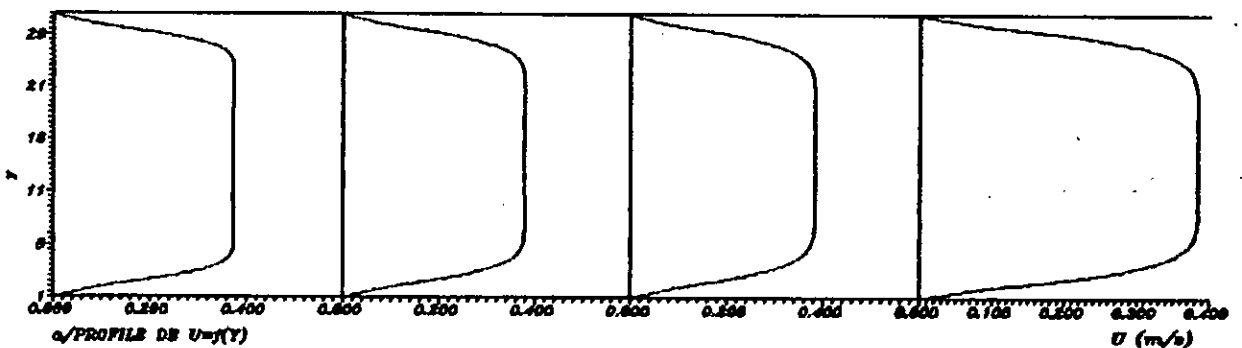
Et par conséquent, pour une interprétation efficace et rapide de ces résultats. Nous avons utilisé des représentations graphiques dont nous citons ci-après quelques cas:



c/PROFILE DE  $H=f(X)$



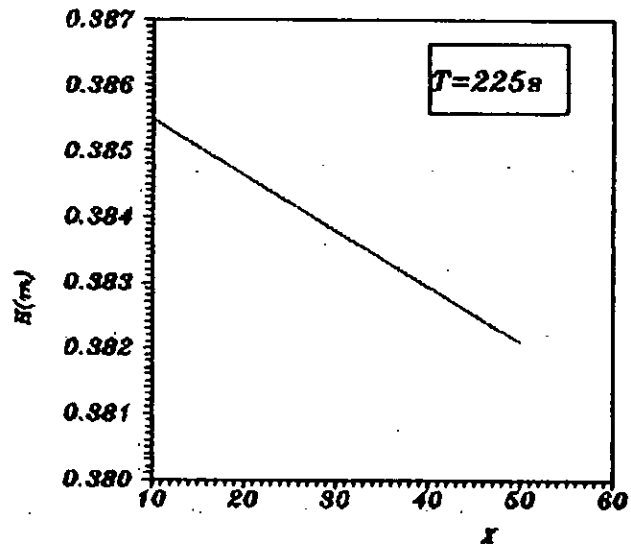
b/PROFILE DE  $V=f(Y)$



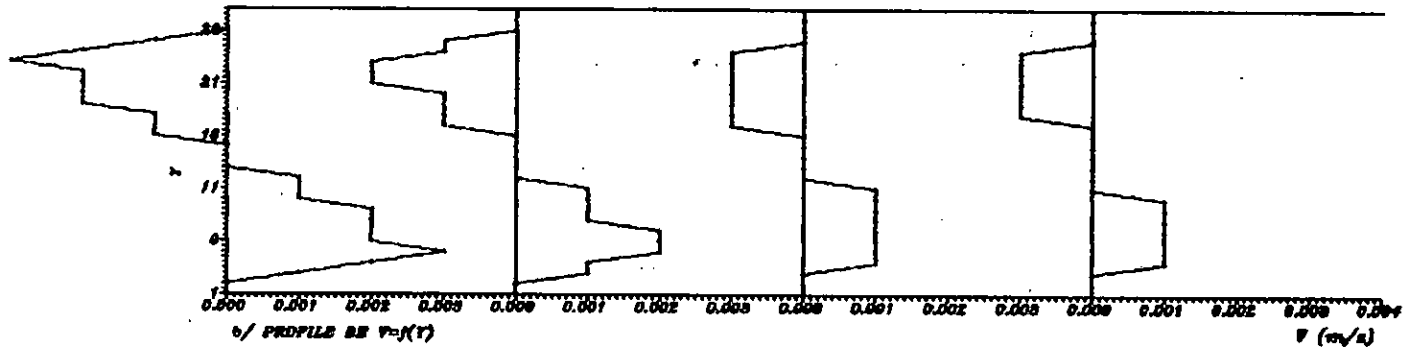
a/PROFILE DE  $U=f(Y)$

7b.1: REPRESENTATION DES PROFILS DE VITESSES SELON X ET Y EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=1.5m$  A L'INSTANT  $T=95s$  :

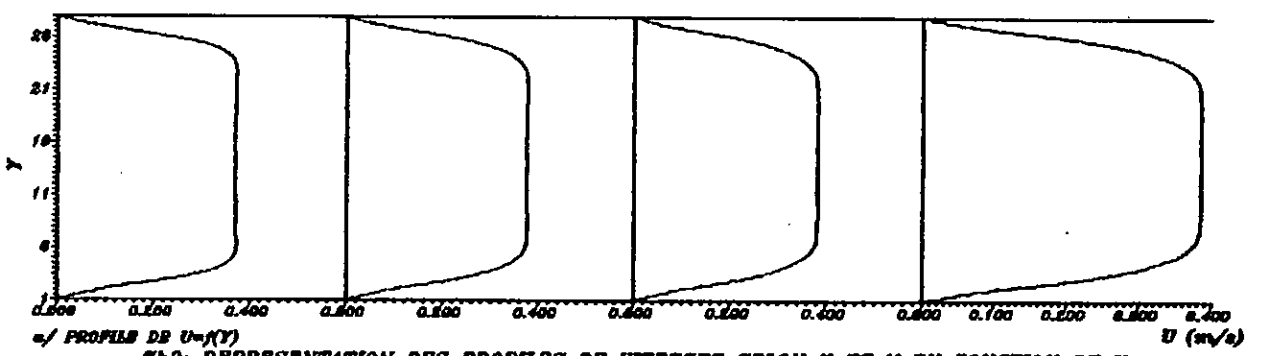
a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
 b/PROFILE DE  $V=f(Y)$   
 c/PROFILE DE  $H=f(X)$



c/ PROFILE DE  $H=f(X)$

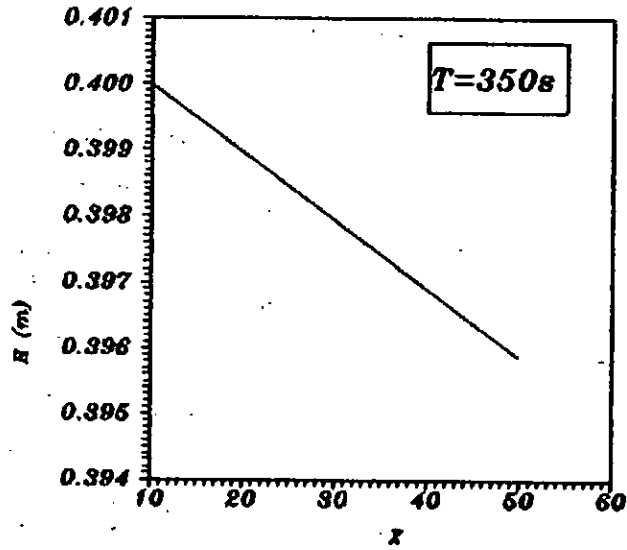


b/ PROFILE DE  $V=f(Y)$

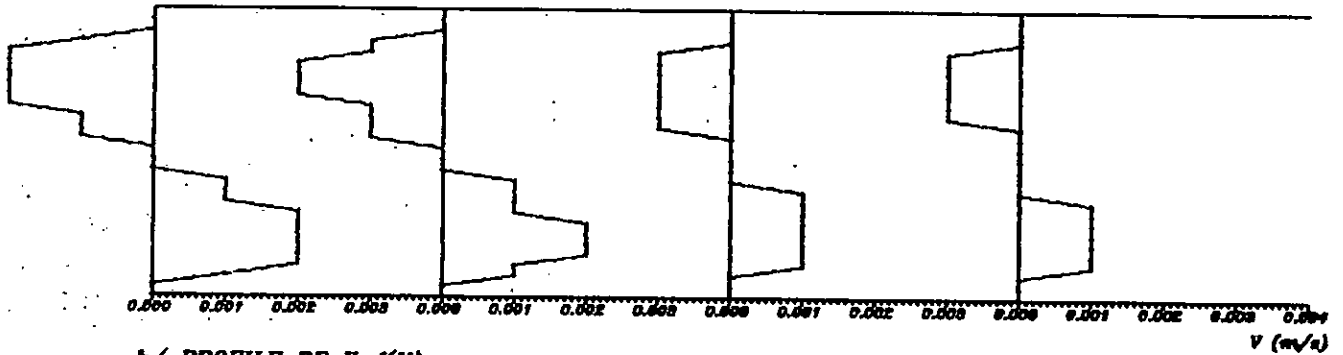


a/ PROFILE DE  $U=f(Y)$

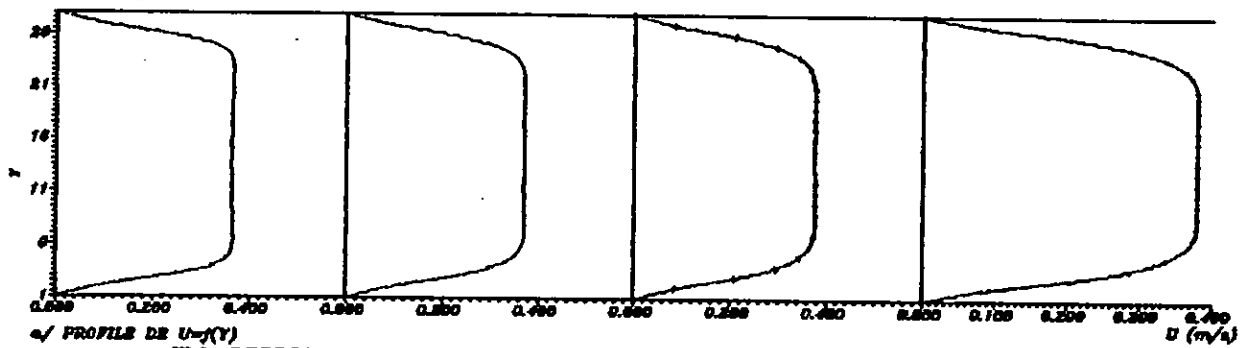
T1/2: REPRESENTATION DES PROFILES DE VITESSES SELON X ET Y EN FONCTION DE Y  
 POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=1.5m$   
 A L'INSTANT  $T=225s$ : a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
 b/PROFILE DE  $V=f(Y)$   
 c/PROFILE DE  $H=f(X)$



c/ **PROFILE DE  $H=f(X)$**



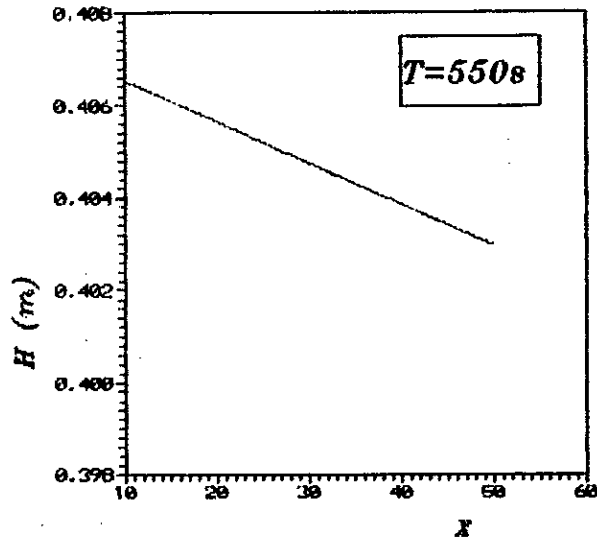
b/ **PROFILE DE  $V=f(Y)$**



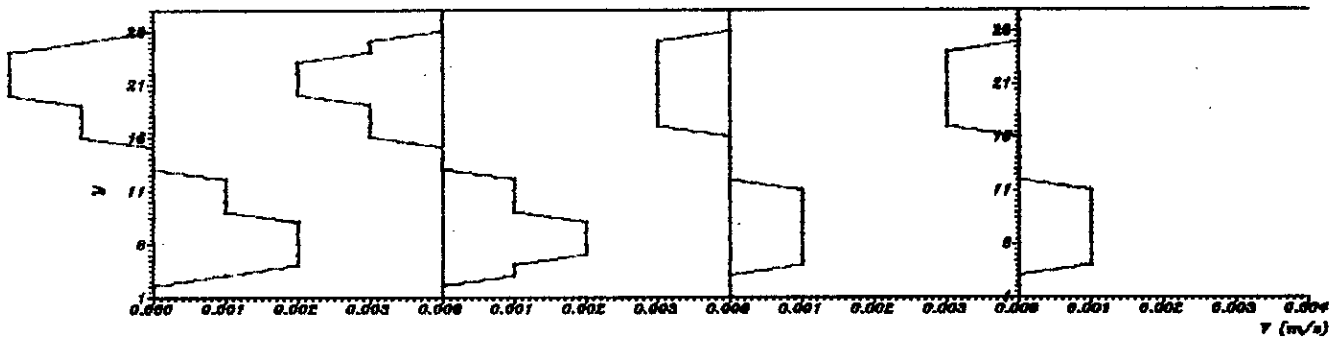
a/ **PROFILE DE  $U=f(Y)$**

**7AS: REPRESENTATION DES PROFILS DE VITESSES SELON X ET Y EN FONCTION DE Y  
 POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=1.5m$   
 A L'INSTANT  $T=350s$ : a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
 b/PROFILE DE  $V=f(Y)$   
 c/PROFILE DE  $H=f(X)$**

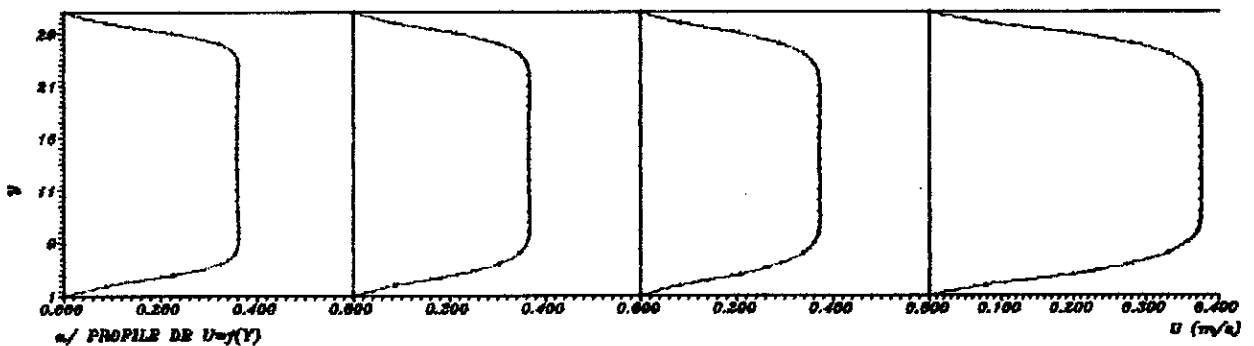




c/ PROFILE DE  $H=f(X)$



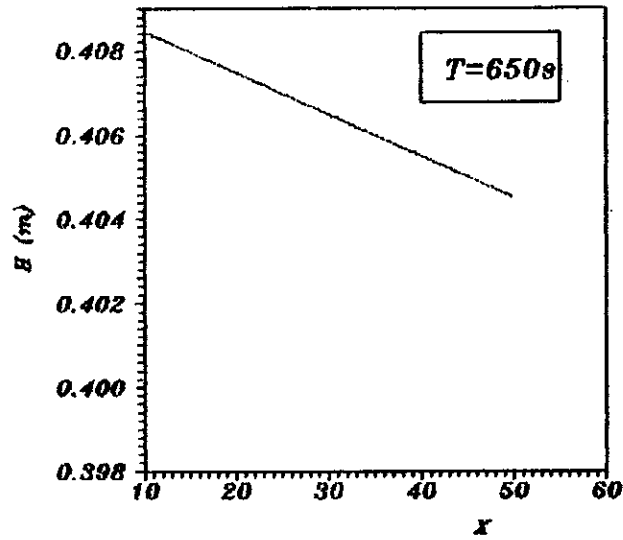
b/ PROFILE DE  $V=f(Y)$



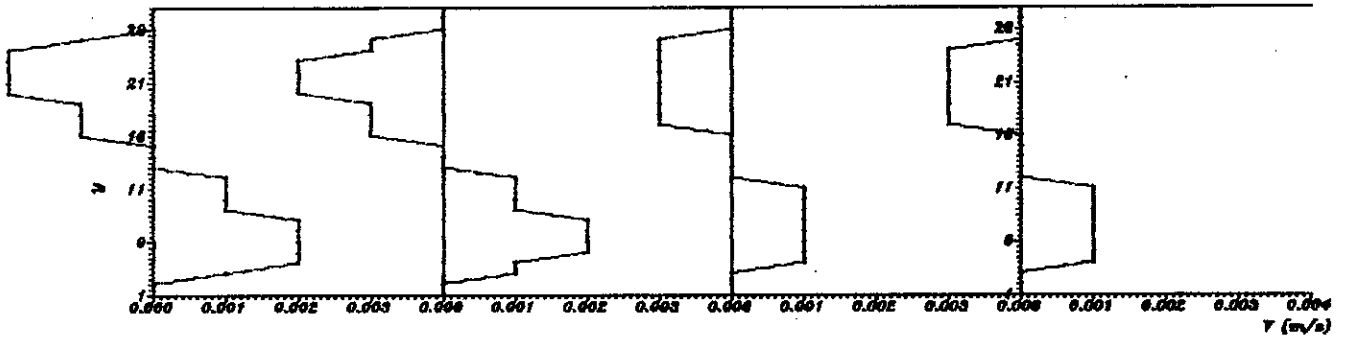
a/ PROFILE DE  $U=f(Y)$

7A4: REPRESENTATION DES PROFILS DE VITESSES SELON X ET Y EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=1.6m$

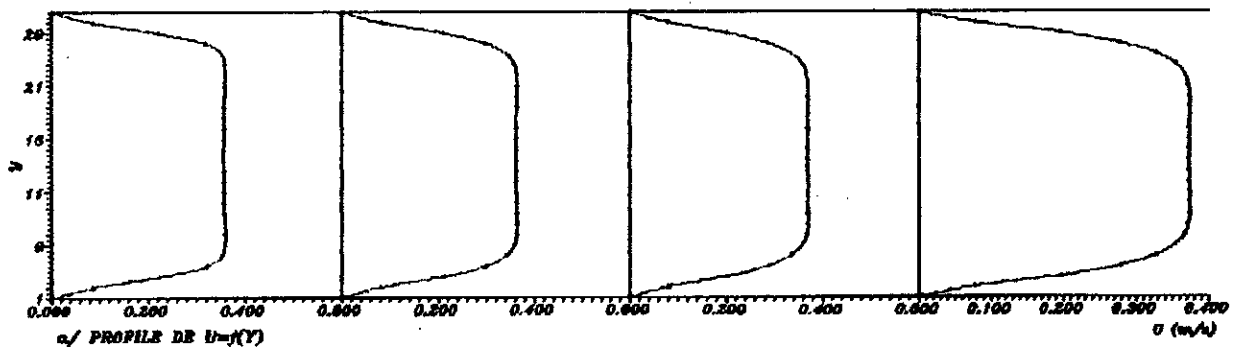
A L'INSTANT  $T=550s$ :  
 a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
 b/PROFILE DE  $V=f(Y)$   
 c/PROFILE DE  $H=f(X)$



c/ PROFILE DE  $H=f(X)$

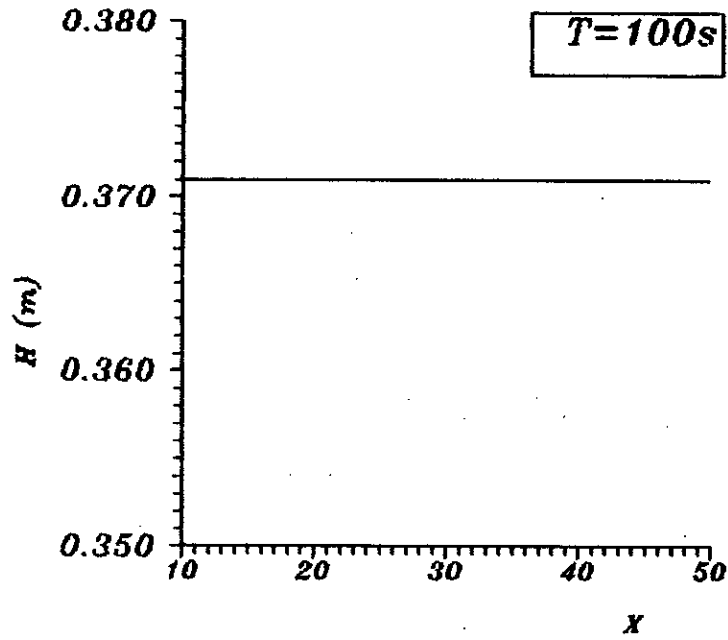


b/ PROFILE DE  $V=f(Y)$

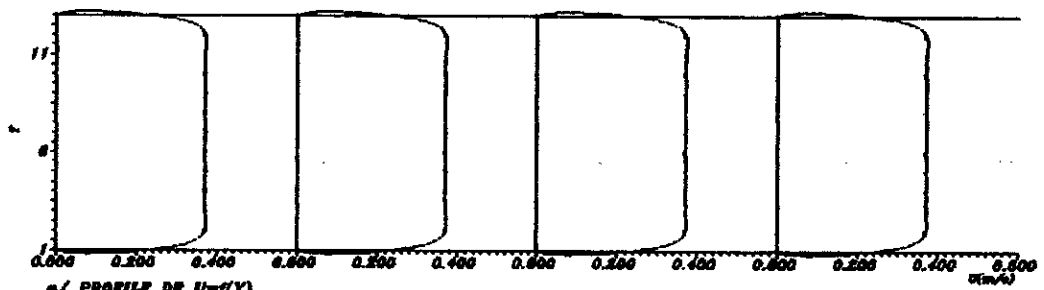


a/ PROFILE DE  $U=f(Y)$

765: REPRESENTATION DES PROFILS DE VITESSES SELON X ET Y EN FONCTION DE Y  
 POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=1.5m$   
 A L'INSTANT  $T=650s$ : a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
 b/PROFILE DE  $V=f(Y)$   
 c/PROFILE DE  $H=f(X)$



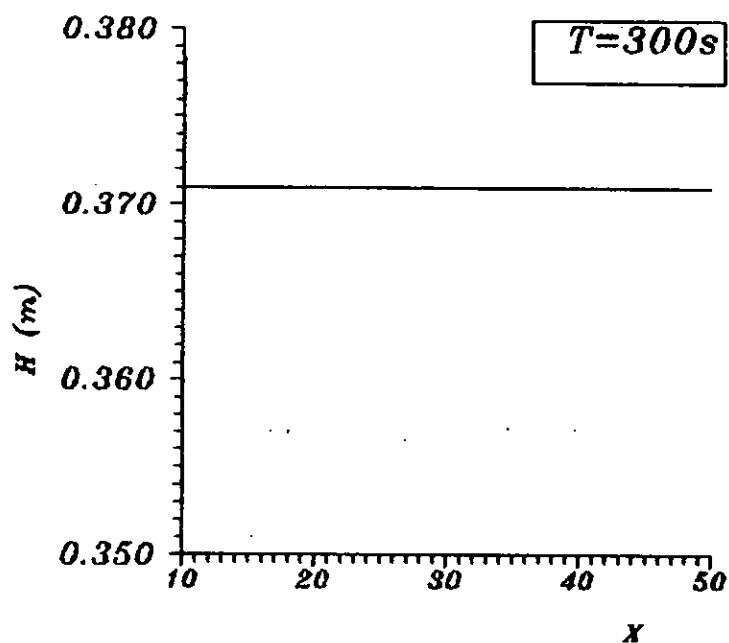
b/ PROFILE DE  $H=f(X)$



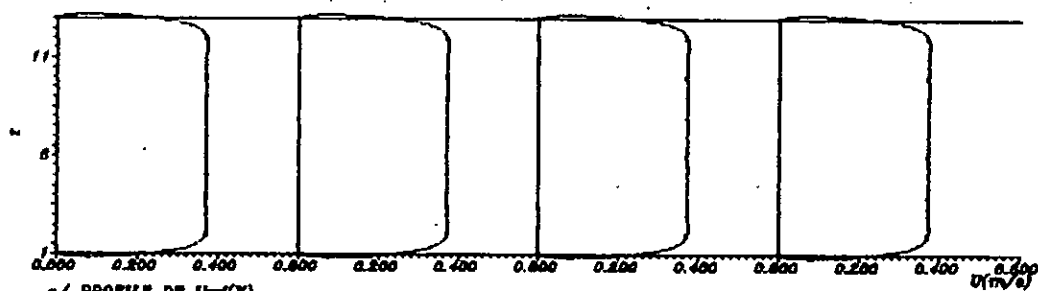
a/ PROFILE DE  $U=f(Y)$

7A6: REPRESENTATION DU PROFILE DE VITESSE SELON X POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=0.9m$  A L'INSTANT  $T=100s$  DANS LE CAS OU LE COEFFICIENT DE VISCOSITE EST NUL

a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
b/PROFILE DE  $H=f(X)$



b/ PROFILE DE  $H=f(X)$



a/ PROFILE DE  $U=f(Y)$

7A7: REPRESENTATION DU PROFILE DE VITESSE SELON  $Y$  POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE  $X$  POUR  $Y=0.9m$  A L'INSTANT  $T=300s$  DANS LE CAS OU LE COEFFICIENT DE VISCOSITE EST NUL

a/PROFILE DE  $U=f(Y)$   
b/PROFIE DE  $H=f(X)$

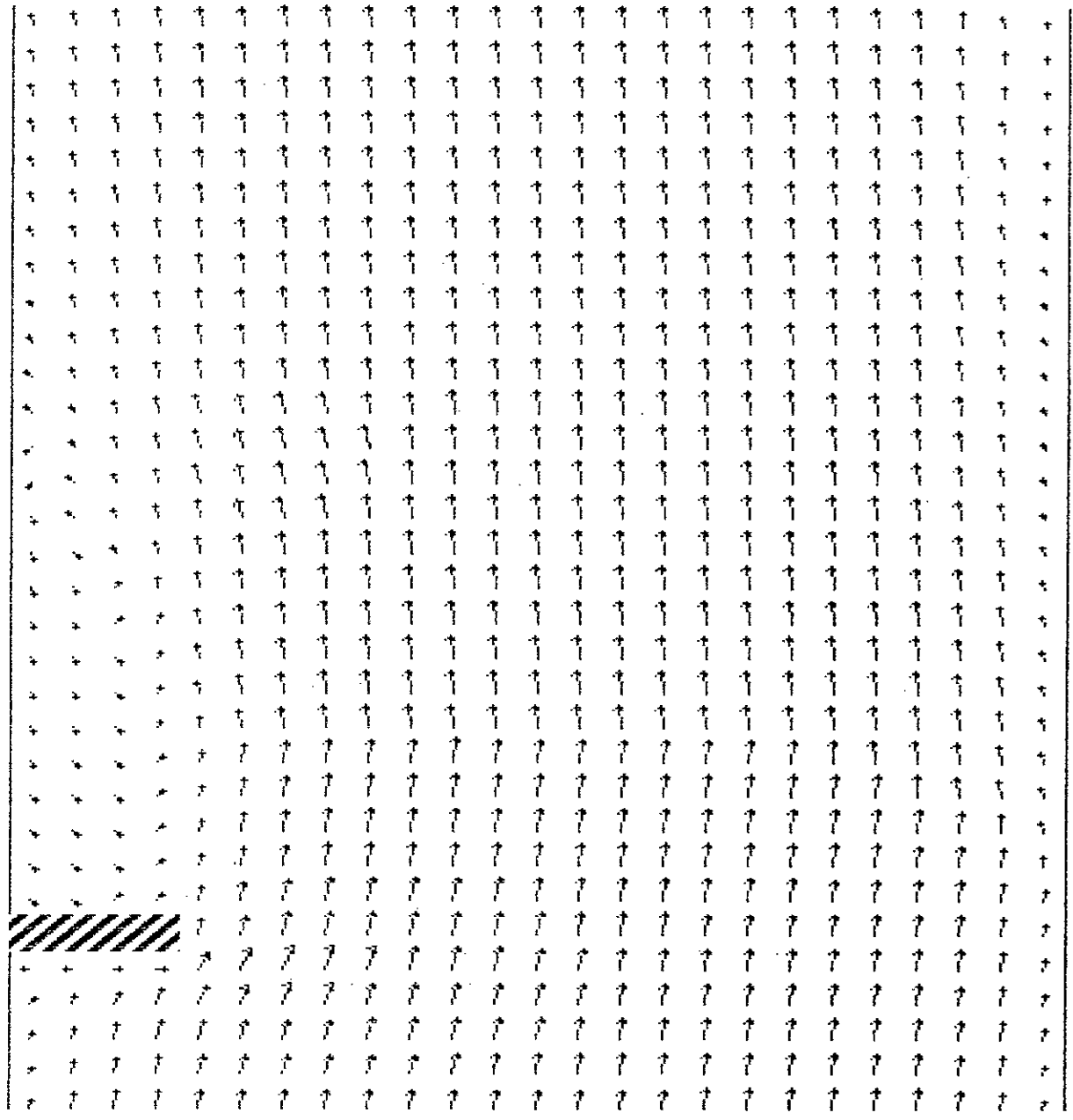


fig.7h8 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT  $T=200$  s  
 DANS LE CAS OU L' OBSTACLE EST AU NIVEAU DE LA 2 ème RIVE

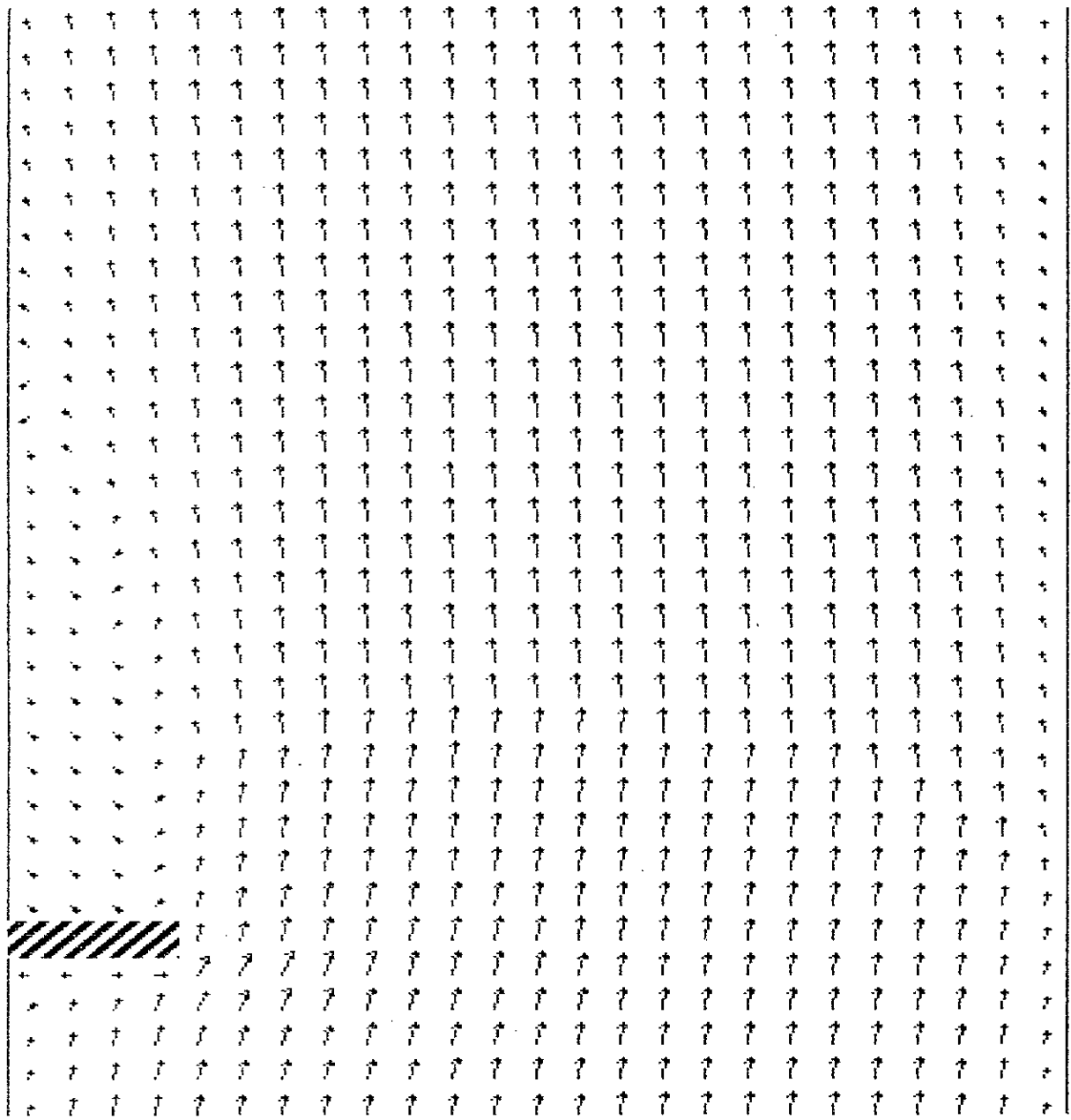


Fig.7h9 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT  $T=350$  s  
 DANS LE CAS OU L' OBSTACLE EST AU NIVEAU DE LA 2 ème RIVE

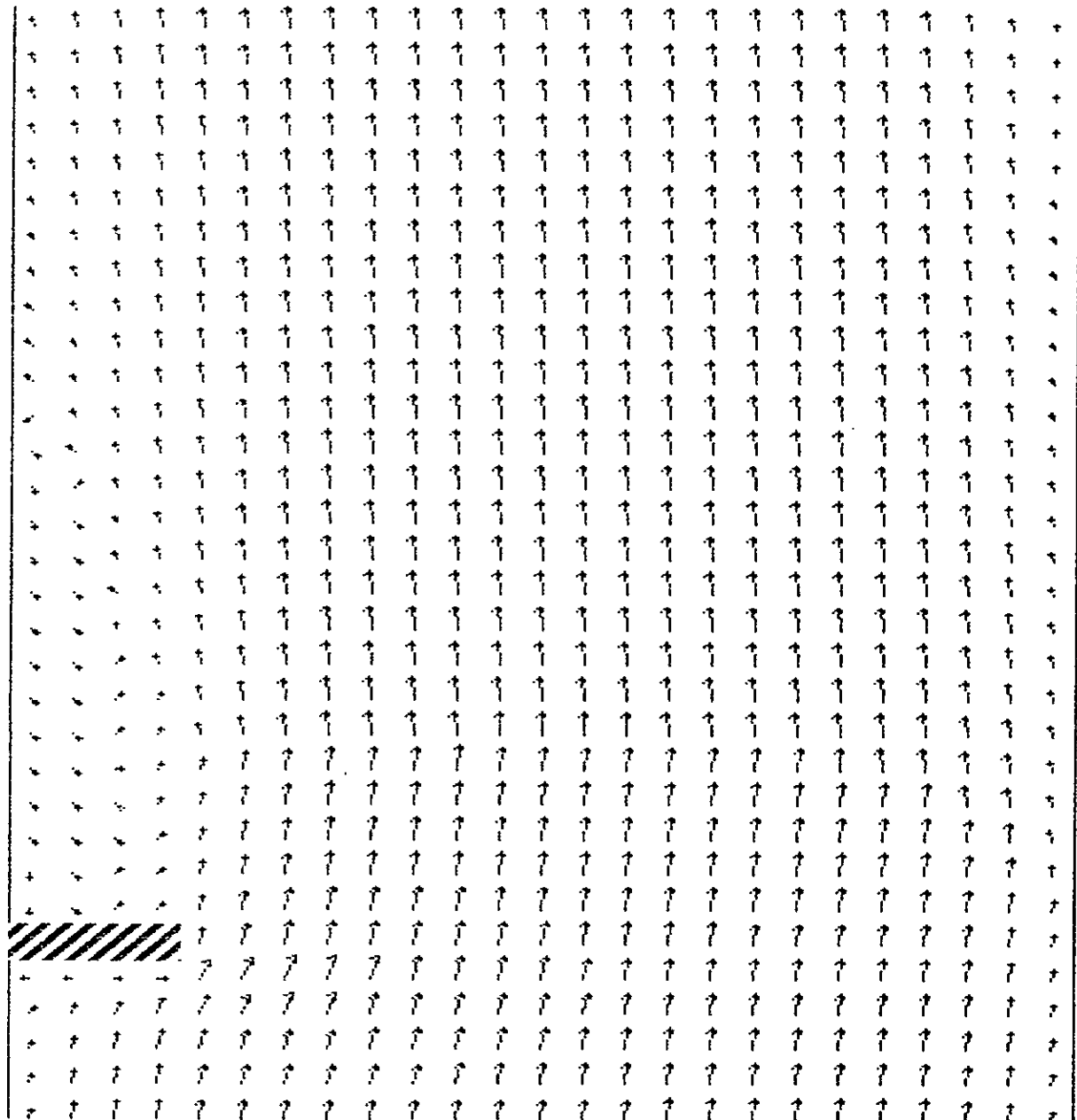


Fig. 7h10 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT  $T=400$  s  
 DANS LE CAS OU L' OBSTACLE EST AU NIVEAU DE LA 2 ème RIVE

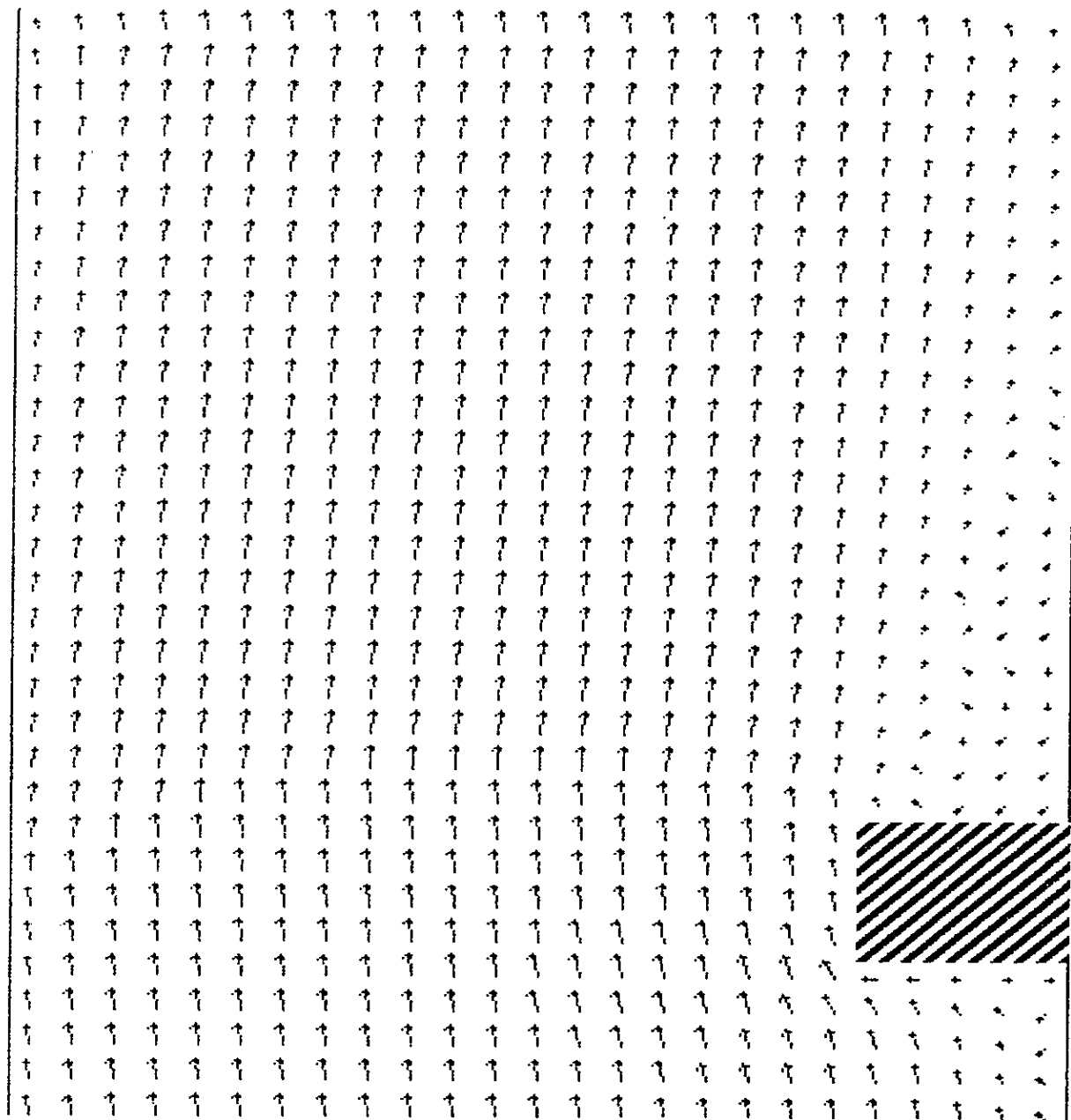


Fig.7h11 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT  $T=200$  s  
 DANS LE CAS OU L' OBSTACLE EST AU NIVEAU DE LA 1 ère RIVE



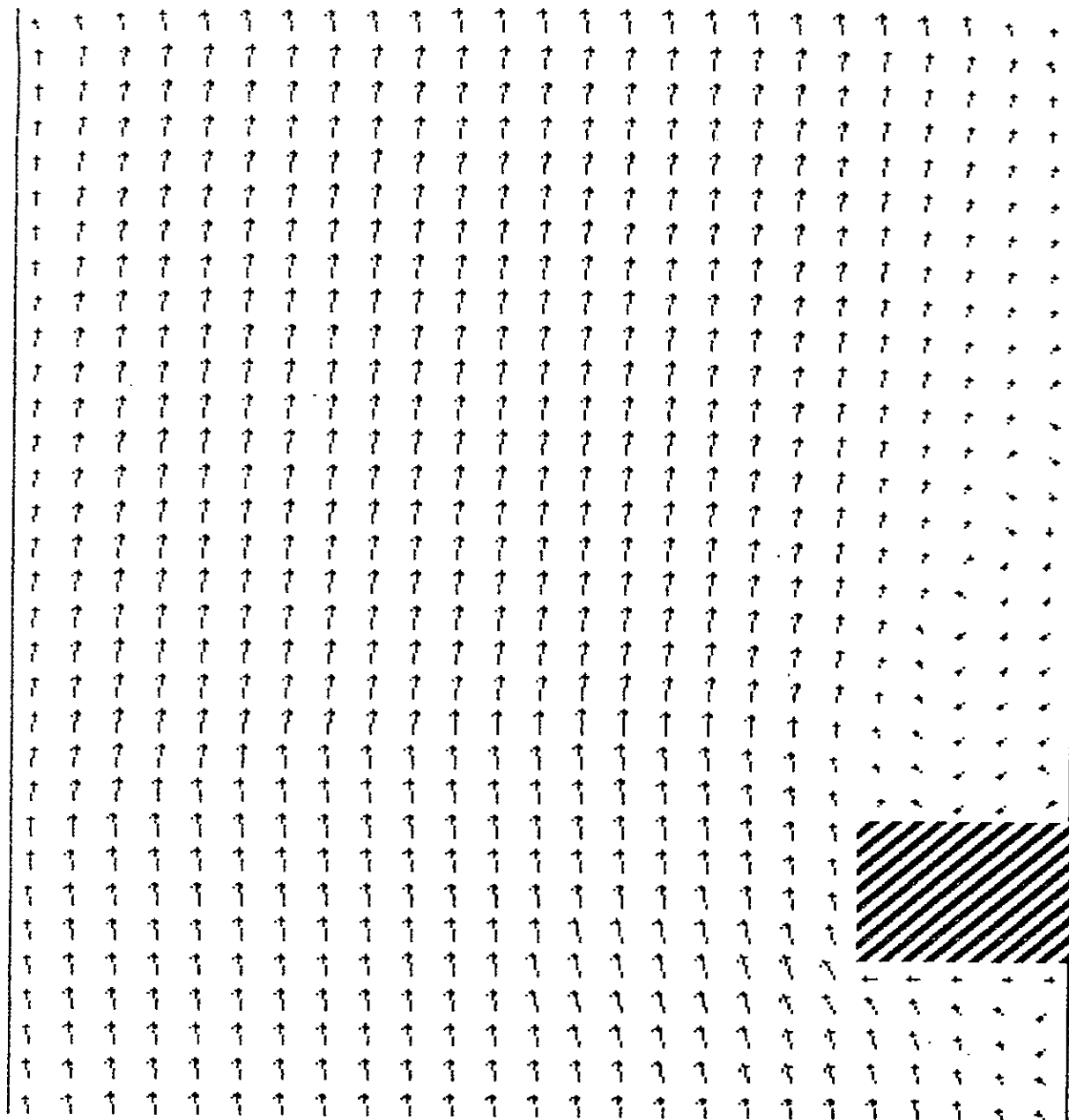


fig. 7h12 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L'INSTANT  $T=350$  s  
 DANS LE CAS OU L'OBSTACLE EST AU NIVEAU DE LA 1 ère RIVE

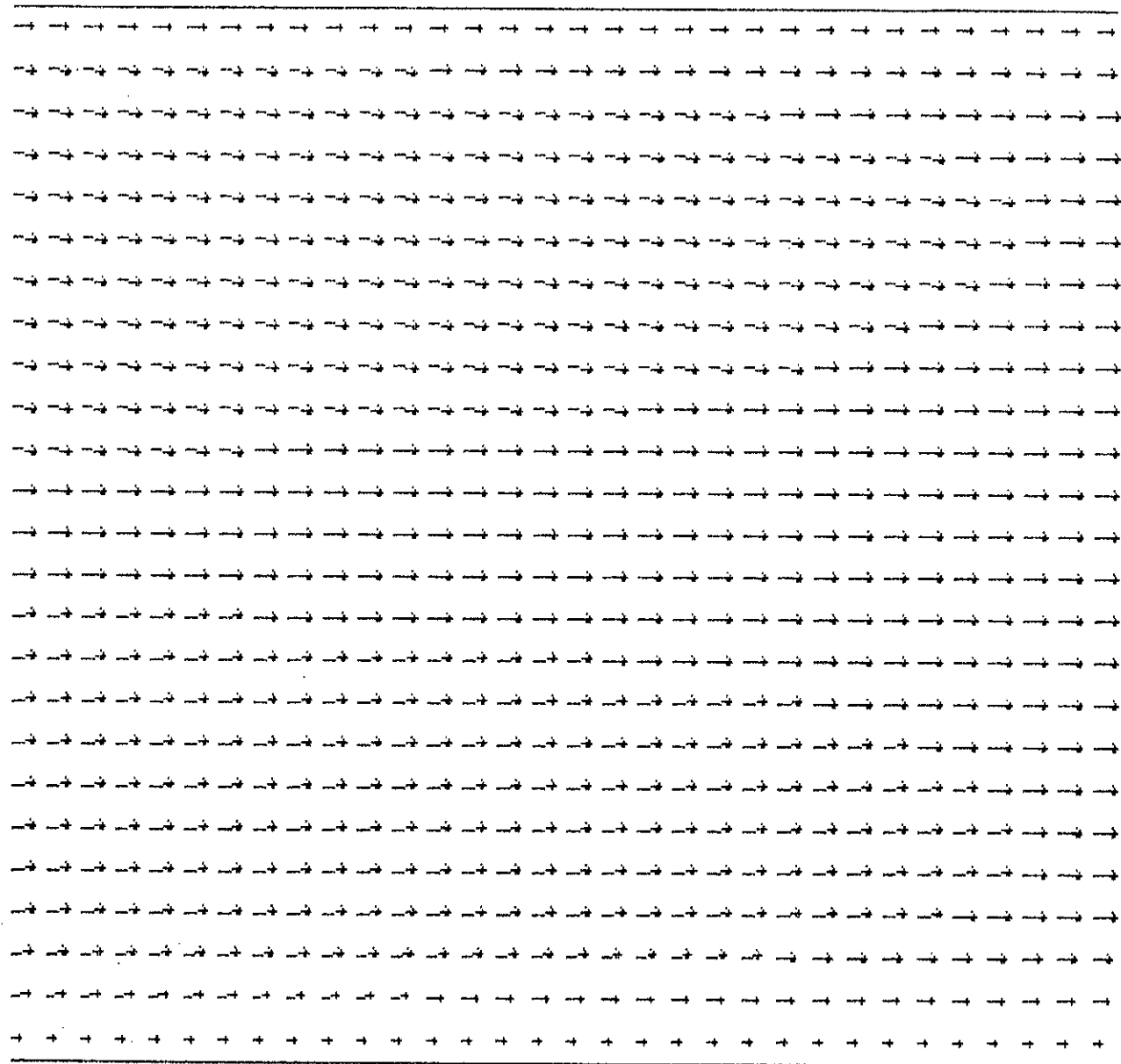


fig.7h13 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L'INSTANT  $T=100$  s  
DANS LE CAS OU LE CANAL EST SANS OBSTACLE

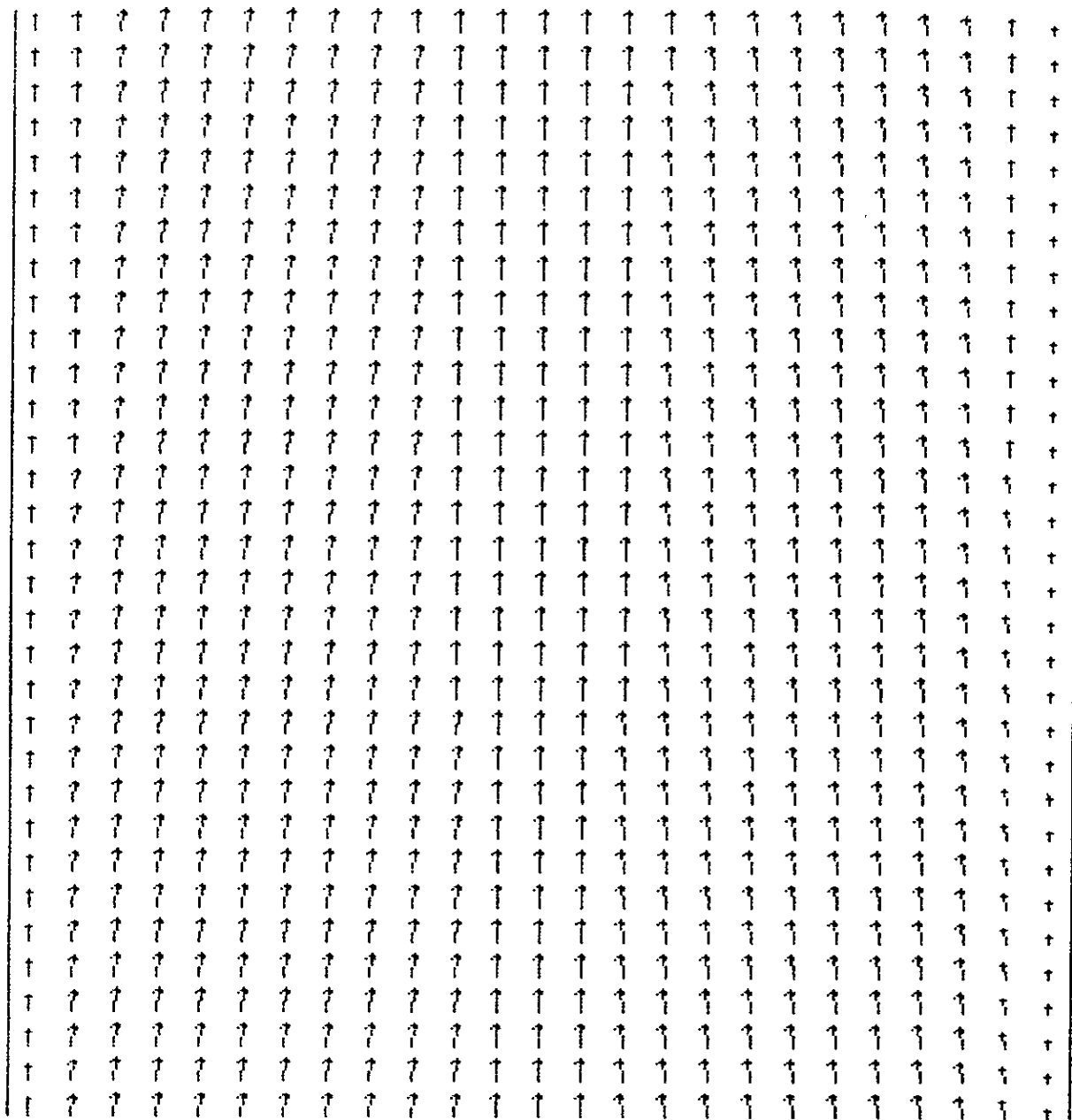


Fig. 7h14 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT  $T=500$  s  
 DANS LE CAS OU LE CANAL EST SANS OBSTACLE

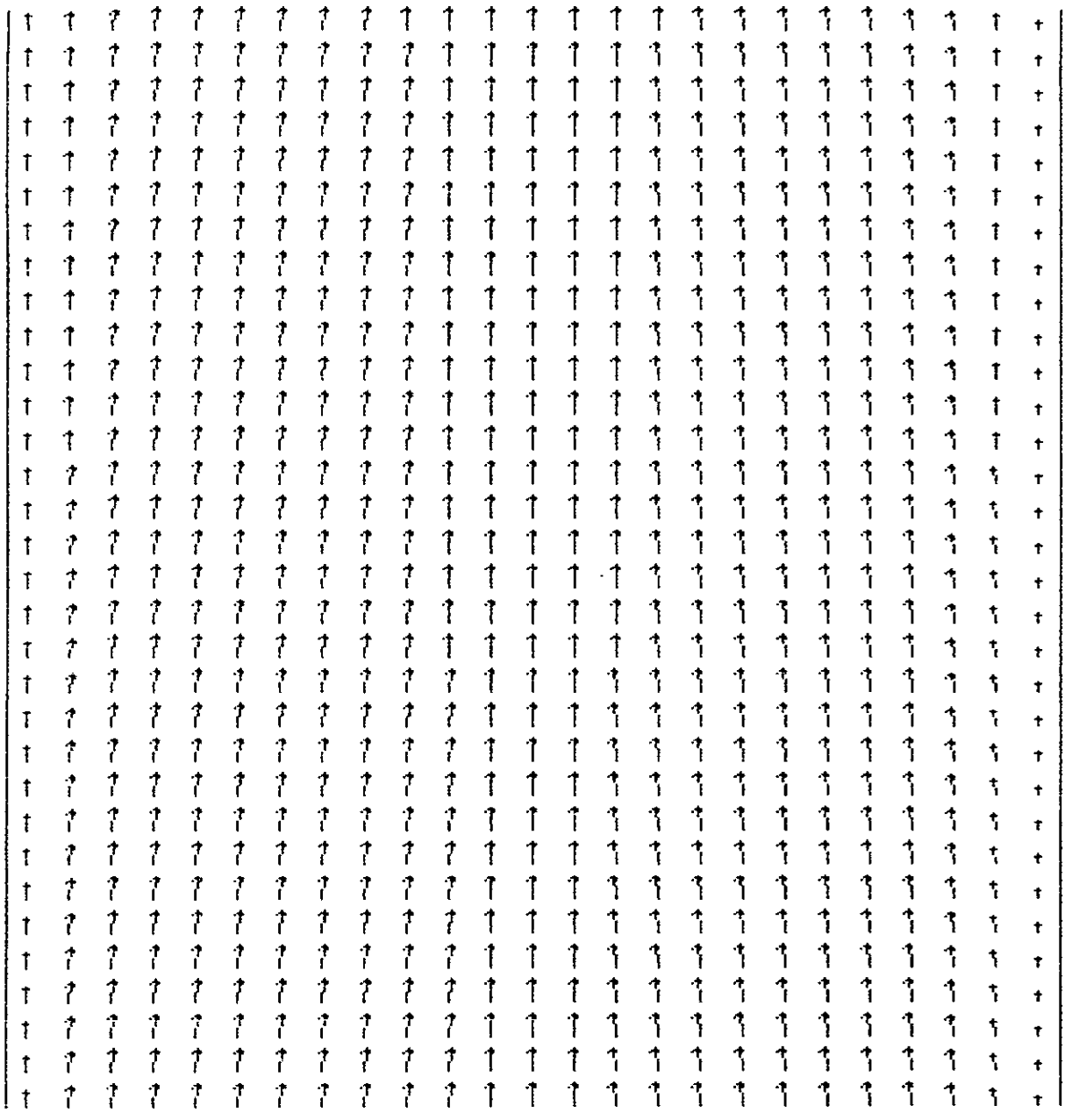


Fig. 7h15 REPRESENTATION DU CHAMPS DE VITESSES A L' INSTANT T=600 s  
 DANS LE CAS OU LE CANAL EST SANS OBSTACLE

## 7.2 Modèle "Transport"

De la même façon que pour l'hydraulique, nous devons évaluer le comportement du modèle "Transport".

Nous avons donc procédé à une série d'essais dont quelques uns sont présentés ici. Nous rappelons seulement que les résultats du modèle Hydrodynamique considéré en (7.1) sont utilisés pour ce modèle ci:

- 1<sup>e</sup> essai : Rejet constant en un point.  
(rejet de 1ppb de polluants)
- 2<sup>e</sup> essai : Rejet constant plan sur toute la largeur.  
(rejet de 1ppb de polluants)
- 3<sup>e</sup> essai : Rejet arbitraire en un point à l'entrée du canal.  
( $c(\text{ppb})=1+T/T_{\text{max}}*10.5$ )
- 4<sup>e</sup> essai : Rejet ponctuelle à partir de la paroi.  
(rejet de 1ppb de polluants)
- 5<sup>e</sup> essai : Rejet plan constant sur une certaine largeur du canal. (rejet sur 5 plans de 1ppb de polluants)

Les conditions initiales de polluant pour tout le domaine sont ( $c^0=0.0$ ).

Nous imposons une concentration constante à l'entrée du canal dans le cas des essais 1, 2, 4 et 5 et une concentration variant avec le temps dans le cas du 3<sup>e</sup> essai.

Le flux de concentration est nul à la sortie.

Les essais ont donc été effectués en fonction des conditions de rejet c-à-d des conditions à l'entrée, des coefficients de dispersion de polluants et du schéma d'interpolation.

Les figures 7t1 à 7t16 représentent le nuage de points pour différents cas de rejets, mettant en évidence l'influence de certains paramètres dans la dispersion de polluants tels:

le temps, les coefficients de dispersion et le type de rejet.

Les figures 7t17 à 7t30 représentent l'une de ces fonctions  $c=f(x)$ ,  $c=f(y)$  et  $c=f(t)$  pour différents cas de rejet, pour différents coefficients de dispersion, pour différentes positions à l'aval du rejet et pour différents instants.

Selon ces figures nous déduisons:

-qu'à partir d'un certain instant, la variation de la concentration en tout point devient négligeable. Nous obtenons les conditions permanentes pour tout le canal;

-que l'augmentation des coefficients de dispersion selon  $x$  et  $y$  facilite la dispersion de polluants dans le temps et l'espace;

-que la variation de la concentration de polluants en fonction de  $y$  suit la loi Gaussienne;

-que dans le cas d'un canal symétrique, nous pouvons faire le calcul de la moitié du canal et en déduire le reste par symétrie.

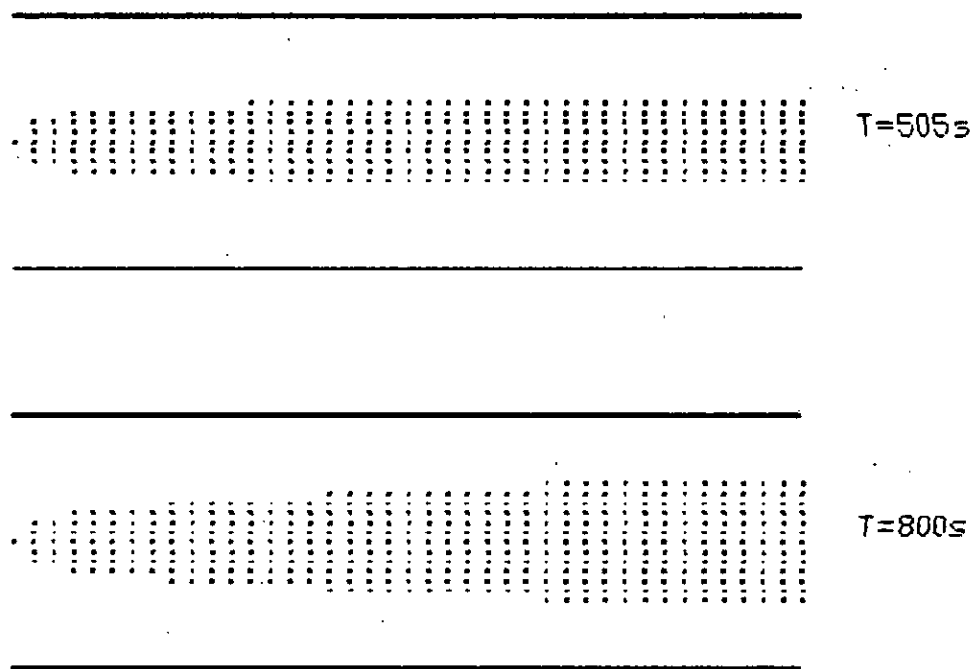


FIG 7t1: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET CT A L'ENTREE DU CANAL

A  $T=505s$  ET  $T=800s$  ET POUR  $E_x = 0,08 \text{ m}^2/s$  et  $E_y = 0,00096 \text{ m}^2/s$

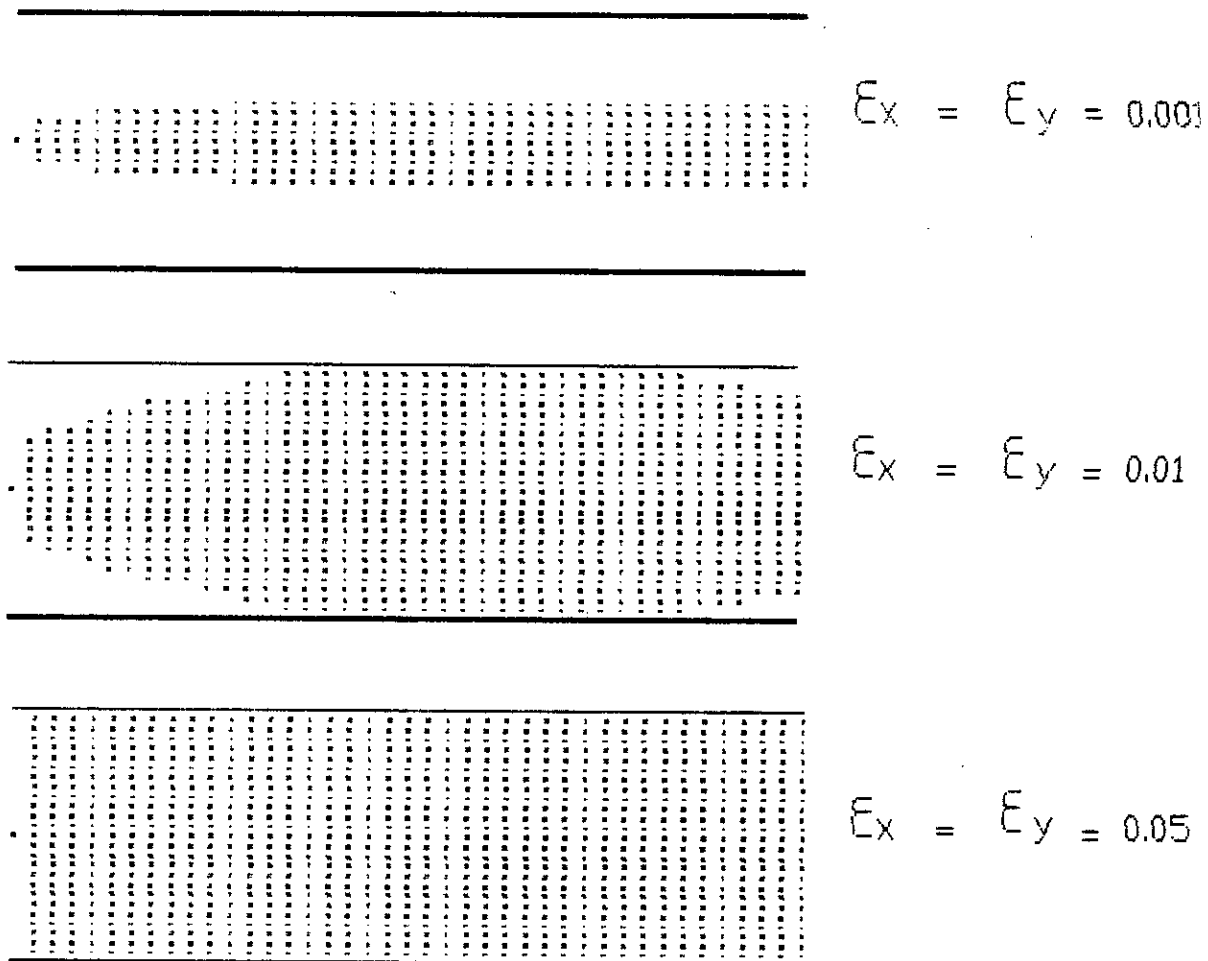
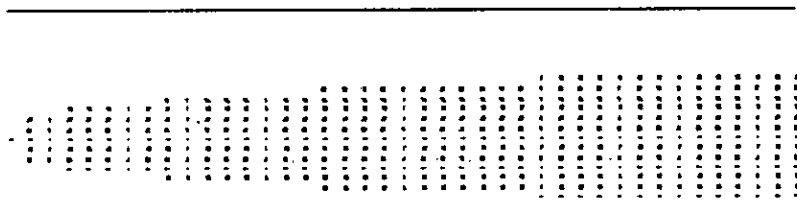


FIG 7+2) REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET CT A L'ENTREE DU CANAL  
 A  $T=505s$  ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

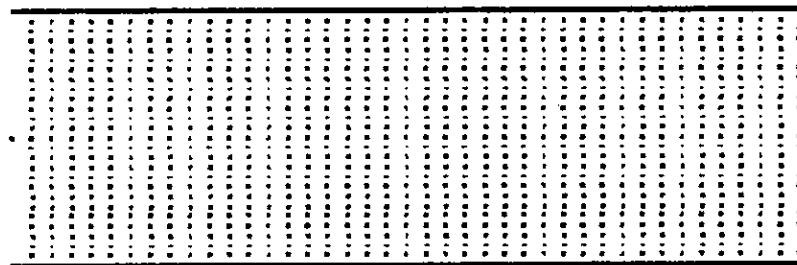




$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.001$$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.01$$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.05$$

FIG 7+3: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET CT A L'ENTREE DU CANAL A  $T=550s$  ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

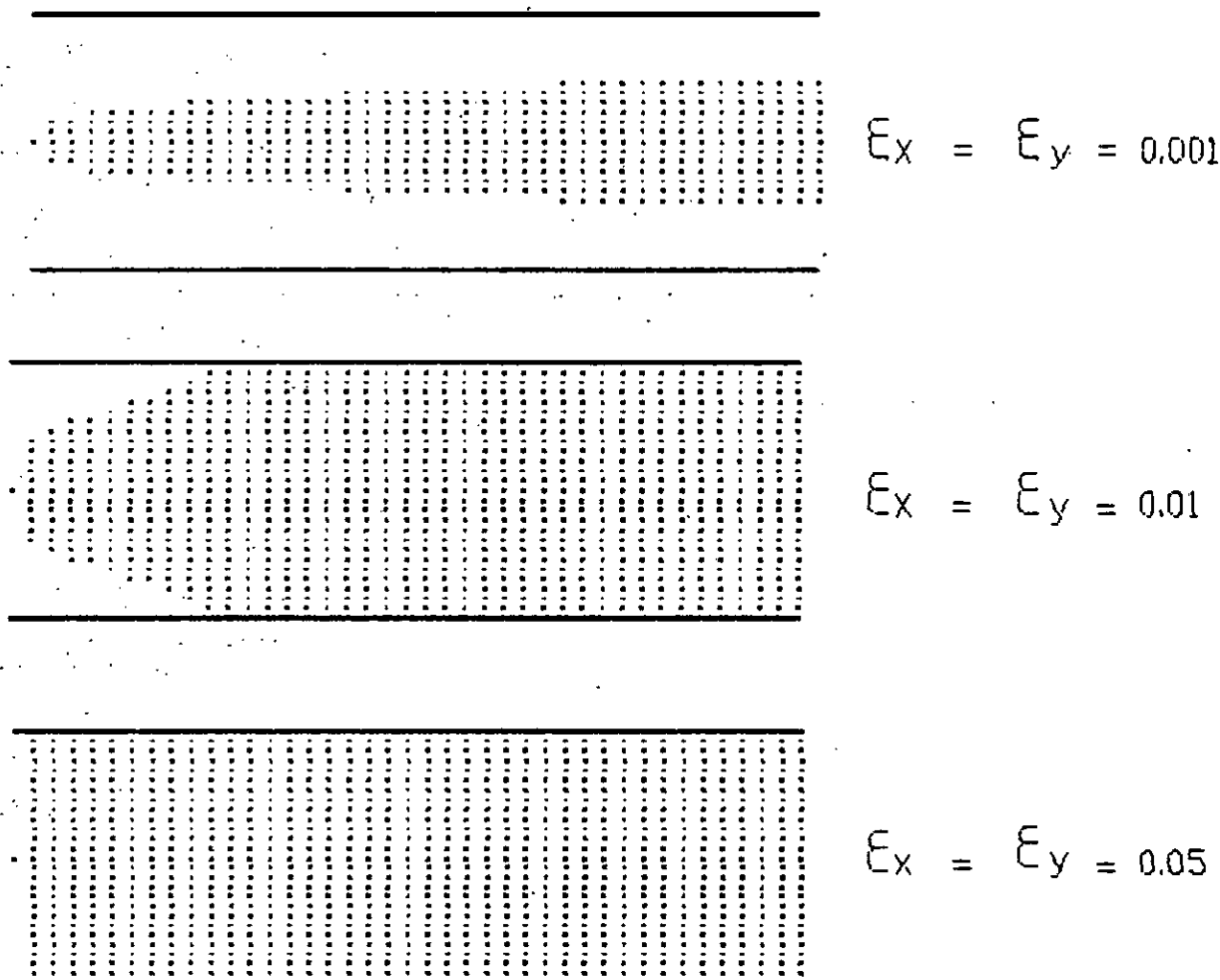


FIG 7+4. REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET CT A L'ENTREE DU CANAL A T=800s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

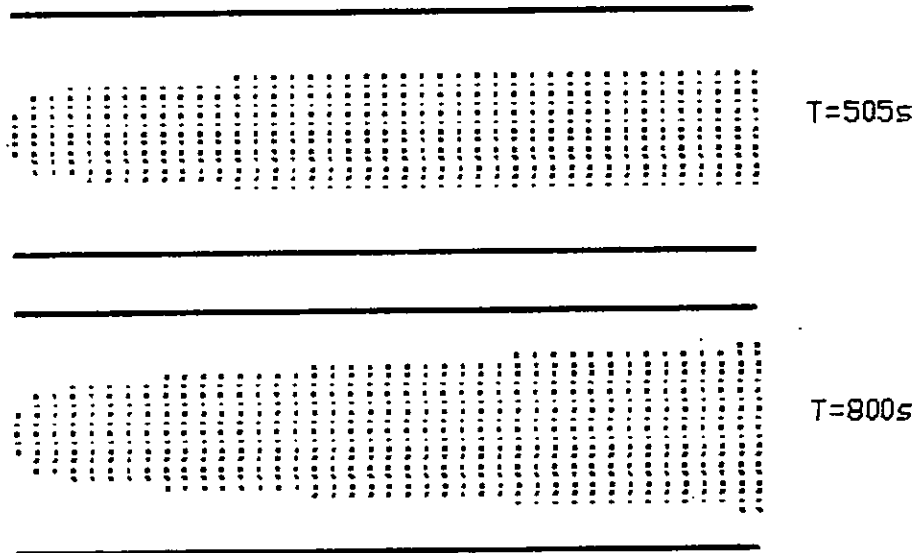


FIG 7+5: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL A T=505s ET T=800s ,  $E_y = 0.00096 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $E_x = 0.08 \text{ m}^2/\text{s}$

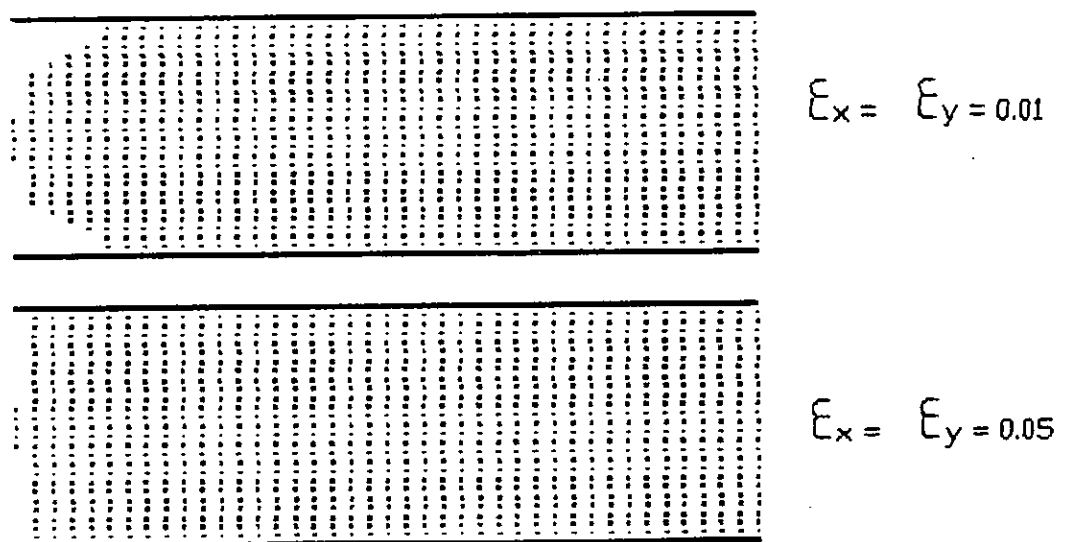
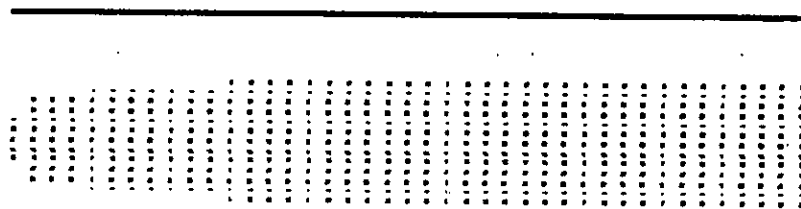
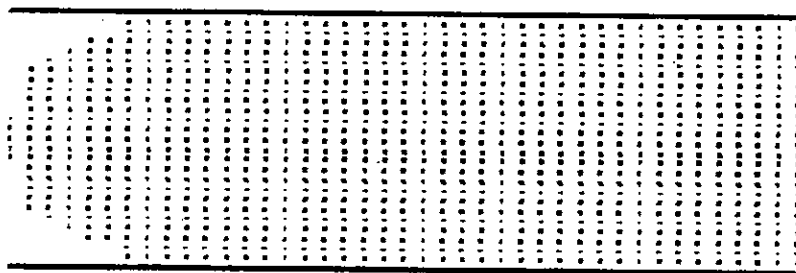


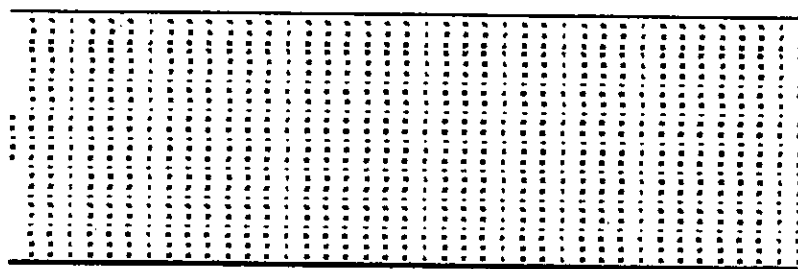
FIG 7+8: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL A T=800s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.001$$

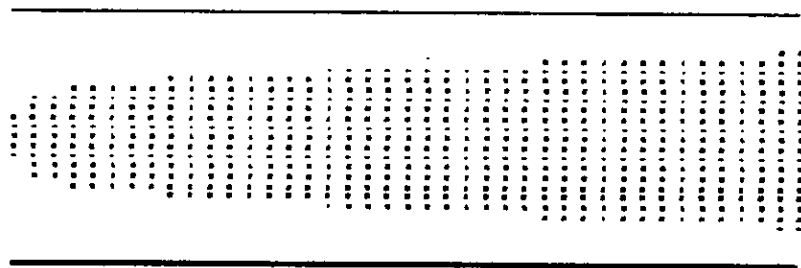


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.01$$

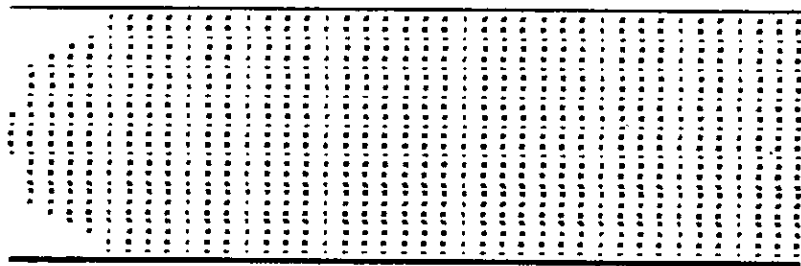


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.05$$

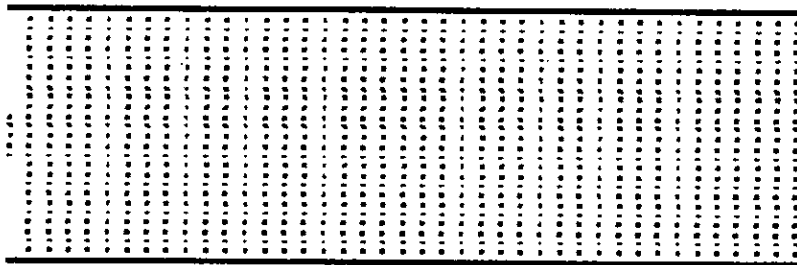
FIG 7+6, REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL A  $T=505s$  ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION



$$E_x = E_y = 0.001$$



$$E_x = E_y = 0.01$$



$$E_x = E_y = 0.05$$

FIG 7+7. REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL A  $T=550s$  ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

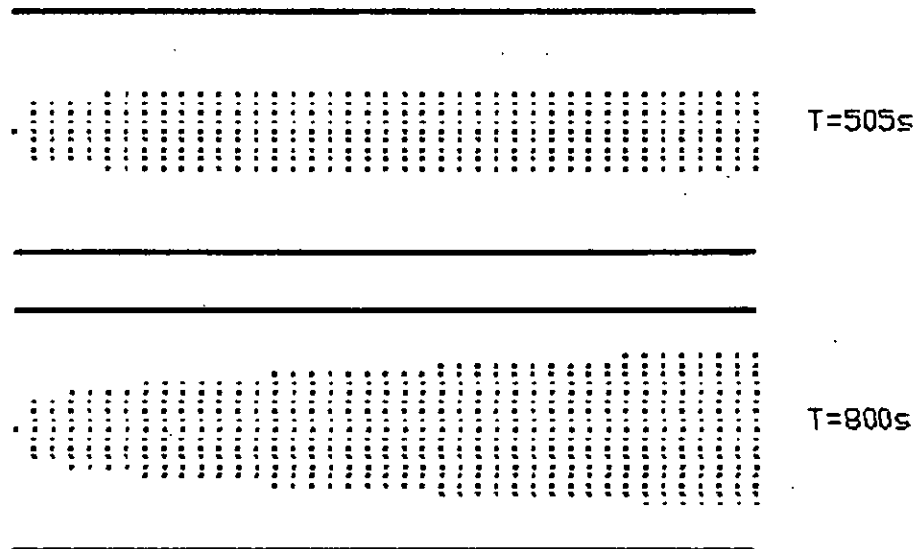


FIG 7+9: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET VARIANT DANS LE TEMPS  
 A T=505s ET T=800s ET POUR  $E_x = 0.00096 \text{ m}^2/\text{s}$  ET  $E_y = 0.08 \text{ m}^2/\text{s}$

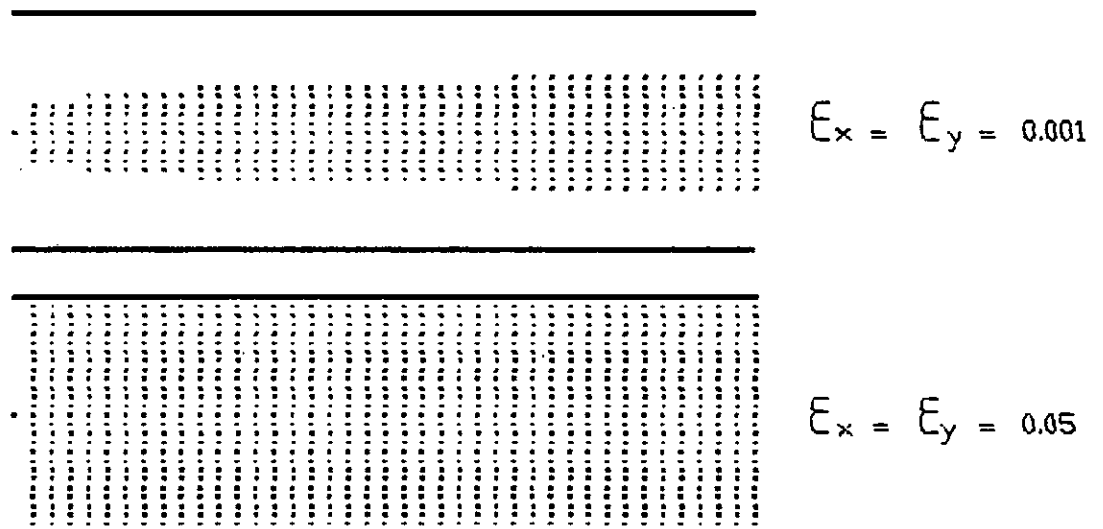
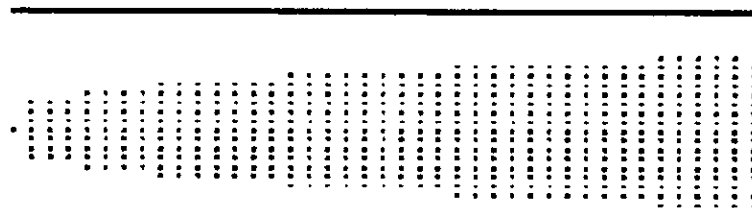
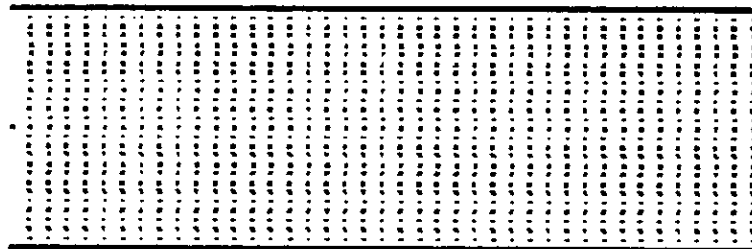


FIG 7+10: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET VARIANT DANS LE TEMPS  
 A T=510s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

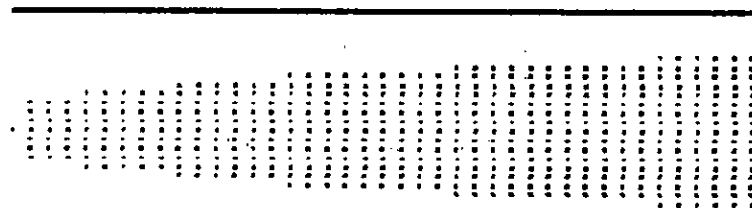


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.001$$

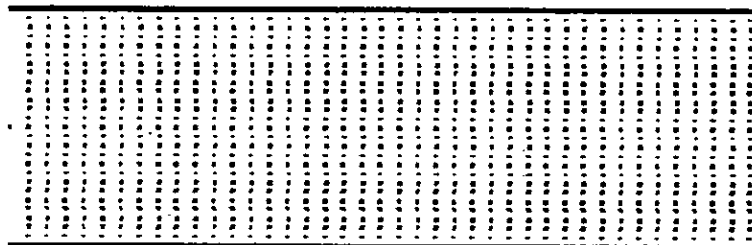


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.05$$

FIG 7+11 REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET VARIANT DANS LE TEMPS  
A T=550s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

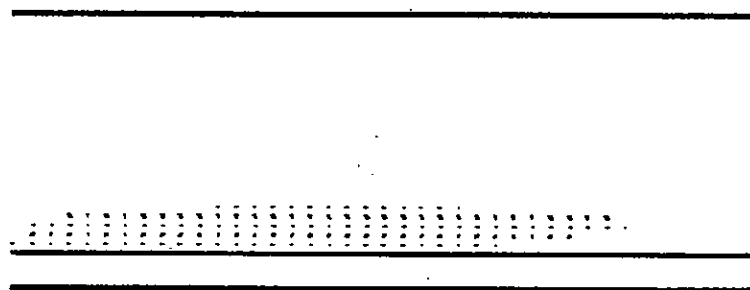


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.001$$

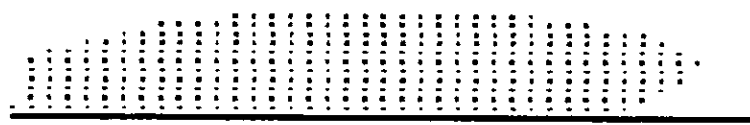


$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0.05$$

FIG 7+12 REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET VARIANT DANS LE TEMPS  
A T=800s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

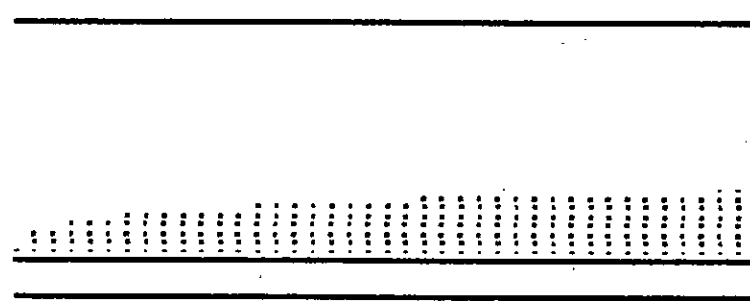


$$E_x = E_y = 0.001$$

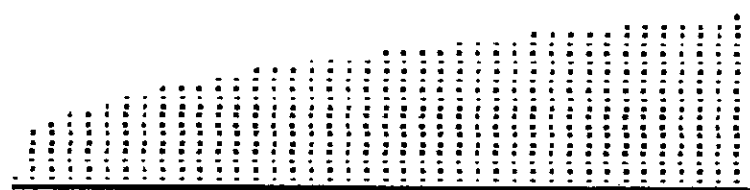


$$E_x = E_y = 0.01$$

FIG 7+13: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET AU NIVEAU DE LA PARDI A T=505s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION



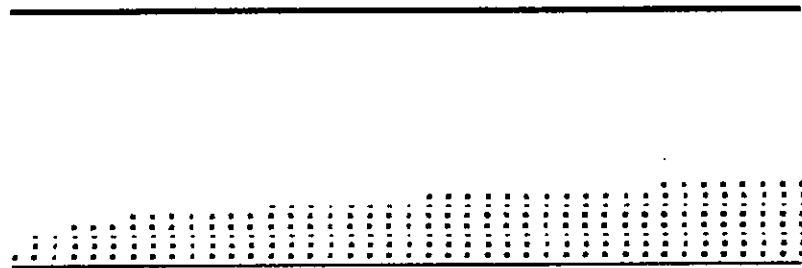
$$E_x = E_y = 0.001$$



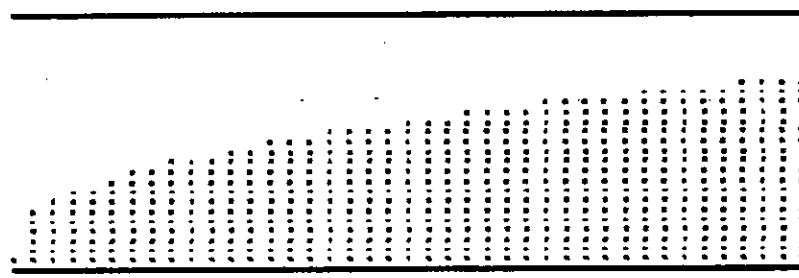
$$E_x = E_y = 0.01$$

FIG 7+14: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET AU NIVEAU DE LA PARDI A T=540s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION



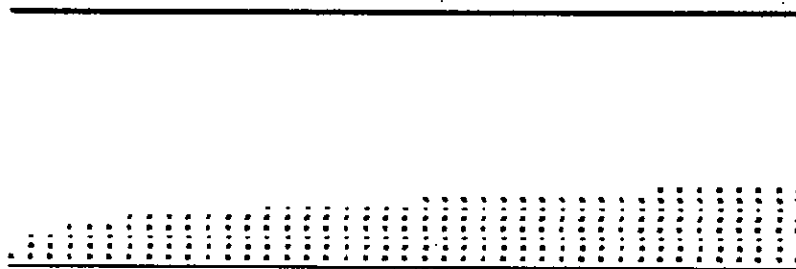


$$\xi_x = \xi_y = 0.001$$

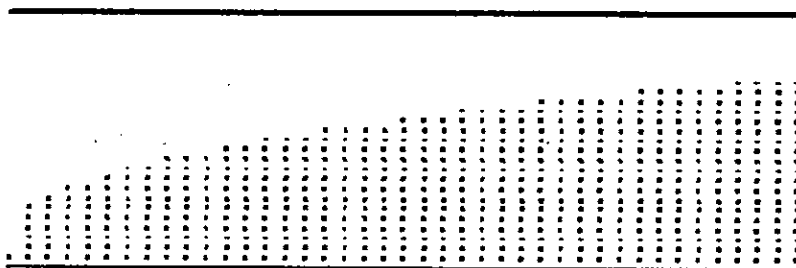


$$\xi_x = \xi_y = 0.01$$

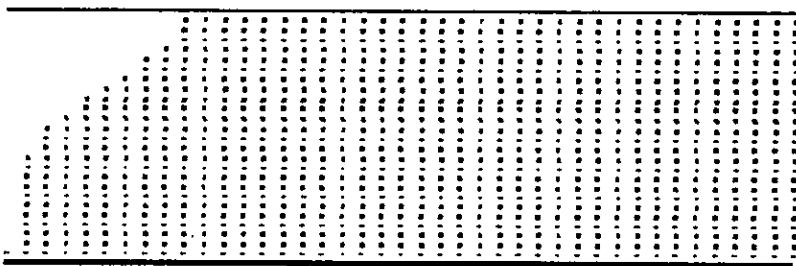
FIG 7t15: REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET AU NIVEAU DE LA PARDI A T=600s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION.



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0,001$$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0,01$$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0,05$$

FIG 7+16' REPRESENTATION DU NUAGE POUR UN REJET AU NIVEAU DE LA PAROI  
A T=900s ET POUR DIEFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION

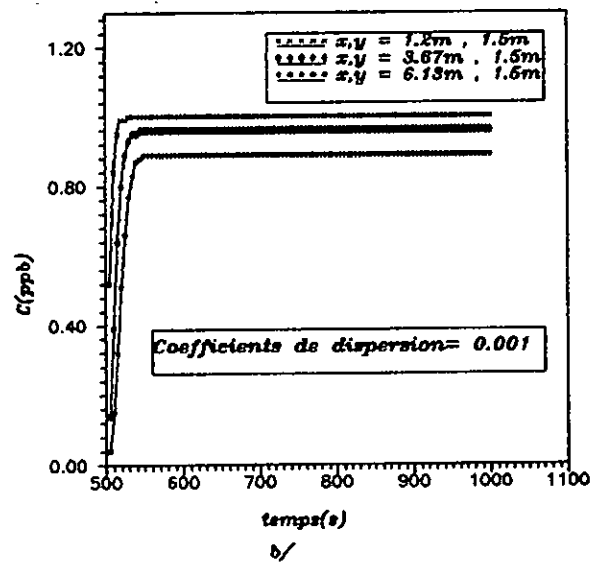
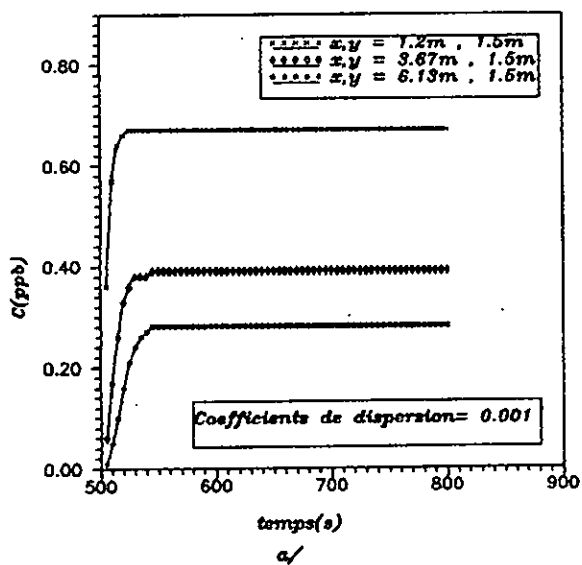
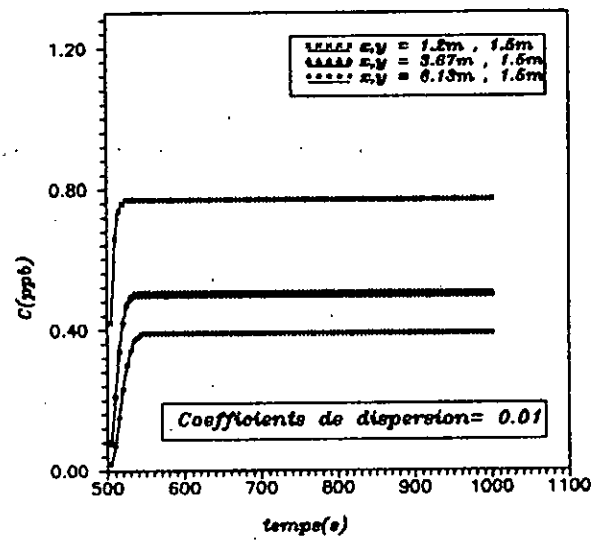
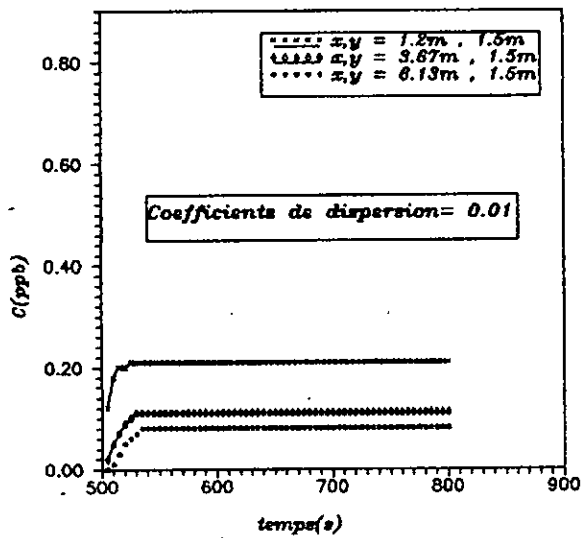
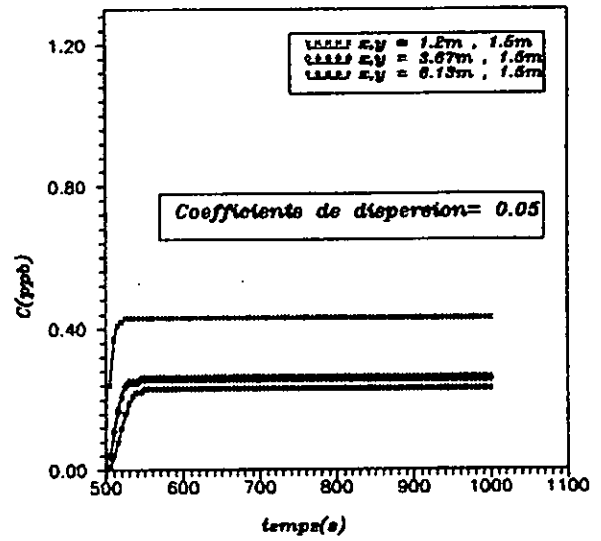
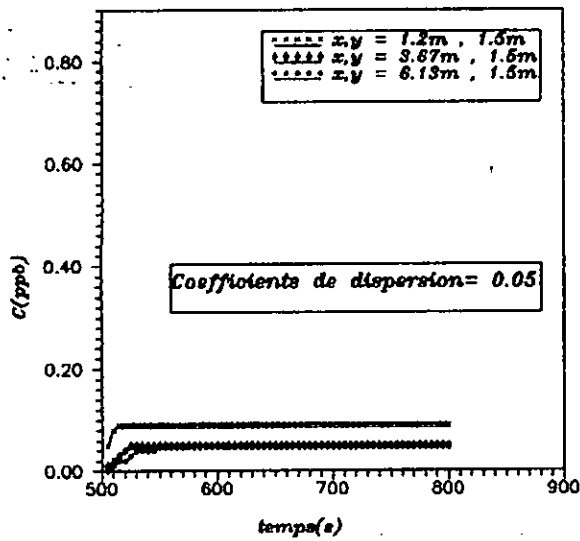


FIG 7a17: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DU TEMPS POUR DIFFERENTES POSITION A L'AVAL DU REJET:

a/ REJET EN UN POINT CT A L'ENTREE DU CANAL  
 b/ REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL

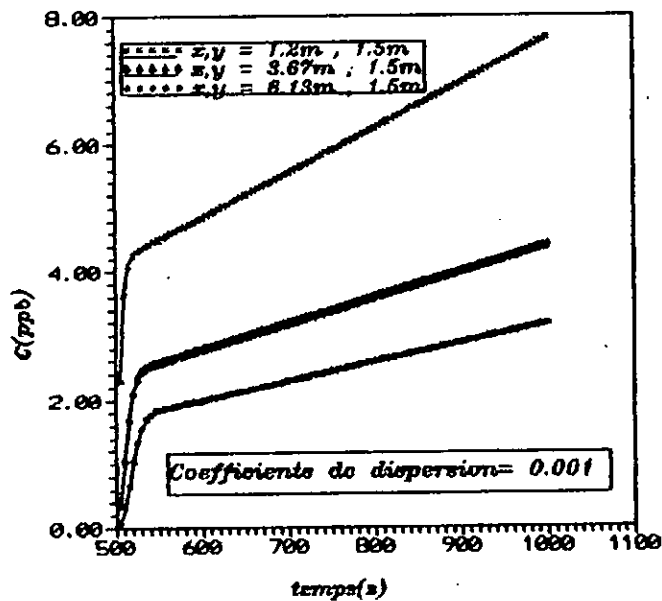
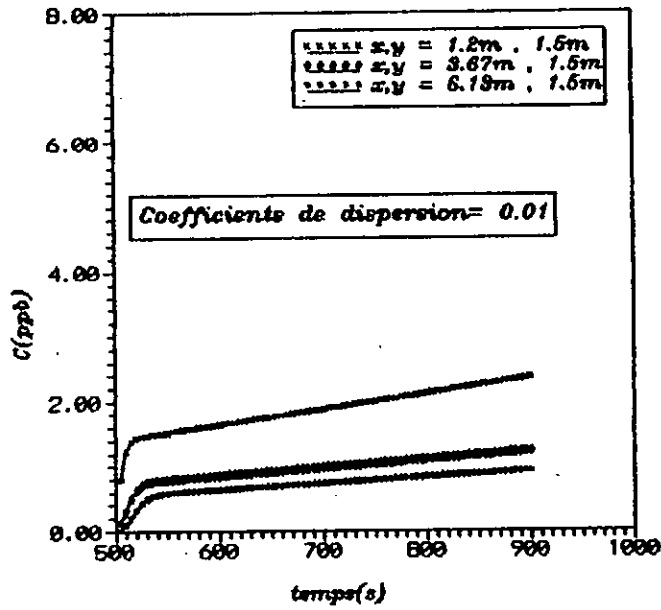
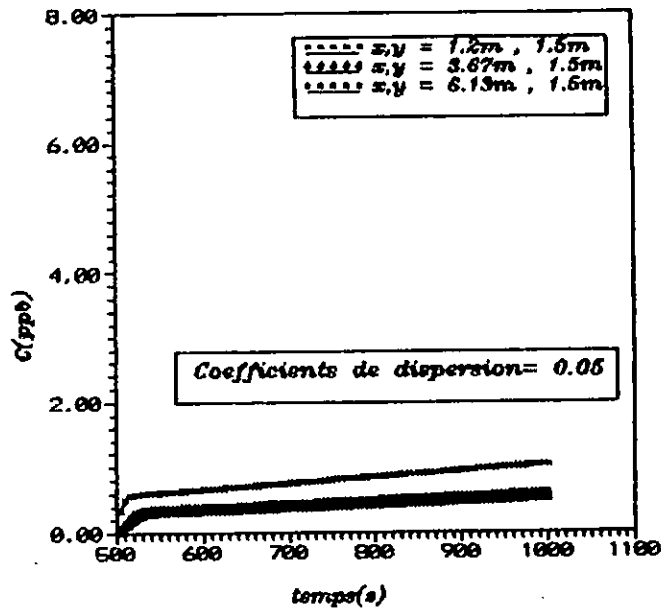


FIG 7118: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DU TEMPS  
 POUR DIFFERENTES POSITION A L'AYAL DU REJET :  
 DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT VARIANT DANS LE TEMPS

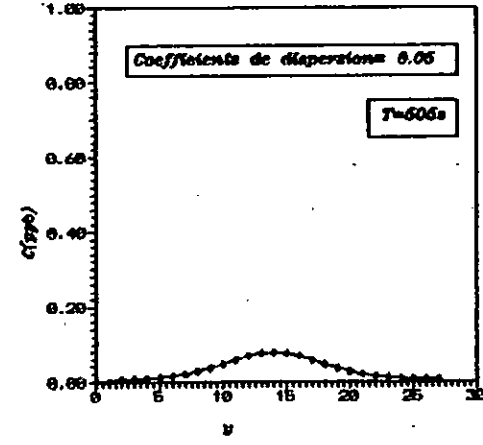
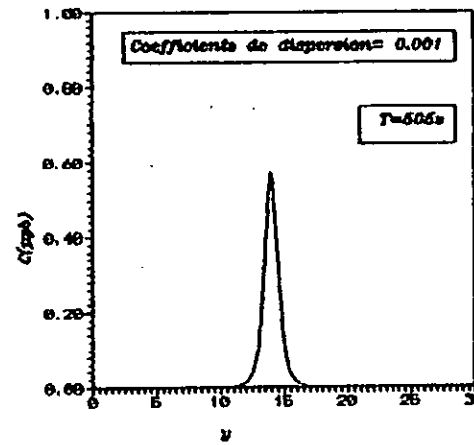
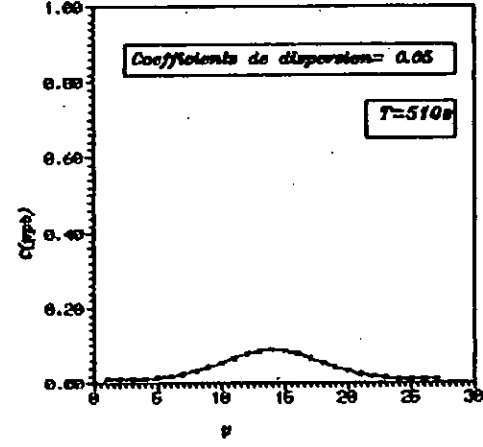
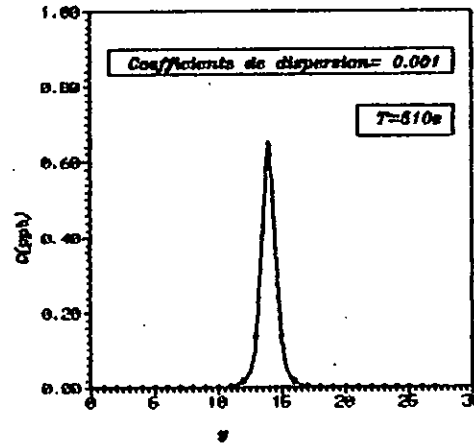
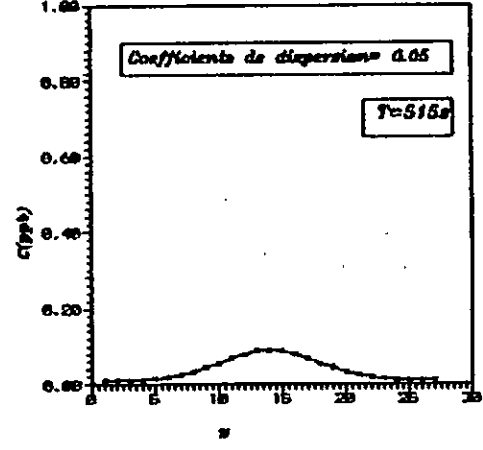
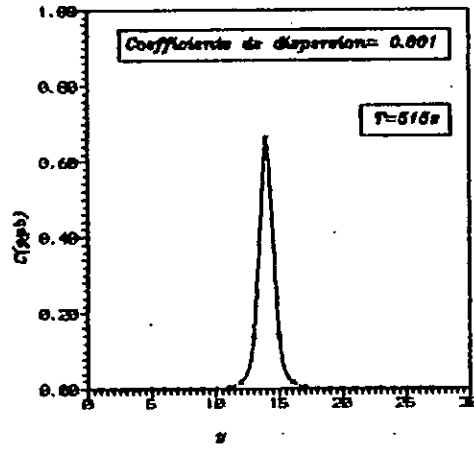
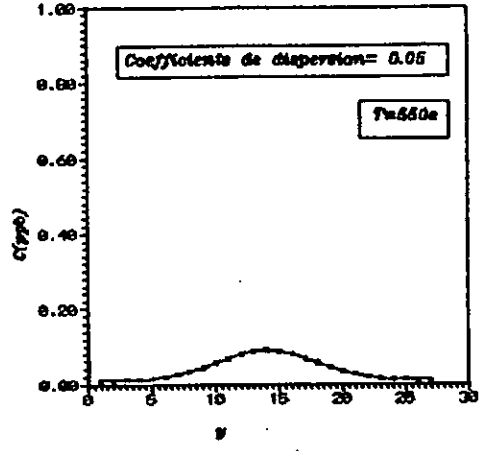
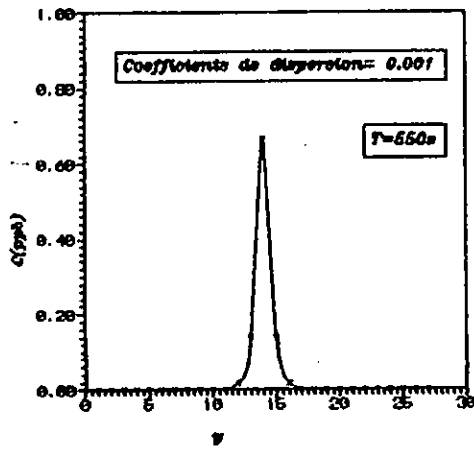
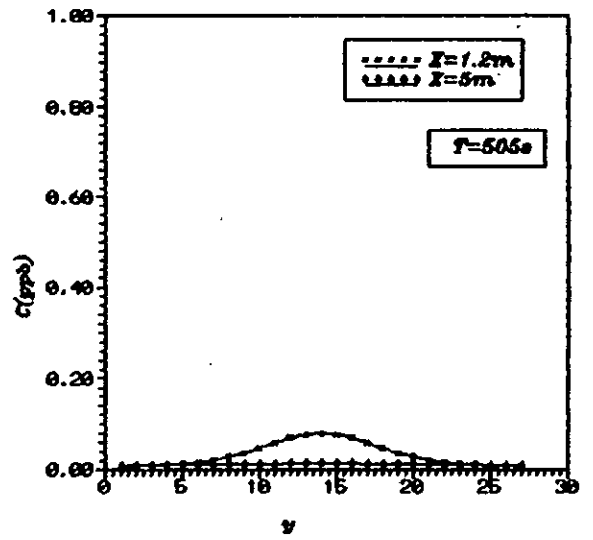
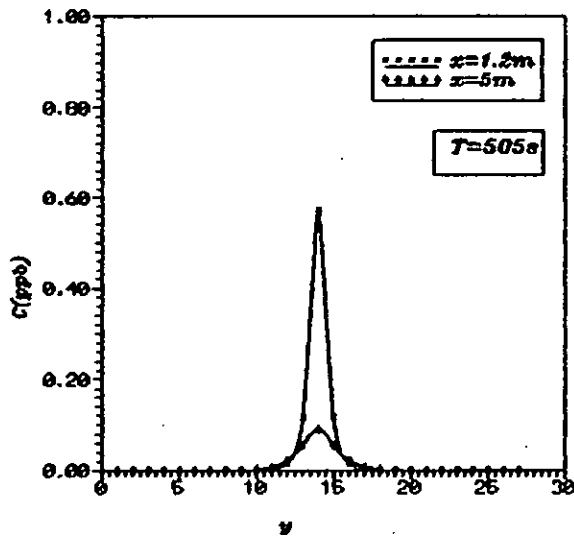
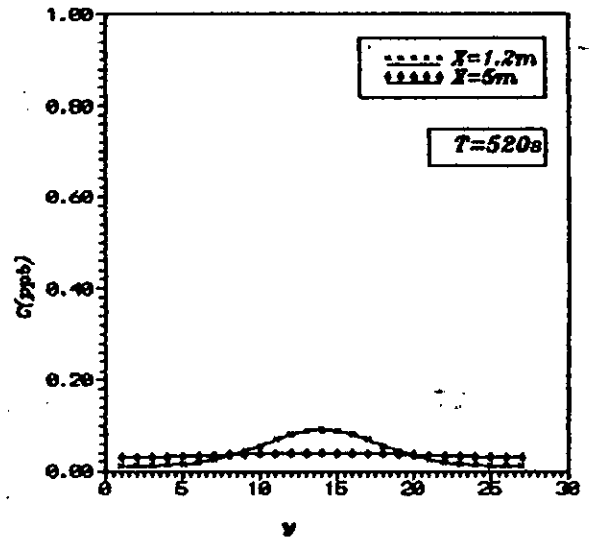
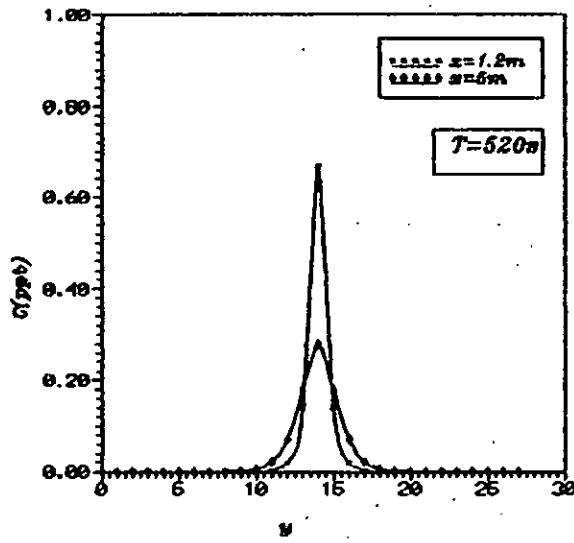
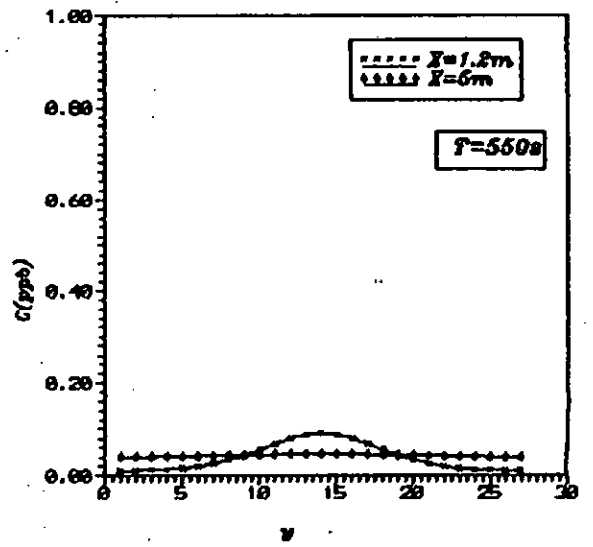
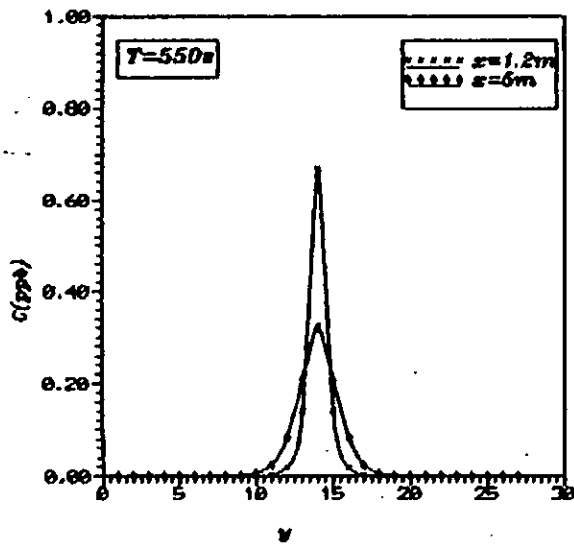


FIG 119: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE Y A LA POSITION  $x=1.5m$  A L'AVANT DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANT ET DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT  $C_1$  A L'ENTREE DU CANAL



a/ Coefficients de dispersion= 0.001

b/ Coefficients de dispersion= 0.05

FIG 7420: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE Y A LA POSITION  $X=1.2m$  ET  $X=5m$  A L'AVAL DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANT ET DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT CT A L'ENTREE DU CANAL

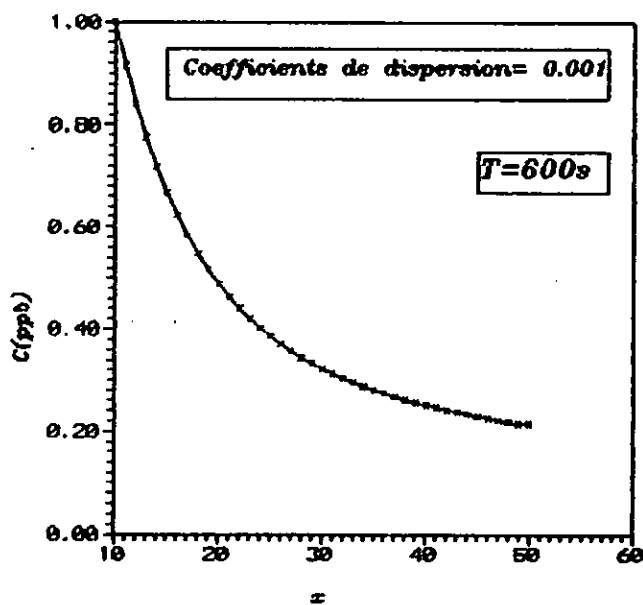
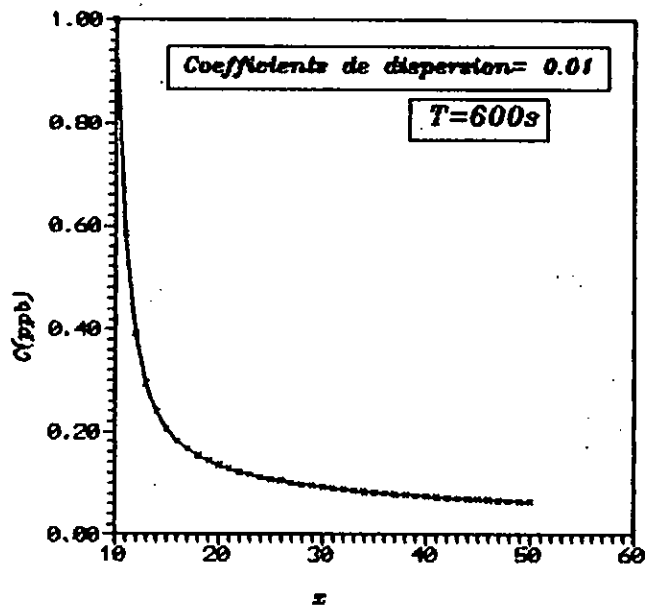
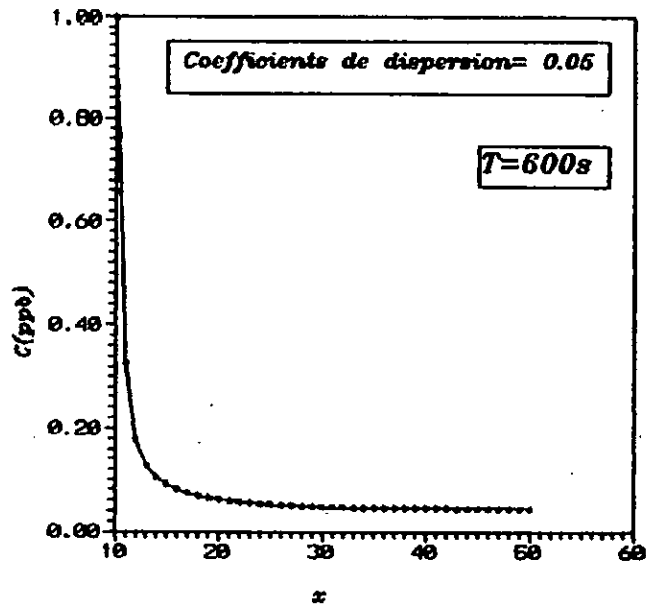
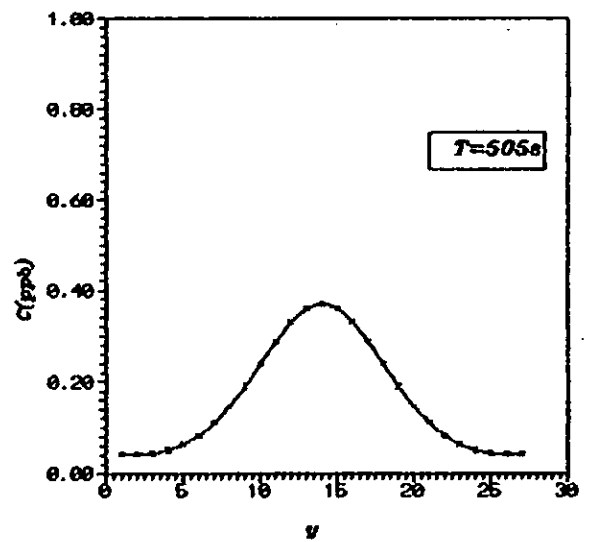
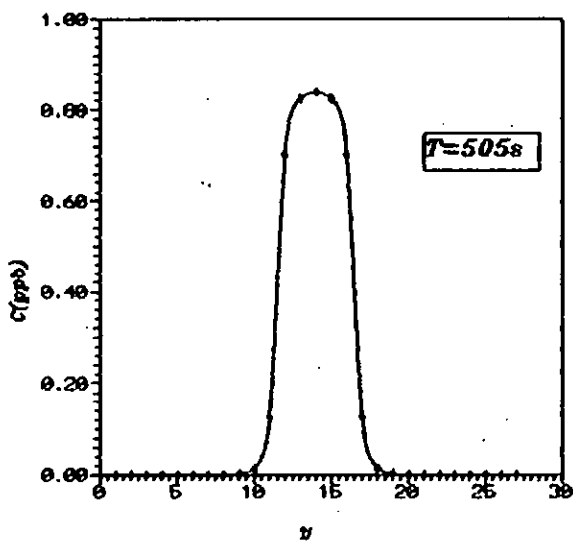
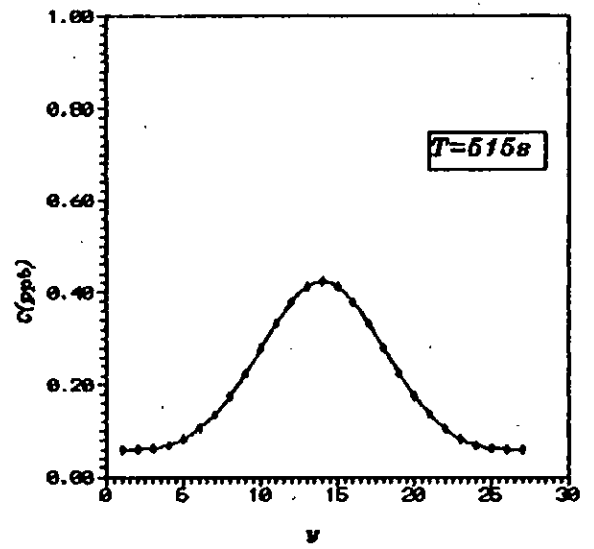
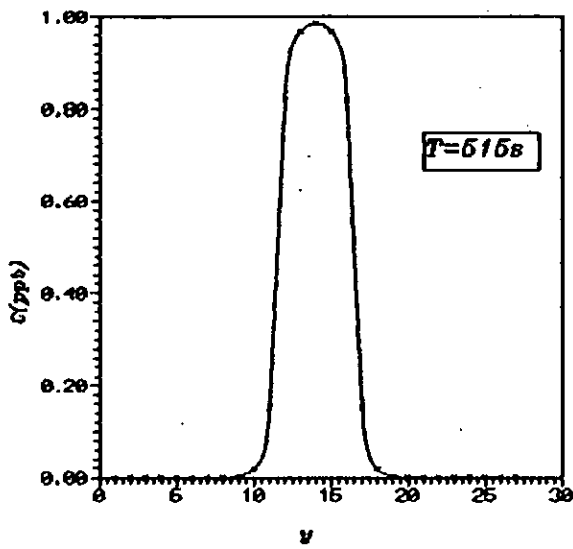
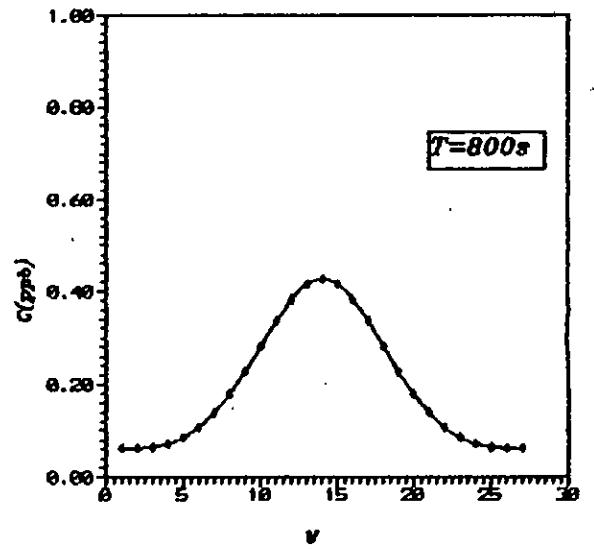
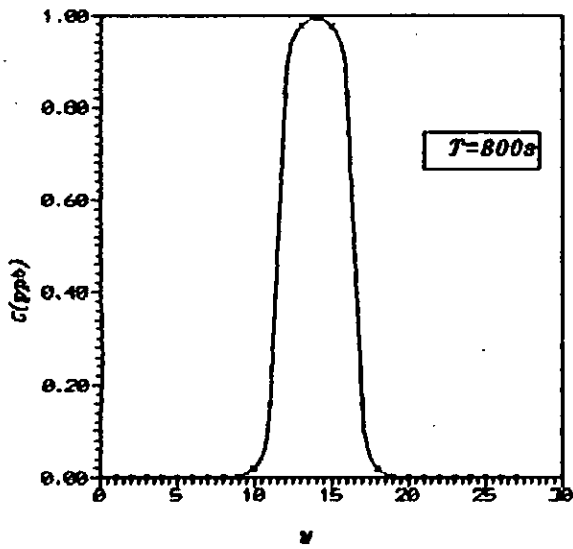


FIG 7121: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE X A T=600s ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION: DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT CT A L'ENTREE DU CANAL



a/ Coefficients de dispersion=  $0.001\text{m}^{*2}/\text{s}$

b/ Coefficients de dispersion=  $0.05\text{m}^{*2}/\text{s}$

FIG 7122: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE Y A LA POSITION  $X=1.2\text{m}$  A L'AVAL DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANT ET DANS LE CAS D'UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL  
 a/ coefficients de dispersion= $0.001\text{ m}^{*2}/\text{s}$   
 b/ coefficients de dispersion= $0.05\text{ m}^{*2}/\text{s}$



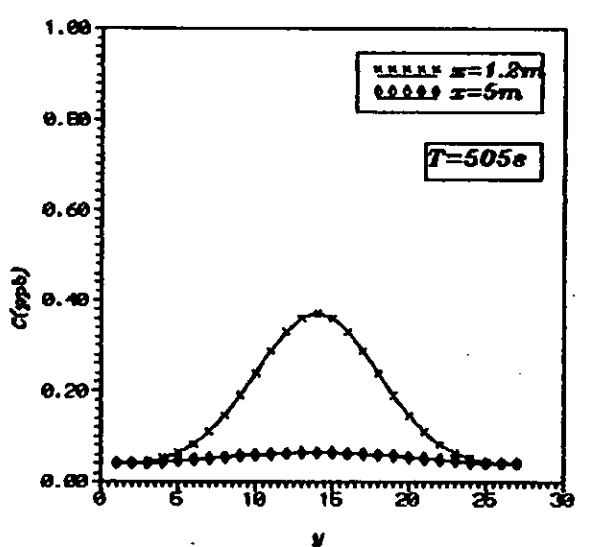
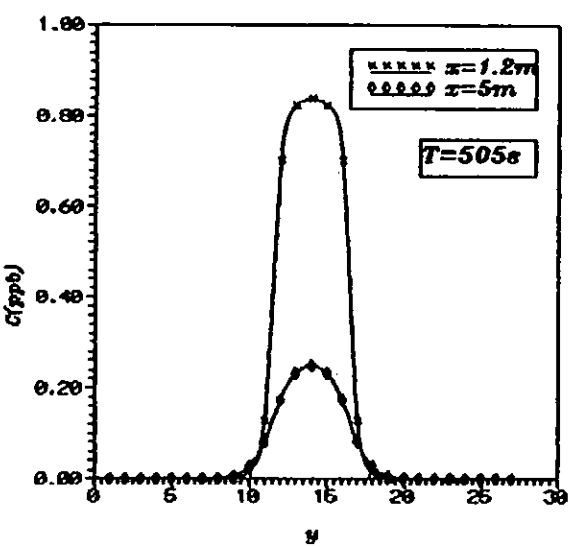
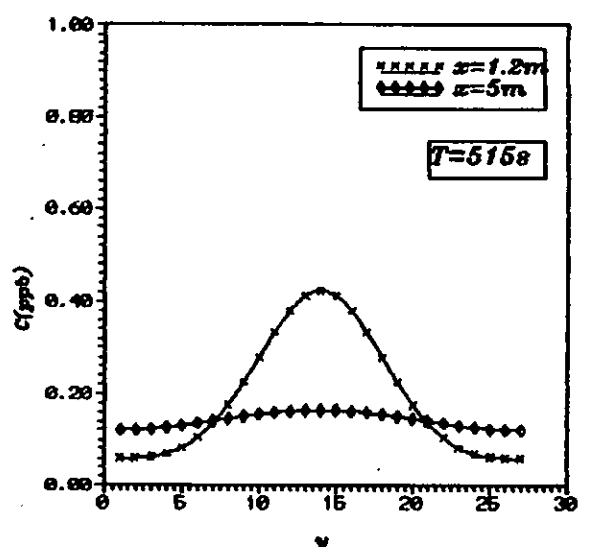
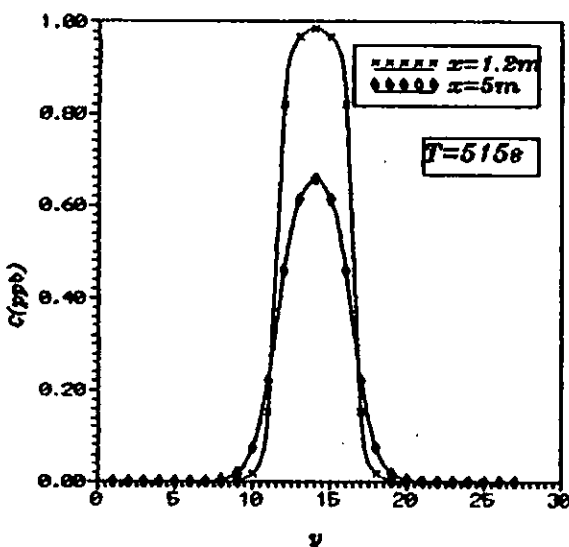
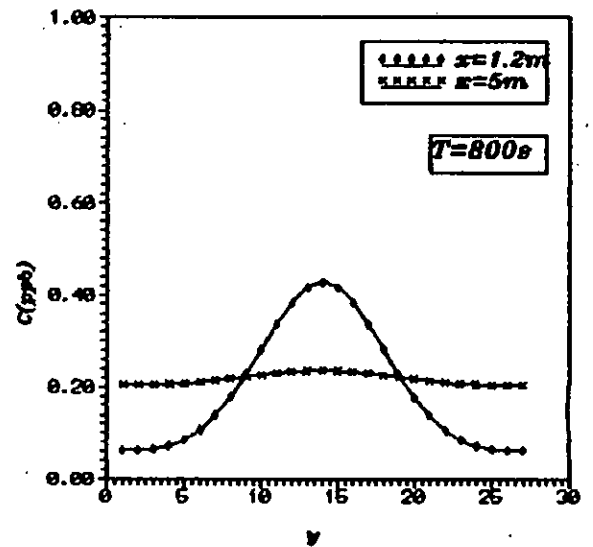
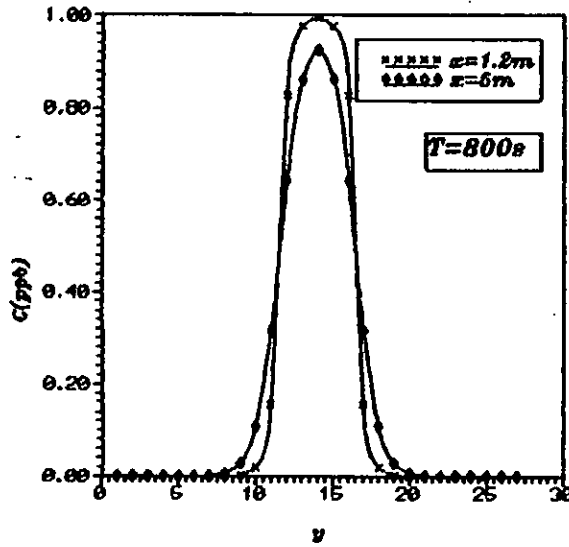


FIG 7423: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE Y A LA POSITION X=1.2m ET X=5m A L'AVANT DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANTS ET DANS LE CAS D'UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL  
 a/ coefficients de dispersion=0.001 m<sup>2</sup>/s  
 b/ coefficients de dispersion=0.05 m<sup>2</sup>/s

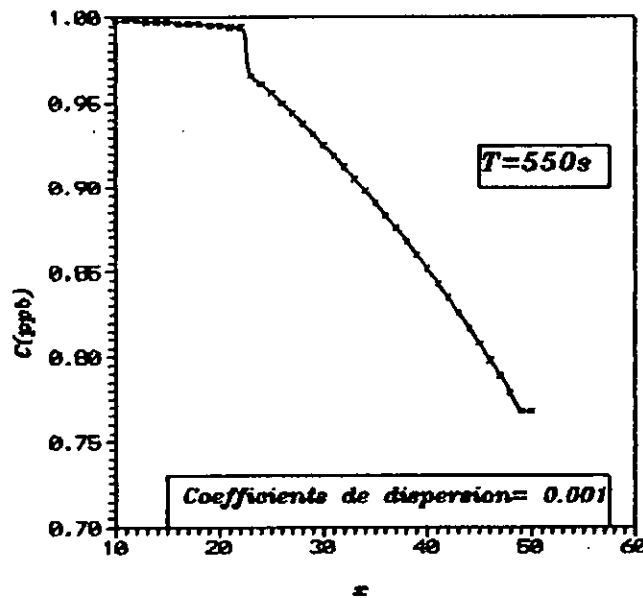
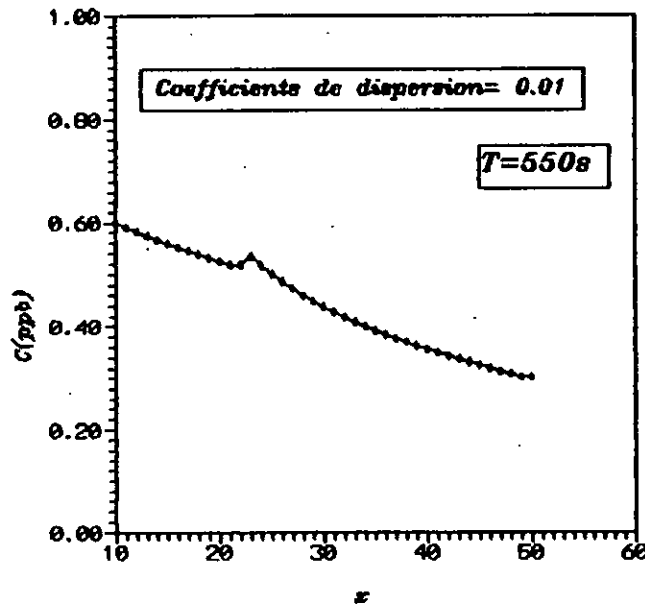
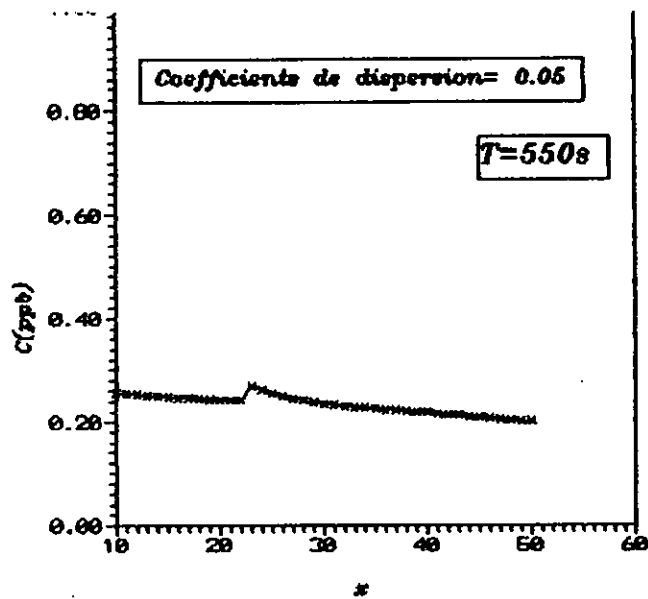


FIG 7t24: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE X A T=550 ET POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE DISPERSION DANS LE CAS D'UN REJET PLAN SUR UNE CERTAINE LARGEUR DU CANAL

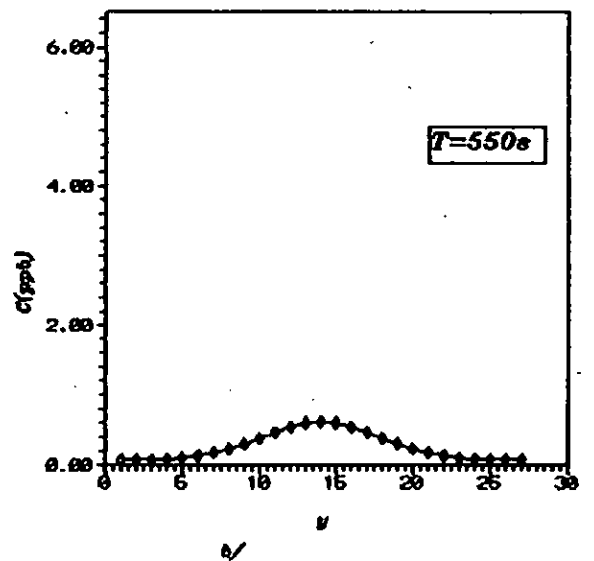
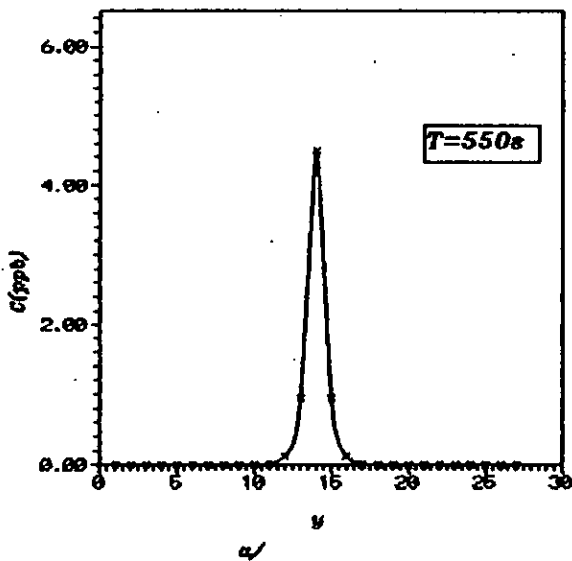
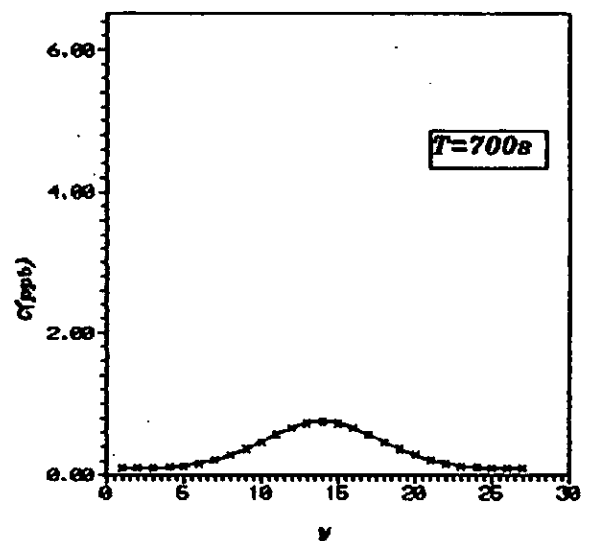
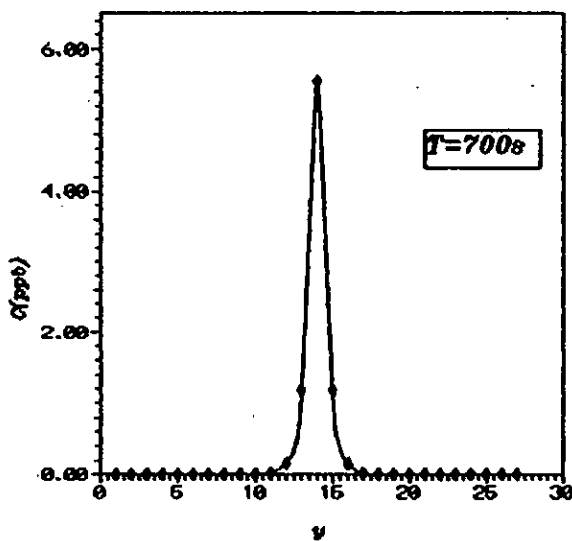
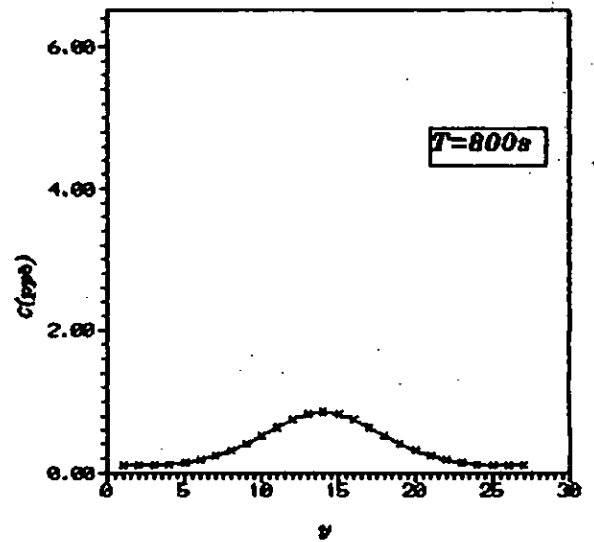
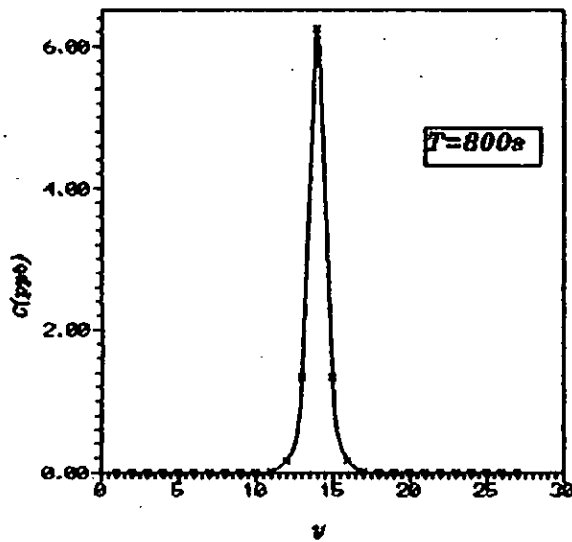


FIG 7426: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE  $y$  A LA POSITION  $X=1.2m$  A L'AVAL DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANT ET DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT VARIANT DANS LE TEMPS:  
 $a$ /COEFFICIENTS DE DISPERSION= $0.001m^{**2}/s$   
 $b$ /COEFFICIENTS DE DISPERSION= $0.05m^{**2}/s$

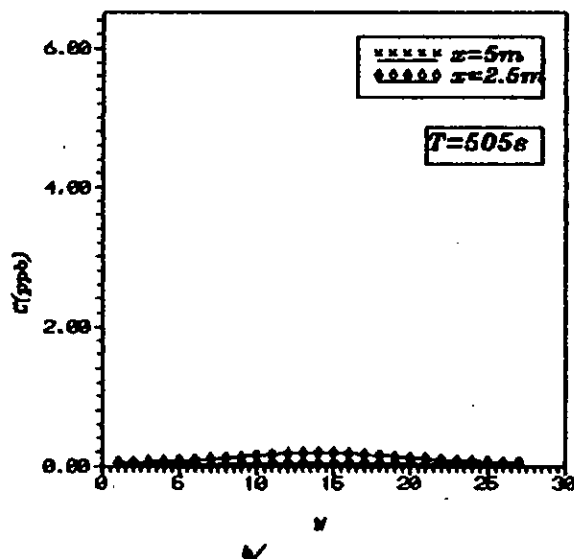
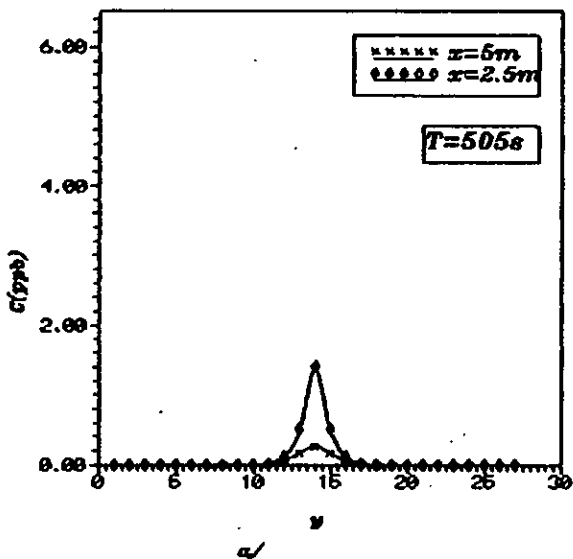
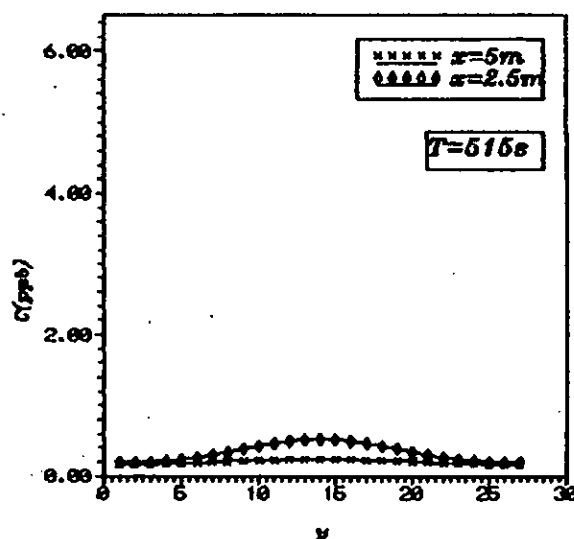
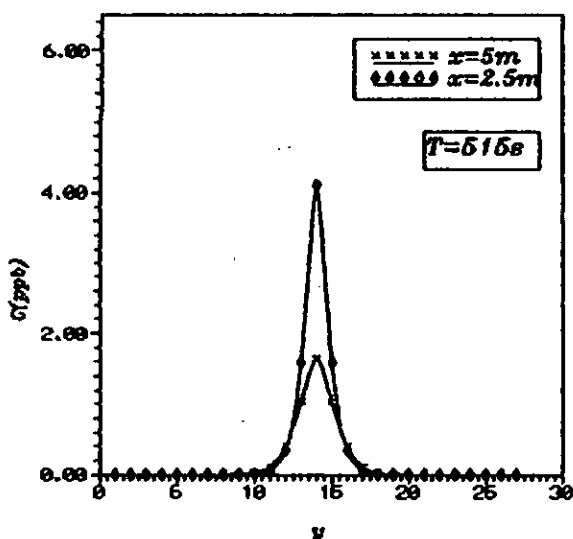
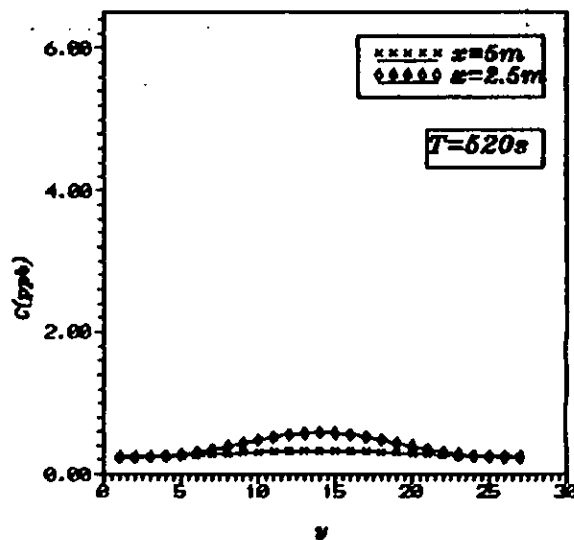
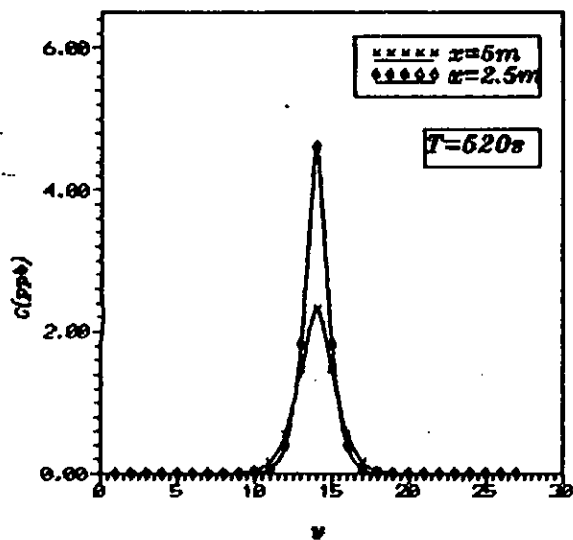
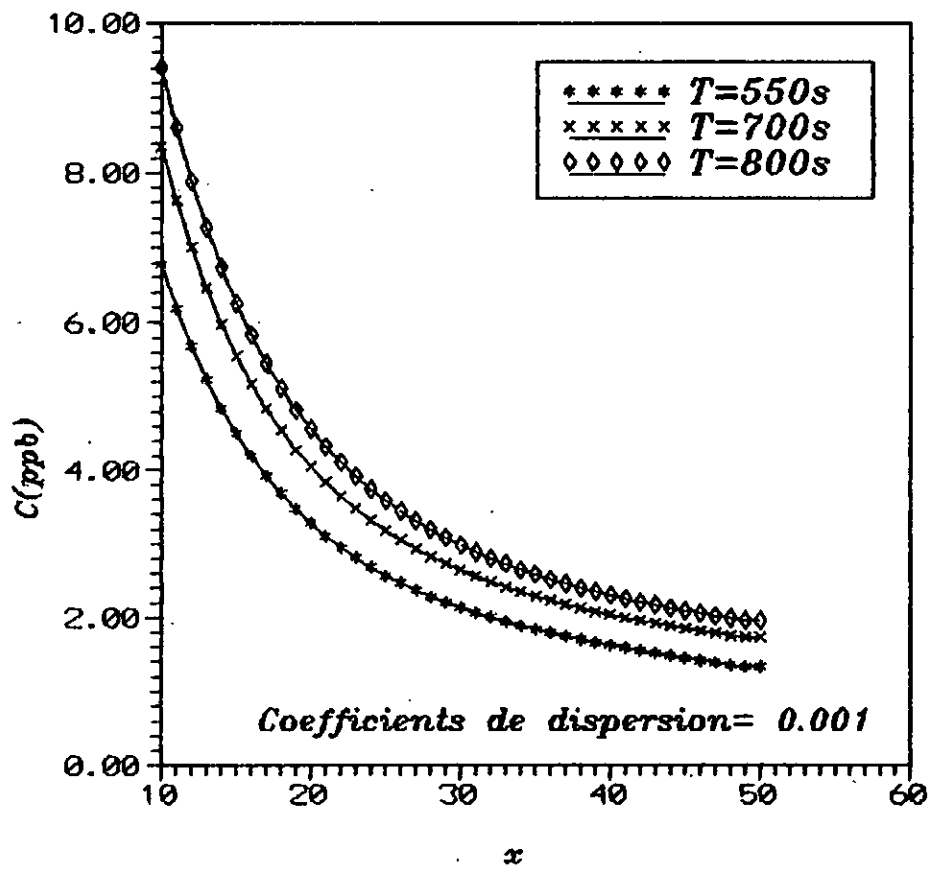
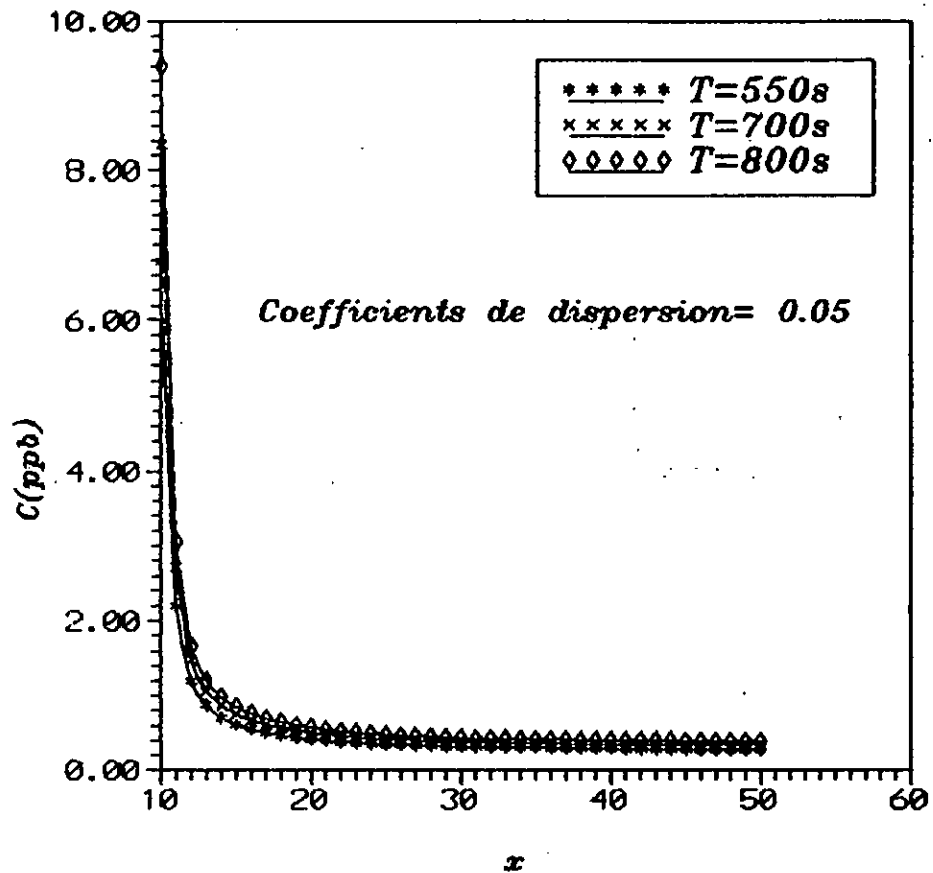
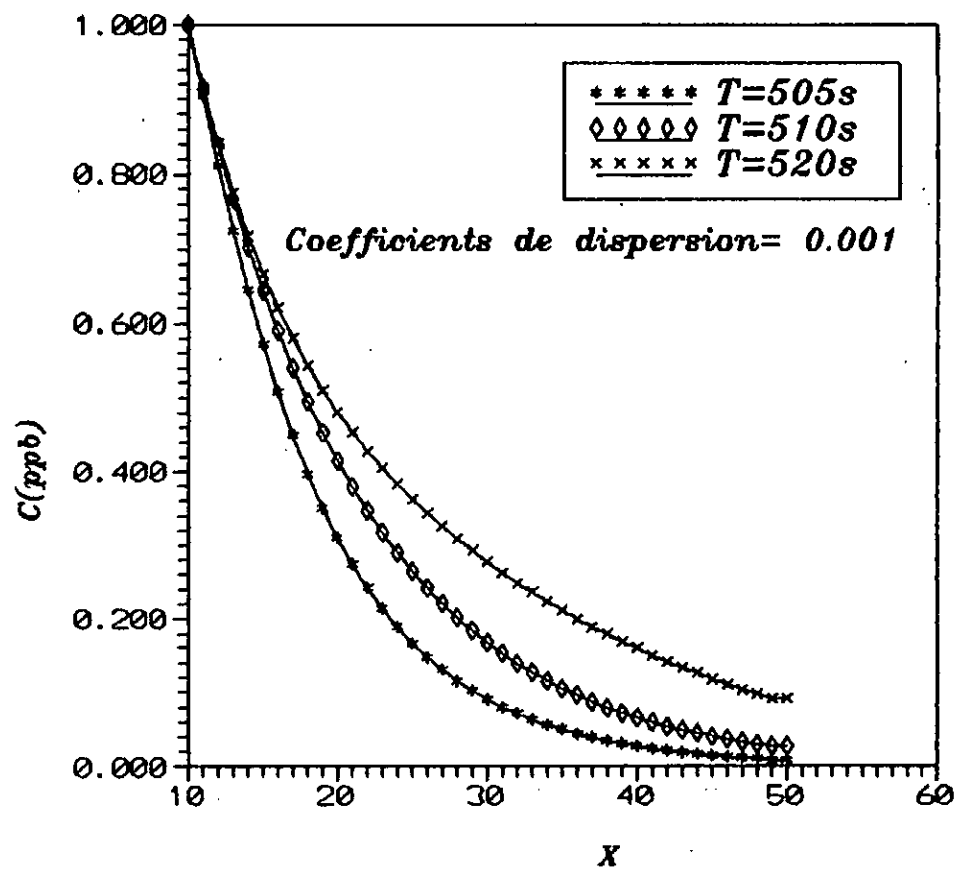
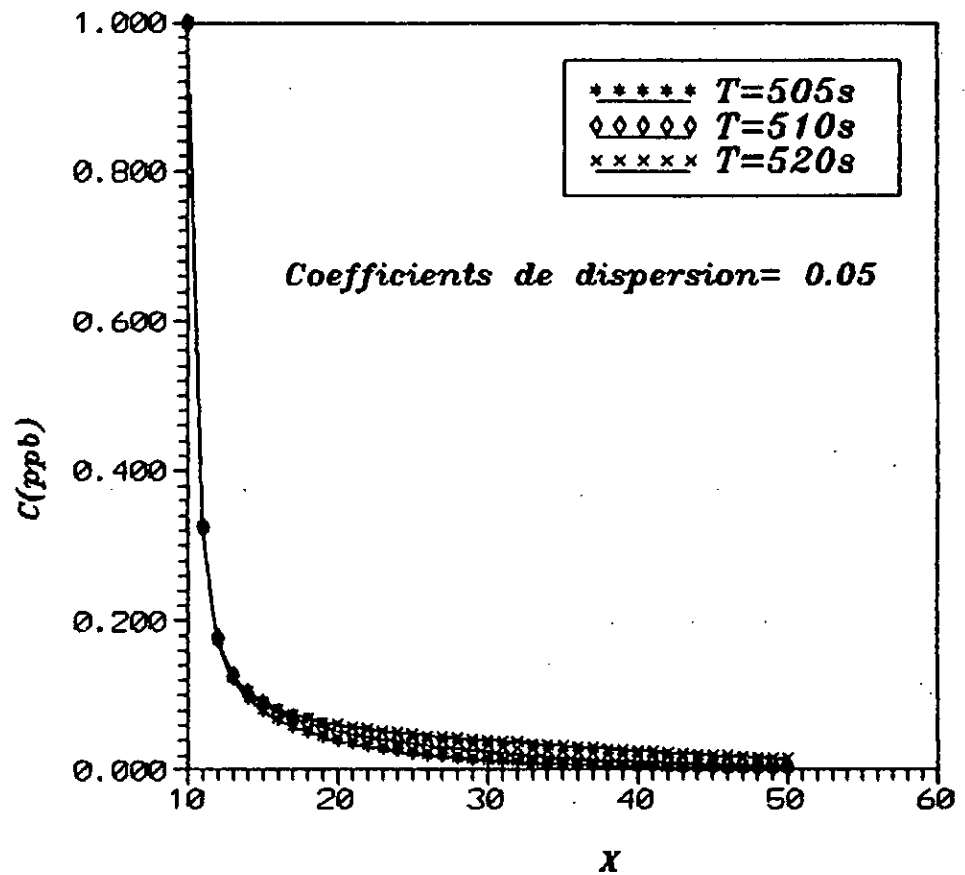


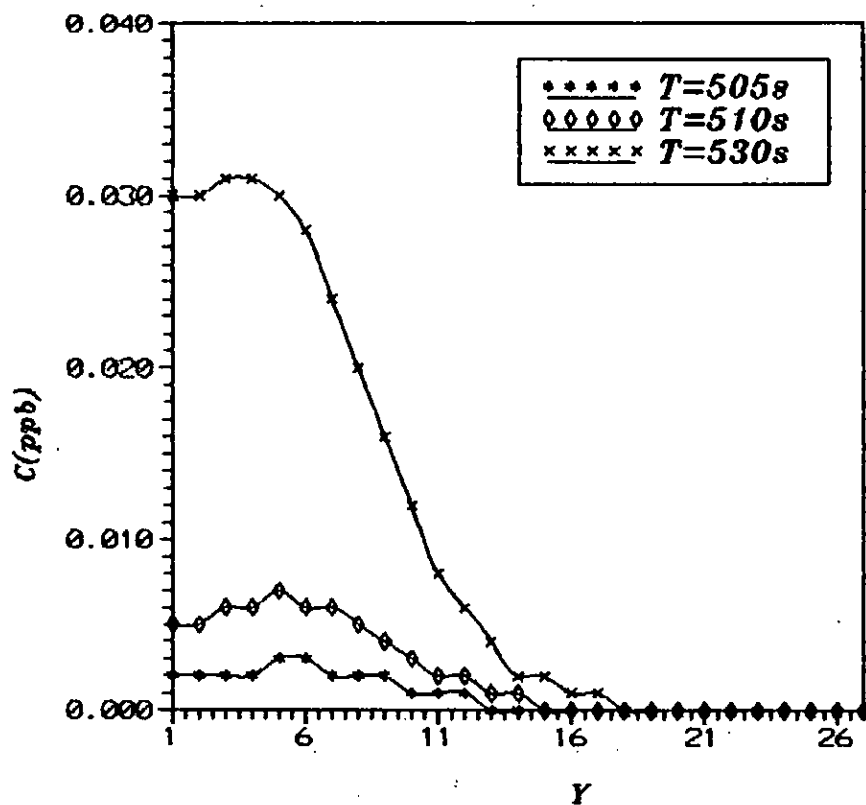
FIG 7126: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE Y A LA POSITION X=2.5m ET X=5m A L'AVANT DU REJET POUR DIFFERENTS INSTANTS ET DANS LE CAS D'UN REJET EN UN POINT VARIANT DANS LE TEMPS:  
 $\alpha$ /COEFFICIENTS DE DISPERSION=0.001m<sup>2</sup>/s  
 $\delta$ /COEFFICIENTS DE DISPERSION=0.05m<sup>2</sup>/s



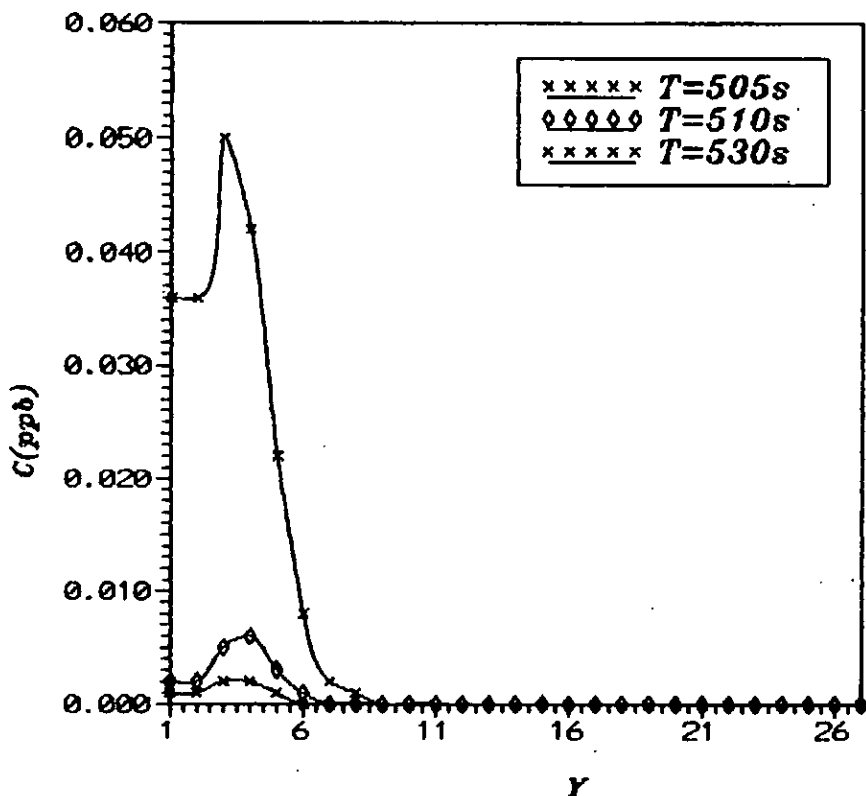
**FIG 7127: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE X AUX INSTANTS  $T=550s, T=700s$  ET  $T=800s$  DANS LE CAS D'UN REJET EN UN PT VARIANT DANS LE TEMPS**



**FIG 7t28: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE X AUX INSTANTS  $T=505s$ ,  $T=510s$  ET  $T=520s$  DANS LE CAS D'UN REJET EN UN PT CT A L'ENTREE DU CANAL**

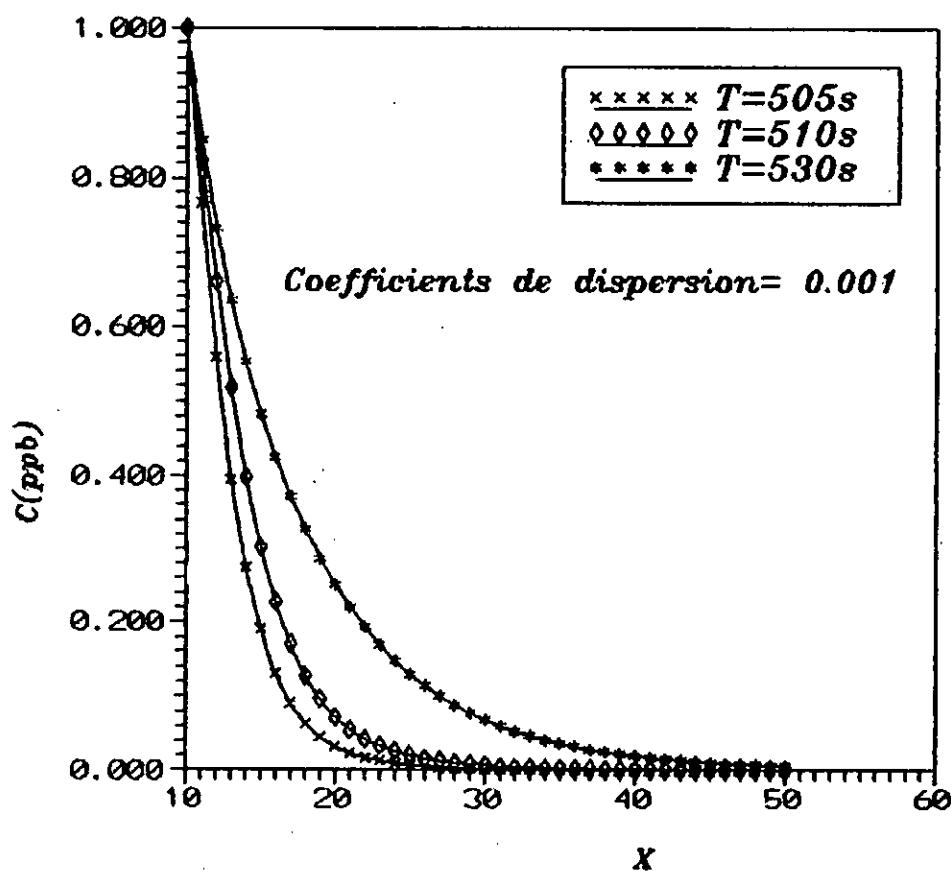
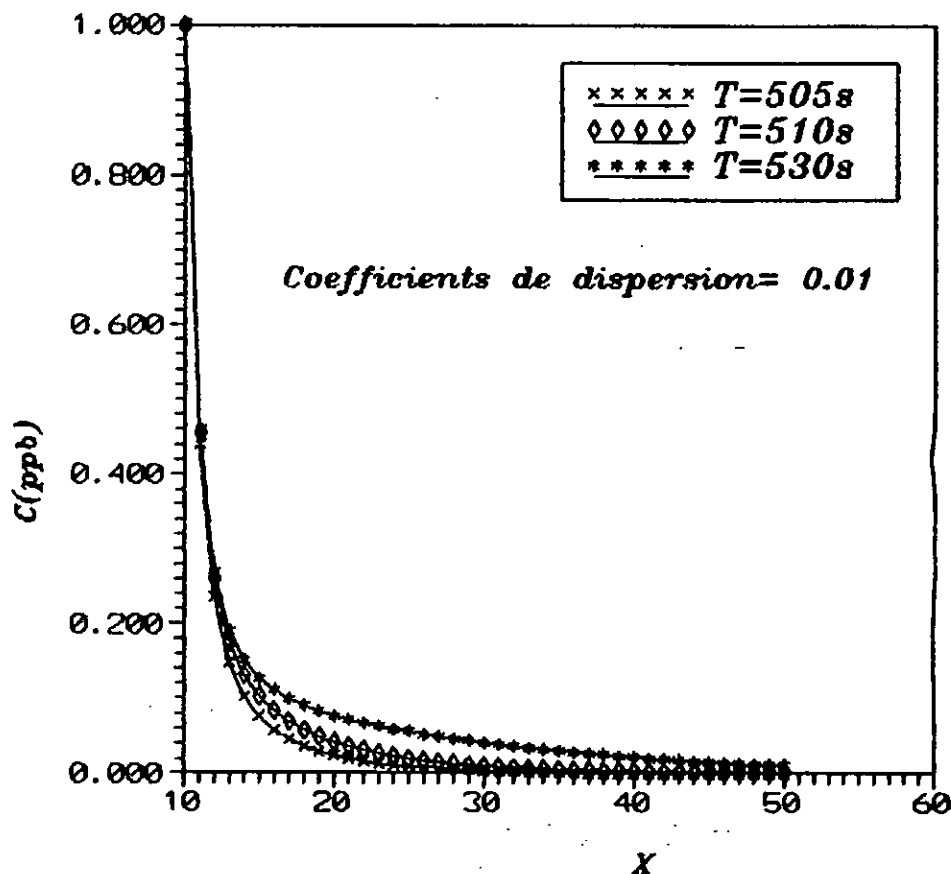


b/ Coefficients de dispersion= 0.01



a/ Coefficients de dispersion= 0.001

FIG 7129: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE  $Y$  A LA POSITION  $X=6m$  A L'AVAL DU REJET AUX INSTANTS  $T=505s, T=510s$  ET  $T=530s$  DANS LE CAS D'UN REJET EN UN PT CT AU NIVEAU DE LA PAROI



**FIG 7430: VARIATION DE LA CONCENTRATION DE POLLUANTS EN FONCTION DE X AUX INSTANTS  $T=505s$ ,  $T=510s$  ET  $T=530s$  DANS LE CAS D'UN REJET EN UN PT CT AU NIVEAU DE LA PAROI.**



## Conclusion

Les différents essais effectués dans le cadre de cette étude, nous permettent de conclure les points suivants:

- le schéma est stable quelques soient le pas de temps et les pas d'espace ce qui est valide puisque notre schéma est implicite;
- la solution convergée est indépendante des valeurs initiales ou supposées;
- le choix des coefficients de sous-relaxation  $\alpha_1=0.5$  et  $\alpha_2=0.8$  permet d'assurer la convergence;
- nos résultats Hydrodynamiques s'accordent bien avec la réalité. Dans le cas d'un canal symétrique nous faisons; le calcul de la moitié du canal et le reste est déduit par symétrie.

Dans le cas du modèle transport, nous en déduisons:

- qu'à partir des relations  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  et  $\epsilon_z$  le frottement de l'eau contre les limites solides est responsable de la turbulence et cause la diffusion;
- qu'à partir d'un certain instant, la variation de la concentration en tout point devient négligeable. Nous obtenons les conditions permanentes pour tout le canal;
- que l'augmentation des coefficients de dispersion selon x et y facilite la dispersion dans le temps et l'espace;

- que la variation de la concentration de polluants en fonction de y et en fonction du temps suit la loi Gaussienne.

Des expériences réalisées par divers chercheurs ( Fischer, Godofrey, ...) ont également abouti au même résultat (voir annexe);

- que dans le cas d'un canal symétrique, nous pouvons faire le calcul de la moitié du canal et en déduire le reste par symétrie;
- les concentrations maximales et minimales dans l'espace et le temps ce qui nous permet de positionner une prise par rapport à un rejet quelconque;

Le modèle de calcul développé s'avère utile pour l'étude:

- des rejets thermiques pour le positionnement de la prise d'eau par rapport au rejet afin d'éviter la recirculation dans le circuit de refroidissement des centrales thermiques. Nous rappelons que le but de l'étude est de comparer les températures de l'eau initiale au niveau de la prise et après rejet;
- de recirculation de la saumure dans les projets de dessalement;
- du transport des sédiments plus spécialement les matériaux fins et cohésifs;
- de la qualité de l'eau en rapport avec les points de décharge des eaux usées et des sources de pollution non ponctuelles.

## Liste de références

[1] Mahmood, K. ,and.Yevjevich.

"Unsteady flow in open channels",  
Water resources publications (1975).

[2] KW. Chan, J.H. Lee.

"Mathematical modelling of shing Mun river"  
Network adv water resources, vol 14, N°3, (1991).

[3] J.A.Cunge, F.M.Holly, J.R. A.Verwey

"Practical aspects of computational rivers hydraulics"  
Publications Pitman (1980)

[4] J.Kuipers. and. C.B Vreugdenhil.

"Calculations of two dimensional horizontal flow"  
Report S 163 part 1 Delph hydraulic laboratories (1973)

[5] Katapodes N. and. Strelkoff T

"Computing two-dimensional dam-break flood waves",  
Journal of the hyd div, ASCE 104 (9), PP 1269-1288, (1978).

[6] Gary A. Sod

"Numerical methods in fluid dynamics"  
Cambridge university publications (1985).

[7] Raymond .S. Chapman and Chin-y. Kuo

"Application of the two-equation K-ε turbulence model to a two dimensional, steady, free surface flow problem with separation (schema quick de Leonard).International journal for numerical methods in fluids, vol5, 257-268 (1985)

[8] Jean-pierre Benqué, Jean. A. Cunge, H.ASCE, Jacques Feuillet, Alain Hauguel, and Forrest, M Holly, Jr, M.ASCE

"New method for tidal current computation"  
Journal of the waterway, port, coastal and ocean division, proceedings of the American society of civil engineers, vol 108, N°ww3 pp 396 - 417 August, (1982).

**[9] Reinaldo Garcia et Rene Kahawita**

"Numerical solution of the St.Venant equations with the Mac-Cormack finite difference schema"  
International Journal for numerical methods in fluids  
vol 6, pp 259 - 274, (1986).

**[10] P.Wang. et R.Kahawita.**

"A two dimensionnal numerical model of estuarine circulation using cubic splines canadian journal of civil engineering  
vol 10, Number 1 pp 116 - 124, (1983)

**[11] Patankar S.V.**

"Numerical heat transfert and fluid flow" (1980)

**[12] S.V. Patankar and . D.B Spalding**

"A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic-flows  
Jnt . J. heat mass transfer  
vol 15, pp 1787 - 1806 (August 1971)

**[13] R. Benyedder**

"Etude de la convection naturelle dans une cavité partitionnée"  
Thèse de master A L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL (1991).

**[14] Fischer, H.B.,**

"The mechanisms of dispersion in natural streams"  
hydrol. div, proc. ASCE 93 (Hy6) : pp 187 - 216 (1967)

**[15] Taylor. G.**

"The dispersion of matter in turbulent flow through  
a pipe proc. R. Soc. London Ser A, 223 : pp 446-468 (1954)

**[16] Bath, et al**

"Concentration profiles downstream from instantaneous pollution loadings J.water pollut. control.fed.,  
42 : pp 582-595 (1970)

**[17] Neely, W.B.,**

"Mathematical models predict concentration time profiles resulting from chemical spill in river environ. sci technol, 10 : pp 72-76 (1976)

[18] Chapman, B.M.

"Dispersion of soluble pollutants in non-uniform rivers,  
II. application to experimental results  
J.Hydrol, 40 : pp 153-163 (1979).

[19] Christopher G.Koutitas.

"Elements of computational hydraulic"  
chap 6 Advective diffusion and dispersion

[20] Fukuoka, S. , and Sayre, W.W.

"Longitudinal dispersion in sinuous channels"  
J.hydr.div, ASCE, 99 (1), pp 195-217 (1973).

[21] Valentine, E.M., and wood, I.R.

"Longitudinal dispersion with dead zones"  
J.hyd.div. ,ASCE, 103 (9), pp 975-990 (1977).

[22] Beltaos, S.

"Longitudinal dispersion in rivers"  
J.hyd.div. ,ASCE, 106 (1),  
pp 151-172 (1980)

[23] Terragni et Salomone,

"A previsional model for reno river water quality"  
proc. 2nd.Int. conf. conf on the state of the art in ecological  
modeling, international society for ecological modeling,  
pp 539-554 (1980)

[24] Chapman, B.M.

"Natural simulation of the transport and speciation of non  
conservative chemical reactions in rivers"  
water resource. res 18 (1), pp 155-167 (1982).

[25] Koussis, et al.

"Pollution routing in streams"  
J.hydr.engrg, ASCE, 109 (12), pp 1636-1651 (1983).

[26] Beer, T., and Young, P.C

"Longitudinal dispersion in natural streams"  
J.env.engrg, ASCE, 109 (5), pp 1049-1067 (1983).

[27] MC. Bribe, G.B., and Rutherford., J.C.

"Accurate modeling of river pollutant transport"  
J.env.engrg. ASCE, 110 (4), pp 808-827 (1984).

[28] El Hadi, et al.

"River mixing a state of the art report",  
can. J.civ.engrg, 11 (3), pp 585-609 (1984).

[29] Siemons, J.

"Numerical methods for the solution of diffusion-advection  
equations"  
report 88, Delft hydr. lab. Delft the Netherlands (1970)

[30] Akhtar, W.

"Study of mixing in natural streams and air agitated tanks"  
thesis presented to the university of windsor, windsor, ontario,  
canada, in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
doctor of philosophy (1978).

[31] MC. Corquodale, et al.

"Transport of pollutants in natural streams"  
Can. J.Civ. engrg. 10 (1), pp 9-17 (1983).

[32] Yotsukura, N., and Sayre, W.W.

"Transverse mixing in natural streams"  
water resour. res, 12 (4), pp 695-704 (1976)

[33] Lau, Y.L, and Krishnappan, B.G.

"Modelling transverse mixing in natural streams"  
J. hydr.div, ASCE, 107 (2), pp 209-226 (1981).

[34] Somlyody, L.

"An approach to the study of transverse mixing in streams"  
J.hydr.res, 20 (2), pp 203-220 (1982).

[35] Gowda, T.P.H.

"Water quality prediction in mixing zones of rivers"  
J.envir.engrg. ASCE, 110 (4), pp 751-769 (1984).

[36] Verboom, G.K

"Transverse mixing in rivers, a numerical approach"  
report 117, Delft hydr.lab, Delft, the Netherlands (1974).

[37] Holly, F.M., Jr.

"Two dimensional mass dispersion in rivers"  
hydrology papers of colorado state university 78, colorado state  
univ, fort collins, colo. (1975).

[38] Onishi, Y.

"Sediment contaminant transport model",  
J. hydr, div, ASCE, 107 (9), pp 1089-1107 (1981).

[39] Harden and Shen.

"Numerical simulation of mixing in natural rivers"  
J. hydr.div, ASCE, 110 (4), pp 393-408 (1979).

[40] Holly, F.M, Jr, and Nerat, G.

"Field calibration of stream tube dispersion model"  
J. hydr.engrg, ASCE, 109 (11), pp 1455-1470 (1983).

[41] Verboom, G.K.

"The advection-dispersion equation for an anisotropic medium solved  
by fractional-step methods"  
mathematical model for environmental problems.  
(proc.Int.conf.) university of southampton, pp 299-312 (1975)

[42] G.K.Y.Luk, Y.L.Lau, and. W.E.Watt.

"Two dimensional mixing in rivers with unsteady pollutant source"  
Journal of environmental engineering vol 116, N°1 February, (1990).

[43] Lars Ekebjærg and Peter Justesen.

"An explicit scheme for advection-diffusion modelling in  
two-dimensions"  
Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering (ISVA)  
Technical University of Denmark, DK-2800 lyngby, Denmark.

[44] Tawutchai Tingsanchali,

"Stability analysis of two-dimensional deph-averaged model"  
Journal of hydraulic engineering vol 115 N°9 september (1989)

[45] Mixing in rivers.

[46] Patel, M.K. et Markatos, N.C.

"An evaluation of eight discretisation schemas for two-dimensional  
convection-diffusion equation", International journal for numerical  
methods in fluids, vol.6, p129-154, (1980)

[47] Stoker, J.J.

"water waves", publications interscience, New york, (1957).

[48] Daubert, A. et Gaffe.O.

"quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents, la houille blanche,"n°8 (1967)

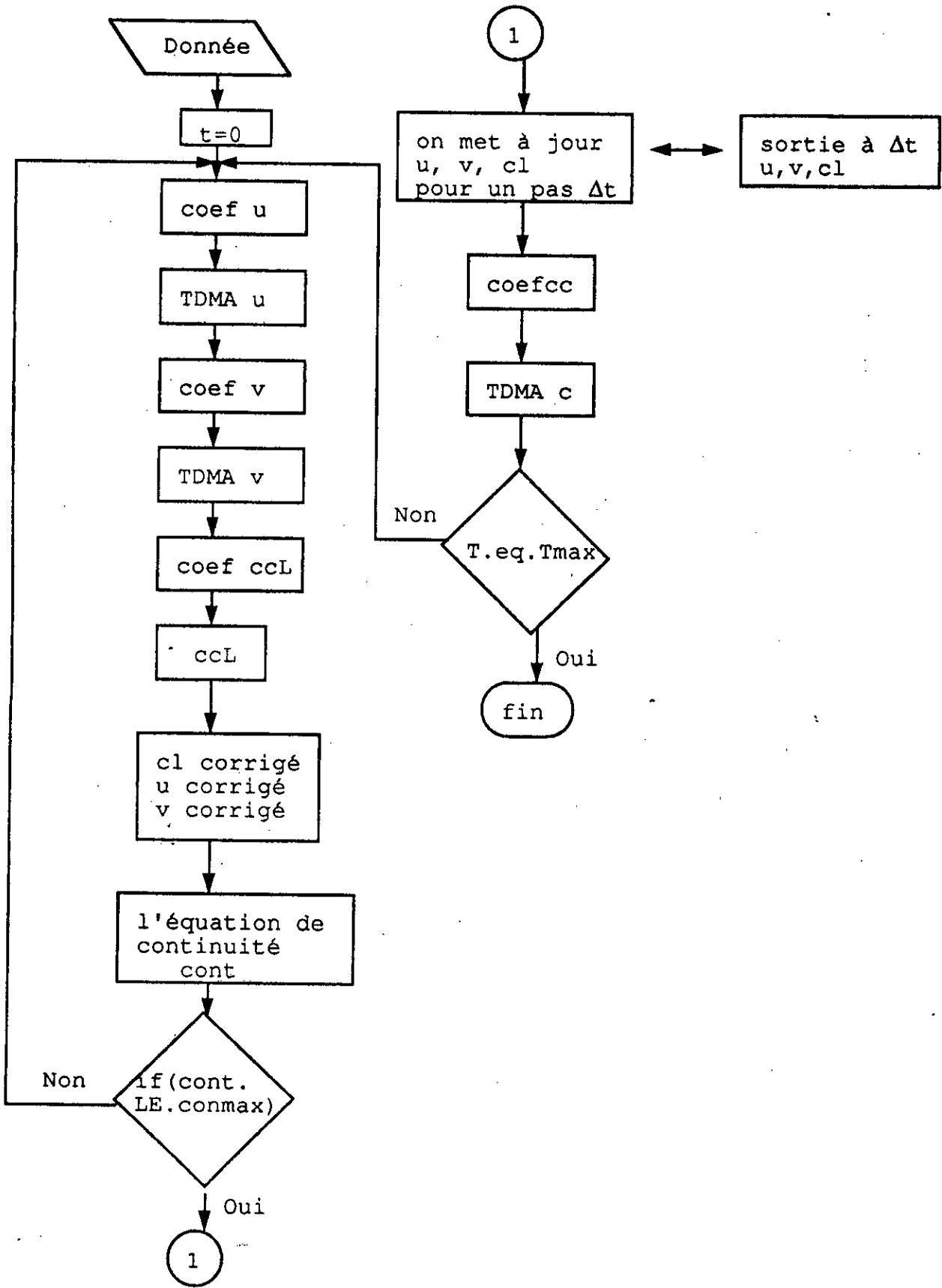
[49] Verboom, G.K, Stelling, G.S, el officier, M.J,

"Boundary conditions for the shallow water equations",  
Engineering Applications of computational hydraulics, vol 1  
edition Pitman, (1982)



# ANNEXE

Organigramme simplifié du modèle Hydrodynamique  
+ modèle Transport



**Donnée** : lecture des données.  
**cœf u** : calcul des coefficients de l'équation (6.8)  
 [voir chap 6.11]  
**TDMA u** : calcul de u en tout point par la méthode de TDMA.  
**cœf v** : calcul des coefficients de l'équation (6.12)  
**TDMA v** : calcul de la vitesse v en tout point par la méthode de  
 TDMA en appliquant l'équation (6.12)  
**cœfccl** : calcul des coefficients de correction de la côte de la  
 surface libre de l'équation (6.21)  
**ccl** : calcul de la correction a donner à la côte de la  
 surface libre en tout point.  
**cl corrigée** : calcul de la côte de la surface libre corrigée.  
**u corrigée** : calcul de la vitesse selon x corrigée  
**v corrigée** : calcul de la vitesse selon y corrigée  
**cont** : calcul de l'équation de continuité en tout point.  
**conmax** : critère d'arrêt du processus itératif.  
**cœf cc** : calcul des coefficients de concentration de polluants  
 en tout point en utilisant l'équation (6.31)  
**TDMA c** : calcul de la concentration de polluants en tout point.

Les détails du programme ne sont pas mentionnés dans l'organigramme  
 tels que les appels aux sous-routines pour les différents cas de rejet  
 et les appels aux programmes qui représentent le champs de vitesses  
 et le panache de polluants.

# RESULTATS EXPERIMENTAUX

