

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

Thème

**Approche Théorique de la Dispersion de
Particules Dans un Milieu Stratifié**

Réalisé par :

ABERBOUR Nabil

Proposé et encadré par :

Dr. B. BENKOUSSAS, MC (A) Ecole Nationale Polytechnique

Dr. A. BOUHDJAR, DR, CDER

En collaboration avec :

Pr. Ph. BOURNOT, Professeur émérite, Université de la Méditerranée Aix Marseille II

Dr. F. CANDELIER, MC, Université de la Méditerranée Aix Marseille II

2010/2011

ملخص :

هذا العمل هو عبارة عن دراسة نظرية ورقمية على ترسب جزيئات كروية صغيرة الحجم في وسط الطبقيّة. لأن هذا الموضوع هو جديد جدا، فإن هذه الدراسة عبارة عن بحث نظري على حركة الجزيئات الصغيرة في وسط متجانس ثم في وسط غير متجانس. ثم المساهمة في حل نظري لمشكلة معينة، بعدها تنفيذ مقارنة عددية، باستخدام MATLAB، ثلاثة نماذج مختلفة لقوة السحب في وسط غير متجانس، و أخيرا تحقيق دراسة عددية ب MATLAB أيضا، على زمن ترسب الجسيمات ذات الأحجام المختلفة التي تتحرك في كلا الوسطين.

الكلمات الرئيسية : متجانسة، الطبقيّة، تعليق الجسيمات السائل، تدفق ستوكس، الترسيب، قوات الهيدروديناميكية، سحب، عدد رينولدز المنخفض

Résumé :

Ce travail est une étude théorique et numérique sur la sédimentation de petites particules sphériques dans un milieu stratifié. Puisque ce sujet est très récent, cette étude consiste à faire une recherche bibliographique sur le mouvement de petites particules dans un milieu homogène ensuite pour un fluide stratifié, puis contribuer à la résolution d'un problème bien particulier, ensuite, réaliser une comparaison numérique, à l'aide de MatLab, de trois modèles différents donnant la force de traînée dans un milieu stratifié, finalement réaliser une étude numérique avec, MatLab également, sur le temps de sédimentation de particules de différentes tailles en mouvement dans les deux milieux.

Mots clés : Milieu homogène, stratification, suspension, particule fluide, écoulement de Stokes, sédimentation, forces hydrodynamique, traînée, faible nombre de Reynolds

Abstract:

This work is a theoretical and numerical study on sedimentation of small spherical particles in a stratified medium. Since this topic is very new, this study is to research literature on the movement of small particles in a homogeneous ambient then a stratified fluid, and contribute to solving a particular problem, then perform a numerical comparison, using MatLab, of three different models giving the drag force in a stratified fluid, finally achieving a numerical study with, MatLab too, on the time sedimentation of particles of different sizes moving in both ambient.

Keywords: homogeneous ambient, stratification, suspension, fluid particle, Stokes flow, sedimentation, hydrodynamic forces, drag, low Reynolds number.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce projet de fin d'études, il m'est indispensable de m'acquitter d'une dette de reconnaissance auprès de toutes les personnes dont l'intervention a favorisé son aboutissement.

Je remercie Mr. B. Benkoussas et Mr. A. Bouhdjar pour m'avoir sélectionné pour ce stage, pour avoir cru en moi et pour leurs soutiens et leurs conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr. Ph. Bournot pour m'avoir accueilli au sein de l'UNIMECA, pour la confiance qu'il m'a accordée et pour m'avoir permis de réaliser ce stage dans de si bonnes conditions.

Un grand merci à Mr. F. Candelier pour son encadrement remarquable et pour son aide et ses conseils avisés.

Je remercie les membres du jury, Mr. S. Larbi et Mr. M. Boubakeur pour avoir pris le temps et le soin de lire ce rapport.

Un grand merci également à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Sans oublier bien sûr ma famille, mes amis et mes collègues de l'ENP ainsi ceux de MED-ACCUEIL pour leurs soutiens durant mon séjour à Marseille.

A mes parents

A mes frères

et à tous mes amis

TABLE DES MATIERES

Résumés	i
Remerciements	ii
Dédicace	iii
Table des matières	v
Liste des figures	iiiv
Liste des tableaux	xi
Introduction générale	2
 CHAPITRE 1 : ETUDE SUR LES ACTIONS HYDRODYNAMIQUES EXERCEESSUR UNE PARTICULE SOLIDE SPHERIQUE DANS UN MILIEU HOMOGENE	
1.1. Introduction	5
1.2. Mouvements stationnaires	7
1.2.1. Sphère solide en écoulement uniforme	7
1.2.2. Sphère solide en écoulement non uniforme	9
1.2.3. Sphère solide en rotation dans un fluide au repos	10
1.2.4. Sphère solide en translation et en rotation simultanées	11
1.3. Mouvements instationnaires	14
1.3.1. Ecoulements uniformes	14
1.3.2. Ecoulements non uniformes	21
 CHAPITRE 2 : ETUDE DE LA SEDIMENTATION D'UNE PARTICULE SPHERIQUE DANS UN MILIEU STRATIFIE	
2.1. Introduction	27
2.2. Formulation du coefficient de traînée	28
2.3. Méthodes expérimentales et numérique	29
2.3.1. Mesure de traînée par la photographie à laps de temps	29
2.3.2. La visualisation du sillage par la schlieren synthétique	31
2.3.3. Modèle numérique	32

2.4. Résultats	35
CHAPITRE 3 : APPROCHE THEORIQUE ET ETUDE NUMERIQUE	
3.1. Introduction	46
3.2. Résolution analytique d'un écoulement de perturbations	46
3.3. Comparaison de la force de traînée de trois modèles	48
3.3.1. Modèle de Yick et al.	49
3.3.2. Modèle de Candelier	50
3.3.3. Modèle de Zvirin et Chadwick	50
3.3.4. Procédure de comparaison	51
3.4. Temps de sédimentation	52
3.4.1. Position du problème	52
3.4.2. Equation de mouvement	54
3.4.3. Détermination des paramètres du problème	55
3.4.4. Procédure de résolution	57
CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS	
4.1. Résultats de la comparaison	59
4.2. Le temps de sédimentation	64
4.2.1. Milieu homogène	64
4.2.2. Milieu stratifié	68
Conclusion générale	74
Références bibliographiques	77
Annexes :	
A. Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques	80
B. Harmoniques sphériques	81
C. Fichiers M-file MatLab	82

LISTE DES FIGURES

Figure (1.1) : Configuration d'illustration	5
Figure (1.2) : Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds [1]	9
Figure (1.3) : Ecoulement de cisaillement autour d'une sphère	12
Figure (1.4) : Coefficient de portance calculé par Dandy & Dwyer (1990) pour $G^* = 0,1$	13
Figure (1.5) : Coefficient de traînée calculé par Dandy & Dwyer (1990) pour $G^* = 0,1$	14
Figure (1.6) : Coefficients de traînée moyens de la sphère dans un écoulement pulsé pour différentes fréquences de pulsation. Tsuji & al. (1991)	19
Figure (1.7) : Erreur relative entre le coefficient de traînée calculé par Chang et Maxey et celui de Basset $Re = 0,1$ et $Sl = 10$ [1]	20
Figure (1.8) : Comparaison des coefficients de traînée entre la simulation numérique de Chang & al. (1994), Odar & al. (1964) et Basset (1888) pour $Re = 16,7$ et $Sl = 0,625$ [1]	20
Figure (1.9) : Ecoulement en présence de l'inclusion	22
Figure (1.10) : Ecoulement non perturbé	22
Figure (2.1) : a. Schéma de la sédimentation d'une sphère dans un fluide linéairement stratifié	28
Figure (2.2) : a. La vitesse de sédimentation U en fonction de la profondeur z pour 10 répétitions pour $a = 390 \mu m$ et $N = 2,92 s^{-1}$. b. Les paramètres du régime exploré expérimentalement, montrant les termes Re et Fr^{-1}	31
Figure (2.3) : Coefficient de traînée homogène	34
Figure (2.4) : Coefficients de traînée en fonction du nombre de Froude (a) et de Richardson	36
Figure (2.5) : a. La pression b. Le cisaillement sur la surface latérale de la sphère $Re = 0,05$ et différents nombre de Richardson	37
Figure (2.6) : Visualisation d'une schlieren synthétique qualitative pour $a = 390 \mu m$ et $N = 1,91 s^{-1}$	38
Figure (2.7) : Champ du contraste de densité pour $Ri = 0,02$	38
Figure (2.8) : Distorsion des isopycnales	38
Figure (2.9) : Champ de contraste de densité, résultats numériques pour $Ri = 0,29$ et $Ri = 1,45$.	39
Figure (2.10) : déplacements vertical (a) et horizontal (b et c) dus à la sédimentation d'une sphère de rayon $a = 390 \mu m$	40
Figure (2.11) : Contraste de densité a. $Re = 0,05$ et $Fr = 0,34$ b. $Re = 0,5$ et $Fr = 1,08$	40

Figure (2.12) : Résultats numériques	41
Figure (2.13) : a. Contraste de densité b. Vitesse verticale du fluide	42
Figure (2.14) : Contraste de densité pour a. $Pr=7$, b. $Pr=100$ et c. $Pr=700$	43
Figure (2.15) : a. Trajectoire d'une particule sphérique de rayon $a = 196 \mu m$ b. Le ratio des temps de sédimentation	44
Figure (3.1) : Sédimentation des suies dans une fumée	52
Figure (3.2) : Distribution de la masse volumique en fonction de la hauteur z	53
Figure (3.3) : Distribution de la température en fonction de la hauteur z	54
Figures (4.1) : Profil du terme β en fonction du nombre de Richardson	60 à 63
Figure (4.2) : Evolution de la hauteur en fonction du temps de sédimentation dans un milieu homogène	65 à 68
Figure (4.2) : Evolution de la hauteur en fonction du temps de sédimentation dans un milieu stratifié	69 à 71

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (1.1) : Corrélations décrivant le coefficient de traînée de la sphère	9
Tableau (3.1) : Dépendance du paramètre correcteur B avec le paramètre de diffusion ζ	51
Tableau (3.2) : Formules et masses volumiques des composants essentiels des fumées	53
Tableau (3-3): Effets de la température sur la viscosité	56
Tableau (4.1) : Nombre de Reynolds et nombre de Richardson correspondant	59
Tableau (4.2) : Vitesses de sédimentation	72

INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté ici, s'inscrit dans le cadre du thème de recherche du mouvement de particules dans les écoulements stratifiés.

L'étude des forces hydrodynamiques qui s'exercent sur une particule évoluant dans un fluide homogène est certainement l'un des sujets les plus anciens de la mécanique des fluides. Aujourd'hui, il y a peu de résultats théoriques et expérimentaux concernant le mouvement des particules lorsque le fluide est stratifié, c'est-à-dire, lorsque sa masse volumique et sa viscosité varient en fonctions des coordonnées de l'espace. Pourtant, les fluides stratifiés sont rencontrés dans de très nombreuses situations, et en particulier, dès que l'on est en présence d'un gradient de température assez significatif.

L'étude de ce type d'écoulement est l'un des problèmes particulièrement difficiles, auquel sont confrontés actuellement, les mécaniciens des fluides, notamment dans la détermination des différentes actions que les particules subissent de la part du fluide afin de prédire les trajectoires qu'elles vont adopter et par conséquent, d'anticiper leur dispersion au sein de l'écoulement.

Les informations que l'on peut tirer de l'étude d'un tel écoulement, s'avèrent cruciales dans plusieurs domaines scientifiques et divers processus industriels, tels que les systèmes en ébullition, les émulsions, la dispersion des polluants dans l'atmosphère, les roches sédimentaires qui constituent la couche la plus superficielle de la terre renferment une quantité exceptionnelle d'informations pour le géophysicien et montrent à quel point le processus de sédimentation façonne notre environnement. Les lacs glaciaires ou les estuaires de fleuves sont soumis à un rythme sédimentaire annuel intense : formation des varves, apparition de lagons...

Lors d'un incendie dans une enceinte fermée, la distribution des fumées se fait d'une manière non homogène, or, les fluides les plus légers ont tendance de monter vers le haut tandis que les plus lourds restent en bas et du coup on aura une stratification de fumées due au gradient de température. Et lors d'une combustion non complète, on aura la formation de suies qui sont des particules à base de carbone imbrûlé qui nuisent le matériel et les équipements. Dans ce contexte, l'objectif poursuivi dans mon stage est de faire une étude bibliographique et théorique sur les modèles de forces hydrodynamiques, ce qui va permettre de déterminer la trajectoire et la dispersion de ces particules dans ce milieu. Pour cela, on assimile les particules de suies à de petites particules sphériques, isolées les unes des autres et électriquement neutres. Aussi, on ne considère que des fluides newtoniens, isothermes et non conducteurs. En d'autres termes, il ne sera donc jamais question de mouvement de particules par thermophorèse ou encore sous l'effet d'un quelconque champ électrique. Par ailleurs, la seule force extérieure qui sera prise en compte sera la force de pesanteur. Comme hypothèse supplémentaire, on ne considère que des situations où les effets d'inertie sont négligeables comparativement aux effets visqueux et où l'écoulement induit est faiblement stationnaire.

Ce type de problème est très récent et reste très difficile à étudier, en effet, beaucoup de phénomènes restent encore incompréhensibles jusqu'à notre heure actuelle, en plus il est très

dur de se mettre dans les mêmes conditions réelles et simuler les différents paramètres de l'écoulement dans le laboratoire.

L'organisation de ce document est faite comme suit :

Dans le chapitre 1, nous effectuons une étude bibliographique, en rappelant quelques définitions et en recensant les travaux antérieurs concernant les actions hydrodynamiques exercées sur des particules solides dans un écoulement à phase dispersée et homogène.

Dans le chapitre 2, nous faisons une étude bibliographique sur la sédimentation de petites particules dans un milieu stratifié et à faible nombre de Reynolds en cherchant une formule générale qui donne le coefficient de traînée dans un tel milieu et par conséquent, la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule.

Dans le chapitre 3, nous présentons une tentative de résolution analytique de la sédimentation d'une particule sphérique en considérant le problème d'un écoulement de perturbations. Ensuite, nous réalisons une comparaison graphique avec MatLab de la force de traînée de trois modèles différents (Yick et al., Zvirin et Chadwick et un modèle proposé par mon tuteur F. Candelier) en étudiant le terme supplémentaire dû à la stratification. Finalement, nous faisons une étude numérique avec MatLab sur le temps de sédimentation de particules sphériques de différentes tailles, dans un premier temps, nous considérons le milieu homogène et dans un second, le fluide est considéré stratifié.

Dans le chapitre 4, nous résumons les résultats trouvés et nous essayons de les interpréter d'une manière globale. Nous allons, d'abord, présenter les résultats de la comparaison ainsi que leur explication, nous passons, ensuite, aux résultats que nous avons eu sur le temps de sédimentation dans un milieu homogène puis ceux obtenus pour un milieu stratifié puis nous comparons tous avec les prédictions de la théorie.

Enfin, dans la conclusion générale, nous donnerons un aspect général de cette étude et nous résumerons les principales contributions de cette étude et nous présenterons les éventuelles perspectives.

CHAPITRE 1

ETUDE SUR LES ACTIONS
HYDRODYNAMIQUES EXERCEES
SUR UNE PARTICULE SOLIDE
SPHERIQUE DANS UN MILIEU
HOMOGENE

1.1. Introduction :

La description précise du mouvement des particules solides ou fluides dans les milieux visqueux est d'une importance fondamentale pour la modélisation des écoulements diphasiques. Elle nécessite une bonne connaissance des différentes forces exercées sur une inclusion par le milieu environnant. D'une façon générale, un obstacle se déplaçant dans un fluide visqueux incompressible, est soumis de la part de celui-ci à l'ensemble des forces de pression et de viscosité, qui se réduisent en un couple \vec{M} et une force résultante \vec{F} . Celle-ci peut se décomposer, de façon classique, en deux forces distinctes: une traînée \vec{F}_D dirigée par la vitesse relative, et une portance \vec{F}_L perpendiculaire à la vitesse.

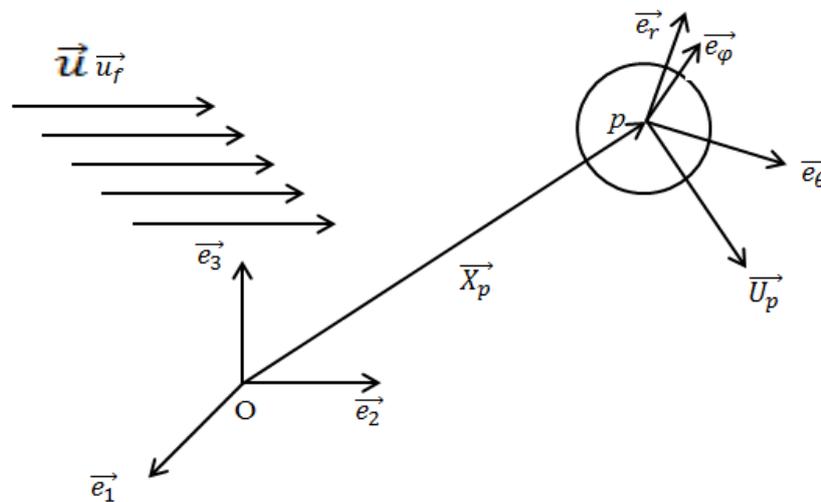


Figure (1.1) : Configuration d'illustration

L'écoulement induit par le mouvement de l'obstacle est gouverné par les équations de Navier-Stokes (1.1) et celle de la continuité (1.2) [1]:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_v + \mu \Delta \vec{u} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.2)$$

où ρ et μ représentent respectivement, la densité et la viscosité dynamique du fluide environnant. \vec{u} est le champ de vitesse induit, p la pression et \vec{f}_v est la résultante des forces volumiques par unité de masse. Cette force dérive d'un potentiel et peut être définie par : $\vec{\nabla} p_0 = \rho \vec{f}_v$ (dans le cas des forces de pesanteur, $\vec{f}_v = \vec{g}$ et $\vec{\nabla} p_0$ représente le gradient de pression hydrostatique). Le système d'équations (1.1) et (1.2) ne peut être résolu analytiquement du fait de sa non-linéarité qui réside dans les termes d'inertie $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$. Alors, depuis plus d'un siècle, plusieurs auteurs ont procédé à sa résolution en adoptant différentes hypothèses leur permettant d'avoir une solution exacte. En général, la simplification de ce système dépend des spécificités du phénomène à étudier. Elle consiste d'abord à écrire les équations de Navier-Stokes sous une forme adimensionnelle, et ensuite, à examiner l'ordre de

grandeur de chacun de ces termes. Pour cela, on considère les variables caractéristiques de l'écoulement a , \vec{U} et τ qui représentent respectivement, la taille de la particule, sa vitesse et le temps de variation de cette vitesse. On peut mettre, alors, les équations (1.1) et (1.2) sous les formes adimensionnelles suivantes :

$$Sl \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \vec{u}^* \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (1.4)$$

avec :

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}_f}{|\vec{U}|} \quad p^* = \frac{p-p_0}{\rho U^2} \quad \vec{\nabla}^* = a \vec{\nabla} \quad \Delta^* = a^2 \Delta \quad (1.5)$$

L'équation du mouvement (1.3) met en évidence deux paramètres importants: le nombre de Reynolds Re et le nombre de Strouhal Sl . Le premier caractérise le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses. On peut le définir comme suit :

$$\left| \frac{\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}{\mu \Delta u} \right| \sim Re = \frac{aU}{\nu} \quad (1.6)$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide.

Étant très petit : $Re \ll 1$, ou de l'ordre de l'unité : $Re \sim O(1)$, le nombre de Reynolds nous permet de donner une approximation des termes d'inertie ou de les négliger devant ceux de la viscosité. Quant au nombre de Strouhal, il mesure l'importance des effets d'instationnarité par rapport aux effets convectifs. Il est donné par :

$$\left| \frac{\partial \vec{u} / \partial t}{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}} \right| \sim Sl = \frac{a}{U\tau} \quad (1.7)$$

Le produit de ces deux paramètres donne lieu à un autre groupe de nombres sans dimension qui prend en compte la comparaison entre les termes d'instationnarité et les termes visqueux. Dans la littérature, il est souvent connu sous le nom de "nombre de Stokes". Noté St , il est défini par :

$$\left| \frac{\partial \vec{u} / \partial t}{\nu \Delta u} \right| \sim St = Re Sl = \frac{a^2}{\nu \tau} \quad (1.8)$$

La combinaison de ces trois grandeurs nous permet généralement de situer le problème étudié et de le placer dans les catégories des écoulements rampants, potentiels, stationnaires ou instationnaires. Et par conséquent, il nous permet de procéder à la résolution du système d'équations qui traduit au mieux le phénomène et qui en donne la meilleure approximation.

Concernant la force totale \vec{F} , plusieurs études théoriques et expérimentales ont été effectuées afin de prédire la trajectoire de l'inclusion. Toutefois, l'évaluation exacte des différentes forces agissant sur l'inclusion reste un problème particulièrement difficile, et non

entièrement élucidé. En particulier, dans les mouvements instationnaires où les forces d'histoire sont souvent négligées. Pour bien cerner ce problème, nous consacrons ce chapitre bibliographique au recensement et à la présentation des divers travaux traitant des actions hydrodynamiques agissant sur une particule solide sphérique, se déplaçant dans un milieu visqueux. Pour se limiter, on considère uniquement les cas des faibles et moyens nombres de Reynolds, où nous aborderons différents types de mouvements pour les deux configurations : uniformes et non-uniformes [2].

1.2. Mouvements stationnaires :

Dans cette partie, nous examinerons les écoulements pour lesquels les profils de vitesses sont quasi-stationnaires. Le temps caractéristique de l'écoulement sera très grand de telle façon à avoir des faibles nombres de Strouhal $Sl \ll 1$.

1.2.1. Sphère solide en écoulement uniforme :

Le premier résultat connu pour une sphère solide de rayon a , ayant un mouvement rectiligne avec une vitesse quasi-constante \vec{U} , est attribué à G.G. Stokes (1851) [3]. En adoptant l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds, et en négligeant les termes d'inertie, il a pu linéariser les équations de Navier-Stokes (1.1) et les écrire sous la forme (1.9) dite "équations stationnaires de Stokes " :

$$\vec{\nabla} p - \rho \vec{f}_v = \mu \Delta \vec{u} \quad (1.9)$$

L'écoulement est supposé uniforme et en repos à l'infini, il doit satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{u} = \vec{U} \quad \text{sur la particule } r = a \quad (1.10)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{loin de la particule } r \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

$$Re = \frac{aU}{\nu} \quad (1.12)$$

où r est la coordonnée radiale du système des coordonnées sphériques (r, θ, φ) , liée au centre de la sphère, tel qu'il est indiqué sur la figure (1.1). Stokes a montré que l'expression de la force de traînée exercée sur la sphère par le fluide environnant s'écrit sous la forme suivante dite formule de Stokes [3]:

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} \quad (1.13)$$

D'un point de vue rigoureux, la solution de Stokes n'est valide que pour des faibles nombres de Reynolds $Re \ll 1$. Elle décrit bien l'écoulement près de la sphère, mais à une distance suffisamment grande, elle est incorrecte du fait que les forces d'inertie deviennent du même ordre que les forces visqueuses et ne peuvent plus être négligées. Whitehead (1889) [2] a essayé de l'améliorer pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité $Re \sim O(1)$. La

méthode qu'il a proposé, est basée sur l'approximation des termes $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ par $(\vec{u}_{f_{st}} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_{f_{st}}$, où $\vec{u}_{f_{st}}$ est le champ de vitesse issu de la solution de Stokes. Cette procédure itérative ne lui a pas permis de résoudre l'écoulement correctement, à cause de la divergence du champ de vitesse loin de la sphère. Ce phénomène apparaît aussi dans l'étude des écoulements uniformes autour des obstacles de longueur caractéristique finie, il est connu sous le nom du "paradoxe de Whitehead". Oseen (1910) [2] a étendu cette méthode et a réussi à établir une première approximation de ce type d'écoulement en proposant d'écrire les termes d'inertie sous la forme $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$. Ainsi, il a pu donner une nouvelle expression de la force de traînée telle que :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} \left(1 + \frac{3}{8} Re\right) \quad (1.13)$$

Il est clair que la formule d'Oseen (1.13) donne une meilleure approximation de la force de résistance que celle de Stokes (1.12), mais sa description de l'écoulement donne une estimation erronée des termes d'inertie près de l'obstacle. Proudman et Pearson (1957) [2] ont relevé ce problème, en utilisant la méthode de raccordement asymptotique pour raccorder les deux solutions (Stokes-Oseen), et ont donné à la force \vec{F}_D un ordre d'approximation plus élevé :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} \left[1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re + O(Re^2)\right] \quad (1.14)$$

On peut signaler aussi, qu'avant l'apparition de la méthode de développement asymptotique, Goldstein (1929) [2] avait trouvé en utilisant simplement l'équation d'Oseen, la traînée \vec{F}_D en termes successifs de Re^2 , Re^3 et Re^4 . Ensuite, Chester et Breach (1969) [1] ont poussé plus loin les calculs de Proudman et Pearson et leurs résultats ont abouti à l'expression suivante

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} \left[1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \ln \left(Re + \frac{3}{2} \ln 2 + Eu - \frac{323}{360}\right) + \frac{27}{80} Re^3 \ln Re + O(Re^3)\right] \quad (1.15)$$

où $Eu = 0,5772$ est la constante d'Euler. Les résultats concernant la traînée stationnaire sur la sphère sont représentés sur la figure (1.2). Les coefficients de traînée C_D relatifs aux expressions précédentes peuvent être obtenus par :

$$C_D = \frac{|\vec{F}_D|}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} \quad (1.16)$$

Les courbes illustrées sur la figure (1.2) montrent que la solution de Goldstein, celle Proudman et Pearson ainsi que celle de Chester et Breach donnent une meilleure évaluation du coefficient de traînée pour des nombres de Reynolds proches de l'unité. Mais au-delà de cette limite, et précisément pour $Re > 2$, ces résultats divergent plus rapidement que celui d'Oseen en comparaison avec les mesures expérimentales de Roos et al. (1971). Cette

défaillance est rattrapée par les études numériques et les méthodes d'optimisations où le coefficient de traînée est donné par des expressions empiriques.

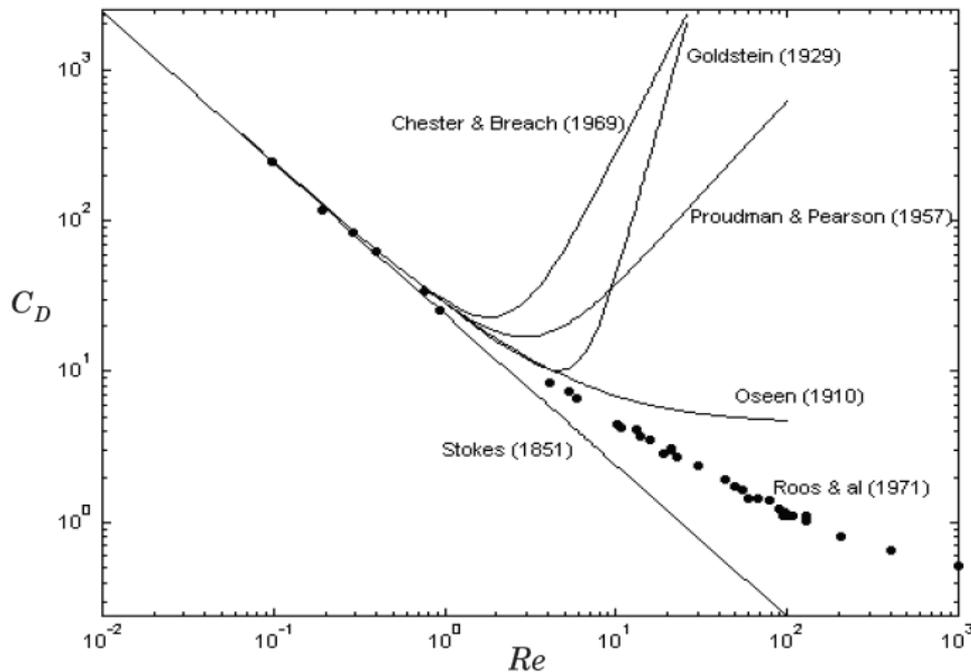


Figure (1.2) : Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds [1]

Tableau (1.1) : Corrélations décrivant le coefficient de traînée de la sphère

Auteur	Nombre de Reynolds	Corrélation
Clift et Gauvin (1970)	$Re < 400$	$C_D = \frac{12}{Re} (1 + 0,24Re^{0,687})$
Tanaka et Liona (1970)	$130 \leq Re \leq 750$	$C_D = 10^{1,6435 - 1,1242 \log Re + 0,1558(\log Re)^2}$
Morsi et Alexander (1972)	$500 \leq Re \leq 66 \times 10^6$	$C_D = 0,3571 + 74,31Re^{-1} + 11875Re^{-2}$

1.2.2. Sphère solide en écoulement non uniforme :

Dans le cas des écoulements non-uniformes, le problème devient plus complexe car le champ de vitesse loin de l'inclusion n'est plus constant et dépend du vecteur position \vec{X}_p , où $|\vec{X}_p| = r$. La première étude de ce problème a été faite par Faxén (1924) [2]. A l'aide d'un développement en série des équations de Stokes, il a donné l'expression de la force de traînée et le couple \vec{M} exercés sur une particule sphérique solide. Si on désigne par \vec{U}_∞ la vitesse de l'écoulement non perturbé qui aurait lieu en l'absence de l'inclusion, les expressions de la force ainsi que du couple seront données par "les formules de Faxén" suivantes :

$$\vec{F}_D = 6\pi\mu a \left[(\vec{U}_{\infty 0} - \vec{U}) + \frac{1}{6}a^2(\Delta\vec{U}_{\infty})_0 \right] \quad (1.17)$$

$$\vec{M} = 4\pi a^3 [\vec{\nabla} \wedge \vec{U}_{\infty}]_0 \quad (1.18)$$

L'indice "o" dénote les caractéristiques de l'écoulement non perturbé au centre de la sphère. On note que ces mêmes relations ont été trouvées par Oseen (1927) en utilisant le tenseur de Green, puis, par Pérès (1929) à l'aide du théorème de réciprocité entre deux solutions des équations de Stokes. L'expression (1.17) [1] peut aussi s'exprimer sous la forme intégrale suivante :

$$\vec{F}_D = 6\pi\mu a \frac{\int_S [\vec{U}_{\infty}(r) - \vec{U}] dS}{4\pi a^2} = 6\pi\mu a \vec{U}^S \quad (1.19)$$

où \vec{U}^S est le champ de vitesse relatif moyen sur la surface S de la sphère. L'équivalence entre (1.17) et (1.19) peut être vérifiée en développant (1.19) au voisinage du centre de l'inclusion ($r = 0$), sachant que pour un écoulement de Stokes stationnaire, on a pour tout $n \geq 2$, $\Delta^{2n}\vec{U}_{\infty}(r) = 0$.

1.2.3. Sphère solide en rotation dans un fluide en repos

Un autre mouvement peut être rencontré en pratique dans le cas d'une sphère de centre fixe, en rotation dans un fluide en repos avec une vitesse angulaire constante $\Omega = |\vec{\Omega}|$. Dans ce cas, l'écoulement sera caractérisé par le nombre de Reynolds de rotation Re_{Ω} appelé aussi "nombre de Taylor", tel que :

$$Re_{\Omega} = \frac{\Omega a^2}{\nu} \quad (1.20)$$

Pour les faibles valeurs de Re_{Ω} , le problème a été résolu par Stokes, qui a établi l'expression du couple \vec{M} s'exerçant sur la sphère ainsi que son coefficient $C_{M\Omega}$ correspondant :

$$\vec{M} = -8\pi a^3 \mu \vec{\Omega} \quad (1.21)$$

$$C_{M\Omega} = \frac{|\vec{M}|}{\frac{1}{2}\rho\pi a^5 \Omega^2} = \frac{16}{Re_{\Omega}} \quad (1.22)$$

Théoriquement, ces expressions ne sont valides que pour $Re_{\Omega} \ll 1$, mais l'expérience a montré qu'elles peuvent être suffisamment précises pour $Re_{\Omega} \leq 10$. En prenant compte des effets d'inertie, et pour $Re_{\Omega} \leq 10$, Takagi (1977) [1] a utilisé la méthode du développement asymptotique et a établi l'expression suivante :

$$\frac{Re_{\Omega} C_{M\Omega}}{16} = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{Re_{\Omega}}{10} \right)^2 - 0,00754 \left(\frac{Re_{\Omega}}{10} \right)^4 - 0,00535 \left(\frac{Re_{\Omega}}{10} \right)^6 + O(Re_{\Omega}^8) \quad (1.23)$$

Pour la gamme de $50 \leq Re_\Omega \leq 1000$, Dennis et al. (1980) ont effectué une étude numérique et ont montré que l'expression du coefficient du couple $C_{M\Omega}$ peut être approchée par l'expression empirique suivante :

$$C_{M\Omega} = \frac{1}{\pi} (6,45Re_\Omega^{-1/2} + 32,1Re_\Omega^{-1}) \quad (1.24)$$

1.2.4. Sphère solide en translation et en Rotation simultanées :

Dans le cas d'une sphère effectuant un mouvement de translation et de rotation simultanées, il est intéressant de distinguer deux types d'écoulements : écoulements sans cisaillement et écoulements de cisaillement.

Écoulements sans cisaillement :

On considère que la sphère effectue un mouvement de translation et de rotation avec des vitesses respectives \vec{U} et $\vec{\Omega}$. La translation est supposée parallèle à la vitesse du fluide à l'infini \vec{U}_∞ , tandis que la vitesse de rotation est dans le plan perpendiculaire. A condition que les nombres de Reynolds Re et Re_Ω soient tous deux suffisamment faibles, ce problème peut être traité comme étant la superposition de ces deux mouvements. Le nombre de Reynolds de translation est basé ici sur la vitesse relative $\vec{U}_r = \vec{U}_\infty - \vec{U}$, tel que $Re = 2a|\vec{U}_r|/\nu$.

En écoulement uniforme, la force de traînée ainsi que le couple exercés sur l'inclusion seront ceux de Stokes, donnés respectivement par les relations (1.12) et (1.21). En écoulement non-uniforme, le même raisonnement conduit à utiliser la formule de Faxén (1.17) pour la traînée, tandis que le couple \vec{M} sera exprimé par :

$$\vec{M} = 8\pi a^3 \mu \left(\frac{1}{2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{U}_\infty]_0 - \vec{\Omega} \right) \quad (1.25)$$

En tenant compte des effets d'inertie et en supposant que Re et Re_Ω sont du même ordre et inférieurs à l'unité, Rubinow et Keller (1961) ont utilisé le développement asymptotique raccordé pour résoudre les équations de Navier Stokes et ont montré que la force totale agissant sur la sphère, en écoulement uniforme, s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U}_r \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) + \rho\pi a^3 (\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r) + O(\pi a \vec{U}_r Re) \quad (1.26)$$

Dans l'expression (1.26), on remarque qu'en plus de la traînée \vec{F}_D obéissant à la formule d'Oseen (1.13), la sphère est soumise à une autre force perpendiculaire à la vitesse dite "portance", et notée \vec{F}_L (deuxième terme de 2.26). En ce qui concerne le couple \vec{M} , il sera exprimé à l'ordre $O(Re)$ par la même formule (1.21) donnée par Stokes. A partir de ce résultat, Rubinow et al. ont montré qu'à cet ordre de précision $O(Re)$, les mouvements de translation et de rotation de l'inclusion sont indépendants et n'ont pas d'influence l'un sur l'autre. Pour des grands nombres de Reynolds Re , la force de portance \vec{F}_L devient de plus en plus significative et provoque une grande influence sur la trajectoire de la sphère. Ce phénomène est connu sous le nom de "l'effet de Magnus", observé la première fois par Magnus (1853) dans le cas d'un

cylindre en rotation. Dans la nature, cet effet peut être illustré par l'exemple de la déviation d'une balle de tennis ou de golf causée par l'action d'une portance importante.

Ecoulements de cisaillement :

Le problème des inclusions solides se déplaçant dans un écoulement de cisaillement a été abordé par Saffman (1965, 1968). Il a considéré le cas d'une sphère en translation et en rotation avec les vitesses respectives \vec{U} et $\vec{\Omega}$ dans un écoulement de cisaillement unidirectionnel à gradient de vitesse constant \vec{G} , tel qu'il est indiqué sur la figure (1.3). La vitesse de translation de la sphère est supposée parallèle à la vitesse de l'écoulement non perturbé : $\vec{U}_\infty = (\vec{U}_{\infty 0} + \vec{G})$. Sous les hypothèses suivantes :

$$Re \ll Re_\Omega^{1/2} \ll 1 \quad \text{et} \quad Re_\Omega \ll 1 \quad (1.27)$$

avec :

$$Re_G = \frac{(2a)^2 |\vec{G}|}{\nu} \quad (1.28)$$

où Re_G est le nombre de Reynolds de cisaillement, et à l'aide de la technique des perturbations, Saffman a montré que la force de portance \vec{F}_L agissant sur la sphère s'écrit comme suit :

$$\vec{F}_L = 3,23\mu a (\vec{U}_{\infty 0} - \vec{U}) \sqrt{Re_G} \cdot \text{signe}(G) \cdot \vec{e}_x \quad (1.29)$$

et par conséquent, le coefficient de portance C_L sera :

$$C_L = \frac{|\vec{F}_L|}{\frac{1}{2}\rho U_r^2 \pi a^2} \approx 4,1125 \frac{\sqrt{Re_G}}{Re} \quad (1.30)$$

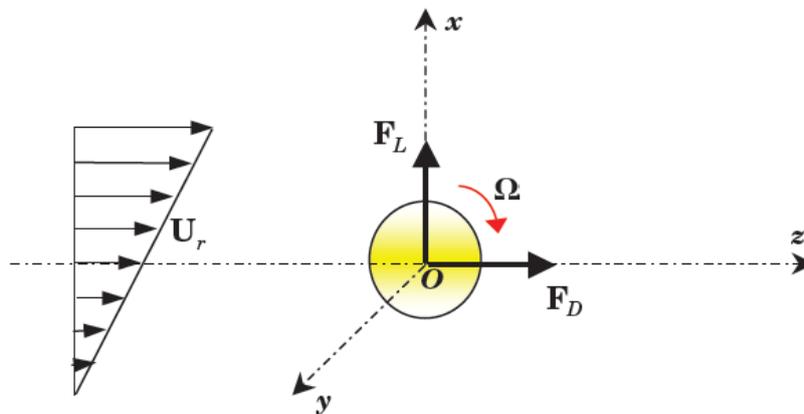


Figure (1.3) : Ecoulement de cisaillement autour d'une sphère

Pour le cas des nombres de Reynolds intermédiaires, Dandy et Dwyer (1990) [1] ont effectué une étude numérique pour les gammes: $0,01 \leq Re \leq 100$ et $0,005 \leq G^* \leq 0,1$, où G^* est le taux de cisaillement adimensionnel défini par :

$$G^* = \frac{1}{2} \frac{ReG}{Re} \quad (1.31)$$

Sur la figure (1.4), ils ont montré que pour $40 \leq Re \leq 100$, le coefficient de portance C_L est pratiquement constant à G^* fixé, et ne suit pas la relation de Saffman (1.29) qui ne reste valable que pour $Re \leq 0,1$. A partir de ces résultats et pour Re quelconque, Mei (1992) a proposé d'écrire l'expression empirique suivante du coefficient de portance C_L rapporté à celui de Saffman C_{LS} :

$$\frac{C_L}{C_{LS}} = \begin{cases} (1 - 0,3314\sqrt{G^*}) \exp\left(-\frac{Re}{10}\right) + 0,3314\sqrt{G^*} & \text{si } Re \leq 40 \\ 0,0524\sqrt{G^*Re} & \text{si } Re > 40 \end{cases} \quad (1.32)$$

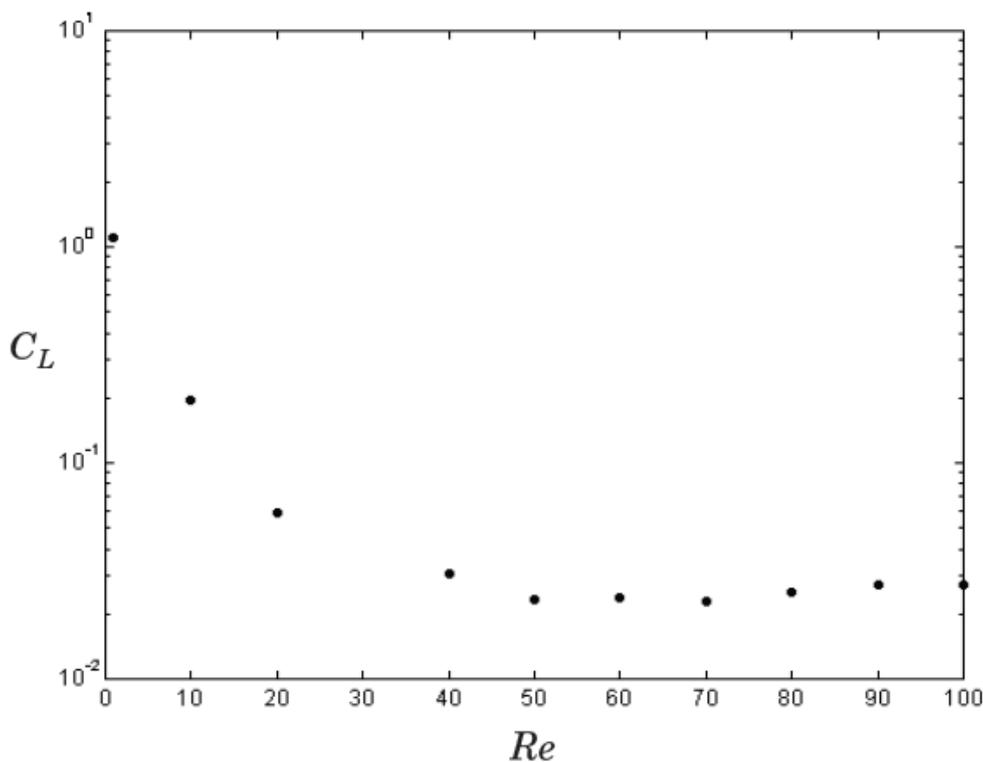


Figure (1.4) : Coefficient de portance calculé par Dandy et Dwyer (1990) pour $G^* = 0,1$

Concernant le coefficient de traînée, Dandy et al. l'ont également calculé pour trois valeurs du taux de cisaillement G^* (0,1 ; 0,2 et 0,4) pour $1 \leq Re \leq 100$. Ils ont trouvé que la valeur du C_D est très proche de celle qui aurait lieu pour un écoulement uniforme, tel qu'il est montré sur la figure (1.5). Pour $Re = 20$, leur résultat conduit à $C_{D(G^*=0,1)} \approx 0,98 C_{D,unif}$. Cette proportionnalité avec l'écoulement uniforme est de l'ordre de 0,99 pour $G^* = 0,2$ et près de l'unité pour $G^* = 0,4$.

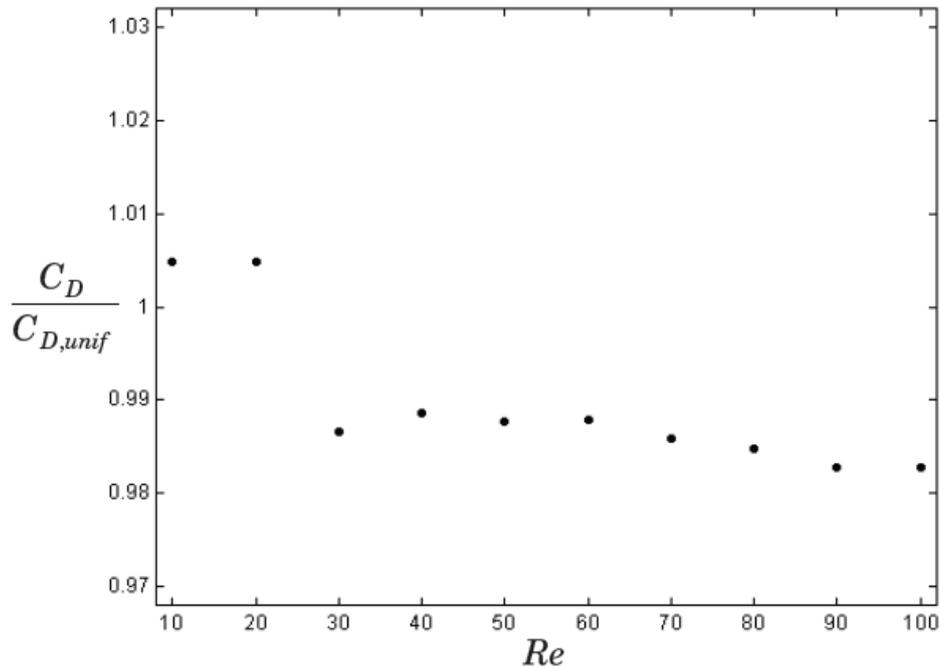


Figure (1.5) : Coefficient de traînée calculé par Dandy et Dwyer (1990) pour $G^* = 0,1$

1.3. Mouvements instationnaires :

A présent, on considère que le terme de l'accélération eulérienne $\partial \vec{u} / \partial t$ dans l'équation (1.1), n'est plus négligeable devant les termes convectifs et les termes visqueux. Ceci peut être traduit par une forte variation de la vitesse caractéristique de l'écoulement.

1.3.1. Ecoulements uniformes :

Le mouvement instationnaire des particules rigides dans les fluides newtoniens a attiré l'intérêt de plusieurs auteurs dès le 19ème siècle. En utilisant différentes approches, un grand nombre d'équations ont été proposées pour décrire le mouvement de la particule dans des situations diverses. Boussinesq (1885), Basset (1888) et Oseen (1927) ont traité, indépendamment, le mouvement rectiligne et instationnaire d'une sphère rigide dans un fluide incompressible en repos. Sous l'hypothèse $Re \ll 1$, ils ont déterminé la force hydrodynamique totale exercée sur la sphère, telle que :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \rho \frac{d\vec{U}}{dt} - 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{U}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1.33)$$

Le premier terme dans cette relation est la traînée instantanée de Stokes, donnée par la relation (1.12) et qui est responsable de la vitesse terminale de l'inclusion. Le deuxième terme correspond à la contribution de la masse ajoutée, dite aussi masse virtuelle. Il est indépendant de la viscosité, et dû à l'accélération d'un volume du fluide sous l'effet de l'accélération de la sphère. Bien entendu, le volume (et par conséquent la masse) de fluide accéléré dépend de la géométrie du corps : pour une sphère, le coefficient de masse ajoutée vaut 1/2. Quant au dernier terme, il représente la force d'histoire dite de "Basset", bien que ce soit Boussinesq qui

l'ait mis en évidence trois ans auparavant. Il résulte de la diffusion de la vorticité dans l'écoulement. Il se présente sous forme d'intégrale et tient compte de l'histoire de l'accélération de l'inclusion aux instants passés.

La relation (1.33) a été obtenue en négligeant les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes. Sa validité pour décrire le mouvement de la particule est donc justifiée dans le cas où $Re \ll 1$. Dans les situations où les termes non linéaires (d'inertie) jouent un rôle non négligeable dans la configuration de l'écoulement, aucune solution analytique exacte n'existe réellement. Odar et Hamilton (1964, 1966) ont tenté d'étendre l'utilisation de la relation (1.33) pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité. Leurs études consistaient à mesurer expérimentalement la force totale exercée sur une sphère effectuant un mouvement oscillatoire dans un fluide visqueux en repos. Le mouvement de l'inclusion est guidé par un dispositif mécanique lui permettant d'osciller dans son plan autour de la position initiale. La force que subit la sphère est mesurée au moyen de jauges de contrainte miniatures fixées à l'intérieur de la sphère. Dans la gamme $Re \leq 62$, où leurs expériences ont été réalisées, Odar et Hamilton ont proposé d'écrire la force de résistance de la sphère en multipliant les termes de la relation (1.33) par des coefficients empiriques, telle que :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}C_{Ds}\pi a^2\rho|\vec{U}|\vec{U} - \frac{1}{2}C_m\rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\frac{d\vec{U}}{dt} - 6C_h a^2\sqrt{\pi\rho\mu}\int_0^t\frac{d\vec{U}}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1.34)$$

le coefficient C_{Ds} correspond à celui de la traînée quasi stationnaire, il peut être déterminé à partir des lois empiriques données par le tableau (1.1). Les coefficients C_m et C_h sont déterminés en considérant que la sphère effectue son mouvement avec une vitesse $U_p = -A_0\omega\sin(\omega t)$ où ω est la fréquence (angulaire) des oscillations. Dans ce cas, la force F_D va s'écrire comme suit :

$$|\vec{F}_D| = F_D = \frac{1}{2}C_{Ds}\pi a^2\rho A_0^2\omega^2|\sin(\omega t)|\sin(\omega t) + \frac{1}{2}C_m\rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)A_0\omega^2\cos(\omega t) + 6C_h\pi a^2\sqrt{\frac{\rho\mu\omega}{2}}A_0\omega^{3/2}[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \quad (1.35)$$

Connaissant la force totale pour la valeur $\omega t = 3\pi/4$, la force d'histoire s'annule et la force de la masse ajoutée ainsi que le coefficient C_m correspondant peuvent être déduits. De la même manière, la détermination du coefficient C_h se fait à partir des positions $\omega t = \pi/2$ et $\omega t = \pi/4$, correspondant respectivement à l'accélération nulle et à la valeur maximale de la force d'histoire. Finalement Odar et Hamilton ont établi les corrélations suivantes :

$$C_m = 2,1 - 0,132\frac{A_c^2}{(1+A_c)^3} \quad (1.36)$$

$$C_h = 0,48 + 0,52\frac{A_c^3}{(1+A_c)^3} \quad (1.37)$$

A partir de ce résultat, ils ont montré que, contrairement au coefficient de traînée, les coefficients de la masse ajoutée et d'histoire ne dépendent pas du nombre de Reynolds mais

du nombre d'accélération A_c , qui mesure le rapport des forces dues à l'accélération locale et celles dues l'accélération convective :

$$\frac{\partial \vec{u}/\partial t}{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}} \sim \left| \frac{d\vec{U}/dt}{2aU^2} \right| = A_c \quad (1.38)$$

avec :

$$A_c \rightarrow \infty \text{ on a } C_m \rightarrow 1; C_h \rightarrow 1 \quad (1.39)$$

Ces résultats vont être vite contredits par une autre étude expérimentale faite par Karanfilian et Kotas (1978) dans la gamme $10^2 \leq Re \leq 10^4$. En utilisant un dispositif similaire à celui d'Odar et Hamilton, ils ont conclu, contrairement à ces derniers, que $C_h = C_m = 1$, tel qu'il a été prédit théoriquement par Basset pour $Re \ll 1$. Cependant, ils ont constaté une dispersion importante de leurs mesures causée par l'utilisation des termes de la masse ajoutée et d'histoire. Ceci les a conduits à inclure les effets instationnaires du mouvement de la sphère dans un coefficient de traînée globale, donné par la relation:

$$C_D = C_{Ds}(1 + A_c^{-1})^{1,2} \quad (1.40)$$

Les résultats expérimentaux obtenus par Odar et Hamilton et Karanfilian et Kotas indiquent que pour des nombres de Reynolds intermédiaires, la traînée exercée sur la sphère augmente sous l'effet de l'accélération de l'inclusion. Temkin et Kim (1980) et Temkin et Mehta (1982) ont étudié le mouvement d'une sphère dans un tube à chocs.

Et contrairement aux auteurs précédents, ils ont remarqué que le coefficient de traînée C_D diminue sous l'effet de l'accélération. Pour $9 \leq Re \leq 115$, ils ont établi l'expression suivante :

$$C_D = C_{Ds} - 0,048 A_{c0} \quad \text{pour } -45 < A_{c0} < 3 \quad (1.41)$$

$$C_D = C_{Ds} - 3,829 A_{c0}^{-1} - 0,204 \quad \text{pour } 5,9 < A_{c0} < 25 \quad (1.42)$$

avec A_{c0} est le nombre d'accélération lié au rapport des densités de l'inclusion et du fluide environnant $\gamma = \rho_i/\rho_f$, tel que :

$$A_{c0} = (\gamma - 1) A_c \quad (1.43)$$

En plus de ces trois études expérimentales, on peut aussi citer celles réalisées par Schoeneborn (1975): oscillations du fluide autour d'une sphère fixe, Marchildon et Gauvin (1979): chute d'une bille rigide dans l'air et Tsuji et al. (1991): écoulement pulsé autour d'une sphère. Ces derniers auteurs ont mesuré la force exercée sur une balle de tennis fixée dans une soufflerie. Pour $8000 \leq Re \leq 16000$, leurs résultats illustrés sur la figure (1.6), pour différentes fréquences de pulsations, montrent clairement que le coefficient de traînée de la sphère en écoulement accéléré est supérieur à celui trouvé en écoulement stationnaire. Confirmant ainsi, l'approche d'Odar et al.[1].

Il faut signaler enfin, que excepté Odar et Hamilton, les différents auteurs n'arrivent pas à séparer quantitativement les contributions des différentes forces exercées sur l'inclusion, à savoir, la traînée stationnaire, la force de la masse ajoutée et la force d'histoire. Les limites de leurs dispositifs expérimentaux les ont conduits à exprimer leurs résultats sous forme d'un coefficient de traînée corrélé avec le nombre de Reynolds et le nombre d'accélération.

En ce qui concerne les solutions numériques ou les approches asymptotiques, Bentwich et Miloh (1978) et Sano (1981) ont étudié l'écoulement induit par le mouvement brusque d'une sphère rigide ayant une vitesse $\vec{U}H(t)$, où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside. En reprenant le développement asymptotique raccordé de Proudman et Pearson (1957), Sano a pu déterminer la force de résistance \vec{F}_D par l'expression suivante :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a \vec{U} \left\{ H(t) + \frac{1}{3} \delta(t) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{3}{8} Re \left[\left(1 + \frac{4}{Re^4 t^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} Re t^{1/2} \right) + \frac{3}{(\pi t)^{1/2} Re} \left(1 - \frac{2}{Re^2 t} \right) \exp \left(\frac{1}{4} Re^2 t \right) - \frac{8}{3(\pi t)^{1/2} Re} \right] + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re + O(Re^2) \right\} \quad (1.44)$$

où t est mis sous une forme adimensionnelle par le temps caractéristique de diffusion $\tau_0 = a^2/\nu$, et $\delta(t)$ représente la distribution de Dirac.

A partir de ce résultat, Sano a montré que pour des temps longs $t \rightarrow \infty$, la traînée instationnaire exercée sur la sphère varie avec un taux de t^{-2} , au lieu d'une variation suivant $t^{-1/2}$ comme l'a prédit Basset. Quelques années plus tard, Mei, Lawrence et Adrian (1991) ont effectué une étude numérique sur un écoulement oscillant autour d'une sphère fixe, pour $1 \leq Re \leq 50$. En supposant que la vitesse du fluide à l'infini \vec{U} ait une faible amplitude, ils ont remarqué aussi que la force hydrodynamique \vec{F}_D varie selon $t^{-1/2}$ quand $\omega \rightarrow \infty$, et selon t^{-2} , quand $\omega \rightarrow 0$, où ω est la fréquence d'oscillations du fluide. Ils ont conclu qu'en tenant compte des termes d'inertie dans la résolution des équations de Navier-Stokes, la force de Basset n'est plus valide et le noyau $(t - \tau)^{-1/2}$ doit être remplacé par $(t - \tau)^{-2}$ pour des temps longs. Pour confirmer ce résultat, Mei et Adrian (1992) ont réexaminé le même écoulement, en considérant le cas des faibles fréquences: $Sl \ll Re \ll 1$, tel que $Sl = a\omega/U$ est le nombre de Strouhal. La nouvelle force d'histoire qu'ils ont proposée est donnée par :

$$\vec{F}_h(t) = -6\pi\mu a \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{U}}{dt} K(t - \tau, \tau) d\tau \quad (1.45)$$

avec :

$$K(t - \tau, \tau) \approx \left\{ \left[\frac{\pi}{\tau_0} (t - \tau_0) \right]^{1/4} + \left[\frac{\pi}{16\tau_0^2} \left(\frac{Re(\tau)}{0,75 + 0,105 Re(\tau)} \right)^3 (t - \tau)^2 \right]^{1/2} \right\}^{-2} \quad (1.46)$$

où $Re(\tau) = 2a|\vec{U}(\tau)|/\nu$. Dans le cas d'un nombre de Strouhal quelconque, Lovalenti et Brady (1993) ont repris le même problème que Mei et al, et à l'aide d'un développement asymptotique à faibles nombres de Reynolds, ils ont montré que la force d'histoire donnée par les relations (1.50) et (1.51) n'est valable que pour $Re \leq 0,5$. Au-delà de

cette limite, ils ont trouvé que le noyau $K(t - \tau, \tau)$ varie exponentiellement pour des temps longs, contrairement aux résultats de Mei et al. où la variation est algébrique. En conclusion, ils ont reformulé la force de traînée totale exercée sur la sphère comme suit :

$$\vec{F}_D = -6\pi\mu a\vec{U} - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\frac{d\vec{U}}{dt} - 6a^2\sqrt{\pi\rho\mu}\int_{-\infty}^t\frac{\vec{U}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}G(\vec{U}, t, \tau)d\tau \quad (1.47)$$

avec :

$$G(\vec{U}, t, \tau) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4|A|^2}\left[\frac{\pi^{1/2}}{2|A|}\operatorname{erf}(|A|) - \exp(-|A|^2)\right] \quad (1.48)$$

et :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}\int_{\tau}^t\vec{U}(\tau')d\tau' \quad (1.49)$$

Dans une étude numérique récente, Chang et Maxey (1994) ont utilisé les méthodes spectrales pour déterminer l'écoulement oscillant autour d'une sphère rigide fixe. En supposant les conditions suivantes :

la vitesse du fluide à l'infini : $U(t) = A_0\omega \sin(\omega t)$

le nombre de Reynolds: $Re = 2aA_0\omega/\nu \leq 20$

le nombre de Strouhal: $Sl = a/A_0$

Ils ont comparé les coefficients de traînée C_D , C_{DB} et C_{DOH} issus, respectivement, de leurs résultats numériques, de la formule de Basset (1.34) et de la relation d'Odar et Hamilton (1.35).

Sur la figure (1.7), ils ont illustré l'erreur relative entre les coefficients de traînée C_D et C_{DB} pour $Re = 0,1$ et $Sl = 10$. Ils ont constaté que dans de telles conditions, la force de traînée obtenue par la résolution des équations de Navier-Stokes complètes et celle donnée par la relation de Basset (1.33) sont assez proches à une erreur près de l'ordre de $O(10^{-3})$. Ainsi, ils ont confirmé que la force d'histoire de Basset reste correcte pour les grandes fréquences et les nombres de Reynolds finis.

(○) Écoulement accéléré, (●) Écoulement décéléré,
 (—) Courbe standard des coefficients de traînée

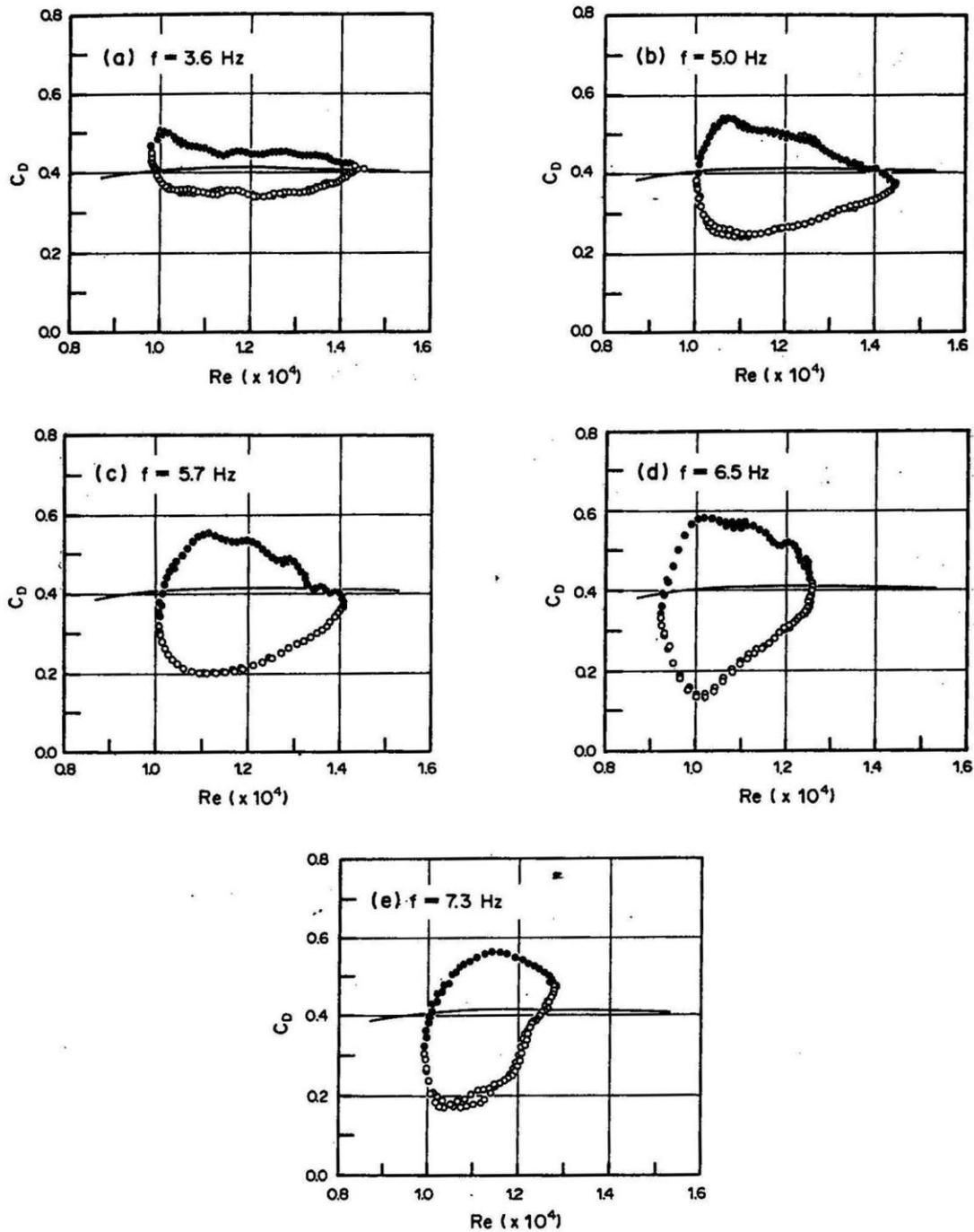


Figure (1.6) : Coefficients de traînée moyens de la sphère dans un écoulement pulsé pour différentes fréquences de pulsation. Tsuji et al. (1991).

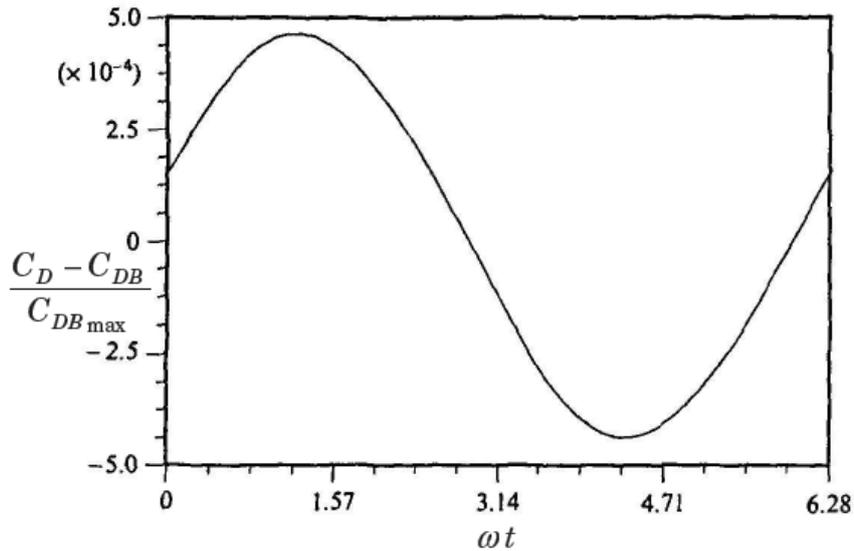


Figure (1.7) : Erreur relative entre le coefficient de traînée calculé par Chang et Maxey et celui de Basset $Re = 0,1$ et $Sl = 10$

Sur la figure (1.8), ils ont comparé les trois coefficients de traînée C_D , C_{DB} et C_{DOH} dans le cas où $Re = 16,7$ et $Sl = 0,625$. Ils ont remarqué que le coefficient de traînée de Basset est plus proche de leurs résultats numériques en comparaison avec ceux d'Odor et al. Ceci, selon eux, est dû probablement aux erreurs commises par Odor et al. lors de l'évaluation des coefficients empiriques C_m et C_h donnée par les formules (1.36) et (1.37).

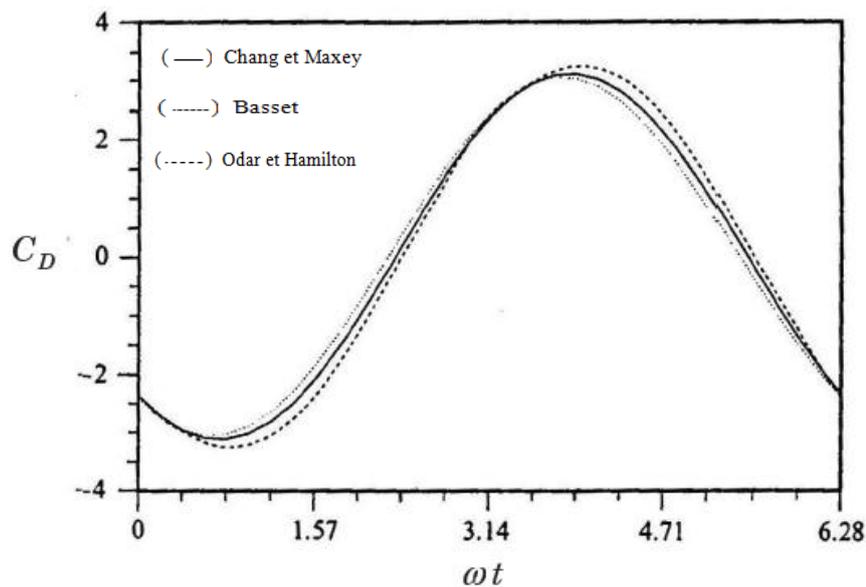


Figure (1.8) : Comparaison des coefficients de traînée entre la simulation numérique de Chang et al. (1994), Odar et al. (1964) et Basset (1888) pour $Re = 16,7$ et $Sl = 0,625$

1.3.2. Ecoulements non uniformes :

Considérons maintenant le cas d'une sphère rigide de rayon a se déplaçant dans un écoulement instationnaire et non uniforme. Ce problème a été abordé par Tchen (1947), Corsin et Lumley (1956), Maxey et Riley (1983) et Gatignol (1983). En utilisant des méthodes analytiques et des hypothèses différentes, ils ont étendu le développement initial de Faxén (1924) et ont déterminé la force totale \vec{F}_D exercée sur la sphère dans un tel écoulement.

En ce qui suit, nous allons reprendre la formulation suivie par Gatignol afin de mieux comprendre l'origine des différentes contributions que ces auteurs ont mis en évidence. Dans un référentiel absolu \mathcal{R}^a centré en O^a , on note respectivement $\vec{r}^a, \vec{u}^a(\vec{r}^a, t)$ et $p^a(\vec{r}^a, t)$ le vecteur position, la vitesse du fluide au point r^a et la pression. La sphère ayant un centre O de vecteur position \vec{r}_O^a , se déplace à partir du repos avec une vitesse de translation $\vec{U}(t)$. S et \mathcal{V} représentent respectivement sa surface et son volume. Dans ce référentiel, les équations de Navier-Stokes, l'équation de la continuité et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}^a}{\partial t} + (\vec{u}^a \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^a = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_a p + \vec{f}_v + \nu \Delta_a \vec{u}^a \quad (1.50)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^a = 0 \quad (1.51)$$

$$\vec{u}^a(\vec{r}^a, t) = \vec{U}(t) \quad \text{quand} \quad \vec{r}^a = \vec{r}_O^a \quad (1.52)$$

$$\vec{u}^a(\vec{r}^a, t) \rightarrow \vec{U}_\infty(t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.53)$$

$$p^a(\vec{r}^a, t) \rightarrow p_\infty(t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.54)$$

Pour résoudre ce système, il est plus commode de l'exprimer dans un autre référentiel \mathcal{R} lié au centre O de l'inclusion (figure (1.9)).

Soit $\vec{u}(\vec{r}, t)$ le champ de vitesse du fluide dans \mathcal{R} , si la sphère ne possède pas de rotation propre, on peut écrire les lois de composition suivantes :

$$\vec{r}^a = \vec{r} + \vec{r}_O^a(t) \quad (1.54)$$

$$\vec{u}^a(\vec{r}^a, t) = \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{U}(t) \quad (1.56)$$

$$\left(\frac{D\vec{u}^a}{Dt} \right)_{\mathcal{R}^a} = \left(\frac{D\vec{u}}{Dt} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{U}}{dt} \quad (1.57)$$

où $D\vec{u}/Dt$ représente la dérivée particulière du champ de vitesse \vec{u} , telle que $D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$.

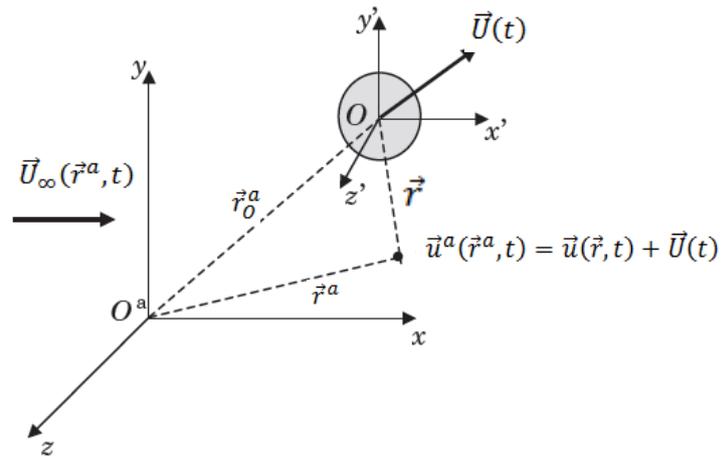


Figure (1.9) : Ecoulement en présence de l'inclusion

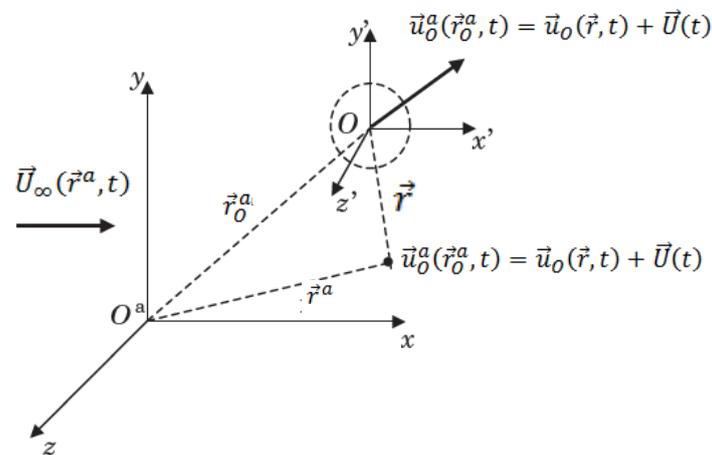


Figure (1.10) : Ecoulement non perturbé

Le champ de vitesse vérifie alors :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_v + \nu \Delta \vec{u} - \frac{d\vec{U}}{dt} \quad (1.58)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.59)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{U}(t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| = a \quad (1.60a)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{U}_\infty(t) = \vec{U}_\infty(\vec{r}^a, t) - \vec{U}(t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.60b)$$

$$p(\vec{r}^a, t) \rightarrow p_\infty(r, t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.60c)$$

Ce problème peut être considéré comme la superposition de deux problèmes qui correspondent respectivement à l'écoulement non perturbé qui existerait en l'absence de l'inclusion (figure 2.9) et à la perturbation apportée par la présence de la sphère (figure 2.10). Ceci peut s'exprimer en posant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0(\vec{r}, t) + \vec{u}_1(\vec{r}, t) \quad (1.61)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t) \quad (1.62)$$

par conséquent, l'écoulement non perturbé sera gouverné par :

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 + \vec{f}_v + \nu \overline{\Delta u_0} - \frac{d\vec{U}}{dt} \quad (1.63)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \quad (1.64)$$

$$\vec{u}_0(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{U}_\infty(t) = \vec{U}_\infty(\vec{r}^a, t) - \vec{U}(t) \quad \text{quand } |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.65a)$$

$$p_0(\vec{r}^a, t) \rightarrow p_\infty(\vec{r}, t) \quad \text{quand } |\vec{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.65b)$$

Et concernant l'écoulement perturbé, on aura :

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_1 + \vec{f}_v + \nu \overline{\Delta u_1} \quad (1.63)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (1.64)$$

$$\vec{u}_1(\vec{r}, t) = -\vec{u}_0(\vec{r}, t) \quad \text{quand } |\vec{r}| = a \quad (1.65a)$$

$$\vec{u}_1(\vec{r}, t), p_0(\vec{r}^a, t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.65b)$$

La force totale exercée sur l'inclusion sera déterminée par l'intégration sur la surface de la sphère des contraintes résultantes des deux contributions telle que :

$$\vec{F}_D = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$$

$$\int_S \bar{\bar{T}}(\vec{u}, p) \cdot \vec{n} dS = \int_S \bar{\bar{T}}(\vec{u}_0, p_0) \cdot \vec{n} dS + \int_S \bar{\bar{T}}(\vec{u}_1, p_1) \cdot \vec{n} dS \quad (1.66)$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire sortant en un point de la surface de l'inclusion, et $\bar{\bar{T}}$ est le tenseur de contraintes totales. Celui-ci s'exprime en fonction de la pression p et du tenseur des contraintes visqueuses comme suit :

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (1.67)$$

Maxey et Riley ont linéarisé les équations de l'écoulement perturbé en négligeant les termes d'inertie sous les hypothèses: $2a|\vec{U}_\infty - \vec{U}|/\nu \ll 1$ et $a/L \ll 1$ où L est la longueur caractéristique de l'écoulement perturbé. L'intégration de la relation (1.66) leur a permis d'établir l'expression de la force de traînée \vec{F}_D suivante :

$$\begin{aligned} \vec{F}_D = \rho \mathcal{V} \left(\frac{D\vec{u}_0^a}{Dt} \right)_0 - 6\pi\mu a \left(\vec{U} - \vec{u}_0^a - \frac{a^2}{6} \nabla_a^2 \vec{u}_0^a \right)_0 - \frac{1}{2} \rho \mathcal{V} \frac{d}{dt} \left(\vec{U} - \vec{u}_0^a - \frac{a^2}{10} \nabla_a^2 \vec{u}_0^a \right)_0 - \\ 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau} \left(\vec{U} - \vec{u}_0^a - \frac{a^2}{6} \nabla_a^2 \vec{u}_0^a \right)_0}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \end{aligned} \quad (1.68)$$

Dans la relation (1.68), il faut distinguer la différence entre la dérivée par rapport au temps de l'écoulement non perturbé : $d\vec{u}_0^a/dt = \partial\vec{u}_0^a/\partial t + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}_a)\vec{u}_0^a$ et la dérivée suivant un élément de fluide $D\vec{u}_0^a/Dt = \partial\vec{u}_0^a/\partial t + (\vec{u}_0^a \cdot \vec{\nabla}_a)\vec{u}_0^a$. Le premier terme dans l'expression de la force \vec{F}_D correspond à la force de Tchen due au gradient de pression dans l'écoulement non perturbé. Les termes restants représentent respectivement, la traînée quasi-stationnaire, l'effet de la masse ajoutée et la force d'histoire qui font intervenir la vitesse relative $\vec{u}_0^a - \vec{U}$ entre le champ \vec{u}_0^a et la vitesse de l'inclusion. Les termes supplémentaires $\nabla_a^2 \vec{u}_0^a$ proviennent de la non-uniformité de l'écoulement sur la surface de la sphère ou à l'intérieur de son volume de contrôle.

Gatignol (1983) [1] a traité le cas où la sphère effectuerait un mouvement de translation et de rotation simultanées avec les vitesses respectives $\vec{U}(t)$ et $\vec{\Omega}(t)$. Sa formulation du problème a été effectuée sous l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds dans l'écoulement général \vec{u} , tel que :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_v + \nu \Delta \vec{u} - \frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \quad (1.69)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.70)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| = a \quad (1.71a)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \sim \vec{U}_\infty(\vec{r}^a, t) - \vec{U}(t) - \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.71b)$$

$$p(\vec{r}, t) \sim p_\infty(\vec{r}, t) \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.71c)$$

En utilisant le théorème de réciprocité, Gatignol a donné la force de résistance \vec{F}_D ainsi que le moment \vec{M} par les relations suivantes :

$$\vec{F}_D = \rho \mathcal{V} \frac{d\vec{v}^v}{dt} - 6\pi\mu a (\vec{U} - \vec{v}^s) - \frac{1}{2} \rho \mathcal{V} \left(\frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{d\vec{v}^v}{dt} \right) - 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\vec{U}}{d\tau} - \frac{d\vec{v}^v}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1.72)$$

$$\vec{M} = \frac{2}{5} a^2 \rho \mathcal{V} \frac{d\vec{\Omega}^v}{dt} - 8\pi\mu a^3 (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}^s)$$

$$- \frac{3}{8} a^4 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_{-\infty}^t \frac{d(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}^s)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$+ \frac{3}{8} \pi\mu a^3 \int_{-\infty}^t \frac{d(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}^s)}{d\tau} \exp\left(\frac{v(t-\tau)}{a^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{v(t-\tau)}{a^2}}\right) d\tau \quad (1.73)$$

Il faut noter que les différences essentielles entre l'expression de la force de traînée (1.72) et celle donnée par Maxey et Riley (1.68) résident en deux points. Le premier concerne la force de Tchen et la masse ajoutée qui, selon Gatignol, font intervenir les dérivées d/dt au lieu de D/Dt . Cette différence est due principalement, à la linéarisation par Gatignol des deux écoulements précédents, alors que le résultat de Maxey et Riley est général car aucune hypothèse n'a été faite sur le problème de l'écoulement non perturbé. Le second point de différence concerne les corrections de Faxén qui sont implicites dans le résultat de Gatignol. Ces termes peuvent être obtenus par le développement limité au voisinage du centre de la sphère, des vitesses moyennes volumiques et surfaciques \vec{v}^v et \vec{v}^s , données par :

$$\vec{v}^v = \frac{\int_V \vec{v}_0^a(\vec{r}^a, t) dV}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (1.74)$$

$$\vec{v}^s = \frac{\int_S \vec{v}_0^a(\vec{r}^a, t) dS}{4\pi a^2} \quad (1.75)$$

Les quantités similaires correspondant aux vitesses de rotations $\vec{\Omega}^v$ et $\vec{\Omega}^s$ dans la relation (1.73), sont définies par:

$$\vec{\Omega}^v = \frac{\int_V (\vec{r}^a - \vec{r}_0^a) \wedge \vec{v}_0^a(\vec{r}^a, t) dV}{\frac{8}{15}\pi a^5} \quad (1.76)$$

$$\vec{\Omega}^s = \frac{\int_S (\vec{r}^a - \vec{r}_0^a) \wedge \vec{v}_0^a(\vec{r}^a, t) dS}{\frac{8}{3}\pi a^4} \quad (1.77)$$

CHAPITRE 2

ETUDE DE LA SEDIMENTATION
D'UNE PARTICULE SPHERIQUE
DANS UN MILIEU STRATIFIE

2.1. Introduction :

Le processus de sédimentation d'un objet dans un fluide stratifié est omniprésent en nature, par exemples, la sédimentation des agrégats marins et de glace à travers les thermoclines et des haloclines dans les océans et les lacs (MacIntyre et al. 1995), et poussière dans l'atmosphère (Kellog 1990 ; Turco et al. 1990). En dépit de cette ubiquité, l'influence de la stratification sur ce phénomène a suscité peu d'attention et demeure mal comprise. Bien que conceptuellement simple, le problème est paradoxal : tandis que la stratification tend à supprimer le mouvement vertical fluide (KOH 1966 ; Turner 1973), ce dernier est exigé par le processus de sédimentation [6].

Le problème du mouvement de particules dans un fluide homogène est certainement l'un des sujets les plus anciens de la mécanique des fluides. La résistance au mouvement est décrite par une loi de traînée, par l'intermédiaire d'un coefficient de traînée C_D qui dépend seulement du nombre de Reynolds des particules. Pour une sphère, beaucoup de travaux expérimentaux, théoriques et numériques ont établi la dépendance du C_D à l'égard de Re .

La présence de la stratification change de manière significative le problème du mouvement de particules dans un fluide. Pour un agent donné de stratification (par exemple sel ou la température) la dynamique dépend simultanément de Re et $Fr = U/Na$, où N est la fréquence de flottabilité $N = [-(g/\rho_0) d\rho/dz]^{1/2}$, ρ_0 une densité de fluide de référence et $d\rho/dz$ le gradient de densité. En outre, il y a une asymétrie distincte entre mouvement parallèle et perpendiculaire aux isopycnales ; puisque les fluides sont souvent verticalement stratifiés, ceci correspond, respectivement, au mouvement horizontal et vertical.

Ici on présente des expériences la photographie à laps de temps, la schlieren synthétique et des simulations numériques pour mesurer et rationaliser la traînée de petites particules sphériques en sédimentation dans une solution d'eau salée, et proposer une loi empirique pour exprimer la traînée pour un fluide linéairement stratifié.

Yick et al. ont fait une recherche expérimentale et numérique sur la sédimentation d'une sphère dans un fluide linéairement stratifié à de faibles nombres de Reynolds. En utilisant une méthode optique et une modélisation numérique, ils ont observé et ont mesuré une augmentation de la traînée due à stratification. Pour une stratification d'eau salée, le coefficient de traînée normalisé évolue avec $Ri^{0.51}$, où $Ri = a^3 N^2 / \nu U$ est le nombre de Richardson et N la fréquence de flottabilité. La schlieren synthétique montre qu'une sphère qui se sédimente chasse les particules fluides de son voisinage immédiat en bas mais ces particules ne peuvent pas descendre d'avantage à cause de différence de la masse volumique et elles auront tendance à s'enrouler sur elles-mêmes et par conséquent, créer des petits tourbillons. L'analyse des champs de vitesse et de densité prouve que la traînée supplémentaire résulte de la flottabilité du fluide dans une région de taille $(\nu U)^{1/2}$ entourant la sphère, alors que la partie du sillage n'influence pas la traînée. L'augmentation de la force de traînée peut, à son tour, augmenter les temps de stabilisation dans les environnements aquatiques normaux, affectant la conservation des particules aux interfaces de densité et les flux verticaux de la matière organique.

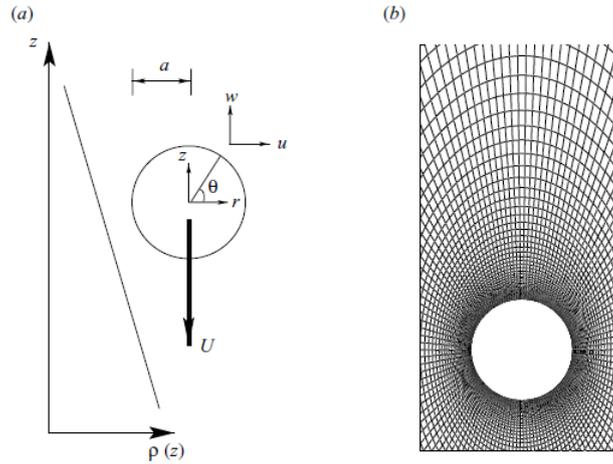


Figure (2.1) : a. Schéma de la sédimentation d'une sphère dans un fluide linéairement stratifié
b. Maillage près de la sphère pour la résolution numérique [2]

2.2. Formulation du coefficient de traînée stratifié :

On rappelle l'expression de la force de traînée F_D sur une sphère dans un fluide homogène :

$$F_D = -6\pi\mu aU - \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho}{2} \frac{dU}{dt} - 6a^2 \rho \sqrt{\pi\nu} \int_{-\infty}^t \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=s} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \quad (2.1)$$

On rappelle aussi la signification des différents termes, le premier terme est la traînée de Stokes, le deuxième est la force de masse ajoutée et le dernier est la force d'histoire de Basset due à la diffusion de la vorticité de l'accélération de la sphère. Dans le cas d'un régime permanent, les deux dernières forces sont négligeables.

Pour adopter une formulation cohérente pour F_D il est commode de mettre $F_D = C_D^H \frac{1}{2} \rho U^2 a^2$ où C_D^H est le coefficient de traînée homogène qui est fonction du nombre de Reynolds ; pour $Re \ll 1$; $C_D^H = \frac{12}{Re}$.

Parfois cette formulation est incorrecte, puisque la force de traînée F_D est indépendante du nombre de Reynolds dans ce régime. Pour de petits et modérés nombres de Reynolds, la relation empirique de White donne de très bons résultats.

$$C_D^H = \frac{12}{Re} + \frac{6}{1+\sqrt{2Re}} + 0.4 \quad (2.2)$$

valable pour $0 < Re < 2 \times 10^5$ à moins de 10% d'erreur (White 2005).

Un schéma du problème à étudier est montré sur le Figure (2.1a). En adoptant le même formalisme que celui d'un fluide homogène, dans des conditions quasi-stationnaires, on peut écrire la force de traînée un fluide stratifié comme suit : $F_D = C_D^S \frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2$, où C_D^S est coefficient de traînée dans un milieu stratifié et qui indique l'influence de la stratification sur

la force de traînée. Pour un agent stratifiant donné, on s'attend à que le coefficient C_D^S dépende du nombre de Reynolds et du nombre de Froude et généralement, il dépend aussi du nombre de Prandtl (stratification de sel $Pr = 700$ et stratification de la température $Pr = 7$).

La sédimentation dans un fluide stratifié est un processus en soi même instable, à cause du contraste de densité entre la particule et le fluide environnant, et par conséquent la vitesse de particules diminuera pendant ce processus et éventuellement, la particule a tendance à rester à la profondeur de sa neutre flottabilité. On verra, cependant, que la sédimentation est quasi-stationnaire pour le régime de paramètre exploré ici, car la force de masse ajoutée et les forces supplémentaires de Basset sont négligeables. Puis, en faisant l'équilibre des forces de traînée et de flottabilité :

$$C_D^S \frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2 = \frac{4}{3} \pi a^3 \Delta \rho g \quad (2.3)$$

on aura :

$$C_D^S = \frac{8ga \Delta \rho}{3U^2 \rho} \quad (2.4)$$

où $\Delta \rho = \rho_p - \rho$ est le contraste de densité et ρ_p est la masse volumique de la particule.

Ce qui permet de déterminer C_D^S en mesurant $\rho(z)$ et $U(z)$. Pour accentuer l'effet de la stratification, on peut normaliser le coefficient C_D^S par le coefficient traînée localement homogène C_D^H de (2.2) que la sphère aurait si la colonne d'eau entière avait la densité et la viscosité du fluide à cette profondeur. Le coefficient de traînée normalisé aura comme expression :

$$C_D^N = \frac{C_D^S}{C_D^H} \quad (2.5)$$

et qui indique si la stratification affecte ($C_D^N = 1$) ou non ($C_D^N \neq 1$) la force de traînée.

2.3. Méthodes expérimentales et numérique:

2.3.1. Mesure de traînée par la photographie à laps de temps :

Les expériences ont été réalisées dans une cuve en acrylique de 30 cm de hauteur, 51 cm longueur et une largeur de 26 cm, avec 0.54 cm d'épaisseur. La cuve a été couverte pour éliminer la convection dans le fluide due à l'évaporation. Un premier ensemble d'expériences a été fait dans des solutions homogènes d'eau salée de densités 1000, 1019 et 1035 $kg \cdot m^{-3}$, mesurés avec un densitomètre Anton-Parr DMA38. Pour toutes les autres expériences, la cuve a été remplie par le dessous avec de l'eau salée linéairement stratifiée utilisant un système de double-seau (Oster 1965), et laissé au repos pour au moins 5 h pour éliminer tous les écoulements résiduels. Pour réaliser de plus grands gradients de densité, dans quelques expériences le récipient était d'abord partiellement rempli avec l'eau douce, suivi de l'eau

salée linéairement stratifiée jusqu'à une densité ρ_s et finalement avec l'eau salée homogène de même masse volumique.

Des flotteurs sphériques (American Density Floats) avec des densités s'étendant de 1010,0 à 1130,0 $kg \cdot m^{-3}$ avec un intervalle de 10,0 $kg \cdot m^{-3}$ ont été relâchés dans le réservoir pour mesurer $d\rho/dz$. L'espacement vertical régulier des flotteurs a confirmé la linéarité du profil de densité $\rho(z)$. Le gradient de densité a été déterminé du profil de $\rho(z)$ et a été utilisé pour calculer N , en prenant $\rho_0 = 1130,0 kg \cdot m^{-3}$. La petite taille des flotteurs (leur diamètre est de 7 millimètre) et de leur endroit loin du chemin de sédimentation (supérieur à 20 cm) ont assuré qu'ils n'ont pas affecté le champ de densité. Il n'y avait aucun mouvement perceptible des flotteurs, démontrant l'absence de toute convection dans la cuve.

Des particules sphériques en polystyrène de rayon 196 μm et 390 μm (Duke Scientific ; coefficient de variation pour a : 3 %) et de masse volumique $\rho_p = 1050 kg \cdot m^{-3}$ ont été employées dans les expériences.

Pour assurer l'exactitude de la masse volumique des particules on a confirmé que les sphères de polystyrène et le flotteur de masse volumique $\rho_p = 1050 kg \cdot m^{-3}$ restent à la même profondeur. On a mesuré la température du fluide à la profondeur de chaque observation avec un thermomètre à aiguille situé loin du chemin de sédimentation. La température et la masse volumique correspondante ont été employées pour calculer la viscosité dynamique locale μ (Fofonoff et Millard 1983), y compris l'effet de la salinité sur la viscosité. Avant de relâcher les particules, elles ont été mêlées avec un peu de fluide de la surface du réservoir et une petite quantité de savon comme agent mouillant pour empêcher le collage. Pour assurer la sédimentation par le voyant à niveau visible, une particule simple a été libérée en utilisant une pipette de 1 ml par un injecteur conique partiellement submergé (une pipette 1 ml avec son bout découpé) inséré dans un trou de diamètre de 7mm dans le couvercle.

Pour éviter les effets de paroi, le chemin de sédimentation était plus de 5 cm (plus de 125fois le rayon des particules) de la paroi la plus proche de la cuve, ce qui correspond à un moins de de 1% du changement du coefficient de traînée pour un fluide homogène (Clift, grace et Weber 1978).

La sédimentation a été faite devant un fond noir et les particules ont été illuminées par une source lumineuse à fibres optiques. Une règle, placée à côté du chemin de sédimentation et à la même distance de l'appareil photo, a été employée pour mesurer des distances verticales.

Des images ont été saisies au-dessus d'une grande fenêtre de 3 cm à 3 – 12 $frames \cdot s^{-1}$ utilisant un appareil-photo CCD de JAI CV-M4+CL commandé par Digiflow (Dalziel 2006) et les sphères ont été, par la suite dépistés avec Matlab (Mathworks, le Natick, mA). Une particule apparue comme une tâche lumineuse sur un fond foncé, et le centre de la tâche a été pris comme la position de la particule. On a lissé la série chronologique de la position verticale par une moyenne mobile à trois points, avant de

calculer la vitesse U de particules utilisant une approche de différences-centrées de quatre points (Dalziel 1992).

Pour chaque expérience, caractérisée par une combinaison donnée de N , a et $\Delta\rho$, dix répétitions ont été exécutées pour réduire les erreurs liées à des facteurs tels que la variabilité de la taille des particules et les conditions d'injection. A chaque endroit vertical, la vitesse moyenne a été calculée en utilisant la moyenne des dix répétitions, comme il est montré sur la figure (2.2).

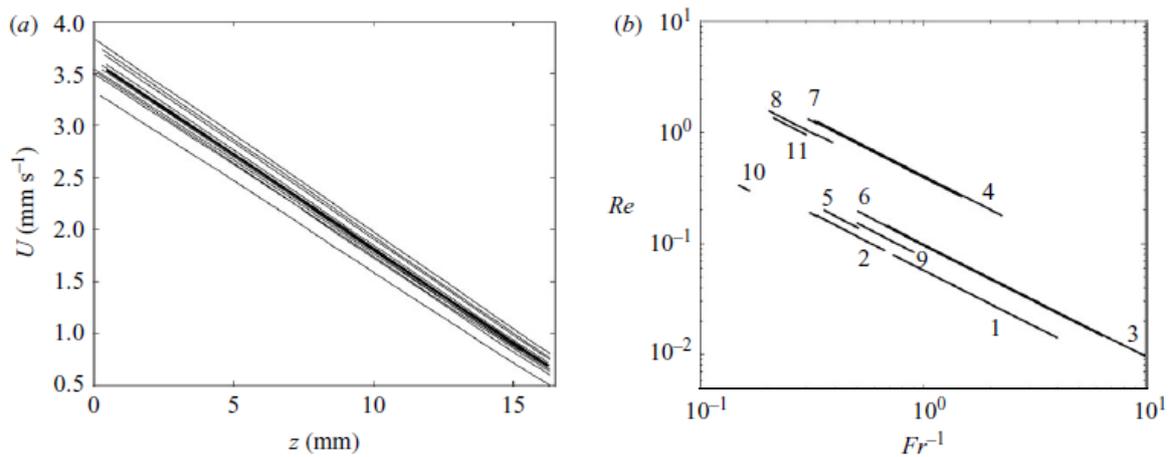


Figure (2.2) : a. La vitesse de sédimentation U en fonction de la profondeur z pour 10 répétitions pour $a = 390 \mu\text{m}$ et $N = 2,92 \text{ s}^{-1}$.

b. Les paramètres du régime exploré expérimentalement, montrant les termes Re et Fr^{-1} [2]

Le profil moyen de vitesse, en combinaison avec $\rho(z)$, a déterminé $Re, Fr, Ri = Re/Fr^2$ et C_D^N où tout varie au-dessus de la fenêtre d'observation depuis que $\rho(z)$ croît avec la profondeur. Les expériences ont été répétées pour $0,01 \leq Re \leq 1,57$ et $0,09 \leq Fr \leq 6,75$ (figure (2.2.b)) en variant N et a . Pour valider le procédé de la moyenne, deux ensembles de 10 répétitions ont été exécutés dans deux fenêtres à niveau visible et adjacentes le long du chemin de sédimentation, pour $a = 196 \mu\text{m}$ et $N = 1,69 \text{ s}^{-1}$.

Pour toutes les expériences de sédimentation exécutées, le calcul de dU/dt a prouvé que la contribution de la force de masse ajoutée et la force d'histoire de Basset est moins de 1% de toute la force de résistance au mouvement, justifiant l'hypothèse de sédimentation quasi-stationnaire. Tandis que la force de masse ajoutée et la force d'histoire de Basset seront en général différentes en fluides stratifié et homogène, on ne s'attend pas à ce que la différence soit assez grande pour faire ces forces importantes dans le processus de sédimentation étudié ici.

2.3.2. La visualisation du sillage par la schlieren synthétique :

Pour visualiser l'effet de sédimentation de la sphère sur le champ de densité du fluide, on a exécuté des expériences utilisant la schlieren synthétique (Yick, Stocker et paon 2006).

La schlieren synthétique (Sutherland et al. 1999) est l'exécution numérique d'une technique optique pour mesurer les perturbations de densité utilisant la relation entre la densité et l'indice de réfraction de la solution d'eau salée. Une description détaillée de la schlieren synthétique, avec son application aux sphères aussi petites que pour $a = 78 \mu\text{m}$, est présentée dans Yick et al (2006). Les expériences ont été exécutées dans une cuve en acrylique de 48 cm de hauteur, 6.3 cm de longueur et une largeur de 2.5 cm, avec 0.54cm d'épaisseur. On a utilisé la même procédure de stratification décrite précédemment. Un micromanipulateur à trois étages monté sur la cuve a facilité le dépôt précis de la sphère au centre de la cuve à l'aide d'un injecteur conique (comme ci-dessus) et le passage à travers une fenêtre de visualisation.

La distance entre le chemin de sédimentation et la paroi la plus proche a été supérieur à 32 fois le rayon de la particule, correspondant à un changement de moins de 5% du coefficient de traînée pour un fluide homogène (Clift et al. 1978) : comme précédemment, c'est négligeable comparé à l'effet de la stratification.

Un masque de 2×2 cm se compose d'un modèle aléatoire de points de $35 \mu\text{m}$ a été imprimé dessus un film transparent utilisant un poseur à haute résolution d'image (Fineline Imaging, Colorado Springs, CO). Le modèle a été monté à 8.3 cm derrière le mur arrière de la cuve, et reflète à $20 \text{ frames} \cdot \text{s}^{-1}$ utilisant un appareil photo 1600 de CCD de PCO, fonctionnant à une résolution de 800×600 Pixel. L'appareil photo a été monté sur un stéréomicroscope 1000 de Nikon SMZ équipé d'un P-Achro 0.5×objective, placé à 18.9 cm devant le masque (la distance de fonctionnement maximum). Les déplacements apparents du masque causés par des perturbations de densité dues à la sédimentation de la sphère ont été déterminés par analyse d'image utilisant Digiflow (Dalziel 2006). Comme décrit par Yick et al. (2006), en raison de la profondeur limitée du centre du microscope, la position de la sphère est connue seulement pour au moins un rayon.

Deux formes de traitement ont été employées. Le premier, connu comme étant la schlieren synthétique qualitative (Dalziel, Hughes et Sutherland 2000), consiste simplement en soustraire l'image de référence de chaque image suivante et fournit une procuration pour l'importance relative de gradients de perturbation de densité. La deuxième, la schlieren synthétique quantitative (Sutherland et al. 1999 ; Dalziel et al. 2000), l'utilisation d'algorithmes de corrélation croisée pour calculer les déplacements apparents du masque et les inverser pour obtenir les gradients associés dans la perturbation de densité. Des détails du traitement sont fournis dans Yick et al. (2006). Les perturbations de gradient radiales de densité $\partial \rho' / \partial z$ ont été alors intégrés le long de r à une position verticale donnée z , et ceci a été répété pour chaque endroit vertical dans une image, rapportant le de champ de perturbation de densité ρ' . Ceci a été ajouté au champ de densité de fond, permettant le calcul des isopycnales en contournant tout le champ de densité dans Matlab.

2.3.3. Modèle numérique :

Des simulations numériques ont été effectuées pour comparer le coefficient de traînée avec les résultats expérimentaux et pour obtenir un modèle à haute résolution sur les champs de vitesse et de densité pour différents paramètres. On a effectué des simulations numériques

dans le régime d'écoulement $0,05 \leq Re \leq 2,1$ pour $0,02 \leq Fr \leq 200$ et pour $7 \leq Pr \leq 700$. Le modèle a été adapté d'un autre ancien (Torres et al. 2000 ; Larrazabal, Torres et Castillo 2003) et est décrit ici brièvement [5]. Il considère l'écoulement d'un fluide linéairement stratifié à la vitesse constante U à travers une sphère immobile (figure 3.1.a), et utilise la méthode des différences finies pour résoudre les équations non dimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p - \frac{\dot{\rho}}{Fr^2} j + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial t} + u \cdot \nabla \dot{\rho} = w - 1 + \frac{1}{RePr} \nabla^2 \dot{\rho} \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 p = -\frac{1}{Fr^2} \cdot \nabla(cj) - \nabla \cdot [(u \cdot \nabla)u] + \frac{1}{Re} \nabla^2 P - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.8)$$

obtenues en considérant les variables caractéristiques suivantes : longueur a , vitesse U , perturbations de pression $\rho_0 U^2$ et des perturbations de densité $-a (d\rho/dz)$. Ici $u = (u, w)$ est la vitesse fluide dans les directions radiale et verticale, respectivement, p est la pression, j le vecteur unité vertical positif vers le haut, et $P = \nabla u$ équation (2.8) représente la condition d'incompressibilité : en discrétisant $\partial P / \partial t$ comme $(P^{n+1} - P^n) / \Delta t$ (n se rapporte au du temps d'intégration t et le t est l'étape d'intégration $t = n\Delta t$), l'incompressibilité a été imposé en plaçant $P^{n+1} = 0$. Les conditions aux limites sur la surface de la sphère étaient $u = 0$ et un flux de densité nul imposé par l'exigence $(\partial \dot{\rho} / \partial z)z + (\partial \dot{\rho} / \partial r)r = z$. La condition de aux limites extérieure pour de la pression a été obtenue à partir (2.6) en mettant $u = 0$. Loin de la sphère, toutes les quantités physiques ont tendances vers leurs valeurs imperturbées : $u = u(0,1)$ à la frontière inférieure, $\partial u / \partial z = 0$ à la frontière supérieure et $\rho = 0, \partial \rho / \partial n = 0$ pour les deux.

Pour améliorer l'exactitude près de la surface de la sphère tout en simplifiant les conditions aux limites, les équations (2.6) et (2.7) ont été écrites en des coordonnées curvilignes (ξ, η) et résolus sur une grille curviligne (figure 3.1.b), comme décrit dans Torres et al. (2000). La frontière externe de la grille était elliptique, avec des longueurs de haches de 80 (verticale) et de 40 (horizontal). La grille est composée de 65×91 ou 195×91 (ξ, η) de points de mailles, non uniformément distribués, cependant avec une densité plus élevée de mailles près de la sphère et d'une plus petite grille de taille $8,2 \times 10^{-4}$. La grille assure pour les conditions aux limites $\delta_p = O((Re Pr)^{-1/2})$ a été exactement résolu : pour $Pr = 700$ et $Re = 1$, le $\delta_p = 0,038$ a été couvert par la grille de 16 points.

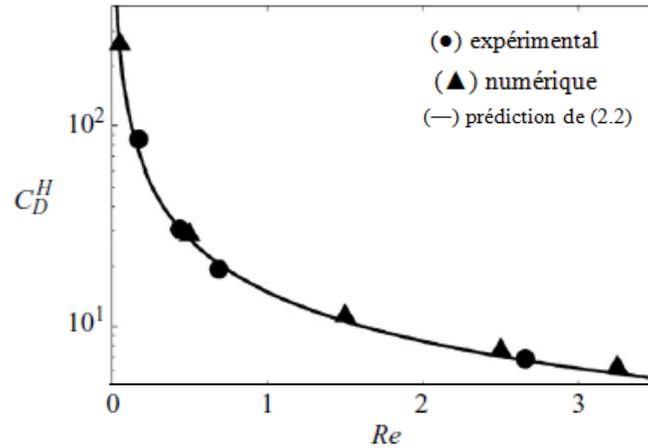


Figure (2.3) : Coefficient de traînée homogène

Pour un régime de petit nombre de Reynolds et un fluide linéairement stratifié, la méthode GMRES (Generalized Minimal RESidual) (Saad 2003) s'est avérée adéquate pour la résolution de l'équation de Poisson pour la pression (2.8) comparée à la méthode de relaxations successives (Larrazabal et al. 2003) utilisée dans une version préalable du code (Torres et al. 2000). Le procédé de résolution était alors comme suit : pour u et ρ donnés à $t = (n + 1)\Delta t$, on récupère la pression p de l'équation (2.8) utilisant la méthode GMRES et substitué dans (2.6) et (2.7). La solution des deux dernières équations a rapporté les nouvelles valeurs de u et ρ à $t = (n + 1)\Delta t$. Les équations (2.6) et (2.7) constituent un problème dépendant du temps, mais ici on était intéressé par les solutions régulières. Par conséquent, le cycle a été répété à partir de $u = u(0,1)$ et $\rho = 0$ jusqu'à la satisfaction du critère de convergence $|f^{n+1} - f^n|_{max} < 10^{-4}$, où f représente chacune des valeurs de u, w, p ou ρ . Le laps de temps était $t = 0,0025$ ou $0,0001$ et le régime permanent a été typiquement atteint pour $t = 30$ s.

Le coefficient de traînée C_D^S a été calculé comme étant la somme du coefficient de traînée de pression C_P^S et du coefficient de traînée visqueux C_V^S :

$$C_P^S = -\frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} \int_S p n \cdot j dS \quad (2.9)$$

$$C_V^S = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} \int_S \mu n \cdot [(\nabla u) + (\nabla u)^T] \cdot j dS \quad (2.10)$$

avec n est le vecteur unité normal à la surface S de la sphère.

Les coefficients de traînée ont été normalisés par leur contrepartie homogène pour obtenir les coefficients de traînée normalisés C_D^N , C_P^S et C_V^S .

2.4. Résultats :

On commence par rapporter les résultats expérimentaux pour la sédimentation des dans les solutions homogènes d'eau salée. Sauf indication contraire, tous les résultats sont exprimés en forme adimensionnelle comme décrit dans le § 2.3. Utilisant la vitesse terminale mesurée de sédimentation U , le coefficient C_D^H a été calculé de l'équilibre de la flottabilité et de la traînée ((2.4), pour le C_D^H au lieu du C_D^S). Ceci a été répété pour les quatre densités du fluide. Les résultats sont rapportés en fonction du nombre de Reynolds Re , sur la figure (2.3) et comparés à la prévision de l'équation (2.2). La bonne concordance de la procédure pour mesurer la vitesse terminale de sédimentation valide que les coefficients de traînée peuvent être déterminés avec une bonne précision. Les résultats du calcul du coefficient C_D^N du modèle numérique a été effectuée pour divers nombre de Reynolds Re et pour $Fr = 200$. À ces valeurs élevées du nombre de Froude, l'influence de la stratification devient négligeable, en effet, on s'attendrait à que les valeurs calculées du C_D^S tendent vers celles du C_D^H (figure (2.3)).

Ensuite, on a mesuré la traînée dans les solutions linéairement stratifiées en termes du coefficient de traînée normalisé C_D^N en fonction de Fr^{-1} et Ri comme il est montré sur la figure (2.4 (a et b)). Le choix du paramètre Fr^{-1} en tant que paramètre indépendant est approprié à de modérés nombres de Reynolds Re (Torres et al. 2000 ; Higginson et al. 2003), alors que pour le nombre de Richardson Ri , on a pris celui donné dans l'analyse théorique de Zvirin et Chadwick (1974).

On peut conclure trois choses. La première est que le coefficient de traînée normalisé est toujours supérieur à 1 ($C_D^N > 1$), ce qui montre que la stratification linéaire augmente la traînée à de faible nombre de Reynolds Re ; en effet, les expériences indiquent que ce coefficient peut être plus de trois fois le coefficient homogène C_D^H . En second lieu, le profil de C_D^N augmente d'une manière monotone avec les deux paramètres Fr^{-1} et Ri , montrant que les fortes stratifications engendrent une plus grande traînée. Troisièmement, on a de meilleurs résultats en traçant Ri en fonction de Fr^{-1} , or, à faible nombre de Reynolds Re , ce dernier et le nombre de Froude Fr affectent le coefficient C_D^N seulement par la combinaison $Ri = Re/Fr^2$. On a trouvé une forme approprié pour décrire la dépendance du coefficient C_D^N et le nombre de Richardson Ri , $1 + \alpha Ri^q$, avec $\alpha = 1,95$ et $q = 0,62$ pour les résultats expérimentaux.

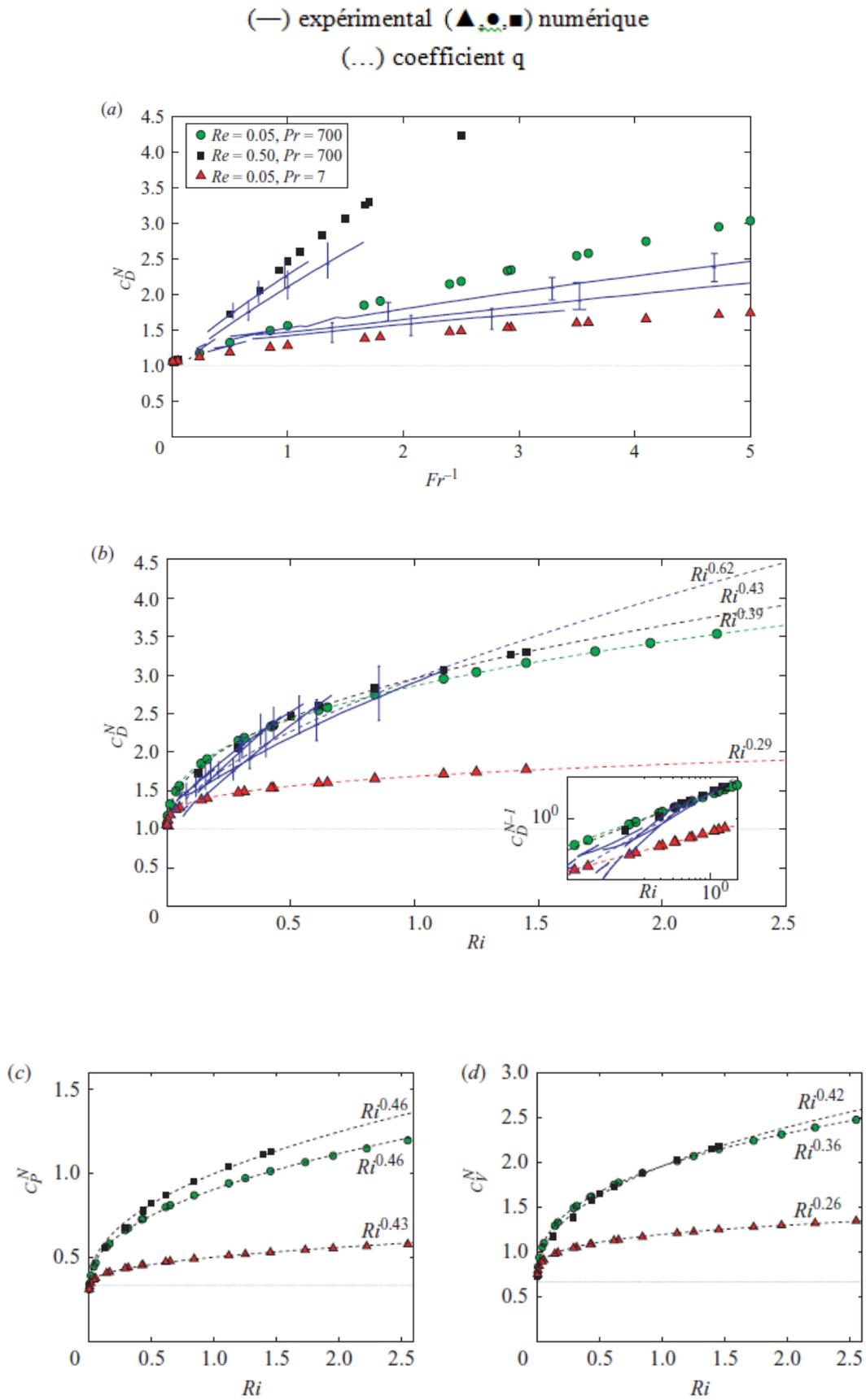


Figure (2.4) : Coefficients de traînée en fonction du nombre de Froude (a) et de Richardson

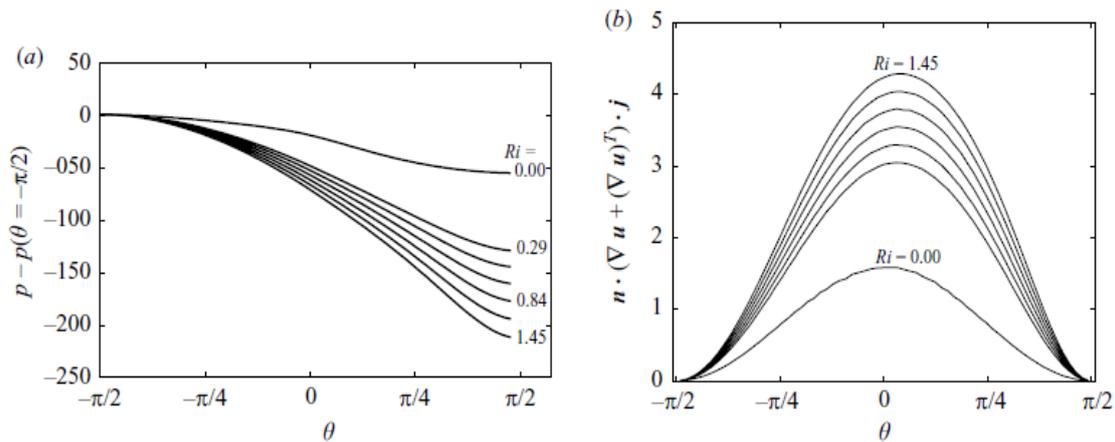


Figure (2.5) : a. La pression b. Le cisaillement sur la surface latérale de la sphère $Re = 0,05$ à différents nombre de Richardson [2]

Les coefficients de traînée ont été également calculés numériquement. On a exécuté deux ensembles de simulations, pour $Re = 0,05$ et $0,5$ à $Pr = 700$ pour modéliser une stratification avec de l'eau salée (l'ensemble de données pour $Pr = 7$ représente une stratification due à la température). Les résultats numériques confirment, à leurs tour, que $C_D^N > 1$ et ils sont en bon accord avec les résultats expérimentaux comme le montre la figure (2.4). En outre, les résultats numériques indiquent la même dépendance du coefficient C_D^N avec le nombre de Richardson Ri . Dans ce cas, on a eu $C_D^N = 1 + 1,91 Ri^{0,41}$ ($C_D^N - 1 \sim Ri^{0,39}$ pour $Re = 0,05$; $C_D^N - 1 \sim Ri^{0,43}$ pour $Re = 0,5$). Ceci est une dépendance légèrement plus faible comparée aux expériences, mais la différence dans les résultats du coefficient C_D^N prévu des deux profils est moins de 15%.

Les autres résultats numériques indiquent que la pression et la composante visqueuse de la traînée augmentent avec le nombre de Richardson (figure (2.4) c, d). Pour $Ri = 0$, $C_P^S = 1/3$ et $C_V^S = 1/3$, comme prévu l'écoulement de Stokes. Le profil de $C_P^N - 1/3$ et $C_V^N - 2/3$ en fonction du nombre de Richardson est semblable à $C_D^N - 1$, avec un exposant légèrement plus grand pour le coefficient C_P^N . Pour comprendre l'origine de l'augmentation de la pression et de la composante visqueuse de la traînée. Pour comprendre l'origine de l'augmentation la pression et la composante verticale de l'effort de cisaillement le long de la surface de la sphère, on a tracé la figure (2.5) (a, b) qui montre que les deux dernières grandeurs correspondent aux fonctions à intégrer dans les équations (2.9) et (2.10). Une augmentation du nombre de Richardson induit une plus grande différence de pression avant-arrière ayant pour résultat l'accroissement de la traînée due à la pression et augmente aussi les efforts de cisaillement, en particulier à l'équateur (figure (2.5) b), ce qui explique l'importance de la traînée visqueuse.

Davantage de détails sur la nature du sillage derrière une sphère en sédimentation ont été obtenus utilisant la schlieren synthétique. La figure (2.6) montre l'image d'une schlieren synthétique qualitative pour une sphère de rayon $a = 390 \mu m$ en sédimentation dans une eau salée avec $N = 1,31 s^{-1}$ (correspondant à $Re = 2,1$, $Fr = 10,2$ et $Ri = 0,02$). Plusieurs dispositifs du sillage sont immédiatement évidents. Il est symétrique autour de l'axe central,

car on prévoirait de la symétrie radiale et de sa longueur considérable (supérieure à 22 millimètre), indiquant que la stratification reste perturbée près de la sphère. La structure de sillage devient plus complexe près de sa fin, sous forme de faibles paires blanches de lobes.

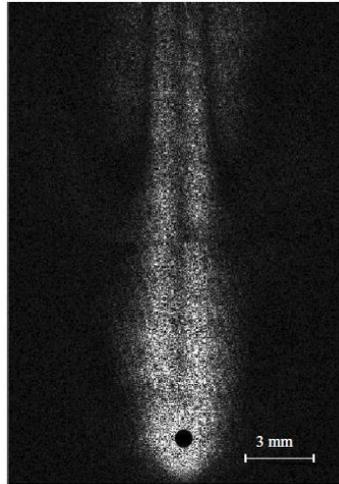


Figure (2.6) : Visualisation d'une schlieren synthétique qualitative pour $a = 390 \mu m$ et $N = 1,91 s^{-1}$

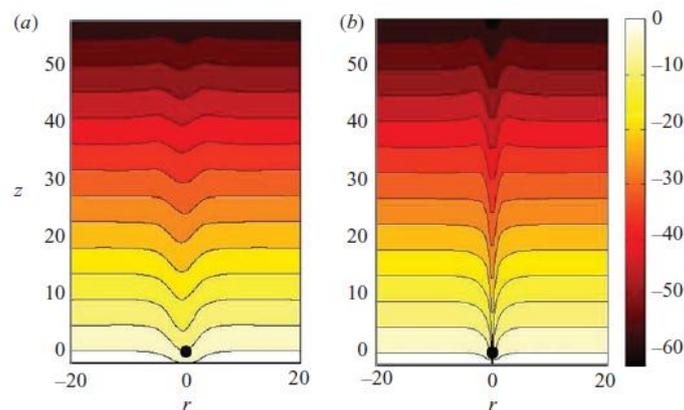


Figure (2.7) : Champ du contraste de densité pour $Ri = 0,02$

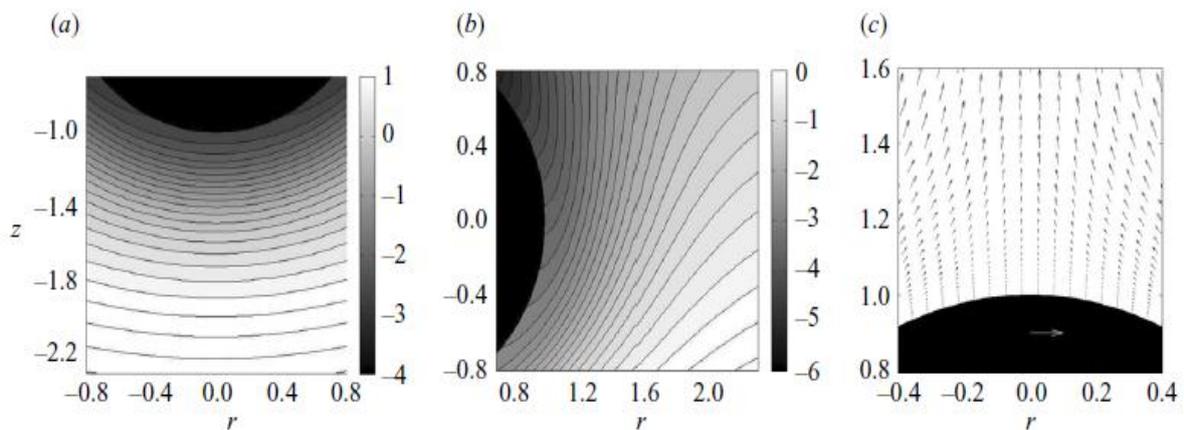


Figure (2.8) : Distorsion des isopycnales [2]

La figure (2.7.a) montre une image quantitative du champ de densité près de la sphère. Les isopycnales sont tirées vers le bas et leur déplacement vertical diminue avec la profondeur z près de la sphère, car ces isopycnales reviennent à leur position de flottabilité neutre. Pendant que la force visqueuse résistante diminue avec z et r , les particules fluides chassées par le déplacement de la sphère ne peuvent pas franchir une zone plus dense et du coup elles auront tendance à tourner autour d'elles-mêmes et créer, par conséquent, des tourbillons.

La déformation des isopycnales numériques (figure (2.7.b)) est légèrement plus pointue comparée aux expériences, pour des raisons qu'on ne pourra pas déterminer. Plusieurs possibilités ont été examinées et escompté, y compris la résolution de l'appareil-photo, le modèle de point aléatoire, la schlieren et le traitement et la grille numérique. Il est intéressant, cependant, que les coefficients de traînée soient en bon accord (figure (2.4)).

La traînée supplémentaire sera rationalisée en termes de flottabilité de fluide dans la proximité immédiate de la sphère. Dans cette région, la déformation des isopycnales dans les expériences et les numériques est comparable.

Concernant les simulations numériques, à proximité de la sphère, on voit que les isopycnales sont fortement comprimés (figure (2.8.a)), à cause d'un un gradient de pression accru (figure (2.5.a)) et par conséquent, générer la traînée due à la pression (figure (2.4.c)). Pendant que la sphère descend, les isopycnales s'inclinent (figure (2.8.b)), entraînant la génération d'une vorticité qui augmente les efforts de cisaillement (figure (2.5.b)) et ainsi la traînée due à la viscosité du fluide (figure (2.4.d)).

Sur une échelle plus grande, les simulations prévoient que la longueur de sillage et le déflexion d'isopycnales diminuent avec l'augmentation du nombre de Richardson (figure (2.9). La figure (2.10.a) montre que la seule région où le schlieren synthétique a détecté des déplacements verticaux de ce modèle (correspondant aux gradients de densité verticaux) contrastait en avant de la sphère, avec les déplacements horizontaux plus forts qui ont été détectés dans le sillage (figure (2.10.b)). En outre, la longueur de sillage et l'amplitude de déformation des isopycnales diminuent avec l'accroissement du nombre de Richardson (figure 10b, c).

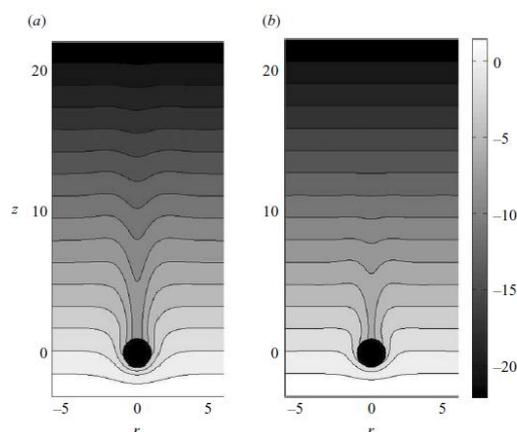


Figure (2.9) : Champ de contraste de densité, résultats numériques pour $Ri = 0,29$ et $Ri = 1,45$

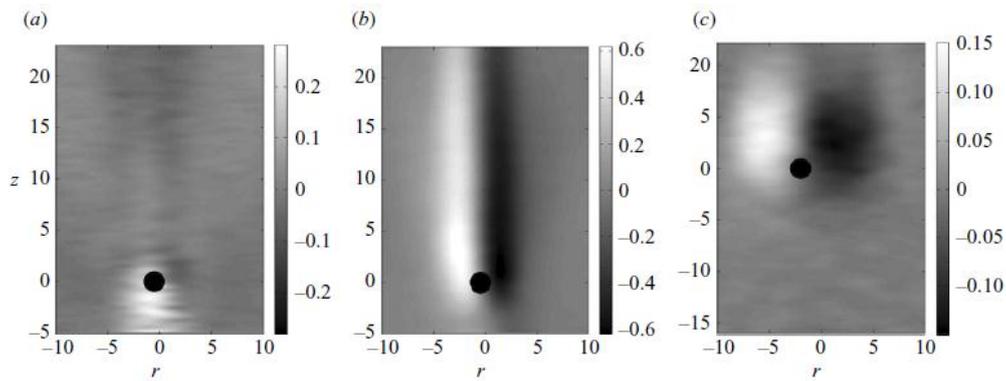


Figure (2.10) : déplacements vertical (a) et horizontal (b et c) dus à la sédimentation d'une sphère de rayon $a = 390 \mu\text{m}$

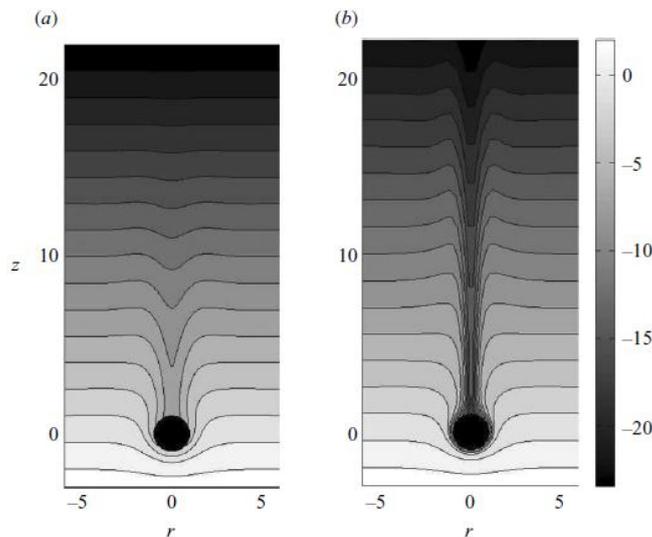


Figure (2.11) : Contraste de densité a. $Re = 0,05$ et $Fr = 0,34$
b. $Re = 0,5$ et $Fr = 1,08$

Le résultat primaire de cette étude est que la stratification augmente la traînée hydrodynamique sur une sphère en sédimentation à petit nombre de Reynolds : les expériences et les simulations numériques ont indiqué que $C_D^N > 1$. Pour un nombre de Prandtl donné (un agent de stratification donné), l'augmentation de la traînée est mieux caractérisée par le nombre de Richardson $Ri = Re/Fr^2$. Ce dernier surgit naturellement quand on considère l'importance relative de la flottabilité et des forces visqueuses et qui peut être exprimée par $\int_{V_F} g \Delta \rho dV / \int_{S_F} \mu (\partial w / \partial r) dS$, où V_F et S_F sont le volume et surface d'un élément. Les coefficients de traînée expérimental et numérique calculés sont en bon accord quantitatif (figure (2.4.b)), atteignant 3,4 fois la valeur du coefficient homogène pour $0 < Ri < 2$. Vu des résultats expérimentaux et numériques, cette étude suggère la formule suivante pour calculer le coefficient de traînée normalisé $C_D^N - 1 \sim Ri^q$, où $q = 0,51 \pm 0,11$, contrairement au résultat $q = 1/3$ pour le $Ri \ll 1$ trouvé par Zvirin et Chadwick 1974.

Pour une stratification linéaire pour $25 \leq Re \leq 100$, Torres et al. (2000) a constaté que l'augmentation de la traînée d'une sphère en sédimentation a été liée à un jet flottable arrière ; cependant, les études numériques courantes n'indiquent aucun signe d'un tel jet

(figure (2.8.c)), compatible à une plus grande importance des forces visqueuses qui empêchent une distorsion rapide des isopycnales. Pour une stratification par étapes à $1,5 \leq Re \leq 15$, Srdic- Mitrovic et al. (1999) a constaté que la traînée accrue sur une sphère a été expliquée par la flottabilité dans le sillage entier du fluide traîné vers le bas. Dans ce cas, l'intégration de la flottabilité au-dessus du sillage entier sur la figure (2.7.a)) a comme conséquence une force 13×10^{-8} bien plus grande que l'augmentation mesurée de traînée $1,5 \times 10^{-8}$ et que la traînée ne dépend pas du sillage entier est encore soutenu par les résultats numériques de deux façons. D'abord, deux sillages peuvent avoir une taille sensiblement différente (figure (2.11)), par conséquent la flottabilité, mais le même coefficient de traînée (figure (2.4)). En second lieu, un équilibre de force sur le sillage qui ignore la contribution de la sphère rapporte un argument de graduation qui prévoit avec précision sa largeur W . L'équilibre entre les forces visqueuses et de flottabilité suggère $(\mu U/W)W^2 \sim g\Delta\rho W^3$ où on suppose que $\Delta\rho \sim N^2\rho_0 W/g$ et les déflexions verticales des isopycnales se comparent également avec W . Ce qui donne $W/a \sim Ri^{-1/3}$ qui est confirmé par résultats numériques donnés par la figure (2.12.a), où W a été pris comme la distance de l'axe de symétrie au point où la déflexion verticale d'isopycnales a diminué de 0.1a.

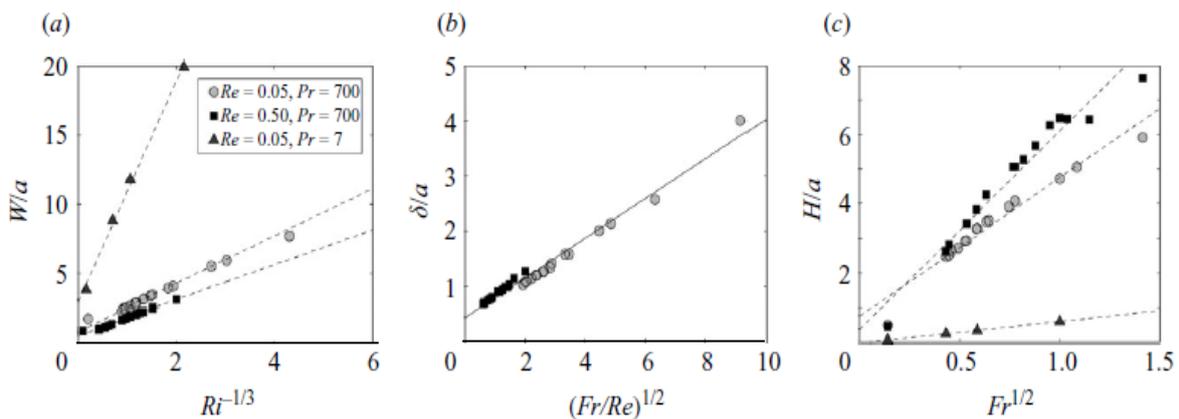


Figure (2.12) : Résultats numériques [2]

Au lieu de cela, on se propose que ce soit la flottabilité d'une région fluide localisée autour de la sphère qui détermine la traînée supplémentaire. Ceci est lié au travail de Higginson et al. (2003) pour des nombres de Reynolds élevés $Re \sim O(10^3)$, où la traînée supplémentaire sur une grille de barres s'est avérée se dériver de la flottabilité du fluide en volume de glissement. Dans ce cas, le volume fluide affectant la traînée peut être identifié en considérant le champ vertical W de vitesse (Figure (2.13)), qui indique que le sillage se compose de deux régions distinctes : inférieure et qui entoure la sphère et descend presque à la même vitesse $w \sim -1$, traîné vers le bas par les forces de cisaillement visqueuses ; le fluide supérieur monte lentement $w > 0$, en raison des isopycnales retraitant sous l'effet de la flottabilité. Il est alors raisonnable de présumer que la flottabilité du fluide, immédiatement à côté de la sphère, est responsable de la traînée supplémentaire, alors que le reste du sillage est simplement un reste du passage de la sphère.

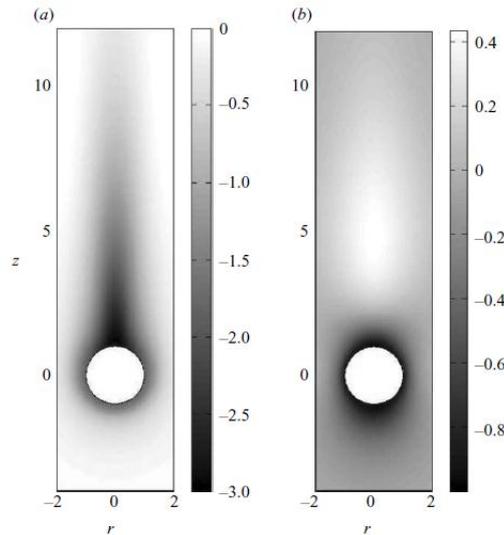


Figure (2.13) : a. Contraste de densité b. Vitesse verticale du fluide

Ici on rationalise la traînée supplémentaire par un argument de graduation basé sur la flottabilité du fluide dans une région traînée vers le bas par la sphère. Pour la clarté, une formulation dimensionnelle est adoptée. Supposant une coquille sphérique de largeur δ , le volume de cette région est calibré à $\pi a^2 \delta$, alors que son contraste de densité est $\Delta\rho = H d\rho/dz$, où H est la distance maximale d'une isopycnales traînée vers le bas. Le coefficient de traînée normalisé peut alors être écrit comme le rapport de cette force de flottabilité et de la force de résistance à l'avancement homogène :

$$C_D^N - 1 \sim \frac{\pi a^2 \delta g \Delta\rho}{C_D^S \frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2} \quad (2.11)$$

où δ/a et H/a doivent toujours être déterminés.

On se propose $\delta \sim (v/N)^{1/2}$ comme échelle de longueur caractéristique dans un écoulement visqueux et flottable (Gargett 1988 ; Saggio et Imberger 2001 ; Barry et al. 2001 ; Basak et Sarkar 2006 ; Blanchette, Peacock et Cousin 2008) ayant pour résultat $\delta/a \sim (Fr/Re)^{1/2}$. C'était, en effet, la graduation de l'ampleur de la coquille fluide autour de la sphère dans les données numériques (figure (2.12.b)), pour lesquelles l'échelle de la longueur caractéristique δ a été du point de vue fonctionnement défini comme épaisseur de la région où la masse volumique ρ était supérieure à 5% de sa valeur maximale, qui s'est produite sur la surface de sphère. De l'autre côté, en dépit de considérer plusieurs possibilités, on ne peut pas trouver une graduation a priori pour la profondeur H . Pour des régimes où le nombre de Reynolds est élevé $Re \sim (10^3)$, $H/a \sim Fr$ en raison d'un équilibre entre l'énergie cinétique et potentielle (Higginson et al. 2003), pourtant entre ceci ne s'applique pas dans le cas du régime de cette étude où la dissipation visqueuse est importante. Par conséquent, on a recouru à une graduation empirique, en calculant H des simulations numériques comme étant la déflexion maximale des isopycnales immédiatement à l'amont de la sphère $z = -a$. La figure (2.12.c) prouve que $H/a \sim Fr^{1/2}$, en conformité avec les observations faites

précédemment et qui stipulent que la déflexion des isopycnal diminue avec l'augmentation de la stratification.

En utilisant $C_D^H \sim 1/Re$ et qui est valable pour de faible nombre de Reynolds, l'équation (2.11) se réduit à $C_D^N - 1 \sim Ri^{1/2}$. Ce résultat est en bon accord avec le profil proposé précédemment $C_D^N - 1 \sim Ri^q$, avec $q = 0,62$ pour les résultats expérimentaux et $q = 0,41$ pour les résultats numériques et $q = 0,51$ comme moyenne.

Ces résultats suggèrent une nouvelle expression pour le coefficient de traînée dans un milieu stratifié :

$$C_D^S = \left(\frac{12}{Re} + \frac{6}{1+\sqrt{2Re}} + 0,4 \right) (1 + \alpha Ri^{1/2}) \quad (2.12)$$

où $\alpha = 1,9$ ($\alpha = 1.95$ et 1.91 dans les expériences et les numériques, respectivement). Cette relation de la traînée supplémentaire s'applique également aux régimes à nombre de Reynolds modéré.

Généralement le problème d'une sphère en sédimentation dans un fluide stratifié dépend encore plus du nombre de Prandtl. Tandis qu'une grande partie de cette étude est faite pour une stratification avec une solution aqueuse $Pr = 700$, le cas d'une stratification avec un gradient de température ($Pr = 7$) est également importante dans les environnements aquatiques. Pour ce cas, les simulations montrent une plus petite augmentation de la traînée due à la stratification (figure (2.4)) et une dépendance plus faible à vis-à-vis du nombre de Richardson Ri ($q = 0,29$). Ceci peut s'expliquer en considérant une diffusion plus forte qui contracte plus efficacement l'accumulation des forces de flottabilité en lissant plus rapidement les déflexion d'isopycnales dehors. Ceci est montré sur le figure (2.14), qui compare le sillage pour $Pr = 7, 100$ et 700 : la diminution de déflexion d'isopycnales avec le nombre de Prandtl (voir également la figure (2.12.c)) et le sillage devient plus court et plus au loin (voir également la figure (2.12.a)).

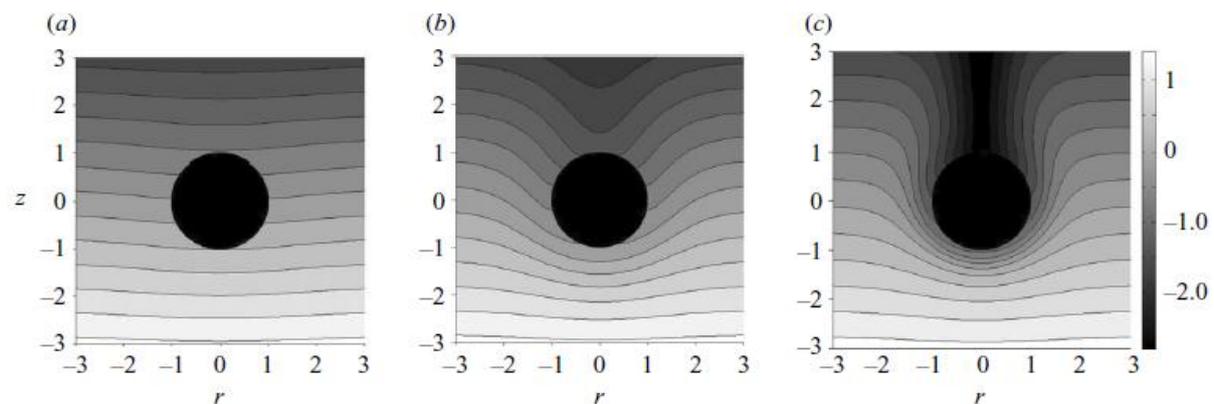


Figure (2.14) : Contraste de densité pour a. $Pr=7$, b. $Pr=100$ et c. $Pr=700$

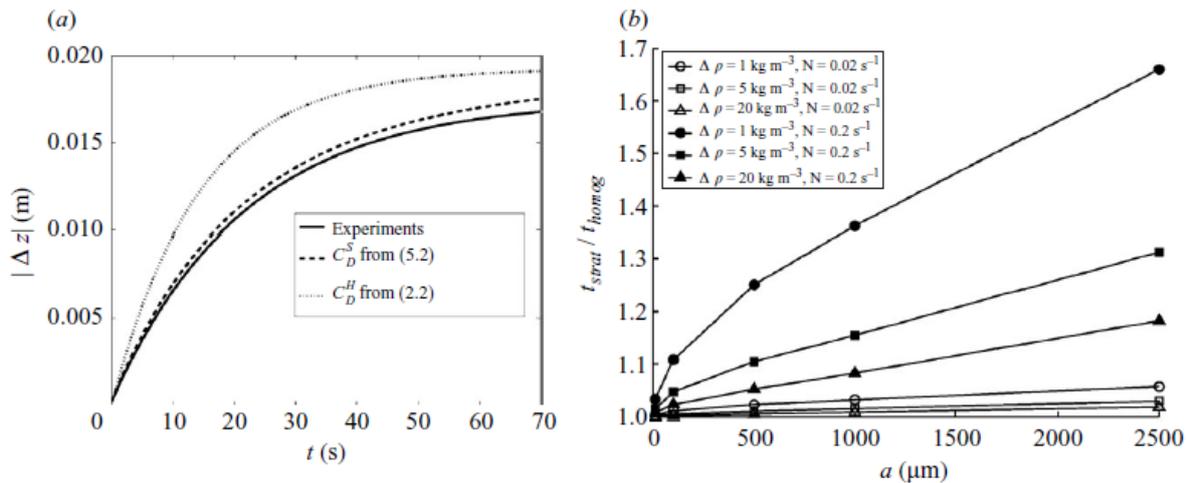


Figure (2.15) : a. Trajectoire d'une particule sphérique de rayon $a = 196 \mu\text{m}$
 b. Le ratio des temps de sédimentation

La traînée supplémentaire observée implique qu'une sphère se sédimente plus lentement dans un fluide stratifié que prévu utilisant des formulations de fluide homogène. La figure (2.15.a) montre la trajectoire adoptée par une sphère de rayon $a = 196 \mu\text{m}$ dans un milieu stratifié avec $N = 2,92 \text{ s}^{-1}$, comparée à la trajectoire prévue dans un fluide homogène. La distance a été parcouru à plus de 20 s, ce qui fait approximativement 40% moins dans un milieu stratifié, et est prévue à moins à 5% par la formulation du coefficient de traînée (2.12).

Dans un océan, on prévoit une augmentation du temps de stabilisation dû à la stratification moins de 6%, montant de manière significative à 66% pour les fjords et les admissions fortement stratifiés. Ceci suggère que l'effet de la stratification sur le temps de stabilisation doit être expliqué dans les corps normaux fortement stratifiés de l'eau. Nous prévoyons que cet effet à composer par l'sédimentation gêné dû aux interactions de particule-particule dans la particule opacifie (Bush, Thurber et Blanchette 2003 ; Blanchette et Bush 2005). En conclusion, on note que ces résultats s'appliquent aux particules beaucoup plus petites que la balance de longueur caractéristique de la stratification g/N^2 (supérieure à un mètre pour $N^2 < 10 \text{ s}^{-2}$), la situation qui est de loin la plus commune dans les environnements stratifiés.

CHAPITRE 3

APPROCHE THEORIQUE
ET ETUDE NUMERIQUE

3.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présenterons une tentative de résolution analytique du champ de vitesse d'un fluide linéairement stratifié dû à un écoulement perturbé provoqué par le mouvement stationnaire d'une petite particule sphérique à faible nombre de Reynolds. Nous allons essayer d'intégrer le modèle obtenu à l'aide des polynômes de Legendre et des harmoniques sphériques.

Ensuite, nous ferons une comparaison graphique, avec MatLab, entre les forces de traînée dans un milieu stratifié données par trois modèles différents, cela en comparant le terme supplémentaire dû à la stratification.

Finalement, nous réaliserons une étude numérique sur le temps de sédimentation de particules sphériques, toujours à faible nombre de Reynolds et de différentes tailles en résolvant le système différentiel obtenu à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 codifié en MatLab.

3.2. Résolution analytique d'un écoulement de perturbation :

Dans cette partie, nous considérons la chute libre dans un fluide linéairement stratifié d'une particule sphérique de rayon a , de densité ρ_p et de centre de masse localisé par \overline{X}_p comme il est montré sur la figure d'illustration (1.1). Nous procédons de la même manière que celle du paragraphe (1.3.2) en décomposant la vitesse du fluide en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit sachant, qu'il est clair, que l'écoulement non perturbé satisfait les équations de Navier-Stokes (1.58) et de continuité (1.59) associées aux conditions aux limites (1.60a), (1.60b) et (1.60c). Le mouvement permanent à faible nombre de Reynolds de l'écoulement induit par la chute de la sphère vérifie, alors, les nouvelles équations adimensionnelles de Navier-Stokes et de transport associées aux conditions aux limites données par les deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla} p' + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{u} = \vec{1} \text{ sur la particule} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ à l'infini} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \Delta \rho' = \gamma \vec{u} \cdot \vec{e}_3 \\ \left. \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right|_{r=1} = \cos \theta \\ \rho' \rightarrow 0 \text{ à l'infini} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

avec

$$\rho = \rho_0 - \gamma z + \rho'$$

où ρ_0 est une densité de référence, γ est le gradient de densité et ρ' est la densité de perturbation, il en résulte aussi :

$$p = -\rho_0 g z + \gamma g z^2 / 2 + p'$$

avec p' la pression de perturbation, κ la diffusivité de l'agent de stratification. Les variables caractéristiques sont la taille de la particule a , sa vitesse \vec{U} et la pression $\rho_0 U^2 / 2$.

En introduisant l'opérateur Laplacien dans la première équation du système (3.1) nous aurons :

$$-\overline{\Delta \nabla} p' + \mu \overline{\Delta \Delta} \vec{u} + \overline{\Delta} \rho' g \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (3.3)$$

La commutativité de l'opérateur de Laplace et la première équation du système (3.2) donnent :

$$\overline{\nabla} \Delta p' + \mu \Delta^2 \vec{u} + g Pe (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (3.4)$$

où $Pe = aU/\kappa$ qui, comme le nombre de Reynolds, compare les forces d'inertie aux effets de diffusivité.

Sachant que $\overline{\text{rot}} \vec{\nabla} = \vec{0}$, alors, en introduisant l'opérateur rotationnel dans l'équation (3.4) elle devient :

$$\mu \Delta^2 \overline{\text{rot}} \vec{u} + g Pe \overline{\text{rot}} (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (3.5)$$

En effet, en tenant compte de la géométrie de la sphère, le mouvement du fluide généré par le déplacement de la particule doit être invariant par rotation autour de l'axe passant par l'origine de la sphère et dirigé suivant \vec{U} . Autrement dit, dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, où θ est l'angle de colatitude entre (\vec{U}, \vec{e}_r) la solution recherchée doit être de la forme :

$$\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$$

c'est-à-dire que la vitesse ne dépend pas de l'azimut φ , et encore, elle doit être contenue dans un plan. En particulier, dans ce cas, l'écoulement étant axisymétrique et sachant qu'il vérifie l'équation de continuité $\overline{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ donc la vitesse dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}(r, \theta)$ tel que $\vec{u} = \overline{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. En plus, le fait que $u_\varphi = 0$ impose que A_r et A_θ soient des constantes pures et encore nulles du fait de la condition à l'infini du champ de vitesse induit, c'est-à-dire, seulement la composante A_φ qui n'est pas nulle $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$. Cela permet d'avoir l'équation suivante :

$$\mu \Delta^2 \overline{\text{rot}} \text{rot} A_\varphi \vec{e}_\varphi + g Pe \overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} A_\varphi \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (3.6)$$

Tenant compte de la relation $\overline{\Delta} = \vec{\nabla} \text{div} - \overline{\text{rot}} \text{rot}$ et $\overline{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ on aura :

$$\Delta^3 A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi - \lambda \overline{\text{rot}} (A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (3.7)$$

avec : $\lambda = g Pe/\mu$

Comme pour le problème de Stokes, pour des raisons de simplicité des calculs, nous introduisons la fonction de courant $\psi = f(r, \theta)$ telle que $A_\varphi = \frac{\psi}{r \sin \theta}$ ce qui est un problème équivalent.

La relation $\vec{u} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ donne le champ de vitesse comme suit :

$$\vec{u} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right) \quad (3.8)$$

Nous allons calculer le deuxième terme de l'équation (3.7) :

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r + \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right) \quad (3.9)$$

Puis :

$$(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r + \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Finalement, on aura :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \frac{1}{r} \left[-\sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2 \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2} \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \quad (3.11)$$

Avec $\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} E^2(\psi) \vec{e}_\varphi$, le modèle qui régit ce problème se présente comme suit :

$$E^6(\psi) = -\sin^2 \theta - \left(\frac{\cos \theta}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.12)$$

Or, pour obtenir le champ de vitesse et par conséquent les forces hydrodynamiques, il faut avoir d'abord la fonction de courant ψ . Malheureusement, nous n'avons pas su résoudre l'équation différentielle (3.12), elle contient beaucoup de termes instables, convectifs et des dérivées croisées. En effet, nous avons essayé de la résoudre avec les polynômes de Legendre et les harmoniques sphériques à l'aide de Maple mais nous n'avons pas eu des résultats concrets.

3.3. Comparaison de la force de traînée de trois modèles :

Nous considérons la même situation que précédemment, c'est-à-dire, une petite particule sphérique de rayon a en mouvement dans un fluide linéairement stratifié dû à son poids à faible nombre de Reynolds.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que la formule la plus simple de la force de traînée exercée sur une particule sphérique en chute libre dans un fluide homogène est donnée par :

$$F_D = -6\pi\mu aU$$

appelée traînée de Stokes. Au deuxième chapitre, nous avons vu que la stratification augmente la force de traînée et en plus on peut toujours la mettre sous la forme suivante :

$$F_D = -6\pi\mu aU(1 + \beta)$$

autrement dit, elle est égale à la force de traînée de Stokes plus un terme dû à la stratification. Plusieurs études sont consacrées pour étudier ce terme supplémentaire. Dans ce qui suit, on s'intéresse à une comparaison graphique à l'aide de MatLab de trois modèles différents (Yick et al., Candelier, et Zvirin et Chadwik).

3.3.1. Modèle de Yick et al. :

Nous pouvons mettre la force de traînée dans un milieu stratifié sous une forme plus commode comme il est montré dans le chapitre 2 :

$$F_D = C_D^S \frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2$$

où le C_D^S est le coefficient de traînée dû à la stratification, $\frac{1}{2} \rho U^2$ est l'échelle caractéristique de pression et le terme πa^2 s'appelle le maître couple et qui est l'aire de la projection d'une sphère sur un plan.

Ensuite, nous faisons apparaître le terme de traînée de Stokes :

$$F_D = -6\pi\mu aU \times C_D^S \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2}{6\pi\mu aU}$$

Il en résulte :

$$F_D = 6\pi\mu aU \times C_D^S \frac{Re}{12}$$

avec :

$$C_D^S = \left(\frac{12}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{2Re}} + \frac{2}{5} \right) (1 + 1.9 Ri^{0.29})$$

obtenu par Yick et al. pour une stratification due à un gradient de température.

ce qui va donner :

$$C_D^S \times \frac{Re}{12} = \left(1 + \frac{Re/2}{1 + \sqrt{2Re}} + \frac{Re/2}{15} \right) (1 + 1.9 Ri^{0.29})$$

Finalement, la force de traînée de la particule sphérique qui se sédimente dans un milieu stratifié dû au gradient de température est obtenue à l'aide du modèle de Yick et al. par :

$$F_D = 6\pi\mu aU \times \left\{ 1 + \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) + 1.9 \left[1 + \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) \right] Ri^{0.29} \right\}$$

Du coup, le terme supplémentaire pour ce cas β_Y est tel que :

$$\beta_Y = \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) + 1.9 \left[1 + \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) \right] Ri^{0.29} \quad (3.13)$$

3.3.2. Modèle de Candelier :

F. Candelier a proposé une formule mais elle reste à vérifier, il a trouvé que la force de traînée exercée sur une particule sphérique en mouvement dans un milieu linéairement stratifié sous l'effet d'un gradient de température est donnée par :

$$F_D = -6\pi\mu aU \times \left[1 + 0.662 \left(\frac{a}{L} \right) \right] \quad (3.14)$$

Comme dans le modèle de Ardekani et al.[7], le nombre de Richardson peut être exprimé par la formule ci-contre :

$$Ri = \frac{1}{Pe} \left(\frac{a}{L} \right)^4 = \frac{1}{RePr} \left(\frac{a}{L} \right)^4$$

ce qui va donner :

$$\left(\frac{a}{L} \right) = (RePrRi)^{1/4}$$

où $L = (\mu\kappa/\gamma g)^{1/4}$ qui est l'échelle de longueur caractéristique [7].

Finalement, la force de traînée dans cette situation s'exprime par :

$$F_D = -6\pi\mu aU \times \left[1 + 0.662(RePrRi)^{1/4} \right]$$

Et de plus, le terme supplémentaire de la force de traînée β_C est donné par :

$$\beta_C = 0.662(RePrRi)^{1/4} \quad (3.15)$$

3.3.3. Modèle de Zvirin et Chadwick :

Pour un corps symétrique qui se sédimente dans un fluide linéairement stratifié avec un gradient thermique, la force de traînée exercée sur ce corps s'exprime par :

$$F_D = -6\pi\mu aU \times \left[1 + B(\zeta)Ri^{1/3} \right]$$

où $\zeta = Ri^{1/3}/Pe$ qui est un paramètre de diffusion et le terme $B(\zeta)$ est un paramètre correcteur évalué par l'intégrale suivante exprimée en coordonnées sphériques [7]:

$$B(\zeta) = \frac{3}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^5 \theta (\sin^2 \theta + \zeta k^4)}{(\sin^2 \theta + \zeta k^4)^2 + k^6 \cos^2 \theta} dk d\theta$$

Les résultats numériques évaluant cette intégrale sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.1 : Dépendance du paramètre correcteur B avec le paramètre de diffusion ζ

ζ	0,0	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	5,0	10,0
$B(\zeta)$	1,060	1,044	0,944	0,872	0,821	0,782	0,750	0,723	0,681	0,649	0,442	0,372

Le terme supplémentaire β_Z est tel que :

$$\beta_Z = B(\zeta) Ri^{1/3} \quad (3.16)$$

qui est évalué également numériquement avec une interpolation cubique à l'aide de MatLab.

3.3.4. Procédure de comparaison :

Récapitulons d'abord les différents modèles à comparer :

$$\begin{cases} Y = \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) + 1.9 \left[1 + \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2Re}} + \frac{1}{15} \right) \right] Ri^{0.29} \\ C = 0.662(RePrRi)^{1/4} \\ Z = B(\gamma) Ri^{1/3} \end{cases} \quad (3.17)$$

Avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} Ri \ll 1 \\ Pe \gg Ri^{2/3} \end{cases} \quad (3.18)$$

La seconde condition donne :

$$Ri \ll (7 \times Re)^{3/2} \quad (3.19)$$

en prenant $Pr = 7$ pour une stratification due à un gradient thermique.

Pour procéder à la comparaison, nous fixons d'abord un nombre de Reynolds relativement faible pour rester dans l'hypothèse des écoulements rampants ensuite on récupère un intervalle de variation du nombre de Richardson en s'appuyant sur la relation (3.19) puis on fait tourner les calculs qui donnent les courbes comparatives comme il est montré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple pour $Re = 0,500$:

```
>x=0 :1/1.2 :10 ;Ri=0 :.5 :6 ;Re=.500 ;a=Re*(.5/(1+sqrt(2*Re))+1/30)+1.9*(1+Re*(.5/(1+sqrt(2*Re))+1/30))*Ri.^29 ;b=.662*(7*Re*Ri).^25 ;c=spline(g,B,x).*Ri.^(1/3) ;plot(Ri,a,'r',Ri,b,'b',Ri,c,'g',Ri,abs(b-c),'mv—','grid)
```

3.4. Temps de sédimentation :

3.4.1. Position du problème :

Nous considérons un feu dans une enceinte fermée de hauteur $h = 3 \text{ m}$ et où le gradient de température provoque une stratification des fumées qui se forment. Nous voudrions étudier le temps de sédimentation des particules de suies formées lors d'une combustion incomplète, pour cela, nous supposons que les particules sont sphériques, isolées les unes des autres et électriquement neutres et qui se déplacent sous l'effet de gravité où les effets d'inertie sont négligeables comparativement aux effets visqueux, autrement dit, des régimes à faible nombre de Reynolds et où l'écoulement induit est faiblement stationnaire (Figure (3.1)).

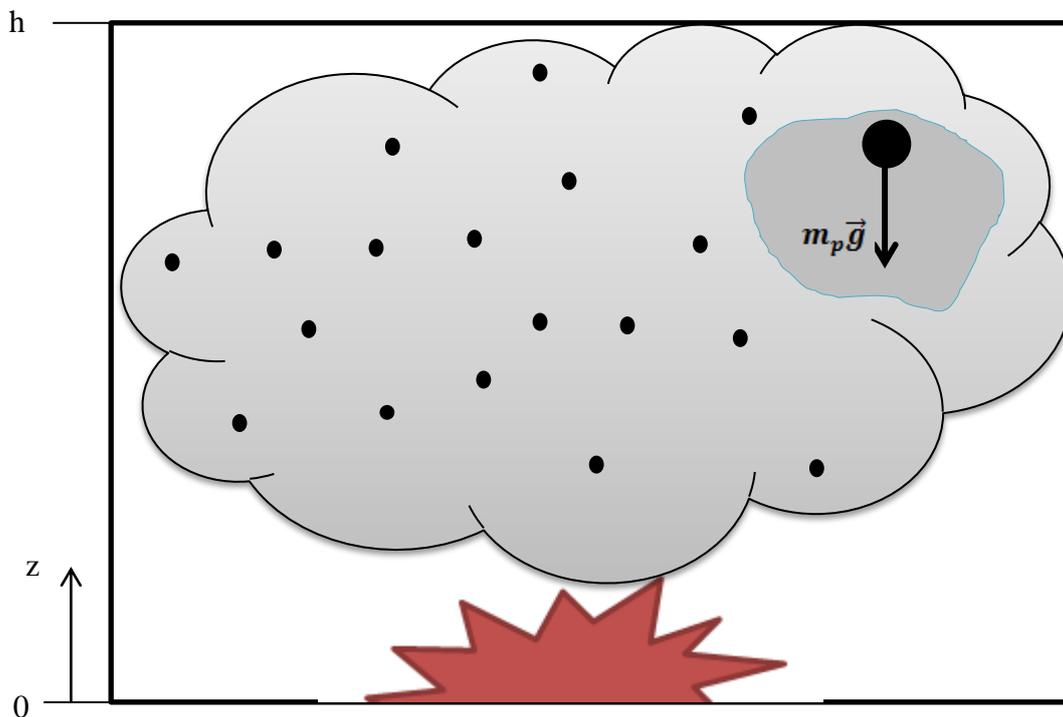


Figure (3.1) : Sédimentation des suies dans une fumée

La masse volumique d'un gaz en fonction de la température est approximée par la formule empirique suivante :

$$\rho = \rho_{273} \times \frac{273}{T}$$

Les fumées sont composées essentiellement de l'air, le monoxyde de carbone et le dioxyde de carbone dont leurs masses volumiques sont données au tableau ci-dessous :

Tableau 3.2 : Formules et masses volumiques des composants essentiels des fumées :

Gaz à 273 K	Formule	Masse volumique en kg/m ³
air	-	1,293
Dioxyde de carbone	CO ₂	1,977
Monoxyde de carbone	CO	1,250

Nous considérons un feu moyen où la fumée est composée de 30% d'air, 7% de monoxyde de carbone et le reste est du dioxyde de carbone, à 30°C à la source. La masse volumique d'un tel mélange à 273 K est telle que :

$$\rho_{273} = 1,293 \times 0,30 + 1,977 \times 0,63 + 1,250 \times 0,07 \Rightarrow \rho_{273} = 1,721 \text{ kg/m}^3$$

La formule ci-dessus permet d'avoir une approximation à 303 K et à 328 K respectivement :

$$\rho_{303} = 1,721 \times \frac{273}{303} \Rightarrow \rho_{303} = 1,551 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{328} = 1,721 \times \frac{273}{328} \Rightarrow \rho_{328} = 1,432 \text{ kg/m}^3$$

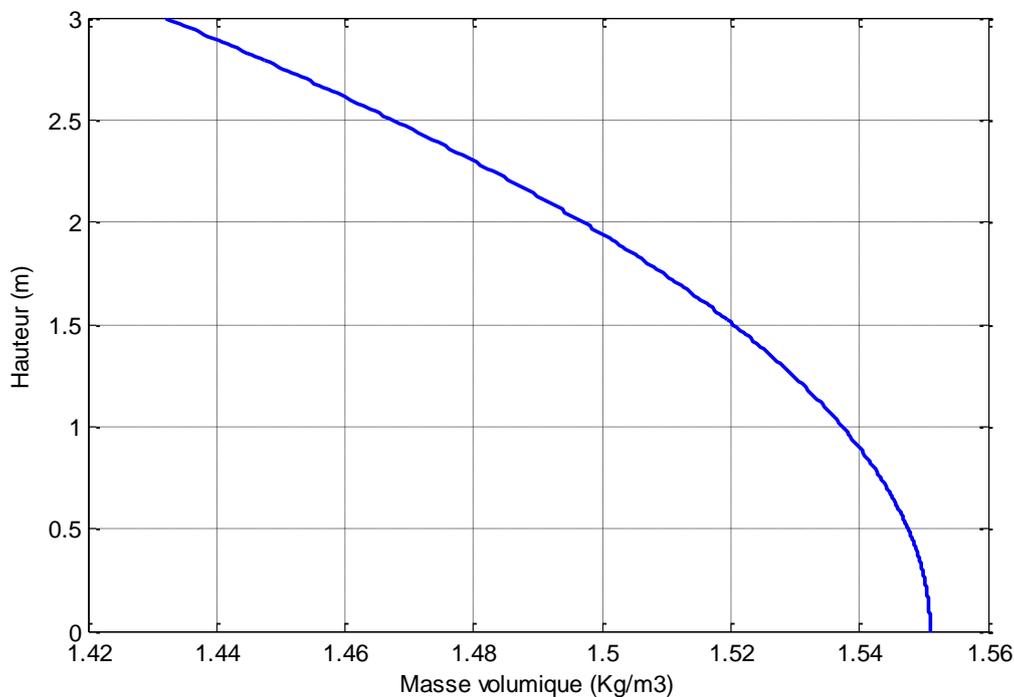


Figure (3.2) : Distribution de la masse volumique en fonction de la hauteur z

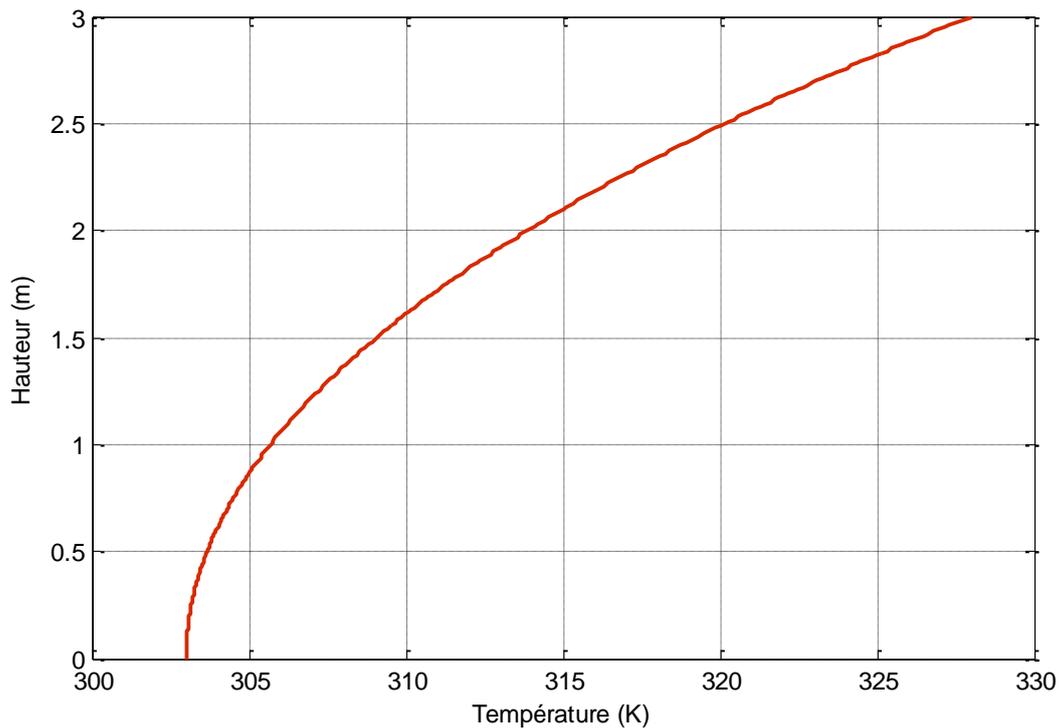


Figure (3.2) : Distribution de la température en fonction de la hauteur z

3.4.2. Equation de mouvement :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m_p \vec{\Gamma}$ sur une particule isolée quelconque, projeté sur l'axe descendant, on aura:

$$m_p \frac{dU}{dt} = -6\pi a \mu(z)[1 + \beta(z)] + (m_p - m)g \quad (3.20)$$

avec $\Gamma = \frac{dU}{dt} = z''$ qui est l'accélération de la particule, le premier terme du second membre est la force de traînée exercée sur la particule et le deuxième est la force de flottabilité.

En réarrangeant l'équation (3.20) on aura :

$$z'' = -\frac{9\mu(z)[1+\beta(z)]}{2a^2\rho}z' + \left[1 - \frac{\rho(z)}{\rho_p}\right]g \quad (3.21)$$

qui est une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$z'' + f(z)z' + g(z) = 0$$

or, ce type d'équations n'admet pas de solutions analytiques et fait appel aux méthodes numériques, dans ce contexte, nous résoudrons ce problème avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

D'abord, nous transformons l'équation différentielle de second ordre (3.21) en un système de deux équations différentielles de premier ordre à l'aide du changement de variable suivant :

$$\begin{cases} y_1 = z \\ y_2 = z' \end{cases}$$

ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{9\mu(z)[1+\beta(y_1)]}{2a^2\rho(z)}y_2 + \left[1 - \frac{\rho(z)}{\rho_p}\right]g \end{cases} \quad (3.22)$$

qui est un système de deux équations différentielles de premier ordre avec des coefficients variables.

3.4.3. Détermination des paramètres du problème :

Distribution de la masse volumique ρ :

Supposons que la distribution de la masse volumique et de la température est normale (Ae^{Bz^2}) en fonction de la hauteur z comme il est montré sur les figures (3.2) et (3.3).

La détermination des constantes A et B donne la distribution suivante de la densité :

$$\rho(y_1) = \rho_0 \exp\left[\left(-\ln\frac{\rho_0}{\rho_h}\right)\left(\frac{y_1}{h}\right)^2\right] \quad (3.23)$$

où $\rho_0 = \rho(z = 0) = 1,551 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_h = \rho(z = h) = 1,432 \text{ kg/m}^3$ qui sont les masses volumiques de la fumée à $z = 0$ et à $z = h$.

ainsi le gradient de densité sera donné par :

$$\frac{d}{dy_1}\rho(y_1) = -\left[\left(2\ln\frac{\rho_0}{\rho_h}\right)\frac{y_1}{h}\right]\frac{\rho(y_1)}{h} \quad (3.24)$$

Distribution de la température T :

De la même manière que précédemment, nous trouvons que la distribution de la température est donnée par :

$$T(y_1) = T_0 \exp\left\{\ln\frac{T_h}{T_0}\left(\frac{y_1}{h}\right)^2\right\} \quad (3.25)$$

avec $T_0 = T(z = 0) = 303 \text{ K}$ et $T_h = T(z = h) = 328 \text{ K}$ étant les température à $z = 0$ et à $z = h$.

Distribution de la viscosité dynamique :

La viscosité dynamique est liée à la température par la formule de Sutherland suivante :

$$\mu(y_1) = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left[\frac{T(y_1)}{T_0} \right]^{3/2}$$

où les constantes C , T_0 et μ_0 dépendent de la nature du gaz.

Tableau 3-3: Effets de la température sur la viscosité

Gaz	$C[K]$	$T_0[K]$	$\mu_0[\mu Pa \cdot s]$
Air	120	291,15	18,27
CO_2	240	293,15	14,80
CO	118	288,15	17,20

Pour ce cas de composition des fumées, les constantes C , T_0 et μ_0 valent respectivement

$$C = 120 \times 0,30 + 240 \times 0,63 + 118 \times 0,07 \Rightarrow C = 195,5 K$$

$$T_0 = 291,15 \times 0,30 + 293,15 \times 0,63 + 288,15 \times 0,07 \Rightarrow T_0 = 292,20 K$$

$$\mu_0 = 18,27 \times 0,30 + 14,80 \times 0,63 + 17,20 \times 0,07 \Rightarrow \mu_0 = 16,01 [\mu Pa \cdot s]$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\mu(y_1) = 1,56 \times 10^{-6} \times \frac{[T(y_1)]^{3/2}}{T+195,5} \quad (3.26)$$

Expression de $\beta(y_1)$:

Nous distinguons deux cas pour ce paramètre :

Pour un milieu homogène, $\beta(y_1)$ est nul.

Dans un milieu stratifié, nous adoptons le modèle proposé par Yick et al. :

$$\beta(y_1) = \frac{Re}{2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}Re} + \frac{1}{15} \right) (1 + 1,9Re^{0,29}) + 1,9Re^{0,29} \quad (3.27)$$

avec le nombre de Reynolds donné par :

$$Re = \frac{ay_2\rho(y_1)}{\mu(y_1)} \quad (3.28)$$

et le nombre de Richardson :

$$Ri = -\frac{g\rho(y_1)}{\rho_0 y_2 \mu(y_1)} \cdot \frac{d}{dy_1} \rho(y_1) \quad (3.29)$$

3.4.4. Procédure de résolution :

L'équation du mouvement (3.21) est une équation différentielle de second ordre à coefficients variables, or, elle n'admet des solutions analytiques ce qui nous ramène à des méthodes numériques. Toute équation différentielle d'ordre n peut être transformée en un système de n équations différentielle linéaires, du coup, pour notre cas, on doit résoudre le système (3.22) et on va utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 codifiée en MatLab.

Les étapes de résolution sont les suivantes :

Ayant les données suivantes :

$$h = 3 \text{ m}$$

$$\rho_0 = \rho(z = 0) = 1,551 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_h = \rho(z = h) = 1,432 \text{ kg/m}^3$$

on codifie la relation (3.23) donnant la distribution de la masse volumique et celle donnant son gradient (3.24) dans un fichier function M-file.

Les données :

$$T_0 = T(z = 0) = 303 \text{ K}$$

$$T_h = T(z = h) = 328 \text{ K}$$

permettent d'écrire un fichier function M-file de l'équation (3.25) donnant la distribution de la viscosité dynamique de la fumée.

Ensuite, à partir des relations (3.28) et (3.29) (nombre de Reynolds et nombre de Richardson respectivement) on codifie la relation (3.27) donnant le terme supplémentaire de la traînée dû à la stratification pour une masse volumique moyenne des particules $\rho_p = 1800 \text{ kg/m}^3$ [11].

Puis, dans un autre fichier function M-file, on codifie le système obtenu (2.22).

Finalement, on regroupe tous les fichiers function M-file dans un script principal dans lequel on introduit à chaque exécution la taille de la particule et il nous retourne un graphe illustrant la variation de la distance verticale parcourue par cette particule, dans un premier temps dans un milieu stratifié, en fonction de son temps de sédimentation puis on refait les calculs pour le cas homogène (dans le second cas, on prend $\rho = 1,491 \text{ kg/m}^3$).

N.B : Tous les fichiers M-file sont donnés dans l'annexe C.

CHAPITRE 4

RESULTATS
ET INTERPRETATIONS

Nous commençons d'abord par rapporter les résultats de la comparaison des modèles cités dans le paragraphe précédent ensuite on passe à ceux donnant le temps de sédimentation dans un milieu homogène et on termine par les résultats obtenus pour un milieu stratifié.

4.1. Résultats de la comparaison :

En suivant la méthode décrite dans le chapitre précédent pour le choix des paramètres, on a réalisé plusieurs calculs et par la suite, on a retenu les plus significatifs (tableau 4.1) et les graphes sont présentés ci-dessous et on se contentera d'une description globale des différentes situations.

Tableau 4.1 : Nombre de Reynolds et nombre de Richardson correspondant

Re	0,001	0,003	0,005	0,010	0,020	0,050	0,100	0,500
$(7Re)^{1,5}$	0,0006	0,0030	0,0065	0,0185	0,0524	0,2071	0,5857	6,5479
Ri	0,00006	0,00030	0,00065	0,00185	0,00524	0,02071	0,05857	0,65479

Pour satisfaire la condition $Ri \ll 1$, nous avons considéré le nombre de Richardson tel que :

$$Ri = \frac{1}{10} (7Re)^{1,5} \quad (4.1)$$

Pour estimer la valeur de $B(\zeta)$, nous avons réaliser une interpolation cubique sur MatLab des résultats numériques présentés dans le tableau (3.1). Nous avons mis les données dans un fichier M-file appelé Paramètre_B, puis nous avons directement fait tourner les calculs sur MatLab comme il est montré dans l'exemple du chapitre précédent.

Les graphes présentés ci-dessous donnent, en fonction du nombre de Richardson, le profil du terme supplémentaire de la force de traînée β exercée sur une particule sphérique en mouvement libre dû à la gravité dans un milieu stratifié à différents nombres de Reynolds. La légende est montrée sur le graphe sachant que beta est le terme supplémentaire β .

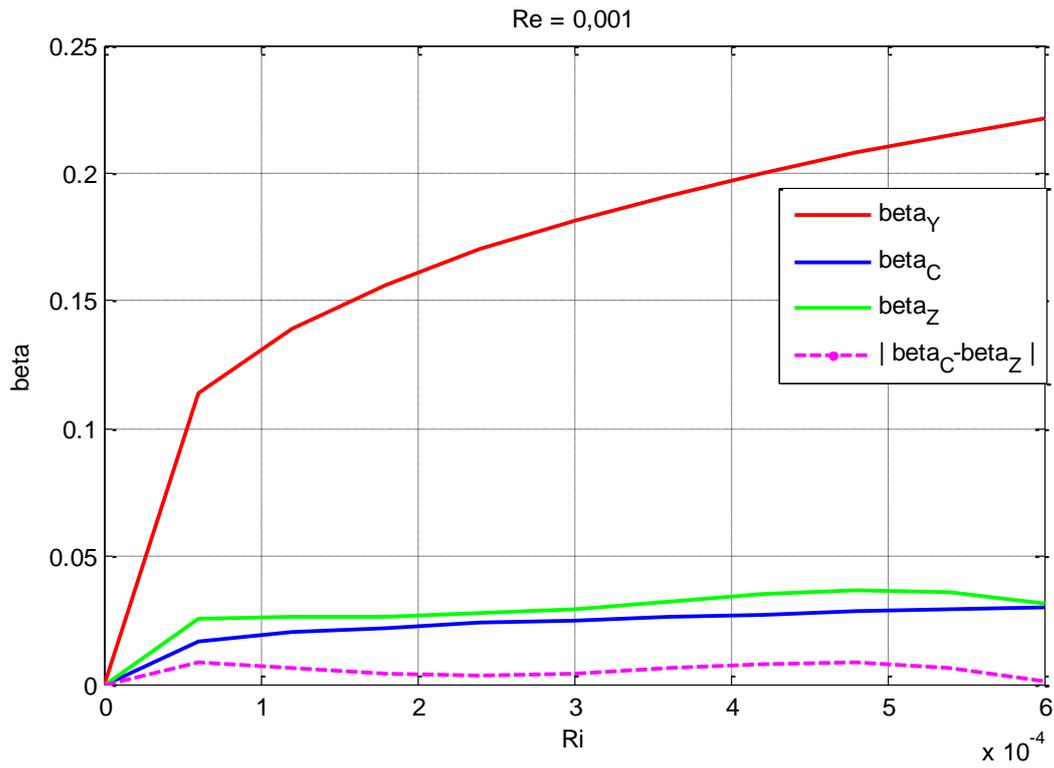


Figure (4.1.a)

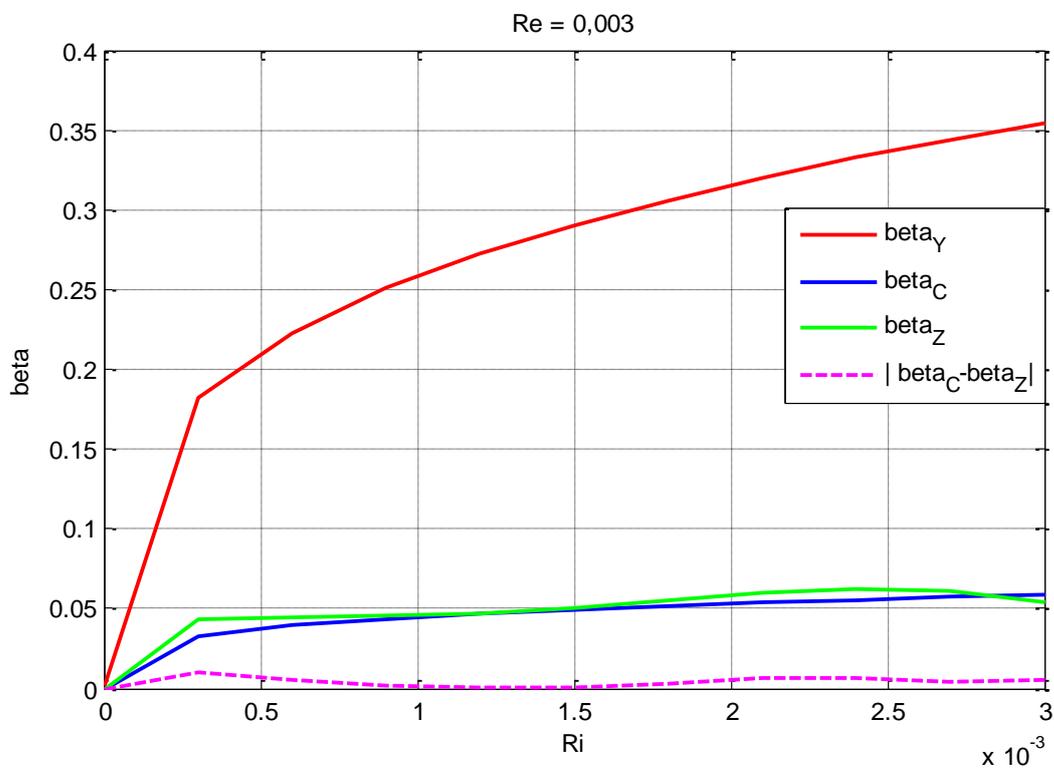


Figure (4.1.b)

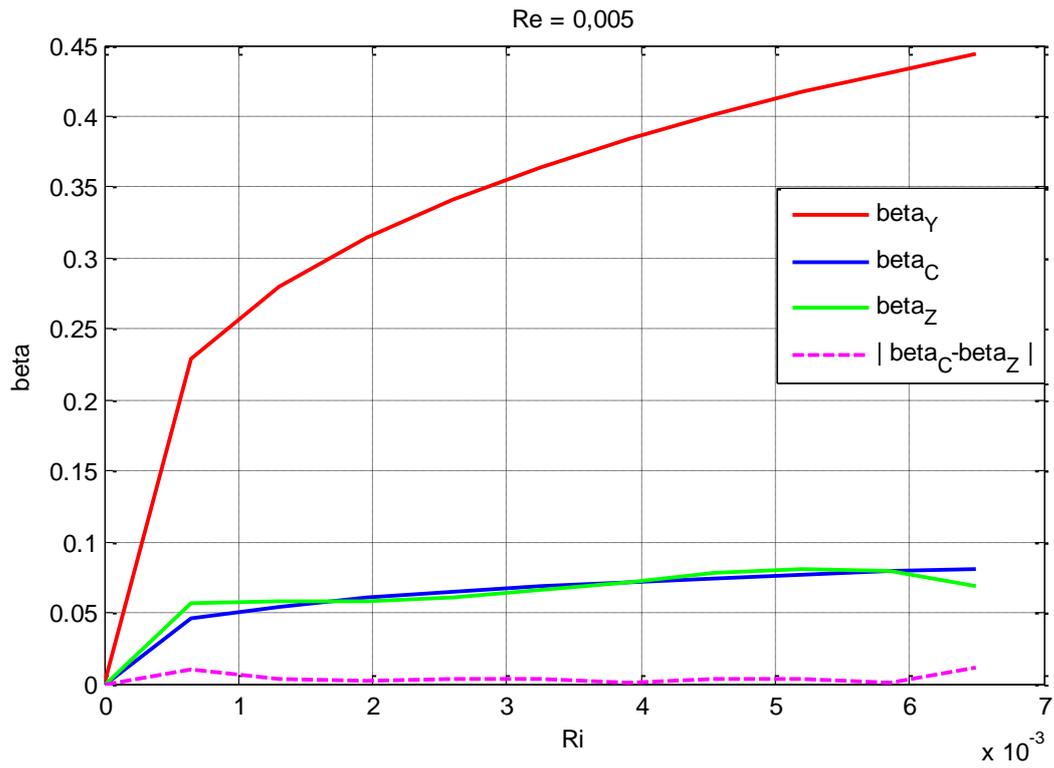


Figure (4.1.c)

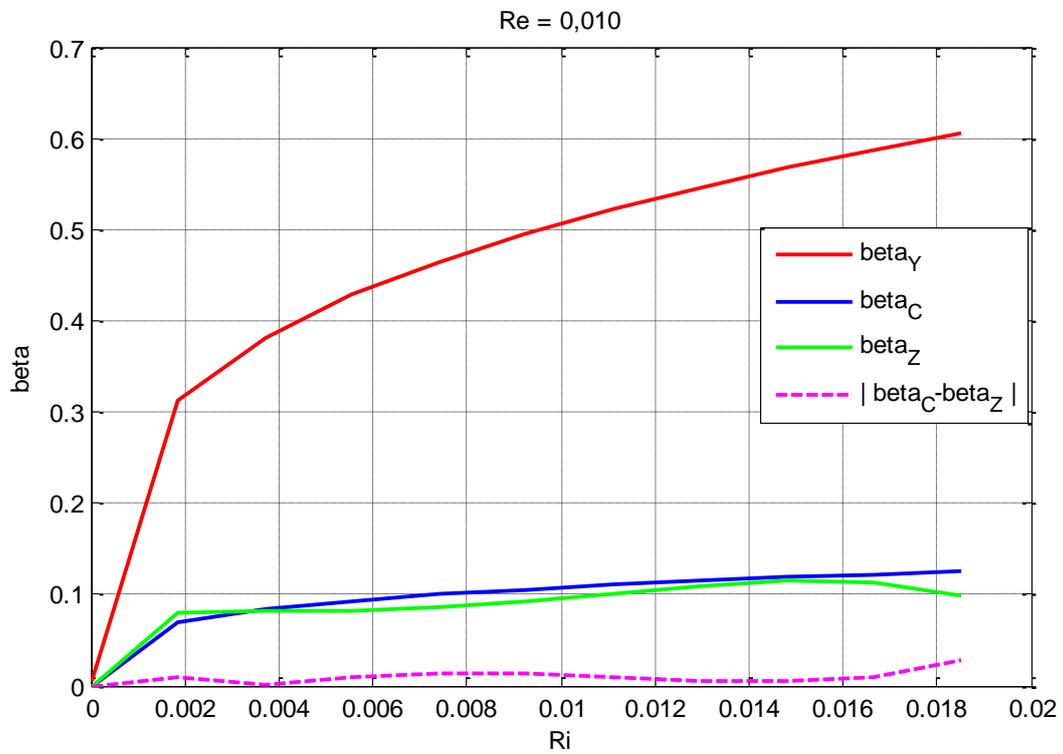


Figure (4.1.d)

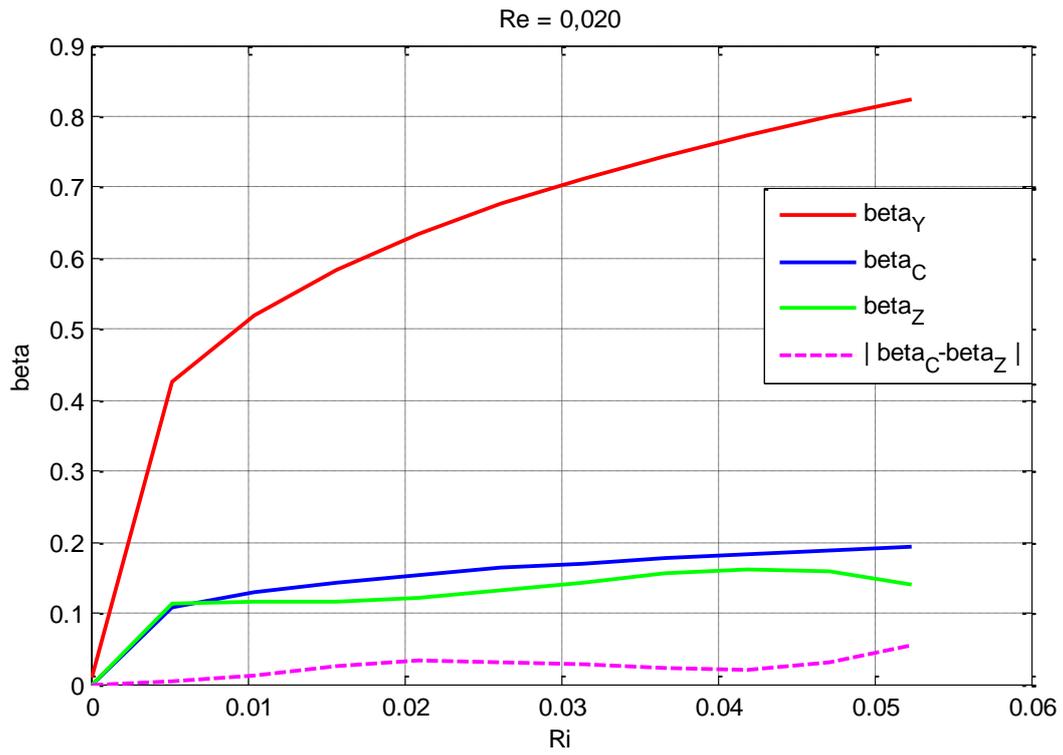


Figure (4.1.e)

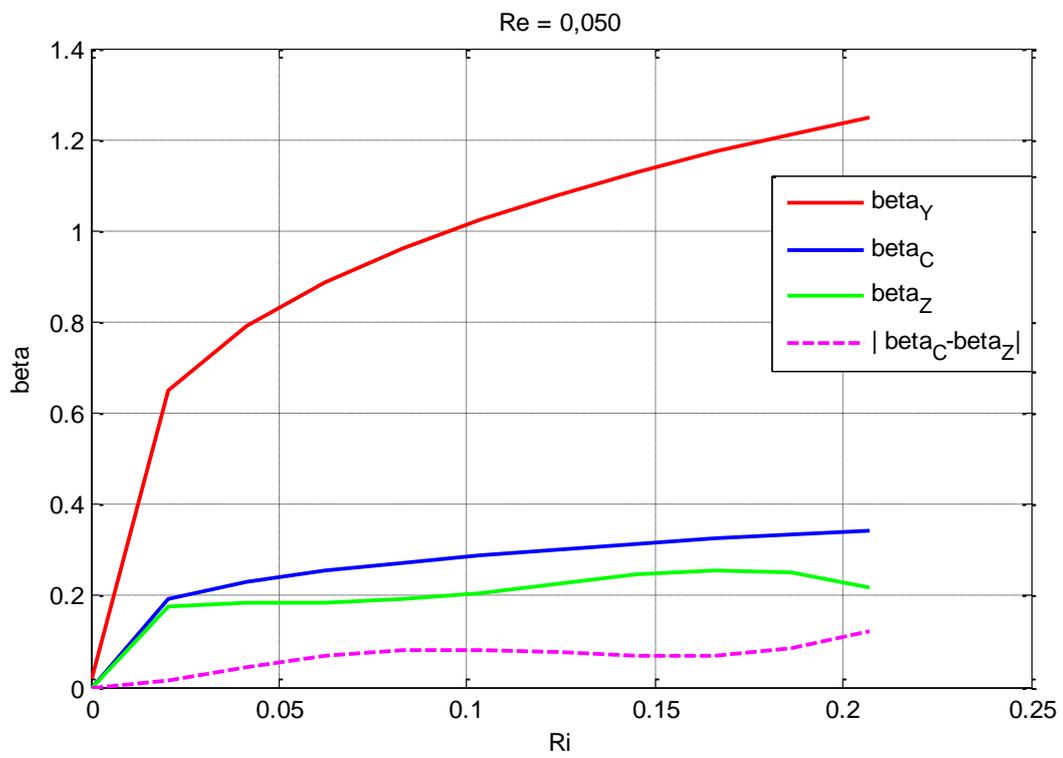


Figure (4.1.f)

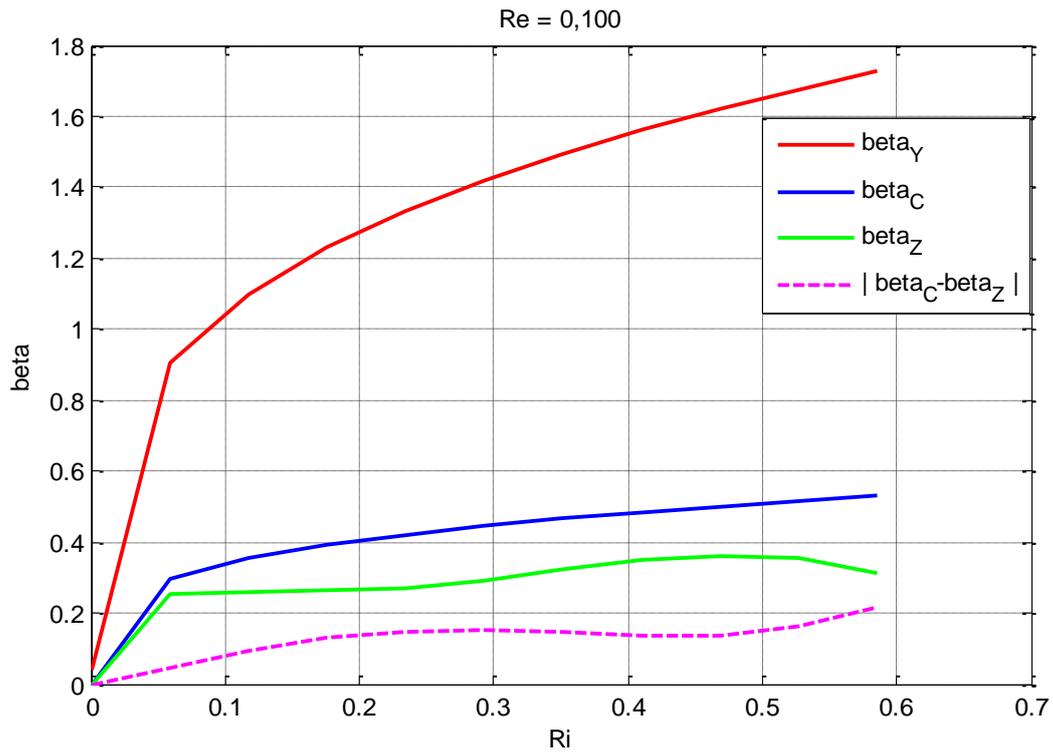


Figure (4.1.g)

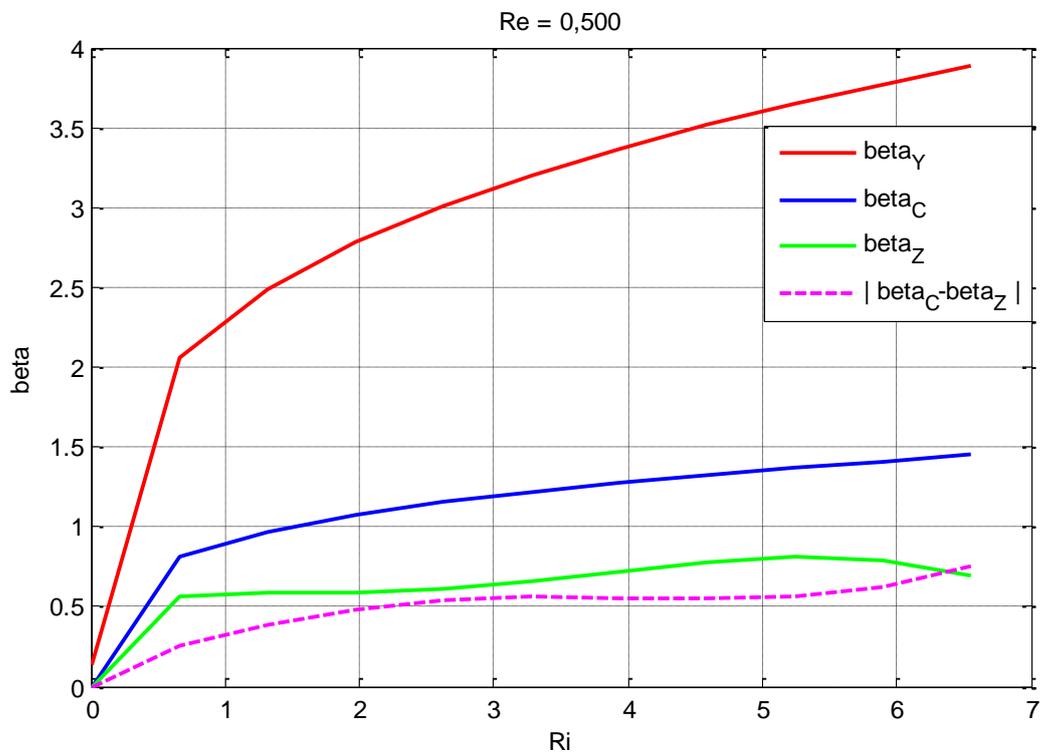


Figure (4.1.h)

Figure (4.1) : Profil du terme β en fonction du nombre de Richardson

D'une façon générale, la force de traînée exercée sur une particule sphérique augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds, en effet, pour une particule de taille déterminée, le nombre de Reynolds croît avec la vitesse de la particule et comme la force résistante est proportionnelle à la vitesse, alors, effectivement pour un nombre de Reynolds élevé la force de traînée sera plus importante.

Pour un régime d'écoulement donné (un nombre de Reynolds fixe), la force de traînée est plus importante quand le nombre de Richardson croît, en effet, la stratification est caractérisée par le nombre de Richardson et comme la stratification influence considérablement la force de traînée, alors, un nombre de Richardson plus élevé implique une force résistante plus importante.

D'une manière globale, on constate que quel que soient le nombre de Reynolds et le nombre de Richardson, le modèle de Yick et al. donne une force de traînée plus importante en terme de grandeur que ceux de Zvirin et Candelier, cela est dû, probablement, au fait que la formule de Yick et al. est obtenue à partir de la résolution d'un modèle numérique pour une stratification linéaire avec un gradient thermique ($Pr = 7$), contrairement aux modèles de Zvirin et Candelier qui sont obtenus à partir de résultats théoriques. A faible nombre de Reynolds (jusqu'à 0,02). Les résultats des modèles de Zvirin et Candelier sont en très bon accord, en fait, ces deux modèles sont valables au voisinage de la particule et pour des régimes à faible nombre de Reynolds et quand les termes d'inertie deviennent du même ordre que ceux de viscosité les résultats de ces modèles divergent.

4.2. Temps de sédimentation :

Le but de cette partie est, dans un premier temps, l'étude du temps de sédimentations de particules de tailles différentes dans un milieu homogène et dans un second, dans un milieu stratifié et faire une comparaison entre les résultats obtenus.

4.2.1. Milieu homogène :

La force de traînée exercée sur une particule sphérique dans un milieu homogène est donnée par la formule de Stokes :

$$F_D = -6\pi\mu a U_T^H \quad (4.2)$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide, a le rayon de la particule et U_T la vitesse terminale théorique

La force de flottabilité s'écrit comme suit :

$$F_F = -\frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{\rho_p - \rho}{\rho} \times g \quad (4.3)$$

où ρ_p est la masse volumique de la particule, ρ la densité du fluide et g l'accélération de la pesanteur.

L'équilibre des deux forces permet d'avoir la vitesse théorique de sédimentation appelée aussi vitesse terminale:

$$U_T^H = \frac{2g(\rho_p - \rho)a^2}{9\mu} \quad (4.4)$$

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats numériques obtenus à l'aide de MatLab qui vont nous permettre de déterminer la vitesse numérique de sédimentation. Par la suite, nous regrouperons les différents résultats dans un tableau et nous ferons une comparaison des différentes situations.

Les graphes présentés ci-dessous donnent la distance verticale (z) parcourue par une particule de taille déterminée en fonction du temps (t). La vitesse terminale est estimée par la formule suivante :

$$U_N^H = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (4.5)$$

où

$$\begin{cases} \Delta z = 2,95 - 0 \\ \Delta t = t(z = 0) - t(z = 2,95) \end{cases}$$

or :

$$\begin{cases} \Delta z = 2,95 \text{ m} \\ \Delta t = t(z = 0) \end{cases}$$

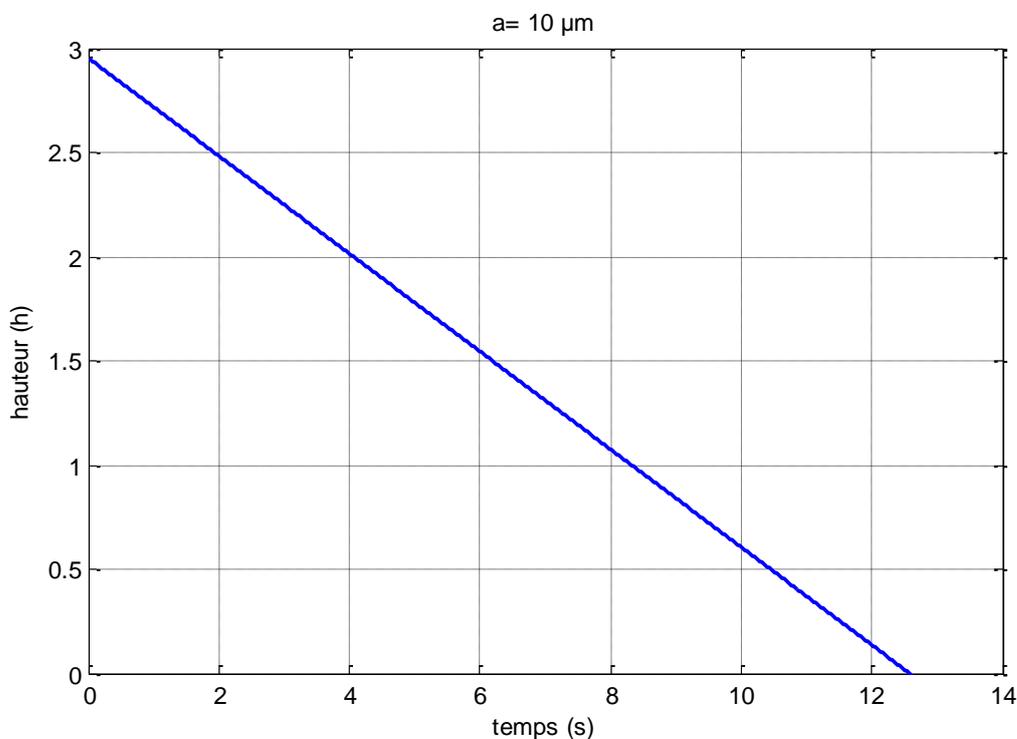


Figure (4.2.a)

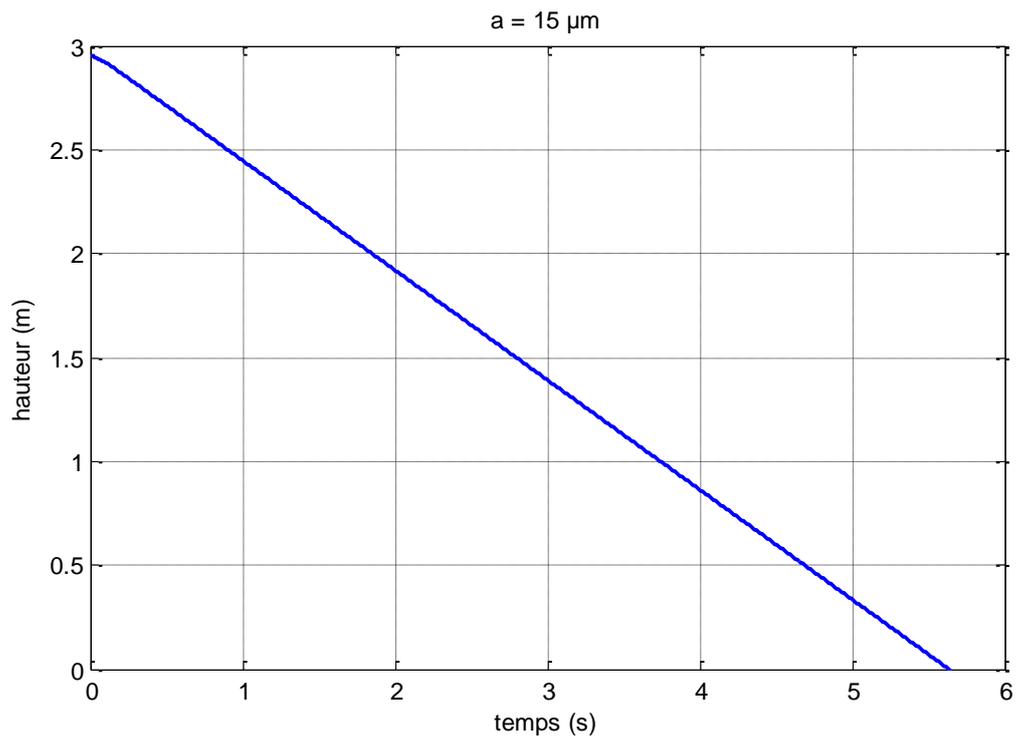


Figure (4.2.b)

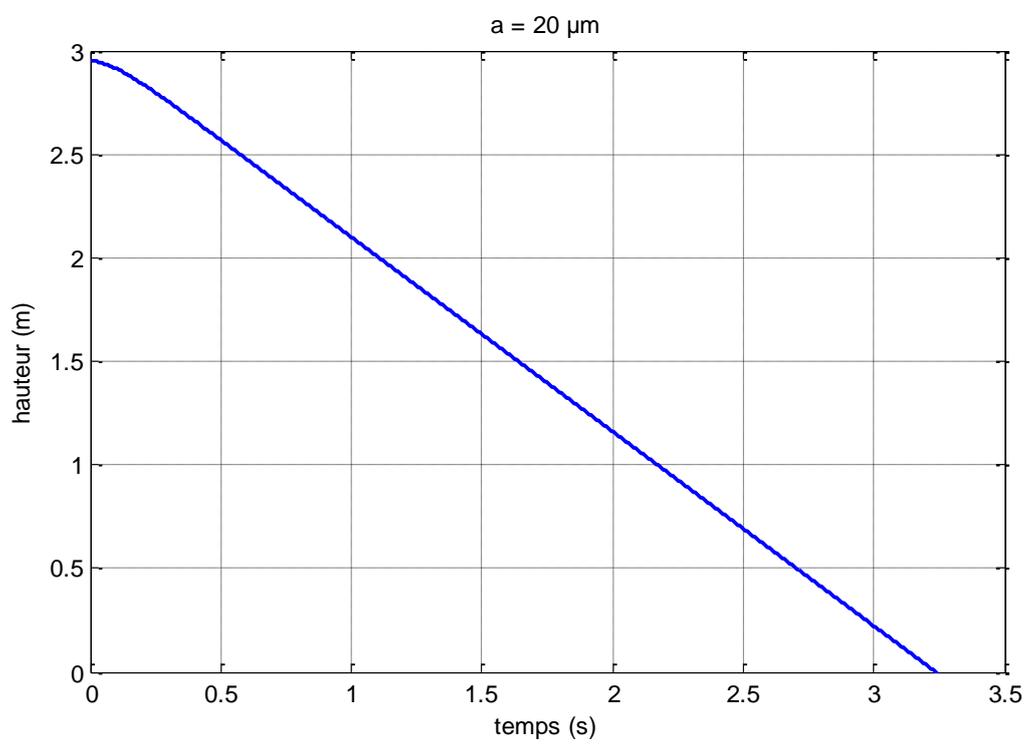


Figure (4.2.c)

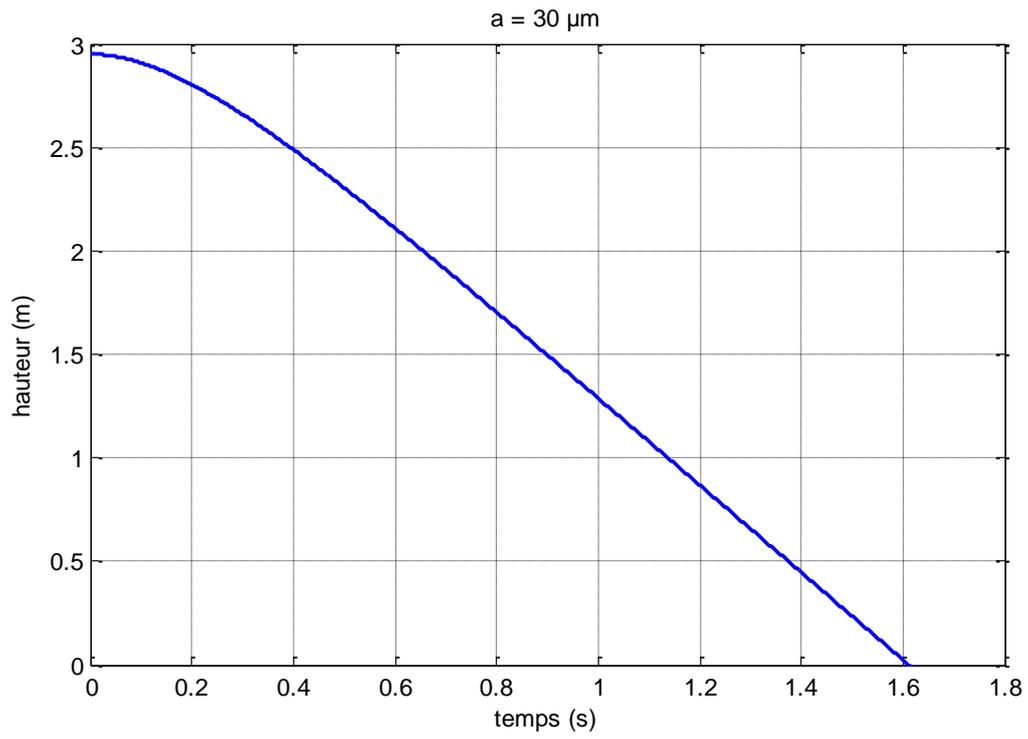


Figure (4.2.d)

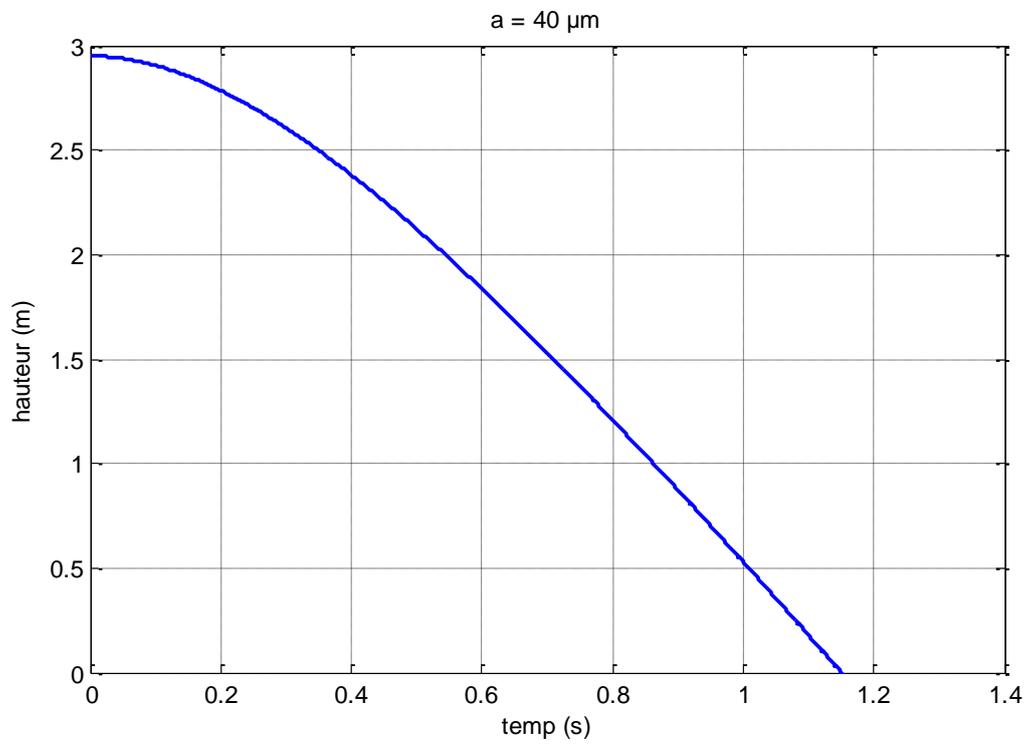


Figure (4.2.e)

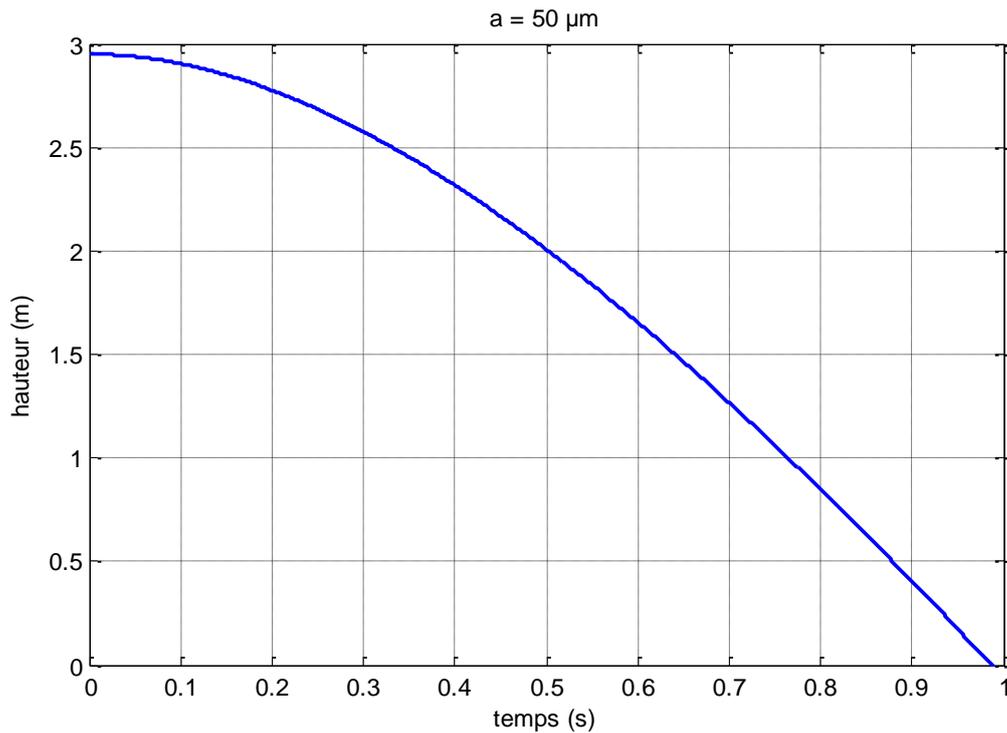


Figure (4.2.f)

Figure (4.2) : Evolution de la hauteur en fonction du temps de sédimentation dans un milieu homogène

D'un point de vue général, les temps de sédimentation dans un milieu homogène sont brefs et on constate que la vitesse terminale dans un tel milieu augmente si la taille de la particule est plus importante, autrement dit, son poids est plus important.

4.2.2. Milieu stratifié :

De la même manière que celle du paragraphe précédent, la vitesse terminale en présence de stratification est donnée par la relation (4.5) en remplaçant U_N^H par U_N^S .

Les résultats obtenus pour des particules sphériques de tailles différentes sont présentés dans les figures ci-dessous :

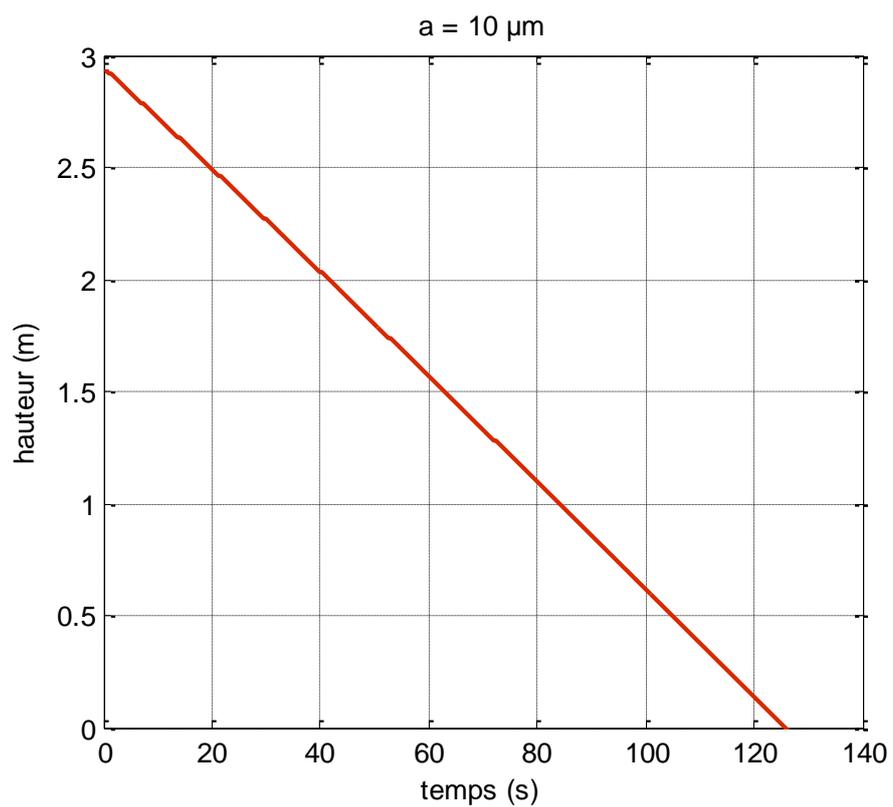


Figure (4.3.a)

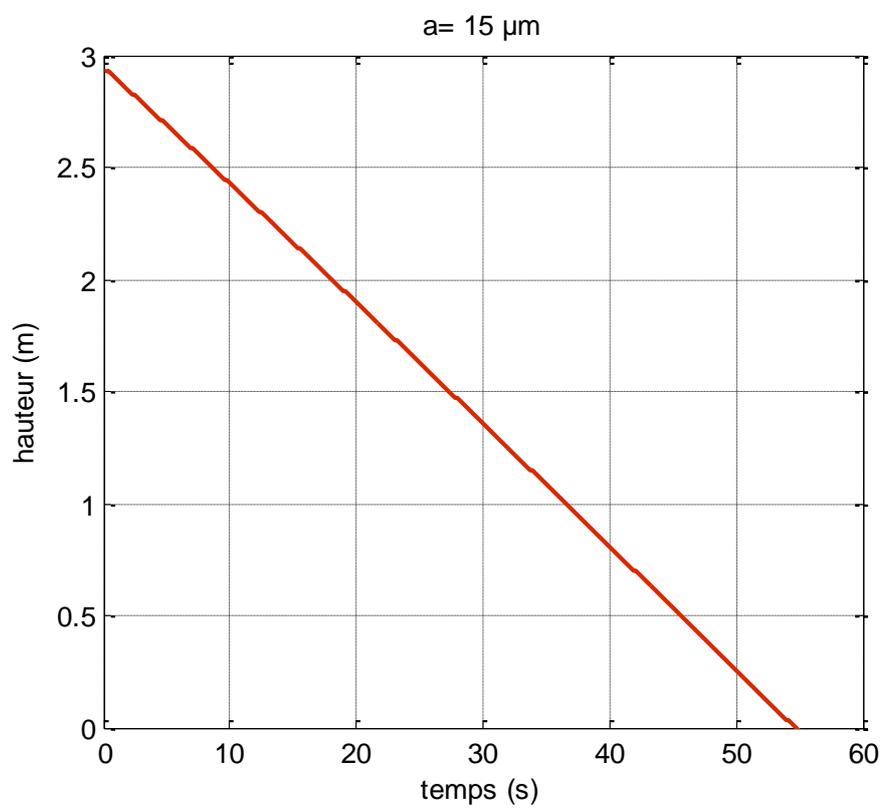


Figure (4.3.b)

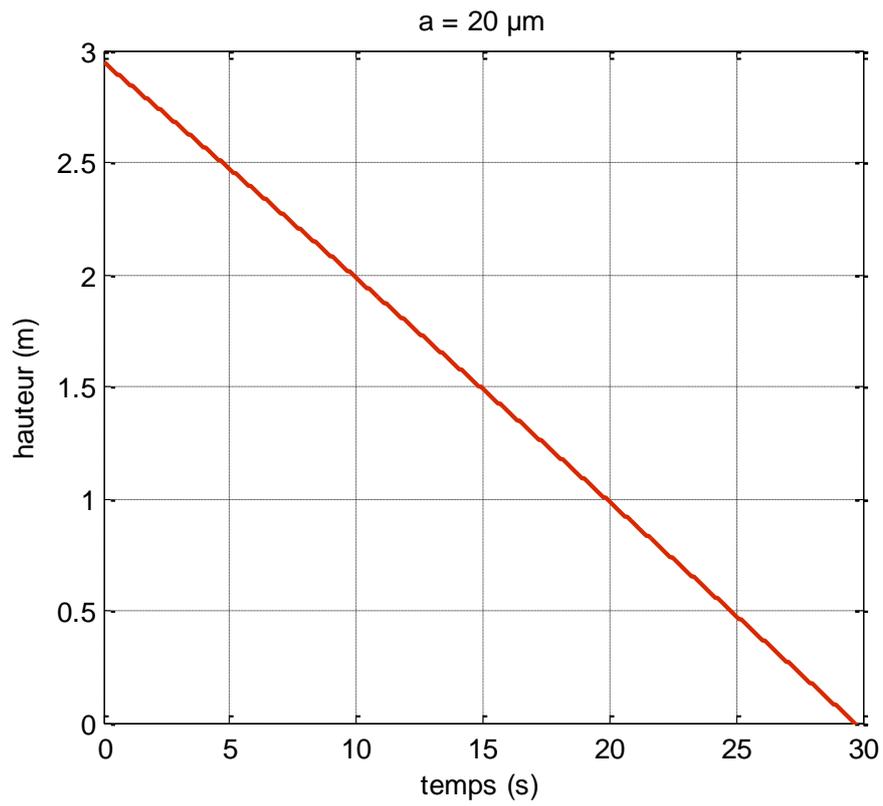


Figure (4.3.c)

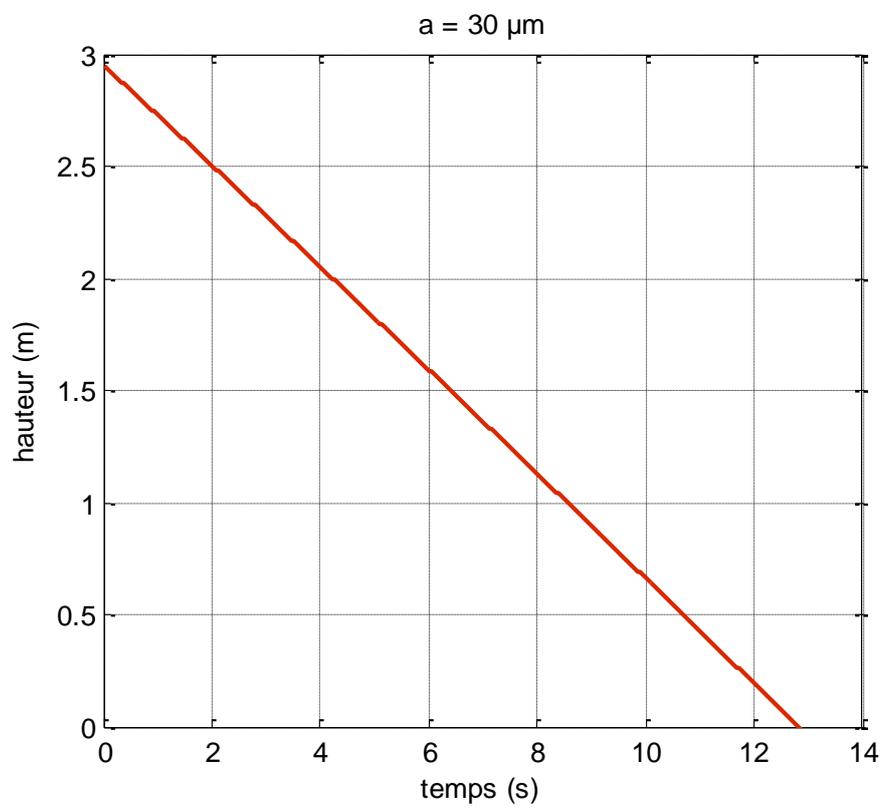


Figure (4.3.d)

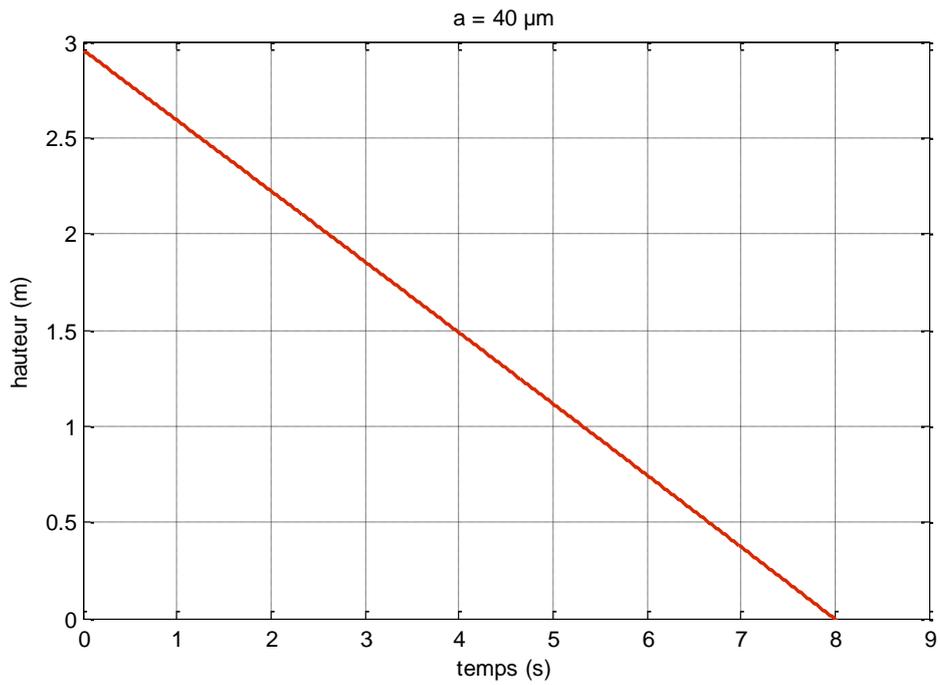


Figure (4.3.e)

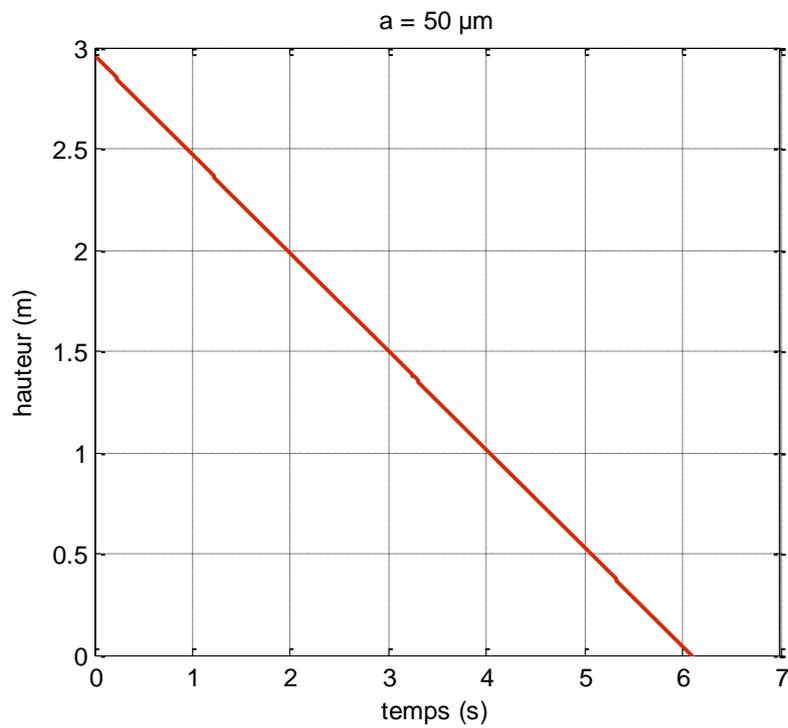


Figure (4.3.f)

Figure (4.2) : Evolution de la hauteur en fonction du temps de sédimentation dans un milieu stratifié

Dans ce cas de figure, nous constatons que les temps de sédimentation deviennent plus long et évidemment la vitesse augmente avec le poids de la particule.

Dans ce paragraphe, nous allons calculer les vitesses de sédimentation pour différents cas. On rappelle la masse volumique des particules $\rho_p = 1800 \text{ kg/m}^3$, pour le cas du milieu homogène, nous avons $\rho = 1,492 \text{ kg/m}^3$ et $\mu = 1,6705 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$. De la formule (4.4) on récupère la vitesse terminale théorique U_T^H .

Tableau (4.2) : Vitesses de sédimentation

$a(\mu\text{m})$	10	15	20	30	40	50
$U_T^H(\text{m/s})$	0,235	0,528	0,939	2,112	3,755	5,868
$t_H(\text{s})$	12,5	5,6	3,3	1,6	1,2	1,0
$U_N^H(\text{m/s})$	0,236	0,527	0,908	1,821	2,458	2,950
$t_S(\text{s})$	125,0	55,0	29,0	13,0	8,0	6,1
$U_N^S(\text{m/s})$	0,024	0,054	0,102	0,227	0,369	0,492

Pour des petites particules (a est inférieur à $20 \mu\text{m}$), les vitesses terminales théoriques et numériques dans un milieu homogène sont en très bon accord. Si les particules sont relativement grandes, le nombre de Reynolds serait plus important et du coup les termes d'inertie seront du même ordre que les termes visqueux, autrement dit, l'hypothèse d'un écoulement rampant n'est plus satisfaite et la formule donnant la force de traînée à partir de laquelle on a déterminé la vitesse théorique n'est plus valable, ce qui explique les mauvais résultats qu'on a eu pour des particules de rayon supérieur à $40 \mu\text{m}$.

La vitesse de sédimentation dans un milieu stratifié est très faible comparée à la vitesse terminale dans un milieu homogène, en effet, la stratification augmente considérablement la force de traînée qui a tendance à ralentir le mouvement de la particule en fur et à mesure qu'elle descend.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail a pour but une recherche bibliographique sur la sédimentation de petites particules solides sphériques dans un milieu homogène et dans un milieu stratifié. Le mouvement des particules dans un écoulement homogène a été l'objet d'étude de plusieurs sujets de la mécanique des fluides depuis le XIX^{ème} siècle, en effet, ça a commencé avec l'étude de Stokes en 1851 qui a pu déterminer le champ de vitesse du fluide autour d'une petite particule sphérique en mouvement sous l'effet de son poids et ainsi la force résistante à son mouvement et qui porte son nom « traînée de Stokes », par la suite, on a constaté beaucoup d'insuffisances dans la théorie de Stokes, depuis cela, plusieurs travaux rejetant l'hypothèse des écoulement rampants stationnaires ont été recensés et du coup on a eu une description physique plus réelles du mouvement. Par contre, quand le fluide est stratifié, il y a peu de résultats théoriques et expérimentaux concernant le mouvement des particules dans un tel milieu, en fait, la majorité des travaux ont été réalisés au début de notre siècle, ça a commencé avec l'étude de chute de particules solides ou liquides dans un milieu à interface de densité, c'est-à-dire, la particule tombe dans un fluide d'une densité connue ensuite elle rentre dans une couche d'un fluide plus lourd, on a observé plusieurs phénomènes (par exemple, dans certains cas la sphère remonte puis redescend quand elle rentre dans la seconde couche) et on a constaté que la force de traînée devient plus importante. Par la suite, on voulait étudier la chute des particules dans un fluide composé d'une infinité de couche très fines d'interface de densité, or, la masse volumique du fluide est décroissante dans l'espace à cause d'un gradient de température ou de salinité (Si le gradient est constant, le fluide sera linéairement stratifié). Dans une telle situation la fore de traînée est très importante et la chute des particules se fait très lentement (donc des temps de sédimentation plus long) et on observe la formation de petits tourbillon, en effet, pour que la particule puisse se déplacer, elle doit chasser le fluide de son voisinage immédiat et l'entraîne vers une zone de densité plus élevé, mais le fluide le plus léger aura tendance à remonter et s'enrouler autour de lui-même d'où la création de petits tourbillons locaux.

Pour pouvoir décrire la trajectoire adoptée par une particule et la force hydrodynamique exercée sur elle, il faut connaître, à chaque instant, à la fois le champ de pression et le champ de vitesse de l'écoulement autour de la particule. Or ces deux champs sont liés par les équations de Navier-Stokes et il se trouve que ces équations sont très complexes et n'admettent de solutions analytiques que dans de très rares situations (Ardekani et al., 2010). Dans notre modèle, nous avons essayé les polynômes de Legendre et les harmoniques sphériques mais malheureusement nous n'avons pas pu avoir une solution analytique du problème. En revanche, pour tenter de comprendre au mieux les mécanismes physiques impliqués dans la détermination de la force qu'exerce un fluide sur un objet, la recherche de solution analytiques, même si elles sont approchées, reste de la plus grande importance. Dans ce contexte, dans une grande partie des problèmes rencontrés en mécanique des fluides, les modèles doivent être résolus numériquement.

Toutes les études numériques faites montrent que la stratification augmente considérablement la force de traînée exercée sur les particules, en effet, le coefficient de traîné normalisé est toujours supérieur à l'unité et dans certaines situations, il vaut trois, autrement dit, la traînée dans un milieu stratifié est trois fois plus importante que la force résistante dans

un milieu homogène, par conséquent, la chute des particules est ralentie de sur et à mesure qu'elle descend ce qui explique l'importance des temps de sédimentation quand les écoulements sont stratifiés.

Les perspectives envisagées pour performer cette étude se résument en deux points principaux : le premier consiste à la conception d'un dispositif expérimental qui permettra de réaliser l'examen expérimental du mouvement d'une particule sphérique dans un milieu stratifié à faible nombre de Reynolds et vérifier les résultats numériques obtenus en tenant compte du caractère réel de l'écoulement. En fait, nous avons étudié la faisabilité d'un banc où le fluide est de l'huile de silicone contenue dans cuve qu'on maintient à température ambiante en haut et qu'on refroidit par le bas, mais le problème est que la plage de température dans laquelle cette huile conserve ses propriétés est très restreinte (généralement de 20 à -20°C) alors que le coefficient de dilatation est très faible (de l'ordre de 10^{-5}) du coup le gradient de densité serait très faible, autrement dit, le fluide a tendance à être homogène. Par contre, pour analyser l'effet de la viscosité sur les forces hydrodynamiques exercées sur les particules dans un fluide stratifié, les huiles de silicone restent un bon fluide pour une telle étude, en effet, la dépendance de la viscosité de la température est exponentielle et dans la plage [-20,20] °C on aura un gradient de viscosité très intéressant. Quant au deuxième point, il consiste au développement d'une solution analytique de l'écoulement autour de la particule (par exemple la méthode des développements asymptotiques raccordés) et ainsi vérifier les résultats numériques et expérimentaux.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. Abbad, Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds. Thèse de Doctorat. INP Lorraine, 2005.
- [2] F. Candelier, Etude expérimentale et théorique du mouvement libre d'une particule dans un fluide en rotation solide à faible nombre de Reynolds : mise en évidence des forces d'histoire et d'inertie. Thèse de Doctorat. Nancy, 2005.
- [3] F. Candelier et M. Souhar, Influence de la force d'histoire dans un écoulement en rotation solide horizontale, 17^{ème} Congrès Français de Mécanique Troyes, 2005.
- [4] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, Hydrodynamique Physique, CNRS Editions, 2001.
- [5] C.R. Torres, D. De Cecchis, G. Larrazaba et J. Castillo, Numerical study of a descending sphere in a low Reynolds number strongly stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, vol. 34, pp. 119–124, 2009.
- [6] Yick K. Y., C.R. Torres, T. Peacock et R. Stocker, Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, vol. 632, pp. 49–68, 2009.
- [7] A. Ardekani et R. Stocker, Stratlets: Low Reynolds Number Point-Force Solutions in a Stratified Fluid, *Physical Review Letters* 105.8 : The American Physical Society, 2010.
- [8] Y. Zvirin et R.S. Chadwick, Settling of an axially symmetric body in a viscous stratified fluid, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol.1, pp 743-752, Pergamon/Elsevier, 1975.
- [9] Chin Y. Kuo, Free falling particle in density stratified fluid. Thèse de Doctorat. Mayaguez, 1972.
- [10] B. Metzger, Sédimentation de particules et instabilités à bas nombre de Reynolds. Thèse de Doctorat. Marseille, 2006.
- [11] M. Maugendre, Etude des particules de suie dans les flammes de kérosène et diester. Thèse de Doctorat. Paris, 2009

- [12] N. Abaid et D. Adalsteinsson, An internal splash: Levitation of falling spheres in stratified fluids. Volume 16, Number 5, 2004.
- [13] R. Camassa, C. Falcon, J. Lin, R.M. McLaughlin et N. Mykins, A first-principle predictive theory for a sphere falling through sharply stratified fluid at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, vol. 664, pp. 436–465, 2009.
- [14] F. Feuillebois, *Ecoulements à petit nombre de Reynolds*, Laboratoire pour l'Informatique, la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur LIMSI - CNRS, Orsay, France, MeNHydro, 2010.
- [15] L. Gostiaux, T. Dauxois, E. Falcon et N. Garnier, Mesure quantitative de gradients de densité en fluides stratifiés bi-dimensionnels, Actes du Colloque FLUVISU11, Ecully, France, 2005.

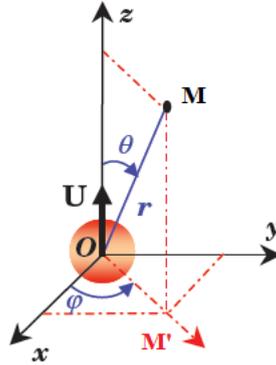
ANNEXES

A. OPERATEURS VECTORIELS EN
COORDONNEES SPHERIQUES

B. HARMONIQUES SPHERIQUES

C. FICHIERS M-FILE MATLAB

A. Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :



- Le vecteur \overrightarrow{OM} est donné par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
- Le champ scalaire du point M est : $f(M) = f(x, y, z)$
- Le champ vectoriel est tel que : $\vec{A}(M) = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta A_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Opérateur E^2 :

$$E^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2$$

B. Les harmoniques sphériques :

$$\varphi_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m \varphi_n(x)}{dx^m} \quad 0 \leq m \leq n$$

$$\varphi_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \varphi_n^{-m}(x) \quad n = 0, 1, \dots ; \quad m = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$$

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \varphi_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \varphi)$$

$$A_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

C. Fichiers M-file MatLab :

C.1. Paramètre_B :

```
clear all;
g=[0 0.01 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.8 1 5 10];
B=[1.06 1.044 0.944 0.872 0.821 0.782 0.750 0.723 0.681 0.649 0.442 0.372];
```

C.2. Cas homogène :

C.2.1. La viscosité dynamique :

```
function [res]=mu_f(z);
T_f=315.5;
res=1.56e-6*((292.2+195.5)/(T_f+195.5))*(T_f/292.2)^1.5;
end
```

C.2.2. L'équation différentielle :

```
function [res]=f_edo(y,a);
rho_p=1800;
rho_f=1.491;
res(1)=y(2);
res(2)=-4.5*mu_f(y(1))*y(2)/(a^2*rho_p)-9.81*(1-rho_f/rho_p);
end
```

C.2.3. Le programme principale:

```
clear all;
close all;
% definition des paramètres à faire varier
a=.00001;
t=0;
dt=.001;
% conditions initiales
y = [2.95,0.01];
% variables de sauvegarde
temps=[t];
z=[y(1)];
u=[y(2)];
while t<100
    k1 = f_edo(y,a);
    k2 = f_edo(y+dt/2*k1,a);
    k3 = f_edo(y+dt/2*k2,a);
    k4 = f_edo(y+dt*k3,a);
    y = y + dt/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    t=t+dt;
    % sauvegarde des résultats
    temps=[temps,t];
    z = [z,y(1)];
    u = [u,y(2)];
end
```

C.3. Cas de stratification :

C.3.2. Distribution de la masse volumique :

```
function [res]=rho_f(z);
rho_0=1.551;
rho_h=1.432;
```

```

h=3;
res=rho_0*exp(log(rho_h/rho_0)*(z/h).^2);
end

```

C.3.2. Distribution de la viscosité dynamique :

```

function [res]=mu_f(z);
T_0=303.0;
T_h=328.0;
h=3;
res=1.56e-
6*((T_0*exp(log(T_h/T_0)*(z/h).^2))^1.5)/(195.5+T_0*exp(log(T_h/T_0)*(z/h).
^2));
end

```

C.3.3. Fonction :

```

function [res]=beta_f(z,u,a);
rho_0=1.551;
rho_h=1.432;
h=3;
Re=a*u*rho_f(z)/mu_f(z);
Ri=2*9.81*a^3*(rho_f(z))^2*z*log(rho_0/rho_h)/(rho_0*u*mu_f(z)*h^2);
res=.5.*Re.*(1/15+1/(1+sqrt(2.*Re))).*(1+1.9.*Ri.^29)+1.9.*Ri.^29;
end

```

C.3.4. Equation différentielle :

```

function [res]=f_edo(y,a);
rho_p = 1800;
res(1)=y(2);
res(2)=-4.5*mu_f(y(1))*(1+beta_f(y(1),y(2),a))*y(2)/(a^2*rho_p)-9.81*(1-
rho_f(y(1))/rho_p);
end

```

C.3.5. Programme principal :

```

clear all;
close all;
% definition des paramètres à faire varier
a=.00001;
t=0;
dt=.001;
% conditions initiales
y = [2.95,0.01];
% variables de sauvegarde
temps=[t];
z=[y(1)];
u=[y(2)];
while t<150
    k1 = f_edo(y,a);
    k2 = f_edo(y+dt/2*k1,a);
    k3 = f_edo(y+dt/2*k2,a);
    k4 = f_edo(y+dt*k3,a);
    y = y + dt/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    t=t+dt;
    % sauvegarde des résultats
    temps=[temps,t];
    z = [z,y(1)];
    u = [u,y(2)];
end

```