

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Laboratoire de Commande des Processus
Département de l'Automatique



Mémoire de fin d'études
En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en
Automatique

**INTRODUCTION A LA COMMANDE
FRACTIONNAIRE**

Proposé et dirigé par :
M^r R.ILLOUL

Etudié par :
M^r BENAICHOUCHE A. Nasr-Eddine

Promotion : Juin 2010

Laboratoire de Commande des Processus
E.N.P.10, Avenue Hassen-Badi, EL-HARRACH, ALGER

DEDICACES

Je dédie ce travail avant tout, à mes très chers parents; qui m'ont tout offerts, et j'espère que j'aurais un jour l'occasion de les remercier d'avantage.

A mes frères Abed, Yacine et ma petite sœur Ratiba, qui compte le plus pour moi.

A tout les membres de ma famille ; Mon oncle Nacer-eddine ,Boussebaine Mes tantes Khadija ,Assia, Fahima, Soad, Rachida. Mes cousins : Hami, Mohamed. Ma cousine Fahima et a ma grand-mère, qui m'ont apporté leur soutien durant mes études.

A mes amis :Zidane, Bouazza, Mohamed, Djilali, Kadirou, Khaled, Rafik , Hocine, Habib , et a toute la promotion 2010.

A.N. BENAICHOUCHE

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon promoteur, Monsieur R.Illoul pour avoir accepté mon encadrement et pour l'ensemble de ses conseils et les efforts Fournis durant toute l'année.

Je remercie aussi Messieurs F.Boudjema, D.Boukhetala, M.S.Boucherit H.Chekireb, O.Stihi et surtout M.Tadjine pour leurs précieux conseils et orientations lesquels *m'ont été d'une très grande utilité.*

Mes remerciements vont également à ceux qui ont participé à ma formation.

Nasr-Eddine

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

" إقرأ باسم ربك الذي خلق * خلق الإنسان من
علق * إقرأ و ربك الأكرم الذي علم بالقلم * علم
الإنسان ما لم يعلم * "

{ صدق الله العظيم }

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre 1 : Théorie des calculs fractionnaires

1.1. FONCTIONS SPECIALES DU CALCUL FRACTIONNAIRE	4
1.1.1. La fonction Gamma.....	4
1.1.1.1. Définition de la fonction Gamma	4
1.1.1.2. Quelques propriétés de la fonction Gamma	4
1.1.1.3 Représentation par limite de la fonction Gamma	5
1.1.1. La fonction de Mittag-Leffler	5
1.1.2.1. Définition et relation avec d'autres fonctions	5
1.1.2.2. Transformé de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler	7
1.1.2.3 Dérivée de la fonction de Mittag-Leffler.....	8
1.1.2.4. Equations différentielles de la fonction de Mittag-Leffler	9
1.1.2.5. Intégral de la fonction de Mittag-Leffler	10
1.1.3. La fonction de Wright	10
1.1.3.1. Définition.....	11
1.1.3.2. Représentation intégrale	11
1.2. DERIVEES ET INTEGRALES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	11
1.2.1. Le jeu de noms	11
1.2.2. Unification entre la dérivée et l'intégrale d'ordre entier	12
1.2.3. Intégrale et dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov.....	15
1.2.3.1. Intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov.....	15
1.2.3.2. Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov	17
1.2.4. Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	18
1.2.4.1. Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	19
1.2.4.2. Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	19
1.2.5. Définition de Caputo	20
1.2.6. Discussion et analyse des différentes approches.....	20
1.3. PROPRIETES DES OPERATEURS FRACTIONNAIRES	21
1.3.1. La linéarité.....	21
1.3.2. Composition d'opérateurs fractionnaire	21
1.3.3. La lois de Leibniz	22
1.4. TRANSFORMEE DE LAPLACE DES OPERATEURS FRACTIONNAIRE.....	22
1.5. EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	24
1.5.1. Equations à un terme	24
1.5.2. Equations à deux termes.....	24
1.5.3. Equations à trois termes	25

1.5.4. Equations à n-termes	25
-----------------------------------	----

Chapitre 2 : Représentation et analyse des systèmes d'ordre fractionnaire

2.1. PROCESSUS D'ORDRE FRACTIONNAIRE	27
2.2. FONCTION DE TRANSFERT IDEALE DE BODE	27
2.3. FONCTIONS ET MATRICES DE TRANSFERT D'ORDRE FRACTIONNAIRE	29
2.4. REPRESENTATION D'ETAT FRACTIONNAIRE.....	30
2.5. PASSAGE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE FRACTIONNAIRE A UNE REPRESENTATION D'ETAT FRACTIONNAIRE	31
2.5. PASSAGE D'UNE REPRESENTATION D'ETAT FRACTIONNAIRE A UNE MATRICE FONCTION DE TRANSFERT	32
2.6. DECOMPOSITION MODALE D'UN SYSTEME FRACTIONNAIRE	33
2.6.1. Expressions générale de la sortie	33
2.6.2. Passage d'une représentation d'état fractionnaire à une autre	33
2.6.3. Réduction de Jordan.....	34
2.6.4. La décomposition modale	35
2.7. TRANSFORME DE LAPLACE INVERSE DES MODES PROPRES	37
2.8. DETERMINATION DES POLES DE $G_{\text{modale}}(s)$	38
2.9. EXPRESSION DE $g_{\text{modale}}(t)$	40
2.10. CONDITION DE STABILITE D'UN SYSTEME FRACTIONNAIRE	41
2.11. SIMULATION D'UN SYSTEME FRACTIONNAIRE.....	43
2.11.1. Méthodes Directes	43
2.11.1.1. La fonction génératrice	43
2.11.1.2. Développement en fraction continue	43
2.11.1.3. Discrétisation récursive de Tustin	44
2.11.1.3.1. Exemple illustratif	46
2.11.1.4. Discrétisation d'Al-Alaoui en utilisant le développement de fractionnaire continu (DFC).....	48
2.11.1.4.1. Opérateur d'Al-Alaoui.....	48
2.11.1.4.2. Exemple illustratif	49
2.11.1.5. Méthode d'Euler en utilisant le développement en fraction continue	51
2.11.1.5.1. Exemple illustratif	51
2.11.2. Méthodes indirectes.....	55
2.12. EXEMPLES D'ETUDE.....	59
2.12.1. Equation différentielle fractionnaire	59
2.12.2. Représentation d'état fractionnaire	62
2.12.3. Décomposition modale.....	62
2.13. CONCLUSION.....	65

Chapitre 3 : La commande PID fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$)

3.1. REGLAGE PAR MINIMISATION.....	68
3.2. PREMIER ENSEMBLE DE REGLES DE REGLAGE BASEES SUR LA REPONSE EN FORME S	71
3.3. DEUXIEME ENSEMBLE DE REGLES DE REGLAGE BASEES SUR LA REPONSE EN FORME S ...	72
3.4. PREMIER ENSEMBLE DE REGLES DE REGLAGE BASEES SUR LE GAIN CRITIQUE	73
3.5. DEUXIEME ENSEMBLE DE REGLES DE REGLAGE BASEES SUR LE GAIN CRITIQUE	74
3.6. TROISIEME ENSEMBLE DE REGLES DE REGLAGE BASEES SUR LE GAIN CRITIQUE.....	75
3.7. LA ROBUSTESSE	76
3.8. CONCLUSION.....	88
Conclusion générale.....	89
Références Bibliographiques	90

Introduction générale

Depuis quelques décennies, le monde industriel a connu un énorme développement technologique, sous l'effet et de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants en qualité et en performances. Les industriels ont été amenés à s'intéresser et à s'impliquer dans la recherche automatique et à suivre les dernières nouveautés des techniques de la commande et de régulation qui participent d'une manière essentielle à améliorer l'efficacité des processus de production, la qualité des produits et la rentabilité.

Cet essor technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs et leur banalisation, ce qui a permis de rendre possible l'application des méthodes et des techniques considérées jusque là comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que l'analyse numérique, et la théorie des systèmes ce qui a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour la commande des systèmes.

Les calculs fractionnaires est un domaine des mathématiques appliqués qui traite des dérivées et intégrales d'ordre arbitraire (y compris complexe), et leur application en science technologique, mathématiques, sciences économiques et autres champs. Depuis 300 ans plusieurs grand mathématicien (purs et appliqués) de leurs temps telles que N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, Grunwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H.J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann M. Riesz, et H. Weyl, ont contribué à ce champ. Cependant, la plupart des scientifiques et ingénieurs restaient ignorants du calcul fractionnaire ; il n'a pas été enseigné dans les écoles et les universités ; et d'autres restaient sceptiques de ce champ. Il y a plusieurs raisons pour cela : La plus part des définitions proposaient des dérivées fractionnaires étaient inconsistantes, c'est-à-dire qu'ils fonctionnaient pour des cas mais pas d'autres. Les mathématiques invoqué apparait très différente du calcul d'ordre entier et il n'y avait souvent aucune application physique. Le calcul fractionnaire été considéré par beaucoup comme une région abstraite contenant seulement des manipulations mathématiques inutiles.

Il y'a 30 ans, le paradigme a commencé à se détacher des formulations mathématiques purs vers l'application dans plusieurs domaines. Durant la dernière décennie le calcul fractionnaire été appliqué à presque tous les domaines de la science et technologie. Certain secteurs où le calcul fractionnaire a fait un profond impacte sont : la viscoélasticité et la rhéologie, l'électrochimie, biologie, biophysique, et la biotechnologie, le traitement d'image et signal, la théorie de commande. Bien que certaines des délivrances mathématiques restent non résolues, la plupart des difficultés ont été surmontés, et la plupart des problèmes mathématiques principaux documentés dans le domaine ont été résolues à un point où beaucoup des outils mathématiques pour le calcul d'ordre entier ou fractionnaire sont les mêmes.

Le présent travail représente une initiation à la commande d'ordre fractionnaire, où on a basé beaucoup plus sur l'aspect théorique et les principaux définitions et la philosophie de leurs élaborations, une théorie qui nous été inconnue jusqu'à lors. C'est ainsi qu'on a devisé notre travail en trois principaux chapitre dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le chapitre 1 commence par donner les principales définitions d'opérateurs d'ordre fractionnaire et les étapes menant à ces définitions ainsi qu'une analyse et comparaison entre eux, pour ensuite donner les propriétés de ces opérateurs jusqu'à aboutir aux équations différentielles fractionnaires et leurs résolution avec la méthode de Laplace que nous privilégiant autant qu'automaticiens.

Le chapitre 2 relève des domaines d'étude qui suscitent les plus vifs intérêts tant auprès des automaticiens que des mathématiciens. Ce chapitre propose en effet une représentation continue dans un espace d'état fractionnaire d'un système linéaire fractionnaire, scalaire ou multivariable. La représentation d'état fractionnaire est définit puis étudié à travers le calcul de la réponse impulsionnelle analytique d'un système non entier commensurable : une attention particulière est portée à la détermination des pôles et la stabilité. La dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation de quelques méthodes de simulation numérique d'un système non entier. Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation de l'équation différentielle non entière par une approximation numérique de l'opérateur de dérivation non fractionnaire. La méthode indirecte est quant à elle fondée sur l'approximation de la transmittance fractionnaire par une transmittance entière.

Le chapitre 3 traite la commande PID d'ordre fractionnaire où on a montré à travers les méthodes de réglage des paramètres de ce dernier son avantage par rapport à un PID classique du point de vue de robustesse vis-à-vis des variations du gain du système. On a terminé ce chapitre par les simulations de diverses structures pour conclure que le PID fractionnaire offre un avantage de définir de nouvelles spécifications car on a plus de degrés de liberté avec le PID fractionnaire (5 paramètres à régler) que le PID entier (3 paramètres à régler).

1. Théorie des calculs fractionnaires

1.1. Fonctions spéciales du calcul fractionnaire

1.1.1. La fonction Gamma

Sans doute, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui est la généralisation du factoriel $n!$, et qui permet à n de prendre également des valeurs non-entières et même complexes.

1.1.1.1. Définition de la fonction Gamma

La fonction Gamma est définie par l'intégral suivant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1)$$

Qui converge dans le demi-plan droit du plan complexe $Re(z) > 0$. En effet on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \cdot \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \cdot \log(t)) + i \cdot \sin(y \cdot \log(t))] dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'expression entre crochets dans (1.2) est bornée pour tous t ; la convergence à l'infini est assurée par e^{-t} , et pour la convergence à $t = 0$ on doit avoir $x = Re(z) > 1$.

1.1.1.2. Quelques propriétés de la fonction Gamma

L'une des propriétés de base de la fonction Gamma est qu'elle satisfait la relation suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z) \quad (1.3)$$

qui peut être facilement démontré par intégration par partie :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Evidemment, $\Gamma(1) = 1$ on utilisant (1.3) on obtient

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est que cette dernière possède des pôles simple en points $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

1.1.1.3 Représentation par limite de la fonction Gamma

La fonction Gamma peut aussi être représentée par une limite comme suit :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z \cdot (z+1) \dots (z+n)} \quad (1.4)$$

Où initialement on a proposé $Re(z) > 0$.

1.1.2. La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, sa généralisation à un-paramètre

$$E_{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha \cdot k + 1)} \quad (1.5)$$

Est introduite par G.M Mittag-Leffler [2] est étudiée par A.Wiman [3].

La fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle très important dans les calculs fractionnaires est en effet introduite par Agarwal . Un nombre important de relations pour cette fonction est obtenu par Humbert et Agarwal en utilisant la technique de la transformé de Laplace, cette fonction devrait porter leurs nom mais par générosité ils ont gardé l'ancien nom d'un-paramètre.

1.1.2.1. Définition et relation avec d'autres fonctions

La fonction de Mittag-Leffler à deux-paramètre est définit par la série d'expansion

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k+\beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.6)$$

Il découle de la définition (1.6) que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.7)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

et en générale

$$E_{1,m} = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (1.8)$$

Les fonctions sinus et cosinus hyperbolique sont aussi un cas particulier de la fonction de Mittag-Leffler (1.6) :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2.k}}{\Gamma(2.k+1)} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{2.k}}{(2.k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2.k}}{\Gamma(2.k+2)} = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{e^{2.k}}{(2.k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$

Les fonctions hyperbolique d'ordre n qui sont une généralisation du sinus et cosinus hyperbolique peuvent aussi êtres représenté par la fonction de Mittag-Leffler :

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(n.k+r-1)} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1.9)$$

Aussi bien que les fonctions trigonométriques d'ordre n qui sont la généralisation du sinus et cosinus :

$$K_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10)$$

La fonction $\varepsilon_t(\nu, a)$ introduite par K.S.Miller et B.Ross pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire est également un cas particulier de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\varepsilon_t(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a.t)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} = t^\nu E_{1,\nu+1}(a.t) \quad (1.11)$$

1.1.2.2. Transformé de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler

De la relation (1.7) on remarque que la fonction exponentielle e^z est un cas particulier de la fonction de Mittag-Leffler, ainsi pour trouver la transformé de Laplace de cette dernière on va raisonner par analogie à la fonction exponentielle.

Nous avons la relation suivante :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} . e^{\pm z.t} dt = \frac{1}{1 \mp z} \quad |z| < 1 \quad (1.12)$$

On dérive k fois par rapport à z les deux parties de l'égalité (1.12), on trouve :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} (\pm t)^k . e^{\pm z.t} dt = \frac{k!}{(1 \mp z)^{k+1}} \quad |z| < 1$$

Après une substitution évidente on retrouve la transformé de Laplace de $t^k e^{\pm at}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-p.t} t^k e^{\pm a.t} dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}} \quad (\text{Re}(p) > |a|) \quad (1.13)$$

Considérons maintenant la fonction de Mittag-Leffler (1.6) remplacé dans l'intégrale ci-dessus :

$$\int_0^{\infty} e^{-p.t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z.t^\alpha) dt = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - z} \quad \text{Re}(P) > |z|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.14)$$

On obtient ainsi de l'équation (1.14) la transformé de Laplace de $t^{\alpha.k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z.t^\alpha)$ ($E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) \equiv \frac{d^k}{dz^k}E_{\alpha,\beta}(z)$)

$$\int_0^\infty e^{-p.t} t^{\alpha.k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a.t^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad \text{Re}(P) > |a|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.15)$$

Cette relation est très utilisée dans la résolution des équations semi-différentielle d'ordre fractionnaire.

1.1.2.3 Dérivée de la fonction de Mittag-Leffler

La dérivé de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.16)$$

Cette relation conduit à des résultats très intéressants. Prenons $\alpha = \frac{m}{n}$ où m et n des entiers naturels :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n},\beta}(t^{\frac{m}{n}})\right) = t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n},\beta}(t^{\frac{m}{n}}) + t^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-\frac{m}{n}.k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}.k)} \quad (1.17)$$

$$(m, n = 1, 2, \dots)$$

Prenons $n = 1$ et considérons la fameuse relation de la fonction Gamma :

$$\frac{1}{\Gamma(-k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

On obtient de (1.17) que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m)\right) = t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m) \quad (1.18)$$

$$(m = 1, 2, 3 \dots; \beta = 1, 2, \dots, m)$$

En remplaçant $t = z^{\frac{n}{m}}$ dans l'équation (1.17) on obtient :

$$\left(\frac{m}{n} z^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dz} \right)^m \left(z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n},\beta}(z) \right) = z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n},\beta}(z) + t^{(\beta-1)\frac{n}{m}} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n} \cdot k)} \quad (1.19)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Prenons $m = 1$ dans (1.19) on obtient l'expression suivante :

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dz} \left(z^{(\beta-1)n} E_{\frac{1}{n},\beta}(z) \right) = z^{\beta \cdot n - 1} E_{\frac{1}{n},\beta}(z) + z^{\beta \cdot n - 1} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{k}{n})} \quad (1.20)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

1.1.2.4. Equations différentielles de la fonction de Mittag-Leffler

Il est intéressant de noter que les relations (1.17)-(1.20) peuvent également être interprétées en tant qu'équations différentielles pour la fonction de Mittag-Leffler ; à savoir, si on dénote :

$$y_1(t) = t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n},\beta}(t^{\frac{m}{n}})$$

$$y_2(t) = t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m)$$

$$y_3(t) = t^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n},\beta}(t)$$

$$y_4(t) = t^{(\beta-1)n} E_{\frac{1}{n},\beta}(t)$$

Alors ces équations vérifient respectivement les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^m y_1(t)}{dt^m} - y_1(t) = t^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-\frac{m}{n} \cdot k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n} \cdot k)} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

$$\frac{d^m y_2(t)}{dt^m} - y_2(t) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots; \beta = 1, 2, \dots, m) \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{m}{n} t^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dz} \right)^m y_3(t) - y_3(t) = t^{(\beta-1)n/m} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n} \cdot k)} \quad (1.23)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{n} \frac{dy_4(t)}{dt} - t^{n-1} y_4(t) = t^{\beta \cdot n-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{k}{n})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.24)$$

1.1.2.5. Intégral de la fonction de Mittag-Leffler

L'intégration de la relation (1.6) terme par terme donne :

$$\int_0^{\infty} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{\alpha, \beta+1}(\lambda z^{\alpha}) \quad (\beta > 0) \quad (1.25)$$

La relation (1.25) est un cas particulier de la relation plus générale obtenue par l'intégration d'ordre fractionnaire terme par terme :

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^z (z-t)^{\nu-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta+\nu-1} E_{\alpha, \beta+\nu}(\lambda z^{\alpha}) \quad (\beta > 0, \nu > 0) \quad (1.26)$$

Des relations (1.26) et (1.7) on trouve :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt = z^{\alpha} E_{1, \alpha+1}(\lambda z) \quad (\alpha > 0) \quad (1.27)$$

1.1.3. La fonction de Wright

La fonction de Wright joue un rôle très important dans la résolution des équations différentielles partielles d'ordre fractionnaires (ex : diffusion fractionnaire de chaleur).

Cette fonction connexe à la fonction de Mittag-Leffler à deux-paramètre a été introduite par Wright, par convenance on va utiliser la notation de Mainardi pour la fonction de Wright $w(z; \alpha, \beta)$.

1.1.3.1. Définition

La fonction de Wright est définie par :

$$w(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.28)$$

1.1.3.2. Représentation intégrale

Cette fonction peut être représentée par l'intégral suivant :

$$w(z; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ha} \tau^{-\beta} e^{\tau + 2\tau^{-\alpha}} d\tau \quad (1.29)$$

Où ha est le contour de Hankel (pour la démonstration voir [1]).

1.2. Dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire

Dans cette partie plusieurs approches à la généralisation de la notion de la différentiation et de l'intégration sont considérées. Le choix a été réduit à ces définitions qui sont liées aux applications.

1.2.1. Le jeu de noms

« ...Les mathématiques sont l'art de nommer les choses mystérieusement. Le bel et au premier regard ambigu nom **les calculs fractionnaires** est l'un de ces noms mal appropriés qui sont l'essence des mathématiques. », Igor Podlubny.

La notion de nombre réel est la généralisation de la notion de nombre naturel. Le mot **réel** souligne que nous reflétons des quantités réelles, mais ceci ne peut pas changer le fait qu'ils n'existent pas. Tous est dans l'ordre de l'analyse mathématique, et la notion de nombre réel le rend plus aisé.

Revenons au nom de calculs fractionnaires, il ne signifie ni le calcul de fraction ni quelconque fraction de calculs différentiel, intégral ou calcul de variations. Le calcul

fractionnaire est le nom de la théorie de l'intégral et de la dérivé d'ordre arbitraire quelconque qui unifie et généralise la notion de différentiation et intégration d'ordre entier n .

Considérons une séquence infinie de n -fois dérivées et intégrales :

$$\dots \int_0^t f(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_0^t f(\tau_1) d\tau, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2} \dots$$

La dérivée d'ordre réel quelconque α peut être considérée comme une interpolation de cette séquence d'opérateurs, on va utiliser la notation suivante :

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

Les deux souscriptions a et t dénotent les deux bornes de l'opérateur de différentiation d'ordre fractionnaire. L'apparence de ces deux bornes est essentielle pour enlever l'ambigüité lors de sons application aux problèmes réels.

Le mot intégrale fractionnaire signifie dans ce support une intégral d'ordre arbitraire quelconque et correspond aux valeurs négatives de α , on utilisera la notation suivante :

$${}_a D_t^{-\beta} f(t) \quad ; \quad \beta > 0$$

Une *équation différentielle d'ordre fractionnaire* est une équation qui contient des dérivées et/ou des intégrales d'ordre fractionnaire.

Un *système d'ordre fractionnaire* est un système modélisé par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

1.2.2. Unification entre la dérivée et l'intégrale d'ordre entier

Dans cette section on va décrire une approche à l'unification de deux notions, qui sont habituellement présentées séparément dans l'analyse classique : la dérivée d'ordre n et l'intégrale d'ordre n , et c'est cette généralisation qui va inspirer à la différentiation d'ordre fractionnaire.

O considère la fonction $y = f(t)$ continue, par définition la première dérivée de f est :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

L'application de la définition n fois donne :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-r.h)$$

Avec :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

Cette relation se démontre facilement par récurrences.

Considérons maintenant l'expression suivante :

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-r.h) \tag{1.30}$$

Où p est un entier quelconque, n aussi entier, ainsi on voit clairement que pour $p \leq n$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \tag{1.31}$$

Car $\binom{p}{r} = 0$ pour $r > p$

Considérons maintenant les valeurs négatives de p et notons :

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p.(p+1)\dots(p+r-1)}{r!}$$

On a alors :

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p.(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right]$$

En remplaçant dans (1.30) p par $-p$ on trouve :

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t - r.h) \quad p > 0$$

Si n est fixé alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro ce qui n'est pas intéressant, pour surmonter ceci on suppose que n tend vers l'infini en même temps que h tend vers zéro en les reliant par la relation $h = \frac{t-a}{n}$ où a est une constante réelle. Notons la limite de $f_h^{(-p)}(t)$ comme suit :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n.h=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \tag{1.32}$$

Ici ${}_a D_t^{-p}$ dénote un certain opérateur appliqué à la fonction f , a et t sont les bornes limites lié à cet opérateur :

Pour : $p = 1$

$${}_a D_t^{-1} f(t) = \sum_{r=0}^n f(t - r.h)$$

Prenant en compte que $t - n.h = a$ et que f est continue on retrouve ainsi la définition d'une intégrale comme suit :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n.h=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

Pour : $p = 2$ on trouve

$${}_a D_t^{-2} f(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau$$

Ainsi par récurrences on montre que pour p entier quelconque positif :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{1.33}$$

De cette relation on a :

$$\frac{d}{dt} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t)$$

Ainsi :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+1} f(t) \right) dt$$

$${}_a D_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+3} f(t) \right) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t \dots \int_a^t}_{p \text{ fois}} f(t) dt \end{aligned}$$

On remarque ainsi que la dérivée et l'intégrale d'ordre n ne sont qu'un cas particulier de la formule plus générale :

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n, h = t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-r.h) \quad (1.34)$$

Où : Pour $p > 0$ c'est une dérivée d'ordre p

Pour $p < 0$ c'est une intégrale d'ordre p

Cette observation nous mène à la généralisation de la dérivée et l'intégrale d'ordre quelconque.

1.2.3. Intégrale et dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

1.2.3.1. Intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Soit $-p$ dans la relation (1.34) :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n, h=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-r.h) \quad (1.35)$$

Pour prouver l'existence d'une telle limite et l'évaluer on fait appelle au théorème de Letnikov suivant :

Théorème 1.1 : on considère la série B_k , ($k = 1, 2, \dots$) on suppose que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0 \quad \text{pour tout } k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A \quad \text{pour tout } k$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K \quad \text{pour tout } n$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \cdot \beta_k = A$$

Pour l'application du théorème 1.1 on fait les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n, h=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-r.h) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n, h=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h.(h.r)^{p-1} f(t-r.h) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n, h=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h.(r.h)^{p-1} f(t-r.h) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n, h=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \cdot \left(r \cdot \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \cdot \frac{t-a}{n} \right) \end{aligned}$$

On prend :

$$B_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{n,k} = \frac{t-a}{n} \left(r \cdot \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f \left(t - r \cdot \frac{t-a}{n} \right)$$

En utilisant la relation (1.7) B_k vérifie les conditions du théorème :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1 \tag{1.36}$$

Evidement f continue sur l'intervalle fermé $[a, t]$ alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \alpha_{n,r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{t-a}{n} \left(r \cdot \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f \left(t - r \cdot \frac{t-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n h \cdot (r \cdot h)^{p-1} f(t - r \cdot h) \\ &= \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{1.37}$$

Tenant compte de (1.36) et (1.37) les conditions du théorème de Letnikov sont vérifiées ainsi :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{1.38}$$

Si f est $(m + 1)$ fois dérivable et de dérivées continues alors :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) \cdot (t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t - \tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

1.2.3.2. Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Considérons les cas où p est positif, l'objectif est d'évaluer la limite :

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n.h=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-r.h)$$

De la même manière que dans l'intégrale, en utilisant le théorème de Letnikov on trouve que la dérivée fractionnaire de f est :

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) \cdot (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (1.39)$$

La formule (1.39) est trouvée sous assumption que les dérivées $f^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$) sont continues dans l'intervalle fermé $[a, t]$ et m est un entier qui satisfait $m > p - 1$, la plus petite valeur de m est déterminée par : $m < p < m + 1$.

1.2.4. Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La manipulation de la dérivée de Grünwald-Letnikov définie par une limite récursive n'est pas convenant. L'expression (1.39) s'avère mieux à cause de la présence de l'intégrale mais qu'en est il du terme non intégrale ? La réponse est à la fois simple et élégante : on considère que (1.39) est un cas particulier de l'expression intégrodifférentielle :

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (m < p < m + 1) \quad (1.40)$$

La définition des intégrales et dérivée fractionnaire se base sur la remarque suivante :

Soit :

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_a^t f(\tau) d\tau \\ f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \\ &\vdots \\ f^{(-n)}(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.41)$$

On suppose alors que $n \geq 1$ fixé et on prend $k \geq 0$ entier, on obtient :

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.42)$$

Où D^{-k} ($k \geq 0$) représente l'intégrale k -fois.

D'autre part si on fixe $n \geq 0$ et on prend $k \geq n$ entier, la $(k - n)$ -fois dérivée de la fonction $f(t)$ peut s'écrire :

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.43)$$

Où D^k ($k \geq 0$) représente la dérivation k -fois de f .

1.2.4.1. Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour étendre la notion d'intégration n -fois aux valeurs non entières de n on peut remplacer dans la formule trouvée ci-dessus (formule de Cauchy) n par p réel :

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (1.44)$$

Dans la formule de Cauchy n satisfait la condition $n \geq 1$, sons équivalent dans cette formule est $p \geq 0$ pour que l'intégrale converge.

1.2.4.2. Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La relation (1.43) de la dérivée d'ordre entier $(k - n)$ nous offre une opportunité pour l'extension à la dérivation d'ordre non entier comme suit : on garde k entier et on remplace n par le réel α tel que $(k - \alpha > 0)$:

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.45)$$

La seule restriction pour α est que : $\alpha > 0$, ceci est nécessaire pour la convergence de l'intégrale. Il est toujours préférable de prendre $0 < \alpha < 1$ ainsi, la dérivée fractionnaire d'ordre p ($p = k - \alpha$) peut s'écrire comme suit :

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k - p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \quad (k - 1 < p < k) \quad (1.46)$$

1.2.5. Définition de Caputo

La définition de Riemann-Liouville joue un rôle très important dans le développement théorique et l'application purement mathématique. Cependant. Les demandes de la technologie moderne exigent certaines révisions d'approches purement mathématiques bien établies. Les problèmes physique exigent des définitions de dérivées fractionnaire où les conditions initiales sont physiquement interprétable ($f(a), f^{(1)}(a), \dots$).

Malheureusement l'approche de Riemann-Liouville nous conduit à des conditions initiales qui sont fonction de dérivées fractionnaire de type suivant :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2 \\ \vdots & \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n \end{aligned}$$

Ces définitions n'ont pas de sens physique explicite, L'approche de M.Caputo fait apparaître des dérivées successives entières bien connue par les physiciens.

La définition de Caputo s'écrit comme suit :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1-n}} d\tau \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (1.47)$$

1.2.6. Discussion et analyse des différentes approches

L'expression (1.39) de Grünwald-Letnikov est obtenue sous assumption $f(t)$ est $m + 1$ continument dérivable peut être retrouvée de l'expression (1.46) de Riemann-Liouville sous même hypothèse, donc pour la classe des fonction $m + 1$ fois dérivable la définition de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville sont équivalentes. D'un point de vu mathématique les fonctions de tel classe son rare, par contre cette classe est très importante en application car la majorité des dynamique des processus physique sont suffisamment lisses et ne présente pas de discontinuités.

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire (par définition de Riemann-Liouville) sous conditions initiales fonction des dérivée fractionnaire sont très bien résolues (voir [4]), par contre ces solutions sont inutiles en pratique à cause de l'absence

d'interprétations physique. On observe ainsi un conflit entre les mathématiques purs et les besoins d'applications, c'est ainsi que l'approche de Caputo est apparue pour remédier à ce conflit.

Pour dériver à l'ordre α pour α tel que $0 < n - 1 < \alpha < n$ on intègre à l'ordre $n - \alpha$ puis on dérive à l'ordre n , selon l'ordre utilisé on obtient la dérivé au sens de Riemann-Liouville ou de Caputo.

La relation qui lie ces deux définitions est la suivante :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) + f(a^+) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha + 1)} \tag{1.48}$$

Le terme qui se rajoute est interprétable du point de vue que pour le cas entier la dérivée de l'intégrale n'égle pas l'intégrale de la dérivée.

Donc la définition de Riemann-Liouville et de Caputo se rejoigne si $f(a^+) = 0$ (c'est-à-dire en pratique pour les systèmes initialement en repos).

1.3. Propriétés des opérateurs fractionnaires

1.3.1. La linéarité

Similaire à la différentiation d'ordre entier, la différentiation d'ordre fractionnaire est un opérateur linéaire :

$$D^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \tag{1.49}$$

Où D^p dénote quelconque définition de différentiation fractionnaire définit sur ce support.

1.3.2. Composition d'opérateurs fractionnaire

Pour $p > 0$ et q arbitraire on a :

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

Pour $p > 0$ et $q > 0$ on a :

$${}_a D_t^{-q} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t)$$

$${}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^q f(t) \right) = {}_a D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_a D_t^{q-j} f(t) \right] \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}$$

$$(0 \leq k-1 \leq q < k)$$

1.3.3. La lois de Leibniz

La dérivée d'ordre p du produit de deux fonctions f et g est donné par :

$${}_a D_t^p (f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(t).{}_a D_t^{p-k} g(t)$$

Avec :

$$\binom{p}{k} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1).\Gamma(p-k+1)}$$

1.4. Transformée de Laplace des opérateurs fractionnaire

La transformée de la fonction f est définit par :

$$F(s) = L\{f(t);s\} = \int_0^{\infty} e^{-s.t} f(t).dt \tag{1.50}$$

Où F est une fonction complexe de la variables.

On peut toujours retrouver la fonction $f(t)$ de sa transformée de Laplace à travers la formule suivante :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s);t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{s.t} F(s).ds \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \tag{1.51}$$

Où c_0 est situé dans le demi-plan de convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g est donné par :

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau).g(\tau).d\tau = \int_0^t g(t-\tau).f(\tau).d\tau$$

Et si f et g sont nulle pour $t < 0$ alors :

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s).G(s) \quad (1.52)$$

Pour la suite on considère que la borne inférieure des opérateurs fractionnaire est nulle ($a = 0$).

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov ce déduit facilement de la remarque suivante :

$${}_0D_t^{-p} f(t) = {}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(p)} t^{p-1} * f(t)$$

Or :

$$L\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p).s^{-p}$$

Et de la propriété (1.52) on trouve :

$$L\{{}_0D_t^{-p} f(t); s\} = L\{t^{p-1} * f(t); s\} = s^{-p} F(s) \quad (1.53)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par :

$$L\{{}_0D_t^p f(t); s\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (1.54)$$

Cette expression n'est pas très utile en pratique à cause de l'apparition des dérivée fractionnaire au point initial ce qui n'a pas d'interprétation physique.

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par :

$$L\{{}_0^C D_t^p f(t); s\} = s^p - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.55)$$

$$n - 1 < p \leq n$$

Par contre cette formule apporte la solution du problème de conditions initial à cause de l'apparition des dérivées entières au point initial (position, vitesse,...).

1.5. Equations différentielles d'ordre fractionnaire

Il existe plusieurs méthodes de résolutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants (voit [1],[4]) on présente ici la méthode de la transformée de Laplace en utilisant la fonction de Green. On suppose dans ce qui suit que les conditions initiales sont nulles (f et ses dérivée jusqu'à l'ordre nécessaire sont nulles).

1.5.1. Equations à un terme

La fonction fractionnaire de Green à un terme $G_1(t)$ de l'équation différentielle fractionnaire à coefficient constant suivante :

$$a \cdot {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t) \quad (1.56)$$

Est trouvée en appliquant la transformée de Laplace inverse à l'expression :

$$g_1(s) = \frac{1}{a \cdot s^\alpha}$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression est :

$$G_1(t) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.57)$$

1.5.2. Equations à deux termes

La fonction fractionnaire de Green à deux termes $G_2(t)$ de l'équation différentielle fractionnaire à coefficient constant suivante :

$$a \cdot {}_0D_t^\alpha y(t) + b \cdot y(t) = f(t) \quad (1.58)$$

Est trouvée en appliquant la transformée de Laplace inverse à l'expression :

$$g_2(s) = \frac{1}{a \cdot s^\alpha + b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}}$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression est trouver en utilisant l'expression (1.15) qui concerne la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler :

$$G_2(t) = \frac{1}{a} \cdot t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (1.59)$$

1.5.3. Equations à trois termes

La fonction fractionnaire de Green à trois termes $G_3(t)$ de l'équation différentielle fractionnaire à coefficient constant suivante :

$$a \cdot {}_0D_t^\beta y(t) + b \cdot {}_0D_t^\alpha y(t) + c \cdot y(t) = f(t) \quad (1.60)$$

Est trouvée en appliquant la transformée de Laplace inverse à l'expression :

$$g_3(s) = \frac{1}{a \cdot s^\beta + b \cdot s^\alpha + c}$$

On supposant que $(\beta > \alpha)$ on écrit $g_3(s)$ de cette forme :

$$\begin{aligned} g_3(s) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{c \cdot s^{-\alpha}}{a \cdot s^{\beta-\alpha} + b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c \cdot s^{-\alpha}}{a \cdot s^{\beta-\alpha} + b}} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a} \right)^{k+1} \frac{s^{\alpha \cdot k - \alpha}}{\left(s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a} \right)^{k+1}} \end{aligned}$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression est trouver en utilisant l'expression (1.15) qui concerne la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler :

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\frac{c}{a} \right)^k \cdot t^{\beta(k+1)-1} \cdot E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)} \left(\frac{-b}{a} t^{\beta-\alpha} \right) \quad (1.61)$$

1.5.4. Equations à n-termes

La fonction fractionnaire de Green à trois termes $G_n(t)$ de l'équation différentielle fractionnaire à coefficient constant suivante :

$$a_n \cdot {}_0D_t^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} \cdot {}_0D_t^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \cdot {}_0D_t^{\beta_1} y(t) + a_0 \cdot {}_0D_t^{\beta_0} y(t) = f(t)$$

Est trouvée en appliquant la transformée de Laplace inverse à l'expression :

$$g_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}}$$

On supposant que $(\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0)$ on écrit $g_3(s)$ de cette forme :

$$\begin{aligned} g_n(s) &= \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}}} \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0, \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \cdot \frac{s^{-\beta_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (\beta_i - \beta_{n-1}) k_i}}{\left(s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}} \end{aligned}$$

Où $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$ est le multinomial coefficients :

$$(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) = \frac{m!}{k_0! k_1! \dots k_{n-2}!}$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression est trouver en utilisant l'expression (1.15) qui concerne la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0, \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\ &\quad \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \cdot t^{(\beta_n - \beta_{n-1})m + \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j - 1} \times E^{(m)}_{\beta_n - \beta_{n-1}, \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j} \left(\frac{-a_{n-1}}{a_n} t^{\beta_n - \beta_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

2. Représentation et analyse des systèmes d'ordre fractionnaire

2.1. Processus d'ordre fractionnaire

L'analyse dans le plan de Bode de plusieurs processus naturels, comme les lignes de transmission, l'impédance de polarisation diélectrique, le rythme cardiaque, a permis d'observer une pente fractionnaire, ce type de processus est connu sous le nom de processus fractionnaire ou non entier.

2.2. Fonction de transfert idéale de Bode

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs en 1945 (voir figure 2.1). Cette fonction de transfert a la forme suivante :

$$G(s) = \left(\frac{s}{w_c} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

Où w_c est la fréquence de coupure désirée et α la pente de la caractéristique idéale du gain (défini la robustesse). La marge de phase est $\Phi_m = \pi(1 + \alpha/2)$ pour toutes les valeurs du gain. La marge de gain A_m est infinie. Les marges de phase constantes $60^\circ, 45^\circ$ et 30° correspondent aux pentes $\alpha = -1.33, -1.5$ et -1.66 .

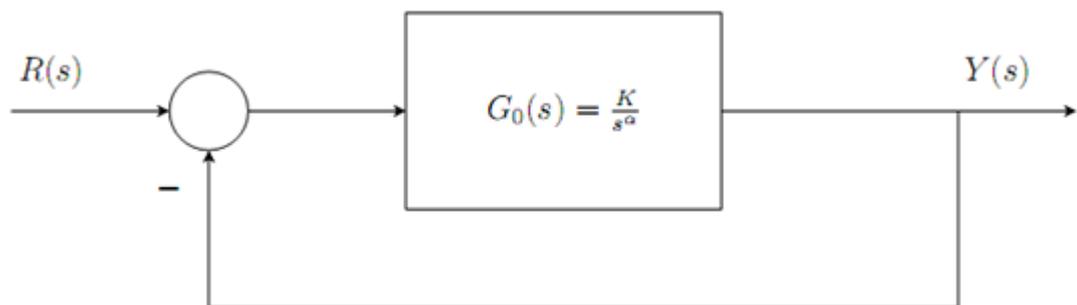


figure 2.1 : Boucle idéale de Bode

Le tracé de Nyquist pour la fonction de transfert idéale de Bode est réduit à une ligne droite passant par l'origine avec $\arg(G(j\omega)) = \alpha\pi/2$.

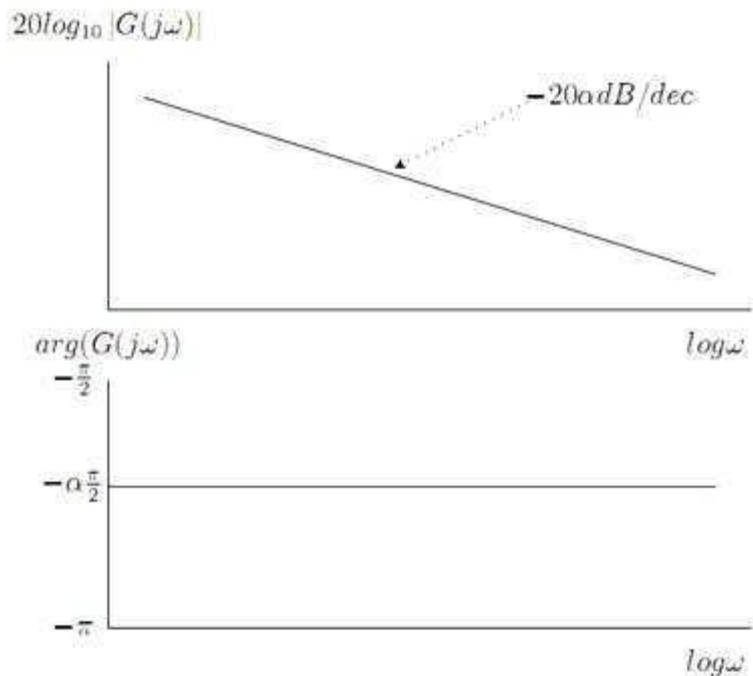


figure 2.2 : Tracé de Bode de la fonction de transfert idéale.

La fonction de transfert de Bode (2.1) peut être utilisée comme un système de référence sous la forme suivante :

$$G_f(s) = \frac{K}{s^\alpha + K} \quad (0 < \alpha < 2) \quad (2.2)$$

$$G_o(s) = \frac{K}{s^\alpha} \quad (0 < \alpha < 2)$$

Où G_f est la fonction de transfert en boucle fermée est G_o la fonction de transfert en boucle ouverte. Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes (voir figure 2.2) :

1. Boucle ouverte :

- Gain : une pente constante de $-20\alpha \text{ dB/dec}$,
- Fréquence de coupure : en fonction de K ,

- Phase : ligne horizontale de $-\frac{\alpha\pi}{2}$,
- Nyquist : ligne droite avec un argument $-\frac{\alpha\pi}{2}$.

2. Boucle fermée :

- Marge de gain : A_m infinie,
- Marge de phase : constante, $\Phi_m = \pi(1 + \alpha/2)$,
- Réponse indicielle : $y(t) = Kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-Kt^\alpha)$

Cette réponse est trouvée en appliquant la formule (1.15) qu'on rappelle ci-dessous :

$$\int_0^\infty e^{-p.t} t^{\alpha.k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a.t^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad \text{Re}(P) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}$$

Où on prend : $\beta = \alpha + 1$, $k = 0$, $K = a$ et on multiplie l'égalité par K .

2.3. Fonctions et matrices de transfert d'ordre fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. En appliquant la transformée de Laplace à ces équations, et en supposant les conditions initiales nulles, on obtient en utilisant (1.54) ou (1.55) des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire.

Une expression générale de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire est donnée par l'expression suivante :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=1}^M b_i s^{q_i}}{\sum_{j=1}^N a_j s^{p_j}} \quad M, N \in \mathbb{N}^*, a_j, b_i, p_j, q_j \in \mathfrak{R} \quad (2.3)$$

Parfois toutes les puissances de s sont multiples d'une certaine valeur q , la fonction de transfert (2.3) devient alors :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=1}^M b_i s^{i,q}}{\sum_{j=1}^N a_j s^{j,q}} \quad M, N \in \mathbb{N}^*, a_j, b_i, q \in \mathfrak{R} \quad (2.4)$$

Une fonction de transfert de la forme (2.4) est dite « commensurable ». En générale une fonction de transfert d'ordre fractionnaire n'est sous cette forme, mais celles qui le sont, sont plus faciles à étudier.

2.4. Représentation d'état fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état fractionnaire comporte deux équations :

- une équation d'état non entière dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre n réel.
- une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^{(n)}x(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

dans lequel :

u est le vecteur des entrées de dimension $(d_u \times 1)$;

x est le vecteur d'état fractionnaire de dimension $(d_x \times 1)$;

n est l'ordre de dérivation (scalaire) ;

y est le vecteur des sorties de dimension $(d_y \times 1)$.

Les matrices A, B, C et E sont des matrices constantes de dimension appropriée.

Remarque importante – Bien que désigné sous l'appellation « *vecteur d'état fractionnaire* », le vecteur $x(t)$ ne présente plus les propriétés « *d'état* » au sens classique du terme. On montre en effet que la connaissance de $x(t)$ à l'instant t_0 ne suffit plus pour

résumer le passé d'un système fractionnaire. Le problème de l'initialisation d'un tel système à l'instant t_0 requiert la connaissance, soit d'un nombre infini de condition initiale, soit d'un nombre fini de variables (signal d'entrée par exemple) mais sur le temps correspondant à tout le passé du système.

2.5. Passage d'une équation différentielle fractionnaire à une représentation d'état fractionnaire

Le passage d'une équation différentielle fractionnaire du type :

$$D^{n_{a_0}} y(t) + a_1 D^{n_{a_1}} y(t) + a_2 D^{n_{a_2}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_0 D^{n_{b_0}} u(t) + b_1 D^{n_{b_1}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{b_M}} u(t)$$

à une représentation d'état non entière telle que définir par (2.5) n'est possible que lorsque les ordres de dérivation de l'équation différentielle sont commensurables.

Lorsque cette condition est vérifiée, le passage d'une équation différentielle fractionnaire à une représentation d'état équivalente s'effectue de la même manière que dans le cas entier c'est-à-dire comme suit :

Soit l'équation différentielle commensurable suivante :

$$a_1 D^n y(t) + a_2 D^{2.n} y(t) + a_3 D^{3.n} y(t) + \dots + D^{L.n} y(t) = b.u(t) \quad (2.6)$$

On choisie le vecteur d'état suivant :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^n y(t) \\ D^{2.n} y(t) \\ D^{3.n} y(t) \\ \vdots \\ D^{(L-1).n} y(t) \end{bmatrix}$$

On remarque que :

$$D^n x_1 = x_2, \quad D^n x_2 = x_3, \quad \dots, \quad D^n x_{L-2} = x_{L-1}$$

A partir de l'équation différentielle (2.6) on en déduit que :

$$D^n x_{L-1} = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_{L-1} x_{L-1} + b u$$

d'où la représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^n x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{L-1} \end{bmatrix} .x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = C .x(t) \end{array} \right.$$

A titre de remarque, il convient de souligner que, pour l'ordre de dérivation non commensurable, moyennant une approximation de l'ordre par des nombres rationnels, il s'avère possible de déterminer un ordre commun n conforme.

2.5. Passage d'une représentation d'état fractionnaire à une matrice fonction de transfert

On supposant que le système est initialement relaxé on retrouve la matrice fonction de transfert fractionnaire à partir de la représentation d'état (2.5) de la même manière que dans le cas entier :

Soit la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(n)}x(t) = A.x(t) + B.u(t) \quad (a) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \quad (b) \end{array} \right.$$

Appliquant la transformée de Laplace à l'équation (a) :

$$\begin{aligned} s^n X &= AX + BU \Rightarrow (s^n I - A)X = BU \\ &\Rightarrow X = (s^n I - A)^{-1}.BU \end{aligned}$$

on remplace X dans l'équation (b), après l'avoir fait une transformation de Laplace on trouve :

$$Y(s) = C(s^n I - A)^{-1} B U(s) + E U(s) \quad (2.7)$$

Ainsi la MFT est la suivante :

$$H(s) = C(s^n I - A)^{-1} B + E \quad (2.8)$$

2.6. Décomposition modale d'un système fractionnaire

Dans le cas entier, la décomposition modale d'un système s'effectue, soit par décomposition en élément simples si le système est décrit par une fonction de transfert de la forme $\frac{N(s)}{D(s)}$:

Dans le cas d'un système d'ordre n et les pôles simples voici la décomposition

$$G(s) = \frac{\alpha_0}{s + \lambda_0} + \frac{\alpha_1}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{s + \lambda_{n-1}}$$

Soit par diagonalisation de la matrice d'évolution si le système est décrit par une représentation d'état.

L'étude du cas fractionnaire, par diagonalisation de la matrice d'évolution, constitue l'objet des développements suivants.

2.6.1. Expressions générale de la sortie

Pour retrouver l'expression générale de la sortie $y(t)$ il suffit d'appliquer la transformé de Laplace inverse à la relation (2.7) :

$$y(t) = L^{-1} \left\{ C(s^n I - A)^{-1} B \right\} u(t) + E u(t) \quad (2.9)$$

2.6.2. Passage d'une représentation d'état fractionnaire à une autre

Le vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, il engendre un espace appelé espace d'état de dimension exactement égal au nombre de variables d'états. Changer le vecteur d'état, c'est simplement changer la base de représentation. Il existe donc une matrice de changement de base P telle que :

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & J_{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

Où les scalaires λ_i sont les valeurs propres de l'endomorphisme considéré. A noter qu'il n'y a pas a priori un bloc de Jordan pour chaque valeur propre sauf si l'endomorphisme est diagonalisable, voici en plus claire comment on procède :

- On cherche les valeurs propres de la matrice considérée
- Si l'ordre de multiplicité géométrique des valeurs propres est égale à l'ordre de multiplicité algébrique, on diagonalise la matrice et chaque valeur propre dans la diagonale représente un bloc de Jordan
- Si l'ordre de multiplicité géométrique des valeurs propres est supérieur à l'ordre de multiplicité algébrique on écrit la matrice sous forme de Jordan.

2.6.4. La décomposition modale

De manière analogue au cas entier, la décomposition modale d'un système fractionnaire s'effectue par la Jordanisation de la matrice d'évolution. Un changement de base par transformation semblable (§2.6.2) de (2.5) permet en effet d'obtenir une nouvelle réalisation, soit :

$$\begin{cases} D^n x_J(t) = J .x_J(t) + B_J .u(t) \\ y(t) = C_J .x + D .u(t) \end{cases} \tag{2.12}$$

où J est une matrice de Jordan contenant sur sa diagonale l'ensemble des valeurs propres de la matrice A .

La sortie $y(t)$ s'exprime alors par :

$$y(t) = L^{-1} \left\{ C_J (s^n I - J)^{-1} B_J \right\} u(t) + D .u(t) \tag{2.13}$$

Comme J est une matrice de Jordan la matrice $(s^n I - J)^{-1}$ s'exprime par :

$$(\mathbf{s}^n \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}^n \mathbf{I} - \mathbf{J}_{d_1}(\lambda_1))^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\mathbf{s}^n \mathbf{I} - \mathbf{J}_{d_1}(\lambda_1))^{-1} & \\ (\mathbf{0}) & & & \ddots & \\ & & & & (\mathbf{s}^n \mathbf{I} - \mathbf{J}_{d_r}(\lambda_r))^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où

$$(\mathbf{s}^n \mathbf{I} - \mathbf{J}_{d_1}(\lambda_1))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1} & \left(\frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1}\right)^{d_1} \\ & \frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1} & & \vdots \\ & & \ddots & \left(\frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1}\right)^2 \\ (\mathbf{0}) & & & \frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La sortie $y(t)$ est donc un vecteur dont les composantes sont définies par une combinaison linéaire d'éléments appelés mode propres du système, de la forme :

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{\mathbf{s}^n - \lambda_1} \right)^{q_i} \right\} \mathbf{u}(t) \quad \text{où } q_i \text{ est un nombre entier reflétant la multiplicité de la}$$

valeur propre λ_1 .

Le paragraphe suivant s'attache ainsi à établir l'expression analytique de la transformée inverse de Laplace de transfert de type $G_{\text{modale}}(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i}$.

2.7. Transformé de Laplace inverse des modes propres

La transformée inverse $g_{\text{modale}}(t)$ d'un mode propre $G_{\text{modale}}(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i}$ peut s'exprimer à l'aide des fonctions de Mittag-Leffler généralisées, soit :

$$g_{\text{modale}}(t) = t^{q_i n - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q_i - 1}{q_i - 1 + k} \cdot \frac{(\lambda_1 t)^k}{\Gamma((q_i + k).n)} \quad (2.16)$$

Bien qu'analytique, l'expression (2.18) se prête difficilement à l'étude structurelle de $g_{\text{modale}}(t)$. Une telle étude, facilitée par l'utilisation de la formule intégrale de Mellin-Fourier et du théorème des résidus, fait ainsi l'objet des paragraphes suivants.

La transformation inverse de Laplace de $G_{\text{modale}}(s)$ s'effectue à l'aide de la formule intégrale de Mellin-Fourier (1.51), soit :

$$g_{\text{modale}}(t) = L^{-1} \{G_{\text{modale}}(s); t\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c - \omega i}^{c + \omega i} e^{s.t} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} ds \quad (2.17)$$

En définissant un contour fermé Γ du type de Bromwich-Wagner contournant la coupure (voir figure 2.3), le théorème des résidus permet d'écrire :

$$\begin{aligned} g_{\text{moale}}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} ds \\ &= \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \left\{ \text{Res}_{s=p_k} \left[e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} \right] \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6)} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} ds \end{aligned} \quad (2.18)$$

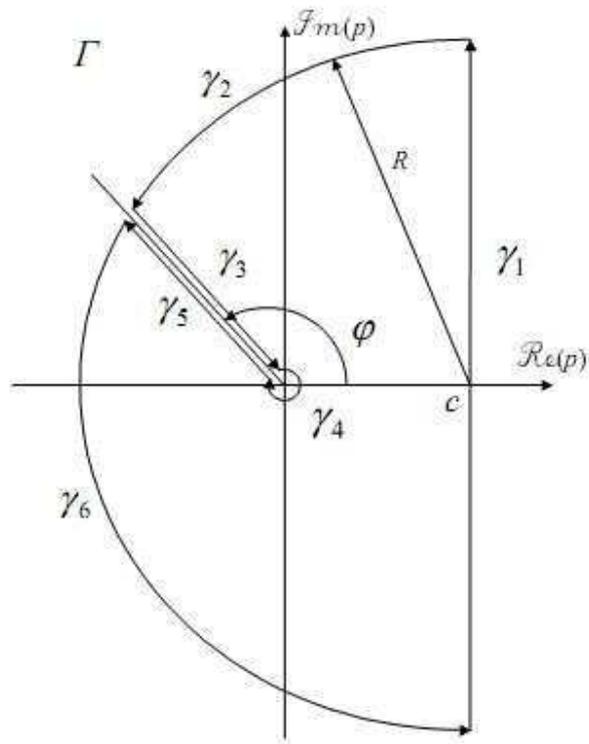


figure 2.3 : Représentation du contour d'intégration Γ

Lorsque le rayon R tend vers l'infini, l'intégrale le long des contours γ_2 , γ_4 et γ_6 tend vers 0 ([Oustaloup, 1983]). L'équation (2.18) devient alors :

$$g_{\text{moale}}(t) = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \left\{ \text{Res}_{s=p_k} \left[e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} \right] \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_3+\gamma_5)} e^{st} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} ds \quad (2.19)$$

Équation dans laquelle figurent deux parties bien distinctes :

- La première résulte du calcul des résidus en chaque pôle de $G_{\text{modale}}(s)$;
- La seconde est générée par le calcul de l'intégrale le long des contours γ_3 et γ_5 .

2.8. Détermination des pôles de $G_{\text{modale}}(s)$

Les pôles d'une fonction de transfert irréductible du type $\frac{N(s)}{D(s)}$ sont les termes qui annulent le dénominateur $D(s)$. Si, dans le cas entiers, l'expression des pôles se déduit directement de la décomposition en élément simples de la fonction de transfert (les pôles étant alors égaux aux valeurs propres), il en est autrement pour le cas fractionnaire. Il s'avère en effet que les pôles de $G_{\text{modale}}(s)$ vérifient l'équation suivante :

$$s^n - \lambda_1 = 0 \quad (2.20)$$

En écrivant $s = \rho e^{i\theta}$ où ($\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[$), l'équation (2.20) devient :

$$\rho^n e^{i\theta n} = \lambda_1 \quad (2.21)$$

Cette équation est équivalente à un système de deux équations, l'une relative au module de λ_1 , l'autre à son argument :

$$\begin{cases} \rho_k^n = |\lambda_1| \\ n \cdot \theta_k = \arg(\lambda_1) + 2 \cdot m_k \pi \end{cases} \quad (2.22)$$

Ainsi on en déduit que :

$$\begin{cases} \rho_k = |\lambda_1|^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k = \frac{\arg(\lambda_1)}{n} + \frac{2 \cdot m_k \pi}{n} \end{cases} \quad (2.23)$$

En tenant compte de la coupure du plan complexe, l'argument de θ des pôles doit vérifier la contrainte :

$$\begin{cases} \theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[\\ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (2.24)$$

imposant une condition sur l'ensemble des entiers m_k , soit :

$$-\frac{a}{2} - \frac{\arg(\lambda_1)}{2\pi} < m_k < \frac{a}{2\pi}(\varphi) - \frac{a}{2} \quad (2.25)$$

2.9. Expression de $g_{\text{modale}}(t)$

Des résultats très importants sont obtenue par Oustaloup [Oustaloup,1983] concernant le calcul des résidus en chaque pôle ainsi que celui de l'intégrale le long de la coupure, conduisant alors à une expression de $g_{\text{modale}}(t)$ de la forme :

$$\begin{aligned} g_{\text{modale}}(t) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^n - \lambda_1} \right)^{q_i} \right\} &= \sum_{k=1}^{\text{nombre de pole}} \frac{p_k}{\lambda_1^{q_i}} Q_{q_i-1} \left(\frac{1}{n}, t, p_k \right) e^{t \cdot p_k} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} \sum_{k=0}^{q_i-1} (-1)^k \binom{q_i}{k} (\lambda_1)^k x^{n(q_i-k)} \sin[n\pi(q_i-k)]}{[x^{2n} - 2\lambda_1 x^n \cos(n\pi) + \lambda_1^2]^{q_i}} dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $Q_k(x, y)$ est un polynôme à deux variable définit par :

$$\begin{cases} Q_0(x, y) = x \\ kQ_k(x, y) = (xy + x - y)Q_{k-1}(x, y) + xy \frac{\partial}{\partial y} Q_{k-1}(x, y) \end{cases} \quad (2.27)$$

L'équation (2.26) met en évidence la décomposition structurelle de $g_{\text{modale}}(t)$ en deux parties :

- La première, appelée mode exponentiel, résultant du calcul des résidus en chaque pôle ;

- La seconde, appelée multimode aperiodique, résultant du calcul de l'intégrale le long de la coupure du plan complexe.

La notion multimode aperiodique provient de ce qu'un tel mode est caractérisé par une dynamique aperiodique à mémoire longue constituée par la superposition continue de réponses impulsionnelles de systèmes de premier ordre dont les fréquences transitionnelles sont distribuées continument de zéro à l'infini [Oustaloup, 1995].

2.10. Condition de stabilité d'un système fractionnaire

Précisons ici que l'on entend par stabilité, La stabilité BIBO (bounded input-bounded output) dont une condition suffisante est le respect de l'équation :

$$\int_0^{\infty} |L^{-1}\{H(s)\}| dt = K < +\infty \tag{2.28}$$

où $H(s)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$, en l'occurrence celle que définit la relation (2.8).

La décomposition modale d'un système fractionnaire (2.13) permet d'exprimer sa réponse impulsionnelle sous la forme d'une combinaison linéaire de modes propres, soit :

$$h(t) = \sum_{l=1}^L L_l g_{l_{\text{modale}}}(t) \tag{2.29}$$

chaque mode propre $g_{l_{\text{modale}}}(t)$ se décompose en un mode exponentiel et un multimode aperiodique conformément à la relation (2.26).

Etant donnée la stabilité du multimode aperiodique qu'assure la superposition d'une infinité de modes aperiodique stable (démonstration par théorème de Fubini [Matignon, 1996]), une condition nécessaire et suffisante de stabilité portant sur les pôles p_k du système peut être formulée soit :

$$\text{Re}(p_k) < 0 \tag{2.30}$$

Relation générale bien connu dans le cas entier, à savoir qu'un système est stable si et seulement si la partie réelle de ses pôles est négative.

Le théorème de stabilité des systèmes fractionnaires peut ainsi être énoncé.

Théorème- soit un système fractionnaire défini par une réalisation irréductible $\{n, A, B, C, D\}$ de la représentation (2.11) est caractériser par ses valeurs propres non nulles $\lambda_{1=1, \dots, N_1}$. Alors :

Le système possède la propriété suivante :

$$\text{stabilité BIBO} \Leftrightarrow |\arg(\lambda_1)| > \frac{n\pi}{2}, \quad \forall 1 = 1, \dots, N_1. \quad (2.31)$$

Remarque : La condition de stabilité des système d'ordre entier est obtenue à partir de (1.31) si $n = 1$.

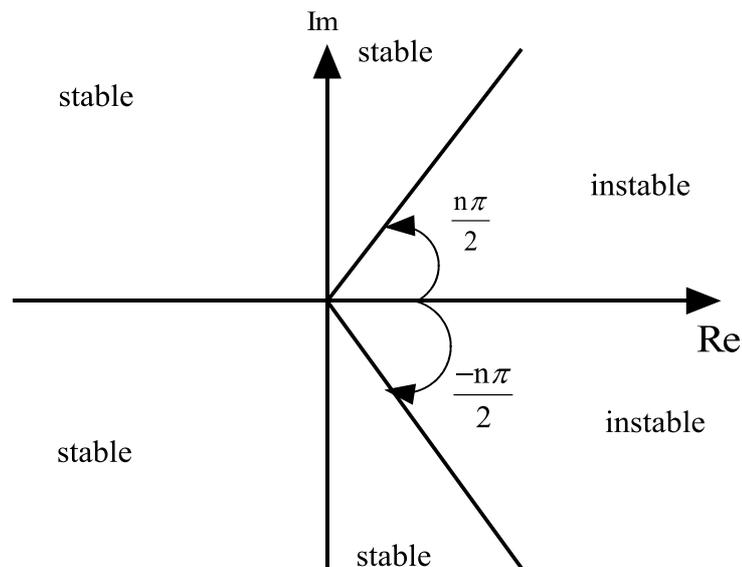


figure 2.4 : domaine de stabilité d'un système fractionnaire d'ordre n dans le plan complexe.

2.11. Simulation d'un système fractionnaire

L'objet de ce paragraphe est de décrire succinctement les différentes méthodes utilisées pour simuler un système d'ordre fractionnaire. Deux types de méthodes se distinguent par leurs approches différentes. Pour les premières, appelées méthodes directes, l'opérateur de dérivation fractionnaire est directement remplacé par une approximation numérique discrète.

Pour les secondes, appelées méthodes indirectes, le système fractionnaire à simuler est approximé par un système entier connu. La simulation est ensuite obtenue par la discrétisation du système entier connu.

2.11.1. Méthodes Directes

2.11.1.1. La fonction génératrice

En générale, la discrétisation de l'opérateur fractionnaire S^r (r réel) peut être exprimée par soi-disant la fonction génératrice $s = w(z^{-1})$. Cette fonction génératrice est son expansion détermine la forme et les coefficients de l'approximation.

2.11.1.2. Développement en fraction continue

En mathématiques une fraction continue est une expression de la forme :

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

On montre qu'on peut représenter tout nombre réel sous forme de fraction continue finie ou infinie, dans laquelle a_0 est un entier relatif est a_j sont des entiers strictement positifs.

On va illustrer avec un exemple le développement en fraction continue du nombre rationnel $\frac{15625}{6842}$:

La partie entière de ce quotient est 2 ce qui permet d'écrire :

$$\frac{15625}{6842} = 2 + \frac{1941}{6842}$$

On a $\frac{1941}{6842}$ est inférieur à 1 et son inverse possède une partie entière 3, on peut donc écrire que :

$$\frac{15625}{6842} = 2 + \frac{1}{\frac{6842}{1941}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1019}{1941}}$$

Ainsi de proche en proche :

$$\frac{15625}{6842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1019}{1941}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{922}{1019}}} = \dots = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{48}}}}}}}}$$

2.11.1.3. Discrétisation récursive de Tustin

Le point clé de Tustin de l'opérateur d'ordre fractionnaire est d'obtenir une formule récursif. Ici nous introduisant soi-disant Muir-récursion à l'origine utilisée dans le traitement des données géophysiques avec des applications à la prospection du pétrole, dans ce qui suit sans perte de généralité supposant que $r \in [-1,1]$, et sans complications on donne seulement la formule récursive pour r positif :

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^r &= \left(\frac{2}{T}\right)^r \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^r \\ &= \left(\frac{2}{T}\right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)} \end{aligned} \tag{2.32}$$

où :

$$A_0(z^{-1}, r) = 1$$

et :

$$A_n(z^{-1}, r) = A_{n-1}(z^{-1}, r) - c_n z^n A_{n-1}(z^{-1}, r) \tag{2.33}$$

$$c_n = \begin{cases} r/n & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases}$$

d'où :

$$s^r \approx \left(\frac{2}{T}\right)^r \frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)}$$

Symboliquement, le tableau 2.1 énumère les expressions de $A_n(z^{-1}, r)$ pour $n = 1 \dots 9$.

n	$A_n(z^{-1}, r)$
0	1
1	$-r.z^{-1} + 1$
3	$-\frac{1}{3}r.z^{-3} + \frac{1}{3}r^2.z^{-2} - r.z^{-1} + 1$
5	$-\frac{r}{5}.z^{-5} + \frac{r^2}{5}.z^{-4} - \left(\frac{r}{3} + \frac{2r^2}{15}\right).z^{-3} + \frac{2}{5}r^2.z^{-2} - r.z^{-1} + 1$
7	$\frac{-r}{7}z^{-7} + \frac{r^2}{7}z^{-6} - \left(\frac{r}{5} + \frac{2r^3}{35}\right)z^{-5} + \left(\frac{26}{105}r^2 + \frac{r^4}{105}\right)z^{-4} - \left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{21}r^3\right)z^{-3} + \frac{3}{7}r^2.z^{-2} - r.z^{-1} + 1$
9	$-\frac{r}{9}z^{-9} + \frac{r^2}{9}z^{-8} - \left(\frac{r}{7} + \frac{r^3}{21}\right)z^{-7} + \left(\frac{34r^2}{189} + \frac{2r^4}{189}\right)z^{-6} - \left(\frac{1}{5}r + \frac{16}{189}r^3 + \frac{1}{945}r^5\right)z^{-5} + \left(\frac{17}{63}r^2 + \frac{1}{63}r^4\right)z^{-4} - \left(\frac{1}{3}r + \frac{1}{9}r^3\right)z^{-3} + \frac{4}{9}r^2.z^{-2} - r.z^{-1} + 1$

Tableau 2.1 : expressions de $A_n(z^{-1}, r)$ pour $n = 1 \dots 9$.

On peut vérifier que la discrétisation récursif de l'opérateur d'ordre fractionnaire est une série de Taylor, en utilisant le Toolbox Symbolic de Matlab, on cherchant la série de Taylor de :

$$\left(w(z^{-1}) \right)^{\pm r} = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm r}$$

pour les 9 premiers termes, puis on fait la même chose pour $\left(\frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)} \right)$;

premièrement on se réfère au tableau 1 pour les valeurs de $A_n(z^{-1}, r)$ pour $n = 1 \dots 9$, en collectant les termes de chaque coefficients, on trouve que ces coefficients sont les même que celles calculés précédemment jusqu'à l'ordre considéré. On conclu donc que la formule de récusions est une série de Taylor jusqu'à l'ordre considéré.

2.11.1.3.1. Exemple illustratif

En utilisant la méthode de discrétisation récursive mentionné, la discrétisation de $s^{-0.5}$ par un pas d'échantillonnage de 0.001s est étudiée numériquement, et les modèles d'approximations sont :

$$G_1(z) = \frac{0.02236 + 0.01118.z^{-1}}{1 - 0.5.z^{-1}}$$

$$G_3(z) = \frac{0.02236 + 0.01118.z^{-1} + 0.001863.z^{-2} + 0.003727.z^{-3}}{1 - 0.5.z^{-1} + 0.08333.z^{-2} - 0.01667.z^{-3}}$$

$$G_7(z) = \frac{0.02236 + 0.01118.z^{-1} + 0.002396.z^{-2} + 0.003993.z^{-3} + 0.001398.z^{-4} + 0.002396.z^{-5} + 0.0007986.z^{-6} + 0.001597.z^{-7}}{1 - 0.5.z^{-1} + 0.1071.z^{-2} - 0.1786.z^{-3} + 0.0625.z^{-4} - 0.1071.z^{-5} + 0.03571.z^{-6} - 0.07143.z^{-7}}$$

On représente les diagrammes fréquentiels ainsi que temporels des trois approximations pour voir l'efficacité de cette discrétisation :

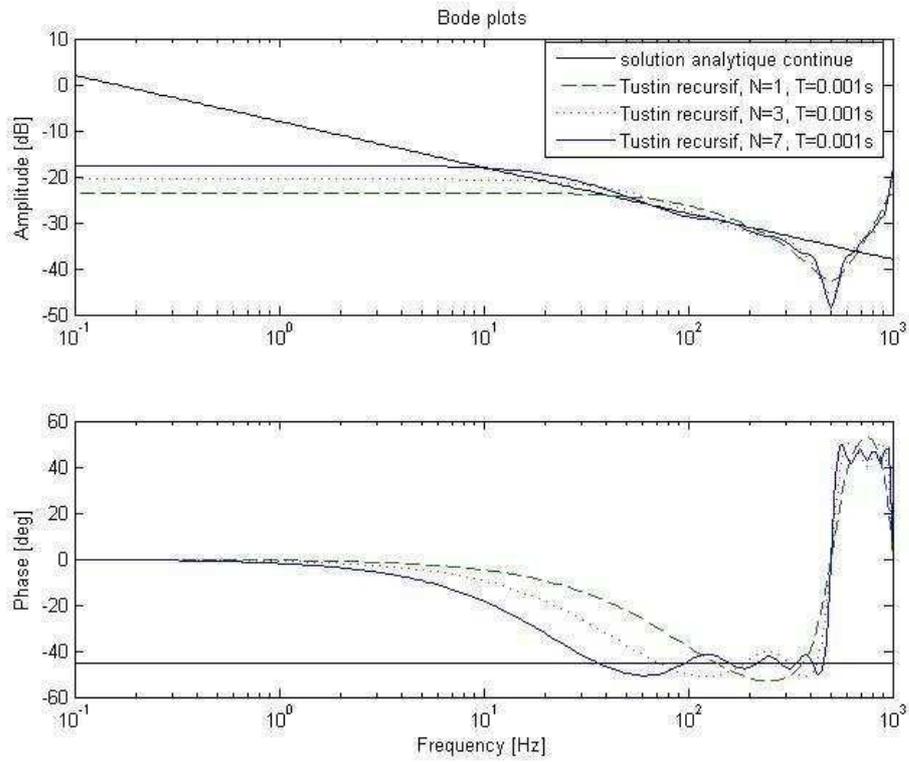


figure 2.5 : Diagramme de Bode de la discrétisation récursif de Tustin pour $s^{-0.5}$, $N = 1, 3, 7$ et $T = 0.001s$.

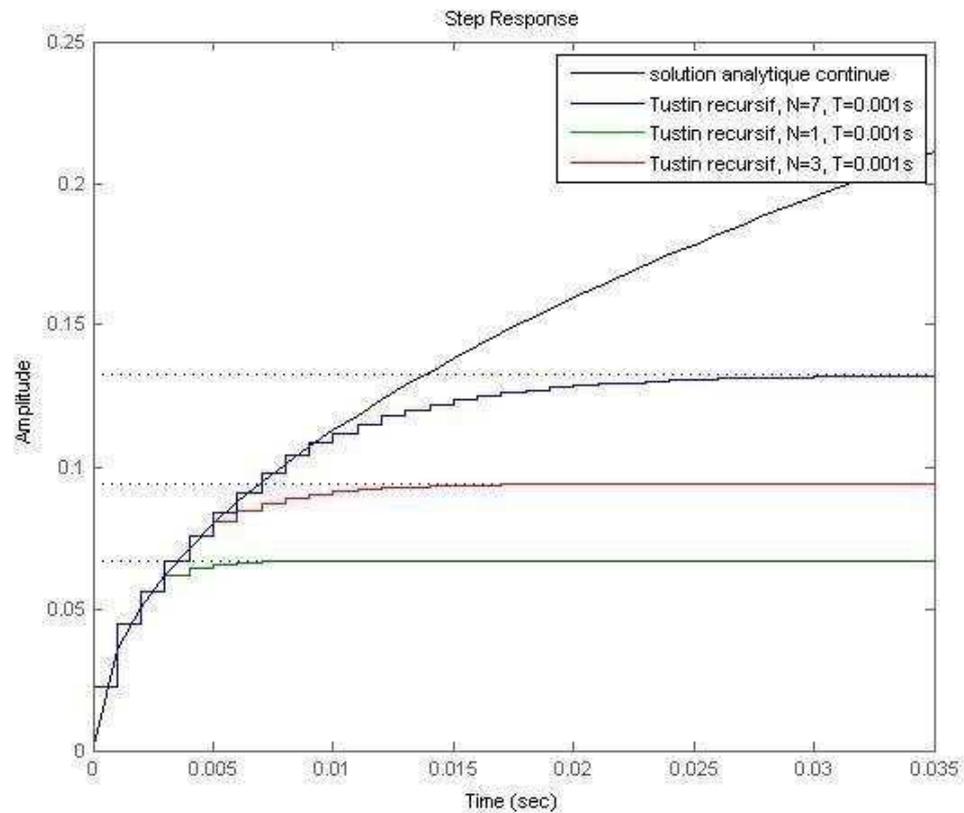


figure 2.6 : Réponse indicielle de la discrétisation récursif de Tustin pour $s^{-0.5}$, $N = 1, 3, 7$ et $T = 0.001s$.

On remarque que plus N augmente plus l'approximation est meilleur, mais on remarque aussi que cette approximation ne s'approche de la solution analytique que dans une plage de fréquence et présente une très grande erreur dans les hautes fréquences.

2.11.1.4. Discrétisation d'Al-Alaoui en utilisant le développement de fractionnaire continu (DFC)

On a vu dans la figure que le diagramme de Bode de la discrétisation basée sur le développement récursif de Tustin présente une grande erreur dans la plage des hautes fréquences, pour avoir une meilleure approximation dans cette plage on va utiliser l'opérateur de Al-Alaoui.

2.11.1.4.1. Opérateur d'Al-Alaoui

Basé sur l'opérateur d'Al-Alaoui la fonction génératrice de discrétisation est :

$$w(z^{-1})^{\pm r} = \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right) \quad (2.34)$$

Pour approximer (2.34) en une fonction de transfert rationnelle d'ordre fini, on utilise le développement fractionnaire continu (DFC). En générale n'importe quelle fonction $G(z)$ peut être représentée par des fractions continues de la forme :

$$G(z) = \frac{b_1(z)}{a_1(z) + \frac{b_2(z)}{a_2(z) + \frac{b_3(z)}{a_3(z) + \dots}}} \quad (2.35)$$

Donc l'approximation discrète de l'opérateur fractionnaire peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} D^{\pm r}(z) &= \left(\frac{8}{7T} \right)^{\pm r} \text{DFC} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right)^{\pm r} \right\}_{p,q} \\ &= \left(\frac{8}{7T} \right)^{\pm r} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.36)$$

où $\text{DFC}\{u\}$ dénote le développement en fraction continue de u ; p et q sont les ordres d'approximation, P et Q sont deux polynôme de degrés p et q . Généralement on prend $p = q = n$.

2.11.1.4.2. Exemple illustratif

En utilisant la méthode de discrétisation mentionnée, la discrétisation de $s^{-0.5}$ par un pas d'échantillonnage de 0.001s est étudiée numériquement, et les modèles d'approximations sont :

$$G_1(z) = \frac{0.04141 - 0.005916z^{-1}}{1.4 - z^{-1}}$$

$$G_3(z) = \frac{0.7805 - 0.7805z^{-1} + 0.1115z^{-2} + 0.01593z^{-3}}{26.38 - 41.46z^{-1} + 16.69z^{-2} - z^{-3}}$$

$$G_s(z) = \frac{7.42 - 13.78.z^{-1} + 7.572.z^{-2} - 0.9086.z^{-3} - 0.1576.z^{-4} + 0.01015.z^{-5}}{250.9 - 609.2z^{-1} + 501.7z^{-2} - 153.6z^{-3} + 9.716z^{-4} + z^{-5}}$$

On représente les diagrammes fréquentiels ainsi que temporels des trois approximations pour voir l'efficacité de cette discrétisation :

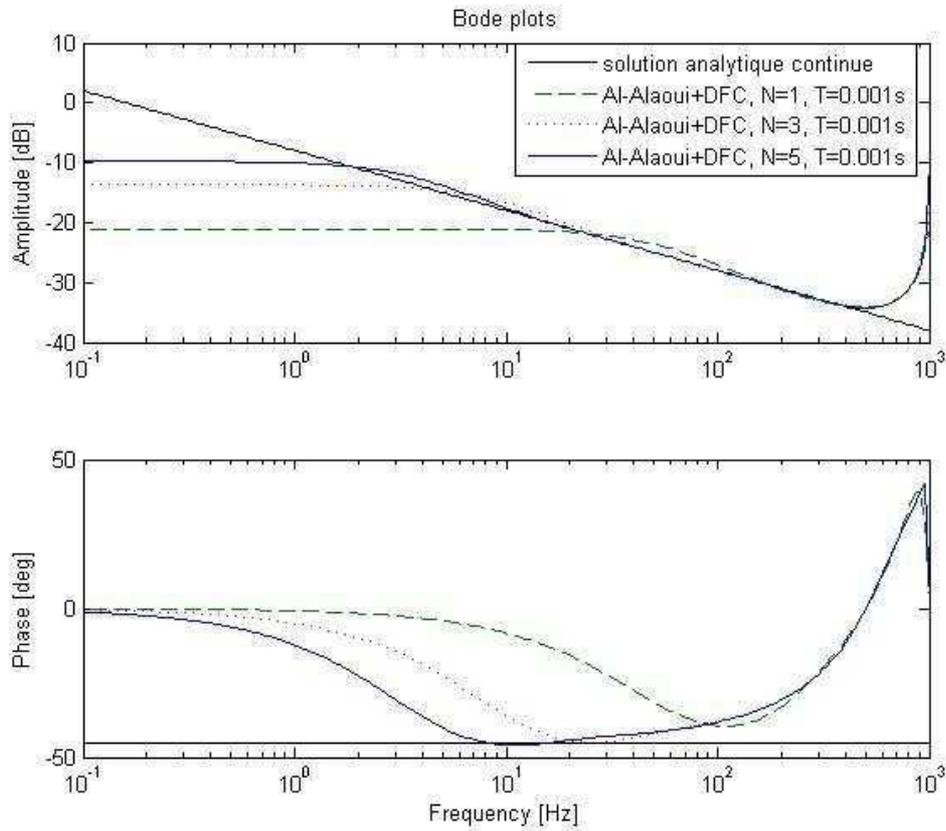


figure 2.7 : Diagramme de Bode de la discrétisation Al-Alaoui+DFC pour $s^{-0.5}$, $N = 1,3,5$ et $T = 0.001s$.

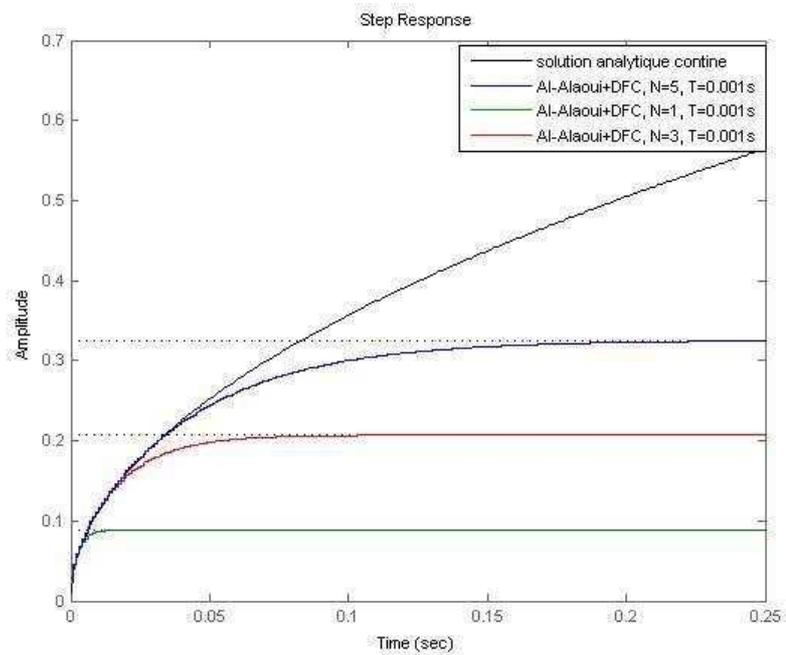


figure 2.8 : Réponse indicielle de la discrétisation Al-Alaoui+DFC pour $s^{-0.5}$, $N = 1, 3, 5$ et $T = 0.001s$.

On peut remarquer que la méthode d'Al-Alaoui+DFC est bien meilleur que la méthode de Tustin pour l'approximation en amplitude de s^r , elle proche de la solution analytique continue dans une grande plage de fréquence.

2.11.1.5. Méthode d'Euler en utilisant le développement en fraction continue

La méthode d'Euler ressemble beaucoup à la méthode d'Al-Alaoui, la fonction génératrice d'Euler s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 D^{\pm r}(z) &= \left(\frac{1}{T}\right)^{\pm r} \text{DFC} \left\{ (1-z^{-1})^{\pm r} \right\}_{p,q} \\
 &= \left(\frac{1}{T}\right)^{\pm r} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})}
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

2.11.1.5.1. Exemple illustratif

En utilisant la méthode de discrétisation mentionné, la discrétisation de $s^{-0.5}$ par un pas d'échantillonnage de 0.001s est étudiée numériquement, et les modèles d'approximations sont :

$$G_1(z) = \frac{0.04216 - 0.01054z^{-1}}{1.333 - z^{-1}}$$

$$G_3(z) = \frac{0.2891 - 0.3614z^{-1} + 0.1084z^{-2} - 0.004518z^{-3}}{9.143 - 16z^{-1} + 8z^{-2} - z^{-3}}$$

$$G_5(z) = \frac{2.944 - 6.624z^{-1} + 5.152z^{-2} - 1.61z^{-3} + 0.1725z^{-4} - 0.002875z^{-5}}{93.03 - 256z^{-1} + 256z^{-2} - 112z^{-3} + 20z^{-4} + z^{-5}}$$

On représente les diagrammes fréquentiels ainsi que temporels des trois approximations pour voir l'efficacité de cette discrétisation :

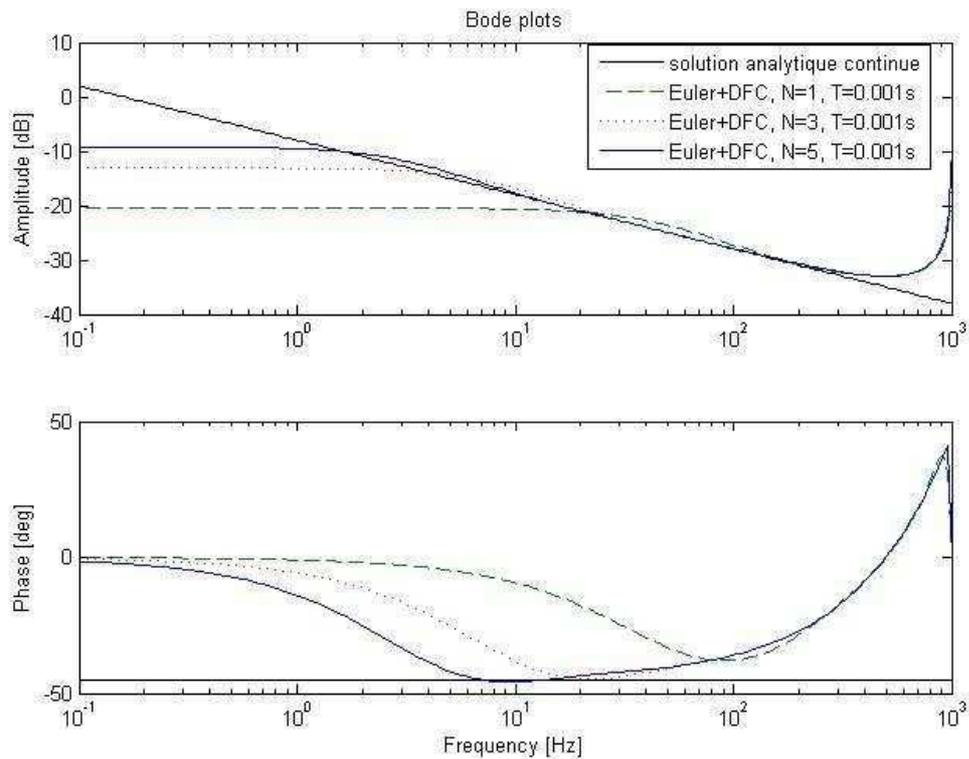


figure 2.9 : Diagramme de Bode de la discrétisation d'Euler+DFC pour $s^{-0.5}$, $N = 1, 3, 5$ et $T = 0.001s$.

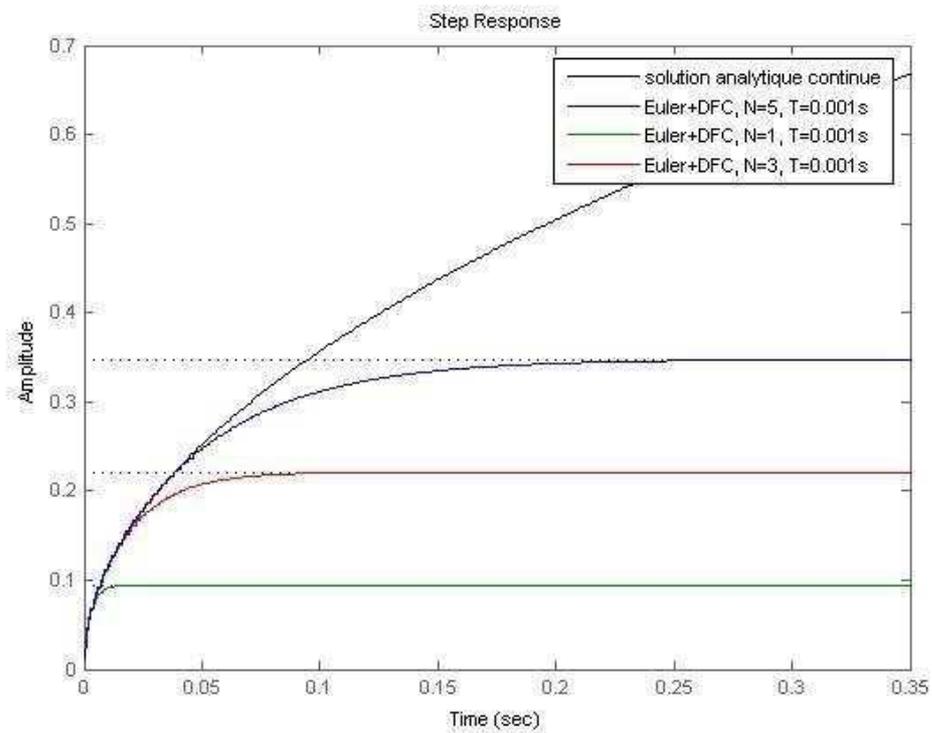


figure 2.10 : Réponse indicielle de la discrétisation d'Euler+DFC pour $s^{-0.5}$, $N = 1,3,5$ et $T = 0.001s$.

On remarque que l'approximation par la méthode d'Euler+DFC donne un résultat très proche de celui trouvé par la méthode d'Al-Alaoui+DFC.

Voici maintenant les graphes qui donnent les trois méthodes citées ci-dessus pour nous permettre de tirer la méthode directe la plus efficace :

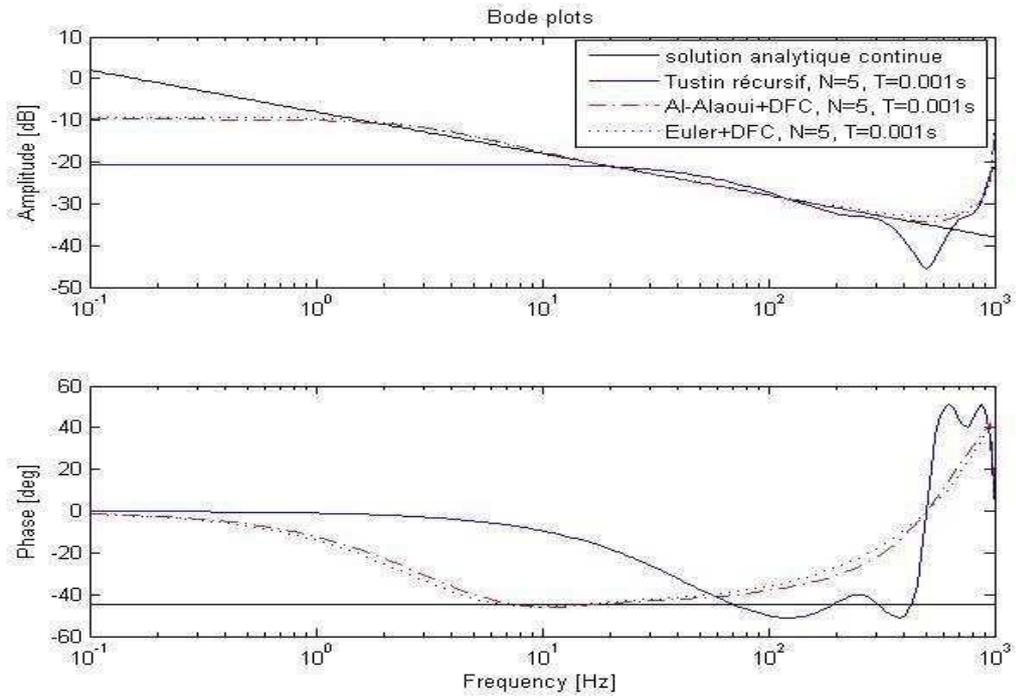


figure 2.11 : Diagramme de Bode des trois méthodes de discrétisation directe récursif de Tustin pour $s^{-0.5}$, $N = 5$ et $T = 0.001s$.

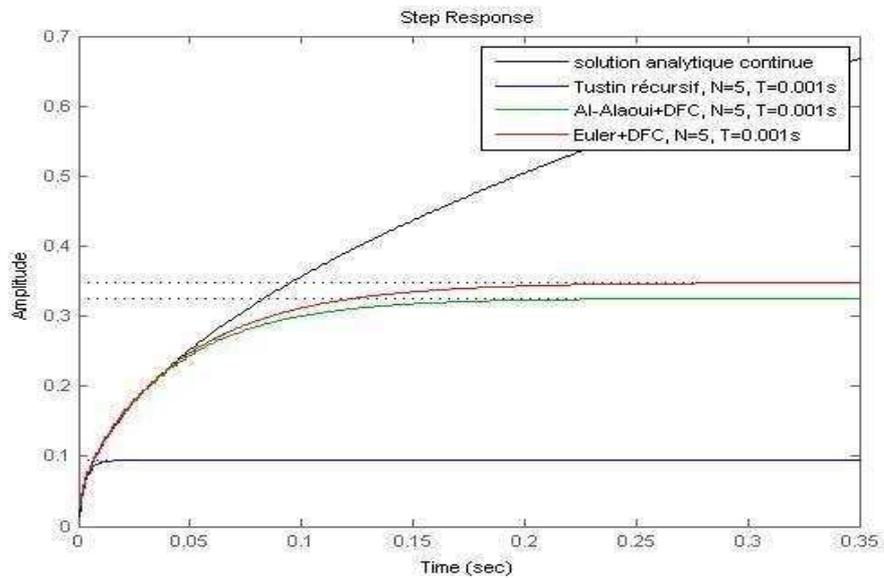


figure 2.12 : Diagramme de Bode des trois méthodes de discrétisation directe récursif de Tustin pour $s^{-0.5}$, $N = 5$ et $T = 0.001s$.

On remarque que pour le même degrés d'approximation la méthode d'Al-Alaoui+DFC et Euler+DFC donne un résultats meilleurs que celui de la méthode de Tustin récursif qui engendre une très grande erreur dans le diagramme de Bode d'amplitude pour les grande fréquences. On peut aussi conclure que dans une certaine plage de fréquences les méthodes d'Al-Alaoui+DFC et Euler+DFC peuvent être identique pratiquement à la solution analytique continue.

2.11.2. Méthodes indirectes

Dans les méthodes indirecte, Le système fractionnaire à simuler est approximé par un système entier continue. La simulation est ensuite obtenue par discrétisation du système continu. La méthode utilisée consiste à remplacer l'opérateur symbolique de dérivation fractionnaire par une distribution récursive de zéros et de pôles.

Dans une première phase, cette approche consiste à remplacer chaque dérivateur non fractionnaire par un dérivateur fractionnaire bornée en fréquence, soit symboliquement :

$$s^n \rightarrow D(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n \quad (2.38)$$

où ω_b et ω_h désignent les fréquences transitionnelles basse et haute, n étant l'ordre de dérivation réel.

Dans une seconde phase, L'approche consiste à synthétiser le dérivateur fractionnaire borné en fréquence par une démarche intuitive fondé sur le concept fractale à travers la récursivité. Sa synthèse repose en effet sur une distribution récursive de zéros et de pôles, soit :

$$D(s) \rightarrow D_N(s) = C_0 \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right) \quad (2.39)$$

La récursivité des pôles et des zéros de synthèse (figure 2.13) se traduit par une distribution des fréquences transitionnelles ω_k et ω'_k conforme à l'ensemble des relations suivantes :

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \alpha\eta > 1; \quad (2.40)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha; \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_{k+1}} = \eta; \quad (2.41)$$

$$n = \frac{\log \alpha}{\log \alpha + \log \eta} \quad (2.42)$$

les rapports α et η définis par (2.41) et implique un rapport constant $\alpha\eta$ entre deux zéros ou deux pôles consécutifs sont appelés facteurs récursifs. Pour un ordre de dérivation n donné et un rapport $\mu = \frac{\omega_b}{\omega_h}$ donné entre les fréquences transitionnelles ω_b et ω_h , ces facteurs ne dépendent que du paramètre N , soit :

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{n/N} \quad (2.43)$$

et

$$\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(1-n)/N} \quad (2.44)$$

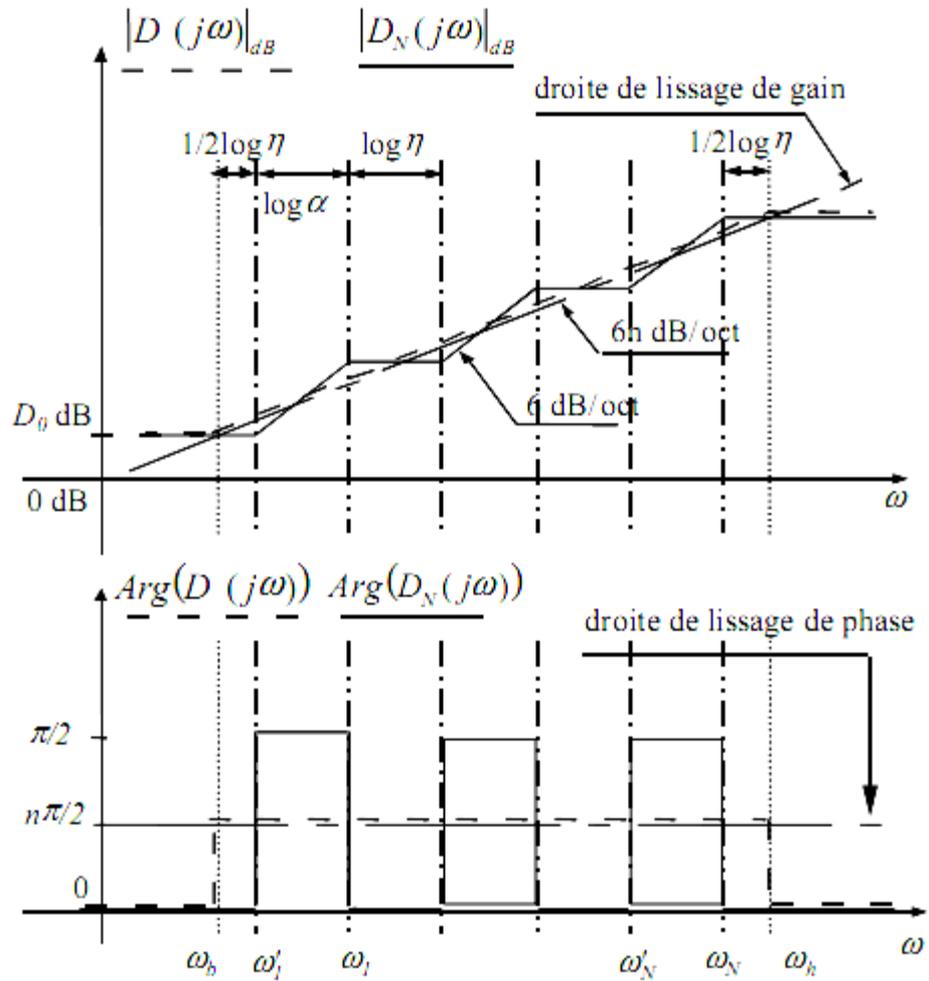


figure 2.13 : Diagrammes asymptotiques de Bode de $D(s)$ et $D_N(s)$.

En utilisant la méthode de discrétisation mentionné, la discrétisation de $s^{-0.5}$ par un pas d'échantillonnage de 0.001s est étudiée numériquement, à noter que dans cette méthode on utilise souvent des ordres d'approximation supérieur à 100, voici les digrammes fréquentielles et temporelles des approximations comparées à la solution analytique continue :

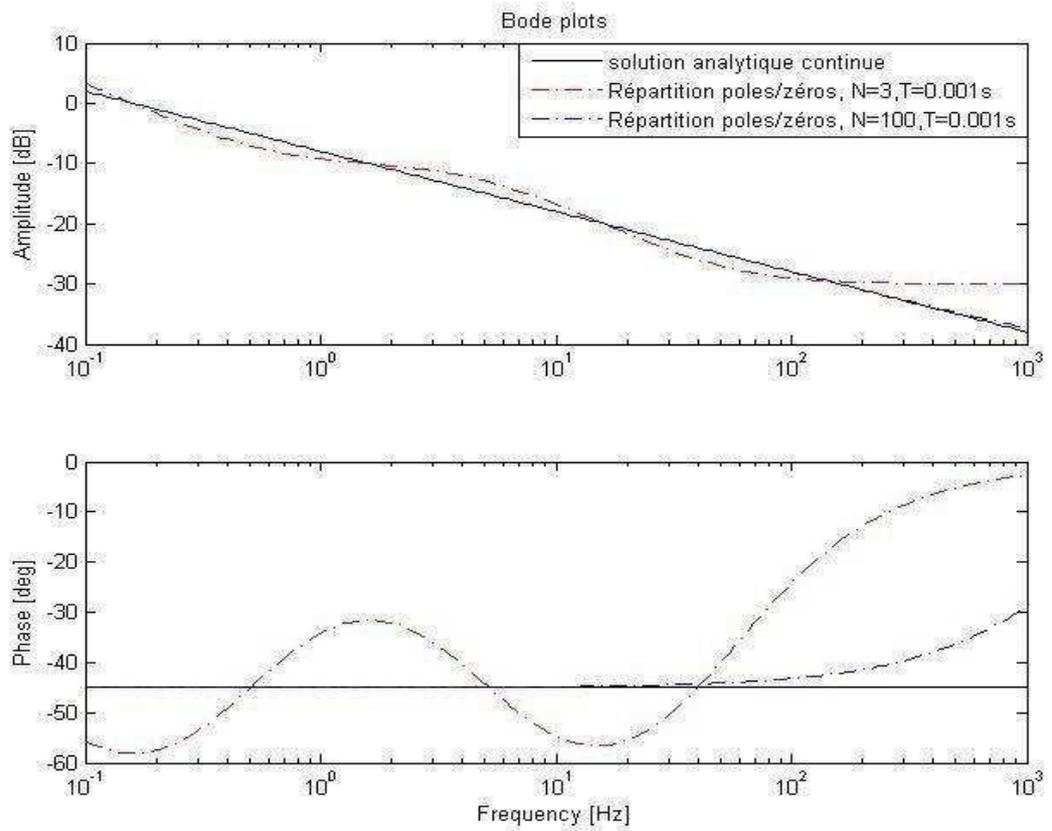


figure 2.14 : Diagramme de Bode de la discrétisation par la méthode de répartition des pôles et des zéros $s^{-0.5}$, $N = 3, 100$ et $T = 0.001s$.

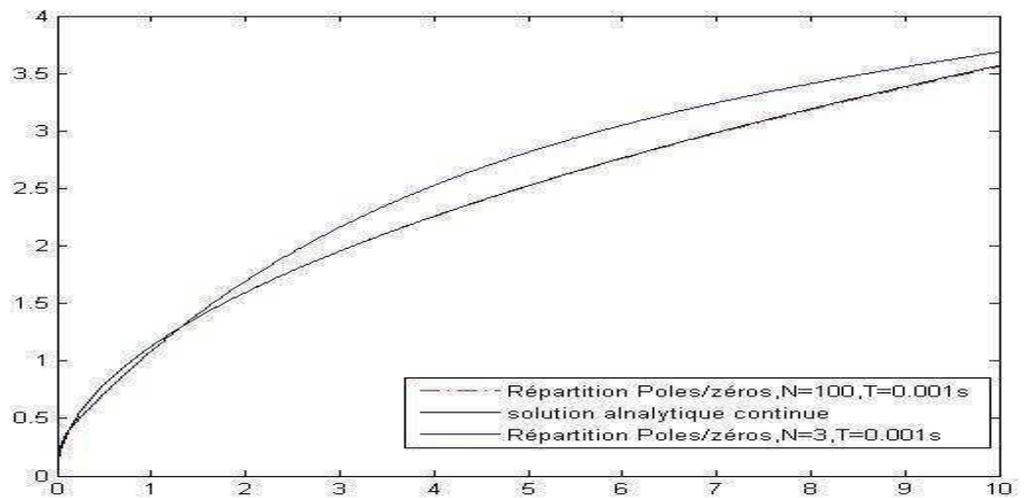


figure 2.15 : Réponse indicielle de la discrétisation par la méthode de répartition des pôles et des zéros $s^{-0.5}$, $N = 3, 100$ et $T = 0.001s$.

On remarque que la méthode indirecte de répartition des pôles et des zéros donne un très bon résultat sur la plage de fréquence désirée pour un ordre d'approximation supérieur à 100 , donc c'est cette méthode qu'on va utiliser dans la suite.

2.12. Exemples d'étude

L'exemple d'étude traite la modélisation, par représentation d'état fractionnaire, du comportement en roulis d'un train de véhicule équipé de la suspension CRONE passive.

Le principe de la suspension CRONE passive consiste à remplacer le ressort et l'amortisseur traditionnels par un dispositif hydropneumatique composé de cellules élémentaires ressort-amortisseur (sphères Citroën) dont les constantes de temps sont distribuées de manière à obtenir un comportement local d'ordre fractionnaires [Oustaloup,1991], soit :

$$C(s) = C_0 \frac{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right)}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right)} \quad (2.45)$$

Un tel comportement permettant d'obtenir la robustesse du facteur d'amortissement vis-à-vis des variations de la masse suspendue du véhicule.

2.12.1. Equation différentielle fractionnaire

Le modèle à 4 degrés de liberté d'un train de véhicule est représenté par la figure 2.16 . Il est caractérisé par la présence de 2 modes dont les dynamiques sont découplées [Moreau,1995] :

- le premiers est le mode propre de la caisse dont la fréquence de coupure est environ de 1 Hz ;
- le deuxième est le mode de roue dont la fréquence de coupure est environ de 18 Hz.

La dynamique de roue étant beaucoup plus rapide que celle de la caisse (en l'occurrence un facteur dix-huit), la suite de l'étude fait l'objet d'une hypothèse simplificatrice : les élongations du profil routier sont directement transmise à la suspension.

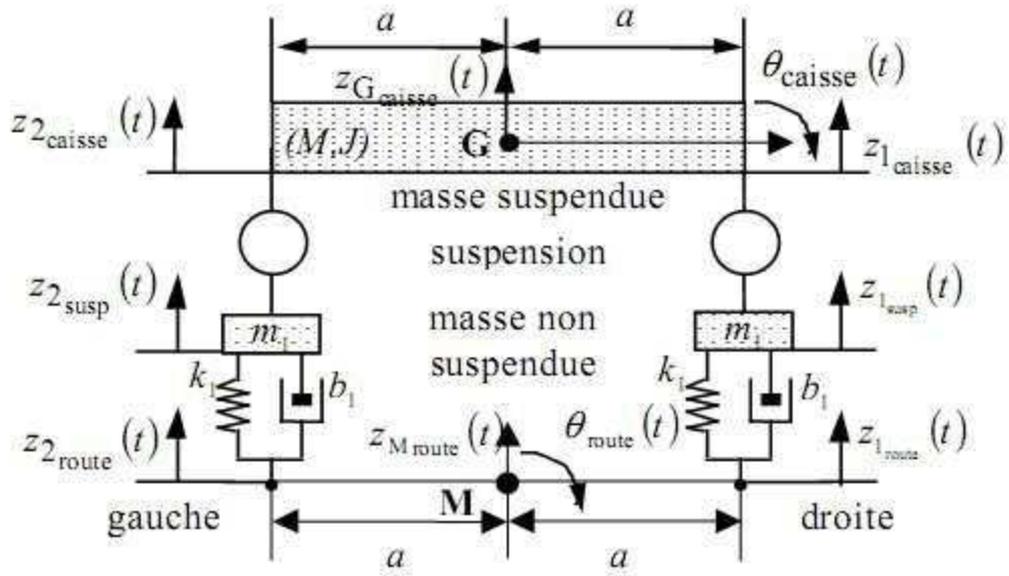


figure 2.16 : Modèle d'un train de véhicule à 4 degrés de liberté.

Les variables suivants sont utilisées.

- Pour la caisse

$$z_{G_{\text{caisse}}} = \frac{z_{1_{\text{caisse}}} + z_{2_{\text{caisse}}}}{2}$$
 : position vertical relative (par rapport à la position d'équilibre) du centre d'inertie de la caisse ;

$$\theta_{G_{\text{caisse}}} = \frac{z_{1_{\text{caisse}}} - z_{2_{\text{caisse}}}}{2}$$
 : angle de roulis de la caisse (sous l'hypothèse de petit déplacement).

- Pour la suspension

$$F_{G_{\text{susp}}} = F_1 + F_2$$
 : effort relatif développé par la suspension sur la caisse dont la masse est ramenée en son centre d'inertie G ;

$$\Gamma_{\text{susp}} = -aF_1 + aF_2$$
 : couple relatif développé par la suspension sur la caisse (en l'absence de barre anti-roulis).

Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation symbolique qui régit le mouvement en roulis de la caisse autour de sa position d'équilibre s'écrit :

$$Js^2\theta_{\text{caisse}}(s) = \Gamma_{\text{susp}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s) \quad (2.46)$$

J et $\Gamma_{\text{ext}}(s)$ désignant respectivement le moment d'inertie de la caisse et un couple extérieur perturbateur qui lui est appliqué.

En portant l'expression de $\Gamma_{\text{susp}}(s)$ dans l'équation (2.46), il vient :

$$Js^2\theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2C(s)(\theta_{\text{route}}(s) - \theta_{\text{caisse}}(s)) + \Gamma_{\text{ext}}(s) \quad (2.47)$$

soit :

$$(Js^2 + 2a^2C(s))\theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2C(s)\theta_{\text{route}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s) \quad (2.48)$$

ou, compte tenu de l'expression de $C(s)$:

$$Js^2\theta_{\text{caisse}}(s) + 2a^2C_0 \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m}{1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m} \theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2C_0 \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m}{1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m} \theta_{\text{route}}(s) + \Gamma_{\text{ext}}(s), \quad (2.49)$$

ou bien :

$$Js^2 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right) \theta_{\text{caisse}}(s) + 2a^2C_0 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right) \theta_{\text{caisse}}(s) = 2a^2C_0 \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^m\right) \theta_{\text{route}}(s) + \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^m\right) \Gamma_{\text{ext}}(s) \quad (2.50)$$

équation symbolique dont la traduction temporelle détermine l'équation différentielle fractionnaire régissant le mouvement en roulis :

$$\frac{J}{(\omega_h)^m} D^{m+2}\theta_{\text{caisse}}(t) + J \cdot D^2\theta_{\text{caisse}}(t) + \frac{2a^2C_0}{(\omega_b)^m} D^m\theta_{\text{caisse}}(t) = \frac{2a^2C_0}{(\omega_b)^m} D^m\theta_{\text{route}}(t) + 2a^2C_0\theta_{\text{route}}(t) + \frac{1}{(\omega_h)^m} D^m\Gamma_{\text{ext}}(t) + \Gamma_{\text{ext}}(t) \quad (2.51)$$

2.12.2. Représentation d'état fractionnaire

La représentation d'état fractionnaire équivalente à l'équation différentielle (2.51), s'obtient conformément au paragraphe 2.5, en exprimant l'ensemble des ordres de dérivation comme le produit d'un nombre entier par un facteur commun n .

La valeur numérique de l'ordre de dérivation de suspension CRONE passive étant voisin de $2/3$, le facteur commun à tous les ordres de dérivation de l'équation (2.51) est $n = 2/3$. La représentation d'état non entière admet alors pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{2/3}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2a^2C_0(\omega_h)^{2/3}}{J} & -\frac{2a^2C_0(\omega_h)^{2/3}}{J} & 0 & -(\omega_h)^{2/3} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2a^2C_0(\omega_h)^{2/3}}{J} & \frac{1}{J} \\ \frac{2a^2C_0(\omega_h)^{2/3}}{J} \left(1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{2/3} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{route}(t) \\ \Gamma_{ext}(t) \end{bmatrix} \\ \theta_{caisse}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(t) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

2.12.3. Décomposition modale

Correspondant à un train arrière de véhicule, les valeurs numériques suivantes sont utilisées dans la suite du calculs :

- pour la suspension :

$$\begin{cases} \omega_b = 0.1 \text{ rad/s} \\ \omega_h = 200 \text{ rad/s} \\ C_0 = 560 \end{cases} \quad (2.53)$$

- pour la caisse :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.7\text{m} : \text{demi-largeur} \\ J = Mr^2 : \text{moment d'inertie} \\ r = 0.7\text{m} : \text{rayon de giration} \\ M_{\text{nom}} = 600\text{kg} : \text{masse nominale} \\ M_{\text{max}} = 1000\text{kg} : \text{masse maximale} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

La décomposition modale de la représentation (2.52) s'obtient conformément au paragraphe 2.6.4, en diagonalisant la matrice d'évolution, soit pour la masse nominale :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{2}{3}}x(t) = \begin{bmatrix} -34.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.232+2.93j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.232-2.93j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.216 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6019 & 3.0311 \cdot 10^{-4} \\ 14.7-2.76j & 1.056 \cdot 10^{-3} - 2.33 \cdot 10^{-3}j \\ 14.7+276j & 1.056 \cdot 10^{-3} + 2.33 \cdot 10^{-3}j \\ 1.91 \cdot 10^{-3} & 3.89 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\text{route}}(t) \\ \Gamma_{\text{ext}}(t) \end{bmatrix} \\ \theta_{\text{caisse}}(t) = \begin{bmatrix} 2.467 \cdot 10^{-5} & 0.0189-0.073j & 0.0189+0.073j & 0.977 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right. \quad (2.55)$$

représentation qui fait apparaître quatre modes propres associés à quatre valeurs propres, deux réelles et deux complexes conjuguées. La figure représente la localisation de ces valeurs propres pour 5 valeurs de M comprises entre 600 kg et 1000 kg .

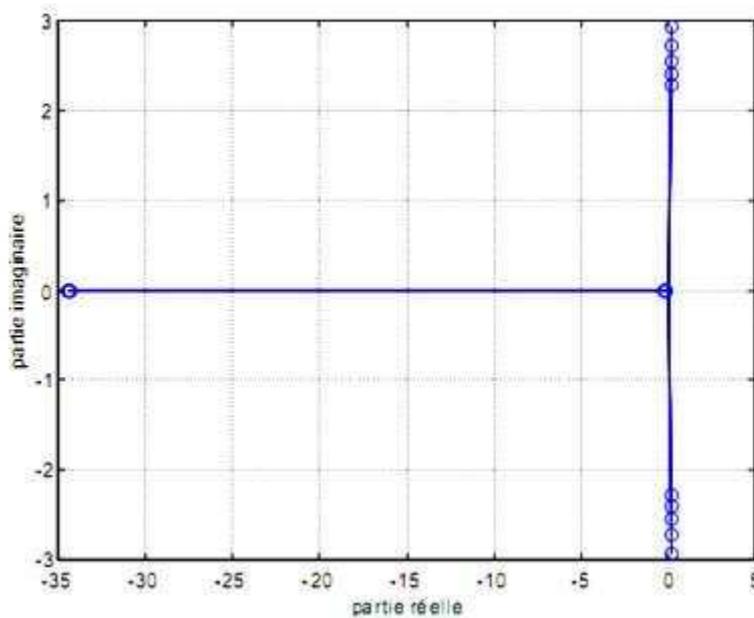


figure 2.17 : Illustration des valeurs propres pour différentes valeurs de M :
 M = 600 kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg
 (Le module des valeurs propres décroît lorsque la masse augmente)

La détermination des pôles, effectuée conformément à la procédure du paragraphe 2.8, conduit à une paire de pôles complexes conjugués associée à la paire de valeurs propres complexes conjuguées, la figure les représente pour 5 valeurs de M comprises entre 600 kg et 1000 kg.

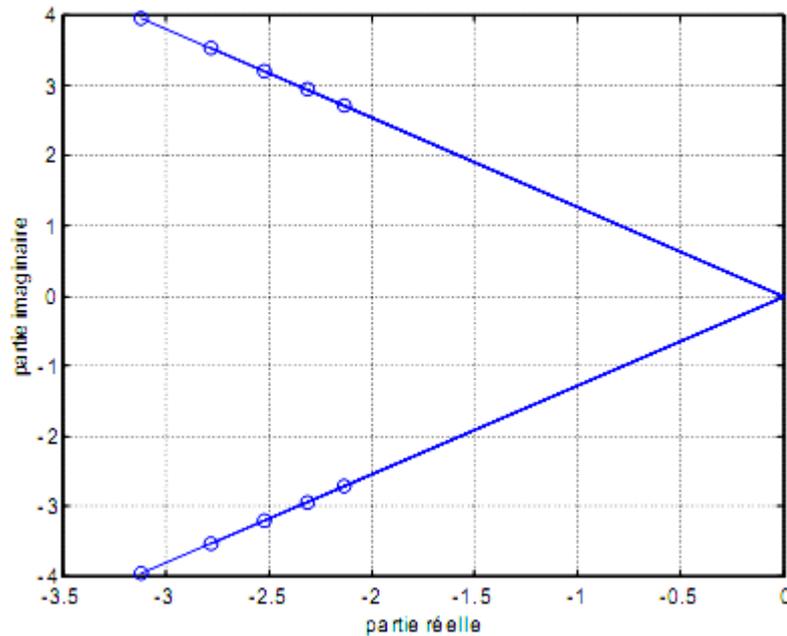


figure 2.18 : Illustration des pôles complexes conjugués pour différentes valeurs de M : M = 600 kg ; 700 kg ; 800 kg ; 900 kg ; 1000 kg
(Le module des pôles décroît lorsque la masse augmente)

L'analyse des figures 2.17 et 2.18 relève que le déplacement des valeurs propres et des pôles dû aux variations de la masse M s'effectue à argument constant. Compte tenu de l'équation (2.26) qui exprime analytiquement la réponse impulsionnelle modale d'un système fractionnaire, soit :

$$g_{\text{modal}}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n - \lambda_1} \right\} = \sum_{k=1}^{\text{nombre de poles}} \frac{p_k}{n\lambda_1} e^{t \cdot p_k} + \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{x^{2n} - 2\lambda_1 x^n \cos(n\pi) + \lambda_1^2} dx, (2.56)$$

L'invariance de l'argument des pôles traduit un résultat remarquable en ce sens qu'il démontre la robustesse du degrés de stabilité du comportement en roulis vis-à-vis des variations de la masse suspendue M .

La figure 2.19 représente les réponses indicielles unitaires du transfert $\theta_{\text{caisse}}(s)/\theta_{\text{route}}(s)$ obtenues pour 5 valeurs de M comprise entre 600 kg et 1000 kg.

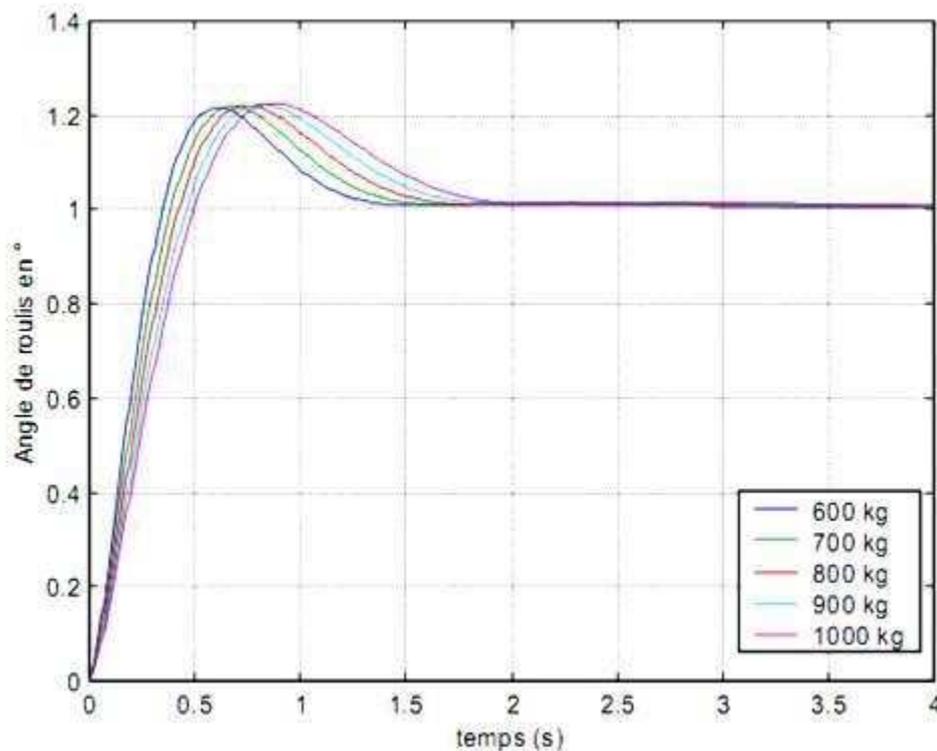


figure 2.19 : Réponses indicielles du transfert $\theta_{\text{voit}}(s)/\theta_{\text{route}}(s)$ pour différentes valeurs de M : $M = 600 \text{ kg} ; 700 \text{ kg} ; 800 \text{ kg} ; 900 \text{ kg} ; 1000 \text{ kg}$.

L'invariance du premier déplacement confirme la robustesse du degrés de stabilité aux variations de M .

2.13. Conclusion

Dans ce chapitre on a montré comment analyser un système d'ordre fractionnaire commensurable dans l'espace d'état à l'aide de sa décomposition modal, pour ensuite donner la démonstration de la condition stabilité d'un tel système. Un autre résultat qu'on a remarqué qu'au contraire d'un système entier les valeurs propres de la matrice d'évolution d'un système fractionnaire ne représente pas les pôles du système. On aussi dans ce chapitre

donné les méthodes de simulation d'un système fractionnaire qu'on a implémenté sur Matlab pour déduire sur leurs efficacités en les comparants avec les solutions analytiques continues. Enfin un exemple d'étude est donner pour mettre en évidence tous ce qui a été présenté dans ce chapitre.

3. La commande PID fractionnaire (PI^λD^μ)

Les contrôleurs PID sont bien connues et largement utilisés par ce qu'ils sont simples, efficaces, robustes, et facilement réglés. Une contribution importante pour les caractéristiques de ce dernier était le développement de plusieurs règles pour régler les paramètres de ces régulateurs à travers de simple réponses des systèmes. Les données exigées par les lois de réglage ne suffirait pas pour trouver un modèle du systèmes mais suffirait pour trouver un régulateur raisonnable.

De telles règles sont le seul choix quand il n'y a vraiment aucun modèle pour le systèmes et aucune manière pour l'obtenir. Même lorsque nous avons un modèle, s'il n'est pas trop difficile d'atteindre nos paramètres, une règle peut être nécessaire, pour gagner le temps et l'effort exigés par une méthode analytique. Les règles ont leurs problèmes, à savoir fournissant des contrôleurs qui sont à peine optimaux selon tous les critères et qui par conséquent pourraient mieux être réglés (et doivent parfois être mieux accordés mieux pour rencontrer des spécifications), mais puisqu'ils (cependant pas toujours) fonctionnent souvent (pas toujours) et sont simples leur utilité est incontestable (car leur utilisation répandue certifie).

Le régulateur PID classique est un cas particulier du régulateur PID fractionnaire :

$$C(s) = P + \frac{I}{s^\lambda} + Ds^\mu \quad (3.1)$$

pour $\lambda = 1$, $\mu = 1$ on retrouve le PID classique :

$$C(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (3.2)$$

En principe λ et μ doivent être positivement pour garder le sens de dérivation et intégration.

Dans ce qui suit on va présenter une méthode analytique et des règles similaire à ceux proposées par Ziegler et Nichols (pour PID entiers) pour trouver les paramètres du régulateur

PIDs fractionnaires, pour ensuite conclure à travers des simulation par une comparaison entres le PID fractionnaire et le PID entier et les méthode des réglages.

3.1. Réglage par minimisation

Cette méthodes de réglage a été proposée par [5], on va commencer par diviser le comportement désirable de notre système contrôlé, décrit par 5 spécifications (5, par ce qu'on a 5 paramètres à régler) :

1. La boucle ouverte doit avoir une fréquence de coupure ω_{cg} spécifique :

$$\left| C(\omega_{cg}).G(\omega_{cg}) \right| = 0 \text{ dB} \quad (3.3)$$

2. La marge de phase ϕ_m doit avoir une valeur spécifique :

$$-\pi + \phi_m = \arg \left[C(\omega_{cg}).G(\omega_{cg}) \right] \quad (3.4)$$

3. Pour rejeter les bruits en hautes fréquences, La fonction de transfert de la boucle fermé doit avoir un petit gain en hautes fréquences, donc à une fréquence donnée ω_h , son amplitude doit être inférieur à un certain gain H :

$$\left| \frac{C(\omega_h).G(\omega_h)}{1 + C(\omega_h).G(\omega_h)} \right| < H \quad (3.5)$$

4. Pour rejeter les perturbations en sortie et assurer la poursuite de la référence, la fonction de sensibilité doit avoir un petit gain en basses fréquences c'est-à-dire à une fréquence donnée ω_l son amplitude doit être inférieur à un certain gain N :

$$\left| \frac{1}{1 + C(\omega_l).G(\omega_l)} \right| < N \quad (3.6)$$

5. Pour être robuste quand des variations du gain du système apparaissent, la phase de la fonction de transfert de la boucle ouverte doit être constante autour ω_{cg} :

$$\left. \frac{d}{dw} \arg[C(w).G(w)] \right|_{w=w_{cg}} = 0 \quad (3.7)$$

Ainsi les 5 paramètres du régulateur sont à trouver on utilisant l'algorithme du simplexe, en prenant l'équation (3.3) comme fonction objective et les équation (3.4) à (3.7) comme contraintes, à noter que le résultat trouvé est un minimum local, donc il faut souvent utiliser plusieurs conditions initiales pour trouver un bon résultat.

Exemple- soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Les spécifications utilisées sont :

$$w_{cg} = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m = 2/3 \text{ rad}$$

$$w_h = 10 \text{ rad/s}$$

$$w_l = 0.01 \text{ rad/s}$$

$$H = -10 \text{ dB}$$

$$N = -20 \text{ dB}$$

En utilisant l'algorithme du simplexe implémenté sur Matlab (la fonction fmincon) le régulateur trouvé est le suivant :

$$C(s) = 1.1149 + \frac{0.0985}{s^{1.5507}} + 0.1732s^{0.3095}$$

Voici les réponses du système réglé :

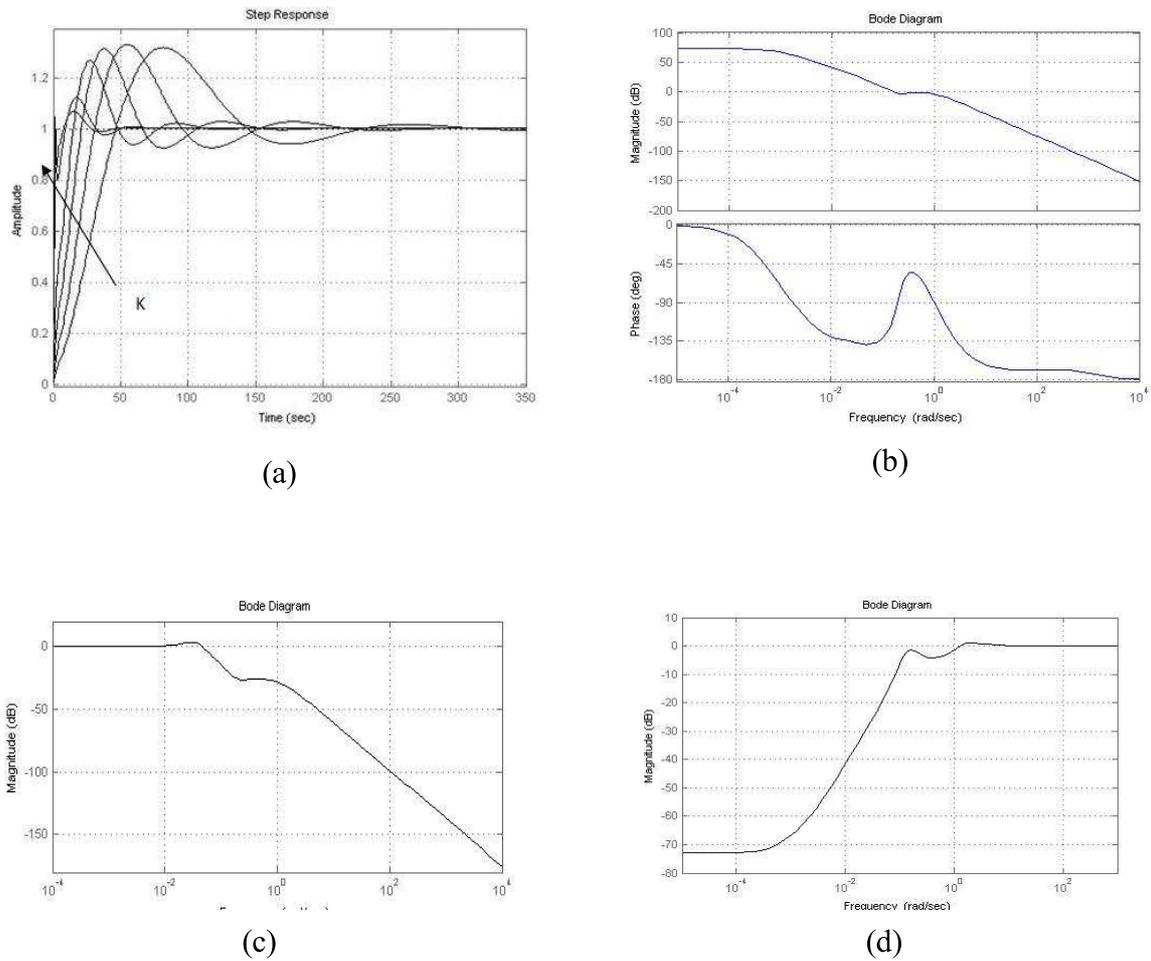


figure 3.1 : (a) Réponse indicielle pour $K = 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4$
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.

On remarque à travers la figure 3.1 que les contraintes spécifiées sont bien réalisées, et on remarque aussi que malgré des grande variation du gain du système l'amplitude de la boucle fermé ne dépasse jamais 30% ce qui assure une robustesse vis-à-vis de la variation du gains du système.

3.2. Premier ensemble de règles de réglage basées sur la réponse en forme S

Le premier ensemble de règles proposées par Ziegler et Nichols appliquées aux systèmes ayant une réponse indicielle en forme S (figure 3.2). De la réponse un retard apparent L et une constante de temps T peuvent être déterminés (graphiquement). Un modèle simple avec telle réponse est :

$$G = \frac{K}{1+T \cdot s} e^{-L \cdot s} \quad (3.8)$$

En utilisant le réglage par minimisation, les valeurs obtenues de P, I, λ, D et μ varient régulièrement avec L et T . En utilisant l'ajustement des moindres carrés, les références [6] et [7] montrent qu'il est possible d'ajuster un polynôme de données. Les paramètres des polynômes trouvés sont donnés dans le tableau 3.1 pour les spécifications suivantes :

$$w_{cg} = 0.5 \text{ rad/s} \quad (3.9)$$

$$\varphi_m = 2/3 \text{ rad} \quad (3.10)$$

$$w_h = 10 \text{ rad/s} \quad (3.11)$$

$$w_l = 0.01 \text{ rad/s} \quad (3.12)$$

$$H = -10 \text{ dB} \quad (3.13)$$

$$N = -20 \text{ dB} \quad (3.14)$$

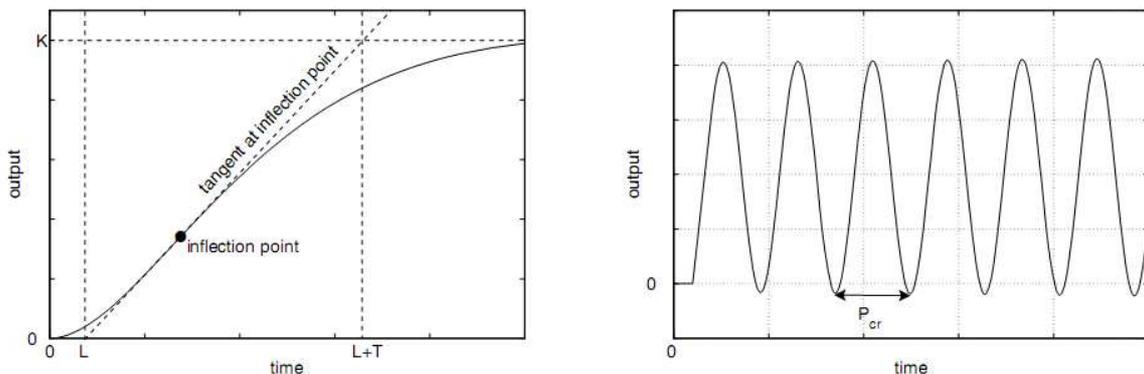


figure 3.2 : Réponse indicielle en forme S ; Réponse d'un contrôle avec gain critique.

Parameters to use when $0.1 \leq T \leq 5$					
	P	I	λ	D	μ
1	-0.0048	0.3254	1.5766	0.0662	0.8736
L	0.2664	0.2478	-0.2098	-0.2528	0.2746
T	0.4982	0.1429	-0.1313	0.1081	0.1489
L^2	0.0232	-0.1330	0.0713	0.0702	-0.1557
T^2	-0.0720	0.0258	0.0016	0.0328	-0.0250
LT	-0.0348	-0.0171	0.0114	0.2202	-0.0323
Parameters to use when $5 \leq T \leq 50$					
	P	I	λ	D	μ
1	2.1187	-0.5201	1.0645	1.1421	1.2902
L	-3.5207	2.6643	-0.3268	-1.3707	-0.5371
T	-0.1563	0.3453	-0.0229	0.0357	-0.0381
L^2	1.5827	-1.0944	0.2018	0.5552	0.2208
T^2	0.0025	0.0002	0.0003	-0.0002	0.0007
LT	0.1824	-0.1054	0.0028	0.2630	-0.0014

Tableau 3.1 : Paramètres du premier ensemble de règles de réglage pour réponse en forme S.

Le tableau est lu comme suit :

$$P = -0.0048 + 0.2664L + 0.4982T + 0.0232L^2 - 0.0720T^2 - 0.0348TL \quad (3.15)$$

Ces règles sont utilisées si :

$$0.1 \leq T \leq 50 \text{ et } L \leq 2 \quad (3.16)$$

3.3. Deuxième ensemble de règles de réglage basées sur la réponse en forme S

Les règles du tableau 3.2 sont obtenues de la même manière que les règles précédente [6,7], mais pour les spécifications suivantes

$$w_{cg} = 0.5 \text{ rad/s} \quad (3.17)$$

$$\varphi_m = 1 \text{ rad} \quad (3.18)$$

$$w_h = 10 \text{ rad/s} \quad (3.19)$$

$$w_1 = 0.01 \text{ rad/s} \tag{3.20}$$

$$H = -20 \text{ dB} \tag{3.21}$$

$$N = -20 \text{ dB} \tag{3.22}$$

Ces règles sont utilisées si :

$$0.1 \leq T \leq 50 \text{ et } L \leq 0.5 \tag{3.23}$$

	<i>P</i>	<i>I</i>	λ	<i>D</i>	μ
1	-1.0574	0.6014	1.1851	0.8793	0.2778
<i>L</i>	24.5420	0.4025	-0.3464	-15.0846	-2.1522
<i>T</i>	0.3544	0.7921	-0.0492	-0.0771	0.0675
<i>L</i> ²	-46.7325	-0.4508	1.7317	28.0388	2.4387
<i>T</i> ²	-0.0021	0.0018	0.0006	-0.0000	-0.0013
<i>LT</i>	-0.3106	-1.2050	0.0380	1.6711	0.0021

Tableau 3.2: Paramètres du deuxième ensemble de règles de réglage pour réponse en forme S.

3.4. Premier ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique

Le deuxième ensemble de règles proposées par Ziegler et Nichols appliquées au systèmes qu’insérer dans la boucle de contrôle avec un gain proportionnel montre pour un gains particulier des oscillations soutenues (voir figure 3.2) . La période des oscillations est dite la période critique P_{cr} et le gain qui les causes est le gain critique K_{cr} . Pour les spécifications (3.9) jusqu’à (3.14) on a remarqué que les paramètres P, I, λ, D et μ obtenue varient régulièrement avec K_{cr} et P_{cr} . La régularité est encore transformée en formule en utilisant l’ajustement des moindres carrés [8]. Les paramètres trouvés sont dans le tableau 3.3.

Parameters to use when $0.1 \leq T \leq 5$					
	P	I	λ	D	μ
1	0.4139	0.7067	1.3240	0.2293	0.8804
K_{cr}	0.0145	0.0101	-0.0081	0.0153	-0.0048
P_{cr}	0.1584	-0.0049	-0.0163	0.0936	0.0061
$1/K_{cr}$	-0.4384	-0.2951	0.1393	-0.5293	0.0749
$1/P_{cr}$	-0.0855	-0.1001	0.0791	-0.0440	0.0810
Parameters to use when $5 \leq T \leq 50$					
	P	I	λ	D	μ
1	-1.4405	5.7800	0.4712	1.3190	0.5425
K_{cr}	0.0000	0.0238	-0.0003	-0.0024	-0.0023
P_{cr}	0.4795	0.2783	-0.0029	2.6251	-0.0281
$1/K_{cr}$	32.2516	-56.2373	7.0519	-138.9333	5.0073
$1/P_{cr}$	0.6893	-2.5917	0.1355	0.1941	0.2873

Tableau 3.3: Paramètres du Premier ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique.

Le tableau est lu comme suit :

$$P = 0.4139 + 0.0145K_{cr} + 0.1584P_{cr} - \frac{0.4384}{K_{cr}} - \frac{0.0855}{P_{cr}} \quad (3.24)$$

Ces règles sont utilisées si :

$$P_{cr} \leq 8 \quad \text{et} \quad K_{cr}P_{cr} \leq 640 \quad (3.25)$$

3.5. Deuxième ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique

Pour les spécification (3.17) jusqu'à (3.22) , les règles sont données dans [8]. le tableau 3.4 donne ces paramètres.

Ces règles sont utilisées si :

$$P_{cr} \leq 2 \quad (3.26)$$

	<i>P</i>	<i>I</i>	λ	<i>D</i>	μ
1	1.0101	10.5528	0.6213	15.7620	1.0101
K_{cr}	0.0024	0.2352	-0.0034	-0.1771	0.0024
P_{cr}	-0.8606	-17.0426	0.2257	-23.0396	-0.8606
P_{cr}^2	0.1991	6.3144	0.1069	8.2724	0.1991
$K_{cr}P_{cr}$	-0.0005	-0.0617	0.0008	0.1987	-0.0005
$1/K_{cr}$	-0.9300	-0.9399	1.1809	-0.8892	-0.9300
$1/P_{cr}$	-0.1609	-1.5547	0.0904	-2.9981	-0.1609
K_{cr}/P_{cr}	-0.0009	-0.0687	0.0010	0.0389	-0.0009
P_{cr}/K_{cr}	0.5846	3.4357	-0.8139	2.8619	0.5846

Tableau 3.4: Paramètres du deuxième ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique.

3.6. Troisième ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique

Malheureusement les règles présentées dans les deux sections précédentes ne fonctionnent pas souvent pour les systèmes ayant un pôle à l'origine. Les règles suivantes sont adressées pour ce type de systèmes [8]. Ils sont obtenues pour des régulateurs qui doivent assurer les spécifications (3.9) jusqu'à (3.14) avec un model :

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \tau_1)(s + \tau_2)} \quad (3.27)$$

On montre que pour ce type de model :

$$K_{cr} = (\tau_1 + \tau_2)\tau_1\tau_2 \quad (3.28)$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \quad (3.29)$$

Les paramètres sont données dans le tableau 3.5 .

Ces règles sont utilisées si :

$$0.2 \leq P_{cr} \leq 5 \quad \text{et} \quad 1 \leq K_{cr} \leq 200 \quad (3.30)$$

	<i>P</i>	<i>I</i>	λ	<i>D</i>	μ
1	-1.6403	-92.5612	0.7381	-8.6771	0.6688
K_{cr}	0.0046	0.0071	-0.0004	-0.0636	0.0000
P_{cr}	-1.6769	-33.0655	-0.1907	-1.0487	0.4765
$K_{cr}P_{cr}$	0.0002	-0.0020	0.0000	0.0529	-0.0002
$1/K_{cr}$	0.8615	-1.0680	-0.0167	-2.1166	0.3695
$1/P_{cr}$	2.9089	133.7959	0.0360	8.4563	-0.4083
K_{cr}/P_{cr}	-0.0012	-0.0011	0.0000	0.0113	-0.0001
P_{cr}/K_{cr}	-0.7635	-5.6721	0.0792	2.3350	0.0639
$\log_{10}(K_{cr})$	0.4049	-0.9487	0.0164	-0.0002	0.1714
$\log_{10}(P_{cr})$	12.6948	336.1220	0.4636	16.6034	-3.6738

Tableau 3.5: Paramètres du troisième ensemble de règles de réglage basées sur le gain critique.

3.7. La robustesse

Dans cette section on va montrer que les régulateurs PIDs fractionnaires sont des régulateurs robustes vis-à-vis des variations du gain du système à commander.

En ce qui concerne les règles basées sur les réponses en forme S trois modèles (première ordre, deuxième ordre et ordre fractionnaire) sont considérés. les régulateurs sont obtenues par les règles présentés dans les sections 3.2 et 3.3 et pour le PID entier on a utilisé les règles de Ziegler-Nichols. Les systèmes *G* et les régulateurs *C* sont les suivants :

$$G_1(s) = \frac{K}{1+s} e^{-0.1s} \quad (3.31)$$

$$C_{1a}(s) = 0.4448 + \frac{0.5158}{s^{1.4277}} + 0.2045s^{1.0202} \quad (3.32)$$

$$C_{1b}(s) = 1.2507 + \frac{1.3106}{s^{1.1230}} - 0.2589s^{0.1533} \quad (3.33)$$

$$C_{1c}(s) = 12.0000 + \frac{60.0000}{s} + 0.6000s \quad (3.34)$$

$$G_2(s) = \frac{K}{4.32s^2 + 19.1801s + 1} \approx \frac{K}{1 + 20s} e^{-0.2s} \quad (3.35)$$

$$C_{2a}(s) = 0.0880 + \frac{6.5185}{s^{0.6751}} + 2.5881s^{0.6957} \quad (3.36)$$

$$C_{2b}(s) = 6.9928 + \frac{12.4044}{s^{0.6000}} + 4.1066s^{0.7805} \quad (3.37)$$

$$C_{2c}(s) = 120.0000 + \frac{300.0000}{s} + 120000s \quad (3.38)$$

$$G_3(s) = \frac{K}{1 + \sqrt{s}} e^{-0.5s} \approx \frac{K}{1 + 1.5s} e^{-0.1s} \quad (3.39)$$

$$C_{3a}(s) = 0.6021 + \frac{0.6187}{s^{1.3646}} + 0.3105s^{1.0618} \quad (3.40)$$

$$C_{3b}(s) = 1.4089 + \frac{1.6486}{s^{1.1011}} - 0.2139s^{0.1855} \quad (3.41)$$

$$C_{3c}(s) = 18.0000 + \frac{90.0000}{s} + 0.9000s \quad (3.42)$$

En ce qui concerne les règles basées sur les réponses en gain critique deux modèles (qui ont des réponse similaire du point de vu L et T) sont considérés. les régulateurs sont obtenues par les règles présentés dans les sections 3.4, 3.5 et 3.6 et pour le PID entier on a utilisé les règles de Ziegler-Nichols. Les systèmes G et les régulateurs C sont les suivants :

$$G_{4a} = \frac{K}{20s + 1} e^{-0.2s} \quad (3.43)$$

$$G_{4b}(s) = \frac{K}{s^3 + 2.539s^2 + 62.15s} \approx \frac{K}{1 + 20s} e^{-0.2s} \quad (3.44)$$

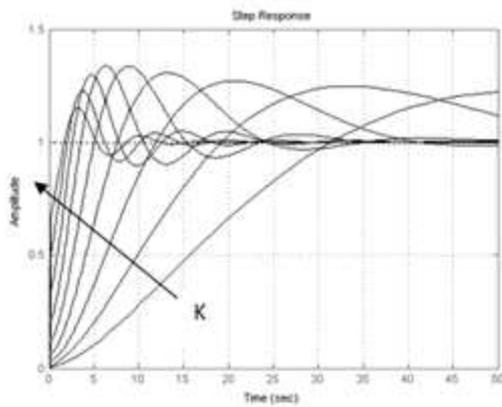
$$C_{4a}(s) = 0.0109 + \frac{6.1492}{s^{0.6363}} + 2.3956s^{0.5494} \quad (3.45)$$

$$C_{4b}(s) = 0.3835 + \frac{14.7942}{s^{0.7480}} + 3.6466s^{0.3835} \quad (3.46)$$

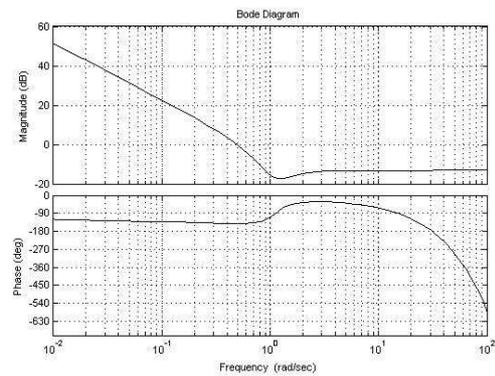
$$C_{4c}(s) = 0.8271 + \frac{14.3689}{s^{0.5588}} - 1.6866s^{1.2328} \quad (3.47)$$

$$C_{4d}(s) = 94.6800 + \frac{237.5910}{s} + 9.43250s \quad (3.48)$$

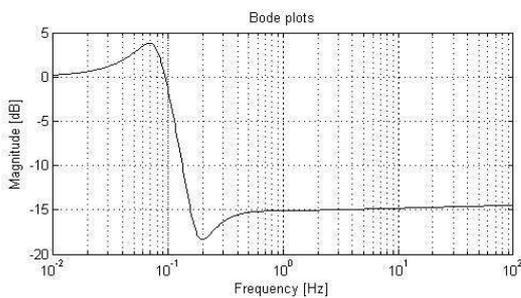
La valeur du gain nominal K est toujours égale à 1, les figures suivantes donnent les réponses indicielles pour les systèmes régulés cités au dessus pour plusieurs valeurs du gain K qu'on suppose connaître avec incertitude. Les diagrammes de Bode de la boucle ouverte et de la boucle fermée ainsi que la fonction de sensibilité sont aussi donnés pour K = 1 :



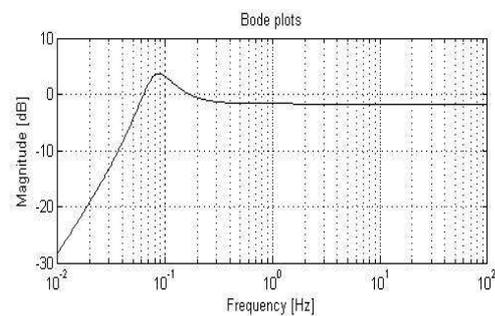
(a)



(b)

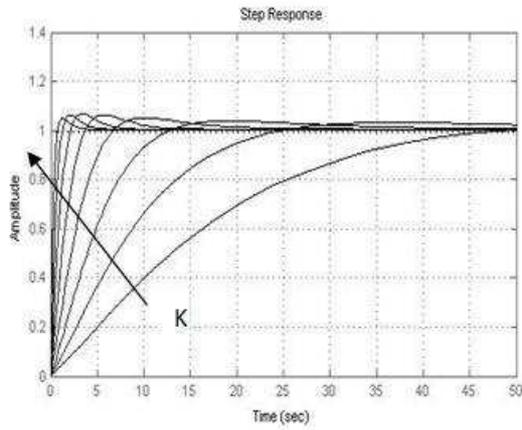


(c)

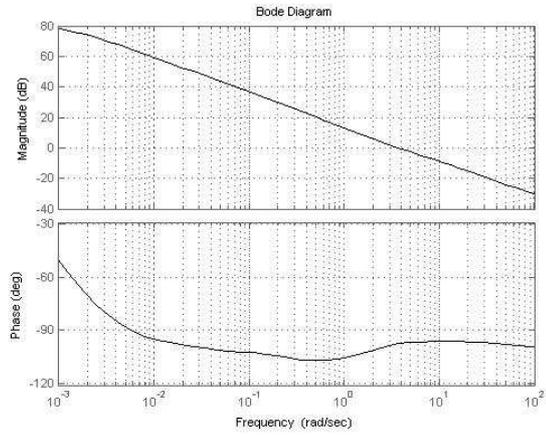


(d)

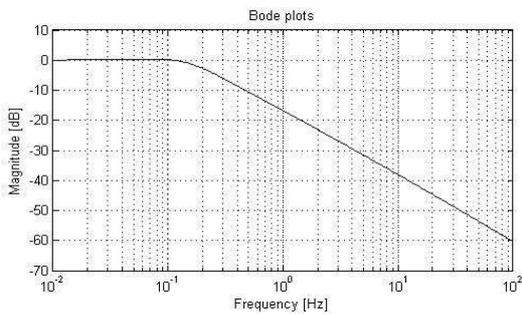
figure 3.3 : (a) Réponse indicielle de (3.31) commandé par (3.32) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



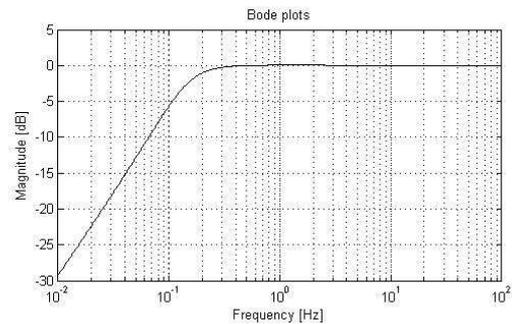
(a)



(b)



(c)



(d)

figure 3.4 : (a) Réponse indicielle de (3.31) commandé par (3.33) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4$.
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.

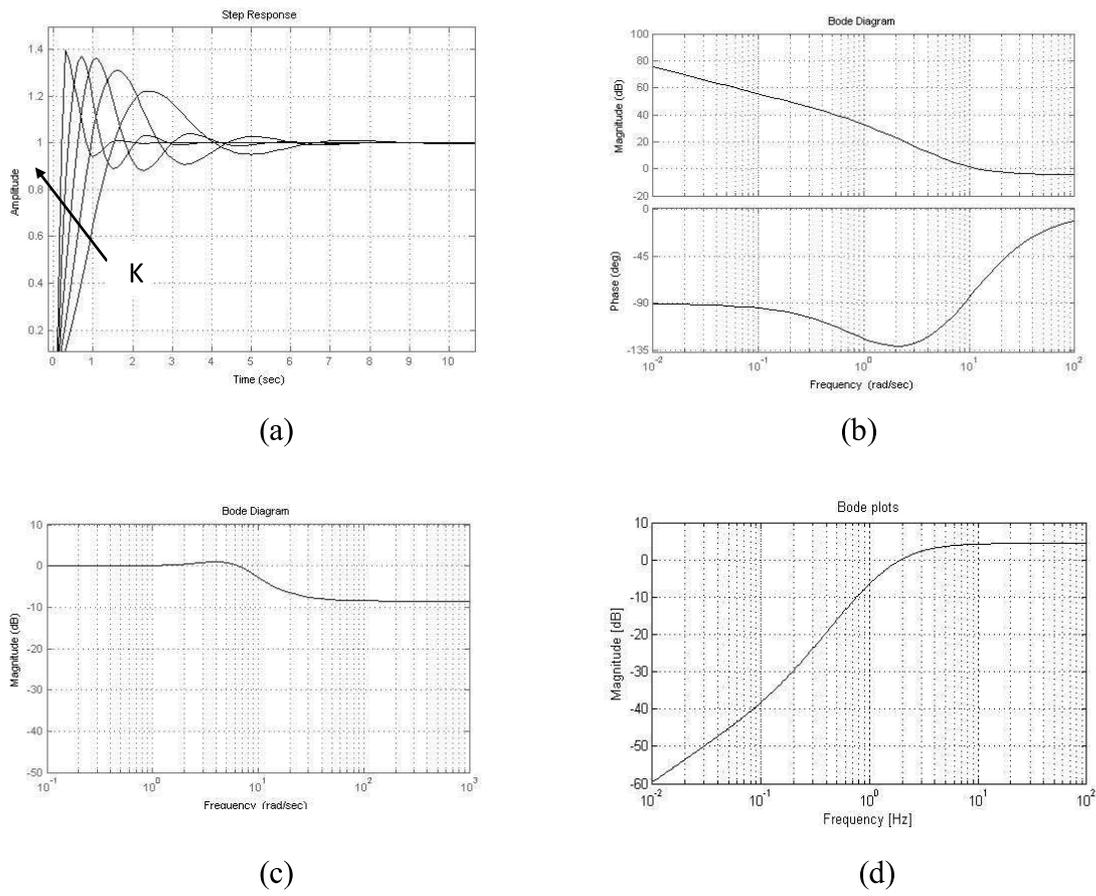
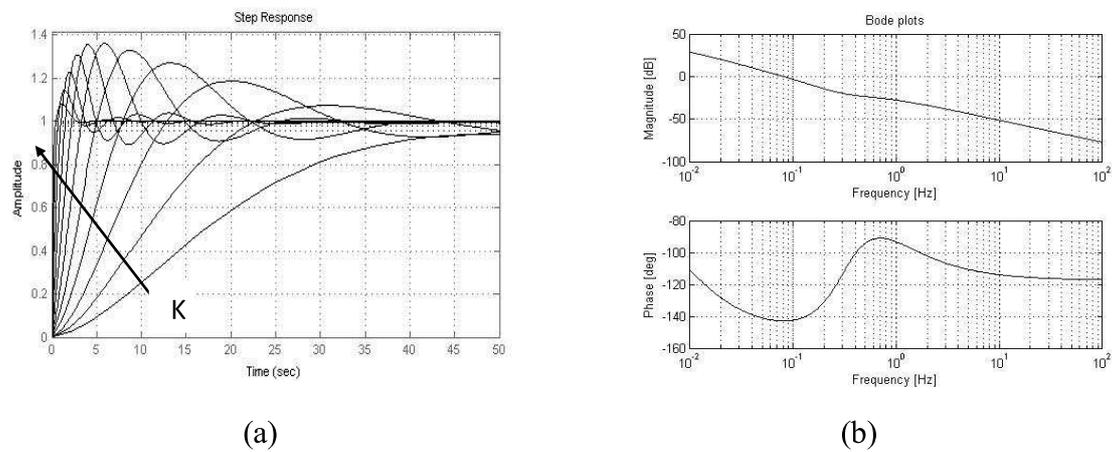
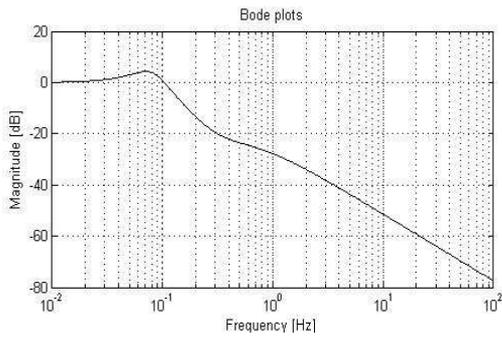
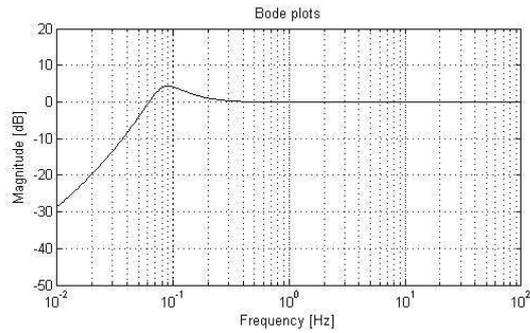


figure 3.5 : (a) Réponse indicielle de (3.31) commandé par (3.34) pour $K = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2$.
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.





(c)



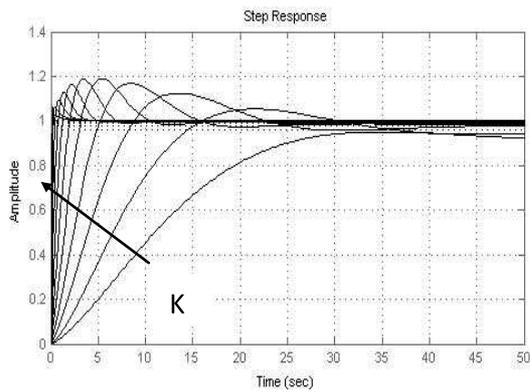
(d)

figure 3.6 : (a) Réponse indicielle de (3.35) commandé par (3.36) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 32$.

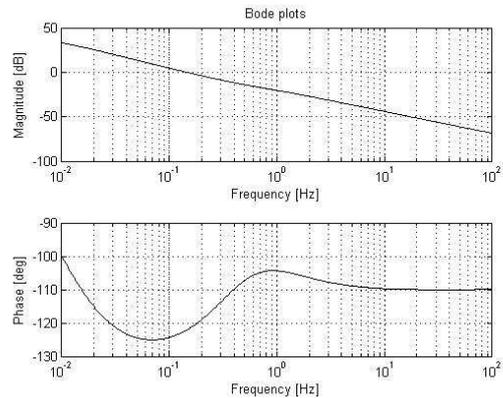
(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

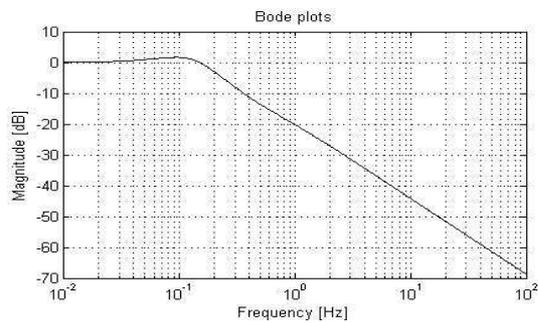
(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



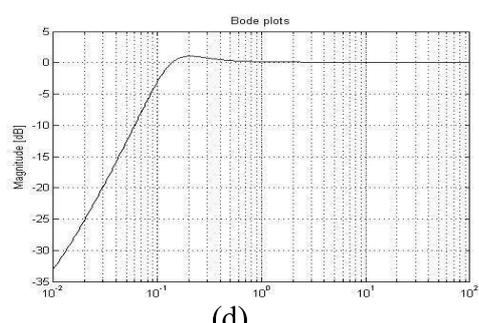
(a)



(b)



(c)



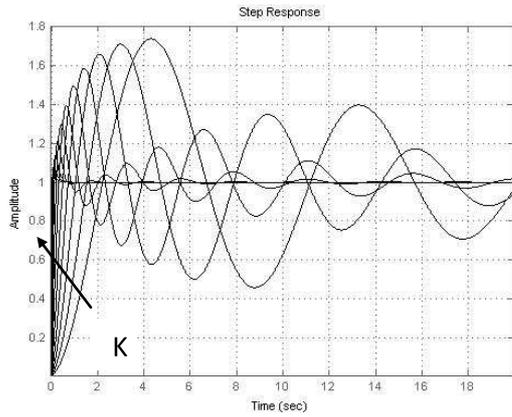
(d)

figure 3.7 : (a) Réponse indicielle de (3.35) commandé par (3.37) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 32$.

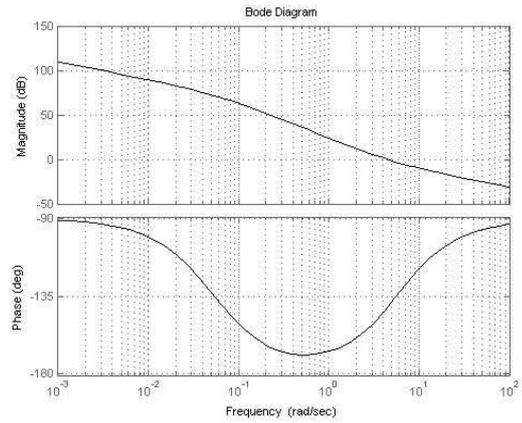
(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

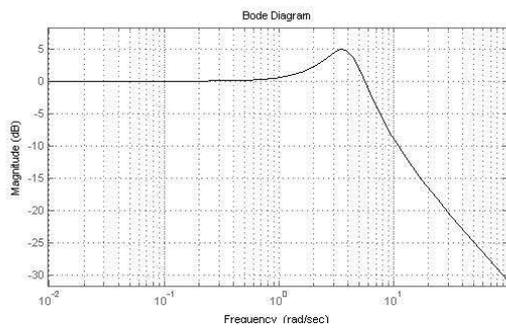
(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



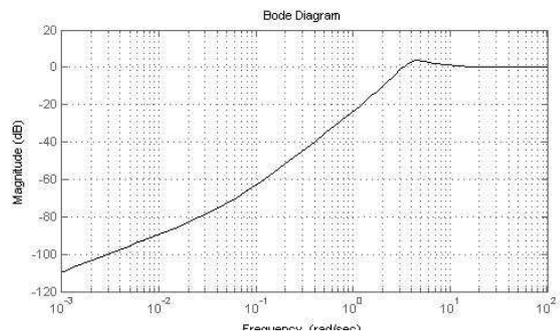
(a)



(b)



(c)



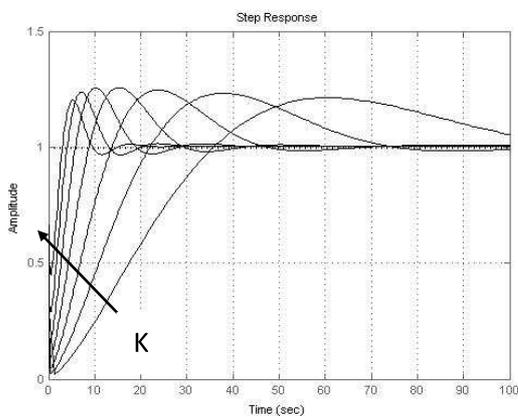
(d)

figure 3.8 : (a) Réponse indicielle de (3.35) commandé par (3.38) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 32$.

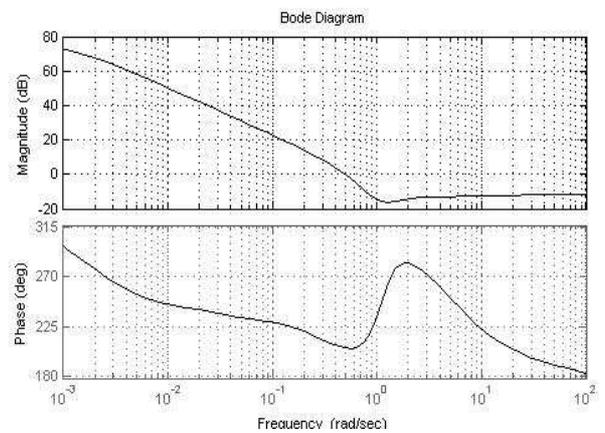
(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



(a)



(b)

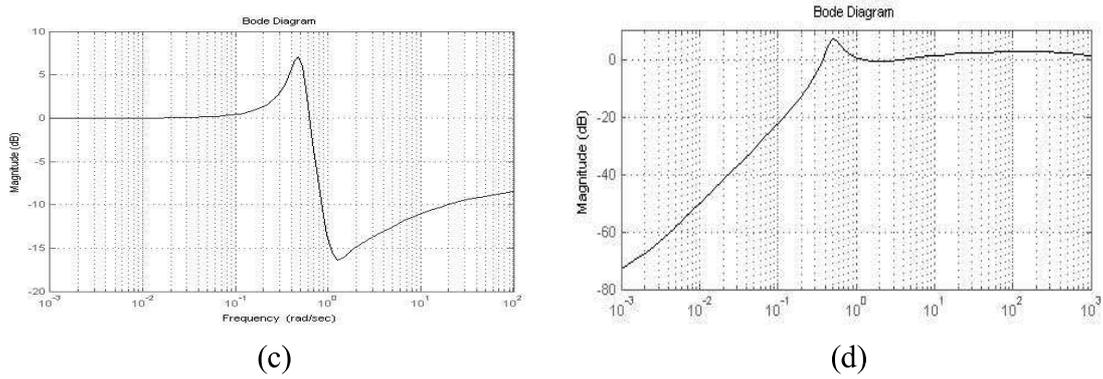


figure 3.9 : (a) Réponse indicielle de (3.39) commandé par (3.40) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2$.
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.

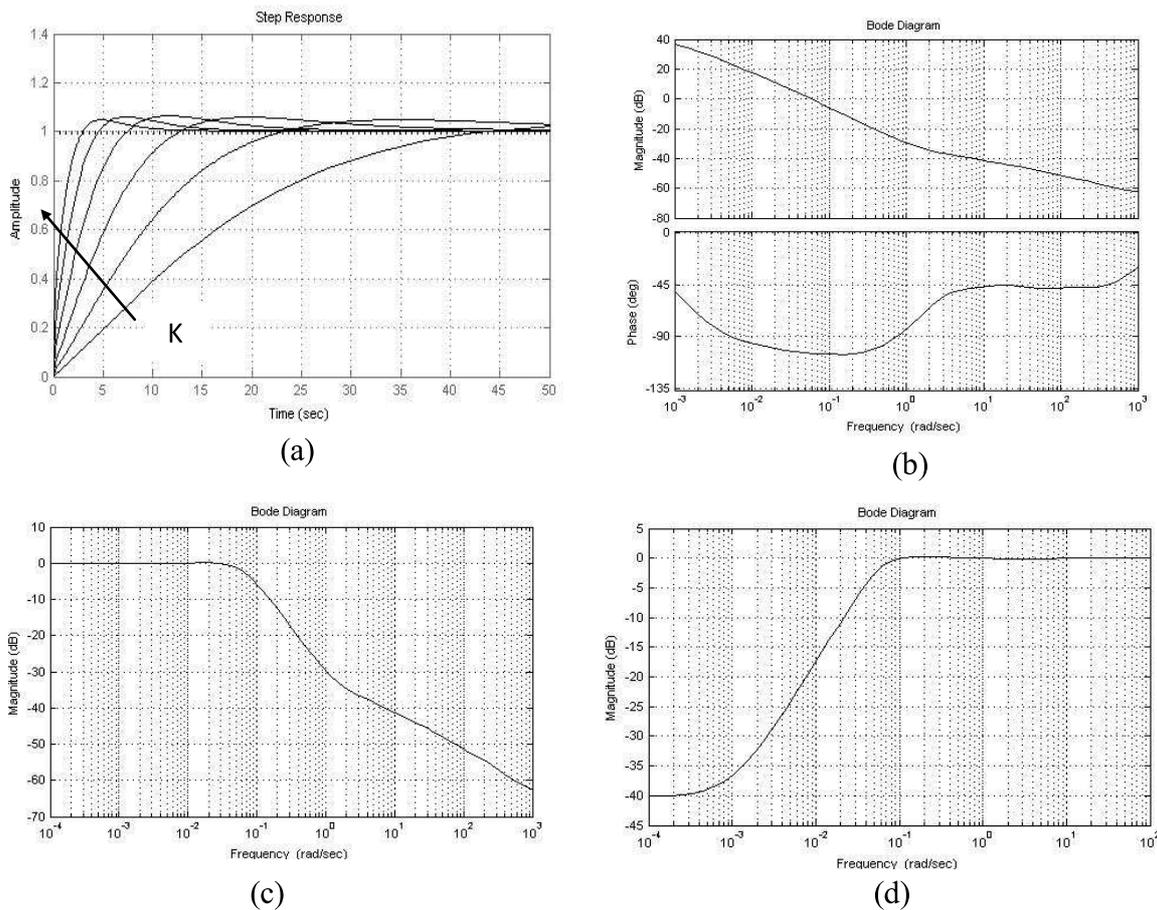
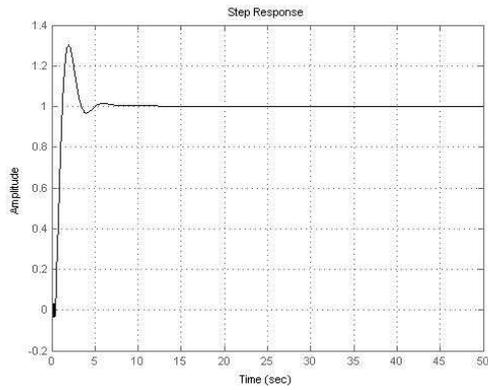
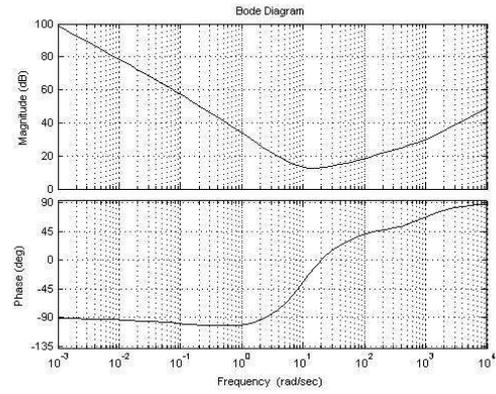


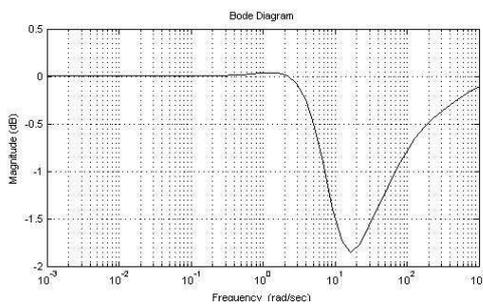
figure 3.10 : (a) Réponse indicielle de (3.39) commandé par (3.41) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1$.
 (b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.
 (c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.
 (d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



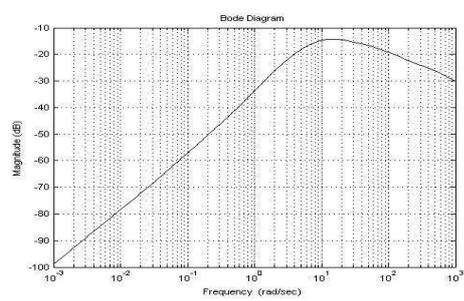
(a)



(b)



(c)



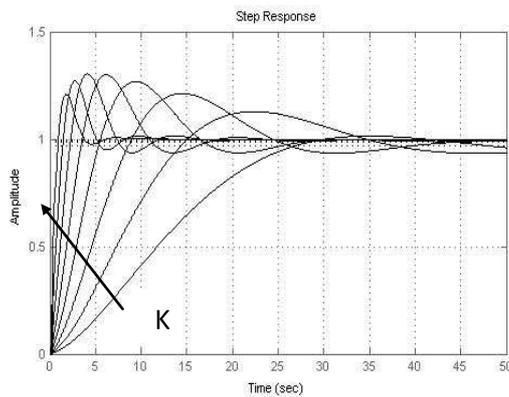
(d)

figure 3.11 : (a) Réponse indicielle de (3.39) commandé par (3.42) pour $K = 1/32$.

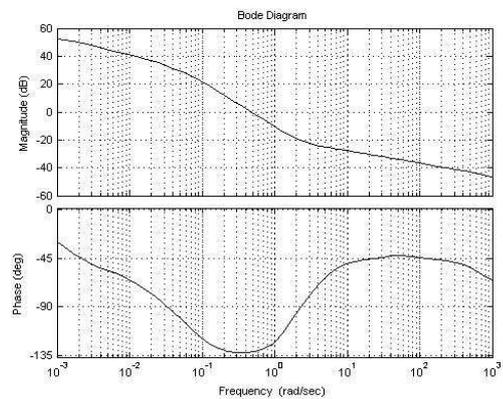
(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

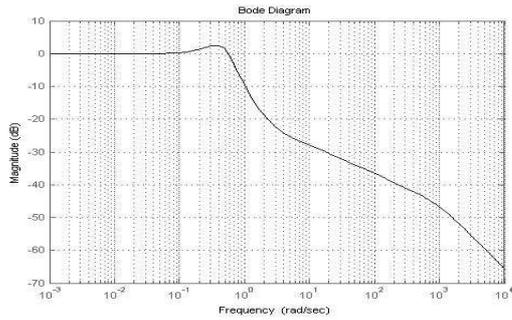
(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



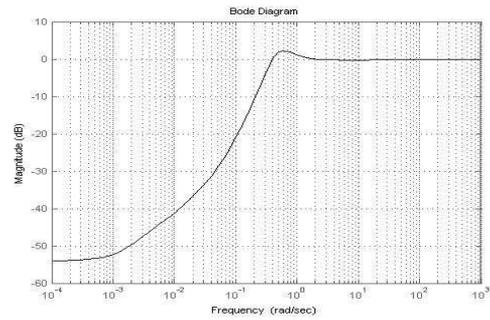
(a)



(b)



(c)



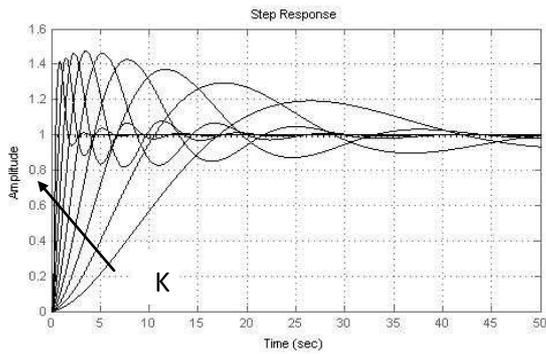
(d)

figure 3.12 : (a) Réponse indicielle de (3.43) commandé par (3.45) pour $K = 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.

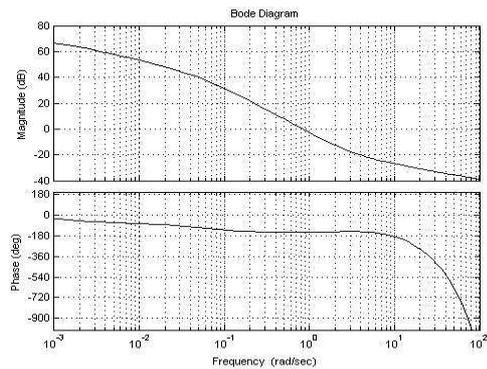
(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

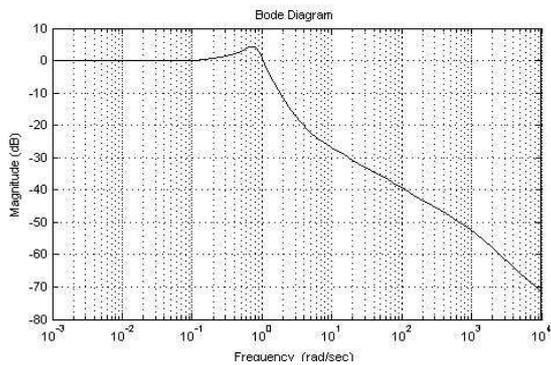
(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.



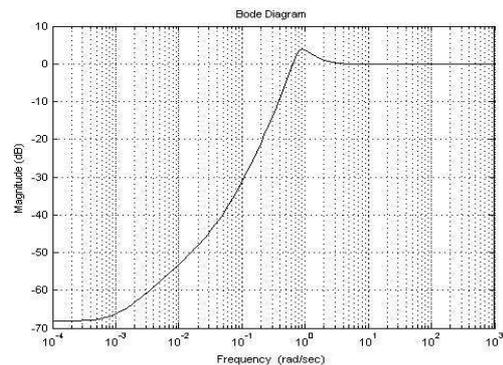
(a)



(b)



(c)



(d)

figure 3.13 : (a) Réponse indicielle de (3.43) commandé par (3.46) pour $K = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.

(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.

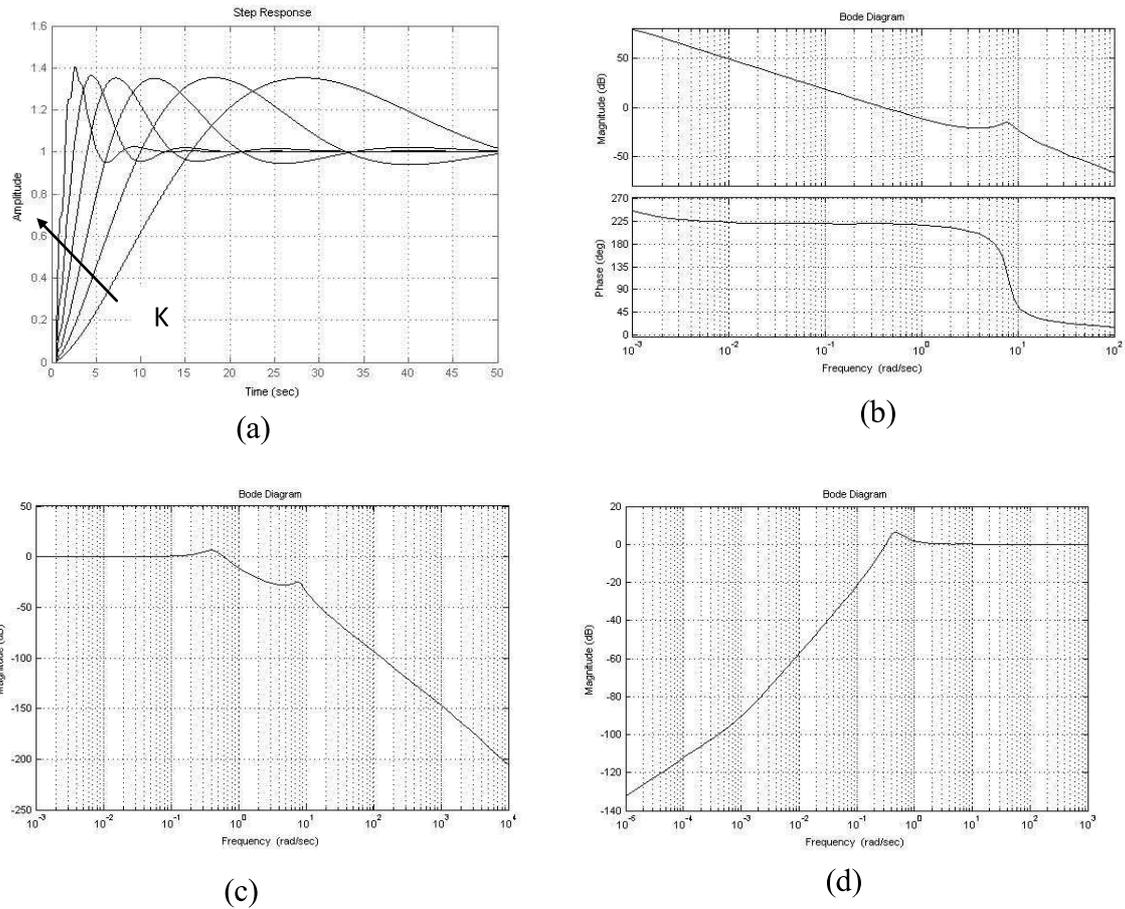
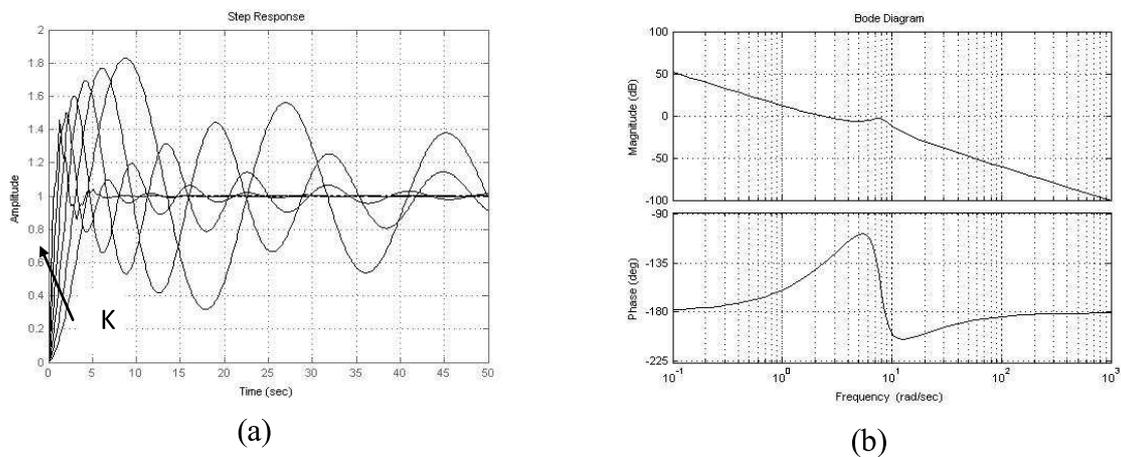


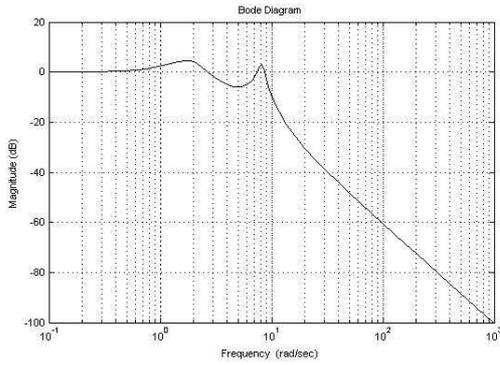
figure 3.14 : (a) Réponse indicielle de (3.44) commandé par (3.47) pour $K = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.

(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

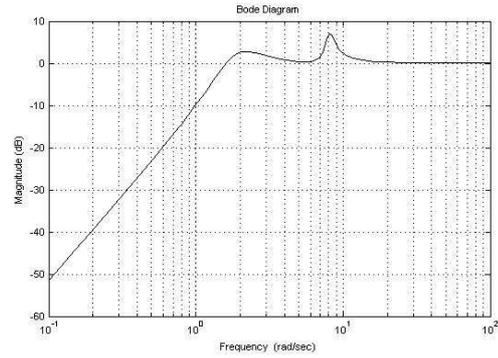
(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.





(c)



(d)

figure 3.15 : (a) Réponse indicielle de (3.44) commandé par (3.48) pour $K = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.

(b) Diagramme de Bode de la boucle ouverte $K = 1$.

(c) Diagramme de Bode de la boucle fermée $K = 1$.

(d) Diagramme de Bode de la fonction de sensibilité pour $K = 1$.

Analyse des résultats de simulation :

La chose la plus importante qu'on remarque et que pour des valeurs de K qui varient autour de 1 le dépassement ne vari pas significativement quand on utilise un PID fractionnaire, La seule différence est que la réponse est plus rapide ou plus lente. Ceci est vrai malgré l'utilisation de plusieurs de plusieurs structure du model. La raison pour ceci est que le PID fractionnaire tend à vérifier la spécification (3.7) ce qui n'est pas le cas pour le PID entier. La vérification et pour les deux pour les spécifications (3.3) à (3.6) à un degré raisonnable comme le montre les diagrammes fréquentielles.

Un petit détail pour le model (3.31), Le PID fractionnaire peut traité une gamme clairement plus large des valeurs de K , ceci est probable car les spécifications que PID entier essaye de réaliser sont différentes : les réponse sont plus rapide au prix d'un grand dépassement. Le model (3.35) est plus facile à contrôler par ce qu'il n'y'a pas de retard pur et une grande variation de K est supporter pour tous les contrôleurs. Le PID entier fonctionne mal avec la structure (3.39) par ce qu'en essayant d'obtenir une réponse plus rapide utilise un grand gain et par conséquent la boucle devient instable pour un K supérieur à $1/32$. Le PID entier (3.48) ne peut stabiliser la structure (3.43), la structure (3.44) est plus facile à contrôler (3.48) le fait et aussi (3.45) et (3.46).

3.8. Conclusion

On remarque bien qu'un PID fractionnaire fonctionne mieux qu'un PID classique, ça apparaît évident car on a 5 paramètres à régler (quand aux PIDs classiques seulement 3). L'implémentation actuelle requière une distributions de plusieurs pôles et zéros (quand aux PIDs classiques un pôle invariant et deux zéros). Le PID fractionnaire fonctionne bien avec une grande robustesse , les exemples donnés montres des règle de réglage des paramètres du PID fractionnaire, bien que des résultats meilleurs peuvent s'obtenir avec les méthodes de réglage analytique.

On pourrait se demander, puisque l'implémentation finale est une répartition de pôles et de zéros, pourquoi ceux-ci ne pourrait pas êtres choisis, en les ajustant pour minimiser les critère appropriés ? Bien sur on pourrait : mais une telle minimisation est difficile. En traitant tous les pôles et les zéros comme une approximation d'un contrôleur fractionnaire, on peut les ajustés facilement et avec de bonne performance comme montré ci-dessus, et on obtient des formulations mathématiques compréhensibles de comportement dynamique obtenu.

Conclusion générale

Dans le cadre de notre travail, constituant une introduction à la commande d'ordre fractionnaire. Comme tous les types de commandes, nous commençons par donner la théorie mathématique qui est derrière ce type de commandes, d'une manière constructive pour partir sur des bases solides dans ce domaine.

La représentation et l'analyse d'un système linéaire fractionnaire dans un espace d'état généralisé fait l'objet du chapitre 2, où on a présenté une méthode d'analyse basée sur la décomposition modale, ainsi on a remarqué que les valeurs propres de la matrice d'évolution d'un système fractionnaire diffèrent des pôles du système, pour enfin donner le théorème de stabilité d'un système linéaire fractionnaire, puis on a donné les méthodes de simulation des opérateurs fractionnaires qu'on a implémenté sur Matlab et simulé pour en conclure que la méthode de distribution de pôles et de zéros donne le meilleur résultat. Dans la fin de ce chapitre on a donné un exemple d'étude de la suspension CRONE où l'objectif n'était pas l'étude de tel système, mais l'application des résultats du chapitre.

Le chapitre 3 traite la commande PID d'ordre fractionnaire où on a montré à travers les méthodes de réglage des paramètres de ce dernier son avantage par rapport à un PID classique du point de vue de robustesse vis-à-vis des variations du gain du système. On a terminé ce chapitre par les simulations de diverses structures pour sortir de la conclusion qu'un PID fractionnaire offre un avantage de définir de nouvelles spécifications car on a plus de degrés de liberté avec le PID fractionnaire (5 paramètres à régler) que le PID entier (3 paramètres à régler).

Eu égard à cette expérience que j'ai pu acquérir dans le cadre de mon travail de fin d'étude, je me fixe comme perspective, de travailler sur les systèmes et les commandes de type fractionnaire d'une manière plus spécialisée et plus profonde.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Igor Podlubny** « Fractional Differential Equations »,
Mathematics in science and engineering volume 198,1999.
- [2] **C. M. Mittag-Leffler** « Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ »,
C.R Acad. Sci.Paris vol 137 , pp 554-558, 1903.
- [3] **A.Wiman** « Uber den funfundamentalsatz in der théorie der funktionen $E_\alpha(x)$ »,
Acta MATH, vol 29 ,pp 191-201, 1905.
- [4] **Selçuk Bayin** « mathematical method in science and engineering »,
© John Wiley & Sons, INC, Publication, 2006.
- [5] **Monje CA, Vinagre BM, Chen YQ, Feliu V, Lanusse P, Sabatier J**
«Proposals for fractional PID tuning » In First IFAC Workshop on
Fractional Differentiation and its Applications, Bordeaux, 2004.
- [6] **Valério D, da Costa JS** « Ziegler-Nichols type tuning rules for fractional PID
controllers »,
In Proceedings of ASME 2005 Design Engineering Technical
Conferences and Computers and Information in Engineering
Conference, Long Beach.
- [7] **Valério D, da Costa JS** « Tuning of fractional PID controllers with ziegler- nichols type
rules »
Signal Processing, Porto, 2006.
- [8] **Valério D, da Costa JS** « Tuning rules for fractional PID controllers »
In Fractional Differentiation and its Applications, Porto, 2006
- [9] **Samir Ladaci** « Contribution a la commande adaptative d'ordre fractionnaire »
Thèse doctorat, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [10] **Olivier Cois**
« Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier
application en thermique »

Thèse doctorat, Université Bordeaux 1, 2002.

- [11] **Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri**
« A note on the stability of fractional order systems »,
Mathematics and Computers in Simulation 79 ,1566–1576, 2009.
- [12] **François Dubois Ana-Cristina Galucio et Nelly Point**
« Introduction à la dérivation fractionnaire Théorie et applications »,
Conservatoire National des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, 2009.
- [13] **Yang Quan Chen and Kevin L. Moore**
« Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators »
IEEE Transactions on circuits and systems : fundamental theory and applications,
vol. 49, no. 3, March 2002
- [14] **Zaid M. Odibat**
« Analytic study on linear systems of fractional differential equations »
Computers and Mathematics with Applications 59 ,1171-1183, 2010.
- [15] **H.-F. Raynaud, A. Zergaimnoh**
« State-space representation for fractional order controllers »
Automatica 36,1017-1021, 2010.
- [16] **Jay L. Adams** « Hankel operators for fractional-order systems »
These Doctor of Philosophy, The Graduate Faculty of The University of Akron, 2009.
- [17] **Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri**
« A note on the stability of fractional order systems »
Mathematics and Computers in Simulation 79 ,1566–1576, 2009.
- [18] **Oustlaoup .A** « La commande CRONE », Hermès, Paris, 1991.
- [19] **Oustlaoup .A** «La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications »
Hermès, Paris, 1995.

Résumé: Le travail présenté dans ce mémoire est une introduction à la commande fractionnaire. Pour ce faire nous avons présenté la théorie des calculs fractionnaires et ses différentes définitions ainsi qu'une analyse et discussion sur cette théorie. On a aussi donné la représentation et l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que les méthodes de leurs simulation. tout ceci illustrer par un exemple d'étude de la suspension CRONE. Enfin dans la dernière section on a présenté le régulateur PID fractionnaire ($PI^{\lambda}D^{\mu}$), ainsi que les méthodes de réglages de ses paramètres, pour terminer avec divers simulations pour en tirer la conclusion que ce régulateur apporte un avantage par rapport au PID d'ordre entier de point de vue robustesse vis-à-vis des variations du gain du système. Enfin dans cette thèse on a montrer que les calculs fractionnaire s'avère une théorie très prometteuse en automatique.

Mots clés: calcul fractionnaire, représentation d'état fractionnaire, PID fractionnaire.

Abstract: The work presented in this memory is an introduction to the fractional control. With this intention we presented the theory of fractional calculus and its various definitions, also an analysis and discussion on this theory. We also given the representation and the analysis of fractional systems, as well as the methods of their simulation. all this to illustrate with an example of study of CRONE suspension. Finally in the last section we presented fractional regulator PID ($PI^{\lambda}D^{\mu}$), as well as the methods of adjustments of his parameters, to finish with various simulations to conclude that this type of regulators regulator bring an advantage compared to the entire PID from robustness point of view with respect to the variations of the gain of the system. Finally in this thesis we showed that fractional calculus avers a very promising theory on control.

Key words: fractional calculus, fractional state-space representation, fractional PID.

ملخص: العمل المقدم في هذه المذكرة هو عبارة عن مقدمة للتحكم الجزئي. من اجل ذلك قمنا بتقديم نظرية الحساب الجزئي و مختلف التعاريف, زيادة على ذلك تحليل و مناقشة هذه النظرية. وقدمنا أيضا كيفية تمثيل و تحليل الأنظمة الجزئية و كذلك طرق و برامج تصنعها. ووضحنا كل هذا بدراسة مثال حول نظام التعلق CRONE و في القسم الأخير قمنا ناضم PID الجزئي و كذلك طرق ضبط متغيراته, و انهينا بتصنع أنظمة مختلفة من اجل الخروج بخاتمة على ان المتحكم PID الجزئي احسن من ال PID الطبيعي من وجهة المتانة بالنسبة لتغيرات ربح النظام. وفي النهاية عبر هذه المذكرة بينا ان نظرية الحساب الجزئي تعد نظرية واعدة في التحكم.

كلمات مفتاحية: الحساب الجزئي, تمثيل الانظمة الجزئية, المنظم الجزئي PID