

M0001/94A

# Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## Thèse de Magister

option : Acquisition et traitement de l'information

Présentée par TAGHI Mohamed Oussaid  
Ingénieur en Electronique de l'ENP

### THEME

Etude comparative des algorithmes de  
contrôle adaptatif des systèmes linéaires,  
non linéaires variant dans le temps ,  
soumis à des incertitudes structurées

Soutenue en Fevrier 1994 devant le jury composé de :

A. Zerguerras	Maitre de conférences (E.N.P)	Président
H. Benchoubane	Ph.D (U. S. T Blida)	Rapporteur
F. Chigara	Chargé de cours (E.N.P)	Rapporteur
B. Derras	Maitre de conférences (E.N.P)	Examineur
N. Louam	Maitre de conférences (E.N.P)	Examineur
F. Boudjemâa	Chargé de cours (E.N.P)	Examineur
M. S. Ait cheikh	Chargé de cours (E.N.P)	Invité

بسم الله الرحمن الرحيم

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

إهداء

الحمد لله على نعمه التي لا تحصى و على آلائه التي لا تستقصى و الصلاة و السلام على رسول الله و آله و صحبه و من و آله بإحسان الى يوم الدين ثم، أما بعد أود أن أهدي هذه الأطروحة إلى :

. الوالدين الكريمين الذين بذلا الغالي و النفيس في سبيل تعليمنا و تنشأتنا على المبادئ الإسلامية السمحة،

. شقيقي يوسف،

. أخواتي صليحة و نادية و أزواجهن و أبناهن الرميضاء، حذيفة و يوسف و أختي وهيبة.

كما لا يفوتني بهذه المناسبة و في هذه الظروف الحرجة التي تعيشها أمتنا الإسلامية في الجزائر و خارجها أن ألفت إلى كافة العلماء و الدعاة و المخلصين سائلا الله عز و جل أن يوفقهم إلى ما فيه خير و صلاح البلاد و العباد.

"ولينصرن الله من ينصره إن الله لقوي عزيز"

الجزائر، يوم الإثنين 18 رمضان 1414 الموافق ل 28 فبراير 1994

محمد

# Ecole Nationale Polytechnique

## Département d'Electronique

### Thèse de Magister

option : Acquisition et traitement de l'information

Présentée par **TAGHI Mohamed Oussaid**  
Ingénieur en Electronique de l'ENP

#### THEME

Etude comparative des algorithmes de contrôle adaptatif des systèmes linéaires, non linéaires variant dans le temps, soumis à des incertitudes structurées

Soutenue en Fevrier 1994 devant le jury composé de :

<b>A. Zerguerras</b> .....	<b>Maitre de conférences (E.N.P)</b> ...	<b>Président</b>
<b>H. Benchoubane</b> .....	<b>Ph.D (U. S. T Blida)</b> .....	<b>Rapporteur</b>
<b>F. Chigara</b> .....	<b>Chargé de cours (E.N.P)</b> .....	<b>Rapporteur</b>
<b>B. Derras</b> .....	<b>Maitre de conférences (E.N.P)</b> ...	<b>Examineur</b>
<b>N. Louam</b> .....	<b>Maitre de conférences (E.N.P)</b> ...	<b>Examineur</b>
<b>F. Boudjemâa</b> .....	<b>Chargé de cours (E.N.P)</b> .....	<b>Examineur</b>
<b>M. S. Ait cheikh</b> .....	<b>Chargé de cours (E.N.P)</b> .....	<b>Invité</b>

Ce travail a été effectué au laboratoire d'automatique du département d'électronique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur A. CHEKIMA, président du conseil scientifique du département ainsi que la Direction du Département pour m'avoir donné la possibilité et les moyens d'aboutir à la finalisation du présent travail.

J'adresse mes remerciements à Monsieur H.BENCHOUBANE, enseignant à l'université de Blida, pour avoir bien voulu proposer et définir le thème de la présente étude et examiner ce mémoire, qu'il trouve ici le signe de ma reconnaissance et de ma gratitude.

Je ne saurais exprimer toute ma reconnaissance à monsieur F.CHIGARA, qui a participé activement à la direction de ma thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mes plus vifs remerciements pour sa disponibilité, ses conseils et pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je suis très reconnaissant envers MONSIEUR M.S.AIT CHEIKH, chef du laboratoire d'automatique, qui a mis à ma disposition sa riche documentation, pour le soutien et les encouragements amicaux qu'il m'a prodigués.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur A.ZERGUERRAS pour avoir accepté la présidence du jury.

Je remercie très vivement Monsieur B.DERRAS pour les discussions fructueuses que j'ai eu avec lui et pour sa participation au jury.

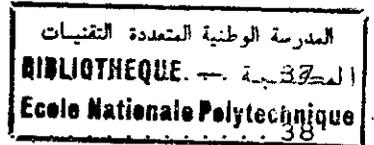
Je suis très honoré de la présence de Messieurs N.LOUAM et F.BOUDJAMAA, dans le jury de thèse, je les remercie d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements, mes amis et collègues du laboratoire particulièrement Messieurs I.KACHA A.NASRI.

INTRODUCTION.....	1
<b>CHAPITRE 1 -GENERALITES SUR LA COMMANDE ADAPTATIVE</b>	
1-1. Historique.....	4
1-2. Principe du contrôle adaptatif.....	3
1-3. Classification des contrôleurs adaptatifs (C A)	
1-3-1. Classification générale.....	7
1-3-2. Principales stratégies de contrôle adaptatif.....	8
1-3-3. Commande adaptative directe et indirecte.....	13
1-4. Principaux outils d'analyse et de synthèse des C A	
1-4-1. Modélisation des procédés.....	14
1-4-2. Stabilité.....	17
1-4-3. Robustesse.....	17
1-4-4. Identification.....	19
<b>CHAPITRE 2 -CONTROLEURS ADAPTATIFS A MODELE DE REFERENCE</b>	
2-1. Introduction.....	21
2-2. Différentes approches du MRAC	
2-2-1. Approche basée sur la théorie de l'optimisation paramétrique locale.....	22
2-2-2. Approche basée sur la stabilité de Lyapounov.....	23
2-2-3. Approche basée sur les concepts d'hyperstabilité et de positivité.....	24
2-3. Commande linéaire par poursuite d'un modèle.....	25
2-4. Contrôleur adaptatif par poursuite d'un modèle de référence (AMFC)	
2-4-1. Généralités.....	28
2-4-2. Système hyperstable.....	30
2-4-3. Synthèse des commandes de poursuite.....	31
2-4-4. Etude de la robustesse du AMFC.....	35

2-5. Contrôleur adaptatif minimal par poursuite d'un modèle (MCS)

2-5-1. Généralités.....	
2-5-2. Synthèse du contrôleur MCS.....	
2-5-3. Etude de la robustesse du MCS.....	40



2-6. Contrôleur adaptatif par génération de commandes de poursuite (CGT)

2-6-1. Généralités.....	45
2-6-2. Notions de systèmes quasi postifs.....	46
2-6-3. Problème de la poursuite d'un modèle d'ordre réduit.....	47
2-6-4. Algorithme de commande CGT pour des procédés ASPR.....	49
2-6-5. Généralisation de l'algorithme CGT.....	51
2-6-6. Etude de la robustesse du CGT.....	56

2-7. Conclusion..... 60

CHAPITRE 3 -CONTROLEURS ADAPTATIFS à STRUCTURE VARIABLE

3-1. Introduction.....	62
3-2. Systemes de commande à structure variable (VSS)	
3-2-1. Principe.....	63
3-2-2. Exemple illustratif.....	64
3-2-3. Formulation du problème du contrôle à structure variable.....	66
3-2-4. Synthèse des VSS par la méthode du contrôle équivalent.....	70
3-2-5. Propriétés d'invariance des VSS en mode de glissement.....	75
3-3. Contrôle adaptatif à structure variable par poursuite d'un modèle.....	76
3-4. Phénomène de brouttement (Chattering).....	81

3-5. Robustesse du contrôleur adaptatif à structure variable. 82

3-6. Conclusion..... 84

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

#### CHAPITRE 4 -CONTROLEURS ADAPTATIFS AUTO-AJUSTABLES

4-1. Introduction..... 86

4-2. Identification des systèmes par la méthode des moindres carrés

4-2-1. Estimation par la méthode des MCR..... 87

4-2-2. Stabilité des estimateurs des MCR..... 88

4-2-3. Convergence de l'estimateur des MCR..... 92

4-3. Contrôle auto-ajustable à variance minimale

4-3-1. Commande à variance minimale..... 96

4-3-2. Version auto-ajustable du contrôleur GMV..... 101

4-4. Contrôle auto-ajustable à placement de pôles

4-4-1. Commande linéaire à placement de pôles..... 102

4-4-2. version auto-ajustable du contrôleur à placement des pôles..... 106

4-5. Extension aux systèmes multivariables

4-5-1. Position du problème..... 108

4-5-2. STC GMV multivariable..... 113

4-5-3. STC à Placement de pôles multivariable..... 115

4-6. Conclusion..... 120

#### CHAPITRE 5 -RESULTATS DE SIMULATION

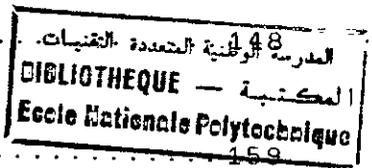
5-1. Introduction..... 124

5-2. Aspects pratiques de la mise en oeuvre des Algorithmes de commande adaptative..... 124

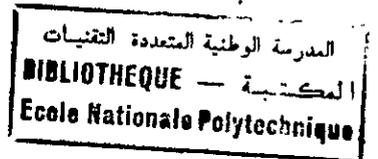
5-2. Exemple 1 : Commande d'un système du second ordre à comportement integral..... 127

5-3. Exemple 2 : Commande d'un système du second ordre instable..... 128

5-3. Exemple 3 : Commande d'un système multi-entrées, simple sortie.....	182
5-4. Application : Commande adaptative d'un bras manipulateur.....	185
5-5. Conclusions.....	189
CONCLUSION GENERALE.....	190
TABLEAU RECAPITULATIF.....	200
BIBLIOGRAPHIE.....	
ANNEXE .....	



## LISTE DES ABREVIATIONS



- AMFC : Poursuiveur Adaptatif à Modèle de Référence;
- ASPR : Quasi Strictement Positif;
- CGT : Générateur de Commandes de Poursuite;
- LMFC : Contrôleur Linéaire par poursuite d'un Modèle de Référence;
- MCR : Moindres Carrés Récurifs;
- MCS : Contrôleur adaptatif Minimal à Modèle de référence;
- MG : Mode de Glissement;
- MIMO : Multi-entrées, Multi-sorties;
- MISO : Multi-entrées, Simple sortie;
- MRAC : Contrôle Adaptatif à Modèle de Référence;
- SC : Surface de Commutation;
- SISO : Simple entrée, Simple sortie;
- SPR : Strictement Positif Réel;
- STC : Contrôle Auto-Ajustable;
- VMG : Variance minimale généralisée;
- VSS : Systèmes à Structure Variable;

La plupart des techniques de synthèse des systèmes de commande sont basées sur la connaissance du processus à commander et de son environnement. Or les phénomènes mis en cause dans les processus physiques sont généralement trop complexes et souvent non linéaires pour que l'on puisse établir rigoureusement un modèle mathématique de leur comportement. De plus, l'influence de l'environnement est souvent difficile à évaluer et change avec le temps.

Dans la pratique, on est toujours amené à approcher la dynamique du processus à commander par un modèle paramétrique linéaire et stationnaire dans un domaine plus ou moins réstreint autour de son point de fonctionnement. Ce type de modèle, désigné dans la littérature par modèle de représentation ou de commande, établit une relation de cause à effet entre les variables auxquelles le fonctionnement du processus est plus sensible de manière à réaliser un meilleur compromis entre l'erreur de modélisation et la simplicité du système de commande.

Par ailleurs, le caractère stationnaire des modèles de commande dépend du point de fonctionnement du processus, de ses non-linéarités et des entrées secondaires, considérées comme perturbations, qui n'ont pas été prises en considération lors de leur élaboration. Les performances d'une loi de commande linéaire se dégradent au fur et à mesure que l'écart entre la dynamique effective du processus et celle de son modèle croit.

Un réajustement de la loi de commande pour tenir compte des variations de la dynamique du processus et maintenir les performances du système s'avère alors impératif. Le concept de commande adaptative apparaît donc pour éliminer les effets des

perturbations sur la dynamique du processus qui affectent les performances, alors que la commande linéaire ne permet d'éliminer que les perturbations d'état du processus.

Les progrès remarquables dans la technologie des circuits intégrés et l'utilisation de plus en plus croissante des micro-ordinateurs dans la commande des processus ont permis un meilleur compromis performances/prix et rendirent possible l'implantation de lois de commande qui demandent un traitement substantiel. Ces développements technologiques joints aux exigences de certains cahiers de charges justifient l'intérêt actuel que porte aussi bien le monde de la recherche universitaire que le monde industriel aux contrôleurs adaptatifs.

Le thème de la présente thèse est l'étude comparative des principales stratégies de contrôle adaptatif des systèmes linéaires, non linéaires, variant dans le temps soumis à des incertitudes structurées. Il est supposé dans ce travail les procédés commandés sont complètement observables et commandables.

Le premier chapitre présente les principaux concepts de la commande adaptative ainsi que les outils associés à cette théorie.

Dans le second chapitre, nous étudions la classe des contrôleurs adaptatifs à modèle de référence (MRAC). Le AMFC, le MCS, et le CGT sont particulièrement développés avec leurs études de robustesse respectives.

Le contrôle adaptatif à structure variable fera l'objet du troisième chapitre, le principe des systèmes à structure variable, le mode de glissement et ses propriétés ainsi que la forme adaptative dérivant de cette théorie y sont présentées

Le chapitre quatre est réservé à l'étude des contrôleurs auto-ajustables, où sont exposés successivement les lois

d'adaptation basées sur la minimisation d'un critère quadratique (à variance minimale) et celles à placement de pôles. Une attention particulière est accordée aux systèmes de commande multivariables.

L'analyse des performances des divers algorithmes de commande exposés dans ce mémoire se fera au chapitre cinq, les résultats sur des exemples de simulation seront présentés et commentés. Une conclusion clôturera cette étude.

## GENERALITES SUR LA COMMANDE ADAPTATIVE

### 1-1-HISTORIQUE

Les premières recherches concernant la commande adaptative ont été abordées au début des années 1950. Proper et Li [34] proposèrent en 1951 un système de commande destiné à optimiser les performances de la combustion interne d'un moteur en présence des incertitudes par la recherche automatique d'un point de fonctionnement optimal. Il fut baptisé contrôleur auto-optimisant. En 1958, Withaker, motivé essentiellement par les problèmes aéronautiques, mit au point le premier contrôleur adaptatif à modèle de référence pour le pilotage automatique (à hautes performances) des avions.

L'enthousiasme généré par ces études commença à s'estomper après qu'un essai en vol désastreux attira l'attention des utilisateurs sur le fait qu'aucun résultat théorique fondamental n'était disponible pour assurer un fonctionnement stable à ces nouveaux systèmes.

Des résultats importants de la théorie de la commande furent trouvés dans les années 1960. Ils se révélèrent fondamentaux pour la commande adaptative. Ceux-ci furent essentiellement les théories de la variable d'état, de la stabilité, et de la commande stochastique. Les travaux de Bellman (1965) sur la programmation dynamique et Feldbaum (1965) sur la commande duale ont amélioré la compréhension des contrôleurs adaptatifs. Des contributions fondamentales ont été apportées par Kalman (1961) sur le filtrage et l'estimation, Astrom (1970) sur la commande stochastique, et

Tsyppkin (1973) sur les schémas d'apprentissage. Ces travaux ont été à l'origine des structures récursives qui donnèrent lieu à toute une panoplie de méthodes d'estimation, outil fondamental en contrôle adaptatif.

Les années 70 donnèrent lieu à tout un éventail de stratégies de commande adaptative, on peut citer le contrôleur adaptatif auto-ajustable de Astrom (1973)[4], amélioré et étendu par Clarke et Gawthrop (1975,1979) [24,25], le contrôleur adaptatif auto-ajustable à placement de pôles de Wellstead et Prager (1979)[105], sans oublier le contrôleur adaptatif à modèle de référence de Landau (1974)[59] basé sur la théorie de l'hyperstabilité de Popov (1973) [80]. A noter, également, que, sous l'impact des progrès spectaculaires enregistrées en micro-informatique et en micro-électronique, des applications de contrôle adaptatif réussies ont vu le jour telle que le contrôle auto-ajustable d'une machine à papier [5].

Malgré tous ces développements, le problème de la stabilité demeurait toujours posé, et ce n'est qu'en 1980 que cette question fut définitivement résolue grâce aux travaux d'Egardt [37], qui établit les preuves théoriques de la stabilité globale des systèmes de commande adaptative. La dernière décennie, a vu l'accent mis , principalement, sur la robustification des performances des contrôleurs adaptatifs [78], l'unification des différentes approches [52], ainsi que sur les applications industrielles et domestiques des régulateurs adaptatifs [26].

## 1-2-PRINCIPE DU CONTROLE ADAPTATIF

Un contrôleur adaptatif est destiné à évoluer dans un environnement incertain et perturbé. Il doit, donc, en principe être capable d'identifier la dynamique du procédé à commander, au cas où cette dernière est méconnue, de détecter toute variation de

celle-ci et d'agir dans le sens d'éviter toute incidence néfaste de ce changement sur les performances du système de commande. Une question se pose, alors, quelle est la différence qui existe entre le contrôle classique à contre réaction et le contrôle adaptatif?. En effet, il existe deux types de perturbations, les perturbations agissant sur les variables à réguler et celles paramétriques, agissant sur les performances du système de commande.

La contre réaction est essentiellement utilisée dans les systèmes de régulation conventionnels, elle réduit l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler, en comparant ces variables aux consignes souhaitées. Les différences sont alors appliquées à l'entrée du contrôleur qui va engendrer la commande appropriée. Cependant, les performances du système de commande se voient rapidement dégrader en présence des perturbations paramétriques.

Une approche similaire peut être considérée pour maintenir les performances désirées d'un système de commande en présence des perturbations paramétriques. On définit d'abord un indice de performances (IP) qui évalue les performances du système, puis on mesure cet IP pour le comparer avec l'IP désirable, l'écart sera traité par un mécanisme d'adaptation. La sortie de ce dernier va agir soit sur les paramètres du contrôleur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système.

Le principe du contrôle adaptatif est illustré dans la figure.1.1. Le système de commande contient, en plus de la boucle de commande à contre réaction comprenant un régulateur à paramètres ajustables, une boucle supplémentaire qui agit sur les paramètres du régulateur et maintient les performances du système en cas d'incertitudes structurées (paramétriques). Cette

boucle supplémentaire est également une structure à contre réaction où la variable contrôlée est la performance du système de commande proprement dit.

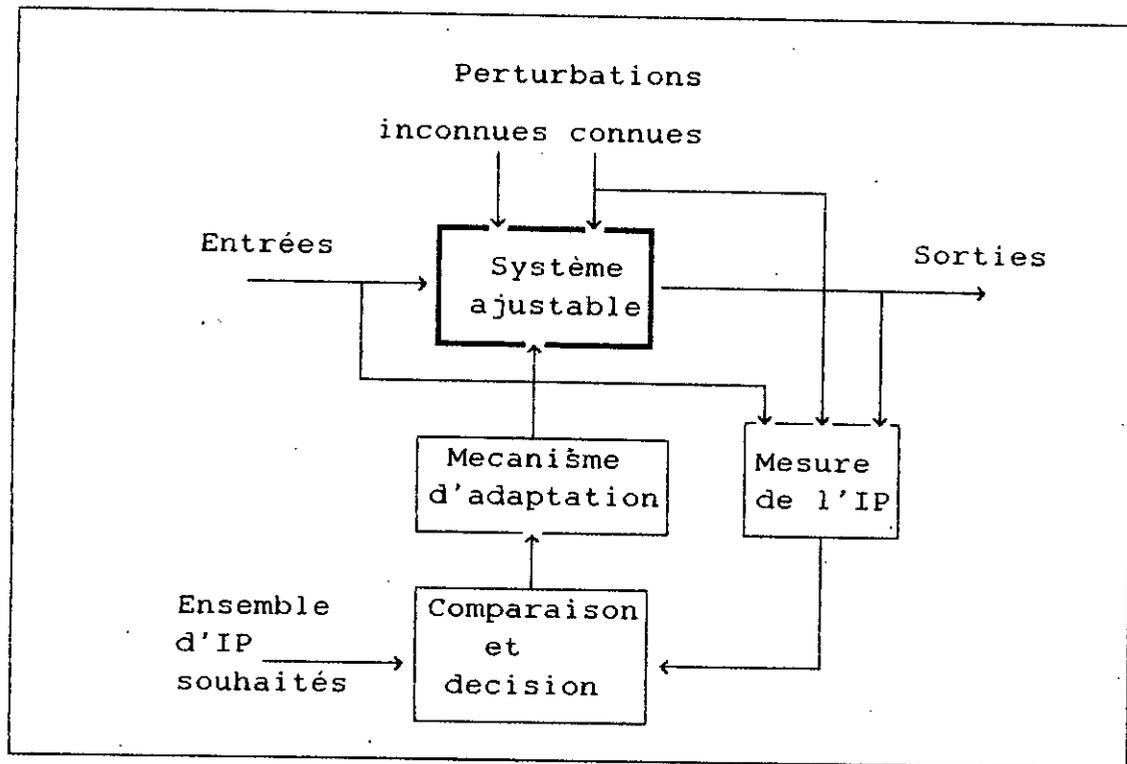


Fig.1.1 : Configuration générale d'un contrôleur adaptatif

### 1-3-CLASSIFICATIONS DES CONTROLEURS ADAPTATIFS

#### 1-3-1-Classification générale

Les systèmes de commande adaptative peuvent être classés selon différents critères. Ces derniers conduisent à plusieurs classifications et catégories. Selon Landau [60], les contrôleurs adaptatifs peuvent être classifiés suivant :

- 1-Leurs mécanismes d'adaptation: adaptation paramétrique ou par synthèse d'un signal de commande;
- 2-Les conditions de fonctionnement : déterministe ou stochastique;
- 3-La nature du modèle mathématique utilisé: linéaire, à paramètres distribués, continu, discret, hybride;

4-L'indice de performance: statique (ex: efficacité), dynamique (ex: l'allure de la réponse temporelle), paramétrique (ex: facteur d'amortissement), ou bien une fonction des variables d'état et des entrées (ex: critère intégral quadratique);

5-La nature du bloc de comparaison-décision : soustracteur, extrémal (au cas où il s'agit de minimiser ou maximiser l'IP), ou bien test de l'appartenance à un certain domaine de valeurs (au cas où l'on désire maintenir un paramètre dans une région spécifique);

6-La nature des incertitudes : incertitudes paramétriques (structurées) ou non structurées et incertitudes invariantes ou variantes dans le temps.

### 1-3-2-Principales stratégies de contrôle adaptatif

Il existe plusieurs schémas de commande adaptative qui se différencient par les techniques d'adaptation utilisées; on distingue deux principales approches les plus courantes, le contrôle adaptatif à modèle de référence, qui à l'origine fut proposé pour la résolution du problème de la poursuite déterministe, et le contrôle adaptatif auto-ajustable qui fut introduit pour résoudre le problème de régulation stochastique [3]. A côté de ces deux contrôleurs, on trouve un ensemble de stratégies adaptatives alternatives moins utilisées, mais efficace dans certains cas, telles que le contrôle à gain préprogrammé, et le contrôle adaptatif à structure variable.

#### *Contrôle adaptatif à gains programmés (Gains scheduling)*

C'est l'une des premières et plus intuitives approches du contrôle adaptatif, elle fut introduite en 1960 pour le contrôle des systèmes aéronautiques en particulier. L'idée principal est de

trouver des variables auxiliaires, autres que les sorties du procédé, corrélées avec les changements de la dynamique du procédé. Il est alors possible de compenser les variations paramétriques du procédé en changeant les paramètres du régulateur qui sont fonction des variables auxiliaires. Cette philosophie est illustrée dans la figure 1.2 :

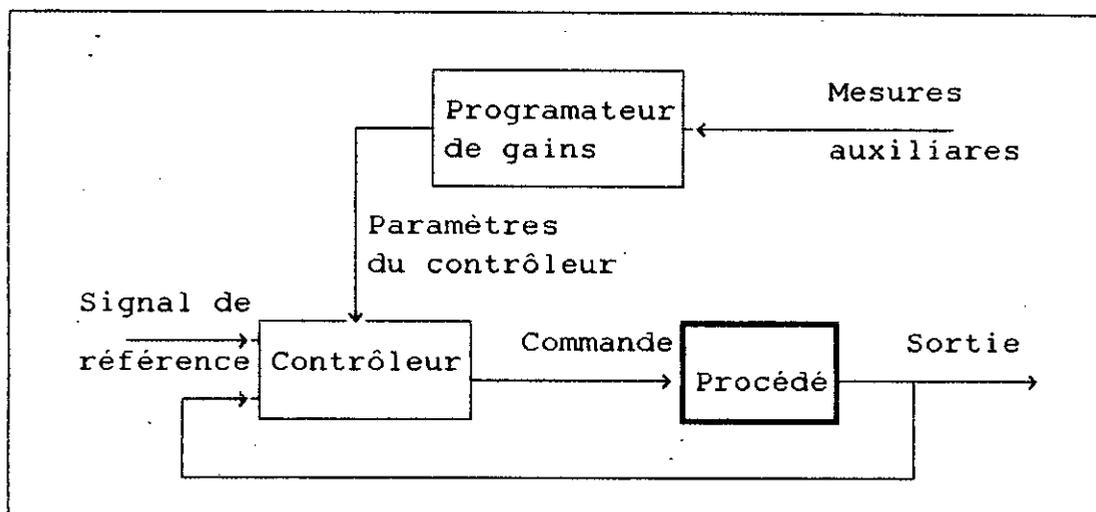


Fig.1.2. Principe du contrôle adaptatif à gains programmés

Ce schéma a l'avantage de permettre un ajustement rapide des paramètres du régulateur en cas de changements rapides de la dynamique du système à contrôler. Il est largement utilisé en aéronautique. Il faut, toutefois, noter que la programmation des gains est un schéma en boucle ouverte comparable à celui de la commande par action directe. Il n'existe pas de rétroaction qui permette de compenser une programmation incorrecte, ce qui risque de conduire vers des résultats catastrophiques. Il faut également souligner que malgré la simplicité de son principe, la mise en oeuvre de ce contrôleur peut être coûteuse car elle nécessite l'introduction de capteurs additionnels. Par contraste, un schéma de commande adaptative en boucle fermée du type représentée par la figure 1.1 ne demande pas de mesures additionnelles mais uniquement une puissance de calcul supplémentaire.

## Contrôle adaptatif à modèle de référence (MRAC)

Le contrôleur adaptatif à modèle de référence (model reference adaptive controller : MRAC) a été à l'origine proposé pour résoudre le problème de poursuite adaptative du comportement d'un modèle spécifiant les performances désirées. Cette approche est résumée dans la figure 1.3 :

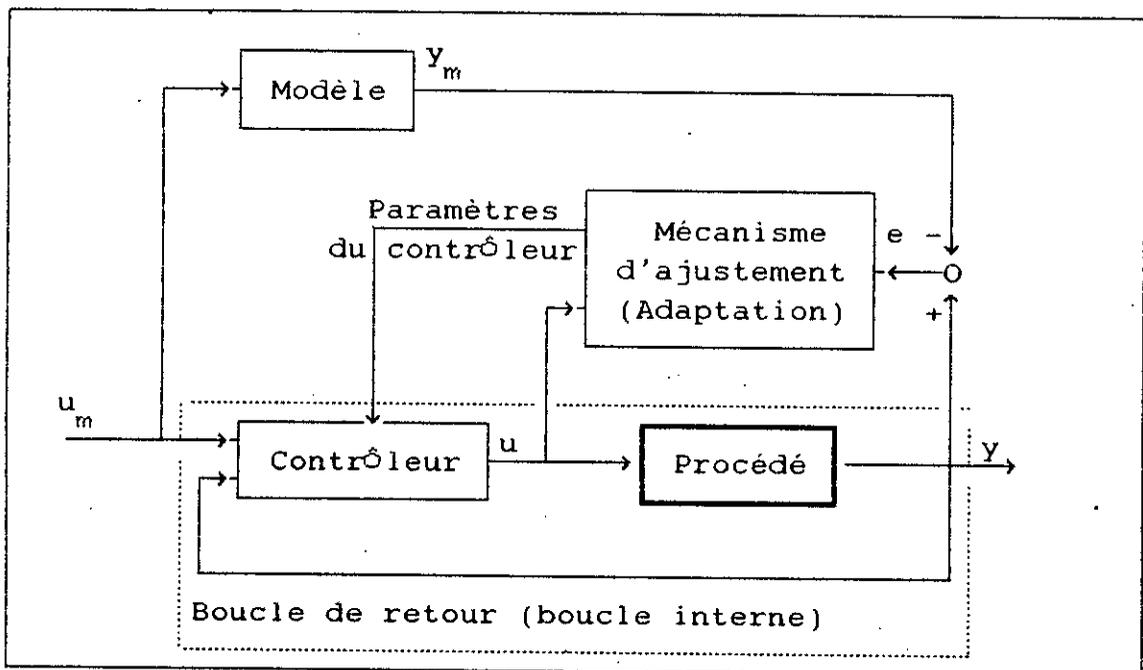


Fig-1-3-Schéma bloc d'un système adaptatif à modèle de référence

Le contrôleur est constitué de deux boucles, une boucle interne qui est une contre réaction ordinaire du système composé du procédé et du régulateur. Les paramètres du régulateur sont alors ajustés par le biais d'une boucle externe de façon à annuler l'erreur  $e$  entre la sortie du procédé et celle du modèle de référence. On peut donc considérer la boucle externe comme une boucle de régulation. Le problème posé se trouve dans la

détermination d'un mécanisme d'ajustement qui assurera la stabilité du système résultant et annulera l'erreur.

### Contrôle adaptatif auto-ajustable (STC)

C'est, dans un sens, l'algorithme de commande adaptative le plus simple déduit de la théorie de la commande stochastique discrète [49]. Cette loi de contrôle utilise le principe d'équivalence certaine qui permet de traiter le problème de la commande adaptative en deux étapes simultanées, l'identification et la commande. Les paramètres du procédé, supposés inconnus, sont obtenus à l'aide d'un algorithme d'estimation, ces estimées serviront à générer en ligne la commande adéquate par une quelconque stratégie linéaire. Le contrôleur qui en résulte est dit *auto-ajustable* (Self tuning controller : STC), les paramètres sont ajustés au fur et à mesure que le processus se déroule. Le principe de ce contrôleur est présenté dans la figure 1.4;

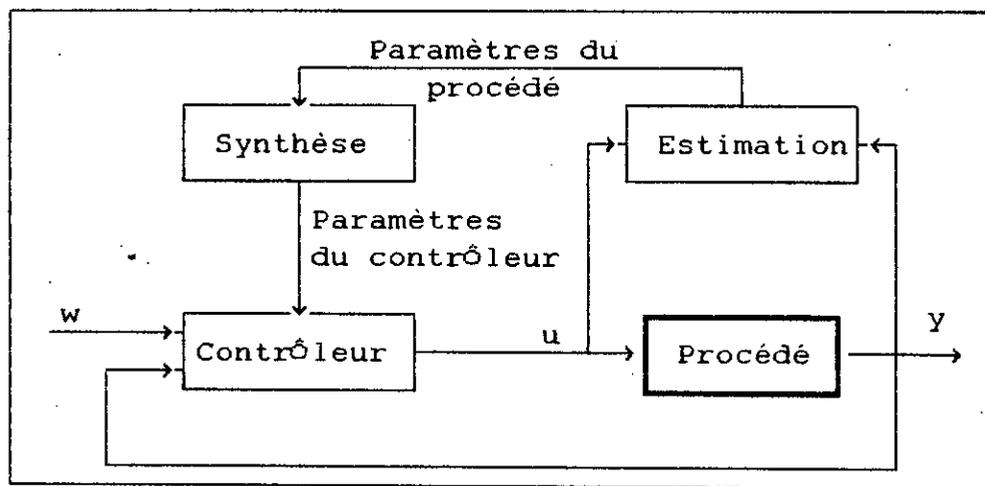


Fig.1.4 : Schéma bloc d'un contrôleur auto-ajustable

L'ensemble du système de commande peut être décomposé en deux systèmes bouclés. La boucle interne comprend le système à réguler et le régulateur ajustable du type linéaire. Les paramètres du régulateur sont ajustés par la boucle externe qui comprend un

estimateur ou un identificateur des paramètres du système à réguler.

### Contrôle adaptatif à structure variable

Ce schéma de commande est basé sur la théorie des systèmes à structure variable, où une structure de contrôle à contre réaction est commuté à chaque fois que l'état du système traverse les surfaces de discontinuités (ou de glissement) dans l'espace d'état, mettant ainsi à profit la propriété d'invariance du procédé, vis à vis de ses paramètres, en mode de glissement. Ce type de contrôle consiste à combiner une commande linéaire (LMFC) avec la commutation des gains de cette loi de commande en vue d'atteindre la trajectoire de glissement. Une fois cette trajectoire atteinte le procédé contrôlé devient insensible aux incertitudes paramétriques et aux perturbations externes. La figure 1.5 montre le principe de cette stratégie.

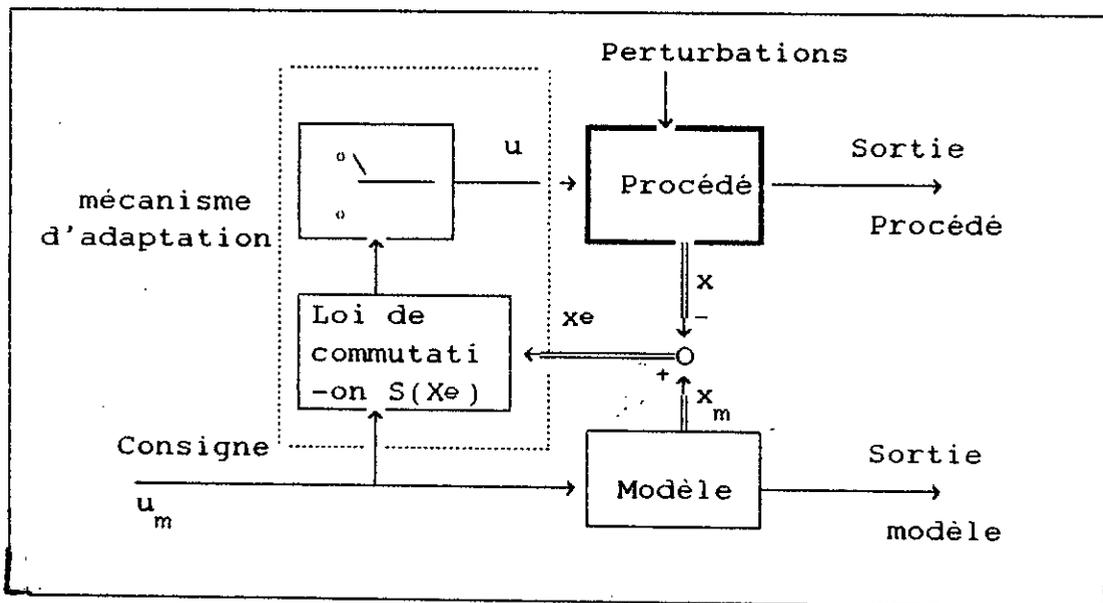


Fig.1.5. Principe du contrôle adaptatif à structure variable

Le vecteur d'état  $x$  du système à commander est comparé à celui  $x_m$  du modèle de référence, ce dernier étant influencé par le

vecteur de consigne  $u_m$ , le vecteur de commande  $u$  est commuté suivant une loi  $S$  fonction de l'erreur d'état  $x_e$  en vue d'atteindre la trajectoire désirable indépendamment des variations des paramètres et des perturbations externes. Cette stratégie de commande est très utilisée dans la commande des moteurs et des robots manipulateurs car en général leurs organes de commande sont des dispositifs possédant un comportement discontinu par une action à deux positions avec une commutation rapide d'une position à une autre. Cette stratégie fera l'objet d'une étude détaillée et approfondie, applications et exemples de simulation à l'appui, au chapitre trois .

### I-3-3-Commande adaptative directe et indirecte

Les schémas indirects sont développés à partir d'une approche naturelle du concept de commande adaptative. Cette approche consiste à identifier en temps réel les paramètres du modèle du processus et à les utiliser comme les vrais paramètres du modèle pour le calcul de la loi de commande. Toutes les stratégies de commande linéaire et les méthodes d'identification peuvent être combinées pour la synthèse de commande adaptative de ce type. Cependant, le choix de cette combinaison doit conduire à la stabilité du schéma de commande adaptative. Ce type de schéma illustré dans la figure 1.6 est utilisé surtout en contrôle auto-ajustable à placement de pôles.

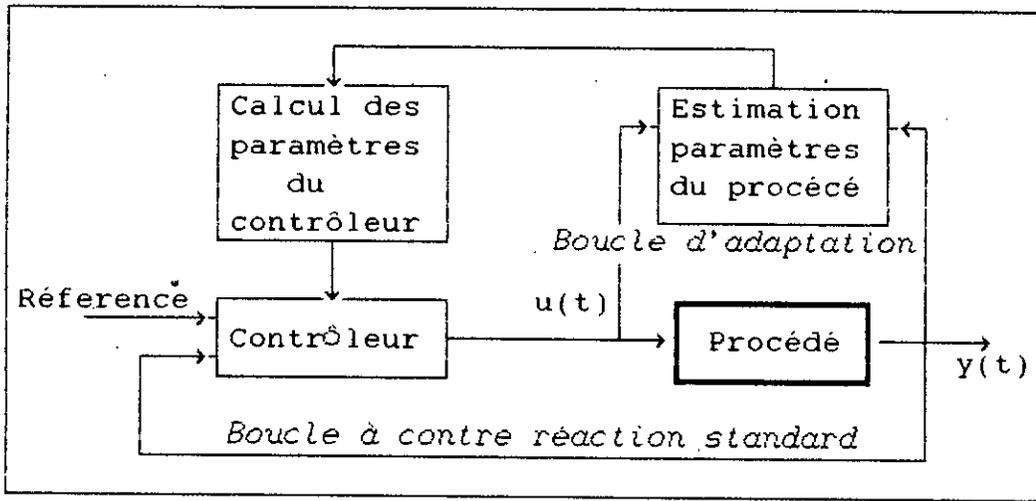


Fig.1.6 : Schéma de commande adaptative indirect

Les schémas directs ou explicites conduisent directement à l'estimation des paramètres de la loi de commande; la phase de calcul des paramètres du contrôleur à partir des estimées des paramètres du procédé est éliminée conduisant ainsi à une diminution du volume de calcul. Ce type de schéma est obtenu en réécrivant le modèle du procédé en fonction des paramètres de la loi de commande. On le retrouve dans les stratégies adaptative à modèle de référence ainsi que dans celle à variance minimale où il n'y a pas d'estimation des paramètres du procédé.

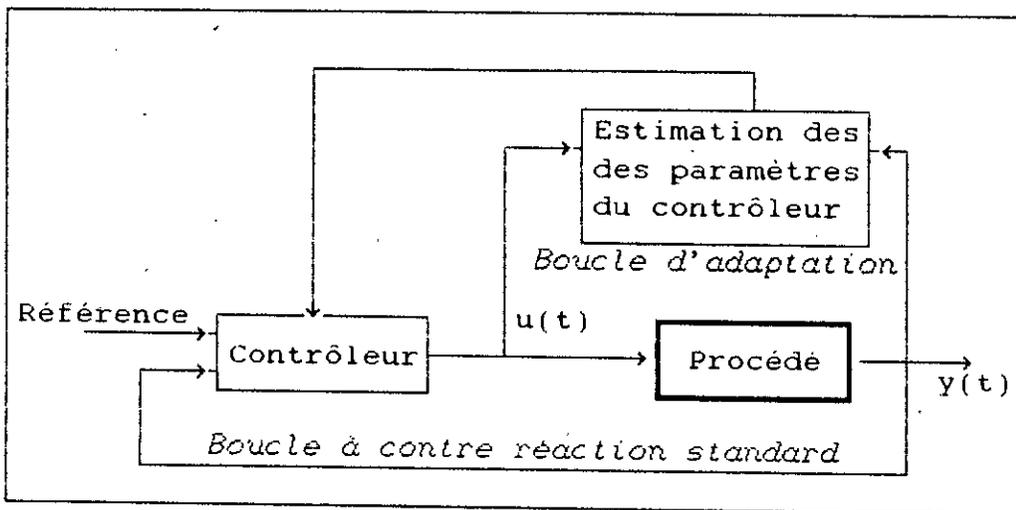


Fig.1.7 : Schéma de commande adaptative direct

## 1-4-Principaux outils d'analyse et de synthèse des C.A

### 1-4-1-Modélisation des processus

Comme il a été mentionné dans l'introduction, il est très difficile d'établir un modèle mathématique rigoureux régissant le comportement d'un processus industriel ou physique. Néanmoins, de bonnes performances peuvent être réalisées par des systèmes de commande utilisant les modèles de comportement entrées sorties du type fonction ou matrice de transfert ou une représentation vectorielle dans l'espace d'état. Ces modèles sont à la base de la théorie de la commande et sont appelés modèle de représentation ou de commande.

#### *Représentation des systèmes dans l'espace d'état*

Certaines méthodes de commande adaptative ont été proposées à l'origine dans l'espace d'état où le système à commander est représenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + d_i(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) + d_o(t) \end{cases}$$

$$X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, U \in \mathbb{R}^p$$

U étant le vecteur commande, Y est le vecteur sortie, et X est le vecteur d'état.

$d_i$  et  $d_o$  sont les perturbations respectivement sur l'état et sur la sortie du système.

#### *Représentation des systèmes par l'approche de transfert*

Beaucoup de schémas de commande adaptative utilisent les modèles paramétriques linéaires et invariants décrits par

l'équation aux différences suivante:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n_A) = b_0 u(t-d) + \dots + b_n u(t-n_B) + w(t)$$

$u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du processus; elles doivent être choisies de manière à ce que le processus leur soit le plus sensible.  $d$  est le retard pur du processus discrétisé; l'action de la commande à l'instant  $t$  n'apparaît à la sortie qu'à l'instant  $t+d$ ,  $d > 1$ ,  $w(t)$  représente l'ensemble des perturbations, supposées bornées, qui affectent le processus.

Ce modèle peut se réécrire, en utilisant la représentation polynomiale en terme de l'opérateur retard  $q^{-1}$ , défini par  $q^{-1} x(t) = x(t-1)$ , sous la forme:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + w(t)$$

avec

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n_A} \quad \text{et} \quad B(q^{-1}) = 1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n_B}$$

Dans le cas multivariable,  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  deviennent des matrices polynomiales, le terme  $d$  devient une matrice dite d'interaction [35], et  $u(t)$  et  $y(t)$  deviennent des vecteurs respectivement d'entrées et de sorties.

#### *Description des perturbations*

Les termes de perturbations  $w(t)$  dans l'équation aux différences du procédé et  $d_i(t)$  et  $d_o(t)$  dans la représentation d'état du système englobent généralement plusieurs composantes :

-L'erreur de modélisation : les modèles de commande sont des approximations grossières du procédé à contrôler, ils conduisent

donc inéluctablement à une erreur de modélisation. Les variables d'entrée-sortie et d'état et l'ordre du procédé doivent être choisis de manière à réaliser le meilleur compromis entre la simplicité et la précision du modèle. L'erreur de modélisation est supposée nulle, chose qui a motivé l'étude de la robustesse des schémas de commande par rapport au modèle utilisé [60];

-Les perturbations mesurables: elles représentent l'effet des variables du processus jugées secondaires lors de l'élaboration du modèle;

-les perturbations aléatoires: elles permettent de tenir compte de l'influence de l'environnement et des bruits de mesure, etc...;

-Les perturbations de charge dont l'amplitude est généralement inconnue et lentement variable dans le temps, peuvent changer brusquement si le point de fonctionnement change;

-Une constante non nulle qui permet de prendre en considération le fait que les perturbations ne sont pas nécessairement de moyenne nulle.

#### 1-4-2-Stabilité

Les contrôleurs adaptatifs sont des systèmes non linéaires, l'analyse de leurs stabilité n'est pas chose aisée. En effet, la théorie de la stabilité a été la source d'inspiration majeure de développement des systèmes adaptatifs à modèle de référence. Le modèle de l'erreur est mis sous la forme d'un système linéaire avec une contre réaction non linéaire. C'est une configuration classique pour laquelle les résultats de la stabilité sont disponibles. Le système en boucle fermée serait globalement asymptotiquement stable si la partie linéaire est strictement réelle positive (SPR) et la partie non linéaire est passive (annexe). Le modèle de l'erreur (écart entre performances désirables et celles obtenues) peut être utilisée aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse, à noter également que la seconde

méthode de Lyapounov de la stabilité est aussi très utilisée pour la l'analyse de la stabilité des contrôleurs adaptatifs.

### 1-4-3-Robustesse

Un système de commande est robuste s'il garantit un certain niveau de performances malgré les incertitudes ou les variations par rapport à son modèle nominal. Cette notion de robustesse n'a de sens à priori que si l'on parle d'une propriété particulière de la commande (stabilité, performance, rapport entrée/sortie, etc...) via à vis d'un effet perturbateur particulier (méconnaissance de la structure du système à commander, entrées perturbatrices, bruit de mesure, etc...), il faut donc préciser le mode de description des incertitudes et le type de performances considéré.

#### 1-4-3-a. Description des incertitudes

Très généralement, on distingue deux types [85] :

- Les incertitudes structurées : relatives aux paramètres d'un modèle dans une structure donnée, elles permettent la description la plus concrète, relative à des constantes physiques (masses, raideurs, capacités). Ces incertitudes sont décrites par un domaine dans l'espace paramétrique;

- Les incertitudes non structurées : concernant typiquement les réponses fréquentielles, elles sont définies par un majorant des écarts de la réponse du système par rapport à une réponse nominale. La réponse concernée étant - quasi universellement - la réponse fréquentielle.

On écrit :

$$\begin{aligned} G'(j\omega) &= G(j\omega) + \Delta G(j\omega) \\ &= G(j\omega) \left[ 1 + \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right] \end{aligned}$$

et on précise un majorant de l'erreur multiplicative

$$|\Delta G(j\omega)/G(j\omega)| < l(\omega) .$$

Un tel majorant engendre des disques d'incertitudes sur le lieu de Nyquist [31].

#### 1-4-3-b. Type de performances

Le deuxième facteur à considérer dans la robustesse est celui du niveau de performances à maintenir.

L'objectif premier de tout contrôle est de réduire ou minimiser des écarts, tout le reste est soit secondaire, soit moyen, soit condition nécessaire à la satisfaction de cet objectif premier.

- Est *secondaire*, la minimisation de l'énergie de la commande.
- Est un *moyen*, la réduction d'un temps de montée, l'augmentation de la bande passante en boucle fermée.
- Est une *condition nécessaire*, la stabilité de la boucle fermée.

#### 1-4-3-c. Problèmes de robustesse des contrôleurs adaptatifs

Dans notre étude nous nous intéressons à la robustesse de la stabilité des schémas de commande adaptative soumis à des incertitudes structurées. Ces schémas comportent en général une partie linéaire usuelle et une partie adaptation. ceci nous amène à distinguer deux types de problèmes de robustesse:

- Les problèmes d'origine linéaire: ils apparaissent lorsque la classe des contrôleurs atteignables par la loi d'adaptation ne contient aucun contrôleur stabilisant le système;
- Les problèmes dus à l'adaptation: la loi d'adaptation qui introduit une non linéarité dans le système introduit en même temps de nouveaux problèmes de robustesse. En effet, des perturbations

bornées agissent directement sur la loi d'adaptation et peuvent provoquer une divergence des paramètres adaptés.

#### 1-4-4-Identification

La théorie de l'identification constitue un outil essentiel pour la synthèse et le développement des algorithmes de contrôle adaptatif. En effet, la phase estimation des paramètres en ligne du contrôleur est primordiale en contrôle auto-ajustable. Cette estimation est implicite dans les MRAC. L'identification des processus comporte plusieurs étapes, le choix du modèle, acquisition des entrées et des sorties du procédé, estimation des paramètres du modèle, et la validation du modèle identifié. L'identification se fait en temps réel de manière automatique dans les systèmes adaptatifs. Il existe plusieurs méthodes d'estimation, la méthode des moindres carrés récurrente est la plus populaire en contrôle adaptatif à cause de sa flexibilité d'utilisation en diverses situations. Elle consiste à trouver récursivement les paramètres qui minimisent un critère du type moindres carrés. Plusieurs variantes sont disponibles. Nous étudierons en détail ces méthodes au chapitre quatre.

## CONTROLEURS ADAPTATIFS A MODELE DE REFERENCE

### 2-1-INTRODUCTION

Le contrôleur adaptatif à modèle de référence (model reference adaptive controller : MRAC) fut proposé pour la première fois par Withaker en 1958 [107]. Deux idées ont été introduites, la première consiste à spécifier les performances désirables du système de commande en terme d'un modèle dit de référence, la seconde est l'ajustement en ligne des paramètres du régulateur en fonction de l'erreur ou bien de l'écart de sortie ou d'état entre ce modèle de référence et le procédé. L'objectif essentiel étant d'assurer la convergence asymptotique de cette erreur en dépit des incertitudes paramétriques et autres perturbations.

Le MRAC a été originellement destiné à la résolution du problème des procédés continus déterministes, l'idée et la théorie furent ensuite développées et étendues aux systèmes discrets et à ceux soumis à des perturbations stochastiques.

Il existe trois approches d'analyse et de conception des systèmes MRAC :

- approche basée sur *la théorie de l'optimisation paramétrique locale*;
- approche basée sur *la stabilité de Lyapounov*;
- approche basée sur *les concept d'hyperstabilité et de positivité*.

Dans le présent chapitre, nous aborderons de manière sommaire les différentes approches du MRAC ainsi que leurs avantages et inconvénients respectifs. Nous insisterons spécialement sur les

contrôleurs issus des concepts d'hyperstabilité et de positivité où seront étudiés le contrôleur adaptatif par poursuite d'un modèle de référence, le contrôleur adaptatif minimal à modèle de référence, et finalement le générateur de commandes de poursuite. La commande linéaire par poursuite d'un modèle qui constitue la boucle ordinaire de tout MRAC y sera également présentée.

## 2-2-DIFFERENTES APPROCHES DU MRAC

### 2-2-1-Approche basée sur la théorie de l'optimisation paramétrique locale

Les méthodes issues de cette approche furent les premières à être utilisées en MRAC. L'idée de base de cette approche est la recherche automatique d'une valeur minimale d'un indice de performances quadratique, fonction de l'écart (de sortie ou d'état) entre le modèle de référence et le procédé, défini dans l'espace paramétrique et ce en faisant varier les paramètres du contrôleur suivant les règles de cette approche. Plusieurs règles ont été suggérées, nous citons la *règle du gradient*, la *règle du pas descendant*, et la *règle du gradient conjuguée*. Nous décrivons ci-dessous de manière sommaire la méthode du gradient.

*Méthode du gradient* : Plus connue sous le nom de règle MIT (MIT rule), institut où le travail a été réalisé. C'est la contribution originale de Withaker, elle est basée sur l'hypothèse que les paramètres du procédé varient plus lentement que les autres variables et utilise les fonctions de sensibilité.

Supposons qu'on veut régler les paramètres du contrôleur de façon à rendre l'erreur de poursuite nulle.

Soit  $\varepsilon$  l'erreur et  $\theta$  les paramètres; introduisons le critère suivant:

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

pour que J soit petit, il, faut changer les paramètres dans le sens du gradient négatif :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma \frac{\delta J}{\delta \vartheta} = -\gamma \varepsilon \frac{\delta \varepsilon}{\delta \vartheta}$$

Les paramètres étant supposés variant plus lentement que les

autres variables du système, la quantité  $\frac{\delta \varepsilon}{\delta \vartheta}$ , appelée fonction de

sensibilité, peut alors, être calculée sous l'hypothèse que  $\vartheta$  est constante.

L'implémentation de la méthode du gradient nécessite la génération en ligne des fonctions de sensibilité, opération très difficile à réaliser (la complexité augmente avec le nombre de paramètres du régulateur). De plus, la majorité de ses variantes conduisent souvent à des systèmes instables. Tous ces problèmes firent en sorte que ces techniques soient très vite abandonnées et laissèrent place aux méthodes basées essentiellement sur la théorie de la stabilité.

## 2-2-2-Approche basée sur la stabilité de LYAPOUNOV<sup>N</sup>

Cette approche fut proposée par Parks en 1966, elle utilise la seconde méthode de Lyapounov pour la stabilité (annexe) en vue de synthétiser un MRAC garantissant la stabilité du système résultant.

*Principe* : le procédé et le modèle de référence sont décrits par les équations d'état suivantes :

Procédé :  $\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u$

Modèle :  $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$

soit e l'erreur d'état:  $e = x_m - x_p$

L'objectif de la synthèse est d'assurer la poursuite adaptative, ce qui signifie l'annulation de l'erreur d'état tout en garantissant la stabilité du système de commande. Pour ce faire la présente approche, consiste à choisir une fonction de Lyapounov  $V$  fonction de  $e$ ,  $x_p$ , et  $u$  ( $V(e, x_p, u, t)$ ) et générer une commande  $u$  qui garantit la négativité de la dérivée  $\dot{V}$  quelques soient les valeurs des variables sus-citées et par la même la stabilité asymptotique du système.

Cette méthode conduit à des contrôleurs stables et efficaces. Malheureusement, le choix de la classe des fonctions de Lyapounov conduisant à des lois d'adaptation globalement stables pose énormément de problèmes. En effet, la seconde méthode de Lyapounov fournit une condition suffisante pour la stabilité globale mais non nécessaire, donc rien ne permet de conclure quant à l'instabilité du procédé lorsque la dérivée  $\dot{V}$  de la fonction de Lyapounov est positive. Il faudra alors examiner d'autres fonctions candidates.

### 2-2-3-Approche basée sur les concepts d'hyperstabilité et de positivité

La question de la stabilité globale des systèmes de commande adaptative à modèle de référence demeura posée jusqu'à 1974, l'année durant laquelle Landau proposa son contrôleur adaptatif par poursuite d'un modèle (adaptive model following controller : AMFC) fondé sur la théorie d'hyperstabilité de POPOV [58]. Dans

son ouvrage intitulé "Adaptive control the model reference approach" [59] Landau présente une étude détaillée des principaux aspects de cette méthode. Une amélioration pratique et simple a été proposée en 1990 par Benchoubane et Stoten [95] dans leur contribution originale le MCS (minimal controller synthesis). Ce contrôleur est un AMFC minimal, également, basé sur la théorie de l'hyperstabilité. Une autre variante du MRAC fut introduite par Broussard en 1978 [19,20], le CGT (command tracking generator) ou générateur de commandes de poursuite, elle repose sur les concepts de positivité et de quasi positivité [13]. Cette technique a fait l'objet de plusieurs modifications et améliorations, notamment celles de Sobel et Kaufmann [90] en 1980, ainsi que les versions proposées par Bar-Kana en 1982-1986 [10-14]. Signalons, également, que plusieurs autres techniques MRAC, utilisant la représentation de transfert et sortant du cadre de cette étude, ont été présentées. Nous citons, à titre d'exemple, les contributions de Monopoli [76], Morse, Narendra et Valvani, et Narendra et Lin [22].

### 2-3-COMMANDE LINEAIRE PAR POURSUITE D'UN MODELE

Considerons le système représenté par la figure 2-1

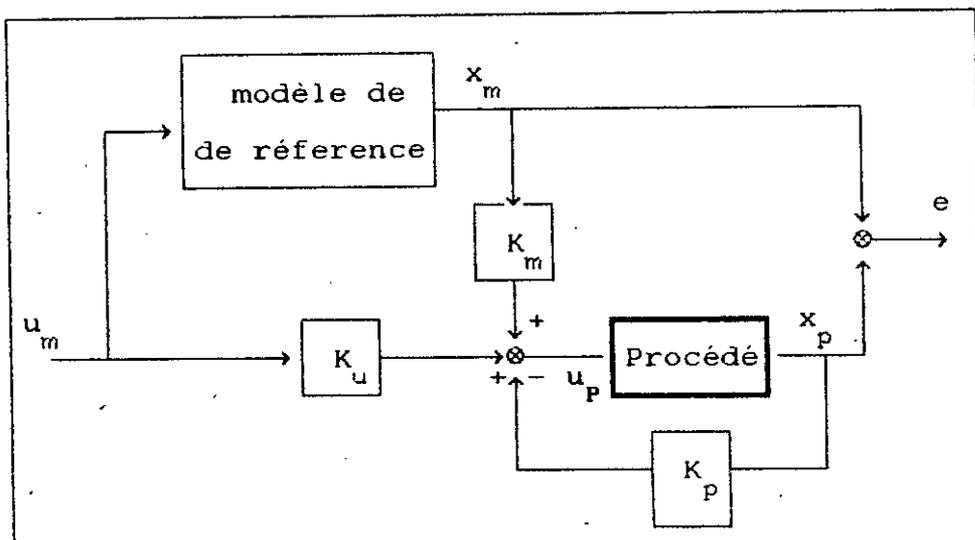


Fig.2.1. commande linéaire par poursuite d'un modèle

qui est décrit par les équations suivantes :

$$\text{Procédé : } \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p \quad (2-3.1)$$

$$\text{Modèle : } \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (2-3.2)$$

$$\text{Commandes : } u_p = -K_p x_p + K_m x_m + K_u u_m \quad (2-3.3)$$

$x_p$  et  $x_m$  sont respectivement les vecteurs d'état du procédé et du modèle (de dimension  $n$ ),  $u_m$  est le vecteur entrée du modèle (de dimension  $m$ ),  $u_p$  est le vecteur de commande du procédé (de dimension  $m$ ),  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $K_u$ ,  $K_p$ , et  $K_m$  sont des matrices constantes de dimension appropriées; les paires  $(A_m, B_m)$  et  $(A_p, B_p)$  sont supposées stabilisables et  $A_m$  est une matrice de Hurwitz.

Considérons l'erreur d'état:

$$e = x_m - x_p \quad (2-3.4)$$

*Objectif de la commande* : c'est d'assurer la poursuite parfaite du modèle pour toute entrée de référence  $u_m$  continue par morceaux, et  $e(0)=0$ , ce qui peut se traduire mathématiquement par :

$$\forall t > 0 : e(t) = x_m - x_p = 0 \text{ et } \dot{e}(t) = \dot{x}_m - \dot{x}_p = 0 \quad (2-3.5)$$

*Synthèse de la commande de poursuite* : le système qui réalise cet objectif s'appelle contrôleur linéaire par poursuite d'un modèle (linear model-following control : LMFC).

Ecrivons la dynamique de l'erreur en utilisant les équations ci dessus :

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_p) e + [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] x_p + (B_m - B_p K_u) u_m \quad (2-3.6)$$

Les relations (2-3.5) seront satisfaites si :

$$[A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] X_p + (B_m - B_p K_u) u_m = 0, \forall x_p \in \mathbb{R}^n, u_m \in \mathbb{C}^m \quad (2-3.7)$$

En plus ,

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e \quad (2-3.8)$$

doit être asymptotiquement stable, ce qui implique que sa matrice d'évolution  $(A_m - B_p K_m)$  doit être de Hurwitz.

L'équation (2-3.7) mène au système suivant :

$$\begin{cases} B_p (K_p - K_m) = A_m - A_p & (2-3.9) \\ B_p K_u = B_m & (2-3.10) \end{cases}$$

quin'admet de solutions que si :

$$\text{Rang}(B_p) = \text{Rang}[B_p, (A_m - A_p)] = \text{Rang}[B_p, B_m] \quad (2-3.11)$$

ce qui signifie que la poursuite parfaite n'existera que si les vecteurs colonnes de  $(A_m - A_p)$  et de  $B_m$  sont linéairement dépendants des vecteurs colonne de la matrice  $B_p$ .

La résolution du système (2-3.9), (2-3.10) donne :

$$\begin{cases} K_p - K_m = B_p^+ (A_m - A_p) & (2-3.12) \\ K_u = B_p^+ B_m & (2-3.13) \end{cases}$$

où  $B_p^+$  est la matrice pseudo inverse gauche de  $B_p$  définie comme

$$\text{suit : } B_p^+ = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T \text{ et } B_p^+ B_p = I$$

En substituant (2-3.12) et (2-3.13) dans (2-3.9) et (2-3.10) nous obtenons :

$$\begin{cases} (I - B_p B_p^+) (A_m - A_p) = 0 & (2-3.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I - B_p B_p^+) B_m = 0 & (2-3.15) \end{cases}$$

Ces deux relations sont connues sous le nom de *Conditions d'Erzberger pour la poursuite parfaite d'un modèle*.

Le calcul des gains LMFC ( $K_p$ ,  $K_u$ , et  $K_m$ ) se fera, si les conditions (2-3.14) et (2-3.15) sont satisfaites, à l'aide des relations (2-3.12) et (2-3.13) et (2-3.8).

-Si  $B_p$  est une matrice carrée non singulière on pourra alors remplacer  $B_p^+$  par  $B_p^{-1}$  sans problèmes;

-Si  $B_p$  est une matrice singulière ou rectangulaire  $B_p B_p^+ \neq I$ , les conditions d'Erzberger seront toujours satisfaites si  $(I - B_p B_p^+)$  est orthogonale à  $B_m$  et  $A_m - A_p$ .

On peut donc conclure ce paragraphe en remarquant que les conditions de poursuite parfaite sont essentiellement liées à la structure des matrices  $A_m$ ,  $A_p$ ,  $B_m$ , et  $B_p$  et non pas aux valeurs de leurs éléments.

## 2-4-CONTROLEUR ADAPTATIF PAR POURSUITE D'UN MODELE DE REFERENCE

### 2-4-1-Généralités

Le LMFC ne peut être efficace que lorsque le procédé est parfaitement connu, à paramètres fixes et satisfaisant les conditions d'Erzberger. Dans le cas contraire, procédé partiellement connu ou inconnu et variant dans le temps, la poursuite est compromise et la stabilité n'est plus garantie. Il faudra, à ce moment, recourir aux méthodes adaptatives. Le contrôleur adaptatif par poursuite d'un modèle (adaptive model following controller : AMFC) est justement une extension du LMFC au cas adaptatif, son objectif est d'assurer une poursuite parfaite en dépit des incertitudes paramétriques et perturbations externes.

Le AMFC comme tous les systèmes adaptatifs comporte deux boucles, une boucle ordinaire LMFC qui nécessite la connaissance des paramètres nominaux du procédé et une boucle d'adaptation qui intervient pour compenser les incertitudes agissant sur la dynamique du procédé. Il existe deux structures de AMFC, la structure à adaptation paramétrique, illustrée par la figure 2.2, très utilisée dans la poursuite adaptative et la structure à adaptation par signal d'entrée destinée essentiellement pour la réjection des perturbations d'état et équivalente à la structure paramétrique.

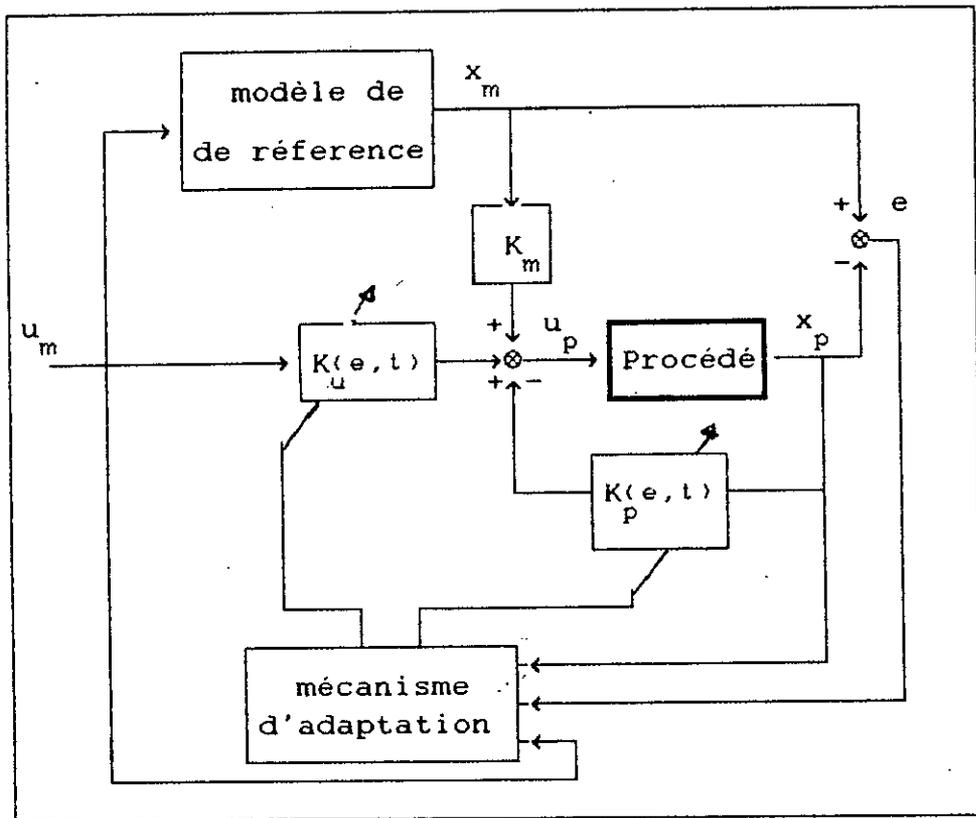


Fig.2.2. Structure d'un AMFC à adaptation paramétrique

En effet, dans le cas d'un système adaptatif les gains LMFC deviennent variants dans le temps et fonction de l'évolution de l'erreur  $e$  ce qui donne la commande suivante:

$$u_p(t) = K_p(e,t)x_p(t) + K_u(e,t)u_m + K_m x_m(t) \quad (2-4.1)$$

telles que :

$$K_p(e, t) = -K_p + \Delta K_p(e, t) \quad (2-4.2)$$

$$K_u(e, t) = K_u + \Delta K_u(e, t) \quad (2-4.3)$$

On peut donc mettre  $u_p(t)$  sous la forme :

$$u_p(t) = u_{p1}(t) + u_{p2}(t) \quad (2-4.4)$$

avec

$$u_{p1}(t) = K_p x_p + K_u u_m + K_m x_m \quad (2-4.5)$$

$$u_{p2}(t) = \Delta K_p(e, t) x_p + \Delta K_u(e, t) u_m \quad (2-4.6)$$

ce qui confirme l'équivalence des deux structures, dans ce qui suit nous nous baserons sur la structure à adaptation paramétrique présentée sur la figure 2.2. Le rôle du mécanisme d'adaptation est de maintenir l'erreur d'état  $e$  au voisinage de zéro lorsque les paramètres du procédé s'éloignent de leurs valeurs nominales et ce quelque soit la consigne  $u_m$ .

Une question se pose alors quant à la détermination d'une règle d'ajustement des gains LMFC qui réalisent l'objectif de poursuite tout en maintenant la stabilité du système, la solution de la stratégie AMFC consiste à ramener le problème d'adaptation à un problème d'hyperstabilité puis utiliser les propriétés des systèmes passifs pour la synthèse de la commande.

## 2-4-2-Systèmes hyperstables

Le système en boucle fermée représentée sur la figure 2.3 est dit hyperstable si le bloc d'action est positif (annexe) et le bloc de contre réaction satisfaisant l'inégalité de POPOV (annexe). Si de plus le bloc d'action est strictement positif réel (SPR) le système en boucle fermé sera dit asymptotiquement hyperstable. L'hyperstabilité (asymptotique) est équivalente à la stabilité (asymptotique) globale [58]. Si le système est asymptotiquement hyperstable, alors on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , où  $x(t)$  est le vecteur d'état de la chaîne directe.

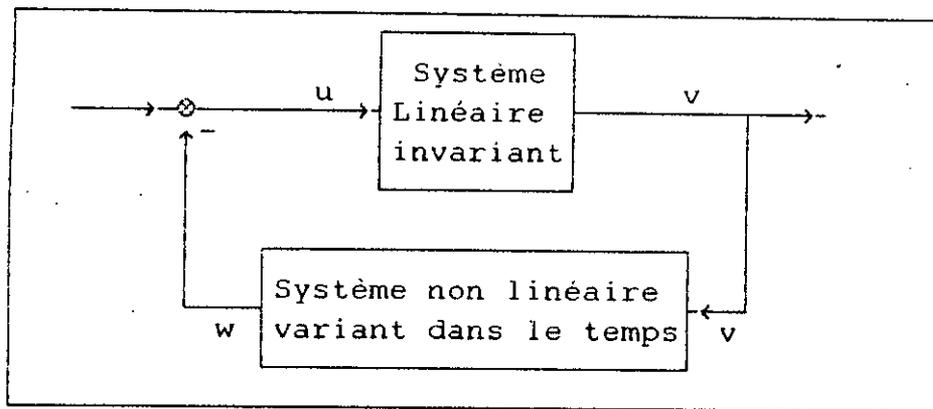


Fig.2.3. Représentation d'un système non linéaire en boucle fermée

### 2-4-3-Synthèse des commandes de poursuite

Pour pouvoir appliquer les résultats de la théorie de l'hyperstabilité, il faut commencer par mettre le système comprenant le procédé et le contrôleur sous la forme équivalente en boucle fermée telle que représentée par la figure 2.3. Il faut ensuite déterminer les gains qui vérifient les conditions d'hyperstabilité.

En écrivant l'équation régissant la dynamique de l'erreur, d'après les équations (2-3.1), (2-3.2), (2-3.4), et (2-4.1) on obtient:

$$e = A_m e + [A_m - A_p + B_p K_p - B_p \Delta K_p(e,t)] x_p(t) + [B_m - B_p K_u - B_p \Delta K_u(e,t)] u_m(t) \quad (2-4.7)$$

$K_m$  étant pris égal à zéro ce qui n'a aucune incidence sur les performances de poursuite du LMFC [59].

Lorsqu'il y'a poursuite parfaite, l'équation (2-3.6) devient:

$$e = A_m e - B_p \Delta K_p(e,t) x_p(t) - B_p \Delta K_u(e,t) u_m(t) \quad (2-4.8)$$

En général les gains ajustables  $\Delta K_p$  et  $\Delta K_u$  possèdent une forme PI, le terme proportionnel est transitoire il disparaît lorsque l'erreur de poursuite devient nulle, tandis que le terme intégral

fournit un excellent moyen pour la mémorisation des anciennes valeurs des gains.

$$\Delta K_p(e, t) = \Delta K_p(v, t) = \int_0^t \Phi_1(v, t, \tau) d\tau + \Phi_2(v, t) + \Delta K_p(0) \quad (2-4.9)$$

$$\Delta K_u(e, t) = \Delta K_u(v, t) = \int_0^t \Psi_1(v, t, \tau) d\tau + \Psi_2(v, t) + \Delta K_u(0) \quad (2-4.10)$$

Où  $v = C_e e$  est l'erreur améliorée avec  $C_e$  matrice de dimension appropriée introduite pour les besoins de calcul de la stabilité, elle est appelée dans la littérature *Compensateur linéaire*.

Représentation équivalente du modèle dynamique de l'erreur :

Les équations (2-3.7), (2-3.8), et (2-3.9) nous permettent de mettre l'ensemble procédé-contrôleur sous la forme dite équivalente en boucle fermée identique à celle de la figure 2.3 :

$$\dot{e} = A_m e - I w \quad (2-4.11)$$

$$v = C_e e \quad (2-4.12)$$

$$w = \Delta K_p(v, t) x_p + \Delta K_u(v, t) u_m \quad (2-4.13)$$

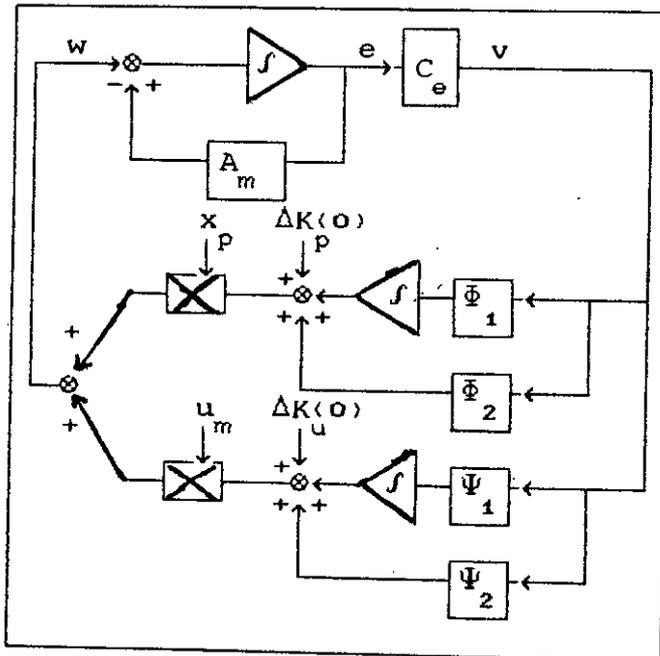


Fig. 2.4. Représentation équivalente en BF de l'AMFC

Résolution du problème AMFC : ayant mis le système sous une forme équivalente en boucle fermée, il faut maintenant déterminer les différentes composantes de la loi de commande, à savoir, le compensateur linéaire  $C_e$ , les  $\Phi_i$ , les  $\Psi_i$  de telle façon que le système global soit asymptotiquement hyperstable. Pour cela on procède en deux étapes :

Résolution du problème de positivité du bloc d'action: Cette étape donne :

$$C_e = B_p^T P \quad (2-4.14)$$

où  $P$  est la solution de l'équation de Lyapounov

$P A_m + A_m^T P = -Q$ ,  $Q$  étant une matrice semi-définie positive (voir annexe).

Résolution de l'inégalité de POPOV pour le bloc NL de contre réaction: Cette opération donne les expressions  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$  qui satisfont à l'inégalité :

$$\int_0^{t_1} v^T w dt \geq -\gamma_0^2 ; \forall t > 0 \text{ et } \gamma_0 \text{ constante positive finie}$$

La solution donnée par Landau et Courtiol [29] et Landau [59] se présente sous la forme :

$$\Phi_1(v, \tau) = F_A v(\tau) [G_A x_p(\tau)]^T \quad ; F_A, G_A > 0 \quad (2-4.15)$$

$$\Phi_2(v, \tau) = F'_A v(\tau) [G_A x_p(\tau)]^T \quad ; F'_A \geq 0 \quad (2-4.16)$$

$$\Psi_1(v, \tau) = F_B v(\tau) [G_B u_m(\tau)]^T \quad ; F_B, G_B > 0 \quad (2-4.17)$$

$$\Psi_2(v, \tau) = F'_B v(\tau) [G_B u_m(\tau)]^T \quad ; F'_B \geq 0 \quad (2-3.17)$$

où  $Z > 0 \Leftrightarrow Z$  définie positive et  $Z \geq 0 \Leftrightarrow Z$  semi définie positive.

Les matrices  $G_A$  et  $G_B$  peuvent être prises égales à l'identité,

les autres matrices sont prises telles que [92] :

$F_A = F_B = \alpha I$  et  $F'_A = F'_B = \beta I$ , avec les scalaires  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

*Algorithme de commande* : compte tenu des résultats ci-dessus issus de la théorie de l'hyperstabilité, on peut donc résumer la loi de commande AMFC comme suit :

$$u_p(t) = - [K_p - \Delta K_p(e, t)] x_p(t) + [K_u + \Delta K_u(e, t)] u_m(t) \quad (2-4.19)$$

$$\Delta K_p(e, t) = \int_0^t \alpha v(\tau) x_p(\tau) d\tau + \beta v(t) x_p(t) \quad (2-4.20)$$

$$\Delta K_u(e, t) = \int_0^t \alpha v(\tau) u_m(\tau) d\tau + \beta v(t) u_m(t) \quad (2-4.21)$$

$$v = B_p^T P e \quad (2-4.22)$$

$\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$

Avec  $K_p$  et  $K_u$  donnés par les relations (2-3.12) et (2-3.13) .

#### 2-4-4-Etude de la robustesse du AMFC

La synthèse du AMFC s'est faite dans le cas idéal (absence des perturbations paramétriques et externes), dans la pratique, les procédés sont sujets à des perturbations diverses. Une étude de la robustesse des schémas de commande en général et du AMFC en particulier s'avère donc nécessaire.

Soit  $d(t)$  le terme regroupant toutes ces perturbations, dans ce cas l'équation (2-3.1) du procédé devient :

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u + d(t) \quad (2-4.23)$$

les perturbations externes et autres peuvent être considérées comme incertitudes paramétriques et vice versa. En effet on peut écrire :

$$d(t) = \Delta A_p x_p + \Delta B_p u \quad (2-4.24)$$

où  $\Delta A$  et  $\Delta B$  sont les incertitudes sur les paramètres  $A$  et  $B$ .

Dans ce cas l'équation (2-4.23) devient :

$$\dot{x}_p = A_p^* x_p + B_p^* u \quad (2-4.25)$$

$$\text{où } A_p^* = A_p + \Delta A_p \text{ et } B_p^* = B_p + \Delta B_p.$$

Le AMFC est-il robuste vis à vis des perturbations décrites ci-dessus? Répondre à cette question équivaut à montrer que ce contrôleur maintient l'hyperstabilité asymptotique du procédé global en dépit de ces incertitudes.

Ecrivons la dynamique de l'erreur d'état dans un environnement incertain :

$$\begin{aligned} \dot{e}_m = & A_m e_m + [A_m - A_p^* + B_p^* K_p - B_p^* \Delta K_p(e, t)] x_p(t) \\ & + [B_m - B_p^* K_u - B_p^* \Delta K_u(e, t)] u_m(t) \end{aligned} \quad (2-4.26)$$

En considérant que les conditions (2-3.9) et (2-3.10) sont satisfaites, l'équation (2-4.26) peut être mise sous la forme suivante :

$$\dot{e} = A_m e + B_p [A^0 - \Delta K_p(e,t)] x_p(t) + B_p [B^0 - \Delta K_u(e,t)] u_m(t) \quad (2-4.27)$$

où  $B_p A^0 = -\Delta A_p + \Delta B_p K_p - \Delta B_p \Delta K_p$  et  $B_p B^0 = -B_p K_u - \Delta B_p \Delta K_u$ ,  $A^0$  et  $B^0$  étant des matrices de dimensions appropriées.

Après la prise en compte des perturbations, le système équivalent en boucle fermée de l'erreur s'écrira comme suit:

$$\dot{e} = A_m e - B_p w \quad (2-4.28)$$

$$v = C_e e \quad (2-4.29)$$

$$w = (\Delta K_p(v,t) - A^0) x_p + (\Delta K_u(v,t) - B^0) u_m \quad (2-4.30)$$

Pour montrer que la stratégie AMFC est robuste, il suffit de prouver que la positivité du bloc direct et la passivité du bloc de rétroaction sont toujours garanties. Landau a montré [59] que le choix de  $C_e$  donnée par (2-4.14) maintient la positivité du bloc d'action dans des conditions incertaines. Pour la seconde propriété la tâche est un peu plus délicate car il faut prouver que l'inégalité de Popov est toujours vérifiée.

Posons :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v^T w dt, \quad t_1 > t_0 \quad (2-4.31)$$

En utilisant les équations (2-4.19)-(2-4.22) on trouve :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (2-4.32)$$

tels que :

$$I_1 = \alpha \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} v_j x_i \left( \int_0^t v_j x_i d\tau - A_{ij}^0 \right) dt \quad (2-4.33)$$

$$I_2 = \beta \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} v_j^2 x_i^2 dt \quad (2-4.34)$$

$$I_3 = \alpha \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} v_j u_{m_i} \left( \int_0^t v_j u_{m_i} d\tau - B_{ij}^0 \right) dt \quad (2-4.35)$$

$$I_4 = \beta \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} v_j^2 u_{m_i}^2 dt \quad (2-4.36)$$

où  $N_i$  est le  $i$ ème élément du vecteur  $N$  et  $M_{ij}$  est le ( $i$ ème,  $j$ ème) élément de la matrice  $M$ .

Les relations (2-4.34) et (2-4.36) sont des sommes d'intégrales de carrées de fonctions,  $\alpha$  et  $\beta$  étant positifs ce qui implique que  $I_2$  et  $I_4$  sont positifs. Les relations (2-4.33) et (2-4.35) sont des sommes d'intégrales de la forme :

$$\int k f(t) \dot{f}(t) dt \geq -k f^2(t)/2$$

en posant par exemple  $f(t) = \int_0^t v_j x_i dt - A_{ij}^0$ , on peut donc conclure que  $I_1 \geq -\gamma_1^2$  et  $I_3 \geq -\gamma_2^2$  sous réserve que les variations de  $A_0$  et  $B_0$  soient faibles par rapport à celles des autres variables du procédé. Ceci nous permet donc d'affirmer en vertu de (2-4.32) que  $I \geq -\gamma^2$ , avec  $\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ . En définitive, nous pouvons conclure que l'inégalité de Popov est satisfaite pour tout système soumis à des perturbations externes ou incertitudes paramétriques lentes relativement aux autres variables du procédé.

## 2-5-CONTROLEUR ADAPTATIF MINIMAL PAR POURSUITE D'UN MODELE

### 2-5-1-Généralites

Le contrôleur AMFC nécessite la connaissance des paramètres nominaux du procédé, donc une identification préalable du procédé

est impérative et ce afin de synthétiser un contrôleur linéaire dont les paramètres seront ajustés à l'aide d'un mécanisme d'adaptation. Le rôle principal de ce dernier étant la compensation des diverses incertitudes et perturbations affectant le système nominal. Stoten et Benchoubane [95] ont proposé en 1990 une structure minimale du AMFC et qui dérive toujours du point de vue de la théorie de l'hyperstabilité et qui libère de l'exigence de la connaissance des paramètres nominaux, ils l'appelèrent MCS (minimal controller synthesis). L'idée principale est d'éliminer la partie LMFC de la loi de commande en posant ( $K_m = K_p = K_u = 0$ ) ce qui minimisera la quantité d'informations prérequis sur le procédé car l'identification des paramètres nominaux du procédé ne sera plus nécessaire. Le MCS est donc une extension de l'AMFC aux systèmes inconnus ou partiellement connus (l'unique connaissance préalable requise est l'ordre du système et l'accessibilité de ces différents états), son implantation ne nécessite aucun régulateur linéaire, et il n'est plus astreint à satisfaire aux conditions d'Erzberger.

### 2-5-2-Synthèse du contrôleur MCS

En posant dans (2-4.7)

$$K_m = K_p = K_u = 0 \quad (2-5.1)$$

la dynamique de l'erreur devient :

$$\dot{e} = A_m e - B_p \Delta K_p(e,t) x_p(t) - B_p \Delta K_u(e,t) u_m(t) + d'(t) \quad (2-5.2)$$

avec 
$$d'(t) = [A_m - A_p] X_p(t) + B_m u_m(t) \quad (2-5.3)$$

Le MCS dérivant du même principe que l'AMFC, sa synthèse sera donc similaire à celle du AMFC et suivra les mêmes étapes à savoir:

Structure équivalente en boucle fermée du modèle de l'erreur :

$$e = A_m e - I w + d'(t) \quad (2-5.4)$$

$$v = C_e e \quad (2-5.5)$$

$$w = \Delta K_p(v, t) x_p + \Delta K_u(v, t) u_m \quad (2-5.6)$$

Résolution du problème de la positivité du bloc d'action: cette étape donne :

$$C_e = P \quad (2-5.7)$$

où P la solution de l'équation de Lyapounov la même que celle définie dans (2-4.14).

Résolution de l'inégalité de Popov: Cette étape n'a pas été considéré au début [95], on s'est tout simplement contenté de déduire la loi de commande à partir du AMFC ce qui a donné :

$$u_p(t) = \Delta K_p(e, t) x_p(t) + \Delta K_u(e, t) u_m(t) \quad (2-5.8)$$

$$\Delta K_p(e, t) = \int_0^t \alpha v(\tau) x_p(\tau) d\tau + \beta v(t) x_p(t) \quad (2-5.9)$$

$$\Delta K_u(e, t) = \int_0^t \alpha v(\tau) u_m(\tau) d\tau + \beta v(t) u_m(t) \quad (2-5.10)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des matrices de dimensions appropriées  
telles que  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$

cette déduction s'est faite également sur la base d'études pratiques et de simulation. Des valeurs pour les gains  $\alpha$  et  $\beta$ , considérés comme des accélérateurs de convergence, ont été proposées par Stoten et Benchoubane [95] suivant la nature du procédé. Pour un système monoentrée-monosortie (SISO)  $\alpha$  et  $\beta$  sont données comme suit :

$$\alpha = [0 \dots 0 \alpha_n] \quad , \quad \beta = [0 \dots 0 \beta_n] \quad (2-5.11)$$

Pour le cas multientrées-multisorties (MIMO) on a :

$$\alpha = \text{diag}[[0 \dots 0 \alpha_1][0 \dots 0 \alpha_2] \dots [0 \dots 0 \alpha_m]] \quad (2-5.12)$$

$$\beta = \text{diag}[[0 \dots 0 \beta_1][0 \dots 0 \beta_2] \dots [0 \dots 0 \beta_m]]$$

Dans le paragraphe suivant on montrera que la stratégie de commande ci-dessus, confrontée à des perturbations externes et incertitudes paramétriques qui n'ont pas été prises en compte et à des perturbations  $d'(t)$  traduisant le fait que les conditions d'Erzberger ne sont pas satisfaites, est robuste.

### 2-5-3-Etude de la robustesse du MCS

La loi de commande MCS dérivant d'une modification empirique du AMFC doit être soumise à une étude rigoureuse de robustesse afin de prouver que l'hyperstabilité asymptotique du système est maintenue en dépit de la suppression du LMFC, qui s'est traduite par un terme de perturbation noté  $d'(t)$ , et d'autres perturbations d'origine structurelle ou externe similaires à ceux auxquels le AMFC est confronté. De manière similaire au AMFC, considérons le système perturbé (2-4.25), la commande d'un tel système à l'aide du MCS donne la dynamique de l'erreur suivante :

$$e = A_m e - I w \quad (2-5.13)$$

$$v = C_e e \quad (2-5.14)$$

$$w = (B_p^* \Delta K_p(v,t) - A_o) x_p + (B_p^* \Delta K_u(v,t) - B_o) u_m \quad (2-5.15)$$

où  $A_o$  et  $B_o$  sont des matrices de dimensions appropriées représentant les divers termes de perturbation affectant le procédé (à la manière de  $A^o$  et  $B^o$  de l'équation (2-4.27)). Le choix de  $C_e = P$ , garantit la positivité du bloc d'action du système équivalent en boucle fermée [94]. pour l'étude de l'hyperstabilité du bloc de contre réaction on doit considérer les cas de systèmes SISO et MIMO.

Cas d'un système SISO: Le procédé est supposé modélisé sous la forme canonique de phase suivante :

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (2-5.16)$$

le signe de  $b_1$  étant supposé connu (normalement,  $b_1 > 0$ ). Le modèle de référence aura également la même structure ce qui implique que les termes  $A_0$  et  $B_0$ , dont les coefficients sont inconnus, et variants dans le temps auront la forme :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{01} \end{bmatrix} \quad (2-5.17)$$

En considérant l'intégrale  $I = \int_{t_0}^{t_1} v^T w dt$ , en suivant les mêmes démarches du paragraphe 2-4-4, et en utilisant les relations (2-5.9)-(2-5.11), et (2-5.13)-(2-5.17), on obtient :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (2-5.18)$$

tels que :

$$I_1 = \alpha_n \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} b_{nn} v_{ni} X_i \left( \int_0^t v_{ni} x_i d\tau - a_i / (b_i^* \alpha_n) \right) dt \quad (2-5.19)$$

$$I_2 = \beta_n \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} b_{nn} v_{ni}^2 x_i^2 dt \quad (2-5.20)$$

$$I_3 = \alpha_n \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} b_{nn} v_{ni} u_{mi} \left( \int_0^t v_{ni} u_{mi} d\tau - b_{0i} / (b_i^* \alpha_n) \right) dt \quad (2-5.21)$$

$$I_4 = \beta_n \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} b_{nn} v_{ni}^2 u_{mi}^2 dt \quad (2-5.22)$$

Les mêmes arguments que ceux du paragraphe 2-4-4 nous permettent de conclure que  $I \geq -\gamma^2$ ,  $\gamma$  étant un réel, sous réserve, comme dans le cas du AMFC, que  $A_0$  et  $B_0$  varient plus lentement que les autres variables du procédé et que  $\alpha_n, \beta_n$ , et  $b_n$  soient du même signe, et d'affirmer que le MCS maintient l'hyperstabilité du bloc de contre réaction et par la même la stabilité globale asymptotique du procédé en présence d'incertitudes et perturbations.

Cas d'un système MIMO : L'étude de la robustesse du MCS multivariable pour un système quelconque est une opération très délicate et compliquée et est toujours au stade de la recherche, pour nôtre part nous choisissons une structure particulière de procédés qui est une généralisation de la représentation canonique SISO (2-5.16) que l'on rencontre dans beaucoup de domaines tels qu'en électromécanique, hydraulique et la commande des moteurs. Les matrices d'évolution et de commande ont la forme suivante:

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix} \quad (2-5.23)$$

m étant le nombre de degrés de libertés du procédé et

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_{1i}^{ii} & -a_{2i}^{ii} & \dots & \dots & \dots & -a_{ni}^{ii} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_{1j}^{ij} & a_{2j}^{ij} & \dots & \dots & \dots & a_{nj}^{ij} \end{bmatrix}$$

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{ii} \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{ij} \end{bmatrix} \quad (2-5.24)$$

où  $n_i$  est la dimension de chaque degré de liberté telle que  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ ,  $n$  étant l'ordre du procédé. La structure du modèle de référence doit également être partiellement identique à celle du procédé. La paire  $\{A_m, B_m\}$  a presque la même forme que (2-5.23) excepté que les termes de couplage  $A_{mij}$  et  $B_{mij}$  doivent être nuls. Les matrices  $A_0$  et  $B_0$  dans (2-5.15) auront la forme suivante :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{mn}^1 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^m & a_{12}^m & \dots & a_{mn}^m \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{11}^1 & b_{12}^1 & \dots & b_{mm}^1 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{11}^m & b_{12}^m & \dots & b_{mm}^m \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'état  $x$  et le vecteur erreur amélioré  $v$ , dans le cas MIMO, deviennent :

$$x^T = [x_{11} \dots x_{1n_1} \quad x_{21} \dots x_{2n_2} \dots \dots x_{m1} \dots x_{mn_m}]$$

$$v^T = [v_{11} \dots v_{1n_1} \quad v_{21} \dots v_{2n_2} \dots \dots v_{m1} \dots v_{mn_m}]$$

La matrice  $B_p^*$  de (2-5.15) est de forme identique à  $B_p$  et d'éléments  $b_{ii}^*$  et  $-b_{ij}^*$ . Pour les besoins de calculs on introduit la matrice  $B'^*$  définie telle que [94] :

$$B'^* u = B_p^* u, \quad B'^* = \text{diag} [ B_{11}^* | B_{22}^* | \dots | B_{mm}^* ], \quad \text{avec } B_{ii}^* = [0 \dots 0 \ b_{ii}^*].$$

En utilisant  $B'^*$  au lieu de  $B^*$  dans (2-5.15) et la relation (2-5.12) au lieu de (2-5.11) et en procédant de la même manière que précédemment on aboutit aux résultats suivants :

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ b_{11}^* \alpha_1 \left[ v_{1n_1} x_{11} \int_0^t v_{1n_1} x_{11} d\tau - a_{11}^1 / (b_{11}^* \alpha_1) \right] \right. \\
+ \dots + v_{1n_1} x_{mn_m} \int_0^t v_{1n_1} x_{mn_m} d\tau - a_{11}^1 / (b_{11}^* \alpha_1) \left. \right] \\
+ \dots + b_{mm}^* \alpha_m \left[ v_{mn_m} x_{11} \int_0^t v_{mn_m} x_{11} d\tau - a_{11}^m / (b_{mm}^* \alpha_m) \right. \\
+ \dots + v_{1n_1} x_{mn_m} \int_0^t v_{1n_1} x_{mn_m} d\tau - a_{mn}^m / (b_{mm}^* \alpha_m) \left. \right] \left. \right\} dt \\
I_2 = \int_0^t \left[ \beta_1 b_{11}^* v_{1n_1}^2 + \dots + \beta_m b_{mm}^* v_{mn_m}^2 \right] \left[ x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{mn_n}^2 \right] dt$$

Ces intégrales étant similaires à celles du cas SISO, on peut facilement prouver que  $I_1 \geq -\gamma_1^2$  et  $I_2 \geq 0$  si  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $b_{ii}^*$  sont de même signe. il en est de même pour  $I_3$  et  $I_4$  du type (2-5.21) et (2-5.22) et ressemblant respectivement à  $I_1$  et  $I_2$  où il suffit de remplacer  $X$  par  $u_m$ . En définitive on peut donc affirmer que pour les systèmes MIMO modélisables par la forme canonique (2-5.23)-(2-5.24) l'inégalité de Popov est vérifiée même dans un environnement incertain et donc que le MCS est robuste pour ce type de procédés soumis à des perturbations relativement lentes par rapport aux autres variables du procédé.

## 2-6-CONTROLEUR ADAPTATIF PAR GENERATION DE COMMANDES DE POURSUITE

### 2-6-1-Généralites

les contrôleurs MRAC proposées ci-dessus supposent l'accessibilité de tous les états du procédé nominal, chose qui n'est pas toujours possible, et nécessitent la connaissance d'une borne supérieure de l'ordre du procédé ce qui est très délicat dans le cas des systèmes complexes. En pratique, l'ordre du procédé peut être très élevé et/ou inconnu, dans ce cas l'implémentation des contrôleurs MRAC qui exigent un modèle de référence de même ordre que le procédé devient très compliquée et parfois impossible et même la stabilité de ces systèmes lorsque l'ordre est sous-estimé n'est pas garantie.

Le contrôleur adaptatif par génération de commandes de poursuite (Command Generator Tracking : CGT) est destiné principalement à la commande des systèmes complexes d'ordre élevé, soumis à des perturbations aussi bien structurelles qu'externes, avec un modèle de référence d'ordre plus bas ou réduit. Le premier CGT fut proposé en 1978 par Broussard [20], il avait pour ambition d'assurer la poursuite asymptotique d'un modèle à consigne échelon à un système complexe stabilisable par retour de sortie constant. En combinant cet algorithme avec les méthodes issues de la théorie de la stabilité de Lyapounov Sobel, Mabiou, et Kaufman [90] présentèrent en 1982 un nouvel algorithme CGT simplifié pour la commande des systèmes complexes multivariables, ils montrèrent que ce contrôleur garantit la stabilité et la poursuite asymptotique parfaite des systèmes *quasi positifs* (*almost strictly positive real*). Bar-Kana et Kaufman [14] proposèrent une extension de cette stratégie de commande au systèmes à modèle avec consigne variable et à la classe de systèmes stabilisables par un quelconque retour de sortie. Dans ce qui suit nous présenterons la notion de quasi positivité, l'algorithme CGT, et

une généralisation de cet algorithme; nous étudierons également la robustesse de chaque variante de CGT.

## 2-6-2-Notions de systèmes quasi positifs

Définition 1 : Soit  $G_a(s)$  la  $(m \times m)$  matrice d'un système linéaire continu à déphasage minimal. S'il existe une matrice constante  $\tilde{K}_e$  telle que la matrice de transfert du système résultant en boucle fermée  $G_s(s) = [I + G_a(s)\tilde{K}_e]^{-1} G_a(s)$  soit strictement positive réelle. Alors  $G_a(s)$  sera dite quasi strictement positive (almost strictly positive real: ASPR) et le système correspondant sera également ASPR.

La classe des systèmes ASPR est la candidate favorite pour l'application du contrôle CGT, cette classe étant très restrictive, il s'avère donc nécessaire d'étendre le champ d'application du CGT vers d'autres classes de systèmes.

Lemme 1 : Soit  $G_p(s)$  la matrice d'un système linéaire continu non nécessairement stable ou à déphasage minimal. S'il existe une matrice constante non singulière de rétroaction  $K_y$  telle que la matrice de transfert du système résultant en boucle fermée  $G_c(s) = [I + G_p(s) K_y]^{-1} G_p(s)$  soit asymptotiquement stable, dans ce cas il existe une matrice d'action non singulière, par exemple,  $D = K_y^{-1}$ , telle que le système augmenté en boucle ouverte  $G_a(s) = D + G_p(s)$  soit ASPR.

En pratique une action parallèle constante est très difficile à réaliser, cette difficulté peut être surmontée en remplaçant dans  $G_a(s)$  l'action statique  $D$  par une dynamique de premier ordre de la forme :  $D(s) = D/(1 + s/s_0)$  qui maintiendra la quasi positivité du système augmenté si  $s_0$  est choisi suffisamment élevé.

En général, le gain d'action  $D$  est sélectionné très faible de façon à ce que  $G_a(s)$  soit pratiquement égale à  $G_p(s)$  minimisant le

biais introduit par le bloc d'action supplémentaire.

Dans le lemme 1 on a présenté le cas où le système est stabilisable par une rétroaction constante, on peut également étendre le concept de quasi positivité aux procédés stabilisables par un retour dynamique.

Lemme 2 : Soit  $G_p(s)$  la matrice de transfert ( $m \times m$ ) d'un système continu linéaire, pas nécessairement stable ou à déphasage minimal. Soit  $H(s)$  un ( $m \times m$ ) retour de sortie dynamique de degré  $p < n$  ( $n$  étant le degré de la matrice de transfert du procédé) de tel que la matrice de transfert du système résultant en boucle fermée  $G_1(s) = [I + G_p(s) H(s)]^{-1} G_p(s)$  soit asymptotiquement stable. Dans ce cas le système augmenté  $G_a(s) = G_p(s) + H^{-1}(s)$  est ASPR si  $H^{-1}(s)$  est ASPR.

### 2-6-3-Problème de la poursuite d'un modèle d'ordre réduit

Considérons le système augmenté ASPR suivant :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (2-6.1)$$

$$y = C x \quad (2-6.2)$$

où  $x$ ,  $y$ , et  $u$  sont respectivement le vecteur d'état de dimension  $n$ , le vecteur de sortie de dimension  $m$ , et le vecteur de commande de dimension  $m$ ,  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées.

On définit également, pour les besoins d'analyse, le système fictif SPR, issu du système (2-6.1)-(2-6.2) par le retour de sortie fictif constant  $\tilde{K}_e$ , suivant :

$$\dot{x} = A_c x + B u \quad (2-6.3)$$

$$y = C x \quad (2-6.4)$$

avec  $A_c = A - B \tilde{K}_e C \quad (2-6.5)$

Objectif : imposer aux sorties du procédé augmenté (2-6.1)-(2-6.2), supposé complexe et d'ordre très élevé pas nécessairement connu, la poursuite des sorties d'un modèle d'ordre réduit d'équations :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (2-6.6)$$

$$y_m = C_m x_m \quad (2-6.7)$$

Tel que :  $\dim[x] \gg \dim[x_m]$  (2-6.8)

A cet effet, on utilise une loi de commande linéaire ressemblant fortement au LMFC sauf que dans notre cas on utilise les sorties du procédé au lieu de ses états. Soit

$$u_p(t) = \tilde{K}_e [y_m(t) - y(t)] + \tilde{K}_x x_m(t) + K_u u_m(t) \quad (2-6.9)$$

De telle façon que :  $y(t) = y_m(t)$  (2-6.10)

Dans le cas où la poursuite parfaite est atteinte la commande  $u_p(t)$  devient idéale et sera notée  $u^*(t)$  telle que :

$$u_p^*(t) = \tilde{K}_x x_m(t) + \tilde{K}_u u_m(t) \quad (2-6.11)$$

Il serait important de noter à ce stade que cette situation idéale n'est pas nécessairement possible. Autrement dit, il n'est pas nécessairement garanti que le système (2-6.1)-(2-6.2), lorsqu'excité par la commande idéale (2-6.9), satisfasse (2-6.10) [11]. Par conséquent, on supposera seulement qu'il existe des trajectoires cibles fictives de la forme :

$$\dot{x}^*(t) = A x^*(t) + B u^*(t) \quad (2-6.12)$$

$$y^*(t) = C x^*(t) \quad (2-6.13)$$

qui, lorsqu'excitées par (2-6.9), satisfont (2-6.10). Notons également que l'ordre (éventuellement inconnu) du système cible et de celui du système augmenté doivent être les mêmes, ces deux

systemes peuvent être totalement différents, on suppose seulement que leurs sorties sont identiques.

Existence des trajectoires cibles : Posons  $x^*(t) = Z x_m(t)$  (2-6.14)

pour prouver que les trajectoires (2-6.12)-(2-6.13) existent, il suffit de montrer que Z existe. En tenant compte de (2-6.14) on obtient :

$$y^*(t) = C x^*(t) = C Z x_m(t) = C_m x_m(t) = y_m(t) \quad (2-6.15)$$

ce qui entraîne :

$$C Z = C_m \quad (2-6.16)$$

l'équation (2-6.16) n'a de solutions que si :

$$\text{Rang } [C \ C_m] = \text{Rang } C \quad (2-6.17)$$

ce qui est généralement garanti sous la condition (2-6.8).

Bar Kana a montré [14] que si la relation (2-6.17) est vérifiée, alors un contrôleur adaptatif nonlinéaire peut conduire le procédé (2-6.1)-(2-6.2) vers la quasi poursuite parfaite.

#### 2-6-4-Algorithmme de commande CGT des procédés ASPR

Dans un environnement réel le système augmenté ASPR est éventuellement soumis à des perturbations structurelles ou externes (Figure 2.5) ce qui traduit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = A x + B u + d_i(t) \quad (2-6.18)$$

$$y = C x + d_o(t) \quad (2-6.19)$$

$d_i(t)$  et  $d_o(t)$  étant des perturbations d'entrée et de sorties bornées.

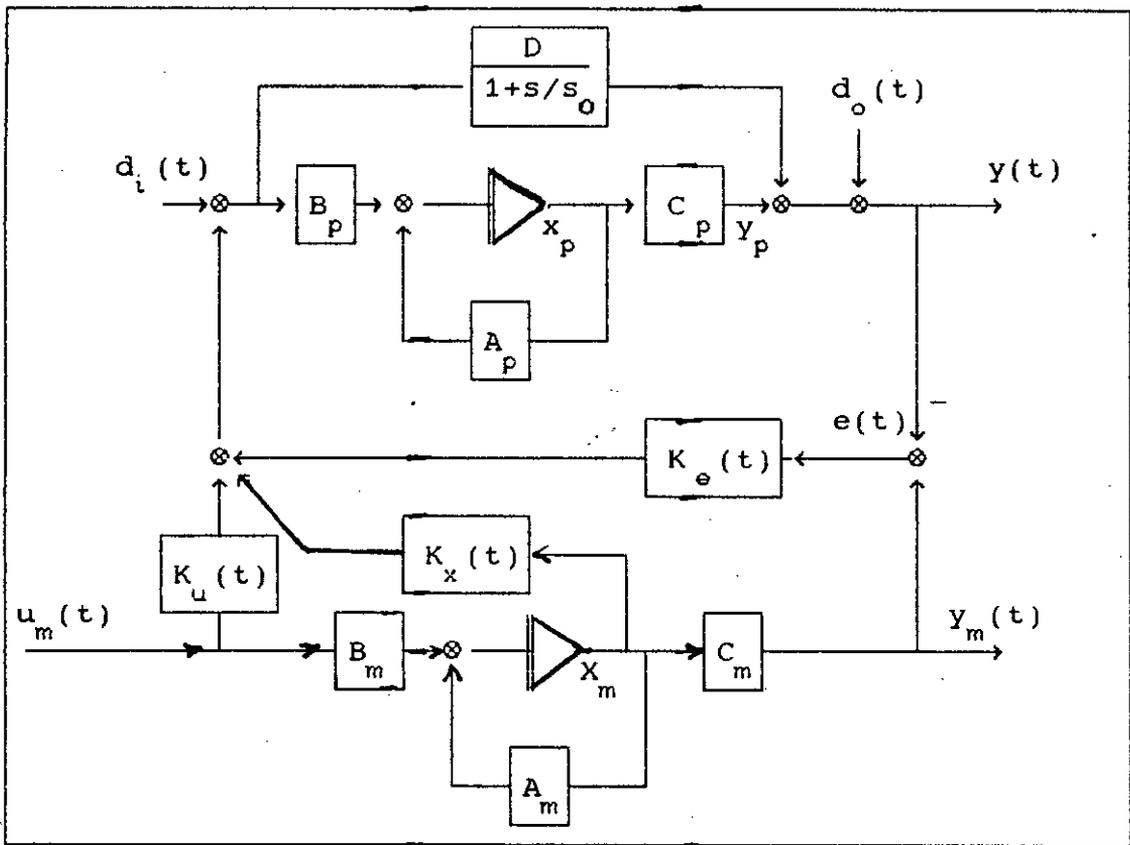


Fig-2-5-Configuration de base d'une loi de commande CGT

On définit les erreurs d'état  $e_x$  et de sortie  $e_y$  comme suit :

$$e_x(t) = x^*(t) - x(t) \quad (2-6.20)$$

$$e_y(t) = y_m(t) - y(t) = y^*(t) - y(t) = C e_x(t) - d_o(t) \quad (2-6.21)$$

Dans le cas adaptatif, présence des perturbations et variations de paramètres, les gains de la loi de commande linéaire (2-6.9) deviennent variants dans le temps et la loi de commande CGT est donnée par les relations suivantes [14] :

$$u_p(t) = K(t) r(t) \quad (2-6.22)$$

$$\text{où } K(t) = \begin{bmatrix} K_e(t) & K_x(t) & K_u(t) \end{bmatrix}, \text{ et } r^T(t) = \begin{bmatrix} e_y^T(t) & x_m^T(t) & u_m^T(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{tels que : } K(t) = K_I(t) + K_P(t) \quad (2-6.23)$$

$$\text{avec : } K_P(t) = e_y(t) r^T(t) T_1 \quad (2-6.24)$$

$$K_I(t) = [e_y(t) r^T(t) - \sigma K_I(t)] T_2 \quad (2-6.25)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont des matrices constantes ou variantes dans le temps définies positives. Le terme  $\alpha$  provenant d'une idée de Ioannou et Kokotovic, est introduit en vue de garantir la robustesse de l'algorithme de commande vis à vis des perturbations parasites [50]

### 2-6-5-Généralisation de l'algorithme CGT

La synthèse ci-dessus de l'algorithme de commande CGT s'est faite sous l'hypothèse de la connaissance à priori d'un retour de sortie garantissant la quasi positivité du système augmenté. Dans de nombreuses applications cette information n'est pas disponible et le choix d'une action directe  $H^{-1}$  risque d'une part de ne pas garantir que le procédé augmenté soit ASPR et d'autre part d'introduire un large biais indésirable. Dans l'optique de résoudre ce problème, Bar Kana proposa en 1986 un algorithme CGT généralisé capable de déterminer de manière adaptative un action directe stabilisatrice sous l'hypothèse que le procédé soit stabilisable via un retour de sortie dynamique inconnu d'ordre inférieur à un entier  $p$  donné.

#### Configuration réelle positive lorsque

tous les coefficients sont connus : Considérons le procédé contrôlé  $G_p(s)$  représenté dans l'espace d'état comme suit :

$$X_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (2-6.26)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (2-6.27)$$

l'action supplémentaire assurant la quasi positivité du système augmenté est choisie, pour la synthèse de la procédure adaptative, telle que :

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \quad (2-6.28)$$

$$y_s(t) = C_s x_s(t) \quad (2-6.29)$$

où

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (2-6.30)$$

et  $C_s$  est choisie à priori en vue d'établir les positions désirables de l'action directe (2-6.27)-(2-6.28). La sortie du système augmenté est donnée par l'équation :

$$y(t) = y_p(t) + y_s(t) = C_p x_p(t) + C_s x_s(t) \quad (2-6.31)$$

La loi de commande est définie par :

$$u_p(t) = -\tilde{K}_e y(t) + u(t), \quad u_s(t) = \tilde{K}_x x_s(t) + \tilde{K}_u u_p(t) \quad (2-6.32)$$

de telle sorte que le système fictif en boucle fermée ci après soit strictement positif réel.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} + B u(t), \quad y(t) = C \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} \quad (2-6.33)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_p - B_p \tilde{K}_e & C_p & -B_p \tilde{K}_e & C_s \\ -B_s \tilde{K}_u & \tilde{K}_e & C_p & \\ A_s - B_s \tilde{K}_x & -B_s \tilde{K}_u & \tilde{K}_e & C_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ B_s \tilde{K}_u \end{bmatrix}$$

$$C = [C_p \quad C_s] \quad (2-6.34)$$

Problème de la poursuite d'un modèle réduit : L'objectif de la commande est d'imposer au procédé augmenté ASPR (2-6.26)-(2-6.31) la poursuite du modèle réduit (2-6.6)-(2-6.7). Les commandes de poursuite linéaire possèdent la forme suivante :

$$u_p(t) = \tilde{K} r(t), \quad u_s(t) = \tilde{K}_{x_s} x_s(t) + \tilde{K}_{u_p} u_p(t) \quad (2-6.35)$$

$$\text{où } \tilde{K} = [\tilde{K}_e \quad \tilde{K}_{x_m} \quad \tilde{K}_{u_m}] , \quad r^T(t) = [(y_m(t) - y(t))^T \quad x_m^T(t) \quad u_m^T(t)]$$

Etudions la possibilité d'existence de la poursuite parfaite, dans ce cas  $y(t) = y_m(t)$ , la loi de commande (2-6.35) devient alors idéale :

$$u_p^* = \tilde{K}_{x_m} x_m(t) + \tilde{K}_{u_m} u_m(t), \quad u_s^*(t) = \tilde{K}_{x_s} x_s^*(t) + \tilde{K}_{u_p} u_p^*(t) \quad (2-6.36)$$

et le procédé augmenté est supposé se déplacer le long de certaines trajectoires idéales bornées permettant la poursuite parfaite. Supposons que ces trajectoires obéissent aux relations suivantes :

$$x_p^*(t) = Z_p x_m(t), \quad x_s^*(t) = Z_s x_m(t) \quad (2-6.37)$$

la condition de poursuite :

$$y_p^*(t) = C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t) = y_m(t), \quad y_s^*(t) = C_s x_s^*(t) = 0 \quad (2-6.38)$$

est alors satisfaite si :

$$C_p x_p = C_m x_m, \quad C_s x_s = 0 \quad (2-6.39)$$

relation qui est en général vérifiée spécialement sous l'hypothèse (2-6.8) car le nombre de variables, dans ce cas, devient supérieur au nombre d'équations et le système (2-6.39) possédera au moins une solution  $(x_p, x_s)$ . Dans le cas où les coefficients du procédé sont inconnus ou variants dans le temps, l'algorithme CGT généralisé se chargera d'une part de maintenir la quasi positivité du procédé augmenté en faisant varier les gains  $K_{x_s}$  et  $K_{u_p}$  dans (2-6.32), ce qui explicite l'idée du calcul adaptatif de l'action parallèle, et de mener le système augmenté vers les trajectoires

idéales tout en compensant les diverses perturbations et incertitudes agissant sur le procédé d'autre part.

Algorithme de Contrôle : Dans un environnement réel le procédé augmentée sera représenté dans l'espace d'état comme suit :

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + E_p d_i(t) \quad (2-6.40)$$

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s u_s(t) + E_s d_i(t) \quad (2-6.41)$$

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t) = C_p x_p(t) + C_s x_s(t) + d_o(t) \quad (2-6.42)$$

où  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  sont telles que définies dans (2-6.28)-(2-6.29) et  $d_i(t)$  et  $d_o(t)$  étant respectivement des perturbations d'entrée et de sortie bornées.

Définissons les erreurs d'état suivantes :

$$e_p(t) = x_p^*(t) - x_p(t), \quad e_s(t) = x_s^*(t) - x_s(t) \quad (2-6.43)$$

par conséquent l'erreur de sortie est :

$$e_y(t) = y_m(t) - y(t) = y^*(t) - y(t) = \begin{bmatrix} C_p & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_s \end{bmatrix} \quad (2-6.44)$$

Comme mentionné ci-dessus, les gains de la loi de commande linéaire (2-6.34) deviennent variants dans le temps dans le cas adaptatif et l'algorithme d'adaptation est donné comme suit :

$$u_p(t) = K(t) r(t), \quad u_s(t) = K_s(t) r_s(t) \quad (2-6.45)$$

$$\text{où } K(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)], \quad r^T(t) = [e_y^T(t) \quad x_m^T(t) \quad u_m^T(t)],$$

$$K_s(t) = [K_x(t) \quad K_u(t)], \quad \text{et } r_s^T(t) = [x_s^T(t) \quad u_p^T(t)]$$

$$\text{tels que : } K(t) = K_I(t) + K_P(t) \quad (2-6.46)$$

$$\text{avec : } K_P(t) = e_y(t) r^T(t) T_1 \quad (2-6.47)$$

$$K_I(t) = [e_y(t) r^T(t) - \sigma K_I(t)] T_2 \quad (2-6.48)$$

$$\text{et : } K_s(t) = K_{sI}(t) + K_{sP}(t) \quad (2-6.49)$$

$$\text{avec : } K_{sP}(t) = e_{y_s}(t) r_s^T(t) T_{1s} \quad (2-6.50)$$

$$K_{sI}(t) = [e_{y_s}(t) r_s^T(t) - \sigma K_{sI}(t)] T_{2s} \quad (2-6.51)$$

où  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_{1s}$ , et  $T_{2s}$  sont des matrices constantes ou variantes dans le temps définies positives.  $e_{y_s}$  est définie par :

$$e_{y_s}(t) = y_s^*(t) - y_s(t) = -y_s(t) \quad (2-6.52)$$

Le terme  $\sigma$  est introduit en vue de garantir la robustesse en présence des perturbations.

Notons finalement que dans cet algorithme, la procédure de détermination adaptative de l'action supplémentaire ne fait que calculer de manière adaptative les gains et les pôles du transfert de cette action, les zéros quant à eux sont imposés par la présélection de la matrice  $C_s$ . Il serait judicieux de calculer également  $C_s$  de la même façon, chose qui est toujours au stade de la recherche[14,11].

## 2-6-6-Etude de la robustesse du CGT

Les algorithmes CGT présentés ci-dessus exigent la quasi positivité du procédé contrôlé. Cette propriété n'étant pas vérifiée dans beaucoup de cas, en pratique on est souvent amené à augmenter le procédé de façon à ce qu'il devienne ASPR introduisant ainsi un certain biais sur la sortie du procédé, si on ajoute à cela les perturbations entrée sortie et celles paramétriques (qu'on peut toujours interpréter comme des perturbations entrée sortie) affectant le système augmenté. face à ces problèmes les performances et stabilité du système risquent fortement de se dégrader, une étude de la robustesse du CGT s'avère alors impérative. L'objectif essentiel de cette étude est de montrer que l'effet des problèmes sus-cités n'affecte que légèrement les performances de poursuite du contrôleur.

Cas du CGT simple : Le procédé augmenté (2-6.1)-(2-6.2) étant ASPR, ce qui entraîne que le système fictif en boucle fermée SPR (2-6.3)-(2-6.5) satisfait l'équation de Lyapounov :

$$P A_c + A_c P = - Q < 0 \quad (2-6.53)$$

$$P B = C^T \quad (2-6.54)$$

où P et Q sont des matrices quelconques définies positives.

Utilisons la fonction de Lyapounov suivante pour étudier la stabilité du système adaptatif (2-6.20)-(2-6.25) [14] :

$$V(t) = -e_x^T(t) P e_x(t) + \text{tr} \left[ \left[ K_I(t) - \tilde{K} \right] T_2^{-1} \left[ K_I(t) - \tilde{K} \right]^T \right] \quad (2-6.55)$$

où P est définie dans (2-6.53)-(2-6.54) et T<sub>2</sub> le coefficient d'adaptation décrit dans (2-6.25).

Calculons la dérivée  $\dot{V}$  de la fonction de Lyapounov (2-6.55), pour cela décomposons V(t) en somme de deux fonctions :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

tels que :

$$V_1(t) = e_x^T(t) P e_x(t), \quad V_2(t) = \text{tr} \left[ \left( K_I(t) - \tilde{K} \right) T_2^{-1} \left( K_I(t) - \tilde{K} \right)^T \right] \quad (2-6.56)$$

Ce qui donne :

$$\dot{V}_1(t) = \dot{e}_x^T(t) P e_x(t) + e_x^T(t) P \dot{e}_x(t) \quad (2-6.57)$$

$$\dot{V}_2(t) = 2 \text{tr} \left[ \left( K_I(t) - \tilde{K} \right) T_2^{-1} \dot{K}_I(t) \right] \quad (2-6.58)$$

En utilisant (2-6.20) on obtient :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}^*(t) - \dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) - A x^*(t) + A x^*(t) - \dot{x}(t) \quad (2-6.59)$$

en substituant (2-6.1) et (2-6.12) dans l'équation ci-dessus on

$$\text{trouve: } \dot{e}_x(t) = A_c e_x(t) - B (K(t) - \tilde{K}) r(t) - F(t), \quad (2-6.60)$$

où  $A_c$  est définie dans (2-6.5) ,  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_e & \tilde{K}_x & \tilde{K}_u \\ & & \tilde{K}_m \end{bmatrix}$ , et

$$F(t) = \left[ Ax - xA_m + BK \right] x_m(t) - \left[ XB_m - BK_u \right] u_m(t) + BK_e d_o(t) + d_i(t) \quad (2-6.61)$$

en substituant (2-6.60) et en utilisant (2-6.53) dans (2-6.57) on

obtient une nouvelle expression de  $\dot{V}_1$  qui, en l'ajoutant à

l'expression de  $\dot{V}_2$ , après substitution de l'expression de  $\dot{K}_I$  dans

(2-6.58), donnera l'expression suivante de  $\dot{V}$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -e_x^T(t) Q e_x(t) - 2\sigma \text{tr} \left[ \left( K_I(t) - \tilde{K} \right) \left( K_I(t) - \tilde{K} \right)^T \right] - 2e_y^T(t) e_y(t) r^T(t) T_2 r(t) \\ & - 2\sigma \text{tr} \left[ \left( K_I(t) - \tilde{K} \right) \tilde{K}^T \right] - 2e_x^T(t) P F(t) - 2d_o^T(t) (K(t) - \tilde{K}) r(t) \end{aligned} \quad (2-6.62)$$

On constate que lorsque  $e_x(t)$ ,  $K_I(t)$ , ou  $e_y(t)$  devient élevée, un ou plus des trois premiers termes définis négatifs dans (2-6.62)

deviennent dominants, rendant ainsi  $\dot{V}(t)$  négative. La forme quadratique  $V(t)$  garantira alors la bornitude de tous les états, gains et erreurs. Ces valeurs sont bornées par l'ensemble :

$$\left\{ e_x, K_I / \dot{V}(t) = 0 \right\} \quad (2-6.63)$$

Notons que la troisième expression dans (2-6.62), résultant directement du gain proportionnel (2-6.24), est un terme défini négatif quadratique par rapport à l'erreur de sortie et proportionnel au coefficient d'adaptation  $T_2$ . par conséquent, un choix approprié de  $T_2$  réduit arbitrairement l'erreur de sortie. L'effet de ce troisième terme est tellement fort que, dans certains, cas on peut se passer des autres conditions de positivité. Le choix de  $T_2$  très élevé réduit considérablement l'erreur de poursuite mais augmente, en revanche, l'effort de commande. Un meilleur compromis peut être réalisé en choisissant un coefficient  $T_2$  variant dans le temps en vue d'obtenir une réponse plus lisse (avec  $T_2$  faible au début, lorsque les erreurs sont importantes) et des erreurs faibles en régime permanent (avec des coefficients plus élevés).

Cas du CGT généralisé : en procédant de la même manière que ci-dessus et en considérant la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(t) = -e_x^T(t) P e_x(t) + \text{tr} \left[ \left( K_I(t) - \tilde{K} \right) T_2^{-1} \left( K_I(t) - \tilde{K} \right)^T \right] \\ + \text{tr} \left[ \left( K_{sI}(t) - \tilde{K} \right) T_2^{-1} \left( K_{sI}(t) - \tilde{K} \right)^T \right] \quad (2-6.64)$$

où  $p$  est une matrice définie positive solution de l'équation de Lyapounov suivante :  $P A + A^T P = -Q < 0$ , avec  $A$  définie dans (2-6.34) et  $Q$  est une matrice définie positive quelconque,  $T_2$  et  $T_2_s$  étant des coefficients d'adaptation définis dans (2-6.48) et (2-6.51). On aboutit au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & - e_x^T(t) Q e_x(t) - 2\sigma \operatorname{tr} \left[ \left[ K_I(t) - \tilde{K} \right] \left[ K_I(t) - \tilde{K} \right]^T \right] \\
& - 2\sigma \operatorname{tr} \left[ \left[ K_{sI}(t) - \tilde{K}_s \right] \left[ K_{sI}(t) - \tilde{K}_s \right]^T \right] - 2e_y^T(t) e_y(t) r^T(t) T_2 r(t) \\
& - 2y_s^T(t) y_s(t) r_s^T(t) T_{2s} r_s(t) - 2\sigma \operatorname{tr} \left[ \left[ K_I(t) - \tilde{K} \right] \tilde{K}^T \right] \\
& - 2\sigma \operatorname{tr} \left[ \left[ K_{sI}(t) - \tilde{K}_s \right] \tilde{K}_s^T \right] - 2e_x^T(t) P F(t) - 2d_o^T(t) (K(t) - \tilde{K}) r(t) \\
& + 2e^T(t) P_{12} B_s \left[ K_s(t) - \tilde{K}_s \right] r_s(t) \\
& + 2e_s^T(t) (P_{22} B_s - C_s^T) \left[ K_s(t) - \tilde{K}_s \right] r_s(t), \tag{2-6.65}
\end{aligned}$$

où  $P_{12}$  et  $P_{22}$  sont des matrices dérivant d'une décomposition appropriée de  $P$  en quatre blocs [12],  $e_x^T(t) = [e_p^T(t) e_s^T(t)]$ , et  $F(t)$  une matrice qu'on peut déduire du calcul de  $e_x(t)$ .

L'examen de l'expression (2-6.65) fait ressortir que, lorsque  $e_x(t)$ ,  $K_I(t)$ ,  $K_{sI}(t)$ ,  $e_y(t)$ , ou  $y_s(t)$  devient importante, les cinq premiers termes, définis négatifs, deviennent dominants, garantissant ainsi la bornitude de tous les états, gains et erreurs. Cependant, il n'est pas évident que les deux derniers termes de (2-6.65) soient dominés par les autres termes négatifs, dans [14] Bar Kana constata que le dernier terme peut être éliminé par un choix adéquat des zéros de l'action supplémentaire tel que  $P_{22} B_s = C_s^T$ . Reste l'avant dernier terme qui ne peut en général s'annuler car il n'y a aucune raison qui laisse croire que  $P_{12} B_s = 0$ , par conséquent, la stabilité du système augmenté repose essentiellement sur l'éventualité que  $2e^T(t) P_{12} B_s \left[ K_s(t) - \tilde{K}_s \right] r_s(t)$  soit absorbée par les termes négatifs. Notons enfin le rôle spécial des quatrième et cinquième termes qui, par un choix approprié des matrices  $T_2$  et  $T_{2s}$ , permettent la réduction

arbitraire des erreurs de sortie même si le système adaptatif tend à diverger.

## 2-7-CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons établi que l'approche MRAC consiste à ramener le problème de commande adaptative en un problème de stabilité, dans ce contexte nous avons développé trois stratégies de commande adaptative à modèle de référence, la AMFC, le MCS, et le CGT. Les deux premiers contrôleurs reposent sur la théorie de l'hyperstabilité et exigent l'accessibilité de tous les états et la connaissance de l'ordre du procédé.

La stratégie de commande AMFC, qui est une combinaison d'une loi de commande linéaire, le LMFC, avec une loi d'adaptation du type PI non linéaire, nécessite la connaissance de la dynamique nominale du procédé. Cette information s'avère être l'handicap majeur de ce contrôleur.

Le MCS quant à lui dérive d'une simplification empirique mais judicieuse du AMFC. En effet cette modification consistant à éliminer la boucle de commande linéaire du processus d'adaptation permet du coup de simplifier la configuration du contrôleur, la réduction du temps de calcul de la commande adaptative, et la minimisation de la quantité d'informations préalables sur le procédé.

Le principal attrait de la stratégie CGT est la possibilité de commander des systèmes complexes d'ordre éventuellement inconnu et élevé avec des modèles de référence d'ordre réduit se passant ainsi de la condition de l'accessibilité de tous les états du procédé. Elle est basée sur le concept de quasi positivité et exige que le procédé contrôlé soit ASPR. Dans le cas contraire, la connaissance d'une action supplémentaire garantissant la quasi positivité du système augmenté est alors nécessaire, information

qui n'est pas souvent disponible et qui de surcroît introduit un biais dans l'erreur de poursuite. La version généralisée propose un algorithme capable de calculer l'action supplémentaire de manière adaptative moyennant la connaissance de l'ordre maximal d'un retour stabilisateur inconnu. On constate également que la loi d'adaptation  $a$ , similairement aux deux autres contrôleurs, la forme d'un PI non linéaire.

L'étude de robustesse montre que le AMFC est très robuste vis à vis des incertitudes paramétriques et perturbations lentes par rapport aux autres variables du procédé. La robustesse du MCS n'est prouvée que pour une classe spéciale de procédés représentés sous la forme canonique de phase sous l'hypothèse que les diverses perturbations soient plus lentes que l'évolution des autres variables du procédé. Dans ce contexte, Benchoubane, dans une récente étude [17], a présenté une extension du MCS robuste vis à vis des perturbations ne respectant pas l'hypothèse sus-citée. Pour le CGT, on a prouvé que l'erreur de poursuite peut être arbitrairement réduite par le choix adéquat des matrices d'adaptation face à toute perturbation d'entrée, de sortie, ou paramétrique bornée.

## CONTROLEURS ADAPTATIFS A STRUCTURE VARIABLE

## 3-1-INTRODUCTION

Les contrôleurs adaptatifs à modèle de référence garantissent la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite mais aucune indication n'est fournie sur le comportement transitoire de cette erreur. Young [110] et Zinober [112] proposèrent un contrôleur adaptatif basé sur la théorie des systèmes à structure variable (variable structure systems : VSS) permettant, grâce aux propriétés de ces systèmes, le contrôle du comportement de l'erreur de poursuite.

Les VSS sont des systèmes dont la structure change ou commute entre deux valeurs extrêmes suivant une certaine règle ou logique de commutation. Ils ont été introduits et développés essentiellement par des auteurs de l'ex-URSS comme Petrov, Emelyanov, Bakakin, et Itkis [22], Utkin [102], puis repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique soit pour étudier quelques applications possibles [9], [30]. Ces systèmes connaissent actuellement un essor certain grâce aux progrès accomplis dans la technologie des calculateurs ainsi que dans l'électronique de puissance et de commutation.

Dans ce chapitre nous présenterons le principe et les propriétés des VSS, la synthèse d'un contrôleur adaptatif à structure variable assurant la poursuite d'un modèle de référence par la combinaison d'une loi de commande linéaire avec une loi d'adaptation basée sur le principe des VSS, et nous terminerons ce chapitre par une étude de robustesse de la stratégie de commande sus-proposée et une conclusion.

## 3-2-1-Principe

Les systèmes de commande à structure variable utilisent la commutation à fréquence élevée de la commande pour conduire la trajectoire d'état du procédé commandé vers une surface de l'espace d'état, dite de commutation, et de l'y maintenir. L'appellation *surface de commutation* est motivé par le faite que les gains de la loi de commande commutent d'une valeur à l'autre à chaque passage par cette surface. Un choix approprié des surfaces de commutation permet d'atteindre des performances désirées telles que la stabilisation, la poursuite, la régulation, etc...

On peut distinguer deux configurations de base différentes des contrôleurs VSS, la première configuration (figure 3.1) change la structure par commutation d'une contre réaction d'état variable suivant la loi  $S(x_s)$ , dans la seconde (figure 3.2) le changement de structure est réalisé au niveau de l'actionneur ou de l'organe de commande (O C).

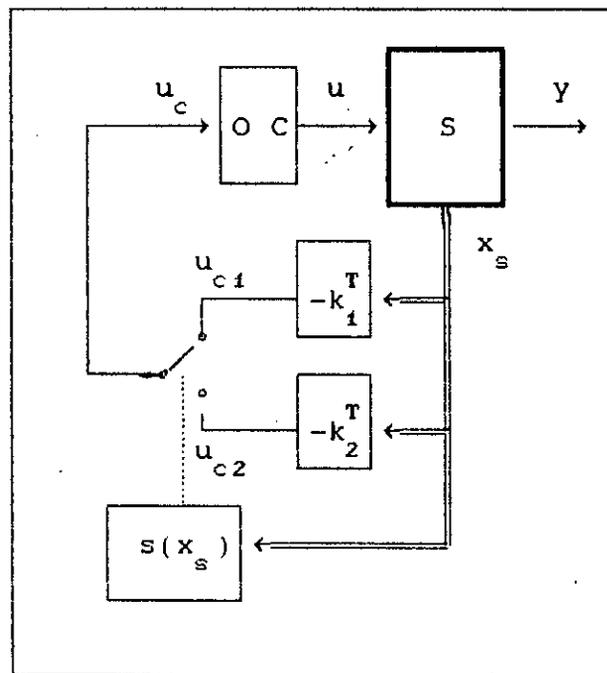


Fig-3-1-Contrôle vss avec changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état variable.

Dans les VSS, sous certaines conditions, la commutation se fait à une vitesse très élevée (théoriquement infiniment élevée). l'organe de commande reçoit, dans le cas de la première configuration, une tension de commande  $u_c$  qui commute rapidement entre deux valeurs variables  $u_{c1}$  et  $u_{c2}$ , provoquant ainsi de fortes sollicitations de l'organe de commande. Dans la seconde configuration l'organe de commande doit être conçu de sorte que la grandeur  $u$  ne prenne que les deux valeurs constantes  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$  évitant ainsi le désavantage de la forte sollicitation rencontrée dans la première configuration.

La seconde configuration est très utilisé en électrotechnique [21].

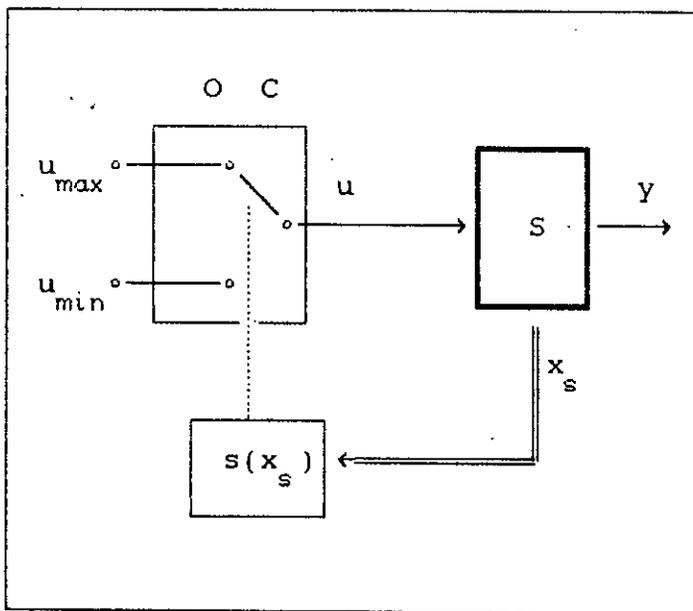


Fig-3-2-Contrôle VSS avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande.

### 3-2-2-Exemple illustratif

Dans ce paragraphe nous illustrerons le principe et les propriétés des VSS par l'application de cette approche de commande à un simple système monovarié. En effet, considérons le système SISO, décrit dans l'espace d'état, suivant :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3-2.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \quad (3-2.2)$$

avec la commande à structure variable suivante :

$$u(t) = k(x_1) x_1(t) \quad (3-3.3)$$

où  $k(x_1)$  peut être égale à "2" ou "-3".

Le système (3-2.1)-(3-2.2) muni de la loi de commande  $k(x_1) = 2$  ou  $k(x_1) = -3$  produit, dans les deux cas, une réponse instable, comme le montre la figure 3-3(a),(b) représentant le plan de phase des deux structures.

Considérons la droite d'équation :

$$s = c_1 x_1 + x_2 = 0 \quad (3-2.4)$$

Si la commutation entre les deux structures a lieu comme suit :

$$k(x_1) = \begin{cases} -3, & \text{si } s \cdot x_1 > 0 \\ 2, & \text{si } s \cdot x_1 < 0 \end{cases} \quad (3-2.5)$$

Il en résultera, par un choix adéquat de la constante  $c_1$  dans (3-2.4), un comportement stable du procédé comme l'illustre la figure 3-3(c), où l'on peut constater que quelque soit la position initiale du point de fonctionnement il finira toujours, grâce à la structure (3-2.5) par intercepter la droite de commutation ( $s = 0$ ) et de s'y maintenir. Dans ce cas, le procédé est dit se trouver en *mode de glissement* (Sliding motion) et la droite de commutation est appelée alors droite de glissement.

En mode de glissement, le procédé sera régi par l'équation différentielle suivante :

$$s = x_2 + c_1 x_1 = \dot{x}_1 + c_1 x_1 = 0 \quad (3-2.6)$$

dont la solution donnée par :

$$x_1(t) = x_1(t_0) e^{-c(t-t_0)} \quad (3-2.7)$$

La constante  $c_1$  doit être choisie de sorte que le système (3-2.6) soit stable. L'examen de la relation (3-2.7) montre qu'en mode de glissement le comportement du système est indépendant des divers paramètres du procédé.

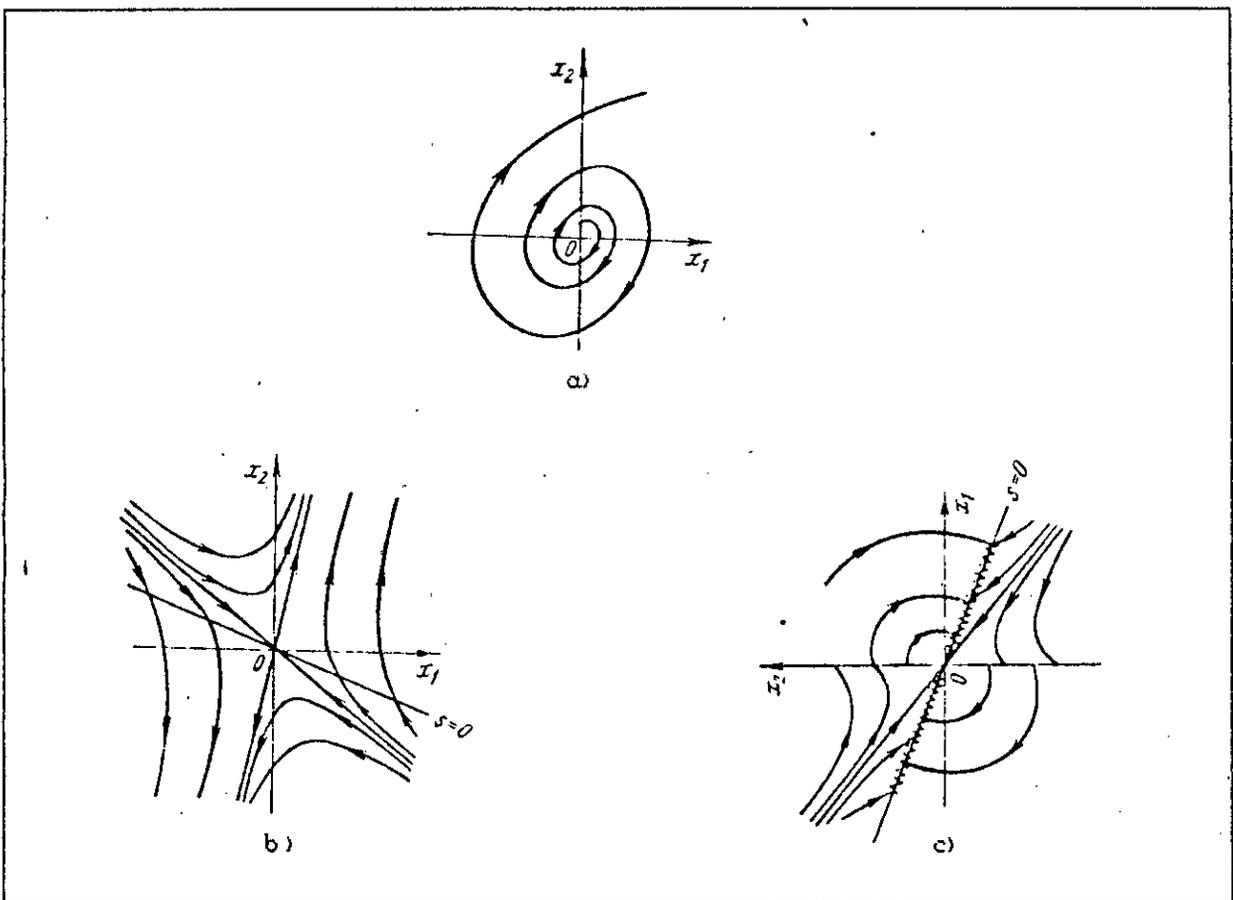


Fig-3-3-Plan de phase du système (3-2.1)-(3-2.2)

L'exemple monovariante traité ci-dessus a permis de mettre en relief les idées suivantes :

- la commutation entre deux structures instables peut conduire à une structure stable regroupant les effets désirables de chaque structure;
- différents types de réponses peuvent être obtenues suivant la surface ou la droite de commutation choisie;
- l'existence du mode de glissement, caractérisé par son invariance vis à vis des différents paramètres du procédé, qui représente le principal attrait des VSS.

### 3-2-3-Formulation du problème du contrôle à structure variable

Avant de formuler le problème du contrôle à structure variable, nous commencerons, d'abord par définir certains concepts associés aux VSS.

Considérons la classe des systèmes ayant un modèle non linéaire par rapport au vecteur d'état et linéaire par rapport au vecteur de commande :

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(t, x, u) = f(t, x) + B(t, x) u(t) \quad (3-2.8)$$

où le vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur de commande  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ , et  $B(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . La commande par commutation  $u(t)$

est de la forme suivante:

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+, & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-, & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3-2.9)$$

où  $s_i(x) = 0$  est la  $i$ ème surface de commutation ( dite également surface de discontinuité) associé à la surface de commutation de dimension  $(n-m)$  :

$$s(x) = [s_1(x), \dots, s_m(x)]^T = 0 \quad (3-2.10)$$

a) *Surface de commutation* : La surface de commutation  $s(x) = 0$  est une variété ou sous espace de dimension  $(n-m)$  de  $\mathbb{R}^n$  déterminée par l'intersection des  $m$  surfaces ou hyperplans de commutation  $s_i = 0$  de dimension  $(n-1)$  chacun. Dans le cas d'un système du second ordre, par exemple, monovariable, l'hyperplan de commutation est réduit à une droite de commutation. La synthèse de ces surfaces sera faite de sorte que la réponse du système restreint à  $s(x) = 0$  possède des caractéristiques désirables en poursuite ou en régulation. En général, bien que les formes non linéaires des surfaces de commutation sont possibles, les surfaces de commutation linéaires semblent être les plus utilisées dans la littérature. En effet, pour une large classe de systèmes, la synthèse de ces surfaces peut être ramenée à un problème de synthèse de commandes linéaires classiques [30]. Dans notre travail, on considérera des surfaces de commutation de la forme:

$$s(x) = G x(t) = 0 \quad (3-2.11)$$

$G$  étant une matrice  $m \times n$ .

b) *Modes de glissement* : Après les surfaces de commutation, le mode de glissement et les problèmes liés à son existence constituent un aspect fondamental des VSS. L'étude géométrique du phénomène de glissement permet d'affirmer que le mode de glissement existe si, au voisinage de la surface de commutation, le vecteur vitesse de la trajectoire d'état pointera toujours vers cette surface. Une fois la surface de commutation interceptée, la commande se chargera de maintenir le point de fonctionnement du procédé sur cette surface ou du moins dans un  $\varepsilon$ -voisinage de l'ensemble  $\left\{ x / s(x)=0 \right\}$ . On dira alors que la trajectoire d'état glisse le long de la surface de commutation qui, à son tour, sera dite "surface de glissement".

Analytiquement, l'existence du mode de glissement sur la surface  $s_i$  est subordonnée à la satisfaction des conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{s_i \rightarrow 0^-} \dot{s}_i \geq 0 \\ \lim_{s_i \rightarrow 0^+} \dot{s}_i \leq 0 \end{array} \right. \quad (3-2.12)$$

$$\lim_{s_i \rightarrow 0^+} \dot{s}_i \leq 0 \quad (3-2.13)$$

Ces conditions sont équivalentes à la relation :

$$s_i \dot{s}_i \leq 0 \quad (3-2.14)$$

connue sous le nom de conditions d'existence ou d'atteignabilité du mode de glissement.

Le mode de glissement, comme décrit ci-dessus, est idéal, dans le sens où la fréquence de l'action de commutation est considéré comme infinie. En réalité, les VSS présentent une hystérèse sur la loi de commutation [21] qui fait que la fréquence de commutation soit finie, amenant, ainsi, la trajectoire d'état du procédé à osciller dans un intervalle de largeur finie autour de la surface de glissement. Ce phénomène, connu dans la

littérature sous le nom de "Chattering" ou broutement, en français, risque d'exciter les modes négligés du procédé qui, dans certains cas, provoquent des instabilités imprévues.

Dans notre cas, on suppose que la loi de commutation est suffisamment rapide par rapport à la réponse du système, ce qui permet de négliger l'effet des imperfections sur le régime de glissement, et de considérer un mode de glissement idéal.

c) *Problèmes de la commande VSS* : à travers l'étude des principaux aspects des VSS, nous pouvons avancer que la commande VSS présente deux problèmes majeurs. Le premier est d'ordre mathématique, et le second étant plutôt d'ordre pratique.

.problème mathématique : Les VSS sont régis par des équations différentielles, à second membre discontinu, en raison de l'action de commutation de la commande, ne satisfaisant pas les théorèmes conventionnels sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles. Néanmoins il a été constaté [30] que le comportement des VSS, au voisinage de la surface de commutation revête un caractère continu. Plusieurs méthodes, exploitant ce fait, ont été proposées. On peut citer la méthode de Fillipov [102], et la méthode du contrôle équivalent proposée par Utkin et Dražanovic [100] qui, en raison de sa simplicité et son applicabilité aux systèmes MIMO, sera adopté pour la suite de notre travail.

.problème pratique : D'après les discussions sur les aspects des VSS, nous pouvons déduire que la synthèse des contrôleurs VSS se fait en deux étapes. La première consiste à construire les surfaces de commutation assurant une dynamique de glissement désirable. La seconde étape est la synthèse des commande discontinues garantissant l'atteignabilité et le maintien du régime de glissement.

### 3-2-4-Synthèse des VSS par la méthode du contrôle équivalent

a) *Méthode du contrôle équivalent* : Cette méthode consiste à utiliser des commandes continues dont l'effet est équivalent, en mode de glissement, à celui de l'action de commutation. En effet, considérons la surface de commutation (3-2.11) et supposons que la trajectoire d'état du procédé (3-2.8) intercepte la surface de commutation au temps  $t \geq t_0$  et s'y maintienne. Alors, le mode de glissement est décrit par:

$$s = 0 \text{ et } \dot{s} = 0, \forall t \geq t_0 \quad (3-2.15)$$

Ce qui implique :

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s}{\delta x} \dot{x} = \frac{\delta s}{\delta x} [f(t, x) + B(t, x) u_{eq}] = 0 \quad (3-2.16)$$

on a, donc, remplacé la commande discontinue  $u$  par la commande continue  $u_{eq}$ , dite commande équivalente.

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\delta s}{\delta x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\delta s}{\delta x} f(t, x) \quad (3-2.17)$$

l'existence de  $u_{eq}$  et donc du mode de glissement est subordonnée à la non singularité de la matrice  $\left[ \frac{\delta s}{\delta x} B(t, x) \right]$ .

Cette commande peut être interprétée comme la valeur moyenne que prend la valeur de commande lors de la commutation rapide entre  $u^+$  et  $u^-$  [21].

b) *système équivalent en mode de glissement* :

En substituant l'expression de la commande équivalente (3-2.17) dans (3-2.8), on obtient le système équivalent du procédé en mode de glissement :

$$\forall t \geq t_0, \quad \dot{x} = \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\delta s}{\delta x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\delta s}{\delta x} \right] f(t, x) \quad (3-2.18)$$

En tenant compte de la relation (3-2.11) de linéarité de  $s$ , on obtient :

$$\dot{x} = \left[ I - B(t,x) \left[ G \ B(t,x) \right]^{-1} G \right] f(t,x) \quad (3-2.19)$$

La dynamique de glissement est, donc, décrite par l'équation (3-2.19) sous la contrainte ( $s = 0$ ), ce qui donne un système différentiel d'ordre réduit ( $n-m$ ).

Notons, enfin, que certaines applications, ne satisfaisant pas la condition de singularité de la matrice  $[G \ B(t,x)]$ , nécessitent l'emploi de surfaces de commutation variants dans le temps ou non linéaires [9].

*c) Construction des surfaces de glissement :*

La détermination des paramètres  $G$  de la surface de glissement est généralement ramenée à un problème conventionnel de commande où une multitude d'outils de synthèse est disponible (par exemple: placement de pôles, contrôle optimale, etc...).

Dans le cas de procédés monovariables, le système équivalent est du premier ordre même sous la contrainte (3-2.10), le calcul de  $G$  est, alors, immédiat. Par contre, la détermination de la forme réduite, pour les systèmes multivariables, est impérative.

Pour ces systèmes représentés sous la forme canonique de phase, le problème est simple, une série de substitutions dans (3-2.10) et (3-2.19) permet de déduire le système réduit. La tâche est plus délicate, en ce qui concerne les systèmes modélisés par une forme d'état quelconque où l'opération de substitution ne donne pas le résultat escompté. On est, alors, amené à introduire une transformation linéaire en vue de réduire le système équivalent.

En effet, on montre que le régime de glissement est invariant par rapport à une transformation linéaire [21], en particulier en ce qui concerne la grandeur de commande équivalente et les pôles.

Dans ce but, on soumet d'abord l'équation d'état à une transformation linéaire et l'on détermine la grandeur de commande équivalente du système transformé.

Soit  $T$  la matrice de transformation d'ordre  $(n \times n)$  telle que :

$$T B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad G T^{-1} = [G_1 \ G_2],$$

$$T x = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = x', \quad T f(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x', t) \\ f_2(x', t) \end{bmatrix} \quad (3-2.20)$$

où  $B_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  sont des matrices d'ordre respectivement  $(m \times m)$ ,  $(m, n-m)$ , et  $(m, n)$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant des fonctions non linéaires d'ordre  $(n-m)$  et  $(m)$ .

La commande équivalente devient après transformation :

$$u_{eq} = - [G_2 \ B_2]^{-1} [G_1 f_1(x', t) + G_2 f_2(x', t)] \quad (3-2.21)$$

en substituant l'expression ci-dessus dans (3-2.8), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}'_1 = f_1(x', t) & (3-2.22) \\ \dot{x}'_2 = f_2(x', t) - B_2 [G_2 \ B_2]^{-1} [G_1 f_1 + G_2 f_2] & (3-2.23) \end{cases}$$

On montre dans [108] que la commande à structure variable agit comme un contrôle à gain élevé en séparant le fonctionnement du procédé en deux modes, un mode rapide et un mode lent.

Le mode rapide est décrit par l'équation (3-2.23), il disparaît après un temps fini. Le mode lent est régi par la relation (3-2.22), qui subsiste en régime de glissement. c'est, donc, par une commande appropriée de ce mode que l'on réalisera des objectifs désirables.

explicitons ceci, en régime de glissement on a :

$$s = G x = G T^{-1} x' = 0$$

ce qui est équivalent, en vertu de (3-2.20), à

$$x_2' = -G_2^{-1} G_1 x_1 \quad (3-2.24)$$

en substituant (3-2.24) dans (3-2.22) on obtient :

$$x_1' = f_1(t, x_1', -G_2^{-1} G_1 x_1') \quad (3-2.25)$$

Cette relation représente les dynamiques d'ordre réduit du système équivalent en mode de glissement.

Au cas où le procédé (3-2.8) est linéaire ( $f(t, x) = A x$ ), la fonction  $f_1$  s'écrira :  $f_1(t, x') = A_{11} x_1' + A_{12} x_2'$  où  $A_{11}$  et  $A_{12}$  sont tels que :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = T A T^{-1} \quad (3-2.26)$$

Le système réduit devient quant à lui :

$$x_1' = [A_{11} - A_{12} (G_2)^{-1} G_1] x_1' \quad (3-2.27)$$

Les valeurs des paramètres  $G^1$  et  $G^2$  sont déterminées de sorte que les valeurs propres du système (3-2.27) soient stables. Ces valeurs propres sont, également, les zéros de transmission [66] du procédé (3-2.8), avec  $G$  comme matrice de sortie.

d) *Synthèse des commandes par la méthode du contrôle hiérarchique :*

La synthèse des commandes constitue la seconde phase de mise en oeuvre des VSS, l'objectif est de trouver, sous l'hypothèse que les surfaces de commutation sont construites de manière à atteindre des objectifs désirables en régime de glissement, une loi de commutation conduisant les trajectoires d'état du procédé vers les hyperplans de commutation et produisant par la même le mode de glissement.

Pour les procédés monovariables, les commandes discontinues se déduisent, tout simplement, de la résolution de la condition d'existence (3-2.14). par contre, la question est beaucoup plus

délicate en ce qui concerne le cas multivariable où, il s'agit d'assurer l'atteignabilité du mode de glissement sur tous les hyperplans simultanément.

Plusieurs méthodes de synthèse ont été proposées dans la littérature [102], parmi lesquelles, on peut citer, les méthodes de diagonalisation qui consistent à transformer le problème de contrôle de procédés MIMO en un ensemble de problèmes découplés de commande de systèmes SISO. Dans notre présent travail, on adoptera la méthode du contrôle hiérarchique pour son efficacité et sa simplicité de mise en oeuvre [30].

Le principe de cette méthode consiste à établir une hiérarchie des canaux de commande de sorte que, par exemple, la commande  $u_1$  conduise le procédé d'un état initial vers la surface ( $s_1 = 0$ ). La seconde commande  $u_2$  se chargera de mener le système vers l'intersection des surfaces ( $s_1 = 0$ ) et ( $s_2 = 0$ ), tandis que  $u_1$  maintienne le régime de glissement sur ( $s_1 = 0$ ). La troisième commande  $u_3$  portera le système, en mode de glissement sur les surfaces ( $s_1 = 0$ ) et ( $s_2 = 0$ ), vers l'intersection des trois premières surfaces. La procédure de hiérarchisation se poursuivra ainsi de manière qu'à la fin, la commande  $u_m$  amène le système à glisser le long de l'intersection des  $m$  surfaces de commutation.

Procédure de calcul des commandes : l'objectif est de déterminer les valeurs  $u^+$ ,  $u^-$  des commandes (3-2.9) garantissant le mode de glissement sur les  $m$  surfaces de commutation.

- 1) on commence par le niveau le plus profond de la hiérarchie en posant  $i = m$  ;
- 2) on suppose que le mode de glissement se produit successivement sur les  $(i-1)$  premières surfaces de commutation  $s_j = 0, j = 1 \dots i-1$ ;
- 3) on calcul la commande équivalente  $(u_{eq}^{(i-1)} = [u_1 \dots u_{i-1}]^T)$  en fonction de la commande  $u_i$  et du vecteur  $(u^{(i+1)} = [u_{i+1} \dots u_m]^T)$

en résolvant le système ( $s_j = 0, j = 1 \dots m$ ), ce qui donne :

$$u_{eq}^{i-1} = -[P_{i-1} f + Q_{i-1} u^{(i+1)} + d_i u_i] \quad , \quad \text{où } P_{i-1}, Q_{i-1}, \text{ et } d_i$$

dependent du produit de l'inverse de la matrice  $M_i$ , formée des  $(i-1)$  premières lignes et colonnes de  $(G \ B)$ , avec respectivement  $G_{i-1}$ , matrice constituée des  $(i-1)$  premières lignes de  $G$ , la matrice constituée des  $(m-i)$  dernières colonnes de  $B$ , et la  $i$ ème colonne de  $B$ ;

. 4) on substitue l'expression de  $u_{eq}^{i-1}$  dans (3-2.8), on obtient, alors, le système équivalent en mode de glissement sur les  $(i-1)$  premières surfaces,  $\dot{x} = f^{i-1}(x,t) + B_1^{i-1} u_i + B_2^{i-1} u^{(i+1)}$ , où  $f^{i-1}$  dépend de  $P_{i-1}, B$ , et  $f$ .  $B_1^{i-1}$  et  $B_2^{i-1}$  sont respectivement un vecteur colonne et une matrice dépendant de  $B, Q_{i-1}$ , et  $d_i$ .

. 5) calcul de la commande  $u_i$ , produisant le mode de glissement sur l'hyperplan ( $s_i = 0$ ), en résolvant l'inégalité (3-2.14), avec  $s_i = [G_{i1} \ G_{i2} \ \dots \ G_{in}] x$ , il en résulte, en posant  $G_i = [G_{i1} \ G_{i2} \ \dots \ G_{in}]$ ,

$$\alpha_i^+ u_i < -\min \left[ G_i f^{i-1}(x,t) + G_i B_2^{i-1} u^{(i+1)} \right] \quad (3-2.28)$$

$$\alpha_i^- u_i < -\max \left[ G_i f^{i-1}(x,t) + G_i B_2^{i-1} u^{(i+1)} \right]$$

$\alpha_i$  : un réel non nul dépendant de  $G_i$  et  $B_1^{i-1}$

les commandes  $u^{(i+1)}$  sont connues ( par ex :  $u^{(m+1)} = 0$  );

. 6) on pose  $i = i - 1$  et on retourne à 2).

### 3-2-5-Propriétés d'invariance des VSS en mode de glissement

Le système (3-2.8), dans un environnement réel, s'écrira comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + B(x,t) u + h(x,t) \quad (3-2.29)$$

$h(x,t)$  représente tous les termes de perturbation affectant le procédé.

Corollaire : le comportement, en mode de glissement, du système (3-2.29) serait invariant par rapport aux perturbations  $h(x,t)$  si et seulement si [109] :

$$\forall t \geq 0, h(x,t) \in \mathcal{B} \quad (3-2.30)$$

$\mathcal{B}$  : l'espace de dimension  $n$  engendré par la base formée par les colonnes de la matrice  $B$ .

La relation (3-2.30) est équivalente à la condition :

$$\text{Rang}(B,h) = \text{Rang}(B) \quad (3-2.31)$$

*Preuve* : le système équivalent en mode de glissement sur l'hyperplan ( $s = G x = 0$ ) s'écrit :

$$\dot{x}(t) = [I - B (GB)^{-1} G] f + [I - B (GB)^{-1} G] h \quad (3-2.32)$$

si  $h(x,t)$  vérifie (3-2.31), on peut, alors, poser  $h = B \lambda$ ,  $\lambda$  étant un vecteur réel de dimension appropriée. Ce qui donne :

$$\dot{x}(t) = [I - B (GB)^{-1} G] f \quad (3-2.33)$$

Ceci montre, donc, l'insensibilité du procédé (3-2.29) vis à vis des perturbations du type (3-2.30).

### 3-3-CONTROLE ADAPTATIF A STRUCTURE VARIABLE PAR POURSUITE D'UN MODELE

Les caractéristiques d'invariance et de robustesse des VSS en mode de glissement ont été à l'origine du développement d'une nouvelle classe de systèmes de commande adaptatifs. En effet, une commande linéaire par poursuite d'un modèle combinée avec un système à structure variable, comme mécanisme d'adaptation, donnera naissance à un contrôleur possédant des propriétés adaptatives.

a) *Principe* : Considérons le procédé :

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p, \quad (3-3.1)$$

et le modèle de référence :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (3-3.2)$$

$x_p, x_m \in \mathbb{R}^n$  et  $u_p, u_m \in \mathbb{R}^m$ ,

soit la commande :

$$u_p = k_p x_p + k_e (x_m - x_p) + k_m u_m \quad (3-3.3)$$

l'objectif de la commande étant d'assurer que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_m(t) - x_p(t)) = 0 \quad (3-3.4)$$

D'après l'étude du chapitre premier sur le problème de la poursuite linéaire d'un modèle, il s'avère que dans un environnement incertain, la commande linéaire n'est plus adéquate. Il serait, alors, nécessaire de lui associer une structure, garantissant la compensation de l'effet des incertitudes sur la dynamique du procédé, de manière à réaliser l'objectif de poursuite désiré.

Dans la présente stratégie, l'adaptation aura lieu par la commutation des gains  $k_p$ ,  $k_e$ , et  $k_m$  de la loi (3-3.3). Ainsi donc la commande  $u_p$  s'écrira comme suit :

$$u_{p_i}(t, x) = \begin{cases} u_{p_i}^+(x_p, e, x_m), & \text{si } s_i(e) > 0 \\ u_{p_i}^-(x_p, e, x_m), & \text{si } s_i(e) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3-3.5)$$

$u_{p_i}$  et  $(s_i(e)=0)$  : la  $i$ ème commande et surface respective.

L'objectif de la commande étant d'assurer la poursuite d'un modèle de référence, il serait, donc, plus judicieux de considérer les surfaces de commutation fonction de l'erreur de poursuite. Dans notre cas :

$$s = G e \quad (3-3.6)$$

$G$  étant une matrice de dimension appropriée.

En mode de glissement sur les surfaces ( $s = 0$ ), la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e} = [I - B_p (GB_p)^{-1} G] [A_m e + (A_m - A_p) x_p + B_m u_m] \quad (3-3.7)$$

En cas de poursuite parfaite (conditions d'Erzberger satisfaites), la relation (3-3.7) devient :

$$e = [I - B_p (GB_p)^{-1} G] A_m e \quad (3-3.8)$$

ce qui prouve, donc, que l'insensibilité de la dynamique de l'erreur, par rapport aux variables  $x_p$  et  $u_m$ , provient du fait que les conditions de poursuite parfaite (2-3.14)-(2-3.15) coïncident avec les conditions d'invariance du procédé en mode de glissement.

L'objectif de la commande sera complètement réalisé si le système équivalent (3-3.8) est asymptotiquement stable. ceci se fera en deux étapes :

- . Construction des surfaces de commutation de manière à garantir la stabilité asymptotique du système équivalent en mode de glissement;
- . synthèse des commandes discontinues assurant l'atteignabilité du mode de glissement.

*b) Construction des surfaces de commutation :*

Comme on l'a montré au paragraphe (3-2-2.c), la dynamique de l'erreur peut être vue comme un système à deux régimes. Un régime rapide disparaissant après un temps fini (temps d'atteinte du mode de glissement), et un régime lent subsistant après la disparition du mode rapide. En procédant comme il est indiqué au paragraphe (3-2-2.c), on trouve que le mode lent est régi par l'équation suivante :

$$e'_1 = [A_{m_{11}} - A_{m_{12}} (G^2)^{-1} G^1] e'_1 \quad (3-3.9)$$

tels que :

$$\begin{bmatrix} A_{m_{11}} & A_{m_{12}} \\ A_{m_{21}} & A_{m_{22}} \end{bmatrix} = T A_m^{-1} T, \quad G T^{-1} = [G^1 \ G^2], \quad (3-3.10)$$

avec T la matrice de transformation convenablement choisie.

Les valeurs propres du système (3-3.9) sont les zéros de transmission du triplet  $(G, A_m, B_p)$ , G étant la matrice de sortie [66]. On montre [108] que les valeurs propres de  $(G \ B_p)$  peuvent

être arbitrairement placées, si la paire  $(A_m, B_p)$  est contrôlable.

procédure de calcul de la matrice G :

1) Détermination de la matrice de transformation T telle que :

$$T B_p = [E^T \quad B_2^T], \text{ et } T \text{ inversible,}$$

E : une matrice nulle de dimension  $(n-m, m)$ ,

en pratique, T doit contenir le maximum de zéros possible;

2) Détermination de  $A_{m_{11}}$  et de  $A_{m_{12}}$  conformément à (3-3.10),

$A_{m_{11}}$  et  $A_{m_{12}}$  étant des matrices de dimensions respectives  $(n-m, n-m)$  et  $(n-m, m)$ ;

3) Détermination des matrices  $G^1$  et  $G^2$  par le placement des valeurs propres du système (3-3.9), en pratique,  $G^2$  est prise égale à une matrice identité de dimension  $(m, m)$ ;

4) Calcul de la matrice G, par la relation :  $G T^{-1} = [G^1 \quad G^2]$ .

c) Synthèse des commandes :

Le calcul des commandes discontinues (3-3.5) implique la détermination de la loi de commutation des gains  $k_p$ ,  $k_e$ , et  $k_m$ . Ceci se fera, en se référant au paragraphe (3-2.d), de la manière suivante :

1) On pose  $i = m$ , et on suppose que le mode de glissement a lieu sur les  $(i-1)$  premières surfaces de commutation notées :

$$s^{i-1} = [G_1^T \quad G_2^T \quad \dots \quad G_{i-1}^T]^T e = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T,$$

$G_k$  : la k-ème ligne de G,  $k = 1 \dots i-1$ ;

2) Ecriture du système équivalent en mode de glissement, en résolvant  $s^{i-1} = 0$  et en substituant l'expression de la commande équivalente dans (3-2.1). Ce qui donne :

$$e = P_{i-1} e + Q_{i-1} x + R_{i-1} u - W_{i-1} u - V_{i-1} u^{(i+1)}$$

tels que :

$$P_{i-1} = N_{i-1} A_m, Q_{i-1} = N_{i-1} (A_m - A_p), R_{i-1} = N_{i-1} B_m, W_{i-1} = N_{i-1} B_{p_i},$$

$$V_{i-1} = N_{i-1} [B_{p_{i+1}} \dots B_{p_m}], B_{p_j} : j\text{ème colonne de } B_p,$$

$$N_{i-1} = \left[ I - [B_{p_1} \dots B_{p_{i-1}}] \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{i-1} \end{bmatrix} [B_{p_1} \dots B_{p_{i-1}}]^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{i-1} \end{bmatrix} \right];$$

3) Résolution de l'inéquation :

$$s_i s_i < 0, s_i = G_i e$$

on obtient, alors :

$$-(G_{i-1} W_{i-1}) u_{p_i}^+ < -\min_u [G_i P_{i-1} e + G_i Q_{i-1} x_p + G_i R_{i-1} u_m - G_i V_{i-1} u^{(i+1)}]$$

$$-(G_{i-1} W_{i-1}) u_{p_i}^- < -\max_u [G_i P_{i-1} e + G_i Q_{i-1} x_p + G_i R_{i-1} u_m - G_i V_{i-1} u^{(i+1)}]$$

Or,  $u = k_e e + k_p x_p + k_m u_m$ , avec :

$$k_e = \begin{cases} k_e^+, & s_i e > 0 \\ k_e^-, & s_i e < 0 \end{cases}, k_p = \begin{cases} k_p^+, & s_i x_p > 0 \\ k_p^-, & s_i x_p < 0 \end{cases}, k_m = \begin{cases} k_m^+, & s_i u_m > 0 \\ k_m^-, & s_i u_m < 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne la loi de commutation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(G_{i-1} W_{i-1}) k_{ik}^+ < -\min_{k_e} [(G_i P_{i-1})_k - \sum_{k_1=k}^{m-i} ((G_i V_{i-1})_{k_1} k_{i+k_1, k}^+)] \\ -(G_{i-1} W_{i-1}) k_{ik}^+ < -\min_{k_p} [(G_i Q_{i-1})_k - \sum_{k_1=k}^{m-i} ((G_i V_{i-1})_{k_1} k_{i+k_1, k}^+)] \quad (3-3.11) \\ -(G_{i-1} W_{i-1}) k_{ik}^+ < -\min_{k_m} [(G_i R_{i-1})_k - \sum_{k_1=k}^{m-i} ((G_i V_{i-1})_{k_1} k_{i+k_1, k}^+)] \end{array} \right.$$

$k = 1 \dots n$ , et  $i = 1 \dots m$ .

les gains  $k_e^-, k_p^-,$  et  $k_m^-$  vérifient les mêmes relations excepté que le sens de l'inégalité s'inverse et que les (min) deviennent des (max).

### 3-4-PHENOMENE DE BROUTTEMENT (Chattering)

La commande par mode de glissement se fait en deux phases :

. a) La phase d'approche du régime de glissement où la commande n'est pas très commutante et les trajectoires d'état sont très sensibles aux perturbations;

. b) la phase de glissement le long de l'hyperplan de commutation ( $s = 0$ ) où la commande commute avec une fréquence infiniment élevée.

En pratique, les dispositifs de commutation présentent certaines imperfections de conception (Hystérésis, dynamiques négligées, etc..) qui affectent le fonctionnement en mode de glissement, en induisant le phénomène de broutement ou chahutement (chattering).

Ces imperfections, ajoutées aux différentes constantes de temps négligées des circuits intervenants dans la chaîne de contrôle, font que l'organe de commande ne réagit pas instantanément, et ce n'est qu'après le passage de l'autre côté de la surface de discontinuité que la commande commute. Il en résulte, alors, des "oscillations" hautes fréquences de la trajectoire d'état, le long de la surface de glissement. Ces composantes HF risquent fortement d'exciter les dynamiques et modes indésirables dans certains procédés (par ex, systèmes mécaniques) [103] .

Beaucoup de méthodes furent proposées pour pallier cet inconvénient, parmi lesquelles, nous citons :

- La méthode de lissage de la commande discontinue, qui consiste à appliquer un filtrage passe-bas à la sortie de l'organe de commande éliminant, ainsi, les composantes HF indésirables. Cependant, l'insertion du filtre passe-bas dans la chaîne de commande, provoque une perte de la précision de poursuite, du fait de la non idéalité du mode de glissement obtenu, ainsi que la prolongation de la phase d'établissement du régime de glissement;

- La méthode de la bande limite de Slotine [89], qui considère des surfaces de glissement variant dans le temps, et forçant les trajectoires d'état à se mouvoir dans une bande, de largeur définie, au voisinage de la surface de glissement idéale. Un algorithme d'estimation des paramètres de la surface permet d'obtenir des largeurs de bande très faibles réduisant, ainsi, le niveau du chahutement.

Il existe, également, d'autres méthodes, qui permettent de réaliser la réduction, voire l'élimination, du chahutement, tout en tenant compte du temps d'établissement du régime de glissement, par l'utilisation des techniques similaires à celles décrites ci-dessus avec, cependant, quelques modifications. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la référence [23].

### 3-5-ROBUSTESSE DU CONTROLEUR ADAPTATIF A STRUCTURE VARIABLE

La synthèse du contrôleur adaptatif à structure variable étant établie dans le cas idéal (absence de perturbations et incertitudes). Il serait, donc, impératif d'étudier la robustesse du système de commande vis à vis des perturbations et dynamiques indésirables.

Etudions l'effet des incertitudes paramétriques sur le contrôle du procédé (3-3.1).

*Effet des variations dans la matrice  $A_p$* : soit  $A_p = A_0 + \Delta A$ ,  $A_0$  étant la matrice d'évolution nominale, et  $\Delta A$  représente les variations affectant  $A_0$ . En substituant l'expression de  $A_p$  dans le système équivalent (3-3.7), on trouve que : les incertitudes sur la matrice d'évolution n'auront pas d'influence néfastes sur les performance de la commande discontinue si ces variations obéissent à la relation suivante :  $\text{Rang}(B_p, \Delta A) = \text{Rang}(B_p)$ . Ce résultat est similaire à la condition (3-2.31) d'invariance des systèmes en mode de glissement.

*Effet des variations dans la matrice  $B_p$* : soit  $B_p = B_c + \Delta B$ ,  $B_c$  étant la matrice de commande nominale, et  $\Delta B$  représente les variations

affectant  $B_c$ . Comme précédemment, le système en mode de glissement sera insensible à ces variations si la condition d'invariance est respectée, à savoir,  $\text{Rang}(B_p, \Delta B) = \text{Rang}(B_p)$ .

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, on peut toujours minimiser l'influence de ces perturbations, si les bornes de  $\Delta B$  sont connues, par un choix adéquat des hyperplans de commutation. En effet, la dynamique de l'erreur en mode de glissement s'écrira, en tenant compte des incertitudes, :

$$e' = (Z - T_1 \Delta B (G^2 B_2)) [G^1 A_{m11} + G^2 A_{m21} - (G^1 A_{m12} + G^2 A_{m22}) (G^2)^{-1} G_1] e'$$

où,  $[T_1^T \ T_2^T]^T = T$ , et  $B_2 = T_2 B_c$ .

En choisissant, alors,  $G_2$  telle que :

$$\|G_2^{-1}\| \leq \frac{1}{\|B_2^{-1}\| \|\Delta B_2\|},$$

avec  $\Delta B_2 = T_2 \Delta B$  ( la norme prise est du type  $\|I\| = 1$ ), la contribution des termes d'incertitudes devient, alors, négligeable devant la dynamique ( $e' = Z e'$ ),  $Z$  étant la matrice d'évolution du système (3-3.9). Ceci peut être facilement réalisée par le placement des valeurs propres de  $Z$ , aussi loin que possible de l'origine, dans le demi plan gauche. Ce qui minimisera l'influence des variations paramétriques sur les pôles de réglage en mode de glissement.

Remarquons, également que, outre les propriétés sus-citées, la loi de commutation adaptative présente un autre aspect de robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques grâce à la structure d'inégalité (3-3.11). En effet, connaissant une borne supérieure de ces incertitudes, on peut toujours trouver des gains assurant l'atteinte du mode de glissement [112].

En ce qui concerne les perturbations externes, la robustesse du système de commande adaptatif est assurée, comme on l'a montré au paragraphe (3-2.5), grâce aux propriétés d'invariance, des VSS, en mode de glissement.

### 3-6-CONCLUSION

La présente stratégie semble être très séduisante eu égard aux propriétés d'invariance et de robustesse des systèmes VSS et à sa capacité de réduction des erreurs transitoires. Il est, également, à noter que cette approche se prête aisément au contrôle des procédés non linéaires sans poser le problème conventionnel de stabilité et de convergence globale vu que l'algorithme de commande ne requiert aucune identification.

Toutefois, quelques inconvénients méritent d'être signalés, notamment :

- La quantité d'informations à priori sur le procédé : l'ordre et les paramètres nominaux doivent être disponibles;

- L'accessibilité des états du procédé : lorsque certains états du procédé sont inaccessibles, leur reconstruction se fait par des filtres de grandeurs d'état (state variable filter) qui ne sont autres que des dérivateurs. Le problème qui se pose, alors, c'est l'irréalisabilité de dérivateurs parfaits, on est alors amené à utiliser des dérivateurs réel comportant des petites constantes de temps. L'utilisation de ces filtres contribue énormément à l'apparition du chahutement dans la trajectoire d'état;

- Le phénomène de broutement lié aux défauts de conception des dispositifs de commutation et des organes de commande et d'action.

Certains auteurs ont pu surmonter le problème de la méconnaissance du procédé en considérant des surfaces de commutation variant dans le temps et en utilisant des procédures adaptatives de détermination des paramètres de ces surfaces de sorte que le mode de glissement se produise et persiste [77].

Concernant l'inaccessibilité de certains états du procédé, des observateurs asymptotiques [103] peuvent être utilisés pour reconstruire ces états. Cette solution permet, ainsi, la réduction du broutement mais au prix d'une légère détérioration de la précision de poursuite.

Pour le phénomène de chahutement, comme on l'a mentionné, plusieurs solutions ont été proposées afin de réaliser un compromis entre la précision de la poursuite et la bande passante du système commandé. Actuellement, les dispositifs de commutation, sous l'impulsion des progrès enregistrés en électronique de puissance, permettent de fournir des fréquences de commutation de dizaines de KiloHertz minimisant ainsi l'effet du chattering sur les performances dans la majorité des procédés.

# CONTROLEURS ADAPTATIFS AUTO-AJUSTABLES

### 4-1-INTRODUCTION

En contrôle stochastique, la commande est influencée par la qualité de l'estimé de l'état du procédé. La résolution de ce problème conduit à des équations différentielles non linéaires très complexes [3], le contrôleur auto-ajustable (Self Tuning Controller : STC) se présente, alors, comme une alternative sous optimale à la commande de tels systèmes. En effet, cette approche repose sur le principe d'équivalence certaine qui permet de séparer le problème de commande stochastique en deux étapes, qui auront lieu simultanément, l'identification en ligne du procédé, et l'utilisation des paramètres de ce procédé pour générer la commande linéaire adéquate. Le STC fût à l'origine introduit au début des années 1960 par Kalman [49]; puis développé à maintes reprises, notamment, par Astrom et Wittenmark [4], [6], Clarke et Gawthrop [24], Goodwin [47], et Wellstead et Prager [105], [106].

Des modèles paramétriques discrets d'entrée-sortie sont, habituellement, adoptés en commande auto-ajustable, les versions continues dans l'espace d'état du STC, qui apparurent plus tard au début des années 1980 [104], ne sont que très peu utilisés en raison du temps de calcul élevé nécessaire à leur mise en oeuvre (elles demandent une estimation conjointe des paramètres et états du procédé [15]).

Il existe une multitude de stratégies de contrôle auto-ajustable, nous en citerons les principales : le STC à variance

minimale avec ses variantes, le STC à placement de pôles, les PID auto-ajustables [36], le contrôle LQG [8], et le contrôle prédictive généralisé [36]. Dans ce chapitre, l'accent sera mis sur les deux premières méthodes. Une attention particulière sera accordée aux problèmes de la commande auto-ajustable des systèmes multivariables, la méthode d'estimation des moindres carrés sera, également, présentée et commentée, et enfin, une conclusion clôturera ce chapitre.

#### 4-2-IDENTIFICATION DES SYSTEMES PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

L'identification est un outil essentiel de la commande, en général; et du contrôle auto-ajustable, en particulier, elle consiste à estimer les paramètres d'un modèle simple décrivant le plus fidèlement possible le comportement entrée-sortie du procédé. Cette proximité de comportement, et non de structure, se mesure à l'aide d'un critère qui exprime quantitativement l'écart entre le modèle et le système. Le rôle de l'algorithme d'estimation, qui constitue le coeur de cette procédure, est, alors, de minimiser ce critère.

A cet effet, plusieurs critères ont été considérés, parmi lesquels on peut citer [43]: la distance d'état, la distance de structure (erreur paramétrique), et la distance de prédiction, et différentes procédures de minimisation ont été proposées. Dans notre travail, nous avons adopté, pour sa simplicité de mise en oeuvre et sa flexibilité, la méthode d'identification des moindres carrés, qui est basée sur la minimisation de l'erreur quadratique de prédiction. Cette forme quadratique exprime en quelque sorte l'énergie du signal d'erreur.

Nous avons préféré la formulation récursive des moindres

carrés (MCR) car elle est la mieux adaptée aux problèmes d'identification en temps réel et à leurs implementation par micro-ordinateur et permet un réajustement en ligne des régulateurs.

#### 4-2-1-Estimation par la méthode des moindres carrés réursive

En contrôle auto-ajustable l'opération d'identification a pour objectif de déterminer les caractéristiques dynamiques du procédé dont la connaissance est nécessaire pour la synthèse et la mise en oeuvre d'un système de commande performant. Par la suite, nous considérerons des modèles dynamiques paramétriques échantillonnés DARMA (determenistic ARMA) [47] qui sont les plus appropriés à la commande numérique auto-ajustable.

Soit le modèle de procédé suivant :

$$A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) \quad (4-2.1)$$

où :  $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

En posant le vecteur paramètres :

$$\vartheta^T = [a_1 \dots a_{na} b_0 \dots b_{nb}], \quad (4-2.2)$$

et le vecteur observation :

$$\phi^T(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-na) u(t-d) \dots u(t-d-nb)] \quad (4-2.3)$$

on peut écrire la sortie :

$$y(t) = \vartheta^T \phi(t) \quad (4-2.4)$$

définissons la sortie prédite à l'instant t :

$$\hat{y}(t) = \hat{\vartheta}^T(t) \phi(t), \quad (4-2.5)$$

$\hat{\vartheta}(t)$  : l'estimée du vecteur  $\vartheta$  à l'instant t

Objectif : il s'agit, dans un premier temps, d'estimer le vecteur  $\vartheta$  à l'instant  $t$  pour qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre la sortie du procédé (4-2.1) et celle du modèle de prédiction (4-2.5) sur un horizon de  $t$  mesures :

$$\min_{\hat{\vartheta}} J = \min_{\hat{\vartheta}} \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\vartheta}^T(i) \phi(i)]^2 \quad (4-2.6)$$

Solution : Cette valeur s'obtient comme suit :

$$\frac{\delta J}{\delta \hat{\vartheta}} = 0, \quad (4-2.7)$$

ce qui donne

$$\hat{\vartheta}(t) = P(t) \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i) \quad (4-2.8)$$

avec

$$P^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t (\phi(i) \phi^T(i)) \quad (4-2.9)$$

Les relations (4-2.8) et (4-2.9) permettent de fournir des estimées du vecteur  $\vartheta$  sur la base d'observations et mesures recueillies sur le procédé jusqu'à l'instant  $t$ .

Version récursive : Considérons l'estimée de  $\vartheta$  à l'instant  $t+1$  :

$$\hat{\vartheta}(t+1) = P(t+1) \sum_{i=1}^{t+1} (y(i) \phi(i)) \quad (4-2.10)$$

compte tenu de la relation (4-2.9), on peut écrire :

$$P^{-1}(t+1) = P^{-1}(t) + \phi(t) \phi^T(t), \quad (4-2.11)$$

et qui, en vertu du lemme d'inversion [75], devient :

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t) \phi(t) \phi^T(t)}{1 + \phi^T(t) P(t) \phi(t)}, \quad (4-2.12)$$

et après décomposition des relations (4-2.8) et (4-2.10), on obtient la forme récursive de l'estimateur des moindres carrés :

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}(t+1) &= \hat{\vartheta}(t) + K(t) [y(t+1) - \hat{\vartheta}^T(t) \phi(t)] \\ K(t) &= \frac{P(t) \phi(t)}{1 + \phi^T(t) P(t) \phi(t)} \\ P(t+1) &= P(t) - \frac{P(t) \phi(t) \phi^T(t) P(t)}{1 + \phi^T(t) P(t) \phi(t)}\end{aligned}\quad (4-2.13)$$

La matrice  $P$ , dans la littérature, porte le nom de matrice de covariance [75], du fait qu'elle est proportionnel à la covariance des estimées des paramètres, dans le cas d'un système stochastique. Certains auteurs l'appellent, également, gain d'adaptation [60]. En pratique,  $P$  est initialisée à la valeur :

$$P_0 = P(0) = (1/\delta) I = g I, \quad 0 < \delta \ll 1 \quad (4-2.14)$$

une valeur typique étant ( $\delta = 0.001$ ).

Cet algorithme est à gain décroissant, ceci se voit très clairement de l'expression (4-2.12). Il donne de moins en moins de poids aux nouvelles erreurs de prédiction. Par conséquent, il ne conviendra pas à l'identification des systèmes variant dans le temps, pour lesquels, il faudra considérer d'autres profils de variation du gain d'adaptation.

Choix du gain d'adaptation : La formule de l'inverse du gain d'adaptation (4-2.11) peut se généraliser par l'introduction de séquences de pondération  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$ , comme indiqué ci-après :

$$P(t+1) = \lambda_1(t) P^{-1}(t) + \lambda_2(t) \phi(t) \phi^T(t) \quad (4-2.15)$$

avec  $0 < \lambda_1(t) \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_2(t) < 2$ , et  $P(0) > 0$

A noter que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , dans l'équation (4-2.15), ont un effet opposé.  $\lambda_1$  tend à augmenter le gain d'adaptation tandis que  $\lambda_2$

tend à décroître ce gain. Pour chaque choix  $(\lambda_1, \lambda_2)$  correspond un profil de variation du gain d'adaptation convenant à un type de système approprié, et à une interprétation en terme de critère d'erreur qui est minimisé par l'algorithme d'estimation :

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[ P(t) - \frac{P(t) \phi(t) \phi^T(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t) P(t) \phi(t)} \right] \quad (4-2.16)$$

Nous citons ci-après quelques variantes des MCR communément utilisées dans les schémas de contrôle auto-ajustable :

a) MCR à facteur d'oubli fixe :  $\lambda_2(t) = 1$ , et  $\lambda_1(t) = \lambda$ ;  $0 < \lambda < 1$

Ce type de gain correspond au critère suivant :

$$J = \sum_{i=1}^t \lambda_1^{(t-i)} (y(i) - \hat{\theta}^T \phi(i))^2 \quad (4-2.17)$$

et conduit à une pondération exponentielle des anciennes données, le maximum de poids étant donné à la dernière erreur. Cette méthode utilise une fenêtre glissante, de pondération exponentielle des informations, de longueur  $L = 1/(1-\lambda)$ . En pratique,  $0.95 < \lambda < 0.99$ .

L'inconvénient majeur de ces méthodes, est que les données sont tout le temps traitées même en absence de nouvelles informations ( $P \phi = 0$ ), comme c'est le cas en régime stationnaire qui se caractérise par des paramètres constants. Il en résulte, alors, une croissance exponentielle du gain d'adaptation conduisant inéluctablement à une explosion du vecteur paramètres. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom du problème du Wind up [60].

b) MCR à trace constante : cette variante des MCR a été introduite dans le but de réaliser un compromis entre la réponse de l'estimateur lorsque la dynamique du procédé varie et ses

performances en régime stationnaire. Dans ce cas,  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  sont choisis automatiquement à chaque pas pour assurer une trace constante de la matrice gain P :

$$\text{Trace } P(t+1) = \text{Trace } P(t) = \text{Trace } P(0) = n g \quad (4-2.18)$$

où n est le nombre de paramètres, et g I étant le gain initial.

Par cette technique, on déplace à chaque pas dans la direction optimale des MCR tout en maintenant le gain d'adaptation approximativement constant (regonflage du gain des MCR). Les valeurs de  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  se déterminent à partir de l'équation (4-2.18). En posant  $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda(t)$ , on obtient alors :

$$\lambda(t) = \frac{1}{n g} \text{ Trace } \left[ P(t) - \frac{P(t) \phi(t) \phi^T(t)}{1 + \phi^T(t) P(t) \phi(t)} \right] \quad (4-2.19)$$

D'autres mesures ont été proposées pour pallier le problème du wind up, on cite notamment, la méthode du gel de l'algorithme d'estimation lorsque les données sont jugées inutiles ou assez pauvres pour représenter la dynamique du système. Il y'a également la méthode de réinitialisation de la matrice gain de manière à éviter la convergence asymptotique du gain vers zéro ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ). Le rafraichissement de P se faisant, soit par une procédure de détection de changement de dynamique du procédé, soit par une période choisie a priori [47].

#### 4-2-2-Stabilité de l'estimateur des MCR

Dans le cas des estimateurs MCR, le gain d'adaptation est une matrice qui doit être définie positive. Une telle condition dépend de la précision des moyens de mise en oeuvre et ceci est particulièrement important dans le cas des micro-calculateurs. En effet, l'algorithme d'estimation implanté sur calculateur opère

durant des dizaines de milliers d'itérations en utilisant des mots de mémoire courts, ce qui risque d'induire des erreurs d'arrondis. La propagation de ces erreurs numériques dans le processus d'estimation peut entraîner la perte de la propriété de la positivité de la matrice P. Il en résulte, alors, l'explosion numérique de l'estimateur.

Pour pallier ce problème d'instabilité numérique, plusieurs contributions ont été apportées, notamment, par Bierman et Thornton [99] qui proposèrent la méthode de factorisation UD. Cette méthode consiste à mettre la matrice P sous la forme :

$$P(t) = U^T(t) D(t) U(t)$$

U(t) et D(t) étant des matrices respectivement triangulaire supérieure et diagonale. Le maintien de la positivité de P est, alors, assuré par la réactualisation des matrices U(t) et D(t) au lieu de celle de P(t).

Peterka, quant à lui, proposa la méthode de décomposition racine carrée [79], qui consiste à mettre à jour, à chaque instant t, la matrice racine carrée de P au lieu du gain P lui même. Cette décomposition peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de factorisation en posant  $D = I$ .

*Forme Racine Carrée des MCR* : En posant :

$$P(t) = S(t) S^T(t) \tag{4-2.20}$$

S : matrice triangulaire supérieure

la mise à jour de la matrice S, au lieu de P, permettra de maintenir la positivité de P et, donc, la stabilité de l'estimateur.

En choisissant  $\lambda_2(t) = 1$  et  $\lambda_1(t) = \lambda$ , la relation (4-2.15) donnera, en considérant (4-2.20) :

$$S(t+1) S^T(t+1) = [\lambda (S^T(t))^{-1} S^{-1}(t) + \phi(t+1)\phi^T(t+1)]^{-1} \quad (4-2.21)$$

Le problème de l'extraction de la racine carrée a été étudié dans [79] on obtient alors l'algorithme d'estimation suivant :

$$\sigma_0 = \lambda$$

$$f_j = \sum_{i=1}^j S(t)_{ij} \phi_i(t)$$

$$\sigma_j^2 = \sigma_{j-1}^2 + f_j^2$$

$$k_j = S(t)_{jj} f_j$$

$$S(t+1)_{jj} = S(t)_{jj} \sigma_{j-1} / (\lambda \sigma_j) \quad (4-2.22)$$

$$S(t+1)_{ij} = \frac{\sigma_{j-1}}{\lambda \sigma_j} [S(t)_{ij} - f_j^2 k_i / \sigma_{j-1}^2]$$

$$k_i = S(t)_{ij} f_j + k_i, \quad i=1,2,\dots,j-1 \text{ et } j=1,2,\dots,n$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{k}{\sigma^2} (\hat{y}(t+1) - \hat{\theta}(t) \phi(t)), \quad \sigma^2 = \sigma_n^2$$

Cet algorithme permet, outre l'amélioration de la robustesse des schémas de commande auto-ajustables, des performances comparables à l'estimateur MCR, malgré l'augmentation du nombre d'opérations liée à l'extraction de racines carrées [7], [49].

#### 4-2-3-Convergence de l'estimateur MCR

Deux aspects sont à considérer dans l'étude de la convergence des MCR, en l'occurrence, l'influence des perturbations sur les performances de l'estimateur, et l'effet du signal d'entrée sur la qualité de l'estimation.

*effets du bruit* : Lorsque le bruit affectant le procédé n'est pas corrélé avec le vecteur observations  $\phi(t)$ , l'estimateur MCR donne des résultats non biaisés et optimum. Par contre, lorsque le bruit et les observations sont corrélés, comme c'est le cas dans un environnement stochastique, l'estimateur MCR introduit un biais dans les estimées des paramètres. Plusieurs méthodes ont été proposées pour éliminer de tels biais, chacune étant adaptée à certains modèles de perturbations. Ainsi, la méthode des moindres carrés étendus (MCE) modélise les perturbations et à la convergence la séquence des erreurs de prédiction est un bruit blanc. Il y'a, également, les méthodes de variables instrumentales où la convergence vers des paramètres non biaisés est assurée par une décorrélation asymptotique du vecteur des observations et des erreurs de prédiction [7], [61], [75].

*Considérations sur le signal d'entrée* : La convergence de l'erreur de prédiction n'implique pas nécessairement la convergence des paramètres. C'est le cas, par exemple, d'un système à entrée constante qui permet d'assurer le même comportement entrée-sortie du modèle et du procédé, en n'identifiant que les gains statiques du procédé. Cela est dû au fait que le signal d'entrée n'est pas suffisamment excitant. En règle générale, pour bien identifier un procédé, l'entrée doit être choisie suffisamment riche en fréquences (contenant au moins  $(n/2)$  sinusoïdes distinctes, où  $n$  est la dimension du vecteur paramètres). En boucle ouverte, un exemple de signal approprié est constitué par les séquences pseudo-aléatoires dont le spectre s'étale sur une large bande de fréquences et qui sont facilement générées par ordinateur.

Dans les systèmes de commande auto-ajustable l'identification se fait en boucle fermée, le problème de la richesse de la

commande se pose de manière aiguë. Dans certains cas, les bruits et les incertitudes affectant le procédé agissent dans le sens d'accentuer l'excitation de la commande. Par contre, dans d'autres cas, les signaux de commande sont tellement pauvres que les performances des contrôleurs sont négatives. Plusieurs solutions, pour surmonter ces difficultés, ont été proposées. Certains auteurs préconisent la superposition, au signal de commande, d'une SPBA de faible amplitude afin d'exciter tous les modes du système [43], d'autres utilisent une SBPA filtrée afin d'éviter l'excitation des modes HF indésirables [2]. D'autres travaux récents se sont penchés sur la modification des algorithmes d'estimation de manière à se passer de la contrainte d'excitation persistante [47], [36].

#### 4-3-CONTROLE AUTO-AJUSTABLE A VARIANCE MINIMALE

Cette stratégie dérive de l'approche directe du problème de contrôle adaptatif, elle consiste à reparamétriser l'ensemble procédé-Contrôleur en fonction des paramètres d'une loi de commande linéaire à variance minimale. Ces paramètres sont, alors, directement identifiés.

##### 4-3-1-Commande à variance minimale

Considérons le procédé DARMA (4-2.1), où  $d$  représente le retard du système, définissons le prédicteur à  $d$  pas de la sortie (valeur de la sortie à l'instant  $t+d$ ) :

$$y^*(t+d) = F(q^{-1}) y(t) + G(q^{-1}) u(t) \quad (4-3.1)$$

où les polynômes  $F(q^{-1})$  et  $G(q^{-1})$  sont donnés par l'identité suivante:

$$I = E(q^{-1}) A(q^{-1}) + q^{-d} F(q^{-1}) \quad (4-3.2)$$

et la relation :

$$G(q^{-1}) = E(q^{-1}) B(q^{-1}) \quad (4-3.3)$$

avec :

$$\deg G = n_b + d - 1, \text{ et } \deg F = n_d - 1 \quad (4-3.4)$$

La loi de commande à variance minimale consiste, alors, à minimiser à chaque instant  $t$ , un critère quadratique en terme de l'écart entre la sortie prédite à  $d$  pas et celle désirable ( $y_d$ ):

$$J = [y^*(t+d) - y_d(t+d)]^2 \quad (4-3.5)$$

Cette quantité peut être interprétée, dans le cas stochastique, comme la variance de l'erreur de prédiction.

Notons, également, que la considération du prédicteur à  $d$  pas est principalement due au fait que l'action d'une commande à l'instant  $t$  n'est observée à l'instant  $t+d$ .

Cette méthode, qui fût à l'origine proposée par Astrom [4], donna lieu à des performances de poursuite acceptables. Cependant, il s'est avéré qu'elle est très sensible à la position des zéros du procédé. En effet, dans le cas de procédés à non minimum de phase, la loi de contrôle à variance minimale fournit des efforts de commande excessifs.

Pour pallier ce problème, Clarke et Gawthrop [24], [25] présentèrent le contrôleur à variance minimale généralisée (VMG), qui minimise le critère suivant :

$$J_1 = \left\{ [P y^*(t+d) - R y_d(t-d)]^2 + [Q u(t)]^2 \right\} \quad (4-3.6)$$

$P(q^{-1})$ ,  $R(q^{-1})$ , et  $Q(q^{-1})$  étant des polynômes de pondération.

On constate que la contribution de la commande a été prise en compte dans ce critère. Permettant, ainsi, à cette stratégie

modifiée, de réaliser un compromis entre la minimisation de l'erreur de prédiction et l'effort de commande. De cette manière, le contrôleur VMG peut facilement commander des systèmes à non minimum de phase avec des efforts de commande modérés.

La minimisation du critère (4-3.6) est équivalente à l'annulation de la sortie auxiliaire  $\phi(t)$  telle que :

$$\phi(t) = P(q^{-1}) y(t) - R(q^{-1}) y_d(t) + Q(q^{-1}) u(t-d) \quad (4-3.7)$$

En posant :

$$\psi(t) = P(q^{-1}) y(t) = \frac{P_N(q^{-1})}{P_D(q^{-1})} y(t) \quad (4-3.8)$$

On peut, en s'inspirant des relations (4-3.1)-(4-3.3), construire un prédicteur à  $d$  pas de la sortie pondérée  $\psi(t)$  :

$$\psi^*(t+d) = F(q^{-1}) \frac{y(t)}{P_D(q^{-1})} + G(q^{-1}) u(t) \quad (4-3.9)$$

$F(q^{-1})$  et  $G(q^{-1})$  étant donnés par la relation :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1}) E(q^{-1}) + q^{-d} \frac{F(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}, \quad (4-3.10)$$

et  $G(q^{-1})$  vérifiant (4-3.3), les degrés de  $F$  et  $G$  sont données par (4-3.4).

En annulant la sortie auxiliaire (4-3.7), on obtient alors la commande VMG :

$$u(t) = \frac{R(q^{-1}) y_d(t+d) - \psi^*(t+d)}{Q(q^{-1})} \quad (4-3.11)$$

la substitution de l'expression du prédicteur (4-3.9) dans

(4-3.11) donne :

$$u(t) = \frac{R(q^{-1}) y_d(t+d) - F(q^{-1}) y_f(t)}{G(q^{-1}) + Q(q^{-1})} \quad (4-3.12)$$

$y_f(t)$  étant la sortie filtrée à l'instant  $t$  :

$$y_f(t) = \frac{y(t)}{P_D(q^{-1})} \quad (4-3.13)$$

Il vient, alors, que l'équation du système en boucle fermée s'écrit :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1}) R(q^{-1}) y_d(t)}{A(q^{-1}) [G(q^{-1}) + Q(q^{-1})] + B(q^{-1}) \frac{F(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}} \quad (4-3.14)$$

en tenant compte de la relation (4-3.10), on peut écrire :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1}) R(q^{-1}) y_d(t)}{A(q^{-1}) Q(q^{-1}) + B(q^{-1}) P(q^{-1})} \quad (4-3.15)$$

la relation (4-2.1) entraîne également :

$$u(t) = \frac{A(q^{-1}) R(q^{-1}) y_d(t+d)}{A(q^{-1}) Q(q^{-1}) + B(q^{-1}) P(q^{-1})} \quad (4-3.16)$$

L'examen de l'équation caractéristique du système en boucle fermé (4-3.14) :

$$P_c = A(q^{-1}) Q(q^{-1}) + B(q^{-1}) P(q^{-1}) \quad (4-3.17)$$

fait ressortir qu'un choix approprié des polynômes  $P$  et  $Q$  permet de réaliser un compromis entre une erreur de poursuite faible et un effort de commande modéré même si le procédé est à non minimum

de phase. En effet, en posant, par exemple, :

$P(q^{-1}) = 1$  et  $Q(q^{-1}) = \lambda$  ( $\lambda$  étant choisie inférieure à 1 pour avoir une biaise de poursuite faible), il vient alors :

$$P_c = B(q^{-1}) + \lambda A(q^{-1}) \quad (4-3.18)$$

. Le choix de  $\lambda$  proche de 1 implique que les zéros de  $P_c$  et donc les pôles du système en boucle fermée vont migrer vers les zéros du polynôme  $A(q^{-1})$ . Ce choix convient à la commande des procédés stables à déphasage non minimal [27];

.  $\lambda \ll 1$ , les pôles du système en boucle fermée se déplaceront vers ceux du polynôme  $B(q^{-1})$ . Ce choix convient aux systèmes instables à minimum de phase;

. Pour les système instable et à non minimum de phase, le choix de  $\lambda$  s'avère délicat surtout dans le cas adaptatif. Il conviendrait alors de déterminer ce paramètre à l'aide d'une procédure de placement de pôles [65], [69].

Signalons, enfin, que le polynôme  $P$ , introduit pour pondérer la sortie et offrir par la même plus de flexibilité quant au choix des pôles du système en boucle fermée, peut également induire une action de filtrage des perturbations de sortie au cas où des informations sont disponibles sur leur bande de fréquences. Le polynôme  $R$  permet la pondération de la sortie désirable de sorte que son spectre de fréquences appartienne à une bande donnée. Le polynôme  $Q$  sert à pondérer le signal de commande dans le sens de la réduction de son énergie, il est, en général, choisi comme un PI inverse :

$$Q(q^{-1}) = \lambda (1 - q^{-1}) / (1 - \alpha q^{-1}) \quad (4-3.19)$$

le facteur  $(1 - q^{-1})$  élimine les offsets (erreur statique en régime permanent), le terme  $(1 - \alpha q^{-1})$  agit dans le sens de

réduire les dépassements résultant de l'action d'élimination des offsets (en pratique  $\alpha \ll 1$ ) [36].

#### 4-3-2-Version auto-ajustable du contrôleur GMV

Il s'agit de construire à chaque instant d'échantillonnage  $t$  le prédicteur optimal à  $d$  pas de la sortie pondérée (4-9.3) reparamétrisé en terme des paramètres du contrôleur, ces derniers seront utilisés pour générer la commande VMG. Pour cela on définit les vecteurs paramètres  $\vartheta(t)$  et observations  $\phi(t)$  comme suit :

$$\vartheta(t) = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{ng} \ f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{nf}] \quad (4-3.20)$$

$$\phi(t) = [y_f(t) \ y_f(t-1) \ \dots \ y_f(t-nf), u(t) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-ng)] \quad (4-3.21)$$

où  $ng$  et  $nf$  sont les degrés respectifs des polynômes  $F$  et  $G$ , ils sont donnés par la relation (4-3.4).  $y_f(t)$  est donnée par (4-3.13).

La commande auto-ajustable VMG s'obtient, sur un horizon  $N$ , en identifiant les polynômes  $F$  et  $G$  et en les utilisant pour calculer la valeur de la commande à l'aide de (4-3.12). Cela se résume comme suit :

- . Initialisation de vecteur  $\hat{\vartheta}(t)$  (estimée de  $\vartheta$  à l'instant  $t$ );
- .  $t = 1$ ;
- . Construction du vecteur observation  $\hat{\phi}(t)$ ;
- . Mesure de la sortie pondérée  $\psi(t)$ ;
- . Estimation du vecteur paramètres  $\hat{\vartheta}(t)$  en utilisant l'algorithme MCR sous sa forme racine carrée (4-2.22);
- . Calcul de la commande  $u(t)$  en utilisant les estimées  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  à l'aide de la relation (4-3.12);
- .  $t = t + 1$ , jusqu'à  $N$ .

La caractéristique principale de cette stratégie adaptative est que son fonctionnement ne nécessite pas la convergence

des paramètres du régulateur, seule la convergence du prédictiveur vers la sortie désirable est exigé, ceci relaxe, donc, le signal de commande de la condition d'excitation persistante.

Les connaissances à priori exigées par cet algorithme de commande sont :

- . Le retard  $d$  du procédé;
- . Une borne supérieure de polynôme  $F$  et  $G$ ;
- . Les zéros de l'équation caractéristique (4-3.17) sont stables.

Cette dernière information est difficile à connaître à priori, dans la mesure où les polynômes  $A$  et  $B$  sont inconnus. quelques auteurs suggèrent de résoudre (4-3.17) en ligne en imposant les zéros de l'équation caractéristique [62],[65]. Cependant, le choix de  $\lambda$  inférieur à 1 dans (4-3.18) donne des performances acceptables en pratique [27].

#### 4-4-CONTROLE AUTO-ÁJUSTABLE A PLACEMENT DE POLES

Cette stratégie de contrôle relève de l'approche indirecte qui consiste à utiliser les estimées des paramètres du procédé, à chaque instant, pour générer une commande du type à placement de pôles.

##### 4-4-1-Commande linéaire à placement de pôles

La loi de commande agit dans le sens de déplacer les pôles du procédé en boucle fermée, tout en laissant inchangés les zéros du procédé, de manière à réaliser des objectifs conventionnels tels que poursuite, régulation et stabilité. La commande à la forme générale suivante .:

$$F(q^{-1}) y(t) = R(q^{-1}) y_d(t) - G(q^{-1}) u(t) \quad (4-4.1)$$

$F(q^{-1})$  et  $G(q^{-1})$  et  $R(q^{-1})$  des polynômes de degrés appropriés.

En substituant l'expression de  $u(t)$  (4-4.1) dans (4-2.1), on obtient l'équation du système en boucle fermée :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1}) q^{-d} R(q^{-1}) y_d(t)}{G(q^{-1}) A(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) F(q^{-1})} \quad (4-4.2)$$

Il s'agit, alors, de placer les zéros de l'équation caractéristique dans des positions désirables telles que mentionnées ci-dessus. Cela se fait en résolvant l'identité polynomiale suivante par rapport à F et G :

$$P(q^{-1}) = G(q^{-1}) A(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) F(q^{-1}) \quad (4-4.3)$$

où  $P(q^{-1})$  spécifie les positions désirables des pôles.

La relation (4-4.3) est connue dans la littérature sous le vocable d'équation de diophantine [61]. Elle peut souvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M X = T \quad (4-4.4)$$

où :

$$X^T = [1 \ g_1 \ \dots \ g_{ng} \ f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{nf}]$$

$$T^T = [1 \ p_1 \ \dots \ p_{np}]$$

les  $g_i$ ,  $f_i$ , et  $p_i$  sont les coefficients respectifs des polynômes G, F, et P et dont les degrés sont donnés par :

$$ng = nb + d - 1, \quad nf = na - 1, \quad np = nf + ng. \quad (4-4.5)$$

M étant une matrice donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ a_{n_a} & \dots & a_1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n_a} & \dots & a_1 & b_{n_b} & \dots & b_0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n_a} & \dots & a_2 & 0 & b_{n_b} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n_a} & 0 & 0 & \dots & b_{n_b} \end{bmatrix} \quad (4-4.6)$$

$n_a$  et  $n_b$  sont les degrés respectifs des polynômes A et B.

L'équation (4-4.3) possèdera toujours une solution unique si  $n_p$  vérifie la relation (4-4.5) et les polynômes A et B sont premiers entre eux.

La solution X s'obtient de la façon suivante :

$$X = M^{-1} T \quad (4-4.7)$$

les polynômes F et G ainsi obtenus spécifient la dynamique de régulation du contrôleur, l'équation du système en boucle fermée (4-4.2) devient alors :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1}) q^{-d} R(q^{-1}) y_d(t)}{P(q^{-1})} \quad (4-4.8)$$

Le choix du polynôme R se fait selon les considérations suivantes:

- . Gain statique unité entre  $y$  et  $y_d$ ;
- . Compensation de la dynamique de régulation  $P(q^{-1})$ , celle ci étant en général différente (plus rapide) de la dynamique de poursuite spécifiée par le dénominateur de la fonction de transfert du modèle  $A_m(q^{-1})$  générant  $y_d(t)$ . Ceci conduit à choisir :

$$R(q^{-1}) = \begin{cases} \frac{T(q^{-1})}{B(1)}, & B(1) \neq 0 \\ T(q^{-1}), & B(1) = 0 \end{cases} \quad (4-4.9)$$

L'algorithme ci-dessus a fait l'objet de plusieurs modifications en vue de l'adapter à la commande des systèmes affectés par des bruits de mesure et des offsets (erreurs statiques). A cet effet, pour éliminer les offsets, il est proposé dans la littérature [49] l'introduction d'un intégrateur numérique dans la chaîne de commande, ce qui se traduit par le remplacement du polynôme G par G' tel que :

$$G' = G (1 - q^{-1}) = G H_2(q^{-1}) \quad (4-4.10)$$

D'autre part, pour des raisons de robustesse numérique, un filtre  $H_1(q^{-1})$  est inséré, en général, avec F :

$$H_1(q^{-1}) = (1 - \alpha q^{-1}) / (1 - \alpha), \quad 0 < \alpha \ll 1 \quad (4-4.11)$$

avec la restriction A et H doivent être premier entre eux.

La fonction de transfert en boucle fermée devient alors :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-d} R(q^{-1}) B(q^{-1})}{A(q^{-1})G(q^{-1}) H_2(q^{-1}) + q^{-d} F(q^{-1}) H_1(q^{-1})} \quad (4-4.12)$$

l'équation de diophantine peut être alors réécrite comme :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})G(q^{-1}) H_2(q^{-1}) + q^{-d} F(q^{-1}) H_1(q^{-1}) \quad (4-4.13)$$

les pôles désirables en boucle fermée qui sont les racines du polynôme P s'obtiennent par discrétisation d'un modèle du second ordre continu ayant la fréquence propre et l'amortissement désirable.

Signalons, enfin, qu'un effet de filtrage peut être introduit

dans une certaine bande de fréquences soit pour réduire un bruit de mesure soit pour adoucir les variations de la commande. ceci se fait en remplaçant le polynôme désirable P par :

$$P_1(q^{-1}) = P(q^{-1}) H_3(q^{-1}) \quad (4-4.15)$$

$H_3(q^{-1})$  décrivant la dynamique du filtre.

#### 4-4-2-Version auto-ajustable du contrôleur à placement de pôles

Il s'agit d'identifier, à chaque instant, la dynamique du procédé (les polynômes A et B) et d'utiliser, alors, les estimées de ces paramètres pour la génération de la commande à placement de pôles. Pour cela, on définit, à l'instant t, le vecteur paramètres estimés

$$\hat{\theta}(t) = [a_1 \dots a_{na} \ b_0 \dots b_{nb}], \quad (4-4.16)$$

et le vecteur observations :

$$\phi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-na), u(t-d) \dots u(t-nb-d)] \quad (4-4.17)$$

La procédure d'adaptation, sur un horizon N, se résume comme suit :

- . Initialisation du vecteur paramètres  $\hat{\theta}$  (le modèle initiale doit être stable);
- .  $t_1 = 1$ ;
- . Estimation des paramètres  $\hat{\theta}(t)$  à l'aide de l'algorithme MCR à trace constante décrit par les relations (4-2.13), (4-2.16) et (4-2.19);
- . Résolution de l'équation de diophantine (4-4.13);
- . Calcul de la commande  $u(t)$  (4-4.1) en tenant compte des modifications éventuelles (4-4.10) et (4-4.11);
- .  $t = t + 1$ , jusqu'à N.

Remarques :

a) Cette stratégie de commande auto-ajustable n'exige que la connaissance d'une borne supérieure des polynômes A et B, aucune connaissance, n'est en revanche, requise sur le retard d. Par conséquent, cette algorithme peut facilement être appliqué aux procédés à retard variant dans le temps, une surparamétrisation du modèle de procédé peut, alors être envisagée. Cet avantage induit, malheureusement, l'inconvénient de l'alourdissement de l'algorithme de calcul;

b) La position des zéros du procédé, contrairement à la commande STC VMG, n'influe aucunement sur les performances du contrôleur auto-ajustable à placement de pôles;

c) Le point délicat de cette stratégie est le problème de la résolution de l'équation de diophantine. En effet, il peut arriver, pendant un certain laps de temps, que le modèle identifié soit non commandable ou non stabilisable, ceci se traduit par une singularité de la matrice M donnée par la relation (4-3.27) entraînant ainsi la non existence de la commande  $u(t)$ .

Deux solutions sont alors à prévoir :

. s'arranger pour que bien qu'identifiant un système rebouclé, l'on converge vers les vrais paramètres du système, ceci impose notamment des conditions d'excitation sur la commande effectivement appliquée et requiert, par exemple, la superposition à la commande auto-ajustable un signal d'excitation supplémentaire.

. agir sur l'algorithme d'identification au niveau du gain et des paramètres estimés pour maintenir la satisfaction de cette propriété. A cet effet, nous avons proposé d'adopter l'estimateur

MCR à trace constante dont on peut éventuellement rafraîchir la matrice de covariance périodiquement pour fournir cette excitation persistante.

d) En pratique, dans un souci de réduire les calculs, on ne réactualise la loi de commande que si les variations des paramètres estimés est significative [36]. Cette notion est cependant assez difficile à préciser et à manipuler avec précaution. Rappelons, à ce sujet, que la variation des racines d'un polynôme peut être sans commune mesure avec la variation de ces paramètres.

#### 4-5-EXTENSION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES

##### 4-5-1-Position du problème

L'extension des techniques auto-ajustables monovariabiles aux systèmes multivariabiles est loin d'être évidente, des problèmes spécifiques apparaissent tels que les connaissances à priori nécessaires sur le procédé, le temps et la qualité de calcul, les retards des différentes boucles, et les termes de couplage entre les diverses canaux de transmission. Toutes ces difficultés sont liées à la structure du modèle de commande adopté. En effet, si l'on considère le modèle DARMA multivariable (m entrées, m sorties) suivant :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t), \quad (4-5.1)$$

$A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  étant des matrices polynomiales données par :

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} A_{11}(q^{-1}) & A_{12}(q^{-1}) & \dots & A_{1m}(q^{-1}) \\ A_{21}(q^{-1}) & A_{22}(q^{-1}) & \dots & A_{2m}(q^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(q^{-1}) & A_{m2}(q^{-1}) & \dots & A_{mm}(q^{-1}) \end{bmatrix}, \quad (4-5.2)$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} q^{-d_{11}} B_{11}(q^{-1}) & q^{-d_{12}} B_{12}(q^{-1}) & \dots & q^{-d_{1m}} B_{1m}(q^{-1}) \\ q^{-d_{21}} B_{21}(q^{-1}) & q^{-d_{22}} B_{22}(q^{-1}) & \dots & q^{-d_{2m}} B_{2m}(q^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^{-d_{m1}} B_{m1}(q^{-1}) & q^{-d_{m2}} B_{m2}(q^{-1}) & \dots & q^{-d_{mm}} B_{mm}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad (4-5.3)$$

les termes  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont des polynômes de degrés appropriés, les  $d_{ij}$  sont les retards correspondant aux paires  $(y_i, u_j)$ .

Le système (4-5.1) peut également se mettre sous la forme :

$$A_{ii}(q^{-1}) y_i(t) = B_{ii}(q^{-1}) q^{-d_{ii}} u_i(t) + \sum_{i \neq j} B_{ij}(q^{-1}) q^{-d_{ij}} u_j(t) - \sum_{i \neq j} A_{ij}(q^{-1}) y_j(t) \quad (4-5.4)$$

On remarque que cette structure décrit de manière complète les propriétés intrinsèques d'un système MIMO (multi-entrées, multi-sorties), à savoir les interactions ou couplages entre les différentes entrées et sorties et tous les retards des boucles de commande.

L'utilisation de ce modèle entraîne beaucoup de problèmes, notamment en ce qui concerne la commande auto-ajustable directe, qui repose sur la reparamétrisation du procédé en terme des paramètres du contrôleur, où l'on exige la connaissance de la matrice interacteur [35] exprimant tous les retards  $d_{ij}$  du procédé

pour pouvoir construire un prédicteur optimal. Cette condition étant très peu réaliste dans un contexte adaptatif, certains auteurs proposent des lois de commande auto-ajustables reposant sur la connaissance partielle ou simplifiée de cette matrice [39], [53], d'autres contributions visant, justement, à surmonter cet handicap suggèrent d'estimer en ligne l'interacteur, cela minimise la quantité d'informations requises a priori sur le procédé [87] mais, en revanche, alourdit l'algorithme de calcul. Aux problèmes sus-cités, il faut ajouter la forte sensibilité des lois de contrôle directe vis à vis de la position des zéros du procédé, question déjà évoquée dans le cas monovariante.

En commande auto-ajustable indirecte, la connaissance des retards n'est pas indispensable, une surparamétrisation du système permet de surpasser ce problème. Par contre, la non commutativité du produit matriciel conduit à la résolution d'une équation matricielle identique à celle de diophantine [81], ce qui a pour effet l'alourdissement de l'algorithme de calcul. un second problème se posant aussi bien dans le cas monovariante que dans le cas multivariante mais de manière plus aiguë est la résolution en ligne d'une équation de diophantine vectorielle [88] et la quantité élevée de calculs qu'elle nécessite. On peut également soulever la question des termes de couplages, faut il les considérer tous ou négliger certains d'entre eux, certains auteurs comme Prager et Wellstead [81], Dugard [60], et Koivo [56] proposent de les déterminer tous en ligne et ce en utilisant  $n$  estimateurs en parallèle conduisant ainsi à un nombre élevé de paramètres à estimer avec toutes les difficultés associées (stabilisabilité du modèle identifié, surparamétrisation entraînant une singularité de l'équation de diophantine, et alourdissement de l'algorithme de

commande).

Dans le souci de réaliser un compromis entre la simplicité de l'algorithme de commande et la qualité des performances, nous proposons, dans ce qui suit, en s'inspirant des travaux de Koivo [55], Goodwin [46], Mansour [68], Deng [32] et de Tham [98], des contrôleurs auto-ajustables basés sur les modèles de commande suivants :

a) Modèle totalement découplé : le procédé est supposé être représenté par le modèle DARMA MIMO suivant :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t) + d(t) \quad (4-5.5)$$

A et B étant des matrices polynomiales diagonales données par :

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} A_1(q^{-1}) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(q^{-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & A_3(q^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_m(q^{-1}) \end{bmatrix}, \quad (4-5.6)$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} q^{-d_1} B_1(q^{-1}) & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q^{-d_2} B_2(q^{-1}) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{-d_3} B_3(q^{-1}) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & q^{-d_m} B_m(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

le terme  $d(t)$  représentant les diverses perturbations auxquelles le procédé est soumis.

L'idée essentielle des contrôleurs construits à base de ce modèle consiste à mettre le procédé (4-5.4) sous la forme (4-5.5),

on obtient ainsi un ensemble de sous systèmes SISO :

$$A_i(q^{-1}) y_i(t) = B_{ii}(q^{-1}) u_i(t) + d_i(t), \quad i = 1 \dots m \quad (4-5.7)$$

les termes de couplage entrées-sorties sont considérés comme des perturbations et sont donc représentés par :

$$d_i(t) = \sum_{j \neq i} q^{-d_{ij}} B_{ij}(q^{-1}) u_j(t) + \sum_{j \neq i} A_{ij}(q^{-1}) y_j(t), \quad i, j : 1 \dots m$$

il incombera, alors, au contrôleur auto-ajustable considéré la charge de compenser ou réduire l'effet de ces perturbations.

Cette méthode permet de convertir le problème de la commande auto-ajustable multivariable en m (nombre d'entrées/sorties) problèmes de contrôle auto-ajustable monovariabile;

b) Modèle partiellement découplé : on considère le modèle (4-5.4) avec la matrice B pleine, A restant inchangée :

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} q^{-d_{11}} B_{11} & q^{-d_{12}} B_{12} & \dots & q^{-d_{1m}} B_{1m} \\ q^{-d_{21}} B_{21} & q^{-d_{22}} B_{22} & \dots & q^{-d_{2m}} B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q^{-d_{m1}} B_{m1} & q^{-d_{m2}} B_{m2} & \dots & q^{-d_{mm}} B_{mm} \end{bmatrix} \quad (4-5.8)$$

un tel modèle peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_i(q^{-1}) y_i(t) = B_{ii}(q^{-1}) u_i(t) + \sum_{j \neq i} q^{-d_{ij}} B_{ij}(q^{-1}) u_j(t) + d_i(t) \quad (4-5.9)$$

le terme  $d_i(t)$  représente, dans ce cas, les couplages ( $y_i(t), u_j(t)$ ) avec ( $j \neq i$ ), et autres erreurs de modélisation.

Ceci revient donc à considérer le procédé (4-5.4) comme un

ensemble de sous systèmes multi-entrées, simple sortie (MISO) perturbés auxquels il conviendrait alors d'appliquer des techniques d'auto-ajustage similaires à celles monovariables.

#### 4-5-2- STC GMV multivariable

##### a) Variante basée sur un modèle totalement découplé

Cette modélisation permet de séparer le problème de la commande d'un système multivariable du type (4-5.4) en  $m$  problèmes de contrôle auto-ajustable monovariable. On aura alors  $m$  contrôleurs monovariables travaillant en parallèle, chacun d'entre eux ayant la charge de commander un des  $m$  sous systèmes résultant de cette modélisation.

Conformément à la stratégie STC GMV présentée au paragraphe 4-3, on définit le vecteur des paramètres du ( $i$ ème) contrôleur  $\vartheta_i(t)$ , la procédure d'adaptation se fait alors comme suit :

- . à chaque instant d'échantillonnage  $t$ , faire les opérations suivantes :
- . pour chaque boucle de commande  $i$  ( $i = 1 \dots m$ ) faire :
- . estimation du vecteur  $\vartheta_i(t)$  à l'aide de (4-2.22);
- . utiliser l'estimé  $\hat{\vartheta}_i(t)$  du vecteur  $\vartheta(t)$  pour générer la commande  $u_i(t)$  suivant (4-3.12).
- . fin.

Cette méthode nécessite la connaissance des retards  $d_{ii}$  relatifs aux paires  $(y_i, u_i)$  et des bornes supérieures des degrés des polynômes  $A_{ii}$  et  $B_{ii}$ . il faut également noter que, similairement à la stratégie monovariable, cette variante multivariable présente beaucoup de problèmes quant aux choix a priori des polynômes  $P$  et  $Q$  assurant une action de commande stable des systèmes à non minimum de phase.

b) Variante basée sur un modèle partiellement découplé :

Dans ce cas, on suppose que le procédé est modélisé suivant l'équation (4-5.9). Par conséquent, la loi de commande doit tenir compte du terme  $(\sum_{j \neq i} q^{-d_{ij}} B_{ij}(q^{-1}) u_j(t))$  représentant les couplages

entrées-sortie. L'objectif de contrôle est la minimisation en ligne du critère quadratique suivant :

$$J = \| y^*(t+d) - y_d(t) \|^2 + \| Q u(t) \|^2 \quad (4-5.10)$$

$y^*(t+d)$  étant le vecteur prédiction de la sortie à d pas,  $y_d(t)$  la sortie désirable à l'instant t,  $u(t)$  le vecteur de commande, et Q est une matrice diagonale.

Ceci est équivalent à la minimisation en ligne de m critères quadratiques  $J_i$  de la forme :

$$J_i = \| y_i^*(t+d_{ii}) - y_{di}(t) \|^2 + \| Q_i u_i(t) \|^2, \quad i=1 \dots m \quad (4-5.11)$$

Le prédicteur optimal à  $d_{ii}$  pas est donné par l'expression :

$$y_i^*(t+d_{ii}) = F_i(q^{-1}) y_i(t) + G_{ii}(q^{-1}) u_i(t) + \sum_{j \neq i} G_{ij}(q^{-1}) u_j(t+d_{ii}-d_{ij}), \quad i, j = 1 \dots m \quad (4-5.12)$$

où les polynômes  $G_{ij}$  et  $F_i$  sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} G_{ij} &= E_i B_{ij} \\ I &= E_i A_i + q^{-d_{ii}} F_i \end{aligned} \quad (4-5.13)$$

La minimisation des critères (4-5.11) donne les loi de commandes

suivantes ( $i, j=1 \dots m$ ) :

$$u_i(t) = [y_{di}(t) - F_i y_i(t) - \sum_{j \neq i} G_{ij} u_j(t+k_{ii}-k_{ij})] / (Q_i + G_{ii}) \quad (4-5.14)$$

La version auto-ajustable de cet algorithme est obtenue en estimant à chaque instant d'échantillonnage les paramètres des prédicteurs (4-5.12) et en utilisant ces estimées pour générer les commandes  $u_i(t)$ . La procédure d'auto-ajustage est donnée comme suit :

- . à chaque instant  $t$  faire :
- . pour chacun des  $m$  sous système MISO faire :
- . estimer les coefficients des polynômes  $F_i$ ,  $G_{ii}$ , et  $G_{ij}$  à l'aide de l'algorithme MCR (4-2.22);
- . utiliser  $\hat{F}_i$ ,  $\hat{G}_{ii}$ , et  $\hat{G}_{ij}$  pour générer la commande  $u_i(t)$  à partir de la relation (4-5.14);
- . fin.

Cet algorithme exige la connaissance des retards  $d_{ii}$  et suppose que ( $d_{ij} > d_{ii} > 1$ ). la connaissance des bornes supérieures des polynômes  $A_i$  et  $B_{ij}$  est également requise. Le polynôme  $Q_i$  est généralement choisi comme l'inverse d'un PI (4-3.19).

#### 4-5-3-STC à placement de pôles multivariable

##### a) Variante basée sur un modèle totalement découplé

L'adaptation à placement de pôles multivariable est traitée, dans ce cas, comme  $m$  problèmes de commande auto-ajustable monovariables. Pour ce faire, on définit le vecteur paramètres  $\theta_i$  du  $i$ ème sous système décrit par l'équation (4-5.7), comme suit :

$$\vartheta_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ina_i} \ b_{i1}^0 \ b_{i1}^1 \ \dots \ b_{i1}^{nb_{i1}}], \quad (4-5.15)$$

le vecteur observations ou mesures est donné par :

$$\phi_i(t) = [-y_i(t-1) \ \dots \ -y_i(t-na_i) \ u_i(t-d_{i1}) \ \dots \ u_i(t-d_{i1} - nb_{i1})]$$

l'algorithme d'auto-ajustage sur un horizon N se présente selon les étapes suivantes:

- . à chaque instant d'échantillonnage t faire :
- . pour chaque sous système i (i=1...m) faire :
- . construire le vecteurs  $\phi_i(t)$  et estimer les paramètres  $\vartheta_i(t)$ ;
- . résoudre l'équation de diophantine (4-4.13) pour le sous système i, ceci donne les polynômes  $\hat{F}_i$  et  $\hat{G}_i$  ;
- . utiliser  $\hat{G}_i$  et  $\hat{F}_i$  pour générer la commande  $u_i(t)$  donnée par la relation (4-4.1);
- . i = i + 1, jusqu'à m;
- . t = t + 1, jusqu'à N;
- . fin.

Cette stratégie n'exige que la connaissance des bornes supérieures des degrés des polynômes  $A_i$  et  $B_{ii}$ , les termes de couplage négligés sont, en principe, compensés par le contrôleur. Les difficultés, relatives à la non commandabilité du modèle identifié, rencontrées dans le cas monovarié se posent également dans la présente approche, mais de manière plus aiguë eu égard aux dynamiques négligées et aux éventuelles surparamétrisations introduites pour survenir aux cas des retards inconnus ou variant dans le temps. Signalons, enfin, que la

quantité et le temps de calcul nécessaires à la mise en oeuvre de cet algorithme augmentent avec le nombre d'entrées-sorties du système MIMO, ce qui risque de compromettre son implémentation en temps réel dans des applications où la rapidité est très recherchées.

b) Variante basée sur un modèle partiellement découplé

On considère, dans ce cas, que le procédé est modélisé sous la forme d'un ensemble de sous systèmes MISO donnés par la relation (4-5.9), où il est partiellement tenu compte des termes de couplage entrées-sorties. Il est supposé, également, que les retards  $d_{ii} < d_{ij}$ .

La loi de commande est similaire à la relation (4-4.1) avec un terme d'anticipation introduit en vue de compenser partiellement les interactions entrées-sorties, elle est donnée par :

$$G_i u_i(t) + F_i y_i(t) + \sum_{i \neq j} L_{ij} u_j(t+d_{ii}-d_{ij}) - R_i y_{d_i}(t) + h_i = 0 \quad (4-5.16)$$

le terme  $h_i$  sert à éliminer les offsets et les perturbations constantes ( $i, j = 1 \dots m$ ).

En substituant les commandes  $u_i$  dans l'expression (4-5.9), on obtient l'équation du système en boucle fermée :

$$[A_i G_i + q^{-d_{ii}} B_{ii} F_i] y_i(t) = B_{ii} R_i y_{d_i}(t-d_{ii}) + \quad (4-5.17)$$

$$\sum_{j \neq i} (B_{ij} G_i - B_{ii} L_{ij}) u_j(t-d_{ij}) + (G_i d_i - q^{-d_{ii}} B_{ii} h_i);$$

Les dynamiques de régulation désirables sont spécifiées par les polynômes  $P_i(q^{-1})$ , il conviendrait, alors, de déterminer  $G_i$  et  $F_i$  de sorte que :

$$A_i G_i + q^{-d_{ii}} B_{ii} F_i = P_i, \quad (4-5.18)$$

ce qui conduit à la résolution de  $n$  équations de diophantine. Les ordres des différents polynômes assurant l'existence des solutions  $F_i$  et  $G_i$  sont donnés par :

$$nf_i = na_i - 1, \quad ng_i = nb_{ii} + d_{ii} - 1, \quad \text{et } np_i \leq nf_i + ng_i + 1 \quad (4-5.19)$$

L'élimination de l'erreur statique de poursuite est réalisée en choisissant le Polynôme  $R_i$  tel que :

$$R_i = P_i(1) / B_{ii}(1) \quad (4-5.20)$$

Les polynômes  $L_{ij}$ , quant à eux, doivent être déterminée de manière à assurer le découplage statique des entrées-sorties :

$$L_{ij} = B_{ij}(1) F_i(1) / B_{ii}(1) \quad (4-5.21)$$

Les offsets sont éliminés par le choix de  $h_i$  :

$$h_i = G_i(1) d_i / B_{ii}(1) \quad (4-5.22)$$

$d_i$  étant le terme  $d_i(t)$  de la relation (4-5.9).

Cette loi de commande permet de garantir le placement des pôles en boucle fermée du procédé tout en compensant les termes de couplages en régime statique. Dans le cas spécial où tous les polynômes  $B_{ii}$  sont stables, une loi de commande à découplage dynamique peut être obtenue. En effet, si l'on pose :

$$G_i = B_{ii} V_i \quad (4-5.23)$$

il vient alors :

$$A_i V_i + q^{-d_{ii}} F_i = P_i, \quad (4-5.24)$$

$P_i$  étant les nouveaux polynômes caractéristiques désirables.

Cette équation aura des solutions uniques si les ordres de  $F_i$ ,  $V_i$ , et  $P_i$  satisfont les relations :

$$nf_i = na_i - 1, \quad nv_i = d_{ii} - 1, \quad \text{et } np_i \leq na_i + d_{ii} + 1 \quad (4-5.25)$$

Compte tenu des relations (4-5.23) et (4-5.24), l'équation du système en boucle fermée devient :

$$P_{1i} y_i(t) = R_i y_d(t-d_{ii}) + \sum_{j \neq i} (B_{ij} V_i - L_{ij}) u_j(t-d_{ij}) + (V_i d_i - q^{-d_{ii}} h_i), \quad (4-5.26)$$

En choisissant :

$$R_i = P_{1i}, \quad (4-5.27)$$

$$L_{ij} = B_{ij} V_i, \quad (4-5.28)$$

$$h_i = V_i d_i \quad (4-5.29)$$

l'équation (4-5.26) se réduira alors à :

$$y_i(t) = y_d(t-d_{ii}) \quad (4-5.30)$$

Les relations (4-5.23)-(4-5.24) et (4-5.27)-(4-7.28) permettent donc la réalisation de l'objectif de poursuite avec une compensation dynamique des termes de couplage et la réjection des offsets. Si le procédé en question est affecté de perturbations mesurables, l'introduction d'une seconde action d'anticipation peut alors être envisagée en vue de réduire ou d'éliminer leurs effets.

La version auto-ajustable de cet algorithme consiste à identifier à chaque instant d'échantillonnage la dynamique du procédé et à utiliser ces informations pour générer la commande à placement de pôles. Le vecteur paramètres du procédé étant donné comme suit :

$$\theta_i = [a_{i1} \dots a_{ina_i} \quad b_{i1}^0 \dots b_{i1}^{nb_{i1}} \quad b_{i2}^0 \dots b_{i2}^{nb_{i2}} \dots b_{im}^0 \dots b_{im}^{nb_{im}}],$$

la procédure d'adaptation sur un horizon N est performée comme suit :

- . à chaque instant d'échantillonnage  $t$  faire :
- . pour chaque sous système  $i$  faire :
- . estimer le vecteur  $\hat{\theta}_i(t)$ ;
- . résoudre l'équation de diophantine (4-5.18) ou (4-5.24) suivant l'objectif de commande désiré (découplage statique ou dynamique);
- . déterminer les polynômes  $L_{ij}$ ,  $R_i$  et le terme  $h_i$  à l'aide des relations (4-5.20)-(4-5.22) ou (4-5.27)-(4-5.29);
- . utiliser les résultats obtenus pour générer la commande  $u_i(t)$  selon la relation (4-5.16);
- .  $i = i + 1$ , jusqu'à  $m$ ;
- .  $t = t + 1$ , jusqu'à  $N$ ;
- . Fin.

L'idée essentielle de cette stratégie est de convertir le problème de commande d'un système MIMO en celui du contrôle de  $m$  sous systèmes MISO avec les signaux d'interaction pris comme perturbations. Comparé aux schémas de commande STC à placement de pôles décrits dans la littérature [22] et notamment à celui de Prager et Wellstead [81], le présent algorithme est plus simple à mettre en oeuvre car il ne requiert pas la résolution en ligne des équations matricielles de diophantine et de commutativité, seule la solution en ligne d'une simple équation polynomiale est nécessaire.

#### 4-6-CONCLUSION

L'analyse des stratégies de commande auto-ajustable fait ressortir que ces méthodes constituent, de par leur structure et leur facilité de mise en oeuvre sur ordinateur, une solution naturelle et efficace au problème du contrôle de procédés dans un milieu incertain et perturbé.

L'algorithme d'identification associé à toute méthode auto-ajustable, et contribuant à la robustesse de l'algorithme de commande, doit être sélectionné de sorte que les problèmes de l'instabilité numérique et de wind up soient évités. A cet effet, il conviendrait de mettre à profit les informations disponibles à priori sur la nature des incertitudes et perturbations affectant le procédé pour opter pour une des variantes des estimateurs des MCR. Certains auteurs recommandent d'utiliser un algorithme avec réinitialisation de la matrice de covariance à chaque détection de variations paramétriques [36]. Delarminat suggère, dans [36], une normalisation du vecteur observation de l'estimateur afin de conforter la robustesse de la commande auto-ajustable vis à vis des dynamiques négligées, des erreurs de modélisation, et des non linéarités.

La stratégie auto-ajustable à variance minimale généralisée permet, en n'exigeant que la connaissance à priori du retard  $d$  du procédé ainsi que celle des bornes supérieures des polynômes  $A$  et  $B$ , des performances optimales de poursuite et de régulation adaptatives. Cependant, un biais de poursuite est obtenu lorsque le procédé est à non minimum de phase, cette erreur peut être réduite par un choix adéquat, mais pas évident, des polynômes de pondération  $P$  et  $Q$ . Cet algorithme, de par sa nature directe, présente également l'avantage de commander des systèmes avec un effort de calcul relativement faible.

En revanche, la stratégie auto-ajustable indirecte à placement de pôles, bien qu'elle nous relaxe de la connaissance à priori du retard en ne présentant aucune difficulté quant au contrôle des systèmes à non minimum de phase, est exposée au

problème majeur du risque de la non commandabilité du modèle identifié étroitement lié à la question de la richesse du signal de commande. Ce dernier n'étant pas directement atteignable puisqu'interne à la boucle fermée, le seul moyen de satisfaire cette condition est, ou bien de superposer au signal de commande un signal de faible amplitude et riche en fréquences, ou de choisir une sortie désirable très excitante. Cette hypothèse d'excitation persistante requiert la bornitude des signaux et sert à établir la bornitude de ces mêmes signaux!. Il est donc très difficile de montrer proprement qu'elle est satisfaite, par ailleurs, on ne peut, en général, l'établir que pour un système idéalement modélisé [27], [47]. Dans le cas contraire, les erreurs de modélisation peuvent détruire l'excitation introduite par le signal externe. Il faut, également, signaler que le temps de calcul requis pour cette méthode est relativement supérieur à la stratégie GMV auto-ajustable.

En plus des problèmes rencontrés en contrôle monovariable, la commande auto-ajustable multivariable présente des difficultés spécifiques relatives aux informations requises à priori sur le procédé. En ce qui concerne la commande STC directe la connaissance des retards des différentes boucles de commande est exigée. En commande STC indirecte, la résolution en ligne des équations matricielle de diophantine et de commutativité pose de sérieux problèmes et alourdit l'algorithme de calcul. La tendance actuelle en commande auto-ajustable MIMO étant la minimisation des informations à priori tout en garantissant les propriétés de stabilité et de convergence, nous avons proposé deux variantes de contrôleurs STC MIMO basées sur des modèles de procédé totalement et partiellement découplés. Les premiers cités devraient donner des résultats acceptables en contrôlant des systèmes découplables

par retour d'état ou de sortie, la seconde variante tient compte partiellement des termes de couplage et serait à même de donner des résultats satisfaisants en commande des systèmes faiblement ou fortement couplés.

Pour ce qui de la robustesse de cette approche de commande adaptative, beaucoup de travaux [44],[45] ont montré que cette propriété dépend en premier lieu de la stabilité et de la convergence de l'algorithme d'estimation utilisé, de l'excitation du signal de commande et de la robustesse de la loi de commande linéaire associée. A cet effet, Il est établi dans [85] que sous certaines conditions sur la matrice de covariance de l'estimateur, dans le cas déterministe, la robustesse des algorithmes STC directs ou indirects vis à vis des incertitudes paramétriques, des perturbations, et des dynamiques négligées bornées est garantie.

## RESULTATS DE SIMULATIONS

## 1-INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions et comparons les performances des diverses stratégies de commande adaptative présentées dans ce mémoire. Pour cela nous nous proposons d'illustrer ces performances sur quatre exemples de simulations. Les deux premiers exemples portent sur la commande adaptative de systèmes monovariables de second ordre, l'un à comportement intégral et l'autre instable. Le troisième exemple a pour objet la commande d'un système multi-entrées simple sortie. Le dernier exemple présente le contrôle adaptatif multivariable appliqué à un bras manipulateur à deux degrés de liberté.

Les programmes des algorithmes de commande AMFC, MCS, CGT et VSS ont été écrits à l'aide de SIMNON (logiciel spécialisé dans la résolution des équations différentielles non linéaires) [114], le calcul des gains par la méthode du contrôle hiérarchique dans les systèmes à structure variables ainsi que la résolution des équations de Lyapounov ont été fait à l'aide de MATLAB [113], et, enfin, les programmes des contrôleurs adaptatifs auto-ajustables ont été développés sous TURBO PASCAL V.6. Les courbes illustrant les comportements des différentes variables des divers systèmes ont été tracées à l'aide du logiciel GRAPHER V.1.75 de la firme Golden Software (1988).

3-ASPECTS PRATIQUES DE LA MISE EN OEUVRE DES ALGORITHMES  
DE COMMANDE ADAPTATIVE

Lors de la mise en oeuvre des programmes des différents algorithmes de commande adaptative, nous nous sommes confrontés à certains problèmes pratiques concernant le choix des divers paramètres prérequis ou nécessaires à la synthèse de ces lois de

commande. Nous citons notamment :

a) *Intégration des équations d'état :*

Cette opération a été effectuée pour les stratégies AMFC, MCS, CGT, et celle adaptative à structure variable, développées sous SIMNON, à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à longueur de pas automatique. Pour les lois auto-ajustables mises en oeuvre sous un aspect discret, l'algorithme d'intégration est celui de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas constant. La longueur du pas, dans ce cas, a été fixée, dans le but d'améliorer la précision de cette opération [63], égale à  $(T_e/4)$ ,  $T_e$  étant la période d'échantillonnage. Le choix de la méthode de Runge-Kutta est principalement motivé par la bonne précision et la stabilité numérique qu'offre ces variantes d'intégration [83].

b) *Choix de la période d'échantillonnage :*

La période d'échantillonnage ne doit être ni trop élevée ni trop faible, afin d'éviter respectivement les problèmes de recouvrement liés à la transgression de la condition de Shannon ( $f_e > 2f_b$ ), où  $f_b$  représente la bande passante du système en boucle fermée, et le risque de perdre par échantillonnage certaines propriétés telles que la commandabilité et la stabilité des zéros du procédé [43] ainsi que le ralentissement de l'algorithme de commande (en raison de la grande quantité d'informations que produit un échantillonnage à fréquence élevée). Pour contourner ces difficultés, nous avons adopté la règle suivante [33] : la période d'échantillonnage  $T_e$  doit être telle que

$$t_m = (20 \div 50) T_e$$

où  $t_m$  est le temps de montée de la réponse du système en boucle fermée. Pour notre part, ne connaissant pas les propriétés en boucle fermée du système commandé, nous nous sommes référés au comportement cible, (ie : réponse du modèle de référence).

c) *Algorithme d'estimation*

La convergence des lois de contrôle auto-ajustable repose en premier lieu sur la robustesse de l'algorithme d'estimation. Pour

nôtre part, dans le souci d'éviter le problème d'instabilité numérique, nous avons opté pour l'utilisation de la forme racine carrée de l'estimateur des MCR avec facteur d'oubli fixe. Ce dernier est choisi en fonction de la nature du procédé commandé. si le système est non linéaire, ou entaché d'erreurs de modélisation ce facteur doit être faible (au voisinage de 0,95) de façon à donner plus de poids aux nouvelles acquisitions. Dans le cas de variations lentes le facteur d'oubli est fixé proche de 1 (0.99 ou 0.98).

*d) Choix des polynômes de pondération et de régulation des contrôleurs auto-ajustables :*

En ce qui concerne la loi de commande auto-ajustable à variance minimale généralisée, les polynômes P et R ont été fixés égaux à 1, et ce afin de garantir que l'erreur de poursuite soit minimale. Le choix du polynôme de pondération de l'effort de commande Q dépend de la nature du système en boucle fermée. Dans le cas d'un système à minimum de phase, il conviendrait de prendre  $Q=0$ , dans le cas contraire, on pose  $Q=\lambda$  où  $\lambda$  est constante réelle proche de 1 lorsque le procédé est stable. Si ce dernier, en plus de son déphasage non minimal, présente un comportement instable le choix du paramètre  $\lambda$  devient plus délicat, on le fixe en faisant plusieurs essais à différentes valeurs de ce coefficient. Dans le cas où la réponse du système en boucle fermée exhibe une erreur statique constante, il conviendrait, alors, d'introduire une action intégrale dans la loi de commande en posant :  $Q=\lambda(1-q^{-1})$ .

Pour ce qui est de la stratégie de commande auto-ajustable à placement de pôles deux problèmes sont à signaler, le premier concerne le risque de non commandabilité du modèle de procédé identifié et le second la sélection des pôles du système en boucle fermée représentant la dynamique de régulation désirable. la première difficulté a été surmontée par la résolution de l'équation de diophantine par la méthode de Jacobi avec pivot total [18] associée à la limitation des commandes afin d'éviter l'explosion de l'algorithme. La seconde question a été résolue en

adoptant une dynamique de régulation très rapide par rapport à celle de poursuite par le choix de  $P=1$ , polynôme communément utilisé dans les procédés déterministes [61]. Si le système est stochastique, il conviendrait alors de prendre en compte, dans le choix du polynôme  $P$ , la dynamique des perturbations aléatoires.

### e) Choix du modèle échantillonné du procédé

Les contrôleurs présentés aux chapitres deux et trois ont été développés dans l'espace d'état d'un point de vue continue et multivariable immédiatement applicables aux systèmes SISO. Par contre, les contrôleurs auto-ajustables ont été développés d'un point de vue exclusivement discret et monovariable, l'extension aux systèmes multivariables dépend, de forte manière, de la modélisation du procédé. En effet, si l'on considère la matrice de transfert d'un procédé échantillonné, le nombre de paramètres de la dynamique du système peut être très élevé, entraînant de ce fait l'encombrement des algorithmes d'estimation et de commande, ce qui risque de compromettre l'implémentation en temps réel de ces lois de contrôle. En pratique, on suppose que les divers éléments de transfert de la matrice d'un procédé multivariable (exemple 3 et exemple 4 ci après) sont de second ordre. Les erreurs de modélisation résultantes seront considérées comme perturbations que le contrôleur adaptatif se chargera de compenser. Il s'en suivra, alors, l'allègement des vecteurs paramètres et observation de l'estimateur et donc l'accélération du processus d'adaptation, au prix d'une identification approximative. Notons, que le choix de modèles de second ordre est motivé par le fait que ces derniers présentent un comportement susceptible de décrire toute réponse d'un système d'ordre supérieur.

### 3-EXEMPLE 1

#### Commande d'un système monovariable à comportement integral

Le procédé est décrit sa fonction de transfert  $P_{av}$  :

$$G_p(s) = \frac{3.833}{s(s+5)}$$

qui s'écrit dans l'espace d'état :

$$\dot{x} = A x + B u + d(t), \quad y = x_2$$

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = B_0 = \begin{bmatrix} 3.833 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où le terme  $d(t)$  représente les perturbations d'état.

Un examen rapide de l'expression de  $G_p(s)$  fait ressortir que ce procédé possède un pôle à l'origine il présente, de ce fait, un comportement intégral, lorsqu'il est excité par une entrée échelon, une rampe est obtenue à sa sortie.

Afin de mieux étudier les performances des des différents systèmes de commande, nous considérerons que la dynamique du procédé varie suivant quatre étapes :

1<sup>ère</sup> étape : dans l'intervalle  $t \in [0 \ 8[$ , le procédé fonctionne sous son régime nominal (ie : pas de perturbations)  $A=A_0$ ,  $B=B_0$ , et  $d(t)=0$ .

2<sup>ème</sup> étape :  $t \in [8 \ 12[$ , le procédé est soumis à des perturbations paramétriques sinusoïdales (de période 1) et des perturbations d'état,  $A=A_0+\Delta A$ ,  $B=B_0+\Delta B$ ,  $d(t)=10+5 \sin(20\pi t)$ ,

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 2\sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 2\sin(2\pi t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3<sup>ème</sup> étape :  $t \in [12 \ 16[$ , le procédé reprend son régime nominal, ie :  $A=A_0$ ,  $B=B_0$ ,  $d(t)=0$ .

4<sup>ème</sup> étape :  $t \geq 16$ , le procédé est maintenant soumis à des incertitudes paramétriques périodiques brusques (signal carré de période 1) ainsi qu'à des perturbations d'état,

$$d(t)=10+5 \sin(20\pi t),$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 2\text{sqw}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 2\text{sqw}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

où la quantité (Amp \* Sqw(t/T)) représente un signal carré d'amplitude (Amp) et de période T

*Objectif* : Imposer au système ci-dessus la poursuite, en dépit des perturbations, du comportement du modèle de référence donné par :

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -11 & -30.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 30.25 \\ 0 \end{bmatrix} u_m, \quad y_m = [0 \ 1] x_m$$

l'entrée  $u_m$  de ce modèle est un échelon d'amplitude 2.224.

Ce modèle est caractérisé par un gain statique unité et un temps de réponse  $t_r = 0.73s$  avec un amortissement égale à l'unité.

.Commande :

Après plusieurs essais, on s'est fixé :

$$\alpha(\text{AMFC}) = 100, \beta(\text{AMFC}) = 1, \text{ et } Q(\text{AMFC}) = 10 I_2$$

$$\alpha(\text{MCS}) = 10, \beta(\text{MCS}) = 30, \text{ et } Q(\text{MCS}) = I_2$$

les coefficients d'adaptation de la stratégie CGT sont posés :

$$T_1^1 = 100 I_4, \quad T_2 = 100 I_4$$

La surface de glissement pour le contrôleur VSS est choisie :

$s = 0.1 e_1 + e_2$ , la loi de commutation est fixée :

$$K_e = [5 \ 5] [\text{sgn}(e_1 s) \ \text{sgn}(e_2 s)]^T, \quad K_p = [5 \ 5] [\text{sgn}(e_1 s) \ \text{sgn}(e_2 s)]^T,$$

$$\text{et } K_m = 17 \text{sgn}(s u_m)$$

pour la synthèse des contrôleurs auto-ajustables, on a choisi la période d'échantillonnage  $\Delta = 0.01$ , le procédé échantillonné à cette fréquence restera toujours à phase minimale, ce qui a permis de fixer le polynôme de pondération pour la commande GMV comme :  $\lambda=0$ , le polynôme de régulation P est sélectionné égal à 1 (valeur communément utilisé pour les procédés déterministes), le facteur d'oubli de l'algorithme d'estimation a été pris égal à 0.99.

#### *Interprétations des résultats*

Les figures 5.1-5.6 illustrent le comportement des variables de cet exemple sous les diverses lois de commande, où l'on peut constater que les quatres premières stratégies affichent de très

bonnes performances de poursuite. Le contrôleur adaptatif à structure variable (VSS) présente la plus faible erreur de poursuite suivi du AMFC, MCS, et CGT. L'effort de commande fourni par le VSS est constamment oscillatoire à fréquence élevée. Il oscille fortement en régime transitoire puis décroît exponentiellement vers zéro dans le cas du CGT. Le AMFC et le MCS produisent des signaux de commande plus lisses et modérées, les oscillations apparaissant au démarrage du MCS (fig 5.2.b) sont dues au fait de la négligence des gains statiques  $K$  et  $K_R$  dans l'expression de la commande  $u_p(t)$ .

Les contrôleurs auto-ajustables étant de nature discrète, utilisent des estimateurs pour la détermination en ligne des paramètres de la loi de commande (cas du GMV) ou du procédé (cas du Placement de Pôles), ceci se traduit par la présence de très légères oscillations de la sortie du procédé autour de la consigne en régime transitoire, comme il visible sur les figures 5.5.a et 5.6.a. Le contrôleur adaptatif à placement de pôles présente un meilleur comportement transitoire par rapport au contrôleur VMG, cependant l'effort de commande est plus oscillatoire et saturé. Signalons, enfin, que toutes ses stratégies affichent de bonnes capacités de compensation des perturbations d'état et paramétriques, ce qui se traduit par de fortes oscillations de faible amplitude des signaux de commande. La figure 5.6.bis présente les résultats de l'opération de l'estimation paramétrique en ligne performée par le contrôleur à placement de pôles où l'on peut remarquer que les véritables valeurs des paramètres du procédé sont atteintes après une brève phase d'estimation, des pics importants ainsi que de légères oscillations apparaissent suite aux changements brusques de dynamique lors des étapes 2 et 4.

# Exemple 1 Systeme du 2<sup>e</sup> ordre à comportement intégral

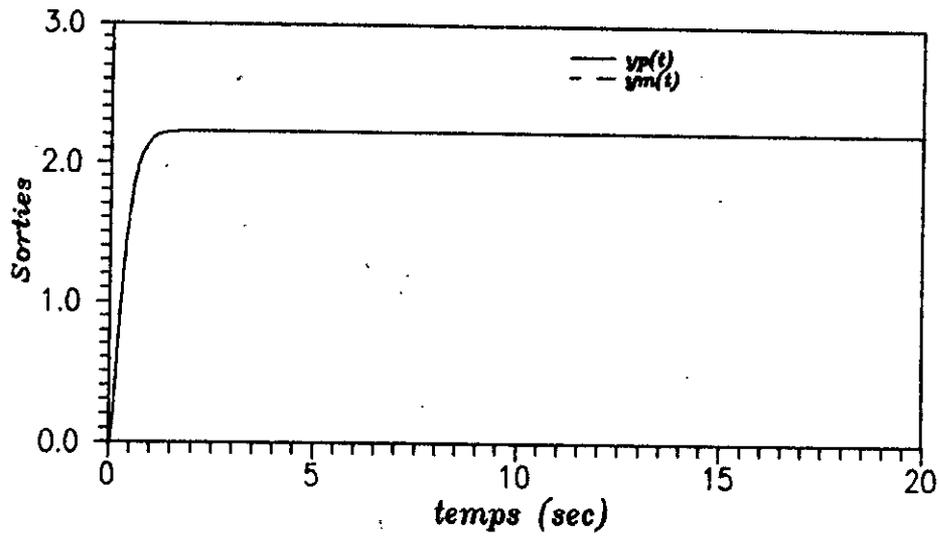


Fig.5.1.a. Sorties du modele et du procede

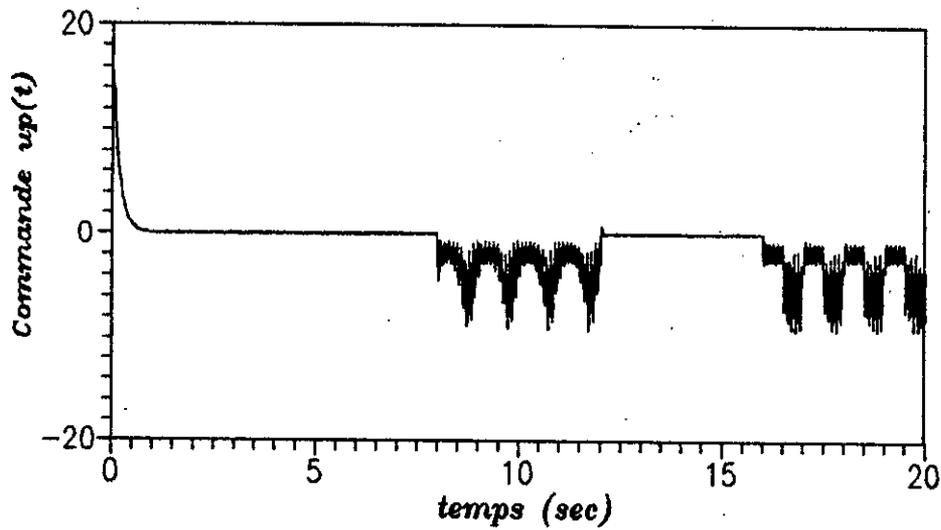


Fig.5.1.b. signal de commande  $u_p(t)$

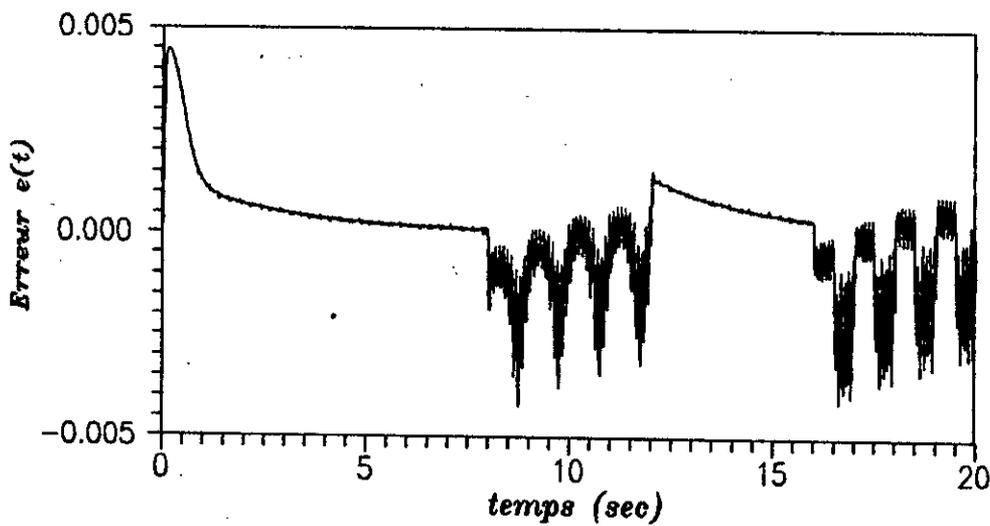


Fig.5.1.c. Erreur de poursuite

Fig.5.1. Controle AMFC d'un systeme du second ordre a comportement integral

# Exemple 1

Système du 2 ordre  
à comportement intégral

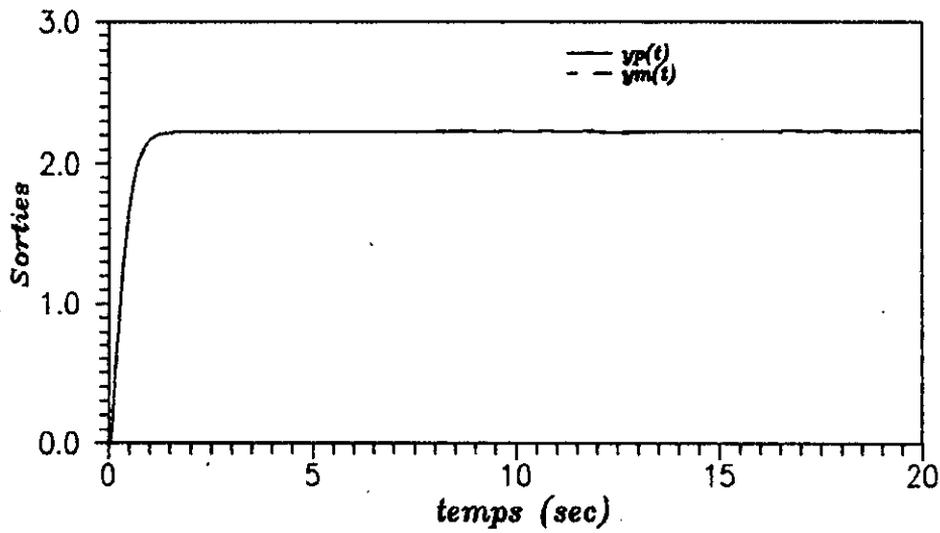


Fig.5.2.a. Sorties du modele et du procede

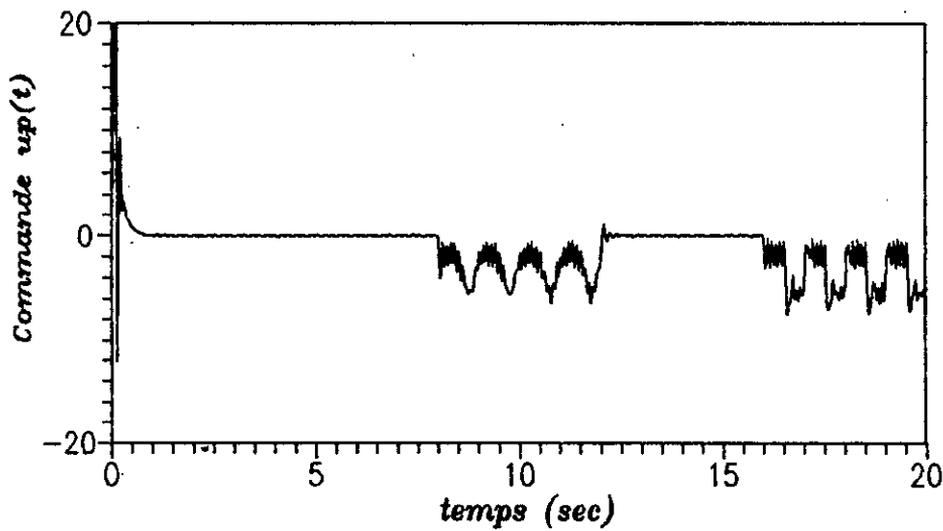


Fig.5.2.b. signal de commande  $u_p(t)$

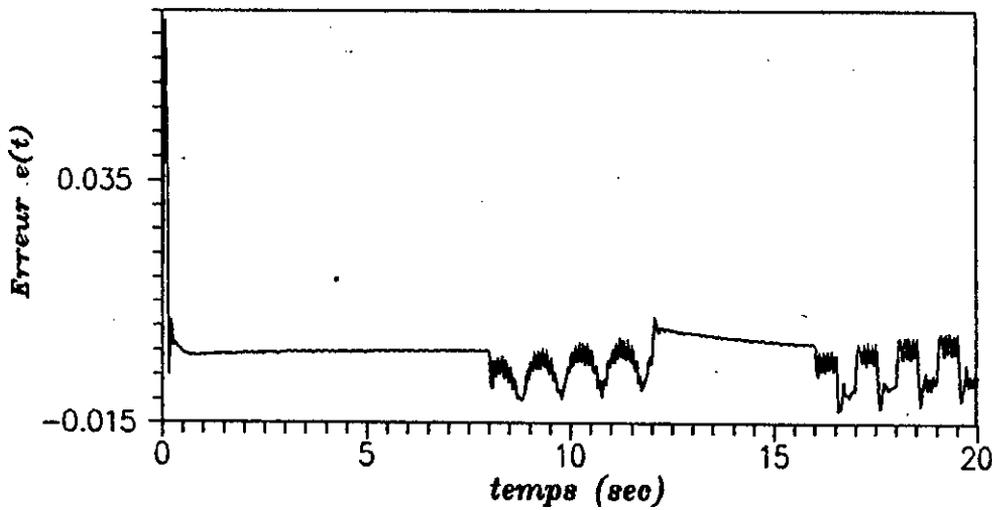


Fig.5.1.c. Erreur de poursuite

Fig.5.2. Controle MCS d'un systeme du second ordre a comportement integral

# Exemple 1

Système du 2 ordre  
à comportement intégral

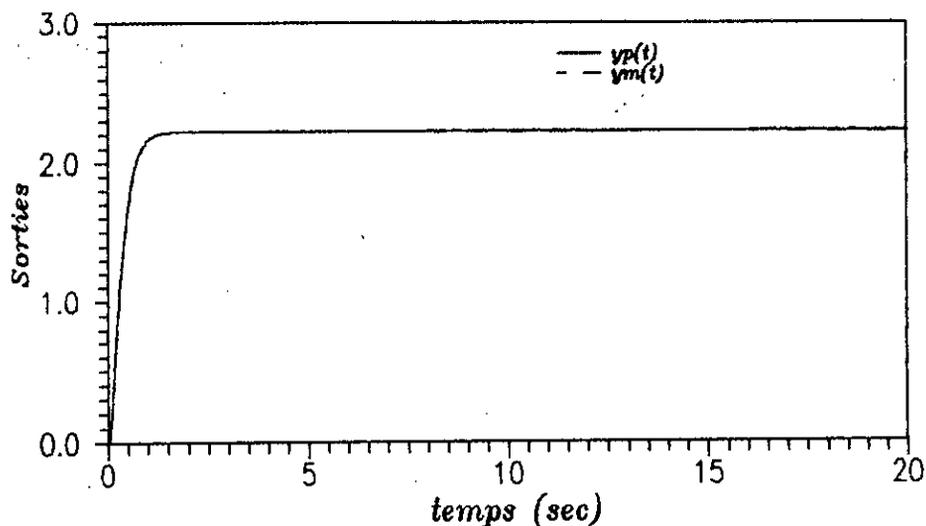


Fig.5.3.a. Sorties du modele et du procede

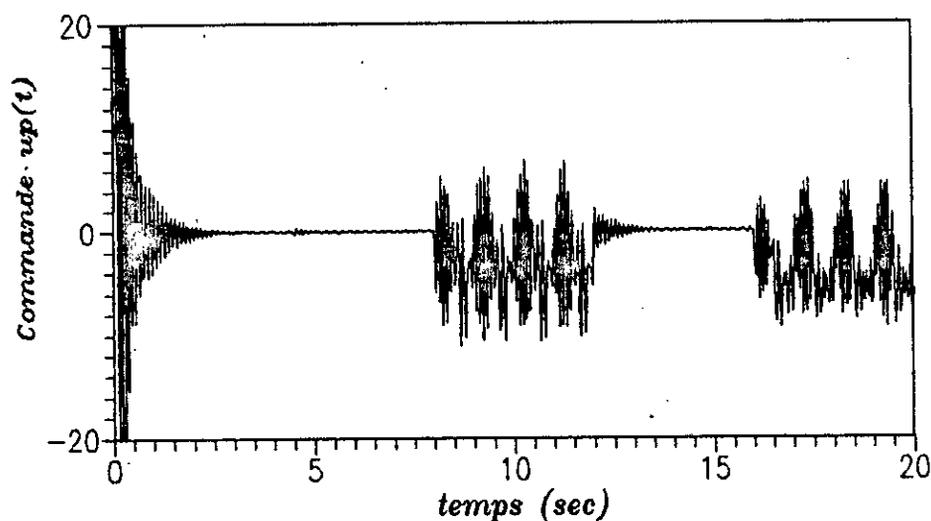


Fig.5.3.b. signal de commande  $up(t)$

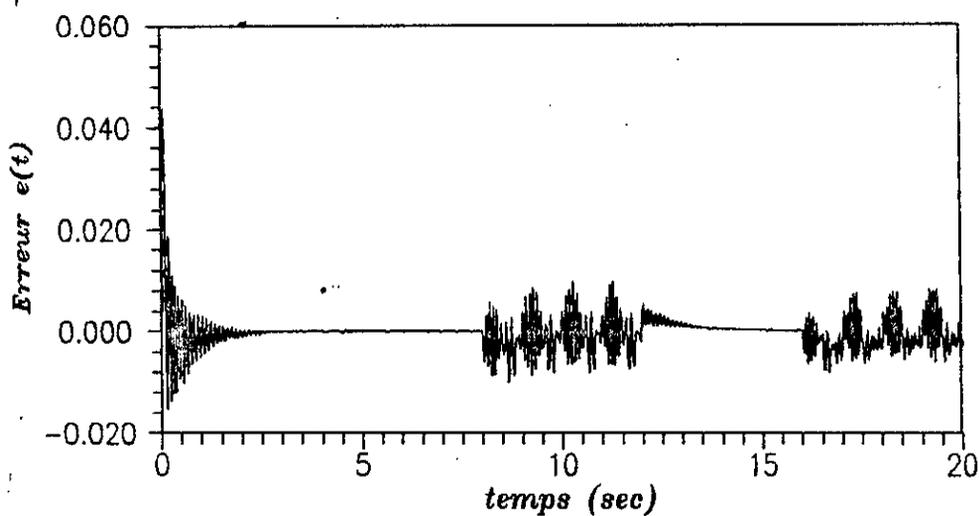


Fig.5.3.c. Erreur de poursuite

Fig.5.3. Controle CGT d'un systeme du second ordre a comportement integral

**Exemple 1** Système du 2 ordre  
à comportement intégral

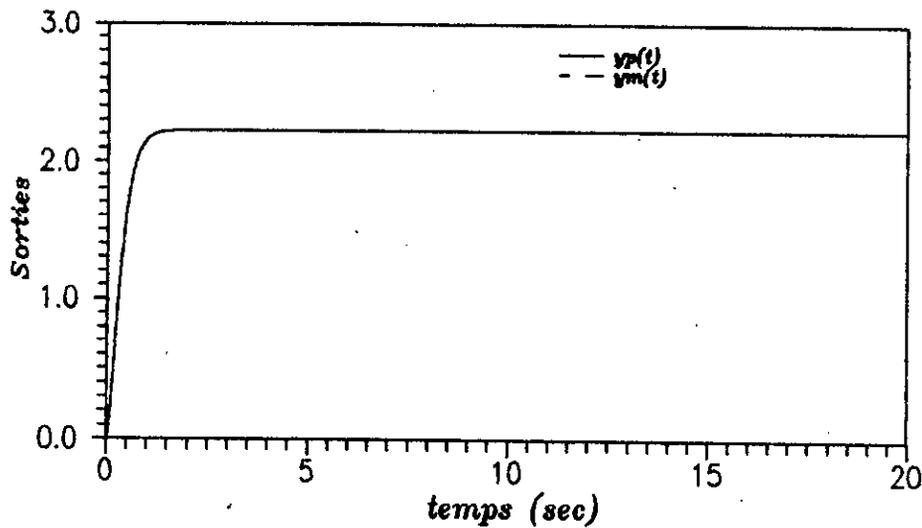


Fig.5.4.a. Sorties du modele et du procede

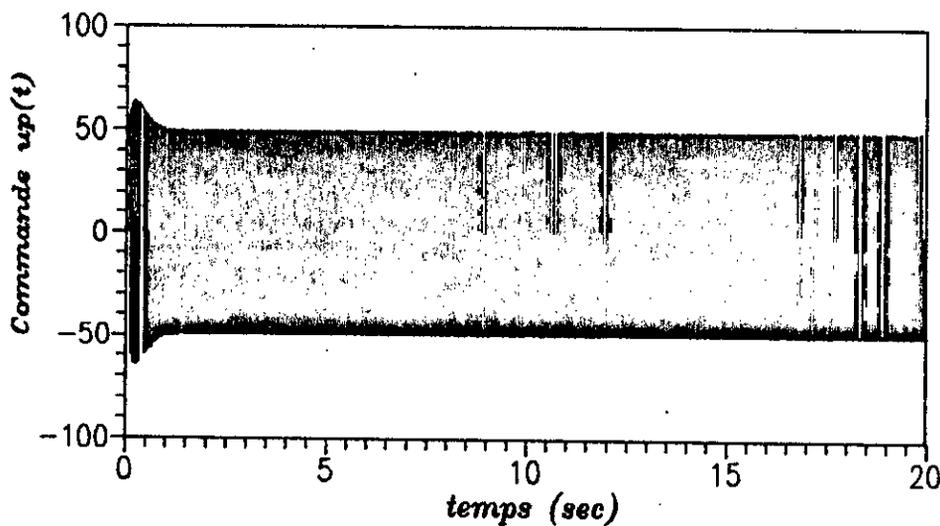


Fig.5.4.b. signal de commande  $u_p(t)$

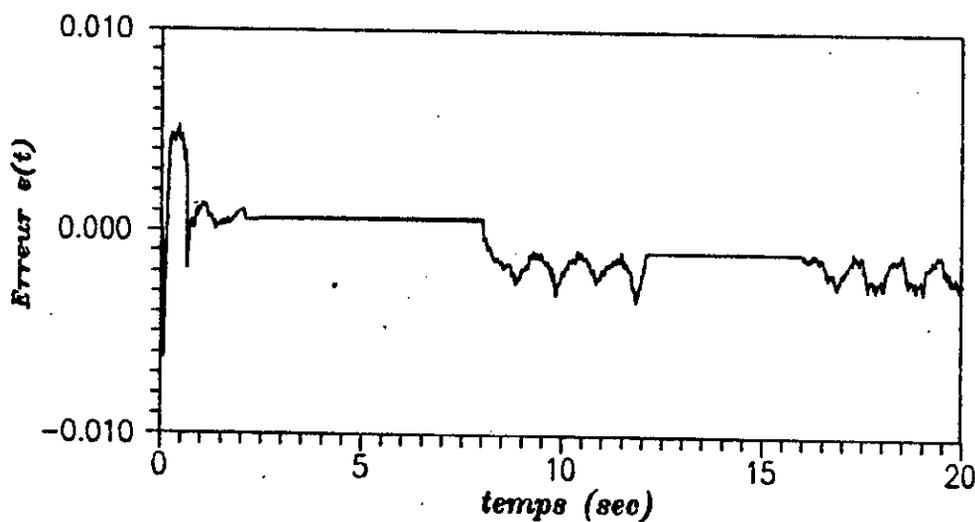


Fig.5.4.c. Erreur de poursuite

Fig.5.4. Contrôle adaptatif à structure variable d'un système du second ordre à comportement intégral

# Exemple 1 Systeme du 2 ordre à comportement intégral

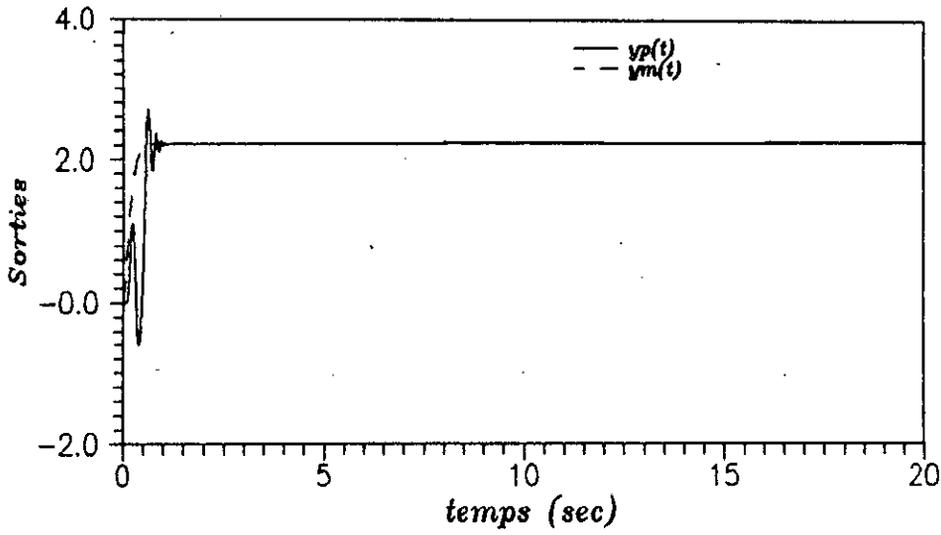


Fig.5.5.a. Sorties du modele et du procede

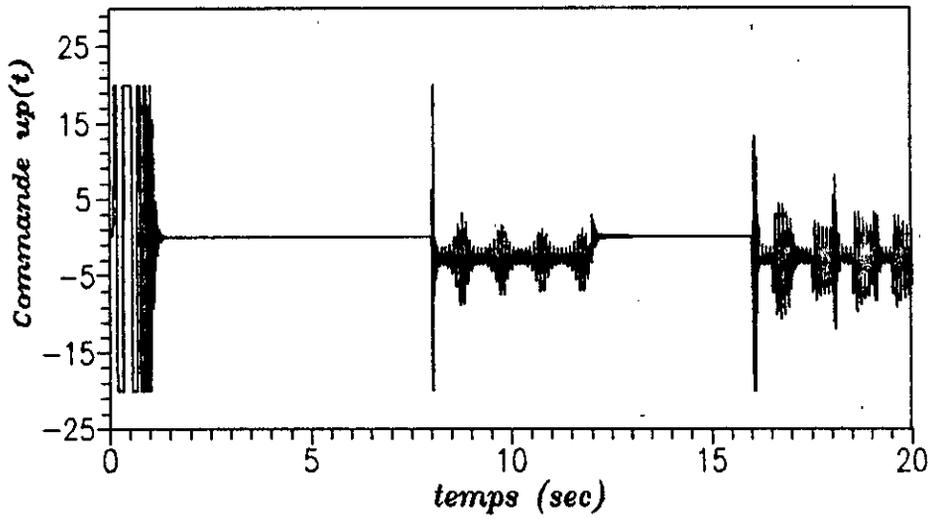


Fig.5.5.b. signal de commande  $u_p(t)$

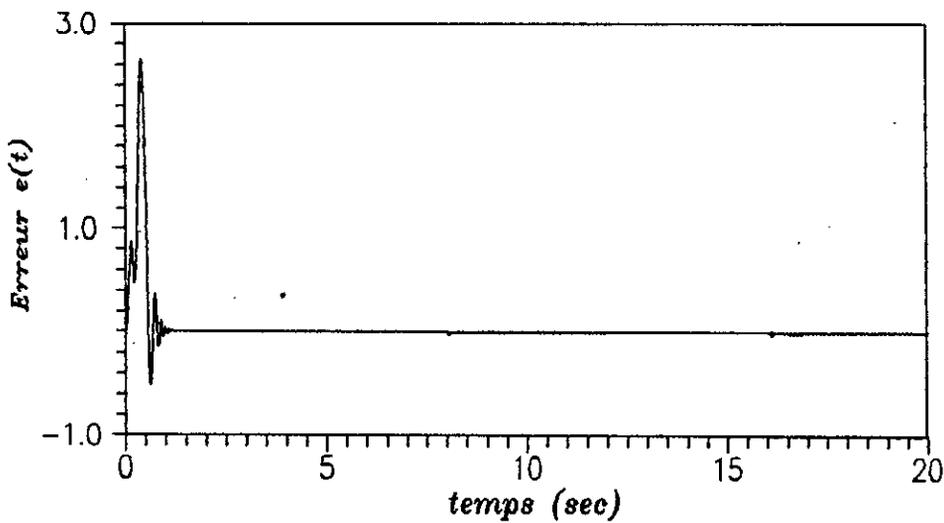


Fig.5.5.c. Erreur de poursuite

Fig.5.5. Controle adaptatif a variance minimale d'un systeme du second ordre a comportement integral

# Exemple 1

Système du 2 ordre  
à comportement intégral

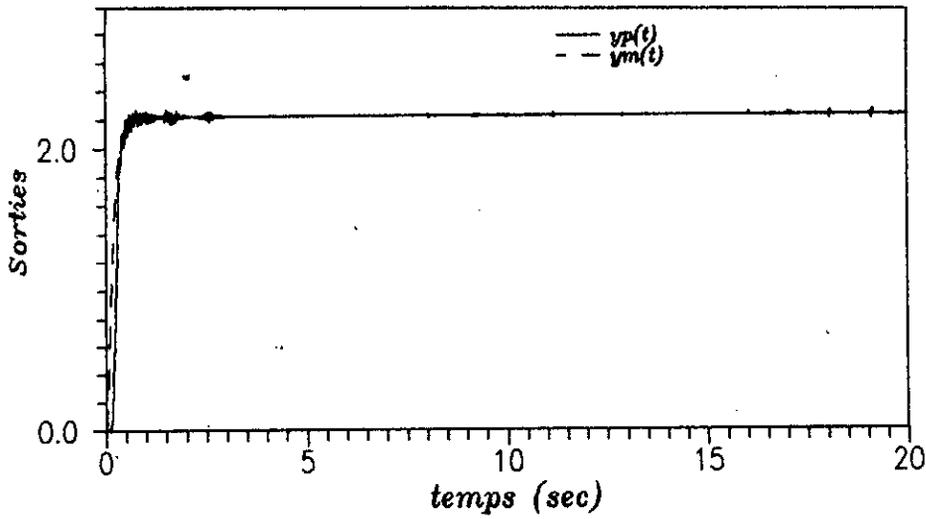


Fig.5.6.a. Sorties du modele et du procede

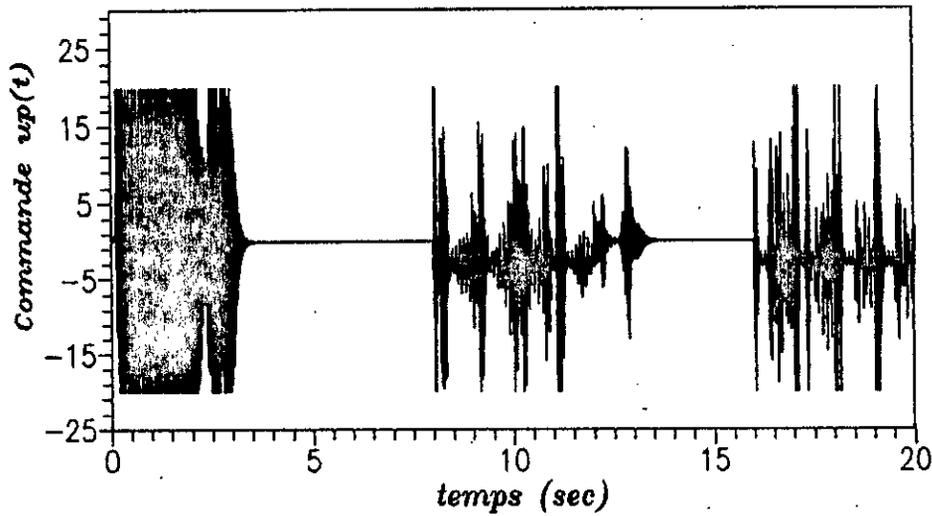


Fig.5.6.b. signal de commande  $u_P(t)$

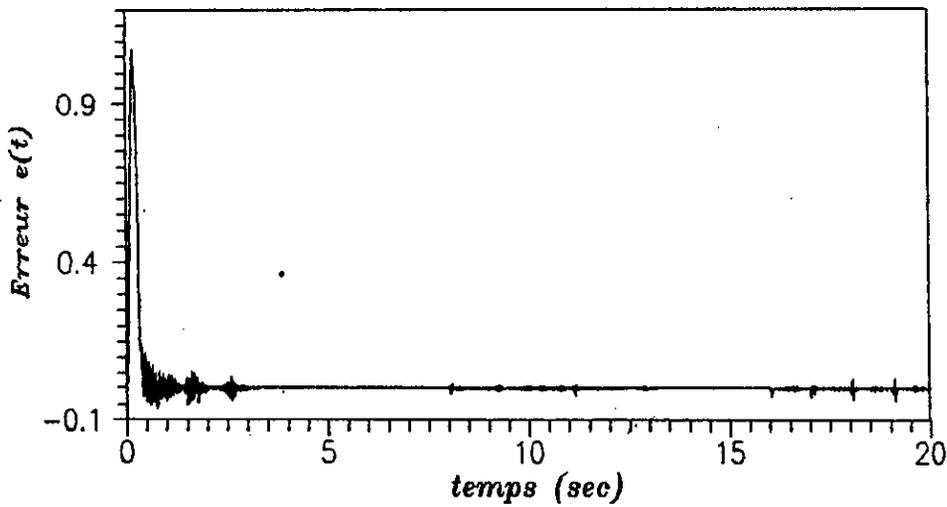


Fig.5.6.c. Erreur de poursuite

Fig.5.6. Contrôle adaptatif à placement de pôles d'un système du second ordre à comportement intégral

# Exemple 1 Système du 2 ordre à comportement intégral

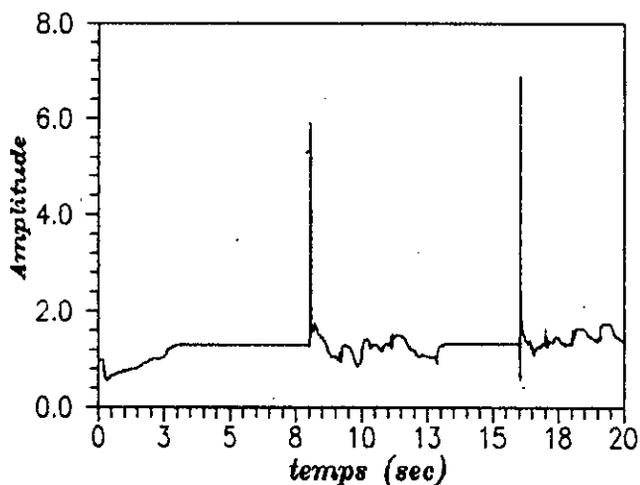


Fig.5.6.bis.a. Parametre a1 du procede

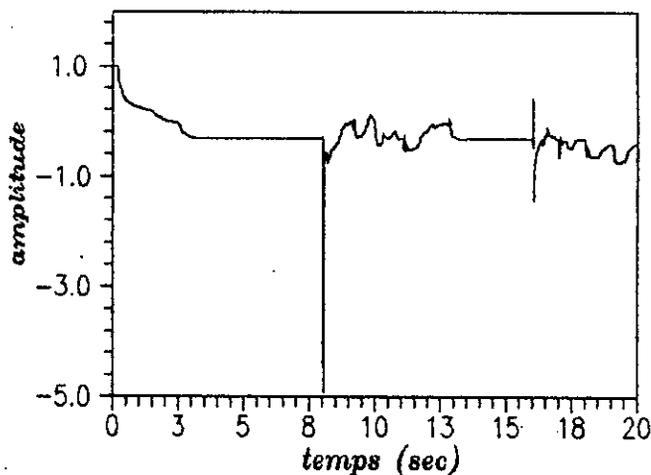


Fig.5.6.bis.o. Parametre a2 du procede

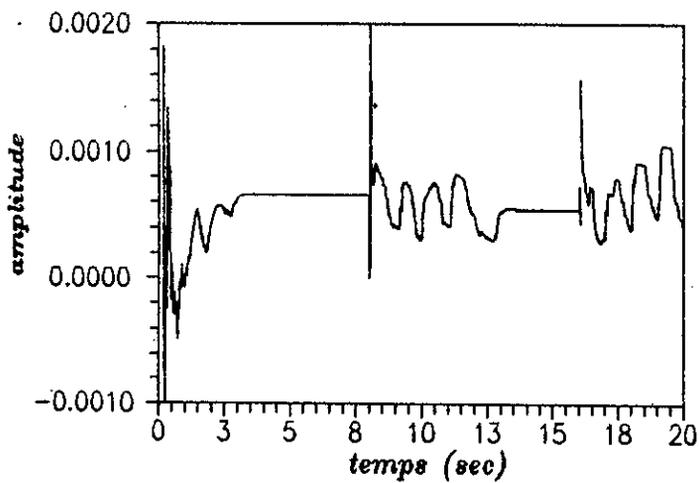


Fig.5.6.bis.c. Parametre b1 du procede

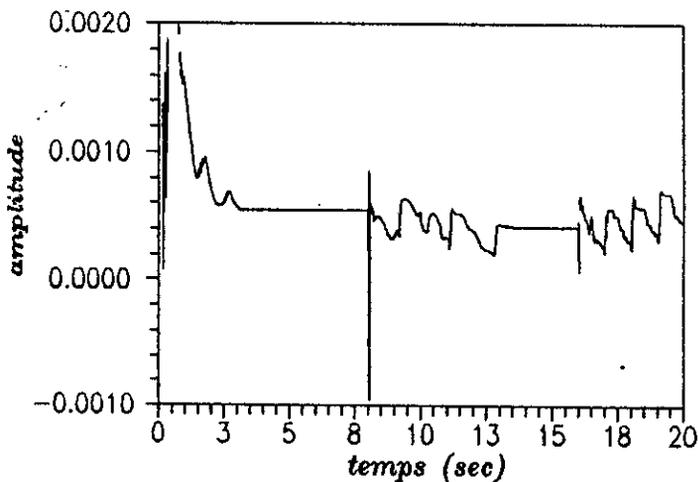


Fig.5.6.bis.d. Parametre b2 du procede

#### 4-EXEMPLE 2

##### Commande d'un système monovariabie instable

Le procédé est décrit par sa fonction de transfert :

$$F_p(s) = \frac{2.9}{(s+0.66)(s-0.75)}$$

qui s'écrit dans l'espace d'état :

$$\dot{x} = A x + B u + d(t), \quad y = x_2$$

$$A^* = A_0 = \begin{bmatrix} 0.095 & 0.495 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = B_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où le terme  $d(t)$  représente les perturbations d'état.

Comme il se voit clairement  $F_p(s)$  possède un pôle positif ( $s_2=0.75$ ), ce procédé est donc instable.

Ce procédé est confronté à diverses types de perturbations qu'on a modélisé suivant quatre étapes :

.1<sup>ère</sup> étape : dans l'intervalle  $t \in [0 \ 10[$ , le procédé fonctionne sous son régime nominal (ie : pas de perturbations)  $A=A_0$ ,  $B=B_0$ , et  $d(t)=0$ .

.2<sup>ème</sup> étape :  $t \in [10 \ 18[$ , le procédé est soumis à des perturbations paramétriques sinusoidales (de période 1) et des perturbations d'état,  $A=A_0+\Delta A$ ,  $B=B_0+\Delta B$ ,  $d(t)=10+5 \sin(20\pi t)$ ,

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \sin(2\pi t) & \sin(2\pi t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} \sin(2\pi t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

.3<sup>ème</sup> étape :  $t \in [18 \ 22[$ , le procédé reprend son régime nominal, ie :  $A=A_0$ ,  $B=B_0$ ,  $d(t)=0$ .

.4<sup>ème</sup> étape :  $t \geq 22$ , le procédé est maintenant soumis à des incertitudes paramétriques périodiques brusques (signal carré de période 1) ainsi qu'à des perturbations d'état,

$$d(t)=10+5 \sin(20\pi t),$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \text{sqw}(t) & \text{sqw}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} \text{sqw}(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

où la quantité (Amp \* Sqw(t/T)) représente un signal carré d'amplitude (Amp) et de période T

*Objectif* : Imposer au système ci-dessus la poursuite, en dépit des perturbations, du comportement du modèle de référence donné par :

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -1.18 & -0.3481 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0.3481 \\ 0 \end{bmatrix} u_m, y_m = [0 \ 1] x_m$$

l'entrée  $u_m$  de ce modèle est un signal carré de période 6 et d'amplitude 2.

Ce modèle est caractérisé par un gain statique unité, un temps de réponse  $t_r = 6.8s$ , et un amortissement unité.

**.Commande :**

Les différents paramètres prérequis ont été choisis comme suit:

$$\alpha(\text{AMFC}) = 50, \beta(\text{AMFC}) = 5, \text{ et } Q(\text{AMFC}) = I_2$$

$$\alpha(\text{MCS}) = 500, \beta(\text{MCS}) = 50, \text{ et } Q(\text{MCS}) = I_2$$

les coefficients d'adaptation de la stratégie CGT sont posés :

$$T_1 = 0.01 I_4, T_2 = 500 I_4$$

La surface de glissement pour le contrôleur VSS est choisie :

$$s = 50 e_1 + e_2, \text{ la loi de commutation est donnée par :}$$

$$K_e = [1 \ 4] [\text{sgn}(e_1 s) \ \text{sgn}(e_2 s)]^T, K_p = [2 \ 5] [\text{sgn}(e_1 s) \ \text{sgn}(e_2 s)]^T,$$

$$\text{et } K_m = 5 \text{sgn}(s u_m), \text{ le filtre lissage est : } u_f = 50 u_f + 50 u_p'$$

Pour les contrôleurs auto-ajustables, on a choisi la après plusieurs essais la période d'échantillonnage  $\Delta = 0.03$ , le procédé échantillonné à cette fréquence est à non minimum de phase, ceci a motivé le choix du polynôme de pondération pour la commande GMV comme :  $\lambda = 0.01$ , le polynôme de régulation P est sélectionné égal à 1, le facteur d'oubli de l'algorithme d'estimation a été pris égal à 0.99.

## Interprétations des résultats

L'allure en dents de scie de la sortie de référence est due au fait que la durée d'une demi période de l'entrée de référence est inférieure au temps de montée du modèle de référence.

L'analyse des figures 5.7-5.12 montrant le comportement du procédé sous les différentes lois de commande fait ressortir que : Les quatre premiers algorithmes présentent de bonnes performances de poursuites et de robustesse, le VSS fournit l'erreur de poursuite la plus faible aussi bien en régime transitoire que face aux perturbations (étapes 2 et 4), ce contrôleur souffre cependant du fait que son effort de commande oscille de manière constante à fréquence très élevée. Le AMFC et le MCS présentent des résultats comparables en dépit de la nature simplifiée dont dérive ce dernier, mieux encore, on constate que le MCS est plus robuste vis à vis des perturbations paramétriques (l'erreur de poursuite est plus faible dans ce cas lors des étapes 2 et 4). Le CGT fournit un effort de commande important et fortement oscillatoire, et donne des performances inférieures à celles des lois de commande sus citées lors des étapes 2 et 4.

Pour les stratégies auto-ajustables, les figures 5.11-5.12 montrent que la sortie du procédé marque quelques très légères oscillations dues à la phase d'estimation avant de suivre parfaitement la sortie désirable, ces fluctuations peuvent être réduite par un choix adéquat des paramètres prérequis. La commande à placement de pôles présente un meilleur comportement transitoire. Cependant, le contrôleur VMG fournit un moindre effort de commande, oscillant pendant le régime transitoire et stable autour de zéros après, à l'inverse du contrôleur à placement de qui exige d'importants et très oscillants signaux de contrôle durant aussi bien le régime transitoire que les étapes d'incertitudes 2 et 4. La figure 5.12.bis montre les résultats de l'estimation paramétrique en ligne opérée par le contrôleur à placement de pôles où l'on constate les oscillations des estimées autour de leurs véritables valeurs en raison de l'allure de l'entrée de référence qui fait que le système est constamment en

# Exemple 2 Système du 2 ordre instable

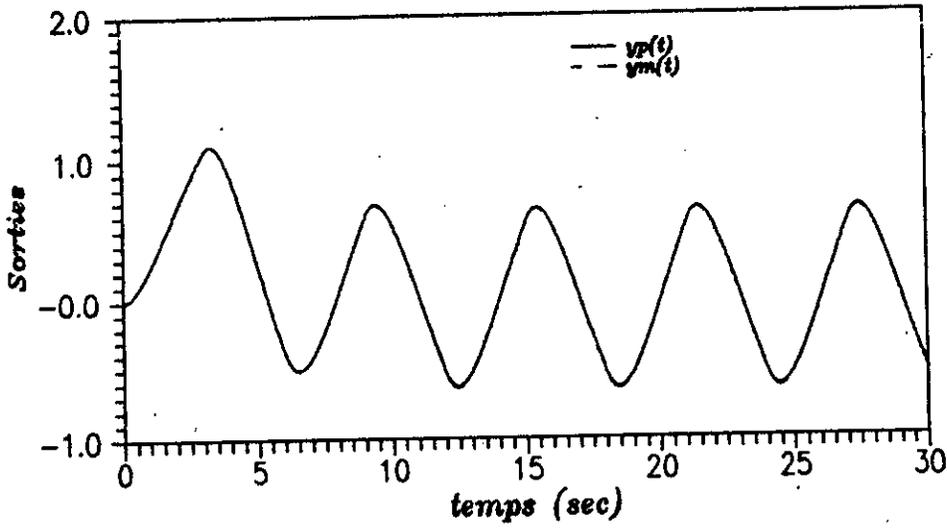


Fig.5.7.a. Sorties du modele et du procede

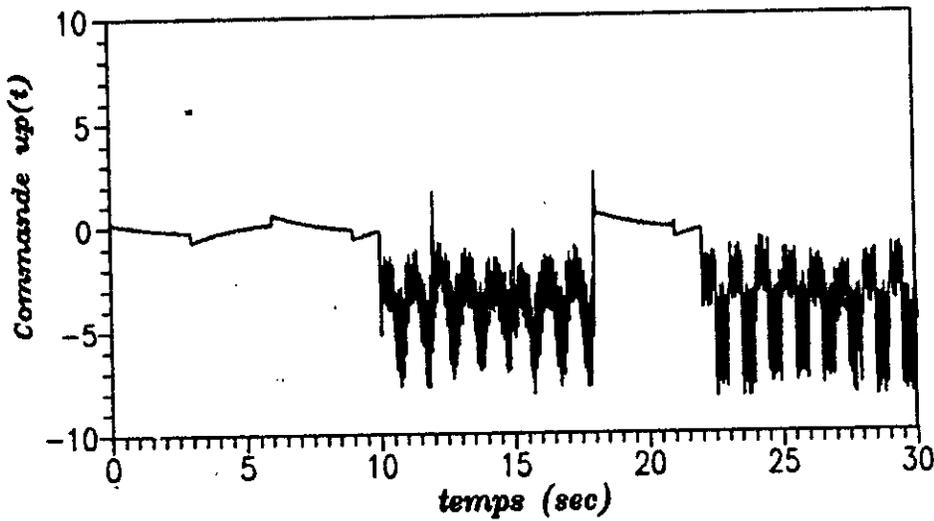


Fig.5.7.b. signal de commande  $u_p(t)$

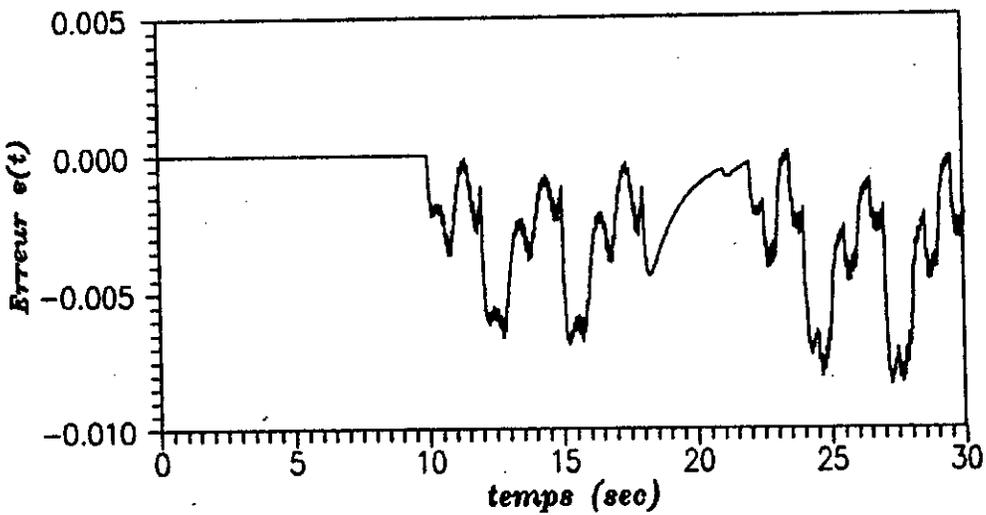


Fig.5.7.c. Erreur de poursuite

Fig.5.7. Controle AMFC d'un systeme instable du second ordre

## Exemple 2 Systeme du 2 ordre instable

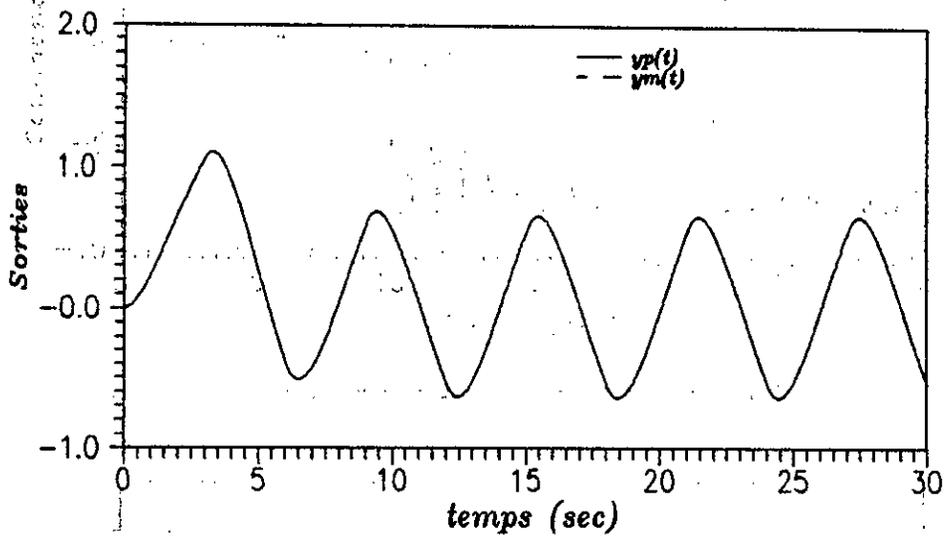


Fig.5.8.a. Sorties du modele et du procede

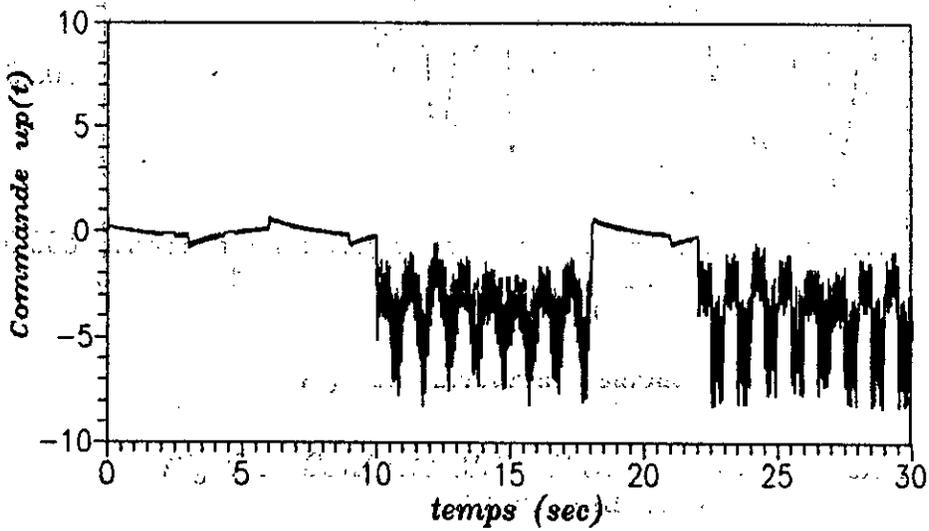


Fig.5.8.b. signal de commande  $u_p(t)$

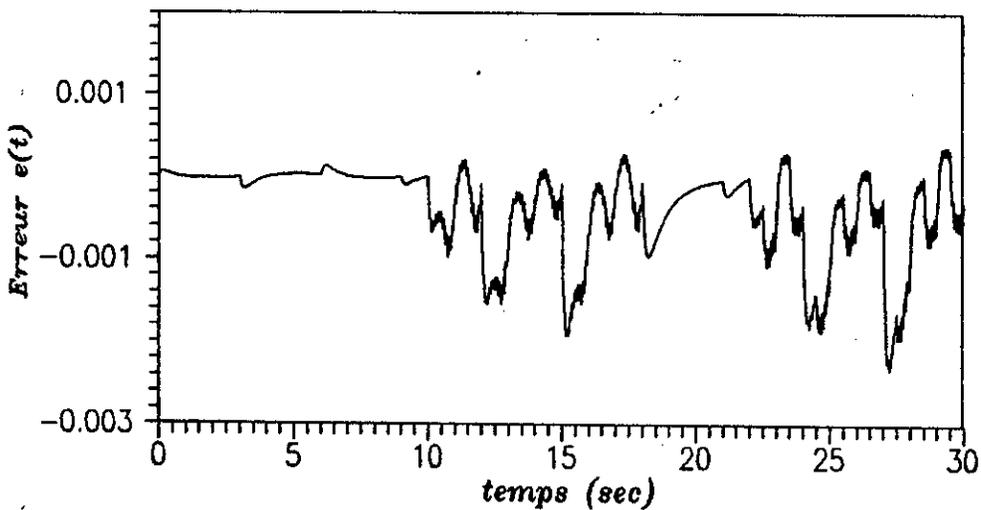


Fig.5.8.c. Erreur de poursuite

Fig.5.8. Controle MCS d'un systeme instable du second ordre

## Exemple 2 Système du 2 ordre instable

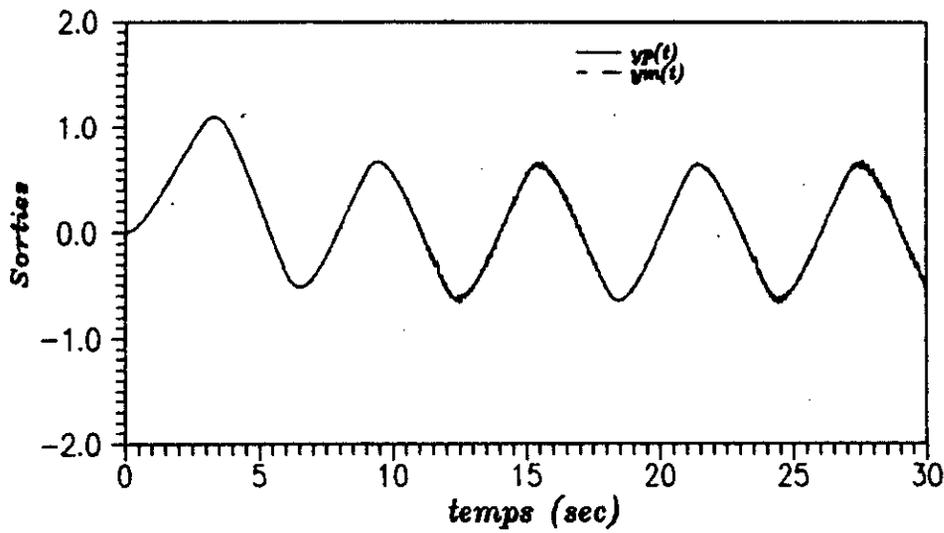


Fig.5.9.a. Sorties du modele et du procede

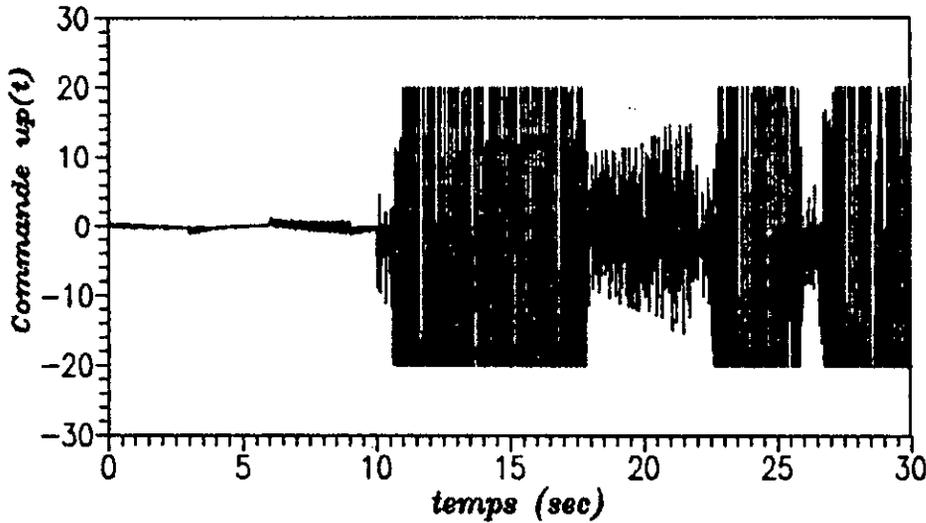


Fig.5.9.b. signal de commande  $u_p(t)$

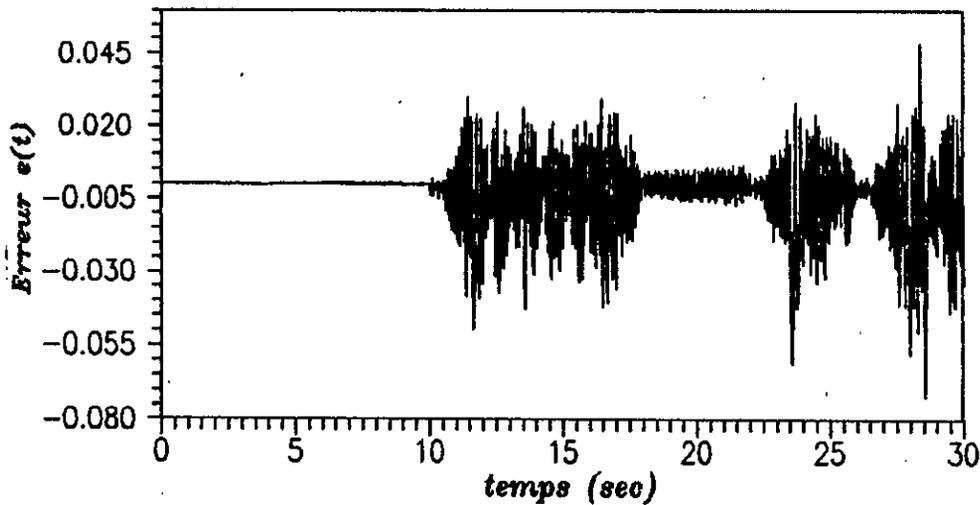


Fig.5.9.c. Erreur de poursuite

Fig.5.9. Contrôle CGT d'un système instable du second ordre

## Exemple 2 Système du 2 ordre instable

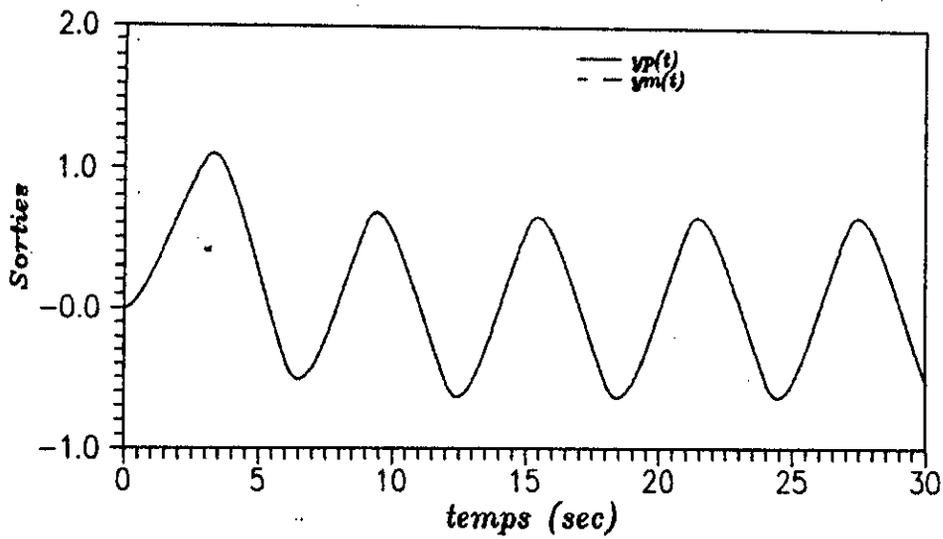


Fig.5.10.a. Sorties du modele et du procede

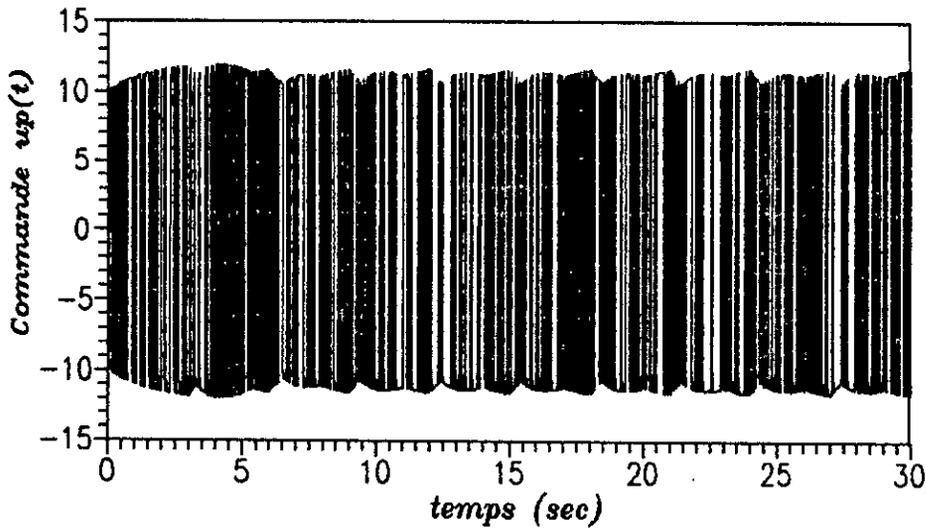


Fig.5.10.b. signal de commande  $v_p(t)$

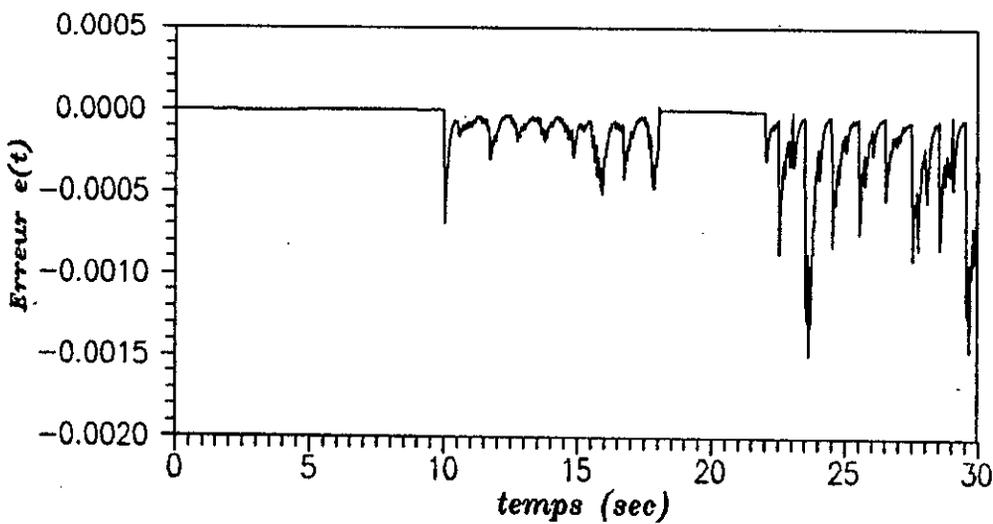


Fig.5.10.c. Erreur de poursuite

Fig.5.10. Contrôle adaptatif à structure variable d'un système instable du second ordre

## Exemple 2 Système du 2 ordre instable

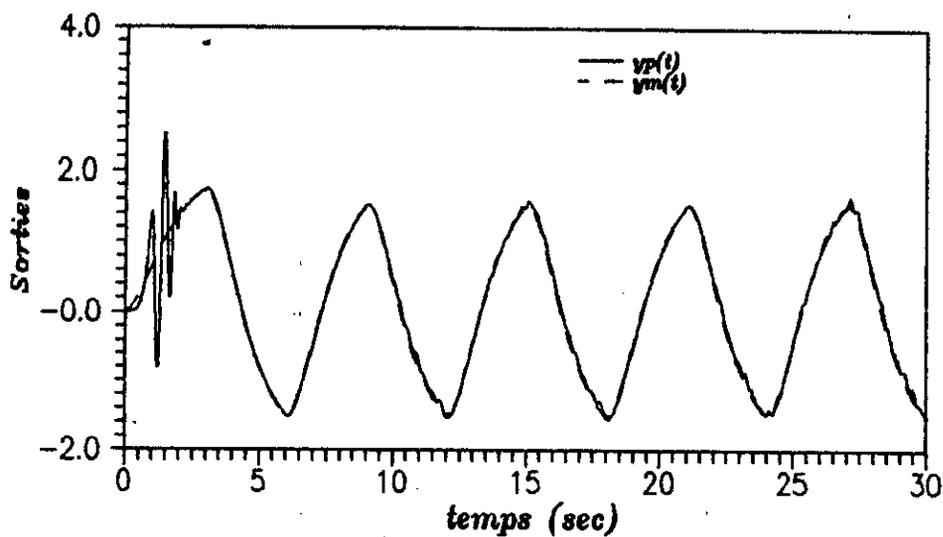


Fig.5.11.a. Sorties du modele et du procede

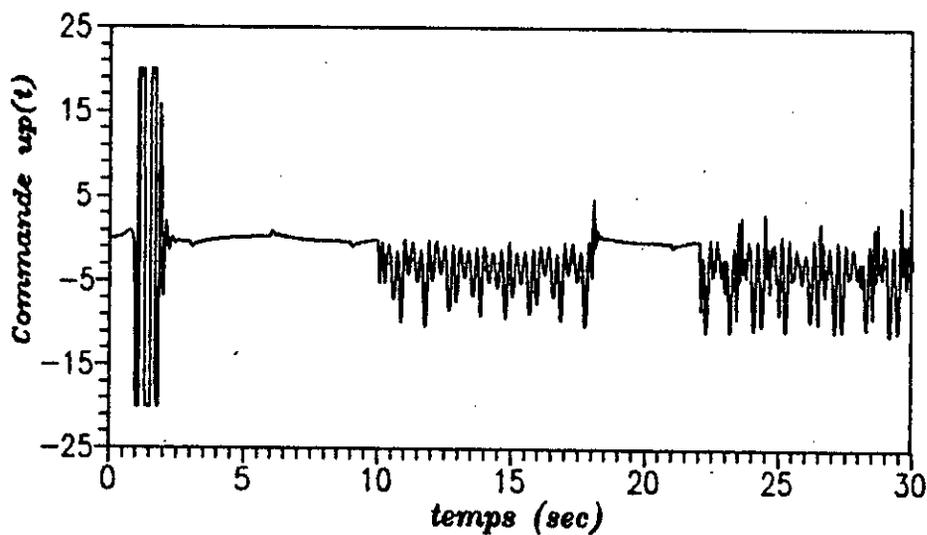


Fig.5.11.b. signal de commande  $u_p(t)$

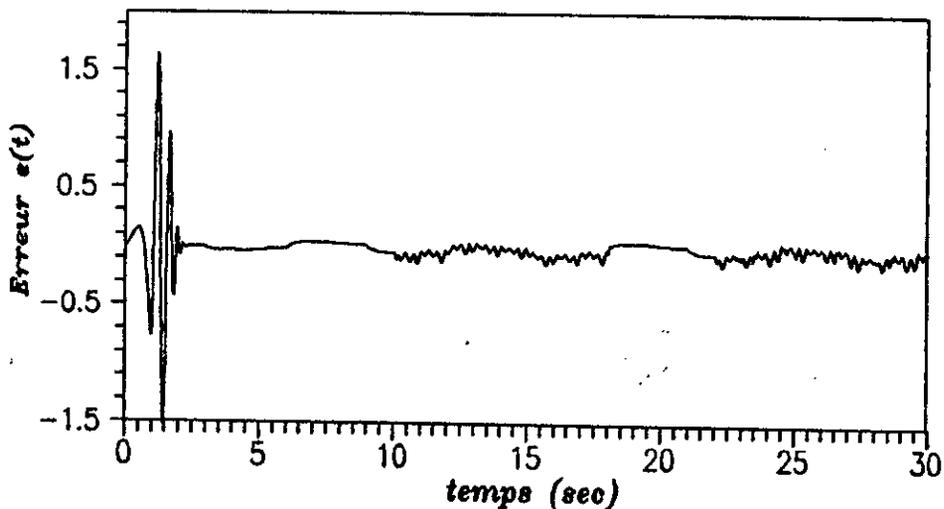


Fig.5.11.c. Erreur de poursuite

Fig.5.11. Contrôle adaptatif à variance minimale d'un système instable du second ordre

## Exemple 2 Système du 2 ordre instable

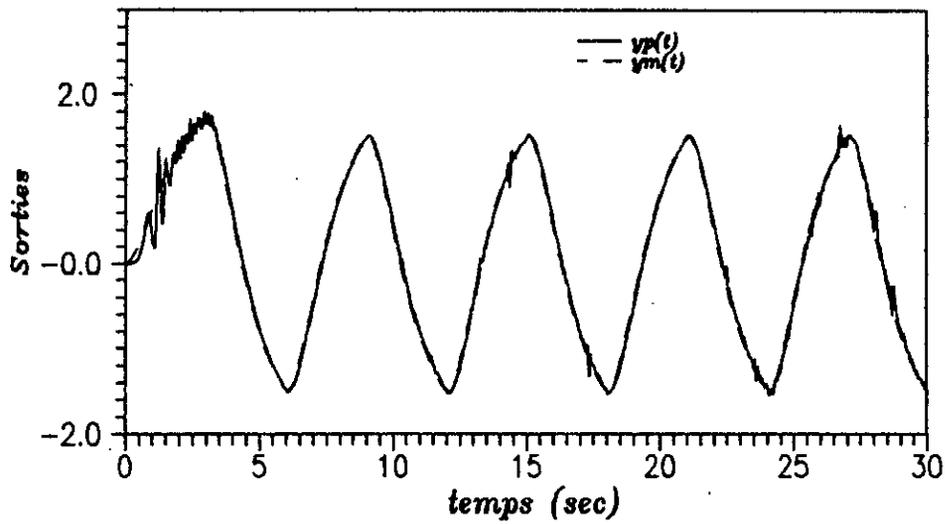


Fig.5.12.a. Sorties du modele et du procede

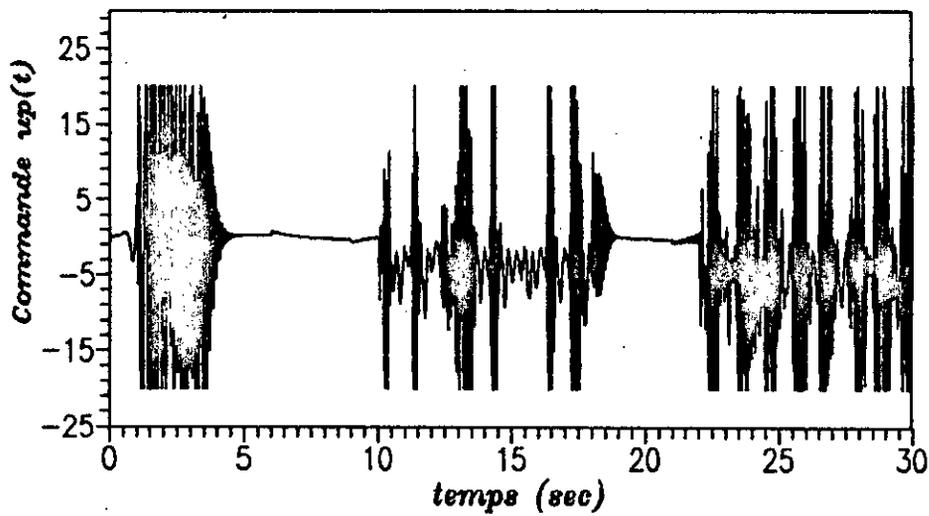


Fig.5.12.b. signal de commande  $u^p(t)$

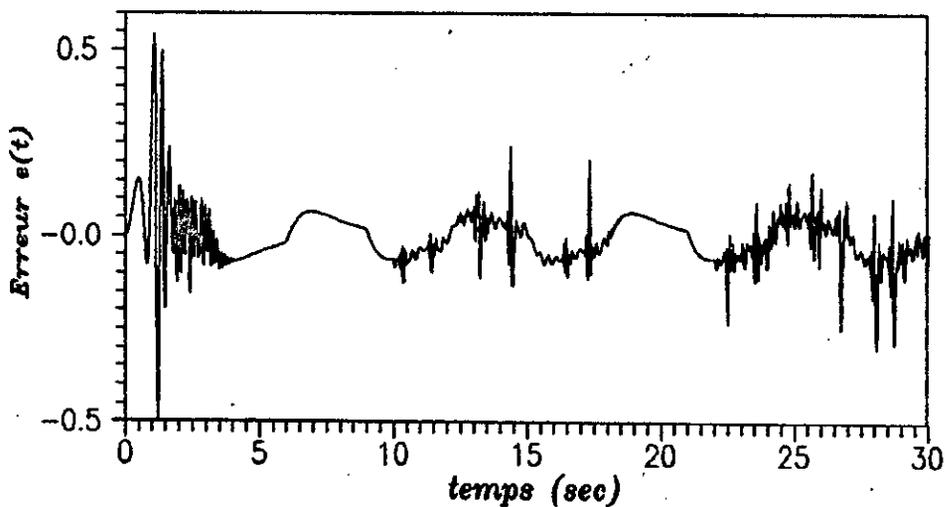


Fig.5.12.c. Erreur de poursuite

Fig.5.12. Contrôle adaptatif à placement de pôles d'un système instable du second ordre

## Exemple 2 Système du 2 ordre instable

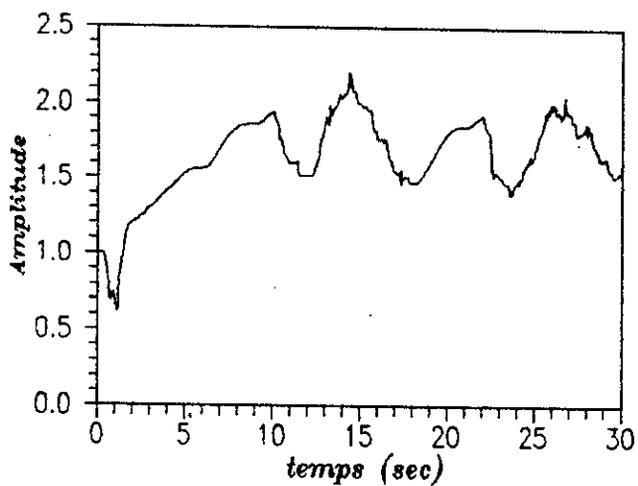


Fig.5.12.bis.a. Parametre a1 du procede

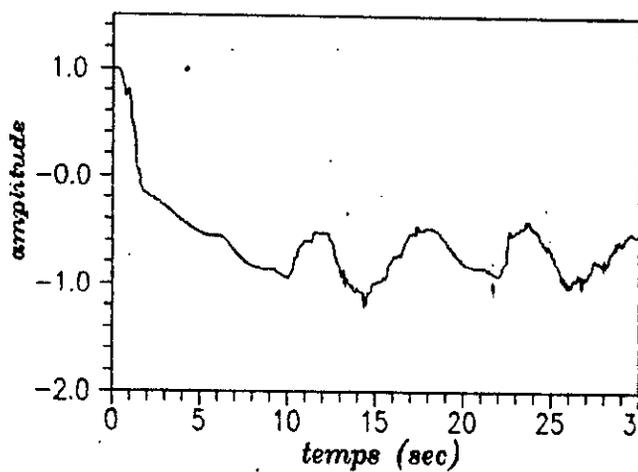


Fig.5.12.bis.b. Parametre a2 du procede

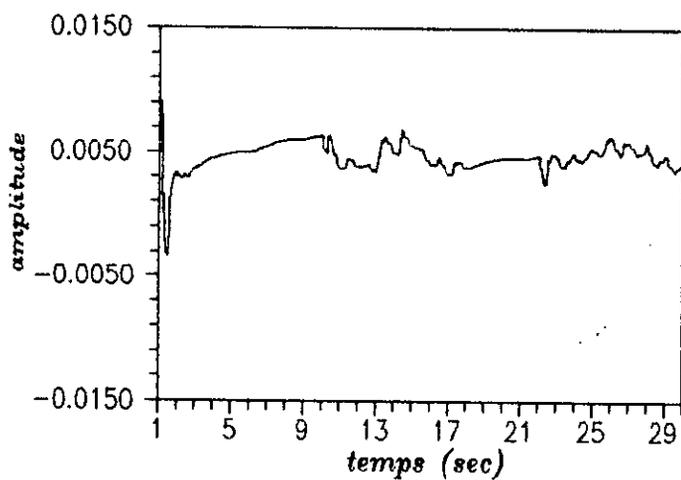


Fig.5.12.bis.c. Parametre b1 du procede

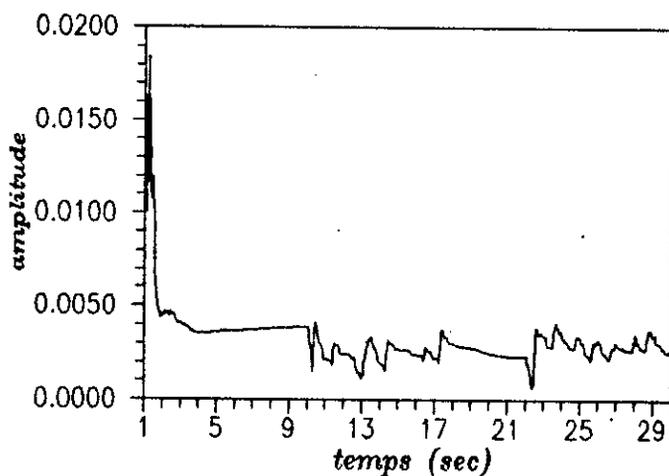


Fig.5.12.bis.d. Parametre b2 du procede

régime transitoire.

### 5-EXEMPLE 3

Commande d'un système multi-entrées simple sortie (MISO)

Le procédé est décrit dans l'espace d'état par :

$$\dot{x}_P = A_P x_P + B_P u_P$$

$$y_P = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x_P$$

où

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & -6 & -11 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en régime nominal  $p=-6$ ,

La matrice de transfert du système est donnée par :

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4 + 10s^3 + 11s^2 + 6s + 6} & \frac{s}{s^4 + 10s^3 + 11s^2 + 6s + 6} \\ \frac{s^2}{s^2 + s + 1} & \frac{s^2}{s^2 + 11s} \\ \frac{1}{s^4 + 10s^3 + 11s^2 + 6s + 6} & \frac{s}{s^4 + 10s^3 + 11s^2 + 6s + 6} \end{bmatrix}$$

l'étude de cette matrice a permis de conclure que ce système est stable avec un comportement oscillatoire. les pôles de  $H(p)$  sont :  $s_1 = -8.82$ ,  $s_2 = -1.163$ ,  $s_{3,4} = 0.0078 \pm 0.7647j$ ,

le comportement oscillatoire est dû au fait que les deux derniers pôles sont presque imaginaires (leur partie réelle est négligeable devant leurs parties imaginaires).

#### Objectif

Imposer au système la poursuite du modèle de référence ci après en dépit des incertitudes et autres perturbations,

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u_m$$

avec :

$$u_m = \begin{cases} 4, & t < 15 \\ 0, & t \geq 15 \end{cases}$$

.Commande : Pour mieux tester les capacités des diverses lois de commande adaptatives, on fait déstabiliser les pôles du procédé à l'instant ( $t=10$ ) en posant :

$$p = \begin{cases} -6, & t < 10 \\ 1, & t \geq 10 \end{cases}$$

Les paramètres intervenant dans les différentes lois de commande ont été choisis comme suit :

$$\alpha(\text{AMFC}) = 10, \beta(\text{AMFC}) = 0.01,$$

$$\alpha(\text{MCS}) = \text{Diag}([0 \ 0.004]), \beta(\text{MCS}) = \text{Diag}([0 \ 0.05]),$$

La matrice de Lyapounov pour le AMFC et le MCS est prise :

$$P = \begin{bmatrix} 30.8737 & 38.4946 & 16.0618 & 1.6667 \\ 38.4946 & 80.1165 & 38.2437 & 3.6246 \\ 16.0618 & 38.2437 & 31.8638 & 2.276 \\ 1.6667 & 3.6246 & 2.276 & 0.9095 \end{bmatrix}$$

les coefficients d'adaptation de la stratégie CGT sont posés :

$$T_1 = 5000, T_2 = 1,$$

Les hyperplans de glissement pour le contrôleur VSS sont choisis :

$$s_1 = e_4, \quad s_2 = e_1 + 2e_2 + e_3,$$

la loi de commutation est :

$$K_e = \begin{bmatrix} -\text{sgn}(s_1 e_1) & -9\text{sgn}(s_1 e_2) & -15\text{sgn}(s_1 e_3) & -5\text{sgn}(s_1 e_4) \\ \text{sgn}(s_2 e_1) & 2\text{sgn}(s_2 e_2) & 3\text{sgn}(s_2 e_3) & 2\text{sgn}(s_2 e_4) \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 5\text{sgn}(s_1 x_1) & -5\text{sgn}(s_1 x_2) & -6\text{sgn}(s_1 x_3) & -4\text{sgn}(s_1 x_4) \\ \text{sgn}(s_2 x_1) & \text{sgn}(s_2 x_2) & \text{sgn}(s_2 x_3) & \text{sgn}(s_2 x_4) \end{bmatrix}$$

$$K_m = [5\text{sgn}(s_2 u_m) \quad \text{sgn}(s_2 u_m)]$$

pour la synthèse des contrôleurs auto-ajustables, on a choisit la période d'échantillonnage  $\Delta = 0.01$ , le procédé échantillonné à

cette fréquence devient à non minimum de phase, ce qui a motivé le choix des facteurs de pondération pour la commande GMV égaux à  $\lambda=0$ , le polynôme de régulation P est sélectionné égal à 1 dans le cas de la commande à placement de pôles découplée et  $P=1-0.2q^{-1}$ . pour la seconde variante de cette stratégie, le facteur d'oubli de l'algorithme d'estimation a été pris égal à 0.98.

### *Interprétations des résultats*

Les figures 5.13-5.20 illustrent le comportement de ce procédé sous différents algorithmes de commande, où il apparaît clairement que les lois CGT et VSS présentent les meilleures performances de poursuite et de robustesse vis à vis des perturbations paramétriques, avec un léger avantage pour le CGT qui exhibe un effort de commande plus lisse et moins important. Le AMFC fournit également des résultats comparables aux deux lois précédentes avec une erreur de poursuite légèrement plus importante (différence de l'ordre de 2%). pour le MCS, le choix des coefficients d'adaptation a été très difficile en raison de la différence de structure des matrices de commande du procédé et du modèle de référence, cette dernière, contrairement au AMFC qui en prend compte par l'intermédiaire des gains statiques  $K$  et  $K_R$ , n'est pas détectée par l'algorithme de commande. Ceci s'est répercuté sur les performances de poursuite du contrôleur, où l'on constate sur la figure 5.14 qu'au changement de paramètres du procédé la sortie dévie légèrement de celle du modèle de référence pour ne revenir qu'après changement de consigne.

Pour les stratégies auto-ajustables, le contrôleur VMG basé sur un modèle découplé, d'après la figure 5.17, donne, en dépit des dynamiques négligées, des résultats très satisfaisants et comparables à ceux du AMFC. La seconde variante de ce contrôleur prend en compte les termes de couplage et donne des résultats acceptables (fig.5.18) mais moins bons, un choix plus adéquat du facteur  $\lambda$  de pondération de l'effort de commande permettrait certainement d'améliorer ces performances. La figure 5.19 montre que la stratégie à placement de pôles est très sensible aux

### Exemple 3 Système MISO

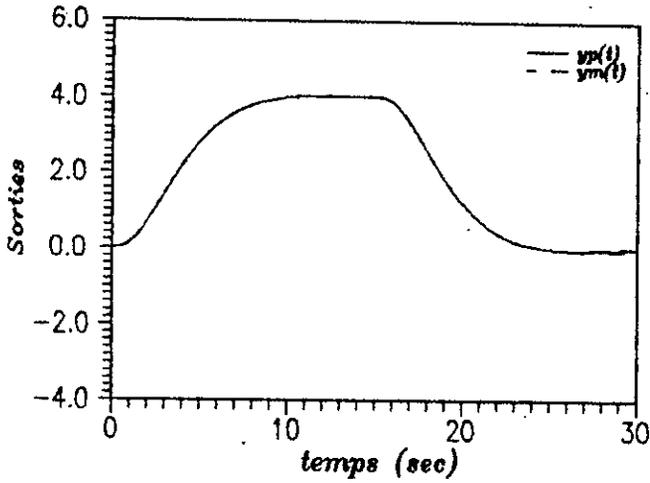


Fig.5.13.a. Sorties du modele et du procede

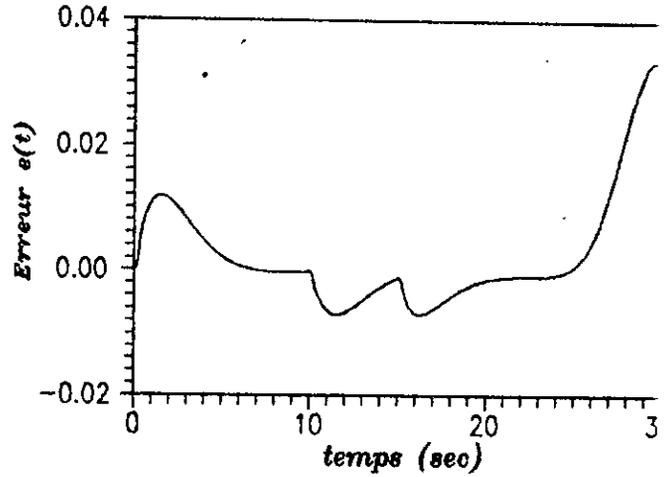


Fig.5.13.b. Erreur de poursuite

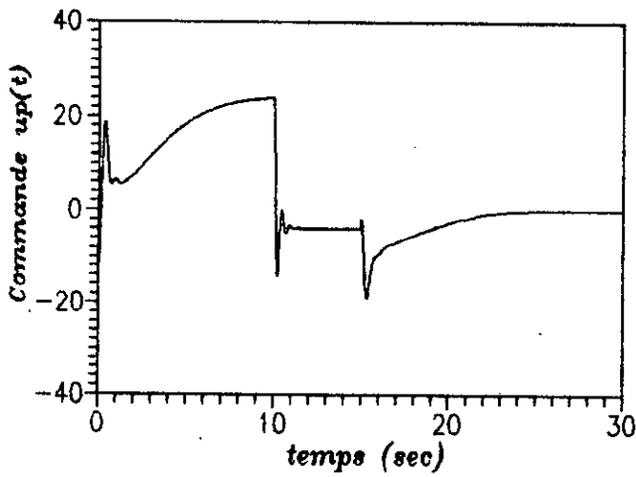


Fig.5.13.c. signal de commande  $u_{p1}(t)$

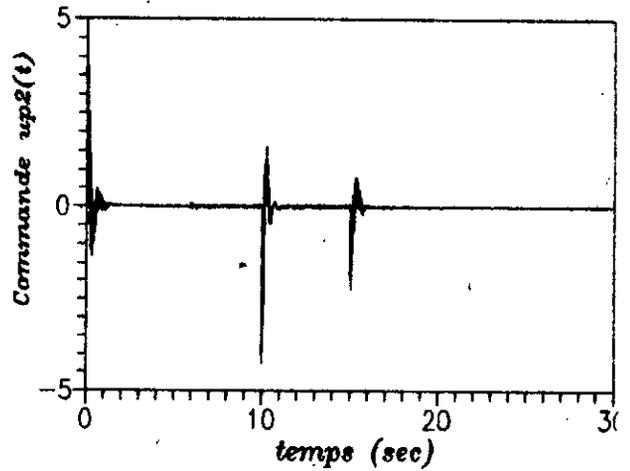


Fig.5.13.d. signal de commande  $u_{p2}(t)$

Fig.5.13. Controle AMFC d'un systeme MISO

## Exemple 3 Système MISO

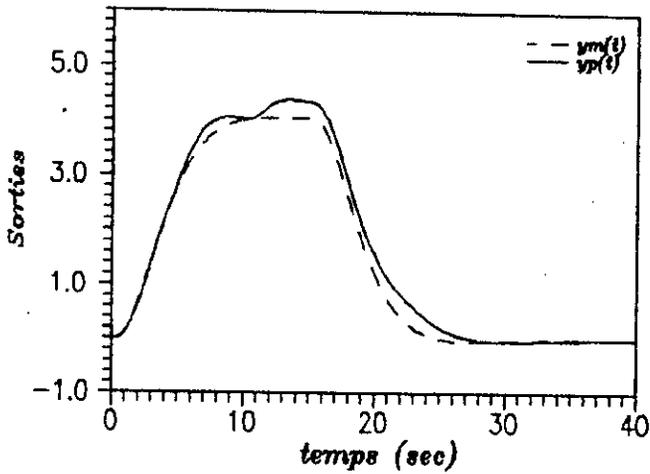


Fig.5.14.a. Sorties du modele et du procede

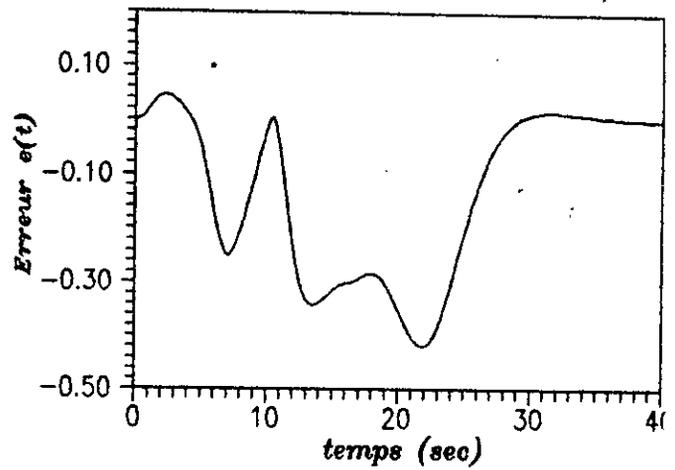


Fig.5.14.b. Erreur de poursuite

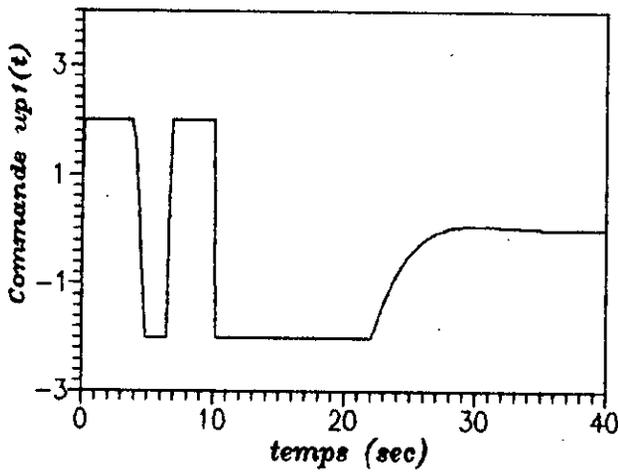


Fig.5.14.c. signal de commande  $up1(t)$

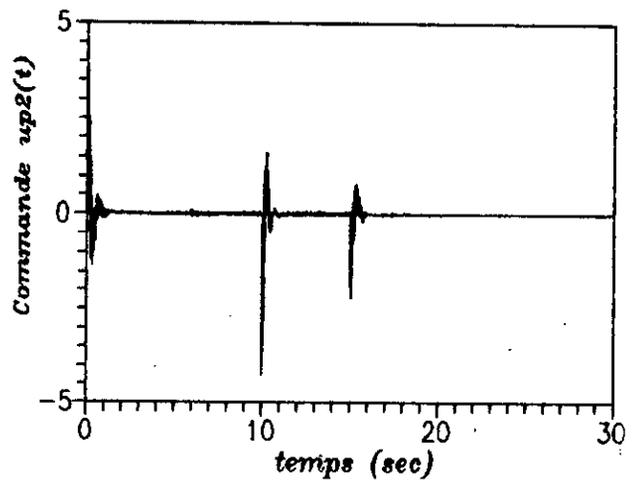


Fig.5.13.d. signal de commande  $up2(t)$

Fig.5.14. Controle MCS d'un systeme MISO

## Exemple 3 Système MISO

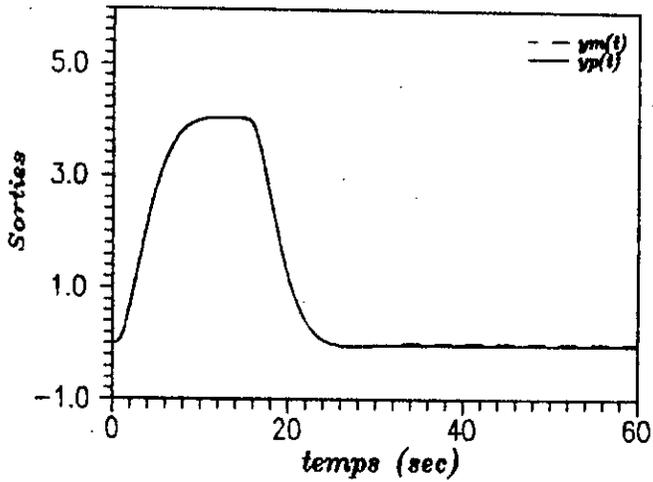


Fig.5.15.a. Sorties du modele et du procede

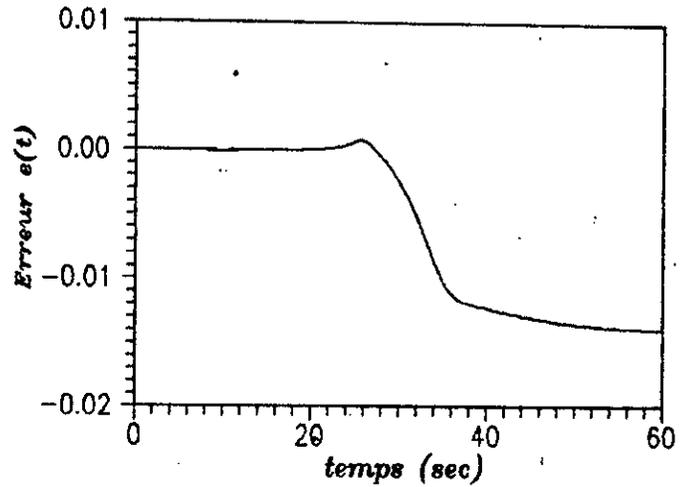


Fig.5.15.b. Erreur de poursuite

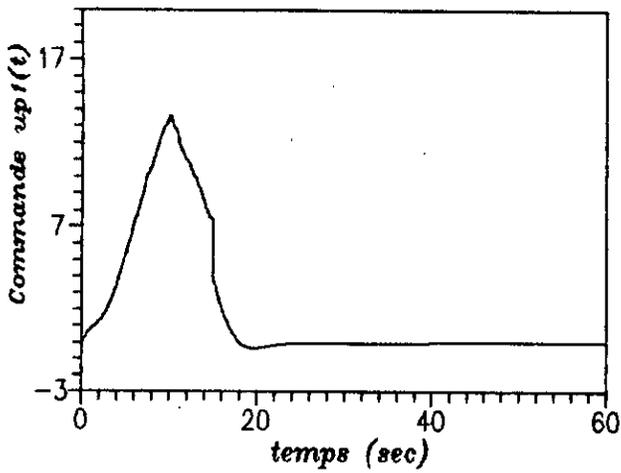


Fig.5.15.c. signal de commande  $up1(t)$

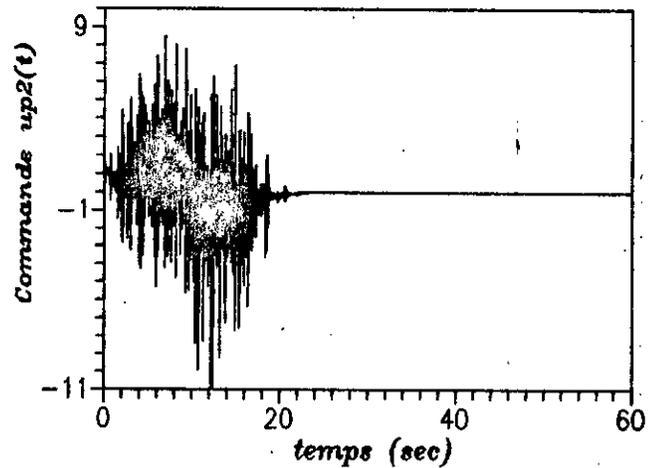


Fig.5.15.d. signal de commande  $up2(t)$

Fig.5.15. Controle CGT d'un systeme MISO

## Exemple 3 Système MISO

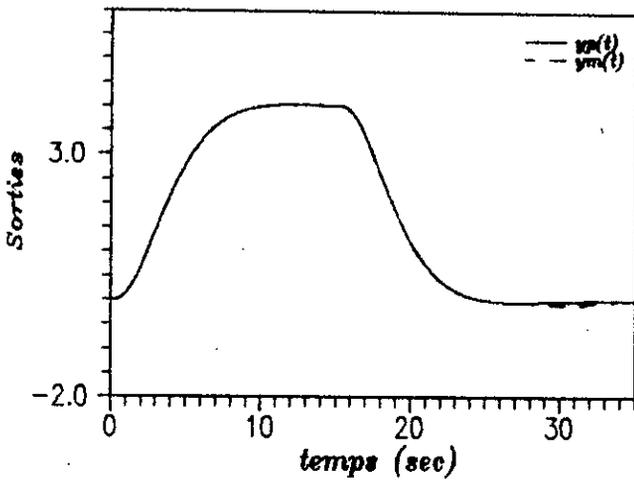


Fig.5.16.a. Sorties du modele et du procede

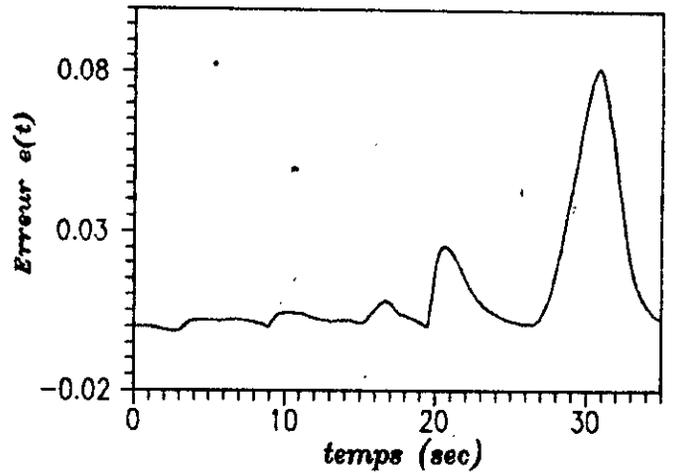


Fig.5.16.b. Erreur de poursuite

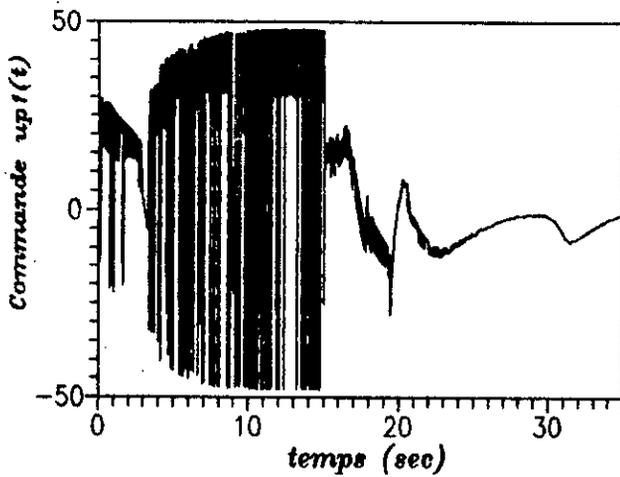


Fig.5.16.c. signal de commande  $up1(t)$

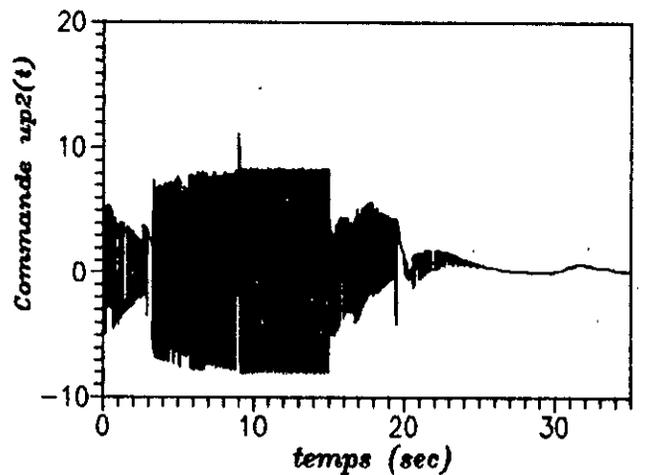


Fig.5.16.d. signal de commande  $up2(t)$

Fig.5.16. Controle adaptatif a structure variable  
d'un systeme MISO

### Exemple 3 Système MISO

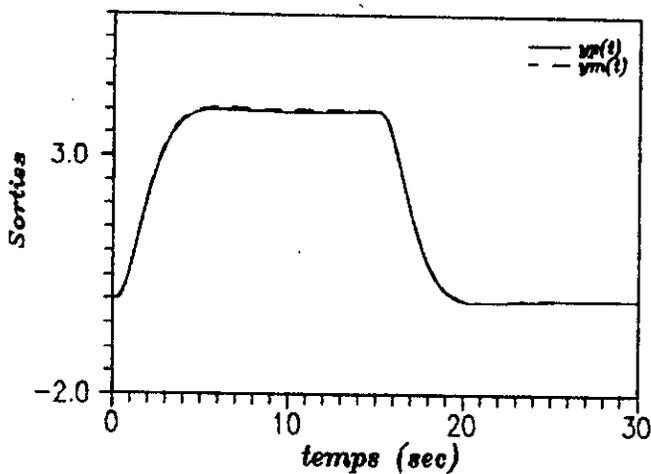


Fig.5.17.a. Sorties du modele et du procede

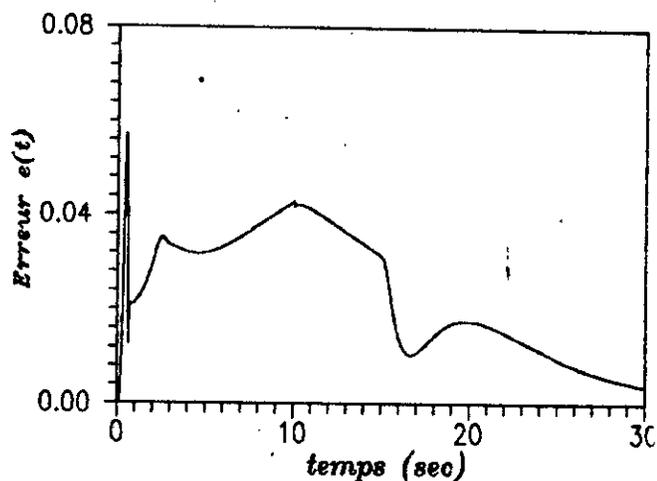


Fig.5.17.b. Erreur de poursuite

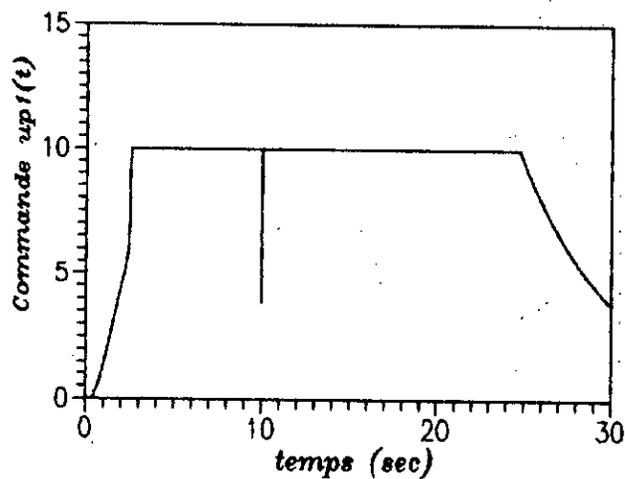


Fig.5.17.c. signal de commande  $up1(t)$

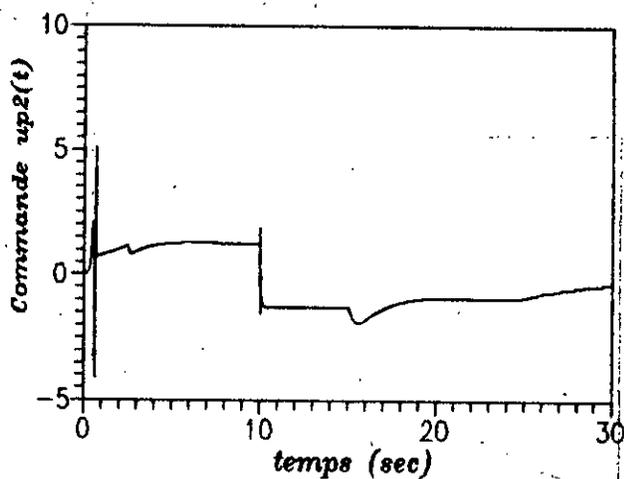


Fig.5.17.d. signal de commande  $up2(t)$

Fig.5.17. Controle adaptatif a variance minimale (variante decouplee) d'un systeme MISO

## Exemple 3 Système MISO

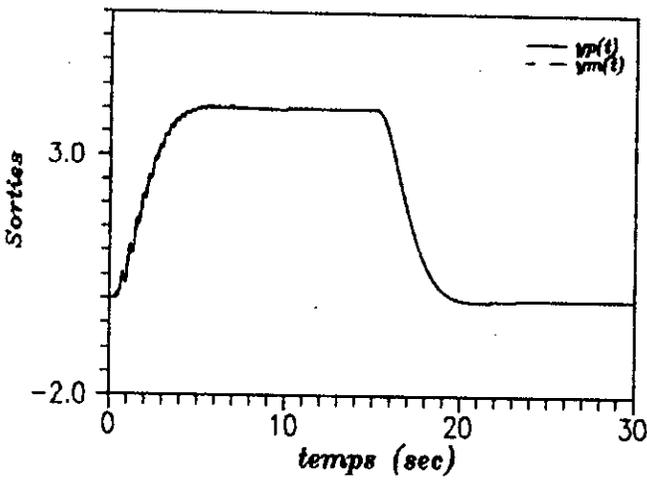


Fig. 5.18.a. Sorties du modèle et du procédé

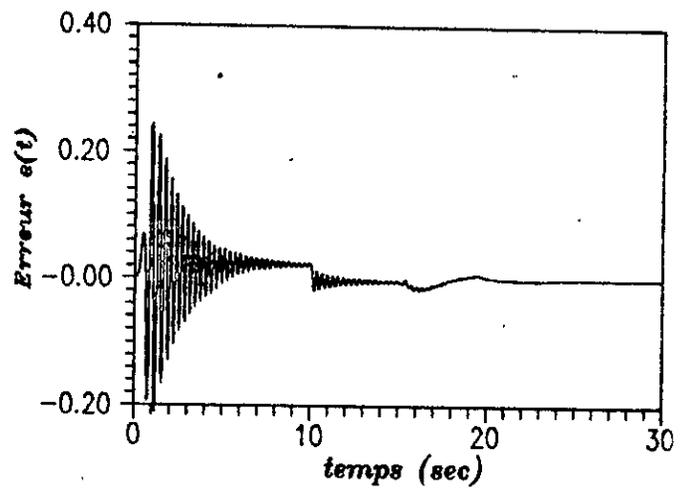


Fig. 5.18.b. Erreur de poursuite

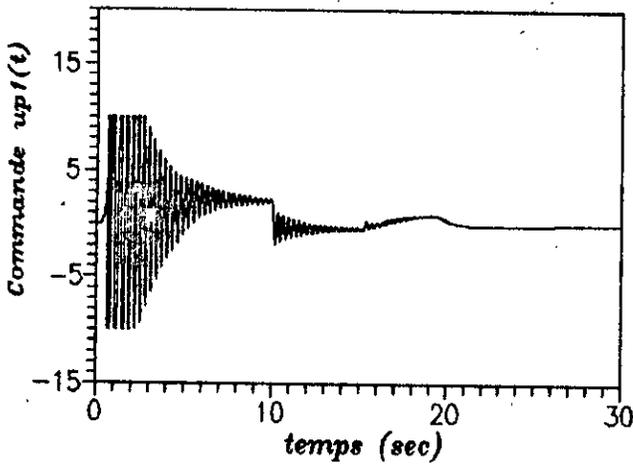


Fig. 5.18.c. signal de commande  $up1(t)$

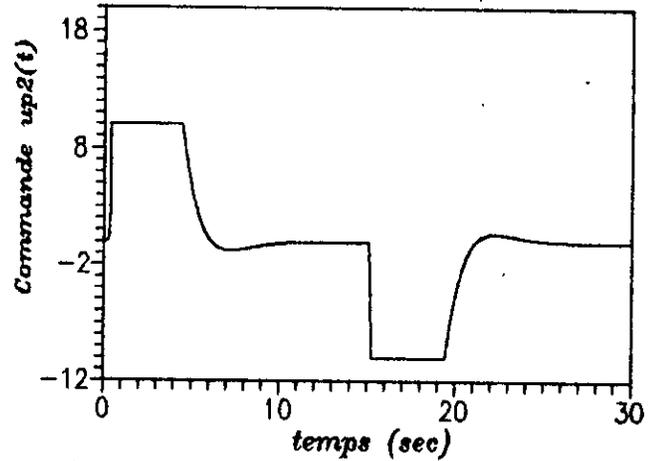


Fig. 5.18.d. signal de commande  $up2(t)$

**Fig. 5.18. Contrôle adaptatif à variance minimale (variante partiellement découplée) d'un système MISO**

### Exemple 3 système MISO

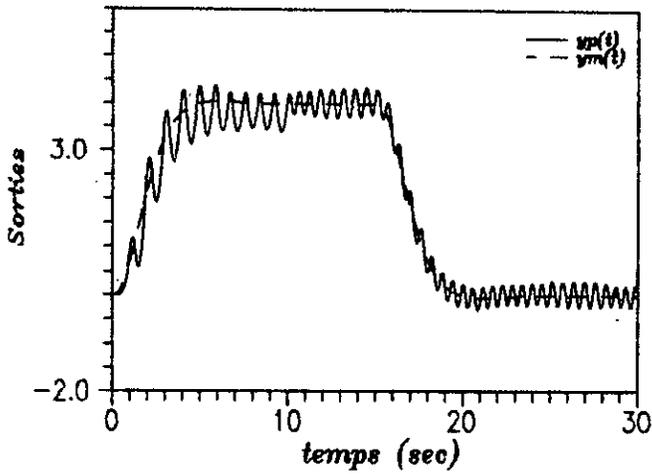


Fig.5.19.a. Sorties du modele et du procede

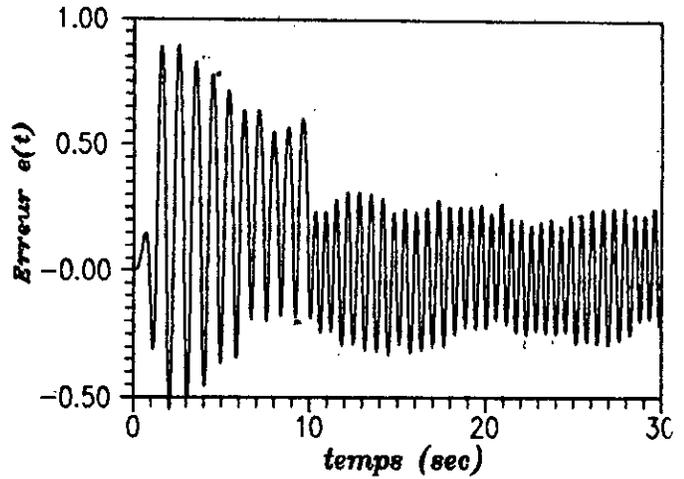


Fig.5.19.b. Erreur de poursuite

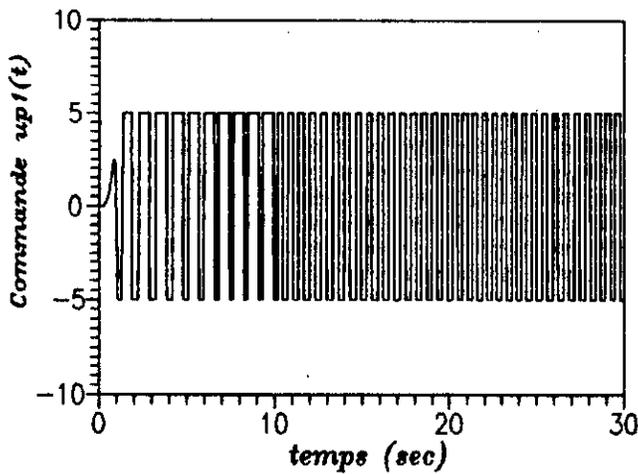


Fig.5.19.c. signal de commande  $u_{p1}(t)$

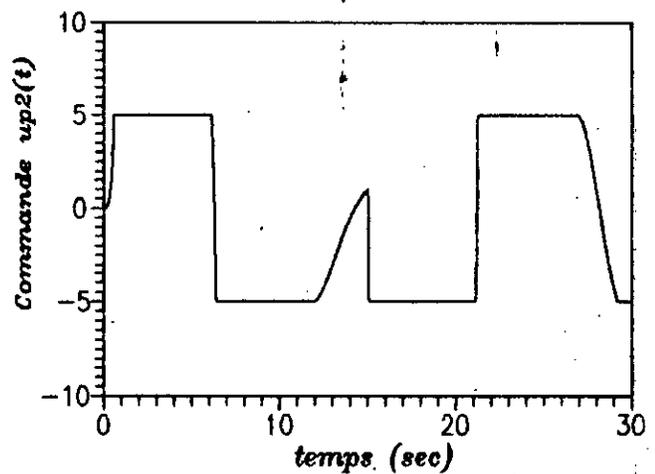


Fig.5.19.d. signal de commande  $u_{p2}(t)$

Fig.5.19. Controle adaptatif a placement de poles (variante decouplee) d'un systeme MISO

## Exemple 3 Système MISO

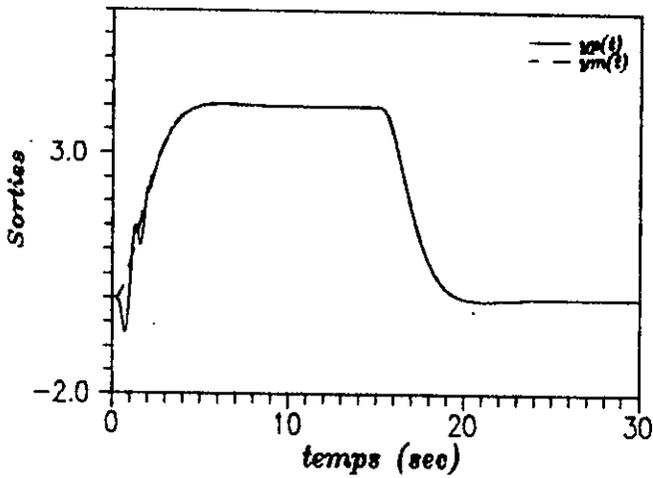


Fig.5.20.a. Sorties du modele et du procede

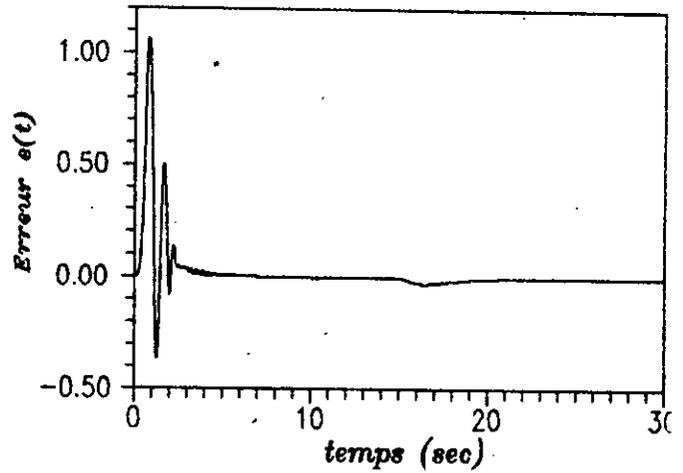


Fig.5.20.b. Erreur de poursuite

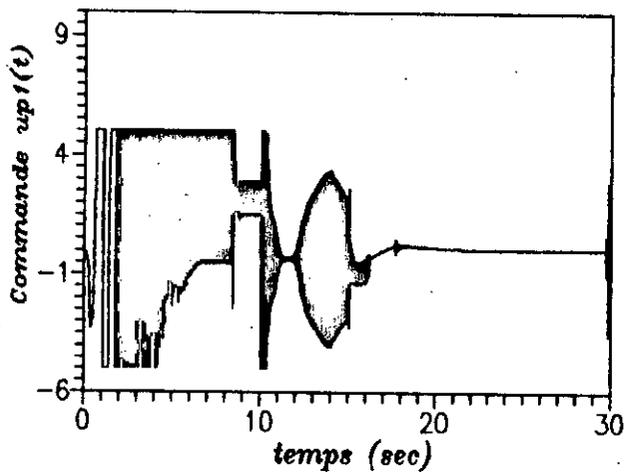


Fig.5.20.c. signal de commande  $up1(t)$

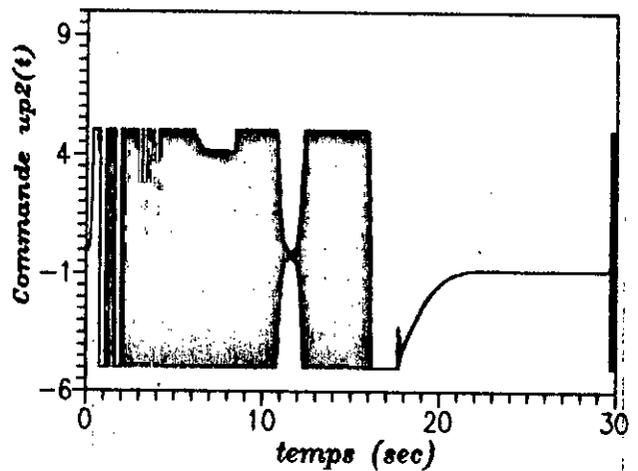


Fig.5.20.d. signal de commande  $up2(t)$

Fig.5.20. Contrôle adaptatif à placement de pôles (variante partiellement découplée) d'un système MISO

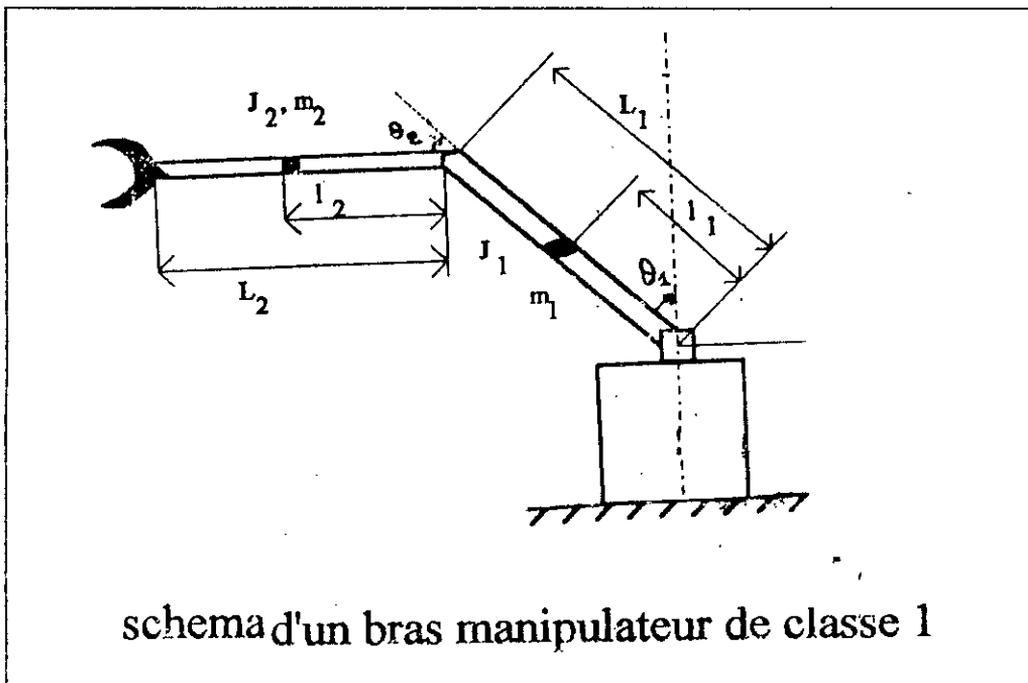
dynamiques négligées, la sortie du procédé commandé par l'algorithme basé sur un modèle découplé oscille constamment autour de la sortie de référence. si l'on prend compte des termes de couplage négligés précédemment, le contrôleur à placement de pôles affiche (fig.5.20) après une brève phase d'estimation de très bonnes performances de poursuite avec cependant un effort de commande très oscillatoire et atteignant la saturation.

## 6-Application :

### Commande adaptative d'un bras manipulateur

#### 5-6-1- Introduction

Les bras manipulateurs constituent, de par leur caractère non linéaire et les couplages de leurs différentes variables d'entrées sorties ainsi que la dépendance de leurs dynamiques des caractéristiques des objets manipulés, un excellent moyen de tester les performances des systèmes adaptatifs.



Pour nôtre part, nous nous proposons d'appliquer les différents algorithmes présentés dans ce travail à la commande de la position des bras d'un robot de classe 1 [93] à deux degrés de liberté (voir figure ci dessus), pour cela nous soumettrons ce procédé à un test à consigne variable avec variation brusque de la

charge transportée et à un second test de répétabilité (consigne périodique) avec variation aléatoire de la charge.

### 5-6-2 Modélisation

Les équations régissant le fonctionnement du bras manipulateur sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange.

Les énergies cinétiques et potentielles des deux bras sont données par :

$$T_1 = \frac{1}{2} (J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\vartheta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_e) \left[ \left( \frac{m_2 l_2 + m_e L_2}{m_e + m_2} \right)^2 (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + L_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \right. \\ \left. + 2 L_1 \frac{m_2 l_2 + m_e L_2}{m_e + m_2} (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2) \right] + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2$$

$$v_1 = m_1 l_1 g \cos(\vartheta_1)$$

$$v_2 = (m_e + m_2) g \left[ L_1 \cos(\vartheta_1) + \frac{m_2 l_2 + m_e L_2}{m_e + m_2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]$$

où  $\vartheta_i$  et  $\dot{\vartheta}_i$  sont respectivement les positions et les vitesses angulaires de l'articulation  $i$ ,  $m_e$  étant la charge à l'extrémité du bras 2.

Le Lagrangien du système est donné par :

$$L = \sum_{i=1}^2 (T_i - v_i)$$

les équations dynamiques du bras sont alors obtenues par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\vartheta}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta \vartheta_i} = k_i u_i - c_i \dot{\vartheta}_i$$

où les  $k_i$  représentent les gains des amplis des moteurs,  $u_i$  les couples de commande, et  $c_i$  le coefficient de frottement visqueux de la  $i$ ème articulation.

Ce qui entraîne le système d'équations différentielles suivant :

$$M \ddot{\vartheta} + C \dot{\vartheta} + D \vartheta + E \dot{\vartheta} \dot{\vartheta} + F g = K u \quad (*)$$

où :

$$M = \begin{bmatrix} J_1 + m_1 l_1^2 + J_2 + \frac{(m_2 l_2 + m_e L_2)^2}{m_2 + m_e} + (m_1 + m_e) L_1 & J_2 + (m_2 l_2 + m_e L_2) L_1 \cos(\vartheta_2) \\ + 2L_1 (m_2 l_2 + m_e L_2) \cos(\vartheta_2) & \\ J_2 + L_1 (m_2 l_2 + m_e L_2) \cos(\vartheta_2) & J_2 + \frac{(m_2 l_2 + m_e L_2)^2}{m_2 + m_e} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2L_1 (m_2 l_2 + m_e L_2) \sin(\vartheta_2) \\ L_1 (m_2 l_2 + m_e L_2) \sin(\vartheta_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -2L_1 (m_2 l_2 + m_e L_2) \sin(\vartheta_2) \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \sin(\vartheta_1) - (m_2 + m_e) L_1 \sin(\vartheta_1) \\ -(m_2 l_2 + m_e L_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -(m_2 l_2 + m_e L_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

$$K = \text{diag}[k_1 \quad k_2]$$

La relation (\*) représente l'équation générale d'un bras manipulateur, M est la matrice des coefficients inertiels, contient les coefficients visqueux, la matrice D traduit les effets centrifuges, E rend compte des effets de Corriolis et K est le vecteur des couples de commande.

### 5-6-3 Forme linéarisée des équations du bras

Les équations (\*) peuvent être mises sous forme d'état linéaire, pour les besoins de synthèse des différents contrôleurs, en considérant les termes linéaires en  $\dot{\vartheta}_i$  et  $\vartheta_i$  et en isolant les termes non linéaires. Ce qui donne :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + d(t)$$

$$\text{où } x(t) = [\vartheta_1 \quad \dot{\vartheta}_1 \quad \vartheta_2 \quad \dot{\vartheta}_2],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c_1}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} & 0 & \frac{c_2}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c_1}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} & 0 & \frac{-c_2}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} + \frac{1}{J_2 + m_2 l_2^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_1}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} & \frac{-k_2}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} \\ 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} & \frac{k_2}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2} + \frac{1}{J_2 + m_2 l_2^2} \end{bmatrix}$$

Le terme  $d(t)$  renferme tous les termes non linéaires considérés comme perturbations :

$$d(t) = [0 \ d_1 \ 0 \ d_2]^T$$

avec

$$d_1 = \frac{f_2 - f_1}{J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2}, \quad d_2 = -d_1 - \frac{2f}{J_2 + m_2 l_2^2}$$

où :

$$f_1 = m_1 L_1 l_1 \cos(\vartheta_2) \ddot{\vartheta}_1 + (m_2 L_1 + l_1 \cos \vartheta_2) \ddot{\vartheta}_2 - (m_2 L_1 l_1 \sin \vartheta_2) \dot{\vartheta}_2^2 - (2m_2 L_1 l_1 \sin \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - ((m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin(\vartheta_1) + m_2 l_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) g,$$

$$f_2 = (m_2 L_1 l_1 \cos \vartheta_2) \ddot{\vartheta}_1 + (m_2 l_2 L_1 \sin \vartheta_2) \dot{\vartheta}_2^2 - (m_2 l_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) g$$

Note : cette forme linéaire s'obtient en posant :  $m_e = 0$  dans (\*).

La représentation ci-dessus et plus spécialement les matrices

A et B serviront à la détermination des gains  $K_r$  et  $K$  du contrôleur AMFC ainsi qu'à la synthèse des gains de commutation par la méthode du contrôle hiérarchique dans les systèmes à structure variable, ces deux lois de commande nécessitent la connaissance des paramètres nominaux du procédé.

#### 5-6-4 Commande

Les valeurs des différentes constantes intervenant dans les équations du bras sont :

$$L_1 = 1\text{m}, L_2 = 1\text{m}, l_1 = 0.5\text{m}, l_2 = 0.5\text{m}, m_1 = 10\text{kg}, m_2 = 10\text{kg}, c_1 = 75\text{N m s}, \\ c_2 = 10\text{N m s}, J_1 = 0.5\text{kgm}^2, J_2 = 0.5\text{kgm}^2, k_1 = 40\text{N m V}^{-1}, k_2 = 20\text{N m V}^{-1}, \\ g = 9.81\text{ms}^{-2}, (m_e \text{ est la charge portée à l'extrémité du second bras}).$$

Ces valeurs, compte tenu des relations ci-dessus, nous permettent d'obtenir les matrices d'évolution et de commande de la forme d'état linéarisée du robot :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.7692 & 0 & 0.7692 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5.7692 & 0 & 4.1026 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.0769 & 3.0769 \\ 0 & 0 \\ 1.5385 & 8.2051 \end{bmatrix}$$

#### Objectif :

Nous nous proposons d'imposer aux bras du robot dont les positions sont décrites par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  la poursuite des trajectoires données par les sorties  $y_{m1}$  et  $y_{m2}$  du modèle de référence suivant :

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} u_m$$

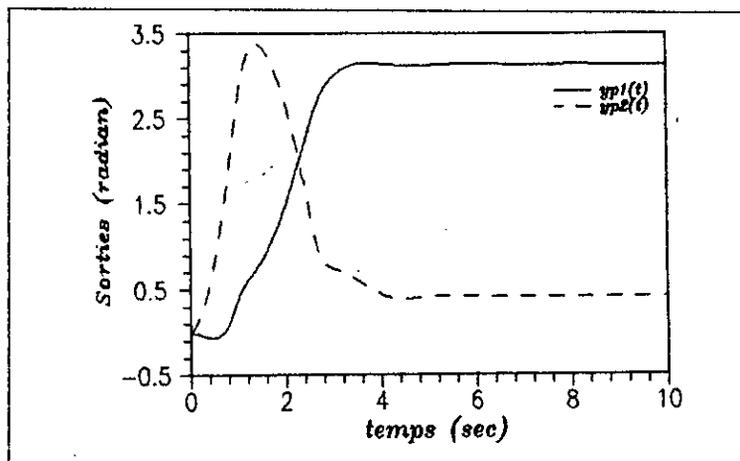
$$y_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_m$$

$u_m$  étant la consigne (entrée de référence).

Ce modèle est un système multivariable constitué de deux sous systèmes monovariables du second ordre totalement découplés, leurs temps de réponse est égale à 1s, avec un amortissement et gain statique respectivement égaux à l'unité.

Analyse du procédé en boucle ouverte :

Certains algorithmes de commande adaptative exigent la connaissance de quelques informations à priori, pour cela nous avons effectué un essai statique sur le procédé ( $u_{m1}=0.5$ ,  $u_{m2}=1$ ), qui a donné le résultat suivant (figure ci-après) :



reponses du procede en boucle ouverte

où l'on constate que le modèle du bras manipulateur est un système stable et à non minimum de phase.

Commande :

Pour mieux évaluer les performances des diverses lois de commande adaptative, nous effectuerons deux tests sur le bras manipulateur :

A. Test 1 :

Les entrées de référence sont des échelons d'amplitudes variables données par :

$$u_{m1}(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t < 3.5 \\ 0.9, & 3.5 \leq t < 6.5 \\ 1.3, & t \geq 6.5 \end{cases}$$

et

$$u_{m2}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3.5 \\ 1.4, & 3.5 \leq t < 6.5, \\ 1.8, & t \geq 6.5 \end{cases}$$

la charge portée à l'extrémité du bras 2 varie comme suit :

$$m_e = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4 \\ 2, & 4 \leq t < 7, \\ 5, & t \geq 7 \end{cases}$$

Les paramètres intervenant dans les différentes lois de commande ont été choisis comme suit :

$$\alpha(\text{AMFC}) = 0.1, \beta(\text{AMFC}) = 100,$$

$$\alpha(\text{MCS}) = \text{Diag}([0 \ 10]), \beta(\text{MCS}) = \text{Diag}([0 \ 100]),$$

La matrice de Lyapounov pour le AMFC et le MCS est prise :

$$P = \text{Diag} \left( \begin{bmatrix} 3.8125 & 0.2813 \\ 0.2813 & 0.0977 \end{bmatrix} \right)$$

Pour le Contrôleur CGT, la propriété de ce dernier de poursuite d'un modèle d'ordre réduit a été mise à profit en imposant au robot de poursuivre un modèle possédant les mêmes propriétés que celui proposé ci-dessus mais d'ordre plus bas (égale à 2):

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u_m, \quad y_m = x_m$$

Comme il a été mentionné au chapitre 1, le procédé étant à non minimum de phase, une augmentation adaptative s'avère donc nécessaire pour la mise en oeuvre de cet loi de commande. Pour cela on propose l'action supplémentaire suivante :

$$\dot{x}_s = I_2 u_s, \quad y_s = I_2 x_s$$

les coefficients d'adaptation sont fixés à  $T_1 = 6000I_{\sigma}$ ,  $T_{s1} = 6000I_4$ ,  $T_2 = 100I_{\sigma}$ ,  $T_{s2} = 100I_4$ , le terme  $\sigma$  est pris égal à 0.01.

Les hyperplans de glissement pour le contrôleur VSS sont choisis :

$$s_1 = 15 e_1 + e_2, \quad s_2 = 15 e_3 + e_4,$$

la loi de commutation est :

$$K_e = \begin{bmatrix} 2\text{sgn}(s_1 e_1) & 4\text{sgn}(s_1 e_2) & 3\text{sgn}(s_1 e_3) & 1.5\text{sgn}(s_1 e_4) \\ 2\text{sgn}(s_2 e_1) & 2\text{sgn}(s_2 e_2) & -2\text{sgn}(s_2 e_3) & 1.5\text{sgn}(s_2 e_4) \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 2\text{sgn}(s_1 x_1) & 3\text{sgn}(s_1 x_2) & 2\text{sgn}(s_1 x_3) & \text{sgn}(s_1 x_4) \\ \text{sgn}(s_2 x_1) & \text{sgn}(s_2 x_2) & \text{sgn}(s_2 x_3) & 0.5\text{sgn}(s_2 x_4) \end{bmatrix}$$

$$K_m = \begin{bmatrix} 8\text{sgn}(s_1 u_{m1}) & 4\text{sgn}(s_1 u_{m2}) \\ 5\text{sgn}(s_2 u_{m1}) & 5\text{sgn}(s_2 u_{m2}) \end{bmatrix}$$

pour la synthèse des contrôleurs auto-ajustables, la période d'échantillonnage est prise égale à 5ms, le facteur de pondération de la commande pour le contrôleur GMV est choisi tel que :  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.001$  au test 1 et  $\lambda_1 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.001$  au test de repeatabilité. Le polynôme de régulation est choisi égal à  $(1 - 0.8q^{-1})$ . Le facteur d'oubli de l'algorithme d'estimation a été pris égal à 0.95

### *.Interprétation des résultats*

Les figures 5.21-5.24 montrent que les quatre premiers algorithmes étudiés présentent de très bonnes performances de poursuite et de robustesse en dépit du caractère non linéaire du robot et des perturbations paramétriques dues aux changements brusques de la charge  $m_e$ . Le contrôleur VSS affiche les meilleurs résultats aussi bien en régime transitoire qu'en régime permanent et face aux incertitudes, cependant cette stratégie exige des efforts de commande fortement oscillatoires. Les stratégies AMFC et MCS exhibent des résultats comparables à ceux du VSS, les signaux de commande sont modérés et présentent quelques oscillations fortes dans le cas du AMFC et plus lisses pour le MCS aux instants de changement de consigne et variation brusque de la charge en raison de l'inertie du robot. Le CGT exige comme le montre la figure 5.22 l'effort de commande le plus important en transitoire et à chaque changement de consigne afin d'imposer au robot la dynamique désirée avec de performances de poursuite identiques au MCS. Les stratégies auto-ajustables (fig.5.25-5.27), donnent des résultats moins performants que les lois sus-citées, ceci est dû au caractère discret de ces algorithmes ainsi qu'à la phase d'estimation paramétrique associée. Après cette phase, les

# Application : Test 1

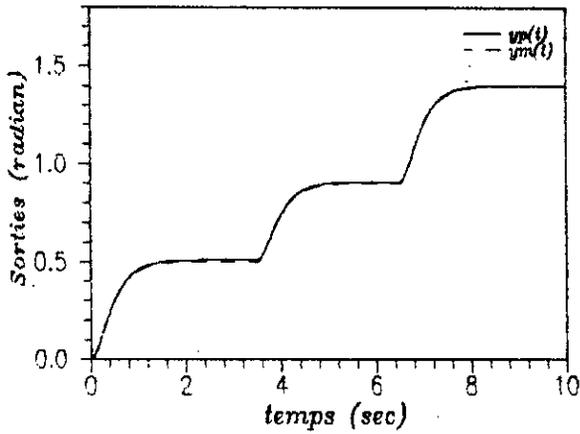


Fig.5.21.a. Sorties du modele et du procede

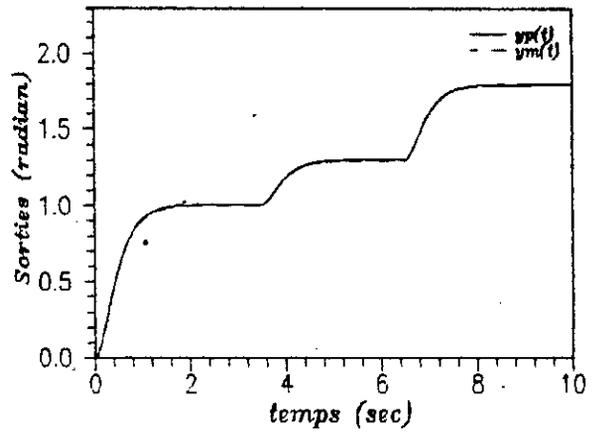


Fig.5.21.b. Sorties du modele et du procede

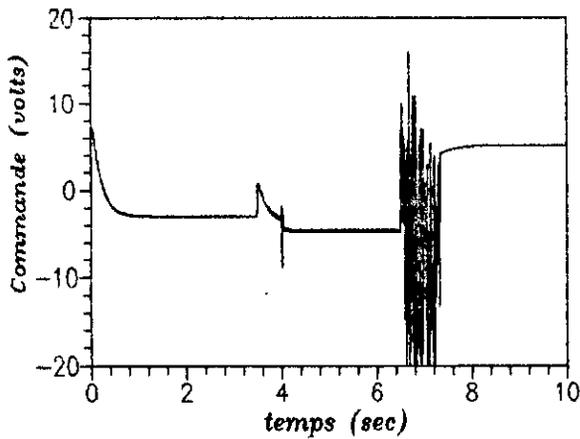


Fig.5.21.c. signal de commande  $up1(t)$

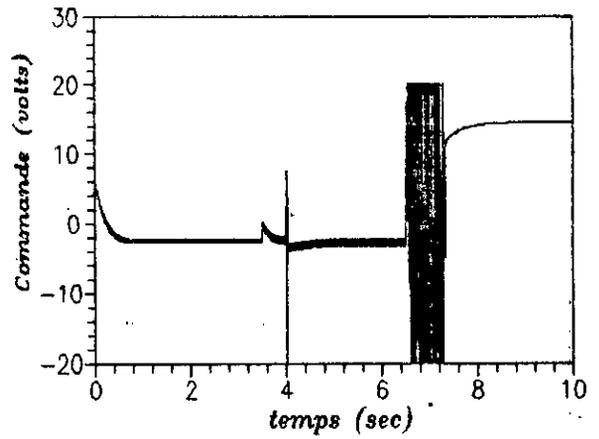


Fig.5.21.d. signal de commande  $up2(t)$

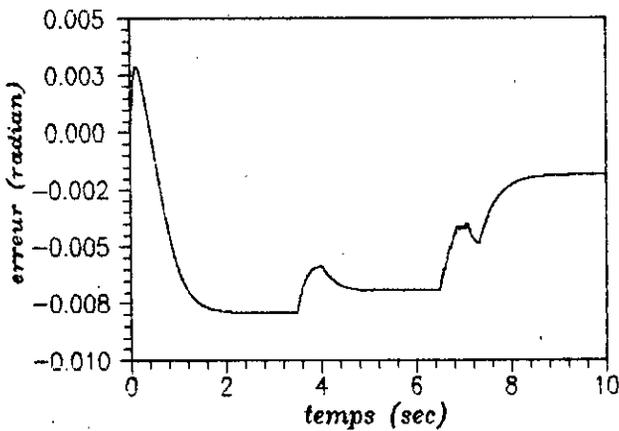


Fig.5.21.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

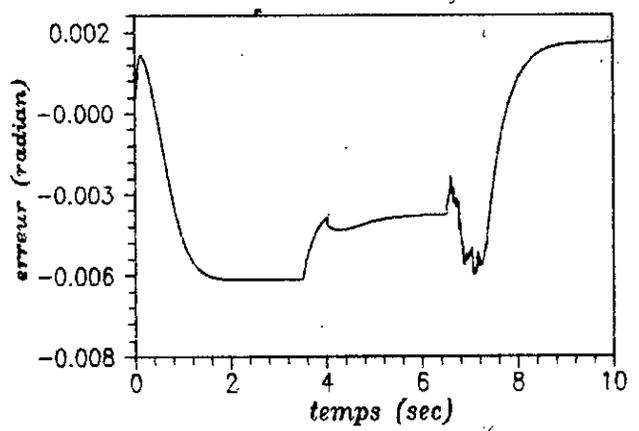


Fig.5.21.f. erreur de poursuite  $e2(t)$

Fig.5.21. Controle AMFC d'un bras manipulateur

Application : Test 1.

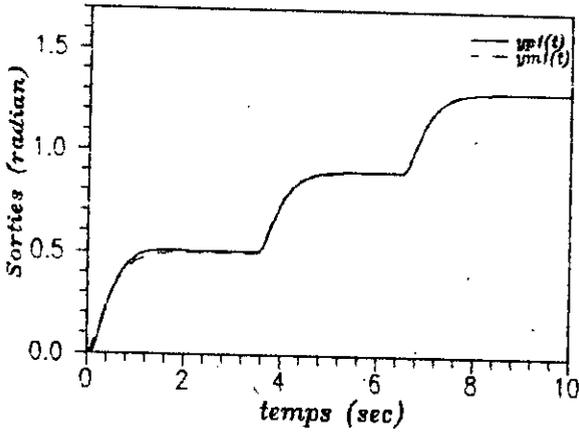


Fig.5.22.a. Sorties du modele et du procede

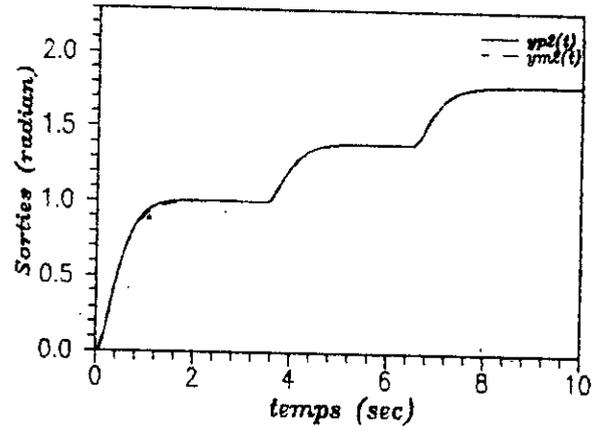


Fig.5.22.b. Sorties du modele et du procede

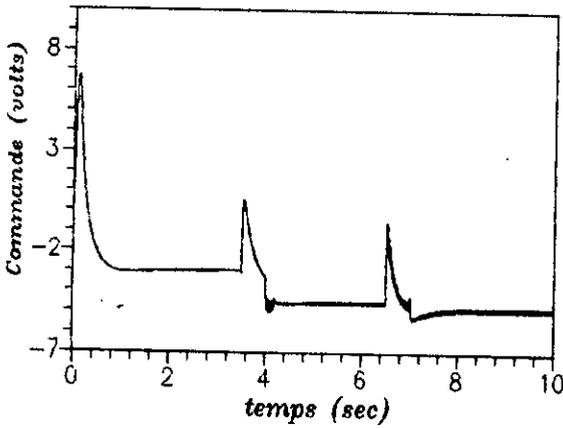


Fig.5.22.c. signal de commande  $up1(t)$

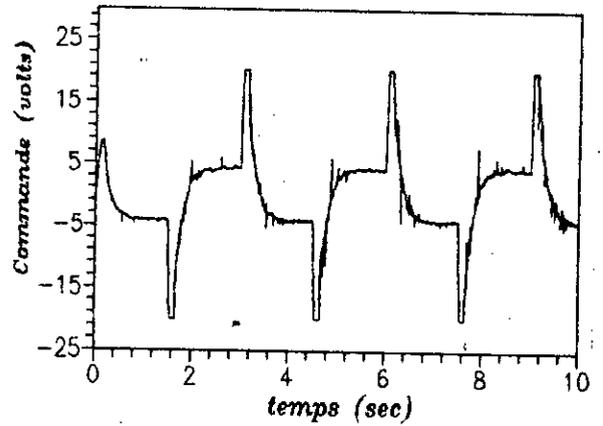


Fig.5.29.c. signal de commande  $up1(t)$

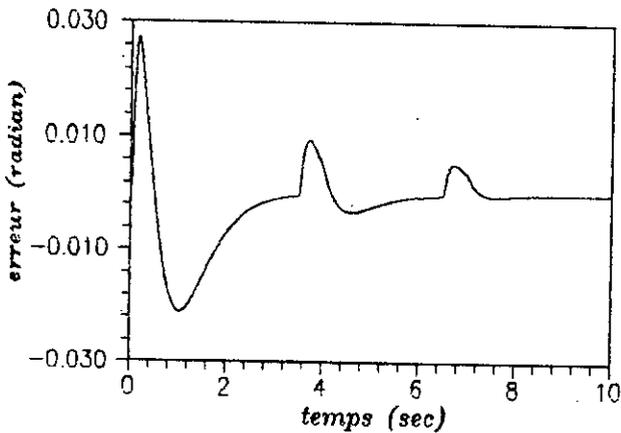


Fig.5.22.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

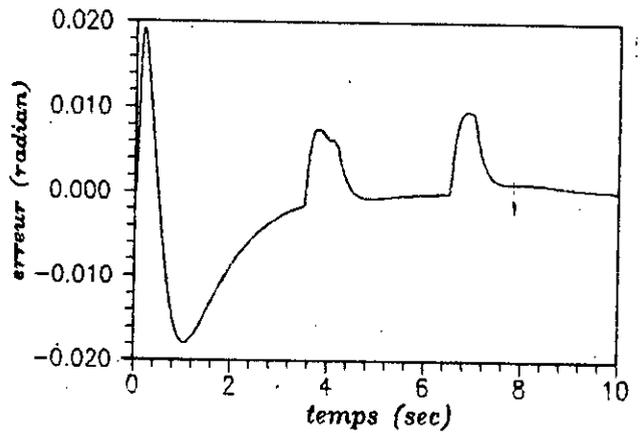


Fig.5.22.f. erreur de poursuite  $e2(t)$

Fig.5.22. Controle MCS d'un bras manipulateur

# Application : Test 1

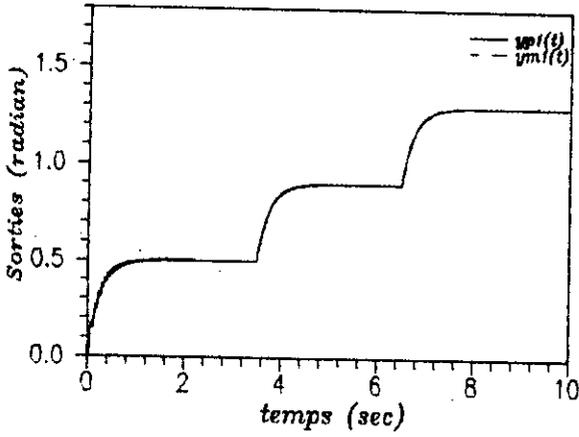


Fig.5.23.a. Sorties du modele et du procede

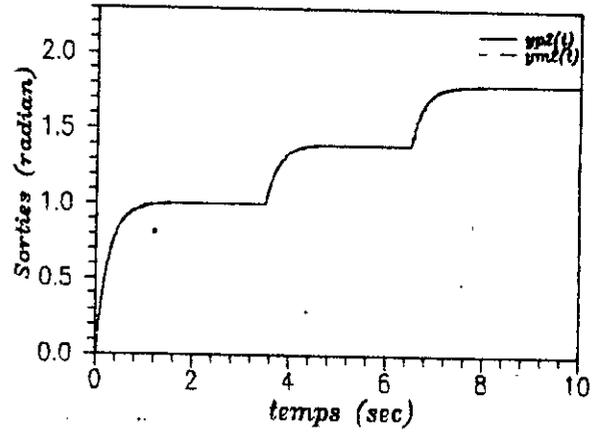


Fig.5.23.b. Sorties du modele et du procede

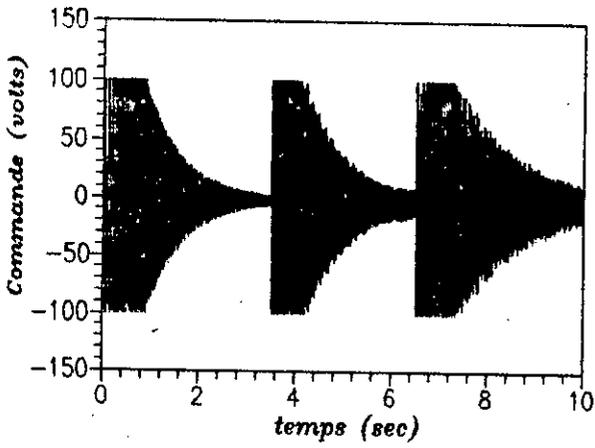


Fig.5.23.c. signal de commande \$u\_{p1}(t)\$

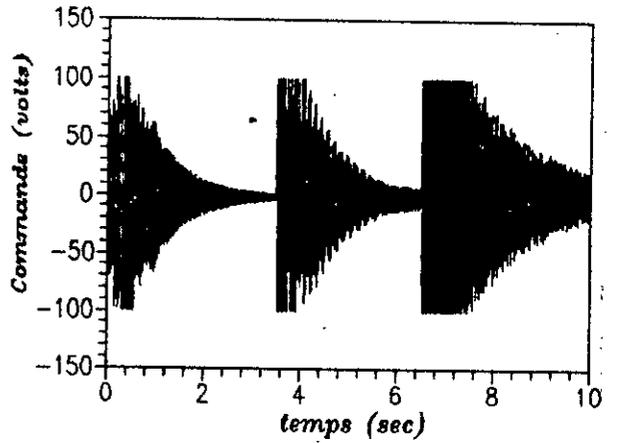


Fig.5.23.d. signal de commande \$u\_{p2}(t)\$

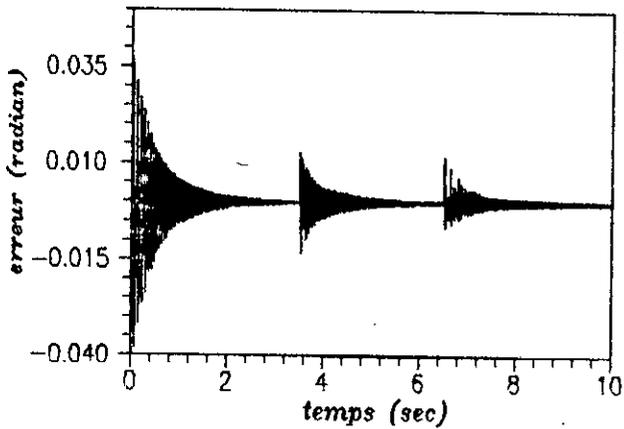


Fig.5.23.e. erreur de poursuite \$e\_1(t)\$

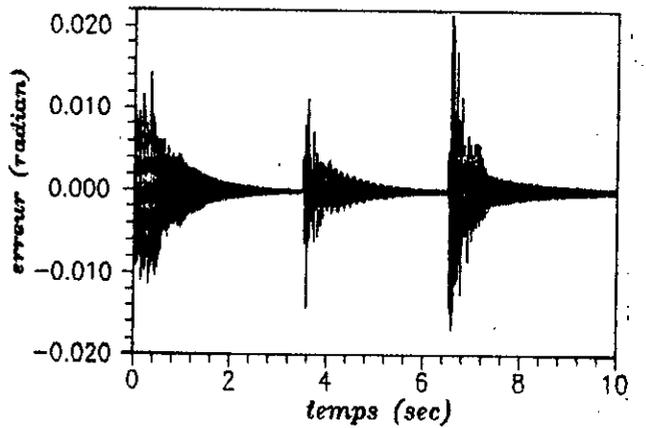


Fig.5.23.f. erreur de poursuite \$e\_2(t)\$

Fig.5.23. Controle CGT d'un bras manipulateur

# Application : Test 1

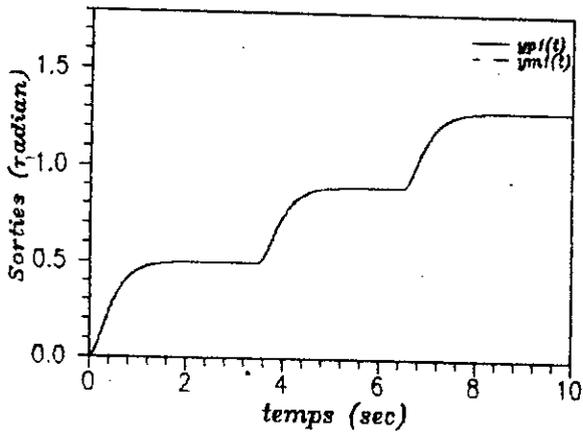


Fig.5.24.a. Sorties du modele et du procede

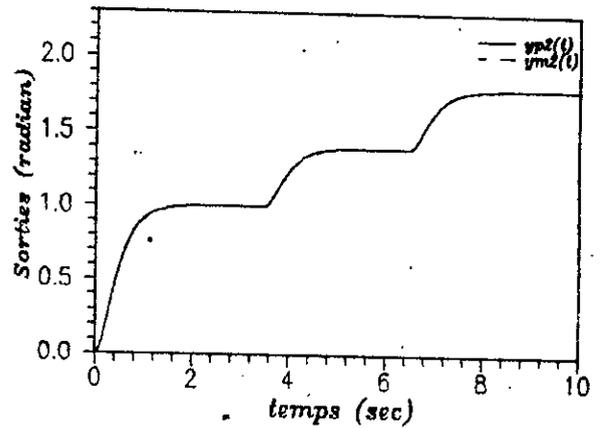


Fig.5.24.b. Sorties du modele et du procede

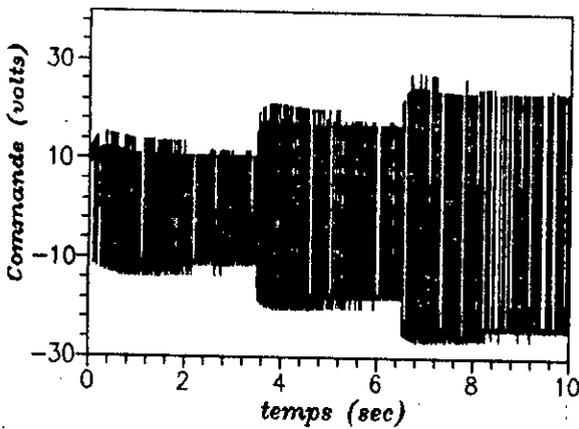


Fig.5.24.c. signal de commande  $up1(t)$

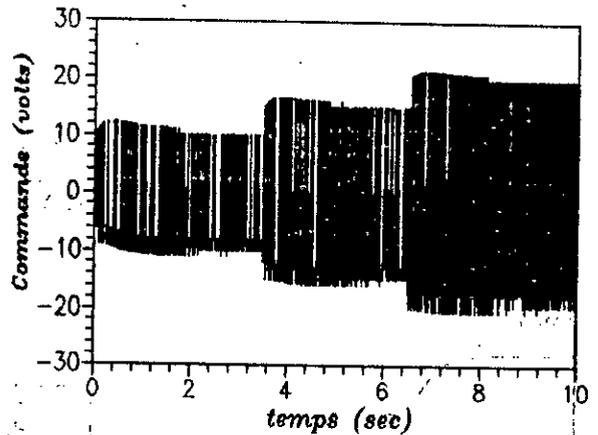


Fig.5.24.d. signal de commande  $up2(t)$

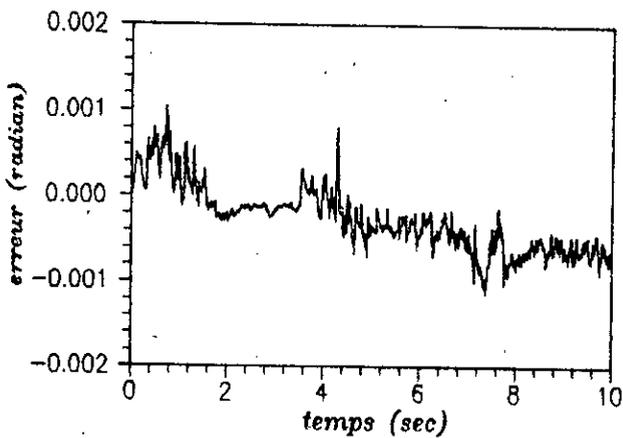


Fig.5.24.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

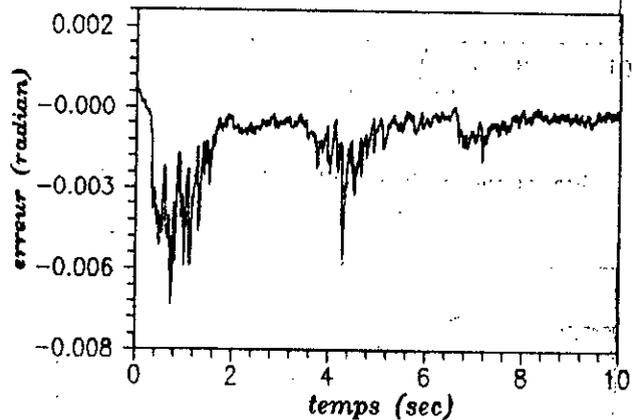


Fig.5.24.f. erreur de poursuite  $e2(t)$

Fig.5.24. Controle adaptatif a structure variable d'un bras manipulateur

# Application : Test 1

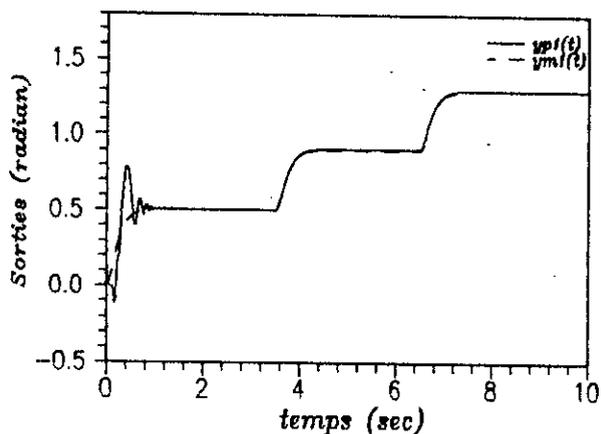


Fig.5.25.a. Sorties du modele et du procede

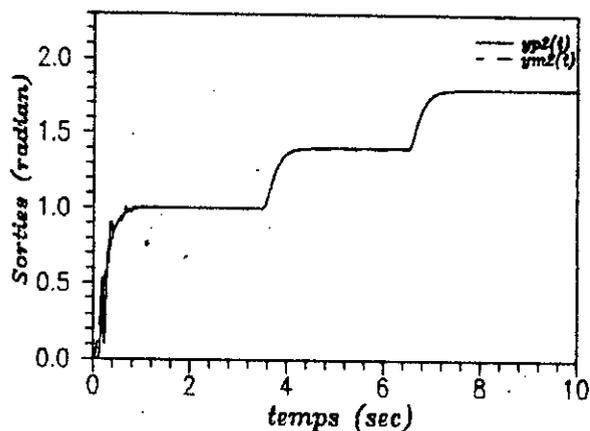


Fig.5.25.b. Sorties du modele et du procede

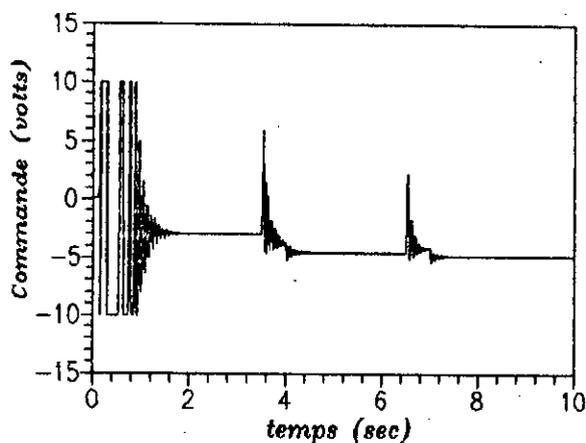


Fig.5.25.c. signal de commande  $u_{p1}(t)$

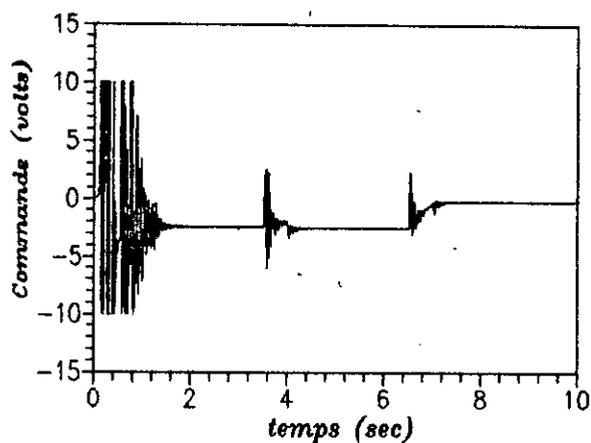


Fig.5.25.d. signal de commande  $u_{p2}(t)$

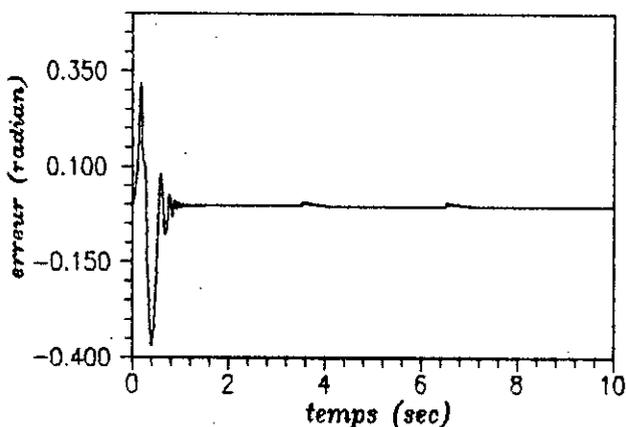


Fig.5.25.e. erreur de poursuite  $e_1(t)$

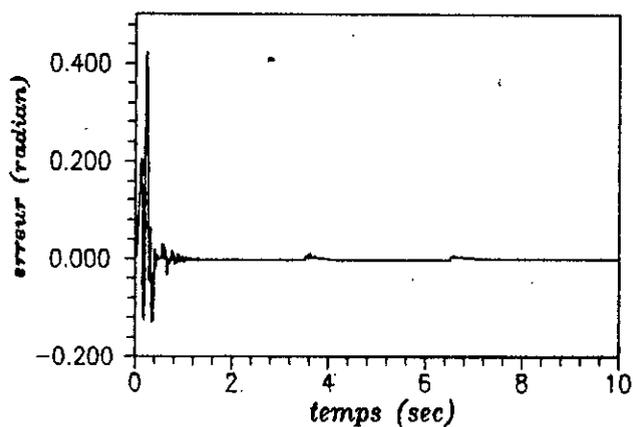


Fig.5.25.f. erreur de poursuite  $e_2(t)$

Fig.5.25. Controle adaptatif a variance minimale (variante decouplee) d'un bras manipulateur

# Application : Test 1

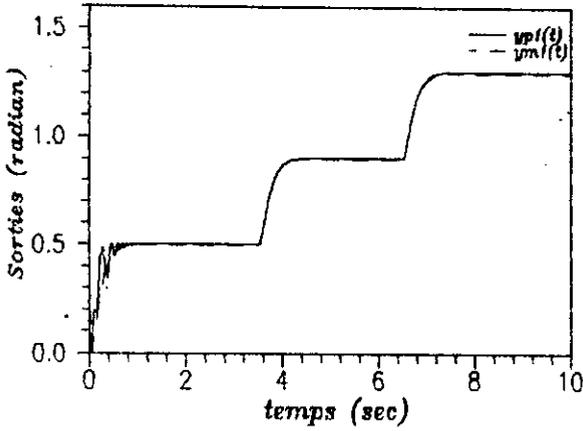


Fig.5.26.a. Sorties du modele et du procede

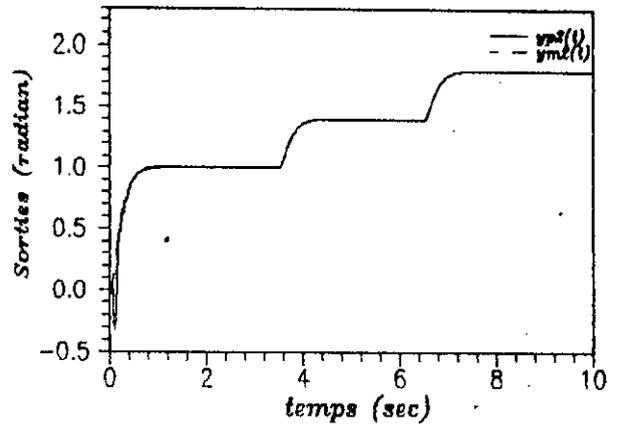


Fig.5.26.b. Sorties du modele et du procede

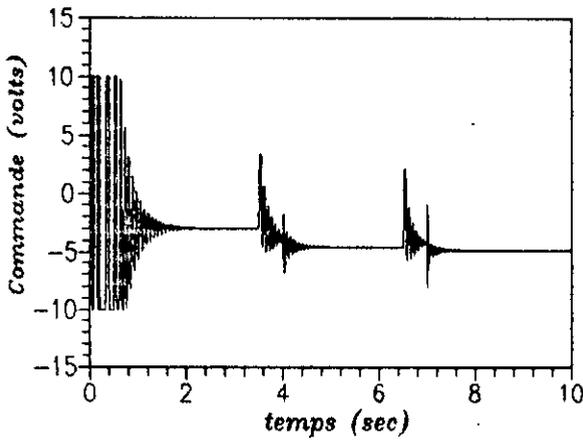


Fig.5.26.c. signal de commande  $u_{p1}(t)$

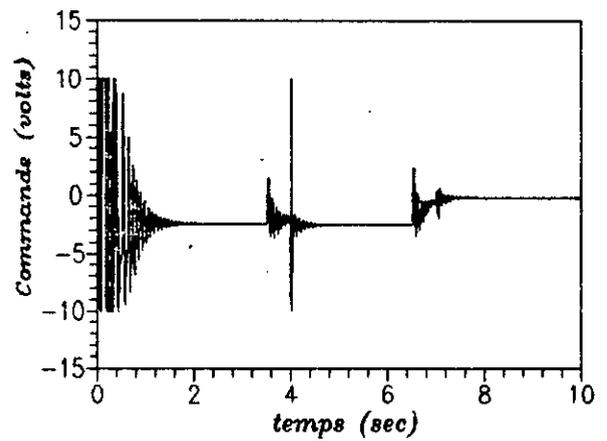


Fig.5.26.d. signal de commande  $u_{p2}(t)$

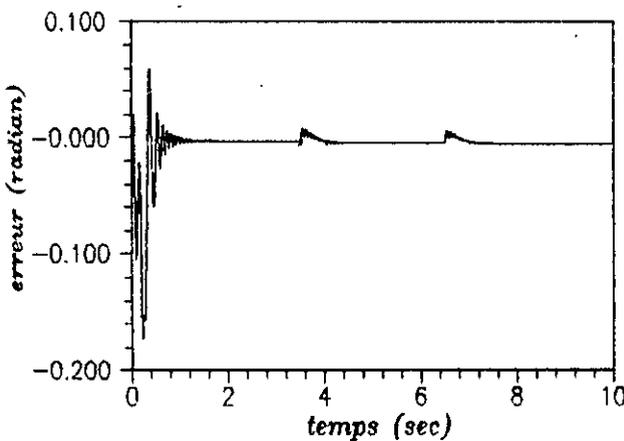


Fig.5.26.e. erreur de poursuite  $e_1(t)$

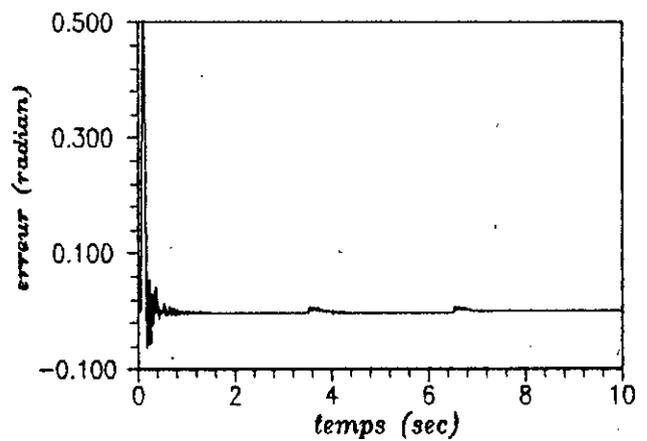


Fig.5.26.f. erreur de poursuite  $e_2(t)$

Fig.5.26. Controle adaptatif a variance minimale (variante partiellement decouplee) d'un bras manipulateur

# Application : Test 1

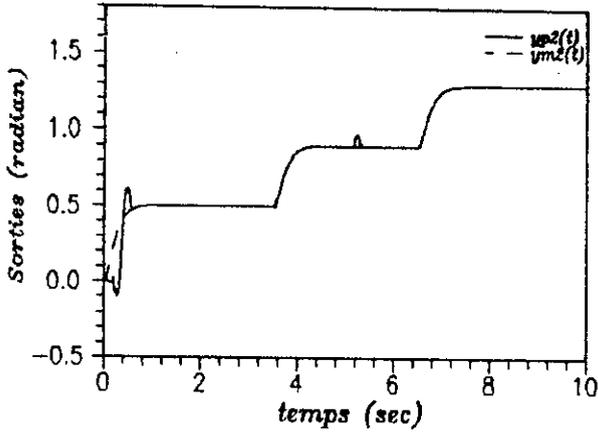


Fig.5.27.a. Sorties du modele et du procede

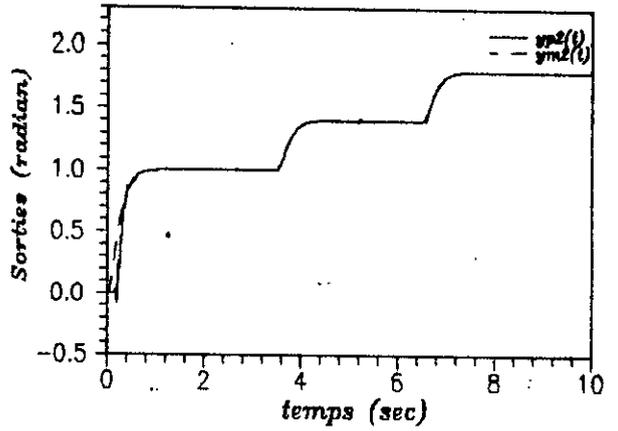


Fig.5.27.b. Sorties du modele et du procede

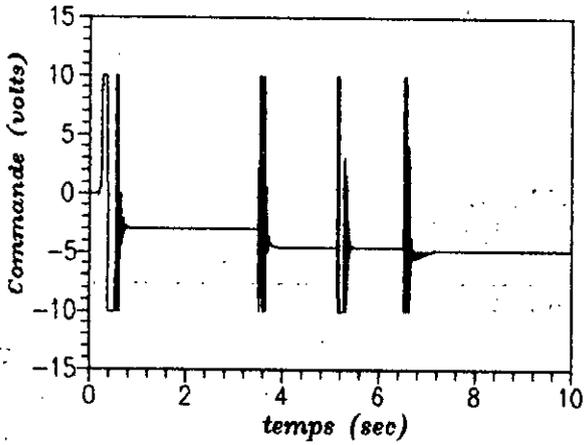


Fig.5.27.c. signal de commande \$u\_{p1}(t)\$

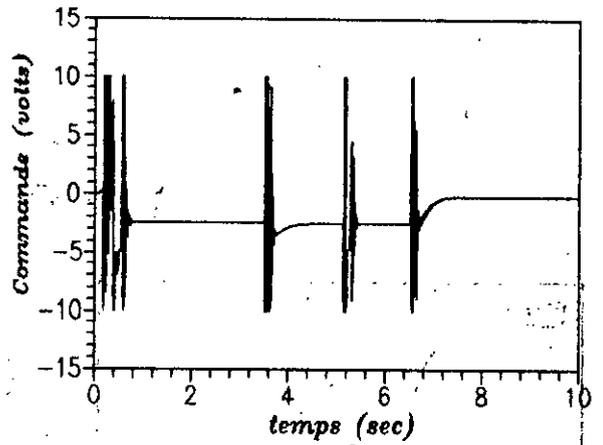


Fig.5.27.d. signal de commande \$u\_{p2}(t)\$

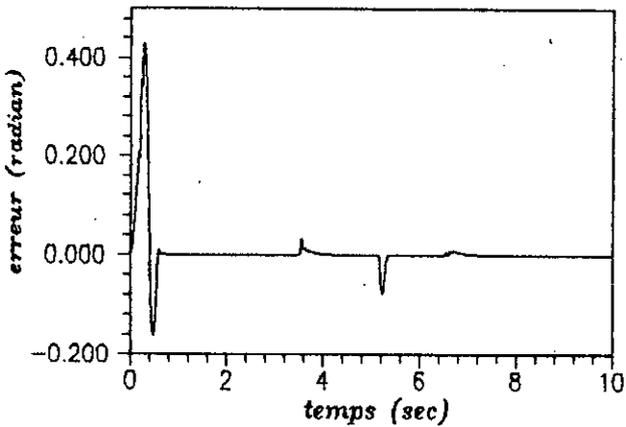


Fig.5.27.e. erreur de poursuite \$e\_1(t)\$

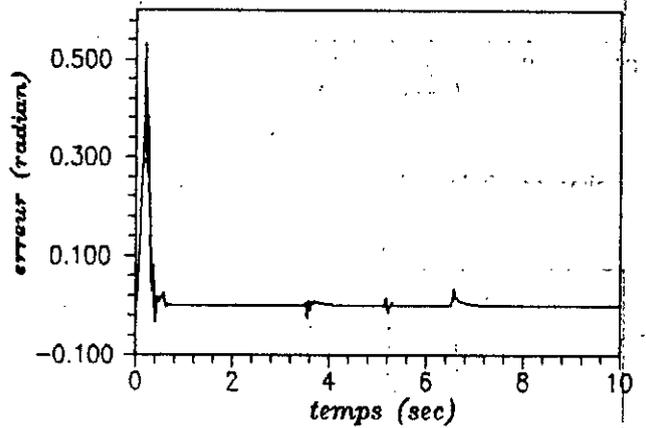


Fig.5.28.f. erreur de poursuite \$e\_2(t)\$

Fig.5.27. Controle adaptatif a placement de poles (variante partiellement decouplee) d'un bras manipulateur

différentes lois de commande semblent produire d'excellentes performances aussi bien en poursuite qu'en régulation (compensation des perturbations d'état et paramétriques). On notera, également que les signaux de commandes générés par ces lois présentent des pics de commande excessifs au démarrage et aux changements brusques de consigne et de charge, ceci est nécessaire pour vaincre l'inertie du robot. La stratégie VMG avec ses deux variantes découplée et partiellement découplée garantit des comportements similaires dans les deux cas ce qui confirme, donc, la robustesse de cette technique de contrôle face aux dynamiques et termes de couplage négligés.

## B- Test 2 : Test de répétabilité

Les entrées de référence sont des signaux carrés de période 3  $u_{m1} = 0.5 \text{ sqw}(t/3)$ , et  $u_{m2} = \text{sqw}(t/3)$ , la charge  $m_e$  varie de manière aléatoire,  $m_e = N(3,4)$  (ie : la charge suit une loi gaussienne de moyenne 3 et de variance 4).

### *Interprétations des résultats*

La variation aléatoire de la charge transportée à l'extrémité du bras 1 du manipulateur a une incidence immédiate sur la dynamique du robot qui voit ses paramètres changer aléatoirement. L'analyse des figures 5.28 à 5.34 fait ressortir ce qui suit :

Le AMFC présente les meilleures performances de poursuite et de régulation ceci est dû au fait que la dynamique nominale du procédé est connue, le contrôleur n'aura qu'à compenser l'effet des perturbations et non linéarités sur le système. Le MCS exhibe des résultats comparables à ceux du AMFC avec toutefois une erreur relativement plus importante au niveau du bras 1 portant la charge ( ce dernier étant directement affecté par la variation aléatoire de la masse). La stratégie CGT donne des réponses légèrement oscillatoires autour des sorties de référence avec des efforts de commande trop élevés (de l'ordre du millier de volts). La loi de commande VSS produit des très bons résultats de poursuite et de régulation, les signaux de contrôle sont fortement oscillatoires. Des pics d'erreur surviennent à chaque changement de consigne.

# Application : Test 2

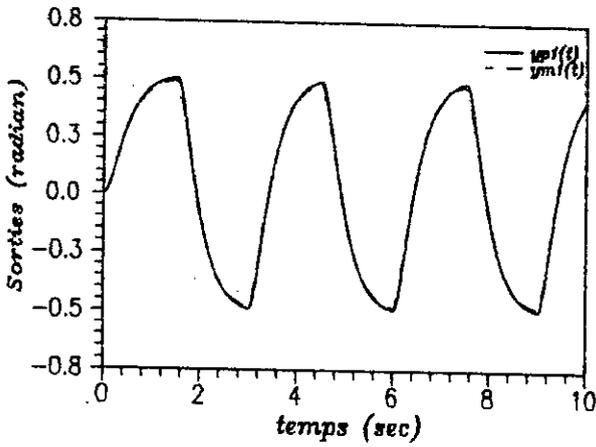


Fig.5.28.a. Sorties du modele et du procede

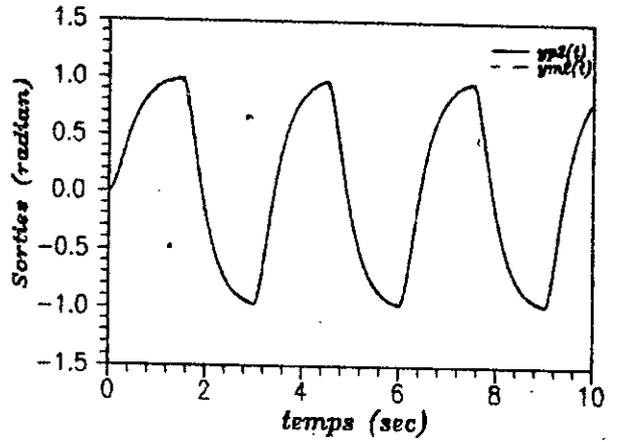


Fig.5.28.b. Sorties du modele et du procede

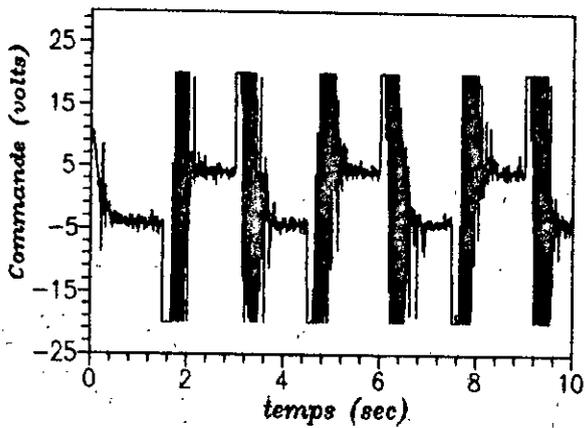


Fig.5.28.c. signal de commande  $up1(t)$

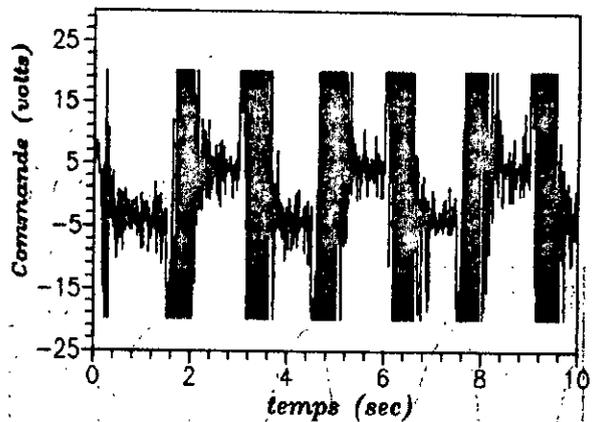


Fig.5.28.d. signal de commande  $up2(t)$

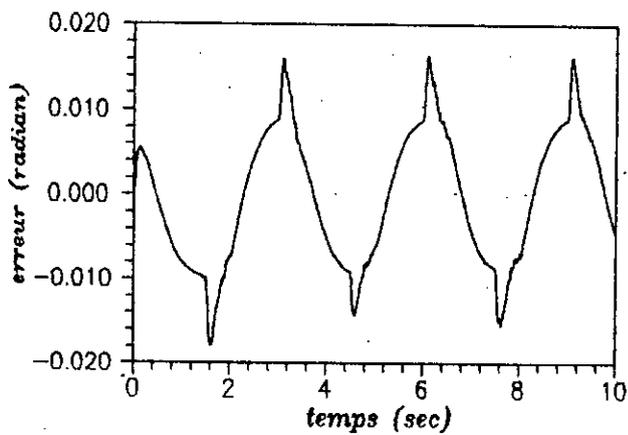


Fig.5.28.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

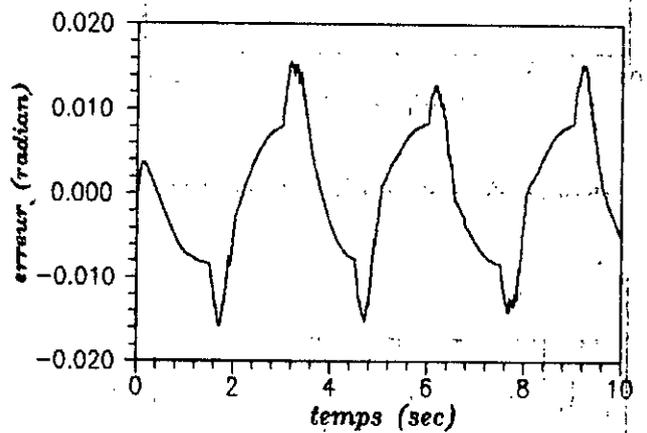


Fig.5.29.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

Fig.5.28. Controle AMFC d'un bras manipulateur

# Application : Test 2

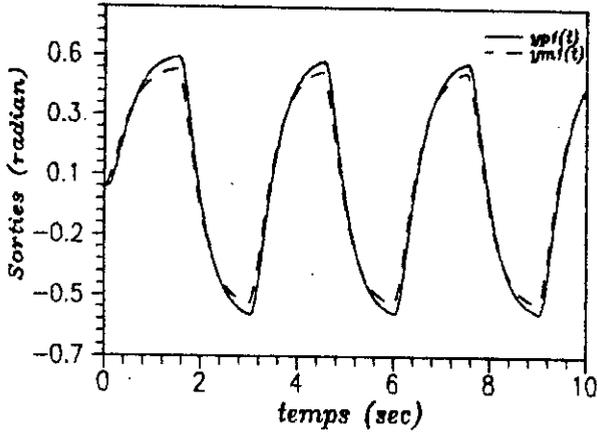


Fig.5.29.a. Sorties du modele et du procede

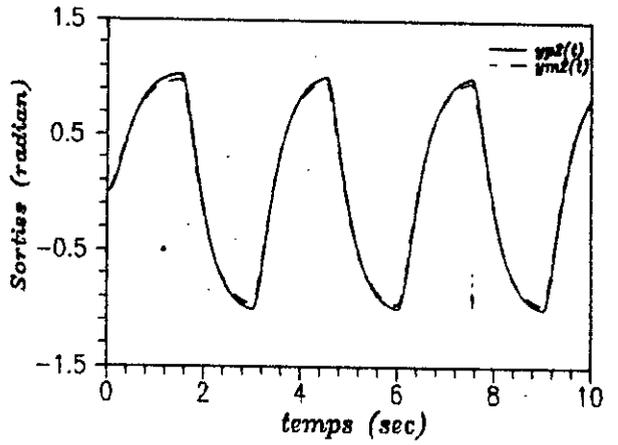


Fig.5.29.b. Sorties du modele et du procede

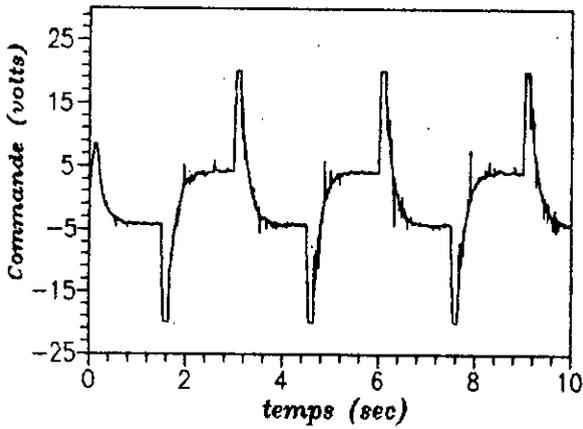


Fig.5.29.c. signal de commande  $up1(t)$

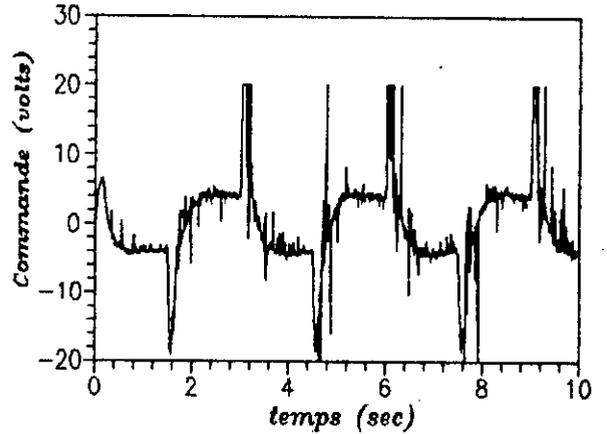


Fig.5.29.d. signal de commande  $up2(t)$

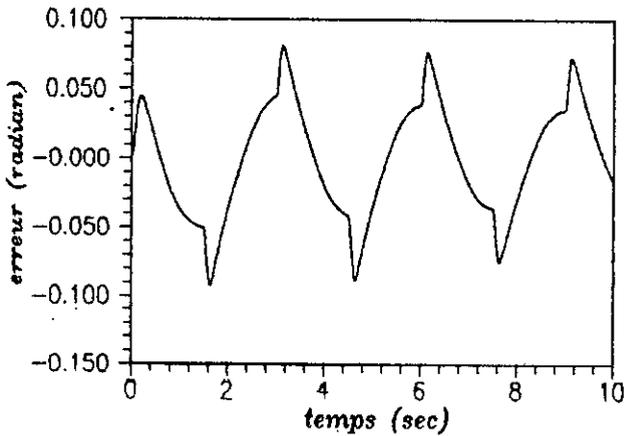


Fig.5.29.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

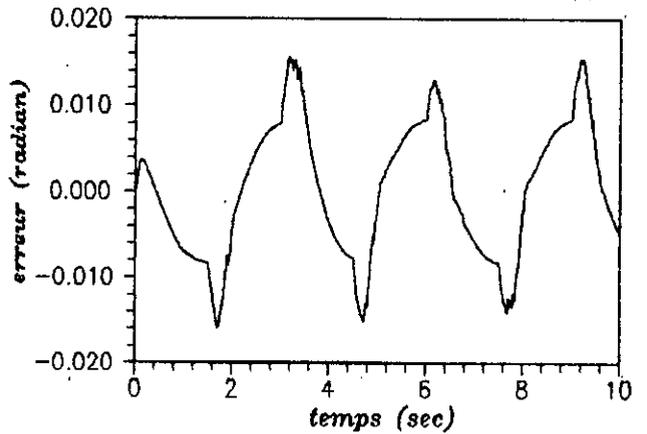


Fig.5.29.f. erreur de poursuite  $e2(t)$

Fig.5.29. Controle AMFC d'un bras manipulateur

# Application : Test 2

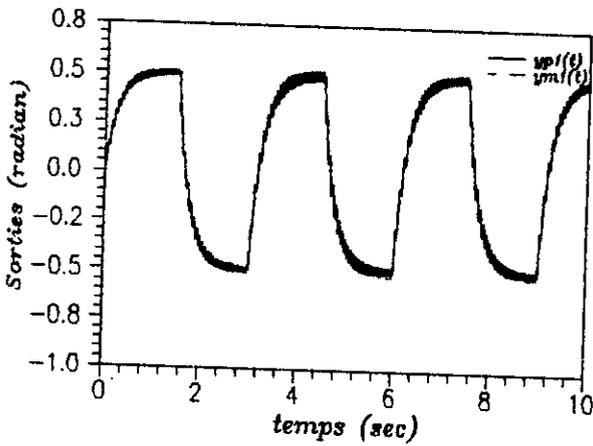


Fig.5.30.a. Sorties du modele et du procede

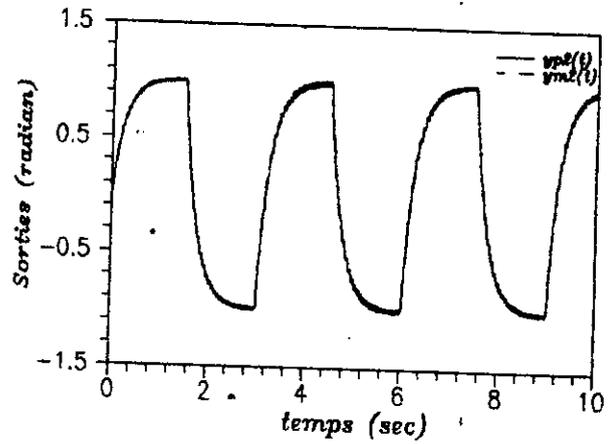


Fig.5.30.b. Sorties du modele et du procede

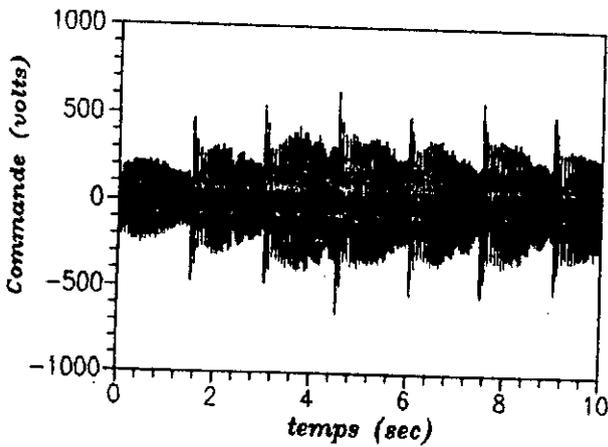


Fig.5.30.c. signal de commande  $up1(t)$

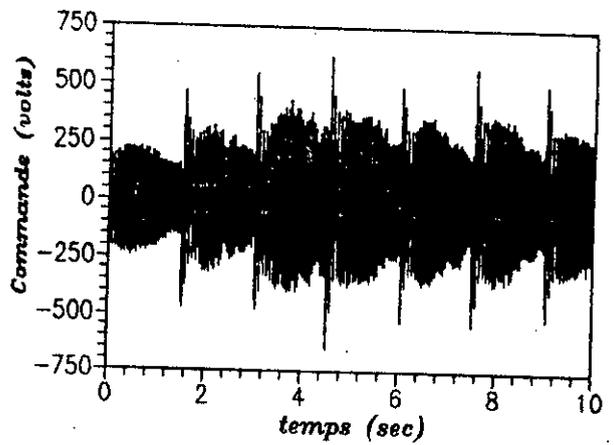


Fig.5.30.d. signal de commande  $up2(t)$

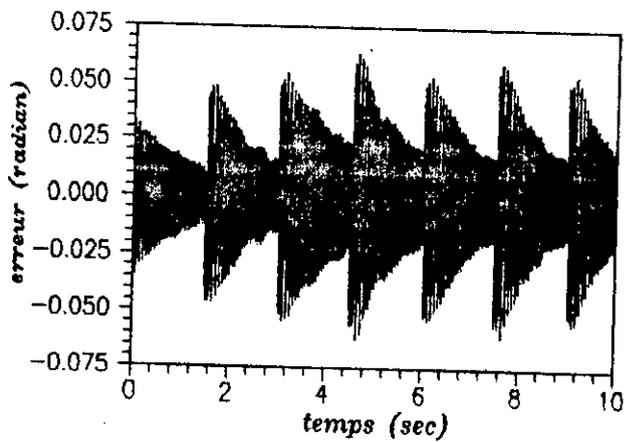


Fig.5.30.e. erreur de poursuite  $e1(t)$

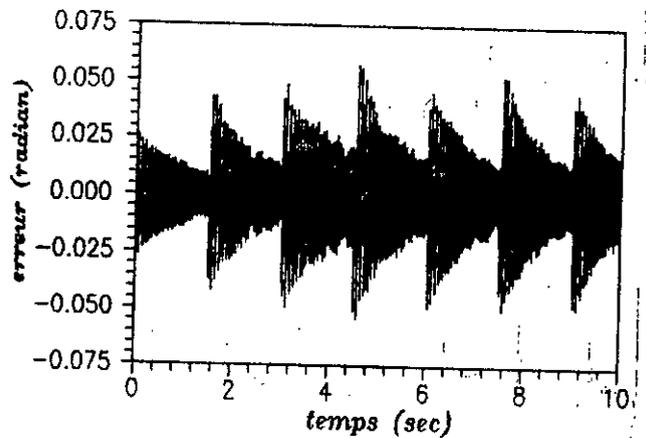


Fig.5.30.f. erreur de poursuite  $e2(t)$

Fig.5.30. Controle CGT d'un bras manipulateur

# Application : Test 2

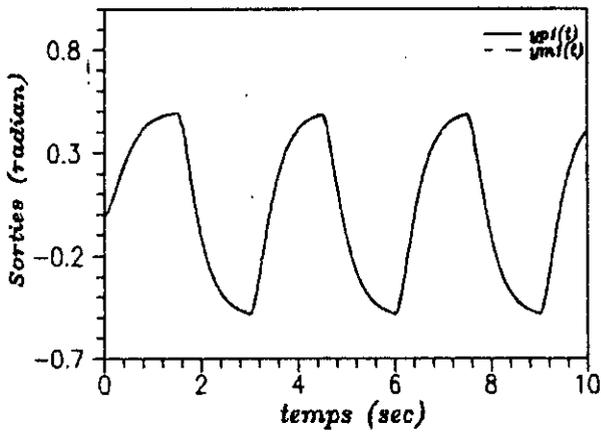


Fig.5.31.a. Sorties du modele et du procede

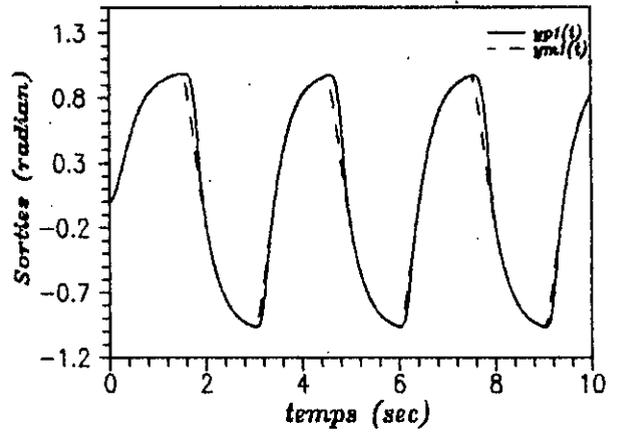


Fig.5.31.b. Sorties du modele et du procede

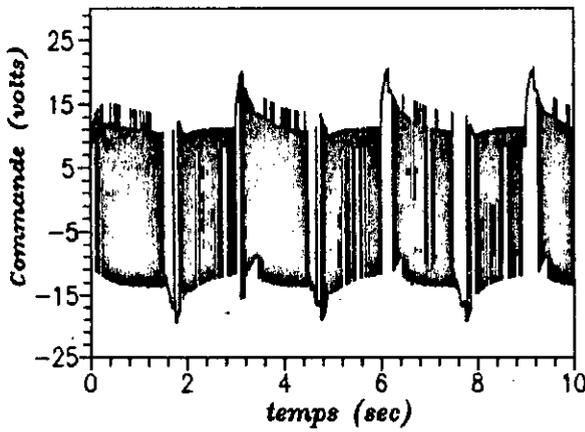


Fig.5.31.c. signal de commande \$u^1(t)\$

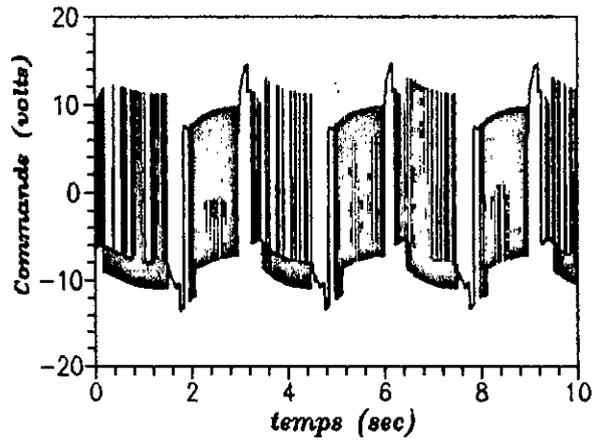


Fig.5.31.d. signal de commande \$u^2(t)\$

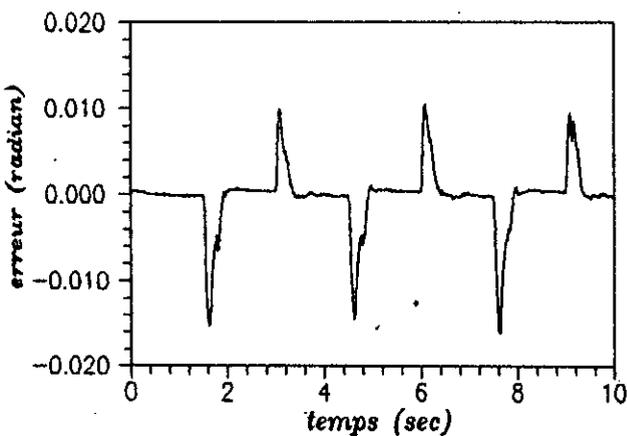


Fig.5.31.e. erreur de poursuite \$e\_1(t)\$

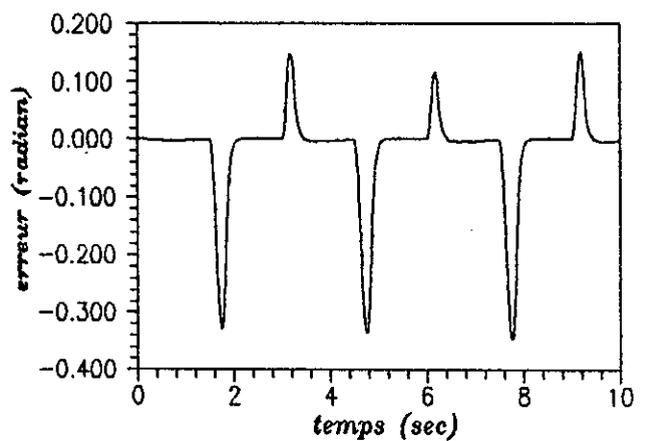


Fig.5.31.f. erreur de poursuite \$e\_2(t)\$

Fig.5.31. Controle adaptatif a structure variable d'un bras manipulateur

# Application : Test 2

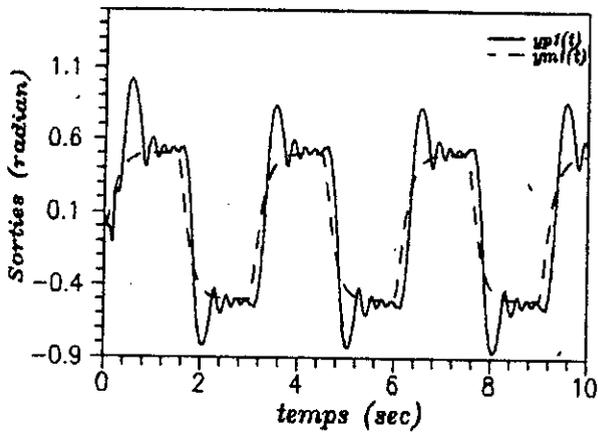


Fig.5.32.a. Sorties du modele et du procede

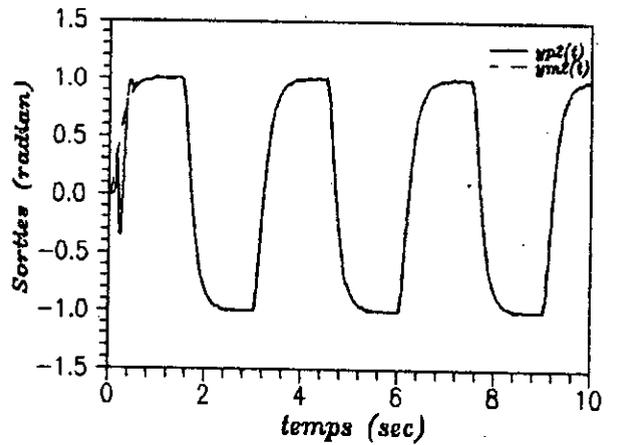


Fig.5.32.b. Sorties du modele et du procede

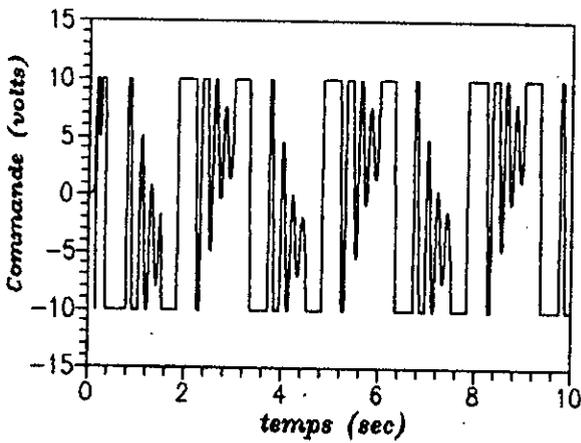


Fig.5.32.c. signal de commande \$u\_{p1}(t)\$

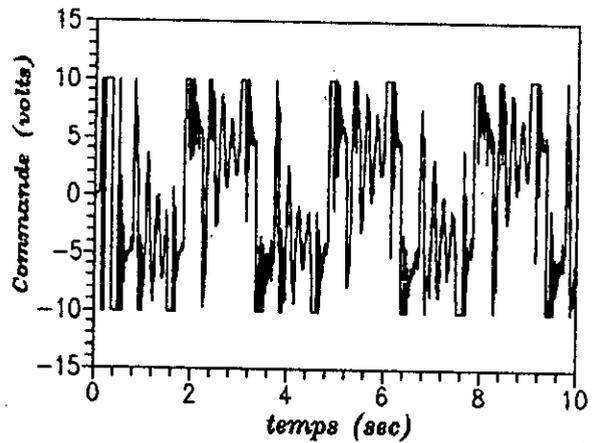


Fig.5.31.d. signal de commande \$u\_{p2}(t)\$

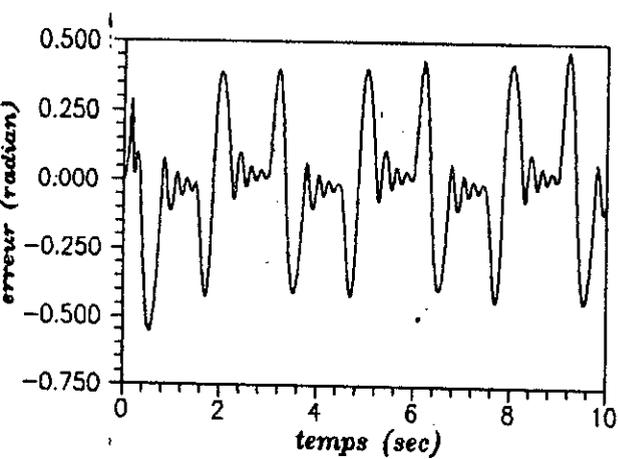


Fig.5.32.e. erreur de poursuite \$e\_1(t)\$

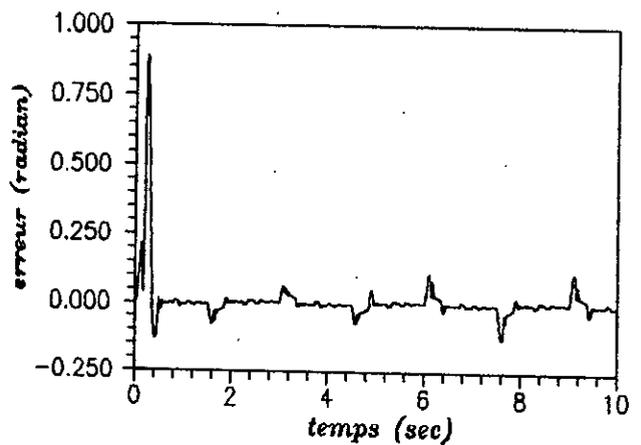


Fig.5.32.f. erreur de poursuite \$e\_2(t)\$

Fig.5.32. Controle adaptatif a variance minimale (variante decouplee) d'un bras manipulateur

Application : Test 2

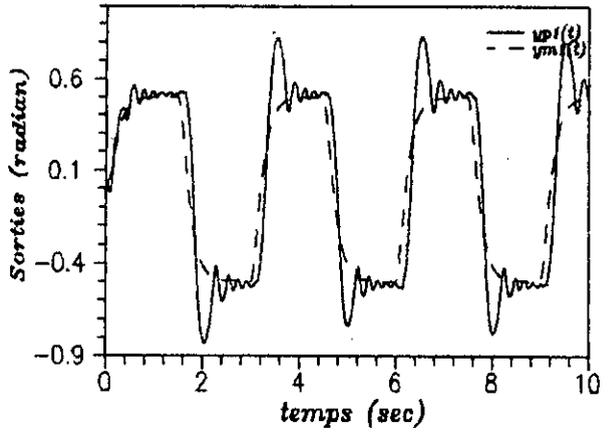


Fig.5.33.a. Sorties du modele et du procede

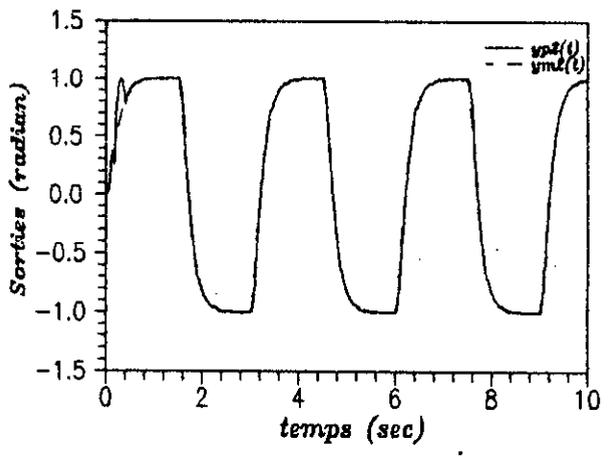


Fig.5.33.b. Sorties du modele et du procede

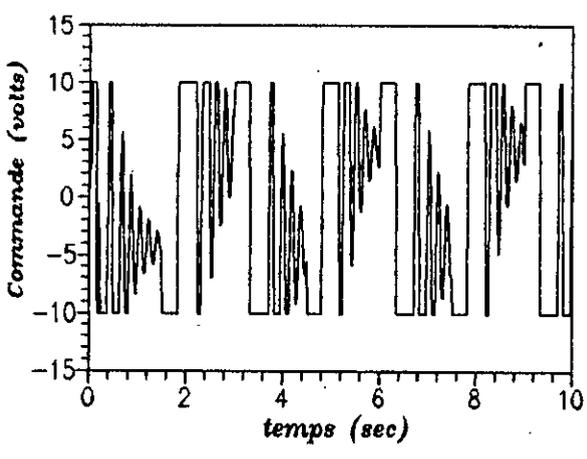


Fig.5.33.c. signal de commande \$u\_{p1}(t)\$

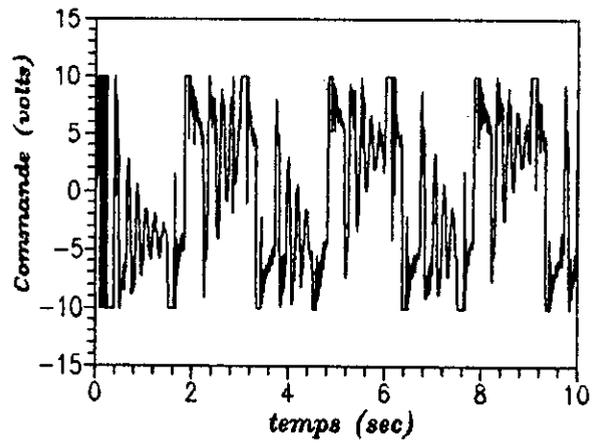


Fig.5.33.d. signal de commande \$u\_{p2}(t)\$

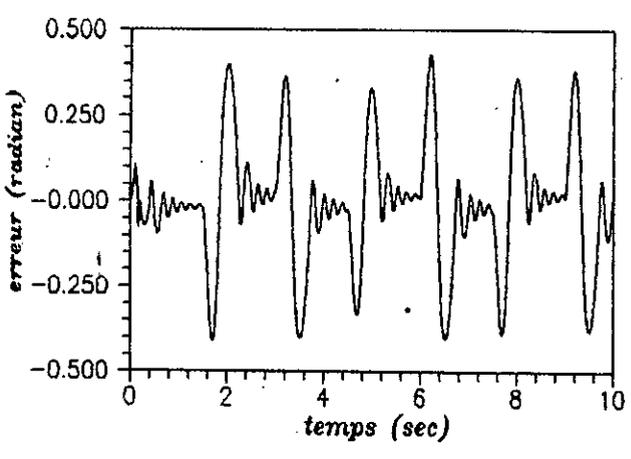


Fig.5.33.e. erreur de poursuite \$e\_1(t)\$

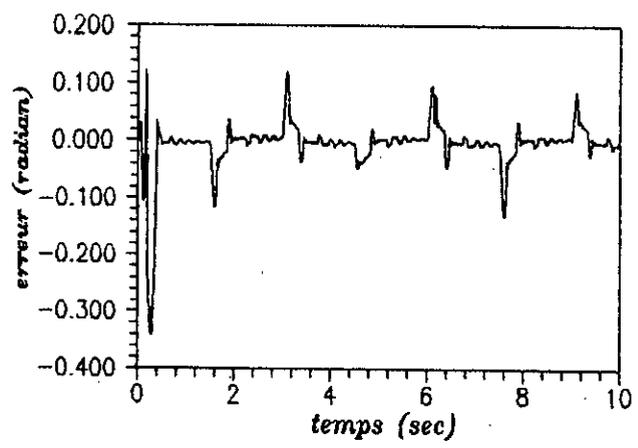


Fig.5.33.f. erreur de poursuite \$e\_2(t)\$

Fig.5.33. Controle adaptatif a variance minimale (variante partiellement decoupee) d'un bras manipulateur

Application : Test 2

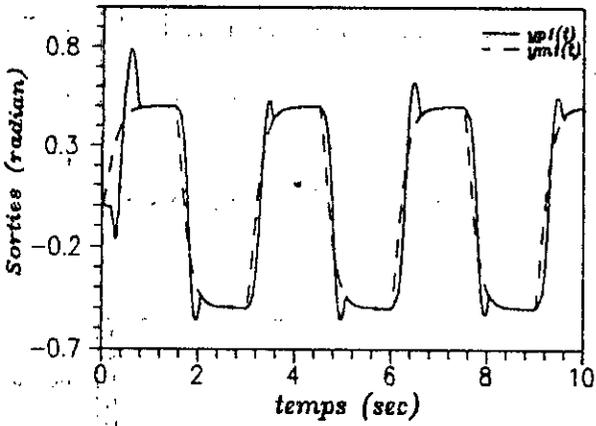


Fig.5.34.a. Sorties du modele et du procede

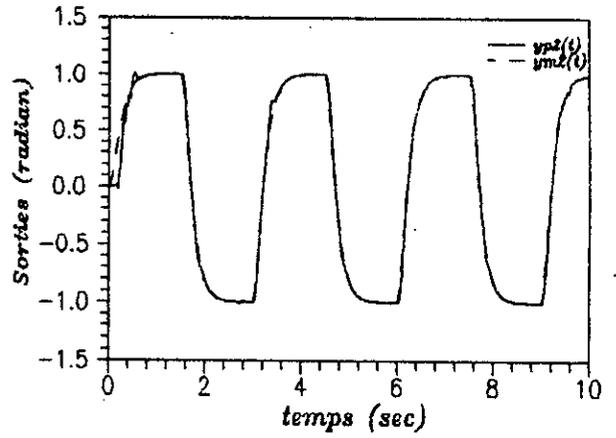


Fig.5.34.b. Sorties du modele et du procede

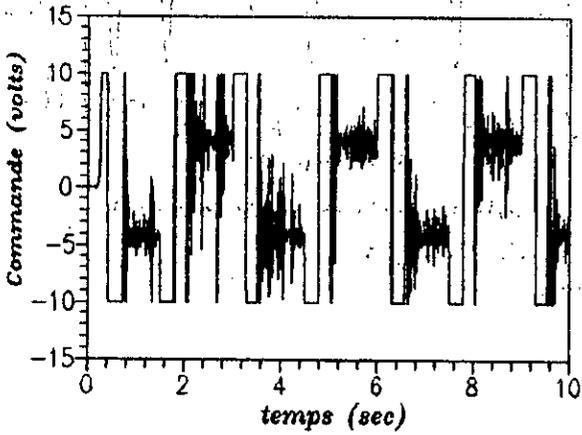


Fig.5.34.c. signal de commande  $u_{p1}(t)$

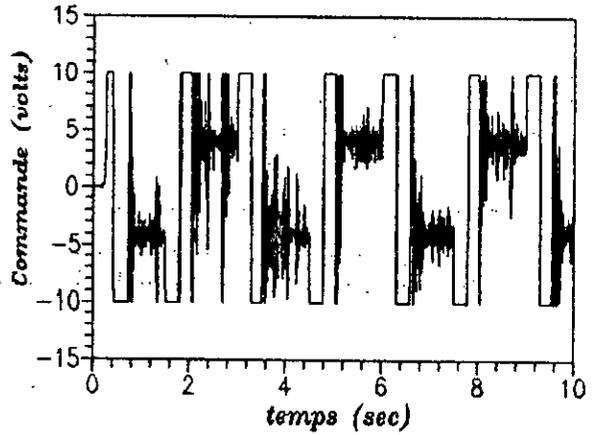


Fig.5.34.d. signal de commande  $u_{p2}(t)$

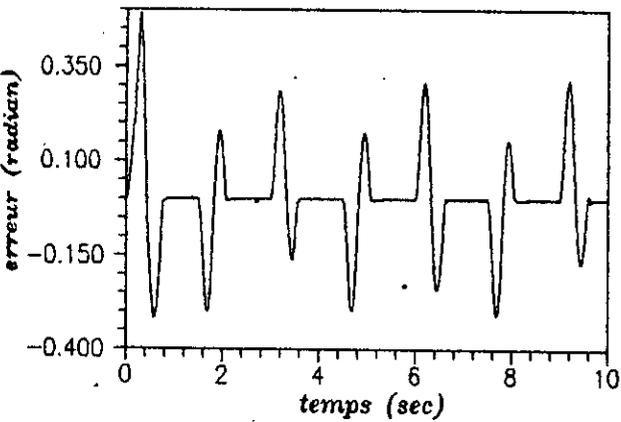


Fig.5.34.e. erreur de poursuite  $e_1(t)$

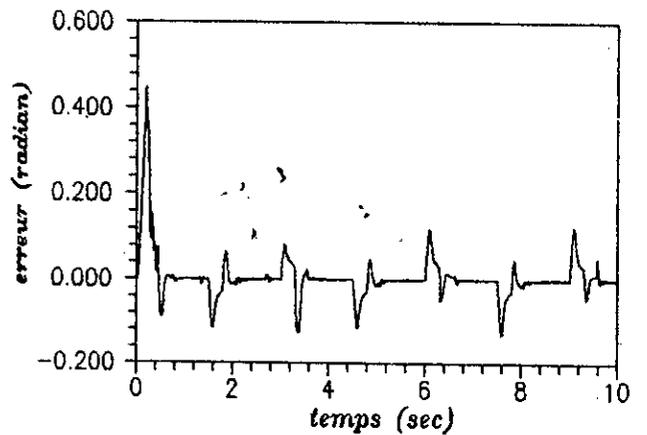


Fig.5.34.f. erreur de poursuite  $e_2(t)$

Fig.5.34. Controle adaptatif a placement de poles (variante partiellement decouplee) d'un bras manipulateur

Ceci peut être expliqué par le fait que ce contrôleur similairement au MCS et CGT n'arrive pas à suivre l'évolution rapide imposée au bras ce qui se traduit par les petits dépassement remarqué aux maximum des consignes. La figure 5.32 montre que la Commande VMG découplée, bien que robuste vis à vis des dynamiques négligées montre rapidement ses limites face aux perturbations paramétriques aléatoires. Ce qui se traduit par des erreurs élevées comparativement au test 1 et des signaux de commande saturés et oscillatoires. La variante partiellement découplée de la loi VMG réduit considérablement les fluctuations des sortie autour des consignes (fig.5.33) mais l'erreur demeure toujours importante et les efforts de commande sont saturés et oscillatoires. Contrairement aux techniques VMG, la loi de contrôle à placement de pôles (variante partiellement découplée) affiche un meilleur comportement face aux perturbations paramétriques aléatoires, l'erreur de poursuite est moins importante, les effort de commande sont plus lisses avec quelques pics se produisant à chaque changement de consigne qui sont dûs à la dynamique accélérée à laquelle est soumis le robot.

#### 5-6-5- Conclusion

Les deux tests effectués sur ce bras manipulateur révèlent que les contrôleurs AMFC et VSS affichent d'excellentes capacités de poursuite et de robustesse en dépit des non linéarités du procédé, de ses termes de couplage ainsi que des variations paramétriques brusques ou aléatoires (découlant de la variation de la charge  $m_g$ ). Cependant, ces deux techniques reposent sur la connaissance de la dynamique à vide du robot, information qui n'est pas toujours disponible, de plus le système à structure variable exige l'emploi d'actionneurs ou organes de commande capables de supporter de fortes sollicitations ( en raison de signaux oscillants à fréquence élevée délivrés par ce contrôleur). Avec le MCS on obtient des performances comparables à celles des stratégies ci-dessus avec le minimum d'informations prérequisées sur le procédé. Du point de vue matériel, l'accessibilité des diverses variables d'état demande l'utilisation de capteur de

vitesse au niveau des articulations du manipulateur (cette contrainte est commune aux trois techniques de commande).

Le CGT permet d'imposer au robot la poursuite d'un modèle d'ordre réduit avec moins d'instrumentation et de connaissance à priori, au prix d'un effort de commande excessif avec une forte sensibilité aux incertitudes aléatoires qui se traduit par des signaux de commande d'amplitude trop exagérée ( de l'ordre du millier de volts)

Pour les contrôleurs auto-ajustables, certaines contributions proposent d'identifier des modèles linéaires du robot autour des trajectoires nominales, ces modèles dits de perturbation [64] exigent le calcul en ligne des couples nominaux à l'aide des équations de Newton-Euler [63], d'autres auteurs tiennent compte des paramètres connus à priori et utilisent ces informations pour estimer en ligne les autres paramètres de l'équation dynamique du robot et synthétiser par la même la loi de commande. Pour notre part, nous avons utilisé des systèmes de commande auto-ajustable basés sur des modèles échantillonnés de second ordre décrivant les relations entre les angles (positions)  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et les couples moteurs des deux articulations  $u_1$  et  $u_2$ . Le rôle des contrôleurs est de compenser outre les non linéarités et les perturbations paramétriques, les dynamiques de couplages négligées et les erreurs de modélisation. Les résultats obtenus confirment la robustesse de la stratégie VMG vis à vis des perturbations décrites ci dessus cependant, face aux variations aléatoires de la charge la loi de commande adaptative à placement de pôles affiche de meilleures performances.

## 5-7. CONCLUSION

Les exemples traités dans ce chapitre nous ont permis de mettre en relief les problèmes pratiques liés à la mise en oeuvre des schémas de commande adaptative et notamment la question du choix des paramètres optimaux prérequis à la synthèse de ces lois de commande. Les résultats de simulation obtenus permettent de conclure que ces méthodes présentent de bonnes performances de

poursuite et de rejection des perturbations et incertitudes au  
prix d'efforts de commande important ou/et d'instrumentation  
supplémentaires

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail était l'étude des diverses approches de contrôle adaptatif, pour cela nous avons procédé en deux étapes, une étude théorique approfondie, mettant en relief les principaux aspects de chaque approche, ses avantages et ses inconvénients, a été menée dans la première étape. La seconde étape (chapitre 5) a permis de confirmer les résultats théoriques obtenus et de faire la lumière sur certains problèmes pratiques relatifs à la synthèse de chaque stratégie ainsi que le comportement de ces lois de commande sous différentes conditions de fonctionnement (robustesse, rapidité et efforts de commande).

Les lois de commande adaptatives VSS et AMFC présentent les meilleures performances de poursuite et de robustesse avec un léger avantage du contrôleur VSS se caractérisant par un comportement transitoire très rapide, cependant ces deux lois reposent sur la connaissance a priori de la dynamique nominale du procédé. Le MCS, bien que découlant d'une simplification empirique du AMFC, manifeste un comportement similaire et relâche de la condition fort astreignante de la connaissance a priori des paramètres nominaux du procédé. Néanmoins, ce contrôleur présente quelques difficultés quant au choix des coefficients d'adaptation  $\alpha$  et  $\beta$  spécialement dans le cas de systèmes multivariables. L'effort de commande fourni par le Contrôleur VSS, contrairement à celui généré par les stratégies AMFC et MCS, se distingue sa nature très oscillatoire à fréquence élevée. Ces trois lois de contrôle supposant l'accessibilité des différentes variables d'état du procédé, leur mise en oeuvre exige l'emploi d'instrumentation supplémentaire (ex : capteurs de vitesses pour le robot). De plus, la commande VSS nécessite l'utilisation d'organes de commande capables de supporter les fortes sollicitations des signaux de commande. En revanche la stratégie CGT permettant d'imposer à un quelconque système multivariable ou

complexe la poursuite d'un système d'ordre réduit, nécessite le minimum de connaissances à priori en l'occurrence le nombre d'entrées et sorties du procédé et le choix des coefficients  $T_1$  et  $T_2$  (même l'ordre du système peut être inconnu), cependant, elle produit de moins meilleurs résultats que ceux des techniques précédemment citées. En effet, cette loi de commande est très sensible aux zéros instables du procédé et exige dans ce cas une action supplémentaire très délicate à déterminer même adaptativement. De plus, face aux perturbations paramétriques aléatoires ses performances sont très mauvaises.

En ce qui concerne les techniques auto-ajustables, deux grandes approches ont été étudiées, la stratégie à placement de pôles et celles à variance minimale généralisée qui ne nécessitent que la connaissance à priori des degrés des différents polynômes de transfert du procédé, l'extension aux systèmes multi-entrées multi-sorties de ces méthodes, à l'inverse des stratégies décrites dans l'espace d'état immédiatement applicables aux procédés multivariables, est loin d'être évidente. Cette opération demande la considération de termes de commande supplémentaires afin de compenser les termes de couplage entre les différents sous systèmes. Dans cette optique, deux variantes de chaque stratégie ont été présentées. Les résultats obtenus montrent que la stratégie VMG est très robuste vis à vis des perturbations d'état, des incertitudes, des non linéarités, des dynamiques de couplage négligées et erreurs de modélisation. Face aux incertitudes paramétriques aléatoires, cette loi de commande voit ses performances rapidement se dégrader. En revanche, la stratégie à placement de pôles affiche une très bonne robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques déterministes et aléatoires, aux perturbations d'état et aux non linéarités. Cependant, ce contrôleur (variante 1) est très sensible aux dynamiques négligées et voit rapidement ses capacités de compensation se détériorer. En régime transitoire ces deux techniques exhibent des comportement

oscillatoires et moins bons que ceux des techniques décrites dans l'espace d'état, ceci est dû à la nature discrète de ces algorithmes ainsi qu'au choix des paramètres prérequis (polynômes de pondération et de régulation). Un meilleur choix de ces paramètres permettrait d'améliorer de façon nette les performances transitoires de ces algorithmes, dans cette optique, certains auteurs proposent de déterminer en ligne les polynômes de pondération [62] pour la stratégie VMG, et la résolution itérative de l'équation de diophantine au sens d'un critère quadratique [40], [72] pour la technique à placement de pôles. Les lois de contrôle auto-ajustables multivariables proposées dans ce travail sont issues des stratégies SISO dans l'objectif de réaliser un compromis entre la précision de la modélisation et l'accélération du processus d'adaptation. En présence de forts termes de couplage ces contrôleurs risquent de donner de mauvais résultats.

Il découle de cette synthèse, qu'il n'est pas très facile d'affirmer qu'une quelconque des stratégies de contrôle adaptatif présentées dans ce travail est absolument la meilleure et plus robuste, d'autant plus que toutes ces lois de commande exhibent d'identiques propriétés de stabilité dans le cas idéal. Il conviendrait donc à l'ingénieur, conformément au cahier de charges d'une quelconque application et du matériel disponible, d'opter pour tel ou tel algorithme adaptatif en cas de besoin.

### *Perspectives*

A travers cette étude, il s'avère que beaucoup de points concernant les systèmes de commande adaptatifs restent encore à explorer et à clarifier notamment dans les sens suivants :

. Conception sur la base des caractéristiques de chacune des stratégies de commande adaptative étudiées d'algorithmes d'adaptation rapides et robustes vis à vis des perturbations et incertitudes lentes ou à fréquences élevées.

. Mise au point d'une méthodologie unifiée de conception des

algorithmes de contrôle adaptatif garantissant la stabilité globale et les performances asymptotiques du système en boucle fermée.

. Quantification de la notion de robustesse dans les systèmes adaptatifs, c'est à dire établir une fonction de mesure de robustesse afin de pouvoir affirmer rigoureusement que tel ou tel schéma de contrôle adaptatif est le plus robuste, spécialement dans le cas des procédés multivariables.

. Etude des moyens susceptible de mettre à profit les connaissances à priori sur le système et l'expérience acquise par apprentissage en vue d'élargir la classe des systèmes de contrôle adaptatif à l'incorporation de systèmes intelligents, utilisation des réseaux de neurones, et de la logique floue.

. Tirer profit des récents progrès accomplis en micro-électronique et technologie des multiprocesseurs afin de concevoir des circuits intégrés spécialisés en contrôle adaptatif des processus, de tels dispositifs vont certainement élargir le domaine d'application de la commande adaptative et l'étendre aux systèmes à large bande passante.

TABLEAU RECAPITULATIF

Classe de CA	Stratégie Considérée	Observations	Avantages	Inconvénients
CONTROLE ADAPTATIF A MODELE DE REFERENCE	AMFC	.Repose sur théorie de l'hyperstabilité.	.Très robuste face à toute perturbation (déterministe ou aléatoire) lente	.Connaissance de la dynamique nominale du procédé .Accessibilité de tous les états.
	MCS	.Repose sur théorie de l'hyperstabilité.	.Robustesse .n'exige que la connaissance de l'ordre du syst	.Accessibilité de tous les états. .Choix très délicat de $\alpha$ et $\beta$ .
	CGT	.Repose sur théorie de la quasi positivité. .Convient à la commande des systèmes complexes	.Connaissance a priori très réduite. .Poursuite de modèle d'ordre réduit. .L'accessibilité des états n'est pas exigée.	.Très sensible à la position des zéros du procédé .Connaissance d'1 dynamique stabilisatrice. .Forte sensibilité aux incertitudes aléatoires. .Forts signaux de commande transitoires
CONTROLE ADAPTATIF A STRUCTURE VARIABLE	Contrôleur adaptatif à structure variable	.Repose sur la théorie des systèmes à structure variable .Implantation très simple	.Très robuste .Simplicité .Régime transitoire très rapide	.Connaissance de la dynamique nominale du procédé .Accessibilité de tous les états. .Fortes sollicitation de l'OC. .Problème de brouillement. .légère sensibilité au bruit.
CONTROLE ADAPTATIF AUTO-AJUSTABLE	STC VMG	.Repose sur principe d'équivalence certaine. .Modèles éch-antillonnés	.Très robuste vis à vis des incertitudes et dynamiques négligées. .Connaissances réduites	.Sensible aux zéros du procédé .Choix très délicat du paramètre $\lambda$ .Forte sensibilité aux incertitudes aléatoires
	STC PP	.Difficultés d'extension aux systèmes MIMO	.Robuste face incertitudes aléatoires. .Connaissances très réduites.	.Forte sensibilité aux dynamiques négligées. .Difficile choix des polynomes de régulation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Abdellah, D. Dawson, P. Dorato, and M. Jamishidi, "Survey of robust control for rigid robots," *IEEE Contr. Syst.*, N°2, PP.24-30, 1991.
- [2] A. Abounada, H. Ouali, A. Benhammou, and A. Ben Riala, "Le problème de la richesse du signal de commande dans les schémas de commande adaptative," *Proc. Jour. Tunis. Elec. Automat.*, pp.125-232, 1990.
- [3] K. J. Astrom, *Introduction to stochastic control theory*, New York: Academic press, 1970.
- [4] K. J. Astrom, and B. Wittenmark, "On self tuning regulators," *Automatica*, vol. 9, pp.185-199, 1973.
- [5] K. J. Astrom, O. Borisson, L. Ljung, and B. Wittenmark, "Theory and applications of self tuning regulators," *Automatica*, vol. 13, pp.457-476, 1977.
- [6] K. J. Astrom and B. Wittenmark, "Self tuning controller based on pole placement," *Proc. IEE*, Vol. 127, Pt. D, pp.120-130, 1980.
- [7] K. J. Astrom, B. Wittenmark, *Adaptive Control*. Addison Wesley, 1989.
- [8] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and designs*, New Jersey: prentice Hall, 1990.
- [9] A. Balestrino, G. Demaria, and A. S. Zinober, "Non linear adaptive model following control," *Automatica*, vol. 20, N°5, pp.559-568, 1984.
- [10] I. Bar Kana and H. Kaufman, "Some applications of direct adaptive control to large structural systems," *AIAA. J. Guidance Dyn*, vol.7, N°6, pp.717-724, 1984.
- [11] I. Bar Kana and H. Kaufman, "Robust Simplified adaptive control for a class of multivariable continuous-time systems," *Proc. 24th Conf. On Decision and Control*, Fort Landerdale Florida. pp.141-146, Dec. 1985.

- [12] I. Bar kana and H. Kaufman, "Global stability and performance of a simplified adaptive algorithm," *Int. J. Control*, vol. 42, N°6, pp.1491-1505, 1985.
- [13] I. Bar Kana, "Positive realness in discrete-time adaptive control systems," *Int. J. Systems Sci.*, vol. 17, N°7, pp.1001-1006, 1986.
- [14] I. Bar Kana, "Adaptive control: a simplified approach, in *Control and Dynamic systems*, pp.187-235, 1987.
- [15] M. M. Bayoumi, K. Y. Wong, and M. A. El Bagoury, "A self tuning regulator for multivariable systems," 1981.
- [16] U. Borison, "Self-tuning regulators for a class of multivariable systems," *Automatica*, vol. 15, pp.209-215, 1979.
- [17] H. Benchoubane, and D. P. Stoten, "Extended minimal controller synthesis algorithm," *Int. J. Control*, pp.1140-1147, 1992.
- [18] M. Boumahrat, and A. Gourdin, "*Méthodes numériques appliquées*," Algiers: OPU, 1983.
- [19] J. R. Broussard, and M. J. Obrian, "Feedforward control to track the output of a forced model," *Proc. 17<sup>th</sup> Conf. Decision Contr.*, pp.1149-1154, Dec. 1978.
- [20] J. R. Broussard, and P. Berry, "Command generator tracking : The continous time case," *Technical report TIM-612-1 TASC* 1978.
- [21] H. Buhler, *Réglage par mode de glissement*. Lausanne: presses polytechniques romandes, 1986.
- [22] V. V. Chalam, *Adaptive Control Systems: Techniques and Applications*. New York: Marcel Decker, 1987.
- [23] F. J. Chang, S. H. Twu, Shyang chang, "Adaptive chattering alleviation of Variable Structure systems control," *IEE Proc.*, vol 137, Pt.D, pp.31-39, 1990.
- [24] D. W. Clarke, and P. J. Gawthrop, "self-tuning controller," *Proc. IEE*, vol. 122, N°2, pp.929-934, 1975.
- [25] D. W. Clarke, and P. J. Gawthrop, "self-tuning control," *Proc. IEE*, vol. 126, N°6, pp.633-640, 1979.

- [26] D. W. Clarke, and P. J. Gawthrop, "Implementation and application of micro-processor based self tuners," *Automatica*, vol. 17, N°1, pp.223-244, 1981.
- [27] D. W. Clarke, "Self tuning control of non minimum phase systems," *Automatica*, vol.20, N°5, pp.501-517, 1984.
- [28] J. J. Craig, P. Hsu, & S. S. Sastry, "Adaptive control of mechanical manipulators," *Int. J. Robotics research*, vol. 6, N°2, pp.16-28, 1987.
- [29] L. Courtiol and I. D. Landau, "High speed adaptation system for controlled electrical drives," *Automatica*, vol. 11, pp.119-127, 1975.
- [30] R. A. Decarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of non linear multivariable systems : a tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, N°3, pp.212-232, 1988.
- [31] P. Delarminat, "la commande robuste : un tour d'horizon," *RAIRO, A. P. I. I.*, vol. 25, N°3, pp.267-296, 1991.
- [32] Z. L. Deng, and X. R. Huang, "Multivariable decoupling pole assignement self-tuning feedforward controller," *IEE Proc. Pt D*, vol. 138, N°1, pp.85-88, 1991.
- [33] R. C. Dorf, *Modern control systems*. California: Addison Wesley, 1992.
- [34] C. S. Draper and Y. T. Li, "Principles of optimalizing control systems and application to the internal combustion engine," *AMSE Publication*, 1959.
- [35] L. Dugard, G. C. Goodwin, and X. Xianya, "The role of the interactor matrix in multivariable stochastic adaptive control," *Automatica*, vol. 20, N°5, pp.701-709, 1984.
- [36] L. Dugard and I. D. Landau, *Commande Adaptative: Methodologie et applications*. Paris: Hermès, 1988.
- [37] B. Egardt, *Stability of Adaptive Controllers*. Berlin: Springer Verlag, 1979.
- [38] H. Elliot, W. A. Wolovich, and M. Das, "Arbitrary adaptive pole placement for linear multivariable systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, N°3, pp.221-228, 1984.

- [39] H. Elliot, and W. A. Wolovich, "Parametrization issues in multivariable adaptive control," *Automatica*, vol. 20, N°5, pp.501-517, 1984.
- [40] E. Fang, "A simple approach to solving the diophantine equation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-37, N°1, pp.152-158, 1992.
- [41] C. Fargeon, *Commande Numérique des Systèmes: Applications aux engins mobiles et aux robots*. Paris: Masson, 1986.
- [42] G. Favier, and M. Hassani, "Multivariable self tuning controllers based on generalized minimum variance strategy," *Proc. 21<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision contr.*, Orlando, pp.770-777, Dec. 1982.
- [43] C. Foulard, S. Gentil, and J. P. Sandraz, *Commande et Régulation par Calculateur Numérique*. Paris: Eyrolis, 1987.
- [44] P. J. Gawthrop, "On the stability and convergence of self tuning controllers," *Int. J. Control*, vol. 31, N°5, pp.973-998, 1980.
- [45] P. J. Gawthrop, and K. W. Link, "Robustness of self-tuning controllers," *IEE Proc. Pt. D*, N°1, pp.21-29, 1982.
- [46] G. C. Goodwin, P. J. Ramadge, and D. E. Caines, "discrete time multivariable adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, N°3, pp.449-456, 1980.
- [47] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive filtering, prediction, and control*. New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- [48] L. Guo, and H. F. Chen, "The Astrom-Wittenmark self tuning regulator revisited and ELS-based trackers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-36, N°7, pp.802-811, 1991.
- [49] C. J. Harris and S. A. Billings, *Self Tuning and Adaptive Control: Theory and applications*. London: Peregrinus, 1981.
- [50] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic "Singular perturbations and robust redesign of adaptive control," *Proc. 21st IEEE Conf. Decision Control*, Orlando, pp.24-29, 1982.

- [51] P. A. Ioannou, and P. V. Kokotovic, "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control," *Automatica*, vol. 20, N°5, pp. 538-594, 1984.
- [52] P. A. Ioannou, and A. Datta, "Robust adaptive control : a unified approach," *Proc. IEEE*, vol. 79, N°12, pp.1736-1767, 1991.
- [53] R. Johansson, "Parametric models of linear multivariable systems for adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, N°4, pp.303-313, 1987.
- [54] M. Kinneart, R. Hanus, and J. L. Henrotte, "A new decoupling precompensator for indirect adaptive control of multivariable linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, N°5, pp.455-459, 1987.
- [55] H. N. Koivo, "A multivariable self tuning controller," *Automatica*, vol. 16, pp.351-366, 1980.
- [56] A. J. Koivo, and T. H. Guo, "Adaptive linear controller for robotic manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-28, N° 2, pp.162-171, 1983.
- [58] I. D. Landau, "A hyperstability criterion for MRAC systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC- , pp.352-355, october 1969.
- [59] I. D. Landau, *Adaptive Control: The model reference approach*. New York: Marcel Decker, 1979.
- [60] I. D. Landau and L. Dugard , *Commande Adaptative: Aspects Pratiques et Théoriques*. Paris: Masson, 1986.
- [61] I. D. Landau, *Identification et Commande des Systèmes*. Paris : Hermès, 1988.
- [62] S. J. Lang, K. Y. Gu, and T. Y. Chi, "A multivariable generalized self tuning controller with decoupling design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, N°5, pp.474-477, 1986.
- [63] C. S. G. Lee, and M. J. Chung, "An adaptive control strategy for mechanical manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, N°9, pp.837-840, 1984.

- [64] M. H. Liu, and W. Lin, "pole assignement self tuning controller for robotic manupulators," *Int. J. Contr.* vol. 46, N°4, pp.1307-1317, 1987.
- [65] M. H. Liu, and W. Lin, "Multivariable self tuning control with decoupling for robotic manipulators," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 135, N°1, pp.43-48, 1988.
- [66] A. G. Macfarlane, and N. Karcanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of algebraic, geometric and complex variable theory," *Int. J. Control*, vol. 24, N°1, pp.33-74, 1976.
- [67] F. Mahieddine and A. S. Morris, "Decoupling multivariable self tuning controller for varying time delays," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 136, N°5, pp.209-214, 1989.
- [68] N. E. Mansour, and D. A. Linkens, "self- tuning pole placement multivariable control of blood pressure for post-operative patients : a model based study," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 137, N°1, pp.13-29, 1990.
- [69] R. S. Mendes, W. C. Amarat, and L. G. Lantre, "Determination of weighting polynomials in generalized minimum variance strategy," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 135, N°1, pp.21-27, 1988.
- [70] R. H. Middleton, "Adaptive control for robot manipulators using discrete time identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-35, N°5, pp.633-637, 1990.
- [71] G. A. Montague, A. J. Morris, and M. T. Tham, "performances evaluation of three multivariable self-tuning controller design techniques," *Proc. 29<sup>th</sup> Conf. Decision and control*, Athens, pp.1564-1569, December, 1986.
- [72] M. M'saad, R. Ortega, and I. D. Landau, " Adaptive controllers for discrete time systems with arbitrary zeros : an overview," *Automatica*, vol. 21, N°4, pp.413-423, 1985.
- [73] N. K. M'sridi, "Représentation des systemes dynamiques, passivité, positivité, et applications," in *Cours stabilité des systemes : DEA Robotique*, Paris 6. 1992.

- [74] K. Najim, *Commande Adaptative des Processus Industriels*. Paris: Masson, 1982.
- [75] M. Najim, *Modélisation et identification en traitement du signal*. Paris: Masson, 1988.
- [76] K. S. Narendra, and R. V. Monopoli, *Applications of adaptive control*. New York: Academic press, 1980.
- [77] T. Noritsugu, and T. Wada, "Adaptive variable structure control of pneumatically actuated robot," *JHPS, Int. Symposium on fluid power*, Tokyo, pp.591-598, March, 1989.
- [78] R. Ortega, and Y. Tang, "Robustness of adaptive controllers. A survey," *Automatica*, vol. 25, N°5, pp.651-677, 1989.
- [79] V. Peterka, "A square root filter for real time multivariate regression," *Kybernetika*, vol. 11, N°1, pp.53-67, 1975.
- [80] V. M. Popov, "*l'hyperstabilité des systèmes automatiques*," Paris: Dunod ed., 1970.
- [81] D. L. Prager and P. E. Wellstead, "Multivariable pole assignment self-tuning regulators," *IEE Proc. Pt D*, vol. 128, N°1, pp.9-18, 1980.
- [82] S. C. Puthenpura, and J. F. Macgregor, "Pole-zero placement controllers and self tuning regulators with better set point tracking," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 134, N°1, pp.26-30, 1987.
- [83] A. Ralston, and P. Rabinowitz "A first course in numerical analysis," Mac Graw Hill, Auckland, 1985.
- [84] D. Rotchild, and A. Jameson, "Comparaison of four numerical algorithms for solving the Liapounov matrix equation," *Int. J. Control*, N°11, pp.181-198, 1970.
- [85] S. Sastry, M. Bodson, "*Adaptive control : stability, convergence, and robustness*," New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [86] R. scattolini, and D. W. Clarke, "Multivariable model following control with offset rejection," *Int. J. Contr.*, vol. 42, N°6, pp.1309-1322, 1985.
- [87] R. Singh, and K. S. Narendra, "Prior information in the design of multivariable adaptive controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, N°12, pp.1108-1111, 1984.

- [88] H. R. Siresina, and F. C. Teng, "Multivariable pole zero placement controllers," *Int. J. systems Sci.*, vol. 17, N°2, pp.345-352, 1986.
- [89] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 38, N°2, pp.465-492, 1983.
- [90] X. Sobel, H. Kaufman and L. Mabiou, "Implicit adaptive control for a class of MIMO systems," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic syst.*, vol. AES-18, N°5, pp.576-589, September 1982.
- [91] D. P. Stoten, "Discrete adaptive control of a manipulator arm," *Optimal Contr Applic and methodes.*, vol. 3, pp.423-433, 1982.
- [92] D. P. Stoten, "The adaptive control of manipulator arms," *Mechanism and Machinery Theory.*, vol. 18, N°4, pp.283-288, UK, 1983.
- [93] D. P. Stoten, "Generalized manipulator dynamics with regard to model reference adaptive control," *Int. J. Control*, vol. 50, N°6, pp.2249-2268, 1989.
- [94] D. P. Stoten and H. Benchoubane, "Robustness of a minimal controller synthesis algorithm," *Int. J. Control.*, vol. 51, N°4, pp.851-861, 1990.
- [95] D. P. Stoten and H Benchoubane, "Empirical studies of an MRAC algorithm with minimal controller synthesis," *Int. J. Control*, vol. 51, N°4, pp.823-849, 1990.
- [96] D. P. Stoten, "The digital control of an unstable system," Automatic control laboratory: Experiment A2, Departement of mechanical engineering, university of Bristol, 1990.
- [97] D. P. Stoten and S. P. Hodgson, "Comparative implementation studies of the minimal control synthesis on a class 1 manipulator," *J. Syst. and Cont. engineering. in Part 1, Proc. Instn. Mech. engrs.*, vol. 205, pp.23-33, 1991.
- [98] M. T. Tham, F. Vagi, and R. K. Wood, "Multivariable and multirate self-tuning control: a distillation column, case

- study," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 138, N°1, pp.9-18, 1991.
- [99] C. L. Thornton, and J. J. Bierman, "Filtering and error analysis via the  $U D U^T$  covariance factorization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, N°5, pp.901-906, 1978.
- [100] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, N°2, pp.212-222, 1977.
- [101] V. I. Utkin, "Discontinuous control systems: state of the art in theory and applications," in *Proc. 10th IFAC World congress*, Munich, Germany, pp.75-94, 1987.
- [102] V. I. Utkin, *Sliding Modes and their Applications in Variable structure systems*. Moscow: Mir, 1978.
- [103] V. I. Utkin, "Variable structure systems- Present and future," *Automat. Remote Contr.*, vol. 44, N°9, pp.1105-1120, 1983.
- [104] K. Warwick, "Self tuning regulators - a state space approach," *Int. J. Control*, vol. 33, N°5, pp.830-859, 1981.
- [105] P. E. Wellstead and D. L. Prager and P. M. Zanker, "Servo self tuners," *Int. J. Control*, vol. 30, N°1, pp.27-36, 1979.
- [106] P. E. Wellstead and D. L. Prager and P. M. Zanker, " Pole assignement self-tuning regulators," *IEE Proc. Pt D*, vol. 126, N°8, pp.781-787, 1980.
- [107] H. P. Withaker, J. Ymron, and A. Kezer, "Design of MRAC systems for aircraft," *Report N° R-164, Instrumentation Lab.*, MIT, 1958.
- [108] K. K. D. Young, P. V. Kokotovic, and V. I Utkin, "A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, N° 6, pp.931-938, 1977.
- [109] K. K. D. Young, "Asymptotic stability of model reference systems with variable structure systems," *IEEE Trans. automat. contr.*, vol., AC-22, N°4, pp.279-281, 1977.
- [110] K. K. D. Young, "Design of variable structure model following control systems," *IEEE Trans. automat. contr.*, vol., AC-23, N°6, pp.1079-1085, 1978.

- [111] K. K. D. Young, "Controller design of a manipulator using theory of variable structure systems," *IEEE Trans. Syst., Man., and Cybernetics*, vol. SMC-8, N°2, pp.101-109, 1978.
- [112] A. S. Zinober, O. M. E. El Ghezaoui, and S. A. Billings, "Multivariable variable structure adaptive model following control systems," *IEE Proc.*, vol. 129, Pt.D, N°1, pp.6-12, 1982.
- [113] "PC-Matlab user's guide," The Math Works Inc., 1991.
- [114] "Simnon user's guide for MS DOS computers," Version 3.0, Göteborg: SSPA systems, 1990.

## STABILITE, POSITIVITE, ET HYPERSTABILITE

Nous donnons dans cet annexe les principales définitions de la stabilité, de positivité et d'hyperstabilité, concepts sur lesquelles reposent la majorité des algorithmes de commande adaptative.

## A. STABILITE [59], [73]

Considérons le système dynamique décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A-1})$$

où  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ .

Le vecteur solution  $\phi(t, x_0, t_0)$  est unique et différentiable par rapport à  $t$  et satisfaisant pour tout  $x_0, t_0$  les relations :

$$\begin{aligned} \phi(t_0, x_0, t_0) &= x_0 \\ \phi(t, x_0, t_0) &= f(\phi(t, x_0, t_0), t) \end{aligned}$$

Un état  $x_e$  du système (A-1) est appelé état d'équilibre si :

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Définition 1 (Stabilité)

Un état d'équilibre  $x_e$  du système (A-1) est stable si pour chaque nombre réel  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tel que :

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \implies \|\phi(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Définition 2 (Stabilité asymptotique)

L'état d'équilibre  $x_e$  est dit asymptotiquement stable si :

- 1-  $x_e$  est stable;
- 2- il existe un nombre  $\delta(t_0)$  tel que :

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$$

(ie : toute solution  $\phi(t, x_0, t_0)$  démarrante suffisamment près de  $x_e$  converge vers  $x_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini).

### Définition 3 (Stabilité asymptotique globale)

L'état d'équilibre  $x_e$  est globalement asymptotiquement stable si, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on a :

- 1-  $x_e$  est stable;
- 2-  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$ .

### Théorème 1 (Lyapounov 1)

Considérons le système (A-1) où  $f(0, t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , s'il existe une fonction scalaire réelle  $V(x, t)$  avec des dérivées partielles du premier ordre continues par rapport à  $x$  et  $t$ , telles que :

- 1-  $V(0, t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2-  $V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) > 0$ , pour tout  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $t \in \mathbb{R}$

où  $\alpha(\cdot)$  est une fonction continue non décroissante telle que :

$$\alpha(0) = 0;$$

- 3-  $V(x, t) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;

$$4- \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta t} + (\text{grad } V)^T f(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

où  $\gamma(\cdot)$  est une fonction scalaire continue telle que  $\gamma(0) = 0$ ;

alors l'état d'équilibre  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable et  $V(x, t)$  est dite fonction de Lyapounov du système (A-1).

Note : si de plus  $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$ , où  $\beta(\cdot)$  est une fonction scalaire continue non décroissante telle que  $\beta(0) = 0$ , alors  $x_e = 0$  est globalement uniformément asymptotiquement stable (le terme uniforme signifie que les propriétés de stabilité du système (A-1) sont indépendantes de l'instant initial  $t_0$ ).

### Théorème 2 (Lyapounov 2)

L'état d'équilibre  $x_e = 0$  du système linéaire invariant dans

le temps :

$$\dot{x} = A x \quad (*)$$

est (globalement uniformément) asymptotiquement stable si et seulement si, étant donné une matrice définie positive  $Q$ , il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive, solution unique de l'équation matricielle de Lyapounov :

$$A^T P + P A = - Q$$

et  $V = x^T P x$  est la fonction de Lyapounov du système (\*)

## B. POSITIVITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

La positivité est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur mathématique soit factorisable comme un produit (par exemple : une matrice définie positive peut être écrite comme un produit de deux facteurs :  $Q = L L^T$ ). Le problème de factorisation et donc de positivité apparaît dans de nombreux problèmes de commande, notamment en contrôle optimal, contrôle non linéaire, et contrôle adaptatif. Les travaux de Popov, Kalman et Yakubovitch [80] sur ce thème constituent une partie importante de la théorie de la commande.

### Systemes Positifs

Considérons le système décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x, u, t, x(t_0))$$

$$y = h(x, u)$$

où  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur sortie,  $h$  et  $f$  sont des fonctions continues par morceaux.

### Définition

Le système (.) est dit positif si l'on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T u dt = \zeta(x(t_1)) - \zeta(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \lambda(x, u) dt$$

avec  $\zeta$  une fonction définie positive,  $\forall x$  et  $\lambda(x,u) \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$   
La fonction  $\lambda(x,u)$  est définie pour tout  $x$  et  $u$ .

### Propriétés des systèmes linéaires positifs

*Fonctions de transfert positives :*

#### Définition 1 (positivité réelle)

Une fonction rationnelle  $h(p)$  de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$  est positive réelle si :

1.  $h(p)$  est réelle pour  $p$  réelle
2.  $\operatorname{Re}[h(p)] \geq 0$  pour tout  $\operatorname{Re}[p] > 0$

Cette définition nous permet d'affirmer qu'une fonction rationnelle  $h(p)$  de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$  est positive réelle si :

1.  $h(p)$  est réelle pour  $p$  réelle;
2.  $h(p)$  n'a pas de pôles dans le demi plan droit de Laplace;
3. les pôles éventuels de  $h(p)$  sur l'axe  $\operatorname{Re}(p)=0$  ( $p=j\omega$ ) sont distincts et les résidus associés sont réels et positifs ou nuls;
4. pour tout  $\omega$  pour lequel  $p=j\omega$  n'est pas un pôle de  $h(p)$ ,  $\operatorname{Re}[h(p)] \geq 0$ .

#### Définition 2 (Positivité réelle stricte : SPR)

Une fonction rationnelle  $h(p)$  de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$  est strictement positive réelle si :

1.  $h(p)$  est réelle pour  $p$  réelle;
2.  $h(p)$  n'a pas de pôles dans le demi plan droit de Laplace;
3.  $\operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0$ ,  $\forall \omega$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

*Matrices de transfert positives*

#### Définition 3 (matrice de fonctions positives réelle)

Une matrice  $H(p)$  ( $n \times n$ ) de fonctions réelles rationnelles est positive réelle si :

1. tous les pôles des éléments de  $H(p)$  ne sont pas dans le demi plan droit de Laplace;

2. les pôles éventuels de  $H(p)$  sur l'axe  $\text{Re}[p]=0$  sont distincts, et la matrice résidu associée à  $H(p)$  est hermitienne semi définie positive;
3. la matrice  $H(jw)+H^T(-jw)$  est hermitienne semi définie positive pour toute valeur réelle  $w$  qui n'est pas un pôle de chaque élément de  $H(p)$ .

Définition 4 (matrice de fonctions SPR)

Une matrice  $H(p)$  ( $n \times n$ ) de fonctions réelles rationnelles est strictement positive réelle si :

1. tous les pôles des éléments de  $H(p)$  sont dans le demi plan gauche ( $\text{Re}[p] < 0$ );
2. la matrice  $H(jw)+H^T(-jw)$  est hermitienne définie positive pour tout  $w$ .

*Systemes linéaires invariants positifs*

Si le système est défini par sa représentation d'état minimale, avec  $(A,B)$  complètement commandable et  $(A,C)$  complètement observable, le lemme positif ci dessous permet de caractériser la positivité du système linéaire. Soit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x + D u \end{aligned}$$

et  $H(p) = C (pI - A)^{-1} B + D$ , sa matrice de transfert.

Théorème (lemme positif réel)

Soit  $H(p)$  une matrice ( $m \times m$ ) de fonctions rationnelles propres de la variable complexe  $p$ , avec  $H(\infty) < \infty$ . Soit  $(A,B,C,D)$  une réalisation minimale sous forme d'état de  $H(p)$ . Alors  $H(p)$  est positive réelle si et seulement si il existe des matrices réelles  $P, L$ , et  $W$  avec  $P$  symétrique définie positive telles que :

$$A^T P + P A = - L L^T$$

$$P B = C^T - L W$$

$$W^T W = D + D^T$$

Le nombre de lignes de  $W$  et de colonnes de  $L$  ne sont pas imposées, par contre les autres dimensions sont fixées par la représentation d'état et les autres théorèmes.

### *Interprétations fréquentielles*

D'après les définitions ci dessus, on en déduit que les conditions nécessaires pour qu'une fonction de transfert d'un système soit SPR, sont :

1.  $H(p)$  strictement stable;
2. le diagramme de Nyquist de  $H(j\omega)$  est dans le demi plan droit;
3. le déphasage introduit par  $H(p)$  est toujours inférieur à  $(\pi/2)$ ;
4.  $H(p)$  est de degré relatif 0 ou 1 (  $\text{deg}(\text{den}) - \text{deg}(\text{num})$  );
5.  $H(p)$  est strictement à phase minimale;
6.  $H(p-\varepsilon)$  est positive réelle pour tout  $\varepsilon > 0$ .

### C. HYPERSTABILITE

Le concept d'hyperstabilité a été introduit par Popov [80] comme une généralisation de la propriété de stabilité absolue.

Considérons le système multivariable en boucle fermée représenté figure c-1, ce dernier est constitué d'un bloc d'action linéaire invariant et d'un bloc de contre réaction pouvant être linéaire, non linéaire, variant ou invariant dans le temps.

Le problème de la stabilité absolue peut être formulé comme suit : quelles sont les conditions que doit satisfaire le bloc d'action pour que le système en boucle fermée soit globalement asymptotiquement stable pour tout bloc de contre réaction appartenant à la classe des systèmes vérifiant une inégalité de

la forme :  $v_i w_i \geq 0, \quad \forall i=1..m$

(ou plus généralement :  $h_i^m v_i^2 \leq v_i w_i \leq h_i^M v_i^2, \quad h_i^M \geq h_i^m \geq 0$ ), où les  $v_i$  et  $w_i$  sont les composantes des vecteurs  $v$  et  $w$  représentant respectivement l'entrée et la sortie des blocs de contre réaction.

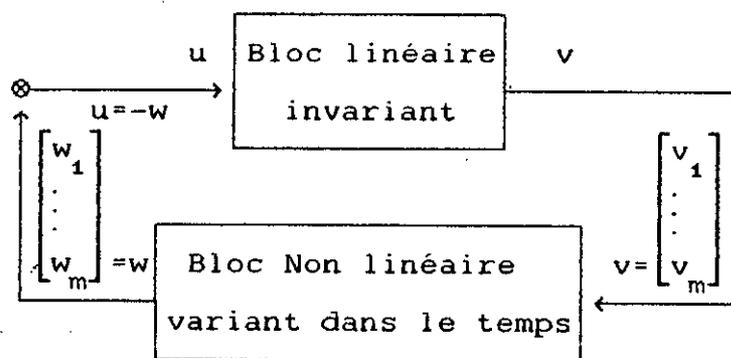


Fig.C-1. Forme standard d'un système multivariable non linéaire en boucle fermée variant dans

Les travaux de Popov, qui ont été couronné par le théorème d'hyperstabilité consistent à garantir la stabilité absolue pour la classe des systèmes en boucle fermée de la forme figure C-1 et dont le bloc de contre réaction satisfait l'inégalité :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T v dt \geq -\gamma_0^2, \text{ pour tout } t_1 \geq t_0 \text{ et } \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

connue sous le nom d'inégalité intégrale de Popov et qui s'interprète comme suit : le produit des entrées/sorties des blocs de contre réaction doit être, en moyenne, supérieur à une constante négative. Il est donc clair que cette propriété est une généralisation du concept de stabilité absolue, où le produit sus cité doit être à chaque instant supérieur à zéro. La classe des systèmes absolument stables est, de ce fait, une sous classe de systèmes vérifiant l'inégalité de Popov.

Un système en boucle fermée, de la forme figure C-1, globalement (asymptotiquement) stable pour tous les blocs de

contre réaction satisfaisant l'inégalité de Popov est appelé (asymptotiquement) hyperstable. Dans ce cas le bloc d'action est dit bloc hyperstable.

### Systemes hyperstables

Supposons que le bloc d'action du système en boucle fermée figure C-1 est donné dans l'espace d'état par :

$$\dot{x} = A x + B u = A x - B w$$

$$v = C x + J u = C x - J w$$

Dans ce cas sa matrice de transfert est donnée par :

$$H_p(s) = J + C (sI - A)^{-1} B$$

le bloc de contre réaction étant décrit par la relation :

$$w = f(v, t, T), \quad T \leq t$$

la paire (A,B) est supposé contrôlable, la paire (A,C) est observable.

#### Théorème 1 (Hyperstabilité)

Toute solution  $x(x(0), t)$  du système décrit par les équations ci-dessus en boucle fermée sur le bloc non linéaire vérifiant l'inégalité de Popov, satisfait la relation :

$$x(t) \leq \delta (\|x(0)\| + \gamma_0), \quad \delta > 0, \gamma_0 > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (T-1)$$

si et seulement si la matrice de transfert  $H_p(s)$  est positive réelle.

#### Théorème 2 (Hyperstabilité asymptotique)

Toute solution  $x(x(0), t)$  du système ci-dessus en boucle fermée sur un bloc non linéaire vérifiant l'inégalité de Popov, satisfait la relation (T-1), et de plus nous avons  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ,

pour toute entrée  $u$  bornée, si et seulement si la matrice de transfert  $H_p(s)$  est strictement positive réelle (SPR).

### Remarques

1- La condition de positivité réelle (stricte) de la matrice de transfert du bloc d'action est équivalente à l'hyperstabilité (asymptotique) de ce bloc.

2- Les théorèmes 1 et 2 donnent les conditions suffisantes pour montrer respectivement la stabilité et la stabilité asymptotique du système dans le cas où le bloc de contre réaction satisfait l'inégalité de Popov.