

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie Mécanique

*Projet de fin d'études en vue de l'obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique*

**Dimensionnement optimal des actionneurs d'un robot
parallèle à trois degrés de libertés**

Réalisé par : *KAMEL Bilel*

Soutenu le 04 Juillet 2011 devant le jury composé de :

President: Mr. MADANNI (ENP)

Promoteurs: Mr. M.BOUAZIZ (ENP)

Mr.HADDAD (ENP)

Examineurs: Mr. RIACH (ENP)

Ecole Nationale Polytechnique, 10 Av. Hassan Badi, El Harrach, Alger, Algérie.

«Il y'a dans la création des cieux et de la terre
Et dans la succession de la nuit et du jour, des
signes
Pour ceux qui sont doués d'intelligence.»

Sourate 3[la famille d'Imran] verset 190

Remerciements

Nous voilà arrivés à l'issue de cinq années d'études intensives et riches en enseignement. Afin d'éviter de sombrer dans ce qui pourrait être un brin de nostalgie abusive, nous tenons à rendre à toutes celles et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à parfaire notre formation au sein de l'ENP un hommage massif en leur soumettant nos remerciements les plus sincères.

En premier lieu, nous tenons à remercier nos promoteurs :

Mr.M.BOUAZIZ, qui a immédiatement accepté de nous encadrer en tant que copromotrice, dont la rigueur, les précieux conseils, le suivi avisé tout au long de notre projet mais surtout sa grande pédagogie ont été d'une aide inestimable.

Mr.M.HADDAD qui nous a permis de traiter un sujet aussi attrayant, tant en profondeur qu'en expérience acquises. Ses compétences techniques, son expérience, sa disponibilité et sa rigueur ont été d'une aide précieuse pour la concrétisation de ce travail.

Nous remercions vivement Mr.MADANNI, de nous avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce projet de fin d'études.

Nous adressons également nos remerciements à Mr.RIACH pour nous avoir consacré une partie de leur précieux temps afin de juger et d'évaluer notre travail.

Enfin nous remercions l'ensemble de nos enseignants du département des sciences fondamentales ainsi que du département de génie mécanique qui nous ont guidé et enseigné durant notre cursus à l'ENP.

Kamel Bilel

Dédicaces

A ceux qui n'ont jamais cessé de m'encourager et
de me soutenir, à ceux qui leur amour m'a donné
la volonté d'aller toujours de l'avant,

A mes très chers parents, que Dieu les protège

A mes très chers frères, A ma très chère sœur,

A toute ma famille,

A tous mes amis

Je dédie ce travail

Résumé

Les robots parallèles sont conçus pour exécuter des tâches très variées et dans des conditions d'emploi très diverses. Les sollicitations induites sont des fonctions complexes. Elles dépendent des paramètres internes du manipulateur, de la répartition de masse de l'outil embarqué et des valeurs instantanées de variables articulaires (positions, vitesses et accélérations).

L'objectif de ce travail est la recherche des sollicitations maximales induites par une charge de référence, sur les liaisons d'un robot parallèle. Nous avons utilisé une méthode d'approche qui se base sur les méthodes stochastiques et plus précisément la méthode du recuit simulé pour trouver des résultats optimaux dans un domaine de recherche très large.

Mots clés : Robot parallèle, sollicitations dynamiques, méthodes stochastiques, recuit simulé, formalisme de Lagrange.

ABSTRACT

The parallel robots are designed to carry out varied tasks within different conditions of use. The induced requests are complex functions. They depend on the internal parameters of the robot, the distribution of mass of the embarked tool, and the instantaneous values of articular variables (positions, speeds and accelerations).

The aim of this work is the research of the maximum requests induced by a load of reference of the parallel robot. We used a method of approach that is based on stochastic methods and more specifically the method of simulated annealing to find the best results in a very broad area of research.

KEY WORDS: Parallel robot, dynamics loads, stochastic methods, simulated annealing, Lagrangian formalism.

الملخص

الآليات المتوازية مصممة للقيام بعدة أعمال في ظروف جد مختلفة. الحمولات الديناميكية الناتجة عبارة عن دوال ترتبط بالعوامل الديناميكية الداخلية و التوزيع الكتلي للأداة المستخدمة و بالقيم الآنية للمتغيرات المفصلية (الوضعية, السرعات, التسارعات).

الهدف من هذا العمل هو البحث عن الحمولات الناتجة عن الأداة المستعملة, والتي تضغط بها على مكونات الروبوت, لقد استعملنا طريقة تقارب تعتمد على الالغريتمات الستوكاستيكية, وبالضبط لإيجاد أفضل النتائج في مجال بحث كبير.

الكلمات الأساسية : الآليات المتوازية, الحمولات الديناميكية, الالغريتمات الستوكاستيكية, طريقة لاغرو نج.

TABLE DES MATIERES

| | |
|---------------------------|--|
| Remerciements | |
| Dédicaces | |
| Résumé | |
| Table des matières | |
| Liste des figures | |

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1 : ETAT DE L'ART ET PROBLEMATIQUE

| | |
|--|----|
| I. Etat de l'art..... | 01 |
| 1. Définition..... | 01 |
| 2. Les robots parallèles : types et classification..... | 03 |
| 2.1. Les robots plans | 03 |
| 2.1.1. Robots plans à 2 ddl | 03 |
| 2.1.2. Robots plans à 3 ddl | 04 |
| 2.2. Les robots à mouvements spatiaux..... | 05 |
| 2.2.1. Robots à 3 ddl..... | 05 |
| 2.2.1.1. Robots translateurs | 06 |
| 2.2.1.2. Robots pour rotation | 07 |
| 3. Comparaison des performances des robots sériels et des robots parallèles | 09 |
| 4. Tendances et perspectives de la recherche en robotique parallèle..... | 10 |
| 4.1. Optimisation de la conception des robots parallèles à très haute précision..... | 10 |
| 4.2. Conception de robots reconfigurables..... | 11 |
| II. Problématique..... | 12 |
| 1. Introduction..... | 12 |
| 2. Problème de conception d'un robot parallèle | 13 |
| 3. Intérêt de l'évaluation des sollicitations dynamiques maximales..... | 14 |
| 4. Contribution..... | 15 |

CHAPITRE 2 : GENERATION DE MOUVEMENTS

| | |
|--|----|
| 1. Introduction..... | 17 |
| 2. Génération de mouvements | 18 |
| 2.1. Génération de mouvements dans l'espace articulaires | 18 |
| 2.2. Génération de mouvements dans l'espace opérationnel | 18 |
| 2.3. Génération de mouvements entre deux points de l'espace..... | 19 |
| 2.3.1. Interpolation polynomiale..... | 19 |
| a) Interpolation linéaire..... | 19 |
| b) Polynôme d'interpolation de degré trois..... | 20 |
| c) Polynôme de degré cinq | 22 |
| 2.3.2. Loi Bang–Bang..... | 23 |
| 2.3.3. Loi trapèze (loi Bang–Bang avec palier de vitesse)..... | 24 |
| 3. Conclusion..... | 27 |

CHAPITRE 3: MODELISATION DYNAMIQUE

| | |
|---|----|
| 1. Introduction..... | 29 |
| 2. Modélisation des systèmes multi-corps | 29 |
| 2.1. Systèmes multi corps à chaîne arborescente | 29 |
| a) Description géométrique | 29 |
| b) Modélisation dynamique..... | 30 |
| 2.2. Systèmes multi corps à chaîne fermée | 31 |
| a) Description géométrique | 31 |
| b) Contraintes géométriques du système | 32 |
| c) Traitement des équations de contraintes du | 35 |
| d) Modèle dynamique | 36 |
| 3. Formalisme de Lagrange..... | 37 |
| 4. Résultats | 39 |
| 4.1. Application au robot parallèle à 3 ddl | 39 |
| 4.2. Application du Formalisme de Lagrange..... | 40 |
| a) Expression de l'énergie cinétique totale..... | 40 |
| b) Expression du couple pour chaque corps..... | 42 |
| 4.3. Equations de contraintes géométriques..... | 43 |
| 4.4. Relations entre liaisons actives et liaisons passives..... | 43 |
| 4.5. Modèle cinématique | 45 |
| 4.6. Résultats | 47 |
| 4.7. validation des résultats par SOLIDDYNAMICS..... | 51 |

CHAPITRE 4 : LES METHODES STOCHASTIQUES D'OPTMISATION

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | |
| 2. techniques de Monté Carlo | 59 |
| 3. Méthode Hill Climbing | 61 |
| 4. Monté Carlo avec réduction d'intervalle de recherche | 62 |
| 5. Le recuit simulé | 63 |
| 5.1. Le mécanisme naturel | 63 |
| 5.2. Algorithme de recuit simulé | 64 |
| 5.3. Eléments génériques du Recuit Simulé..... | 65 |
| 5.3.1. Température initiale T_0 | 65 |
| 5.3.2. Palier et décroissance de la température | 66 |
| 5.3.3. Convergence | 66 |
| 6. La recherche tabou..... | 67 |
| 7. Les algorithmes génétiques..... | 68 |
| 8. Résultats de l'optimisation..... | 69 |
| 9. Conclusion | |

CONCLUSION GENERALE

TABLE DES FIGURES

| | |
|--|----|
| Figure 1.1. Modèle d'un robot sériel KUKA et un robot parallèle le RAF | 1 |
| Figure 1.2. Robots plans à 2 ddl | 4 |
| Figure 1.3. Exemples de robots plans à 3 ddl | 5 |
| Figure 1.4. Manipulateur de Lee | 6 |
| Figure 1.5. Le robot delta | 7 |
| Figure 1.6. Le 3-UPU | 7 |
| Figure 1.7. Le RAF | 8 |
| Figure 1.8. Le poignet de Hayward | 8 |
| Figure 1.9. Poignet de Gosselin | 9 |
| Figure 1.10. Robot parallèle reconfigurable | 12 |
| Figure 2.1 Interpolation linéaire sur une articulation A_j donnée | 20 |
| Figure 2.2 Loi polynômiale de degré trois | 21 |
| Figure 2.3 Loi polynômiale de degré cinq | 22 |
| Figure 2.4 Loi Ban –Bang | 23 |
| Figure 2.5 Cas où la vitesse n'est pas saturée | 26 |
| Figure 2.6 Evolution des positions, vitesse et accélération sur l'articulation A_j avec une loi trapèze | 27 |
| Figure 3.1. Repères placés sur une articulation coupée | 32 |
| Figure 3.2. Les deux branches d'une boucle fermée | 33 |
| Figure 3.3 : robot parallèle à 3 ddl du type PP-RRR | 39 |

| | |
|---|----|
| Figure 3.4 : Graphe de liaisons du robot <i>PP-RRR</i> | 39 |
| Graphe 3.1 : Graphe des positions des angles $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ | 47 |
| Graphe 3.2 : Graphe de position de θ_2 | 47 |
| Graphe 3.3 : Graphe de position de θ_4 | 48 |
| Graphe 3.4 : Graphe des vitesses angulaires $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_5$ | 48 |
| Graphe 3.5 : Graphe des vitesses angulaires $\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_4$ | 49 |
| Graphe 3.6 : Graphe des accélérations angulaires $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_3$ et $\ddot{\theta}_5$ | 49 |
| Graphe 3.7 : Graphe des accélérations $\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4$ | 50 |
| Graphe 3.8 : Graphe des couples Γ_1, Γ_3 | 50 |
| Graphe 3.9 : Graphe de couple Γ_5 | 51 |
| Figure 3.6 : Le robot parallèle réalisé sous solid-dynamics | 51 |
| Figure 4.1 : Convergence d'une technique de Monté Carlo | 60 |
| Figure 4.2 : Changement du centre du voisinage dans la technique hB | 61 |



Introduction
Générale

Depuis quelques années, la famille des robots parallèles suscite un intérêt croissant au vu des multiples avantages qu'elle offre : rapport charge / puissance très élevée relativement à celui des autres structures, une très grande rigidité de structure, des vitesses opérationnelles exceptionnelles. Quand le robot parallèle n'est qu'au stade de conception, une première estimation des sollicitations dynamiques maximales indispensable pour dimensionner sa structure dans le respect du cahier des charges. Les robots parallèles exécutent des tâches très variées et dans des conditions maximales induites par le chargement de référence permet de connaître l'adaptabilité du robot parallèle face à un emploi donné.

Les efforts consacrés à l'amélioration des performances de ces robots sont canalisés dans deux grandes voies, distinctes mais complémentaires. La première voie, dans laquelle s'inscrit notre travail vise à optimiser la conception (structure mécanique, actionneurs, instrumentation, source d'énergie, ...). Elle profite des remarquables progrès technologiques que connaissent les différentes disciplines entrant dans le domaine de la robotique. Son objectif principal est d'améliorer les performances en termes de capacité et de fiabilité. Cependant, il est évident qu'un système, même bien conçu, ne pourra jamais répondre à un souci de productivité ou d'efficacité s'il est mal utilisé. La deuxième voie, vise à exploiter de façon optimale les capacités déjà disponibles de ces robots lors de l'exécution d'une tâche prescrite. L'objectif principal dans ce cas est de déterminer la meilleure trajectoire, selon un critère de performance donné, qui permettra l'exécution de la tâche assignée tout en assurant le bon fonctionnement de l'ensemble du système.

Ce mémoire tente de présenter une certaine approche d'évaluation des sollicitations maximales induites par un chargement de référence. Cette approche consiste à utiliser les méthodes d'optimisation stochastiques.

Les méthodes stochastiques font intervenir des processus aléatoires dans la recherche des solutions optimales. Elles sont itératives et souvent constituées de deux phases. La première est globale et consiste à échantillonner aléatoirement l'espace de recherche afin de créer des solutions initiales. La deuxième phase utilise les solutions initiales et recherche dans leur voisinage de meilleures solutions.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres:

- Chapitre 1: sont présentés les robots parallèles en énonçant quelques définitions et en donnant une liste non exhaustive des différentes architectures qu'on trouve dans la littérature. Nous y introduisons des notions nécessaires pour l'analyse et la manipulation des robots parallèles.
- Chapitre 2 : sont présentés les méthodes de génération de mouvements couramment utilisées en robotique. Les Différents modes d'interpolations ont été étudiés. Ces méthodes s'appliquent aussi bien dans l'espace articulaire que dans l'espace opérationnel.
- Chapitre 3 : est abordée la modélisation dynamique du robot étudié, en vue d'établir les relations entre les efforts et les coordonnées, vitesses et accélérations. Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodologies couramment rencontrées dans la littérature, qui peuvent être déduites d'une approche analytique (formalisme de Lagrange) ou d'une approche récursive (Formalisme d'Euler).
- Chapitre 4 : sont abordées les différentes méthodes mathématiques utilisées pour résoudre le problème d'optimisation, l'approche choisie. Les calculs sont effectués sous MATLAB.

En conclusion, on synthétise les principaux résultats acquis au cours de cette étude pour déboucher sur un ensemble de perspectives que ce travail pourrait éventuellement susciter.

ETAT DE L'ART ET PROBLEMATIQUE



Chapitre 1

I. Etat de l'art

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par présenter les robots parallèles en énonçant quelques définitions et nous donnons une liste non exhaustive des différentes architectures qu'on trouve dans la littérature. Nous introduisons des notions nécessaires pour l'analyse et la manipulation des robots parallèles.

1. Définitions :

Un mécanisme est un assemblage de pièces conçu afin de convertir des mouvements et/ou des efforts.

Un robot est un mécanisme piloté par une unité de commande qui réalise automatiquement des tâches telles que la manipulation ou l'usinage.

Une chaîne cinématique est un ensemble de pièces liées par des liaisons mécaniques. On appelle chaîne cinématique simple toute chaîne cinématique où chaque pièce a une ou deux liaisons seulement. On appelle chaîne cinématique complexe toute chaîne cinématique contenant une pièce (ou plusieurs pièces) ayant trois liaisons ou plus.

Un robot sériel est un robot formé par une chaîne cinématique simple contenant une base fixe et un organe terminal, qui ont chacun une seule liaison. Un robot parallèle est un robot en chaîne cinématique complexe, constitué d'un organe terminal et d'une base fixe reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes [Merlet.97].



FIG 1.1. Modèle d'un robot sériel KUKA et un robot parallèle le RAF

Un manipulateur est un robot utilisé pour la manipulation. Dans la littérature, les robots sériels et les robots parallèles sont considérés comme étant des robots manipulateurs par

opposition aux robots mobiles. On note aussi qu'il existe des robots manipulateurs mobiles. Dans ce mémoire on utilise les termes manipulateurs parallèles ou mécanismes parallèles ou encore robots parallèles pour décrire la même structure.

On appelle degrés de liberté d'un système mécanique (qu'on note ddl) les mouvements indépendants qui restent possibles. Le ddl d'une liaison mécanique entre deux pièces correspond au nombre de translations et de rotations indépendantes entre ces deux pièces. Ainsi une liaison pivot et une liaison glissière ont chacune un seul ddl, alors qu'une liaison pivot glissant a deux ddl et une liaison rotule en a trois.

Le ddl d'un mécanisme, appelé aussi degré de mobilité, correspond au nombre de mouvements indépendants possibles dans le mécanisme.

Dans un robot parallèle, on appelle jambe, une chaîne cinématique indépendante reliant l'organe terminal à la base fixe.

On dit qu'un robot est pleinement parallèle si le ddl de l'organe terminal est égal au nombre de jambes. Chaque jambe comporte au plus un actionneur. Aucune pièce d'une jambe ne doit avoir plus de deux liaisons [**Pierrot.91**].

En robotique, on utilise souvent l'appellation articulation pour une liaison mécanique entre deux pièces. Une liaison pivot est appelée articulation rotoïde (qu'on note R). Une liaison glissière est appelée articulation prismatique (P) et une liaison rotule est appelée articulation sphérique (S). On appelle aussi articulation universelle (U), la liaison correspondant à un joint de cardan, c'est-à-dire, la liaison composée de deux liaisons pivots d'axes perpendiculaires.

Dans le cas des robots parallèles, les articulations ne sont pas toutes motorisées, contrairement au cas des robots sériels. Les articulations motorisées sont appelées articulations actives, alors que les articulations non motorisées sont appelées articulations passives.

Les coordonnées opérationnelles sont utilisées pour repérer la position et l'orientation de l'organe terminal d'un manipulateur.

Les variables d'un mécanisme sont l'ensemble des articulations actives, l'ensemble des articulations passives et l'ensemble des coordonnées opérationnelles.

On appelle mécanisme plan, un mécanisme ayant des mouvements plans. Les mouvements plans sont des mouvements qui s'effectuent dans un plan, ils se décomposent en deux translations d'axes parallèles au plan et en une rotation d'axe perpendiculaire au plan.

Un mécanisme qui n'est pas plan est dit spatial.

2. Les robots parallèles : types et classification

Dans cette étude, nous présentons quelques types de robots parallèles intéressants pour étudier la planification de trajectoire, tout en évitant à la fois les collisions et les singularités. Une étude relativement complète des différentes architectures des robots parallèles peut être trouvée dans [Merlet.97].

Nous distinguons deux catégories de robots parallèles : les robots plans et les robots spatiaux. Puis, dans ces deux catégories nous classons les robots parallèles selon leur nombre de ddl.

Les robots à câbles sont des robots parallèles où les jambes sont remplacées par des câbles. Ces robots peuvent être plans ou spatiaux, nous avons choisi de les classer dans une catégorie particulière pour les distinguer des autres robots parallèles.

Nous remarquons que dans le cas des robots pleinement parallèles, le nombre de ddl ne peut excéder trois pour les robots plans et ne peut excéder six pour les robots spatiaux.

2.1. Les robots plans :

Nous ne considérons dans ce mémoire que le cas des robots pleinement parallèles. Comme il y a autant de ddl de l'organe terminal que de jambes dans un robot pleinement parallèle et comme il n'y a qu'un seul actionneur par jambe, les robots pleinement parallèles plans sont soit à deux ddl soit à trois ddl.

2.1.1. Robots plans à 2 ddl :

Dans le cas où l'on ne considère que les robots constitués d'articulations de types rotoïdes et prismatiques, McCloy [McCloy.90] a démontré qu'il pouvait y avoir vingt architectures différentes. Ce nombre se réduit à six si l'on suppose que les actionneurs sont attachés au sol, qu'il n'y a pas d'articulation prismatique passive et qu'aucun actionneur ne supporte le poids d'un autre actionneur. Ces architectures sont montrées sur la figure (1-2). Les articulations rotoïdes actives sont représentées par des cercles blancs à l'intérieur tandis que les articulations rotoïdes passives sont représentées par des cercles noirs pleins.

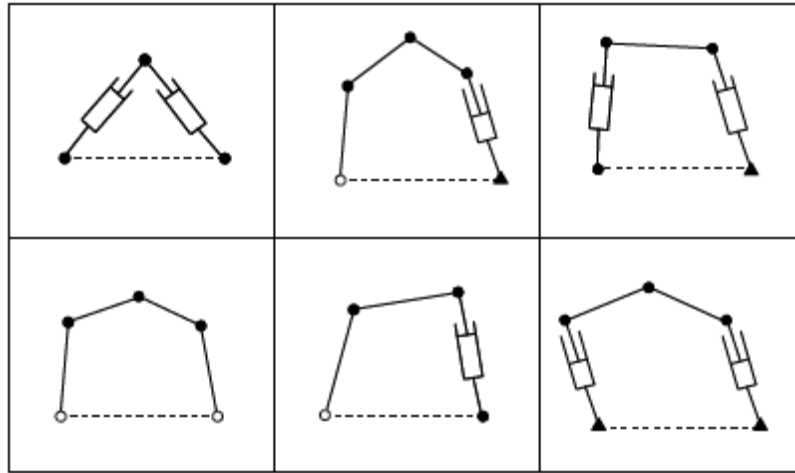


FIG 1-2 : Robots plans à 2 ddl

2.1.2. Robots plans à 3 ddl :

Hayes et Husty [Hayes 03] ont étudié les plateformes généralisées planes à trois chaînes. Ces robots sont composés d'une plateforme mobile reliée par trois chaînes cinématiques. Chaque chaîne contient trois articulations qui peuvent être, soit de type rotoïde (R), soit de type prismatique (P). Ainsi, les types de chaînes possibles sont les séquences suivantes : RRR, RPR, RRP, RPP, PRR, PPR, PRP. Les chaînes de type PPP sont à exclure puisqu'elles imposent une orientation particulière à la plateforme mobile. En d'autres termes, aucune combinaison de translations dans le plan ne permet d'avoir un changement de l'orientation.

Il y a alors sept types de chaînes utilisés. Dans chaque chaîne il n'y a qu'une seule liaison actionnée. Le tableau I.1 montre les 18 chaînes possibles. Les liaisons actionnées sont soulignées. Les chaînes passives sont de type RR, PR, RP, ou bien PP. Les chaînes passives de type PP sont à rejeter, puisqu'une plateforme ayant une chaîne pareille soit n'est pas contrôlable, soit elle est difficilement assemblable quand les liaisons actives sont spécifiées [Hayes.04]. Parmi ces 18 chaînes, il y a 8 paires de chaînes symétriques. Ce qui amène certains auteurs à enlever les chaînes marquées, lors de l'étude des différentes architectures possibles [Bonev.03]. Ceci rend le nombre de chaînes à étudier égal à 10. Si on considère que le sens de montage des chaînes entre la base et l'organe terminal est important nous considérons les 18 chaînes pour calculer le nombre total de plateformes possibles. Ce nombre correspond à la somme du cas où toutes les chaînes sont identiques plus le cas où il y a deux chaînes identiques plus le cas où il y a trois chaînes différentes :

$$C_{18}^1 + 2 \times C_{18}^2 + C_{18}^3 = 1140 \quad (\text{I-1})$$

On montre dans la figure 1.3, deux exemples de robots plans à trois ddl ayant trois chaînes identiques.

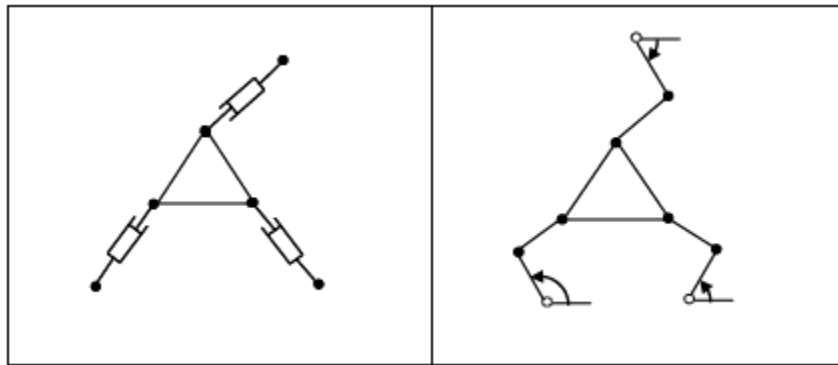


FIG 1-3 : Exemples de robots plans à 3 ddl

2.2. Les robots à mouvements spatiaux :

Les robots à mouvements spatiaux se décomposent principalement en robots à trois ddl et en robots à six ddl. Il existe évidemment des robots à quatre ddl et des robots à cinq ddl. Ici l'objectif étant de montrer les robots parallèles les plus pertinents, voir [Merlet.97] pour plus de détails.

Il existe aussi des robots à mouvements spatiaux qui ont plus de 6 ddl, ces robots ne sont évidemment pas des robots pleinement parallèles.

2.2.1. Robots à 3 ddl :

Les robots parallèles à trois ddl se décomposent principalement en robots translateur et en robots pour la rotation. Il existe aussi des robots qui présentent à la fois des rotations et des translations comme c'est le cas du manipulateur de Lee par exemple [Lee.88] (voir figure (1-4)). Ce manipulateur permet une translation sur l'axe vertical et deux rotations : une de roulis et une de tangage.

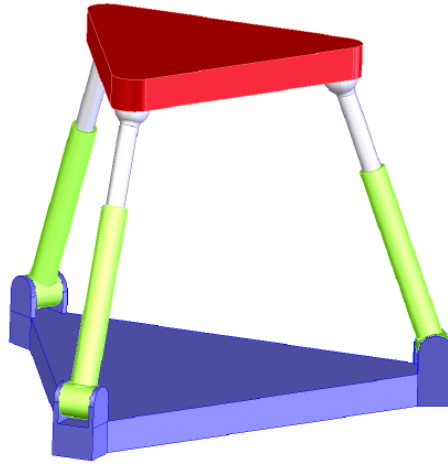


FIG 1-4 : Manipulateur de Lee

2.2.1.1. Robots translateurs :

Ce sont des robots ayant trois ddl de translation. Ils présentent un intérêt important pour les opérations de transfert. Ces robots sont largement utilisés dans les applications de conditionnement dans la mesure où dans ces applications, les trois translations sont suffisantes. Un mouvement de rotation selon l'axe z est souvent rajouté à l'organe terminal. Le robot delta (figure (1-5)) a été proposé par Clavel [Clavel.88]. Ce robot utilise des actionneurs rotatifs. Il est basé sur une propriété intéressante des parallélogrammes pour ne garder que des translations de la plateforme mobile.

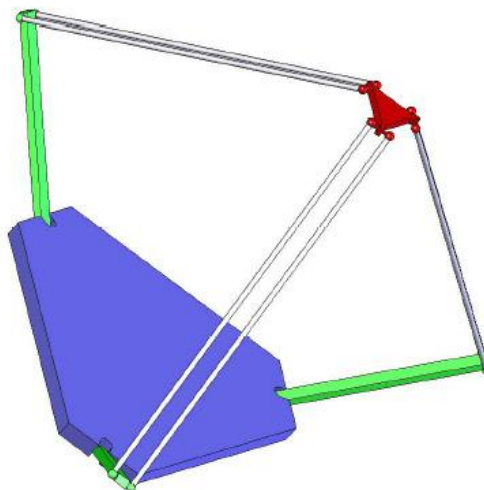


FIG 1-5 : Le robot delta

Le robot 3UPU (figure (1-6)) est constitué de trois chaînes composées de deux joints de cardans reliés par un actionneur prismatique. Un choix judicieux des axes des joints de cardan peut empêcher la rotation de la plateforme mobile [Tsai.96].

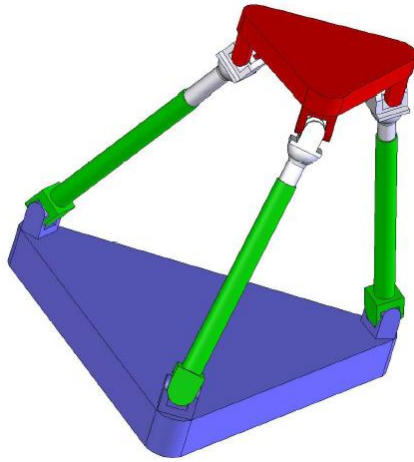


FIG 1-6 : Le 3-UPU

Romdhane [Romdhane.99] a proposé un translateur RAF (voir figure (1-7)). Ce translateur comporte trois jambes SPS et deux chaînes passives qui éliminent les rotations. Une jambe SPS est composée de deux liaisons sphériques reliées par un actionneur prismatique.

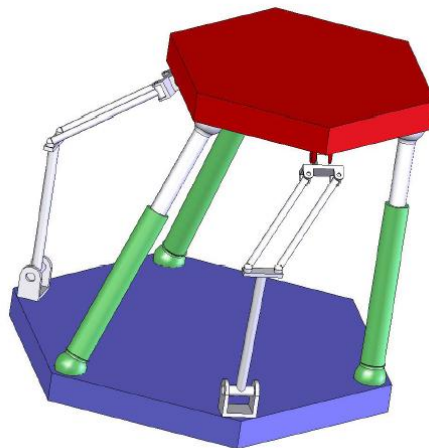


FIG 1-7 : Le RAF

2.2.1.2. Robots pour rotation :

Ces manipulateurs sont une alternative intéressante aux poignets utilisés dans les robots sériels, ils permettent les trois rotations autour d'un point. La figure (1-8) montre le poignet de

Hayward [Hayward 89]. Ce robot se compose de 4 actionneurs prismatiques qui permettent d'orienter un plateau monté sur rotule.

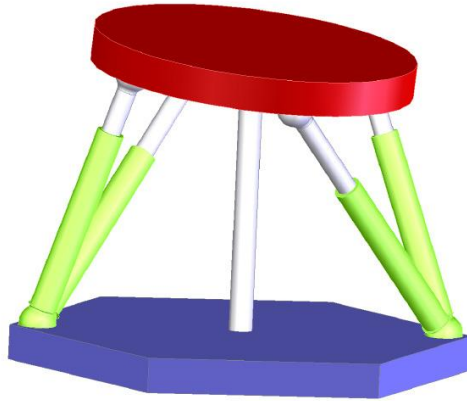


FIG 1-8 : Le poignet de Hayward

Le poignet sphérique de Gosselin [Gosselin 88] est montré dans la figure (1-9). Ce poignet comporte trois chaînes à actionneurs rotatifs dont les axes sont concourants au centre du plateau mobile.

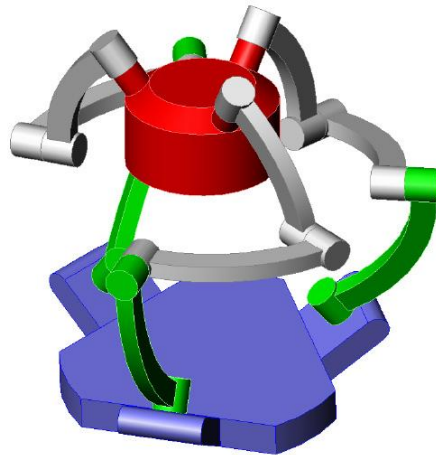


FIG 1-9 : Poignet de Gosselin

3. Comparaison des performances des robots sériels et des robots parallèles :

Les principaux critères de comparaison des robots parallèles par rapport aux robots sériels sont le volume de travail, le rapport masse transportable/masse du robot, la précision et le comportement dynamique.

- **Volume de travail** : le principal défaut d'un robot parallèle est que son domaine accessible est relativement restreint, il correspond en effet à l'intersection du volume de travail de toutes les chaînes cinématiques.
- **Rapport masse transportable/masse du robot** : dans l'architecture série classique l'effecteur et l'objet manipulé se situent à l'extrémité de la chaîne mécanique articulée. Chaque actionneur doit avoir la puissance nécessaire pour mettre en mouvement non seulement l'objet, mais aussi les corps des actionneurs situés en aval. Chaque segment du robot doit donc être dimensionné en conséquence, ce qui conduit à un faible rapport masse transportable / masse du robot. Les actionneurs des robots parallèles se situent le plus souvent au voisinage des points d'articulation de la base si ce n'est sur la base elle-même. Dans tous les cas, ces actionneurs agissent sans mettre en œuvre des transmissions complexes. Les segments peuvent être considérablement allégés. De ce fait, le rapport masse transportable / masse du robot est beaucoup plus élevée, en général d'un facteur d'au moins égal à 10.
- **Précision** : l'architecture même des robots de type sériel pose le problème de l'accumulation des erreurs, une erreur de positionnement sur chaque articulation ayant une répercussion sur la position de l'effecteur, répercussion d'autant plus importante que l'articulation est proche de la base. La mise en série des articulations implique aussi la mise en série de leurs défauts (jeux, frottements, flexion des corps...). Les robots parallèles ne présentent pas cet inconvénient et leur morphologie leur assure une rigidité remarquable même avec des structures mobiles très allégées.
- **Comportement dynamique** : compte tenu de leur faible rapport masse transportable / masse du robot et de leur structure massive, les robots de type sériel ont des performances dynamiques limitées. Avec les robots parallèles, le fait que les actionneurs soient ramenés au voisinage des points d'articulation de la base donne des

performances dynamiques appréciables. Par ailleurs, le fait de diminuer les effets de couplage dynamique entre les articulations, la commande pouvant éventuellement se contenter d'un modèle dynamique simplifié.

Nous résumons dans le tableau suivant les avantages et les inconvénients des robots sériels et des robots parallèles :

| Manipulateur sériel | Robot parallèle |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> -Succession de segments en série de la base vers l'effecteur -Chaine cinématique ouverte -Important espace de travail -Faible précision -Faible charge transportable -Faible rigidité | <ul style="list-style-type: none"> - Tout les segments sont au contact de la base de l'effecteur -Chaine cinématique fermée - Espace de travail restreint -Grande précision -Lourde charge transportable -Très rigide |

Tableau 1-1 : Comparatif entre manipulateur sériel et manipulateur parallèle

4. Tendances et perspectives de la recherche en robotique parallèle :

La recherche contemporaine en robotique parallèle s'oriente vers l'optimisation de la conception des robots à très haute précision, le développement des robots contraints en menant des investigations pour la détermination des espaces de travail et des singularités, la conception de machines outils à structure parallèles et en fin la multi-configuration pour aboutir à l'auto-configuration.

4.1. Optimisation de la conception des robots parallèles à très haute précision :

Dans l'industrie de la haute précision, la plupart des opérations exigent l'intervention de robots pouvant fournir des mouvements très précis et hautement répétables. Or, pour garantir l'exactitude du mouvement c'est à dire avoir une précision absolue, il est indispensable de limiter, voire d'éliminer, les effets de différentes sources d'erreur qui provoquent l'imprécision de l'organe terminal du robot, souvent à l'aide d'un calibrage.

Cependant, un calibrage ne peut pas être appliqué pour compenser des erreurs parasites, erreurs suivant les degrés de liberté non souhaités, des robots comme, par exemple, les variations angulaires subies par l'organe terminal d'un robot à trois degrés de liberté en translation. Les principales orientations des travaux dans ce domaine de recherche est d'identifier et de classer ces différentes sources d'erreur selon leur importance et d'établir des règles de conception de robots parallèles à articulations flexibles afin d'assurer une précision absolue optimale par la limitation des erreurs parasites, ces robots seront destinés pour des applications médicales [Niaritsiry.2006].

4.2. Conception de robots reconfigurables :

Les robots reconfigurables sont des systèmes intelligents qui peuvent changer de façon autonome leur configuration pour s'adapter aux changements d'environnement et de tâche.

Les avantages de développer des systèmes reconfigurables incluent le comportement d'adaptabilité, de réutilisabilité, de convertibilité et de compacité. La recherche sur des systèmes reconfigurables est principalement en activité en robotique [Xi.2006]. L'idée principale de développer des systèmes reconfigurables est basée sur l'utilisation des composants modulaires comme modules. Dans le secteur de la robotique, plusieurs robots modulaires intéressants reconfigurables ont été proposés, et ils peuvent être classés dans deux catégories: self-configuration et manuelle-configuration. Les robots à configuration manuelle sont en fait les robots modulaires. Ils peuvent seulement être reconfigurés avec une certaine forme d'aide manuelle. Les unités modulaires sont habituellement établies avec les contrôleurs incorporés et l'ordinateur principal a les possibilités pour identifier rapidement la nouvelle configuration et pour produire automatiquement des équations cinématiques et dynamiques pour la commande.

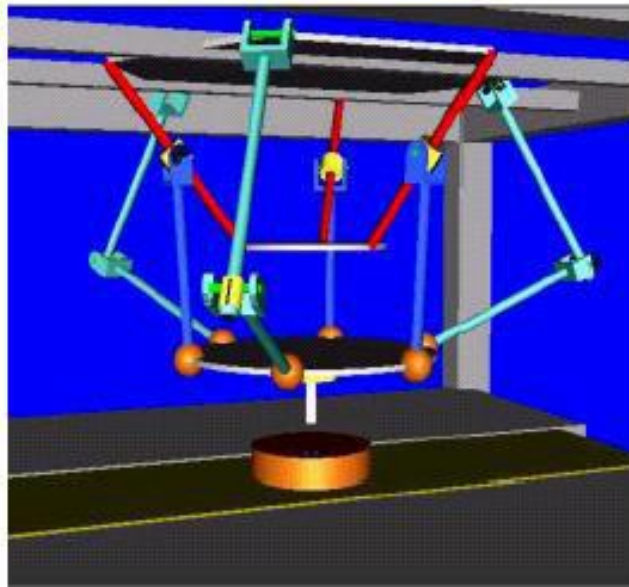


FIG 1-10 : Robot parallèle reconfigurable

II- PROBLEMATIQUE :

1. Introduction :

Les robots d'aujourd'hui ont la tâche délicate de remplacer avantageusement l'être humain dans ces activités les plus diverses (réparation, assemblage, et interventions diverses). Au début de la robotique, on demandait aux robots d'être juste des automates, capables d'effectuer des gestes simples, précis et de manière répétitives. Ensuite, on leur a demandé de s'adapter à leur environnement et de suivre des consignes strictes malgré les perturbations. Ce qui a conduit aux lois de contrôle robustes et aux commandes adaptatives. Aujourd'hui, nous souhaitons qu'ils puissent réaliser des tâches plus complexes. En effet, les missions confiées aux robots sont de nature diverses. Par exemple, les robots intervenant dans les milieux hostiles doivent être relativement autonomes. Cela signifie qu'ils peuvent évoluer dans des environnements contraints.

Une classe importante des systèmes robotiques sont les robots parallèles. Ils sont des moyens de production utilisés en tant que manipulateurs de charges divers et d'outils multiformes : meules, fraises, pinces à souder ...etc. Leurs champs d'application est très vaste. Ils doivent assurer, avec précision et en conformité avec leurs précisions et en conformité avec la tâche à exécuter, le positionnement et l'orientation de leurs organes

terminaux dans un référentiel fixe indépendant. Ainsi ils disposent de six degrés de liberté et permettent de commander les six mobilités d'un corps dans l'espace euclidien.

2. Problème de conception d'un robot parallèle :

Dans un problème global de conception d'un robot parallèle, seules les informations concernant la tâche elle-même sont disponibles. Certaines de ces informations sont difficiles à formaliser mathématiquement (le problème de trouver la topologie adaptée à la réalisation de tâches, la forme du volume de travail).

Dans un tel problème d'optimisation global, le nombre trop élevé de paramètres à évaluer rend le problème complexe et difficile à résoudre.

La méthodologie d'optimisation appliquée pour ce type de problème s'appelle optimisation séquentielle, cette méthode consiste à décomposer le problème global en sous problèmes et à les résoudre chacun à son tour. Un sous problème peut utiliser les résultats du sous problème précédent.

Le problème de conception de robot doit être décomposé en trois sous problèmes ou on évalue quelques paramètres dans chaque sous problème. Les paramètres déjà évalués dans le premier problème servent comme des données pour le second. Les sous problèmes sont définis comme suit :

- 1- Le premier est le choix de la forme topologique et de la géométrie du robot (succession de liaisons, type de structure), ce problème d'optimisation est trop compliqué, les travaux publiés sur ce domaine utilisent les algorithmes évolutionnaires ou les algorithmes génétiques, mais en général le choix est porté sur l'expérience de l'ingénieur.
- 2- Le deuxième est la détermination de la géométrie du robot (longueur des segments) ou les chercheurs exploitent le principe de manipulabilité.
- 3- Le troisième est le dimensionnement des organes mécaniques (actionneurs, mécanismes et segments), il est basé sur l'évaluation des sollicitations dynamiques maximales dans la structure mécanique.

3. Intérêt de l'évaluation des sollicitations dynamiques maximales :

Nous abordons dans ce paragraphe l'intérêt de l'évaluation des sollicitations dynamiques maximales et les domaines d'exploitation des ces valeurs pour un robot parallèle.

Quand le robot parallèle n'est qu'au stade de la conception, une première estimation des sollicitations dynamiques (torseurs de liaisons) est indispensable pour dimensionner sa structure dans le respect du cahier de charges prévisionnel. Afin d'établir un cahier d'entretien préventif, la connaissance des sollicitations dynamiques maximales sur les liaisons permet d'évaluer le taux de charges équivalents sur les organes interchangeables les plus critiques du robot.

Les sollicitations dynamiques varient de manières complexes et dans des limites très larges. Elles sont prépondérantes relativement aux charges statiques et sont largement influencées par l'organe embarqué en raison de sa position comme corps terminal et des accélérations importantes qu'il subit. La forte dépendance des sollicitations dynamiques vis-à-vis de l'application pose le problème de l'adaptabilité du robot face à un emploi donné. Ce problème se pose pour les robots parallèles en phase d'exploitation pour les principales raisons ci-dessous [YOU.98] :

- Les structures optimisées pour réduire les sollicitations dynamiques.
- Les phénomènes de couplage importants.
- Les sollicitations dynamiques prépondérantes.
- Chaque sollicitation au niveau des articulations est une fonction non l des variables articulaires (q, \dot{q}, \ddot{q}) .

L'évaluation des sollicitations dynamiques maximales permet de protéger les robots industriels face aux surcharges d'emploi et de garantir la bonne tenue du robot pour tout emploi rentrant dans les limites des performances affichées dans la documentation technique qui sont vitesse, accélération et charge autorisée. Les paramètres géométriques et cinématiques quand à eux sont dictés par des considérations d'exploitation liées au robot.

4. Contribution:

Le travail que nous menons aborde une partie du problème de conception optimal d'un robot parallèle planaire à 3 degrés de liberté. L'objectif visé est l'établissement d'une méthode de recherche des sollicitations dynamiques maximales induites par une charge de référence sur les actionneurs de ce robot. Ce dernier, doit être en mesure de manipuler cette charge de référence en toutes situations et sans dégradation des performances cinématiques (vitesses et accélérations maximales).

GENERATION DE MOUVEMENTS



Chapitre 2

1. INTRODUCTION

Dans un poste de travail le robot est amené à réaliser trois grandes tâches. Des déplacements purs, des efforts purs en statiques et des tâches combinant des déplacements et des efforts. Lors du déplacement, nous attendons du manipulateur qu'il suive, avec une loi horaire donnée, une trajectoire définie par une suite de points, correspondant aux situations successives de l'organe terminal ou de configurations articulaires. Ces points peuvent être :

- Programmés par apprentissage.
- Donnés en ligne par un capteur extéroceptif.
- Issue d'une base de données d'un système de CAO...

Le problème de génération de mouvement est de calculer les consignes de référence en position, vitesse et accélération qui sont des fonctions du temps qui assurent le passage du robot par ces points.

Plusieurs classes de mouvements peuvent être distinguées :

- Mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points,
- Mouvements entre deux points avec points intermédiaires spécifiés en particulier pour éviter les obstacles, et trajectoire libre entre les points intermédiaires
- Mouvement entre deux points avec trajectoire contrainte entre les points ; par exemple trajectoire rectiligne
- Mouvement entre deux points avec points intermédiaires, et trajectoire contrainte entre points intermédiaires.

Dans les deux premiers cas, la génération de trajectoires peut être réalisée directement dans l'espace articulaire. Dans les derniers cas, comme la trajectoire est décrite dans l'espace opérationnel, il est préférable de raisonner dans cet espace.

2. GENERATION DE MOUVEMENTS

2.1. GENERATION DE MOUVEMENT DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

| Avantages | Inconvénients |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Elle nécessite moins de calcul en ligne car il n'y a pas d'appel au modèle géométrique direct et inverse • Le mouvement peut être effectué sans passage par les configurations singulières • Les contraintes de vitesse et de couples maximaux sont déduites directement des limites physiques des actionneurs | <ul style="list-style-type: none"> • La géométrie de la trajectoire de l'organe terminal est imprévisible : risque de collisions lorsque le robot évolue dans un environnement très encombré |

2.2. GENERATION DE MOUVEMENT DANS L'ESPACE OPERATIONNEL

| Avantages | Inconvénients |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Maîtrise de la trajectoire | <ul style="list-style-type: none"> • Transformation de coordonnées de chaque point de la trajectoire • Possibilité de mise en échec quand la trajectoire passe par un point singulier • Possibilité de mise en échec si les points de la trajectoire ne sont pas dans le volume accessible du robot ou chaque fois que la trajectoire nécessite une reconfiguration du robot • Les limites en vitesse et en couple du robot varient en fonction de la configuration. On impose en général ces limites en terme de performances moyennes valables quelle que soit la configuration. On travaille donc en deçà des capacités réelles du robot. |

Remarque : le choix de l'espace de génération de mouvement dépend fortement de l'application considérée. Chacune des méthodes a ses propres limites, inhérentes au fait que les contraintes sont exprimées soit dans l'espace articulaire (butées, vitesse et couple maximum), soit dans l'espace opérationnel (précision, prise en compte des obstacles).

2.3 GENERATION DE MOUVEMENT ENTRE DEUX POINTS DE L'ESPACE ARTICULAIRE

On considère un robot à n degrés de liberté. Soit $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(0)$ et $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ les vecteurs de coordonnées articulaires correspondant aux configurations initiale et finale. On désigne respectivement par \mathbf{Kv} et \mathbf{Ka} les vecteurs des vitesses et accélérations maximales. Les paramètres Kv_j sont généralement calculés de façon exacte à partir des caractéristiques des actionneurs et des rapports de réduction des organes de transmissions. Tandis que les paramètres Ka_j sont approchés par le rapport des couples moteurs maximaux aux inerties maximales vues par les articulations.

Le mouvement, interpolé entre \mathbf{q}_i et \mathbf{q}_f ces en fonction du temps t , est décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i + r(t) \cdot \mathbf{D} \quad t \in [0 \quad t_f] \quad (1.1)$$

Où

- $r(t)$ est une fonction d'interpolation qui satisfait $r(0) = 0$ et $r(t_f) = 1$
- $\mathbf{D} = \mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i$

Le temps minimum $(t_f)_j$ pour une articulation A_j doit saturer la vitesse et/ou l'accélération de cette articulation. Le temps global minimal pour passer de la configuration \mathbf{q}_i à la configuration \mathbf{q}_f est le temps mis par l'articulation contraignante, articulation pour laquelle le temps minimal est le plus grand. On en déduit que :

$$t_f = \text{Max}(t_{f1}, t_{f2}, \dots, t_{fn}) \quad (1.2)$$

Plusieurs fonctions permettent de satisfaire le passage par \mathbf{q}_i à $t = 0$ et par \mathbf{q}_f à $t = t_f$. Nous étudions successivement l'interpolation polynômiale, la loi Bang–Bang et la loi Bang–Bang avec palier de vitesse ou loi trapèze. Ce sont les méthodes d'interpolation les plus utilisées en robotiques.

2.3.1 Interpolation polynômiale

a) Interpolation linéaire

On a :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{t}{t_f} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i + \frac{t}{t_f} \cdot \mathbf{D} \end{cases} \quad (1.3)$$

Le temps minimum t_f est égale : $Max(|D_j|/Kv_j)$

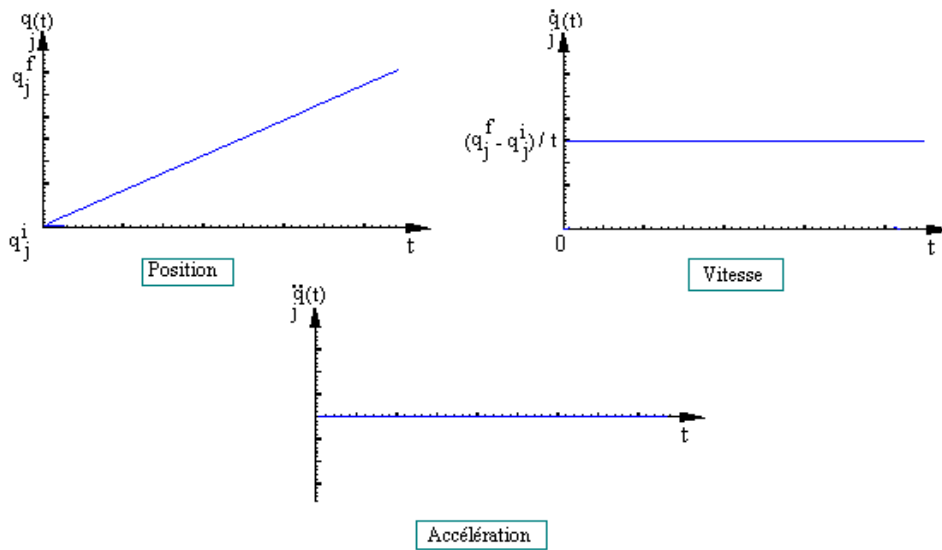


Figure 2. 1

Interpolation linéaire sur une articulation A_j donnée

Cette loi est continue en position, par contre elle est discontinue en vitesse : $\dot{q}(0-) = \vec{0}$ et

$\dot{q}(0+) = \frac{1}{t_f} \cdot D$. Elle provoque des à-coups sur le robot.

b) Polynôme d'interpolation de degré trois

Si l'on impose une vitesse nulle aux points de départ et d'arrivée. Nous ajoutons deux contraintes aux contraintes de position. Le degré minimal du polynôme qui satisfait ces quatre contraintes est de degré trois et a pour forme générale :

$$q(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$$

Avec : $\begin{cases} q(0) = q_i \\ q(t_f) = q_f \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{q}(0) = \vec{0} \\ \dot{q}(t_f) = \vec{0} \end{cases}$

La détermination des coefficients est obtenue par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} q(t) = a_0 = q_i \\ q(t_f) = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 \\ \dot{q}(0) = a_1 = 0 \\ \dot{q}(t_f) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = q_i \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2} \cdot D \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3} \cdot D \end{cases}$$

Ce qui conduit à la fonction d'interpolation suivante :

$$r(t) = 3 \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 - 2 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 \quad (1.4)$$

Pour une articulation quelconque A_j , la vitesse est maximum lorsque $t = t_f/2$. Elle a pour valeur :

$$|\dot{q}_{jmax}| = \frac{3|D_j|}{2t_f}$$

et l'accélération est maximale à $t = 0$ et à $t = t_f$ est égale à :

$$|\ddot{q}_{jmax}| = \frac{6|D_j|}{2t_f^2}$$

Le temps minimum t_f est donné par : $t_f = \text{Max}(t_{f1}, \dots, t_{fn})$

Avec:
$$t_{fj} = \text{Max} \left[\frac{3|D_j|}{2kv_j}, \sqrt{\frac{6|D_j|}{ka_j}} \right] \quad (1.5)$$

Cette loi de mouvement assure la continuité des vitesses mais pas celle des accélérations. En pratique, les robots industriels sont suffisamment rigides pour que cette discontinuité soit filtrée par la mécanique.

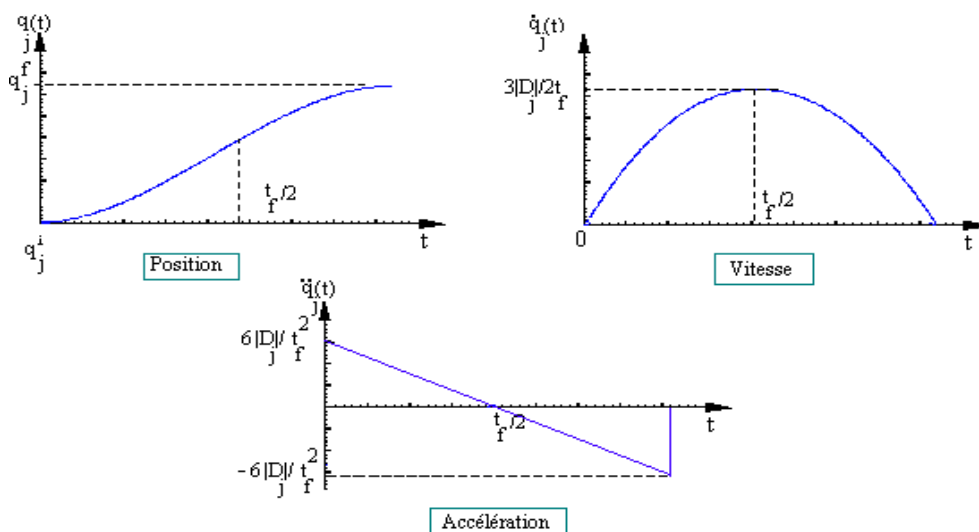


Figure 2.2
Loi polynômiale de degré trois

c) *Polynôme de degré cinq*

Nous avons vu que l'interpolation de degré trois assure la continuité en vitesse, si l'on recherche en plus la continuité des accélérations, il faut satisfaire six contraintes et le polynôme d'interpolation doit être de degré cinq. Et en plus nous choisissons :

$$\begin{cases} q(0)=0 \\ q(t_f)=0 \end{cases}, \begin{cases} \dot{q}(0)=0 \\ \dot{q}(t_f)=0 \end{cases}, \begin{cases} \ddot{q}(0)=0 \\ \ddot{q}(t_f)=0 \end{cases}$$

Donc :
$$r(t) = 10 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \tag{1.6}$$

Les vitesses et accélérations maximales sont : $|\dot{q}_j \max| = \frac{15|D_j|}{8t_f}$; $|\ddot{q}_j \max| = \frac{10|D_j|}{\sqrt{3}t_f^2}$

Le temps minimum est donné par : $t_f = \text{Max}(t_{f1}, \dots, t_{fn})$

Avec :
$$t_{fj} = \text{Max} \left[\frac{15 \cdot |D_j|}{8 \cdot kv_j}, \sqrt{\frac{10 \cdot |D_j|}{\sqrt{3} \cdot ka_j}} \right] \tag{1.7}$$

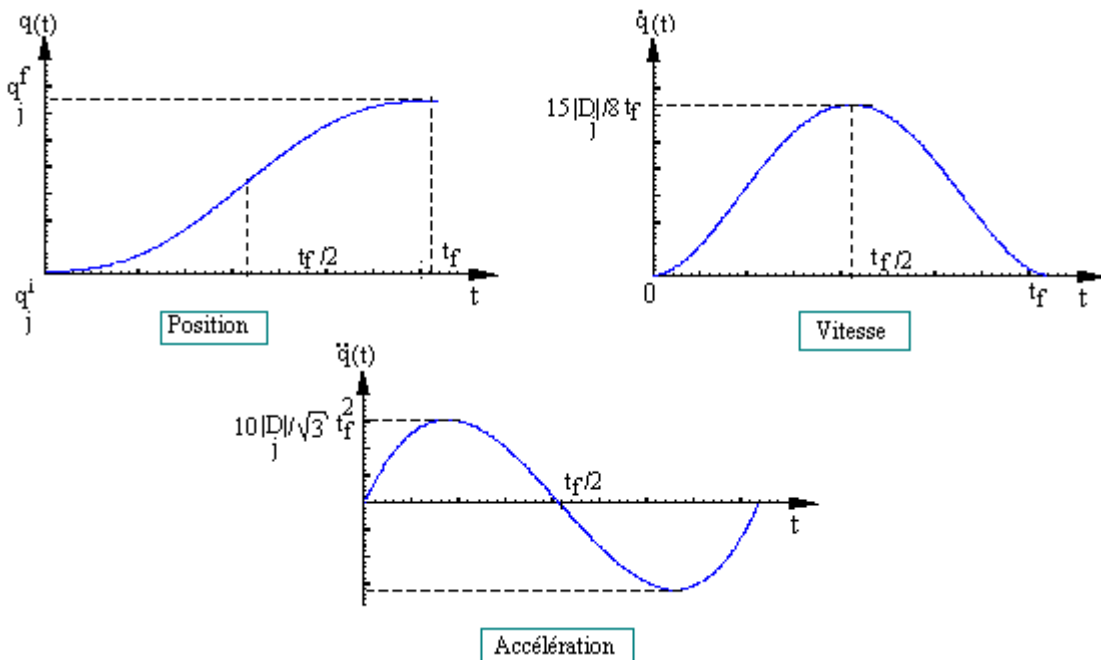


Figure 2.3
Loi polynômiale de degré cinq

2.3.2 Loi Bang–Bang

Le mouvement est représenté par une phase d'accélération constante jusqu'à $t_f/2$ puis par une phase de décélération constante. Les vitesses de départ et d'arrivée sont nulles. Le mouvement est donc continu en position et en vitesse, discontinu en accélération.

La position est donnée par :

$$\begin{cases} q(t) = q_i + 2 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^2 \cdot D & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_f}{2} \\ q(t) = q_i + \left[-1 + \frac{4 \cdot t}{t_f} - 2 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^2\right] \cdot D & \text{pour } \frac{t_f}{2} \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (1.8)$$

Pour une articulation j donnée, les vitesses et accélérations maximales ont pour expression :

$$|\dot{q}_{j_{max}}| = \frac{2|D_j|}{t_f} \quad ; \quad |\ddot{q}_{j_{max}}| = \frac{4|D_j|}{t_f^2}$$

Le calcul du temps minimum se fait comme dans le cas polynômiale avec :

$$t_{f_j} = \text{Max} \left[\frac{2 \cdot |D_j|}{kv_j}, 2 \cdot \sqrt{\frac{|D_j|}{ka_j}} \right] \quad (1.9)$$

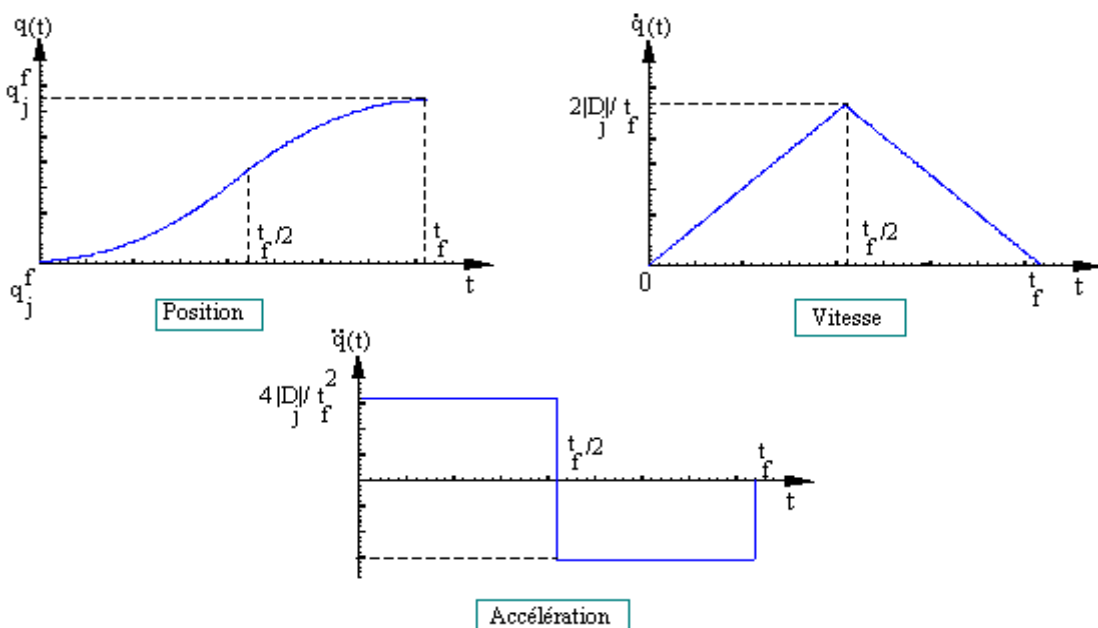


Figure 2.4 Loi Ban –Bang

Avec la loi Bang–Bang, le temps minimal est assuré en saturant soit la vitesse soit l'accélération. Lorsque la vitesse est saturée, le fait de rajouter un palier de vitesse permet de saturer aussi l'accélération et de diminuer le temps de parcours. C'est la description de la loi trapèze.

2.3.3 Loi trapèze (loi Bang–Bang avec palier de vitesse)

Ce type de loi est le plus couramment implanté sur les contrôleurs de robots industriels. La loi trapèze est la loi optimale en temps parmi celles qui assurent la continuité en vitesse.

Le mouvement d'une articulation A_j donnée est représenté par les relations :

$$\begin{cases} q_j(t) = q_j^i + \left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot ka_j \cdot Sgn(D_j) & \text{pour : } 0 \leq t \leq \tau_j \\ q_j(t) = q_j^i + \left(1 - \frac{\tau_j}{2}\right) \cdot kv_j \cdot Sgn(D_j) & \text{pour : } \tau_j \leq t \leq t_{fj} - \tau_j \\ q_j(t) = q_j^i - \frac{1}{2}(t_{fj} - t_j)^2 \cdot ka_j \cdot Sgn(D_j) & \text{pour : } t_{fj} - \tau_j \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (1.10)$$

Supposons que la vitesse est saturée dans l'articulation A_j . On peut alors, d'après les relations de la vitesse et d'accélération maximales de la loi Bang–Bang, écrire l'inégalité :

$$\frac{|D_j|}{kv_j} > \sqrt{\frac{|D_j|}{ka_j}}$$

Donc la condition d'existence d'un palier de vitesse est la suivante : $|D_j| > \frac{kv_j^2}{ka_j}$

L'air du trapèze représentant l'évolution des vitesses est égale à la distance parcourue dans l'intervalle $[0, t_{fj}]$.

Donc :

$$|D_j| = |q_j^f - q_j^i| = 2 \cdot \int_0^{\tau_j} ka_j \cdot t \cdot dt + \int_{\tau_j}^{t_{fj} - \tau_j} kv_j \cdot dt = kv_j \cdot t_{fj} - \frac{kv_j^2}{ka_j}$$

On en déduit le temps de parcours minimal pour l'articulation j :

$$t_{fj} = \frac{kv_j}{ka_j} + \frac{|D_j|}{kv_j} = \tau_j + \frac{|D_j|}{kv_j} \quad (1.11)$$

Synchronisation de mouvement

Afin de synchroniser le mouvement des articulations, on utilise la méthode suivante : Soit $\lambda_j \cdot kv_j$ la vitesse de la loi synchronisée pour l'articulation A_j et soit $v_j \cdot ka_j$ l'accélération correspondante qui produit le mouvement. On désire calculer la valeur de τ qui assure un temps t_f minimum. Etudiant le problème sur deux articulations.

Pour les deux articulations 1 et 2 qui ont comme temps finaux :

$$\begin{cases} t_{f1} = \tau + \frac{|D_1|}{kv_1} \\ t_{f2} = \tau + \frac{|D_2|}{kv_2} \end{cases}$$

La loi synchronisée est telle que :

$$t_f = \frac{\lambda_1 \cdot kv_1}{v_1 \cdot ka_1} + \frac{|D_1|}{\lambda_1 \cdot kv_1} = \frac{\lambda_2 \cdot kv_2}{v_2 \cdot ka_2} + \frac{|D_2|}{\lambda_2 \cdot kv_2} \tag{1.12}$$

Avec $t_f \geq \text{Max}(t_{f1}, t_{f2})$. On doit calculer λ_j et v_j pour rendre t_f minimum.

$$\tau = \frac{\lambda_1 \cdot kv_1}{v_1 ka_1} = \frac{\lambda_2 \cdot kv_2}{v_2 \cdot ka_2} \tag{7.13}$$

De l'expression (1.12), on déduit que :

$$\lambda_2 = \frac{|D_2| \cdot kv_1}{|D_1| \cdot kv_2} \tag{7.14}$$

$$v_2 = \frac{|D_2| \cdot ka_1}{|D_1| \cdot ka_2} \tag{7.15}$$

Et pour satisfaire les contraintes de vitesse, il faut que :

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \\ 0 \leq \lambda_2 \leq 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

En utilisant la relation (1.14), la dernière inégalité devient : $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{kv_2 \cdot |D_1|}{kv_1 \cdot |D_2|}$

Un raisonnement analogue sur les contraintes d'accélération conduit à :

$$\begin{cases} 0 \leq v_1 \leq 1 \\ 0 \leq v_2 \leq \frac{ka_2 \cdot |D_1|}{ka_1 \cdot |D_2|} \end{cases} \tag{1.17}$$

Le temps t_f minimum est obtenu lorsque les paramètres λ_1 et v_1 sont les plus grands et satisfont simultanément les contraintes ci-dessus :

$$\begin{cases} \lambda_{1opt} = \text{Min} \left[1, \frac{|D_1| \cdot kv_2}{|D_2| \cdot kv_1} \right] \\ v_{1opt} = \text{Min} \left[1, \frac{|D_1| \cdot ka_2}{|D_2| \cdot ka_1} \right] \end{cases} \quad (1.18)$$

La durée correspondante de la phase d'accélération vaut alors:

$$\tau_{opt} = \frac{\lambda_{1opt} \cdot kv_1}{v_{1opt} \cdot ka_1} \quad (1.19)$$

Pour le cas où nous avons n articulations l'écriture de (1.18) est la suivante :

$$\begin{cases} \lambda_{1opt} = \text{Min} \left[1, \frac{|D_1| \cdot kv_j}{|D_j| \cdot kv_1} \right] \\ v_{1opt} = \text{Min} \left[1, \frac{|D_1| \cdot ka_j}{|D_j| \cdot ka_1} \right] \end{cases} \quad (j = 2,3,\dots,n) \quad (1.20)$$

Si pour une articulation A_j donnée, la loi optimale n'atteint pas la vitesse maximale kv_j , nous remplaçons dans la formule ci-dessus le terme kv_j par la vitesse maximale effectivement atteinte (Figure VII.5).

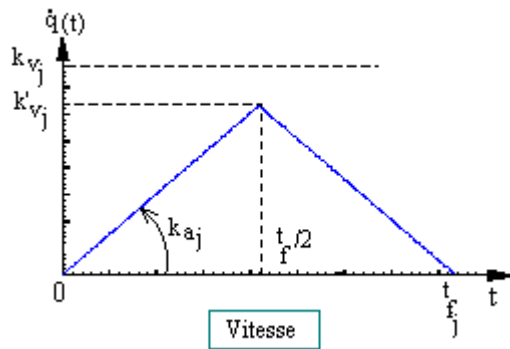


Figure 2.5
Cas où la vitesse n'est pas saturée

Cette situation se présente lorsque : $|D_j| < \frac{kv_j^2}{ka_j}$

On déduit que la vitesse maximale atteinte a pour valeur : $kv'_j = \sqrt{|D_j| \cdot ka_j}$

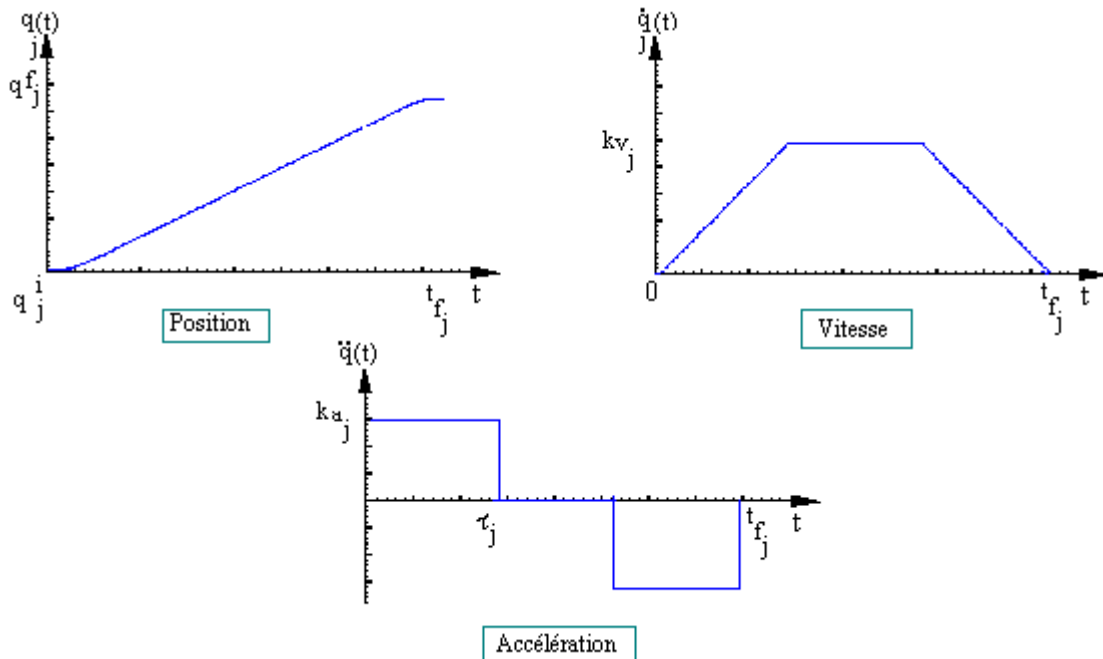


Figure 2.6

Evolution des position, vitesse et accélération sur l'articulation A_j avec une loi trapèze

3. CONCLUSION

La partie de ce chapitre a permis de présenter les méthodes de génération de mouvement couramment utilisées en robotique. Différents modes d'interpolations ont été étudiés, notamment la loi Bang–Bang avec palier de vitesse qui est implantée sur la plupart des contrôleurs industriels. Pour chacun, on a donné l'expression de du temps minimum, temps à partir duquel on peut réaliser la coordination articulaire. Nous avons ensuite présenté la méthode basée sur les fonctions splines cubiques pour la génération de mouvement prenant en compte des points intermédiaires. Ces points permettant de déformer la trajectoire en vue d'éviter les collisions entre le robot et les objets de l'environnement. Ces méthodes s'appliquent aussi bien dans l'espace articulaire que dans l'espace opérationnel.

MODELISATION DYNAMIQUE



Chapitre 3

1. Introduction

Un robot parallèle peut être considéré comme étant un Système Multi-Corps (SMC) à chaîne complexe. Pour simuler le comportement dynamique d'un tel système, il est nécessaire d'établir les modèles dynamiques qui seront utiles à la compréhension et à la résolution de ce problème. Les modèles développés dans ce chapitre sont basés sur des formalismes couramment utilisés en robotique.

Cette partie présente une approche générale pour la description et la modélisation du comportement dynamique des systèmes multi-corps à chaîne fermée, puis l'application de cette approche à la modélisation du comportement dynamique d'un robot parallèle.

2. Modélisation des systèmes multi-corps

Dans cette section, nous nous intéressons à la description géométrique et à la modélisation dynamique des SMC à chaîne arborescente ou fermée ayant une base fixe ou mobile. L'approche multi corps utilisée est constituée par les étapes suivantes: (i) la description géométrique du système, (ii) la génération des équations de contraintes (dans le cas d'un SMC à chaîne fermée), (iii) le traitement des équations de contraintes, (iv) la génération des équations du mouvement et (v) l'intégration de ces équations du mouvement pour la simulation du comportement dynamique du système. Les hypothèses simplificatrices de cette approche sont les suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides,
- Les liaisons son supposées sans jeu mécanique.

2.1. Systèmes multi corps à chaîne arborescente

a) Description géométrique

Afin de modéliser les SMC à chaîne arborescente de façon systématique, il est nécessaire d'utiliser une méthode de description géométrique adéquate. La méthode la plus utilisée pour ce type de systèmes est celle établie par W. Khalil et J. Kleinfinger . Cette méthode, dite de Denavit et Hartenberg Modifiée (DHM), permet une description homogène,

avec un nombre minimum de paramètres géométriques, des SMC à chaîne ouverte simple ou fermée.

Dans cette méthode, la configuration d'un SMC à chaîne arborescente est définie par le vecteur \mathbf{q} , de n coordonnées indépendantes, appelé vecteur des coordonnées généralisées du système.

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (2.1)$$

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ième}}$ articulation (notée A_j) du système est définie par :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \text{ avec } \bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

Où :

$\sigma_j = 0$ si l'articulation A_j est rotoïde.

$\sigma_j = 1$ si l'articulation A_j est prismatique.

b) Modélisation dynamique

On appelle modèle dynamique, d'un SMC à chaîne arborescente, le système d'équations qui permet d'exprimer le vecteur des efforts généralisés (forces et/ou couples) appliqués au niveau des actionneurs en fonction des variables cinématiques généralisées du système et des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement. On représente ce modèle par une relation de la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_{ext}) \quad (2.2)$$

Avec $\mathbf{\Gamma}$: vecteur des efforts généralisés,

\mathbf{f}_{ext} : torseur des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement

Plusieurs formalismes sont utilisés pour établir le modèle dynamique d'un SMC. Les plus souvent utilisés sont : le formalisme de Lagrange et celui de Newton-Euler. Le formalisme le plus adapté pour l'établissement du modèle dynamique dédié à l'analyse et la simulation des SMC est celui de Newton-Euler. Ceci pour les deux raisons suivantes : (1) ce formalisme est caractérisé, par rapport à celui de Lagrange, par un nombre d'opérations (additions et multiplications) relativement réduit, ce qui se traduit par un gain en temps de calcul, et (2) le calcul du torseur de tous les efforts appliqués sur le système, qui est nécessaire pour l'analyse de la structure du SMC .

2.2. Systèmes multi corps à chaîne fermée

a) Description géométrique

Un système multi-corps à chaîne fermée est constitué de $n+1$ corps, la base étant le corps C_0 , éventuellement de plusieurs organes terminaux et dispose de L articulations ($L > n$). Le nombre de boucles fermées est donné par la relation : $B = L - n$. Parmi les L articulations, N seulement sont motorisées. On suppose que la structure est compatible avec les contraintes de fermeture des boucles, que le nombre de degrés de liberté du système est égal au nombre d'articulations motorisées N et que la connaissance des N variables articulaires correspondantes permet de déterminer la configuration du système, c'est-à-dire la situation de tous les corps du système. Pour distinguer entre les articulations motorisées et non motorisées, on introduit le paramètre μ_j telle que :

- $\mu_j = 1$ si l'articulation A_j est motorisée (active),
- $\mu_j = 0$ si l'articulation A_j est non motorisée (passive).

Pour déterminer les paramètres géométriques d'un tel système, on suit les trois étapes suivantes :

Première étape : on construit d'abord une structure arborescente équivalente comportant n articulations et n corps mobiles en coupant virtuellement chacune des boucles sur l'une de ses articulations (généralement passive). On place ensuite les repères sur les corps et on détermine les paramètres géométriques de la structure arborescente équivalente en appliquant les règles et les conventions de la méthode employée pour la description géométrique d'un SMC à chaîne arborescente.

Deuxième étape : on numérote les articulations coupées à partir de $n+1$ jusqu'à L . Pour chaque articulation coupée A_k , on définit un repère \mathcal{R}_k fixe par rapport à l'un des corps supportant cette articulation, C_j par exemple (Figure 2.6). On suppose que l'axe \mathbf{z}_k est porté par l'axe de l'articulation A_k , l'axe \mathbf{x}_k est porté par la perpendiculaire commune à \mathbf{z}_k et \mathbf{z}_j (Figure 2.6). À partir des quatre (ou six) paramètres usuels indicés k , on peut décrire la transformation entre les repères \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_k , $i = a(k)$ désignant l'autre corps connecté à l'articulation A_k .

Troisième étape : le repère \mathcal{R}_k étant fixe par rapport au corps C_j , on peut définir des paramètres géométriques constants exprimant la transformation entre \mathcal{R}_j et \mathcal{R}_k . Pour éviter toute confusion, cette transformation constante sera notée ${}^jT_{k+B}$, avec $j = a(k + B)$ et les

paramètres de la transformation seront indicés $k+B$ (pour $k = n+1, \dots, L$). Ceci revient à dire que le repère \mathfrak{R}_{k+B} est confondu avec \mathfrak{R}_k mais leurs antécédents sont différents. Étant donné que \mathbf{x}_{k+B} est perpendiculaire à l'axe \mathbf{z}_j donc $r_{k+B} = 0$ et $O_{k+B} = 0$ (Figure 3.1).

Ainsi, la description d'un SMC à chaîne fermée se ramène à celle d'un système à chaîne arborescente obtenu en coupant chaque boucle sur une de ses articulations passives et en ajoutant deux repères à ce point de coupure, ce qui donne un total de $n + 2B$ repères. La configuration du système est définie par le vecteur \mathbf{q} de L variables articulaires :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_L]^T \tag{2.5}$$

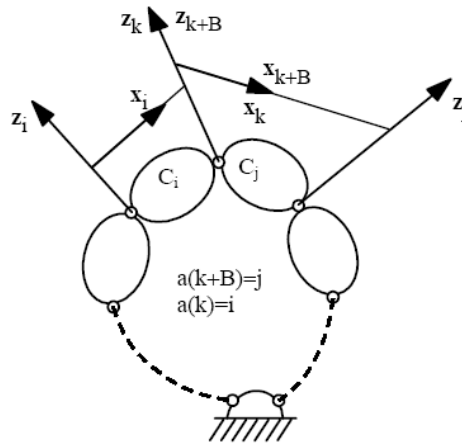


Figure 3.1. Repères placés sur une articulation coupée

B) Contraintes géométriques du système

Un SMC à chaîne fermée est caractérisé, par rapport à un système à chaîne arborescente, par des équations de contraintes exprimant les conditions de fermeture des boucles. Ces conditions sont des équations algébriques généralement non-linéaires et dans lesquelles le temps n'intervient pas explicitement. Elles sont données par :

$${}^{k+B}\mathbf{T}_j \dots {}^i\mathbf{T}_k = \mathbf{I}_4 \tag{2.6}$$

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme d'un système de $L-N$ équations non linéaires :

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

Leurs dérivées premières seront :

$$\dot{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

avec $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est la matrice Jacobienne, de dimension $((L-N) \times L)$, associée aux équations de contraintes du système. Deux méthodes sont envisageables pour calculer la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$:

- par différentiation directe des équations de contraintes données dans (2.7) par rapport aux variables articulaires,
- par l'utilisation d'une méthode fondée sur le calcul des vitesses linéaires et angulaires des repères \mathfrak{R}_k et \mathfrak{R}_{k+B} associés aux articulations coupées.

C'est cette deuxième méthode que nous utilisons dans ce travail. Pour la mettre en œuvre, on calcul depuis la racine de la boucle les contributions des vitesses articulaires de la boucle sur les vitesses des repères \mathfrak{R}_k et \mathfrak{R}_{k+B} et on écrit l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+B} \\ \mathbf{w}_{k+B} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1})\dot{\mathbf{q}}_{b1} = \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2})\dot{\mathbf{q}}_{b2} \quad (2.9)$$

\mathbf{q}_{b1} et \mathbf{q}_{b2} étant les vecteurs des vitesses des articulations appartenant à chacune des deux branches de la boucle, notées $b1$ et $b2$. L'équation (2.9) s'écrit encore :

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1})\dot{\mathbf{q}}_{b1} - \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2})\dot{\mathbf{q}}_{b2} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Pour chaque boucle, en notant e et d les premières articulations de chaque branche (Figure 3.2), ce qui permet d'exprimer \mathbf{J}_k et \mathbf{J}_{k+B} comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1}) = \begin{bmatrix} \sigma_e \mathbf{z}_e + \bar{\sigma}_e (\mathbf{z}_e \times^e \mathbf{P}_k) & \cdots & \sigma_k \mathbf{z}_k + \bar{\sigma}_k (\mathbf{z}_k \times^k \mathbf{P}_k) \\ \bar{\sigma}_e \mathbf{z}_e & \cdots & \bar{\sigma}_k \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2}) = \begin{bmatrix} \sigma_d \mathbf{z}_d + \bar{\sigma}_d (\mathbf{z}_d \times^d \mathbf{P}_{k+B}) & \cdots & \sigma_j \mathbf{z}_j + \bar{\sigma}_j (\mathbf{z}_j \times^j \mathbf{P}_{k+B}) \\ \bar{\sigma}_d \mathbf{z}_d & \cdots & \bar{\sigma}_j \mathbf{z}_j \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.11)$$

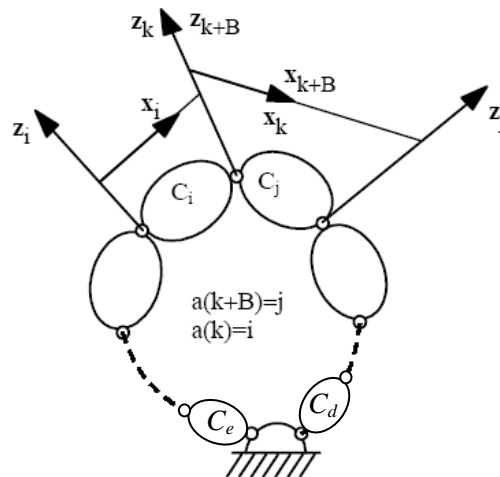


Figure 3.2. Les deux branches d'une boucle fermée

On projette les deux matrices Jacobiennes \mathbf{J}_k et \mathbf{J}_{k+B} respectivement dans les repères \mathfrak{R}_k et \mathfrak{R}_{k+B} ou bien dans le repère de la racine de la boucle. Par la suite, en regroupant les équations du type (2.10) de toutes les boucles, on obtient une relation de la forme (2.8).

On projette les deux matrices Jacobiennes \mathbf{J}_k et \mathbf{J}_{k+B} respectivement dans les repères \mathfrak{R}_k et \mathfrak{R}_{k+B} ou bien dans le repère de la racine de la boucle. Par la suite, en regroupant les équations du type (2.10) de toutes les boucles, on obtient une relation de la forme (2.8).

En dérivant l'équation (2.8) par rapport au temps, on obtient les équations de contraintes sur les accélérations articulaires :

$$\ddot{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Le terme $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ regroupe les éléments quadratiques en vitesses articulaires de type $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$. Pour une boucle donnée, ce terme est calculé en utilisant la méthode récursive exprimée dans la figure 2.1 pour le calcul des accélérations linéaire ($\dot{\mathbf{V}}_k$) et angulaire ($\dot{\boldsymbol{\omega}}_k$) du corps C_k et en imposant que les accélérations articulaires de la première branche ($\ddot{\mathbf{q}}_{b1}$) et de la deuxième branche ($\ddot{\mathbf{q}}_{b2}$) de la boucle soient nulles :

$$\begin{bmatrix} {}^k\dot{\mathbf{V}}_k (\ddot{\mathbf{q}}_{b1} = \mathbf{0}) \\ {}^k\dot{\boldsymbol{\omega}}_k (\ddot{\mathbf{q}}_{b1} = \mathbf{0}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{k+B}\dot{\mathbf{V}}_{k+B} (\ddot{\mathbf{q}}_{b2} = \mathbf{0}) \\ {}^{k+B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{k+B} (\ddot{\mathbf{q}}_{b2} = \mathbf{0}) \end{bmatrix} = {}^k\dot{\mathbf{J}}_k \dot{\mathbf{q}}_{b1} - {}^{k+B}\dot{\mathbf{J}}_{k+B} \dot{\mathbf{q}}_{b2} \quad (2.13)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est calculé en regroupant les équations (2.13) de toutes les boucles et en les mettant dans le même ordre que celui donné aux équations de vitesse (2.8).

Remarques :

1. dans le cas où deux corps de la chaîne fermée sont reliés par une rotule (liaison sphérique) idéale, il est plus intéressant d'ouvrir la chaîne au niveau de la rotule que de couper une liaison simple (rotoïde ou prismatique) de la chaîne. Les équations de contraintes d'une chaîne fermée coupée au niveau d'une rotule sont uniquement des contraintes de translation qui imposent une position identique aux points O_k et O_{k+B} . ce qui permet de réduire le nombre des équations de contraintes.
2. dans le cas où la fermeture d'une boucle est définie par des conditions de roulement et de pivotement sans glissement d'un corps du système sur un autre, les équations de contraintes du système, pour cette boucle, sont définies par les contraintes de non-holonomes calculées au points de contact des deux corps considérés. Ces équations peuvent être réécrites sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

C) Traitement des équations de contraintes du système

Comme nous l'avons déjà dit, un SMC à chaîne fermée est caractérisé par des équations de contraintes. La méthode la plus utilisée pour le traitement de ces équations de contraintes est celle basée sur le partitionnement des coordonnées. Cette méthode est constituée de deux étapes :

- (i) subdiviser le vecteur des coordonnées généralisées, \mathbf{q} , en deux vecteurs : un vecteur des coordonnées généralisées indépendantes, noté \mathbf{q}_u de dimension $(N \times 1)$, et un vecteur des coordonnées généralisées dépendantes, noté \mathbf{q}_v de dimension $((L-N) \times 1)$.
- (ii) déduire, à partir des $(L-N)$ équations de contraintes du système, les composantes du vecteur \mathbf{q}_v (et leurs dérivées) en fonction des composantes du vecteur \mathbf{q}_u et leurs dérivées.

La question qui se pose concerne le choix des composantes indépendantes du système. Ce choix doit permettre le calcul de toutes les coordonnées généralisées du vecteur \mathbf{q}_v et/ou de ses dérivées sans introduire des problèmes de singularités. En pratique, ce choix est dicté par les variables des articulations commandées (actives) du système.

Avec ce partitionnement des coordonnées, les équations de contraintes en vitesses (2.8) et en accélérations (2.12) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

- Equations de contraintes en vitesses :

$$[\mathbf{J}_u(\mathbf{q}) \quad \mathbf{J}_v(\mathbf{q})] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

- Equations de contraintes en accélérations :

$$[\mathbf{J}_u(\mathbf{q}) \quad \mathbf{J}_v(\mathbf{q})] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \Psi_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Pour exprimer \mathbf{q}_v en fonction de \mathbf{q}_u , le cas le plus simple est celui où la relation (2.7) peut se mettre sous la forme explicite suivante :

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{g}(\mathbf{q}_u) \quad (2.17)$$

Si ce passage est difficile analytiquement, il faut utiliser la méthode numérique fondée sur le modèle différentiel inverse. Cette méthode, nécessite une bonne estimation initiale de la valeur des coordonnées dépendantes \mathbf{q}_v . Les valeurs précises de ces coordonnées sont calculées de façon itérative par la formule suivante :

$$(\mathbf{q}_v)_{k+1} = (\mathbf{q}_v)_k - \mathbf{J}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_u(\mathbf{q}) d\mathbf{q}_u \quad (2.18)$$

Le calcul des vitesses et des accélérations des variables dépendantes en fonctions des vitesses et des accélérations des variables indépendantes peut se faire, à partir des équations de contraintes (2.15) et (2.16), de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_v = -\mathbf{J}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_u(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_u \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_v = -\mathbf{J}_v^{-1}(\mathbf{q})\left(\mathbf{J}_u(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_u + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right) \quad (2.20)$$

Remarque : si le système est compatible, la matrice $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ est inversible en dehors des positions singulières.

D) Modèle dynamique :

On appelle modèle dynamique, d'un SMC à chaîne fermée, le système d'équations qui permet d'exprimer le vecteur des efforts généralisés (forces et/ou couples) appliqués au niveau des articulations motorisées du système en fonction des variables cinématiques généralisées et des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement. L'une des méthodes utilisées pour calculer ces efforts, est celle basée sur le calcul des efforts généralisés de la chaîne arborescente équivalente, $\boldsymbol{\Gamma}_{ar}$, majorés par les efforts articulaires nécessaires pour respecter les contraintes de la fermeture des boucles $\boldsymbol{\Gamma}_c$. Soit $\boldsymbol{\Gamma}$ le vecteur des efforts généralisés de la chaîne fermée, ce vecteur est obtenu par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_{ar}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^t(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.21)$$

avec : $\boldsymbol{\Gamma}$: le vecteur $((L-N) \times 1)$ contenant les multiplicateurs de Lagrange associés aux équations de contraintes. Ce vecteur représente les efforts transmis par les liaisons coupées pour respecter les contraintes de fermeture des boucles.

$\boldsymbol{\Gamma}_{ar}$: le vecteur des efforts généralisés obtenu par le modèle dynamique de la chaîne arborescente équivalente. Sa forme générale est donnée par :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ar} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_u \\ \boldsymbol{\Gamma}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{uv} \\ \mathbf{A}_{vu} & \mathbf{A}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_u(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{H}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Pour éliminer les multiplicateurs de Lagrange, nous utilisons une méthode qui tient compte du fait que les efforts généralisés des articulations passives du SMC à chaîne fermée sont nuls, ce qui permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_u \\ \boldsymbol{\Gamma}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_u^t(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{J}_v^t(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Γ_m contenant les efforts généralisés délivrés par les N actionneurs du système.

On a donc un système de L équations où les inconnues sont les composantes des deux vecteurs Γ_m et λ . De la partie inférieure de l'équation (2.23), on déduit λ comme suit :

$$\lambda = -[J'_v(q)]^{-1} \Gamma_v \quad (2.24)$$

On obtient le vecteur des efforts des actionneurs Γ_m par substitution de λ , par son expression (2.24), dans la première rangée de l'équation (2.23). Ce qui donne :

$$\Gamma_m = \Gamma_u - J'_u(q) \cdot [J'_v(q)]^{-1} \Gamma_v = \begin{bmatrix} I_N & -J'_u(q)[J'_v(q)]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

expression qui peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathbf{q}_u}{\partial \mathbf{q}_u} \right]^T \\ \left[\frac{\partial \mathbf{q}_v}{\partial \mathbf{q}_u} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \Gamma_{ar} \quad (2.26)$$

avec \mathbf{G} la Jacobienne des coordonnées généralisées du système par rapport aux variables indépendants (variables des articulations motorisées du système).

3. Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange est décrit par les équations du mouvement en terme de travail d'énergie du système ce qui se traduit, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Avec :

L : force de Lagrange du système, égale à $E - U$.

E : énergie cinétique totale du système.

U : énergie potentielle totale du système.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [A] [\dot{q}]$$

Où A est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique d'élément générique A_{ij} appelé aussi matrice d'inertie robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction de variables articulaires q .

L'énergie potentielle étant, elle aussi, fonction des variables articulaires q , le couple Γ_i pour chaque articulation peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_i = [A_{i1}\ddot{q}_1 + \dots + A_{in}\ddot{q}_{1n}] + [B_i^{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + B_i^{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n + B_i^{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \dots + B_i^{(n-1)n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n] + [B_i^{11}\dot{q}_1^2 + \dots + B_i^{nn}\dot{q}_n^2] + Q_i$$

Sous la forme matricielle :

$$\Gamma_i = [A_i] [\ddot{q}] + \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [B_i] [\dot{q}] + Q_i$$

Avec :

$[A_i]$: Vecteur ligne de dimension n .

$[B_i]$: Matrice des termes centrifuge de Coriolis, d'élément générique B_i^{jk} , elle est de dimension $(n \times n)$.

$$[\dot{q}] = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n]^T$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n]$$

On calcule les éléments de B et Q par les relations suivantes :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}$$

$$B_i^{jj} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Les éléments de A, B et Q s'appellent les coefficients dynamiques du robot, ils sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Les équations dynamiques d'un système mécanique articulé forment donc un système de n équations différentielles du second ordre couplées et non linéaires.

4. Résultats

4.1. Application au robot parallèle à 3 ddl

D'après la description précédente notre robot parallèle sera paramétré de la façon suivante :

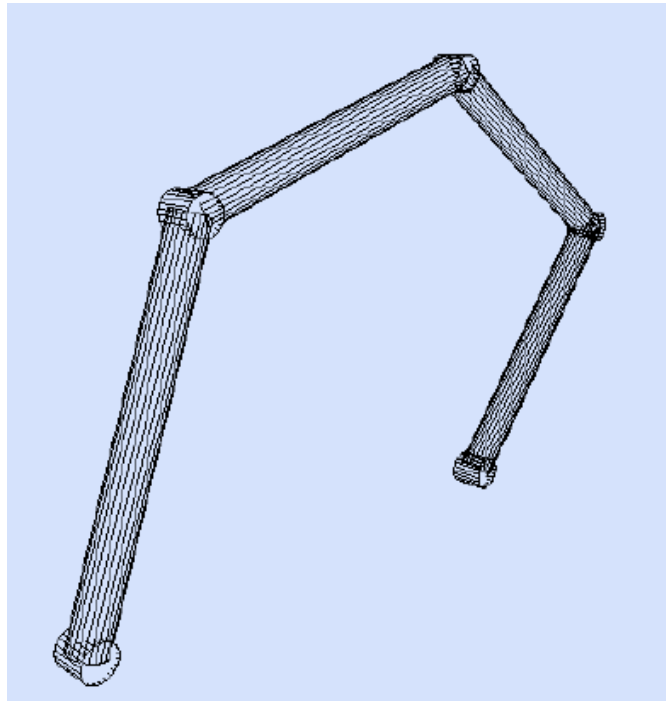


Figure 3-3 : robot parallèle à 3 ddl du type PP-RRR

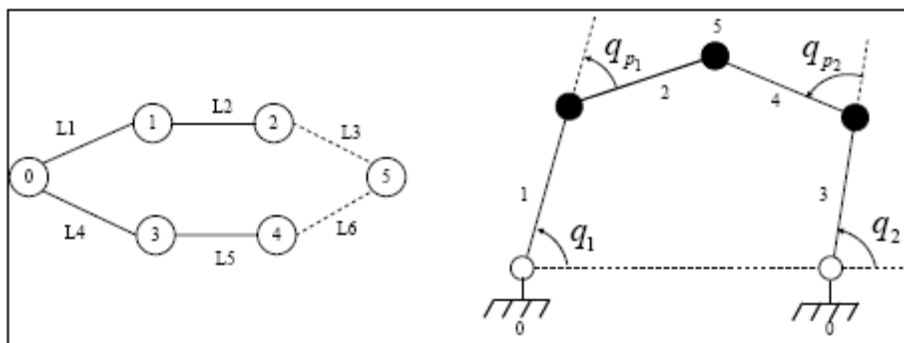


Figure 3-4 : Graphe de liaisons du robot PP-RRR

$\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ rotation autour de \vec{z}_1

$\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ rotation autour de \vec{z}_2

$\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ rotation autour de \vec{z}_3

$\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$ rotation autour de \vec{z}_4

$\theta_5 = (\vec{x}_4, \vec{x}_5)$ rotation autour de \vec{z}_5

Les données pour chaque corps c_i :

$$\text{Centre de masse : } \vec{O_i G_i} = \begin{pmatrix} L_i/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenseur d'inertie : } \mathbb{I}_{G_i}^{c_i} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Les longueurs : $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$

4.2. Application du Formalisme de Lagrange

a). Expression de l'énergie cinétique totale

L'expression de l'énergie cinétique :

$$E_{C_i} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{G_i}^{02} \cdot \vec{v}_{G_i}^0 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^{ot} \cdot \mathbb{I}_{G_i}^{c_i} \cdot \vec{\omega}_i^o$$

tel que :

$m_i =$ la masse de chaque corps

$\vec{v}_{G_i}^{02} =$ Vitesse linéaire

$\vec{\omega}_i^o =$ Vitesse de rotation

$\mathbb{I}_{G_i}^{c_i} =$ Tenseur d'inertie

Recherche des E_{C_i} :

Corps 1 :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \left(I_{331} + m_1 \cdot \frac{l_1^2}{4} \right) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

Corps 2 :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \cos \theta_2) + \frac{1}{2} I_{332} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Corps 3 :

$$E_{C3} = \frac{1}{2} (I_{331} + m_1 \cdot \frac{l_1^2}{4}) \cdot \dot{\theta}_3^2$$

Corps 4 :

$$E_{C4} = \frac{1}{2} [m_2 (l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2) + I_{332}] \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} [m_2 \cdot (\frac{l_2^2}{4}) + I_{332}] \cdot \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} [m_2 \cdot (\frac{l_2^2}{2} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_4) + 2 \cdot I_{332}] \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4$$

Corps 5 :

$$E_{C5} = \frac{1}{2} [m_5 (l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2) + I_{335}] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} [m_5 \cdot l_2^2 + I_{335}] \cdot \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} [m_5 \cdot (2 \cdot l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2) + 2 \cdot I_{335}] \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \cdot I_{335} \cdot \dot{\theta}_5^2 + I_{335} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_5 + I_{335} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_5$$

Recherche des E_{P_i} :

$$E_{P_i=0}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} B_1 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (e_1 + e_2 \cos \theta_4) \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} f_1 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cos \theta_4) \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + I_{335} \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_5 + I_{335} \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_5 + \frac{1}{2} I_{335} \dot{\theta}_5^2$$

Tel que:

$$A_1 = I_{331} + I_{332} + I_{335} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \right) + m_5 (l_1^2 + l_2^2)$$

$$A_2 = m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 + 2m_5 \cdot l_1 \cdot l_2$$

$$d_1 = m_2 \frac{l_2^2}{2} + 2m_5 l_2^2 + 2(I_{332} + I_{335})$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= (2m_5 + m_2)l_1 \cdot l_2 \\
f_1 &= I_{332} + m_2 \frac{l_2^2}{4} \\
g_1 &= 2I_{332} + m_2 \frac{l_2^2}{2} \\
g_1 &= m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \\
e_1 &= I_{331} + I_{332} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \right) \\
e_2 &= m_2 \cdot l_1 \cdot l_2
\end{aligned}$$

b). Expression du couple pour chaque corps

$$L = E_C - E_p$$

$$E_p = 0$$

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta_i} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta_i} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_i}$$

Corps 1 :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (A_1 + A_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \ddot{\theta}_1 - A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + I_{335} \cdot \ddot{\theta}_5 + \lambda_1 \cdot (-l_1 \cdot \sin \theta_2 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\
&\quad + \lambda_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

Corps 2 :

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= B_1 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \lambda_1 l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + \lambda_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + I_{335} \ddot{\theta}_5
\end{aligned}$$

Corps 3 :

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = & (e_1 + e_2 \cdot \cos \theta_4) \cdot \ddot{\theta}_3 - e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_4 \\ & - \frac{1}{2} \cdot g_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_4^2 + \lambda_1 \cdot (l_1 \cdot \sin \theta_3 + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4)) \\ & - \lambda_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \theta_3 + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4)) \end{aligned}$$

Corps 4 :

$$\begin{aligned} \Gamma_4 = & f_1 \cdot \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3^2 + \lambda_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ & - \lambda_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

Corps 5 :

$$\Gamma_5 = I_{335}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_5)$$

4.3. Equations de contraintes géométriques

$$\vec{o}_0 o_1 + \vec{o}_1 o_2 + \vec{o}_2 E = \vec{o}_0 o_3 + \vec{o}_3 o_4 + \vec{o}_4 E$$

$$\begin{cases} d + l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} = \begin{cases} -d + l_1 \cdot \cos \theta_3 + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ l_1 \cdot \sin \theta_3 + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) \end{cases}$$

$$\Phi_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 2d + l_1(\cos \theta_1 - \cos \theta_3) + l_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$$

$$\Phi_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = l_1(\sin \theta_1 - \sin \theta_3) + l_2(\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_3 + \theta_4)) = 0$$

4.4. Relations entre liaisons actives et liaisons passives

Calcul de λ_1 ; λ_2 :

On a :

Les liaisons passives \rightarrow

$$\Gamma_2 = \Gamma_4 = 0$$

On aura :

$$\lambda_1 = \frac{L + K}{\cot(\theta_3 + \theta_4) - \cot(\theta_1 + \theta_2)} \cot(\theta_1 + \theta_2) + K$$

$$\lambda_2 = \frac{L + K}{\cot(\theta_3 + \theta_4) - \cot(\theta_1 + \theta_2)}$$

Tel que :

$$K = \frac{B_1 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + I_{335} \ddot{\theta}_5 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2}{l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$L = \frac{f_1 \cdot \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2}(g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3^2}{l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4)}$$

Recherche de θ_2, θ_4 :

Des équations de contraintes ϕ_1 et ϕ_2 on a respectivement,

$$\begin{cases} l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) = \alpha + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) \dots \dots 1 \\ l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = \beta + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) \dots \dots 2 \end{cases}$$

Tel que :

$$\alpha = l_1(\cos \theta_3 - \cos \theta_1) - 2d$$

$$\beta = l_1(\sin \theta_3 - \sin \theta_1)$$

on aura,

$$A + B \cos(\theta_3 + \theta_4) + C \sin(\theta_3 + \theta_4) = 0$$

Tel que :

$$A = \alpha^2 + \beta^2$$

$$B = 2\alpha l_2$$

$$C = 2\beta l_2$$

En procédant au changement trigonométrique :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$$

Et en posant :

$$y = \tan\left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right)$$

On aura :

$$(A - B)y^2 + 2Cy + A + B = 0$$

$$\Delta = C^2 - A^2 + B^2$$

$$y_1 = \frac{-C - \sqrt{\Delta}}{A - B}$$

$$y_2 = \frac{-C + \sqrt{\Delta}}{A - B}$$

Les formes des variables θ_2, θ_4 :

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} y_1 - \theta_3$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha} + \tan(\theta_3 + \theta_4)\right] - \theta_1$$

4.5. Modèle cinématique

Le modèle cinématique complète le modèle géométrique, en écrivant les relations entre les vitesses des variables articulaires et les vitesses de l'organe terminal. La propriété intéressante du modèle cinématique est sa linéarité par rapport aux vitesses. Ainsi il est plus simple à manipuler que le modèle géométrique et permet d'utiliser des propriétés qui découlent de la résolution des systèmes linéaires.

Dans la plupart des cas, des robots parallèles, le modèle cinématique est facile à obtenir. Une ligne de la Jacobienne cinématique, dépend d'une jambe du robot parallèle suffira pour obtenir les résultats recherchés :

$$J_{\phi} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$J_u \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = -J_v^{-1} \cdot J_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$J_{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix}$$

$$J_u = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{21} & J_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_v = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{14} \\ J_{22} & J_{24} \end{bmatrix}$$

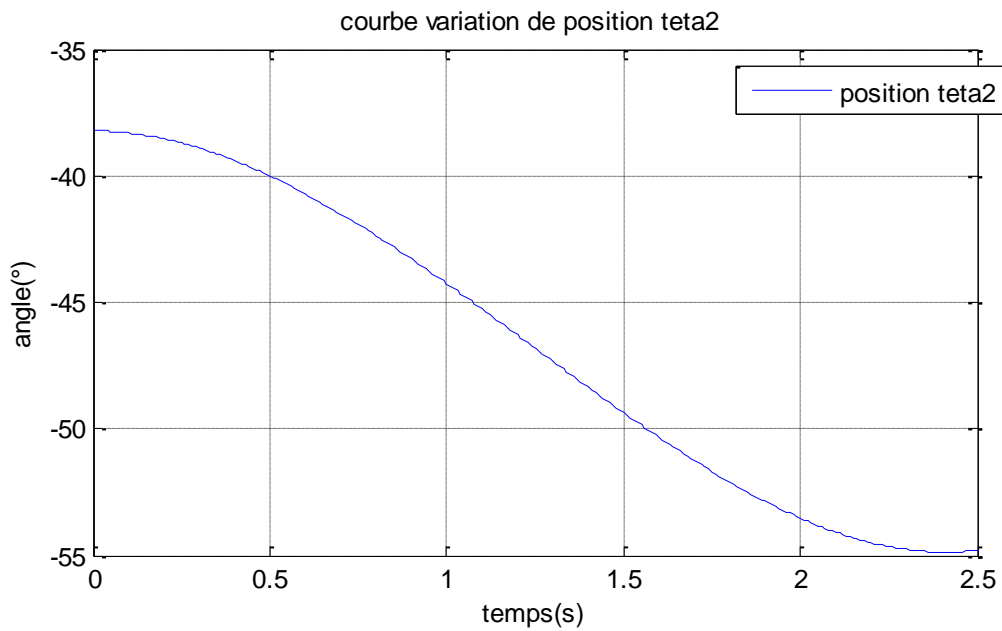
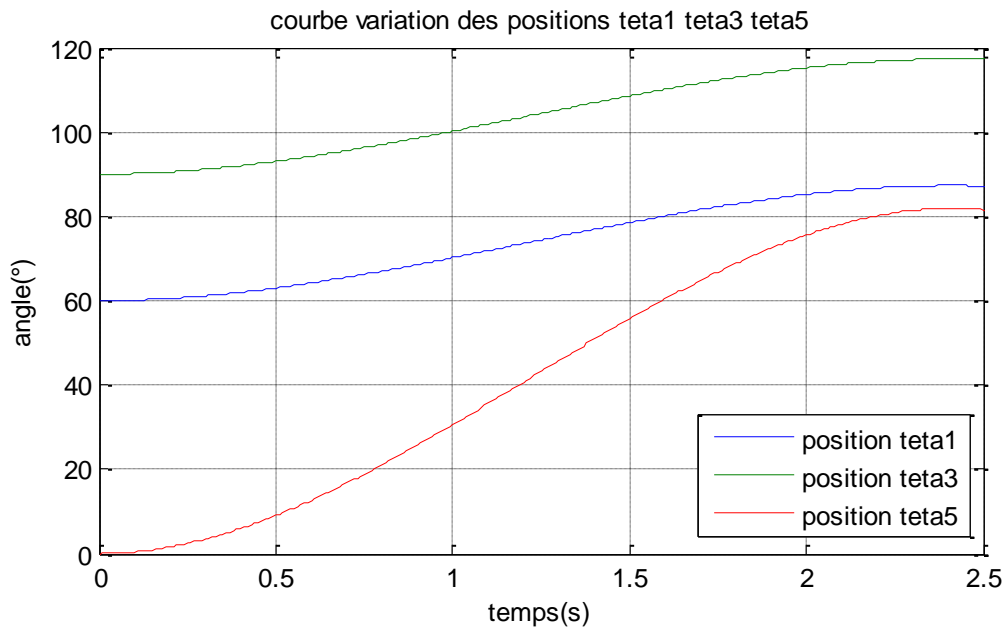
Même approche pour les accélérations :

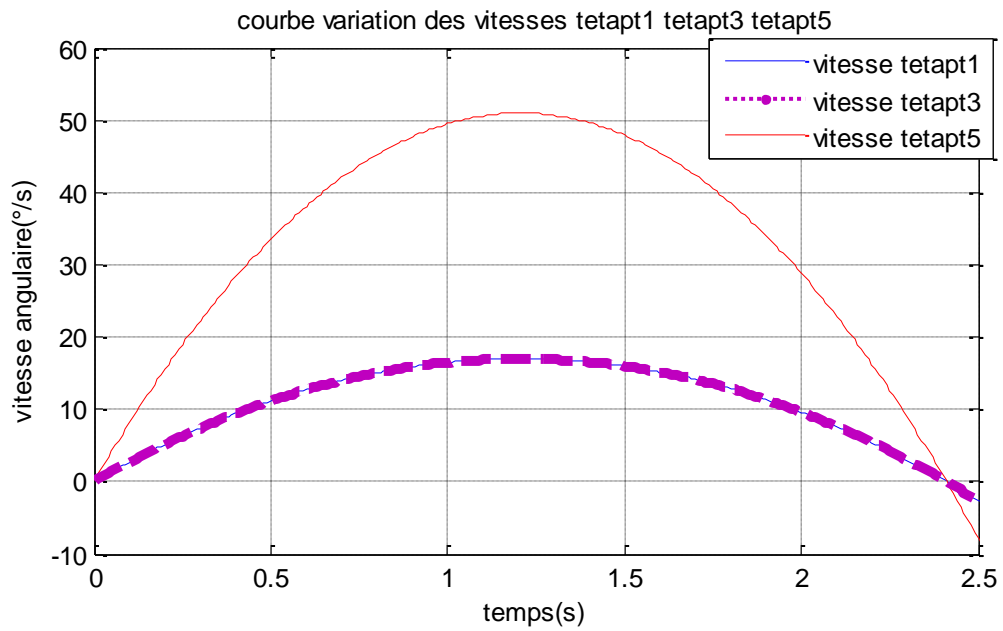
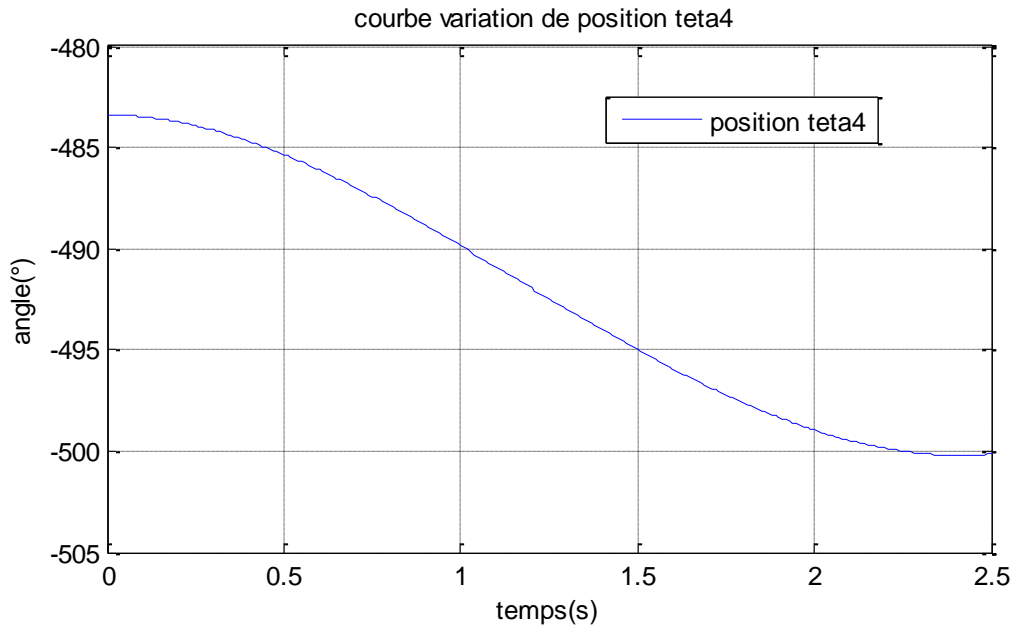
$$J_u \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} + \dot{J}_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \dot{J}_v \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = 0$$

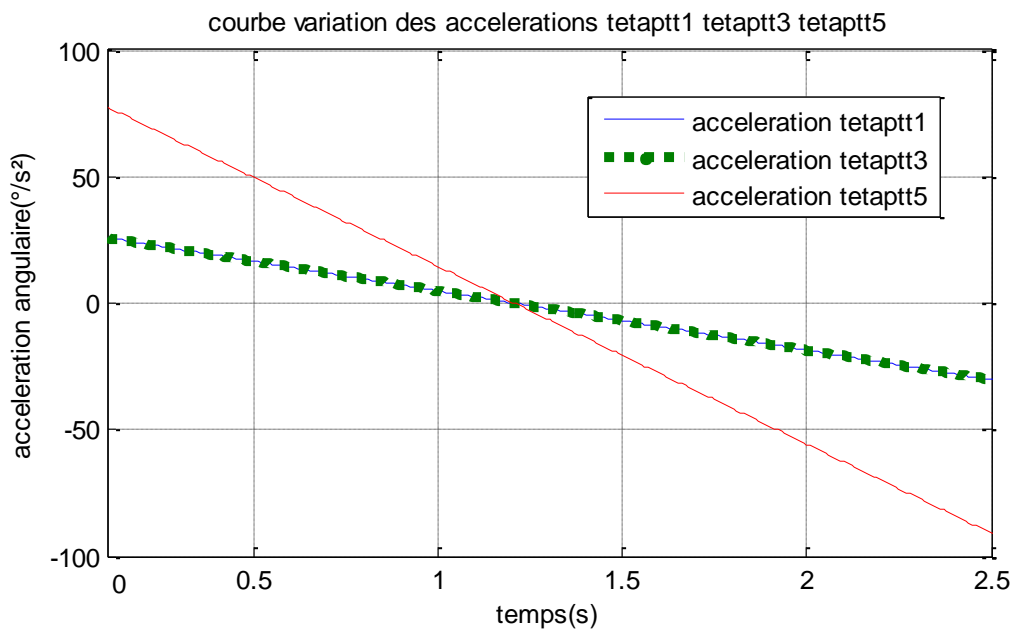
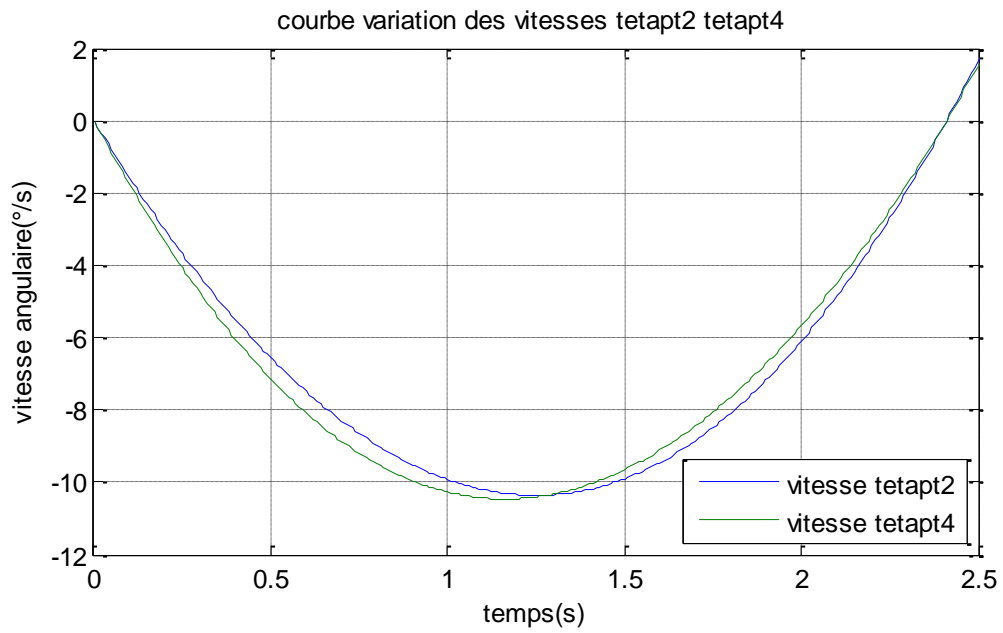
$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} = -J_v^{-1} [J_u \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \dot{J}_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \dot{J}_v \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}]$$

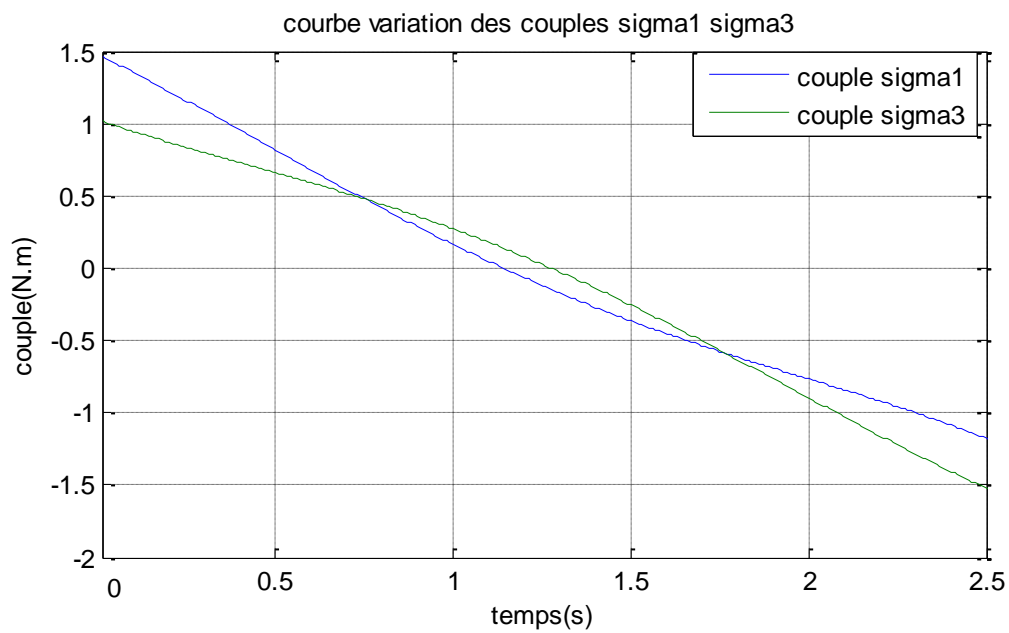
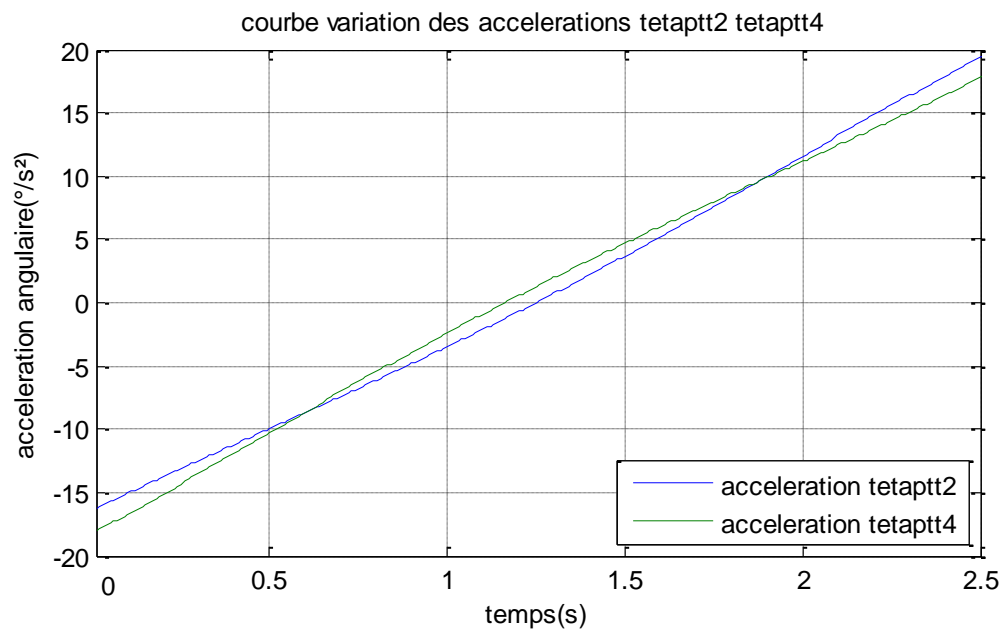
4.6. Résultats :

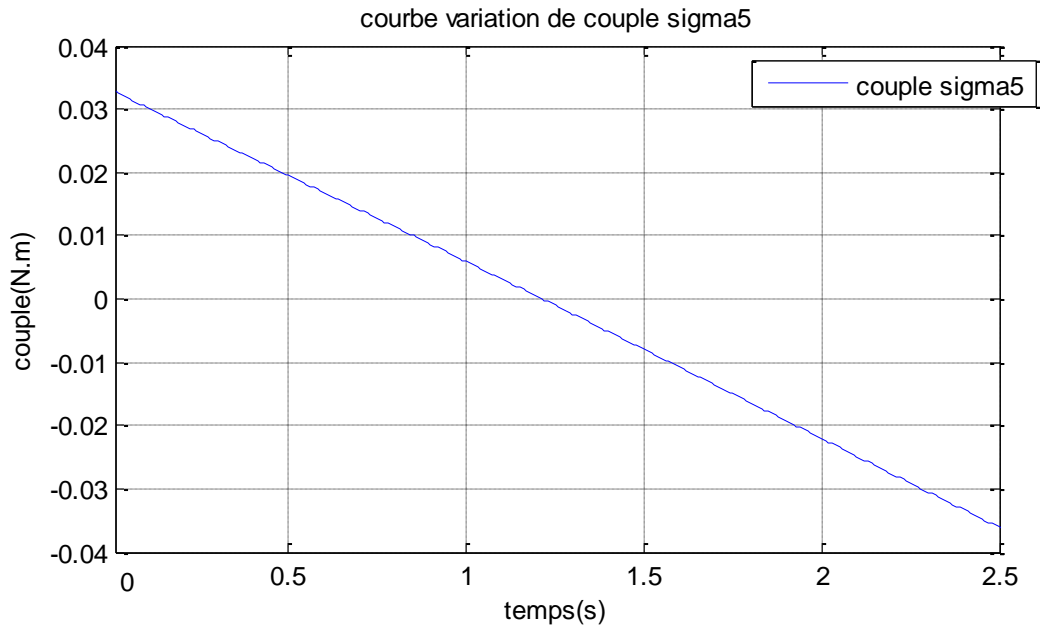
Les graphes ont été calculés sous programme MATLAB (annexe1) :



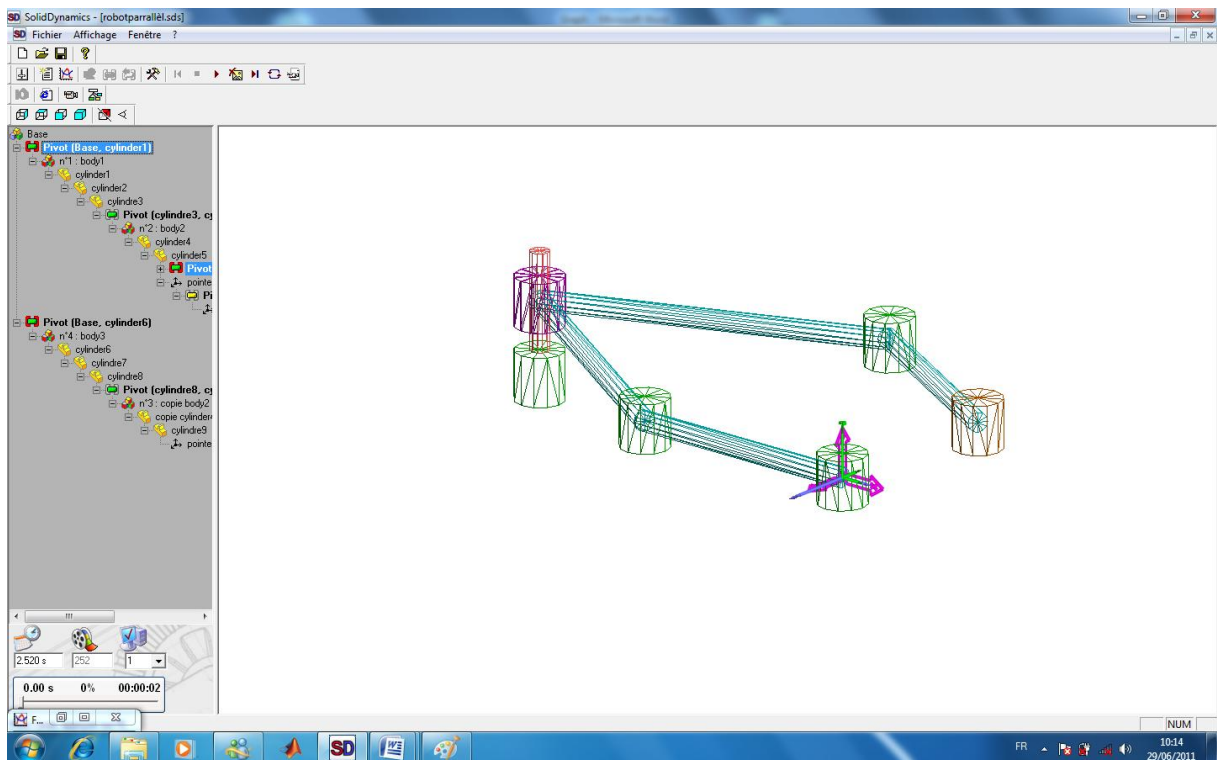




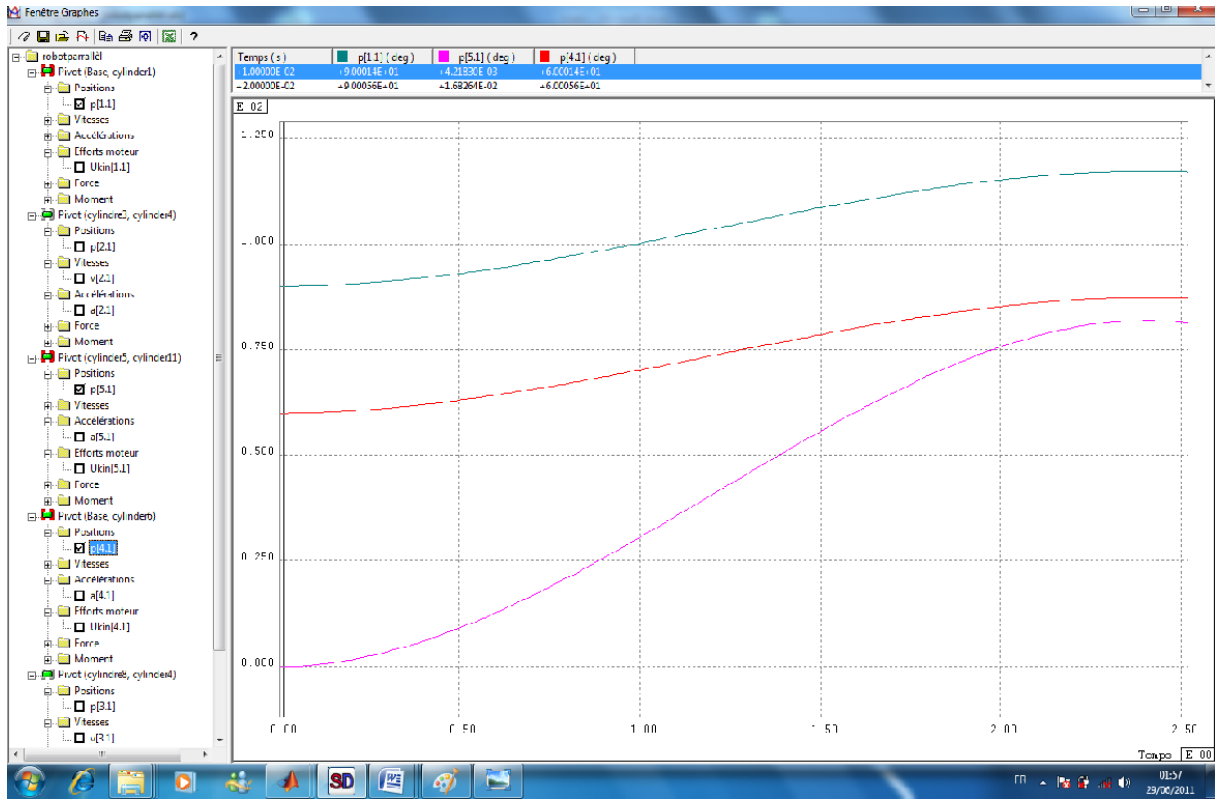




4.7. validation des résultats par Solidynamics:

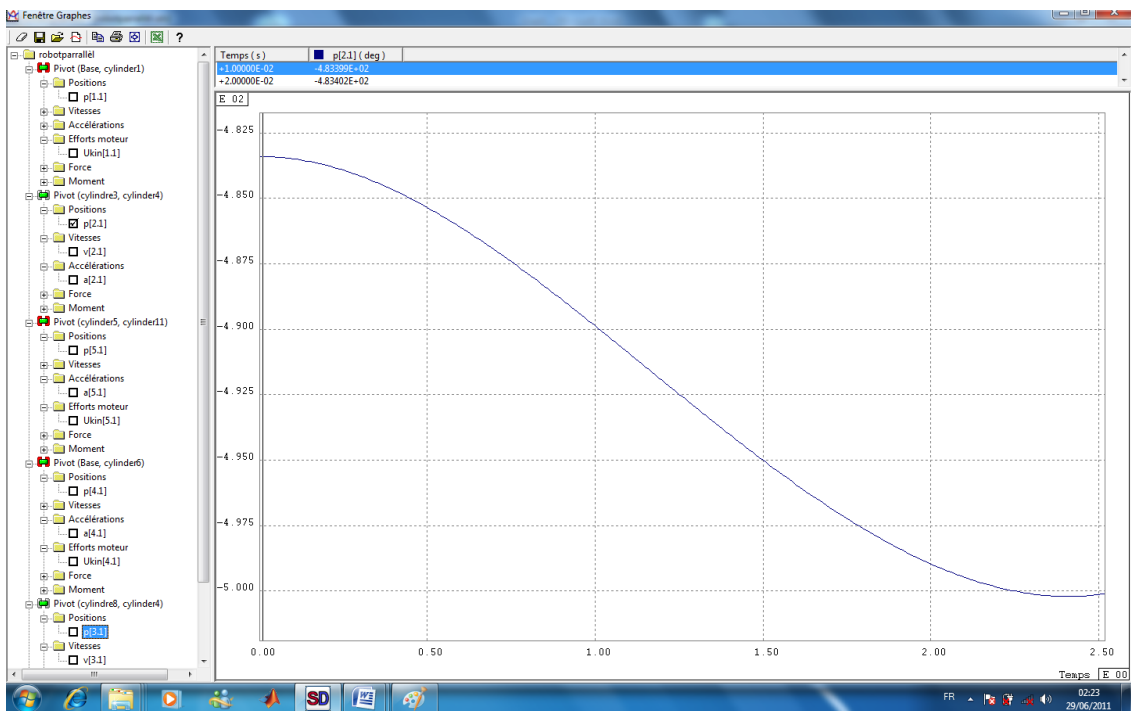


Le robot parallèle réalisé sous solidynamics

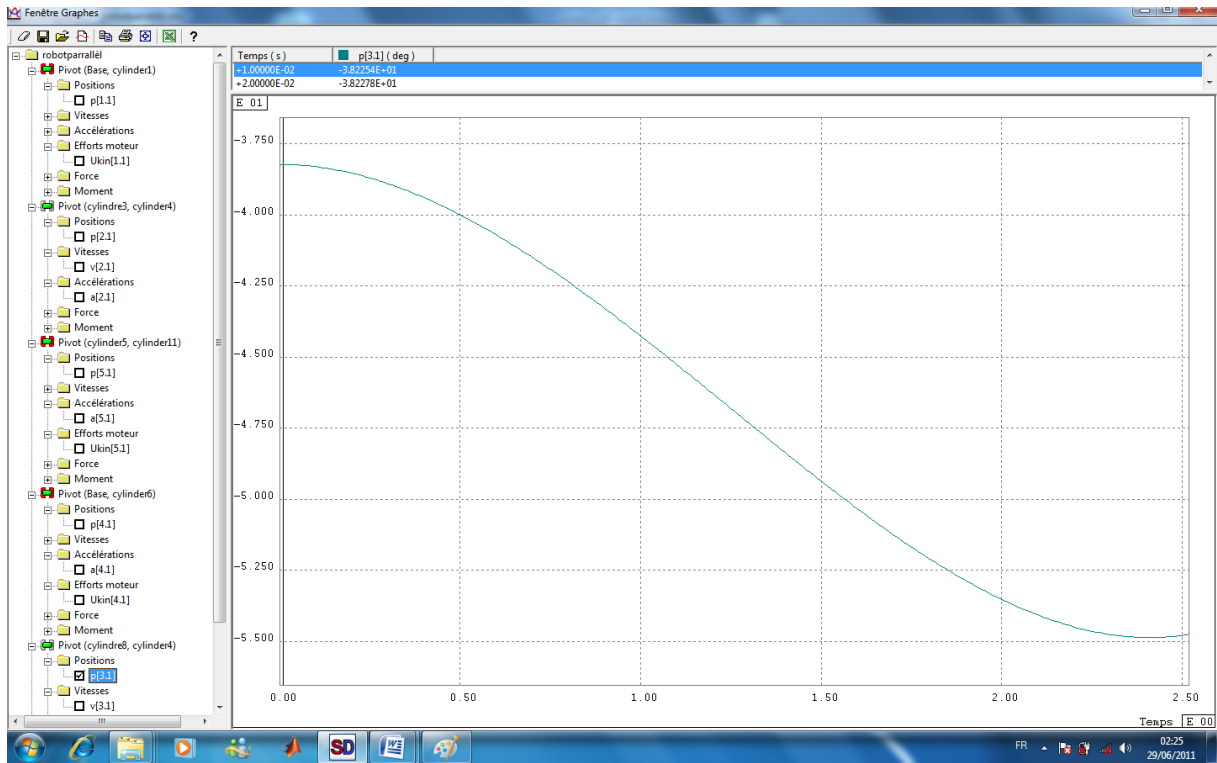


Graphes des positions des angles $\theta_1, \theta_3, \theta_5$

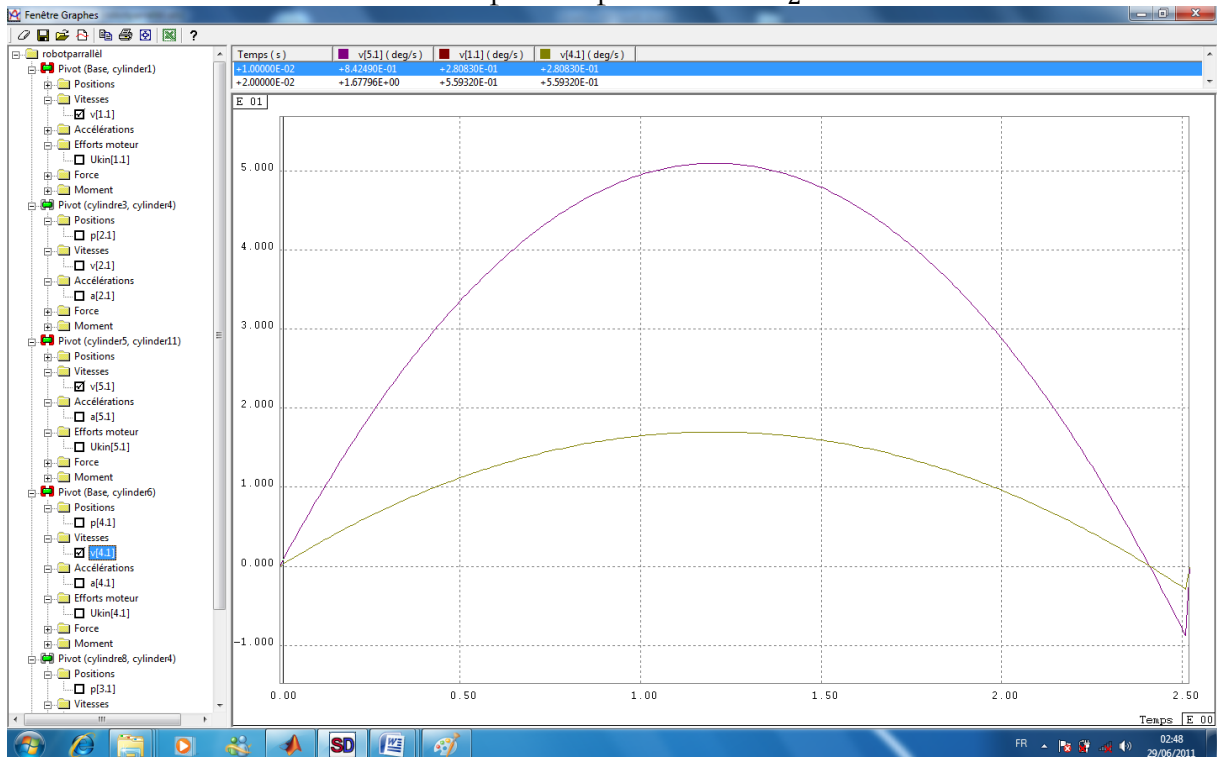
--- θ_3 --- θ_1 --- θ_5



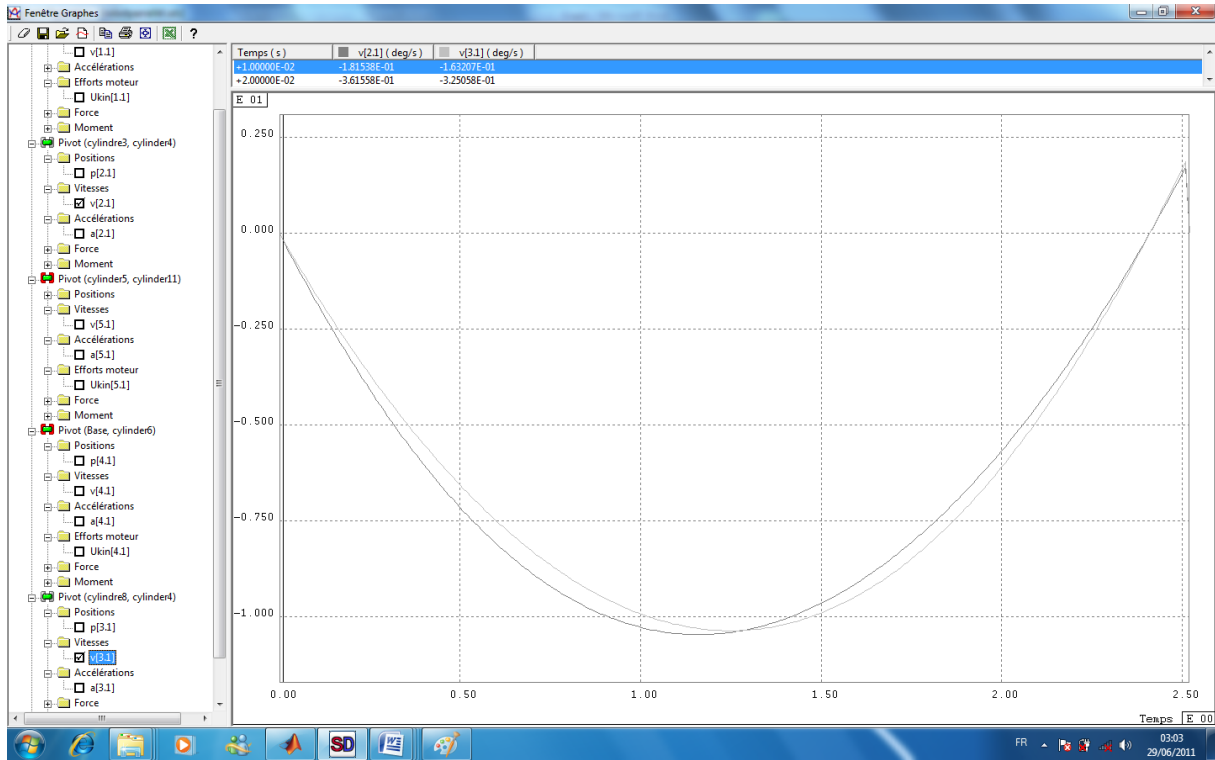
Graphes de position de θ_4



Graphe de position de θ_2

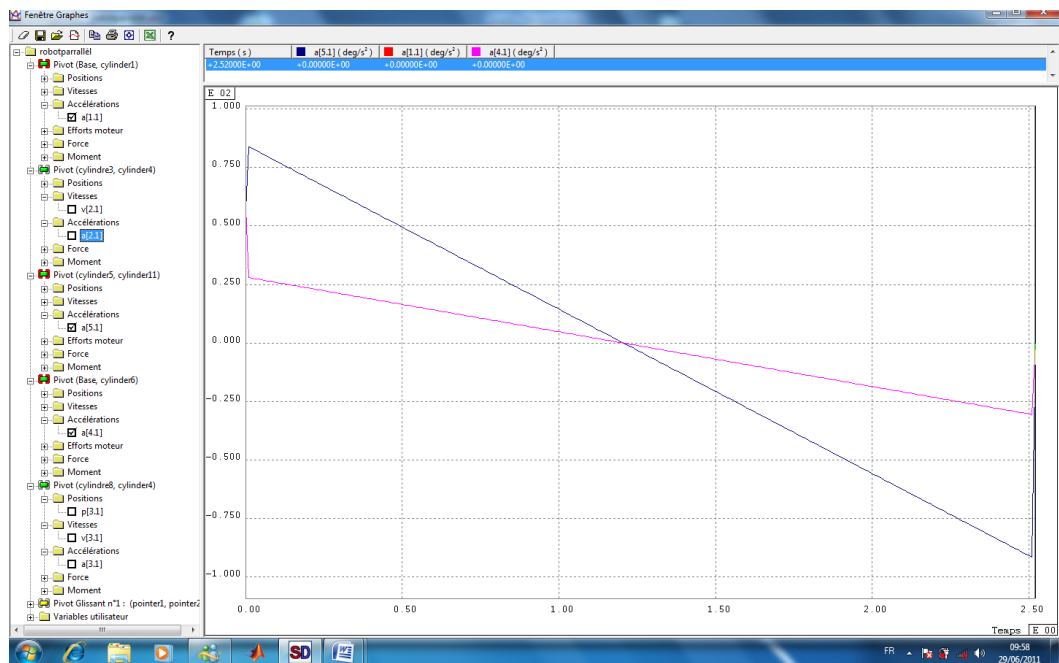


Graphe des vitesses angulaires $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_5$.
 --- $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_3$ --- $\dot{\theta}_5$.



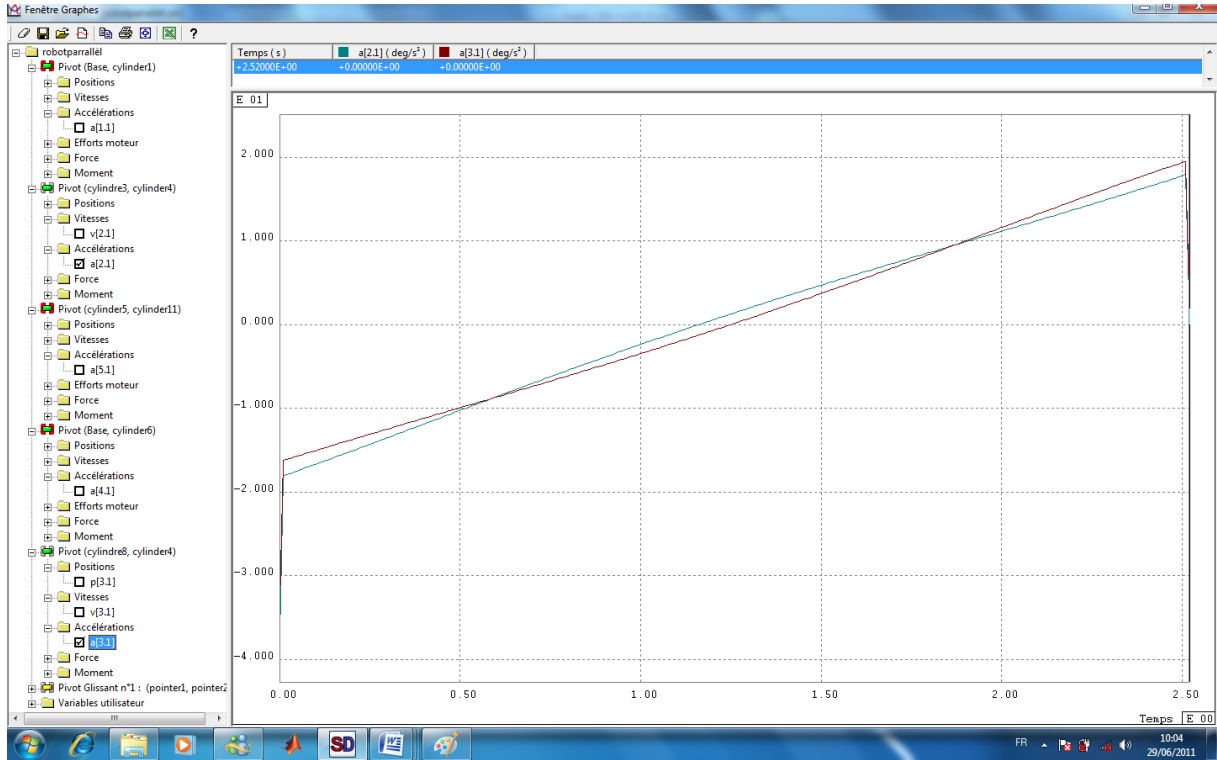
Graphes des vitesses angulaires $\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_4$

--- $\dot{\theta}_2$ --- $\dot{\theta}_4$



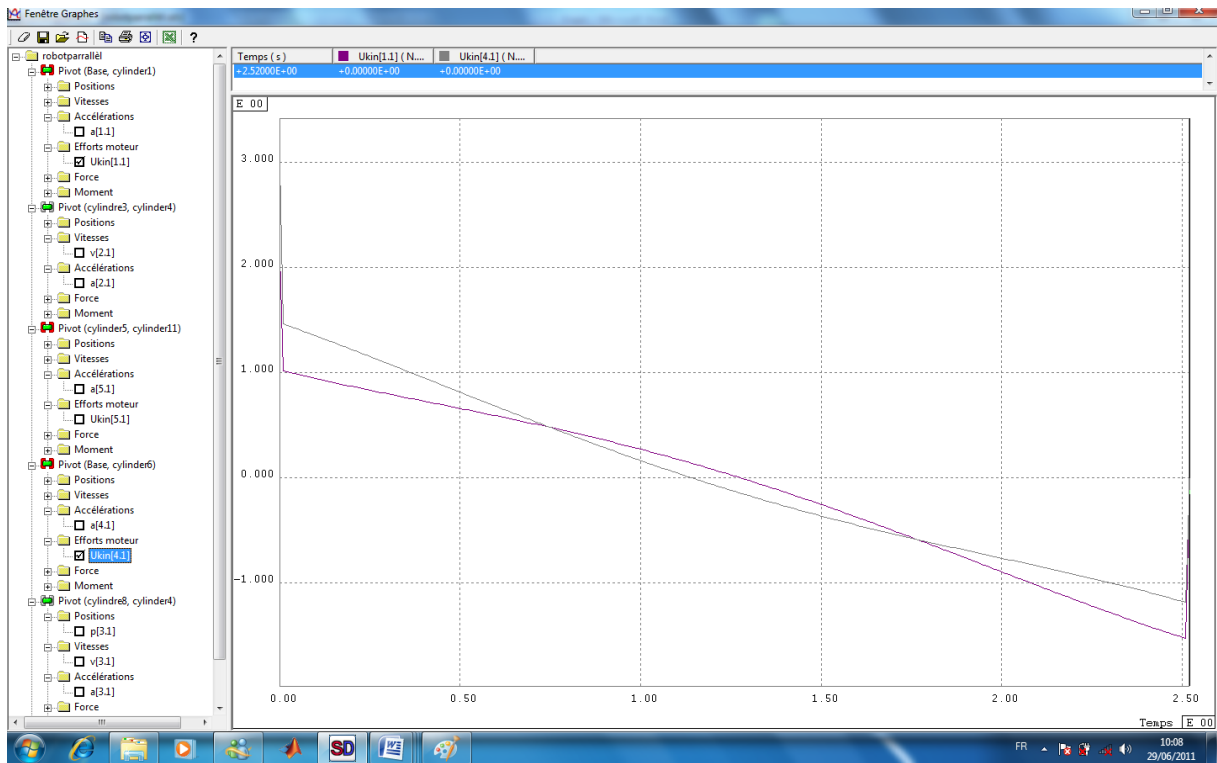
Graphes des accélérations angulaires $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_3$ et $\ddot{\theta}_5$

--- $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_3$ --- $\ddot{\theta}_5$



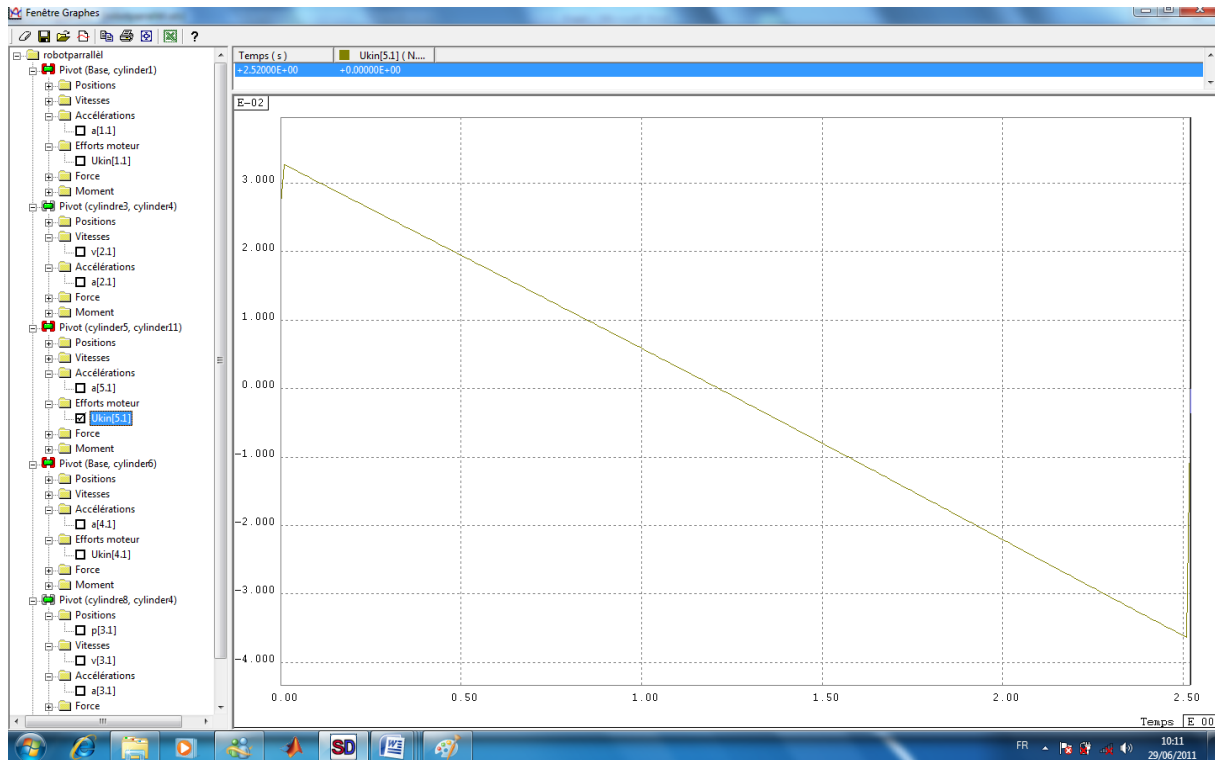
Graphe des accélérations $\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4$

--- $\ddot{\theta}_2$ --- $\ddot{\theta}_4$



Graphe des couples Γ_1, Γ_3

--- Γ_1 --- Γ_3

Graphe de couple Γ_5 **COMMENTAIRE :**

Les résultats obtenus sous SOLIDDYNAMICS nous confirment les résultats obtenus précédemment sous MATLAB. Une fois les résultats obtenus sont juste nous passons à l'étape d'optimisations de nos fonctions couts(les couples).

LES TECHNIQUES STOCHASTIQUES D'OPTIMISATION



Chapitre 4

1. INTRODUCTION

La résolution d'un problème d'optimisation consiste à trouver, parmi un ensemble Ω de solutions S possibles, une solution S_{opt} minimisant (ou maximisant) une fonction objectif donnée $F(S)$.

La majorité des techniques envisagées pour résoudre ce problème commencent la recherche par une estimation initiale S_0 de la solution pour arriver, après un nombre fini de cycles de calcul, à une approximation S^* de la solution finale S_{opt} . La différence essentielle entre ces techniques réside dans la manière avec laquelle S_{opt} est recherchée dans Ω .

Les techniques classiques, connues sous le nom de *déterministes*, se basent sur la construction d'une direction de recherche privilégiée dans Ω . Cette direction est déterminée par des concepts mathématiques utilisant des informations sur la variation de la fonction F et de ses dérivées. Les techniques déterministes sont très efficaces pour la résolution des problèmes ayant une fonction objective continue et comportant peu d'extremums (minimums locaux). Elles convergent rapidement vers l'optimum le plus proche de la solution de démarrage S_0 . Cependant, lorsque la fonction F est compliquée, les développements mathématiques nécessaires pour construire les directions de recherche deviennent de plus en plus lourds et difficiles à établir. D'un autre côté, dans le cas où la fonction à optimiser comporte plusieurs optimums locaux, les techniques déterministes risquent facilement de manquer l'optimum global S_{opt} .

Pour un problème d'optimisation compliqué ayant plusieurs optimums locaux, les techniques de résolution préférées sont les techniques stochastiques. Ces dernières se basent sur une recherche aléatoire uniformément distribuée dans l'espace Ω des solutions réalisables. Elles peuvent, de ce fait, éviter les pièges de minimums locaux et assurer une bonne approximation de la solution globale S_{opt} recherchée.

Les techniques stochastiques reposent sur des concepts de statistiques et de probabilités et ne nécessitent que des informations sur les valeurs de la fonction F . Ceci rend leur mise en œuvre plus facile et sans développements mathématiques coûteux.

On présente, ici, les techniques stochastiques d'optimisation les plus répandues, en l'occurrence :

- les techniques de Monte Carlo;
- le recuit simulé;
- les algorithmes génétiques;
- la recherche Tabou.

On donnera plus de détails sur Les techniques de Monte Carlo et le Recuit Simulé. Cette dernière a été utilisée pour la mise en œuvre de l'approche développée dans ce mémoire (chapitre IV).

2. TECHNIQUES DE MONTE CARLO

Le cycle de base des techniques de type Monte Carlo consiste à générer aléatoirement des solutions S de l'espace Ω et faire une comparaison entre ces solutions en retenant à chaque fois la meilleure rencontrée. L'algorithme d'un cycle de base se présente de la manière suivante :

| | |
|--------------------|---|
| | Générer aléatoirement une solution initiale S_0 ; $S^* = S_0$; |
| Répéter : | Générer une solution aléatoire S dans Ω ; évaluer $F(S)$; Si $F(S) < F(S^*)$ alors $S^* = S$; |
| Fin répéter | |

Algorithme A- 1 : cycle de base des techniques de Monté Carlo

Si nous répétons indéfiniment ce cycle, et dans le cas le plus simple d'un tirage aléatoire uniformément distribué dans Ω , ce processus convergera vers l'optimum globale du problème[63]. La figure A-1 montre une allure typique de convergence.

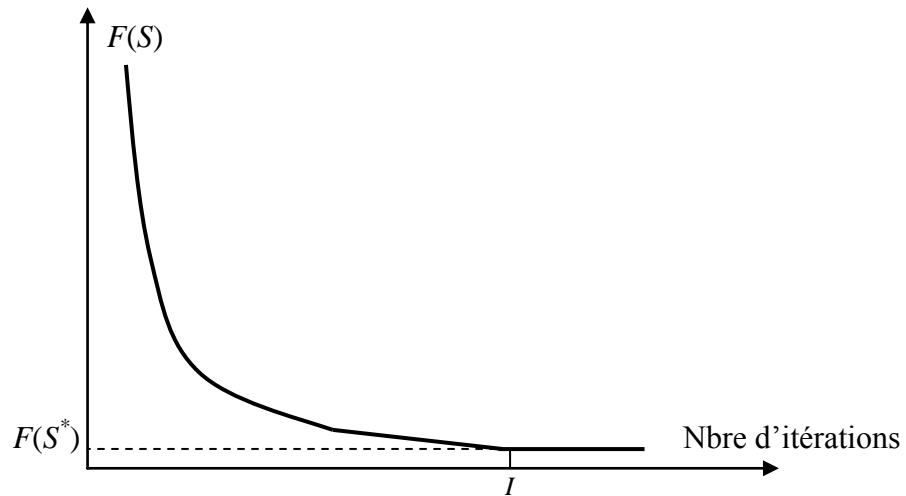


Figure 4-1 : Convergence d'une technique de Monté Carlo

La mise en œuvre du principe de base des méthodes de Monte Carlo apparaît très facile. Ainsi, sans aucun développement mathématique, ni complexités algorithmiques le cycle de base est applicable à tous les types de problème. Il suffit de pouvoir évaluer la fonction objectif F pour chaque solution S tirée aléatoirement. L'obtention de la solution exacte du problème nécessite, en principe, un temps de calcul infini. Toutefois, pour des raisons pratiques, ce processus de base est arrêté après un nombre d'itérations I jugé suffisant pour avoir une bonne approximation de la solution recherchée.

Toutes les techniques d'optimisation de type Monte Carlo dérivent de ce processus de base. Elles essayent d'apporter des moyens pour *guider* la recherche afin qu'elle ne soit pas complètement aléatoire. Ceci permettra de réduire l'effort de calcul et d'accélérer ainsi la convergence.

L'idée essentielle consiste à concentrer la recherche dans un *voisinage* $V(S_i)$ de la meilleure solution S_i obtenue à l'étape i . Ceci a pour but d'augmenter les chances d'amélioration de la solution et donc d'accélérer les calculs. $V(S_i)$ est défini par son étendu L_i . Cette idée de voisinage est exploitée dans les techniques *Hill Climbing*, Monte Carlo avec réduction d'intervalle, le recuit simulé et la recherche Tabou.

3. METHODE HILL CLIMBING

Cette technique propose de faire une recherche dans un voisinage $V(S)$ d'étendue fixe L , centré autour de la meilleure solution courante. Au fur et à mesure que la solution est améliorée, la position du voisinage est modifiée dans Ω de telle sorte que la recherche reste toujours centrée autour de la nouvelle solution retenue (figure A -2)

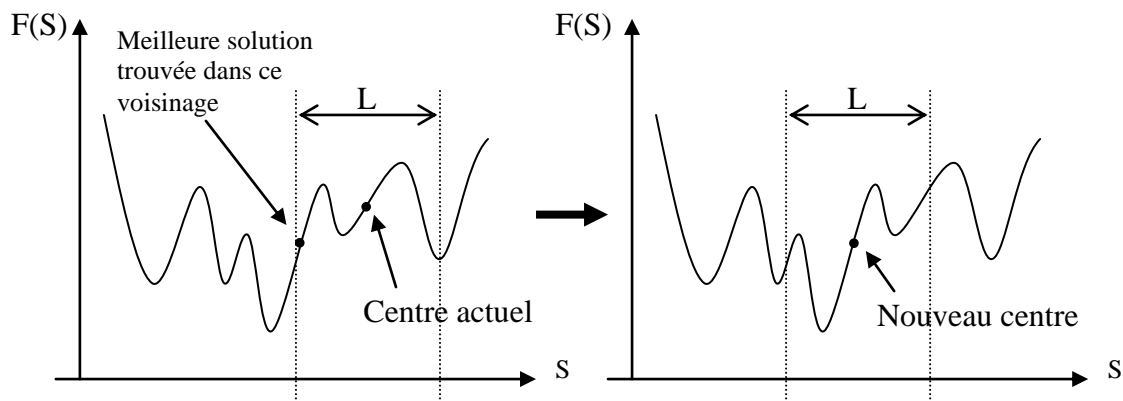


Figure 4-2 : Changement du centre du voisinage dans la technique de *Hill Climbing*

Cette technique accélère la recherche de façon notable. Cependant, elle présente une difficulté concernant le choix de la taille L du voisinage. Un mauvais choix peut :

- mener la technique à se piéger dans un minimum local (L trop petit) ;
- augmenter le temps de calcul inutilement (L trop grand).

L'algorithme de la méthode *Hill Climbing* se présente comme suit :

généraler aléatoirement une solution initiale S_0 ;
 $S^* = S_0$;
 Centre du voisinage = S^* ;

Répéter :

généraler une solution aléatoire S dans $V(S^*) \in \Omega$; évaluer $F(S)$;
Si $F(S) < F(S^*)$ **alors** $S^* = S$;
 Centre du voisinage = S^* ;

Jusqu'à convergence

Algorithme A-2 : technique de *HILL Climbing*

4. MONTE CARLO AVEC REDUCTION D'INTERVALLE DE RECHERCHE :

Cette technique est une variante améliorée de *Hill Climbing*. Elle consiste à introduire un facteur *Fact* de réduction de l'intervalle de recherche (voisinage de la meilleure solution trouvée) dans lequel s'effectuent les tests aléatoires. Au début du processus, L est pris assez large mais au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente, on procède à une réduction de la taille de L . Ceci permet de bien explorer le domaine de recherche Ω dans la phase initiale des calculs. La réduction intervient pour permettre d'effectuer des raffinements de la solution.

Soit E le nombre d'échecs successifs comptabilisés depuis la dernière amélioration (un échec est une tentative qui augmente la valeur de $F(S)$). La valeur de E restera petite tant que le processus améliore la solution. Dans ce cas, il faut le laisser faire. Mais quand E commence à prendre de grandes valeurs cela signifie que le processus commence à devenir inefficace puisqu'il n'apporte aucune amélioration. Dès lors, il sera plus rentable de réduire l'intervalle de recherche pour permettre les raffinements. Un paramètre E_{max} est introduit qui constitue un seuil de prise de décision. Il est possible de décider la réduction en se basant sur le nombre d'itérations au lieu du nombre d'échecs. Cependant, le nombre d'échecs permet une meilleure adaptation selon les spécificités du problème traité.

Cette technique est résumée par l'algorithme suivant :

```

Générer aléatoirement une solution initiale  $S_0$  ;
 $S^* = S_0$  ;
Répéter :
    générer une solution aléatoire  $S$  dans  $V(S^*) \in \Omega$  ; évaluer  $F(S)$  ;
    Si  $F(S) < F(S^*)$ 
    alors  $S^* = S$  ;
    Sinon
        Compter les échecs successifs ;
        Si le nombre des échecs successifs =  $E_{max}$ 
        Alors réduire  $V(S)$ 
Jusqu'à convergence.

```

Algorithme A-3 : Technique de Monté Carlo avec réduction d'intervalles

L'efficacité de la technique de réduction du voisinage de recherche dépend essentiellement du choix du facteur de réduction $Fact$ et du nombre d'échecs successifs permis E_{max} . En effet une forte réduction du voisinage de recherche risque de concentrer la recherche autour d'un optimum local et une faible réduction peut augmenter le temps de calcul sans apporter d'amélioration. De même un nombre d'échec E_{max} faible ne permet pas au processus de bien explorer le voisinage de recherche avant de passer à la réduction et une valeur élevée pour E_{max} risque de laisser le processus effectuer un grand nombre de tests inutiles.

5. LE RECUIT SIMULE

Les techniques présentées précédemment n'acceptent que des diminutions de la fonction objectif (elles sont appelées, pour cela, méthodes de descente pure), elles peuvent dans certains cas se coincer dans un minimum local sans pouvoir s'échapper pour chercher l'optimum global. Une idée, qui consiste à permettre dans certain cas une augmentation de la fonction objectif, peut remédier au piège du minimum local. Cette idée est mise en œuvre dans la technique du recuit simulé qui est une autre variante de la technique de Monté Carlo.

L'algorithme du recuit simulé se résume en un parcours pseudo-aléatoire de l'espace des solutions Ω . Cette méthode est dérivée de la Physique Statistique. Elle est fondée sur une analogie thermodynamique, qui consiste à chauffer un matériau à haute température et à le laisser refroidir lentement, par paliers, afin de permettre au système d'atteindre son énergie libre minimale. L'idée donc est de minimiser une «énergie» liée à une «température».

5.1. Le mécanisme naturel

Le recuit est connu dans le domaine de la métallurgie comme un traitement thermique qui consiste à chauffer un matériau à une température suffisante pour assurer l'équilibre physico-chimique et structurel, puis à refroidir lentement ce matériau. L'état final correspond à une énergie minimale à laquelle le métal devient plus malléable. Lors du refroidissement, les atomes de la matière s'organisent entre eux de manière à privilégier les configurations les plus stables : ils passent donc des configurations de haute énergie à des configurations de faible énergie. Cependant, si le niveau d'énergie total du matériau est suffisamment élevé, les atomes trouvent l'énergie nécessaire pour changer de configuration et passer à des configurations moins stables ayant un niveau d'énergie plus élevé. Ce passage se fait selon la

loi de *Boltzman* qui annonce qu'à la température T , la probabilité P de passage d'un groupe d'atomes se trouvant à un niveau d'énergie E_1 à un niveau d'énergie supérieur E_2 , d'écart $dE = E_2 - E_1$, est donnée par :

$$P = \exp\left(\frac{-dE}{K.T}\right) \quad (\text{A-1})$$

Où K représente la constante de *Boltzman*

Au fur et à mesure que la température baisse, les atomes auront une ressource d'énergie plus faible pour passer à des configurations instables, en conséquence le passage vers les configurations instables devient de plus en plus difficile et les atomes prennent que des configurations stables, conduisant le matériau à prendre son énergie minimale.

5.2. Algorithme de recuit simulé

L'énergie à minimiser dans un problème d'optimisation est la fonction objective F , et les configurations stables correspondent à des solutions diminuant la fonction objective, tandis que les configurations instables correspondent à des solutions engendrant une augmentation de F .

L'algorithme de recuit simulé accepte toujours le passage d'une solution actuelle S_i à une solution S_{i+1} générée aléatoirement dans un voisinage $V(S_i)$ et diminuant la fonction objectif, alors que les augmentations sont acceptées avec une probabilité exprimée par :

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta F}{T}\right) \quad (\text{A-2})$$

Où :

$$\Delta F = F(S_{i+1}) - F(S_i)$$

Ici T est un paramètre de contrôle jouant le rôle de la température dans le processus naturel de recuit. Nous gardons pour ce paramètre la même appellation : température.

La probabilité d'acceptation P décroît avec la température T . Autrement dit, à une température élevée, beaucoup d'augmentations sont acceptées, mais plus la température

décroît, et moins les passages qui augmentent la fonction objective sont retenus. Les transformations qui accroissent la fonction objective sont acceptées, même si elles dégradent momentanément la solution, pour permettre de sortir d'un minimum local. Cette méthode de résolution, sans garantir de solution exacte, fournit une solution proche de l'optimum sans avoir été piégé dans un minimum local.

5.3. Eléments génériques du Recuit Simulé

Si la solution initiale est générée aléatoirement, quatre paramètres sont nécessaires au Recuit Simulé :

- la température initiale,
- le mode de décroissance,
- le nombre d'itérations par palier,
- le test de convergence.

5.3.1. Température initiale T_0

Le choix de la température initiale conditionne, en partie, le déroulement optimal de la recherche. Une température de départ trop faible interdit l'entrée de certaines remontées énergétiques qui permettraient de sortir d'un minimum local. Dans le cas contraire, une température initiale trop élevée pénalise le temps de convergence en acceptant trop de solutions sans garantir la décroissance énergétique de la fonction objectif.

Il existe une méthode, couramment adoptée en pratique, qui permet la détermination automatique de la température initiale T_0 . Elle consiste à effectuer un certain nombre de tirages aléatoires, puis calculer la valeur médiane M des augmentations de la fonction objective F (la médiane est la valeur qui partage une distribution en deux parties égales) et enfin déterminer la température initiale qui favorise une probabilité d'acceptation égale à 50 %. Soit :

$$P = \exp\left(-\frac{M}{T_0}\right) = 0.5 \Rightarrow T_0 = -\frac{M}{\ln(0.5)} \approx 1.44M \quad (\text{A-3})$$

5.3.2. Palier et décroissance de la température

L'algorithme du Recuit Simulé prévoit d'effectuer un certain nombre d'itérations à température constante, puis d'abaisser cette température par paliers successifs. Le protocole de refroidissement est une suite finie de températures, décroissantes par palier (procédure quasi-statique). Au palier Pa ; $0 < Pa < Pa_{max}$, on associe une température Tpa et une longueur de palier Lpa . On suppose que $T_0 > T_1 > \dots > Tpa_{max}$ et que $L_0 > 0$. L'abaissement de la température est effectué soit par une décroissance logarithmique, soit par une décroissance géométrique. La décroissance géométrique est habituellement utilisée, elle est exprimée par :

$$T_{i+1} = a_i T_i$$

Où a_i est choisie souvent constante et inférieure à 1.

La longueur du palier Lpa représente le nombre d'itérations à effectuer pour une température donnée, le plus simple consiste à donner à ce paramètre une valeur qui ne dépend que de la taille du problème à traiter. Comme les passages acceptés deviennent de plus en plus rares au cours de la procédure d'optimisation, il faudra prévoir une limite supérieure sur le nombre total d'itérations effectuées par palier. Plusieurs façons permettent de déterminer la longueur du palier :

- constant : $L_i = Cste$;
- arithmétique : $L_i = L_{i-1} + Cte$;
- géométrique : $L_i = L_{i-1}/a$;
- logarithmique : $L_i = Cste / \log(L_{i-1})$;
- exponentielle $L_i = (L_{i-1})^{(1/a)}$

5.3.3. Convergence

On suppose que la convergence est atteinte lorsque la solution reste identique pendant un nombre d'itérations suffisamment élevé. Le Recuit Simulé possède la propriété de

convergence stochastique vers l'optimum global sous condition de décroissance infiniment longue, avec des pas suffisamment fins de la température. En pratique, on cherche un compromis entre ces deux paramètres pour se rapprocher des conditions de convergence théorique, en choisissant des pas de décroissance faible et des paliers isothermes suffisamment longs.

L'algorithme du recuit simulé se présente comme suit :

```

généraler aléatoirement une solution initiale  $S_0$  ;
 $S^* = S_0$  ;
Calculer la température initiale  $T_0$ 
 $T = T_0$ 
Répéter :
   $k = 0$ 
  Répéter
    généraler une solution aléatoire  $S$  dans  $V(S^*) \in \Omega$  ; évaluer  $F(S)$  ;
     $dF = F(S) - F(S^*)$ 
    Si Accepte( $dF, T$ ) alors  $S^* = S$  ;
     $k = k + 1$  ;
  jusqu'à  $k = Lpa$ 
  diminuer la température  $T$ 
Jusqu'à convergence

Fonction Accepte( $dF, T$ ) = booléen
Si Random(0,1) <  $\exp(-dF / T)$  alors
  Accepte = vrai
Sinon
  Accepte = faux

```

Algorithme A-4 : technique du Recuit Simulé

6. LA RECHERCHE TABOU

Cette technique consiste à se déplacer d'une solution à une autre en s'interdisant de revenir à une solution déjà rencontrée. Supposons qu'on a défini un voisinage $V(S)$ pour chaque solution S ; et supposons, en outre, qu'on dispose pour toute itération de la liste *Tab* de toutes les solutions déjà rencontrées depuis le début de l'exécution de la méthode. Dès lors à partir de la solution courante S_i nous passons à une solution $S_{i+1} \in V(S_i)$ minimisant la

fonction objectif F en ajoutant S_i à la liste Tab . Autrement dit, nous choisissons parmi les solutions voisines de S_i non rencontrées précédemment une qui minimise fortement F .

En pratique, il est rarement possible de pouvoir mettre en œuvre ce principe [70]: conserver toutes les solutions rencontrées consomme en général trop de place mémoire et trop de temps de calcul pour savoir ce qu'il faut choisir dans le voisinage de la solution courante, puisque il nous faut comparer chaque voisin sélectionné avec tous les éléments de la liste Tab .

Pour éviter ces inconvénients rédhibitoires, sans être obligé de conserver en mémoire toutes les configurations rencontrées depuis le début, la méthode Tabou préconise la tactique suivante[71] : au lieu d'ajouter la solution courante à la liste Tab des solutions interdites (taboues), on se contente, quand on remonte, de conserver en mémoire la transformation élémentaire qui a permis de passer de la solution courante à la suivante et s'interdit d'appliquer son inverse, ce sont donc désormais des mouvements qui sont tabous et non plus des solutions. La recherche tabou se prête bien au problème d'optimisation discret. Elle est aussi utilisée pour l'optimisation dans les réseaux.

Nous présentons l'algorithme de la technique Tabou de la manière suivante :

| |
|---|
| <p style="margin-left: 40px;">générer aléatoirement une solution initiale S_0 ; $S^* = S_0$; $Tab = \emptyset$</p> <p>Répéter :</p> <p style="margin-left: 40px;">générer une solution aléatoire S dans $V(S^*) \in \Omega$; Si $S \notin Tab$ alors évaluer $F(S)$; Si $F(S) < F(S^*)$ alors $S^* = S$; Sinon Ajouter S à la liste Tab</p> <p>Jusqu'à Convergence</p> |
|---|

Algorithme A-5 : La recherche Tabou

7. LES ALGORITHMES GENETIQUES

Les algorithmes génétiques sont des techniques d'optimisations fondées sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique. Leur fonctionnement est relativement simple. On part avec une population de solutions potentielles (*chromosomes*) initiales arbitrairement choisie. On évalue leurs performances (*fitness*) relatives sur la base desquelles on crée une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs d'évolution simples : la sélection, le croisement et la mutation. On recommence ce cycle jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante. Ces algorithmes se distinguent des autres méthodes stochastiques par les deux principaux points suivants:

- Ils utilisent un codage des paramètres (solutions) et non pas les paramètres eux même;
- Ils travaillent sur une population de points, au lieu d'un point unique.

Un algorithme génétique se présente en général de la manière suivante :

Générer une population initiale

Répéter :

- Evaluer les performances de chaque individu (chromosome),
- Sélectionner et regrouper les chromosomes par paire selon leurs performances,
- générer une nouvelle population : (Appliquer les opérations de croisement, et de mutation),

Jusqu'à convergence.

Algorithme A- 6 : les algorithmes génétiques

8. Résultats de l'optimisation

Les résultats obtenus sous programme MATLAB ont été fait grâce a la fonction prédéfinie :

`[x,fval]=simulannealbnd(fun,x0,lb,ub,options)`

$[X]=[\theta_1, \theta_3, \theta_5, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_5, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5]$

Avec:

`options = saoptimset('PlotFcns',{ @saplotbestx,...
@saplotbestf,@saplotx,@saplotf});
simulannealbnd(fun,x0,lb,ub,options)`

et les vecteurs x_0, lb, ub :

$x_0 =$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$lb =$

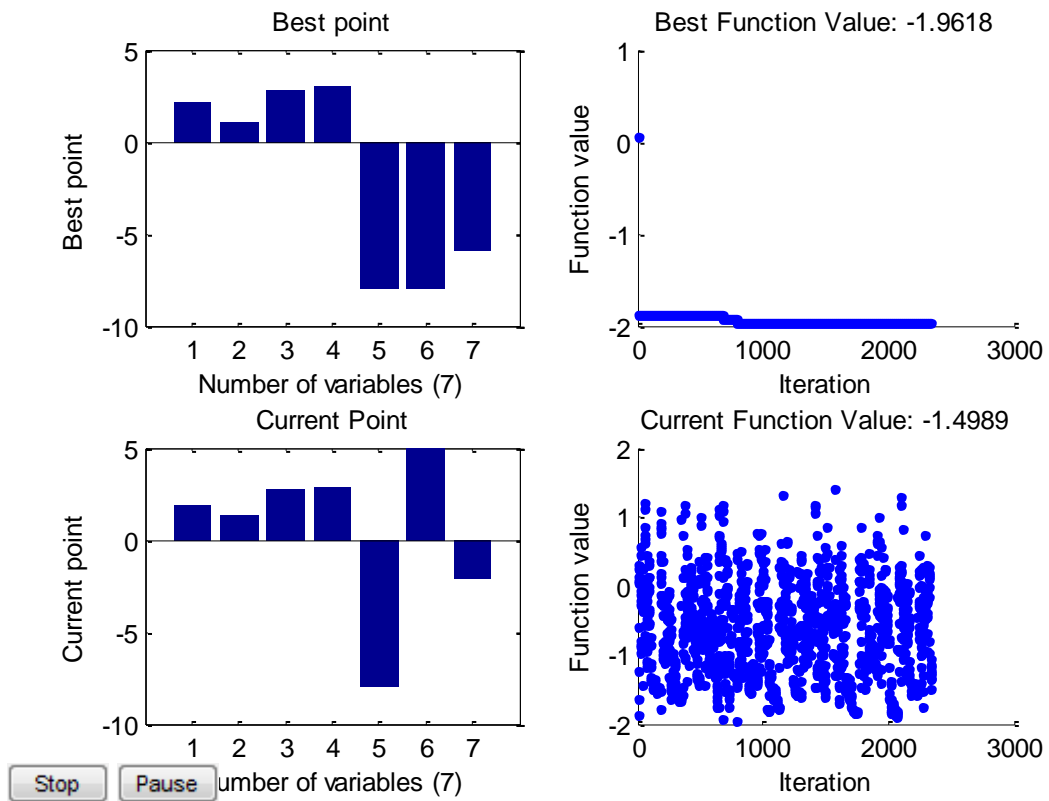
$$[0 \ 1.0472 \ -3.0000 \ -3.0000 \ -8.0000 \ -8.0000 \ -8.0000]$$

$ub =$

$$[2.0944 \ 3.1416 \ 3.0000 \ 3.0000 \ 8.0000 \ 8.0000 \ 8.0000]$$

Remarque :

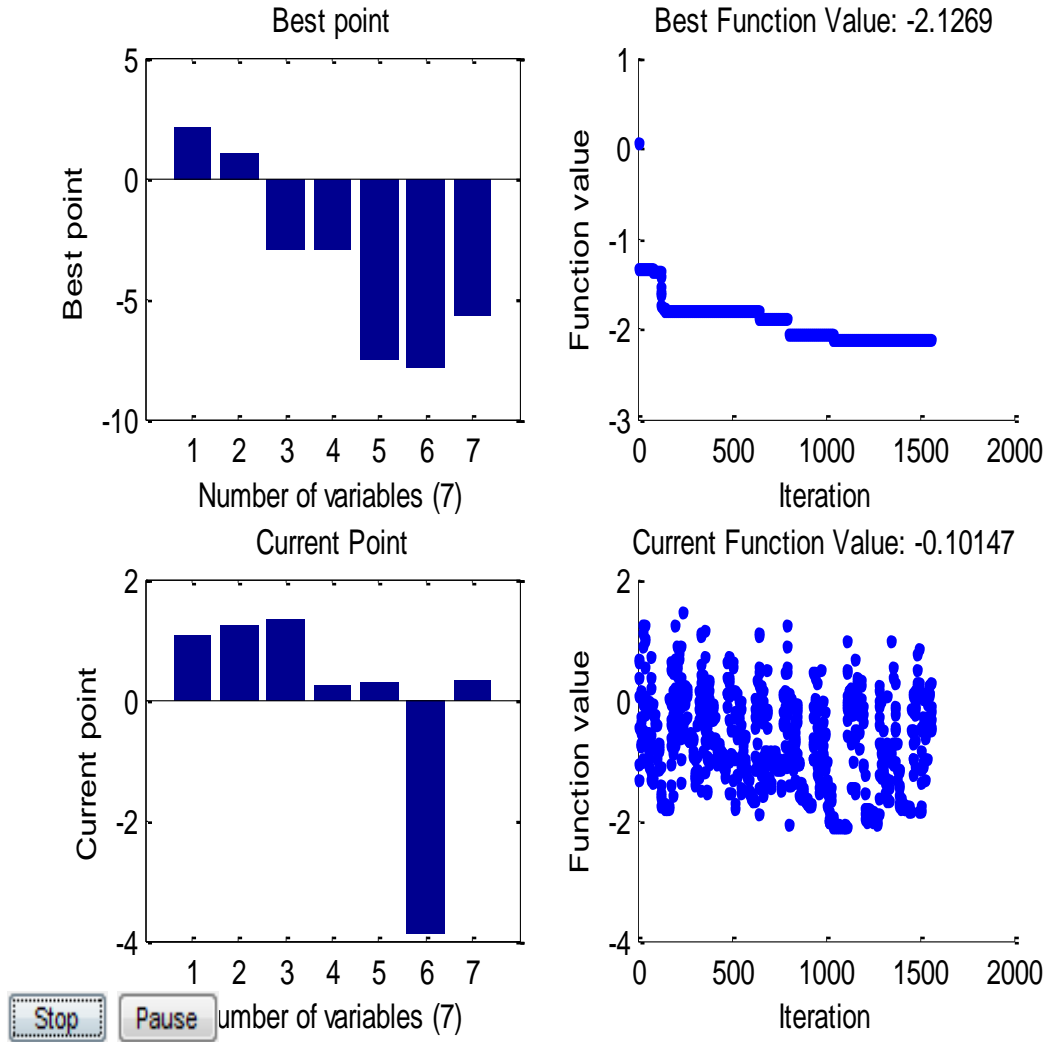
Nous rappelons que la méthode choisie est celle du recuit simulé les fonctions objectives à optimiser sont les couples moteurs : couple1, couple3, couple5.



Avec :

$$[X] = [2.0745 \ 1.0481 \ 2.7522 \ 2.9989 \ -7.9534 \ -7.9927 \ -5.8782]$$

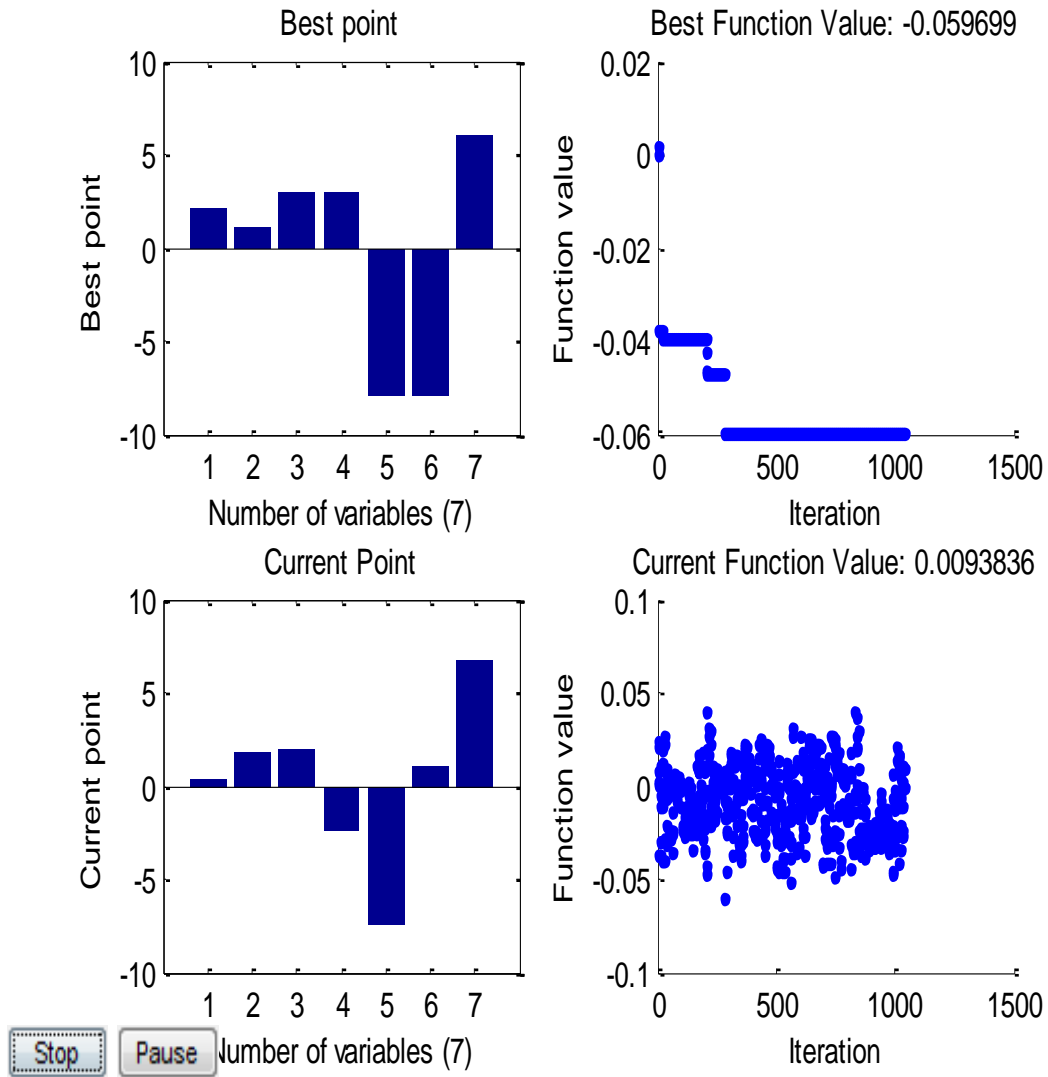
D'après les graphes la valeur max du **couple 1** est de **1.96 N.M**



Avec :

$$[X]=[2.0943 \quad 1.0472 \quad -2.9998 \quad -2.9997 \quad -7.5643 \quad -7.8384 \quad -5.7418]$$

D'après les graphes la valeur max du **couple 2** est de **2.12 N.M**



Avec:

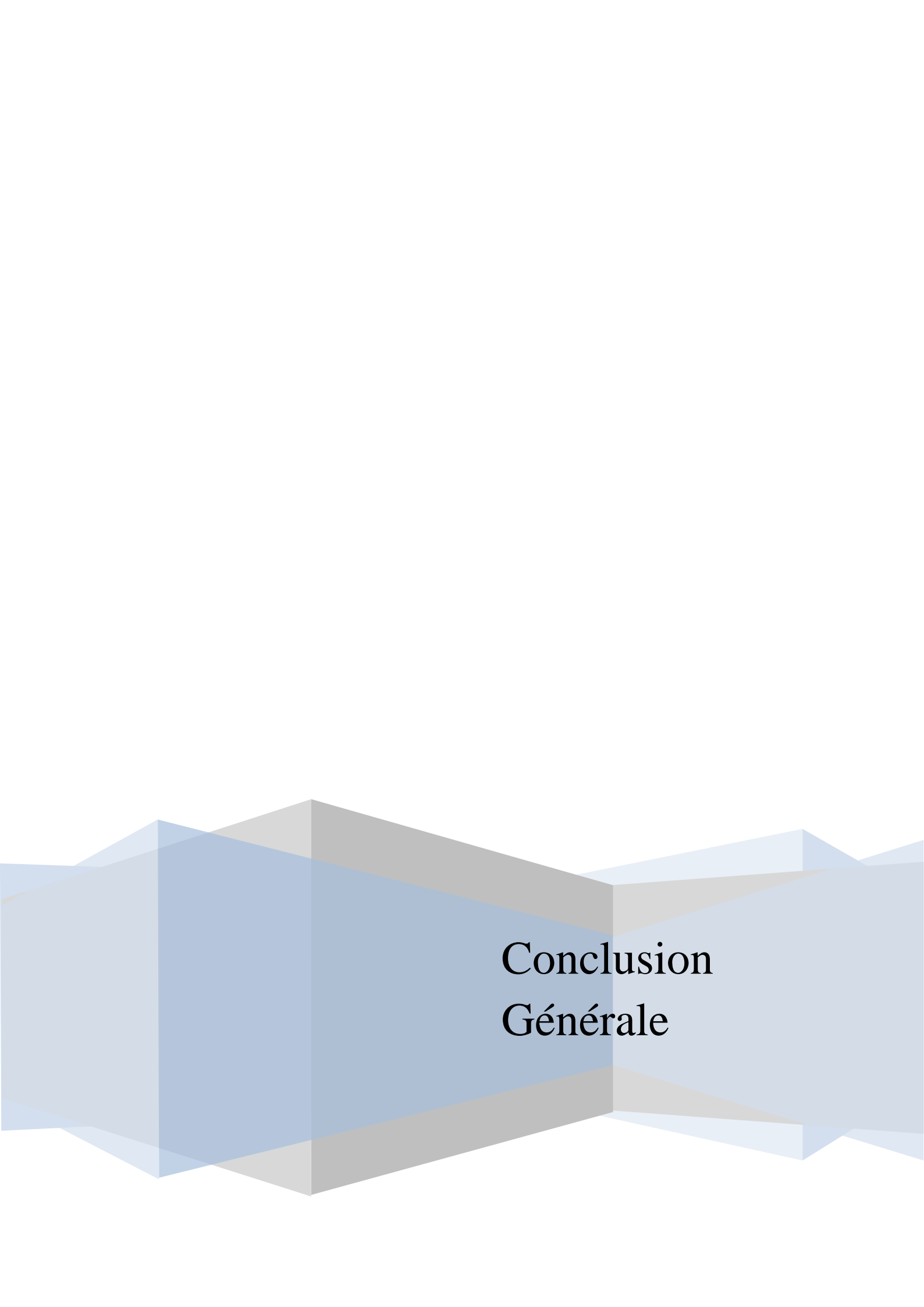
$$[X] = [2.0856 \quad 1.0561 \quad 2.9846 \quad 2.9847 \quad -7.9546 \quad -7.9660 \quad 6.0621]$$

D'après les graphes la valeur max du **couple 5** est de **0.05 N.M**

9. CONCLUSION

Les techniques d'optimisation stochastiques sont des heuristiques établies permettant d'approcher des solutions à des problèmes complexes pour lesquels les techniques déterministes ne sont pas applicables ou moins efficaces. Ces techniques n'assurent pas une solution exacte du problème mais présentent l'avantage d'éviter les optimums locaux en faisant une exploration globale dans l'espace des solutions. Elles aboutissent souvent à une très bonne approximation de l'optimum global.

Leur principe consiste à faire des tirages aléatoires uniformément repartis dans le domaine de recherche jusqu'à l'obtention d'une solution satisfaisante. Ce principe favorise un traitement général des problèmes d'optimisation indépendamment de la nature de la physique de ces problèmes. Cependant, l'efficacité de ces techniques dépend de certains paramètres qui doivent être adaptés selon la dimension du problème à résoudre.



Conclusion
Générale

Dans ce travail, nous nous sommes fixés comme objectif, l'étude des sollicitations maximales induites par une charge de référence les robots parallèles a 3ddl. Nous avons commencé par étudier les robots parallèles et les notions qui s'y rapportent. Cette modélisation n'est pas évidente étant donnée la diversité des architectures des robots parallèles et le manque de méthodes permettant de générer le modèle géométrique de ces robots. Les modèles géométriques sont soit générés au cas par cas, soit générés numériquement. La difficulté est de pouvoir exprimer automatiquement les variables opérationnelles en fonction des seules variables actionnées en éliminant les variables passives du modèle. Le modèle cinématique de ces robots est également étudié ; il peut au choix, soit s'écrire comme la dérivée par rapport au temps du modèle géométrique, soit s'écrire directement en fonction des torseurs de vitesses associés aux liaisons. L'étude de ce modèle permet d'analyser l'état du robot et permet de détecter les positions singulières à éviter.

Au début on aborde La modélisation dynamique de notre modèle, ce qui consiste à déterminer les relations entre les efforts et les coordonnées, vitesses et accélérations. Dans cette partie, nous présentons les différentes méthodologies couramment rencontrées dans la littérature, qui peuvent être déduites d'une approche analytique (formalismes Lagrange) ou d'une approche récursive (Formalisme d'Euler).

On a choisit d'utiliser la méthode de Lagrange pour la modélisation dynamique a cause de sa simplicité et sa rapidité pour arriver a nos résultats qui sont les couples.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la recherche des sollicitations dynamiques maximales, le problème de recherche des sollicitations dynamiques optimal est formulé mathématiquement sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte et dont l'objectif est de maximiser une quantité physique représentée par un critère de performance tout en respectant certaines limitations et exigences de nature technologique liées au robot.

Nous avons utilisé les méthodes stochastiques qui sont les plus approprié et ceci à cause de la complexité de notre fonction objective, qui est dans notre la fonction du couple trouvé après développement de du formalisme de lagrange.les méthodes que nous avons trouvé ont été confirmé par la modélisation de notre robot parallèle sous le logiciel SOLIDDYNAMICS.

L'étude que nous avons menée n'est que préliminaire, on recommande que d'autres études soient menées dans l'axe et qui englobent les thèmes suivants :

- 1) Utilisation d'autres méthodes d'optimisations stochastiques en occurrence les algorithmes génétiques.
- 2) Appliquer Les études qu'on a faites à des robots plus complexes (4ddl, 5ddl et 6ddl).
- 3) Un travail d'analyse et de simplification des équations du modèle dynamique peut être à notre avis un sujet de recherche important qui complètera cette méthode et qui permettra d'améliorer considérablement les performances des programmes d'optimisations.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bonev 03]** I. Bonev, D. Zlatanov, C. Gosselin, « Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via screw theory », ASME Journal of Mechanical Design, volume 125, pp. 573-581, 2003
- [Clavel 88]** R. Clavel, « DELTA, a fast robot with parallel geometry », 18th Int. Symp. on Industrial Robots (ISIR), pages 91-100, Lausanne, 26-28 Avril 1988.
- [Gosselin 88]** C. Gosselin, « Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators ». Thèse de doctorat de McGill University, Montréal, 15 Juin 1988.
- [Hayes 03]** M.J. D. Hayes, M.L. Husty , « On the kinematic constraint surfaces of general three-legged planar robot platforms », Mechanism and Machine Theory 38, pp. 379–394, 2003.
- [Hayes 04]** M.J.D. Hayes, P.J. Zsombor-Murray, C. Chen, « Unified Kinematic Analysis of General Planar Parallel Manipulators » ASME Journal of Mechanical Design, vol 126, no 5, pp. 866-874. Septembre 2004.
- [Hayward 89]** V. Hayward, et R. Kurtz, « Preliminary study of serial-parallel redundant manipulator », NASA Conference on Space Telerobotics, pages 39-48, Pasadena, 31 Janvier 1989.
- [Lee 88]** K-M . Lee et D. Shah, « Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator », IEEE Journal of Robotics and Automation, 4(3):354-360, Juin 1988.
- [McCloy 90]** D. McCloy, « Some comparisons of serial-driven and parallel-driven manipulators », 1990.
- [Merlet97]**. J-P. Merlet, « Les robots parallèles », 2eme Ed, HERMES, Paris, 1997.
- [Niaritsiry 2006]** T. Niaritsiry “ Optimisation de la conception du robot parallèle delta cube de très haute précision”, thèse présentée à l’école fédérale polytechnique de lausanne, Juin 2006.
- [Pierrot 91]** F. Pierrot, « Robot pleinement parallèle légers : conception, modélisation et commande », Thèse de doctorat Montpellier, Avril 1991
- [Romdhane 99]** L. Romdhane, « Design and analysis of a hybrid serial-parallel manipulator », Mechanism and Machine Theory 34 7, pp. 1037–1056.
- [Tsai 96]** Tsai L-W., « Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs ». ARK, pages 401-410, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [Xi 2006][Xi 06]** F. Xi, “ design and analysis of a reconfigurable parallel robot”, Mechanism and Machine theory 41, pp. 191-211 , 2006.
- [YOU.98]** Yousnadj, A.(1998), « Caractéristique Lites de Charges des bras manipulateurs »



ANNEXE 1

Programmes MATLAB pour l'obtention des courbes :

```
function [a0,a1,a2,a3]= fonctionr0123(ri,rpti,rf,rptf)
%programme1
%fonction pour le calcul de r(t)

a0=ri;
a1=rpti;
a2=1/4*(-2*rptf-4*rpti+3*rf-3*ri);
a3=1/4*(rptf+rpti+ri-rf);
end

function
[r,teta1,teta3,teta5]=grapheposition135(tetai1,tetaf1,tetai3,tetaf3,tetai5,
tetaf5,a0,a1,a2,a3)
%programme2
%programme visant a tracer les graphes teta1 et teta3 en fct du temps

t=0:1/1000:2;
r=a0+a1*t+a2*t.^2+a3*t.^3;
teta1=tetai1+r*(tetaf1-tetai1);
teta3=tetai3+r*(tetaf3-tetai3);
teta5=tetai5+r*(tetaf5-tetai5);

plot(t,teta1,'r')
hold on
plot(t,teta3,'g')
plot(t,teta5,'b')

xlabel('temps');
ylabel('position');
legend('position teta1' , 'position teta3','position
teta5','Location','NorthWest');
title('courbe variation des positions teta1 teta3 teta5');

end

function
[rpt,tetapt1,tetapt3,tetapt5]=graphevitesse135(tetai1,tetaf1,tetai3,tetaf3,
tetai5,tetaf5,a1,a2,a3)
%programme3
%programme visant a tracer les graphes tetapt1 et tetapt3 en fct du temps

t=0:1/1000:2;
rpt=a1+2*a2*t+3*a3*t.^2;
tetapt1=rpt*(tetaf1-tetai1);
tetapt3=rpt*(tetaf3-tetai3);
tetapt5=rpt*(tetaf5-tetai5);

plot(t,tetapt1,'^r')
hold on
plot(t,tetapt3,'*g')
plot(t,tetapt5,'+b')
```

```

xlabel('temps');
ylabel('vitesse');
legend('vitesse tetapt1' , 'vitesse tetapt3','vitesse
tetapt5','Location','NorthWest');
title('courbe variation des vitesses tetapt1 tetapt3 tetapt5');

end

function
[rptt,tetaptt1,tetaptt3,tetaptt5]=grapheacceleration135(teta1,tetaf1,tetai
3,tetaf3,tetai5,tetaf5,a2,a3)
%programme4
%programme visant a tracer les graphes tetaptt1 et tetaptt3 en fct du temps

t=0:1/1000:2;
rptt=2*a2+6*a3*t;
tetaptt1=rptt*(tetaf1-tetai1);
tetaptt3=rptt*(tetaf3-tetai3);
tetaptt5=rptt*(tetaf5-tetai5);

plot(t,tetaptt1,'^r')
hold on
plot(t,tetaptt3,'*g')
plot(t,tetaptt5,'+b')

xlabel('temps');
ylabel('acceleration');
legend('acceleration tetaptt1' , 'acceleration tetaptt3','acceleration
tetaptt5');
title('courbe variation des accelerations tetaptt1 tetaptt3 tetaptt5');

end

function [alpha,beta]=progalphabeta(teta1,teta3,l1,d)
%programme5.1
%fonction donnant les valeurs de alpha et beta

alpha=l1*(cos(teta3)-cos(teta1))-2*d;
beta=l1*(sin(teta3)-sin(teta1));
end

function [A,B,C]=progABC(alpha,beta,l2)
%programme5.2
%fonction donnant les valeurs de A B et C aidant à résoudre l'equation du
%second degres

%[alpha,beta]=prog1(teta1,teta3,l1,l2,d);
A=(alpha).^2+(beta).^2;
B=2*alpha.*l2;
C=2*beta.*l2;
end

```

```

function [y1,y2]=equadeuxvecteur(A,B,C)
%programme5.3
%fonction donnant le résultat de l'equation de second degres contraintes
%géométriques

```

```

k=zeros(2,length(A));

```

```

for i=1:length(A)

```

```

k(:,i)=roots([A(i)-B(i) 2*C(i) A(i)+B(i)]);

```

```

end

```

```

y1=k(1,:);

```

```

y2=k(2,:);

```

```

y1=y1';

```

```

y2=y2';

```

```

function [teta4]=angleteta4vect(teta3,y)
%fonction4
%teta4 vecteur ligne
%fonction donnant teta4en fonction de teta3graphe

```

```

teta4=2.*atan(y)-teta3';

```

```

teta4=teta4';

```

```

t=0:1/1000:2;

```

```

plot(t,teta4)

```

```

xlabel('temps')

```

```

ylabel('angle teta4')

```

```

title('graphe variation de la valeur de l angle teta4')

```

```

end

```

```

function [teta2]=angleteta2(alpha,beta,teta1,teta3,teta4)

```

```

%programme6

```

```

%teta2 vecteur ligne

```

```

%fonction donnant teta2

```

```

teta2=atan((beta/alpha)+tan(teta3+teta4))-teta1;

```

```

t=0:1/1000:2;

```

```

plot(t,teta2,'g')

```

```

xlabel('temps')

```

```

ylabel('angle teta2')

```

```

title('graphe variation de la valeur de l angle teta2')

```

```

end

```

```

function [teta2pt,teta4pt]=vitesses24vect(teta1,teta2,teta3,teta4,l1,l2,teta
pt1,tetapt3)

```

```

%programme7

```

```

%fonction délivrant les valeurs des vitesses teta2pt et teta4pt vecteurs

```

```

for i=1:length(teta1)

[teta2pt(i),teta4pt(i)]=vitesses24(teta1(i),teta2(i),teta3(i),teta4(i),l1,l
2,tetapt1(i),tetapt3(i));

end

t=0:1/1000:2;

plot(t,teta2pt,'r')
xlabel('temps')
ylabel('vitesse teta2pt')
title('graphe variation de la vitesse teta2pt')

pause
close all

plot(t,teta4pt,'g')
xlabel('temps')
ylabel('vitesse teta4pt')
title('graphe variation de la vitesse teta4pt')
pause
close all

function [teta2ptt
teta4ptt]=acceleration24vect(teta1,teta2,teta3,teta4,l1,l2,tetapt1,tetapt3,
teta2pt,teta4pt,tetaptt1,tetaptt3)
%programme9
%fonction delivrant les valeurs des accelerations teta2ptt ainsi que
%teta4ptt vecteurs

for i=1:length(teta1)

[teta2ptt(i),teta4ptt(i)]=acceleration24(teta1(i),teta2(i),teta3(i),teta4(i)
),l1,l2,tetapt1(i),tetapt3(i),teta2pt(i),teta4pt(i),tetaptt1(i),tetaptt3(i)
);

end

t=0:1/1000:2;

plot(t,teta2ptt,'r')
xlabel('temps')
ylabel('acceleration teta2ptt')
title('graphe variation de l acceleration teta2pt')

pause
close all

plot(t,teta4ptt,'g')
xlabel('temps')
ylabel('acceleration teta4ptt')
title('graphe variation de l acceleration teta4pt')
pause

```



```

close all
function
[A1,A2,d1,d2,f1,g1,g2,b1,e1,e2]=energiecinetiquetotale(iz1,iz2,iz5,m1,m2,l1
,l2,m5)
%programme11
%fonction pour données d'energie cinetique

A1=iz1+(m1*(l1)^2)/4+iz2+m2*((l1)^2+(l2)^2)/4+m5*((l1)^2+(l2)^2)+iz5;
A2=m2*l1*l2+2*l1*l2*m5;
d1=(m2*(l2)^2)/2+2*iz2+m5*2*(l2)^2+2*iz5;
d2=(m2+2*m5)*l1*l2;
f1=(m2*(l2)^2)/4+iz2;
g1=(m2*(l2)^2)/2+2*iz2;
g2=m2*l1*l2;
b1=(m2*(l2)^2)/4+iz2+m5*(l2)^2+iz5;
e1=iz1+iz2+m1*((l1)^2/4)+m2*((l1)^2+(l2)^2/4);
e2=m2*l1*l2;

end

function
[L,K]=constantesLK(f1,g1,g2,teta4,tetapt3,tetaptt3,b1,d1,d2,A2,teta1,teta2,
tetapt1,l2,tetaptt1,teta2ptt,teta4ptt,iz5,tetaptt5,e2,teta3)
%programme12
tetalpt=tetapt1;
teta3pt=tetapt3;

tetalptt=tetaptt1;
teta3ptt=tetaptt3;
for i=1:length(teta1)

L(i)=(f1*teta4ptt(i)+0.5*(g1+g2*cos(teta4(i)))*teta3ptt(i)+0.5*e2*sin(teta4
(i))*(teta3pt(i))^2)/l2*sin(teta4(i)+teta3(i));
K(i)=(b1*teta2ptt(i)+0.5*(d1+d2*cos(teta2(i)))*tetalptt(i)+0.5*A2*sin(teta2
(i))*(tetalpt(i))^2+iz5*tetaptt5(i))/(l2*sin(teta1(i)+teta2(i)));
end
end

function
[sigma1]=couple1(A1,A2,d1,d2,lambda1,lambda2,l1,l2,teta1,teta2,tetapt1,teta
2pt,tetaptt1,teta2ptt,iz5,tetaptt5)
%programme14
%calcul du lagrangien 1

tetalpt=tetapt1;
tetalptt=tetaptt1;

sigma1=(A1+A2*cos(teta2)).*tetalptt-
A2*sin(teta2).*tetalpt.*teta2pt+0.5*(d1+d2*cos(teta2)).*teta2ptt-
0.5*d2*sin(teta2).*(teta2pt).^2+lambda1.*(-l1*sin(teta1)-
l2*sin(teta1+teta2))+lambda2.*(l2*cos(teta1+teta2)+l1*cos(teta1))+iz5*tetap
tt5;
t=0:1/1000:2;
plot(t,sigma1,'r')
xlabel('temps')
ylabel('sigma1')
title('graphe variation de sigma1 ')

```

```
end
```

```
function
```

```
[sigma3]=couple3(e1,e2,g1,g2,lambda1,lambda2,l1,l2,teta3,teta4,tetapt3,teta  
4pt,tetaptt3,teta4ptt,tetal)
```

```
%programme15
```

```
%calcul du sigma 3
```

```
teta3pt=tetapt3;
```

```
teta3ptt=tetaptt3;
```

```
for i=1:length(tetal)
```

```
sigma3(i)=(e1+e2*cos(teta4(i))).*(teta3ptt(i))-
```

```
e2*sin(teta4(i)).*(teta3pt(i)).*(teta4pt(i))+0.5*(g1+g2*cos(teta4(i))).*tet  
a4ptt(i)-
```

```
0.5*g2*sin(teta4(i)).*(teta4ptt(i))^2+lambda1(i).*(l1*sin(teta3(i))+l2*sin(  
teta3(i)+teta4(i)))-
```

```
lambda2(i).*(l1*cos(teta3(i))+l2*cos(teta3(i)+teta4(i)));
```

```
end
```

```
t=0:1/1000:2;
```

```
plot(t,sigma3,'g')
```

```
xlabel('temps')
```

```
ylabel('sigma3')
```

```
title('graphe variation de sigma3 ')
```

```
end
```

```
function [sigma5]=couple5(tetaptt1,teta2ptt,tetaptt5,iz5)
```

```
%programme16
```

```
%calcul du sigma 3
```

```
tetaptt2=teta2ptt;
```

```
sigma5=iz5*(tetaptt1+tetaptt2+tetaptt5);
```

```
t=0:1/1000:2;
```

```
plot(t,sigma5,'b')
```

```
xlabel('temps')
```

```
ylabel('sigma5')
```

```
title('graphe variation de sigma5 ')
```

```
end
```