

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

En vue de l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie
Mécanique

Thème

ETUDE DES CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT DES ENGRENAGES CONIQUES DROITS.

Proposé et Dirigé par :
Mr.M.BOUAZIZ

Réalisé par :
Fouad FETMOUCHE

Promotion : Septembre 2011

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi BP182 El-Harrach
16200 Alger (Algérie)



Remerciements

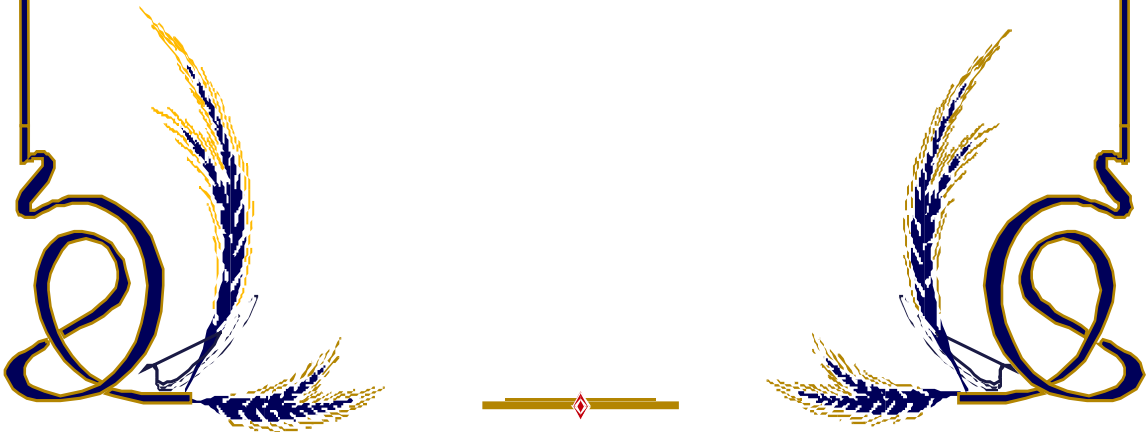
*Au terme de ce Mémoire je tiens à remercier tout naturellement en premier lieu **Dieu le tout Puissant** qui m'a donné la force, le courage et la patience de bien mener ce travail.*

*Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **M.BOUAZIZ**, mon promoteur, qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa compétence, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail.*

*Je remercie Monsieur **BELHANECHÉ**, qui a bien voulu assurer la présidence du jury ainsi que Monsieur **RIACHE**, pour avoir accepté de juger ce modeste travail.*

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Mes sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.





Dédicaces

Je dédie ce travail :

A l'âme de mes ancêtres.

A mes très chers parents.

A mon frère et à mes sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A cette terre qui m'a vu naître.

Fouad

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو دراسة المسننات المخروطية المستقيمة ذات هندسة كروية، قمنا بدراسة عناصر التشغيل قبل و بعد تصحيح المسنن.

و قمنا بدراسة التعشيق و حساب نسبة النقل و الانزلاق و حاولنا تصحيح عيوب التشغيل كالتآكل و التداخل باختيار معامل التصحيح المناسب.

كلمات مفتاحية: مسنن مخروطي، هندسة كروية، التعشيق، نسبة النقل، الانزلاق، التآكل، التداخل، معامل التصحيح.

Résumé :

Dans ce travail on s'est basé sur la géométrie à développante sphérique des engrenages coniques droits pour calculer les différents paramètres géométriques avant et après correction de denture, et on a étudié l'engrènement tout en calculant le rapport de conduite avec deux méthodes différentes ainsi que le glissement spécifique.

On a aussi trouvé les coefficients de déport adéquats pour éliminer les anomalies de fonctionnement tels que les interférences de fonctionnement et l'usure.

Mots clés : engrenage conique, développante sphérique, correction, rapport de conduite, glissement spécifique, interférence, usure, déport.

Abstract:

In this work one based oneself on the geometry with spherical involute to calculate the various geometrical parameters before and after correction of teeth, and one studied engaging while calculating the ratio of control with two different methods as well as the specific sliding.

We also found the adequate offset coefficients to eliminate the faulty operations such as the interferences of operation and the wear.

Keywords: bevel gear, spherical involute, correction of teeth, the ratio of control, specific sliding, interferences, wear, offset coefficient.

Liste des tableaux.

TableauII.1 : Désignation des symboles utilisés.....	16
TableauII.2 : Modules normalisés usuels.....	27
TableauII.3 : Résultats du calcul de la denture.....	28
TableauII.4 : Résultats de calcul d'une denture corrigée.....	35
TableauIII.1 : Caractéristiques géométriques de la denture.....	49
TableauIII.2 : valeurs du rapport de conduite calculé avec les deux méthodes....	51
TableauIII.3 : Nombre de dents limite pour éviter les interférences.....	53
TableauIII.4 :Le coefficient de déport adéquat pour éviter les interférences.....	54
TableauIV.1 :Données pour le calcul du glissement.....	60
TableauIV.2 :Les coefficients de déport pour l'équilibrage de l'usure.....	69

Liste des figures.

Figure I-1 : Triangle sphérique rectangle.....	3
FigureI-2 : Génération d'une denture conique droite à développante de cercle sphérique.....	4
FigureI-3 : Triangle sphérique II'B.....	5
FigureI-4 : Triangle sphérique TMB.....	6
FigureI-5 : Profil de la roue plate génératrice à développante sphérique.....	8
FigureI-6 : Génération d'une denture conique droite par un outil à développante sphérique.....	9
Figure I-7 : Système d'axes.....	10
FigureI-8 : Epaisseur de denture à développante sphérique.....	12
FigureII.1 : Surfaces axoïdes coniques.....	15
FigureII.2 : Eléments caractéristiques d'une denture conique droite.....	16
FigureII.3 : Engrenages coniques à axes orthogonaux.....	19
FigureII.4 : Engrenages coniques dont l'angle des axes $\Sigma < 90^\circ$	19
FigureII.5 : Engrenages conique avec $\Sigma = \delta_2 - \delta_1$	19
FigureII.6 : Engrenages coniques avec $\Sigma > 90^\circ$	20
FigureII.7 : Engrenages coniques à roue plate ($\delta_2=90^\circ$).....	20
FigureII.8 : Dimensions de la roue plate.....	22
FigureII.9 : Les différents efforts appliqués sur une denture conique droite.....	22
FigureII.10 : Roue taillée à denture déportée.....	29
FigureII.11 : Correction de denture avec déport variable.....	30
FigureII.12 : Correction de denture avec déport constant.....	31
FigureII.13 : Angle de fonctionnement d'un engrenage conique droit.....	32
FigureII.14 : Angle de pression de fonctionnement.....	33
FigureII.15 : Profil de la denture après correction.....	34

Figure III.1.a : Arc de contact d'un engrenage conique droit.....	38
Figure III.1.b : Arc de contact d'un engrenage conique droit.....	39
Figure III.2 : Le triangle sphérique SO_1T_1I	40
figureIII.3 : Le triangle sphérique SO_2T_2I	41
figureIII.4 : Le triangle sphérique SO_1T_1A	42
figureIII.5 : Le triangle sphérique SO_2T_2B	43
FigureIII.6 : Engrenage complémentaire.....	46
FigureIII.7 : Ligne de conduite d'un engrenage complémentaire.....	48
FigureIII.8 : Interférences de fonctionnement.....	52
FigureIII.9 : variation du coefficient de déport en fonction du rapport de transmission.....	54
FigureIV.1 : Vecteur vitesse \vec{V}_M en M.....	56
FigureIV.2 : Projections de \vec{V}_M sur \vec{u} et \vec{v}	57
FigureIV.3 : Variation des glissements spécifiques en fonction de la position angulaire.....	62
FigureIV.4 : Vitesse de glissement relative.....	63
FigureIV.5 : Répartition de la vitesse sur la ligne de contact.....	65
FigureIV.6 : vitesses tangentielles.....	66

Nomenclature

C_p :	Cône primitif	[-]
C_e :	Cône extérieur	[-]
C_b :	Cône de base	[-]
d :	Diamètre primitif	[mm]
δ :	Angle primitif	[rad]
d_a :	Diamètre de tête	[mm]
δ_a :	Angle de tête (cône de tête)	[rad]
d_f :	Diamètre de pied	[mm]
δ_f :	Angle de pied (cône de pied)	[rad]
R :	Génératrice primitive	[mm]
R_m :	Génératrice moyenne	[mm]
h :	Hauteur de la denture	[mm]
θ :	Angle de hauteur de la denture	[rad]
h_a :	Hauteur de saillie	[mm]
θ_a :	Angle de saillie	[rad]
h_f :	Hauteur du creux	[mm]
θ_f :	Angle de creux	[rad]
δ_b :	Angle de base	[rad]
b :	Largeur de denture	[mm]
u :	rapport de transmission	[-]
ω_1, ω_2 :	vitesse de rotation	[rad /s]
Z_1, Z_2 :	nombre de dents	[-]
Σ :	angle des axes	[rad]

p_p :	pas primitif sur la roue plate	[mm]
s_p :	épaisseur de dent	[mm]
s_b :	épaisseur de base	[mm]
j :	jeux au fond de la dent	[mm]
τ_p :	pas angulaire	[rad]
ψ_p :	demi-angle d'épaisseur	[rad]
η_p :	demi-angle d'intervalle	[rad]
\vec{F}_n :	effort normal à la dent	[N]
\vec{F}_t :	effort tangentiel	[N]
\vec{F}_a :	effort axial.	[N]
\vec{F}_r :	effort radial	[N]
m :	module	[mm]
m' :	module de fonctionnement	[mm]
α :	angle de pression	[rad]
α' :	angle de pression de fonctionnement	[rad]
δ' :	angle de fonctionnement	[rad]
v :	déport	[mm]
x :	coefficient de déport	[-]
\widehat{AB} :	Arc de contact	[mm]
\widehat{AI} :	Arc d'approche	[mm]
\widehat{IB} :	Arc de retraite	[mm]
$\widehat{T_1T_2}$:	Arc d'action	[mm]
ε_α :	rapport de conduite	[-]
$\varepsilon_{\alpha v}$:	rapport de conduite virtuel	[-]
z_{v1}, z_{v2} :	nombre de dents virtuels	[-]
u_v :	rapport de transmission virtuel	[-]

d_v :	diamètre virtuel	[mm]
d_{av} :	diamètre de tête virtuel	[mm]
d_{fv} :	diamètre de pied virtuel	[mm]
\vec{V}_M :	vitesse du point M	[mm/s]
$\vec{V}_{Mu}, \vec{V}_{Mv}$:	projections du vecteur vitesse	[mm/s]
$\vec{V}_t(M)$:	vitesse tangentielle	[mm/s]
\vec{V}_g :	vitesse de glissement	[mm/s]
dg :	glissement relatif élémentaire	[-]
gs_1, gs_2 :	glissements spécifiques	[-]

Sommaire

Introduction générale.

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

I-1. Introduction.....	3
I-2. Relations fondamentales de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle.....	3
I-3. Denture à développante sphérique.....	3
I-3.1. Coordonnées d'un point de la développante sphérique	3
I-3.2. Composantes de la normale en un point de la surface de denture	7
I-3.3. Outil de génération	7
I-3.3.1. Coordonnées et normales d'un point de la denture du pignon associé Au point de la roue plate génératrice.....	8
I-3.3.2. Recherche du point de l'outil associé à celui de la denture du Pignon.....	11
I-3.4. Epaisseur de denture du pignon	12
Conclusion.....	14

Chapitre II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Introduction.....	15
II.1. Paramètres géométriques des engrenages coniques droits.....	15
II.1.1. Surfaces axoïdes.....	15
II.1.2. Eléments géométriques de la denture.....	15
II.2. Rapport de transmission.....	17

II.3. Expressions de δ_1 , δ_2 connaissant Z_1 , Z_2 et Σ	18
II.4. Dispositions roue-pignon.....	18
II.5. Profil de référence et roue plate	21
II.5.1 Profil de référence sur la roue plate	21
II.5.2. Dimensions de la roue plate.....	21
II.6. Efforts sur les dentures des engrenages coniques droits.....	22
II.7. Calcul du module de la denture.....	24
II.8. Calcul des roues coniques.....	25
II.8.1. Conduite des calculs.....	25
II.8.2. Application.....	27
II.9. Génération pratique des dentures	29
II.9.1. Taillage par reproduction	29
II.9.2 Taillage par génération.....	29
II.10. Notion du déport	29
II.11. Correction des dentures conique.....	30
II.11.1. Correction avec déport variable.....	30
II.11.2. Correction de denture avec déport constant	30
II.12. Caractéristiques géométriques d'une denture corrigée.....	31
II.13. Caractéristiques de fonctionnement d'une roue conique	
à denture déportée	32
II.13.1. Angle de fonctionnement	32
II.13.2. Angle de pression de fonctionnement	32
II.13.3. Module de fonctionnement.....	34
Conclusion.....	36

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement.

Introduction.....	37
III.1. Arc de contact.....	37
III.2. Procédure de calcul.....	40
III.2.1. Calcul de l'arc \widehat{IT}_1	40
III.2.2. Calcul de l'arc \widehat{IT}_2	41
III.2.3. Calcul de l'arc \widehat{AT}_1	42
III.2.4. Calcul de l'arc \widehat{BT}_2	43
III.3. Rapport de conduite	44
III.4. Calcul du rapport de conduite par l'approximation de Tred-Gold.....	45
III.4.1. Engrenage complémentaire.....	45
III.4.2. Diamètres primitifs et nombre de dents virtuels.....	46
III.4.3. Rapport de transmission virtuel.....	47
III.4.4. Diamètres des roues virtuelles	47
III.4.5. Calcul du rapport de conduite.....	47
III.4.5.1. Ligne de conduite	47
III.4.5.2. Procédure de calcul.....	48
III.5. Application.....	49
III.5.1. Calcul par la formule exacte.....	50
III.5.2. Calcul par l'approximation de Tred-Gold.....	50
III.6. Interférences de fonctionnement.....	51
III.6.1. Calcul des interférences de fonctionnement.....	52
III.6.2. Correction de denture pour annuler les interférences de fonctionnement	53
Conclusion.....	55

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure.

Introduction.....	56
IV.1. Calcul des vitesses de roulement et de glissement au point de contact.....	56
IV.1.1 Vitesse d'un point M de la développante de cercle sphérique.....	56
IV.1.2. Vitesses de roulement et de glissement.....	57
IV.2. Glissement spécifique.....	59
IV.3. Application.....	60
IV.4. Calcul du glissement spécifique par la méthode de Tred-Gold.....	62
IV.4.1. Vitesse de glissement.....	63
IV.4.2. Glissement relatif élémentaire.....	64
IV.4.3. Glissement spécifique.....	65
IV.5. Equilibrage de l'usure.....	67
Conclusion.....	69
Conclusion générale.	
Conclusion générale.....	70
Bibliographie	71
Annexes	72

Introduction Générale

Introduction générale

Les engrenages à axes concourants servent à transmettre la puissance entre deux arbres faisant habituellement un angle $\Sigma = 90^\circ$, mais tout angle compris entre 0° et 180° est en principe possible. Le rendement de ce genre de transmission est élevé, jusqu'à 97 %, si le soin apporté à la fabrication et au montage est suffisamment poussé et si les paliers sont bien choisis en fonction des charges à transmettre. Ces engrenages se composent de deux roues coniques qui doivent coïncider exactement le long de leurs génératrices communes et les axes doivent se couper au sommet des cônes primitifs.

Contrairement aux engrenages cylindriques pour lesquels on trouve de nombreux travaux, les engrenages coniques droits sont encore moins développés.

Les engrenages coniques droits possèdent trois types différents de géométrie, un profil théorique de la denture qui est la développante sphérique, et deux profils pratique qui sont les octoïdes 1^{ère} et 2^{ème} espèce.

Pour ce mémoire on a choisi la denture à développante sphérique et on a fait :

- En premier lieu une étude générale de la géométrie de la denture à développante sphérique.
- Au deuxième chapitre on a défini les différentes caractéristiques géométriques des engrenages coniques, ensuite on redéfini les caractéristiques géométriques de la denture mais cette fois ci avec une correction de denture, et on calcule les paramètres de fonctionnement c'est-à-dire le nouvel angle du cône et le nouveau angle de pression, et le module de fonctionnement.
- Au troisième chapitre on a étudié l'engrènement de deux roues coniques, en définissant l'arc de contact pour ensuite calculé le rapport de conduite avec deux méthodes, la première c'est la méthode exacte, et la deuxième c'est l'approximation de Tred-Gold et comparer les résultats de ces deux méthodes. Ensuite on recherche le nombre de dents minimales du petit pignon pour éviter les interférences de fonctionnement.

Introduction générale

- Au quatrième chapitre on définit glissement spécifique avec la méthode exacte et l'approximation de Tred-Gold, pour ensuite rechercher la bonne correction de denture pour l'équilibrage de l'usure en égalisant les deux glissements spécifiques maximaux pour retrouver le bon coefficient de déport qui nous permet de réaliser cette correction.

Chapitre I
Géométrie des
engrenages coniques
droits.

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

I-1. Introduction:

Les engrenages coniques droits sont des éléments de transmission de mouvement entre deux arbres concourants. Ils sont couramment utilisés dans les différentiels et pont d'automobiles et les machines-outils (têtes des fraiseuses par exemple).

Ces engrenages possèdent trois définitions pour la génération de la surface de denture : la développante sphérique (profil de la denture théorique) et les octoïdes de 1^{ère} ou de 2^{ème} espèce (profil des dentures pratiques). Leurs profils de denture devant être tracés sur une sphère.

I-2. Relations fondamentales de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle :

La figI-1. représente un triangle sphérique rectangle en C dont le centre de la sphère de rayon unité est le point O. soient a, b les cotés de l'angle droit et c l'hypoténuse, A, B les angles opposés respectivement aux cotés a et b On démontre les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin c \sin A & (1) \\ \sin b &= \sin c \sin B & (2) \\ \cos A &= \cos a \sin B & (3) \\ \cos B &= \cos b \sin A & (4) \\ \operatorname{tga} &= \sin b \operatorname{tga} & (5) \\ \operatorname{tgb} &= \sin a \operatorname{tgb} & (6) \\ \cos c &= \cos a \cos b & (7) \\ \operatorname{tga} &= \operatorname{tgc} \cos B & (8) \\ \operatorname{tgb} &= \operatorname{tgc} \cos A & (9) \\ \cos c &= \cot g A \cot g B & (10) \end{aligned}$$

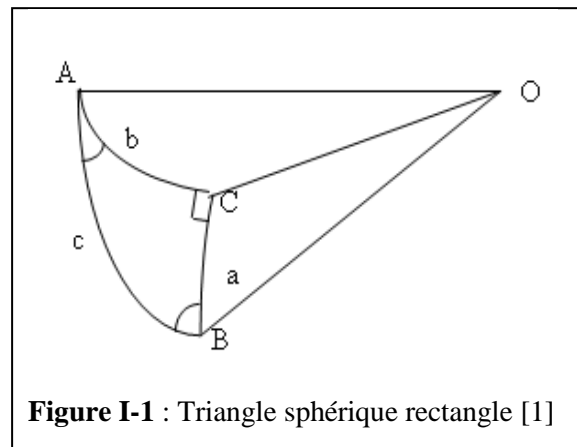


Figure I-1 : Triangle sphérique rectangle [1]

I-3. Denture à développante sphérique :

I-3.1. Coordonnées d'un point de la développante sphérique :

D'après [1] la figI-2 illustre la génération d'une denture conique droite à développante sphérique. Le plan (P_b) passant par le centre S de la sphère de rayon R roule sans glisser sur le cône de base de demi-angle au sommet δ_b . Le plan (N) est normal à(P_b) et lui est invariablement lié. Notons que le plan (P_b) est appelé plan d'action, sa trace sur la sphère, qui est un grand cercle, est la ligne d'action.

Le profil de la denture est décrit par le point M intersection de cette ligne d'action avec le plan de génération (N). Nous allons déterminer ses coordonnées X_1 , Y_1 , Z_1 et les composantes de sa normale.

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

Soient ST la droite de contact du plan (P_b) et du cône de base et θ l'angle de rotation de la droite OT par rapport à OQ (Q étant le point de rebroussement). Le vecteur unitaire U porté par OT (fig I.2b) est normal au plan (P_b) . Les deux vecteurs ST et SM (M étant un point de la développante sphérique) dont leurs modules sont égaux à R , contenus dans ce plan (P_b) . Leur produit vectoriel est donc parallèle au vecteur U . On a alors la relation vectorielle suivante :

$$\frac{\overrightarrow{ST} \wedge \overrightarrow{SM}}{\|\overrightarrow{ST}\| \|\overrightarrow{SM}\|} = \lambda \vec{U} \quad (11)$$

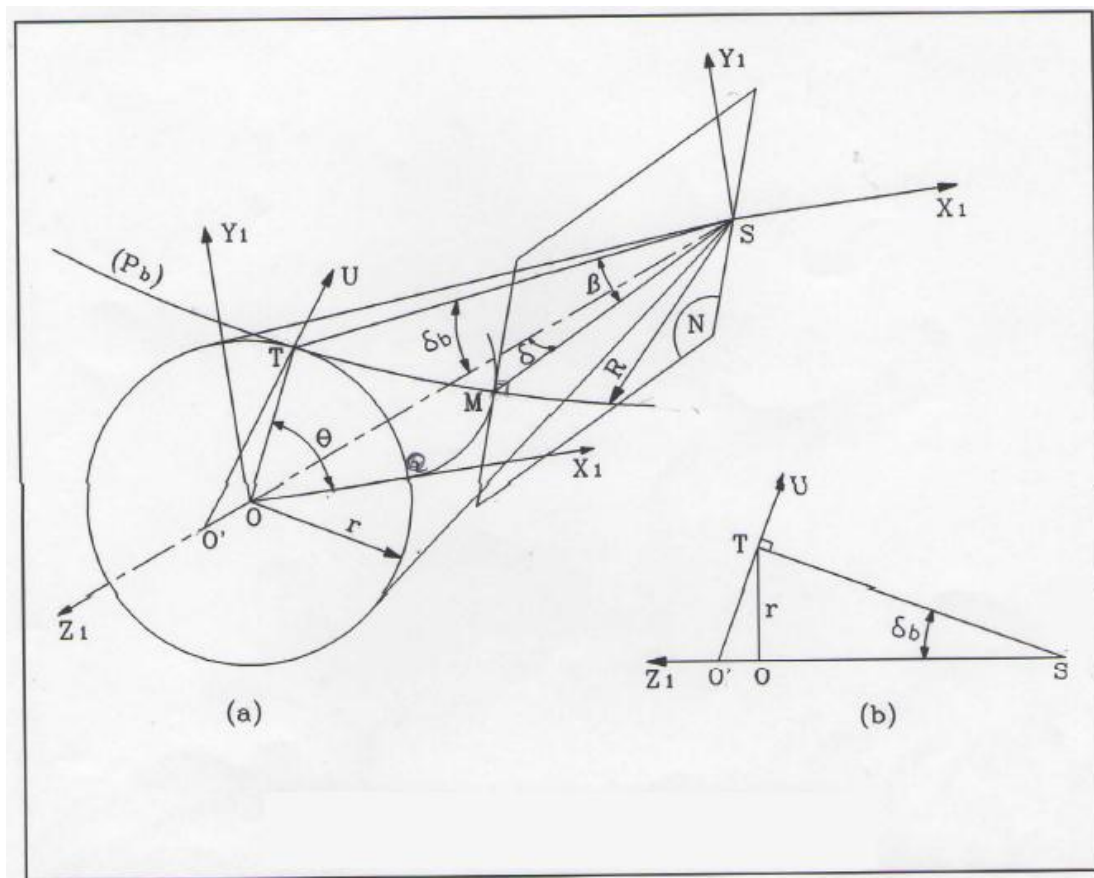


Figure I-2 : Génération d'une denture conique droite

à développante de cercle sphérique [1]

En désignant par β l'angle entre les vecteurs ST et SM , cette relation permet d'écrire

$$|\lambda| = \sin\beta \quad (12)$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

Le vecteur \overrightarrow{SM} est défini par ses composantes X_1 , Y_1 et Z_1 vérifiant la relation :

$$\|\overrightarrow{SM}\| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = R \quad (13)$$

Les vecteurs \overrightarrow{ST} et \overrightarrow{U} sont définis à l'aide des relations suivantes vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OT} \text{ et } \overrightarrow{U} = \frac{\overrightarrow{O'T}}{\|\overrightarrow{O'T'}\|}$$

Avec :

$$\overrightarrow{SO} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R\cos\delta_b \end{cases} ; \quad \overrightarrow{OT} \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{O'T} \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ -rtg\delta_b \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{U} \begin{cases} \cos\delta_b \cos\theta \\ \cos\delta_b \sin\theta \\ -\sin\delta_b \end{cases} ; \quad \overrightarrow{ST} \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ R\cos\delta_b \end{cases}$$

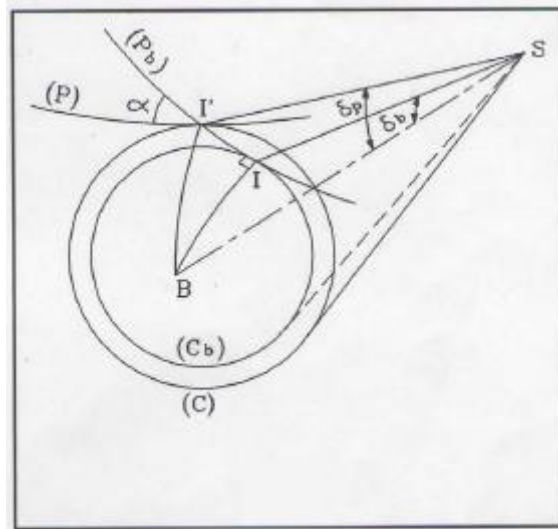


Figure I-3 : Triangle sphérique II'B [1]

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

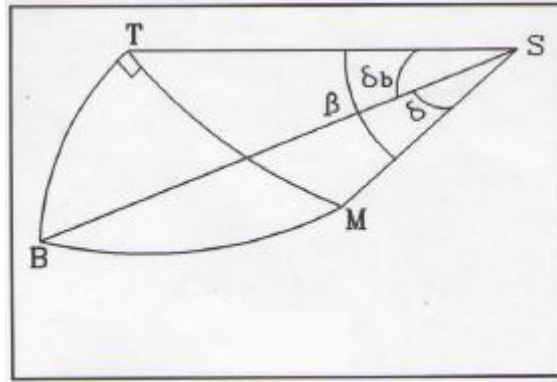


Figure I-4 : Triangle sphérique TMB [1]

En appliquant la formule (1) au triangle sphérique $II'B$ de centre S (fig.I-3) on obtient :

$$\sin \delta_b = \sin \delta_p \cos \alpha \quad (14)$$

δ_p est le demi-angle au sommet du cône primitif, α l'angle de pression de la denture.

Le roulement sans glissement du cercle de rayon R dans le plan (P_b) sur le cercle de rayon r du cône de base permet d'écrire :

$$r\theta = R\beta \Rightarrow \beta = \left(\frac{r}{R}\right) \theta$$

Ou encore : $\beta = \theta \sin \delta_b \quad (15)$

L'application de la formule (7) au triangle sphérique représenté par la fig.I-4 donne :

$$\cos \delta = \cos \beta \cos \delta_b \quad (16)$$

La cote Z_1 s'écrit sous la forme :

$$Z_1 = R \cos \delta \quad (17)$$

D'où :

$$Z_1 = R \cos \beta \cos \delta_b$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

En tenant compte des relations (11) à (17) et en prenant $\lambda = \sin\beta$, le développement du produit vectoriel $\overrightarrow{ST} \wedge \overrightarrow{SM}$, permet d'écrire :

$$\overrightarrow{SM} \begin{cases} [a \cos\theta \cos(a\theta) + \sin\theta \sin(a\theta)]R \\ [a \sin\theta \cos(a\theta) - \cos\theta \sin(a\theta)]R \\ [b \cos(a\theta)]R \end{cases}$$

Avec : $a = \sin\delta_b$ et $b = \cos\delta_b$

I-3.2. Composantes de la normale en un point de la surface de denture :

Le vecteur normale unitaire en un point de la surface définie par le vecteur $\overrightarrow{SM}(R, \theta)$ peut être donné par :

$$\vec{N} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{SM}}{\partial R} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{SM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{SM}}{\partial R} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{SM}}{\partial \theta} \right\|} \quad (18)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{N} \begin{cases} a \cos\theta \sin(a\theta) - \sin\theta \cos(a\theta) \\ a \sin\theta \sin(a\theta) + \cos\theta \cos(a\theta) \\ b \sin(a\theta) \end{cases}$$

La normale doit être choisie sortante de la matière.

I-3.3. Outil de génération :

On montre que l'outil de génération d'une denture en développante sphérique est une roue plate dont le profil est également une développante sphérique et possède un point d'inflexion au point de contact I. cette roue plate est évidemment conique et est caractérisé par son plan primitif (P) qui roule sans glisser sur le cône primitif du pignon à tailler. Elle a un cercle de base (il y en a même deux disposés symétriquement par rapport au plan primitif) de rayon $R \cos\alpha$ (R étant le rayon de la sphère (K)). Son profil $Q_r I Q_r'$ est généré par un point du grand cercle (P_b) qui roule sans glisser sur ce cercle de base, et également sur le cercle (C_d) du cône de base du pignon. Ce même point génère aussi le profil de la denture du pignon.[1]

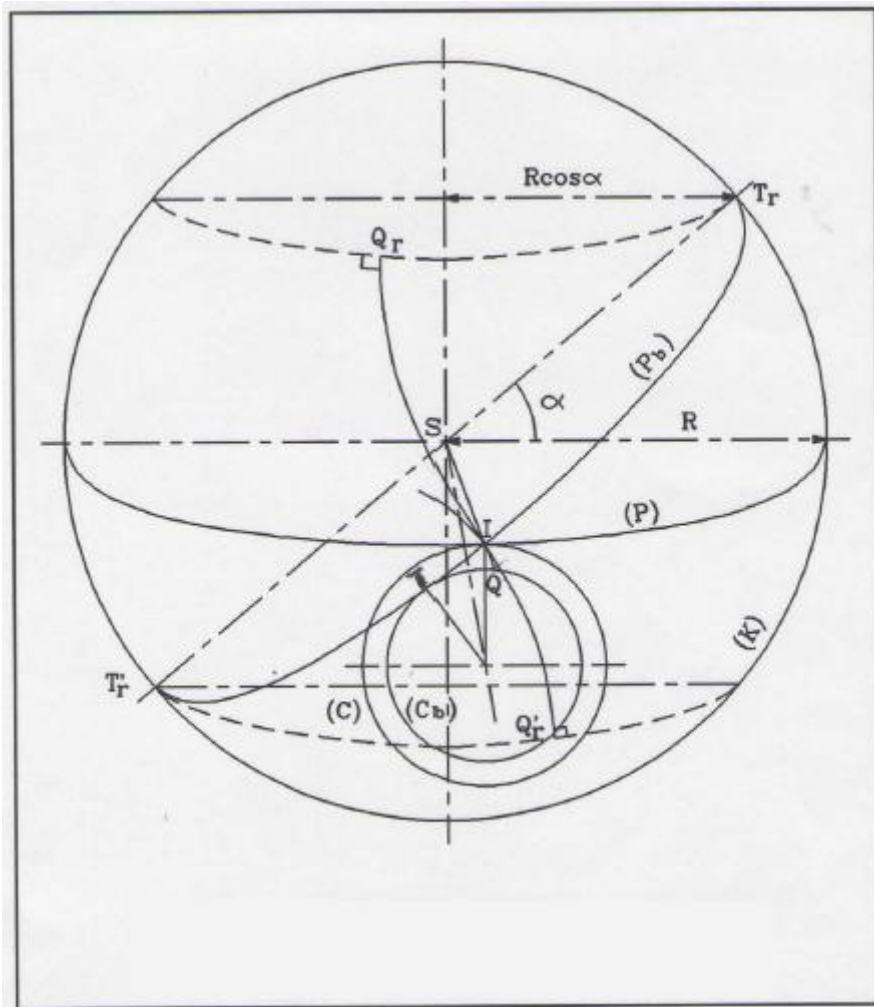


Figure I-5 : Profil de la roue plate génératrice à développante sphérique [1]

I-3.3.1. Coordonnées et normales d'un point de la denture du pignon associé au point de la roue plate génératrice :

Nous allons exprimer les coordonnées d'un point du profil de la denture du pignon à partir de celui de l'outil de génération. Pour cela considérons un repère (S, X_0, Y_0, Z_0) tel que SZ_0 est porté par l'axe instantané de rotation SI . Les coordonnées du point M exprimées dans ce référentiel s'écrivent :

$$\vec{SM} = \begin{cases} X_0 = R \sin \alpha \sin \beta' \\ Y_0 = -R \cos \alpha \sin \beta' \\ Z_0 = R \cos \beta' \end{cases}$$

β' étant l'angle entre les droites SM et SI .

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

La normale à la surface de denture est contenue dans le plan (P_b) et normale à la droite SM .

Exprimée dans le référentiel (S, X_0, Y_0, Z_0) , elle a donc pour composantes :

$$\vec{N} = \begin{cases} N_{x0} = \sin\alpha \cos\beta' \\ N_{y0} = -\cos\alpha \cos\beta' \\ N_{z0} = -\sin\beta' \end{cases}$$

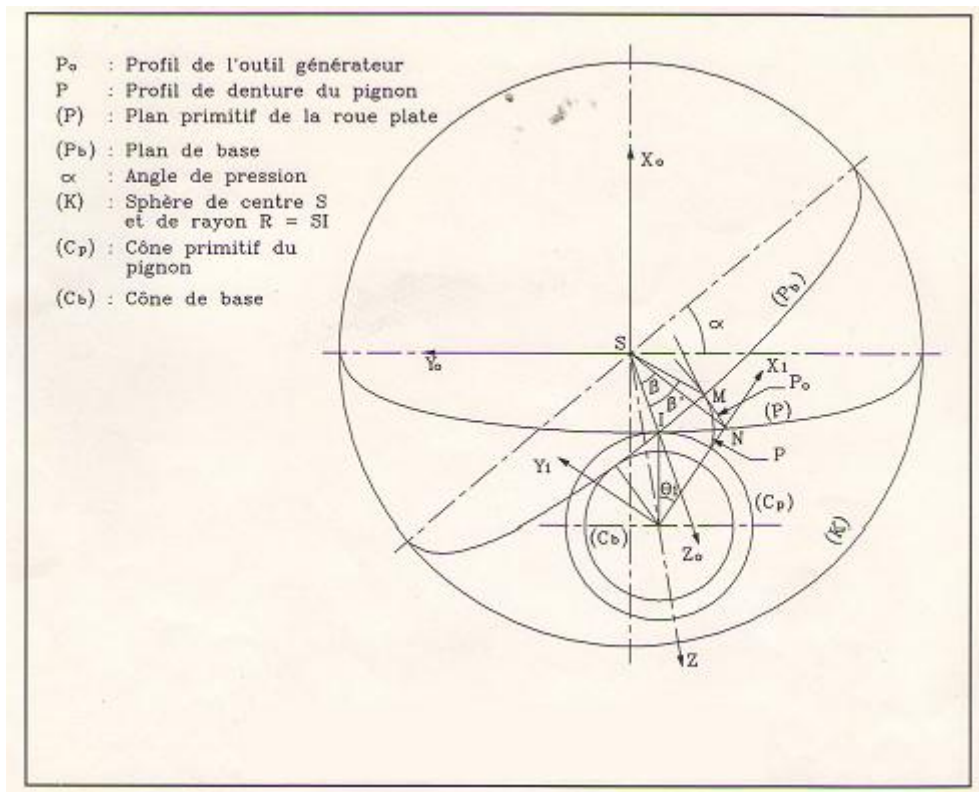


Figure I-6 : Génération d'une denture conique droite par un outil à développante sphérique [1]

Le roulement sans glissement du plan (P) sur le cône (C_p) permet d'écrire :

$$R\beta = R_p\theta_1 \Rightarrow \beta = \frac{R_p}{R} \theta_1 = \theta_1 \sin\delta_p \quad (19)$$

Le roulement sans glissement du plan (P_b) sur le cône (C_d) donne :

$$\beta' = \theta' \sin\delta_b$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

θ' étant l'angle de rotation du cône de base.

Comme les cônes (C_p) et (C_b) sont liés, on a alors $\theta_1 = \theta'$, et en tenant compte de la relation (14) on obtient :

$$\beta' = \beta \cos \alpha \quad (20)$$

On exprime les coordonnées du point M et les composantes de la normale N de le référentiel (S, X_1, Y_1, Z_1) en effectuant les changements de repères :

a) Rotation de (S, X_0, Y_0, Z_0) d'angle δ_p autour de l'axe SY_0 :

$$Z_1 = Z_0 \cos \delta_p - X_0 \sin \delta_p \quad (21)$$

$$X'_1 = Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p \quad (22)$$

b) Rotation de (S, X'_1, Y_0, Z_1) d'angle θ_1 autour de l'axe SZ_1 :

$$X_1 = X'_1 \cos \theta_1 - Y_0 \sin \theta_1 \quad (23)$$

$$Y_1 = X'_1 \sin \theta_1 + Y_0 \cos \theta_1 \quad (24)$$

Finalement on obtient :

$$\overline{SM} \begin{cases} X_1 = (Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p) \cos \theta_1 - Y_0 \sin \theta_1 \\ Y_1 = (Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p) \sin \theta_1 + Y_0 \cos \theta_1 \\ Z_1 = Z_0 \cos \delta_p - X_0 \sin \delta_p \end{cases}$$

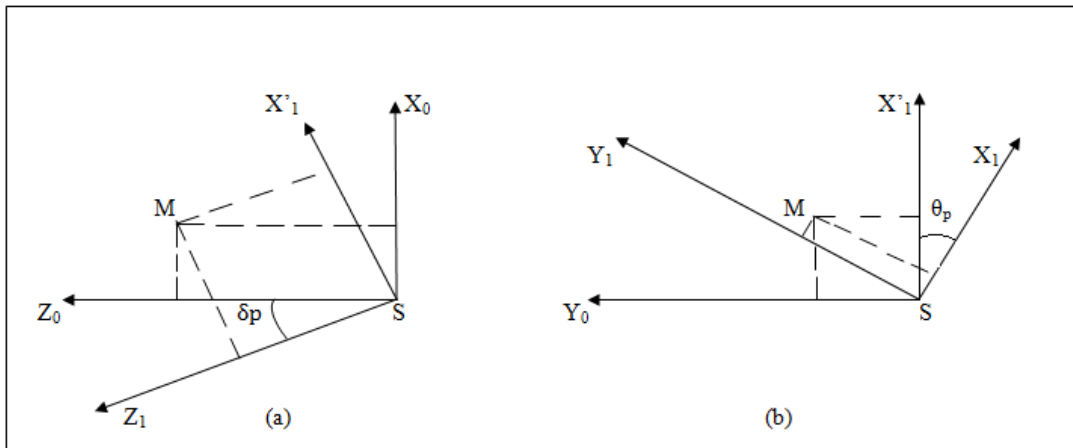


Figure I-7 : Système d'axes [1]

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

Avec le même changement de repère on obtient pour la normale :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x1} = (N_{z0} \sin \delta_p + N_{x0} \cos \delta_p) \cos \theta_1 - N_{y0} \sin \theta_1 \\ N_{y1} = (N_{z0} \sin \delta_p + N_{x0} \cos \delta_p) \sin \theta_1 + N_{y0} \cos \theta_1 \\ N_{z1} = N_{z0} \cos \delta_p - N_{z0} \sin \delta_p \end{cases}$$

I-3.3.2. Recherche du point de l'outil associé à celui de la denture du pignon :

Nous venons de voir que si l'on connaît un point de l'outil de génération, on peut trouver le point associé du profil de la denture du pignon. Nous allons montrer qu'il est aussi possible de déterminer les points de l'outil connaissant ceux du profil du pignon.

On sait que la cote Z_1 peut être écrite sous la forme : $Z_1 = R \cos \delta$ (les valeurs de δ sont calculées à partir des points de la denture du pignon).

Comme :

$$Z_1 = Z_0 \cos \delta_p - X_0 \sin \delta_p$$

et en substituant X_0 et Z_0 par leurs expressions on obtient :

$$\cos \delta_p \cos \beta' - \sin \alpha \sin \delta_p \sin \beta' = \cos \delta \quad (25)$$

On pose :

$$a = \cos \delta_p$$

$$b = \sin \alpha \sin \delta_p$$

$$c = \cos \delta$$

La relation (25) devient :

$$a \cos \beta' - b \sin \beta' = c$$

Cette relation peut être résolue en posant :

$$a = l \cdot \sin \varphi$$

$$b = l \cdot \cos \varphi$$

Avec : $l = \sqrt{a^2 + b^2}$

Tous calculs faits on obtient :

$$\sin(\varphi - \beta') = \frac{c}{l}$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

Finalement on a :

$$\beta' = \varphi - \arcsin\left(\frac{c}{l}\right)$$

A l'aide de la relation (20), on calcul la rotation β du plan (P) autour de l'axe SX_0 ,

on a :

$$\beta = \frac{\beta'}{\cos\alpha}$$

I-3.4. Epaisseur de denture du pignon :

Considérons une sphère de rayon R et un profil en développante sphérique tracé sur cette sphère (fig.I-8.a) Soit M un point du profil dont le vecteur SM fait un angle δ avec l'axe SZ les fig.I-8 .b et I-8.c permettent d'écrire :

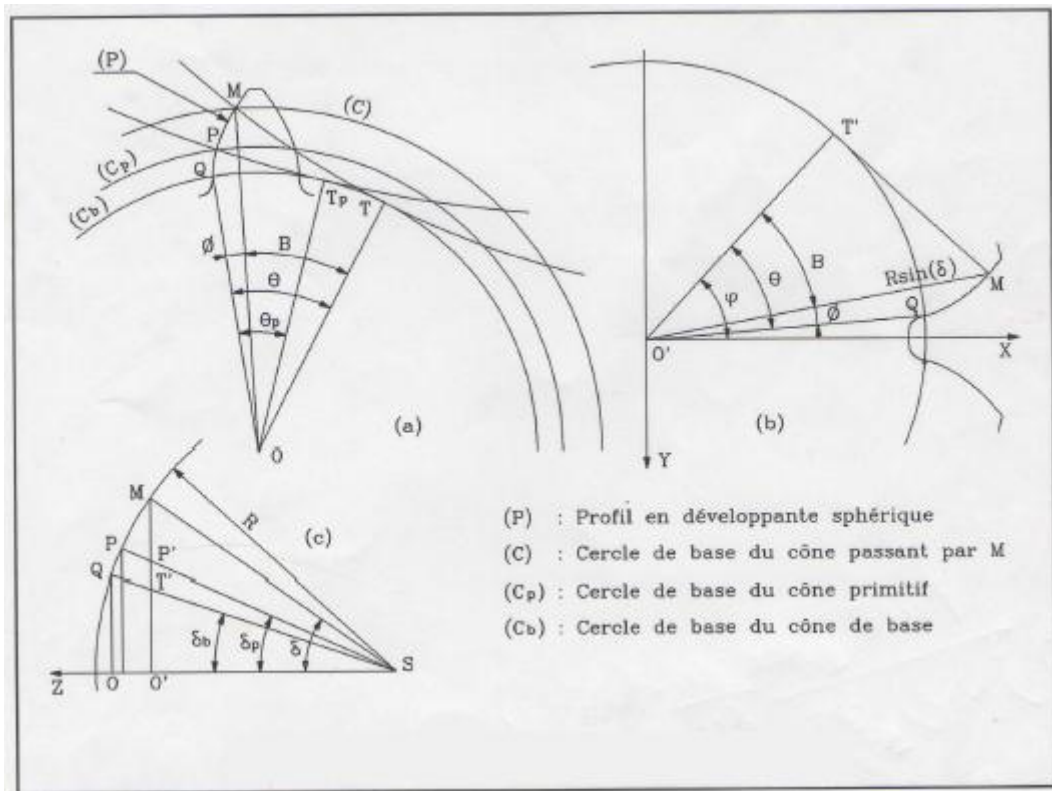


Figure I-8 : Epaisseur de denture à développante sphérique [1]

$$R \cos\delta \operatorname{tg}\delta_b = R \sin\delta \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta_b}{\operatorname{tg}\delta} \quad (28)$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

L'angle formé les droites OQ et OM vaut :

$$\phi = \theta - \beta = \theta - \arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta}\right) \quad (29)$$

Lorsque le point M est confondu avec le point P (intersection du cône primitif avec le profil de la denture) et en affectant l'indice p aux angles ϕ , θ et β , on aura :

$$\phi_p = \theta_p - \beta_p = \theta_p - \arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta_p}\right) \quad (30)$$

D'où :

$$\phi - \phi_p = \theta - \theta_p - \left[\arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta}\right) - \arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta_p}\right) \right] \quad (31)$$

Soient S'_p et R'_p l'épaisseur de la dent et le rayon primitif définis sur le cône primitif dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par le point M figI.8c. Dans ce plan, l'épaisseur de la dent au point M s'écrit :

$$S = \left[\frac{S'_p}{R'_p} - 2(\phi - \phi_p) \right] R \sin\delta \quad (32)$$

Or:
$$\frac{S'_p}{R'_p} = \frac{S_p}{R_p} \quad (33)$$

Où S_p et R_p sont respectivement l'épaisseur de denture et le rayon du cercle du cône primitif coupé par la sphère de rayon R.

La formule (32) peut donc être écrite sous la forme générale suivante :

$$S = R \sin\delta \left\{ \frac{S_p}{R_p} - 2(\theta - \theta_p) - 2 \left[\arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta}\right) - \arccos\left(\frac{tg\delta_b}{tg\delta_p}\right) \right] \right\} \quad (34)$$

Chapitre I : Géométrie des engrenages coniques droits.

La valeur de θ_p se déduit de celle de β_p que l'on détermine en utilisant la relation (16) ($\beta = \beta_p$ pour $\delta = \delta_p$). On a :

$$\cos\beta_p = \frac{\cos\delta_p}{\cos\delta_b} \quad \text{et} \quad \theta_p = \frac{\beta_p}{\sin\delta_b}$$

Pour un point quelconque, on a :

$$\cos\beta = \frac{\cos\delta}{\cos\delta_b} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\beta}{\sin\delta_b}$$

Epaisseur de base :

L'épaisseur de base de denture est définie sur le cercle intersection du cône de base avec la sphère. Elle se déduit de la formule (34) en prenant $\delta = \delta_b$. Dans ce cas on a $\theta = 0$ et par suite :

$$S_b = R \sin\delta_b \left\{ \frac{S_p}{R_p} + 2 \left[\theta_p - \arccos\left(\frac{\tan\delta_b}{\tan\delta_p}\right) \right] \right\} \quad (35)$$

Conclusion :

Au terme de ce chapitre nous avons défini la géométrie d'un engrenage conique droit à développante sphérique et on a montré comment générer une denture.

Chapitre II
Paramètres de
fonctionnement des
engrenages coniques
droits.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Introduction :

Dans ce chapitre nous allons calculer les différentes caractéristiques géométriques d'un engrenage conique droit sans correction de denture, ensuite les paramètres de fonctionnement avec correction tel que : les nouveaux angles de pression et de fonctionnement, et le nouveau module

II.1. Paramètres géométriques des engrenages coniques droits :

II.1.1. Surfaces axoïdes :

- Pièce 1 : cône de demi-angle au sommet δ_1 et de sommet O
- Pièce 2 : cône de demi-angle au sommet δ_2 et de sommet O

La figure I.1 montre que les surfaces axoïdes sont décrites par l'axe instantané de rotation Δ_{12} au cours des rotations des deux pièces autour de leurs axes. L'orientation d'une pièce par rapport à l'autre est définie par l'angle des axes des cônes :

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

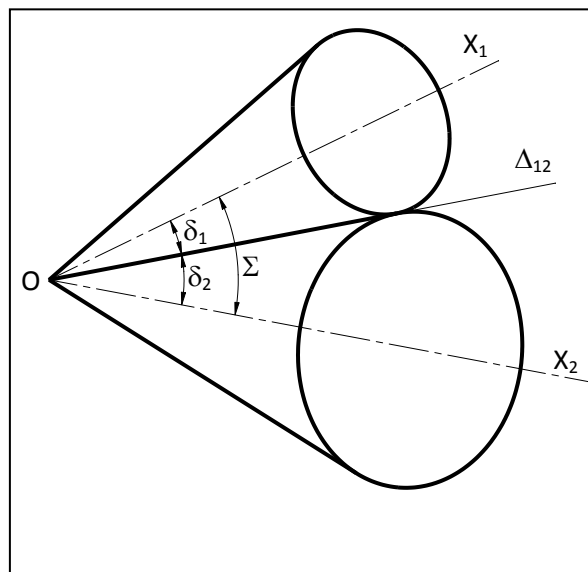


Figure II.1 : Surfaces axoïdes coniques.

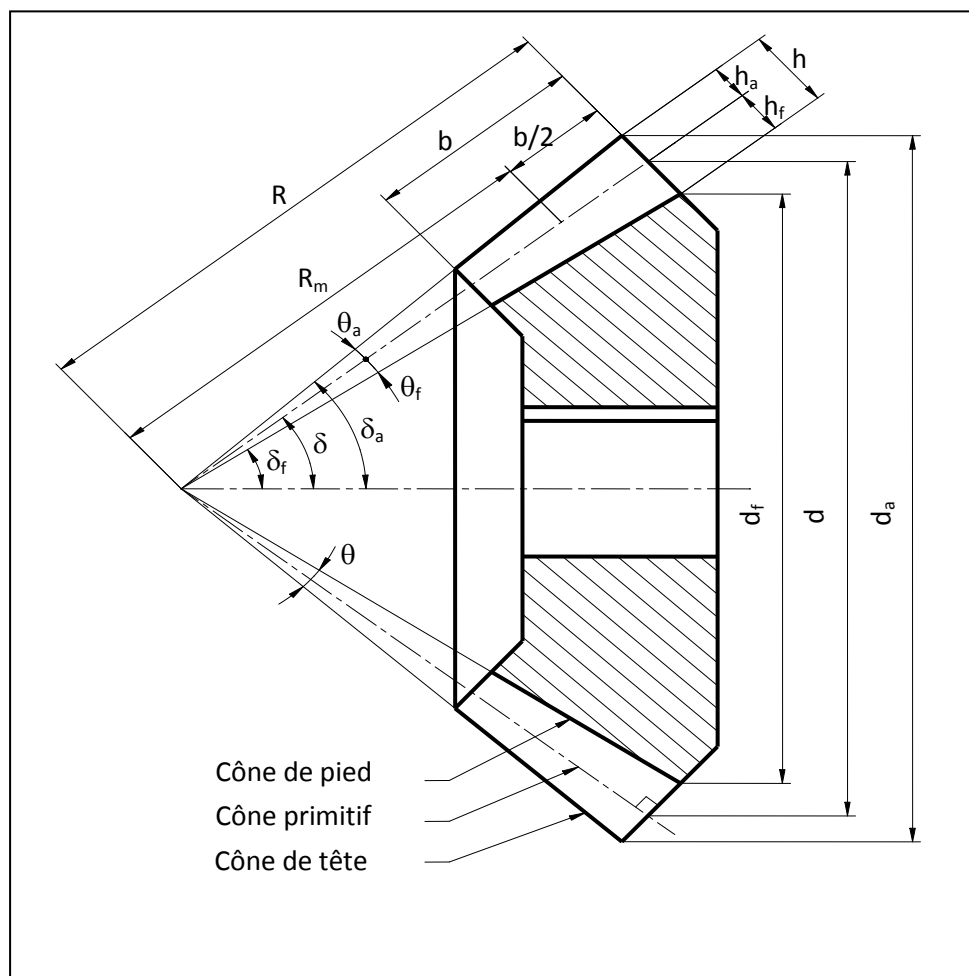
II.1.2. Éléments géométriques de la denture

La figure II.2 illustre les différents éléments géométriques caractéristiques de la denture. Le tableau II.1 indique les désignations des symboles utilisés.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

TableauII.1 : Désignation des symboles utilisés.

Symbole	Désignation	Symbole	Désignation
d	Diamètre primitif	h	Hauteur de la denture
δ	Angle primitif (cône primitif)	θ	Angle de hauteur de la denture
d_a	Diamètre de tête	h_a	Saillie
δ_a	Angle de tête (cône de tête)	θ_a	Angle de saillie
d_f	Diamètre de pied	h_f	Creux
δ_f	Angle de pied (cône de pied)	θ_f	Angle de creux
R	Génératrice primitive	b	Largeur de denture
R_m	Génératrice moyenne		



FigureII.2 : Eléments caractéristiques d'une denture conique droite.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

- diamètre primitif : $d = m \cdot Z$
- hauteur de saillie : $h_a = 1 \cdot m$
- hauteur de creux : $h_f = 1,25 \cdot m$
- diamètre de tête : $d_a = d + 2h_a \cos\delta$
- diamètre de pied : $d_f = d - 2h_f \cos\delta$
- Longueur de la génératrice primitive : $R = \frac{r}{\sin\delta} = \frac{d}{2\sin\delta}$
- angle de saillie : $\operatorname{tg}\theta_a = \frac{h_a}{R}$
- angle de creux : $\operatorname{tg}\theta_f = \frac{h_f}{R}$
- 1/2 angle au sommet du cône de tête : $\delta_a = \delta + \theta_a$
- 1/2 angle au sommet du cône de pied : $\delta_f = \delta - \theta_f$
- largeur de denture : $b = k \cdot m$ ($k = 4$ à 6) avec la recommandation : $b \leq \frac{R}{3}$
- pas au cercle primitif : $p = \pi \cdot m$
- épaisseur au cercle primitif : $s = \frac{\pi \cdot m}{2}$ (pour une denture normale)
- intervalle de creux : $e = p - s$

II.2. Rapport de transmission :

On définit le rapport de transmission comme suit :

$$u = \frac{\text{vitessederotationdesortie}}{\text{vitessederotationd'entréee}}$$

Le roulement sans glissement des cônes primitifs des deux roues de l'engrenage permet d'écrire au point de contact M des cercles primitifs :

$$\overrightarrow{V}_{1/2}(M) = 0 \Rightarrow r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

ω_1 et ω_2 , r_1 et r_2 désignent les vitesses de rotation et les rayons primitifs de ces deux roues.

Le rapport de transmission est :

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Comme: $r_1 = R \sin\delta_1$

$$r_2 = R \sin\delta_2$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

On aura :

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}$$

- Dans un engrenage réducteur ($z_2 > z_1$) : $u = z_1/z_2 < 1$
- Dans un engrenage multiplicateur ($z_2 < z_1$) : $u = z_1/z_2 > 1$

II.3. Expressions de δ_1 , δ_2 connaissant Z_1 , Z_2 et Σ .

En général, les nombres de dents Z_1 et Z_2 des deux roues et l'angle Σ de leurs axes sont connus. Le problème consiste à déterminer δ_1 et δ_2 .

La relation $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$ permet d'écrire : $\delta_1 = \Sigma - \delta_2$

Il vient : $\sin\delta_1 = \sin(\Sigma - \delta_2) = \sin\Sigma \cos\delta_2 - \sin\delta_2 \cos\Sigma$

Le rapport de transmission devient :

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2} = \frac{\sin\Sigma \cos\delta_2 - \sin\delta_2 \cos\Sigma}{\sin\delta_2} = \frac{\sin\Sigma}{\text{tg}\delta_2} - \cos\Sigma$$

D'où :

$$\text{tg}\delta_2 = \frac{\sin\Sigma}{\frac{Z_1}{Z_2} + \cos\Sigma}$$

II.4. Dispositions roue-pignon :

Il faut noter que quelque soit la valeur de Σ , les relations donnant δ_1 et δ_2 restent applicables. Cependant, elles peuvent être écrites sous une forme qui paraît plus simple selon la disposition roue-pignon. On rencontre les dispositions suivantes :

a) Cas où $\Sigma = 90^\circ$:

Les axes étant orthogonaux ($\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$)(figureII.3), le rapport de transmission s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin\delta_1}{\cos\delta_1} = \text{tg}\delta_1$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

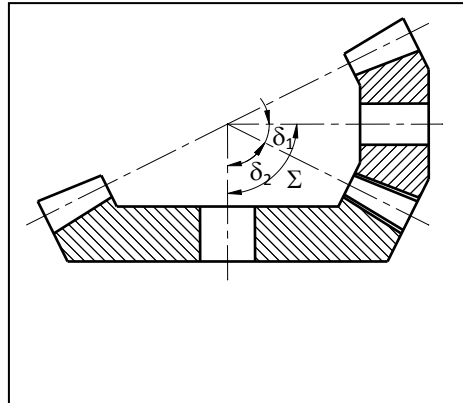


Figure II.3 : Engrenages coniques à axes orthogonaux.

b) Cas où $\Sigma < 90^\circ$:

On rencontre deux dispositions (figure II.4 et figure II.5)

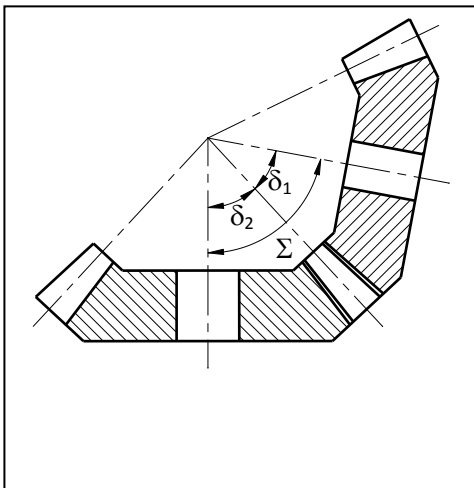


Figure II.4 : Engrenages coniques dont

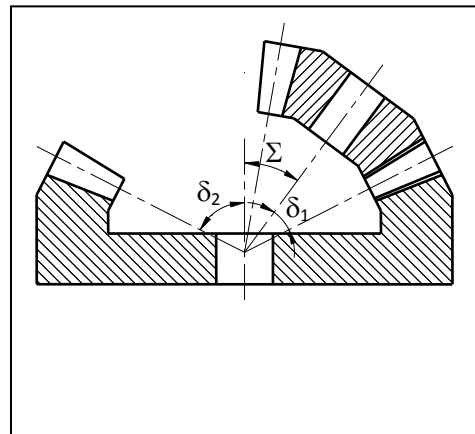


Figure II.5 : Engrenages conique

l'angle des axes $\Sigma < 90^\circ$. avec $\Sigma = \delta_2 - \delta_1$

Dans le cas de la figure II.4 le cône primitif du pignon est à l'extérieur de celui de la roue. Dans ce cas, les relations générales indiquées précédemment conservent leurs formes, c'est à dire, on a :

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma}$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Dans le cas de la figure II.5, le cône primitif du pignon est à l'intérieur de celui de la roue; l'engrenage se comporte alors comme un engrenage intérieur.

On a : $\Sigma = \delta_2 - \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 - \Sigma$

Il vient : $\sin \delta_1 = \sin(\delta_2 - \Sigma) = \sin \delta_2 \cos \Sigma - \sin \Sigma \cos \delta_2$

Le rapport de transmission devient :

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\sin \delta_2 \cos \Sigma - \sin \Sigma \cos \delta_2}{\sin \delta_2} = \cos \Sigma - \frac{\sin \Sigma}{\operatorname{tg} \delta_2}$$

D'où :

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma - \frac{Z_1}{Z_2}}$$

c) Cas où $\Sigma > 90^\circ$:

On rencontre deux dispositions possibles (figure II.6 et figure II.7) :

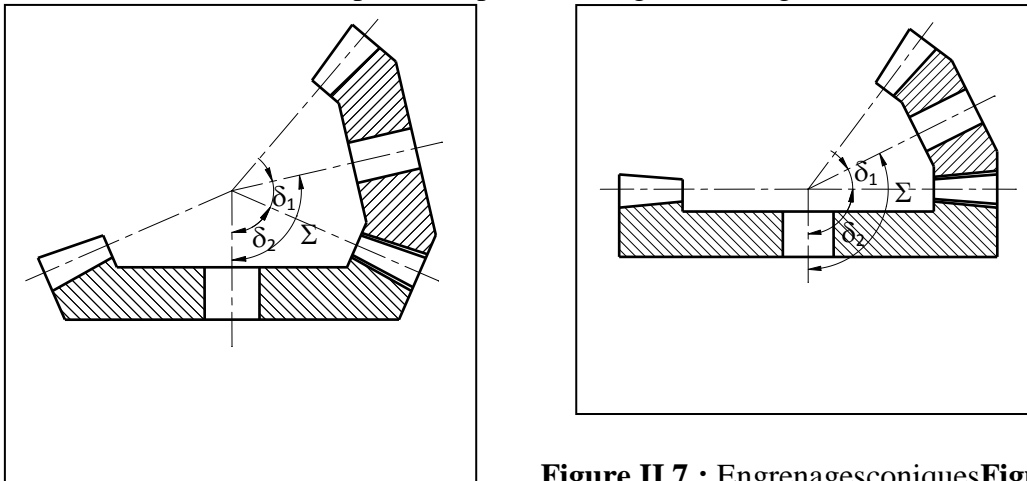


Figure II.6 : Engrenages avec $\Sigma > 90^\circ$. **Figure II.7 :** Engrenages coniques à roue plate ($\delta_2 = 90^\circ$).

Dans le cas de la figure II.6, on peut écrire :

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\cos(\Sigma - 90^\circ)}{\frac{Z_1}{Z_2} - \sin(\Sigma - 90^\circ)} = \frac{\sin(180^\circ - \Sigma)}{\frac{Z_1}{Z_2} - \cos(180^\circ - \Sigma)}$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Dans le cas de la figure II.7 la roue est une roue plate ($\delta_2 = 90^\circ$). Dans ce cas, la détermination des angles s'effectue sans calcul trigonométrique. On a :

$$\delta_2 = 90^\circ \quad \text{et} \quad \delta_1 = \Sigma - 90^\circ$$

II.5. Profil de référence et roue plate :

II.5.1 Profil de référence sur la roue plate :

La ligne de référence du profil de la roue plate se trouve dans le plan primitif de cette roue lorsqu'il n'y a pas de déport. Les dimensions du profil de référence sont :

- le pas primitif sur la roue plate : $p_p = \pi m_p$
- l'angle de référence : $\alpha_p = 20^\circ$
- l'épaisseur de dent : $s_p = \pi m_p / 2$
- l'intervalle de dent : $e_p = \pi m_p / 2$
- la saillie : $h_{aP} = y m_p$
- le creux : $h_{fP} = (y + j) m_p$
- la hauteur de dent : $h_p = h_{aP} + h_{fP}$

Pour une denture normale $y = 1$:

$$h_{aP} = m_p h_{fP} = (1 + j) m_p \text{ avec } j = (0,1 \dots 0,3)$$

II.5.2. Dimensions de la roue plate :

Considérons un engrenage conique composé d'un pignon et d'une roue coniques (figure II.8). Dans le plan primitif de référence, les dimensions visibles pour la denture droite de cette roue sont :

- diamètre extérieur : $d_{eP} = 2 OC = d_p,$
- largeur de la dent : $b \text{ avec } b \leq \frac{OC}{3}$
- diamètre intérieur : $d_{iP} = d_{eP} - 2b,$
- diamètre moyen : $d_{mP} = (d_{eP} + d_{iP})/2$
- pas angulaire : $\tau_p = 2\pi m_p / d_{eP} = \pi m_p / R_e$
- demi-angle d'épaisseur : $\psi_p = \pi m_p / (2d_{eP}) = \pi m_p / (4R_e)$
- demi-angle d'intervalle : $\eta_p = \pi m_p / (2d_{eP}) = \pi m_p / (4R_e)$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

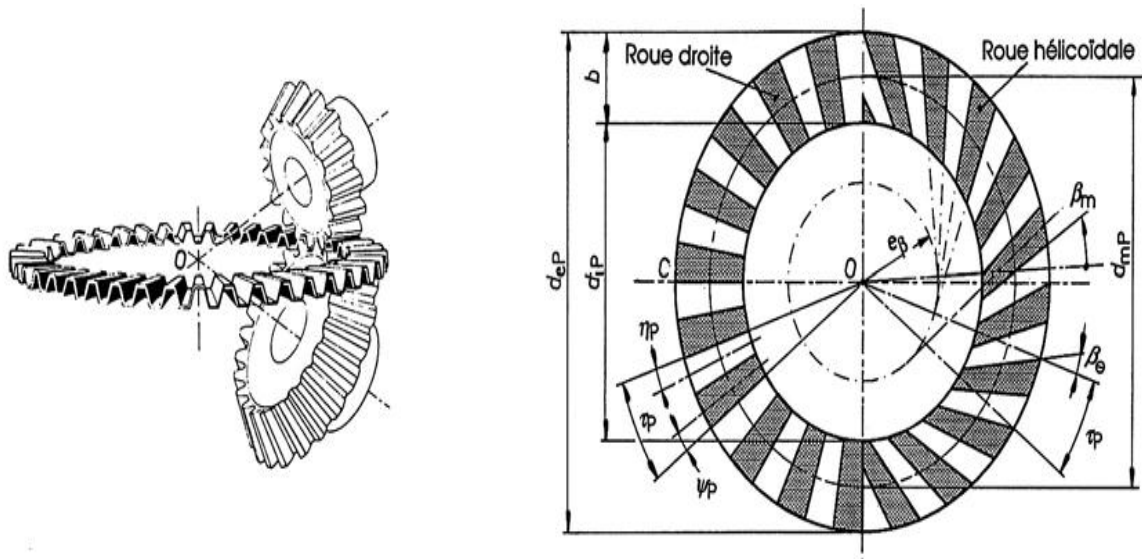


Figure II.8 : Dimensions de la roue plate.

II.6. Efforts sur les dentures des engrenages coniques droits :

La figure II.9 montre les différents efforts appliqués sur une denture conique droite, on se place au niveau du cercle primitif moyen.

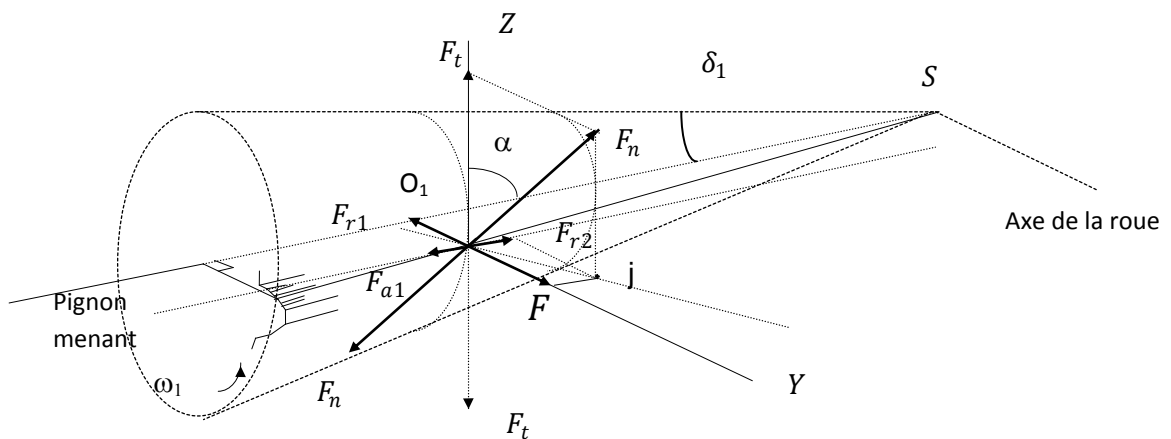


Figure II.9 : Les différents efforts appliqués sur une denture conique droite.

Soit M un point de la ligne de contact d'une dent avec sa conjuguée.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Soit \vec{F}_n l'action de contact entre les dents.

Sa direction est la ligne de poussée qui fait un angle α avec la tangente au cercle primitif.

\vec{F}_n : effort normal à la dent.

$$\vec{F}_n = \vec{F}_t + \vec{F}$$

\vec{F}_t : effort tangentiel

$$F_t = F_n \cos \alpha = \frac{2C}{d_m}$$

$$F = F_n \sin \alpha$$

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_a$$

\vec{F}_a : effort axial.

$$F_a = F \sin \delta = F_n \sin \delta \sin \alpha$$

$$F_a = F_t \sin \delta \operatorname{tg} \alpha$$

\vec{F}_r : effort radial.

$$F_r = F \cos \delta = F_n \cos \delta \sin \alpha$$

$$F_a = F_t \cos \delta \operatorname{tg} \alpha$$

Si de plus $\Sigma = \frac{\pi}{2}$ (les axes de la roue et du pignon sont perpendiculaires), on a :

$$F_{a1} = F_{r2} \text{ et } F_{a2} = F_{r1}$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.7. Calcul du module de la denture :

La formule de Lewis nous donne l'expression du module :

$$m \geq 2,34 \sqrt{\frac{F_t}{k \sigma_p}}$$

Avec :

F_t : effort tangentiel sur la denture.

σ_p : est la contrainte admissible à la traction par le matériau.

k : coefficient de largeur.

Exprimons le module en fonction de la puissance à transmettre.

On a :

$$F_t = \frac{2C}{d} = \frac{2P}{\omega d}$$

$$\Rightarrow m \geq 2,34 \sqrt{\frac{2P}{\omega d k \sigma_p}}$$

On sait que :

$$d = m Z$$

$$m^2 \geq \frac{11P}{\omega m Z k \sigma_p}$$

D'où :

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{11P}{\omega Z k \sigma_p}}$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.8. Calcul des roues coniques :

Les roues coniques réunissent deux arbres concourants faisant un angle Σ .

Le rapport de vitesses est donné ainsi que la puissance à transmettre.

Par la résistance des matériaux on choisit le module.

✓ Données du problème:

- L'angle Σ des deux axes,
- Le nombre de dents Z_1 et Z_2 ,

✓ Inconnues:

- δ_1 et δ_2 : angles au sommet des cônes primitifs,
- R : longueur exacte de la génératrice commune,
- d_1, d_2 : diamètres primitifs,
- $d_a, d_f, \delta_a, \delta_f, \theta_a, \theta_f$: caractéristiques de la denture.

II.8.1. Conduite des calculs:

- Angles δ_1 et δ_2 :

Nous avons:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\sin \Sigma}{\frac{Z_1}{Z_2} + \cos \Sigma}$$

On tire la valeur de δ_2 et pour retrouver la valeur de δ_1 , on utilise :

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

- Le module :

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{11P}{\omega Z k \sigma_p}}$$

- Diamètres primitifs :

Les diamètres primitifs se calculent par :

$$d_1 = m Z_1$$

$$d_2 = m Z_2$$

- Diamètres de tête d_a et de pied d_f :

$$d_a = d + 2h_a \cos\delta$$

$$d_f = d - 2h_f \cos\delta$$

- Les angles de saillie θ_a et de creux θ_f :

$$\operatorname{tg}\theta_a = \frac{h_a}{R} = \frac{m}{R} = \frac{2\sin\delta}{Z}$$

$$\operatorname{tg}\theta_f = \frac{h_f}{R} = \frac{1,25 m}{R} = \frac{2,5 \sin\delta}{Z}$$

D'où :

$$\text{Angle de tête} \quad \delta_a = \delta + \theta_a$$

$$\text{Angle de pied} \quad \delta_f = \delta - \theta_f$$

$$\text{Angle de hauteur} \quad \theta = \theta_a + \theta_f$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.8.2. Application:

$$\Sigma = 90^\circ$$

$$Z_1 = 43 \text{ et } Z_2 = 57$$

- **Angles δ_1 et δ_2 :**

On a pour $\Sigma = 90^\circ$:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{Z_2}{Z_1}$$

D'où :

$$\delta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{57}{43} \right) = 52,97^\circ$$

Et :

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 = 90 - 52,97 = 37,03^\circ$$

- **Le module :**

La puissance transmise par l'arbre moteur tournant à 520 tr/mn est de 736 w

La contrainte pratique en extension du matériau $\sigma_p = 80$ Mpa et $k = 10$.

On aura :

$$m \geq 10 \sqrt[3]{\frac{11 \cdot 736 \cdot 30}{520 \cdot \pi \cdot 43 \cdot 10 \cdot 80}}$$
$$m \geq 1,63 \text{ mm}$$

On prendra un module normalisé (voir tableau II.2) :

$$m = 1,75 \text{ mm}$$

Tableau II.2 : Modules normalisés usuels.

Modules normalisés usuels	
Série principale	1 ; 1,25 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16 ; 20
Série secondaire	1,125 ; 1,375 ; 1,75 ; 2,25 ; 2,75 ; 3,50 ; 4,50 ; 5,50 ; 7 ; 9 ; 11 ; 14 ; 18
Série exceptionnelle	0,75 ; 3,25 ; 3,75 ; 6,50

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Les diamètres primitifs et les autres caractéristiques de la denture sont donnés dans le tableau II.3:

Tableau II.3 : Résultats du calcul de la denture.

Caractéristique	Symbole	Formule	Pignon	Roue
Somme des angles	Σ		90°	
Module	m (mm)		1,75	
Nombre de dents	Z_1, Z_2		43	57
Angles primitifs	δ_1 δ_2	$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$ $\delta_2 = \arctg\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)$	37,03°	52,97°
Diamètres primitifs	d_1, d_2 (mm)	$d = m \cdot Z$	75,25	99,75
Longueur de la génératrice	R (mm)	$R = \frac{d}{2 \sin \delta}$	62,47	
Largeur de denture	b (mm)	$b \leq R/3$	20,91	
Hauteur de saillie	h_a (mm)	$h_a = 1 \cdot m$	1,75	
Hauteur de creux	h_f (mm)	$h_f = 1,25 \cdot m$	2,1875	
Diamètre de tête	d_a (mm)	$d_a = d + 2h_a \cos \delta$	78,04	101,85
Diamètre de pied	d_f (mm)	$d_f = d - 2h_f \cos \delta$	71,75	97,11
Angle de saillie	θ_a	$tg \theta_a = h_a / R$	1,60°	
Angle de creux	θ_f	$tg \theta_f = h_f / R$	0,03°	
Angle de tête	δ_a	$\delta_a = \delta + \theta_a$	38,63°	54,57°
Angle de pied	δ_f	$\delta_f = \delta - \theta_f$	37°	52,94°

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.9. Génération pratique des dentures :

La denture de l'outil de génération à développante sphérique est une surface conique droite dont les génératrices sont convergentes au sommet du cône primitif du pignon. Son profil possède un point d'inflexion au plan primitif. Cette particularité rend la réalisation pratique quasiment impossible, c'est pour cela qu'on est amené à s'écarter de la denture théorique à développante sphérique.

Dans la pratique il existe deux procédés de taillage des engrenages coniques droit.

II.9.1. Taillage par reproduction :

Cette méthode consiste à utiliser un gabarit dont le profil est celui de la roue cylindrique complémentaire. Ce mode de taillage ne convient que pour les productions unitaires est pour des gros modules.

II.9.2 Taillage par génération :

Dans cette méthode de taillage, l'outil théorique en développante est remplacé par un plan de génération incliné de l'angle de pression par rapport à la normale au plan primitif. On rencontre trois procédés :

- Taillage par outils animés de mouvement alternatif.
- Taillage par fraises disques de grand diamètre.
- Taillage Gleason Revacycle.

II.10. Notion du déport :

Sur le gros bout du cône, on définit le déport comme le déplacement v de la ligne primitive de taillage par rapport à la ligne de référence (figure II.10).

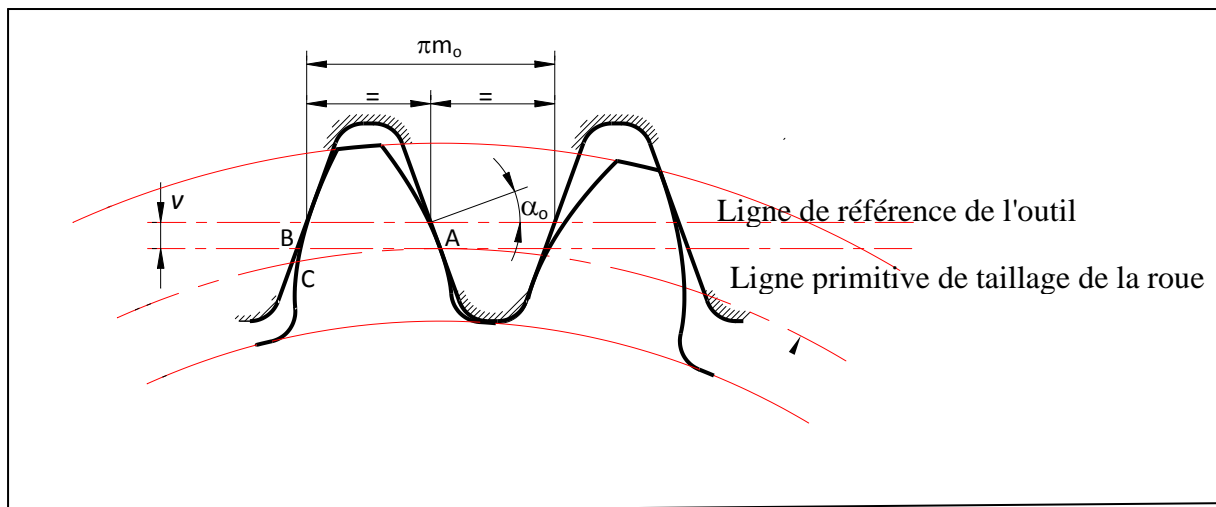


Figure II.10 : Roue taillée à denture déportée.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Le déport est compté positif lorsque la ligne de référence est à l'extérieur du cercle primitif, et négatif dans le cas contraire. Le coefficient de déport est défini par la relation :

$$x = \frac{v}{m}$$

Convention de signe pour v et x :

- Si la ligne de référence est à l'extérieur du cercle primitif, on a $v > 0 \Rightarrow x > 0$
- Si la ligne de référence coupe le cercle primitif, on a : $v < 0 \Rightarrow x < 0$

II.11. Correction des dentures conique :

II.11.1. Correction avec déport variable :

Dans ce type de correction l'outil de correction se déplace suivant le cône primitif, dans ce cas nous aurons :

- Changement de l'angle du cône primitif : $\delta \neq \delta'$
- Un coefficient de déport constant.
- Le sommet reste le même.

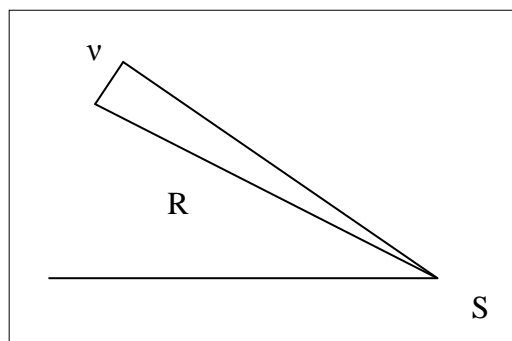


Figure II.11 : Correction de denture avec déport variable.

II.11.2. Correction de denture avec déport constant :

Dans cette correction l'outil se déplace en parallèle avec la ligne de la génératrice dans ce cas nous aurons :

- Conservation de l'angle primitif $\delta = \delta'$
- Un coefficient de déport variable.
- Décalage du sommet.

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

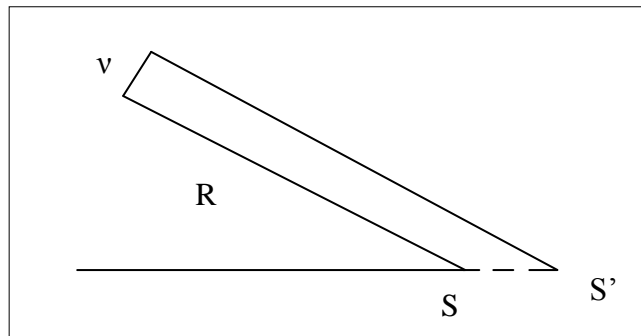


Figure II.12 : Correction de denture avec déport constant.

Pour ce type de correction nous aurons des difficultés dans le réglage au montage à cause du décalage des sommets.

II.12. Caractéristiques géométriques d'une denture corrigée :

Les paramètres géométriques de la denture seront comme suit :

- diamètre primitif : $d' = m' \cdot Z$
- hauteur de saillie : $h_a = (1 + x) \cdot m$
- hauteur de creux : $h_f = (1,25 - x) \cdot m$
- diamètre de tête : $d_a = d + 2h_a \cos \delta$
- diamètre de pied : $d_f = d - 2h_f \cos \delta$
- Longueur de la génératrice primitive : $R = \frac{r}{\sin \delta} = \frac{d}{2 \sin \delta}$
- angle de saillie : $\operatorname{tg} \theta_a = \frac{h_a}{R}$
- angle de creux : $\operatorname{tg} \theta_f = \frac{h_f}{R}$
- 1/2 angle au sommet du cône de tête : $\delta_a = \delta' + \theta_a$
- 1/2 angle au sommet du cône de pied : $\delta_f = \delta' - \theta_f$
- largeur de denture : $b = k \cdot m$ ($k = 4$ à 6) avec la recommandation : $b \leq \frac{R}{3}$
- pas au cercle primitif : $p = \pi \cdot m'$
- épaisseur au cercle primitif : $s = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha \right)$ (pour une denture normale)
- intervalle de creux : $e = p - s$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.13. Caractéristiques de fonctionnement d'une roue conique à denture déportée :

II.13.1. Angle de fonctionnement :

On prendre une denture conique droite corrigée avec un déport variable, l'angle de fonctionnement sera déterminé par la formule des épaisseurs :

$$S'_1 + S'_2 = \pi m'$$

Mais vu la complexité des formules retrouvées on a utilisé un schéma approximatif.

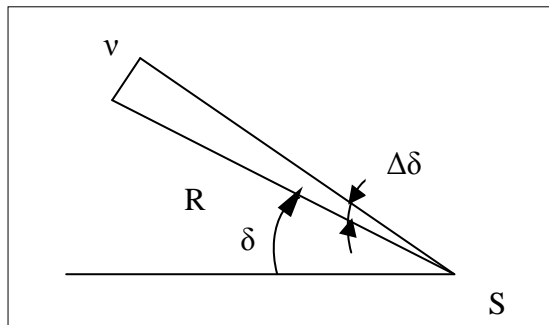


Figure II.13 : Angle de fonctionnement d'un engrenage conique droit.

On calcule tout d'abord la variation de l'angle primitif $\Delta\delta$, d'après la figure II.13 on peut déterminer cette variation comme étant :

$$\text{tg}\Delta\delta = \frac{v}{R} = \frac{2 \times m \sin\delta}{m Z} = \frac{2 \times \sin\delta}{Z}$$

D'où :

$$\Delta\delta = \text{arctg}\left(\frac{2 \times \sin\delta}{Z}\right)$$

Donc l'angle de fonctionnement δ' sera :

$$\delta' = \delta + \text{arctg}\left(\frac{2 \times \sin\delta}{Z}\right)$$

II.13.2. Angle de pression de fonctionnement :

L'angle de pression de fonctionnement α' sera exprimé à partir des relations suivantes:

On a :

$$\sin\delta_b = \sin\delta \cos\alpha$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Après correction de denture l'angle de base ne changera pas figII.14 d'où :

$$\sin \delta_b = \sin \delta' \cos \alpha'$$

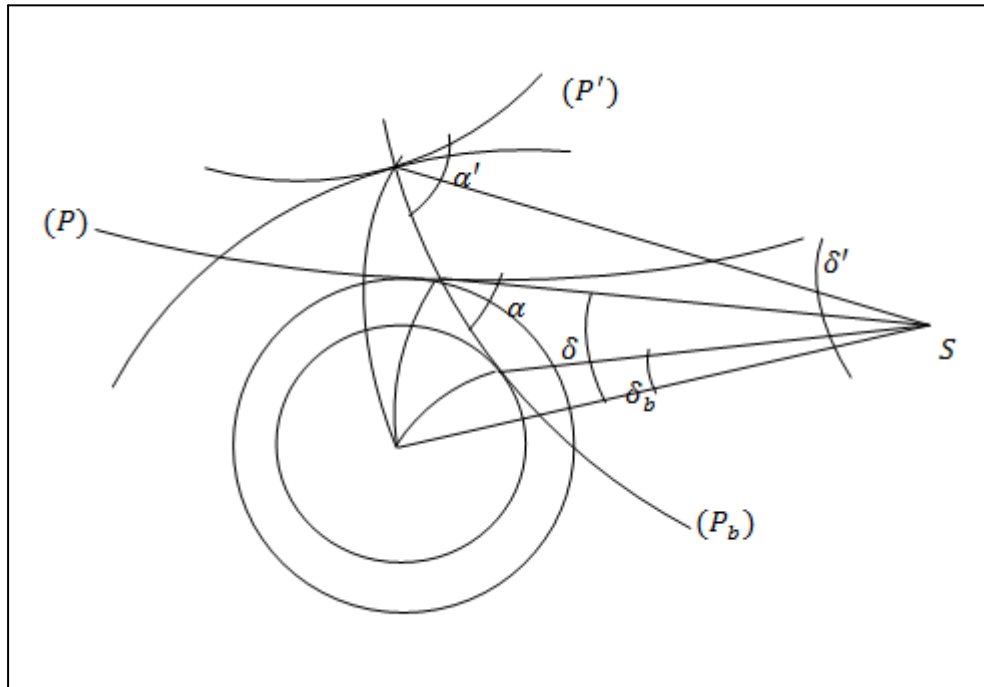


Figure II.14 : Angle de pression de fonctionnement.

Donc :

$$\begin{aligned} \sin \delta \cos \alpha &= \sin \delta' \cos \alpha' \\ \cos \alpha' &= \frac{\sin \delta \cos \alpha}{\sin \delta'} \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{\sin \delta \cos \alpha}{\sin \delta'}\right)$$

Nous avons déjà :

$$\delta' = \delta + \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \times \sin \delta}{Z}\right)$$

Finalement nous aurons l'expression de l'angle de pression de fonctionnement :

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{\sin \delta \cos \alpha}{\sin\left(\delta + \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \times \sin \delta}{Z}\right)\right)}\right)$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

II.13.3. Module de fonctionnement :

Le module de fonctionnement est calculé comme suit:

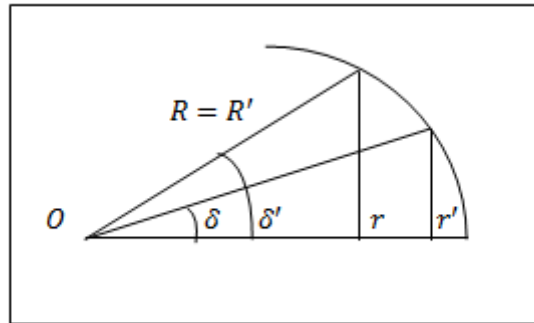


Figure II.15 : Profil de la denture après correction.

D'après la figure II.15 on garde la même génératrice après correction puisque le profil de la denture est tracé sur la même sphère, ce qui nous permet de écrire :

$$\begin{aligned}r' &= R \sin \delta' \\r &= R \sin \delta\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{r'}{r} = \frac{d'}{d} = \frac{\sin \delta'}{\sin \delta}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}d &= m Z \\d' &= m' Z\end{aligned}$$

On aura donc :

$$\frac{m'}{m} = \frac{\sin \delta'}{\sin \delta}$$

Finalement l'expression du module de fonctionnement sera donnée par la relation suivante :

$$m' = m \frac{\sin \delta'}{\sin \delta}$$

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Application :

Les résultats de calcul d'une denture corrigée sont illustrés dans le tableau ci-dessous :

Tableau II.4 : Résultats de calcul d'une denture corrigée.

Caractéristique	Symbole	Formule	Pignon	Roue
Somme des angles	Σ		90°	
Module de fonctionnement	m (mm)	$m' = m \frac{\sin \delta'}{\sin \delta}$	1,7565	
Nombre de dents	Z_1, Z_2		43	57
Angle de pression de fonctionnement	α'	$\arccos\left(\frac{\sin \delta \cos \alpha}{\sin\left(\delta + \arctg\left(\frac{2x \sin \delta}{Z}\right)\right)}\right)$	20,7475	
Coefficient de déport	x_1, x_2		0,1	-0,1
Angles primitifs de fonctionnement	δ_1' δ_2'	$\delta + \arctg\left(\frac{2x \sin \delta}{Z}\right)$	37,21°	52,79°
Diamètres primitifs	d_1, d_2 (mm)	$d = m' \cdot Z$	75,52	100,12
Longueur de la génératrice	R' (mm)	$R = \frac{d'}{2 \sin \delta'}$	62,47	
Largeur de denture	b (mm)	$b \leq R/3$	20,91	
Hauteur de saillie	h_a (mm)	$h_a = (1 + x) \cdot m$	1,925	1,575
Hauteur du creux	h_f (mm)	$h_f = (1,25 - x) \cdot m$	2,012	2,362
Diamètre de tête	d_a (mm)	$d_a = d + 2h_a \cos \delta$	79,1	102,9
Diamètre de pied	d_f (mm)	$d_f = d - 2h_f \cos \delta$	70,52	95,02
Angle de saillie	θ_a	$\operatorname{tg} \theta_a = h_a / R$	1,72	1,43
Angle de creux	θ_f	$\operatorname{tg} \theta_f = h_f / R$	1,83°	2,12
Angle de tête	δ_a	$\delta_a = \delta + \theta_a$	38,81°	54,44°
Angle de pied	δ_f	$\delta_f = \delta - \theta_f$	35,20°	50,82°

CHAPITRE II : Paramètres de fonctionnement des engrenages coniques droits.

Conclusion :

Au terme de ce chapitre nous avons pu calculer les différentes caractéristiques géométriques d'un engrenage conique droit sans correction de denture, et les nouveaux paramètres de fonctionnement après correction de denture, seulement pour l'angle de fonctionnement où nous avons établi un schéma approximatif vu la complexité de l'équation de la somme des épaisseurs de denture.

Chapitre III

Rapport de conduite
et interférences de
fonctionnement.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Introduction :

Dans ce chapitre nous allons définir l'arc de conduite pour ensuite calculer le rapport de conduite avec la méthode exacte, et avec l'approximation de Tred-Gold en deuxième lieu pour ensuite comparer les résultats des deux méthodes.

III.1. Arc de contact :

Sur les figures III.1.a et III.1.b on définit :

Un plan primitif (P) tangent aux deux cônes primitifs au point I.

Un plan de base (P_b) tangent aux deux cônes de bases aux points T₁, T₂.

L'intersection du plan de base (P_b) avec les deux cônes extérieurs (C_{e1}), (C_{e2}) est les points A, B respectivement.

Alors on définit :

- \widehat{AB} : arc de contact.
- Le point A : début de contact.
- Le point B : fin de contact.
- \widehat{AI} : arc d'approche.
- \widehat{IB} : arc de retraite.

On calcule la longueur de l'arc AB. Pour cela on a :

$$\widehat{AB} = \widehat{AI} + \widehat{IB}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\widehat{AI} &= \widehat{AT_1} - \widehat{IT_1} \\ \widehat{IB} &= \widehat{BT_2} - \widehat{IT_2}\end{aligned}$$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

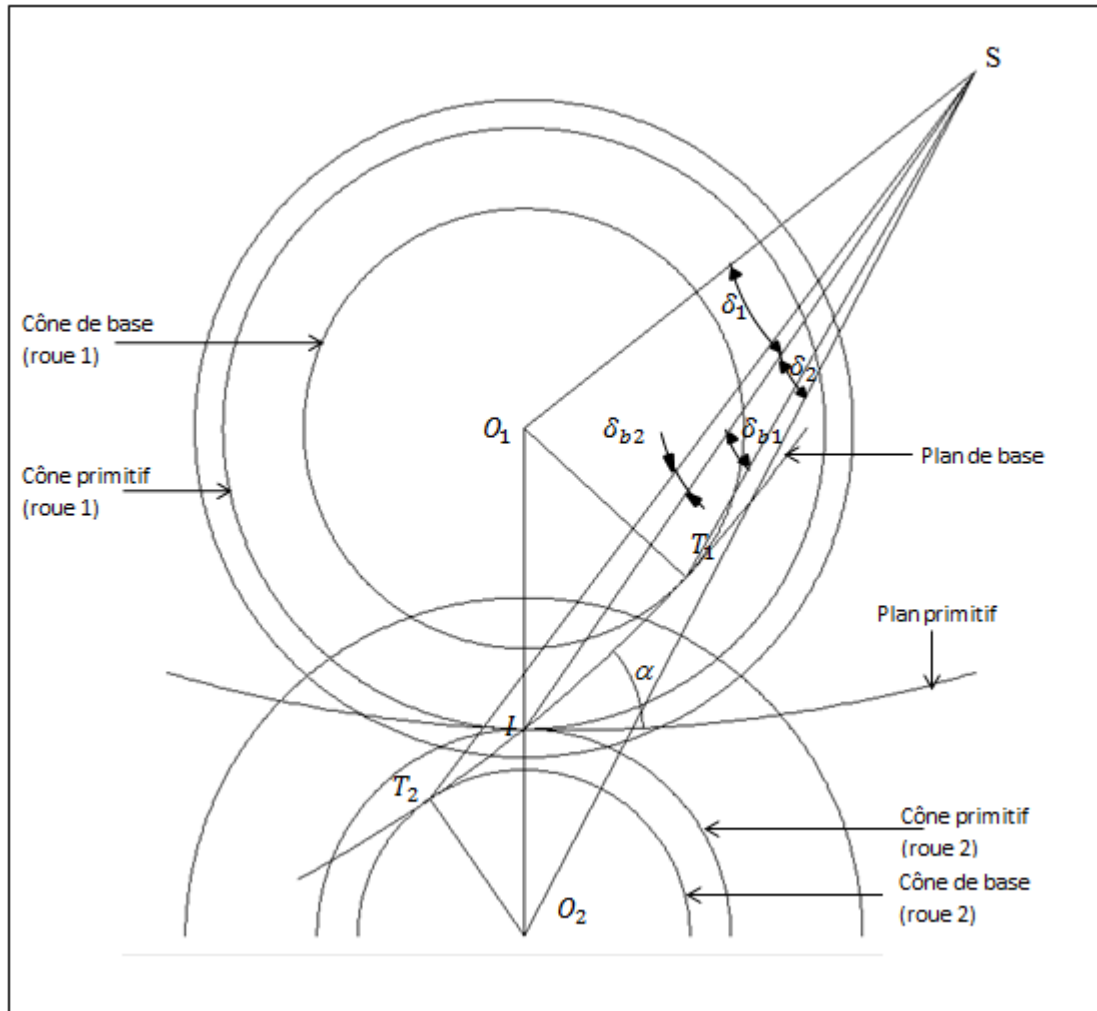


Figure III.1.a : Arc de contact d'un engrenage conique droit.

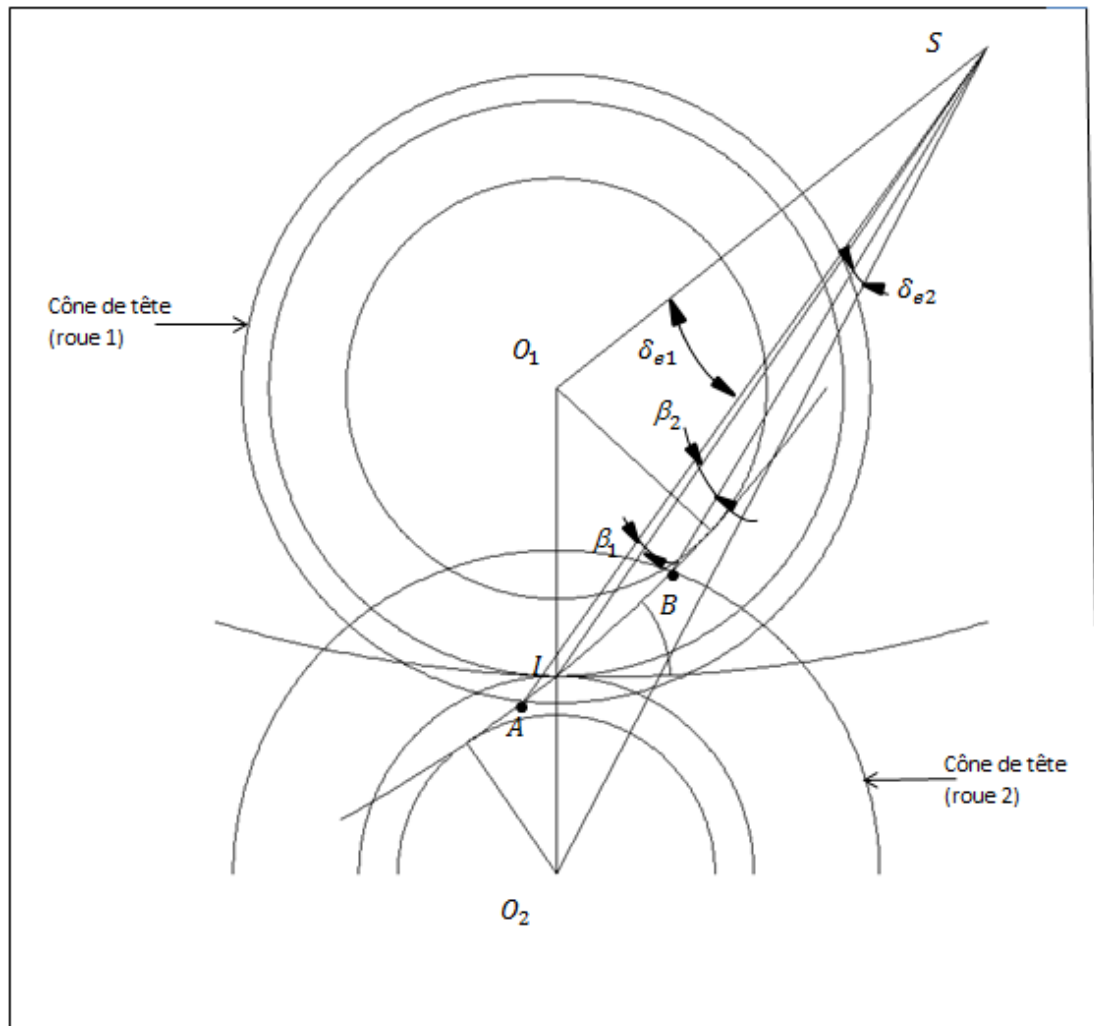


Figure III.1.b : Arc de contact d'un engrenage conique droit.

III.2. Procédure de calcul :

III.2.1. Calcul de l'arc $\widehat{IT_1}$:

Prenant le triangle sphérique SO_1T_1I (figure III.2).

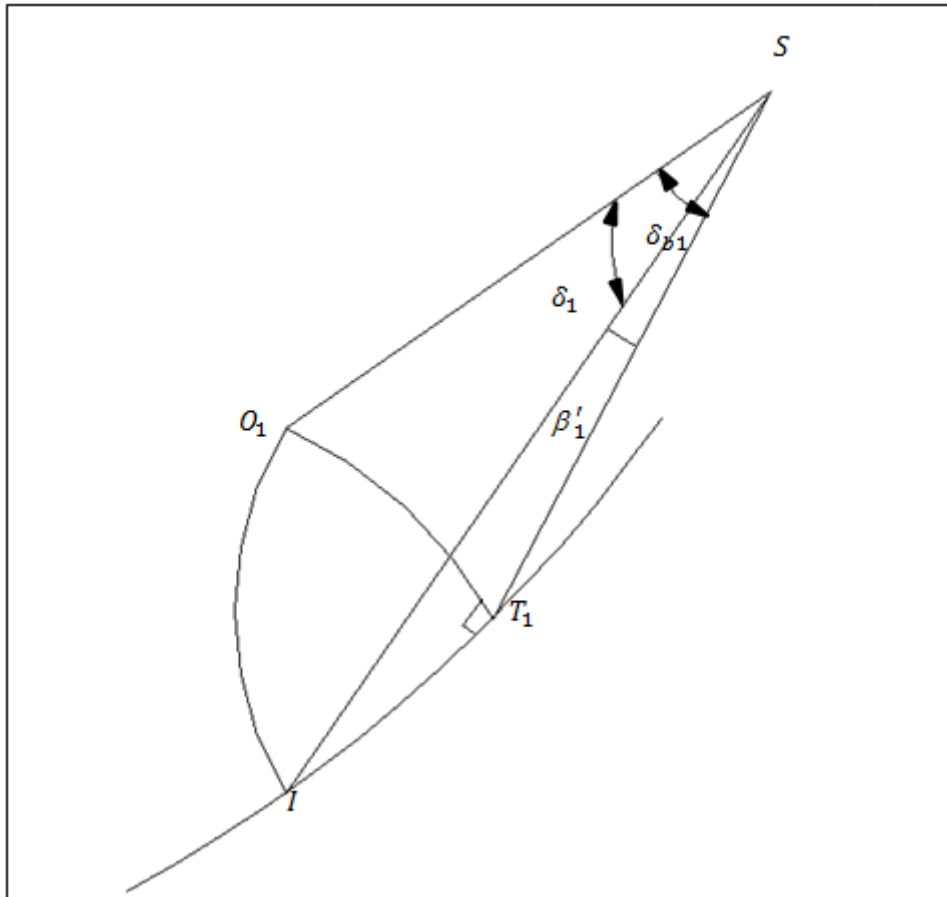


Figure III.2 : Le triangle sphérique SO_1T_1I

En utilisant la relation (7) de la trigonométrie sphérique on obtient :

$$\begin{aligned} \cos \delta_{p1} &= \cos \delta_{b1} \cos \beta'_1 \Rightarrow \cos \beta'_1 = \frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}} \\ \Rightarrow \beta'_1 &= \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}}\right) \end{aligned}$$

D'où : $\widehat{IT_1} = R \beta'_1$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

III.2.2. Calcul de l'arc $\widehat{IT_2}$:

Prenant le triangle sphérique SO_2T_2I (figure III.3).

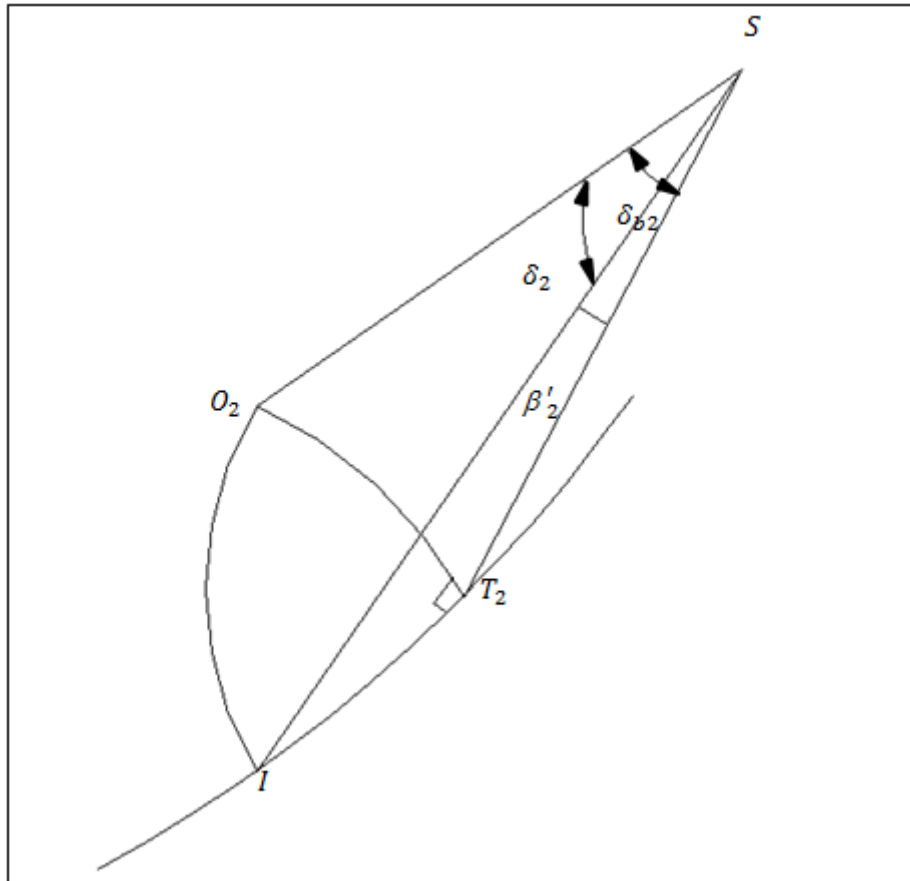


Figure III.3 : Le triangle sphérique SO_2T_2I .

On utilise la même relation de la trigonométrie sphérique on obtient :

$$\cos \delta_{p2} = \cos \delta_{b2} \cos \beta'_2 \Rightarrow \cos \beta'_2 = \frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}$$

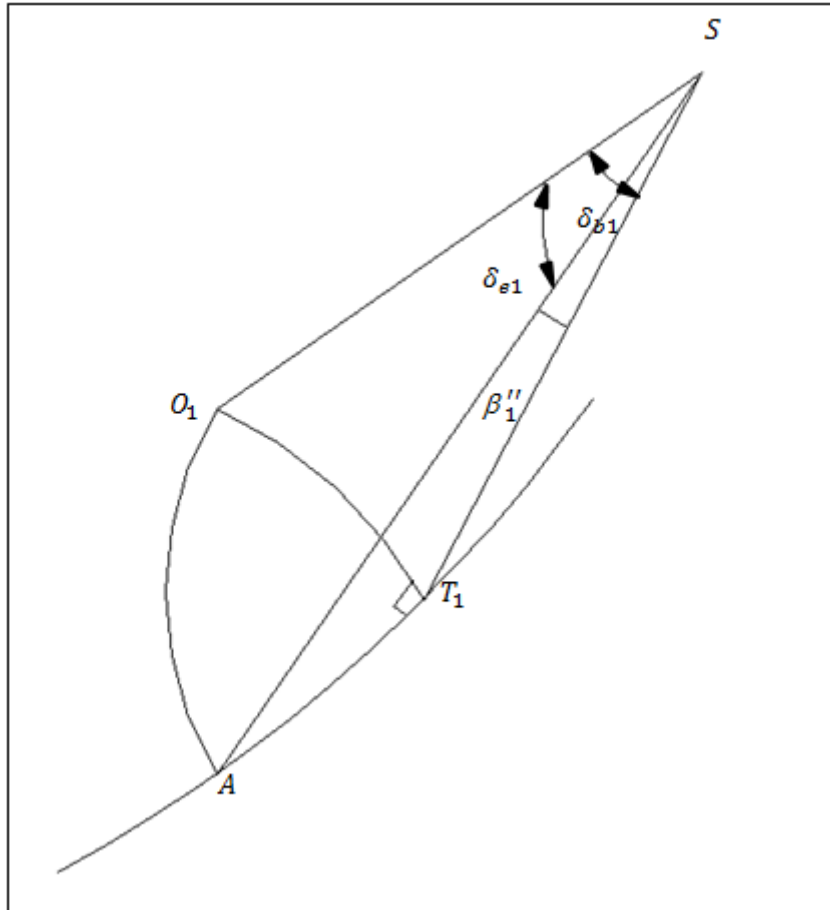
$$\Rightarrow \beta'_2 = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

D'où : $\widehat{IT_2} = R \beta'_2$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

III.2.3. Calcul de l'arc $\widehat{AT_1}$:

Prenant le triangle sphérique SO_1T_1A (figureIII.4).



FigureIII.4 : Le triangle sphérique SO_1T_1A .

La relation (7) nous donne :

$$\cos \delta_{e1} = \cos \delta_{b1} \cos \beta_1'' \Rightarrow \cos \beta_1'' = \frac{\cos \delta_{e1}}{\cos \delta_{b1}}$$

$$\Rightarrow \beta_1'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e1}}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

D'où : $\widehat{AT_1} = R \beta_1''$.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

III.2.4. Calcul de l'arc \widehat{BT}_2 :

Prenant le triangle sphérique SO_2T_2B (figure.III.5).

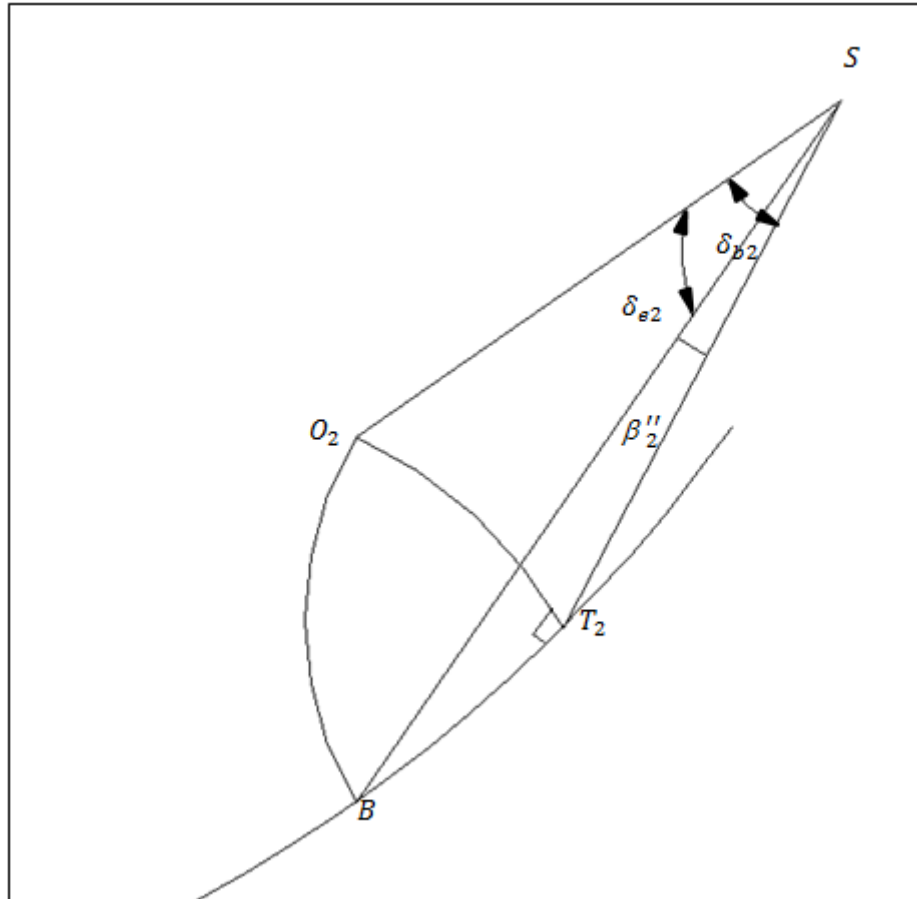


Figure III.5 : Le triangle sphérique SO_2T_2B .

La relation (7) nous donne :

$$\cos \delta_{e2} = \cos \delta_{b2} \cos \beta_2'' \Rightarrow \cos \beta_2'' = \frac{\cos \delta_{e2}}{\cos \delta_{b2}}$$

$$\Rightarrow \beta_2'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

D'où : $\widehat{BT}_2 = R \beta_2''$.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

III.3. Rapport de conduite :

Le rapport de conduite ε_α est la longueur de l'arc formé par l'ensemble des points de contact sur la sphère divisé par le pas de base. L'arc de conduite est l'arc de cercle passant par I et ayant pour extrémité A et B. Il est donné par la relation :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\widehat{AB}}{P_b}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\widehat{AB} = \widehat{AI} + \widehat{IB}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{AT_1} + \widehat{BT_2} - \widehat{IT_1} - \widehat{IT_2}$$

$$\widehat{AB} = R(\beta_1'' + \beta_2'' - \beta_1' - \beta_2')$$

D'où le rapport de conduite ε_α :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\widehat{AB}}{P_b} = \frac{R(\beta_1'' + \beta_2'' - \beta_1' - \beta_2')}{P_b}$$

On définit le pas de base par la relation :

$$P_b = 2\pi \frac{r_b}{z}$$

Donc :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{R(\beta_1'' + \beta_2'' - \beta_1' - \beta_2') z}{2\pi r_b}$$

Nous avons :

$$\sin \delta_b = \frac{r_b}{R}$$

d'où:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{(\beta_1'' + \beta_2'' - \beta_1' - \beta_2') z}{2\pi \sin \delta_b}$$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Remplaçons $\beta_1'', \beta_2'', \beta_1', \beta_2'$ par leurs expressions pour obtenir l'expression finale du rapport de conduite.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\left(\arccos\left(\frac{\cos \delta_{e1}}{\cos \delta_{b1}}\right) + \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e2}}{\cos \delta_{b2}}\right) \right) z}{2\pi \sin \delta_b} - \frac{\left(\arccos\left(\frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}}\right) + \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}\right) \right) z}{2\pi \sin \delta_b}$$

La référence [2] donne la même formule du rapport de conduite.

III.4. Calcul du rapport de conduite par l'approximation de Tred-Gold :

III.4.1. Engrenage complémentaire :

Soit δ_1 et δ_2 les angles primitifs d'un engrenage concourant de sommet S (figure III.6). Les cônes complémentaires, de sommets S_1 et S_2 , ont comme demi-angles au sommet $(90^\circ - \delta_1)$ et $(90^\circ - \delta_2)$ respectivement. Développons les cônes complémentaires sur un plan : nous obtenons alors deux secteurs circulaires de centres S_1 et S_2 . Les cercles primitifs, de diamètres d_1 et d_2 , se développent suivant les arcs de cercle de rayons S_1I et S_2I respectivement.

Nous obtenons ainsi un engrenage à deux roues cylindriques appelées roues complémentaires du pignon et de la roue conique : c'est l'engrenage complémentaire.[3]

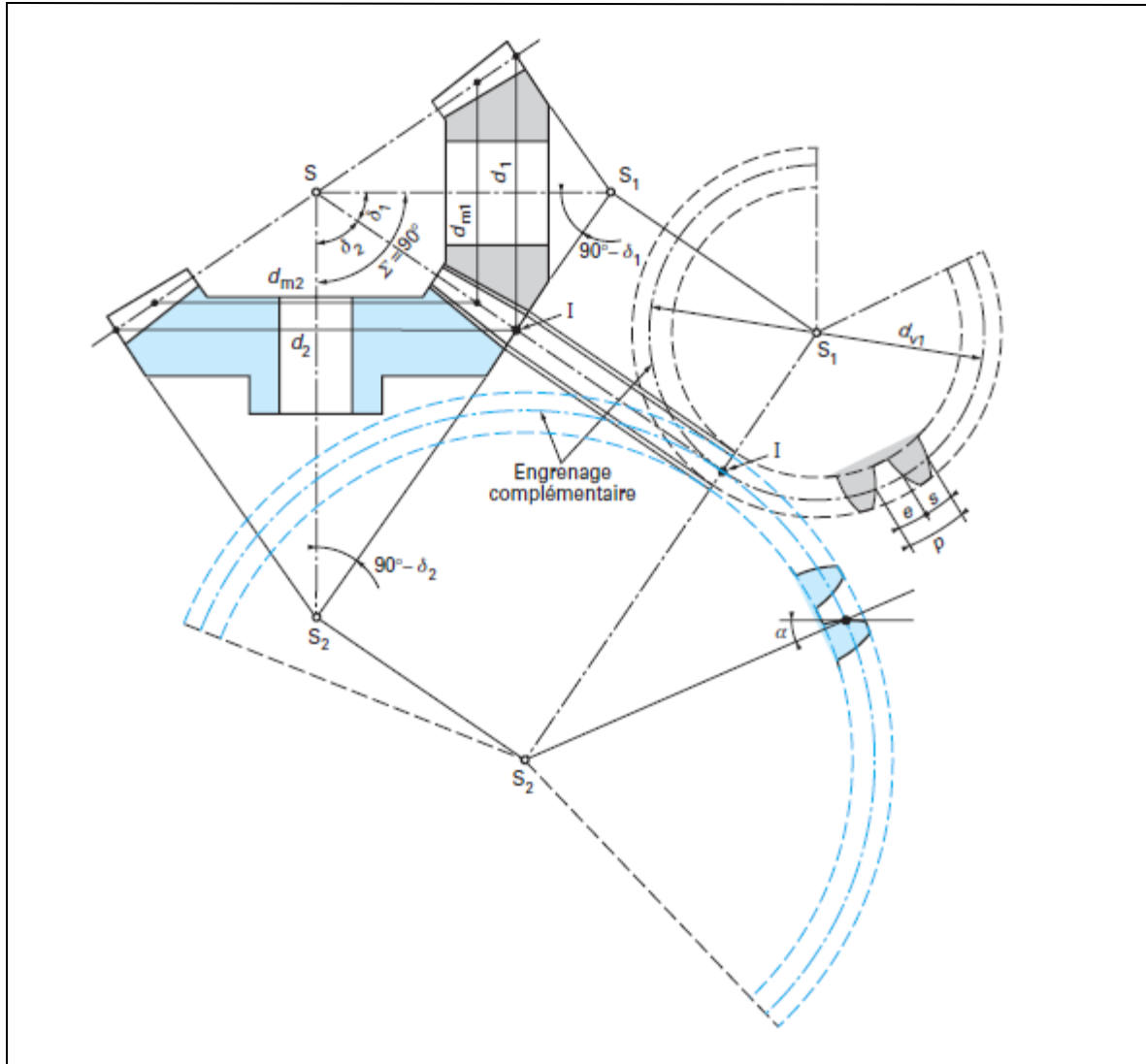


Figure III.6 : Engrenage complémentaire.

III.4.2. Diamètres primitifs et nombre de dents virtuels :

Le cône complémentaire développé du pignon est un secteur circulaire comprenant z_1 dents, celui de la roue un secteur circulaire à z_2 dents. Les roues complémentaires complètes possèdent des nombres de dents virtuels z_{v1} et z_{v2} habituellement non entiers. Les diamètres primitifs peuvent s'exprimer par :

- pour le pignon 1 :
$$d_{v1} = z_{v1} m = \frac{d_1}{\cos \delta_1}$$
- pour la roue 2 :
$$d_{v2} = z_{v2} m = \frac{d_2}{\cos \delta_2}$$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Ainsi le nombre de dents virtuel des deux roues vaut :

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos\delta_1} \quad \text{et} \quad z_{v2} = \frac{z_2}{\cos\delta_2}$$

III.4.3. Rapport de transmission virtuel :

Le rapport d'engrenage virtuel se trouve par :

$$u_v = \frac{\text{grandnombrede dents virtuel}}{\text{petitnombrede dents virtuel}} = \frac{z_{v2}}{z_{v1}} \geq 1$$

Pour un engrenage conique avec un angle des axes $\Sigma = 90^\circ$, le rapport d'engrenage virtuel de l'engrenage réducteur est égal à :

$$u_v = (z_2/\cos\delta_2)/(z_1/\cos\delta_1) = (z_2\sin\delta_2/z_1\sin\delta_1) = u^2$$

III.4.4. Diamètres des roues virtuelles :

A partir des diamètres primitifs des roues, il est possible de donner toutes les dimensions diamétrales de l'engrenage virtuel de substitution :

- diamètres de tête : $d_{av1} = d_{v1} + 2h_a$ $d_{av2} = d_{v2} + 2h_a$
- diamètres de pied : $d_{fv1} = d_{v1} - 2h_f$ $d_{fv2} = d_{v2} - 2h_f$
- diamètres de base : $d_{bv1} = d_{v1}\cos\alpha$ $d_{bv2} = d_{v2}\cos\alpha$

Avec :

- saillie : $h_a = 1.m$
- creux : $h_f = 1,25.m$

III.4.5. Calcul du rapport de conduite :

III.4.5.1. Ligne de conduite :

Sur la figure III.7 nous définissons :

- **Longueur d'approche** : elle est définie par le segment AI.
Soit : $g_f = AI$
- **Longueur de retraite** : elle est définie par le segment IB.
Soit : $g_a = IB$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

➤ **Longueur de conduite** : le segment AB.

On a :

$$AB = AI + IB$$

$$AB = g_f + g_a = g_\alpha$$

Le rapport de conduite se définit comme étant :

$$\varepsilon_{\alpha v} = \frac{g_\alpha}{P_b}$$

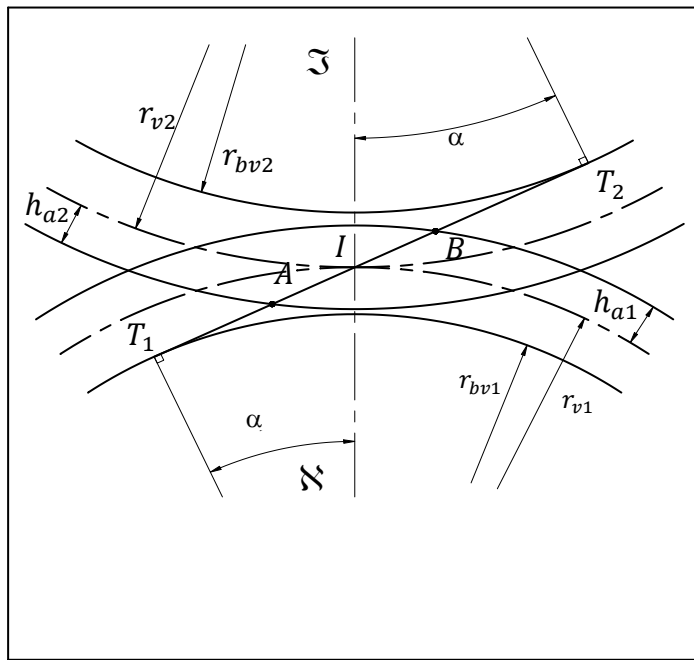


Figure III.7 : Ligne de conduite d'un engrenage complémentaire.

III.4.5.2. Procédure de calcul :

On a:

$$g_f = AI = AT_1 - IT_1$$

$$g_f = \sqrt{(r_{v1} + h_{a1})^2 - r_{v1}^2 \cos^2 \alpha} - r_{v1} \sin \alpha$$

Et :

$$g_a = IB = T_2B - IT_2$$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

$$g_\alpha = \sqrt{(r_{v2} + h_{a2})^2 - r_{v2}^2 \cos^2 \alpha} - r_{v2} \sin \alpha$$

Posons :

$$2r_{v1} = m Z_{v1}$$

$$2r_{v2} = m Z_{v2}$$

$$h_{a1} = m y_1$$

$$h_{a2} = m y_2$$

D'où :

$$\varepsilon_{av} = \frac{g_\alpha}{P_b} = \frac{g_\alpha}{\pi m \cos \alpha}$$

$$\varepsilon_{av} = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[\sqrt{\frac{Z_{v1}^2}{4} \sin^2 \alpha + y_1^2 + Z_{v1} y_1} + \sqrt{\frac{Z_{v2}^2}{4} \sin^2 \alpha + y_2^2 + Z_{v2} y_2} - \frac{(Z_{v1} + Z_{v2})}{2} \sin \alpha \right]$$

III.5. Application :

Reprenons l'exemple du chapitre II, nous avons dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.1 : Caractéristiques géométriques de la denture.

Caractéristique	Symbole	Formule	Pignon	Roue
Somme des angles	Σ		90°	
Angle de pression	α		20°	
Nombre de dents	Z_1, Z_2		43	57
Angles primitifs	δ_1	$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$	37,03°	52,97°
	δ_2	$\delta_2 = \arctg\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)$		
Angle de saillie	θ_a	$tg \theta_a = h_a/R$	1,60°	
Angle de tête	δ_a	$\delta_a = \delta + \theta_a$	38,63°	54,57°
Angle de base	δ_b	$\delta_b = \arcsin(\sin \delta \cos \alpha)$	34,46°	48,60°

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

III.5.1. Calcul par la formule exacte :

Calculons le rapport de conduite d'abord par la formule exacte :

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\left(\arccos\left(\frac{\cos(38,63^{\circ})}{\cos(34,46^{\circ})}\right) + \arccos\left(\frac{\cos(54,57^{\circ})}{\cos(48,60^{\circ})}\right) \right) 43}{2\pi \sin(34,46^{\circ})} - \frac{\left(\arccos\left(\frac{\cos(37,03^{\circ})}{\cos(34,46^{\circ})}\right) + \arccos\left(\frac{\cos(52,97^{\circ})}{\cos(48,60^{\circ})}\right) \right) 43}{2\pi \sin(34,46^{\circ})}$$

Après tout calcul fait on obtient :

$$\varepsilon_{\alpha} = 1,8030$$

III.5.2. Calcul par l'approximation de Tred-Gold :

Recalculons le rapport de conduite mais avec l'approximation de Tred-Gold :

On a :

$$z_{v1} = \frac{Z_1}{\cos\delta_1} = \frac{43}{\cos(37,03^{\circ})} = 53,86$$

$$z_{v2} = \frac{Z_2}{\cos\delta_2} = \frac{57}{\cos(52,97^{\circ})} = 94,64$$

Pour une denture normale on a :

$$y_1 = 1 \text{ et } y_2 = 1$$

Donc :

$$\varepsilon_{\alpha v} = \frac{1}{\pi \cos\alpha} \left[\sqrt{\frac{Z_{v1}^2}{4} \sin^2\alpha + 1 + Z_{v1}} + \sqrt{\frac{Z_{v2}^2}{4} \sin^2\alpha + 1 + Z_{v2}} - \frac{(Z_{v1} + Z_{v2})}{2} \sin\alpha \right]$$

Après calcul on obtient un rapport de conduite :

$$\varepsilon_{\alpha v} = 1,8077$$

On constate que l'approximation de Tred-Gold nous donne une très bonne approche pour le calcul du rapport de conduite.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Calculons pour des nombres de dents différents, le rapport de conduite avec les deux méthodes et cherchons l'erreur.

Les résultats du calcul sont illustrés dans le tableau ci-dessous :

TableauIII.2 : valeurs du rapport de conduite calculé avec les deux méthodes.

Z_1	43	25	24	17	15
Z_2	57	45	32	23	20
ϵ_α	1,8059	1,7412	1,7105	1,6629	1,6106
$\epsilon_{\alpha v}$	1,8077	1,7441	1,7108	1,6396	1,5873
Erreur(%)	0,10	0,16	0,17	1,40	1,44

Du tableauIII.2 on remarque que l'approximation de Tred-Gold nous donne de bons résultats pour un nombre de dents élevé, mais pour un nombre de dents assez faible l'erreur augmente.

III.6. Interférences de fonctionnement :

On a vu précédemment que dans un engrenage conique droit à développante sphérique, le contact des profils conjugués doit s'effectuer obligatoirement suivant l'arc d'action $\widehat{T_1 T_2}$.

D'autre part, on sait que le profil d'une dent est composé d'une partie en développante sphérique suivie d'une trochoïde de raccordement formant le fond de la denture.

Autrement dit, pour que l'engrènement s'effectue correctement, il faut qu'aucun point de contact ne puisse se situer en dehors de la partie du profil de développante.

Si cette limite n'est pas respectée, il y a contact dans la partie en trochoïde. Et comme celle-ci se trouve à l'extérieur de la développante, il se produit le phénomène d'interférence de fonctionnement (FigureIII.8). [4]

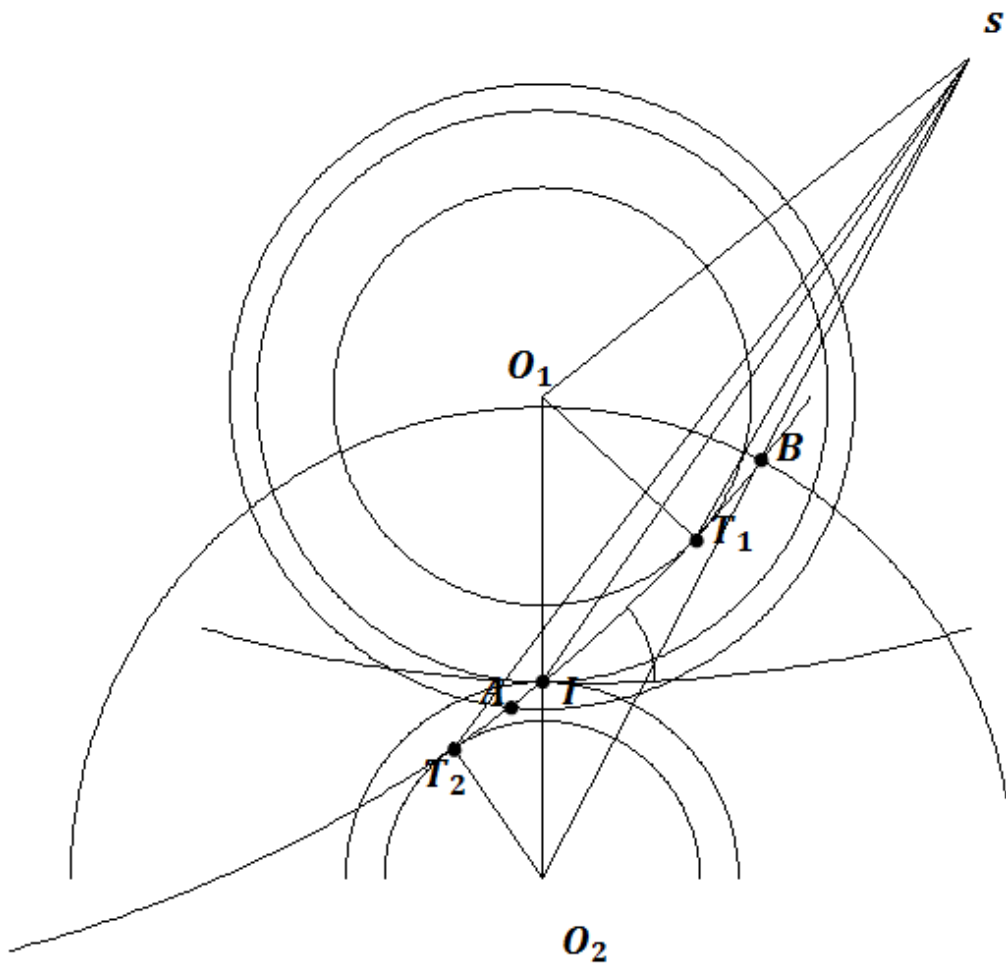


Figure III.8 : Interférences de fonctionnement

III.6.1. Calcul des interférences de fonctionnement :

Pour éviter cette interférence, il suffit que l'arc de conduite \widehat{AB} soit situé à l'intérieur de l'arc d'action T_1T_2 , ce qui peut se vérifier par la condition sur le petit pignon :

$$\widehat{IB} < \widehat{IT_1}$$

On a calculé IB et IT_1 précédemment, d'où on aura pour condition :

$$\beta_2'' - \beta_2' < \beta_1'$$

On a :

$$\beta_1' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

$$\beta_2' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Et :

$$\beta_2'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

Avec :

$$\delta_{e2} = \delta_2 + \theta_{a2}$$

$$\theta_{a2} = \arctg\left(\frac{2 h_{a2} \sin \delta_1}{Z_1 m}\right)$$

Notre but c'est de calculer le nombre de dents limite Z_1 pour qu'il n'y est pas interférence de fonctionnement, pour cela on a fait un programme en MATLAB (Annexe A.4). On fait varier le nombre de dents Z_1 et On calcule β_2'' et on vérifie la condition, notre programme nous donnera le nombre de dents limite pour éviter toute interférences de fonctionnement.

On a fait nos calculs pour des rapports de transmission différents, les résultats sont illustrés dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.3: Nombre de dents limite pour éviter les interférences.

Rapport de transmission	1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
Z limite	9	10	10	11	12	13	14	15	16	16

On remarque que le nombre de dents limites est inversement proportionnel au rapport de transmission.

On peut dire que pour des rapports de transmission très faible on est plus confronté à tomber dans des interférences de fonctionnement.

III.6.2. Correction de denture pour annuler les interférences de fonctionnement :

Pour éviter les interférences de fonctionnement, on fera une correction de denture sur la roue 2 pour diminuer le diamètre de tête c'est pour cela qu'on aura un coefficient de déport $x < 0$.

Pour retrouver le bon coefficient de déport on prendra un nombre de dents inférieur à celui de la limite pour avoir des interférences de fonctionnement, ensuite on recherchera le coefficient de déport qui éliminera cette dernière.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Procédure de calcul :

C'est les mêmes calculs que ceux des interférences de fonctionnement mais on remplace seulement h_{a2} par sa formule après correction de denture qui est :

$$h_{a2} = 1 + x$$

Par un programme en MATLAB (Annexe A.5) on fait varier le coefficient de déport dans un intervalle [-1 ; 0] jusqu'à ce que la condition soit vérifiée.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.4: Le coefficient de déport adéquat pour éviter les interférences.

Rapport de transmission	1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
Z_{limite}	9	10	10	11	12	13	14	15	16	16
Z	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
x	-0.12	-0.20	-0.26	-0.32	-0.38	-0.42	-0.46	-0.49	-0.51	-0.52

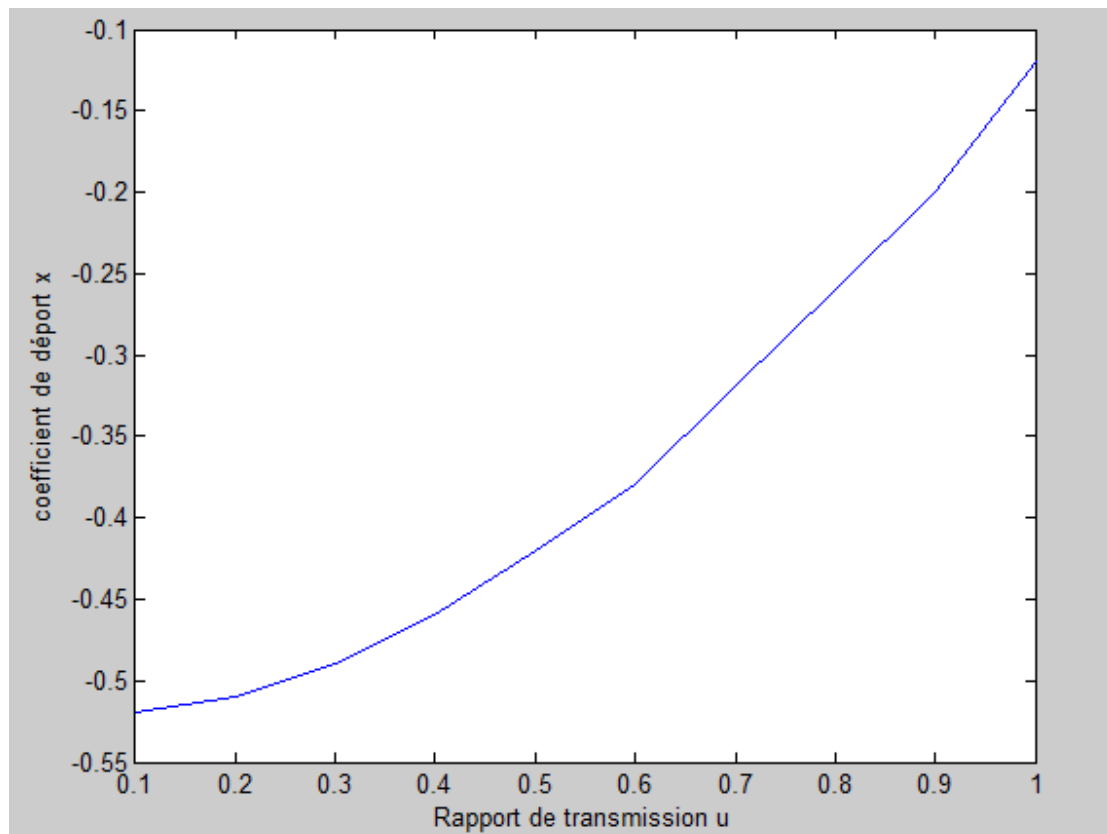


Figure III.9 : variation du coefficient de déport en fonction du rapport de transmission.

Nous constatons de la Figure III.9 que la valeur algébrique du coefficient de déport est proportionnelle au rapport de transmission.

Chapitre III : Rapport de conduite et interférences de fonctionnement

Conclusion :

Au terme de ce chapitre nous avons pu calculé le rapport de conduite avec deux méthodes, et nous avons constaté que l'approximation de Tred-Gold donne de très bons résultats surtout pour un nombre de dents élevés, nous avons détecter les interférences de fonctionnement et on a retrouvé le bon coefficient de déport les diminuer.

Chapitre IV
Glissement
spécifique et
équilibre de
l'usure.

Introduction :

Dans ce chapitre nous allons calculer le glissement spécifique, et nous allons rechercher le bon coefficient de déport pour l'équilibrage de l'usure en égalisant les deux glissements spécifiques maximaux.

IV.1. Calcul des vitesses de roulement et de glissement au point de contact :

IV.1.1 Vitesse d'un point M de la développante de cercle sphérique :

D'après la référence [5], soit l'axe SX, le petit cercle de rayon r_b définissant le cône de base (figure IV.1). La courbe OA est un grand cercle, ainsi que les courbes OM et AM (intersection de la sphère S avec le plan d'engrènement P).

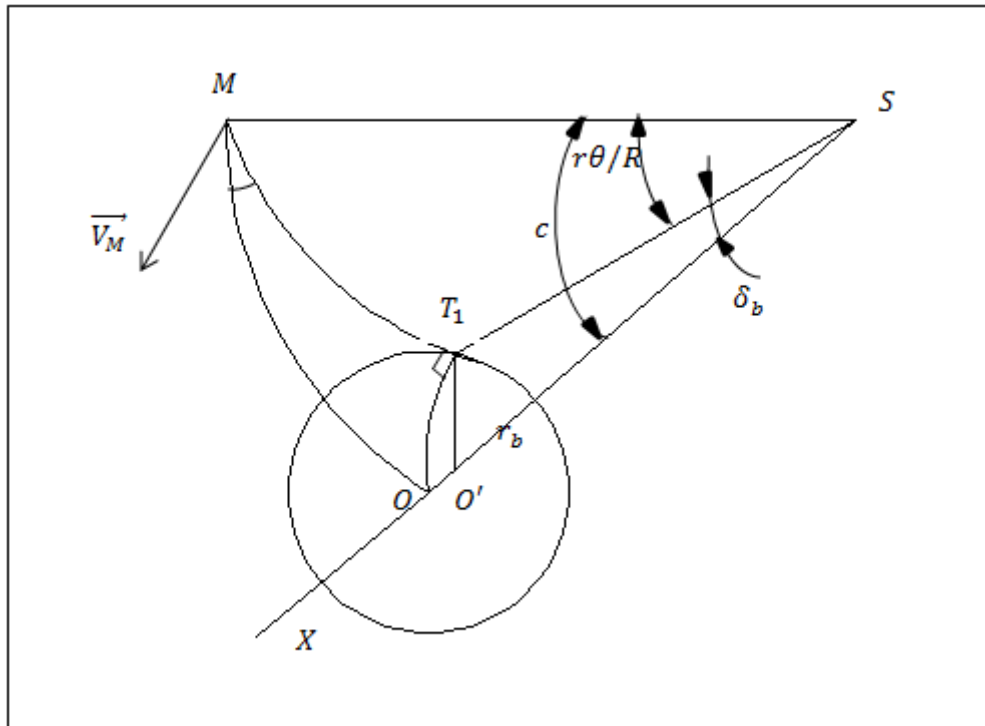


Figure IV.1 : Vecteur vitesse \vec{V}_M en M.

Le triangle sphérique OAM nous permet d'écrire les relations suivantes:

- $\cos\left(\frac{r\theta}{R}\right) = \frac{\cos c}{\cos \delta_b}$
- $\sin \delta_b = \sin M \sin c$
- $\operatorname{tg} \delta_b = \operatorname{tg} M \operatorname{tg}\left(\frac{r_b \theta}{R}\right)$

Le pignon tourne autour de l'axe SX avec une vitesse angulaire ω . Par définition la vitesse du point M sera :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overline{SM}$$

Le vecteur vitesse \vec{V}_M est perpendiculaire au plan SOM et au rayon de de la sphère SM. Il est tangent à la sphère S au point M.

Il sera toujours possible de projeter \vec{V}_M sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} (figure IV.2), respectivement tangents au grand cercle contenu dans le plan d'engrènement et à la développante de cercle sphérique.

Ces vecteurs \vec{u} et \vec{v} appartiennent, ainsi que \vec{V}_M , au plan tangent en M à la sphère S.

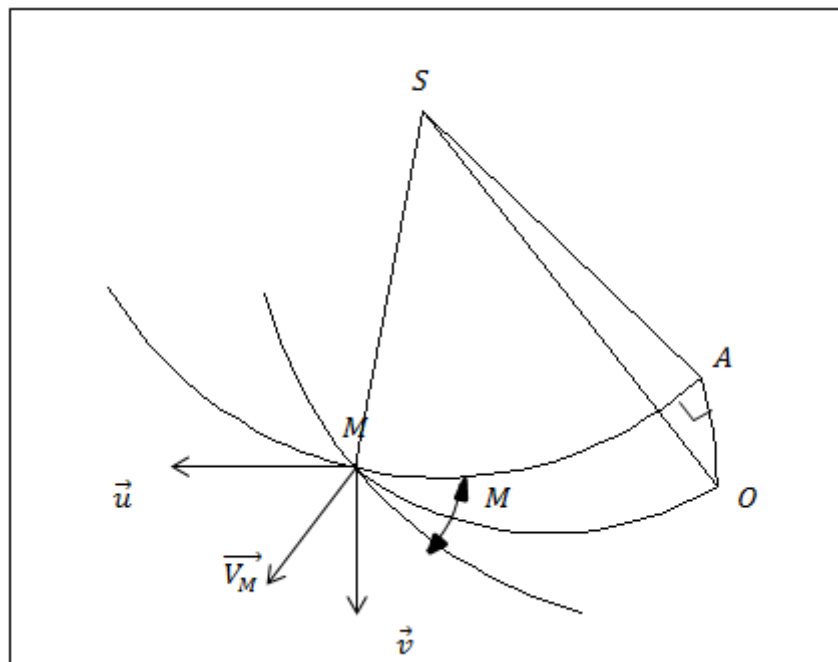


Figure IV.2 : Projections de \vec{V}_M sur \vec{u} et \vec{v} .

IV.I.2. Vitesses de roulement et de glissement :

Considérons la figure IV.2. Le vecteur \vec{V}_M se projette par $\sin M$ sur \vec{u} et par $\cos M$ sur \vec{v} .

Ainsi :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overline{SM}$$

$$|\vec{V}_M| = \omega \cdot R \cdot \sin c$$

En projetant sur \vec{u} :

$$|\vec{V}_{Mu}| = \omega \cdot R \cdot \sin c \cdot \sin M$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

Qui devient :

$$|\overrightarrow{V_{Mu}}| = \omega \cdot r_b$$

En projetant sur \vec{v} :

$$|\overrightarrow{V_{Mv}}| = \omega \cdot R \cdot \sin c \cos M$$

$$|\overrightarrow{V_{Mv}}| = \omega \cdot R \cdot \frac{\sin \delta_b}{\operatorname{tg} M}$$

Or:

$$\operatorname{tg} \delta_b = \operatorname{tg} M \operatorname{tg} \left(\frac{r_b \theta}{R} \right)$$

Ce qui nous donne :

$$|\overrightarrow{V_{Mv}}| = \omega \cdot R \cdot \cos \delta_b \cdot \sin \left(\frac{r_b \theta}{R} \right)$$

La vitesse $|\overrightarrow{V_{Mu}}|$ correspond à la vitesse de déplacement du point M le long du grand cercle du plan d'action.

La vitesse $|\overrightarrow{V_{Mv}}|$ est la vitesse du roulement au point M du pignon considéré.

On définit la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_g}$ au point M comme étant la valeur absolue de la différence des deux vitesses de roulement $\overrightarrow{V_{1Mv}}$ et $\overrightarrow{V_{2Mv}}$.

Nous avons d'après ce qui précède, pour la roue 1 :

$$|\overrightarrow{V_{1Mv}}| = \omega_{10} \cdot R \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin \left(\frac{r_b \theta}{R} \right)$$

Et pour la roue 2:

$$|\overrightarrow{V_{2Mv}}| = \omega_{20} \cdot R \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin \left(\phi - \frac{r_b \theta}{R} \right)$$

Avec : $\phi = \widehat{T_1 S T_2}$ angle limitant la zone d'action.

Ainsi la vitesse de glissement est donnée par la relation :

$$|\overrightarrow{V_g}| = \left| \omega_{10} \cdot R \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin \left(\frac{r_b \theta}{R} \right) - \omega_{20} \cdot R \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin \left(\phi - \frac{r_b \theta}{R} \right) \right|$$

IV.2. Glissement spécifique :

Le glissement spécifique se définit par :

Pour le pignon 1 :

$$g_{S_1} = \frac{V_g}{V_{1Mv}} = \frac{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin\left(\frac{r_b\theta}{R}\right) - \omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin\left(\phi - \frac{r_b\theta}{R}\right)}{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin\left(\frac{r_b\theta}{R}\right)}$$

$$g_{S_1} = 1 - \frac{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin\left(\phi - \frac{r_b\theta}{R}\right)}{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin\left(\frac{r_b\theta}{R}\right)}$$

Pour la roue 2 :

$$g_{S_2} = \frac{V_g}{V_{2Mv}} = \frac{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin\left(\phi - \frac{r_b\theta}{R}\right) - \omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin\left(\frac{r_b\theta}{R}\right)}{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin\left(\phi - \frac{r_b\theta}{R}\right)}$$

$$g_{S_2} = 1 - \frac{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin\left(\frac{r_b\theta}{R}\right)}{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin\left(\phi - \frac{r_b\theta}{R}\right)}$$

Posons :

$$\frac{r_b\theta}{R} = \beta$$

L'expression finale du glissement spécifique sera :

$$g_{S_1} = 1 - \frac{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin(\phi - \beta)}{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin(\beta)}$$

$$g_{S_2} = 1 - \frac{\omega_{10} \cdot \cos\delta_{b1} \cdot \sin(\beta)}{\omega_{20} \cdot \cos\delta_{b2} \cdot \sin(\phi - \beta)}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

IV.3. Application :

Reprenons l'exemple du chapitre II, pour calculer les glissements spécifiques du pignon et de la roue.

On a :

$$gs_1 = 1 - \frac{\omega_{20} \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\phi - \beta)}{\omega_{10} \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta)}$$

$$gs_2 = 1 - \frac{\omega_{10} \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta)}{\omega_{20} \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\phi - \beta)}$$

Avec :

$$\phi = \beta'_1 + \beta'_2$$

Et :

$$\beta'_1 = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

$$\beta'_2 = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

Les données sont dans le tableau ci-dessous :

Tableau IV.1: Données pour le calcul du glissement.

Caractéristique	Symbole	Formule	Pignon	Roue
Somme des angles	Σ		90°	
Angle de pression	α		20°	
Nombre de dents	Z_1, Z_2		43	57
Angles primitifs	δ_1	$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$	37,03°	52,97°
	δ_2	$\delta_2 = \arctg\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)$		
Angle de base	δ_b	$\delta_b = \arcsin(\sin \delta \cos \alpha)$	34,46°	48,60°

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

Nous aurons :

$$\beta'_1 = \arccos\left(\frac{\cos(37,03)}{\cos(34,46)}\right) = 0,253 \text{ rad}$$

Et :

$$\beta'_2 = \arccos\left(\frac{\cos(52,97)}{\cos(48,60)}\right) = 0,426 \text{ rad}$$

Donc l'angle β vraie dans l'intervalle $[0 ; 0,679]$.

D'où la formule du glissement spécifique sera :

$$gs_1 = 1 - \frac{28,436 \sin(0,679 - \beta)}{47 \sin(\beta)}$$

$$gs_2 = 1 - \frac{47 \cdot \sin(\beta)}{28,436 \sin(0,679 - \beta)}$$

On remarque que :

- Pour $(\beta = \beta'_1)$ qui correspond au point I on a $gs_1 = gs_2 = 0$ car on a roulement sans glissement.
- Pour $(\beta = 0)$ qui est le premier point de tangence T_1 , on a :

$$gs_1 \rightarrow \infty$$

$$gs_2 = 1$$

- Pour $(\beta = \beta'_1 + \beta'_2)$ qui est le second point de tangence T_2 , on a :

$$gs_2 \rightarrow \infty$$

$$gs_1 = 1$$

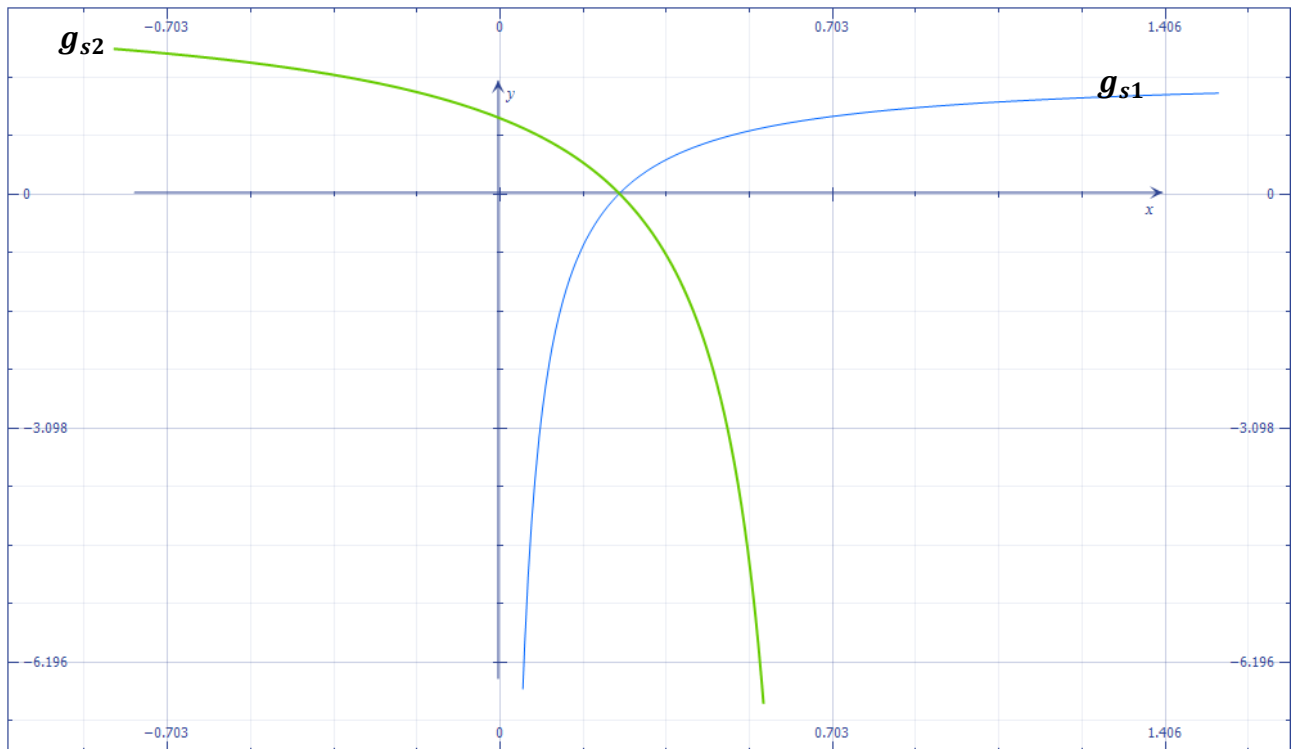


Figure IV.3 : Variation des glissements spécifiques en fonction de la position angulaire

IV.4. Calcul du glissement spécifique par la méthode de Tred-Gold :

IV.4.1. Vitesse de glissement :

D'après [6] c'est la vitesse relative au point de contact.

On a :

$$\overrightarrow{V}_{1/2}(M) = \overrightarrow{V}_1^0(M) - \overrightarrow{V}_2^0(M)$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{V}_1^0(M) = \overrightarrow{V}_1^0(I) + \overrightarrow{\omega}_{10} \wedge \overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{V}_2^0(M) = \overrightarrow{V}_2^0(I) + \overrightarrow{\omega}_{20} \wedge \overrightarrow{IM}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

En considérant le roulement sans glissement des cercles primitifs (ou cercles de fonctionnement), on aura :

$$\overrightarrow{V_1^0(I)} = \overrightarrow{V_2^0(I)} = 0$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\overrightarrow{\omega_{10}} - \overrightarrow{\omega_{20}}) \wedge \overrightarrow{IM}$$

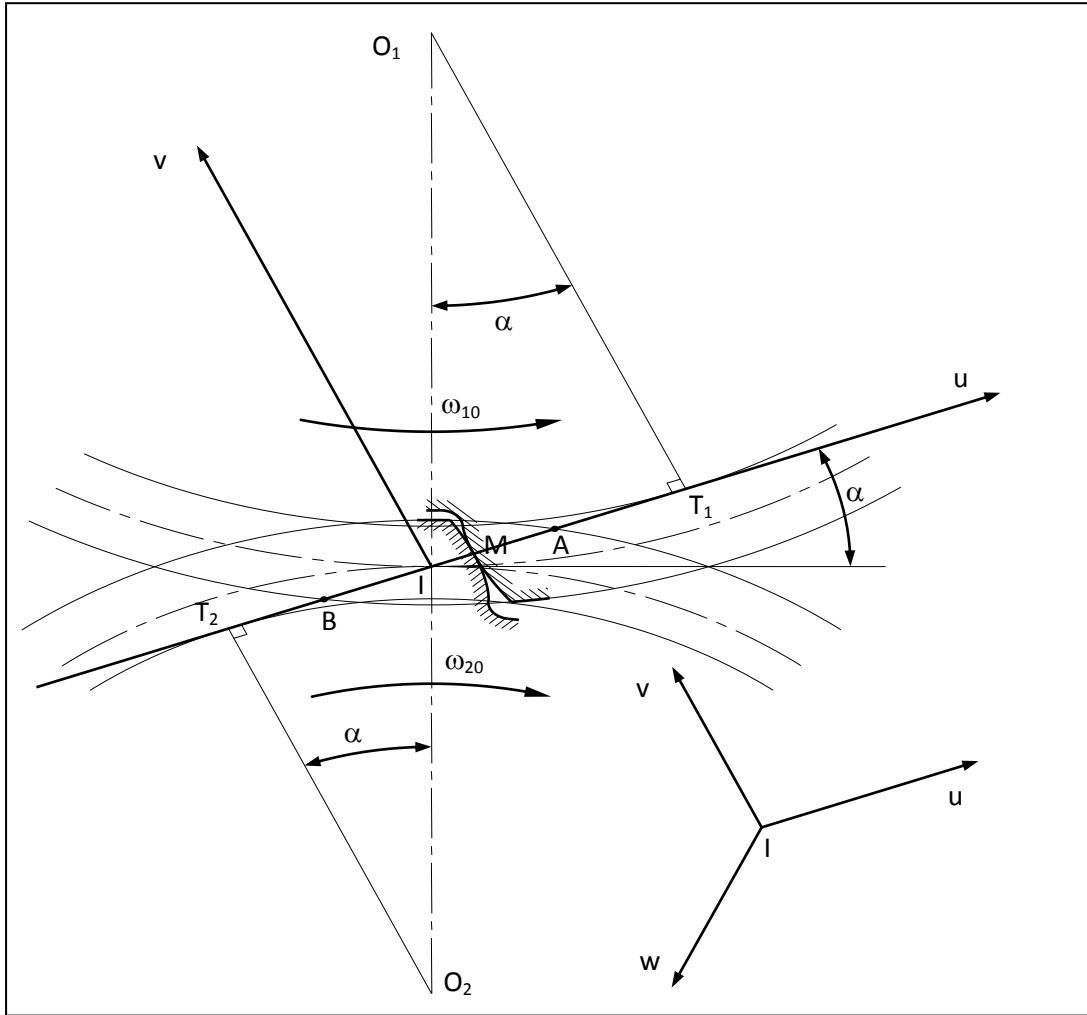


Figure IV.4: Vitesse de glissement relative [6]

Dans le repère \$(I, u, v, w)\$ (Fig.IV.4) et en engrenage extérieur, la vitesse relative \$\overrightarrow{V_{1/2}(M)}\$ aura pour composantes :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} - (-\omega_{20}) \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} IM \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (\omega_{10} + \omega_{20})IM \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

Soit :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = [(\omega_{10} + \omega_{20})IM] \vec{v}$$

En engrenage intérieur, on aura :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = [(\omega_{10} - \omega_{20})IM] \vec{v}$$

IV.4.2. Glissement relatif élémentaire :

Pendant une période de temps dt le glissement relatif global au point M est :

$$dg = V_{1/2}(M)dt$$

Pour un engrenage extérieur on aura :

$$dg = (\omega_{10} + \omega_{20})IM dt$$

IV.4.3. Glissement spécifique :

Reprenons la relation de la vitesse de glissement :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(M)} - \overrightarrow{V_2^0(M)}$$

Et écrivons :

$$\overrightarrow{V_1^0(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} + \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{AT_1M}$$

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_2)} + \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{AT_2M}$$

Il vient :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} + \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{AT_1M} - \overrightarrow{V_1^0(T_2)} - \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{AT_2M}$$

Ou encore :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} - \overrightarrow{V_1^0(T_2)} + \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{AT_1M} - \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{AT_2M}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

On a aussi :

$$\overrightarrow{V_1^0(T_1)} = \overrightarrow{V_1^0(O_1)} + \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{O_1 T_1} = \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{O_1 T_1} \quad (O_1 \text{ fixe / bâti})$$

$$\overrightarrow{V_2^0(T_2)} = \overrightarrow{V_2^0(O_2)} + \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{O_2 T_2} = \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{O_2 T_2} \quad (O_2 \text{ fixe / bâti})$$

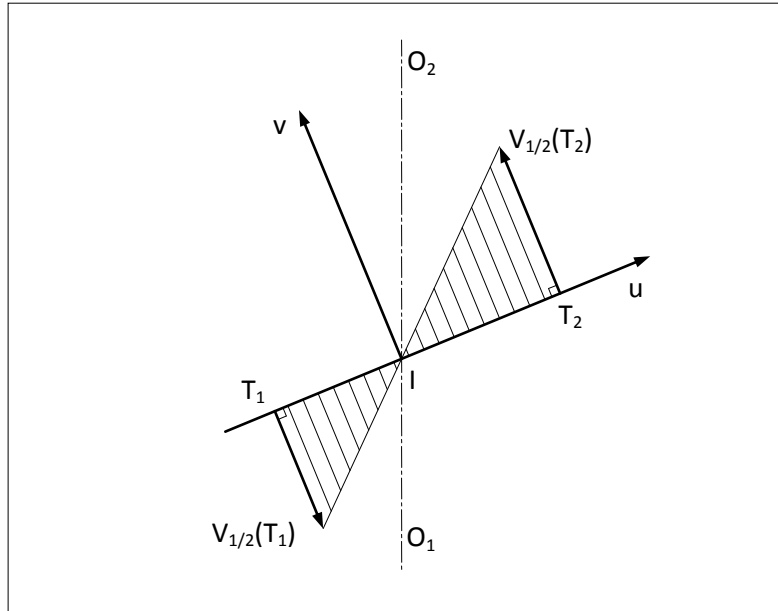


Figure IV.5 : Répartition de la vitesse sur la ligne de contact [6]

Comme $\overrightarrow{\omega_{10}} \perp \overrightarrow{O_1 T_1}$ et $\overrightarrow{\omega_{20}} \perp \overrightarrow{O_2 T_2}$, les vitesses $\overrightarrow{V_1^0(T_1)}$ et $\overrightarrow{V_2^0(T_2)}$ sont donc les vitesses tangentielles respectivement en T_1 et T_2 . Elles sont dirigées suivant l'axe u.

Par conséquent, le vecteur :

$$\overrightarrow{V_1^0(T_1)} - \overrightarrow{V_2^0(T_2)} = 0$$

Car le vecteur $\overrightarrow{V_{1/2}(M)}$ est dirigé suivant l'axe v. Il s'ensuit :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{AT_1 M} - \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{AT_2 M}$$

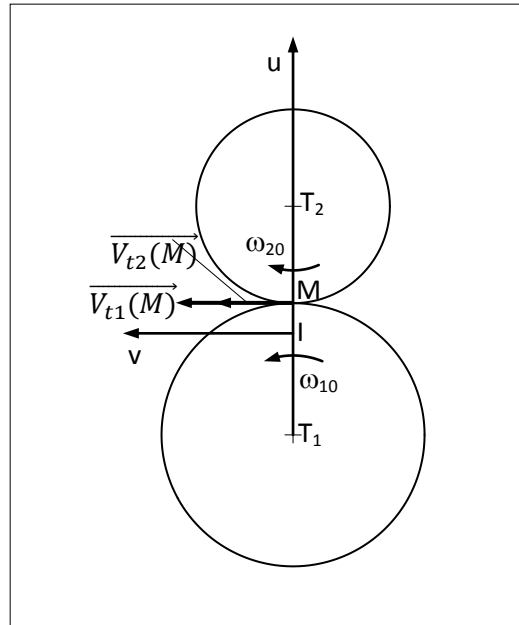
Compte tenu du fait que $\overrightarrow{\omega_{10}} \perp \overrightarrow{T_1 M}$ et $\overrightarrow{\omega_{20}} \perp \overrightarrow{T_2 M}$, cette relation montre que tout se passe comme si l'on a roulement avec glissement de deux cercles de centres respectifs T_1 et T_2 (Fig.IV.6). Ce qui permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_{t1}(M)} - \overrightarrow{V_{t2}(M)}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

Avec : $\overrightarrow{V_{t1}(M)} = \overrightarrow{\omega_{10}} \wedge \overrightarrow{T_1 M}$

Et : $\overrightarrow{V_{t2}(M)} = \overrightarrow{\omega_{20}} \wedge \overrightarrow{T_2 M}$



FigureIV.6 : vitesses tangentielles [6]

Le développement de ces produits vectoriels donne :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\omega_{10} T_1 M - \omega_{20} T_2 M) \vec{v} = [V_{t1}(M) - V_{t2}(M)] \vec{v}$$

En prenant maintenant $T_1 M$ et $T_2 M$ en valeurs algébriques, on aura :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\omega_{10} T_1 M + \omega_{20} T_2 M) \vec{v} = [V_{t1}(M) + V_{t2}(M)] \vec{v}$$

Pendant le temps dt , le glissement du point M :

✓ Sur le cercle de centre T_1 : $ds_1 = V_{t1}(M) dt = \omega_{10} T_1 M dt$

✓ Sur le cercle de centre T_2 : $ds_2 = V_{t2}(M) dt = \omega_{20} T_2 M dt$

On définit alors le glissement spécifique comme étant :

- Pour le pignon 1 :

$$gs_1 = \frac{dg}{ds_1} = \frac{V_{1/2}(M) dt}{V_{t1}(M) dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{t1}(M)}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

- Pour la roue 2 :

$$g_{s_2} = \frac{dg}{ds_2} = \frac{V_{1/2}(M) dt}{V_{t_2}(M) dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{t_2}(M)}$$

Remplaçons les vitesses de glissement par leurs expressions :

- Pour le pignon :

$$g_{s_1} = \frac{(\omega_{10}T_1M + \omega_{20}T_2M)}{\omega_{10}T_1M} = 1 - \frac{\omega_{20}MT_2}{\omega_{10}T_1M}$$

- Pour la roue :

$$g_{s_1} = \frac{(\omega_{10}T_1M + \omega_{20}T_2M)}{\omega_{20}T_2M} = 1 - \frac{\omega_{10}MT_1}{\omega_{20}T_2M}$$

IV.5. Equilibrage de l'usure :

Equilibrage de l'usure par égalisation des glissements spécifique maximums :

Le glissement spécifique maximum est situé au pied de la dent, en A pour le pignon, et en B pour la roue.

On a donc :

En A :

$$\beta = \beta_1'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e1}}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

D'où :

$$g_{s_1} = 1 - \frac{\omega_{20} \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\beta_1' + \beta_2' - \beta_1'')}{\omega_{10} \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta_1'')}$$

En B :

$$\beta = \beta_1' + \beta_2' - \beta_2''$$

$$g_{s_2} = 1 - \frac{\omega_{10} \cdot \cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta_1' + \beta_2' - \beta_2'')}{\omega_{20} \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\beta_2'')}$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

Avec :

$$\beta_2'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{e2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

Notre but c'est de retrouver la bonne correction de denture où le bon coefficient de déport pour égaliser les deux glissements spécifiques maximaux pour cela on prendra une correction de denture totale ce qui veut dire que :

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 = x$$

Nous avons après correction de denture :

$$\delta_e = \delta + \theta_a$$

Avec :

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{2(1+x)\sin\delta}{Z}\right)$$

D'où nous aurons :

$$\delta_{e1} = \delta_1 + \arctan\left(\frac{2(1+x)\sin\delta_1}{Z_1}\right)$$

$$\delta_{e2} = \delta_2 + \arctan\left(\frac{2(1-x)\sin\delta_2}{Z_2}\right)$$

Nous avons :

$$gS_{1max} = gS_{2max}$$

$$\frac{u \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\beta_1' + \beta_2' - \beta_1'')}{\cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta_1'')} = \frac{\cos \delta_{b1} \cdot \sin(\beta_1' + \beta_2' - \beta_2'')}{u \cdot \cos \delta_{b2} \cdot \sin(\beta_2'')}$$

Avec :

$$\beta_1' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p1}}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

$$\beta_2' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_{p2}}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

Chapitre IV : Glissement spécifique et équilibrage de l'usure

$$\beta_1'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_1 + \arctan\left(\frac{2(1+x)\sin\delta_1}{Z_1}\right)}{\cos \delta_{b1}}\right)$$

$$\beta_2'' = \arccos\left(\frac{\cos \delta_2 + \arctan\left(\frac{2(1-x)\sin\delta_2}{Z_2}\right)}{\cos \delta_{b2}}\right)$$

La résolution de cette équation est difficile, c'est pour cela qu'on a utilisé un programme en MATLAB (Annexe A.7).

En faisant varier le coefficient de déport x dans un intervalle $[0 ; 1]$ avec un pas de 0,0001, et en comparant le résultat des deux glissements spécifiques maximaux avec une précision de 10^{-4} nous avons obtenu les résultats illustrés dans le tableau ci-dessous :

Tableau IV.2: Les coefficients de déport pour l'équilibrage de l'usure.

Rapport de transmission	0,75	Z_1	40	30	20
		Z_2	53	40	28
		x	0,0965	0,1275	0,2035
	0,5	Z_1	40	30	20
		Z_2	80	60	40
		x	0,1854	0,2368	0,3248
	0,25	Z_1	40	30	20
		Z_2	160	120	80
		x	0,2460	0,3099	0,4135
	0,125	Z_1	40	30	20
		Z_2	320	240	160
		x	0,2623	0,3291	0,4355

Du tableau ci-dessus on constate bien que le coefficient est inversement proportionnel au rapport de transmission, pour un rapport de transmission assez élevé le coefficient de déport est faible, et il atteint des valeurs élevées pour des rapports faibles.

On remarque aussi que pour le même rapport de transmission, le coefficient de déport varie aussi en fonction du nombre de dent de l'engrenage. Il est aussi inversement proportionnel au nombre de dents des deux roues. Pour un nombre de dent très faible le coefficient de déport atteint sa valeur maximale.

Conclusion :

Au terme de ce chapitre nous avons pu calculer le glissement spécifique, et on a retrouvé le bon coefficient de déport pour l'équilibrage de l'usure

Conclusion Générale

Conclusion générale

Notre étude nous a permis de traiter le sujet des engrenages coniques droits, un sujet très peu abordé dans la littérature. Ce qui nous a permis d'élargir un peu nos connaissances dans le domaine des engrenages.

Dans notre travail on a :

- 1) Utilisé un modèle géométrique celui de la développante sphérique, et on a expliqué comment on fait générer une denture conique droite.
- 2) Calculé les paramètres géométriques des engrenages coniques droits sans une correction de denture, et trouver les paramètres de fonctionnement après correction.
- 3) Étudié l'engrènement de deux roues coniques tout en calculant le rapport de conduite avec deux méthodes différentes, et on a cherché le bon coefficient de déport pour éviter les interférences de fonctionnement.
- 4) Calculé le glissement spécifique et donner la bonne correction de denture pour l'équilibrage de l'usure.

Dans ce travail on a aussi constaté que l'approximation de Tred-Gold donne de très bons résultats surtout pour un nombre de dents assez élevé.

Toute notre étude s'est basée sur le profil théorique de la denture conique droite comme suite de notre travail nous proposons :

- ✓ Étudier les deux profils pratique de génération de denture qui sont les octoïdes de 1^{ère} et 2^{ème} espèce.

Nous espérons avoir ainsi contribué à la vulgarisation de la technologie des engrenages coniques droits.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] **M.BOUAZIZ**, ‘Contribution au contrôle des engrenages sur machines à mesurer tridimensionnelle’.Thèse de doctorat d’état, 20 janvier 1996, ENP, Alger.
- [2] **J.BRUYÈRE**, ‘Contribution à l’optimisation de la conception des engrenages coniques à denture droite, analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances’.Thèse de doctorat, 27 novembre 2006 , ENSAM, Metz, France.
- [3]**G. HENRIOT**, ‘Traite théorique et pratique des engrenages’, 6^{ème} édition, Dunod, novembre 1983, France.
- [4] **M.SZWAECMAN**, ‘Eléments de machines’, Technique et documentation, 1983, Paris, France.
- [5] **J.C.RAFFY, M.GODET**, ‘Le calcul des engrenages coniques droits’, Bulletin S.E.I.E. N° 53, septembre 1968, France.
- [6] **M.BOUAZIZ**, ‘Glissement spécifique’, Cours de construction mécanique, Post graduation, ENP.

Annexes

A.1 Programme de calcul des paramètres géométrique des engrenages coniques sans correction de denture :

```
Z1=input('valeur de Z1=');
Z2=input('valeur de Z2=');
m=input('donner le module(mm) m=');
delta1=atan(Z1/Z2);
delta2=(pi/2)-delta1;
deltab1=asin(sin(delta1)*cos(pi/9));
deltab2=asin(sin(delta2)*cos(pi/9));
deltaA1=delta1+atan((2*sin(delta1))/Z1);
deltaA2=delta2+atan((2*sin(delta2))/Z2);
d1=m*Z1;
d2=m*Z2;
R=d1/(2*sin(delta1));
ha=m;
hf=1.25*m;
da1=d1+2*ha;
da2=d2+2*ha;
df1=d1-2*hf;
df2=d2-2*hf;
tetaA=atan(ha/R);
tetaf=atan(hf/R);
deltaf1=delta1-tetaf;
deltaf2=delta2-tetaf;
disp(['le diamètre primitif du pignon 1 (mm)= ',num2str(d1)]);
disp(['le diamètre primitif de la roue 2(mm)= ',num2str(d2)]);
disp(['la hauteur de saillie (mm)= ',num2str(ha)]);
disp(['la hauteur de creux (mm)= ',num2str(hf)]);
disp(['le diamètre de tête du pignon 1 (mm)= ',num2str(da1)]);
disp(['le diamètre de tête de la roue 2 (mm)= ',num2str(da2)]);
disp(['le diamètre de pied du pignon 1 (mm)= ',num2str(df1)]);
disp(['le diamètre de pied de la roue 2 (mm)= ',num2str(df2)]);
disp(['l'angle primitif du pignon 1 (rad)= ',num2str(delta1)]);
disp(['l'angle primitif de la roue 2 (rad)= ',num2str(delta2)]);
disp(['l'angle de saillie (rad)= ',num2str(tetaA)]);
disp(['l'angle de creux (rad)= ',num2str(tetaf)]);
disp(['l'angle de base du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltab1)]);
disp(['l'angle de base de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltab2)]);
disp(['l'angle de tête du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltaA1)]);
```

```

disp(['l'angle de tête de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltaA2)]);
disp(['l'angle de pied du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltaf1)]);
disp(['l'angle de pied de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltaf2)]);

```

A.2 Programme de calcul des paramètres géométrique des engrenages coniques avec correction de denture :

```

Z1=input('valeur de Z1=');
Z2=input('valeur de Z2=');
m=input('donner le module(mm) m=');
x1=input('donner le coefficient de déport du pignon x1=');
x2=input('donner le coefficient de déport de la roue x2=');
delta1=atan(Z1/Z2);
delta2=(pi/2)-delta1;
deltafonc1=delta1+atan(2*x1*sin(delta1)/Z1);
deltafonc2=delta2+atan(2*x2*sin(delta1)/Z2);
d1=m*Z1;
d2=m*Z2;
R=d1/(2*sin(delta1));
ha1=(1+x1)*m;
hf1=(1.25-x1)*m;
ha2=(1+x2)*m;
hf2=(1.25-x2)*m;
tetaA1=atan(ha1/R);
tetaA2=atan(ha2/R);
deltaA1=delta1+tetaA1;
deltaA2=delta2+tetaA2;
tetaf1=atan(hf1/R);
tetaf2=atan(hf2/R);
deltaf1=delta1-tetaf1;
deltaf2=delta2-tetaf2;
mfonc=m*((sin(deltafonc1))/(sin(delta1)));
d1fonc=mfonc*Z1;
d2fonc=mfonc*Z2;
da1=d1+2*ha1;
da2=d2+2*ha2;
df1=d1-2*hf2;
df2=d2-2*hf2;
disp(['l'R(mm)= ',num2str(R)]);
disp(['le module de fonctionnement(mm)= ',num2str(mfonc)]);
disp(['le diamètre primitif du pignon 1 (mm)= ',num2str(d1fonc)]);
disp(['le diamètre primitif de la roue 2(mm)= ',num2str(d2fonc)]);
disp(['la hauteur de saillie du pignon (mm)= ',num2str(ha1)]);

```

```

disp(['la hauteur de saillie de la roue (mm)= ',num2str(ha2)]);
disp(['la hauteur de creux du pignon (mm)= ',num2str(hf1)]);
disp(['la hauteur de creux de la roue (mm)= ',num2str(hf2)]);
disp(['le diamètre de tête du pignon 1 (mm)= ',num2str(da1)]);
disp(['le diamètre de tête de la roue 2 (mm)= ',num2str(da2)]);
disp(['le diamètre de pied du pignon 1 (mm)= ',num2str(df1)]);
disp(['le diamètre de pied de la roue 2 (mm)= ',num2str(df2)]);
disp(['l'angle primitif de fonctionnement du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltafonc1)]);
disp(['l'angle primitif de fonctionnement de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltafonc2)]);
disp(['l'angle de saillie du pignon (rad)= ',num2str(tetaA1)]);
disp(['l'angle de saillie de la roue(rad)= ',num2str(tetaA2)]);
disp(['l'angle de creux du pignon (rad)= ',num2str(tetaf1)]);
disp(['l'angle de creux de la roue (rad)= ',num2str(tetaf2)]);
disp(['l'angle de tête du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltaA1)]);
disp(['l'angle de tête de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltaA2)]);
disp(['l'angle de pied du pignon 1 (rad)= ',num2str(deltaf1)]);
disp(['l'angle de pied de la roue 2 (rad)= ',num2str(deltaf2)]);

```

A.3 Programme de calcul du rapport de conduite :

```

Z1=input('valeur de Z1=');
Z2=input('valeur de Z2=');
delta1=atan(Z1/Z2);
delta2=(pi/2)-delta1;
deltab1=asin(sin(delta1)*cos(pi/9));
deltab2=asin(sin(delta2)*cos(pi/9));
deltaA1=delta1+atan((2*sin(delta1))/Z1);
deltaA2=delta2+atan((2*sin(delta2))/Z2);
epsilon1=(acos(cos(deltaA1)/cos(deltab1))+acos(cos(deltaA2)/cos(deltab2)));
epsilon2=(acos(cos(delta1)/cos(deltab1))+acos(cos(delta2)/cos(deltab2)));
epsilon=((epsilon1-epsilon2)*Z1)/(2*pi*sin(deltab1));
disp(['le rapport de conduite est = ',num2str(epsilon)]);

```

A.4 Programme de calcul des interférences de fonctionnement :

```

clear all
clc
%%%% Données %%%%
alpha=20 ; %%% Angle de pression en degré
sigma=90 ; %%% Angle des axes
%%%% Calcul %%%%
k=180/pi;
i=1;
j=0;

```



```

u=input('Valeur du rapport de réduction (entre 1 et 0.15) ? ');
u(i)=u;
delta1=k*atan(u(i))
delta2=sigma-delta1
deltab1=k*asin(sin(delta1*1/k)*cos(alpha*1/k));
deltab2=k*asin(sin(delta2*1/k)*cos(alpha*1/k));
beta1=k*acos(cos(delta1*1/k)/cos(deltab1*1/k));
beta2=k*acos(cos(delta2*1/k)/cos(deltab2*1/k));
for Z1=5:20;

    j=j+1;
    X(j)=Z1;

    ha2=1;

    R=Z1/(2*sin(delta1*1/k));
    teta_a2=k*atan(ha2/R);
    delta_a2=delta2+teta_a2;
    beta_a2=k*acos(cos(delta_a2*1/k)/cos(deltab2*1/k));
    sommebeta_i=beta1+beta2;
    diff(j,i)=sommebeta_i-beta_a2;
    if diff(j,i)<0
    Zlim=Z1;
    end
    end
    Z1interf(i)=Zlim;
    diff
    Z1interf
    n=i
    m=j

```

A.5. Programme de calcul du coefficient du déport pour éviter les interférences de fonctionnement:

```

clear all
clc
%%% Données %%%
alpha=20 ; %%% Angle de pression en degré
sigma=90 ; %%% Angle des axes

%%% Calcul %%%
k=180/pi;

```

```
u=input('Valeur du rapport de réduction (entre 1 et 0.15) ? ');
```

```
Zlim=input('donner votre Zlim');  
delta1=k*atan(u);  
delta2=sigma-delta1;  
deltab1=k*asin(sin(delta1*1/k)*cos(alpha*1/k));  
deltab2=k*asin(sin(delta2*1/k)*cos(alpha*1/k));  
beta1=k*acos(cos(delta1*1/k)/cos(deltab1*1/k));  
beta2=k*acos(cos(delta2*1/k)/cos(deltab2*1/k));  
R=Zlim/(2*sin(delta1*1/k));  
for x=-1:0.01:1;  
    teta_a2=k*atan((1+x)/R);  
    delta_a2=delta2+teta_a2;  
    beta_a2=k*acos(cos(delta_a2*1/k)/cos(deltab2*1/k));  
    sommebeta_i=beta1+beta2;  
    diff=sommebeta_i-beta_a2;  
    ifdiff<0  
        disp(['le coefficient de déport x est = ',num2str(x)]);  
        break  
    end  
end
```

A.6 programme de calcul du glissement spécifique :

```
u=input('donner votre rapport de transmission u=');  
delta1=atan(u);  
delta2=(pi/2)-delta1;  
deltab1=asin(sin(delta1)*cos(pi/9));  
deltab2=asin(sin(delta2)*cos(pi/9));  
beta1=acos((cos(delta1))/(cos(deltab1)));  
beta2=acos((cos(delta2))/(cos(deltab2)));  
disp(['beta1= ',num2str(beta1)]);  
disp(['beta2= ',num2str(beta2)]);  
beta=input('donner votre angle dans intervalle [0,beta1+beta2] beta=');  
gs1=1-((u*cos(deltab2)*sin(beta1+beta2-beta))/(cos(deltab1)*sin(beta)));  
gs2=1-((cos(deltab1)*sin(beta))/(u*cos(deltab2)*sin(beta1+beta2-beta)));  
disp(['le glissement sur le pignon gs1= ',num2str(gs1)]);  
disp(['le glissement sur la roue gs2= ',num2str(gs2)]);
```

A.7 Programme de calcul du coefficient de déport pour l'équilibrage de l'usure :

```
%%% Données %%%
alpha=pi/9 ; %%% Angle de pression en radian
sigma=pi ; %%% Angle des axes

Z1=input('la valeur de Z1=');
Z2=input('la valeur de Z2=');
u=Z1/Z2;
delta1=atan(u);
delta2=(pi/2)-delta1;
deltab1=asin(sin(delta1)*cos(pi/9));
deltab2=asin(sin(delta2)*cos(pi/9));
beta1=acos((cos(delta1))/(cos(deltab1)));
beta2=acos((cos(delta2))/(cos(deltab2)));
for x=0:0.0001:1;

gs1=1-((u*cos(deltab2)*sin(beta1+beta2-
acos(cos(delta1+atan(2*(1+x)*sin(delta1)/Z1))/cos(deltab1)))))/(cos(deltab1)*sin(acos
(cos(delta1+atan(2*(1+x)*sin(delta1)/Z1))/cos(deltab1))));

gs2=1-((cos(deltab1)*sin(beta1+beta2-acos(cos(delta2+atan(2*(1-
x)*sin(delta2)/Z2))/cos(deltab2))))/(u*cos(deltab2)*sin(acos(cos(delta2+atan(2*(1-
x)*sin(delta2)/Z2))/cos(deltab2))));

if(abs(gs1-gs2)<0.0001);

disp(['le coefficient de déport x est = ',num2str(x)]);

break
end
end
disp(['glissement spécifique max sur le pignon 1 = ',num2str(gs1)]);
disp(['glissement spécifique max sur la roue 2 = ',num2str(gs2)]);
```