

M0004/06A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Mécanique



## MEMOIRE DE MAGISTER

*Etudié par :*

**M<sup>R</sup> BENDAOU LARBI ADLANE**

*Thème*

**DETERMINATION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DES CHAMPS DE  
TEMPERATURES DANS UN CRYOSTAT A AZOTE LIQUIDE**

*Soutenue devant le jury*

Professeur S.E. CHITOUR  
Professeur M.A. AIT-ALI  
Professeur A.BOUABDELLAH  
D<sup>R</sup> S.LARBI  
D<sup>R</sup> A.BILEK  
M<sup>R</sup> SEKKOUR

ENP  
ENP  
USTHB  
ENP  
ENP  
SONATRACH

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Invité

*Février 2006*

*ENP 10, Avenue Hassen Badi El-Harrach*

## Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes ayant contribué à la réalisation de ce travail.

Mes grands remerciements, respects, et sincères reconnaissances vont vers mon directeur de thèse le Professeur M.A. Ait-Ali de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Je remercie les membres du jury.



## DEDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes parents qui m'ont toujours soutenu sans limites pour pouvoir poursuivre des études sans sentir le moindre manque.

Mon frère et sœur à qui je souhaite la plus grande réussite dans leurs études.

Mes chers amis .

BENDAOU ADLANE LARBI



## ملخص :

في هذا العمل النظري المعتمد على عمل تطبيقي أنجز في إطار دوكتوراه على مخزن الموانع الجذ باردة ، وأين قيس انتشار درجة الحرارة وكمية السائل التبخر. العمل النظري المقدم ، هو تمثيل حراري للمخزن الموانع الجذ باردة ، وتمثيل مكون من ثلاث مبدلات حرارية مرتبطة حراريا واثنين منهم منغروستان في الغطاء الثابت الحراري على الدرجة (300 كالفين) دراسة مخزن النيتروجين السائل عن طريق المبدلات الحرارية الثلاث أين وجدنا حلا جبريا للمعدلات التفاضلية الخطية المرتبطة التي سمحت لنا بفهم أفضل للظواهر الحرارية ، التي تحدث عامل التبادل الحراري. النتائج المحصل عليها استعملت على خزانات الغاز الطبيعي المميع ، أين حصلنا على جملة مبدلتان حراريتان مرتبطتان حراريا ، كما حصلنا على الحل الجبري الذي استعملت في حساب نسبة تبخر الغاز الطبيعي في الخزان .

مخزن الموانع الجذ باردة مبدلات حرارية مرتبطة , نسبة تبخر الغاز الطبيعي , النيتروجين السائل

**Résumé :** Cette étude repose sur un travail expérimental réalisé précédemment sur un cryostat d'Azote liquide pour lequel les distributions de températures sur le col et les températures et débits des vapeurs issues du bain cryogénique ont été mesurés. Le travail présenté ici consiste en une modélisation thermique de ce cryostat par trois ailettes concentriques ancrées dans un couvercle maintenu à 300 K et dont les bords sont joints par deux disques parallèles et isothermes . L'analyse du comportement thermique d'un cryostat à Azote liquide à l'aide d'un modèle de trois ailettes concentriques, dont la solution analytique des trois équations différentielles linéaires et couplées a été obtenue, permet de mieux comprendre l'interaction des phénomènes en présence dans les cryostats, en particulier l'importance relative des coefficients d'échanges. Les résultats obtenus ont été transposés par similitude au comportement des bacs de stockage de GNL. Ils donnent lieu à un système de deux ailettes et deux équations différentielles couplées dont la solution analytique a été obtenue.

**Mots clés :** Cryostat/Azote liquide/ailettes couplées/Bac de stockage de GNL/Boil off.

**Abstract:** This study is based on an experimental work realised previously on a nitrogen cryostat with temperatur and boill off measurements have been carried out. This study consists in a thermal modelization of a nitrogen cryostat with three concentric thermally coupled fins. The analysis using this modelization allows a better understanding of the cryostat thermal behaviour with averaged heat transfert coefficients. The resulst obtained are applied to LNG storage tanks with a two coupled fins model to evaluate the rate of boil off.

**Keywords:** Cryostat/Liquid Nitrogen/coupled fins/Tank of GNL/Boil off.

Nomenclature

$A_{px}$	: Surface longitudinale de l'élément du volume de l'ailette extérieure haute.....	$[m^2]$
$A_{pe}$	: Surface transversale extérieure de l'élément du volume de l'ailette extérieure haute.....	$[m^2]$
$A_{pi}$	: Surface transversale intérieur des éléments de volume des ailettes extérieures.....	$[m^2]$
$A_{vx}$	: Surface longitudinale de l'élément du volume de l'ailette intérieure.....	$[m^2]$
$A_{ve}$	: Surface transversale extérieure de l'élément du volume de l'ailette intérieure.....	$[m^2]$
$A_{vi}$	: Surface transversale intérieur de l'élément de volume de l'ailettes intérieure.....	$[m^2]$
$A_t$	: Surface intérieure du toit.....	$[m^2]$
$A_L$	: Surface latérale mouillée du bac.....	$[m^2]$
$A_{GNL}$	: Surface libre du GNL.....	$[m^2]$
$A_B$	: Surface du socle du vase.....	$[m^2]$
$C_p$	: Chaleur spécifique des vapeurs d'Azote issues du bain d'Azote.....	$[kJ.kg^{-1}.K^{-1}]$
$e$	: Epaisseur des ailettes.....	$[m]$
$F_{pv}$	: Facteur de forme entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure.....	$[l]$
$F_{vi-GNL}$	: Facteur de forme entre l'élément $i$ de l'ailette intérieure et la surface libre du GNL.....	$[l]$
$F_{t-GNL}$	: Facteur de forme Toit-Surface libre du GNL.....	$[l]$
$T_{i-1}$	: Valeur de la fonction $T(x)$ au point $i-1$	
$T_i$	: Valeur de la fonction $T(x)$ au point $i$	
$T_{i+1}$	: Valeur de la fonction $T(x)$ au point $i+1$	
$g$	: Constante de gravitation terrestre $9,81$ .....	$[m.s^{-2}]$
$GNL$	: Acronyme de Gaz Naturel Liquéfié	
$h_v$	: Coefficient équivalent de convection entre les ailettes extérieures et le milieu ambiant.....	$[w.m^{-2}.K^{-1}]$
$h_{e1}$	: Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure haute et l'ailette intérieure.....	$[w.m^{-2}.K^{-1}]$
$h_{e2}$	: Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure du bas et le fond du vase.....	$[w.m^{-2}.K^{-1}]$
$h_{fg}$	: Enthalpie de vaporisation du GNL.....	$[kJ.kg^{-1}]$
$h_i$	: Coefficient équivalent de convection entre les vapeurs d'Azote et l'ailette intérieure.....	$[w.m^{-2}.K^{-1}]$
$k_f$	: Conductivité thermique de l'air.....	$[w.m^{-1}.K^{-1}]$
$k$	: Conductivité thermique de l'acier dont est fait le cryostat.....	$[w.m^{-1}.K^{-1}]$
$L_f$	: Longueur de contact paroi-fluide convectif.....	$[m]$
$L$	: Longueur de l'ailette extérieure du bas.....	$[m]$
$L$	: Longueur des ailettes extérieures.....	$[m]$
$L'$	: Distance entre les ailettes extérieure et intérieure du bac.....	$[m]$
$m$	: Débit massique d'Azote évaporé.....	$[kg.h^{-1}]$
$Q_{cond-ent-v}$	: Flux de conduction entrant dans l'élément de volume de l'ailette intérieure.....	$[w]$
$Q_{cond-sort-v}$	: Flux de conduction sortant de l'élément de volume de l'ailette intérieure.....	$[w]$
$Q_{gaz}$	: Flux de convection cédé par l'ailette intérieure aux vapeurs d'Azote.....	$[w]$
$Q_{cond-ver}$	: Flux de conduction vertical entrant à travers la paroi du liner.....	$[w]$
$Q_{cond-lat}$	: Flux de conduction entrant latéralement au contenu cryogénique.....	$[w]$
$Q_{rad}$	: Flux radiatifs émis par le toit et l'ailette intérieure et reçu par le GNL.....	$[w]$
$Q_{rad-emis}$	: Flux de rayonnement émis par la surface libre du GNL.....	$[w]$
$Q_{fond}$	: Flux de conduction venant de l'environnement et entrant par le fond dans le bac de GNL.....	$[w]$
$Q_{t-rad}$	: Flux radiatif sortant du toit vers le GNL stocké au bac.....	$[w]$
$Q_{t-cond}$	: Flux de conduction venant de l'environnement et entrant à travers le toit du bac.....	$[w]$
$R_i$	: Rayon intérieur des ailettes extérieures.....	$[m]$
$R_e$	: Rayon extérieur des ailettes extérieures.....	$[m]$

$r_i$	: Rayon intérieur de l'ailette intérieure .....	[m]
$r_e$	: Rayon extérieur de l'ailette intérieure .....	[m]
$s$	: Variable dans l'espace de Laplace .....	
$s$	: Terme source .....	[w]
$T_a$	: Température du milieu ambiant .....	[K]
$T_f$	: Température du film dans un transfert convectif .....	[K]
$T_{p-ph}(x)$	: Température du point de contact des deux ailettes extérieures .....	[K]
$T_v(x)$	: Température de l'ailette intérieure .....	[K]
$T'_v(x)$	: Dérivée première de la fonction de température de l'ailette intérieure .....	[K]
$T_{vi}(x)$	: Température de l'élément $i$ de l'ailette intérieure .....	[K]
$T_{ph}(x)$	: Température de l'ailette extérieure du haut .....	[K]
$T'_{ph}(x)$	: Dérivée première de la fonction de température de l'ailette extérieure du haut .....	[K]
$T_g$	: Température du bout d'ailette intérieure, 77,4 .....	[K]
$T_i(x)$	: Température des vapeurs d'Azote .....	[K]
$T_{GNL}$	: Température d'ébullition de GNL .....	[K]
$T_s$	: Température du socle du bac .....	[K]
$T_{pi}$	: Température de l'élément $i$ de l'enveloppe extérieure .....	[K]
$T_t$	: Température du toit .....	[K]
$T_p$	: Température de l'enveloppe extérieure du bac .....	[K]
$U_B$	: Conductivité thermique équivalente du fond du réservoir .....	[w.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$U_L$	: Conductivité latérale de l'enveloppe du bac .....	[w.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$U_t$	: Conductivité thermique de l'isolant du toi .....	[w.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$Z$	: Constante de substitution .....	

**Lettres grecs**

$\beta$	: Coefficient d'expansion volumétrique isobare .....	[K <sup>-1</sup> ]
$\nu$	: Viscosité cinématique .....	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\sigma$	: Constante de Stephan-Boltzmann .....	[w.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup> ]
$\Sigma$	: Constante de substitution	
$\Pi$	: Constante de substitution	
$\sqcup$	: Constante de substitution	
$\Omega$	: Constante de substitution	

**Nombre sans dimension**

$Nu$	: Nombre de Nusselt
$Pr$	: Nombre de Prandtl
$Ra$	: Nombre adimensionnel de Rayleigh
$Gr$	: Nombre de Grashoff
$\varepsilon$	: Emissivité
$\varepsilon_t$	: Emissivité du toit du bac
$\varepsilon_{vi}$	: Emissivité de l'élément $i$ de l'ailette intérieure

**Opérateurs**

$\Delta x$	: Pas d'espace
$\Delta x_v$	: Pas d'espace sur la paroi de l'ailette intérieure
$\Delta x_{ph}$	: Pas sur la paroi de l'ailette extérieure du haut
$\Delta x_{pb}$	: Pas sur la paroi de l'ailette extérieure du bas
$\mathcal{L}$	: Opérateur de Laplace

## Indices et exposants

- $ph$  : Ailette extérieure du haut  
 $pb$  : Ailette extérieure du bas  
 $v$  : Ailette intérieure  
 $p$  : enveloppe extérieure du conteneur cryogénique  
 $\wedge$  : Fonction dans l'espace de Laplace

## Liste des Figures

- Fig.I.2** Schéma détaillé d'un réservoir classique.  
**Fig.II.1** Modèle et schéma simplifiés du cryostat à Azote liquide de Khemis.  
**Fig.II.2.a** Schéma d'ailettes de la partie haute du cryostat.  
**Fig.II.2.b** Schéma de l'ailette extérieure du bas du cryostat.  
**Fig.II.2.c** Schéma représentant les flux thermiques dans un cryostat  
**Fig.II.3** Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du haut.  
**Fig.II.4** Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du bas.  
**Fig.II.5** Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette intérieure.  
**Fig.III.1** Schéma simplifié du cryostat montrant les échanges thermiques inventoriés.  
**Fig.III.2** Schéma montrant qualitativement les profils de température et les échanges thermiques dans le cryostat.  
**Fig.III.3** Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du haut.  
**Fig.III.4** Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du bas.  
**Fig.III.5** Bilan thermique sur un élément de volume de l'ailette intérieure.  
**Fig.III.6** Corrélation des températures expérimentales des vapeurs d'Azote mesurées à différents niveaux de l'ailette intérieure.  
**Fig.III.7** Bilan thermique sur un élément de vapeur.  
**Fig.III.8** Schéma simplifié du cryostat discrétisé pour le calcul numérique.  
**Fig.III.9** Distribution de la température dans l'ailette intérieure pour différentes valeurs de  $h_i$ .  
**Fig.III.10** Distribution de la température dans l'ailette extérieure du bas.  
**Fig.III.11** Distribution de la température dans l'ailette extérieure du haut.  
**Fig.III.12** Distribution de la température dans l'ailette intérieure.  
**Fig.IV.1** Dessin d'un bac de stockage de GNL.  
**Fig.IV.2** Schéma simplifié d'un bac de stockage de GNL.  
**Fig.IV.3** Schéma simplifié de la discrétisation de l'ailette-paroi intérieure du bac de stockage.  
**Fig.IV.4** Bilan thermique du volume de GNL.  
**Fig.IV.5** Bilan thermique du toit du bac de stockage de GNL.  
**Fig.IV.6** Élément de volume à la surface libre du GNL illustrant le flux de conduction latérale par le Liner.  
**Fig.IV.7** Élément de volume du GNL illustrant le flux radiatif émis par la surface libre.  
**Fig.IV.8** Variation du débit de boil off par rapport au taux de remplissage du bac.  
**Fig.IV.9** Influence de l'émissivité du liner sur le débit de boil off  
**Fig.IV.10** Influence de la température ambiante sur le débit de boil off.

## Liste des Tableaux

- Tableau I.1** Différents types de réservoirs de stockage de GNL.  
**Tableau III.1** Températures de la paroi du col.  
**Tableau III.2** Températures mesurées des vapeurs.  
**Tableau IV.1** Caractéristiques thermiques des matériaux composant le bac de stockage de GNL.  
**Tableau IV.2** Inventaire des flux thermiques échangés par les ailettes extérieures du cryostat et du bac de GNL.  
**Tableau IV.3** Inventaire des flux thermiques échangés par les ailettes intérieures du cryostat et du bac de GNL.



**Nomenclature** ..... I

**CHAPITRE I : INTRODUCTION**

I.1 Historique de la liquéfaction des gaz ..... 2  
 I.2 Introduction aux cryostats ..... 4  
 I.3 Le gaz naturel liquéfié (GNL) ..... 5  
 I.4 Les réservoirs de stockage de GNL ..... 5  
 I.5 Objet de l'étude ..... 7  
 I.6 Plan de l'étude ..... 8

**CHAPITRE II: PROBLEMATIQUE**

II.1 Introduction ..... 10  
 II.2 Présentation du modèle ..... 10  
 II.3 Mise en équations du problème ..... 13  
     II.3.a *Ailette extérieure du haut* ..... 13  
     II.3.b *Ailette extérieure du bas* ..... 15  
     II.3.c *Ailette intérieure* ..... 16  
 II.4 Méthodologie de résolution ..... 18  
     II.4.a *Méthode analytique* ..... 18  
     II.4.b *Méthode numérique* ..... 19

**CHAPITRE III: MODELISATION ET RESOLUTION**

III.1 Introduction ..... 21  
 III.2 Mise en équation du problème ..... 22  
     III.2.a *Ailette extérieure du haut* ..... 23  
     III.2.b *Ailette extérieure du bas* ..... 25  
     III.2.c *Ailette intérieure* ..... 26  
 III.3 Détermination de l'expression du facteur convectif équivalent entre les ailettes  
     extérieures et le milieu ambiant ..... 28  
 III.4 Détermination du facteur convectif équivalent entre l'ailette extérieure  
     du haut et l'ailette intérieure ..... 30  
 III.5 Détermination du coefficient convectif équivalent entre l'ailette intérieure  
     et les vapeurs d'azote ..... 30  
 III.6 Résolution du système d'équations ..... 32  
     III.6.a *Résolution analytique* ..... 33  
     III.6.b *Résolution par méthode numérique* ..... 37  
 III.7 Analyse des résultats et discussion ..... 40  
     III.7.a *Distribution de la température du vase pour différentes valeurs de  $h_i$*  ..... 40  
     III.7.b *Distribution de la température dans l'ailette extérieure du bas* ..... 41  
     III.7.c *Distribution de la température dans l'ailette extérieure du haut* ..... 42  
     III.7.d *Distribution de la température dans le col du vase* ..... 43  
 III.8 Conclusion ..... 43



**CHAPITRE IV : APPLICATION**

IV.1 Introduction ..... 45

IV.2 Les bacs de stockage de GNL ..... 45

IV.3 Modèle Mathématique ..... 45

IV.4 Analogie thermique entre le cryostat et le bac de stockage de GNL..... 46

IV.5 Dédution des équations différentielles des températures des ailettes du bac de stockage de GNL..... 47

IV.6 Elaboration d'une procédure mathématique pour la détermination des débits de boil off dans les bacs de stockage de GNL..... 51

IV.7 Détermination du flux radiatif net reçu par le GNL ..... 51

    IV.7.a Détermination du flux radiatif émis par le toit et reçu par le GNL..... 50

    IV.7.b Détermination du flux radiatif émis par la paroi interne de l'enveloppe du bac et reçu par le GNL stocké ..... 52

IV.8 Détermination du flux de conduction verticale reçue par le GNL ..... 53

IV.9 Détermination du flux radiatifs emis par la surface libre du GNL..... 53

IV.10 Détermination du flux de conduction venant du fond du bac et reçu par le GNL ..... 54

IV.11 Détermination du flux de conduction latérale reçu par le GNL ..... 54

IV.12 Résultats et interprétation..... 54

    IV.12.a Influence du taux de remplissage du bac sur le débit de boil off ..... 54

    IV.12.b Influence de l'émissivité du liner sur le débit de boil off..... 55

    IV.12.c Influence de la température ambiante sur le débit de boil off ..... 56

IV.13 Conclusion..... 57

**CHAPITRE V : CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS**

V.1 Conclusion générale..... 59

V.2 Recommandations..... 61

**LES ANNEXES :**

**Annexe 1 :** Résolution des équations différentielles couplées ..... 62

**Annexe 2 :** Les facteurs de forme ..... 67

**Annexe 3 :** Dessin détaillé du cryostat réalisé par Khemis ..... 74

**BIBLIOGRAPHIE** ..... 76



# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

## I.1. Historique de la liquéfaction des gaz

L'industrie des gaz industriels a pris son essor au dix-neuvième siècle avec la liquéfaction et la séparation de l'air en Azote et Oxygène, et celle de l'Hydrogène et l'Hélium utilisés dans les montgolfières et les ballons dirigeables. Par la suite, les techniques se sont généralisées pratiquement à tous les gaz pour leur transport sous forme liquide, économiquement avantageux puisque le volume peut être réduit de 200 à 600 fois à la pression atmosphérique, selon les gaz.

Le concept de température absolue introduit par les travaux de Carnot au début du siècle était consacré en pratique par les travaux de Clausius. Déjà dans la deuxième moitié du XVII<sup>ème</sup> siècle, Boyle et Mariotte montrèrent que de l'air, à température constante et soumis à une compression, voyait sa pression varier en fonction inverse de son volume. Ils en tirèrent une loi qui porte leurs noms et qui peut s'exprimer de la façon suivante:

$$(P_1V_1)_T = (P_2V_2)_T = Cst$$

Environ un siècle plus tard, Gay-Lussac, formula une loi sur la variation du volume d'un gaz en fonction de sa température: *A pression constante, le volume d'une masse invariable de gaz est proportionnel à sa température absolue*, qui peut s'exprimer sous la forme:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Des travaux de ces différents physiciens, on déduira plus tard la loi des gaz parfaits:

$$PV = nRT$$

A la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle, M. Van Marum voulant vérifier si la loi de Boyle-Mariotte était valable pour tous les gaz ou seulement pour l'air, choisit de mesurer la variation de volume de l'ammoniac lors de sa compression dans un système piston / cylindre. Arrivé à une pression d'environ 7 atmosphères, il constata que bien que le volume de gaz continua à diminuer par action du piston, la pression n'augmenta plus. Il comprit qu'il venait de liquéfier l'ammoniac par simple compression sans qu'il soit nécessaire d'abaisser la température et que le volume du gaz diminuait au fur et à mesure que le volume du liquide augmentait. A la suite de cette expérience, de nombreux chercheurs se mirent à essayer de liquéfier les gaz en les comprimant à haute pression. On peut citer Michael Faraday, plus connu pour ses travaux sur l'électromagnétisme, qui, le premier liquéfia le Chlore en 1823 puis un certain nombre d'autres gaz de 1826 à 1845, connus à l'époque mais, sans jamais arriver à liquéfier l'Oxygène, l'Azote ou l'Hydrogène. C'est d'ailleurs lui qui, le premier, introduit l'appellation de 'gaz permanents' pour les gaz qu'il ne put arriver à liquéfier.

Johann August Natterer, un médecin et physicien Autrichien de Vienne, s'intéressa aux machines de compression à partir de 1854; il étudia la compression des gaz dans la gamme des très hautes pressions. Il constata que même à ces niveaux de pression, l'air ne se liquéfiait pas et mis ainsi en évidence la notion de pression critique. Il détermina la pression critique de certains gaz grâce à la méthode des tubes qui porte son nom.

En 1852, Joule et Thomson montrèrent séparément que le fait de détendre un gaz rapidement par un abaissement brutal de sa pression, donc de façon quasi adiabatique, à travers une vanne provoquait un refroidissement brusque; cette vanne de détente utilisée depuis dans les transformations et les cycles de réfrigération porte leurs noms.

En 1863, Thomas Andrews travaillant sur la liquéfaction du Dioxyde de Carbone fournit une description de la coexistence et de l'équilibre des phases liquide et vapeur des corps purs ainsi que de la constance de la température lors de leur changement de phases, d'où le nom *d'isothermes d'Andrews* ; il montra aussi qu'il existe pour tous les gaz une température, appelée *température critique*, au-dessus de laquelle il est impossible de distinguer entre un liquide et une vapeur.

C'est à partir des travaux d'Andrews et de Joule et Thomson que l'on conclut qu'il fallait combiner la détente du gaz avec un abaissement préalable de sa température pour produire la dernière chute de température et liquéfier plus simplement les gaz de l'air. La thermodynamique moderne montrera plus tard que ce comportement est observé pour tous les corps purs même si les niveaux de température et de pression varient considérablement d'un corps à l'autre.

La liquéfaction des gaz est à peine maîtrisée que le stockage des fluides cryogéniques devient d'actualité ; le problème du stockage des gaz liquéfiés se posant en même temps que leur obtention, il a fallu tenter très tôt de développer des solutions efficaces d'isolation thermique des récipients de stockage. Les faibles valeurs des enthalpies de vaporisation des fluides cryogéniques ; et plus particulièrement celles de l'Hydrogène et de l'Hélium, obligent à utiliser des conteneurs très bien isolés thermiquement. Pictet a utilisé de la sciure de bois et des tissus, vraisemblablement en laine ou en coton, comme isolants thermiques à 133 K ; D'Arsonval utilisa un vase à double parois argentées, et séparées par un espace dont il fit le vide pour stocker du Chlorure de Méthyle. Dewar utilisa ce type de récipient, décrit par D'Arsonval pour la conservation des fluides cryogéniques. Le mot '*Dewar*' est aujourd'hui synonyme de vase cryogénique. Un tel récipient a permis de réduire les pertes thermiques par un facteur de trente (30), par rapport à un récipient non isolé pour une même géométrie, cf. Conte [1].

Ces principes d'isolation thermique des conteneurs cryogéniques, suppression de la convection par la technique du vide poussé et utilisation de matériaux super isolants, sont encore utilisés aujourd'hui par l'industrie gazière et en particulier celle du GNL ; celle-ci commença à se développer rapidement après la seconde guerre mondiale aux USA pour l'écrêtage (peak shaving) des trop fortes demandes hivernales impossible à satisfaire quotidiennement par les réseaux de gazoducs dimensionnés pour la demande moyenne annuelle ; la surcapacité existante en été est ainsi liquéfiée et stockée près des grandes agglomérations pour y être distribuées en hiver. Les procédés adoptés jusqu'alors pour la liquéfaction du gaz naturel utilisèrent le cycle cascade.

Le développement de l'industrie du GNL en Algérie est d'abord la conséquence d'une situation géographique qui la place loin des marchés industriels de l'Europe, de l'Amérique et du Japon ; dans les années soixante le gaz naturel que pouvait produire l'Algérie en grande quantité ne pouvait être exporté que par voie maritime. Faute de débouchés conséquents, les gisements découverts restèrent largement inexploités. Par ailleurs, la découverte de nouveaux gisements de brut ayant marqué le pas depuis le début des années 1960, la production de gaz naturel se trouve valorisée dans les options énergétiques ouvertes à la décision politique. L'essor de cette industrie a finalement été scellé par la politique énergétique visionnaire et hardie entreprise par l'Etat qui s'appropriera le domaine gazier pour mieux en décider l'exploitation et la commercialisation à grande échelle.

Les risques économiques pris avec cette décision d'exporter annuellement furent financièrement lourds dans un monde géopolitique peu favorable à laisser faire les nouveaux acteurs sur le marché de l'énergie alors totalement dominé par les pays industrialisés par leurs compagnies pétrolières interposées. Il aura fallu quelques dix ans entre la décision prise d'exporter le GNL algérien aux états unis et la réalisation du complexe de liquéfaction destiné à sa fourniture.

## I.2. Introduction aux cryostats

La cryogénie, appelée aussi *cryotempérature*, est un domaine assez récent puisque sa découverte remonte à la moitié du dix-neuvième siècle et que ses grandes applications industrielles ont une centaine d'années. C'est une activité industrielle qui se développa par la liquéfaction de l'air destinée à la séparation physique de ses principales composantes : Oxygène, Azote, Argon,...; la liquéfaction permet de séparer physiquement les composants d'un mélange gazeux mais aussi de réduire leur volume de façon considérable : plus de 600 fois pour le Méthane, 260 fois pour l'Oxygène et 175 fois pour l'Azote à la pression normale d'ébullition de 101 kPa.

C'est grâce au développement des procédés de liquéfaction et de stockage cryogénique que les gaz industriels sont devenus des produits d'usage généralisé à des domaines aussi différents que l'instrumentation scientifique, la supra conductivité ou le domaine médical.

On appelle cryostat un réservoir de stockage de fluide cryogénique utilisé dans les laboratoires. L'appellation de fluides cryogéniques concerne un domaine de température se situant entre 0 et 120 K, correspondant aux températures normales d'ébullition de l'Hélium, l'Hydrogène, l'Azote et l'Oxygène. Les conteneurs et les cryostats n'auront pas les mêmes performances, selon leur utilisation prévue ou la nature du fluide cryogénique utilisé. Les applications technologiques de la cryogénie sont nombreuses et peuvent être classées en deux grandes catégories.

La première concerne l'exploitation d'un changement de phase pour:

- La liquéfaction des gaz en vue d'obtenir une forte réduction de volume sous faible pression pour en faciliter le transport, le stockage et l'utilisation ;
- La séparation physique de gaz liquéfiés par distillation fractionnée à basse température ;
- Le cryopompage par solidification du gaz sur une paroi très froide ;
- La purification des gaz par cryodépôt et cryosorption.

La deuxième catégorie concerne l'exploitation des phénomènes spécifiques aux basses températures tels que la surgélation et cryoconservation, la fragilisation (pour le cryobroyage), la réduction de l'agitation thermique des molécules d'un corps solide (technique des amplificateurs en mesures et communications), la supra conductivité (champs magnétiques intenses).

Dans la construction d'un cryostat, l'objectif majeur est de minimiser les introductions de chaleur du milieu extérieur vers le fluide cryogénique afin d'en conserver la phase liquide. Les transferts thermiques étant des phénomènes de surface, il importe avant tout d'en minimiser celles-ci par le choix de la forme appropriée du réservoir pour un volume donné. La forme sphérique serait le choix optimal, abstraction faite des difficultés de réalisation du

réservoir. La forme d'un cylindre dont le diamètre est égal à la hauteur serait le second meilleur choix. On peut vérifier que le rapport surface/volume pour ces deux géométries est de  $3/\text{Rayon}$  ; cette valeur nous permet d'estimer le volume de liquide évaporé d'un réservoir de stockage de GNL par exemple à partir du taux d'évaporation mesuré sur un cryostat de géométrie similaire. Les transferts thermiques augmentent aussi avec l'écart de température entre la source de chaleur et le bain cryogénique, de façon linéaire avec la conduction et la convection, et exponentielle avec le rayonnement. Aussi est-il essentiel dans la construction d'un cryostat de bien maîtriser d'abord les mécanismes de transferts thermiques mis en œuvre avant d'évaluer ensuite leurs contributions précises.

### 1.3. Le Gaz naturel liquéfié (GNL)

Au sens large, toute substance naturelle qui est à l'état gazeux dans les conditions normales de température et de pression est un gaz naturelle, cf. Rojey[2]. Les substances sont en nombre réduit et celles que l'on trouve dans l'écorce terrestre sont en nombre encore plus limité, il s'agit pour l'essentiel des hydrocarbures saturés d'un nombre de carbone inférieur à cinq, du Dioxyde de Carbone, d'Azote, d'Hydrogène, d'Hydrogène Sulfuré, d'Hélium et d'Argon.

Le gaz naturel joue un rôle énergétique croissant, l'importance de ses réserves et les avantages qu'il présente sur le plan de l'environnement favorisent son utilisation, notamment dans les secteurs à forte valeur ajoutée comme l'industrie de précision, la production d'électricité. L'avantage du gaz naturel est qu'il représente une forme de combustible fossile moins polluante que le pétrole ou le charbon, car pour une unité équivalente d'énergie produite, le pétrole dégage un tiers de gaz carbonique de plus que le gaz naturel et deux tiers de plus que le charbon, cf. jesse [3] et Rifkin[4]. Devant les qualités énergétiques et environnementales du gaz naturel, son exploitation à partir des gisements demeure ardue, car les différentes étapes de production, de traitement et de transport sont délicates et étroitement associées pour former une *Chaîne Gaz*.

La difficulté relative de transport du gaz naturel représente un frein au développement de son commerce international, il est transporté soit par gazoduc sous forme de gaz comprimé, soit par méthanier à l'état liquide, après liquéfaction. Il peut également être transformé par conversion chimique. Dans notre travail de magistère, on s'intéresse à l'aspect thermique des étapes stockage et transport sous forme liquide cryogénique du gaz naturel, en effet, le gaz naturel doit être liquéfié puis stocké et transporté à la pression atmosphérique car le transport sous pression a été écarté pour des raisons économiques et de sécurité. La température à laquelle le gaz naturel est stocké sous forme de GNL est voisine de la température d'ébullition du méthane ( $-161,19$  °C). Le paragraphe qui va suivre traitera des différentes techniques de stockage de GNL, des avantages et inconvénients des conteneurs sur les plans économiques et techniques.

### 1.4. Les réservoirs de stockage de GNL

Dans ce paragraphe nous décrivons les différents types de réservoirs de stockage de GNL utilisés par l'industrie gazière en Algérie afin de mieux cerner les similitudes physiques et géométriques avec les cryostats, et apprécier ainsi la possibilité d'extrapolation des résultats d'études des cryostats aux réservoirs de stockage de GNL

Ce paragraphe traite des réservoirs de GNL dont la pression de stockage est légèrement supérieure à la pression atmosphérique et la température avoisine les  $110\text{ K}$ , pour rester dans les conditions opératoires des cryostats en général. La forme des réservoirs de GNL est généralement cylindrique, avec un toit en forme de dôme et actuellement le volume des grands réservoirs est de  $150\ 000\text{ m}^3$ .

Les principales caractéristiques de fonctionnement de ces réservoirs sont :

- Leur pression relative maximale (de  $100$  à  $230\text{ mbar}$  selon les différentes conceptions) ;
- Leurs taux journalier d'évaporation, c'est à dire le pourcentage du volume de GNL évaporé par jour est compris entre  $0.05\%$  à  $4\%$  selon les différentes conceptions et les capacités.

Plusieurs modèles de réservoirs de stockages de GNL sont construits dans le monde selon les différentes conceptions; ils peuvent être munis d'une cuvette de rétention ou pas, et construits en aérien, semi enterré ou complètement enterrés comme schématisé sur la figure I.1 ci-dessous. Enterrés ou pas, les cuves des réservoirs de stockage sont en acier spécial capable de supporter les températures cryogéniques qui fragilisent les aciers ordinaires ; auto portantes ou à membrane, elles sont isolées des parois extérieures du réservoir par une ou plusieurs épaisseurs de matériaux isolants tels que la laine de verre et la perlite.

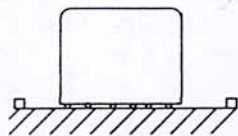
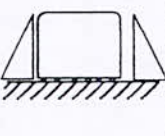
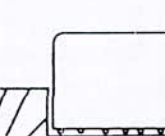
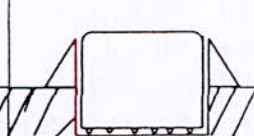
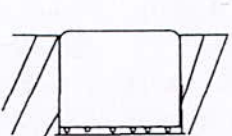
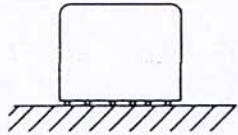
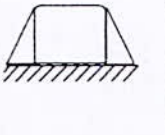
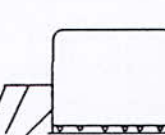
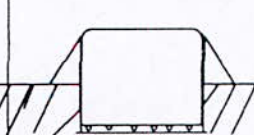
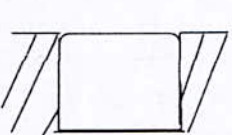
Type de Réservoir	Aérien	Aerien-Taluté	Semi enterré	Semi enterré taluté	Enterré
Avec cuvette de rétention					
Sans cuvette de rétention					

Tableau.I.1 Différents types de réservoirs de stockage de GNL.

Les différentes conceptions de réservoirs ont en commun sur les caractéristiques des trois parties constituantes qui sont :

- La cuve interne ;
- La cuve externe ;
- L'espace annulaire d'isolation thermique.

Les principaux paramètres techniques communs à ces conceptions sont :

- La parfaite étanchéité au gaz ;
- La reprise des efforts dus aux contraintes provoquées par la charge de GNL (pression, température, poids) ;
- La capacité rétention destinée à contenir le GNL accidentellement échappé du réservoir ;
- La stabilité des encrages ;
- Le maintien de l'intégrité de l'isolation thermique dont est pourvu l'espace annulaire ;
- La possibilité de contrôler l'intégrité des cuves en service.

Un schéma de réalisation d'un réservoir classique est représenté sur la figure I.2 ci-dessous ; celui-ci est constitué d'un réservoir extérieur en béton, et d'une cuve de stockage à membrane ou auto porteuse. Les réservoirs utilisés au complexe GNL2 Z sont du type aérien avec une cuve de rétention.

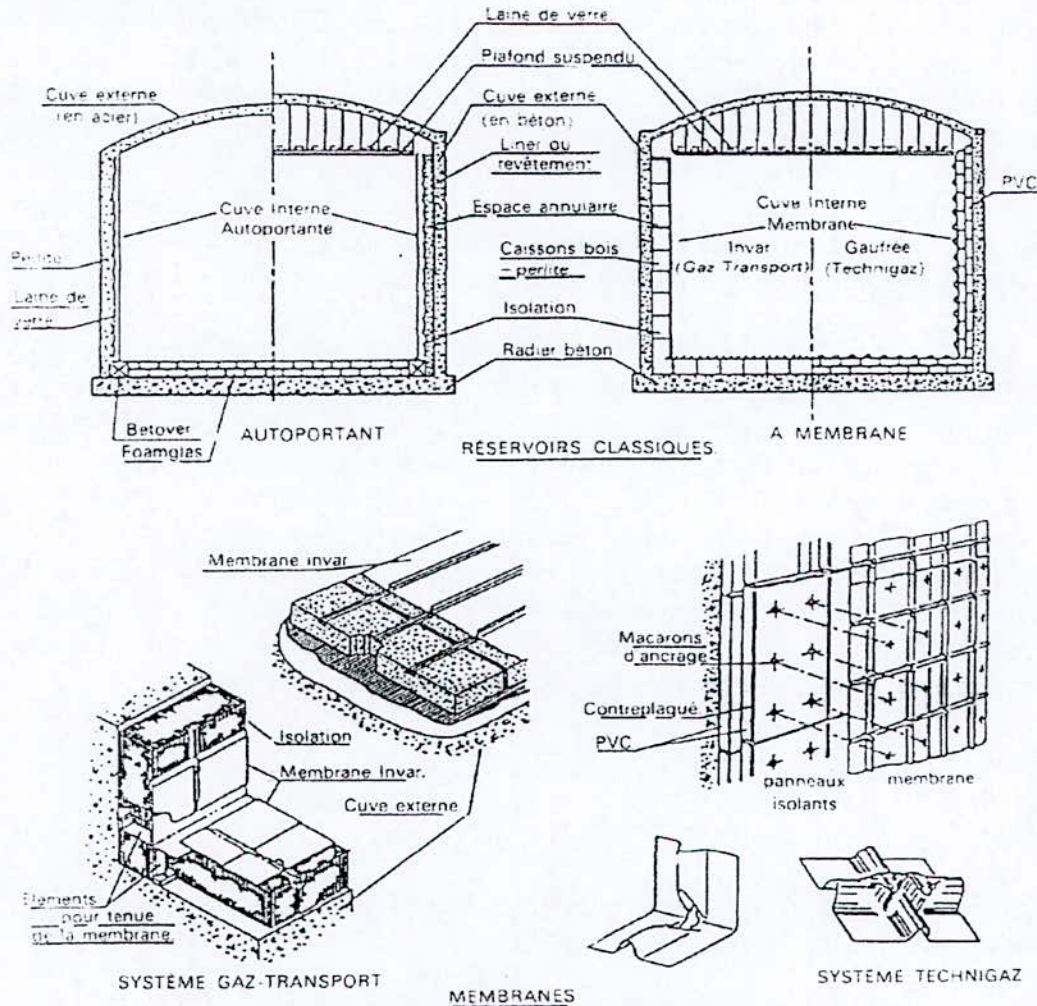


Fig.I.2 Schéma détaillé d'un réservoir classique.

### I.5. Objet de l'étude

Le travail proposé dans ce mémoire de Magistère s'appuie sur les résultats d'un travail expérimental réalisé par O. Khémis [5] au Laboratoire du LIMSI (Paris VI) et soutenu récemment à l'ENP dans le cadre d'un doctorat d'état sur l'optimisation d'un cryostat à Azote liquide. Il porte sur une étude théorique et expérimentale d'un cryostat à Azote liquide.

Le comportement thermique de ce cryostat, qui a déjà fait l'objet de plusieurs publications [6,7,8] était modélisé numériquement avec plusieurs variantes relatives à la nature du contact thermique entre le col et les vapeurs issues du bain cryogénique, les valeurs des coefficients de conductivité et des chaleurs spécifiques des matériaux utilisés, d'isolation par écrans thermiques thermalisés. Le couvercle du cryostat a été maintenu à 300 K et l'enveloppe extérieure supposée à la température ambiante de 300 K. Des chauffettes à puissance électrique variables sont introduites sous le bain et dedans pour produire un volume de vapeur suffisant à la mise en évidence du phénomène de Wexler.



La réalisation d'un prototype avec plusieurs configurations et de nombreux essais a permis de récolter une riche moisson de données expérimentales sur les débits massiques d'évaporation de l'Azote liquide à une pression de quelques milli bars effective, qui témoignent des entrées de chaleur réellement introduites dans le cryostat à travers l'enveloppe extérieure, le col, le couvercle et le fond du vase. La prédiction des débits massiques évaporés est corroborée par les résultats expérimentaux avec une bonne précision, malgré l'hypothèse d'iso thermalité de l'enveloppe extérieure, qui peut faire l'objet d'appréciations diverses. Il paraît évident que cette enveloppe extérieure ne peut rester à la même température sur toute sa hauteur puisque celle du vase cryogénique à  $77\text{ K}$  la tirera indiscutablement vers le bas ; mais la question demeure si cette déviation est suffisante pour améliorer la prédictibilité des débits évaporés avec un modèle thermique analytique destiné à décrire plus simplement le comportement de ce vase cryogénique à Azote liquide et à en transposer les résultats obtenus à un réservoir de GNL.

Le modèle analytique envisagé a été suggéré par l'assemblage mécanique présenté par le cryostat : deux tubes concentriques encastrés dans un couvercle thermalisé et dont les extrémités sont fermées par un fond. Celui-ci suggère ainsi deux ailettes concentriques enracinées dans un même socle à  $300\text{ K}$ , le vase à l'intérieur et dont l'extrémité est maintenue à  $77\text{ K}$  par le bain d'Azote liquide, et l'enveloppe à l'extérieur et dont le fond est à une température flottante inconnue, résultant de l'échange thermique entre le vase et la température ambiante. L'enveloppe extérieure étant deux fois plus longue conduit à traiter l'enveloppe extérieure par deux ailettes jointes bout à bout à la hauteur du fond du vase ; la continuité thermique à l'interface sera assurée par les conditions limites appropriées.

## I.6. Plan de l'étude

Après cette introduction, l'étude portera sur :

- La définition d'une approche et d'une méthodologie de solution, travail que l'on détaillera dans le chapitre intitulé problématique ;
- L'élaboration du modèle thermique destiné à déterminer les champs de températures dans les différentes parties du cryostat aux moyens de bilans thermiques échangés entre les éléments constitutifs ;
- La mise en équations et la résolution de celles-ci d'abord par une approche analytique utilisant des valeurs moyennes des coefficients d'échange, puis par une approche numérique plus fine afin de tenir compte de la variation des coefficients d'échange en fonction de la température. La comparaison de ces résultats entre eux, et avec la distribution expérimentale de température nous renseignera sur la validité de notre modélisation ;
- Une transposition du modèle analytique élaboré sur les bacs de stockage de GNL afin de pouvoir estimer les taux d'évaporation (boil off) à partir des champs de températures obtenues .

Le chapitre qui va suivre définira la problématique et la méthodologie de solution adoptées.

# **CHAPITRE II**

## **PROBLEMATIQUE**

**II.1. Introduction**

Dans le présent chapitre, nous allons introduire le modèle d'ailettes et expliciter le comportement thermique des cryostats de fluide cryogénique et leur similitude avec les réservoirs de stockage de GNL. Nous allons examiner le comportement thermique et la géométrie du cryostat à Azote liquide décrit par Khemis[5], ainsi que les similarités fonctionnelles qui existent entre le cryostat et les bacs de stockage de GNL, pour envisager la possibilité d'extrapoler les résultats des solutions obtenues.

Nous allons présenter notamment le modèle mathématique permettant d'obtenir les champs de températures du col du cryostat à Azote liquide et de son enveloppe extérieure. Après validation, ce modèle sera extrapolé aux réservoirs de stockage de GNL.

**II.2. Présentation du modèle**

Le modèle thermique élaboré considère le cryostat schématisé en Figure II.1 comme étant un système de trois ailettes couplées; il est composé d'une enveloppe extérieure, qui sépare le vase cryogénique d'Azote liquide du milieu ambiant, tous deux faits d'un même acier inoxydable et ancrés dans le couvercle iso thermalisé à 300 K. Le fait que l'enveloppe extérieure soit deux fois plus longue que le vase, nous a amené à modéliser cette enveloppe par deux ailettes jointes bout à bout; la première s'étend du couvercle isotherme jusqu'au niveau du fond du vase, et la seconde du fond du vase jusqu'au socle du cryostat.

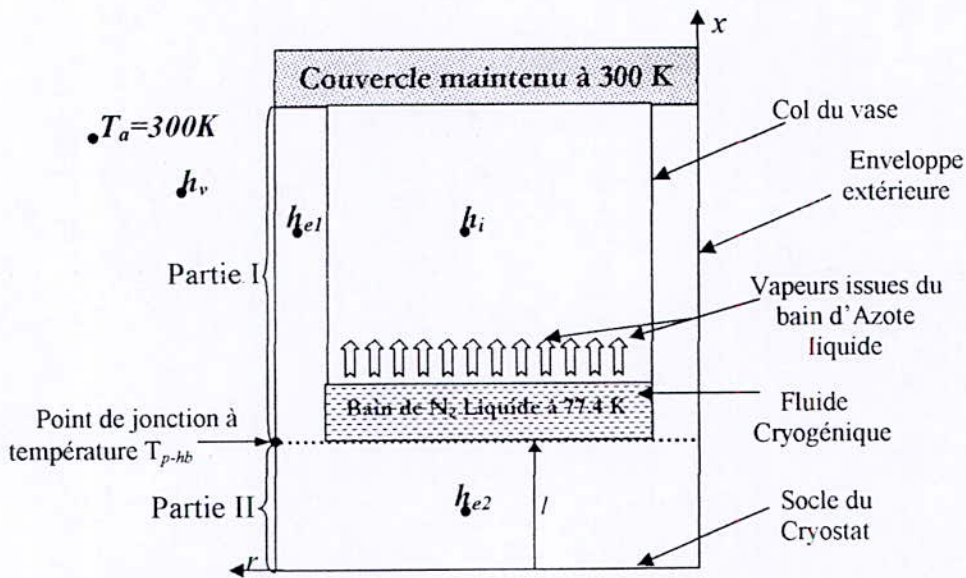


Fig.II.1 Modèle et schéma simplifiés du cryostat à Azote liquide de Khemis[5].

Avec :

- $h_v$  : Coefficient de convection équivalent entre les ailettes extérieures et le milieu ambiant ;
- $h_{e1}$  : Coefficient de convection équivalent entre l'ailette extérieure haute et l'ailette intérieure ;
- $h_{e2}$  : Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure basse et le fond du vase ;

- $h_i$  : Coefficient équivalent de convection entre l'ailette intérieure et les vapeurs d'Azote ;
- $T_{p-hb}$  : Température du point de contact entre les deux ailettes extérieures haute et basse ;
- $l$  : Distance entre le socle du cryostat et le fond du vase,  $l = 0,23 \text{ m}$ .

Les Figures II.2.a et II.2.b illustrent les trois ailettes couplées constituant le modèle de cryostat :

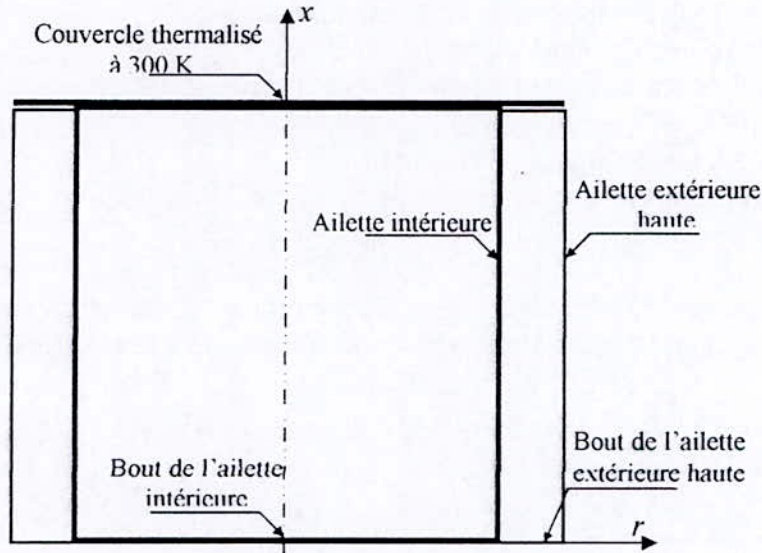


Fig.II.2.a Schéma d'ailettes de la partie haute du cryostat.

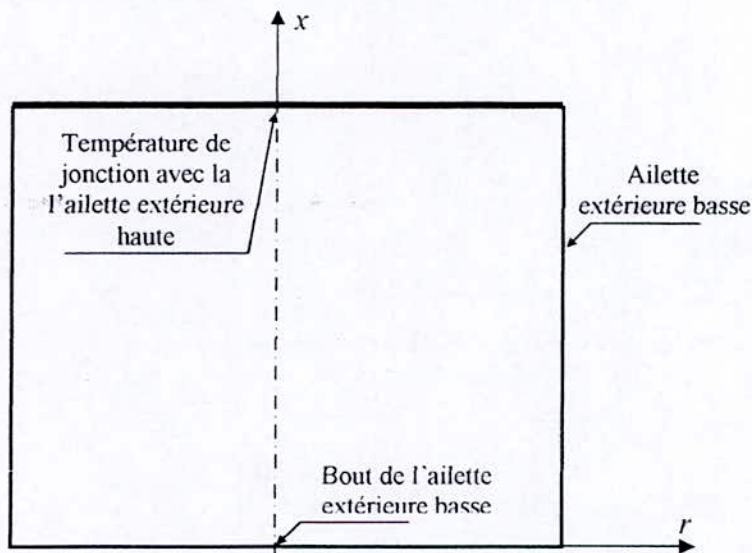


Fig.II.2.b Schéma de l'ailette extérieure du bas du cryostat.

Les échanges thermiques impliquant les trois ailettes et le milieu ambiant sont (Cf. fig.II.2.c) :

1- Pour l'ailette extérieure haute :

- Echange convectif et radiatif avec le milieu ambiant ;
- Echange radiatif avec l'ailette intérieure ;
- Flux conducteur à l'intérieur de l'ailette.

2- Pour l'ailette extérieure basse :

- Echange convectif et radiatif avec le milieu ambiant ;
- Echange radiatif avec le bout de l'ailette intérieure ;
- Flux conducteur à l'intérieur de l'ailette.

3- Pour l'ailette intérieure :

- Echange radiatif avec l'ailette extérieure haute ;
- Echange convectif avec les vapeurs issues du bain d'Azote liquide ;
- Flux conducteur à l'intérieur de l'ailette.

Les équations régissant ces échanges sont établies ci-après à partir de bilans thermiques effectués sur des éléments annulaires infinitésimaux appartenant aux trois ailettes.

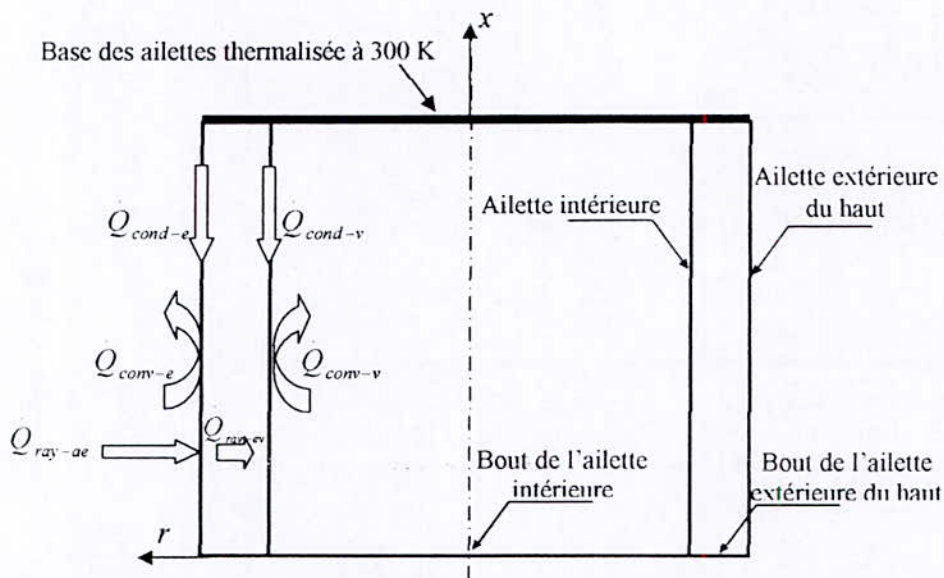


Fig.II.2.c Schéma représentant les flux thermique dans le cryostat.

Avec :

$Q_{cond-e}$  : Flux de conduction dans l'ailette extérieure du haut ;

$Q_{cond-v}$  : Flux de conduction dans l'ailette intérieure ;

$Q_{conv-e}$  : Flux de convection entre l'ailette extérieure du haut et l'ambiante ;

$Q_{conv-v}$  : Flux de convection entre l'ailette intérieure et les vapeurs issues du bain d'Azote liquide ;

$Q_{ray-ae}$  : Flux de rayonnement entre l'ambiante et l'ailette extérieure du haut ;

$Q_{ray-ev}$  : Flux de rayonnement entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure.

### II.3. Mise en équations du problème

A partir des bilans thermiques réalisés sur des volumes élémentaires, on aboutit à des équations dont les solutions donnent les champs de températures dans le cryostat. La résolution se fera par deux méthodes, la première est analytique; elle considère des valeurs moyennées des coefficients de convection équivalents, des coefficients de conduction dans l'enveloppe extérieure et dans le col du vase. La deuxième méthode est numérique ; elle utilise des coefficients de convection et des conductivités thermiques calculées ponctuellement dans l'enveloppe extérieure et le col du vase.

Les bilans thermiques sur des volumes de contrôle élémentaires sont obtenus comme suit :

#### II.3.a. Ailette extérieure du haut

L'ailette extérieure haute est influencée par la température du milieu ambiant et le champ de températures de l'ailette intérieure.

Le bilan thermique d'un volume de contrôle élémentaire de forme annulaire appartenant à l'ailette extérieure haute fait apparaître quatre flux thermiques :

- Un flux de conduction entrant  $Q_{cond-ent}$  venant du couvercle thermalisé à  $300\text{ K}$  ;
- Un flux de conduction sortant  $Q_{cond-sort}$  vers la base de l'ailette extérieure basse ;
- Deux flux de convection et de rayonnement recus de l'environnement représenté par un seul flux de convection équivalent  $Q_{env}$  ;
- Un flux de rayonnement représenté par une convection équivalente  $Q_{envl-vase}$  cédé par l'ailette extérieure du haut à l'ailette intérieure.

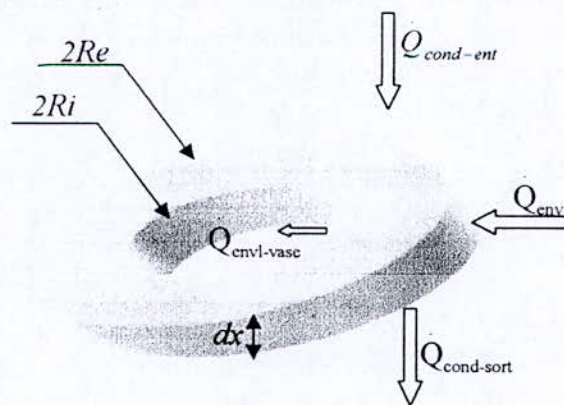


Fig. II.3 Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du haut.

Ces différents flux thermiques s'écrivent :

1- Flux de conduction entrant  $Q_{cond-ent}$  :

$$Q_{cond-ent} = -k(T_{ph}(x))A_{px} \left( \frac{dT_{ph}(x)}{dx} \right)_{x+\Delta x} \quad (II.1)$$

2- Flux de conduction sortant  $Q_{cond-sort}$  :

$$Q_{cond-sort} = -k(T_{ph}(x))A_{px} \left( \frac{dT_{ph}(x)}{dx} \right)_x \quad (II.2)$$

3- Flux de convection équivalente reçu de l'environnement  $Q_{env}$  :

$$Q_{env} = h_v A_{pe} (T_a - T_{ph}(x)) \quad (II.3)$$

4- Flux de convection équivalente cédé au vase contenant de l'Azote liquide  $Q_{envl-vase}$  :

$$Q_{envl-vase} = h_{e1} A_{pi} (T_{ph}(x) - T_v(x)) \quad (II.4)$$

Avec :

$$A_{px} = \pi (R_e^2 - R_i^2)$$

$$A_{pe} = 2\pi R_e dx$$

$$A_{pi} = 2\pi R_i dx$$

Avec :

$T_{ph}(x)$  : Température de l'ailette extérieure du haut ;

$T_v(x)$  : Température de l'ailette intérieure ;

$T_a$  : Température du milieu ambiant, 300 K ;

$k(T_{ph}(x))$  : Conductivité thermique des ailettes, elle est fonction de la température ;

$A_{px}$  : Surface longitudinale de l'élément du volume de l'ailette extérieure haute ;

$A_{pe}$  : Surface transversale extérieure de l'élément de volume de l'ailette extérieure haute ;

$A_{pi}$  : Surface transversale intérieure de l'élément de volume de l'ailette extérieure haute ;

$R_i$  : Rayon intérieur de l'ailette extérieure haute ;

$R_e$  : Rayon extérieur de l'ailette extérieure haute.

Finalement, le bilan thermique de l'élément de volume de l'ailette extérieure haute s'écrit:

$$Q_{cond-ent} - Q_{cond-sort} + Q_{env} - Q_{envl-vase} = 0 \quad (II.5)$$

Après remplacement et simplification, on obtient l'équation différentielle régissant la distribution des températures de l'ailette extérieure haute :

$$-k(T_{ph}(x))A_{px} \left( \frac{d^2 T_{ph}(x)}{dx^2} \right) dx - (h_v A_{pe} + h_{e1} A_{pi}) T_{ph}(x) + h_{e1} A_{pi} T_v(x) = -h_v A_{pe} T_a \quad (II.6)$$

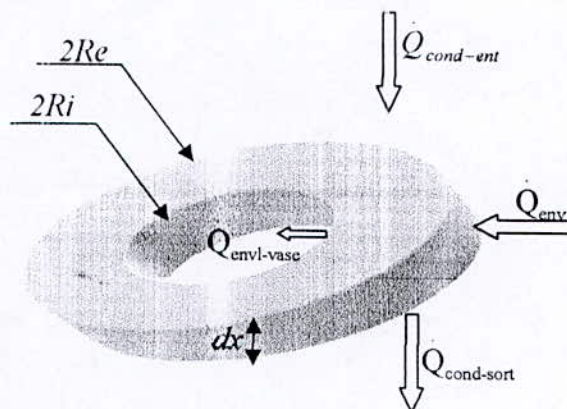
Cette équation différentielle de second ordre est non homogène, sa résolution nécessite deux conditions aux limites.

**II.3.b. Ailette extérieure du bas**

L'ailette extérieure du bas subit les mêmes modes d'échanges thermiques que l'ailette extérieure haute dont l'équation est donnée ci-dessus, (eq.II.6), mais les coefficients de convection ont des valeurs différentes; cependant, l'équation résultante n'est pas couplée avec celle du vase et sa résolution se fera séparément .

Le bilan thermique d'un volume de contrôle élémentaire de forme annulaire appartenant à l'ailette extérieure du bas fait apparaître quatre flux thermiques :

- Un flux de conduction entrant  $Q_{cond-ent}$  venant du bout d'ailette extérieure haute ;
- Un flux de conduction sortant  $Q_{cond-sort}$  vers le socle du cryostat ;
- Deux flux de convection et de rayonnement recus de l'environnement représenté par un seul flux de convection equivalente  $Q_{env}$  ;
- Un flux de rayonnement représenté par une convection equivalente  $Q_{envl-vase}$  cédé par l'ailette extérieure du bas à l'ailette intérieure.



**Fig. II.4 Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du bas.**

Les différents flux thermiques de l'élément de volume s'écrivent :

1- Flux de conduction entrant  $Q_{cond-ent}$  :

$$Q_{cond-ent} = -k(T_{pb}(x))A_{px} \left( \frac{dT_{pb}(x)}{dx} \right)_{x+dx} \tag{II.7}$$

2- Flux de conduction sortant  $Q_{cond-sort}$  :

$$Q_{cond-sort} = -k(T_{pb}(x))A_{px} \left( \frac{dT_{pb}(x)}{dx} \right)_x \tag{II.8}$$

3- Flux de convection équivalente reçu de l'environnement  $Q_{env}$  :

$$Q_{env} = h_v A_{pe} (T_a - T_{pb}(x)) \tag{II.9}$$



4- Flux équivalent de convection cédé au vase contenant de l'Azote liquide  $Q_{envl-vase}$  :

$$Q_{envl-vase} = h_{e2} A_{pi} (T_{pb}(x) - T_g) \quad (II.10)$$

Avec :

$$A_{px} = \pi (R_e^2 - R_i^2)$$

$$A_{pe} = 2\pi R_e dx$$

$$A_{pi} = 2\pi R_i dx$$

Avec :

- $T_{pb}(x)$  : Température de l'ailette extérieure du bas ;
- $T_v(x)$  : Température de l'ailette intérieure ;
- $T_a$  : Température de l'ambiante, 300 K ;
- $k(T_p(x))$  : Conductivité thermique des ailettes, elles sont fonction de la température ;
- $A_{px}$  : Surface longitudinale de l'élément du volume de l'ailette extérieure du bas ;
- $A_{pe}$  : Surface transversale extérieure de l'élément du volume de l'ailette extérieure du bas ;
- $A_{pi}$  : Surface transversale intérieure de l'élément du volume de l'ailette extérieure du bas ;
- $R_i$  : Rayon intérieur de l'ailette extérieure du bas ;
- $R_e$  : Rayon extérieur de l'ailette extérieure du bas.

Finalement, le bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du base s'écrit:

$$Q_{cond-ent} - Q_{cond-sort} + Q_{env} - Q_{envl-vase} = 0 \quad (II.11)$$

Après remplacement et simplification, on obtient l'équation différentielle régissant la distribution de températures dans cette ailette :

$$-k(T_p(x)) A_{px} \left( \frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} \right) dx - (h_v A_{py-ext} + h_{e2} A_{py-int}) T_p(x) + h_{e2} A_{py-int} T_{fv} = -h_v A_{py-ext} T_a \quad (II.12)$$

Avec :

$T_g$  : Température du fond du vase supposée isotherme et constante, 77,4 K.

### II.3.c. Ailette intérieure

L'équation différentielle régissant la distribution de la température dans l'ailette intérieure est établie de la même manière que celles des ailettes extérieures.

Le bilan thermique d'un volume de contrôle élémentaire de forme annulaire appartenant à l'ailette intérieure fait apparaître quatre flux thermiques :

- Un flux de conduction entrant  $Q_{cond-ent-v}$  ;
- Un flux de conduction sortant  $Q_{cond-sort-v}$  ;
- Un flux de convection cédé par l'ailette intérieure aux gaz issues du bain d'Azote liquide  $Q_{gaz}$  ;

- Un flux de rayonnement représenté par une convection équivalente  $Q_{envl-vase}$  cédé par l'ailette extérieure du haut à l'ailette intérieure.

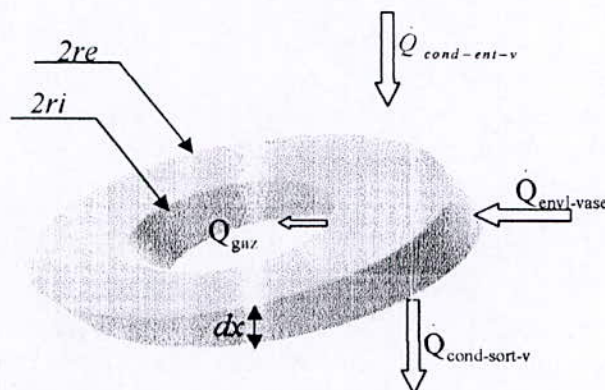


Fig. II.5 Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette intérieure.

Les différents flux de chaleur s'écrivent pour cette ailette :

1- Flux de conduction  $Q_{cond-ent-v}$  entrant dans l'élément de volume :

$$Q_{cond-ent-v} = -k(T_v(x))A_{vx} \left( \frac{dT_v(x)}{dx} \right)_{x+dx} \quad (II.13)$$

2- Flux de conduction  $Q_{cond-sort-v}$  sortant de l'élément de volume :

$$Q_{cond-sort-v} = -k(T_v(x))A_{vx} \left( \frac{dT_v(x)}{dx} \right)_x \quad (II.14)$$

3- Flux de convection équivalente  $Q_{gaz}$  cédé par la paroi interne de l'ailette intérieure aux gaz issus du bain d'Azote liquide :

$$Q_{gaz} = h_i A_{vi} (T_v(x) - T_i(x)) \quad (II.15)$$

4- Flux convectif équivalent  $Q_{envl-vase}$  cédé par le socle du cryostat et de l'ailette extérieure du haut à l'ailette intérieure :

$$Q_{envl-vase} = h_{e2} A_{ve} (T_{ph}(x) - T_v(x)) \quad (II.16)$$

Où :

$$A_{vx} = \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

$$A_{vy-ext} = 2\pi r_e dx$$

$$A_{vy-int} = 2\pi r_i dx$$

Avec :

$T_i(x)$  : Température des gaz issues du bain d'Azote liquide ;

$A_{vx}$  : Surface transversale de l'élément du volume de l'ailette intérieure ;

$A_{ve}$  : Surface longitudinale extérieure de l'élément du volume de l'ailette intérieure ;

$A_{vi}$  : Surface longitudinale intérieure de l'élément du volume de l'ailette intérieure ;

- $r_i$  : Rayon intérieur de l'ailette interne ;  
 $r_e$  : Rayon extérieur de l'ailette interne.

Finalement, le bilan thermique sur un élément de volume de l'ailette intérieure s'écrit :

$$\dot{Q}_{cond-ent-v} - \dot{Q}_{cond-sort-v} + \dot{Q}_{envl-vase} - \dot{Q}_{gaz} = 0 \quad (II.17)$$

Après remplacement et simplification, on trouve l'équation différentielle régissant la distribution des températures dans l'ailette intérieure :

$$-k(T_v(x))A_{vx} \left( \frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} \right) dx + (h_i A_{vi} + h_{e2} A_{ve}) T_v(x) - h_{e2} A_{ve} T_{ph}(x) - h_i A_{vi} T_i(x) = 0 \quad (II.18)$$

L'équation ci-dessus est une équation différentielle ordinaire homogène de second ordre dont la résolution nécessite deux conditions aux limites qui sont, la température d'ancrage de l'ailette intérieure égale à 300 K, et la température au bout qui est la température du bain d'Azote liquide, 77,4 K.

## II.4. Méthodologie de résolution

La modélisation mathématique du cryostat à Azote liquide nous a donné un système de trois équations différentielles non homogènes de second ordre et couplées ; pour la résolution, nous allons procéder par deux méthodes, la première méthode est analytique, et la seconde numérique. Les résultats obtenus seront comparés entre eux et avec les résultats expérimentaux obtenus par Khemis[5]. Après sa validation, le modèle élaboré sera utilisé pour déterminer les champs de températures dans les bacs de stockage de GNL.

### II.4.a. Méthode analytique

Pour une résolution analytique du problème, nous considérons :

- Des valeurs moyennées de tous les coefficients de convection équivalents ;
- Des valeurs moyennées des coefficients de conduction thermique dans les trois ailettes.

On résout le système d'équations obtenu grâce aux bilans thermiques en faisant appel à la méthode des transformées de Laplace. Notons que le système d'équations est composé de trois équations différentielles ordinaires non homogène de second ordre, et que par conséquent la résolution nécessite six conditions aux limites. Quatre d'entre elles sont :

- Température en base d'ailette intérieure, égale à 300 K ;
- Température en bout d'ailette intérieure, égale à 77,4 K ;
- Température en base d'ailette extérieure du haut, égale à 300 K ;
- Température en bout d'ailette extérieure du bas, égale à 293 K.

Pour obtenir les deux autres conditions aux limites, nous allons procéder de la manière suivante.

D'abord, on résout le système d'équations différentielles avec les conditions aux limites disponibles mentionnées ci-dessus, on obtient alors :

- L'expression complète de la température de l'ailette intérieure  $T_v(x)$  ;
- L'expression de la température de l'ailette extérieure du haut  $T_{ph}(x)$ , en fonction des deux constantes d'intégration ;
- L'expression de la température de l'ailette extérieure du bas  $T_{pb}(x)$ , en fonction des deux constantes d'intégration.

Les deux conditions aux limites manquantes du système différentiel sont fournies par la continuité de la température et du flux de chaleur au point de jonction entre les deux ailettes extérieures.

- La condition de continuité de la température au point de jonction des deux ailettes extérieures s'exprime par :

$$T_{ph}(l) = T_{pb}(l) \quad (\text{II.19})$$

- La condition de continuité du flux au point de jonction des deux ailettes extérieures s'exprime par :

$$k_{ph} \left( \frac{dT_{ph}(x)}{dx} \right)_{x=l} = k_{pb} \left( \frac{dT_{pb}(x)}{dx} \right)_{x=l} \quad (\text{II.20})$$

Puisque les deux ailettes extérieures ont la même conductivité thermique  $k_{ph} = k_{pb}$  au point de jonction  $x=l$ , l'expression ci-dessus se simplifie pour donner :

$$\left( \frac{dT_{ph}(x)}{dx} \right)_{x=l} = \left( \frac{dT_{pb}(x)}{dx} \right)_{x=l} \quad (\text{II.21})$$

#### II.4.b. Méthode Numérique

Dans la résolution numérique du problème, nous avons considéré :

- Des valeurs ponctuelles de tous les coefficients de convection équivalents ;
- Des valeurs ponctuelles des coefficients de conduction thermique dans les ailettes extérieures et intérieure.

Nous avons opté pour la méthode des différences finies centrée (cf. Striyan [10] et Jordan [11]), parce qu'elle est facile à mettre en œuvre, elle sera appliquée sur un maillage relativement fin des deux ailettes extérieures et intérieure afin d'obtenir des résultats suffisamment précis avec un temps de calcul acceptable. Nous prendrons le même nombre de nœuds sur les trois ailettes parce qu'elles sont presque toute de même longueur (l'ailette extérieure basse est plus courte de 2 cm par rapport aux deux autres qui sont de même longueur, 27 cm), on aura donc  $3N$  nœuds au total dont quatre ont des températures constantes et connues (bases des ailettes intérieure et extérieure du haut, bouts des ailettes intérieure et extérieure du bas), ce qui correspond à système de  $3N-4$  équations algébriques à  $3N-4$  températures à déterminer suivant un schéma implicite.

Dans le chapitre qui va suivre, nous détaillerons les procédures décrites ci-dessus, nous présenterons les corrélations utilisées pour les coefficients de transfert, enfin les résultats obtenus seront présentés puis interprétés.

# CHAPITRE III

## MODELISATION ET RESOLUTION

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons la modélisation du problème et sa mise en équations en vue d'une solution analytique et numérique. Les modes de transferts thermiques considérés sont de type conducto-convectif ; les transferts par rayonnement sont représentés par un mode convectif équivalent de même flux thermique.

La Figure III.1, montre les différents flux de chaleur échangés par les éléments du cryostat avec le milieu ambiant ou entre eux.

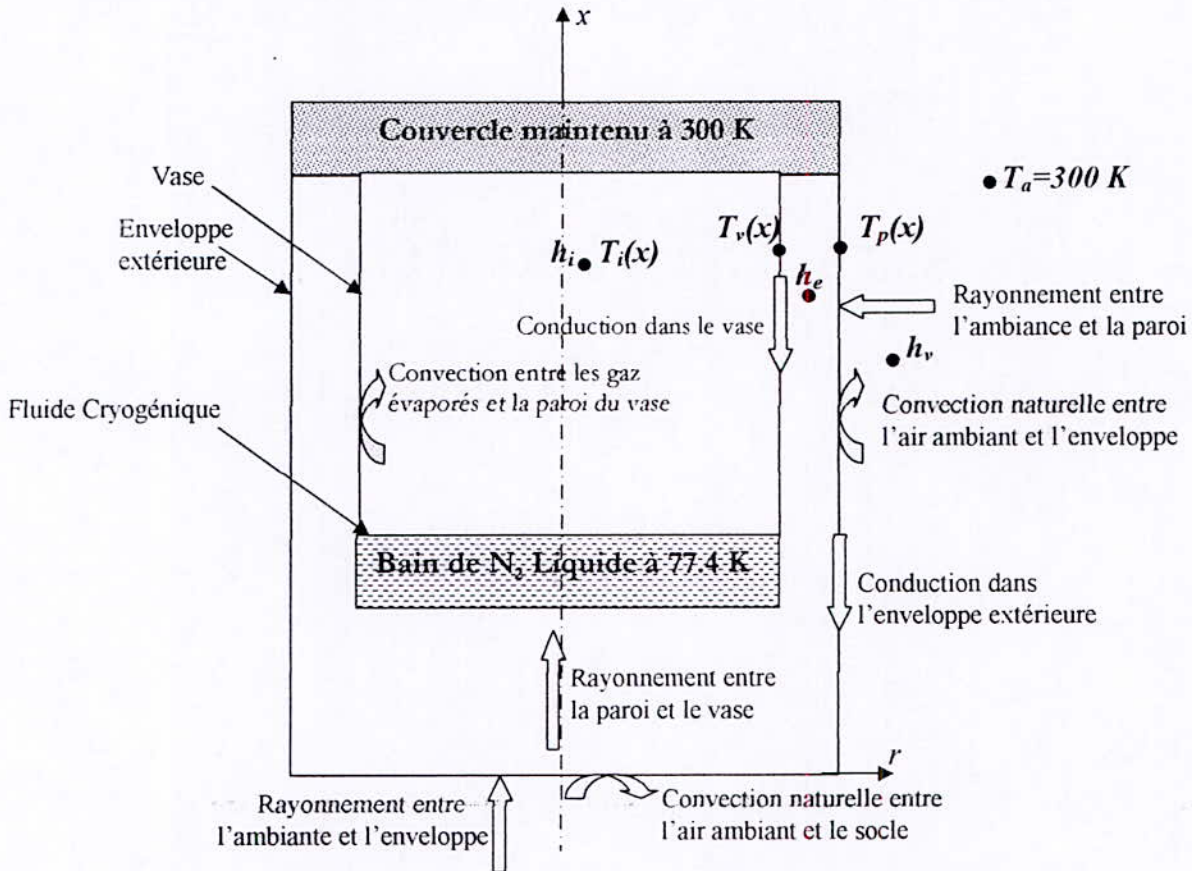


Fig.III.1 Schéma simplifié du cryostat montrant les échanges thermiques inventoriés.

Dans cette approche mathématique, nous modélisons le comportement thermique du cryostat par un ensemble de trois ailettes couplées deux à deux, comme expliqué au chapitre II (cf. Fig.II.1). Les différents échanges thermiques dans le cryostat sont indiqués sur les Figures III.1 et III.2 :

a). Pour l'ailette extérieure du haut on a :

- Une conduction longitudinale dans l'ailette, l'ancrage au couvercle étant à 300 K ;
- Une convection naturelle entre l'air ambiant et la paroi externe de l'ailette ;
- Un rayonnement entre le milieu ambiant et la paroi externe de l'ailette ;
- Un rayonnement entre la paroi interne de l'ailette et le col du vase.

b). Pour l'ailette extérieure du bas on a :

- Une conduction longitudinale venant du bout de l'ailette extérieure du haut ;
- Une convection naturelle entre l'air ambiant et la paroi externe de l'ailette ;
- Un rayonnement entre le milieu ambiant et la paroi externe de l'ailette ;
- Un rayonnement entre la paroi interne de l'ailette et le fond du vase.

c). Pour l'ailette intérieure on a :

- Une conduction longitudinale dans l'ailette, l'ancrage au couvercle étant à  $300\text{ K}$  ;
- Une convection naturelle entre la paroi interne du col et les vapeurs issues du bain d'Azote liquide ;
- Un rayonnement entre la paroi interne du col et les vapeurs issues du bain d'Azote liquide, considéré négligeable par hypothèse ;
- Un rayonnement entre les parois internes des deux ailettes extérieures et l'ailette intérieure.

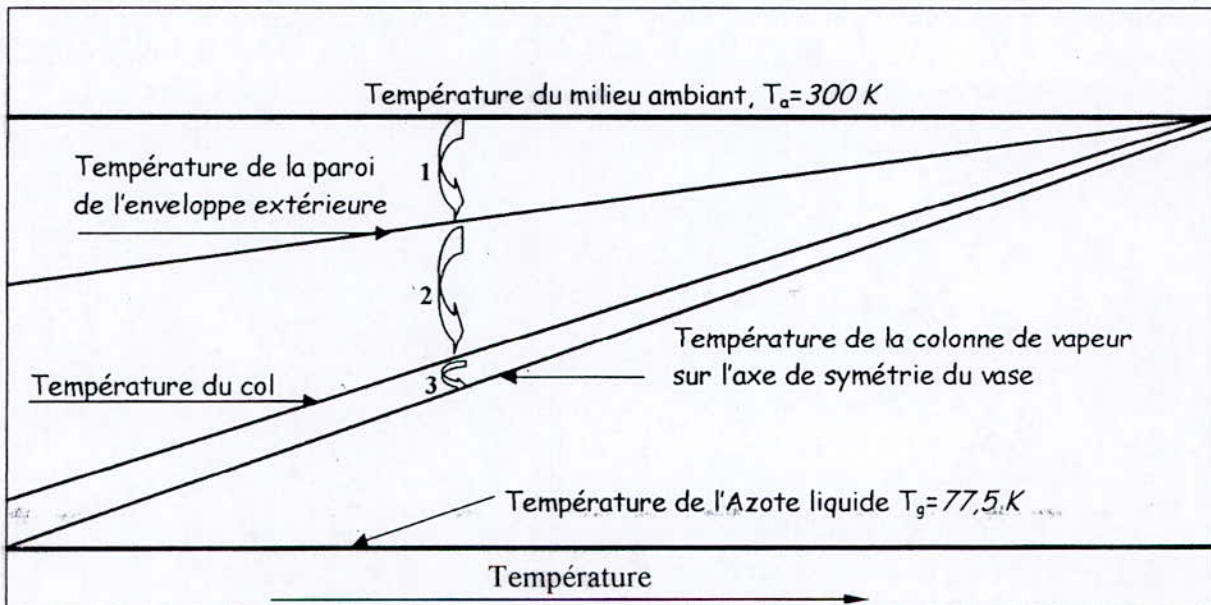


Fig.III.2 Schéma montrant qualitativement les profils de températures et les échanges thermiques dans le cryostat.



- 1 : Flux de chaleur convecto-radiatif ;
- 2 : Flux de chaleur radiatif ;
- 3 : Flux de chaleur convectif.

### III.2 Mise en équation du problème

Comme évoqué dans l'introduction, tous les transferts thermiques par rayonnement ayant lieu à des températures modérées seront assimilés à des transferts convectifs équivalents en termes de flux. La mise en équation du problème consiste à établir les bilans de chaleur sur des volumes élémentaires des deux parties de l'enveloppe extérieure et du col du cryostat

considérés comme des ailettes, les éléments de volume de forme annulaire sont de hauteur  $dx$  (cf. Figure III.3).

Du point de vue phénoménologique, le bilan thermique d'une ailette établit la dépendance de la variation du gradient de température longitudinal en fonction d'un terme source, négatif lorsqu'il y a perte et positif lorsqu'il y a apport thermique.

Pour une conduction unidimensionnelle et en régime stationnaire, ce bilan thermique s'écrit simplement :

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{s} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Ce terme source  $\dot{s}$  sera maintenant explicité pour chacune des trois ailettes considérées.

### III.2.a Ailette extérieure du haut

Un élément de volume de l'ailette extérieure du haut est schématisé en Fig.III.3 ci-dessous, avec sa géométrie et les flux de chaleur échangés avec le milieu ambiant d'une part, et l'ailette intérieure d'autre part.

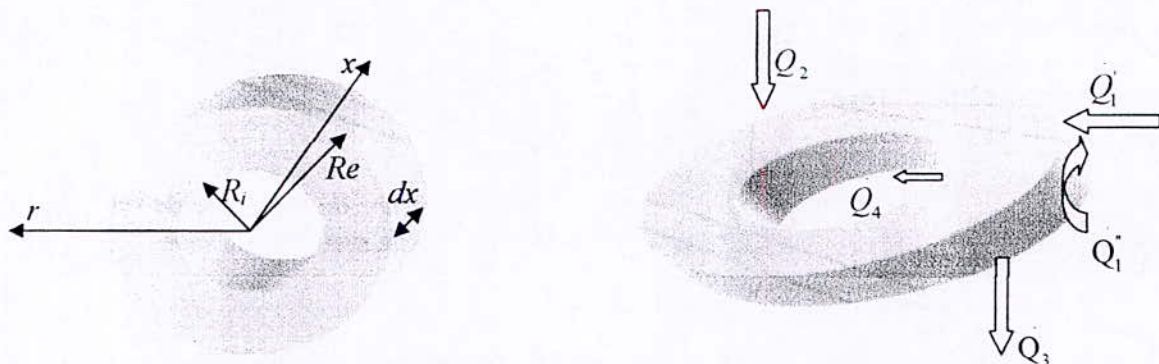


Fig. III.3 Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du haut.

Avec, les flux de chaleur suivants :

$Q_1$  : Flux reçu de l'environnement, il est composé de:

$Q_1$  : Flux radiatif ;

$Q_1^*$  : Flux convectif ;

$Q_2$  : Flux conductif entrant ;

$Q_3$  : Flux conductif sortant ;

$Q_4$  : Flux radiatif cédé à l'ailette intérieure.

Ces flux sont exprimés par les équations suivantes



$$Q_1 = h_v \cdot A_{pe} (T_a - T_{ph}(x)) \quad (III.2)$$

$$Q_2 = -k_{ph} A_{px} \left( \frac{dT_{ph}}{dx} \right)_{x+\Delta x} \quad (III.3)$$

$$Q_3 = -k_{ph} A_{px} \left( \frac{dT_{ph}}{dx} \right)_x \quad (III.4)$$

$$Q_4 = h_{e1} \cdot A_{pi} (T_{ph}(x) - T_v(x)) \quad (III.5)$$

Où :

$$A_{pe} = 2\pi \cdot Re \cdot dx$$

$$A_{px} = \pi (Re^2 - Ri^2)$$

$$A_{pi} = 2\pi \cdot Ri \cdot dx$$

Avec :

$T_{ph}(x)$  : Températures de l'ailette extérieure du haut ;

$e$  : Epaisseur des enveloppes des ailettes extérieures,  $e = Re - Ri = 0,001 \text{ m}$ .

$k(T)$ , la conductivité thermique de l'Acier inox 304, dont est fait le cryostat ; elle est donnée équivalente à celle d'un acier au Ni-Cr (18%-8%) entre 20 et 350 K par la corrélation linéaire suivante, Holmann [13]:

$$k(T) = 0,0070 T + 14,39, \text{ w / mK} \quad (III.6)$$

Le terme source de l'équation (III.1) pour l'ailette extérieure du haut est donné par l'expression suivante :

$$\dot{s} = \frac{h_{e1} A_{pi}}{k_{ph} \cdot A_{px}} (T_{ph}(x) - T_v(x)) - \frac{h_v A_{pe}}{k_{ph} \cdot A_{px}} (T_a - T_{ph}(x)) \quad (III.7)$$

En remplaçant les surfaces de transfert par leurs expressions dans (III.7) et en transposant dans (III.1), on obtient l'équation de l'ailette extérieure du haut. Après simplification, et en négligeant la valeur numérique de l'épaisseur de l'enveloppe extérieure (1 mm) devant son diamètre (300 mm), on trouve :

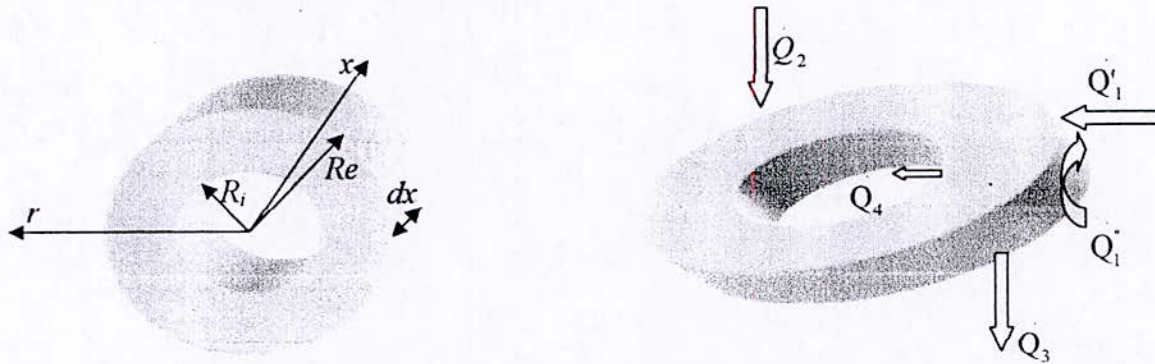
$$\frac{d^2 T_{ph}(x)}{dx^2} + \left( \frac{h_v R_e + h_e R_i}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} T_{ph}(x) - \frac{h_{e1} R_i T_v(x)}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} - \frac{h_v R_e T_a}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} \right) = 0 \quad (III.8)$$

Les deux conditions aux limites nécessaires pour compléter la fermeture du système d'équations s'obtiennent en remarquant que :

- i. L'ailette extérieure du haut est ancrée dans le couvercle thermalisé à 300 K ;
- ii. La température doit être continue au point de jonction avec l'ailette extérieure du bas.

**III.2.b Ailette extérieure du bas**

Un élément de volume annulaire de l'ailette extérieure du bas est schématisé en Fig.III.4 ci-dessous, avec les flux de chaleur échangés avec le milieu ambiant d'une part, et l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure d'autre part.



**Fig. III.4 Bilan thermique d'un élément de volume de l'ailette extérieure du bas.**

Avec, les flux de chaleur suivants :

$Q_1$  : Flux reçu de l'environnement, il est composé de:

$Q_1^r$  : Flux radiatif ;

$Q_1^c$  : Flux convectif ;

$Q_2$  : Flux conductif entrant ;

$Q_3$  : Flux conductif sortant ;

$Q_4$  : Flux radiatif cédé à la base de l'ailette intérieure.

Ces flux sont donnés par les expressions suivantes

$$Q_1 = h_v \cdot A_{pe} (T_a - T_{pb}(x)) \tag{III.9}$$

$$Q_2 = -k_{pb} A_{px} \left( \frac{dT_{pb}}{dx} \right)_{x+dx} \tag{III.10}$$

$$Q_3 = -k_{pb} A_{px} \left( \frac{dT_{pb}}{dx} \right)_x \tag{III.11}$$

$$Q_4 = h_{e2} \cdot A_{pi} (T_{pb}(x) - T_g) \tag{III.12}$$

Où :

$$A_{pe} = 2\pi \cdot Re \cdot dx$$

$$A_{px} = \pi (Re^2 - Ri^2)$$

$$A_{pi} = 2\pi \cdot R_i \cdot dx$$

Avec :

$T_{pb}(x)$  : Température de l'ailette extérieure du bas ;

$T_g$  : Température du bout d'ailette intérieure, égale à 77,4 K.

$e$  : Epaisseur des enveloppes des ailettes extérieures,  $e = Re - Ri = 0,001 m$ .

Le terme source de l'équation (III.1) pour l'ailette extérieure du bas est :

$$\dot{s} = \frac{h_v R_e + h_{e2} R_i}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} T_{pb}(x) - \left( \frac{h_v R_e T_a + h_{e2} R_i T_g}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} \right) \tag{III.13}$$

En remplaçant pour les sections et les surfaces dans (III.13), et en transposant dans (III.1), on obtient l'équation de l'ailette extérieure du bas. Après simplification et en négligeant la valeur numérique de l'épaisseur de l'enveloppe extérieure (1 mm) devant son diamètre (300 mm), on obtient :

$$\frac{d^2 T_{pb}(x)}{dx^2} + \frac{h_v R_e + h_{e2} R_i}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} T_{pb}(x) - \left( \frac{h_v R_e T_a + h_{e2} R_i T_g}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} \right) = 0 \tag{III.14}$$

Les deux conditions aux limites nécessaires pour compléter la position du problème s'obtiennent en notant que :

- i. La température au bout de l'ailette extérieure du bas a été calculée et trouvée égale à 293 K ;
- ii. Le gradient de température doit être continu au point de jonction avec l'ailette extérieure du haut.

### III.2.c Ailette intérieure

Un élément de l'ailette intérieure est schématisé en Fig.III.5 ci-dessous, avec sa géométrie et les flux de chaleur échangés avec les parois des ailettes extérieures d'une part, et les vapeurs issues du bain d'Azote liquide d'autre part.



Fig. III.5 Bilan thermique sur un élément de volume de l'ailette intérieure.

Avec, les flux de chaleurs suivants:

$Q_4$ : Flux radiatif venant des ailettes extérieures ;

$Q_5$ : Flux convectif avec les vapeurs issues du bain d'Azote liquide ;

$Q_6$ : Flux de conduction entrant ;

$Q_7$ : Flux conduction sortant.

Ces flux sont explicités par leurs expressions qui s'écrivent :

$$Q_4 = h_{e1} \cdot A_{ve} (T_{ph}(x) - T_v(x)) \quad (III.15)$$

$$Q_5 = h_i \cdot A_{vi} (T_v(x) - T_i(x)) \quad (III.16)$$

$$Q_6 = -k_v A_{vx} \left( \frac{dT_v}{dx} \right)_{x+dx} \quad (III.17)$$

$$Q_7 = -k_v A_{vx} \left( \frac{dT_v}{dx} \right)_x \quad (III.18)$$

Où :

$$A_{ve} = 2\pi r_e dx$$

$$A_{vx} = \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

$$A_{vi} = 2\pi r_i dx$$

Avec :

$T_v(x)$  : Températures de l'ailette intérieure ;

$e$  : Epaisseur de l'ailette intérieure,  $e = r_e - r_i = 0,001 \text{ m}$ .

$k_v$  étant la conductivité thermique de l'ailette intérieure donnée par la corrélation (III.6).

Le terme source de l'équation (III.1) pour l'ailette intérieure s'écrit :

$$\dot{s} = \frac{h_{e1} A_{ve}}{k_v A_{vx}} (T_{ph}(x) - T_v(x)) - \frac{h_i A_{vi}}{k_v A_{vx}} (T_v(x) - T_i(x)) \quad (III.19)$$

En remplaçant pour les sections et les surfaces dans (III.19) et en transposant dans (III.1), on obtient l'équation de l'ailette intérieure. Après simplification et en négligeant la valeur numérique de l'épaisseur de l'ailette intérieure (1 mm) devant son diamètre (300 mm), on trouve :

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} - \frac{h_{e1} r_e + h_i r_i}{k_v r_i e} T_v(x) + \frac{h_{e1} r_e T_{pb}(x)}{k_v r_i e} + \frac{h_i r_i T_i}{k_v r_i e} = 0 \quad (III.20)$$

Les deux conditions aux limites nécessaires pour compléter la définition du problème sont :

- i. L'ailette intérieure est ancrée dans le couvercle thermalisé à 300 K ;
- ii. La température au bout de l'ailette intérieure est égale à celle du bain d'Azote liquide, 77,4 K.

Notons que les trois équations (III.8), (III.14) et (III.20), constituent un système d'équations différentielles ordinaires non homogènes de second ordre dont les six conditions aux limites sont rappelées ici :

- i. L'ailette intérieure est ancrée dans le couvercle thermalisé à 300 K ;
- ii. L'ailette extérieure du haut est ancrée dans le couvercle thermalisé à 300 K ;
- iii. La température en bout d'ailette intérieure est égale à celle du bain d'Azote liquide, 77,4K ;
- iv. La température en bout d'ailette extérieure du bas est prise égale à 293K, valeur moyenne calculée à partir du bilan thermique effectué sur le socle du cryostat ;
- v. Par continuité, la température en bout d'ailette extérieure du haut est égale à la température à la base de l'ailette extérieure du bas ;
- vi. Par continuité également, le gradient de température en bout de l'ailette extérieure du haut est égal au gradient de température à la base de l'ailette extérieure du bas.

Le modèle thermique obtenu donne lieu à trois équations différentielles linéaires couplées de second ordre et non homogènes. Sa solution sera obtenue d'abord sous forme analytique par la méthode des transformées de Laplace, puis sous forme numérique en utilisant la méthode des différences finies. La solution analytique utilise des valeurs moyennes des coefficients de convection équivalents et ceux de conduction, alors que la solution numérique utilise des valeurs locales de ces coefficients calculées à chaque abscisse le long des ailettes.

### III.3 Détermination de l'expression du facteur convectif équivalent entre les ailettes extérieures et le milieu ambiant

Les parois externes des deux ailettes extérieures reçoivent de l'environnement un flux thermique de convection et un flux de rayonnement. Incropera [9] donne l'expression du flux net de chaleur échangée entre deux surfaces qui se voient uniquement l'une l'autre :

$$Q_1 = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot (T_a^4 - T_p^4(x))}{2 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1} \tag{III.21}$$

$\sigma$  étant la constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Le flux de convection thermique est donné par l'expression suivante:

$$Q_1 = h_{conv} \cdot A_{pe} \cdot (T_a - T_p(x)) \tag{III.22}$$

$\varepsilon$ , étant l'émissivité du matériau, elle est moyennée et prise égale à 0,12 (cf. Khemis [5]).  
 et  $T_p(x)$ , la température de l'ailette extérieure du haut (ou du bas, selon la valeur de  $x$ ).

Les parois extérieures des deux ailettes externes subissent une convection naturelle. Le coefficient  $h_v$ , coefficient de convection entre les parois externes des deux ailettes extérieures et le milieu ambiant, est calculé en utilisant l'expression semi empirique de Nusselt donnée par Perry [12] :

$$Nu = 0,683Gr^{0.25} Pr^{0.25} \left[ \frac{Pr}{0,861 + Pr} \right]^{0.25} \quad (III.23)$$

Cette expression donne une valeur moyenne du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Grashoff moyen intégré ( $Gr$ ) et du nombre de Prandtl ( $Pr$ ), dont la valeur moyenne est prise égale à 0,7135 pour l'air atmosphérique entre 250 à 300 K.

Par ailleurs, Holman [13] donne la corrélation suivante pour une convection naturelle le long d'une paroi verticale :

$$Nu_{ul} = 0,677(Ra_x)^{\frac{1}{4}} \left( 1 + \frac{0,952}{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (III.24)$$

Où :

$Ra = Pr \cdot Gr$  est le nombre adimensionnel de Rayleigh.

Les deux expressions ci-dessus sont valables pour :  $10^8 \leq Gr \leq 10^9$ .

Avec :

$$Gr_x = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_a - T_p(x)) x^3}{\nu^2}, \quad \beta = \frac{1}{T} \text{ (pour un gaz parfait)} \quad (III.25)$$

$$h_{conv} = \frac{Nu_x \cdot k_f}{L_f} \quad (III.26)$$

Avec :

$\beta$  : Coefficient d'expansion volumétrique isobare ;

$L_f$  : Longueur de contact paroi-fluide convectif ;

Le coefficient de viscosité cinématique de l'air atmosphérique est corrélé ici en utilisant des données prises dans le Holman [13] :

$$\nu 10^6 = 0.1286 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 + 0.018614 \cdot T - 1.2639 \quad (III.27)$$

Le coefficient de conductivité de l'air atmosphérique est également corrélé ici en utilisant des données prises dans le Holman [13] :

$$k_f 10^3 = -0.3 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 0.969 \cdot 10^{-1} \cdot T - 0.65 \cdot 10^{-1} \quad (III.28)$$

**Nota :** Les nombres adimensionnels sont calculés à la température du film  $T_f = \frac{T_a + T_p}{2}$

Le coefficient global de convection équivalent, qui tient compte de la convection et du rayonnement, que reçoit la paroi extérieure de l'enveloppe est obtenu à partir de l'expression :

$$h_v \cdot A_{pe} (T_a - T_p(x)) = \frac{\sigma \cdot A_{pe} \cdot (T_a^4 - T_p^4(x))}{2 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1} + \frac{Nu \cdot k_f}{L} \cdot A_{pe} \cdot (T_a - T_p(x)) \quad (III.29)$$

d'où :

$$h_v = \frac{\sigma \cdot (T_a^2 + T_p^2(x))(T_a + T_p(x))}{2 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1} + \frac{Nu \cdot k_f}{L} \quad (\text{III.30})$$

### III.4 Détermination du coefficient convectif équivalent entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure

Entre la paroi interne de l'ailette extérieure haute et la paroi externe de l'ailette intérieure, seul le rayonnement est à prendre en compte, puisque l'espace entre ces deux éléments est sujet à un vide poussé. Cette configuration géométrique d'enveloppes concentriques infiniment longues donne lieu à un flux de rayonnement exprimé par :

$$Q_{12} = \frac{\sigma (T_{ph}^4(x) - T_v^4(x))}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_{pi}} + \frac{1}{A_{pi} F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_{ve}}} \quad (\text{III.31})$$

Puisque le matériau des ailettes extérieures et intérieure est le même, et le transfert thermique par rayonnement entre les ailettes est remplacé par une convection équivalente, on aboutit à l'expression suivante du coefficient de convection équivalent :

$$h_e = \frac{\sigma (T_{ph}^2(x) + T_v^2(x))(T_{ph}(x) + T_v(x))}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{A_{pi}}{A_{ve}} \right) + \frac{1}{F_{ph-v}}} \quad (\text{III.32})$$

Où :

$T_{ph}(x)$ ,  $T_v(x)$ , sont les températures de l'enveloppe extérieure du haut et celle du col du vase, respectivement ;

$A_{pi}$ ,  $A_{ve}$ , les surfaces de l'ailette extérieure du haut et de l'ailette intérieure, respectivement ;

$F_{ph-v}$ , le facteur de forme entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure, qui constitue une configuration concentrique de longueur finie ; son expression est donnée en Annexe 2 d'après IHS [14].

### III.5 Détermination du coefficient convectif équivalent entre l'ailette intérieure et les vapeurs d'Azote

La paroi intérieure de l'ailette interne et les vapeurs issues du bain d'Azote liquide s'échangent de la chaleur par conducto-convection, et par rayonnement dans une mesure beaucoup plus faible, car ces vapeurs surchauffées peuvent être supposées transparentes. Le coefficient de convection équivalent sera déterminé à partir des mesures de températures données par Khemis [5].

Les températures des vapeurs et de la paroi intérieure de l'ailette interne à différentes hauteurs du cryostat sont données dans les tableaux ci-dessous :

Tableau.III.1 Températures mesurées de la paroi du col.

<i>Hauteur [mm]</i>	60	89,7	172,2	255,5
<i>Température du col [K]</i>	86,5	148,9	205,2	176,9

Tableau.III.2 Températures mesurées des vapeurs.

<i>Hauteur [mm]</i>	40	87,7	173,7	258,7
<i>Température du Gaz [K]</i>	84,2	142,9	202,1	268,4

Ces données ont été obtenues pour un débit massique des vapeurs d'Azote  $m = 45,1 \text{ mg/s}$ .

Dans nos calculs, nous utilisons une corrélation obtenue par interpolation linéaire des mesures ci-dessus (voir fig.III.6), soit :

$$T_i(x) = 845,8x + 51,7 \tag{III.33}$$

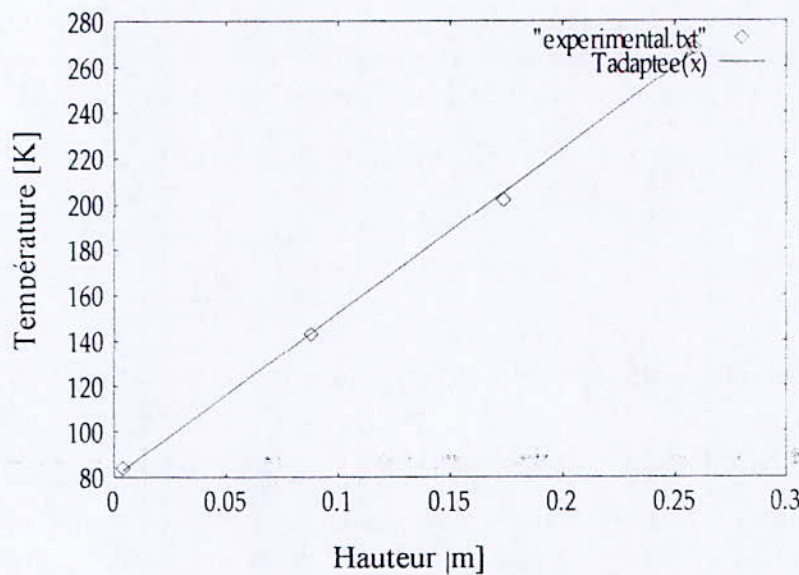


Fig.III.6 Corrélation des températures expérimentales des vapeurs d'Azote mesurées à différents niveaux de l'ailette intérieure.

Le coefficient de convection équivalent sera déterminé grâce à un bilan thermique sur un volume de contrôle élémentaire des vapeurs d'Azote, voir fig.III.7 :

D'une part, le flux convectif cédé par la paroi interne du vase aux vapeurs d'Azote est donné par :

$$q = \bar{h}_i A_{vi} (T_v(x) - T_i(x)) \tag{III.34}$$

D'autre part, la chaleur reçue par les vapeurs d'Azote ascendantes s'exprime par :

$$q = m \left[ (C_p T_i)_{i+1} - (C_p T_i)_i \right] \tag{III.35}$$

Le bilan thermique de l'élément exprime simplement l'égalité de ces deux quantités.



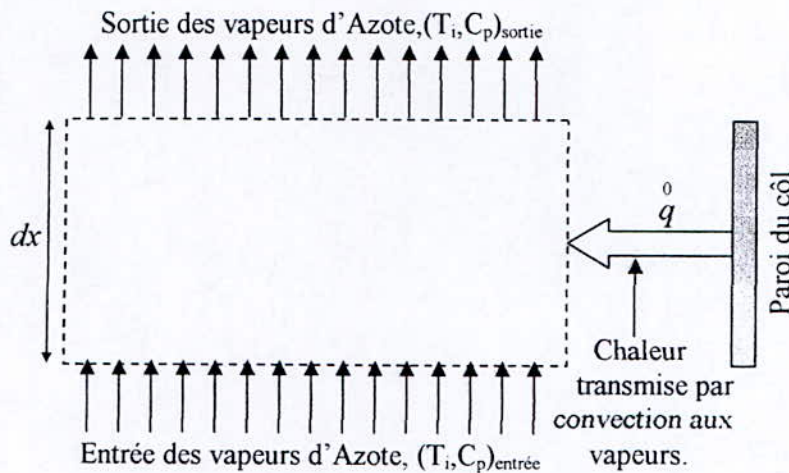


Fig.III.7. Bilan thermique sur un élément de vapeur.

La chaleur spécifique de l'Azote gazeux entre 70 et 300 K est obtenue par corrélation de données obtenues d'après Holman [13] :

$$C_p = -8,6667 \cdot 10^{-9} T_i^3 + 6,45714 \cdot 10^{-6} T_i^2 - 0,00160119 T_i + 1,1742 \quad \text{(III.36)}$$

Le bilan thermique donne donc le coefficient de convection équivalent :

$$h_i(x) = \frac{m \left[ (C_p T_i)_{sortie} - (C_p T_i)_{entree} \right]}{A_{vx} (T_v(x) - T_i(x))} \quad \text{(III.37)}$$

### III.6 Résolution du système d'équations

La modélisation mathématique du problème a donné lieu à un système de trois équations différentielles ordinaires de second ordre non homogènes, dont la solution donne les températures des ailettes extérieures  $T_p(x)$  et celle de l'ailette intérieure  $T_v(x)$ . La résolution de ces équations se fera d'abord d'une manière analytique avec des coefficients de convection et de conduction de valeur moyenne, ensuite par une méthode des différences finies utilisant des valeurs discrétisées des coefficients de convection et de conduction.

Le système d'équations différentielles à résoudre décrit le comportement thermique des trois ailettes couplées qui échangent entre elles des flux de rayonnement et de conduction. Nous rappelons ci-dessous ces équations :

- Pour l'équation de l'ailette extérieure du haut :

$$\frac{d^2 T_{ph}(x)}{dx^2} + \frac{h_v R_e + h_{e1} R_i}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} T_{ph}(x) - \frac{h_{e1} R_i}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} T_v(x) - \frac{h_v R_e T_a}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} = 0 \quad \text{(III.38.a)}$$

- Pour l'équation de l'ailette extérieure du bas :

$$\frac{d^2 T_{pb}(x)}{dx^2} + \frac{h_v R_e + h_{e2} R_i}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} T_{pb}(x) - \left( \frac{h_v R_e T_a + h_{e2} R_i T_g}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} \right) = 0 \quad \text{(III.38.b)}$$

• Pour l'équation de l'ailette intérieure :

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} + \frac{h_e r_e + h_i r_i}{k_v r_i e} T_v(x) - \frac{h_e r_e}{k_v r_i e} T_{ph}(x) - \frac{h_i r_i}{k_v r_i e} T_i(x) = 0 \quad \text{(III.38.c)}$$

Dont les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{i. } T_{ph}(0,5) = 300 \text{ K;} \\ \text{ii. } T_{pb}(0) = 293 \text{ K;} \\ \text{iii. } T_v(0,23) = 77,4 \text{ K;} \\ \text{iv. } T_v(0,5) = 300 \text{ K;} \\ \text{v. } T_{pb}(0,23) = T_{pb}(0,23); \\ \text{vi. } \left( \frac{dT_{pb}(x)}{dx} \right)_{x=0,23} = \left( \frac{dT_{ph}(x)}{dx} \right)_{x=0,23} \end{array} \right\} \quad \text{(III.39)}$$

Les températures obtenues seront représentées graphiquement et comparées à celles obtenues par la méthode numérique ainsi qu'aux résultats expérimentaux de Khemis [5].

### III.6.a Résolution analytique

Les équations de (III.38.a) à (III.38.c) peuvent être écrites sous une forme plus compacte en introduisant des coefficients de substitution figurant les constantes :

• Pour l'ailette extérieure du haut:

$$\frac{d^2 T_{ph}(x)}{dx^2} + \Sigma_{ph} T_{ph}(x) + \Pi_{ph} T_v(x) + \Upsilon_{ph} = 0 \quad \text{(III.40.a)}$$

• Pour l'ailette extérieure du bas :

$$\frac{d^2 T_{pb}(x)}{dx^2} + \Sigma_{pb} T_{pb}(x) + \Pi_{pb} = 0 \quad \text{(III.40.b)}$$

• Pour l'ailette intérieure :

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} + \Sigma_v T_v(x) + \Pi_v T_{ph}(x) + \Upsilon_v \cdot x + \Omega_v = 0 \quad \text{(III.40.c)}$$

où  $\Sigma_{ph}, \Pi_{ph}, \Upsilon_{ph}, \Sigma_{pb}, \Pi_{pb}, \Sigma_v, \Pi_v, \Upsilon_v$  et  $\Omega_v$  sont des constantes de substitution définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ph} &= \frac{h_v R_e + h_{e1} R_i}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} \\ \Pi_{ph} &= -\frac{h_{e1} R_i}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} \\ \text{II}_{ph} &= -\frac{h_v R_e T_a}{k_{ph} \cdot R_i \cdot e} \\ \Sigma_{pb} &= \frac{h_v R_e + h_{e2} R_i}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} \\ \Pi_{pb} &= -\left( \frac{h_v R_e T_a + h_{e2} R_i T_g}{k_{pb} \cdot R_i \cdot e} \right) \\ \Sigma_v &= \frac{h_{e1} r_e + h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e} \\ \Pi_v &= -\frac{h_{e1} r_e}{k_v \cdot r_i \cdot e} \\ \text{II}_v &= -\frac{h_i r_i a}{k_v \cdot r_i \cdot e} \\ \Omega_v &= -\frac{h_i r_i b}{k_v \cdot r_i \cdot e} \end{aligned}$$

La difficulté principale dans la résolution de ce système d'équations différentielles est le couplage entre les équations (III.40.a) et (III.40.c) ; la troisième équation (III.40.b) est linéairement indépendante et peut ainsi être résolue séparément. Nous avons appliqué les transformées de Laplace aux équations (III.40.a) et (III.40.c) et nous avons ainsi résolu le système d'équations algébriques qui en découle et dont les étapes des transformations et de résolution sont développés en annexe 1. Nous donnons ci-dessous directement les solutions du système d'équations (III.40.a), (III.40.b) et (III.40.c) :

$$T_{ph}(x) = \frac{A_1}{Z} e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x} + A_3 e^{s_3 x} + A_4 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_5} + \frac{1}{C_6} \tag{III.41.a}$$

$$T_{pb}(x) = \sin(\sqrt{\Sigma_{pb}} x) \cdot Cst_2 + \cos(\sqrt{\Sigma_{pb}} x) \cdot Cst_1 + \frac{\Pi_{pb}}{\Sigma_{pb}} \tag{III.41.b}$$

$$T_v(x) = \frac{A_5}{Z} e^{s_1 x} + A_6 e^{s_2 x} + A_7 e^{s_3 x} + A_8 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_7} + \frac{1}{C_8} \tag{III.41.c}$$

où les différents paramètres sont définis dans le tableau suivant:

N	Constante de substitution	Expression
0 1	Z	$\Sigma_v \Sigma_{ph} - \Pi_v \Pi_{ph}$
0 2	$s_1$	$\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
0 3	$s_2$	$-\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$

04	$s_3$	$\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v + \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
05	$s_4$	$-\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v + \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$

06	$C_1$	$Z.T_{ph}(0) + \Pi_{ph} \Sigma_v - \Pi_{ph} \Omega_v$
07	$C_2$	$Z.T'_{ph}(0) - \Pi_{ph} \Pi_v$
08	$C_3$	$\left[ \Sigma_v^2 T_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \Sigma_v + \Omega_v) \Pi_{ph} \right] \Sigma_{ph} + T_v(0) \Pi_{ph}^2 \Pi_v +$ $+ \left[ \Pi_{ph} \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Omega_v) \Sigma_v \right] \Pi_{ph} + \Sigma_v^2 \Pi_{ph}$
09	$C_4$	$\left[ \Sigma_v^2 T'_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \Sigma_v + \Pi_v) \Pi_{ph} \right] \Sigma_{ph} +$ $+ T'_v(0) \Pi_{ph}^2 \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Pi_v) \Sigma_v \Pi_{ph}$
10	$C_5$	$\frac{\Pi_v \Pi_{ph}}{Z}$
11	$C_6$	$\frac{\Omega_v \Pi_{ph} - \Sigma_v \Pi_{ph}}{Z}$
12	$C_7$	$\frac{-\Sigma_{ph} \Pi_v}{Z}$
13	$C_8$	$\frac{\Pi_{ph} \Pi_v - \Sigma_{ph} \Pi_v}{Z}$
14	$C_9$	$Z.T_v(0) - \Pi_{ph} \Pi_v + \Sigma_{ph} \Omega_v$
15	$C_{10}$	$Z.T'_v(0) + \Sigma_{ph} \Pi_v$
16	$C_{11}$	$Z \left( \Sigma_{ph} T_v(0) - \Pi_v T_{ph}(0) \right) + \Omega_v \left( \Pi_v \Pi_{ph} + \Sigma_{ph}^2 \right) - \Pi_{ph} \Pi_v \left( \Sigma_v + \Sigma_{ph} \right)$
17	$C_{12}$	$\Pi_v \left( \Pi_v \Pi_{ph} + \Sigma_{ph}^2 \right) - Z \left( \Sigma_{ph} T'_v(0) + \Pi_v T'_{ph}(0) \right)$
18	$A_1$	$\frac{s_1^3 C_1 + s_1^2 C_2 + s_1 C_3 + C_4}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$
19	$A_2$	$\frac{-(s_2^3 C_1 + s_2^2 C_2 + s_2 C_3 + C_4)}{Z (s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$
20	$A_3$	$\frac{s_3^3 C_1 + s_3^2 C_2 + C_3 s_3 + C_4}{Z (s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
21	$A_4$	$\frac{C_4 + s_4 (C_3 + s_4^2 C_1 + s_4 C_2)}{Z \left[ s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3) s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2) s_4 - s_1 s_2 s_3 \right]}$
22	$A_5$	$\frac{s_1^3 C_9 + s_1^2 C_{10} + s_1 C_{11} + C_{12}}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$
23	$A_6$	$\frac{-(s_2^3 C_9 + s_2^2 C_{10} + s_2 C_{11} + C_{12})}{Z (s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$

24	$A_7$	$\frac{s_3^3 C_9 + s_3^2 C_{10} + C_3 s_{11} + C_{12}}{Z (s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
25	$A_8$	$\frac{C_{12} + s_4 (C_{11} + s_4^2 C_9 + s_4 C_{10})}{Z [s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3) s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2) s_4 - s_1 s_2 s_3]}$

Remarquons que quelques unes des expressions du tableau A1-1 précédent sont écrites en fonction des valeurs initiales des températures des ailettes  $T_{ph}(0)$  et  $T_v(0)$  ainsi que de celles de leurs dérivées  $T'_{ph}(0)$  et  $T'_v(0)$ .

$T_v(0)$  est la température du liquide cryogénique stocké, dans le cryostat étudié, de l'Azote liquide à 77,4 K.

$T_{ph}(0)$  a la même valeur que la température du bout d'ailette extérieure du bas  $T_{pb}(l)$ , obtenue à partir de l'équation (7).

$T'_{ph}(0)$  et  $T'_v(0)$  sont considérées durant les développements comme des constantes dont les expressions seront obtenues en appliquant les conditions aux limites.

Pour appliquer ces résultats à notre cryostat, dont un schéma présentant les caractéristiques géométriques principales est donné en annexe 3, nous déterminons les différentes constantes de substitution des équations (III.41.a), (III.41.b) et (III.41.c), en utilisant les données du tableau suivant :

<i>Symbole</i>	<i>Signification</i>	<i>Valeur</i>	<i>Unité</i>
$r_i$	Rayon intérieur de l'ailette interne	0,075	[m]
$r_e$	Rayon extérieur de l'ailette interne	0,076	[m]
$R_i$	Rayon intérieur des ailettes externes	0,15	[m]
$R_e$	Rayon extérieur des ailettes externes	0,151	[m]
$e$	Epaisseur des parois des trois ailettes	0,001	[m]
$l$	Longueur de l'ailette extérieure du bas	0,23	[m]
$L$	Longueur des ailettes, extérieure du haut et intérieure	0,27	[m]
$h_i$	Coefficient équivalent de convection entre l'ailette interne et les vapeurs d'Azote	3	[w.m <sup>-2</sup> k <sup>-1</sup> ]
$h_e$	Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure	0,17	[w.m <sup>-2</sup> k <sup>-1</sup> ]
$h_{e2}$	Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure du bas et le fond du vase cryogénique	0,08	[w.m <sup>-2</sup> k <sup>-1</sup> ]
$h_v$	Coefficient équivalent de convection entre les ailettes extérieures et le milieu ambiant	1	[w.m <sup>-2</sup> k <sup>-1</sup> ]
$k$	Coefficient moyen de conduction des trois ailettes	0,08	[w.m <sup>-1</sup> k <sup>-1</sup> ]
$g$	Constante de gravitation terrestre	9,81	[m.s <sup>-2</sup> ]
$T_a$	Température ambiante, elle est égale aussi à celle du couvercle du cryostat	300	[K]
$T_i$	Température des vapeurs d'Azote le long du côtel	750,7x-95,185	[K]

On obtient ainsi pour notre cryostat les champs de température suivants :

$$\begin{aligned}
 T_{ph}(x) = & 103,334x + 0,0001735 \left[ e^{(3,3524+8,8019x)} + e^{(20,0253-8,8019x)} - e^{(12,1543-8,8019x)} - e^{(11,2234+8,8019x)} \right] + \\
 & 0,001816 \left[ e^{(9,3124-14,5758x)} - e^{(14,0654-14,5758x)} \right] + 0,2506 \left[ e^{(8,8019x+1,9355)} - e^{(12,7374-8,8019x)} \right] + \\
 & 0,000001257 \left[ -e^{(6,7775+14,5759x)} + e^{(21,3533-14,5759x)} - e^{(16,6003-14,5759x)} + e^{(2,0244+14,5759x)} \right] + \\
 & 0,00498 \left[ -e^{(-8,8019x+6,4254)} + e^{(8,8019x+2,3765)} \right] + 0,1398 \left[ e^{(8,8019x)} - e^{(-8,8019x+8,8019)} \right] + 245,5788
 \end{aligned}
 \tag{III.42.a}$$

$$T_{pb}(x) = 9,3877 \cos(8,5114x) - 9,7803 \sin(8,51143x) + 283,6123
 \tag{III.42.b}$$

$$\begin{aligned}
 T_v(x) = & 0,00001487 \left[ e^{(-14,5759x+16,6003)} - e^{(-14,5759x+21,3533)} + e^{(-14,5759x+6,7774)} - e^{(-14,5759x+2,0244)} \right] + \\
 & 0,00001487 \left[ e^{(8,8019x+3,3524)} - e^{(8,8019x+11,2234)} - e^{(-8,8019x+12,1543)} + e^{(-8,8019x+20,0253)} \right] \\
 & -76,68017 + 0,021478 \left[ e^{(-14,5759x+14,0654)} - e^{(-14,5759x+9,3124)} + e^{(8,8019x+3,9355)} - e^{(-8,8019x+12,7374)} \right] + \\
 & 0,0004269 \left[ e^{(8,80189x+2,3765)} - e^{(-8,80189x+6,42538)} \right] + 0,011977 \left[ e^{8,8019x} - e^{(-8,8019x+8,80189)} \right] + 715,2334x
 \end{aligned}
 \tag{III.42.c}$$

Ces trois températures sont représentées graphiquement sur les figures (III.10), (III.11) et (III.12) respectivement.

### III.6.b Résolution par méthode numérique

Les équations différentielles régissant la distribution des températures dans les trois ailettes du système sont discrétisées en utilisant la définition de la discrétisation différentielle,

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{[i+1]} - 2T_{[i]} + T_{[i-1]}}{(\Delta x)^2}
 \tag{III.43}$$

On obtient ainsi,

- Pour l'ailette extérieure du haut :

$$\frac{T_{ph}[i+1] - 2T_{ph}[i] + T_{ph}[i-1]}{(\Delta x_{ph})^2} + \sum_{ph} T_{ph}[i] + \Pi_{ph} T_v[i] + \text{II}_{ph} = 0
 \tag{III.44.a}$$

- Pour l'ailette extérieure du bas :

$$\frac{T_{pb}[i+1] - 2T_{pb}[i] + T_{pb}[i-1]}{(\Delta x_{pb})^2} + \sum_{pb} T_{pb}[i] + \Pi_{pb} = 0
 \tag{III.44.b}$$

- Pour l'ailette intérieure :

$$\frac{T_v[i+1] - 2T_v[i] + T_v[i-1]}{(\Delta x_v)^2} + \sum_v T_v[i] + \Pi_v T_p[i] + \text{II}_v = 0
 \tag{III.44.c}$$

$\Delta x_v$  : Pas sur la paroi de l'ailette intérieure ;

$\Delta x_{ph}$  : Pas sur la paroi de l'ailette extérieure du haut ;

$\Delta x_{pb}$  : Pas sur la paroi de l'ailette extérieure du bas.

En prenant le même pas sur les ailettes extérieure du haut et intérieure, et après réarrangement, les équations (III.44.a), (III.44.b) et (III.44.c) deviennent :

- Pour l'ailette extérieure du haut :

$$\frac{T_{ph}[i+1]}{(\Delta x)^2} + \left\{ \sum_{ph} - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right\} T_{ph}[i] + \frac{T_{ph}[i-1]}{(\Delta x)^2} + \Pi_{ph} T_v[i] + \text{II}_{ph} = 0 \quad \text{(III.45.a)}$$

- Pour l'ailette extérieure du bas :

$$\frac{T_{pb}[i+1]}{(\Delta x_{pb})^2} + T_{pb}[i] \left( \sum_{pb} - \frac{2T_{pb}[i]}{(\Delta x_{pb})^2} \right) + \frac{T_{pb}[i-1]}{(\Delta x_{pb})^2} + \Pi_{pb} = 0 \quad \text{(III.45.b)}$$

- Pour l'ailette intérieure :

$$\frac{T_v[i+1]}{(\Delta x)^2} + \left\{ \sum_v - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right\} T_v[i] + \frac{T_v[i-1]}{(\Delta x)^2} + \Pi_v T_{ph}[i] + \text{II}_v = 0 \quad \text{(III.45.c)}$$

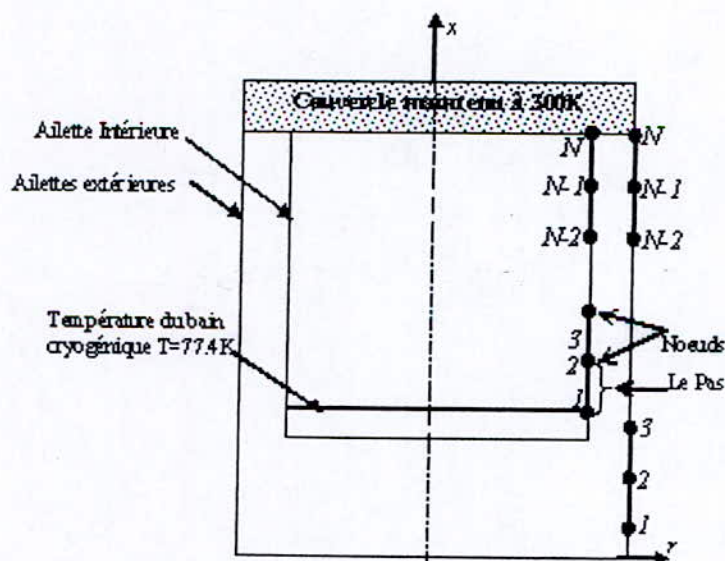
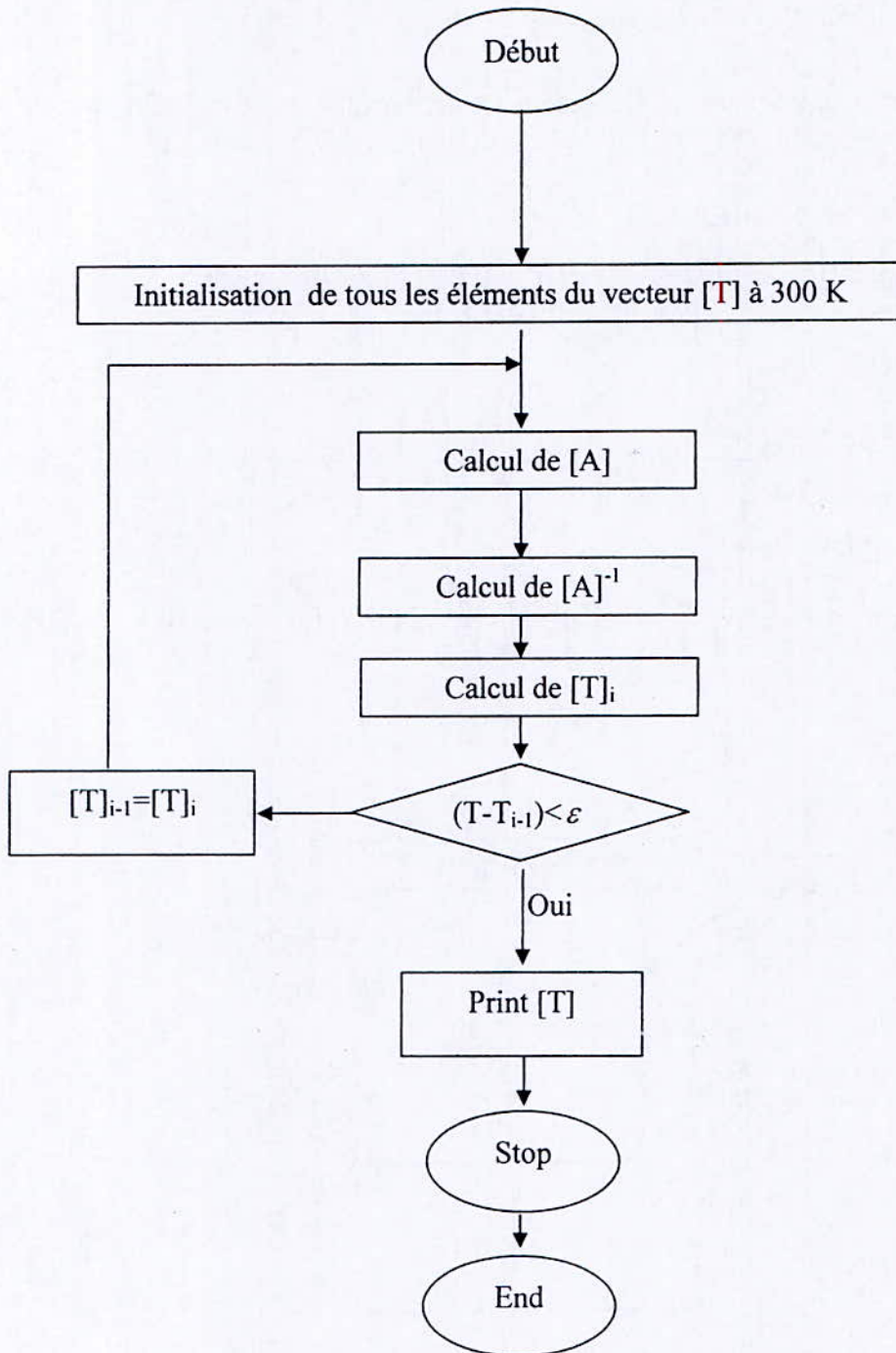


Fig.III.8 Schéma simplifié du cryostat discrétisé pour le calcul numérique.

A partir des équations (III.45.a), (III.45.b) et (III.45.c) il sera généré  $(3n - 6)$  équations à  $(3n - 4)$  inconnues, ces équations, ajoutées aux deux équations des deux conditions aux limites conduit à un système de  $(3n - 4)$  équations à  $(3n - 4)$  inconnues . La solution de ce problème est obtenue numériquement par une méthode itérative. Le système d'équations est d'abord mis sous forme matricielle :

$$[T_{i+1}] = [A][T_i]$$

Le calcul est initialisé avec un vecteur température uniforme  $T_i=300\text{ K } \forall i$ , puis il suit la procédure décrite sur l'organigramme suivant :



Organigramme pour le calcul numérique des températures des ailettes du cryostat.



III.7 Analyse des résultats et discussion

III.7.a Distribution de la température dans le vase pour différentes valeurs du coefficient de convection équivalente entre les vapeurs ascendantes et la paroi interne du vase (Calcul Analytique)

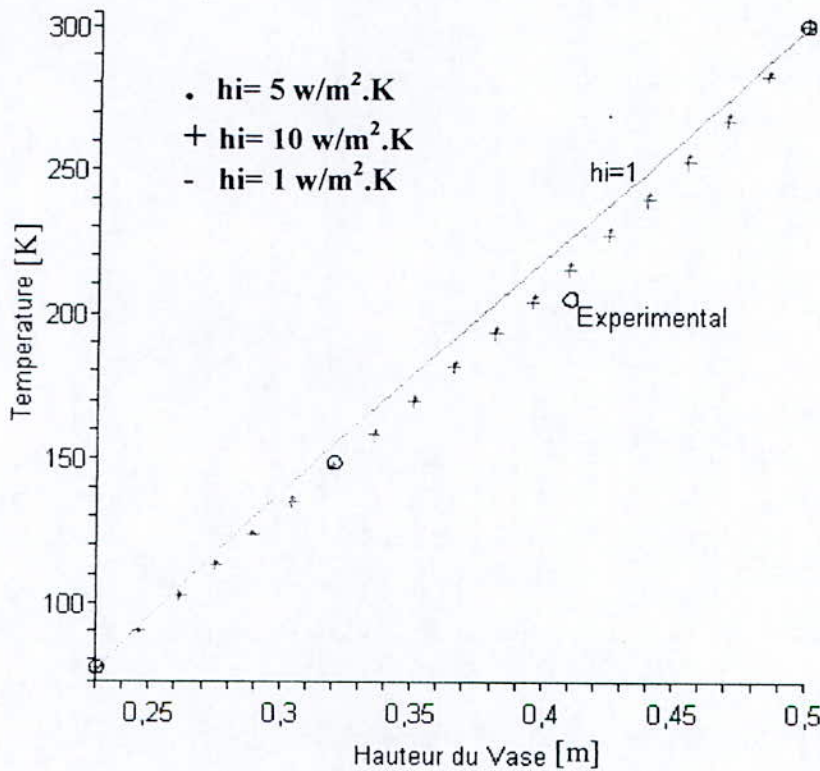


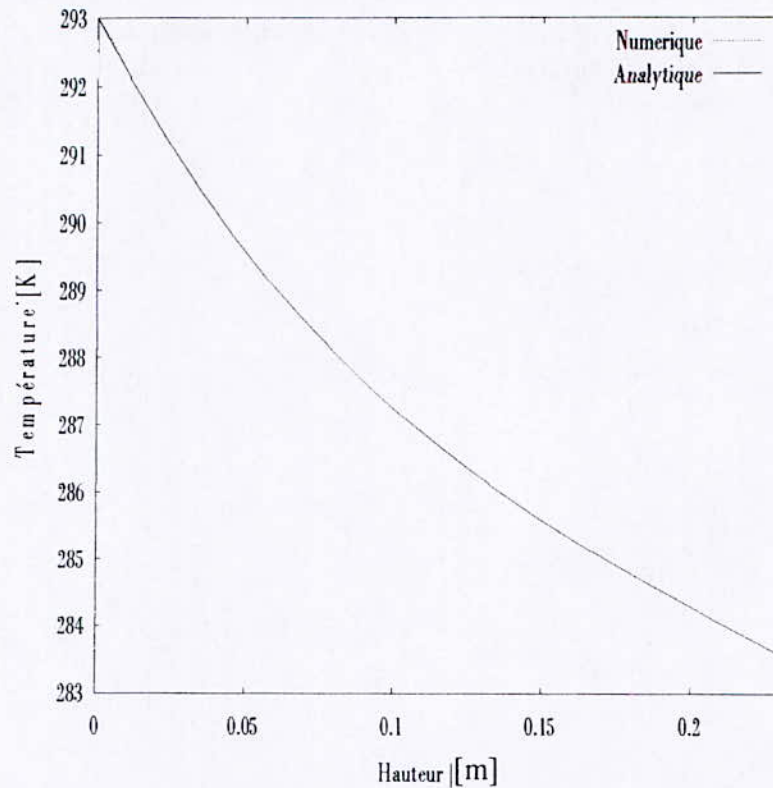
Fig.III.9. Distribution de la température dans l'ailette intérieure pour différentes valeurs de  $h_i$ .

La Figure III.9, illustre la variation analytique de la température de l'ailette intérieure pour différentes valeurs du coefficient de convection équivalent  $h_i$ , entre la paroi du col et les vapeurs ascendantes issues du bain liquide, avec la condition limite de température en bout d'ailette extérieure du bas égale à 293 K.

Une estimation initiale de ce coefficient a été obtenue en utilisant le résultat analytique donné par Holman [13] pour la convection libre le long d'une plaque verticale ou d'un cylindre :

$$Nu_x = 0,508\sqrt{\text{Pr}}(0,952 + \text{Pr})^{-1/4} Gr_x^{1/4} \tag{III.48}$$

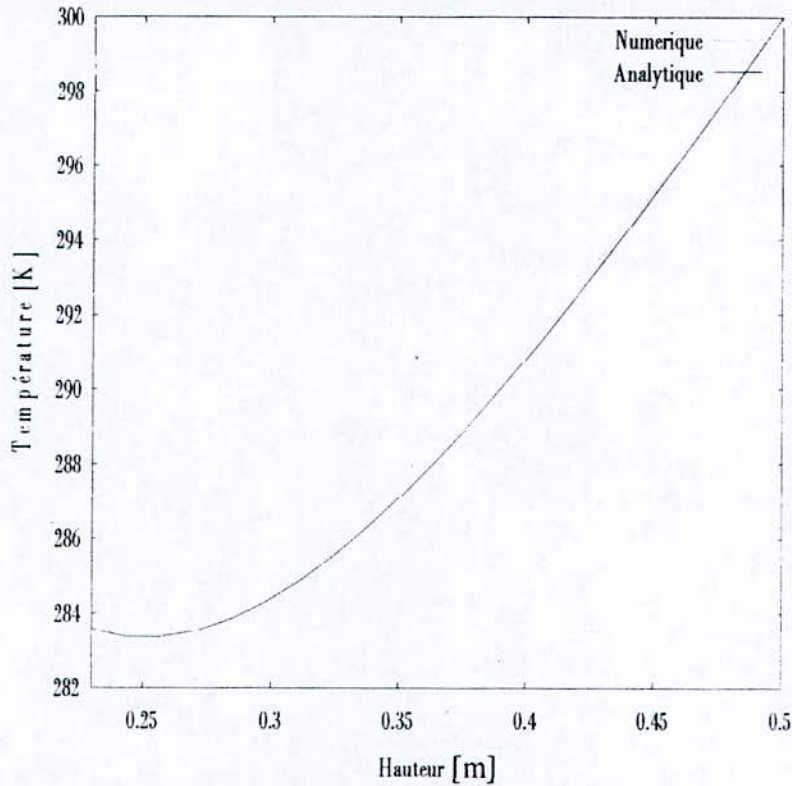
Le coefficient de convection résultant est de  $2,9 \text{ w/m}^2\cdot\text{K}$  à  $0,27 \text{ m}$  (en base d'ailette, à  $T \approx 300 \text{ K}$ ),  $3,7 \text{ w/m}^2\cdot\text{K}$  à  $0,17 \text{ m}$  (à mi-hauteur du vase, à  $T \approx 200 \text{ K}$ ), et  $4,9 \text{ w/m}^2\cdot\text{K}$  à  $0,02 \text{ m}$  (valeur extrapolée à  $T \approx 80 \text{ K}$ ).

**III.7.b Distribution de la température dans l' ailette extérieure du bas****Fig. III.10 Distribution de la température dans l' ailette extérieure du bas.**

La figure III.10 montre que les profils des températures analytique et numérique de l' ailette extérieure bas sont relativement proches l'un de l'autre ; l'écart maximal a lieu à l'extrémité froide, à la hauteur du bain d'Azote liquide. Cet écart est de l'ordre de  $1K$  ; il est dû au fait que les calculs numériques prennent en considération les variations ponctuelles des coefficients de convection et de conduction contrairement aux calculs analytiques où des valeurs moyennes sont utilisées. Le faible écart entre les deux approches conforte l'approche analytique pour la détermination de la distribution de la température dans le cryostat.

L'allure régressive de la température de l' ailette extérieure du bas s'explique physiquement par le fait que le bain d'Azote liquide se situe à la mi-hauteur du cryostat, donc au niveau du bout d' ailette extérieure du bas, ce qui a tendance à attirer la température de ce dernier vers des valeurs plus froides.

**III.7.c Distribution de la température dans l'ailette extérieure du haut**

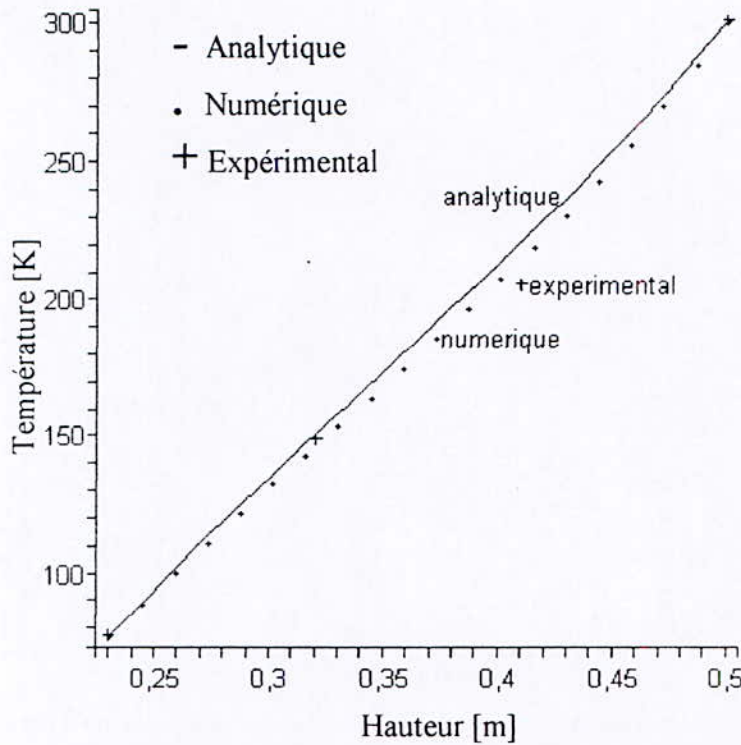


**Fig. III.11 Distribution de la température dans l'ailette extérieure du haut.**

La figure III.11 ci-dessus illustre la distribution des températures dans l'ailette extérieure du haut calculées numériquement et analytiquement. L'écart maximale est noté à la mi-hauteur du cryostat au niveau du bain d'Azote liquide. L'écart entre les approches analytique et numérique est dû au fait que la première approche considère des variations ponctuelles des coefficients de convection équivalents et de conduction et que la seconde méthode considère des valeurs moyennées.

L'allure progressive de la température est expliquée par le fait qu'à la base de l'ailette extérieure du haut se trouve le couvercle du cryostat maintenu à 300 K et qu'en bout se trouve le bain d'Azote liquide qui tire la température vers des valeurs plus basses.

**III.7.d Distribution de la température dans le col du vase (Calculs Analytique, Numérique comparés à l'Expérimental)**



**Fig. III.12** Distribution de la température dans l'ailette intérieure.

La figure ci-dessus illustre la distribution de la température dans l'ailette intérieure du cryostat, les résultats analytique et numérique sont représentés et comparés aux mesures expérimentales. Nous remarquons une bonne concordance entre les trois représentations ce qui indique que l'approche analytique est un bon candidat pour la détermination de la distribution de la température dans l'ailette intérieure.

La variation de la température de l'ailette intérieure à une allure linéaire produite par le fait que l'ailette intérieure est cernée par un couvercle maintenu à 300 K et un bain d'Azote liquide à 77,4 K et que les vapeurs issues du bain cryogénique lèchent la paroi intérieure en prenant de la chaleur.

**III.8 Conclusion**

Les trois figures III.10, III.11 et III.12 illustrant les distributions des températures dans les ailettes extérieures et intérieure montrent que l'approche analytique permet de déterminer de manière fiable les températures dans tout le cryostat. Les résultats analytiques sont très proches des résultats numériques et expérimentaux.

A partir des graphiques ci-dessus, on remarque que la température de l'enveloppe extérieure du cryostat n'est pas isotherme mais varie le long de l'enveloppe ; le bain d'Azote liquide a abaissé les températures des ailettes extérieures.

Dans le paragraphe qui suit, nous appliquons le modèle d'ailette aux bacs de stockage de GNL pour la détermination des taux de boil off de gaz liquéfié.

# **CHAPITRE IV**

## **APPLICATION**

**IV.1 Introduction**

Dans le présent chapitre nous établissons une application du modèle mathématique élaboré sur les bacs de stockage de GNL afin de déterminer les champs de températures et calculer les débits de boil off.

**IV.2 Les bacs de stockage de GNL**

Au cours du stage pratique effectué à l'usine GL2Z à Arzew de traitement et liquéfaction du gaz naturel nous avons relevé les caractéristiques des bacs de stockage utilisés. La figure IV.1 ci-dessous schématise un des trois bacs de GNL du complexe GL2Z.

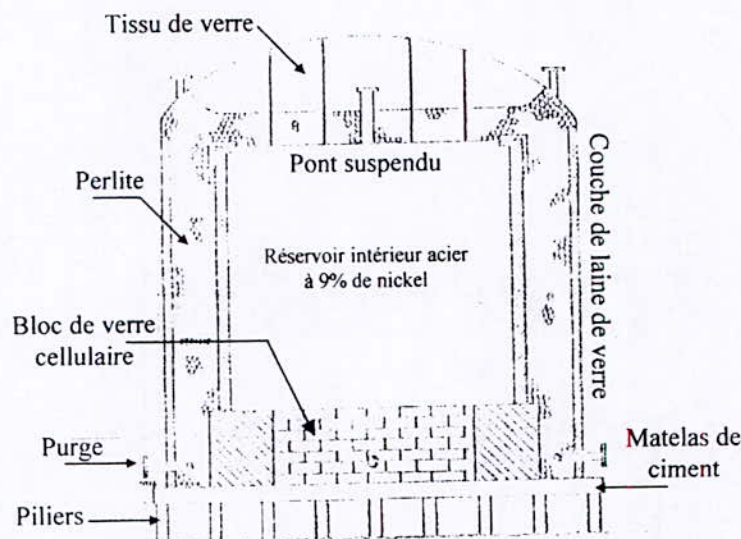


Fig. IV.1 Coupe d'un bac de stockage de GNL.

**IV.3 Modèle mathématique**

Nous considérons le bac de stockage de GNL comme étant un système à doubles ailettes couplées thermiquement de même longueur comme illustré dans la figure IV.2 :

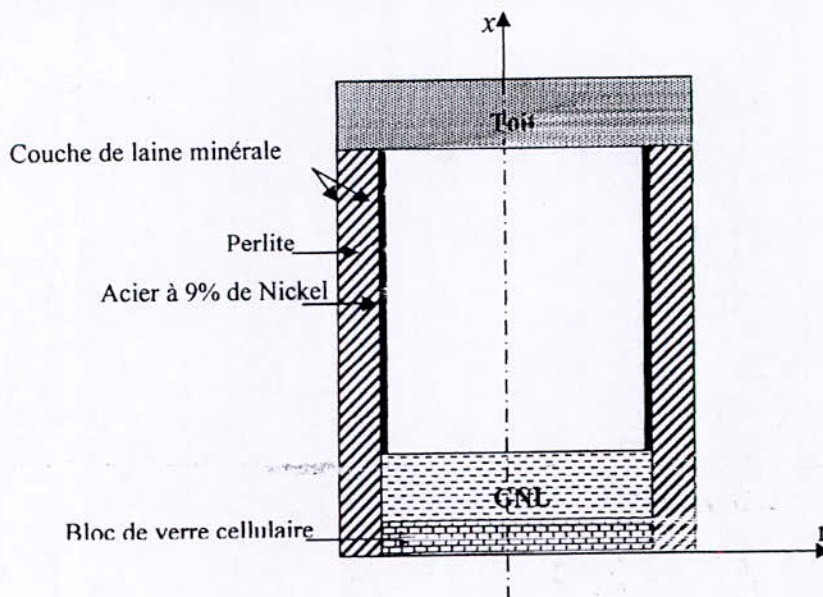


Fig. IV.2 Schéma simplifié d'un bac de stockage de GNL.

Les caractéristiques du bac étudié sont résumées dans le tableau suivant :

**Tableau IV.1 Caractéristiques thermiques des matériaux composant le bac de stockage de GNL étudié.**

Matériau	Epaisseur [m]	Conductivité thermique [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ]
Toit (Perlite)	0,914	0,0116
Paroi latérale (Perlite)	0,914	0,0116
Fond (Perlite+Laine de verre)	0,914	0,0191
Couche méthane	0,61	0,0058
Liner (Acier inox 92N)	0,01265	28,8967

- Le diamètre intérieur du bac est égal à 20,422 m ;
- La hauteur interne du bac est égale à 17,678 m ;
- L'émissivité du Liner varie entre 0,1 et 0,9 avec la température.

#### IV.4 Analogie thermique entre le cryostat et le bac de stockage de GNL

Le bac de stocke de GNL est assimilé à un système de double ailettes couplées thermiquement ; il est équivalent au couple ailette extérieure du haut – ailette intérieure. Le tableau IV.2 ci-dessous donne l'inventaire des flux thermiques échangés par chacune des ailettes des deux systèmes étudiés :

**Tableau IV.2 Inventaire des flux thermiques échangés par les ailettes extérieures du cryostat et du bac de stockage.**

Ailette extérieure du haut du cryostat	Ailette extérieure du bac de GNL
Flux de convection avec l'environnement	Flux de convection avec l'environnement
Flux de conduction entrant venant du couvercle	Flux de conduction entrant venant du toit
Flux de conduction sortant vers le socle du cryostat	Flux de conduction sortant vers le socle du bac de stockage
Flux de convection équivalente sortant vers l'ailette intérieure	Flux de conduction sortant vers l'ailette intérieure

A partir du tableau IV.2 ci-dessus, nous remarquons que les mêmes modes de transferts thermiques agissent sur les ailettes extérieures du cryostat et du bac de stockage de GNL à l'exception des flux sortants des ailettes extérieures vers les ailettes intérieures où il s'agit d'un transfert convectif équivalent pour le cryostat et d'un transfert conductif pour le bac de GNL.

A partir du chapitre III, reprenons l'équation (III.5) du flux de convection équivalente entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure :

$$Q_{conv} = h_e \cdot A_{pi} (T_{ph} - T_v) \tag{IV.1}$$

$h_e$  : Coefficient équivalent de convection entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure du cryostat.

Dans le bac de stockage de GNL, le flux de conduction sortant de l'ailette extérieure vers l'ailette intérieure s'écrit :

$$Q_{cond} = U_L \cdot \frac{A_L}{L} (T_{ph} - T_v) \tag{IV.2}$$

- $U_L$  : Conductivité latérale de l'enveloppe du bac ;
- $A_L$  : Surface latérale de l'élément.

Nous remarquons une analogie entre les deux équations (IV.1 et IV.2) où seul le coefficient d'échange thermique varie.

**Tableau IV.3 Inventaire des flux thermiques échangés par les ailettes intérieures du cryostat et du bac de stockage.**

Ailette intérieure du cryostat	Ailette intérieure du bac de GNL
Flux de convection entrant venant de l'ailette extérieure du haut	Flux de conduction entrant venant de l'ailette extérieure
Flux de conduction entrant venant du couvercle	Flux de conduction entrant venant du couvercle
Flux de conduction sortant vers le socle du cryostat	Flux de conduction sortant vers le socle du bac de stockage
Flux de convection sortant vers les vapeurs issues du bain liquide (Azote)	Flux de convection sortant vers les vapeurs issues du bain liquide (GNL)

A partir du tableau IV.3 ci-dessus, nous remarquons que les mêmes modes de transferts thermiques agissent sur les ailettes intérieures du cryostat et du bac de stockage de GNL, sauf pour les flux sortants des ailettes extérieures vers les ailettes intérieures où il s'agit d'un transfert convectif équivalent pour le cryostat et d'un transfert conductif pour le bac de GNL, et dont l'analogie a été démontrée ci-dessus, voir équations (IV.1) et (IV.2).

A partir de ces comparaisons effectuées, nous constatons qu'il suffit de remplacer le coefficient de convection équivalente entre l'ailette extérieure du haut et l'ailette intérieure  $h_e$  par le coefficient de conductivité latérale de l'enveloppe du bac  $U_L$  pour aboutir aux équations régissant la distribution de la température dans les deux ailettes du bac de stockage de GNL.

#### IV.5 Déduction des équations différentielles des températures des ailettes du bac de stockage de GNL

Reprenons du chapitre III les équations différentielles dont les solutions donnent les températures des deux ailettes du cryostat:

$$\frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} + \left( \frac{h_v R_e + h_e R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_p(x) - \frac{h_e R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_v(x) - \frac{h_v R_e}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_a \right) = 0 \quad (IV.3)$$

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} - \frac{h_e r_e + h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_v(x) + \frac{h_e r_e}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_p(x) + \frac{h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_i(x) = 0 \quad (IV.4)$$

Où l'expression de la température des vapeurs issues du bain cryogénique stocké est corrélée comme étant une fonction linéaire,  $T_i(x) = ax + b$ .

En appliquant l'analogie déduite précédemment, nous aboutissons aux équations différentielles suivantes et dont les solutions donnent les températures dans les deux ailettes du bac de stockage de GNL:

$$\frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} + \left( \frac{h_v R_e + (U_L/L') R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_p(x) - \frac{(U_L/L') R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_v(x) - \frac{h_v R_e}{k_p \cdot R_i \cdot e} T_a \right) = 0 \quad (IV.5)$$



$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} - \frac{(U_L/L')r_e + h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_v(x) + \frac{(U_L/L')r_e}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_p(x) + \frac{h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e} T_i(x) = 0 \quad (IV.6)$$

L'expression simplifiée des équations (IV.5) et (IV.6) s'écrit :

$$\frac{d^2 T_p(x)}{dx^2} + \Sigma_p T_p(x) + \Pi_p T_v(x) + \text{II}_p = 0 \quad (IV.7)$$

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} + \Sigma_v T_v(x) + \Pi_v T_p(x) + \text{II}_v x + \Omega_v = 0 \quad (IV.8)$$

Où :

$$\Sigma_p = \frac{h_v R_e + (U_L/L') R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e}$$

$$\Pi_p = -\frac{(U_L/L') R_i}{k_p \cdot R_i \cdot e}$$

$$\text{II}_p = -\frac{h_v R_e T_a}{k_p \cdot R_i \cdot e}$$

$$\Sigma_v = -\frac{(U_L/L') r_e + h_i r_i}{k_v \cdot r_i \cdot e}$$

$$\Pi_v = \frac{(U_L/L') r_e}{k_v \cdot r_i \cdot e}$$

$$\text{II}_v = \frac{h_i r_i a}{k_v \cdot r_i \cdot e}$$

$$\Omega_v = \frac{h_i r_i b}{k_v \cdot r_i \cdot e}$$

Dont la solution a été développée en annexe 1 et dont nous reprenons l'écriture:

$$T_v(x) = \frac{A_5}{Z} e^{s_1 x} + A_6 e^{s_2 x} + A_7 e^{s_3 x} + A_8 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_7} + \frac{1}{C_8} \quad (IV.9)$$

$$T_{ph}(x) = \frac{A_1}{Z} e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x} + A_3 e^{s_3 x} + A_4 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_5} + \frac{1}{C_6} \quad (IV.10)$$

Les variables de substitution sont données dans le tableau suivant :

N	Constante de substitution	Expression
01	Z	$\Sigma_v \Sigma_{ph} - \Pi_v \Pi_{ph}$
02	$s_1$	$\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
03	$s_2$	$-\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_{ph} + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_{ph} + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$

04	$s_3$	$\frac{1}{2}\sqrt{-2\left(\sum_{ph} + \sum_v + \sqrt{(\sum_{ph} + \sum_v)^2 - 4Z}\right)}$
05	$s_4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{-2\left(\sum_{ph} + \sum_v + \sqrt{(\sum_{ph} + \sum_v)^2 - 4Z}\right)}$
06	$C_1$	$Z.T_{ph}(0) + \Pi_{ph} \sum_v - \Pi_{ph} \Omega_v$
07	$C_2$	$Z.T'_{ph}(0) - \Pi_{ph} \Pi_v$
08	$C_3$	$\left[\sum_v^2 T_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \sum_v + \Omega_v) \Pi_{ph}\right] \sum_{ph} + T'_v(0) \Pi_{ph}^2 \Pi_v$ $+ \left[\Pi_{ph} \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Omega_v) \sum_v\right] \Pi_{ph} + \sum_v^2 \Pi_{ph}$
09	$C_4$	$\left[\sum_v^2 T'_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \sum_v + \Pi_v) \Pi_{ph}\right] \sum_{ph} +$ $+ T'_v(0) \Pi_{ph}^2 \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Pi_v) \sum_v \Pi_{ph}$
10	$C_5$	$\frac{\Pi_v \Pi_{ph}}{Z}$
11	$C_6$	$\frac{\Omega_v \Pi_{ph} - \sum_v \Pi_{ph}}{Z}$
12	$C_7$	$\frac{-\sum_{ph} \Pi_v}{Z}$
13	$C_8$	$\frac{\Pi_{ph} \Pi_v - \sum_{ph} \Pi_v}{Z}$
14	$C_9$	$Z.T'_v(0) - \Pi_{ph} \Pi_v + \sum_{ph} \Omega_v$
15	$C_{10}$	$Z.T'_v(0) + \sum_{ph} \Pi_v$
16	$C_{11}$	$Z\left(\sum_{ph} T'_v(0) - \Pi_v T_{ph}(0)\right) + \Omega_v \left(\Pi_v \Pi_{ph} + \sum_{ph}^2\right) -$ $+ \Pi_{ph} \Pi_v \left(\sum_v + \sum_{ph}\right)$
17	$C_{12}$	$\Pi_v \left(\Pi_v \Pi_{ph} + \sum_{ph}^2\right) - Z\left(\sum_{ph} T'_v(0) + \Pi_v T'_{ph}(0)\right)$
18	$A_1$	$\frac{s_1^3 C_1 + s_1^2 C_2 + s_1 C_3 + C_4}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$
19	$A_2$	$\frac{-(s_2^3 C_1 + s_2^2 C_2 + s_2 C_3 + C_4)}{Z(s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$
20	$A_3$	$\frac{s_3^3 C_1 + s_3^2 C_2 + C_3 s_3 + C_4}{Z(s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
21	$A_4$	$\frac{C_4 + s_4(C_3 + s_4^2 C_1 + s_4 C_2)}{Z[s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2)s_4 - s_1 s_2 s_3]}$
22	$A_5$	$\frac{s_1^3 C_9 + s_1^2 C_{10} + s_1 C_{11} + C_{12}}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$

2 3	$A_6$	$\frac{-(s_2^3 C_9 + s_2^2 C_{10} + s_2 C_{11} + C_{12})}{Z(s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$
2 4	$A_7$	$\frac{s_3^3 C_9 + s_3^2 C_{10} + C_3 s_{11} + C_{12}}{Z(s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
2 5	$A_8$	$\frac{C_{12} + s_4(C_{11} + s_4^2 C_9 + s_4 C_{10})}{Z[s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2)s_4 - s_1 s_2 s_3]}$

**IV.6 Elaboration d’une procédure mathématique pour la détermination des débits de boil off dans les bacs de stockage de GNL**

Les réservoirs de stockage de GNL ne sont pas entièrement remplis pour disposer d’un espace de vapeur tampon qui évite les variations brusques de pression au stockage et au déstockage du liquide. Cet espace vapeur minimal est d’environ 5% du volume total de stockage, Rojey[2]. Les méthodes classiques de calcul de boil off telles qu’utilisées par la Sonatrach par exemple, ne prennent pas en compte les phénomènes thermiques de conducto-convection à l’intérieur de la phase gazeuse. La conséquence directe de cette simplification est une sous estimation du débits de boil off, mais on ne peut mesurer que le taux de boil off total à partir du débit massique des vapeurs issues du bain.

Le modèle proposé ici prend en compte le rayonnement incident sur le fluide stocké et le flux conducto-convectif transmis par la paroi mouillée du réservoir au bain de GNL. Le GNL reçoit un flux radiatif du toit et de la paroi interne de l’enveloppe ; ce qui nécessite donc de déterminer la température de chaque élément de la paroi en utilisant le modèle analytique développé pour l’analyse du cryostat à Azote liquide. La figure IV.3 ci- dessous illustre la discrétisation de l’ailette paroi intérieure du bac de stockage.

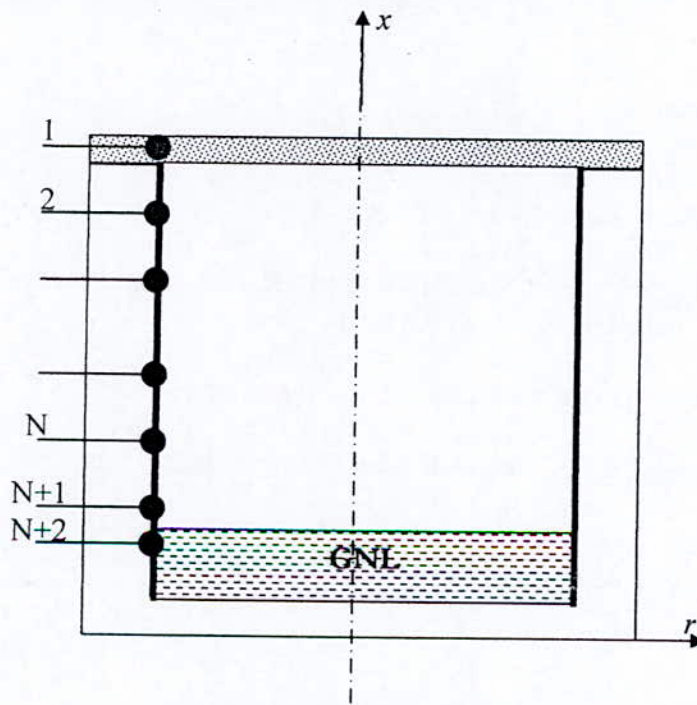


Fig. IV.3 Schéma simplifié de la discrétisation de l’ailette-paroi intérieure du bac de stockage.

La figure IV.4 ci-dessous représente le volume de GNL stocké avec l'inventaire des échanges thermiques qui l'affectent :

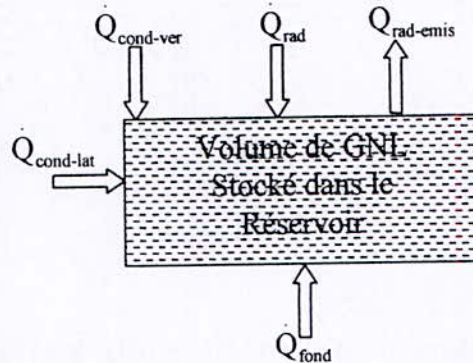


Fig. IV.4 Bilan thermique du volume de GNL.

Avec :

- $Q_{cond-ver}$  : Flux de conduction vertical entrant à travers la paroi du liner ;
- $Q_{cond-lat}$  : Flux de conduction entrant latéralement ;
- $Q_{rad}$  : Flux radiatif entrant, émis par la paroi intérieure et le toit du bac ;
- $Q_{rad-emis}$  : Flux radiatif émis de la surface libre du GNL vers son entourage ;
- $Q_{fond}$  : Flux de conduction entrant par le fond du bac.

L'équation du bilan thermique qui permet de calculer le taux de boil off s'écrit :

$$\dot{m}h_{fg} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{cond-ver} + \dot{Q}_{cond-lat} + \dot{Q}_{fond} - \dot{Q}_{rad-emis} \tag{IV.11}$$

Avec :

- $m$  : Débit de boil off ;
- $h_{fg}$  : Enthalpie de vaporisation du GNL.

#### IV.7 Détermination de la quantité de chaleur radiative reçue par le GNL

Le GNL stocké reçoit deux flux thermiques radiatifs, le premier venant du toit et le second de la paroi intérieure de l'enveloppe du bac.

##### IV.7.a Détermination du flux radiatif émis par le toit et reçu par le GNL

La figure IV.5 ci-dessous illustre l'inventaire des échanges thermiques subis par le toit :

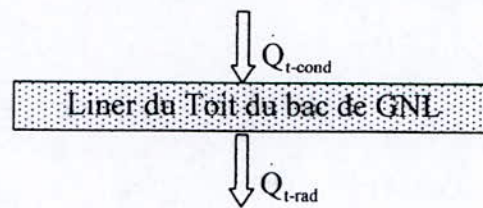


Fig.IV.5 Bilan thermique du toit du bac de stockage de GNL.

Avec :

$Q_{t-cond}$  : Flux de conduction venant de l'environnement et entrant dans le toit du bac de GNL ;

$Q_{t-rad}$  : Flux radiatif sortant du toit vers le GNL stocké au bac.

Où :

$$Q_{t-cond} = U_t A_t (T_a - T_t) \tag{IV.12}$$

$$Q_{t-rad} = F_{t\_GNL} \epsilon_t \sigma A_t (T_t^4 - T_{GNL}^4) \tag{IV.13}$$

- $A_t$  : Surface interne du toit ;
- $U_t$  : Conductance thermique de l'isolant du toit ;
- $T_a$  : Température ambiante ;
- $T_t$  : Température du toit ;
- $F_{t\_GNL}$  : Facteur de forme Toit-Surface de GNL, cf. Annexe 2 ;
- $T_{GNL}$  : Température d'ébullition de GNL ;
- $\epsilon_t$  : Emissivité du toit ;
- $\sigma$  : Constante de Stephan Boltzmann.

L'équation de bilan du toit s'écrit alors :

$$U_t (T_a - T_t) = F_{t\_GNL} \epsilon_t \sigma (T_t^4 - T_{GNL}^4) \tag{IV.14}$$

D'où, l'expression de la température du toit:

$$\Rightarrow T_t = -\frac{F_{t\_GNL} \epsilon_t \sigma}{U_t} (T_t^4 - T_{GNL}^4) + T_a \tag{IV.15}$$

La valeur de cette température, sera déterminée par calculs itératifs.

**Nota :** Les expressions des facteurs de forme utilisées sont détaillées en Annexe 2.

#### IV.7.b Détermination du flux radiatif émis par la paroi interne de l'enveloppe du bac et reçu par le GNL

En considérant une évolution linéaire de la température des vapeurs issues du bain de GNL, variant entre la température d'ébullition du GNL et celle du toit et en utilisant les expressions du modèle analytique qui permet de calculer les températures de l'enveloppe extérieure et celles du vase du bac de stockage, on obtient les températures de chaque élément de l'enveloppe intérieure.

Le flux de chaleur par radiation émis par un élément de la paroi intérieure du bac au bain de GNL est donné par l'expression :

$$\dot{Q}_{rad-pi-GNL} = \epsilon_{vi} \sigma A_{vi} F_{vi-GNL} (T_{vi}^4 - T_{GNL}^4) \tag{IV.16}$$

Avec :

- $\epsilon_{vi}$  : Émissivité de l'élément  $i$  de la paroi interne du bac ;
- $T_{vi}$  : Température de l'élément  $i$  de la paroi interne du bac;
- $A_{vi}$  : Surface de l'élément  $i$  de la paroi interne du bac;
- $F_{vi-GNL}$  : Facteur de forme entre l'élément  $i$  de la paroi interne du bac et la surface libre du GNL, (voir annexe 2).

La quantité de chaleur radiative émise par la paroi intérieure et reçue par le GNL est représentée par la somme des quantités de chaleurs radiatives des éléments de la paroi intérieure de l'enveloppe, soit :

$$\dot{Q}_{rad-pi-GNL} = \sum_{i=1}^N [\epsilon_{vi} \sigma A_{vi} F_{vi-GNL} (T_{vi}^4 - T_{GNL}^4)] \tag{IV.17}$$

Le flux radiatif total que reçoit le GNL s'écrit :

$$\dot{Q}_{rad} = F_{t\_GNL} \epsilon_t \sigma A_t (T_t^4 - T_{GNL}^4) + \sum_{i=1}^N [\epsilon_{vi} \sigma A_{vi} F_{vi-GNL} (T_{vi}^4 - T_{GNL}^4)] \tag{IV.18}$$

#### IV.8 Détermination de la quantité de chaleur de conduction verticale reçue par le GNL

La figure IV.6 ci-dessous illustre un élément de volume à la surface libre du GNL et les flux de conduction latéraux :

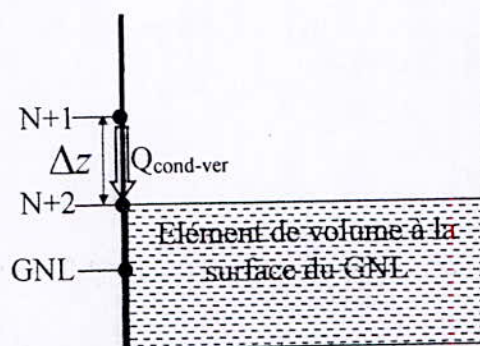


Fig. IV.6 Élément de volume à la surface libre du GNL illustrant le flux de conduction latérale par le Liner.

Le bilan thermique s'écrit alors :

$$\dot{Q}_{cond-vert} = \frac{k_v A_{vx}}{\Delta z} (T_{N+1} - T_{GNL}) \tag{IV.19}$$

#### IV.9 Détermination de la quantité de chaleur de rayonnement émise par la surface libre de GNL

La figure IV.7 ci-dessous illustre un élément de volume de la surface libre du GNL et le flux radiatif émis :

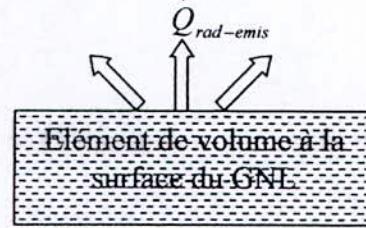


Fig. IV.7 Elément de volume du GNL illustrant le flux radiatif émis par la surface libre.

L'énergie totale émise par la surface de GNL par rayonnement s'écrit :

$$Q_{rad-emise} = \sigma T_{GNL}^4 A_{GNL} \tag{IV.20}$$

Avec :

$A_{GNL}$  : Surface libre du GNL.

#### IV.10 Détermination du flux de chaleur conductif venant du fond du bac et reçu par le GNL

Le flux de conduction que reçoit le GNL par le fond s'écrit :

$$Q_{fond} = U_B A_B (T_S - T_{GNL}) \tag{IV.21}$$

Où :

$T_S$  : Température du socle du bac ;

$U_B$  : Conductance thermique équivalente du fond du réservoir (bloc de verre cellulaire);

$A_B$  : Surface du socle du contenant cryogénique (GNL).

#### IV.11 Détermination du flux de conduction latérale reçu par le GNL

Le gaz liquéfié stocké reçoit de l'environnement un flux de conduction qui arrive latéralement à travers les isolations ; son expression est donnée par:

$$Q_{cond-lat} = \frac{U_L A_L}{L'} (T_p - T_{GNL}) \tag{IV.22}$$

$L'$  : Distance entre l'enveloppe extérieure du bac et son vase ;

$U_L$  : Conductivité latérale de l'enveloppe du bac ;

$A_L$  : Surface mouillée du bac ;

$T_p$  : Température de l'enveloppe extérieure du bac.

#### IV.12 Résultats et interprétation

Nous avons réalisé une étude paramétrique qui nous permet d'estimer l'influence de chacun des paramètres sur le débit de boil off de GNL.

##### IV.12.a Influence du taux de remplissage du bac

La figure IV.8 ci-dessous illustre la variation du débit de boil-off par rapport au taux de remplissage du bac :

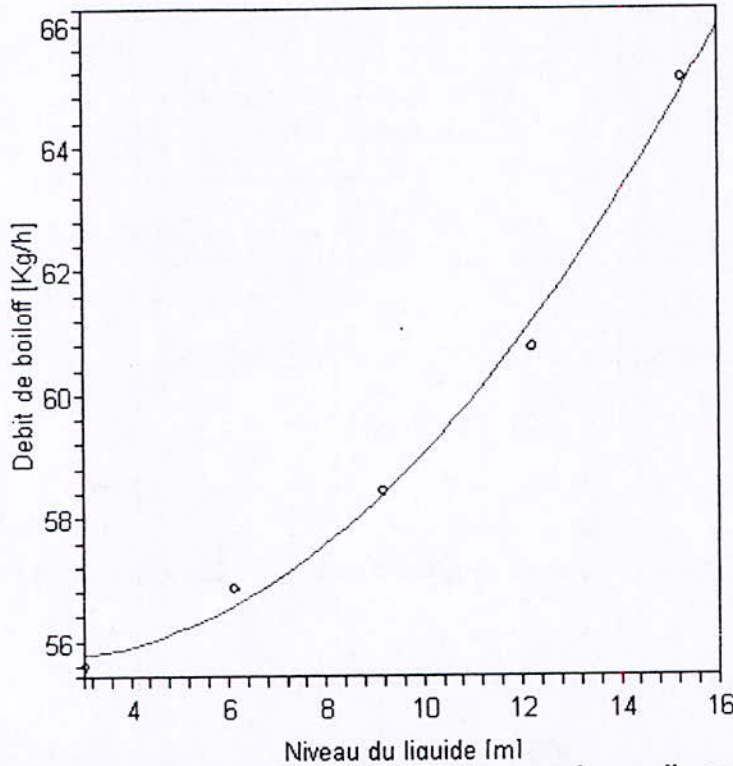


Fig.IV.8 Variation du débit de boil off par rapport au taux de remplissage du bac.

A partir de cette figure, nous remarquons que plus le bac est rempli, plus le débit de boil off augmente. Les principales causes de cette augmentation tiennent aux faits suivants :

- Le flux radiatif venant du toit vers le liquide augmente à cause du rapprochement des deux surfaces échangeant des flux radiatifs (Toit - Liquide).
- Le flux de conduction que reçoit le liquide de l'environnement augmente à cause de l'augmentation de la surface d'échange (surface mouillée).

Le flux de conduction venant du toit vers le liquide augmente car les pertes par convection avec les vapeurs issues du bain liquide diminuent.

#### IV.12.b Influence de l'émissivité du liner sur le débit de boil off

La figure IV.9 illustre l'influence de l'émissivité du liner sur la variation du débit de boil off ; on remarque une variation proportionnelle entre l'émissivité du liner et le débit d'évaporation. Dans la pratique, il est préconisé des valeurs de l'émissivité du liner inférieure à 0,3 pour minimiser les pertes par évaporation et rester dans le domaine de sécurité par rapport à l'implosion du bac



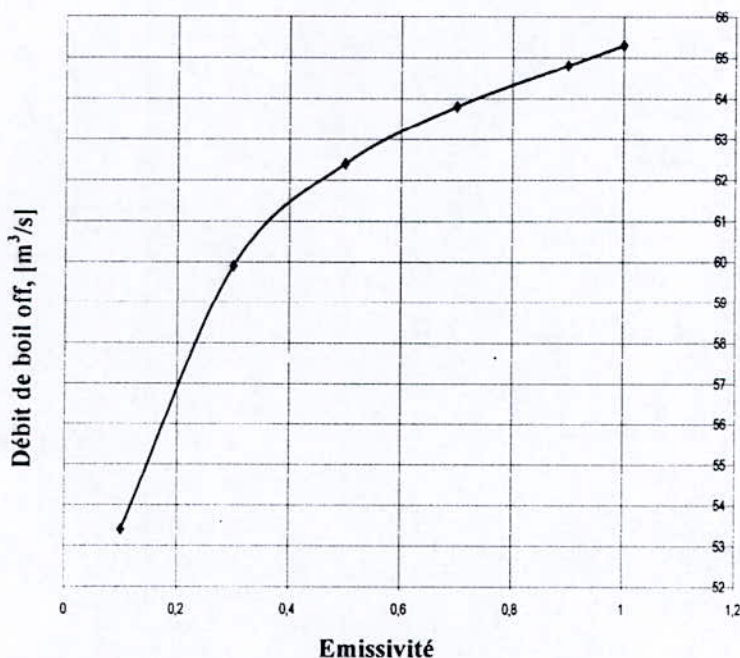


Fig.IV.9 influence de l'émissivité du liner sur le débit de boil off

**IV.12.c Influence de la température ambiante sur le débit de boil off**

La figure IV.10 ci-dessus illustre l'influence de la température ambiante sur le taux de boil off. Nous remarquons que plus la température ambiante augmente, plus le débit de boil off augmente. Cette concordance du comportement entre ces deux variables est très acceptable à partir du moment où le flux thermique de conduction que reçoit le liquide stocké de l'environnement est influencé par le potentiel de températures Liquide - Paroi externe de l'enveloppe extérieure du bac qui est directement influencée par la température ambiante. Un bon choix de revêtement conjugué avec une bonne isolation permettrait de pallier les entrées thermiques par l'environnement et de diminuer ainsi les pertes par évaporation du GNL.

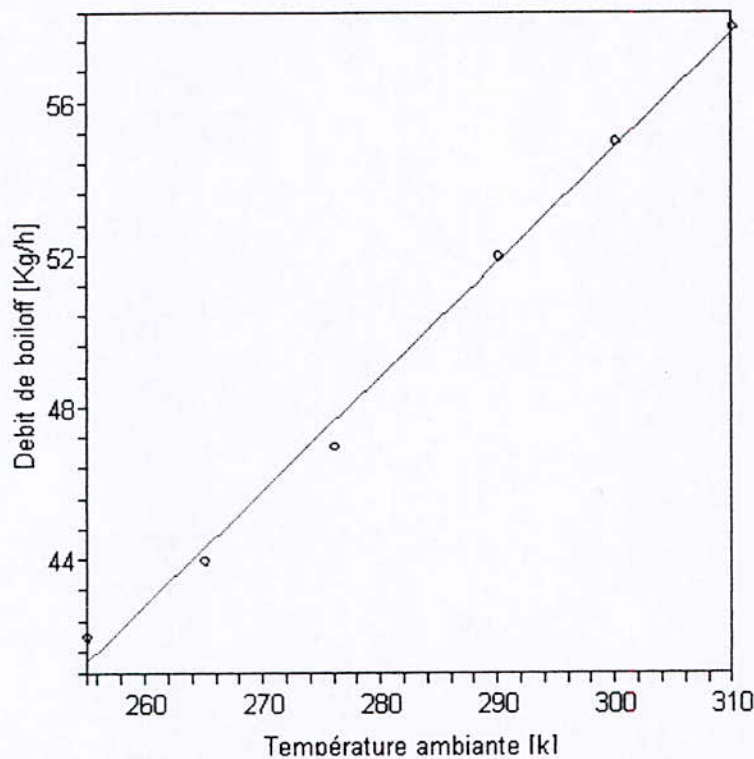


Fig.IV.10 Influence de la température ambiante sur le débit de boil off.

IV.13

**Conclusion**

Le modèle mathématique ici élaboré permet d’obtenir les champs de températures analytiques des parois intérieure et extérieure d’un conteneur cryogénique, amenant ainsi une meilleure appréciation des échanges thermiques qui s’y produisent. La SONATRACH utilise des modèles numériques de prédiction des débits d’évaporation de GNL en considérant l’isothermalité atmosphérique de l’enveloppe extérieure simplifiant ainsi les calculs au détriment de leur précision.

L’étude paramétrique quant à elle nous a permis de montrer que :

- Le choix de l’émissivité du liner est très important. Avoir une émissivité plus faible donnerait des débits d’évaporation moins importants.
- Plus le bac est rempli et plus le débit d’évaporation est élevé. Il faut noter qu’un remplissage total du bac est risqué, du fait d’une probable rupture de l’enveloppe, et un niveau trop bas conduirait à une implosion par dépressurisation excessive.

La température atmosphérique influe de façon assez importante sur le débit de boil off, ce qui valorise l’importance d’un bon choix du revêtement qui minimiserait les entrées de chaleur..

# **CHAPITRE V**

## **CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS**

## V.1 Conclusion générale

Ce travail de magistère intitulé « *Détermination analytique et numérique des champs de températures dans un cryostat à Azote liquide* » se divise en trois parties principales; la première porte sur la modélisation d'un cryostat à Azote liquide en un système de trois ailettes couplées thermiquement, la deuxième partie porte sur la validation du modèle mathématique élaboré par la comparaison des résultats obtenus avec les résultats numériques et expérimentaux de Khemis [5]. La troisième partie consiste à transposer le modèle analytique au comportement des bacs de stockage de GNL puis à élaborer un code de calcul pour la détermination des taux de boil off.

Le modèle analytique élaboré consiste à considérer le cryostat comme un système composé de trois ailettes creuses concentriques et couplées thermiquement deux à deux. La première et la deuxième, de même longueur, sont ancrées dans le couvercle du cryostat maintenu à  $300\text{ K}$ ; la deuxième et la troisième ailettes, faites de même métal, sont jointes bout à bout; l'une est ancrée dans le couvercle thermalisé à  $300\text{ K}$ , l'autre a sa racine confondue avec le fond de l'enveloppe extérieure du cryostat dont la température a été évaluée à  $293\text{ K}$  qui est la température d'un écran thermique flottant entre la température ambiante de  $300\text{ K}$  et celle du fond du vase cryogénique égale à  $77,4\text{ K}$ .

Les bilans thermiques réalisés sur les ailettes prennent en compte la conduction dans le corps de l'ailette et une convection naturelle qui s'ajoute à une convection équivalente de rayonnement sur une des parois de l'ailette. Les échanges radiatifs ont été remplacés par des échanges convectifs équivalents, car on est en présence d'écart de températures modérés. Ces bilans thermiques des trois ailettes donnent lieu à trois équations différentielles ordinaires non homogènes et couplées qui ont été résolues d'abord analytiquement en utilisant la méthode des transformées de Laplace et ensuite numériquement par la méthode des éléments finis. La première méthode utilise des coefficients de convection et de conduction moyens sur toute la longueur des ailettes; la deuxième méthode utilise des valeurs ponctuelles des coefficients de conduction et de convection ainsi qu'un échange radiatif avec des facteurs de forme évolutifs.

La résolution analytique du problème, consiste d'abord à transformer les équations différentielles ordinaires en équations algébriques par les transformées de Laplace, ensuite à résoudre celles-ci. On note que le système d'équations de trois équations différentielles de second ordre nécessite six conditions aux limites qui sont :

- Température en base d'ailette intérieure égale à  $300\text{ K}$  ;
- Température en bout d'ailette intérieure égale à  $77,4\text{ K}$  ;
- Température en base d'ailette extérieure du haut égale à  $300\text{ K}$  ;
- Température en bout d'ailette extérieure du bas égale à  $293\text{ K}$  ;
- Egalité des températures des deux ailettes extérieures au point de jonction ;
- Continuité du gradient de température des deux ailettes extérieures au point de jonction.

Les résultats obtenus permettent d'une part, de conclure que le modèle thermique de trois ailettes concentriques et couplées adopté traduit fidèlement la réalité du comportement en température du cryostat telle que validée par les mesures expérimentales de Khemis [5]. D'autre part, les résultats des modèles analytique et numérique se traduisent par les mêmes

valeurs de températures, ce qui permet de valider le modèle analytique à coefficients de conduction et de convection moyens.

Cette modélisation thermique étant ainsi validée, l'approche adoptée a été transposée à l'analyse du comportement thermique d'un bac de stockage de GNL pour déterminer les débits d'évaporation ou taux de boil off. Le modèle obtenu ne comporte que deux ailettes couplées de même longueur.

Les équations différentielles caractérisant le comportement thermique des deux ailettes du bac de stockage ont été obtenues par analogie des coefficients d'échange du cryostat à Azote liquide :

- 1- L'enveloppe intérieure reçoit un flux de conduction à travers l'isolation en perlite (plutôt qu'un flux de convection équivalente), l'échange avec les vapeurs de boil off étant inchangé ;
- 2- L'enveloppe extérieure cède un flux de chaleur par conduction à travers l'isolation en perlite (plutôt qu'un flux de convection équivalente), l'échange avec la température ambiante étant inchangé.

Les coefficients d'échange ainsi obtenus ont été transposés dans les équations différentielles.

Les résultats obtenus montrent que :

- L'hypothèse d'iso thermalité de l'enveloppe extérieure du cryostat considérée par la Sonatrach dans ses calculs de boil off n'est pas consistante du fait que le modèle démontre un écart maximal de température atteignant les  $15 K$  à la base du bac de stockage ce qui favorise la stratification du GNL stocké et la réduction du taux de boil off ;
- Plus le bac est rempli et plus le débit d'évaporation est élevé : ce résultat s'explique par la prépondérance de l'échange conductif entre l'enveloppe intérieure et le GNL, sur l'échange convectif avec les vapeurs et par rayonnement entre l'enveloppe intérieure et le fond du réservoir ;
- On peut noter à ce propos que le bac n'est jamais rempli à  $100\%$  pour laisser un espace vapeur suffisant, et qu'il n'est jamais vidé complètement pour un maintien en basse température. Les débits de stockage et déstockage doivent être limités pour éviter respectivement, une surpression prohibitive ou une dépression excessive qui pourrait induire une implosion ;
- Le milieu extérieur influence les entrées de chaleur vers le bac par convection et par rayonnement ; on peut réduire celle-ci en évitant les courants d'air sur les parois des réservoirs et en revêtant celle-ci par une peinture non absorbante ;
- Bien que le réservoir de stockage de GNL fonctionne plutôt est le plus souvent plein que vide , une faible émissivité du liner réduit le boil off et prolonge le maintien en froids lorsque le réservoir est vide .

## V.2- Recommandations

Le taux de boil off économiquement acceptable dans une usine de GNL doit être évalué en incorporant des considérations économiques qui sont applicables; celui-ci peut varier selon qu'il est perdu à la torche ou utilisé comme gaz combustible. S'il faut le réduire à des valeurs minimales, celles-ci dépendent du surcoût créé par l'isolation thermique améliorée.

Les utilisations alternatives du boil off sont :

- Soit le gaz est envoyé à la torche, au quel cas il est perdu ;
- Soit le gaz est utilisé comme combustible, ce qui représente un léger surcoût (qui reste à déterminer) par rapport au gaz naturel d'alimentation ;
- Soit le gaz est reliquéfié dans une installation annexe, ce qui représente un surcoût à déterminer par rapport au GNL non reliquéfié.

Les taux de boil off difficilement prévisibles ou maîtrisables, sont probablement ceux qui sont consécutifs à la mise en froid des cuves de méthanier, plus ou moins maintenu en froid au début de chargement ; ces quantités peuvent sans doute être mesurées par l'opérateur concerné et imputées selon les conditions du marché, soit au client soit au fournisseur. Si le producteur en supporte le coût, il lui appartient à justifier les installations de reliquefaction éventuelles.

Le problème de réduction de boil off des usines de GNL et des installations de chargement mérite donc un examen global basé sur des considérations économiques applicables. Ce problème mérite certainement un examen approfondi .

# ANNEXE 1

## RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES COUPLEES PAR LA METHODE DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

Dans ce qui suit, nous présentons la méthode des transformées de Laplace pour la résolution du système d'équations différentielles couplées régissant la distribution de la température dans les ailettes intérieure et extérieure.

Les bilans thermiques effectués au chapitre III du mémoire ont donné les équations simplifiées suivantes :

$$\frac{d^2 T_{ph}(x)}{dx^2} + \sum_p T_{ph}(x) + \prod_p T_v(x) + \Pi_p = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T_v(x)}{dx^2} + \sum_v T_v(x) + \prod_v T_{ph}(x) + \Pi_v x + \Omega_v = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 T_{pb}(x)}{dx^2} + \sum_{pb} T_{pb}(x) = \Pi_{pb} \quad (3)$$

L'équation (3) peut être résolue indépendamment des deux autres, c'est une équation de second ordre avec second membre dont la solution est classique et s'écrit :

$$\sin(\sqrt{\sum_{pb}} x) \cdot Cst_2 + \cos(\sqrt{\sum_{pb}} x) \cdot Cst_1 + \frac{\Pi_{pb}}{\sum_{pb}} \quad (4)$$

Où :

$Cst_1$  et  $Cst_2$  sont des constantes d'intégration.

Les équations (1) et (2) sont couplées, et pour les résoudre nous utilisons la méthode des transformées de Laplace (cf. Poularikas[17] et Mauch[18]), qui fait appel aux correspondances suivantes :

Fonction :  $\mathcal{L}(T(x)) \rightarrow \hat{T}(s)$

Constante :  $\mathcal{L}(C) \rightarrow \frac{C}{s}$

Variable :  $\mathcal{L}(C.x) \rightarrow \frac{C}{s^2}$

Dérivée :  $\mathcal{L}\left(\frac{d^2 T(x)}{dx^2}\right) \rightarrow s^2 \hat{T}(s) - T'(0) - sT(0)$

Avec :

$\mathcal{L}$  : Opérateur de Laplace ;

$x$  : Variable dans l'espace réel ;

$s$  : Variable dans l'espace de Laplace ;

$T(x)$  : Fonction de  $x$  dans le domaine réel ;

$\hat{T}(s)$  : Transformée de Laplace de la fonction  $T(x)$ .

L'équation (1) devient :

$$\hat{T}_{ph}(s)(s^2 + \sum_p) + \prod_p \hat{T}_v(s) + \frac{\Pi_p}{s} - sT_{ph}(0) - T'_{ph}(0) = 0 \quad (5)$$



L'équation (2) devient :

$$\hat{T}_v(s)(s^2 + \Sigma_v) + \Pi_v \hat{T}_{ph}(s) + \frac{\Pi_v}{s^2} + \frac{\Omega_v}{s} - sT_v(0) - T_v'(0) = 0 \quad (6)$$

Notons que dans les équations (5) et (6) apparaissent les valeurs initiales des températures des ailettes  $T_{ph}(0)$ , qui est en même temps  $T_{pb}(l)$  obtenue à partir de l'équation (4) pour  $x=l$  (condition de continuité au point de contact des deux ailettes extérieures), et  $T_v(0)$ , qui est en même temps la température du liquide cryogénique stocké (77,4 K dans notre cas), ainsi que les valeurs initiales de leurs dérivées  $T'_{ph}(0)$  et  $T'_v(0)$ . Ces deux dernières valeurs sont traitées comme des constantes lors de la procédure de résolution puis déterminées à la fin par application des conditions aux limites.

Ainsi donc, les équations (5) et (6) forment un système algébrique de premier degré en  $\hat{T}_{ph}(s)$  et  $\hat{T}_v(s)$  dont la solution s'obtient sans difficulté particulière pour donner :

$$\hat{T}_{ph}(s) = \frac{1}{s^2(s^2 \Sigma_p + s^4 + \Sigma_v \Sigma_p + \Sigma_v s^2 - \Pi_v \Pi_p)} \left[ -T_v(0) \cdot s^2 \Pi_p - s^3 T_v(0) \Pi_p + \Pi_v \Pi_p + \Omega_v s \Pi_p + s^4 T'_{ph}(0) + s^5 T_{ph}(0) - s^3 \Pi_p + \Sigma_v T'_{ph}(0) s^2 + \Sigma_v s^3 T_{ph}(0) - s \Sigma_v \Pi_p \right] \quad (7)$$

$$\hat{T}_v(s) = \frac{1}{s^2(s^2 \Sigma_p + s^4 + \Sigma_v \Sigma_p + \Sigma_v s^2 - \Pi_v \Pi_p)} \left[ T_v(0) \cdot s^2 \Sigma_p + s^3 T_v(0) \Sigma_p - \Omega_v s \Sigma_p + s^4 T'_v(0) - s^5 T_v(0) - s^3 \Omega_v - \Pi_v T'_{ph}(0) s^2 - \Pi_v s^3 T_{ph}(0) + s \Pi_v \Pi_p - \Pi_v \Sigma_p - s^2 \Pi_v \right] \quad (8)$$

Pour faciliter la transformation inverse ( $\mathcal{Z}^{-1}$ ) des équations (7) et (8), il est plus commode de présenter chacune des fonctions (7) et (8) sous la forme d'une somme de fractions rationnelles. Pour ce faire, nous procédons de la manière suivante :

Notons d'abord que les deux expressions (7) et (8) possèdent le même dénominateur, qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$s^2(s^2 \Sigma_p + s^4 + \Sigma_v \Sigma_p + \Sigma_v s^2 - \Pi_v \Pi_p) = s^2(s^2 \Sigma_p + s^4 + \Sigma_v s^2 + Z) = s^2(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)$$

Avec :  $Z = \Sigma_v \Sigma_p - \Pi_v \Pi_p$  et  $s_1$  à  $s_4$  définies par les expressions figurant dans les lignes de 2 à 5 du tableau A1-1 ci-dessous.

A présent, on peut dans une première étape, écrire l'expression (7) sous la forme :

$$\hat{T}_{ph}(s) = \frac{1}{C_5(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)} \left[ C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4 \right] + \frac{1}{s^2 C_6} + \frac{1}{s C_7} \quad (9)$$

Avec  $C_1$  à  $C_7$  définies par les expressions figurant dans les lignes de 6 à 12 du tableau A1-1.

Dans une seconde étape l'expression (9) est écrite sous forme d'une somme de fraction rationnelles, eq(11) ci-après, dont les constantes  $A_1$  à  $A_4$  sont obtenues après réduction à nouveau au dénominateur commun et identification :

$$\hat{T}_{ph}(s) = \frac{A_1}{C_5(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} + \frac{A_3}{(s - s_3)} + \frac{A_4}{(s - s_4)} + \frac{1}{s^2 C_6} + \frac{1}{s C_7} \quad (11)$$

Les constantes  $A_1$  à  $A_4$  sont définies par les expressions figurant dans les lignes de 18 à 21 du tableau A1-1.

On procède de la même façon avec l'équation (8) pour aboutir à l'équation (12) ci-après :

$$\hat{T}_v(s) = \frac{A_5}{C_5(s-s_1)} + \frac{A_6}{(s-s_2)} + \frac{A_7}{(s-s_3)} + \frac{A_8}{(s-s_4)} + \frac{1}{s^2 C_8} + \frac{1}{s C_9} \quad (12)$$

Les expressions des constantes de substitution ( $C_7$  à  $C_{12}$  et  $A_5$  à  $A_8$ ) correspondant à cette dernière procédure figurent également dans les lignes de 12 à 17 pour  $C_7$  à  $C_{12}$  et de 22 à 25 pour  $A_5$  à  $A_8$ .

Tableau A1-1 : Expression des constantes de substitution

N	Constante de substitution	Expression
01	Z	$\Sigma_v \Sigma_p - \Pi_v \Pi_p$
02	$s_1$	$\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_p + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_p + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
03	$s_2$	$-\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_p + \Sigma_v - \sqrt{(\Sigma_p + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
04	$s_3$	$\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_p + \Sigma_v + \sqrt{(\Sigma_p + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
05	$s_4$	$-\frac{1}{2} \sqrt{-2 \left( \Sigma_p + \Sigma_v + \sqrt{(\Sigma_p + \Sigma_v)^2 - 4Z} \right)}$
06	$C_1$	$Z T_{ph}(0) + \Pi_p \Sigma_v - \Pi_p \Omega_v$
07	$C_2$	$Z T'_{ph}(0) - \Pi_p \Pi_v$
08	$C_3$	$\left[ \Sigma_v^2 T_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \Sigma_v + \Omega_v) \Pi_p \right] \Sigma_p + T_v(0) \Pi_p^2 \Pi_v + \left[ \Pi_p \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Omega_v) \Sigma_v \right] \Pi_p + \Sigma_v^2 \Pi_p$
09	$C_4$	$\left[ \Sigma_v^2 T'_{ph}(0) - (T'_v(0) \cdot \Sigma_v + \Pi_v) \Pi_p \right] \Sigma_p + T'_v(0) \Pi_p^2 \Pi_v - (T'_{ph}(0) \cdot \Pi_v + \Pi_v) \Sigma_v \Pi_p$
10	$C_5$	$\frac{\Pi_v \Pi_p}{Z}$
11	$C_6$	$\frac{\Omega_v \Pi_p - \Sigma_v \Pi_p}{Z}$
12	$C_7$	$\frac{-\Sigma_p \Pi_v}{Z}$
13	$C_8$	$\frac{\Pi_p \Pi_v - \Sigma_p \Pi_v}{Z}$
14	$C_9$	$Z T_v(0) - \Pi_p \Pi_v + \Sigma_p \Omega_v$
15	$C_{10}$	$Z T'_v(0) + \Sigma_p \Pi_v$
16	$C_{11}$	$Z \left( \Sigma_p T_v(0) - \Pi_v T_{ph}(0) \right) + \Omega_v \left( \Pi_v \Pi_p + \Sigma_p^2 \right) - \Pi_p \Pi_v \left( \Sigma_v + \Sigma_p \right)$
17	$C_{12}$	$\Pi_v \left( \Pi_v \Pi_p + \Sigma_p^2 \right) - Z \left( \Sigma_p T'_v(0) + \Pi_v T'_{ph}(0) \right)$

18	$A_1$	$\frac{s_1^3 C_1 + s_1^2 C_2 + s_1 C_3 + C_4}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$
19	$A_2$	$\frac{-(s_2^3 C_1 + s_2^2 C_2 + s_2 C_3 + C_4)}{Z(s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$
20	$A_3$	$\frac{s_3^3 C_1 + s_3^2 C_2 + C_3 s_3 + C_4}{Z(s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
21	$A_4$	$\frac{C_4 + s_4(C_3 + s_4^2 C_1 + s_4 C_2)}{Z[s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2)s_4 - s_1 s_2 s_3]}$
22	$A_5$	$\frac{s_1^3 C_9 + s_1^2 C_{10} + s_1 C_{11} + C_{12}}{(s_1 - s_4)(s_1 - s_3)(s_1 - s_2)}$
23	$A_6$	$\frac{-(s_2^3 C_9 + s_2^2 C_{10} + s_2 C_{11} + C_{12})}{Z(s_2 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}$
24	$A_7$	$\frac{s_3^3 C_9 + s_3^2 C_{10} + C_3 s_{11} + C_{12}}{Z(s_3 - s_4)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$
25	$A_8$	$\frac{C_{12} + s_4(C_{11} + s_4^2 C_9 + s_4 C_{10})}{Z[s_4^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s_4^2 + (s_2 s_3 + s_1 s_3 + s_1 s_2)s_4 - s_1 s_2 s_3]}$

Les solutions du système comprenant les équations (1) et (2) qui donnent les températures des ailettes extérieure du haut ( $T_{ph}$ ) et intérieure ( $T_v$ ), sont finalement obtenues en procédant à la transformation inverse selon le schéma défini par les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\hat{T}(s)) &\rightarrow T(x) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{B.s}\right) &\rightarrow \frac{A}{B} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{B.s^2}\right) &\rightarrow \frac{A}{B}.x \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{B(s-s_0)}\right) &\rightarrow \frac{A}{B}e^{s_0 x} \end{aligned}$$

Les équations (11) et (12) deviennent :

$$T_{ph}(x) = \frac{A_1}{C_5} e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x} + A_3 e^{s_3 x} + A_4 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_6} + \frac{1}{C_7} \quad (13)$$

$$T_v(x) = \frac{A_5}{C_5} e^{s_1 x} + A_6 e^{s_2 x} + A_7 e^{s_3 x} + A_8 e^{s_4 x} + \frac{x}{C_8} + \frac{1}{C_9} \quad (14)$$

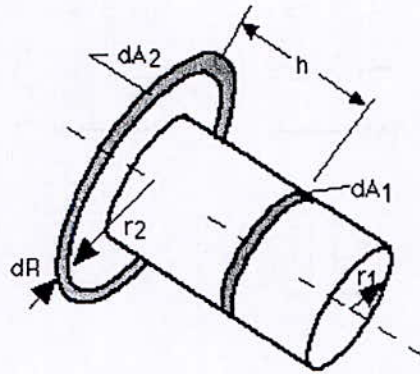
Ainsi le découplage et la résolution du système d'équations différentielles (1) et (2) a été effectué par la méthode des transformées de Laplace.

# ANNEXE 2

## LES FACTEURS DE FORME

Dans la présente annexe nous présentons les expressions des facteurs de forme des différentes configurations rencontrées dans les calculs numériques du cryostat, cf. Hawell[19].

- Configuration 1

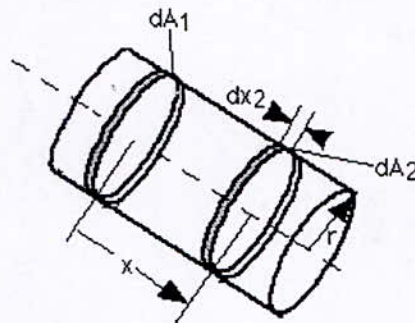


$$dF_{d_1-d_2} = \frac{2HRdR}{\pi(Z^2 - 4R^2)} \left\{ (R^2 - 1)^{1/2} + 2 \frac{(R^2 - H^2 - 1)}{(Z^2 - 4R^2)^{1/2}} \tan^{-1} \left[ \left( \frac{Z + 2R}{Z - 2R} \frac{R - 1}{R + 1} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

Avec

$$H = \frac{h}{r_1}, R = \frac{r_2}{r_1}, Z = 1 + R^2 + H^2$$

- Configuration 2

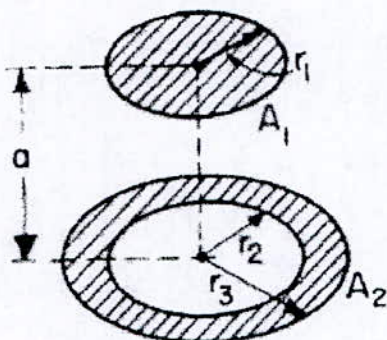


$$dF_{d_1-d_2} = \left[ 1 - \frac{2X^3 + 3X}{2(X^2 + 1)^{3/2}} \right] dX_2$$

Avec

$$X = \frac{x}{2r}$$

- Configuration 3

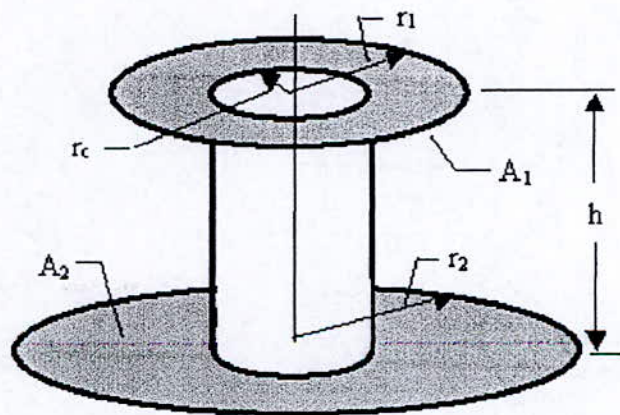


$$F_{1-2} = \frac{1}{2} \left\{ R_3^2 - R_2^2 - \left[ (1 + R_3^2 + H^2)^2 - 4R_3^2 \right]^{1/2} + \left[ (1 + R_2^2 + H^2)^2 - 4R_2^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Avec

$$H = \frac{a}{r_1}, R_2 = \frac{r_2}{r_1}, R_3 = \frac{r_3}{r_1}$$

- Configuration 4

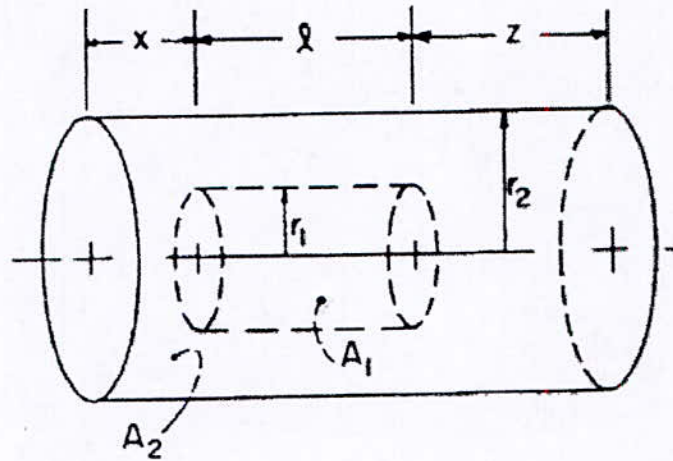


$$= \frac{1}{\pi A} \left[ \begin{aligned} & \frac{A}{2} \cos^{-1} \frac{R_c}{R_2} + \frac{B}{2} \cos^{-1} \frac{R_c}{R_1} + 2R_c \left( \tan^{-1} Y - \tan^{-1} A^{1/2} - \tan^{-1} B^{1/2} \right) \\ & - \left[ (1+C^2)(1+D^2) \right]^{1/2} \tan^{-1} \left[ \frac{(1+C^2)(Y^2 - D^2)}{(1+D^2)(C^2 - Y^2)} \right]^{1/2} \\ & + \left\{ \left[ 1 + (R_1 + R_c)^2 \right] \left[ 1 + (R_1 - R_c)^2 \right] \right\}^{1/2} \tan^{-1} \left\{ \frac{\left[ 1 + (R_1 + R_c)^2 \right] (R_1 - R_c)}{\left[ 1 + (R_1 - R_c)^2 \right] (R_1 + R_c)} \right\}^{1/2} \\ & + \left\{ \left[ 1 + (R_2 + R_c)^2 \right] \left[ 1 + (R_2 - R_c)^2 \right] \right\}^{1/2} \tan^{-1} \left\{ \frac{\left[ 1 + (R_2 + R_c)^2 \right] (R_2 - R_c)}{\left[ 1 + (R_2 - R_c)^2 \right] (R_2 + R_c)} \right\}^{1/2} \end{aligned} \right]$$

Avec

$$R_1 = \frac{r_1}{h}, R_2 = \frac{r_2}{h}, R_c = \frac{r_c}{h}, A = R_1^2 - R_c^2, B = R_2^2 - R_c^2, C = R_1 + R_2, D = R_1 - R_2, Y = A^{1/2} + B^{1/2}$$

- Configuration 5



$$F_{1-2} = 1 + \frac{X}{L} F_x + \frac{Z}{L} F_z - \left( \frac{L+X}{L} \right) F_{L+X} - \frac{L+Z}{L} F_{L+Z}$$

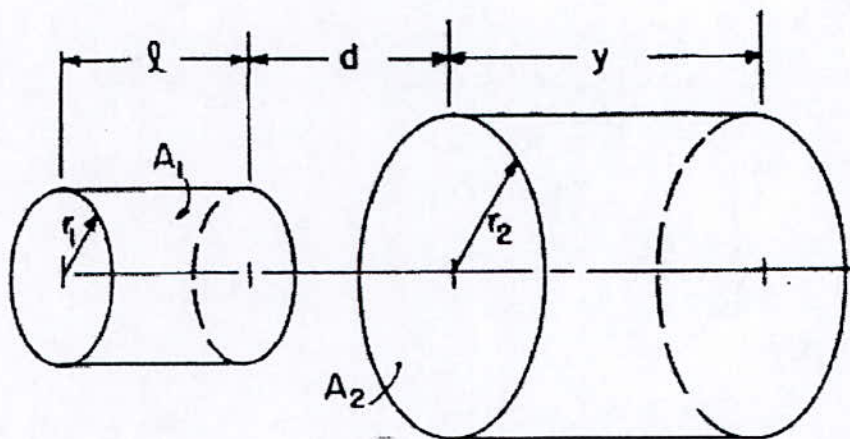
Avec

$$F_\xi = \frac{B_\xi}{8R\xi} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{A_\xi}{B_\xi} - \frac{1}{2\xi} \left[ \frac{(A_\xi + 2)^2}{R^2} - 4 \right]^{1/2} \cos^{-1} \frac{A_\xi R}{B_\xi} - \frac{A_\xi}{2\xi R} \sin^{-1} R \right\}$$

Et

$$X = \frac{x}{r_2}, Z = \frac{z}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, A_\xi = \xi^2 + R^2 - 1, B_\xi = \xi^2 - R^2 + 1$$

- Configuration 6



$$F_{1-2} = \frac{L+D}{L} F_{L+D} + \frac{Y+D}{L} F_{Y+D} - \frac{D}{L} F_D - \frac{L+D+Y}{L} F_{L+D+Y}$$

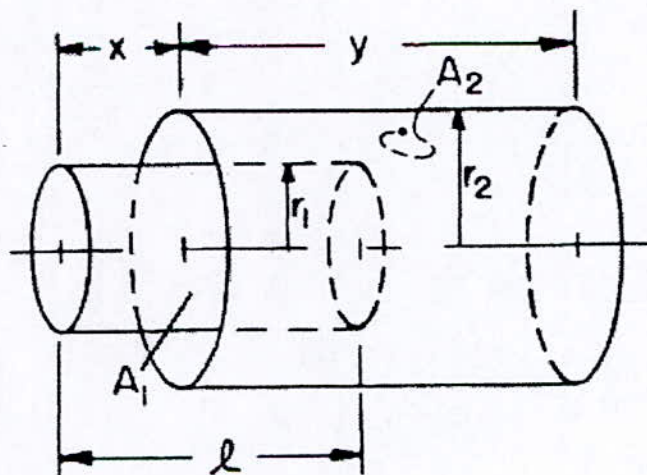
Avec

$$F_{\xi} = \frac{B_{\xi}}{8R\xi} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{A_{\xi}}{B_{\xi}} - \frac{1}{2\xi} \left[ \frac{(A_{\xi} + 2)^2}{R^2} - 4 \right]^{1/2} \cos^{-1} \frac{A_{\xi}R}{B_{\xi}} - \frac{A_{\xi}}{2\xi R} \sin^{-1} R \right\}$$

Et

$$D = \frac{d}{r_2}, Y = \frac{y}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, A_{\xi} = \xi^2 + R^2 - 1, B_{\xi} = \xi^2 - R^2 + 1$$

- Configuration 7





$$F_{1-2} = \frac{X}{L} F_X + \frac{L-X}{L} (1 - F_{L-X}) + \frac{Y+X-L}{L} F_{Y+X-L} - \frac{X+Y}{L} F_{X+Y}$$

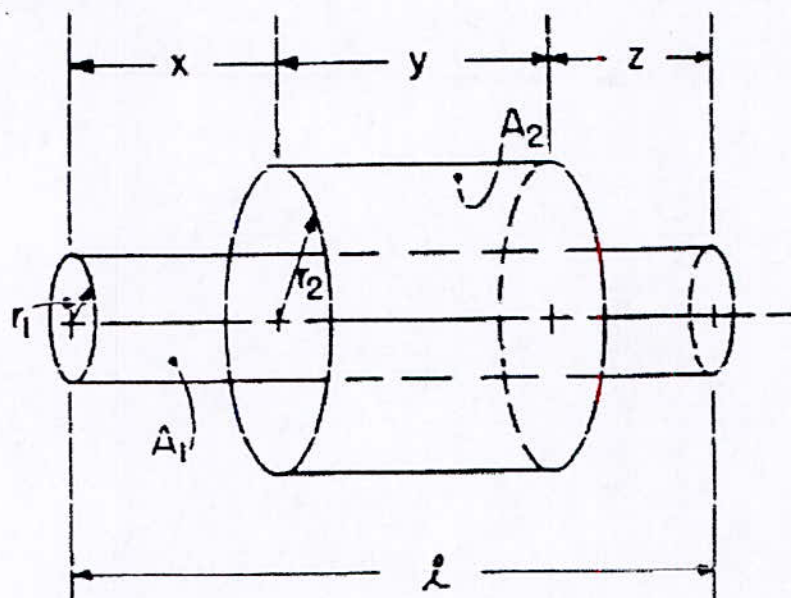
Avec

$$F_\xi = \frac{B_\xi}{8R\xi} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{A_\xi}{B_\xi} - \frac{1}{2\xi} \left[ \frac{(A_\xi + 2)^2}{R^2} - 4 \right]^{1/2} \cos^{-1} \frac{A_\xi R}{B_\xi} - \frac{A_\xi}{2\xi R} \sin^{-1} R \right\}$$

Et

$$X = \frac{x}{r_2}, Y = \frac{y}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, A_\xi = \xi^2 + R^2 - 1, B_\xi = \xi^2 - R^2 + 1$$

- Configuration 8



$$F_{1-2} = \frac{Y}{L} + \frac{X}{L} F_X + \frac{Z}{L} (F_Z) - \frac{Y+X}{L} F_{Y+X} - \frac{Z+Y}{L} F_{Y+Z}$$

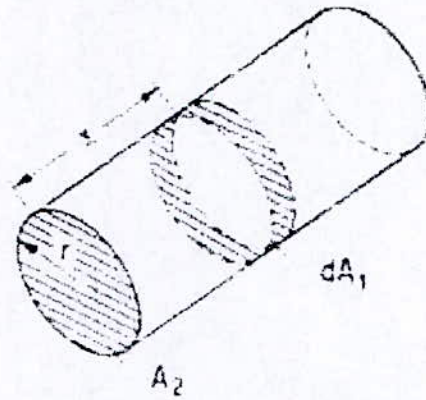
Avec

$$F_\xi = \frac{B_\xi}{8R\xi} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{A_\xi}{B_\xi} - \frac{1}{2\xi} \left[ \frac{(A_\xi + 2)^2}{R^2} - 4 \right]^{1/2} \cos^{-1} \frac{A_\xi R}{B_\xi} - \frac{A_\xi}{2\xi R} \sin^{-1} R \right\}$$

Et

$$X = \frac{x}{r_2}, Y = \frac{y}{r_2}, Z = \frac{z}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, A_\xi = \xi^2 + R^2 - 1, B_\xi = \xi^2 - R^2 + 1$$

- Configuration 9



$$F_{dA_1-2} = \frac{X^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{(1+X^2)}} - X$$

Avec :

$$X = \frac{x}{2r}$$

# ANNEXE 3

## DESSIN DETAILLE DU CRYOSTAT REALISE PAR KHEMIS

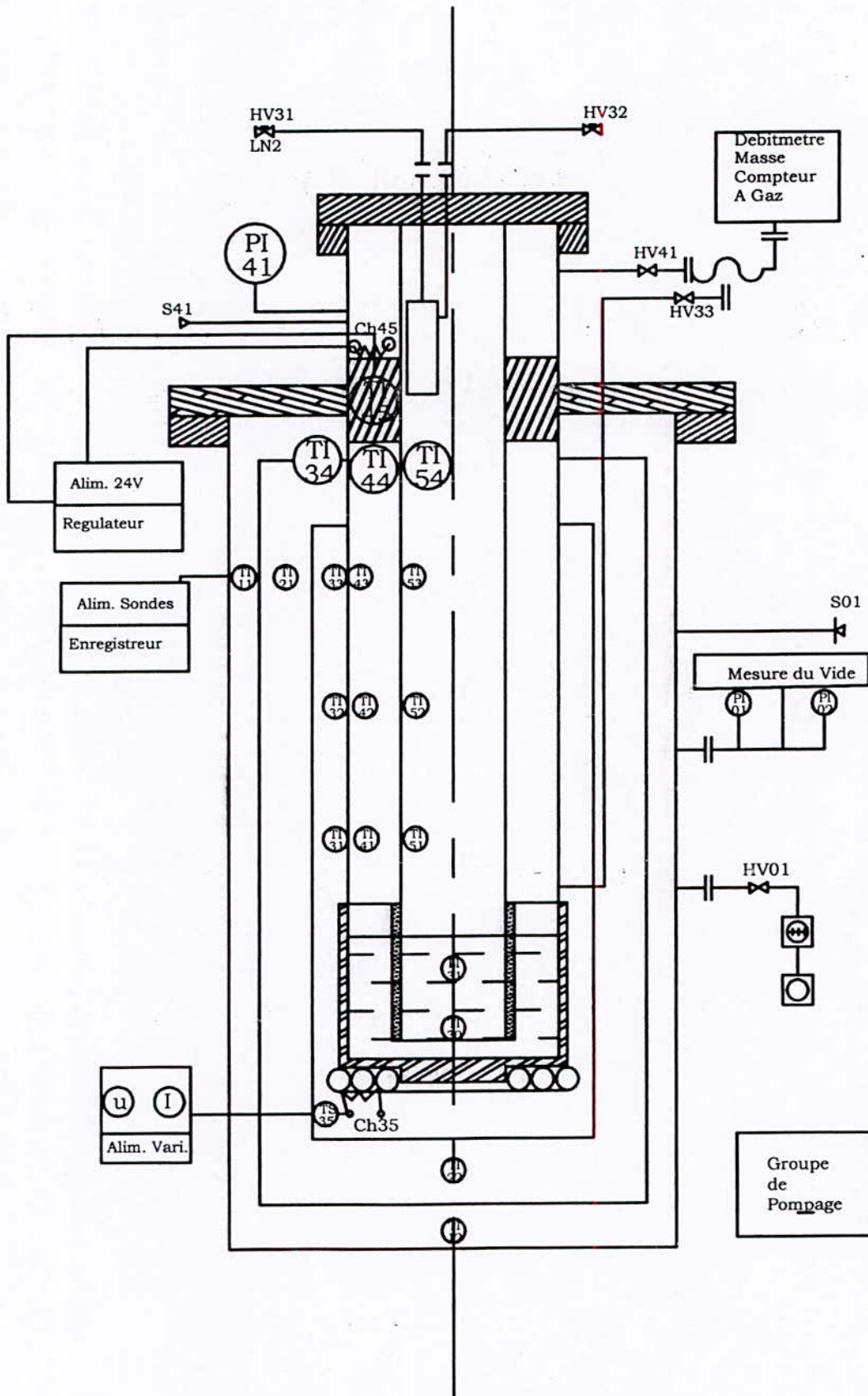


Fig.1 Schema détaillé du cryostat réalisé par Khemis

## **BIBLIOGRAPHIE**

**Bibliographie**

- [1] R.R.Conte, *Eléments de cryogénie*, Edition Masson et c<sup>ie</sup>, 1970.
- [2] A. Rojey, B. Durand, C. Jaffret, S. Jullian, M. Valais, *Le gaz naturel production, traitement et transport*, Edition Technip, I.F.P., 1994.
- [3] Jesse H.Ausubel, *Energy and environnement : the light path, energy systems and policy*, vol 15, 1991, disponible sur le web : [http://www.phe.rockefeller.edu/light\\_path/](http://www.phe.rockefeller.edu/light_path/).
- [4] J. Rifkin, *L'économie hydrogène, après la fin du pétrole la nouvelle révolution économique*, La découverte, 2002.
- [5] O.Khemis, *Optimisation des réservoirs de stockage de fluides cryogéniques*, thèse de Doctorat soutenue à l'E.N.P. au département G.M. en octobre 2004.
- [6] O. Khemis , R. Bessaïh, M. Ait Ali et M.X. Francois, *Mesure des transferts thermiques couplés dans un réservoir cryogénique avec deux configurations*, *EJMEE*, vol 48, N°4, p231-234, 2003.
- [7] O. Khemis , R. Bessaïh, M. Ait Ali et M.X. Francois, *Measurement of heat transfers in a cryogenic tank with several configurations* , *Applied Thermal Engineering journal*, in press, 2004 .
- [8] O. Khemis, M. Boumaza, M. Ait Ali, M.X. Francois, *Experimental analysis of heat transfers in a cryogenic tank without a lateral insulation*, *Applied Thermal Engineering journal*, Volume 23, Issue 16, Pages 2107-2117, November 2003.
- [9] F.Incropera et D.P. Dewitt, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley and Sons, 1985.
- [10] K.D. Striyan, *Mathematical background: foudations of infinitesimal calculus*, Academic press Inc., 1997.
- [11] C. Jordan, *Calculus of finite differnces*, 2<sup>nd</sup>Edition, chelsea publishing company, New York, 1950.
- [12] R. H. Prry, D.W. Green, *Chemical engineer's handbook*, Mc Graw Hill, 1999.
- [13] J.P.Holman, *Heat transfer*, 4<sup>th</sup> Edition, Mc Graw Hill book Company, 1976.
- [14] HIS, *Aerospace information report heat and mass transfer and air-water mixtures*, The engineering society for advancing mobility land sea air and space, 2004.
- [15] G. Chavent, *Approximation des équations aux dérivées partielles*, Techniques de l'ingénieur, a 550.
- [16] B. Randé, *Equations différentielles linéaires*, Techniques de l'ingénieur, AF 103.
- [17] E.Alexander, D. Poularikas, B. Raton, *The transforms and applications handbook*, 2<sup>nd</sup> Edition, CRC Press llc, 2000.

- 
- [18] S. Mauch, *Introduction to methods of applied mathematics or advanced mathematical methods for scientists and engineers*, April 8 2002.
- [19] R. Siegel and J.R. Howell, *Thermal radiation heat transfer*, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1972.