

M0024/94B

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Electronique
Laboratoire d'Automatique

THESE DE MAGISTER

Spécialité: Electronique

Option: Acquisition et traitement de l'information

Présentée par: Lahcène MITICHE
Ingénieur d'Etat diplômé de l'ENP

THEME

• Simplification de modèles complexes par projections internes:

Application à la synthèse d'un contrôleur optimal LQG
à modèle simplifié.

Soutenue le jeudi 06 Octobre 1994 à 10h devant le jury composé de:

N. LOUAM	Maitre de conférence	E.N.P	Président
F. CHIGARA	Chargé de cours	E.N.P	Rapporteur
C. LARBES	Ph. D.	E.N.P	Examinateur
M.S. AIT CHEIKH	Chargé de cours	E.N.P	Examinateur
F. BOUDJEMAA	Maitre de conférence	E.N.P	Examinateur

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

Laboratoire d'Automatique

THESE DE MAGISTER

Spécialité: Electronique

Option: Acquisition et traitement de l'information

Présentée par: Lahcène MITICHE

Ingénieur d'Etat diplômé de l'ENP

THEME

Simplification de modèles complexes par projections internes:

Application à la synthèse d'un contrôleur optimal LQG
à modèle simplifié.

Soutenue le jeudi 06 Octobre 1994 à 10h devant le jury composé de:

N. LOUAM	Maitre de conférence	E.N.P	Président
F. CHIGARA	Chargé de cours	E.N.P	Rapporteur
C. LARBES	Ph. D.	E.N.P	Examinateur
M. S. AIT CHEIKH	Chargé de cours	E.N.P	Examinateur
F. BOUDJEMAA	Maitre de conférence	E.N.P	Examinateur

AVANT PROPOS

Je ne saurais exprimer ma reconnaissance à Monsieur F. CHIGARA, chargé de cours à l'ENP, pour m'avoir proposé la présente étude. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je remercie sincèrement Monsieur N. LOUAM, d'avoir accepté la présidence du jury.

Je suis honoré de la présence de Mrs M. LARBES, M. S. AIT CHEIKH et F. BOUDJEMAA, ayant accepté d'examiner ce travail.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'efficace contribution, les différents encouragements et l'assistance permanente de AMEL, mon seul et unique abri dans les plus sombres moments, m'aidant à aller de l'avant, vers le meilleurs.



Sommaire

Définitions mathématiques et conventions	V
INTRODUCTION	1
Chapitre I. ANALYSE DES SYSTEMES COMPLEXES	3
I.1. Introduction	3
I.2. Notion de systèmes complexes	3
I.3. Analyse de systèmes complexes	4
I.3.1. Généralités	4
I.3.2. Méthodes d'analyse des systèmes complexes	4
I.4. Conclusion	4
Partie A. SIMPLIFICATION DE MODELES COMPLEXES	
Chapitre II. DIFFERENTES APPROCHES DE SIMPLIFICATION DE MODELES COMPLEXES	5
II.1. Introduction	5
II.2. Méthode d'agrégation	5
II.2.1. Choix des modes et structure du modèle agrégé	7
- Sélection des modes par critère énergétique	
- Structure du modèle agrégé	
- Calcul de la matrice de sortie	
II.3. Méthode des gains équilibrés	12
II.3.1. Introduction et hypothèses	12
II.3.2. Définition: Gains équilibrés	13
II.3.3. Conclusion	15

II.4. Approche par la norme L_2 (solution optimale)	15
II.4.1 Introduction	15
II.4.2. Problème d'optimisation	16
- Définition: Pseudogrammiens d'observabilité et de commandabilité	
II.4.3. Conclusion	20
II.5. Approximation par la norme de Hankel	20
II.5.1. Introduction	20
II.5.2. Position du problème	20
II.5.3. Procédure de calcul de la réalisation simplifiée	22
II.5.4. Définition: Fonction de transfert passe tout	23
II.5.5. Conclusion	24

**Chapitre III. SIMPLIFICATION DE MODELES COMPLEXES
PAR PROJECTIONS INTERNES**

25

**A. METHODE DES REALISATIONS EQUILIBREES
(SYSTEMES MINIMAUX)**

III.1. Principe de l'approche	25
III.2. Equilibre du modèle	26
III.2.1. Principe de l'équilibre	26
III.2.2. Calcul des grammiens	26
i/ Cas d'un modèle continu	
2i/ Cas d'un modèle discret	
III.2.3. Base d'équilibre et maximisation d'énergie	28
III.2.4. Procédure d'équilibre	30
III.2.5. Conclusion	32
III.3. Réduction d'ordre par la M.R.E	32
III.3.1. Introduction	32
III.3.2. Critère énergétique de réduction	33
III.3.3. Procédure de réduction	34
III.3.4. Conclusion	35

B. METHODE DE SCHUR (SYSTEMES NON MINIMAUX)

III.4. Simplification de modèles par l'approche de Schur	36
III.4.1. Introduction et position du problème	36
III.4.2. Procédure de réduction de simplification de modèles	
38	
III.4.3. Algorithme de Schur	39
III.4.4. Algorithme de la racine carrée	41
III.5. Simulations et interprétations	43
III.5.1. Exemple 1 (système SISO, minimal, continu)	43
III.5.2. Exemple 2 (filtre numérique de <i>Butterworth</i>)	48
III.5.3. Exemple 3 (filtre numérique de <i>Chebyshev</i>)	50
III.5.4. Exemple 4 (système SISO, non minimal, continu)	52
III.5.5. Exemple 5 (système MIMO, non minimal, continu)	55
III.6. Conclusion	59

Partie B. COMMANDE DES SYSTEMES COMPLEXES

Chapitre IV. LE CONTROLEUR LQG	60
IV.1. Introduction	60
IV.2. Le contrôleur LQG	61
IV.2.1. Théorème principal	61
IV.2.2. Procédure de calcul du contrôleur	62
A. Calcul de la loi de commande optimale	62
B. Calcul du filtre de Kalman	65
IV.3. Simulations et interprétations	68
(correction d'un système SISO, continu, instable)	
IV.4. Conclusion	70

Chapitre V. SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR A MODELE SIMPLIFIE	71
V.1. Introduction (différentes approches)	71
V.2. Approche directe de synthèse du contrôleur à modèle simplifié	72
V.2.1. Principe de l'approche	72
V.2.2. Synthèse du LQG équilibré	72
- Solution du problème LQG	
- Calcul de la base d'équilibre-LQG	
V.2.3. Réduction d'ordre du contrôleur dans la base d'équilibre	75
V.2.4. Simulations et interprétations	76
V.3. Conclusion	79
CONCLUSION GENERALE	80
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	81
ANNEXES:	
Annexe 1. Généralités sur la théorie des systèmes	86
Annexe 2. Algorithme SVD	90
Annexe 3. Estimation optimale et filtre de Kalman	93
Annexe 4. Loi de commande optimale et équations de Riccati	96
Annexe 5. Algorithme de Cholesky	103

Définitions mathématiques et conventions

- (A, B, C, D, n) : Réalisation dans l'espace d'état d'un système d'ordre (n) .
- (A_e, B_e, C_e, D_e, n) : Réalisation du modèle d'ordre (n) dans la base équilibrée.
- (A_r, B_r, C_r, D_r, k) : Réalisation du modèle simplifié, d'ordre (k) .
- $x(t) [x(k)]$: Vecteur d'état du système continu [discret] de dimension (n) .
- $u(t) [u(k)]$: Signal d'entrée continu [discret] de dimension (r) .
- $y(t) [y(k)]$: Signal de sortie continu [discret] de dimension (m) .
- $\lambda_i(.)$: $i^{ème}$ valeur propre de la matrice $(.)$.
- $\bar{\lambda}(.)$: Valeur propre maximale de la matrice $(.)$.
- $\underline{\lambda}(.)$: Valeur propre minimale de la matrice $(.)$.
- $\sigma_i(.)$: $i^{ème}$ valeur singulière de la matrice $(.)$.
- Σ : Matrice des valeurs singulières du système.
- $\mu_i(.)$: $i^{ème}$ valeur caractéristique de la matrice $(.)$.
- M : Matrice des valeurs caractéristiques du système.
- CARE : Control Algebraic Riccati Equation.
- FARE : Filter Algebraic Riccati Equation.
- $(.)^T$: Transposée de la matrice $(.)$.
- $\text{Re}(.)$: Partie réelle de la quantité $(.)$.
- $\text{Im}(.)$: Partie imaginaire de la quantité $(.)$.
- erH : Borne de l'erreur de Hankel.

Définition 1. (Nombre condition d'une matrice)

Le nombre condition de la matrice (A) est donné par la quantité $N_c = \frac{\bar{\lambda}(A)}{\underline{\lambda}(A)}$.

Définition 2. (Projection)

La matrice P est dite projection, si elle est idempotente; c-à-d, $P = P^2$.

La projection est orthogonale si $P \cdot P^T = I$.

Définition 3. (Norme)

La norme d'une matrice (A) est le nombre défini par:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda^2(A^T \cdot A)}$$

Si la matrice (A) est symétrique, la norme sera donnée par $\|A\| = \max |\lambda_i(A)|$.

Introduction

L'évolution des techniques et la modernisation des moyens de production conduisent, de plus en plus, les automaticiens à étudier des systèmes complexes (la complexité peut provenir soit de la grande dimension, soit des propriétés intrinsèques des systèmes), tels les systèmes de production d'énergie électrique, systèmes thermiques, les industries chimiques et pétrochimiques, ...etc.

De sérieuses difficultés portant sur les problèmes d'analyse, de synthèse et d'organisation de la commande, nous ont poussé à investir dans la simplification; c-à-d, représenter les systèmes par des modèles d'ordre réduit.

Pour atteindre ces objectifs, une étape fondamentale doit être effectuée consistant en la construction d'un modèle d'ordre réduit du système (processus), objet mathématique capable de reproduire fidèlement, avec une certaine tolérance, le comportement global du processus. Elle sera suivie d'une autre étape qui consiste à assurer la stabilité du système et améliorer ses performances, en le mettant dans un environnement le plus défavorable, cela via un contrôleur optimal d'ordre réduit.

Notre travail a pour objectif, le développement théorique de diverses approches de simplification de modèles, voire (M.R.E, Méthode de Schur). L'application de ces diverses approches d'approximation portera sur la synthèse d'un contrôleur optimal LQG d'ordre réduit.

Le mémoire est présenté comme suit:

Le premier chapitre portera sur quelques éléments de la théorie des systèmes complexes, dans le but d'avoir une idée sur leur structure et d'orienter par la suite diverses méthodologies d'analyse.

Dans la première partie, un développement théorique sur les diverses approches de simplification de modèles complexes (Chap. II) est présenté, ainsi qu'une approche récente dite "M.R.E." (Chap. III), où la réduction d'ordre s'effectue dans une base de coordonnées particulière appelée *Base d'équilibre*. Diverses applications mettant en évidence l'efficacité et les performances de ces approches sont proposées.

Il est important de noter que du fait des conditions de travail sévères imposées au système, ces approches s'avèrent limitées et donc non appropriées à une éventuelle généralisation. Nous avons résolu ce problème en présentant une méthode de simplification robuste exploitant des projections dans l'espace d'état.

La seconde partie discutant de la commande des systèmes complexes, développera le concept de la régulation optimale (Chap. IV), ainsi que la synthèse du contrôleur optimal simplifié (Chap. V).

Pour mettre en évidence le problème de compensation, nous effectuons diverses simulations sur quelques modèles suivies de leurs interprétations.

Une conclusion générale mettant en relief l'aboutissement de notre recherche est présentée.

En annexes, les divers algorithmes sont exposés.

Chapitre I

ANALYSE DES SYSTEMES COMPLEXES

I.1. Introduction

L'analyse d'un système est une phase déterminante et préalable au calcul de sa commande. Son objectif final vise à trouver une formulation mathématique au problème de la commande. Cette formulation englobe les équations du modèle représentant intimement le système ainsi que les relations exprimant l'indice de performance et les contraintes.

Une telle analyse est particulièrement difficile dans le cas des processus industriels complexes. La difficulté tient aux caractéristiques propres de ces systèmes qui commandent la prise en compte de plusieurs facteurs ainsi que leurs inter-relations, difficiles à identifier, souvent non linéaires et non stationnaires.

Après quelques généralités sur des notions de base, nous présenterons les méthodes récentes d'analyse des systèmes complexes. Notons que ces méthodes ne sont applicables qu'à une classe de systèmes bien déterminée, toutefois, elles sont présentées pour mettre en relief les facteurs qui les rendent inadaptées et qui mènent à la construction d'une méthodologie.

I.2. Notion de systèmes complexes

Dans la pratique, une tendance courante, source de confusion, assimile souvent, système complexe et système de grande dimension. Or, un système peut être complexe sans être de grande taille et inversement.

La complexité est une notion relative, définie comme étant "un caractère fondamental qui apparaît comme l'incapacité de décrire tout le système et de déduire son comportement à partir de la connaissance du comportement de ses parties [1]".

Cette définition convient parfaitement aux processus industriels continus de production.

La complexité de ces systèmes est attribuée aux facteurs suivants:

- Les aspects multivariables, non linéaires et non stationnaires.
- L'existence de bouclages internes rendant difficile la compréhension des phénomènes physiques par le seul principe des relations de cause à effet.

I.3. Analyse des systèmes complexes

I.3.1. Généralités

L'analyse d'un système implique, la définition des entrées, des sorties, des commandes, la construction du modèle, l'estimation des paramètres du modèle et la définition des critères de commande.

La notion relative de système amène nécessairement différentes méthodologies d'analyse, qui se distinguent essentiellement par les objectifs spécifiques à atteindre. Ceci conduit à la mise en oeuvre de techniques variées plus ou moins complexes.

I.3.2. Méthode d'analyse des systèmes complexes

Ces méthodes consistent soit à réduire l'ordre du système (simplification du modèle) par plusieurs approches qui feront objet de la partie A de notre travail, soit à décomposer le système complet en sous-systèmes, dans le but d'utiliser des méthodes de décomposition-coordination pour la commande optimale [2].

I.4. Conclusion

L'applicabilité des méthodes d'analyse des systèmes complexes est subordonnée à diverses hypothèses simplificatrices ou aux caractéristiques d'une classe de systèmes complexes particuliers telle que les systèmes linéaires, invariants, complètement observables et commandables.

Ces conditions, ne correspondent pas à la réalité des processus industriels complexes pour lesquelles, il est nécessaire de se doter d'une méthodologie en vue d'effectuer leur analyse.

Chapitre II

DIFFERENTES APPROCHES DE SIMPLIFICATION DE MODELES COMPLEXES

II.1. Introduction

La réduction de l'ordre de modèles complexes (à grande dimension) est fréquemment désirable quand il s'agit de les contrôler ou bien de les simuler.

Des modèles d'ordre élevé, qu'ils soient continus ou discrets dans le temps sont généralement entièrement définis par des équations d'états et la connaissance des lois qui régissent les phénomènes. Ils peuvent être aussi déterminés à partir des signaux mesurés.

Les signaux d'entrées et de sorties du processus sont évalués par diverses méthodes d'identification de façon que les relations d'entrées/sorties soient exprimées par un modèle mathématique.

La simplification de modèles complexes peut être basée sur l'hypothèse de la conservation d'énergie, c-à-d, l'énergie (moment de second ordre) emmagasinée durant le régime transitoire doit demeurer sensiblement constante lors de la réduction de l'ordre du modèle.

Les modèles d'ordre réduit peuvent être générés par plusieurs approches; nous en citerons les plus importantes:

- Méthode d'agrégation [4],
- Méthode des gains équilibrés [7],
- Méthode L^2 -optimale [7],
- Norme de Hankel [7].

La Méthode des Réalisations Equilibrées (M.R.E.) fera objet du chapitre III.

II.2. Méthode d'agrégation [3]

Le modèle simplifié via cette approche [4] est obtenu par séparation des modes du système en deux groupes, les modes dominants (lents) [persistant dans le régime transitoire], et les modes non-dominants (rapides) [non persistant en régime transitoire], avec conservation uniquement des modes dominants.

Partant d'un système initial, continu, asymptotiquement stable, invariant dans le temps, d'ordre (n), complètement commandable et complètement observable (voir Annexe 1) représenté dans l'espace d'état par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Un modèle simplifié d'ordre (k) d'équations d'état:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= F \cdot z(t) + G \cdot u(t) \\ \hat{y}(t) &= H \cdot z(t) + E \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

est dit "modèle agrégé" issu du modèle initial, si :

- Les états $z(t)$ du modèle d'ordre réduit et $x(t)$ du modèle d'ordre complet sont reliés par la relation linéaire de type:

$$z(t) = L \cdot x(t). \quad (2.2.3)$$

où : $L = k \times n$ -matrice (matrice d'agrégation), de rang complet.

- Les matrices F et G du système d'équations (2.2.2) vérifient alors les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} F \cdot L &= L \cdot A \\ G &= L \cdot B \end{aligned}$$

Le modèle agrégé donné par (2.2.2), d'ordre (k), doit approcher au mieux le comportement du modèle initial.

Une façon d'apprécier la qualité de réduction est de comparer, à posteriori, les réponses du modèle initial et du modèle d'ordre réduit en introduisant le critère quadratique J

$$J = \sum_{i=1}^r \text{tr} \left[\int_0^T [y_i(t) - \hat{y}_i(t)][y_i(t) - \hat{y}_i(t)]^T dt \right] \quad (2.2.4)$$

où y_i et \hat{y}_i sont respectivement les sorties du modèle initial et du modèle agrégé, r étant le nombre d'entrées, le critère J est donné encore par:

$$J = \sum_{i=1}^r \text{tr} \left[\int_0^T (C-H.L).x_i(t).x_i^T(t).(C-H.L)^T dt \right]$$

$$= \text{tr} \left[(C-H.L)^T W (C-H.L) \right]$$

avec : $W = \sum_{i=1}^r \int_0^T x_i(t).x_i^T(t) dt$

La minimisation de J conduit à un modèle agrégé optimal pour une classe d'entrée et un horizon d'observation [0, T] déterminés.

Pour minimiser J, une solution en deux étapes est fréquemment utilisée [5], [6]. Ces étapes sont:

E1- Choix des modes du modèle agrégé, ce choix pouvant être par exemple réalisé sur des bases énergétiques, fixe les matrices F, G et L.

E2- Optimisation du critère J sur les matrices H et E pour les modes conservés.

II.2.1. Choix des modes et structure du modèle agrégé

Le modèle d'ordre réduit est construit à partir de ses modes, choix basé sur les caractéristiques énergétiques de ceux-ci.

Après présentation du principe de sélection des modes, nous décrirons la structure du modèle agrégé résultant.

- Sélection des modes par un critère énergétique.

Le choix des modes s'effectuant à partir du régime transitoire, c'est la réponse impulsionnelle qui est calculée et elle s'écrit dans le cas monovarié :

$$y = \sum_{i=1}^n (\omega_i . \text{Exp}(\lambda_i t) . \gamma_i)$$

avec: $\Omega = C.P = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$

$$\Gamma = P^{-1}.B = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]^T$$

$$\Lambda = P^{-1}.A.P = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

et P est la matrice de passage du modèle dans sa base modale.

L'énergie associée au mode λ_i s'écrit [4]:

$$g_{i,i} = \int_0^{\infty} [\omega_i \cdot \text{Exp}(\lambda_i t) \cdot \gamma_i]^2 dt$$

et l'énergie associée aux modes λ_i et λ_j est:

$$g_{i,j} = \int_0^{\infty} [\omega_i \cdot \text{Exp}(\lambda_i t) \cdot \gamma_i][\omega_j \cdot \text{Exp}(\lambda_j t) \cdot \gamma_j] dt$$

Dans le cas multivariable, les coefficients $g_{i,j}$ sont les termes de la matrice G donnée par :

$$G = [\Omega^T \cdot \Omega] \otimes W$$

où : - W est solution de l'équation de Lyapunov,

$$A \cdot W + W \cdot A^T + \Gamma \cdot \Gamma^T = 0$$

- \otimes : produit terme à terme [40].

Le classement des modes s'effectue suivant les $g_{i,i}$ décroissants.

Lorsque deux modes voisins ($\lambda_i \approx \lambda_j$) ont des énergies comparables ($g_{i,i} \approx g_{j,j}$), le test sur le signe des contributions croisées permet de conclure si les deux modes se compensent: si $g_{i,j} < 0$, les deux modes se compensent. En pratique, un écart relatif de 10% est choisi.

Le nombre de modes retenus, dans l'ordre des $g_{i,i}$ décroissants, peut s'effectuer de deux façons différentes:

- En fixant une borne inférieure minimale que doivent vérifier tout les $g_{i,i}$ retenus.
- En imposant une limite maximale dans le rapport entre deux contributions successives.

- **Structure du modèle agrégé**

Supposons la matrice A diagonalisable et soit P la matrice de passage dans la base modale du vecteur d'état $x(t)$.

$$x(t) = P \cdot \xi(t)$$

Le système d'état (2.2.1) devient:

$$\dot{\xi}(t) = \Lambda \cdot \xi(t) + \Gamma \cdot u(t)$$

$$y(t) = \Omega \cdot \xi(t) + D \cdot u(t)$$

où:

$$\Omega = C \cdot P$$

$$\Gamma = P^{-1} \cdot B$$

$$\Lambda = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Les (k) modes conservés ayant été choisis, la matrice Λ est partitionnée sous la forme:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_k & & & \\ & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

L'écriture du modèle dans la base modale est alors:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (2.2.5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + D \cdot u(t)$$

les (k) premières valeurs propres sont celles conservées pour le modèle d'ordre réduit qui s'écrit:

$$\dot{\xi}_1(t) = \Lambda_1 \cdot \xi_1(t) + \Gamma_1 \cdot u(t) \quad (2.2.6)$$

$$y(t) = \Theta \cdot \xi_1(t) + E \cdot u(t)$$

Posons, pour garder les mêmes notations qu'avant:

$$\begin{aligned} z &= \xi \\ L &= [I_r \quad 0].P^{-1} \\ F &= \Lambda_1 \\ G &= \Gamma_1 \end{aligned}$$

Par contre, les matrices $H=\theta$ et E sont calculées de manière à minimiser le critère J .

Calcul de la matrice de sortie

Une fois les modes choisis, il faut calculer les matrices de sortie H et E qui minimisent l'écart de sortie.

La conservation du gain statique est une condition supplémentaire qui vient se superposer, il faut pour cela solliciter le système avec une entrée échelon.

Optimisation du critère pour des entrées Impulsions.

Afin d'obtenir un comportement identique à l'instant initial, il faut prendre $D=E$. Sans considérer la contrainte de la conservation du gain statique, il suffit de calculer l'optimum de J par rapport à θ :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0, \text{ ce qui donne par un calcul classique, la valeur de la matrice de sortie}$$

$$\theta = \Omega.W.L^T(L.W.L^T)^{-1},$$

où W est solution de l'équation de Lyapunov:

$$\Lambda.W + W.\Lambda^T + \Gamma.\Gamma^T = 0$$

Optimisation pour des entrées échelons sans contraintes sur E .

Sans contrainte sur E ($E \neq D$), le régime permanent est assuré en écrivant l'égalité des gains statiques:

$$E = D - (\Omega - \theta.L)\Lambda^{-1}.\Gamma$$

où la matrice de sortie est toujours définie par $\theta = \Omega.W.L^T.(L.W.L^T)^{-1}$

Cette première solution approche au mieux le régime transitoire mais, le fait que $E \neq D$ entraîne une discontinuité à l'origine. Pour pallier à cet inconvénient, il faut fixer la contrainte $E = D$.

Optimisation pour des entrées échelons avec contrainte ($E = D$).

La contrainte nécessite l'introduction d'un opérateur de Lagrange K et le critère à minimiser devient [4]:

$$\bar{J} = J + 2 \cdot \text{tr} [K^T \cdot (C - H \cdot K) \cdot A^{-1} \cdot B] \quad (2.2.7)$$

La solution de (2.2.7), donnée dans [6] est:

$$\theta = \Omega \cdot W \cdot K^T - \Omega \cdot A^{-1} \cdot \Gamma \cdot Y$$

$$E = D$$

$$X = V \cdot (I_k - U \cdot Y); \quad Y = (U^T \cdot V \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot V$$

$$U = -K \cdot A^{-1} \cdot \Gamma; \quad V = (K \cdot W \cdot K^T)^{-1}$$

Remarques

1/ Cette méthode présente l'avantage, si $D=0$ (système strictement propre), de conserver pour le modèle d'ordre réduit une matrice nulle directement entre les entrées u et les sorties y .

2/ D'autres types d'entrées peuvent être choisis pour calculer la matrice de sortie et sont détaillés dans les travaux de G. Michalecco [5] et G. Duc [6].

II.3. Méthode des Gains équilibrés [7]

II.3.1. Introduction

Cette méthode a été proposée par Kabamba (1985) [8]. Elle repose sur la donnée de certaines mesures sur le système, le modèle d'ordre réduit résultera de la troncature des états ayant les plus faibles mesures. On notera que cette approche de réduction d'ordre du modèle ne garantit pas l'obtention d'un modèle simplifié "Optimal" au sens L^2 .

Hypothèses. On suppose que le modèle initial est minimal, strictement propre ($D=0$), et qu'il est sous sa forme équilibrée, c-à-d:

$$W_o = W_c = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

où : - W_o = nxn-matrice (grammien d'observabilité du système).

- W_c = nxn-matrice (grammien de commandabilité du système).

- Σ = nxn-matrice (matrice de valeurs singulières du système).

- σ_i ($i = \overline{1, n}$) : valeurs singulières du système.

Un tel système est représenté, dans l'espace d'état par:

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \tag{2.3.1}$$

$$y(t) = C.x(t)$$

Théorème 2.1. [7] Soit (A, B, C) une réalisation strictement propre, ayant pour valeurs singulières de Hankel (voir Annexe 2)

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

et si:

$$a_{i,j} = \text{le } i,j^{\text{ème}} \text{ élément de } A$$

$$b_i = \text{la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } B^T$$

$$c_i = \text{la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } C$$

la réalisation (A, B, C) est dite équilibrée si et seulement si [7]:

$$\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}; \exists / v_i \in \mathcal{R}^n, \bar{b}_i \in \mathcal{R}^r, \bar{c}_i \in \mathcal{R}^m$$

tels que:

$$* b_i = v_i \cdot \bar{b}_i$$

$$* c_i = v_i \cdot \bar{c}_i$$

$$* a_{i,i} = -\frac{v_i^2}{2 \cdot \sigma_i^2}$$

$$* a_{i,j} = \frac{v_i \cdot v_j \left[\bar{b}_i^{-1} \cdot \bar{b}_j^{-1} \cdot \sigma_j - \bar{c}_i^{-1} \cdot \bar{c}_j^{-1} \cdot \sigma_i \right]}{\sigma_i^2 - \sigma_j^2}, \text{ pour } i \neq j; \sigma_i \neq \sigma_j$$

$$* a_{i,j} + a_{j,i} = \frac{v_i \cdot v_j \cdot \bar{b}_i^{-1} \cdot \bar{b}_j^{-1}}{\sigma_i}; \bar{c}_i^{-1} \cdot \bar{c}_j = \bar{b}_i^{-1} \cdot \bar{b}_j, i \neq j; \sigma_i = \sigma_j.$$

Remarque

On montre que si les valeurs singulières de Hankel sont distinctes, alors la paramétrisation donnée dans le Théorème-2.1 est canonique, c-à-d, la réalisation vérifiant les conditions de ce Théorème est unique.

II.3.2. Définition : Gains équilibrés [7]

Les v_i ($i = 1, n$) sont appelés "Gains équilibrés" du système (2.3.1).

Remarque On remarque que si le $i^{ème}$ gain équilibré v_i est très faible, l'élément correspondant à la $i^{ème}$ ligne, $i^{ème}$ colonne de A; la $i^{ème}$ ligne de B et la $i^{ème}$ colonne de C sont faibles, cela signifie (d'après Kabamba) [8] que le $i^{ème}$ état est découplé des autres états.

Partant de ce principe, on peut supposer que l'état correspondant à un gain v_i assez faible, contribue peu dans le comportement global du système, mais les gains équilibrés v_i ne sont pas des indicateurs du degré de commandabilité et d'observabilité des états du système. C'est plutôt les valeurs singulières de Hankel σ_i , qui assurent cette mesure.

Dans ce qui suit, nous verrons l'influence des gains équilibrés sur la norme L^1 de la fonction de transfert du système.

Théorème 2.2. [7] Soit $\hat{G}(s)$ la fonction de transfert du système (2.3.1), ayant pour valeurs

singulières de Hankel $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ et comme gains équilibrés (v_1, v_2, \dots, v_n) , alors:

$$\|\hat{G}(j\omega)\|_{L^2}^2 = 2 \cdot \pi \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot v_i^2 \tag{2.3.2}$$

Interprétation

Il vient que chaque terme (σ_i, v_i^2) contribue dans la norme L^2 de la fonction de transfert du modèle, de façon qu'une éventuelle technique de réduction de l'ordre du modèle soit la troncature des états auxquels sont associés les termes (σ_i, v_i^2) faibles.

La procédure réalisant cet objectif est simplement l'élimination des lignes et colonnes des matrices A , B et C de la réalisation équilibrée, correspondant aux états qui contribuent faiblement dans le comportement global du système.

Si l'on fait l'analogie avec la M.R.E (traitée dans le Chap. III), c'est presque le même principe, sauf que dans cette dernière, les états éliminés sont ceux faiblement commandables et faiblement observables.

Après la procédure de troncature, il sera facile de calculer la norme L^2 de la fonction de transfert de l'erreur (écart entre le modèle d'ordre complet et celui d'ordre réduit).

D'après le *Théorème de Pernebo-Silverman* [22], si les valeurs singulières de Hankel de Σ_1 et Σ_2 sont distinctes où:

- $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ [Matrice des valeurs singulières du modèle simplifié],
- $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$ [Matrice des v. s. de la partie du système à éliminer],
- $k =$ ordre du modèle simplifié.

alors le modèle simplifié, d'ordre réduit (k) est complètement commandable, complètement observable et asymptotiquement stable à condition que le modèle initial l'est.

Le calcul de la norme L^2 sera spécifié dans le paragraphe suivant.

Théorème 2.3. [7] Soit la réalisation (A, B, C) du système (2.3.1), ayant pour valeurs singulières de Hankel $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, pour gains équilibrés (v_1, v_2, \dots, v_n) et $\hat{G}(s)$ comme fonction de transfert.

Soient : $N = \{1, 2, \dots, n\}$ et

T : sous-ensemble de N .

Posons alors: (A_T, B_T, C_T) , la nouvelle réalisation obtenue par troncature des $i^{\text{ème}}$ lignes et colonnes de A , la $i^{\text{ème}}$ ligne de B et la $i^{\text{ème}}$ colonne de C , pour tout $i \in T$.

Supposons que: $\sigma_i \neq \sigma_j, \forall i \in T \text{ et } j \in N/T$.

Posons: $\hat{G}_T(s)$ la fonction de transfert associée à la réalisation (A_T, B_T, C_T) , il vient que:

$$\|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_T(j\omega)\|_{L_2} \geq \left(2\pi \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2\pi \sum_{i \in N/T} \sigma_i \cdot v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et}$$

$$\|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_T(j\omega)\|_{L_2} = 2\pi \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot v_i^2 + \sum_{i \in N/T} \sigma_i \cdot v_i^2 - 2\text{tr}[C_T \cdot V \cdot C^T] \right]$$

où V est solution unique de l'équation de Lyapunov :

$$A_T \cdot V + V \cdot A^T + B_T \cdot B = 0$$

II.3.3. Conclusion

Cette technique de réduction ne permet pas d'obtenir un modèle d'ordre réduit optimal, mais engendre un bon modèle simplifié qui approxime d'une manière satisfaisante le modèle initial au sens de la norme L_2 .

Donc, si l'on s'intéresse à l'obtention d'un bon modèle simplifié au sens de la norme L_2 , on doit non seulement examiner les valeurs singulières de Hankel, mais aussi les termes $(\sigma_i \cdot v_i^2)$ qui représentent une mesure de contribution des états correspondants de la fonction de transfert dans la norme L_2 .

II.4. Réduction d'ordre de modèles par la norme L_2 . (solution optimale) [7]

II.4.1. Introduction

Cette approche, améliorée par Wilson [9], Hyland et Bernstein [10], est capable d'engendrer un modèle d'ordre réduit optimal au sens de la norme L_2 .

Le problème d'une telle approximation est de poser des équations implicites, si elles admettent une solution, cette solution sera optimale, mais en contre-partie, le calcul devient complexe.

Considérons le système (2.4.1), représentant le modèle initial dans l'espace d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

II.4.2. Problème d'optimisation

Soit un système d'ordre (n), stable, complètement commandable, complètement observable, strictement propre, ayant une fonction de transfert $\hat{G}(s)$.

Le problème est de trouver un modèle d'ordre réduit (k) ($k < n$), stable, complètement observable, complètement commandable, strictement propre, ayant pour fonction de transfert $\hat{G}_k(s)$ et une représentation d'état:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k \cdot x_k(t) + B_k \cdot u(t) \\ y_k(t) &= C_k \cdot x_k(t) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

qui minimise la fonction de coût quadratique:

$$J(A_k, B_k, C_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (y(\tau) - y_k(\tau))^T R (y(\tau) - y_k(\tau)) d\tau \quad (2.4.3)$$

Remarques

- Quand l'excitation (signal d'entrée) est un bruit blanc, de densité spectrale V définie positive, R est une matrice semi-définie positive, symétrique.

- Lorsque $V=R=I$ (cas d'un signal d'entrée bruit blanc centré avec une variance unité), le problème de minimisation sera équivalent au problème de minimisation de la norme L_2 de l'erreur de la fonction de transfert, c-à-d trouver $\hat{G}_k(s)$ qui minimise

$$\|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_k(j\omega)\|_{L_2} \quad (2.4.4)$$

Le théorème-2.4 suivant donne les conditions nécessaires de l'existence d'une solution au problème (2.4.4).

Théorème 2.4. [7]

Supposons que la réalisation (A_k, B_k, C_k) résolve le problème (2.4.4), alors:

- \exists : - P_{PS}, Q_{PS} : matrices semi-définies positives,
- M : $m \times m$ -matrice, semi-simple, positive,
- I, G : $m \times n$ -matrice.

telles que:

$$A_k = \Gamma \cdot A \cdot G^T$$

$$B_k = \Gamma \cdot B$$

$$C_k = C \cdot G^T$$

avec $\tau = G^T \cdot \Gamma$, les conditions suivantes sont aussi satisfaites:

$$\text{rang}(Q_{PS}) = \text{rang}(P_{PS}) = \text{rang}(Q_{PS} \cdot P_{PS}) = k$$

$$\tau \cdot [A \cdot P_{PS} + P_{PS} \cdot A^T + B \cdot V \cdot B^T] = 0$$

$$[A^T \cdot Q_{PS} + Q_{PS} \cdot A + C^T \cdot R \cdot C] \cdot \tau = 0$$

$$P_{PS} \cdot Q_{PS} = G^T \cdot M \cdot \Gamma$$

$$\Gamma \cdot G^T = I_k$$

De même, la norme L_1 de la fonction de transfert de l'erreur est donnée par:

$$\begin{aligned} J(A_k, B_k, C_k) &= \frac{1}{2\pi} \left\| \hat{G}(j\omega) - \hat{G}_k(j\omega) \right\|_{L_1} \\ &= 2 \cdot \text{tr}[(P_{PS} \cdot Q_{PS} - P \cdot Q) \cdot A] \\ &= 2 \cdot \text{tr}[P_{PS} \cdot Q_{PS} \cdot A] + \text{tr}[C^T \cdot R \cdot C \cdot P] \\ &= 2 \cdot \text{tr}[P_{PS} \cdot Q_{PS} \cdot A] + \text{tr}[B \cdot V \cdot B^T \cdot Q] \\ &= \text{tr}[C^T \cdot R \cdot C (P - P_{PS})] \\ &= \text{tr}[B \cdot V \cdot B^T (Q - Q_{PS})] \end{aligned}$$

où P et Q sont les grammians de commandabilité et d'observabilité du système (2.4.1).

Définition : Pseudogrammiens de commandabilité et d'observabilité [7]

P_{PS} et Q_{PS} (nxn-matrices, définies-positives) sont appelés Pseudogrammiens de commandabilité et d'observabilité.

Remarques

1/ P_{PS} et Q_{PS} , sont dites pseudogrammiens car elles ne sont pas de rang complet, mais vérifient les mêmes équations de Lyapunov associées à la réalisation (A, B, C).

2/ τ , appelée matrice de projection, satisfait:

$$\tau^2 = G^T \cdot \Gamma \cdot G^T \cdot \Gamma = G^T \cdot I_k \cdot \Gamma = \tau$$

Généralement, τ est une matrice de projection oblique, ce qui signifie que les vecteurs qu'initialement étaient orthogonaux, ne le sont plus nécessairement après projection via τ .

Interprétation

Le *Théorème-2.4* rassemble les conditions nécessaires d'optimalité du modèle d'ordre réduit. Ainsi, toute réalisation (A_k, B_k, C_k) satisfaisant les conditions du *Théorème-2.4* peut être soit un maximum ou un minimum du problème d'optimisation.

Il est possible de transformer le système (2.4.1) initial, de façon que la matrice de projection τ transformée soit $\tau = \text{diag}(I_k, 0)$ et que les pseudogrammiens deviennent matrices diagonales supérieures, la conséquence de cette transformation est le *Théorème-2.5*.

Théorème 2.5. [7]

Supposons que le système (2.4.1) satisfasse l'hypothèse du problème d'optimisation. Supposons aussi que $A_k, B_k, C_k, P_{PS}, Q_{PS}$ et τ satisfassent les conditions du *théorème-4.1* et qu'il existe une transformation non singulière $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ du système (2.4.1), telle que:

$$\hat{x}(t) = T \cdot x(t)$$

alors les matrices $\hat{P}_{PS}, \hat{Q}_{PS}$ et $\hat{\tau}$, transformées de P_{PS}, Q_{PS} et τ via T auront pour expressions:

$$\hat{P}_{PS} = T \cdot P_{PS} \cdot T^T = \begin{bmatrix} \Lambda_{P_{PS}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}_{PS} = T^{-T} \cdot Q_{PS} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{Q_{PS}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{PS} \cdot \hat{Q}_{PS} = T \cdot P_{PS} \cdot Q_{PS} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\tau} = T \cdot \tau \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où: $\Lambda_{P_s}, \Lambda_{Q_s} = k \times k$ -matrices (diagonales, définies-positives)

$$\Lambda = \Lambda_{P_s} \cdot \Lambda_{Q_s}$$

La transformation T appliquée au système (2.4.1) donne:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

$$\text{où: } (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = (T \cdot A \cdot T^{-1}, T \cdot B, C \cdot T^{-1})$$

$$\text{de même: } \hat{\tau} = \hat{G}^T \cdot \hat{\Gamma} = \text{diag}(I_k, 0)$$

$$\hat{A} \cdot \hat{G}^T = I_k$$

ceci implique qu'il existe une transformation $S \in \mathcal{R}^{n \times n}$, non singulière, telle que:

$$\hat{\Gamma} = [S \quad 0]$$

$$\hat{G} = [S^{-T} \quad 0]$$

Partitionnons \hat{x} , \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} conformément à $\hat{\Gamma}$ et \hat{G} , nous aurons:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix}; \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_k \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}; \hat{C} = [\hat{C}_k \quad \hat{C}_1]$$

Le modèle d'ordre réduit optimal est donc obtenu par troncature des:

- $(n-k)$ lignes et colonnes de \hat{A} .

- $(n-k)$ lignes de \hat{B} .

- $(n-k)$ colonnes de \hat{C} .

II.4.3. Conclusion

Quand un système d'ordre (n) est transformé dans une base correcte, on trouve son modèle simplifié, d'ordre réduit (k), optimal au sens de la norme L_1 .

La réduction s'effectue par élimination des (n-k) lignes et colonnes restant dans la réalisation transformée.

II.5. Approximation de modèles complexes par la norme de Hankel [7]

II.5.1. Introduction

Le problème de l'approche de Hankel [11] donne pour une matrice de fonctions transfert $\hat{G}(s)$, stable, de dimension (m x r), de degré (n) (r, m et n représentent respectivement le nombre d'entrées, de sorties et l'ordre du système) une matrice de fonctions de transfert $\hat{G}_H(s)$, de dimension (m x r), de degré (k) ($k < n$) minimisant la quantité:

$$\|\hat{G}(s) - \hat{G}_H(s)\|_H, \text{ appelée } \underline{\text{norme de Hankel}}.$$

Une solution complète de ce problème est donnée par Glover [11].

Quoique la norme de Hankel n'a pas d'interprétation directe, il s'est avéré que les solutions de ce problème vérifient aussi la norme L^∞ .

II.5.2. Position du problème

Soit le système linéaire, invariant, stable, multivariable, donné dans l'espace d'état par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Soit $\hat{G}(s)$, la matrice de fonctions de transfert du système (2.5.1), ayant comme valeurs singulières de Hankel (voir annexe 2): $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$.

La procédure de résolution du problème d'approximation de modèles via la norme de Hankel est d'établir une borne inférieure pour la quantité:

$$\|\hat{G}(s) - \hat{G}_H(s)\|_H \tag{2.5.2}$$

Pour satisfaire la borne inférieure de (2.5.2), on doit construire un ensemble de $\hat{G}_H(s)$, cette borne est donnée par le *Théorème-2.6* suivant.

Théorème 2.6. [7]

Si $\hat{G}(s)$ est la matrice de fonctions de transfert du système stable (2.5.1), ayant des valeurs singulières de Hankel:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0,$$

alors, pour tout $\hat{G}_H(s)$ de degré (k) ($k < n$), on aura:

$$\begin{aligned} \|\hat{G}(s) - \hat{G}_H(s)\|_H &\geq \sigma_{k+1}[\hat{G}(s)] \\ \|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_H(j\omega)\|_{L^2} &\geq \sigma_{k+1}[\hat{G}(s)] \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Remarques

On peut dire que la résolution de ce problème soit donnée par:

1/ Calculer $\sigma_{k+1}[\hat{G}(s)]$.

2i/ Construire $\hat{G}_H(s)$ qui satisfait les normes (2.5.3).

Il est clair qu'avec cette procédure on peut obtenir plusieurs solutions répondant aux inégalités (2.5.3), c'est pourquoi nous pouvons limiter ces solutions à un sous-ensemble de solutions suffisant, décrit par le Théorème-2.7 suivant.

Théorème 2.7. [7]

Soit $\hat{G}(s)$ la matrice de fonctions de transfert ayant des valeurs singulières de Hankel:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k = \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_{k+r} > \sigma_{k+r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

(où r est l'ordre de multiplicité de la valeur singulière de Hankel σ_{k+1}).

Avec le système (2.5.5) ci-dessous, on peut calculer un ensemble de $\hat{G}_H(s)$ de degré (k) ($k < n$), qui résoud le problème d'approximation par la norme de Hankel.

$$\begin{aligned} \hat{G}_H(s) + \hat{F}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} + \hat{D} \\ \|\hat{G}(s) - \hat{G}_H(s)\|_H &= \sigma_{k+1}[\hat{G}(s)] \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

II.5.3. Procédure : Calcul de la réalisation $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ [7]

Etape 1: Soit une réalisation équilibrée (A_b, B_b, C_b, D_b) de $\hat{G}(s)$, ayant comme grammians de commandabilité et d'observabilité:

$$W_c = W_o = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+r})$$

- définissons la matrice Σ_1 telle que:

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

Etape 2 : Augmentons la description du système de zéros afin d'obtenir une matrice carrée $(p+m) \times (p+m)$, nous aurons:

$$\left(A_b, \begin{bmatrix} B_b & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_b \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (A_s, B_s, C_s, D_s) \quad (2.5.5)$$

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1} \cdot I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

Etape 3 : Partitionner la nouvelle réalisation (2.5.5) conformément à (2.5.6):

$$(A_s, B_s, C_s) = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right)$$

Etape 4 : Posons $U = -C_2 \cdot B_2^n$, où B_2^n est l'inverse gauche [47] de B_2 .

Si $\text{rang}(B_2) = r$, alors $B_2^n = (B_2 \cdot B_2^T)^{-1} \cdot B_2$.

Soient aussi V et Γ tels que:

$$V = \begin{bmatrix} U & (I - U \cdot U^T)^{\frac{1}{2}} \\ (I - U^T \cdot U)^{\frac{1}{2}} & -U^T \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{k+1}^2 \cdot I$$

Etape 5 : Construction de la réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ telle que:

$$\tilde{A} = \Gamma^{-1} \cdot \left\{ \sigma_{k+1}^2 \cdot A_{11}^T + \Sigma_1 \cdot A_{11} \cdot \Sigma_1 - \sigma_{k+1} [C_1^T \ 0] V \begin{bmatrix} B_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \hat{A}$$

$$\tilde{B} = \Gamma^{-1} \cdot \left\{ \Sigma_1 \cdot [B_1 \ 0] + \sigma_{k+1} \cdot [C_1^T \ 0] \cdot V \right\} = [\hat{B} \ B_2]$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Sigma_1 + \sigma_{k+1} \cdot V \cdot \begin{bmatrix} B_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = D_a - \sigma_{k+1} \cdot V = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix}$$

Remarques

1/ Le Théorème-2.7 montre que la solution du problème d'approximation de la norme de Hankel est la partie stable, strictement propre de la réalisation $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$.

2/ Le choix de la matrice U (dans l'étape 4), doit uniquement satisfaire l'inéquation $(U^T \cdot U) \leq I$.

Un choix particulier de U, satisfaisant une telle condition, donne des bornes d'erreur favorables au sens de la norme L^∞ .

II.5.4. Définition: Fonction de transfert Passe-tout [7]

Une fonction de transfert $G(s)$ est dite passe-tout, si et seulement si:

$$G(s) \cdot G(-\bar{s}) = I$$

Remarque

Si W_c et W_o sont les grammiens de commandabilité et d'observabilité respectivement, d'une fonction de transfert passe-tout, alors: $(W_c \cdot W_o) = I$.

Théorème 2.8. [7]

Si $G_H(s)$ est une solution au problème d'approximation par la norme de Hankel posé dans le Théorème-2.7, ayant une valeur singulière de multiplicité r , avec un ordre du modèle réduit ($k=n-r$) (l'ensemble d'états ayant des valeurs singulières de Hankel identiques), alors:

$$\frac{G(s) - G_H(s)}{\sigma_n^r} \text{ est un passe-tout.}$$

$$\sigma_i[G_H(s)] = \sigma_i[G(s)].$$

Remarque Comme déjà mentionné, le Théorème-2.7 ne caractérise pas toutes les solutions du problème de la norme de Hankel.

Cependant, il caractérise un important sous-système de solutions qui satisfait la borne d'erreur de la norme L^∞ .

Théorème 2.9. [7]

Soient $\hat{F}(s)$, $\hat{G}(s)$, $\hat{G}_H(s)$ et $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ définis comme dans le Théorème-2.7, alors il existe une matrice D_0 telle que [11]:

$$\begin{aligned} \|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_H(j\omega) - D_0\|_{L^\infty} &\leq \sigma_{k+1}[\hat{G}(s)] + \|\hat{F}(j\omega) - D_0\|_{L^\infty} \\ &\leq \sigma_{k+1}[\hat{G}(s)] + \dots + \sigma_n[\hat{G}(s)] \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Remarque

On peut noter que les solutions du problème de la norme de Hankel peuvent être ajustées de façon qu'elles satisfassent l'erreur L^∞ .

II.5.5. Conclusion

Ce qui a été présenté est une technique de réduction d'ordre de modèles, qui génère des modèles simplifiés satisfaisant la norme L^∞ . Cependant, la procédure d'optimisation par la norme de Hankel demande un volume important de calcul, mais engendre un modèle d'ordre réduit ayant des performances meilleures au sens de la norme L^∞ , on note aussi que le modèle simplifié n'est pas optimal.

Chapitre III

SIMPLIFICATION DE MODELES COMPLEXES
PAR PROJECTIONS INTERNES

Le principe de base de simplification de modèles complexes par projections internes (projection du vecteur d'état dans une autre base de coordonnées) est le suivant:

- Ayant un modèle, d'ordre n , représenté dans l'espace d'état

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

- Choix (selon le critère adopté, dans notre cas le critère SVD) d'une certaine base de représentation, de dimension $k < n$.

- Projection du vecteur d'état $x(t)$ dans cette base et l'obtention par la suite d'un nouveau vecteur d'état d'ordre réduit k , représentant le modèle simplifié.

A. METHODES DES REALISATIONS EQUILIBREES
(CAS DE SYSTEMES MINIMAUX)

III.1. Principe de l'approche

Cette approche introduite par Moore [12], est fondée sur la recherche des valeurs singulières (voir Annexe 2) du système dans la base d'équilibre, où les deux grammiens de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux.

Pour un système continu, linéaire, invariant et minimal [40], représenté dans l'espace d'état par (voir Annexe 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

les degrés de commandabilité et d'observabilité à l'instant T , sont obtenus par décomposition en valeurs singulières (SVD) (voir Annexe 2) des grammiens de commandabilité et d'observabilité donnés respectivement par:

$$W_c = \int_0^T \text{Exp}[At] \cdot B \cdot B^T \cdot \text{Exp}[A^T t] dt \quad (3.1.2)$$

$$W_o = \int_0^T \text{Exp}[A^T t] \cdot C^T \cdot C \cdot \text{Exp}[At] dt \quad (3.1.3)$$

En opérant un changement de base, la représentation équilibrée est celle où les deux grammiens s'égalent à une matrice diagonale Σ dite matrice des valeurs singulières (Annexe 2) du système (3.1.1).

Il sera alors possible de classer les modes les plus commandables et les plus observables et ne conserver que les plus significatifs dans ce sens.

Notons que la troncature dans la base d'équilibre est indépendante du type du signal d'entrée, contrairement à d'autres approches de simplification de modèles.

III.2. Equilibre de modèles

III.2.1. Principe

Sachant que la représentation d'un système dans l'espace d'état n'est pas unique, ses divers modèles sont reliés entre eux par une transformation de similarité régulière du vecteur d'état, mais ceci n'implique pas l'invariance de toutes les propriétés du système sous une transformation de coordonnées telles que les propriétés de commandabilité et d'observabilité qui sont fonction du choix de la base choisie et sont appelées respectivement grammiens de commandabilité et d'observabilité du système, notés W_c et W_o .

Equilibrer le modèle (3.1.1) revient à rendre symétrique une certaine propriété d'entrée (commandabilité) avec une certaine propriété de sortie (observabilité) en choisissant correctement une base de représentation [13].

Il est donc nécessaire de trouver une nouvelle représentation dans laquelle ces deux grammiens sont égaux et diagonaux.

Un choix d'un grammien d'entrée particulier avec un grammien de sortie particulier est dit "paire équilibrée" si le spectre du produit des deux quantités est indépendant du système de coordonnées dans lequel le modèle est représenté:

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) & \xleftrightarrow{T} (A_o, B_o, C_o, D) \\ (W_o, W_c) & \xleftrightarrow{T} (\Sigma, \Sigma) \end{aligned}$$

III.2.2. Calcul des grammiens

i/ Cas d'un modèle continu [12, 13]

Soit le système (3.1.1), supposé linéaire, continu, invariant dans le temps, observable, commandable et asymptotiquement stable.

La paire (A, B) assure le calcul du degré de commandabilité, tandis que la paire (A, C) assure le calcul du degré d'observabilité.

Définition [7]

Soit le système (3.1.1), supposons que les valeurs propres de la matrice d'état A appartiennent au demi-plan gauche du plan fréquentiel complexe de Laplace (s), les grammians d'observabilité et de commandabilité du système sont définis respectivement par (3.1.3) et (3.1.2).

Quand $T_f \rightarrow \infty$, les matrices W_o et W_c sont solutions uniques des équations algébriques de Lyapunov données par:

$$A \cdot W_c + W_c \cdot A^T + B \cdot B^T = 0 \quad (3.2.1)$$

$$A^T \cdot W_o + W_o \cdot A + C^T \cdot C = 0 \quad (3.2.2)$$

Plusieurs algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre les équations (3.2.1) et (3.2.2), citons par exemple l'algorithme donné par Jameson [14].

2i/ Cas d'un modèle discret

Soit un modèle linéaire, discret, invariant dans le temps, commandable, observable et asymptotiquement stable, représenté dans l'espace d'état par:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Les deux grammians W_o et W_c du système (3.2.3) sont alors donnés par [15]:

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k \cdot C^T \cdot C \cdot A^k \quad (3.2.4)$$

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot B \cdot B^T \cdot (A^T)^k \quad (3.2.5)$$

Si le système (3.2.3) est asymptotiquement stable, autrement dit les valeurs propres de la matrice d'état A (pôles du système) appartiennent à l'intérieur du cercle unité, les deux sommes des équations (3.2.4) et (3.2.5) convergent pour un nombre fini de termes.

Les deux grammians W_o et W_c sont aussi solutions uniques des équations algébriques de Lyapunov suivantes [16]

$$A^T \cdot W_0 \cdot A - W_0 + C^T \cdot C = 0$$

$$A \cdot W_c \cdot A^T - W_c + B \cdot B^T = 0$$

III.2.3. Base d'équilibre et maximisation d'énergie [17]

Afin d'illustrer le principe de l'équilibre de modèles, il est nécessaire de mettre en évidence la relation existant entre grammien et entrées/sorties, considérons pour cela le problème de commande suivant [18]: Supposons que le système est à son état initial à l'instant t_0 et soit une commande $u(t)$ à énergie finie. Si le système est complètement commandable, alors son grammien de commandabilité est inversible et l'énergie minimale E_1 nécessaire pour commander l'état dans la direction $e_1 = [0 \dots \hat{e}_1 \dots 0]$ où $\hat{e}_1=1$, est donnée par:

$$E_1 = \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \tag{3.2.6}$$

où :

$$* u(\tau) = B^T(\tau) \cdot \Phi^T(t, \tau) \cdot W_c^{-1}(t) \cdot e_1,$$

$$* \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau)^T \cdot u(\tau) d\tau,$$

$$* W_c(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot B^T(\tau) \cdot \Phi^T(t, \tau) d\tau,$$

* $\Phi(t, \tau)$: matrice de transition du système [19].

Dans le cas où le système est invariant dans le temps et par décomposition en valeurs propres de W_c , nous aurons:

$$W_c = U_c^T \cdot \Sigma_c \cdot U_c \tag{3.2.7}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} u_{c1} & u_{c2} & \dots & u_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{c1} & & & \\ & \sigma_{c2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \vdots \\ u_{cn} \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

où : - $\Sigma_c = \text{diag}(\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \dots, \sigma_{cn})$,

- $\sigma_{ci} = i^{\text{ème}}$ valeur propre de W_c , ($i = \overline{1, n}$),

- $u_{ci} = i^{\text{ème}}$ vecteur propre associé à la valeur propre σ_{ci} .

En injectant (3.2.8) dans (3.2.6), on obtient:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma_{ci}} \tag{3.2.9}$$

La puissance E_o qu'on retrouve à la sortie de l'état e_1 est définie par:

$$E_o = \int_{-\infty}^t \|y(\tau)\|^2 d\tau \tag{3.2.10}$$

où:

$$\int_{-\infty}^t \|y(\tau)\|^2 d\tau = \int_{-\infty}^t y^T(\tau) \cdot y(\tau) d\tau$$

$$W_o(t) = \int_{-\infty}^t \Phi^T(t, \tau) \cdot C^T(\tau) \cdot C(\tau) \cdot \Phi(t, \tau) d\tau$$

Dans le cas où le système est invariant dans le temps, par décomposition en valeurs propres, nous aurons:

$$W_o = U_o^T \cdot \Sigma_o \cdot U_o \tag{3.2.11}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} u_{o1} & u_{o2} & \dots & u_{on} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{o1} & & & \\ & \sigma_{o2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_{on} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ \vdots \\ u_{on} \end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

où : - $\Sigma_o = \text{diag}(\sigma_{o1}, \sigma_{o2}, \dots, \sigma_{on})$,

- $\sigma_{oi} = i^{\text{ème}}$ valeur propre de W_o , ($i = \overline{1, n}$),

- $u_{oi} = i^{\text{ème}}$ vecteur propre associé à la valeur propre σ_{oi} .

En injectant (3.2.12) dans (3.2.10), on obtient:

$$E_o = \frac{1}{\sigma_{oi}} \quad (3.2.13)$$

Se basant sur les équations (3.2.9), (3.2.13), on peut voir que si dans une certaine représentation d'état σ_{oi} où est faible, l'état dans la direction e_i est faiblement couplé avec l'entrée, donc très difficilement commandable, et demande par conséquent une énergie σ_{oi}^{-1} relativement grande pour pouvoir commander cet état dans la direction e_i .

Si l'on observe une énergie σ_{oi} à la sortie de l'état e_i , ceci indique que le couplage entre les états et la sortie dans cette direction est très fort, donc facilement observable.

Une intéressante interprétation qui en découle des deux grammiens peut être illustrée dans un problème de commande. En effet, l'énergie nécessaire à l'entrée est proportionnelle à la quantité $x^T \cdot W_c^{-1} \cdot x$. Le grammien de commandabilité indiquant le degré de commandabilité donne une idée sur la notion quantitative du problème de commande.

Si la sortie est à commander, alors la quantité $x^T \cdot W_o \cdot x$ serait la mesure de l'énergie à la sortie du système autonome, qui est faible si les états sont difficilement contrôlables, donc nécessite une grande énergie à l'entrée.

III.2.4. Procédure d'équilibre

La procédure d'équilibre que nous allons exposer est aussi valable pour les systèmes continus que pour ceux à temps discret.

Elle consiste en la détermination de la transformation d'équilibre (T) pour une paire de grammiens (W_o, W_c). De cette procédure, résulte une paire de grammiens équilibrée (Σ, Σ).

La transformation d'équilibre (T) peut être construite via l'algorithme donné dans Laub [20], qui présente l'avantage, par rapport à d'autres algorithmes, de donner, à la fois, la transformation de l'équilibre et son inverse.

Algorithme [20]

Ayant la réalisation dans l'espace d'état (A, B, C, n), le système équilibré (A_o, B_o, C_o, n) s'obtient, après construction de la transformation d'équilibre (T), en suivant les étapes suivantes:

Etape 1: Calcul des grammiens d'observabilité W_o et de commandabilité W_c par résolution des équations de Lyapunov (3.2.1, 3.2.2) dans le cas continu, et par évaluation des quantités (3.2.4, 3.2.5) dans le cas discret.

Etape 2: Factorisation de Cholesky (voir Annexe 6) des grammians W_o et W_c telle que:

$$W_o = L_o \cdot L_o^T \quad (L_o : \text{matrice triangulaire inférieure})$$

$$W_c = L_c \cdot L_c^T \quad (L_c : \text{matrice triangulaire inférieure})$$

Etape 3: Décomposition en valeurs singulières (SVD) (voir Annexe 2) de la quantité

$$M = L_o^T \cdot L_c, \text{ telle que: } M = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

où: - U et V = nxn-matrices orthogonales.

- Σ = nxn-matrice diagonale (matrice des valeurs singulières du système) telle que:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \text{ avec: } \sigma_i > \sigma_j \text{ pour } i > j.$$

Etape 4: Obtention de la transformation d'équilibre T et de son inverse T^{-1} :

$$T = L_c \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad [\text{transformation d'équilibre directe}]$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_o^T \quad [\text{transformation d'équilibre inverse}]$$

Etape 5: Construction de la réalisation équilibrée:

$$A_o = T^{-1} \cdot A \cdot T = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot A \cdot L_c \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.14a)$$

$$B_o = T^{-1} \cdot B = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot B \quad (3.2.14b)$$

$$C_o = C \cdot T = C \cdot L_c \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.14c)$$

On montre bien que:

$$\begin{aligned} W_{oo} &= T^T \cdot W_o \cdot T \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot V^T \cdot L_o^T \cdot L_o \cdot L_o^T \cdot L_c \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot V^T \cdot M^T \cdot M \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

de même, on montre:

$$\begin{aligned} W_{\infty} &= T^{-1} \cdot W_c \cdot T^{-T} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot L_c \cdot L_c^T \cdot L_o \cdot U \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot M \cdot M^T \cdot U \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

d'où : $(W_{oo}, W_{\infty}) = (\Sigma, \Sigma)$.

Proposition [21]

Soit P tel que $P \subseteq \mathfrak{R}(m, n, p)$, P est la classe de systèmes à paramètres équilibrés.

Si (A, B, C) appartient à P , alors (A, B, C) est minimale et le modèle est asymptotiquement stable.

III.2.5. Conclusion

La forme équilibrée des systèmes, intéressante dans le problème de synthèse de systèmes, présente de bonnes propriétés numériques.

La théorie des réalisations équilibrées nous semble et a été jugée utile dans le problème de réduction d'ordre de modèles complexes.

III.3. Réduction d'ordre de modèles complexes par la M.R.E

III.3.1. Introduction

Une fois la procédure de l'équilibre du modèle achevée, c-à-d, ayant obtenu:

$$W_{oo} = W_{\infty} = \Sigma,$$

où : $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ [matrice des valeurs singulières du modèle (3.1.1)],

avec $\sigma_i > \sigma_j ; (i > j)$, la réduction consiste en l'élimination, par troncature, dans la réalisation équilibrée (A_e, B_e, C_e, n) , des modes les moins observables et les moins commandables du système, selon le critère de la norme de Hankel [12].

Les valeurs singulières du système (éléments de la matrice Σ), reflètent une mesure quantitative à la fois des énergies de commandabilité et d'observabilité de chaque état du système, le principe de réduction d'ordre est donc d'éliminer les valeurs singulières les moins significatives (faibles).

III.3.2. Critère énergétique de réduction

De point de vue mathématique, Σ est aussi solution des équations de Lyapunov [20], que ce soit dans le cas de systèmes continus ou bien discret.

Cas de systèmes continus

$$\begin{aligned} A_o \cdot \Sigma + \Sigma \cdot A_o^T + B_o \cdot B_o^T &= 0 \\ A_o^T \cdot \Sigma + \Sigma \cdot A_o + C_o^T \cdot C_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Cas de systèmes discrets

$$\begin{aligned} A_o \cdot \Sigma \cdot A_o^T - \Sigma + B_o \cdot B_o^T &= 0 \\ A_o^T \cdot \Sigma \cdot A_o - \Sigma + C_o^T \cdot C_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

où la réalisation (A_o, B_o, C_o, n) est définie par les équations (3.2.14).

Partitionnons la matrice Σ comme suit:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

où: - $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ [partie à conserver]
 - $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$ [partie à éliminer]
 - k : Ordre du modèle simplifié.

et les éléments de Σ doivent être ordonnés par ordre décroissant, c-à-d:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Le classement des σ_i ($i = \overline{1, n}$) est établi pour garder les valeurs singulières les plus significatives (éléments de Σ_1) tout en éliminant les plus faibles (éléments de Σ_2), la réduction d'ordre s'opère donc sur une base énergétique.

III.3.3. Procédure de réduction [13]

Le problème est de trouver un ordre (k) de troncature (ordre du modèle simplifié), qui donnerait avec une certaine erreur imposée a priori, un sous-système optimal pour cet ordre. Le critère utilisé est celui de la norme de Hankel, défini par [35]:

$$\left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right)^{\frac{1}{2}} \gg \left(\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^4 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.3)$$

$k \neq \{0, n\}$

ou bien:

$$\xi_k = \frac{\left(\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^4 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right)^{\frac{1}{2}}} \ll 1 \quad (3.3.4)$$

$k \neq \{0, n\}$

pour plus d'efficacité, on définit une autre mesure d'erreur e telle que:

$$\zeta_i = |\xi_i - \xi_{i+1}| \leq e, \quad i = \overline{1, n-1} \quad (3.3.5)$$

où e est une erreur fixée a priori.

En introduisant la matrice Σ partitionnée dans les équations de Lyapunov (3.3.1), nous aurons:

$$\begin{bmatrix} A_{o11} & A_{o12} \\ A_{o21} & A_{o22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{o11}^T & A_{o12}^T \\ A_{o21}^T & A_{o22}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{o1} \\ B_{o2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{o1}^T & B_{o2}^T \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{o11} & A_{o12} \\ A_{o21} & A_{o22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{o11}^T & A_{o12}^T \\ A_{o21}^T & A_{o22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{o1}^T \\ C_{o2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{o1} & C_{o2} \end{bmatrix} = 0$$

En posant: $(A_r, B_r, C_r, \Sigma_r) = (A_{o11}, B_{o1}, C_{o1}, \Sigma_1)$, le système équilibré réorganisé peut se partitionner comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & A_{.12} \\ A_{.21} & A_{.22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ B_{.2} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (3.3.6a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_r & C_{.2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.6b)$$

où $z(t)$ est le vecteur d'état du système représenté dans la base d'équilibre, c-à-d; $x(t)=T.z(t)$ (T étant la transformation d'équilibre).

La réalisation simplifiée (A_r, B_r, C_r, k) , d'ordre (k) , correspond bien à la partie la plus commandable et la plus observable de la réalisation complète (A, B, C, n) .

Il est très important de noter que la réduction d'ordre, par troncature dans la base d'équilibre, préserve la signification physique des états dans le modèle simplifié, comme il faut signaler que ces états $z_i(t)$ sont fonction (combinaison linéaire) de tout les états anciens $x(t)$ du modèle initial, d'ordre complet.

La procédure est similaire dans le cas de modèles discrets.

Définition [12] Le système d'ordre réduit (k) , dont la réalisation est (A_r, B_r, C_r, k) est dit à dominance interne si et seulement si le modèle complet représenté dans sa base d'équilibre est organisé de telle façon qu'il satisfait la relation (3.3.3).

Propriété Tout système simplifié, ayant pour réalisation (A_r, B_r, C_r, k) engendré par un modèle équilibré, satisfera lui aussi les deux équations de Lyapunov, ce qui induit la conservation des propriétés de commandabilité, d'observabilité et de la stabilité asymptotique dans le modèle d'ordre réduit [12, 16, 22].

III.3.4. Conclusion

Dans ce paragraphe, une des plus récentes approches de réduction d'ordre de modèles a été développée, un problème se pose dans le cas où l'équilibre est mal conditionné.

En effet, la procédure de simplification de modèles introduite par Moore, de point de vue utilisation s'avère limitée par des difficultés numériques (inversion matricielle,...), ces dernières associées au calcul de T ont été contournées par l'utilisation d'un algorithme très performant [20], donnant à la fois, la transformation d'équilibre et son inverse.

Par ailleurs, un sérieux problème se pose lorsque le système possède des modes presque non commandables et presque non observables [23] (correspondant à de faibles valeurs singulières), dans ce cas l'équilibre devient intrinsèquement mal conditionné et la matrice d'équilibre tend à la singularité.

Un autre problème surgit lorsque les valeurs singulières du système sont de même ordre de grandeur. Dans ce cas la réduction d'ordre s'avère très difficile. C'est pourquoi, il serait préférable de générer une réalisation pour la fonction de transfert du modèle simplifié de Moore:

$$G(s) = C_1 (s.I - A_{11})^{-1} . B_1 + D$$

sans avoir du tout à équilibrer, et ce en procédant à des "Projections dans l'espace d'état" [24], objet du paragraphe suivant, où l'approche de Schur sera traitée.

Les diverses performances de la M.R.E. seront illustrées et discutées par quelques applications (section III.5), aussi bien dans le cas de modèles continus que dans le cas discret.

B. APPROCHE DE SCHUR (CAS DE SYSTEMES NON MINIMAUX)

III.4. Simplification de modèles par l'approche de Schur [23]

III.4.1. Introduction et position du problème

Soit (A, B, C, D, n) , une réalisation d'état stable, non nécessairement minimale [40], ayant pour fonction de transfert:

$$G(s) = D + (I.s - A)^{-1} . B$$

Il existe alors une transformation d'état inversible $T_e \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, qui transforme le système en:

$$\begin{pmatrix} A_e & B_e \\ C_e & D_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_e^{-1} . A . T_e & T_e^{-1} . B \\ C . T_e & D \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

Les grammiens de commandabilité et d'observabilité s'écrivent donc dans cette base comme suit:

$$W_{c,e} = T_e^{-1} . W_c . (T_e^{-1})^T = \text{diag}(\Sigma_1, 0) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.4.2)$$

$$W_{o,e} = T_e^T . W_o . T_e = \text{diag}(\Sigma_1, 0) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.4.3)$$

où: Σ_1 est une matrice diagonale, telle que:

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.4.4)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > \sigma_{n+1} = \dots = \sigma_n = 0 \quad (3.4.5)$$

les σ_i ($i = 1, n$) sont déterminées par (voir Annexe 2):

$$\sigma_i = [\lambda_i(W_o \cdot W_c)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.6)$$

où $\lambda_i(W_o \cdot W_c)$ sont les valeurs propres de $(W_o \cdot W_c)$ et W_o, W_c sont solutions des équations de Lyapunov:

$$W_c \cdot A^T + A \cdot W_c + B \cdot B^T = 0 \quad (3.4.7)$$

$$W_o \cdot A + A^T \cdot W_o + C^T \cdot C = 0 \quad (3.4.8)$$

Le modèle simplifié d'ordre ($k \leq n$), proposé par Moore, s'établit en partitionnant la réalisation équilibrée comme suit:

$$\begin{bmatrix} [A_o] & [B_o] \\ [C_o] & [D_o] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11} & A_{12}] \\ [A_{21} & A_{22}] \\ [C_1 & C_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ [D] \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

où $A_{11} \in \mathfrak{R}^{k \times k}$ et $A_{22} \in \mathfrak{R}^{(n-k) \times (n-k)}$.

Le modèle d'ordre réduit (k) obtenu en tronquant les $(n-k)$ états les moins observables et les moins commandables, est donné par:

$$G_r(s) = D + C_1 \cdot (I \cdot s - A_{11})^{-1} \cdot B_1 \quad (3.4.10)$$

Le modèle simplifié est stable, minimal et équilibré, avec des grammiens d'observabilité et de commandabilité équilibrés:

$$\Sigma_{e,r} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \quad (3.4.11)$$

et qui vérifie la norme L^∞ :

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty \leq 2 \cdot \sum_{i=k+1}^n \sigma_i, \quad \forall \omega \quad (3.4.12)$$

Cette approche est limitée numériquement, le calcul de la transformation d'équilibre s'avère compliqué, en particulier si la matrice $(W_o \cdot W_c)$ présente un nombre condition élevé reflétant l'existence de modes presque non observables ou presque non contrôlables.

Les difficultés numériques associées à la transformation d'équilibre font que l'approche de Moore est inutilisable, l'équilibre est dit alors intrinsèquement mal conditionné pour des systèmes présentant des modes presque non observables et d'autres presque non contrôlables.

Pour résoudre ce problème (mal conditionnement de l'équilibre), on propose une approche, opérant dans n'importe quelle base de représentation, utilisant les espaces propres.

Deux méthodes seront développées, l'une basée sur la décomposition du produit $(W_c \cdot W_o)$ en forme de Schur (Méthode de Schur), l'autre exploitant la factorisation de Cholesky des matrices W_c et W_o (Méthode de la racine carrée).

III.4.2. Procédure de simplification de modèles

Nous présenterons la procédure générale de calcul de la réalisation du modèle simplifié d'ordre (k) , $G_r(s)$, en utilisant une base de représentation quelconque et en exploitant les espaces propres gauche et droite associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice $(W_c \cdot W_o)$.

Procédure [23]

Entrées: A, B, C, D, k

Etape 1: Calcul des matrices $V_{d,r} \in \mathcal{R}^{n \times k}$, $V_{g,r} \in \mathcal{R}^{n \times k}$, ayant pour colonnes respectivement les espaces propres droite et gauche de la matrice $(W_c \cdot W_o)$ associés aux grandes valeurs propres $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$.

Etape 2: Former la projection [49]

$$P_s = V_{g,r}^T \cdot V_{d,r} \quad (3.4.13)$$

Et calculer sa décomposition en valeurs singulières (SVD) (Annexe 2):

$$P_g = U_{P,g} \cdot \Sigma_{P,g} \cdot V_{P,g} \quad (3.4.14)$$

Etape 3: Former les matrices:

$$S_{s,s} := V_{s,s} \cdot U_{P,g} \cdot \Sigma_{P,g}^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{R}^{n \times k} \quad (3.4.15)$$

$$S_{d,s} := V_{d,s} \cdot V_{P,g} \cdot \Sigma_{P,g}^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{R}^{n \times k} \quad (3.4.16)$$

Etape 4: Construction de la réalisation d'état du modèle simplifié

$$\begin{bmatrix} [A_r] & [B_r] \\ [C_r] & [D_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{s,s}^T \cdot A \cdot S_{d,s}] & [S_{s,s}^T \cdot B] \\ [C \cdot S_{d,s}] & [D] \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

Fin de la procédure.

Proposition La matrice de fonctions de transfert d'ordre (k)

$$G_r(s) := C_r \cdot (Is - A_r) \cdot B_r + D_r \quad (3.4.18)$$

obtenue par cette procédure est la même que celle obtenue par Moore, dans le cas d'une réalisation minimale du modèle initial G(s).

La réalisation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r) présente des grammiens de commandabilité et d'observabilité donnés respectivement par:

$$W_{c,r} = S_{s,s}^T \cdot W_c \cdot S_{s,s} \in \mathfrak{R}^{k \times k} \quad (3.4.19)$$

$$W_{o,r} = S_{d,s}^T \cdot W_o \cdot S_{d,s} \in \mathfrak{R}^{k \times k} \quad (3.4.20)$$

III.4.3. Algorithme de Schur

La robustesse numérique de la procédure précédente dépend précisément de la base dans laquelle les matrices (espaces propres) V_{d,s} et V_{s,s} sont calculées (étape 1).

Les (k) premières colonnes des matrices T_s et T_s^{-T} donnent respectivement V_{d,s} et V_{s,s}, or,

comme déjà souligné en introduction, le calcul de la transformation d'équilibre est numériquement mal conditionné. Pour résoudre ce problème, nous proposons la présente procédure basée sur la décomposition de Schur de la matrice $(W_c \cdot W_o)$, pour le calcul des bases orthonormales V_d et V_c .

Procédure [23]

Etape 1: Résoudre les équations (3.4.7) et (3.4.8), obtention des grammien W_c , W_o .

Etape 2: Calcul de la matrice réelle, orthonormale V , telle que la matrice $(V \cdot W_c \cdot W_o \cdot V^T)$ soit triangulaire supérieure; c-à-d, mettre $(W_c \cdot W_o)$ sous la forme de Schur.

Etape 3: Utiliser les rotations orthogonales [47] pour calculer les transformations réelles orthogonales V_A et V_D qui ordonnent respectivement la forme de Schur en ordre ascendant et descendant, telles que:

$$V_A^T \cdot W_c \cdot W_o \cdot V_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A_1} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{A_{n-1}} & * & * & * \\ . & 0 & * & * & * \\ . & . & . & * & * \\ . & . & . & . & \lambda_{A_1} \end{bmatrix} \quad (3.4.21)$$

$$V_D^T \cdot W_c \cdot W_o \cdot V_D = \begin{bmatrix} \lambda_{D_1} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{D_2} & * & * & * \\ . & . & * & * & * \\ . & . & . & * & * \\ . & . & . & . & \lambda_{D_n} \end{bmatrix} \quad (3.4.22)$$

avec:

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2 \quad (i = \overline{1, k}) \quad (3.4.23)$$

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2 \quad (i = \overline{k+1, n}) \quad (3.4.24)$$

Etape 4: Partition de V_A, V_D en vue de l'obtention des matrices $V_{s,s}$ et $V_{d,s}$.

$$V_A = \begin{bmatrix} \overbrace{V_{d,p}}^{n-k} & \overbrace{V_{s,s}}^k \end{bmatrix} \quad (3.4.25)$$

$$V_D = \begin{bmatrix} \overbrace{V_{d,s}}^k & \overbrace{V_{s,p}}^{n-k} \end{bmatrix} \quad (3.4.26)$$

Commentaire Les colonnes de $V_{d,s}, V_{d,p}$ forment respectivement les bases orthonormales des espaces propres droite de (W_c, W_o) associés aux grandes valeurs propres σ_i^2 ($i = \overline{1, k}$) et aux petites valeurs propres σ_i^2 ($i = \overline{k+1, n}$), de même, les colonnes de $V_{s,s}, V_{s,p}$ forment la décomposition analogue des espaces propres gauche.

Remarque La méthode de Schur assure l'obtention d'un modèle simplifié, sans avoir à calculer la transformation d'équilibre.

III.4.4. Algorithme de la racine carrée [23]

La méthode de Schur offre l'avantage d'obtenir une base orthonormale et assure une robustesse numérique appréciable.

Sachant que le nombre condition des facteurs de Cholesky de W_c et de W_o est la racine carrée du nombre condition de W_c et de W_o , le conditionnement numérique est meilleur en utilisant la factorisation de Cholesky.

Procédure

Etape 1: Résolution de (3.4.7), (3.4.8) et obtention de W_c et W_o .

Etape 2: Factorisation de Cholesky de W_c et de W_o telles que (voir annexe 6):

$$W_c = L_c \cdot L_c^T \quad (L_c : \text{triangulaire Inf.}) \quad (3.4.27)$$

$$W_o = L_o \cdot L_o^T \quad (L_o : \text{triangulaire Inf.}) \quad (3.4.28)$$

Etape 3: Calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) du produit $(L_o^T \cdot L_c)$:

$$L_o^T \cdot L_c = U \cdot \Sigma_1 \cdot V^T \quad (3.4.29)$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m); \quad \sigma_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3.4.30)$$

Remarque

Les colonnes de la matrice $(L_r \cdot V)$ sont les vecteurs propres droite de la matrice $(W_c \cdot W_o)$ associés aux valeurs propres non nulles σ_i^2 ($i = \overline{1, m}$).

Les colonnes de la matrice $(L_o \cdot U)$ sont les vecteurs propres gauches associés aux valeurs propres non nulles σ_i^2 ($i = \overline{1, m}$) du produit $(W_c \cdot W_o)$.

Etape 4: Calcul de V_{d_s} et V_{s_s}

$$V_{d_s} = L_r \cdot V \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.31)$$

$$V_{s_s} = L_o \cdot U \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.32)$$

Etape 5: Construction de la projection [47]

$$\begin{aligned} P_s &= V_{s_s}^T \cdot V_{d_s} = [I_k \quad 0] \cdot U^T \cdot L_o^T \cdot L_r \cdot V \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [I_k \quad 0] \cdot U^T \cdot U \cdot \Sigma_1 \cdot V^T \cdot V \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [I_k \quad 0] \cdot \Sigma_1 \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P_s = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \Sigma_{s,r} \quad (3.4.33)$$

Etape 6: Former

$$S_{s,s} = L_o \cdot U \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{s,r}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.34)$$

$$S_{d,s} = L_r \cdot V \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{s,r}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.35)$$

Etape 7: Construction de la réalisation du modèle simplifié en utilisant l'équation (3.4.17).

III.5. Simulation et interprétation

III.5.1. Exemple 1 (système SISO, continu, minimal)

Considérons le système linéaire, continu, invariant et asymptotiquement stable, d'ordre 7, donné par la fonction de transfert suivante [25]:

$$G(s) = \frac{1441.53 s^6 + 78319 s^5 + 525286 s^4 + 607693.25 s^3}{s^7 + 112.04 s^6 + 3755.92 s^5 + 39756.73 s^4 + 363650.56 s^3 + 759894.19 s^2 + 683656.25 s + 617497.37}$$

La réalisation d'état correspondante est donnée par:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -112.04 & -3755.92 & -39756.73 & -363650.6 & -759894 & -683656.3 & -617497.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1441.53 & 78319 & 525286.1 & 607693.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières correspondantes sont données par:

$$\Sigma = [1.3193 \quad 0.8006 \quad 2.8905 E - 2 \quad 9.3737 E - 3 \quad 7.3070 E - 3 \quad 1.2674 E - 4 \quad 2.2890 E - 5]$$

En prenant un modèle réduit d'ordre 2, sa réalisation est obtenue par troncature dans la base équilibrée, et est donnée par:

$$\begin{bmatrix} [A_r] & [B_r] \\ [C_r] & [D_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-0.2377 & 1.0712] \\ [-1.0712 & -0.3076] \\ [0.7921 & -0.7018] \\ [0] \end{bmatrix}$$

ce qui correspond à une borne de l'erreur de Hankel: $erH = 9.147246E-2$

Les pôles du système initial et celui simplifié d'ordre 2 sont donnés dans le tableau suivant:

Tableau 3.1. Pôles du modèle initial et celui d'ordre réduit

Systeme initial (Ordre 7)	Systeme simplifié (Ordre2)
-52.65353	-0.272686 + j1.070709
-49.23136	-0.272686 - j1.070709
-1.897453	
-3.856054 + j9.651712	
-3.856054 - j9.651712	
-0.272775 + j1.042962	
-0.272775 - j1.042962	

Dans les figures qui suivent, nous représentons les diverses réponses temporelles (réponses impulsionnelle, indicielle et leurs écarts), fréquentielles (spectres d'amplitude et de phase) ainsi que la région des pôles (plan de stabilité) des systèmes initial et simplifié.

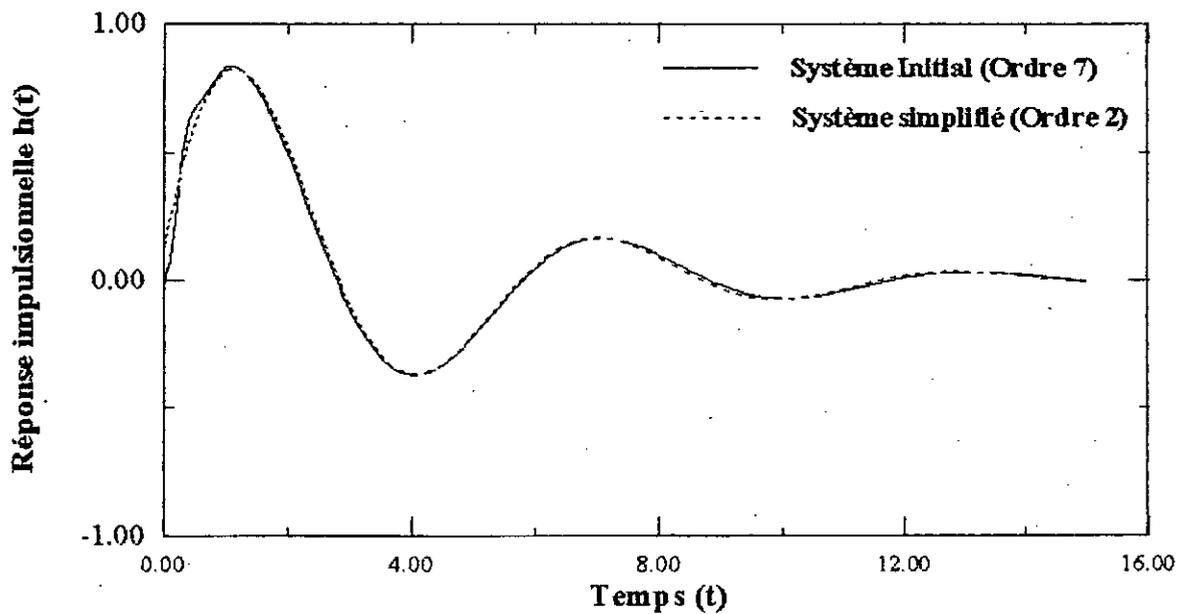


Figure 3.1. Réponse impulsionnelle des systèmes initial et simplifié

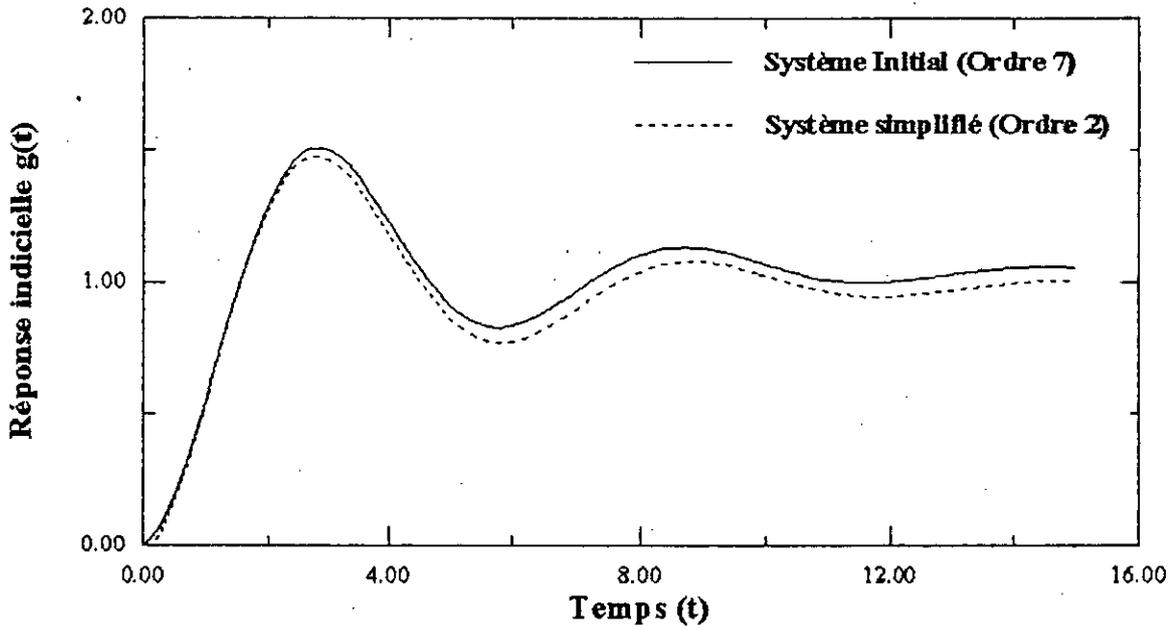


Figure 3.2. Réponse indicienne des systèmes initial et simplifié.

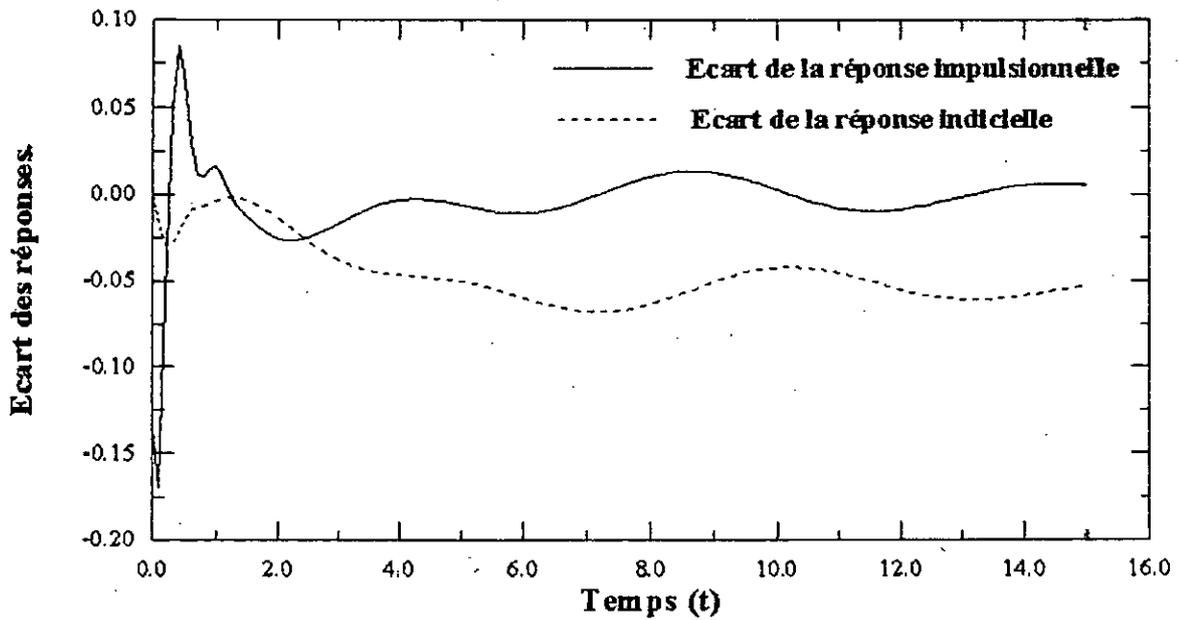


Figure 3.3. Ecart des réponses impulsionnelles et indicielles.

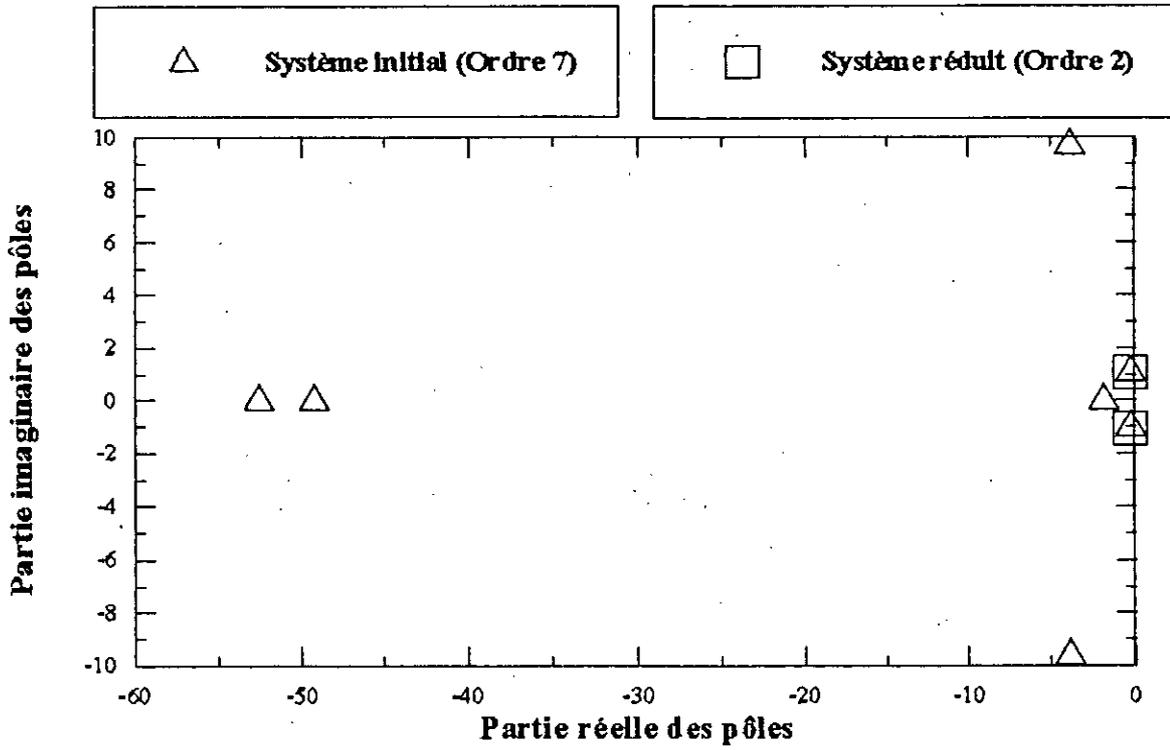


Figure 3.4. Lieu des pôles (Plan de stabilité).

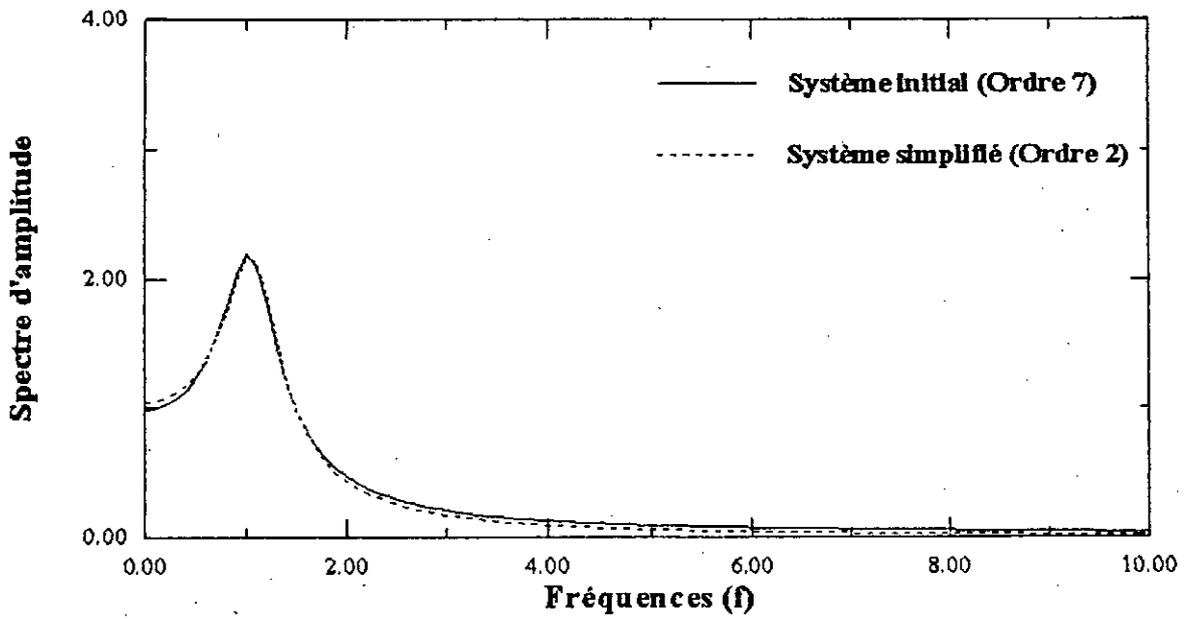


Figure 3.5. Spectre d'amplitude des systèmes initial et simplifié.

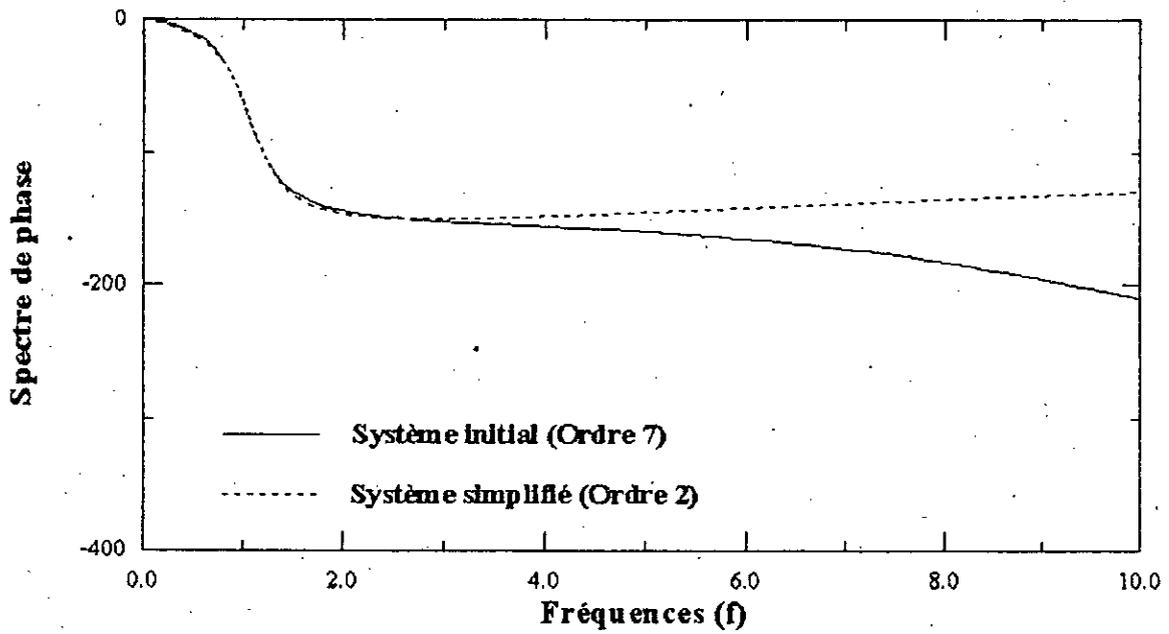


Figure 3.6. Spectre de phase des systèmes initial et simplifié.

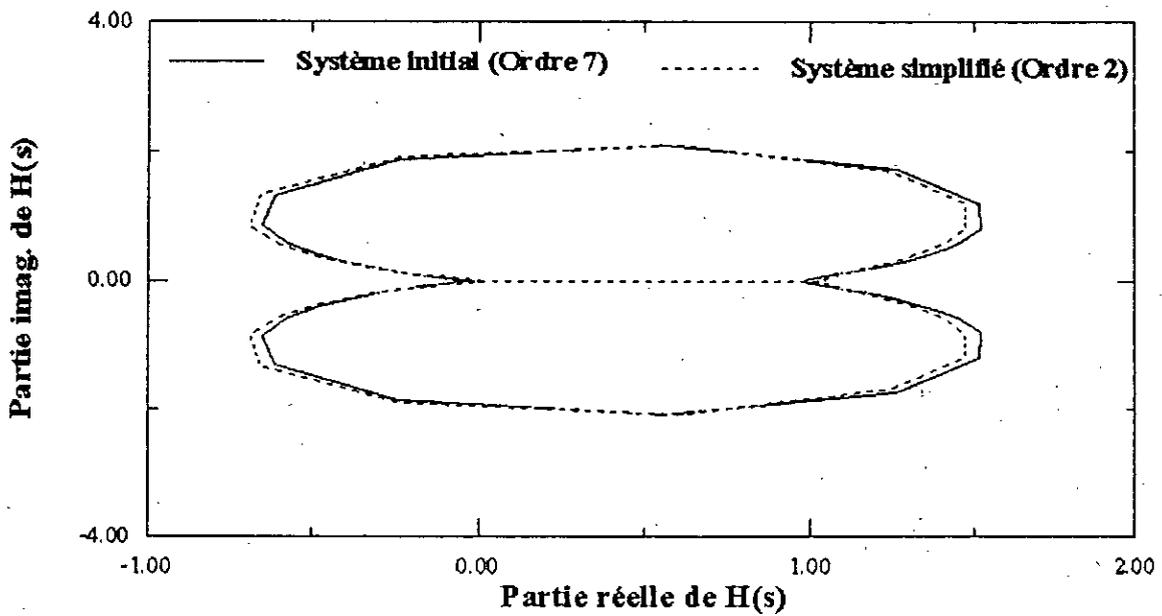


Figure 3.7. Plan de Nyquist des systèmes initial et réduit.

III.5.2. Exemple 2 (Filtre numérique de Butterworth)

Considérons le filtre numérique de *Butterworth*, d'ordre 15, conforme au gabarit suivant [27]: $(w_c, w_r, A) = (0.25, 0.258, 0.1)$, où:

- w_c : fréquence de coupure normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage,
- w_r : fréquence d'atténuation normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage,
- A : atténuation dans la bande coupée.

la fonction de transfert correspondante est donnée par:

$H(z) = N(z)/D(z)$, avec:

$$N(z) = 2.36E - 3z^{14} + 0.02z^{13} + 0.07z^{12} + 0.21z^{11} + 0.47z^{10} + 0.79z^9 + z^8 + z^7 + 0.79z^6 + 0.47z^5 + 0.21z^4 + 0.07z^3 + 0.02z^2 + 2.36E - 3z + 1.6E - 4$$

$$D(z) = z^{15} + 2.03z^{13} + 1.51z^{11} + 0.52z^9 + 0.09z^7 + 6.67E - 3z^5 + 2E - 4z^3 + 1E - 6z$$

Les valeurs singulières correspondantes sont données par:

$$\Sigma = [1 \quad 0.985 \quad 0.887 \quad 0.593 \quad 0.231 \quad 4.65E-2 \quad 5.11E-3 \quad 3.43E-4 \quad 1.49E-5 \quad 4.10E-7 \quad 6.61E-9 \quad 6.22E-11 \quad 3.19E-13 \quad 5.45E-18 \quad 4.60E-20]$$

En prenant comme ordre du filtre simplifié 7, le modèle d'ordre réduit résulte de la troncature des 8 états du modèle initial, représenté dans sa base équilibrée, et aura pour fonction de transfert:

$$H_r(z) = \frac{2.60E - 3z^4 + 1.05E - 3z^3 + 5.22E - 2z^2 + 9.17E - 2z + 0.2z^2 + 0.14z + 0.15}{z^7 - 1.68z^6 + 2.76z^5 - 2.76z^4 + 2.2z^3 - 1.24z^2 + 0.488z - 0.1}$$

Seront tracés les spectres d'amplitude et de phase, le lieu des pôles et l'écart de la réponse impulsionnelle, pour le filtre initial et celui d'ordre réduit.

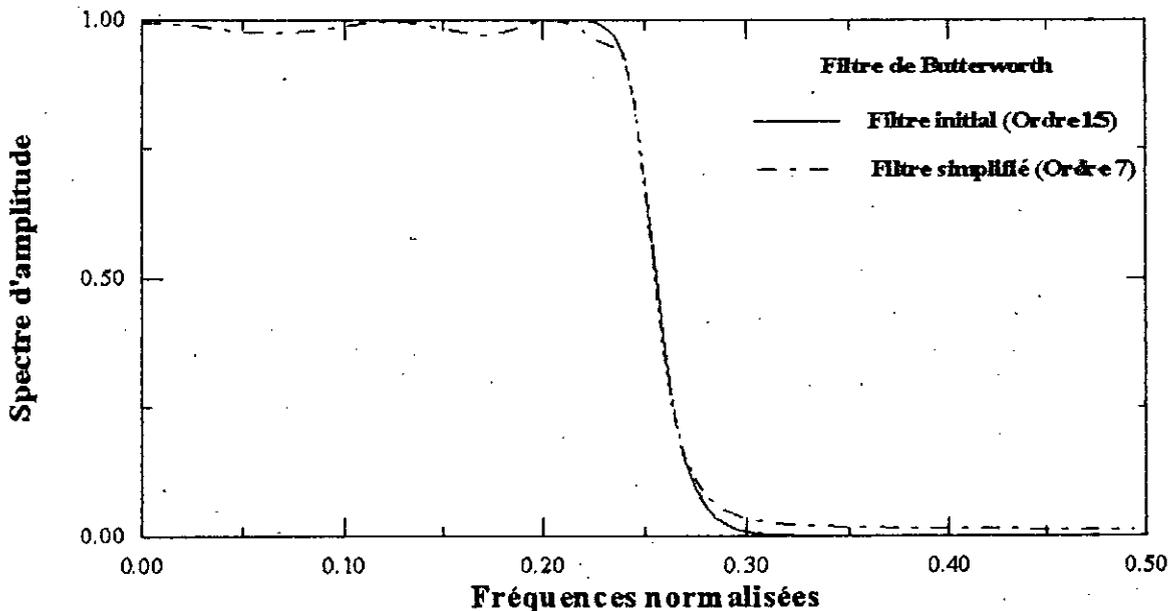


Figure 3.3 Spectre d'amplitude du filtre initial et celui simplifié

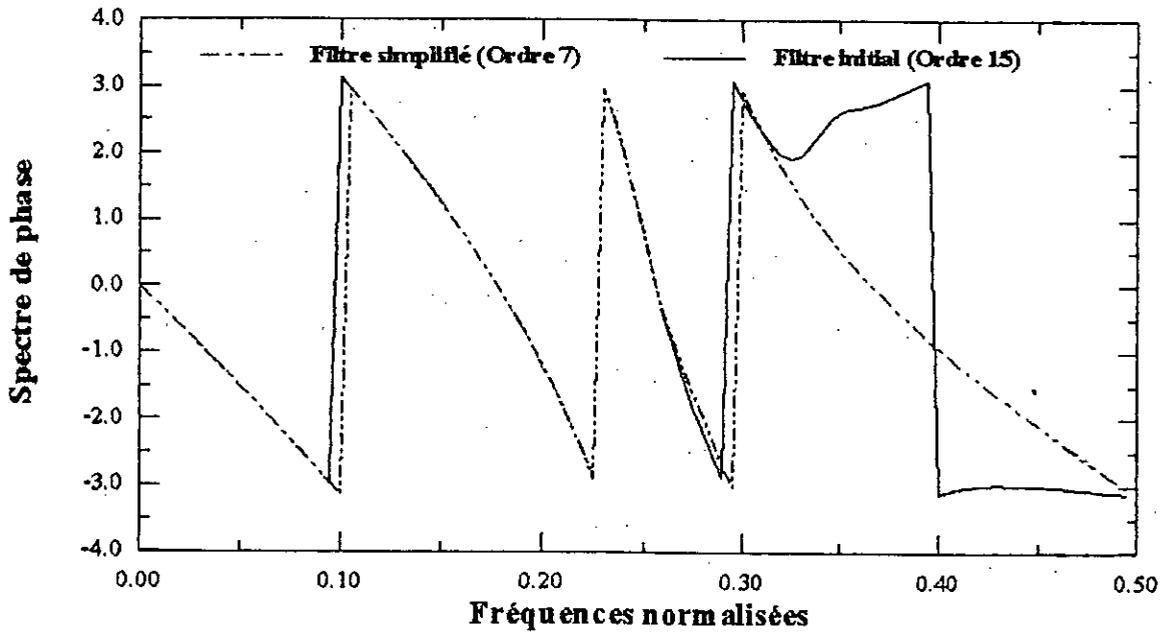


Figure 3.9 Spectre de phase du filtre initial et celui simplifié

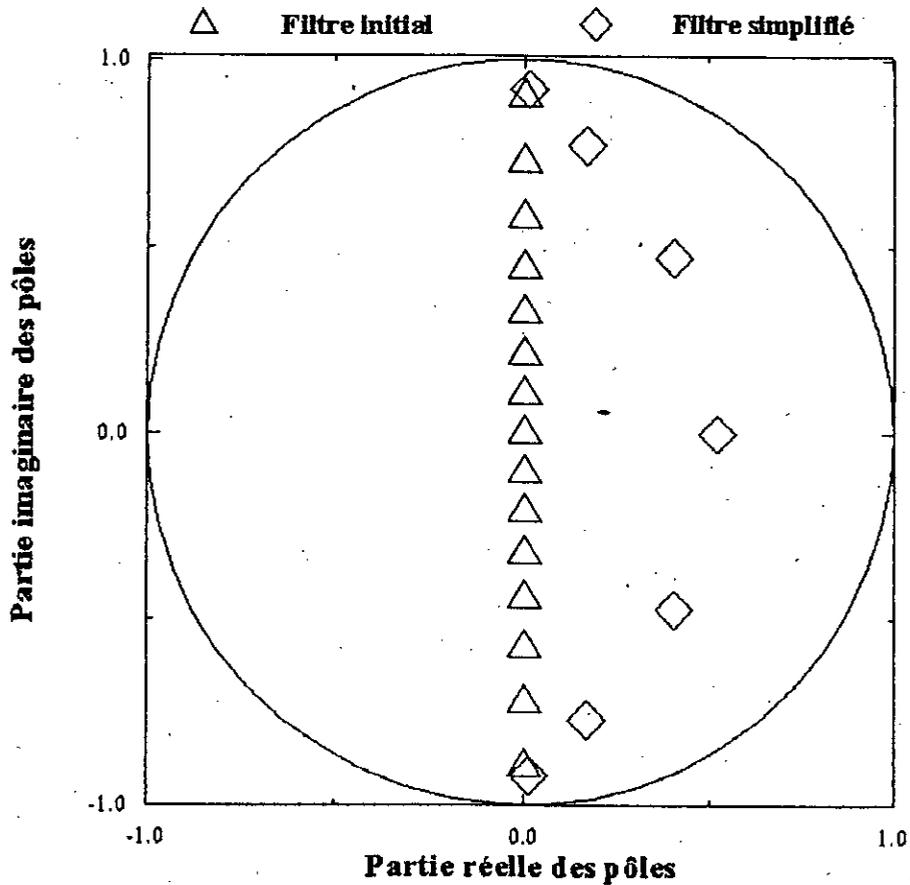


Figure 3.10 Lieu des pôles du filtre initial et celui simplifié

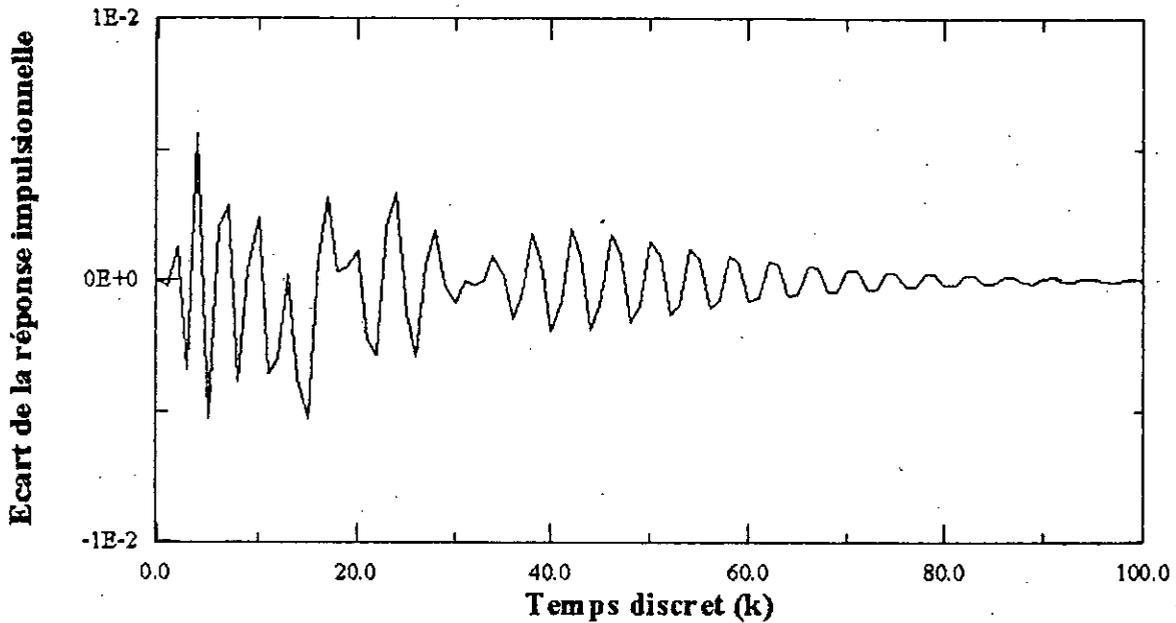


Figure 3.11 Ecart de la réponse impulsionnelle.

III.5.4. Exemple 3 (Filtre numérique de Chebyshev type I).

Soit le filtre numérique de Chebyshev type I, d'ordre 19, obtenu à partir du gabarit suivant:

$(w_c, w_r, A, O) = (0.25, 0.255, 0.05, 0.05)$, où

- w_c : fréquence de coupure normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage,
- w_r : fréquence d'atténuation normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage,
- A : atténuation dans la bande coupée.
- O : Ondulations dans la bande passante.

Les valeurs singulières correspondantes sont données par:

$\Sigma = [3.55E+8, 0.30E+8, 0.17E+8, 0.16E+8, 0.076E+8, 0.075E+8, 0.075E+8, 0.074E+8, 7.48E+6, 6.86E+6, 5.13E+6, 5.13E+6, 3.06E+6, 1.59E+6, 0.76E+6, 0.41E+6, 0.25E+6, 2.04E+5, 1.94E+5, 1.92E+5]$

En prenant 12 comme ordre du filtre simplifié, nous tracerons les spectres d'amplitude et de phase, et le lieu des pôles, pour le filtre initial et celui d'ordre réduit.

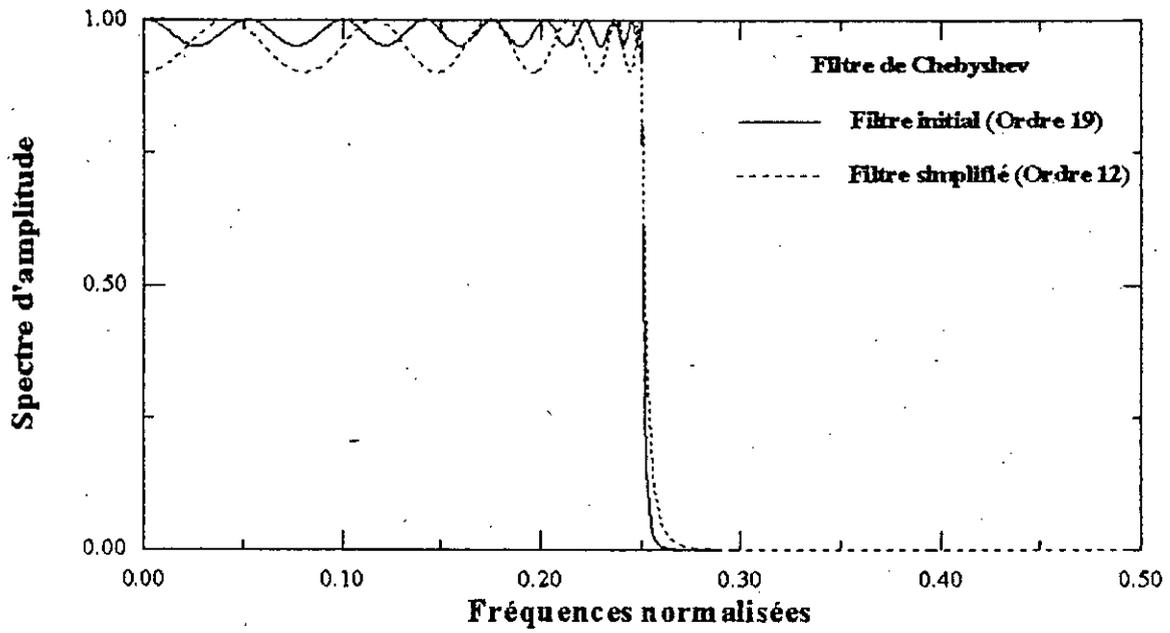


Figure 3.12 Spectre d'amplitude du filtre initial et celui simplifié.

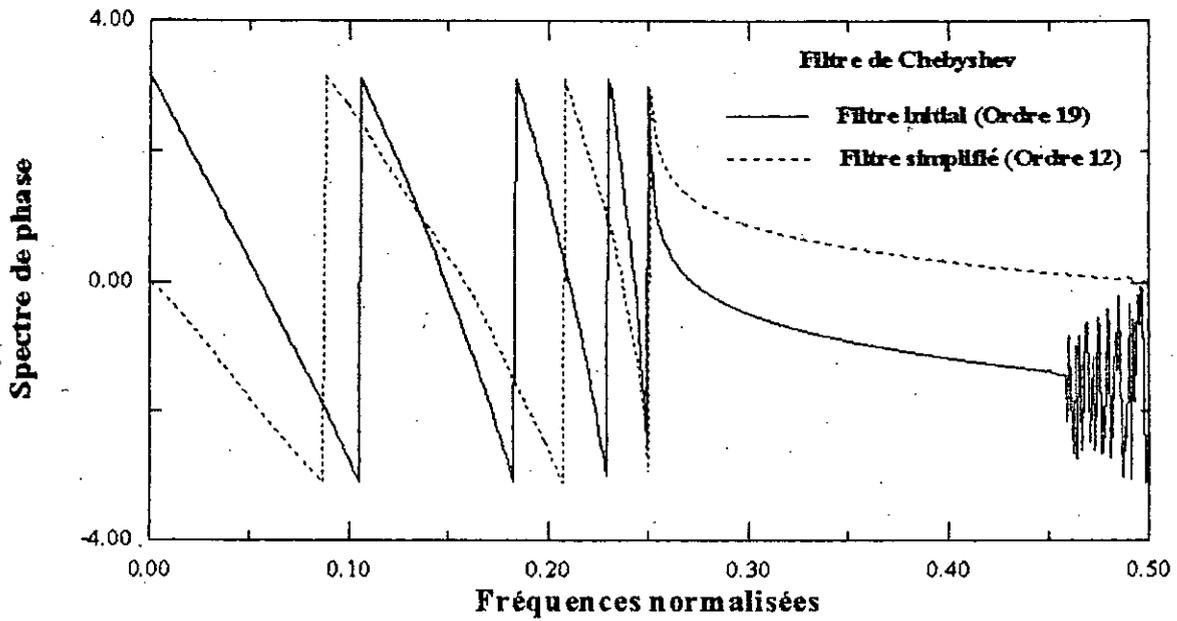


Figure 3.13 Spectre de phase du filtre initial et celui simplifié.

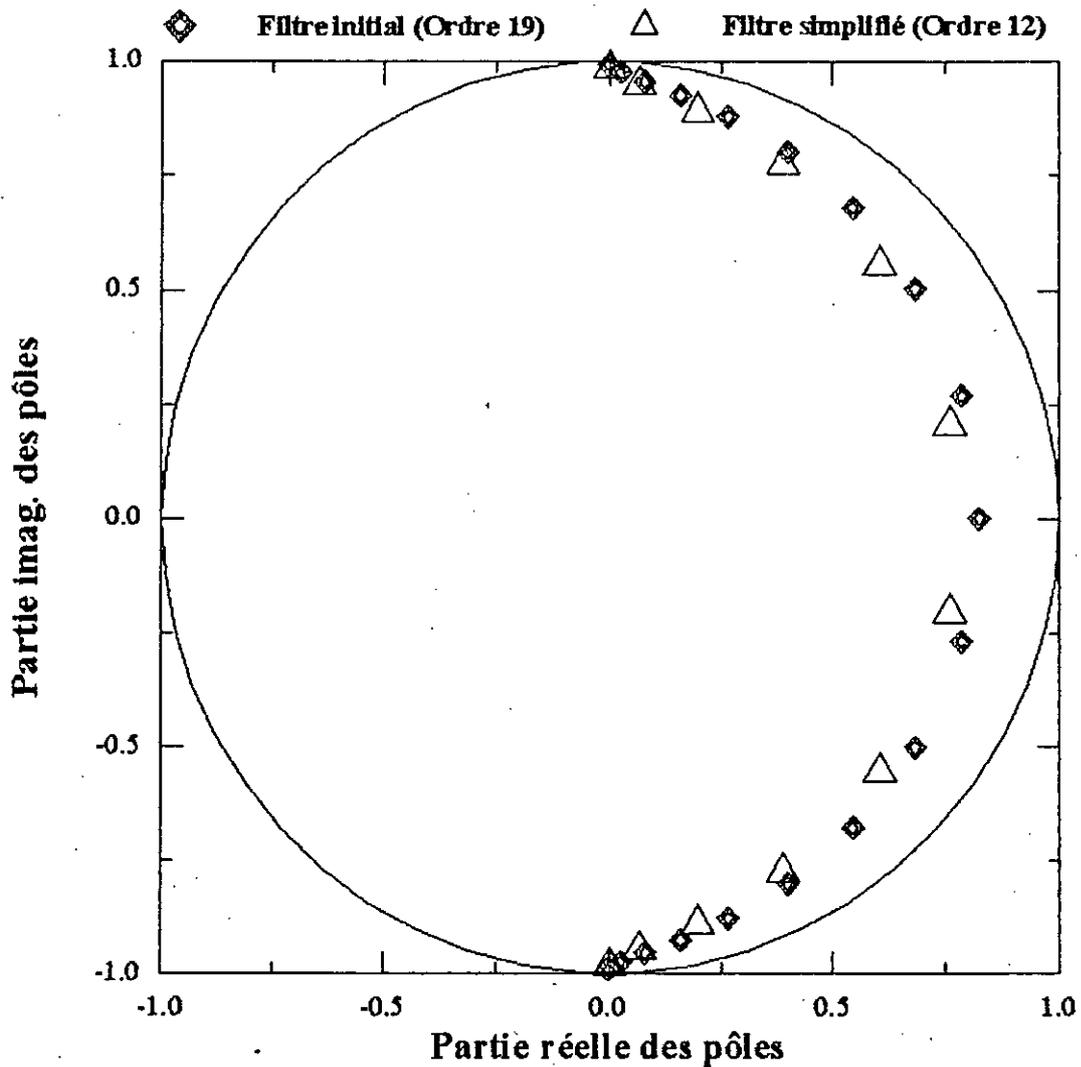


Figure 3.14 Lieu des pôles.

III.5.4. Exemple 4 (système SISO, continu, non minimal).

Considérons un système continu, linéaire, stable, SISO, non minimal, d'ordre 8, représenté par la fonction de transfert:

$$G(s) = \frac{17s^7 + 514s^6 + 5982s^5 + 36380s^4 + 122664s^3 + 222088s^2 + 185760s + 40320}{s^8 + 36s^7 + 546s^6 + 4536s^5 + 22449s^4 + 67284s^3 + 118124s^2 + 109584s + 40320}$$

ses pôles sont donnés par: (-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8).

Les valeurs singulières de ce système sont données par:

$$\Sigma = [1.2166525, 7.4640349E-1, 2.7915998E-2, 1.9406437E-3, 1.0696152E-4, 2.7749188E-7, 5.8976506E-8, 0.0000000].$$

La dernière valeur singulière est nulle, l'équilibre est donc intrinsèquement mal conditionné et l'approche de Schur reste sollicitable.

En prenant 4 comme ordre du modèle simplifié, la borne de l'erreur de Hankel serait:
 $erH = -7.3367596E+1$ dB.

Un modèle simplifié, d'ordre 4, obtenu via l'approche des modes dominants [48], est donné par la fonction de transfert suivante:

$$G_4^{md}(s) = \frac{15.18s^3 + 68.11s^2 + 95.34s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

correspondant aux modes dominants (-1, -2, -3, -4).

Seront tracés valeurs singulières (dB) (voir Annexe 2) du système d'ordre réduit via l'approche de Schur, ainsi que la réponse indicielle et son écart pour les deux approches Schur et modes dominants.

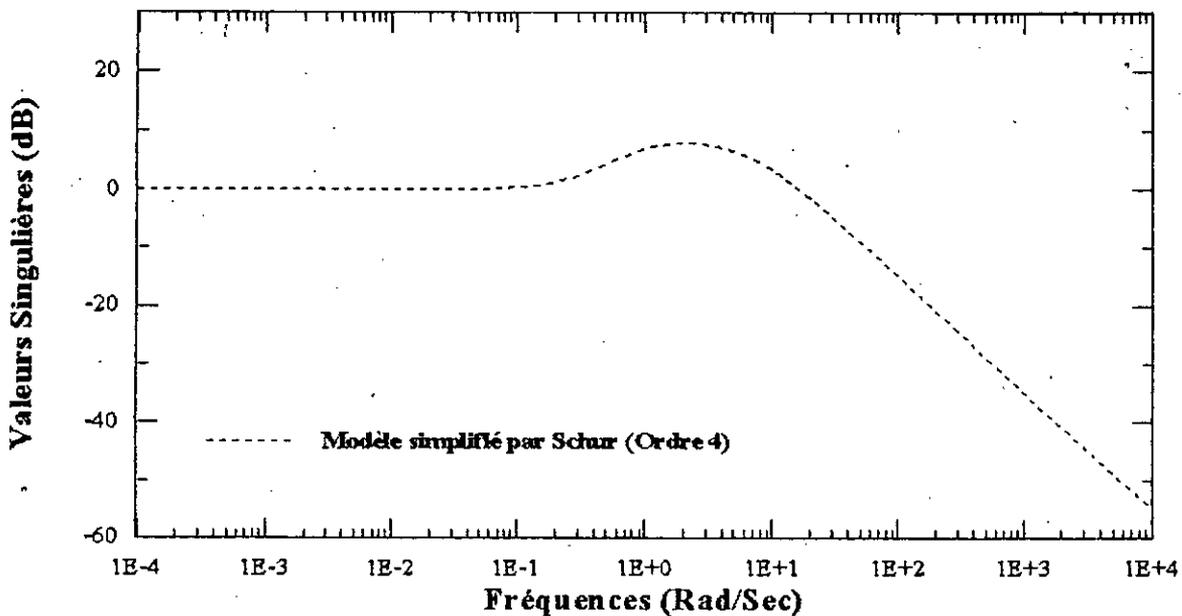


Figure 3.15. Valeurs singulières (dB) du système simplifié

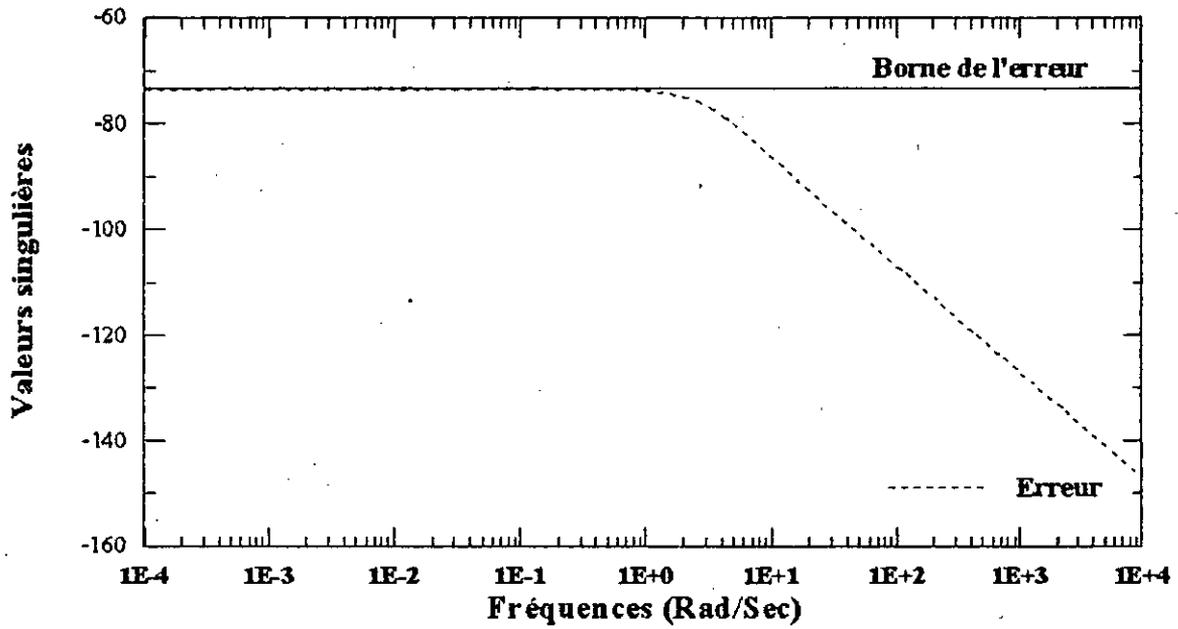


Figure 3.16. Valeurs singulières (dB) de l'erreur.

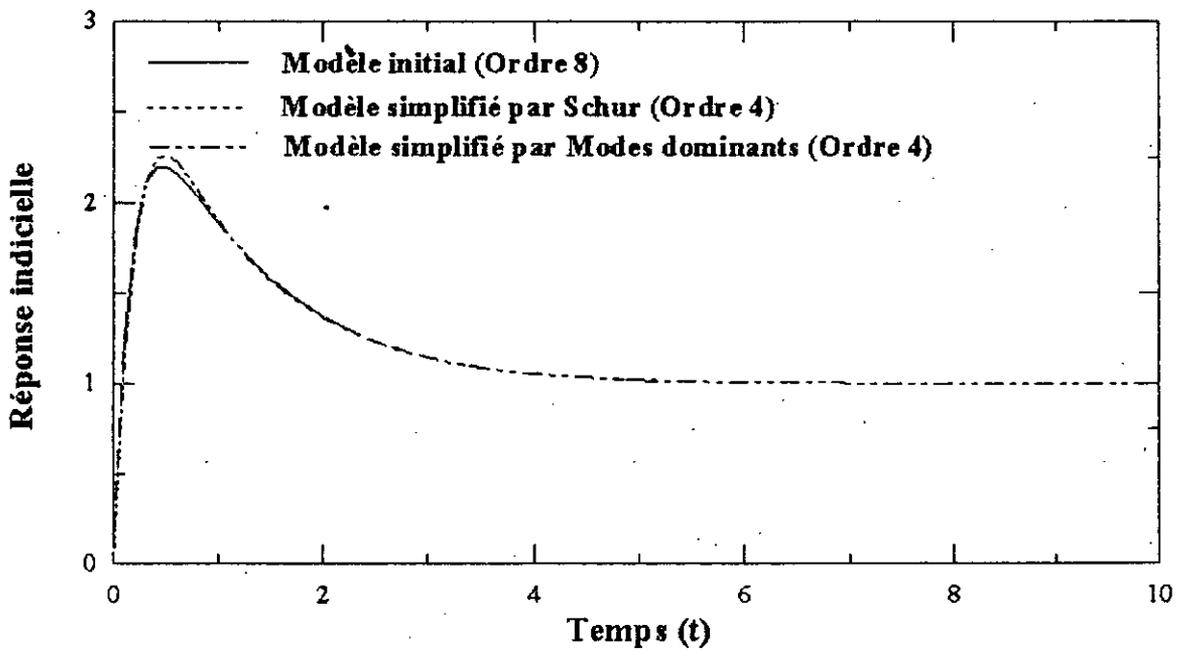


Figure 3.17. Réponses indicelles.

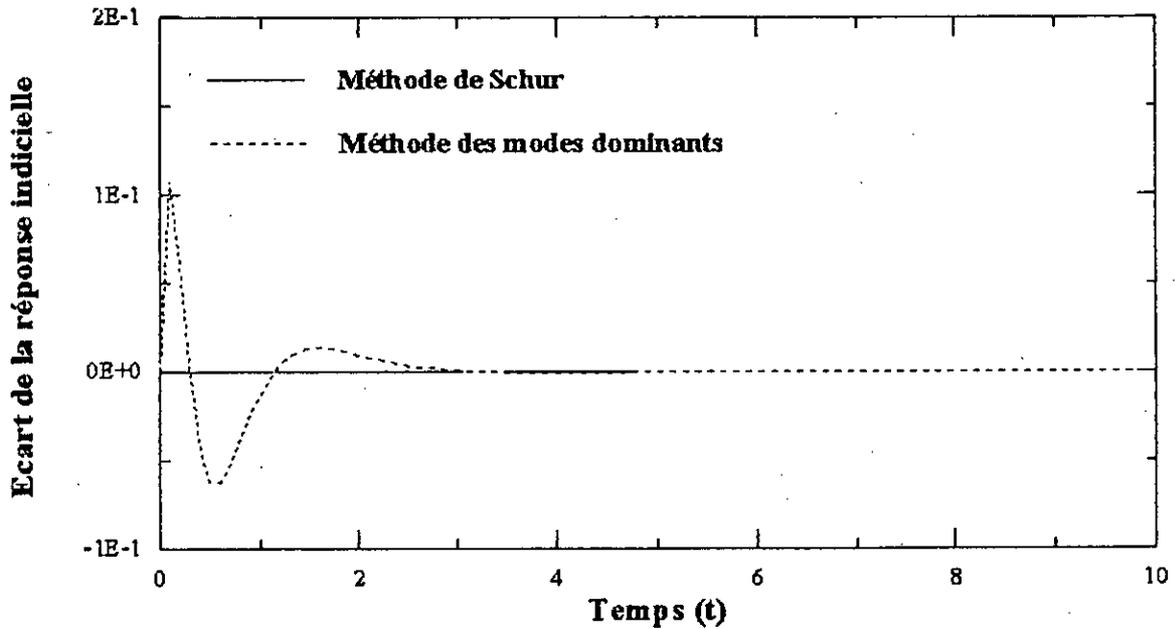


Figure 3.18. Ecart de la réponse indicielle

III.5.5. Exemple 5 (système MIMO, continu, non minimal)

Considérons un système continu, linéaire, stable, MIMO, non minimal, d'ordre 10, représenté dans l'espace d'état par [23]:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & -3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1E-3 & 1E-3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5E+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 5E+5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières correspondantes sont données par:

$$\Sigma = [2.5E+2 \quad 2.51E-2 \quad 5.58E-3 \quad 2.41E-3 \quad 9.22E-4 \quad 1.31E-5 \quad 2.13E-7 \quad 2.13E-7 \quad 1.96E-9 \quad 1.96E-9]$$

On remarque que les deux dernières valeurs singulières sont pratiquement nulles, ce qui correspond à des états non observables et non commandables. L'équilibre est donc mal conditionné du fait de la singularité de la matrice d'équilibre. Pour y remédier, on utilisera la méthode de **Schur** opérant par des projections dans l'espace d'état sans avoir à équilibrer. En choisissant comme ordre du modèle simplifié 2, la borne de l'erreur de Hankel serait $1.8701E-3$ soit (-54.562703 dB) .

Les pôles du modèle initial et celui réduit sont donnés par:

Tableau 3.2. Pôles du système initial et celui simplifié

Pôles du modèle initial (Ordre 10)	Pôles du modèle simplifié (Ordre 4)
-7.00 (pôle de multiplicité 4)	-1.535927E+1
-1.10E+1	-2.00
-1.10E+1 + j 4.09E-8	-7.3734 + j 1.7893
-1.10E+1 - j 4.09E-8	-7.3734 - j 1.7893
-1.10E+1	
-2.00	
-1.10E+1	

Dans les figures qui vont suivre, nous présenterons une analyse fréquentielle (valeurs singulières en dB) (voir Annexe 2) des modèles initial et simplifié et erreur, ainsi que les écarts des réponses temporelles (impulsionnelle et indicielle).

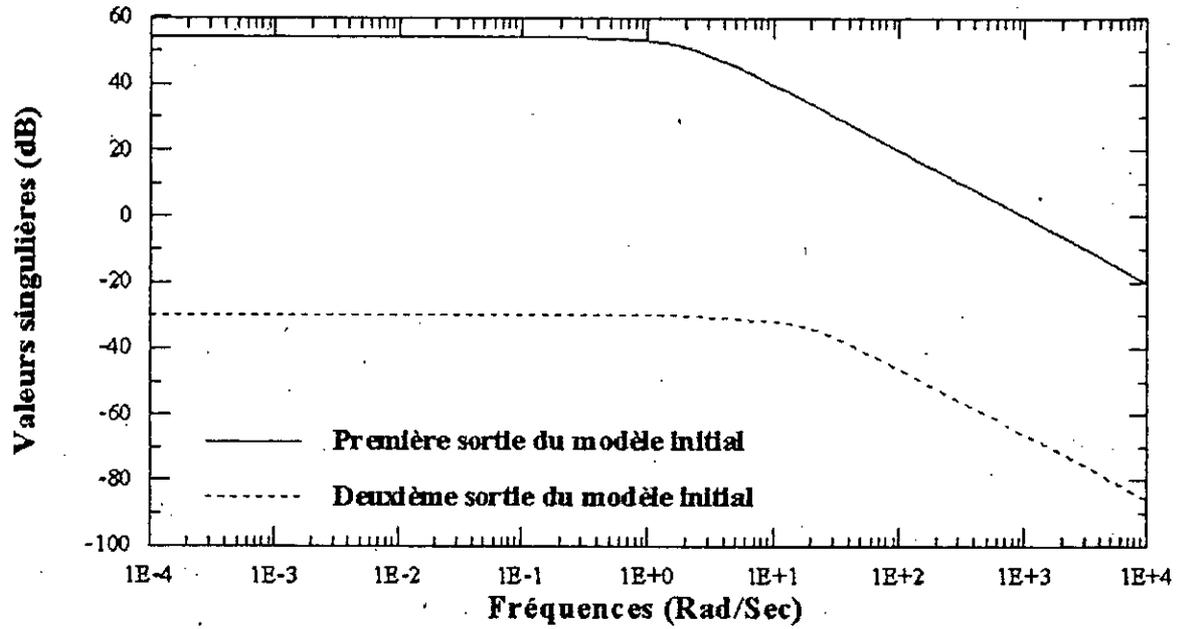


Figure 2.19. Valeurs singulières (dB) du modèle initial (Ordre 10).

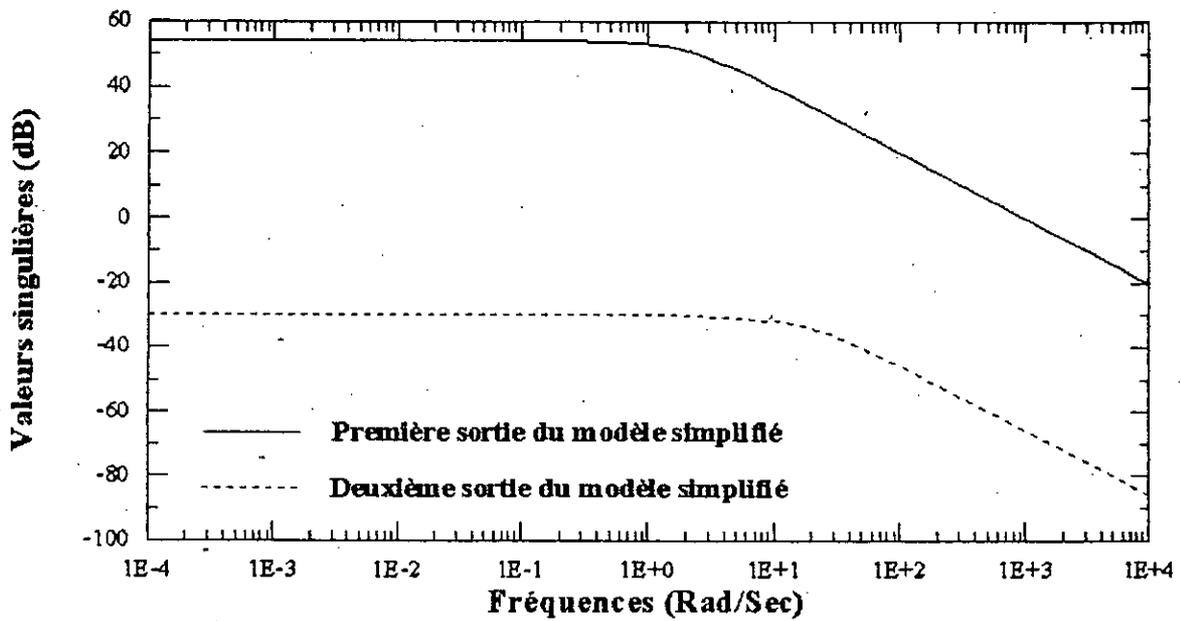


Figure 2.20. Valeurs singulières (dB) du modèle simplifié (Ordre 4)

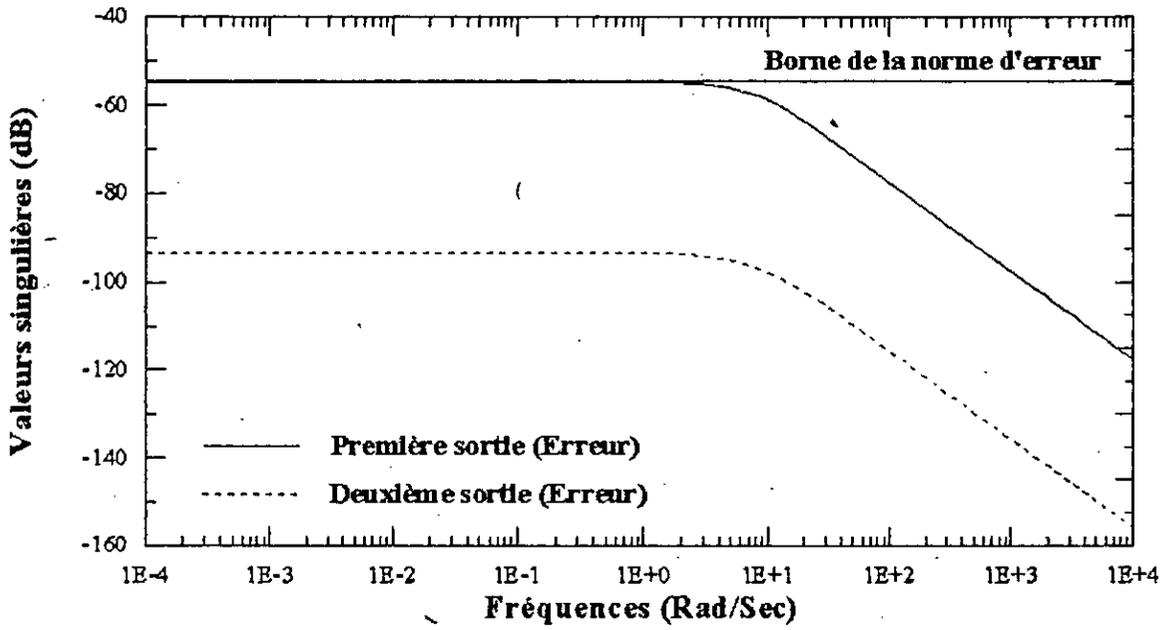


Figure 2.21. Valeurs singulières (dB) de l'erreur, borne de l'erreur.

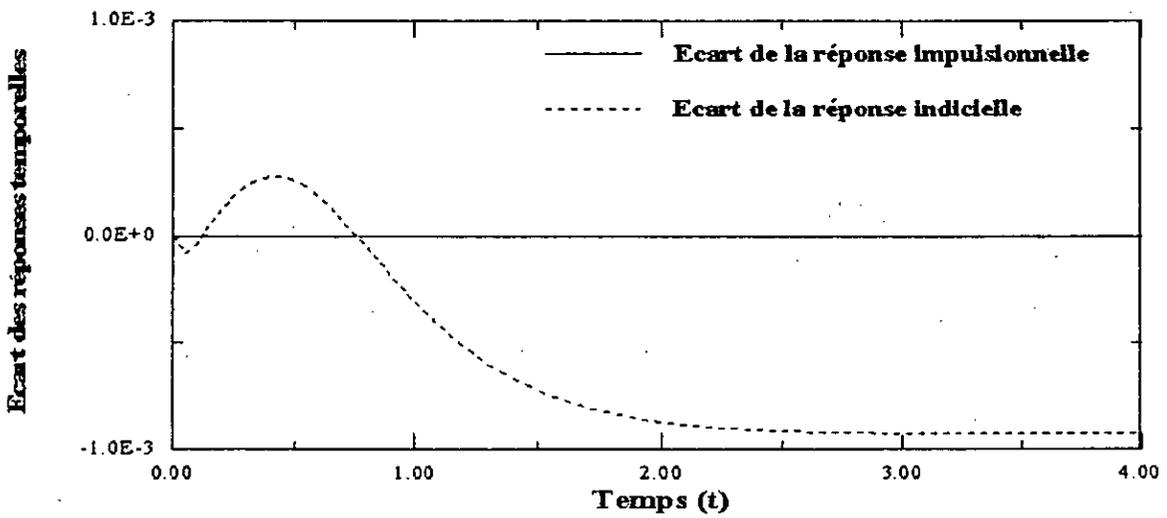


Figure 2.22. Ecart des réponses impulsionnelle et indicielle.

Interprétation

On remarque que pour les systèmes minimaux (entièrement observables et entièrement commandables), l'approche de Moore (M.R.E) donne de bonnes performances du modèle simplifié que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, ceci est confirmé par simulation sur quelques modèles continus et numériques.

Notons que l'ordre du modèle d'approximation est fonction directe du nombre de valeurs singulières dominantes du système, les autres, relativement faibles, donc contribuant faiblement dans l'évolution du système, sont éliminées.

L'exemple de filtres numériques prototypes (*Butterworth* et *Chebyshev I*) montre que les modèles d'ordre réduit ont le comportement du filtre de *Chebyshev I*, car présentent des ondulations d'égales amplitudes dans la bande passante, et un lieu des pôles ellipsoïdal.

Dans le cas où le système est non minimal, on fait recours à l'approche de Schur qui donne un bon approximant respectant la borne de la norme de Hankel.

Les deux approches (Moore et Schur) préservent les propriétés clés du système initial et le modèle d'ordre réduit est toujours stable, causal (donc physiquement réalisable) et minimal.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, une réalisation équilibrée, pour tout système linéaire invariant a été définie. Une telle représentation est caractérisée par le fait que les grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux.

La technique d'équilibre a été appliquée à divers systèmes, ce qui a permis d'étudier les propriétés des réalisations équilibrées. Ces dernières guident à un schéma de réduction d'ordre de modèles.

En effet, le modèle simplifié est un bon approximant, si la matrice des valeurs singulières Σ peut être partitionnée, correspondant ainsi à deux sous-systèmes, dominant (à retenir) et non-dominant (à tronquer).

Le modèle d'ordre réduit a pour qualité de préserver les propriétés clés du système original d'ordre complet.

L'équilibre se qualifie d'intrinsèquement mal-conditionné, si les valeurs singulières du système approchent zéro, nous avons alors traité une généralisation de l'approche suggérée par Moore, qui, sans passer par l'étape de l'équilibre du modèle, permet d'obtenir un modèle d'ordre réduit, cela en utilisant des projections internes, opérant dans l'espace d'état. Cette approche est connue sous le nom de "Méthode de Schur".

Chapitre IV

REGULATEUR LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIEN (LQG)

IV.1. Introduction

La commande consiste en la manoeuvre de l'entrée dans un certain système, alors que la sortie accomplit un objectif spécifié. S'il n'y a pas de perturbations, ni d'incertitudes du procédé, on peut obtenir le système idéal. Comme en réalité, aucun système n'est parfait, on est amené à compenser ce phénomène, en introduisant la commande par modèle ou bien la commande en boucle fermée (Fig. 4.1) [29].

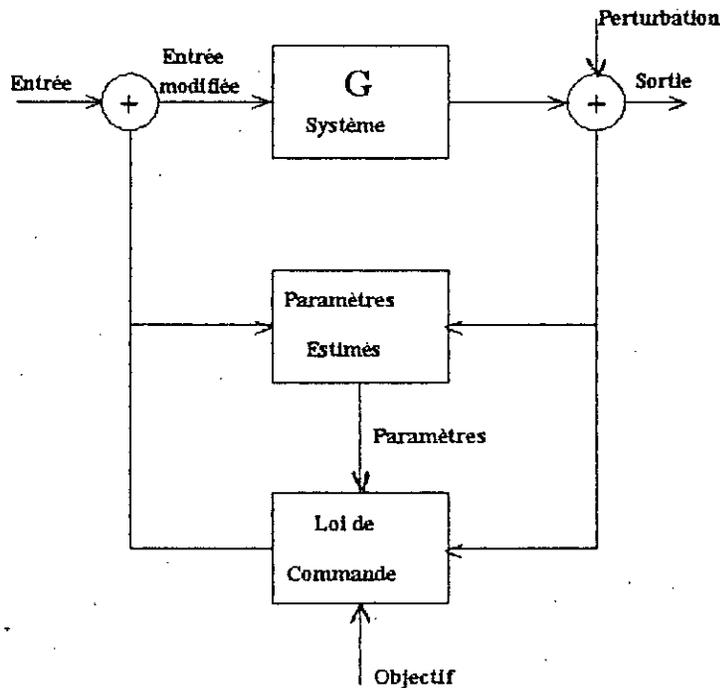


Figure 4.1. Structure de la commande

La commande en boucle fermée a la capacité de régler les paramètres par rapport à la perturbation ou aux incertitudes du procédé. On peut l'analyser par Nyquist ou Bode, donc les études théoriques du système en boucle fermée ont pour objectif de trouver la stabilité du système par rapport à la perturbation ou aux incertitudes du procédé, c-à-d de trouver la robustesse vis-à-vis des incertitudes du système dynamique.

Dans ce chapitre, nous présenterons le concept de base de la commande robuste [49].

IV.2. Le contrôleur LQG (Linear Quadratic Gaussian) [30]

IV.2.1. Théorème principal

L'existence d'une perturbation du système et des incertitudes du procédé dégrade la performance du système et déstabilise le système à contrôler.

Pour résoudre ce problème, on introduit le contrôleur LQG.

La solution du problème LQG est la combinaison de la solution du **filtre de Kalman** (voir Annexe 3) et celle de la **commande par retour d'état**, basée sur le principe de séparation [30].

Soit le système invariant (Fig. 4.2) représenté dans l'espace d'état par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + v \\ y(t) &= C \cdot x(t) + w \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

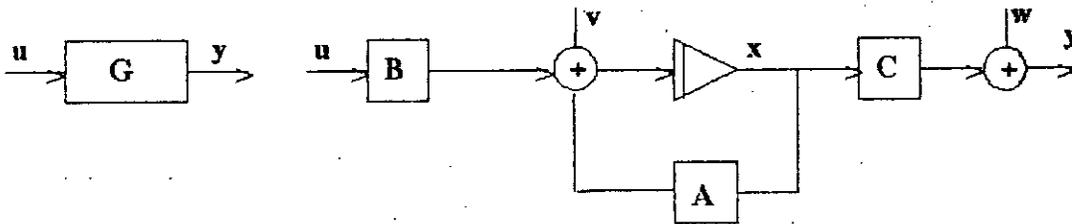


Figure 4.2. Système incertain

Supposons que le système ait l'incertitude de modélisation (Fig. 4.3), l'équation (4.2.1) devient:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\hat{A} + \Delta A) \cdot x(t) + (\hat{B} + \Delta B) \cdot u(t) + v \\ y(t) &= (\hat{C} + \Delta C) \cdot x(t) + w \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

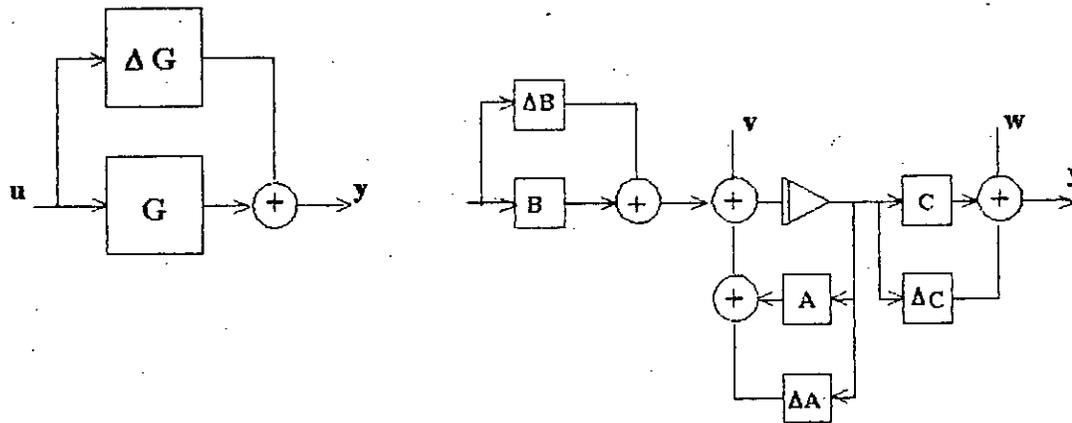


Figure 4.3. Système incertain avec incertitudes du procédé .

L'approche LQG est formulée par la fonction coût (critère) suivante:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u(t)^T \cdot R \cdot u(t)) dt \quad [\text{système continu}]$$

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [x(k)^T \cdot Q \cdot x(k) + u(k)^T \cdot R \cdot u(k)] \quad [\text{système discret}]$$

où: Q : matrice définie non-négative,
 R : matrice définie non-négative, symétrique.

IV:2.2. Procédure de calcul

A. Calcul de la loi de commande optimale

I/ Cas d'un système continu [29] Soit le problème de commande optimale du système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u(t)^T \cdot R \cdot u(t)) dt \quad (4.2.4)$$

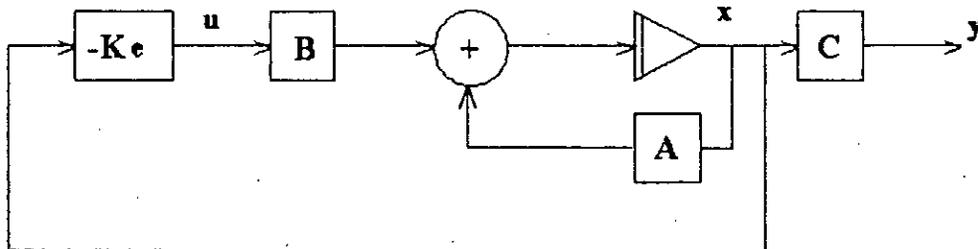


Figure 4.4. Commande optimale

On veut déterminer la matrice K_0 qui doit satisfaire la loi de commande optimale

$$U = -K_0 \cdot x \quad (4.2.5)$$

Le problème de la commande optimale devient alors:

$$\dot{x}(t) = (A - B \cdot K_0) \cdot x(t)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T \cdot Q \cdot x(t) + x(t)^T \cdot K_0^T \cdot R \cdot K_0 \cdot x(t)) dt$$

Le système commandé doit être stable, donc il existe une fonction de Lyapunov P , symétrique, définie positive vérifiant:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T \cdot [Q + K_0^T \cdot R \cdot K_0] \cdot x(t) dt = -x^T \cdot P \cdot x$$

par dérivation de J ,

$$\begin{aligned} x^T \cdot [Q + K_0^T \cdot R \cdot K_0] \cdot x &= -\frac{d}{dt} (x^T \cdot P \cdot x) \\ &= -x^T \cdot [(A - B \cdot K_0)^T \cdot P + P \cdot (A - B \cdot K_0)] \cdot x \end{aligned}$$

d'où:

$$(A - B \cdot K_0)^T \cdot P + P \cdot (A - B \cdot K_0) = -[Q + K_0^T \cdot R \cdot K_0] \quad (4.2.6) \quad 63$$

de l'équation (4.2.6), nous aurons:

$$A^T \cdot P + P \cdot A + \left[(R^T)^{\frac{1}{2}} \cdot K_e - (R^T)^{-\frac{1}{2}} \cdot B^T \cdot P \right]^T \left[(R^T)^{\frac{1}{2}} \cdot K_e - (R^T)^{-\frac{1}{2}} \cdot B^T \cdot P \right] - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T + Q = 0 \quad (4.2.7)$$

La résolution de (4.2.7) nous donne K_e .

$$K_e = R^{-1} \cdot B^T \cdot P$$

Calcul de P

De (4.2.7) et (4.2.8), on peut trouver P qui satisfait la relation suivante:

$$\begin{aligned} & A^T \cdot P + P \cdot A - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P + Q \\ &= A^T \cdot P + P \cdot A - K_e^T \cdot R^{-1} \cdot K_e + Q = 0 \end{aligned}$$

2i/ Cas d'un système discret [31] Soit le problème de commande optimale suivant:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

$$u(k) = -K_e \cdot x(k)$$

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [x(k)^T \cdot Q \cdot x(k) + u(k)^T \cdot R \cdot u(k)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x(k)^T \cdot [Q + K_e^T \cdot R \cdot K_e] \cdot x(k)$$

Supposons que le système commandé est stable, il existe alors une fonction de Lyapunov P définie positive, symétrique, ayant pour dérivée une matrice définie négative.

La matrice P satisfait:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x(k)^T \cdot [Q + K_e^T \cdot R \cdot K_e] \cdot x(k) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [x(k+1)^T \cdot P \cdot x(k+1) - x(k)^T \cdot P \cdot x(k)]$$

d'où:

$$\mathbf{x}(k)^T \cdot [\mathbf{Q} + \mathbf{K}_e^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_e] \cdot \mathbf{x}(k) = -[(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}_e) \cdot \mathbf{x}(k)]^T \mathbf{P} [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}_e) \cdot \mathbf{x}(k)] + \mathbf{x}(k)^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(k) \quad (4.2.9)$$

En simplifiant l'écriture de l'équation (4.2.9), la matrice \mathbf{K}_e s'exprime comme:

$$\mathbf{K}_e = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}]^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \quad (4.2.10)$$

Calcul de P La matrice \mathbf{P} satisfait l'équation de Riccati (voir Annexe 5) suivante:

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}]^{-1} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.2.11)$$

B. Calcul du filtre de Kalman (Annexe 3)

i/ Cas d'un système continu

Soit le système continu, représenté dans l'espace d'état par:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{v} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

où \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des bruits blancs gaussiens centrés, avec:

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}] = 0; \mathbf{E}[\mathbf{w}] = 0; \mathbf{E}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^T] = 0; \mathbf{E}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}^T] = 0; \mathbf{E}[\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^T] = 0$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T] = \mathbf{Q} \quad (\mathbf{Q} : \text{définie non-négative})$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T] = \mathbf{R} \quad (\mathbf{R} : \text{définie positive})$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{M}$$

Le filtre linéaire de Kalman associé est donné par (voir Annexe 3):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}' \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K}_f \cdot \xi \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}' \cdot \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

où \hat{x} est l'estimé du vecteur d'état, $\xi = y - \hat{y}$, $\varepsilon = x - \hat{x}$ (erreur d'estimation) et \hat{y} est la sortie du filtre de Kalman.

Si l'estimateur est non biaisé, on aura:

$$E[\varepsilon] = E[x - \hat{x}] = E[x] - E[\hat{x}] = 0 \Rightarrow E[x] = E[\hat{x}],$$

$$E[\dot{\varepsilon}] = E[\dot{x} - \dot{\hat{x}}] = E[\dot{x}] - E[\dot{\hat{x}}] = 0 \Rightarrow E[\dot{x}] = E[\dot{\hat{x}}].$$

donc:

$$E[\dot{x}] = A \cdot E[x] + B \cdot u$$

$$\begin{aligned} E[\dot{\hat{x}}] &= A' \cdot E[\hat{x}] + B' \cdot u + K_r \cdot E[C \cdot x + w - C' \cdot \hat{x}] \\ &= A' \cdot E[\hat{x}] + B' \cdot u + K_r \cdot C \cdot E[x] - K_r \cdot C' \cdot E[\hat{x}] \end{aligned}$$

d'où $A' = A$; $B' = B$ et $C' = C$.

Ce qui donne:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + K_r (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.2.13)$$

Des équations (4.2.12) et (4.2.13), nous écrivons:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= A \cdot x + B \cdot u + v - [A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_r (y - \hat{y})] \\ &= (A - K_r \cdot C) \cdot \varepsilon + v - K_r \cdot w \end{aligned}$$

Objectif: Trouver la matrice K_r qui minimise la variance de l'erreur d'estimation:

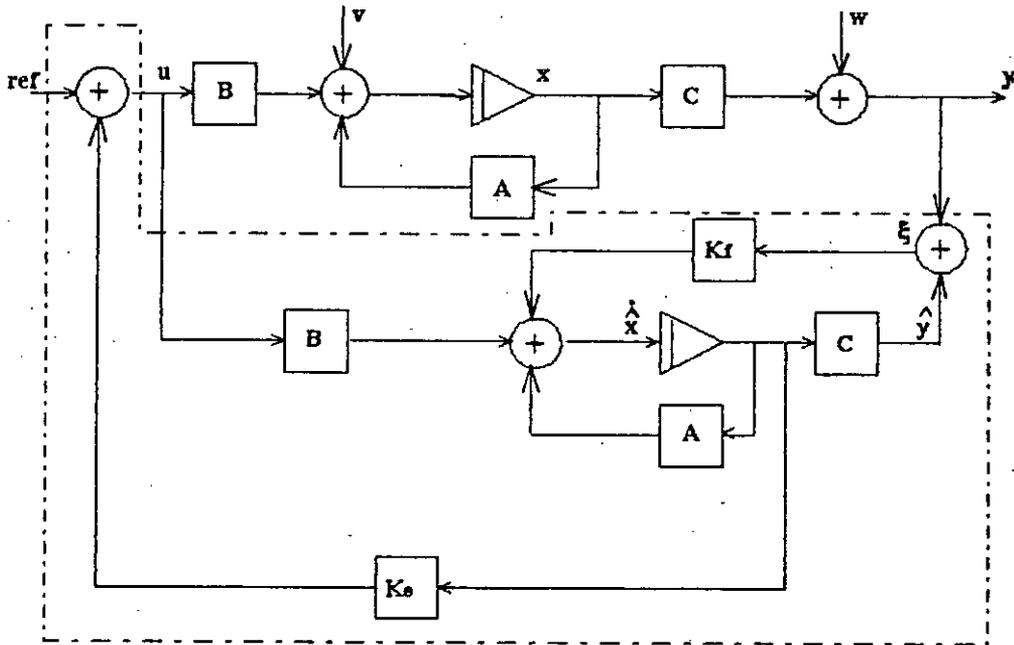


Figure 4.5. Schéma du contrôleur LQG

$$\begin{aligned}
 E[\dot{s} \cdot \dot{s}^T] &= E\left[[(A - K_f \cdot C) \cdot s + v - K_f \cdot w] \cdot [(A - K_f \cdot C) \cdot s + v - K_f \cdot w]^T\right] \\
 &= (A - K_f \cdot C) \cdot E[s \cdot s^T] \cdot (A - K_f \cdot C)^T + E[v \cdot v^T] + K_f \cdot E[w \cdot w^T] \cdot K_f^T \\
 &= (A - K_f \cdot C) \cdot E[s \cdot s^T] + E[s \cdot s^T] \cdot (A - K_f \cdot C)^T + Q' + K_f \cdot R' \cdot K_f^T
 \end{aligned}$$

Posons: $P = E[s \cdot s^T]$, ($P = P^T$), vérifiant:

$$\dot{P} = (A - K_f \cdot C) \cdot P + P \cdot (A - K_f \cdot C)^T + Q' + K_f \cdot R' \cdot K_f^T \tag{4.2.14}$$

Par minimisation de \dot{P} , nous aurons:

$$K_f = P \cdot C^T \cdot R'^{-1} \tag{4.2.15}$$

2i/ Cas d'un système discret

Soit le système discret, représenté dans l'espace d'état par:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + v(k)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + w(k)$$

de la même façon, l'erreur d'estimation est:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{v}(k) + \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{w}(k) \end{aligned}$$

donc, en posant $\mathbf{P} = \mathbf{E}[\mathbf{s}(k+1) \cdot \mathbf{s}^T(k+1)]$, nous pouvons écrire:

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{K}_e^T$$

par minimisation de $\mathbf{P}(k+1)$, l'expression de \mathbf{K}_e est:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(k) \cdot \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}(k) \cdot \mathbf{C}^T)^{-1}$$

Calcul de P En régime permanent, $\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k)$, solution de l'équation:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^T (\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T$$

Ayant \mathbf{K}_e et \mathbf{K}_f , nous pouvons construire le contrôleur optimal LQG (Fig. 4.5).

IV.3. Simulation et interprétation

Considérons un système SISO, continu, instable, d'ordre 6, défini par la fonction de transfert suivante:

$$G(s) = \frac{-(948.12s^3 + 30325s^2 + 56482s + 1215.3)}{s^6 + 64.554s^5 + 1167s^4 + 372.86s^3 - 5495.4s^2 + 1102s + 708.1}$$

La réalisation d'état du contrôleur associé est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{LQG} & \mathbf{B}_{LQG} \\ \mathbf{C}_{LQG} & \mathbf{D}_{LQG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.256E-2 & -3.661E+1 & -1.889E+1 & 1.601E+2 & 3.2509 & -7.625E-1 \\ 9.257E-5 & -1.8997 & 9.831E-1 & -5.1594 & -1.708E-1 & -4.965E-3 \\ 1.233E-2 & 1.172E+1 & -2.6316 & -2.399E+1 & -3.160E+1 & 2.239E+1 \\ 0 & 0 & 1.00 & -6.9272 & 0 & 0 \\ 2.4246 & 2.302E+3 & 6.102E+5 & 9.487E+8 & -6.211E+3 & 4.379E+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.00 \\ -8.082E-2 & -7.675E+1 & -2.034E+4 & -3.162E+7 & 2.060E+2 & -1.460E+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.922E+2 \\ 5.1587 \\ 23.993 \\ 6.9272 \\ -3.899E-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système initial et du contrôleur LQG sont donnés par:

Tableau 4.1. Pôles du système initial et du contrôleur LQG associé

Systeme initial	Contrôleur LQG
-3.0E+1	$(-1.553 + j2.694)E+3$
-3.0E+1	$(-1.553 - j2.694)E+3$
-5.6757	-3.1136E+3
$(6.898 + j2.488)E-1$	-2.177E-2
$(6.898 - j2.488)E-1$	-1.9626
-2.5779E-1	-3.00E+1

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (système corrigé) sont donnés par:

Tableau 4.2. Pôles du système corrigé

Systeme corrigé / LQG
$(-1.553 + j2.6904)E+3$
$(-1.553 - j2.6904)E+3$
-3.1067E+3
-3.0019E+1
-4.6863 + j2.8479
-4.6863 - j2.8479
-2.1770E-2
-2.5160E-2
-2.0641
-1.9626
-30.00
-30.00

D'après le tableau 4.1, le système initial d'ordre 6 (en boucle ouverte) est instable (existence de 2 pôles ϵ demi-plan gauche de Laplace), le contrôleur LQG associé est stable et le système corrigé d'ordre 12 (en boucle fermée) l'est aussi (voir tableau 4.2). Par conséquent, le contrôleur LQG assure la stabilité qui reste un impératif de tout système conçu.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié et synthétisé un contrôleur optimal LQG (Linéaire Quadratique Gaussien), qui assure la stabilité d'un système (éventuellement instable en boucle ouverte), ceci est vérifié par l'exemple donné dans IV.3.

Dans le chapitre suivant, on traitera diverses approches de synthèse d'un contrôleur LQG à modèle simplifié, dont l'une utilisera l'approche de réduction d'ordre par projections internes traitée dans le chapitre III, l'autre approche, directe, apport propre de mon travail, permet de donner un contrôleur LQG à modèle simplifié, en exploitant une base particulière, dite LQG-équilibré.

Chapitre V

SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR A MODELE SIMPLIFIE

V.1. Introduction

Les contrôleurs de petites complexités sont fréquemment désirables en pratique. Malheureusement, les techniques modernes de conception de contrôleurs conduisent à de grandes complexités. Dans ce chapitre, nous développons diverses approches de synthèse de contrôleurs à modèle simplifié [32], résumées dans la Figure 5.1.

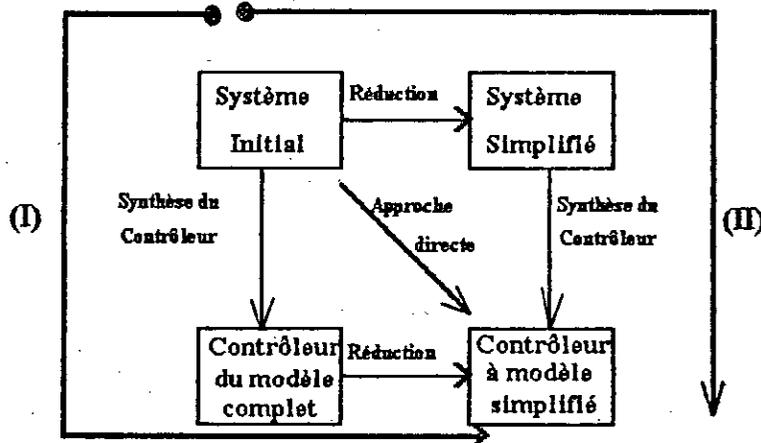


Figure 5.1. Diverses approches de synthèse du contrôleur d'ordre réduit

L'approche (I) est peu désirable puisque dans le cas où le système initial est d'ordre élevé, la synthèse du contrôleur associé s'avère complexe.

La seconde approche, recommandée, consiste en la synthèse du contrôleur à modèle simplifié associé au système d'ordre réduit via la M.R.E..

La troisième approche, dite "LQG-Balancing", qui permet, en exploitant les propriétés de la réalisation équilibrée, d'obtenir directement le contrôleur d'ordre réduit à partir du système initial, fera objet du paragraphe suivant.

V.2. Approche directe de synthèse du contrôleur à modèle réduit

V.2.1. Principe de l'approche [37]

Cette nouvelle approche permet la synthèse du contrôleur LQG à modèle simplifié en utilisant le LQG-standard dans la compensation d'un système initial (d'ordre complet) éventuellement instable en boucle ouverte, ce qui engendre la formulation de deux équations algébriques de Riccati appelées CARE (Control Algebraic Riccati Equation) et FARE (Filter Algebraic Riccati Equation). Ces dernières ont pour solutions des mesures du degré de contrôle et de filtrage du procédé respectivement.

En effectuant un changement de base via une transformation d'équilibre S , ces solutions s'identifient à une même matrice $M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_i > \mu_j$ pour $i > j$.

Les μ_i ($i = 1, n$), appelées "valeurs caractéristiques-LQG" du processus, reflètent, à la fois, le degré de difficulté de contrôle et de filtrage de l'état x_i correspondant du système.

Les états correspondant aux faibles μ_i sont facilement filtrés et contrôlés au sens LQG, motivant ainsi la réduction d'ordre du modèle.

Remarque L'équilibre du modèle, via une transformation non singulière S , est dans un sens contrôle-filtrage, le système est alors dit en coordonnées équilibrées au sens LQG.

V.2.2. Synthèse du LQG-équilibré

L'approche du LQG-équilibré est basée sur le problème du LQG-standard traité dans le Chap. IV.

Soit le problème suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + v \\ y(t) &= C \cdot x(t) + w = z_1(t) + w \\ z_1(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

où v et w sont des signaux bruits blancs gaussiens centrés, avec une fonction d'autocorrélation identité.

Le processus G , représenté dans l'espace d'état par (5.2.1) est supposé minimal.

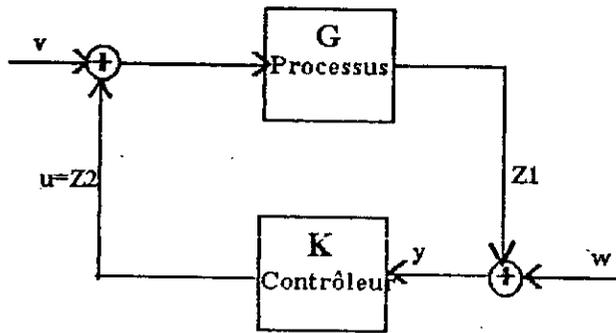


Figure 5.2. Processus corrigé

Le critère LQG est défini par:

$$C[H(G,K)] \triangleq \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2t_f} \int_{-t_f}^{t_f} Z^T(t) \cdot Z(t) dt \right\}$$

$$\triangleq \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2t_f} \int_{-t_f}^{t_f} [x(t)^T \cdot C^T \cdot C \cdot x(t) + u(t)^T \cdot u(t)] dt \right\}$$

où: $Z = [z_1^T, z_2^T]^T$, $W = [v^T, w^T]^T$

Le problème du LQG-standard est de trouver un contrôleur K qui minimise le critère LQG et qui stabilise H(G, K) (matrice de fonctions de transfert en boucle fermée):

$$H(G,K) = \begin{bmatrix} (I - G.K)^{-1} \cdot G & (I - G.K)^{-1} \cdot G.K \\ K.(I - G.K)^{-1} \cdot G & K.(I - G.K)^{-1} \end{bmatrix}$$

Solution du problème LQG [37]

Soit $G=(A, B, C)$ un système minimal, il existe une solution unique stabilisatrice $X_2 \in R^{n \times n}$ (définie positive, symétrique), solution de la CARE:

$$A^T \cdot X_2 + X_2 \cdot A - X_2 \cdot B \cdot B^T \cdot X_2 + C^T \cdot C = 0 \quad (\text{CARE})$$

et il existe une solution unique $Y_2 \in R^{n \times n}$ (définie positive, symétrique), solution de la FARE:

$$A \cdot Y_2 + Y_2 \cdot A^T - Y_2 \cdot C^T \cdot C \cdot Y_2 + B \cdot B^T = 0 \quad (\text{FARE})$$

Le contrôleur LQG associé $K_{LQG} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ est sous forme d'un observateur:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot y(t) \\ u &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= (A - Y_2 \cdot C^T \cdot C - B \cdot B^T \cdot X_2) \\ \hat{B} &= Y_2 \cdot C^T \\ \hat{C} &= -B^T \cdot X_2 \end{aligned}$$

La valeur minimale du critère LQG est donc donnée par:

$$C[H(G, K_{LQG})] = \text{tr}[B^T \cdot X_2 \cdot B + B^T \cdot X_2 \cdot Y_2 \cdot X_2 \cdot B]$$

Soit S la transformation d'équilibre non singulière, telle que:

$$X_2 \cdot Y_2 \xrightarrow{S} S^{-T} \cdot X_2 \cdot Y_2 \cdot S^T$$

Les valeurs propres du produit $(X_2 \cdot Y_2)$ sont invariantes à la transformation d'état S , et sont égales au carré des valeurs caractéristiques μ_i , c-à-d:

$$\lambda_i[X_2 \cdot Y_2] = \lambda_i[S^{-T} \cdot X_2 \cdot Y_2 \cdot S^T] = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$$

Calcul de la transformation d'équilibre S

La transformation d'équilibre S est construite en suivant les étapes suivantes:

Étape 1: Calcul des matrices X_2 et Y_2 , solutions de la CARE et FARE (voir Annexe 5).

Étape 2: Factorisation de Cholesky (voir Annexe 6) de X_2 et Y_2 , telle que:

$$\begin{aligned} X_2 &= L_X \cdot L_X^T & (L_X : \text{triangulaire inférieure}) \\ Y_2 &= L_Y \cdot L_Y^T & (L_Y : \text{triangulaire inférieure}) \end{aligned}$$

Etape 3: Décomposition en valeurs singulières (SVD) (Annexe 2) de la quantité $(L_Y^T \cdot L_X)$, telle que:

$$L_Y^T \cdot L_X = U \cdot M \cdot V^T.$$

où: - U et V = nxn-matrices orthogonales,

- M = nxn-matrice diagonale (matrice des valeurs caractéristiques)

$$M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec : } \mu_i \geq \mu_j \text{ pour } i > j$$

Etape 4: Construction de la transformation d'équilibre S et de son inverse.

$$S = L_X \cdot V \cdot M^{-\frac{1}{2}}$$

$$S^{-1} = M^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_Y^T$$

V.2.3. Réduction d'ordre du contrôleur LQG dans la base d'équilibre

Soit $G=(A, B, C)$, un système minimale, d'ordre (n), dans sa base équilibrée, avec des valeurs caractéristiques $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$ avec:

$$X_2 = Y_2 = M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

Soit la partition de M:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, M_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k) \text{ et } M_2 = \text{diag}(\mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \text{ avec } \mu_k > \mu_{k+1}$$

Soit $K_{LQG} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$, le contrôleur du processus, partitionnons alors $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ conformément à M:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \hat{C} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2].$$

Le contrôleur d'ordre réduit (k) est alors donné par:

$$K_r = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$$

Remarque

Il est très important d'étudier la stabilité et les performances en boucle fermée, si le contrôleur d'ordre réduit est connecté au système d'ordre complet.

V.2.3. Simulation et interprétation

Comme application, nous proposons la synthèse du contrôleur à modèle simplifié associé au système d'ordre 7 donné dans l'exemple 1, de la section III.5.1, cela via les deux approches II et directe (voir fig. 5.1).

En adoptant l'approche II (voir fig. 5.1), le contrôleur LQG associé au modèle simplifié, d'ordre 2, via la MRE est donné par la réalisation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} [A_{cl}] & [B_{cl}] \\ [C_{cl}] & [D_{cl}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1.98E+7 & 1.76E+7] \\ [-1.76E+7 & 1.56E+7] \\ [2.50E+7 & -2.22E+7] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [6.54E-1] \\ [-1.65E-1] \\ [0] \end{bmatrix}$$

ayant pour pôles: (-4.268E+6; -9.387E+0)

Le système contrôlé, en boucle fermée (système initial d'ordre complet corrigé par le contrôleur à modèle simplifié) a pour pôles:

Tableau 5.1. Pôles du système contrôlé (Approche II)

Système corrigé (Ordre 9)
-4.27E+6
-5.25E+1
-4.93E+1
-3.28E+0 + j 9.54E+0
-3.28E+0 - j 9.54E+0
-9.82E+0
-5.97E-1 + j 1.10E+0
-5.97E-1 - j 1.10E+0
-2.01E+0

En adoptant maintenant l'approche directe (Fig. 5.1), les valeurs caractéristiques-LQG sont données par:

$$M=[9.17E-1; 3.46E-1; 2.45E-2; 9.27E-3; 4.69E-3; 3.59E-5; 7.15E-7]$$

et le contrôleur LQG à modèle simplifié, d'ordre 2, est donné par la réalisation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} [A_{c2}] & [B_{c2}] \\ [C_{c2}] & [D_{c2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1.01E+0 & 1.41E+0] \\ [-1.41E+0 & -8.87E-1] \\ [-6.67E-1 & -2.33E-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [6.67E-1] \\ [-2.33E-1] \\ [0] \end{bmatrix}$$

correspondant aux pôles suivants: $(-9.52E-1 + j 1.41E+0; -9.52E-1 - j 1.41E+0)$

Le système contrôlé, en boucle fermée (système initial d'ordre complet corrigé par le contrôleur à modèle simplifié) a pour pôles:

Tableau 5.2. Pôles du système contrôlé (Approche directe)

Système corrigé (Ordre 9)
-5.26E+1
-4.92E+1
-3.85E+0 + j 9.65E+0
-3.85E+0 - j 9.65E+0
-1.86E+0
-1.09E+0 + j 1.45E+0
-1.09E+0 - j 1.45E+0
-1.60E-1 + j 1.02E+0
-1.60E-1 - j 1.02E+0

Nous tracerons les réponses impulsionnelles du système initial (en boucle ouverte) et des systèmes corrigés (contrôleur à modèle simplifié, d'ordre 2, connecté au système initial) via les deux approches II et directe (voir Fig. 5.1).

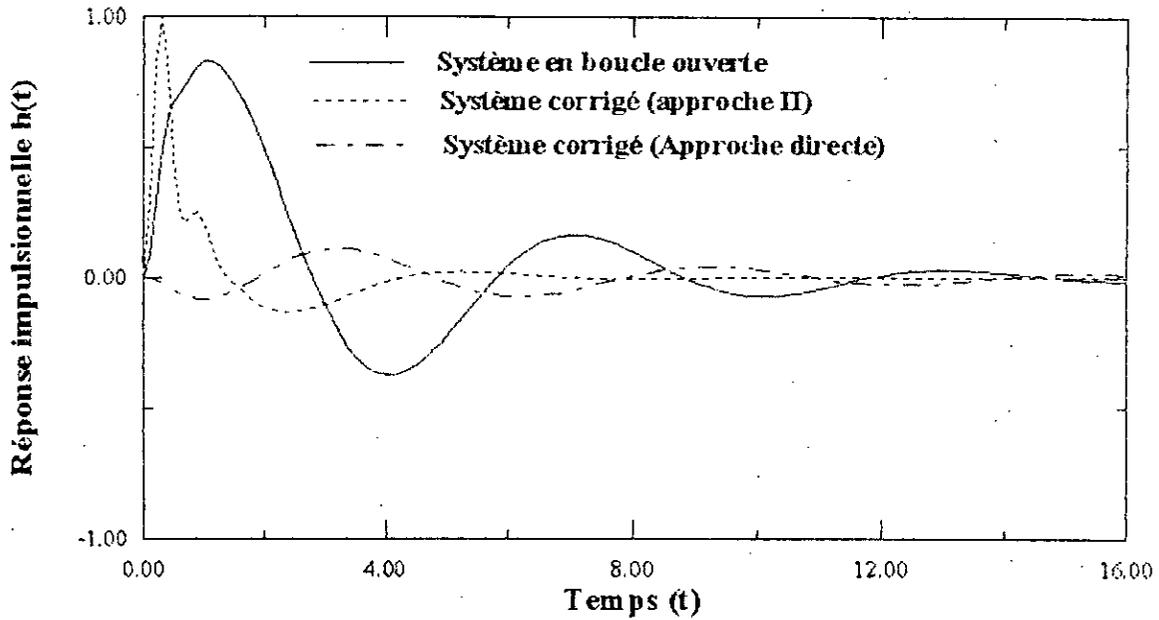


Figure 5.3. Réponse impulsionnelle des systèmes initial et ceux corrigés via les deux approches II et directe

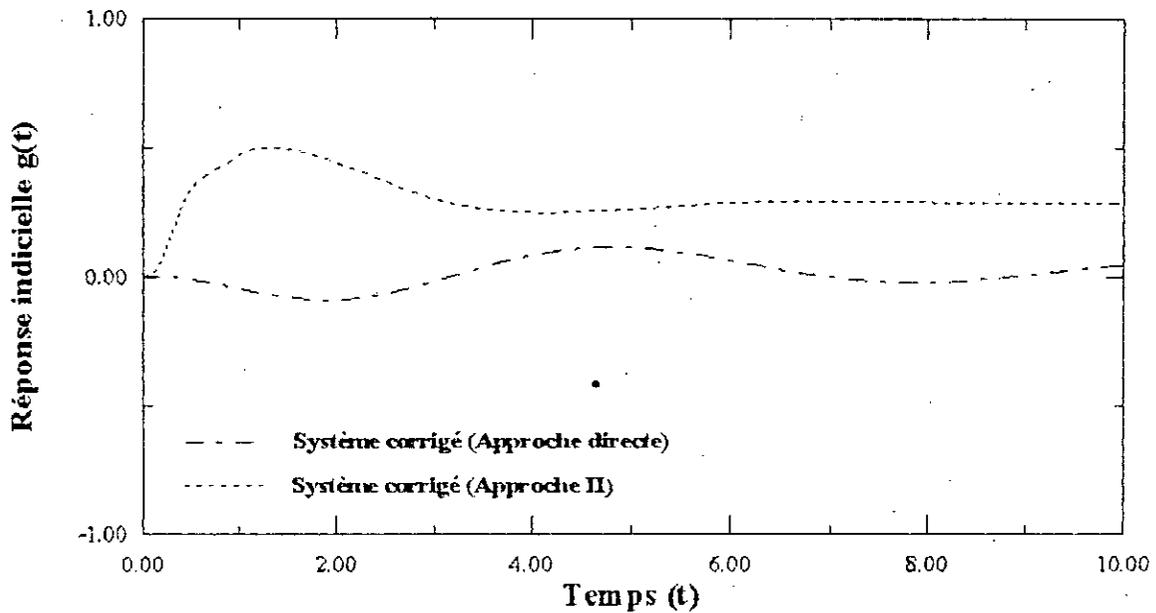


Figure 5.4. Réponse indicienne des systèmes corrigés via les deux approches II et directe

La Figure 5.3. montre que la réponse impulsionnelle du système corrigé via l'approche II (Fig. 5.1) présente un temps de réponse court (régime transitoire de courte durée), donc le système

atteint le régime permanent rapidement, par contre, on observe une augmentation d'amplitude de la réponse impulsionnelle à l'origine, restant parfois indésirable.

Le système corrigé via l'approche directe (Fig. 5.1) présente une réponse impulsionnelle ayant une faible amplitude par rapport à celle du système initial en boucle ouverte, et le système bouclé tend progressivement vers le régime permanent.

Donc, selon les performances souhaitées (temps de réponse, amplitude de la réponse impulsionnelle,...), on adoptera l'une des deux approches II ou directe (Fig. 5.1), cela en fonction de notre application.

V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, à part les deux approches usuelles (voir Fig. 5.1), une autre approche, directe, a été développée; cette dernière consiste à choisir une base de représentation du système à contrôler, dans laquelle celui-ci est équilibré du point de vue filtrage-contrôle. Deux équations de Riccati apparaissent, dont l'exploitation formulera l'algorithme de construction de la transformation d'équilibre-LQG, donc la base de coordonnées où le vecteur d'état du processus doit être projeté.

L'avantage majeur de cette approche, qu'on peut qualifier de directe, est la souplesse due au fait que la réduction d'ordre du contrôleur s'effectue en opérant sur une seule matrice diagonale (matrice des valeurs caractéristiques), où chaque élément donne à la fois une mesure quantitative du degré de filtrage et de contrôle de l'état correspondant du processus.

Il est très important de noter que l'approche II (voir Fig. 5.1) exige l'hypothèse que le système initial à contrôler soit asymptotiquement stable, hypothèse non nécessairement exigée dans l'approche directe (voir Fig. 5.1).

Si l'ordre (n) du système initial est très élevé, l'approche directe, nécessitant la résolution de deux équations de Riccati (CARE et FARE) d'ordre (n), est indésirable (temps de calcul élevé), par contre l'approche II nécessite la résolution de deux équations de Lyapunov d'ordre (n) (pour le calcul des grammiens), et deux équations de Riccati d'ordre (k) (k étant l'ordre du modèle simplifié).

CONCLUSION GENERALE

Dans le présent travail, nous nous sommes fixés comme objectif la représentation d'un système complexe par son approximant d'ordre réduit, pour cela, diverses approches de simplification de modèles complexes ont été développées.

Deux parmi ces méthodes, récentes, traitant respectivement le cas de systèmes minimaux (Méthode des Réalisations Equilibrées) et le cas de systèmes non minimaux (Méthode de Schur), nous semblent très intéressantes à détailler.

Après diverses simulations, nous pouvons confirmer que ces approches donnent un modèle d'ordre réduit, représentant fidèlement, avec une certaine tolérance, le système initial.

En effet, la réduction de l'ordre d'un système n'affecte que peu son comportement globale, car l'élimination se fait sur les états du système initial, contribuant faiblement, dans un certain sens, dans son évolution.

Même si le système initial est non minimal (restriction de la M.R.E.), l'approche de Schur, se passant des états non observables et/ou non commandables, donne un approximant d'ordre réduit, présentant l'avantage d'être minimal.

Comme application de la réduction d'ordre de modèles, trois approches de synthèse d'un contrôleur optimal (LQG) à modèle simplifié ont été développées, dont la plus récente, approche directe, apport propre de ma recherche, exploite la forme équilibrée-LQG du processus à compenser, en vue de réduire l'ordre du contrôleur associé.

Cette réduction d'ordre trouve bien son application dans la synthèse de contrôleurs à modèles simplifiés et la connection de ce dernier au système initial, d'ordre complet, donne de bonnes performances en boucle fermée.

Le logiciel développé (sous forme d'un Tool Boxe RED.m), à base du Matlab [50], offre diverses techniques de synthèse de modèles d'ordre réduit (par MRE, Schur, Approche de la Racine carrée), le logiciel RED permet aussi la synthèse d'un contrôleur LQG, ainsi que son approximant d'ordre réduit.

S'il est vrai qu'aucune approche ne peut prétendre résoudre les problèmes que pose l'analyse et la synthèse de systèmes complexes, nous sommes persuadés que c'est par la diversité de ces méthodes et leurs applications à des cas réels, que cette analyse s'enrichit. Nous espérons y avoir modestement contribué.

REFERENCES

- [1] J. Melese, *L'analyse modulaire des systèmes*, Ed. Hommes et technique, Paris, 1977.
- [2] A. Adjtoutah, *Analyse et modélisation d'une classe de systèmes complexes: application à un four rotatif à ciment*, Thèse de MAGISTER, Dépt. d'Electronique, E.N.P, 1991.
- [3] M. Aoki, "Control of large scale systems by aggregation", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-13, pp. 246-253, 1968.
- [4] C. Coeffier, *Etude de la commande de traction dans les entrainements de bandes de metal*, Thèse de Doctorat de l'INPL, CNRS, Juillet 1992.
- [5] G. Michallesko, J. M. Siret, P. Bertrand, "Modélisation de grands systèmes par agrégation", *RAIRO Auto*, Vol. 13, No. 2, 1979.
- [6] G. Duc, *Etude de grands systèmes par modèle agrégé et méthode de perturbation*, Thèse de Dr. Ingénieur, Paris XI, 1981.
- [7] E. M. Jeffrey, *Identification using low order models*, Ph. D. Thesis in mechanical engineering, University of California, Berkley, USA, 1988.
- [8] P. T. Kabamba, "Balanced gains and their significance for L^2 model reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, pp. 690-693, July 1985.
- [9] D. A. Wilson, "Optimum solution of model reduction problem", *Proceeding of the IEE*, Vol. 117, No. 6, pp. 1161-1165, June 1970.
- [10] D. C. Hyland and D. S. Bernstein, "The optimal projection equations for model reduction and the relationships among the methods of Wilson, Skelton and Moore", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, pp. 1201-1211, Dec. 1985.
- [11] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds", *International Journal of Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.

- [12] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, Observability and model reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 17-32, Feb. 1981.
- [13] A. B. H. Adamou, Simplification de modèles complexes par la méthode des réalisations équilibrées, Thèse d'Ingénieur d'Etat en Electronique, ENP, Juillet 93.
- [14] D. Rothschild & A. Jameson, "Comparison of four numerical algorithms for solving the Lyapunov matrix equations", *International Journal of Control*, Vol. 11, No.2, pp. 181-198, 70.
- [15] N. J. Young, "Balanced realization via operators", *International Journal of Control*, Vol. 42, No. 2, pp. 369-389, 1985.
- [16] R. J. Obert, "Balanced realizations: Canonical form, parametrization", *International Journal of Control*, Vol. 46, No. 2, pp. 648-670, 1987.
- [17] M. Bettayeb, "New interpretation of balancing state space representation as an input-output energy minimization problem", *International Journal Systems SCI*, pp. 325-331, 1991.
- [18] S. Shokoochi and L. Silverman, "Linear time-variable systems balancing and model reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-28, No. 8, pp. 810-822, August 1983.
- [19] A. Fossard, *Commandes des systèmes multidimensionnels*, 1972.
- [20] A. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige & R. C. Ward, "Computation of systems balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 2, pp. 115-122, Feb. 1987.
- [21] P. T. Kabamba, "Balanced forms: Canonicity and parametrization", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 1, pp. 1106-1109, Nov. 1985.
- [22] L. Pernebo & L. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-27, No. 2, pp. 382-387, April 1982.

- [23] M. G. Safonov & R. Y. Chiang, "A Schur method for balanced-truncation model reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 729-733, July 1989.
- [24] M. G. Safonov, R. Y. Chiang and D. J. N. Umebeer, "Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 4, pp. 496-501, April 1990.
- [25] Mu-H Cheng & YH-Y Chang, "Model reduction for continuous and discrete-time systems via squared-magnitude responses matching by linear programming", *International Journal of Control*, Vol. 22, No. 4, pp. 723-734, 1991.
- [26] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems: Theory, Models & Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [27] L. Mitiche, M. A. Belouchrani, *Etude unifiée des transformations fréquentielles numériques et application aux filtres prototypes, Thèse d'Ingénieur d'Etat en Electronique*, ENP, Juin 91.
- [28] A. Antoniou, *Digital filters: Analysis and design*, Mc Graw-Hill, New York, USA, 79.
- [29] D. Kirk, *Optimal control theory*, Prentice-Hall Electrical Engineering series, USA, 1970.
- [30] C. Graham Goodwin, K. S. Sin, *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall Information and Systems Sciences series, USA, 1984.
- [31] K. J. Aström, B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: Theory and design*, Prentice-Hall International, Inc., USA, 1990.
- [32] B. D. O. Anderson and Yi Liu, "Controller reduction: Concepts and approaches", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 8, pp. 801-812, August 1989.
- [33] M. Saeki, " H^{∞} /LTR procedure with specified degree of recovery", *Automatica*, Vol. 28, No. 3, pp. 509-517, 1992.

- [34] M. G. Safonov & R. Y. Chiang, "CACSD using the state-space L^{∞} theory, A design example", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-33, No. 5, pp. 477-479, May 1988.
- [35] P. Constantine & Therapos, "On the selection of the reduced order via balanced state representations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 11, pp. 1019-1021, Nov. 1984.
- [36] S. D. Bernstein & W. M. Haddad, "LQG control with an H_{∞} performance bounds: A Riccati equation approach", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 3, pp. 293-305, March 89.
- [37] M. Denis & K. Glover, "Controller reduction by H_{∞} -balanced truncation", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, No. 6, pp. 668-682, June 91.
- [38] A. Youssuf & R. Skgiton, "Balanced controller reduction", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, No. 2, pp. 254-257, March 84.
- [39] M. G. Singh & A. Titli, *Systems: Decomposition, optimisation and control of small and large scale systems*, Pergamon Press, 1978.
- [40] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [41] M. Jamshidi & M. M. Zavarei, *Linear control systems*, 1987.
- [42] A. Saberi, B. M. Chen and P. Sannuti, "Theory of LTR for non-minimum phase systems, recoverable target loops, and recovery in a subspace. Part 1: Analysis", *International Journal of Control*, Vol. 53, No. 5, May 91.
- [43] A. Saberi, B. M. Chen and P. Sannuti, "Theory of LTR for non-minimum phase systems, recoverable target loops, and recovery in a subspace. Part 1: Design", *International Journal of Control*, Vol. 53, No. 5, May 91.
- [44] P. A. Lof & T. Smed, "Fast calculation of a voltage stability index", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 54-64, Feb. 92.
- [45] G. Golub and W. Kahan, "Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix", *J. SIAM Num. Analy.*, Ser. B, Vol. 2, No. 2, pp. 205-223, 1965.

- [46] C. Foulard, S. Gentil & J. P. Sandraz, *Commande et régulation par ordinateur numérique*, Ed. Eyrolles, Paris, 1979.
- [47] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, Inc., USA, 1976.
- [48] D. Xue, "Accuracy consideration to order reduction algorithms for Gaussian input", CE/S/47, Sussex Univ., England.
- [49] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, M. Athans, "Robustness results in Linear -Quadratic Gaussian based multivariable control designs", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 75-92, Feb. 1981.
- [50] The Mathworks, Inc., "PC-Matlab", 1984-1989, Version 3.5f.
- [51] L. Mitiche, A. B. H. Adamou, "Model reduction via balanced realizations: Application to digital prototype filters", *International Conference on Signals and Systems*, Vol. 1, pp. III.54-III.57, Algiers Sept. 24-26, 1994.
- [52] L. Mitiche, A. B. H. Adamou, "A Schur method for Model reduction (nonminimal case)", *International Conference on Signals and Systems*, Vol. 2, pp. VI.63-VI.66, Algiers Sept. 24-26, 1994.

ANNEXE 1

GENERALITES SUR LA THEORIE DES SYSTEMES

1. Notion de systèmes

On appelle système un ensemble structuré d'éléments naturels de même espèce ou de même fonction.

Comme on peut le définir comme étant un ensemble composé de parties ordonnées ayant chacune ses propres lois. Cette notion est utilisée dans divers domaines de la vie, à savoir systèmes économique, électrique, hydraulique, dynamique, ...ect.

L'état du système est lié à un ensemble de variables, sa sensibilité est le degré de changement qui affecte son comportement quand les paramètres varient un par un.

2. Notion de modèle mathématique

Le comportement d'un système réel est représenté par un ensemble de relations constituant le modèle mathématique de ce système.

La construction d'un tel modèle est appelée identification, dont la précision peut être mesurée par la différence entre la sortie du modèle et celle du système réel.

En général, l'identification peut être divisée en deux phases:

- Détermination de la structure du modèle.
- Estimation des paramètres du modèle.

Les modèles mathématiques peuvent consister en:

- Des équations (système d'équations) intégral-différentielles [systèmes dynamiques].
- Des équations (système d'équations) aux dérivées partielles [systèmes à paramètres distribués].
- Des équations (système d'équations) récurrentes [systèmes discrets].
- Fonction (matrice) de transfert.
- Représentation dans l'espace d'état.

3. Notion de système linéaire

On appelle système linéaire tout système dont les lois physiques régissant son comportement s'expriment par des équations (différentielles ou récurrentes) linéaires.

De tels systèmes ont les propriétés suivantes:

- Additivité: (superposition)

si : $y_1(t) = T[x_1(t)]$ et $y_2(t) = T[x_2(t)]$,

alors : $T[x_1(t) + x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$.

où $x(t)$ et $y(t)=T[x(t)]$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système.

- Homogénéité: (proportionnalité)

Si: $y(t) = T[x(t)]$,

alors: $T[\alpha \cdot x(t)] = \alpha \cdot y(t)$, où α est une constante complexe.

4. Notion de commande optimale

Dans la commande optimale, on cherche une fonction (loi commande), qui nous permettra d'atteindre l'objectif désiré (degré de stabilité, temps de réponse, précision,...ect.), en minimisant une certaine fonction de coût (critère).

5. Notion d'état

L'état à l'instant t_0 d'un système représente l'ensemble d'informations qu'il faut connaître à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution dans le temps, lorsqu'on se donne des commandes (entrées) $u(t_0, t)$.

Les variables d'états déterminent l'état du système en évolution à tout instant t .

La représentation d'état d'un système est l'une des représentations modernes. Très utilisée, elle présente une souplesse de calcul, basée essentiellement sur le calcul matriciel facilement implémenté sur calculateur numérique (ordinateur).

Soit un système linéaire, invariant dans le temps, sa représentation d'état est donnée par:

Cas continu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \tag{A1.1a}$$

Cas discret

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned} \tag{A1.1b}$$

- où: - $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(k)$: = n-vecteur (vecteur d'état).
 - $\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(k)$ = m-vecteur (vecteur de sortie).
 - $\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(k)$ = r-vecteur (vecteur d'entrée).
 - \mathbf{A} = nxn-matrice (matrice d'état).
 - \mathbf{B} = nxr-matrice (matrice d'entrée).
 - \mathbf{C} = mxn-matrice (matrice de sortie).
 - \mathbf{D} = mxr-matrice (matrice de transmission directe).
 - r : nombre d'entrées.
 - m : nombre de sorties.
 - n : ordre du système.

6. Commandabilité et Observabilité

Les notions de commandabilité et d'observabilité possèdent une grande importance dans l'étude des systèmes dans l'espace d'état.

Il est indispensable que le système à régler ou à observer soit commandable et observable pour pouvoir appliquer les méthodes modernes de régulation.

Il est évident que la commande et la régulation de tout procédé physique imposent que l'on soit maître du procédé, donc savoir exactement dans quel état il se trouve.

A. Commandabilité

- **Définition** Un système est dit commandable, si par une commande convenable on peut l'amener, en un temps fini, d'un état à un autre.

Une partie seulement du système est dite commandable, si seulement certaines composantes du vecteur d'état peuvent être ramenées, en un temps fini, d'un état à un autre.

- Critère de commandabilité

Le système représenté par (A1.1) est commandable si et seulement si:

$$\text{rang}[Q_c] = n, \text{ où: } Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

est la matrice de commandabilité du système.

- Stabilisabilité

Si le système (A1.1) n'est pas commandable, alors il est stabilisable si et seulement si les états non commandables sont asymptotiquement stables, c-à-d :

$$\exists L / \text{Re}[\lambda_i(A - BL)] < 0.$$

B. Observabilité

- **Définition** Un système est dit observable si et seulement si de l'observation de la sortie pendant un temps fini, on peut déduire l'état initial.

Une partie seulement du système est dite observable, si de l'observation de certaines grandeurs seulement de la sortie, on peut déduire l'état initial correspondant.

Physiquement, un système non observable est un système sur lequel on ne fait pas toutes les mesures nécessaires pour observer son état.

- Critère d'observabilité

Le système (A1.1) est observable si et seulement si:

$$\text{rang}[Q_o] = n \text{ où } Q_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

est la matrice d'observabilité du système.

- Détectabilité

Si le système (A1.1) n'est pas observable, alors il est détectable si et seulement si les états non observables sont asymptotiquement stables, c-à-d :

$$\exists M / \text{Re}[\lambda_i(A + MC)] < 0.$$

7. Stabilité

La stabilité est un impératif de tout système conçu et l'une des premières qualités que l'on réclame à une régulation ou réduction.

- Critère de stabilité

Cas continu Le système (A1.1a) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A sont à partie réelle négative, c-à-d:

$$\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0; \forall i = \overline{1, n}.$$

Cas discret Le système (A1.1b) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A se trouvent à l'intérieur du cercle unité, c-à-d:

$$|\lambda_i(A)| < 1; \forall i = \overline{1, n}.$$

ANNEXE 2

VALEURS SINGULIERES ET ALGORITHME SVD

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in C^{m \times n}$, de rang (r), notées σ_i , sont les racines carrées non négatives des valeurs propres de $(A^T \cdot A)$, ordonnées telles que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Si $r < n$, nous aurons $(n-r)$ valeurs singulières nulles, c-à-d:

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

Il existe deux matrices orthogonales $U \in C^{m \times m}$, $V \in C^{n \times n}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in C^{m \times n}$ telles que [45]:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T = U \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V^T$$

où: $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$

et les valeurs singulières σ_i , ($i = \overline{1, r}$) sont les racines carrées des (r) valeurs propres positives (non nulles) de $(A^T \cdot A)$. U et V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de $(A^T \cdot A)$ et $(A \cdot A^T)$ respectivement.

Cette décomposition est dite "Décomposition en Valeurs Singulières" (SVD) de la matrice A .

Remarque Si $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ est la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , alors les décompositions en valeurs propres de $(A^T \cdot A)$ et de $(A \cdot A^T)$ sont données par [44]:

$$A^T \cdot A = V \cdot (\Sigma^T \cdot \Sigma) \cdot V^T = V \cdot \Sigma^2 \cdot V^T$$

$$A \cdot A^T = U \cdot (\Sigma \cdot \Sigma^T) \cdot U^T = U \cdot \Sigma^2 \cdot U^T$$

Notons:

$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1$ [la plus grande valeur singulière de la matrice A]

$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n$ [la plus petite valeur singulière de la matrice A]

Les valeurs singulières minimum et maximum d'une matrice A, notées respectivement $\underline{\sigma}$ et $\bar{\sigma}$, sont équivalentes en terme de norme spectrale à:

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2$$

$$\underline{\sigma}(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_2^{-1}, & \text{si } \det(A) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \det(A) = 0 \end{cases}$$

La valeur singulière minimale $\underline{\sigma}(A)$ donne une mesure de la tendance à la singularité de la matrice A.

Propriétés des valeurs singulières

$$1/ \underline{\sigma}(A) = \min_{x \in C^n} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}$$

$$2/ \bar{\sigma}(A) = \max_{x \in C^n} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}$$

3/ $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A)$; où $\lambda_i(\cdot)$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de (\cdot)

$$4/ \text{ si } A^{-1} \text{ existe, } \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$$

$$5/ \text{ si } A^{-1} \text{ existe, } \bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

$$6/ \bar{\sigma}(\alpha \cdot A) = |\alpha| \cdot \bar{\sigma}(A)$$

$$7/ \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

$$8i / \bar{\sigma}(A.B) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$$

$$9i / \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}(A.B) \leq \sqrt{2} \cdot \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$$

$$10i / \max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \cdot \max_{i,j} |a_{i,j}|$$

$$11i / \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}[A^T \cdot A]$$

2i/ Cas stochastique

$\forall x(t), \forall u(t)$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{x}(t)] = 0$$

ceci est vrai si et seulement si:

1- $F = A - KC$

2- $E = B$

3- $\text{Re}[\lambda_i(F)] < 0$

Par conséquent, la forme générale de l'équation identité sera donnée par:

$$\dot{\hat{x}} = A.\hat{x} + B.u + K(y - C.\hat{x})$$

La synthèse de l'estimateur revient donc à la détermination du gain K de celui ci.

Dans le cas d'un estimateur optimal, la détermination de K s'obtient par minimisation d'un critère usuel en statistique. La synthèse d'un tel estimateur est alors unique et porte le nom du "Filtre de Kalman".

3. Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un observateur d'ordre n donnant l'estimation du vecteur d'état.

Dans un environnement stochastique, lorsque les variances des bruits sont connus, c'est le meilleur observateur linéaire au sens de la variance de l'erreur d'estimation.

Il faut mentionner que le filtre de Kalman a la structure d'un observateur linéaire et qu'il peut, en dehors de tout contexte d'optimalité, être considéré comme observateur d'ordre (n).

3.1. Détermination de la structure du filtre de Kalman

Prenons le cas d'un environnement stochastique caractérisé par les matrices de covariances V et W , considérons alors le système suivant (A3.1).

Le problème de la détermination d'un estimateur identité optimal dont l'état est \hat{x} , valeur estimée de x telle que:

$$\dot{\hat{x}} = A.\hat{x} + B.u + K(y - C.\hat{x})$$

réside dans la recherche de la matrice du gain K de l'observateur minimisant l'erreur d'estimation $\bar{x} = x - \hat{x}$.

Gain du filtre de Kalman

Le gain optimal K qui minimise à tout instant la somme des variances des composantes de l'erreur d'estimation est donné par:

$$K = R.C^T.W^{-1}$$

où R est la matrice de variance de l'erreur d'estimation, solution unique de l'équation de Riccati stationnaire:

$$\dot{R} = A.R + R.A^T - R.C^T.W^{-1}.C.R + V = 0 \quad (A3.3)$$

3.2. Stabilité du filtre de Kalman

La stabilité du filtre de Kalman est toujours assurée sous réserve de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Riccati (A3.3).

Ces conditions seront satisfaites si on a:

i/ La paire (A^T, C^T) stabilisable.

2i/ La paire (A^T, L) détectable où L est telle que : $V = L.L^T$.

ANNEXE 4

COMMANDE OPTIMALE ET EQUATIONS DE RICCATI

I. Détermination de la commande optimale

Le problème d'optimisation dynamique consiste à déterminer un vecteur u^* admissible faisant suivre au système une trajectoire admissible x^* qui minimise le critère quadratique. Pour trouver le minimum de ce dernier, on fera appel au principe du minimum [46].

I.1. Cas continu

Soit le problème de régulateur suivant:

$$\text{Min}[J] = \text{Min} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot P \cdot u) dt \right]$$

où: - Q : Matrice définie non négative,
- P : Matrice définie positive.

avec les contraintes dynamiques linéaires:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (\text{A4.1})$$

Pour résoudre ce problème, écrivons son Hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2} [x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot P \cdot u] + \theta^T(t) [A \cdot x(t) + B \cdot u(t)] \quad (\text{A4.2})$$

où $\theta(t)$ est l'état adjoint.

Le principe du minimum (continu), conduit aux équations suivantes:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (\text{A4.3})$$

$$\dot{\theta}(t) = -[Q \cdot x(t) + A^T \cdot \theta(t)] \quad (\text{A4.4})$$

$$P \cdot u(t) + B^T \cdot \theta(t) = 0 \quad (\text{A4.5})$$

$$\underline{\text{d'où: } u(t) = -P^{-1} \cdot B^T \cdot \theta(t)} \quad (\text{A4.6})$$

remplaçons (A4.6) dans (A4.3) et posons $V = B \cdot P^{-1} \cdot B^T$, on obtient:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) - V \cdot \theta(t) \quad (\text{A4.7})$$

Etant donné que la commande optimale recherchée est de la forme $u(t) = -G \cdot x(t)$, avec G une matrice constante ($n \times n$), nous pouvons aisément voir la relation existant entre l'état adjoint $\theta(t)$ et l'état $x(t)$, donnée par:

$$\theta(t) = R \cdot x(t) \quad (\text{A4.8})$$

R est une matrice constante ($n \times n$)

$$\text{d'où } \dot{\theta}(t) = R \cdot \dot{x}(t) \quad (\text{A4.9})$$

En substituant l'expression de $\theta(t)$ dans les équation (A4.4) et (A4.7), on obtient:

$$\dot{x}(t) = (A - V \cdot R) \cdot x(t) \quad (\text{A4.10})$$

$$\dot{\theta}(t) = -(Q + A^T \cdot R) \cdot x(t) \quad (\text{A4.11})$$

de (A.10) et (A4.9), on obtient:

$$\dot{\theta}(t) = R \cdot (A - V \cdot R) \cdot x(t) \quad (\text{A4.12})$$

Par comparaison de (A4.11) et (A4.12), nous obtenons:

$$R \cdot (A - V \cdot R) = -Q - A^T \cdot R$$

d'où finalement:

$$R \cdot A + A^T \cdot R - R \cdot V \cdot R + Q = 0 \quad (\text{A4.13})$$

(A4.13) est dite équation de Riccati stationnaire.

La commande optimale s'exprime donc par la relation:

$$u(t) = -P^{-1} \cdot B^T \cdot R \cdot x(t)$$

où R est une matrice ($n \times n$), solution de l'équation de Riccati.

Théorème. La solution R de l'équation de Riccati existe si le couple (A, B) est commandable et elle est unique si le couple $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est observable (voir Annexe 1).

Stabilité du système en boucle fermée

Si la solution de l'équation de Riccati existe et est unique, la stabilité du système en boucle fermée est toujours assurée.

I.2. Cas discret

D'une manière similaire, nous pouvons déterminer une commande optimale pour un système linéaire discret. Appliquons pour cela le principe du minimum (cas discret), ce qui conduit à l'équation de Riccati suivante.

$$A^T \cdot R \cdot A - P - A^T \cdot R \cdot B \cdot (B^T \cdot R \cdot B + P)^{-1} \cdot B^T \cdot R \cdot A + Q = 0$$

La commande optimale est alors donnée par:

$$u(k) = - \left[(B^T \cdot R \cdot B + P)^{-1} \cdot B^T \cdot R \cdot A \right] \cdot x(k) \quad (A4.14)$$

II. Résolution des équations de Riccati

II.1. Introduction

La mise en oeuvre d'une commande par critère quadratique revient à résoudre l'équation de Riccati. Considérons la résolution de cette dernière par l'application d'une technique, via la fonction signe d'une matrice [40].

Cette technique est basée au départ sur la construction de la matrice Hamiltonienne associée à l'équation de Riccati, pour cela il nous a semblé nécessaire d'exposer la formulation suivante:

II.2. Formulation des équations Hamiltonniennes associées

II.2.1. Cas continu

Les conditions d'optimalité (minimisation du critère quadratique J) conduisent à l'introduction d'un état adjoint θ [46] qui conjointement à x vérifie le système aux équations Hamiltonniennes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B.P^{-1}.B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A4.15})$$

On définit alors la matrice Hamiltonienne H de dimension $(2n \times 2n)$

$$H = \begin{bmatrix} A & -B.P^{-1}.B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{A4.16})$$

II.2.2. Cas discret

De même que pour le cas continu, les conditions d'optimalité conduisent à l'introduction d'un état adjoint θ et aux équations Hamiltonniennes suivantes:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B.P^{-1}.B^T \\ Q & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.17})$$

ces équations s'écrivent encore:

$$\begin{bmatrix} I & B.P^{-1}.B^T \\ 0 & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix}$$

que l'on notera:

$$U \cdot \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad (\text{A4.18})$$

et $S = U^{-1} \cdot L$ est la matrice Hamiltonienne $(2n \times 2n)$, associée à l'équation de Riccati discrète.

II.3. Fonction signe d'une matrice

La fonction signe d'une matrice est un outil puissant pour la résolution de problèmes relatifs aux systèmes dynamiques linéaires invariants.

C'est dans cette optique que Berrand [46] a développé un algorithme "accélééré de Newton" pour le calcul de la fonction signe d'une matrice et en a déduit une application pour la résolution de l'équation de Riccati.

Définition Nous savons qu'une matrice carrée $A(n,n)$ est semblable à sa forme de Jordan

$$A = M.J.M^{-1}$$

où: M : matrice des vecteurs propres de la matrice A ,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & 0 \\ . & . & J_j & . & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J_j = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & \lambda_2 & 1 & . & . \\ .. & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

P étant le nombre de blocs de Jordan J_j associés à la valeur propre λ_j .

Soit $f(\lambda)$, une fonction définie sur le spectre de matrice A , telle que:

$$f(A) = M.f(J).M^{-1}$$

Si $f(\cdot)$ est la fonction signe, nous aurons:

$$\text{signe}(A) = M.\text{signe}(J).M^{-1} = S$$

avec:

$$\text{signe}(J_j) = \begin{bmatrix} \text{signe}(\lambda_1) & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \text{signe}(\lambda_1) \end{bmatrix} = \begin{cases} I & \text{si } \text{Re}(\lambda_1) > 0 \\ -I & \text{si } \text{Re}(\lambda_1) < 0 \end{cases}$$

II.4. Algorithme de Newton accéléré

Soit M une matrice ($n \times n$), telle que $\text{Re}[\lambda_i(M)] \neq 0$ et $S = \text{signe}(M)$ sa fonction signe telle que:

$$S = \text{signe}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$$

$$\text{où } z_{k+1} = \frac{1}{2} [z_k + z_k^{-1}] \text{ et } z_0 = M$$

La convergence de cet algorithme standard pouvait être améliorée en utilisant la formulation suivante:

$$z_{k+1} = \alpha_k \cdot z_k + \beta_k \cdot z_k^{-1} \quad (\alpha_k, \beta_k \text{ sont des scalaires})$$

Un algorithme basé sur cette formulation est défini par la procédure suivante:

$$* z_0 = M$$

$$* z_{k+1} = \frac{1}{2} \left[\alpha_k \cdot z_k + \frac{1}{\alpha_k} \cdot z_k^{-1} \right]$$

$$* \alpha_k = \sqrt{\frac{\|z_k^{-1}\|}{\|z_k\|}}$$

avec:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 1$$

En vue d'accélérer la convergence de l'algorithme, un choix particulier du couple (α_k, β_k) est donné par:

$$\alpha_k = \frac{1}{[\det(z_k)]^{\frac{1}{n}} + 1}$$

$$\alpha_k + \beta_k = 1$$

II.5. Algorithme de résolution de l'équation de Riccati

Considérons un problème dynamique et les hypothèses suivantes:

$$P = P^T > 0; Q = Q^T \geq 0.$$

(A, B) stabilisable (voir Annexe 1).

(L, A) détectable ; (Q = L^T . L)

Théorème: Etant donné les hypothèses ci-dessus, la solution unique symétrique, non négative de l'équation de Riccati dans le cas continu et discret est donnée par:

$$R = F_{21} \cdot F_1^{-1} \text{ avec:}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} = \text{signe}(H) + \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

et:

$$\text{a) } H = \begin{bmatrix} A & -B \cdot P^{-1} \cdot B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{cas continu})$$

$$\text{b) } H = \begin{bmatrix} I+A & -B \cdot P^{-1} \cdot B^T \\ -Q & I+A^T \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A-I & -B \cdot P^{-1} \cdot B^T \\ -Q & I-A^T \end{bmatrix} \quad (\text{cas discret})$$

ANNEXE 5

ALGORITHME DE CHOLESKY

Les opérations de factorisation et de triangularisation de matrices constituent les opérations de base des nouveaux algorithmes de contrôle ou de traitement de signal.

Ainsi la procédure de décomposition LU d'une matrice $A(n,n)$, avec :

L: matrice triangulaire inférieure,

U: matrice triangulaire supérieure,

permet par exemple de ramener la résolution du système d'équations linéaires

$$A.x = B$$

où: - $A = nxn$ -matrice

- $B, x = n$ -vecteur

à la résolution de deux systèmes particuliers:

- Système triangulaire inférieur $L.x = B$

- Système triangulaire supérieur $U.x = Y$

Si A est une matrice symétrique, définie positive, alors Cholesky nous affirme que A peut se mettre sous la forme:

$$A = S.S^T$$

où S est une matrice triangulaire inférieure.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ s_{n1} & . & . & . & s_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} & . & . & . & s_{n1} \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & s_{nn} \end{bmatrix}$$

Certains auteurs considèrent S comme étant la racine carrée de la matrice A , du fait qu'une telle décomposition (Cholesky) est unique.

L'algorithme de factorisation de Cholesky permet de calculer les coefficients $s_{i,j}$ de la matrice S par récurrence:

Algorithme

Entrée: A : $n \times n$ -matrice

Sortie: S : $n \times n$ -matrice triangulaire inférieure

For $i = 1$ **to** n **Do**

$$s_{i,i} = \left[a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{i,k}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

If $s_{i,i} = 0$, **then Halt** (A est non définie positive)

while $j > i$ **and** $j \leq n$ **Do**

$$s_{i,j} = \frac{1}{s_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{i,k} \cdot s_{j,k} \right]$$

End loop on i .