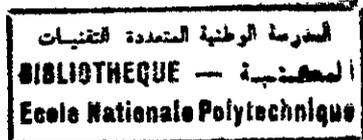


République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT de GENIE ELECTRIQUE
OPTION: AUTOMATIQUE



THESE DE MAGISTER
EN AUTOMATIQUE

Présentée par:
M.S. Nedjari
Ingénieur en Automatique E.N.P

Intitulée :

Etude comparative des techniques optimales LQG et H_{∞} :
Application à la Commande des Systèmes à Suspension Active

Soutenu en Mars 2000 devant le jury composé de Messieurs:
A. Zerguerras.....Professeur ENP.....Président
N. Louam.....Professeur ENP.....Rapporteur
R. Illoul.....Chargé de cours ENP.....Examineur
M.Tadjine.....Chargé de cours ENP.....Examineur
M.C.Souami.....Chargé de cours ENP.....Examineur
C.Larbes.....PHD Chargé de cours ENP.....Invité

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

*A toute ma famille
A tous mes amis*



Remerciements :

Je tiens à remercier le Prof. Louam pour m'avoir apporté son aide à la réalisation de cette étude.

Je remercie également Messieurs les membres du jury, pour m'avoir fait l'honneur de juger ce modeste travail.

J'exprime toute ma gratitude à mes parents pour tout ce qui m'ont apporté.

Mes remerciements chaleureux vont aussi à mon ami Yacine Yahia Chérif pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté pour l'accomplissement de ce travail, ainsi qu'à mon cousin Sidali, l'équipe d'IMComputer et à tous ceux qui m'ont aidé ou encouragé à finir ce travail.

ملخص

قمنا بدراسة خصائص طرق التحكم المدعيات آل كيو جي و آش لانهاية و بصفة خاصة خصائص المتانة بالنسبة للمجهولات الوسيطة و اشارات التشويش. طريقة التحكم آش لانهاية تمنح أكثر ضمانات للمتانة بالنسبة لطريقة آل كيو جي، نستنتج من هذا أن طريقة التحكم آش لانهاية لها طابع أكثر شمولية. قمنا بتطبيق كلتا الطريقتين لنظام امتصاص الاهتزازات لسيارة، تم تأكيد خصائص طريقة التحكم آش لانهاية العالية في رد أثر اشارات التشويش و المتانة بالنسبة للمجهولات الوسيطة.

Mots clés: Commande, Optimale, Robuste, Hinfini, Théorie des jeux

Résumé

Au cours de ce travail, il nous a été donné d'étudier les propriétés des commandes optimales LQG et H_∞ , notamment, celles concernant la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des entrées de perturbation. La commande H_∞ présente plus de garanties de robustesse que la commande LQG, cela est dû au fait que la technique H_∞ tend à minimiser la norme ∞ de la fonction de transfert en boucle fermée T_{zw} en supposant les perturbations de spectre inconnu, alors que la technique LQG tend à minimiser la norme 2 de cette dernière fonction de transfert, en supposant que les entrées de perturbations sont des bruits blancs. Il en découle que l'approche H_∞ a un caractère plus général que l'approche LQG. En appliquant ces techniques au cas de la suspension d'un véhicule roulant, nous avons conclu à un meilleur rejet de la perturbation et une plus grande robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques pour le contrôleur H_∞ .

Keywords: Control, Optimal, Robust, Hinfini, Games Theory

Abstract

In present research, we studied LQG and H_∞ optimal control properties, Particularly, the properties which concern robustness regard to parametric uncertainty and disturbance inputs. H_∞ control method present more robustness guaranties, due to a fact that this later try to minimize an ∞ norm of the closed loop transfer function T_{zw} and suppose that the disturbance inputs are of unknown spectra, when LQG method try to minimize a 2 norm of this transfer function and suppose that the disturbance inputs are white noises. We concluded that the H_∞ method have a more general character. When we applied LQG and H_∞ control techniques to automotive vehicle suspension problem, we concluded to a better disturbance rejection and more parametric uncertainty robustness for H_∞ controller.

Glossaire



A' ou A^T : transposée de la matrice A .

$\sigma(A)$: vecteur des valeurs singulières de la matrice A .

$\lambda(A)$: valeur propre de la matrice A .

LTI: Système linéaire invariant dans le temps

$L_2(-\infty, +\infty)$: espace de Lebesgue dans le domaine temporel.

$L_2(0, +\infty)$: sous espace de Lebesgue dans le domaine temporel.

Quart de véhicule : QV.

Moitié de véhicule : MV.

Avec suspension conventionnelle : ASC.

Sans suspension conventionnelle : SSC.

Actionneur idéal : AI

Actionneur non idéal : ANI = Bande passante de l'actionneur en Hertz.

Sortie bruitée : SB = Facteur multiplicatif du bruit.

Sortie non bruitée : SNB.

Incertitudes paramétriques : IP = Pourcentage de l'incertitude.

Sans incertitudes paramétriques : SIP.

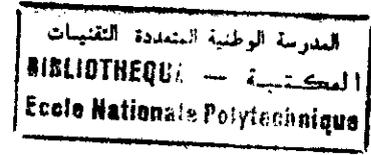
Problème à Information Complète : PIC.

Problème à Information Incomplète : PIIC.

Introduction :	1
Chapitre II :	
II.1. Introduction :	3
II.2. Formulation du problème de commande :	
II.2.1. Modèle du système en boucle ouverte :	3
II.3. Performances nominales d'un système de commande:	
II.3.1. Cas monovariable :	5
II.3.2. Cas multivariable :	7
II.3.3. Problème de sensibilité mixte :	7
II.3.4. Stabilité robuste :	8
II.4. Incertitudes dans l'espace d'état:	9
II.5. Conclusion :	11
Chapitre III :	
III.1. Introduction :	12
III.2. La commande optimale linéaire quadratique :	12
III.2.1. Cas de la régulation optimale en régime établi :	13
III.2.3. Propriétés de la commande LQR :	13
III.2.4. Identité de Kalman:	13
III.2.5. Sélection de l'index de performance :	14
III.3. Problème de la commande LQG:	15
III.3.1. Le filtre de Kalman:	16
III.3.2. Schéma de la commande optimale LQG :	16
III.4. Conclusion :	17
Chapitre IV :	
IV.1. Introduction :	18
IV.2. Forme canonique d'une commande robuste :	18
IV.3. Formulation du problème H_{∞} :	19
IV.4. Conclusion :	24

Chapitre V :

V.1 Introduction :	25
V.2 Problème du jeu différentiel :	25
V.3 Application de la théorie des jeux :	28
V.5. Synthèse d'un compensateur invariant dans le temps :	36
V.6. Parallèle entre les commandes LQG et H_{∞} :	39
V.7. Conclusion :	40



Chapitre VI :

VI.1. Problème du véhicule :	
VI.1.1. Problème du quart de véhicule	41
VI.1.2. Problème de la moitié de véhicule :	43
VI.1.3. Expression des contraintes :	45
VI.2. Simulations :	47
VI.3. Discussions :	55
VI.4. Conclusion :	57
Conclusion	58

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

I. Introduction :

La commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) est une partie fondamentale de la théorie de commande optimale. Elle combine une méthode mathématique élégante et des considérations pratiques, en effet, la commande basée sur les concepts de l'optimisation linéaire quadratique gaussienne offre une solution claire au problème de la commande multivariables.

Jusqu'à présent, les différents travaux concernant la conception d'une suspension active pour un véhicule roulant ont largement fait usage de la technique de commande LQG (voir par exemple [Thomson 1979], [Sharp 1987], [Louam 1988]).

Etant donné, les qualités de robustesse dont font preuve le régulateur LQR et son dual le filtre de Kalman, le schéma de commande LQG étant l'association de ces deux blocs, on pouvait s'attendre à ce que la commande LQG présente ces même qualités de robustesse. Cependant, dans une série de travaux, il a été montré que cette méthode pouvait conduire à une instabilité du système global. En effet, il a été montré dans [Doyle 1981] que l'insertion d'un filtre de Kalman dans la boucle de commande pouvait diminuer dans une certaine mesure la marge de stabilité du système. Il apparaît alors clairement que la commande LQG met davantage l'accent sur la caractéristique d'optimisation que sur celle de la robustesse vis à vis des entrées de perturbations et des incertitudes.

De part sa nature, le système de la suspension d'un véhicule roulant peut souffrir d'incertitudes paramétriques dues par exemple au changement de pression des pneumatiques, nous notons également la présence d'entrées de perturbation, représentées par le profil de la route et l'éventuelle présence de bruits de mesures. Etant donné le manque de robustesse que présente la commande LQG, l'investigation par des techniques alternatives d'une solution au problème de suspension d'un véhicule s'impose.

La commande H_∞ introduite par G. Zames [Zames 1981] se donne comme principale tâche de préserver une bonne marge de stabilité au système à commander et un rejet appréciable des différentes perturbations. Après les résultats obtenus par G. Zames dans le domaine fréquentiel, il y a eu d'autres tentatives pour résoudre le problème H_∞ dans le domaine temporel. Parmi celles-ci, citons les travaux de Doyle et Glover [Doyle 1989] qui ont abouti à un schéma de commande présentant plusieurs similitudes avec la commande LQG. Après cela, d'autres approches ont vu le jour, notamment celle initiée par Rhee et Speyer [Rhee and al 1991] et basée sur les concepts de la théorie des jeux. Nous constatons également que le

schéma de commande auquel aboutit cette approche présente des ressemblances avec celui de la commande LQG. Etant donné, les qualités de robustesse qu'offre cette méthode de commande, elle se présente comme une sérieuse alternative à la commande LQG pour le problème de suspension d'un véhicule roulant.

Dans le chapitre 2, nous introduisons le problème de commande en général et les performances nominales qui sont exigées du système de commande, dans le chapitre 3 nous présentons les propriétés essentielles de la commande LQG, notamment, celles concernant la robustesse vis-à-vis des entrées de perturbations, dans le chapitre 4, nous introduisons le problème de la commande robuste H_∞ et une solution dans le domaine temporel à ce problème présentée par Doyle et Glover. Dans le chapitre 5, nous présentons une solution au problème de la commande H_∞ , qui utilise les concepts de la théorie des jeux, enfin, dans le chapitre 6 nous appliquons les deux techniques de commandes LQG et H_∞ au cas d'un système de suspension d'un véhicule roulant.

Chapitre 2

Problème de la commande

« La raison nous commande bien plus impérieusement qu'un maître; car en obéissant à l'un on est malheureux, et en désobéissant à l'autre on est un sot. »

PASCAL, Pensées.

II.1. Introduction :

La modélisation d'un système physique implique inévitablement l'approximation du système réel par un modèle mathématique plus ou moins fidèle. En général, le système à commander est souvent sujet à des variations paramétriques et à des perturbations extérieures. Dans ce qui suit, nous présentons la structure de la commande pour une certaine classe typique de systèmes ainsi que pour certaines performances souvent exigées d'un système de commande.

II.2. Formulation du problème de commande :

II.2.1. Modèle du système en boucle ouverte :

Considérons le système en boucle ouverte donné par la figure ci-dessous, où $u \in \mathbb{R}^{m_0}$ est le vecteur des signaux de commande et $y_0 \in \mathbb{R}^{p_0}$ est le vecteur des sorties du système.

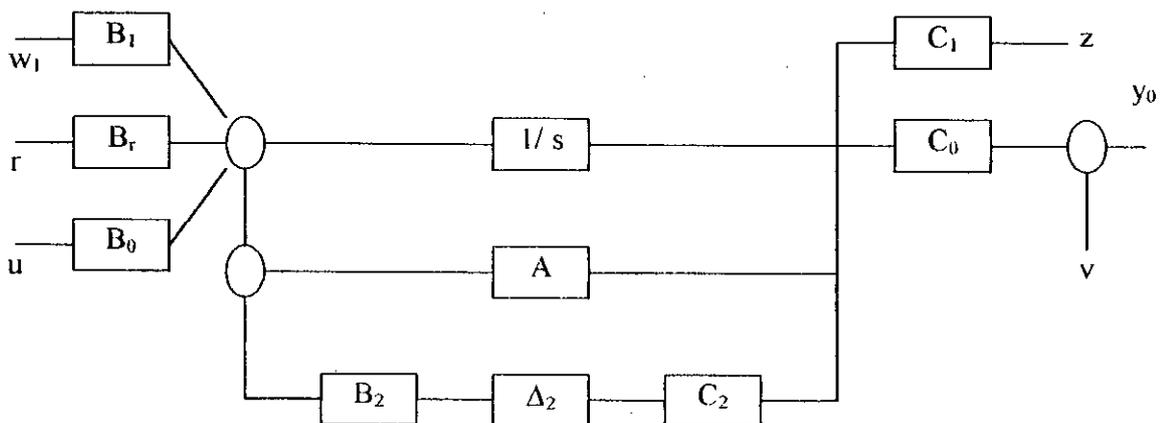


Fig. 2.1 Système en boucle ouverte

Au point nominal, le modèle d'un système décrit par ces matrices d'état (A, B_0, C_0) engendre une réponse telle que :

$$y_0 = C_0 (sI - A)^{-1} B_0 u \quad (2.1)$$

Avec : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m_0}, C_0 \in \mathbb{R}^{p_0 \times n}$

Plus généralement, lorsque le terme de transmission directe n'est pas nul, nous aurons :

$$y_0 = [D + C_0 (sI - A)^{-1} B_0] u \quad (2.2)$$

A noter qu'un système à commander est en général aussi sujet à plusieurs sortes de perturbations externes, de bruits et d'erreur de modélisation (Fig. 2.1) :

- **Erreur de modélisation** : En vue de prendre en considération l'erreur de modélisation d'un système, la matrice nominale A peut être augmentée d'un terme d'incertitude et deviendra $A+B_2\Delta_2C_2$; les matrices B_2 et C_2 servent à déterminer la structure de la perturbation et la matrice Δ_2 sert à fixer l'amplitude de l'incertitude.
- **Bruits et perturbations** : le vecteur $w_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, formé des perturbations et des bruits de mesure, agit sur les entrées du système à travers la matrice $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$.
- **Entrées déterministes** : le vecteur des entrées déterministes $r \in \mathbb{R}^{m_r}$, peut être aussi considéré comme un signal de commande, agissant à travers la matrice $B_r \in \mathbb{R}^{n \times m_r}$.
- **Bruits de mesure** : $v \in \mathbb{R}^{p_0}$ affecte le vecteur des mesures y .

Si x est le vecteur des variables d'état du système, alors ce dernier peut être décrit linéairement par l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A+B_2\Delta_2C_2)x + B_r r + B_1 w_1 + B_0 u \\ y &= C_0 x + v\end{aligned}\tag{2.3}$$

Ainsi, le terme Δ_2 complique quelque peu l'analyse. Une façon de contourner cette difficulté serait de considérer Δ_2 comme une perturbation externe telle que :

$$w_2 = \Delta_2 C_2 x\tag{2.4}$$

le système sera décrit alors par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B_r r + B_1 w_1 + B_0 u + B_2 w_2 \\ y &= C_0 x + v\end{aligned}\tag{2.5}$$

Aussi, en posant $z_1 = C_1 x$, $z_2 = C_2 x$, $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$ et $w = [r^T \ w_1^T \ w_2^T \ v^T]^T$, nous aurons :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + [B_r \ B_1 \ B_2 \ 0] w + B_0 u \\ y &= C_0 x + [0001] w \\ z &= [C_1 \ C_2]^T x\end{aligned}\tag{2.6}$$

- x est le vecteur des variables d'état.
- u est le vecteur de commande.
- w est le vecteur des entrées exogènes comprenant les références externes que le système devra suivre le plus fidèlement possible, les perturbations externes où les incertitudes du modèle, considérés comme des perturbations et enfin les bruits de mesure.

- z est le vecteur des grandeurs à minimiser ou à réguler.
- y est le vecteur des grandeurs mesurables ou disponibles.

II.3. Performances nominales d'un système de commande :

En plus d'être suffisamment stable, un système de commande doit satisfaire à certaines performances, appelées parfois performances nominales et cela en dépit des incertitudes dont peut souffrir le système à commander.

Supposons que le système à commander est décrit par le schéma ci-dessous :

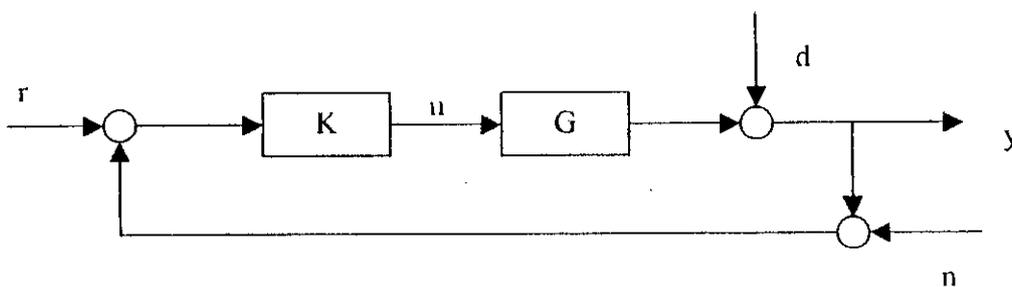


Fig. 2.2 Schéma bloc d'un système de commande avec perturbation et bruit sur la sortie.

- r est le vecteur des références, ou consignes que le système devra suivre.
- d est le vecteur des entrées de perturbation connues, ou entrées que le système de commande devra rejeter.
- n est le vecteur des bruits de mesure introduits par les capteurs du système, ce sont le plus souvent des signaux aléatoires de hautes fréquences.
- u est le vecteur des grandeurs de commande.

En résumé, un système de commande bien conçu doit pouvoir suivre la référence avec un minimum d'erreur et rejeter l'effet des entrées de perturbations et des bruits de mesures.

II.3.1. Cas monovariante :

la sortie totale du système est donnée par :

$$y(s) = \frac{GK}{1+GK} r(s) + \frac{1}{1+GK} d(s) - \frac{GK}{1+GK} n(s) \quad (2.7)$$

- $L = G(s)K(s)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte (encore appelé gain de boucle).
- $J = 1 + G(s)K(s)$ est appelée la fonction différence de retour.

- $S = 1 / J$ est appelée **la fonction de sensibilité** (qui est également la fonction de transfert entre l'entrée de perturbation d et la sortie y du système).
- $T = 1 - S$ est appelée **la fonction de sensibilité complémentaire** (qui est également la fonction de transfert entre la référence r et la sortie y du système).

En règle générale, un système de commande doit satisfaire à ce qui suit:

1. **Poursuite de la référence** : en supposant que $d = n = 0$, alors pour que $y = r$ dans un certain intervalle de fréquence, il faudrait que le module de $S(s)$ soit petit dans ce même intervalle ce qui revient à dire que le module de $[G(s) K(s)]$ doit être grand.

Comme la plupart des signaux de référence sont des signaux de basses fréquences, il s'ensuit que pour un bon suivi de la référence, le module de $S(s)$ doit être petit pour les basses fréquences.

2. **Rejet de la perturbation** : pour minimiser l'effet de la perturbation, le module de $S(s)$ doit être petit. Comme la plupart des signaux de perturbation sont de basses fréquences, il s'ensuit que le suivi de la référence et le rejet de la perturbation sont deux exigences de performances additives.

3. **Suppression de l'effet des bruits de mesures** : le module de $T(s)$ doit être petit pour éliminer l'effet des bruits de mesure. Comme la plupart des bruits de mesure ont leurs énergies concentrées en hautes fréquences, il s'ensuit que pour une suppression convenable des bruits de mesure, le module de $S(s)$ doit être petit en hautes fréquences...

Ce qui revient à dire que le gain en boucle ouverte doit avoir un module grand en basses fréquences et petit en hautes fréquences. Cette exigence est aussi notée à travers la formule :

$$u(s) = \frac{K}{1 + GK} [r(s) - d(s) - n(s)] \quad (2.8)$$

En effet, pour un gain en boucle ouverte $[G(s)K(s)]$ très grand en module, $u(s)$ sera proportionnel à $1/G(s)$. le gain $G(s)$ va diminuer en hautes fréquences ce qui donne un signal de commande $u(s)$ très grand, et explique le fait que le gain en boucle ouverte doit être petit en module en hautes fréquences.

II.3.2. Cas multivariable :

Dans ce qui a précédé, nous avons vu que les performances du système, comme la poursuite de trajectoire, le rejet de perturbation ; et la suppression du bruit, peuvent être exprimées par des conditions sur les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire.

Dans le cas monovariante la grandeur d'une fonction de transfert est donnée par son module. Dans le cas multivariable, où nous avons à manipuler des matrices de fonctions de transfert, une façon de mesurer la grandeur d'une matrice est de calculer sa valeur singulière.

A noter que les valeurs singulières d'une matrice sont définies par :

$$\sigma_i(A) = \left[\lambda_i(A^*A) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

où A^* est la matrice complexe conjuguée de A .

La plus grande et la plus petite des valeurs singulières sont souvent notées $\underline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ respectivement.

Pour le système de commande donné en fig. 2.2, la sortie du système sera donnée par :

$$y = GK(I + GK)^{-1}r + (I + GK)^{-1}(d - n) \quad (2.10)$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire seront alors [Shahian 1993] :

$$S = (I + GK)^{-1} \text{ et } T = GK(I + GK)^{-1} \quad (2.11)$$

Ainsi les performances nominales seront exprimées par :

$\overline{\sigma}(GK) \gg 1$ ou bien : $\overline{\sigma}(S) \ll 1$ en basses fréquences.

$\underline{\sigma}(GK) \ll 1$ ou bien : $\underline{\sigma}(T) \ll 1$ en hautes fréquences.

II.3.3. Problème de sensibilité mixte :

Une autre manière d'assurer les performances citées précédemment est de fixer des bornes appropriées aux fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire et concevoir le système de commande de façon à vérifier les conditions suivantes :

- $|S| \leq W_s^{-1}$ ou bien : $|W_s S| \leq 1$ (problème de sensibilité pondérée).
- $|T| \leq W_T^{-1}$ ou bien : $|W_T T| \leq 1$ (problème de sensibilité complémentaire pondérée).

Ces deux problèmes sont appelés : problème de sensibilité mixte.

II.3.4. Stabilité robuste :

La stabilité d'un système n'est pas souvent une fin en soi. En pratique, on est souvent intéressé par ce que l'on appelle la stabilité robuste, qui implique que le système doit rester stable pour de larges amplitudes sur les incertitudes.

On distingue entre deux catégories d'incertitudes : les incertitudes dites structurées et celles dites non structurées.

Les incertitudes structurées sont celles dues à des variations paramétriques du système, alors que les incertitudes non structurées supposent une insuffisance dans la connaissance du système qui est souvent traduite par le fait que la réponse fréquentielle du système se trouve bornée entre deux limites.

Il existe en général deux manières de modéliser l'incertitude non structurée [Shahian 1993] :

Supposons que le système nominal soit décrit par la fonction de transfert G et le système actuel ou réel par la fonction \tilde{G} .

a) cas de l'incertitude additive :

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s) \quad (2.12)$$

où l'erreur du modèle est donnée par : $\Delta_a(s) = \tilde{G}(s) - G(s)$ (2.13)

b) cas de l'incertitude multiplicative :

$$\tilde{G}(s) = (1 + \Delta_m(s))G(s) \quad (2.14)$$

où l'incertitude multiplicative est alors donnée par :

$$\Delta_m(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)} \quad (2.15)$$

En utilisant le « théorème des petits gains », on montre que la plus petite des incertitudes pouvant déstabiliser un système est donnée par la condition de stabilité robuste suivante :

$$|\Delta_m| < \frac{1}{|T|} \quad (2.16)$$

En effet, la marge de stabilité pour une incertitude multiplicative est donnée par :

$$\text{MSM} = \inf_{\omega} \left| \frac{1}{T} \right| = \frac{1}{\sup_{\omega} |T|} \quad (2.17)$$

Dans le cas multivariables, le module de la plus petite perturbation qui déstabiliserait le système est alors :

$$\bar{\sigma}[\Delta_m(j\omega)] = \frac{1}{\bar{\sigma}[T(j\omega)]} \quad (2.18)$$

II.4. Incertitudes dans l'espace d'état :

Un système linéaire à variations paramétriques peut être décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_0 \\ C_1 & D_{11} & D_{10} \\ \hat{C}_0 & \hat{D}_{01} & \hat{D}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Où les matrices non chapeautées sont celles qui ne souffrent d'aucune incertitude paramétrique.

Il est à noter également que le système perturbé peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B_1 & B_0 \\ C_1 & D_{11} & D_{10} \\ C_0 & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix} + \Delta P \right\} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Où la matrice ΔP est la matrice des perturbations définie par :

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_1 & \Delta B_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta C_0 & \Delta D_{01} & \Delta D_{00} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Supposons qu'il existe m perturbations paramétriques indépendantes Δp_i et que la matrice de perturbation ΔP peut être décomposée comme suit :

$$\Delta P = \begin{bmatrix} M_x \\ 0 \\ M_y \end{bmatrix} \xi \begin{bmatrix} N_x & N_w & N_u \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Avec :

$$\xi = \text{diag}\{\Delta p_1, \dots, \Delta p_m\} \quad (2.23)$$

Il est à noter que cette décomposition n'est pas unique [Ching Fang Lin 1994]

Introduisons les nouvelles variables suivantes :

$$\bar{w} = -\xi z$$

$$\bar{z} \equiv \begin{bmatrix} N_x & 0 & N_w & N_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Avec \bar{w} et \bar{z} deux vecteurs d'entrée fictifs et ξ est la matrice de gain de retour fictif.

Le système sera alors décrit par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \bar{z} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & M_x & B_1 & B_0 \\ N_x & 0 & N_w & N_u \\ C_1 & 0 & D_{11} & D_{10} \\ C_0 & M_y & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

On peut faire les changements de variables suivants:

$$z_1 \leftarrow \begin{bmatrix} \bar{z} \\ z \end{bmatrix}$$

$$w_1 \leftarrow \begin{bmatrix} \bar{w} \\ w \end{bmatrix}$$

$$B_1 \leftarrow \begin{bmatrix} M_x & B_1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow \begin{bmatrix} N_x \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & N_w \\ 0 & D_{11} \end{bmatrix}$$

$$D_{10} \leftarrow \begin{bmatrix} N_u \\ D_{10} \end{bmatrix}$$

$$D_{01} \leftarrow \begin{bmatrix} M_y & D_{01} \end{bmatrix}$$

Le système peut être décrit alors par le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_0 \\ C_1 & D_{11} & D_{10} \\ C_0 & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

II.5. Conclusion :

Il découle de ce qui précède que les variations paramétriques induisent des entrées de perturbation (entrées exogènes) fictives et donc peuvent être considérées en tant que telles, il s'ensuit que le problème de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques peut être ramené à un problème de rejet de la perturbation.

Chapitre 3

La commande LQG

« Avec des erreurs de chemins trouve ceux pour t'en sortir ».
William Shakespeare, Hamlet.

III.1. Introduction :

La commande LQG est une partie fondamentale de la commande optimale, elle associe une approche mathématique élégante à un aspect pratique très prononcé et offre ainsi une solution relativement simple et efficace au problème de la commande des systèmes à multi-entrées et multi-sorties ou ce qu'on appelle communément les systèmes MIMO.

III.2. La commande optimale linéaire quadratique :

Le problème de la commande optimale linéaire quadratique consiste à déterminer l'entrée u qui minimise l'index de performance le plus souvent donné par :

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) S_f e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (3.1)$$

Où : $e(t) = z(t) - r(t)$, c'est à dire l'erreur entre le vecteur des sorties z et celui des consignes à suivre $r \in \mathbb{R}^p$ avec :

$$\dot{x} = A x + B u, \quad z = C_1 x \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

Où :

- S_f , Q et R sont des matrices souvent choisies symétriques et S_f , Q sont semi-définies positives et R définie positive.
- Nous supposons que la paire (A, B_0) est contrôlable.

La solution optimale u à un tel problème est donnée par [Louam 1995] :

$$u^*(t) = -R^{-1} B_0^T [S(t) x(t) - g(t)] \quad (3.2)$$

où $S(t)$ est la solution de l'équation de Riccati :

$$-\dot{S}(t) = S A + A^T S - S B_0 R^{-1} B_0^T S + Q \quad \text{pour} \quad S(t_f) = S_f \quad (3.3)$$

Et g le vecteur d'anticipation satisfaisant à :

$$\dot{g}(t) = -(A - B_0 R^{-1} B_0^T S)^T g(t) - Q r(t) \quad \text{avec} \quad g(t_f) = \frac{1}{2} C_1^T S_f C_1 \quad (3.4)$$

Remarque :

Le problème ainsi formulé se réduit à celui d'une régulation de sortie si $r = 0$, c'est à dire que l'objectif recherché est l'état d'équilibre du système.

III.2.1. Cas de la régulation optimale en régime établi :

Ce cas est celui qui correspond à $t_f \rightarrow \infty$ et qui ne peut avoir de solution que si le système du problème considéré est à la fois commandable et observable.

La solution optimale dans ces conditions est donnée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}B_0^T \bar{S}x(t) \quad (3.5)$$

où \bar{S} est la solution de l'équation algébrique de Riccati pour $\dot{S}(\infty) = 0$.

On démontre que le système en boucle fermée donné par :

$$\dot{x} = (A - B_0R^{-1}B_0^T\bar{S})x \text{ avec } x(t_0) = x_0 \quad (3.6)$$

est en général asymptotiquement stable.

Notons que cette commande optimale exige la disponibilité de tout le vecteur d'état.

III.2.3. Propriétés de la commande LQR :

La commande LQR a plusieurs propriétés appréciables, telle que la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, mais également, particulièrement pour un système SISO, une marge de gain infinie et une marge de phase d'au moins 60° . La plupart de ces propriétés peuvent être déduites à partir de ce qu'on appelle l'identité de Kalman.

III.2.4. Identité de Kalman :

La loi de commande donnée ci-dessus peut être exprimée par:

$$u = Fx(t) \quad (3.7)$$

$$\text{Avec: } F = -R^{-1}B_0^T\bar{S} \quad (3.8)$$

\bar{S} étant la solution de l'équation algébrique de Riccati donnée ci-dessus.

Soit le transfert en boucle ouverte : $L(s) = F(sI - A)^{-1}B_0$.

Et la différence de retour: $I - L(s)$.

D'autre part, l'équation de Riccati peut être réécrite sous la forme:

$$(sI + A)^T S + S(-sI + A) - SB_0 R^{-1} B_0^T S + Q = 0 \quad (3.8)$$

En multipliant l'équation précédente à gauche par $B_0(sI - A)^{-1}$ et à droite par $(sI - A)^{-1} B_0$ et en remplaçant F par son expression, on trouve enfin que:

$$\left[I - B_0^T (-sI - A^T) F^T \right] R \left[I - F(sI - A)^{-1} B_0 \right] = R + B_0^T (-sI - A^T) Q (sI - A)^{-1} B_0 \quad (3.9)$$

Cette dernière égalité s'appelle l'identité de Kalman, une propriété importante de LQR peut en être déduite, en effet, considérons le cas où R est une matrice identité et Q est semi-définie positive, on aura alors:

$$\left[I - B_0^T (-sI - A^T) F^T \right] \left[I - F(sI - A)^{-1} B_0 \right] \geq I \quad (3.10)$$

De l'inégalité précédente, découle ce qui suit:

La valeur minimale des valeurs singulières est supérieure à 1, ce qui revient à dire dans le cas de système SISO que le lieu de Niquist n'entre pas dans le cercle unité, ce qui implique que la marge de phase est au moins égale à 60° et que borne supérieure de la marge de gain est infinie, ceci a pour conséquence un très bon rejet de la perturbation et donc une bonne robustesse du système.

III.2.5. Sélection de l'index de performance :

Un compromis doit être trouvé entre l'énergie de commande et les performances exigées du système, ceci peut se faire en faisant varier les paramètres de la fonction coût.

Bryson [Bryson 1975] proposa une méthode dite des inverses carrés et qui est largement utilisée, elle est donnée par [Johnson 1987]:

$$Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

$$R = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0 \quad (3.11)$$

$$\text{tel que: } q_i = (z_i)_{\max}^{-2} \quad r_i = (u_i)_{\max}^{-2}$$

Où: z_i et r_i sont les valeurs des $i^{\text{ème}}$ éléments des vecteurs correspondants et $(z_i)_{\max}$ et $(u_i)_{\max}$ sont les valeurs maximales de celles-ci.

Lorsque le système ne possède pas de zéros de transmission, en augmentant $\| Q \|$ ou en diminuant $\| R \|$, ceci a pour effet une réponse plus rapide. Cependant, lorsque le système possède des zéros de transmission, ceci pourrait avoir comme résultat, une réponse plus lente, enfin, Thompson a proposé une modification dans le calcul des poids pour pallier à ce problème [Johnson 1987].

Rynaski et Whitbeck ont proposé une méthode qui lie les facteurs de pondération à des figures de mérite traditionnelles tel que le coefficient d'amortissement ξ et la fréquence naturelle ω_N dans le cas d'un système du second ordre [Johnson 1987]. Houpis et Constantinides ont étendu cela à des systèmes du troisième et quatrième ordre [Johnson 1987].

Enfin, Shih et Chen se sont intéressés à la relation entre le problème d'optimisation linéaire quadratique et le contrôleur PID [Johnson 1987].

III.3. Problème de la commande Quadratique Linéaire Gaussienne:

La commande Linéaire Quadratique suppose que tous les états du système sont accessibles à la mesure. Evidemment, ceci n'est pas vérifié dans la plupart des cas pratiques. Un modèle plus réaliste du système serait décrit donc par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x + B_0 u + B_1 w_1 \\ z(t) &= C_0 x + v(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ce qui correspond au modèle du système donné dans le chapitre précédent avec $B_1=B_2=0$.

Dans l'équation ci-dessus, w_1 et v sont des bruits blancs à moyenne nulle et dont les matrices de covariance sont respectivement $W \geq 0$ et $V > 0$.

Le problème de la régulation Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) peut être formulé comme suit:

Soit l'ensemble des mesures $\{z(\sigma), t_0 \leq \sigma \leq t\}$ donné, trouver l'ensemble des grandeurs de commandes $\{u(\sigma), t_0 \leq \sigma \leq t\}$, tel que le critère:

$$J = E \left\{ x^T S_1 x + \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) d\tau / z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \right\} \quad (3.13)$$

soit minimal, où $E\{\cdot\}$ désigne l'espérance mathématique. Le problème précédent peut être résolu à l'aide du principe de séparation, qui consiste à résoudre d'une manière indépendante le problème de la commande et de celui de l'estimation.

III.3.1. Le filtre de Kalman :

Le filtre de Kalman est un estimateur qui tend à minimiser l'index de performance suivant :

$$J = E\{[\hat{x} - x]^T [\hat{x} - x]\}$$

où $\hat{x}(t)$ correspond à l'estimation du vecteur d'état x à l'instant t , le système étant décrit par le système d'équations (3.12).

On définit le vecteur $\theta = [w_1^T \ v^T]^T$, où θ est un bruit blanc gaussien de covariance :

$$\text{cov}[\theta(t), \theta(\tau)] = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad (3.14)$$

- Les matrices W et V vérifient les inégalités suivantes : $W = \tilde{W}^T \tilde{W} \geq 0$, $V = \tilde{V}^T \tilde{V} > 0$.
- La paire $(A, \tilde{W}B_1)$ est complètement contrôlable et la paire (A, C_0) est complètement observable.

L'estimation optimale du vecteur d'état $\hat{x}(t)$ est donnée par le filtre de Kalman :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B_0 u + K_f (z - C_0 \hat{x}) \quad (3.15)$$

où la matrice gain du filtre de Kalman est donnée par : $K_f = S_\infty C_0^T V^{-1}$.

La matrice symétrique S_∞ est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$AS_\infty + S_\infty A - S_\infty C_0^T V^{-1} C_0 S_\infty + B_1 W B_1^T = 0 \quad (3.16)$$

- le filtre de Kalman est asymptotiquement stable.
- par principe de dualité, le filtre de Kalman possède les mêmes propriétés de robustesse que le contrôleur LQR, en l'occurrence une marge de phase d'au moins 60° et une marge de gain infinie.

III.3.2. Schéma de la commande optimale LQG :

La solution du problème LQG repose sur le principe de séparation, qui permet de séparer la conception de la commande et l'estimation du vecteur d'état, la commande optimale sera alors donnée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}B_0^T \bar{S} \hat{x}(t) \quad (3.17)$$

où \bar{S} est solution de l'équation (3.3) avec $\dot{S}(\infty) = 0$.

Et \hat{x} est l'estimation du vecteur d'état donnée par l'équation (3.15).

Remarque :

Il a été observé dans [Doyle 1981] que l'insertion du filtre de Kalman dans la boucle de commande peut diminuer dans une certaine mesure la marge de stabilité.

III.4. Conclusion :

Malgré les propriétés de robustesse que présente la commande LQR et le filtre de Kalman, nous devons faire remarquer que l'association de ces deux blocs, en l'occurrence le schéma de commande LQG, ne garde pas les mêmes propriétés de robustesse.

Chapitre 4

Commande robuste

« Tout alla mal pendant les six premiers mois...
Tout alla bien pendant les six derniers... »

Winston Churchill.

IV.1. Introduction :

Un système physique est souvent sujet à des entrées de perturbations et/ou à des incertitudes. La commande robuste a pour principe de concevoir une loi de commande qui assure certaines performances au système en boucle fermée, et surtout une appréciable marge de stabilité pour chaque entrée de perturbation appartenant à un ensemble préalablement défini et pour toutes ou certaines classes d'incertitudes du système. L'ensemble des perturbations auquel la loi de commande devra faire face sera défini au moment de la conception, en relation avec l'environnement du système. Cet ensemble des entrées de perturbations est parfois défini comme l'ensemble des signaux dont la norme (représentant le plus souvent l'énergie du signal) est bornée supérieurement. Dans ce cas, il serait judicieux pour le concepteur de minimiser l'erreur maximale ("Worst Case") pouvant être engendrée par une entrée de perturbation appartenant à l'ensemble défini ci-dessus; cette approche est celle introduite pour la première fois par G.Zames [Zames 1981], d'un point de vue fréquentiel. D'autres approches l'ont suivies, notamment dans le domaine temporel, toujours dans le but de résoudre le problème initialement introduit par Zames.

IV.2. Forme canonique d'une commande robuste :

La tâche confiée à la commande sera de répondre aux exigences demandées, qui se résument le plus souvent à la stabilité interne, à la robustesse et aussi à d'autres performances. La forme canonique d'un schéma de commande robuste est donnée par la figure ci-dessous :

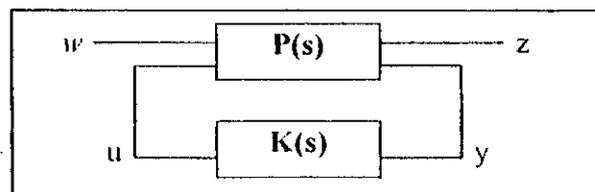


Fig. 4.1 Forme canonique d'un schéma de commande robuste

Cette représentation est dite représentation des "deux blocs", où le système considéré peut être décrit par l'ensemble d'équations suivantes [Francis 1986]:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

w , z , u et y sont définies dans le chapitre 2.

La fonction de transfert en boucle fermée, de w à z , est donnée par :

$$T_{zw} = P_{zw} + P_{zu}K(1 - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \quad (4.2)$$

En supposant l'existence de la matrice $(1 - P_{yu}K)^{-1}$.

L'expression de cette fonction de transfert en boucle fermée, est appelée "Transformation fractionnaire linéaire" ou plus couramment LFT, en utilisant la représentation d'état introduite dans le chapitre 2, et en employant la notation "empaquetée" [Shahian 1993] d'une fonction de transfert nous avons :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

IV.3. Formulation du problème H_∞ :

Le problème H_∞ peut être formulé comme étant celui qui consiste à trouver un contrôleur $K(s)$, pour le système décrit par $P(s)$ de la figure 4.1, tel que la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée, T_{zw} , soit en dessous d'une certaine valeur positive γ , c'est à dire $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$.

Ce problème est appelé "problème de la commande H_∞ standard".

Le "problème de la commande H_∞ optimal" est défini comme étant celui qui consiste à trouver un contrôleur $K(s)$ qui à la fois, stabilise le système $P(s)$ et minimise $\|T_{zw}\|_\infty$.

Le régulateur conçu à l'aide de la méthode H_∞ optimal est dit régulateur optimal, et celui conçu à l'aide de H_∞ standard est souvent qualifiée de cas sous-optimal.

La solution au problème H_∞ standard est donnée, pour un système LTI, par l'algorithme de Doyle et Glover [Doyle 1989] qui suppose la représentation d'état du système augmenté G suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (3.4)$$

Avec :

$$\text{rang}(A) = n, \dim(w) = m_1, \dim(u) = m_2, \dim(z) = p_1, \dim(y) = p_2.$$

La solution de Doyle et Glover suppose en outre la vérification des hypothèses suivantes :

i)- (A, B_1) est stabilisable et (C_1, A) est détectable.

ii)- (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable.

iii)- $\text{Rang } D_{12} = m_2$, $\text{Rang } (D_{21}) = p_2$.

$$\text{iv)- } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{v)- } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{vi)- } D_{12}' [C_1 \quad D_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\text{vii)- } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}' = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

viii) $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$.

A propos des hypothèses : [Ching fang Lin 1994]

1. Les hypothèses (i) et (ii) sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un régulateur K stabilisant.
2. L'hypothèse (iii) est suffisante pour assurer que le régulateur soit propre.
3. L'hypothèse (iv) signifie que le sous-système G_{12} ne doit pas avoir des zéros de transmissions sur l'axe imaginaire si (C_1, A, B_2) est une réalisation minimale.
4. L'hypothèse (v) impose à ce que le système proprement dit n'ait pas de pôles sur l'axe imaginaire. Si c'est le cas, il conviendra d'abord de les stabiliser d'une manière artificielle.
5. L'hypothèse (vi) signifie que $C_1 x$ et $D_{12} w$ sont orthogonaux de sorte qu'il n'y ait pas de pondérations sur les termes croisés en x et w dans z et que la pondération sur u est normalisée.
6. L'hypothèse (vii) est duale de l'hypothèse (vi).
7. L'hypothèse (viii) signifie qu'il n'y a pas de terme direct entre le signal perturbateur w et la

sortie z . Cette hypothèse vise la simplification du problème. Si cette condition n'est pas vérifiée, il est possible de reformuler le problème pour qu'elle le soit, comme il a été montré dans [Ching fang Lin 1994].

La solution au problème H_∞ standard sollicite deux matrices Hamiltoniennes X_∞ , Y_∞ définies comme suit [Ching fang Lin 1994]:

Soient les matrices suivantes :

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^2 B_1 B_1' - B_2 B_2' \\ C_1' C_1 & -A' \end{bmatrix}$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A' & \gamma^2 C_1' C_1 - C_2' C_2 \\ B_1 B_1' & -A \end{bmatrix}$$

Théorème 4.1: [Doyle and al 1989]

Il existe un régulateur admissible K_{SOP} tel que $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- a) $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$
- b) $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$
- c) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

$H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ signifie que X_∞ est solution de l'équation de algébrique de Riccati suivante :

$$A' X_\infty + X_\infty A + X_\infty (\gamma^2 B_1 B_1' - B_2 B_2') X_\infty + C_1' C_1 = 0 \quad (4.5)$$

De même que pour la condition (b), Y_∞ est solution de l'équation de algébrique de Riccati suivante :

$$A Y_\infty + Y_\infty A' + Y_\infty (\gamma^2 C_1' C_1 - C_2' C_2) Y_\infty + B_1 B_1' = 0 \quad (4.6)$$

Le symbole ρ de la condition (c) désigne le rayon spectral.

Si les conditions citées précédemment sont vérifiées, le contrôleur admissible K_{SOP} est donné par la représentation d'état suivante :

$$K_{SOP} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Où :

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$L_\infty = -Y_\infty C^T, \quad F_\infty = B_2^T X_\infty$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

Ce qui peut être reformulé par:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_1 \hat{w} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y) \quad (4.7)$$

où :

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (4.8)$$

et :

$$\hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \quad (4.9)$$

Il apparaît alors, à partir des équations (4.7) à (4.9), que la structure du régulateur K_{SOP} est celle d'un retour d'état observateur où \hat{x} s'interprète comme une estimation du vecteur d'état x , F_∞ le gain du retour d'état et $[Z_\infty L_\infty]$ le gain de l'observateur. La structure du régulateur K_{SOP} vérifie de façon évidente le principe de séparation. La différence majeure entre l'observateur donné par l'équation (4.7) et le filtre de Kalman réside dans la présence du terme \hat{w} qui s'interprète comme une estimée de la pire perturbation possible.

Si γ tend vers l'infini, les équation (4.5) et (4.6) tendent vers les équations de Riccati associée au filtre de Kalman, Z_∞ tend vers une identité et \hat{w} vers 0. Dans ce cas, le régulateur K_{SOP} convergerait vers le régulateur LQG minimisant le critère $J = E \left\{ \int_t^\infty z^T(t) z(t) dt \right\}$ [D'Azzo 1984].

K_{SOP} est appelé le régulateur central, son ordre est égal à celui du système augmenté.

A partir de ce régulateur, il est possible de trouver tout les régulateurs K'_{SOP} pour lesquels on

$$a \quad \|T_{wz}\| < \gamma$$

Le théorème suivant donne une paramétrisation de ces régulateurs.

Théorème 4.2 : [Doyle and al 1989]

Si les conditions (a), (b), (c) du théorème (4.1) sont vérifiées, alors l'ensemble des régulateurs admissibles, c' à d pour lesquels on a $\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma$, est égale à l'ensemble de toutes les matrices de transfert, de y à u , du schéma ci-dessous :

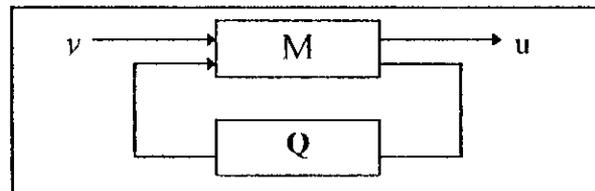


Fig. 4.2

Avec :

$$M_{\infty}(S) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{\infty} & -Z_{\infty}L_{\infty} & Z_{\infty}B_2 \\ F_{\infty} & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Où :

$$Q \in RH_{\infty} \quad , \quad \|Q\|_{\infty} < \gamma$$

Ces régulateurs sont paramétrisés, à travers une transformation linéaire fractionnelle fixe, par un paramètre Q libre. Le régulateur central est obtenu par $Q = 0$.

En résumé, les étapes à suivre pour la résolution du problème H_{∞} standard sont les suivantes :

1. Former la représentation d'état donnée par les équations (4.4).
2. S'assurer que les hypothèses i à viii sont vérifiées. Si elles ne le sont pas, reformuler le problème en rajoutant des pondérations.
3. Sélectionner un γ positif.
4. Résoudre les équations de Riccati (4.5) et (4.6), vérifier que les solutions sont semi-définies positives, ainsi que la condition [c] sur le rayon spectral du théorème 4.1.

5. Si les conditions citées ci-dessus sont vérifiées, diminuer γ et répéter les opérations 4 et 5 jusqu'à ce qu'on atteigne la solution optimale.

IV.4. Conclusion :

La solution au problème de la commande H_∞ introduite par Doyle et Glover présente des similitudes avec le schéma de commande LQG, d'ailleurs pour un certain choix du paramètre Υ , nous retrouvons la même configuration que la commande LQG. Nous retrouverons cette similitude également pour l'approche introduite dans le chapitre suivant, qui utilise les concepts de la théorie des jeux pour la résolution du problème H_∞ standard.

Chapitre 5

Résolution du problème H_{∞} par la théorie des jeux

« Donnez-nous des outils et nous acheverons le travail. »

Winston Churchill.

V.1 Introduction :

Dans ce qui suit, nous introduisons le problème du jeu différentiel, en particulier le jeu quadratique linéaire à sommation zéro, puis nous appliquons celui-ci à la résolution du problème du jeu à information partielle. Enfin nous verrons que le correcteur obtenu à partir de la théorie des jeux est équivalent, sous certaines conditions, à un régulateur H_∞ explicité dans le chapitre précédent.

Le jeu différentiel est un problème d'optimisation dynamique multiple, dans lequel les joueurs ont des intérêts en conflit. Chaque joueur essaye de minimiser (optimiser) son propre index de performances. Si les intérêts des joueurs sont directement opposés, cela revient à ce que l'on appelle un jeu de sommation zéro. La stratégie optimale adoptée généralement pour le jeu différentiel reste celle de la théorie des jeux à point chargé du problème minimax.

V.2 Problème du jeu différentiel :

V.2.1 Formulation du problème : [Ching Fang Lin 1994]

Le jeu différentiel consiste à trouver les stratégies $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, \dots, u_N^*)$ tel que :

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad i=1, N. \quad (5.1)$$

Où u_i est un vecteur de dimension p_i et J_i est l'index de performances que le joueur u_i essaye de minimiser (maximiser). Les index de performances J_i sont de la forme :

$$J_i = \phi_i(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) dt, \quad i = 1, N \quad (5.2)$$

Où $(x(t_f), t_f)$ est soumise à la contrainte finale $\psi(x(t_f), t_f) = 0$ et $x(t)$ est assujéti à la contrainte dynamique :

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_N, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.3)$$

Avec $u_i(t) \in U_i$ est l'ensemble des stratégies admissibles, dépendantes des informations disponibles pour le joueur u_i à l'instant t . Lorsque $u_i(t)$ est fonction de $x(t)$ à l'instant t , on dit que l'information est complète, par contre, si $u_i(t)$ est une fonction des mesures historiques, on dit que l'information est partielle i.e. que $u_i(t)$ est une fonction de y_{ii} et t , avec:

$y_{ii} = \{ y_i(\tau), 0 \leq \tau \leq t \}$ / où y_i est contaminé par un bruit de mesure.

soit :

$$y_i(t) = h_i(x(t), t) + v_i(t). \quad (5.4)$$

Si pour tout t_0 , x_0 et u_i : $\sum_{i=1}^N J_i = 0$, on dit que le jeu est à sommation zéro [Ching Fang Lin 1994].

Pour deux joueurs, la condition du jeu à sommation zéro, devient celle du point chargé :

$$J(u^*, w) \leq J(u^*, w^*) \leq J(u, w^*) \quad (5.5)$$

Où : $u = u_1$, $w = u_2$ et $J = J_1 = -J_2$.

La stratégie du point chargé peut être obtenue, en résolvant les deux problèmes d'optimisation suivants :

$$\min_u \max_w J(u, w) \quad (5.6)$$

Et :

$$\max_w \min_u J(u, w) \quad (5.7)$$

La solution aux problèmes (5.6) et (5.7) produit une stratégie du point chargé si :

$$\min_u \max_w J(u, w) = \max_w \min_u J(u, w) \quad (5.8)$$

En théorie des jeux, la solution de l'équation (5.8) est appelée le point chargé. [Ching Fang Lin 1994]

On considère l'Hamiltonien H donné par : [Ching Fang Lin 1994]

$$H = L + \lambda^T f \text{ et } \Phi(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) + v^T \psi(x(t_f), t_f) \quad (5.9)$$

En utilisant le calcul variationnel, les conditions nécessaires au problème minimax sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f, \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} &= -H_x^T, \quad \lambda(t_f) = \Phi(x(t_f), t_f) \\ H_u &= 0 \\ H_w &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Où :

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$H_u = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$H_w = \frac{\partial H}{\partial w}$$

Si : $f = f_1(x, u, t) + f_2(x, w, t)$, $L = L_1(x, u, t) + L_2(x, w, t)$, alors l'Hamiltonien est dit séparable, ce qui entraîne :

$$\min_u \max_w H(u, w) = \max_w \min_u H(u, w) \quad (5.11)$$

L'ordre du minimax n'est pas important pour l'Hamiltonien, mais la séparabilité de H , n'implique pas celle de J . La solution de (5.10) obtenue, peut ne pas satisfaire la condition du point chargé (5.8).

Dans beaucoup d'applications, on admet que l'un des joueurs annonce au départ sa stratégie, dans ce cas l'approche variationnelle reste toujours utile.

Par exemple, si w est un bruit, le jeu différentiel peut être défini comme un jeu de commande contre le pire des cas de perturbation [Ching Fang Lin 1994].

V.2.2 Problème du jeu quadratique linéaire :

Dans ce qui suit, nous définissons le jeu quadratique linéaire à information complète et à sommation zéro à deux joueurs comme suit : [Ching Fang Lin 1994]

Pour le système dynamique linéaire suivant :

$$\dot{x} = A x + B_1 w + B_2 u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.12)$$

Et l'index de performance :

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u + \frac{1}{\theta} w^T E w \right) dt \quad (5.13)$$

Où S_f , Q , R et E sont des matrices symétriques, S_f et Q sont semi-définies positives, R et E sont définies positives, θ est un nombre réel négatif.

Le problème du jeu quadratique linéaire consiste alors à trouver u^* et w^* tel que la condition (5.5) soit satisfaite.

Si nous considérons le vecteur de commande augmenté $[u^T w^T]^T$, le problème défini par (5.12) et (5.13) est équivalent au problème de commande optimale quadratique, la seule différence réside dans le fait que les matrices de pondération du jeu quadratique linéaire sont indéfinies.

Le problème défini par (5.12) et (5.13), avec la condition (5.10) est équivalente à l'existence d'une solution d'une équation différentielle de Riccati, ceci est établi dans le théorème suivant :

Théorème V.1: [Ching Fang Lin 1994]

S'il existe S , une matrice de fonction symétrique sur $[t_0, t_f]$, satisfaisant l'équation différentielle de Riccati suivante:

$$\dot{S} = -SA - A^T S + S^T (B_2 R^{-1} B_2^T - B_1 E^{-1} B_1^T) S - Q, \quad S(t_f) = S_f \quad (5.14)$$

Alors le jeu défini par les équations (5.12) et (5.13) a pour valeur $J = \frac{1}{2} x_0^T S(t_0) x_0$ et une stratégie du point chargé est donnée par le retour d'état optimal suivant :

$$\begin{aligned} u(t) &= R^{-1}(t) B_2^T(t) S(t) x(t) \\ w(t) &= E^{-1}(t) B_1^T(t) S(t) x(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

En plus si A, B_0, B, Q, R et E sont des matrices constantes et que $t_f \rightarrow \infty$ alors $s(t)$ est remplacée par la matrice constante S , solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$-SA - A^T S + S^T (B_2 R^{-1} B_2^T - B_1 E^{-1} B_1^T) S - Q = 0 \quad (5.16)$$

V.3 Application de la théorie des jeux au problème à information partielle:

Dans ce qui va suivre, une approche de résolution du problème différentiel à information partielle basée sur la théorie des jeux est introduite. Le contrôleur qui en résulte, développé par Rhee et Speyer, 1991, à travers l'utilisation du calcul variationnel, a une structure très proche de celle du problème H_∞ .

V.3.1 Formulation du problème de l'atténuation de la perturbation :

Considérons le système linéaire variant dans le temps décrit par :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) \quad (5.17)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ R_1(t) \end{bmatrix} u(t) \quad (5.18)$$

$$y(t) = C_2(t)x(t) + v(t) \quad (5.19)$$

Où x est un vecteur d'état ($n \times 1$), u est un vecteur d'entrée ($m \times 1$), y est le vecteur de mesures ($p \times 1$), w et v sont les vecteurs de perturbation ($q \times 1$) et ($p \times 1$) respectivement, z est le vecteur des sorties contrôlées ; on suppose que $R = R_1^T R_1$ est non singulière et que la condition initiale $x(0)$ est inconnue. Toutes les matrices sont de dimensions appropriées et sont variables dans le temps.

Les mesures historiques sont données par :

$$y_t = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$$

Les commandes admissibles sont restreintes seulement à l'ensemble des fonctions de y_t .

Soit U cet ensemble et U_t le sous-ensemble de U qui concerne uniquement les fonctions linéaires de y_t .

Le problème d'atténuation de la perturbation est celui qui consiste à trouver les commandes $u \in U_t$ tel que :

$$x^T(t_f) \pi_f x(t_f) + \int_0^{t_f} z^T z dt \leq \gamma^2 \left[x^T(0) P_0^{-1} x(0) + \int_0^{t_f} (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) dt \right] \quad (5.20)$$

Pour tout $w, v \in L_2(0, t_f)$, $x(0) \in \mathcal{R}^n$ tel que $(w(t), v(t), x(0) \neq 0)$, définis pour $t \in [0, t_f]$ où γ est une constante positive, P_0, W, V sont des matrices définies positives, W et V peuvent être variables dans le temps, π_f est définie non négative.

En notant $Q = Q_1^T Q_1$, on a :

$$\int_0^{t_f} z^T z dt = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5.21)$$

On peut considérer alors le problème du jeu quadratique linéaire relatif au système décrit par (5.17), (5.18), (5.19) ainsi que (5.20) qui consiste à trouver $u^* \in U$, v^* , $w^* \in L_2(0, t_f)$ et $x^*(0) \in \mathcal{R}^n$ satisfaisant la condition du point chargé :

$$J(u^*, v, w, x(0)) \leq J(u^*, v^*, w^*, x^*(0)) \leq J(u, v^*, w^*, x^*(0)) \quad (5.22)$$

Où :

$$J(u, v, w, x(0)) = \frac{1}{2} \left[-\gamma^2 (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) + x^T(t_f) \pi_f x(t_f) \right] + \int_0^{t_f} \left\{ (x^T Q x + u^T R u) - \gamma^2 (w^T W^{-1} w + V^T v^{-1} v) \right\} dt \quad (5.23)$$

Où \hat{x}_0 est un vecteur donné, pour tout $u, v, w \in L_2(0, t_f)$ et $x(0) \in \mathcal{R}^n$. L'équation (5.23) est la formulation par le jeu quadratique linéaire du problème de l'atténuation de la perturbation.

Puisque $v = y - C_2 x$ l'équation (5.23) est équivalente à :

$$J = \frac{1}{2} \left[-\gamma^2 (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) + x^T(t_f) \pi_f x(t_f) \right] + \int_0^{t_f} \left\{ x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 \left(w^T W^{-1} w + (y - C_2 x)^T V^{-1} (y - C_2 x) \right) \right\} dt \quad (5.24)$$

V.3.2. Approche de solution [Rhee and Speyer 1991] :

La stratégie du point chargé peut être obtenue en résolvant les deux problèmes d'optimisations suivants :

$$\min_u \max_v \max_w \max_{x(0)} J(u, v, w, x(0)) = J^* \quad (5.25)$$

$$\max_v \max_w \max_{x(0)} \min_u J(u, v, w, x(0)) = J_* \quad (5.26)$$

Les solutions des problèmes (5.25) et (5.26) produisent une stratégie du point chargé si : $J^* = J_*$.

L'ordre correspondant au premier problème minimax défini par (5.25) joue un rôle important dans la résolution du problème à information partielle. De ce fait, la procédure de résolution du problème minimax sera comme suit :

Au début, maximisation par rapport à la perturbation w et la condition initiale $x(0)$ en gardant u et v fixes, puis la fonction objective résultante est maximisée et minimisée par rapport à v et u respectivement, pour déterminer par la suite la stratégie du point chargé du correcteur correspondant.

V.3.3. Maximisation par rapport à w et $x(0)$:

Considérons la fonction coût donnée par l'équation (5.24). On commence par maximiser J par rapport à w et $x(0)$ pour un y donné et une stratégie $u \in U$, pour lesquelles les variations de u et y sont nulles.

Soit $J_1 = \max_w \max_{x(0)} J$, la fonction coût résultante, J_1 sera ensuite minimisée et maximisée par rapport à u et y respectivement.

Considérons l'Hamiltonien H donné par :

$$H = \frac{1}{2} \left[x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 \left(w^T W^{-1} w + (y - C_2 x)^T V^{-1} (y - C_2 x) \right) \right] + \gamma^2 \lambda^T (A x + B_2 u + B_1 w) \tag{5.27}$$

En appliquant la procédure du calcul variationnel standard, on aboutit aux conditions nécessaires pour l'existence d'un maximum qui sont les suivantes :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\gamma^2} H_x^T, \quad \lambda(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} \pi_f x(t_f) \tag{5.28}$$

$$\lambda(0) = -P_0^{-1} [x(0) - \hat{x}_0]$$

$$w = -W B_1^T \lambda \tag{5.29}$$

En substituant l'équation (5.29) dans (5.17), on aboutit au problème suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_1 W B_1^T \\ -\left(-\frac{1}{\gamma^2} Q + C_2^T V^{-1} C_2 \right) & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 u \\ C_2^T V^{-1} y \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Avec :

$$x(0) = \hat{x}_0 - P_0 \lambda(0), \quad \lambda(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} \pi_f x(t_f) \quad (5.31)$$

L'équation (5.30) peut être résolue par la méthode de balayage en posant :

$$x = \hat{x} - P \lambda \quad (5.32)$$

En substituant (5.32) dans (5.30) nous obtenons :

$$\left[\dot{P} - P A^T - A P + P \left(C_2^T V^{-1} C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q \right) P - B_1 W B_1^T \right] \lambda = \dot{\hat{x}} - A \hat{x} - B_2 u - P C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) - \frac{1}{\gamma^2} P Q \hat{x} \quad (5.33)$$

Pour avoir l'égalité des deux membres de l'équation (5.33) on pose :

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_2 u + P C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) + \frac{1}{\gamma^2} P Q \hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.34)$$

$$\dot{P} = P A^T + A P - P \left(C_2^T V^{-1} C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q \right) P + B_1 W B_1^T, \quad P(0) = P_0 \quad (5.35)$$

Donc P est la solution de l'équation différentielle de RICCATI (5.35) :

A partir de (5.31) et (5.32), nous avons :

$$\lambda(t_f) = \left(-\frac{1}{\gamma^2} \right) \pi_f \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^{-1} \hat{x}(t_f) \quad (5.36)$$

$$x(t_f) = \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^{-1} \hat{x}(t_f)$$

Où nous supposons que $\left[I - \frac{1}{\gamma^2} P(t_f) \pi_f \right]^{-1}$ est non singulière. On peut alors calculer $\lambda(t)$ à

partir de :

$$\dot{\lambda} = - \left[-A - P \left(-\frac{1}{\gamma^2} Q + C_2^T V^{-1} C_2 \right) \right]^T \lambda + C_2^T V^{-1} (y - C_2 \hat{x}) + \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x} \quad (5.37)$$

En substituant $x(0) = \hat{x}_0 - P_0 \lambda(0)$ et $w = -WB_1^T \lambda$ dans la fonction coût, J_1 peut être réécrite de la manière suivante :

$$J_1 = \frac{1}{2} \left[\hat{x}^T(t_f) S_f \hat{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u - \gamma^2 (y - C_2 x)^T V^{-1} (y - C_2 x) \right\} dt \right] \quad (5.38)$$

Où :

$$S_f = \pi_f + \frac{1}{\gamma^2} \pi_f \left[P^{-1}(t_f) - \frac{1}{\gamma^2} \pi_f \right]^{-1} \pi_f \quad (5.39)$$

L'ensemble de l'index de performance (5.38) et la contrainte dynamique (5.34) forment le jeu différentiel à information partielle.

Si on pose : $\bar{v} = y - C_2 \hat{x}$, l'équation (5.34) devient :

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A} \hat{x} + B_2 u + \bar{B}_1 \bar{v}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.40)$$

Où :

$$\bar{A} = A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \quad \text{et} \quad \bar{B}_1 = P C_2^T V^{-1}$$

L'index de performance J_1 est changé en :

$$J_1 = \frac{1}{2} \left[\hat{x}^T(t_f) S_f \hat{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u - \gamma^2 \bar{v}^T V^{-1} \bar{v} \right\} dt \right] = J_1(u, \bar{v}) \quad (5.41)$$

V.4. Solution du point chargé [Ching Fang Lin] :

Les équations (5.40) et (5.41) définissent le jeu quadratique linéaire à sommation zéro standard à deux joueurs à savoir $\min_u \max_{\bar{v}} J_1(u, \bar{v})$, pour lequel la stratégie du retour d'état optimal est $u^* \in U$ et \bar{v}^* et est donnée par :

$$u^* = -R^{-1} B_2^T S \hat{x} \quad (5.42)$$

$$\hat{v}^* = \frac{1}{\gamma^2} C_2 P S \hat{x} \quad (5.43)$$

Où S est une solution de l'E.D.R suivante :

$$\dot{S} = -S\bar{A} - \bar{A}^T S + S \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_1 V^{-1} \bar{B}_1^T \right) S - Q \quad (5.44)$$

dans $[0, t_f]$, avec la condition finale $S(t_f) = S_f$.

En remplaçant u^* et \hat{v}^* dans J_1 on obtient la valeur suivante de J_1 :

$$J_1(u^*, v^*) = \frac{1}{2} \hat{x}_0^T S(0) \hat{x}_0 \quad (5.45)$$

Notons $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$, et $\hat{x}^*(t)$ les trajectoires optimales de x , λ , et \hat{x} respectivement..

$x^*(t)$, $\lambda^*(t)$, et $\hat{x}^*(t)$ sont les solutions de x , λ , et \hat{x} avec $u = u^*$, et $v = v^*$.

En substituant (5.42) et (5.43) dans (5.34) et (5.37) on aboutit aux équations suivantes :

$$\dot{\hat{x}}^* = \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right) \hat{x}^* - B_2 R^{-1} B_2^T S \hat{x}^* + \frac{1}{\gamma^2} P C_2^T V^{-1} C_2 P S \hat{x}^* \quad (5.46)$$

$$\hat{x}^*(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\lambda}^* = - \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right)^T \lambda^* + C_2^T V^{-1} C_2 P \left(\lambda^* + \frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) - \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x}^* \quad (5.47)$$

$$\text{Avec } \lambda^*(t_f) = -\frac{1}{\gamma^2} S_f \hat{x}^*(t_f).$$

$\hat{x}^*(t)$ peut être calculée indépendamment à partir de (5.46).

De plus, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) = - \left(A + \frac{1}{\gamma^2} P Q \right)^T \left(-\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^* \right) - \frac{1}{\gamma^2} Q \hat{x}^* \quad (5.48)$$

En comparant (5.48) et (5.47), on obtient :

$$\lambda^*(t) = -\frac{1}{\gamma^2} S \hat{x}^*(t), \quad t \in [0, t_f] \quad (5.49)$$

En remplaçant (5.42) et (5.49) dans (5.30) et (5.32) on obtient la trajectoire optimale $x^*(t)$ suivante :

$$x^*(t) = \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right) \hat{x}^*(t), \quad t \in [0, t_f] \quad (5.50)$$

$$x^*(0) = \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P_0 S(0) \right) \hat{x}_0$$

A partir de (5.18), (5.42), (5.49) et (5.50), on obtient les trajectoires optimales de $v(t)$, $x(t)$, $w(t)$ et qui sont :

$$v^*(t) = \left\{ \hat{v}^*(t) + C_2 \left(\hat{x}^*(t) - x^*(t) \right) \right\} = 0, \quad t \in [0, t_f] \quad (5.51)$$

$$x^*(0) = \left\{ I + \frac{1}{\gamma^2} P_0 S(0) \right\} \hat{x}_0 \quad (5.52)$$

$$w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T S \hat{x}^*(t), \quad t \in [0, t_f] \quad (5.53)$$

En supposant que $\left[I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right]$ est non singulière sur $t \in [0, t_f]$, l'équation (5.52) peut être réécrite de la manière suivante :

$$w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T \Pi x^*(t), \quad t \in [0, t_f] \quad (5.54)$$

Avec :

$$\Pi = S \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P S \right)^{-1} \quad (5.55)$$

Il a été démontré dans [Rhee and Speyer 1991] que la stratégie optimale satisfaisant la condition du point chargé donnée par (5.22) est la suivante :

$$\begin{aligned}
u^* &= -R^{-1} B_2^T \Pi x_c \\
w^* &= \frac{1}{\gamma^2} W B_1^T \Pi x_c \\
v^* &= 0 \\
x^*(0) &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P_0 \Pi(0) \right]^{-1} \hat{x}_0
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
x_c &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P \Pi \right]^{-1} \hat{x} \\
\dot{x}_c &= A x_c + B_2 u + \frac{1}{\gamma^2} B_1 W B_1^T \Pi x_c + M C_2^T V^{-1} (y - C_2 x_c) \\
x_c(0) &= \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P_0 \Pi(0) \right]^{-1} \hat{x}_0
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Où :

$$M = \left[I - \frac{1}{\gamma^2} P \Pi \right]^{-1} P$$

Et Π défini par (5.54) satisfait l'équation différentielle de RICCATI :

$$\begin{aligned}
-\dot{\Pi} &= A^T \Pi + \Pi A - \Pi \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 W B_1^T \right) \Pi + Q \\
\Pi(t_f) &= \pi_f
\end{aligned} \tag{5.58}$$

et que pour $\hat{x}_0 = 0$, le problème d'atténuation de perturbation posée par (5.20) est résolu pour $u = u^* = -R^{-1} B_2^T \Pi x_c$.

V.5. Synthèse d'un compensateur invariant dans le temps :

Dans cette section, nous admettons que le système (5.17), (5.18) et (5.19) est un système invariant dans le temps et que les matrices de pondérations dans (5.20) sont également constantes, en particulier W et V sont des matrices identitaires.

On admet en plus que (A, B_1) et (A, B_2) sont des paires stabilisables et commandables respectivement et que (C_2, A) et (Q_1, A) sont détectables.

Le problème de l'atténuation de la perturbation pour ce système ainsi défini a été résolu dans [Doyle 1989] et la solution est basée sur deux équations algébriques de RICCATI.

On suppose qu'il existe deux matrices $\bar{\Pi}$ et \bar{P} , définies respectivement non négative et non positive et satisfaisant aux deux E.A.R suivantes :

$$0 = A^T \bar{\Pi} + \bar{\Pi} A - \bar{\Pi} \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right) \bar{\Pi} + Q_1^T Q_1 \quad (5.59)$$

$$0 = A \bar{P} + \bar{P} A^T - \bar{P} \left(C_2^T C_2 - \frac{1}{\gamma^2} Q_1^T Q_1 \right) \bar{P} + B_1 B_1^T \quad (5.60)$$

tel que :

$$\bar{P}^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} \bar{\Pi} > 0 \quad (5.61)$$

On montre que la solution $\Pi(t)$ de l'équation différentielle de RICCATI (5.58) converge vers $\bar{\Pi}_m$, si $\pi_r \leq \bar{\Pi}_m$ où $\bar{\Pi}_m$ est la solution définie non négative minimale de l'E.A.R (5.59).

Quand $t_f \rightarrow \infty$, le compensateur décrit par (5.56) et (5.57) devient un compensateur invariant dans le temps de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (5.62)$$

Où :

$$A_c = A - B_2 R^{-1} B_2^T \bar{\Pi} - \bar{M} C_2^T C_2 + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \bar{\Pi}$$

$$B_c = \bar{M} C_2^T$$

$$C_c = -R^{-1} B_2^T \bar{\Pi}$$

Et :

$$\bar{M} = \left(I - \frac{1}{\gamma^2} \bar{P} \bar{\Pi} \right)^{-1} \bar{P} > 0$$

De plus si nous choisissons \bar{P} et $\bar{\Pi}$ comme étant les solutions définies non négative et positive minimales, alors le correcteur (5.62) invariant dans le temps est équivalent au correcteur H_∞ standard proposé par J.Doyle et K.Glover dans [Doyle 1989].

Ainsi le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{cl} \bar{x} + \Gamma_{cl} \bar{w} \\ z &= C_{cl} \bar{x} \end{aligned} \tag{5.63}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \\ T_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & R_1 C_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La fonction de transfert entre la perturbation \bar{w} et z est donnée par :

$$T_{wz}(s) = C_{cl} [sI - A_{cl}]^{-1} T_{cl}$$

Proposition : [Rhee and Speyer 1991]

Le système en boucle fermée donné par (5.63) est stable et :

$$\|T_{wz}\|_\infty \leq \gamma \tag{5.64}$$

en posant $\gamma^2 = -1/\theta$:

$$\|T_{zw}\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \tag{5.65}$$

V.6. Parallèle entre les commandes LQG et H_∞ :

Rappelons le problème de commande déjà introduit dans le chapitre 4 et illustré par la figure ci-dessous :

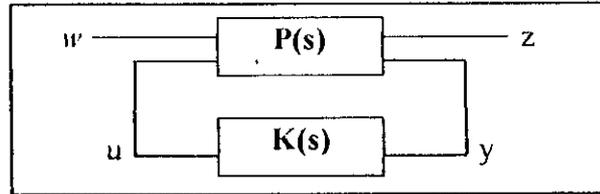


Fig. 5.1 Forme canonique d'un schéma de commande robuste

Notre but est de minimiser les sorties du système contenues dans le vecteur z , malgré les entrées de perturbation agissant sur le système et les bruits de mesures agissant sur la sortie et contenues dans le vecteur w . Nous désirons aussi diminuer l'effort de commande afin de conserver l'énergie de commande.

Dans la figure 5.1, w est le vecteur des entrées exogènes et z est le vecteur des grandeurs à réguler ou à minimiser, rappelons que la fonction de transfert en boucle fermée également appelée "Transformation fractionnaire linéaire" (LFT) est donnée par:

$$T_{zw} = P_{zw} + P_{zu} K (1 - P_{yu} K)^{-1} P_{yw} \quad (5.66)$$

On démontre que:

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} SG & -T \\ -T & -T/G \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Et où S et T sont respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire.

Rappelons qu'en général, notre but est de minimiser le module de ces fonctions de transfert dans des intervalles de fréquences appropriées (voir Chapitre 2).

Le problème H_∞ consiste à minimiser la norme ∞ de la fonction de transfert T_{zw} et par conséquent garder les sorties à réguler (les composantes du vecteur z) à l'intérieur d'une certaine plage de tolérance.

Le problème LQG consiste à minimiser la fonction de coût suivante:

$$J = E\{z' z\} = E\{x' Q x + u' R u\} \quad (5.68)$$

En choisissant: $z = [Q^{1/2} x \quad R^{1/2} u]$.

On démontre que : (voir Annexe)

$$J = \|T_{zw}\|_2 \quad (5.69)$$

Il en découle alors ce qui suit :

- La différence entre la commande H_∞ et la commande LQG réside donc dans la norme de la fonction de transfert en boucle fermée T_{zw} qui doit être minimisée. La première utilise la norme ∞ et la seconde utilise la norme 2.
- La commande LQG en minimisant $\|T_{zw}\|_2$, minimise $z_{RMS} = E\{z^T z\} = \|T_{zw}\|_2$ en supposant que les signaux d'entrée w sont des bruits blancs d'intensité unité. Alors que la commande H_∞ en minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ et suivant l'inégalité : $z_{RMS} \leq \|T_{zw}\|_\infty w_{RMS}$ minimise la borne supérieure de z_{RMS} qui correspond au cas limite de la pire perturbation « Worst case » et ce pour des perturbations de spectres inconnus.
- Plus particulièrement, on constate à partir de l'équation (5.64) que plus θ est grande en valeur absolue plus nous avons de garantie de robustesse. D'autre part, nous remarquons que lorsque θ tend vers zéro les équations (5.59), (5.60) tendent vers les équations (3.3) et (3.16), nous retrouverons alors un schéma similaire à celui de la commande LQG.

V.7. Conclusion :

Nous avons introduit une approche de résolution du problème de commande H_∞ par la théorie des jeux. Malgré, les similitudes qui existent entre les deux schémas de commande LQG et H_∞ , nous constatons que cette dernière technique présente plus de garanties de robustesse et a un caractère plus général.

Chapitre 6

Problème du véhicule et Simulations

« Tout ce que tu fera sera dérisoire,
mais il est essentiel que tu le fasses... »

Mahatma Gandhi

VI.1. Problème du véhicule :

VI.1.1. Problème du quart de véhicule :

Le modèle du quart de véhicule considéré est celui étudié dans [Louam 1992] (voir Fig. 6.1). La masse m_2 correspond au quart de la masse totale du véhicule, y comprise celle du passager. La masse m_1 correspond à la roue. Les deux masses sont connectées à travers un actionneur dont la dynamique est supposée en premier lieu idéale.

La force de commande u développée par l'actionneur, est supposée appliquée de manière égale et opposée sur les deux masses m_1 et m_2 . La pneumatique de la roue est représentée par un ressort de constante de raideur k_0 et est supposé avoir constamment un seul point de contact avec le sol.

On suppose aussi que les deux masses m_1 et m_2 ne peuvent avoir que des mouvements verticaux sous l'effet de la perturbation de la route, décrits par leurs déplacements x_1 et x_2 , par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.

Le système est supposé linéaire et invariant dans le temps, décrit alors par [Louam 1992, Louam 1988] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_d w, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $x = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ est le vecteur d'état, u est le vecteur de commande, $w = [x_a]^T$ est le vecteur des perturbations représentant le profil de la route, les matrices A , B et B_d sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Au cours de la conception d'un système de suspension active pour un véhicule roulant, deux principaux objectifs s'imposent : le confort et la tenue de route (la sécurité de conduite). L'objectif du confort peut être atteint en minimisant l'accélération verticale \ddot{x}_2 de la masse m_2 . En supposant m_2 constante, alors l'accélération \ddot{x}_2 est proportionnelle à l'effort de commande u . L'objectif de la tenue de route ou de la sécurité de conduite peut être atteint en minimisant ce que l'on appelle le décollement dynamique de la roue, c-à-d $(x_1 - x_a)$, enfin on minimisera également l'excursion de la roue par rapport au châssis $(x_1 - x_2)$ [Thompson and Pearce 1979].

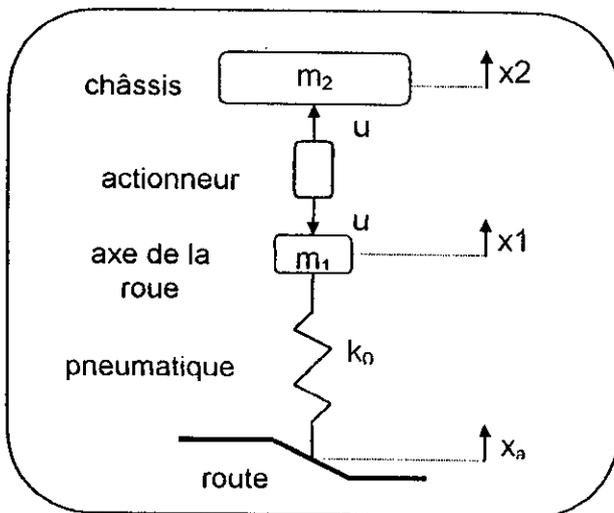


Fig. 6.1.a Sans suspension conv.

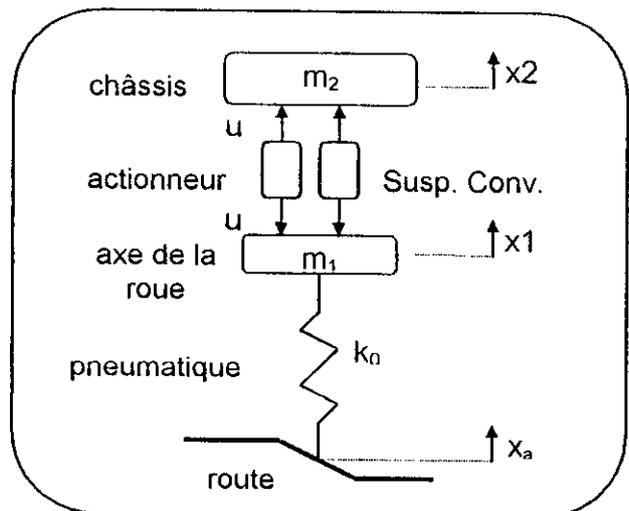


Fig. 6.1.b Avec suspension conv.

VI.1.2. Problème de la moitié de véhicule :

Le modèle de la moitié de véhicule est le même que dans [Louam 1992] (voir Fig. 6.2). La masse M correspond à la moitié de la masse totale du véhicule et J est le moment d'inertie de celle-ci par rapport à un axe passant par son centre de gravité. Les masses M_1 et M_3 correspondent respectivement à la roue avant et arrière et sont connectées à la masse M à travers un actionneur dont la dynamique est supposée en premier lieu idéale.

Les forces de commande u_1 et u_2 développées par les deux actionneurs, sont supposées appliquées de manière égale et opposée entre le châssis et l'axe de la roue.

Comme dans [Louam 1992], les pneumatiques des roues sont représentées par deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_3 et sont supposés avoir constamment un seul point de contact avec le sol.

On suppose aussi que les deux masses M_1 et M_3 ne peuvent avoir que des mouvements verticaux sous l'effet de la perturbation de la route, décrits par leurs déplacements x_1 et x_3 , par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.

Le système est supposé linéaire et invariant dans le temps, décrit alors par [Louam 1988, Louam 1992] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u + B_d w, \quad x(0) = x_0 \\ y &= C x \end{aligned} \tag{6.3}$$

avec $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4]^T$ est le vecteur d'état, $u = [u_1 \ u_3]^T$ est le vecteur de commande, $w = [x_a \ x_b]^T$ est le vecteur des perturbations représentant le profil de la route, les matrices A , B et B_d sont donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_3}{M_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_1} & 0 \\ \left(\frac{1}{M} + \frac{a^2}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J}\right) \\ 0 & -\frac{1}{M_3} \\ \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{J}\right) \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{M_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6.4)

Comme pour le cas du quart de véhicule, le confort est assuré par la minimisation des forces

commande u_1 et u_3 c-à-d les accélérations du châssis \ddot{x}_2 et \ddot{x}_4 , la sécurité de conduite est assurée en minimisant les décollements dynamiques $(x_1 - x_a)$ et $(x_3 - x_b)$, enfin on minimisera également l'excursion des roues par rapport au châssis $(x_1 - x_2)$ et $(x_3 - x_4)$.

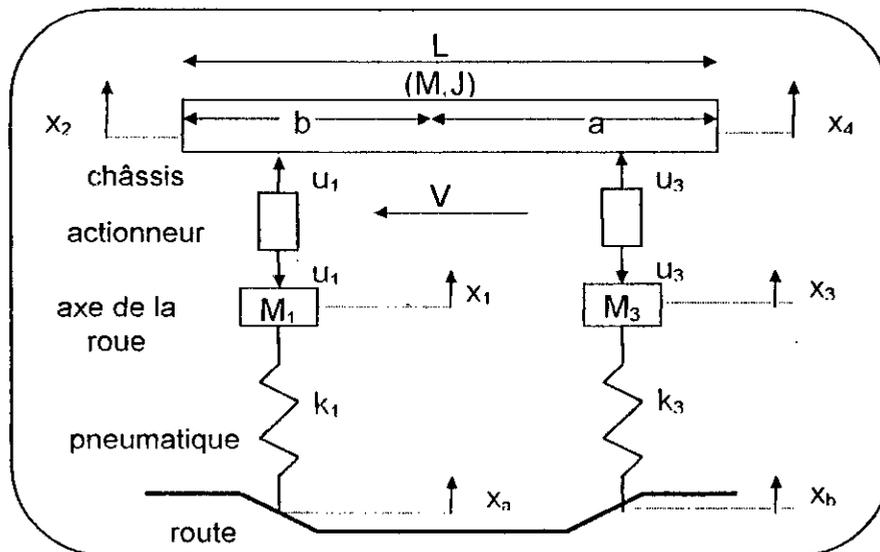


Fig. 6.2.a Moitié de véhicule sans suspension conventionnelle

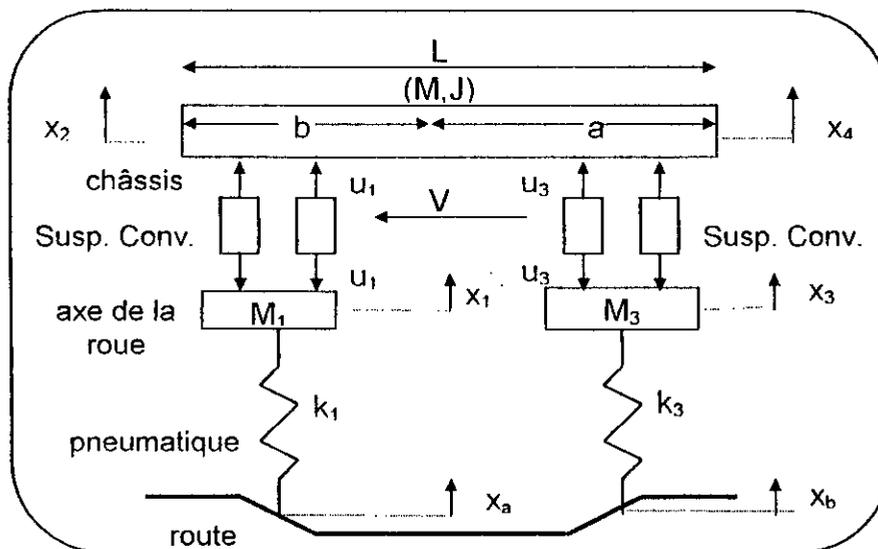


Fig. 6.2.b Moitié de véhicule avec suspension conventionnelle

VI.1.3. Expression des contraintes :

Dans ce qui suit, nous allons exprimer les contraintes énoncées pour le quart et la moitié de véhicule à l'aide de fonctions coût à minimiser. Il est à noter que l'expression de l'indice de performance (la fonction coût) est la même pour le quart et la moitié de véhicule, la seule différence réside dans les dimensions du vecteur d'état, du vecteur de commande et des

matrices de pondération.

Cas de la commande LQG :

Cas déterministe :

Les contraintes données ci-dessus peuvent être exprimées par la fonction coût à minimiser suivante :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt \quad (6.5)$$

Où la loi de commande permettant de minimiser cette fonction coût est donnée par (3.5).

Cas stochastique :

La fonction coût permettant de vérifier les contraintes définies ci-dessus est donnée par :

$$J = E \left\{ \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt / z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \right\} \quad (6.6)$$

Où la loi de commande permettant de minimiser cette fonction coût est définie par (3.17).

Cas de la commande H_{∞} :

Problème à information complète :

La fonction coût sera donnée par :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(x' Q x + u' R u + \frac{1}{\theta} w' E w \right) dt \quad (6.7)$$

avec w est le vecteur de perturbation défini ci-dessus.

La loi de commande permettant de minimiser cette fonction est donnée par (5.15).

Problème à information incomplète :

Les contraintes seront alors exprimées par la fonction coût :

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ (x^T Q x + u^T R u) + \frac{1}{\theta} (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) \right\} dt \quad (6.8)$$

avec v le vecteur de bruit défini par (5.19).

La loi de commande permettant de minimiser la fonction coût sera alors donnée par (5.56) et (5.57).

Remarques :

- Dans tout ce qui a précédé, les matrices Q , R et E sont symétriques et constantes, Q est supposée semi-définie positive, R et E définies positives, θ est un nombre réel négatif, enfin W , V sont des matrices définies positives.
- Dans ce qui suit, Q et R ont été choisies comme dans [Louam 1992], E est égale à la matrice unité, W est égale à la matrice unité, enfin, V est égale 0.1 la matrice unité, enfin, la valeur de θ sera donnée à chaque fois, ce qui fixera le degré d'atténuation des perturbations.

VI.2. Simulations :

Au cours des simulations effectuées, nous avons considéré une entrée de perturbation en échelon unitaire. Pour illustrer les performances de chaque schéma de commande, nous avons comparé les résultats de la commande H_∞ à information complète avec ceux de la commande LQR (voir paragraphe II.2.2) et les résultats de la commande H_∞ à information partielle avec ceux de la commande LQG.

Dans ce qui suit, nous considérons le cas d'une suspension active pure (voir figures 6.1.a et 6.2.a) et le cas où celle-ci est associée en parallèle à une suspension conventionnelle formée de systèmes de ressort et d'amortisseur (voir figures 6.1.b et 6.2.b).

En premier lieu, nous avons supposé l'actionneur idéal, puis nous avons modélisé celui-ci par un système du second ordre de coefficient d'amortissement $\xi = 0.707$ et dont la bande passante est spécifiée à chaque fois.

Nous avons également considéré le cas où la sortie est contaminée par un bruit et où le système souffre d'incertitudes paramétriques.

Pour alléger les figures, nous avons adopté les abréviations suivantes :

Quart de véhicule : QV.

Moitié de véhicule : MV.

Avec suspension conventionnelle : ASC.

Sans suspension conventionnelle : SSC.

Actionneur idéal : AI

Actionneur non idéal : ANI = Bande passante de l'actionneur en Hertz.

Sortie bruitée : SB = Facteur multiplicatif du bruit de distribution normale, de moyenne nulle et de variance 0.01.

Sortie non bruitée : SNB.

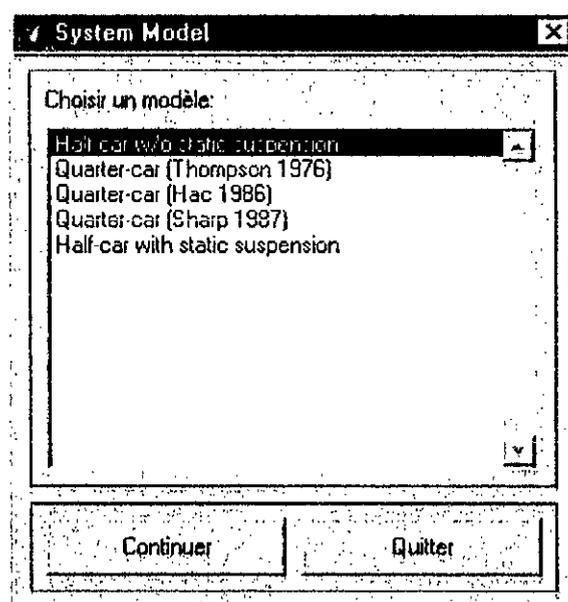
Incertitudes paramétriques : IP = Pourcentage de l'incertitude.

Sans incertitudes paramétriques : SIP.

Problème à Information Complète : PIC.

Problème à Information Incomplète : PIIC.

Afin de procéder aux différentes simulations, un programme a été conçu à l'aide du framework **MATLAB**® ver. 5.2 pour Windows 9x. Ce programme présente les particularités d'être facilement extensible pour d'autres schémas de commande et de supporter différents modèles de système de suspension de véhicule, comme il est indiqué dans la boîte de dialogue du programme ci-dessous :



Les résultats des simulations sont donnés respectivement pour le quart et la moitié de véhicule.

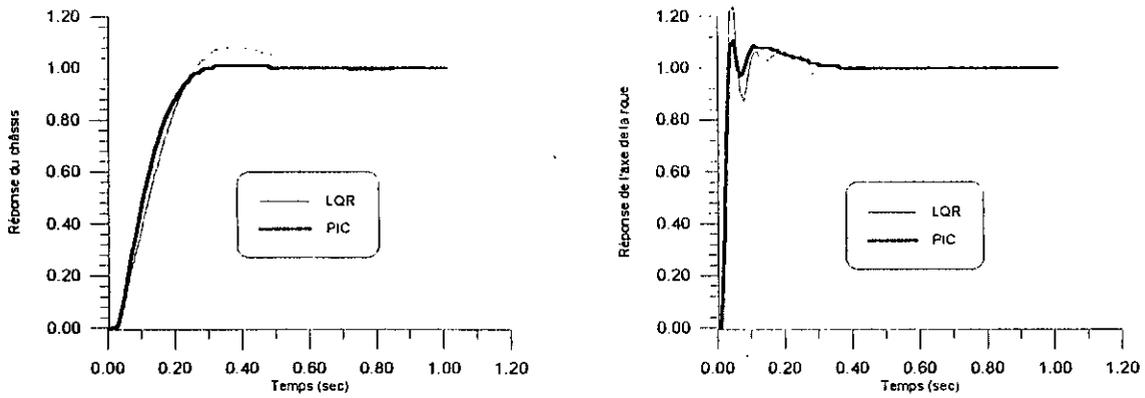


Fig. 6.3
QV, SSC, AI, SNB, SIP, $\theta = -50$

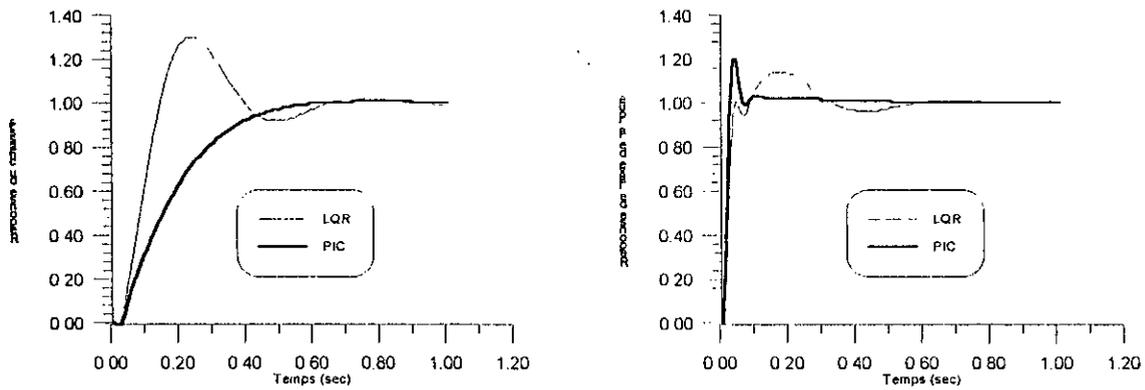


Fig. 6.4
QV, ASC, AI, SNB, SIP, $\theta = -50$

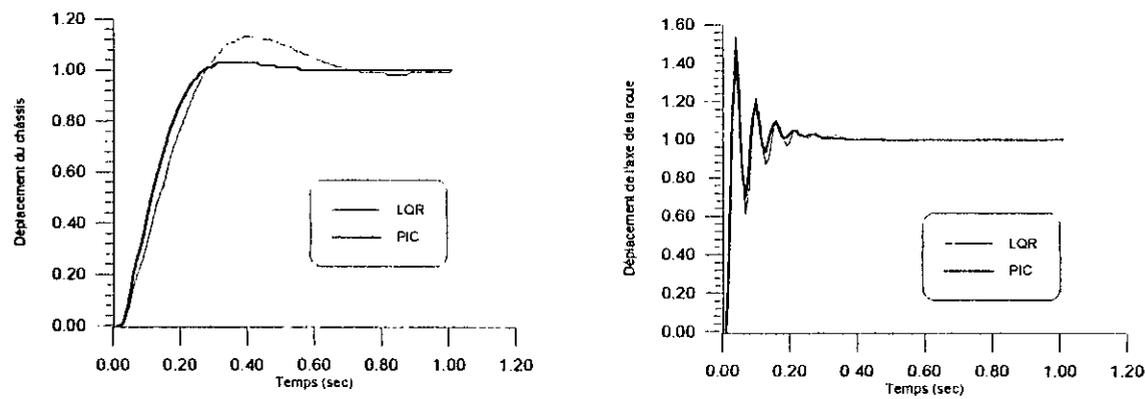


Fig. 6.5
QV, SSC, AI, SNB, IP = 50%, $\theta = -50$

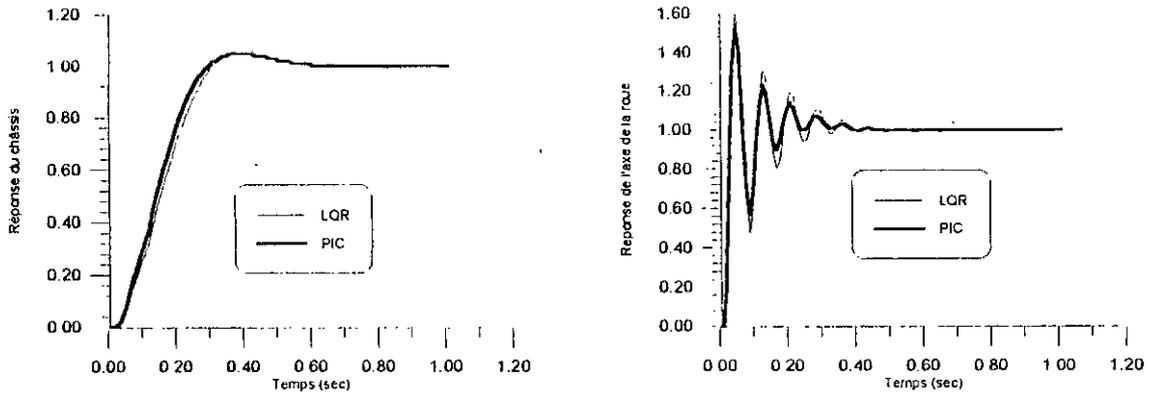


Fig. 6.6
 QV, SSC, ANI = 7 Hz, SNB, SIP, $\theta = -20$

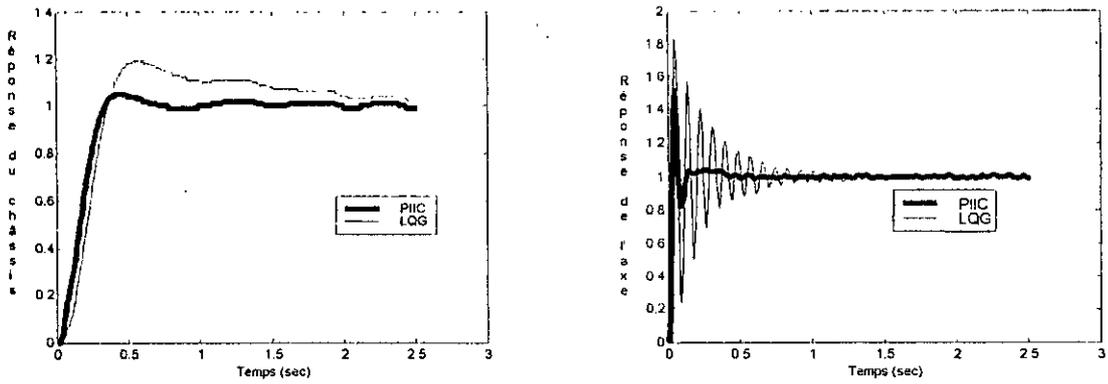


Fig. 6.7
 QV, SSC, AI, SB = 0.5, SIP, $\theta = -8$

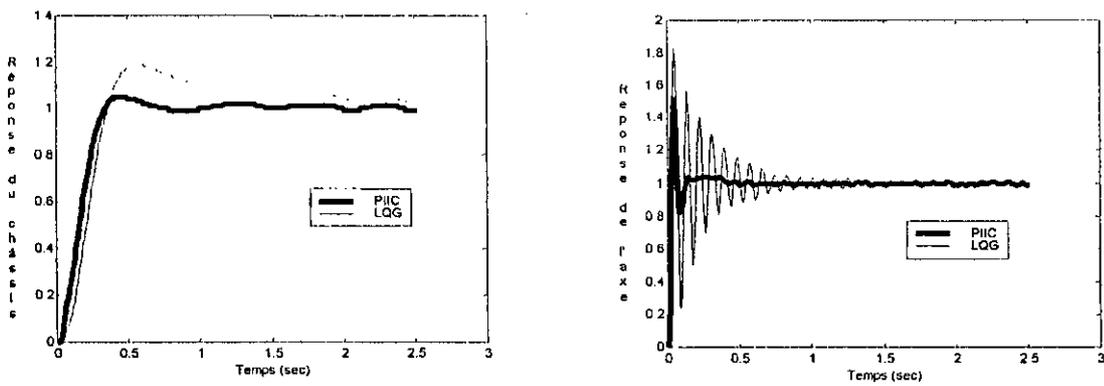


Fig. 6.8
 QV, SSC, ANI = 7 Hz, SB = 0.5, IP = 50 %, $\theta = -7$

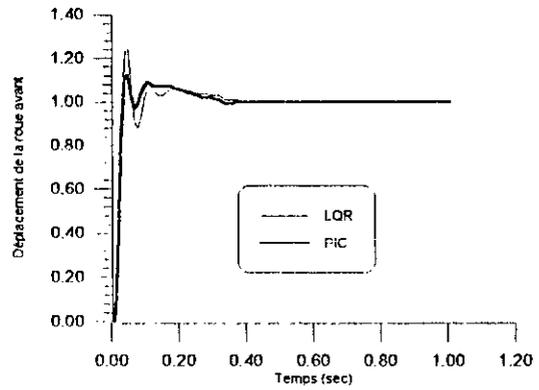
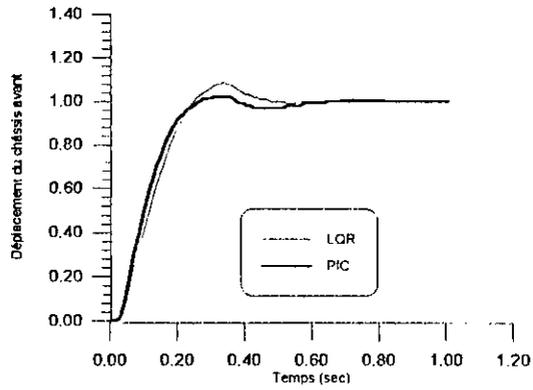


Fig. 6.9.a
MV, SSC, AI, SNB, SIP, $\theta = -50$

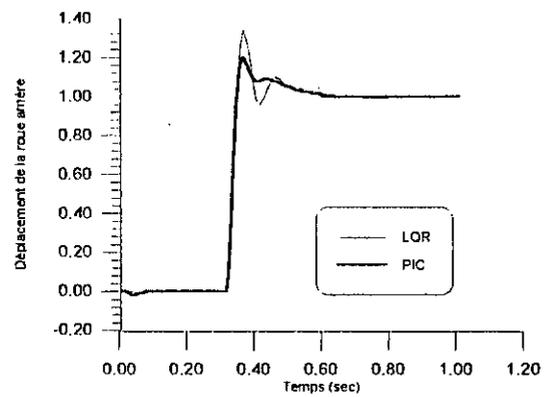
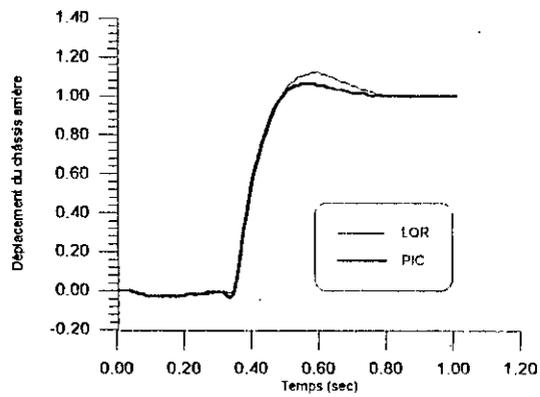


Fig. 6.9.b
MV, SSC, AI, SNB, SIP, $\theta = -50$

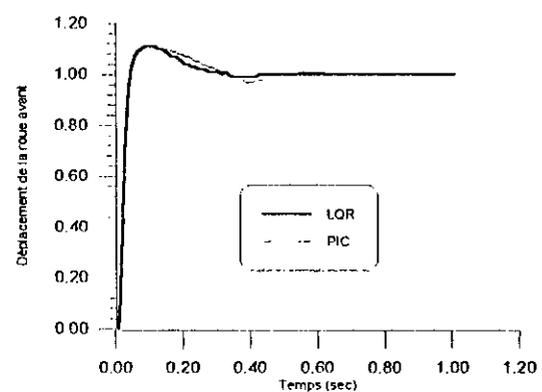
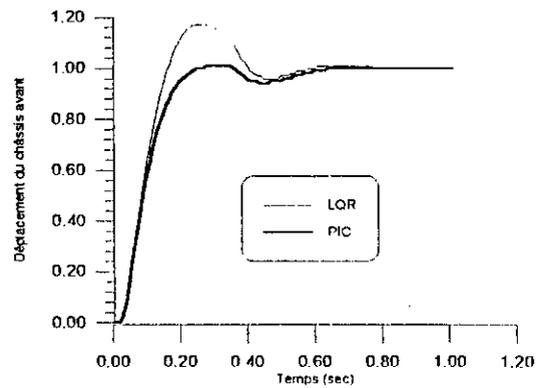


Fig. 6.10.a
MV, ASC, AI, SNB, SIP, $\theta = -60$

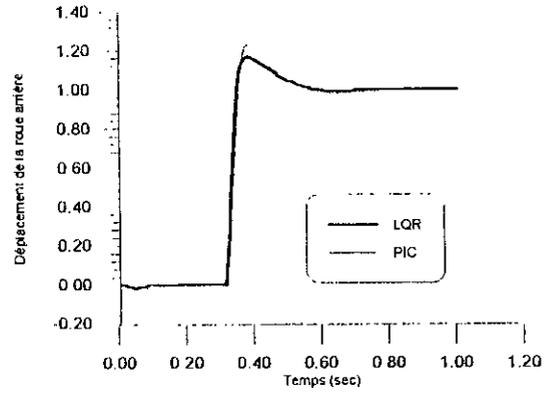
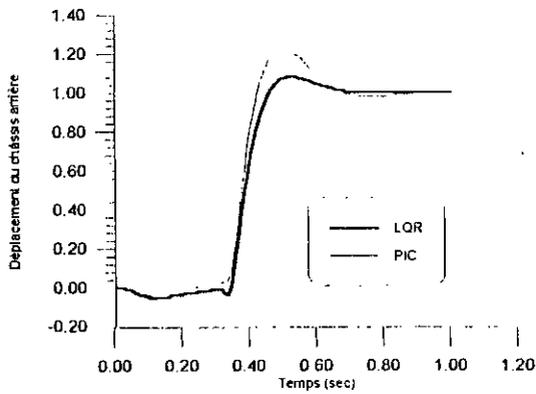


Fig. 6.10.b
MV, ASC, AI, SNB, SIP, $\theta = -60$

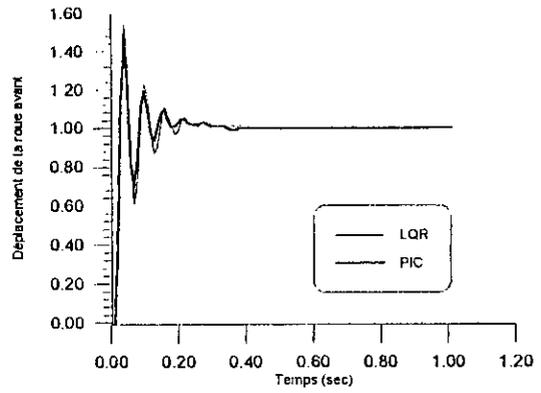
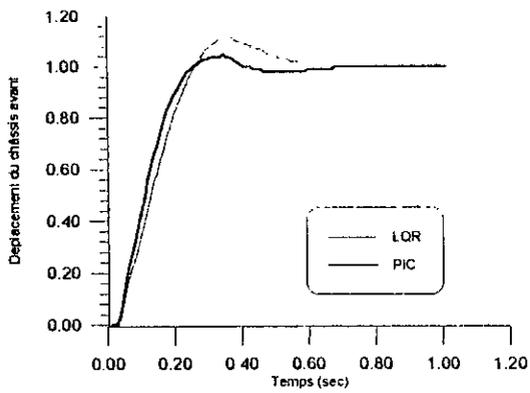


Fig. 6.11.a
MV, SSC, AI, SNB, IP = 50%, $\theta = -40$

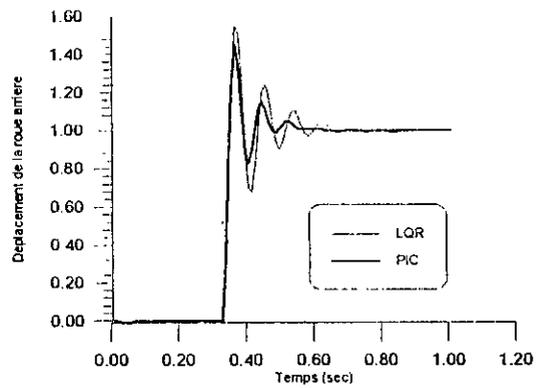
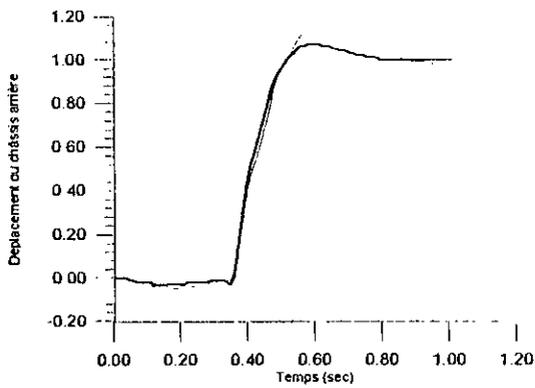


Fig. 6.11.b
MV, SSC, AI, SNB, IP = 50%, $\theta = -40$

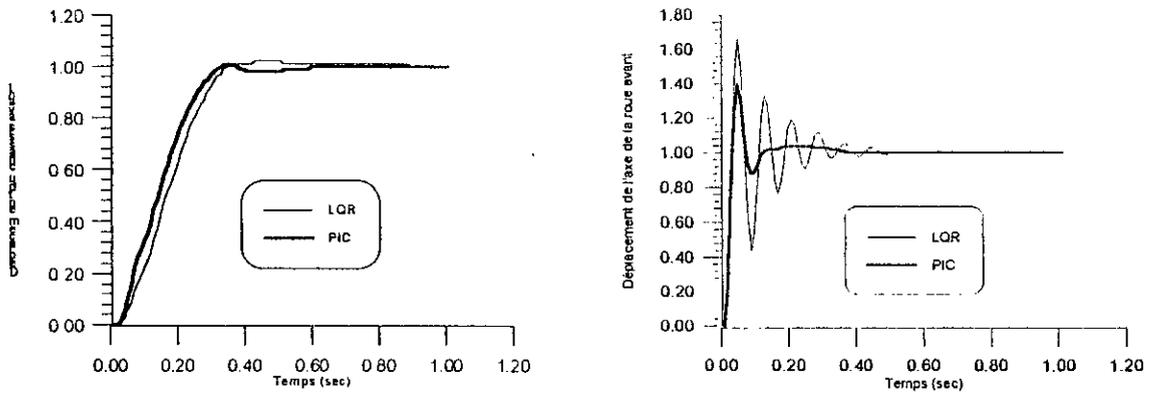


Fig. 6.12.a
MV, SSC, ANI = 7 Hz, SNB, SIP, $\theta = -20$

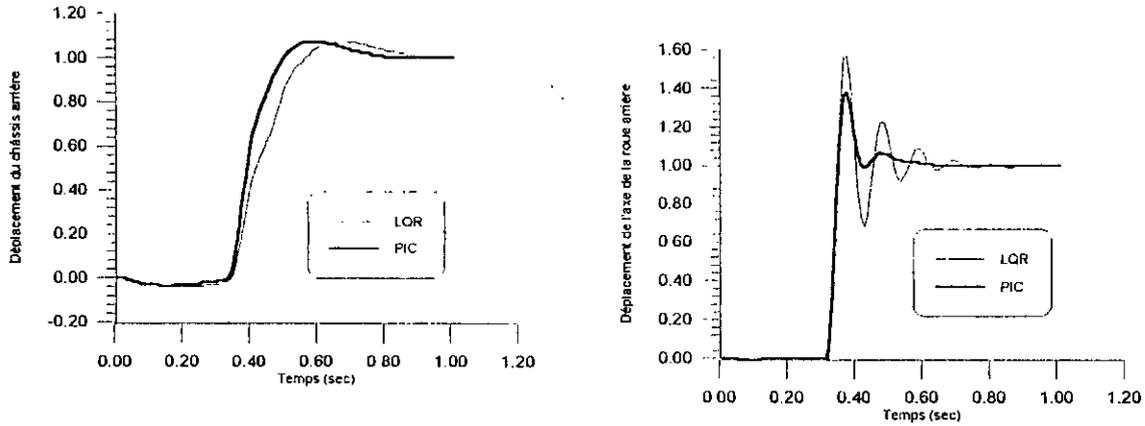


Fig. 6.12.b
MV, SSC, ANI = 7 Hz, SNB, SIP, $\theta = -20$

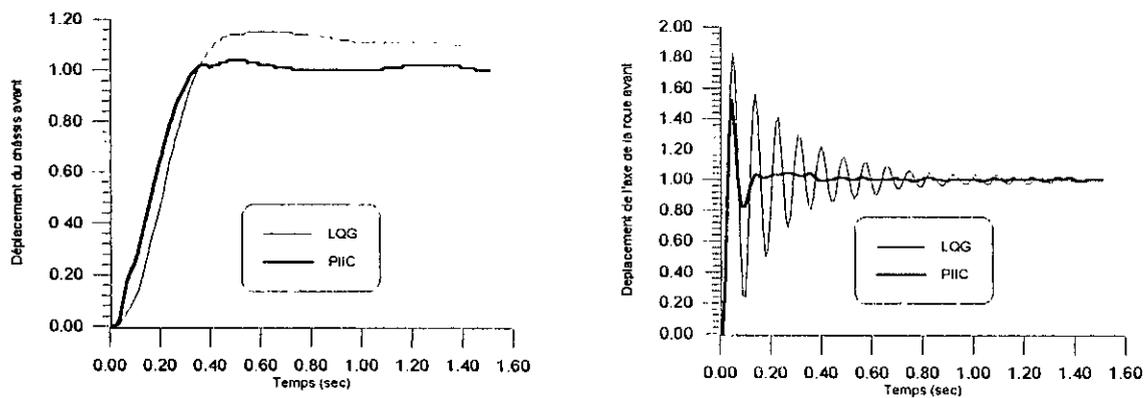


Fig. 6.13.a
MV, SSC, AI, SB = 0.5, SIP, $\theta = -8$

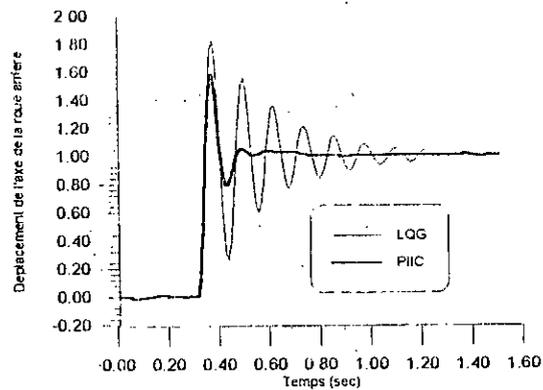
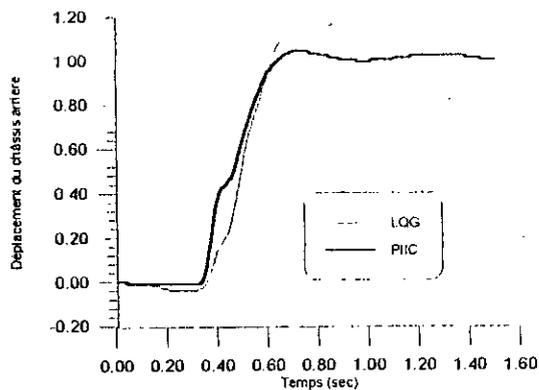


Fig. 6.13.b
MV, SSC, AI, SB = 0.5, SIP, $\theta = -8$

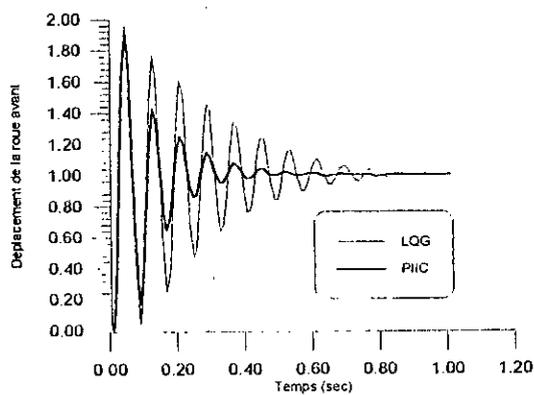
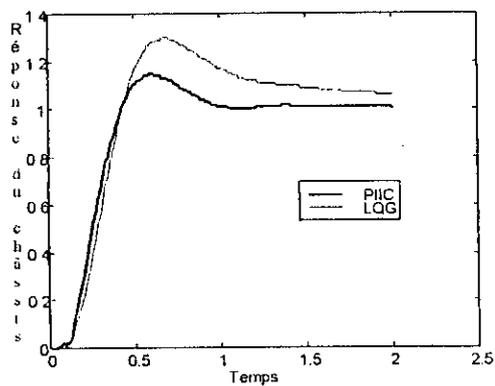


Fig. 6.14.a
MV, SSC, ANI = 7 Hz, SB = 0.5, IP = 50 %, $\theta = -7$

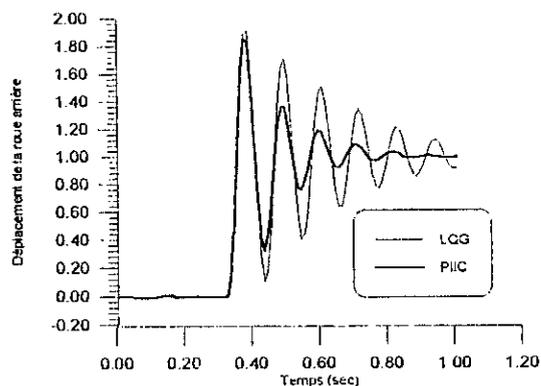
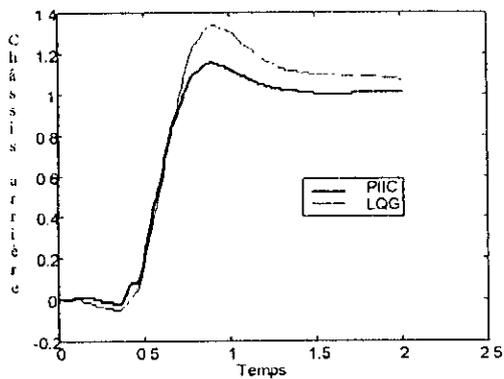


Fig. 6.14.b
MV, SSC, ANI = 7 Hz, SB = 0.5, IP = 50 %, $\theta = -7$

VI.3. Discussions :

Dans le cas du quart de véhicule, avec suspension active pure, un actionneur idéal, une connaissance parfaite des paramètres et une mesure non bruitée, nous constatons que le contrôleur PIC, issu de la résolution du problème à information complète, présente un meilleur comportement que le contrôleur LQR, ceci se traduit par un dépassement moins important et un temps de réponse inférieur sinon égal pour le contrôleur PIC (Fig. 6.3).

Lorsque on ajoute en parallèle à la suspension active, une suspension conventionnelle, on note que l'effet de cette dernière masque celui du contrôleur LQR, ce qui conduit à un dépassement trop important et des oscillations indésirables, notamment pour le châssis du véhicule, alors que le contrôleur PIC présente une réponse avec un dépassement moins important et pratiquement le même temps d'établissement. Cela est dû au fait que l'action de la suspension conventionnelle est vue comme une entrée de perturbation par le contrôleur PIC (Fig. 6.4).

En introduisant une incertitude paramétrique de 50% sur tous les paramètres du système, nous nous trouvons en face d'incertitudes paramétriques qui peuvent être aisément modélisées sous forme d'une entrée de perturbation (voir la section II.4 du chapitre 2). Nous constatons que le contrôleur LQR tient ses promesses de robustesse vis à vis des incertitudes, comme il a été montré dans [Doyle and al 1981]. Néanmoins, le contrôleur PIC présente toujours un meilleur rejet de la perturbation (Fig. 6.5).

Après avoir considéré l'actionneur comme idéal, nous supposons que celui-ci est représenté par un système du second ordre de coefficient d'amortissement optimal et de bande passante de 7 Hertz, comme il a été montré dans [Louam], à partir d'une bande passante de 10 Hertz, l'effet de la dynamique de l'actionneur peut être négligé. La dynamique de l'actionneur agit comme un filtre sur le signal de commande, ce qui limite l'énergie de commande aux basses fréquences. Le système de l'axe de la roue présente une résonance aux basses fréquences. Ceci provoque des oscillations au niveau de l'axe de la roue. Nous constatons que ces oscillations sont davantage amorties par le contrôleur PIC (Fig. 6.6).

Pour considérer un cas plus pratique, nous supposons que la mesure des différentes grandeurs est contaminée par un bruit de distribution normale. Vu les propriétés de robustesse dont font preuve le régulateur LQR et par dualité le filtre de Kalman [Doyle 1981], le schéma de commande LQG étant l'association de ces deux blocs, on pouvait s'attendre à ce que le contrôleur LQG présente ces mêmes propriétés de robustesse. En fait il n'en est rien, en effet, il

a été montré dans [Doyle 1981] que l'insertion d'un filtre de Kalman dans la boucle de commande pouvait diminuer dans une certaine mesure la marge de stabilité du système. Ce manque de garantie de robustesse est dû au fait que le filtre de Kalman utilise un modèle qui ne reflète pas la réalité physique du système, d'autre part, il a été prouvé dans [Speyer 1991], que le contrôleur PIIC, issu de la résolution du problème à information incomplète, permet de borner la norme ∞ de la fonction de transfert T_{zw} et donc fournit une garantie suffisante de robustesse. Ceci apparaît clairement à travers la figure 6.7, où on constate un meilleur rejet de la perturbation pour le contrôleur H_∞ , traduit par un dépassement et une erreur statique moindre pour le châssis du véhicule et moins d'oscillations pour l'axe de la roue.

Lorsque on ne considère plus l'actionneur comme idéal, le contrôleur H_∞ garde sa supériorité, notamment, en assurant un dépassement moindre au niveau du châssis et en amortissant mieux les oscillations dues à l'actionneur au niveau de l'axe de la roue (Fig. 6.8).

Dans le cas de la moitié de véhicule, nous remarquons l'abaissement du châssis avant exactement au même instant où le châssis arrière s'élève, ce qui révèle l'effet de couplage mécanique qui existe entre l'avant et l'arrière du véhicule. Mis à part cela, nous notons un meilleur rejet de la perturbation présenté par le contrôleur PIC (Fig. 6.9).

Lorsque on ajoute en parallèle une suspension conventionnelle, nous constatons également que l'effet de cette dernière masque celui du contrôleur LQR, alors que le contrôleur PIC impose une réponse ayant un dépassement inférieur, et où on retrouve toujours l'abaissement du châssis avant dû au couplage mécanique avec le châssis arrière (Fig. 6.10).

En introduisant des incertitudes paramétriques de 50 % sur les paramètres du système, nous constatons un meilleur rejet de l'effet de ces incertitudes par le contrôleur PIC (Fig. 6.11).

En ajoutant la dynamique de l'actionneur nous remarquons que les oscillations de l'axe de la roue induite par l'actionneur sont mieux amorties par le contrôleur PIC (Fig. 6.12).

Dans le cas où nous supposons que la sortie est contaminée par un bruit de distribution normale, nous constatons encore une fois la nette supériorité du contrôleur H_∞ , traduite par une erreur statique qui tend vers zéro au niveau du châssis et un meilleur amortissement des oscillations au niveau des axes des roues. Ce qui est également intéressant à noter, c'est l'absence de l'effet du couplage mécanique qui causait l'abaissement du châssis avant lorsque le châssis arrière s'élevait (Fig. 6.13).

Enfin, le contrôleur H_∞ garde sa supériorité lorsque nous introduisant la dynamique de l'actionneur, notamment par une erreur statique et un dépassement moindre et un meilleur amortissement des oscillations des axes des roues (Fig. 6.14).

VI.4. Conclusion :

A travers les résultats de simulations, nous avons constaté le meilleur rejet de perturbation et une plus grande robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques pour le contrôleur H_∞ par rapport au contrôleur LQG. En particulier, le contrôleur H_∞ permet de mieux amortir les oscillations de l'axe de la roue dues à la dynamique de l'actionneur. Nous avons également constaté, que lors de l'association de la suspension active avec une suspension conventionnelle, ce qui a pour but d'augmenter la fiabilité du système, l'effet du contrôleur LQG est masqué par celui de la suspension conventionnelle, contrairement au contrôleur H_∞ , ce qui est sans doute, fort appréciable du point de vue pratique. Enfin, nous remarquons que dans le cas de la moitié de véhicule, le contrôleur H_∞ permet d'éliminer l'effet du couplage entre avant et arrière du véhicule.

Conclusion

Conclusion :

Dans le cas de la conception d'un système de suspension active pour véhicule roulant, la technique H_∞ s'avère meilleure sur plusieurs aspects, par rapport à la commande LQG, qui est à ce jour largement utilisée.

Il est à noter que le schéma de la commande H_∞ détaillé dans [Rhee and al 1991], présente de grandes similitudes avec celui de la technique LQG et que sous certaines conditions les résultats des deux techniques se rapprochent. Néanmoins, l'approche H_∞ garde un caractère plus général par rapport à la commande LQG.

En effet, la commande H_∞ comme l'a souligné la théorie permet un meilleur rejet de la perturbation et une atténuation appréciable de l'effet des incertitudes paramétriques. En particulier, le contrôleur H_∞ permet de mieux amortir les oscillations sur l'axe de la roue dues à la dynamique de l'actionneur. Nous avons également constaté, que lors de l'association de la suspension active avec une suspension conventionnelle, ce qui a pour but d'augmenter la fiabilité du système, l'effet du contrôleur LQG est masqué par celui de la suspension conventionnelle, contrairement au contrôleur H_∞ , ce qui est sans doute, fort appréciable du point de vue pratique. Enfin, nous remarquons que dans le cas de la moitié de véhicule, le contrôleur H_∞ permet d'éliminer l'effet de couplage entre l'avant et l'arrière du véhicule.

Enfin, nous pouvons à présent dire que la commande H_∞ ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine de la conception d'un système de suspension active pour véhicule roulant, notamment en associant à cette technique une pré-information du profil de la route, cela aboutira sans doute à un système de suspension performant, pouvant répondre aux exigences d'un fonctionnement réel.

Annexe :**A.1. Décomposition en valeurs singulières :**

Dans la théorie de la commande, les pôles de la fonction de transfert ou ce qui équivalent, les valeurs propres de la matrice A dans la représentation d'état, jouent un rôle prépondérant dans l'analyse de la stabilité du système. D'une manière similaire, la notion de valeur singulière joue un rôle principal dans l'analyse de la robustesse en terme de stabilité d'un système multivariables.

Soit la matrice A de rang ρ , alors A peut être décomposée comme suit :

$$A = U \hat{\Sigma} V^* \text{ où } A = m \times n, U = m \times m, V = n \times n$$

U et V sont des matrices unitaires, c'est à dire, $U^*U = I_m$ et $V^*V = I_n$.

La matrice $\hat{\Sigma}$ est définie par :

$$\hat{\Sigma} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} & \text{si } m < n \\ \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } m > n \end{cases} \quad \text{avec : } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_\rho \end{bmatrix}, \quad \rho = \min[m, n]$$

Cette représentation de la matrice A est appelée **Décomposition en valeurs singulières** de la matrice A.

Ces valeurs singulières satisfont à ce qui suit :

$$A^* u_i = \sigma_i v_i$$

$$A v_i = \sigma_i u_i$$

Il s'ensuit les égalités suivantes :

$$(A^*A) v_i = \sigma_i^2 v_i$$

$$u_i^* (A A^*) = \sigma_i^2 u_i^*$$

ce qui implique que v_i sont les vecteurs propres à droite de la matrice A^*A et u_i sont les vecteurs propres à gauche de la matrice AA^* . Les vecteurs v_i et u_i sont appelés les vecteurs singuliers, respectivement, à droite et à gauche de la matrice A. il est à noter que ces vecteurs doivent être

normalisés, avant de former les colonnes des matrices V et U.

Enfin, les valeurs singulières (parfois appelées « gains principaux ») de la matrice A sont définies par :

$$\sigma_i = [\lambda_i(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$$

Les valeurs singulières sont des valeurs réelles non négatifs, souvent ordonnées dans un ordre décroissant : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_p$, la plus grande et la plus petite de ces valeurs sont notées respectivement, $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$.

Ainsi, la matrice A peut être d'une autre manière :

$$A = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^*$$

Les valeurs singulières, plus particulièrement $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$, peuvent avoir plusieurs propriétés et applications.

Normes et Espaces H_2 et H_∞ :

L'optimisation dans le domaine fréquentiel exige des définitions précises des normes des fonctions de transfert. En l'occurrence, nous pouvons être amenés à chercher parmi toutes les fonctions de transfert stables, celle qui soit optimale dans un certain sens. Il s'ensuit que pour effectuer cette sélection, nous avons besoin de normes pour le système. Dans ce qui suit, nous définissons deux importantes normes, qui sont H_2 et H_∞ .

Soit un système monovariante donné par la fonction transfert G, la norme H_2 est définie par :

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$$

alors que la norme ∞ est définie par :

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$$

La norme ∞ est donc la plus grande distance à partir de l'origine sur le lieu de Nyquist de la fonction de transfert G.

Dans le cas Multivariables, ces normes seront définies comme suit :

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr } G^*(j\omega)G(j\omega) d\omega$$

Ou ce qui revient au même :

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i^2[G(j\omega)] d\omega$$

alors que la norme ∞ est définie par :

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}[G(j\omega)]$$

Enfin, nous allons définir l'espace H_2 comme étant l'espace des fonctions de transfert strictement propre et ne possédant pas de pôles sur l'axe des imaginaires, alors que l'espace H_∞ est l'espace des fonctions de transfert qui sont stable et propre.

LQG et H_∞ , une histoire de norme...

Soit $S_w(\omega)$ la fonction densité spectrale de w , $S_z(\omega)$ la fonction densité spectrale de z .

On montre que: $S_z(\omega) = \text{tr } T_{zw}^* T_{zw} S_w(\omega)$

La relation de Wiener - Kinchine donne :

$$S_z(\omega) = F[R_z(\tau)]$$

Où F est la transformée de Fourier et $R_z(\tau)$ est la fonction d'auto-correlation de z .

Il s'ensuit que :

$$R_z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr } T_{zw}^* T_{zw} S_w(\omega) d\omega$$

Lorsque w est un bruit blanc, $S_w(\omega) = 1$, on aura donc :

$$R_z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr } T_{zw}^* T_{zw} d\omega = \|T_{zw}\|_2^2$$

D'autre part : $R_z(0) = E\{z^T z\} = z_{\text{RMS}}^2$

Rappelons que le but de la commande LQG est de minimiser la fonction coût :

$$J = E\{x^T Q x + u^T R u\}$$

En choisissant alors $z = [Q^{1/2} x \quad R^{1/2} u]$, on trouve alors :

$$J = E\{z^T z\} = R_z(0) = z_{RMS}^2 = \|T_{zw}\|_2^2 \quad (\text{c.q.f.d})$$

Bibliographie :

- [1] Bernstein, D.S, W.M. Haddad, « LQG Control with an H_{∞} Performance Bound : A Riccati Equation Approach », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, 1989, pp. 293 - 305.
- [2] Bryson. A.E and Y.C. Ho, « Applied optimal control », 1975, New York : Hemisphere.
- [3] Ching-Fang Lin, « Advanced Control Systems Design », PTR Prentice Hall, 1994, p.n° 155.
- [4] D'Azzo, « Linear control system analysis and design », Mc Graw - Hill 1984.
- [5] Doyle, J.C, Francis, B.A, Tannenbaum, A.R, « Feedback Control Theory », Mc Millan Publishing Company, New York, 1992.
- [6] Doyle. D, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis, « State-space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems, » IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, n° 8, 1989, pp. 831-847
- [7] Doyle. J.C et G. Stein, « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, n°. 1, 1981, pp. 4-16.
- [8] Francis, B.A, « A Course in H_{∞} Control Theory », Springer - Verlag, New York, 1987.
- [9] Glover, K, Mc Farlane, D, « Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Description with H_{∞} Bounded Uncertainty », IEEE Trans. Automat. Contr, Vol. 34, N° 8, August 1989.
- [10] Ho, Y.C, A.E. Bryson Jr, and S. Baron, « Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies », IEEE Trans. Automat. Contr., Vol, AC-10 N°4, Octobre 1965, pp. 385-389.

- [11] Jacobson, D.H, « Optimal Stochastic Linear Systems with Exponential Performance Criteria and Their Relation to Deterministic Differential Games », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18 N° 2, 1973, pp. 124 - 131.
- [12] Johnson, M.A, Grimble, M.J, « Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design », IEE Proceedings, Vol. 134, Pt D, N° 1, January 1987, pp. 53-71.
- [13] Louam, N, « Design of Optimal Active Suspension Systems of Limited Bandwidth for Patient Transportation Trolleys ».
- [14] Louam. N, D.A. Wilson and R.S. Sharp, « Optimal control of a vehicle suspension incorporating the time delay between front and rear wheel inputs », Vehicle System Dynamics, Vol. 17(6), 1988, pp. 317-336.
- [15] Louam. N, D.A. Wilson and R.S. Sharp, Optimization and Performance Enhancement of Active Suspensions for Automobiles under Preview of the Road », Vehicle System Dynamics, 21, 1992, pp. 39-63.
- [16] Mageirou, E.F, « Values and Strategies for Infinite Time Linear Quadratic Games », IEEE Trans. Automat. Contr., August 1981, pp. 547-550.
- [17] Mc Farlane, D, K. Glover, « A loop shaping design procedure using H_{∞} synthesis », IEEE Trans. Automat. Contr, Vol. 37, June 1992.
- [18] Rhee. I and L. Speyer, « A Game Theoretic Approach to a Finite-Time Disturbance Attenuation Problem », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 36, n°. 9, 1991, pp 1021-1032.
- [19] Shahian. B, M. Hassul, « Control System Design Using Matlab® », Prentice Hall, 1993. p n°. 428.
- [20] Thompson, A.G, « Quadratic Performance Indices and Optimum Suspension Design », Proc, Instn Mech Engrs 1973, Vol 187

9/73, pp. 129-139.

- [21]Thompson, A.G, Pearce, C.E.M, « An Optimal Suspension for an Automobile on a Random Road », Society of Automotive Enginners 1979.
- [22]Thompson. A.G . « Optimal and suboptimal linear active suspensions for road vehicles. Vehicle System Dynamics, Vol. 13 , 1984, pp.61-72,.
- [23]Willems, J.C, « Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-16 N° 6, 1971, pp. 621 - 634.
- [24]Yahia Cherif Y, Yagoub, S, « Etude de la commande H_{∞} , Application : Puma 560 », Projet de fin d'étude, E.N.P, 1997.
- [25]Zames. G, « Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, 1981, pp. 301-320.

Application de la théorie des jeux à la synthèse d'une commande H_∞ pour un système à suspension active d'un véhicule roulant.

M.S. Nedjari * et N.Louam **

* DER de Génie Electrique et Informatique, ENP, 10 Rue Hassen Badi El Harrach Alger.

** DER de Génie Electrique et Informatique, ENP, 10 Rue Hassen Badi El Harrach Alger.

Résumé :

Les résultats d'une commande H_∞ , basés sur les concepts de la théorie des jeux, ont été appliqués à la conception d'un système à suspension d'un véhicule roulant. Les résultats établis ont permis de montrer en particulier que les problèmes de robustesse vis à vis des incertitudes et des effets de perturbation sont mieux pris en charge que dans le cas d'autres techniques employées dans la littérature.

Mots clés :

LQG, H_∞ , Théorie des jeux, robuste.

I. Introduction :

Jusqu'à présent, les différents travaux concernant la conception d'une suspension active pour un véhicule ont largement utilisé la technique de commande LQG (voir [1], [2], [3]). Néanmoins, cette méthode de commande souffre d'un manque de robustesse lorsque elle est confronté à des conditions de fonctionnement réel. Dans une série de travaux, il a été montré que cette technique pouvait conduire même à une instabilité du système global. En effet, il a été constaté dans [4] que l'insertion d'un filtre de Kalman dans la boucle de commande peut diminuer dans une certaine mesure la marge de stabilité du système. Il apparaît alors que la commande LQG met plus l'accent sur la caractéristique d'optimisation que sur celle de la robustesse vis à vis des incertitudes et des effets de perturbation.

Dans le présent travail, nous présentons une technique alternative qui accorde davantage d'attention à la robustesse, en l'occurrence l'approche du problème H_∞ , basée sur les concepts de la théorie des jeux.

La commande H_∞ , introduite par G.Zames [5] se donne comme tâche principale de préserver une bonne marge de stabilité au système stable et un rejet appréciable des diverses perturbations.

L'approche temporelle de la technique H_∞ [6,7] est adoptée dans ce qui suit et les résultats sont directement appliqués au cas de la conception et la commande robuste d'un système à suspension active pour un quart de véhicule roulant, c-à-d une station à une seule roue.

Comparaison des performances obtenues ici est faite avec celles connues dans la littérature [2,3].

II. Problème de la commande H_∞ :

II.1. Problème général :

La forme canonique d'un schéma de commande robuste est donné par le schéma ci-dessous [5,8]:

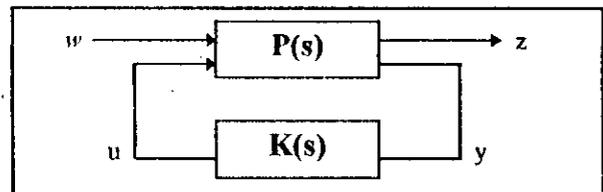


Fig 1.

- u est le vecteur de commande.
- w est le vecteur des entrées exogènes comprenant les références externes que le système devra suivre le plus fidèlement possible, les perturbations externes où les incertitudes du modèle, considérées comme des perturbations et enfin les bruits de mesure.
- z est le vecteur des grandeurs à minimiser ou à réguler.
- y est le vecteur des grandeurs mesurables.

Le système ci-dessus peut être décrit par l'ensemble d'équations [5,8]:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

la fonction de transfert en boucle fermée, de w à z , plus communément appelée LFT, est donnée par :

$$T_{zw} = P_{zw} + P_{zu} K (I - P_{yu} K)^{-1} P_{yw} \quad (2.2)$$

en supposant l'existence de la matrice $(I - P_{yu}K)^{-1}$.

Ainsi le problème $H\infty$ standard consiste à chercher un contrôleur K pour le système décrit par $P(s)$, tel que la norme $H\infty$ de la fonction de transfert T_{zw} , soit inférieure à une certaine valeur positive γ ([8]), c'est à dire :

$$\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma \quad (2.3)$$

II.2. Application de la théorie des jeux :

II.2.a. Rappels sur le problème du jeu différentiel :

Le problème du jeu différentiel consiste à trouver les stratégies $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$ tel que :

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_i, \dots, u_N^*) \quad (2.4)$$

où J_i est l'index de performance que l'action du joueur u_i tente de minimiser.

Les indices de performances sont en général de la forme :

$$J_i = \phi_i(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1, \dots, u_N) dt \quad (2.5)$$

où : $x(t_f)$ et t_f sont liés par la contrainte finale : $\Psi(x(t_f), t_f) = 0$ et $x(t)$ est assujéti à la contrainte dynamique :

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_N, t) \text{ et } x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

□ u_i appartient à l'ensemble des stratégies admissibles, dépendantes des informations disponibles pour le joueur u_i à l'instant t .

□ lorsque u_i est fonction de $x(t)$ à l'instant t , il s'agit d'un problème à information complète, en revanche, lorsque u_i est fonction des mesures historiques, on est en présence d'un problème à information partielle, c'est à dire que u_i est une fonction de l'ensemble des mesures à l'instant t , y_{it} et de t , avec : $y_{it} = \{y_i(\sigma), 0 \leq \sigma \leq t\}$, y_i est sujet à des bruits de mesure, soit : $y_i = h_i(x, t) + v_i$.

□ Si pour tout t_0 , x_0 et u_i : $\sum_{i=1}^N J_i = 0$, on dit que le jeu différentiel est à sommation zéro.

□ Pour deux joueurs, la condition du jeu à sommation zéro devient celle du point chargé :

$$J(u^*, w) \leq J(u^*, w^*) \leq J(u, w^*) \quad (2.7)$$

où : $u_1 = u$ et $u_2 = w$ et $J_1 = J = -J_2$.

Les stratégies du point chargé peuvent être obtenues en résolvant les deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \min_u \max_w J(u, w) \\ \max_w \min_u J(u, w) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ce qui est équivalent à :

$$\min_u \max_w J(u, w) = \max_w \min_u J(u, w) \quad (2.9)$$

A noter que lorsque w est un bruit blanc, les résultats du problème du jeu différentiel se réduisent au cas de la recherche d'une commande qui joue contre la pire des perturbations [9].

II.2.b. résolution du problème $H\infty$ par la théorie des jeux :

problème avec information complète :

Un jeu différentiel linéaire quadratique, à deux joueurs, avec information complète et à sommation zéro est défini comme suit :

Considérons le système linéaire d'ordre n décrit par les équations :

$$\dot{x} = Ax + B_0 u + B_1 w, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.10)$$

où A , B_0 et B_1 sont des matrices invariantes dans le temps et de dimensions appropriées.

Soit l'index de performance suivant :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u - w' E w) dt \quad (2.11)$$

où Q , R et E sont des matrices symétriques et constantes, Q est supposée semi-définie positive, R et E définies positives.

Remarques :

□ les deux stratégies du jeu différentiel défini par (2.10) et (2.11) sont : $u_1 = u$ et $u_2 = w$.

□ en considérant le vecteur augmenté $[u^T w^T]^T$ comme vecteur de commande, nous pouvons retrouver la même formulation que celle du problème LQR [9].

Pour le jeu différentiel défini par (2.10) et (2.11), la condition du point chargé donne alors :

$$u = -R^{-1} B_0' S x(t) \text{ et } w = E^{-1} B_1 S x(t) \quad (2.12)$$

où S est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$-SA - A'S + S(B_0 R^{-1} B_0' - B_1 E^{-1} B_1') S - Q = 0 \quad (2.13)$$

problème avec information partielle :

Soit le système dynamique donné par les équations

suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_0u + B_1w \\ y &= C_0x + v \\ z &= \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ R_1 \end{bmatrix}}_{D_{10}} u \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où z est le vecteur des grandeurs à réguler.

Où A , B_0 , B_1 , Q_1 et R_1 sont des matrices invariantes dans le temps et de dimensions appropriées.

On suppose que la matrice $R = R_1^T R_1$ est non-singulière et que les conditions initiales $x(0)$ sont inconnues.

On suppose que la commande est fonction des mesures historiques du vecteur de sortie :

$$y_t = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$$

Le problème d'atténuation de la perturbation se résume à trouver la commande admissible u tel que :

$$\begin{aligned} &x'(t_f) \pi_f x(t_f) + \int_0^\infty z^T z dt \leq \\ &\gamma^2 \left[x'(0) P_0^{-1} x(0) + \int_0^\infty (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) dt \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Où γ est une constante positive, P_0 , W et V sont des matrices définies positives et π_f est définie non négative.

En notant, $Q = Q_1^T Q_1$ on a :

$$\int_0^\infty z^T z dt = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

On peut considérer alors que le problème du jeu quadratique linéaire relatif au système décrit par (2.14) consiste à trouver : u^* , v^* , w^* et $x^*(0)$ satisfaisant à la condition du point chargé :

$$J(u^*, v^*, w^*, x^*(0)) \leq J(u, v, w, x^*(0)) \leq J(u^*, v^*, w^*, x^*(0))$$

(2.16)

pour tout $u, v, w \in L_2[0, \infty]$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

où :

$$J(u, v, w, x(0)) = \frac{1}{2} \left[-\gamma^2 (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) \right] +$$

$$\int_0^\infty \left\{ (x^T Q x + u^T R u) - \gamma^2 (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v) \right\} dt$$

(2.17)

la solution de ce problème revient à résoudre un problème de min-max comme expliqué dans [7] et en minimisant J par rapport à u et maximisant J par rapport à v , on trouve :

$$u = -R^{-1} B_0^T \Pi x_c \quad (2.18)$$

où Π est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$A^T \Pi + \Pi A - \Pi (B_0 R^{-1} B_0^T + \theta B_1 B_1^T) \Pi + Q_1^T Q_1 = 0 \quad (2.19)$$

avec : θ est un réel négatif et : $\gamma^2 = -\frac{1}{\theta}$

Et où x_c est donné par l'équation dynamique :

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \quad (2.20)$$

Avec :

$$A_c = A - B_0 R^{-1} B_0^T \Pi - M C_0^T V^{-1} C_0 - \theta B_1 B_1^T \Pi$$

$$B_c = M C_0^T V^{-1}$$

$$M = (I_n + \theta P \Pi)^{-1} P > 0 \quad (2.21)$$

où P est solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$A P + P A^T - P (C_0^T V^{-1} C_0 + \theta Q_1^T Q_1) P + B_1 B_1^T = 0 \quad (2.22)$$

Avec : $P^{-1} + \theta \Pi > 0$.

En définissant :

$$C_c = -R^{-1} B_0^T \Pi \quad (2.23)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, A_{cl} = \begin{bmatrix} A & B_0 C_c \\ B_c C_0 & A_c \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Et :

$$\Gamma_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix}, C_{cl} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 C_c \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

la fonction de transfert en boucle fermée de w vers z , notée T_{zw} , est donnée par :

$$T_{zw} = C_{cl} (sI - A_{cl})^{-1} \Gamma_{cl} \quad (2.26)$$

On démontre alors l'inégalité suivante (pour la démonstration voir [7]) :

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \quad (2.27)$$

dans ce qui suit nous mettrons en évidence certaines propriétés des deux techniques décrites ci-dessus.

III. Parallèle avec la commande LQG :

La différence principale entre la commande H_∞ et la commande LQG se situe au niveau de la norme de la fonction de transfert T_{zw} qui est à minimiser.

La première utilise la norme ∞ alors que la seconde utilise la norme 2 (Annexe). La commande LQG en minimisant $\|T_{zw}\|_2$, minimise $z_{RMS}^2 = E\{z'z\} = \|T_{zw}\|_2^2$ en supposant que l'entrée w est un bruit blanc d'intensité unitaire, alors que la commande H_∞ en minimisant $\|T_{zw}\|_\infty$ et sachant que: $z_{RMS} \leq \|T_{zw}\|_\infty w_{RMS}$, minimise la borne supérieure de z_{RMS} qui correspond au cas limite de perturbation « Worst case » et ce quelque soit le modèle des perturbations choisi.

A noter que si θ est nul on peut retrouver à partir des équations (2.19) et (2.22), un schéma semblable à celui de la commande LQG, bien qu'on utilise pas le même estimateur.

Il découle également de l'équation (2.27), que pour θ petit nous avons très peu de garantie de robustesse, alors que pour de grande valeur absolue de θ , la robustesse est relativement grande.

Ainsi, la commande H_∞ offre plus de garanties de robustesse par rapport aux entrées de perturbations que la commande LQG.

IV. Problème du véhicule et simulations :

Le modèle du quart de véhicule considéré est celui étudié dans [2] (voir Fig 2).

La masse m_2 correspond au quart de la masse totale du véhicule, y comprise celle du passager. La masse m_1 correspond à la roue. Les deux masses sont connectées à travers un actionneur dont la dynamique est supposée idéale. La force de commande u développée par l'actionneur, est supposée appliquée de manière égale et opposée sur les deux masses m_1 et m_2 . La pneumatique de la roue est représentée par un ressort de constante de raideur k_0 et est supposé avoir constamment un seul point de contact avec le sol.

On suppose aussi que les deux masses m_1 et m_2 ne peuvent avoir que des mouvements verticaux sous l'effet de la perturbation de la route, décrits par leurs déplacements x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives. Le système est linéaire et invariant, décrit alors par [2,3] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u + B_d w, \quad x(0) = x_0 \\ y &= C x \end{aligned} \quad (2.28)$$

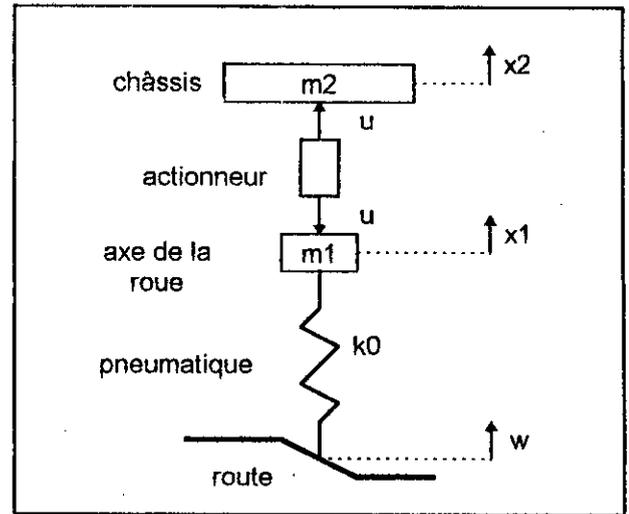


Fig 2

avec $x = [x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2]^T$ est le vecteur d'état, u est le vecteur de commande, w est le vecteur des perturbations représentant le profil de la route, les matrices A , B et B_d sont données en [2].

L'objectif recherché dans le problème du véhicule est souvent de minimisation de l'accélération du passager \ddot{x}_2 , de l'effort de commande u , la déviation pneumatique donnée par $(x_1 - w)$ et enfin l'excursion de l'axe de la roue relativement au châssis donné par $(x_1 - x_2)$.

Toutes ces contraintes peuvent être exprimées par les fonctions coûts suivantes, respectivement pour le problème à information complète et à information incomplète [7]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (X^T Q X + u^T R u + \frac{1}{\theta} w^T W^{-1} w) dt \quad (2.29)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (X^T Q X + u^T R u + \frac{1}{\theta} (w^T W^{-1} w + v^T V^{-1} v)) dt \quad (2.30)$$

avec : $r = [x_1, w, 0, 0]^T$, $X = x - r$.

Les résultats de la résolution des problèmes posés ci-dessus sont directement dérivés de l'application des équations de la section II (voir aussi [7]). Ces résultats sont comparés pour le problème à information complète avec ceux de la commande LQR (voir Remarques II.2.b), et pour le problème à information incomplète avec ceux de la commande LQG.

Pour cela on a utilisé les mêmes matrices de pondération Q et R que dans [2] et avec $\theta = 50$. W égale à la matrice identité.

Les figures 3 et 4, montrent pour une perturbation de type échelon unitaire, les résultats de simulation du problème LQR et du problème à information complète, respectivement pour l'axe de la roue et le châssis du

véhicule, nous constatons en particulier que le contrôleur H_∞ produit un pic de dépassement et un temps de réponse moins importants que ceux obtenus avec le contrôleur LQR.

Les figures 5 et 6 montrent les résultats obtenus pour le problème LQG et le problème à information partielle avec $\theta = 8$. W est une matrice identité et $V = 0,01.I_n$. On introduit ici un bruit qui contamine la sortie du système et une incertitude paramétrique de 10% sur un des paramètres du système.

On remarque une supériorité claire des performances du contrôleur H_∞ par rapport à celles du contrôleur LQG. Dans le cas du problème de suspension d'un véhicule considéré, on note un pic et une erreur statique moins importants pour le contrôleur H_∞ , et notamment pour le déplacement du châssis x_2 , ce qui est augmenté incontestablement la sensation de confort.

V. Conclusion :

Dans la conception et la commande d'un système à suspension active pour un véhicule roulant à une seule roue, l'application de la technique H_∞ est une meilleure alternative à la méthode LQG qui est la plus utilisée à ce jour dans la littérature. En effet, la technique H_∞ prend mieux en charge les incertitudes du système ainsi que les effets des entrées de perturbation. De certains points de vue, les résultats de la commande LQG peuvent être considérés seulement comme étant ceux de la commande H_∞ , réduits à certaines hypothèses de travail.

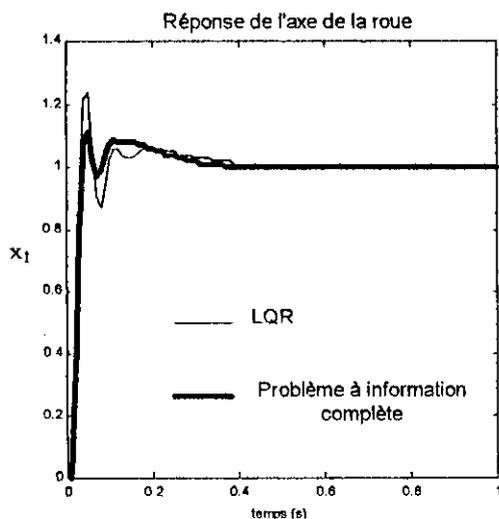


Fig 3

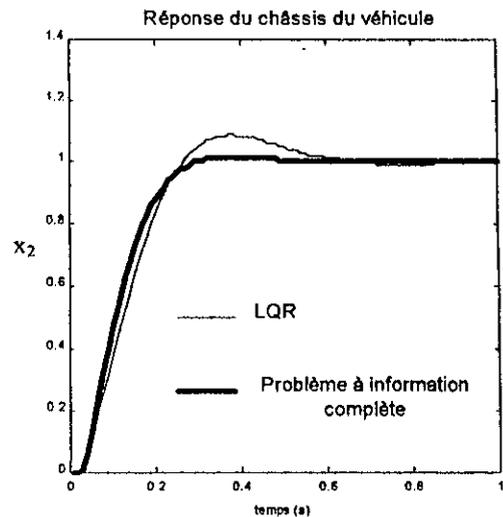


Fig 4

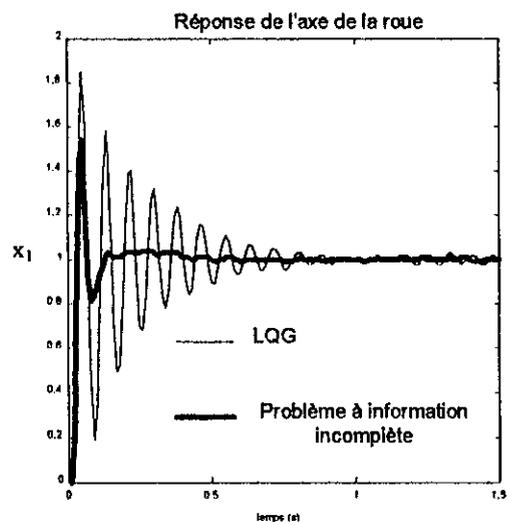


Fig 5

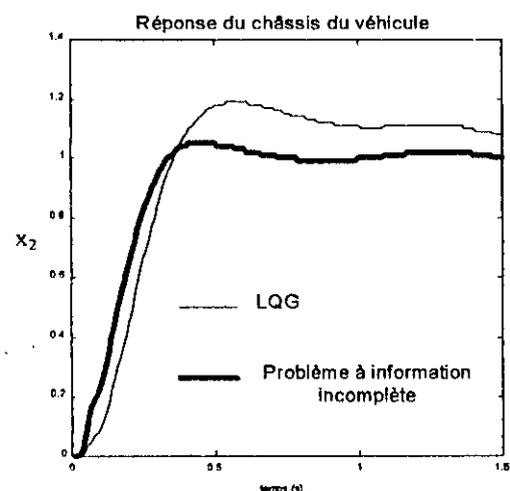


Fig 6

Bibliographie :

- [1] A.G. Thompson : « Optimal and suboptimal linear active suspensions for road vehicles. Vehicle System Dynamics, Vol. 13, 1984, pp.61-72. »
- [2] N.Louam, D.A. Wilson and R.S. Sharp, Optimization and Performance Enhancement of Active Suspensions for Automobiles under Preview of the Road », Vehicle System Dynamics, 21, 1992, pp. 39-63.
- [3] N.Louam, D.A. Wilson and R.S. Sharp, « Optimal control of a vehicle suspension incorporating the time delay between front and rear wheel inputs », Vehicle System Dynamics, Vol. 17(6), 1988, pp. 317-336.
- [4] J.C. Doyle et G. Stein, « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, n° 1, 1981, pp. 4-16.
- [5] G.Zames, « Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, 1981, pp. 301-320.
- [6] J.Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis, « State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, » IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, n° 8, 1989, pp. 831-847.
- [7] I. Rhee and L.Speyer, « A Game Theoretic Approach to a Finite-Time Disturbance Attenuation Problem », IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 36, n° 9, 1991, pp 1021-1032.
- [8] B. Shahian, M. Hassul, « Control System Design Using Matlab[®] », Prentice Hall, 1993. p n° 428.
- [9] Ching-Fang Lin, « Advanced Control Systems Design », PTR Prentice Hall, 1994, p.n° 155.
- [10] A.E. Bryson and Y.C. Ho, « Applied optimal control », 1975, New York : Hemisphere.

Rappelons que le but de la commande LQG est de minimiser la fonction coût :

$$J = E \{ x^T Q x + u^T R u \}$$

En choisissant alors $z = \{ Q^{1/2} x \ R^{1/2} u \}$, on trouve alors :

$$J = E \{ z^T z \} = R_z(0) = z_{RMS}^2 = \| T_{zw} \|_2^2 \quad (\text{c.q.f.d})$$

Annexe :

Soit $S_w(\omega)$ la fonction densité spectrale de w , $S_z(\omega)$ la fonction densité spectrale de z .

$$\text{On montre que: } S_z(\omega) = tr T_{zw}^* T_{zw} \cdot S_w(\omega)$$

La relation de Wiener - Kinchine donne :

$$S_z(\omega) = F \{ R_z(\tau) \}$$

Où F est la transformée de Fourier et $R_z(\tau)$ est la fonction d'auto-correlation de z .

Il s'ensuit que :

$$R_z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} tr T_{zw}^* T_{zw} \cdot S_w(\omega) d\omega$$

Lorsque w est un bruit blanc, $S_w(\omega) = 1$, on aura donc :

$$R_z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} tr T_{zw}^* T_{zw} d\omega = \| T_{zw} \|_2^2$$

D'autre part : $R_z(0) = E \{ z^T z \} = z_{RMS}^2$