

6/04

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
**Département de Génie Electrique**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en Automatique  
promotion 2004

**Thème**

**Commande Hybride Force / Position  
dans l'Espace Cartésien  
du Robot PUMA 560**

**Proposé et Dirigé par :**

**Mr. M. TADJINE**

**Mr. H. CHEKIREB**

**Etudié par :**

**K.Kh. BENTIFOUR**

**M.L. BENSEDDIK**

**E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger.**

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département de Génie Electrique**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en Automatique  
promotion 2004

**Thème**

**Commande Hybride Force / Position  
dans l'Espace Cartésien  
du Robot PUMA 560**

**Proposé et Dirigé par :**

**Mr. M. TADJINE**

**Mr. H. CHEKIREB**

**Etudié par :**

**K.Kh. BENTIFOUR**

**M.L. BENSEDDIK**

**E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger.**



# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents qui m'ont toujours apporter leurs amour et leurs soutient pour affronter les difficultés de la vie.*

*Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance la plus dévouée.*

*A mes chers frères Lotfi et Fazil, ainsi qu'à mes chères sœurs Amina et Meriem, ainsi qu'à la mémoire de mon frère Sami.*

*A tous les membres de ma famille : oncles, tantes, cousins et cousines, en particulier Bahidja, Hayet, Latifa, Samia, Fichem et son épouse Khouira, Tata Lila et Imène ainsi que ses sœurs.*

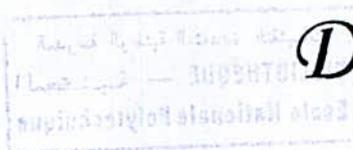
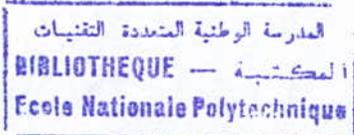
*A tous les automaticiens, en particulier : Younes, Abdelmoumène, Zakaria, Boudjellah ainsi que Mohamed.*

*A tous mes amis en particulier Boualem, Mustapha, Hakim, Ahmed et Mohamed.*

*A mon binôme Mohamed Lamine ainsi qu'à toute sa famille.*

*En fin, à tous ceux qui m'ont aidé, et tous les étudiants de l'Ecole Nationale Polytechnique.*

*Kamel Khalil BENTIFOUR*



## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail aux êtres les plus chers à mon cœur : mes parents qui m'ont éclairé le chemin de la réussite et qui sont toujours à mes côtés pour me soutenir, m'encourager et m'aider à affronter les difficultés de la vie.*

*Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance la plus dévouée.*

*A mes sœurs Soumia, Charazed ainsi qu'à mon frère Addelghani.*

*A tous les membres de ma famille : oncles, tantes, cousins et cousines sans oublier mes grands parents.*

*A tous mes camarades automaticiens, en particulier : Younes, Abdelmoumène, Zakaria, Boudjellah ainsi que Mohamed.*

*A mes amis Mohamed, Yahia et Sofiane.*

*A mon binôme Kamel avec qui je garde des souvenir inoubliables des jours passés au campus Bouraoui Amar.*

*En fin, à tous ceux qui m'ont aidé.*

*Mohamed Lamine BENSEDDIK.*



## Remerciements

*Le travail présenté dans ce mémoire a été mené au Laboratoire de Commande des Processus du département de Génie Electrique de l'Ecole Nationale Polytechnique. Il a été dirigé par monsieur H. Chekireb et monsieur M. Tadjine à qui nous témoignons notre gratitude pour le savoir qu'ils nous ont prodigué.*

*Nous tenons à remercier l'ensemble de nos enseignants d'automatique.*

*Nos remerciements vont aujourd'hui à tous ceux qui ont participé à notre formation du primaire à l'université.*

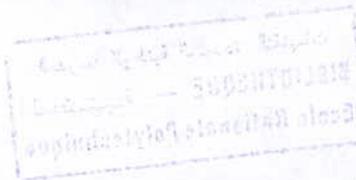
*Enfin, nous remercions tout le personnel de la bibliothèque et tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce projet.*

# Table des Matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>CHAPITRE 1</b>	
MODELISATION : PUMA 560 ET SON ENVIRONNEMENT .....	4
1.1. INTRODUCTION .....	4
1.2. DESCRIPTION DE PUMA 560 .....	5
1.3. MODELISATION DU PUMA 560 .....	6
1.1.1. Modèle géométrique direct .....	6
1.1.2. Modèle géométrique inverse .....	13
1.1.3. Modèle cinématique direct .....	20
1.1.3.1. Modèle cinématique du premier ordre .....	20
1.1.3.2. Modèle cinématique du deuxième ordre .....	24
1.1.4. Modèle cinématique inverse .....	24
1.1.5. Modèle dynamique .....	25
1.4. MODELISATION DE L'ENVIRONNEMENT .....	27
1.5. CONCLUSION .....	29
<b>CHAPITRE 2</b> .....	
2.1. INTRODUCTION .....	30
2.2. STRUCTURES DE COMMANDE .....	30
2.2.1. Structures de commande dans l'espace articulaire .....	31
2.2.2. Structures de commande dans l'espace cartésien .....	31
2.2.2.1. Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace articulaire .....	34
2.2.2.2. Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace cartésien .....	36

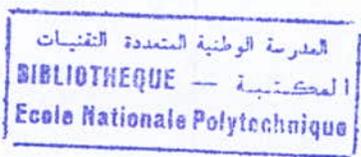
2.2.3. Structures de commande en force .....	37
2.2.3.1. Structures de commande sans consigne d'effort .....	37
2.2.3.1.1. Compliance passive .....	37
2.2.3.1.2. Commande par raideur active .....	38
2.2.3.1.3. Commande en impédance .....	41
2.2.3.2. Structures de commande avec consigne d'effort .....	43
2.2.3.2.1. Commande hybride force / position parallèle .....	43
2.2.3.2.2. Commande hybride force / position externe .....	49
2.3. TECHNIQUES DE COMMANDE .....	50
2.3.1. Techniques de commande à base du modèle .....	50
2.3.1.1. Commande par couple calculé .....	51
2.3.1.2. Commande par couple calculé simplifié .....	52
2.3.1.3. Commande basée sur une approximation linéaire du système ...	53
2.3.1.4. Commande par découplage non linéaire .....	53
2.3.1.5. Commande décentralisée .....	55
2.3.1.6. Commande adaptative .....	57
2.3.1.6.1. Commande adaptative par découplage non linéaire .....	58
2.3.1.6.2. Commande adaptative passive .....	59
<b>CHAPITRE 3</b>	
COMMANDE HYBRIDE PARALLELE DU PUMA 560 .....	60
3.1. INTRODUCTION .....	60
3.2. PRINCIPE DE LA COMMANDE HYBRIDE PARALLELE .....	60
3.2.1 Repères associés à la tâche .....	63
3.2.2. Orthogonalité effort-position .....	64
3.3. COMMANDE DU PUMA 560 DANS LE PLAN .....	65
3.3.1. Spécification de la tâche .....	66
3.3.2. Génération de trajectoires .....	66
3.3.2.1. Génération de trajectoire pour la première phase de la tâche .....	66
3.3.2.2. Génération de trajectoire pour la deuxième phase de la tâche .....	70
3.3.3. Commande hybride parallèle .....	73
3.3.3.1. Commande hybride parallèle DNL / PID .....	73

3.3.3.2. Commande hybride parallèle Passive / PID .....	79
3.3.4. Résultats et simulations .....	84
3.3.4.1. Commande hybride force / position du type DNL / PID .....	84
3.3.4.2. Commande hybride force / position du type Passive / PID .....	94
3.4. COMMANDE DU PUMA 560 DANS L'ESPACE 3D .....	104
3.4.1. Spécification de la tâche .....	104
3.4.2. Génération de trajectoire .....	104
3.4.2.1. Génération de la trajectoire dans la première phase .....	104
3.4.2.2. Génération de la trajectoire dans la deuxième phase .....	105
3.4.3. Commande hybride parallèle .....	106
3.4.3.1. Commande hybride parallèle DNL / PID .....	106
3.4.3.2. Commande hybride parallèle Passive / PID .....	110
3.4.4. Résultats et simulations .....	111
3.4.4.1. Commande hybride force / position du type DNL / PID .....	111
3.4.4.2. Commande hybride force / position du type Passive / PID .....	117
3.5. ETUDE COMPARATIVE DES DEUX TECHNIQUES .....	123
3.6. CONCLUSION .....	123
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>124</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>125</b>
<b>ANNEXE A .....</b>	<b>126</b>
TRANSFORMATIONS HOMOGENES .....	126
A.1. COORDONNEES HOMOGENES .....	126
A.1.1. Représentation d'un point .....	126
A.1.2. Représentation d'un vecteur .....	126
A.1.3. Représentation d'un plan .....	127
A.2. TRANSFORMATIONS HOMOGENES .....	127
A.2.1. Transformation de repères .....	127
A.2.2. Propriétés des matrices de transformation .....	128
A.2.3. Transformation de vecteurs .....	129
A.2.4. Matrice rotation autour des axes principaux .....	129



A.2.5. Composition des transformations homogènes .....	130
A.2.5.1. Composition de transformations .....	130
A.2.5.2. Multiplication à droite ou à gauche .....	130
<b>ANNEXE B</b>	
NOTATION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIEE SELON CRAIG .....	132
<b>ANNEXE C</b> .....	
TRAVAUX PRECEDENTS SUR LA COMMANDE EN FORCE .....	135
C.1. COMMANDE AVEC CONSIGNE D'EFFORT .....	135
C.1.1. Commande proportionnelle .....	135
C.1.2. Commande intégrale .....	136
C.1.3. Commande proportionnelle intégrale .....	137
C.1.4. Commande proportionnelle dérivée .....	137
C.2. COMMANDE SANS CONSIGNE D'EFFORT .....	138
<b>ANNEXE D</b>	
MODELISATION DU PUMA 560 A 3 DDL .....	139
D.1. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT .....	139
D.2. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE .....	140
D.3. MODELE CINEMATIQUE DIRECT .....	142
D.4. MODELE CINEMATIQUE INVERSE .....	143
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	145

# Table des illustrations



<b>Figure 1.1.</b> PUMA 560. ....	5
<b>Figure 1.2.</b> PUMA 560 à la position zéro. ....	8
<b>Figure 1.3.</b> Système masse-amortissement-ressort. ....	28
<b>Figure 2.1.</b> Structure de commande dans l'espace articulaire. ....	32
<b>Figure 2.2.</b> Structure de commande dans l'espace cartésien. ....	33
<b>Figure 2.3.</b> Structure de commande par Jacobien inverse. ....	35
<b>Figure 2.4.</b> Structure de commande par Jacobien transpose. ....	35
<b>Figure 2.5.</b> Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace cartésien	36
<b>Figure 2.6.</b> Exemple d'un <i>Remote Center Compliance</i> . ....	38
<b>Figure 2.7.</b> Commande par raideur active. ....	40
<b>Figure 2.8.</b> Commande en impédance sans mesure de force. ....	42
<b>Figure 2.9.</b> Commande en impédance avec mesure d'effort. ....	43
<b>Figure 2.10.</b> Organisation générale de la commande hybride force-position. ....	44
<b>Figure 2.11.</b> Commande hybride force position avec somme de couples articulaire (d'après Raibert). ....	45
<b>Figure 2.12.</b> Commande hybride force position avec somme de couples de vitesses. ....	46
<b>Figure 2.13.</b> Commande hybride force position avec somme de couples des efforts. ....	46
<b>Figure 2.14.</b> Schéma de commande hybride force position (d'après Fisher). ....	48
<b>Figure 2.15.</b> Principe de la commande hybride externe. ....	49
<b>Figure 2.16.</b> Commande par anticipation. ....	51
<b>Figure 2.17.</b> Commande par couple calculé. ....	52
<b>Figure 2.18.</b> Commande par découplage non linéaire. ....	54
<b>Figure 2.19.</b> Commande décentralisée. ....	55

<b>Figure 2.20.</b> Schéma d'une commande décentralisée de type PID .....	55
<b>Figure 2.21.</b> Commande par découplage non linéaire adaptative (d'après Craig)	57
<b>Figure 3.1.</b> Exemple de tâche de commande hybride (Suivi de contour dans le plan) .....	61
<b>Figure 3.2.</b> Phase hybride .....	62
<b>Figure 3.3.</b> Repères associés à la tâche .....	63
<b>Figure 3.4.</b> Première phase de la tâche .....	67
<b>Figure 3.5.</b> Variation de en fonction de .....	67
<b>Figure 3.6.</b> Variation de, et selon la loi Bang-Bang .....	68
<b>Figure 3.7.</b> Deuxième phase de la tâche .....	70
<b>Figure 3.8.</b> Variation de, et selon la loi Bang-Bang .....	71
<b>Figure 3.9.</b> Implémentation de la commande hybride force / position par découplage non-linéaire .....	76
<b>Figure 3.10.</b> Repères associés à la tâche dans le plan .....	77
<b>Figure 3.11.</b> Implémentation de la commande hybride DNL / PID .....	79
<b>Figure 3.12.</b> Implémentation de la commande hybride force position du type Passive / PID .....	83
<b>Figure 3.13.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 1 <sup>er</sup> cas (dans le plan) .....	84 - 86
<b>Figure 3.14.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 2 <sup>ème</sup> cas (dans le plan) .....	88 - 90
<b>Figure 3.15.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 3 <sup>ème</sup> cas (dans le plan) .....	91 - 93
<b>Figure 3.16.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 1 <sup>er</sup> cas (dans le plan) .....	94 - 96
<b>Figure 3.17.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 2 <sup>ème</sup> cas (dans le plan) .....	98 - 100
<b>Figure 3.18.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 3 <sup>ème</sup> cas (dans le plan) .....	101-103
<b>Figure 3.19.</b> Repères associés à la tâche dans l'espace .....	105
<b>Figure 3.20.</b> Implémentation de la commande hybride DNL / PID dans l'espace cartésien .....	108
<b>Figure 3.20'.</b> commande hybride DNL / PID dans l'espace cartésien, modifiée	109

<b>Figure 3.21.</b> Implémentation de la commande hybride Passive / PID dans l'espace cartésien .....	110
<b>Figure 3.22.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 1 <sup>er</sup> cas (dans l'espace) .....	111-113
<b>Figure 3.23.</b> Simulations pour la commande hybride du type DNL / PID : 2 <sup>ème</sup> cas (dans l'espace) .....	114-116
<b>Figure 3.24.</b> Simulations pour la commande hybride du type Passive / PID : 1 <sup>er</sup> cas (dans l'espace) .....	117-119
<b>Figure 3.25.</b> Simulations pour la commande hybride du type Passive / PID : 2 <sup>er</sup> cas (dans l'espace) .....	120-122

# Introduction générale

La majorité des tâches robotiques actuelles nécessitent en plus de positionner des objets dans l'espace (position et orientation), une interaction entre les robots et leurs environnements. Citons dans ce cadre les tâches d'assemblage, d'usinage et de polissage.

Pour l'exécution correcte de ces tâches, l'effecteur terminal du bras manipulateur est amené à établir et maintenir le contact avec son environnement, ainsi il ne peut se mouvoir librement dans toutes les directions mais en se soumettant aux contraintes imposées par l'environnement.

Lorsque l'effecteur en mouvement entre en contact avec une surface rigide ou déformable, la chaîne cinématique du robot est fermée sur l'environnement, et du fait de la raideur de l'ensemble, des faibles variations de position du point terminal peuvent induire des efforts élevés. Ainsi, un système de commande d'une chaîne cinématique ouverte, parfaitement stable lors de mouvements dans l'espace libre peut devenir instable en présence d'un contact avec apparition de rebonds et risque de détérioration de l'effecteur ou de l'environnement [Khalil 99].

Si le système mécanique est commandé en position, éviter ces phénomènes exige des robots infiniment précis et une connaissance parfaite de l'environnement. Or, la précision d'un robot manipulateur est obtenue au détriment de son poids, de son volume de travail et de son prix. Aussi, l'indexation du robot par rapport à son environnement n'est jamais parfaite, une bonne précision nécessitant des développements d'éléments de périrobotique coûteux. Cette solution n'est que peu satisfaisante, car ne fournissant aucune information sur les efforts d'interaction dus au contact.

Il semble donc important et intéressant de prendre ces efforts en considération, par exemple au niveau de la commande elle-même, lors de l'exécution d'une tâche afin, soit de les minimiser, soit de les maintenir à une valeur donnée.

Une solution, consiste à interposer entre l'effecteur terminal et le robot un dispositif se déformant sous l'effet des efforts de contact, ajoutant ainsi à la structure une certaine élasticité qui permet de corriger les erreurs de positionnement [Whitney 79], approche nommée *compliance passive*. Mais souvent, ces dispositifs sont spécifiques à une tâche particulière.

Il devient alors nécessaire de commander le robot en force le long d'au moins un de ses degrés de liberté, les autres degrés de liberté étant toujours commandés en position. Raibert et Craig ont proposé cette approche [Craig 81], et l'ont nommée *commande hybride*. Le manipulateur devrait être commandé en force dans les directions où la position est contrainte du fait de l'interaction avec l'environnement, et commandé en position dans toutes les directions orthogonales.

Le formalisme de commande hybride ne fait que partitionner l'espace occupé par les degrés de liberté en un sous espace dans lequel la commande en position est utilisée, et un autre dans lequel la commande en force est employée. Il n'y a donc pas de spécification particulière sur le type de commande utilisée.

Un autre formalisme introduit par Hogan qu'il appela *commande en impédance*, consiste à commander la relation entre l'effort qu'exerce le manipulateur sur son environnement et la position de l'effecteur, sans spécifier explicitement cet effort. Cependant deux familles de commandes sont envisageables selon qu'on dispose ou non d'une mesure d'effort.

D'autres approches furent aussi proposées dans ce cadre (*compliance active*), citons la commande par raideur active développée par Salisbury, et la commande par amortissement de Whitney qui ne sont en fait que des cas particuliers de la commande en impédance.

Ces approches rappellent le, ne posent pas de spécification sur le type de commande utilisée. On peut donc synthétiser une commande classique de type PID, ou même une commande robuste, adaptative ou optimale.

Une commande adaptative constitue un bon choix, car souvent les paramètres du robot sont variés dans le temps. Par exemple du fait des changements de charge, de configuration ou de vitesse de mouvement.

D'autre part, les tâches réalisées par les robots sont généralement spécifiées dans l'espace cartésien, soit par rapport à l'effecteur terminal, ou autre repère d'intérêt. On évite donc la

difficulté d'expression des points dans l'espace articulaire, mais cela rajoute une contrainte supplémentaire. Le passage par certains points dits de singularité intrinsèque n'est pas permis, Il faut donc s'assurer que les points transmis sont exclus de l'ensemble des points singuliers.

Toutefois, l'implémentation d'une commande nécessite une bonne modélisation du robot. En plus, une modélisation de l'environnement devient nécessaire, surtout dans le cas où l'information de retour de force n'est pas disponible (absence de capteur de force). Ce problème est encore posé lorsqu'on veut faire de la simulation.

La problématique de la commande des manipulateurs se résume en la détermination des couples généralisés que les actionneurs d'axes doivent développer afin de garantir l'exécution d'une tâche tout en satisfaisant un cahier de charge donné.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le **chapitre 1** nous entamerons une modélisation du manipulateur PUMA 560. L'obtention des différents modèles du manipulateur nécessitant quelques outils mathématiques, ces derniers seront furtivement énoncés et explicités en annexe.

Ensuite, nous enchaînerons avec une modélisation de l'environnement avec lequel le manipulateur entrera en contact, on essaiera aussi de prendre en compte le phénomène d'impact.

Dans le **chapitre 2** nous présenterons un sommaire des stratégies de commandes, et discuterons les différentes approches proposées dans le contexte des applications robotiques nécessitant interaction avec l'environnement.

Dans le **chapitre 3** la problématique de la commande hybride parallèle du PUMA 560 est traitée. Ce chapitre est subdivisé en trois parties. La première est consacrée au principe de la commande. La deuxième, à la commande du PUMA 560 réalisant une tâche dans le plan. Et la troisième, à la commande avec tâche dans l'espace tridimensionnel. Chacune des deux dernières parties sont accompagnées de simulations comparatives des commandes appliquées.

# CHAPITRE

# 1

## MODELISATION : LE PUMA 560 ET SON ENVIRONNEMENT

### 1.1. INTRODUCTION:

La modélisation des robots manipulateurs a suscité un nombre considérable d'études tant au niveau géométrique et cinématique qu'au niveau dynamique. Elle permet essentiellement la détermination des relations directes et inverses entre les coordonnées généralisées et les coordonnées cartésiennes et leurs dérivées respectives.

Dans ce chapitre, on commence par donner une description du manipulateur considéré, le PUMA 560, puis on développe ses modèles mathématiques, en l'occurrence :

- le modèle géométrique direct, qui permet de donner la position et l'orientation de l'effecteur terminal à partir des variables articulaires.
- le modèle géométrique inverse, qui permet de déterminer les variables articulaires correspondant à une position et orientation de l'effecteur terminal.
- le modèle cinématique direct qui permet d'exprimer les vitesses (resp. forces) cartésiennes en fonction des vitesses (resp. forces) articulaires.
- le modèle cinématique inverse qui permet de traiter le problème inverse.
- le modèle dynamique du manipulateur, incluant la modélisation de ces actionneurs.

## 1.2. DESCRIPTION DU PUMA 560 :

Les robots de la gamme PUMA sont probablement les plus répandus dans les universités et constituent les robots d'assemblage les plus utilisés dans l'industrie.

PUMA signifie **P**rogrammable **U**niversal **M**achine for **A**ssembly, conçu par Vic Schienman et financé par General Motors au Massachusetts Institute of Technology au milieu des années 70. Il fut produit pendant de nombreuses années par Unimation, société qui fut rachetée plus tard par Westinghouse, avant d'être revendue à Staubli, une grande société suisse de robotique.

Le PUMA 560 est un robot manipulateur à six articulations rotoïdes lui conférant six degrés de liberté. À ce titre, il est non redondant dans l'espace tridimensionnel, car c'est là le nombre minimum de degrés de liberté nécessaires pour placer arbitrairement un corps dans l'espace : trois pour la position et trois pour l'orientation.

La morphologie de ce manipulateur ressemble beaucoup à celle d'un bras humain, il fait partie des manipulateurs dits anthropomorphiques.



Figure 1.1. PUMA 560

### 1.3. MODELISATION DU PUMA 560:

Cette partie traite du calcul des différents modèles mathématiques.

#### 1.3.1. Modèle géométrique direct : (*forward kinematics*)

Le modèle géométrique direct permet d'exprimer la position et l'orientation de l'effecteur terminal relativement à un repère fixe (par exemple celui de la base,  $R_0$ ), en fonction des variables articulaires  $q_1, q_2, \dots, q_n$  du mécanisme, sans considération des forces produisant le mouvement.

En d'autres termes, il consiste à trouver la fonction  $f$  telle que :

$$X = \begin{pmatrix} P(q) \\ R(q) \end{pmatrix} = f(q) \quad (1.1)$$

où  $P(q) \in \mathbb{R}^3$  représente la position cartésienne de l'effecteur terminal, et  $R(q) \in SO(3)$  représente la rotation du repère de l'effecteur relativement à celui de la base, dont les éléments sont les cosinus directeurs.

Cette description géométrique est essentiellement basée sur la position relative ou absolue des différents corps du robot dans l'espace. Il est alors nécessaire de choisir des méthodes pour :

- décrire les transformations de coordonnées et leur composition afin de placer les différents corps dans l'espace ;
- obtenir une notation cohérente et universelle pour paramétrer la structure articulée.

En robotique, l'utilisation de matrices homogènes pour décrire les transformations entre repères est très courante, car elle permet la représentation de n'importe quelle transformation, translation ou rotation, avec un nombre minimal d'opérations.

Aussi, l'assignation des repères aux différents composants du robot, nécessite l'adoption d'une certaine méthode de description. On peut citer, la notation de Seth-Uiker, la notation de

Khalil-Kleinfinger, et la notation de Denavit-hartenberg, dont on utilisera la version modifiée selon Craig.

L'expression générale de cette transformation est obtenue par une succession de 4 transformations élémentaires entre deux repères  $R_i$  et  $R_{i-1}$  :

1. Translation le long de  $z$  d'une longueur  $d_i$  ;
2. Rotation autour de  $z$  d'un angle  $\theta_i$  ;
3. Translation le long de  $x$  d'une longueur  $a_{i-1}$  ;
4. Rotation autour de  $x$  d'angle  $\alpha_{i-1}$  ;

${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_{i-1}) \cdot Trans(x, a_{i-1}) \cdot Rot(z, \theta_i) \cdot Trans(z, d_i)$ , ce qui donne :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

**Remarque :** Pour les manipulateurs dont les articulations sont toutes rotoïdes (cas du PUMA 560), la coordonnée généralisée  $q$  est notée  $\theta$ .

Pour le PUMA 560 dans sa configuration complète, l'assignation des repères est telle qu'indiquée sur la figure (1.2).

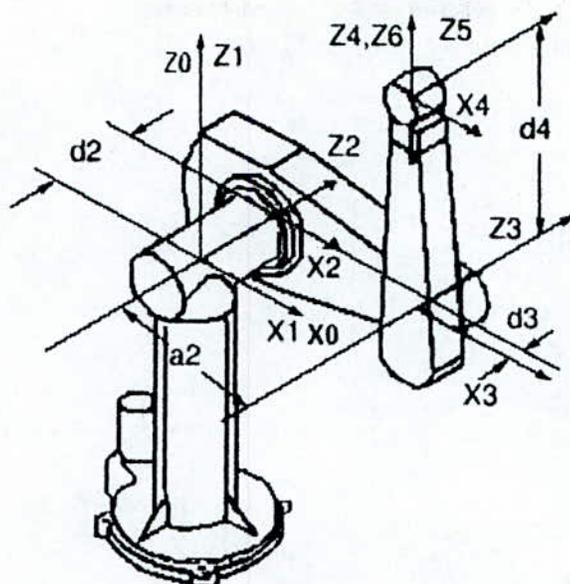


Figure 1.2 PUMA 560 à la position zéro

Ainsi, les paramètres D-H modifiés sont donnés dans le tableau (1.1).

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0.2435	$\theta_2$
3	0	0.4318	-0.0934	$\theta_3$
4	$90^\circ$	-0.0203	0.4331	$\theta_4$
5	$-90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$90^\circ$	0	0	$\theta_6$

Tableau 1.1 paramètres de D-H modifiés  
du PUMA 560

Les transformations entre repères sont obtenues en exploitant l'expression générale (1.2),  
d'où :

- ${}^0T_1$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_1, \alpha_{i-1} = 0, a_{i-1} = 0, d_i = 0$

$${}^0T_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.3)$$

- ${}^1T_2$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_2, \alpha_{i-1} = -90^\circ, a_{i-1} = 0, d_i = d_2$

$${}^1T_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.4)$$

- ${}^2T_3$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_3, \alpha_{i-1} = 0, a_{i-1} = a_2, d_i = d_3$

$${}^2T_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.5)$$

- ${}^3T_4$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_4, \alpha_{i-1} = 90^\circ, a_{i-1} = a_3, d_i = d_4$

$${}^3T_4 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.6)$$

- ${}^4T_5$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_5, \alpha_{i-1} = -90^\circ, a_{i-1} = 0, d_i = 0$

$${}^4T_5 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.7)$$

- ${}^5T_6$  est obtenue pour :  $\theta_i = \theta_6$ ,  $\alpha_{i-1} = 90^\circ$ ,  $a_{i-1} = 0$ ,  $d_i = 0$

$${}^5T_6 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.8)$$

- ${}^6T_E$  est obtenue par simple translation du repère  $R_6$  de  $l_6$  selon l'axe des  $z$ .

$${}^6T_E = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.9)$$

En utilisant les propriétés des transformations homogènes, on obtient le modèle géométrique direct du manipulateur par :

${}^0T_E = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_E$ , ou sous forme compacte :

$${}^0T_E = {}^0T_3 \cdot {}^3T_6 \cdot {}^6T_E \quad (1.10)$$

$${}^0T_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & -s_1(d_2 + d_3) + c_1c_2a_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & c_1(d_2 + d_3) + s_1c_2a_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.11)$$

$${}^3T_6 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -d_4 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.12)$$

$${}^0T_E = \left[ \begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^0R_E(\theta) & \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.13)$$

où :

$$r_{11} = c_1 c_{23} \cdot (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_1 s_{23} s_5 c_6 - s_1 \cdot (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) ;$$

$$r_{12} = -c_1 c_{23} \cdot (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_1 s_{23} s_5 s_6 - s_1 \cdot (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) ;$$

$$r_{13} = c_1 c_{23} c_4 s_5 + c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 ;$$

$$r_{21} = s_1 c_{23} \cdot (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_1 s_{23} s_5 c_6 + c_1 \cdot (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) ;$$

$$r_{22} = -s_1 c_{23} \cdot (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_1 s_{23} s_5 s_6 + c_1 \cdot (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) ;$$

$$r_{23} = s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5 ;$$

$$r_{31} = -s_{23} \cdot (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 ;$$

$$r_{32} = s_{23} \cdot (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 ;$$

$$r_{33} = -s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5 .$$

$$P_x = -s_1 \cdot (d_2 + d_3) + c_1 c_2 a_2 + c_1 c_{23} \cdot (a_3 + c_4 s_5 l_6) + c_1 s_{23} \cdot (d_4 + c_5 l_6) - s_1 s_4 s_5 l_6 ;$$

$$P_y = c_1 \cdot (d_2 + d_3) + s_1 c_2 a_2 + s_1 c_{23} \cdot (a_3 + c_4 s_5 l_6) + s_1 s_{23} \cdot (d_4 + c_5 l_6) + c_1 s_4 s_5 l_6 ;$$

$$P_z = -s_2 a_2 - s_{23} \cdot (a_3 + c_4 s_5 l_6) + c_{23} \cdot (d_4 + c_5 l_6) .$$

Pour spécifier une rotation, la matrice  ${}^0R_z(\theta)$  présente un nombre surabondant de paramètres (neuf) qui doivent être reliés par les six contraintes exprimant que le repère est orthonormé. On peut donc, en pratique, ne spécifier que trois paramètres [Liégeois].

Il existe plusieurs méthodes pour décrire l'orientation, par exemple les angles d'Euler, les angles de Roulis-Tangage-Lacet et les quaternions.

On choisit d'utiliser la représentation de l'orientation par les angles d'Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , selon la paramétrisation  $(zyz)$ , qui correspondent à [Craig 89] :

- une rotation du repère  $R_0$  par rapport à l'axe  $z_0$  d'un angle  $\alpha$ , définissant le repère  $R'_0$  ;
- une rotation du repère  $R'_0$  par rapport à l'axe  $y'_0$  d'un angle  $\beta$ , définissant le repère  $R''_0$  ;
- une rotation du repère  $R''_0$  par rapport à l'axe  $z''_0$  d'un angle  $\gamma$ .

La matrice de rotation associée à cette paramétrisation est donnée par [Craig 89] :

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

par identification avec la matrice  ${}^0R_E(\theta)$ , on obtient :

- 1<sup>er</sup> cas :  $\sin \beta \neq 0$

$$\begin{cases} \beta = A \tan 2(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}) \\ \alpha = A \tan 2(r_{23} / s\beta, r_{13} / s\beta) \\ \gamma = A \tan 2(r_{32} / s\beta, -r_{31} / s\beta) \end{cases} \quad (1.15)$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $\sin \beta = 0$

- $\beta = 0$  :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = A \tan 2(-r_{12}, r_{11}) \end{cases} \quad (1.16)$$

- $\beta = \pi$  :

$$\begin{cases} \beta = \pi \\ \alpha = 0 \\ \gamma = A \tan 2(r_{12}, -r_{11}) \end{cases} \quad (1.17)$$

Etant donné cette représentation de l'orientation, le modèle géométrique direct s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} P(\theta) \\ o(\theta) \end{pmatrix} = f_1(\theta) \quad (1.18)$$

avec :

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad o(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Partant de la connaissance du modèle géométrique direct nous abordons dans la section suivante le problème inverse.

### 1.3.2. Modèle géométrique inverse :

Le modèle géométrique direct d'un robot permet de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'effecteur terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'effecteur terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI). Il existe plusieurs méthodes pour le calcul du MGI [Khalil 99] :

- la méthode analytique [Craig 89] ;
- la méthode de Paul;
- la méthode de Pieper ;
- la méthode de Raghavan et Roth.

**Remarque :** lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques.

Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

- a- absence de solutions lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degré de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments ;
- b- infinité de solutions lorsque :
  - le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ;
  - le robot se trouve dans certaines configurations singulières ;
- c- solutions en nombre fini, exprimée par un ensemble de vecteurs  $\{q^1, \dots, q^r\}$ . On dit qu'un robot manipulateur est résolvable lorsqu'il est possible de calculer toutes les

configurations permettant d'atteindre une situation donnée. Pour le PUMA 560, le nombre maximum de solutions est de huit [Khalil 99] [Craig 89].

Pour le calcul du MGI du PUMA 560, on utilise la méthode de Craig [Craig 89] :

Afin de simplifier les calculs, on ramène le problème au niveau du poignet c'est-à-dire au niveau du repère  $R_6$  :

$${}^0T_E = {}^0T_6 \cdot {}^6T_E = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & w_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & w_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & w_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} + l_6 \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - l_6 \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

On veut résoudre :

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & w_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & w_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & w_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$= {}^0T_1(\theta_1) \cdot {}^1T_2(\theta_2) \cdot {}^2T_3(\theta_3) \cdot {}^3T_4(\theta_4) \cdot {}^4T_5(\theta_5) \cdot {}^5T_6(\theta_6)$$

pour  $\theta_i$   $i = \overline{1,6}$

Une reformulation de l'équation (1.22), qui met le premier membre de l'équation uniquement en fonction de  $\theta_1$  est :

$$[{}^0T_1]^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^1T_6 \quad (1.23)$$

où :

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & | & {}^1P_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & | & {}^1P_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & | & {}^1P_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$${}^1r_{11} = c_{23}c_4c_5c_6 - c_{23}s_4s_6 - s_{23}s_5c_6$$

$${}^1r_{12} = -c_{23} \cdot (c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6$$

$${}^1r_{13} = c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5$$

$${}^1r_{21} = s_4c_5c_6 + c_4s_6$$

$${}^1r_{22} = -s_4c_5s_6 + c_4c_6$$

$${}^1r_{23} = s_4s_5$$

$${}^1r_{31} = -s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6$$

$${}^1r_{32} = s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6$$

$${}^1r_{33} = -s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5$$

$${}^1P_x = c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2$$

$${}^1P_y = d_2 + d_3$$

$${}^1P_z = -s_{23}a_3 + c_{23}d_4 - a_2s_2$$

et

$${}^0T_1^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & | & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

ce qui donne :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} c_1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & w_x & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & w_y & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & w_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2 & 0 & 0 \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & d_2 + d_3 & 0 & 0 \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & -s_{23}a_3 + c_{23}d_4 - a_2s_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1.26)$$

par identification des éléments (2,4) des deux membres de (1.26), on obtient :

$$-s_1 w_x + c_1 w_y = d_2 + d_3 \quad (1.27)$$

on pose :

$$\begin{aligned} w_x &= \rho \cos \varphi \\ w_y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.28)$$

où  $\rho = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$  et  $\varphi = A \tan 2(w_y, w_x)$

en remplaçant (1.28) dans (1.27), on obtient :

$$c_1 s_\varphi - s_1 c_\varphi = \frac{d_2 + d_3}{\rho} \quad (1.29)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \theta_1) &= \frac{d_2 + d_3}{\rho} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{(d_2 + d_3)^2}{\rho^2}} \\ \varphi - \theta_1 &= A \tan 2 \left( \frac{d_2 + d_3}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{(d_2 + d_3)^2}{\rho^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Finalement, on obtient pour  $\theta_1$  l'expression :

$$\theta_1 = A \tan 2(w_y, w_x) - A \tan 2 \left( d_2 + d_3, \pm \sqrt{w_x^2 + w_y^2 - (d_2 + d_3)^2} \right) \quad (1.31)$$

↓  $\theta_1$  possède deux solutions selon le signe de  $\sqrt{w_x^2 + w_y^2 - (d_2 + d_3)^2}$ .

$\theta_1$  étant connu, le membre de gauche de l'équation (1.26) est connu. De même, on obtient par identification des éléments (1,4) et (3,4) des deux membres de (1.26) :

$$c_1 w_x + s_1 w_y = c_{23} a_3 + s_{23} d_4 + c_2 a_2 \quad (1.32)$$

$$-P_z = s_{23} a_3 - c_{23} d_4 + a_2 s_2 \quad (1.33)$$

En élevant au carré les deux dernières équations {(1.32) et (1.33)}, et en faisant la somme, on obtient :

$$a_3 c_3 + d_4 s_3 = k \quad (1.34)$$

$$k = (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2 - (d_2 + d_3)^2) / 2a_2 \quad (1.35)$$

$$\theta_3 = -A \tan 2(a_3, d_4) + A \tan 2\left(k, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}\right) \quad (1.36)$$

↓  $\theta_3$  possède deux solutions selon le signe de  $\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}$ .

Considérons de nouveau l'équation (1.22), on peut la réécrire de telle sorte que le premier membre soit fonction uniquement des variables connues et de  $\theta_2$  :

$$[{}^0T_3(\theta_2)]^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^3T_6 \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -c_3 a_2 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & s_3 a_2 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -(d_2 + d_3) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & w_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & w_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & w_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & -d_4 \\ s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 c_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.38) \end{aligned}$$

par identification des éléments (1,4) et (2,4) des deux membres de (1.38), on obtient :

$$c_{23} \cdot (c_1 w_x + s_1 w_y) - s_{23} w_z - a_2 c_3 = a_3 \quad (1.39)$$

$$-s_{23} \cdot (c_1 w_x + s_1 w_y) - c_{23} w_z + a_2 s_3 = -d_4 \quad (1.40)$$

d'où :

$$s_{23} = \frac{-(a_3 + a_2 c_3) \cdot w_z + (c_1 w_x + s_1 w_y) \cdot (a_2 s_3 + d_4)}{w_z^2 + (c_1 w_x + s_1 w_y)^2} \quad (1.41)$$

$$c_{23} = \frac{w_z \cdot (a_2 s_3 + d_4) + (a_3 + a_2 c_3) \cdot (c_1 w_x + s_1 w_y)}{w_z^2 + (c_1 w_x + s_1 w_y)^2} \quad (1.42)$$

$$\theta_2 = A \tan 2(s_{23}, c_{23}) - \theta_3 \quad (1.43)$$

↓  $\theta_2$  possède 4 solutions, résultant des 4 combinaisons possibles de  $\theta_1$  et  $\theta_3$ .

on procède de la même façon pour trouver  $\theta_4$  :

$$s_4 s_5 = -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} \quad (1.44)$$

$$c_4 s_5 = c_1 c_{23} r_{13} + s_1 c_{23} r_{23} - s_{23} r_{33} \quad (1.45)$$

tant que  $s_5 \neq 0$ ,  $\theta_4$  est donné par :

$$\theta_4 = A \tan 2(s_4 s_5, c_4 s_5) \quad (1.46)$$

**Remarque :** dans le cas où  $s_5 = 0$ , le manipulateur est dans une configuration singulière dans laquelle les axes des articulations 4 et 6 engendrent le même mouvement du dernier segment.

Considérons de nouveau l'équation (1.22), on peut la réécrire de telle sorte que le premier membre soit fonction uniquement des variables connues:

$$[{}^0T_4]^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^4T_6 \quad (1.47)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4 & s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4 & -s_{23} c_4 & -(c_4 a_3 + s_4 (d_2 + d_3) + c_4 c_3 a_2) \\ -c_1 s_{23} s_4 - s_1 c_4 & -s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4 & s_{23} s_4 & s_4 (a_3 + c_3 a_2) - c_4 (d_2 + d_3) \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & c_{23} & -d_4 + s_3 a_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & w_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & w_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & w_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

par identification des éléments (1,3) et (3,3) des deux membres de l'équation (1.48) :

$$s_5 = r_{13} \cdot (c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4) + r_{23} \cdot (s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) - r_{33} s_{23} c_4 \tag{1.49}$$

$$c_5 = r_{13} c_1 s_{23} + r_{23} s_1 s_{23} + r_{33} c_{23} \tag{1.50}$$

$$\theta_5 = A \tan 2(s_5, c_5) \tag{1.51}$$

L'application de la même procédure donne :

$$[{}^0T_5]^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^5T_6 \tag{1.52}$$

où :

$$[{}^0T_5]^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0R_5^{-1} & \bar{P} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

avec :

$${}^0R_5^{-1} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} s_5 - c_5 s_4 s_1 + c_{23} c_5 c_1 c_4 & s_4 c_5 c_1 - s_1 s_{23} s_5 + c_{23} c_5 s_1 c_4 & -s_{23} c_4 c_5 - c_{23} s_5 \\ -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 + s_1 s_4 s_5 & -s_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 & s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ -c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4 & -s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4 & s_{23} s_4 \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot (s_5 s_3 - c_3 c_4 c_5) - c_5 c_4 a_3 - c_5 s_4 \cdot (d_2 + d_3) + s_5 d_4 \\ a_2 \cdot (c_5 s_3 + c_3 c_4 s_5) + s_5 c_4 a_3 + s_5 s_4 \cdot (d_2 + d_3) + c_5 d_4 \\ s_4 c_3 a_2 + s_4 a_3 - c_4 \cdot (d_2 + d_3) \end{bmatrix} \tag{1.55}$$

par identification des éléments des deux membres de l'équation (1.52):

$$s_6 = -r_{11} \cdot (c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4) + r_{21} \cdot (-s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4 + r_{31} s_{23} s_4) \quad (1.56)$$

$$c_6 = -r_{12} \cdot (c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4) + r_{22} \cdot (-s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + r_{32} s_{23} s_4 \quad (1.57)$$

$$\theta_6 = A \tan 2(s_6, c_6) \quad (1.58)$$

**Remarque :** le nombre maximum de solutions pour le PUMA 560 est de huit [Craig 89]. En effet :

- 4 solutions : combinaisons des solutions de  $\theta_1$  et  $\theta_3$ .
- Pour chacune des premières solutions, il existe une autre solution dans laquelle les trois dernières articulations s'expriment par :

$$\begin{cases} \theta'_4 = \theta_4 + \pi \\ \theta'_5 = -\theta_5 \\ \theta'_6 = \theta_6 + \pi \end{cases} \quad (1.59)$$

### 1.3.3. Modèle cinématique direct :

#### 1.3.3.1. Modèle cinématique du premier ordre :

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires [Khalil 99]. Il est noté :

$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \quad (1.60)$$

où  $J(q)$  désigne la matrice jacobienne de dimension  $(m \times n)$  du mécanisme, égale à  $\frac{\partial X}{\partial q}$  et fonction de la configuration articulaire  $q$ . La même matrice jacobienne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires  $dq$ , soit :

$$dX = J(q) \cdot dq \quad (1.61)$$

L'intérêt de la matrice jacobienne est multiple :

- Elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettent de calculer une solution locale des variables articulaires  $q$  connaissant les coordonnées opérationnelles  $X$  ;
- En statique, on utilise le jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés par l'effecteur terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs ;
- Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

### Etude des singularités :

On appelle singularité une configuration particulière du robot pour laquelle le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal, qu'il est possible de commander, devient inférieur au nombre de degrés de liberté nominal du robot.

Pour rechercher ces configurations singulières, il existe deux approches. La première méthode que nous traitons ci-après, est une méthode analytique fondée sur l'étude des matrices jacobiennes du manipulateur. La seconde méthode est une méthode géométrique utilisant la géométrie de Grassmann [Chablat 98].

Si on note :

$$r = \text{rang} [J(q)] ; \text{ avec } r \leq \min(m, n)$$

Lorsque  $r < m$ , il devient impossible d'engendrer une vitesse et donc un mouvement le long ou autour de certaines directions. Le robot possède une configuration singulière d'ordre égale à  $m - r$ .

Pour le PUMA 560 il y a trois singularités, qui correspondent à :

$$\triangleright \sin(\theta_5) = 0$$

$$\triangleright (d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) = 0$$

$$\triangleright (s_{23} + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23}) = 0$$

Le calcul de la jacobienne peut se faire soit :

- par différentiation du modèle géométrique direct ;
- par un algorithme récursif ;
- par différentiation numérique.

Dans ce qui suit, on développe le modèle cinématique direct pour le PUMA 560, en utilisant la 2<sup>ème</sup> méthode, étant donné que la 1<sup>ère</sup> méthode est lourde en calcul et que la dernière ne permet pas d'obtenir une forme analytique.

La première méthode étant lourde en calcul, il ne sera explicité que la deuxième méthode.

Etant donné le vecteur de position et orientation de l'effecteur terminal défini par  $X = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ , sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{X} = [\dot{P}_x \ \dot{P}_y \ \dot{P}_z \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$$

Le vecteur  $\dot{X}$  est lié aux vitesses de translation et de rotation de l'effecteur terminal par la relation [Craig 89] [Khalil 99] :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_{yz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_{yz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot {}^0V_E \quad (1.62)$$

avec :

$$E_{yz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

$$\dot{P} = [\dot{P}_x \ \dot{P}_y \ \dot{P}_z]^T \text{ et } \omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$$

Le modèle cinématique est alors donné par :

$$\dot{X} = J(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad (1.64)$$

or :

$${}^0V_E = {}^0J_E \cdot \dot{\theta} \quad (1.65)$$

avec  ${}^0J_E$  est la jacobienne exprimant les vitesses réelles de l'effecteur terminal en fonction des vitesses articulaires [Khalil 99] [Craig 89].

en injectant l'équation (1.65) dans l'équation (1.64), on obtient :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_{zyz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot {}^0J_E \cdot \dot{\theta} \quad (1.66)$$

d'où :

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_{zyz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot {}^0J_E(\theta) \quad (1.67)$$

d'autre part :

$${}^0J_E(\theta) = \begin{bmatrix} I_3 & -{}^6\hat{P}_{6,E} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \cdot {}^0J_6(\theta) \quad (1.68)$$

qui découle de l'expression suivante des vitesses [Khalil 99]:

$$\begin{cases} {}^0V_E = {}^0V_6 + {}^0\omega_6 \times {}^6P_{6,E} \\ {}^0\omega_E = {}^0\omega_6 \end{cases} \quad (1.69)$$

où :

$${}^6\hat{P}_{6,E} = \times {}^6P_{6,E} = \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_6 & 0 \\ l_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

${}^6P_{6,E}$  représente la position de l'effecteur exprimée dans le repère  $R_6$ .

La jacobienne de base  ${}^0J_6(\theta)$  est calculée en utilisant l'algorithme récursif suivant [Spong 89] :

$${}^0J_{6,i} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (O_6 - O_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = \overline{2,6} \quad (1.70)$$

où :

${}^0J_{6,i}$  représente la  $i^{ème}$  colonne de  ${}^0J_6$

$z_{i-1} = {}^0R_{i-1} \cdot k$ , avec  $k = [0 \ 0 \ 1]^T$

$O_j$  La position de l'origine du repère  $R_j$ .

On obtient ainsi :

$${}^0J_6 = [{}^0J_{6,1} \ \dots \ {}^0J_{6,6}] \quad (1.71)$$

### 1.3.3.2. Modèle cinématique du deuxième ordre :

Le modèle cinématique du deuxième ordre permet de calculer les accélérations des coordonnées opérationnelles en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. Il est obtenu par dérivation du modèle (1.60) par rapport au temps [Khalil 99] :

$$\ddot{X} = J \cdot \ddot{q} + \dot{J} \cdot \dot{q} \quad (1.72)$$

où :

$$\dot{J}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} J(q) \quad (1.73)$$

**Remarque :** Le terme  $\dot{J} \cdot \dot{q}$  de l'équation (1.61), peut être calculé par un algorithme récursif [Khalil 99].

### 1.3.4. Modèle cinématique inverse :

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration  $q$  donnée, les vitesses articulaires  $\dot{q}$  qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle  $\dot{X}$  imposée. Cette définition est analogue à celle du modèle différentiel inverse : ce dernier permet de déterminer la différentielle articulaire  $dq$  correspondant à une différentielle opérationnelle  $dX$  spécifiée. Pour obtenir le modèle cinématique inverse, on inverse

le modèle cinématique direct en résolvant un système d'équations linéaires [Khalil 99]. La mise en œuvre peut être faite de façon analytique ou numérique.

Dans le cas régulier et si la matrice jacobienne est carrée, le modèle cinématique inverse a pour expression :

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \cdot \dot{X} \quad (1.74)$$

Ce modèle est défini tant que  $J^{-1}$  existe, sinon, le robot se trouve dans une configuration singulière.

Dans tous les cas où l'inverse  $J^{-1}$  n'existe pas, on cherche à formuler une matrice inverse généralisée qui fournit une solution "acceptable" et utile au problème. Le résultat dépend alors du choix de l'inverse généralisée qui produira une approximation de la solution selon des critères à définir [FLÜCKIGER 98]. Il existe donc une infinité d'inverses généralisées, mais la plus utilisée en robotique et la pseudo-inverse, notée  $J^+$ . Cette solution minimise en général la norme euclidienne  $\|\dot{q}\|^2$  et la norme de l'erreur  $\|\dot{X} - J(q) \cdot \dot{q}\|^2$  [Khalil 99].

Dans ce cas le modèle cinématique inverse a pour expression :

$$\dot{q} = J^+(q) \cdot \dot{X} \quad (1.75)$$

avec  $J^+ = (J^T \cdot J)^{-1} \cdot J^T \quad (1.76)$

### 1.3.5. Modèle dynamique :

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et /ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = D(q, \dot{q}, \ddot{q}, \mathbb{F}_e) \quad (1.77)$$

où  $\Gamma$  vecteur des couples des actionneurs,  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  vecteurs des positions, vitesses et accélérations articulaires.  $\mathbb{F}_e$  est le vecteur représentant l'effort extérieur (dû à l'interaction du robot avec son environnement).

La relation (1.77) qui représente le modèle dynamique inverse est communément appelée modèle dynamique.

Le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des vitesses, couples des actionneurs et des efforts externes. Il est donné par :

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, \Gamma, \mathbb{F}_e) \quad (1.78)$$

Les deux principaux formalismes utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots sont le formalisme de Newton-Euler (théorèmes généraux de la mécanique classique) et celui de Lagrange [Khalil 99] [Liégeois] [Craig 89] [Spong 89].

Pour le PUMA 560, on adopte le modèle proposé par Armstrong et al, dont l'expression est :

$$A(q) \cdot \ddot{q} + B(q) \cdot [\dot{q} \ \dot{q}] + C(q) \cdot [\dot{q}^2] + g(q) + J^T \cdot \mathbb{F}_e = \Gamma \quad (1.79)$$

où :

- $A(q)$  : est la matrice de dimension  $(n \times n)$  représentant l'inertie du robot ;
- $B(q)$  : est la matrice de dimension  $(n \times \frac{n-1}{2})$  représentant les couples de Coriolis ;
- $C(q)$  : est la matrice de dimension  $(n \times n)$  représentant les couples centrifuges ;
- $g(q)$  : est le vecteur de dimension  $n$  représentant les couples de gravité ;
- $J^T$  : désigne la jacobienne transposée.

Les symboles  $[\dot{q} \ \dot{q}]$  et  $[\dot{q}^2]$  sont des notations données par :

$$[\dot{q} \ \dot{q}] = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_1 \dot{q}_n \ \dot{q}_2 \dot{q}_3 \ \dot{q}_2 \dot{q}_4 \ \dots \ \dot{q}_{n-2} \dot{q}_n \ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n]^T ;$$

$$[\dot{q}^2] = [\dot{q}_1^2 \ \dot{q}_2^2 \ \dots \ \dot{q}_{n-1}^2 \ \dot{q}_n^2]^T$$

Ce modèle peut être augmenté afin de prendre en compte les frottements : Plusieurs études ont été réalisées afin de mieux analyser les frottements au niveau des articulations, des réducteurs et des transmissions. Les frottements non compensés provoquent en effet, des erreurs statiques, des retards et des cycles limites. Différents modèles de frottements ont été proposés dans la littérature, en l'occurrence celui de Armstrong [Armstrong 88] :

$$\Gamma_{f,i} = F_{s,i} \cdot \text{Sign}(\dot{q}_i) + F_{v,i} \cdot \dot{q}_i + F_{e,i} \cdot e^{-|\dot{q}_i|^{B_i}} \cdot \text{Sign}(\dot{q}_i) \quad (1.80)$$

Dans cette expression, le couple de frottement de l'articulation  $i$  est noté  $\Gamma_{f,i}$ , et les termes  $F_{s,i}$  et  $F_{v,i}$  désignent respectivement les coefficients de frottement sec et visqueux de l'articulation  $i$  ; le couple statique de démarrage est donné par  $(F_{s,i} + F_{e,i}) \cdot \text{Sign}(\dot{q}_i)$ .

Ou sous forme matricielle :

$$\Gamma_f = \text{Diag}[\text{Sign}(\dot{q})] \cdot F_s + \text{Diag}(\dot{q}) \cdot F_v \quad (1.81)$$

On utilisera dans la suite, une forme compacte du modèle augmenté :

$$\Gamma = A(q) \cdot \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + J^T \cdot F_e \quad (1.82)$$

$$\text{où : } H(q, \dot{q}) = B(q) \cdot [\dot{q} \dot{q}] + C(q) \cdot [\dot{q}^2] + g(q) + \Gamma_f \quad (1.83)$$

regroupe les couples de Coriolis, centrifuges, gravitationnels et de frottements.

## 1.4. MODELISATION DE L'ENVIRONNEMENT :

Maintenant qu'un modèle du manipulateur a été obtenu, on s'intéresse à la modélisation de l'environnement avec lequel il entrera en interaction.

La prise en compte des dynamiques de l'environnement, nous permet en plus d'étudier le comportement de ce dernier face à des efforts externes, d'obtenir des mesures sur les forces d'interaction mises en jeu.

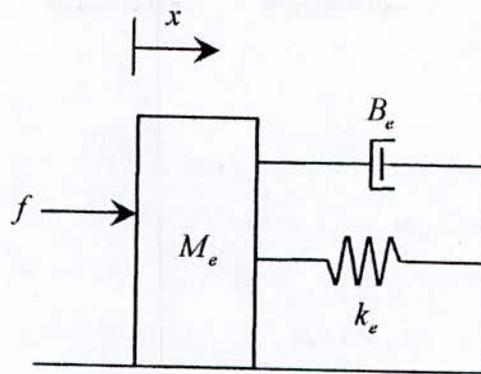


Figure 1.3 Système masse-amortissement-ressort

Considérons un système simplifié représenté par la figure (1.3), où l'effecteur terminal applique une force sur l'environnement selon la direction  $x$ . L'environnement est modélisé par un système du second ordre consistant en une masse  $M_e$ , une raideur  $k_e$  et un amortissement  $B_e$ .

L'équation gouvernant le comportement de ce système est alors :

$$M_e \cdot \ddot{x} + B_e \cdot \dot{x} + k_e \cdot x = f - f^p \quad (1.84)$$

où  $f$  est la force exercée par la pointe de l'effecteur terminal, et  $f^p$  une force de perturbation.

En l'absence de perturbations, et en supposant la force mesurée équivalente à la force de réaction, la force qu'exerce le manipulateur sur l'environnement est donnée par :

$$f_m = M_e \cdot \ddot{x} + B_e \cdot \dot{x} + k_e \cdot x \quad (1.85)$$

Dans le cadre de notre étude, on ne traite pas le phénomène de l'impact et considérons que le manipulateur ne rebondit pas après être entré en contact avec la surface de l'environnement.

Afin de disposer de l'information de la force, on utilise l'artifice suivant :

Nous considérons un environnement rigide (ne se déplace pas), dans ce cas la force est l'image d'un déplacement virtuel selon la direction commandée en effort à un coefficient près (la raideur  $k_e$ ).

## **1.5. CONCLUSION :**

L'objectif de ce premier chapitre était d'aboutir à la formulation des différents modèles mathématiques du PUMA 560. Ces modèles mettent en évidence la difficulté de commander ce genre de systèmes, étant donné les fortes non linéarités qui régissent le fonctionnement dynamique de ceux-ci. Une modélisation de l'environnement est aussi effectuée afin d'étudier les effets des forces de contact lorsque le robot est amené à interagir avec l'environnement extérieur.

## CHAPITRE

## 2

**STRATEGIES DE COMMANDE DES  
MANIPULATEURS****2.1. INTRODUCTION :**

La commande des manipulateurs a fait l'objet de plusieurs années de recherche, et continue encore d'en faire cet objet. Cela est dû aux grandes difficultés posées par ce genre de systèmes, notamment :

- Les dynamiques hautement non linéaires du robot et éventuellement des actionneurs, incluant les effets inertiels, gravitationnels, centrifuges et de Coriolis, ainsi que les frottements, jeux, et flexibilités.
- L'existence de couplages entre les entrées et les sorties du système.
- Les paramètres variants dans le temps, par exemple du fait du changement de charge, de configuration, et de vitesse de mouvement.

Il existe plusieurs techniques différentes de commande, la plus appropriée étant déterminée selon l'application, et le manipulateur lui même. Par exemple, le problème de commande des manipulateurs cartésiens est différent de celui des manipulateurs anthropomorphiques.

Le type d'actionneurs utilisés joue aussi un rôle dans le choix de la stratégie de commande. Si le manipulateur est piloté par des moteurs électriques ayant des rapports de réduction élevés, cela tend à linéariser le système et ainsi découpler les articulations réduisant

de ce fait les nonlinéarités. Cependant, ce type de transmission engendre l'apparition de frottements, d'élasticité et de jeu (*backlash*), ce qui a pour effet de limiter les performances. L'utilisation d'actionneurs à transmission directe, permet d'éliminer ces inconvénients, mais les nonlinéarités et les couplages entre articulations deviennent significatifs.

Aussi, dans le cas où le robot est commandé en force, il est préférable d'éviter l'action dérivée car les mesures de force sont généralement bruitées.

Il convient alors, de prendre en compte tous ces facteurs et d'autres, afin de trouver la technique de commande la plus appropriée.

## **2.2. STRUCTURES DE COMMANDE :**

Généralement, la spécification des tâches que le robot est amené à exécuter (mouvements et forces de l'effecteur terminal) se fait dans l'espace opérationnel, tandis que les actions de commande (couples des actionneurs) sont entreprises dans l'espace articulaire. Il s'ensuit la classification des structures de commandes en deux catégories :

- structures de commande dans l'espace articulaire ;
- structures de commande dans l'espace cartésien.

Cette classification s'applique tout autant aux architectures de commande en force qu'à celles de commande en position. Cependant, il existe d'autres catégories de structures de commande associées à la commande en force, qui sont distinctes de celles de la commande en position.

### **2.2.1. Structures de commande dans l'espace articulaire :**

Une structure de commande dans l'espace articulaire, utilise un régulateur qui permet la poursuite de références données en termes de variables articulaires. Ces dernières sont obtenues à partir de références prescrites dans l'espace opérationnel, en passant par la géométrie et éventuellement la cinématique inverse du robot, qui sont des fonctions assez complexes et peuvent faire l'objet de singularités. Le robot constitue dans ce cas un système dont les entrées (resp. sorties) sont les couples (resp. variables) articulaires, et dont le modèle pouvant s'écrire :

$$\Gamma = A(q) \cdot \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + J^T \cdot \mathbb{F}_e \quad (2.1)$$

où :  $\Gamma$  représente le vecteur des couples articulaires ;

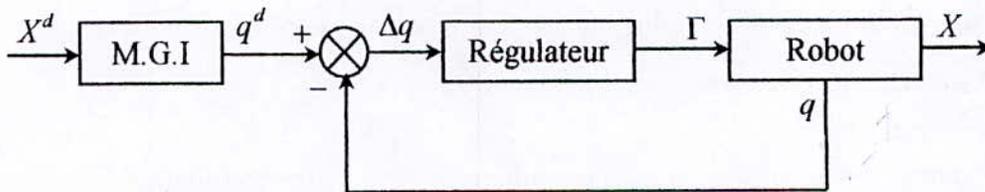
$\mathbb{F}_e$  force exercée par l'environnement ;

$q, \dot{q}, \ddot{q}$  représentent respectivement les positions, vitesses et accélérations articulaires ;

$A(q)$  est la matrice inertie du robot, et  $H(q, \dot{q})$  regroupe les couples de Coriolis, centrifuges, gravitationnels et de frottements.

Cette solution possède l'inconvénient de ne pas influencer directement les variables opérationnelles (en termes desquelles la tâche est définie) qui sont alors commandées en boucle ouverte. Il s'en suit que les incertitudes sur la structure (tolérance, calibration, élasticité) entraînent une perte de précision sur le positionnement du bras.

La figure (2.1) montre ce type de structures, où les positions cartésiennes désirées  $X^d$  sont transformées en variables articulaires désirées  $q^d$ , qui sont alors asservies selon la loi de commande implémentée dans le bloc régulateur.



**Figure 2.1** Structure de commande dans l'espace articulaire

Cette structure peut aussi être appliquée pour la commande des vitesses, mais dans ce cas la transformation requise est la cinématique inverse (ou jacobien inverse) du robot. Cela suppose une mesure des vitesses articulaires.

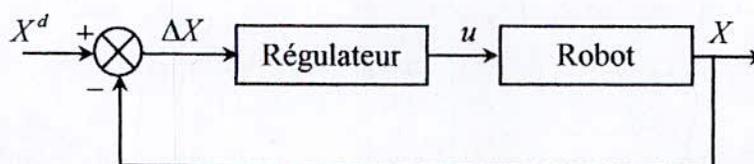
Dans le cas où la trajectoire désirée est définie en termes de position, vitesse et accélération, il est nécessaire de calculer la géométrie inverse, la cinématique inverse du premier et du second ordre afin d'avoir les variables correspondantes dans l'espace articulaire, ce qui constitue une lourde tâche. C'est pour cette raison, que certains systèmes de commande

industriels calculent les positions articulaires via la géométrie inverse, et procèdent ensuite à des dérivations numériques pour l'obtention des vitesses et accélérations.

**Remarque :** les trajectoires obtenues par apprentissages ne nécessitent pas le passage par la géométrie et la cinématique inverses.

### 2.2.2. Structures de commande dans l'espace cartésien :

Dans ce type de structures, les variables cartésiennes, positions ou vitesses, sont directement commandées, c'est-à-dire contrairement aux structures articulaires, le bouclage est réalisé sur les variables cartésiennes, figure (2.2).



**Figure 2.2** Structure de commande dans l'espace cartésien

Mais, cet avantage n'est que peu senti, car dans la plupart des cas, l'obtention des variables cartésiennes passe par le calcul de la géométrie directe (source d'imprécision), partant des variables articulaires mesurées.

En outre, ces structures présentent un coût en calculs considérable, ce qui peut être comparé aux transformations inverses requises dans les structures articulaires. Cependant, ces calculs sont effectués on-line, ce qui implique, pour une implémentation numérique, l'utilisation de périodes d'échantillonnage qui peuvent dégrader les performances du système de commande.

Au-delà de ces limitations, le recours à la commande dans l'espace cartésien devient intéressant et même nécessaire si l'on est confronté au problème de commande avec interaction entre le robot et son environnement. En effet, la commande dans l'espace des articulations suffit uniquement pour la commande en mouvements de robots évoluant dans l'espace libre [Sciavicco 96]. Quand un manipulateur est contraint par son environnement, par exemple, dans le cas de contact avec une surface déformable, il est nécessaire de commander,

et les positions et les forces de contact, et il convient de se référer aux structures de commande dans l'espace cartésien.

Les structures de commande dans l'espace cartésien sont basées sur une comparaison directe entre les entrées, spécifiant la trajectoire désirée, et les sorties du système. Deux façons de faire :

### 2.2.2.1. Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace articulaire :

Le système de commande doit incorporer les actions qui permettent de passer de l'espace cartésien, dans lequel les erreurs sont spécifiées, à l'espace articulaire, dans lequel les commandes, en termes de forces généralisées, sont développées.

Les relations entre les variables de l'espace cartésien et celles de l'espace articulaire sont données par :

$$X = f(q) \Rightarrow q = g(X) \quad (2.2)$$

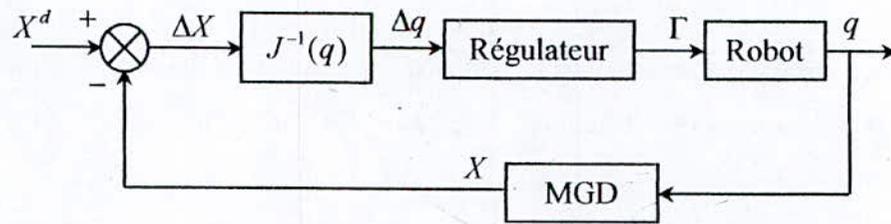
$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J(q)^{-1} \cdot \dot{X} \quad (2.3)$$

$$\ddot{X} = J(q) \cdot \ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \Rightarrow \ddot{q} = J(q)^{-1} \cdot (\ddot{X} - \dot{J}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}) \quad (2.4)$$

avec 
$$\dot{J}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} J(q) \quad (2.5)$$

Ces relations permettent de décrire la trajectoire à suivre dans l'espace articulaire pour une trajectoire donnée dans l'espace cartésien.

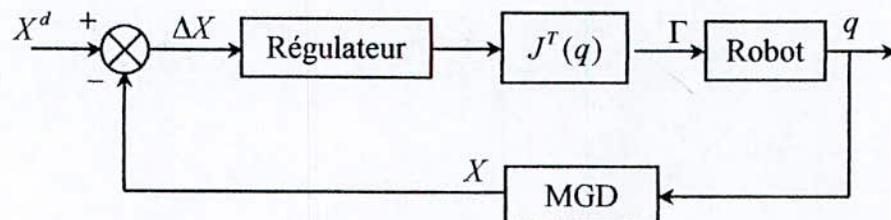
Une structure de commande possible, est la structure dite de commande par jacobien inverse *inverse jacobian control*, figure (2.3).



**Figure 2.3** Structure de commande par jacobien inverse

Dans cette structure, la position de l'effecteur terminal exprimée dans l'espace cartésien est comparée avec la valeur désirée correspondante, et ainsi, la déviation  $\Delta X$  est obtenue. Si on suppose que cette déviation est suffisamment petite,  $\Delta X$  peut être transformée en déviation articulaire  $\Delta q$  à travers l'inverse du jacobien du manipulateur (voir §1.3.4). Les couples généralisés à appliquer aux articulations sont alors calculés à la base de la déviation  $\Delta q$  via le bloc régulateur.

Une autre structure consiste à traiter d'abord l'erreur  $\Delta X$  par un régulateur, dont la sortie est considérée comme une force généralisée exprimée dans l'espace cartésien, et transformer ensuite cette dernière en force généralisée exprimée dans l'espace articulaire à travers le jacobien transpose, structure dite de commande par jacobien transpose, figure (2.4).



**Figure 2.4** Structure de commande par jacobien transpose

**Remarque :** Vu que les jacobiens inverse et transpose, varient avec la configuration du robot (robot en mouvement), le gain et la réponse du système en boucle fermée, sont affectés.

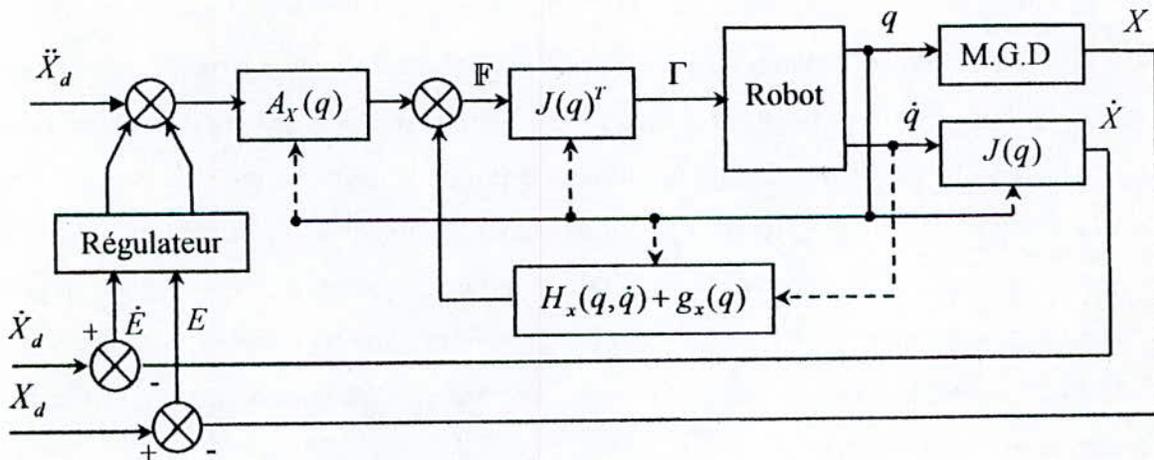
**2.2.2.2. Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace cartésien :**

Dans ce cas, la commande est calculée, non pas dans l'espace articulaire, mais dans l'espace cartésien en utilisant un modèle du robot dont les équations dynamiques sont décrites en termes de variables cartésiennes. Ce modèle peut être écrit :

$$\mathbb{F} = A_x(q) \cdot \ddot{X} + H_x(q, \dot{q}) + \mathbb{F}_e \tag{2.6}$$

où  $\mathbb{F}$  est l'image des couples aux actionneurs,  $\mathbb{F}_e$  représente le vecteur force-moment appliqué par l'effecteur terminal du robot, et  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$  les vecteurs représentant la position, vitesse et accélération de ce dernier. Par analogie à l'écriture de cette dynamique dans l'espace articulaire (2.1), la matrice  $A_x(q)$  représente l'inertie du robot écrite dans l'espace cartésien, le terme  $H_x(q, \dot{q})$  regroupe les forces de Coriolis, centrifuges, gravitationnels et de frottements.

Pour illustrer le principe de cette commande, nous donnons l'exemple de la commande par découplage non-linéaire décrit par le schéma bloc suivant :



**Figure 2.5** Commande dans l'espace cartésien avec correction dans l'espace cartésien

### 2.2.3. Structures de commande en force :

Les structures de commande en force sont nombreuses en robotique : depuis la fin des années 70, plusieurs travaux s'intéressent à celles-ci. Pour les présenter, les méthodes de classement sont différentes suivant les auteurs : Whitney, Gorinevsky et Dauchez parlent de commande implicite et explicite, [Sciavicco 96] préfère utiliser la notion de commande directe et indirecte, [Khalil 99] différencie celles avec ou sans consigne d'effort, [Dégoulange 93] utilise les termes de commande passive, active et mixte, alors que Yoshikawa ne les ordonne qu'en deux catégories impédance et hybride.

On choisit d'utiliser la classification de Khalil, en distinguant les structures avec consigne d'effort de celles sans consigne d'effort, pour présenter l'ensemble de ces commandes.

#### 2.2.3.1. Structures de commande sans consigne d'effort :

##### 2.2.3.1.1. Compliance passive :

La compliance passive repose sur l'utilisation d'une structure mécanique déformable sous l'action des efforts de contact. La variation de la géométrie de cette structure corrige en fait les erreurs de positionnement du robot. L'utilisation d'un tel mécanisme est généralement propre à la tâche à effectuer, ce qui constitue son principal inconvénient : après détermination de la matrice de raideur propre à la tâche (tenant compte de la raideur du robot et de l'environnement), le système mécanique présentant cette compliance est réalisé ; la position du centre de compliance est fixée une fois pour toutes et doit être adaptée à la pièce à insérer. La structure la plus connue est le *Remote Compliance Center* utilisée pour l'insertion de pièces dans des alésages.

La relation entre les efforts et les déformations est donnée par [Khalil 99] :

$$dX = C \cdot \mathbb{F}_e \quad (2.7)$$

où  $\mathbb{F}_e = [f_e^T \ m_e^T]^T$  représente le torseur des efforts dont la résultante est une force  $f$  et un moment  $m$  et  $dX$  le vecteur des déplacements différentiels.

La matrice  $C$  est la matrice de compliance de dimension  $(6 \times 6)$  dans le cas général. Elle est diagonale pour un point  $O_c$  appelé centre de compliance.

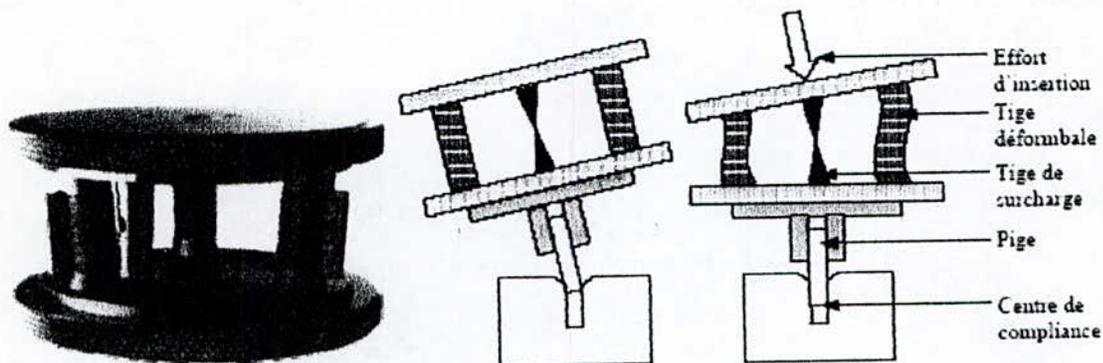


Figure 2.6 exemple d'un Remote Center Compliance

Depuis quelques années cependant, on trouve des *Variables Remote Center Compliance* en élastomère dont la raideur réglable, permet l'adaptation de ceux-ci à différentes tâches [Joo 96] : en effet, la présence de raidisseurs ajustables sur les tiges déformables permet de modifier la position du centre de compliance [Choi 01] et ainsi de pouvoir insérer des tiges de longueurs variables.

#### 2.2.3.1.2. Commande par raideur active :

Idee développée par Salisbury et appelée commande par raideur (*stiffness control*).

Dans cette méthode, on donne au robot le comportement d'un ressort dont la raideur est programmable. Cette raideur est ajustée afin de répondre aux besoins de diverses tâches à réaliser.

Un régulateur de position idéal possède une raideur infinie du moment qu'il rejette toute perturbation en force. Par contre, un régulateur de force idéal possède une raideur nulle du moment qu'il maintient le contact indépendamment de la position. Le concept de commande par raideur permet de spécifier la raideur du manipulateur entre ces deux extrêmes, en attribuant un grand gain aux directions commandées en position - gain limité par la bande passante du robot - et un faible gain aux directions commandées en effort.

Cette raideur est définie dans l'espace cartésien par rapport à un repère de compliance situé au niveau de l'effecteur terminal, et dont le centre est fixé en fonction de la tâche à accomplir. L'équation de la raideur :

$${}^c\mathbb{F}_{e,c} = K_c \cdot {}^c dX_c \quad (2.8)$$

est obtenue à partir de la généralisation de l'équation régissant le comportement d'un ressort soumis à une force  $f$  par rapport à une position initiale  $x_0$  d'équilibre dans laquelle  $f$  est nulle :

$$f = k \cdot (x - x_0).$$

Dans l'équation (2.8)  $K_c$  définit la matrice de raideur désirée, diagonale par rapport au repère  $R_c$ . Dans le cas général, elle est de dimension  $(6 \times 6)$ . L'effort  ${}^c\mathbb{F}_{e,c}$  et le déplacement différentiel  ${}^c dX_c$  étant calculés et exprimés dans le repère  $R_c$ .

**Remarque :** Dans la suite, on adoptera les notations simplifiées  $\mathbb{F}_e$  et  $dX$  pour désigner respectivement l'effort  ${}^c\mathbb{F}_{e,c}$  et le déplacement différentiel  ${}^c dX_c$ .

Pour une commande cartésienne avec correction dans l'espace cartésien, la loi de commande est directement donnée par l'expression (2.8). Le passage à une correction dans l'espace articulaire nécessite l'utilisation des transformations suivantes :

$$\Gamma = J^T \cdot \mathbb{F}_e \quad (2.9)$$

$$dX = J \cdot dq \quad (2.10)$$

$J$  est la matrice jacobienne du robot exprimant les transformations différentielles du repère de compliance.

En combinant les relations (2.9) et (2.10), on obtient une relation exprimant le vecteur  $\Gamma$  des couples des actionneurs en fonction des déplacements articulaires  $dq$  :

$$\Gamma = J^T \cdot K_c \cdot J \cdot dq = K_q \cdot dq \tag{2.11}$$

La relation (2.11) permet de déduire l'expression de la matrice de raideur articulaire  $K_q$  en fonction de la matrice de raideur cartésienne  $K_c$  :

$$K_q = J^T \cdot K_c \cdot J \tag{2.12}$$

La matrice de raideur articulaire  $K_q$  est symétrique mais non diagonale. Cela signifie qu'une erreur de position sur une articulation va affecter le couple aux actionneurs des autres articulations [Dégoulange 93].

La figure (2.6) donne le schéma de principe de cette commande. La loi de commande est donnée par :

$$\Gamma = K_q \cdot (q^d - q) + K_v \cdot (\dot{q}^d - \dot{q}) + Q \tag{2.13}$$

Le vecteur  $Q$  représentant les forces de compensation de la gravité et la matrice  $K_v$  pouvant être assimilée à une matrice d'amortissement apportant une meilleure stabilité.

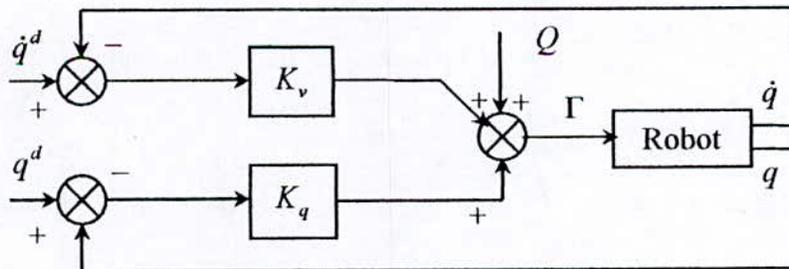


Figure 2.7 Commande par raideur active

L'avantage de la commande par raideur active est qu'elle est relativement simple à implémentée. La matrice de raideur est modifiable en ligne pour adapter le comportement du robot aux contraintes de la tâche.

### 2.2.3.1.3. Commande en impédance :

La commande en impédance est une stratégie qui consiste à commander la relation dynamique entre le robot et son environnement. La force exercée par le robot sur l'environnement dépend alors, de sa position et de son impédance [Volpe 90].

Généralement, cette relation est exprimée dans l'espace cartésien par :  $\mathbb{F} = \bar{Z}(X)$ .

En d'autres termes, elle consiste à réguler l'impédance de sortie du robot. Hogan [Hogan 85] a formalisé la notion d'impédance en la définissant comme une fonction de transfert  $Z$ , ce qui se traduit dans le domaine de Laplace par :

$$\mathbb{F}(s) = Z(s) \cdot dX(s) \quad (2.14)$$

où  $dX$  est un déplacement opérationnel à partir d'une position nominale  $X_0$ , et  $\mathbb{F}$  est la force produite en réponse au déplacement  $dX$ .

Le robot doit donc se comporter comme un système mécanique d'impédance  $Z$  variable en fonction des différentes phases de la tâche. En général, on suppose le robot équivalent à un système masse-amortissement-ressort du deuxième ordre, ce qui conduit à choisir pour  $Z(s)$  la fonction suivante :

$$Z(s) = \Lambda \cdot s^2 + B \cdot s + K \quad (2.15)$$

où,  $\Lambda$  est une matrice d'inertie,  $B$  est une matrice d'amortissement, et  $K$  est une matrice de raideur.

Les valeurs des paramètres de  $Z(s)$  sont choisis en fonction des performances souhaitées :

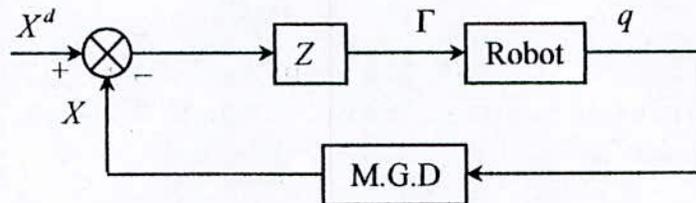
- On donne à  $\Lambda$  des valeurs élevées dans les directions où l'on attend un contact, afin de diminuer la dynamique du robot, c'est-à-dire assouplir la réponse du système ;
- Des valeurs importantes sont données à  $B$  quand il est nécessaire de dissiper de l'énergie cinétique et donc d'amortir la réponse ;
- La raideur  $K$  représente la précision avec laquelle on peut espérer satisfaire la commande en position : si on s'attend, par exemple, à rencontrer des contraintes physiques dans une certaine direction, la raideur dans cette direction doit être faible

pour limiter les forces de contact. Inversement, dans les autres directions, qui sont commandées en positions, la raideur doit être importante pour assurer un positionnement précis.

Dés lors, deux stratégies principales existent en fonction de la présence ou non d'un capteur d'effort [Khalil 99] :

La première consiste à mesurer la position pour en déduire l'effort exercé sur l'environnement en utilisant la relation (2.14) ;

La figure (2.7) présente une structure de la première famille :



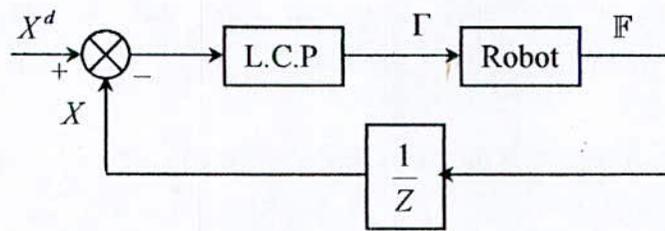
**Figure 2.8** Commande en impédance sans mesure de force

La seconde consiste à mesurer l'effort d'interaction et utiliser cette mesure pour modifier la position de consigne, compte tenu de l'impédance souhaitée.

Les mesures de la force sont converties en déplacements cartésiens en utilisant la relation suivante :

$$X(s) = \frac{F(s)}{Z(s)} \quad (2.16)$$

où  $Z(s)$  représente l'impédance désirée du robot selon la tâche à effectuer. Le principe de cette commande est décrit dans la figure (2.8).



**Figure 2.9** Commande en impédance avec mesure d'effort

**Remarque :** L'ordre de  $Z(s)$  doit être au plus égal à deux, vu la difficulté d'obtenir des mesures sur les variables dépassant cet ordre [Volpe 90].

### 2.2.3.2. Structures de commande avec consigne d'effort :

#### 2.2.3.2.1. Commande hybride force / position parallèle :

La commande hybride consiste à utiliser simultanément les informations d'effort et de position afin de satisfaire à la fois des contraintes sur les trajectoires en position et sur les efforts. Les directions qui sont contraintes en position sont commandées en effort, tandis que les directions qui sont contraintes en effort sont commandées en position ou en vitesse (dualité vitesse effort, [Khalil 99]). Ces contraintes sont définies dans un système de coordonnées fonction de la géométrie de la tâche (donc pas forcément attaché à l'effecteur terminal du robot). Ce principe est issu du formalisme de Mason et repose sur une description particulière de la tâche. On décompose la tâche en sous tâches élémentaires correspondant chacune à un ensemble différent de surfaces de contact. Pour chaque sous tâche, on définit une surface idéale (appelée C-surface) à partir de laquelle on exprime deux types de contraintes, les contraintes naturelles liées à la géométrie de la tâche, et les contraintes artificielles fixées par l'objectif à atteindre. Une C-surface de dimension 0 et représentée par un point et correspond à l'absence totale de liberté de mouvement. Une C-surface de dimension 6 représente l'espace  $R^6$  entier et correspond à un déplacement totalement libre. Cette C-surface, connexe et régulière dans tous les cas, représente la position à chaque instant du point matérialisant l'effecteur terminal du robot. Donc, le vecteur vitesse  $V$  de déplacement de l'effecteur terminal appartient à l'espace tangent à la C-surface. En négligeant

les forces tangentielles (notamment le frottement), le vecteur des efforts de contact  $\mathbb{F}$  appartient à l'orthogonal de l'espace tangent.

Raibert et Craig ont été les premiers à proposer un schéma de principe de commande hybride position/force respectant le formalisme de Mason et utilisant le partitionnement de l'espace.

Les schémas de commandes hybrides font ainsi apparaître deux boucles d'asservissement parallèles, l'une pour la position, l'autre pour l'effort. Du fait que chaque articulation contribue à la fois à la réalisation de la commande en position et de la commande en effort, les sorties de ces boucles sont sommées avant d'être envoyées au robot sous forme d'un vecteur de commande globale.

Pour éviter les conflits entre les commandes issues de chacun des asservissements au niveau des actionneurs on utilise une matrice de sélection diagonale notée  $S$ . Elle permet de désigner le type de commande, position ou force, associé à chaque direction du repère de compliance, figure (2.9). Dans le cas général :

$$S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_6) \tag{2.17}$$

Le terme  $s_i$  est égal à :

- 1 si le  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté de l'espace opérationnel est commandé en position ;
- 0 s'il est commandé en effort. Cette matrice dépend de la tâche.

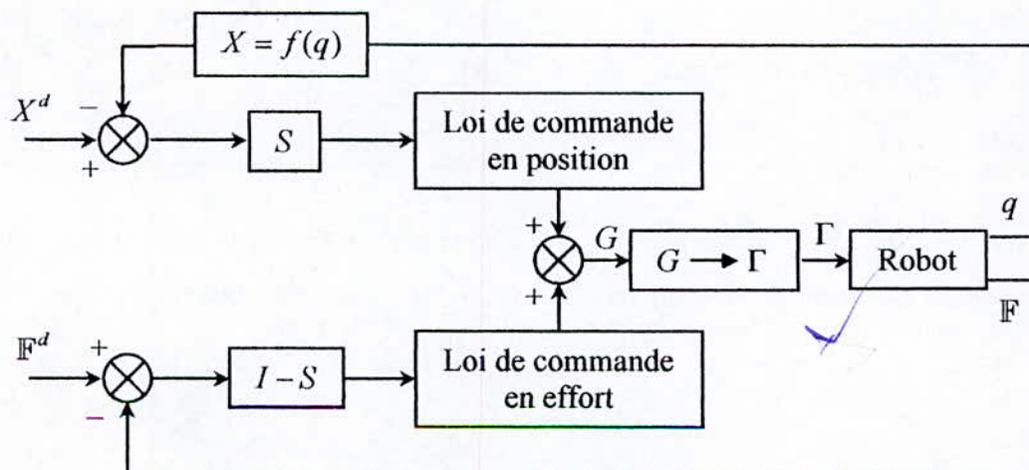
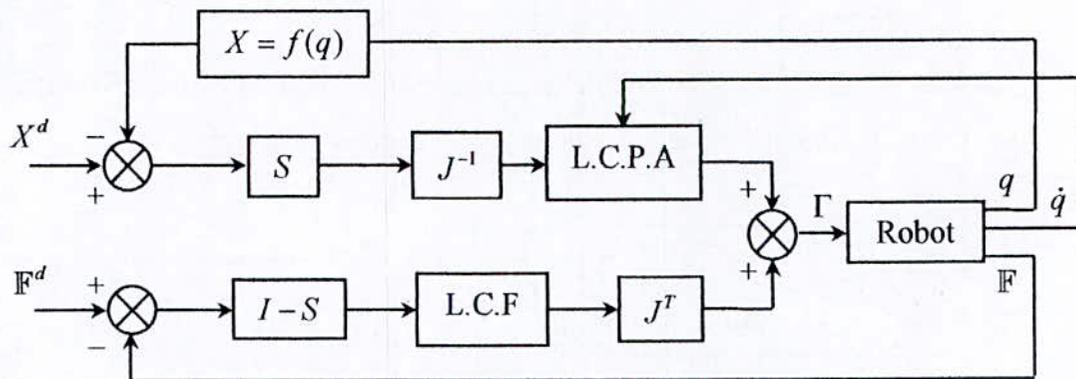


Figure 2.10 Organisation générale de la commande hybride force-position

On peut distinguer trois familles de commande selon le type des grandeurs  $G$  issues des deux boucles d'asservissement, et l'opérateur à mettre en œuvre pour traduire ces grandeurs en couples articulaires, figure (2.9) :

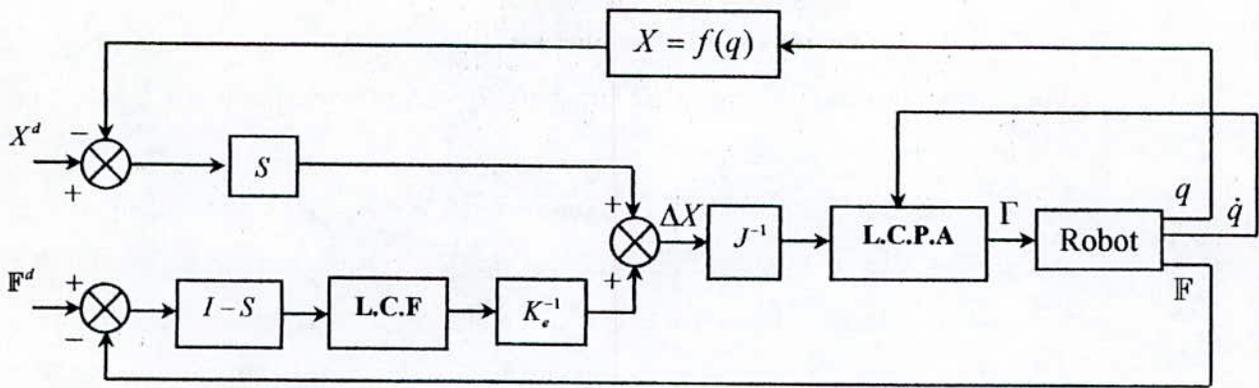
- Soit les grandeurs sont déjà des couples articulaires ;
- Soit ce sont des déplacements ou vitesses dans l'espace opérationnel que l'on multiplie par une jacobienne inverse pour les transformer en positions articulaires.  $\Gamma$  est alors la sortie d'asservissement en position articulaire ;
- Soit ce sont des efforts opérationnels que l'on multiplie par une jacobienne transposée.

Les schémas de commande des figures (2.10, 2.11, 2.12) sont des exemples représentatifs de chacune des familles. Dans ces schémas, les changements de repères éventuels pour les vitesses, les efforts ou pour la matrice jacobienne ne sont pas indiqués. Pratiquement, il faut faire en sorte que les opérateurs  $S$  et  $I-S$  agissent sur les composantes exprimées dans le repère de compliance.



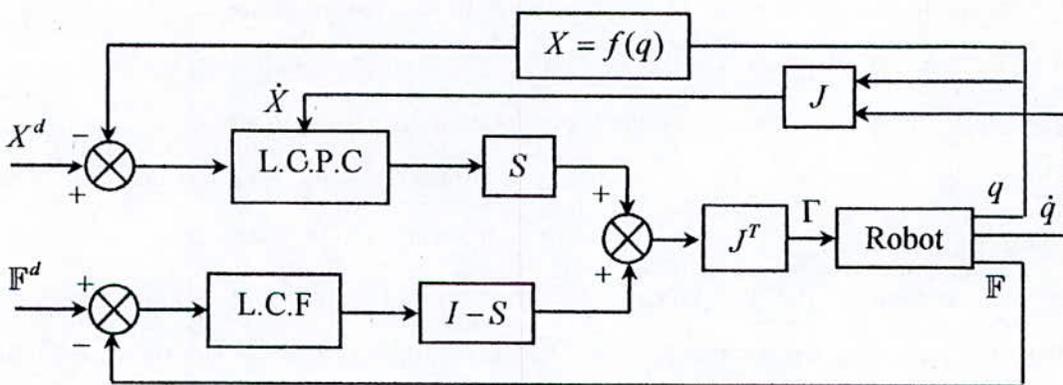
*L.C.P.A* : loi de commande en position articulaire ; *L.C.F* : loi de commande en force

**Figure 2.11** Commande hybride force position avec somme de couples articulaire (d'après Raibert)



*L.C.P.A : loi de commande en position articulaire ; L.C.F : loi de commande en force  
 $K_e$  : matrice de raideur de l'environnement*

**Figure 2.12** *Commande hybride force position avec somme de couples de vitesses*



*L.C.P.A : loi de commande en position cartésienne ; L.C.F : loi de commande en force*

**Figure 2.13** *Commande hybride force position avec somme de couples des efforts*

**Remarques :**

- Hormis le fait que ce type de commande est conceptuellement simple et s'applique parfaitement à un grand nombre de tâches (en jouant sur la matrice de sélection  $S$ ), on peut lui reprocher d'être lourd en temps de calcul. Plusieurs changements de coordonnées sont nécessaires : changeur de coordonnées direct, calcul de la matrice jacobienne, de sa transposée et de son inverse ou pseudo-inverse. Ces calculs doivent être faits en ligne puisqu'ils dépendent à chaque instant de la configuration du robot.

Plus le robot a de degrés de libertés, plus les calculs seront longs. Zhang a proposé certaines modifications du schéma de Craig afin d'effectuer une partie des calculs hors ligne pour accélérer l'algorithme.

- D'un point de vue formel, Duffy a montré qu'il n'était pas correct de parler de l'orthogonalité des sous espaces de vitesse et d'effort comme le propose Mason dans son formalisme de description des tâches compliantes. En effet, les torseurs de vitesse et d'effort ne sont pas orthogonaux. En revanche, les directions commandées en effort et celles commandées en vitesse doivent être orthogonales dans le repère de compliance.

An et Hollerbach ont montré que pour les structures de commande utilisant la matrice jacobienne inverse  $J^{-1}$ , une instabilité du système pouvait apparaître dans des configurations pas nécessairement singulières, c'est-à-dire même lorsque la jacobienne inverse est définie. Ils attribuent cette instabilité à une interaction entre la matrice inertielle et le modèle cinématique inverse. Fisher et Mujtaba vont plus loin et montrent que cette instabilité provient de la formulation même du modèle cinématique inverse  $J^{-1}$  dans la boucle d'asservissement en position du schéma hybride. A partir du schéma classique de la figure (2.11) on peut écrire  $S \cdot dX = (SJ) \cdot dq$ , il ressort de cette équation que la matrice de sélection  $S$  réduit l'espace opérationnel du manipulateur qui devient redondant vis à vis de la tâche en position. Ainsi, des instabilités du schéma initial de commande hybride de Craig et Raibert sont la conséquence d'une formulation erronée de la projection de l'erreur opérationnelle dans l'espace articulaire. Pour remédier à ce problème, on utilise la solution générale :

$$dq = (SJ)^+ \cdot dX + [I - (SJ)^+ \cdot (SJ)] \cdot Z \quad (2.18)$$

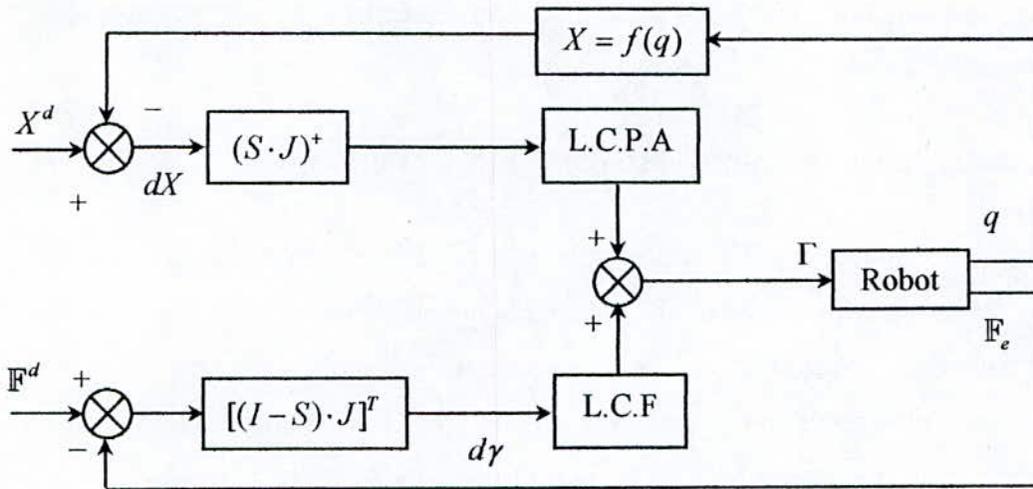
Fisher et Mujtaba montrent que si l'on choisit  $Z = J^{-1} \cdot dX$  comme terme d'optimisation de la solution (2.18) alors il revient au même de prendre pour solution au modèle cinématique inverse

$$dq = J^{-1} \cdot dX \quad (2.19)$$

Ils expliquent ainsi les instabilités qui peuvent apparaître avec le schéma hybride et l'importance que revête le choix de  $Z$ . En effet, ils montrent que le premier terme qui est la

solution de norme minimale est toujours stable. Comme indiqué sur la figure (2.14) les sélections de consignes en position et en effort se ramènent alors à :

$$dq = (SJ)^+ \cdot dX \tag{2.20}$$



*L.C.P.A* : loi de commande en position articulaire ; *L.C.F* : loi de commande en force

Figure 2.14 Schéma de commande hybride force position (d'après Fisher)

**Remarques :**

En termes d'implémentation, la commande hybride force/position nécessite beaucoup de calculs en ligne puisque plusieurs changements de coordonnées sont réalisés. La puissance des calculateurs actuels autorise cependant des fréquences d'échantillonnage de plus en plus élevées et permet d'améliorer ainsi ses performances.

Lorsqu'une perturbation est appliquée en amont du capteur dans une direction commandée en effort, elle n'est pas compensée par l'asservissement en effort à moins que le robot ne soit au contact dans cette direction.

Avec la commande hybride force / position, l'environnement doit être parfaitement connu pour éviter que le robot soit en espace libre dans une direction commandée en effort ou qu'il soit au contact dans une direction commandée en position.

La plupart des tâches exigent le passage d'un mode de commande à un autre en cours d'exécution, ce qui théoriquement se réalise en modifiant les éléments concernés

de la matrice  $S$ . Mais ces commutations de modes peuvent aussi exiger des modifications des gains des correcteurs et sont d'autant plus difficiles à mettre en œuvre si les lois de commande en position et en effort comportent des termes intégraux.

Autres les structures parallèles présentées ci-dessus, il existe une structure dite commande externe.

**2.2.3.2.2. Commande hybride force / position externe :**

La commande externe a été formalisée par J de Schutter et H. Van Bruce [Dégouange 93]. Elle consiste en une hiérarchisation de la boucle de commande en effort sur la boucle de commande en position et non plus une mise en parallèle de ces deux boucles. Cette commande représente en quelque sorte un compromis entre la commande par retour d'effort explicite et la commande hybride force / position. La figure (2.14) représente son schéma de principe.

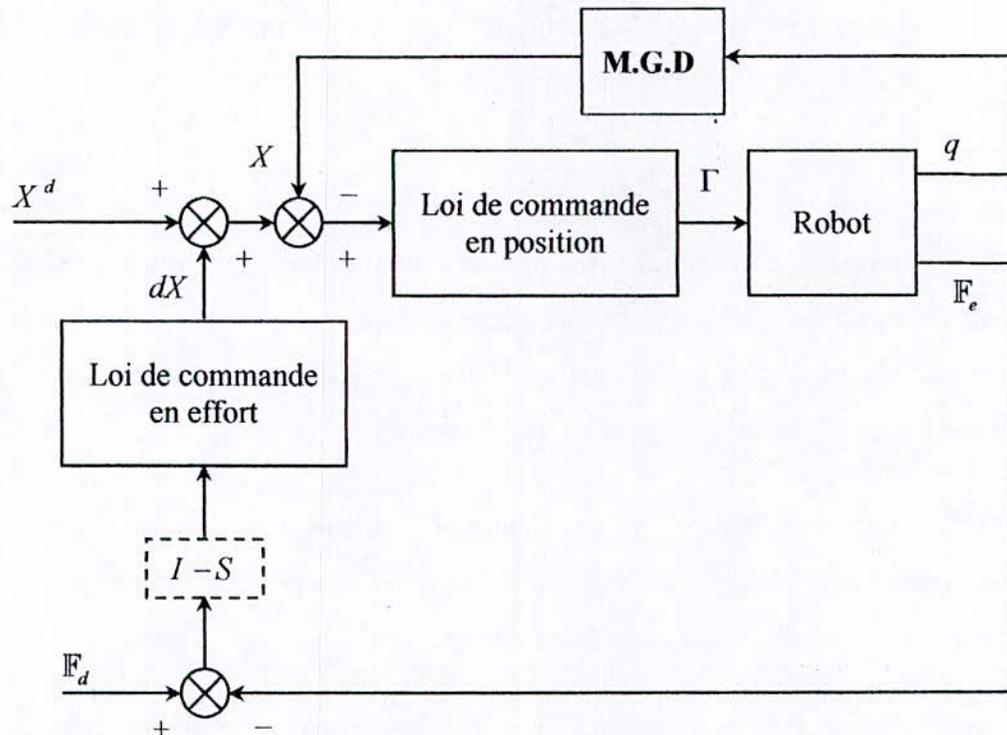


Figure 2.15 Principe de la commande hybride externe

À partir des efforts de consigne  $F^d$  et des efforts de retour  $F_e$  exercés au niveau de l'effecteur, nous calculons un incrément de position (position/orientation)  $\Delta X$  qui vient

s'ajouter à la consigne de situation désirée  $X^d$  pour donner la consigne de situation  $X$  envoyée au système. Dors et déjà, on constate qu'il est possible d'imposer un effort désiré, ce qui laisse envisager bon nombre d'applications. La matrice de sélection intervient dans le choix des directions à commander en effort. Ces directions correspondent à celles du repère de compliance dans lequel sont exprimés les efforts. L'incrément de situation  $\Delta X$  issu de la différence  $F^d - F$  est obtenu à partir d'une loi de commande en effort, qu'il faut définir en fonction de la tâche à réaliser et des résultats escomptés. Cette loi peut donc être plus ou moins complexe selon les performances souhaitées. À la différence de la commande parallèle, les contraintes en effort n'agissent pas directement au niveau des couples articulaires des actionneurs, mais au niveau cartésien sur la consigne  $X^d$ . Cette commande présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à des architectures de contrôleurs relativement fermées qui possèdent déjà leurs propres asservissements en position. C'est le cas de tous les contrôleurs de robots industriels. Sa relative facilité de mise en œuvre et sa faible demande en puissance de calculs autorisent son implémentation sur un grand nombre de contrôleurs, industriels au moins. Enfin comme dans le cas de la commande parallèle la mesure des efforts de contact s'effectue à partir d'un capteur d'effort.

## 2.3. TECHNIQUES DE COMMANDE :

Dans la section précédente, le point a été mis sur les différentes structures de commande des manipulateurs, sans considération des régulateurs mis en jeu, vus jusqu'à lors comme des boites noires.

Dans la présente section, on traite les différentes techniques de commandes pouvant être appliquées avec ces structures. Ces techniques peuvent être groupées comme suit :

### 2.3.1. Techniques de commande à base du modèle :

Si un régulateur est conçu connaissant et prenant en compte des dynamiques du système, les variations des conditions de travail peuvent alors être accommodées. Ce type de régulateur est appelé régulateur à base du modèle (*Model based controller*). Cette technique peut aller d'une simple compensation de la gravité, à la linéarisation complète des dynamiques du système. Il est clair que l'utilisation d'un tel régulateur prétend avoir une bonne connaissance du système sous commande.

### 2.3.1.1. Commande par couple calculé (*computed torque control*) :

Dans le cas idéal, ce régulateur consiste en l'inverse du système, utilisé alors comme pré-compensateur. Les entrées de commandes nécessaires pour avoir les positions, vitesses et accélérations désirées peuvent alors être calculées directement, et le système, piloté en boucle ouverte avec compensation parfaite de ses dynamiques.

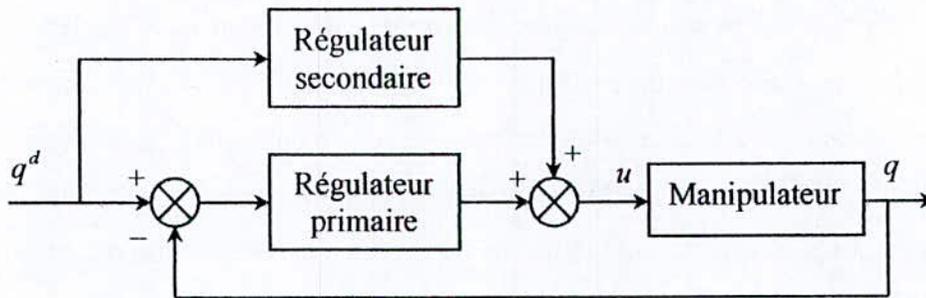


Figure 2.16 Commande par anticipation

En réalité, aucun système n'est parfaitement connu, de ce fait, les dynamiques non modélisées ne sont pas compensées. Pour y remédier, un bouclage est réalisé en ajoutant au régulateur dit primaire, un régulateur dit secondaire souvent de type PID. Ce dernier permet la régulation en présence de perturbations et d'erreurs de modélisation, figure (2.14).

Les premiers régulateurs contenant un modèle complet du robot furent proposées par Paul et Bejczy, donnant ainsi naissance, à la commande par couple calculé [Bejczy]. Comme leur nom l'indique, ces régulateurs calculent les couples nécessaires pour suivre les positions, vitesses et accélérations désirées à partir du modèle complet du robot.

Dans ce qui suit, l'exemple d'une telle commande dans l'espace articulaire avec régulateur secondaire de type PID :

La loi de commande a pour expression :

$$u = \Gamma^d + K_p(q^d - q) + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_I \int_{t_0}^t (q^d - q) d\tau \quad (2.21)$$

où :  $\Gamma^d$  est le couple théorique nécessaire pour compenser les dynamiques du manipulateur décrit par (1.81), obtenu à partir du modèle complet de ce dernier :

$$\Gamma^d = A(q^d) \cdot \ddot{q}^d + H(q^d, \dot{q}^d) + J^T \cdot {}^d F_e \quad (2.22)$$

L'autre partie de la commande (c'est-à-dire le PID), étant nécessaire pour garantir la régulation en présence de perturbations et d'erreurs de modélisation.

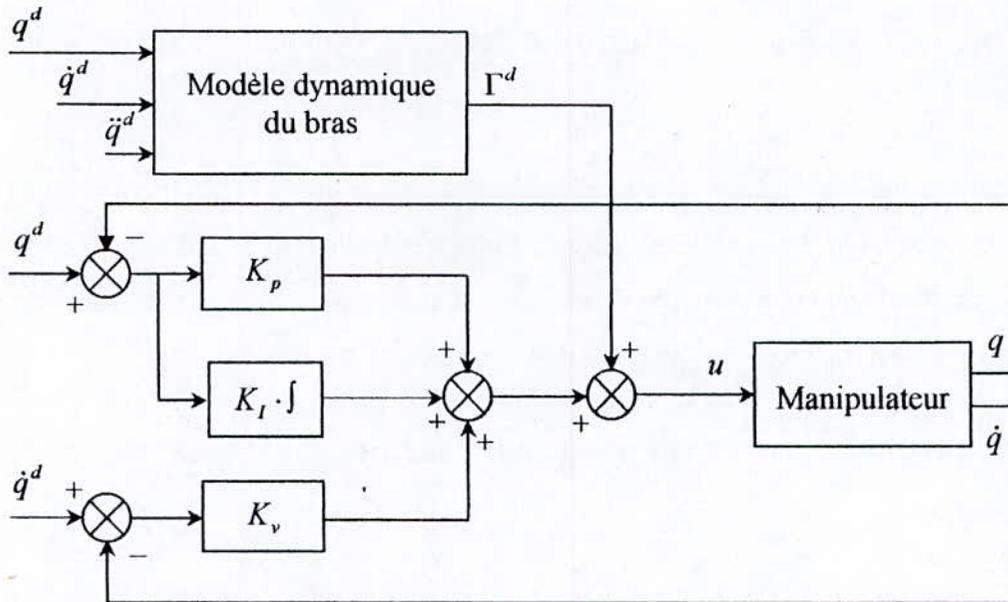


Figure 2.17 Commande par couple calculé

### 2.3.1.2. Commande par couple calculé simplifié :

Vu la complexité du modèle complet du manipulateur et le coût en calcul requis, d'autres approches, plus simples, qui n'utilisent qu'une partie du modèle dans le régulateur primaire ont été proposées. Par exemple, pour **compenser les effets gravitationnels**.

Ceci conduit à des régulateurs plus pratiques, car la partie du modèle représentant les effets gravitationnels est relativement simple et ses paramètres sont souvent bien connus. Dans ce cas, le régulateur primaire développe le couple qui maintient la position du robot en présence de la gravité. Couple dit de maintien (*holding torque*).

Les approches qui **compensent l'inertie** du robot ont aussi été proposées, et sont relativement simples pouvant être appliquées soit au niveau des articulations, ou au robot tout entier compensant ainsi les couplages entre articulations.

### 2.3.1.3. Commande basée sur une approximation linéaire du système :

Un autre moyen de réduire la complexité et la lourdeur des calculs, est d'utiliser un **modèle linéarisé** du robot. Cela revient à une commande dans l'espace d'état avec régulateur conçu afin de, réaliser un placement de pôles désiré, ou optimiser un certain critère de performance.

Cependant, le modèle linéaire devient rapidement inapproprié et les performances du système se dégradent, car il ne peut être efficace que si les déviations du point de linéarisation sont petites (ce n'est généralement pas le cas), ou si l'on utilise alternativement différents modèles linéaires pour accompagner le robot dans sa trajectoire (complexité).

### 2.3.1.4. Commande par découplage non linéaire (*feedback model based control*) :

La notion de linéarisation par retour d'état des systèmes non linéaires est une idée relativement récente dans la théorie de la commande, dont la mise en œuvre pratique a été rendue possible grâce aux développements rapides qu'a connus la technologie en matière de microprocesseurs et de calculateurs.

La commande par découplage non linéaire consiste à transformer un système non linéaire en un système linéaire en utilisant un changement de base et un retour d'état non linéaire. Son principal avantage est de permettre l'application aux systèmes non linéaires, des savoir-faire acquis en matière de commande des systèmes linéaires.

L'objectif est donc, dans un premier temps, de compenser tous les couplages non linéaires présents dans le modèle dynamique via un premier régulateur, dont la loi de commande, pour un robot modélisé selon (2.1), est donnée par :

$$\Gamma = A(q) \cdot u + H(q, \dot{q}) + J^T \cdot \mathbb{F}_e \quad (2.23)$$

Dans le cas idéal, où le modèle est supposé parfait, le système est régi par l'équation :

$$\ddot{q} = u \quad (2.24)$$

On se ramène donc à un problème de commande de  $n$  systèmes linéaires, invariants, découplés et du second ordre (doubles intégrateurs).

Ensuite un autre régulateur est conçu selon l'une des méthodes de commande linéaires, à la base du nouveau système, figure (2.16).

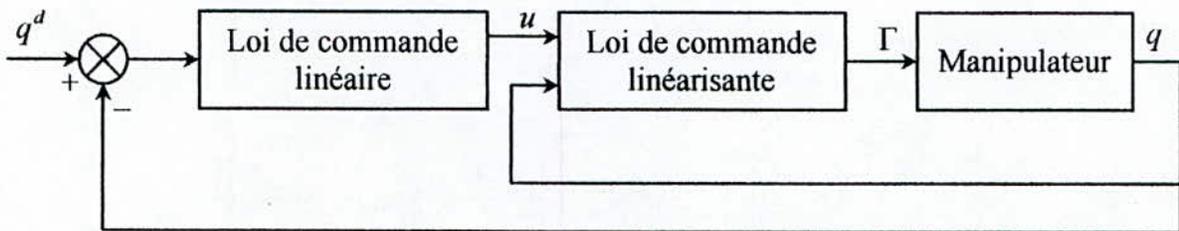


Figure 2.18 Commande par découplage non linéaire

De façon générale, le problème de linéarisation par retour d'état n'est pas facile à résoudre. Cependant, dans le cas des robots manipulateurs rigides, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est égal au nombre de variables articulaires, et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée du système en fonction du vecteur d'état  $(q, \dot{q})$  et de  $\ddot{q}$ . Ces propriétés font que les équations du robot définissent un système plat dont les sorties plates sont les variables articulaires.

La commande par découplage non linéaire est généralement utilisée dans l'espace articulaire. Cependant, elle peut être appliquée en utilisant un modèle exprimé dans l'espace cartésien. Ceci fut à l'origine, proposé par Khatib et appelé *operational space formulation*, qui est particulièrement utile dans les applications nécessitant une commande hybride force/position, où la réponse dynamique de l'effecteur terminal constitue un intérêt principal [S.R.Poleon 97]

**Remarque :** Parfois, cette approche est aussi désignée commande par couple calculé, mais elle diffère de la loi précédente car utilisant un bouclage.

### 2.3.1.5. Commande décentralisée :

La commande décentralisée, ou commande classique [Khalil 99], est la commande la plus répandue dans l'industrie, du fait de la facilité de son implémentation et du faible coût en calcul qu'elle requiert.

Elle consiste en l'utilisation d'un ensemble de régulateurs chacun agissant sur une articulation du manipulateur. La figure (2.19) montre le schéma de principe d'une telle commande donné dans l'espace articulaire, mais qui peut facilement être étendu dans l'espace cartésien.

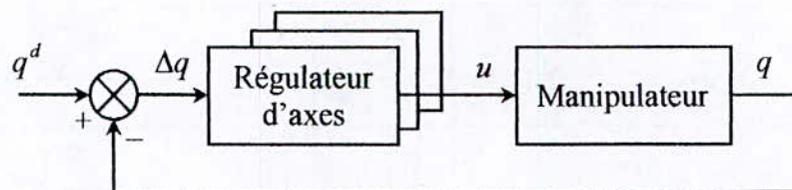


Figure 2.19 Commande décentralisée

L'angle, la vitesse ou le couple de chaque articulation est commandé indépendamment des autres articulations du robot. Il n'est question que de simples régulateurs SISO. Ses régulateurs se montrent satisfaisants du moment que le robot est en mouvement lent, où les couplages entre articulations voisines peuvent être négligés. Mais, à grande vitesse, ces interactions peuvent devenir significatives, et agissent comme des perturbations sur les sous-systèmes, apportant des dégradations de performances.

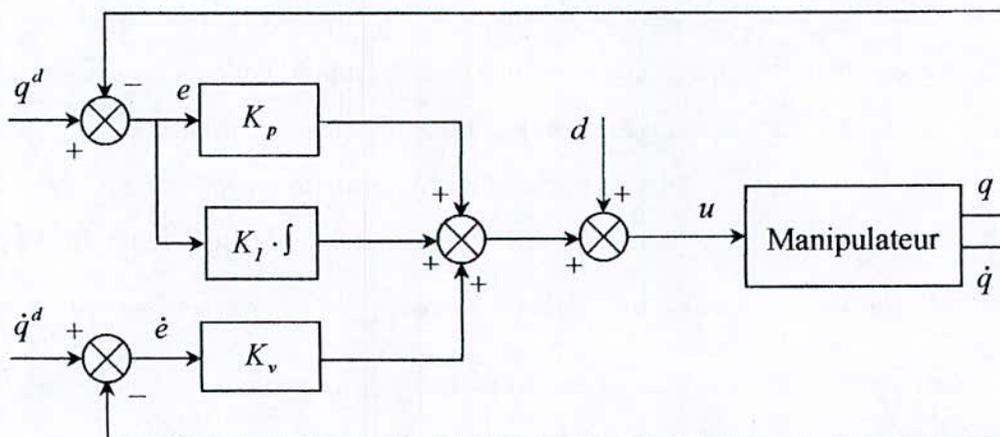


Figure 2.20 Schéma d'une commande décentralisée de type PID

Généralement, les régulateurs utilisés sont de type PID à gains constants, figure (2.20), où  $d$  représente les effets des couplages considérés comme perturbation.

La loi de commande est donnée par :

$$u = K_p(q^d - q) + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_I \int_{t_0}^t (q^d - q) d\tau \quad (2.25)$$

où  $\dot{q}^d$  et  $q^d$  désignent les vitesses et positions désirées dans l'espace articulaire et où  $K_p$ ,  $K_v$  et  $K_I$  sont des matrices diagonales définies positives, de dimension  $(n \times n)$ , d'éléments génériques respectivement les gains proportionnels  $K_{pj}$ , dérivés  $K_{vj}$  et intégraux  $K_{ij}$ .

Le calcul des gains  $K_{pj}$ ,  $K_{vj}$  et  $K_{ij}$  est effectué en considérant le modèle de l'articulation  $j$  représenté par le système linéaire du deuxième ordre à coefficients constants suivant :

$$u_j = a_j \cdot \ddot{q}_j + F_{vj} \cdot \dot{q}_j + d_j \quad (2.26)$$

équation dans laquelle  $a_j = A_{jj \max}$  désigne la valeur maximale de l'élément  $A_{jj}$  de la matrice d'inertie du robot, et  $d_j$  représente un couple perturbateur.

L'objectif principal étant de garantir un bon rejet de perturbations, on ne peut satisfaire à une poursuite de référence à des vitesses et accélérations élevées. Dans ce cas, il convient d'utiliser une commande par anticipation afin de réduire l'erreur de poursuite [L.Sciavicco 96].

#### Remarques :

- Dans la pratique, la commande décentralisée est limitée par l'utilisation d'actionneurs à rapports de réduction élevés.
- La commande par couple calculé (vue précédemment), peut être considérée comme une commande décentralisée. Les termes de couplage sont toujours considérés comme étant des perturbations pour le système linéaire, mais leur compensation est réalisée par calcul via une action anticipation.

**2.3.1.6. Commande adaptative :**

Le modèle dynamique du robot ne pouvant être parfait, il est naturel que les chercheurs appliquent les théories de la commande adaptative pour estimer ou ajuster en ligne les valeurs des paramètres dynamiques utilisés dans la commande.

**2.3.1.6.1. Commande adaptative par découplage non linéaire :**

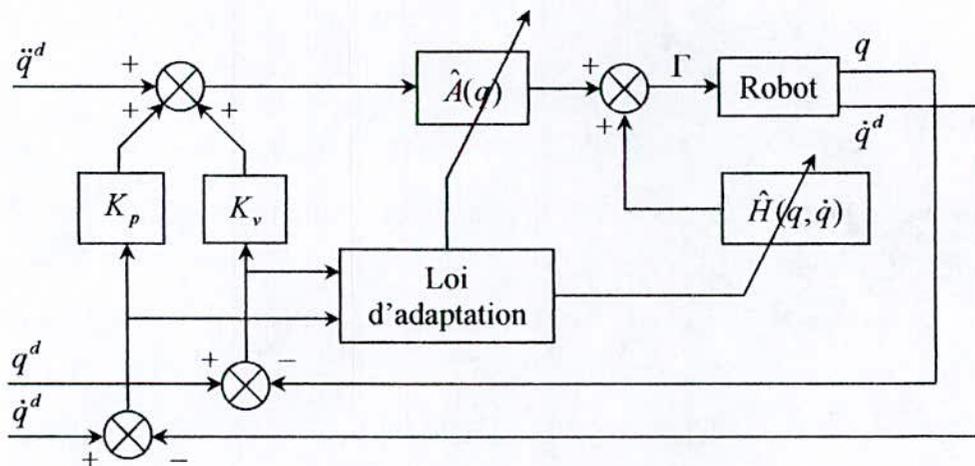
La première version d'une commande dynamique adaptative a été formulée par Craig et al. La loi de commande a la même structure que celle de la commande par découplage non linéaire et s'écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma = A(q, \hat{\chi}) \cdot u(t) + H(q, \dot{q}, \hat{\chi}) + J^T \cdot \mathbb{F}_e \tag{2.27}$$

où  $\hat{\chi}$  est le vecteur des paramètres dynamiques estimé et où :

$$u(t) = \ddot{q}^d + K_v \cdot \dot{e} + K_p \cdot e \tag{2.28}$$

Cette méthode comporte deux hypothèses restrictives : la première est que l'on doit connaître les accélérations articulaires ; la seconde est que l'inverse de la matrice d'inertie doit rester bornée. Craig et al ont suggéré de projeter les paramètres estimés dans une région connue de l'espace des paramètres contenant les paramètres réels et dans laquelle l'inverse de la matrice d'inertie existe.



**Figure 2.21** Commande par découplage non linéaire adaptative (d'après Craig)

Song et Ortega ont proposé une nouvelle version de la loi de commande adaptative par découplage non linéaire dans laquelle la condition sur la matrice  $\hat{A}^{-1}$  est levée, mais les accélérations articulaires restent indispensables.

### 2.3.1.6.2. Commande adaptative passive :

Afin de développer un algorithme adaptatif fondé sur le modèle dynamique complet, Slotine et Li ont exploité la propriété d'antisymétrie de la matrice  $(\dot{A} - 2 \cdot C)$ . Cette propriété est liée à la passivité du robot, d'où le nom de méthode de commande adaptative passive.

La loi de commande est obtenue par la relation suivante :

$$\Gamma = A(q, \hat{\chi}) \cdot \ddot{q}^r + C(q, \dot{q}, \hat{\chi}) \cdot \dot{q}^r + g(q, \hat{\chi}) + K_v \cdot \dot{e}_r \quad (2.29)$$

que l'on note :

$$\Gamma = \hat{A}(q) \cdot \ddot{q}^r + \hat{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}^r + \hat{g}(q) + K_v \cdot \dot{e}_r \quad (2.30)$$

avec :

$$e = q^d - q$$

$$\dot{e}_r = \dot{e} + \Lambda \cdot e$$

$$\dot{q}^r = \dot{q} + \dot{e}_r = \dot{q}^d + \Lambda \cdot e$$

$$\ddot{q}^r = \ddot{q} + \ddot{e}_r = \ddot{q}^d + \Lambda \cdot \dot{e} = \ddot{q}^d + \Lambda \cdot (\dot{q}^d - \dot{q})$$

où  $\Lambda$  et  $K_v$  sont deux matrices de gain diagonales, définies positives.

L'élaboration de la loi d'adaptation est basée sur une fonction de Lyapunov (voir [Khalil 99]).

## **2.4. CONCLUSION :**

L'objectif de ce chapitre était de décrire les approches principales traitant du problème de la commande des robots manipulateurs.

Dans un premier temps, une classification des commandes est proposée en distinguant les commandes cartésiennes des commandes articulaires.

Ensuite, une discussion des structures de commande en force, selon l'existence ou non d'une consigne d'effort, est présentée, permettant l'introduction du concept de la commande hybride force / position.

Enfin, les différentes techniques de commande des manipulateurs ont été exposées, parmi lesquelles certaines feront l'objet de synthèse dans la suite de ce travail.

**CHAPITRE****3****COMMANDE HYBRIDE  
PARALLELE DU PUMA 560****3.1. INTRODUCTION:**

Au cours de certaines tâches, il est souvent nécessaire que le point d'application de la force exercée se déplace sur la surface qui représente l'environnement.

Le robot doit suivre une trajectoire sur la surface tout en maintenant un effort désiré généralement normal à cette surface.

La réalisation simultanée d'une consigne de force et d'une consigne de position par un manipulateur est la définition de la commande hybride force / position.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de la commande hybride force / position appliquée au PUMA 560, pour des tâches nécessitant trois et six degrés de liberté.

**3.2. PRINCIPE DE LA COMMANDE HYBRIDE  
PARALLELE :**

Le problème général de la commande hybride consiste à commander un vecteur composé au maximum de 3 composantes de force et de 3 composantes de couple, et un vecteur de position composé au maximum de 3 composantes de position et de 3 composantes d'orientation.

Toutefois, ces informations sont redondantes lorsque le robot est en contact avec un environnement rigide ; il ne reste au plus qu'un vecteur de dimension 6, combinaison des deux précédents vecteurs.

Pour simplifier la présentation de ce problème complexe, nous considérons dans la suite un cas particulier dans un espace à deux dimensions (figure 3.1). Non seulement le vecteur de commande sera de dimension 2 mais aussi la structure du robot sera choisie minimale, avec deux degrés de liberté seulement.

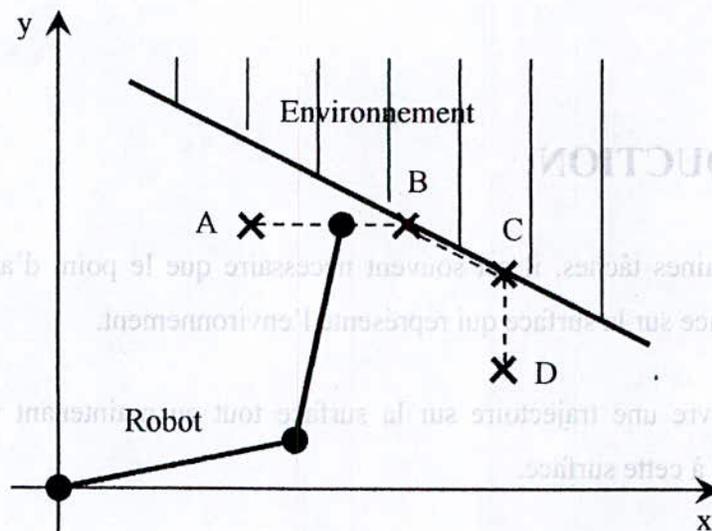


Figure 3.1. Exemple de tâche de commande hybride

(Suivi de contour dans le plan)

Néanmoins, l'exemple utilisé permet de voir le comportement du robot dans les différentes phases d'une tâche de commande hybride.

Le manipulateur se déplace du point A au point B dans le plan de repère  $\{x, y\}$ . Dans cet espace, le contour de l'environnement est une droite oblique.

Le trajet de l'effecteur se décompose de la manière suivante :

🚦 Phase d'approche : du point **A** au point **B**

Le robot se déplace dans un espace libre de toute contrainte. Aucune force d'interaction n'est créée. La commande se réduit à un asservissement pur de la position.

🚦 Mise en contact : au point **B**

L'effecteur entre en contact avec la surface de l'environnement. Ce point correspond donc à une transition entre une commande de position pure et une commande d'effort qui doit compenser éventuellement l'effet d'un choc lorsque la position du point est méconnue.

🚦 Phase hybride : du point **B** au point **C**

L'effecteur doit suivre le contour de l'environnement. Le contact entre le robot et la surface engendrent des forces d'interactions importantes et qui provoquent des contraintes sur le robot. Celles-ci doivent être commandées par le suivi simultané, d'une consigne de force normale à l'environnement et d'une consigne de position (figure 3.2).

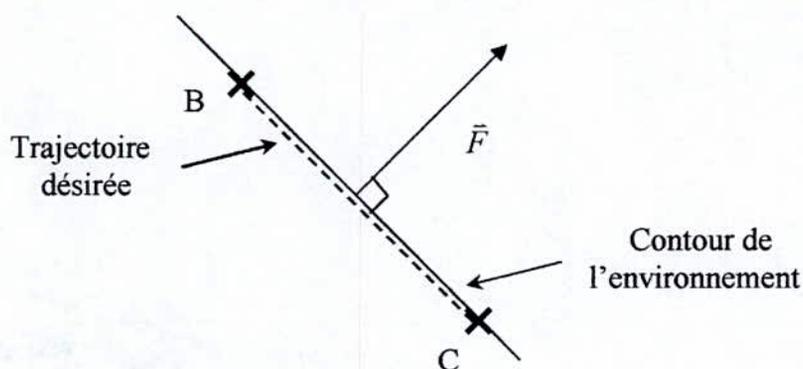


Figure 3.2. Phase hybride

↓ Phase de retour : du point C au point D

Le robot quitte l'environnement. Il est à nouveau en déplacement dans l'espace libre.

### 3.2.1. Repères associés à la tâche :

Les informations qui seront utilisées pour l'asservissement sont définies dans différents repères.

Les mesures capteur sont fournies d'une part dans un repère capteur  $R_s$  lié au robot pour le vecteur de force et d'autre part dans l'espace généralisé  $R_g$  pour le vecteur de position.

Prenons l'exemple du robot à deux degrés de liberté décrit à la figure (3.3).  $(\theta_1, \theta_2)$  sont les mesures angulaires de position dans le repère  $R_g$  et  $\{x_s, y_s\}$  définit le repère  $R_s$  lié au capteur de force.

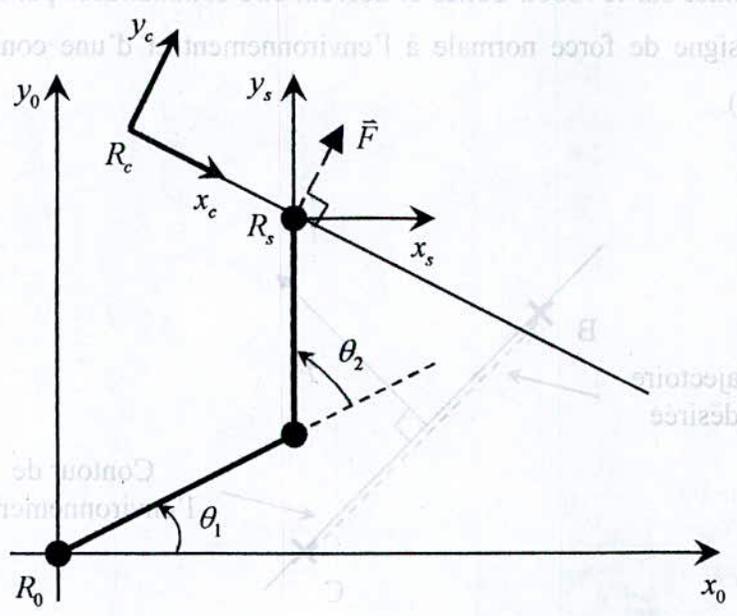


Figure 3.3. Repères associés à la tâche

Les données capteurs peuvent être transformées dans un repère cartésien commun : le repère de référence  $R_f$  (dans ce cas le repère de la base  $R_0$ ). Les mesures de force  $y$  sont obtenues par rotation du repère  $R_s$  et la position du point terminal par le modèle géométrique direct :  $X = f(\theta)$ .

Il est souvent préférable d'utiliser un troisième niveau de représentation propre à la description de la tâche : le repère tâche ou repère de compliance  $R_c$ . Ce repère évolue en fonction de la configuration de la tâche ; un de ses axes est aligné avec la normale à l'environnement. Deux cas de figure se présentent :

- La géométrie de la tâche est curviligne, dans ce cas le repère de compliance évolue à chaque instant. Le vecteur consigne de position est alors constitué des projections dans le repère de compliance de ce même vecteur décrit dans le repère de la base.
- Le contour de l'environnement est rectiligne, et le repère de compliance peut être figé à l'instant initial.

Dans l'exemple de la figure (3.3) le repère de compliance est le repère fixe  $\{x_c, y_c\}$  obtenu par translation  $T$  et rotation  $R$  du repère de référence.

### 3.2.2. Orthogonalité effort-position :

La commande de force et la commande de position sont deux notions duales. Lorsque le robot est contraint par l'environnement suivant toutes les directions, aucun déplacement du point terminal n'est possible ; il ne peut qu'exercer des efforts sur l'environnement. Par contre, lorsque le manipulateur est dans l'espace libre, l'absence de tout contact empêche la création d'efforts.

Il apparaît que l'espace doit être subdivisé en deux sous-espaces complémentaires, un constitué des directions commandables en position et l'autre de directions commandables en effort.

L'exécution d'une tâche de commande hybride résulte donc d'une stratégie dont la synthèse a été formalisée par Mason [Mason 81].

Mason représente la configuration de la tâche par une hyper surface constituée des positions possibles de l'effecteur lorsqu'il n'a qu'une liberté de mouvement partielle, appelée C-surface. Cette surface délimite l'espace libre de l'espace contraint.

La configuration géométrique du robot et de l'environnement impose des « contraintes naturelles » : aucun déplacement ne peut se produire suivant les normales à la C-surface, aucune force ne peut être exercée suivant les tangentes.

La stratégie de commande constitue des « contraintes artificielles » : l'effort peut être commandé suivant les normales à la C-surface et les positions suivant les tangentes.

Ces contraintes complémentaires les unes des autres fournissent des équations linéaires sur les composantes de force et de vitesse. Force et vitesse sont orthogonales sur la C-surface.

C'est pourquoi le repère de complianc (repère de tâche)  $R_c$  lié à cette C-surface autorise une décomposition simple de ses axes en axes commandés en effort et axes commandés en position.

La trajectoire désirée est une fonction du temps, décrite sur la C-surface à partir des contraintes artificielles en tenant compte des contraintes naturelles [Perdereau 91].

### 3.3. COMMANDE DU PUMA 560 DANS LE PLAN :

Les tâches réalisées dans le plan ne nécessitant pas plus de trois degrés de liberté, le manipulateur considéré, dans sa configuration complète (6 ddl), est redondant vis-à-vis de ces tâches.

Dans ce cas, et pour éviter ce problème de redondance qui se traduit par des inversions impossibles de matrices de rang réduit, on est amené à calculer les modèle de ce manipulateur à la base des degrés de liberté mis en jeu.

On utilisera, les articulations 2, 3 et 5 pour positionner et orienter l'effecteur du robot arbitrairement dans le plan (sans sortir de l'espace de travail).

Pour les simulations, on utilisera le modèle dynamique proposé dans le chapitre 1, où les variables articulaires  $\theta_1$ ,  $\theta_4$  et  $\theta_6$  sont forcées à zéro, ainsi que les couples correspondants.

### 3.3.1. Spécification de la tâche :

La tâche que le robot est amené à réaliser comporte deux phases :

- dans la 1<sup>ère</sup> phase, le robot se déplace dans l'espace libre en effectuant un demi cercle ;
- dans la seconde phase, le robot arrivant au bout du demi cercle, continue son déplacement en entrant en contact avec un plan incliné. Il applique alors un effort désiré suivant la normale à ce plan tout en se déplaçant suivant la tangente à ce même plan.

### 3.3.2. Génération de trajectoires :

#### 3.3.2.1. Génération de trajectoire pour la première phase de la tâche :

On désire que l'effecteur terminal parcoure le demi cercle dans le sens des aiguilles d'une montre (comme indiqué dans la figure (3.4)). L'orientation de l'effecteur est représentée par l'angle  $\beta$ . Pour une orientation  $\beta$  donnée, le point concerné sur le demi cercle est situé à la position  $\alpha$ .

Si on adopte une représentation polaire pour le situer, l'effecteur terminal, aura pour coordonnées dans le repère de la base  $\{z_0, x_0, y_0\}$  :

$$\begin{cases} x_E = O_x'' + \rho \cdot \cos \alpha \\ z_E = O_z'' + \rho \cdot \sin \alpha \\ y_E = d_2 + d_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

$\rho$  : représente le rayon du demi cercle,

$O_x'', O_z''$  : représentent les coordonnées du centre du demi cercle dans le repère  $(z_0, x_0)$ .

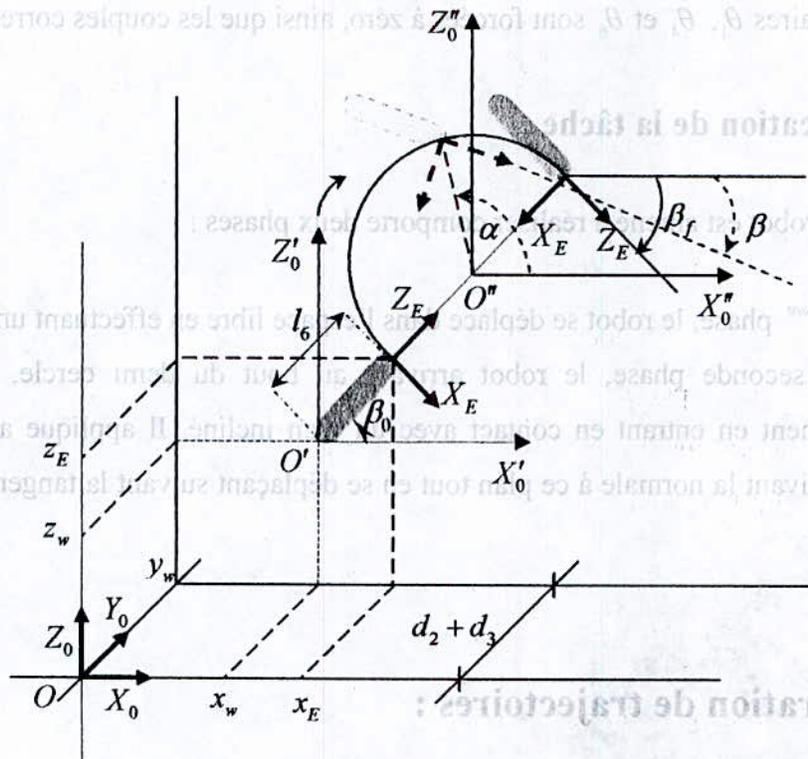


Figure 3.4. Première phase de la tâche

On impose à l'orientation  $\beta$  une variation linéaire en fonction de l'angle polaire  $\alpha$ .

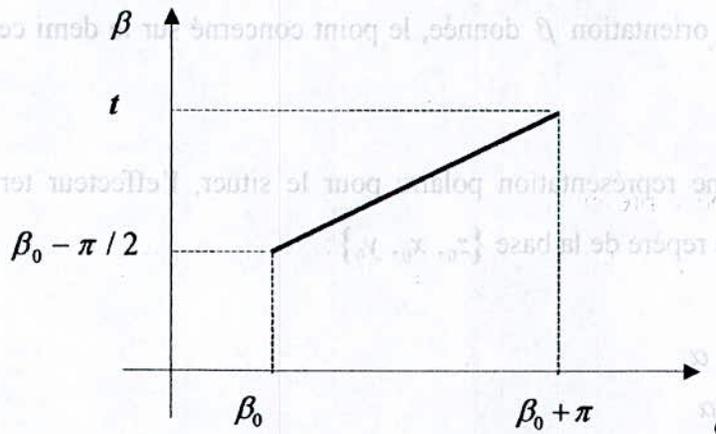


Figure 3.5 variation de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$

avec :  $\beta \in [\beta_0 - \pi/2, \beta_0]$  et  $\alpha \in [\beta_0, \beta_0 + \pi]$

on aura alors :

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta_0 - \pi) \tag{3.2}$$

L'évolution de  $\alpha(t)$  est imposée telle que (la loi du Bang-Bang [Khalil 99]) :

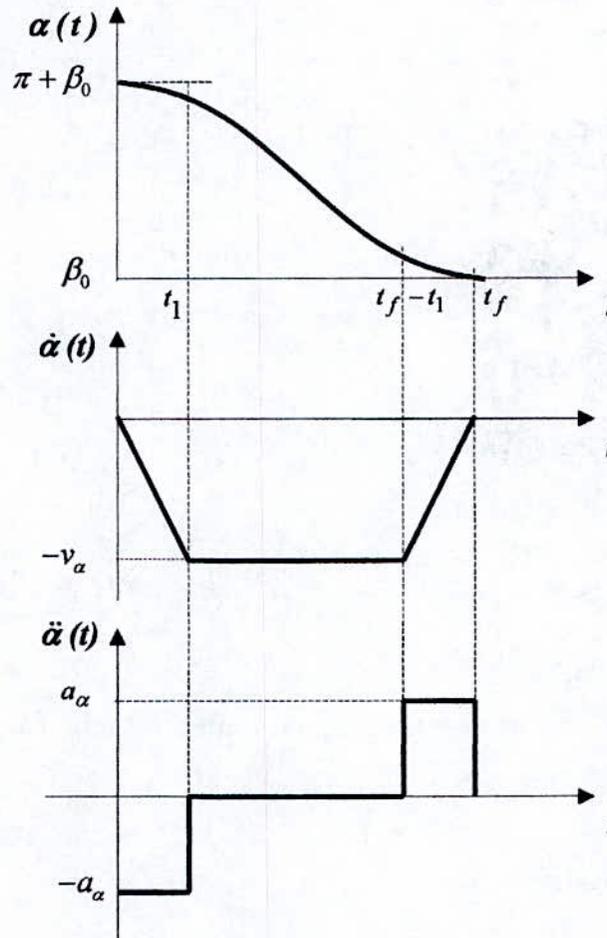


Figure 3.6 variation de  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$  selon la loi Bang-Bang

D'après ce qui précède, on peut écrire :

- Pour le premier intervalle de temps  $0 \leq t \leq t_1$  :

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \cdot a_\alpha \cdot t^2 \\ \dot{\alpha}(t) = -a_\alpha \cdot t \\ \ddot{\alpha}(t) = -a_\alpha \cdot 1(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

- Pour le deuxième intervalle de temps  $t_1 \leq t \leq t_f - t_1$  :

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 - v_\alpha \cdot (t - \frac{t_1}{2}) \\ \dot{\alpha}(t) = -v_\alpha \cdot 1(t) \\ \ddot{\alpha}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

- Et pour le troisième intervalle de temps  $t_f - t_1 \leq t \leq t_f$  :

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_f + \frac{1}{2} \cdot a_\alpha \cdot (t - t_f)^2 \\ \dot{\alpha}(t) = a_\alpha \cdot (t - t_f) \\ \ddot{\alpha}(t) = a_\alpha \cdot 1(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec :

$$v_\alpha = -\frac{(\alpha_f - \alpha_0)}{t_f - t_1}, \quad a_\alpha = \frac{v_\alpha}{t_1}, \quad \alpha_0 = \beta_0 \text{ et } \alpha_f = \beta_0 + \pi \quad (3.6)$$

Ainsi, la position, la vitesse, et l'accélération de l'effecteur terminal, sont données par les équations suivantes :

- **Position et orientation:**

$$\begin{cases} x_E = O_x + \rho \cdot \cos \alpha \\ y_E = d_2 + d_3 \\ z_E = O_z + \rho \cdot \sin \alpha \\ \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta_0 - \pi) \end{cases} \quad (3.7)$$

- **Vitesse :**

$$\begin{cases} \dot{x}_E = -\rho \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{y}_E = 0 \\ \dot{z}_E = \rho \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\alpha}(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

- Accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x}_E = -\rho \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - \rho \cdot \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_E = 0 \\ \ddot{z}_E = -\rho \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + \rho \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \ddot{\alpha} (t) \end{cases} \quad (3.9)$$

### 3.3.2.2. Génération de la trajectoire pour la deuxième phase de la tâche :

L'effecteur terminal se déplace le long du diamètre  $AB$  du demi cercle, tel que  $z_E \perp AB$ . L'orientation de l'effecteur terminal demeure ainsi constante, et elle est égale à  $\beta_0 - \frac{\pi}{2}$ , comme est indiquée à la figure (3.5).

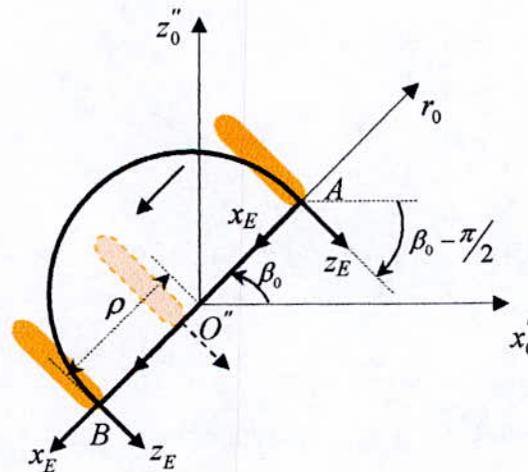


Figure 3.7. Deuxième phase de la tâche

Pour situer l'effecteur terminal sur le diamètre (AB), on utilise la coordonné  $r$  de l'axe  $O''r_0$ , dont on impose la variation dans le temps comme indiqué à la figure (3.8) :

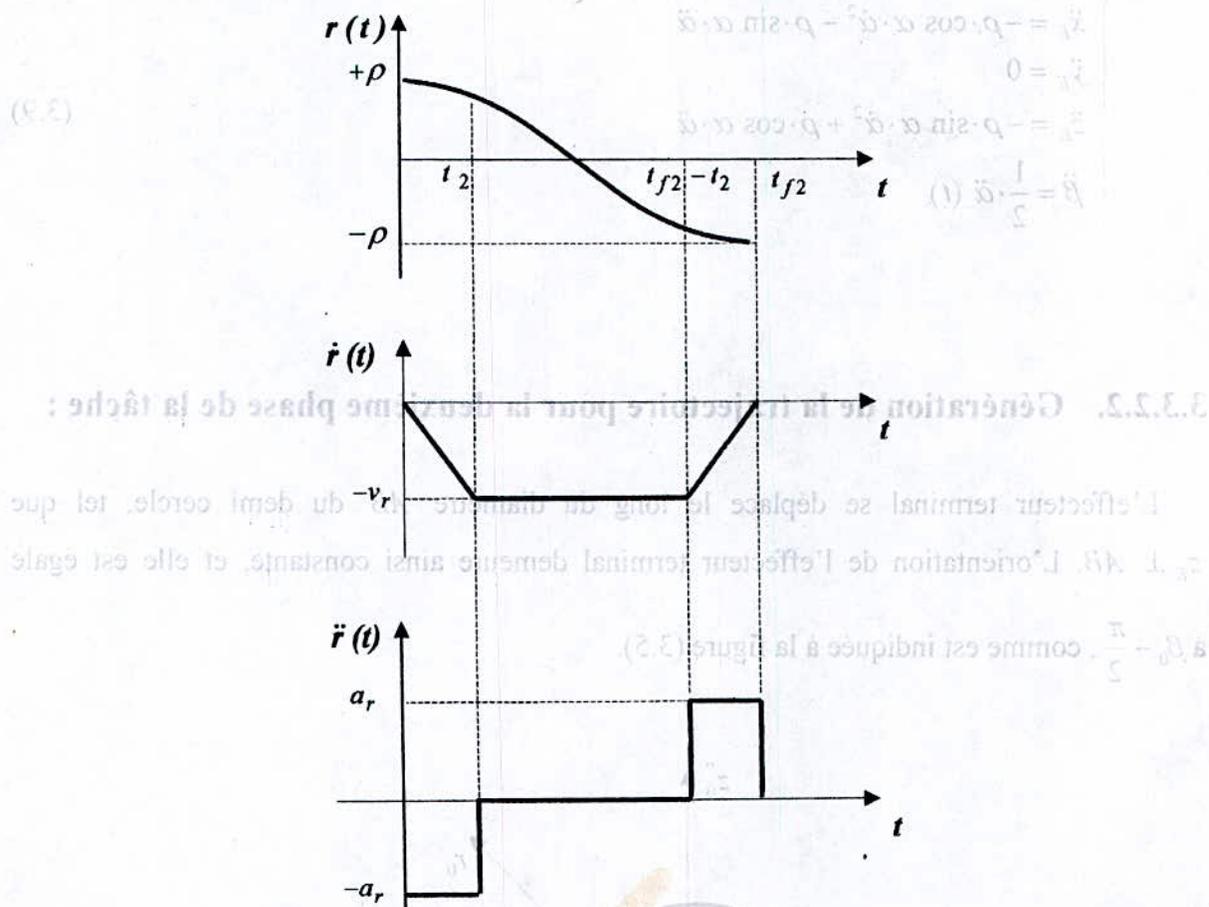


Figure 3.8 variation de  $r$ ,  $\dot{r}$  et  $\ddot{r}$  selon la loi Bang-Bang

Les expressions temporelles des grandeurs représentées dans le schéma de la figure (3.8) sont données par :

- Pour le premier intervalle de temps  $t_{f1} \leq t \leq t_2$  :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 - \frac{1}{2} \cdot a_r \cdot (t - t_{f1})^2 \\ \dot{r}(t) = -a_r \cdot (t - t_{f1}) \\ \ddot{r}(t) = -a_r \cdot 1(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

- Pour le deuxième intervalle de temps  $t_2 \leq t \leq t_{f2} - t_2$  :

$$(3.10) \quad \begin{cases} r(t) = a_0 - v_r \cdot (t - t_f - \frac{t_1}{2}) \\ \dot{r}(t) = -v_r \cdot 1(t) \\ \ddot{r}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

- Et pour le troisième intervalle de temps  $t_{f2} - t_2 \leq t \leq t_{f2}$  :

$$(3.12) \quad \begin{cases} r(t) = r_f + \frac{1}{2} \cdot a_r \cdot (t - t_{f2})^2 \\ \dot{r}(t) = a_r \cdot (t - t_{f2}) \\ \ddot{r}(t) = a_r \cdot 1(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec :

$$(3.13) \quad v_r = -\frac{(r_f - r_0)}{t_f - t_2}, \quad a_r = \frac{v_r}{t_2}, \quad r_0 = \rho \quad \text{et} \quad r_f = -\rho$$

Comme nous l'avons fait pour le premier tronçon, nous allons donner la position, vitesse et accélération de l'effecteur :

- **Position et orientation:**

$$(3.14) \quad \begin{cases} x_E = O_x + r(t) \cdot \cos \beta_0 \\ y_E = d_2 + d_3 \\ z_E = O_z + r(t) \cdot \sin \beta_0 \\ \beta = \beta_0 - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.14)$$

- **Vitesse :**

$$(3.15) \quad \begin{cases} \dot{x}_E = \dot{r}(t) \cdot \cos \beta_0 \\ \dot{y}_E = 0 \\ \dot{z}_E = \dot{r}(t) \cdot \sin \beta_0 \\ \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

- Accélération :

$$(11.8) \quad \begin{cases} \ddot{x}_E = \dot{r}(t) \cdot \cos \beta_0 \\ \ddot{y}_E = 0 \\ \ddot{z}_E = \dot{r}(t) \cdot \sin \beta_0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

### 3.3.3. Commande hybride parallèle :

#### 3.3.3.1. Commande hybride parallèle DNL / PID :

La commande hybride parallèle DNL / PID dans l'espace opérationnel, consiste en une commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel avec correction dans l'espace opérationnel pour la position, et une commande classique du type PID pour la force.

Le comportement dynamique du robot dans l'espace opérationnel est obtenu en utilisant les équations (1.81) et (1.71) :

$$\Gamma = A \cdot J^{-1} \cdot (\ddot{X} - \dot{J} \cdot \dot{q}) + H + J^T \cdot F_e \quad (3.17)$$

La loi de commande hybride est obtenue par la superposition de deux lois de commandes, une de position et l'autre de force. L'utilisation de la matrice de sélection  $S$ , permet de spécifier les directions commandées en position de celles commandées en effort.

La loi de commande en position est donnée par :

$$\Gamma_p = A \cdot (S \cdot J)^+ \cdot (u(t) - \dot{J} \cdot \dot{q}) + H + J^T \cdot F_e \quad (3.18)$$

Pour un mouvement complètement spécifié, une correction proportionnelle dérivée est utilisée :

$$(21.8) \quad u(t) = \ddot{X}^d + K_v \cdot (\dot{X}^d - \dot{X}) + K_p \cdot (X^d - X) \quad (3.19)$$

En substituant l'équation (3.19) dans l'équation (3.18), il vient :

$$\Gamma_p = A \cdot (S \cdot J)^+ \cdot (\ddot{X}^d + K_v \cdot (\dot{X}^d - \dot{X}) + K_p \cdot (X^d - X) - \dot{J} \cdot \dot{q}) + H + J^T \cdot F_e \quad (3.20)$$

Avec cette loi de commande, dans l'hypothèse d'une modélisation parfaite et d'une erreur initiale nulle, le comportement du robot dans les directions commandées en position est décrit par l'équation :

$$\ddot{e}_X + K_v \cdot \dot{e}_X + K_p \cdot e_X = 0 \quad (3.21)$$

avec :

$$e_X = X^d - X \quad (3.22)$$

L'équation (3.21) représente un système du deuxième ordre, qu'on peut encore écrire :

$$\ddot{e}_X + 2\xi\omega \cdot \dot{e}_X + \omega^2 \cdot e_X = 0 \quad (3.23)$$

d'où :

$$K_p = \omega^2 \text{ et } K_v = 2\xi\omega$$

La solution de l'erreur est globalement exponentiellement stable. Les gains  $K_p$  et  $K_v$  sont choisis pour imposer à l'erreur la dynamique désirée d'amortissement  $\xi$  et pulsation  $\omega$  quelque soit la configuration du robot.

$$\blacksquare \text{ 1}^{\text{er}} \text{ cas : } \xi = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} K_p = \omega_0^2 \\ K_v = \sqrt{K_p} \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ 2}^{\text{ème}} \text{ cas : } \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} K_p = \omega_0^2 \\ K_v = \sqrt{2 \cdot K_p} \end{cases}$$

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation, c'est-à-dire qu'on ne dispose que d'estimations sur les paramètres du système. L'équation (3.20) devient :

$$\Gamma_p = \hat{A} \cdot (S \cdot J)^+ \cdot (\ddot{X}^d + K_v \cdot (\dot{X}^d - \dot{X}) + K_p \cdot (X^d - X) - \dot{J} \cdot \dot{q}) + \hat{H} + J^T \cdot F_e \quad (2.24)$$

où  $\hat{A}$  et  $\hat{H}$  sont les estimations respectives des matrices  $A$  et  $H$ .

L'équation de la boucle fermée donnée dans (3.21) devient alors :

$$\ddot{e}_x + K_v \cdot \dot{e}_x + K_p \cdot e_x = J \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \left[ (A - \hat{A}) \cdot J^{-1} \cdot \ddot{\theta} + H - \hat{H} \right] \quad (3.25)$$

Une fois le régime permanent est atteint, l'erreur est donnée par :

$$e_{x,p} = K_p^{-1} \cdot J \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \left[ (A - \hat{A}) \cdot J^{-1} \cdot \ddot{\theta} + H - \hat{H} \right] \quad (3.26)$$

Notons  $f$  le second membre de la relation (3.25). Si on connaît la borne max de  $f$  avec une norme d'erreur imposée, on peut donner la condition sur le choix de la matrice gain  $K_p$  pour assurer la robustesse vis-à-vis des erreurs paramétriques (le gain  $K_p$  idéal est égal à  $\infty$ ) :

$$K_{p,ii} \geq \frac{|f_{i,\max}|}{|e_{imp,i}|} \quad (3.27)$$

**Remarque :** Le gain  $K_p$  est choisit de manière à assurer de bonnes performances en boucle fermée, mais ce choix est limité par la bande passante du système.

La loi de commande en effort est donnée par :

$$\Gamma_F = [(I - S) \cdot J]^T \cdot [F^d + K_f \cdot (F^d - F) - K_{f_v} \cdot \dot{X} + K_{f_p} \cdot \int_0^t (F^d - F) \cdot d\tau] \quad (3.28)$$

Le terme  $-K_{f_v} \cdot \dot{X}$  vient remplacer l'action dérivée sur la force, car les mesures de force sont bruitées ce qui peut causer une instabilité et une erreur statique non nulle.

Finalement, la commande appliquée au robot est obtenue par :

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_F \quad (3.29)$$

Le schéma de l'implémentation de cette commande est donné par la figure (3.9) :

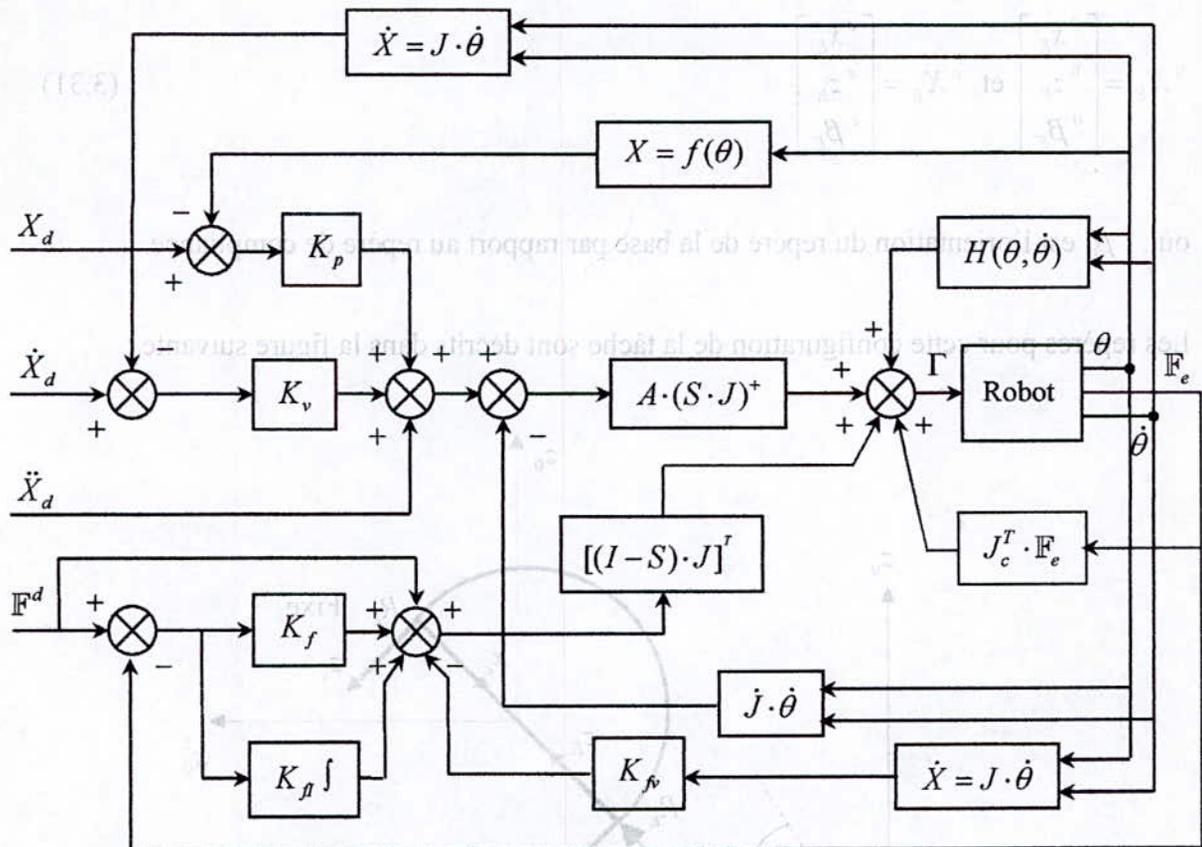


Figure 3.9. Implémentation de la commande hybride force / position par découplage non-linéaire

On notera que toutes les grandeurs sont exprimées dans le repère de compliance. La trajectoire désirée et la jacobienne étant exprimées dans le repère de la base, on procédera à des transformations afin de les écrire dans le repère de compliance.

Etant donné le vecteur position opérationnelle  $X$  de l'effecteur terminal défini par l'équation (1.18), exprimé dans le repère de la base, qu'on note  ${}^0 X_E$ . Sa projection dans le repère de compliance s'obtient par :

$${}^c X_E = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^0 X_E + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^c \beta_0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

avec :

$${}^0 X_E = \begin{bmatrix} 0 x_E \\ 0 z_E \\ 0 \beta_E \end{bmatrix} \text{ et } {}^c X_E = \begin{bmatrix} c x_E \\ c z_E \\ c \beta_E \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où :  ${}^c \beta_0$  est l'orientation du repère de la base par rapport au repère de compliance.

Les repères pour cette configuration de la tâche sont décrits dans la figure suivante :

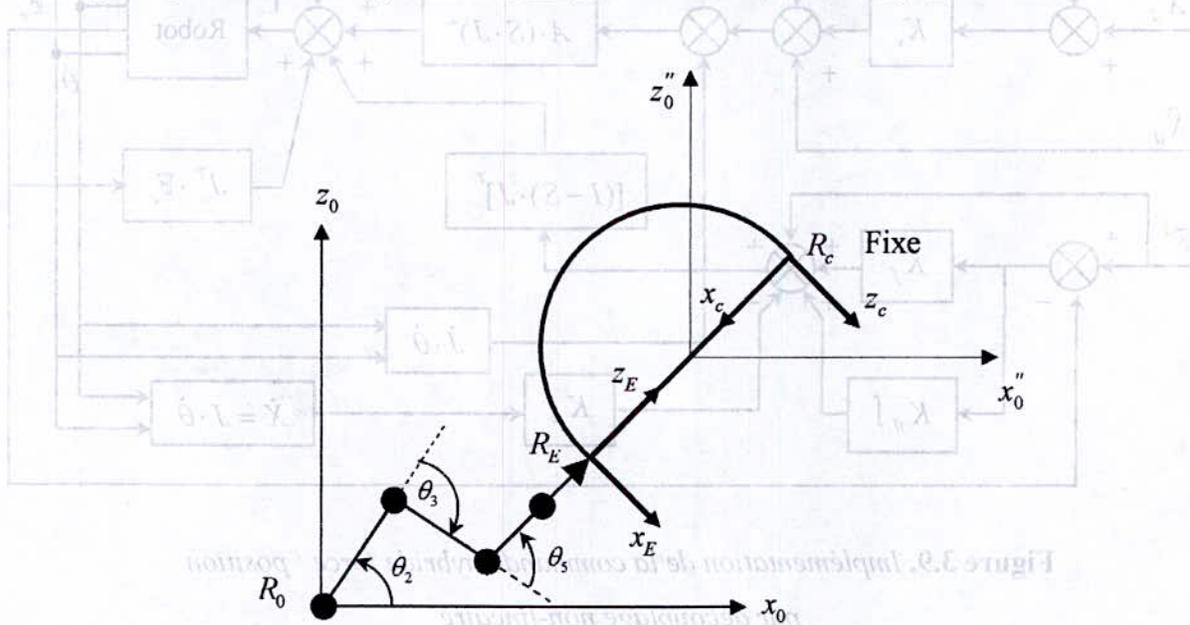


Figure 3.10 Repères associés à la tâche dans le plan

Par dérivation par rapport au temps on obtient l'expression :

$${}^c \dot{X}_E = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^0 \dot{X}_E + \begin{bmatrix} -\cos({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & \sin({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & 0 \\ -\sin({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & -\cos({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^0 X_E + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^c \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Vu que l'angle d'orientation  ${}^c \beta_0$  est constant :  ${}^c \dot{\beta}_0 = 0$ .

donc :

$${}^c \dot{X}_E = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^0 \dot{X}_E \quad (3.33)$$

On peut ainsi définir la matrice jacobienne écrite dans le repère de complianse en utilisant les relations (3.33) et (1.64) par :

$${}^c \dot{X}_E = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot J \cdot \dot{\theta} = J_c \cdot \dot{\theta} \quad (3.34)$$

où :

$$J_c = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot J \quad (3.35)$$

L'accélération opérationnelle a pour expression :

$${}^c \ddot{X}_E = J_c \cdot \ddot{\theta} + \dot{J}_c \cdot \dot{\theta} \quad (3.36)$$

avec :

$$\dot{J}_c = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{J} + \begin{bmatrix} -\cos({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & \sin({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & 0 \\ -\sin({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & -\cos({}^c \beta_0) \cdot {}^c \dot{\beta}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J$$

$$\dot{J}_c = \begin{bmatrix} -\sin({}^c \beta_0) & -\cos({}^c \beta_0) & 0 \\ \cos({}^c \beta_0) & -\sin({}^c \beta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{J} \quad (3.37)$$

où :

$$\dot{J}_{11} = -(a_2 c_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + d_4 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_6 c_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5))$$

$$\dot{J}_{12} = -(a_3 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + d_4 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_6 c_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5))$$

$$\dot{J}_{13} = -l_6 c_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5)$$

$$\dot{J}_{21} = a_2 s_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - d_4 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - l_6 s_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5)$$

$$\dot{J}_{22} = a_3 s_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - d_4 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - l_6 s_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5)$$

$$\dot{J}_{23} = -l_6 s_{235} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5)$$

$$\dot{J}_{31} = 0$$

$$\dot{J}_{32} = 0$$

$$\dot{J}_{33} = 0$$

Le schéma de commande est transformé en :

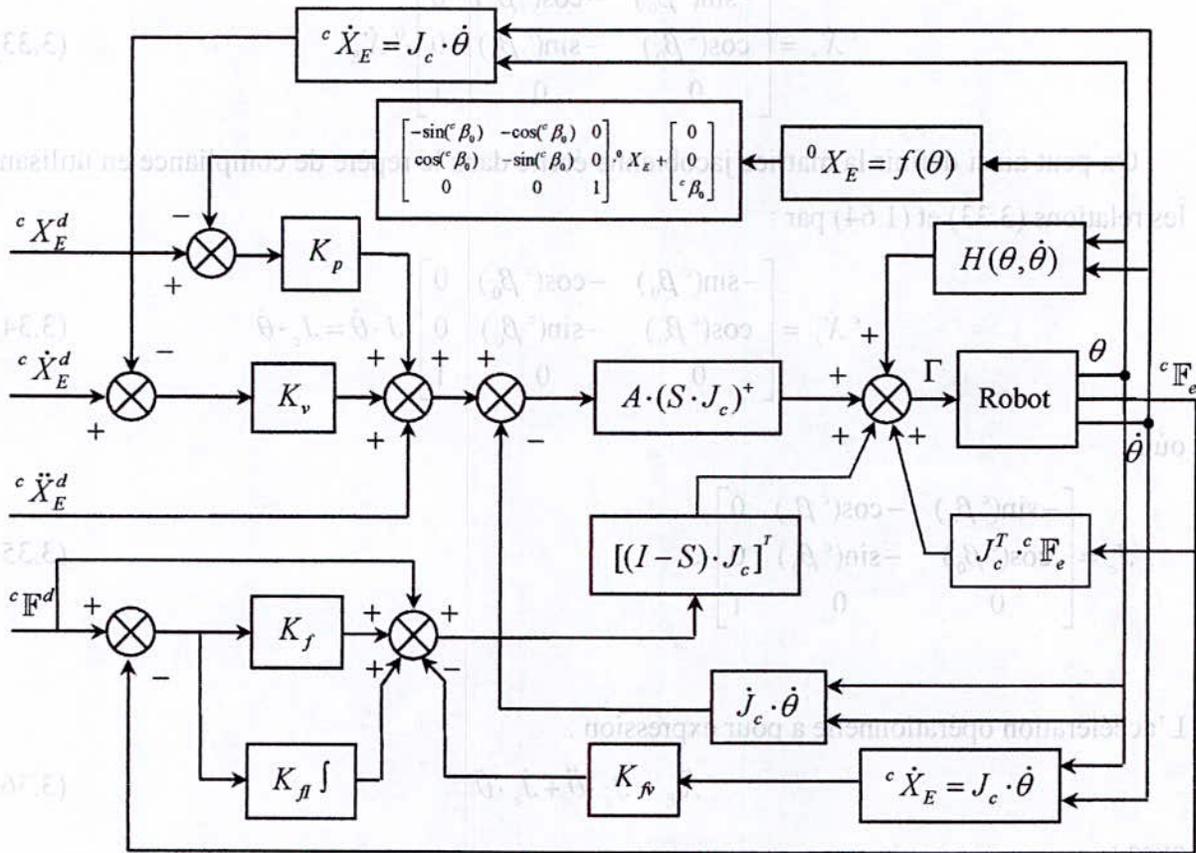


Figure 3.11. Implémentation de la commande hybride DNL / PID

**Remarque :** les grandeurs de consigne ont été déjà écrites dans le repère de compliançe pour ne pas trop encombrer le schéma de la figure (3.11).

### 3.3.3.2. Commande hybride parallèle passive / PID :

On a vu que la commande en position par découplage non linéaire d'un robot découle d'une exploitation de la forme inverse de son modèle dynamique. Dans ce qui suit on présente une autre approche qui utilise la propriété de passivité du robot (système qui dissipe de l'énergie). De telles lois de commandes, aussi appelées commandes basées sur Lyapunov, permettent de modifier l'énergie naturelle du robot pour qu'il satisfasse les objectifs désirés (régulation ou suivi).

Cette loi de commande fût premièrement proposée par Slotine et Li dans leur algorithme du même nom [Spong 89] :

$$\Gamma = A(\theta) \cdot \dot{v} + C(\theta, \dot{\theta}) \cdot v + g(\theta) - K_D \cdot (\dot{\theta} - v) \quad (3.38)$$

pour un robot modélisé par :

$$\Gamma = A(\theta) \cdot \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} + g(\theta) \quad (3.39)$$

où :

$A$  : désigne la matrice inertie du robot ;

$C$  : regroupe les termes de Coriolis et centrifuges ;

$g$  : étant le vecteur gravité.

$v$  étant donnée par :

$$\begin{aligned} v &= \dot{\theta}^d - \Lambda \cdot (\theta - \theta^d) \\ &= \dot{\theta}^d - \Lambda \cdot e \end{aligned} \quad (3.40)$$

et :

$$\dot{v} = \ddot{\theta}^d - \Lambda \cdot (\dot{\theta} - \dot{\theta}^d) \quad (3.41)$$

où  $\Lambda$  et  $K_D$  sont deux matrices de gain diagonales, définies positives

On définit

$$r = \dot{\theta} - v = \dot{e} + \Lambda \cdot e \quad (3.42)$$

en substituant (3.42) dans (3.38) ; le résultat est :

$$A(\theta) \cdot \dot{r} + C(\theta, \dot{\theta}) \cdot r + K_D \cdot r = 0 \quad (3.43)$$

On note que la loi de commande non linéaire (3.38) est différente de la commande par découplage non linéaire, et ne mène pas à un système linéaire en boucle fermée. Cependant on verra que cette loi de commande est utile lorsqu'on est confronté à des incertitudes sur les paramètres du système, voire, sur leurs estimées.

Afin de démontrer la stabilité du système en boucle fermée, considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} r^T \cdot A(\theta) \cdot r \tag{3.44}$$

et calculons sa dérivée par rapport au temps  $\dot{V}$  :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= r^T \cdot A(\theta) \cdot \dot{r} + \frac{1}{2} r^T \cdot \dot{A}(\theta) \cdot r \\ &= -r^T K_D r + \frac{1}{2} r^T (\dot{A}(\theta) - 2 \cdot C(\theta, \dot{\theta})) \cdot r \end{aligned} \tag{3.45}$$

En utilisant la propriété d'antisymétrie de la quantité  $\dot{A} - 2 \cdot C$ , il vient :

$$\dot{V} = -r^T \cdot K_D \cdot r \leq 0 \text{ définie négative sur tout l'espace articulaire.}$$

On conclut que  $r$  est globalement asymptotiquement stable et  $e$  et  $\dot{e}$  sont bornées, et tendent vers 0.

**Remarque :** Si  $K_D$  est choisit suffisamment grand pour que  $r$  converge rapidement vers 0, on peut approximer la dynamique par :

$$\dot{e} + \Lambda \cdot e = 0 \tag{3.46}$$

Et si maintenant on choisit  $\Lambda$  suffisamment grand, l'erreur  $e$  convergera vers 0 plus rapidement.

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation, c'est-à-dire qu'on ne dispose que d'estimations sur les paramètres du système. L'équation (3.38) devient :

$$\Gamma = \hat{A}(\theta) \cdot \dot{v} + \hat{C}(\theta, \dot{\theta}) \cdot v + \hat{g}(\theta) - K_D \cdot (\dot{\theta} - v) \tag{3.47}$$

où  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{g}$  sont les estimations respectives des matrices  $A$ ,  $C$  et  $\hat{g}$ .

L'équation de la boucle fermée donnée dans (3.43) devient alors :

$$-\hat{A} \cdot \ddot{e} - (\hat{A} \cdot \Lambda + \hat{C} + K_D) \cdot \dot{e} - (\hat{C} + K_D) \cdot \Lambda \cdot e = (A - \hat{A}) \cdot \ddot{\theta} + (C - \hat{C}) \cdot \dot{\theta} + (g - \hat{g}) \quad (3.48)$$

Une fois le régime permanent est atteint, on a :

$$e_p = -[(\hat{C} + K_D) \cdot \Lambda]^{-1} \cdot [(A - \hat{A}) \cdot \ddot{\theta} + (C - \hat{C}) \cdot \dot{\theta} + (g - \hat{g})] \quad (3.49)$$

En se basant sur la remarque précédente,  $e_p$  est très petite vu qu'on dispose de l'inverse du produit  $K_D \cdot \Lambda$  dans la relation (3.49).

Le robot étant contraint par son environnement, la commande en position n'agit que sur les directions non contraintes, tandis que les autres directions sont commandées en effort. Le modèle du robot s'écrit alors :

$$\Gamma = A(\theta) \cdot \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} + g(\theta) + J^T \cdot F \quad (3.50)$$

Réécrivons les relations (3.40) et (3.41) dans l'espace cartésien, (espace dans lequel la commande sera calculée) :

$$\dot{v}_x = J^{-1} \cdot {}^c \dot{X}_E^d - \Lambda \cdot J^{-1} ({}^c X_E - {}^c X_E^d) \quad (3.51)$$

$$\dot{v}_x = J^{-1} \cdot ({}^c \ddot{X}_E^d - \dot{J} \cdot J^{-1} \cdot {}^c \dot{X}_E^d) - \Lambda \cdot J^{-1} ({}^c \dot{X}_E - {}^c \dot{X}_E^d) \quad (3.52)$$

On peut à présent écrire la loi de commande en position :

$$\Gamma_p = A(\theta) \cdot [S \cdot J_c]^{+} \cdot \dot{v}_x + C(\theta, \dot{\theta}) \cdot [S \cdot J_c]^{+} \cdot v_x - K_D \cdot [S \cdot J_c]^{+} \cdot ({}^c \dot{X}_E - v_x) + g(\theta) \quad (3.53)$$

Pour la boucle de force, on utilise la même loi que celle décrite précédemment (§ 3.3.3.1).

Le schéma de l'implémentation de cette commande est donné par la figure (3.12).

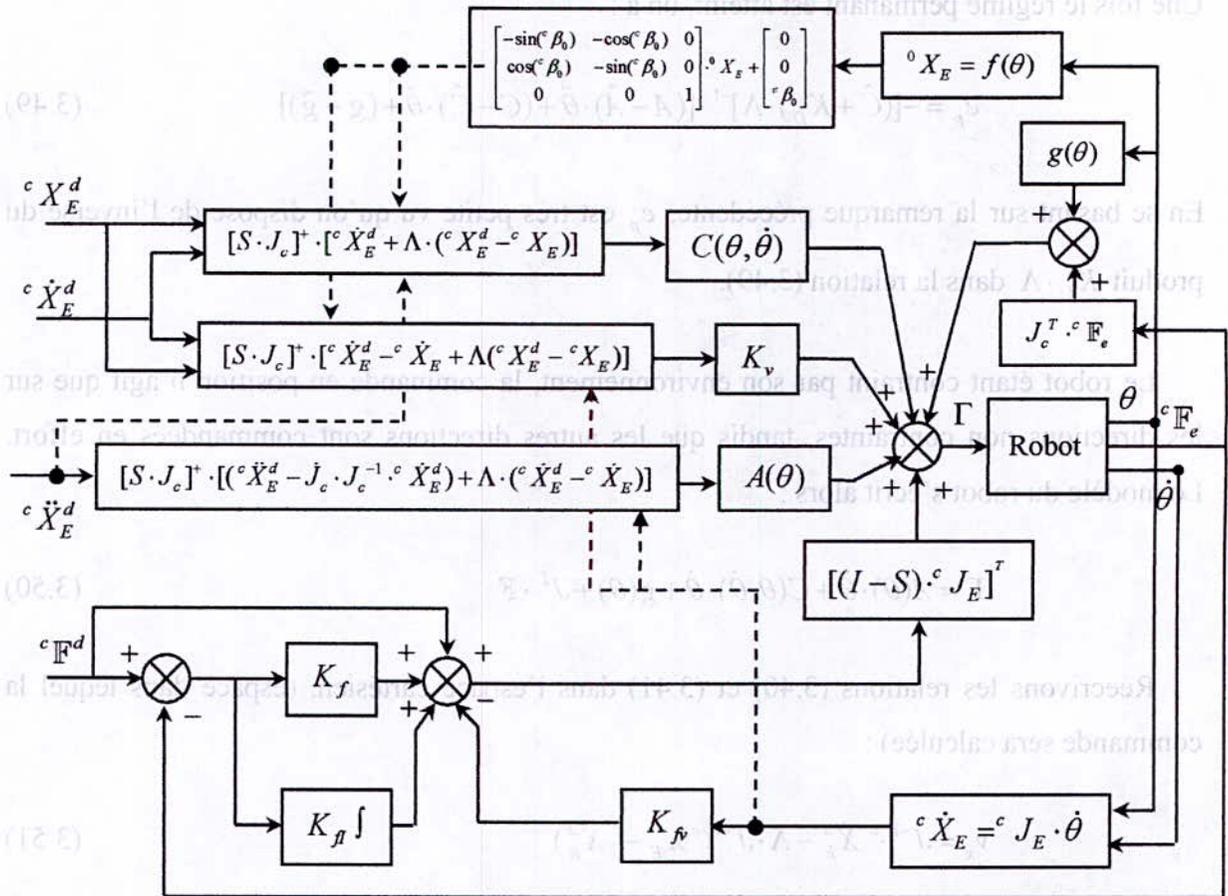


Figure 3.12. Implémentation de la commande hybride

force position du type Passive / PID

### 3.3.4. Résultats et simulations :

#### 3.3.4.1. commande hybride force / position du type DNL / PID :

➤ **Premier cas : sans perturbations ni erreurs de modélisation**

$$K_p = \text{diag}[25000 \ 25000 \ 25000], K_v = \text{diag}[158 \ 158 \ 158] ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement

$$B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ et une masse } M_e = 0.3 \text{ kg}$$

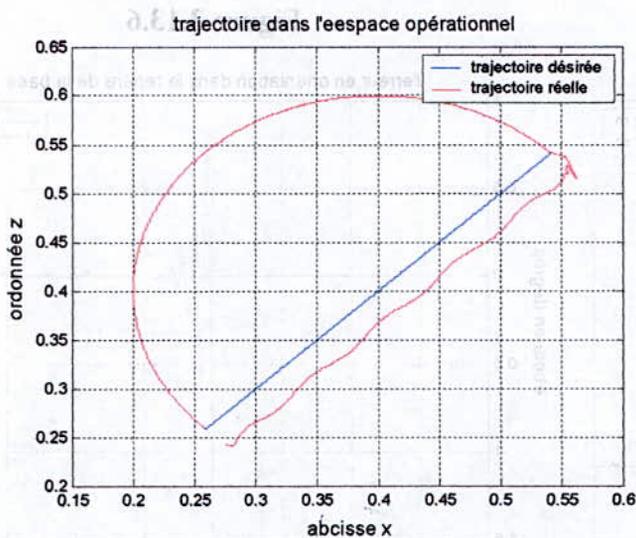


Figure 3.13.1

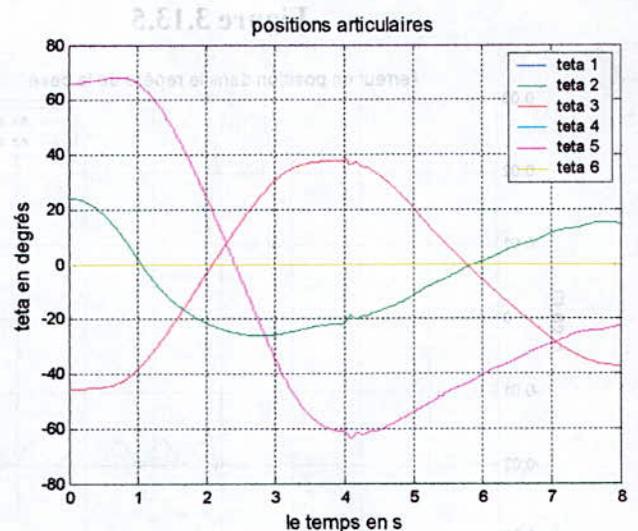


Figure 3.13.2

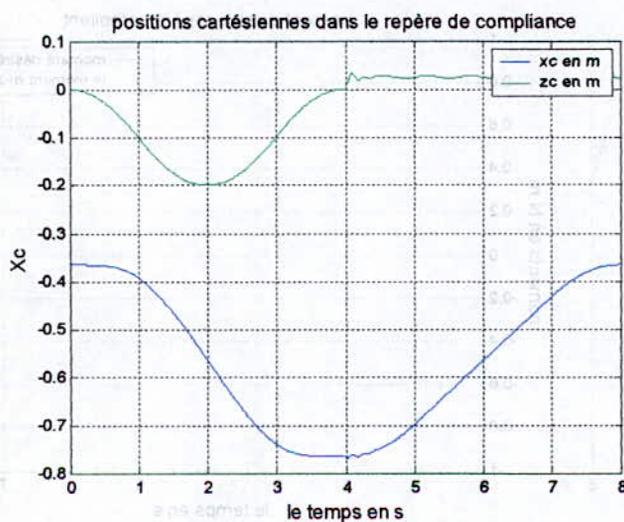


Figure 3.13.3

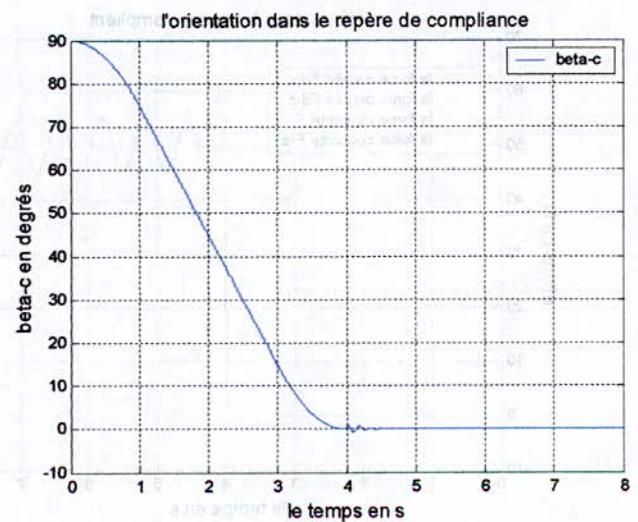


Figure 3.13.4

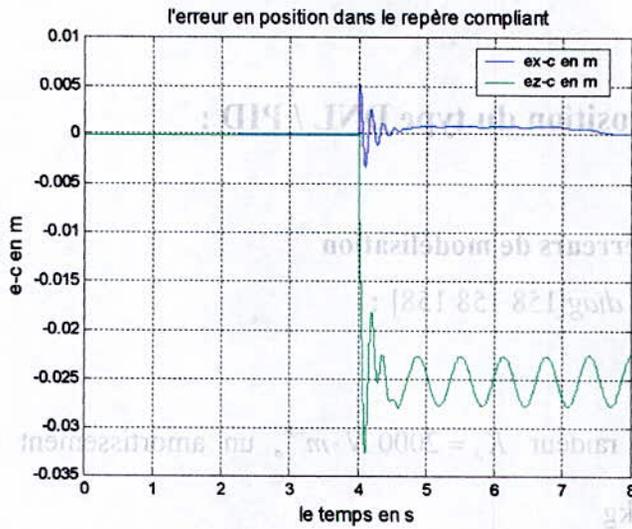


Figure 3.13.5

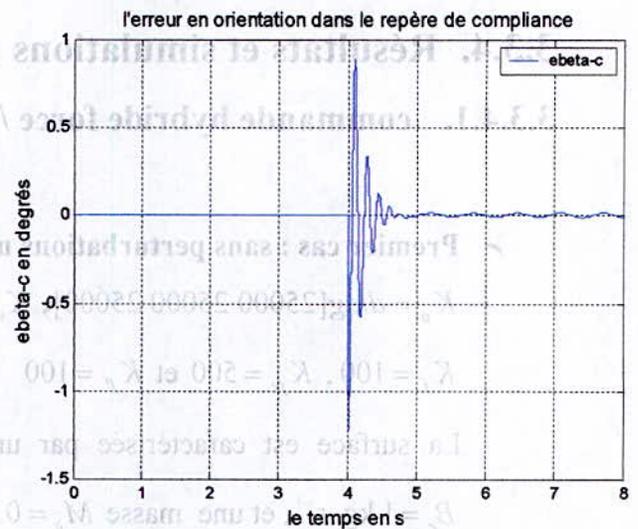


Figure 3.13.6

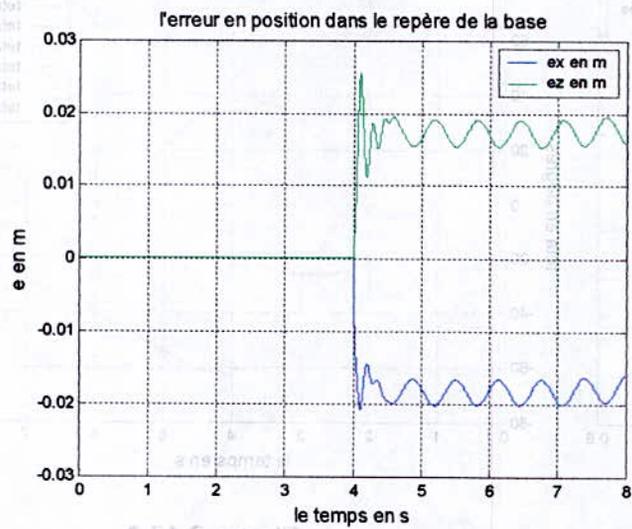


Figure 3.13.7

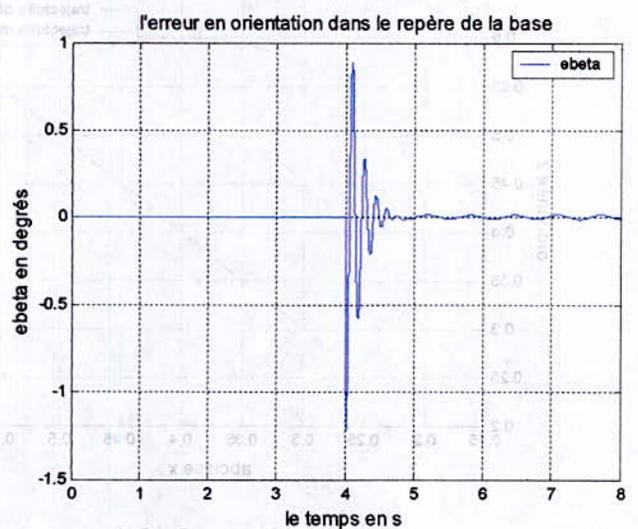


Figure 3.13.8

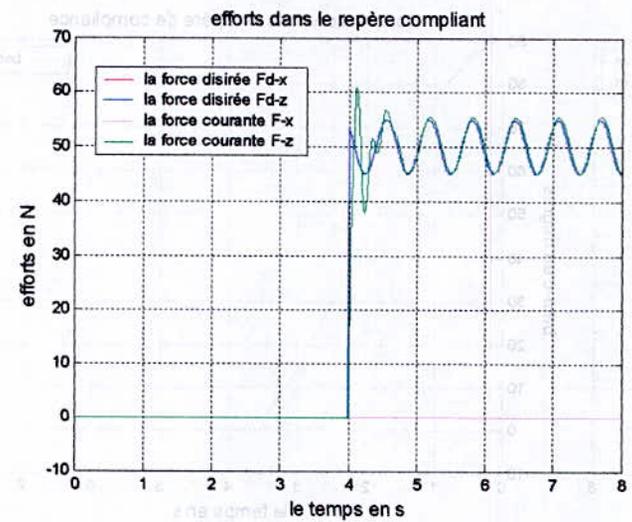


Figure 3.13.9

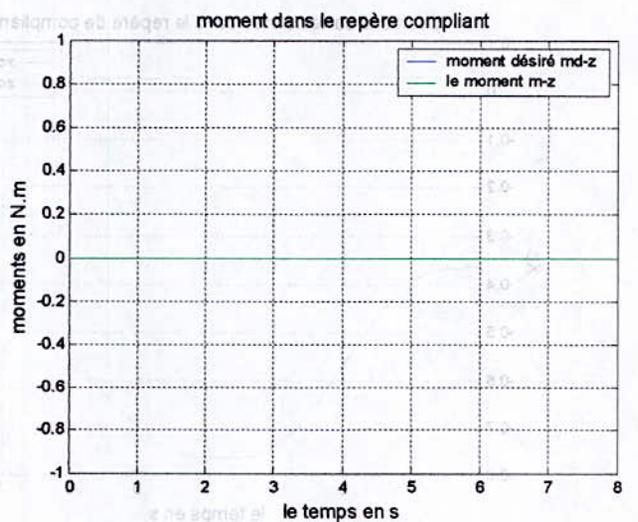


Figure 3.13.10

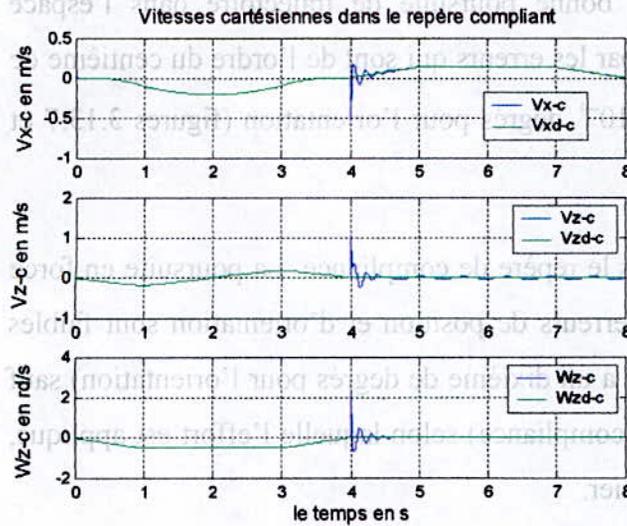


Figure 3.13.11

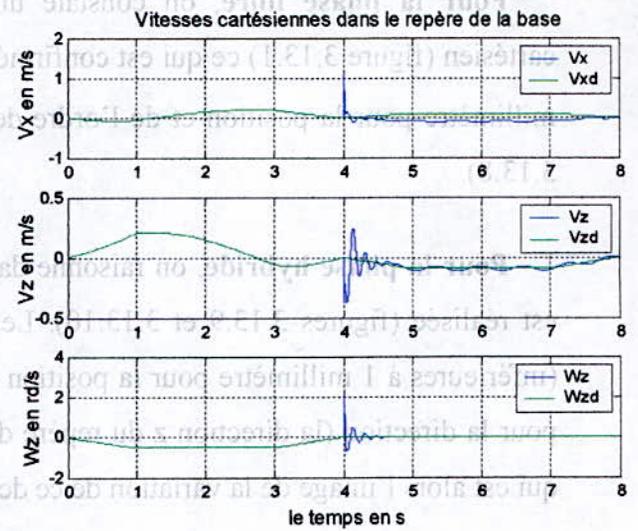


Figure 3.13.12

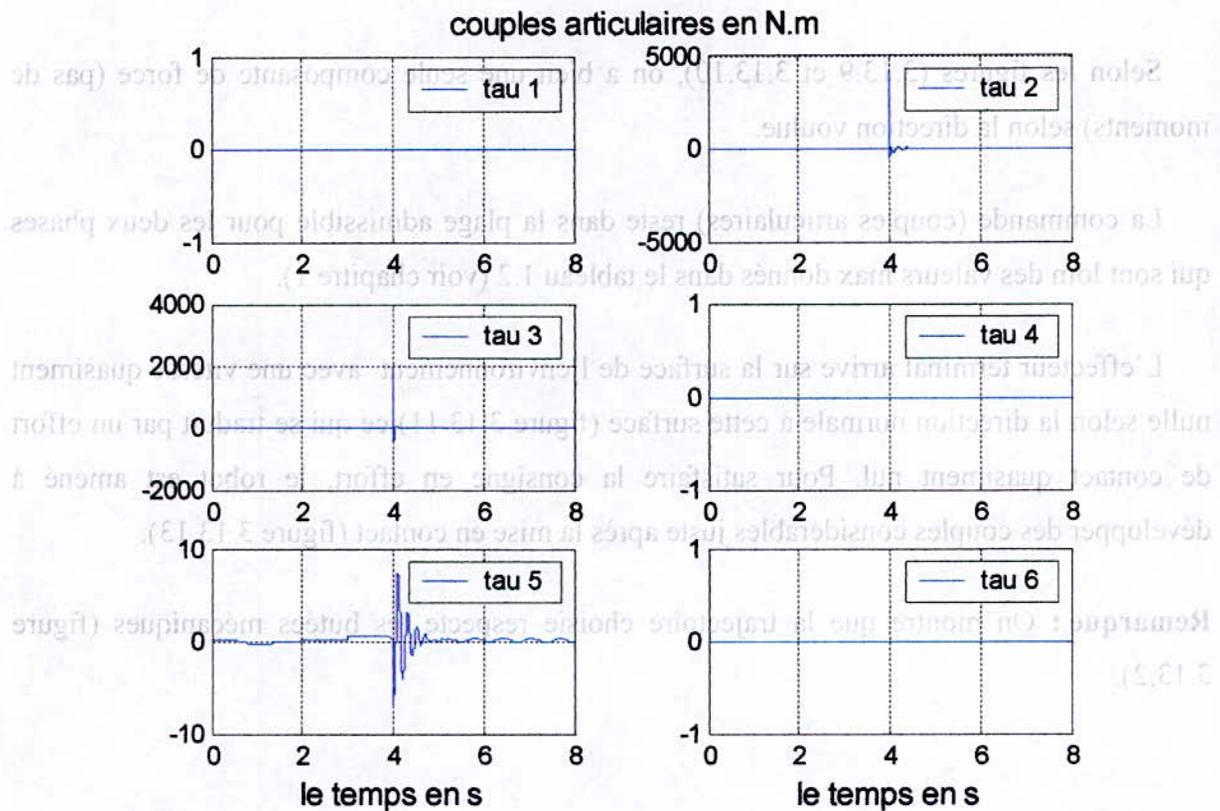


Figure 3.13.13

**Pour la phase libre**, on constate une bonne poursuite de trajectoire dans l'espace cartésien (figure 3.13.1) ce qui est confirmé par les erreurs qui sont de l'ordre du centième de millimètre pour la position et de l'ordre de  $10^{-4}$  degrés pour l'orientation (figures 3.13.7 et 3.13.8).

**Pour la phase hybride**, on raisonne dans le repère de compliance. La poursuite en force est réalisée (figures 3.13.9 et 3.13.10). Les erreurs de position et d'orientation sont faibles (inférieures à 1 millimètre pour la position et à un dixième de degrés pour l'orientation) sauf pour la direction (la direction z du repère de compliance) selon laquelle l'effort est appliqué, qui est alors l'image de la variation de ce dernier.

Les erreurs de position dans le repère de la base sont importantes (figures 3.13.7 et 3.13.8) mais ne permettent pas de conclure sur la poursuite en position car elles subissent l'effet de la variation de la force qui dans ce repère, possède des composantes selon les deux directions.

Selon les figures (3.13.9 et 3.13.10), on a bien une seule composante de force (pas de moments) selon la direction voulue.

La commande (couples articulaires) reste dans la plage admissible pour les deux phases qui sont loin des valeurs max donnés dans le tableau 1.2 (voir chapitre 1).

L'effecteur terminal arrive sur la surface de l'environnement avec une vitesse quasiment nulle selon la direction normale à cette surface (figure 3.13.11) ce qui se traduit par un effort de contact quasiment nul. Pour satisfaire la consigne en effort, le robot est amené à développer des couples considérables juste après la mise en contact (figure 3.13.13).

**Remarque :** On montre que la trajectoire choisie respecte les butées mécaniques (figure 3.13.2).

➤ Deuxième cas : avec perturbation en force et erreurs de modélisation de 100%

La perturbation est un signal carré introduit à l'instant  $t = 5\text{ s}$  et de durée 1 s.

$$K_p = \text{diag}[25000 \ 25000 \ 25000], K_v = \text{diag}[158 \ 158 \ 158] ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , un amortissement

$$B_e = 1\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}, \text{ et une masse } M_e = 0.3\text{ kg}$$

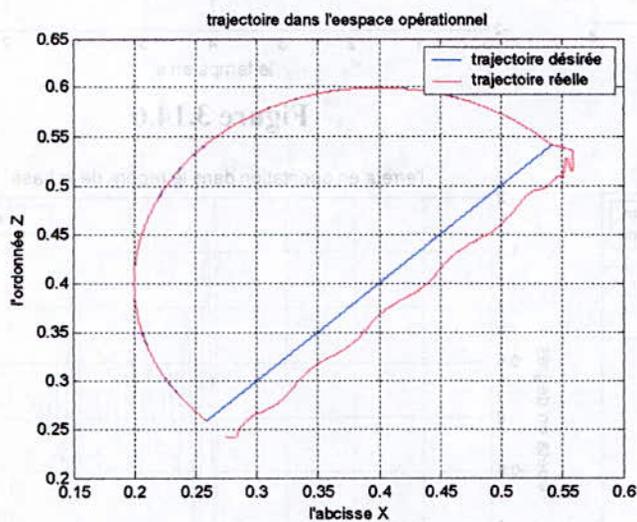


Figure 3.14.1

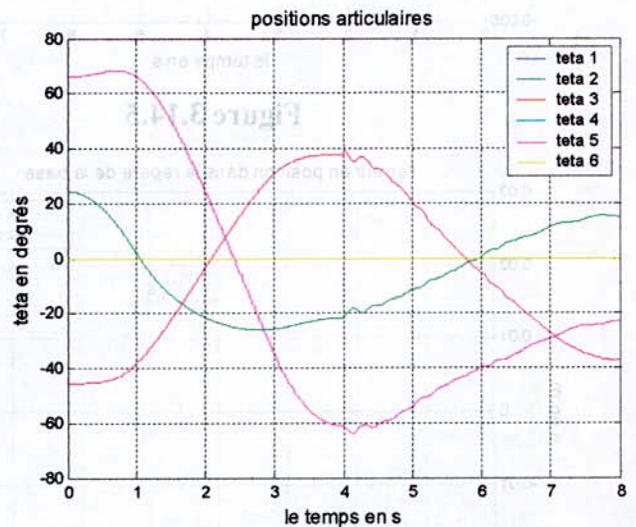


Figure 3.14.2

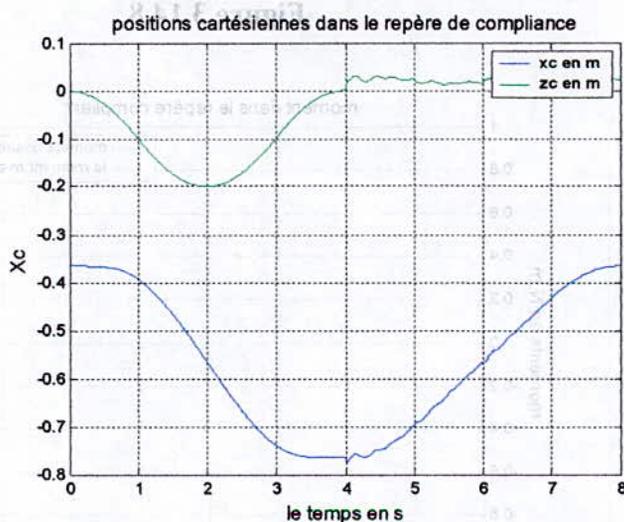


Figure 3.14.3

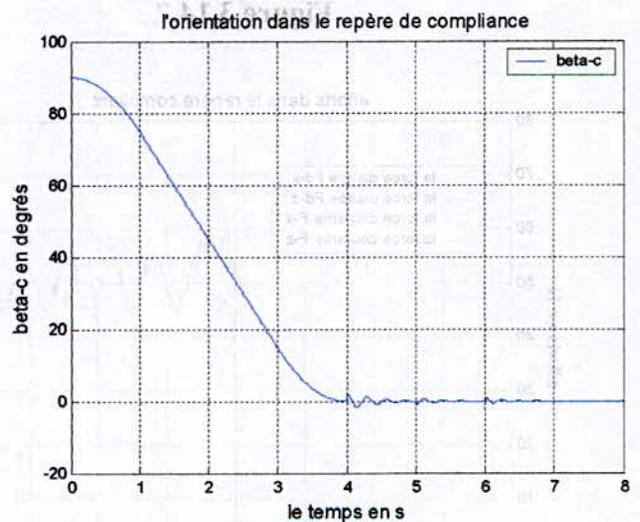


Figure 3.14.4

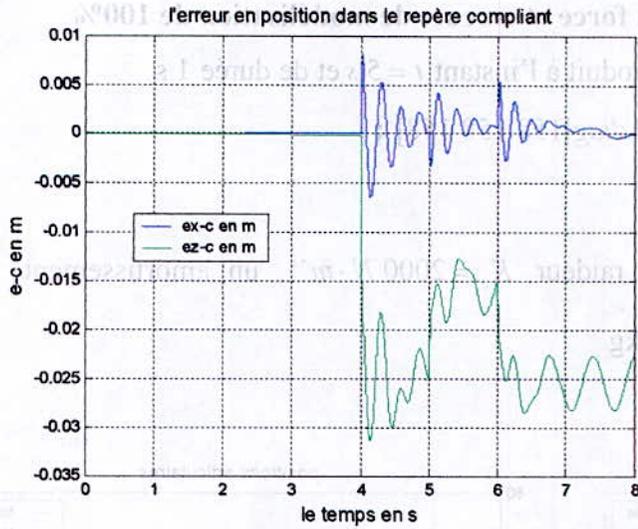


Figure 3.14.5

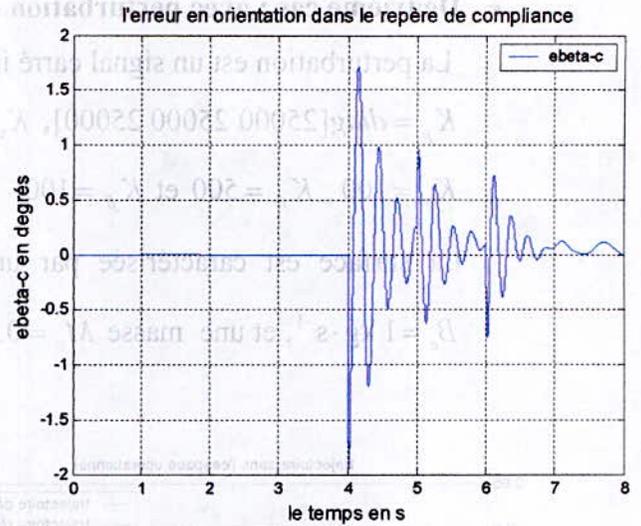


Figure 3.14.6

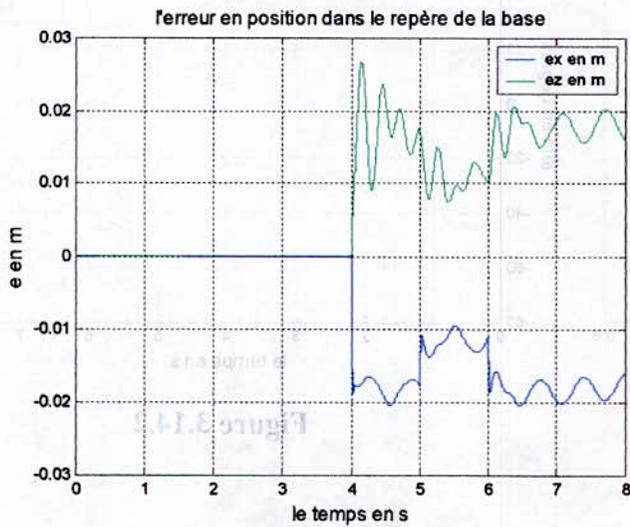


Figure 3.14.7

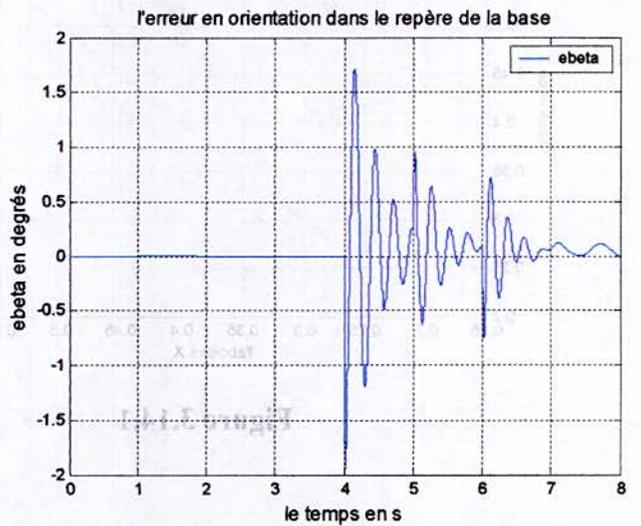


Figure 3.14.8

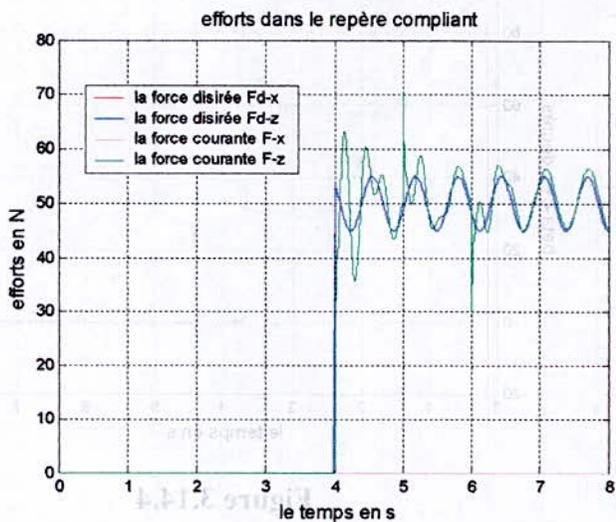


Figure 3.14.9

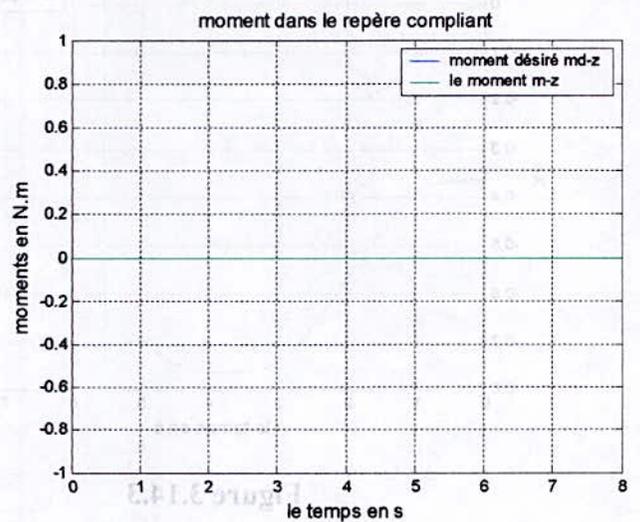


Figure 3.14.10

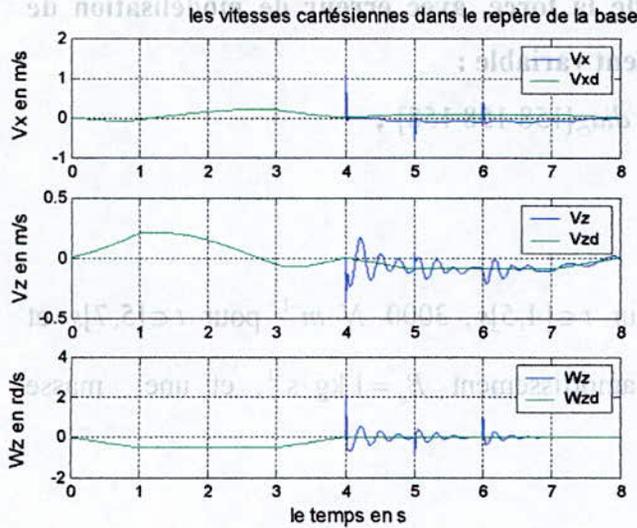


Figure 3.14.11

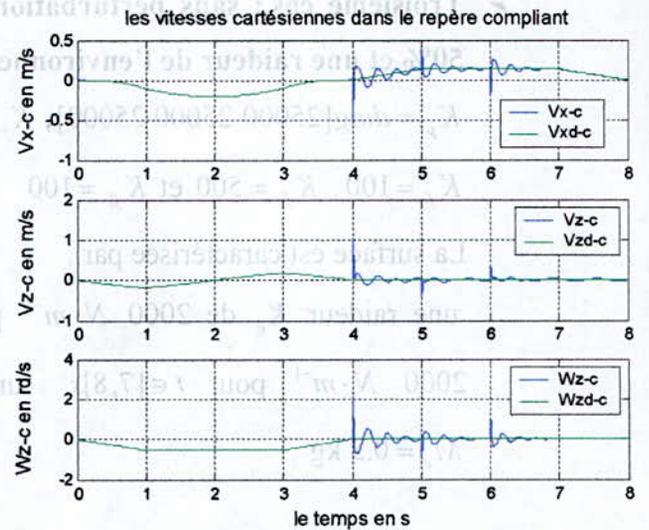


Figure 3.14.12

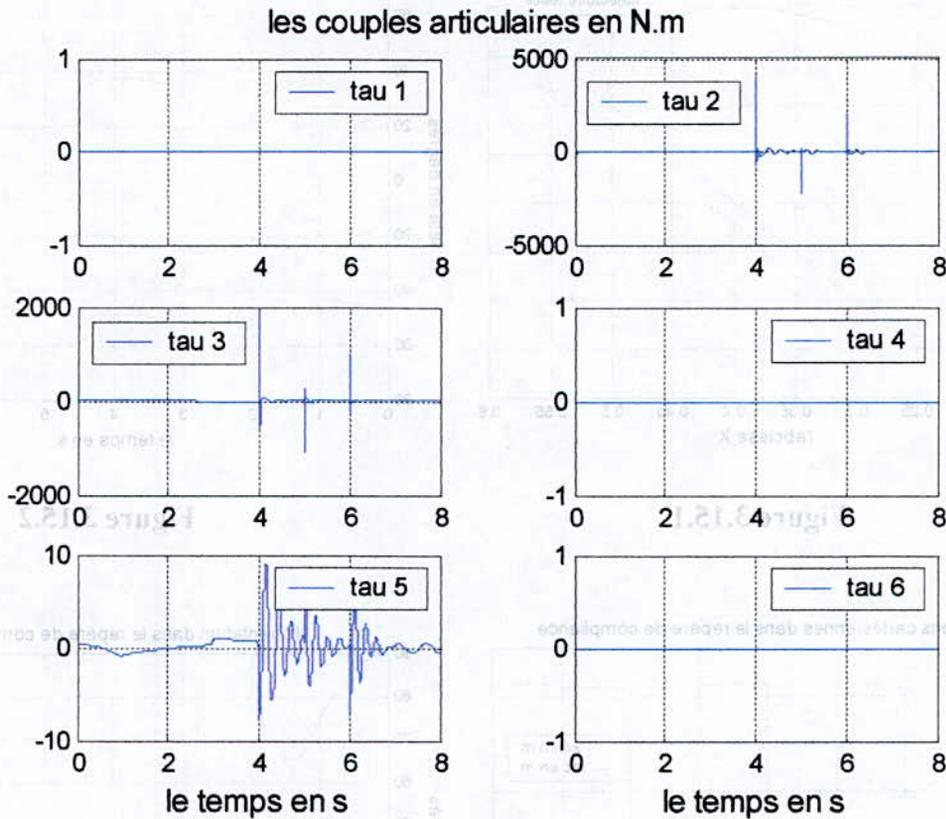


Figure 3.14.13

Les performances restent satisfaisantes en termes de rapidité et de précision, car les valeurs choisies pour les gains sont suffisantes pour annuler l'effet des erreurs de modélisation. Les perturbations en sortie introduites dans la boucle de force sont rapidement atténuées, et la commande reste admissible figure (3.14.13).

➤ Troisième cas : sans perturbation de la force, avec erreur de modélisation de 50% et une raideur de l'environnement variable :

$$K_p = \text{diag}[25000 \ 25000 \ 25000], K_v = \text{diag}[158 \ 158 \ 158] ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par :

une raideur  $K_e$  de  $2000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pour  $t \in [4,5]\text{s}$ ,  $3000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pour  $t \in [5,7]\text{s}$  et  $2000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pour  $t \in [7,8]\text{s}$  un amortissement  $B_e = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , et une masse  $M_e = 0.3 \text{ kg}$

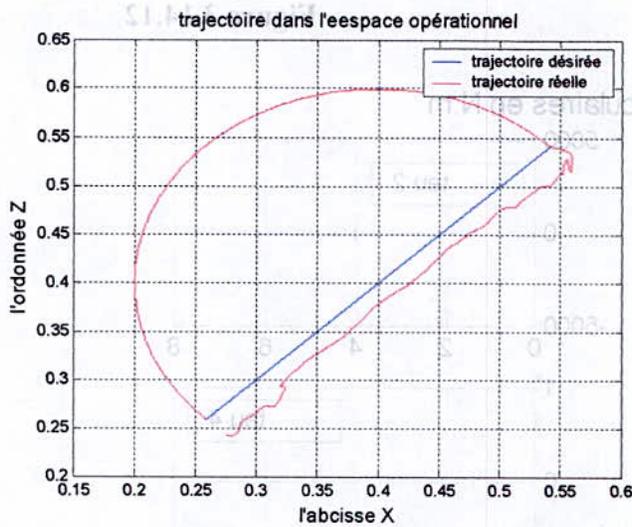


Figure 3.15.1

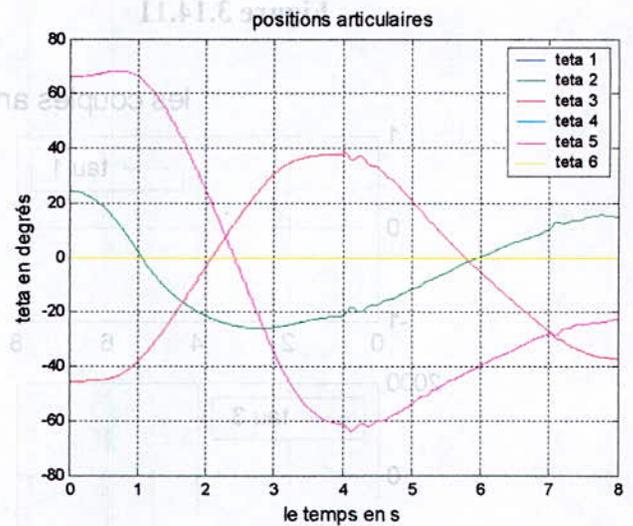


Figure 3.15.2

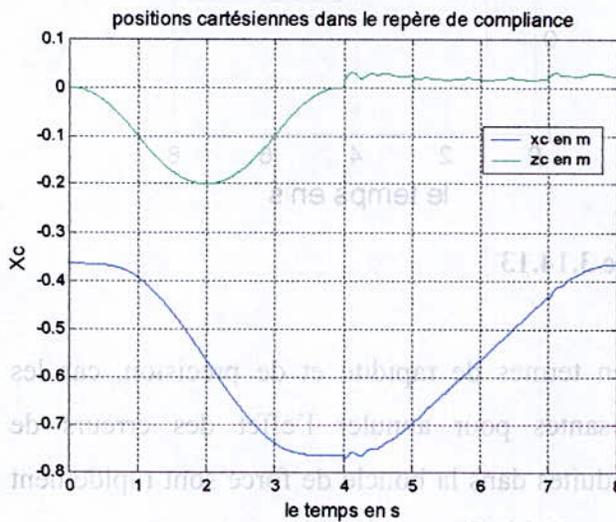


Figure 3.15.3

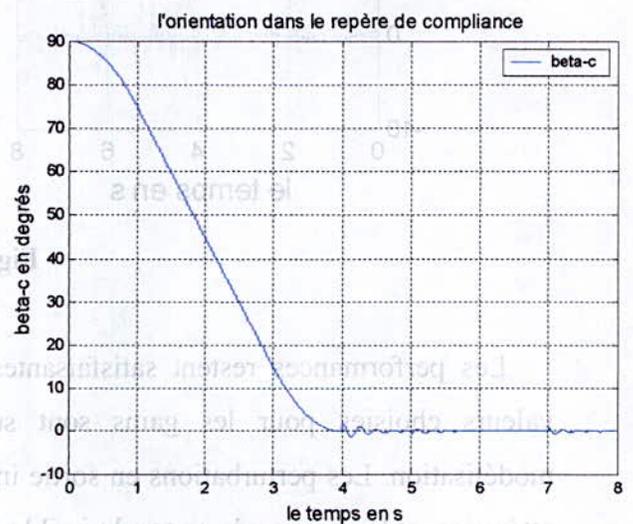


Figure 3.15.4

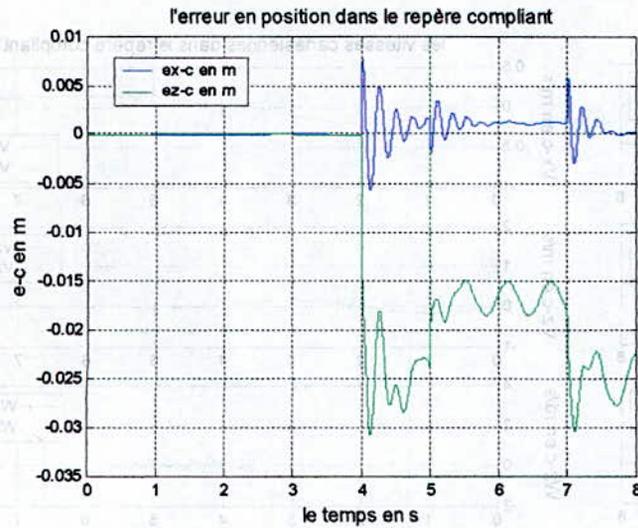


Figure 3.15.5

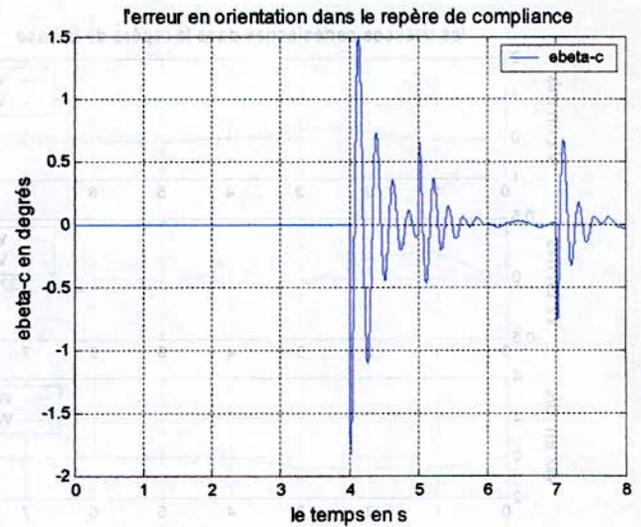


Figure 3.15.6

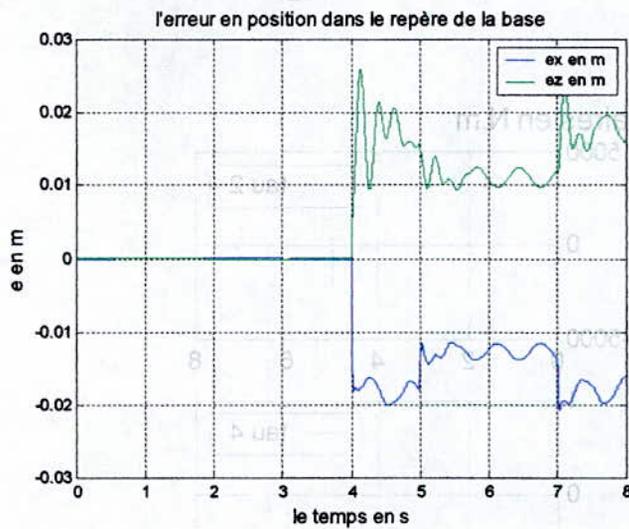


Figure 3.15.8

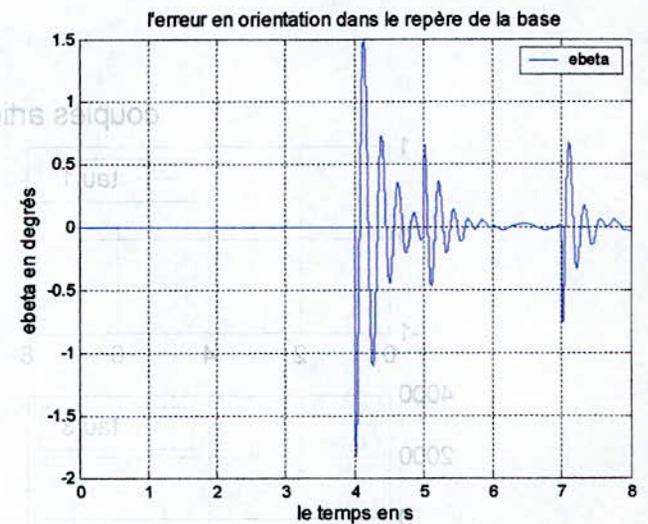


Figure 3.15.9

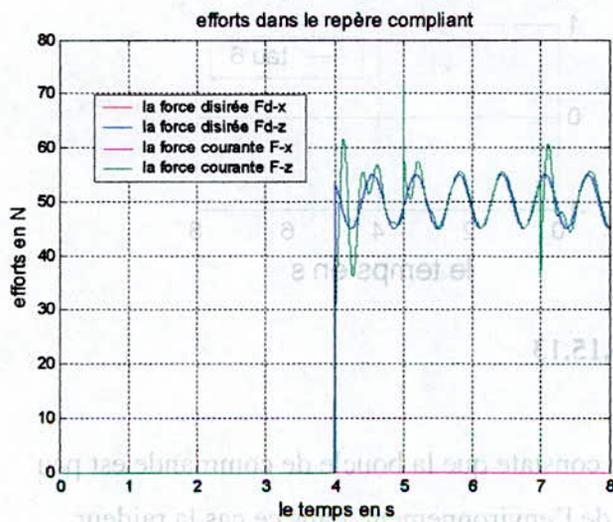


Figure 3.15.10

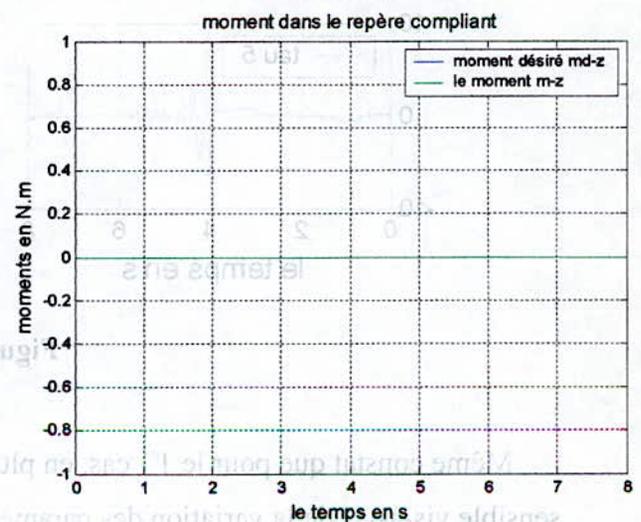


Figure 3.15.11

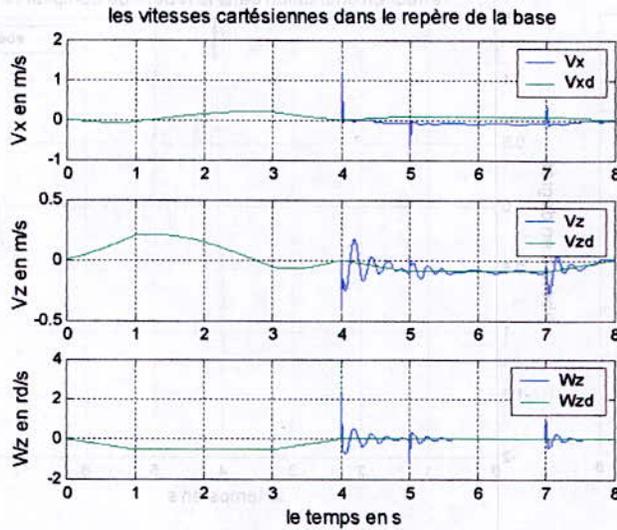


Figure 3.15.11

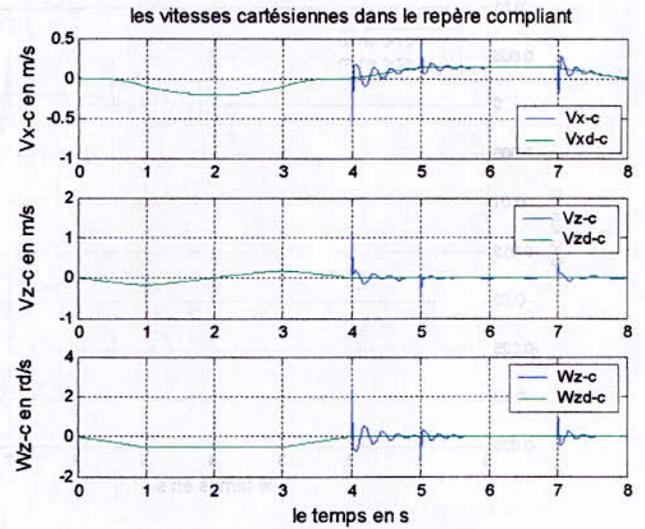


Figure 3.15.12

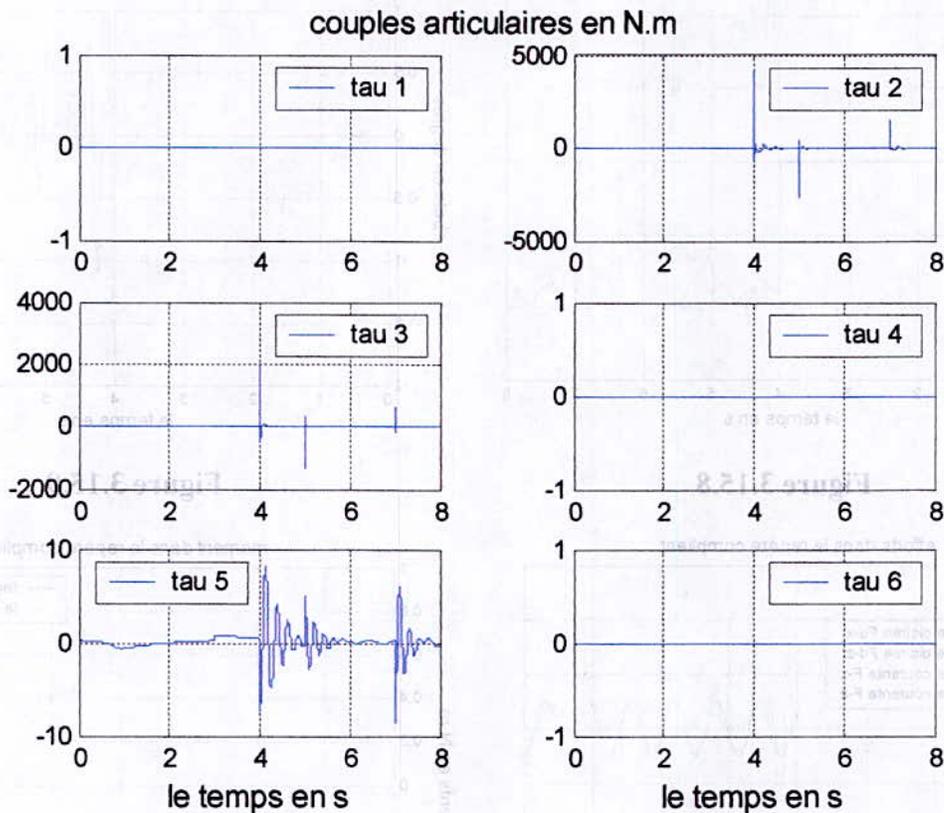


Figure 3.15.13

Même constat que pour le 1<sup>er</sup> cas, en plus on constate que la boucle de commande est peu sensible vis-à-vis de la variation des paramètres de l'environnement, dans ce cas la raideur.

### 3.3.4.2. Commande hybride force / position du type Passive / PID :

➤ Premier cas : sans perturbations ni erreurs de modélisation

$$\Lambda = \text{diag}[100 \ 100 \ 100], K_D = \text{diag}[500 \ 500 \ 500] ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement

$$B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ et une masse } M_e = 0.3 \text{ kg}$$

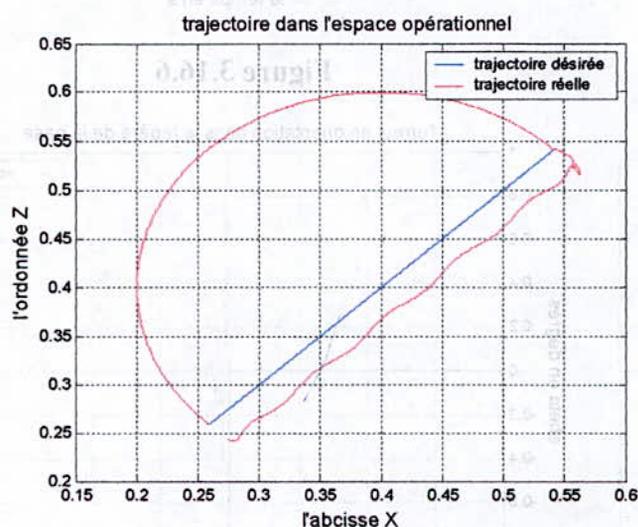


Figure 3.16.1

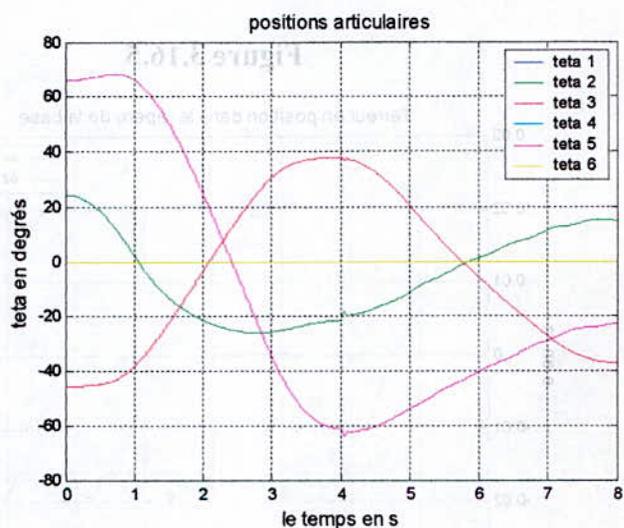


Figure 3.16.2

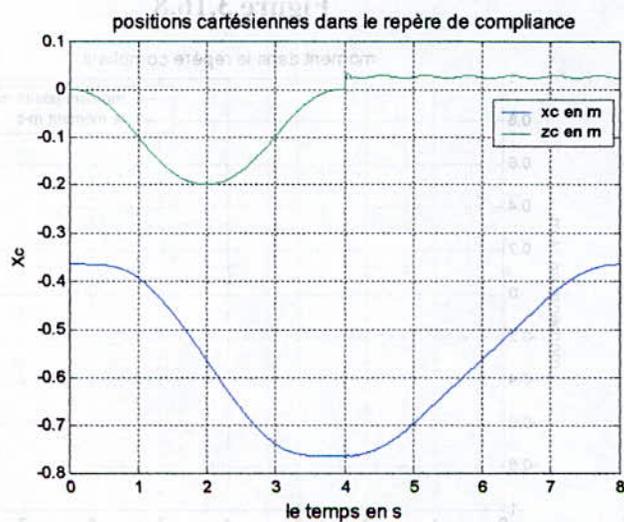


Figure 3.16.3

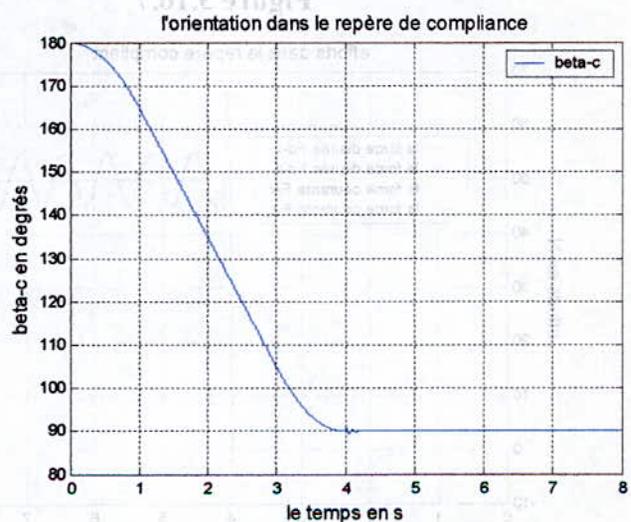


Figure 3.16.4

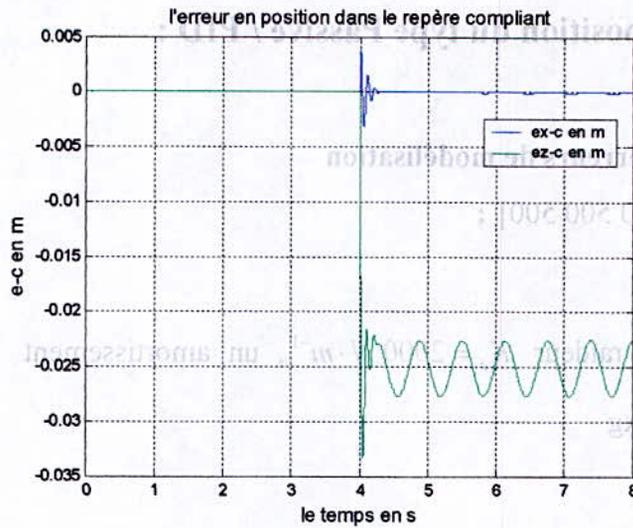


Figure 3.16.5

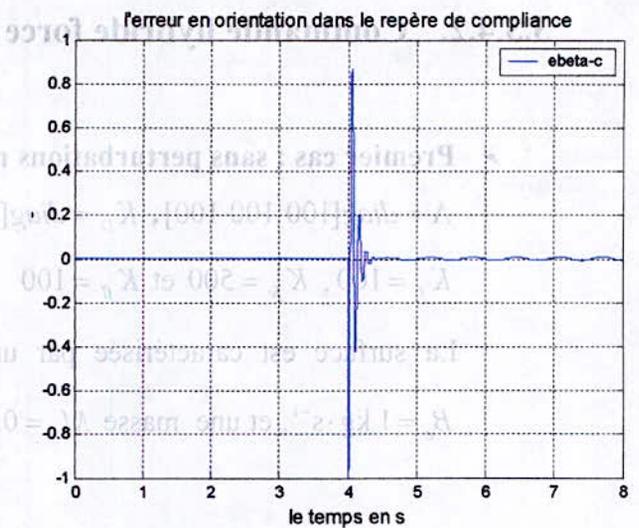


Figure 3.16.6

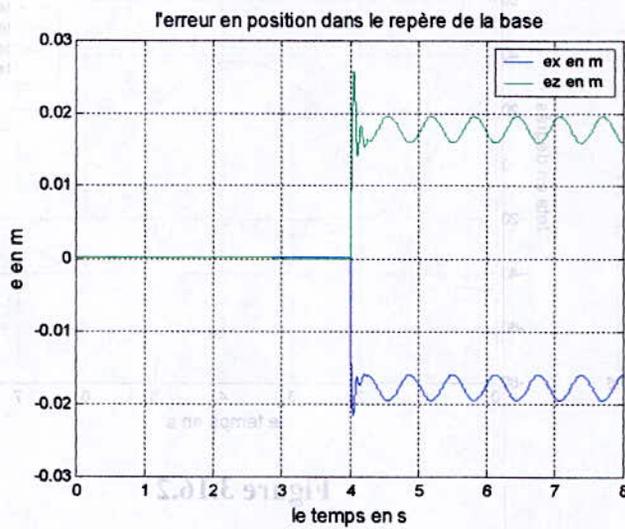


Figure 3.16.7

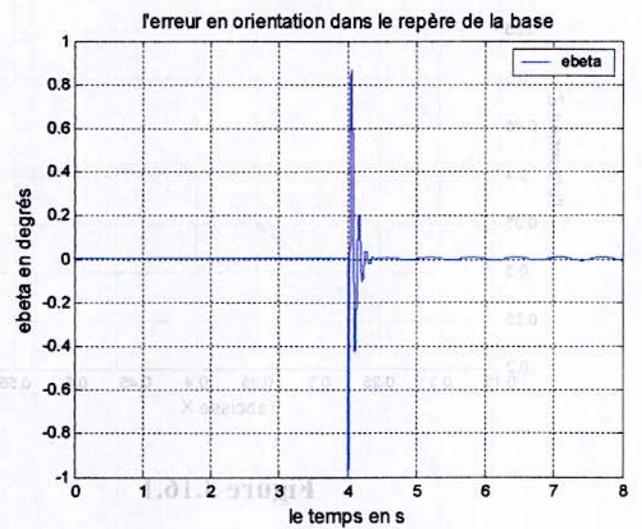


Figure 3.16.8

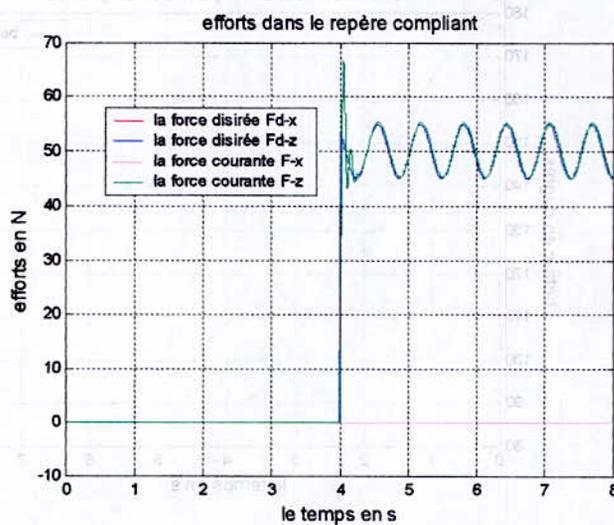


Figure 3.16.9

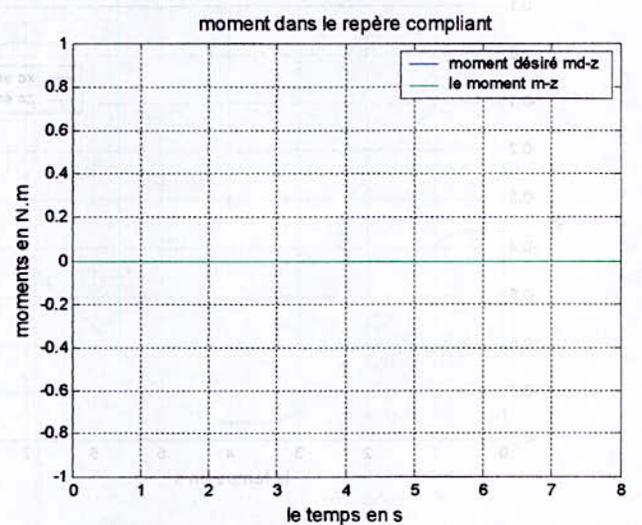


Figure 3.16.10

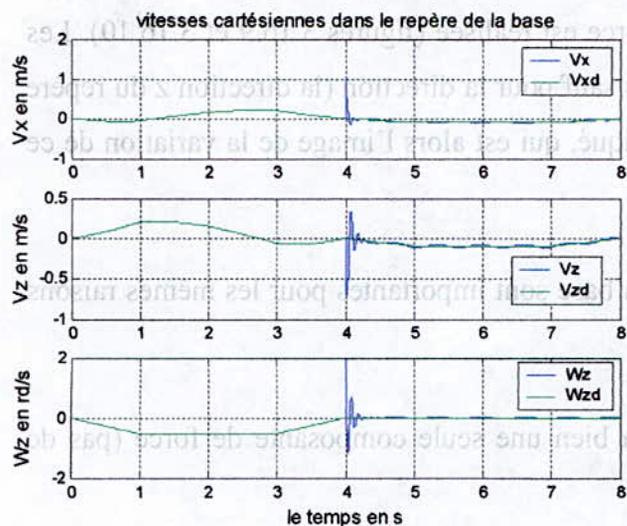


Figure 3.16.11

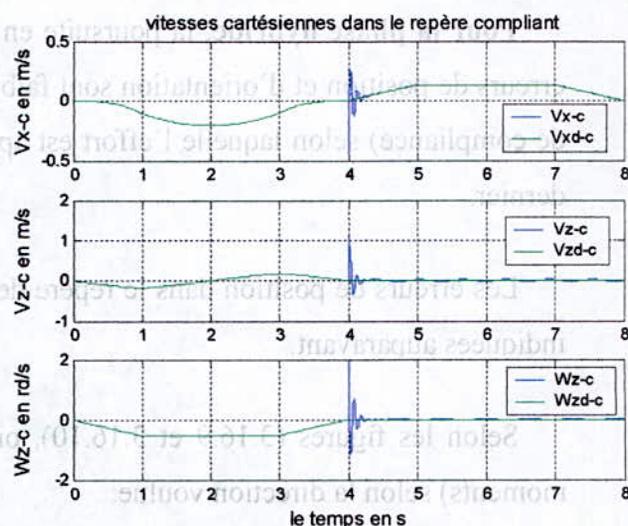


Figure 3.16.12

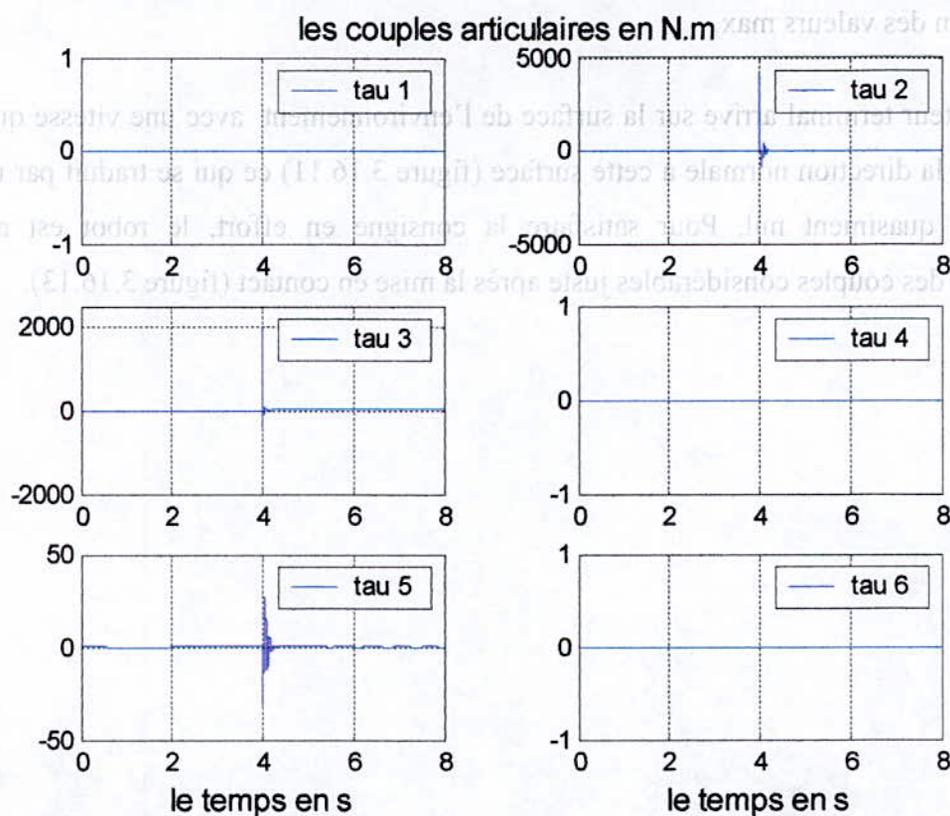


Figure 3.16.13

Pour la phase libre, on constate une bonne poursuite de trajectoire dans l'espace cartésien (figure 3.13.1) ce qui est confirmé par les erreurs qui sont de l'ordre du dixième de millimètre pour la position et de l'ordre de  $10^{-3}$  degrés pour l'orientation (figures 3.16.7 et 3.16.8).

Pour la phase hybride, la poursuite en force est réalisée (figures 3.16.9 et 3.16.10). Les erreurs de position et d'orientation sont faibles sauf pour la direction (la direction z du repère de compliance) selon laquelle l'effort est appliqué, qui est alors l'image de la variation de ce dernier.

Les erreurs de position dans le repère de la base sont importantes pour les mêmes raisons indiquées auparavant.

Selon les figures (3.16.9 et 3.16.10), on a bien une seule composante de force (pas de moments) selon la direction voulue.

La commande (couples articulaires) reste dans la plage admissible pour les deux phases qui sont loin des valeurs max.

L'effecteur terminal arrive sur la surface de l'environnement avec une vitesse quasiment nulle selon la direction normale à cette surface (figure 3.16.11) ce qui se traduit par un effort de contact quasiment nul. Pour satisfaire la consigne en effort, le robot est amené à développer des couples considérables juste après la mise en contact (figure 3.16.13).



Figure 3.16.13

Pour la phase libre, on constate une bonne poursuite de trajectoire dans l'espace cartésien (figure 3.13) ce qui est confirmé par les erreurs qui sont de l'ordre du dixième de millimètre pour la position et de l'ordre de 10<sup>-2</sup> degrés pour l'orientation (figures 3.16.7 et 3.16.8).

➤ **Deuxième cas : avec perturbation en force et erreurs de modélisation de 100%**

La perturbation est un signal carré introduit à l'instant  $t = 5 \text{ s}$  et de durée 1 s.

$$\Lambda = \text{diag}[100 \ 100 \ 100], \quad K_D = \text{diag}[500 \ 500 \ 500] ;$$

$$K_f = 100, \quad K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement  $B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , et une masse  $M_e = 0.3 \text{ kg}$

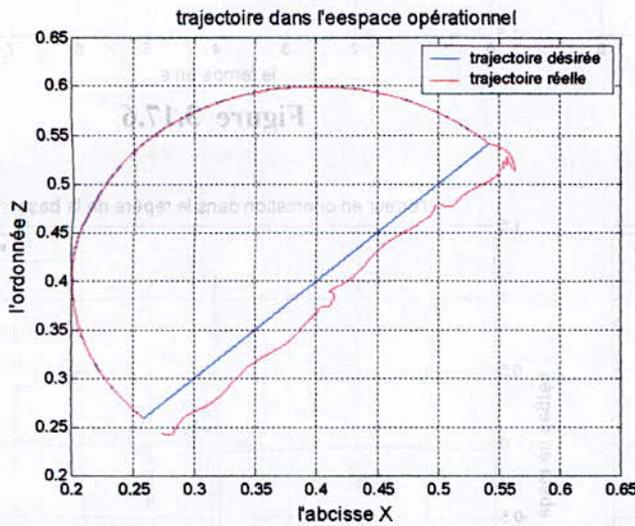


Figure 3.17.1

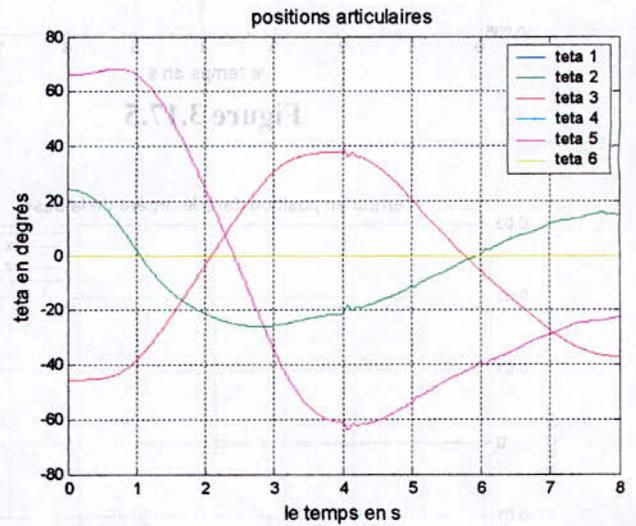


Figure 3.17.2

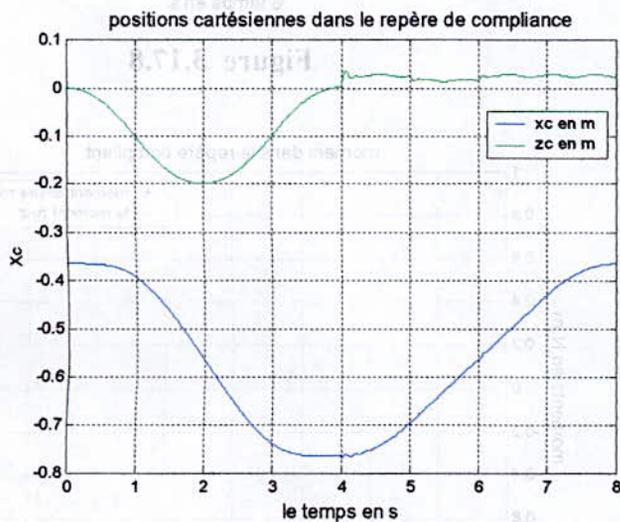


Figure 3.17.3

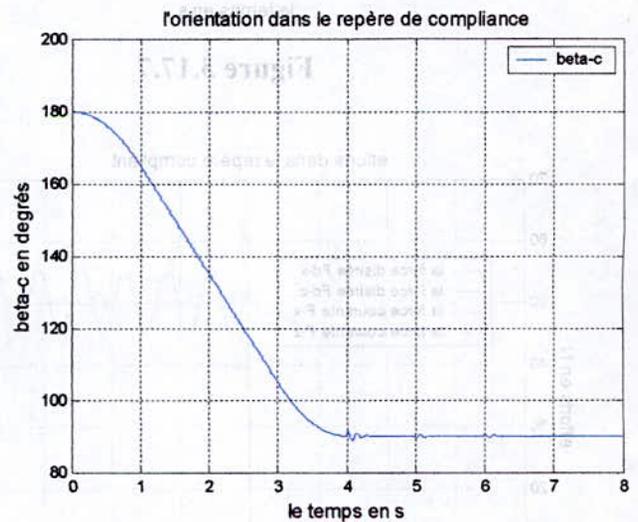


Figure 3.17.4

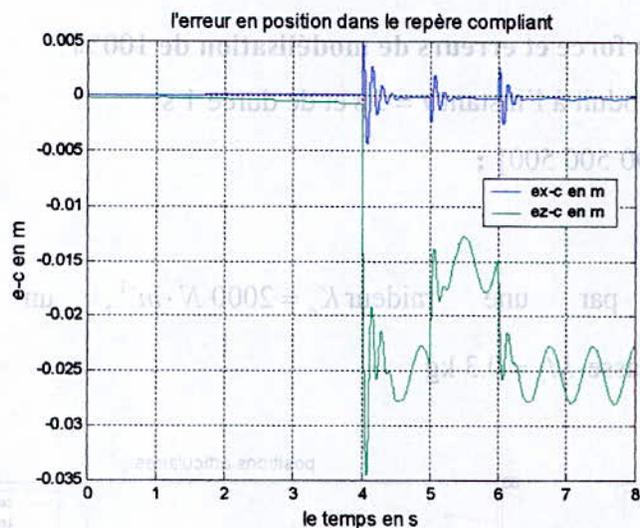


Figure 3.17.5

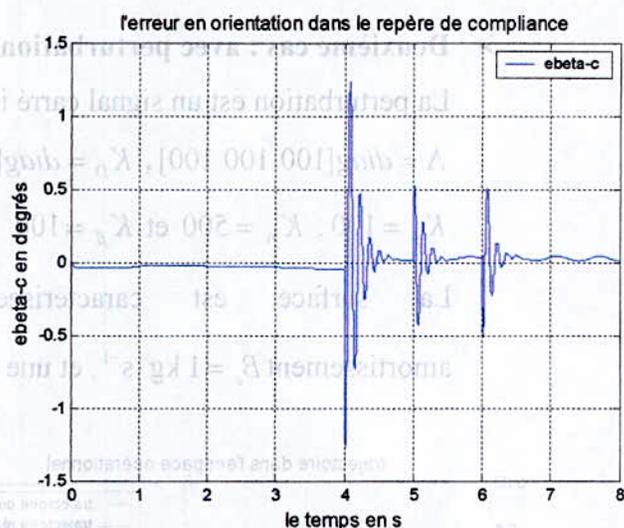


Figure 3.17.6

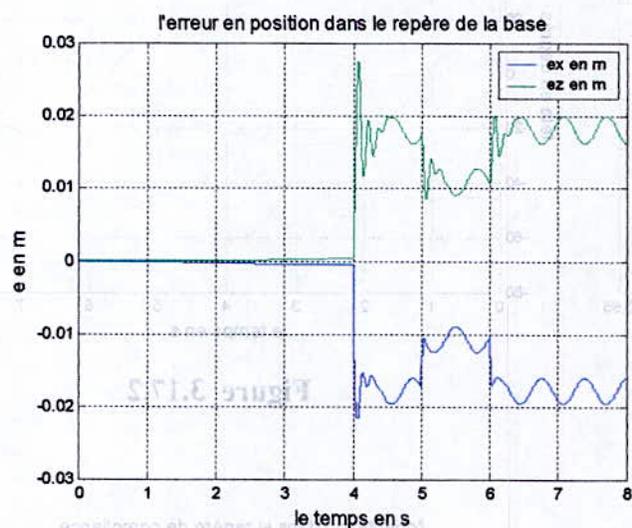


Figure 3.17.7

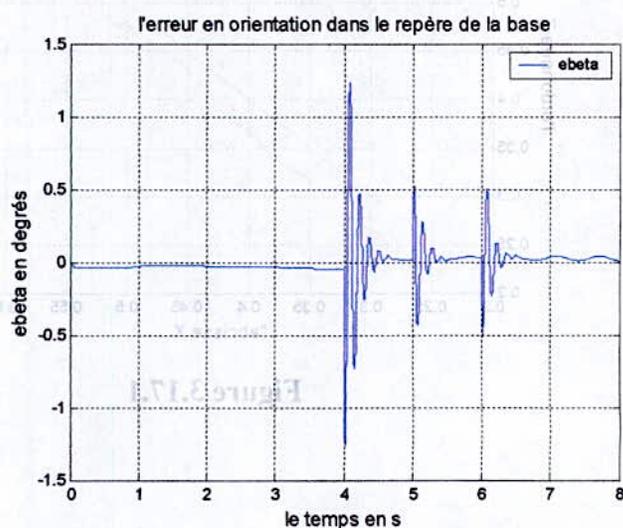


Figure 3.17.8

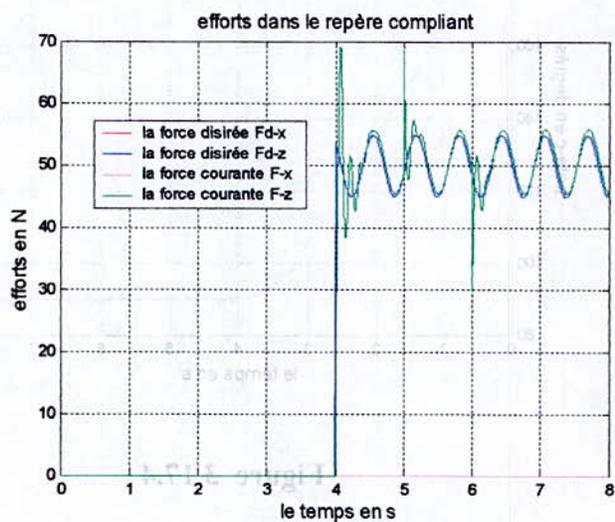


Figure 3.17.9

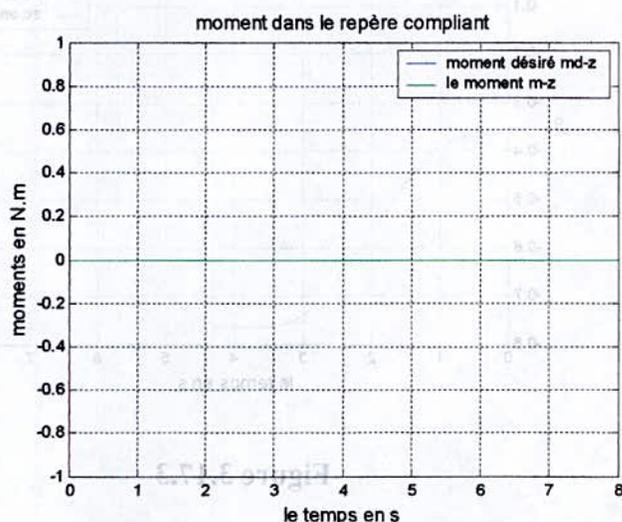


Figure 3.17.10

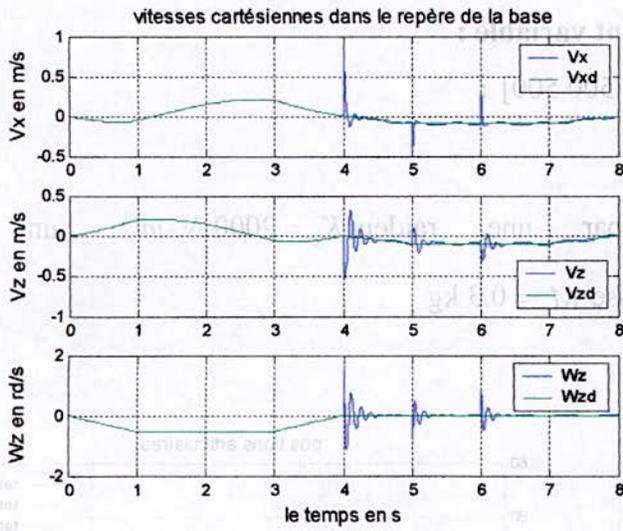


Figure 3.17.11

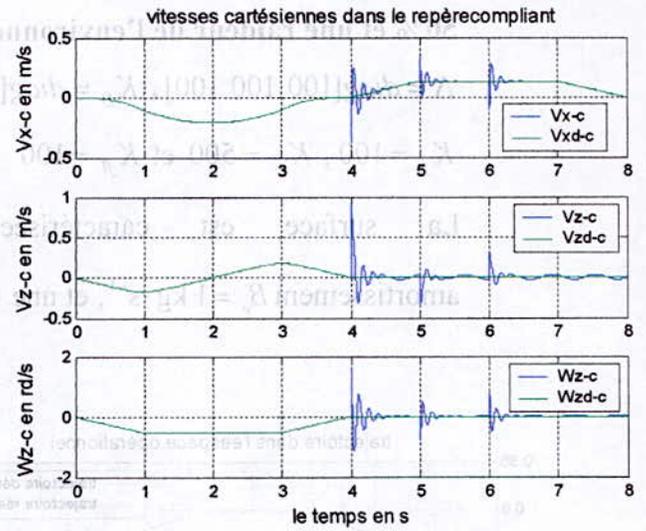


Figure 3.17.12

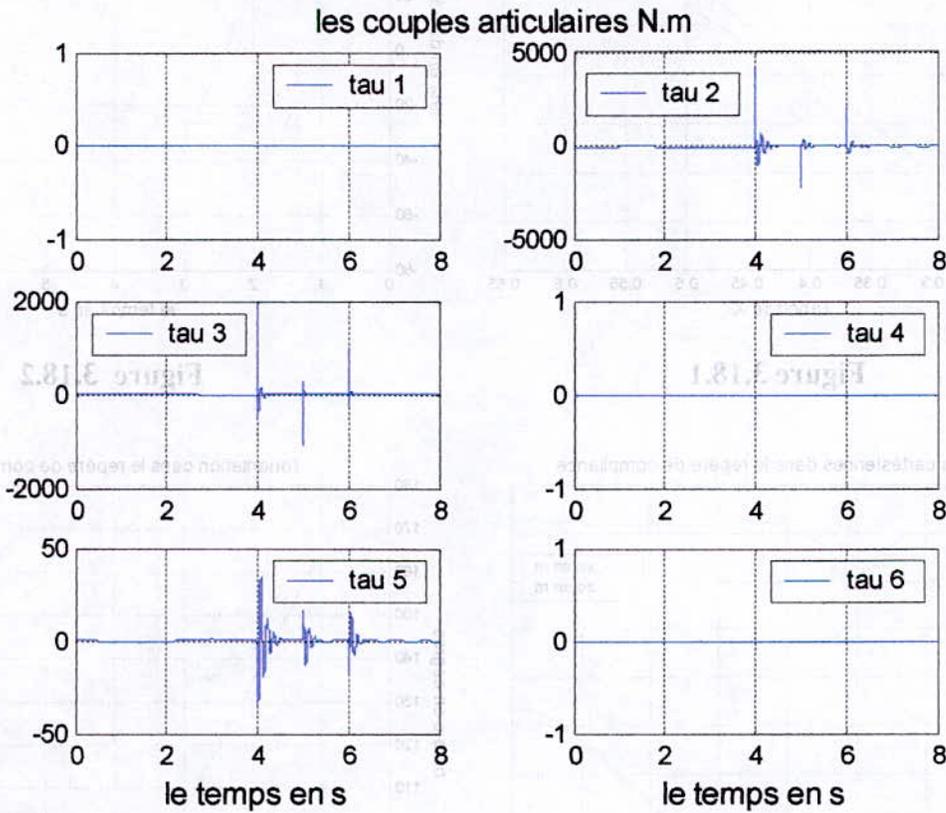


Figure 3.17.13

Les performances restent satisfaisantes en termes de rapidité et de précision, car les valeurs choisies pour les gains sont suffisantes pour annuler l'effet des erreurs de modélisation. Les perturbations en sortie introduites dans la boucle de force sont rapidement atténuées, et la commande reste admissible figure (3.17.13).

- Troisième cas : sans perturbation de la force, avec erreur de modélisation de 50% et une raideur de l'environnement variable :

$$\Lambda = \text{diag}[100 \ 100 \ 100], K_D = \text{diag}[500 \ 500 \ 500] ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{fl} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement  $B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , et une masse  $M_e = 0.3 \text{ kg}$

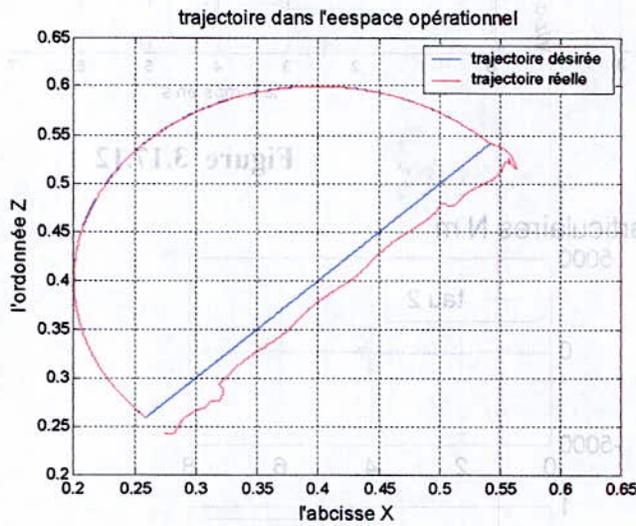


Figure 3.18.1

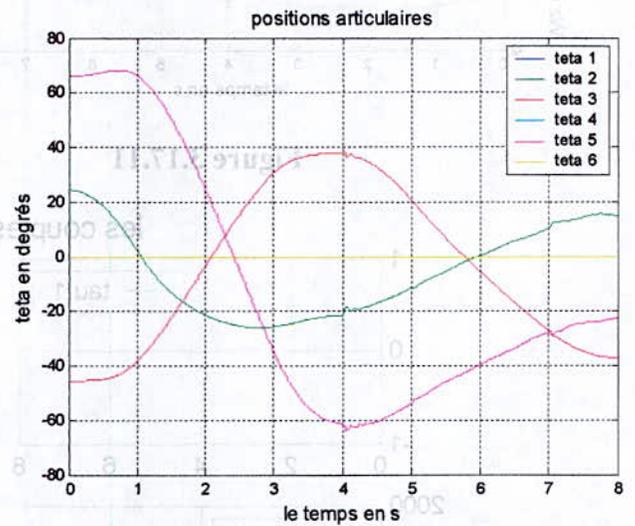


Figure 3.18.2

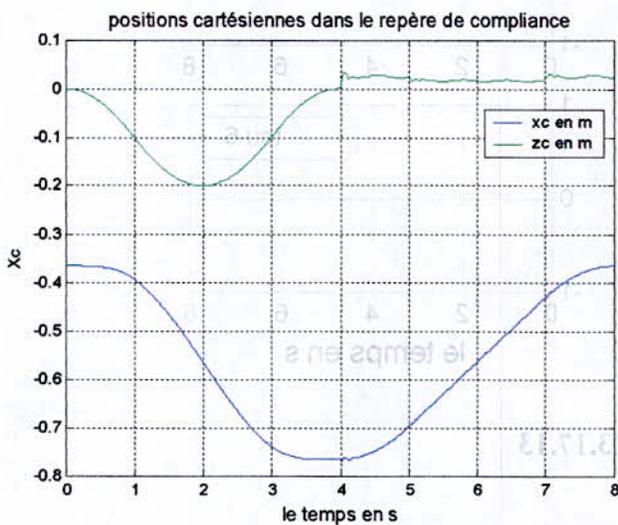


Figure 3.18.3

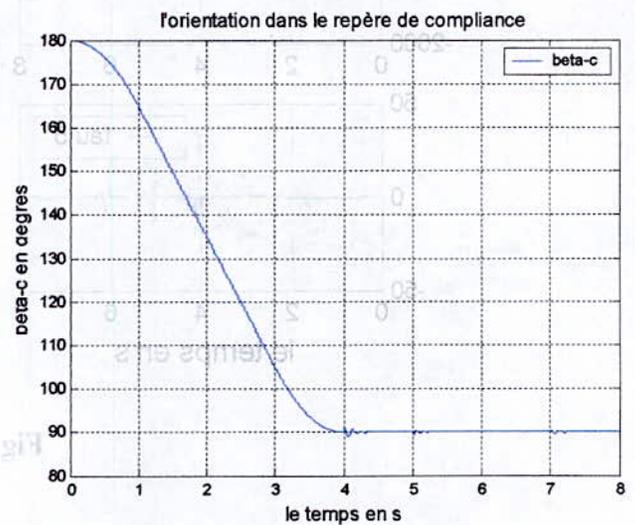


Figure 3.18.4

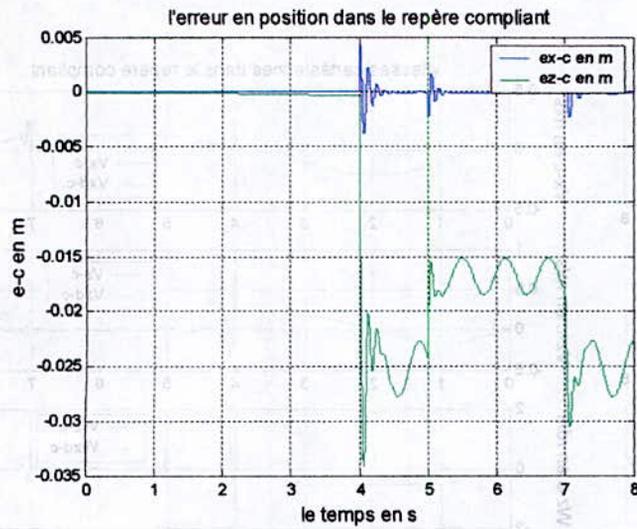


Figure 3.18.5

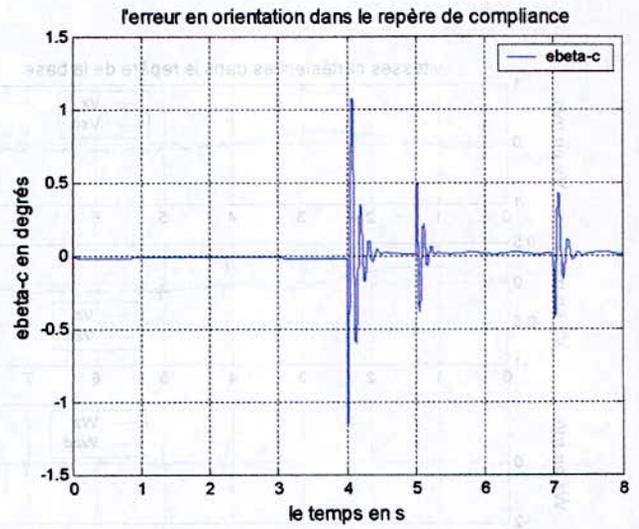


Figure 3.18.6

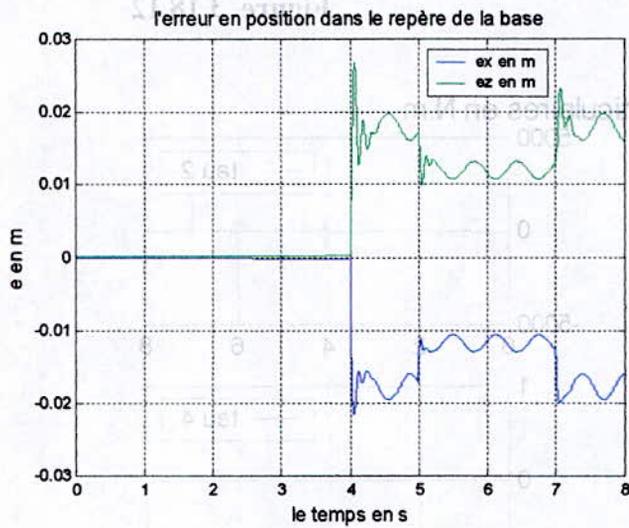


Figure 3.18.7

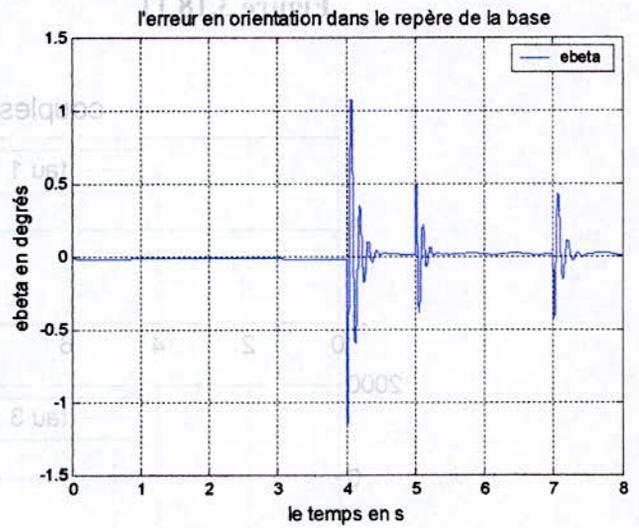


Figure 3.18.8

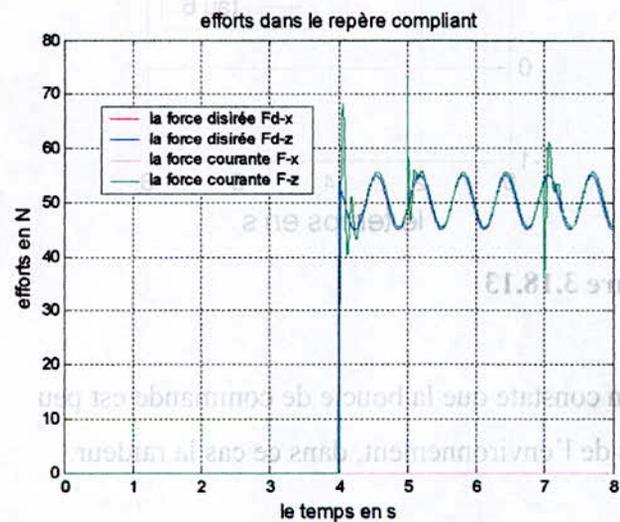


Figure 3.18.9

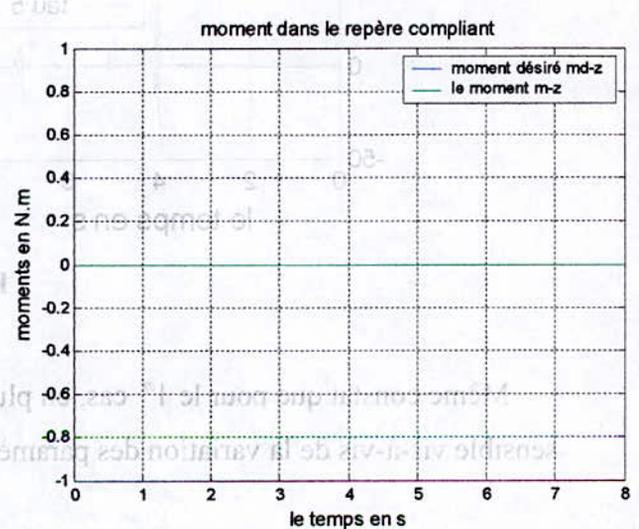


Figure 3.18.10

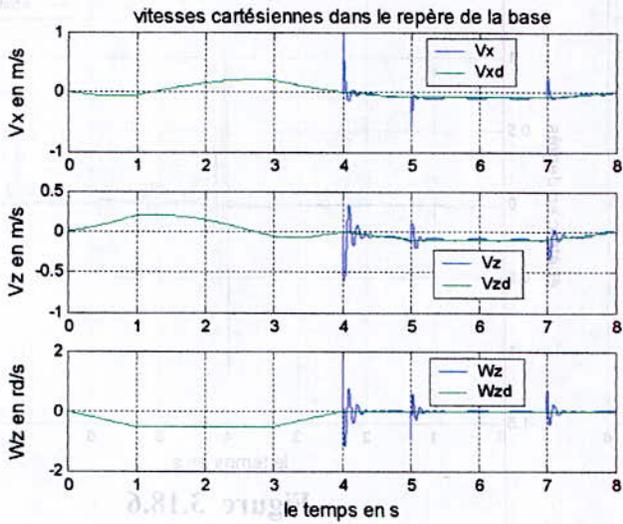


Figure 3.18.11

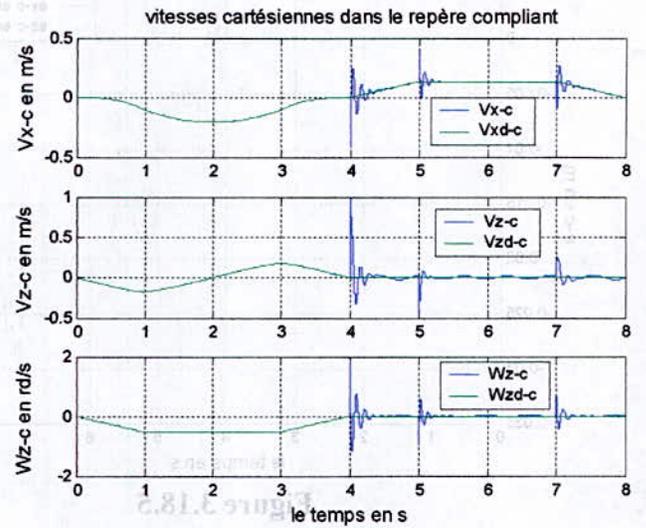


Figure 3.18.12

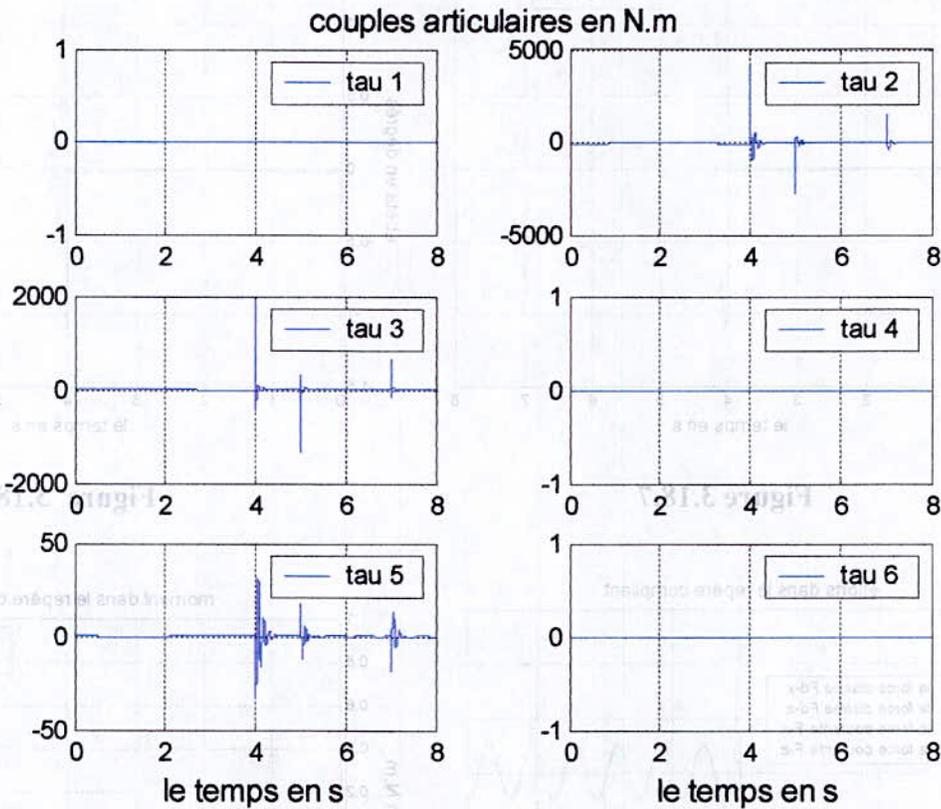


Figure 3.18.13

Même constat que pour le 1<sup>er</sup> cas, en plus on constate que la boucle de commande est peu sensible vis-à-vis de la variation des paramètres de l'environnement, dans ce cas la raideur.

### 3.4. COMMANDE DU PUMA 560 DANS L'ESPACE 3D :

Souvent les tâches que les bras manipulateurs sont amenés à accomplir sont des tâches décrites dans l'espace tridimensionnel.

Dans ce qui suit on traitera la commande hybride force / position du PUMA 560 dans sa configuration complète (6 ddl).

#### 3.4.1. Spécification de la tâche :

La tâche que nous considérons consiste en un déplacement du robot jusqu'à atteindre l'environnement, ce dernier étant représentée par une sphère de rayon  $\rho$  et se trouvant à la position  $(x_0, y_0, z_0)$  du repère  $R_0$  de la base. Puis en l'application d'une force normale à la surface de contact et en suivant une trajectoire donnée.

Ceci implique deux phases :

- Une 1<sup>ère</sup> phase, dans laquelle le robot se déplace, partant d'une position initiale, vers une position donnée, se trouvant sur la sphère.
- Une seconde phase, dans laquelle, le robot atteignant la surface de contact, continue son déplacement tout en appliquant une force désirée suivant la normale à cette surface.

#### 3.4.2. Génération de trajectoire :

##### 3.4.2.1. Génération de la trajectoire dans la première phase :

On désire que l'effecteur terminal effectue une trajectoire libre pour arriver à un point donné avec une orientation telle que l'effecteur terminal soit normal à la surface de la sphère. Cette trajectoire est générée par la loi Bang-Bang.

Figure 3.19. Répertoriés associés à la tâche dans l'espace

On impose à  $w$  et  $\pi$  une variation selon la loi du Bang-Bang.

3.4.2.2. Génération de la trajectoire dans la deuxième phase :

Cette deuxième phase consiste à garder l'effecteur normal à la surface, pour ce faire on a choisi de décrire la position et l'orientation par le système de coordonnées sphériques qui est mieux adapté à notre situation (environnement sphérique).

La position de l'effecteur terminal est donnée par :

$$\begin{cases} {}^0x_E = \rho \cdot \sin(u) \cdot \cos(v) \\ {}^0y_E = \rho \cdot \sin(u) \cdot \sin(v) \\ {}^0z_E = \rho \cdot \cos(u) \end{cases} \quad (3.54)$$

L'orientation de l'effecteur terminal selon la convention d'Euler  $zyz$ , est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha = v \\ \beta = u + \pi \\ \gamma = v \end{cases} \quad (3.55)$$

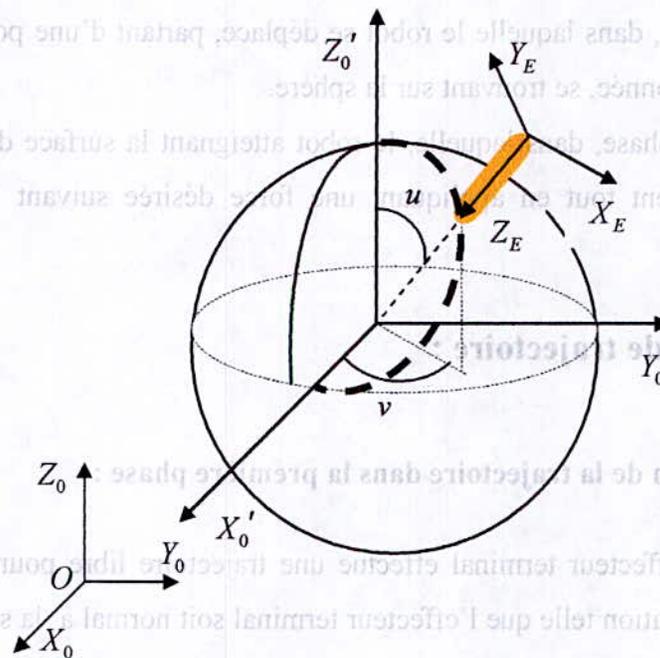


Figure 3.19. Repères associés à la tâche dans l'espace

On impose à  $u$  et  $v$  une variation selon la loi du Bang-Bang.

### 3.4.3. Commande hybride parallèle :

#### 3.4.3.1. Commande hybride parallèle DNL / PID :

Cette loi de commande a été déjà explicitée dans le paragraphe (3.3.3.1), son principe ainsi que les schémas de commande restent inchangés.

De façon analogue, on procédera à des transformations pour écrire dans le repère de compliance, les grandeurs exprimées dans le repère de la base.

Le repère de compliance est choisit associé à l'effecteur terminal compte tenu de la géométrie curviligne de la surface de l'environnement (voir § 3.2.1).

Etant donné le vecteur position opérationnelle  $X$  de l'effecteur terminal défini par l'équation (1.18), exprimé dans le repère de la base, qu'on note :  ${}^0 X_E$ . Sa projection dans le repère de compliance s'obtient par :

$${}^c X_E = \begin{bmatrix} {}^c R_0 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \cdot {}^0 X_E + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \hat{E}({}^c R_0, {}^0 R_E) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

avec :

$${}^0 X_E = [{}^0 x_E \quad {}^0 y_E \quad {}^0 z_E \quad {}^0 \alpha_E \quad {}^0 \beta_E \quad {}^0 \gamma_E]^T$$

$${}^c X_E = [{}^c x_E \quad {}^c y_E \quad {}^c z_E \quad {}^c \alpha_E \quad {}^c \beta_E \quad {}^c \gamma_E]^T$$

et  $\hat{E}(\cdot)$  la fonction d'Euler permettant d'extraire les orientations selon la convention  $zyz$  à partir d'une matrice de rotation

Par projection des vitesses dans le repère compliant, on obtient :

$${}^c V_E = \begin{bmatrix} {}^c R_0 & 0_3 \\ 0_3 & {}^c R_0 \end{bmatrix} \cdot {}^0 V_E \tag{3.57}$$

avec :

$${}^0V_E = \begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E & {}^0\dot{y}_E & {}^0\dot{z}_E & {}^0\omega_{x,E} & {}^0\omega_{y,E} & {}^0\omega_{z,E} \end{bmatrix}^T$$

$${}^cV_E = \begin{bmatrix} {}^c\dot{x}_E & {}^c\dot{y}_E & {}^c\dot{z}_E & {}^c\omega_{x,E} & {}^c\omega_{y,E} & {}^c\omega_{z,E} \end{bmatrix}^T$$

or :

$${}^0\dot{X}_E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^0E_{zyz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot {}^0V_E \tag{3.58}$$

$${}^0V_E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^0E_{zyz} \end{bmatrix} \cdot {}^0\dot{X}_E \tag{3.59}$$

$${}^c\dot{X}_E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^cE_{zyz}^{-1} \end{bmatrix} \cdot {}^cV_E \tag{3.60}$$

en utilisant les relations (3.57), (3.59) et (3.60), on peut écrire :

$${}^c\dot{X}_E = \begin{bmatrix} {}^cR_0 & 0_3 \\ 0_3 & {}^cE_{zyz}^{-1} \cdot {}^cR_0 \cdot {}^0E_{zyz} \end{bmatrix} \cdot {}^0\dot{X}_E \tag{3.61}$$

où :

$${}^0\dot{X}_E = \begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E & {}^0\dot{y}_E & {}^0\dot{z}_E & {}^0\dot{\alpha}_E & {}^0\dot{\beta}_E & {}^0\dot{\gamma}_E \end{bmatrix}^T$$

$${}^c\dot{X}_E = \begin{bmatrix} {}^c\dot{x}_E & {}^c\dot{y}_E & {}^c\dot{z}_E & {}^c\dot{\alpha}_E & {}^c\dot{\beta}_E & {}^c\dot{\gamma}_E \end{bmatrix}^T$$

**Remarque :** la matrice  $E_{zyz}$  est définie dans le paragraphe (§ 1.3.3.1) par la relation (1.63).

${}^0E_{zyz}$  (Resp.  ${}^cE_{zyz}$ ) désigne cette matrice où les grandeurs sont exprimées dans le repère de base (Resp. de compliance).

On peut ainsi définir la matrice jacobienne écrite dans le repère de compliance en utilisant les relations (3.61) et (1.64) par :

$${}^c\dot{X}_E = \begin{bmatrix} {}^cR_0 & 0_3 \\ 0_3 & {}^cE_{zyz}^{-1} \cdot {}^cR_0 \cdot {}^0E_{zyz} \end{bmatrix} \cdot J \cdot \dot{\theta} = J_c \cdot \dot{\theta} \tag{3.62}$$

où : le repère de complaisance étant confondu avec le repère de l'effecteur (on ne peut l'orientation de celui-ci par rapport à ce dernier est toujours nulle ( $K = E$ ). On ne peut commander l'orientation dans le repère de complaisance.

$$J_c = \begin{bmatrix} {}^c R_0 & 0_3 \\ 0_3 & {}^c E_{zyz}^{-1} \cdot {}^c R_0 \cdot {}^0 E_{zyz} \end{bmatrix} \cdot J \quad (3.63)$$

L'accélération opérationnelle a pour expression :

$${}^c \ddot{X}_E = J_c \cdot \ddot{\theta} + \dot{J}_c \cdot \dot{\theta} \quad (3.64)$$

avec :

$$\dot{J}_c = \begin{bmatrix} {}^c \dot{R}_0 & 0_3 \\ 0_3 & ({}^c E_{zyz}^{-1} \cdot {}^c \dot{R}_0 \cdot {}^0 E_{zyz}) \end{bmatrix} \cdot J \quad (3.65)$$

Le schéma de commande dans le cas général est donné par :

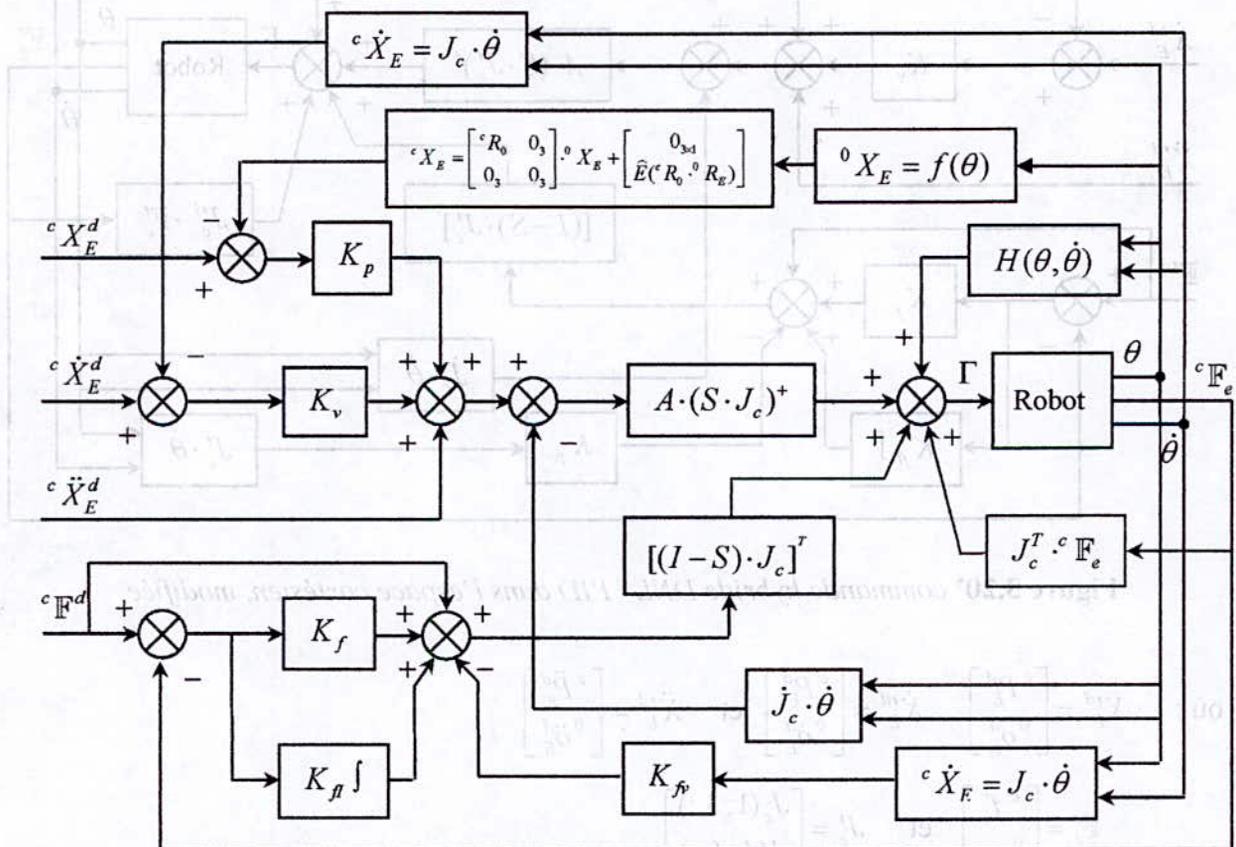


Figure 3.20 Implémentation de la commande hybride DNL / PID dans l'espace cartésien

**Problème :** le repère de compliancance étant confondu avec le repère de l'effecteur terminal, l'orientation de celui-ci par rapport à ce dernier est toujours nulle ( ${}^c R_0 = {}^E R_0$ ). On ne peut donc commander l'orientation dans le repère de compliancance.

**Solution :** commander l'orientation dans le repère de la base tout en gardant la commande en position dans le repère de compliancance.

Le schéma de commande de la figure (3.20) devient alors :

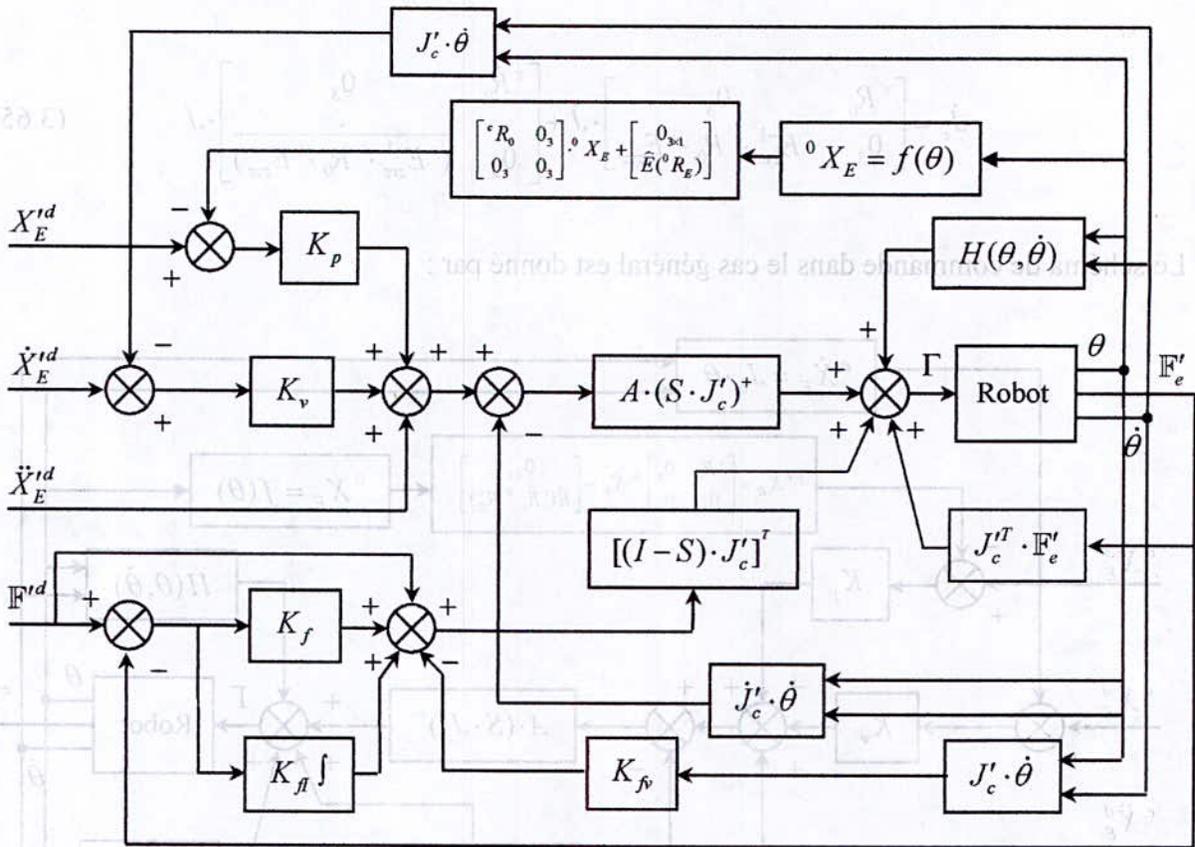


Figure 3.20' commande hybride DNL / PID dans l'espace cartésien, modifiée

où :

$$X_E^{td} = \begin{bmatrix} {}^c P_E^d \\ 0 \\ {}^c O_E^d \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_E^{td} = \begin{bmatrix} {}^c \dot{P}_E^d \\ 0 \\ {}^c \dot{O}_E^d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{X}_E^{td} = \begin{bmatrix} {}^c \ddot{P}_E^d \\ 0 \\ {}^c \ddot{O}_E^d \end{bmatrix}$$

$$F'_e = \begin{bmatrix} {}^c f_e \\ 0 \\ m_e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J'_c = \begin{bmatrix} J_c(1:3,:) \\ J(4:6,:) \end{bmatrix}$$

**Remarque :** cette solution est aussi valable dans le plan, si on choisit le repère de compliancance lié au repère de l'effecteur pour des trajectoires curvilignes.

3.4.3.2. Commande hybride parallèle Passive / PID :

Cette loi de commande a été déjà explicitée dans le paragraphe (3.3.3.2).

On ne donnera dans la suite que son schéma de commande, dans lequel les grandeurs exprimées dans le repère de complianc sont issues de transformations explicitées dans le paragraphe précédent.

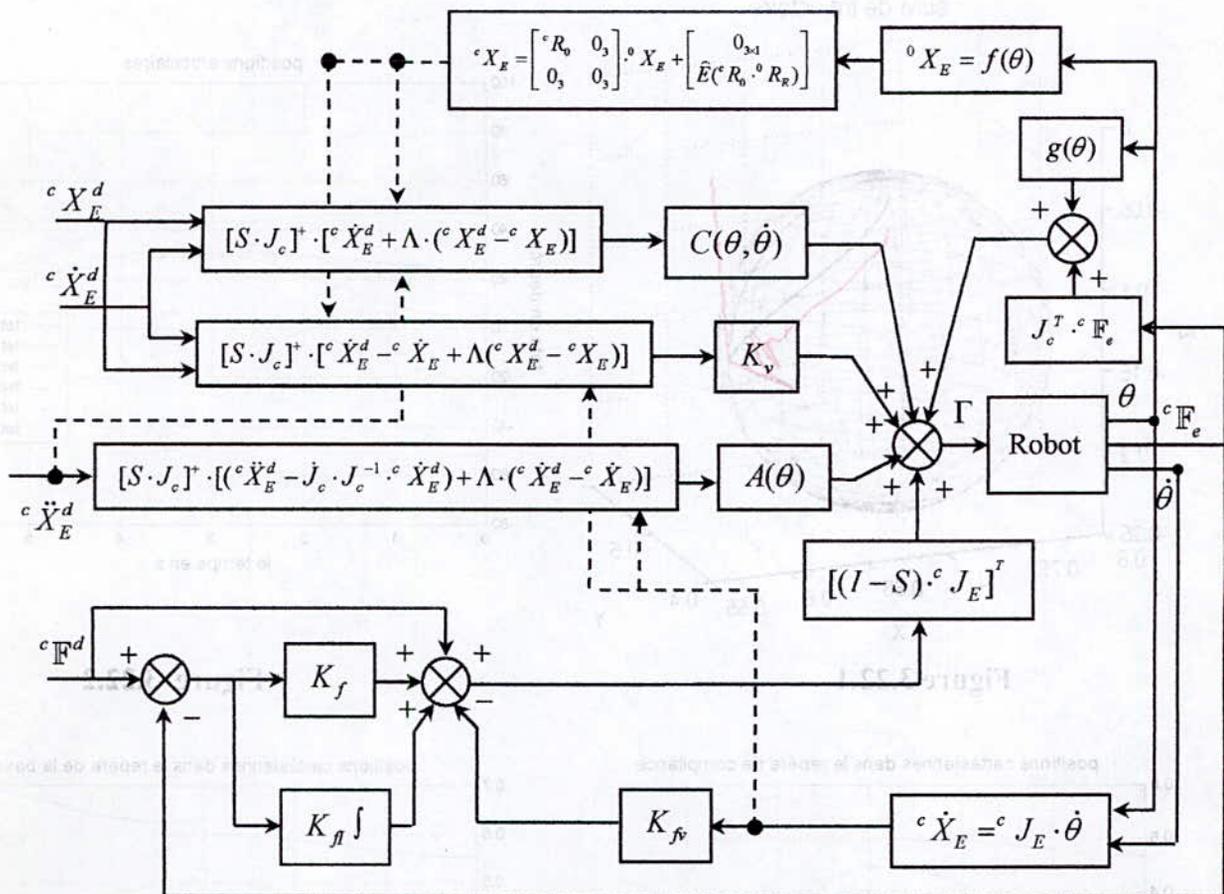


Figure 3.21 Implémentation de la commande hybride Passive / PID dans l'espace cartésien

**Remarque :** on procède de la même façon que pour la technique de commande par découplage non linéaire concernant le problème de l'orientation dans le repère de complianc.

### 3.4.4. Résultats et simulations :

#### 3.4.4.1. Commande hybride force / position du type DNL / PID :

➤ **Premier cas : sans perturbations ni erreurs de modélisation**

$$K_p = 25000 \cdot I_6, K_v = 158 \cdot I_6 ;$$

$$K_f = 100, K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100 ;$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement

$$B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ et une masse } M_e = 0.3 \text{ kg}$$

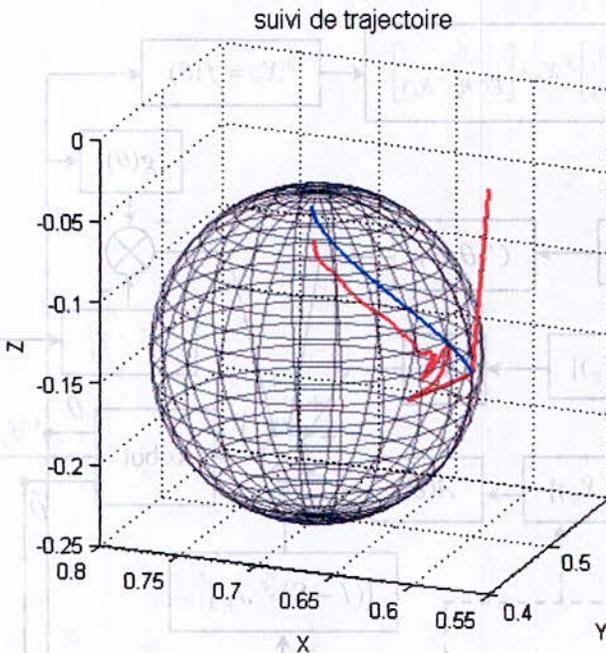


Figure 3.22.1

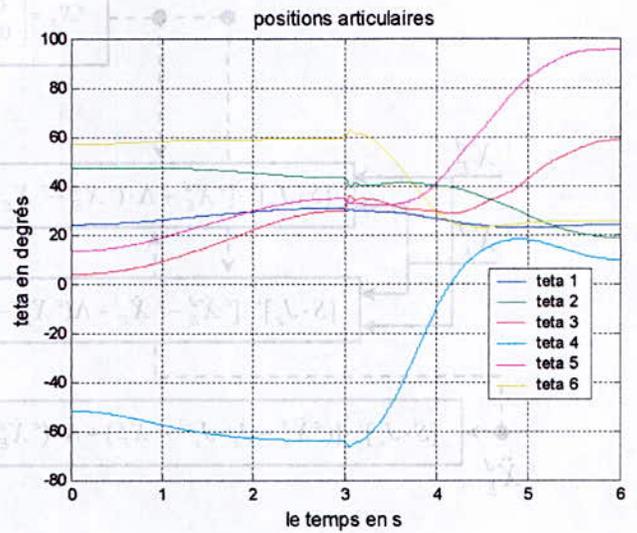


Figure 3.22.2

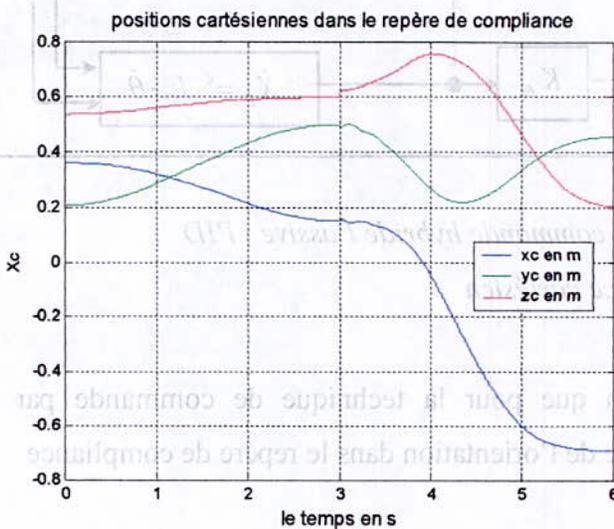


Figure 3.22.3

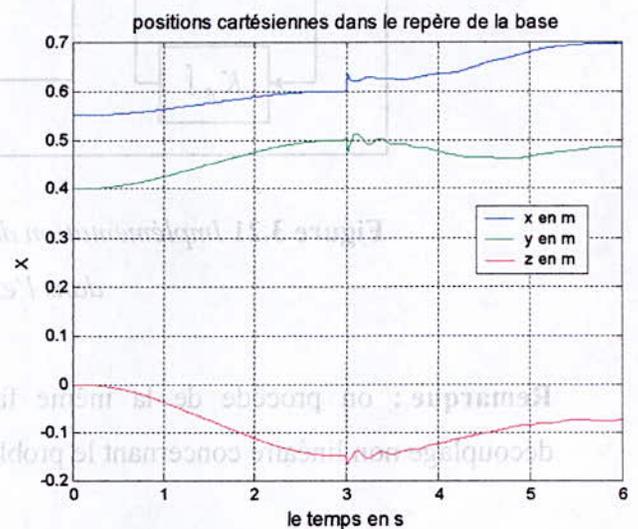


Figure 3.22.4

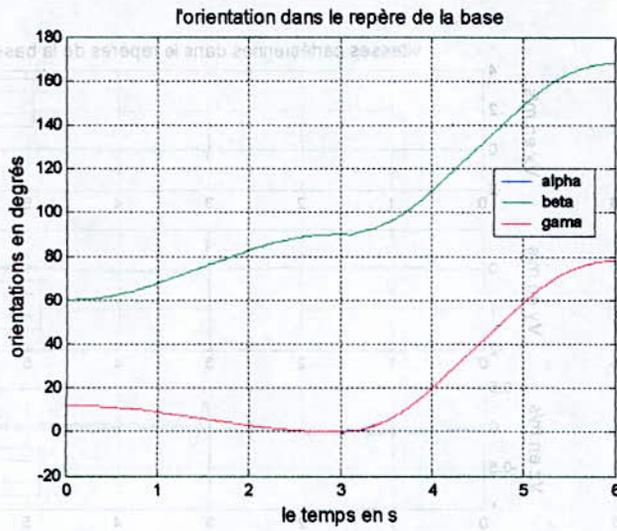


Figure 3.22.5

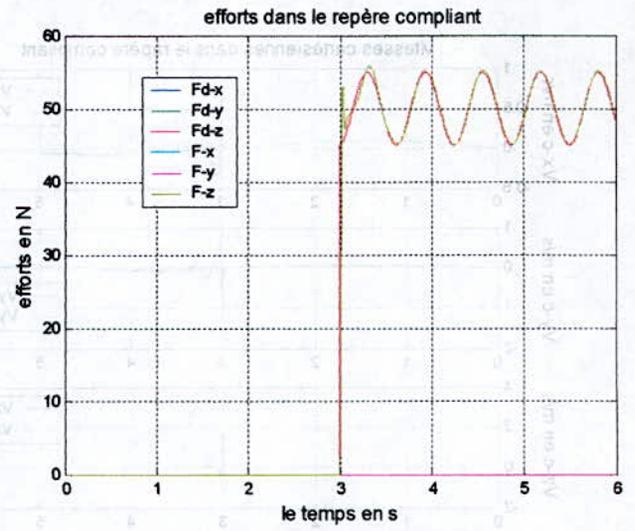


Figure 3.22.6

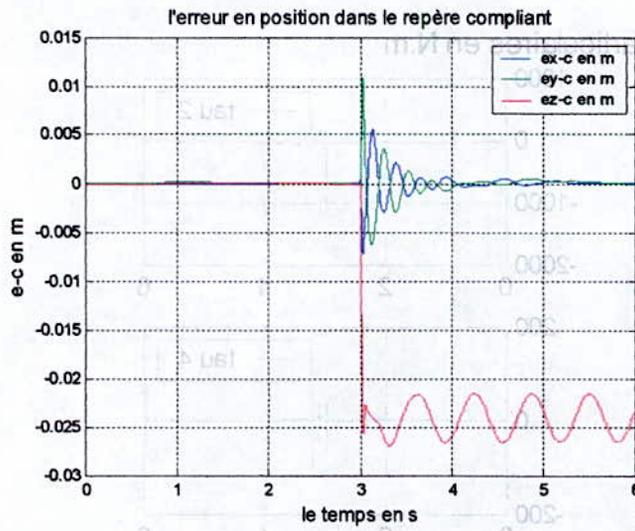


Figure 3.22.7

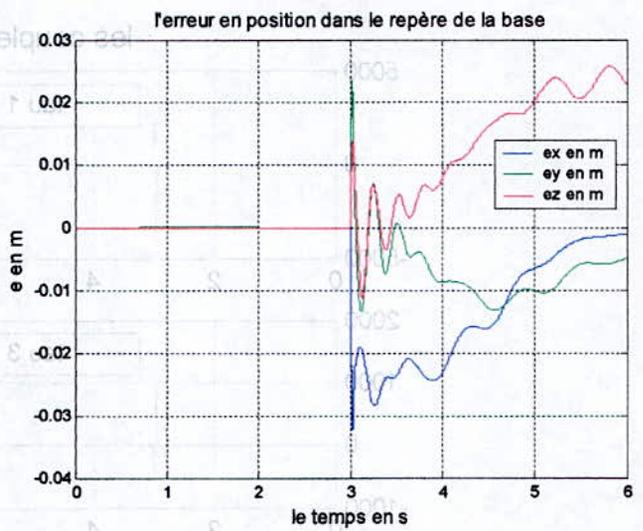


Figure 3.22.8

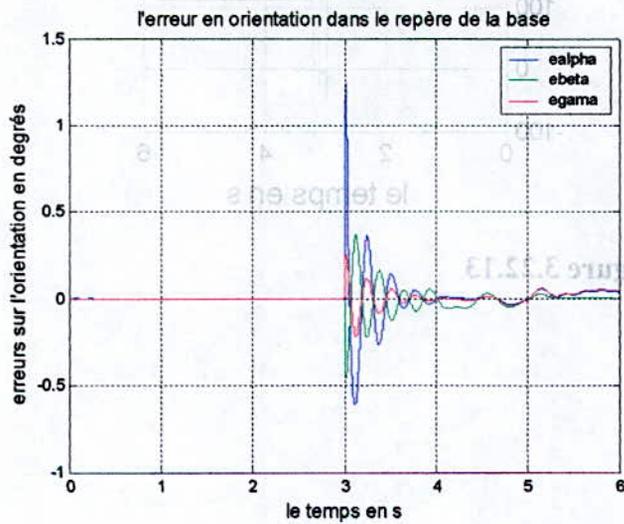


Figure 3.22.9

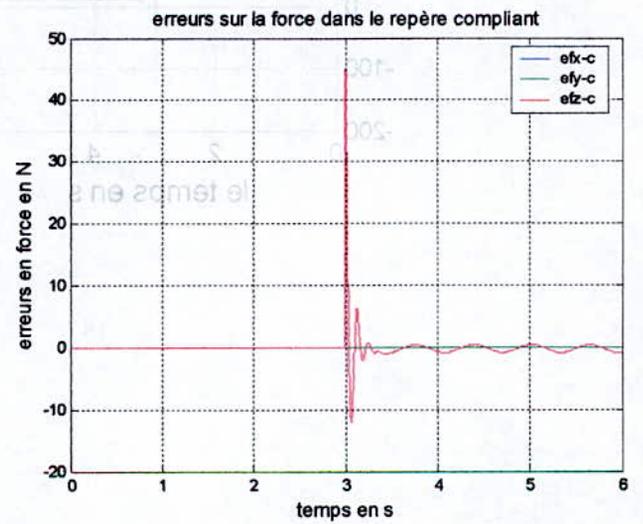


Figure 3.22.10

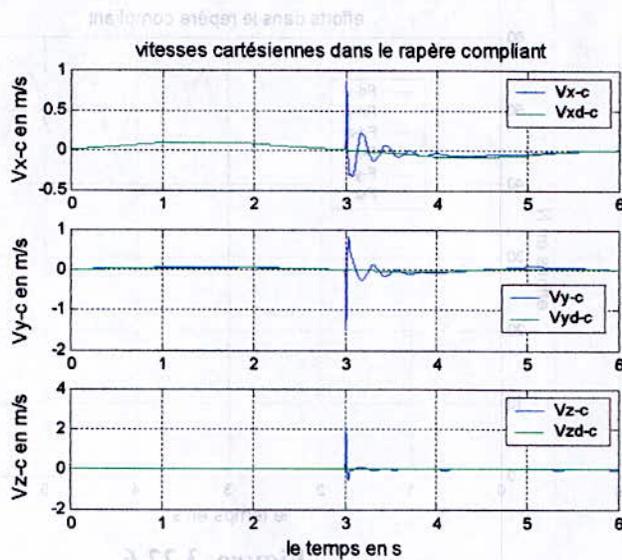


Figure 3.22.11

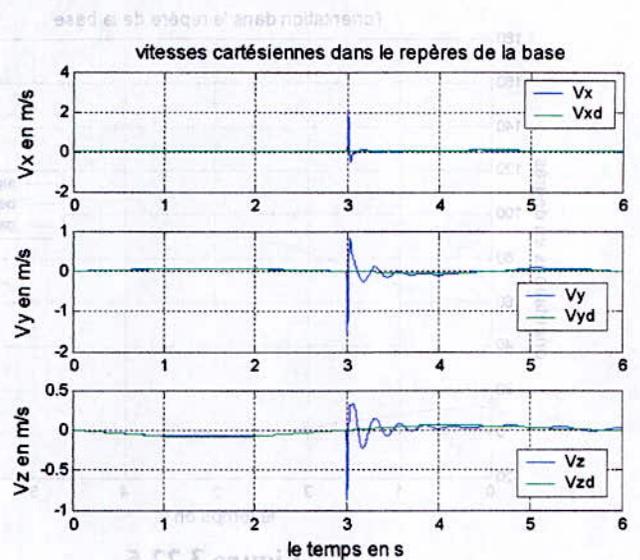


Figure 3.22.12

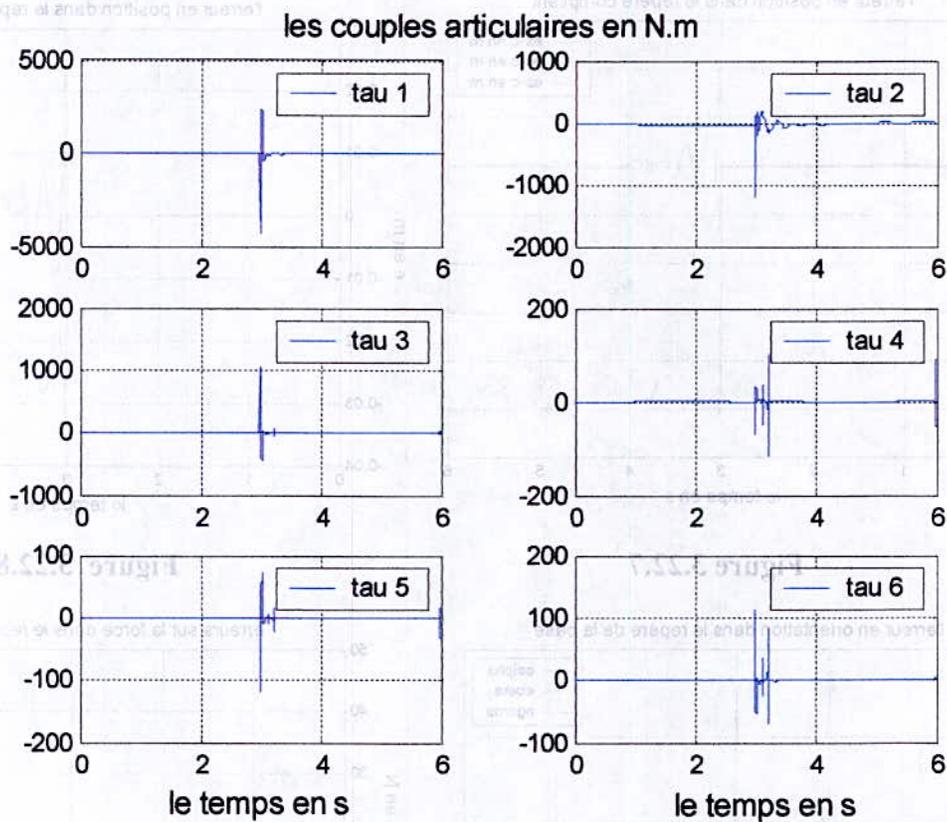


Figure 3.22.13

➤ **Deuxième cas : avec perturbation en force et erreurs de modélisation de 100%**

La perturbation est un signal carré introduit à l'instant  $t = 4 \text{ s}$  et de durée 1 s.

$$K_p = 25000 \cdot I_6, \quad K_v = 158 \cdot I_6 ;$$

$$K_f = 100, \quad K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100 ;$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement

$$B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ et une masse } M_e = 0.3 \text{ kg}$$

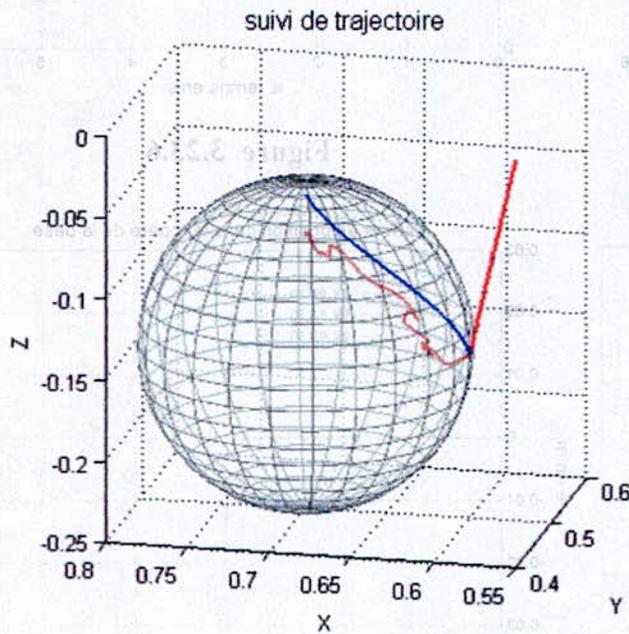


Figure 3.23.1

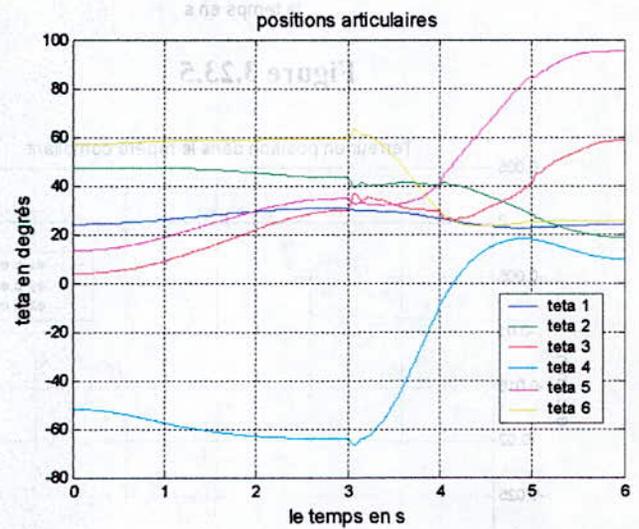


Figure 3.23.2

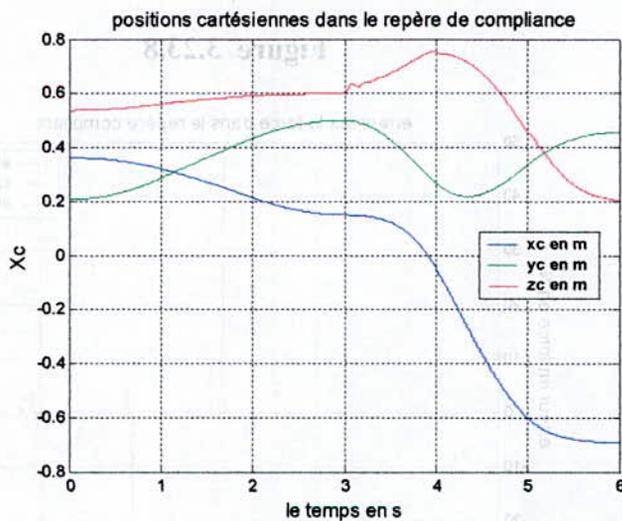


Figure 3.23.3

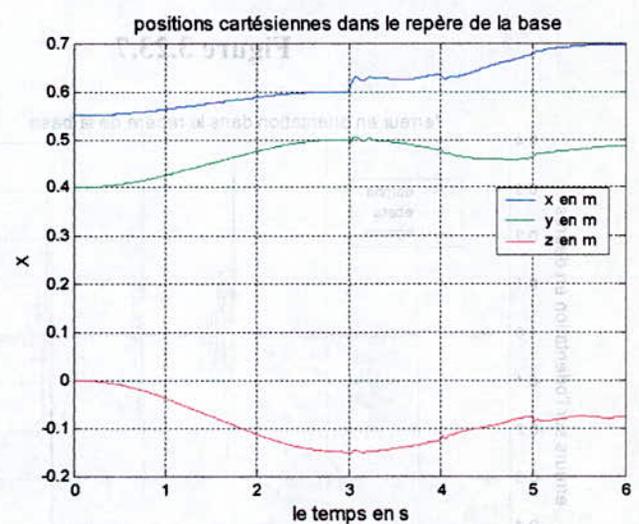


Figure 3.23.4

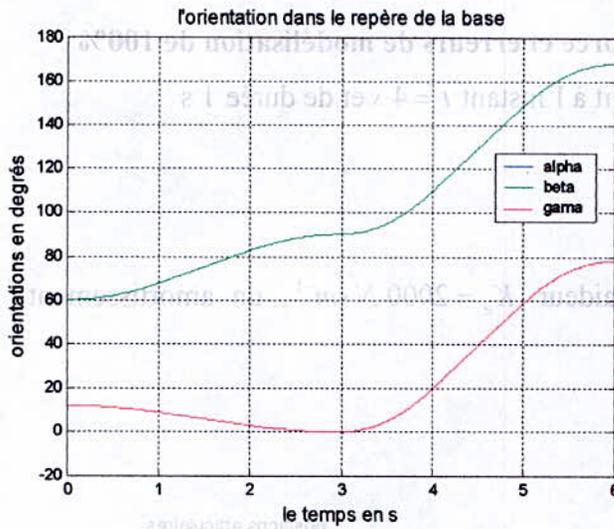


Figure 3.23.5

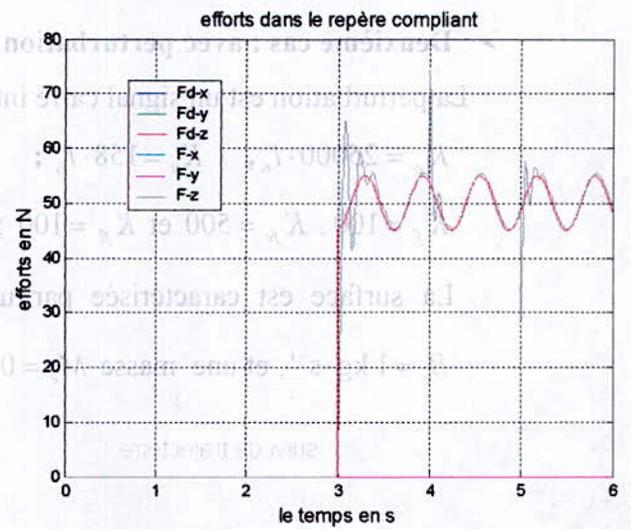


Figure 3.23.6

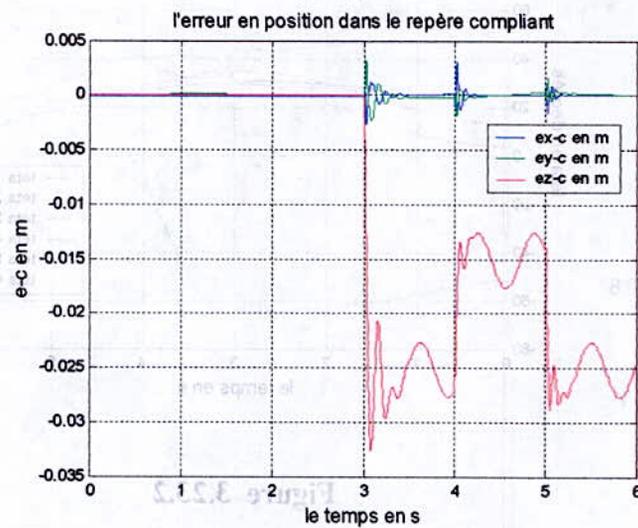


Figure 3.23.7

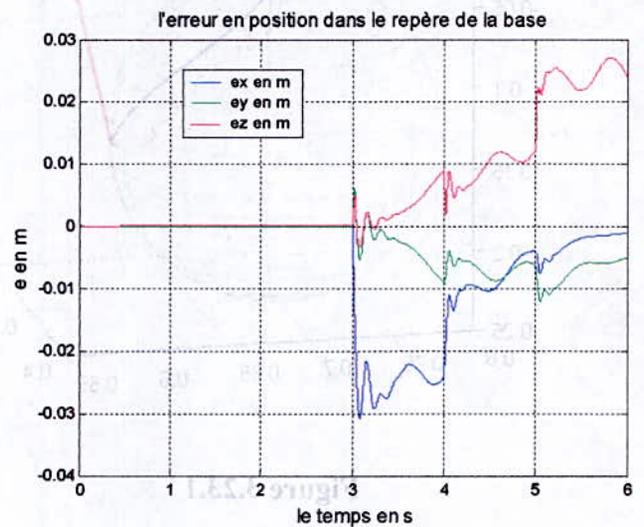


Figure 3.23.8

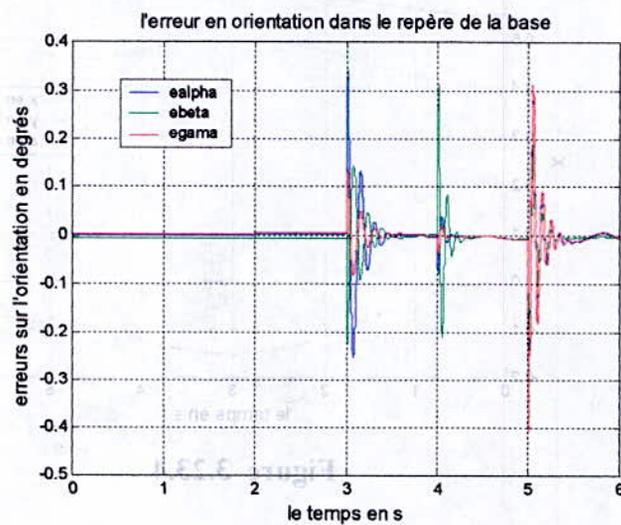


Figure 3.23.9

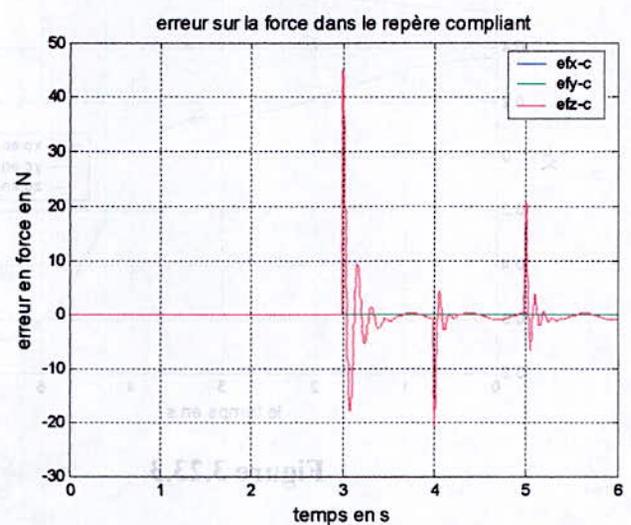


Figure 3.23.10

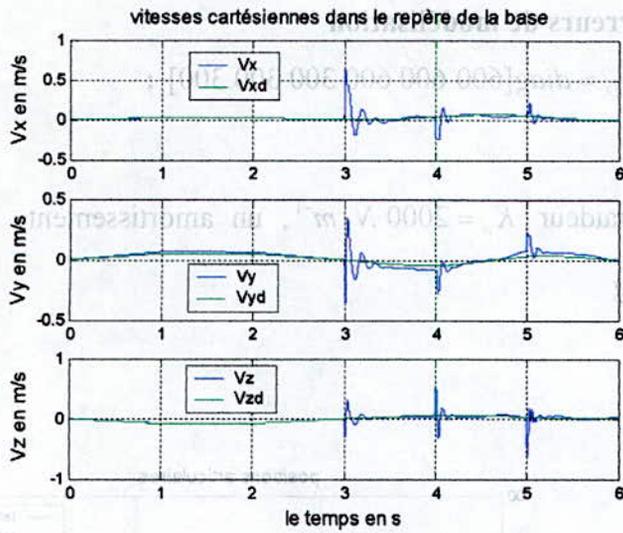


Figure 3.23.11

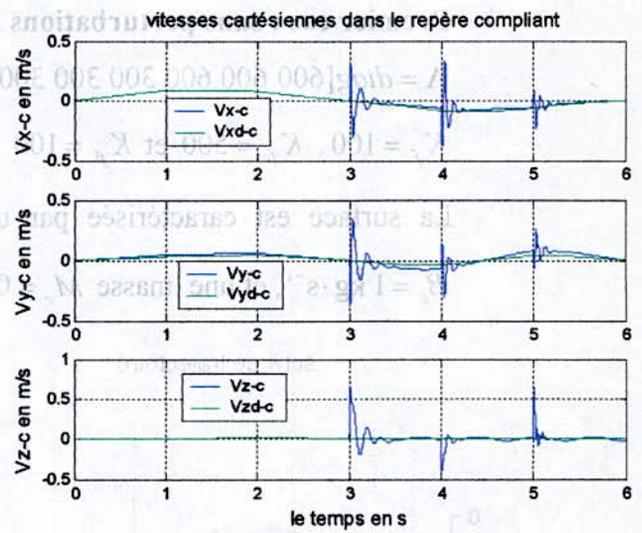


Figure 3.23.12

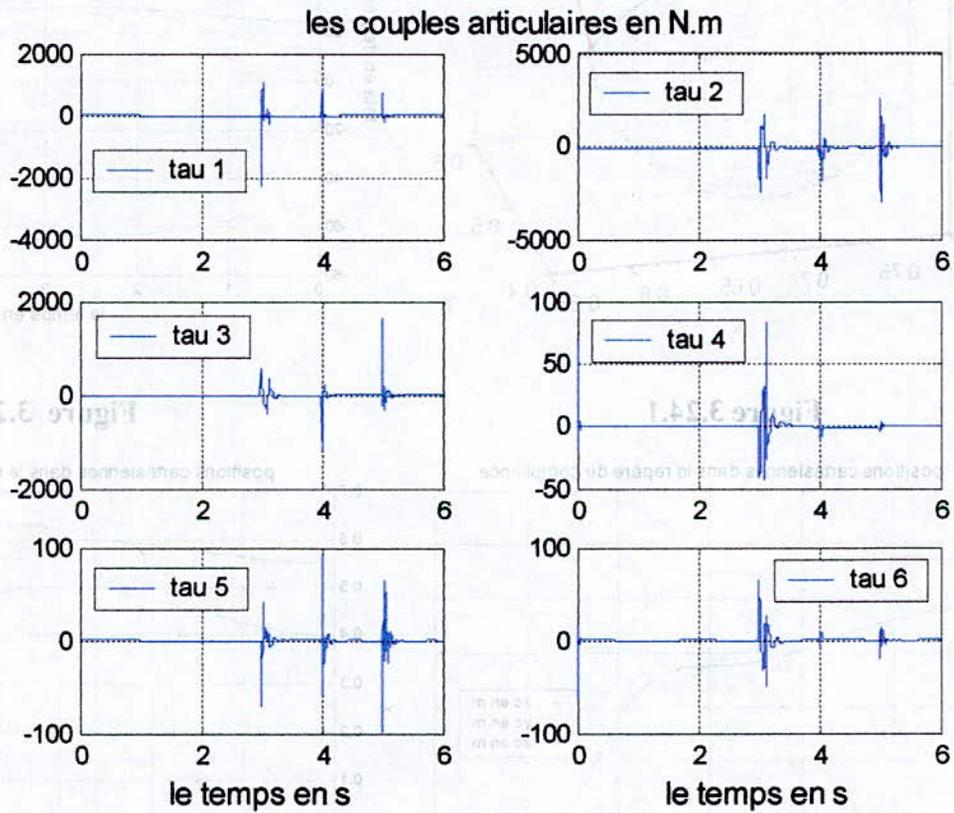


Figure 3.23.13

**Commande hybride force / position du type Passive / PID :**

➤ **Premier cas : sans perturbations ni erreurs de modélisation**

$$\Lambda = \text{diag}[600 \ 600 \ 600 \ 300 \ 300 \ 300], \quad K_D = \text{diag}[600 \ 600 \ 600 \ 300 \ 300 \ 300] ;$$

$$K_f = 100, \quad K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , un amortissement  $B_e = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , et une masse  $M_e = 0.3 \text{ kg}$

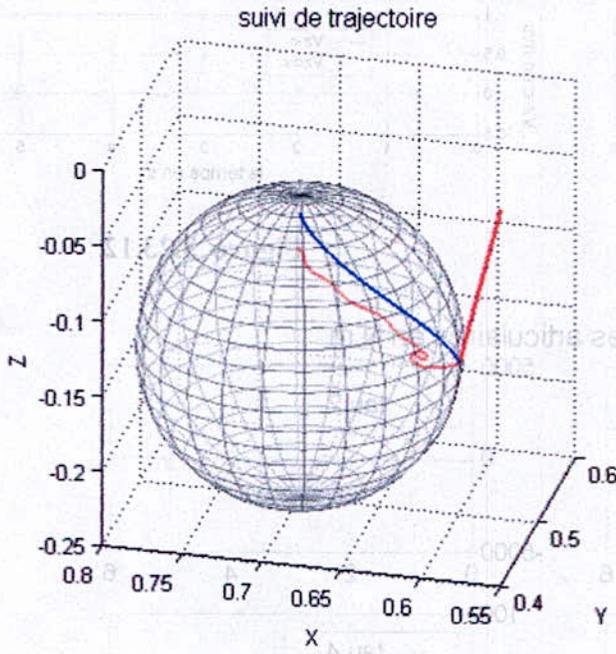


Figure 3.24.1

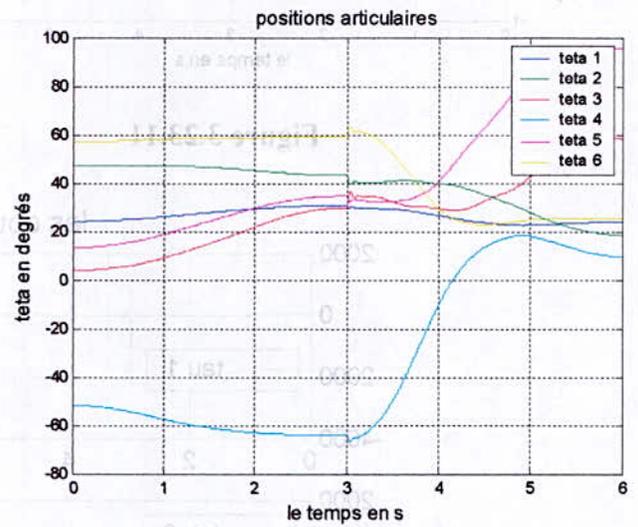


Figure 3.24.2

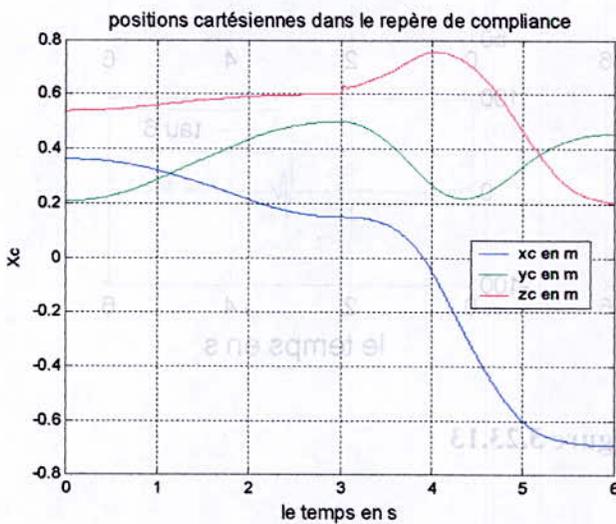


Figure 3.24.3

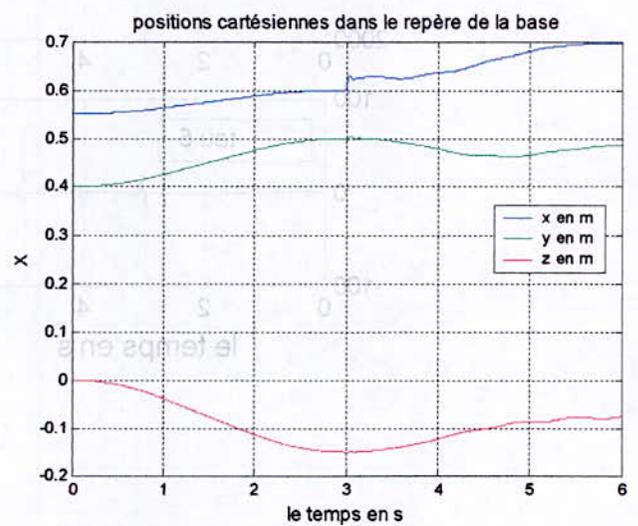


Figure 3.24.4

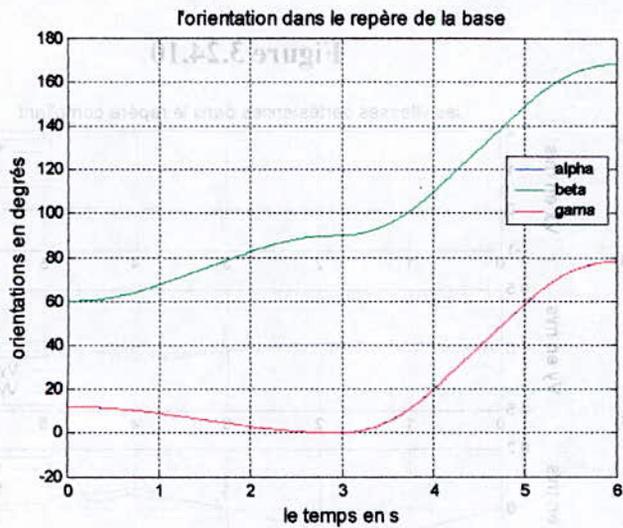


Figure 3.24.5

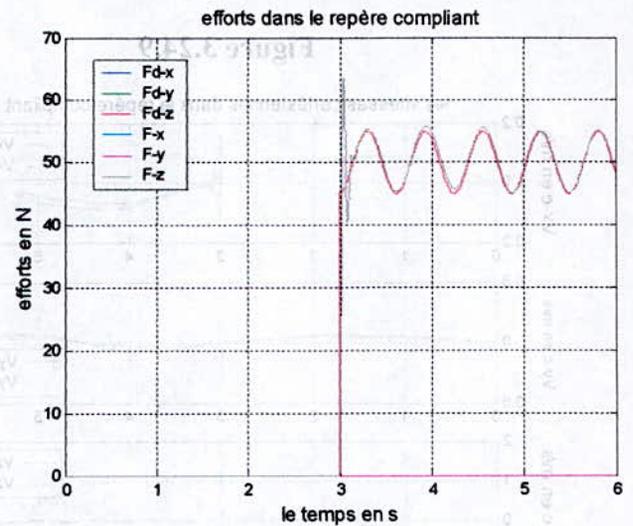


Figure 3.24.6

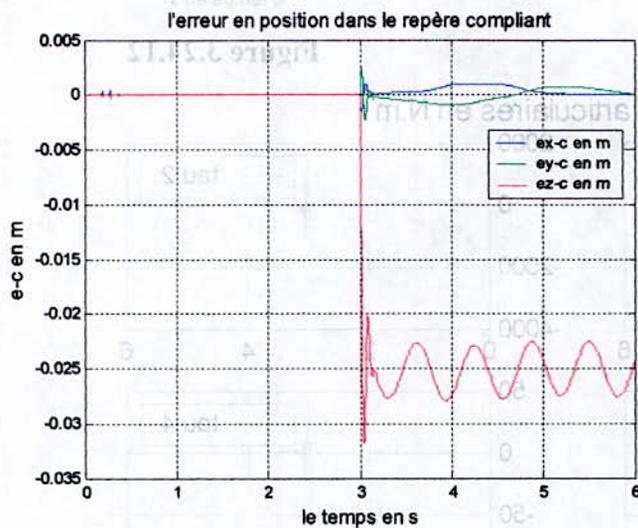


Figure 3.24.8

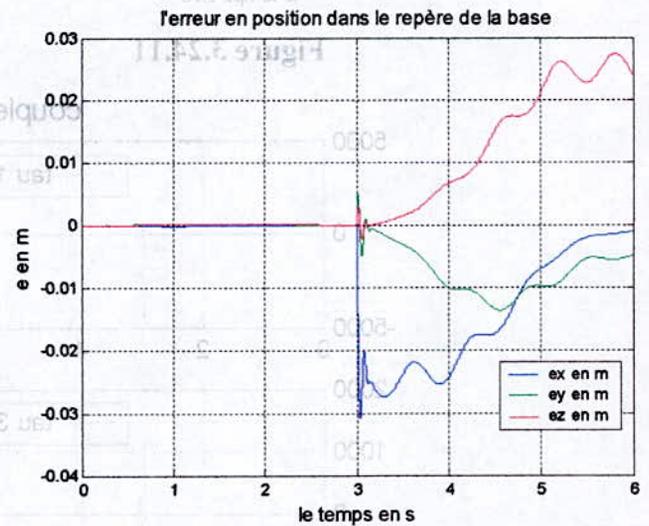


Figure 3.24.7

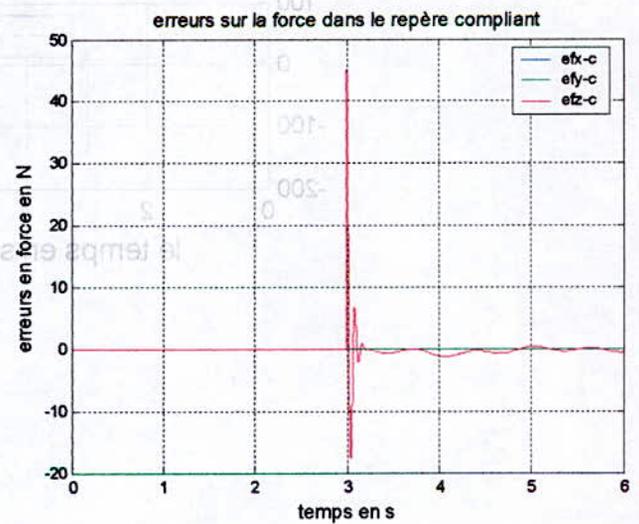
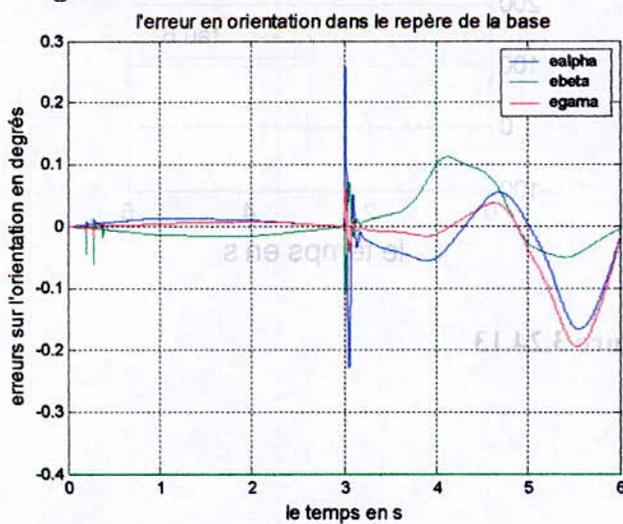


Figure 3.24.9

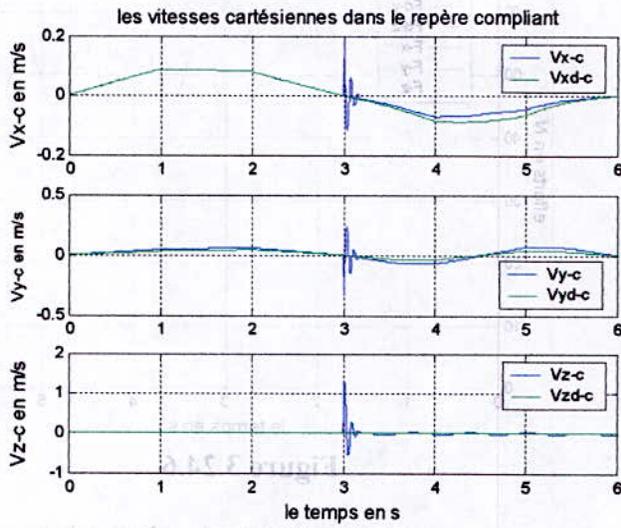


Figure 3.24.11

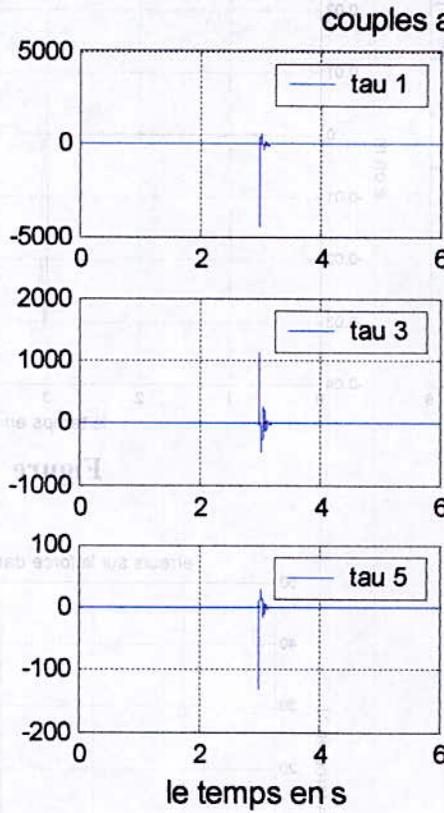


Figure 3.24.13

Figure 3.24.10

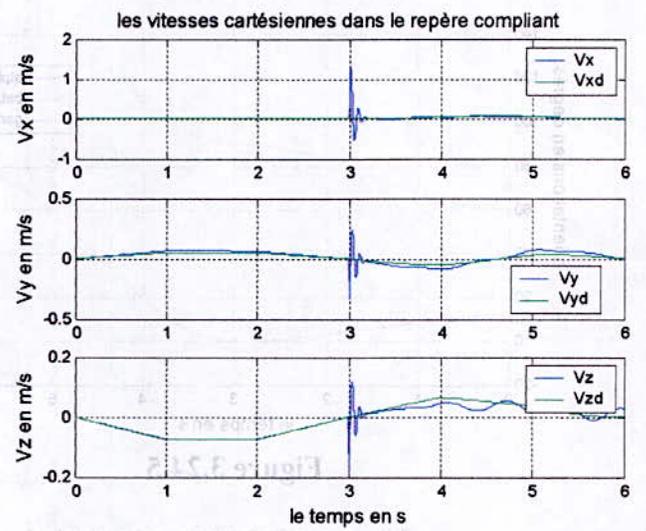
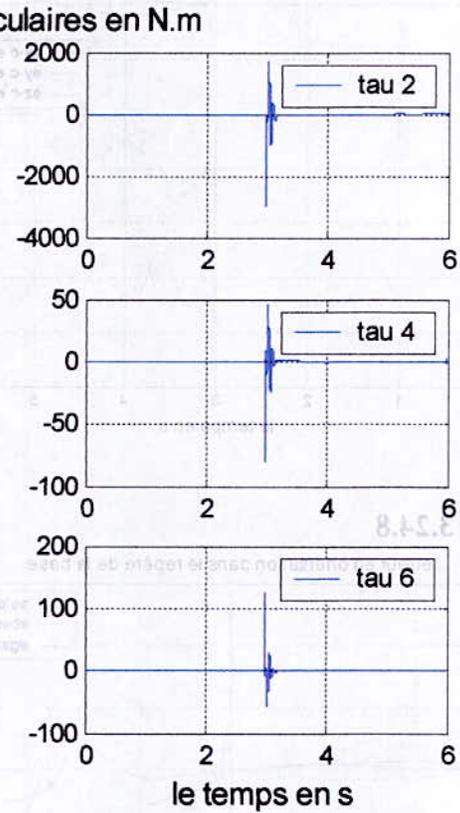


Figure 3.24.12



➤ **Deuxième cas : avec perturbation en force et erreurs de modélisation de 100%**

La perturbation est un signal carré introduit à l'instant  $t = 4$  s et de durée 1 s.

$$\Lambda = \text{diag}[600 \ 600 \ 600 \ 300 \ 300 \ 300], \quad K_D = \text{diag}[600 \ 600 \ 600 \ 300 \ 300 \ 300];$$

$$K_f = 100, \quad K_{fv} = 500 \text{ et } K_{ff} = 100$$

La surface est caractérisée par une raideur  $K_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , un amortissement  $B_e = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , et une masse  $M_e = 0.3 \text{ kg}$

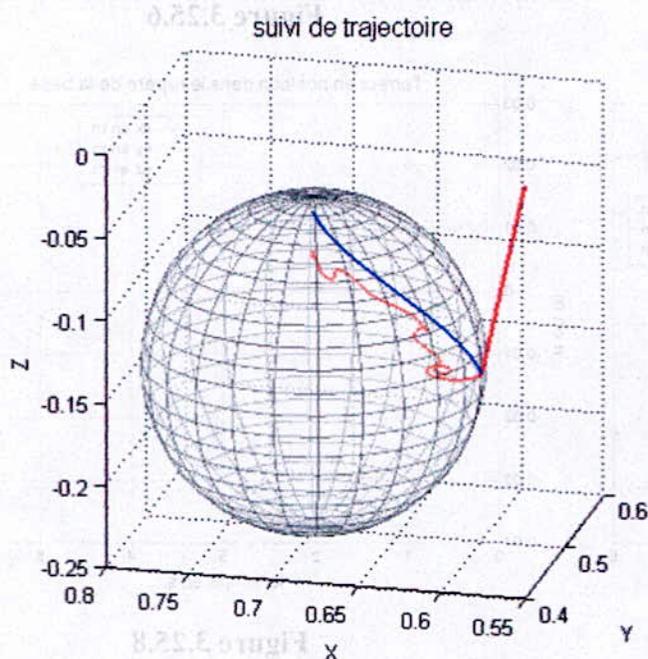


Figure 3.25.1



Figure 3.25.2

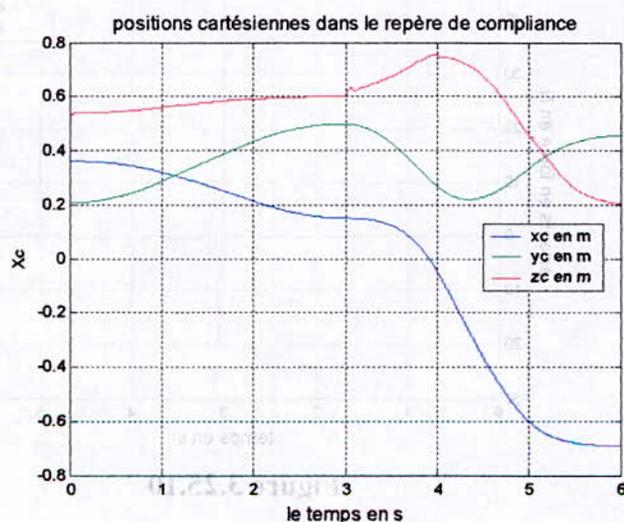


Figure 3.25.3

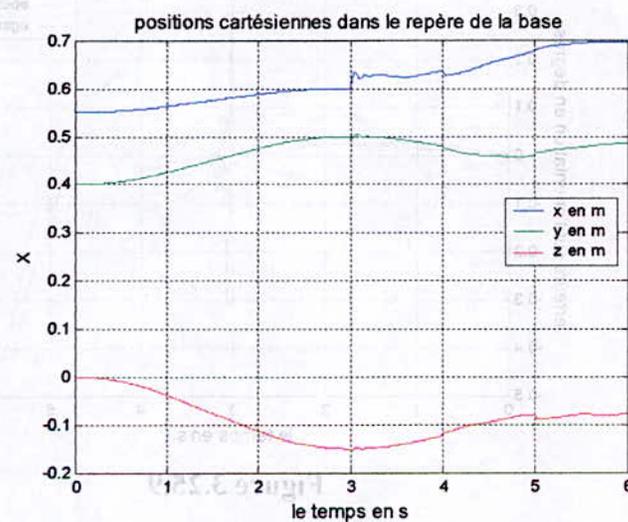


Figure 3.25.4

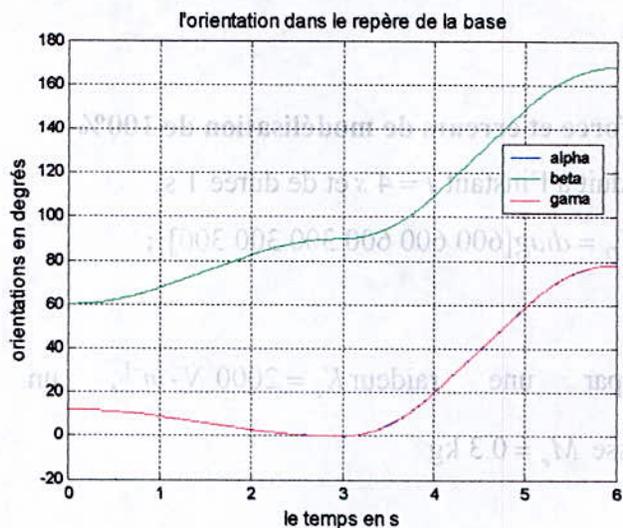


Figure 3.25.5

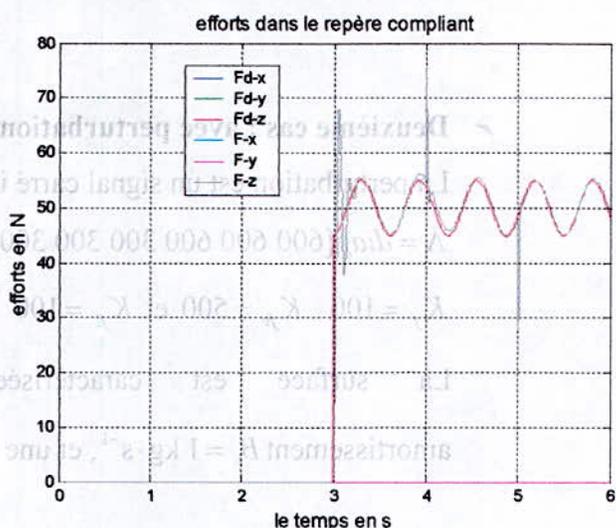


Figure 3.25.6

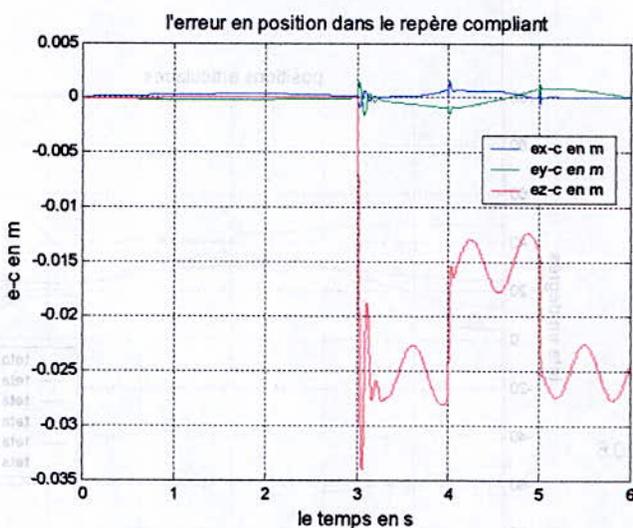


Figure 3.25.7

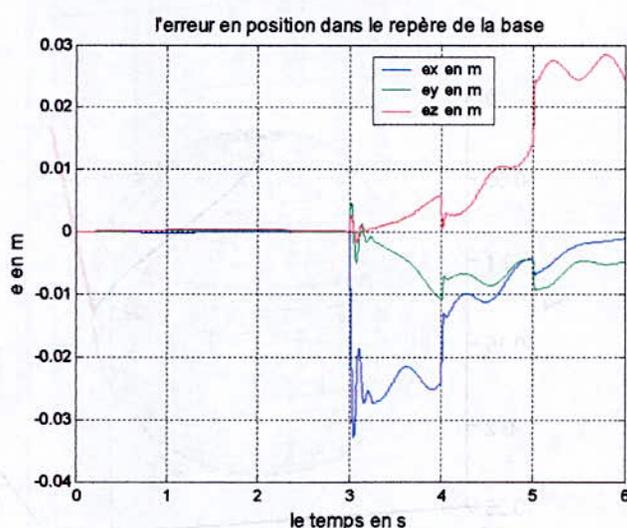


Figure 3.25.8

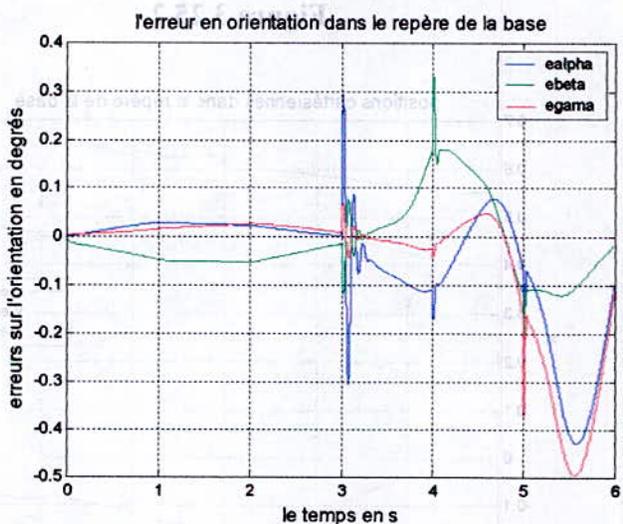


Figure 3.25.9

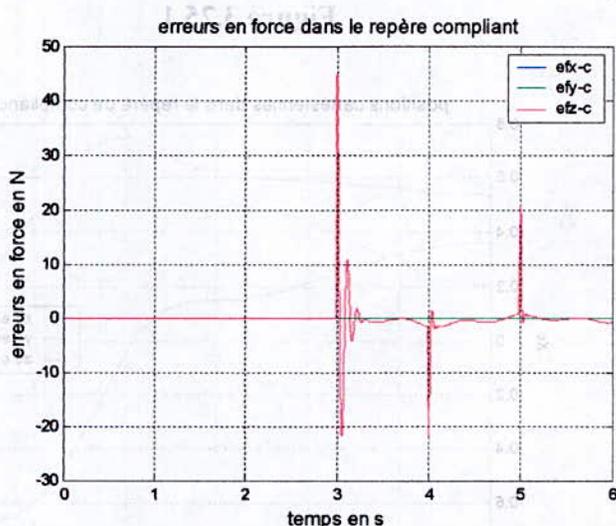


Figure 3.25.10

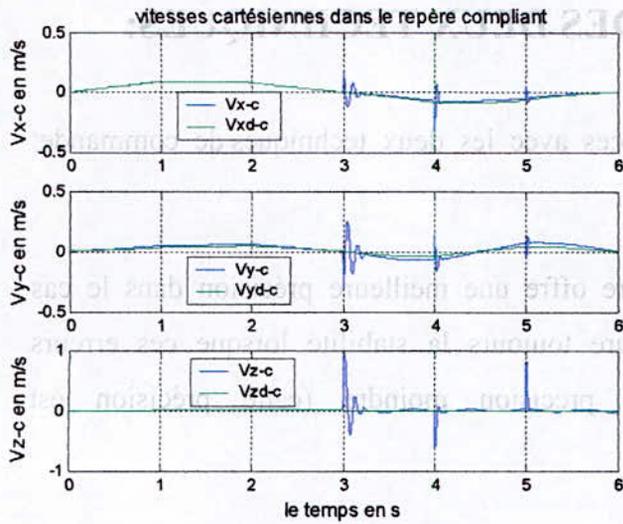


Figure 3.25.11

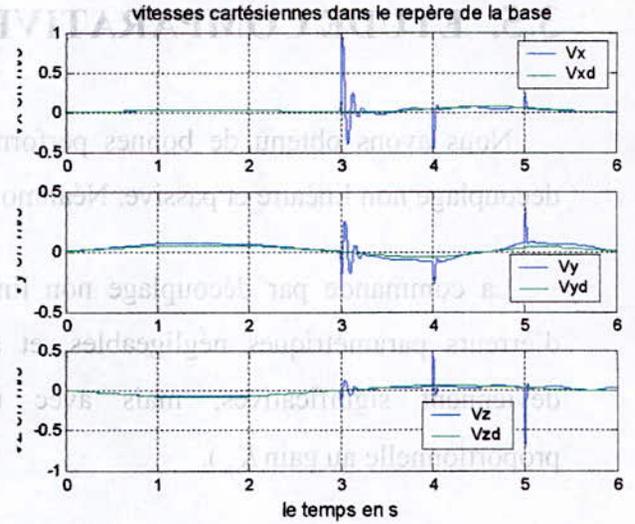


Figure 3.25.12

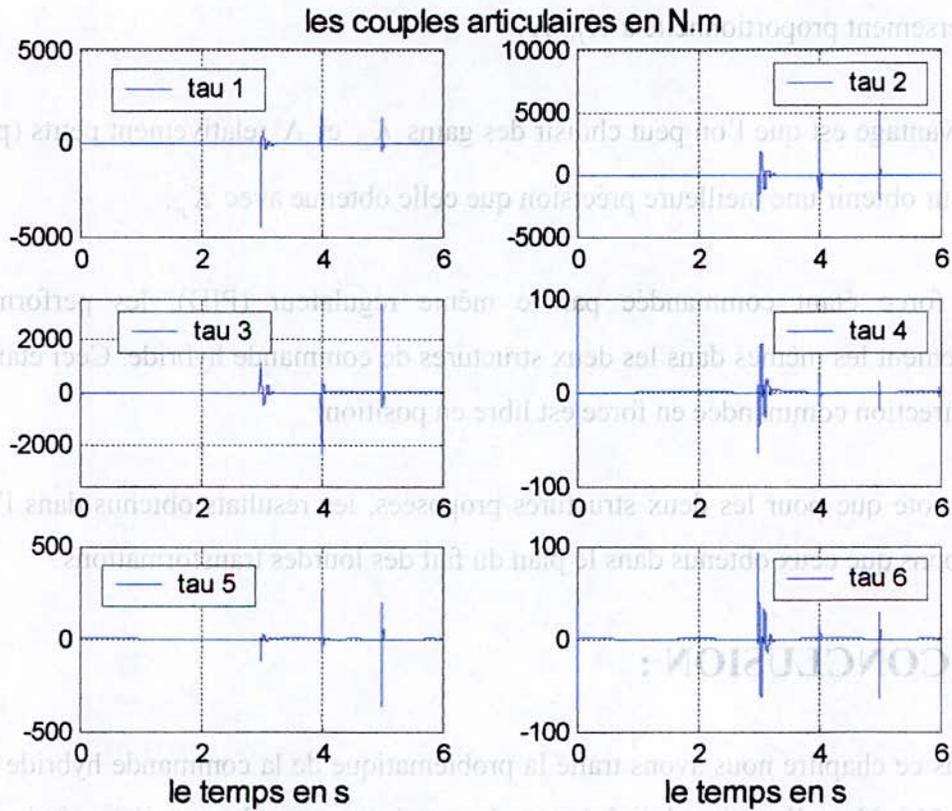


Figure 3.25.13

Les résultats obtenus avec les deux techniques dans les deux cas de figures restent satisfaisants en termes de stabilité et de performance ; néanmoins les erreurs sont relativement grandes par rapport au cas plan. Nous attribuons ceci au nombre important de transformations effectuées qui engendrent des erreurs supplémentaires.

### 3.5. ETUDE COMPARATIVE DES DEUX TECHNIQUES:

Nous avons obtenu de bonnes performances avec les deux techniques de commande: découplage non linéaire et passive. Néanmoins :

La commande par découplage non linéaire offre une meilleure précision dans le cas d'erreurs paramétriques négligeables, et assure toujours la stabilité lorsque ces erreurs deviennent significatives, mais avec une précision moindre (cette précision est proportionnelle au gain  $K_p$ ).

La commande passive devient meilleure en termes de précision pour des erreurs paramétriques non négligeables (de l'ordre de 50% et plus), du fait que l'erreur de poursuite est inversement proportionnelle à  $K_D \cdot \Lambda$ .

L'avantage est que l'on peut choisir des gains  $K_D$  et  $\Lambda$  relativement petits (par rapport à  $K_p$ ) pour obtenir une meilleure précision que celle obtenue avec  $K_p$ .

La force étant commandée par le même régulateur (PID), les performances sont pratiquement les mêmes dans les deux structures de commande hybride. Ceci était prévisible, car la direction commandée en force est libre en position.

On note que pour les deux structures proposées, les résultats obtenus dans l'espace sont moins bons que ceux obtenus dans le plan du fait des lourdes transformations.

### 3.6. CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons traité la problématique de la commande hybride parallèle du PUMA 560. Nous l'avons subdivisé en trois grandes parties : la première a été consacrée au principe de la commande. La deuxième, à la commande du PUMA 560 réalisant une tâche dans le plan. Et la troisième, à la commande avec tâche dans l'espace tridimensionnel. Chacune des deux dernières parties ont été accompagnées de simulations des commandes appliquées. Une étude comparative des structures de commandes proposées nous a permis de conclure sur les bonnes performances obtenues.

## Conclusion générale

L'automatisation d'un certain nombre de tâches robotisées nécessite un contrôle explicite des efforts créés par l'effecteur associé à un contrôle de sa position. Le contrôle classique de position d'un manipulateur est remplacé par des schémas plus complexes et notamment le contrôle hybride force / position introduit par Craig et Raibert.

Le contrôle de force et le contrôle de position sont deux notions duales, et l'espace de travail doit être subdivisé en deux sous espaces complémentaires, l'un constitué des directions commandables en position et l'autre, de celles commandables en effort.

A partir de cette décomposition, de nombreuses structures de commande hybrides ont été proposées.

Le travail présenté dans ce mémoire avait pour objectif la synthèse d'une commande hybride parallèle et son application sur le PUMA 560 d'abord pour une tâche dans le plan, puis dans l'espace tridimensionnel.

Dans le premier chapitre, la modélisation du manipulateur et de son environnement a été présentée.

Dans le deuxième chapitre, un sommaire des stratégies de commandes, et en particulier, celles proposées dans le contexte des applications robotiques nécessitant interaction avec l'environnement ont été détaillées.

Dans le troisième chapitre, la problématique de la commande hybride parallèle du PUMA 560 a été traitée. Deux techniques de commandes pour la boucle de position ont été proposées : la commande par découplage non linéaire et la commande passive. La technique pour la boucle de force étant la même, PID classique.

# **ANNEXES**

## ANNEXE

## A

## TRANSFORMATIONS HOMOGENES

## A.1. COORDONNEES HOMOGENES :

## A.1.1. Représentation d'un point :

Soit un point  $p$  de l'espace ayant pour coordonnées  $p_x, p_y, p_z$ . On appelle coordonnées homogènes du point  $p$  les termes  $p_x, p_y, p_z, w$ , où  $w$  est un facteur d'échelle.

$$\text{Ou sous forme vectorielle : } p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{En pratique, on a } w = 1, \text{ il en résulte : } p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

## A.1.2. Représentation d'un vecteur :

La représentation d'un vecteur  $u = p_1 p_2$  en coordonnées homogènes est définie par :

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

### A.1.3. Représentation d'un plan :

Un plan dans l'espace cartésien est caractérisé par une équation algébrique de la forme :

$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ . En coordonnées homogènes, le plan est défini par un vecteur ligne

$$Q = [\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta] \text{ tel que pour tout point } p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ du plan, l'équation suivante est}$$

satisfaite :

$$Q \cdot p = 0 \Leftrightarrow \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z + \delta = 0 \quad (\text{A.4})$$

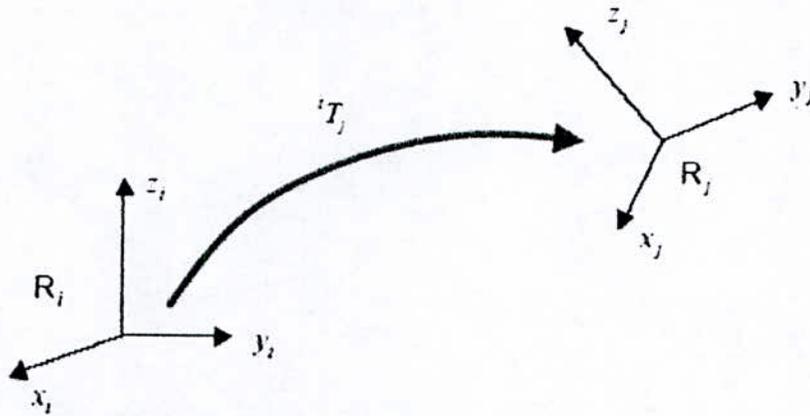
## A.2. TRANSFORMATIONS HOMOGENES :

### A.2.1 Transformation de repères :

Soient  $R_i = \{O_i \quad x_i \quad y_i \quad z_i\}$  et  $R_j = \{O_j \quad x_j \quad y_j \quad z_j\}$  deux repères orthonormés. La transformation permettant de passer du repère  $R_i$  au repère  $R_j$  est caractérisée par une matrice de transformation homogène de dimension  $(4 \times 4)$  définie par :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i s_j & {}^i n_j & {}^i a_j & {}^i P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où les termes  ${}^i s_j$ ,  ${}^i n_j$ ,  ${}^i a_j$ ,  ${}^i P_j$  représentent d'une part les vecteurs unitaires des axes  $x_j$ ,  $y_j$  et  $z_j$  du repère  $R_j$  définis dans le repère  $R_i$  et d'autre part le vecteur exprimant l'origine de  $R_j$  dans  $R_i$ .



La matrice qui définit le repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$  est souvent partitionnée en faisant apparaître une matrice  $(3 \times 3)$  d'orientation de  $R_j$  par rapport à  $R_i$  et un vecteur de translation caractérisant la position de l'origine de  $R_j$  dans  $R_i$ . On note :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i A_j & {}^i P_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

### A.2.2. Propriétés des matrices de transformation :

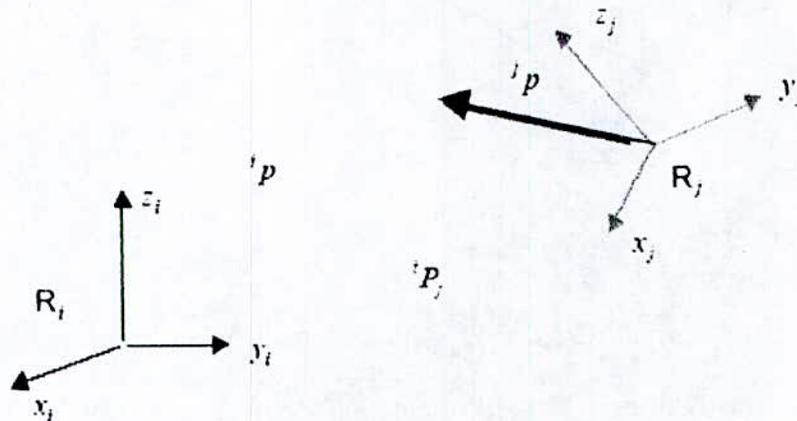
- Matrice de rotation pure :  ${}^i P_j = 0$  ;
- Matrice de translation pure :  ${}^i A_j = I_3$  ;
- Les éléments de la matrice  ${}^i A_j$  représentent les cosinus directeurs qui font apparaître 3 éléments indépendants. Le trièdre  $[s \ n \ a]$  définit une base orthonormée, ce qui suppose que :  $\|s\| = \|n\| = \|a\| = 1$  et  $s \cdot n = 0$ ,  $n \cdot a = 0$  et  $a \cdot s = 0$  ; l'un des trois vecteurs se déduit du produit vectoriel des deux autres. Par exemple :  $a = s \times n$ .
- La matrice  $A$  est orthogonale. On a donc :  $A^{-1} = A^T$ .
- L'inverse de la matrice  ${}^i T_j$  définit la matrice  ${}^j T_i$  telle que :

$${}^i P = {}^i T_j {}^j P \Leftrightarrow {}^j P = [{}^i T_j]^{-1} {}^i P = {}^j T_i {}^i P$$

### A.2.3. Transformation de vecteurs :

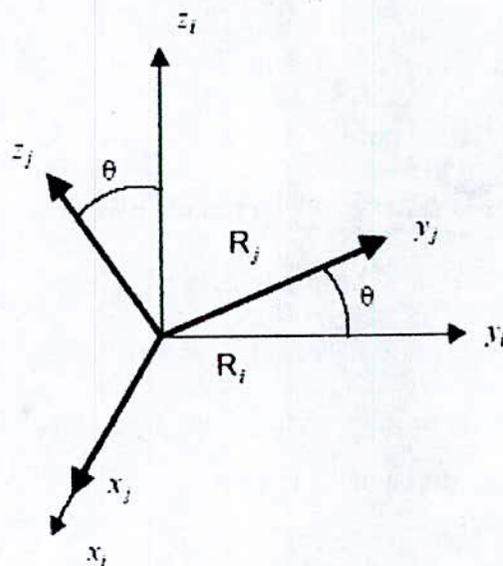
Soit un point  ${}^jP$  défini dans le repère  $R_j$ . Le calcul des coordonnées du point dans le repère  $R_i$  est obtenu simplement par la relation :

$${}^iP = {}^iT_j {}^jP = {}^iA_j {}^jP + {}^iP_j$$



### A.2.4. Matrice rotation autour des axes principaux :

Par exemple la rotation autour de l'axe  $x$  d'un angle  $\theta$  donne pour  ${}^iT_j$  :



$${}^i T_j = Rot(x, \theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.7})$$

Le même schéma peut être établi pour les rotations autour des axes  $y$  et  $z$ . On obtient dans ce cas les matrices de rotation suivantes :

$${}^i T_j = Rot(y, \theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c\theta & 0 & -s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ et } {}^i T_j = Rot(z, \theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right];$$

### A.2.5. Composition des transformations homogènes :

#### A.2.5.1. Composition de transformations :

La composition de deux matrices de transformations homogènes  $T_1$  et  $T_2$  définie par :

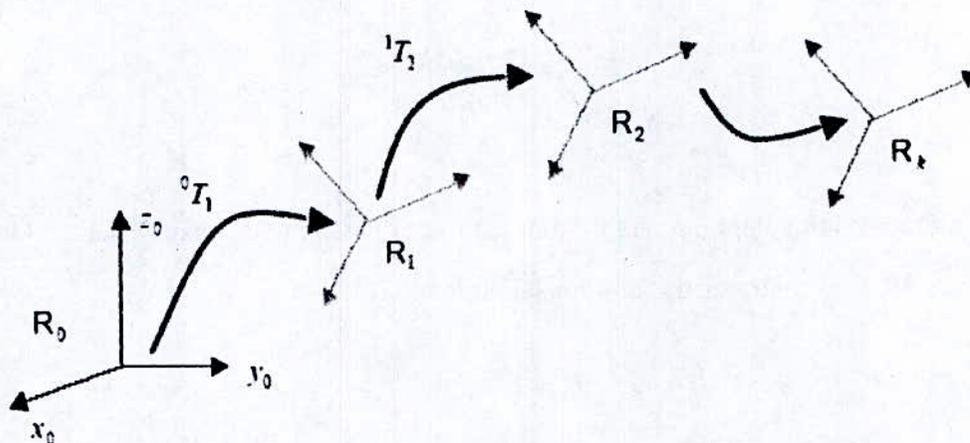
$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} A_1 & P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & P_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 P_2 + P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Le produit de matrices n'étant pas commutatif, le produit  $T_1 T_2$  est donc différent du produit  $T_2 T_1$ .

#### A.2.5.2. Multiplication à droite ou à gauche :

La matrice de passage permettant de passer d'un repère  $R_0$  à un repère  $R_k$  au travers une succession de changements de repères  $R_j$  peut être obtenue par la composition de multiplications à droit ou à gauche. On a :

$${}^0 T_k = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot {}^2 T_3 \cdot \dots \cdot {}^{k-1} T_k \quad (\text{A.9})$$



- Une multiplication à droite signifie que la transformation est faite par rapport au repère courant  $R_j$ .
- Une multiplication à gauche signifie que la transformation est faite par rapport au repère de référence  $R_i$ .

## ANNEXE

## B

# NOTATION DE DENAVIT-HARTENBERG MODIFIÉE SELON CRAIG

Cette notation, apparue très tôt dans le domaine de la robotique, est encore largement utilisée par la communauté scientifique pour décrire des robots en vue de leur analyse et/ou modélisation.

La méthode repose sur l'assignation d'un repère unique pour chaque lien de façon systématique :

1. identifier les dimensions du robot, et comprendre sa géométrie ;
2. numéroté les liens (segments) et articulations :
  - Base = segment 0
  - 1<sup>ère</sup> articulation = articulation 1

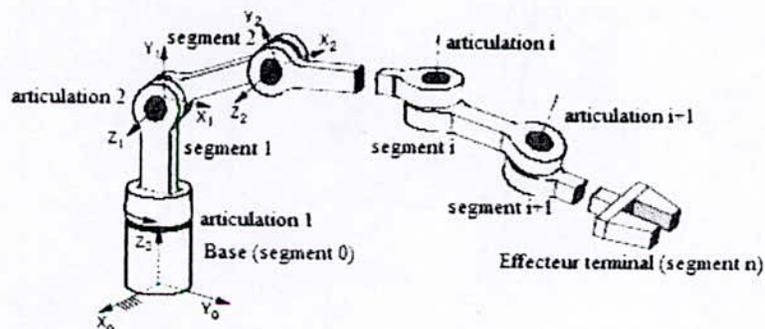


Figure B.1

3. identifier les axes des articulations, leurs types et sens de mouvements positifs ;
4. tracer les normales communes, et trouver leurs intersections avec les axes des articulations. Définir deux points :
  - $A_i$  = intersection de l'axe  $i$  avec la normale à l'axe  $i+1$
  - $B_i$  = intersection de l'axe  $i$  avec la normale à l'axe  $i-1$
5. assigner les repères :
  - L'origine du repère  $i$  correspond au point  $A_i$
  - $z_i$  pointe le long de l'axe  $i$
  - $x_i$  pointe le long de la normale au point  $B_{i+1}$
  - $y_i$  complète la règle de la main droite
6. dériver les paramètres de Denavit-Hartenberg pour chaque lien :
  - $a_i$  = distance séparant  $A_i$  de  $B_{i+1}$  = distance séparant  $z_i$  de  $z_{i+1}$  le long de  $x_i$  = longueur du segment
  - $\alpha_i$  = angle entre l'axe  $i$  et l'axe  $i+1$  autour de la normale commune = angle entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  autour de  $x_i$
  - $d_i$  = distance entre  $B_i$  et  $A_i$  = distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
  - $\theta_i$  = angle entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  autour de  $z_i$

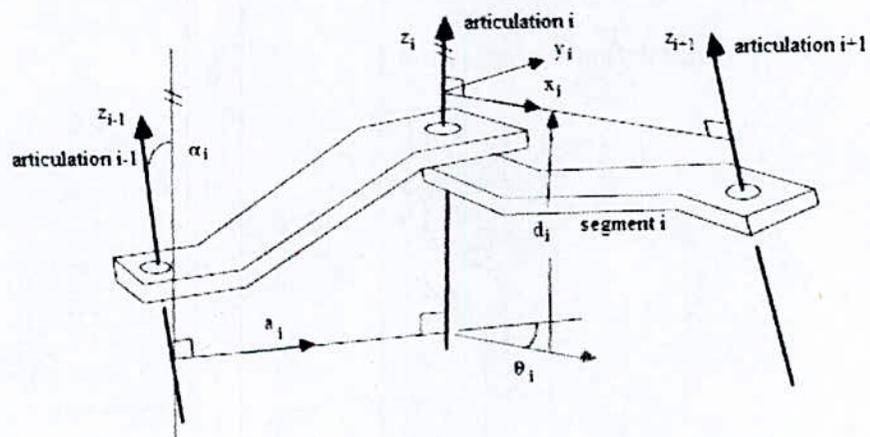


Figure B.2

7. calculer la transformation pour chaque lien :

${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_{i-1}) \cdot Trans(x, a_{i-1}) \cdot Rot(z, \theta_i) \cdot Trans(z, d_i)$ , ce qui donne :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & | & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & | & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & d_i \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & | & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & | & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & | & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

8. multiplier toutes les transformations, pour obtenir :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}T_n \quad (B.2)$$

## ANNEXE

## C

## TRAVAUX PRECEDENTS SUR LA COMMANDE EN FORCE

### C.1. COMMANDE AVEC CONSIGNE D'EFFORT :

#### C.1.1. Commande proportionnelle :

Wu et Paul, '80 ont implémenté une commande proportionnelle du couple sur un manipulateur à 1 ddl, avec un terme amortissement :

$$\tau = K_{\tau p}(\tau_c - \tau_m) - K_o \dot{\theta}_m \quad (C.1)$$

Khatib et Burdick, '86 ont implémenté une commande proportionnelle de la force avec action anticipation et amortissement :

$$f = f_c + K_{fp}(f_c - f_m) - K_v \dot{x}_m \quad (C.2)$$

et les couples articulaires sont obtenus par :  $\tau = J^T f$

**An, '86** a implémenté une commande proportionnelle de la force sur un manipulateur à 3 ddl, avec utilisation de la compliance passive et une action anticipation. Dans le domaine de Laplace, cette loi de commande est donnée par :

$$F = F_c + K_{fp} \left( \frac{a}{s+a} \right) (F_c - F_m) \quad (C.3)$$

**Epinger et Seering, '86,'87** ont analysés des modèles manipulateur/capteur/environnement, du second, quatrième et sixième ordre. La stratégie de commande employée est une simple commande proportionnelle :

$$f = K_{fp}(f_c - f_m) \quad (C.4)$$

**Youcef Toumi, '87** a implémenté une commande proportionnelle de la force sur un manipulateur à 1 ddl, avec un terme d'amortissement :

$$f = K_{fp}(f_c - f_m) - K_v \dot{x}_m \quad (C.5)$$

**Wedel et Saridis '88** ont implémenté une commande proportionnelle sur un manipulateur à 6 ddl (articulations rotoïdes), avec action anticipation. La loi de commande est donnée par :

$$f = f_c + K_{fp}(f_c - f_m) \quad (C.6)$$

### C.1.2. Commande intégrale :

**Townsend et Salisbury '87** ont analysé l'effet des frottements sur une commande intégrale de la force :

$$f = K_{fi} \int (f_c - f_m) dt \quad (C.7)$$

**Youcef Toumi et Gutz '89** ont implémenté une commande en force avec amortissement sur un manipulateur à 1 ddl.

$$f = K_{fi} \int (f_c - f_m) dt - K_v \dot{x}_m \quad (C.8)$$

**Khatib et Vischer '90** ont implémenté une commande intégrale des couples articulaires avec action anticipation :

$$\tau = \tau_c + K_{\tau i} \int (\tau_c - \tau_m) dt \quad (C.9)$$

### C.1.3. Commande proportionnelle intégrale :

**Raibert et Craig '81** ont implémenté une commande PI des couples articulaires sur un manipulateur à 6 ddl. Cette loi transforme les erreurs de force vers l'espace articulaire avant d'appliquer l'action proportionnelle. Cependant, **An** a démontré que la combinaison entre erreurs de force cartésiennes et matrice de gain diagonale risque d'être instable.

$$\tau = J^T f_c + K_{\tau p} J^T (f_c - f_m) + K_{\tau i} \int J^T (f_c - f_m) dt \quad (C.10)$$

où  $J$  est la jacobienne du manipulateur.

**Miyazaki et Arimoto '84** ont implémenté une commande PI avec amortissement sur un manipulateur à 3 ddl.

$$f = K_{fp} (f_c - f_m) + K_{fi} \int (f_c - f_m) dt - K_v \dot{x}_m \quad (C.11)$$

**Epinger et Seering '87** ont analysé une commande en force PI sur un modèle linéaire du manipulateur.

$$f = K_{fp} (f_c - f_m) + K_{fi} \int (f_c - f_m) dt \quad (C.12)$$

### C.1.4 Commande proportionnelle dérivée :

**Epinger et Seering '87** ont analysé une commande en force PD sur un modèle linéaire du manipulateur.

$$f = K_{fp} (f_c - f_m) + K_{fd} \frac{d}{dt} (f_c - f_m) \quad (C.13)$$

Xu '88 a implémenté une commande PD sur un robot à 6 ddl avec capteur de force compliant.

$$f = K_{fp}(f_c - f_m) + K_{fd} \frac{d}{dt}(f_c - f_m) \quad (\text{C.14})$$

Khatib et Vischer '90 ont implémenté une commande PD du couple, avec action anticipation.

$$\tau = \tau_c + K_{\tau p}(\tau_c - \tau_m) + K_{\tau d} \frac{d\tau_m}{dt} \quad (\text{C.15})$$

## C.2. COMMANDE SANS CONSIGNE D'EFFORT :

Maples et Becker '86 ont implémenté une commande similaire à la commande en impédance.

DeSchutter '87 a analysé et formalisé des commandes en force avec boucle interne de position. Les trois types de régulateurs étudiés sont : boucle interne avec retour de position et de vitesse, avec position uniquement, sans boucle interne.

## ANNEXE

## D

## MODELISATION DU PUMA 560

## A 3 DDL

## D.1. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT :

Le modèle géométrique direct dans le plan est obtenu en mettant  $\theta_1 = \theta_4 = \theta_6 = 0$  ;

$${}^0T_6 = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{235} & 0 & s_{235} & a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + d_3 \\ -s_{235} & 0 & c_{235} & -a_2 \cdot s_2 - a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (D.1)$$

Les coordonnées du poignet sont données par :

$$\begin{cases} x_w = a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} \\ y_w = d_2 + d_3 \\ z_w = -a_2 \cdot s_2 - a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} \end{cases} \quad (D.2)$$

Lorsque  $\theta_2, \theta_3$  et  $\theta_5$  varient, le poignet demeure dans un plan verticale situé à la profondeur  $d_2 + d_3$  suivant l'axe  $y_0$ . Cette situation est représentée par le schéma de la figure ci-dessous, où les coordonnées sont exprimées dans le repère de base  $\{x_0, y_0, z_0\}$  :

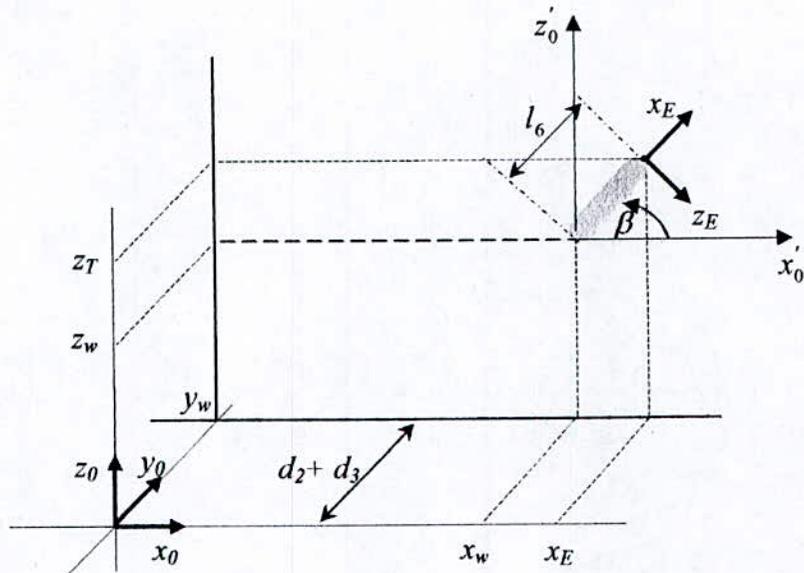


Figure .D.1 situation de l'effecteur du bras dans le plan

L'orientation du poignet dans le repère  $(x'_0, z'_0)$  peut être tout simplement représentée par l'angle  $\beta$  (utilisation des coordonnées polaires).

La situation du poignet est alors donnée par :

$$\begin{cases} x_w = a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} \\ z_w = -a_2 \cdot s_2 - a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} \\ \beta = \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 \end{cases} \quad (D.3)$$

Le système (D.3), constitue le modèle géométrique directe du PUMA 560 pour  $(\theta_1 = \theta_4 = \theta_6 = 0)$ .

## D.2. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE :

En partant du système (D.3), on obtient :

$$x_w^2 + z_w^2 = a_2^2 + a_3^2 + d_4^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot c_3 + 2 \cdot a_2 \cdot d_4 \cdot s_3 \quad (D.4)$$

ou encore :

$$a_3 \cdot c_3 + d_4 \cdot s_3 = \frac{(x_w^2 + z_w^2) - (a_2^2 + a_3^2 + d_4^2)}{2 \cdot a_2} \quad (\text{D.5})$$

en posant :

$$A = \frac{(x_w^2 + z_w^2) - (a_2^2 + a_3^2 + d_4^2)}{2 \cdot a_2}$$

on a :

$$a_3 \cdot c_3 + d_4 \cdot s_3 = A \quad (\text{D.6})$$

et  $d_4 = \rho \cdot \cos \psi$  ,  $a_3 = \rho \cdot \sin \psi$  ,  $\rho = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$  et  $\psi = \text{atan2}(a_3, d_4)$

on a alors :

$$\sin(\theta_3 + \psi) = \frac{A}{\rho} \quad \text{et} \quad \cos(\theta_3 + \psi) = \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{\rho^2}}$$

d'où :

$$\theta_3 = \text{atan2}(A, \pm \sqrt{\rho^2 - A^2}) - \text{atan2}(a_3, d_4) \quad (\text{D.7})$$

ou encore :

$$\theta_3 = \text{atan2} \left[ \frac{(x_w^2 + z_w^2) - (a_2^2 + a_3^2 + d_4^2)}{2 \cdot a_2}, \pm \sqrt{(a_3^2 + d_4^2) - \left[ \frac{(x_w^2 + z_w^2) - (a_2^2 + a_3^2 + d_4^2)}{2 \cdot a_2} \right]^2} \right] - \text{atan2}(a_3, d_4)$$

On peut, réécrire le système (D.3), sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_w = k_1 \cdot c_2 + k_2 \cdot s_2 \\ z_w = k_2 \cdot c_2 - k_1 \cdot s_2 \\ \beta = \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = a_2 + a_3 \cdot c_3 + d_4 \cdot s_3 \\ k_2 = d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3 \end{cases}$$

d'où on tire :

$$c_2 = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot (k_1 \cdot x_w + k_2 \cdot z_w), s_2 = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot (k_2 \cdot x_w - k_1 \cdot z_w)$$

et on peut écrire :

$$\theta_2 = \text{atan2}(k_2 \cdot x_w - k_1 \cdot z_w, k_1 \cdot x_w + k_2 \cdot z_w) \quad (\text{D.8})$$

Et finalement :

$$\theta_5 = \beta - (\theta_2 + \theta_3) \quad (\text{D.9})$$

### D.3. MODELE CINEMATIQUE DIRECT:

Le modèle cinématique direct du premier ordre s'obtient par dérivation du système (D.3), et du deuxième ordre, par double dérivation de ce dernier.

$$\begin{cases} \dot{x}_w = -a_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_2 - a_3 \cdot s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + d_4 \cdot c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{z}_w = -a_2 \cdot c_2 \cdot \dot{\theta}_2 - a_3 \cdot c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - d_4 \cdot s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{\beta} = \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{z}_w \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \cdot s_2 - a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} & -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} & 0 \\ -(a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23}) & -(a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

On peut réécrire ce dernier système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{z}_w \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = J_w \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \text{ Avec } J_w = \begin{bmatrix} -a_2 \cdot s_2 - a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} & -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} & 0 \\ -(a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23}) & -(a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Le modèle cinématique du deuxième ordre s'écrit :

$$\ddot{X} = J_w \cdot \ddot{\theta} + \dot{J}_w \cdot \dot{\theta} \quad (D.13)$$

où :

$$\dot{J}_w(\theta, \dot{\theta}) = \frac{d}{dt} J_w(\theta) \quad (D.14)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_w \\ \ddot{z}_w \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = J_w \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} + \dot{J}_w \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (D.15)$$

avec :

$$J_w = \begin{bmatrix} -[a_2 c_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + d_4 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] & -[a_3 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + d_4 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] & 0 \\ a_2 s_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - d_4 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & a_3 s_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - d_4 c_{23} \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.16)$$

#### D.4. MODELE CINEMATIQUE INVERSE :

Comme pour le modèle cinématique directe, le modèle cinématique inverse possède aussi un premier et deuxième ordre. Ces dernier, expriment les vitesses et accélérations articulaires en fonction de celles opérationnelles. D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} = J_w^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{z}_w \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (D.17)$$

avec :

$$J_w^{-1} = \frac{1}{\det(J_w)} \cdot \begin{bmatrix} -(a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23}) & a_3 \cdot s_{23} - d_4 \cdot c_{23} & 0 \\ a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} & -(a_2 \cdot s_2 + a_3 \cdot s_{23}) + d_4 \cdot c_{23} & 0 \\ -a_2 \cdot c_2 & -a_2 \cdot s_2 & a_2 \cdot d_4 \cdot c_3 - a_2 \cdot a_3 \cdot s_3 \end{bmatrix}$$

où :  $\det(J_w) = a_2 \cdot d_4 \cdot c_3 - a_2 \cdot a_3 \cdot s_3$

Et le modèle cinématique du deuxième ordre est donné par :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} = J_w^{-1} \times \begin{bmatrix} \ddot{x}_w \\ \ddot{z}_w \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} - \dot{J}_w \times \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Ce dernier, peut être réécrit en remplaçant  $\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}$  par son expression donnée par le modèle

cinématique du premier ordre, et ainsi, le modèle du deuxième ordre ne sera exprimé qu'en terme de grandeurs opérationnelles :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} = J_w^{-1} \times \begin{bmatrix} \ddot{x}_w \\ \ddot{z}_w \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} - \dot{J}_w \times J_w^{-1} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{z}_w \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

- Le jacobien est singulier pour  $\Delta = a_2 \cdot d_4 \cdot c_3 - a_2 \cdot a_3 \cdot s_3 = 0$

ce qui implique :  $\text{tg}(\theta_3) = \frac{d_4}{a_3}$

et on obtient ainsi une singularité pour  $\theta_3 = \arctan\left(\frac{d_4}{a_3}\right)$ .

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Armstrong 81] :** Brain Armstrong-Hélouvry and Peter I. Corke, "A search for consensus model parameters reported for the PUMA 560 robot", 1981.
- [Carbou 99]:** Jean Damien CARBOU, "Etude d'une Architecture Reconfigurable de la commande position/force d'un bras manipulateur" Rapport de DEA. Université de Montpellier II, 1999.
- [Chablat 98] :** Damien Chablat, "Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France, 1998.
- [Clegg 00] :** Andrew C. Clegg "Self-tuning Position and Force Control of a Hydraulic Manipulator", Thesis submitted for the degree of doctor of Philosophy, Heriot-Watt University. Department of Computing and Electrical Engineering. November 2000.
- [Craig 89] :** JOHN J. CRAIG "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", 2nd ed, Addison-Wesley Publishing Company, Canada, 1989.
- [Dégoulange 93] :** Dégoulange É., "Commande en effort d'un robot manipulateur à deux bras : application au contrôle de la déformation d'une chaîne cinématique fermée", Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, France, Décembre 1993.
- [De Schutter 88] :** De Schutter J. et Van Brussel H., "Compliant robot motion II. A control approach based on external control loops", *Int. Jour. of Robotics Research*, vol. 7(4), Août 1988, p. 18-33.

- [Featherstone 99] :** Roy Featherstone, Stef Sonck Thiebaut, and Oussama Khatib, "A General Contact Model for Dynamically-Decoupled Force / Motion Control", proceedings of the 1999 IEEE . International Conference on Robotics & Automation. Detroit, Michigan 1 May 1999.
- [Flückiger 98] :** Lorenzo Flückiger, "Interface pour le pilotage et l'analyse des robots basée sur un générateur de cinématiques", thèse de doctorat en sciences techniques, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 1998.
- [Fodor 00] :** Gergely Fodor, and Gábor Tevesz, "Hybrid Position and Force Control Algorithm Expansion of a Robot System", Budapest University of Technology and Economics Department of Automation and Applied Informatics, Periodica Polytechnica Ser. el. eng. vol. 43, no. 4, pp. 251-261 (1999).
- [Goldsmith 99] :** P.B. Goldsmith, B.A. Francis, and A.A. Goldenberg, "Stability of Hybrid Position / Force Control Applied to Manipulators with Flexible Joints", International Journal of Robotics and Automation, Vol. 14, No. 4, 1999.
- [Khalil 99] :** WISAMA KHALIL ET ETIENNE DOMBRE "Modélisation Identification et Commande des robots", 2<sup>e</sup> édition, Hermes Science Publications, Paris, 1999.
- [Khatib 86] :** Brain Armstrong, Oussama Khatib and Joel Burdick "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the Puma 560 Arm", In Proc. 1986 IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation, San Francisco, CA.

- [Khatib 87] :** O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation", IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. 3, no. 1, pp. 43-53, 1987.
- [Lanzon 97] :** Alexander Lanzon, "Compliant Motion Control for Robotic Manipulators", Robot Control Group. Department of Engineering. University of Cambridge, A dissertation submitted for the degree of Master of Philosophy, September 1997.
- [Liégeois] :** Alain Liégeois, "Modélisation et commande des robots manipulateurs" Techniques de l'ingénieur. article S7 730.
- [Meggiolaro 00] :** Marco Antonio Meggiolaro "Achieving Fine Absolute Positioning Accuracy in Large Powerful Manipulators", Thesis submitted for the degree of doctor of Philosophy in Mechanical Engineering, University of Rio de Janeiro, September 2000.
- [Natale 96] :** Ciro Natale, Bruno Siciliano, and Luigi Villiani, "Robust Hybrid Force / Position Control with Experiments on an Industrial robot", Prisma LAB, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, Università degli Studi di Napoli Federico, Italy.
- [Olsson 00] :** Anders Olsson, and Sara Liljenborg, "Identify a Surface with Robot Force Control", Department of Automatic Control Lund Institute of Technology Lund Sweden. ISRN LUTFD2/TFRT5656SE, November 2000.
- [Perdereau 91] :** Perdereau V., "Contribution à la commande hybride force-position Application à la coopération de deux robots", Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, Février 1991.

- [Saitoh 03] :** Yohei Saitoh, Zhiwei Luo, and Keiji Watanabe, "Adaptive Modular Vector Field Control for Robot Contact Tasks in Uncertain Environment", IEEE Journal of Robotics and Automation, pp. 3645–3650, 2003.
- [Sciavicco 96] :** Sciavicco L. et Siciliano B. "Modeling and control of robot manipulators", Mc Graw-Hill Companies, Inc., New-York, NY, 1996.
- [Selig 92] :** J. M. Selig, "Introductory Robotics", published by Prentice Hall International, 1992.
- [Spong 89] :** MARK W.SPONG AND M. VIDYASAGAR "Robot Dynamics and Control", Quinn- Woodbine, USA, 1981.
- [Volpe 90] :** Richard Alan Volpe "Real and Artificial Forces in the Control of Manipulators: Theory and Experiments". Submitted for the degree of Doctor of Philosophy Department of Physics The Robotics Institute Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213. September 1990.
- [Williams II 97] :** Robert L. Williams II. "Cartesian Control of Force-Reflecting Hand controllers", Ohio University, Athens, OH 45701. Proceedings of the Fifth National Conference on Applied Mechanisms and Robotics Cincinnati OH, October 12-15, 1997.

## ملخص :

العمل المقدم من خلال هذه المذكرة يخص دراسة مشكلة التحكم في الموضع والاتجاه، والقوة التي تطبقها الذراع الآلية على المحيط الخارجي؛ وذلك في الفضاء العملي. قمنا في بداية الأمر باستخراج النماذج الهندسية، الحركية و الديناميكية المباشرة و العكسية باستعمال المعطيات الحقيقية لذراع آلية من نوع " پوما 560 ". تطرقنا بعد ذلك إلى مختلف بني التحكم المقترحة في مجال التحكم في الأذرع الآلية و بالخصوص البنى المتعلقة بالتحكم في القوة. بنية التحكم المستعملة هي التحكم الهجين في الموضع و القوة. فيما يخص التحكم في الموضع اقترحنا نظامين اثنين: الفصل الأخطي و مبدأ التحكم الخامل، أما فيما يخص التحكم في القوة فقد اقترحنا النظام الكلاسيكي (PID).

## كلمات مفتاحية:

استخراج النماذج - التحكم الهجين في الموضع و القوة - الأذرع الآلية - الفضاء العملي - پوما 560

## Résumé :

Dans le travail présenté dans ce mémoire, nous avons proposé une structure de commande hybride afin de commander simultanément la position, l'orientation et la force qu'exerce l'effecteur terminal du PUMA 560 sur son environnement. Nous avons commencé par développer les modèles mathématiques du manipulateur considéré, ensuite nous avons présenté un sommaire des stratégies de commande proposées dans le contexte, en situant celles permettant la commande des efforts appliqués par le robot sur l'environnement. Par la suite nous avons introduit le principe de la commande hybride parallèle. Nous avons étudié deux techniques de commandes la commande par découplage non linéaire et la commande passive pour la boucle de position et une commande du type PID pour la boucle de force.

## Mots clés :

Modélisation - commande hybride force / position - bras manipulateurs - espace opérationnel - PUMA 560

## Abstract:

This thesis presents the parallel hybrid force / position control applied to a manipulator, the PUMA 560, typical of the robots used in university's researches. A modelling of the robot and the environment is presented as the concern is to control the forces of interaction involved while contact with the environment is made. Two control techniques for the position loop are proposed, feedback linearization with full dynamic model and passivity adaptive control based on the algorithm of Slotine and Li. For the force loop, a classical PID controller is considered which is proved to be sufficient to control a mass-damper-stiffness system.

## Key words:

Modelling - hybrid position / force control - manipulators - operational space - PUMA 560