République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

Thème :

Etude du Comportement Dynamique d'un Palier de Pied de Bielle d'un Moteur Thermique

Etudié par :

Mr ALBANE Chawki

Proposé et dirigé par :

Mr H. BELHANECHE
Mr S. LARBI

2006

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi, El-Harrach, ALGER

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur ***H.BELHANECHE*** *et Monsieur* ***S.LARBI****, promoteur et copromoteur, pour leur disponibilité, leur patience et leurs conseils tout au long de mon projet.*

Mes remerciements vont également à Monsieur ***L.RIACHE*** *pour son assistance et soutien, et au président de jury Monsieur* ***A.SMAÏLI*** *qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.*

Dédicaces

A mes chers Mère et Père

A mes Sœurs et frère, Amel, Samia et Lamine

A mes neveux et nièces, Yasmine, Amanda et Louisa, Khalil, Jens et Dain

A ma Nabila adorée

A Samir et Foued de Koléa, Salim aussi

A tous mes amis

Résumé :

Notre travail consiste à modéliser le comportement d'un palier de bielle en utilisant la méthode J. F. BOOKER et étudier les paramètres influant le fonctionnement du mécanisme. Ensuite, établir un programme de calcul qui permet de calculer la trajectoire du centre de l'arbre, la variation de l'angle de calage et l'épaisseur du film minimale en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin. Les résultats sont présentés sur des graphes.

Mots clés :

Palier, arbre, coussinet, méthode de mobilité, excentricité relative, épaisseur du film.

Summary:

This work consists in modelling the behaviour of rod's stage by using J.F Booker's mobility method and studying the parameters influencing the functionality of the mechanism.

Data processing software has been set up to calculate the trajectory of the center of the crankshaft center, the variation of the angle of chock and the minimum thickness of the oil-film according to the swing angle of the crankshaft. The results are presented on graphs.

Key words:

Stage, crankshaft, bearing, method of mobility, relative eccentricity, thickness of oil-film.

ملخص:

إن هذا العمل مخصص لدراسة تصرف سطح عمود التوصيل وذلك باستعمال منهج ج.ف.بوكر ,و دراسة الإعدادات المؤثرة في آليته و تركيبه.

إن برنامج معلوماتي قد سطر لحساب محرك و مسار النقطة المركزية للعمود ,تغيير زاوية الوضع كثافة الشريط الأدنى و ذلك حسب زاوية دوران قلابة.

النتائج مقدمة في مخططات.

كلمات مفتاحيه:

عمود التوصيل, وسيدة, منهج الحركية, مختلف المركز النسبي, سمك الشريط

Table des matieres

CHAPITRE I INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE II ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE MANIVELLE

CHAPITRE III PALIERS A CHARGE VARIABLE

CHAPITRE IV METHODE DE J.F BOOKER

CHAPITRE V RESOLUTION NUMERIQUE

CHAPITRE VI RESULTATS ET DISCUSSION

ANNEXES

Nomenclature

F	Charge dynamique appliquée [N]
F_ε	Projection de la force F suivant l'axe ε [N]
F_Φ	Projection de la force F suivant l'axe Φ [N]
W	Charge hydrodynamique supportée par le palier [N]
p	Pression [N/m^2]
P	Préssion sans dimenssion
R	Rayon moyen du palier [mm]
D	Diametre moyen du palier [mm]
C	Jeu radial [mm]
e	Excentricité absolue [mm]
ε	Excentricité relative du palier.
L	Longueur du palier [mm]
L_2	Rayon de manivelle [mm]
L_3	Entraxe de bielle [mm]
h	Epaisseur du film [mm]
H	Epaisseur du film sans dimension (h/C)
M	Vecteur mobilité
M_ε	Composante du vecteur mobilité suivant l'axe du lieu de centre ε
M_Φ	Composante du vecteur mobilité suivant l'axe Φ perpendiculaire à l'axe ε
Re	Nombre de Reynolds
O_a	Centre de l'arbre
O_c	Centre du coussinet

Lettres greques :

Φ Angle de calage [rad]

Φ' Vitesse angulaire de l'angle de calage [rad/s]

α Angle que fait le vecteur mobilité M avec l'axe d'éxcentricité [rad]

ψ Angle qui repere la charge F(t) par rapport au repere fixe x,y [rad]

ψ' Vitesse angulaire de la charge [rad/s]

θ_2 Angle de rotation du vilbrequin [rad]

ω_a Vitesse angulaire de l'arbre [rad/s]

ω_c Vitesse angulaire du coussinet [rad/s]

ω_f Vitesse angulaire de la force F(t) [rad/s]

μ Viscosité dynamique du lubrifiant [Pl]

ρ Masse volumique du lubrifiant [kg/m^3]

indices :

a Arbre

c Coussinet

v Vilebrequin

x Coordonnée dans la direction circonferentielle.

y Coordonnée dans le sens de la hauteur du film.

z Coordonnée dans la direction axiale.

Chapitre I

Introduction

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Les phénomènes de frottements, d'usure et de lubrification, de même que les propriétés d'adhérence des matériaux entrent en jeu dans de nombreux domaines industriels, en particulier dans les secteurs où les enjeux de conservation d'énergie ou de fiabilité des systèmes et des équipements interviennent de façon cruciale.

Des étapes décisives ont pu être franchies qu'à partir des années 1960 dans le domaine de la lubrification hydrodynamique, lorsque l'ordinateur est venu ajouter aux connaissances physiques sa puissance de calcul combinée à l'évolution des techniques numérique, et a ainsi permis de construire des modèles numériques capables de représenter très finement le comportement des films d'huile dans les paliers.

Ainsi en lubrification hydrodynamique, on désire maintenir un film d'huile complet entre deux surfaces chargées l'une contre l'autre et très rapprochées l'une de l'autre. On comprend que, plus l'épaisseur du film diminue, plus les défauts de forme des surfaces qui l'entourent deviennent importants et plus les conditions réelles de maintien du film s'éloignent de celles que l'on peut calculer pour éviter les risques d'usure, de grippage ou de collage.

L'influence des efforts d'inertie, dûs aux pièces en mouvements, sur l'épaisseur minimale du film d'huile dans les paliers de bielle, a été étudiée par *J.F Booker* en 1965 [1], en mettant en œuvre une méthode de calcul appelée *« Méthode de mobilité »*, cette méthode permet le calcul graphique ou numérique de la trajectoire du centre de l'arbre dans le coussinet du palier de bielle pour différent cas de charge, en supposant un fonctionnement en régime laminaire et l'emploie d'un lubrifiant incompressible et isovisqueux. Par ailleurs, les défauts de forme de l'arbre et du coussinet sont négligés.

J.F Booker a caractérisé la variation de l'excentricité dans le palier par le vecteur mobilité M qui dépend de l'excentricité ε et du rapport L/D (rapport de la longueur du palier sur le diamètre moyen de celui-ci).

POSITION DU PROBLEME:

Nous nous proposons d'aborder l'étude hydrodynamique du palier de pied de bielle. Cet ensemble comprend généralement trois paliers (figure I.1).

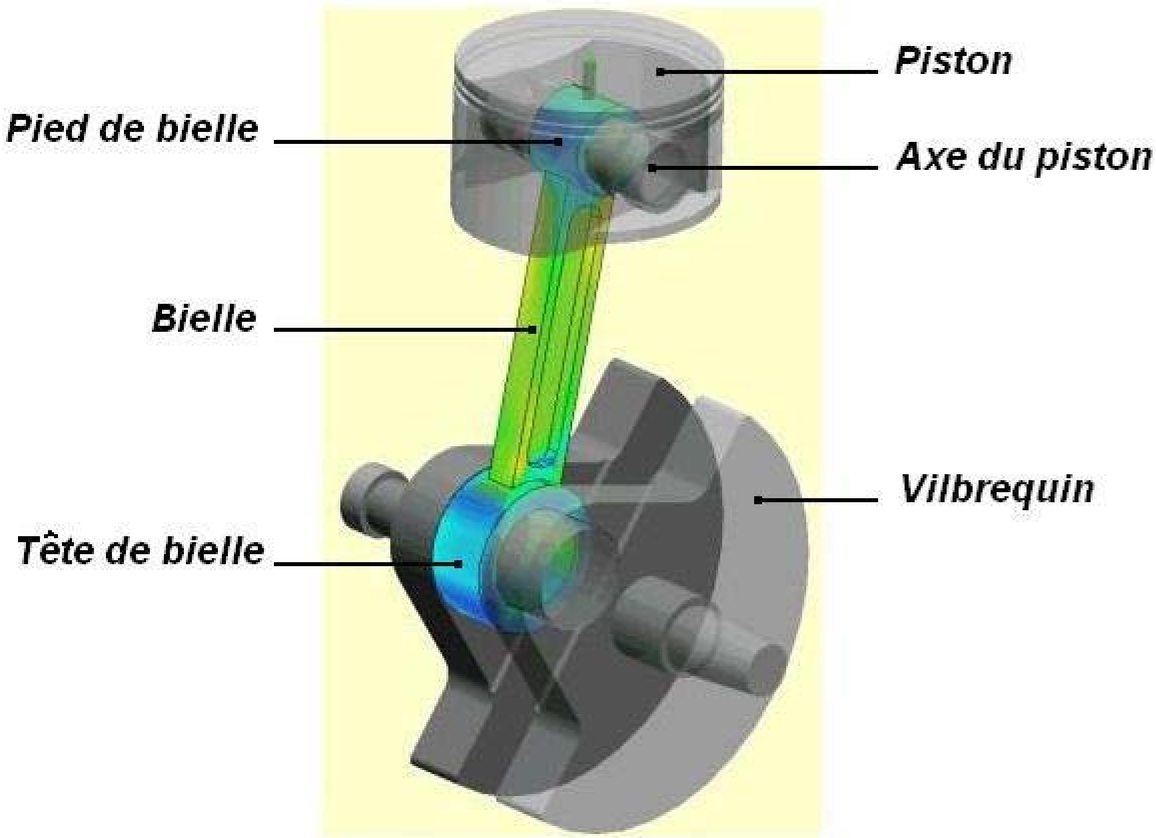


Fig I.1 Ensemble piston – bielle

Différents cas peuvent se présenter :

1. L'arbre est fixé sur le piston et a donc une vitesse angulaire nulle par rapport à celui-ci, le coussinet de pied de bielle est mobile par rapport à son axe.
2. L'arbre est fixé sur le pied de bielle et par conséquence sa vitesse angulaire est égale à celui du coussinet de pied de bielle, cet axe est alors mobile par rapport au piston.
3. L'arbre est mobile à la fois par rapport au pied de bielle et par rapport au piston, il a donc une vitesse angulaire propre qui dépend des forces de frottement.

Dans cette étude nous nous limiterons au *cas (1)* ou l'axe est fixé dans le piston et nous déterminerons le déplacement du centre de l'arbre par rapport au coussinet.

Le rapport de la longueur sur le diamètre du palier étant égal à l'unité, le palier est considéré de longueur finie.

De manière générale le problème se résume à un palier lisse dont le coussinet est animé d'une vitesse de rotation et dont l'arbre est soumis à une force variable en module et en direction (figure I.2).

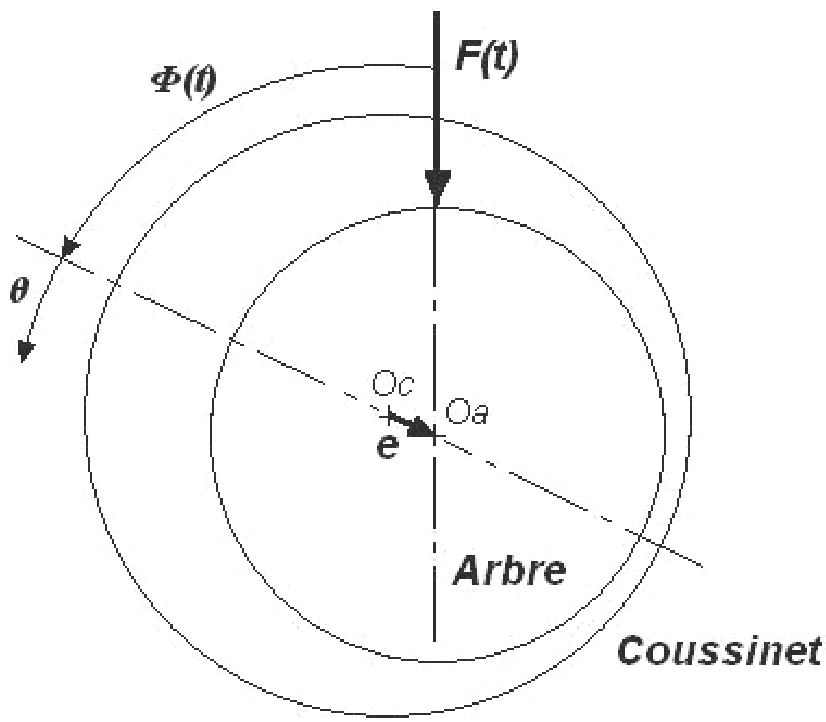


Fig I.2 Section droite du palier sous charge

<u>Les paramètres connus sont :</u>

- la dimension du palier et de la bielle
- la vitesse angulaire du coussinet car elle est fonction de la vitesse de rotation du moteur.
- le diagramme de charge F(t).
- la viscosité dynamique du lubrifiant μ.

Par ailleurs, nous supposerons que le palier est parfaitement aligné et sans défaut de forme et que le lubrifiant est incompressible et isovisqueux.

Chapitre II

ETUDE CINEMATIQUE DU SYTEME BIELLE-MANIVELLE

CHAPITRE II
ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

II-1- INTRODUCTION:

Le système bielle-manivelle est un modèle de mécanisme qui doit son nom aux 2 pièces qui le caractérisent. Il parait à l'aube de la renaissance. Ce système représente sans doute la plus importante innovation du XV^{e} siècle.

Par ailleurs, les techniciens se sont probablement très vite rendus compte qu'il existe deux points morts qui peuvent bloquer le mécanisme, de sorte qu'ils ont rapidement associé un volant d'inertie sur l'axe de rotation.

C'est avant tout un système mécanique de transformation de mouvement de rotation en mouvement rectiligne alternatif et vice-versa, il est constitué de quatre pièces principales [2 ,3] :

- La bielle.
- La manivelle appelée aussi vilebrequin.
- L'oscillateur.
- Le bâti.

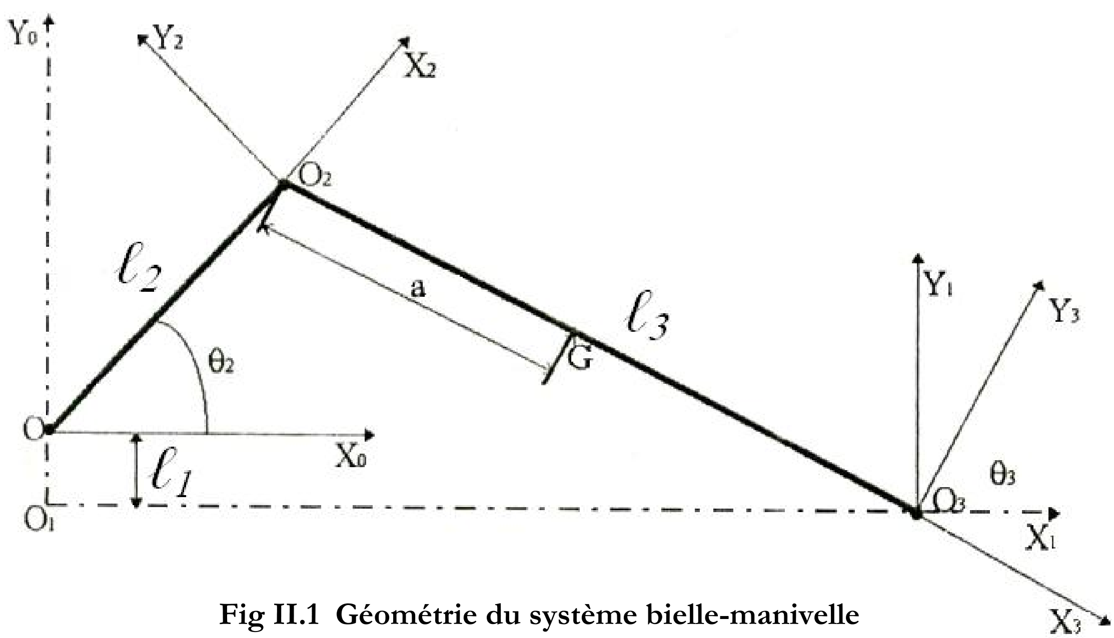


Fig II.1 Géométrie du système bielle-manivelle

<u>Nous utiliserons les notations suivantes :</u>

- « Manivelle » : OO_2 de longueur ℓ_2

- « Bielle » : O_2O_3 de longueur ℓ_3 : en O_2 se situe la tête de bielle

  en O_3 se situe le pied de bielle

Les systèmes d'axes se rattachant à la figure II.1 sont :

- T_0 système d'axes OX_0Y_0 fixe et de référence.
- T_1 système d'axes $O_3X_1Y_1$ lié au pied de bielle O_3.
- T_2 système d'axes $O_2X_2Y_2$ lié à la manivelle.
- T_3 système d'axes $O_3X_3Y_3$ lié à la bielle.

Les angles définis sont :

$\theta_2 = (X_0, X_2)$ angle que fait la manivelle par rapport à T_0.

$\theta_3 = (X_0, X_3) = (X_1, X_3)$ angle que fait la bielle par rapport à T_0 ou T_1.

II-2- TORSEURS CINEMATIQUES:

- **Manivelle :**

$$\vec{T}_{2/0} = \begin{cases} \vec{\omega}_2^0 = \theta_2'.\vec{z}_0 \\ \vec{V}_2^0(O) = \vec{0} \end{cases} \tag{2.1}$$

- **Bielle :**

$$\vec{T}_{3/0} = \begin{cases} \vec{\omega}_3^0 = \theta_3'.\vec{z}_0 \\ \vec{V}_3^0(O_2) = V.\vec{x}_1 = V.\vec{x}_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

- **Bielle par rapport à la manivelle :**

$$\vec{T} = \begin{cases} \vec{\omega}_3^2 = (\theta_3' - \theta_2').\vec{z}_0 \\ \vec{V}_3^2(O_2) = \vec{0} \end{cases} \tag{2.3}$$

Avec : V vitesse du piston

II-3- CONDITIONS DE CONTACT O_2 et O_3 :

$$\begin{cases} \vec{V}_2^0(O_2) = \vec{V}_3^0(O_2) \\ \vec{V}_3^0(O_3) = V.\vec{x}_0 \end{cases}$$

La formule de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}_2^0(O_2) = \vec{V}_2^0(O) + O_2\vec{O} \wedge \vec{\omega}_2^0 = -\ell_1\vec{x}_2 \wedge \theta_2'\vec{z}_0 = \ell_2\theta_2'\vec{y}_2 \tag{2.4}$$

$$\vec{V}_2^0(O_2) = \vec{V}_3^0(O_2) = \vec{V}_3^0(O_3) + O_2\vec{O}_3 \wedge \vec{\omega}_3^2 = V.\vec{x}_0 + \ell_3\vec{x}_3 \wedge \theta_3'\vec{z}_0 = V.\vec{x}_0 - \ell_3\theta_3'\vec{y}_3 \tag{2.5}$$

- Les composantes des vecteurs $\vec{y}_2$ et $\vec{y}_3$ dans le système T_0 sont les suivantes :

$$\vec{Y}_{2/T0} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{T_0} \qquad \vec{Y}_{3/T0} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{T_0}$$

$\vec{V}_2^0(O)$ dans le repère T_0 s'écrit :

$$\vec{V}_2^0(O_2) = \begin{bmatrix} -\ell_2\theta_2'\sin\theta_2 \\ \ell_2\theta_2'\cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{T_0} = \begin{bmatrix} V-\ell_3\theta_3'\sin\theta_3 \\ \ell_3\theta_3'\cos\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{T_0} \tag{2.6}$$

Donc:

$$V+\ell_2\theta_2'\sin\theta_2+\ell_3\theta_3'\sin\theta_3=0 \tag{2.7}$$

$$\ell_2\theta_2'\cos\theta_2+\ell_3\theta_3'\cos\theta_3=0 \tag{2.8}$$

L'équation (8) devient :

$$\frac{\theta_3'}{\theta_2'}=\frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_2}=-\frac{\ell_2\cos\theta_2}{\ell_3\cos\theta_3} \tag{2.9}$$

D'après la figure (II.1) :

$$O\vec{O}_2 = O\vec{O}_3 + O_3\vec{O}_2$$

- les composants des vecteurs $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ dans le système T_0 sont les suivants :

$$\vec{X}_{2/T0} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}_{3/T0} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} O\vec{O}_2.\vec{y}_0 = \ell\vec{x}_2\vec{y}_0 = \ell_2\sin\theta_2 \\ O\vec{O}_3.\vec{y}_0 = -\ell_1 \\ O_3\vec{O}_2.\vec{y}_0 = -\ell_0\vec{x}\ \vec{y}_0 = -\ell_3\sin\theta_3 \end{cases}$$

Soit:

$$\ell_2\sin\theta_2 = -\ell_1-\ell_3\sin\theta_3$$

D'où :

$$\sin\theta_3 = -\frac{\ell_1}{\ell_3}-\frac{\ell_2}{\ell_3}\cdot\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1-\frac{\ell_1^2}{\ell_3^2}-\frac{\ell_2^2}{\ell_3^2}\cdot\sin^2\theta_2} \tag{2.10}$$

Dans le cas d'une bielle de voiture on s'arrange pour qu'il n'y ait pas d'excentricité, c'est à dire que $\ell_1 = 0$.

Alors l'équation (10) devient :

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \cdot \sin^2\theta_2} \qquad (2.11)$$

II-4- EXPRESSION DE LA VITESSE ANGULAIRE MOYENNE :

II-4-1- Dans le palier de tête de bielle:

$$\varpi = \frac{\omega_a - \omega_c}{2} = \frac{\omega_a}{2} \cdot \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_a}\right) = \frac{\omega_a}{2} \cdot \left(1 - \frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_2}\right) \qquad (2.12)$$

Avec :

$\omega_a = \theta_2'$ vitesse de rotation de l'arbre (manivelle).

$\omega_c = \theta_3'$ vitesse de rotation du coussinet (bielle)

Donc en utilisant les relations (2.9) et (2.10) on obtient:

$$\varpi = \frac{\omega_a}{2} \cdot \left[1 + \frac{\ell_2}{\ell_3} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1 - \frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \cdot \sin^2\theta_2}} \right] \qquad (2.13)$$

En pratique les longueurs ℓ_2 et ℓ_3 utilisés nous donnent :

$\frac{\ell_2}{\ell_3} < 1$ (de l'ordre de 0.3), donc : $\frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} << 1$

D'ou la solution simplifiée :

$$\varpi = \frac{\omega_a}{2} \cdot \left[1 + \frac{\ell_2}{\ell_3} \cdot \cos\theta_2 \right] \qquad (2.14)$$

II-4-2- Dans le palier de pied de bielle:

Dans le cas ou l'arbre du palier (axe du piston) est fixe (ω_a=0), la vitesse angulaire moyenne du palier devient :

$$\varpi = -\frac{\omega_c}{2} \qquad (2.15)$$

Avec : ω_c: vitesse de rotation du coussinet (pied de bielle)

$$\omega_c = \frac{\partial \theta_3}{\partial t}$$

Donc en utilisant les relations (2.9) et (2.10) on obtient :

$$\omega_c = \theta_3' = -\frac{\ell_2}{\ell_3} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1 - \frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \cdot \sin^2 \theta_2}} \cdot \theta_2'$$

D'ou :

$$\varpi = \frac{\omega_v}{2} \cdot \left[\frac{\ell_2}{\ell_3} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1 - \frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \cdot \sin^2 \theta_2}} \right] \tag{2.16}$$

$\theta_2' = \omega_v$ = vitesse de rotation du vilebrequin.

$\frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} << 1$

Donc la solution simplifiée s'écrit :

$$\varpi = \frac{\omega_v}{2} \cdot \left(\frac{\ell_2}{\ell_3} \cdot \cos\theta_2 \right) \tag{2.17}$$

II-5- CONCLUSION:

La vitesse angulaire moyenne dans le palier de pied de bielle s'annule pour angle θ_2 ayant les valeurs $\pi/2$ et $3\pi/2$, ceci est d'autant plus important que la portance est liée, entre autres, à la vitesse angulaire moyenne du palier. En effet lorsque cette vitesse devient très faible il y a diminution du film d'huile entre l'arbre et le coussinet donc il y a risque de rupture de ce film et donc risque de contact entre les deux pièces [4].

Chapitre III

PALIERS A CHARGE VARIABLE

CHAPITRE III
PALIERS A CHARGE VARIABLE

III-1- INTRODUCTION:

Lorsque la charge extérieure qui agit sur l'arbre (ou le coussinet) est variable en module et en direction, le centre de l'arbre décrit une trajectoire a l'intérieure du coussinet. La détermination de cette trajectoire nécessite la résolution des équations de la dynamique, donc la connaissance de l'action hydrodynamique dans le film. La difficulté réside dans le fait que la force hydrodynamique dépend de la position inconnue de l'arbre dans le coussinet et des vitesses des surfaces qui prennent en compte la vitesse inconnue du centre de l'arbre.

III-2- EQUATION DE REYNOLDS D'UN PALIER LISSE SOUMIS A UNE CHARGE VARIABLE:

Dans le cas où les surfaces du contact sont lisses et, compte tenu des hypothèses de la mécanique des films minces visqueux pour un lubrifiant incompressible et isovisqueux en écoulement laminaire, l'équation de Reynolds appliquée au cas du palier de pied de bielle[5,6] s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=6\mu(U_1-U_2)\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+6\mu h\frac{\partial}{\partial x}(U_1+U_2)+12\mu V_2 \qquad (3.1)$$

<u>Avec:</u> $\boldsymbol{h = c\,(1 + \epsilon \cos \theta)}$

Les vitesses des surfaces dans le repère Oxy (figures III.1 et III.2) sont:

- U_1 vitesse suivant x, du coussinet
- U_2 V_2 vitesses respectivement suivant x et y, de l'arbre.

Les systèmes d'axes utilités sont définis sur les figures III.1 et III.2 :

Oxy = repère dont « y » passe les points O_cO_a et dont « x » décrit le contour du coussinet.

O_cxy = repère fixe

$O_cX_2Y_1$ = repère lié à O_aO_c

$O_cX_2Y_2$ = repère lié à MN.

<u>Avec:</u>

O_a = centre de l'arbre

O_c = centre du coussinet

On considérera que O_cM # O_aN # R

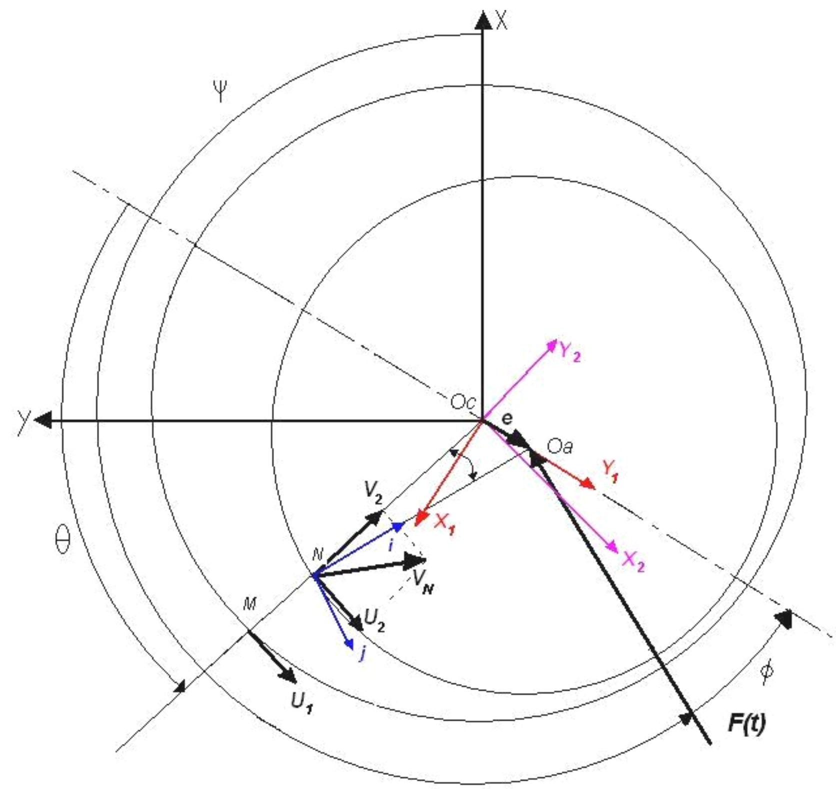


Fig III.1 Section droite du palier [4]

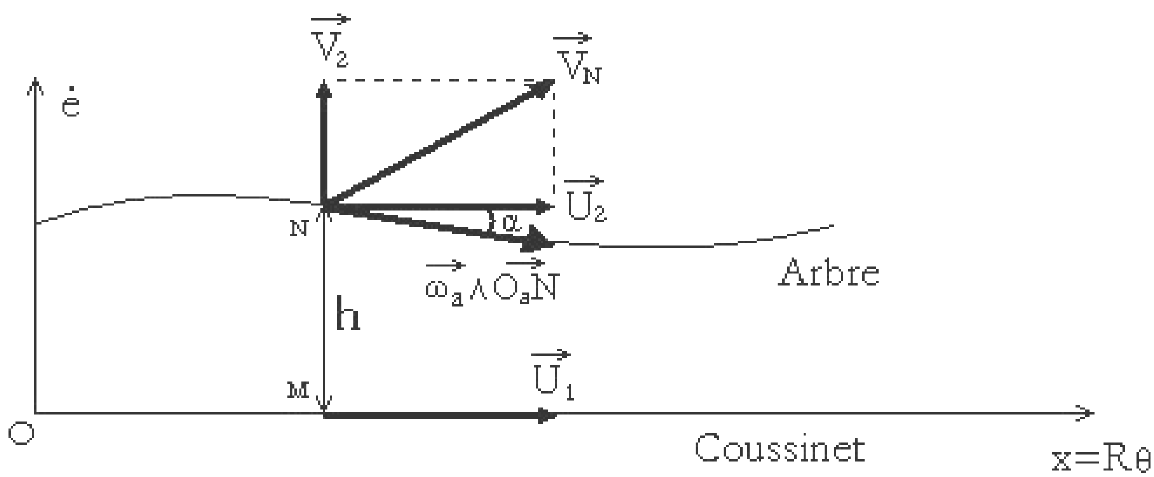


Fig III.2 Palier développé

a) vitesse du coussinet dans le système d'axes Oxy :

$$\boldsymbol{U_1} = \omega_c \, R \tag{3.2}$$

b) vitesse du centre de l'arbre dans le système d'axes $O_c$xy :

$$\frac{dxy\left(O_a\vec{O}_c\right)}{dt} = \frac{dx_1y_1\left(O_a\vec{O}_c\right)}{dt} + \vec{\Omega}^{xy}_{x1y1}\Lambda O_a\vec{O}_c \tag{3.3}$$

Avec:

$$\vec{\Omega}^{xy}_{x1y1} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ \Psi' + \Phi' \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

D'ou:

$$\frac{dxy\left(O_a\vec{O}_c\right)}{dt} = \dot{e}\cdot\vec{y}_1 - e\cdot\left(\dot{\Psi} + \dot{\Phi}\right)\vec{x}_1 \tag{3.5}$$

$$\frac{dxy\left(O_a\vec{N}\right)}{dt} = \frac{dx_2y_2\left(O_a\vec{N}\right)}{dt} + \vec{\Omega}^{xy}_{x2y2}\Lambda O_a\vec{N} \tag{3.6}$$

$$\vec{\Omega}^{xy}_{x2y2} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ \omega_a \end{pmatrix} \qquad O_a\vec{N}_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}} = \begin{pmatrix} O \\ -R_a \\ O \end{pmatrix}$$

$$O_a\vec{N}_{x2y2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} O \\ -Ra \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha'.Ra \\ -\cos\alpha'.\,Ra \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

L'angle α' étant très petit on peut faire les multiplications suivantes :

$$\alpha' \neq \sin\alpha' \neq tg\alpha' \neq \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\cos\alpha' \neq 1$$

Donc:

$$O_a\vec{N}_{x2y2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}.R_a \\ -R_a \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\frac{dx_2y_2\left(O_a\vec{N}\right)}{dt} = 0$$

D'ou l'expression:

$$\frac{dxy\left(O_a\vec{N}\right)}{dt} = \varpi_a\frac{\partial h}{\partial x}.R_a\vec{y}_2 + \omega_a R_a\vec{x}_2 \tag{3.9}$$

On peut en déduire que:

$$\vec{V}_N^{xy} = \frac{dxy(O_c\vec{N})}{dt} = \frac{dxy(O_c\vec{O}_a)}{dt} + \frac{dxy(O_a\vec{N})}{dt} = \dot{e}\vec{y}_1 - e(\dot{\Psi}+\dot{\Phi})\vec{x}_1 + \omega_a R_a \vec{x}_2 + \varpi_a \frac{\partial h}{\partial x}.R_a\vec{y}_2 \quad (3.10)$$

On fait une rotation de θ pour transformer les composantes sur $\vec{y}_1$ et $\vec{x}_1$ par rapport à $\vec{y}_2$ $\vec{x}_2$.

$$V_{N/x_2y_2}^{xy} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_2} \\ \\ \boldsymbol{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -e(\dot{\Psi}+\dot{\Phi}) \\ \\ \dot{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_a R_a \\ \\ \varpi_a \frac{\partial h}{\partial x}.R_a \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Le jeu radial a pour expression:

$C = R_c - R_a$

Avec: $\begin{cases} R_c = \text{rayon du coussinet} \\ R_a = \text{rayon de l'arbre} \end{cases}$

On a aussi:

$e = C.\varepsilon$

$h_a \approx R$

D'ou les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{U_2} = C\dot{\varepsilon}\ \sin\theta - C\varepsilon\,(\dot{\Psi}+\dot{\Phi})\cos\theta + \omega_a R & (3.12) \\ \mathbf{V_2} = C\dot{\varepsilon}\ \cos\theta + C\varepsilon\,(\dot{\Psi}+\dot{\Phi})\sin\theta + \varpi_a R\frac{\partial h}{\partial x} & (3.13) \end{cases}$$

En remplaçant $\boldsymbol{U_1}$, $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{V_2}$ par leur valeur, l'expression (3.1) devient:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{6\mu}{R}\left[R(\omega_c-\omega_a) - c\dot{\varepsilon}\sin\theta + c\varepsilon(\dot{\Psi}+\dot{\phi})\cos\theta\right]\frac{\partial h}{\partial\theta} \\ &+6\mu\frac{h}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[R(\omega_c+\omega_a) + c\dot{\varepsilon}\sin\theta - c\varepsilon(\dot{\Psi}+\dot{\phi})\cos\theta\right] \\ &+12\mu\left[c\dot{\varepsilon}\cos\theta + c\varepsilon(\dot{\Psi}+\dot{\phi})\sin\theta + \omega_a\frac{\partial h}{\partial\theta}\right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6\mu\left[(\omega_c+\omega_a) - \frac{c}{R}\dot{\varepsilon}\sin\theta + \frac{c}{R}\varepsilon(\dot{\Psi}+\dot{\phi})\cos\theta\right]\frac{\partial h}{\partial\theta} \\ &+6\mu\left(\frac{h}{R}+2\right)\left[c\dot{\varepsilon}\cos\theta + c\varepsilon(\dot{\Psi}+\dot{\phi})\sin\theta\right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

On peut négliger ($\frac{h}{R}$) devant 2 car ($\frac{h}{R} << 1$)

Par ailleurs:

$$C\varepsilon.\sin\theta = -\frac{\partial h}{\partial \theta}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=6\mu\left[(\omega_c+\omega_a)-\frac{c}{R}\dot{\varepsilon}\sin\theta+(\frac{c}{R}\varepsilon.\cos\theta-2)\left(\dot{\Psi}+\dot{\phi}\right)\right]\frac{\partial h}{\partial\theta} \quad (3.16)$$
$$+12\mu.c\dot{\varepsilon}\cos\theta$$

Sachant que ($\frac{c}{R}$ << 1), que ($\varepsilon \leq 1$) et (cos $\theta \leq 1$), nous pouvons négliger $\frac{c}{R} = \varepsilon\cos\theta$ devant 2.

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=-6\mu\left[(\omega_c+\omega_a)-2\left(\dot{\Psi}+\dot{\phi}\right)\right]c\varepsilon\sin\theta+12\mu.c\dot{\varepsilon}\cos\theta \quad (3.17)$$

Définissant ϖ comme la vitesse angulaire moyenne de l'axe et du coussinet rapporté à la charge :

$$\varpi = \frac{\omega_a+\omega_c}{2}-\dot{\Psi} = \frac{\omega_a+\omega_c}{2}-\omega_f$$

Le fluide étant supposé isovisqueux (μ=cte) l'équation finale s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]+R^2\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=12\mu R^2c\left[\dot{\varepsilon}\cos\theta+\varepsilon\left(\dot{\Psi}-\varpi\right)\sin\theta\right] \quad (3.18)$$

c) Conditions aux limites:

Dans un palier lisse qui est alimenté à la pression ambiante par ses extrémités, les conditions aux limites sont les suivantes :

- **Condition de Sommerfeld:**

Si l'on suppose que le film lubrifiant est continu, les conditions aux limites sont celles proposées par Sommerfeld (voir figure III.3).

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(\theta,\frac{-L}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\theta,\frac{L}{2}\right)=0 \\ \mathrm{P}\left(\theta=0,z\right)=\mathrm{P}\left(\theta=2\pi,z\right)=0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Avec: L = largeur du palier (suivant $O_c\vec{Z}$)

Ces conditions aux limites se sont valables que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées.

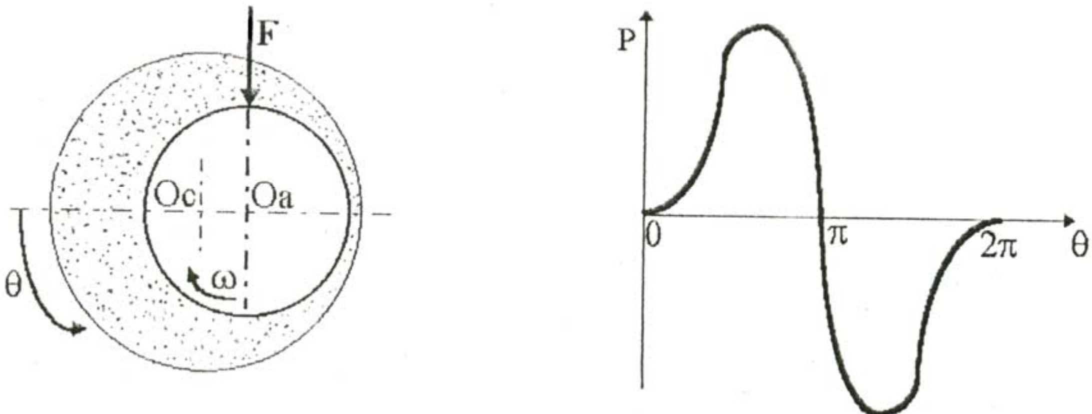


Fig III.3 Diagramme de pression de Sommerfeld

- ## <u>Conditions de Gümbel:</u>

Ces conditions reviennent à négliger dans la solution de Sommerfeld, les pressions négatives, elles impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta = \pi$ (voir figure III.4).

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(\theta = 0, z\right) = \mathrm{P}\left(\theta = 2\pi, z\right) = 0 \\ \mathrm{P}\left(\theta, z\right) = 0 \quad \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi \\ \mathrm{P}\left(\theta, \frac{-L}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\theta, \frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

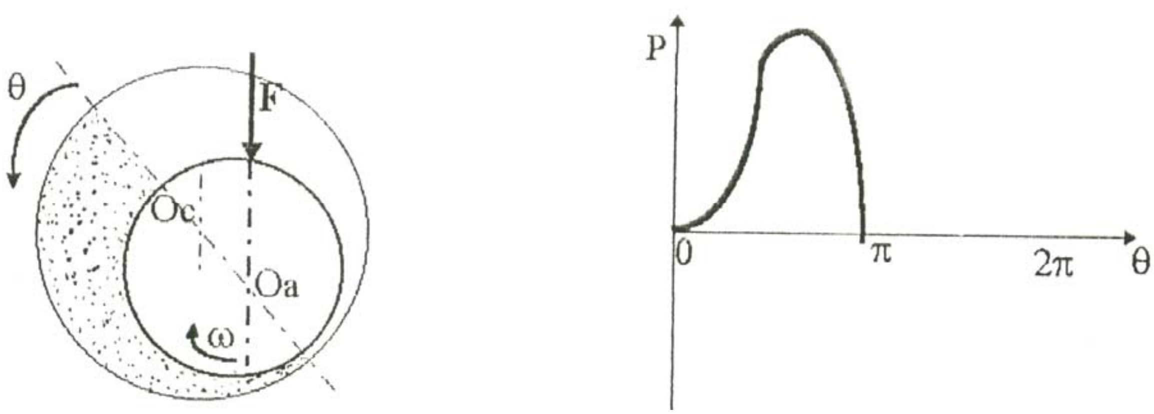


Fig III.4 Diagramme de pression de Gümbel

- ## <u>Conditions de Reynolds:</u>

Ces conditions qui respectent la continuité du débit supposent que pour une abscisse θ_2 inconnue la pression et le gradient de pression s'annulent.

Les valeurs de pressions négatives sont ramenées à zéro.

Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes, elles ont été vérifiées dans de nombreuses études expérimentales.

$$\begin{cases} P\left(\theta, \dfrac{-L}{2}\right) = P\left(\theta, \dfrac{L}{2}\right) = 0 \\ P\left(\theta_1, z\right) = P\left(\theta_2, z\right) = 0 \\ P\left(\theta, z\right) = 0 \quad \underline{\text{si}} \quad \theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \tag{3.21}$$

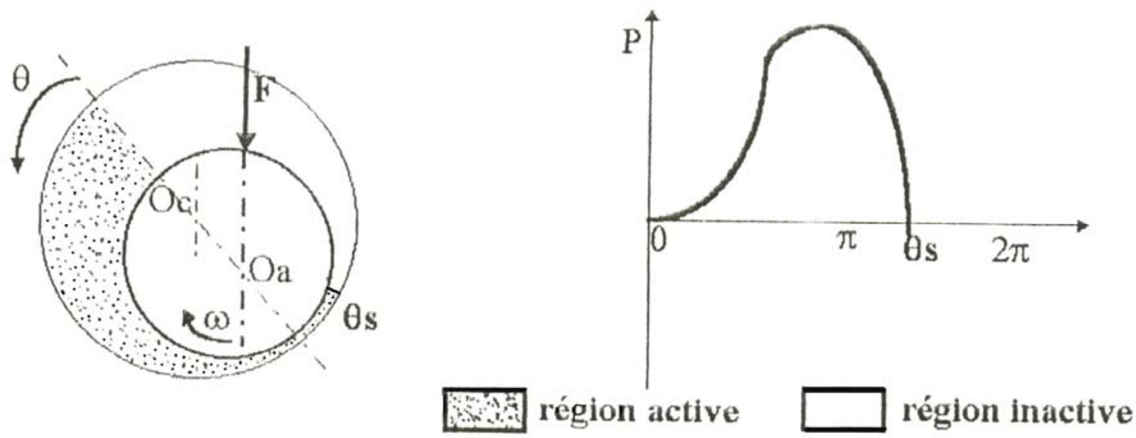


Fig III.5 Diagramme de pression de Reynolds

III-3- SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'EQUATION DE REYNOLDS:

a) Palier infiniment court : (solution d'Ocvirk)

Le rapport L/D étant faible (<1/8), on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Une solution approchée peut donc être obtenue par intégration directe de l'équation de Reynolds (3.18) d'où :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 12\frac{\mu}{c^2}\left[\frac{\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta}{\left(1 + \varepsilon\cos\theta\right)^2}\right] \tag{3.22}$$

Avec les conditions aux limite $P\left(\theta, \dfrac{-L}{2}\right) = P\left(\theta, \dfrac{L}{2}\right) = 0$, on obtient :

$$P\left(\theta_1, z\right) = -6\mu\left(\frac{R}{c}\right)^2\left(\frac{L}{D}\right)^2\left[1 - \left(\frac{2z}{L}\right)^2\right]\left[\frac{\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta}{\left(1 + \varepsilon\cos\theta\right)^2}\right] \tag{3.23}$$

Dans la partie des pressions positives bornées par les angles θ_1 et θ_2 pour satisfaire aux conditions aux limites il faut :

$P(\theta_1) = 0$

<u>Ce qui conduit à:</u>

$$\dot{\varepsilon}\cos\theta_1 + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta_1 = 0 \tag{3.24}$$

Par ailleurs:

$P(\theta_2) = 0$

Ce qui impose:

$\theta_2 = \theta_1 + \pi$

D'autres part, dans le domaine $[\theta_1, \theta_2]$ la pression doit être positive ou nulle ce qui impose :

$$\frac{\partial P\left(\theta_1 = 0\right)}{\partial \theta_1} \geq 0$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{\varepsilon}\sin\theta_1 - \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\cos\theta_1 \geq 0 \qquad (3.25)$$

b) Palier infiniment long : (solution de Sommerfeld)

Le rapport L/D étant infini, on peut donc négliger le gradient de pression axial. Ce calcul s'applique uniquement aux paliers tel que $L/D > 4$ cette solution approximative est obtenue par intégration directe de l'équation de Reynolds :

$$P\left(\theta\right) = -6\mu\left(\frac{R}{c}\right)^2\left(\frac{L}{D}\right)^2\left[\dot{\varepsilon}\cos\theta + \left(\frac{2}{2+\varepsilon^2}\right)\varepsilon\left(\dot{\phi} - \varpi\right)\sin\theta\right]\left[\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^{-1} + \left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^{-2}\right] \qquad (3.26)$$

Si on ne retient des valeurs de la pression que les valeurs positives, les angles θ_1 et θ_2 qui limitent la zone de pression positive sont tels que :

$P(\theta_1) = 0$

Ce qui conduit à:

$$\left(2+\varepsilon^2\right)\dot{\varepsilon}\cos\theta_1 + 2\varepsilon\left(\dot{\phi} - \varpi\right)\sin\theta_1 = 0 \qquad (3.27)$$

Par ailleurs:

$P(\theta_2) = 0$

Ce qui impose:

$\theta_2 = \theta_1 + \pi$

$$\frac{\partial p\left(\theta_1 = 0\right)}{\partial \theta_1} \geq 0$$

Ce qui donne:

$$\left(2+\varepsilon^2\right)\dot{\varepsilon}\sin\theta_1 - 2\varepsilon\left(\dot{\phi} - \varpi\right)\cos\theta_1 \geq 0 \qquad (3.28)$$

c) Palier de longueur finie : (solution de Werner)

Plusieurs solutions analytiques approchées ont été proposées dans le cas des paliers de longueur finie, toutes utilisent la solution de Sommerfeld.

Warner associe à la solution de Sommerfeld à une fonction qui prend en compte un écoulement par les relations :

$$P(\theta, z) = P_{\infty}(\theta)\left[1 - \frac{ch\left(\frac{2z}{L}\right)\left(\frac{\lambda L}{D}\right)}{ch\left(\frac{\lambda L}{D}\right)}\right] \qquad (3.29)$$

$$\lambda = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (1+\varepsilon\cos\theta)^3 \left(\frac{dp_{\infty}}{d\theta}\right)^2 d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (1+\varepsilon\cos\theta)^3 (p_{\infty})^2 d\theta}$$

Avec : $P_{\infty}(\theta)$ solution de Sommerfeld.

III-4- CALCUL DU LIEU DU CENTRE DE L'ARBRE DANS LE COUSSINET:

A partir des valeurs de la pression calculées précédemment, on peut déterminer par intégration les composants de la charge hydrodynamique du palier. En égalisant ces valeurs aux composantes de la charge appliquée on obtient un système de deux équations différentielles en $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\Phi}$. L'integration de ces équations donne en coordonnées polaires le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet [7]. Nous allons montrer le principe de ce calcul dans le cas du palier court.

Dans le système d'axes $O_cX_1Y_1$ (voir figure III.1), les composantes de la charge hydrodynamique s'écrivent :

$$\mathrm{Wx1} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin\theta . R \, d\theta . dz \qquad (3.30)$$

$$\mathrm{Wy1} = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cos\theta . R \, d\theta . dz \qquad (3.31)$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\mathrm{Wx1} = -4\mu L R \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \sin\theta . d\theta \qquad (3.32)$$

$$\mathrm{Wy1} = 4\mu LR\left(\frac{R}{c}\right)^2\left(\frac{L}{D}\right)^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\dot{\varepsilon}\cos\theta+\varepsilon\left(\dot{\Phi}-\varpi\right)}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}\cos\theta d\theta \tag{3.33}$$

Soit en posant: $K = 4\mu LR\varpi\left(\frac{R}{c}\right)^2\left(\frac{L}{D}\right)^2$ (3.34)

$$\mathrm{Wx1} = -\frac{K}{\varpi}\left[\dot{\varepsilon}I_1+\varepsilon\left(\dot{\Phi}-\varpi\right)I_2\right] \tag{3.35}$$

$$\mathrm{Wy1} = \frac{K}{\varpi}\left[\dot{\varepsilon}I_3+\varepsilon\left(\dot{\Phi}-\varpi\right)I_1\right] \tag{3.36}$$

Avec:

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}d\theta \tag{3.37}$$

$$I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin^2\theta}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}d\theta \tag{3.38}$$

$$I_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^2\theta}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}d\theta \tag{3.39}$$

La charge appliquée au palier doit être égale en module et en direction à la charge hydrodynamique soit (voir figure III.1)

W_{x1} = F sin ф

W_{y1} = F cos ф (3.40)

F: module de la charge.

Dans ces conditions :

$$F\sin\phi = -\frac{K}{\varpi}\left[\dot{\varepsilon}I_1+\varepsilon\left(\dot{\Phi}-\varpi\right)I_2\right] \tag{3.41}$$

$$F\cos\phi = \frac{K}{\varpi}\left[\dot{\varepsilon}I_3+\varepsilon\left(\dot{\Phi}-\varpi\right)I_1\right] \tag{3.42}$$

D'où:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varpi F}{K\varepsilon}\frac{\sin\Phi.I_1+\cos\Phi.I_2}{I_2I_3-I_1^2} \tag{3.43}$$

$$\dot{\Phi} = \varpi\left[\frac{F}{K\varepsilon}\frac{\sin\Phi.I_3+\cos\Phi.I_1}{I_1^2-I_2I_3}+1\right] \tag{3.44}$$

III-5- CONCLUSION:

L'intégration de ces deux équations différentielles s'effectue en utilisant une méthode numérique. Dans le cas général le principe reste le même, mais comme il n'existe pas de solution analytique à l'équation de Reynolds, la résolution de ce problème impose des calculs numériques très importants.

Pour réduire le volume des calculs, J.F Booker propose en 1971 [8] d'introduire deux fonctions M_ε et M_Φ qui regroupent ε, $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\Phi}$ et qu'il définit comme les composantes d'un vecteur M appelé « vecteur mobilité ».

Nous allons décrire plus particulièrement cette méthode qui n'est cependant applicable que dans le cas de coussinet de révolution.

Chapitre IV

METHODE DE J.F. BOOKER

CHAPITRE IV
MÉTHODE DE J.F BOOKER

IV-1- INTRODUCTION:

L'équation de Reynolds (3.18), dans le cas du palier de longueur finie, est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique, sa solution ne peut être analytique d'où la nécessité d'employer une méthode numérique. Parmi les différentes méthodes existantes, celle mise au point par J.F. Booker apparaît comme la mieux adaptée à ce type de problème car elle permet une résolution rapide et précise.

IV-2- PALIER INFINIMENT COURT [6,1]:

L'équation de Reynolds s'écrit:

$$R^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right] = 12\mu\left(\frac{R}{c}\right)^2 c\left[\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta\right] \tag{4.1}$$

Transformons cette équation sous forme adimensionnelle en posant:

h= H.C

z= Z.L

$$p = P\frac{F}{LD}$$

L'équation de Reynolds devient:

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left[H^3 \frac{\partial P}{\partial Z}\right] = 12\mu\frac{LD}{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}\left(\frac{L}{R}\right)^2\left[\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta\right] \tag{4.2}$$

a. Équation de mouvement:

Booker introduit les composants M_ε et M_Φ

$$M_\varepsilon = \frac{\mu \mathrm{LD}}{\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}}\right)^2}\dot{\varepsilon} \tag{4.3}$$

$$M_{\Phi} = \frac{\mu \mathrm{LD}}{\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}}\right)^2} \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right) \tag{4.4}$$

Avec:

$M_\varepsilon = M_\varepsilon(\varepsilon, \Phi, L/D)$

$M_\Phi = M_\Phi(\varepsilon, \Phi, L/D)$

M_ε et M_Φ peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur mobilité M qui, pour un coussinet cylindrique de révolution, ne dépend que du vecteur position ε et du rapport L/D

$$M = M(\varepsilon, L/D)$$

L'équation sans dimension (4.2) devient donc:

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left[H^3 \frac{\partial P}{\partial Z}\right] = 48\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[M_\varepsilon \cos\theta + M_\Phi \sin\theta\right] \tag{4.5}$$

Après l'intégration en Z et après avoir appliqué les conditions aux limites :

$$P(\theta, z) = 24 \frac{\left(\frac{L}{D}\right)^2}{H^3}\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)\left[M_\varepsilon \cos\theta + M_\Phi \sin\theta\right] \tag{4.6}$$

b. Détermination de M_ε ,M_Φ et M:

Pour plus de commodité, le système d'axes X_1 Y_1 sera remplacé par le repère ε, Φ

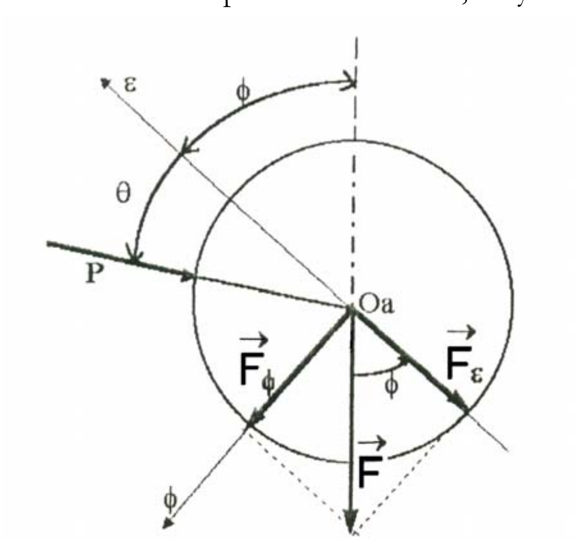


Fig IV.1 Représentation du vecteur F

F_ε : projection de la force F suivant l'axe ε

F_Φ : projection de la force F suivant l'axe Φ (perpendiculaire a l'axe ε)

L'intégration de la pression sur tout le film (Entre les angles θ_1 θ_2 délimitant le film) donne La force F, donc les composantes sont les suivantes.

$$F_\varepsilon = F\cos\Phi = -\int_{-L/2}^{L/2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} p(\theta, z)\cos\theta.R.d\theta.dz \tag{4.7}$$

<u>Avec:</u> p= P.F/(L.D)

dz= L.dZ

$$2F_\varepsilon = F\cos\Phi = -\frac{F}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} p(\theta, z)\cos\theta.R.d\theta.dZ \tag{4.8}$$

En remplaçant P(θ, Z) par l'expression (4.6) on a:

$$\cos\Phi = -12\left(\frac{L}{D}\right)^2\int_{-1/2}^{1/2}\left(Z^2\frac{1}{4}\right)dZ.\int_{\theta 1}^{\theta 2}\frac{M_\Phi\sin\theta + M_\varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta \tag{4.9}$$

On obtient donc:

$$\cos\Phi = 2\left(\frac{L}{D}\right)^2\int_{\theta 1}^{\theta 2}\frac{(M_\Phi\sin\theta + M_\varepsilon\cos\theta)\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta \tag{4.10}$$

De même:

$$F_\Phi = -F\sin\Phi = -\int_{-L/2}^{L/2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} p(\theta, z)\sin\theta.R.d\theta.dz$$

En remplaçant P(θ, Z) et dz et en intégrant suivant Z, on obtient:

$$\sin\Phi = -2\left(\frac{L}{D}\right)^2\int_{\theta 1}^{\theta 2}\frac{(M_\Phi\sin\theta + M_\varepsilon\cos\theta)\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}d\theta \tag{4.11}$$

On obtient donc un système de deux équations [(4.10) et (4.11)] a deux inconnues M_ε M_Φ.

Les intégrales à résoudre sont celles déjà utilisées au chapitre précédent.

Le système (4.10) et (4.11) se simplifie donc aux deux équations suivantes:

$$\begin{cases} I_1 M_\Phi + I_3 M_\varepsilon = \dfrac{\cos\Phi}{2\left(\dfrac{L}{D}\right)^2} \\[2ex] I_2 M_\Phi + I_1 M_\varepsilon = -\dfrac{\sin\Phi}{2\left(\dfrac{L}{D}\right)^2} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne les composantes du vecteur mobilité:

$$\begin{cases} M_{\varepsilon} = \dfrac{I_2 \cos\Phi + I_1 \sin\Phi}{2\left(I_3 I_2 - I_1^{\,2}\right)\left(\dfrac{L}{D}\right)^2} \\ \\ M_{\Phi} = \dfrac{-\left(I_1 \cos\Phi + I_3 \sin\Phi\right)}{2\left(I_3 I_2 - I_1^{\,2}\right)\left(\dfrac{L}{D}\right)^2} \end{cases}$$

c. Carte de mobilité:

Le vecteur mobilité M peut être représenté sur un graphe appelé "carte de mobilité". Il est important de noter que cette carte est tracée dans le repère lié à la force appliquée au palier. La figure IV.2 donne cette carte de mobilité dans le cas du palier court en utilisant la solution d'Ocvirk développée précédemment.

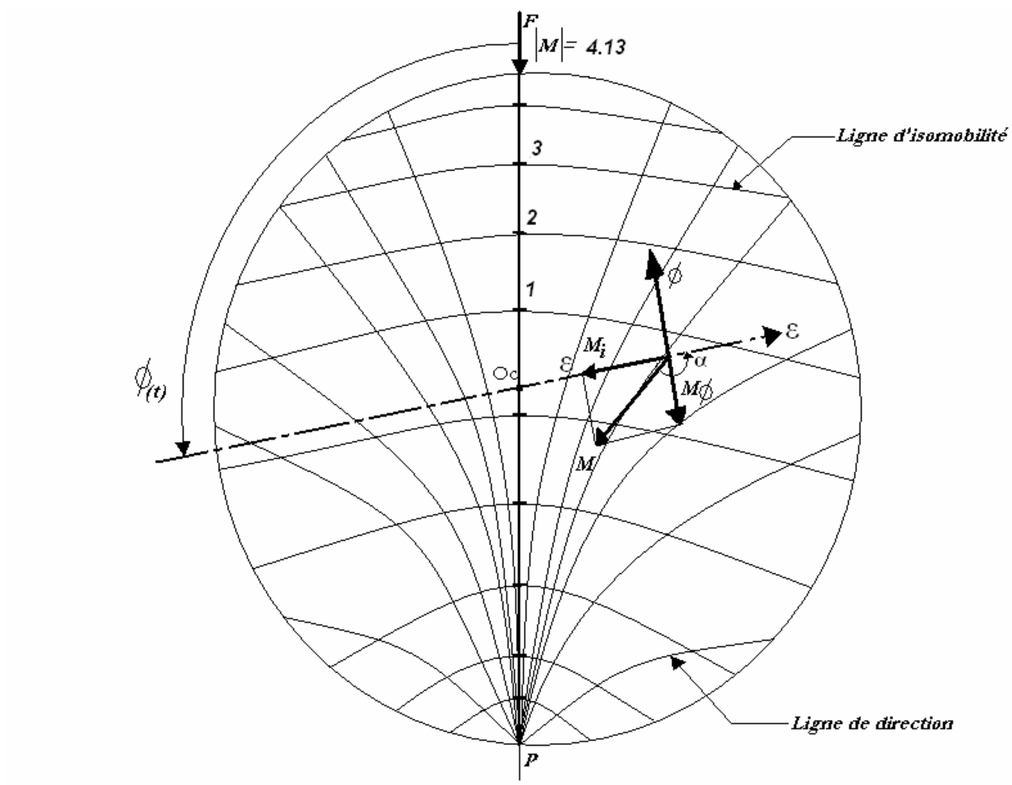


Fig IV.2 Carte de mobilité d'un palier court pour L/D=1

Avec:

$\vec{\alpha} = \left[A\vec{M}, O_c\vec{A}\right]$: Angle que fait le vecteur mobilité avec l'axe ε.

$O_c\vec{A}$: Excentricité relative du palier (ε).

Dans cette carte de mobilité on remarque deux sortes de lignes:

- Une ligne d'isomobilité qui permet de connaître le module du vecteur mobilité.

- Une ligne de direction issue de P qui détermine la direction du vecteur mobilité, en effet celui-ci est tangent à cette ligne au point A considéré.

Cette carte étant établie avec l'hypothèse du palier pour un rapport L/D=1, on peut aisément déterminer le vecteur mobilité pour tout rapport de L/D d'un palier court en appliquant l'expression suivante:

$$M\left(\varepsilon, \frac{L}{D}\right) = \frac{M(\varepsilon, 1)}{\left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (4.12)$$

On remarque que seul le module de M dépend du rapport L/D

- $\Phi > 0$ implique $0 < \alpha < \pi$
- $\Phi < 0$ implique $\pi < \alpha < 2\pi$

IV-3- PALIER DE LONGUEUR FINIE:

La carte de mobilité présentée précédemment n'est exacte que pour les rapport L/D<1/4, pour des rapports supérieurs a ces valeurs il faut utiliser la théorie du palier de longueur finie.

a. Équations de mouvement:

Les équations du mouvement sont les même qu'au paragraphe (IV-2-a)

$$\begin{cases} M_\varepsilon = \dfrac{\mu \mathrm{LD}}{\mathrm{F}\left(\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}}\right)^2} \dot{\varepsilon} \\[2ex] M_\Phi = \dfrac{\mu \mathrm{LD}}{\mathrm{F}\left(\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}}\right)^2} \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right) \end{cases}$$

<u>En posant:</u>

h= H.C

z= Z.L

$$p = P\frac{F}{LD}$$

L'équation de Reynolds (3.18) devient:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[H^3 \frac{\partial P}{\partial\theta}\right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial Z}\left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Z}\right) = 12\mu \frac{LD}{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}\left[\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\left(\dot{\Phi} - \varpi\right)\sin\theta\right] \quad (4.13)$$

En remplaçant M_ε et M_Φ par leur valeur respective on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[H^3 \frac{\partial P}{\partial\theta}\right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial Z}\left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Z}\right) = 12\left[M_\varepsilon \cos\theta + M_\Phi \sin\theta\right] \quad (4.14)$$

L'intégration directe est impossible, donc le vecteur mobilité ne peut être déterminé que numériquement (voir chapitre V).

b. Carte de mobilité:

La carte de mobilité du palier de longueur finie peut être établie de manière approchée à partir de la solution de Sommerfeld donnée pour un palier infiniment long.

Cette solution conduit à la carte de mobilité présentée en figure IV.3.

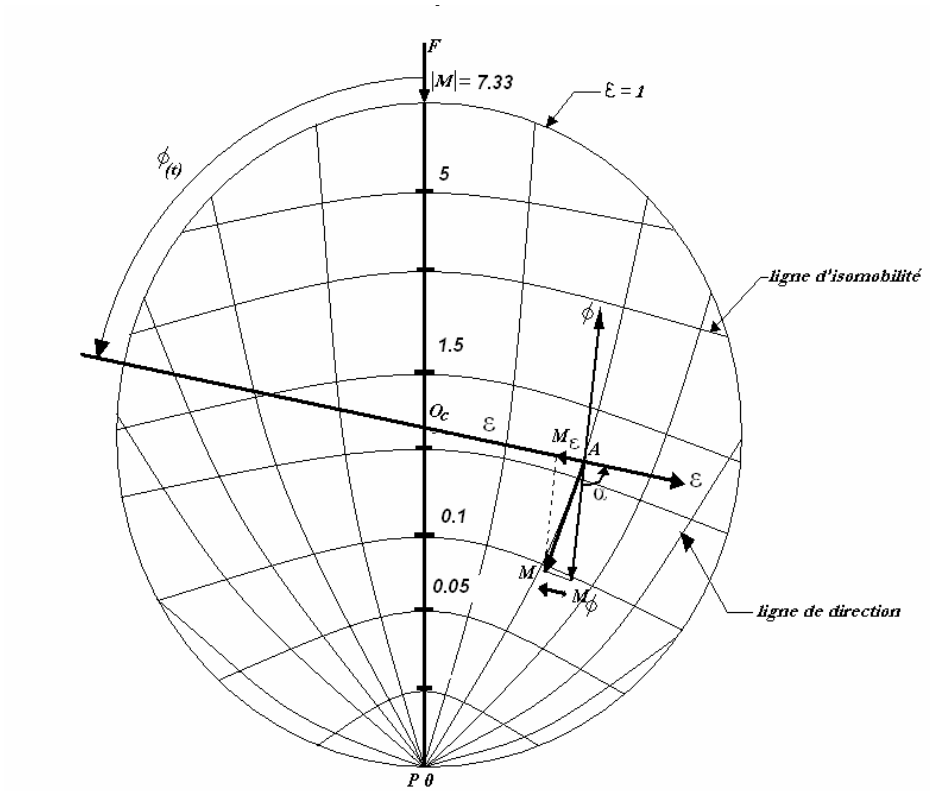


Fig IV.3 Carte de mobilité d'un palier infiniment long

(Solution de Sommerfeld, L/D=∞)

Avec:

$\vec{\alpha} = \left[A\vec{M}, O_c\vec{A}\right]$: Angle que fait le vecteur mobilité avec l'axe ε.

O_cA: excentricité relative du palier (ε).

Pour obtenir la carte de mobilité dans le cas d'un palier de longueur finie on peut utiliser la solution de Warner-Sommerfeld qui permet d'écrire:

$$M\left(\varepsilon, \frac{L}{D}\right) = \frac{M(\varepsilon, \infty)}{\left[1 - \dfrac{tgh\lambda \dfrac{L}{D}}{\lambda \dfrac{L}{D}}\right]} \tag{4.15}$$

IV-4- EMPLOI DE LA CARTE MOBILITE:

Dans les problèmes sur les paliers hydrodynamiques en régime transitoire, il est important de connaître la variation de l'excentricité afin de déterminer celle-ci a tout instant.

Pour mieux comprendre l'intérêt de la carte de mobilité nous écrivons l'équation de mouvement du centre de l'arbre sous format vectorielle.

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD}\vec{M} + \vec{\varpi} \wedge \vec{\varepsilon} \qquad (4.16)$$

$$\vec{\varepsilon}(t=0) = \vec{\varepsilon}_0$$

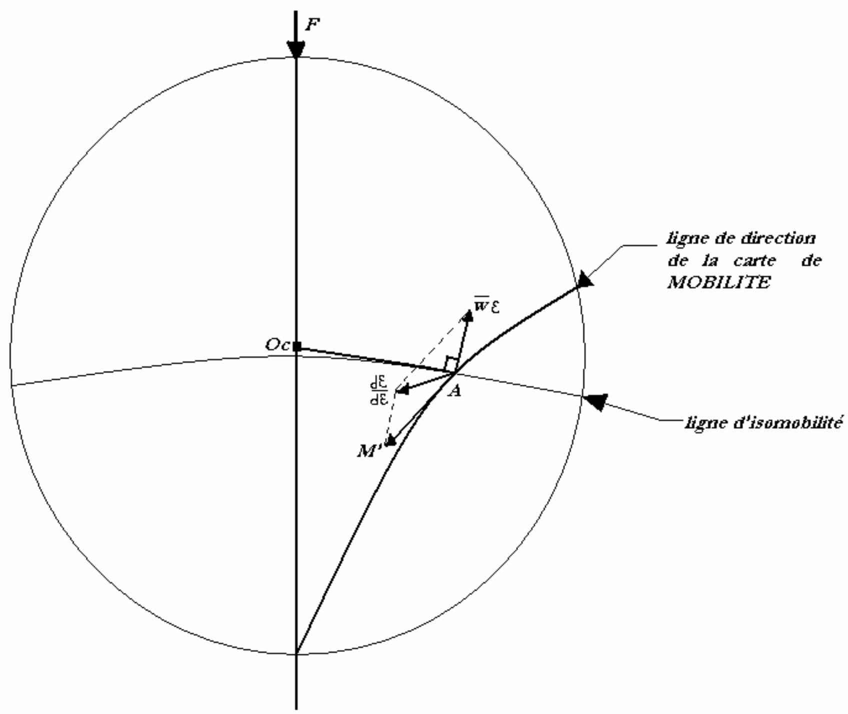


Fig IV.4 Schéma descriptif du vecteur de variation d'excentricité relative

- $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt}$ représente la vitesse du centre de l'arbre vue par un observateur lié à la charge.

Le vecteur $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt}$ se décompose donc en deux termes :

- Le vecteur $\vec{M}' = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD}\vec{M}$ qui a pour origine l'excentricité du vecteur position $\vec{\varepsilon}$

Et qui est tangent a la ligne de direction (se reporter a la carte de mobilité §IV-3), ce vecteur caractérise la vitesse du centre de l'axe relative a la force appliquée, si les vitesses de rotation de la charge appliquée du coussinet et de l'arbre étaient nulles.

- Le vecteur $\vec{\varpi} \wedge \vec{\varepsilon}$ qui est perpendiculaire a la ligne des centres et est fonction de la vitesse angulaire $\varpi = \dfrac{\omega_a + \varpi_c}{2} - \omega_F$.

Le vecteur de variation d'excentricité relative est donc la somme de ces deux vecteurs (voir figure IV.4).

IV-5- CONCLUSION :

Le vecteur mobilité M, dont le module est une quantité sans dimension, caractérise l'effet d'écrasement du film lubrifiant. A un coefficient multiplicateur prés $F\left(\dfrac{c}{R}\right)^2 \Big/ \mu LD$, et a tout instant, le vecteur mobilité définit la vitesse $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\Phi}$ qu'aurait le centre de l'arbre par rapport a la charge.

Un cas particulier de fonctionnement est l'écrasement pur du film lubrifiant qui se produit pour la condition de fonctionnement $\dot{\Phi} - \varpi = 0$, dans ce cas, le vecteur mobilité est colinéaire a la charge appliquée et est situé sur la même droite d'action (axe verticale sur figures IV.2 et IV.3).

Chapitre V

RESOLUTION NUMERIQUE

CHAPITRE V

RESOLUTION NUMERIQUE

V-1- INTRODUCTION:

Le calcul numérique du déplacement du centre de l'arbre impose la détermination du champ de pression dans le film lubrifiant, à partir de l'équation de Reynolds (4.14) en utilisant la méthode des différences finies. L'emploi des conditions aux limites de Reynolds nécessite d'utiliser la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. L'intégration du champ de pression donne la charge supportée par le palier et son orientation pour une direction de mobilité donnée. Cette orientation, a priori inconnue, est déterminée par l'emploi d'une méthode d'interpolation.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'intégration directe de l'équation de Reynolds (3.22) est impossible, le calcul numérique s'impose donc.

Le problème revient donc à résoudre numériquement l'équation (4.14) en partant du calcul des pressions dans le film lubrifiant.

V-2- CALCUL DE LA PRESSION DANS LE PALIER:

La méthode utilisée pour calculer des pressions dans le palier de longueur finie est celle des « différences finies » avec les conditions aux limites de Reynolds. Afin d'appliquer cette méthode, il est nécessaire de développer le palier dans le sens circonférentiel et de découper le domaine ainsi obtenu en un certain nombre de rectangles (voir figure V.1). Les variables θ et Z sont remplacées par les variables discrètes I et J.

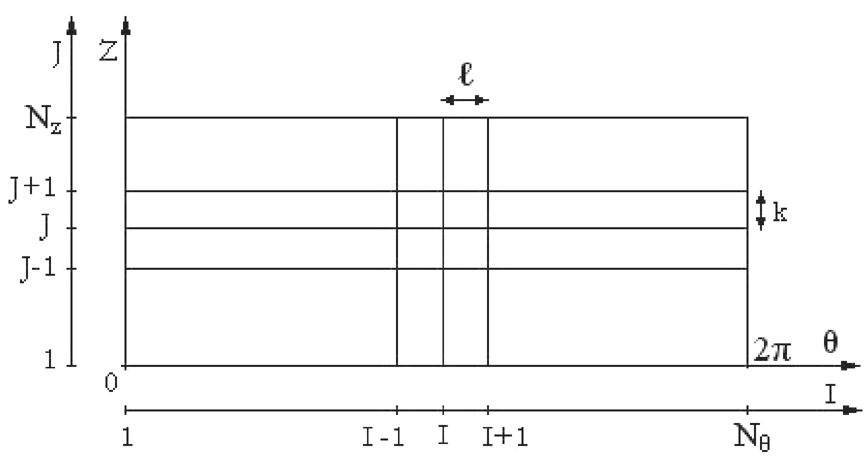


Fig V.1 Palier développé

ℓ et k sont les pas respectivement suivant I et J.
N_θ et N_z sont le nombre de point pris respectivement sur I et J.
Soit :
$\Delta z = K$
Le développement de $\overline{p}(z+\Delta z)$ et $\overline{p}(z-\Delta z)$ donne :

$$\overline{p}(z+\Delta z) = \overline{p}(z) + \Delta z \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\Delta^2 z}{2}\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2}$$

$$\overline{p}(z-\Delta z) = \overline{p}(z) - \Delta z \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\Delta^2 z}{2}\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2}$$

La résolution de ces deux équations donne :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \frac{\overline{p}(z+\Delta z) - \overline{p}(z-\Delta z)}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2} = \frac{\overline{p}(z+\Delta z) - 2\overline{p}(z) + \overline{p}(z-\Delta z)}{\Delta^2 z}$$

En expriment cette dernière équation en fonction de I et J on obtient :

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2}(I,J) = \frac{\overline{p}(I,J+1) - 2\overline{p}(I,J) + \overline{p}(I,J-1)}{k^2}$$

De la même manière on trouve :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta}(I,J) = \frac{\overline{p}(I+1,J) - \overline{p}(I-1,J)}{2\ell}$$

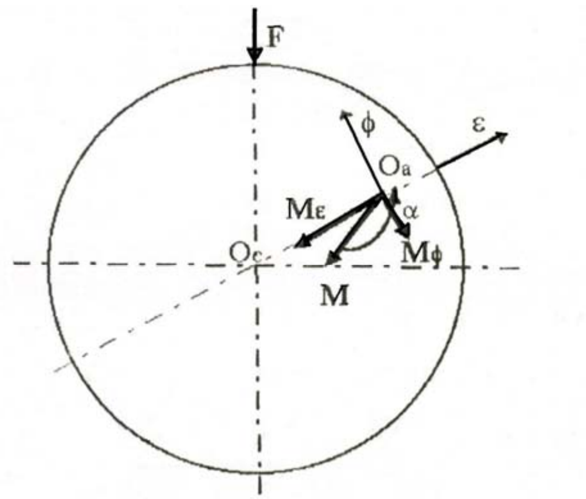


Fig V.2 Vecteur mobilité

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial \theta^2}(I,J) = \frac{\overline{p}(I+1,J) - 2\overline{p}(I,J) + \overline{p}(I-1,J)}{\ell^2} \tag{5.1}$$

En regardant la carte de mobilité (figure V.2) on peut écrire :

$M_\varepsilon =$ M.cos (α)

$M_\Phi =$ -M.sin (α)

Le second membre de l'équation de Reynolds (4.14) nous donnera donc:

$$12(M_\varepsilon \cos\theta + M_\Phi \sin\theta) = 12M(\cos\alpha.\cos\theta - \sin\alpha.\sin\theta) = 12M\cos(\theta+\alpha) \tag{5.2}$$

L'équation de Reynolds s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(H^3 \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(H^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 12M\cos(\theta+\alpha) \tag{5.3}$$

D'où en posant $P = \overline{P}$

$$H^3 \frac{\overline{P}(I+1,J) - 2\overline{P}(I-1,J)}{\ell^2} + 3H^3 \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\overline{P}(I+1,J) - \overline{P}(I-1,J)}{2\ell} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left[H^3 \frac{\overline{P}(I,J+1) - 2\overline{P}(I,J) + \overline{P}(I,J-1)}{k^2}\right] = 12\cos(\theta+\alpha) \tag{5.4}$$

Cette équation et donc de la forme :

$$\overline{P}(I,J) = A(I).\overline{P}(I+1,J) + B(I).\overline{P}(I-1,J) + C(I).\left[\overline{P}(I,J+1) + \overline{P}(I,J-1)\right] + D(I) \quad (5.5)$$

Avec :

$$A(I) = \frac{\dfrac{1}{\ell^2} + \dfrac{3}{2\ell H}\dfrac{\partial H}{\partial \theta}}{2\left(\dfrac{1}{\ell^2} + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \dfrac{1}{k^2}\right)} \qquad C(I) = \frac{\left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \dfrac{1}{k^2}}{2\left(\dfrac{1}{\ell^2} + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \dfrac{1}{k^2}\right)}$$

$$B(I) = \frac{\dfrac{1}{\ell^2} - \dfrac{3}{2\ell H}\dfrac{\partial H}{\partial \theta}}{2\left(\dfrac{1}{\ell^2} + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \dfrac{1}{k^2}\right)} \qquad D(I) = \frac{-12\cos(\theta+\alpha)}{\left(\dfrac{2H^3}{\ell^2} + 2\left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \dfrac{H^3}{k^2}\right)}$$

$H=1+\varepsilon.\cos\theta$

La relation (5.5) s'applique a tous les nœuds a l'intérieur du domaine, on a donc un système de $(N_z-2)x(N_\theta-2)$ équations a $(N_z-2)x(N_\theta-2)$ inconnus. Les $2(N_z+N_\theta)-4$ autres équations sont obtenues a partir des conditions aux limites.

La solution de ce système de $N_z.N_\theta$ équations peut être obtenue par une méthode directe mais dans ce cas il n'est pas possible de prendre en compte les conditions aux limites de Reynolds. Pour cela on utilise une méthode itérative appropriée : la méthode de Gauss-Seildel avec coefficient de sur relaxation Ω. Ce dernier, en lubrification, est généralement compris entre 1,5 et 1,85.

L'équation (5.5) devient :

$$\begin{aligned}\overline{P}(I,J) &= (1-\Omega)\overline{P}(I,J) \\ &+ \Omega\left[A(I).\overline{P}(I+1,J) + B(I).\overline{P}(I-1,J) + C(I).\left[\overline{P}(I,J+1) + \overline{P}(I,J-1)\right] + D(I)\right]\end{aligned} \quad (5.6)$$

Avec :
Ω : Coefficient de sur-relaxation.

Le palier étant symétrique suivant θ_z on peut diminuer le temps de calcul de moitié en ne considérant que la moitié du palier et posant :

$$\overline{P}(I, N_z - 1) = \overline{P}(I, N_z + 1)$$

V-3- CALCUL DE L'ANGLE DE CALAGE Φ :

En négligeant les forces de cisaillement dans le film lubrifiant on a :

$$F_\varepsilon = F\cos\Phi = -\int_S p\cos\theta.ds \qquad (5.7)$$

$$F_\Phi = -F\sin\Phi = -\int_S p\sin\theta.ds \qquad (5.8)$$

D'où :

$$tg(\Phi) = -\frac{F_\Phi}{F_\varepsilon} = -\frac{\int_S p\sin\theta.ds}{\int_S p\cos\theta.ds} \qquad (5.9)$$

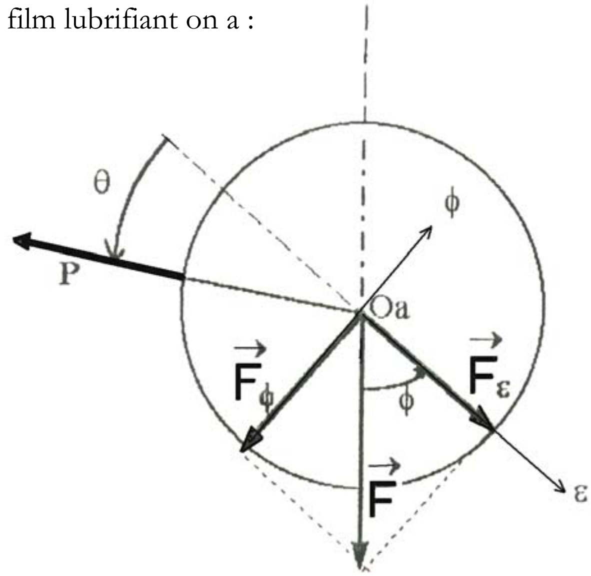


Fig V.3 Angle de calage

L'intégration de la pression donne :

$$\overline{F}_\Phi = -2\left(\sum_{I=2}^{N_\theta}\sum_{I=2}^{N_z}\left[\left(\overline{P}(I-1,J)+\overline{P}(I-1,J-1)\right)\sin\left((I-2)\ell\right)+\left(\overline{P}(I,J)+\overline{P}(I,J-1)\right)\sin\left((I-2)\ell\right)\right].\left[\frac{k\ell}{4}\right]M\right) \quad (5.10)$$

$$\overline{F}_\varepsilon = -2\left(\sum_{I=2}^{N_\theta}\sum_{I=2}^{N_z}\left[\left(\overline{P}(I-1,J)+\overline{P}(I-1,J-1)\right)\cos\left((I-2)\ell\right)+\left(\overline{P}(I,J)+\overline{P}(I,J-1)\right)\cos\left((I-2)\ell\right)\right].\left[\frac{k\ell}{4}\right]M\right) \quad (5.11)$$

Où :

$$\overline{F}_\Phi = \frac{F_\phi}{F} = -\sin\phi$$

$$\overline{F}_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{F} = \cos\phi$$

Remarque:

Dans les relations (5.10) et (5.11), les termes $\overline{F}_\Phi$ et $\overline{F}_\varepsilon$ sont multipliés par deux, car le calcul des pressions est uniquement effectué sur la moitié du palier.

Ne connaissant pas la valeur de M nous écrivons :

$$T_\Phi = -\frac{2\overline{F}_\phi}{M} = -\frac{2F_\Phi}{MF}$$

$$T_\varepsilon = -\frac{2\overline{F}_\varepsilon}{M} = -\frac{2F_\varepsilon}{MF}$$

D'où :

$$tg(\Phi) = -\frac{F_\Phi}{F_\varepsilon} = -\frac{T_\Phi}{T_\varepsilon}$$

Soit :

$$\Phi = arctg\left(-\frac{T_{\Phi}}{T_{\varepsilon}}\right) \qquad \textbf{Angle de calage} \qquad (5.12)$$

Le calcul des pressions dans le film lubrifiant, la détermination des valeurs des charges sans dimension T_{Φ} et T_{ε} et le calcul de l'angle de calage se feront dans un sous programme appelé ***« CALAGE »*** (voir l'organigramme en annexe 1).

Les coefficients à introduire dans ce sous programme sont :

ε : L'excentricité relative du palier.

α : L'angle entre le vecteur mobilité et l'axe des centres du palier.

Ω : Le coefficient de sur-relaxation.

Δp : Le coefficient fixant la convergence de la pression dans la méthode d'itération.

L/D : Le rapport de la longueur et du diamètre du palier.

N_0, N_z : Le nombre de point pris respectivement sur I et J.

V-4- CALCUL DU VECTEUR MOBILITE:

Précédemment nous avons posé :

$$2\overline{F}_{\varepsilon} = -T_{\varepsilon}.M$$

D'où :

$$M = -\frac{2\cos\Phi}{T_{\varepsilon}} \qquad (5.13)$$

$$M_{\varepsilon} = M\cos\alpha \qquad (5.14)$$

$$M_{\Phi} = -M\sin\alpha \qquad (5.15)$$

Le calcul du vecteur mobilité M se fait a partir des valeurs Φ et T_{ε}, donc a partir du sous programme ***« CALAGE »*** dans lequel on introduit une valeur d'angle α pour en déduire l'angle de calage Φ, or en réalité c'est seulement ce dernier qui est connu, ne connaissant pas la fonction qui relie les angle α et Φ, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'interpolation linéaire pour déterminer la valeur de α_0 correspondant a Φ_0 (voir figure V.4).

Avec :

$$\alpha(k+1)=\alpha(k-1)+(\alpha(k)-\alpha k-1)\left[\frac{\Phi_0-\Phi(k-1)}{\Phi(k)-\Phi k-1}\right] \qquad (5.16)$$

Donc pour calculer le vecteur mobilité, connaissant l'excentricité relative et l'angle de calage Φ_0 ,
On procède de la manière suivante :

- On se fixe un angle α
- Par l'intermédiaire du sous programme ***« CALAGE »*** on calcule l'angle de calage Φ correspondant.

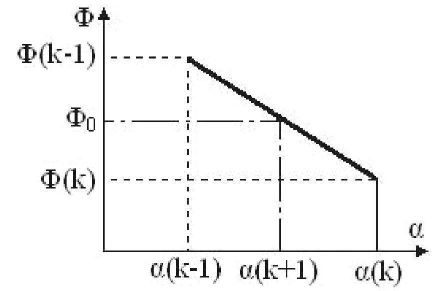


Fig V.4 Interpolation de α

- On compare Φ et Φ_0 , si ces deux valeurs sont différentes on se donne une autre valeur de l'angle α et on refait le calcul de l'angle de calage. On a ainsi deux valeurs de α auxquelles correspondent deux valeurs de Φ. La valeur approchée de α_0 s'effectue ensuite par interpolation linéaire (équation 5.16) ; le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce que la valeur de Φ calculée soit très proche de Φ_0. On détermine alors la valeur du vecteur mobilité (voir organigramme donné en annexe 2).

V-5- DETERMINATION DES COURBES RELIANT L'ANGLE DE CALAGE Φ et α :

Les courbes qui relient l'angle de calage a l'angle α sont données dans le chapitre suivant pour différentes excentricités et deux valeurs du rapport L/D. on remarque que ces courbes ne correspondent pas a la réalité [4], c'est-à-dire a :

- $\Phi>0$ implique $0<\alpha<\pi$.
- $\Phi<0$ implique $\pi<\alpha<2\pi$.

Cela provient du calcul de l'angle de calage obtenu à partir de l'arctangente défini dans le domaine $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ donc il est nécessaire d'introduire un programme de correction tel que les changements soient les suivants :

ε_ζ	ε_y	Φ_{reel}	Φ'	Φ_{calcul}
+	0	0	0	0
+	+	0°<Φ<90°	0°<Φ<90°	0°<Φ<90°
0	-	90°	90°	90°
-	+	90°<Φ<180°	-90°<Φ<0°	-90°<Φ<0°
-	0	180°	0°	0°
-	-	-180°<Φ<-90°	90°>Φ>0°	-90°<Φ<0°
0	-	-90°	90°	90°
+	-	-90°<Φ<0	90°>Φ>0	90°>Φ>0

Avec :

Φ' : angle de calage obtenu a partir de l'expression de l'arctangente.

Le sous programme ***« CADRAN »*** permet le calcul de α.

Le sous programme ***« CHANGE »*** permet, après calcul, de donner aux angles α et Φ leurs valeurs réelles.

Les organigrammes sont donnés en annexes 4 et 5.

V-6- CALCUL DES EQUATIONS DE MOUVEMENT:

L'équation du mouvement du centre de l'arbre dans un repère lié a la charge a été donné au §V-3, elle s'écrit :

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD}\vec{M} + \vec{\varpi} \wedge \vec{\varepsilon}$$

Avec :

$$\varpi = \frac{\omega_a + \omega_c}{2} - \omega_F$$

Ne connaissant pas ω_F la vitesse angulaire de la charge appliquée, il est intéressant d'écrire cette équation de mouvement dans un repère lié a la bielle, c'est-à-dire au coussinet.

- Soit un « *repère 1* » dont l'origine est le centre du coussinet et qui tourne a :

$$\omega_1 = \frac{\omega_a + \omega_c}{2} - \omega_F$$

Dans ce repère l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_1 = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD} M \qquad (5.17)$$

En effet un observateur lié à ce repère ne verrait que l'écrasement du film lubrifiant dû a la variation de l'excentricité.

Remarquons que ces résultats ne sont valables que pour un coussinet cylindrique de révolution.

- Dans un *« repère 2 »*, repère de calcul fixé au coussinet mais tournant a une vitesse par rapport a la charge $\omega_2 = \omega_c - \omega_F$, la variation de l'excentricité relative devient :

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_2 = \left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_1 + \left(\varpi_1 - \varpi_2\right) \wedge \varepsilon \qquad (5.18)$$

En posant :

$$\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 = \frac{\omega_a + \omega_c}{2} \tag{5.19}$$

On peut donc écrire :

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_2 = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD} M + \varpi \wedge \varepsilon \tag{5.20}$$

Où ϖ représente la vitesse angulaire moyenne de l'arbre et du coussinet mesuré relativement au *« repère 2 »*.

V-7- MATRICES DE PASSAGE:

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, les différents paramètres tels que la charge, l'excentricité, l'angle de calage, le vecteur mobilité, sont définis dans leurs propre repère, il est donc nécessaire, pour effectuer des calculs cohérents, de ramener chacun de ces paramètres dans un système d'axe commun.

Avec :

(x_3, y_3) Repère de calcul lié a la bielle.

(ξ, η) Système d'axe lié a la force.

(ε, Φ) Système d'axe lié a la ligne des centres, ce repère est identique au repère (x_1, y_1) défini au §IV.1.

Dans le repère lié a la bielle (x_3, y_3) :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \varepsilon_{x3} \\ \varepsilon_{y3} \end{bmatrix} = \frac{F\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\mu LD}\begin{bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \end{bmatrix} + \overline{\Omega}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{x3} \\ \varepsilon_{y3} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

La charge est repérée dans le système d'axe (x_3, y_3) par l'angle θ_f, soit :

$$|F| = \sqrt{F_{x3}^2 + F_{y3}^2}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_f \\ \sin\theta_f \end{bmatrix} = \frac{1}{|F|}\begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix}$$

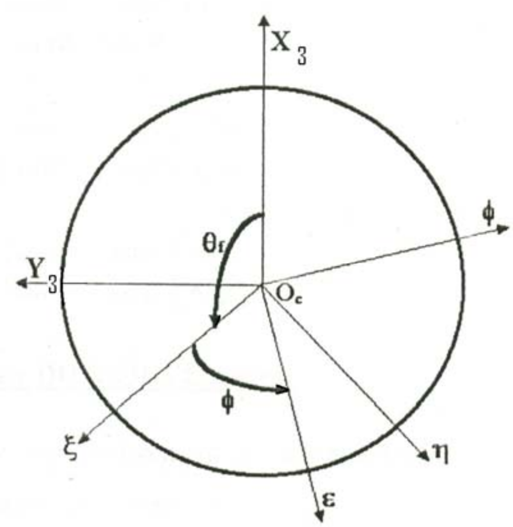


Fig V.5 Représentation des axes

Les composantes de l'excentricité et du vecteur mobilité sont données dans les différents systèmes d'axes, par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_f & \sin\theta_f \\ -\sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x3} \\ \varepsilon_{y3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_f & -\sin\theta_f \\ \sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\xi \\ M\eta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_f & -\sin\theta_f \\ \sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\varepsilon \\ M_\Phi \end{bmatrix}$$

V-8- CALCUL DE L'EXCENTRICITE RELATIVE ε :

Le programme de calcul est détaillé sur l'organigramme en annexe 3. Etant donné que l'excentricité varie dans le temps, on doit se fixer un intervalle de temps entre chaque point tel que :

$$\Delta t = \frac{1}{6}\frac{\Delta\theta}{\omega} \quad \text{si} \quad \omega > 0$$

$$\Delta t = -\frac{1}{6}\frac{\Delta\theta}{\omega} \quad \text{si} \quad \omega < 0$$

Avec :

ω : Vitesse angulaire du vilebrequin en (tr/mn).

$\Delta\theta$: En degré d'angle

<u>Les données du programme sont :</u>

- La charge F.
- Les dimensions du palier et de la bielle.
- Le jeu radial C.
- La viscosité dynamique du lubrifiant μ.
- La vitesse angulaire du moteur.

V-9 CONCLUSION :

Pour le calcul de la pression dans le film lubrifiant, le problème reviendra donc de résoudre numériquement l'équation de Reynolds vu que l'intégration directe de cette celle-ci est impossible. La détermination du déplacement du centre de l'arbre sera faite après ça.

Chapitre VI

RESULTATS ET DISCUSSION

CHAPITRE VI
RESULTATS ET DISCUSSION

V-1 INTRODUCTION:

Deux types de calculs ont été effectués, le premier pour vérifier nos résultats par comparaison avec les données existantes, le second plus original concerne le palier de pied de bielle d'un moteur

Les données sont celles utilisées par Hiruma et Furuhama dans l'étude « mesure de la trajectoire de l'axe d'un palier de tête de bielle de moteur a essence » [9] (Moteur quatre cylindres Mitsubishi)

Le diagramme de charge (pages 49) de ce moteur donne les composantes de la charge pour un angle de vilebrequin variant de dix en dix degrés. Or dans notre étude il est important, pour avoir un calcul plus précis, de connaître les composantes de la charge
tous les deux degrés ; celles-ci seront déterminées par interpolation linéaire [4].

	Piston	
Alésage x Course	36x66 mm	
	Bielle	
L_3	119 mm	
	Pied de Bielle	**Tête de Bielle**
L	23 mm	25 mm
D	23 mm	60 mm
C	0.015 µm	0.036 µm
L/D	**1**	**0.417**
	Bras du Vilebrequin	
L_2	35 mm	
ω_v	-5000 tr/mn	
	Viscosité dynamique du lubrifiant	
µ	0.367×10^{-2} Pa.s	

Pour calculer le lieu du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet de ces deux paliers, nous avons utilisé le même diagramme de charge. Par contre les vitesses de rotation des axes et des coussinets sont celles calculées dans chacun des cas par les relations données
au chapitre II.

Ce diagramme de charge (fig VI.1) a été reproduit en 3 dimensions, et en vu de profile pour mieux apprecier le deplacement de θ=0° a θ=720° (2 tours de vilbrequin du moteur 4 temps Mitsubishi [4]), il est representé sur la figure VI.2 et VI.3

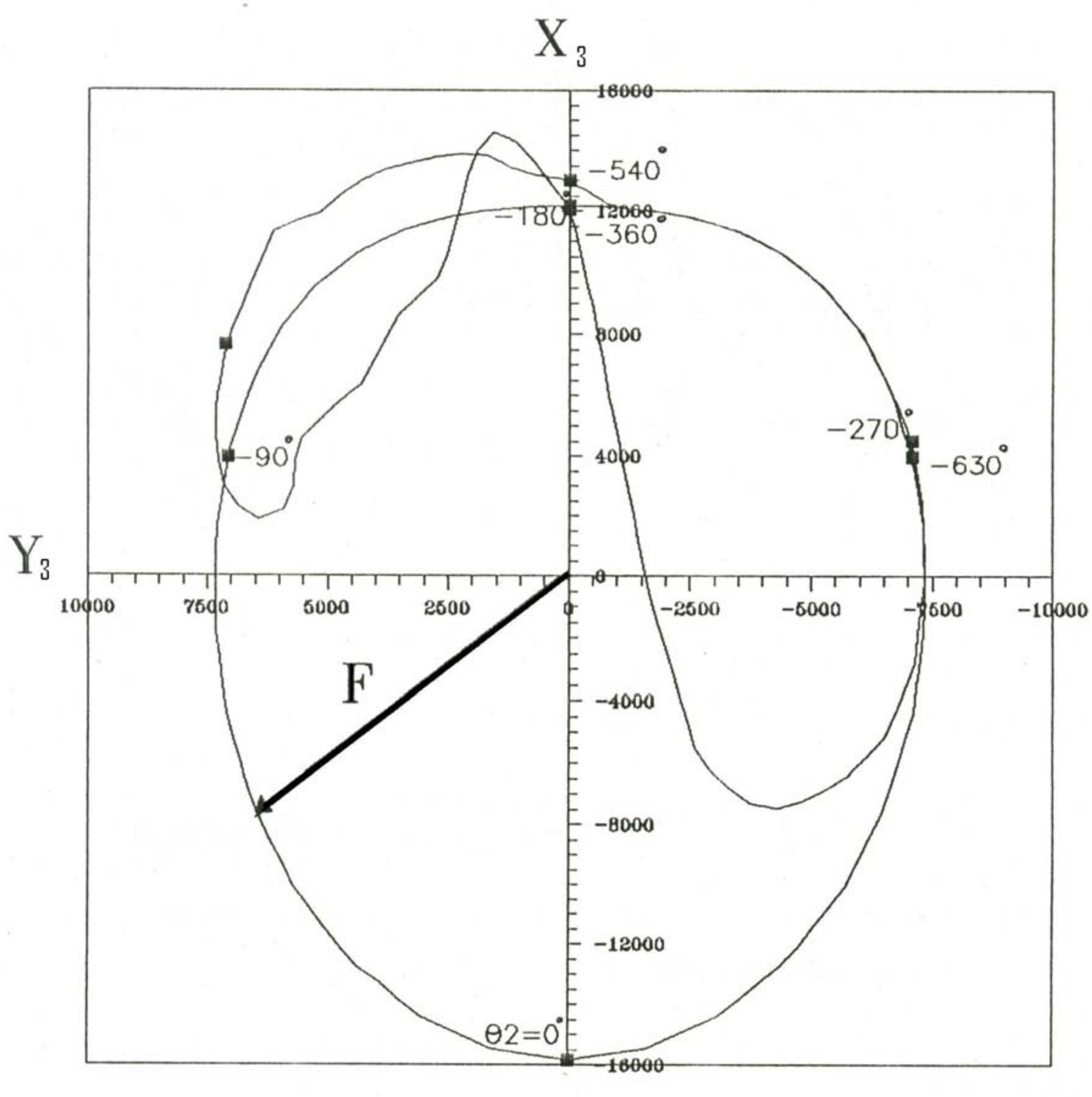


Fig VI.1 Diagramme de charge

Moteur quatre cylindre Mitsubishi [4]

θ_2: Angle de rotation du vilbrequin.
(X_3 ,Y_3): Repere lié a la bielle.
ω_v: -5000 tr/mn

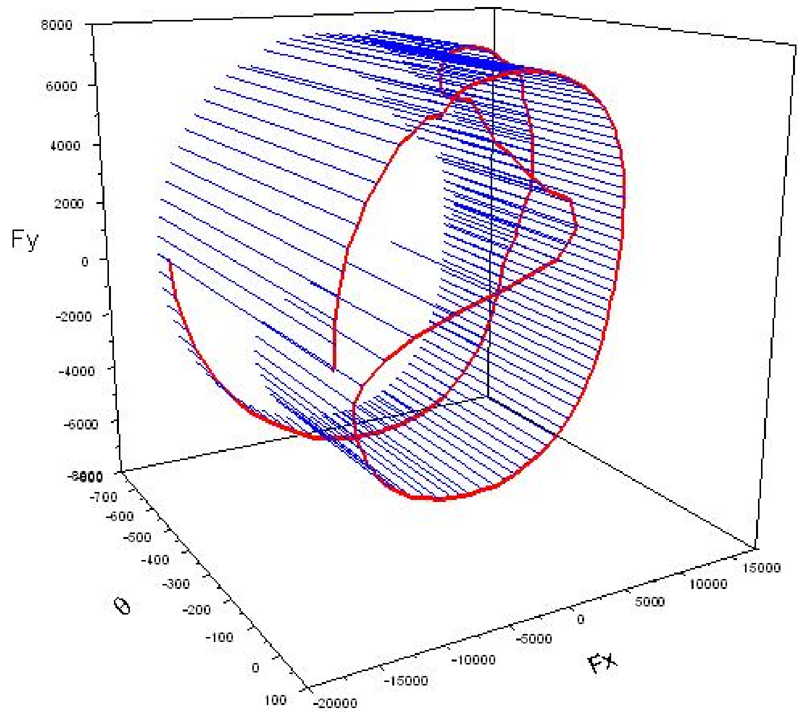


Fig VI.2 Diagramme de charge F en 3D

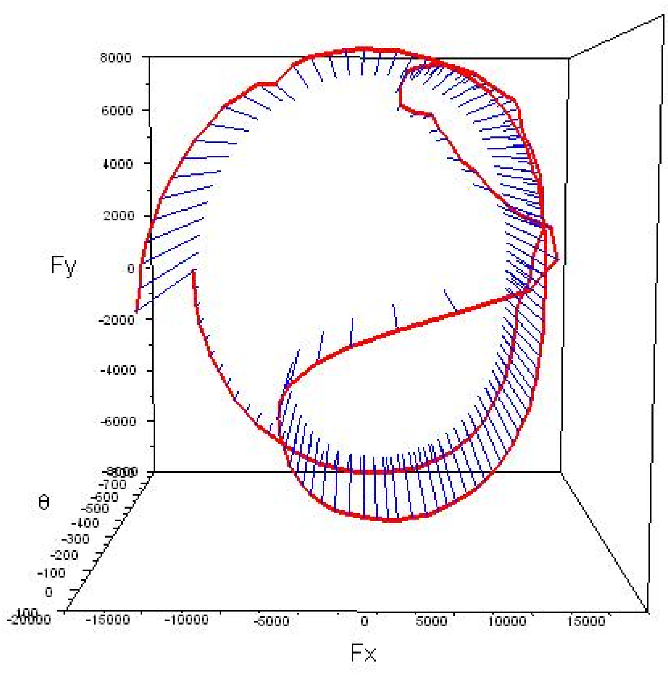


Fig VI.3 Diagramme de chrage F de profile

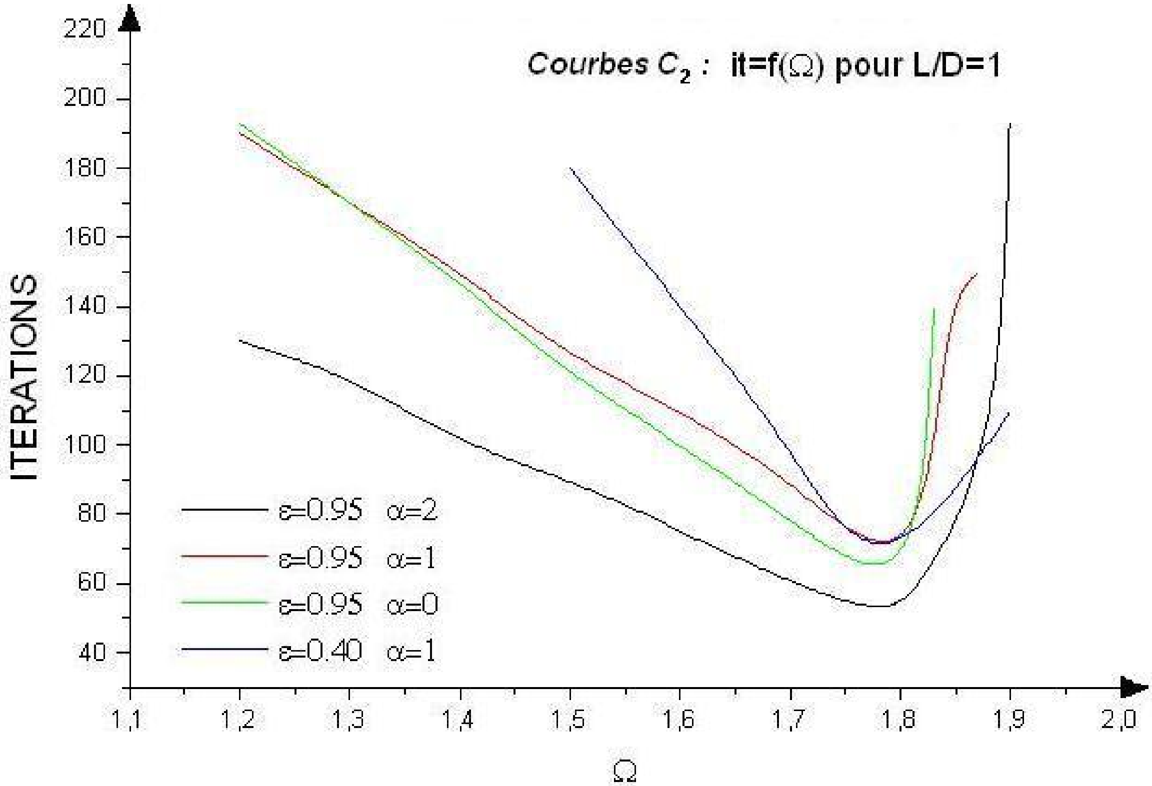


Fig VI.4 Variation du nombre d'itération en fonction du coefficient de surrelaxation pour L/D = 1

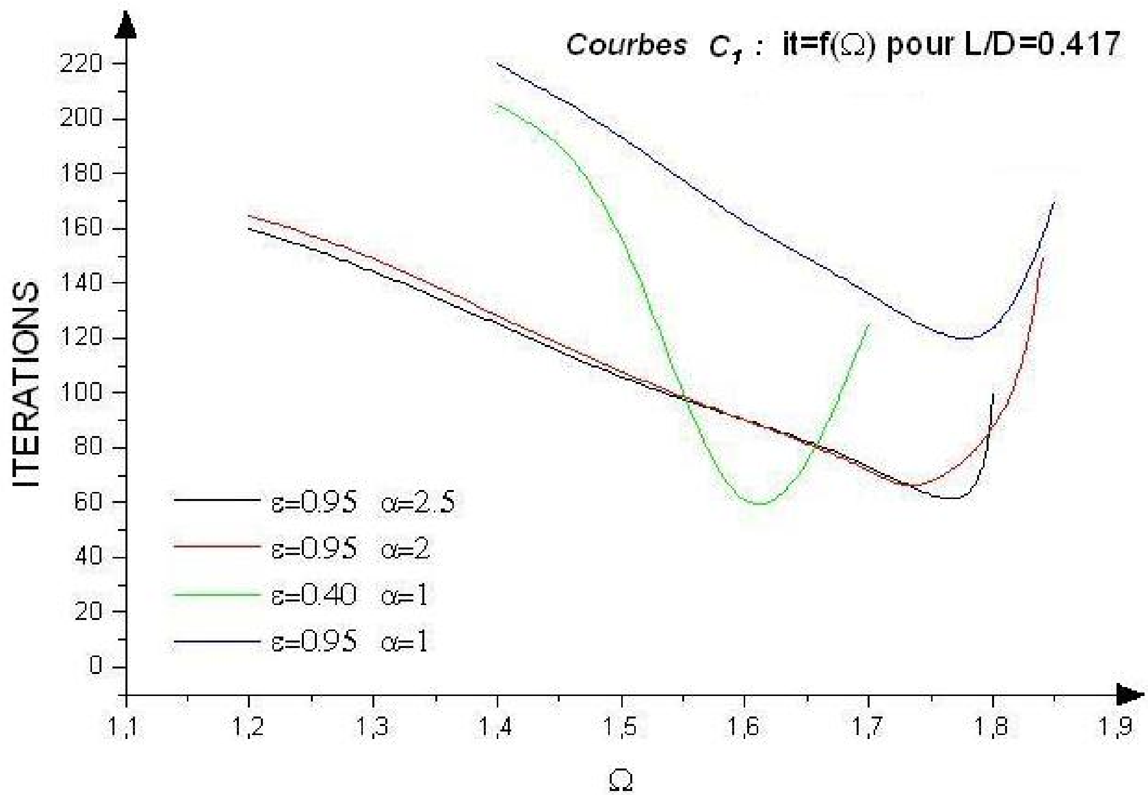


Fig VI.5 Variation du nombre d'itération en fonction du coefficient de surrelaxation pour L/D = 0.417

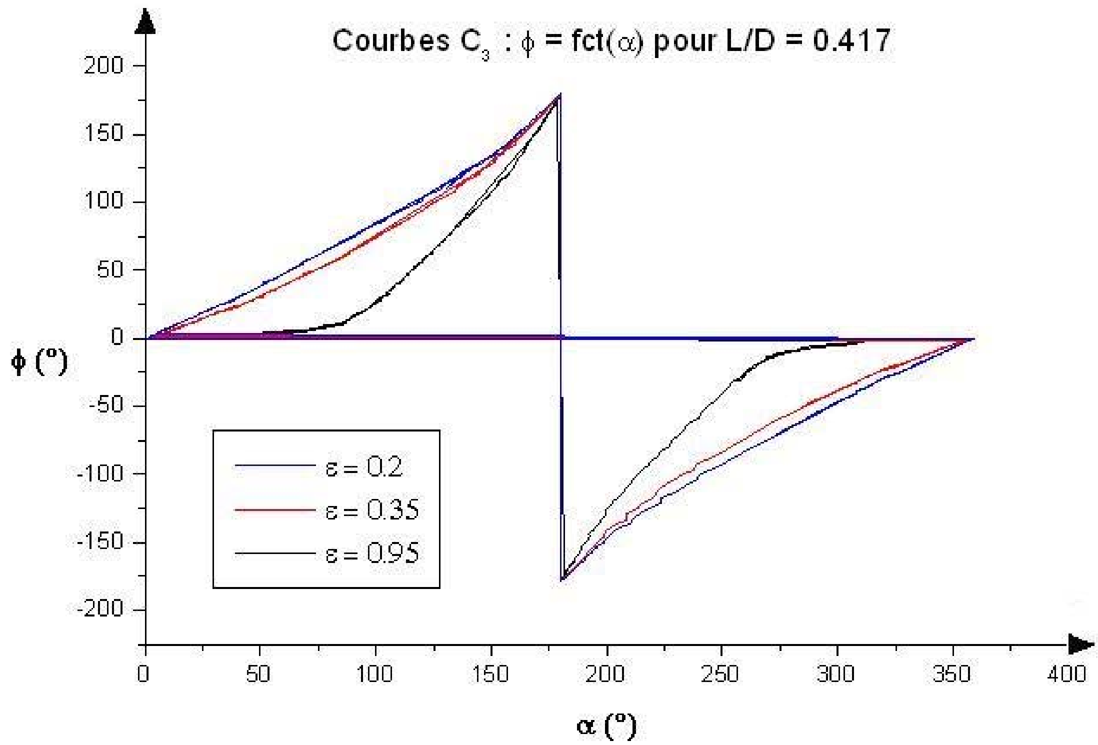


Fig VI.6 Variation de l'angle de calage en fonction de l'angle α pour L/D = 1

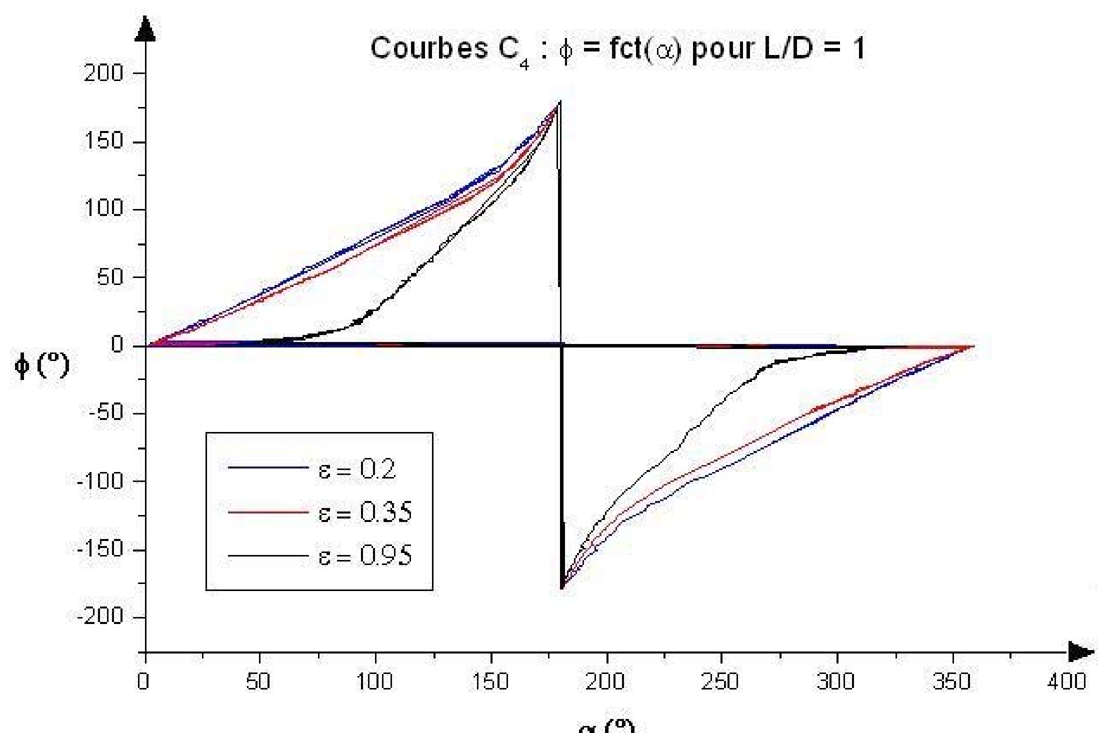


Fig VI.7 Variation de l'angle de calage en fonction de l'angle α pour L/D = 0.417

Choix du coefficient de sur-relaxation:

Les courbes C_1 et C_2 (fig VI.4 et fig VI.5), donnent les variations du nombre d'itération en fonction du coefficient de sur-relaxation pour différentes valeurs de l'excentricité relative ε, de l'angle α et du rapport L/D.

Dans la suite des calculs nous retiendrons :

$\Omega = 1.74$ pour $\frac{L}{D} = 0.417$

$\Omega = 1.78$ pour $\frac{L}{D} = 1$

VI-2- DIAGRAMME DE LA TRAJECTOIRE DU CENTRE DE L'ARBRE :

a. Palier de tête de bielle (L/D=0.417)

Nous avons comparé nos résultats avec les données existantes. Les courbes de cette trajectoire ont été calculés a l'aide de notre programme, elles coïncident sur quelques points avec les résultats données dans la référence [2] .Elles sont données en 3 dimensions ainsi que de profile, voir figures VI.8 et VI.9.

Notons que ces trajectoires sont tracées dans le repère lié a la bielle (X_3, Y_3).

Theta (°)	epsx_calculé	epsx_Tanneau	delta_epsx	epsy_calculé	epsy_Tanneau	delta_epsy
0	-0,9200	-0,90	**0,0200**	0,1500	0,16	**0,0100**
-90	0,3410	-0,17	**0,1710**	-0,8670	-0,85	**0,0170**
-180	0,9200	0,92	**0,0000**	-0,1490	-0,15	**0,0010**
-270	0,6380	0,75	**0,1120**	0,6800	0,60	**0,0800**
-360	0,9200	0,70	**0,2200**	-0,1500	0,10	**0,0500**
-450	0,5890	0,64	**0,0510**	-0,7220	-0,58	**0,1420**
-540	0,9200	0,94	**0,0200**	-0,1490	-0,04	**0,1090**
-630	0,5990	0,70	**0,1010**	0,7150	0,65	**0,0650**
-720	-0,9200	-0,90	**0,0200**	0,1500	0,16	**0,0100**

b. Palier de pied de bielle (L/D=1)

Les résultats obtenus de notre programme sont donnés sur les figures VI.10 et VI.11.

On constate que la trajectoire du centre de l'arbre est peu différente pour ce palier de celle calculée pour le palier de tête de bielle pour le même diagramme de charge, ce qui montre que l'effet d'écrasement du film est prépondérant devant l'effet dû aux rotations.

Remarque :

Les résultats données pour le palier de pied de bielle, calculés pour une meilleure comparaison, pour le même diagramme de charge que celui du palier de tête de bielle ne sont pas les résultats réels car le diagramme des charges appliquées sur ce palier est différent du fait des effets d'inertie.

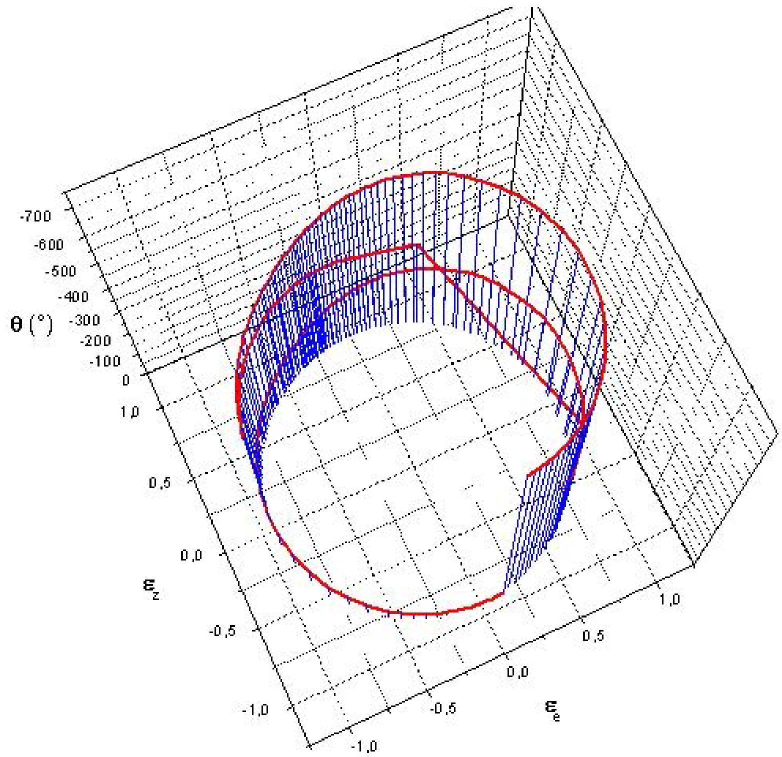


Fig VI.8 Trajectoire du centre de l'axe du palier de tête de bielle pour L/D=0.417 (En 3 dimensions)

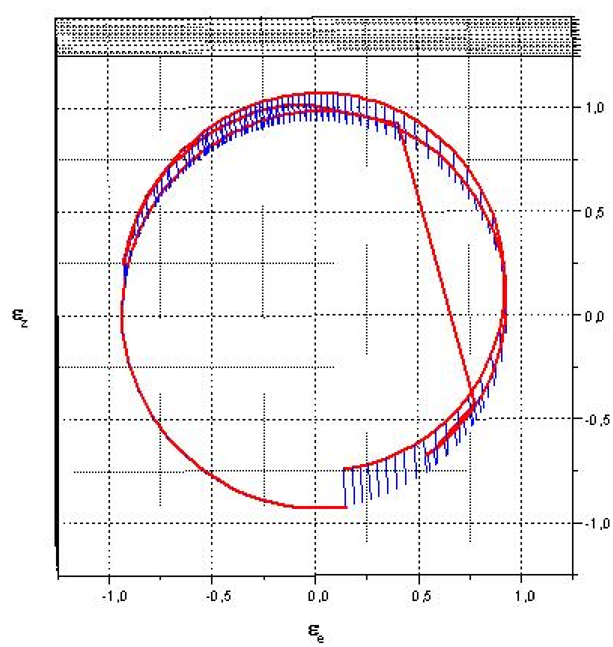


Fig VI.9 Trajectoire du centre de l'axe du palier de tête de bielle pour L/D=0.417 (Vue de profile)

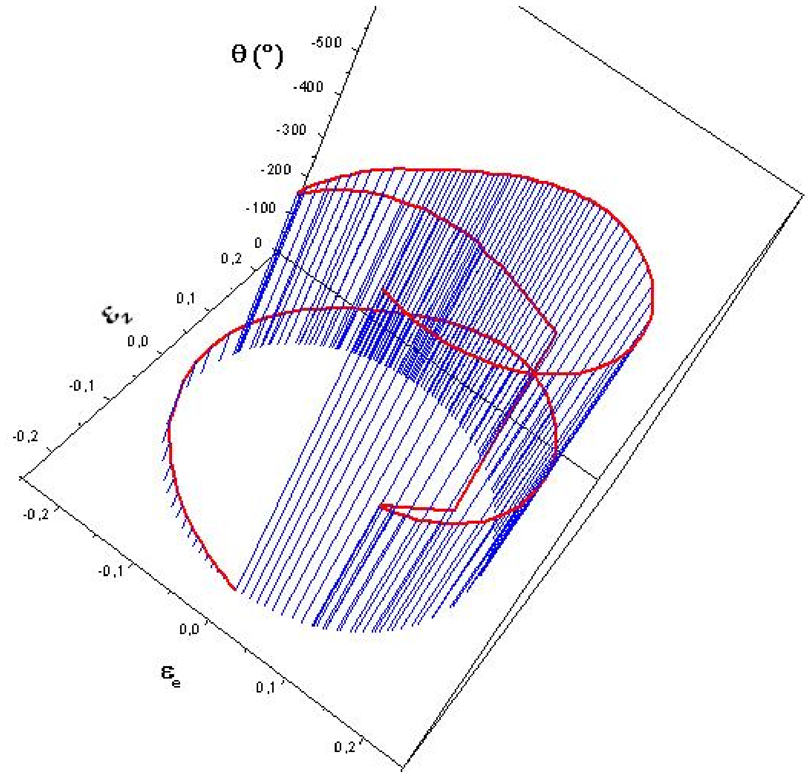


Fig VI.10 Trajectoire du centre de l'axe du palier de pied de bielle pour L/D=1 (En 3 dimensions)

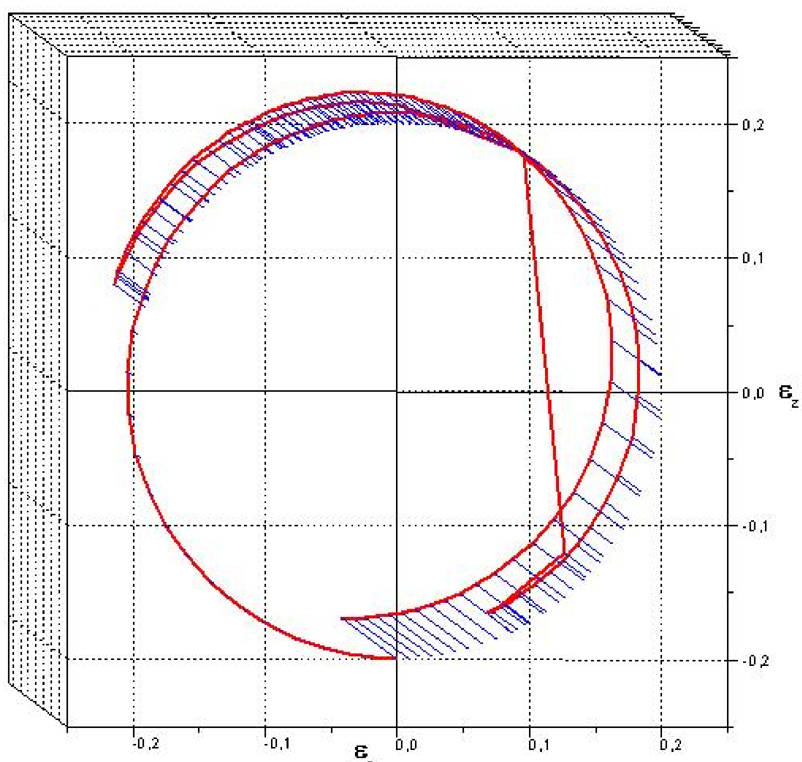


Fig VI.11 Trajectoire du centre de l'axe du palier de pied de bielle pour L/D=1 (Vue de profile)

Courbe de l'épaisseur minimale :

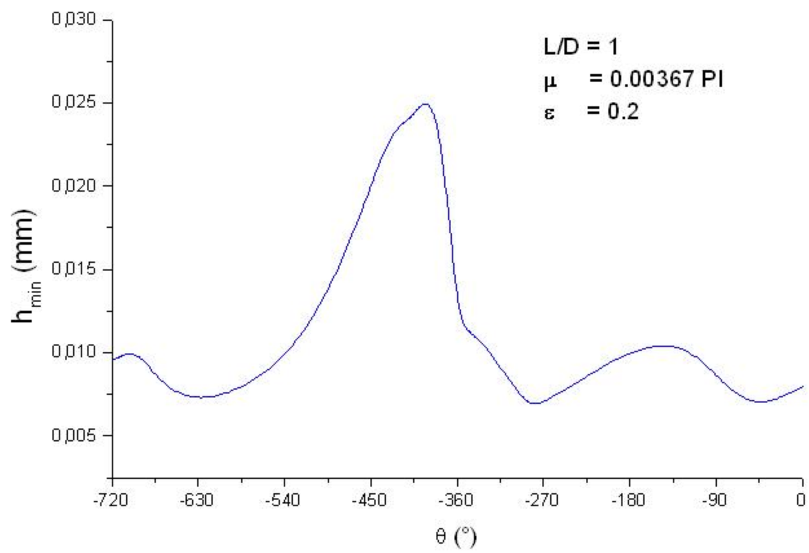


Fig VI.12 Variation de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin pour L/D=1

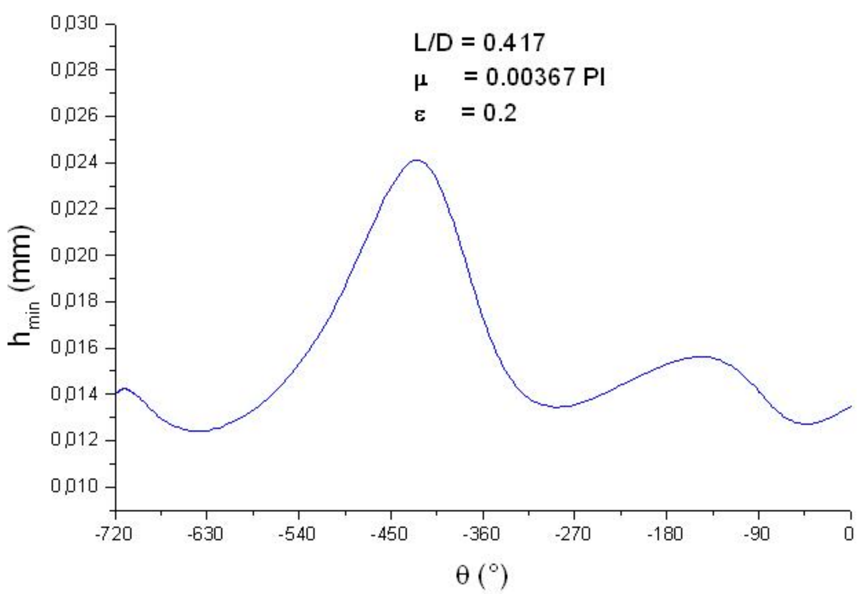


Fig VI.13 Variation de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin pour L/D=0.417

Pendant la phase d'explosion (0° - 180°) l'épaisseur du film prend des valeurs relativement faibles car l'arbre est sollicité par une charge importante due à la pression de fin de combustion qui engendre une force perpendiculaire à l'arbre et par l'inertie du mécanisme que supporte le palier. A l'échappement (180° - 360 °), l'épaisseur du film commence à augmenter d'une façon faible mais d'une façon considérable pendant la phase d'aspiration (360° - 540°) car l'arbre n'est pas sollicité par une charge importante et elle atteint sa valeur maximale et à environ 400° pour diminuer encore à cause de la charge qu'engendre le remplissage du cylindre jusqu'au PMB (540°) pour prendre des valeurs relativement faibles pendant la phase de compression (540° - 720°) et cela s'explique par l'augmentation de la charge due à l'augmentation de la pression dans le cylindre.

VI-4- CONCLUSION:

Au cours de ce travail nous avons été amené a analyser en détail la méthode de mobilité de J.F.BOOKER qui permet d'étudier le fonctionnement d'un palier en régime transitoire sans effectuer des calculs considérables

Nous avons été amené a mette au point un programme basé sur cette méthode afin de calculer la trajectoire du centre de l'arbre a l'intérieure d'un coussinet de révolution pour un palier soumis a une charge variable en module et en direction

Ce programme peut donc être appliqué au cas du palier de pied de bielle d'un moteur thermique, afin de déterminer l'épaisseur minimale du film et d'évaluer le risque de grippage

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

CONCLUSION ET PERSPECTIVES :

Le contact entre l'arbre et le coussinet du palier joue un rôle important, notamment, dans la durée de vie du mécanisme en fonctionnement ainsi que l'énergie dissipée par frottement. Et pour étudier un mécanisme en fonctionnement, on doit connaître les paramètres qui l'influencent afin de pouvoir simuler les phénomènes engendrés.

Dans ce présent travail, nous avons étudié le comportement dynamique d'un palier de bielle (palier lisse court) en régime laminaire et transitoire en utilisant un modèle mathématique proposé par J. F. BOOKER et nous avons établi un code de calcul pour estimer la trajectoire du centre de l'arbre et l'épaisseur du film d'huile pour différents valeurs de la viscosité dynamique en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin.

Les résultats s'avèrent satisfaisants par comparaison avec des résultats établis par plusieurs auteurs tels que ceux de G. TANNEAU ce qui nous permet de consolider la validité de notre programme de calcul. L'erreur commise sur le calcul de chaque paramètre est due aux hypothèses du modèle.

Enfin, notre programme de calcul peut être amélioré en prenant en compte plusieurs paramètres négligés dans ce modèle tels que :

- La considération des défauts de forme (la rugosité) ;
- La considération des effets de température due au frottement ;
- La considération de la variation de la viscosité dynamique du fluide lubrifiant.

Nous souhaitons aussi améliorer le programme afin de pouvoir tracer les allures du couple de frottement, de la pression et du débit du fluide lubrifiant.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.F.Booker: Dynamically loaded journal bearings: Mobility method of solution (ASME journal of basic Engineering, September 1965)

[2] J.Frene. D.Nicolas, B.Degueurce, D.Berthe, M.Gaudet : Lubrification hydrodynamique, paliers et butées (Saint-Denis, Mars 1990).

[3] R.Haardt : Cinématique vectorielle et analytique. Application aux mécanismes (INSA Lyon-1976).

[4] G.Tanneau : Rapport de DEA, Comportement dynamique d'un palier (Poitiers, 1981).

[5] G.Tanneau : Contribution a l'étude des paliers de bielles, Effet de rugosité, thèse de doctorat 3^{eme} cycle, (Poitiers 1984).

[6] Rapport sur les paliers hydrodynamiques soumis a une charge dynamique, application de la méthode de mobilité.

[7] J.P.Fugene : Rapport de DEA, Contribution a l'étude du comportement élastique d'un coussinet de tête de bielle en fonctionnement hydrodynamique (Poitiers 1978,1979).

[8] J.F.Booker: Dynamically loaded journal of bearings: Numerical Application of the Mobility Method (Transactions of the ASME, January 1971).

[9] J.F.Booker: A table of journal bearings integral (journal of basic Engineering, Juin 1965)

[10] M.Huruma, S.Furuhama: Measurement of the journal bearing of an automobile gasoline engine (Journal of lubrication technology, April 1973)

[11] B.Fantino : Influence des défauts de forme dans la lubrification hydrodynamique (thèse 3^{eme} cycle 1973).

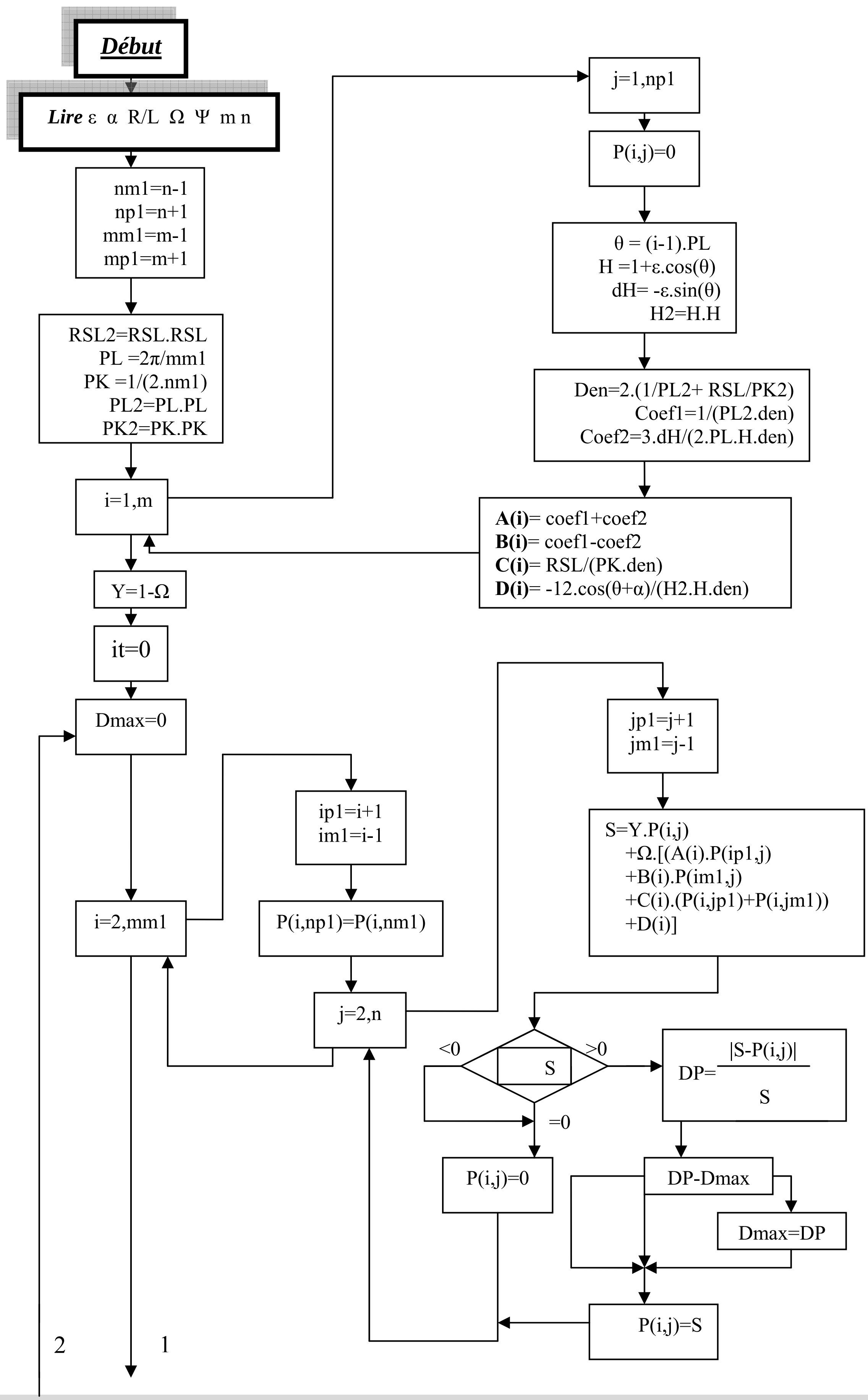
[12] J.Frene : Paliers hydrodynamiques, Technique de l'ingénieur.

[13] D.Bonneau, D.Guiness, J.Frene, J.Toplosky : EHD analysis, including structural inertia effects and mass-conserving cavital model, Transaction of the ASME, July 1995.

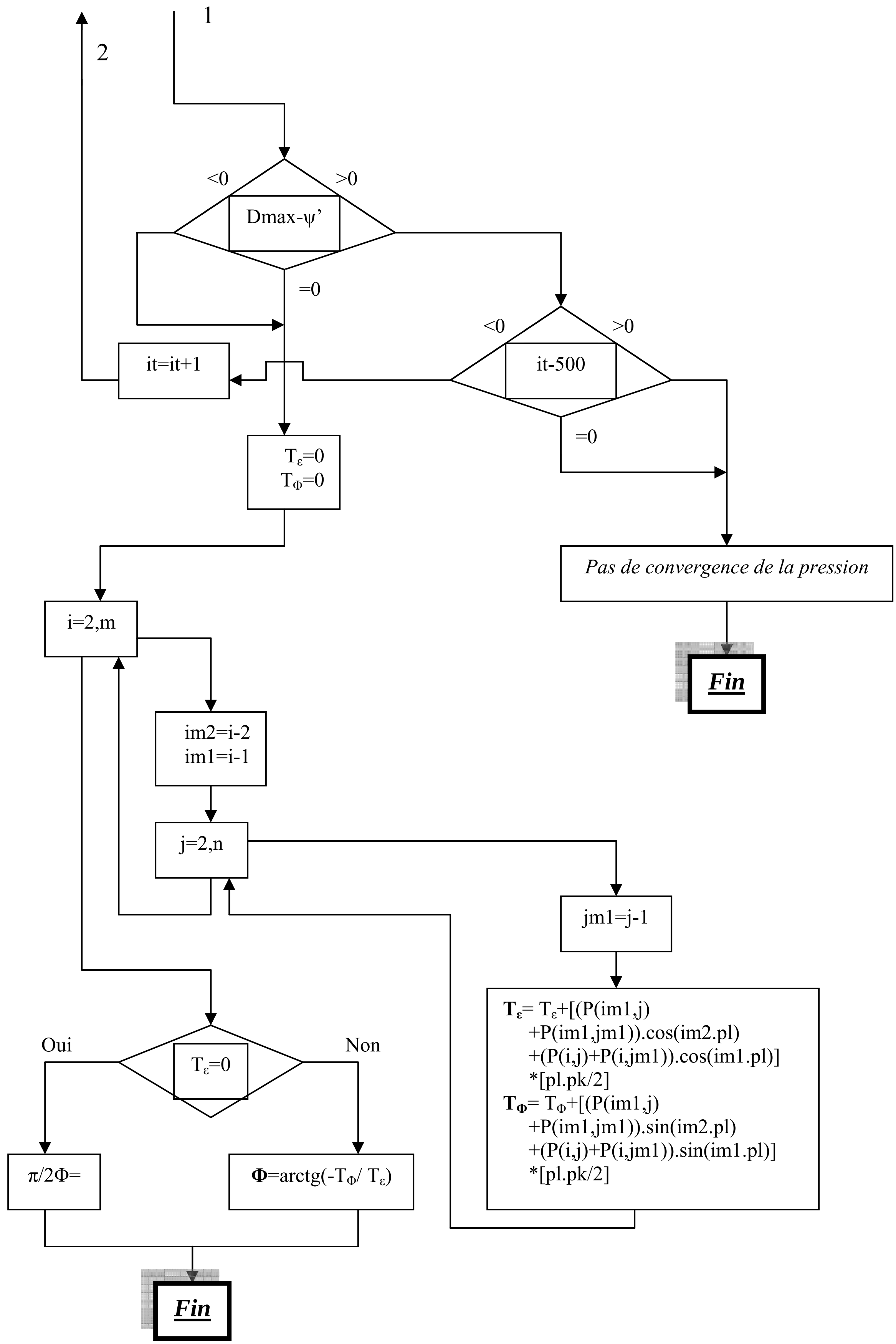
[14] B.Fantino: Influence des défauts de forme dans la lubrification hydrodynamique, these doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1973.

Annexes

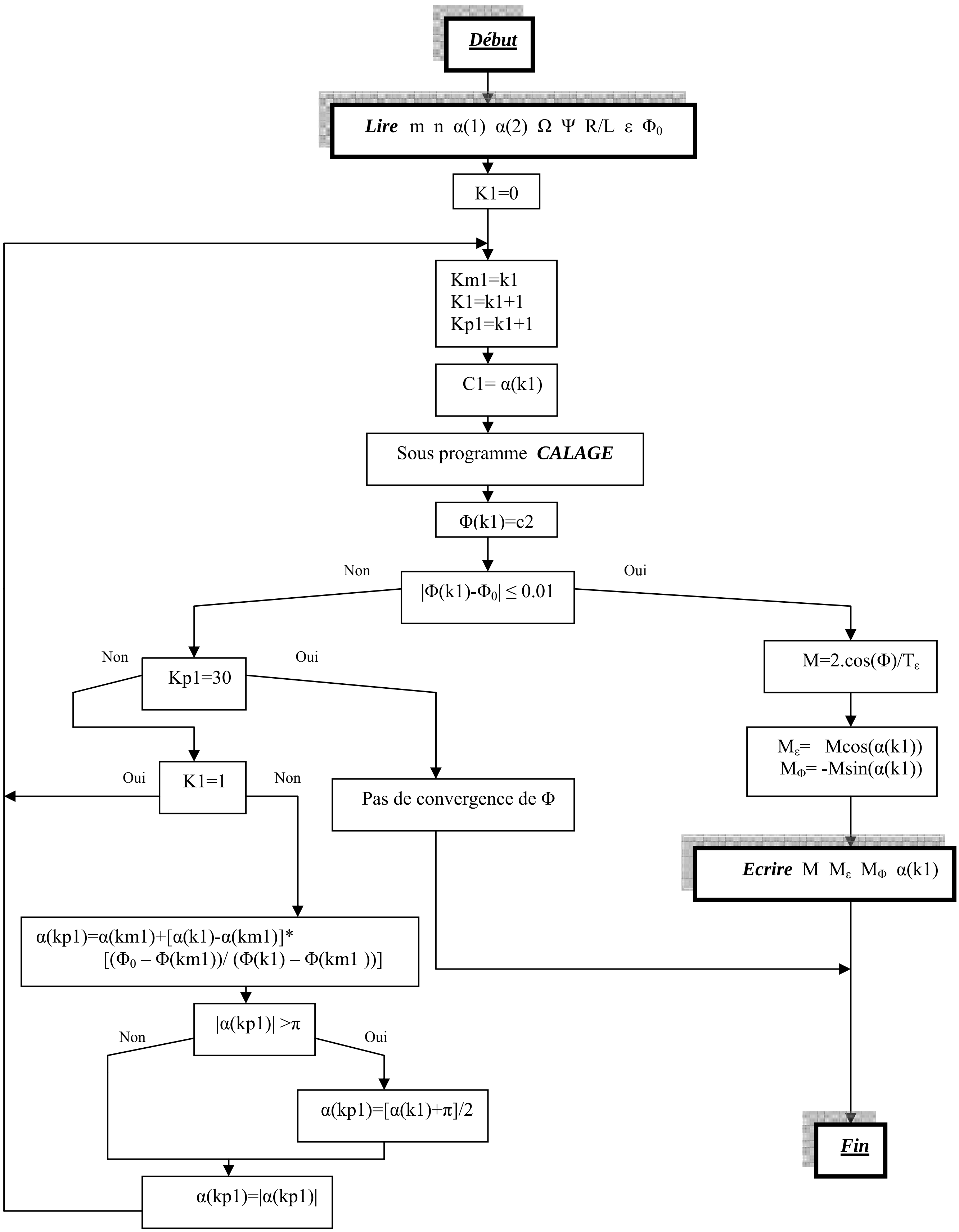
Annexe 1



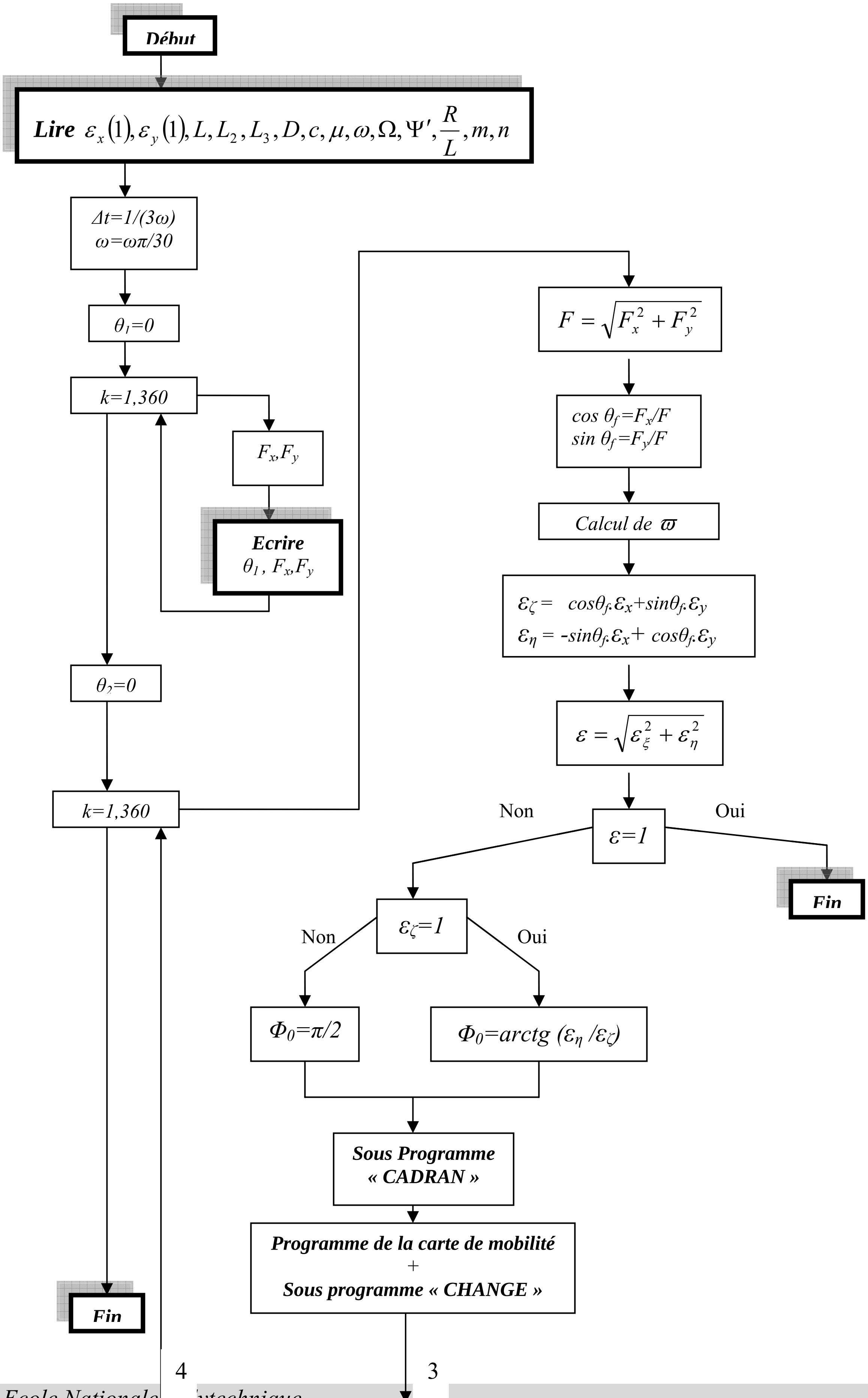
Début
Lire ε α R/L Ω Ψ m n
nm1=n-1
np1=n+1
mm1=m-1
mp1=m+1
RSL2=RSL.RSL
PL =2π/mm1
PK =1/(2.nm1)
PL2=PL.PL
PK2=PK.PK
i=1,m
j=1,np1
P(i,j)=0
θ = (i-1).PL
H =1+ε.cos(θ)
dH= -ε.sin(θ)
H2=H.H
Den=2.(1/PL2+ RSL/PK2)
Coef1=1/(PL2.den)
Coef2=3.dH/(2.PL.H.den)
A(i)= coef1+coef2
B(i)= coef1-coef2
C(i)= RSL/(PK.den)
D(i)= -12.cos(θ+α)/(H2.H.den)
Y=1-Ω
it=0
Dmax=0
i=2,mm1
ip1=i+1
im1=i-1
P(i,np1)=P(i,nm1)
j=2,n
jp1=j+1
jm1=j-1
S=Y.P(i,j)
+Ω.[(A(i).P(ip1,j)
+B(i).P(im1,j)
+C(i).(P(i,jp1)+P(i,jm1))
+D(i)]
<0
S
>0
=0
DP= |S-P(i,j)| / S
P(i,j)=0
DP-Dmax
Dmax=DP
P(i,j)=S
2
1

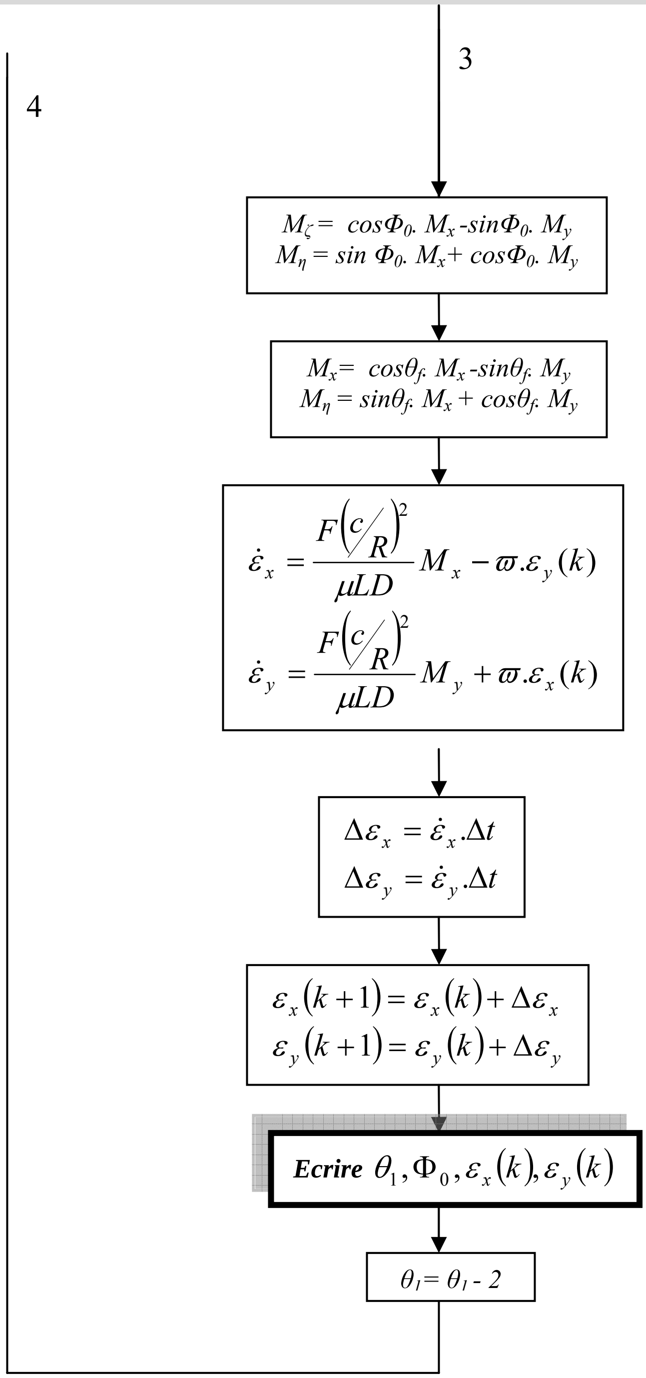

1
2
<0
>0
Dmax-ψ’
=0
<0
>0
it=it+1
it-500
=0
Tε=0
TΦ=0
Pas de convergence de la pression
Fin
i=2,m
im2=i-2
im1=i-1
j=2,n
jm1=j-1
Tε= Tε+[(P(im1,j)
+P(im1,jm1)).cos(im2.pl)
+(P(i,j)+P(i,jm1)).cos(im1.pl)]
*[pl.pk/2]
TΦ= TΦ+[(P(im1,j)
+P(im1,jm1)).sin(im2.pl)
+(P(i,j)+P(i,jm1)).sin(im1.pl)]
*[pl.pk/2]
Oui
Non
Tε=0
π/2Φ=
Φ=arctg(-TΦ/ Tε)
Fin

Annexe 2


Début
Lire m n α(1) α(2) Ω Ψ R/L ε Φ0
K1=0
Km1=k1
K1=k1+1
Kp1=k1+1
C1= α(k1)
Sous programme CALAGE
Φ(k1)=c2
Non
Oui
|Φ(k1)-Φ0| ≤ 0.01
Non
Kp1=30
Oui
M=2.cos(Φ)/Tε
Oui
K1=1
Non
Pas de convergence de Φ
Mε= Mcos(α(k1))
MΦ= -Msin(α(k1))
Ecrire M Mε MΦ α(k1)
α(kp1)=α(km1)+[α(k1)-α(km1)]*
[(Φ0 – Φ(km1))/ (Φ(k1) – Φ(km1))]
|α(kp1)| >π
Non
Oui
α(kp1)=[α(k1)+π]/2
Fin
α(kp1)=|α(kp1)|

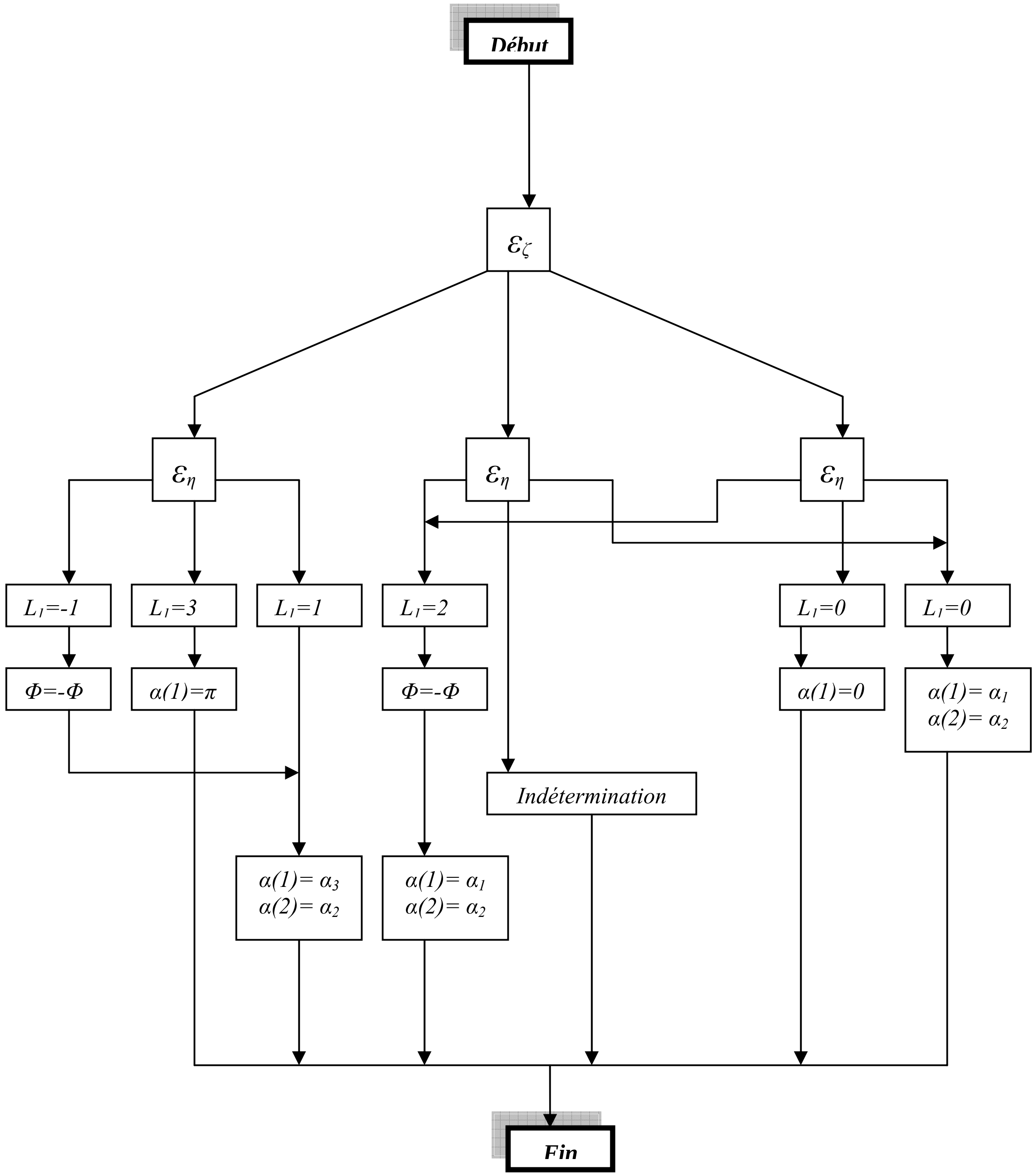
Annexe 3


Début
Lire $\varepsilon_x(1), \varepsilon_y(1), L, L_2, L_3, D, c, \mu, \omega, \Omega, \Psi', \frac{R}{L}, m, n$
$\Delta t=1/(3\omega)$
$\omega=\omega\pi/30$
$\theta_1=0$
k=1,360
F_x, F_y
Ecrire
θ_1, F_x, F_y
$\theta_2=0$
k=1,360
Fin
$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$
$\cos\theta_f=F_x/F$
$\sin\theta_f=F_y/F$
Calcul de ϖ
$\varepsilon_\zeta= \cos\theta_f.\varepsilon_x+\sin\theta_f.\varepsilon_y$
$\varepsilon_\eta= -\sin\theta_f.\varepsilon_x+\cos\theta_f.\varepsilon_y$
$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_\xi^2+\varepsilon_\eta^2}$
Non
$\varepsilon=1$
Oui
Fin
Non
$\varepsilon_\zeta=1$
Oui
$\Phi_0=\pi/2$
$\Phi_0=arctg\ (\varepsilon_\eta/\varepsilon_\zeta)$
Sous Programme
« CADRAN »
Programme de la carte de mobilité
+
Sous programme « CHANGE »
4
3

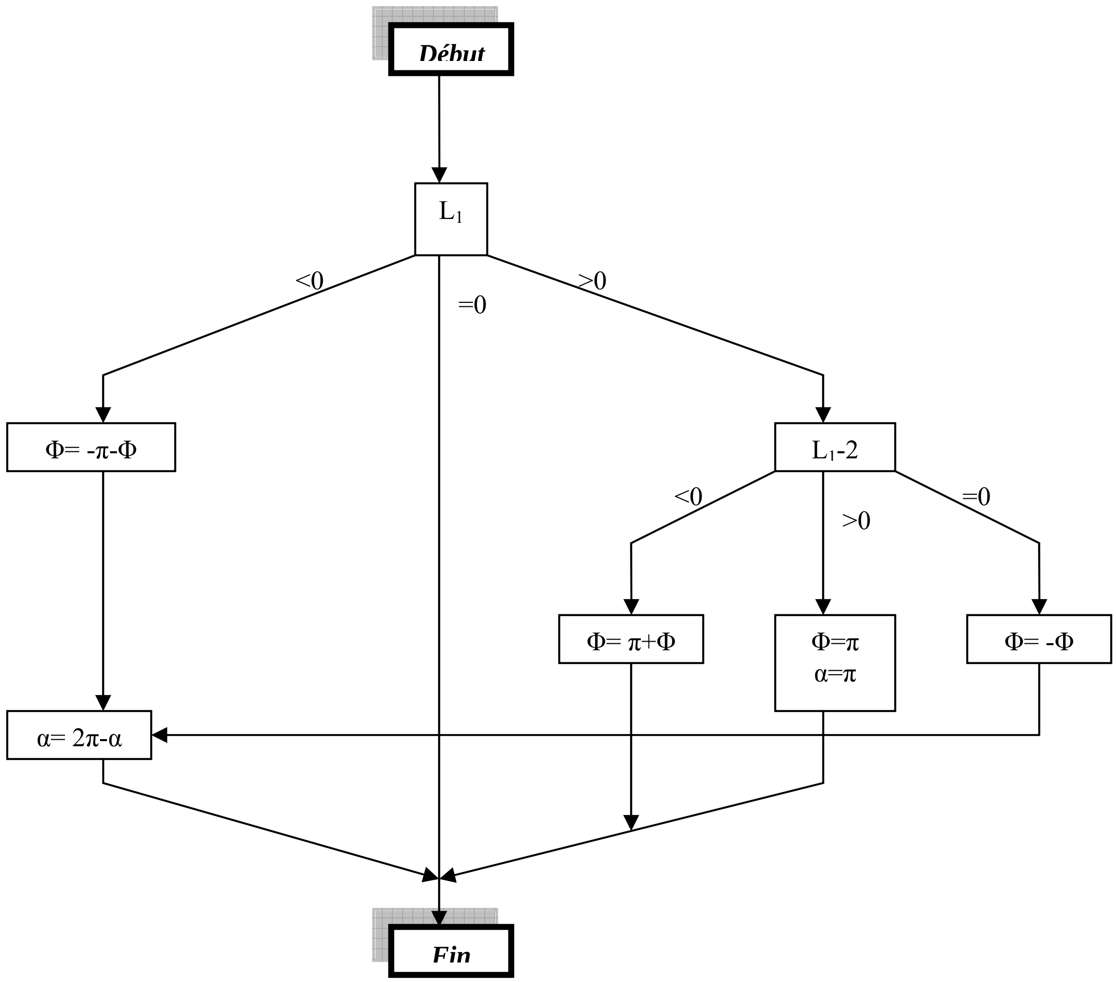


3
4
$M_\zeta = \cos\Phi_0 . M_x - \sin\Phi_0 . M_y$
$M_\eta = \sin \Phi_0 . M_x + \cos\Phi_0 . M_y$
$M_x = \cos\theta_f . M_x - \sin\theta_f . M_y$
$M_\eta = \sin\theta_f . M_x + \cos\theta_f . M_y$
$\dot{\varepsilon}_x = \frac{F\left(c/R\right)^2}{\mu LD} M_x - \varpi.\varepsilon_y(k)$
$\dot{\varepsilon}_y = \frac{F\left(c/R\right)^2}{\mu LD} M_y + \varpi.\varepsilon_x(k)$
$\Delta\varepsilon_x = \dot{\varepsilon}_x.\Delta t$
$\Delta\varepsilon_y = \dot{\varepsilon}_y.\Delta t$
$\varepsilon_x(k+1) = \varepsilon_x(k) + \Delta\varepsilon_x$
$\varepsilon_y(k+1) = \varepsilon_y(k) + \Delta\varepsilon_y$
Ecrire $\theta_1, \Phi_0, \varepsilon_x(k), \varepsilon_y(k)$
$\theta_1 = \theta_1 - 2$

Annexe 4


Début
ε_ζ
ε_η
ε_η
ε_η
L_1=-1
L_1=3
L_1=1
L_1=2
L_1=0
L_1=0
Φ=-Φ
α(1)=π
Φ=-Φ
α(1)=0
α(1)= α_1
α(2)= α_2
Indétermination
α(1)= α_3
α(2)= α_2
α(1)= α_1
α(2)= α_2
Fin

Annexe 5


Début
L1
<0
=0
>0
Φ= -π-Φ
L1-2
<0
>0
=0
Φ= π+Φ
Φ=π
α=π
Φ= -Φ
α= 2π-α
Fin