

M0013/00B

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
**Département de Génie Civil**

**Thèse**

présentée par

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**LAKEHAL SAADI**

*Ingénieur d'état en Génie Civil*  
de l' Ecole Nationale Polytechnique

*Pour l'obtention du titre de*  
**MAGISTERE EN GENIE CIVIL**

*Thème*

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU**  
**DIMENSIONNEMENT OPTIMAL DES FONDATIONS**  
**DANS UN CONTEXTE PROBABILISTE**

Soutenue publiquement devant le jury composé de

Président	<b>M. BERRAH</b>	Professeur, E.N.P.
Directeur de thèse	<b>B. TILIOUINE</b>	Professeur, E.N.P.
Examineurs	<b>S. BELKACEMI</b>	Maître de conférences, E.N.P.
	<b>M. HAMMOUTENE</b>	Maître de conférences, E.N.P.
	<b>B. ZEGHLACHE</b>	Chargé de recherche, E.N.P.

﴿ بسم الله الرحمن الرحيم ﴾

﴿ والعصر إن الإنسان لفي خسر (1) إلا الذين آمنوا و عملوا

الصالحات و تواصلوا بالحق (2) و تواصلوا بالصبر (3) ﴾

### خلاصة:

خصصت هذه الدراسة للبحث عن تحديد احتمالي للأبعاد لأساس سطحي. عامة استعمال مفهوم احتمالي يتطلب من جهة كسب معطيات إحصائية و من جهة أخرى إدخالهم في نموذج ميكانيكي. منهجية التقريب التي تستنتج هي أكثر تعقيد و عامة يجب أن تلي أمرين أمني و اقتصادي. المعلومات الضرورية للبحث عن الحل المثالي للمسألة المطروحة لها علاقة بـمميزات المواد المستعملة و التحريضات الخارجية التي تبرز هذه كالأخرى ميزة بشدة عشوائية. علاوة على ذلك يجب أن تسمح معايير الاقتصاد بتخفيض الثمن الكلي المحتمل للمواد المستعملة و في بعض الأحيان الوزن الكلي لاحتمال انهيار معين للأساس المعتبر في إطار احتمالي عرضت عدة حالات للصياغة العامة لمسألة تحديد مثالي الأبعاد لأساسات سطحية. صيغت على ضوء الحلول المثالية المتحصل عليها إنطلاقاً من حالة دراسة تحديد مثالي احتمالي الأبعاد خلاصات ذات أهمية تطبيقية لأساسات سطحية في وسط عشوائي.

## RESUME

La présente étude est consacrée à la recherche du dimensionnement probabiliste optimal d'une fondation superficielle. L'utilisation du concept probabiliste nécessite en général, l'acquisition de données statistiques d'une part et leur introduction dans un modèle mécanique d'autre part. La méthodologie d'approche qui en résulte est d'autant plus complexe, qu'elle doit en général, satisfaire au double impératif de sécurité et d'économie. Les informations nécessaires en vue de la recherche de la solution optimale du problème posé ont trait essentiellement aux caractéristiques des matériaux mis en œuvre et aux sollicitations extérieures, lesquelles présentent les unes comme les autres, un caractère fortement aléatoire. En outre, les critères de dimensionnement doivent permettre de minimiser le coût total probable des matériaux mis en œuvre ou encore dans certains cas leur poids total pour une probabilité de ruine donnée de la fondation considérée. Différents aspects d'une formulation générale du problème de dimensionnement optimal des fondations superficielles dans un contexte probabiliste, sont présentés. Des conclusions d'importance pratique sont formulées à la lumière des solutions optimales obtenues à partir de cas d'étude de dimensionnement probabiliste optimal des fondations superficielles dans un environnement aléatoire

## ABSTRACT

This study is devoted to the solution of reliability – based optimization problem of shallow foundations. Use of the probabilistic concept requires in general the collection of statistical data on the one hand and their introduction in a mechanical model on the other hand. The resulting methodology is as much sophisticated as it should generally meet both safety and minimum total cost requirements. Necessary informations in order to obtain the problem solution consist essentially in material characteristics and loadings which are both random. In addition, the design criterion should allow for the minimization of the total probable cost of the foundation, or under certain conditions, of the total weight for a given probability of failure of the foundation. Various aspects of a general formulation of the problem of the reliability based optimal design of shallow foundations are presented. Conclusions of engineering significance are given in light of the optimal solutions obtained from the case study of the reliability - based optimal design of shallow foundation in a random environment.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المصنعية — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Mots-clés : Optimisation stochastique, Fiabilité, probabilité de ruine, coefficients de sécurité, dimensionnement optimal des fondations, caractéristiques aléatoires des matériaux, coefficients de corrélation, degré d'incertitude .

## **Dédicaces**

**Je dédie ce modeste travail à :**

**La mémoire de mon père**

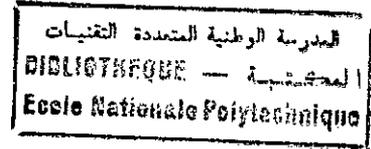
**Toute ma famille**

**Mes frères et sœurs**

**Mes amis**

**Tous ceux qui luttent pour une cause juste**

## Remerciements



Je remercie Dieu clément et miséricordieux de m'avoir donné force et patience pour bien mener à terme ce modeste travail, qui a été effectué dans le laboratoire de modélisation numérique des structures (LMNS ) à l'Ecole Nationale Polytechnique sous la direction de mon Directeur de thèse le Professeur B.Tiliouine à qui je dois des remerciements pour le suivi permanent dont il m'a fait bénéficier pendant toute cette initiation à la recherche, pour ses conseils précieux et son attention ; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

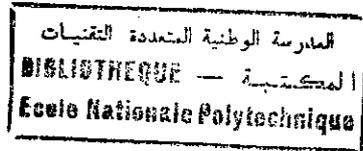
J'exprime ma vive gratitude au professeur M.Berrah Directeur à le E.N.P pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie également tous les membres du laboratoire de M.N.S en particulier Mr B.Zaghlache pour son soutien , ses conseils et ses encouragements, Mr M.Hamoutène et Mr S. Belkacemi pour leurs conseils et critiques.

Je suis aussi profondément reconnaissant envers tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de présider ou d'examiner ce modeste travail.

Sans oublier je dois aussi adresser mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce document en particulier A.Seghir ainsi que l'ensemble du personnel du centre du calcul et de la bibliothèque.

# SOMMAIRE



## CHAPITRE 1

INTRODUCTION.....	1
1.1 PROBLÉMATIQUE.....	2
1.2 OBJECTIF VISÉ.....	4

## CHAPITRE 2

ELEMENTS DE THEORIE DES PROBABILITÉS.....	6
2.1 INTRODUCTION.....	7
2.2 EXPÉRIENCE STOCHASTIQUE, ÉVÉNEMENT.....	7
2.2.1 Expérience stochastique.....	7
2.2.2 Ensemble fondamental, événement.....	7
2.3 LE LANGAGE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS.....	8
2.3.1 La famille des événements.....	8
2.3.2 Notion de probabilité.....	8
2.3.3 Exemple d'espaces probabilisés.....	9
2.3.3.1 Exemple (a).....	9
2.3.3.2 Exemple (b).....	10
2.3.4 Analogie mécanique.....	11
2.4 VARIABLE ALÉATOIRE.....	12
2.5 FONCTION DE RÉPARTITION.....	13
2.6 EXEMPLE DE VARIABLE ALÉATOIRE.....	13
2.6.1 Exemple (a).....	13
2.6.2 Exemple (b).....	13
2.7 MOYENNE, VARIANCE, COVARIANCE.....	13
2.8 INDÉPENDANCE, DÉPENDANCE, COEFFICIENT DE CORRÉLATION.....	14
2.9 ESPACE VECTORIEL DES VARIABLES ALÉATOIRES RELATIVES À UNE CATÉGORIE DONNÉE D'ÉVÉNEMENTS PROBABILISÉS.....	16
2.10 APPLICATION.....	17

## CHAPITRE 3

ÉLÉMENTS D'OPTIMISATION – DÉFINITIONS.....	19
3.1 INTRODUCTION.....	20
3.2 RÔLE DE L'OPTIMISATION.....	20
3.3 DÉFINITIONS.....	20
3.3.1 Éléments de l'optimisation.....	20
3.3.2 Formulation du problème.....	21
3.3.3 Variables de décisions.....	21
3.3.4 Contraintes.....	22
3.3.5 Fonction objective.....	22
3.4 TYPE DE PROBLÈME D'OPTIMISATION.....	22
3.4.1 Problèmes déterministes.....	22
3.4.2 Problèmes probabilistes.....	23

3.5	Méthodes et formulation générale d'un problème d'optimisation déterministe.....	23
3.6	Contraintes.....	24
3.6.1	Contraintes de comportement explicites.....	26
3.7	ESPACE DE CONCEPTION.....	32
3.8	FONCTION OBJECTIVE.....	33
3.9	FORMULATION DANS L'ESPACE DES VARIABLES DE CONCEPTION.....	34
3.10	Deuxième illustration : Fondation superficielle.....	36
3.10.1	Fondation filante.....	36
3.10.2	Charge limite, contrainte de rupture et capacité portante.....	36
3.10.2.1	Charge limite de la semelle.....	36
3.11	Formulation mathématique du problème.....	38
3.12	Application.....	40
3.13	Troisième illustration.....	42



#### CHAPITRE 4

FIABILITÉ.....	44	
4.1	INTRODUCTION.....	45
4.2	INCERTITUDES ET ANALYSE DU RISQUE.....	45
4.3	BASES POUR L'ÉVALUATION DU RISQUE.....	46
4.4	CALCUL PRATIQUE DU RISQUE.....	49
4.5	CAS D'UNE DISTRIBUTION NORMALE.....	52
4.6	FORMULATION DU CALCUL BASÉ SUR LA FIABILITÉ.....	52
4.7	EVALUATION DES COEFFICIENTS DE SÉCURITÉ.....	55

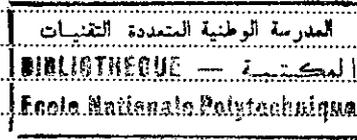
#### CHAPITRE 5

CONCEPTS ET FORMULATION GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION STOCHASTIQUE.....	57	
5.1	INTRODUCTION.....	58
5.2	CRITÈRE DU COÛT TOTAL.....	59
5.2.1	Définition du critère.....	59
5.2.2	La solution optimale du cas fondamental.....	59
5.2.3	Excès du coût total probable.....	63
5.3	CRITÈRE DU POIDS TOTAL.....	64
5.4	RÉSULTATS.....	72

#### CHAPITRE 6

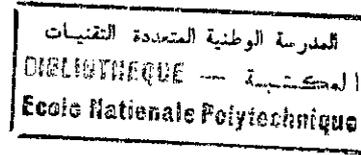
FORMULATIONS ET RECHERCHE DE SOLUTIONS OPTIMALES.....	73	
6.1	CAS DU DIMENSIONNEMENT DES FONDATIONS DANS UN CONTEXTE PROBABILISTE.....	74
6.1.1	Fondations superficielles.....	74
Méthode de dimensionnement probabiliste		
6.1.1.1	Semelle isolée carrée: charge verticale centrée.....	74
Formulation (1).....		75
Formulation (2).....		78
6.1.1.2	Semelle carrée: charge verticale excentrée.....	78
6.1.1.3	Semelle carrée soumise à une charge centrée inclinée.....	81
6.1.2	Fondation profondes : Les pieux.....	83

6.1.2.1	Charge portante d'un pieu.....	83
6.1.2.2	Formulations.....	83
	Formulation (1).....	83
	Formulation 2.....	84
6.1.3	Résultatats.....	87
6.2	EXTENSION AU DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES MÉTALLIQUES DANS UN CONTEXTE PROBABILISTE.....	89
6.2.1	Introduction et définition du critère.....	89
6.2.2	Première application.....	89
	6.2.2.1 Première formulation.....	89
	6.2.2.2 Deuxième formulation.....	91
6.2.3	Deuxième application.....	91
6.2.4	Troisième application.....	94
	Résultats.....	97
	CONCLUSIONS.....	98
	REFERENCES.....	101
	ANNEXES.....	106



# INTRODUCTION

# INTRODUCTION



## 1.1 Problématique

L'idéal que cherche à atteindre tous ceux qui sont associés à l'acte de construire est de réaliser l'ouvrage qui donnera les meilleures garanties de services dans des conditions requises de sécurité, au meilleur prix. Cette dernière condition prend une importance de plus en plus grande, car les besoins en équipement de toutes natures se développent à un rythme tel qu'ils nécessitent une étude approfondie des investissements nécessaires. Elles se traduisent par la recherche de la solution économique. L'optimisation qui en découle peut être regardée comme une recherche systématique de l'excellence à donner, dans un cadre de référence déterminé, le meilleur usage des ressources disponibles. On peut dire que l'émergence des méthodes d'optimisation et leur développement servent à rendre explicite la recherche, l'évaluation et le classement des options, ce qui jusque-là, avaient été accomplit de façon implicite.

Il n'existe pas, de nos jours, un modèle d'optimisation (ou une théorie générale d'optimisation) pour la totalité des opérations de conceptions et de réalisations qui s'applique aux systèmes de génie civil les plus importants. La théorie et les méthodes d'optimisation élaborées par des chercheurs de divers pays se sont limitées jusqu'ici à des exemples très particuliers d'éléments de construction et manquent, tout au moins dans l'étape actuelle, de la qualification nécessaire pour une application générale [11, 24, 27]. Les problèmes posés par le calcul optimal peuvent être groupés dans les trois catégories suivantes :

- Optimisation des éléments constructifs
- Optimisation des structures de type et de configuration présumés.
- Optimisation d'une structure dans son ensemble.

Les éléments constructifs tels que les planchers, poutre, murs rideaux,... etc., font partie du premier groupe de problème d'optimisation.

Les problèmes d'optimisation du second groupe comprennent des systèmes tels que les portiques, treillis,... etc.

Dans le troisième groupe, on trouve les problèmes concernant l'optimisation d'une structure dans son ensemble.

Ces problèmes d'optimisation peuvent mathématiquement être approchés selon deux philosophies différentes : une conception essentiellement déterministe et une conception probabiliste.

La première a acquis une expérience considérable à travers le développement et l'émergence de nombreuses techniques d'optimisation qui relèvent pour l'essentiel des techniques de la programmation mathématique. Cette approche souffre néanmoins d'un inconvénient majeur du fait qu'elle apparaît incapable de répondre correctement aux préoccupations de la profession sur le plan de la sécurité. En effet, traiter du problème de l'optimisation en omettant d'inclure de façon directe ou indirecte la probabilité de ruine de l'ouvrage considéré paraît surréaliste.

La seconde approche, fondée sur l'optimisation probabiliste devient une nécessité dans la mesure où elle permet de mieux appréhender les incertitudes des concepteurs. Il est du reste économiquement plus logique et plus réaliste de se satisfaire de matériaux imparfaits en considérant les imperfections possibles plutôt, que d'exiger des entrepreneurs une réalisation parfaite, évidemment impossible à l'échelle humaine. Tout le problème d'optimisation consistera alors à identifier d'abord les aspects fortement aléatoires du problème considéré et à rechercher dans une seconde phase le degré d'incertitude acceptable pour la marge de sécurité jugée suffisante.

Les conceptions probabilistes qui en découlent interviennent non seulement au niveau des concepts structuraux mais également au niveau de certains problèmes particuliers dans les ouvrages.

La notion probabiliste du degré de sécurité introduite de façon explicite dans le domaine de la construction par Marcel Prot [ 60 ] et Robert Lévi [ 9, 49 ] vers 1946 a pris une part de plus en plus grande dans la recherche des critères de sécurité. En effet, les travaux récents des chercheurs du monde entier, les travaux des commissions internationales, s'occupant de sécurité ont montré la nécessité d'étudier sur une base statistique non seulement la résistance des structures mais aussi les actions (les sollicitations) qui ont été jusqu'ici évalués dans la plus grande incertitude en prenant compte de manière forfaitaire leur variabilité. L'absence de fondement scientifique du concept de sécurité nous contraint à faire appel à la théorie des probabilités.

Dès ses premières activités conscientes de constructeur, l'homme a remarqué par l'expérience qu'il commet dans ses structures des erreurs de conception ou de construction qui peuvent entraîner leurs ruine après un temps variable. Pour éviter d'éventuelles conséquences catastrophiques, l'ingénieur a établi plusieurs méthodes de calcul qui introduisent certaine "marges de sécurité" pour se prémunir suffisamment, sinon tout à fait, du danger de dégâts.

Les premières méthode de calcul des structures se développent à partir de linéarité et de la considération déterministe des grandeurs en question, ce qui rendait naturel et utile l'usage "des contraintes admissibles" pour introduire la "marge de sécurité voulue". Ainsi, l'on définissait le concept, sans le comprendre tout à fait, du "coefficient de sécurité" comme le

nombre par lequel il fallait diviser la résistance des matériaux pour obtenir la contrainte admissible et l'on identifiait, dans un certain sens le coefficient de sécurité avec la marge de sécurité réelle de la structure [8].

Des études successives firent remarquer plus clairement le comportement (non linéaire) des matériaux et par suite des éléments structuraux dont ils faisaient partie, et mirent par conséquent en évidence l'ignorance des ingénieurs sur la marge de sécurité réelle quand il n'utilisait que les méthodes classiques aux contraintes admissibles. En plus, une analyse plus profonde de la sécurité des structures montra que les grandeurs et les méthodes utilisées dans les calculs, comme les charges, résistances et caractéristiques rhéologiques des matériaux, les résultats de superpositions, les hypothèses, ... etc. étaient de nature aléatoire. Une considération probabiliste des calculs apparaissait alors nécessaire [12, 44].

En ingénierie, pour le calcul et l'analyse, la résolution des incertitudes est devenue une nécessité, et c'est à cause de ces incertitudes que les coefficients de sécurité et les coefficients de majoration des charges sont traditionnellement exigés dans le calcul.

Les nouveaux règlements de conception et calcul des constructions sont différents des règlements antérieurs : ils sont en effet basé sur de nouveaux principes de sécurité. L'introduction de ces concepts probabilistes entraîne deux préalables : la nécessité d'acquérir des données statistiques et de les inclure de manière judicieuse dans un modèle mécanique en faisant usage de techniques modernes.

Ainsi, ces techniques de probabilités en structure ont un impact réel et important dans le cadre logique de l'analyse d'incertitude et constituent la base quantitative pour l'évaluation du risque et de la sécurité. Par ailleurs, le développement d'un dimensionnement probabiliste d'ouvrages importants dans un calcul global est au-delà des possibilités actuelles et l'apport des probabilités sera restreint dans un premier temps au niveau de l'analyse de structures courantes en vue de mettre en place une méthodologie d'optimisation stochastique.

## **1.2 Objectif visé**

L'objectif visé consistait à mettre en évidence l'intérêt des méthodes probabilistes et des recherches correspondantes dans le domaine de la construction.

C'est le développement et la formulation de cette méthode d'optimisation et sa mise en application pour plusieurs exemple de structures qui permettra de comparer les deux conceptions déterministe et probabiliste. Donc notre objectif est surtout de présenter une méthodologie concernant ces recherches sur l'approche stochastique par quelques applications. Donc en se plaçant au niveau du concept probabiliste de la sécurité on peut envisager le calcul sous deux optiques différentes. La première consiste en une analyse probabiliste, c'est à dire

en une évaluation de la probabilité globale de survie d'une structure à caractéristiques aléatoires connues, sous l'effet d'un ensemble d'actions aléatoires également connues. Cette probabilité doit être supérieure à une valeur préalablement établie. La deuxième se donne comme objectif de trouver la structure optimale qui peut supporter un ensemble d'actions aléatoires supposées connues : c'est la cas du dimensionnement probabiliste optimal.

L'objectif visé est d'identifier aussi les besoins et les conditions nécessaires à l'application d'une approche probabiliste et de montrer que les considérations du risque dans l'évaluation de la performance et la formulation du calcul sont maintenant pratiquement faisable et souhaitable. Et de montrer l'importance et le rôle de l'information sur la connaissance des incertitudes sur l'évolution du gain en fonction des variables considérées. Et l'influence des incertitudes et des probabilités sur la variation du coefficient de sécurité et par là la variation de l'optimum.

Enfin, montrer la contribution de l'outils stochastique à donner un sens scientifique au concept traditionnel du coefficient de sécurité qui est certainement mal défini et les principaux avantages acquis par cette approche probabiliste pour la sécurité et la performance des structures et que dans ce contexte qu'elles doivent être analysées et évaluées.

**ELEMENTS DE  
THEORIE  
DES PROBABILITES**

## ELEMENTS DE THEORIE DES PROBABILITES

### 2.1 Introduction

Le calcul des probabilités est l'étude des phénomènes aléatoires ou non déterministes. Pour certains, les probabilités ont la réputation d'être une branche difficile à comprendre. L'expérience montre que les difficultés se situent rarement au niveau des concepts mathématiques introduits, mais le plus souvent au niveau de la construction d'un modèle probabiliste permettant l'étude d'une situation concrète donnée.

Or les probabilités se prêtent, peut être mieux que toute autre branche mathématique, à développer l'aptitude à la modélisation mathématique, démarche scientifique qui doit occuper une place de premier plan dans la formation de tout ingénieur.

Les origines du calcul des probabilités remontent au 17<sup>ème</sup> siècle. Pendant une première période, elles ne constituaient en effet guère plus qu'une collection de méthodes combinatoires et algébriques. Depuis cette époque, les probabilités ont trouvé un nombre croissant d'applications dans des domaines plus scientifiques (problème de statistiques démographiques, en théorie des erreurs et en biologie). Au 20<sup>ème</sup> siècle, un nombre croissant de disciplines qui s'étendent des sciences naturelles et techniques jusqu'au sciences sociales et économiques, utilisant des méthodes probabilistes et statistiques [54, 62].

Cette extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard n'a été possible que grâce à un développement théorique auquel de nombreux mathématiciens ont contribué.

### 2.2 Expérience stochastique, événement

#### 2.2.1 Expérience stochastique

Une expérience est dite stochastique ou aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience stochastique peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques ; son résultat peut donc varier d'une réalisation à une autre.

Si l'on jette un dé en l'air, il est certain que le dé va retomber en faisant apparaître un 6. Supposant que l'on répète l'expérience plusieurs fois, soit  $s$  le nombre de succès, c'est à dire le nombre de fois où l'on a un 6 et soit  $n$  le nombre total de jets. On observe empiriquement que le rapport  $f = s / n$ , qu'on appelle fréquence relative devient stable à la longue et se rapproche d'une limite. C'est sur cette stabilité que repose toute la théorie des probabilités.

#### 2.2.2 Ensemble fondamental, événement

En théorie des probabilités, on introduit un ensemble  $\Omega$  dont les éléments  $\omega$  symbolisent les différentes épreuves, résultats ou éventualités d'une expérience aléatoire.

L'ensemble, noté en générale  $\Omega$ , de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'ensemble fondamental ou univers de cette expérience. On appelle événement tout sous ensemble de  $\Omega$ .

## 2.3 Le langage de la théorie des probabilités

En théorie des probabilités on s'intéresse à certains sous ensembles  $A$  de  $\Omega$  appelés événements à chacun desquels on affecte un nombre compris entre 0 et 1, ce nombre attestant de la fréquence de production de l'événement au cours d'expériences successives. Plus précisément on identifie la famille des événements auxquels on s'intéresse et qui constitue la famille  $P(\Omega)$  de parties de l'ensemble  $\Omega$  (ensemble fondamental).

### 2.3.1 La famille des événements

La famille  $P(\Omega)$  a les propriétés suivantes :

1.  $P(\Omega)$  contient la partie vide  $\phi$ , c'est l'événement vide,
2.  $P(\Omega)$  contient le plus grande partie possible, autrement dit, l'ensemble  $\Omega$  : c'est l'événement certain,
3. à tout événement  $E$ , on peut associer l'événement contraire  $E_c$ ,
4. à toute suite  $E_1, E_2, \dots, E_n$  d'événements, on peut associer l'événement  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , c'est l'événement qui se produit si l'un au moins des événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  se produit, et c'est l'événement qui ne se produit pas dans le cas contraire ; c'est à dire si aucun des événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  n'a lieu. De même, on peut définir l'événement  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$  comme étant l'événement se produisant si tous les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  se produisent simultanément.

### 2.3.2 Notion de probabilité

On affecte à tout événement  $E$  une probabilité  $P(E)$ , nombre compris entre 0 et 1 de façon que l'on ait :

1.  $P(\phi) = 0$ , ce qui signifie que l'ensemble vide a la probabilité nulle
2.  $P(\Omega) = 1$ , ce qui signifie que l'événement certain a, en moyenne, une fréquence de production égale à 1.
3. Si les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont disjoints, autrement dit, si deux quelconques d'entre eux ne peuvent se produire simultanément, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Ceci correspond au fait que, si l'on fait  $N$  expériences successives au cours desquelles  $E_1$  s'est produit  $n_1$  fois,  $E_2$  s'est produit  $n_2$  fois, l'événement  $E_1 \cup E_2$  se produit  $n_1 + n_2$  fois. La fréquence de production de cet événement :

$$(n_1 + n_2)/N = n_1/N + n_2/N$$

est donc égale à la somme des fréquences de production de  $E_1$  et de  $E_2$ .

### 2.3.3 Exemples d'espaces probabilisés

#### 2.3.3.1 Exemple (a)

Soient  $m_1$  un nombre réel et  $\sigma_1 > 0$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \tag{1}$$

pour tout intervalle  $I_1 = ]a_1, b_1[$  posons

$$P(I_1) = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx \tag{2}$$

On démontre que parmi toutes les familles parties de la droite  $\mathfrak{R} = \Omega$  qui contient les intervalles  $I$  et qui ont les propriétés §2.3.1a à §2.3.1d, il en existe une  $P_B(\mathfrak{R})$  plus petite que toutes les autres. Si  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sont des intervalles ouverts disjoints avec  $I_i = ]a_i, b_i[$ ,  $\cup I_i$  est donc un événement. C'est à dire qu'il appartient à la famille  $P_B(\mathfrak{R})$ , et que l'on peut poser :

$$P(\cup I_i) = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f_1(x) dx \tag{3}$$

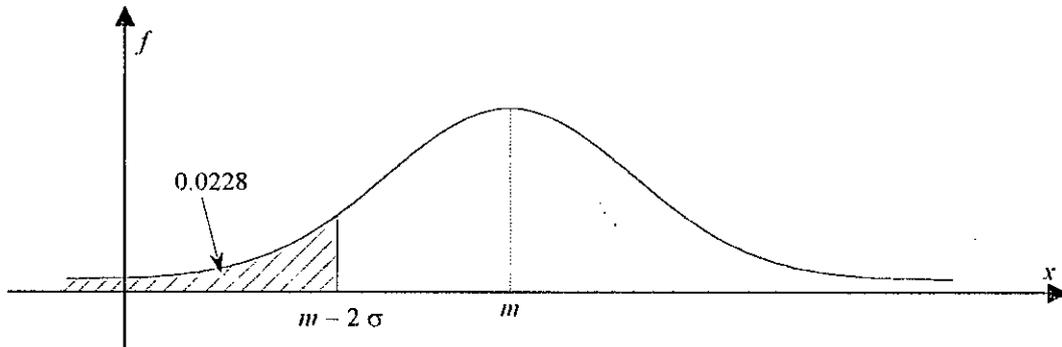


Figure 1.

On obtient ainsi une probabilité  $P$  et l'on dit que  $P$  a pour densité  $f(x)$ . Cette probabilité peut être utilisée si l'on s'intéresse à la limite élastique de l'acier (en Kg/mm<sup>2</sup> par exemple) fabriqué pendant une période donnée par un aciériste donné. Le nombre  $m$  est appelé la moyenne de la limite élastique car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = m_1 \tag{4}$$

Le nombre  $\sigma$  est appelé écart-type car on a en effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_1(x) dx = \sigma_1^2 \quad (5)$$

Plus  $\sigma$  est grand, plus la dispersion de la limite élastique est grande. Le nombre  $\sigma^2$  est appelé la variance.

En effet, les aciéristes ne donnent pas relativement à leurs production deux paramètres  $m$  et  $\sigma$  mais seulement le paramètre  $m - 2\sigma$  comme :

$$\int_{-\infty}^{m-2\sigma} f_1(x) dx = 0.0228 \quad (6)$$

On peut dire que la limite élastique a une probabilité d'environ 0.0228 d'être inférieure à  $m - 2\sigma$ . Notons que l'exemple ci-dessus peut être généralisé en remplaçant  $f$  par une fonction positive quelconque dont l'intégrale (sur toute la droite) est égale à 1.

### 2.3.3.2 Exemple (b)

Nous généralisons l'exemple précédent au cas de plusieurs variables :

On se donne un vecteur  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  de l'espace  $\mathfrak{R}^n$  à  $n$  dimensions. On définit le produit scalaire :

$$\bar{m} \cdot \bar{x} = (m, x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

des vecteurs  $m$  et  $x$  (où  $x$  est un vecteur arbitraire). On se donne une matrice symétrique  $[V] = n^2$  c'est à dire un tableau symétrique de  $n^2$  nombres  $V_{ij}$ . On note  $[B]$  la matrice inverse de  $[V]$ . On suppose que la matrice  $[V]$  est définie positive, autrement dit pour tout vecteur  $x$  non nul on a l'inégalité :

$$(V, x) = \sum_{i,j=1}^n V_{ij} x_i x_j > 0 \quad (7)$$

Soit  $|V|$  le déterminant de la matrice  $[V]$ , on pose alors :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}(B(x-m), x-m)} \quad (8)$$

Cette expression généralise (1).

On appelle pavé ouvert  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \prod_{j=1}^n I_j$  le produit de  $n$  intervalles ouverts  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . on peut alors écrire

$$P(I) = \iiint \dots \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2, \dots, dx_n \quad (9)$$

Cette expression généralise (2).

On démontre que parmi toutes les familles de parties de l'espace  $\mathfrak{R}^n = \Omega$ , qui contiennent les pavées ouverts et qui ont les propriétés §2.3.1.a à §2.3.1.d, il existe une plus petite que toutes les autres, notée  $P_B(\mathfrak{R}^n)$ . On peut démontré que si l'on intègre  $f$  sur  $\mathfrak{R}^n$ , autrement dit, si l'on fait  $I = \mathfrak{R}^n$  dans (9), on obtient  $P(\mathfrak{R}^n) = 1$ . La fonction  $f$  permet donc de définir une probabilité  $P$  sur la tribu  $P_B(\mathfrak{R}^n)$  et l'on dit que  $f$  est la densité de  $P$ . On projetant cette répartition de masse  $P$  sur le premier axe de coordonnées, on obtient une répartition de masse sur la droite.

Cette répartition de masse a pour densité :

$$f_1(x_1) = \iint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad (10)$$

On trouve :

$$f_1(x_1) = (2\pi V_{11})^{-1/2} \text{Exp}[-(x_1 - m_1)^2 / 2V_{11}] \quad (11)$$

On reconnaît une expression analogue à (1) avec  $\sigma_1^2 = V_{11}$ . on dit que  $f_1$  est la première densité marginale de  $P$  ; on définit de même les autres densités marginales  $f_2, \dots, f_n$ .

### 2.3.4 Analogie mécanique

En mécanique rationnelle, la répartition des masses dans un corps solide  $S$  de l'espace  $\mathfrak{N}^n$  ( $n=2$  ou  $n=3$ ) est caractérisée par une fonction densité  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nulle en dehors de  $S$ . Supposons que la masse totale est égale à 1.

$$\iint \dots \int_S f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (12)$$

on voit que le point  $m$  de coordonnées :

$$m_j = \iint \dots \int_S x_j f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n ; \quad j=1, 2, \dots, n$$

est le centre de gravité du solide  $S$

Le moment d'inertie de  $S$  par rapport à l'hyperplan d'équation  $x_1 = m_1$  est égal à :

$$M_{11} = \iint \dots \int_S (x_1 - m_1)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Cette intégrale est égale à  $V_{11}$  si  $f$  a l'expression (10).

Le moment d'inertie croisé de  $S$  par rapport aux hyperplans  $x_1 = m_1$  et  $x_2 = m_2$  correspond à :

$$M_{12} = \iint \dots \int_S (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Cette intégrale est égale à  $V_{12}$  si  $f$  a l'expression (10)

La matrice des nombres  $V_{ij}$  est la matrice centrale d'inertie. Cette matrice et les coordonnées du centre de gravité sont deux paramètres essentiels de la répartition de masse. Il en est de même en théorie des probabilités.

De plus, dans le cas particulier où  $f$  a l'expression (10), la répartition des masses est même entièrement caractérisée par la donnée du centre de gravité et de la matrice  $V_{ij}$ . On emploie donc en mécanique et en théorie des probabilités des langages équivalents (Tableau 1).

Mécanique	Théorie des probabilités
Répartition de masse sur $\mathfrak{N}^n$ de masse totale 1	Loi de probabilité sur $\mathfrak{N}^n$
Densité de la répartition de masse	Densité de la loi des probabilités
Matrice d'inertie	Matrice des moments d'ordre 2
Matrice centrale d'inertie	Matrice des covariances
Barycentre	Moyenne ou point moyen

**Tableau 2.1.**

## 2.4 Variable aléatoire

Soit  $\mathcal{P}(\Omega)$  une famille d'événements probabilisés et représentés par des parties d'un certain ensemble  $\Omega$ . Relativement à ces données, une variable aléatoire  $X_1$  est une application  $X_1$  de  $\Omega$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathfrak{R}$  des nombres réels, telle que pour tout intervalle  $I_1 = ]a_1, b_1[$  la partie de  $\Omega$  notée " $X_1 \in I_1$ " où  $X_1$  prend ses valeurs dans  $I_1$ , est un événement.

On appelle loi de la variable aléatoire  $X_1$  la répartition de masse  $\mu_1$  sur la droite qui est l'image de  $\mathcal{P}$  par l'application  $X$ . Ces définitions sont illustrées dans la figure 2 ci dessous :

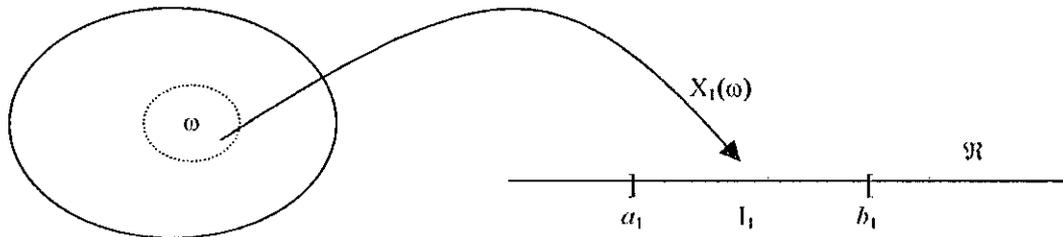


Figure 2.2.

" $X_1 \in I_1$ " est la partie de  $\Omega$ , formée par les points  $\omega$  de  $\Omega$ , tels que  $a_1 < X_1 < b_1$

Tout intervalle  $I_1$  et son image inverse " $X_1 \in I_1$ " portent la même masse :

$$\forall I_1, P(X_1 \in I_1) = \mu_1(I_1) \quad (13)$$

La loi de la variable aléatoire  $X_1$  est la loi de probabilité  $\mu_1$  sur  $\mathfrak{R}$  qui vérifie cette relation. La proportion logique " $X_1$  a pour loi  $\mu_1$ " sera notée :

$$X_1 \sim \mu_1 \quad (14)$$

La définition d'une variable aléatoire peut être schématisée de la manière suivante : une grandeur physique mesurée par un nombre (résistance, température, vitesse du vent, . . .) est dite aléatoire si elle dépend du hasard. Autrement dit, une grandeur physique  $X_1$  peut être caractérisée par une application définie sur le hasard  $\Omega$  à valeurs réelles. Plus généralement, lorsqu'on a  $n$  grandeurs physiques aléatoires, les applications  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{R}$  associées à ces grandeurs définissent une application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\bar{x}} & \mathfrak{R} \\ \omega & \longrightarrow & (x_1(\omega), x_2(\omega), \dots, x_n(\omega)) \end{array} \quad (15)$$

L'image de la probabilité  $P$  par cette application est une répartition de masse  $\mu$  sur  $\mathfrak{R}^n$  telle que, quelque soient les intervalles  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , on ait :

$$P("X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \dots \text{ et } X_n \in I_n") = \mu(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n) \quad (16)$$

On dit que  $\mu$  est la loi conjointe des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . Il faut noter que dans ces définitions, l'ensemble  $\Omega$  n'est pas défini de façon unique. Par exemple, lorsqu'on étudie  $n$  grandeurs aléatoires associées à des applications  $X_1, \dots, X_n$  de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{R}$ , on ne change rien du point de vue probabiliste en remplaçant  $\Omega$  par  $\mathfrak{R}^n$ , la probabilité  $P$  par la loi conjointe  $\mu$ , et chaque  $X_i$  par la  $i^{\text{ème}}$  projection canonique de l'espace produit  $\mathfrak{R}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R} & \xrightarrow{\pi_j} & \mathfrak{R} \\ X = (X_1, X_2, \dots, X_n) & \longrightarrow & X_j \end{array} \quad (17)$$

c'est ainsi d'ailleurs que nous procéderons.

## 2.5 Fonction de répartition

Si  $X_1$  est une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition la fonction  $F_1$  telle que :

$$\forall x, F_1(x) = P(" X_1 < x ") = P( X_1 \in ]-\infty, x[ ) \quad (18)$$

si la loi de  $X_1$  admet une densité  $f_1$  on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt ; \text{ d'où } F_1'(x) = f_1(x) \quad (19)$$

## 2.6 Exemples de variable aléatoire

### 2.6.1 Exemple (a)

Reprenons l'exemple a) §2.3.3.1, soit  $X$  l'application identique  $x \rightarrow x$  de la droite  $\mathfrak{R}$ . La probabilité  $P$  coïncide avec la loi  $\mu$  de  $X$ . On peut poser :

$$\mu = N(m, \sigma^2) \quad (20)$$

On dit que  $\mu$  est une loi normale (ou Gaussienne) de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

Signalons que la fonction de répartition de la normale réduite  $N(0, 1)$  est tabulée et figure dans les bibliothèques d'ordinateurs, elle est parfois appelée fonction *Erf* ou  $\Phi$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (21)$$

si  $X_1$  est une variable aléatoire de loi  $N(m, \sigma^2)$ , on calcul la fonction de répartition  $F_1$  de  $X_1$  en notant que  $(x-m)/\sigma$  est normale réduite :

$$F_1(x) = P(X_1 < x_0) = P\left(\frac{X_1 - m}{\sigma} < \frac{x_0 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right) \quad (22)$$

### 2.6.2 Exemple (b)

Reprenons l'exemple b) §2.3.3.2, soit  $k$  un entier quelconque compris entre 1 et  $n$ . Considérons la  $k^{\text{ème}}$  projection canonique  $\Pi_k$  de l'espace produit  $\mathfrak{R}^n$  (voir l'expression 17).  $X_k$  est une variable aléatoire de loi  $N(m_k, V_{kk})$  et l'on dit que  $(X_1, \dots, X_n)$  est un ensemble gaussien de variables aléatoires.

## 2.7 Moyenne, variance, covariance

Supposons que la variable aléatoire  $X$  a pour loi  $f_1(x_1) dx_1$ , on écrit :

$$X \sim f_1(x_1) dx_1 \quad (23)$$

On définit alors la moyenne de  $X$  (ou espérance mathématique de  $X$ ) par :

$$\bar{X} = m_1 = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (24)$$

on définit la variance de  $X$  par :

$$\sigma^2(x) = Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^2 f_1(x_1) dx_1 \quad (25)$$

soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de moyennes  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. On appelle loi conjointe de ces deux variables aléatoires la probabilité  $\mu$  sur  $\mathfrak{R}^2$  qui est l'image de  $P$  par l'application  $(X_1, X_2)$  :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathfrak{R}^2 \\ \omega &\longrightarrow X_1(\omega), X_2(\omega) \end{aligned}$$

Si  $\mu$  a pour densité  $f(X_1, X_2)$ , on définit la covariance de  $X_1$  et de  $X_2$  par :

$$Cov(X_1, X_2) = \int (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (26)$$

## 2.8 Indépendance, dépendance et coefficient de corrélation

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires. On note  $f_1(X_1)$ ,  $f_2(X_2)$ ,  $f(X_1, X_2)$  les densités de  $X_1$ ,  $X_2$  et de la loi conjointe. On dit que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants si :

$$f(X_1, X_2) = f_1(X_1) \cdot f_2(X_2) \quad (27)$$

Une méthode plus générale pour définir l'indépendance de deux variables aléatoires consiste à définir d'abord l'indépendance de deux événements  $E_1$  et  $E_2$ .

$$E_1 \text{ et } E_2 \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \quad (28)$$

Puis l'on définit l'indépendance des deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  par la condition : quelque soient les intervalles  $I_1$  et  $I_2$ , les événements " $X_1 \in I_1$ " et " $X_2 \in I_2$ " sont indépendants. Dans le cas particulier où  $X_1$  et  $X_2$  sont gaussiennes l'expression de  $f$ , donnée par l'équation (8), avec  $n = 2$ , montre que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants si, et seulement si,  $V_{12} = 0$ . Graphiquement, cela se traduit par le fait que les ellipses d'égale densité ont des axes parallèles aux axes de coordonnées (figure 2.3)

Au contraire, si ces ellipses ont des directions d'axes obliques et si elles s'allongent dans une certaine direction, ceci correspond à une certaine liaison entre  $X_1$  et  $X_2$ . Plus précisément, pour tout nombre réel  $k$ , on a, puisque l'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif :

$$\iint [(x_2 - m_2) - k(x_1 - m_1)]^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq 0 \quad (29)$$

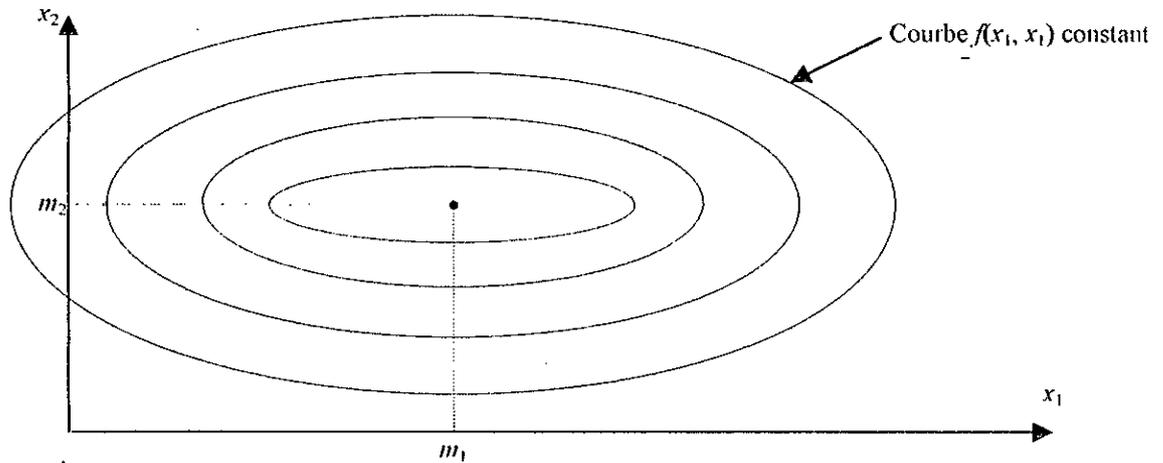


Figure 2.3.

En développant le crochet, on voit que cette relation équivaut à :

$$k^2 \sigma^2(x_2) - 2k \text{Cov}(X_1, X_2) + \sigma^2(X_1) \geq 0 \quad (30)$$

par conséquent :

$$| \text{Cov}(X_1, X_2) | \leq \sigma(X_1) \cdot \sigma(X_2) \quad (31)$$

Dans le cas particulier où l'on a une égalité, le trinôme (30) admet la racine double  $k_0$  et par conséquent, revenons à (29), on voit que l'on a presque sûrement (c'est à dire avec une probabilité 1) la relation :

$$(x_2 - m_2) - k_0(x_1 - m_1) = 0 \quad (32)$$

Soit :

$$(x_2 - m_2) = k_0(x_1 - m_1)$$

d'où une relation de dépendance entre les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ .

En conclusion, on définit le coefficient de corrélation  $\rho$  entre  $X_1$  et  $X_2$  par la formule :

$$\rho(X_1, X_2) = [\text{Cov}(X_1, X_2)] / [\sigma(X_1) \cdot \sigma(X_2)] \quad (33)$$

on a toujours  $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq +1$

Lorsque  $|\rho|$  est petit, les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont "peu" dépendantes : elles sont même indépendantes si  $\rho = 0$  dans le cas gaussien. Lorsque  $|\rho|$  est grand, les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont "très" dépendantes : elles sont même liées si  $\rho = \pm 1$ .

Notons que dans le cas gaussien, si  $\rho$  tend vers  $+1$  ou vers  $-1$ , les ellipses d'égalité de densité dégèrent selon la droite passant par  $(m_1, m_2)$  et de coefficient angulaire  $k_0$ . De plus, la forme quadratique :

$$V_{11} x_1^2 + 2 V_{12} x_1 x_2 + V_{22} x_2^2$$

S'annule pour le vecteur non nul  $(x_1, x_2) = (k_0, -1)$ . La matrice de coefficient  $V_{ij}$  ne vérifie plus la condition (7) : la loi gaussienne correspondante est dite dégénérée. De telles lois interviennent aussi lorsque certaines variables sont "certaines" (c'est à dire qu'elles prennent des valeurs connues).

## 2.9 Espace vectoriel des variables aléatoires relatives à une catégorie donnée d'événements probabilisés

Considérons un espace probabilisé  $(\Omega, P(\Omega), P)$ , cela signifie que l'on considère une famille  $P(\Omega)$  d'événements représentée par des parties d'un certain ensemble  $\Omega$ , chaque événement  $E$  de  $P(\Omega)$  étant affecté d'une probabilité  $P$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires relatives à ces données et  $\lambda$  un nombre réel quelconque. On peut alors définir, naturellement  $\lambda X$  et  $X+Y$  puisque  $X$  et  $Y$  sont représentées par des fonctions numériques définies sur  $\Omega$ . On voit que ces définitions munissent l'ensemble des variables aléatoires relatives à  $(\Omega, P(\Omega), P)$  d'une structure d'espace vectoriel.

Nous admettons le théorème selon lequel :

1. La moyenne de la somme de deux variables aléatoires est la somme des moyennes.
2. La variance de  $X+Y$  est reliée aux variances de  $X$  et de  $Y$  par la formule

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y) \quad (34)$$

3. Si la loi conjointe de plusieurs variables aléatoires est Gaussienne, alors la somme de ces variables l'est aussi.
4. Pour tout réel  $\lambda$  on a :

$$\overline{\lambda X} = \lambda \overline{X} \text{ et } Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$$

5. Si la densité de la loi de  $X$  est  $\Phi(x)$ , la densité de la loi de  $\lambda X$  est  $\lambda \Phi(\lambda x)$

Remarque: Si on a  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  formant un ensemble Gaussien, Cet

ensemble est défini par la donnée du vecteur  $\mathbf{m} (m_1, m_2, \dots, m_n)$  et la matrice symétrique inertielle positive  $[V]$ .

On démontre une formule importante qui généralise la relation (22) (voir annexe 2) et permet de calculer la probabilité de  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$  qui suit une loi normale.

## 2.10 Application

Une barre de section constante, définie par des paramètres  $I$  et  $\nu$  est soumise à un moment fléchissant aléatoire  $M_f$  dont la loi de probabilité  $f_1(x_1)dx_1$  est supposée connue. La résistance élastique  $\sigma_e$  de l'acier constituant cette barre est une variable aléatoire dont la loi  $g(x_2) dx_2$  est supposée connue (2.3.3.a). On cherche qu'elle est la probabilité de l'événement  $E$  de dépassement de la résistance élastique  $\sigma_e$ . Pour chercher la solution, on prend pour  $M_f$  une convention de signe telle que sa valeur moyenne soit positive.

Le moment de début de plastification est la variable aléatoire  $M_p = I/\nu \sigma_e$  (d'après 2.9 e), la densité de la loi de  $M_p$  est  $g_2(x_2) = I/\nu g(\frac{\nu}{I} x_2)$ .

Le chargement de la poutre, étant indépendant de sa résistance effective, on peut considérer que  $M_p$  et  $M_f$  sont de variables aléatoires indépendantes. Etant donné  $f(X_1, X_2) = f(X_1) \cdot f(X_2)$  si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes (voir Equation 27).

La loi conjointes de  $M_f$  et  $M_p$  a pour densité le produit de  $f_1$  et  $f_2$ .

Représentons l'espace probabilisé  $\Omega$  par  $\mathfrak{R}^2$ . L'événement  $E$  est caractérisé par  $M_f > M_p$ .  $E$  est donc représenté par le demi-plan hachuré de la figure 2.4.

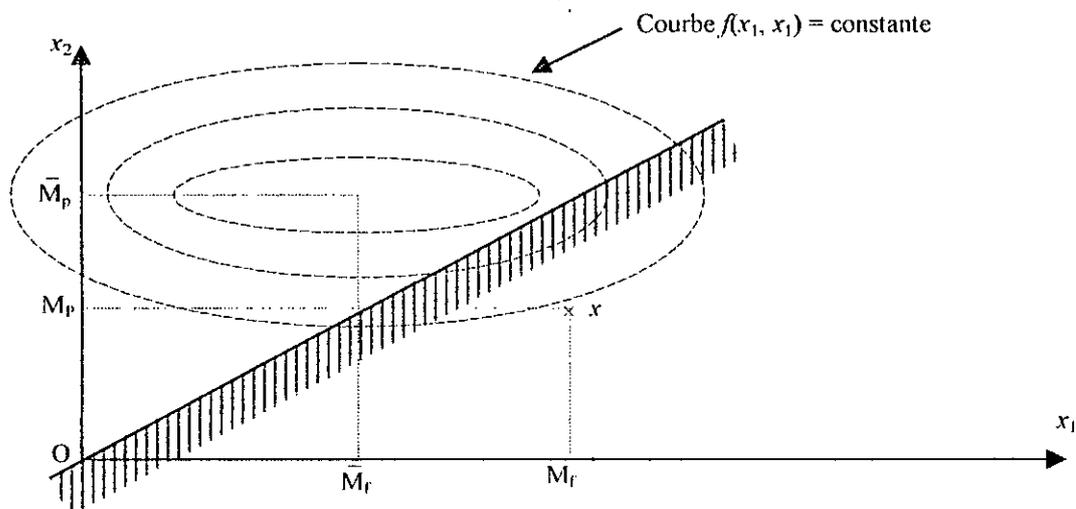


Figure 2.4.

La probabilité de  $E$  est donc égale à l'intégrale de  $f$  sur  $E$

$$P(E) = \iint_{E'} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) dx_2$$

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) F_2(x_1) dx_1 \quad (35)$$

Où  $F_2$  est la fonction de répartition du moment résistant et  $f_1$  est la densité du moment fléchissant. Cette formule est classique.

Si les lois de charge et de résistance sont quelconques l'évaluation de cette intégrale se fait à l'aide des formules de quadrature ou par des méthodes Monte-Carlo [47].

Dans le cas où les lois de charges et de résistances sont gaussiennes, il résulte d'après 2.9 que la variable aléatoire

$$X = M_p - M_f = I/v \sigma_c - M_f$$

est une variable aléatoire gaussienne de moyenne et de variance connues

$$\bar{X} = \bar{M}_p - \bar{M}_f = I/v \bar{\sigma}_c - \bar{M}_f$$

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = \text{Var}(M_p) + \text{Var}(M_f) = I^2/v^2 \text{Var}(\sigma_c) + \text{Var}(M_f)$$

On a alors :  $P(E) = P(X < 0)$ . D'après (22) on obtient :  $P(E) = \Phi(-\bar{X}/\sigma(X))$ .

Autrement dit, la probabilité cherchée s'obtient simplement en consultant une table de la loi normale centrée et réduite.

*Interprétation* : On voit que  $P(E)$  diminue lorsque la différence  $\bar{M}_p - \bar{M}_f$  augmente. De plus,  $P(E)$  augmente lorsque  $I^2/v^2 \text{Var}(\sigma_c) + \text{Var}(M_f)$  augmente ; c'est à dire lorsque les dispersions de la résistance et de la charge augmente. Finalement, dans ce cas simple, la sécurité dépend non seulement de la différence du moment résistant et du moment appliqué, mais aussi de la dispersion de ces grandeurs, c'est à dire de leurs variances.

# ELEMENTS D'OPTIMISATION

## ELEMENTS D'OPTIMISATION – DEFINITIONS

### 3.1 Introduction

Le mot optimisation en mathématique désigne la recherche des conditions moyennants pour lesquelles une fonction donnée atteint un optimum, qui se présente le plus souvent comme un extremum (c'est à dire un maximum ou un minimum).

C'est la recherche de la meilleure solution, évaluée selon certains critères avec prise en compte des conditions nécessaires. On voit immédiatement à quel point ce genre de problème peut répondre à des préoccupations pratiques de tout ordre ; physique, mécanique, technique, économique, . . . etc.

Historiquement, le problème de maximiser ou de minimiser une fonction sous des conditions d'égalités est un problème mathématique bien classique (c'est un problème d'optimisation qui remonte à Lagrange, après un premier intérêt porté par Monge en 1776 à un problème de ce genre) [42]. Le fait d'étendre la théorie de Lagrange et de ses multiplicateurs au cas où il y a aussi des contraintes d'inégalités est relativement nouveau et les premiers résultats ne datent que depuis 1948. (C'est à dire ce n'est qu'après la deuxième guerre mondiale que ces méthodes ont connues un développement considérable, surtout avec l'avènement des ordinateurs) [16, 37, 35].

### 3.2 Rôle de l'optimisation

Le rôle de l'optimisation dans la construction est capital, elle permet de déterminer la meilleure solution d'un problème et d'aboutir à des coûts minimaux. Le développement des méthodes d'optimisation n'a servi qu'à rendre explicite la recherche, l'évolution et le classement des options.

Les tendances faites pour développer ces méthodes ont eu pour effets bénéfiques d'affiner notre compréhension du projet, d'identifier les applications valables de la sous optimisation et de restructurer un grand nombre des processus partiels qu'intègre l'étude du projet.

### 3.3 Définitions

#### 3.3.1 Eléments de l'optimisation

Parmi les différentes méthodes ou formes d'optimisation (par exemple les méthodes variationnelles, les méthodes des multiplicateurs de Lagrange qui ne seront pas pris en

compte), nous allons présenter ici une classe de méthodes d'optimisation appelée programmation mathématique.

La programmation mathématique se propose pour objet, l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution.

La présence du terme « programmation » dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie et de la recherche opérationnelle.

Très naturellement, la terminologie employée alors reflète l'étroite relation existant entre l'activité d'analyse mathématique d'un problème et son interprétation économique (la recherche d'un programme économique optimal).

C'est ainsi que G. B. Dantzig propose en 1949 [16] le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmes liés à la programmation des fonctions sous contraintes linéaires. Dans le même sens, Kuhm et Tucker [37] proposent le nom de programmation non linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaires avec ou sans contraintes.

La programmation mathématique est aujourd'hui une branche particulièrement active. La première, c'est peut être le nombre, la variété et l'importance de ses applications que ce soit dans les sciences de l'ingénieur ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées.

### 3.3.2 Formulation du problème

D'une façon générale, le problème d'optimisation peut être formulé ou énoncé sous forme fonctionnelle comme suit :

$$(A) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } W = C(X) & (1a) \\ \text{Soumis à : } F(X) = 0 & (1b) \\ G(X) \leq 0 & (1c) \end{cases}$$

où le vecteur  $X$  est le vecteur des variables du projet (variables de décision, variables de conception).  $C(X)$  est la fonction objective (fonction critère ou économique).  $F(X)$ ,  $G(X)$  sont appelées contraintes ou fonctions de limitation.

### 3.3.3 Variables de décisions

Les variables de conception ou de décision ou variables de calcul sont constituées par des

sections ou par les dimensions (épaisseur, longueur, ...) de la structure à optimiser ou par d'autres paramètres. Dans les structures à deux ou trois dimensions ceux qui définissent la géométrie sont particulièrement intéressants à déterminer afin de minimaliser la quantité des matériaux mis en œuvre.

Le calcul consiste à définir les valeurs des composantes du vecteur  $X : x_1, x_2, \dots, x_n$ , qui sont les inconnus du problème (on appelle ces composants les variables de décision).

### 3.3.4 Contraintes

La structure calculée doit satisfaire aux exigences fonctionnelles concernant la résistance, l'utilisation, ... etc. Ces exigences qu'on appelle conditions sont les limitations ou les contraintes du problème. Comme le montre l'équation (1), il convient de répartir les contraintes en deux classes : celles qui doivent être satisfaites comme des égalités strictes (1b) et celles qui sont régies par des inégalités (1c).

### 3.3.5 Fonction objective

Parmi les facteurs caractéristiques d'une structure, il y a toujours un dont l'importance prédomine. C'est ce facteur qui constitue le critère d'optimisation et qui est représenté sous la forme d'une fonction objective  $C(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (on dit aussi parfois : fonction économique, fonction critère ou critère de mérite).

En outre, le critère de mérite n'exige pas d'être déterministe et peut s'exprimer en terme de probabilité.

En optimisation des structures, on utilise souvent un volume minimal comme critère plutôt qu'un coût minimal pour la raison que les coefficients de coût sont trop difficiles à déterminer.

## 3.4 Type de problème d'optimisation

### 3.4.1 Problèmes déterministes

Soit une structure dont les charges, résistances, géométrie (dimensions) sont fixées (c'est à dire qu'on connaît avec certitude les données). Le problème du dimensionnement optimal consiste à déterminer les variables  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  qui optimisent une certaine fonction de mérite (appelée fonction objective ou fonction critère) et satisfaisant également aux limitations (ou contraintes). Il peut être énoncé sous la même forme que le (A) du 3.2.

### 3.4.2 Problèmes probabilistes

Supposons maintenant que les charges et les résistances des éléments soient des variables aléatoires définies par des modèles mathématiques à paramètres statistiques connus à l'exception des valeurs moyennes des résistances qui restent à déterminer.

Les conditions de sécurité contre la ruine peuvent être spécifiées en adoptant des niveaux de "confiance" convenables.

En générale, le problème de dimensionnement probabiliste optimal peut être énoncé comme suit :

- Pour une structure, charges probables et variations de résistance connues
- Trouver les résistances moyennes des éléments tels que des niveaux de confiance spécifiés et des conditions d'économie déterminées soient satisfaits.

## 3.5 Méthodes et formulation générale d'un problème d'optimisation déterministe

### *Première illustration : Treillis à trois barres*

Afin d'illustrer la formulation des variables de conception (ou de décision), considérons le treillis symétrique constitué de trois barres de la figure 3.1 cet exemple était le premier présenté par Schmit [55]. Le matériau de la structure est l'acier et la structure est soumise à deux charges distinctes  $P_1$  et  $P_2$  respectivement. Les paramètres préalablement attribués représentent les propriétés du matériau (module d'élasticité, densité, contrainte limite, . . . etc.). La topologie de la structure (trois barres entre les nœuds A-B, A-C et A-D) et les coordonnées des nœuds sont les paramètres de la configuration. Les variables de décision représentent les sections transversales  $A_1$  et  $A_2$  des barres.

En générale, les variables de décision sont indépendantes dans le problème d'optimisation. Une fois que leurs valeurs ont été choisies d'une façon ou d'une autre, la structure est complètement déterminée et son comportement peut être évalué à partir des équations d'analyses.

Par comportement nous voulons dire les quantités qui sont les résultats d'une analyse, tels que les forces, les contraintes, les déplacements. Puisque le comportement de la structure dépend de la valeur des variables de décision. Il peut être représenté par un groupe de variable de comportement dépendants.

Bien que la distinction ci-dessus entre variables (de décision) indépendantes et de

comportement dépendantes semble être naturel, d'autres formulations peuvent être utiles. Les différentes possibilités seront discutées en 3.7.

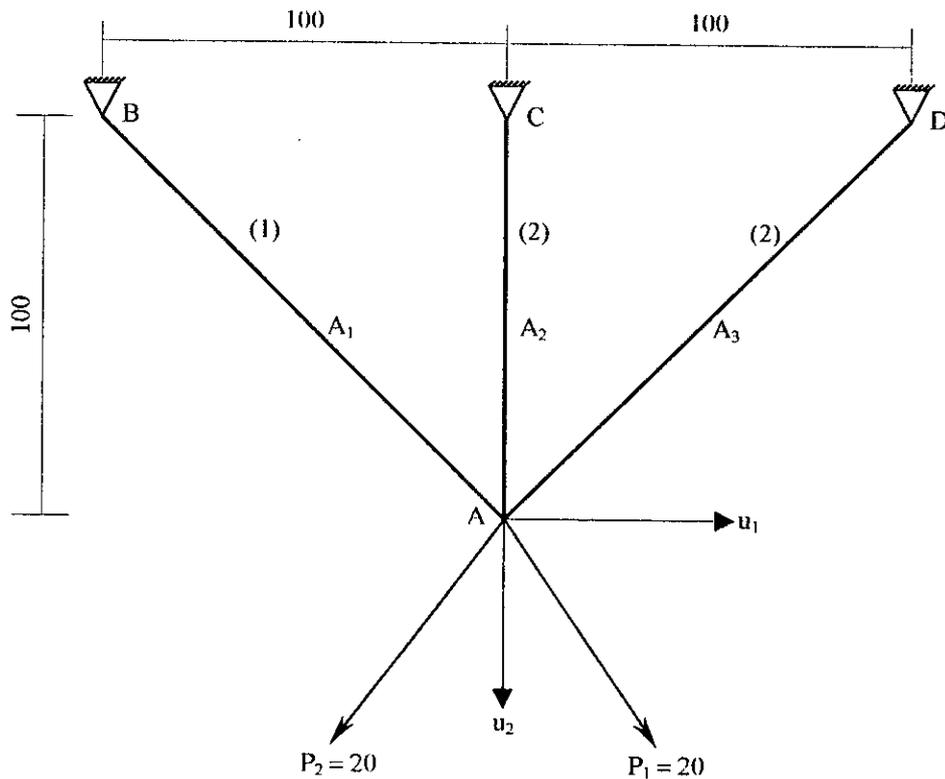


Figure 1. Exemple d'un treillis à 3 barres

### 3.6 Contraintes

Chaque groupe de valeur pour les variables de décision (ou de conception) représente une conception de la structure. Clairement, quelques conceptions sont des solutions utiles pour l'optimisation du problème, mais d'autres peuvent être inadéquates en terme de fonctions, comportement ou autre considération. Si une conception satisfait toutes les exigences (ou conditions) imposées, elle sera dite "solution admissible" (ou solution faisable).

Les conditions (ou restrictions) qui doivent être satisfaites afin d'obtenir une conception faisable sont dites "contraintes". Du point de vue physique, on peut identifier deux sortes de contraintes :

1- Les contraintes imposées sur les variables de conception et qui limitent leur champs (portée étendue) pour des raisons que des considérations sont appelées contraintes de conception ou contraintes de "bon côté".

Les contraintes qui sont explicitées en forme peuvent provenir de différentes considérations telles que la fonctionnalité, la fabrication, ou l'esthétique. De cette façon, une contrainte de conception est une limitation spécifique (ou imposée) sur une variable de conception.

2- Les contraintes qui dérivent des exigences sur le comportement sont appelées "contraintes de comportement". Les limitations sur les contraintes maximales, déplacements et flambements sont des exemples typiques de contraintes de comportement.

Des contraintes de comportement explicites ou implicites sont toutes deux rencontrées dans la conception pratique. Les contraintes de comportement explicites sont souvent données par des formules présentées dans des cadres de conception ou dans des spécifications. Cependant, les contraintes de comportement sont généralement implicites.

D'un point de vue mathématique, les contraintes de conception et de comportement peuvent être usuellement exprimées comme un groupe d'inégalités.

$$g_i(X) \leq 0 ; i=1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

où  $m$  est le nombre de contraintes d'inégalité et  $X$  est le vecteur des variables qui peut comprendre les variables de décision et de comportement.

Souvent dans un problème de conception des structures, on a aussi à considérer des contraintes d'égalité de la forme générale :

$$h_i(X) = 0 ; i=1, 2, \dots, k \quad (3.2)$$

où  $k$  est le nombre d'égalités.

Dans la plupart des cas, les contraintes d'égalité peuvent être utilisées pour éliminer des variables du processus d'optimisation en réduisant leur nombre

En général, les équations d'analyse d'un problème sous condition peuvent être exprimées en terme de variables dans la forme de l'équation (3.2). Cependant, si nous choisissons les variables comme indépendantes, alors ces équations peuvent calculer les variables de comportement (dépendantes) pour chacune des conceptions données.

Cette procédure est avantageuse dans plusieurs cas puisque nous avons à trouver les valeurs optimales d'un nombre moindre de variables, et le problème est dit avoir une dimension plus basse.

L'égalité (3.2) peut représenter aussi différentes considérations de conception tel qu'un rapport désiré entre la longueur de la section transversale et son épaisseur.

De telles simples et explicites contraintes peuvent facilement être utilisées pour réduire le nombre de variables indépendantes. Cependant, dans certains cas la procédure d'élimination peut être complexe et consomme du temps et quelques contraintes d'égalité doivent être considérées.

### *3.6.1 Contraintes de comportement explicites*

En général, les contraintes de comportement sont des fonctions non linéaires des variables de décision, cela peut être le cas même des structures élastiques avec une analyse linéaire. Pour illustrer ce point ainsi que la nature explicite des contraintes de comportement, considérons une formulation générale de la méthode des déplacements en analyse. Cette méthode est un outil d'analyse universel en pratique courante dans le calcul optimal des structures mais on peut souligner que les formulations d'une conception optimale ne sont pas restreintes à une méthode spécifique d'analyse et d'autre méthode peuvent être employées.

L'analyse commence avec la construction de l'équation de la matrice de rigidité de l'élément (voir annexe) :

$$[K]_e \{U\}_e = \{R\}_e \quad (3.3)$$

où le vecteur  $\{R\}_e$  représente le vecteur force nodale de l'élément.  $\{U\}_e$  est le vecteur déplacements correspondant et  $[K]_e$  est la matrice de rigidité de l'élément.

Les coefficients de la matrice de rigidité peuvent être des fonctions linéaires des variables de conception, si ces dernières représentent la surface de la section transversale ou le moment d'inertie par exemple.

Les équations du système complet peuvent être obtenues à partir des équations des éléments en appliquant le processus classique d'assemblage (voir annexe).

$$[K]\{U\}=\{R\} \quad (3.4)$$

où  $[K]$  est la matrice de rigidité globale et  $\{U\}$  est le vecteur de déplacements nodaux global et  $\{R\}$  est le vecteur de chargement extérieur appliqué.

Considérons les limitations sur les déplacements  $\{U\}$ , exprimées sous forme (3.1)

$$\{U\}-\{U^a\} \leq 0 \quad (3.5)$$

où  $\{U^a\}$  est le vecteur de la limite supérieur où des déplacements spécifiques.

Substituons  $\{U\}$  de (3.4) dans (3.5) on trouve :

$$[K]^{-1}\{R\} - \{U^a\} \leq 0 \quad (3.6)$$

où la matrice  $[K]^{-1}$  est la matrice inverse de  $[K]$

Il est généralement plus efficace d'utiliser les techniques de résolution.

*Remarque :* La matrice  $[K]^{-1}$  est une fonction linéaire de variables de conception, et en général il n'est pas possible de l'exprimer explicitement en terme de ces variables.

Considérons les limitations des contraintes :

$$\{\sigma\}-\{\sigma^a\} \leq 0 \quad (3.7)$$

où  $\{\sigma\}$  est le vecteur contraintes et  $\{\sigma^a\}$  est le vecteur des contraintes admissibles spécifiques.  $\{\sigma\}$  est calculé de :

$$\{\sigma\}=[S]\{U\}=[S][K]^{-1}\{R\} \quad (3.8)$$

où  $[S]$  est une matrice du système qui exprime les contraintes en fonction des déplacements.

Substituons l'équation (3.8) dans l'équation (3.7). La limitation des contraintes devient :

$$[S][K]^{-1}\{R\} - \{\sigma^a\} \leq 0 \quad (3.9)$$

Du fait de la dépendance avec la matrice inverse  $[K]^{-1}$  les contraintes sont aussi, en général une solution implicite et non linéaire des variables de conception.

Revenons à l'exemple donné (exemple du treillis à trois barres) de la figure 1. Les paramètres préalablement attribués sont supposés donnés :

Chargement appliqué :  $P_2 = 20$ .

Contraintes admissibles

Traction (limite supérieure) :  $\sigma_s^a = 20$

compression (limite influence) :  $\sigma_i^a = 15$

Limite inférieure de la surface de la section transversale :  $A_i = 0$

Du fait de la symétrie de chargement et de la géométrie, le nombre de variables de conception se réduit à deux variables ( $A_1, A_2$ ) et seulement une seule condition de chargement peut être considérée.

Les conditions du problème de conceptions, (sous la forme de l'équation 3.1) sont :

1) contraintes de conceptions :

$$g_1 \equiv -A_1 \leq 0 ; g_2 \equiv -A_2 \leq 0 \quad (3.10)$$

2) contraintes de comportement :

$$\begin{aligned} g_3 \equiv \sigma_1 - 20 \leq 0 & ; g_4 \equiv -\sigma_1 - 15 \leq 0 & ; g_5 \equiv \sigma_2 - 20 \leq 0 ; \\ g_6 \equiv -\sigma_2 - 15 \leq 0 & ; g_7 \equiv \sigma_3 - 20 \leq 0 & ; g_8 \equiv -\sigma_3 - 15 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les contraintes sont calculées par l'équation (3.8) (voir en annexe comment on obtient la matrice[S]) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{E}{100} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

où E est le module d'élasticité

Les déplacements  $U_1$  et  $U_2$  (voir figure 1) sont calculés par les équations d'analyse des déplacements (voir 3.4)

$$\frac{E}{100\sqrt{2}} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 + \sqrt{2} A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

$$[K] \quad \{U\} = \{R\}$$

dans cet exemple simple, il est aussi possible d'exprimer explicitement les déplacements en terme de variables de conception de l'équation (3.13) ; on trouve :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{20 \cdot 100}{E} \begin{Bmatrix} 1/A_1 \\ 1/(A_1 + \sqrt{2} A_2) \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Substituons (3.14) dans (3.12), on obtient les contraintes exprimées en terme de variables de conception (ou de décision)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 20 \frac{A_2 + \sqrt{2} A_1}{2 A_1 A_2 + \sqrt{2} A_1^2} \\ \sigma_2 &= 20 \frac{\sqrt{2} A_1}{2 A_1 A_2 + \sqrt{2} A_1^2} \\ \sigma_3 &= -20 \frac{A_2}{2 A_1 A_2 + \sqrt{2} A_1^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Seulement les conditions (ou limitations) qui peuvent affecter la conception doivent être considérées. Puisque  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont toujours positives et  $\sigma_3$  négative, nous pouvons considérer seulement les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 - 20 &\leq 0 \\ \sigma_2 - 20 &\leq 0 \\ -\sigma_3 - 15 &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituons (3.15) dans l'équation (3.16) on obtient les limitations (ou conditions) en contraintes explicites suivantes :

$$\sigma_1 - 20 \equiv \frac{20 (A_2 + \sqrt{2} A_1)}{2 A_1 A_2 + \sqrt{2} A_1^2} - 20 \leq 0$$

$$\sigma_2 - 20 \equiv \frac{20\sqrt{2} A_1}{2A_1A_2 + \sqrt{2} A_1^2} - 20 \leq 0 \quad (3.17)$$

$$-\sigma_3 - 15 \equiv \frac{20A_2}{2A_1A_2 + \sqrt{2} A_1^2} - 15 \leq 0$$

La représentation graphique de ces conditions dans le plan formé par  $A_1, A_2$  est montré sur la figure 2

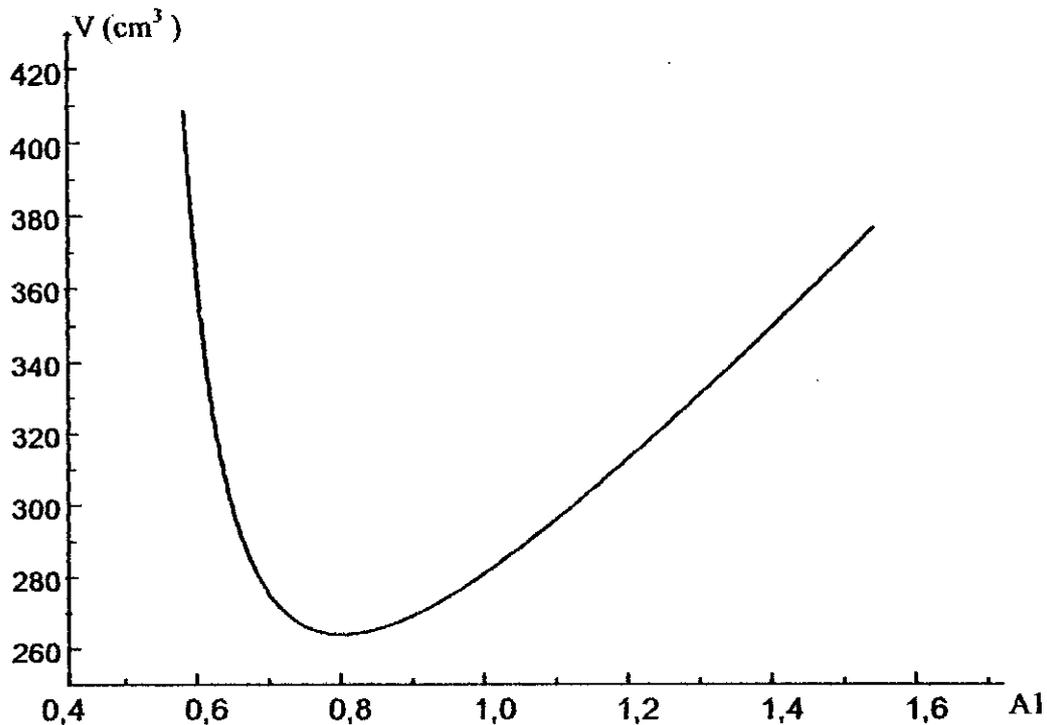


Figure 1 : Fonction objective

Solution optimale :  $A_1 = 0.79$  ;  $A_2 = 0.41$  ;  $Z_{op} = V_{op} = 263.89 \text{ cm}^3$

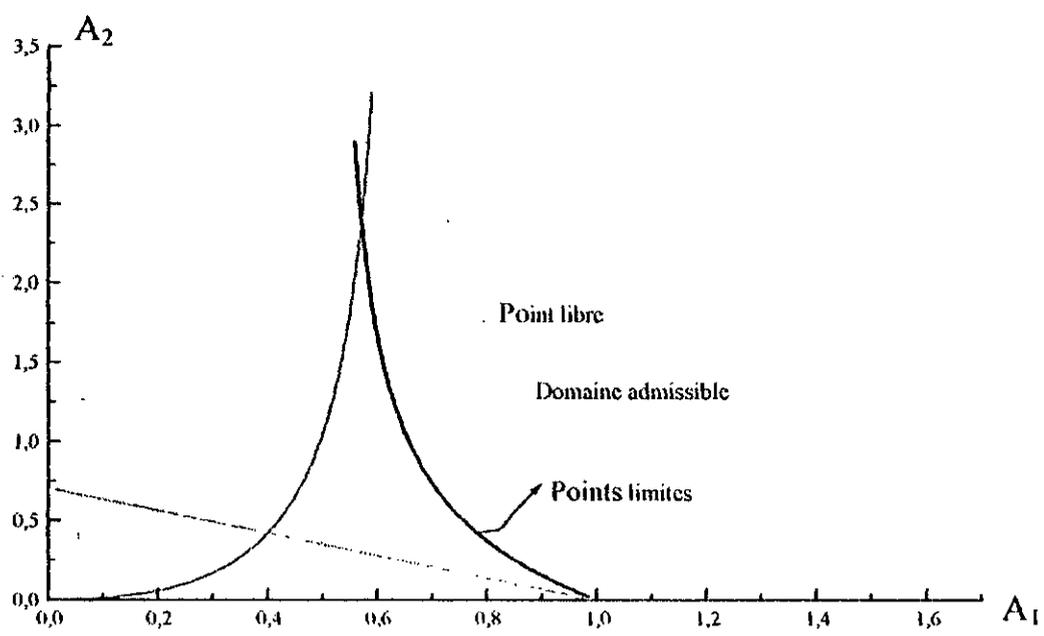


Figure 2 . Espace de conception

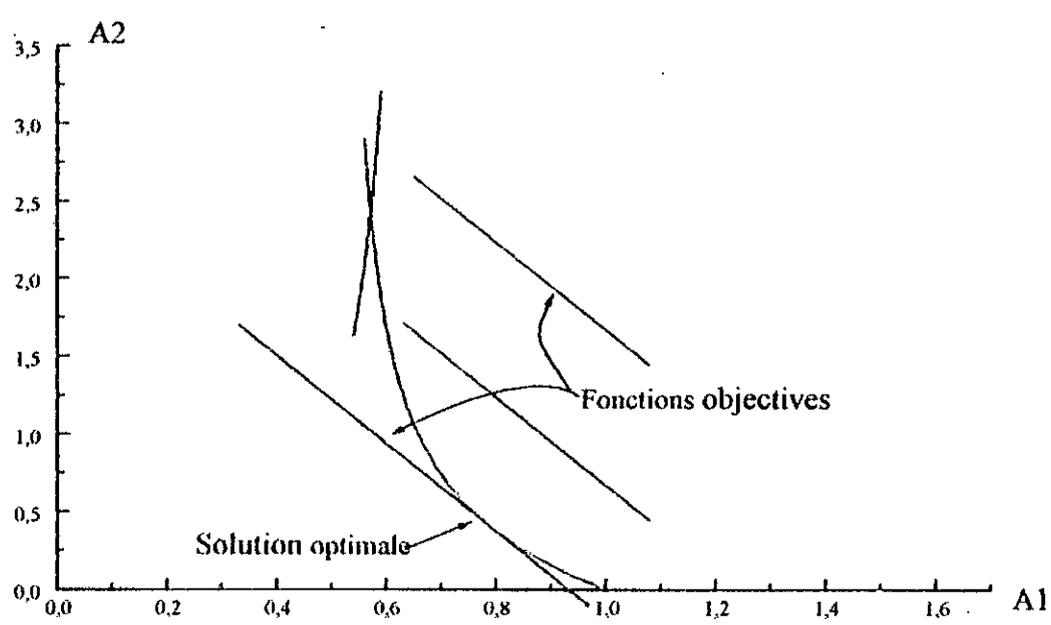


Figure 3: Espace de calcul et fonction objective

### 3.7 Espace de conception

Nous pouvons voir chaque variable de décision comme une dimension dans un espace de conception, et chaque groupe particulier de ces variables comme un point de cet espace. Dans le cas de deux variables, l'espace de conception se ramène à un plan. Dans le cas général de  $n$  variables, nous avons un hyperplan de dimension  $n$ . Une conception qui satisfait toutes ces contraintes  $g_i(x) \leq 0$  est une conception faisable.

Le groupe de valeurs des variables de conception qui satisfait l'équation  $g_i(x) = 0$  forme une surface dans l'espace de conception. C'est une surface dans le sens qu'elle coupe l'espace en deux régions, une où  $g_i > 0$  et l'autre où  $g_i < 0$ . L'espace de conception et les surfaces de contraintes (conditions) pour l'exemple des trois barres est montré sur la figure 2.

Le groupe de toutes les conceptions faisables forme la région faisable. Les parties des surfaces de contraintes respectives qui limitent la région faisable forment la surface de contraintes composées.

Les points à l'intérieur de la région faisable (c'est à dire où  $g_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ) sont appelés points libres, ou conception sans contraintes. Les points sur la surface (c'est à dire les conceptions faisables pour lesquels  $g_i = 0$ ) sont appelés points limites.

Il est possible que la région faisable soit composée de deux ou plus de sous régions disjointes, mais ceci est rare dans les problèmes de conceptions où les éléments ne peuvent pas être éliminés.

Le sous espace où deux ou plusieurs contraintes  $g_i(x) = 0$  est appelé une intersection. Dans l'espace à deux dimensions, l'intersection de deux contraintes est un point.

La  $i^{\text{ème}}$  contrainte est dite être active en un point de conception si  $g_i(x) = 0$  et elle est dite passive si  $g_i(x) < 0$ . Si  $g_i(x) > 0$ , la contrainte est violée et la conception correspondante est infaisable.

Les contraintes d'égalité :

$$h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, k$$

introduisent un couplage entre les variables et peuvent être vues comme des surfaces dans l'espace de conception à  $n$  dimensions. Les points de conception faisables doivent être localisés à l'intersection de ces surfaces. Le nombre des contraintes d'égalité,  $k$  doit satisfaire  $k \leq T$  où  $T$  est le nombre total des variables. Dans le cas où  $k = T$ , les variables peuvent en

principe être déterminées comme solutions des équations :  $h_i(x) = 0$  et il n'y a pas de problème d'optimisation au sens propre.

### 3.8 Fonction objective

Il existe habituellement un nombre infini de conceptions faisables. Pour obtenir la meilleure, il est nécessaire de former une fonction de variables à utiliser pour la comparaison des conceptions faisables.

La fonction objective (appelée aussi coût, critère, ou fonction de mérite) est la fonction à partir de laquelle la plus petite valeur est recherchée dans un problème d'optimisation. C'est une fonction de variable  $x$  et elle peut représenter le poids, le coût de la structure ou n'importe quel autre critère à partir duquel une conception possible est préférée aux autres.

Nous supposons toujours que la fonction objective  $z = f(x)$  doit être minimisée, ceci n'implique aucune diminution de la généralisation, puisque le minimum de  $-f(x)$  est obtenu lorsque  $f(x)$  est maximum, c'est à dire :

$$\max ( f(x) ) = - \min ( -f(x) ) \quad (3.18)$$

Le choix d'une fonction objective peut être une des plus importantes décisions dans la procédure d'une conception optimale. Dans certaines situations, une fonction objective évidente existe. Par exemple, si le coût de la structure est supposé être proportionnel au poids de celle-ci, alors la fonction objective peut être la poids.

La formulation mathématique de la fonction objective peut être une tâche très difficile, par exemple lorsque des valeurs esthétiques importantes sont influencées par les variables de décisions. En général, la fonction objective représente la propriété simple la plus importante d'une conception. Mais elle peut représenter aussi la résultante d'un certain nombre de propriétés.

Des précautions doivent être prises pour optimiser par rapport à la fonction objective qui reflète au mieux, le véritable but du problème d'optimisation.

Le poids est la fonction objective la plus habituellement utilisée dû au fait qu'il est facilement quantifiable bien que la plupart des méthodes d'optimisation ne se limitent pas à la minimisation du poids. Le poids de la structure est souvent d'une importance critique, mais la minimisation du poids n'est pas toujours la plus facile.

Le coût est d'une importance pratique plus grande que celle du poids, mais il est souvent difficile d'obtenir suffisamment de données pour la construction d'une fonction réelle du

coût. Une fonction du coût général doit inclure le coût des matériaux, de la fabrication, du transport, ... etc.

En plus du coût engendré par la construction et la conception d'autres facteurs tels que mise en service, maintenance, réparation, assurance, ... etc., doivent être considérés. Cependant, il n'est pas toujours désirable de considérer une fonction aussi large que possible.

D'un point de vue pratique, il est demandé d'introduire une fonction objective qui est à la fois sensible aux variations des variables de décision et à la composante la plus importante du coût.

Dans le chapitre quatre, on verra une autre approche (approche stochastique) c'est de considérer le coût initial de la structure et le coût de ruine. L'hypothèse est que le coût de ruine est donné par les coûts des dommages associés à une ruine particulière multiplié par sa probabilité d'occurrence ( $C_T = C_i + C_D P_{(-)}$ ).

En général, la fonction objective est une fonction non linéaire des variables de décision. Considérons à nouveau l'exemple des trois barres de la figure 1 et supposons que le volume du matériau est la fonction objective. Nous obtenons l'expression linéaire suivante :

$$z = 282.8 A_1 + 100 A_2 \quad (3.19)$$

Le lieu des points satisfaisant  $F(x) = C^0$  forme une surface. Pour chaque valeur de la constante, il correspond un élément différent de la famille des surfaces.

La figure 3 montre la famille des contours de volume (ou poids) constant appelés contours de la fonction objective pour l'exemple des trois barres. Chaque conception sur un contour particulier a le même volume.

On peut remarquer que le volume minimal de  $F(x)$  dans la région de faisabilité se produit au point A lequel représente la conception optimale (ou solution optimale).

### 3.9 Formulation dans l'espace des variables de conception

Le problème général de conception de la structure optimale peut être formulé comme étant le choix d'une conception et des variables de comportement correspondantes soumises aux contraintes relatives à la conception et au comportement de la structure, de telle sorte que la fonction objective soit minimale.

Si le comportement de la structure peut être facilement calculé pour n'importe quelle valeur donnée des variables de conception, les équations d'analyse peuvent être extraites de la formulation mathématique. Dans de tels cas, nous utilisons les équations d'analyse pour évaluer les contraintes qui sont données de façon implicite. Une formulation explicite de ces contraintes est possible seulement pour des structures déterminées ou simples.

Supposons que toutes les contraintes d'égalité peuvent être éliminées, le problème de conception optimal peut être formulé mathématiquement comme étant une façon de choisir le vecteur des variables de décision  $\{X\}$  de telle sorte que :

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.20)$$

$$z = F(x) \longrightarrow \min \quad (3.21)$$

L'équation (3.21) signifie que  $F(x)$  donne un minimum

Ce problème est dit formulé dans l'espace de conception puisque les variables de décision sont les seules indépendantes. Les deux équations ci-dessus représentent une forme de problème appelé "programmation mathématique".

Sur la base des équations de contrainte (3.10) et (3.17) et supposant que la fonction objective est l'équation (3.19) alors l'exemple des trois barres de la figure 1 peut être formulé par la programmation mathématique comme suit : Trouver les variables de conception  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv -\Lambda_1 \leq 0 ; \\ g_2 &\equiv -\Lambda_2 \leq 0 ; \\ g_3 &\equiv \sigma_1 - 20 \equiv \frac{20(\Lambda_2 + \sqrt{2}\Lambda_1)}{2\Lambda_1\Lambda_2 + \sqrt{2}\Lambda_1^2} - 20 \leq 0 ; \\ g_4 &\equiv \sigma_2 - 20 \equiv \frac{20\sqrt{2}\Lambda_1}{2\Lambda_1\Lambda_2 + \sqrt{2}\Lambda_1^2} - 20 \leq 0 ; \\ g_5 &\equiv -\sigma_3 - 15 \equiv \frac{20\Lambda_2}{2\Lambda_1\Lambda_2 + \sqrt{2}\Lambda_1^2} - 15 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$z = 282.8 \Lambda_1 + 100 \Lambda_2 \longrightarrow \min \quad (3.23)$$

L'illustration de ce problème dans l'espace des variables de décision à deux dimensions est montré sur la figure 3. La conception optimale, c'est à dire une d'elles qui est faisable et dont la valeur de la fonction objective est minimale est au point A

$$\Lambda_1 = 0.798 ; \Lambda_2 = 0.40 ; \min z = 263.89$$

### 3.10 Deuxième illustration : FONDATION SUPERFICIELLE

#### 3.10.1 FONDATION FILANTE

Une fondation est destinée à transmettre au sol dans les conditions les plus favorables les charges provenant de la superstructure.

Lorsque le terrain résistant se trouve à une faible profondeur et qu'il est facilement accessible (nappe phréatique absente); on établit directement sur le sol à proximité de la surface

On appelle " fondation superficielle " toutes les fondations dont l'encastrement D dans le sol de fondation n'excède pas quatre fois la largeur B (de la semelle), c.-à-d. :  $D/B < 4$

Et elle est dite filante si  $L/B > 5$

Semelle isolée : le rapport  $L/B < 5$

Semelle carrée :  $L = B$  [41]

#### 3.10.2 Charge limite, contrainte de rupture et capacité portante

##### 3.10.2.1 Charge limite de la semelle : $Q_L$

c'est la charge maximale que peut supporter celle-ci et qui entraîne la rupture :

$$Q_L = Q_\gamma + Q_t + Q_c$$

avec :

$Q_\gamma$  : Résistance du sol pulvérisé sous le niveau de la semelle, avec  $\gamma$  poids spécifique des terres sous le niveau de la fondation.

$Q_t$  : Action des terres de fondations situées au dessus du niveau des fondations.

$Q_c$  : Action de la cohésion .

Si A est l'aire de la semelle, la contrainte de rupture de la semelle est :

$$\sigma_R = \frac{Q_L}{A} \quad (\text{ou } \sigma_t)$$

Est la pression moyenne de rupture sous la fondation est appelée : capacité portante de la semelle [15]

$$\sigma_t = 0.5\gamma BN_\gamma + CN_c + \gamma DN_q$$

Avec :

$N_\gamma, N_q$  et  $N_c$  coefficients appelés respectivement terme de surface, terme de profondeur et terme de cohésion.

$\gamma$  : poids spécifique de la terre

$B$ : largeur de la semelle filante.

Remarque : En pratique, dans les calculs on utilise la capacité portante nette  $\sigma_{ln}$

$$\sigma_{ln} = \sigma_t - \gamma D = 0.5\gamma BN_\gamma + CN_c + \gamma D(N_q - 1)$$

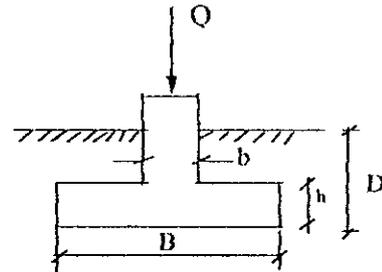


Figure 31

pour dimensionner une semelle, on utilise la contrainte admissible :  $\bar{\sigma}_s$

$$\bar{\sigma}_s = \sigma_t / \theta \quad (1)$$

$\theta$  Représente le coefficient de sécurité (généralement pris égale à 3)

Si  $\sigma_{ap}$  est la contrainte appliquée, on a la condition :

$$\sigma_{ap} \leq \bar{\sigma}_s \quad (2)$$

dans le calcul, on utilise plutôt :

$$\sigma_{an} = \sigma_{ap} - \gamma D$$

De (1) et (2), on tire :  $\sigma_{ap} \leq \frac{\sigma_t}{\theta}$

Si on pose :  $B = X_1$  et  $D = X_2$

Les contraintes du problème sont :

$$\begin{cases} g_1 = -X_1 \leq 0 \\ g_2 = -X_2 \leq 0 \\ g_3 = \sigma_{ap} - \sigma_t / \theta \end{cases}$$

Dans les calculs, on utilise :

$\sigma_{ln}$  : capacité portante

$\sigma_{an}$  : contrainte appliquée nette.

### 3.11 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME :

Choisissons pour fonction objective le poids propre de la fondation et le poids de la fouille de fondation.

$$W = \rho_b \left[ \frac{B(B-b)}{4} + \left[ D - \left( \frac{B-b}{4} \right) \right] b \right] + \rho_s B D \eta$$

On a multiplié le poids de la fouille par le facteur  $\eta$  qui prend en compte la différence de prix du béton  $C_b$  par rapport au prix de l'excavation de la fouille  $C_f$  :  $\eta = C_f/C_b$  (Voir fig.31)

pour l'exemple, de la semelle filante de la fig.3.1

avec  $Q = 80t$  et  $\theta=3$

la formulation est : trouver les variables de décisions  $X_1$  et  $X_2$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} g_1 = -X_1 \leq 0 & (1) \\ g_2 = -X_2 \leq 0 \\ g_3 = \sigma_{ap} - \sigma_1/\theta & (2) \end{cases}$$

$$G = 2.4 \left[ \frac{X_1(X_1-b)}{4} + \left[ X_2 - \left( \frac{X_1-b}{4} \right) \right] b \right] + 1.8 X_1 X_2 \eta \rightarrow \min$$

La contrainte (2), ramenée à une égalité nous donne :

$$\sigma_{an} = \frac{\sigma_{ln}}{3}$$

ou

$$Q/X_1 - \gamma D = \frac{0.5\gamma X_1 + C N_c + \gamma X_2 (N_q - 1)}{3}$$

L'illustration de ce problème dans le plan de deux variables de décisions est montré sur les figures 4, 5 et 6.

### 3.12 Application

$$Q=80t, \theta=3$$

On a un sol ferme de poids spécifique  $\gamma=18 \text{ KN/m}^3$ , les paramètres de cisaillement de ce sol sont :  $C_u=15 \text{ KN/m}^2$  et  $\varphi=30^\circ$

$\varphi=30^\circ$  donne (d'après Terzagui) [15]

$$\begin{cases} N_\gamma=20 \\ N_c=37 \end{cases}$$

Et  $N_q=22$

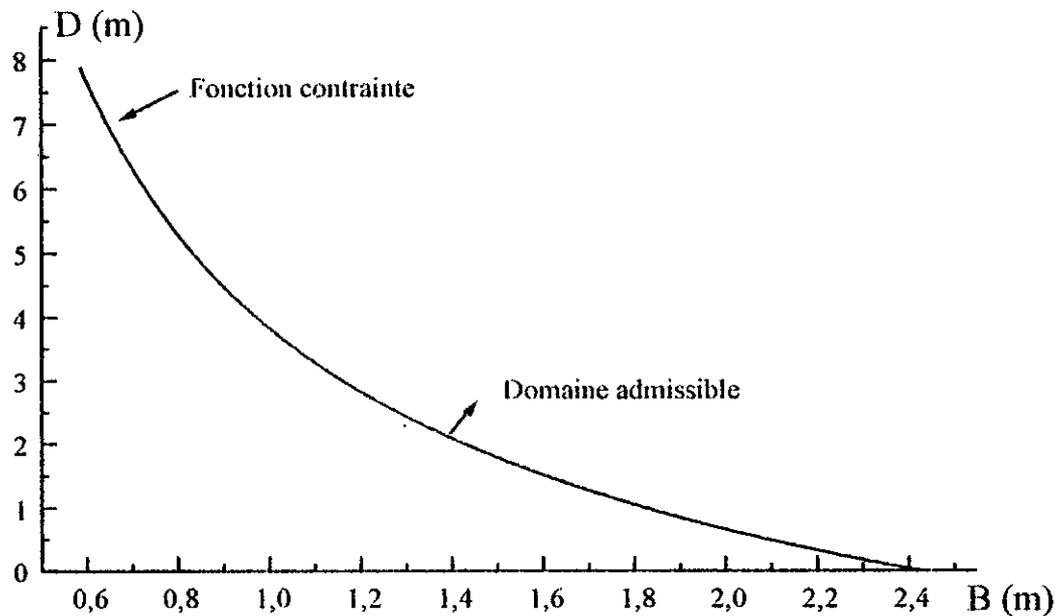


Fig.4 - Espace de calcul, semelle filante

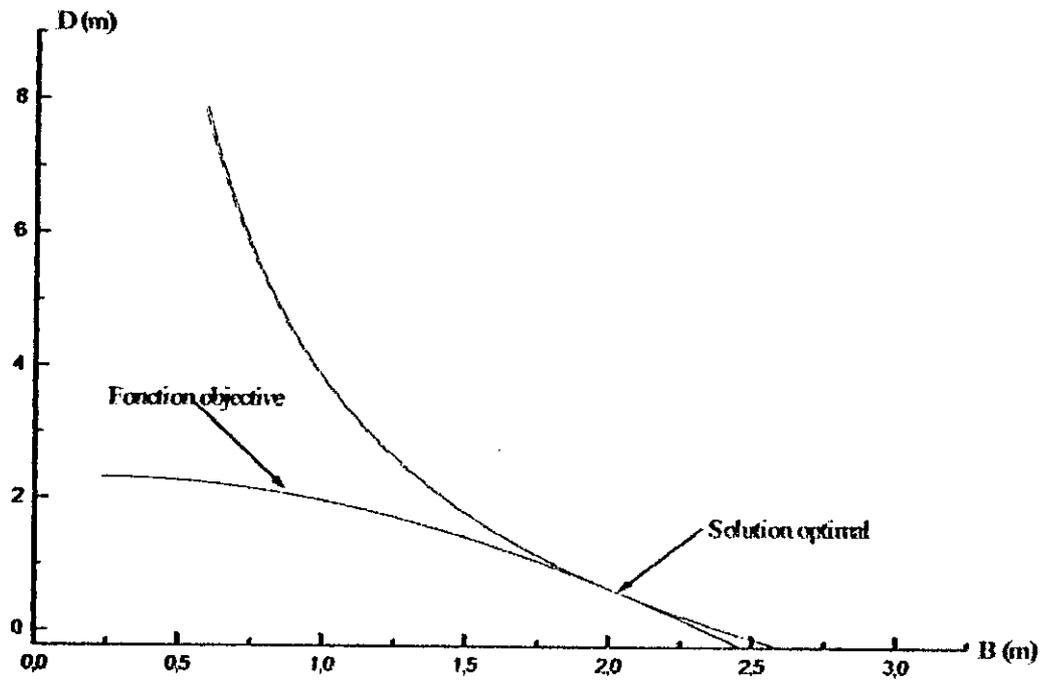


Fig.4 – Espace de calcul et fonction objective  
 Solution optimale (  $B_{op}=2.02$  ;  $D_{op}=0.64$  ;  $W_{op}=2.28$  )

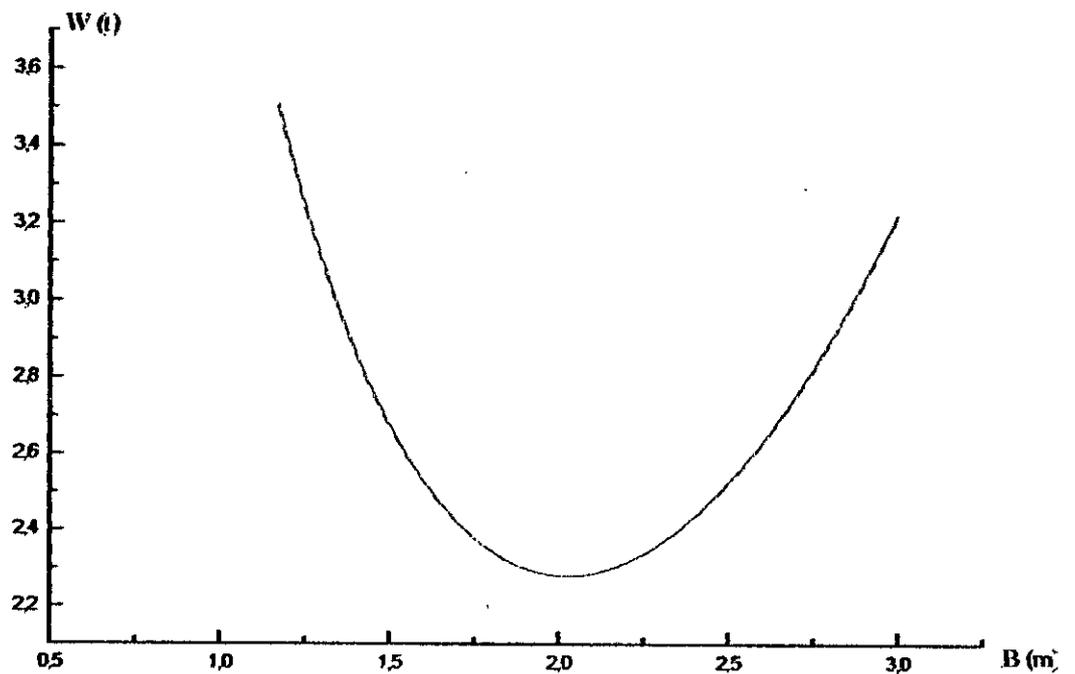


Fig.5 –fonction objective de la semelle filante  
 ( Optimum :  $B_{op}=2.02$  ;  $W_{op}=2.28$  t )

### 3.13 Troisième Illustration

considérons le treillis ci-dessous formé de 2 barres identiques.

Posons :  $X_1=H$  et  $X_2=D.e$

Les conditions du problème sont :

$$g_1 = -x_1 \leq 0 \quad (1)$$

$$g_2 = -x_2 \leq 0 \quad (2)$$

$$g_3 = \sigma_{app} - \sigma_e \leq 0$$

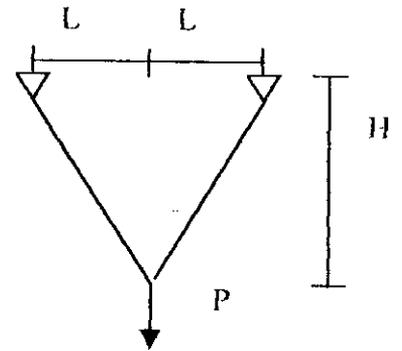


Fig.3.2

Si on désigne par  $T$  la tension dans chaque barre, la condition d'équilibre nous donne :

$$2T \cos \alpha = P$$

ou

$$T = \frac{P}{2 \cos \alpha} \quad (3)$$

De la figure 3.2, on tire que :  $\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}} \quad (4)$

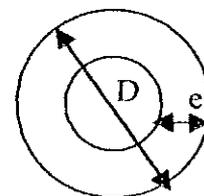
Donc :  $T = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{P \sqrt{L^2 + H^2}}{H} \quad (5)$

La contrainte appliquée dans chaque barre est :

$$\sigma_{app} = \frac{T}{A} \quad A : \text{section de la barre.}$$

Les sections des barres ont la forme indiquée ci-dessous :

$$A = \pi \cdot D \cdot e$$



En utilisant (5) on aura :

$$\sigma_{app} = \frac{T}{\pi \cdot D \cdot e} = \frac{P \cdot \sqrt{L^2 + H^2}}{H \cdot \pi \cdot D \cdot e} \quad (6)$$

**Formulation mathématique du problème :**

Choisissons pour fonction objective le poids des deux barres

$$Z = 2\pi \cdot X_2 \cdot \sqrt{L^2 + X_1} \cdot \gamma_{\text{acier}} \quad (7)$$

avec :

$$X_2 = D_e, \quad X_1 = H \quad \text{et} \quad L = 1\text{m}$$

$$Z = 2\pi \cdot X_2 \cdot \sqrt{1 + X_1} \cdot \gamma_{\text{acier}}$$

Finalement, en substituant (6) dans (2), la formulation pour cet exemple de treillis à deux barres est :

Trouver les variables de décision  $X_1$  et  $X_2$  de telle sorte que :

$$g_1 = -X_1 \leq 0$$

$$g_2 = -X_2 \leq 0$$

$$g_3 = \frac{P \sqrt{L^2 + X_1^2}}{2\pi X_1 X_2} - \sigma_c \leq 0$$

$$Z = 2\pi X_2 \sqrt{L^2 + X_1^2} \rightarrow \text{Min}$$

L'illustration de ce problème dans le plan des deux variables de décision est montrée sur la figure 7, 8, et 9

Application :      $P = 18 \text{ t}$   
                            $\sigma_c = 300 \text{ MPa}$

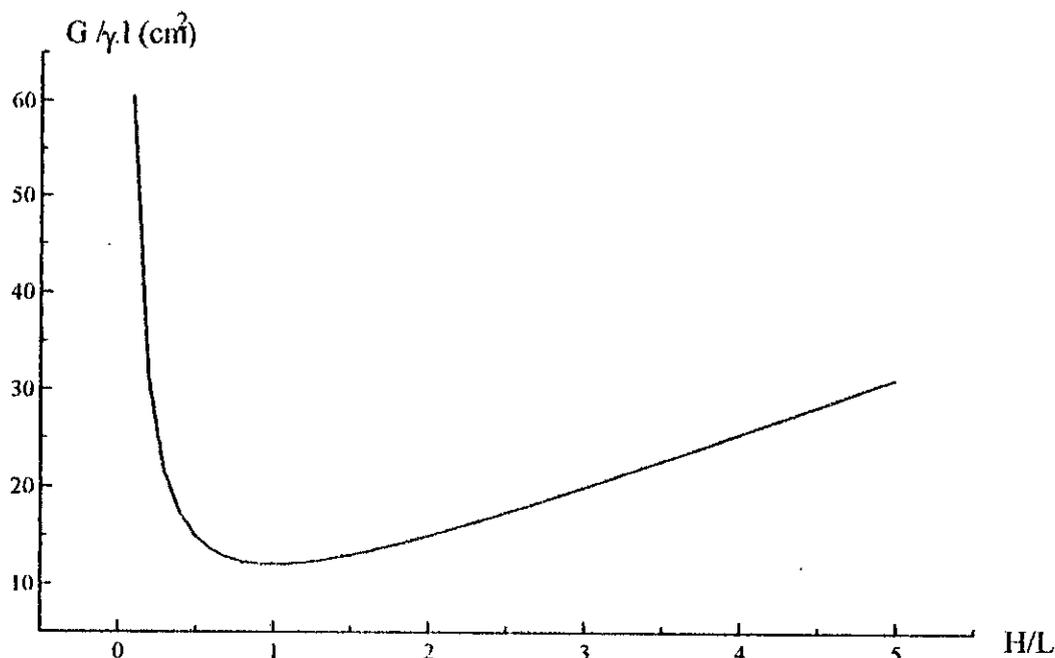


Figure 7 : Fonction objective pour l'exemple du treillis à deux barres

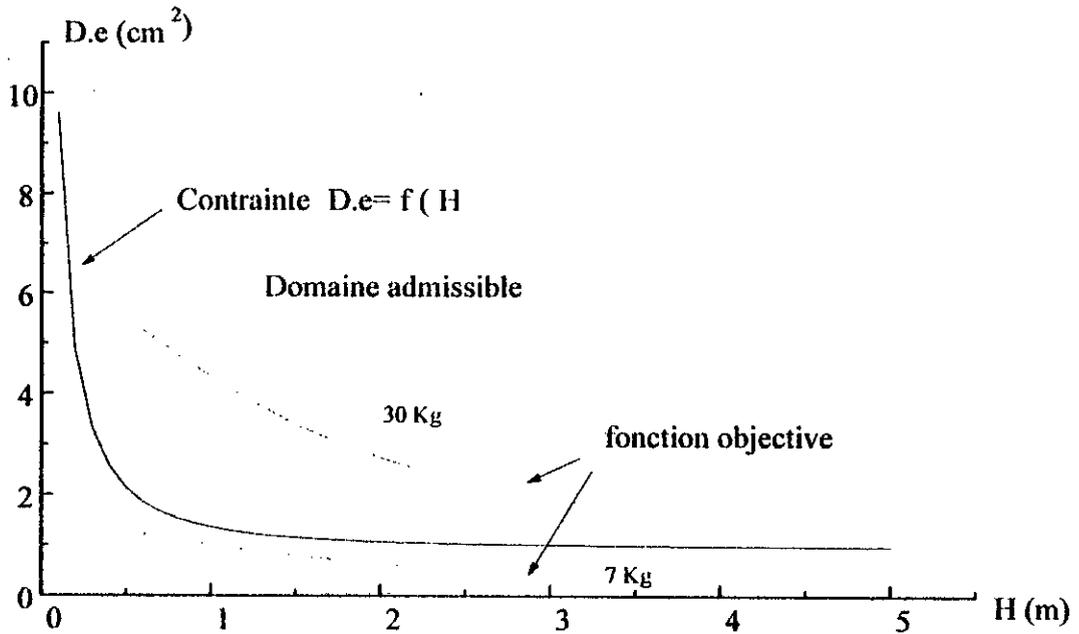


Figure 8 - Espace de calcul pour le treillis à deux barres

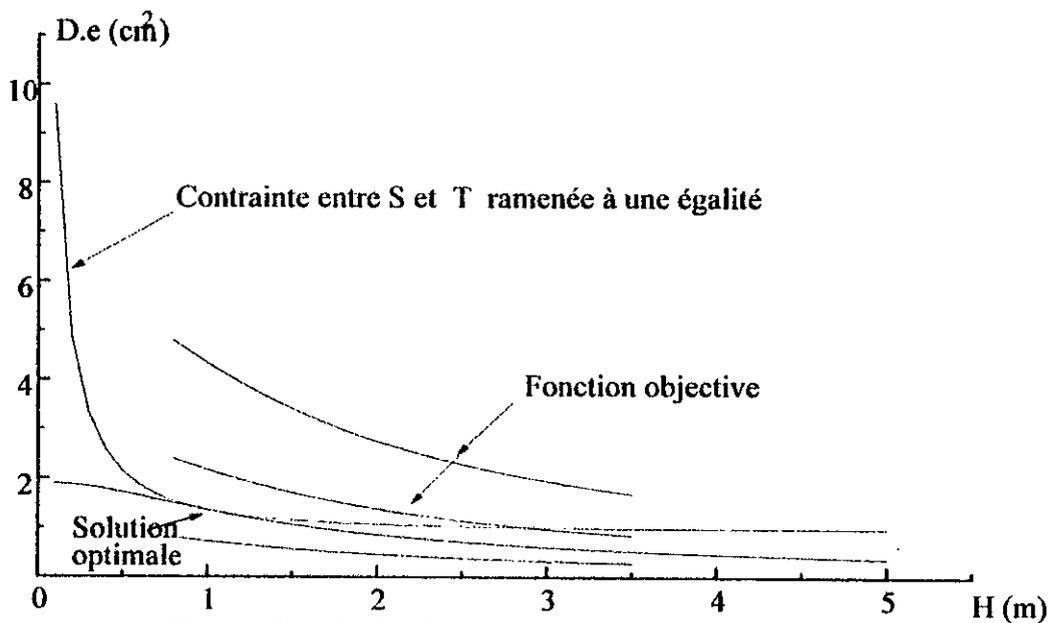


Figure 9 - Espace de calcul et fonctions objectives

( Solution optimale:  $H=1$ ;  $D.e=1.35\text{cm}^2$ ;  $W_{\min} = 9.36 \text{ t}$  )

# FIABILITE

## **FIABILITE**

### **4.1 Introduction**

La théorie de la fiabilité a comme objectif d'étudier l'aptitude de dispositifs techniques (machines, équipements, éléments, ..., etc.) à accomplir une fonction requise et le bon fonctionnement d'une structure (ou ouvrage) dans des conditions données et pour une durée de vie donnée.

Par définition, la fiabilité c'est la probabilité d'une structure (ou d'un dispositif quelconque) de fonctionner correctement sans défaillance dans des conditions déterminées et pour une période de temps définie. C'est aussi la sécurité que garantit une structure pour une période de temps définie. Il est logique de faire appel au calcul des probabilités pour résoudre des problèmes de fiabilité.

### **4.2 Incertitudes et analyse du risque**

Le calcul et l'analyse en ingénierie nécessitent la résolution des incertitudes. Du point de vue de ces incertitudes, le risque est inévitable.

Certes, c'est à cause de ces incertitudes que les coefficients de majoration des charges sont traditionnellement exigés dans le calcul. Cependant, les incertitudes et leur importance sur la sécurité et la performance des structures ne peuvent être systématiquement analysées que par les méthodes probabilistes. Ainsi les critères de calcul doivent aussi être développés selon une formulation probabiliste.

Les concepts théoriques des analyses du risque et de la fiabilité sont disponibles depuis longtemps [29, 35, 49, 50] et l'importance de tels concepts dans le calcul et la sécurité est bien reconnue. Cependant, l'application de ces concepts dans la pratique de l'ingénieur était limitée. Récemment, il y a de nouveaux efforts [6, 3, 14, 13] visant à appliquer la théorie de fiabilité dans les calculs. Ceux-ci comprennent le développement des formats de calcul statistiquement consistants [13, 51]. De tels efforts se sont concentrés sur la consistance des formats de calcul basé sur la probabilité, mais ont évité de se référer au risque ou probabilité de ruine.

D'autres développements [6, 5, 18] concernant la généralisation du modèle de fiabilité classique se concentrent sur les rôles du jugement de l'ingénieur dans le calcul du risque et des problèmes associés à l'application des mesures de risque explicite dans le calcul.

En tout cas, les rôles réels et importants de la probabilité dans les structures se trouvent dans le cadre logique de l'analyse d'incertitude et la base quantitative pour l'évaluation du risque et de la sécurité. Cependant, le risque comme conséquence d'incertitude est mesuré par la probabilité de ruine. Pour cette raison, il est important que la notion de probabilité de ruine soit acceptée, ne serait-ce que comme une mesure relative de sécurité et de performance.

Accepter cette mesure probabilistique de sécurité et de performance est nécessaire pour l'accomplissement total du potentiel de la théorie de fiabilité.

Malgré quelques imperfections (ou de très petites probabilités sont considérées) et le fait de ne pas accepter la probabilité de ruine, il y a des avantages significatifs et uniques donnés par la base probabiliste de l'analyse et du calcul de sécurité qui ne devraient pas être ignorés.

① Elle fournit une base importante pour l'évaluation systématique et l'analyse de l'incertitude d'une manière adéquate et convenable pour l'évaluation des effets d'incertitude sur la sécurité et le calcul.

② Le risque probabiliste et les mesures de fiabilité peuvent être soumises à des opérations logiques à travers la théorie mathématique des probabilités, permettant ainsi une approche "formelle" à l'analyse de la sécurité et à la performance des structures et des éléments structurales.

Tout comme d'autres concepts théoriques, la réalisation pratique de la théorie de fiabilité nécessite l'introduction de certaines hypothèses et approximations.

L'objectif visé ici est d'identifier les besoins et les conditions nécessaires à l'application d'une approche probabiliste et ensuite de montrer que la considération du risque dans l'évaluation de la performance et la formulation du calcul sont maintenant pratiquement faisables et souhaitables.

### **1.3 Bases pour l'évaluation du risque**

La ruine d'une structure qui signifie généralement l'atteinte d'un état limite allant jusqu'à l'effondrement peut être défini comme  $R \leq S$  où  $R$  et  $S$  sont respectivement la résistance de la structure et la charge appliquée (ou la sollicitation appliquée).  $R$  et  $S$  sont en général des variables aléatoires.

Sous les conditions idéales, dans lesquelles l'incertitude est strictement associée à la nature aléatoire de  $R$  et  $S$  et les distributions de probabilités sont connues, le risque est donné par la probabilité de ruine (ou rupture) :

$$P_f = P(R \leq S) \quad (1)$$

En réalité, notamment, les caractéristiques aléatoires de R et de S sont inconnues.

La forme des fonctions de distribution et des paramètres associés sont inconnues, il est seulement possible de faire des prévisions sur ce qu'ils sont ou ce qu'ils pourraient être en utilisant des modèles théoriques appropriés. De telles prévisions théoriques sont cependant constamment imparfaites et par conséquent sujettes à des erreurs. C'est pour cela que la simple hypothèse que la résistance et la sollicitation sont des variables aléatoires est insuffisante. Ceci va particulièrement modéliser les incertitudes associées à la nature aléatoire ou la variabilité. Cependant, ceci n'inclut pas les incertitudes associées aux erreurs de prévision.

Il n'apparaît pas clairement dans l'équation (1) Comment ces dernières incertitudes sont quantifiées et comment elles affectent le risque sous-jacent. Ces questions peuvent être résolues à travers le modèle de fiabilité étendu [5, 6] dont l'essentiel peut être exposé succinctement comme suit :

Comme on peut prévoir R et S, soient ces prévisions  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$  respectivement, à priori tout aléa sera modélisé dans  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$ . Dans le but de compenser les imperfections dans ces modèles prévisionnels, on introduit des facteurs de correction  $N_R$  et  $N_S$ , représentant les corrections aux prévisions théoriques de sorte que :

$$\begin{aligned} R &= N_R \tilde{R} \\ S &= N_S \tilde{S} \end{aligned} \quad (2)$$

De cette façon, les incertitudes associées aux erreurs de prévision sont considérées dans  $N_R$  et  $N_S$ . Par conséquent, dans le cas pratique, la probabilité de défaillance devient :

$$P_f = P(R \leq S) = P(N_R \tilde{R} \leq N_S \tilde{S}) \quad (3)$$

Pour pouvoir appliquer l'équations (3), les modèles  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$  appropriés pour une application spécifique doivent être déterminés. Ceci nécessite la détermination des distributions de probabilité de  $\tilde{R}$  et de  $\tilde{S}$ , y compris le forme des fonctions de distribution et des paramètres respectifs.

En pratique cependant, la forme des fonctions de distribution est généralement prescrite ou donnée (ou bien supposée)(guidée par l'information disponible ou spécifiée sur code si nécessaire), ainsi que les valeurs moyennes  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$ , et les écarts types  $\sigma_{\bar{R}}$  et  $\sigma_{\bar{S}}$  calculées

sur la base des données et d'informations disponibles, à partir desquelles on obtient les coefficients de variation :

$$\delta_R = \sigma_{\bar{R}} / \bar{R} \text{ et } \delta_S = \sigma_{\bar{S}} / \bar{S} \text{ (ainsi que d'autres paramètres de distribution si nécessaire).}$$

Toute erreur dans les modèles  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$  devrait être corrigée par  $N_R$  et  $N_S$ , qui peuvent être supposés être des variables aléatoires (Bayésiennes, de Bayes) avec des moyennes  $\bar{N}_R = \bar{N}_S = 1$  et des erreurs de prévision  $\Delta_R$  et  $\Delta_S$  représentant des valeurs des incertitudes associées au erreurs sur  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$  (dans Ang et Amin [4],  $N_R$  et  $N_S$  sont supposés être des constantes déterministes). Dans la théorie de l'approximation linéaire cependant, les erreurs de précision  $\Delta_R$  et  $\Delta_S$  peuvent être entièrement attribuées aux valeurs moyennes calculées de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$ . Par conséquent, même s'il y a des incertitudes associées aux valeurs calculées  $\sigma_{\bar{R}}$  et  $\sigma_{\bar{S}}$  ainsi qu'aux fonctions de distribution supposées,  $\Delta_R$  et  $\Delta_S$  peuvent être évalués (avec la théorie linéaire) en se référant aux erreurs sur les moyennes calculées  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$  uniquement.

En d'autres mots, dans l'approximation linéaire de premier ordre, toute erreur sur  $\sigma_{\bar{R}}$  et  $\sigma_{\bar{S}}$  ainsi que sur le moment supérieur est négligeable. (par exemple l'erreur sur la variance est un terme de second ordre [1, 58]) Conceptuellement, ceci équivaut à définir les facteurs correcteurs comme suit :

$$\begin{aligned} N_R &= \mu_R / \bar{R} \\ N_S &= \mu_S / \bar{S} \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\mu_R$  et  $\mu_S$  sont les vraies moyennes de  $R$  et de  $S$ , alors que les moyennes prévues  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$  sont des variables aléatoires avec des espérances  $E(\bar{R}) = \mu_R$  et  $E(\bar{S}) = \mu_S$ .

Ceci entraîne que  $\bar{N}_R = \bar{N}_S = 1$  et que les erreurs de précision  $\Delta_R$  et  $\Delta_S$  sont des erreurs sur  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$  relativement à  $\mu_R$  et  $\mu_S$  respectivement. Formellement, les  $\Delta$  ont un caractère Bayésien, dans le sens qu'elles diminuent avec plus d'information, alors que les valeurs de  $\delta$  peuvent rester constantes ou même augmenter.

Suivant l'équation (2), nous obtenons les moyennes de  $R$  et de  $S$  (en supposant une indépendance statistique entre  $\tilde{R}$  et  $\tilde{N}_R$  et entre  $\tilde{S}$  et  $\tilde{N}_S$ )

$$\mu_R = \bar{R} \text{ et } \mu_S = \bar{S} \quad (5)$$

alors que les incertitudes sur  $R$  et  $S$  se composent du coefficient de variation et de l'erreur de prévision et sont approximativement (voir annexe 3) :

$$\Omega_R = \sqrt{\delta_R^2 + \Delta_R^2} ; \text{ et } \Omega_S = \sqrt{\delta_S^2 + \Delta_S^2} \quad (6)$$

## 1.4 Calcul pratique du risque

Théoriquement, le calcul de la probabilité de ruine nécessite généralement l'évaluation d'intégrales multiples [3, 21, 30]. Pour cette raison, l'évaluation du risque n'est pas pratique et a donc contribué à la difficulté de mettre en œuvre les concepts de fiabilité en ingénierie (ou dans le domaine des science de l'ingénieur). Cependant, de telles difficultés peuvent être contournées sur le plan pratique.

Conformément avec l'état d'information habituel, les probabilités de ruine calculées sur la base d'un certain nombre d'hypothèses (ou sur la base de certaines suppositions) peuvent être utiles du point de vue pratique.

En particulier une probabilité de ruine peut être évaluée (pour un ensemble de distributions données) simplement comme une fonction des incertitudes des moyenne des variables de calcul comme montré dans ce qui suit :

Des équations (1) ou (3), on peut dire que abstraction faite des distributions sous-jacentes la probabilité de ruine peut s'exprimer comme suit :

$$P_f = P(R-S \leq 0) = F_x(0) \quad (7)$$

où  $x = R-S$  et  $F_x$  la fonction de distribution de  $x$ .

mais

$$\mu_x = E(R-S) = \mu_R - \mu_S = \bar{R} - \bar{S} \quad (8)$$

et pour  $R$  et  $S$  statistiquement indépendants.

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (9)$$

où  $\sigma_R = \Omega_R \bar{R}$  ; et  $\sigma_S = \Omega_S \bar{S}$

donc  $F_x(0) = F_{\eta} \left( \frac{-\mu_x}{\sigma_x} \right)$

où  $\eta_i = \frac{(R-S) - (\bar{R} - \bar{S})}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$

qui est une variable aléatoire normalisée avec  $\mu_{\eta_1} = 0$  et  $\sigma_{\eta_1} = 1$ . Donc pour une distribution spécifique de  $\eta_1$ , la probabilité peut être exprimée comme suit :

$$P_f = F_{\eta_1} \left[ \frac{-(\bar{R} - \bar{S})}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (10)$$

Alternativement, la probabilité de ruine peut être exprimée comme :

$$P_f = P(R/S \leq 1) = P(\log R/S \leq 0) = F_y(0) \quad (11)$$

où  $y = \log R/S$  et  $\log$  est le logarithme népérien.

En remarquant que sur la base de l'approximation linéaire (voir annexe) :

$$\mu_y \approx \log R/S \quad (12)$$

et

$$\sigma_y = [\Omega_R^2 + \Omega_S^2]^{1/2} \quad (13)$$

La probabilité de ruine devient :

$$P_f = F_y(0) = F_{\eta_2} \left( \frac{-\mu_y}{\sigma_y} \right) \quad (14)$$

où  $\eta_2 = \frac{\log R/S - \log \bar{R}/\bar{S}}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_S^2}}$  est aussi une variable aléatoire normalisée réduite avec  $\mu_{\eta_2} = 0$  et

$$\sigma_{\eta_2} = 1$$

donc pour une distribution spécifiée de  $\eta_2$ , la probabilité de ruine peut être exprimées comme suit :

$$P_f = F_{\eta_2} \left( \frac{-\log \frac{\bar{R}}{\bar{S}}}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_S^2}} \right) \quad (15)$$

dans chacune des formes (c'est à dire équation 10 ou 15), on voit que pour une distribution donnée (ou prescrite) de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ , la probabilité de ruine est une fonction du premier et second moments (c'est à dire les moyennes et les variances) de R et de S.

La relation précise de  $F_{\eta_1}$  ou  $F_{\eta_2}$  peuvent bien être difficile à déterminer. Cependant, si cette fonction est connue ou supposée, la probabilité de ruine peut être exprimée simplement comme une fonction des moyennes  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$  et des mesure d'incertitudes associées  $\Omega_R$  et  $\Omega_S$ .

En considérant les fonctions de distribution, on devrait souligner laquelle des distributions de la marge de sécurité  $R-S$  ou du  $\log R/S$  qui est importante.

Aussi, il devrait être reconnu que les données et l'information pour la détermination des distributions de probabilité et des paramètres sont habituellement disponibles pour les variables constituantes  $R$  et  $S$ . Par conséquent, la distribution de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  doit découler de celle de  $R$  et  $S$  qui, elles, sont fonctions des variables constituantes.

Ce calcul pour obtenir la distribution de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  est généralement difficile (à l'exception de cas très spéciaux); de plus, les distributions correctes des variables constituantes sont rarement connues (dans un premier temps).

Pour ces raisons, ce n'est qu'en pratique que les distributions de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont prescrites (ou données) et que la probabilité de ruine est évaluée (sur cette base).

La probabilité de ruine résultante est une mesure utile et pratique du ruine sous-adjacent sur les bases suivantes :

- 1) A des niveaux de risque élevés par exemple  $P_f \geq 10^{-3}$  des différences dans les formes des distribution de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  n'affecteraient pas sérieusement la valeur calculée de  $P_f$ . par conséquent, le choix de la fonction de distribution de l'une des variables aléatoires ( $\eta_1$  ou  $\eta_2$ ) ne serait pas très important.
- 2) A des niveaux de risque très bas, soit  $P_f \leq 10^{-3}$  la valeur calculée de  $P_f$  dépendra beaucoup des distributions de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ , de sorte à ce que la probabilité de ruine puisse être déterminée uniquement en connaissant la distribution correcte.

Cependant, pour la plupart des problèmes d'ingénieur, une mesure relative du risque est supérieure à celle qui est nécessaire (largement suffisante) : dans ce sens et pour ce but, une distribution recommandée de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  devrait suffire.

Pour des raisons pratiques, il est proposé que la probabilité de ruine soit évaluée avec l'équation (10) ou l'équation (15) en utilisant des distributions prescrites de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ .

## 4.5 Cas d'une distribution normale

Concernant le choix de la distribution, selon les équations (7) et (11), ce n'est pas toutes les fonctions de distribution qui peuvent être choisies comme distribution de  $(R-S)$  ou  $\log^R/S$  (ou pour  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ ). Toute fonction de distribution ayant une probabilité nulle pour des valeurs négatives des variables aléatoires, ne peut convenir. La fonction normale de Gauss est l'une des rares fonction parmi les fonctions bien connues qui peut convenir (ou qui est qualifiée).

La recommandation (ou le choix) de la distribution de  $(R-S)$  ou du  $\log^R/S$  doit aussi comprendre (ou inclure) des considérations pratiques adéquates et des informations probabilistes qui doivent être rapidement accessibles telles que les tables de probabilités.

De ce point de vue, la large disponibilité des tables normales standard favorise cette distribution. Donc à moins qu'il y ait de bonnes raisons pour d'autres distributions (qui peut être le cas d'un domaine spécifique d'application), la distribution normale peut être généralement adoptée.

Supposons que la marge de sécurité  $(R-S)$  est une variable aléatoire normale, la probabilité de ruine de l'équation (10) devient : (voir annexe A)

$$P_r = \Phi\left(\frac{-(\bar{R}-\bar{S})}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{R}-\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (16.a)$$

où  $\Phi(x)$  est une fonction de répartition de la nouvelle variable aléatoire centrée réduite (Annexe A) avec  $x = [R - S] / [\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2}$ .

De même, supposons une distribution normale pour  $\log^R/S$  (cela équivaut à faire l'hypothèse que  $R$  et  $S$  sont des variables log-normales [6]), la probabilité de ruine de l'équation (15) devient :

$$P_r = \Phi\left(\frac{-\log^R/S}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\log^R/S}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_S^2}}\right) \quad (16b)$$

## 4.6 Formulation du calcul basé sur la fiabilité

Le problème majeur du calcul d'une structure peut être considéré comme étant la détermination d'une résistance nécessaire pour assurer une sécurité adéquate, une performance ou les deux. Étant données les incertitudes, une assurance absolue de sécurité et

de performance d'un calcul (ou conception) n'est pratiquement pas possible à obtenir : des risques peuvent se produire de manière invariable. Sur le plan pratique, le calcul dans le domaine d'ingénierie peut être développé dans la mesure d'un risque admissible ou une probabilité de ruine. Pour déterminer un calcul, la charge et la résistance exigée peuvent être définies de différentes manières. Traditionnellement, le calcul de la charge est défini comme étant la charge "nominale", tandis que la résistance exigée est définie comme étant une valeur nominale "minimale". Cependant, puisque la probabilité de ruine est une fonction des valeurs moyennes, il serait plus adéquate de développer le calcul de la résistance exigée en termes de ces valeurs moyennes  $\bar{R}$  et  $\bar{S}$ .

En ces termes, le calcul exigé correspond à un risque défini  $P_f$  qui peut être obtenu à partir de l'inverse de l'équation (10), donnant pour une distribution admise de  $\eta_1$ .

$$\bar{R} = \bar{S} - G_1(P_f) [\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2} \quad (17)$$

où  $G_1$  est la fonction inverse de  $F_{\eta_1}$  pour une probabilité  $P_f$  donnée.

Alternativement, en inversant l'équation (15), nous obtenons la moyenne exigée du calcul (ou du modèle).

$$\bar{R} = \bar{S} \text{Exp}(-G_2(P_f) [\Omega_R^2 + \Omega_S^2]^{1/2}) \quad (18)$$

où  $G_2$  est la fonction inverse de  $F_{\eta_2}$ .

Pour  $P_f \ll 0.5$ , comme il est généralement nécessaire pour des exigences de ces structures,  $G_1(P_f)$  ou  $G_2(P_f)$  seront négatives.

Il est à noter que les équations (17) et (18) sont généralisées comme fonction de base des risques de conception : l'une ou l'autre équation est valable pour toute distribution recommandée  $F_{\eta_1}$  ou  $F_{\eta_2}$ .

Les fonctions inverses,  $G_1$  et  $G_2$  vont, bien sûr dépendre de la fonction de distribution de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ .

Encore une fois, à un niveau de risque élevé ( $P_f > 10^{-3}$ ), les valeurs des fonctions inverses,  $G_1$  et  $G_2$  peuvent être approximativement indépendantes des distributions [5], tandis qu'à un niveau de risque faible ( $P_f \leq 10^{-5}$ ), la dépendance de la distribution de  $G_1$  et  $G_2$  deviendra plus significative. Cependant, si une mesure relative du risque et de la sécurité est aussi grande qu'il est nécessaire, le calcul exigé peut être déterminé aussi sur la base d'une distribution recommandée de  $\eta_1$  ou de  $\eta_2$  sans prendre en considération comment sera la distribution exacte. La distribution qui paraissait la plus appropriée peut être recommandée ou déterminée

par un code pour un champ d'applications. Dans ce sens l'adoption d'une distribution normale pour  $(R-S)$  donnera :

$$G_1(P_f) = -\phi^{-1}(1-P_f) \quad \text{pour } P_f < 0.5$$

Le calcul devient alors :

$$R = S + \phi^{-1}(1-P_f) [\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2} \quad (19)$$

où  $\phi^{-1}(1-P_f)$  est la valeur de la variable aléatoire normale standard qui correspond à la probabilité  $(1-P_f)$  laquelle peut être obtenue à partir des tables de la probabilité de la loi normale

Alternativement, la recommandation d'une distribution normale pour  $R/S$  donne :

$$R = S \text{Exp}(\phi^{-1}(1-P_f) [\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2}) \quad (20)$$

Pour des raisons pratiques, les équations (19) ou (20) peuvent être généralement utilisées (en l'absence d'informations favorisant d'autres distributions) comme base pour le développement d'un critère de calcul basé sur des mesures spécifiques du risque acceptable.

Il est à constater que, pour une distribution recommandée, les valeurs de  $G_1(P_f)$  de l'équation (17) et  $G_2(P_f)$  de l'équation (18), correspondent à un risque spécifique  $P_f$  sont des indices de sécurité [13,53].

L'indice de sécurité peut être utilisé comme mesure de fiabilité sans référence à la probabilité de ruine. Dans le but de développement d'un code, une méthode de calcul sur la base de la fiabilité peut être étalonnée par rapport à des codes existants à travers un choix approprié de la valeur de l'indice de sécurité [51].

Durant le processus d'élaboration de concepts de fiabilité pour le calcul, ceci est (peut être) une première étape indispensable pour la mise en place d'une stratégie d'application, car ceci évite une référence directe à la probabilité de ruine. Une notion d'ailleurs difficile à accepter par les concepteurs qui ont l'habitude de croire que les structures ne sont pas supposées tomber en ruine.

La même stratégie, cependant, peut être utilisée par étalonnage sur la base d'un risque admis des calculs courants comme illustré par Ellingwood et Ang [18], et l'indice de sécurité exigé, évalué pour ce niveau de risque.

La relation explicite entre l'indice de sécurité et la mesure du risque  $P_f$ , ou la mesure de la fiabilité ( $1-P_f$ ) servira à renforcer la reconnaissance du besoin et les avantages des concepts probabilistes.

Les avantages opérationnels de la théorie probabiliste peuvent dans ce cas être utilisés, c'est à dire que la survie d'une structure, ou la probabilité de ruine, peut être soumise à des opérations logiques de probabilité (ce qui n'est pas le cas cependant avec l'indice de sécurité). De plus, dans ces exemples où les informations disponibles favorisent fortement certaines distributions. De telles distributions peuvent être utilisées pour obtenir  $G_1$  ou  $G_2$  correspondant à un risque spécifique  $P_f$  ou défini (s'il est évalué à travers un étalonnage direct par des codes existants, l'indice de sécurité peut, bien sûr être indépendant de toute distribution, et ne peut, aussi, faire l'usage de telles informations).

Finalement, l'étalonnage est effectué en terme de probabilité de ruine, ceci servira à insister sur le fait qu'il existe un risque implicite dans les calculs courants et que le niveau de sécurité des calculs futurs peut augmenter ou diminuer en ajustant la probabilité de ruine calculée relative à celle des calculs courants. En d'autres termes, l'indice de sécurité est un indicateur statistiquement consistant de la fiabilité.

Cependant, ceci doit être considéré comme étant une mesure intermédiaire de la sécurité, et ne possède pas de propriétés opérationnelles ou théorique de la probabilité de ruine (ou de la probabilité de survie).

De plus, l'avantage d'un indice de sécurité dans la mise en place d'une stratégie d'application peut être préservé si c'est expressivement rapporté à la probabilité de ruine. Dans ce sens, la pleine potentialité d'analyse probabiliste peut commencer à être réaliste.

## 4.7 Evaluation des coefficients de sécurité

Ce n'est pas notre objectif ici de suggérer les calculs qui peuvent être formulés en utilisant les équations (17) ou (18). Pour des raisons du calcul routinier, le calcul nécessaire peut toujours être déterminé à travers l'utilisation des coefficients de sécurité conventionnels (ou des facteurs de chargement) c'est à dire  $R \geq 0_0 S$ .

Les équations (17) et (18) cependant, peuvent être utilisées pour évaluer les coefficients de sécurité et des facteurs de chargement correspondant à un risque spécifique. Pour cela, nous constatons à travers l'équation (18) que le coefficient de sécurité central exigé c'est à dire  $0_0 = R / S$  correspond à risque spécifique tolérable  $P_f$  qui se présente par :

$$0_0 = \text{Exp}(-G_2(P_f) [\Omega_R^2 + \Omega_S^2]^{1/2}) \quad (22)$$

Il est donc évident que le facteur de sécurité est une fonction du risque tolérable (ou admissible)  $P_f$  et du degré des incertitudes pour R et S qui sont mesurées par  $\Omega_R$  et  $\Omega_S$ .

Si la distribution de  $\log R/S$  est considéré comme étant normale,  $G_2(P_f) = -\phi^{-1}(1-P_f)$ . Dans ce cas, cette relation est illustrée sur la figure 4.1

*Remarque* : s'il existe plusieurs chargements, c'est l'effet combiné total du chargement qui est important. Par exemple, si l'effet du chargement total est  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ , l'effet moyen se présente comme suit :

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_n \tag{23}$$

Si  $S_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$  sont statistiquement indépendants l'incertitude totale sur  $S_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$

Peut être obtenu par  $\Omega_S^2 = 1/S^2(\Omega_{S1}^2 S_1^2 + \dots + \Omega_{Sn}^2 S_n^2)$  (24)

En utilisant l'équation (24) dans l'équation (22), nous constatons, sans prendre en considération le nombre de chargement, que le calcul peut être développé sur la base d'un seul coefficient de sécurité. Comme c'est généralement le cas, un seul coefficient de sécurité est suffisant du point de vue du calcul effectué pour un niveau de risque ou de sécurité donnée.

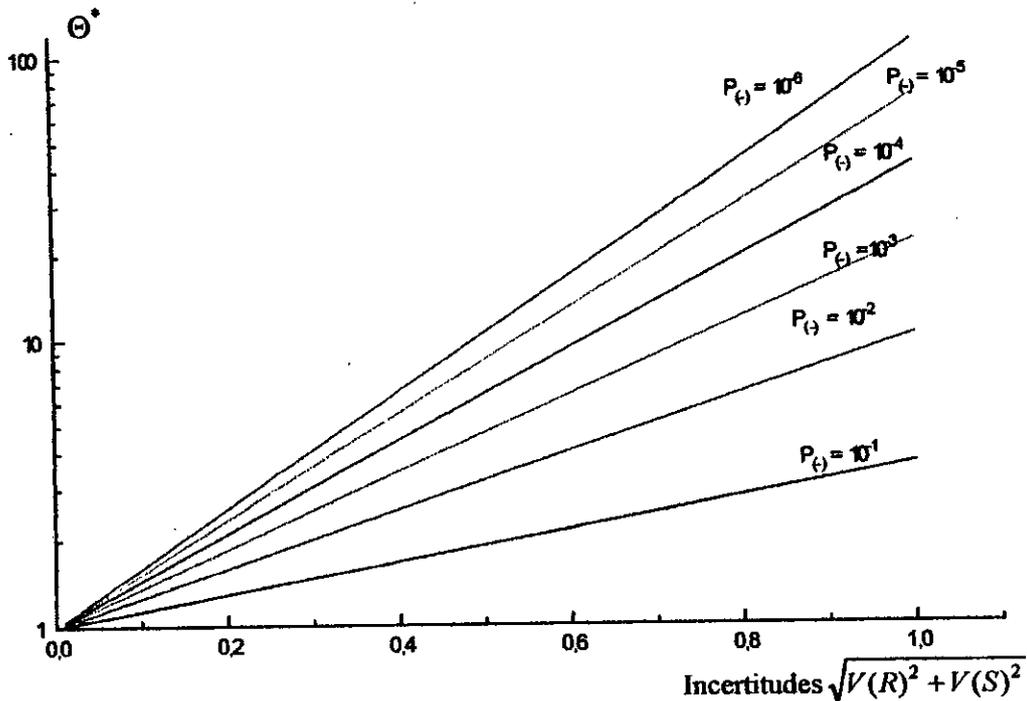


Figure 4.1. relation du coefficient de sécurité, des incertitudes, et du risque.

CONCEPTS ET  
FORMULATION GENERALE  
D'UN PROBLEME  
D'OPTIMISATION STOCHASTIQUE

# CONCEPTS ET FORMULATION GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION STOCHASTIQUE

## 5.1 Introduction

Le problème principal qui se pose à l'ingénieur est de donner une réponse satisfaisante à la conception d'une structure. Cette charge lui incombe essentiellement. Il doit faire face à un problème très complexe, il doit combiner les impératifs de sécurité et d'économie tout en respectant les conditions fonctionnelles, d'esthétiques ...

Devant l'ensemble de ces facteurs, l'ingénieur fait appel à son expérience et aura souvent intérêt à profiter des méthodes les plus performantes pour adopter dans une première étape du dimensionnement une bonne solution. Cette solution préliminaire se concrétise par le choix du type de structure et de ses matériaux constituants.

Sur cette base il passe ensuite au problème véritable de dimensionnement qui consiste à calculer la structure pour aboutir à la solution définitive.

Les informations nécessaires pour le calcul ont trait aux propriétés des matériaux, aux actions et aux lois de comportement de la structure. Tous ces facteurs ont un caractère aléatoire.

Dans ces conditions, on peut envisager les calculs sous deux optiques différentes en se plaçant au niveau du concept probabiliste de la sécurité (l'introduction des concepts probabilistes entraîne deux préalables ; il est nécessaire d'acquérir des données statistiques, puis de savoir les inclure dans un modèle mécanique)

Le premier consiste en une analyse probabiliste ; c'est-à-dire en une évaluation de la probabilité globale, de survie d'une structure à caractéristiques aléatoires connues, sous l'effet d'un ensemble d'actions aléatoires également connues.

Cette probabilité doit être supérieure à une valeur préalablement établie ou imposée. (cette valeur de référence est appelée sécurité de la structure).

Le deuxième se donne comme objectif de trouver la structure optimale qui peut supporter un ensemble d'actions aléatoires supposées connues : c'est le cas du dimensionnement probabiliste optimal.

La notion d'optimisation est indissolublement liée à un critère auquel doit satisfaire la solution. Il existe plusieurs critères d'optimisation probabiliste, deux d'entre eux sont présentés et discutés dans ce chapitre.

## 5.2 Critère du coût total

### 5.2.1 Définition du critère

Le première formulation de l'optimisation basée sur la fiabilité pour obtenir le minima du coût total a été initialisé par Forssell [23]. Depuis, plusieurs critères ont été proposés [23, 26, 35]. Le critère le plus général qui permet de trouver la structure optimale du point de vue économique (les considérations fonctionnelles, esthétiques... étant exclues) a été formulé comme suit [26, 28, 44] :

$$C_T = C_i + C_D P_{(-)} \quad (1)$$

Où  $C_T$  représente le coût total probable de la structure (ou de l'ouvrage).  $C_i$  est le coût initial  $C_D$  est le coût de ruine égale à la somme du coût engendré par une éventuelle mise hors service de la structure.  $P_{(-)}$  est la probabilité de ruine ou la probabilité d'occurrence de cette mise ne service. Selon ce critère, l'objectif de dimensionnement probabiliste optimal est de trouver la structure qui rend minimal son coût total probable. Autrement dit, la structure optimale est celle dont la probabilité de mise hors service  $P_{(-)}$  conduit à la valeur minimale du coût total  $C_T$ .

Nous appelons  $P_{(-)}$  la probabilité économique (1). Sa valeur est calculée dans le cas fondamental présenté ci-après.

### 5.2.2 La solution optimale du cas fondamental

Ce cas correspond à une structure simple soumise à une action aléatoire connue, pour laquelle le dimensionnement se réduit à trouver un seul paramètre  $Y$  (l'aire d'une section droite, le moment statique, ...). En n'envisageant qu'un mode de ruine, nous nous proposons de trouver la valeur de ce paramètre  $Y_{op}$  pour laquelle le coût total probable sera minimum. Comme la relation entre  $Y$  et le coefficient de sécurité central  $\theta_0$  est généralement connue, le problème revient à trouver la valeur  $\theta_{op}$  de  $\theta_0$  qui minimise le coût total de la structure. Pour la plupart des lois de distribution (loi Normale, Log-Normale, ... etc.).  $\theta_0$  varie presque linéairement avec  $\log_{10} P_{(-)}$  (voir chapitre 4). En effet, elle est linéaire et nous l'avons vérifiée pour plusieurs cas. (annexe 3).

Si l'on pose comme approximation que cette variation est linéaire, la relation entre  $\theta_0$  et  $\log_{10} P_{(-)}$  (comme le montre plusieurs exemples en annexe 3) est de la forme :

$$\theta_0 = -\lambda_{\theta_0} \log P_{(-)} + a_1 = \lambda_{\theta_0} \text{colog}_{10} P_{(-)} + a_1 \quad (2)$$

où  $a_1$  représente une constante positive et  $\text{colog } P_{(-)}$  est le cologarithme du nombre considéré.  $\lambda_{\theta_0}$  n'est que la pente de la droite (2) ( voir figure 1 ).

D'autre part, le coût initial  $C_i$  est généralement considéré [38, 40, 57] comme une fonction linéaire de  $\theta_0$  donc aussi de  $\text{colog}_{10} P_{(-)}$ . Cette fonction s'écrit :

$$C_i = a \theta_0 + b = \lambda_{C_i} \text{colog } P_{(-)} + b_1 \quad (3)$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $b_1 = a a_1 + b$  sont des constantes positives.

La relation (3) introduit un nouveau coefficient  $\lambda_{C_i} = a \lambda_{\theta_0}$  : c'est la pente de la droite (3). (voir figure 1 )

Puisque la somme  $C_T$  des coûts engendrés par une ruine éventuelle ne dépend généralement pas de la probabilité de réalisation de cet événement [35, 38]. La valeur optimale  $P_{(-)op}$  se calcule comme suit :

$$\frac{\partial C_T}{\partial P_{(-)}} = \frac{\partial}{\partial P_{(-)}} (C_i + C_D P_{(-)}) = \frac{\lambda_{C_i}}{P_{(-)} \ln 10} + C_D = 0 \quad (4)$$

D'où on tire :

$$C_D = \frac{\lambda_{C_i}}{P_{(-)op} \ln 10} \quad (4a)$$

$$P_{(-)op} = \frac{\lambda_{C_i}}{C_D \ln 10} \quad (4b)$$

Cette probabilité correspondant au coût total minimal s'identifie à la probabilité économique  $P_{(-)E}$ . sa valeur dépend uniquement du coefficient  $\lambda_{C_i}$  et du coût  $C_D$ .

En remplaçant dans (2)  $P_{(-)}$  par  $P_{(-)op}$ , on obtient le coefficient de sécurité centrale pour lequel le coût totale probable est minimal :

$$\theta_{op} = \lambda_{\theta_0} \text{colog} \frac{\lambda_{C_i}}{C_D \ln 10} + a_1 \quad (5)$$

La valeur du coût total probable qui correspond au coefficient de sécurité optimale  $\theta_{op}$  est la suivante :

$$C_{\text{top}} = \lambda_{C_i} \operatorname{colog} \frac{\lambda_{C_i}}{C_D \ln 10} + \frac{\lambda_{C_i}}{\ln 10} \quad (6)$$

On obtient cette valeur en remplaçant dans (1)  $C_i$  et  $P_{(-)}$  respectivement par (3) et (4). Nous allons illustrer ce critère du coût total par un exemple pour bien expliciter et préciser ces notions développées.

L'exemple qu'on va prendre est une semelle filante soumise à une charge de 800 kN/ml et ancrée à 1m de profondeur sur un sol ferme de poids volumique 18 kN/m<sup>3</sup>. Les paramètres de résistance au cisaillement du sol sont  $C_u = 15$  kN/m<sup>2</sup> et  $\varphi_u = 30^\circ$ .

D'après ce qu'on a vu au chapitre 4.

$$\theta_0^* = \frac{\bar{C}}{S} = \operatorname{Exp} \left[ \phi_{1-t_i}^{-1} \sqrt{V_R^2 + V_S^2} \right] \quad (7)$$

Pour  $V_R=20\%$  et  $V_S=25\%$  nous avons obtenu (voir annexe3) :

$$\theta_0^* = -0.2676 \log_e P_{(-)} + 0.8606 = -0.615 \log_{10} P_{(-)} + 0.8606 \quad (8)$$

Finalement :

$$\theta_0^* = 0.615 \operatorname{colog}_{10} P_{(-)} + 0.86 \quad (9)$$

Avec  $R^2 = 0.9993$  donc  $R=0.9996 \approx 1$

avec  $R$  : coefficient de détermination sur le graphique.

D'après (2) :

$$\theta_0 = \lambda_{\theta_0} \operatorname{colog} P_{(-)} + a_1 \quad (10)$$

donc  $\lambda_{\theta_0} = 0.615$  et  $a_1=0.86$

d'après (3) :

$$C_i = a \theta_0^* + b = \lambda_{C_i} \operatorname{colog}_{10} P_{(-)} + b_1 \quad (11)$$

on trouve d'après l'exemple qu'on a pris

$$\lambda_{C_i} = a \lambda_{\theta_0} = 0.78 \text{ et } b_1 = 1.25 \text{ (voir annexe 3)}$$

donc :  $C_i = 0.78 \text{ colog } P_{(-)} + 1.25$

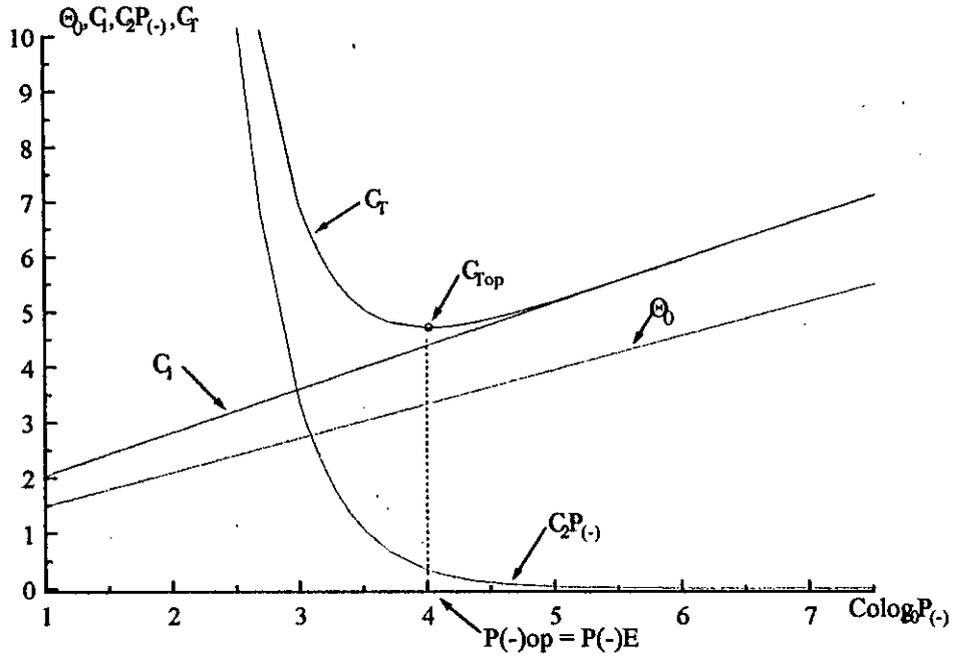


Fig.1: Variation de  $\Theta_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2P_{(-)}$  et  $G_T$  en fonction de  $\text{Colog}P_{(-)}$

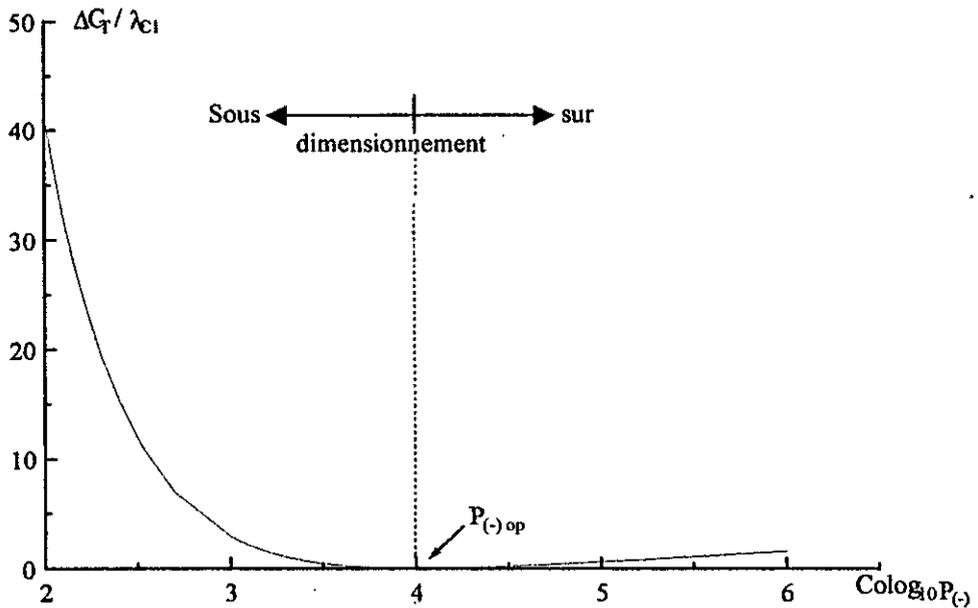


Figure 2 - Excès du cout total probable pour  $P_{(-)op} = 10^{-4}$

Finalement en prenant  $C_D$  comme fraction de  $C_i$ , on détermine  $P_{(-)op}$  par (4.b)

$$P_{(-)op} = \frac{\lambda_{C_i}}{C_D \log_e 10} = 10^{-4}$$

donc

$$C_T = C_i + C_D P_{(-)} = 0.78 \text{ colog } P_{(-)} + 1.25 + 3.4 \cdot 10^{-3} P_{(-)}$$

Un des deux couples de valeurs  $[P_{(-)op}, C_{T,op}]$  ou  $[\theta_{op}, C_{T,op}]$  défini d'une manière complète la solution optimale du cas fondamental.

### 5.2.3 Excès du coût total probable

Si la solution n'est pas optimale, elle engendre un excès du coût total probable :

$$\Delta C_T = C_T - C_{T,op} = C_i + C_D P_{(-)} - C_{T,op} \tag{7}$$

$P_{(-)}$  étant la probabilité qui caractérise la solution particulière envisagée.

En remplaçant dans (7)  $C_i$ ,  $C_D$  et  $C_{T,op}$  respectivement par (3), (4a) et (6) on obtient :

$$\Delta C_T = \lambda_{C_i} \left( \log_{10} \frac{P_{(-)op}}{P_{(-)}} + \frac{1}{\log_e 10} \frac{P_{(-)} - P_{(-)op}}{P_{(-)op}} \right) \tag{8}$$

nous avons représenté à la figure 2, l'évolution du rapport  $\Delta C_T / \lambda_{C_i}$  en fonction de  $P_{(-)}$  dans l'hypothèse où  $P_{(-)op}$  à la valeur  $10^{-4}$ .

**Tableau 2**

$\text{Colog}_{10} P_{(-)}$	1	2	3	4	5	6
$\Delta C_T / \lambda_{C_i}$	430.8	41	2.9	0.00	0.6	1.58
	Sous-dimensionnement opt			solution optimale	Surdimensionnement	

cette hypothèse n'enlève rien à la généralité des conclusions énoncées. L'analyse de la figure 2 et les résultats présentés au tableau 1 nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

a) pour une même valeur absolue de l'écart de sécurité par rapport à la solution optimale :

$$\Delta P = | \text{colog } P_{(-)} - \text{colog } P_{(-)op} |$$

le sous dimensionnement engendre un excès du coût total probable supérieur à celui engendré par le sur-dimensionnement ; la différence entre ces excès augmente fortement avec  $\Delta P$ .

b) dans le cas d'un sous-dimensionnement ( $P_{(-)} > P_{(-)op}$ ), l'augmentation du coût total probable avec  $\Delta P$  est très prononcée ; c'est la raison pour laquelle un sous-dimensionnement important ne peut être accepté.

c) dans le cas d'un sur dimensionnement ( $P_{(-)} < P_{(-)op}$ ), l'augmentation du coût total probable avec  $\Delta P$  est nettement plus lente ; c'est la raison pour laquelle lorsque les incertitudes des résultats de calcul sont importants, il est préférable d'opter pour un léger sur-dimensionnement.

### 5.3 Critère du poids total

En pratique, dans les problèmes réels d'optimisation, on utilise souvent le poids ou le volume comme critère plutôt qu'un coût minimal, car il est difficile, et parfois même impossible, de quantifier le coût total probable de manière précise. Puisque le poids total d'une structure ou d'un ouvrage s'avère dans de nombreux cas constituer une bonne mesure du coût, il est logique de substituer au critère du coût le critère du poids.

Cependant, pour les fondations superficielles ce critère doit tenir compte non seulement du volume (ou poids) de la fondation mais aussi du volume des fouilles nécessaires à leurs mises en place. Dans ce but, on définit un poids effectif (voir équation 3).

Selon ce critère, l'objectif du dimensionnement optimal d'une fondation en contexte probabiliste est de trouver la fondation de poids effectif  $W_T$  minimal, dont la probabilité de mise hors service (ou la probabilité de survie  $P_{(+a)}$ ) a une valeur  $P_{(-)a}$  fixée ou imposée a priori.

Mathématiquement, ce problème de programmation stochastique se pose comme suit :

trouver  $\{X\}$  tel que

$$W_T(\{X\}) \text{ soit minimal} \tag{1a}$$

et que

$$P_{(-)}\{\{X\}\} \geq P_{(-)0} \tag{1b}$$

ou

$$P_{(-)}\{\{X\}\} \leq P_{(-)0}$$

Si  $\{X\} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$  respecte uniquement la contrainte probabiliste (1b), elle est une solution admissible, si de plus  $\{X\}$  satisfait à la condition (1a), elle est la solution optimale  $\{X\}_{op}$ .

Les composantes  $X_1, X_2, \dots, X_p$  du vecteur solution  $\{X\}$  peuvent être des variables non aléatoires ou des paramètres (espérance mathématiques, variances ...).

Ces composantes se réfèrent soit à la configuration géométrique générale de la fondation (hauteur, largeur, profondeur ...); soit à la répartition du matériau dans cette même fondation (moment d'inertie, ou autre ...).

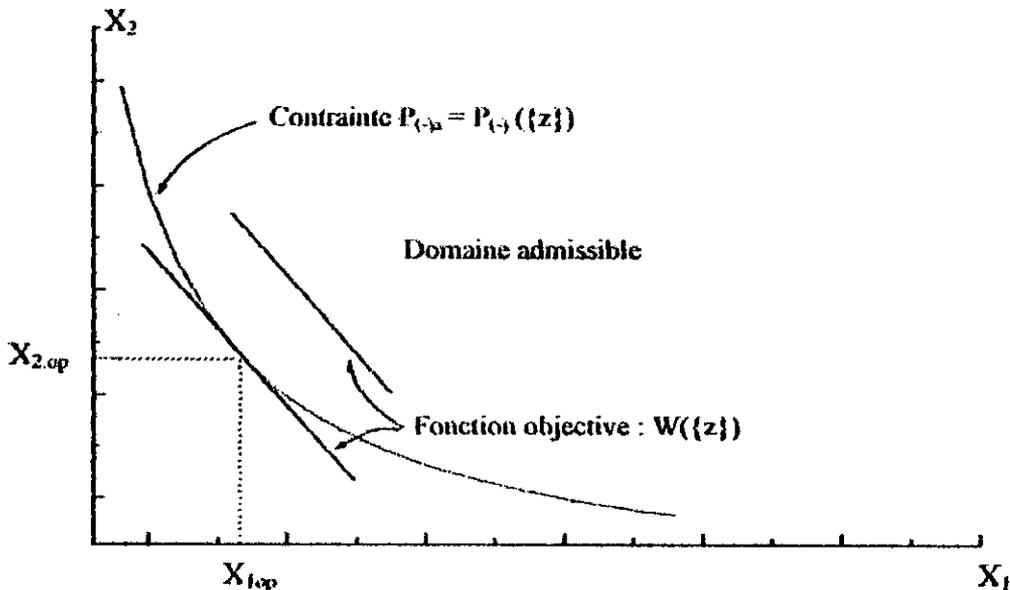


Fig. 1- : Illustration du problème d'optimisation

Lorsque  $\{X\}$  ne dépend que deux variables, une illustration graphique du problème d'optimisation est donnée à la figure 1. Nous avons admis que le poids effectif qui représente la fonction objective, dépend linéairement de ces variables. Le domaine des solutions admissibles est limité par la contrainte probabiliste (1b) ramenée à une égalité. L'optimum est atteint pour le point extrême du domaine admissible (voir figure 1.). Une formulation équivalente à (1) est la suivante :

trouver  $\{X\}$  tel que :

$$W_T[\{X\}, P_{(+)}(\{x\}) \geq P_{(+)\alpha} \text{ soit minimal} \quad (2a)$$

ou

$$W_T[\{X\}, P_{(-)}(\{x\}) \leq P_{(-)\alpha} \text{ soit minimal} \quad (2b)$$

Dans ce cas, le poids effectif est de plus fonction de la probabilité de survie ou de ruine de la structure

### Applications

Illustrons les deux formulations (1) et (2) du critère du poids effectif par un exemple. Pour préciser et expliciter ces notions prenons l'exemple d'une fondation filante soumise à une charge centrée  $Q$  (voir le schéma). Nous nous proposons de déterminer la solution optimale pour diverses valeurs fixées a priori de la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$  de cette fondation.

#### Formulation (1)

Explicitons d'abord les variables, la contrainte probabiliste et la fonction objective du problème.

- Les variables de dimensionnement sont  $X_1 = B$  et  $X_2 = D$ .

- La contrainte probabiliste, ramenée à une égalité exprime que la fondation doit avoir la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha} = P_{(+)\alpha}$ . Cette contrainte s'écrit :

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = \frac{1/2 \cdot \gamma \cdot X_1 \cdot N_\gamma + \gamma \cdot X_2 \cdot (N_q - 1) + C \cdot N_C}{\frac{Q}{X_1} - \gamma \cdot X_2} = \theta^* \left( V(S), V(R), P_{(+)\alpha} \right)$$

$\theta^*$  étant le coefficient de sécurité central nécessaire à la fondation pour lui assurer la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$

$\bar{R} = 1/2 \cdot \gamma \cdot X_1 \cdot N_\gamma + \gamma \cdot X_2 \cdot (N_q - 1) + C \cdot N_C$  est la résistance du sol ou capacité portante de la semelle

où  $N_\gamma, N_q, N_C$  sont des coefficients appelés respectivement terme de surface, terme de profondeur, et terme de cohésion,  $\gamma$  est le poids spécifique du sol,  $\bar{S}$  est l'action ou la contrainte appliquée et  $\bar{Q}$  est la charge moyenne appliquée sur la fondation

- La fonction objective est le poids effectif de la fondation défini comme suit :

$$W_T = \rho_b \left[ \frac{x_1 \cdot (x_1 - b)}{4} + \left( x_2 - \frac{x_1 - b}{4} \right) b \right] + \rho_s \cdot x_1 \cdot \eta \quad (3)$$

où  $\eta$  est un coefficient d'homogénéisation relatif à la fouille nécessaire à la mise en place de la fondation.

Pour fixer ces idées, considérons que  $V(S) = 30\%$  et  $V(R) = 10\%$  ou  $V(S)$  et  $V(R)$  sont les coefficients de variation de l'action et de la capacité portante du sol. Supposons que les variables  $R$  et  $S$  obéissent à une distribution logarithmo-normale. Dans ce cas, la figure 2 représente la contrainte probabiliste (1) pour les valeurs  $1 \cdot 10^{-2}$ ,  $1 \cdot 10^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^{-3}$  de  $P_{(+)} = P_{(+)\alpha}$

Les courbes en trait plein et celles en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures du coefficient  $\theta^*$ . On constate que le domaine des solutions admissibles s'amenuise avec l'augmentation de la probabilité de survie de la fondation. Cette même figure montre aussi la fonction objective pour diverses valeurs (1, 7, 9 tonnes..) du poids effectif.

On remarque que l'optimum représenté par le point du domaine des solutions admissibles caractérisé par le poids minimal augmente avec la valeur de  $P(+)$  (voir tableau 1). Dans le tableau 1 se trouve le poids de la fondation  $W_{OP}$  qui correspond à la solution optimale.

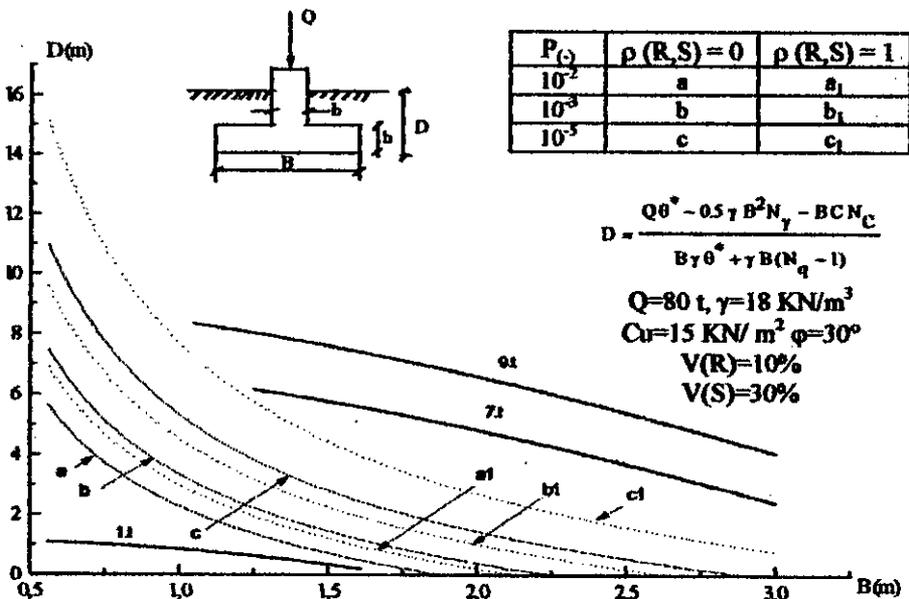


Figure 2. Exemple, pour une semelle filante de la première formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre  $R$  et  $S$

$\theta^*$  : coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$

On remarque que l'optimum représenté par le point du domaine des solutions admissibles caractérisé par le poids minimal augmente avec la valeur de  $P_{(+)\alpha}$  (voir tableau 1). Dans le tableau 1 se trouve le poids de la fondation  $W_{OP}$  qui correspond à la solution optimale.

Tableau 1.

$P_{(+)\alpha}$		$1-10^{-2}$	$1-5 \cdot 10^{-3}$	$1-10^{-3}$	$1-10^{-4}$	$1-10^{-5}$
$B_{OP}$ (m)	1	1.87	1.90	1.98	2.05	2.13
	2	1.95	2.0	2.08	2.20	2.3
$D_{OP}$ (cm)	3	2.0	12	42.1	74	108
	4	28.3	47	86.0	143	197
$W_{op}$ ( $10^3$ daN)	5	1.315	1.485	1.973	2.479	3.045
	6	1.760	2.077	2.673	3.589	4.453
Gain (%)	7	53	47	30	12	-
	8	38	26.5	5.5	-	-

Les valeurs indiquées aux lignes 1, 3, 5, 7 et 2, 4, 6, 8 correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures du coefficient de sécurité central  $\theta^*$ .

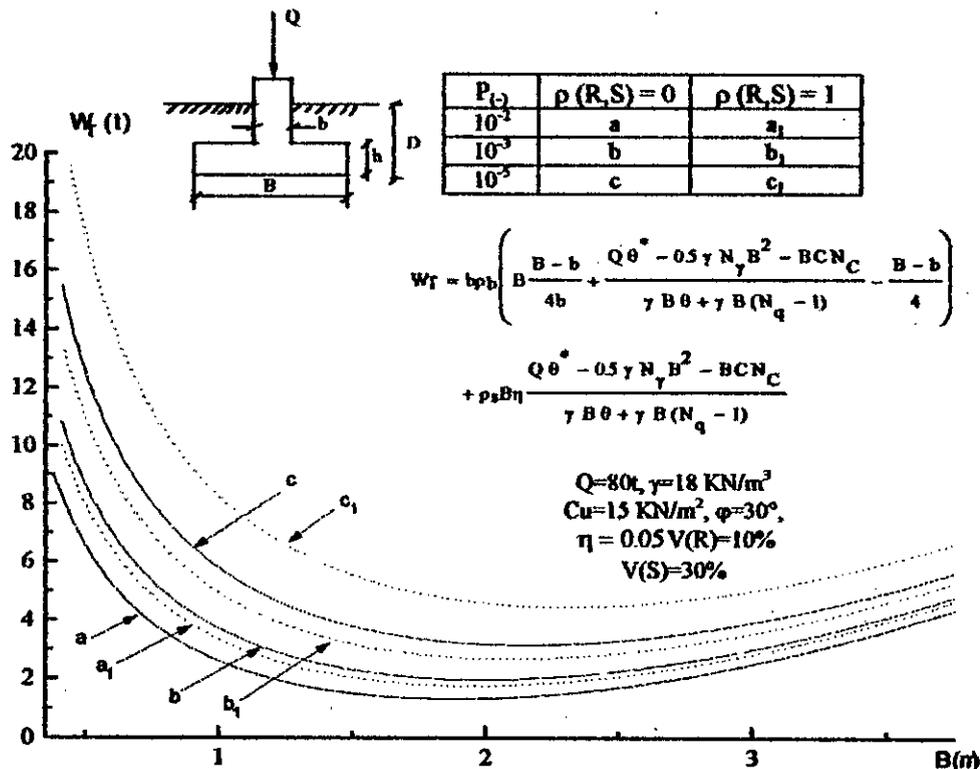


Figure 3. Exemple pour une semelle filante de la seconde formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.  
 $\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S  
 $\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$

- **Formulation (2)**

L'autre possibilité de trouver la solution optimale consiste à exprimer le poids total en fonction de la probabilité de survie à assurer à la fondation. Portons la valeur de  $X_2$  tirée de (1) dans (2), on obtient ainsi l'expression du poids effectif donné sur la figure 3.

En conservant les mêmes données que celles de l'exemple traité ci-dessus, on a reporté sur la figure 3, la variation de  $W_T$  en fonction de  $X_1$  pour les valeurs :  $1 \cdot 10^{-2}$ ,  $1 \cdot 10^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$  de la probabilité de survie  $P_{(+)} = P_{(+)}^a$  ; les courbes en trait plein et en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures de  $\theta^*$ . La valeur minimale de  $W_T$  est donnée pour diverses probabilités de survie dans le tableau (1)

Dans cette exemple très simple, la solution optimale est aisée à obtenir .Il n'en est plus de même pour un nombre de variables et de mode de ruine plus élevé.

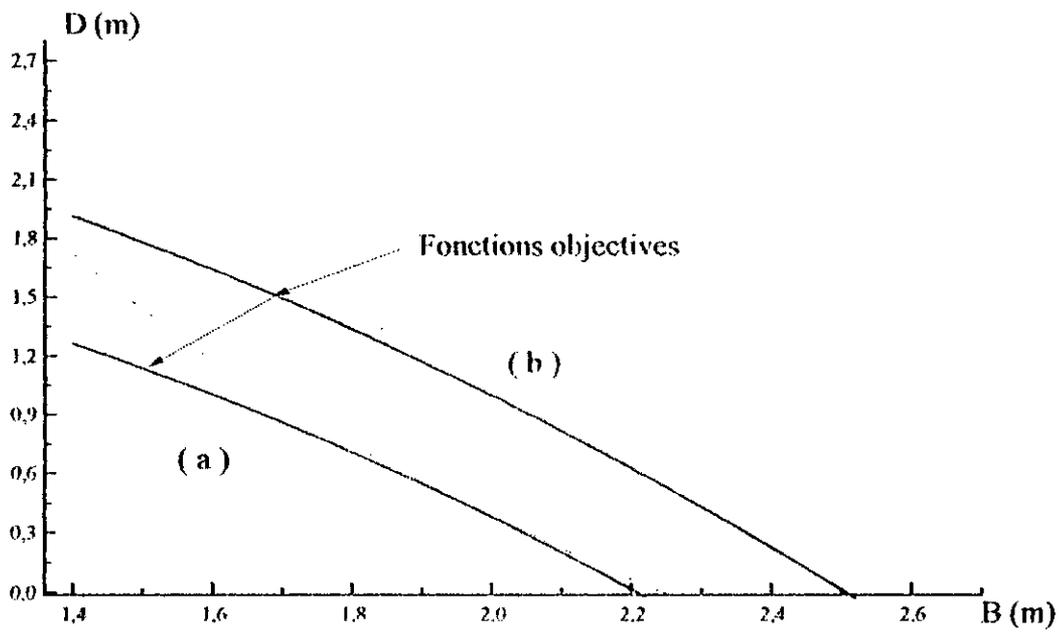


Fig.5.1 Fonctions objectives et solutions optimales pour la même probabilité de ruine  $P_{(c)} = 10^{-3}$

- (a): sans corrélation
- (b): parfaitement corrélées

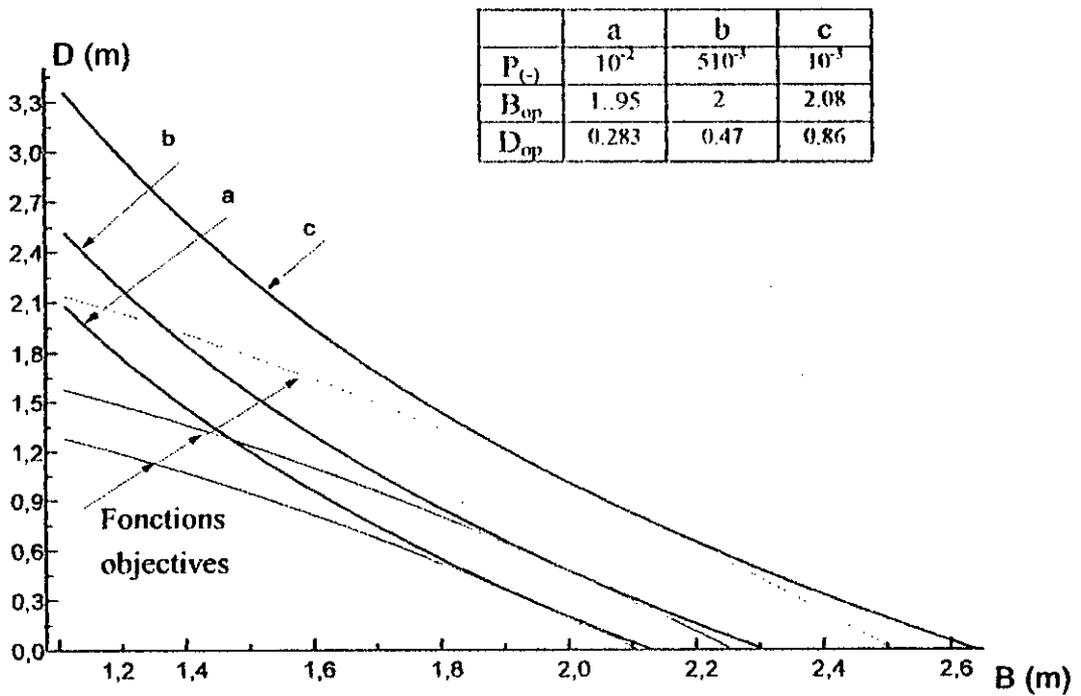


Fig.5.2 - Variation de l'optimum en fonction des probabilités

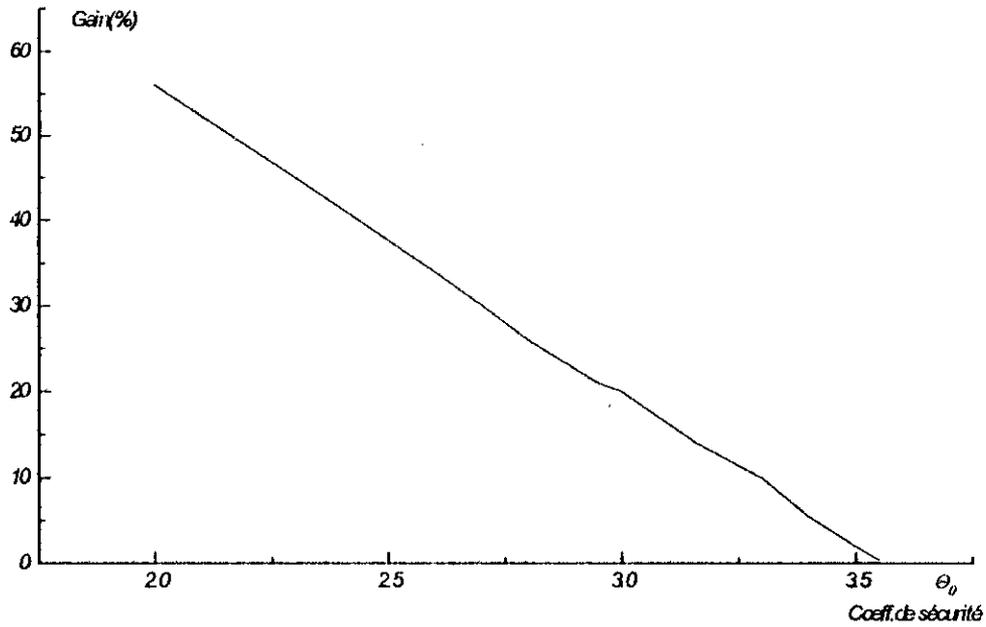


Fig.5.3 – Variation du gain en fonction de la sécurité

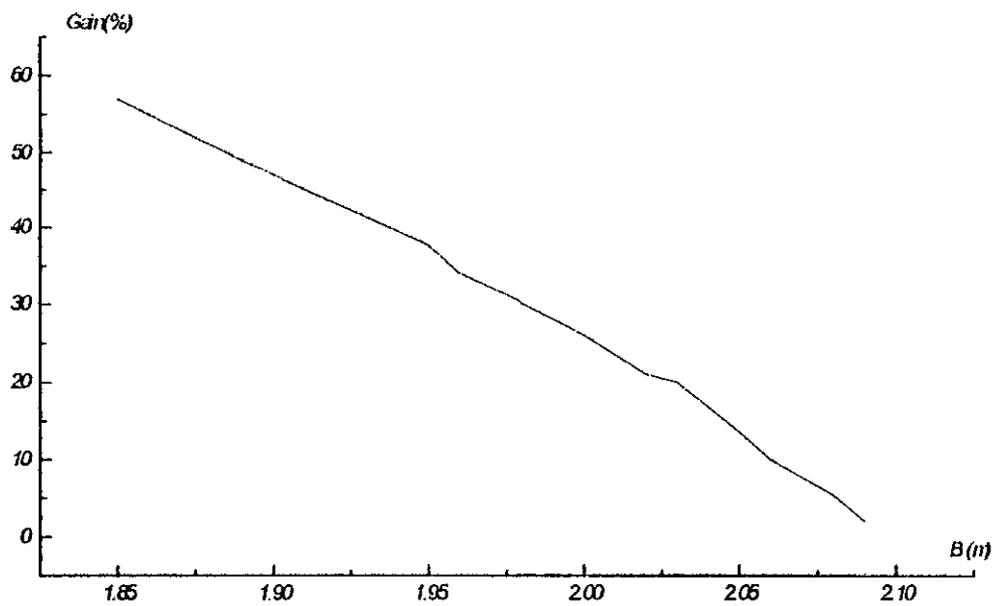


Fig.5.4 – variation du gain en fonction de la largeur B de la semelle

Les résultats obtenus pour les fondations superficielles peuvent être résumés comme suit :

- Pour concevoir à un niveau de sécurité spécifié, un facteur de sécurité semble suffisant. Les effets des incertitudes et des probabilités peuvent être appréciés proprement à travers le seul facteur de sécurité. Bien sûr, le coefficient de sécurité lui-même est fonction de la probabilité de ruine (ou de survie), des incertitudes sur les informations, et les aberrations sur ces dernières vont directement l'affectés.
- On a obtenu que pour un coefficient de sécurité de 3, généralement adopté dans les procédures classiques de dimensionnement déterministe d'une fondation, correspond une probabilité de  $10^{-4}$  pour une variabilité de 30% sur les actions et de 10% sur les caractéristiques du sol. Lorsque la variabilité diminue, la probabilité de ruine diminue, ainsi pour une variabilité de 25% sur les actions et pour une même variabilité pour les caractéristiques du sol, la probabilité de ruine est alors de  $10^{-5}$ .
- De plus pour une même probabilité de survie, le coefficient de sécurité est d'autant plus grand que la corrélation entre les actions et les caractéristiques du sol est forte. Cette influence est d'autant plus forte que la probabilité de ruine est faible. Par exemple pour une probabilité de ruine de  $10^{-3}$  sans corrélation,  $\theta^* = 2.655$  et avec une parfaite corrélation  $\theta^* = 3.5$ . Pour une probabilité de  $10^{-4}$ ,  $\theta^* = 3.24$  sans corrélation et  $\theta^* = 4.43$  avec une parfaite corrélation.
- Pour l'évaluation du gain, on a obtenu ses variations en fonction des variables de décision (largeur et profondeur) pour une probabilité de survie (ou de ruine) donnée. On remarque que le gain décroît avec cette probabilité. Le tableau 1 montre bien la diminution du gain, l'augmentation de l'optimum, avec l'importance de la corrélation.
- Dans tous les cas étudiés, la fonction objective est non linéaire.
- Les variables de décision ont été limités à deux, les plus prépondérantes. Ceci nous a permis de mieux percevoir, d'une façon plus concrète, les problèmes considérées, et d'aboutir ainsi à un dimensionnement rationnel.

# FORMULATIONS ET RECHERCHES DE SOLUTIONS OPTIMALES

# FORMULATIONS ET RECHERCHES DE SOLUTIONS OPTIMALES

## 6.1 Cas du dimensionnement des fondations dans un contexte probabiliste.

### 6.1.1 Fondations superficielles Méthode de dimensionnement probabiliste

#### 6.1.1.1 Semelle isolée

##### 1/ Semelle carrée

Comme il n'est pas possible d'assimiler toutes les semelles à des semelles filantes, on rappelle que cette simplification n'est admissible que lorsque le rapport de la longueur  $L$  de la semelle à la largeur  $B$  dépasse 5 c'est à dire :

$$L / B > 5$$

pour le calcul de la capacité portante, **Terzaghi**, a été le premier à proposer, le 1<sup>er</sup> avait proposé dans le cas d'une semelle carrée de côté  $B$ , la relation suivante [15]:

$$q_d = 0.8\gamma \frac{B}{2} N_\gamma + \gamma N_q + 1.3 N_c$$

Une autre formule pour calculer la capacité portante d'une semelle rectangulaire (proposé par **Terzaghi** et **Peck**), qui donne des résultats inférieurs à la réalité, donc du côté de la sécurité, est donnée par [15] :

$$q_t = (1 - 0.2 \frac{B}{L}) \gamma \frac{B}{2} N_\gamma + \gamma D N_q + (1 + 0.2 \frac{B}{L}) C N_c$$

Dans le cas d'une semelle carrée,  $L = B$ , donc :

$$q_t = 0.8 \frac{B}{2} \gamma N_\gamma + \gamma D N_q + 1.2 C N_c$$

Choisissons comme fonction objective le critère du poids.

Selon ce critère, l'objectif du dimensionnement optimal d'une semelle carrée en contexte probabiliste est de trouver la fondation carrée de poids total  $W_T$  minimal, dont la probabilité de mise hors service a une valeur  $P(-)_a$  fixée à priori.

Illustrons les deux formulations (1) et (2) du critère du poids total minimal de la page (65, ou page 66) par un exemple.

L'exemple que nous prenons est une semelle isolée de forme carrée qui repose sur un sable dont les caractéristiques sont : densité : 1.70

$$\varphi = 30^\circ$$

Ce sable a une légère cohésion de  $0.1 \text{ daN/m}^2$ .

pour diverses valeurs fixées à priori de la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$  de cette fondation proposons nous de déterminer la solution optimale.

### Formulation (1)

Explicitons d'abord, la contrainte probabiliste et la fonction objective du problème :

- 1) Les variables de dimensionnement sont :  $X_1 = B$  et  $X_2 = D$ .
- 2) La contrainte probabiliste, ramenée à une égalité, exprime que la fondation doit avoir la probabilité de suivre  $P_{(+)\alpha} = P_{(+)\alpha}$ . Cette contrainte s'écrit :

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = \frac{0.8 \frac{X_1}{2} \gamma N_\gamma + \gamma X_2 (N_q - 1) + 1.2 C N_c}{Q/X_1^2 - \gamma X_2} = \theta^* (V(s), V(R), P_{(+)\alpha}) \quad (1)$$

$\theta^*$  : étant le coefficient de sécurité central nécessaire à la fondation pour lui assurer la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$

$$\bar{R} = 0.8 \frac{X_1}{2} \gamma N_\gamma + \gamma D X_2 (N_q - 1) + 1.2 C N_c$$

$\bar{R}$  : est la capacité portante moyenne nette de la semelle.

$N_\gamma$ ,  $N_q$ , et  $N_c$  : sont des coefficients appelés respectivement terme de surface, terme de profondeur et terme de cohésion.

$\gamma$  : Poids spécifique de la terre.

$\bar{S}$  : Contrainte moyenne nette appliquée.

$\bar{Q}$  : La charge moyenne appliquée sur la fondation.

- 3) La fonction objectif est le poids de la fondation et le poids de la fouille de fondation.

$$W_T = \rho_b \left[ \frac{X_1^2 (X - a)}{4} + \left( X_2 - \frac{(X_1 - a) X_1^2}{4} \right) \right] + \rho_s X_1 X_2 \eta \quad (2)$$

avec  $a = B/4 = X_1/4$

$$W_T = \frac{3\rho_b X_1^3}{16} + \rho_b \left( X_2 - \frac{3X_1}{16} \right) \frac{X_1^2}{16} + \rho_s X_1 X_2 \eta$$

on a multiplié le poids de la fouille par  $\eta$  ( $\eta$  est un coefficient qui prend en compte la différence de prix du béton par rapport au prix de l'excavation de la fouille).

$$\eta = C_f / C_b$$

$C_f$  : Coût d'extraction d'un  $\text{m}^3$  de la fouille.

$C_b$  : Coût d'un  $\text{m}^3$  de béton.

Considérons que  $V(S) = 30\%$  et  $V(R) = 10\%$ .

$V(S)$  et  $V(R)$  sont les coefficients de variation de l'action et de la capacité portante de la semelle et supposons que les variables  $R$  et  $S$  obéissent à une distribution Logarithmo-normale.

Dans ce cas la figure 4 représente la contrainte probabiliste (1) pour les valeurs :  $1-10^{-2}$ ,  $1-10^{-3}$ ,  $1-10^{-5}$ . De  $P_{(t)u} = P_{(t)u}$ .

Les courbes en trait plein et en celles en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures du coefficient  $\theta^*$ .

On constate aussi que le domaine des solutions admissibles s'amenuise avec l'augmentation de la probabilité de survie de la fondation. Cette même figure montre aussi la fonction objectif pour diverses valeurs (0.5t, 2t, 2.5t) du poids total.

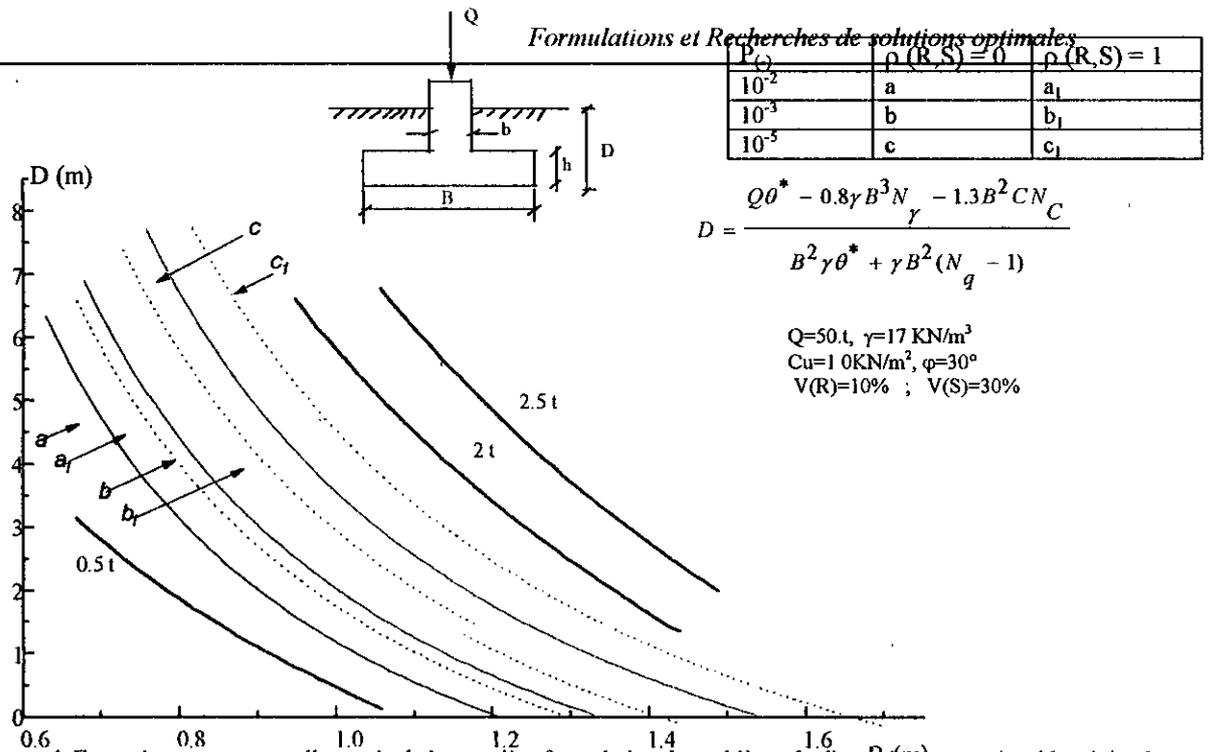


Figure 4. Exemple pour une semelle carrée de la première formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(+)}^*$

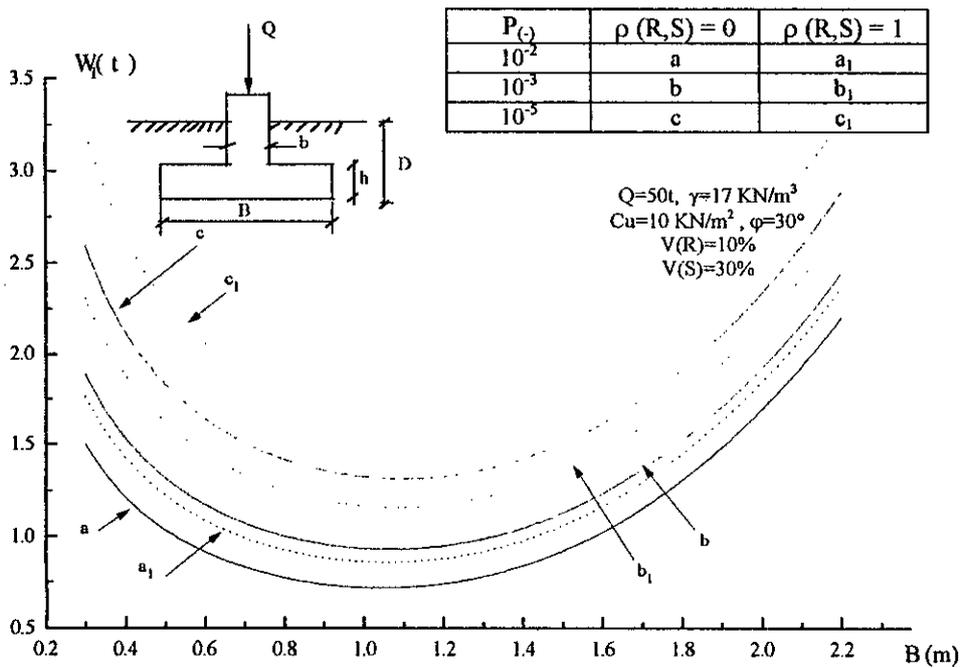


Figure 5. Exemple pour une semelle carrée de la seconde formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(+)}^*$

On remarque aussi que l'optimum représenté par le point du domaine des solution admissibles caractérisé par le poids minimal augmente avec la valeur de  $P_{(+)_s}$  (voir tableau 2).

Tableau 2

$P_{(+)_a}$		$1-10^{-2}$	$1-5.10^{-3}$	$1-10^{-3}$	$1-10^{-1}$	$1-10^{-5}$
$B_{op}$ (m)	1	1.04	1.05	1.06	1.08	1.09
	2	1.06	1.07	1.08	1.09	1.11
$D_{op}$ (cm)	3	0.91	1.22	1.54	2.07	2.64
	4	1.29	1.60	2.20	2.96	3.6
$W_{op}$ ( $10^3$ daN)	5	.718	0.781	0.928	1.073	1.311
	6	0.86	0.972	1.157	1.374	1.652

**Formulation (2)**

L'autre possibilité de trouver la solution optimale consiste à exprimer le poids total en fonction de la probabilité de survie à assurer à la fondation. Si on porte la valeur de  $X_2$  tirée de (1) dans (2) on obtient l'expression suivante du poids total :

$$W_T = \rho \left[ \frac{3X_1^3}{16} + \left( \frac{\theta^* Q - 0.8 \frac{\gamma}{2} X_1^3 N_f - 1.2 C N_c X_1^2}{\gamma X_1^2 (N_q - 1) + \theta^* \gamma X_1^2} - \frac{3X_1}{16} \right) \frac{X_1^2}{16} \right] + \eta \rho_s X_1 \left[ \frac{\theta^* Q - 0.8 \frac{\gamma}{2} X_1^3 N_f - 1.2 C N_c X_1^2}{\gamma X_1^2 (N_q - 1) + \theta^* \gamma X_1^2} \right]$$

En conservant les mêmes données que celles de l'exemple traité ci-dessus, on a tracé à la fig5, la variation de  $W_T$  en fonction de  $X_1$  pour les valeurs :  $1-10^{-2}$ ,  $1-10^{-3}$  et  $1-10^{-5}$  de la probabilité de survie  $P_{(+)_s} = p_{(+)_a}$ .

Les courbes en trait plein et en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures de  $\theta^*$ . La valeur maximale  $W_T$  de est donnée pour diverses probabilité de survie dans le tableau (4).

**6.1.1.2 Semelle carrée : charge verticale excentrée**

On va traiter une semelle carrée, mais soumise à une charge excentrée. L'excentricité et l'inclinaison de la charge diminuent fortement la capacité portante des fondations [15].

Meyerhof a proposé en 1953 d'attribuer à cette semelle une longueur fictive centrée sur la charge [15, 48].

$$B' = B - 2 E \text{ avec } E = e B$$

lorsqu'on est en présence d'une semelle isolée et que la charge est doublement excentrée (c'est à dire dans les deux sens : aussi bien dans le sens longitudinal que dans le sens transversal).

$$B'_1 = B - 2E_1$$

$$B'_2 = B - 2E_2$$

si

$$E_1 = E_2, \text{ On a : } B'_1 = B'_2 = B'$$

Semelle carrée : non excentrée

$$\sigma_t = 0.8\gamma \frac{B}{2} N_\gamma + \gamma D N_q + 1.2 C N_c$$

Pour une semelle isolée : charge excentrée de e. En remplaçant B par B' = B - 2E, E = Be,

$$B' = B - 2Be = B(1 - 2e).$$

on met en évidence deux coefficients correcteurs  $\xi_{fc}, \xi_{fy}$  relatifs à la forme de la semelle correspondants à l'excentricité e de la charge.

$$\xi_{fc} = (1 - 2e)^2 \text{ pour } N_q \text{ et } N_c$$

$$\xi_{fy} = (1 - 2e)^3 \text{ pour } N_\gamma.$$

Pour la même semelle isolée de forme carrée de l'exemple précédent prenant une excentricité

e maximale égale à  $\frac{B}{6} = 0.166B$  C'est à dire e = 16.6%.

On obtient pour la 1<sup>ère</sup> formulation avec  $X_1 = B$  et  $X_2 = D$ , l'expression suivante de  $X_2$  :

$$X_2 = \frac{\theta^* Q - 0.8 \frac{\gamma}{2} B^3 N_\gamma (1 - 2e)^3 - 1.2 C N_c (1 - 2e)^2}{\gamma B^2 (N_q - 1) (1 - 2e)^2 + \gamma \theta^* B^2 (1 - 2e)^2}$$

et pour le poids total on obtient l'expression :

$$W_T = \rho_b \left[ 3 \frac{X_1^3}{16} + \left( X_2 - 3 \frac{X_1}{16} \right) \frac{X_1^2}{16} \right] + \rho_s \eta X_1 X_2$$

Avec  $X_2$  égale à l'expression ci-dessus.

Tableau 3

$P_{(+)\text{ja}}$		$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$B_{op}$ (m)	1	1.05	1.06	1.08	1.11	1.12
	2	1.07	1.085	1.11	1.13	1.15
$D_{op}$ (cm)	3	2.25	2.60	3.03	3.57	4.4
	4	2.79	3.27	3.8	4.56	5.55
$W_{op}$ ( $10^3$ daN)	5	1.103	1.22	1.396	1.613	1.926
	6	1.30	1.461	1.713	1.982	2.397

Ce qui montre que l'excentricité diminue fortement la capacité portante (voir fig6 et fig7).

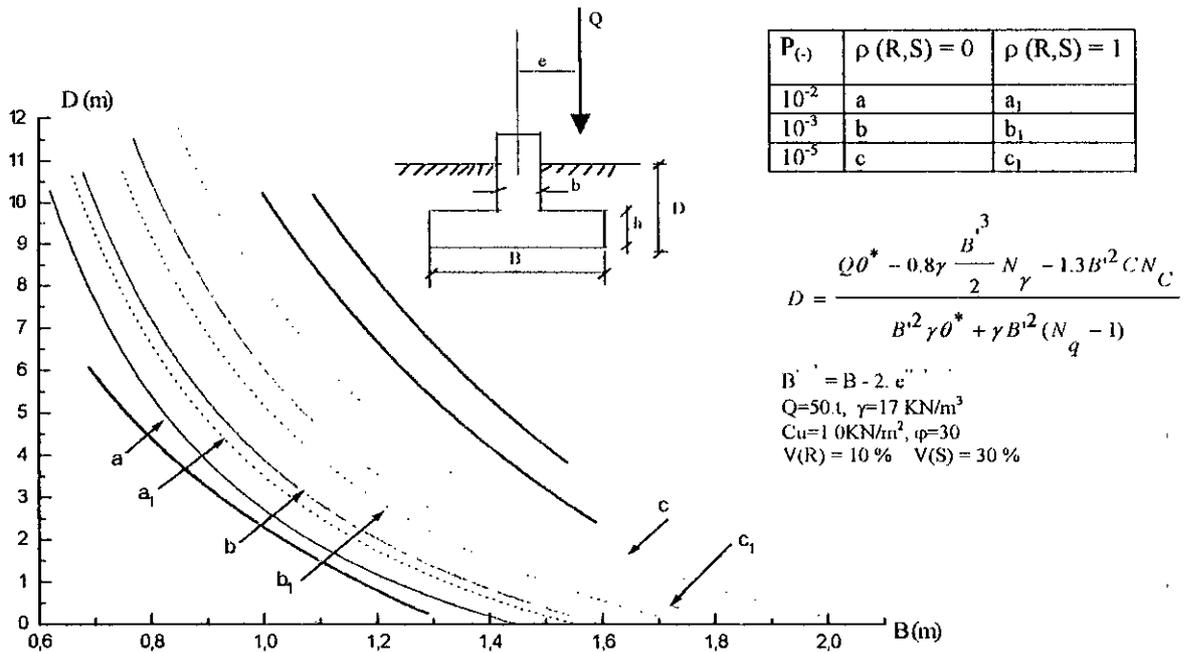


Figure 6. Exemple pour une fondation isolée soumise à charge excentrée de la première formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c)a}$

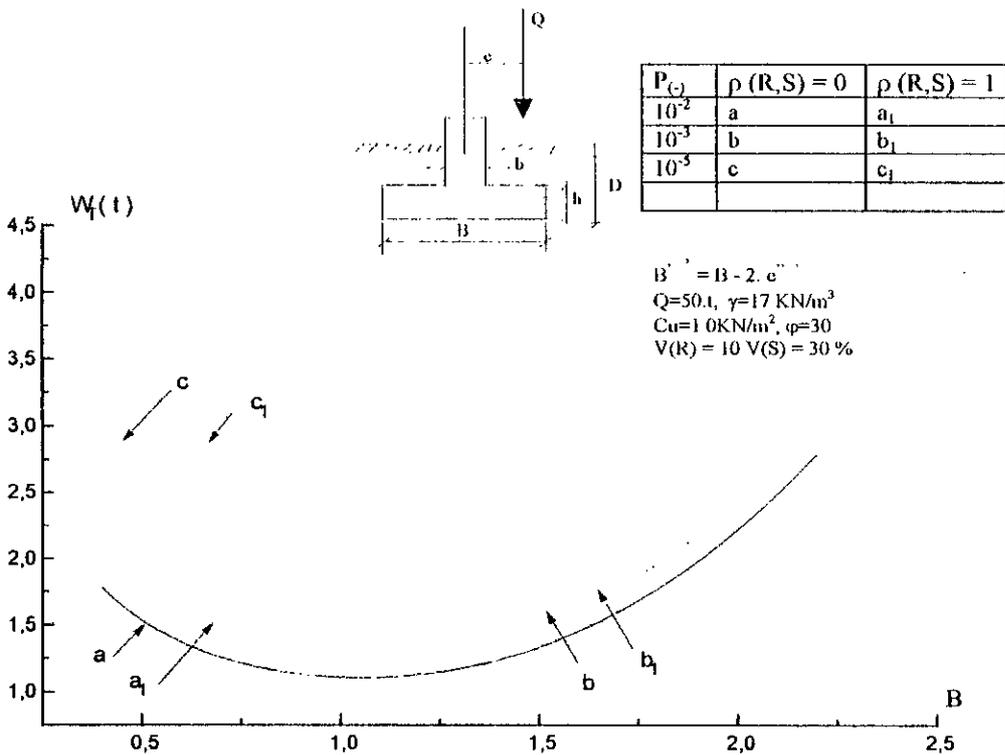


Figure 7. Exemple pour une fondation isolée soumise à une charge excentrée de la seconde formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c)a}$

### 6.1.1.3 Semelle carrée soumise à une charge centrée inclinée.

L'inclinaison de la charge comme l'excentricité diminue fortement la force portante de la fondation.

L'influence de l'inclinaison de la charge sur la force portante :

Pour une charge inclinée centrée si  $\alpha$  est l'inclinaison de la charge par rapport à la verticale (voir fig.8 et fig.9) on a mis en évidence trois facteurs réducteurs  $i_y$ ,  $i_q$  et  $i_c$  qui sont fonctions de l'obliquité de la charge et de l'angle de frottement interne  $\varphi$  [15,31].

Les trois facteurs  $N_y$ ,  $N_c$  et  $N_q$  sont multipliés respectivement par :

$$i_y = (1 - \alpha/\varphi)^2 \quad (1)$$

$$i_c = i_q = \left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right)^2 \quad (2)$$

Pour le même exemple de la semelle isolée mais soumise à une charge centrée et inclinée avec  $\alpha=10^\circ$ , l'illustration des deux formulations (1) et (2) de la page 69 et 70, du critère du poids fictif nous permet de trouver la solution optimale pour diverses valeurs fixées a priori de la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$  de cette fondation (voir fig.8 et fig.9).

Les résultats obtenus sont sur le tableau 4.

Tableau 4

$P_{(+)\alpha}$		$1-10^{-2}$	$1-5.10^{-3}$	$1-10^{-3}$	$1-10^{-4}$	$1-10^{-5}$
$B_{OP}$ (m)	1	1.26	1.31	1.36	1.43	1.51
	2	1.33	1.38	1.45	1.52	1.61
$D_{OP}$ (cm)	3	0.78	0.86	0.95	1.08	1.23
	4	0.89	1.09	1.14	1.31	1.52
$W_{op}$ ( $10^3$ daN)	5	1.208	1.347	1.582	1.803	2.302
	6	1.458	1.694	2.007	2.401	2.98

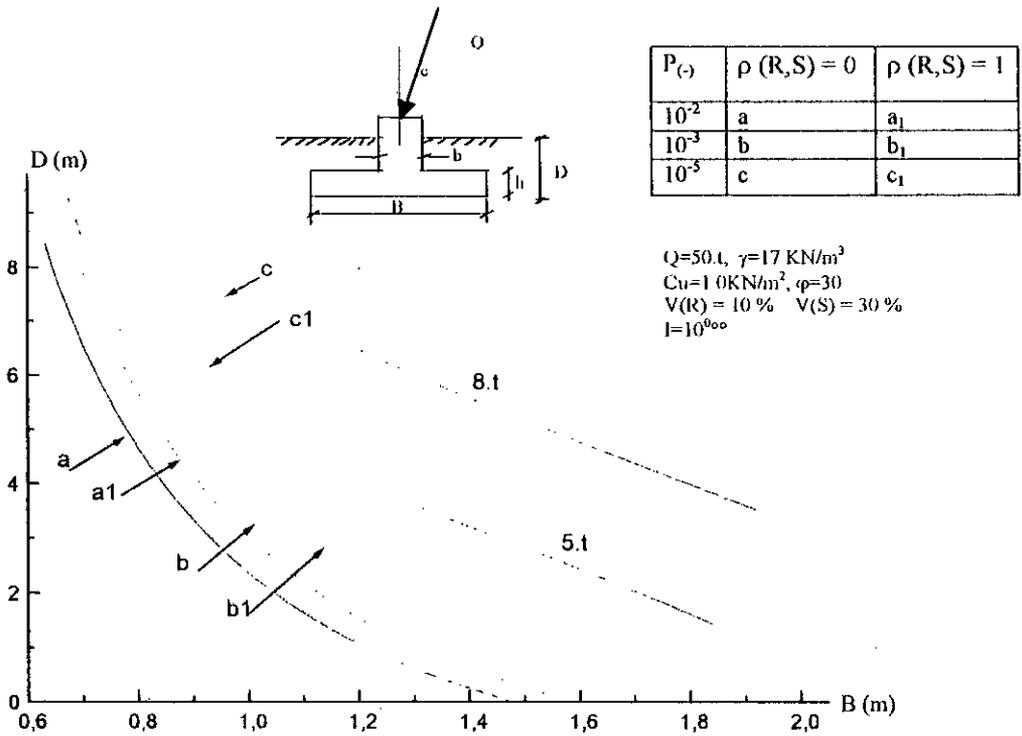


Figure 8. Exemple pour une fondation isolée soumise à une charge inclinée de la première formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(-)a}$

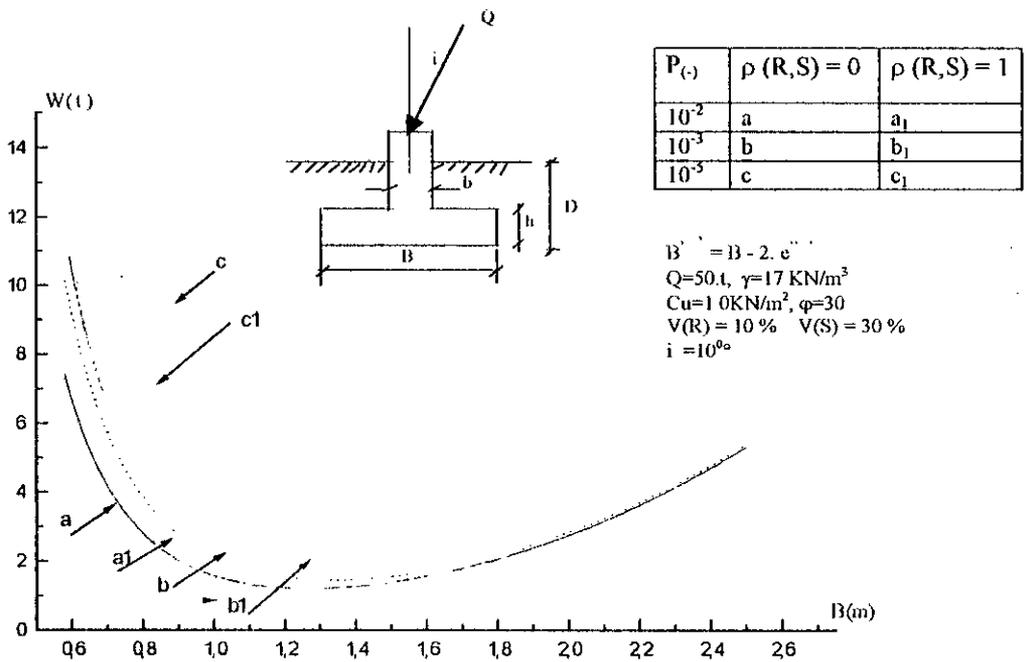


Figure 9. Exemple pour une fondation isolée soumise à une charge inclinée de la seconde formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(-)a}$

### 6.1.2 Fondations profondes : Les pieux

Il arrive souvent que le terrain superficiel sur lequel une fondation doit être assise n'est pas susceptible de résister aux efforts appliqués. Ce cas se présente lorsque les couches superficielles du sol sont constituées par exemple par de la vase, de la barbe, de l'argile molle ou d'une façon générale par des terrains peu résistants et très compressibles. Si la fondation était exécutée directement sur ces couches, des tassements incompatibles avec la stabilité des ouvrages se produiraient. Donc, lorsqu'elle est possible, la solution la plus simple consiste à asseoir l'ouvrage sur une assise profonde résistante par l'intermédiaire d'éléments porteurs qui vont constituer la fondation dite profonde. Enfin, la distinction capitale entre les fondations profondes et les fondations superficielles réside dans le fait que la portance des premières fait intervenir en plus de la résistance du terrain d'assise, les frottements des terrains latéraux sur le fût enterré de la fondation.

Les fondations profondes sont caractérisées par un rapport  $D/B$  élevé ( $D/B > 5$ ) Avec  $D$  la hauteur totale de la fondation dans le sol et  $B$  la largeur de la fondation.

#### 6.1.2.1 Charge portante d'un pieu

La charge limite du sol provient de deux termes :

- De la résistance au poinçonnement du sol sous la pointe du pieu ; c'est la résistance de pointe  $Q_p$
- De la mobilisation d'un frottement entre le sol et le pieu le long du fût ; c'est le frottement latéral  $Q_f$ .

La charge limite du sol s'écrit finalement :

$$Q_l = A q_p + Q_f = A(\gamma D N_q + 1.2 C N_c) + \alpha \gamma D^2 B \pi / 2$$

Avec  $A$  : section droite du pieu [15, 48].

#### 6.1.2.2 Formulations

Pour illustrer les deux formulations (1) et (2) du problème du dimensionnement optimal, prenons l'exemple d'un pieu de diamètre  $B$ , ayant une fiche de longueur  $D$  encastrée dans une bicouche comme le montre la figure 61 de la page 70. Pour diverses valeurs fixées a priori de la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha}$  de cette fondation profonde, proposons de déterminer la solution optimale.

##### Formulation (1)

1°) Les variables de dimensionnement sont  $X_1 = B$  et  $X_2 = D$

2°) La contrainte probabiliste, ramenée à une égalité, exprime que la fondation doit avoir la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha} = P_{(+)\alpha}$ . Elle s'écrit :

$$\frac{Q_l}{Q_{app}} = \frac{1}{E(Q_{app})} \left[ \frac{\pi X_1^2 N_q (\gamma'_1 h_1 + \gamma'_2 (X_2 - h_1))}{4} + \frac{\alpha \pi \lambda_2 X_2^2 X_1}{2} \right] = \theta^* (V(R), V(S), P_{(+)\alpha}) \quad (1)$$

$\theta^*$  : étant le coefficient de sécurité central.

$E(S)$  : moyenne ou espérance mathématique de la charge appliquée  $Q_{app}$ .

$\gamma'_1, \gamma'_2$  : poids spécifiques des deux couches.

$\alpha$  : Coefficient dépend de  $\varphi$  et de l'obliquité .

Les caractéristiques numériques de toutes les variables aléatoires sont indiquées à la figure 10.

Considérons  $V(Q) = 25\%$  et  $V(R) = 10\%$ , dans ce cas la figure 10 représente la contrainte probabiliste pour les valeurs  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$  de  $P_{(+)s} = P_{(+)a}$ .

- La fonction objectif : on a choisi la résistance du pieu comme fonction objectif défini par :

$$W = \gamma_2' \frac{\pi \cdot X_1^2}{4} X_2 N_q + \frac{\alpha \cdot \pi}{2} \gamma_2' X_2^2 X_1$$

## Formulation 2

Si on exprime la résistance totale du pieu en fonction de la probabilité de survie à assurer à ce pieu, si on porte la valeur de  $X_2$  tirée de (1) dans (2), (voir l'expression de  $X_2$  ci-dessous relation (4) ); on obtient l'expression suivante de la résistance du pieu

$$W = \gamma_2' \frac{\pi}{4} X_1^2 (X_2 - h_1) N_q + \alpha \cdot \pi \cdot \frac{\gamma_2'}{2} \cdot (X_2 - h_1)^2 \cdot X_1$$

$$\text{avec } X_2 = \frac{-37.82 X_1^2 + 19.44 X_1 + \sqrt{\Delta}}{6.48 X_1} \quad \text{et}$$

$$\Delta = 1304.38 X_1^4 - 1390.1 X_1^3 + 12.96 Q X_1 \theta^* \quad (3)$$

A la figure 3 on a tracé la courbe de  $W$  en fonction de  $X_1$  pour les valeurs  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$  de la probabilité de survie  $P_{(+)s} = P_{(+)a}$ .

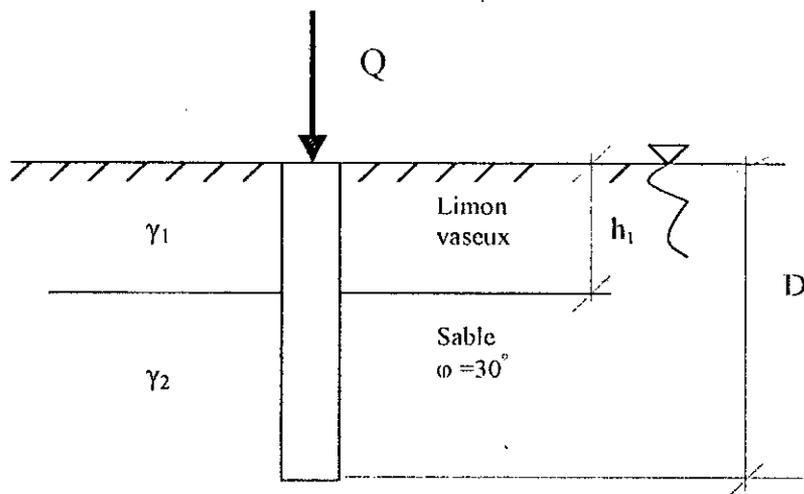


Fig. 6.1

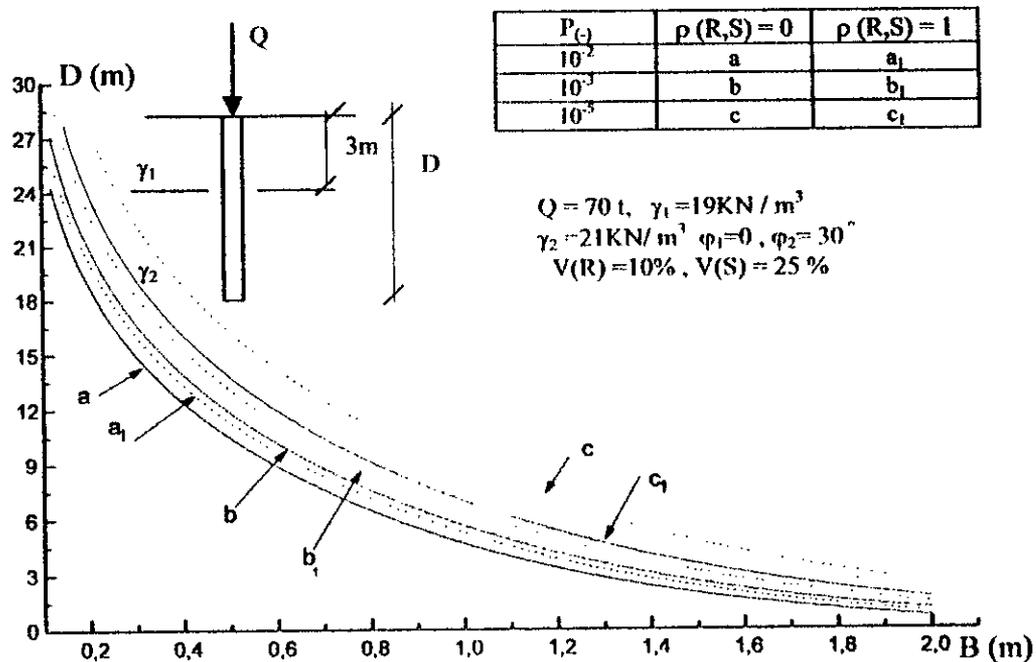


Fig.10 -Exemple, pour une fondation profonde de la première formulation de dimensionnement

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P(f)$

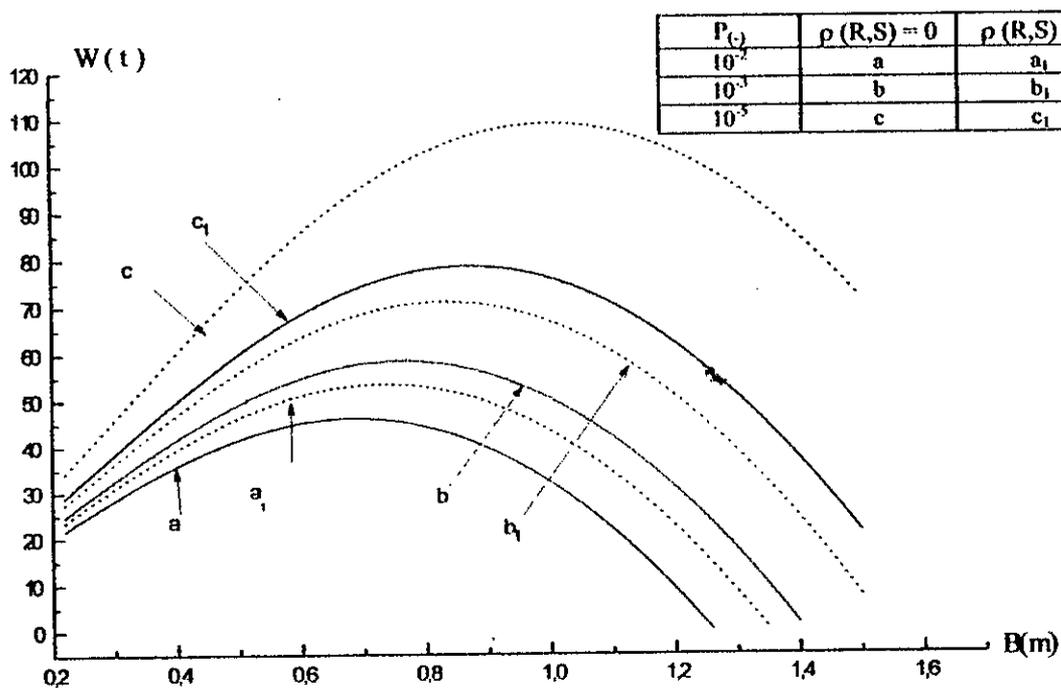


Fig.11 -Exemple, pour une fondation profonde de la seconde formulation de dimensionnement

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P(f)$

Les courbes en trait plein en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures de  $\theta^*$  (voir tableau 5).

Tableau 5

$P_{(+)\alpha}$		$1-10^{-2}$	$1-5.10^{-3}$	$1-10^{-3}$	$1-10^{-4}$	$1-10^{-5}$
$B_{op}$ (m)	1	0.69	0.72	0.76	0.81	0.87
	2	0.73	0.77	0.83	0.90	1.00
$D_{op}$ (cm)	3	7.75	7.89	8.06	8.19	8.33
	4	7.98	8.10	8.24	8.47	8.73
$W_{op}$ ( $10^3$ daN)	5	46.166	51.24	58.26	67.46	78.60
	6	5359	61.10	71.06	87.22	109.02

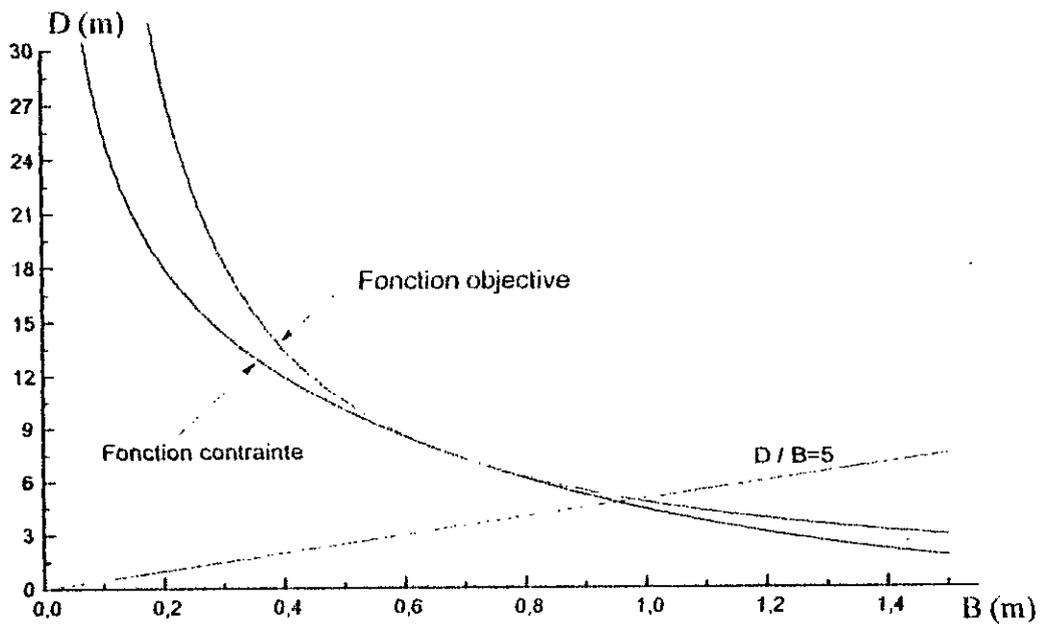


Figure 12 - Solution optimale ( $B_{op}=0.69$  m,  $D_{op}=7.75$  m)

## Résultats

Les résultats obtenus pour une fondation superficielle isolée sont présentés sur les tableaux (2, 3 et 4) et les figures 4 à 9. Tout d'abord, le cas de la fondation isolée sous charge centrée (figures 4 et 5) a été étudié, à travers un exemple réel d'une fondation carrée rigide. Ensuite, les cas de la charge excentrée (figures 6 et 7) et de la charge inclinée (figures 8 et 9) ont été successivement envisagés, pour la même fondation supportant la même charge en module.

Les considérations, remarques et conclusions citées pour les fondations continues sous mur restent valables pour les fondations isolées principalement en ce qui concerne le coefficient de sécurité, le gain, les degrés d'incertitudes, l'effet de la corrélation et la probabilité de ruine.

Pour, les trois cas de fondations superficielles isolées, on constate que l'effet de la corrélation est d'autant plus important que l'on s'approche du voisinage de l'optimum et que la probabilité de ruine est faible. Au-delà de ce voisinage son effet semble plutôt uniforme pour une probabilité de ruine donnée (on passe d'une courbe non corrélée à la courbe parfaitement corrélée par une simple translation).

Dans tous les cas, comme attendu, le poids effectif optimal relatif au coût optimal, augmente avec la diminution de la probabilité de ruine. Une excentricité ou bien une inclinaison de la charge engendre aussi une augmentation de ce poids optimal.

De plus pour les trois cas considérés, on constate que pour les différentes probabilités de ruine considérées, la largeur optimale de la fondation augmente faiblement avec la diminution de la probabilité de ruine. Par contre la profondeur d'ancrage optimale est fortement affectée par cette diminution de la probabilité de ruine et ce d'autant plus que la probabilité de ruine est d'autant plus faible. Ceci est principalement dû au fait que le prix de revient d'un mètre cube de béton ferrailé est nettement plus cher que le prix de revient d'un mètre cube de fouille de sol meuble en surface.

De même, contrairement à notre attente, une excentricité ou une inclinaison de la charge affecte peu la largeur optimale mais affecte fortement la profondeur d'ancrage optimale de la fondation.

Ce qui fait, que pour la charge inclinée, au vu des résultats obtenus, le terme de profondeur dans la fonction objective, relatif au coût des fouilles, a dû être revu, pour tenir compte d'un surcoût engendré par un ancrage qui ne serait plus superficiel. Les figures 8 et 9 montrent les résultats obtenus dans ce cas. Elles montrent qu'alors, la largeur optimale et la profondeur optimale d'ancrage, sont affectées dans une même proportion, aussi bien par l'augmentation de l'inclinaison que par la diminution de la probabilité de ruine.

Cette dernière remarque met en évidence le soin nécessaire à apporter à l'évaluation du coût probable (ou poids effectif probable qui en découle) et de sa variation en fonction des variables aléatoires de dimensionnement. Une sous ou sur estimation de cette fonction affecte de façon plus prépondérante la profondeur optimale plutôt que la largeur optimale.

#### **Fondations profondes :**

Le cas de fondation profondes demande une étude particulière, vu la complexité du problème de manque de données pour apprécier ou choisir la fonction critère du pieu car prendre le poids du pieu ou son poids fictif comme fonction critère c'est sous estimer le prix réel de son réalisation sans tenir compte de la nature du sol à excavé, de la technique utilisé et du type de pieu.

Nous avons cherché et optimiser ce type fondation en choisissant sa résistance ou sa capacité portante comme fonction critère pour le cas traité que nous avons pris, le tableau 5 et les Figures 10 et 11 montrent les résultats que nous avons obtenus.

On remarque que l'effet de la corrélation est d'autant plus important que la probabilité est faible.

Cet effet se traduit d'une part par un décalage appréciable de l'extremum (Fig.11) .Par ailleurs la courbe pour le cas parfaitement corrélé est d'autant plus éloignée de celle du cas non corrélé, que B croit, alors que pour les petites valeurs de B, les courbes restent très proches pour une très faible probabilité de ruine.

Dans tous les cas, pour une probabilité de ruine donnée la courbe correspondant au cas parfaitement corrélé est toujours plus haute que celle de la courbe non corrélé.

En plus des ces remarques celles faites pour les fondations superficielles relatives à la non linéarité de la fonction objectif, à la diminution de l'espace de calcul et à la variabilité de l'influence qui existe entre les trois paramètres : coefficient de sécurité, variabilité et probabilité de ruine, restent valables.

†

## 6.2 Extension au dimensionnement des structures métalliques dans un contexte probabiliste

### 6.2.1 Introduction et définition du critère

Comme on l'a déjà signalé dans le chapitre précédent, il est difficile et parfois même impossible de quantifier le coût total probable d'une structure.

En construction métallique, où le coût total d'une structure (assemblage et éléments divers) est approximativement proportionnel à son poids. Il est justifiable de substituer au critère du coût, celui du poids.

### 6.2.2 Première application

Dimensionnement probabiliste d'un treillis métallique : C'est un treillis constitué de deux barres soumis à une action aléatoire P tel qu'il est représenté à la figure 1. Les deux barres sont identiques, ayant une section en couronne de diamètre D (ou de section tubulaire) Prenons comme variable de décision  $X_1 = H$  et  $X_2 = D.e$

#### Première formulation

La contrainte probabiliste ramenée à une égalité exprime que la structure doit avoir la probabilité de survie  $P_{(+)} = P_{(+)_a}$ . Cette contrainte s'écrit :

$$2\pi X_2 \frac{E(C)}{E(P)} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + L^2}} = \theta^* (V(C), V(S), P_{(+)_a}) \quad (1)$$

$E(C)$  : Moyenne ou espérance mathématique de la capacité portante de la barre.

$E(P)$  : Moyenne ou espérance mathématique de l'action ou de la charge appliquée.

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité central nécessaire au treillis pour lui assurer la probabilité de survie  $P_{(+)_a}$ .

La fonction objective est le poids du treillis (poids des deux barres).

$$W_T = 2\pi\gamma X_2 \sqrt{L^2 + X_1^2} = 2\pi\gamma X_2 \sqrt{X_1^2 + L^2}$$

$\gamma$  : étant le poids spécifique de l'acier des barres (2)

Les caractéristiques numériques (espérance mathématique et coefficient de variation) de toutes les variables aléatoires qui interviennent sont indiquées à la figure 2.

Supposons que les variables C et S obéissent à une distribution logarithmo-normale, dans ce cas la figure 1 représente la contrainte probabiliste (1) pour les valeurs  $1.10^{-1}$ ,  $1.10^{-3}$  et  $1.10^{-5}$  de  $P_{(+)} = P_{(+)_a}$ .

Les courbes en trait plein et celles en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures du coefficient  $\theta^*$ .

Même constatation pour le domaine des solutions admissibles : Il s'amenuisent avec l'augmentation de la probabilité de survie des deux barres. La figure 1 montre aussi la fonction objective pour diverses valeurs du poids (10Kg et 45kg).

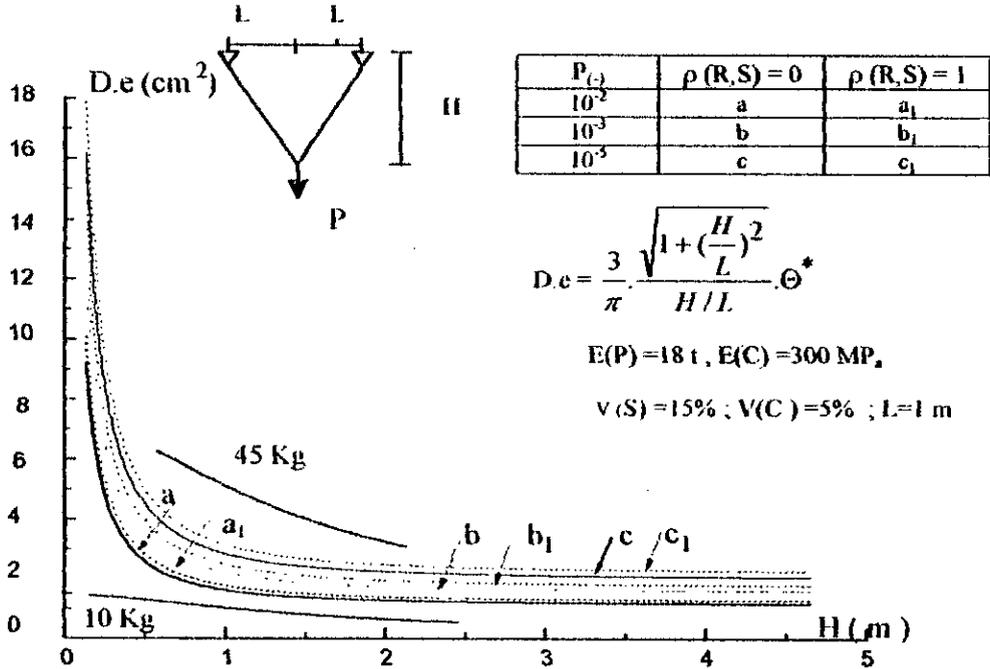


Figure 1. Exemple pour un treillis à deux barres de la première formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\Theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c_j)}$

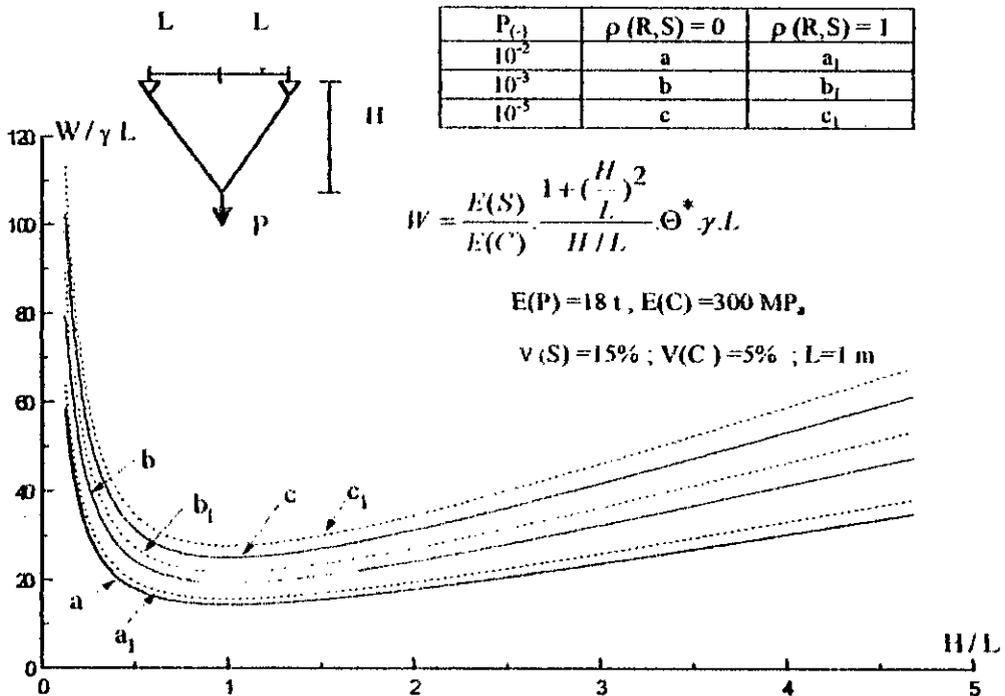


Figure 2. Exemple pour un treillis à deux barres de la seconde formulation du problème de dimensionnement à poids minimal.

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\Theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c_j)}$

**Remarque :** l'optimum représenté par le point du domaine des solutions admissibles caractérisé par le poids minimal augmente avec la valeur de  $P_{(+)\alpha}$  (voir tableau 6). Les valeurs indiquées aux lignes 1, 3, et 2, 4 correspondent respectivement aux bornes inférieures et supérieures du coefficient de sécurité  $\theta^*$ .

**Tableau 6**

$P_{(+)\alpha}$		$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$H_{OP}$ (m)	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1
$De_{OP}$ (cm <sup>2</sup> )	3	1.64	1.91	2.20	2.58	2.81
	4	1.74	2.08	2.47	2.79	3.13
$W_{op}$ (en daN)	5	11.42	13.12	15.25	17.30	19.80
	6	12.26	14.34	17.23	19.41	21.72

### 6.2.2.2 Deuxième formulation

L'autre possibilité de trouver la solution optimale consiste à exprimer le poids total en fonction de la probabilité de survie à assurer à la structure.

Portons la valeur de  $X_2$  tirée de (1) dans (2), on obtient ainsi l'expression du poids total

$$W_T = \gamma \frac{[L^2 + X_1^2]}{X_1} \frac{E(c)}{E(P)} \theta^*(V(c), V(s), P(+)\alpha) \dots \dots \dots (3)$$

En conservant les mêmes données de l'exemple précédent, on a représenté à la figure 2 la variation de  $W_T$  en fonction de  $X_1$  pour les valeurs  $1 \cdot 10^{-1}$ ,  $1 \cdot 10^{-3}$  et  $1 \cdot 10^{-5}$  de la probabilité de survie  $P_{(+)\alpha} = P_{(+)\alpha}$ .

Les courbes en trait plein et celles en trait interrompu correspondent respectivement aux bornes inférieure et supérieures de  $\theta^*$ . La valeur optimale de  $W_T$  est donnée pour divers probabilités de survie dans le tableau 6.

### 6.2.3 Deuxième application

#### Dimensionnement probabiliste d'une barre métallique soumise à une traction :

L'exemple est une barre soumise à une traction  $P$  aléatoire (Figure 4). La résistance de cette barre est aussi une variable aléatoire  $\sigma_c$  (c'est la limite élastique de l'acier). Le dimensionnement probabiliste de cette barre consiste à trouver la section transversale  $A$  qui corresponde à un niveau de sécurité imposé  $P_{(+)\alpha}$ .

Si on désigne par  $C$  la capacité de la barre et par  $P$  l'action ou la charge appliquée, en utilisant la formulation (1), on obtient :

$$A_T = \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}_c} \theta^*$$

avec  $A = \pi D e$  (section en couronne), avec  $D$  diamètre moyen

$$\frac{\bar{C}}{\bar{P}} = \frac{A \bar{\sigma}_c}{\bar{P}} = \exp \left[ \phi_{(1-P_c)}^{-1} \sqrt{V_C^2 + V_P^2} \right]$$

et l'aire nécessaire de la section  $A_T$  :

$$A_T = \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}_c} = \exp \left[ \phi_{(1-P_c)}^{-1} \sqrt{V_C^2 + V_P^2} \right]$$

$$\pi D e = \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}_c} \theta^*$$

ou  $D = \frac{\bar{P}}{\pi e \bar{\sigma}_c} \theta^*$  avec  $X_2 = D$  et  $X_1 = e$ .

Les caractéristiques numériques (moyenne et coefficient de variation) de toutes les variables aléatoires qui interviennent sont indiquées dans la figure 3.

la fonction objective :  $W = \gamma_a \pi D e L = \gamma_a \pi X_1 X_2 L$ .

Formulation (2) :  $W = \gamma_a \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}} L \theta^{**}$  (voir Figure 4)

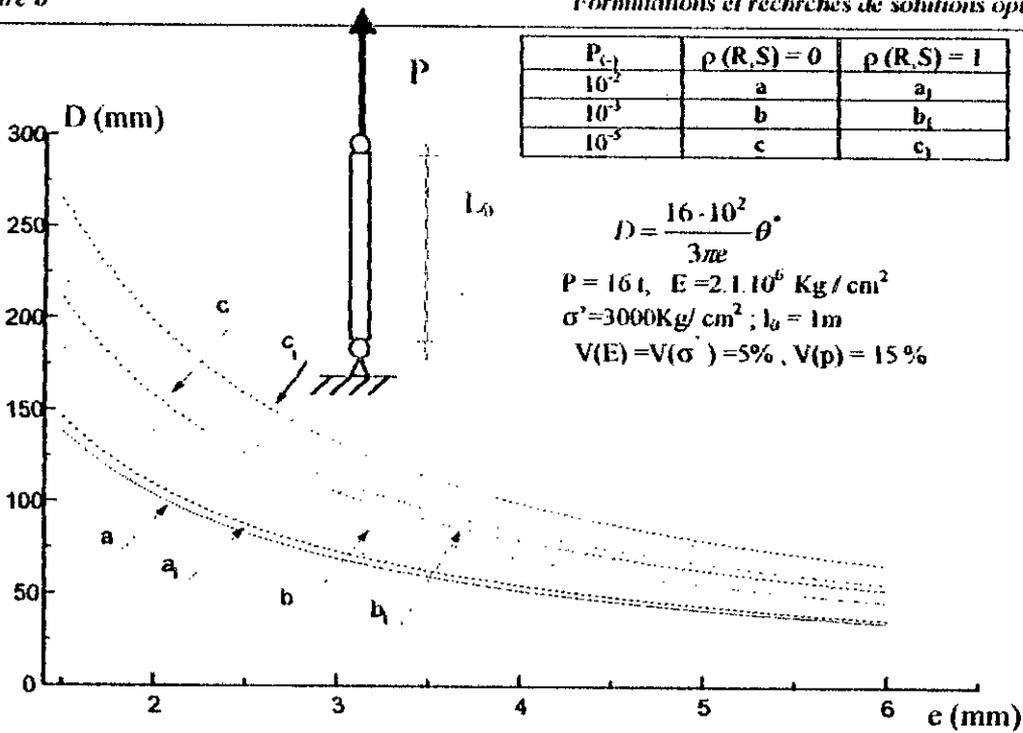


Fig 3 - Exemple, pour une barre soumise à une tension de la première formulation de dimensionnement

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c),p}$

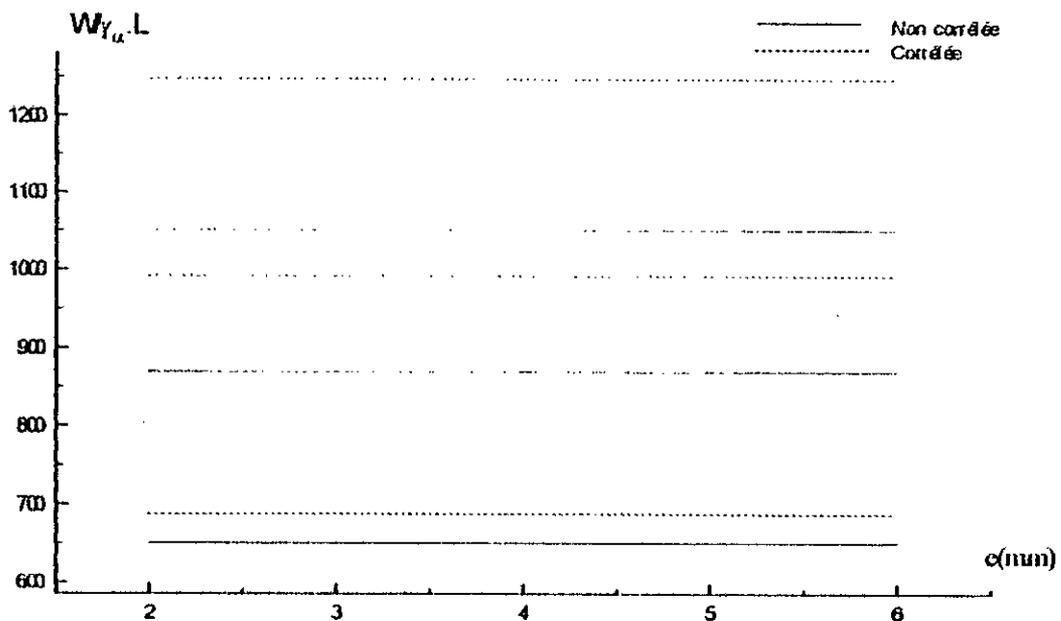


Fig 4 - Exemple, pour une barre soumise à une tension de la seconde formulation de dimensionnement

$\rho(R,S)$  : coefficient de corrélation linéaire entre R et S

$\theta^*$  : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(c),p}$

### 6.2.4 Troisième application

Dimensionnement probabiliste d'une barre métallique soumise à une compression : Prenons l'exemple de la barre précédente soumise à une compression aléatoire  $P$  (Figure 5).

On doit trouver la section transversale  $A$  qui correspond à une probabilité de survie imposée  $P_{(+)\alpha}$ .

La mesure de la sécurité de cette structure est donnée par  $P_{(+)}$ , c'est la probabilité que, simultanément, l'acier ne dépasse pas la résistance à la compression  $\bar{\sigma}'_c$  et que la barre résiste au flambage.

Si l'on suppose l'indépendance des variables  $R$  et  $P$ , on obtient une borne inférieure pour la sécurité de la barre [4, 45] :

$$\inf(P_{(+)}) = P(\bar{\sigma}'_c > \frac{P}{A}) \cdot P(\bar{\sigma}'_c > \frac{P}{A}) = P_{(+)\sigma} \cdot P_{(+)\Pi} \quad (1)$$

Dans les applications, il est indiqué du point de vue sécurité d'utiliser la borne inférieure pour apprécier la sécurité de la barre.

Si  $P_{(+)\alpha}$  est le niveau de sécurité imposé, en utilisant la relation (1) et en admettant l'égalité entre la sécurité à la compression et au flambement, on obtient :

$$\frac{\bar{\sigma}'_c}{P} = \theta_1^*(V(S), V(R), P_{(+)\alpha})$$

En utilisant la formulation (1), on obtient l'aire nécessaire pour la compression :

$$A_c = \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}'_c} = \exp\left[\phi^{-1}\frac{-1}{\sqrt{1-P(-)}}\sqrt{V_C^2 + V_P^2}\right]$$

De la condition de flambage résulte le moment d'inertie de la section. Pour notre cas :

$$N_E = \pi^2 \frac{EI}{L_0^2} \quad (2)$$

(barre articulée sur ses deux extrémités  $L_c=L_{(c)}$ )

$$I = \pi D e (D^2 + e^2) / 8 \quad (3)$$

(voir forme de la section en Figure 5 ou 6), donc la condition de flambage est :

$$\frac{\bar{N}_E}{\bar{P}} = \frac{\pi^2 \frac{\bar{E}I}{L_0^2}}{\bar{P}} = \theta_2^*(V(S), V(R), P_{(+)\alpha}) \quad (4)$$

$$I_0 = \frac{\bar{P}}{\pi^2 \bar{E}} L_0^2 \theta_2^* \quad (5)$$

avec

$$\theta_1^* = \exp\left[\phi \frac{-1}{\sqrt{1-P(-)}} \sqrt{V_R^2 + V_S^2}\right] \quad (6)$$

$$\theta_2^* = \exp\left[\phi \frac{-1}{\sqrt{1-P(-)}} \sqrt{V_E^2 + V_R^2}\right] \quad (6)$$

$$\text{car } P_{(+)\text{barre}} = P_{(+)\text{c}} \cap P_{(+)\text{fl}}. \quad (8)$$

si on connaît l'élanement  $\lambda$ , on obtient :

$$A_{fl} = \frac{\lambda^2}{L_0^2} I$$

ou

$$A_{fl} = \frac{\bar{P}}{\pi^2 \bar{E}} \lambda^2 \theta_2^* \quad (9)$$

Si on remplace les capacités portantes de la barre à la compression et au flambage, on obtient les expressions du dimensionnement probabiliste à la compression :

$$De = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{P}}{\bar{\sigma}_c} \theta_1^* \quad (10)$$

et au flambage :

$$\frac{\pi D e (D^2 + e^2)}{8} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\bar{P}}{\bar{E}} L_0^2 \theta_2^* \quad (11)$$

ou

$$D e (D^2 + e^2) = \frac{8 L_0^2}{\pi^3} \frac{\bar{P}}{\bar{E}} \theta_2^* \quad (12)$$

L'illustration de cet exemple est représentée dans la figure 5 (avec les caractéristiques numériques et toutes les données)

On peut observer que les points d'intersection des courbes de flambement et de compression qui correspondent à la même sécurité se trouvent sur un cercle centré à l'origine des axes de coordonnées (voir expressions 10 et 12), ce cercle a pour équation :

$$D^2 + e^2 = R^2 \quad \text{avec } R^2 = \left( \frac{4 \cdot 10^2}{\pi \sqrt{14}} \right)^2 \quad \text{pour les mêmes données de l'exemple cité ci-dessus}$$

En dehors du cercle, la condition de compression est déterminante et à l'intérieur c'est la condition de flambement qui domine (voir figure 6)

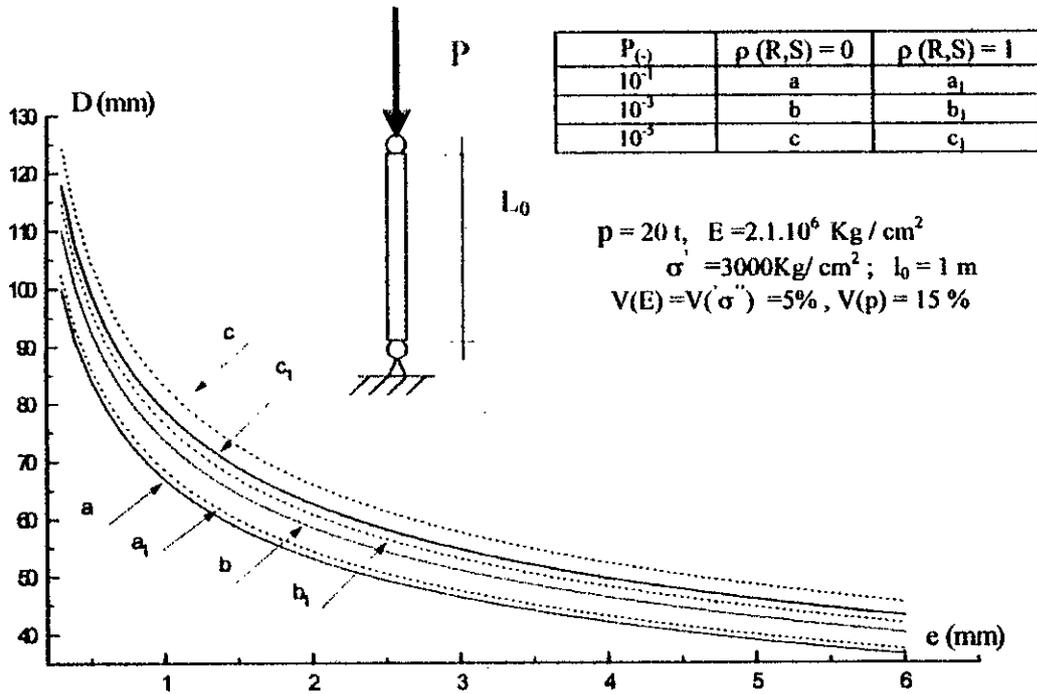


Fig.4 -Exemple, pour une barre soumise à compression avec flambage de la première formulation de dimensionnement  
 $\rho(R,S)$ : coefficient de corrélation linéaire entre R et S  
 $\theta^*$ : Coefficient de sécurité centrale nécessaire pour assurer à la fondation la probabilité de survie  $P_{(t)}$

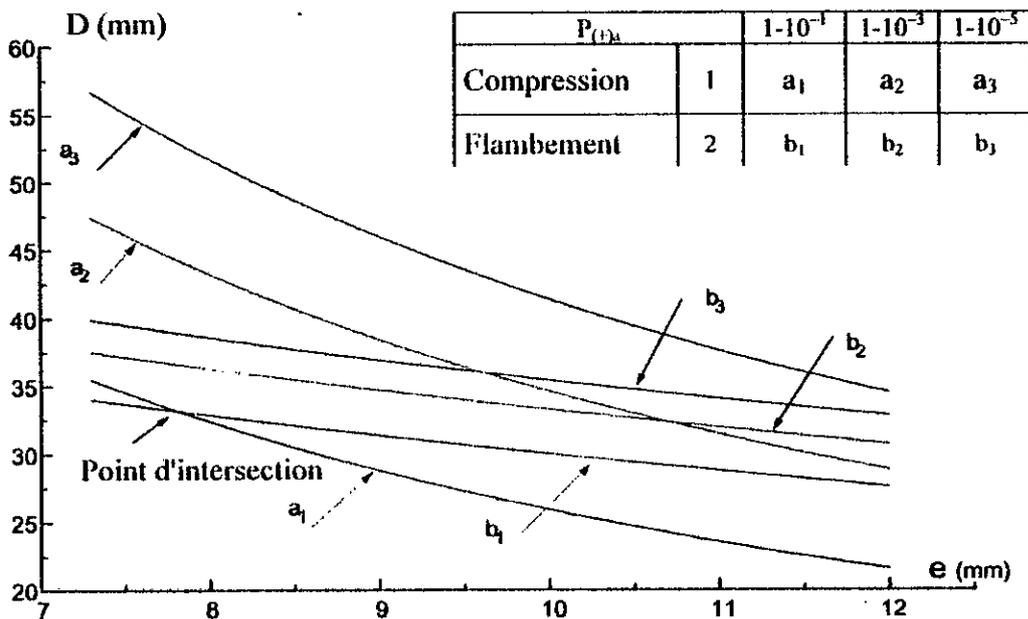


Figure 5 : Illustration des points d'intersection des courbes de flambement et de compression qui correspondent à la même sécurité.  
 (a) : courbes de compression  
 (b) : courbes de flambement

## Résultats

Les trois applications de cette extension aux structures simples (treillis à deux barres, barre simple soumise à la traction ou à la compression avec flambage) montre la variété du domaine d'application de cette méthode stochastique aux différentes structures de génie civil.

Les résultats obtenus sont présentés sur le tableau 6 et les figures de 1 à 6. Pour ces structures où le coût est approximativement proportionnel au poids, il est logique que les résultats obtenus soient réalistes vu l'analyse et l'estimation du risque de ces structures. On a pris comme coefficients de variation de l'action  $V(p)=15\%$  et de la capacité portante  $V(c)=5\%$  des deux barres, en supposant que les variables  $P$  et  $C$  obéissent à une même distribution logarithmo-normale. Ainsi, pour  $L_0=1m$ , la figure 1 représente la contrainte probabiliste pour les valeurs  $1-10^{-1}$ ,  $1-10^{-3}$ ,  $1-10^{-5}$  de  $P_{(+)\beta} = P_{(+)\alpha}$ . Les valeurs de la sécurité qu'on a pris pour ces structures sont différentes que celles considérées pour les fondations, car pour  $1-10^{-1}$  correspond un coefficient  $\theta^*=1.23$  qui est celui couramment utilisé en pratique (on remarque que les incertitudes qu'on a pris sont faibles par rapport à celles considérées pour les fondations car il est plus facile d'estimer le risque et d'évaluer les incertitudes pour une barre métallique). Une autre remarque (voir fig.2) est quelque soit la valeur de la sécurité imposée, l'optimum est toujours atteint pour  $H_{op}=1m$ .

Le manque de données statistiques aussi bien pour les actions que pour les matériaux reste toujours un obstacle non négligeable au développement de cette théorie probabiliste du dimensionnement optimal.

Si on arrive à connaître la probabilité de survie à assurer à la structure, les coefficients de variations des actions et des capacités portantes des éléments, ainsi que les coefficients de corrélation entre les actions et les capacités portantes, alors le dimensionnement probabiliste offre un cadre mathématique plus large que celui du dimensionnement classique, avec l'intention de se rapprocher de plus près de la réalité et ainsi la valeur de la solution peut être obtenue sans complication.

# CONCLUSIONS

## CONCLUSIONS

Le principal avantage apporté par le dimensionnement probabiliste optimal est que cette méthode permet de prendre en considération le degré d'incertitude sur les informations relatives aux actions et aux caractéristiques des matériaux. Ce degré d'incertitude sur les informations a une grande incidence sur la valeur de la solution optimale comme le montre l'ensemble des applications traitées. Il est regrettable, qu'actuellement, nous constatons un manque d'informations ou de données statistiques précises concernant les actions et les caractéristiques aléatoires des matériaux et des structures. Par suite, une recherche et une synthèse des lois de distribution statistique relatives à ces données s'imposent car ce manque d'information est le facteur majeur qui constitue un obstacle au développement du dimensionnement probabiliste optimal.

Un autre problème majeur relatif au dimensionnement probabiliste optimal est le choix d'un niveau de sécurité convenable relatif aux phénomènes à éviter, étant bien entendu que la sécurité est estimée en terme de probabilité de ruine (ou de survie). La définition, le choix des phénomènes à éviter ainsi que les probabilités de ruine correspondantes dépendent du projet considéré. Pour concevoir à un niveau de sécurité spécifié, un facteur de sécurité semble suffisant. Les effets des incertitudes et des probabilités peuvent être appréciés proprement à travers le seul facteur de sécurité. Bien sûr, le coefficient de sécurité lui-même est fonction de la probabilité de ruine (ou de survie), des incertitudes sur les informations, et les aberrations sur ces dernières vont directement l'affecter. Pour les problèmes de fondations, nous avons considéré la rupture du sol comme phénomènes prépondérants à éviter. Comme prévu, le coefficient de sécurité qui en résulte est d'autant plus important que le niveau de sécurité est d'autant plus strict. La méthodologie proposée à l'avantage, comparativement aux méthodes classiques, de relier directement le coefficient de sécurité et la probabilité de ruine. Par exemple, nous avons obtenu pour les coefficients de sécurités de 3 et de 2 habituellement utilisé en bureau d'étude pour le dimensionnement respectif des fondations superficielles et des fondations profondes, des probabilités de ruine respectivement de  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$  et ce, sans corrélation entre les caractéristiques mécaniques du sol et les actions. Ceci illustre un des avantages majeurs de l'utilisation de la méthodologie adoptée. Un autre avantage de cette approche stochastique est le choix du coefficient de sécurité, elle nous permet de choisir le coefficient de sécurité convenable si on arrive à estimer le risque et à évaluer les incertitudes pour n'importe quelle structure considérée.

Comme les applications traitées l'ont montré, une corrélation parfaite entre les caractéristiques des matériaux et les actions a pour effet d'augmenter la probabilité de ruine d'une manière non négligeable. A l'heure actuelle ces corrélations ne sont pas maîtrisées et compte tenu de leurs impacts sur la solution optimale, il semble important de rechercher à mieux les apprécier. De plus, nous remarquerons que les inexactitudes courantes d'exécution,

par nature probabiliste, modifient les sollicitations agissantes et les caractéristiques des matériaux. Il serait aussi intéressant de développer une méthodologie de prise en compte de ces inexactitudes et d'étudier leur influence sur la sécurité d'une part et sur la solution optimale d'autre part.

Un dernier point important est que la recherche de la solution optimale nécessite la définition précise de la fonction objective. Comme nous l'avons montré pour les fondations superficielles, sa définition a une incidence importante sur la solution optimale. Sa définition varie bien sûr d'un projet à un autre et nécessite bien entendu la collaboration et une transparence parfaite entre toutes les structures concernées par la réalisation du projet.

Finalement, nous pouvons dire que l'approche stochastique est une voie rationnelle pour étudier la sécurité d'une part et pour déterminer une solution optimale d'autre part. Son importance a été soulignée maintes fois par des chercheurs spécialisés en matériaux et en structures « mieux mesurer le risque et mieux garantir la sécurité » .

Il est recommandé d'orienter la recherche dans cette voie, et principalement pour les points cités ci-dessus. La méthode probabiliste semble être actuellement la seule voie possible pour garantir une sécurité homogène que ce soit pour les éléments structuraux et la structure globale.

Une telle recherche aidera à mieux cerner la nature du problème de dimensionnement probabiliste optimal et à faire apparaître la nature de la dépendance de la solution optimale vis à vis de divers paramètres, (probabilité de survie à assurer à la structure, les coefficients de variation des actions, des capacités portantes des éléments, les coefficients de corrélation entre les actions, les capacités portantes des éléments, ...etc). Cette recherche s'avère d'autant plus nécessaire pour les ouvrages ou constructions non courantes pour lesquelles les méthodes classiques sont insuffisantes, ne garantissant pas forcément, en plus une sécurité homogène.

## REFERENCES

- [1] Anderson R. G. "Reduction of uncertainty in structural design and decision making by first-order bayesian information analysis", presented to the MIT, 1971.
- [2] Ang, A. H. S. & Cornell, C.A, "Papers no1 on structural safety", Journal of Structural Division, Proceedings of the A.S.C.E, vol. 100 Sept. 1974.
- [3] Ang, A. H. S. & Amin. M., "Reliability of structures and structural systems ", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE Vol .94 April 1968
- [4] Ang, A. H. S. & Amin. M., "Saffety factors and probability in structural design" ASCE Vol .95 July 1969
- [5] Ang, A. H. S. & Ellingwood. B.R., "Critical Analysis of reliability principals relation to design", First International Conference on Application of Station and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong-Kong University, Sept. 1971.
- [6] Ang, A. H. S., "Probabilities based for safety performance and design", presented at the number 1972 ASCE Pittsburgh.
- [7] Baghery, S. & Magnan, J. P, "Analyse probabiliste de la stabilité et des tassements des remblais du site expérimental de Cubzac-les-Ponts", Raport de recherche LPCP, No. 122, Paris, 1980.
- [8] Bans, R., "Sollicitations et sécurité.", Conférence donnée à l' ABEM, Liège, Mars 1972.
- [9] Benjamin, J. R. and Cornell, C. A, "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers." , Mac Graw- Hill Inc, ISBN 070045496, 1970.
- [10] Boissier.D, "Analyse probabiliste de securité", Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA, Loyon 1977.
- [11] Carmasol, A., "Dimensionnement stochastique des structures", J.M.A., Paris, 1980, pp. 108-193.
- [12] Carmasol, S. & Salencon, J., "Une analyse probabiliste du dimensionnement des structures par le calcul à la rupture", *Journal de mécanique théorique et appliqué*, Vol. 4, No. 3, 1985, pp. 305-321.
- [13] Cornell, C.A, "A probability based, structural code.", *Journal of the American Concrete Institute*, 1969.
- [14] Cornell, C.A., "First-order reliability theory for structural design," *Study No.3, Solid Mechanics Division*, University of Waterloo, Ontario, Canada 1969.
- [15] Costet.J et Sanglerat.G,"Cours pratique de mecanique des sols", t.2 Dunot .1986.
- [16] Dantzing, G. B., "Programming linear structure", *Econometrica*, Vol. 17, N°1, 1949.
- [17] Demengel, G., Benichou, P., "Mathématiques appliquées, Probabilité, Statistique, Fiabilité - Outils pour l'ingenieur" Ellypse, 1997.
- [18] Ellingwood B.R & A.H.S "Illustration of safety evaluation and risk-based design", ASCE , San Fransisco 1973.

- [19] Erangopol, D, "On the safety of structures and structural elements", *Bull. Scient. Constr no3*, Bucarest 1973.
- [20] Favre, J. L. "Milieu continu et milieu discontinu : mesure statistique indirecte des paramètres rhéologiques et approche probabiliste de la sécurité", Thèse de Doctorat d'Etat en Sciences Physiques, Université P. et M. Curie, Paris, 1980.
- [21] Ferry B.J & Castanheta, M. "Structural safety.", *2nd ed., National Civil Engineering Laboratory*, Lisbon, Portugal, Mar. 1971.
- [22] Fogli, M., Muzeau, J. P. & Lemaire, M., "Reliability of structures subjected to buckling in probabilistic context", *Fourth International Conference on Structural Safety and Reliability: ICOSAR'85*, Vol. 3, Kobe, Japan , May 27-29, 1985.
- [23] Forsell, C., "Economy and construction", *Sunt Fornoft*, April 1924 , pp74-77.
- [24] Frangopol, D. M., "A reliability-based optimisation technique for automatic plastic design", *Computer methods in Applied Mechanics an Engineering*, Vol. 44, No. 1, 1984, pp. 105-117.
- [25] Frangopol, D. M., "Interactive reliability-based structural optimisation", *Computers and Structures*, Vol. 19, No. 4, 1984, pp. 559-563.
- [26] Frangopol, D. M., "Multi-Criteria reliability-based optimisation of structural systems", *Proceedings of the International Conference on Structural Safety and Reliability: ICOSAR'85*, Vol. 3, Kobe, Japan , May 27-29, 1985, pp. 591-595.
- [27] Frangopol, D. M., "Sensitivity reliability-based optimum design", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 111, No. 8, Aug., 1985, pp. 1703-1721.
- [28] Frangopol, D. M., "Towards reliability-based computer-aided optimisation of reinforced concrete structures", *Engineering Optimisation*, Vol. 8, No. 4, 1985, pp. 301-313.
- [29] Freudenhal, A.M., "Safety of structures," *Transactions of the ASCE*, Vol. 112, 1947, pp.125-180.
- [30] Freudenhal, A.M., Garretts, J.M., & Shinozuka, M., "The analysis of structural safety.", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 92, N°.ST1, Proc. Paper 4682, Feb.,1966, pp. 267-325.
- [31] Genevois, B. "Rôle de la variabilité spatiale des paramètres de sol sur la capacité portante des fondations superficielles", Thèse de Docteur Ingénieur, ECP, Déc. 1984.
- [32] Girault, M., "Calcul des probabilités en vue des applications.", Dunod, 1996.
- [33] Hilton, H. H. & Feigen, M., "Minimum weight analysis based on structural reliability.", *Journal of Aerospace Sciences*, Vol. 27, Sept. 1960.
- [34] Jacob, B. "An application of the bayesian probability theory to a predictive model of steel strength", *Second International Workshop of Pavia*, 24-27 Aug., 1984.
- [35] Johnson, A. I., "Strength, safety and economical dimensions of structures.", *Bull. N° 12, Division of Buildings Statics and Structural Engineering*, Royal Institut of Technology, Stockholm, sweden,1953.
- [36] Krée, P. et Met. P., "Probabilité de ruine des structures élastiques", *Construction Métalliques*, N° 4, 1973

- [37] Kuhn, H. W. & Tucker, K. W., "Non linear programming ", *Econometrica*, Vol. 19, pp 50-51, 1951.
- [38] Lind, N. C., "Constant partial safety factors", *Journal of the Structural Division*, ASCE Vol. 97 June 1971.
- [39] Massonnet, Ch. & Rondal, J., "Dimensionnement optimal des structures.", Notes de Cours, Université de Liège, 1975.
- [40] Mau, S. T., "Optimum design of structures with a minimum expected cost criterion", *Repport N°340*, Cornell University, New York, Jun 1971.
- [41] Mebarki, A., "Evaluation de la probabilité de ruine des ponts isostatiques en béton armée", Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA, Toulouse 1984.
- [42] Monge, "Déblai et remblai", Mémoire de la Cadémie des Sciences, 1781.
- [43] Moses, F. et Kinser, D.E., "Optimum structural design failure probability constraints.", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 5, Jun 1967.
- [44] Moses, F., "Structural system reliability and optimisation", *Computers and Structures*, Vol. 7, 1977, pp. 283-290.
- [45] Moses, F. "Design for reliability - concepts and applications", *Optimum Structural Design*, John Wiley and Sons. 1973.
- [46] Nowak, A. S., "Sensitivity analysis of human errors", *Proceeding Fourth International Conference on Applications of Statistics an Probability in Soil and Structural Engineering*, Vol. 1, Florence, Italy, 1983, pp. 729-739.
- [47] Parzen, E., "Stochastic processes", Holden Inc, San Francisco 1962.
- [48] Philliponnat, G., "Fondation et Ouvrages en Terre", Eyrolles, 1980.
- [49] Prot., M., "Théorie probabiliste de la sécurité", *Revue Central de Chemins de Fer*, Paris France June, 1951.
- [50] Pugsly, A. G., "Concepts of safety in structural engineering", *Jornal of the Institute of Engineers*. London, England, Vol. 33, N° 3, July 1959. pp 353-362.
- [51] Ravindra, M.,K, Lind, N.C., & Siu, W. "Illustration of reliability - based design", *Presented at The April 9<sup>th</sup> -13<sup>th</sup>, 1973, ASCE, National Structural Engineering Meeting. Held at San Francisco, Calif. (pre-print 2023)*, 1973.
- [52] Rockey, K.C, Evans, H.R, "Introduction à la méthode des éléments finis", Eyrolles, Paris 1979.
- [53] Rosenblueth, E., & Esteva, L., "Reliability basis for some Mexico codes", *Publication SP-31*, The American Concrete Institute, 1972.
- [54] Ruegg, A., "Probabilités et statistiques.", Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1994.
- [55] Schmit, L. A. Jr., 'Structural design by systematic synthesis.', *2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation*, A.S.C.E., Pittsburgh, 1960, pp. 105-132.

- [56] Schmith, L. A., "Structural synthesis – Its genesis and development", *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 10, Oct. 1981, pp. 1349-1262.
- [57] Sexmith, R. G., & Mau, S. T., "Reliability design with expected cost optimization", *ASCE, Special, Conference on the Safety and Reliability of Metal Structures*, Pittsburg, Nov. 1972.
- [58] Tang, W. H & Ang, H-S, "Modelling analysis and updating of uncertainties", *Presented at the April 9<sup>th</sup>–13<sup>th</sup>, ASCE National Structural Engineering Meeting, Held at San Francisco, Calif* (pre-print 2016).
- [59] Tukstra. C. J., "Choice of failure probabilities", *Journal of Structural Division*, ASCE Vol. 93. Dec 1967, pp 189-200.
- [60] Uti-Cisco, "La sécurité des constructions", Edit Eyrolles, 1974
- [61] Vanerplaats, G. N., *Numerical optimisation techniques for engineering design*, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1984.
- [62] Ventsel, H., "Théorie des Probabilités.", Edition Mir, Moscou, 1973.

## ANNEXE 1

### 1- Loi normale (ou de Laplace-Gauss) :

Soient  $x$  une v.a ,  $m$  et  $\sigma > 0 \in \mathbb{R}$

$X$  est normale ou suit une loi normale de paramètres  $(m, \sigma)$  si  $x$  admet pour densité de probabilité la fonction  $f(x)$  définie pour tout  $x$  par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

on a :

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  (car  $\sigma > 0$ )
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

- **Fonction de répartition** : ( $F(x)$ )

On a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- **Proposition** :

Soit  $x$  une v.a qui suit une loi normale de paramètre  $(m, \sigma)$  ; alors la variable aléatoire

$$\frac{x - m}{\sigma} \text{ suit la loi normale } (0, 1)$$

- **Remarque** :

Soit  $x$  une v.a normale, on dit que  $x$  est centré réduite (ou normale réduite) lorsque  $m=0$  et  $\sigma = 1$

- **Proposition importante** :

$\Phi$  fonction de répartition de la v.a normale réduite on a :

$$\Phi(a) = 1 - \Phi(-a)$$

$$P(|x| > a) = 2(1 - \Phi(a))$$

Relation très utilisé dans les calculs pratiques

Si  $y$  suit une loi normale  $(m, \sigma)$  on a :

$$P(|y - m| > \sigma a) = 2(1 - \Phi(a))$$

$$P(x \leq a) = P\left(\frac{x - m}{\sigma} \leq \frac{a - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

## 2- Loi log- normale (ou le modèle des produits) :

### - Les modèles multiplicatifs :

Alors qu'une distribution normale est produite à partir d'une somme de plusieurs petits effets il est désirable aussi de considérer la distribution d'un phénomène qui se produit comme résultat d'un mécanisme agissant sur un nombre de facteurs.

Un exemple de tel mécanisme se produit dans le processus de rupture, tel que l'écrasement des agrégats ou le transport des sédiments dans un écoulement.

La taille finale de la particule résulte d'un nombre de collisions entre particules de différentes tailles voyageant à différentes vitesses, chaque collision réduit la particule d'une proportion aléatoire de sa taille  $y_n$  d'une particule choisie aléatoirement après la  $n^{\text{ième}}$  collision est Le produit de  $y_{n-1}$  (sa précédente taille juste avant la collision) et  $w_n$  (le facteur de résolution aléatoire).

Par extension de cet argument en arrière pour tout les collisions :

$$Y_n = y_{n-1} \cdot w_{n-1} \cdot w_n = \dots = y_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$$

L'évolution de certains systèmes économique peut suivre ce modèle.

Un autre exemple est le mécanisme de la fatigue des matériaux après  $n$  cycles de chargement-

### -Distribution :

Dans tous ces cas, la variable d'intérêt  $y$  est exprimée comme le produit d'un grand nombre de variables.

### - Distribution de $y$ :

En prenant le logarithme naturel de chaque coté de l'équation (1), le résultat est de cette forme

$$\ln y = \ln y_0 + \ln w_1 + \ln w_2 + \dots + \ln w_n$$

Remarque :

$w_i$  sont des variables aléatoires, les fractions  $\ln w_i$  sont aussi des variables aléatoires et  $\ln y$  est normalement distribué

### Distribution de $y$ :

$$\text{Posons : } x = \text{Log } y \Rightarrow y = e^x$$

Puisque  $y$  est normalement distribué, on peut facilement démontré que la distribution de  $y$  est :

$$f_y(y) = \frac{1}{y\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

on dit dans ce cas que la variable aléatoire suit une loi log-normale de paramétrés ( $m_x, \sigma_x$ )

avec :

$$x = \ln y$$

si :  $\tilde{m}_y$  est la médiane de  $y$

et  $\tilde{m}_x$  est la médiane de  $x$

on montre que :

$$\ln \tilde{m}_y = \tilde{m}_x$$

pour une distribution normale :

la médiane est égale à la moyenne

donc :

$$\tilde{m}_x = m_x$$

d'où :

$$\ln \tilde{m}_y = m_x$$

$Y \geq 0$  (3) Par substitution dans (3) on obtient :

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2 \cdot \pi \sigma_{mY}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{mY}} \cdot \ln\left(\frac{y}{m_Y}\right)\right]^2\right]$$

Si Y possède cette fonction de densité on dit que Y est LN(  $m_Y, \sigma_{mY}$  )

Où  $m_Y$  et  $\sigma_{mY}$  sont les deux paramètres de distribution .

Moment :

Le 1<sup>er</sup> moment de Y :

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y \cdot f_Y(y) \cdot dy = (\tilde{m}_Y)^r \exp\left(\frac{1}{2} r^2 \sigma_{mY}^2\right)$$

r=1 :

$$E(y) = m_Y = \overline{m_Y} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \sigma_{mY}^2\right)$$

Si on pose :

$$V_Y^2 = \exp(\sigma_{mY}^2 - 1)$$

on obtient :

$$\tilde{m}_Y = m_Y \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{mY}^2\right)$$

$$\sigma_{mY}^2 = \ln(V_Y^2 + 1)$$

il faut aussi remarquer :

$$m_{mY} = L \cdot m_Y - 1/2 \sigma_{mY}^2$$

## ANNEXE 2

1) Les différentes étapes de base pour la détermination de la rigidité d'un élément :

1) Relation entre déformations et déplacements :

$$[\varepsilon] = [B] \cdot [U]^e \quad \text{avec} \quad [B] = [L] \cdot [H]$$

$[L]$  : opérateur matriciel, dans notre cas  $[L] = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right]$

2) Relation entre contrainte et déformation :

$$\{\sigma\} = [c] \cdot \{\varepsilon\}$$

Dans notre cas  $[c] = [\bar{E}]$

L'application du principe des travaux virtuels nous donne :

$$[K]^e \cdot [U]^e = [R]^e$$

Avec  $[K] = \int [B]^T \cdot [c] \cdot [B] \cdot dv$

3) Relation entre contrainte et déplacement :

$$\{\sigma\} = [c] \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\text{ou : } \{\sigma\} = [c] \cdot [B] \cdot [U]^e = [H] \cdot \{U^e\}$$

4) Etablir la matrice  $[H]$  reliant contraintes et déplacements :

$$[H] = [c] \cdot [B]$$

Dans le repère global, la matrice de rigidité  $[K]^e$

$$[K]^e = \frac{A \cdot E}{L} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \cos \varphi$$

$$\mu = \sin \varphi$$

et la matrice  $[H]$  dans le repère global est :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

**Application :** (voir figure)

On a un treillis à trois barres, on considère un seul Cas de chargement.

Les barres (1) et (3) sont identiques et de même Section :  $A1=A3$  .

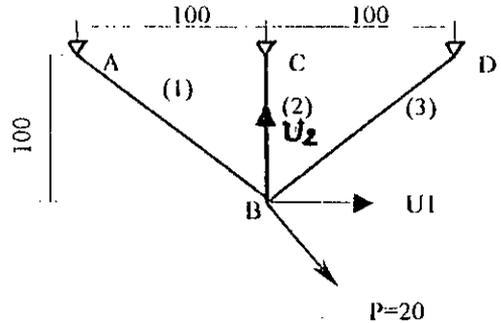


Figure 1

Barre (1) :  $\varphi = -45 = -\frac{\pi}{4}$

$$\left[ \overline{K}_1^e \right] = \frac{EA1}{L1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{U}_A \\ \overline{V}_A \\ \overline{U}_B \\ \overline{V}_B \end{bmatrix}$$

Barre : (2)  $\varphi = -90$

$$\left[ \overline{K}_2^e \right] = \frac{EA2}{L2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{U}_C \\ \overline{V}_C \\ \overline{U}_B \\ \overline{V}_B \end{bmatrix}$$

Barre (3) :  $\varphi = -135^\circ$

$$\left[ \overline{K}_3^e \right] = \frac{EA3}{L3} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{U}_D \\ \overline{V}_D \\ \overline{U}_B \\ \overline{V}_B \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité de la structure ou du treillis, on doit additionner ou assembler ces trois matrices (il est important de remarquer qu'on ne peut faire le processus d'assemblage que si ces trois matrices sont établies dans le système de coordonnées global). Après assemblage et introduction des conditions aux limites en tenant compte que  $A1=A3$  et  $L1=L3$  on obtient :

$$E \cdot \begin{bmatrix} \frac{A1}{L1} & 0 \\ 0 & \frac{A2}{L2} + \frac{A1}{L1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1B} \\ R_{2B} \end{bmatrix}$$

ou avec  $L1 = 100 \cdot \sqrt{2}$  et  $L2 = 100$

$$\frac{E}{100 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} A1 & 0 \\ 0 & A1 + \sqrt{2} \cdot A2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1B} \\ R_{2B} \end{bmatrix}$$

Formulation de la matrice  $[H]$  ( ou de la matrice S)

$$\{\sigma\} = [c] \cdot \{e\}$$

ou  $\{\sigma\} = [H] \cdot \{U^e\}$  en introduisant la matrice  $[A]$  on obtient

$$[\sigma_1] = \frac{E}{L1} \cdot [\cos \varphi \quad \sin \varphi] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$[\sigma_2] = \frac{E}{L2} \cdot [\cos \varphi \quad \sin \varphi] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } [\sigma_3] = \frac{E}{L3} \cdot [\cos \varphi \quad \sin \varphi] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi = -135$$

Finalement on obtient  $[S]$  :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E}{L1} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E}{L1} \\ 0 & -\frac{E}{L2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E}{L3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E}{L3} \end{bmatrix} = \frac{E}{100} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

avec U1 et U2 dirigés comme indiqué sur la figure (1) .

Si U2 est dirigé vers le bas on obtient :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\{\sigma\} = [S] \cdot [U]$  du système.

## ANNEXE 3

Exemple :

Nous allons préciser et expliciter certain notion développées.

La semelle est soumise a une charge de (800KN/ml) et ancrée a un mètre de profondeur.

Les incertitudes sur R et S sont :

$$V_R = 20\% \text{ et } V_S = 25\%$$

$$\theta_0^* = \frac{\bar{C}}{\bar{S}} = \text{Exp} \left[ \Phi_{A-P_i}^{-1} \sqrt{V_R^2 + V_S^2} \right]$$

$$\sqrt{V_R^2 + V_S^2} = 0.32$$

on obtient pour diverses probabilités :

$P_f = 10^{-1}$	$\theta_1^* = 1.5$	$P_f = P_{(t)}$
$P_f = 10^{-2}$	$\theta_2^* = 2.1$	
$P_f = 10^{-3}$	$\theta_3^* = 2.69$	
$P_f = 10^{-4}$	$\theta_4^* = 3.287$	
$P_f = 10^{-5}$	$\theta_5^* = 3.90$	
$P_f = 10^{-6}$	$\theta_6^* = 4.60$	

Si on trace cette fonction sur Excel ,on obtient une droite (échelle semi-logarithmique)

$$\theta^* = -0.273 \ln(x) + 0.8606$$

ou

$$\theta^* = -0.61479 \log_{10}(x) + 0.8606$$

$$\theta^* = 0.615 \text{ colog } P_{(t)} + 0.86$$

La valeur du coefficient de détermination sur le graphique  $R^2 = 0.9993$

On déduit que :

$$\lambda_{00} = 0.615$$

et  $a_1 = 0.86$

Détermination de  $C_i$  et  $C_T$  :

$$C_i = a \theta_0 + b = \lambda_{ci} \text{ colog } P_f + b_i$$

Le calcul de cette semelle nous donne, pour :

$P_f = 10^{-1}$ ; $\theta^* = 3/2$	$b_i = 1.045\text{m} = 1\text{m}$
$P_f = 10^{-6}$ ; $\theta^* = 4.6$	$b_i = 2.48\text{m} = 2.5\text{m}$
$P_f = 10^{-5}$ ; $\theta^* = 3.9$	$b_i = 2.2\text{m}$

Cas 1 :

$\theta^* = 3/2$  on obtient un volume  $V_1 = 0.6m^3$  de béton.

Cas 2 :

$\theta^* = 3.9$  on obtient un volume  $V_2 = 1.425m^3$  de béton.

Cas 3 :

on obtient un volume  $V_3 = 1.725m^3$  de béton.

Pour un pris unitaire de béton égale à  $15000DA/m^3$ , on obtient :

Cas 1 :  $C_i = 10200DA$

Cas 3 :  $C_i = 29800DA = 30000DA$

Après un choix judicieux de l'échelle, on obtient après résolution du système suivant :

$$C_i = a \theta + b$$

$$C_i = a \theta + b$$

que  $a = 1.277 = 1.27$

et  $b = 0.158$

$C_i$  est égale aussi a :

$$C_i = \lambda_{ci} \text{ colog} P_T + b_1$$

on obtient :

$$\lambda_{ci} = a \lambda_{0i} = 0.78$$

et :

$$b_1 = a a_1 + b = 1.25$$

finalement :

$$C_i = 0.78 \text{ colog} P_{(-)} + 1.25$$

Si on choisi par exemple  $C_D$  égal a 15% de  $C_T$  nous déterminons l'expression de  $C_T$ .

$$C_T = C_i + C_D P_{(-)}$$

$$C_T = 0.78 \text{ colog} P_{(-)} + 1.25 + 3.4 \cdot 10^{-3} P_{(-)}$$

(voir fig.1 page 62)