

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



M0012/00B

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

OPTION : TELECOMMUNICATION

THESE DE MAGISTER

Présentée par : M^r Ali. Chemsa

Ingénieur d'état en Electronique à l'ENP

THEME :

**Dimensionnement d'un réseau phasé rectangulaire
à grande directivité
et à niveau de lobes secondaires réduit.**

Soutenue publiquement le Jeudi 08 Juin 2000 devant la commission d'examen
composée de :

MM

A. ZERGUERRAS.	Professeur (ENP)	Président.
R. AKSAS.	Maître de conférence (ENP)	Rapporteur.
A. BELOUHRANI.	Dr. (ENP)	Rapporteur.
M. TRABELSI.	Chargé de Cours (ENP)	Examineur.
A. AZRAR.	Chargé de Cours (Univ. De Boumerdes)	Examineur.
B. BOUSSEKSOU.	Chargé de Cours (ENP)	Examineur.

ENP 10, Avenue Pasteur, Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de Télécommunications de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de Monsieur **R. AKSAS**, Maître de conférence à l'ENP, et de Monsieur **A. Belouchrani**, Docteur à l'ENP, qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude et mes sincères remerciements pour leurs aides et conseils précieux durant toute ma formation et le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont apporté tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier très vivement Monsieur **A. ZERGUERRAS**, Professeur à l'ENP, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie très vivement Monsieur **M. TRABELSI**, Chargé de cours à l'ENP, pour son aide et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur **A. AZRAR**, Chargé de cours à l'Université de Boumerdes, dont je suis très honoré de sa présence dans le jury de cette thèse.

Mes remerciements très vivement Monsieur **B. Bousseksou**, Chargé de cours à l'ENP, en me faisant l'honneur de participer à ce jury.

Mes vifs remerciements à tous mes amis et en particulier : **Abdellah Tidjani, Zakaria Tidjani, Redoune Yanbaï, Mohamed Airouche, Lassaad Teksebt, Djamel Hmoda, Amine Mokraoui, Mehdi Si-moussa, Moloud Challal, Lynda Cherbi**, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements vont également à tout le personnel du département d'Electronique et de la bibliothèque de l'ENP, surtout : **Salah, Krime, Zahia, Naïma**.

Enfin, je tiens à remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation jusqu'à aujourd'hui et en particulier ceux du département d'Electronique de l'ENP d'Alger.

إن الشبكات ذات المسح الإلكتروني (أو الشبكات الطورية) يكون شكلها عادة مستطيلا وهذا الغرض تحقيق المسح الإلكتروني في الفضاء. كخطوة أولى، أنشأنا صياغة جديدة لعبارة عامل الشبكة من أجل بنية مسنونة و مستطيلة، حيث توزيع العريض منزن بتقنية دولف-تشيبيشيف لكي نحصل على أحسن تسوية بين التوجيهية و مستوى الفصوص الثانوية. لقد برهننا هنا بأن الشبكة المرعبة تعطي ميزات إشعاعية أفضل من ميزات الشبكة المستطيلة التي لها نفس الحجم. عمنا في هذا العمل طريقة تشيبيشيف المعدلة، المقترحة من طرف صفاي، في حالة الشبكات الخطية، عمناها من أجل شبكات مسنونة ذات حجم كبير و أثبتنا بأنها تحسن في المميزات الإشعاعية.

الكلمات الأساسية : شبكة طورية، شبكة أفضلية، شبكة مسنونة، الطريقة النمطية، المسح الإلكتروني.

Abstract :

The electronic scanning arrays (or phased arrays) often make use of rectangular configuration to achieve spatial scanning. In order to have the best compromise between the directivity and the sidelobes level we first established a new formulation for the expression of the array factor for a rectangular configuration, for which Dolph-Chebyshev distribution is used to feed the elements that form the whole array. We showed that a square array offers better performances in term of radiation than rectangular array of the same size does. The modified Chebyshev method formulated by Safaai for an alignment of sources was generalized for planar arrays of large size. We showed that this new distribution improves the characteristics of the array appreciably.

Key words : Phased array, Optimum array, Planar array, Modal method, Scanning.

Résumé :

Les réseaux à balayage électronique (ou réseaux phasés) utilisent souvent une configuration rectangulaire pour réaliser le balayage spatial (site et gisement). Dans une première étape, nous avons établi une nouvelle formulation de l'expression du facteur de réseau d'une configuration plane rectangulaire, dont la distribution d'excitation est pondérée par la technique de Dolph-Chebyshev afin d'avoir le meilleur compromis entre la directivité et le niveau des lobes secondaires. Nous avons montré qu'un réseau carré offre de meilleurs performances de rayonnement qu'un réseau rectangulaire de même taille. Nous avons généralisé la méthode de Chebyshev modifiée, conçue par Safaai, pour les alignements, à des réseaux plans de grande taille et prouvé qu'elle améliore sensiblement leurs caractéristiques radioélectriques.

Mots clés : Réseau phasé, Réseau optimum, Réseau plan, Méthode modale, Balayage.

Sommaire

Introduction	3
Chapitre 1 : Réseaux Phasés.....	5
1. 1. Introduction.....	5
1. 2. Facteur de réseau - Multiplication des diagrammes	6
1. 3. Structure générale d'un réseau phasé.....	9
1. 4. Théories des réseaux phasés.....	10
1. 4. 1. Réseaux linéaires	10
1. 4. 2. Réseaux plans	18
1. 4. 3. Couplage entre éléments	22
1. 5. Effets de quantifications de phase	23
1. 6. Réseaux à balayage en fréquence.....	25
1. 7. Avantages et inconvénients des réseaux phasés.....	26
1. 8. Conclusion	27
Chapitre 2 : Optimisation des Réseaux Rectangulaires	28
2. 1. Introduction.....	28
2. 2. Méthode conventionnelle pour les réseaux rectangulaires de Chebyshev.....	28
2. 2. 1. Diagramme de rayonnement.....	28
2. 2. 2. Calcul de la distribution de courant	31
2. 2. 3. Calcul de la distribution de courant par la méthode modale	32
2. 2. 4. Calcul de la directivité maximale.....	33
2. 2. 5. Résultats obtenus.....	34
2. 3. Méthode optimale appliquée aux réseaux carrés	39
2. 3. 1. Distribution optimale de courant.....	39
2. 3. 2. Calcul de la directivité maximale.....	40
2. 3.3. Largeur de faisceau de réseau carré de Chebyshev.....	41
2. 3. 4. Nombre minimum d'éléments pour un large secteur de balayage	42

2. 3. 5. Résultats numériques obtenus	42
2. 4. Conclusion	48
Chapitre 3 : Réseaux Carrés Optimaux auto-convolués	49
3. 1. Introduction	49
3. 2. Facteur de réseau et distribution de courant	49
3. 3. Directivité maximale	52
3. 4. Largeur de faisceau à mi-puissance	54
3. 5. Résultats obtenus et discussion	55
3. 6. Conclusion	57
Conclusion	58
Bibliographie	59
Annexe A	61
Annexe B	75

Introduction

Introduction

Une antenne individuelle simple ne permet pas d'obtenir les caractéristiques de rayonnement (directivité, largeur du lobe principal...) nécessaires aux applications radioélectriques modernes et plus particulièrement dans les techniques radar. C'est la raison pour laquelle on fait appel aux réseaux d'antennes [1], [2] constitués de sources rayonnantes identiques et disposées selon une configuration souhaitée (réseaux linéaires ou alignements, circulaire, rectangulaire, ...). Le contrôle de l'amplitude et de la phase des excitations de chaque élément individuellement permet de former un faisceau de n'importe quelle forme et dans n'importe quelle direction de l'espace.

L'orientation du lobe principal dans une direction désirée peut s'obtenir mécaniquement en faisant tourner le réseau sur lui-même. Cette opération nécessite des équipements assez lourds et encombrants et son exécution est assez lente. Aussi, on préfère utiliser le balayage électronique qui consiste à agir sur la phase électrique de la distribution des excitations des sources rayonnantes (réseaux phasés) [3], [4].

L'ajustage de la phase, se fait en alimentant les éléments du réseau aux moyens de déphaseurs. La variation de la phase suit, généralement, une progression arithmétique dont la raison est la différence de phase électrique entre deux éléments adjacents.

Les réseaux phasés trouvent de nombreuses applications, particulièrement dans les systèmes radar [5]. Dans ces systèmes, le pointage du lobe principal dans une direction désirée se fait en un temps faible par rapport à la période de répétition du radar.

Les réseaux plans phasés ont généralement une configuration rectangulaire ou circulaire. Par rapport aux alignements (réseaux linéaires), on peut orienter le maximum de rayonnement dans n'importe quelle direction de l'espace. Afin d'obtenir des caractéristiques radioélectriques optimales, nous alimentons le réseau à l'aide d'une distribution d'excitation pondérée, de type Dolph-Chebyshev. Une telle distribution offre aux réseaux, à espacement uniforme, le meilleur compromis directivité-niveau des lobes secondaires.

La première partie de notre travail constitue une rétrospective des réseaux d'antennes, de plus simple à savoir le réseau linéaire (alignement) à excitation uniforme jusqu'aux réseaux plans à amplitudes pondérées et à balayage électronique. Nous avons exposé la technique permettant d'établir l'expression générale d'une configuration quelconque (à trois dimensions). Nous avons ensuite passé en revue les différentes caractéristiques de ces dispositifs rayonnants aussi bien celles dépendant du champ lointain (diagramme de rayonnement, directivité ...) que celles qui caractérisent le champ proche (bande passante, coefficient de réflexion). Le principe du balayage électronique et les techniques d'excitation qui permettent de réaliser ce balayage sont également exposés dans cette partie.

Nous allons présenter ici une nouvelle formulation du facteur de réseau d'une configuration rectangulaire ($K \times L$) permettant d'englober sous forme d'une expression unique toutes les éventualités que peuvent prendre les valeurs des entiers K et L . Du point de vue directivité, nous mettrons en évidence les meilleures performances d'un réseau carré par rapport à celles d'une géométrie rectangulaire de taille comparable. Les propriétés de symétrie du réseau nous ont amené à développer une nouvelle méthode de détermination de la directivité permettant de calculer aisément et avec précision ce paramètre. Cependant, les réseaux ainsi étudiés ne sont optimaux que dans deux plans verticaux particuliers. Dans le but de rendre le diagramme de rayonnement de révolution, on a fait appel à une nouvelle technique d'excitation utilisant toujours les polynômes de Chebyshev mais de manière modifiée. Ainsi on améliore sensiblement la largeur du lobe principal.

Les réseaux excités à l'aide d'une distribution de courant à amplitude pondérée de type Chebyshev, ont la propriété de fournir le meilleur compromis entre la directivité et le niveau des lobes secondaires. Toutefois, au delà d'une certaine taille du réseau, la directivité demeure pratiquement constante. Des travaux [6] basés sur la modification du facteur de réseau ont permis de contourner ce problème et ce, en utilisant une technique originale. Cependant, cette technique n'a été utilisée que dans le cas simple des alignements. Nous avons généralisé cette méthode à des réseaux plans rectangulaires et nous avons montré que son application présente l'avantage d'améliorer aussi bien la directivité que le niveau des lobes secondaires. Cette dernière partie fait l'objet du chapitre 3.

Chapitre 1 :
Réseaux Phasés

Chapitre 1 :

Réseaux Phasés

1. 1. Introduction

L'antenne filaire rectiligne (dipôle électrique) malgré son faible gain, est la plus simple et la plus appropriée lorsqu'on désire un rayonnement uniforme (omnidirectionnel) dans un plan donné. Elle est donc toute indiquée pour des applications en radiodiffusion. Par contre, les liaisons point à point nécessitent un rayonnement intense dans des directions désirées et exigent donc des aériens directifs. Nous savons bien que les antennes filaires utilisant de longs conducteurs et travaillant en régime d'ondes progressives permettent de réaliser cet objectif. Cependant, malgré leurs dimensions importantes, leur gain et leur rendement demeurent relativement faibles. C'est la raison pour laquelle on préfère utiliser l'association d'une manière adéquate de plusieurs éléments rayonnants (dipôle, ouverture, etc.) excités judicieusement afin d'obtenir un rayonnement très directif dans des directions voulues. On obtient alors un réseau d'antennes. Bien que ce ne soit pas nécessaire, les éléments d'un réseau doivent être identiques afin que la conception soit plus simple et la réalisation plus pratique.

Si on néglige l'effet du couplage (espacement convenable entre éléments adjacents), le champ rayonné par le réseau est alors la somme vectorielle des champs rayonnés individuellement par chaque élément. Pour que le rayonnement de ce réseau soit directif, il faut que les champs rayonnés par les divers éléments interfèrent d'une manière appropriée. Il doivent s'additionner dans les directions voulues et se neutraliser dans les directions indésirables.

Un simple réseau permet d'obtenir un gain de 10 à 15 dB par rapport au gain du dipôle électrique demi-onde (pris comme antenne de référence). On obtient alors l'avantage de pouvoir utiliser des émetteurs moins puissants et des récepteurs moins sensibles.

L'avènement des équipements radioélectriques en ondes courtes en 1920 a rendu possible l'utilisation de réseaux d'antennes de dimensions raisonnables. Durant la deuxième guerre mondiale, des réseaux d'antennes en UHF et SHF ont été utilisés dans les systèmes radar. Actuellement les réseaux SHF sont essentiellement destinés pour les communications par satellites. Une nouvelle classe des réseaux appelées réseaux conformes, commence à prendre de l'ampleur. Leurs éléments fabriqués essentiellement en technologie microruban sont implantés sur des surfaces non planes. On trouve ce genre de réseaux sur les engins volants et les missiles pour des problèmes aérodynamiques.

Seuls les réseaux d'antennes permettent le balayage électronique du lobe principal en agissant sur la phase des courants d'excitation des éléments rayonnants. Ce type de réseaux, appelé réseaux phasés, trouve de nombreuses applications particulièrement dans les systèmes radar. Dans ces systèmes, le pointage du lobe principal dans une direction désirée se fait en un temps faible par rapport à la période de répétition du radar.

La forme du diagramme de rayonnement d'un réseau d'antennes peut être contrôlée par les paramètres suivants :

- La géométrie de la configuration du réseau (linéaire, circulaire, etc.) ;
- L'espacement entre éléments ;
- L'amplitude et la phase des courants d'excitation des éléments rayonnants ;
- La nature et le nombre des éléments utilisés.

On peut classer les réseaux d'antennes comme suit :

- Réseaux uniformes (espacement constant, amplitude constante, phase constante ou à variation linéaire) ;
- Réseaux pondérés (espacement variable, amplitude pondérée).

Les éléments rayonnants sont répartis sur un axe (réseau linéaire), un cercle ou un rectangle (réseau plan) ou sur une sphère (distribution spatiale).

Ce chapitre est consacré à la détermination de l'expression générale du facteur de réseau, à décrire la structure des réseaux phasés et à étudier le principe de balayage électronique. Nous présentons le principe de multiplication des diagrammes de rayonnement qui n'est d'ailleurs valable que dans la région du champ lointain (zone de Fraunhofer).

1. 2. Facteur de réseau - Multiplication des diagrammes

Considérons d'abord le cas d'une antenne unique occupant un volume V et excitée par une densité de courant électrique $\vec{J}(\vec{r}')$ (Fig. 1.1). Ramené à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou sphériques (r, θ, ϕ) d'origine O , le potentiel vecteur \vec{A} s'écrit

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (1-1)$$

avec $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$

$\vec{r}' = \overline{OP} = x' \hat{x} + y' \hat{y} + z' \hat{z}$ décrit le point d'excitation P .

$\vec{r} = \overline{OM} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ décrit le point d'observation M .

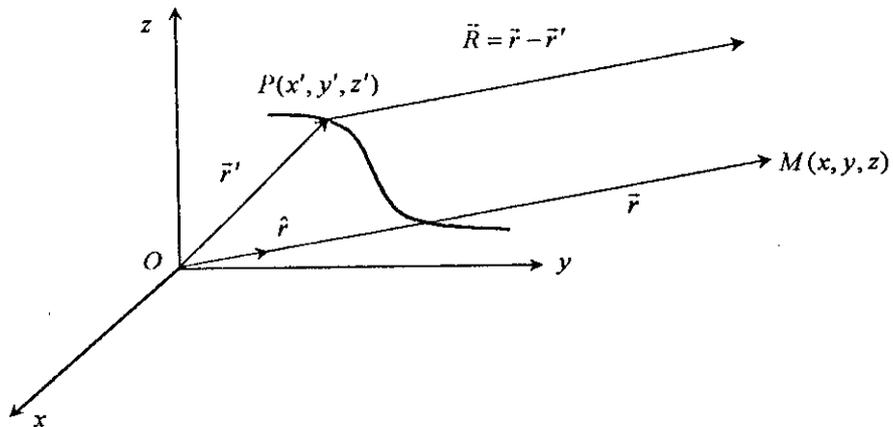


Fig .1.1 : Champ lointain d'une antenne unique

Dans la zone du champ lointain, on peut effectuer les approximations

$$R = \begin{cases} r & \text{pour le terme d'amplitude de } \psi(R) = e^{-jkR} / R \\ r - \vec{r}' \cdot \hat{r} & \text{pour le terme de phase dont la variation harmonique est rapide.} \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad (1-3)$$

Dans ces conditions l'expression (1-1) devient

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}} dV' \quad (1-4)$$

Considérons un réseau de T antennes identiques ($\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \dots, \mathcal{A}_T$) (Fig. 1.2). L'antenne \mathcal{A}_1 d'ordre 1 est prise comme référence et son excitation est $\bar{J}(\bar{r}') = \bar{J}_{ref}(\bar{r}')$. L'excitation de l'antenne \mathcal{A}_m d'ordre m s'écrit

$$\bar{J}_m(\bar{r}'_m) = i_m \bar{J}_{ref}(\bar{r}')$$

le coefficient multiplicatif i_m est complexe.

La position du $m^{ième}$ élément du réseau est obtenue par une translation \bar{r}_m appliquée à l'antenne de référence pour l'amener en coïncidence avec \mathcal{A}_m .

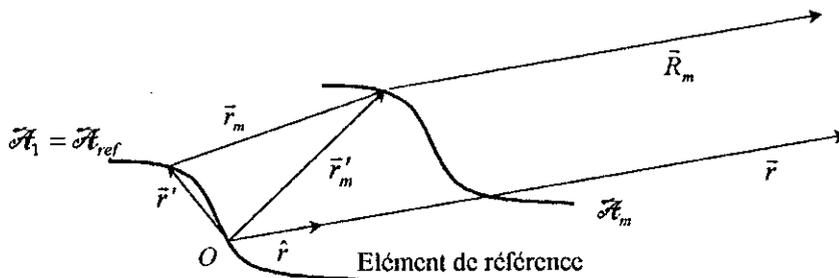


Fig. 1.2 : Le champ lointain d'un réseau

D'après l'équation (1-4), le potentiel vecteur \bar{A}_m correspondant à la $m^{ième}$ antenne s'écrit

$$\bar{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V_m} \bar{J}(\bar{r}'_m) e^{jk\bar{r}'_m \cdot \bar{r}} dV' \quad (1-5)$$

avec $\bar{r}'_m = \bar{r}' + \bar{r}_m$

Le potentiel vecteur \bar{A}_m de l'antenne \mathcal{A}_m s'écrit alors

$$\begin{aligned} \bar{A}_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V_m} i_m \bar{J}_{ref}(\bar{r}') e^{jk\bar{r}' \cdot \bar{r}} e^{jk\bar{r}_m \cdot \bar{r}} dV' \\ &= i_m e^{jk\bar{r}_m \cdot \bar{r}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V_{ref}} \bar{J}_{ref}(\bar{r}') e^{jk\bar{r}' \cdot \bar{r}} dV' \end{aligned}$$

ou encore

$$\bar{A}_m = \left(i_m e^{jk\bar{r}_m \cdot \bar{r}} \right) \cdot \bar{A}_{ref} \quad (1-6)$$

avec

$$\bar{A}_{ref} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V_{ref}} \bar{J}_{ref}(\bar{r}') e^{jk\bar{r}' \cdot \bar{r}} dV' \quad (1-7)$$

le potentiel vecteur de l'antenne du référence.

En sommant les contributions des T éléments, on obtient l'expression du potentiel vecteur total

\bar{A} du réseau sous la forme

$$\vec{A} = \sum_{m=1}^T \vec{A}_m = \vec{A}_{ref} \cdot f(\theta, \phi) \quad (1-8)$$

où

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^T i_m e^{jk \vec{r}_m \cdot \hat{r}} \quad (1-9)$$

est le *facteur de réseau*.

Il est important de remarquer que le facteur de réseau est une caractéristique propre au réseau ; il dépend uniquement des coefficients d'excitation i_m et de la position relative des éléments. Par contre, il est indépendant du type des éléments utilisés. Le facteur de réseau $f(\theta, \phi)$ est généralement une fonction complexe dont une attention toute particulière est consacrée au module $|f(\theta, \phi)|$ qui illustre le diagramme de rayonnement.

A partir des relations

$$\vec{E} = j\omega \left(\frac{1}{k^2} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) + \vec{A} \right) \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (1-10)$$

on montre que (1-8) et (1-9) s'appliquent aux champs rayonnés dans la zone lointaine

$$\vec{E} = \vec{E}_{ref} f(\theta, \phi) \quad \vec{H} = \vec{H}_{ref} f(\theta, \phi) \quad (1-11)$$

avec \vec{E}_{ref} et \vec{H}_{ref} sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique de l'antenne de référence.

En coordonnées cartésiennes les vecteurs \vec{r}_m et \hat{r} s'écrivent

$$\vec{r}_m = x_m \hat{x} + y_m \hat{y} + z_m \hat{z}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta$$

et l'expressions (1-9) devient alors

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^T i_m e^{jk(x_m \sin \theta \cos \phi + y_m \sin \theta \sin \phi + z_m \cos \theta)} \quad (1-12)$$

ou

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^T i_m e^{ju_m(\theta, \phi)} \quad (1-13)$$

avec

$$u_m(\theta, \phi) = k \vec{r}_m \cdot \hat{r} = k \cdot (x_m \sin \theta \cos \phi + y_m \sin \theta \sin \phi + z_m \cos \theta) \quad (1-14)$$

L'expression (1-9) illustre le théorème de multiplication des diagrammes de rayonnement [7].

La fonction caractéristique $E(\theta, \phi)$ d'un réseau d'antennes identiques est égale au produit du facteur de réseau $f(\theta, \phi)$ et de la fonction caractéristique d'une antenne individuelle $f_{\mathcal{A}}(\theta, \phi)$.

$$E(\theta, \phi) = f_{\mathcal{A}}(\theta, \phi) \times f(\theta, \phi)$$

Toutefois, ce théorème ne tient pas compte des effets de couplage inter-éléments qui devient important particulièrement lorsque l'espacement est faible devant la longueur d'onde. L'usage de ce théorème donne des bons résultats au voisinage du lobe principal, mais peut conduire à des erreurs sur la position et le niveau des lobes secondaires éloignés.

1. 3. Structure générale d'un réseau phasé

Un réseau phasé passif [8] peut prendre plusieurs formes différentes, mais ces formes possèdent toujours des parties communes (Fig. 1.3).

Dans un réseau phasé en émission, on trouve les parties suivantes :

- Système d'alimentation qui sert à diviser et distribuer la puissance entre les éléments du réseau au moyen des déphaseurs accordés à la fonction d'amplitudes désirée (accordés à la distribution d'excitations d'amplitude désirée). Les phases d'excitations varient avec l'angle du balayage.
- Ensemble des déphaseurs ;
- Calculateur qui permet de calculer les phases correspondantes à la direction de pointage et un contrôleur de déphaseurs (qui produit un contrôle de courant / tension pour les diodes ou pour les déphaseurs à ferrite) ;
- Ensemble d'éléments du réseau ;
- Quelquefois, un système complémentaire à collecteur (réflecteur ou lentille).

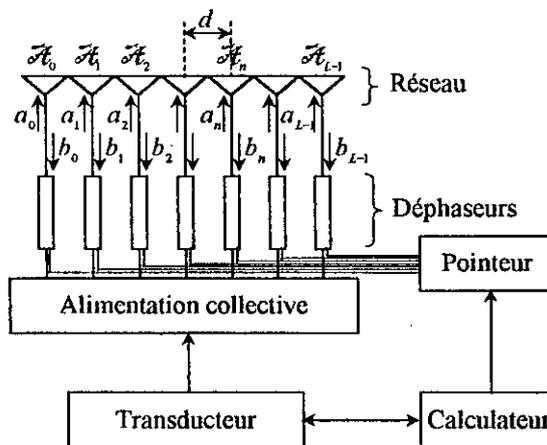


Fig. 1.3 : Structure générale d'un réseau phasé

a) Systèmes d'alimentation

Beaucoup de systèmes d'alimentation des déphaseurs ont été imaginés, et beaucoup conduisent à des structures très lourdes et encombrantes, insérant des pertes considérables.

En pratique, les systèmes les plus utilisés sont les suivants [9]:

- Système à alimentation collective ;
- Système à guide d'ondes et coupleurs directifs ;
- Système avec lentille entre deux plans parallèles ;
- Système à disque ;
- Système avec lentille à phase électronique ;
- Système à réseau réflecteur phasé.

b) Structure des déphaseurs

Il y a différents types de déphaseurs usuellement utilisés [10], [11]

- Déphaseur à commutation (ou à aiguillage) ;
- Déphaseur à vecteur modulateur ;
- Déphaseur à varacteur contrôlé.

1. 4. Théorie des réseaux phasés

Avant d'entamer l'étude des réseaux plans, considérons d'abord le cas simple d'un réseau linéaire (alignement) de sources isotropes uniformément espacées. Nous montrerons que la théorie des réseaux plans peut être formulée comme une extension de celle d'un alignement (car les réseaux bidimensionnels sont souvent constitués par interconnexion de réseaux linéaires). La théorie des réseaux à éléments isotropes (antennes omnidirectionnelles) sera alors être étendue et modifiée pour l'appliquer à des réseaux à éléments réels.

Pour simplifier et exploiter au mieux la formulation qui sera présentée, on doit poser les hypothèses suivantes :

- On ne s'intéresse qu'aux caractéristiques du champ lointain dont la portée R est

$$R \geq \frac{2D^2}{\lambda}$$

où D est la plus grande dimension de l'antenne et λ la longueur d'onde du milieu.

- L'identification des diagrammes en émission et en réception est admise en vertu du théorème de réciprocité.
- A raison de simplicité, on va se limiter aux réponses des réseaux aux signaux d'ondes continues (signaux non impulsionnels).

1. 4. 1. Réseaux linéaires

1. 4. 1. 1. Diagramme de rayonnement d'un réseau linéaire

La théorie des réseaux linéaires est bien détaillée dans plusieurs ouvrages didactiques de haut niveaux [1], [2], [3]. Considérons un alignement de L sources isotropes, uniformément espacées (Fig. 1.4), excité par une onde plane dont la direction de propagation fait un angle θ par rapport à la direction de l'alignement. Le courant au niveau de l'antenne d'ordre n est de la forme

$$i'_n = A e^{jnk d \sin \theta} \quad (1-15)$$

où A est une constante complexe dépendant de l'amplitude instantané et de la phase de l'onde plane. k est le nombre d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\Delta\varphi = kd \sin \theta$ est le gradient de phase entre deux éléments adjacents.

Si on place un élément de contrôle après chaque antenne (Fig. 1.4), le coefficient de transfert pour le $n^{\text{ième}}$ élément est donné par

$$\frac{i_n''}{i_n'} = I_n e^{j\varphi_n}$$

où I_n et φ_n sont respectivement le gain en courant et le déphasage de l'élément de contrôle correspondant à cet élément.

A la sortie de sommation, on obtient

$$E(\theta) = \sum_{n=0}^{L-1} I_n e^{j(\varphi_n + nk d \sin \theta)} \quad (1-16)$$

au coefficient près. Cette relation donne la réponse de réseau au signal d'arrivé en fonction des coefficients réels I_n et φ_n . L'ensemble des coefficients I_n et φ_n sont respectivement les illuminations en amplitude et en phase.

Pour avoir un maximum de rayonnement dans une direction θ_0 désirée, il faut définir la phase φ_n comme suit

$$\varphi_n = -nk d \sin \theta_0 \quad (1-17)$$

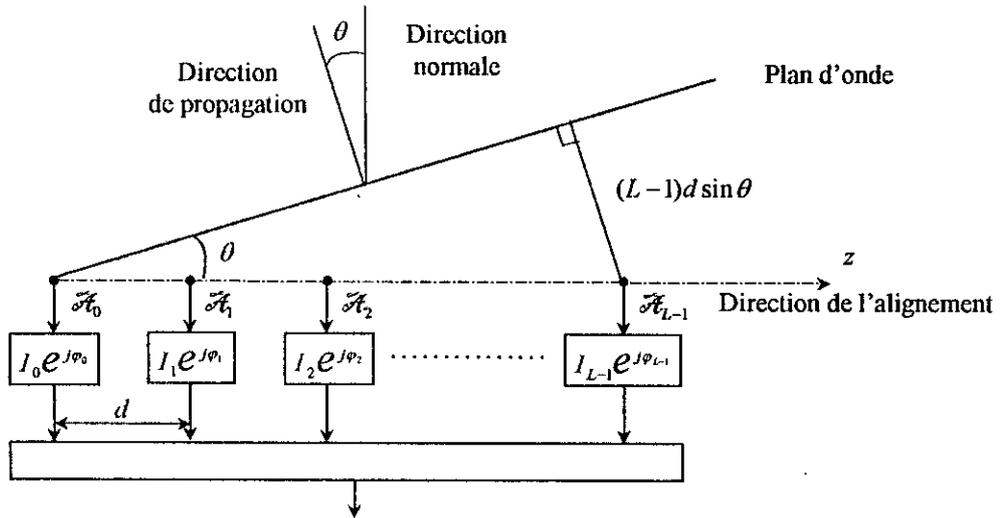


Fig. 1.4 : Configuration d'un réseau linéaire

L'expression (1-17) montre que l'illumination en phase est linéaire (différence de phase constante entre deux antennes adjacentes). En émission, quand les phases des éléments de contrôles vérifient l'équation (1-17), les champs rayonnés par toutes les antennes sont sommés en phase pour produire un faisceau principal dans la direction θ_0 . L'expression (1-16) est la même en émission et en réception en vertu du théorème de réciprocité. Compte tenu de (1-17), l'expression (1-16) devient

$$E(\theta) = \sum_{n=0}^{L-1} I_n e^{jnk d (\sin \theta - \sin \theta_0)} \quad (1-18)$$

Pour le cas particulier où l'illumination est uniforme, $I_n = 1$ pour toute valeur de n , le module du facteur de réseau d'un groupement de L antennes devient

$$|E(\theta)| = \frac{\left| \sin \left[L\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right] \right|}{\left| L \sin \left[\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right] \right|} \quad (1-19)$$

1. 4. 1. 2. Angle d'ouverture

D'après l'expression (1-19) on remarque que le diagramme de rayonnement varie en fonction de l'angle du rayonnement maximum θ_0 . En particulier, l'angle d'ouverture à -3 dB, θ_3 angle à mi-puissance, du lobe principal, augmente avec θ_0 . Cet angle est défini par la relation

$$|E(\theta)| = \frac{\left| \sin \left[L\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right] \right|}{\left| L \sin \left[\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right] \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1-20)$$

La quasi-totalité de l'énergie rayonnée est concentrée entre

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_3}{2} \quad \text{et} \quad \theta = \theta_0 - \frac{\theta_3}{2}$$

Si la taille du réseau est grande, une solution approximative de (1-20) est donnée [9] par

$$\pi d \frac{d}{\lambda} \left(\sin \left(\theta_0 + \frac{\theta_3}{2} \right) - \sin \theta_0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad (1-21)$$

à partir de laquelle on obtient

$$\theta_3 = \frac{\lambda}{Ld \cos \theta_0} \quad (1-22)$$

La relation (1-22) donne un résultat complètement erroné dans la direction transversale (Broadside array $\theta_0 = \pi/2$). Ceci est dû aux approximations successives effectuées pour résoudre l'équation (1-20). Elle demeure toutefois valable pour un balayage limité entre 0 et 30°. Nous constatons également que le rayonnement longitudinal ($\theta_0 = 0^\circ$) donne le faisceau le plus large et par conséquent la directivité la plus faible. On peut trouver une formule exacte [12] donnant l'expression de θ_3 . Ces conclusions restent valables, quelle que soit la variation d'amplitude le long du réseau, sous réserve que la variation de phase reste toujours linéaire.

1. 4. 1. 3. Espacement maximum entre éléments – Lobes d'ambiguïté

Le facteur de réseau donné par (1-16) peut aussi s'exprimer en terme de la variable $\nu = \sin \theta$, comme suit :

$$E(\nu) = \sum_{n=0}^{L-1} I_n e^{jnk d(\nu - \nu_0)} \quad (1-23)$$

où la direction du faisceau ν_0 est liée au gradient de phase $\Delta\varphi$ par la relation $\Delta\varphi = -kd\nu_0$. On remarque qu'il y a une bijection entre $E(\nu)$ et $E(\theta)$ dans la région définie par $|\nu| \leq 1$, souvent appelé *l'espace visible* et qui correspond aux angles réels θ . $E(\nu)$ est une fonction périodique de période

$$\frac{2\pi}{kd} = \frac{1}{d/\lambda} = \frac{\lambda}{d}$$

et son expression (1-23) n'est autre qu'un développement en série de Fourier, facilement analysable. Le maximum de $|E(\nu)|$ se produit pour les valeurs ν_i telle que

$$\nu_i - \nu_0 = \frac{i}{d/\lambda} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

A la valeur $i=0$, correspond le lobe principal du diagramme de rayonnement. Les autres maxima ($i = \pm 1, \pm 2, \dots$) donnent naissance à ce qu'on appelle les lobes d'ambiguïté, responsables d'une perte d'énergie inutilement, et donc d'une dégradation du gain. Lors de la conception de réseaux, il faut choisir convenablement l'espacement afin d'éliminer les lobes d'ambiguïté (Fig. 1.5). Ainsi pour un réseau dont le rayonnement maximum est dans la direction θ_0 , on montre aisément que cet espacement doit vérifier la relation

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{1 + |\sin \theta_0|}$$

Pour un réseau phasé dont l'angle de balayage maximum est θ_M , la relation précédente devient

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{d_M}{\lambda} = \frac{1}{1 + \sin \theta_M} \quad (1-24)$$

La courbe de la figure 1.6 montre que pour assurer un balayage important, il faut réduire l'espacement d tout en prenant la précaution de ne pas dépasser une certaine valeur qui peut provoquer le phénomène de couplage.

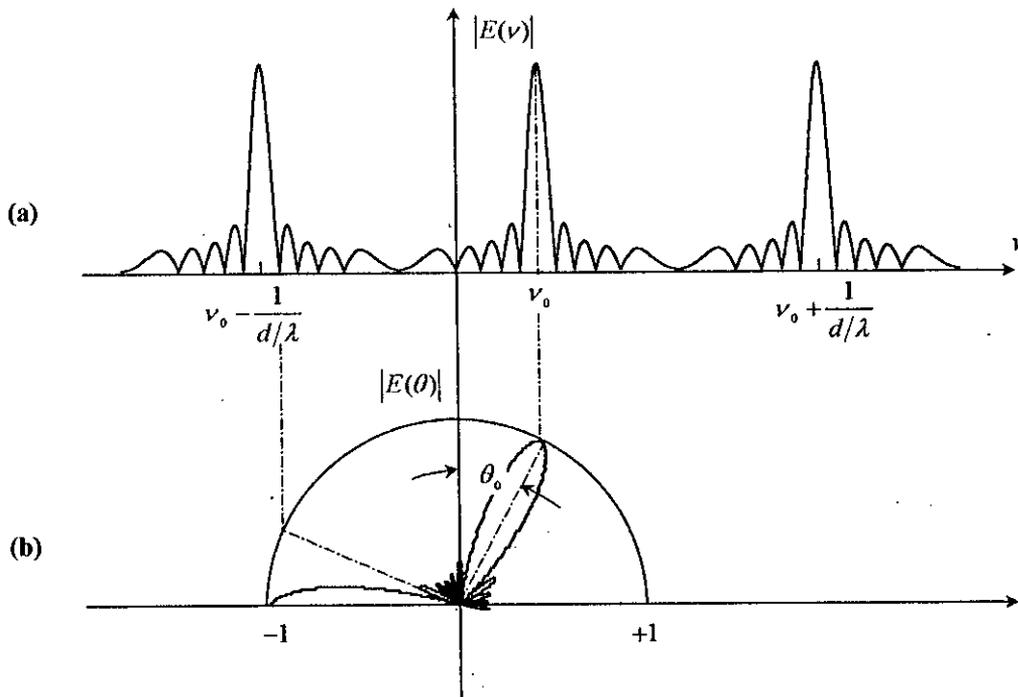


Fig. 1.5 : Position des lobes d'ambiguïté dans le diagramme de rayonnement θ_0 et d fixés. a) en cartésien b) en polaire

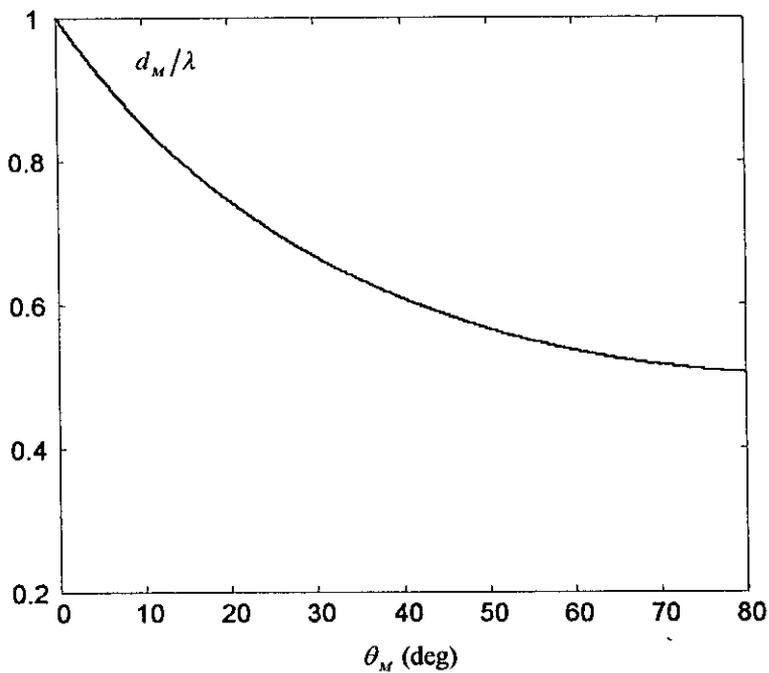


Fig. 1.6 : Espacement maximum autorisé entre éléments (d_M/λ), en fonction de l'angle maximum du balayage θ_M .

1. 4. 1. 4. Lobes secondaires –Rayonnement nul

Les directions de rayonnement nul d'un réseau uniforme, à rayonnement longitudinal ($\theta_0 = 0$), correspondant aux zéros de l'expression (1-19) qui peuvent s'exprimer comme suit :

$$\sin \theta_z = p \cdot \frac{\lambda}{Ld}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \text{Int}\left(\frac{Ld}{\lambda}\right) \quad (1-25)$$

(où $\text{Int}(x)$ signifie la partie entière de x)

Entre deux directions de rayonnement nul, on a toujours un lobe secondaire qui correspond à un maxima de (1-19) autre que celui donnant le lobe principal. La position du premier lobe secondaire (ayant le plus haut niveau) est donné par

$$\theta_1 \cong \cos^{-1}\left(\pm 1.43 \cdot \frac{\lambda}{Ld}\right) \quad (1-26)$$

Dans ces conditions, le ratio entre le niveau du lobe principal (valeur normalisée égale à 1) et celui du premier lobe secondaire est égal à 13.26 dB (Fig. 1.7). Quelque soit la taille d'un réseau uniforme, on ne peut pas dépasser cette valeur. C'est l'inconvénient majeur de ce genre de réseaux.

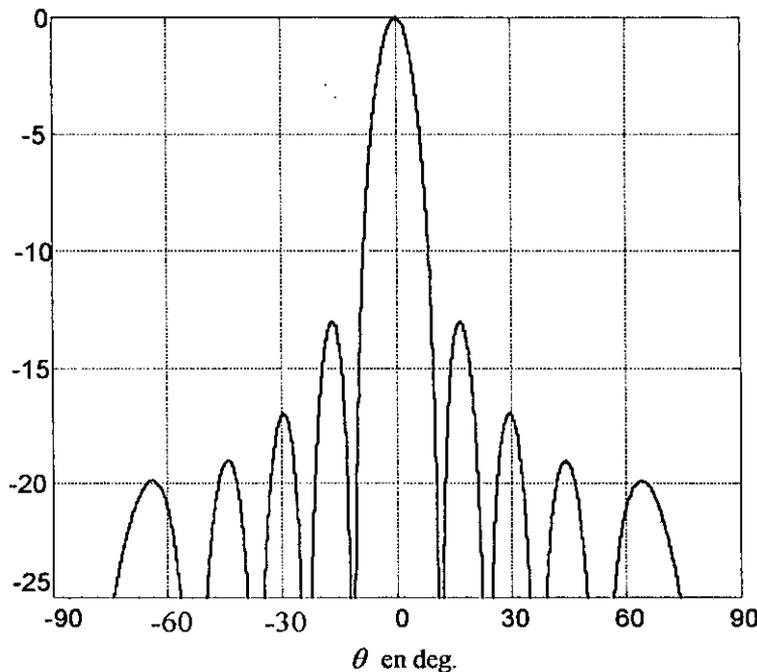


Fig. 1. 7 : Lobes secondaires d'un réseau uniforme. Le niveau du premier lobe secondaire est 13.26 dB.

1. 4. 1. 5. Bande passante

La bande passante d'un réseau dépend de plusieurs paramètres à savoir l'impédance d'entrée d'un élément, l'espacement d , la nature des éléments, etc.

La limitation de la bande passante provoque celle du balayage électronique du faisceau. L'angle de balayage θ lié à la direction du rayonnement maximum θ_0 par [13]

$$\sin \theta = (f_0/f) \sin \theta_0 \quad (1-27)$$

f_0 étant la valeur de f pour laquelle $\theta = \theta_0$. La figure 1.8 illustre les variations de l'angle θ en fonction de θ_0 .

A partir de l'expression (1-27), on peut montrer aisément que la bande passante relative à la fréquence centrale f_0 s'écrit

$$BP = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \sin \theta_0}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \quad (1-28)$$

Pour un réseau à grande taille

$$BP \cong \frac{\theta_3}{\sin \theta_0} \quad (1-29)$$

Dans le cas d'un réseau uniforme (1-29) peut s'écrire

$$BP \cong \frac{0.866\lambda}{Ld \sin \theta_0} \quad (1-30)$$

alors que pour un réseau pondéré la bande passante est donnée [3] comme suit :

$$BP \cong \frac{\lambda}{Ld \sin \theta_0} \quad (1-31)$$

Par conséquent, la bande passante d'un réseau est inversement proportionnelle à sa taille.

Le réseau de courbe de la figure 1.8 permet d'obtenir la bande passante à partir de la valeur de θ_0 et de l'angle d'ouverture θ_3 à 3 dB.

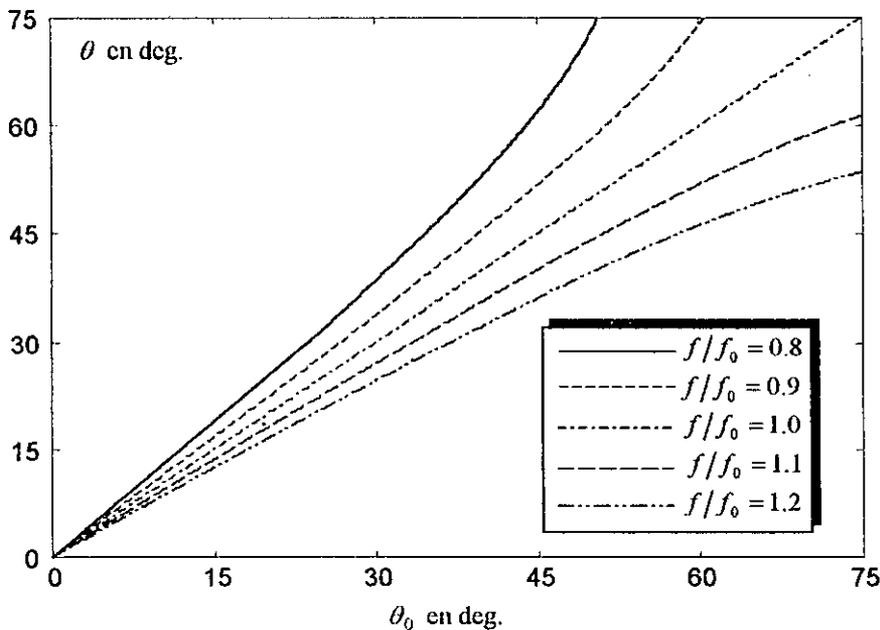


Fig. 1.8 : Direction du pointage en fonction de la fréquence

1. 4. 1. 6. Directivité maximale d'un réseau linéaire

La directivité maximale d'un réseau linéaire est définie

$$D_0 = D(\theta_0) = \frac{|E(\theta_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} |E(\theta)|^2 d\Omega} \quad (1-32)$$

avec $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

Pour un réseau linéaire à éléments isotropes alignés sur l'axe z (Fig. 1.9), $E(\theta)$ est indépendant de ϕ . Par conséquent

$$\int_{4\pi} |E(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |E(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \quad (1-33)$$

En effectuant le changement de variable $v = \sin \theta$, on obtient

$$D_0 = \frac{\left| \sum_{n=0}^{L-1} I_n \right|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} I_m I_n \frac{\sin[2\pi(d/\lambda)(n-m)]}{2\pi(d/\lambda)(n-m)}} \quad (1-34)$$

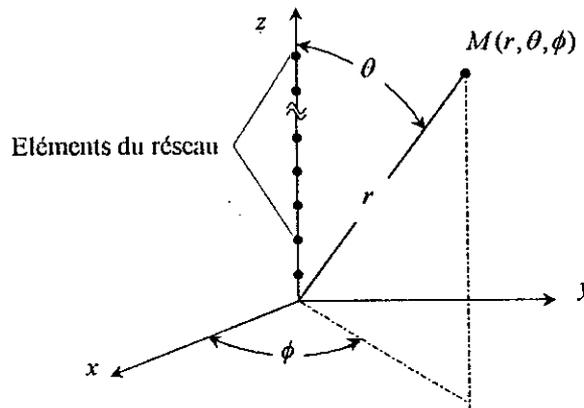


Fig. 1.9 : Réseau linéaire placé selon l'axe z

Pour un espacement d égal à un multiple de la demi-longueur d'onde (1-34) devient

$$D(v_0) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{L-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{L-1} I_n^2}$$

La figure 1.10 illustre, dans le cas d'une distribution de type Dolph-Chebyshev, les variations de la directivité D_0 en fonction de l'espacement normalisé d/λ . Pour tous les réseaux pondérés dont le maximum de rayonnement est concentré dans le lobe principal, on obtient la même allure pour la courbe de D_0 en fonction de d/λ .

Lorsque l'espacement d demeure inférieur à la longueur d'onde, condition qui permet dans le cas d'un rayonnement transversal d'éviter l'apparition des lobes d'ambiguïté, l'expression (1-34) peut s'écrire, avec une bonne approximation, sous la forme [14]

$$D_0 \cong \frac{2d}{\lambda} \frac{\left(\sum_{n=0}^{L-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{L-1} I_n^2} \quad (1-35)$$

En posant

$$\frac{\left(\sum_{n=0}^{L-1} I_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{L-1} I_n^2} = \eta L \quad (1-36)$$

où η est définie comme étant le rendement d'ouverture, on peut écrire :

$$D_0 = \frac{2\eta L d}{\lambda} \quad (1-37)$$

La connaissance de la taille L du réseau et l'espacement normalisé entre éléments d/λ , permet de déterminer la directivité D_0 à partir de la valeur du rendement d'ouverture η . Dans le cas d'une distribution uniforme, la valeur de η est égale à 1.

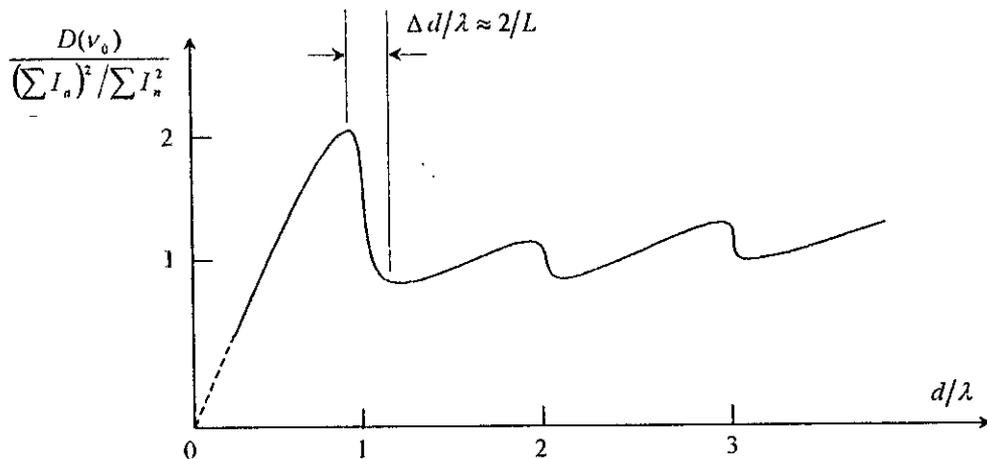


Fig. 1.10: Variation de la directivité $D(v_0)$ en fonction de l'espacement entre éléments d/λ

1. 4. 1. 7. Distributions d'amplitudes de courant

Lors de la conception des réseaux, on s'intéresse particulièrement aux caractéristiques radioélectriques suivantes :

- Le niveau des lobes secondaires ;
- La directivité ;
- La largeur de faisceau (ou l'angle d'ouverture).

Toutes ces propriétés dépendent de la distribution d'excitation des amplitudes I_n intervenant dans l'équation (1-18).

Les réseaux uniformes permettent de contrôler la largeur du lobe principal et donc la directivité. En effet, une distribution uniforme des excitations des sources correspond à la plus faible valeur de l'angle d'ouverture à 3 dB et plus particulièrement lorsque cette distribution est équiphase (rayonnement transversal). Une telle distribution offre donc une directivité maximale la plus élevée que l'on puisse obtenir avec un réseau linéaire. Cependant, quelque soit le nombre de sources utilisées, le niveau des lobes secondaires demeure élevé. Même avec un nombre infini de sources, il est impossible d'obtenir un niveau des lobes secondaires inférieur à 13.56 dB par rapport à celui du lobe principal.

Dans certaines applications, il est nécessaire de diminuer le niveau des lobes secondaires, soit pour éviter des interférences, soit pour minimiser les risques de brouillage ou de diaphonie. Afin de

pouvoir contrôler aussi bien la directivité que le niveau des lobes secondaires, on utilise des réseaux linéaires dits non uniformes.

Nous savons qu'en traitement du signal temporel, il est possible de diminuer les lobes parasites en utilisant des fonctions de pondération (Hamming...). Ces fonctions permettent une diminution de l'amplitude du signal sur les bords, donc du niveau des lobes secondaires, mais au détriment d'un élargissement du lobe principal. Le problème à résoudre est donc d'obtenir le lobe principal le plus étroit pour un niveau des lobes secondaires donné et réciproquement. Mathématiquement c'est le même compromis que l'on rencontre dans le calcul des filtres lorsqu'on veut obtenir le maximum d'atténuation en dehors de la bande désirée en tolérant dans celle-ci des ondulations d'amplitudes imposées de la fonction de transfert. On sait alors que la réponse du filtre doit être un polynôme de Chebyshev de degré $L - 1$ (L étant le nombre de cellules du filtre). La transposition de cette méthode aux antennes a été faite par Dolph [15], puis étendue par Herscovici [16] à un très grand nombre de sources rayonnantes composant le réseau. Nous allons utiliser la méthode de Dolph-Chebyshev dans les deux chapitres suivants.

1. 4. 2. Réseaux plans

Un réseau plan est un groupement d'éléments rayonnants suivant des alignements souvent orthogonaux bien que ceci ne soit pas indispensable. Ces alignements peuvent être situés dans un plan (réseaux plans) ou plaqués sur une surface non plane (réseaux conformes).

Comme pour les alignements, la théorie des réseaux plans suppose qu'il n'y a aucun couplage entre les éléments. Comme c'est une caractéristique du champ proche, le couplage entraîne une modification de l'impédance d'entrée de chaque source, qui peut engendrer l'apparition de directions aveugles. L'effet du couplage est moins sensible en ce qui concerne le diagramme de rayonnement de chaque source car c'est une caractéristique du champ lointain. Cependant, si l'espacement d entre deux sources adjacentes est faible, les diagrammes de rayonnement seront légèrement modifiés ce qui entraîne une déformation du champ total.

La disposition uniforme (espacement d constant) confère au réseau un caractère périodique et entraîne donc la propagation d'ondes de surface qui favorisent le couplage inter-éléments. C'est souvent le cas des réseaux d'antennes microrubans. Une étude des réseaux tenant compte des effets de tous ces couplages s'avère donc très complexe.

1. 4. 2. 1. Diagramme de rayonnement d'un réseau plan

La suite de notre travail sera consacrée aux réseaux plans de forme rectangulaire centré en O dans le plan xy . Ce réseau est constitué de K alignements de sources isotropes parallèles à l'axe des y et L alignements parallèles à l'axe des x . La taille de ce réseau est donc $T = K \times L$ (Fig. 1.11).

L'antenne \mathcal{A}_{mn} d'ordre (m, n) est excitée par un courant de la forme

$$i_{mn} = I_{mn} e^{j\varphi_{mn}} \quad (m \text{ selon } x, \text{ et } n \text{ selon } y) \quad (1-38)$$

Pour obtenir un rayonnement maximum dans la direction (θ_0, ϕ_0) , la phase φ_{mn} doit être de la forme

$$\varphi_{mn} = -mkd_x \sin \theta_0 \cos \phi_0 - nk d_y \sin \theta_0 \sin \phi_0 \quad (1-39)$$

Dans ces conditions, on montre aisément que le facteur de réseau s'écrit

$$E(u, v) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N i_{mn} e^{2j(mu+nv)} \quad (1-40)$$

avec

$$u = \frac{kd_x}{2} (\sin \theta \cos \phi - \sin \theta_0 \cos \phi_0) \quad (1-41.a)$$

$$v = \frac{kd_y}{2} (\sin \theta \sin \phi - \sin \theta_0 \sin \phi_0) \quad (1-41.b)$$

$$M = \frac{K-1}{2} \quad \text{et} \quad N = \frac{L-1}{2}$$

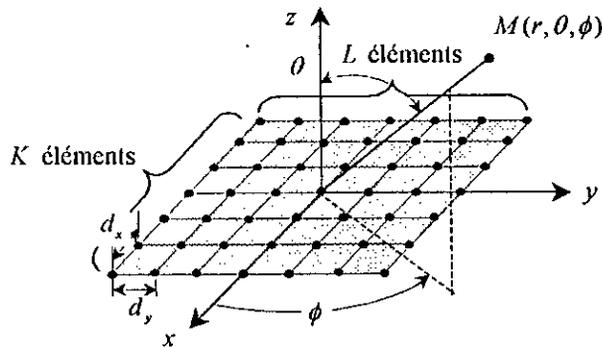


Fig. 1.11: Réseau rectangulaire de taille $T = K \times L$

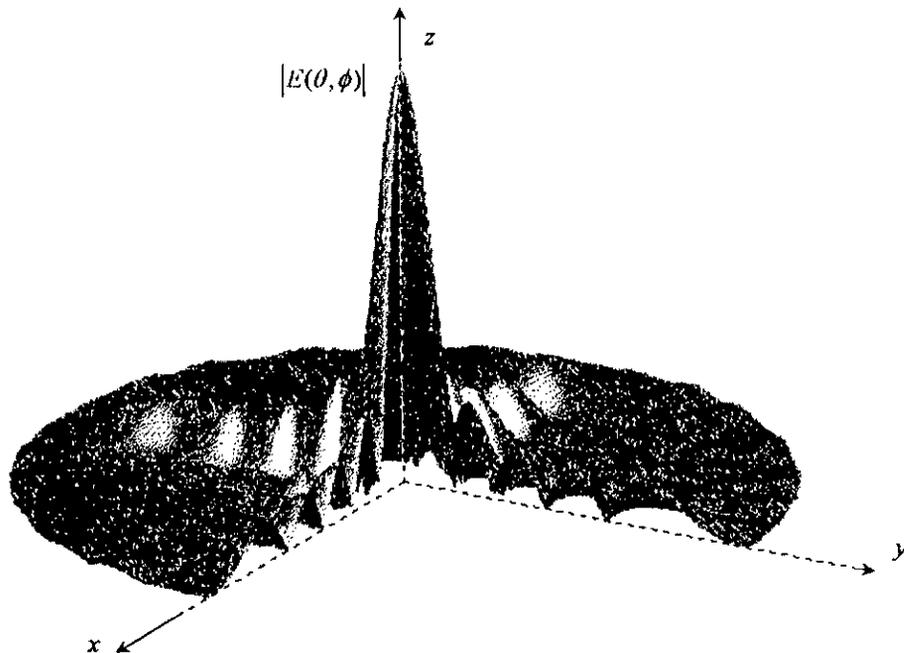


Fig. 1.12 : Coupe de diagramme de rayonnement d'un réseau carré uniforme avec $K = L = 10$ et $d_x/\lambda = d_y/\lambda = 0.5$

Dans le cas d'une illumination à amplitude uniforme ($I_{mn} = 1$ par exemple), l'expression (1-40) devient

$$E(u, v) = \frac{\sin(Ku)}{\sin u} \cdot \frac{\sin(Lv)}{\sin v} \quad (1-42)$$

autrement dit, le facteur de réseau d'une configuration plane rectangulaire à excitation équi-amplitude est égal au produit des facteurs de réseau des deux alignements disposés le long des axes x et y . On retrouve ainsi le principe de multiplication des diagrammes de rayonnement. Ce principe reste valable même pour les réseaux pondérés mais à excitation séparable ($I_{mn} = I_m I_n$). La figure 1.12 illustre le diagramme de rayonnement tridimensionnel d'un réseau rectangulaire à excitation uniforme.

1. 4. 2. 2. Angle d'ouverture

L'angle d'ouverture du diagramme de rayonnement d'un réseau plan, ayant comme direction de rayonnement maximum (θ_0, ϕ_0) , est défini par la relation

$$|E(\theta, \phi)| = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|}{\sqrt{2}} \quad (1-43)$$

Pour le calculer, il faut déterminer les angles d'ouverture dans deux plans perpendiculaires, l'un vertical et l'autre horizontal.

En prenant $\phi = \phi_0$ comme plan vertical, on obtient un angle d'ouverture à 3 dB en résolvant l'équation

$$\left| \frac{\sin(K \cdot u_3)}{\sin(u_3)} \right| \times \left| \frac{\sin(L \cdot v_3)}{\sin(v_3)} \right| = \frac{K \times L}{\sqrt{2}} \quad (1-44)$$

avec

$$u_3 = \frac{kd_x}{2} \cos \phi_0 (\sin \theta_3 - \sin \theta_0) \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{kd_y}{2} \sin \phi_0 (\sin \theta_3 - \sin \theta_0)$$

Dans le cas d'un réseau carré ($K=L$) et $\phi_0 = \tan^{-1}(d_x/d_y)$, on a $u_3 = v_3$ et l'angle d'ouverture est alors

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 + \frac{2u_3}{kd_x \cos \phi_0} \right] - \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 - \frac{2u_3}{kd_x \cos \phi_0} \right] \quad (1-45)$$

Dans le cas des réseaux à grande taille, (1-45) peut s'écrire, avec une bonne approximation, comme suit [17]:

$$\theta_3 \cong \frac{4u_3}{kd_x \cos \theta_0 \cos \phi_0} = \frac{2\lambda u_3}{\pi d_x \cos \theta_0 \cos \phi_0} \quad (1-46)$$

On procède d'une manière analogue pour le calcul de l'angle d'ouverture dans le plan vertical en prenant $\theta = \theta_0$.

L'équation paramétrique (1-43) décrit un contour elliptique [2]. A la surface hachurée (Fig. 1.13), indépendante de ϕ , délimitée par ce contour, correspond l'angle d'ouverture à 3 dB (en Stéradian).

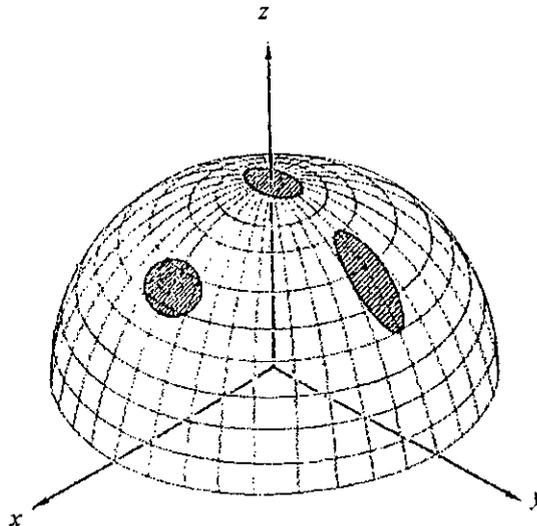


Fig. 1.13 : Surfaces correspondantes aux angles d'ouverture à 3 dB (en stéradian) de différents faisceaux [3]

1. 4. 2. 3. Espacement maximum entre éléments – Lobes d’ambiguïté

Comme pour les alignements, le diagramme de rayonnement d’un réseau plan possède des lobes d’ambiguïté. Lorsque l’argument de $E(\theta, \phi)$ est égal à un multiple de 2π , les positions de ces lobes d’ambiguïté sont définies par

$$\begin{cases} \sin \theta \cos \phi - \sin \theta_0 \cos \phi_0 = \frac{\lambda}{d_x} \cdot p \\ \sin \theta \sin \phi - \sin \theta_0 \sin \phi_0 = \frac{\lambda}{d_y} \cdot q \end{cases} \quad p, q = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-47)$$

Afin de déterminer les espacements d_x et d_y , à ne pas dépasser sous peine d’apparition des lobes d’ambiguïté, il est plus aisé de travailler dans le plan $\mu\xi$, dont les coordonnées sont définies par [18]

$$\mu = \sin \theta \cos \phi \quad (1-48.a)$$

$$\xi = \sin \theta \sin \phi \quad (1-48.b)$$

L’espace visible est alors délimité par le cercle unité (Fig. 1.14)

$$\mu^2 + \xi^2 = 1$$

Les lobes d’ambiguïtés sont alors espacés uniformément de λ/d_x et λ/d_y , respectivement selon les axes μ et ξ . Lors du balayage du lobe principal, le point correspondant à ce dernier, défini par les coordonnées $(\sin \theta_0 \sin \phi_0, \sin \theta_0 \cos \phi_0)$ dans le plan $\mu\xi$, varie dans le cercle unité. Il faut limiter les variations de ce point afin qu’un point représentant un lobe d’ambiguïté ne puisse pénétrer dans le cercle. Cette condition est traduite par les relations

$$\begin{cases} \frac{d_x}{\lambda} < \frac{1}{1 + \sin \theta_0} \\ \frac{d_y}{\lambda} < \frac{1}{1 + \sin \theta_0} \end{cases} \quad (1-49)$$

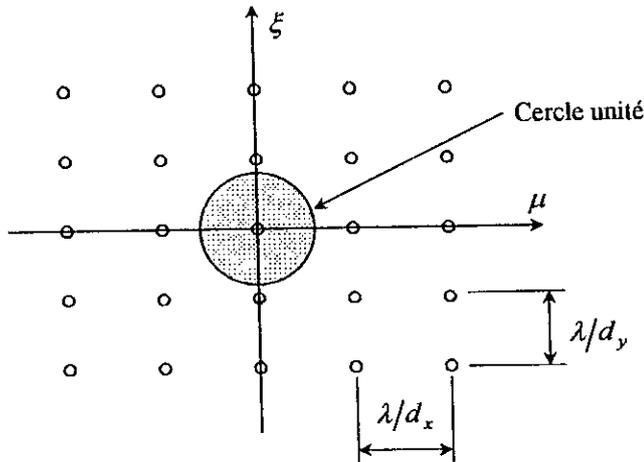


Fig. 1.14 : Lobes d’ambiguïté dans le plan $\mu\xi$

1. 4. 2. 4. Directivité d'un réseau plan

La directivité maximale D_0 du réseau considéré est [4]

$$D_0 = D(\theta_0, \phi_0) = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} |E(\theta_0, \phi_0)|^2 d\Omega} \quad (1-50)$$

avec $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

Dans le cas où l'alimentation est séparable, le calcul de la directivité est analogue à celui des alignements en vertu du principe de multiplication des diagrammes de rayonnement. Dans le cas contraire, le calcul est trop complexe et nécessite une intégration numérique. Cependant, pour des réseaux de grande taille, la quasi-totalité de la puissance rayonnée est concentrée dans le lobe principal, on peut assimiler la directivité de ces réseaux à celle d'une ouverture rayonnante rectangulaire qui s'écrit [12]

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cos \theta_0 \frac{\left| \iint_A I(x, y) dx dy \right|^2}{\iint_A |I(x, y)|^2 dx dy} \quad (1-51)$$

où A est la surface de l'ouverture.

L'utilisation de l'inégalité de Schwarz

$$\left| \iint fg dx dy \right|^2 \leq \iint f^2 dx dy \iint g^2 dx dy$$

où f et g sont deux fonctions réelles, permet d'écrire (1-51) sous la forme

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A \cdot \eta \cdot \cos \theta_0 \quad (1-52)$$

Les termes η , A , $\eta \cdot A$ sont respectivement le rendement, la surface physique et l'aire équivalente de l'ouverture.

Les intégrales intervenant dans l'équation (1-51) peuvent s'exprimer avec une bonne approximation comme suit :

$$\begin{aligned} \iint_A I(x, y) dx dy &\cong \sum_m \sum_n I_{mn} d_x d_y \\ \iint_A |I(x, y)|^2 dx dy &\cong \sum_m \sum_n |I_{mn}|^2 d_x d_y \end{aligned}$$

avec $I_{mn} = I(m \cdot d_x, n \cdot d_y)$.

Dans ces conditions on obtient une expression, aisément utilisable, de la directivité sous la forme

$$D(\theta_0, \phi_0) = 4\pi \cdot \eta \cdot T \frac{d_x \cdot d_y}{\lambda^2} \cos \theta_0 \quad (1-53)$$

où $T = K \times L$ représente la taille du réseau. Le rendement η dépend de la distribution des amplitudes.

1. 4. 3. Couplage entre éléments

En tenant compte de l'effet du couplage, on peut écrire les relations entre les ondes de tension et de courant de deux éléments rayonnants (Fig. 1.15) sous la forme

$$\begin{cases} b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 \\ b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 \end{cases} \quad (1-54)$$

où les c_{ij} sont des coefficients complexes (de transmission si $i \neq j$ et de réflexion si $i = j$).

Pour chaque alimentation il vient

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = c_{11} + c_{12} \frac{a_2}{a_1} \\ \Gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = c_{12} \frac{a_1}{a_2} + c_{22} \end{cases} \quad (1-55)$$

car d'après le théorème de réciprocité $c_{21} = c_{12}$.

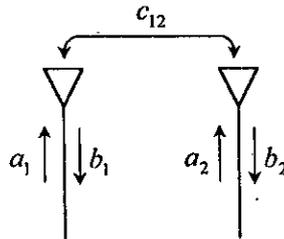


Fig. 1.15 : Couplage entre deux éléments voisins

Le coefficient c_{12} dépend des procédés d'excitation et de la position relative des deux éléments, alors que le rapport a_2/a_1 dépend que du déphasage électrique entre ces éléments [8]. Les coefficients Γ_1 et Γ_2 dépendent donc à la fois du procédé d'excitation, de l'espacement entre éléments et de la direction du rayonnement maximum (θ_0, ϕ_0) .

Dans le cas d'un réseau plan, le coefficient de réflexion global du réseau $\Gamma(\theta_0, \phi_0)$ doit tenir compte de la combinaison de tous couplage entre éléments. Dans le cas le plus défavorable, où il y a une direction dans laquelle Γ est égal à 1 (réflexion totale), le rayonnement du réseau est alors nul dans cette direction (direction aveugle).

1. 5. Effets de quantification de phase

Pour bien comprendre l'effet de la quantification de phase sur le diagramme de rayonnement [19], nous supposons que l'espacement entre éléments est petit devant la dimension du réseau afin d'utiliser les propriétés des ouvertures rayonnantes.

Dans ces conditions le gradient de phase est variation à linéaire, et son expression est donnée par

$$\varphi(x) = -2\pi \frac{x}{\lambda} \nu_0 \quad (1-56)$$

avec $\nu_0 = \sin \theta_0$ (θ_0 direction de pointage)

Comme $\varphi(x)$ est périodique de période 2π , on utilisera des déphaseurs donnant une phase maximale égale à 2π de sorte que la loi de variation soit en forme d'escalier (Fig. 1.16) au lieu d'être linéaire.

L'utilisation des déphaseurs digitaux à p bits permet une quantification de la phase dont le pas $\Delta\varphi$ correspondant à un déplacement $\Delta x = d_\nu$, vient

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{2^p} = -2\pi \frac{d_v}{\lambda} v_0 \tag{1-57}$$

Pour un déphaseur donné et une direction de rayonnement maximum θ_0 fixe, on peut alors déterminer les espacements

$$d_v = -\frac{\lambda}{v_0} \cdot \frac{1}{2^p} \tag{1-58}$$

on a ainsi créé un alignement fictif de longueur d_v , le long duquel toutes les sources sont équiphasés. Cependant, un tel alignement peut présenter des lobes d'ambiguïté si l'espacement d_v , supérieur à longueur d'onde λ . La direction θ_1 (ou $v_1 = \sin \theta_1$) du lobe d'ambiguïté, dit lobe de quantification est donné par [19]

$$v_0 - v_1 = \pm \frac{\lambda}{d_v} = \mp 2^p v_0 \tag{1-59}$$

Chaque sous-réseau équiphasé de longueur d_v , présente un facteur de réseau de la forme

$$f_{\mathcal{A}}(v) = \frac{\sin\left(\pi \frac{d_v}{\lambda} v\right)}{\pi \frac{d_v}{\lambda} v} \tag{1-60}$$

Donc, d'après le théorème de multiplications des diagrammes, le facteur de réseau de l'alignement constitué par les sous-réseaux doit être pondéré par $f_{\mathcal{A}}(v)$ pour avoir le nouveau facteur de réseau de l'alignement constitué par les antennes isotropes. Alors, le rapport du niveau du lobe principal de direction v_0 et du lobe d'ambiguïté de direction v_1 est donné par (Fig. 1.17)

$$r_v = \frac{f_{\mathcal{A}}(v_0)}{f_{\mathcal{A}}(v_1)} = 2^p - 1 \tag{1-61}$$

Ce rapport est indépendant de la direction de pointage. Il ne dépend que de la capacité p des déphaseurs. Pour $p = 3$ bits, par exemples, $r_v = 7$, ce qui correspond approximativement à 17 dB.

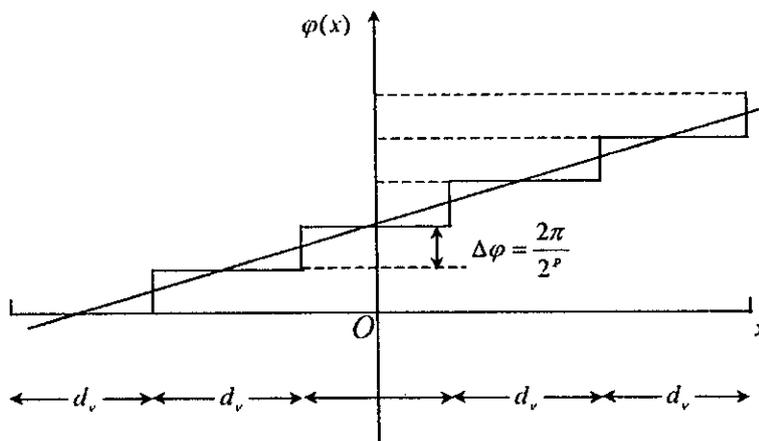


Fig. 1.16 : La quantification d'une phase linéaire

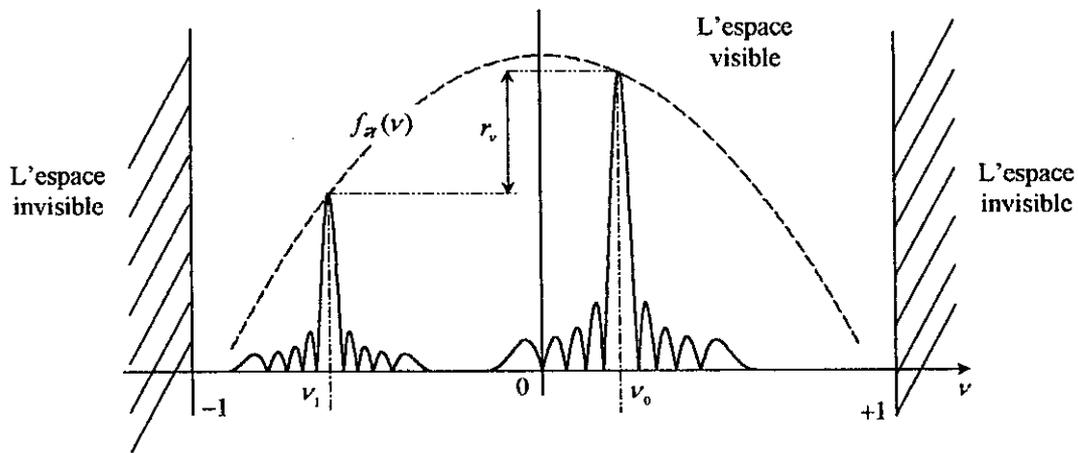


Fig. 1.17 : L'effet de la quantification de phase

1. 6. Réseaux à balayage en fréquence

Une antenne à balayage électronique peut être réalisée au moyen d'un réseau à balayage fréquentiel. Donc, le balayage est obtenu par la variation de la fréquence. Un simple moyen pour obtenir un tel réseau consiste à utiliser une longueur de ligne de transmission pour alimenter le réseau par des coupleurs directs [20], [4].

Deux éléments adjacents dans le réseau, espacés par une distance a , sont alimentés par deux coupleurs séparés dans la ligne de transmission (guide d'onde) d'une longueur b (Fig. 1.18). Les propriétés du réseau et de la ligne de transmission nous permettent de montrer qu'une déviation en fréquence df_0 autour de la fréquence centrale f_0 produit un balayage angulaire $d\nu_0$ donné en radian par l'équation

$$d\nu_0 = \frac{b \lambda_g}{a \lambda_0} \frac{df_0}{f_0}$$

où λ_g est la longueur d'onde dans le guide. En effet, nous savons que le déphasage produit par une longueur b de la ligne de transmission est donné par

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi b}{\lambda_g} \quad (1-62)$$

Cela produit une déviation θ_0 du faisceau telle que

$$2\pi \frac{a}{\lambda_0} \sin \theta_0 = \Delta\varphi - 2q\pi \quad (1-63)$$

l'entier q est limité par la condition $|\sin \theta_0| \leq 1$.

La dérivée de l'équation précédente donne

$$a \cdot d\left(\frac{\nu_0}{\lambda_0}\right) = d\left(\frac{b}{\lambda_g}\right) \quad \text{avec } \nu_0 = \sin \theta_0$$

ou sous la forme

$$a \cdot \frac{\lambda_0 \cdot d\nu_0 - \nu_0 \cdot d\lambda_0}{\lambda_0^2} = -b \cdot \frac{d\lambda_g}{\lambda_g^2} \quad (1-64)$$

Au voisinage de la normale ($\nu_0 \cong 0$ ou $\theta_0 \cong 0$)

$$d\nu_0 = -\frac{b \lambda_0}{a \lambda_g} \frac{d\lambda_g}{\lambda_g} \quad (1-65)$$

Si la ligne de transmission n'a pas de fréquence de coupure (ligne coaxial remplie de diélectrique de constante ϵ), nous avons

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$$

donc

$$d\nu_0 = -\frac{b}{a} \sqrt{\epsilon} \frac{d\lambda_0}{\lambda_0} = +\frac{b}{a} \sqrt{\epsilon} \frac{df_0}{f_0} \quad (1-66)$$

Si la ligne de transmission (guide d'onde) possède une longueur d'onde de coupure λ_c , nous avons la relation classique suivante

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (1-67)$$

et par dérivation, on obtient

$$-\frac{d\lambda_g}{\lambda_g^3} = -\frac{d\lambda_0}{\lambda_0^3}$$

et finalement nous avons

$$d\nu_0 = \frac{b \lambda_g}{a \lambda_0} \frac{df_0}{f_0} \quad (1-68)$$

La déviation en radians, est proportionnelle à la longueur relative (b/a) du guide d'onde, au ratio des longueurs d'onde dans le guide et dans l'espace libre aussi qu'à la déviation relative de la fréquence.

Dans le cas d'un alignement d'antennes microrubans $a=b$ car la ligne de transmission imprimée sur la même face que les éléments rayonnants.

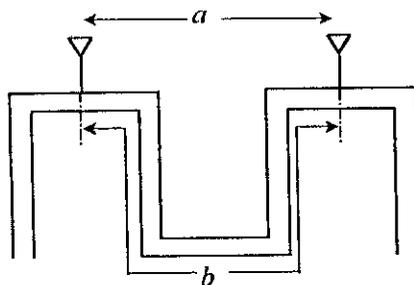


Fig. 1.18 : Alimentation du réseau par ligne de transmission (guide d'onde)

1. 7. Avantages et inconvénients des réseaux phasés

Avantages

Parmi les avantages des réseaux phasés on cite

- Ils sont mécaniquement fixes, d'où une bonne résolution angulaire ;
- Un pilotage du balayage du faisceau rapide et continu.
- L'absence d'un rayonnement arrière (spill-over) leur donne un rendement élevé.

- Avec les faisceaux multiples et les temps de réaction très court, bien des performances sont possibles.
- L'introduction des calculateurs et des microprocesseurs dans leur gestion permet de nouvelles applications.
- La redondance des composants confère au réseau une bonne fiabilité.

Inconvénients

- Des directions aveugles peuvent limiter la couverture de l'espace surveillé.
- Une bonne directivité implique des réseaux de dimensions importantes, donc des coûts de production élevés et une complexité accrue du système.
- La stabilité en phase dépend des conditions ambiantes.

1. 8. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un type très intéressant de réseaux, à savoir les réseaux phasés. La théorie et les problèmes inhérents trouvés dans ce type de réseau sont exposés de manière détaillée.

Ce type de réseau permet d'orienter le maximum de rayonnement (lobc principal) dans une direction imposée. En faisant varier le gradient de phase (qui représente le pas de phase entre deux éléments adjacents) selon une loi donnée, on imposera au faisceau un balayage selon la même loi de variation. Les réseaux phasés sont les seuls qui permettent de réaliser le balayage électronique. Pour réaliser le balayage dans un plan, on doit utiliser un réseau linéaire. Mais dans la plupart des cas on veut un balayage en site et en gisement. Pour ce faire, on utilise souvent des réseaux plans. Parmi ces derniers, on trouve les réseaux rectangulaires. Une distribution d'excitation de courant convenable, appliquée aux éléments de ces réseaux, nous permet d'atteindre les performances désirées. Si on veut un réseau optimum, on utilise la technique de Dolph-Chebyshev. Cette méthode est simple à appliquer si le réseau possède une alimentation séparable, où l'étude d'un réseau rectangulaire se réduit donc à celle de deux réseaux linéaires. Dans le cas contraire, où l'alimentation n'est pas séparable, Baklanov [21] a proposé une technique qui a été uniquement appliquée à des réseaux carrés. Nous allons exposer cette technique dans le chapitre suivant mais avec une nouvelle formulation.

*Chapitre 2 :
Optimisation
des Réseaux
Rectangulaires*

Chapitre 2 :

Optimisation des Réseaux Rectangulaires

2. 1. Introduction

Les réseaux d'antennes qui trouvent le plus d'applications aussi bien dans les stations terriennes que marines sont le plus souvent plans. Leur configuration est fréquemment rectangulaire ou circulaire. Par rapport aux alignements (réseaux linéaires), le facteur de réseau de tels aériens comporte d'autres variables qui permettent le contrôle de la forme et de l'orientation du diagramme de rayonnement. On peut ainsi orienter le maximum de ce rayonnement dans n'importe quelle direction de l'espace. Afin d'obtenir des caractéristiques radioélectriques optimales, nous alimentons le réseau à l'aide d'une distribution d'excitations des éléments, pondérée de type Dolph-Chebyshev. Une telle distribution offre aux réseaux à espacement uniforme, le meilleur compromis directivité-niveau des lobes secondaires.

Dans ce qui suit, nous allons exposer deux méthodes d'analyse de tels réseaux. La première, appelée méthode conventionnelle, consiste à considérer des distributions de courant indépendantes dans les deux directions du réseau et appliquer ainsi la méthode classique de multiplication de diagrammes de rayonnement. Nous allons montrer que pour cette méthode, une configuration carrée offre de meilleures performances qu'une géométrie rectangulaire de taille comparable. Toutefois, cette méthode conventionnelle donne des diagrammes de rayonnement optimaux uniquement dans les deux plans principaux. Pour les autres plans, les lobes secondaires sont effectivement réduits mais au détriment des lobes principaux assez larges. Ceci est dû au fait que la distribution des excitations est séparable [22]. La deuxième, appelée méthode optimale, élaborée par Baklonov [21]. Cette méthode permette d'obtenir des diagrammes optimaux dans tous les plans verticaux. Cependant, il n'a traité que le cas d'un rayonnement transversal en supposant que les excitations sont équiphases.

L'objet de ce chapitre consiste à étendre la méthode optimale aux réseaux phasés à configuration rectangulaire ($K \times L$), en utilisant une nouvelle formulation du facteur de réseau, permettant d'englober sous forme d'une expression unique toutes les éventualités que peuvent prendre les valeurs des entiers K et L . Nous montrerons également que par rapport aux expressions classiques des amplitudes pondérées des excitations, un développement modal permet à la fois d'obtenir une réduction du temps de calcul et de meilleurs résultats, particulièrement pour les réseaux de grande taille. Du point de vue directivité, nous mettrons en évidence les meilleures performances d'un réseau carré par rapport à celles d'une géométrie rectangulaire de taille comparable. Les propriétés de symétrie du réseau nous ont amené à développer une nouvelle méthode de détermination de la directivité permettant de calculer aisément et avec précision ce paramètre.

2. 2. Méthode conventionnelle pour les réseaux rectangulaires de Chebyshev

2. 2. 1. Diagramme de rayonnement

Considérons un réseau rectangulaire de $K \times L$ éléments identiques à espacement uniforme dans le plan xy (Fig. 2.1). Pour des raisons de simplicité, les amplitudes des excitations des éléments du réseau sont supposées symétriques par rapport aux axes x et y , et les phases sont ajustées de telle sorte que les éléments rayonnants soient équiphases dans la direction (θ_0, ϕ_0) (direction du rayonnement maximum). On peut écrire le facteur de réseau sous la forme (§ annexe A)

$$E_{ee}(\theta, \phi) = F_{ee}(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N 4I_{mn} \cos[(2m-1)u] \cdot \cos[(2n-1)v] \quad (2-1)$$

pour un nombre d'éléments pair dans les deux directions ($K = 2M$, $L = 2N$), et

$$E_{oo}(\theta, \phi) = F_{oo}(u, v) = \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_{m-1} \varepsilon_{n-1} I_{mn} \cos[2(m-1)u] \cdot \cos[2(n-1)v] \quad (2-2)$$

pour $K = 2M + 1$, $L = 2N + 1$, et

$$E_{eo}(\theta, \phi) = F_{eo}(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N+1} 2\varepsilon_{m-1} I_{mn} \cos[(2m-1)u] \cdot \cos[2(n-1)v] \quad (2-3)$$

pour $K = 2M$ et $L = 2N + 1$, et

$$E_{oe}(\theta, \phi) = F_{oe}(u, v) = \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N 2\varepsilon_{m-1} I_{mn} \cos[2(m-1)u] \cdot \cos[(2n-1)v] \quad (2-4)$$

pour $K = 2M + 1$ et $L = 2N$, avec

$$u = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta \cos \phi - \sin \theta_0 \cos \phi_0) \quad (2-5.a)$$

$$v = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta \sin \phi - \sin \theta_0 \sin \phi_0) \quad (2-5.b)$$

$$\varepsilon_l = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 0 \\ 2, & \text{si } l \neq 0 \end{cases} \quad (2-6)$$

où d est la distance entre deux éléments adjacents et λ la longueur d'onde, I_{mn} étant l'excitation de l'élément d'ordre (m, n) et les indices e et o signifiant pair (ang: even) et impair (ang: odd) respectivement.

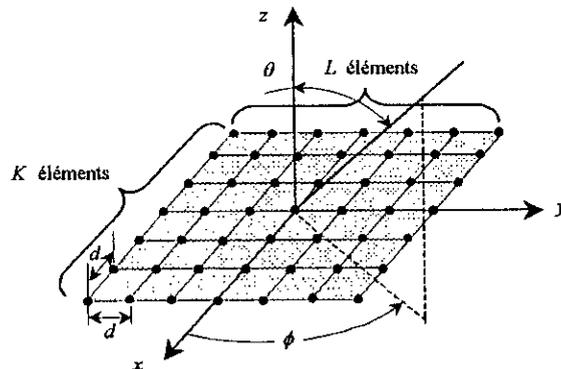


Fig. 2. 1 : Réseau rectangulaire à espacement uniforme

Les expressions (2-1), (2-2), (2-3), et (2-4) peuvent être écrites sous la forme générale

$$E(\theta, \phi) = F(u, v) = \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_K \delta_{m-1})(2-r_L \delta_{n-1}) I_{mn} \cos[(2m-r_K-1)u] \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \quad (2-7)$$

$\delta_{p-q} = \delta_{pq}$, où δ_{pq} est le symbole de Kronecker, et

$$r_Q = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } Q \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{avec } Q = K \text{ ou } L \quad (2-8)$$

La méthode conventionnelle pour la synthèse des réseaux rectangulaires de Chebyshev, consiste à écrire $F(u, v)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes de Chebyshev d'ordre $(K-1)$ et $(L-1)$, c'est-à-dire

$$F(u, v) = f_K(u) \cdot f_L(v) = T_{K-1}(w_0 \cos u) \cdot T_{L-1}(w_0 \cos v) \quad (2-9)$$

où w_0 étant un paramètre dépendant du niveau des lobes secondaires. Compte tenu des équations (2-7) et (2-9) et du fait que la distribution des excitations est séparable (indépendantes) dans les deux directions, on peut écrire

$$f_K(u) = T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} (2 - r_K \delta_{m-1}) I_m^K \cdot \cos[(2m - r_K - 1)u] \quad (2-10)$$

$$f_L(v) = T_{L-1}(w_0 \cos v) = \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{n-1}) I_n^L \cdot \cos[(2n - r_L - 1)v] \quad (2-11)$$

avec

$$I_{mn} = I_m^K \times I_n^L \quad (2-12)$$

L'approche conventionnelle, réduit donc la synthèse d'un réseau rectangulaire à celle de deux réseaux de Chebyshev linéaires et indépendants. Néanmoins, le diagramme obtenu est optimum uniquement dans les plans $u = 0$, $v = 0$, car les excitations ne sont pas produites selon la technique de Dolph-Chebyshev que dans ces deux plans.

L'équation (2-9) montre que le niveau du lobe principal, situé dans la direction (θ_0, ϕ_0) , et le niveau du premier lobe secondaire valent respectivement

$$T_{K-1}(w_0) \times T_{L-1}(w_0) \quad (2-13.a)$$

$$T_{K-1}(w_0) \quad (\text{dans le cas où } K \geq L) \quad (2-13.b)$$

et on peut donc déduire la relation donnant le facteur d'échelle w_0 en fonction du rapport R du niveau de lobe principal à celui du premier lobe secondaire par

$$R = T_{L-1}(w_0) = \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{n-1}) I_n^L \quad (2-14)$$

ou sous la forme

$$w_0 = \cosh \left[\frac{1}{L-1} \cosh^{-1} R \right] \quad (2-15)$$

2. 2. 2. Calcul de la distribution de courant

La distribution de courant du réseau est obtenue à partir des polynômes de Chebyshev introduits dans l'équation (2-9). Un polynôme de Chebyshev d'ordre $Q - 1$ est défini par [2]

$$T_{Q-1}(w) = \begin{cases} \cosh[(Q-1) \cosh^{-1} w], & w > 1 \\ \cos[(Q-1) \cos^{-1} w], & w \leq 1 \end{cases} \quad (2-16)$$

ou encore sous la forme polynomiale

$$T_{Q-1}(w) = \sum_{m=1}^{P+r_Q} (-1)^{P-m+r_Q} \frac{2^{2m-r_Q-2} (2P+r_Q-1)}{P+m-1} \cdot C_{P+m-1}^{2m-r_Q-1} \cdot w^{2m-r_Q-1} \quad (2-17)$$

$$\begin{cases} P = M \text{ et } w = w_0 \cos u \text{ pour } Q = K \\ P = N \text{ et } w = w_0 \cos v \text{ pour } Q = L \end{cases} \quad \text{et} \quad C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Compte tenu de (2-17), l'expression (2-9) devient (§ annexe A)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{m=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{m-1}) \cdot b_m^K \cdot \cos[(2m-r_K-1)u] \times \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_L \delta_{n-1}) \cdot b_n^L \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \\ &= \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_K \delta_{m-1})(2-r_L \delta_{n-1}) \cdot b_m^K \cdot b_n^L \cdot \cos[(2m-r_K-1)u] \cos[(2n-r_L-1)v] \end{aligned} \quad (2-18)$$

avec

$$b_m^K = \sum_{s=m}^{M+r_K} (-1)^{M-s+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+s-1)} \cdot C_{M+s-1}^{2s-r_K-1} \cdot C_{2s-r_K-1}^{s-m} \cdot w_0^{2s-r_K-1} \quad (2-19.a)$$

$$b_n^L = \sum_{s=n}^{N+r_L} (-1)^{N-s+r_L} \frac{2N+r_L-1}{2(N+s-1)} \cdot C_{N+s-1}^{2s-r_L-1} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-n} \cdot w_0^{2s-r_L-1} \quad (2-19.b)$$

L'identification de (2-7) avec (2-18) permet d'obtenir l'amplitude I_{mn} de l'élément d'ordre (m, n) sous la forme

$$I_{mn} = b_m^K \times b_n^L \quad (2-20)$$

et on peut donc déduire que

$$I_m^K = b_m^K \quad \text{et} \quad I_n^L = b_n^L$$

Généralement dans les problèmes de synthèse des réseaux, la valeur du rapport R est imposée. On en déduit alors le facteur d'échelle w_0 à partir de l'équation (2-15) pour calculer la distribution des amplitudes I_{mn} à l'aide des relations (2-19) et (2-20), et donc l'expression du facteur de réseau pour le tracé du diagramme de rayonnement.

Compte tenu de la symétrie considérée, les résultats obtenus montrent que le nombre d'amplitudes à déterminer passe de $(M+r_K) \times (N+r_L)$ pour une configuration rectangulaire ($K \neq L$) à $(N+r_L)(N+r_L+1)/2$ pour un réseau carré. Le temps de calcul est ainsi réduit de moitié.

2. 2. 3. Détermination des amplitudes de courant par la méthode modale

Le calcul des amplitudes I_{mm} à partir des relations (2-19) et (2-20) est très complexe et exige un temps de calcul assez long. C'est la raison pour laquelle, nous proposons une méthode permettant d'alléger le formalisme mathématique et de réduire le temps de calcul. Cette méthode [23] consiste à développer l'amplitude I_m^K (ou I_n^L) de la relation (2-12) sous la forme modale (§ annexe A)

$$I_m^K = \sum_{p=1}^{M+r_K} (2 - r_K \delta_{p-1}) \alpha_p^K \cos \left[\frac{2\pi}{K} \left(m - \frac{r_K + 1}{2} \right) \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \right] \quad m=1,2,\dots,M+r_K \quad (2-20)$$

qui permet de réécrire l'équation (2-10) comme suit :

$$f_K(u) = T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{p=1}^{M+r_K} (2 - r_K \delta_{p-1}) \alpha_p^K \psi_p^K(u) \quad (2-21)$$

où les α_p^K sont des coefficients à déterminer, et

$$\psi_p^K(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \left[K \left(u + \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right) \right]}{\sin \left[u + \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right]} + \frac{\sin \left[K \left(u - \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right) \right]}{\sin \left[u - \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right]} \right] \quad (2-22)$$

Comme

$$\psi_p^K \left[\left(p' - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right] = \frac{K}{(2 - r_K \delta_{p'-1})} \delta_{p-p'} \quad (2-23)$$

l'expression (2-21) s'écrit

$$f_K \left[\left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right] = T_{K-1} \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right] \right] = K \cdot \alpha_p^K \quad (2-24)$$

et permet alors d'obtenir les coefficients α_p^K sous la forme

$$\alpha_p^K = \frac{1}{K} \cdot T_{K-1} \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right] \right] \quad (2-25)$$

Compte tenu des équations (2-20) et (2-25), l'expression de I_m^K devient

$$I_m^K = \frac{1}{K} \sum_{p=1}^{M+r_K} (2 - r_K \delta_{p-1}) \cdot T_{K-1} \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \frac{\pi}{K} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K} \left(m - \frac{r_K + 1}{2} \right) \left(p - \frac{r_K + 1}{2} \right) \right] \quad (2-26.a)$$

Un développement analogue permet d'obtenir le deuxième terme de la relation (2-12) sous la forme

$$I_n^L = \frac{1}{L} \sum_{q=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{q-1}) \cdot T_{L-1} \left[w_0 \cos \left[\left(q - \frac{r_L + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L} \left(n - \frac{r_L + 1}{2} \right) \left(q - \frac{r_L + 1}{2} \right) \right] \quad (2-26.b)$$

Il est clair que l'expression des amplitudes I_{mn} obtenues à l'aide des équations (2-26) est moins complexes que celles obtenues à partir des relations (2-19). La méthode proposée permet ainsi de réduire le temps de calcul des amplitudes I_{mn} . D'ailleurs, elle est plus avantageuse pour les réseaux de grande taille (§ tableau 2.1).

2. 2. 4. Calcul de la directivité maximale

La directivité maximale d'un réseau rectangulaire dont le rayonnement maximum est dans la direction (θ_0, ϕ_0) est définie par la relation (1-50), et on peut l'écrire sous la forme [24]

$$D_0 = \frac{1}{P} |E(\theta_0, \phi_0)|^2 \quad (2-27)$$

avec

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |E(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2-28)$$

La configuration du réseau considéré nous permet d'obtenir (§ annexe A) l'expression de P comme suit :

$$P = \sum_{m=1}^{M_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} b_{m-1 \ n-1} \cos[(m-1)u_0] \cdot \cos[(n-1)v_0] \quad (2-29)$$

avec

$$b_{m-1 \ n-1} = \sin c \left(kd \sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2} \right) \quad (2-30)$$

$$I_{mn}^{(2)} = I_m^{K_2} \times I_n^{L_2} \quad (2-31.a)$$

$$I_m^{K_2} = \frac{1}{K_2} \sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cdot T_{K_2-1}^2 \left[w_0 \cos \left[(p-1) \frac{\pi}{K_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right] \quad (2-31.b)$$

$$I_n^{L_2} = \frac{1}{L_2} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{q-1}) \cdot T_{L_2-1}^2 \left[w_0 \cos \left[(q-1) \frac{\pi}{L_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \quad (2-31.c)$$

$$M_2 = K - 1, \quad K_2 = 2M_2 + 1, \quad N_2 = L - 1 \quad \text{et} \quad L_2 = 2N_2 + 1 \quad (2-31.d)$$

$$u_0 = kd \sin \theta_0 \cos \phi_0 \quad \text{et} \quad v_0 = kd \sin \theta_0 \sin \phi_0 \quad (2-32)$$

Compte tenu de (2-9) et (2-14), la directivité maximale devient

$$D_0 = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{P} = \frac{(T_{K_2-1}(w_0) \times R)^2}{P} \quad (2-33)$$

Dans le cas d'un espacement entre éléments de l'ordre de la demi-longueur d'onde ($d \approx \lambda/2$), la quantité $b_{m-1 \ n-1}$ peut s'écrire, avec une bonne approximation, comme suit :

$$b_{m-1 \ n-1} \cong \delta_{m-1} \times \delta_{n-1} \quad (2-34)$$

et l'expression de la directivité maximale est donc

$$D_0 \cong \frac{(T_{K-1}(w_0) \times R)^2}{I_{11}^{(2)}} = \sum_{m=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{m-1}) I_m^{K_2} / I_1^{K_2} \times \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^{L_2} / I_1^{L_2} \quad (2-35)$$

$$\text{car} \quad R = T_{L-1}(w_0) = \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^{L_2} \quad (2-36.a)$$

$$T_{K-1}(w_0) = \sum_{m=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{m-1}) I_m^{K_2} \quad (2-36.b)$$

Dans le cas d'un réseau carré ($K = L$), l'expression (2-35) devient

$$D_0 \cong \left(\sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^{L_2} / I_1^{L_2} \right)^2 = \left(\frac{R^2}{I_1^{L_2}} \right)^2 \quad (2-37)$$

alors que Tseng [23] obtient pour la même structure

$$D_0 \cong 4 \cdot \frac{\left(\sum_{n=1}^N I_n^L \right)^4}{\left(\sum_{n=1}^N (I_n^L)^2 \right)^2} = \left(\frac{R^2}{2 \cdot \sum_{n=1}^N (I_n^L)^2} \right)^2 \quad (\text{si } L = 2N) \quad (2-38.a)$$

$$D_0 \cong \frac{\left(\sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^L \right)^4}{\left(\sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{n-1}) (I_n^L)^2 \right)^2} = \left(\frac{R^2}{\sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{n-1}) (I_n^L)^2} \right)^2 \quad (\text{si } L = 2N + 1) \quad (2-38.b)$$

L'expression (2-37) donne la même valeur de la directivité que les expressions (2-38), mais avec un temps de calcul beaucoup plus faible (voir tableau 2.2).

2. 2. 5. Résultats obtenus

Le tableau 1.1, est un état comparatif des performances entre les résultats obtenus à l'aide des équations (2-19) et ceux obtenus par (2-26). La première colonne représente la taille du réseau carré considéré. Les colonnes 2 et 3 illustrent les temps de calcul (en secondes) des amplitudes I_{mn} en utilisant respectivement (2-19) et (2-26) et montrent l'avantage évident du développement modal qui nécessite un temps de calcul pratiquement dix fois plus faible. De plus, à l'aide de la relation (2-14), nous avons effectué l'investigation de la validité des approches pour des réseaux de grande taille et ce en recalculant la valeur du rapport R (en dB), représentée dans les colonnes 4 et 5. Nous constatons, qu'au delà d'une certaine taille ($L=40$), les relations (2-19) donnent des résultats complètement erronés quoique leur développement mathématique soit rigoureux. Toutefois cette méthode nécessite trop de développements numériques (usage de la fonction factorielle) qui dépassent les capacités de stockage de l'outil informatique. Toutefois, les résultats obtenus, par l'usage de la fonction factorielle, dépassent les capacités de stockage de l'outil informatique. Même l'usage de la formule approximative de Stirling

$$n! \cong \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

ne résout pas ce phénomène de débordement, car les erreurs s'accumulent lors du calcul du rapport R selon (2-14).

Par contre, la méthode modale donne toujours des bons résultats car elle est basée sur l'usage direct des polynômes de Chebyshev sous leur forme (2-16), qui permet de traiter des réseaux carrés de n'importe quelle taille. Nous avons testé la validité de cette méthode jusqu'à $L = 2000$.

L	Eq. (2-19)	Eq. (2-26)	R selon Eq. (2-19)	R selon Eq. (2-26)
10	0.11	0.00	30	30
20	0.38	0.06	30	30
30	0.82	0.06	30	30
40	1.43	0.11	30.39	30
50	2.14	0.22	81.81	30
100	8.19	0.77	$470.66 e^{j0.058}$	30
150	17.90	1.75	$852.82 e^{j0.052}$	30
200	31.42	3.02	∞	30
1000	784.89	97.49	∞	30

Tab. 2.1 : Temps de calcul (en secondes) et précision des deux méthodes exposées pour la détermination des amplitudes de courant.

Le tableau 2.2, permet une étude comparative du temps de calcul (en secondes) nécessaire à l'établissement de la courbe donnant la directivité en fonction de la taille d'un réseau carré dont la valeur de R est fixée à 30 dB.

Nous mettons aussi en évidence l'avantage de l'approche que nous proposons, particulièrement pour les réseaux de grande taille. Ce résultat est d'ailleurs prévisible en analysant les expressions (2-37) et (2-38). En effet, pour tracer une courbe de directivité en fonction de la taille L d'un réseau carré ($L = 2, \dots, L_{\max}$), il faut déterminer $L_{\max}(L_{\max} + 1)(L_{\max} + 2)/12 - 1$ valeurs dans le cas du modèle élaboré par Tseng [23], et $(L_{\max} - 1)(L_{\max} + 2)/2$ dans le cas de notre approche, ce qui permet d'obtenir pratiquement un temps de calcul $L_{\max}/6$ fois plus faible.

L_{\max}	t (en sec.) notre approche	t (en sec.) selon [23]
10	0.05	0.05
40	0.27	1.70
70	0.72	8.07
100	1.32	22.14
130	2.08	47.01
160	3.02	85.63
190	4.18	141.32
220	5.61	215.64

Tab. 2.2 : Temps de calcul de la directivité en fonction de L selon le modèle proposé et celui élaboré par [23].

Il est intéressant de comparer les performances de rayonnement d'un réseau carré et celles d'un réseau rectangulaire. Dans cette optique, nous avons effectué les tracés (Fig. 2.2 à 2.6) de diagrammes de rayonnement d'un réseau rectangulaire ($K \times L$) et ceux d'un réseau carré ($S \times S$) de taille comparable, et ce prenant S égale à la partie entière de $\sqrt{K \times L}$. Ces tracés sont obtenus pour les paramètres suivants : $R = 30$ dB, $d = \lambda/2$ et $\theta_0 = 0^\circ$.

Dans le plan xz ($\phi = 0^\circ$), les diagrammes de rayonnement sont pratiquement identiques, particulièrement du point de vue de la largeur de lobe principal et de l'angle d'ouverture à mi-puissance.

L'avantage du réseau carré apparaît nettement dans le plan yz ($\phi = 90^\circ$) où l'amélioration de la directivité est bien illustrée par la réduction de la largeur de l'angle d'ouverture à 3 dB. Dans le cas de la figure 2.3.b, par exemple, cet angle passe de 26° pour une géométrie rectangulaire à 9° pour un réseau carré. Pour la structure de la figure 2.4.b, la réduction est moins sensible ; elle passe de 42° à 27° . Ainsi, pour une valeur de K fixée, nous remarquons que cette avantage est d'autant plus prononcé que L est faible.

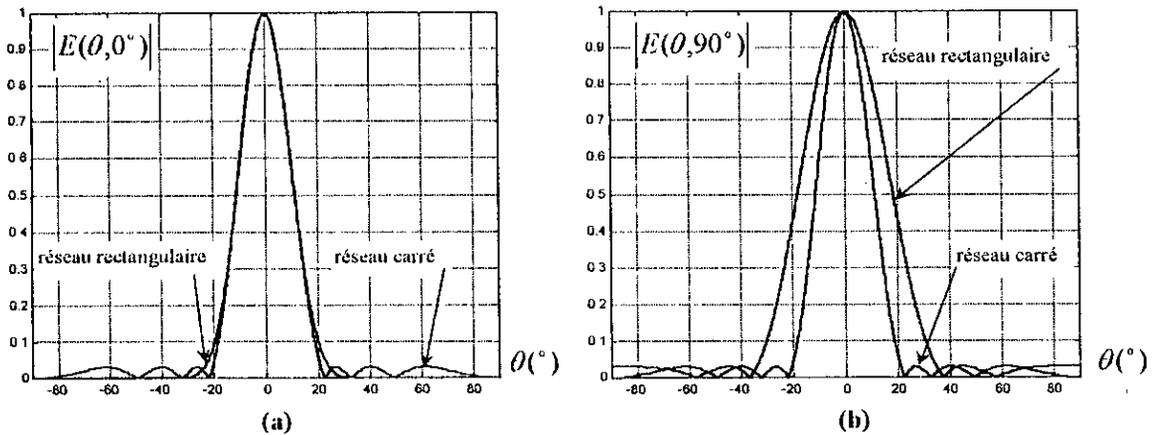


Fig. 2.2 : Diagrammes de rayonnement du réseau rectangulaire et du réseau carré pour $K = 12$ et $L = 5$. (a) $\phi = \phi_0 = 0^\circ$ (b) $\phi = \phi_0 = 90^\circ$

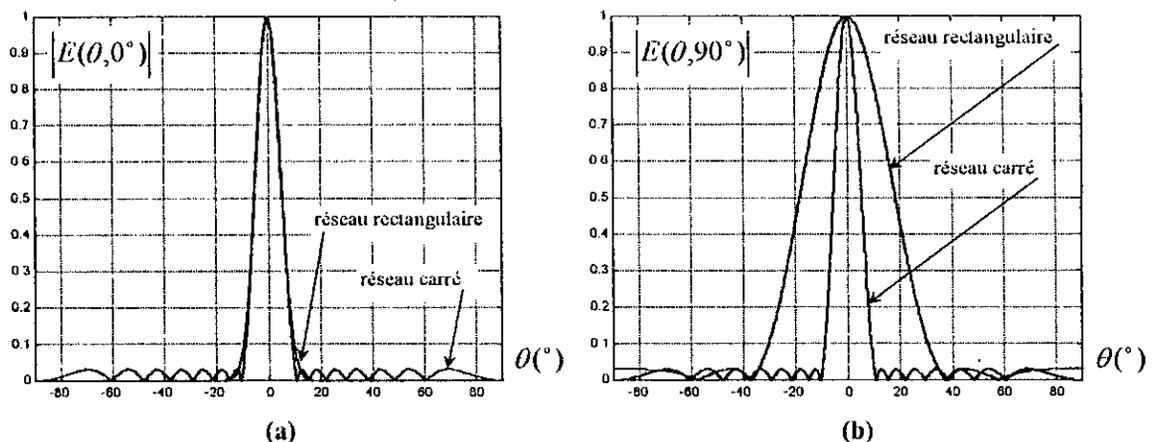


Fig. 2.3 : Diagrammes de rayonnement du réseau rectangulaire et du réseau carré pour $K = 50$ et $L = 5$. (a) $\phi = \phi_0 = 0^\circ$ (b) $\phi = \phi_0 = 90^\circ$

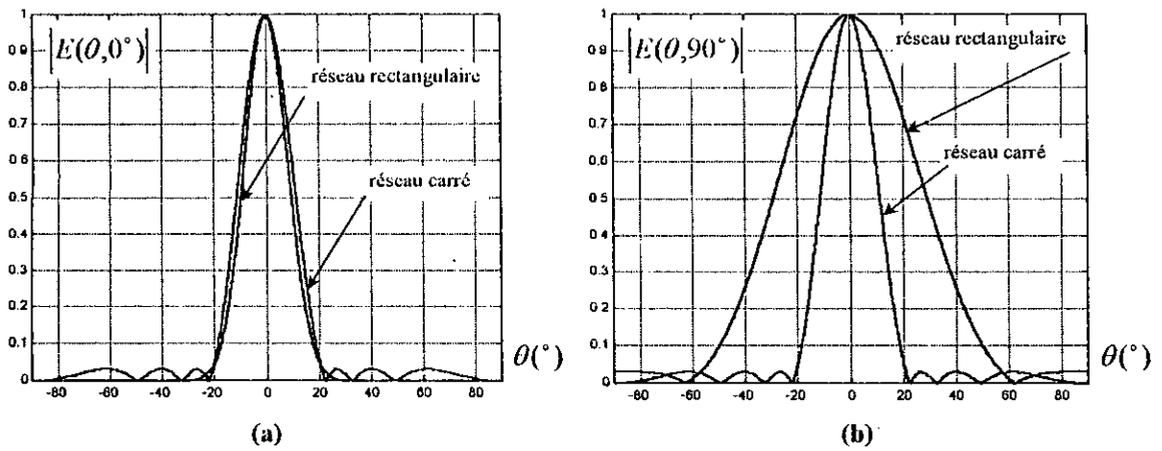


Fig. 2.4 : Diagrammes de rayonnement du réseau rectangulaire et du réseau carré pour $K = 20$ et $L = 3$. (a) $\phi = \phi_0 = 0^\circ$ (b) $\phi = \phi_0 = 90^\circ$

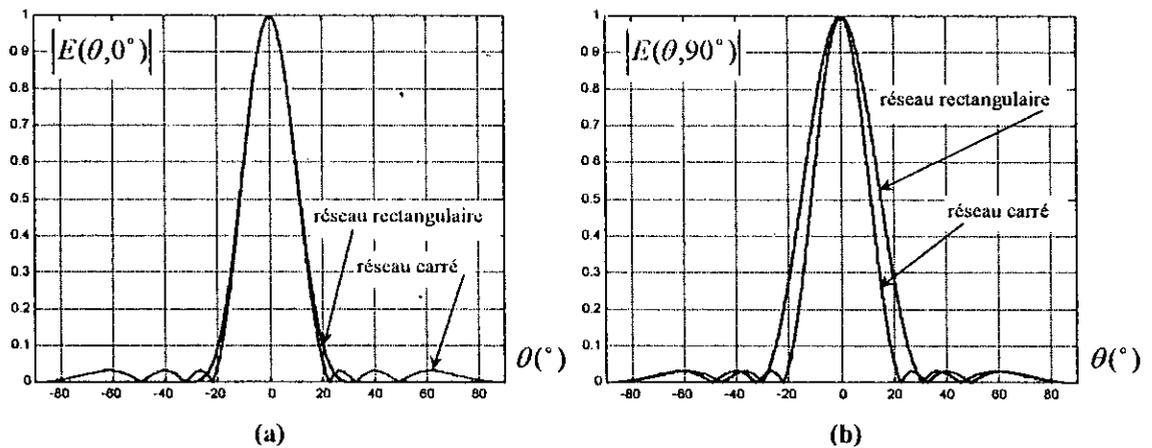


Fig. 2.5 : Diagrammes de rayonnement du réseau rectangulaire et du réseau carré pour $K = 10$ et $L = 6$. (a) $\phi = \phi_0 = 0^\circ$ (b) $\phi = \phi_0 = 90^\circ$

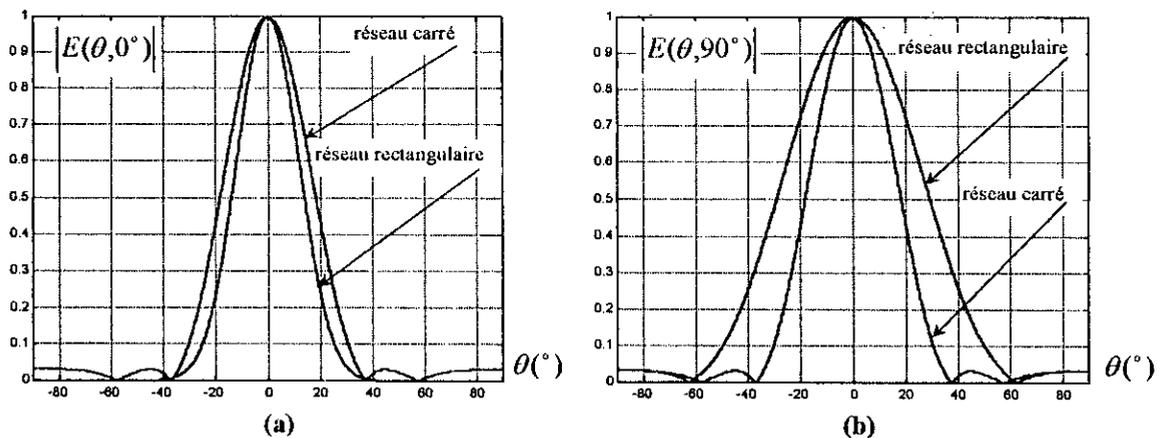


Fig. 2.6 : Diagrammes de rayonnement du réseau rectangulaire et du réseau carré pour $K = 10$ et $L = 3$. (a) $\phi = \phi_0 = 0^\circ$ (b) $\phi = \phi_0 = 90^\circ$

Les figures 2.7 et 2.8 illustrent bien, que du point de vue de la directivité, le réseau carré offre, dans le cas général où $K \geq 10$, de meilleures performances qu'un réseau rectangulaire de taille comparable.

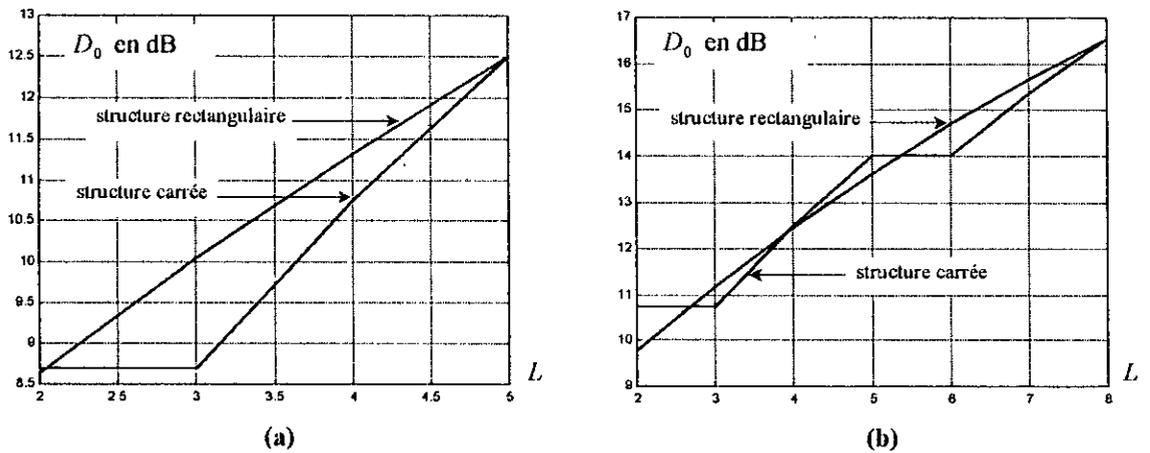


Fig. 2.7 : Directivités maximales en fonction de L pour des valeurs faibles de K ($K < 10$). (a) $K = 5$. (b) $K = 8$

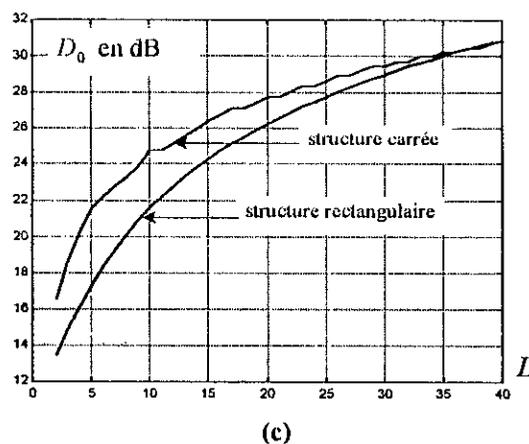
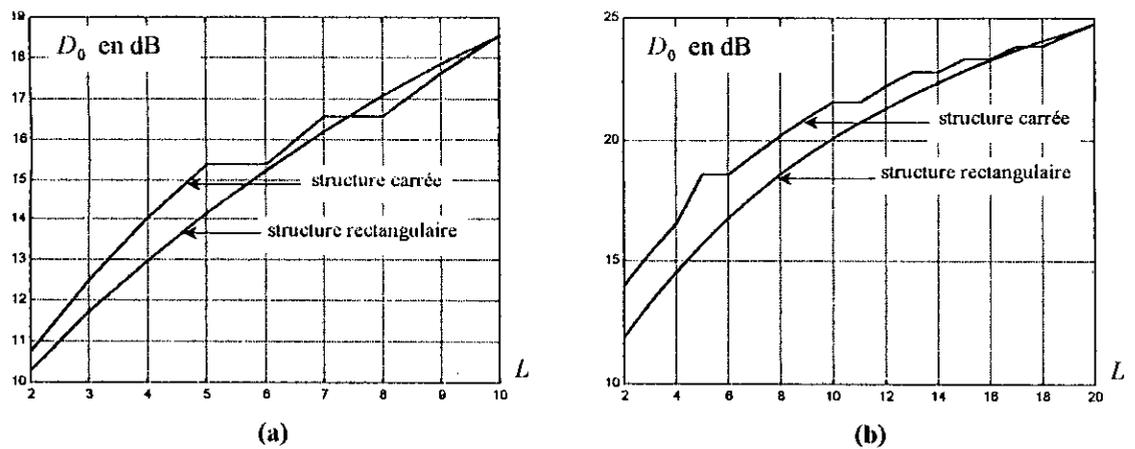


Fig. 2.8 : Directivités maximales en fonction de L pour $K \geq 10$. (a) $K = 10$. (b) $K = 20$. (c) $K = 40$

2. 3. Méthode optimale appliquée aux réseaux carrés

Les réseaux de Chebyshev conventionnels ne sont optimaux que dans deux plans perpendiculaires particuliers (Fig. 2.15.b). Afin de rendre le diagramme de rayonnement de révolution autour de la direction de rayonnement maximum (Fig. 2.15.a), on fait appel à la technique de Baklanov [21] qui consiste à modifier la distribution de courant tout en lui gardant son originalité à savoir l'utilisation des polynômes de Chebyshev. Pour cela, on remplace l'expression (2-9) par

$$F(u, v) = T_{L-1}(w_0 \cos u \cos v) \quad (2-39)$$

La combinaison des relations (2-7) (avec $K = L$) et (2-39), permet de déterminer les amplitudes I_{mn} en fonction de w_0 .

Dans la direction de rayonnement maximum (θ_0, ϕ_0) , la valeur de $F(u, v)$ est égale à $T_{L-1}(w_0)$. Le niveau des lobes secondaires est égal à 1 dans toutes les coupes transverses.

D'autres formes, autre que (2-39), basées sur des combinaisons en termes de $\cos u$ et $\cos v$, sont également possibles pour exprimer le facteur de réseau.

2. 3. 1. Distribution optimale de courant

Le polynôme de Chebyshev $T_{L-1}(w)$ est donné par (2-16) ou (2-17) a pour argument dans ce cas, la nouvelle variable

$$w = w_0 \cos u \cdot \cos v \quad (2-40)$$

En tenant compte de (2-17), (2-39) et (2-40), on obtient l'expression du facteur de réseau sous la forme (§ annexe A)

$$F(u, v) = \sum_{m=1}^{N+r_L} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{m-1})(2 - r_L \delta_{n-1}) B_{mn} \cos[(2m - r_L - 1)u] \cdot \cos[(2n - r_L - 1)v] \quad (2-41)$$

avec

$$B_{mn} = \sum_{s=\max(m, n)}^{N+r_L} (-1)^{N-s+r_L} \frac{2N + r_L - 1}{2(N + s - 1)} \cdot C_{N+s-1}^{2s-r_L-1} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-m} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-n} \cdot (w_0/2)^{2s-r_L-1} \quad (2-42)$$

où

$$\max(m, n) = \begin{cases} m, & \text{si } m \geq n \\ n, & \text{si } m < n \end{cases} \quad (2-43)$$

L'égalité des relations (2-7) et (2-41), nous donne

$$I_{mn} = B_{mn} \quad (2-44)$$

La distribution des amplitudes I_{mn} est donc complètement définie par (2-42). Ces amplitudes vérifient

$$\sum_{m=1}^{N+r_L} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{m-1})(2 - r_L \delta_{n-1}) I_{mn} = R \quad (2-45)$$

A partir de (2-39), on peut dire que le paramètre w_0 et le rapport R sont liés par l'équation

$$T_{L-1}(w_0) = R \quad (2-46)$$

Comme pour le cas des réseaux conventionnels, il est préférable d'utiliser la méthode modale pour la détermination des amplitudes de courant plutôt que d'utiliser (2-42). Un travail analogue à celui effectué au paragraphe 2.2.3, nous permet d'écrire les amplitudes I_{mn} sous la forme

$$I_{mn} = \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{p=1}^{N+r_L} \sum_{q=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{p-1})(2 - r_L \delta_{q-1}) \cdot T_{L-1} \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_L + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \right] \cdot \cos \left[\left(q - \frac{r_L + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \right] \right] \times \cos \left[\frac{2\pi}{L} \left(m - \frac{r_L + 1}{2} \right) \left(p - \frac{r_L + 1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L} \left(n - \frac{r_L + 1}{2} \right) \left(q - \frac{r_L + 1}{2} \right) \right] \quad (2-47)$$

Il est clair que l'équation (2-47) est moins complexe que l'équation (2-42). La méthode proposée permet ainsi de réduire le temps du calcul des amplitudes I_{mn} . De plus, elle est plus avantageuse pour les réseaux de grande taille (voir le tableau 2.3).

2. 3. 2. Calcul de la directivité maximale

En utilisant la méthode exposée dans le paragraphe 2.2.4 et en tenant compte de (2-39), on peut écrire

$$D_0 = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{P} = \frac{R^2}{P} \quad (2-48)$$

avec

$$P = \sum_{m=1}^{N_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} b_{m-1 \ n-1} \cos[(m-1)u_0] \cdot \cos[(n-1)v_0] \quad (2-49)$$

$$I_{mn}^{(2)} = \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot T_{L_2-1}^2 \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \right] \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \quad (2-50)$$

Dans le cas d'un espacement entre éléments de l'ordre de la demi-longueur d'onde ($d \approx \lambda/2$), (2-48) devient

$$D_0 \cong \frac{R^2}{I_{11}^{(2)}} = \sum_{m=1}^{N_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} / I_{11}^{(2)} \quad (2-51)$$

car

$$R^2 = \sum_{m=1}^{N_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} \quad (2-52)$$

alors que Tseng [23] obtient pour la même structure

$$D_0 \cong 4 \cdot \frac{\left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_{mn} \right)^2}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_{mn}^2} = \frac{R^2}{4 \cdot \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_{mn}^2} \quad (\text{si } L = 2N) \quad (2-53.a)$$

et

$$D_0 \cong \frac{\left(\sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn} \right)^2}{\sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^2} = \frac{R^2}{\sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^2} \quad (\text{si } L = 2N + 1) \quad (2-53.b)$$

L'expression (2-51) donne les mêmes résultats que ceux obtenus par les expressions (2-53), mais avec un temps de calcul beaucoup plus faible, comme illustré dans le tableau 2.4.

2. 3. 3. Largeur de faisceau d'un réseau plan de Chebyshev

La largeur de faisceau d'un réseau carré optimum dans le plan $\phi = \phi_0$ peut être déterminée à partir de (2-39). En attribuant au facteur de réseau $F(u, v)$ une valeur c (avec $1 \leq c \leq R$), la résolution de l'équation (2-39) donne la valeur du couple (u_1, v_1) qui permet de déterminer la largeur du faisceau θ_c .

$$T_{L-1}(w_1) = T_{L-1}(w_0 \cos u_1 \cos v_1) = c \quad (2-54)$$

avec

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \cos \phi_0 \\ v_1 = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) \sin \phi_0 \end{cases} \quad (2-55)$$

Dans le plan $\phi_0 = \pi/4$, on obtient la largeur de faisceau θ_c sous la forme

$$\Delta \theta_c = \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi d} \cos^{-1} \left(\frac{w_1}{w_0} \right) \right] - \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi d} \cos^{-1} \left(\frac{w_1}{w_0} \right) \right] \quad (2-56)$$

où

$$w_1 = \cosh \left[\frac{1}{L-1} \cosh^{-1} c \right] \quad (2-57)$$

Pour L grand, nous avons

$$\theta_c \cong 2 \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi d \cos \theta_0} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{w_1}{w_0}} \right) \right] \quad (2-58)$$

Un travail analogue, permet de trouver la largeur de faisceau, dans le plan $\phi = \phi_0 = 45^\circ$, d'un réseau conventionnel à grande taille, comme suit :

$$\theta'_c \cong 2 \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi d \cos \theta_0} \cos^{-1} \left(\frac{w'_1}{w_0} \right) \right] \quad (2-59)$$

avec

$$w'_1 = \cosh \left[\frac{1}{L-1} \cosh^{-1} \sqrt{c} \right] \quad (2-60)$$

La comparaison de (2-58) avec (2-59), nous permet de conclure que pour toute valeur de c , comprise entre 1 et R , la largeur θ_c est toujours inférieure à θ'_c .

2. 3. 4. Nombre minimum d'éléments pour un large secteur de balayage

D'après l'équation (2-58), on peut constater que, si l'espacement normalisé entre éléments d/λ augmente la largeur de faisceau θ_c diminue. Donc, il est préférable du point de vue pratique, d'avoir un espacement grand que possible. Cependant, quand d/λ dépasse certaine valeur, soit d_M/λ , des lobes d'ambiguïté (§ 1.4.2.3) commencent d'apparaître. Pour un angle de balayage maximum θ_M , la condition d'éviter l'apparence de ces lobes est que l'argument de $T_{l-1}(\cdot)$ dans l'équation (2-39) soit supérieur ou égal à -1 [25]

$$w_0 \cos \left[\frac{\pi d}{\lambda} (1 + \sin \theta_M) \cos \phi_0 \right] \cdot \cos \left[\frac{\pi d}{\lambda} (1 + \sin \theta_M) \sin \phi_0 \right] \geq -1 \quad (2-61)$$

pour tout ϕ_0 . D'où la condition

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{d_M}{\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{w_0} \right)}{1 + \sin \theta_M} \quad (2-62)$$

En remplaçant (2-62) dans (2-58), on obtient la largeur maximale de faisceau, soit θ_{cM} , comme suit :

$$\theta_c \leq \theta_{cM} = 2 \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2} (1 + \sin \theta_M) \cos^{-1} (\sqrt{w_1/w_0})}{\cos \theta_M \cdot [\pi - \cos^{-1} (1/w_0)]} \right\} \quad (2-63)$$

Comme w_0 et w_1 dépendent de L , la largeur maximale θ_{cM} peut être tracée en fonction de L pour un angle de balayage maximum θ_M et un rapport R/c donnés. Le nombre minimum d'éléments L_M , nécessaire, pour assurer que la largeur de faisceau ne dépasse pas θ_{cM} pour tout $\theta_0 \leq \theta_M$ et pour tout ϕ_0 peut être trouvé directement à partir des courbes représentées dans les figures 2.11 et 2.12.

2. 3. 5. Résultats numériques obtenus

Le tableau 2.3, montre, comme dans le paragraphe 2.3, que la méthode modale reste avantageuse (donne des résultats exacts) même dans le cas d'un réseau carré optimum.

L	Eq. (2-42)	Eq. (2-47)	R selon Eq. (2-42)	R selon Eq. (2-47)
10	0.33	0.11	30.00	30
20	1.76	1.59	30.00	30
30	5.27	7.58	30.00	30
40	11.65	23.46	30.02	30
50	21.75	56.63	83.43	30
60	36.41	116	168.48	30
70	58.99	226.51	$247.12 e^{j0.110}$	30
80	86.95	381.95	316.83	30
90	119.58	608.02	391.17	30
100	166.98	1083.5	$481.30 e^{j0.056}$	30

Tab. 2.3 : Temps de calcul et précision des deux méthodes exposées pour le calcul des amplitudes I_{mn} (réseau optimum)

Le tableau 2.4, représente une étude comparative du temps de d'exécution (en secondes) nécessaire pour calculer la directivité maximale (dans le cas d'un réseau optimum) correspond à une taille donnée du réseau carré dont la valeur de R est fixée à 30 dB.

D'après ce tableau, on constate que notre approche est avantageuse que la l'approche proposée par Tseng [23], particulièrement pour les réseaux optimaux de grand taille. Ce résultat est d'ailleurs prévisible en analysant les expressions (2-51) et (2-53). En effet, pour calculer la directivité du réseau carré, il faut déterminer $((L + r_L)/2)^4$ valeurs dans le cas du modèle élaboré par Tseng [23], et L^2 dans le cas de notre approche, ce qui permet d'obtenir pratiquement un temps de calcul $(L/4)^2$ fois plus faible.

L	t (en sec.) notre approche	t (en sec.) selon [23]
10	0.025	0.17
20	0.08	2.03
30	0.17	10.38
40	0.33	32.58
50	0.5	79.04
60	0.66	164.06
70	0.88	301.16
80	1.16	539.97

Tab. 2.4 : Temps de calcul de la directivité en fonction de L selon le modèle proposé et celui élaboré par [23].

Plusieurs figures ont été tracées pour illustrer les performances des méthodes optimale et conventionnelle.

Les figures 2.9, illustrent les amplitudes relatives de courant pour un réseau carré de taille $L \times L = 121$. Les amplitudes de la figure 2.9.a, produit un diagramme de rayonnement optimum (Fig. 2.10) à un niveau des lobes secondaires invariant et à faisceau étroit pour tout angle ϕ . Les amplitudes de la figure 2.9.b, produit un diagramme de rayonnement à niveau des lobes secondaires réduit dans toutes les coupes (sauf dans les plans $u = 0$ et $v = 0$) au détriment de la largeur de faisceau (Fig. 2.10).

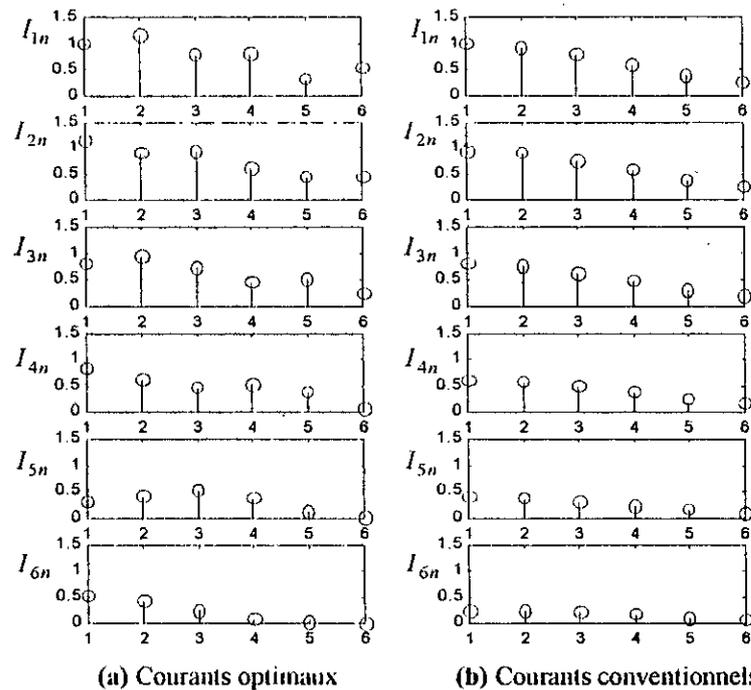


Fig. 2.9 : Amplitudes relatives de courant d'un réseau carré de Chebyshev avec $L = 11$ et $R = 30$ dB

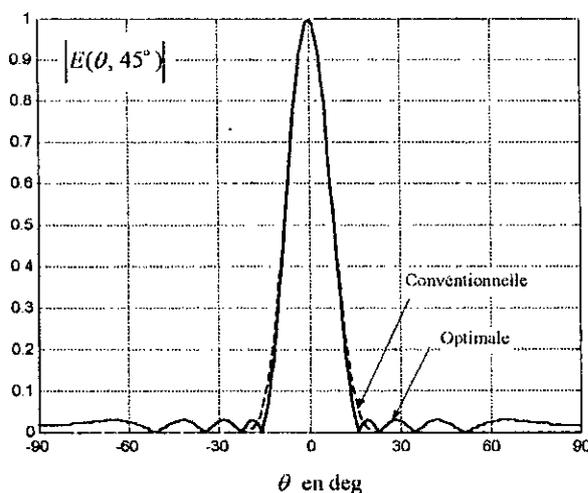


Fig.2. 10.a : Diagramme de rayonnement dans le plan $\phi = 45^\circ$. $L = 11$, $d = \lambda/2$, $\theta_0 = 0^\circ$ et $R = 30$ dB

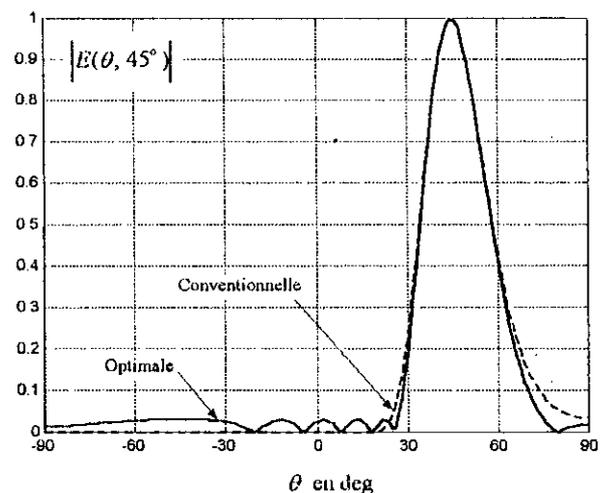


Fig.2.10.b : Diagramme de rayonnement dans le plan $\phi = 45^\circ$. $L = 11$, $d = \lambda/2$, $\theta_0 = 45^\circ$ et $R = 30$ dB

Les figures 2.11, représentent la variation de largeur maximale de faisceau, en fonction du nombre minimum d'éléments L_M , pour les deux méthodes. On constate d'après ces figures que la largeur de faisceau obtenue par la méthode optimale est toujours inférieure à celle obtenue par la méthode conventionnelle. Ce résultat est d'ailleurs prévisible en analysant les expressions (2-58) et (2-59).

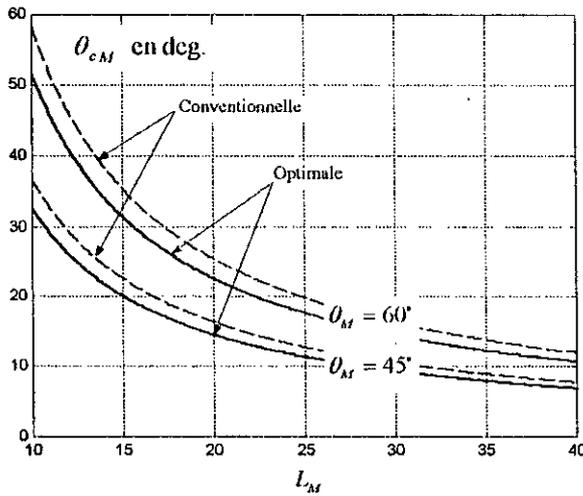


Fig.2.11.a : La largeur de faisceau en fonction de nombre minimum d'éléments avec $R = 20 \text{ dB}$ et $c/R = 0.1$

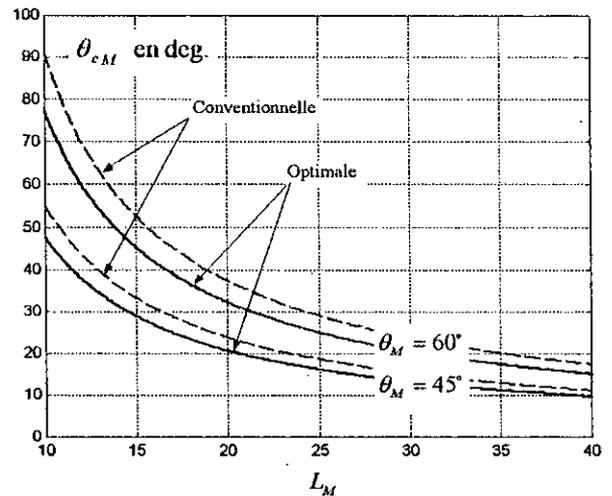


Fig.2.11.b La largeur de faisceau en fonction de nombre minimum d'éléments avec $R = 30 \text{ dB}$ et $c/R = 0.03$

Les figures 2.12, illustrent la variation de la largeur maximale de faisceau à 3 dB en fonction du nombre minimum d'éléments du réseau optimum. Ces figures montrent qu'un faisceau étroit correspond à des valeurs faibles de l'angle θ_M .

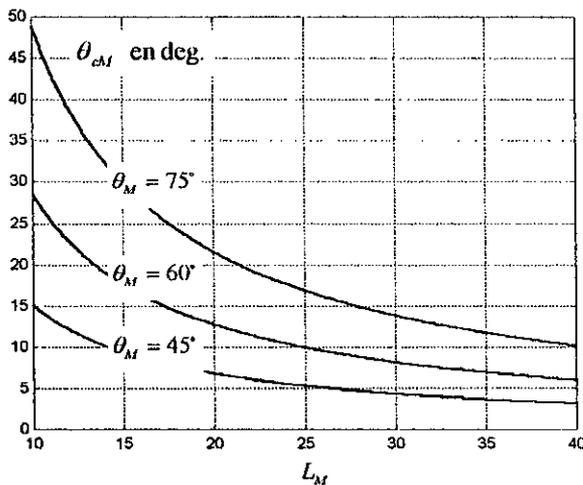


Fig.2.12.a : Largeur de faisceau en fonction de nombre minimum d'éléments avec $R = 20 \text{ dB}$ et $c/R = 0.707$ en utilisant la méthode optimale

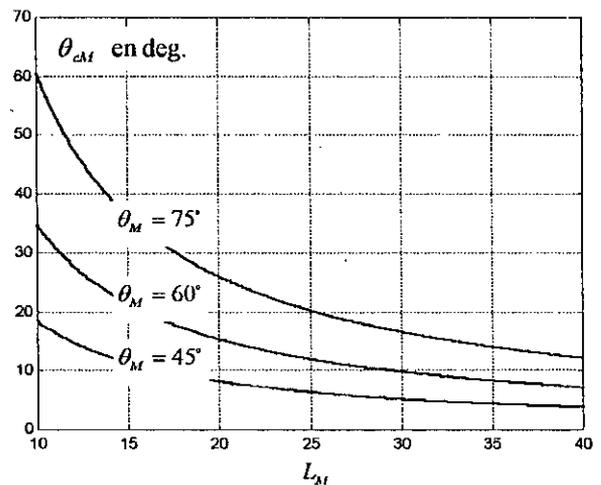


Fig.2.12.b : Largeur de faisceau en fonction de nombre minimum d'éléments avec $R = 30 \text{ dB}$ et $c/R = 0.707$ en utilisant la méthode optimale

Les figures 2.13, montrent que pour un angle θ_M donné, on peut pas dépasser une certaine valeur de d_M/λ quelque soit la taille du réseau utilisé. Cette valeur est l'inverse de $(1 + \sin \theta_M)$.

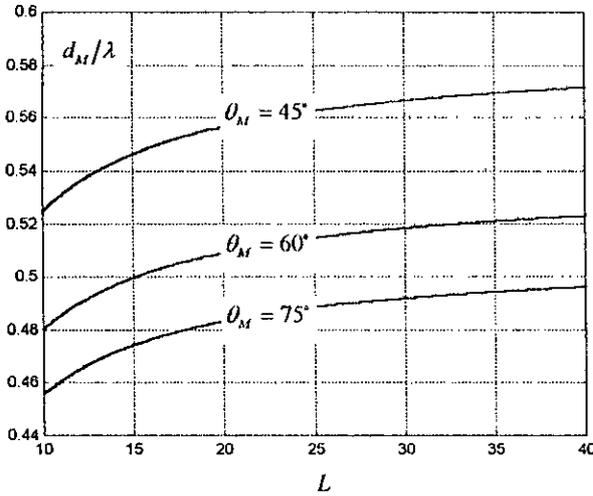


Fig.2. 13.a : d_M/λ en fonction de L avec $R = 20$ dB

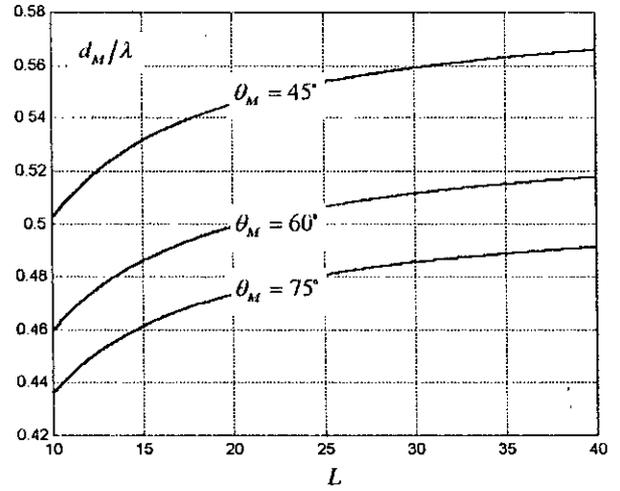


Fig.2.13.b : d_M/λ en fonction de L avec $R = 30$ dB

Les courbes des figures 2.14, sont tracées en utilisant les formules approximatives (2-37) et (2-51). Nous constatons à partir de ces figures que, la directivité de la méthode conventionnelle dépasse légèrement celle de la méthode optimale. Mais, si on augmente le rapport R , les deux méthodes donnent pratiquement la même directivité.

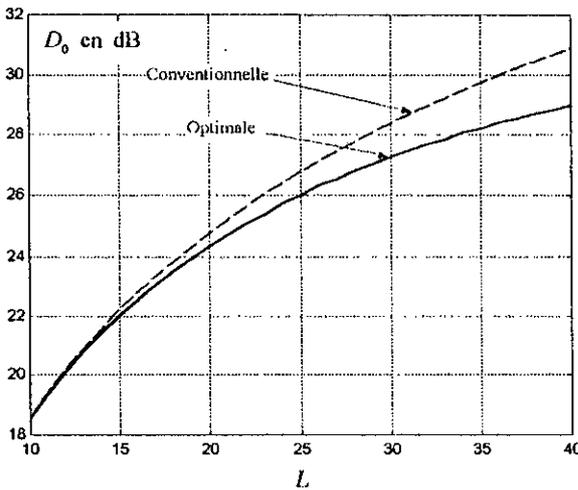


Fig.2.14.a : Directivité maximale en fonction de L ($d = \lambda/2$, $\theta_0 = 0^\circ$, $R = 30$ dB)

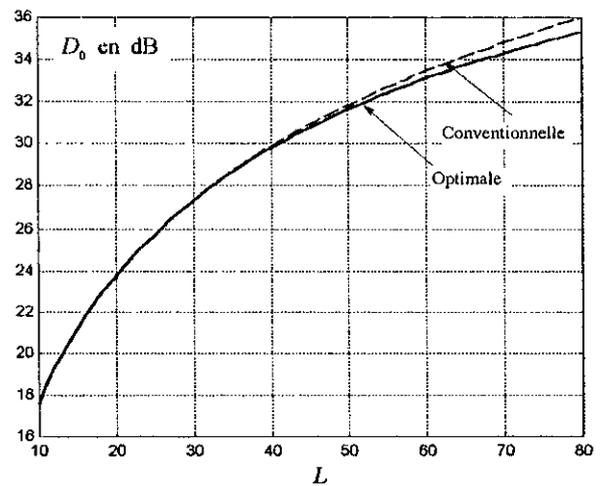


Fig.2.14.b : Directivité maximale en fonction de L ($d = \lambda/2$, $\theta_0 = 0^\circ$, $R = 40$ dB)

Les figures 2.15, illustrent les diagrammes de rayonnement en 3 dimensions d'un réseau carré de 121 éléments avec un rapport $R = 10$ dB, pour les deux méthodes. Le diagramme de rayonnement de la figure 2.15.a est optimum dans toutes les coupes transverses et possède une forme de révolution (symétrique par rapport à l'axe z). Par contre, le diagramme obtenu par la méthode conventionnelle est optimum que dans les plans $u = 0$ et $v = 0$. Ainsi, le faisceau principal du diagramme optimum est plus étroit que celui du diagramme conventionnel.

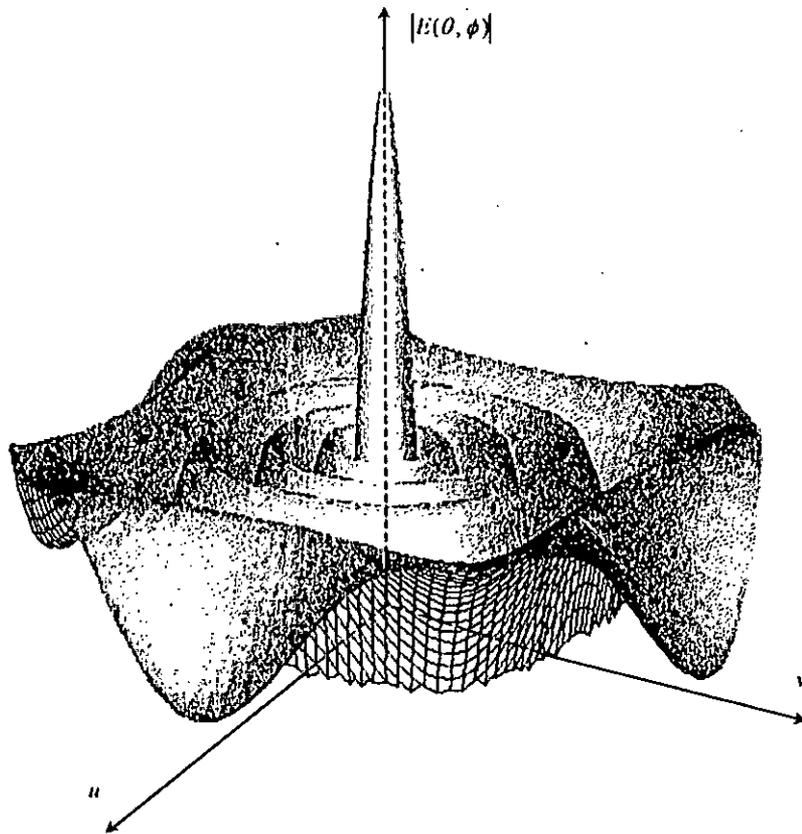


Fig.2.15.a : Diagramme de rayonnement , en 3 dimensions, d'un réseau carré optimum de 121 éléments avec $d = \lambda/2$, $\theta_0 = 0^\circ$ et $R = 10$ dB

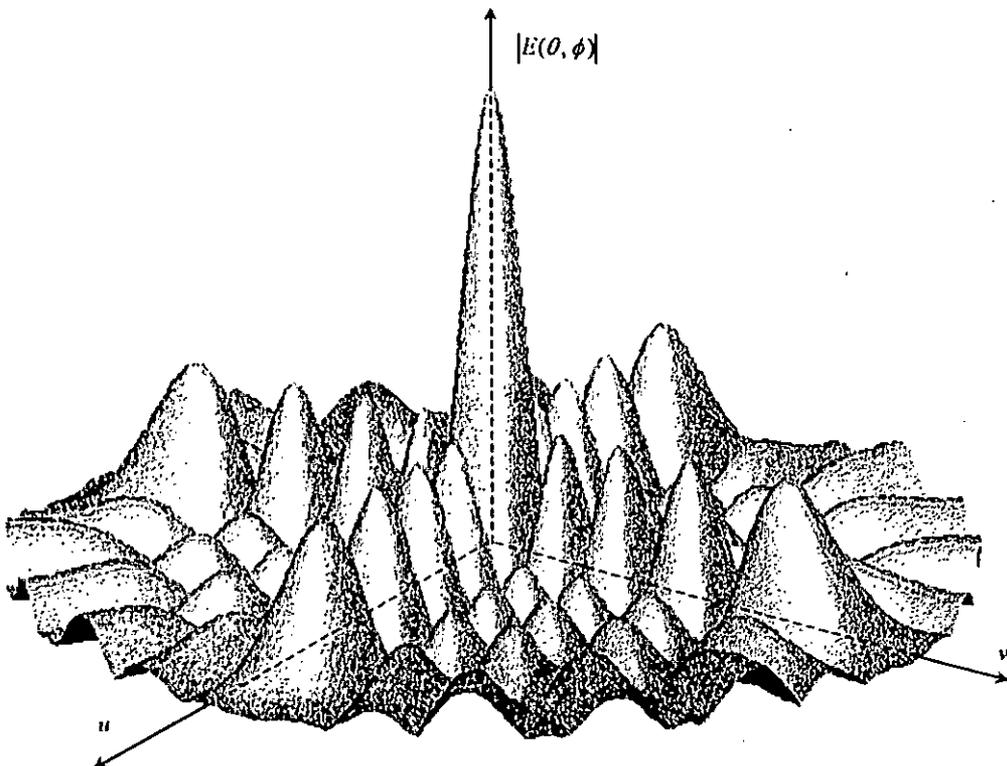


Fig.2.15.b : Diagramme de rayonnement, en 3 dimensions, d'un réseau carré conventionnel de 121 éléments, avec $d = \lambda/2$, $\theta_0 = 0^\circ$ et $R = 10$ dB

2. 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons élaboré une nouvelle approche de détermination du facteur de réseau en l'écrivant sous une forme plus générale englobant les différents cas possibles de la taille $K \times L$ (pair-pair, pair-impair, impair-pair et impair-impair). L'avantage de développement modal par rapport aux expressions classiques des amplitudes des excitations a été mis en évidence en terme de temps de calcul et de précision dans les deux méthodes de conception, conventionnelle et optimale. Le modèle que nous proposons permet le tracé de la directivité en fonction de la taille du réseau en un temps d'exécution beaucoup plus réduit que l'approche proposée Tseng [23], particulièrement lorsque la taille de réseau est grande. De plus, nous avons montré que, du point de vue de la directivité, la configuration carrée offre les meilleures performances que celles d'un réseau rectangulaire, et que la méthode optimale qui est applicable que sur les réseaux carrés donne un diagramme de rayonnement à faisceau principal étroit par rapport à celui donné par la méthode conventionnelle, avec des lobes secondaires égaux. Le problème majeur dans la conception optimale est que la directivité maximale se sature lorsque la taille du réseau dépasse certaine valeur, c'est-à-dire qu'on gagne peu si on augmente la taille. Ce problème est traité dans le chapitre suivant.

Chapitre 3 :
Réseaux Carrés
Optimaux Auto-
convolués

Chapitre 3 :

Réseaux Carrés Optimaux Auto-convolués

3. 1. Introduction

Les réseaux alimentés à l'aide d'une distribution d'excitation à amplitude pondérée de type Chebyshev, ont la propriété de fournir le meilleur compromis entre la directivité et le niveau des lobes secondaires. Toutefois, au delà d'une certaine taille du réseau, la directivité demeure pratiquement constante [26]. Des travaux [6] ont permis, en modifiant l'expression du facteur de réseau, d'améliorer la directivité mais uniquement dans le cas des alignements (réseaux linéaires). L'objectif de notre travail, consiste à généraliser cette modification aux réseaux plans carrés.

En remplaçant le facteur de réseau $E(\theta, \phi)$ d'un réseau plan carré de taille $L_1 \times L_1$ par $E_s(\theta, \phi) = (E_s(\theta, \phi))^s$ ($s = 2, 3, \dots$), on conserve la même configuration du diagramme de rayonnement (même nombre de directions de rayonnement nul et même nombre de lobes secondaires) tout en diminuant à la fois la largeur du lobe principal et le niveau des lobes secondaires. Pratiquement, cela revient à passer d'un réseau carré $L_1 \times L_1$ à un autre réseau carré de taille $L_s \times L_s$ tel que $L_s = s(L_1 - 1) + 1$. Nous allons montrer que l'usage de cette nouvelle technique donne une meilleure directivité que celle obtenue par la méthode classique de Chebyshev, pour un réseau $L_s \times L_s$ identique en taille, en espacement, en direction (θ_0, ϕ_0) du lobe principal et en niveau des lobes secondaires. De plus, l'usage de cette technique confère au diagramme de rayonnement un nombre de lobes secondaires inférieur ou égal à la moitié de celui obtenu par la méthode classique et, ce au détriment d'un léger élargissement du lobe principal.

La technique proposée, consiste à trouver la taille $L_1 \times L_1$ et l'ordre s appropriés donnant les meilleurs performances aussi bien du point de vue de la directivité qu'en nombre de lobes secondaires. On a donc affaire à un problème de synthèse. Pour cela nos résultats seront présentés sous forme de réseau de courbes servant d'abaque qui permet, à partir d'une directivité et d'un niveau de lobes secondaires imposés, de déterminer la taille optimale du réseau modifié ($L_s \times L_s$), l'ordre s et d'en déduire le réseau de base $L_1 \times L_1$.

3. 2. Facteur de réseau et distribution de courant

Considérons un réseau optimum de taille $L_1 \times L_1$.

Le facteur de réseau d'un tel réseau est [27]

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{m=1}^{N_1+r_{L_1}} \sum_{n=1}^{N_1+r_{L_1}} (2-r_{L_1}\delta_{m-1})(2-r_{L_1}\delta_{n-1}) I_{mn} \cos[(2m-r_{L_1}-1)u] \cdot \cos[(2n-r_{L_1}-1)v] \\ &= T_{L_1-1}(w_0 \cos u \cdot \cos v) \end{aligned} \quad (3-1)$$

où les paramètres u et v sont donnés par (2-5).

Le facteur d'échelle w_0 est lié au rapport R_1 du niveau du lobe principal sur celui du premier secondaire par la relation

$$R_1 = T_{L_1-1}(w_0) \quad (3-2.a)$$

ou encore

$$w_0 = \cosh \left[\frac{1}{L_1 - 1} \cosh^{-1} R_1 \right] \quad (3-2.b)$$

Le principe de la méthode proposée consiste à élever à la puissance s le facteur de réseau $F(u, v)$ (s entier supérieur à 1 étant l'ordre de la modification ou l'ordre de la convolution) pour obtenir l'expression du facteur de réseau de Chebyshev modifié

$$F_s(u, v) = F^s(u, v) = T_{L_1-1}^s(w_0 \cos u \cos v) \quad (3-3)$$

qui représente le facteur de réseau d'une nouvelle configuration plan carrée $L_s \times L_s$ donnant un diagramme de rayonnement ayant le même nombre de lobes secondaires et les mêmes directions de rayonnement nul que ceux du réseau de base $L_1 \times L_1$.

Du point de vue des performances des réseaux d'antennes, cette idée présente un intérêt considérable. En effet, elle offre le double avantage d'améliorer la directivité et de réduire le niveau des lobes secondaires. La taille L_s du réseau modifié et le ratio R_s du lobe principal par rapport à celui des lobes secondaires seront déduits (§ annexe B) de ceux du réseau de base par

$$L_s = s(L_1 - 1) + 1 \quad (3-4.a)$$

$$R_s = R_1^s \quad (3-4.b)$$

L'expression de $F_s(u, v)$, dont la détermination très laborieuse, est exposée dans l'annexe B, s'écrit

$$F_s(u, v) = F^s(u, v) = \sum_{m=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} I_{mn}^{(s)} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r_{L_s}+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r_{L_s}+1}{2} \right) v \right]} \quad (3-5)$$

où les amplitudes de courant $I_{mn}^{(s)}$ s'expriment par la relation de récurrence

$$I_{mn}^{(s)} = \sum_{m_2=\max(m-N_{s-1}-r_{L_{s-1}}+\rho_{s-1}, -N_1+1)}^{\min(m+N_{s-1}+\rho_{s-1}-1, N_1+r_{L_1})} \sum_{n_2=\max(n-N_{s-1}-r_{L_{s-1}}+\rho_{s-1}, -N_1+1)}^{\min(n+N_{s-1}+\rho_{s-1}-1, N_1+r_{L_1})} I_{m_2 n_2}^{(s-1)} \quad (3-6)$$

avec

$$L_s = 2N_s + r_{L_s} = s(2N_1 + r_{L_1} - 1) + 1 \quad (3-7)$$

$$r_{L_s} = [(2r_{L_1} - 1)^s + 1]/2 \quad (3-8)$$

$$\rho_s = 1 - (r_{L_1} - 1)(r_{L_s} - 1) \quad (3-9)$$

La relation (3-5), très utilisée dans la transformée de Fourier discrète, peut être exprimée sous la forme de produit de convolution

$$I_{mn}^{(s)} = I_{mn}^{(s-1)} * I_{mn} = \prod_{i=1}^s I_{mn}^{(i)} \quad (3-10)$$

avec $I_{mn}^{(1)} = I_{mn}$. L'utilisation de l'opérateur de convolution, noté par X , confère au réseau $L_s \times L_s$ la dénomination de réseau de Chebyshev auto-convolué.

Les relations (3-6) et (3-10) montrent que les amplitudes $I_{mn}^{(s)}$ sont symétriques par rapport aux axes x et y (§ annexe B), et on peut alors écrire $F_s(u, v)$ sous la forme

$$\begin{aligned} F_s(u, v) &= \sum_{m=1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n=1}^{N_s+r_{L_s}} (2-r_{L_s}\delta_{m-1})(2-r_{L_s}\delta_{n-1}) I_{mn}^{(s)} \cos[(2m-r_{L_s}-1)u] \cdot \cos[(2n-r_{L_s}-1)v] \\ &= T_{L_s-1}^s(w_0 \cos u \cdot \cos v) \end{aligned} \quad (3-11)$$

La connaissance des paramètres du réseau de base à savoir L_1 et R_1 nous permet, à l'aide de la relation (3-10), de déterminer les amplitudes $I_{mn}^{(s)}$, de tracer le diagramme de rayonnement $F_s(u, v)$ et de calculer le ratio R_s du réseau auto-convolué de taille $L_s \times L_s$.

La méthode proposée est très utile dans le cas de la synthèse des réseaux. Pour cela, on impose la directivité $D_0^{(s)}$, le rapport R_s et l'espacement d/λ et on détermine à partir d'abaques analogues aux courbes illustrées par la figure 3.4, la valeur optimale de L_s et on en déduit l'entier s correspondant. L'utilisation des relations (3-4), permet de déterminer la taille L_1 et le rapport R_1 du réseau de base dont on calcule le facteur de réseau $F_1(u, v)$ et la distribution du courant I_{mn} . Les expressions (3-3) et (3-10) permettent de déterminer les caractéristiques du réseau auto-convolué $L_s \times L_s$, qui est beaucoup plus performant qu'un réseau identique à excitation classique.

Le calcul des excitations $I_{mn}^{(s)}$ à l'aide de la relation (3-10) est complexe et nécessite un temps de calcul assez long. Aussi, on préfère écrire l'expression de ces excitations sous la forme modale [23]

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(s)} &= \sum_{p=1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{q=1}^{N_s+r_{L_s}} (2-r_{L_s}\delta_{p-1})(2-r_{L_s}\delta_{q-1}) a_{pq}^{(s)} \cos\left[\frac{2\pi}{L_s}\left(m-\frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\left(p-\frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\right] \\ &\quad \times \cos\left[\frac{2\pi}{L_s}\left(n-\frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\left(q-\frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\right] \quad m, n = 1, 2, \dots, N_s \end{aligned} \quad (3-12)$$

et qui permet d'exprimer $F_s(u, v)$ par la relation

$$F_s(u, v) = \sum_{p=1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{q=1}^{N_s+r_{L_s}} (2-r_{L_s}\delta_{p-1})(2-r_{L_s}\delta_{q-1}) a_{pq}^{(s)} \psi_p^{(s)}(u) \cdot \psi_q^{(s)}(v) \quad (3-13)$$

avec

$$\psi_p^{(s)}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left[L_s\left(u - \left(p - \frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\frac{\pi}{L_s}\right)\right]}{\sin\left[u - \left(p - \frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\frac{\pi}{L_s}\right]} + \frac{\sin\left[L_s\left(u + \left(p - \frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\frac{\pi}{L_s}\right)\right]}{\sin\left[u + \left(p - \frac{r_{L_s}+1}{2}\right)\frac{\pi}{L_s}\right]} \right] \quad (3-14)$$

et $\psi_q^{(s)}(v)$ ayant une expression similaire.

Sachant que

$$\psi_p^{(s)} \left[\left(p' - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] = \frac{L_s}{(2 - r_{L_s} \delta_{p'-1})} \delta_{p'-p'} \quad (3-15)$$

alors

$$\bar{I}_s \left[\left(p - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s}, \left(q - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] = I_s^2 \cdot \alpha_{pq}^{(s)} \quad (3-16)$$

et en tenant compte de (3-3), on peut écrire

$$\alpha_{pq}^{(s)} = \frac{1}{L_s^2} \cdot T_{L-1}^s \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] \cdot \cos \left[\left(q - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] \right] \quad (3-17)$$

Dans ces conditions, l'expression (3-12) devient

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(s)} = & \frac{1}{I_s^2} \cdot \sum_{p=1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{q=1}^{N_s+r_{L_s}} (2 - r_{L_s} \delta_{p-1}) (2 - r_{L_s} \delta_{q-1}) \cdot T_{L-1}^s \left[w_0 \cos \left[\left(p - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] \cdot \cos \left[\left(q - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \frac{\pi}{L_s} \right] \right] \\ & \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_s} \left(m - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \left(p - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L_s} \left(n - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \left(q - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-18)$$

3. 3. Directivité maximale

Comme dans le paragraphe 2.2.4, on peut écrire la directivité maximale du réseau $L_s \times L_s$ comme suit :

$$D_0^{(s)} = \frac{|E_s(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |E_s(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{P_s} |E_s(\theta_0, \phi_0)|^2 \quad (3-19)$$

avec

$$E_s(\theta, \phi) = \sum_{m=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} i_{mn}^{(s)} e^{jkd \left[\left(m - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \sin \theta \cos \phi + \left(n - \frac{r_{L_s} + 1}{2} \right) \sin \theta \sin \phi \right]} \quad (3-20)$$

On peut calculer la double intégrale de l'équation (3-19), en utilisant le polynôme de Chebyshev sous sa forme en série de puissances [28], mais cette méthode exige un travail laborieux. Donc, il vaut mieux utiliser notre méthode, qui est exposée au chapitre 2, pour le calcul de la directivité.

Comme les $I_{mn}^{(s)}$ sont symétriques par rapport aux axes x et y , on peut écrire alors $|E_s(\theta, \phi)|^2$ comme suit :

$$|E_s(\theta, \phi)|^2 = \sum_{m=-N_{2s}+1}^{N_{2s}+1} \sum_{n=-N_{2s}+1}^{N_{2s}+1} I_{mn}^{(2s)} e^{j2[(m-1)u+(n-1)v]} \quad (3-21)$$

L'expression de P_s s'écrit alors sous la forme

$$P_s = \sum_{m=1}^{N_{2s}+1} \sum_{n=1}^{N_{2s}+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2s)} b_{m-1, n-1} \cos[(m-1)u_0] \cdot \cos[(n-1)v_0] \quad (3-22)$$

où la fonction $b_{m-1, n-1}$ est donnée par (2-30), et

$$I_{mn}^{(2s)} = \left(\frac{1}{L_{2s}} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_{2s}+1} \sum_{q=1}^{N_{2s}+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot I_{L-1}^{2s} \left[w_0 \cos\left((p-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \cos\left((q-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \right] \times \cos\left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (m-1)(p-1) \right] \cos\left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (n-1)(q-1) \right] \quad (3-23.a)$$

$$N_{2s} = L_s - 1 = s(L_1 - 1) \text{ et } L_{2s} = 2N_{2s} + 1 = 2s(L_1 - 1) + 1 \quad (3-23.b)$$

Les paramètres u_0 et v_0 sont définis par les équations (2-32).

Compte tenu (3-2.a) et (3-4), l'expression (3-19) devient

$$D_0^{(s)} = \frac{|E_s(\theta_0, \phi_0)|^2}{P_s} = \frac{R_1^{2s}}{P_s} = \frac{R_s^2}{P_s} \quad (3-24)$$

Dans le cas d'un espacement entre éléments adjacents de l'ordre de la demi-longueur d'onde ($d \approx \lambda/2$), la directivité peut être écrite, avec une bonne approximation, comme suit :

$$D_0^{(s)} \cong \frac{R_1^{2s}}{I_{11}^{(2s)}} = \sum_{m=1}^{N_{2s}+1} \sum_{n=1}^{N_{2s}+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2s)} / I_{11}^{(2s)} \quad (3-25)$$

car

$$R_1^{2s} = \sum_{m=1}^{N_{2s}+1} \sum_{n=1}^{N_{2s}+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2s)} \quad (3-26)$$

Considérons un réseau classique optimum de rapport R , La directivité d'un tel réseau tend vers $2R^2$ [29] lorsque sa taille tend vers l'infinie. Pour un réseau auto-convolué de même rapport, on peut montrer que pour une taille infinie sa directivité s'écrit (§ annexe B)

$$D_\infty^{(s)} = \lim_{L_s \rightarrow +\infty} D_0^{(s)} = \frac{2^{2s} R^2}{C_s^{2s}} \quad (3-27)$$

Par conséquent, le rapport entre la directivité ($D_\infty^{(s)}$) d'un réseau auto-convolué et celle (D_∞) d'un réseau classique, ayant le même rapport R , est

$$ra = \frac{D_\infty^{(s)}}{D_\infty} = \frac{2^{2s-1}}{C_s^{2s}} = \frac{2^{2s-1} \times (s!)^2}{(2s)!} \quad (3-28)$$

D'après (3-28), on constate que le rapport ra croît avec l'entier s . Cependant, l'augmentation de ce rapport est très lente pour des valeurs grandes de s . Par exemple, pour $s = 2, 3, 4, 5, 10, 100$, et 1000 , les valeurs correspondantes de ra sont $1.333, 1.600, 1.828, 2.032, 2.837, 8.837$ et 28.028 .

3. 4. Largeur de faisceau à mi-puissance

L'angle d'ouverture à 3 dB, notée par θ_3 , est déterminé à partir de la relation

$$T_{L_1-1}^s(w_0 \cos u \cos v) = R_s / \sqrt{2} \quad (3-29)$$

ou sous la forme

$$T_{L_1-1}(w_0 \cos u \cos v) = R_1 / (\sqrt{2})^{1/s} \quad (3-30)$$

L'angle d'ouverture à 3 dB, d'un réseau de Chebyshev auto-convolué de taille $L_s \times L_s$ est égal à la largeur de faisceau à $3/s$ dB d'un réseau de Chebyshev usuel de taille $L_1 \times L_1$. Les entiers L_s , L_1 et s sont reliés entre eux par la relation $L_s = s(L_1 - 1) + 1$.

Pour $\phi_0 = 45^\circ$, on a

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi l} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{w_1}{w_0}} \right) \right] - \sin^{-1} \left[\sin \theta_0 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi l} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{w_1}{w_0}} \right) \right] \quad (3-31)$$

où

$$w_1 = \cosh \left[\frac{1}{L_1 - 1} \cosh^{-1} \left(\frac{R_1}{(\sqrt{2})^{1/s}} \right) \right] \quad (3-32)$$

Pour L_1 grand, la relation (3-31) devient

$$\theta_3 \cong 2 \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi l \cos \theta_0} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{w_1}{w_0}} \right) \right] \quad (3-33)$$

L'espacement entre éléments d'un réseau de Chebyshev auto-convolué est égal à celui d'un réseau de Chebyshev classique. Alors, la distance maximale autorisée entre éléments, d_M/λ , pour éviter les lobes d'ambiguïté, est donnée par (2-62), où w_0 est définie par la relation (3-2.b).

L'équation (2-62), nous permet d'obtenir une borne supérieure, notée par $\theta_{3M}^{(s)}$, de l'angle d'ouverture à 3 dB

$$\theta_{3M}^{(s)} = 2 \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}(1 + \sin \theta_M) \cos^{-1}(\sqrt{w_1/w_0})}{\cos \theta_M \cdot [\pi - \cos^{-1}(1/w_0)]} \right\} \quad (3-34)$$

θ_M étant l'angle maximum du balayage.

3. 5. Résultats numériques obtenus et discussions

Dans ce paragraphe, nous allons effectuer une comparaison entre un réseau de Chebyshev auto-convolué et un réseau de Chebyshev classique, qui ont les mêmes caractéristiques : la taille $L \times L$, le rapport R , l'espacement $d/\lambda = 0.5$ et l'angle maximum de balayage θ_M qui est fixé à 75° . Pour effectuer cette comparaison, nous avons pris comme indices de performances la directivité maximale et la largeur du faisceau principal dans la direction transversale ($\theta_0 = 0^\circ, \phi_0 = 45^\circ$).

Les distributions d'amplitudes des courants des deux réseaux, sont illustrées par la figure 3.1.

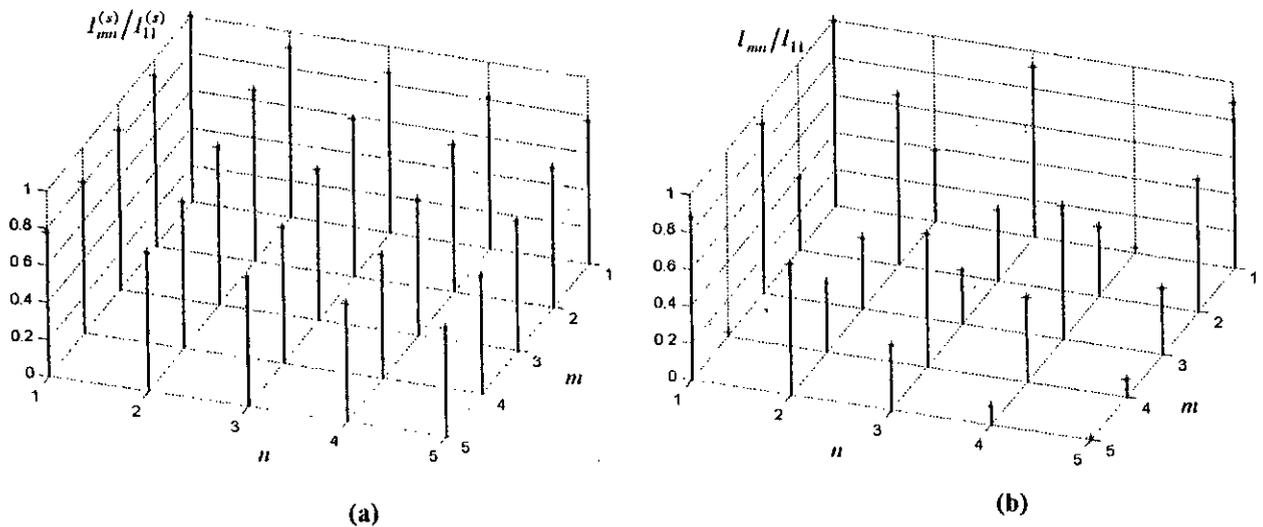


Fig. 3.1 : Distribution des amplitudes de courant dans le premier quadrant avec $R = 20$ dB .

- (a) Réseau de Chebyshev auto-convolué avec $L_1 = 5$ et $s = 2$
- (b) Réseau de Chebyshev classique avec $L = 9$

Nous remarquons que l'inconvénient majeur d'une excitation classique (Fig. 3.1.b) réside dans les écarts élevés entre les amplitudes de courant I_{mn} . Ces écarts deviennent très importants lorsque la taille du réseau est grande. Il est alors difficile d'obtenir et de maintenir une telle distribution sur les différentes sources du réseau. Cet inconvénient est compensé par la technique d'auto-convolution (Fig. 3.1.a) qui donne des écarts peu significatifs des amplitudes de courant, ce qui est facilement réalisable. Nous remarquons de plus que cette nouvelle technique s'approche de la distribution uniforme lorsque la taille du réseau est importante.

La figure 3.2 illustre le diagramme de rayonnement, dans le plan $\phi = 45^\circ$, d'un réseau auto-convolué, pour deux valeurs de L , et pour un rapport $R = 10$ dB. Nous constatons une diminution de la largeur de faisceau lorsque la taille du réseau augmente. Pour une valeur de L fixée, le nombre des lobes secondaires diminue au détriment de la largeur du faisceau.

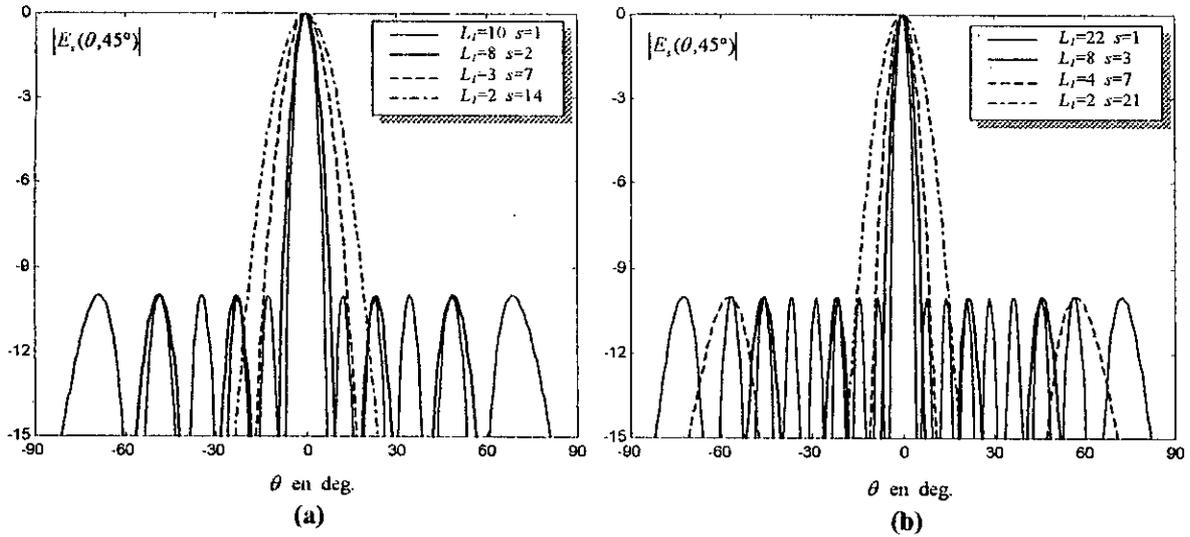


Fig. 3.2 : Diagrammes de rayonnement pour : (a) $L = 15$ (b) $L = 22$

La figure 3.3 met en évidence l'augmentation de la directivité avec la taille du réseau et de l'ordre de la modification s . Dans le cas où le paramètre R est pris égal à 20 dB, cette augmentation est pratiquement linéaire jusqu'à $L = 30$. Elle l'est jusqu'à $L = 60$ dans le cas où $R = 30$ dB. Nous constatons également que les valeurs élevées de l'ordre de la modification n'améliore guère la directivité. Par conséquent, des valeurs de s égales à 2 ou 3 suffisent amplement pour améliorer les performances du réseau.

Un réseau de courbes comparables à celles de la figure 3.3 peuvent servir d'abaques pour effectuer la synthèse de tels réseaux. Ainsi, pour des valeurs imposées de la directivité et du rapport R , on peut déterminer les dimensions du réseau de base et l'ordre de la modification. On procédera ensuite par auto-convolution aux calculs des amplitudes I_{mn} . On déterminera ensuite le facteur du réseau de la configuration modifiée dont on déterminera toutes les caractéristiques de rayonnement.

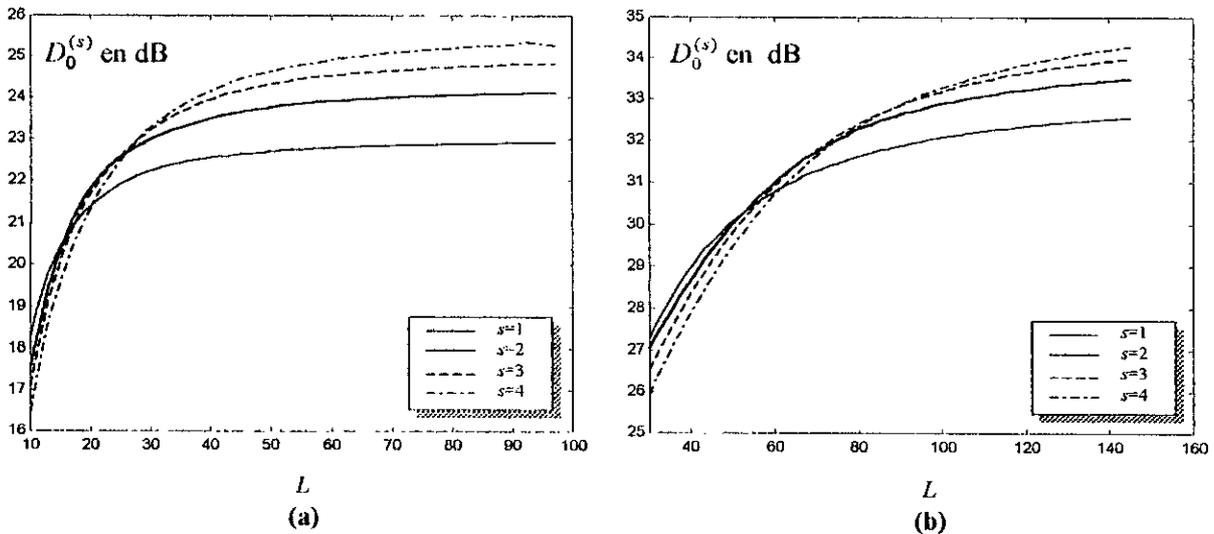


Fig. 3.3 : Comparaison entre la directivité d'un réseau auto-convolué et celle d'un réseau usuel de Chebyshev, en fonction de la taille, pour différentes valeurs de s . (a) $R = 20$ dB. (b) $R = 30$ dB.

La figure 3.4 représente l'évolution de l'angle maximum $\theta_{3M}^{(s)}$ à mi-puissance en fonction de la taille du réseau pour deux valeurs du rapport R . Les courbes en trait plein et en pointillés représentent respectivement $\theta_{3M}^{(s)}$ d'un réseau auto-convolué et d'un réseau classique de même taille. A partir de ces courbes on peut déduire que l'intérêt des réseaux modifiés réside plutôt dans la diminution du nombre et du niveau des lobes secondaires car les angles d'ouverture à mi-puissance sont pratiquement les mêmes.

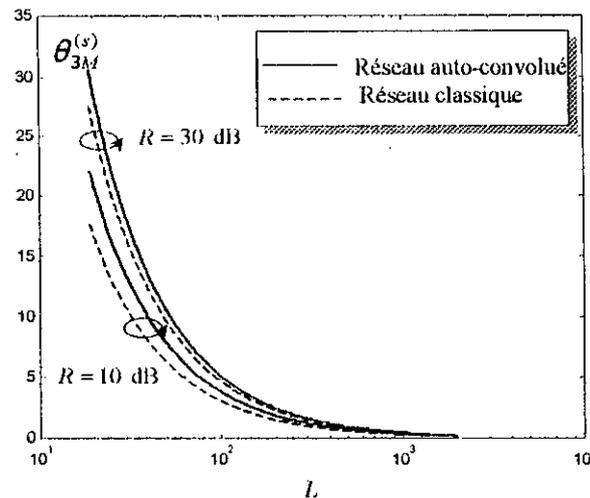


Fig. 3.4 : Largeur maximale de faisceau à mi-puissance pour les deux types de réseaux, en fonction de la taille avec $R = 10$ dB , $R = 30$ dB et $s = 2$.

3. 6. Conclusion

Une modification du facteur de réseau d'une structure carrée de Chebyshev a été proposée. Cette modification conserve la même configuration du diagramme de rayonnement (même nombre de directions de rayonnement nul et même nombre de lobes secondaires) tout en améliorant à la fois la directivité et le niveau des lobes secondaires. Des expressions analytiques pour le facteur du réseau, la directivité, la largeur maximale du faisceau à mi-puissance, et l'espacement maximum entre éléments ont été présentés. Nous avons montré que l'usage de cette nouvelle technique, donne une meilleure directivité que celle obtenue par la méthode classique de Chebyshev pour un réseau $L \times L$ identique en taille, en espacement, en direction (θ_0, ϕ_0) du lobe principal et en niveau des lobes secondaires.

Conclusion

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail un type très intéressant de réseaux : les réseaux phasés. Ce type de réseau, permet d'orienter le maximum de rayonnement (lobe principal) dans une direction imposée. En faisant varier le gradient de phase (qui représente le pas de phase entre deux éléments adjacents) selon une loi donnée, on imposera au faisceau un balayage selon la même loi de variation. Les réseaux phasés sont les seuls qui permettent de réaliser le balayage électronique. Pour réaliser le balayage dans un plan, on doit utiliser un réseau linéaire. Mais dans la plupart des cas on veut un balayage en deux plans (en site et en gisement). Pour ce faire, on utilise souvent des réseaux plans dont la structure est rectangulaire. Une distribution d'excitation de courant convenable, appliquée aux éléments de cette structure, nous permet d'atteindre les performances désirées. Si on veut que notre réseau soit optimum, on utilise la technique de Dolph-Chebyshev. Cette technique est simple à appliquer si le réseau possède une alimentation séparable, et l'étude d'un réseau rectangulaire se réduit à celle de deux réseaux linéaires.

Nous avons pu, à l'aide d'un développement mathématique long et laborieux, élaborer une formulation originale du facteur de réseau d'une configuration plane de forme rectangulaire ($K \times L$). Le facteur de réseau a été exprimé à l'aide d'une seule expression qui tient compte de toutes les éventualités concernant les valeurs des entiers K et L (pair-pair, pair-impair, impair-pair, impair-impair).

L'avantage d'un développement modal, de la distribution des amplitudes, par rapport aux expressions usuellement utilisées est mis en évidence du point de vue précision et temps de calcul. Nous avons également montré qu'un réseau carré est plus directif qu'un réseau rectangulaire de taille comparable. Les propriétés de symétrie du réseau ont été mises à profit pour développer une nouvelle méthode de calcul de la directivité permettant d'obtenir aisément avec précision ce paramètre.

Malgré toute amélioration, l'hypothèse toujours admise, de l'alimentation séparable ($I_{mn} = I_m \times I_n$) n'est pas du tout évidente. De plus, les réseaux réalisés en tenant compte de cette hypothèse, ne sont optimaux que dans deux plans verticaux particuliers. Afin d'éliminer cette ambiguïté, nous avons été amenés à utiliser la technique proposée par Baklanov [21], qui consiste à modifier la distribution des amplitudes tout en leur conservant le caractère des polynômes de Chebyshev. Ainsi, nous avons contourné l'hypothèse de l'alimentation séparable et obtenu des réseaux optimaux de révolution autour de la direction de rayonnement maximum et amélioré sensiblement la largeur du lobe principal du diagramme de rayonnement.

Ayant constaté qu'au delà d'une certaine valeur de la taille du réseau, la directivité tend à devenir constante. En généralisant le concept des alignements auto-convolués proposé par Safaai [6] aux réseaux plans, nous avons pu montrer qu'il est encore possible d'améliorer la directivité. La distribution des amplitudes obtenues à l'aide de cette technique, bien que pondérées à l'aide de polynôme de Chebyshev, tend à s'approcher de la distribution uniforme qui confère aux réseaux la meilleure directivité. Le caractère de pondération par la technique de Dolph conserve à ses réseaux des lobes secondaires égaux.

Ainsi, la combinaison de la technique des réseaux optimaux et de celle des réseaux auto-convolués, permet la conception de réseaux plans ayant la meilleure directivité et le plus faible niveau des lobes secondaires.

Bibliographie

Bibliographie

- [1]. Collin, R. E. and Zucker, F. J., *Antenna theory*, Vol. 7, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, Part1, Chapter 5.
- [2]. Elliott, R. S., *Antenna theory and design*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1981, Chapter 5.
- [3]. Hansen, R.C., *Phased Array Antennas*, John Wiley & sons, New York, 1998.
- [4]. Johnson, R. C., *Antenna Engineering Handbook*, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1993, Chapters 19, 20.
- [5]. Carpentier, M. H., *Radars : Bases Modernes*, 6^{ième} édition, Masson, Paris, 1990.
- [6]. Safaai-Jazi, A., "Modified Chebyshev Arrays" *IEE Proc. Antennas and Propagation*, Vol.145, No. 1, pp. 45-48, Feb. 1998.
- [7]. Darricau, J., *Physique et Théorie du Radar*, Tome 1, Editeur Sodipe, Paris 1973.
- [8]. Skobelev, S. P., "Methods of Constructing Optimum Phased Arrays Antennas for Limited Field of View," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 40, No. 2, pp. 39-50, April. 1998.
- [9]. Drabowitch, S., Papiernik, A., Griffiths, H., Encinas, J. and Smith, B. L., *Modern Antennas*, First edition, Chapman & Hall, London, 1998.
- [10]. Morrow, I. L., Hall, P. S. and James, J. R., "Measurement and Modeling of a Microwave Active-Patch Phased Array for Wide-Angle Scanning," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 45, No. 2, pp. 297-303, Feb. 1997.
- [11]. Kam, M., Wilcox, J. and Herczfeld, P. R., "Design for Steering Accuracy in Antenna Arrays Using Shared Optical Phase Shifters," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 37, No. 9, pp. 1102-1108, Sep. 1989.
- [12]. Thourel, L., *Les Antennes : Calcul et conception des dispositifs en ondes centimétriques et millimétriques*, Tome 2, Edition Cepadues, Toulouse, France, 1990.
- [13]. Paine, A. S., "Minimum Variance Monopulse Technique for an Adaptive Phased Array Radar," *IEE Proc. Radar, Sonar, Navig.*, Vol. 145, No. 6, pp. 374-380, Dec. 1998.

- [14]. Soumekh, M., *Synthetic Aperture Radar Signal Processing with Matlab Algorithms*, John Wiley & sons, Inc., New York, 1999, Chapter 5, pp. 277-282.
- [15]. Dolph, C. L., "A Current Distribution for Broadside Arrays which Optimizes the Relationship between Beam Width and Side-Lobe Level," *Proc. IRE*, Vol. 34, pp. 335-348, Juin 1946.
- [16]. Farina, A., *Antenna-Based Signal Processing Techniques for Radar Systems*, Artech House, Boston, London, 1991.
- [17]. Vaskelainen, L. I., "Virtual Array Synthesis Method for Planar Array Antennas," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 46, No. 3, pp. 391-396, March 1998.
- [18]. Elliot Chang, R. S., Long, S. A. and Richards, W. F., *Antenna Theory and Design*, Prentice-Hall, 1981, Chapter 12.
- [19]. Mailloux, R. J., "Array Grating Lobes due to Periodic Phase, Amplitude, and Time Delay Quantization," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-32, No. 12, pp. 1364-1368, Dec. 1984.
- [20]. Darricau, J., "Radars : Principes et Eléments de Base," *Technique de l'Ingénieur, traité Electronique*, No. E 6 650, 1996.
- [21]. Baklanov, Y. V., "Chebyshev distribution of currents for a plane array of radiator," *Radio Engng. and Electronic Phys.*, vol. 11, pp. 640-642, April 1966.
- [22]. Collin, R. E., "Pattern Synthesis with Nonseparable Aperture Fields," *IEEE Proc. Antennas and Propagation (Communications)*, Vol. AP-12, pp. 502-503, July 1964.
- [23]. Tseng, F-I. and Cheng, D. K., "Optimum Scannable Planar Arrays with an Invariant Sidelobe Level," *IEEE Proc. Antennas and Propagation*, Vol. 56, No. 11, pp. 1771-1778, Nov. 1968.
- [24]. Cheng, D. K. and Tseng, F-I. and, "Maximization of Directive Gain for Circular and Elliptical Arrays," *Proc. IEE (London), Antennas and Propagation*, Vol. 114, pp. 589-594, May 1967.
- [25]. Krupitskiy, E. I. and Sapohnikova, T. N., "Minimum Number of Controlled Elements in Along linear Array with Electric Beam Scanning over a Wide Secteur," *Radio Engng. And Electronic Phys.*, Vol. 10, pp. 1678-1685, Nov. 1965.
- [26]. Mailloux, R. J., *Phased Array Antenna Handbook*, Artech House. Boston, 1994.
- [27]. Chemsas, A. and Aksas, R. "Nouvelle Approche des Réseaux Plans Rectangulaires avec un Niveau des Lobes Secondaires Invariant," *AJOT, International Publications, Série B, Vol. 14, No. 1, 1999.*
- [28]. Safaai-Jazi, A., "Directivity of Chebyshev Arrays with Arbitrary Element Spacing" *Electron. Lett.*, Vol. 34, No. 10, pp. 772-774, 1995.
- [29]. Drane, C. J., "Useful Approximation for the Directivity and Beamwidth of Large Scanning Dolph Chebyshev Arrays" *IEE Proc.*, Vol. 56, No. 11, pp. 1779-1787, 1968.

Annexes A et B

Annexe A

1. Détermination de l'équation (2-7)

Considérons un réseau rectangulaire de $K \times L$ éléments, excité à l'aide d'une distribution de courant symétrique par rapport aux axes x et y . On se propose de déterminer l'expression (2-7) du facteur de réseau.

On prend le cas où $K = 2M + 1$ et $L = 2N + 1$. Le facteur de réseau est alors donné par

$$E_{oo}(\theta, \phi) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N i_{mn} e^{jk(md \sin \theta \cos \phi + nd \sin \theta \sin \phi)} \quad (\text{A-1})$$

avec

$$i_{mn} = I_{mn} e^{-jk(md \sin \theta_0 \cos \phi_0 + nd \sin \theta_0 \sin \phi_0)} \quad (\text{A-2})$$

donc

$$E_{oo}(\theta, \phi) = F_{oo}(u, v) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N I_{mn} e^{j2(mu+nv)} \quad (\text{A-3})$$

où u et v sont donnés respectivement par (2-5).

D'après l'hypothèse de symétrie des I_{mn} selon les deux axes x et y où on a

$$I_{-m, -n} = I_{mn} \quad \text{et} \quad I_{m, n} = I_{mn} \quad (\text{A-4})$$

On peut décomposer $F_{oo}(u, v)$ sous la forme

$$\begin{aligned} F_{oo}(u, v) &= \sum_{m=-M}^{-1} \sum_{n=-N}^{-1} I_{mn} e^{j2(mu+nv)} + \sum_{m=-M}^{-1} \sum_{n=1}^N I_{mn} e^{j2(mu+nv)} \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=-N}^{-1} I_{mn} e^{j2(mu+nv)} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{mn} e^{j2(mu+nv)} \\ &+ \sum_{m=-N}^{-1} I_{0n} e^{j2nv} + \sum_{m=1}^N I_{0n} e^{j2nv} + \sum_{m=-M}^{-1} I_{m0} e^{j2mu} + \sum_{m=1}^M I_{m0} e^{j2mu} + I_{00} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} F_{oo}(u, v) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{-m, -n} e^{-j2(mu+nv)} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{-mn} e^{-j2(mu-nv)} \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{m, -n} e^{j2(mu-nv)} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{mn} e^{j2(mu+nv)} \\ &+ \sum_{n=1}^N I_{0-n} e^{-j2nv} + \sum_{n=1}^N I_{0n} e^{j2nv} + \sum_{m=1}^M I_{-m0} e^{-j2mu} + \sum_{m=1}^M I_{m0} e^{j2mu} + I_{00} \end{aligned}$$

donc, à l'aide de (A-4), on peut écrire

$$F_{oo}(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{1}{4} \varepsilon_m \varepsilon_n I_{mn} \left[e^{-j2(mu+nv)} + e^{j2(mu+nv)} + e^{-j2(mu-nv)} + e^{j2(mu-nv)} \right]$$

alors

$$E_{oo}(\theta, \phi) = F_{oo}(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varepsilon_m \varepsilon_n I_{mn} \cos(2mu) \cdot \cos(2nv) \quad (\text{A-5})$$

avec

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 2 & \text{si } p \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

Si on fait un décalage de 1 dans la numérotation des éléments dans les deux axes, c'est-à-dire

$$I_{mn} \rightarrow I_{m+1, n+1}$$

on obtient

$$E_{oo}(\theta, \phi) = F_{oo}(u, v) = \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_{m-1} \varepsilon_{n-1} I_{mn} \cos[2(m-1)u] \cdot \cos[2(n-1)v] \quad (\text{A-7})$$

qui représente la formule (2-2).

Un travail analogue permet d'obtenir les formules (2-1), (2-3) et (2-4).

Les expressions (2-1), (2-2), (2-3), et (2-4) peuvent être écrites sous la forme générale

$$E(\theta, \phi) = F(u, v) = \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_K \delta_{m-1})(2 - r_L \delta_{n-1}) I_{mn} \cos[(2m - r_K - 1)u] \cdot \cos[(2n - r_L - 1)v] \quad (\text{A-8})$$

où $\delta_{p-q} = \delta_{pq}$ est le symbole de Kronecker, r_K et r_L sont définis par l'équation (2-8). Cette expression n'est autre que celle de la formule (2-7).

Lors du calcul des amplitudes I_{mn} nous allons utiliser les relations suivantes

$$\sum_{l=0}^M \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^l f(p, q, l) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M \sum_{s=\max(m, n)}^M f(s - m, s - n, s) \quad (\text{A-9})$$

$$\sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^l g(p, q, l) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \sum_{s=\max(m, n)}^M g(s - m + 1, s - n + 1, s) \quad (\text{A-10})$$

2. Démonstration des équations (A-9) et (A-10)

Pour l'équation (A-9)

Soit $m = l - p$ et $n = l - q$. Alors

$$S \triangleq \sum_{l=0}^M \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^l f(p, q, l) = \sum_{l=0}^M \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^l f(l - m, l - n, l) \quad (\text{A-11})$$

mais, pour toute fonction $h(l, m)$ on a

$$\sum_{l=0}^M \sum_{m=0}^l h(l, m) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^M h(l, m) \quad (\text{A-12})$$

ce qui nous permet de changer les deux premiers opérateurs somme du troisième membre de la double égalité (A-11) comme suit :

$$S = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^M \sum_{n=0}^l f(l-m, l-n, l) \quad (\text{A-13})$$

Aussi, on remarque que

$$\sum_{l=m}^M \sum_{n=0}^l h(n, l) = \sum_{n=0}^M \sum_{l=\max(m, n)}^M h(n, l) \quad (\text{A-14})$$

En utilisant (A-14) dans (A-13), on obtient

$$S = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M \sum_{l=\max(m, n)}^M f(l-m, l-n, l) \quad (\text{A-15})$$

d'où l'équation (A-9)

$$S = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M \sum_{s=\max(m, n)}^M f(s-m, s-n, s)$$

Pour l'équation (A-10)

On peut écrire la formule (A-9) comme suit :

$$\sum_{l'=1}^{M'} \sum_{p'=0}^{l'} \sum_{q'=0}^{l'} f(p'-1, q'-1, l'-1) = \sum_{m'=0}^{M'} \sum_{n'=0}^{M'} \sum_{s'=\max(m', n')}^{M'} f(s'-m', s'-n', s'-1) \quad (\text{A-16})$$

avec $x' = x + 1 \quad x = l, p, q, m, n, s, M$

Posons $f(p'-1, q'-1, l'-1) = g(p', q', l')$

alors $f(s'-m', s'-n', s'-1) = g(s'-m'+1, s'-n'+1, s')$

d'où l'équation (A-10)

$$\sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^l g(p, q, l) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \sum_{s=\max(m, n)}^M g(s-m+1, s-n+1, s)$$

3. Détermination des I_{mn}

a) Linéarisation du $\cos^L u$

On a

$$\cos^L u = \left(\frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2} \right)^L = 2^{-L} (e^{ju} + e^{-ju})^L \quad (\text{A-17})$$

La formule du binôme donne

$$\cos^L u = 2^{-L} \sum_{l=0}^L C_L^l e^{j(L-2l)u} \quad (\text{A-18})$$

ou

$$\cos^L u = 2^{-L} \left[\sum_{l=0}^{N+r_L-1} C_L^l e^{j(L-2l)u} + \sum_{l=N+1}^L C_L^l e^{j(L-2l)u} + (1-r_L)C_L^N \right] \quad (\text{A-19})$$

En effectuant le changement de variable $l' = L - l$ dans le deuxième terme entre crochets on obtient

$$\cos^L u = 2^{-L} \left[\sum_{l'=0}^{N+r_L-1} 2C_L^{l'} \cos[(L-2l')u] + (1-r_L)C_L^N \right] \quad (\text{A-20})$$

car

$$C_L^{L-l'} = C_L^{l'}$$

Posons $l = l' + 1$, alors

$$\cos^L u = 2^{-L} \left[\sum_{l=1}^{N+r_L} 2C_L^{l-1} \cos[(L-2l+2)u] + (1-r_L)C_L^N \right]$$

écrite autrement

$$\cos^L u = 2^{-L} \sum_{l=1}^{N+1} [r_L(2 - \tilde{\varepsilon}_l) + \tilde{\varepsilon}_l] C_L^{l-1} \cos[(L-2l+2)u] \quad (\text{A-21})$$

avec

$$\tilde{\varepsilon}_l = \varepsilon_{N+1-l} \quad (\text{A-22})$$

b) Détermination des I_{mn} pour la méthode conventionnelle (réseau rectangulaire quelconque)

Considérons un réseau rectangulaire de $K \times L$ éléments. Dans le cas de la méthode conventionnelle, l'alimentation est séparable c'est-à-dire $I_{mn} = I_m^K \times I_n^L$, et la formule générale (A-8) devient

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) = F(u, v) &= \sum_{m=1}^{M+r_K} (2 - r_K \delta_{m-1}) I_m^K \cos[(2m - r_K - 1)u] \\ &\times \sum_{n=1}^{N+r_L} (2 - r_L \delta_{n-1}) I_n^L \cos[(2n - r_L - 1)v] \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

La formule (2-17), s'écrit pour $w = w_0 \cos u$

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} (-1)^{M-m+r_K} \frac{2^{2m-r_K-2} (2M+r_K-1)}{M+m-1} \cdot C_{M+m-1}^{2m-r_K-1} \cdot w_0^{2m-r_K-1} (\cos u)^{2m-r_K-1} \quad (\text{A-24})$$

et comme

$$r_{2m-r_K-1} = 1 - r_K$$

alors

$$2m - r_K - 1 = 2(m-1) + r_{2m-r_K-1}$$

et à l'aide de la formule (A-21), on peut écrire donc

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{p'=1}^m [(1-r_K)(2-\tilde{\varepsilon}_{p'}) + \tilde{\varepsilon}_{p'}] (-1)^{M-m+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+m-1)} \\ C_{M+m-1}^{2m-r_K-1} \cdot C_{2m-r_K-1}^{p'-1} \cdot w_0^{2m-r_K-1} \cdot \cos[(2m-2p'-r_K+1)u]$$

Posons dans cette égalité $p = m - p' + 1$, on trouve

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{p=1}^m [(1-r_K)(2-\tilde{\varepsilon}_{m-p+1}) + \tilde{\varepsilon}_{m-p+1}] (-1)^{M-m+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+m-1)} \\ C_{M+m-1}^{2m-r_K-1} \cdot C_{2m-r_K-1}^{m-p} \cdot w_0^{2m-r_K-1} \cdot \cos[(2p-r_K-1)u]$$

En utilisant l'équation (A-12), cette égalité devient

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{p=1}^{M+r_K} \sum_{m=p}^{M+r_K} [(1-r_K)(2-\tilde{\varepsilon}_{m-p+1}) + \tilde{\varepsilon}_{m-p+1}] (-1)^{M-m+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+m-1)} \\ C_{M+m-1}^{2m-r_K-1} \cdot C_{2m-r_K-1}^{m-p} \cdot w_0^{2m-r_K-1} \cdot \cos[(2p-r_K-1)u]$$

ou

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} \sum_{s=m}^{M+r_K} [(1-r_K)(2-\tilde{\varepsilon}_{s-m+1}) + \tilde{\varepsilon}_{s-m+1}] (-1)^{M-s+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+s-1)} \\ C_{M+s-1}^{2s-r_K-1} \cdot C_{2s-r_K-1}^{s-m} \cdot w_0^{2s-r_K-1} \cdot \cos[(2m-r_K-1)u]$$

L'équation (A-22) nous permet d'écrire

$$\tilde{\varepsilon}_{s-m+1} = \varepsilon_{M-s+m} = \begin{cases} 1 & \text{si } M-s+m=0 \\ 2 & \text{si } M-s+m \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=1 \\ 2 & \text{si } m \neq 1 \end{cases} = \varepsilon_{m-1}$$

donc

$$(1-r_K)(2-\tilde{\varepsilon}_{s-m+1}) + \tilde{\varepsilon}_{s-m+1} = (1-r_K)(2-\varepsilon_{m-1}) + \varepsilon_{m-1} \\ = 2-r_K(2-\varepsilon_{m-1}) \\ = 2-r_K \delta_{m-1} \quad (\text{A-25})$$

et l'écriture finale de l'équation (A-24) est

$$T_{K-1}(w_0 \cos u) = \sum_{m=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{m-1}) \cdot b_m^K \cdot \cos[(2m-r_K-1)u] \quad (\text{A-26-a})$$

avec

$$b_m^K = \sum_{s=m}^{M+r_K} (-1)^{M-s+r_K} \frac{2M+r_K-1}{2(M+s-1)} \cdot C_{M+s-1}^{2s-r_K-1} \cdot C_{2s-r_K-1}^{s-m} \cdot w_0^{2s-r_K-1} \quad (\text{A-26-b})$$

Un travail analogue est effectué pour $T_{L-1}(w_0 \cos v)$, on obtient donc

$$T_{L-1}(w_0 \cos v) = \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_L \delta_{n-1}) \cdot b_n^L \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \quad (\text{A-27-a})$$

avec

$$b_m^L = \sum_{s=n}^{N+r_L} (-1)^{N-s+r_L} \frac{2N+r_L-1}{2(N+s-1)} \cdot C_{N+s-1}^{2s-r_L-1} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-n} \cdot w_0^{2s-r_L-1} \quad (\text{A-27-b})$$

Le produit de (A-26-a) et (A-27-a) donne alors

$$\begin{aligned} T_{K-1}(w_0 \cos u) \cdot T_{L-1}(w_0 \cos v) &= \sum_{m=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{m-1}) \cdot b_m^K \cdot \cos[(2m-r_K-1)u] \\ &\times \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_L \delta_{n-1}) \cdot b_n^L \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

L'identification de (A-28) avec (A-23), nous permet de conclure que

$$I_m^K = b_m^K \quad \text{et} \quad I_n^L = b_n^L \quad (\text{A-29})$$

donc

$$I_{mn} = I_m^K \times I_n^L = b_m^K \times b_n^L \quad (\text{A-30})$$

c) Détermination des I_{mn} pour la méthode optimale (réseau carré $L \times L$ éléments)

Le polynôme de Chebyshev de degré $L-1$ est donné par (2-17) avec $w = w_0 \cos u \cdot \cos v$.

Comme

$$r_{2n-r_L-1} = 1 - r_L \quad \text{alors} \quad 2n - r_L - 1 = 2(n-1) + r_{2n-r_L-1}$$

En utilisant l'équation (A-21), on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{L-1}(w) &= \sum_{n=1}^{N+r_L} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n [(1-r_L)(2-\tilde{\varepsilon}_p) + \tilde{\varepsilon}_p] [(1-r_L)(2-\tilde{\varepsilon}_q) + \tilde{\varepsilon}_q] \\ &\quad (-1)^{N-n+r_L} \frac{2N+r_L-1}{2(N+n-1)} \cdot C_{N+n-1}^{2n-r_L-1} \cdot C_{2n-r_L-1}^{p-1} \cdot C_{2n-r_L-1}^{q-1} \cdot (w_0/2)^{2n-r_L-1} \\ &\quad \cos[(2n-2p-r_L+1)u] \cdot \cos[(2n-2q-r_L+1)v] \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (A-10), cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_{L-1}(w) &= \sum_{m=1}^{N+r_L} \sum_{n=1}^{N+r_L} \sum_{s=\max(m,n)}^{N+r_L} [(1-r_L)(2-\tilde{\varepsilon}_{s-m+1}) + \tilde{\varepsilon}_{s-m+1}] [(1-r_L)(2-\tilde{\varepsilon}_{s-n+1}) + \tilde{\varepsilon}_{s-n+1}] \\ &\quad (-1)^{N-s+r_L} \frac{2N+r_L-1}{2(N+s-1)} \cdot C_{N+s-1}^{2s-r_L-1} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-m} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-n} \cdot (w_0/2)^{2s-r_L-1} \\ &\quad \cos[(2m-r_L-1)u] \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \end{aligned} \quad (\text{A-31})$$

La formule (A-25) donne

$$(1-r_L)(2-\tilde{\varepsilon}_{s-m+1}) + \tilde{\varepsilon}_{s-m+1} = 2 - r_L \delta_{m-1}$$

donc, (A-31) devient

$$T_{L-1}(w) = \sum_{m=1}^{N+r_L} \sum_{n=1}^{N+r_L} (2-r_L \delta_{m-1})(2-r_L \delta_{n-1}) B_{mn} \cos[(2m-r_L-1)u] \cdot \cos[(2n-r_L-1)v] \quad (\text{A-32})$$

avec

$$B_{mn} = \sum_{s=\max(m,n)}^{N+r_L} (-1)^{N-s+r_L} \frac{2N+r_L-1}{2(N+s-1)} \cdot C_{N+s-1}^{2s-r_L-1} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-m} \cdot C_{2s-r_L-1}^{s-n} \cdot (w_0/2)^{2s-r_L-1} \quad (\text{A-33})$$

L'identification de (A-32) avec (A-8) (où $M = N$), nous permet de conclure que

$$I_{mn} = B_{mn} \quad (\text{A-34})$$

4. Pourquoi la relation (2-20) ?

Puisqu'il y a $(M + r_K)$ inconnues dans l'équations (2-10), à variable continue u , qui sont les I_m^K ($m=1, \dots, M + r_K$), il faut avoir $(M + r_K)$ équations, pour obtenir un système de $(M + r_K)$ équations et $(M + r_K)$ inconnues, donc

$$f_K(u_p) = \sum_{m=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{m-1}) I_m^K \cdot \cos[(2m-r_K-1)u_p], \quad p=1, \dots, M+r_K \quad (\text{A-35})$$

où les u_p sont des échantillons de la variable u . En multipliant les deux membres de cette équations par la quantité $\cos[(2m'-r_K-1)u_p]$ et en faisant la somme par rapport p , on trouve

$$\sum_{p=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{p-1}) f_K(u_p) \cos[(2m'-r_K-1)u_p] = \sum_{m=1}^{M+r_K} \left((2-r_K \delta_{m-1}) I_m^K \cdot \sum_{p=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{p-1}) \times \frac{1}{2} \left\{ \cos[2(m+m'-r_K-1)u_p] + \cos[2(m-m')u_p] \right\} \right) \quad (\text{A-36})$$

et comme

$$\sum_{p=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{p-1}) \cos \left[\frac{2\pi}{K} \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right) \cdot x \right] = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\sin(\pi \cdot x/K)} = K \cdot \delta_x \quad (x \text{ un entier quelconque}) \quad (\text{A-37})$$

alors, en prenant

$$u_p = \frac{\pi}{K} \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right)$$

l'équation (A-36) devient

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{p-1}) f_K \left(\frac{\pi}{K} \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right) \right) \cos \left[\frac{2\pi}{K} \left(m' - \frac{r_K+1}{2} \right) \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right) \right] \\ = \frac{K}{2} \sum_{m=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{m-1}) (\delta_{m+m'-r_K-1} + \delta_{m-m'}) I_m^K = K \cdot I_{m'}^K \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

En posant

$$a_p^K = \frac{1}{K} \cdot f_K \left(\frac{\pi}{K} \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right) \right) \quad (\text{A-39})$$

L'expression de I_m^K s'écrit comme suit :

$$I_m^K = \sum_{p=1}^{M+r_K} (2-r_K \delta_{p-1}) \cdot a_p^K \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K} \left(m - \frac{r_K+1}{2} \right) \left(p - \frac{r_K+1}{2} \right) \right] \quad (\text{A-40})$$

L'écriture de I_m^K sous la forme (A-40), s'appelle la décomposition modale de I_m^K , d'où la dénomination « *méthode modale* ».

5. Calcul de la directivité maximale d'un réseau rectangulaire de Chebyshev

La directivité maximale est définie comme suit :

$$D_0 = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |E(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{P} |E(\theta_0, \phi_0)|^2 \quad (\text{A-41})$$

où

$$E(\theta, \phi) = F(u, v) = \sum_{m=-M+1}^{M+r_K} \sum_{n=-N+1}^{N+r_L} I_{mn} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r_K+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r_L+1}{2} \right) v \right]} \quad (\text{A-42})$$

Les paramètres u et v sont donnés par (2-5). Le fait que les amplitudes de courant soient symétriques par rapport aux axes x et y , fait que le facteur de réseau devienne une quantité réelle, ce qui nous permet d'écrire

$$|E(\theta, \phi)|^2 = E^2(\theta, \phi) = \sum_{m_1=-M+1}^{M+r_K} \sum_{m_2=-M+1}^{M+r_K} \sum_{n_1=-N+1}^{N+r_L} \sum_{n_2=-N+1}^{N+r_L} I_{m_1 n_1} I_{m_2 n_2} e^{j2[(m_1+m_2-r_K-1)u + (n_1+n_2-r_L-1)v]} \quad (\text{A-43})$$

et si on pose

$$m = m_1 + m_2 - r_K \quad \text{et} \quad n = n_1 + n_2 - r_L$$

on trouve que

$$|E(\theta, \phi)|^2 = \sum_{m=-M_2+1}^{M_2+1} \sum_{n=-N_2+1}^{N_2+1} I_{mn}^{(2)} e^{j2[(m-1)u + (n-1)v]} \quad (\text{A-44})$$

avec

$$M_2 = 2M + r_K - 1, \quad N_2 = 2N + r_L - 1 \quad \text{et}$$

$$I_{mn}^{(2)} = \sum_{m_2=\max(m-M, -M+1)}^{\min(m+M+r_K-1, M+r_K)} \sum_{n_2=\max(n-N, -N+1)}^{\min(n+N+r_L-1, N+r_L)} I_{m-m_2+r_K, n-n_2+r_L} I_{m_2 n_2} \quad (\text{A-45})$$

La relation (A-44), peut être réécrite de la manière suivante

$$|E(\theta, \phi)|^2 = \sum_{m=-M_2+1}^{M_2+1} \sum_{n=-N_2+1}^{N_2+1} i_{mn}^{(2)} e^{jk d \sin \theta [(m-1) \cos \phi + (n-1) \sin \phi]} \quad (\text{A-46})$$

où

$$i_{mn}^{(2)} = I_{mn}^{(2)} e^{jk d \sin \theta_0 [(m-1) \cos \phi_0 + (n-1) \sin \phi_0]} \quad (\text{A-47})$$

La partie entre crochet de l'exponentielle de (A-46) peut s'écrire

$$(m-1) \cos \phi + (n-1) \sin \phi = \sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2} \cos(\phi + \xi) \quad (\text{A-48})$$

avec

$$\text{tg } \xi = \frac{n-1}{m-1} \quad (\text{A-49})$$

Pour alléger le formalisme, on pose

$$\tau = jkd\sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2} \quad (\text{A-50})$$

Dans ces conditions, l'expression de P devient

$$P = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-M_2+1}^{M_2+1} \sum_{n=-N_2+1}^{N_2+1} i_{mn}^{(2)} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{A-51})$$

Le développement de $e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)}$ sous la forme d'une série entière

$$e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi))^l}{l!} \quad (\text{A-52})$$

permet d'écrire la double intégrale de (A-51) comme suit

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} \sin \theta d\theta d\phi = \sum_{l=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{(\tau \sin \theta)^l}{l!} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^l(\phi+\xi) d\phi \quad (\text{A-53})$$

sachant que

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\phi+\xi))^l d\phi = 0 \text{ si } l \text{ est impair} \quad (\text{A-54})$$

alors

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} \sin \theta d\theta d\phi = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta \cdot \int_0^{2\pi} (\cos(\phi+\xi))^{2p} d\phi \quad (\text{A-55})$$

Compte tenu de (A-21), et de la relation

$$\int_0^{2\pi} \cos qx dx = 2\pi \cdot \delta_q \quad (\text{A-56})$$

la deuxième intégrale de (A-55) s'écrit

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\phi+\xi))^{2p} d\phi = 2\pi \cdot 2^{-2p} \cdot C_{2p}^p \quad (\text{A-57})$$

et (A-55) devient alors

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} \sin \theta d\theta d\phi = \sum_{p=0}^{+\infty} 2\pi \cdot 2^{-2p} C_{2p}^p \cdot \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta \quad (\text{A-58})$$

comme

$$\int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta = \frac{2^{p+1} \times p!}{(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 3 \times 1} = \frac{2^{2p+1} \times (p!)^2}{(2p+1)!} \quad (\text{A-59})$$

alors

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau \sin \theta \cos(\phi+\xi)} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2p}}{(2p+1)!} = 4\pi \cdot \frac{\sinh(\tau)}{\tau} \quad (\text{A-60})$$

d'après (A-50)

$$\frac{\sinh(\tau)}{\tau} = \frac{\sin(-j\tau)}{-j\tau}$$

$$\frac{\sinh(\tau)}{\tau} = \text{sinc}(-j\tau)$$
(A-61)

et l'expression de P s'écrit finalement

$$P = \sum_{m=-M_2+1}^{M_2+1} \sum_{n=-N_2+1}^{N_2+1} I_{mn}^{(2)} b_{m-1 \ n-1} e^{-jkd \sin \theta_0 [(m-1) \cos \phi_0 + (n-1) \sin \phi_0]}$$
(A-62)

tel que

$$b_{m-1 \ n-1} = \text{sinc} \left(kd \sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2} \right)$$
(A-63)

Cette équation nous permet de conclure que $b_{m-1 \ n-1}$ est symétrique par rapport aux droites $m=1$ et $n=1$, c'est-à-dire que :

$$b_{-m+1 \ n-1} = b_{m-1 \ n-1} \quad b_{m-1 \ -n+1} = b_{m-1 \ n-1} \quad b_{-m+1 \ -n+1} = b_{m-1 \ n-1}$$
(A-64)

d'autre part, l'équation (A-45) permet de dire que les amplitudes $I_{mn}^{(2)}$ vérifient les relations de symétrie suivantes

$$I_{-m+2 \ n}^{(2)} = I_{mn}^{(2)} \quad I_{m \ -n+2}^{(2)} = I_{mn}^{(2)} \quad I_{-m+2 \ -n+2}^{(2)} = I_{mn}^{(2)}$$
(A-65)

A partir de là, l'expression de P devient

$$P = \sum_{m=1}^{M_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} b_{m-1 \ n-1} \cos[(m-1)u_0] \cdot \cos[(n-1)v_0]$$
(A-66)

avec $u_0 = kd \sin \theta_0 \cos \phi_0$ et $v_0 = kd \sin \theta_0 \sin \phi_0$.

Finalement l'expression de la directivité maximale s'écrit comme suit :

$$D_0 = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{P} = \frac{(T_{K-1}(w_0) \times T_{L-1}(w_0))^2}{P} = \frac{(T_{K-1}(w_0) \times R)^2}{P}$$
(A-67)

pour un réseau rectangulaire de Chebyshev $K \times L$ qui utilise la méthode conventionnelle.

Pour un réseau carré qui utilise la méthode optimale l'expression de la directivité maximale devient

$$D_0 = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{P} = \frac{(T_{L-1}(w_0))^2}{P} = \frac{R^2}{P}$$
(A-68)

A partir de la relation (A-46), on peut assimiler $(E(\theta, \phi))^2$ à un nouveau facteur de réseau d'une géométrie rectangulaire de taille $K_2 \times L_2$, avec $K_2 = 2M_2 + 1$ et $L_2 = 2N_2 + 1$, excitée à l'aide d'une distribution séparable d'amplitudes $I_{mn}^{(2)}$ ($I_{mn}^{(2)} = I_m^{K_2} \times I_n^{L_2}$) symétriques par rapport aux axes x et y . La méthode modale appliquée à $(E(\theta, \phi))^2$ donne alors

$$I_m^{K_2} = \frac{1}{K_2} \sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cdot T_{K-1}^2 \left[w_0 \cos \left[(p-1) \frac{\pi}{K_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right]$$
(A-69.a)

$$I_n^{L_2} = \frac{1}{L_2} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{q-1}) \cdot T_{L-1}^2 \left[w_0 \cos \left[(q-1) \frac{\pi}{L_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \quad (\text{A-69.b})$$

pour la méthode conventionnelle.

Un travail analogue donne pour la méthode optimale

$$I_{mn}^{(2)} = \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot T_{L-1}^2 \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \right] \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \quad (\text{A-70})$$

Simplification

Pour un espacement d égal à la demi-longueur d'onde ($d = \lambda/2$) ; l'approximation suivante est valable :

$$b_{mn} \hat{=} \sin c \left(kd \sqrt{m^2 + n^2} \right) \cong \delta_m \times \delta_n \quad (\text{A-71})$$

D'après (A-70) la quantité $b_{m-1 \ n-1}$ de la relation (A-63) peut s'écrire comme suit :

$$b_{m-1 \ n-1} \cong \delta_{m-1} \times \delta_{n-1}$$

et compte tenu de l'équation (A-66), la relation (A-67) (pour un réseau rectangulaire qui utilise la méthode conventionnelle) devient

$$D_0 \cong \frac{(I_{K-1}(w_0) \times R)^2}{I_{11}^{(2)}} = \sum_{m=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{m-1}) I_m^{K_2} / I_1^{K_2} \times \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^{L_2} / I_1^{L_2} \quad (\text{A-72})$$

et si $K = L$ (réseau carré), la relation (A-71) s'écrit

$$D_0 \cong \frac{R^4}{I_{11}^{(2)}} = \left(\frac{R^2}{I_1^{L_2}} \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{n-1}) I_n^{L_2} / I_1^{L_2} \right)^2 \quad (\text{A-73})$$

L'équation (A-68) (pour un réseau carré qui utilise la méthode optimale) devient

$$D_0 \cong \frac{R^2}{I_{11}^{(2)}} = \sum_{m=1}^{N_2+1} \sum_{n=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{m-1})(2 - \delta_{n-1}) I_{mn}^{(2)} / I_{11}^{(2)} \quad (\text{A-74})$$

6. Calcul de la limite de la directivité maximale

Pour calculer la limite de la directivité maximale d'un réseau de Chebyshev $K \times L$ ($K \geq L$) lorsque sa taille tend vers l'infini (ou L tend vers l'infini), nous allons nous baser sur les équations (A-69) et (A-70).

Nous savons que

$$T_{K-1}^2(x) = \frac{1 + T_{2K-2}(x)}{2} = \frac{1 + T_{K_2-1}(x)}{2} \quad (\text{A-75})$$

donc

$$I_m^{K_2} = \frac{1}{2K_2} \sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right] \\ + \frac{1}{2K_2} \sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cdot T_{K_2-1} \left[w_0 \cos \left[(p-1) \frac{\pi}{K_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right] \quad (\text{A-76})$$

et comme

$$\sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right] = \frac{\sin((m-1)\pi)}{\sin \left((m-1) \frac{\pi}{K_2} \right)} = K_2 \cdot \delta_{m-1} \quad (\text{A-77})$$

et

$$\lim_{K_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K_2} \sum_{p=1}^{M_2+1} (2 - \delta_{p-1}) \cdot T_{K_2-1} \left[w_0 \cos \left[(p-1) \frac{\pi}{K_2} \right] \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{K_2} (m-1)(p-1) \right] = 0 \quad (\text{A-78})$$

alors

$$\lim_{K_2 \rightarrow +\infty} I_m^{K_2} = \frac{1}{2} \delta_{m-1} \quad (\text{A-79})$$

Un travail analogue permet d'obtenir

$$\lim_{L_2 \rightarrow +\infty} I_n^{L_2} = \frac{1}{2} \delta_{n-1} \quad (\text{A-80})$$

donc on peut écrire

$$\lim_{L_2 \rightarrow +\infty} I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{4} \delta_{m-1} \times \delta_{n-1} \quad (\text{A-81})$$

Si le réseau de Chebyshev utilise la méthode optimale ($K = L$), on peut écrire (A-70), compte tenu de (A-75), comme suit

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) T_{L_2-1} \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \right] \\ \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] \quad (\text{A-82})$$

et comme

$$\sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] = (L_2)^2 \delta_{m-1} \times \delta_{n-1} \quad (\text{A-83})$$

et

$$\lim_{L_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_2+1} \sum_{q=1}^{N_2+1} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) T_{L_2-1} \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_2} \right) \right] \\ \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_2} (n-1)(q-1) \right] = 0 \quad (\text{A-84})$$

alors

$$\lim_{K_2 \rightarrow +\infty} I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{2} \delta_{m-1} \times \delta_{n-1} \quad (\text{A-85})$$

A l'aide de (A-63) on a

$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} b_{m-1 n-1} = 0 \quad (\text{A-86})$$

donc, compte tenue de (A-66), (A-81) et (A-86) on peut dire que

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} P = \frac{1}{4} \quad (\text{A-87})$$

pour un réseau de Chebyshev rectangulaire qui utilise la méthode conventionnelle.

Pour un réseau de Chebyshev carré qui utilise la méthode optimale, on peut écrire à partir des formules (A-66), (A-85) et (A-86)

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} P = \frac{1}{2} \quad (\text{A-88})$$

Conclusion

Pour un réseau carré de Chebyshev, la limite de la directivité maximale est de

- $4R^4$ en utilisant la méthode conventionnelle;
- $2R^2$ en utilisant la méthode optimale.

7. Démonstration numérique

Puisque la limite de la directivité maximale ne dépend que de R , on prend le cas particulier d'un espacement entre éléments égal à la demi-longueur d'onde, et on peut alors utiliser les expressions simplifiées (A-73) et (A-74) de la directivité maximale, car les expressions exactes demandent un temps de calcul énorme lorsque la taille du réseau devient importante.

Les tableaux suivants montrent numériquement la convergence de la directivité maximale vers sa limite lorsque la taille du réseau tend vers l'infini.

L	10	20	40	80	160	320	640	1280	$+\infty$
D_0 (en dB) (La méthode optimale)	12.74	12.98	13.02	13.02	13.01	13.01	13.01	13.01	13.01
D_0 (en dB) (La méthode conventionnelle)	18.38	21.56	23.56	24.71	25.34	25.67	25.84	25.93	26.02

Tab. A.1 : La convergence de la directivité maximale vers sa limite pour $R = 10$ dB .

L	10	20	40	80	160	320	640	1280	$+\infty$
D_0 (en dB) (La méthode optimale)	18.46	21.49	22.61	22.91	22.99	23.00	23.01	23.01	23.01
D_0 (en dB) (La méthode conventionnelle)	19.66	25.59	30.98	35.66	39.41	42.11	43.85	44.86	46.02

Tab. A.2 : La convergence de la directivité maximale vers sa limite pour $R = 20$ dB .

L	10	20	40	80	160	320	640	1280	$+\infty$
D_0 (en dB) (La méthode optimale)	18.56	24.36	29.01	31.65	32.63	32.91	32.98	33.00	33.01
D_0 (en dB) (La méthode conventionnelle)	18.56	24.78	30.90	36.86	42.63	48.11	53.10	57.35	66.02

Tab. A.3 : La convergence de la directivité maximale vers sa limite pour $R = 30$ dB .

L	10	20	40	80	160	320	640	1280	$+\infty$
D_0 (en dB) (La méthode optimale)	17.68	23.79	29.79	35.31	39.57	41.87	42.69	42.93	43.01
D_0 (en dB) (La méthode conventionnelle)	17.60	23.73	29.88	35.98	42.02	48.02	53.94	59.75	86.02

Tab. A.4 : La convergence de la directivité maximale vers sa limite pour $R = 40$ dB .

On remarque que pour $R = 30$ dB, la directivité maximale de la méthode optimale est presque la même que celle de la méthode conventionnelle pour $L \leq 40$, c'est-à-dire pour une taille de réseau inférieure ou égale à 1600 éléments. De même, pour $R = 40$ dB, les deux méthodes donnent des résultats très proches pour $L \leq 80$.

Annexe B

1. Démonstration du principe de la méthode de Chebyshev modifiée

Le facteur de réseau d'un groupement carré $L \times L$ est donné par

$$E(\theta, \phi) = F(u, v) = \sum_{m=-N+1}^{N+r} \sum_{n=-N+1}^{N+r} I_{mn} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r+1}{2} \right) v \right]} \quad (\text{B-1})$$

La taille du réseau est $L \times L$ éléments avec $L = 2N + r$ et $r = \begin{cases} 1 & \text{si } L \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } L \text{ est pair} \end{cases}$ (B-2)

Les conditions de la symétrie des amplitudes de courant par rapport aux deux axes x et y du réseau carré s'écrivent

$$I_{-m \ -n} = I_{m+r+1 \ n+r+1} \quad (\text{B-3.a})$$

$$I_{-mn} = I_{m+r+1 \ n} \quad (\text{B-3.b})$$

$$I_{m \ -n} = I_{m \ n+r+1} \quad (\text{B-3.c})$$

L'application de la méthode de Chebyshev modifiée sur un réseau carré requiert le calcul de $(F(u, v))^s$ où s est un nombre entier.

Montrons par récurrence que $F^s(u, v)$ s'écrit

$$F^s(u, v) = \sum_{m=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} I_{mn}^{(s)} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r_{L_s}+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r_{L_s}+1}{2} \right) v \right]} \quad (\text{B-4.a})$$

où $(F(u, v))^s$ est le facteur de réseau d'un groupement carré, alimenté à l'aide d'excitations d'amplitudes $I_{mn}^{(s)}$, de taille $L_s \times L_s$ avec

$$L_s = 2N_s + r_{L_s} = s(2N + r - 1) + 1 \quad (\text{B-4.b})$$

$$r_{L_s} = [(2r - 1)^s + 1]/2 \quad (\text{B-4.c})$$

où r donné par (B-2), et montrons aussi les expressions concernant la symétrie des amplitudes $I_{mn}^{(s)}$ par rapport aux axes x, y .

$$I_{-m \ -n}^{(s)} = I_{m+r_{L_s}+1 \ n+r_{L_s}+1}^{(s)} \quad (\text{B-5.a})$$

$$I_{-mn}^{(s)} = I_{m+r+1, n}^{(s)} \quad (\text{B-5.b})$$

$$I_{m, -n}^{(s)} = I_{m, n+r+1}^{(s)} \quad (\text{B-5.c})$$

- On remarque que pour $s = 1$, les relations (B-4) et (B-5.a) sont vérifiées, car elles sont identiques aux relations (B-1) et (B-2) respectivement, avec $N_1 = N$, $L_1 = L$, $r_{L_1} = r$ et $I_{mn}^{(1)} = I_{mn}$
- Lorsque $s = 2$, on a

$$F^2(u, v) = \sum_{m_1=-N+1}^{N+r} \sum_{n_1=-N+1}^{N+r} \sum_{m_2=-N+1}^{N+r} \sum_{n_2=-N+1}^{N+r} I_{m_1 n_1} I_{m_2 n_2} e^{j2[(m_1+n_2-r-1)u+(n_1+n_2-r-1)v]} \quad (\text{B-6})$$

posons

$$p = p_1 + p_2 - r \quad (\text{B-7})$$

avec p prend les valeurs de m ou n .
comme

$$-N+1 \leq p_1, p_2 \leq N+r \quad (\text{B-8})$$

$$-2N-r+2 \leq p \leq 2N+r$$

et on a d'après (B-7)

$$p_1 = p - p_2 + r$$

alors (B-8) s'écrit

$$-N+1 \leq p - p_2 + r \leq N+r$$

ou

$$p - N \leq p_2 \leq p + N + r - 1 \quad (\text{B-9})$$

Les doubles inéquations (B-8) et (B-9) donnent

$$\max(p - N, -N + 1) \leq p_2 \leq \min(p + N + r - 1, N + r)$$

donc (B-6) devient

$$F^2(u, v) = \sum_{m=-N_2+1}^{N_2+1} \sum_{n=-N_2+1}^{N_2+1} I_{mn}^{(2)} e^{j2[(m-1)u+(n-1)v]}$$

avec $N_2 = 2N + r - 1$ et $L_2 = N_2 + 1 - (-N_2 + 1) + 1 = 2N_2 + 1$ donc $r_{L_2} = 1$ (on obtient la même valeur si on applique la formule de r_{L_2} donnée par (B-4.b)), et

$$I_{mn}^{(2)} = \sum_{m_2=\max(m-N, -N+1)}^{\min(m+N+r-1, N+r)} \sum_{n_2=\max(n-N, -N+1)}^{\min(n+N+r-1, N+r)} I_{m-m_2+r, n-n_2+r} I_{m_2 n_2} \quad (\text{B-10})$$

Montrons maintenant que

$$I_{-m -n}^{(2)} = I_{m+2 \ n+2}^{(2)} \quad (\text{la formule (B-5.a) pour } r_{L_s} = r_{L_2} = 1)$$

L'équation (B-10) nous permet d'écrire

$$I_{m+2 \ n+2}^{(2)} = \sum_{m_2=\max(m-N+2, -N+1)}^{\min(m+N+r+1, N+r)} \sum_{n_2=\max(n-N+2, -N+1)}^{\min(n+N+r+1, N+r)} I_{m-m_2+r+2 \ n-n_2+r+2} I_{m_2 n_2}$$

Posons

$$m'_2 = -m_2 + r + 1 \text{ et } n'_2 = -n_2 + r + 1$$

donc

$$I_{m+2 \ n+2}^{(2)} = \sum_{m_2=\min(-m+N+r-1, N+r)}^{\max(-m-N, -N+1)} \sum_{n_2=\min(-n+N+r-1, N+r)}^{\max(-n-N, -N+1)} I_{m+n'_2+1 \ n+n'_2+1} I_{-m'_2+r+1 \ -n'_2+r+1}$$

En utilisant (B-3) on a

$$I_{m+n'_2+1 \ n+n'_2+1} = I_{-m-m'_2+r \ -n-n'_2+r} \text{ et } I_{-m'_2+r+1 \ -n'_2+r+1} = I_{m'_2 n'_2}$$

donc

$$I_{m+2 \ n+2}^{(2)} = \sum_{m_2=\max(-m-N, -N+1)}^{\min(-m+N+r-1, N+r)} \sum_{n_2=\max(-n-N, -N+1)}^{\min(-n+N+r-1, N+r)} I_{-m-m'_2+r \ -n-n'_2+r} I_{m'_2 n'_2}$$

qui est l'expression de $I_{-m -n}^{(2)}$.

- Supposons que les relations (B-4) et (B-5.a) sont vraies et montrons que

$$F^{s+1}(u, v) = \sum_{m=-N_{s+1}+1}^{N_{s+1}+r_{s+1}} \sum_{n=-N_{s+1}}^{N_s+r_{L_{s+1}}} I_{mn}^{(s+1)} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r_{L_{s+1}}+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r_{L_{s+1}}+1}{2} \right) v \right]} \quad (\text{B-11})$$

et

$$I_{-m -n}^{(s+1)} = I_{m+r_{L_{s+1}}+1 \ n+r_{L_{s+1}}+1}^{(s+1)} \quad (\text{B-12})$$

On a

$F^{s+1}(u, v) = F^s(u, v) \times F(u, v)$, et à l'aide de l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$F^{s+1}(u, v) = \sum_{m_1=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n_1=-N_s+1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{m_2=-N+1}^{N+r} \sum_{n_2=-N+1}^{N+r} I_{m_1 n_1}^{(s)} I_{m_2 n_2} e^{j2 \left[\left(m_1+m_2 - \frac{r_{L_s}+1}{2} - \frac{r+1}{2} \right) u + \left(n_1+n_2 - \frac{r_{L_s}+1}{2} - \frac{r+1}{2} \right) v \right]} \quad (\text{B-13})$$

La taille du nouveau réseau, de facteur $F^{s+1}(u, v)$, est $L_{s+1} \times L_{s+1}$ avec

$$L_{s+1} = 2N_{s+1} + r_{L_{s+1}} = (N_s + r_{L_s} + N + r) - (-N_s + 1 - N + 1) = 2N_s + 2N + r_{L_s} + r - 1 \quad (\text{B-14})$$

donc

$$r_{L_{s+1}} = r_{r_{L_s}+r-1} = (2r-1)r_{L_s} + 1 - r \quad (\text{B-15.a})$$

$$L_{s+1} = L_s + 2N + r - 1 \quad (\text{B-15.b})$$

Les formules (B-15) sont des formules récurrentes usuelles, on peut tirer alors les expressions générales de r_{L_s} et de L_s en fonction de s

$$r_{L_s} = [(2r-1)^s + 1]/2 \quad (\text{B-16.a})$$

$$L_s = s(2N + r - 1) + 1 \quad (\text{B-16.b})$$

La quantité

$$p_1 + p_2 - \frac{r_{L_s} + 1}{2} - \frac{r+1}{2} \quad (p \text{ prend les deux notations } m \text{ et } n)$$

qui existe dans l'exponentielle de l'équation (B-13), doit être écrit sous la forme

$$p - \frac{r_{L_{s+1}} + 1}{2}$$

alors si on pose

$$\rho = p_1 + p_2 - \rho_s \quad (\text{B-17})$$

avec ρ constant à calculer, on trouve que

$$\frac{r_{L_s} + 1}{2} + \frac{r+1}{2} - \rho_s = \frac{r_{L_{s+1}} + 1}{2}$$

et compte tenu de (B-15.a) on aboutit à l'expression de ρ_s qui est

$$\rho_s = 1 - (r-1)(r_{L_s} - 1) \quad (\text{B-18})$$

Sachant que

$$-N_s + 1 \leq p_1 \leq N_s + r_{L_s} \quad (\text{B-19.a})$$

et

$$-N + 1 \leq p_2 \leq N + r \quad (\text{B-19.b})$$

(p prend les deux notations m et n)

on peut écrire

$$-(N_s + N) + 2 - \rho_s \leq p \leq N_s + N + r + r_{L_s} - \rho_s \quad (\text{B-20})$$

compte tenu de (B-17), on peut écrire $p_1 = p - p_2 + \rho_s$, et à l'aide de (B-19) on trouve

$$p - N_s - r_{L_s} + \rho_s \leq p_2 \leq p + N_s + \rho_s - 1 \quad (\text{B-21})$$

Les relations (B-19.b) et (B-21) donnent donc

$$\max(p - N_s - r_{L_s} + \rho_s, -N + 1) \leq p_2 \leq \min(p + N_s + \rho_s - 1, N + r) \quad (\text{B-22})$$

Compte tenu de (B-14), (B-15.a), (B-17), (B-18), (B-20) et (B-21), l'équation (B-13) devient

$$F^{s+1}(u, v) = \sum_{m=-N_{s+1}+1}^{N_{s+1}+r_{L_{s+1}}} \sum_{n=-N_{s+1}+1}^{N_{s+1}+r_{L_{s+1}}} I_{mn}^{(s+1)} e^{j2 \left[\left(m - \frac{r_{L_{s+1}}+1}{2} \right) u + \left(n - \frac{r_{L_{s+1}}+1}{2} \right) v \right]}$$

avec

$$I_{mn}^{(s+1)} = \sum_{m_2=\max(m-N_s-r_{L_s}+\rho_s, -N+1)}^{\min(m+N_s+\rho_s-1, N+r)} \sum_{n_2=\max(n-N_s-r_{L_s}+\rho_s, -N+1)}^{\min(n+N_s+\rho_s-1, N+r)} I_{m_2 n_2}^{(s)} \quad (B-23)$$

alors la relation (B-11) est vraie. Il reste à démontrer la relation (B-12).

A partir de (B-23) on peut écrire

$$I_{m+r_{L_{s+1}}+1, n+r_{L_{s+1}}+1}^{(s+1)} = \sum_{m_2=\max(m-N_s-r_{L_s}+r_{L_{s+1}}+\rho_s+1, -N+1)}^{\min(m+N_s+r_{L_{s+1}}+\rho_s, N+r)} \sum_{n_2=\max(n-N_s-r_{L_s}+r_{L_{s+1}}+\rho_s+1, -N+1)}^{\min(n+N_s+r_{L_{s+1}}+\rho_s, N+r)} I_{m_2 n_2}^{(s)} \quad (B-24)$$

Effectuant dans (B-24) le changement de variable suivant

$$p'_2 = -p_2 + r + 1 \quad (p \text{ prend les deux notations } m \text{ et } n)$$

ce qui permet d'écrire

$$I_{m+r_{L_{s+1}}+1, n+r_{L_{s+1}}+1}^{(s+1)} = \sum_{m'_2=\min(-m+N_s+r+r_{L_s}-r_{L_{s+1}}-\rho_s+1, -N+1)}^{\max(-m-N_s+r-r_{L_s}-\rho_s+1, -N+1)} \sum_{n'_2=\min(-n+N_s+r+r_{L_s}-r_{L_{s+1}}-\rho_s, N+r)}^{\max(-n+N_s+r-r_{L_s}-\rho_s+1, -N+1)} I_{m'_2 n'_2}^{(s)}$$

Selon (B-3) et (B-5.a) on a

$$I_{m+m'_2-r+r+r_{L_{s+1}}+\rho_s, n+n'_2-r+r_{L_{s+1}}+\rho_s}^{(s)} = I_{-m-m'_2+r+r_{L_s}-r_{L_{s+1}}-\rho_s+1, -n-n'_2+r+r_{L_s}-r_{L_{s+1}}-\rho_s+1}^{(s)}$$

$$I_{-m'_2+r+1, -n'_2+r+1} = I_{m'_2 n'_2}$$

En utilisant les relations (B-15.a) et (B-18) il en résulte l'équation suivante :

$$r + r_{L_s} - r_{L_{s+1}} = 2\rho_s - 1$$

donc

$$I_{m+r_{L_{s+1}}+1, n+r_{L_{s+1}}+1}^{(s+1)} = \sum_{m'_2=\max(-m-N_s-r_{L_s}+\rho_s, -N+1)}^{\min(-m+N_s+\rho_s-1, N+r)} \sum_{n'_2=\max(-n-N_s-r_{L_s}+\rho_s, -N+1)}^{\min(-n+N_s+\rho_s-1, N+r)} I_{m'_2 n'_2}^{(s)}$$

qui représente l'expression de $I_{-m-n}^{(s+1)}$.

On peut démontrer de manière analogue les autres conditions de symétrie

$$I_{-mn}^{(s)} = I_{m+r+1, n}^{(s)} \quad I_{m-n}^{(s)} = I_{m, n+r+1}^{(s)}$$

Compte tenu des relations (B-4) et (B-5) on peut écrire $F^{s+1}(u, v)$ sous la forme (§ annexe A)

$$F^{s+1}(u, v) = \sum_{m=1}^{N_s+r_{L_s}} \sum_{n=1}^{N_s+r_{L_s}} (2-r_{L_s} \delta_{m-1})(2-r_{L_s} \delta_{n-1}) I_{mn}^{(s)} \cos[(2m-r_{L_s}-1)u] \cdot \cos[(2n-r_{L_s}-1)v] \quad (B-25)$$

qui représente la formule (3-11).

2. Calcul de la limite de la directivité

D'après (B-24) on a

$$D_{\infty}^{(s)} \hat{=} \lim_{L_s \rightarrow +\infty} D_0^{(s)} = \frac{R_s^2}{\lim_{L_s \rightarrow +\infty} P_s} \quad (\text{B-26})$$

Une procédure analogue à celle exposée dans l'annexe A pour aboutir à l'équation (A-21), nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} T_{L-1}^{2s}(x) &= 2^{-2s} \sum_{l=1}^{s+1} (2 - \delta_{s+1-l}) \cdot C_{2s}^{l-1} \cdot T_{2(s+1-l)(L-1)}(x) \\ &= 2^{-2s} \cdot C_{2s}^s + 2^{-2s+1} \cdot \sum_{l=1}^s C_{2s}^{s-l} \cdot T_{2l(L-1)}(x) \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

alors, les amplitudes $I_{mn}^{(2s)}$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(2s)} &= 2^{-2s} \cdot C_{2s}^s \cdot \left(\frac{1}{L_{2s}} \right)^2 \sum_{p=1}^{N_{2s+1}} \sum_{q=1}^{N_{2s+1}} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (n-1)(q-1) \right] \\ &+ 2^{-2s+1} \cdot \left(\frac{1}{L_{2s}} \right)^2 \sum_{l=1}^s \sum_{p=1}^{N_{2s+1}} \sum_{q=1}^{N_{2s+1}} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot C_{2s}^{s-l} \cdot T_{2l(L-1)} \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \right] \\ &\quad \times \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (n-1)(q-1) \right] \end{aligned}$$

ou sous la forme simplifiée

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(2s)} &= 2^{-2s} \cdot C_{2s}^s \cdot \delta_{m-1} \cdot \delta_{n-1} + 2^{-2s+1} \cdot \left(\frac{1}{L_{2s}} \right)^2 \sum_{l=1}^s \sum_{p=1}^{N_{2s+1}} \sum_{q=1}^{N_{2s+1}} (2 - \delta_{p-1})(2 - \delta_{q-1}) \cdot C_{2s}^{s-l} \\ &\quad \times T_{2l(L-1)} \left[w_0 \cos \left((p-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \cos \left((q-1) \frac{\pi}{L_{2s}} \right) \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (m-1)(p-1) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{L_{2s}} (n-1)(q-1) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-28})$$

Comme la limite du deuxième terme dans (B-28) est égale à zéro lorsque L_s tend vers l'infini, on peut dire que

$$\lim_{L_s \rightarrow +\infty} I_{mn}^{(2s)} = \lim_{L_s \rightarrow +\infty} I_{11}^{(2s)} = 2^{-2s} \cdot C_{2s}^s \quad (\text{B-29})$$

et à partir de la relation (3-22), on peut déduire que

$$\lim_{L_s \rightarrow +\infty} P_s = \lim_{L_s \rightarrow +\infty} I_{11}^{(2s)} = 2^{-2s} \cdot C_{2s}^s \quad (\text{B-30})$$

Finalement, la limite de la directivité s'écrit

$$D_{\infty}^{(s)} = \lim_{L_s \rightarrow +\infty} D_0^{(s)} = \frac{2^{2s} R_s^2}{C_{2s}^s} \quad (\text{B-31})$$

qui est une limite dépendant seulement du niveau des lobes secondaires.