

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
5 / 03

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

OPTION : AUTOMATIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'état

**COMMANDE PAR MODE DE GLISSEMENT
CONTINU ET DISCRET DES ROBOTS MOBILES**

Présenté par : ALALOUCHE Mohamed Tahar

Dirigé par : Mr. HAMERLAIN
Mr. BOUDJEMAA

Promotion : 2002 – 2003

Ecole Nationale Polytechnique : 10, Avenue Hassen Badi BP182 El-Harrach

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A ma famille.

Remerciements

Je tiens à remercier messieurs HAMERLAIN et BOUDJEMAA, qui ont encadré mes travaux dont l'aide efficace et précieuse m'a permis de mener à bien ce travail. Ainsi que tous mes enseignants qui m'ont suivi tout au long de mes études.

Je tiens aussi, à adresser l'expression de ma sincère reconnaissance aux membres du jury d'examen, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Que tous les personnels de l'Ecole Nationale Polytechnique et du Centre de Développement des Technologies Avancées trouvent ici ma reconnaissance pour la part qu'ils ont prise à la réalisation de ce travail.

Sans oublier tous mes camarades de l'Ecole Polytechnique et de la résidence universitaire Bouraoui Amar.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
1. Modélisation des robots mobiles	3
1.1 introduction.....	3
1.2 généralités sur les robots mobiles	4
1.2.1 définition d'un robot mobile	4
1.2.2 architecture d'un robot mobile.....	5
1.3 cinématique des robots mobiles	6
1.3.1 position du robot.....	6
1.3.2 classification des roues.....	7
1.3.3 expression des contraintes sur les roues.....	10
1.3.4 formulation des contraintes dans le cas des robots mobiles.....	11
1.3.5 les types de robots mobiles.....	14
1.3.6 caractéristiques de deux types de robots mobile.....	15
1.4 les modèles dans l'espace d'état.....	17
1.5 le modèle cinématique de position.....	17
1.5.1 modèles des robots de types (3,0) et (2,0).....	19
1.5.2 mobilité, gouvernabilité et manoeuvrabilité.....	19
1.6 dynamique des robots mobiles.....	20
1.6.1 équations en β_m et φ	21
1.6.2 le modèle dynamique général.....	22
1.6.3 configuration de la motorisation.....	24
1.7 conclusion.....	25
2. commande par mode de glissement continu des robots mobiles	26
2.1 introduction.....	26
2.2 formalisation classique du régime glissant.....	27
2.2.1 régime glissant.....	27
2.2.2 condition d'existence du glissement.....	28

2.2.3	choix des surfaces de glissement.....	31
2.2.4	commande à structure variable en régime glissant.....	32
2.3	application de la commande par mode de glissement aux robots mobiles.....	38
2.3.1	les systèmes différentiellement plats.....	38
2.3.2	commande du robot (3,0).....	39
2.3.3	commande du robot (2,0).....	52
2.3.4	étude de la robustesse.....	62
2.4	conclusion.....	66

3. Modes glissants discrets 67

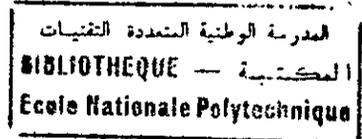
3.1	Introduction.....	67
3.2	fondements théoriques.....	68
3.2.1	formulation discrète d'un système continu.....	68
3.2.2	condition d'existence du régime glissant discret.....	68
3.2.3	synthèse de la loi de commande par mode de glissement discret.....	71
3.3	application au robot mobile de type (3,0).....	73
3.3.1	discrétisation du modèle cinématique du robot mobile de type (3,0).....	73
3.3.2	linéarisation du modèle cinématique du robot mobile de type (3,0).....	74
3.3.3	commande par mode de glissement discret du robot de type (3,0).....	76
3.3.4	étude de la robustesse.....	84
3.3.5	comparaison entre la commande par mode de glissement continu et discret.....	88
3.4	conclusion.....	93

Conclusion générale 94

Références bibliographiques 96

Annexe

Introduction Générale



L'apparition de nouvelles générations de robots mobiles dont les tâches sont plus diversifiées et auxquels on demande des performances toujours plus voisines des performances humaines justifie l'étude de commandes spécifiques.

De nombreuses études ont été consacrées au problème de la commande des robots mobiles comme vu dans [4], [5], [11], [21], [39], [57], [68], [74]. La non trivialité de ce problème provient du fait que les équations régissant ces systèmes sont non linéaires, couplées et non holonomes. Pour toutes ces raisons, il est important d'envisager l'application de techniques de commande réputées robustes. On peut ainsi, recourir à une classe particulière d'organes de commande, appelée « commande par mode de glissement ». Ces systèmes ont fait l'objet de nombreux travaux depuis 1962, en Union Soviétique, notamment dans l'équipe du Professeur Emelyanov (Utkin[71], Taran, Kostyleva, etc.), à partir des résultats d'études théoriques du mathématicien A.F. Filippov sur les équations différentielles à second membre discontinu[25].

Les systèmes en mode glissant sont des systèmes dans lesquels les paramètres du régulateurs peuvent varier par à coups, afin d'obtenir une stabilité et une précision supérieurs à celles généralement obtenues avec les régulateurs classiques. Ceci permet sous certaines conditions, de maintenir dans l'espace des phases le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface choisie à priori. Nous dirons alors, que le système bouclé est en régime glissant sur la surface considérée ; il jouit alors de la propriété d'indépendance vis-à-vis des perturbations extérieurs et des variations des paramètres de la partie commandée.

La mise en œuvre de tels systèmes ne nécessite pas une identification très précise des paramètres du processus à commander, puisque toutes les contraintes que la commande doit satisfaire qui sont de type égalité pour un système classique deviennent ici des contraintes inégalités.

Dans ce mémoire, nous visons donc l'élaboration d'une commande par mode de glissement classique (i.e. dans le cas continu) appliquée aux robots mobiles. De plus, l'arrivée et le développement extraordinaire de l'électronique et de son corollaire l'informatique a permis d'ouvrir de nouveaux horizons à l'automatique. Désormais, on voit les calculateurs puissants immerger le monde de l'automatisation, ce qui nous a amené à étudier le cas de « la commande par mode de glissement discret », et que nous avons aussi implémenté pour l'asservissement des robots mobiles.

Le premier chapitre, de nature théorique, présente les aspects de la modélisation des robots mobiles. Ainsi, les différents modèles cinématiques et dynamiques seront revus pour permettre, par la suite, d'élaborer nos commandes.

Le second chapitre présente la commande par mode de glissement en continu. Il se divise en deux parties : la première énonce les fondements théoriques relatifs à ce type de commande. Quant à la seconde, et bien, elle aborde l'aspect pratique du travail, i.e. l'application de la commande glissante continue aux plus fréquents types de robots mobiles, i.e. le type (3,0) et le (2,0).

Le dernier chapitre donne une approche théorique de la synthèse de la commande par mode de glissement discret, puis, la validation de cette dernière se fera sur un robot de type (3,0), et nous concluons le travail par une comparaison entre les deux types de la commande glissante.

L'ensemble des résultats obtenus montrera l'intérêt de la commande par mode de glissement continu et discret du point de vue de la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures.

Enfin, l'annexe comprend quelques définitions sur les systèmes holonomes et non holonomes.

Chapitre 1

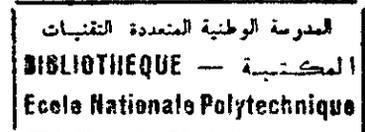
Modélisation Des Robots Mobiles

1.1 Introduction

Les robots mobiles sont des systèmes mécaniques, qui constituent, avec les robots manipulateurs « la robotique ». Leur intérêt réside dans leur mobilité, qui ouvre des applications dans de nombreux domaines. Ils sont en général, destinés à assister l'homme dans les tâches pénibles (comme le transport de charges lourdes), monotones ou en ambiance hostile (nucléaire, marine, lutte contre l'incendie, surveillance,...).

Ce chapitre se veut représentatif des caractéristiques des robots mobiles ; i.e. leur structure et fonctionnement, puis une étude de la cinématique et de la dynamique de ces robots sera présentée, et d'où découlera les différents modèles mathématiques régissant le mouvement de ces robots, et qui seront par la suite, le point de départ de toute opération de commande et de contrôle.

1.2 Généralités sur les robots mobiles



1.2.1 Définition d'un robot mobile

Un robot mobile peut être défini comme étant une plate forme supportée par des roues (fig.1.1); ces dernières lui permettent de bouger de façon autonome (sans l'intervention directe de l'homme) dans un environnement donné, et ceci grâce à des moteurs commandés par des calculateurs embarqués, et aussi des capteurs.

Les principaux problèmes liés à la robotique mobile sont [55] :

- La conception mécanique liée à la mobilité.
- La détermination de la position et de l'attitude (orientation) du robot.
- La détermination du chemin optimal pour atteindre le lieu de la tâche.

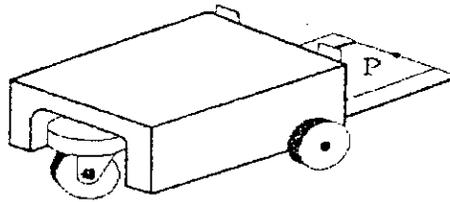


Fig. 1.1. Robot mobile

Il faut ajouter à ceux-là le fait que les robots mobiles sont des systèmes non holonomes, i.e. qu'ils sont sujets à des contraintes non holonomes de position et/ou vitesse qui doivent être satisfaites pendant toute la durée du mouvement[32]. Ces dernières rajoutent de la complexité lors de la commande de ces systèmes.

Approfondissons un peu la chose ; une contrainte cinématique est dite holonome si on peut l'intégrer, du coup aboutit à des relations algébriques liant les différentes coordonnées de position, ces dernières peuvent être éliminés par un changement de variables approprié, et le système est dit holonome. Dans le cas de contraintes non intégrables (i.e. non holonome), l'élimination n'est pas possible, et les contraintes doivent être prises en

considération lors de la modélisation, le système est alors dit non holonome (voir annexe 1).

1.2.2 Architecture d'un robot mobile

Précisons tout d'abord les sous systèmes constituant un système mécanique asservi en général (fig. 1.2), le système robotique se compose donc de : (i).sous système mécanique, (ii) capteurs, (iii).actionneurs, (iv).Régulateur, (v). sous système de traitement de l'information.

En plus de tout cela, ces sous systèmes communiquent entre eux via des interfaces ; dont la fonction consiste à décoder l'information transmise.

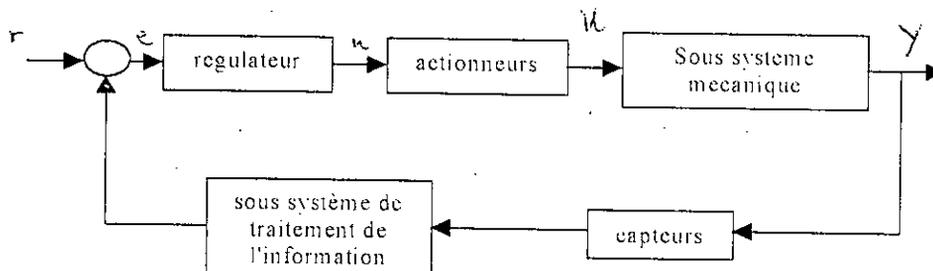


Fig 1.2 schéma fonctionnel d'un robot en général

Et plus particulièrement, l'architecture d'un robot mobile est structurée en quatre blocs [55] :

- *Structure mécanique et motorisation* : la partie principale est le châssis rigide qui se déplace à l'aide de roues motorisées.
- *Système de localisation* : il permet de définir la position du robot et des obstacles à éviter, il n'y a pas de techniques universelles de localisation, tout dépend de la nature des tâches à accomplir.
- *Éléments de sécurité* : qui dépendent de la mission du robot. Un robot mobile peut agir dans un environnement hostile avec plein d'obstacles (personnes, objets,...etc.) autour de lui. Il doit avoir donc, les bons capteurs pour pouvoir les détecter.
- *Système de traitement d'informations et gestion de tâches* : il constitue le module informatique central qui établit les commandes permettant au mobile de réaliser un déplacement et d'activer les divers organes en accord avec l'objectif.

Après avoir exposé cette brève présentation des robots mobiles, nous passons maintenant au calcul des modèles d'état régissant ces robots.

1.3 Cinématique des robots mobiles

Ce paragraphe traite l'étude de la cinématique des robots mobiles, il a pour but de définir les lois caractérisant le mouvement des ces systèmes mécaniques, ainsi que les différentes contraintes et restrictions de mobilité liées à ces robots. Ce paragraphe comprend tout d'abord, une étude des différents types de roues utilisées en robotique mobile ; ainsi, toutes les propriétés et caractéristiques de ces roues seront exposées [17]. Ceci afin de permettre, par la suite, de tirer les expressions des contraintes cinématiques qui aboutirons vers les modèles d'état des robots mobiles.

1.3.1 Position du robot

On suppose que le robot étudié ici, est composé d'un cadre rigide, équipé de roues non déformables, et qui se déplace dans un plan horizontal.

La position du robot est décrite à l'aide de :

- une base orthogonale d'inertie arbitraire $\{\bar{0}, \bar{I}_1, \bar{I}_2\}$ qui est fixée dans le plan du mouvement.
- Un point de référence arbitraire P qui appartient à la structure (robot) et une base arbitraire $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ attaché à la structure. Ceci est illustré par la figure 1.3.

Du coup, la position du robot est complètement décrite par les trois variables x, y et θ telles que :

- x, y sont les coordonnées du point de référence P dans la base d'inertie, i.e.

$$\bar{O}P = x\bar{I}_1 + y\bar{I}_2 \quad (1.1)$$

- θ est l'orientation de la base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ par rapport à la base d'inertie $\{\bar{I}_1, \bar{I}_2\}$.

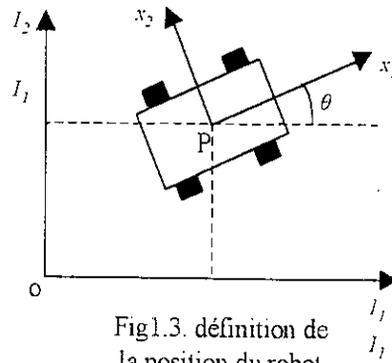


Fig1.3. définition de la position du robot

On définit le vecteur de position comme suit : $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$ (1.2)

On définit aussi la matrice orthogonale de rotation : $R(\theta) \hat{=} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.2 Classification des roues

Passons maintenant à l'étude des roues qui entrent dans la composition d'un robot mobile. Rappelons que cette étude est à la base du calcul des différents modèles d'états des robots mobiles.

On suppose que durant tout le mouvement, que le plan de chaque roue reste vertical, et que l'orientation de la roue par rapport au cadre peut être fixe ou variable.

Ceci nous amène à faire la distinction entre deux classes de roues :

- roues conventionnelles.
- Roues suédoises.

Néanmoins, il est supposé que le contact entre la roue et le sol est réduit à un seul point du plan et ceci pour les deux classes de roues.

a). Roues conventionnelles

Une roue conventionnelle de base consiste en un pneumatique monté sur un centre qui tourne autour d'un axe fixé à la plate-forme du robot

mobile [6]. On suppose que chaque roue tourne et ne glisse pas, ceci implique que la vitesse du point de contact est nulle, ce qui implique que ses composantes qui sont parallèles et orthogonales au plan de la roue sont nulles.

Cette classe de roues comprend elle-même les trois types de roues suivants :

a1). Roues fixes Le centre de ce type de roue (noté A) est un point fixe du cadre du robot (fig1.4). La position de A dans la base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ est définie en utilisant les coordonnées polaires, i.e. par la distance $PA=l$ et l'angle α . L'orientation du plan de la roue par rapport à PA est représentée par la constante β . La rotation de la roue autour de son axe (horizontal) est mesurée par l'angle $\varphi(t)$, et enfin, le rayon de la roue est noté r .

a2). Les roues centrées orientables Une roue pareille est telle que le mouvement du plan de la roue -par rapport à la structure du robot- est une rotation autour d'un axe vertical qui passe par le centre de la roue (fig1.4). La description est la même que pour une roue fixe, à l'exception que β ici est variable ($=\beta(t)$).

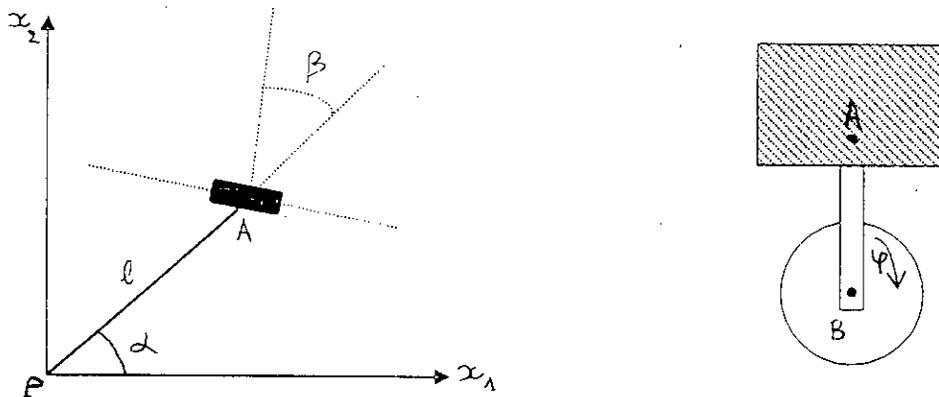


Fig.1.4. roues conventionnelles fixe et orientable centrée

a3). Les roues décentrées orientables Une roue décentrée orientable est aussi une roue orientable par rapport au cadre (du robot), mais la rotation se fait autour d'un axe vertical qui ne passe pas par le centre de la roue (fig.1.5).

Dans ce cas, la description du mouvement de la roue nécessite plus de paramètres. Le centre de la roue est noté ici B, et il est lié à la structure par

une tige rigide AB de longueur constante ($=d$), est qui peut tourner autour d'un axe vertical au point A. ce point A qui est lui-même un point de la structure, et sa position est spécifiée par deux coordonnées polaires " l " et " α ", comme auparavant. Le plan de la roue est aligné le long de AB.

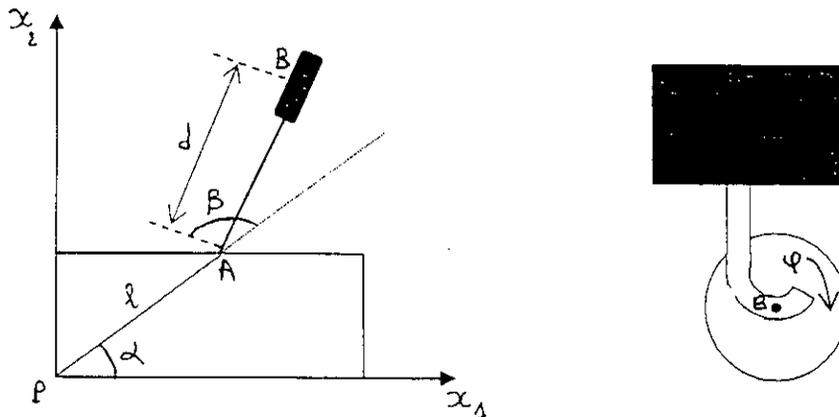


Fig. 1.5. Roue orientable décentrée

b). Les roues suédoises

Pour une roue suédoise (fig. 1.6); seule une composante de la vitesse du point de contact - de la roue avec le sol- est supposée nulle et ceci tout le long du mouvement.

La direction de cette composante nulle est à priori arbitraire, mais elle est fixée par rapport à l'orientation de la roue.

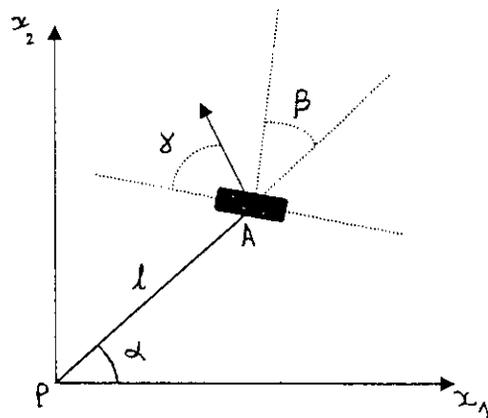


Fig. 1.6. Roue suédoise

Après avoir décrit les types de roues, nous passons maintenant à l'établissement des formules mathématiques qui caractérisent le mouvement des ces roues.

1.3.3 Les expressions des contraintes sur les roues

Il existe deux types de contraintes cinématiques qui doivent être satisfaites en chaque point de la plate-forme mobile, et ceci pour permettre au robot de bouger.

- le long du plan de la roue: supposons un roulement seul de la roue, i.e. la rotation de la roue par rapport à son plan vertical est entièrement manifestée comme un déplacement le long de l'axe principal du robot dans le plan horizontal du mouvement.

- Orthogonal au plan de la roue: supposons que la roue ne doit pas glisser le long de ce plan, i.e. la vitesse du robot au long de l'axe orthogonal au plan de la roue est nulle.

A présent, on peut écrire explicitement, pour chacun des types de roues (décrits au-dessus), les expressions des contraintes au long du plan de la roue, et celui orthogonal à ce dernier ; i.e. :

1) roues conventionnelles fixes

Rappelons que la position de la roue est définie par: $\alpha, \beta, \varphi(t), r$. on peut donc, calculer aisément les composantes de la vitesse du point de contact (de la roue avec le sol), et on en déduit donc :

$$\{-\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)/\cos\beta\}R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.4)$$

$$[\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta)/\sin\beta]R(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (1.5)$$

2) roues conventionnelles centrées

$$\{-\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)/\cos\beta\}R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.6)$$

$$[\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta)/\sin\beta]R(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (1.7)$$

3) roues conventionnelles orientables décentrées

$$\{-\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)/\cos\beta\}R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.8)$$

$$[\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta)/\sin\beta]R(\theta)\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0 \quad (1.9)$$

4) roues suédoises

$$\{-\sin(\alpha + \beta + \gamma)\cos(\alpha + \beta + \gamma) / \cos(\beta + \gamma)\}R(\theta)\ddot{\xi} + r\cos(\gamma)\dot{\phi} = 0 \quad (1.10)$$

Où γ représente l'angle entre le plan de la roue et la direction de la composante nulle de la vitesse du point de contact (fig1.6)

Remarque 1 La description de l'orientation des roues est très discutée. Parmi toutes les configurations possibles, seulement quelques unes permettent la mobilité du robot en satisfaisant le roulement pur et le non glissement. Dans ce cas favorable, les configurations résultantes des roues sont dites " configurations admissibles des roues ".

Remarque 2 La non holonomie des contraintes cinématiques impose des restrictions dans la mobilité du robot. Quelques questions seront discutées après.

1.3.4 Formulation des contraintes dans le cas des robots mobiles

On considère, maintenant, un robot mobile général, équipé avec N roues, et qui sont des quatre types présentés auparavant.

$$N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw} = N$$

avec : N_f le nombre de roues conventionnelles fixes.

N_c le nombre de roues conventionnelles orientables centrées.

N_{oc} le nombre de roues conventionnelles orientables décentrées.

N_{sw} nombre de roues suédoises.

Le mouvement du robot est totalement décrit par les vecteurs suivants :

- Coordonnées de position $\xi(t)$: pour la position et l'orientation dans le plan.
- Coordonnées angulaires : $\beta_c(t)$ pour l'orientation des angles des roues orientables centrées, et $\beta_{oc}(t)$ pour les roues orientables décentrées.

- Coordonnées de rotation $\varphi(t)$: pour l'orientation des angles de rotation des roues autour des axes horizontaux.

$$\text{Où : } \xi = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}; \beta_c(t); \beta_{oc}(t); \varphi(t) \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_c(t) \\ \varphi_{oc}(t) \\ \varphi_{sw} \end{pmatrix}$$

L'ensemble complet q , des coordonnées de position, angles et rotation est appelé "l'ensemble des coordonnées de configuration". De manière claire, le nombre totale des coordonnées de configuration est : $(N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3)$

En utilisant ces notations, les contraintes peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivantes :

$$\{J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (1.11)$$

$$\{C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + C_2 \dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{avec (a). } J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \hat{=} \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{pmatrix}; \text{ (b). } C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \hat{=} \begin{pmatrix} C_f \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{pmatrix}; C_2 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{pmatrix}$$

où :

(a). $J_{1f}, J_{1c}, J_{1oc}, J_{1sw}$ sont respectivement, des matrices de dimensions $(N_f * 3), (N_c * 3), (N_{oc} * 3), (N_{sw} * 3)$; et dont les formes sont dérivées directement des expressions des contraintes(1.4),(1.6),(1.8) et (1.10).

J_2 est une matrice constante de $dim(N*N)$; et dont les éléments diagonaux sont les rayons des roues, sauf pour ceux des roues suédoises, et qui sont multipliés par $(\cos \gamma)$.

(b). $C_{1f}, C_{1c}(\beta_c), C_{1oc}(\beta_{oc})$ sont respectivement, des matrices de dimensions $(N_f * 3), (N_c * 3), (N_{oc} * 3)$, et dont les lignes sont dérivées des contraintes (1.5),(1.7) et (1.9).

C_2 étant une matrice diagonale, dont les éléments sont égaux à la longueur "d" pour les N_{oc} roues orientables décentrées.

On considère maintenant, les $(N_f + N_c)$ premières contraintes de (1.12) réécrites comme suit :

$$C_{1f} \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (1.13)$$

$$C_{1c}(\beta_c) \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (1.14)$$

Ces contraintes impliquent que le vecteur $[R(\theta) \cdot \dot{\xi}]$ appartient à l'espace nul des matrices :

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$\text{i.e. } R(\theta) \cdot \dot{\xi} \in N[C_1^*(\beta_c)] \quad (1.16)$$

Ceci implique que $\text{rang}[C_1^*(\beta_c)] \leq 3$, parce que si $\text{rang}[C_1^*(\beta_c)] = 3$, donc on aura $[R(\theta) \cdot \dot{\xi}] = 0$ et par suite, aucun mouvement ne sera possible sur le plan.

Une interprétation géométrique des condition (1.12) et (1.13) stipule qu'à chaque instant, le mouvement du robot peut être vue comme une rotation instantanée autour du "centre de rotation instantané"(ICR), et dont la position (par rapport à la structure du robot) peut être variable dans le temps, et donc, le vecteur de vitesse de chaque point de la structure est orthogonal à la droite liant ce point au ICR, ce qui est vérifié à chaque instant. En particulier, ceci est vrai pour les centres des roues conventionnelles fixes, et orientables centrées, ce qui implique :

Supposition 1 à chaque instant, les axes de rotation horizontaux de toutes les roues conventionnelles fixes et centrée orientables sont orientés vers le ICR, ceci est illustré dans la figure 1.7, et il est équivalent à la condition $\text{rang}[C_1^*(\beta_c)] \leq 2$. Mais le rang de la matrice $C_1^*(\beta_c)$ dépend du design du robot mobile. Par suite, nous définissons "le degré de mobilité" du robot , et qui est égal à :

$$\delta_m = \dim N[C_1^*(\beta_c)] = 3 - \text{rang}[C_1^*(\beta_c)]$$

examinons le cas où $\text{rang}[C_{1f}]=2$, ce qui implique que le robot a au moins 2 roues fixes et, s'il y avait plus que 2, leurs axes seraient dirigés vers le ICR, ce qui rend sa position fixe par rapport à la structure. Dans ce cas, il est clair que le seul mouvement possible est une rotation autour du ICR, et ceci n'est pas acceptable dans la pratique, car la mobilité du robot est très réduite. Donc, il est toujours supposé que $\text{rang}[C_{1f}] \leq 1$. cependant :

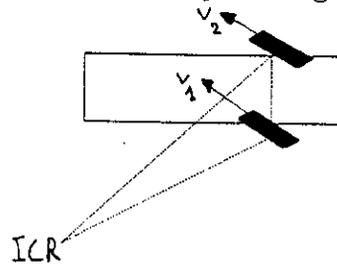


Fig. 1.7. le centre de rotation instantané

Supposition 2 un robot mobile est dit "non dégénéré" (i.e. il a une structure non singulière) si :

- i. $\text{rang}[C_{1f}] \leq 1$.
- ii. $\text{rang}[C_{1c}(\beta_c)] = \text{rang}[C_{1f}] + \text{rang}[C_{1c}(\beta_c)] \leq 2$.

Cette supposition est équivalente aux conditions suivantes :

1. pour plus d'une roue fixe conventionnelle ($N_f > 1$), elles ont toutes le même axe.
2. Les centres des roues centrées orientables n'appartiennent pas à cet axe commun.
3. Le "degré de gouvernabilité" défini par : $\delta_s = \text{rang}[C_{1c}(\beta_c)] \leq 2$ donne le nombre de roues centrées orientables qui peuvent être orientées indépendamment afin de gouverner le robot.

1.3.5 Les types de robots mobiles

Suite à la présentation précédente, il existe seulement cinq structures non singulières des robots mobiles [17]. Et dont le degré de mobilité δ_m et celui de gouvernabilité δ_s satisfont les trois inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leq \delta_m \leq 3 \\ 0 \leq \delta_r \leq 2 \\ 2 \leq \delta_m + \delta_r \leq 3 \end{cases} \quad (1.17)$$

On s'appuyant sur (1.17), on peut dire qu'il existe seulement cinq types de robots mobiles, qui correspondent aux cinq paires des valeurs de δ_m et δ_r qui satisfont les trois dernières inéquations, comme le montre le tableau suivant :

Type	I	2	2I	IV	V
δ_m	3	2	2	1	1
δ_r	0	0	1	1	2

Remarque 3 Les robots mobiles sont toujours désignés par la forme : *robot mobile de type* (δ_m, δ_r) .

1.3.6 Caractéristiques de deux types de robots mobile

Suivant le critère de mobilité, deux classes importantes des robots mobiles apparaissent :

- Robots omnidirectionnels, i.e. $\delta_m = 3$.
- Robots à mobilité réduite, i.e. $\delta_m < 3$.

On donne ci-après un exemple de chaque classe :

a). Robots omnidirectionnels (type (3,0))

Ces robots sont caractérisés par un degré de mobilité $\delta_m = 3$. Par conséquent, on voit bien que la seule paire (δ_m, δ_r) définissant ce type est la paire robot est $(\delta_m, \delta_r) = (3, 0)$. Donc, tout robot omnidirectionnel doit être impérativement du type (3,0). Présentons maintenant, les caractéristiques de ce type de robots.

Ces systèmes mécaniques n'ont ni roues conventionnelles fixes (i.e. $N_f = 0$), ni roues centrées orientables (i.e. $N_c = 0$). Ces robots sont dit "omnidirectionnels" parce qu'ils ont une totale mobilité dans le plan, i.e. qu'ils peuvent bouger dans n'importe quelle direction sans aucune réorientation et ceci à chaque instant. Un exemple des robots de type (3,0) est illustré dans la figure (1.8), il s'agit là d'un tricycle avec seulement des roues décentrées orientables.

Inversement, les quatre autres types de robots mobiles ont une mobilité réduite, l'un des types les plus utilisés est le robot mobile de type(2,0).

b). Robots à mobilité réduite (cas du robot type (2,0))

Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles centrées orientables ($N_c = 0$); mais ils ont une roue conventionnelle fixe, ou même plusieurs mais qui sont montées sur un seul axe commun.

La mobilité de ces robots est réduite dans le sens où, pour n'importe quelle trajectoire $\xi(t)$, la vitesse $\dot{\xi}(t)$ est contrainte à appartenir à l'espace de dimension 2 généré par les vecteurs $R^T(\theta).S_1$ et $R^T(\theta).S_2$, et où S_1 et S_2 sont des vecteurs constants générant $N[C_{1f}]$. un exemple de ce type de robot est présenté dans la fig.1.9. Il s'agit ici, d'un tricycle avec deux roues fixes mais montées sur le même axe plus, une roue orientable décentrée.

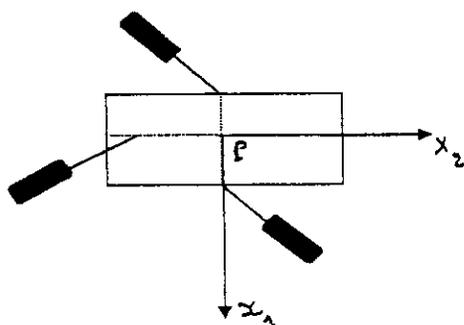


Fig. 1.8. Exemple de robot mobile de type (3,0)

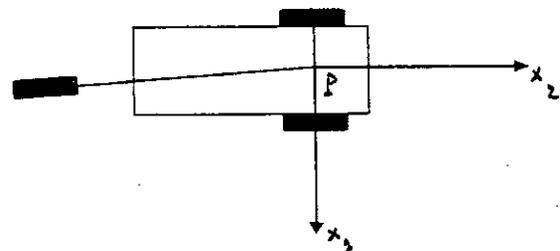


Fig. 1.9. Exemple de robot mobile de type (2,0)

1.4 Les modèles dans l'espace d'état

Il existe quatre types de modèles d'état qui nous décrivent le comportement des robots mobiles avec :

- **Le modèle cinématique de position (PKM)** C'est le plus simple modèle d'état, il donne une globale description du robot. C'est pourquoi il est très utilisé dans les tâches de contrôle.
- **Le modèle cinématique de configuration (CKM)** il permet l'analyse du comportement des robots mobiles dans le cadre de la théorie des systèmes non holonomes.
- **Le modèle dynamique de configuration (CDM)** la plus générale représentation d'état, elle donne une description du système dynamique incluant les forces généralisées fournies par les actionneurs, et permet particulièrement de traiter la question de la configuration de la motorisation.
- **Le modèle dynamique de position (PDM)** il est équivalent au CDM, utile pour analyser la réductibilité, commandabilité et les propriétés de stabilisabilité, et il décrit totalement le système dynamique entre les accélérations homogènes (entrées de commande) et la position.

Nous présenterons dans notre travail les deux représentations d'états les plus utilisées, à savoir : le modèle cinématique de position (PKM) et le modèle dynamique de configuration (CDM).

1.5 Le modèle cinématique de position

En conclusion de ce qui a été présenté auparavant, on peut dire que quel que soit le type du robot mobile, la vitesse $\dot{\xi}(t)$ est contrainte à appartenir à une distribution

$$\Delta_c \text{ définie par :} \quad \dot{\xi}(t) \in \Delta_c \hat{=} \text{span}\{ \text{col} R^T(\theta) \Sigma(\beta_c) \}, \forall t \quad (1.18)$$

où les colonnes de la matrice $\Sigma(\beta_c)$ forment une base pour $N[C^*(\beta_c)]$ telles que :

$$N[C^*(\beta_c)] = \text{span} \{ \text{col} \Sigma(\beta_c) \} \quad (1.19)$$

Ceci est trivialement équivalent à dire que :

" Quel que soit t , il existe un vecteur $\eta(t)$ dans le temps tel que :

$$\dot{\xi}(t) = R^T(\theta) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta \quad (1.20)$$

La dimension de la distribution Δ_c (qui est celle du vecteur $\eta(t)$) est le degré de mobilité δ_m du robot.

Donc, dans le cas où le robot n'a pas de roues conventionnelles centrées orientables ($\alpha_i = 0$) ; la matrice Σ est constante et l'expression (1.20) se réduit à :

$$\dot{\xi}(t) = R^T(\theta) \cdot \Sigma \cdot \eta \quad (1.21)$$

Inversement, si $\delta_c \geq 0$ (il existe au moins, une roue orientable centrée); et bien, la matrice Σ dépend explicitement de la coordonnée angulaire β_c , et l'expression (1.20) sera augmentée comme suit :

$$\dot{\xi}(t) = R^T(\theta) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta \quad (1.22)$$

$$\dot{\beta}_c = \zeta \quad (1.23)$$

La représentation (1.21) ou (1.22) et (1.23) sont considérées comme une description dans l'espace d'état du système, aussi appelée " le modèle cinématique de position" (PKM). Avec :

- Les coordonnées de position ξ et (éventuellement) les coordonnées angulaires β_c considérées comme variables d'états ;
- η et ζ (qui représentent les vitesses homogènes) peuvent être considérées comme des entrées de commande (et qui influent sur le système d'une manière linéaire).

Remarque 4 Cette interprétation doit être utilisée avec précaution, parce que les vraies entrées physiques de commande du robot mobile sont les moments fournis par les moteurs embarqués. Le modèle cinématique de position est un sous système du modèle dynamique général.

1.5.1 Modèles des robots mobiles du type (3,0) et (2,0)

Une écriture plus compacte du modèle cinématique de position est donnée ci-après :

$$\dot{Z} = B(Z)U \quad (1.24)$$

avec $\{Z \hat{=} \xi \quad ; B(Z) \hat{=} \eta \text{ si } N_c = 0\}$ ou $\{Z \hat{=} \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \end{pmatrix} \text{ si } N_c > 0\}$.

Le tableau suivant donne le PKM du robot de type (3,0) et celui de type (2,0) ;

Type	Z	$\Sigma(\beta_c)$ or Σ	Equations du PKM
(3,0)	x, y, θ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\dot{x} = \eta_1 \cos \theta - \eta_2 \sin \theta$ $\dot{y} = \eta_1 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta$ $\dot{\theta} = \eta_2$
(2,0)	x, y, θ	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\dot{x} = -\eta_1 \sin \theta$ $\dot{y} = \eta_2 \cos \theta$ $\dot{\theta} = \eta_2$

1.5.2 Mobilité, Gouvernabilité et Manœuvrabilité ([41])

a). Mobilité

C'est le premier critère de la manœuvrabilité, donnée par δ_m - i.e. le degré de mobilité- la mobilité est définie par le nombre de degrés de liberté qui peuvent être manipulés directement par les entrées η sans réorientation des roues centrées. Intuitivement, elle correspond au nombre de "degrés de liberté" que le robot peut avoir depuis sa configuration courante, et ceci à chaque instant et sans tourner aucune de ses roues. Ce n'est cependant pas égal au nombre de degré de liberté du robot qui peuvent être manipulées par toutes les entrées η et ζ .

b). Gouvernabilité

Elle est donnée par le degré de gouvernabilité δ_s , la gouvernabilité correspond aux degrés de liberté additionnels et qui sont accessibles par les entrées. En fait, l'influence de ζ sur les coordonnées de position ξ est indirecte, parce qu'elle est seulement établie à travers les coordonnées β , et qui sont reliées à ξ par une action intégrale. Ceci montre bien le fait que la modification de l'orientation d'une roue centrée ne peut pas se faire d'une façon instantanée.

c). manœuvrabilités

La manœuvrabilité du robot mobile est définie par le nombre δ_M qui est appelé "degré de manœuvrabilité", et qui est égal à la somme $\delta_M = \delta_m + \delta_s$. Il inclut donc le δ_m et le δ_s en même temps, i.e. les degrés de liberté qui sont accessibles directement et indirectement par les entrées.

Remarque 5 La manœuvrabilité d'un robot mobile dépend initialement de δ_M ; mais aussi de la manière dont ces δ_M degrés de liberté sont partitionnés entre δ_m et δ_s . Et donc, deux indices suffisent pour caractériser la manœuvrabilité : $\{\delta_m \text{ et } \delta_M\}$ ou $\{\delta_m \text{ et } \delta_s\}$.

Remarque 6 Deux robots avec le même δ_M , mais avec des δ_m différents ne sont pas équivalents; Le plus manœuvrable est celui qui a le plus grand δ_m .

Maintenant que le modèle cinématique a été calculé, nous nous proposons d'approfondir notre étude en passant à la dynamique du robot, et qui, rappelons le, donne la plus complète description du robot mobile et de son mouvement.

1.6. Dynamique des robots mobiles

la dynamique des robots mobiles est décrite par "le modèle dynamique général de configuration" (CDM), qui est composé de six types d'équations

d'états, correspondant aux coordonnées de configuration $\xi, \beta_{oc}, \varphi, \beta_c$, et les coordonnées internes η et ζ , sachant que les équations d'états de ξ et β_c sont incluses dans le modèle cinématique de position (PKM) (voir les expressions (1.22) et (1.23)).

Avant d'entamer la dynamique des robots mobiles proprement dite, nous allons d'abord présenter le modèle cinématique de configuration des robots mobiles, et ceci afin de suivre une certaine logique qui découlera à la fin à la mise en équation du modèle dynamique général des robots mobiles.

1.6.1 Équations d'états de β_{oc} et φ

Les équations d'état caractérisant l'évolution de la vitesse angulaire $\dot{\beta}_{oc}$ et celle de rotation $\dot{\varphi}$ ne figurent pas dans le PKM, mais elles peuvent être obtenues en combinant l'expression du PKM (1.22) et les équations (1.11) et (1.12), et voici le résultat :

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta \quad (1.25)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta \quad (1.26)$$

$$\text{avec : } D(\beta_{oc}) \doteq -C_{2oc}^{-1} \cdot C_{1oc}(\beta_{oc}) \quad (1.27)$$

$$E(\beta_c, \beta_{oc}) \doteq -J_2^{-1} \cdot J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \quad (1.28)$$

Et qui satisfont les équations :

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) + J_2 \cdot E(\beta_c, \beta_{oc}) = 0 \quad (1.29)$$

$$C_{1oc}(\beta_{oc}) + C_{2oc} \cdot D(\beta_{oc}) = 0 \quad (1.30)$$

L'ensemble des équations (1.22), (1.23), (1.25) et (1.26) forme le CKM (modèle cinématique de configuration). La forme standard du modèle est donnée par :

$$\dot{q} = S(q)U$$

$$\text{avec } S(q) \doteq \begin{pmatrix} R^T(\theta) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \end{pmatrix}, U \doteq \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}; q \doteq \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{oc} \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

1.6.2 Le modèle dynamique général (CDM)

On suppose que le robot est équipé de moteurs qui peuvent agir sur l'orientation des roues orientables (i.e. β_c, β_{oc}) et d'autres qui agissent sur la rotation des roues (i.e. φ), et ceci en développant les moments :

- τ_φ pour le rotation des roues;
- τ_{oc} pour l'orientation des roues décentrées ;
- τ_c pour l'orientation des roues centrées.

En utilisant le formalisme de Lagrange, où T représente l'énergie cinétique, et λ, μ sont les coefficients de Lagrange associés aux équations (1.11) et (1.12) respectivement ; la dynamique des robots est décrite par les $(3 + N_c + N_{oc} + M)$ équations de Lagrange qui suivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\xi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \xi} = R^T(\theta) \cdot J_1^T(\beta_c, \beta_{oc}) \lambda + R^T(\theta) \cdot C^T_1(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \mu \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\beta}_{oc}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \beta_{oc}} = C^T_2 \cdot \mu + \tau_{oc} \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \varphi} = J^T_2 \cdot \lambda + \tau_\varphi \quad (1.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\beta}_c} \right) - \frac{\delta T}{\delta \beta_c} = \tau_c \quad (1.34)$$

pour éliminer les coefficients inconnues de Lagrange, les trois premières équations sont multipliées par les matrices $\Sigma^T(\beta_c) \cdot R^T(\theta)$, $\Sigma^T(\beta_c) \cdot D(\beta_{oc})$ et $\Sigma^T(\beta_c) \cdot E(\beta_c, \beta_{oc})$ respectivement, puis on les somme, ceci donne :

$$\begin{aligned} & \Sigma^T(\beta_c) \cdot R^T(\theta) \cdot [T]_\xi + D(\beta_{oc}) \cdot [T]_{\beta_{oc}} + E(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot [T]_\varphi = \\ & \Sigma^T(\beta_c) \cdot \{ D^T(\beta_{oc}) \cdot \tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \tau_\varphi \} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$[T]_{\beta_c} = \tau_c \quad (1.36)$$

$$\text{avec la notation compacte : } [T]_\psi \triangleq \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\psi}} \right) - \frac{\delta T}{\delta \psi} \quad (1.37)$$

où l'expression de l'énergie cinétique T du robot est donnée par :

$$T = \dot{\xi}^T \cdot R^T(\theta) \cdot [M(\beta_{oc}) \cdot R(\theta) \cdot \dot{\xi} + 2V(\beta_{oc}) \dot{\beta}_{oc} + 2W \dot{\beta}_c] + \dot{\beta}_{oc} \cdot I_{oc} \cdot \dot{\beta}_{oc} + \dot{\varphi} \cdot I_{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \dot{\beta}_c \cdot I_c \cdot \dot{\beta}_c \quad (1.38)$$

Les matrices $M(\beta_{oc}), V(\beta_{oc}), W, I_{oc}, I_{\varphi}, I_c$ dépendent de la distribution de la masse et des moments d'inertie des différents corps constituant le robot (exemple : châssis, roues, ...).

En substituant la valeur de T dans les équations (1.35) et (1.36), et on utilisant (1.22), (1.23), (1.25), (1.26), (1.29) et (1.30), puis après de longs calculs et des simplifications on aboutit finalement à ces deux équations :

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c) \cdot V(\beta_{oc}) \cdot \dot{\xi} + f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \Sigma^T(\beta_c) \cdot \{D^T(\beta_{oc}) \cdot \tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \tau_{\varphi}\} \quad (1.39)$$

$$V^T(\beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \dot{\eta} + I_c \cdot \dot{\xi} + f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \tau_c \quad (1.40)$$

$$\text{avec : } H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \Sigma^T(\beta_c) \cdot [M(\beta_{oc}) \cdot \dot{\eta} + D^T(\beta_{oc}) \cdot V^T(\beta_{oc}) + V(\beta_{oc}) \cdot D(\beta_{oc}) + D^T(\beta_{oc}) \cdot I_{oc} \cdot D(\beta_{oc}) \cdot E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot I_{\varphi} \cdot E(\beta_c, \beta_{oc})] \cdot \Sigma(\beta_c) \quad (1.41)$$

Le modèle dynamique général du robot est donné par l'ensemble des équations d'états correspondant aux coordonnées de configuration $\xi, \beta_{oc}, \varphi, \beta_c$ et les coordonnées internes η et ζ ; i.e. (1.22), (1.23), (1.25), (1.26), (1.39) et (1.40) respectivement. i.e. :

$$\dot{\xi}(t) = R^T(\theta) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta$$

$$\dot{\beta}_c = \zeta$$

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \eta$$

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c) \cdot V(\beta_{oc}) \cdot \dot{\xi} + f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \Sigma^T(\beta_c) \cdot \{D^T(\beta_{oc}) \cdot \tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot \tau_{\varphi}\}$$

$$V^T(\beta_{oc}) \cdot \Sigma(\beta_c) \cdot \dot{\eta} + I_c \cdot \dot{\xi} + f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \tau_c$$

1.6.3 Configuration de la motorisation

En pratique, une motorisation est optimale lorsqu'elle procure une totale manœuvrabilité du robot avec un nombre minimal de moteurs embarqués.

Ceci veut dire - d'après le modèle dynamique général - que plusieurs composantes des vecteurs $\tau_\varphi, \tau_{oc}, \tau_c$; et qui représentent les moments potentiels appliqués aux roues seront nulles.

La motorisation doit satisfaire deux conditions :

1. chaque roue centrée orientable doit être actionnée par un moteur pour son orientation.
2. Pour une totale mobilité du robot, le nombre de moteurs, $N_m > \delta_m$, doit être implémenté pour la rotation de quelques roues et aussi pour l'orientation de quelques roues décentrées orientables.

Si τ_m est le moment développé par les moteurs, on a :

$$\begin{pmatrix} \tau_{oc} \\ \tau_\varphi \end{pmatrix} = P \cdot \tau_m \quad (1.42)$$

avec P étant une matrice de dimensions $(N_{oc} + M) \times N_m$, qui sélectionne les composantes de $(\tau_{oc}, \tau_\varphi)$ qui seront pratiquement utilisées comme entrées de commande. En combinant (1.42) et (1.39), la partie droite de (1.39) devient égale à : $B(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot P \cdot \tau_m$.

avec $B(\beta_c, \beta_{oc}) \hat{=} \Sigma^T(\beta_c) \cdot [D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})]$

Supposition 3 La configuration de la motorisation est telle que " $B(\beta_c, \beta_{oc}) \cdot P$ " ait un rang total.

Remarque 7 La motorisation minimale admissible nécessite au moins $(\delta_m + N_c)$ moteurs.

1.7 Conclusion

Ce chapitre présente une introduction générale aux robots mobiles et aussi une représentation rigoureuse de leurs modélisation et classification. En effet, l'aspect mobilité du système mécanique est toujours accompagné de la restriction cinématique de la "non holonomie" ; ceci permet de classer les robots mobiles en cinq types distincts ; chacun d'eux a son modèle cinématique général de position, et une configuration de roues et de moteurs propres à lui.

Nous optons dans notre étude pour deux types de robots mobiles ; le (3,0) et le (2,0), ceci revient à l'abondance de ces deux types dans la pratique, vu qu'ils présentent une bonne mobilité.

Le chapitre suivant abordera le problème du contrôle de ces deux robots mobile par une loi de commande par mode de glissement continu.

Chapitre 2

Commande par mode de glissement continu des robots mobiles

2.1. Introduction

Les systèmes à structure variable sont des systèmes dans lesquels les paramètres du régulateur peuvent prendre des valeurs différentes, la commutation d'une valeur à l'autre se fait suivant le signe d'une fonction définie dans l'espace d'état du système correspondant à l'hypersurface de glissement (fig.2.1), ceci dans le but d'obtenir une meilleure stabilité et précision que celles généralement obtenues avec les régulateurs classiques. Ainsi, le point représentatif de l'évolution du système peut être maintenu, sous certaines conditions, sur l'hypersurface choisie dans l'espace des phases et quand le régime glissant sera atteint, la dynamique du système bouclé devient alors celle du système d'ordre réduit et libre, c'est à dire que le système évolue sur une sous variété de dimension inférieure d'une unité à celle de la dimension système initial. Le système bouclé jouit alors de la propriété d'indépendance vis à vis des perturbations extérieurs, des non linéarités et des variations des paramètres du système à commander. L'intérêt d'un système à structure variable se voit dans la

simplicité de réaliser une commande de qualité pour des processus perturbés ou mal identifiés.

Ce chapitre est composé de trois parties ; la première traite les aspects théoriques concernant la commande par mode de glissement, d'où découlera les fondements de bases, ceux là permettront par la suite de synthétiser un régulateur multivariable qui sera appliqué aux robots mobiles de type (3,0) et (2,0), chose qui fera l'objet de la deuxième partie. Quant à la dernière, elle se veut plus pratique, et expose le problème de robustesse de la loi de commande synthétisée auparavant (en deuxième partie), et ceci en introduisant des perturbations dans les modèles des deux robots.

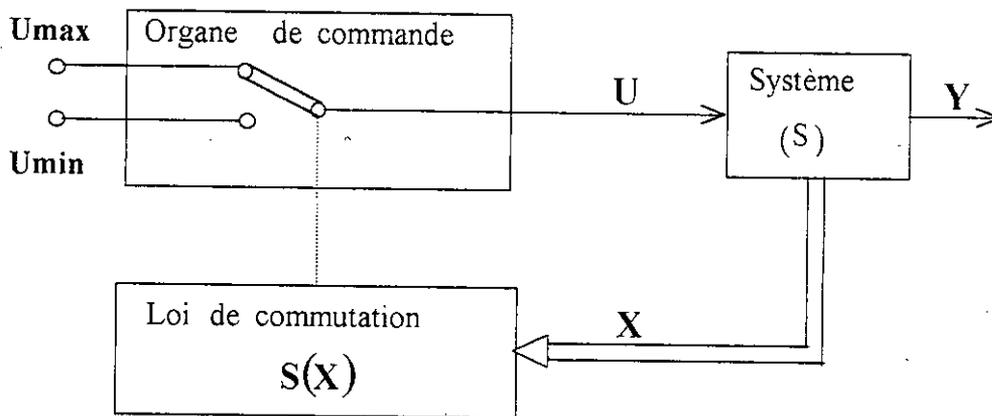


Fig. 2.1 : Schéma de principe d'un système à structure variable avec changement de la structure par commutation au niveau de l'organe de commande (d'après [16]).

2.2 Formalisation Classique du Régime Glissant

Dans ce paragraphe, nous présentons les concepts classiques utilisés pour la commande en régime glissant des systèmes linéaires et non linéaires, ainsi qu'un rappel de quelques propriétés mathématiques des équations différentielles à second membre discontinue. Ensuite nous étudions le choix des surfaces de glissement.

2.2.1 Régime glissant

Nous supposons qu'à un instant t_0 , le point de fonctionnement du système coupe la surface de glissement avec la commande U_{min} , et dès qu'il

atteint le point A (le seuil inférieur de basculement) la commande prend la valeur U_{\max} , et de nouveau le point représentatif du système coupe la surface de glissement jusqu'à ce qu'il atteigne le point B (le seuil supérieur de basculement), une deuxième fois la commande prend la valeur U_{\min} et le point de fonctionnement sera forcé à évoluer sur la surface de glissement et ainsi de suite. Donc, un mouvement continu à l'intérieur de la zone hystérésis du relais et lorsque le point représentatif atteint la zone de zéro, ce dernier continu à commuter sans s'éloigner de zéro (fig. 2.2).

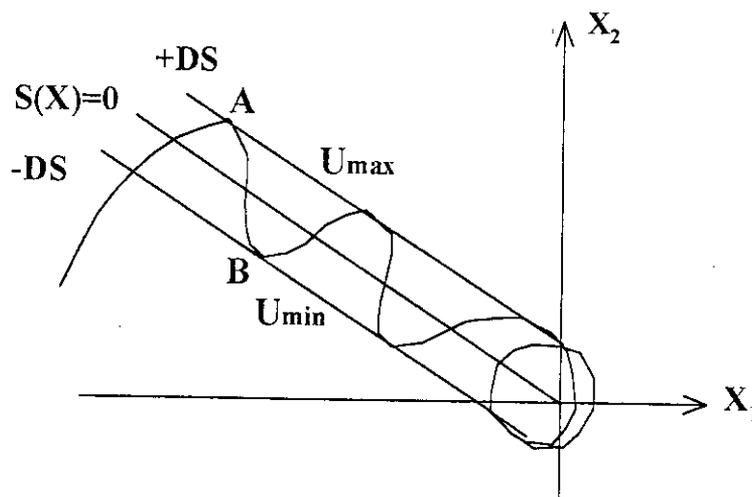


Fig. 2.2 : Mode de glissement (d'après [17],[34]).

2.2.2 Condition d'existence du glissement [70]

Soit le système d'équations différentielles :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

avec :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

Les fonctions $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont continues par morceaux, et présentent des discontinuités sur l'hypersurface notée S d'équation : $S(X)=0$

Les fonctions f_i sont supposées définies dans un domaine G de l'espace d'état. La surface $S(X)=0$ sépare le domaine G en deux parties $G^+(S < 0)$ et $G^-(S > 0)$, ce qui nous donne au voisinage de la surface S deux valeurs de f soit f^+ et f^- . Nous appelons f_N^+ et f_N^- les projections respectives de f^+ et f^- sur la normale à la surface S , orienté de G^- vers G^+ .

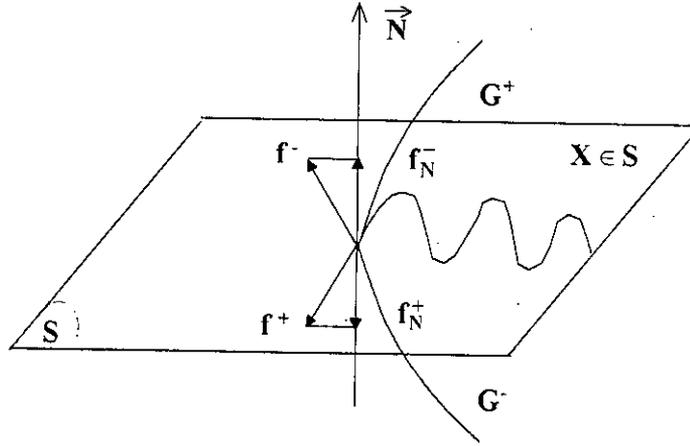


Fig. 2.3 : Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2[47]

Le théorème suivant permet de préciser les conditions d'existence et d'unicité d'une solution $X(t)$ de l'expression (2.1).

Théorème [25] *Considérons le système d'écrit par l'équation (2.1) satisfaisant la condition :*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K \quad \text{avec : } (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

K étant une constante arbitraire indépendante de X et de t , ces inégalités étant vérifiées pour tout X et t dans les domaines G^+ et G^- . Soit une surface S deux fois différentiable, chacune des composantes f_N^+ et f_N^- est continue sur $[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ pour $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ appartenant à S et le vecteur $h = f^+ - f^-$ étant continûment différentiable. Si en chaque point de la surface S une des inégalités $f_N^+ < 0$ ou $f_N^- > 0$ est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de S), il existe alors, dans le domaine G , une solution $X(t)$ pour le système (2.1), et les propriétés d'unicité et de dépendance de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées de façon continue.

Ce théorème conduit à dire que si l'on vérifie à la fois $f_N^- > 0$ et $f_N^+ < 0$, la surface S sera attractive pour les trajectoires de phase $X(t)$ du système (2.1) au moins dans un petit voisinage de S dans l'espace d'état puisque de chaque côté de la surface les vecteurs vitesses sont dirigés vers la surface. Il y a donc un régime glissant limite sur la surface S .

La surface S est définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.2)$$

En dérivant (2.2) par rapport à t , on aura :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

La dérivée \dot{S} apparaît comme le produit scalaire de la normale orientée à la surface S et du vecteur F . Or si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$\begin{cases} f_N^+ < 0 & \text{correspond à } S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0 \\ f_N^- > 0 & \text{correspond à } S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0 \Rightarrow S \cdot \dot{S} < 0 \quad (2.4)$$

Donc la condition de glissement sous les deux formes classiques ($f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$) et ($S \cdot \dot{S} < 0$) sont équivalentes. La condition (2.4) est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse d'un correcteur à structure variable.

Alors un régime glissant existe sur une surface de glissement si, et seulement si, dans un voisinage de la surface de glissement toutes les trajectoires du système sont dirigées vers elle. En d'autres termes [70] :

$$\lim_{S(x) \rightarrow 0^-} \dot{S}(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{S(x) \rightarrow 0^+} \dot{S}(x) < 0 \quad (2.5)$$

2.2.3 Choix des surfaces de glissement

Les surfaces de glissement sont choisies en général comme étant des hyperplans passant par l'origine de l'espace pour des raisons évidentes de stabilisation et de manière à définir une certaine évolution du système lors du régime glissant.

Les surfaces $S(X)$ sont données par :

$$S(X) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e_i = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot e_i \quad \text{avec : } (c_n = 1) \quad (2.6)$$

on pose : $e_i = X_i - X_{id}$

avec :

X_d : Etat désiré.

c_i : Coefficients de surface.

D'après ce choix de surface, le problème de stabilité du système en régime glissant se pose comme le cas d'un système linéaire classique, d'où on peut utiliser les critères de stabilité de Routh et Herwitz.

D'une façon générale, la stabilisation d'un système sur l'origine, par l'utilisation de régimes glissants, s'effectue en deux étapes distinctes :

- * Commander le système de façon à l'amener dans le voisinage de la surface de glissement à partir d'une position initiale arbitraire (Etat hitting en anglais)
- * Engendrer une commande permettant de faire évoluer le système en régime glissant sur cette surface. Le système sera alors plongé dans l'état d'un système réduit déterminé par la surface de glissement (Etat oscillatoire).

2.2.4 Commande à Structure Variable en Régime Glissant

La mise en œuvre d'une commande à structure variable des systèmes non linéaires revient aux professeurs EMELYANOV et UTKIN par leurs exploits des résultats sur les équations différentielles à second membre discontinu [71]. Nous donnons ci-dessous deux expressions équivalentes pour la détermination de la trajectoire d'état (t) , solution du système en mode de glissement.

a). Equation d'état en mode de glissement exprimée à partir du gradient et du produit scalaire

Soit le système différentiel non linéaire dans lequel la commande U est indépendante :

$$\frac{dx}{dt} = f(U, x, t) \quad (2.7)$$

Considérons une commande non linéaire discontinue :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Supposons que la partie droite de l'équation (2.7) présente une discontinuité à la traversée de la surface $S(x, t)$ (fig. 2.4).

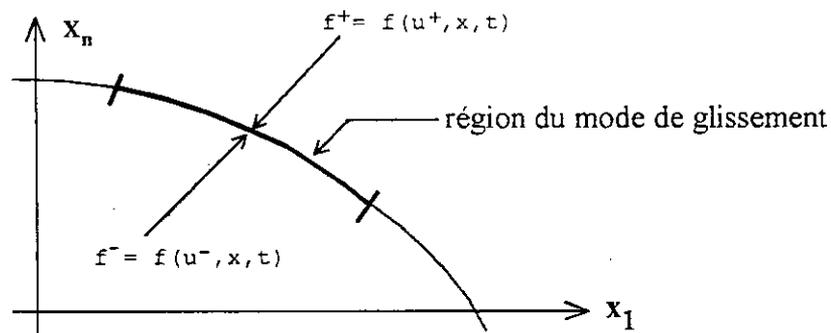


Fig. 2.4 : Schéma de principe montrant la région du mode de glissement et les champs de vecteurs associés selon une coupe d'état [71].

Soit une surface de glissement $S(x,t)=0$ et une loi de commande donnée par (2.8), la trajectoire d'état $x(t)$ du système (2.7) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot f^+ + (1-\mu) \cdot f^- = f^0 \quad (2.9)$$

avec : $0 \leq \mu \leq 1$ et $f^0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0]^T$

f^0 est appelée par UTKIN [71] la vitesse d'état moyenne (c'est un champ de vecteur moyen) sur la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteur moyen est tangentiel à la surface de glissement, il est obtenu par la moyenne géométrique, ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs de chaque côté de S (figure 2.5).

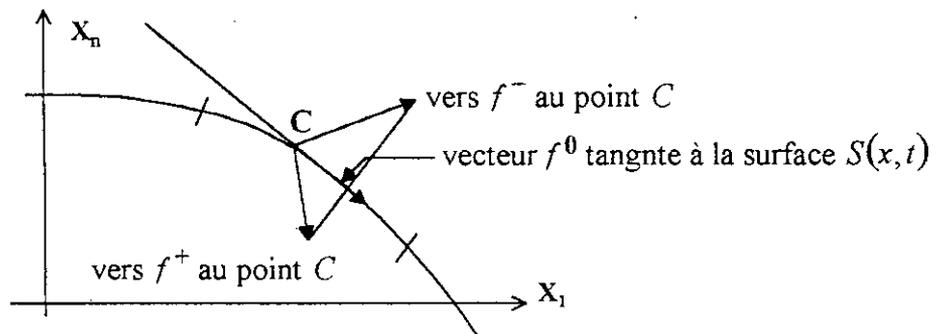


Fig. 2.5 : Schéma de principe de la construction du champ de vecteur moyen f^0 dans une coupe de l'espace d'état (d'après [71]).

Soit ∇S le gradient de $S(x,t)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs. En dérivant $S(x,t)=0$ par rapport au temps t , on aura :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot f^0 + \frac{\partial S}{\partial t} = \langle \nabla S, f^0 \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

En tenant compte de (2.9) et (2.10), on peut tirer :

$$\mu = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \quad (2.11)$$

En portant l'expression de μ dans (2.9), l'équation d'état qui décrit le système bouclé en régime glissant est :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} \\ \langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle \end{bmatrix} \cdot f^+ - \frac{\langle \nabla S, f^+ \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \cdot f^- = f^0 \quad (2.12)$$

Cette équation détermine la trajectoire d'état, solution du système en mode glissement.

Remarques

- Si le temps t n'est pas explicite $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, alors la trajectoire d'état $x(t)$ sera donnée par l'équation (2.12).
- La commande U qui n'est pas explicite dans l'équation (2.12) intervient dans la solution puisque f^- et f^+ sont fonction de U .

b). Commande équivalente

Soit le système dynamique mono variable décrit par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t) \cdot U \quad (2.13)$$

où x , f et g sont des vecteurs colonnes de dimension n .

La commande équivalente U_{eq} correspond au régime glissant idéal (ni seuil, ni retard, ni hystérésis). Ce glissement s'effectue sur la surface d'équation $S(x, t) = 0$ avec la condition $\dot{S}(x, t) = 0$.

Posons $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ et $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]$ et exprimons $\dot{S}(x, t)$, pour obtenir U_{eq} :

$$\frac{dS(x, t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot [f(x, t) + g(x, t) \cdot U_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Si on suppose que la condition d'existence :

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \neq 0 \quad (2.14)$$

La commande équivalente peut être donnée par :

$$U_{eq}(x, t) = - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (2.15)$$

En portant l'expression de $U_{eq}(x, t)$ dans l'équation (2.13), la trajectoire d'état $x(t)$ décrivant le système en régime glissant est solution de :

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ I - g(x, t) \cdot \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \right\} \cdot f(x, t) - g(x, t) \cdot \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \quad (2.16)$$

Les équations (2.12) et (2.16) sont équivalentes.

La commande équivalente U_{eq} a un sens physique : elle représente la valeur moyenne que prend la grandeur de commande lors de la commutation rapide entre U_{max} et U_{min} , qui maintient l'état du système sur la surface de glissement $S(x, t) = 0$, définit comme suit [34][16].

$$U_{min} = \text{Min} \{ U^+(x, t), U^-(x, t) \}$$

$$U_{max} = \text{Max} \{ U^+(x, t), U^-(x, t) \}$$

$$U_{min} < U_{eq}(x, t) < U_{max}$$

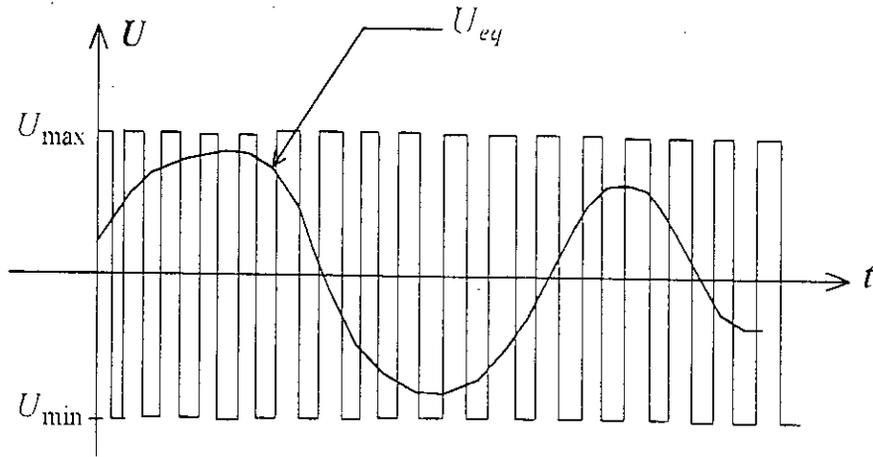


Fig. 2.6 : Caractéristique dynamique de la grandeur de commande équivalente (d'après [16]).

c).Exemple [34]

Soit un système linéaire non perturbé avec un fonctionnement en régulation $e(t) \equiv 0$, représenté par l'asservissement de la figure 2.7 sous la forme :

$$\frac{y}{u} = \frac{k}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad \text{où } \omega_0 > 0$$

avec :

$$\begin{cases} k_{\min} < k < k_{\max} \\ \xi_{\min} < \xi < \xi_{\max} \end{cases} \quad (2.17)$$

Ces inégalités traduisent l'effet des erreurs de modélisation.

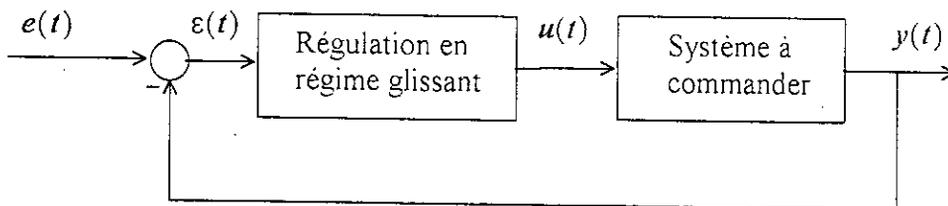


Fig. 2.7 : Schéma fonctionnel d'un système à structure variable avec régime glissant.

La loi de commande choisie est $U = \Psi \cdot \varepsilon(t)$, avec Ψ une fonction de type relais idéal pouvant prendre deux valeurs Ψ^+ et Ψ^- avec $\Psi^+ > \Psi^-$. Le système (2.1) devient en posant $X = [x_1, x_2]^T$ et $x_2 = \dot{x}_1$, avec $y = x_1$ et $\varepsilon = e - x_1$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = -2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot x_2 - (k \cdot \psi + w_0^2) \cdot x_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Soit S , la droite de commutation d'équation :

$$S = \lambda \cdot x_1 + x_2 = 0 \quad (2.19)$$

La dérivée de S par rapport à t est proportionnelle à x_1 pour une entrée $e = 0$:

$$\dot{x}_2 = -\lambda \cdot x_1 \quad (2.20)$$

Nous remplaçons (2.20) dans (2.18), on aura :

$$x_2 = [2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot \lambda - k \cdot \psi - w_0^2] \cdot x_1$$

d'où :

$$\dot{S} = [2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot \lambda - \lambda^2 - k \cdot \psi - w_0^2] \cdot x_1 \quad (2.21)$$

Pour que la condition de glissement existe, il faut choisir les deux valeurs de Ψ telle que :

$$u = \begin{cases} u^+ = -\psi^+ \cdot x_1 & \text{si } x_1 \cdot S > 0 \\ u^- = -\psi^- \cdot x_1 & \text{si } x_1 \cdot S < 0 \end{cases}$$

Ce qui impose :

$$\psi^+ > \max_k \left[\frac{2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot \lambda - \lambda^2 - w_0^2}{k} \right]$$

et

$$\psi^- > \min_k \left[\frac{2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot \lambda - \lambda^2 - w_0^2}{k} \right]$$

Nous constatons que, quelles que soient les variations des paramètres définies en (2.17), le choix de ces deux valeurs de Ψ permet de satisfaire la condition de glissement. Donc l'insensibilité du système bouclé vis à vis les variations des paramètres k et ξ est assurée.

Lorsque le point représentatif de l'évolution du système vient de rencontrer la droite, à partir des conditions initiales quelconques, avec des commandes $\Psi^+ \cdot x_1$ et $\psi^- \cdot x_1$, la trajectoire d'état devient celle de la droite jusqu'au point d'équilibre, et cela quelles que soient les variations des

paramètres k et ξ du système à commander. La commande équivalente correspondant à $\dot{S} = 0$ prend la forme $U_{eq} = \frac{2 \cdot \xi \cdot w_0 \cdot \lambda - \lambda^2 - w_0^2}{k} \cdot x_1$.

La dynamique du système bouclé devient celle du système réduit en mode de glissement, c'est à dire la dynamique d'équation $\dot{x}_1 = -\lambda \cdot x_1$.

2.3 Application de la commande par mode de glissement aux robots mobiles

Cette partie traite l'implémentation de lois de commandes de type VSC aux types les plus courants de robots mobiles, en l'occurrence le type (3,0) et le (2,0). Le calcul des lois de commande se fera en exploitant la propriété dite de « différentialité plate » dont jouissent les robots mobiles [27], et qui sera présentée dans le paragraphe suivant. Les simulations sont effectuées dans le cas d'une régulation, une poursuite d'une droite puis une poursuite d'une trajectoire circulaire.

Enfin, une étude de robustesse vient compléter ce travail et qui met l'accent sur les qualités de robustesse de la commande par mode de glissement.

2.3.1 Les systèmes différentiellement plats[27]

Les systèmes différentiellement plats sont des systèmes non linéaires, dont la linéarisation peut se faire d'une manière totale, ceci au moyen de feedback statiques ou dynamiques. En plus, ils sont caractérisés par l'existence d'un ensemble de sorties dites « linéarisantes et indépendantes », celles-ci permettent à chaque variable du système (y compris les entrées de commande) de s'écrire sous forme d'expression différentielle des sorties, i.e. en fonction des sorties ainsi que leurs dérivées temporelles.

2.3.2 Commande du robot mobile de type (3,0)

Rappelons que le robot mobile de type(3,0) est un robot omnidirectionnel, à trois degré de liberté, et trois entrées de commande, et dont le modèle cinématique est donné par [17] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \theta - \eta_2 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta \\ \dot{\theta} = \eta_3 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \\ \dot{\eta}_3 = v_3 \end{cases} \quad (2.22)$$

avec :

x, y représentent la position du robot, et θ son orientation.

η_1, η_2 sont les vitesses linéaires.

η_3 est la vitesse angulaire.

Et les entrées de commande v_1, v_2, v_3 représentent respectivement les accélérations linéaires et celle angulaire.

Le vecteur d'état sera $[x, y, \theta, \eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$ et celui de la commande sera:

$$[v_1, v_2, v_3]^T.$$

Ce système est différentiellement plat avec les sorties linéarisantes (x, y et θ), ce qui nous permet de tirer les expressions de η_1, η_2, η_3 et v_1, v_2, v_3 en fonction de $x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y} \dots$ comme suit :

$$\eta_1 = \frac{\dot{x}}{\cos \theta} + \tan \theta (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)$$

$$\eta_2 = \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta$$

$$\eta_3 = \dot{\theta}$$

$$v_1 = \frac{\ddot{x} \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)}{\cos^2 \theta} + \tan \theta (\ddot{y} \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{x} \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta) \quad (2.23)$$

$$v_2 = \ddot{y} \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{x} \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \quad (2.24)$$

$$v_3 = \ddot{\theta} \quad (2.25)$$

a). Calcul des expressions de la commande par mode de glissement

Lorsqu'il s'agit de commander un robot mobile, on se trouve confronté d'une manière générale, à deux types de problèmes :

- L'évolution de l'état, entre états initial et final imposés, est libre : on est alors ramené à un problème de régulation pour lequel il s'agit d'asservir l'état courant à l'état final. Ce type de commande est dénommé « point par point » (en anglais, point to point : PTP).
- L'évolution de l'état, entre états initial et final imposés, est elle-même imposée : le problème est alors celui de la poursuite de trajectoire (en anglais, continuous path control : CP).

a1). Robot en point à point Nous désirons synthétiser un régulateur à structure variable qui permet au robot d'atteindre un point du plan du mouvement de coordonnées connues et ceci en partant d'un point initial quelconque.

Pour ce faire, nous définissons les variables suivantes qui représentent les erreurs entre la position actuelle du robot et la consigne (i.e. le point de référence) :

$$\begin{aligned} e_1 &= x - x_d \\ e_2 &= y - y_d \\ e_3 &= \theta - \theta_d \end{aligned} \tag{2.26}$$

les surfaces de glissement S_i sont définies telles que :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_2 &= \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2 \\ S_3 &= \dot{e}_3 + \lambda_3 e_3 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Nous définissons maintenant les dynamiques en boucle fermée sur les trois surfaces :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 + W_1 \text{sign} S_1 &= 0 \\ \ddot{e}_2 + \lambda_2 \dot{e}_2 + W_2 \text{sign} S_2 &= 0 \\ \ddot{e}_3 + \lambda_3 \dot{e}_3 + W_3 \text{sign} S_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

ces dernières sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\dot{S}_1 = -W_1 \text{sign} S_1$$

$$\dot{S}_2 = -W_2 \text{sign} S_2$$

$$\dot{S}_3 = -W_3 \text{sign} S_3$$

ceci montre bien que la conditions d'existence du glissement est satisfaite pour les trois surfaces, i.e. :

$$S_i \dot{S}_i = -W_i |S_i| < 0; \quad \text{où } i=1,2,3.$$

Et donc, lorsque S_1, S_2, S_3 tendent vers zéro, il est évident que e_1, e_2, e_3 convergent aussi asymptotiquement vers zéro suivant des dynamiques entièrement déterminées par les coefficients : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Les expressions des composantes du régulateur multivariable sont déduites des expressions (2.23),(2.24)et (2.25) mais après la substitution des dérivés de plus grand ordre de x et y obtenues par (2.28)[18], i.e. :

De (2.28), nous avons :

$$\ddot{x} = -\lambda_1 \dot{x} - W_1 \text{sign} S_1$$

$$\ddot{y} = -\lambda_2 \dot{y} - W_2 \text{sign} S_2 \quad (2.29)$$

$$\ddot{\theta} = -\lambda_3 \dot{\theta} - W_3 \text{sign} S_3$$

en substituant dans (2.23),(2.24)et(2.25) nous obtenons:

$$v_1 = \frac{(-\lambda_1 \dot{x} - W_1 \text{sign} S_1) \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)}{\cos^2 \theta} + \tan \theta ((-\lambda_2 \dot{y} - W_2 \text{sign} S_2) \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - (-\lambda_1 \dot{x} - W_1 \text{sign} S_1) \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta) \quad (2.30)$$

$$v_2 = (-\lambda_2 \dot{y} - W_2 \text{sign} S_2) \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - (-\lambda_1 \dot{x} - W_1 \text{sign} S_1) \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$v_3 = -\lambda_3 \dot{\theta} - W_3 \text{sign} S_3$$

a2). Robot en poursuite de trajectoires deux types de trajectoires doivent être suivies par le robot : une rectiligne, et un cercle.

1. Poursuite d'une trajectoire rectiligne

A présent, Nous désirons calculer une loi de commande par mode de glissement afin de permettre au robot de suivre une droite d'équation $y=x$,avec une vitesse linéaire égale à Ω , et une orientation désirée égale à θ_a .

Pour se faire, nous définissons les variables d'erreurs suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 &= x - y \\ e_2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \Omega^2 \\ e_3 &= \theta - \theta_d \end{aligned} \quad (2.31)$$

les surfaces de glissement S_i sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_2 &= e_2 \\ S_3 &= \dot{e}_3 + \lambda_3 e_3 \end{aligned} \quad (2.32)$$

nous définissons maintenant les dynamiques en boucle fermée sur les trois surfaces :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 + W_1 \text{sign} S_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 + W_2 \text{sign} S_2 &= 0 \\ \ddot{e}_3 + \lambda_3 \dot{e}_3 + W_3 \text{sign} S_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Les expressions des composantes du régulateur multi variable sont déduites des expressions (2.23), (2.24) et (2.25), comme déjà vu précédemment, nous obtenons donc de (2.33) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \\ \ddot{y} = \ddot{x} + \lambda(\dot{x} - \dot{y}) + W_1\text{sign}(S_1) \end{cases} \quad (2.34)$$

puis, en substituant dans (2.23), (2.24) et (2.25) nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\left(\frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \right) \cos \theta + \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &+ \tan \theta \left(\left(\frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \right) + \lambda(\dot{x} - \dot{y}) \right) \\ &+ W_1 \text{sign}(S_1) \cos \theta - \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta - \left(\frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \right) \sin \theta - \dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \\ v_2 &= \left(\left(\frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \right) + \lambda(\dot{x} - \dot{y}) + W_1 \text{sign}(S_1) \right) \cos \theta \\ &- \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta - \left(\frac{-2\lambda(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2) - 2W_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - W_2\text{sign}(S_2)}{2(\dot{x} + \dot{y})} \right) \sin \theta - \dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \\ v_3 &= -\lambda_3 \dot{\theta} - W_3 \text{sign} S_3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

2. La poursuite d'un cercle

Après la régulation et la poursuite de la droite, Nous voulons maintenant faire suivre une trajectoire circulaire au robot, le rayon du cercle étant égale à 10m, et l'orientation du robot (θ) doit elle aussi faire un tour (i.e. 2π) pendant que le robot effectue un tour complet du cercle. En d'autres termes, nous voulons simuler le mouvement de la terre autour du soleil et autour d'elle-même. Où le robot serait la terre, quant au soleil, et bien, il sera positionné au centre du cercle. Mais à la différence que le robot va faire seulement un tour autour de lui-même contre 365 pour la terre. Les équations du cercle seront présentées dans le prochain paragraphe.

Pour ce faire, nous procédons comme dans les deux premières études, nous définissons tout d'abord les variables d'erreurs :

$$\begin{aligned} e_1 &= x - x_d \\ e_2 &= y - y_d \\ e_3 &= \theta - \theta_d \end{aligned} \tag{2.36}$$

puis, les surfaces de glissement seront :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_2 &= \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2 \\ S_3 &= \dot{e}_3 + \lambda_3 e_3 \end{aligned} \tag{2.37}$$

enfin, les dynamiques en boucle fermée sur les surfaces seront :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 + W_1 \text{sign} S_1 &= 0 \\ \ddot{e}_2 + \lambda_2 \dot{e}_2 + W_2 \text{sign} S_2 &= 0 \\ \ddot{e}_3 + \lambda_3 \dot{e}_3 + W_3 \text{sign} S_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Nous tirons maintenant les expressions des variables de commande, et qui sont déduites des équations (2.23), (2.24) et (2.25), mais après avoir substituer les dérivées de plus haut ordre par leurs expressions qui sont tirées de (2.38), c'est-à-dire :

De (2.38) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_d - \lambda_1 (\dot{x} - \dot{x}_d) - W_1 \text{sign}(S_1) \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_d - \lambda_2 (\dot{y} - \dot{y}_d) - W_2 \text{sign}(S_2) \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_d - \lambda_3 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - W_3 \text{sign}(S_3) \end{aligned}$$

puis :

$$v_1 = \frac{(\ddot{x}_d - \lambda_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - W_1 \text{sign}(S_1)) \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$+ \tan \theta ((\ddot{y}_d - \lambda_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - W_2 \text{sign}(S_2)) \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - (\ddot{x}_d - \lambda_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - W_1 \text{sign}(S_1)) \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$v_2 = (\ddot{y}_d - \lambda_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - W_2 \text{sign}(S_2)) \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - (\ddot{x}_d - \lambda_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - W_1 \text{sign}(S_1)) \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$v_3 = \ddot{\theta}_d - \lambda_3(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - W_3 \text{sign}(S_3)$$

b). Simulations et résultats

Afin de valider la commande par mode de glissement, nous procédons à une série de simulations qui sont :

- **cas de la régulation**

Soit le vecteur d'état $X = [x, y, \theta, \eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$, prenons comme état initial $X(t_0) = [0, 0, 0, 1, 1, 1]^T$ pour le premier essai, et $X(t_0) = [5, 0, 0, 1, 1, 1]^T$ pour le second.

Les figures (2.8) et (2.9) représentent l'évolution des variables caractérisant le système (erreurs de position, vitesses des sorties, surfaces de glissement et entrées de commande) en fonction du temps. Ceci afin d'atteindre le point final de coordonnées $[x_d, y_d, \theta_d] = [2.5, 2, \pi]$. Il est à noter que ces essais ont été accomplis avec les valeurs suivantes de $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, W_1, W_2, W_3] = [6, 11, 6, 10, 10, 10]$.

A l'issue de ces deux essais, nous constatons une bonne convergence du système qui s'est déroulée en temps fini. Quant aux erreurs de position, et bien, elles sont de l'ordre de 0.05% ; chose qui est très acceptable. Nous remarquons aussi une bonne atténuation du chattering.

- **cas de la poursuite d'une droite**

Là aussi, deux essais seront effectués pour la poursuite d'une droite d'équation $y=x$, avec une vitesse linéaire $\Omega = 1m/s$, et une orientation désirée $\theta_d = \pi/5$.

Les figures (2.10) et (2.11) montrent également l'évolution des variables caractérisant le système (vitesses, surfaces de glissement et commandes) en

fonction du temps, ainsi que la représentation des coordonnées cartésiennes du robot dans le plan du mouvement ; i.e. $y=f(x)$.

Ces essais ont été établis pour deux valeurs du point de départ initial, i.e. $X(t_0) = [0,2,0,1,1,1]^T$ pour l'essai (fig.2.10) et $X(t_0) = [5,0,0,1,1,1]^T$ pour le second essai (fig.2.11), notons aussi que les valeurs de $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, W_1, W_2, W_3]$ sont égales à $[10,1,1,1,1]$.

En nous appuyant sur ces résultats, nous pouvons affirmer que les performances de la poursuite de la droite sont très satisfaisantes, et ceci malgré l'écart initial entre la position du robot et la trajectoire désirée (2m pour le premier essai et 5m pour le second). Les commandes ont atteint un seuil maximum de 15m/s^2 ($=1.5g$) puis elles sont redescendues vers les 5m/s^2 ce qui représente des accélérations physiquement réalisables, et là nous constatons aussi que l'effet du chattering a été bien atténué.

- **cas de la poursuite du cercle**

La trajectoire imposée ici, est un cercle de centre A (0,0) et de rayon $r=10\text{m}$, dont les équations cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x_d = 10 \sin\left(\frac{\pi}{7.2}t\right) \\ y_d = 10 \cos\left(\frac{\pi}{7.2}t\right) \end{cases}$$

Le robot doit aussi effectuer un tour autour de lui-même avec une vitesse angulaire Ω égale elle aussi à $\left(\frac{\pi}{7.2}\text{rad/s}\right)$.

Les figures (2.12) et (2.13) donnent l'évolution des états du robot pour deux points de départ, en l'occurrence $X(t_0) = [2,11,0,1,1,1]^T$ (fig.2.12) et $X(t_0) = [1,8,0,1,1,1]^T$ (fig.2.13). Ces simulations ont été faites pour $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, W_1, W_2, W_3] = [5,5,5,10,10,5]$.

En se référant aux résultats précédents, Nous remarquons une convergence assez rapide (dans les deux premières secondes), et aussi une poursuite très satisfaisantes, ainsi que pour l'orientation. Le profil de vitesse et lui aussi très acceptables. Et l'effet du chattering est bien atténué là aussi, mais les commandes restent assez énergétiques comme même.

La commande du robot de type (2,0) fera l'objet du prochain paragraphe.

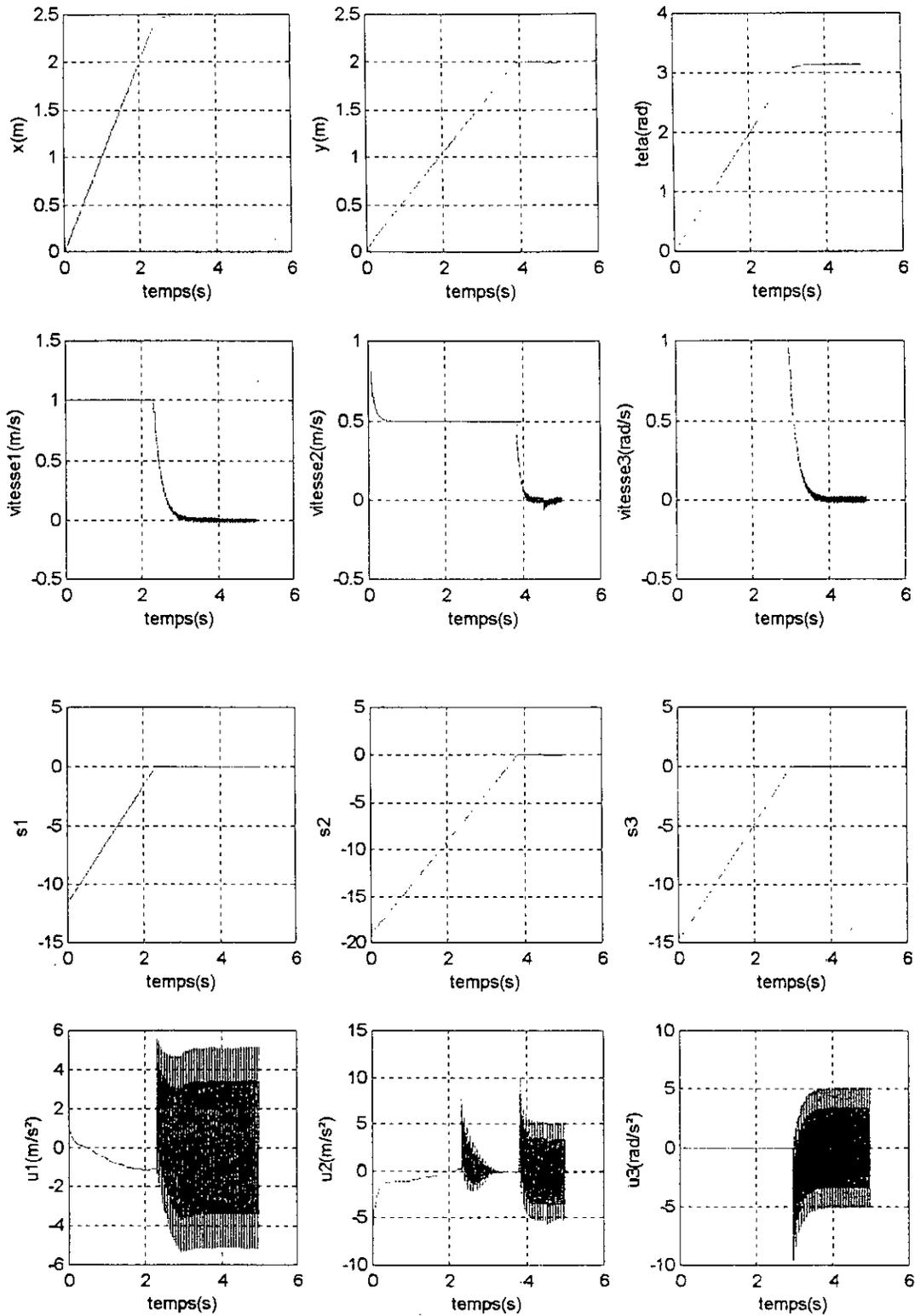


Fig 2.8. robot type(3,0) en régulation, essai 1 initialisé à [0 0 0 1 1 1]

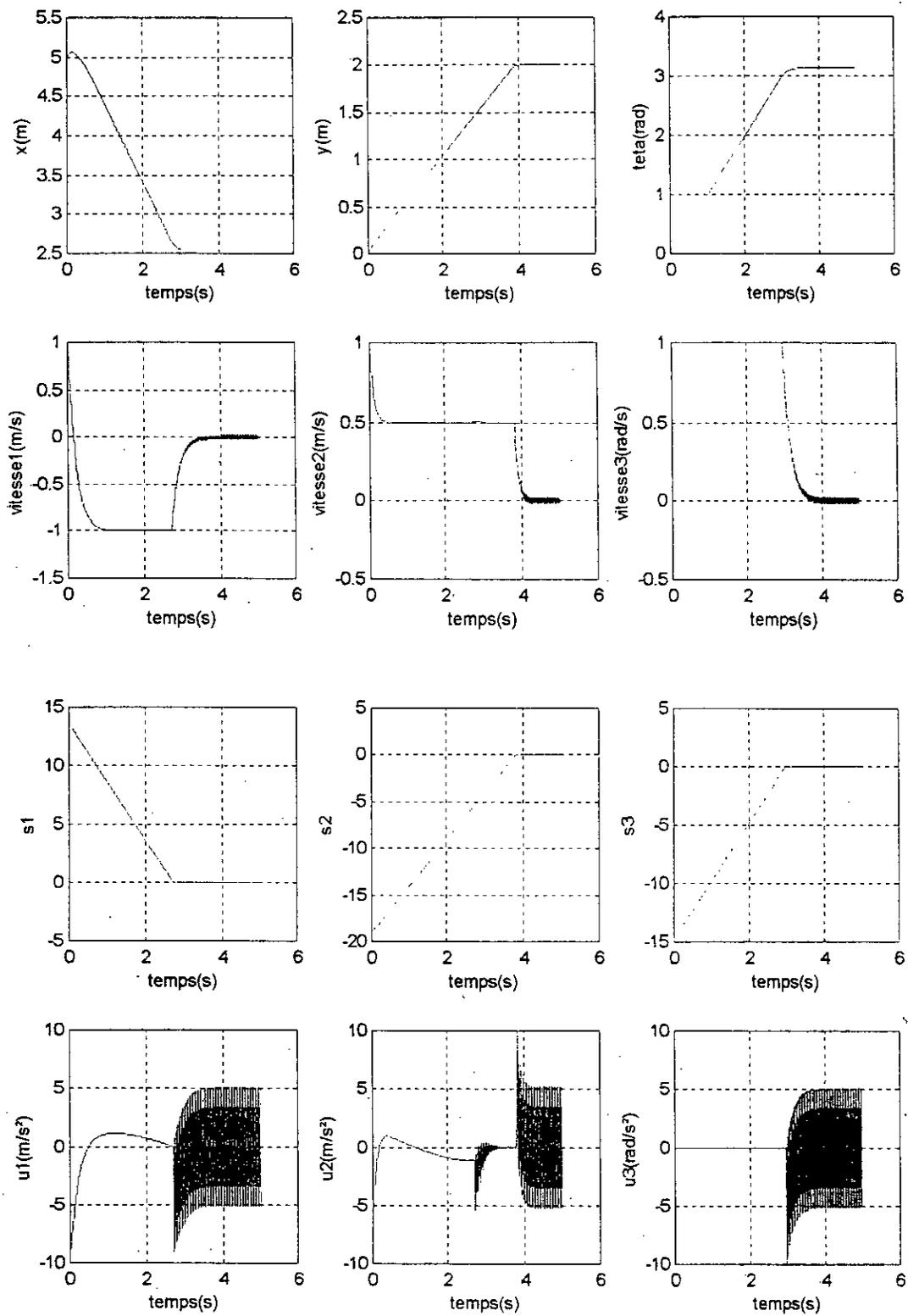


Fig.2.9. robot type(3,0) en régulation, essai2
initialisé à [5 0 0 1 1 1]

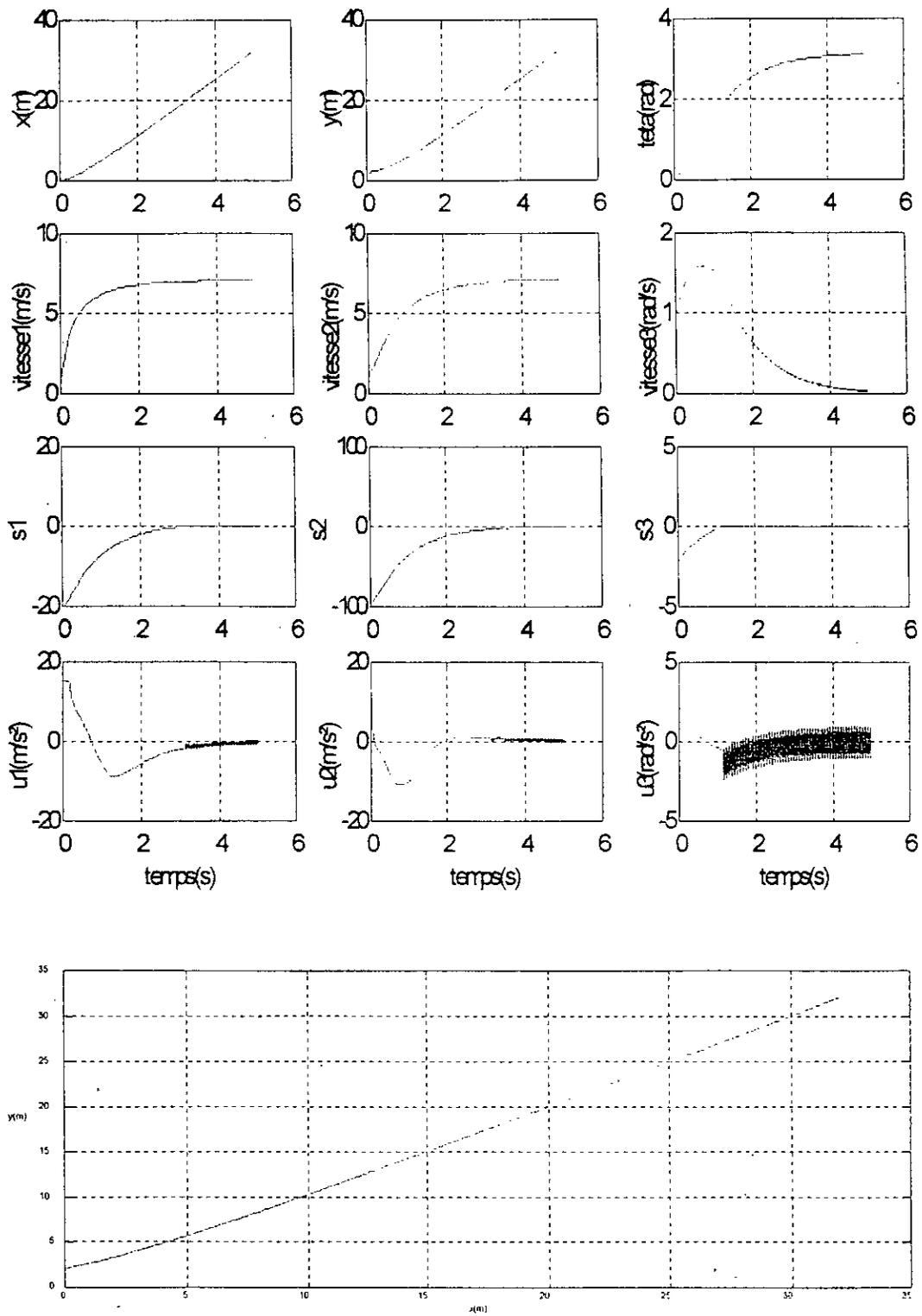


Fig.2.10. robot type(3,0) en poursuite d'une droite, essai initialisé à [0 2 0 1 1 1]

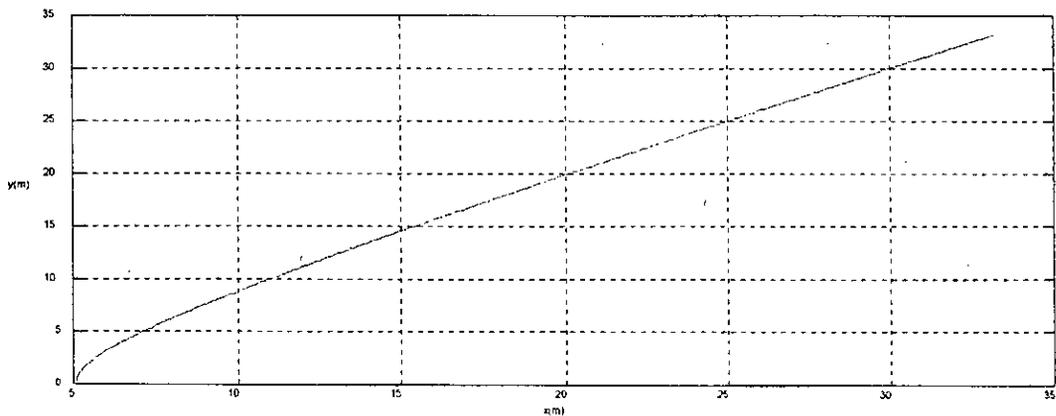
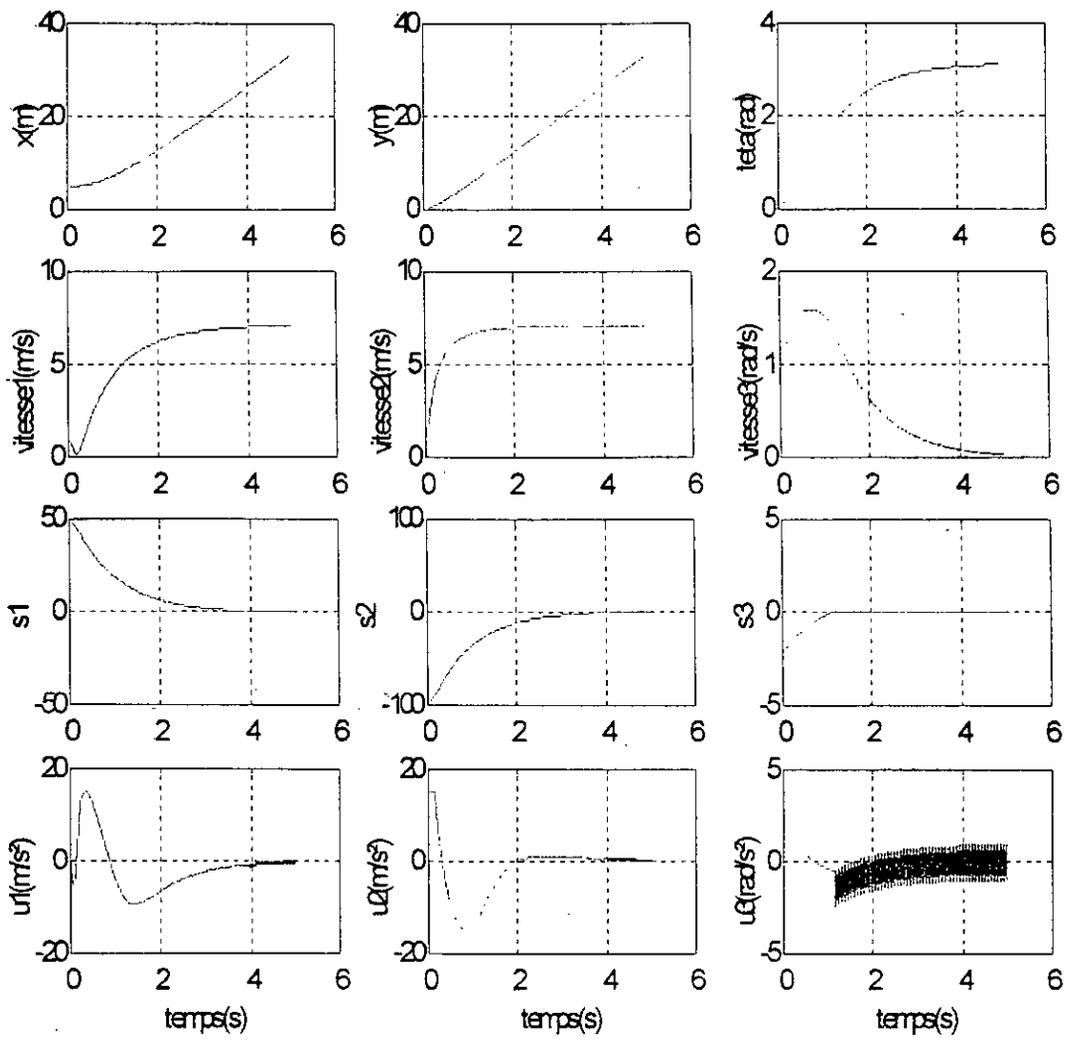


Fig.2.11. robot type(3,0) en poursuite d'une droite, essai2 initialisé à [5 0 0 1 1 1]

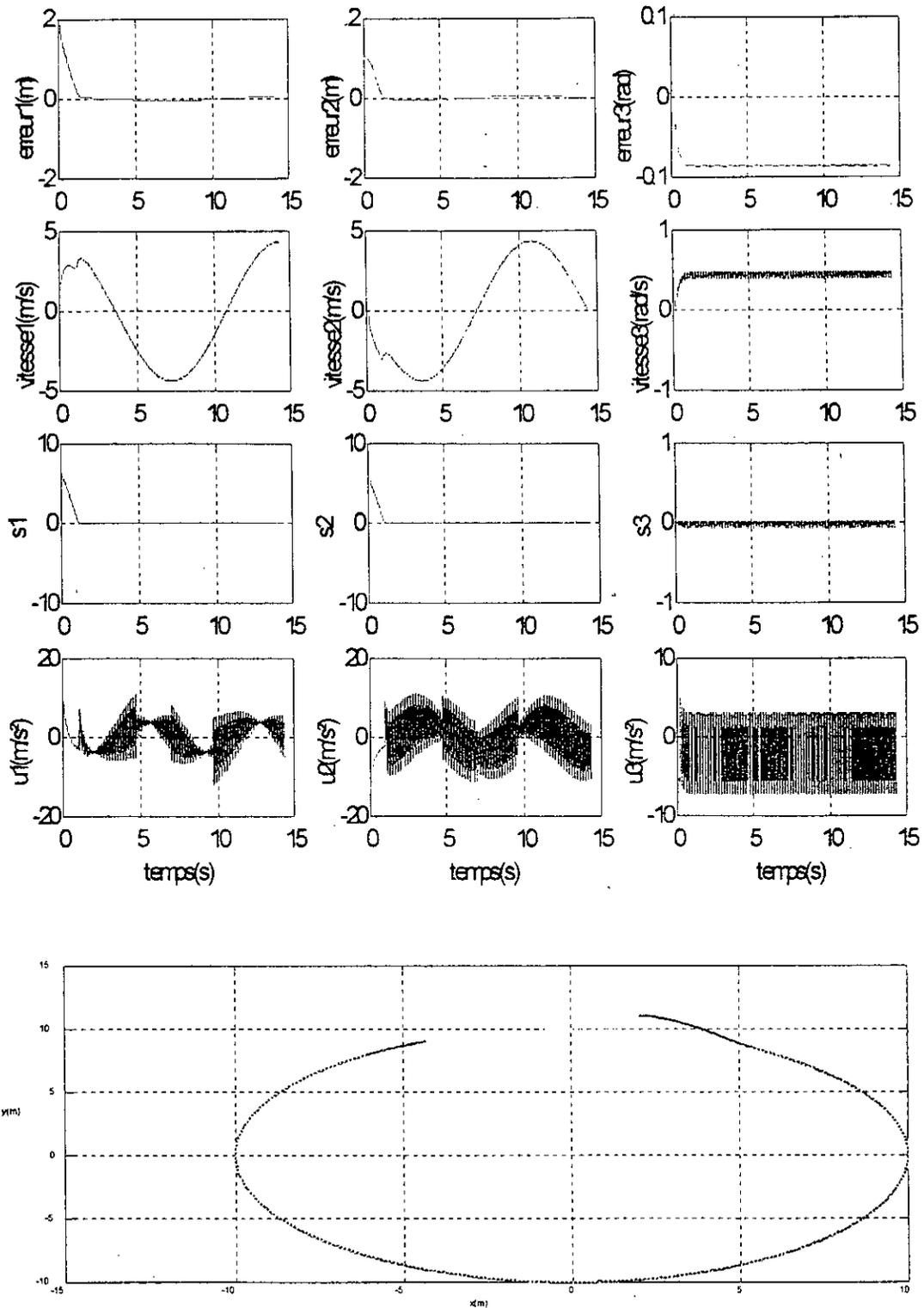


Fig.2.12. robot type(3,0) en poursuite d'un cercle, essai 1 initialisé à $[2 \ 11 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$

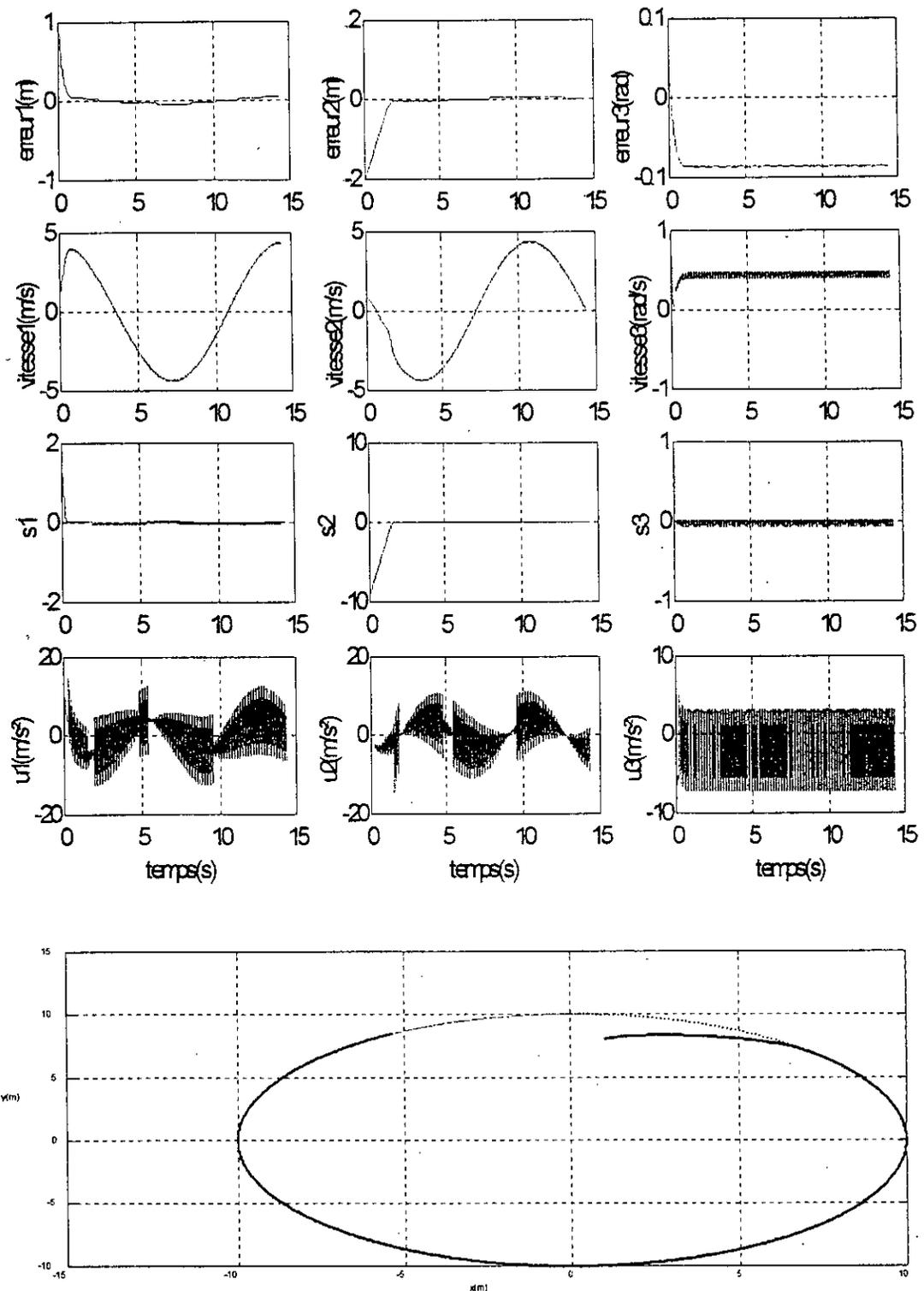


Fig.2.13. robot type(3,0) en poursuite d'un cercle, essai2
initialisé à [1 8 0 1 1 1]

2.3.3 Commande du robot mobile de type (2,0)

C'est un robot à mobilité réduite, ceci est dû à l'existence d'une ou de plusieurs roues centrées fixes. Son modèle cinématique est donné par [17]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\eta_1 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \cos \theta \\ \dot{\theta} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

avec x, y représentent la position du robot, et θ son orientation.

η_1 est la vitesse linéaire.

η_2 est la vitesse angulaire.

Et les entrées de commande v_1, v_2 représentent respectivement l'accélération linéaire et celle angulaire. Mais pour avoir un système différentiellement plat nous ajoutons une intégration à l'entrée v_1 , et le modèle étendu sera :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\eta_1 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \cos \theta \\ \dot{\theta} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = u_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

avec u_1 et v_2 comme nouvelles entrées de commande.

Nous remarquons que ce robot possède seulement deux entrées de commandes contre trois sorties à commander. Ceci montre clairement qu'il est moins contrôlable que le type (3,0); mais nous nous contentons, dans notre exposé de ne commander que deux sorties (x, y) et de stabiliser seulement l'orientation du robot θ .

Grâce à la propriété de différentialité plate [27] du robot mobile type (2,0), nous pouvons tirer les variables θ, η_1, η_2 et v_1, v_2, u_1 en fonction de $x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$, le résultat est le suivant :

$$\theta = -\arctg\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\eta_2 = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$v_1 = \dot{\eta}_1 = \frac{\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$v_2 = \dot{\eta}_2 = \frac{(\dot{x}y^{(3)} - \dot{y}x^{(3)})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \quad (2.41)$$

$$u_1 = \dot{v}_1 = \frac{(\ddot{x}^2 + \dot{x}x^{(3)} + \dot{y}y^{(3)})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y})^2}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \quad (2.42)$$

a). Calcul des lois de commandes pour les différents modes de fonctionnements

- **La régulation**

Comme nous l'avons fait pour le robot mobile type (3,0), nous voulons toujours implémenter une loi de commande à structure variable afin que le robot type (2,0) atteigne un point de coordonnées préétablies et ceci en partant d'un point initial quelconque du plan de mouvement.

Pour se faire, nous définissons les variables suivantes qui représentent les erreurs entre la position actuelle du robot et la consigne (i.e. le point de référence).

$$\begin{aligned} e_1 &= x - x_d \\ e_2 &= y - y_d \end{aligned} \quad (2.43)$$

les surfaces de glissement S_i sont définies tel que :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_1 + B\dot{e}_1 + L_1e_1 \\ S_2 &= \dot{e}_2 + L_2e_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nous définissons maintenant les dynamiques en boucle fermée sur les deux surfaces :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + B_1\ddot{e}_1 + L_1\dot{e}_1 + w_1\text{sign}(S_1) &= 0 \\ \ddot{e}_2 + B_2\ddot{e}_2 + L_2\dot{e}_2 + w_2\text{sign}(S_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

donc, les relations (2.45) sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -W_1\text{sign}S_1 \\ \dot{S}_2 &= -W_2\text{sign}S_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ceci montre bien que les conditions d'existence du glissement sont satisfaites pour les deux surfaces, i.e. :

$$S_i \cdot \dot{S}_i = -W_i |S_i| < 0; \text{ avec } i=1,2.$$

Et donc, lorsque S_1, S_2 tendent vers zéro, il est évident que e_1, e_2 convergent aussi asymptotiquement vers zéro suivant des dynamiques définies par les coefficients : B_1, B_2, L_1, L_2 .

Les expressions des composantes du régulateur multivariable sont déduites des expressions (2.41) et (2.42) mais après la substitution des dérivés de plus grand ordre de x et y obtenues par (2.45)[18], i.e. :

De (2.45), nous avons :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -B_1\ddot{x} - L_1\dot{x} - w_1\text{sign}(S_1) \\ \ddot{y} &= -B_2\ddot{y} - L_2\dot{y} - w_2\text{sign}(S_2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

en substituant dans (2.41) et (2.42) nous obtiendrons :

$$v_2 = \frac{(\dot{x}(-B_2\ddot{y} - L_2\dot{y} - w_2\text{sign}(S_2)) - \dot{y}(-B_1\ddot{x} - L_1\dot{x} - w_1\text{sign}(S_1)))(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$$

$$u_1 = \dot{v}_1 = \frac{(\ddot{x}^2 + \dot{x}(-B_1\ddot{x} - L_1\dot{x} - w_1\text{sign}(S_1)) + \dot{y}(-B_2\ddot{y} - L_2\dot{y} - w_2\text{sign}(S_2)))(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})^2}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

- **Poursuite d'une droite**

Comme pour le robot type (3,0), nous désirons calculer une loi de commande par mode de glissement afin de permettre au robot de suivre une droite d'équation $y = x$.

les variables d'erreurs de position et de vitesse sont:

$$\begin{aligned} e_1 &= x - y \\ e_2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

quant aux surfaces de glissements, elles sont définies comme suit :

$$S_1 = \ddot{e}_1 + B\dot{e}_1 + L_1 e_1 \quad (2.49)$$

$$S_2 = \dot{e}_2 + L_2 e_2$$

nous posons maintenant les dynamiques des surfaces en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + B\dot{e}_1 + L_1 e_1 + w_1 \text{sign}(S_1) &= 0 \\ \dot{e}_2 + L_2 e_2 + w_2 \text{sign}(S_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

puis nous calculons les dérivées de x, y de plus grand ordre, i.e. \ddot{x}, \ddot{y} en utilisant(2.50) :

$$\ddot{x} - \ddot{y} + B(\dot{x} - \dot{y}) + L_1(x - y) + w_1 \text{sign}(S_1) = 0$$

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L_2(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}) + 0.5w_2 \text{sign}(S_2) = 0$$

ce qui implique que :

$$\ddot{x} = \frac{-\dot{y}\dot{y}(L_2 - B) - \dot{x}(L_2\dot{x} + B\dot{y}) - L_1\dot{x}\dot{y} + L_1\dot{y}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - w_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - 0.5w_2\text{sign}(S_2)}{\dot{x} + \dot{y}}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{-\dot{y}\dot{y}(L_2 - B) - \dot{x}(L_2\dot{x} + B\dot{y}) - L_1\dot{x}\dot{y} + L_1\dot{y}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - w_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - 0.5w_2\text{sign}(S_2)}{\dot{x} + \dot{y}} \\ &+ B(\dot{x} - \dot{y}) + L_1(x - y) + w_1 \text{sign}(S_1) \end{aligned}$$

puis en remplaçons ces dernières expressions dans (2.41) et (2.42), nous aboutissons aux expressions des commandes à implémenter, i.e. :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(\dot{x}\dot{y}) - \dot{y} \left(\frac{-\dot{y}\dot{y}(L_2 - B) - \dot{x}(L_2\dot{x} + B\dot{y}) - L_1\dot{x}\dot{y} + L_1\dot{y}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - w_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - 0.5w_2\text{sign}(S_2)}{\dot{x} + \dot{y}} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \\ &+ \frac{2(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{(\ddot{x}^2 + \dot{x}(-\ddot{y}(L_2 - B) - \dot{x}(L_2\dot{x} + B\dot{y}) - L_1\dot{x}\dot{y} + L_1\dot{y}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - w_1\dot{y}\text{sign}(S_1) - 0.5w_2\text{sign}(S_2)) + \dot{y}^3)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} - \frac{(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})^2}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

- **Poursuite d'un cercle**

Nous voulons maintenant, calculer une loi de commande de type VSC qui permet au robot de suivre une trajectoire circulaire de rayon égal à 10m. La procédure de calcul est la suivante :

définition des variables d'erreurs :

$$\begin{aligned} e_1 &= x - x_d \\ e_2 &= y - y_d \end{aligned} \quad (2.51)$$

définition surfaces de glissements :

$$\begin{aligned} S_1 &= \ddot{e}_1 + B_1\dot{e}_1 + L_1e_1 \\ S_2 &= \ddot{e}_2 + B_2\dot{e}_2 + L_2e_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

définition des dynamiques des surfaces en boucles fermée :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + B_1\dot{e}_1 + L_1e_1 + w_1\text{sign}(S_1) &= 0 \\ \ddot{e}_2 + B_2\dot{e}_2 + L_2e_2 + w_2\text{sign}(S_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

calcul des dérivées de x, y de plus grand ordre, i.e. \ddot{x}, \ddot{y} en utilisant (2.53) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_d - B_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - L_1(x - x_d) - w_1\text{sign}(S_1) \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_d - B_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - L_2(y - y_d) - w_2\text{sign}(S_2) \end{aligned}$$

en remplaçons ces dernières expressions dans (2.41) et (2.42), nous aboutissons aux expressions des commandes à implémenter, i.e. :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(\dot{x}(\ddot{y}_d - B_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - L_2(y - y_d) - w_2\text{sign}(S_2)) - \dot{y}(\ddot{x}_d - B_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - L_1(x - x_d) - w_1\text{sign}(S_1)))(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \\ u_1 &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{x}(\ddot{x}_d - B_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - L_1(x - x_d) - w_1\text{sign}(S_1)) + \dot{y}(\ddot{y}_d - B_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - L_2(y - y_d) - w_2\text{sign}(S_2)))(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})^2}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \end{aligned}$$

b). Simulations

Nous effectuons là aussi deux essais pour la régulation (la position désirée est $[x_0, y_0] = [1, 1]$), mais nous nous contenterons d'un seul pour la poursuite de la droite et du cercle.

Les résultats sont illustrés par les figures (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17).

c). Interprétation des résultats

Nous confirmons là aussi les bons points de la commande par modes de glissements ; i.e. convergence rapide et en temps fini, bonne performances et réponses très acceptables, absence d'oscillations et de dépassements mais sans pour autant augmenter le temps de réponse. Erreurs de poursuite et de position très faibles. Bonne atténuation de l'effet du chattering.

Sans oublier pour autant les mauvais points qui se résument dans le fait que les commandes sont discontinues et basculent très rapidement d'un état vers l'autre, ceci peut occasionner l'affaiblissement des performances des actionneurs, aussi la commande est assez coûteuse en énergie.

Une des caractéristiques de la commande par mode de glissement est bien sûr, sa grande capacité à garantir la robustesse des systèmes mal identifiés et très bruités, cette étude fera l'objet de la partie suivante.

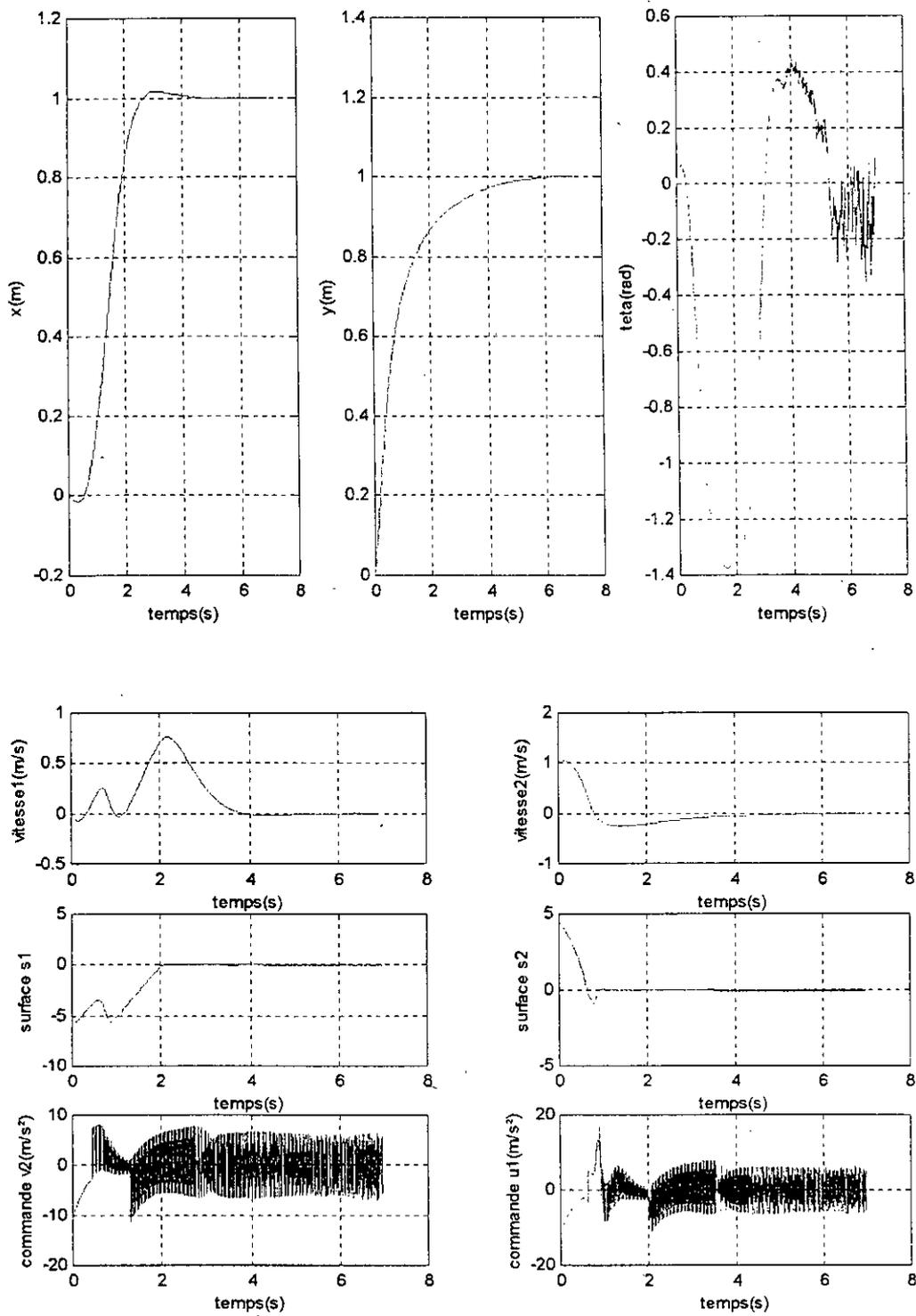


Fig.2.14. robot type(2,0) en régulation, essai1 initialisé à [0 0 0 1 1 1]

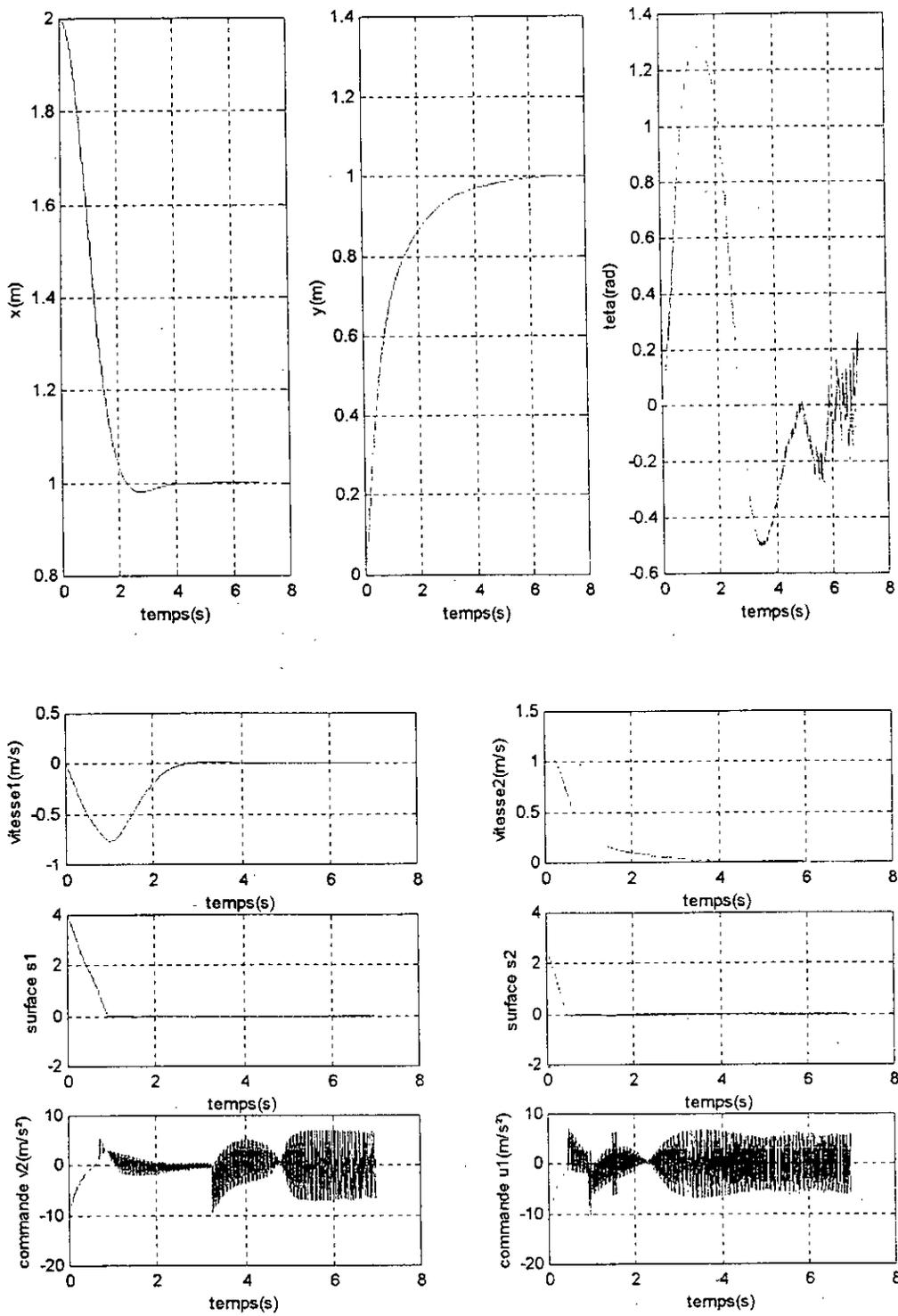


Fig.2.15. robot type(2,0) en régulation, essai2 initialisé à [2 0 0 1 1 1]

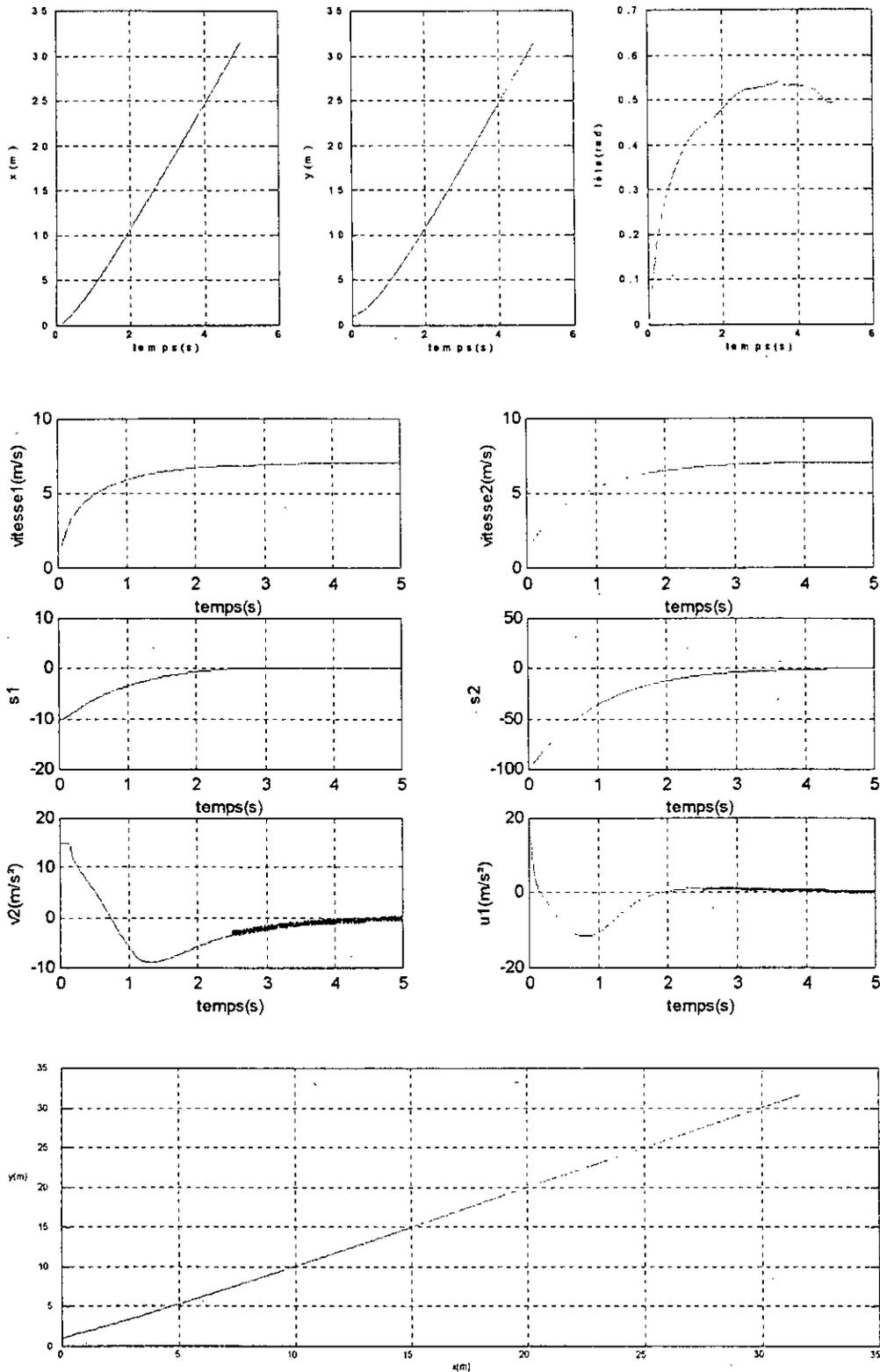


Fig.2.16. robot type(2,0) en poursuite d'une droite, initialisé à [0 1 0 1 1 1]

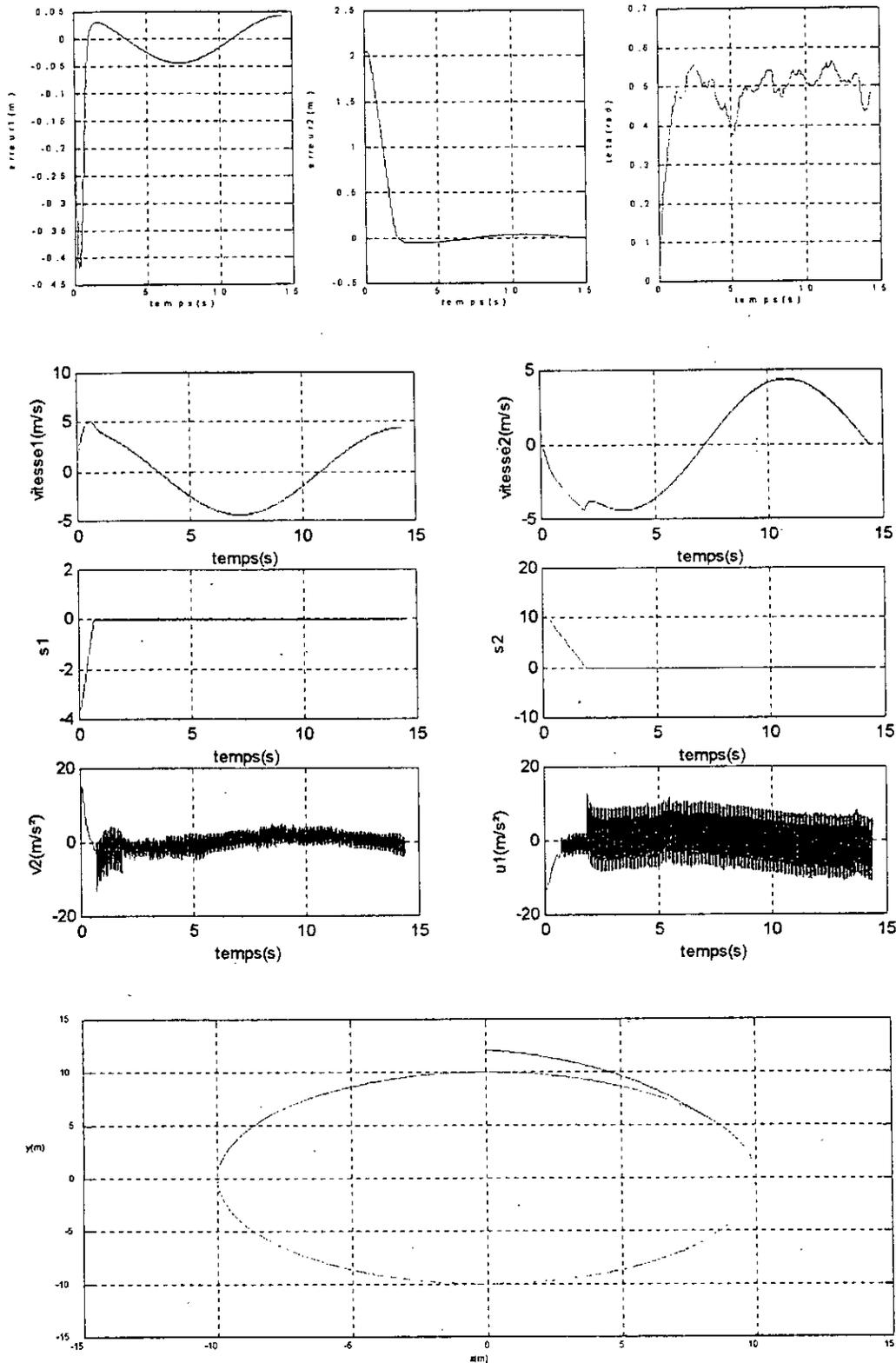


Fig.2.17. robot type(2,0) en poursuite d'un cercle, initialisé à [0 12 0 1 1 1]

2.3.4 Etude de la robustesse

Ce paragraphe traite l'effet de la prise en considération des erreurs de modélisation ainsi que les perturbations que le système subit dans son environnement de fonctionnement.

La perturbation sera représentée par un échelon d'amplitude variable (nous verrons plus tard comment son amplitude sera calculée) et qui prend effet à l'instant $(D/3)$, avec D étant la durée totale de la simulation.

Approfondissons un peu plus la chose ; les modèles perturbés des deux robots seront comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \theta - \eta_2 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta + P \\ \dot{\theta} = \eta_3 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \\ \dot{\eta}_3 = v_3 \end{cases} \quad \text{pour le robot de type (3,0)}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = -\eta_1 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \cos \theta + P \\ \dot{\theta} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \end{cases} \quad \text{pour le robot de type (2,0)}$$

$$\text{avec : } P = \begin{cases} 0; & 0 \leq t \leq D/3 \\ z * \text{moyenne}(|\dot{y}(t)|_{0 < t < D/3}); & D/3 < t \leq D \end{cases}$$

Nous allons donc faire augmenter le coefficient z , i.e. augmenter l'effet de la perturbation puis visualiser les réponses du système correspondantes.

Les simulations seront faites dans le cas d'une poursuite d'un cercle pour le robot de type (3,0) (fig.2.18), et celle d'une droite pour le robot de type (2,0) (fig.2.20). Les figures (fig.2.19) et (fig.2.21) montrent l'évolution des caractéristiques du système (vitesses, surfaces et commandes) pour la plus grande valeur du coefficient z .

En nous référant à ces résultats, Nous constatons une très bonne conservation de la stabilité et des performances, malgré les fortes valeurs de z , et ceci est observé pour les deux robots.

Il faut aussi noter que les commandes engendrées sont très admissibles et satisfaisantes.

Cette étude nous permet de confirmer les très bonnes performances de la commande par mode de glissement en robustesse.

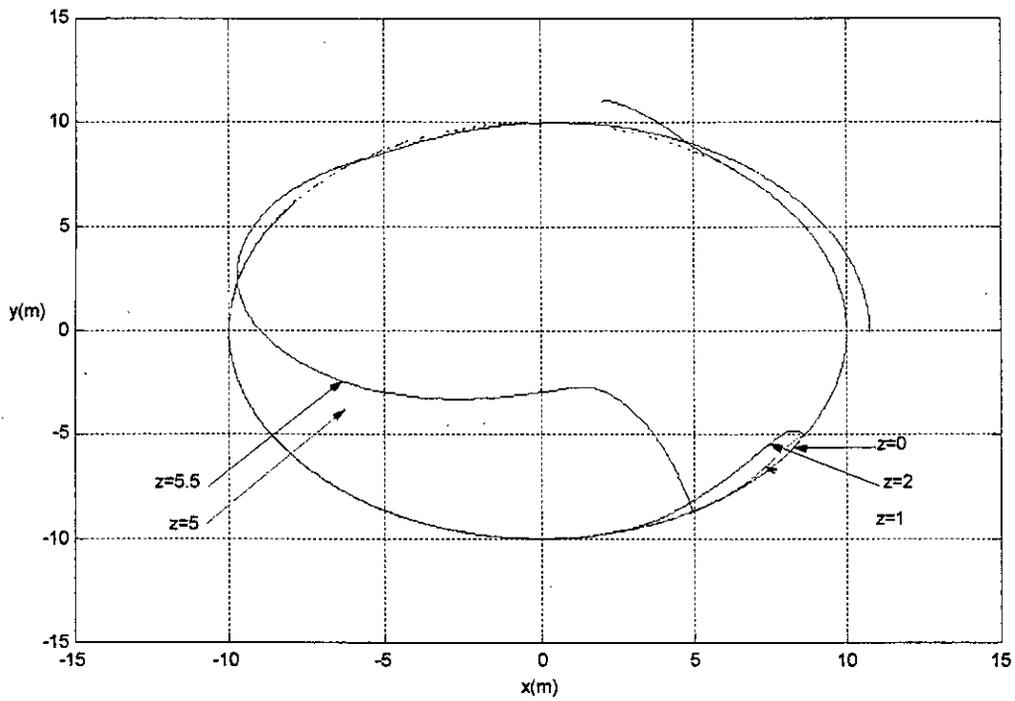


Fig.2.18. robot type(3,0) test de robustesse

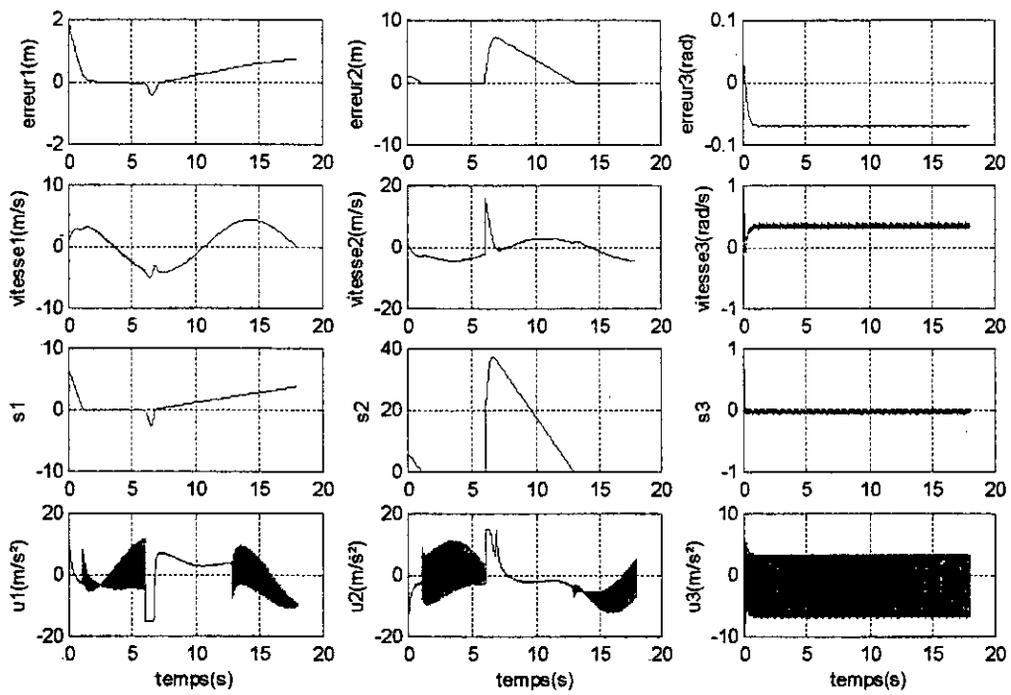


Fig.2.19. robot type (3,0), essai pour $z=5.5$

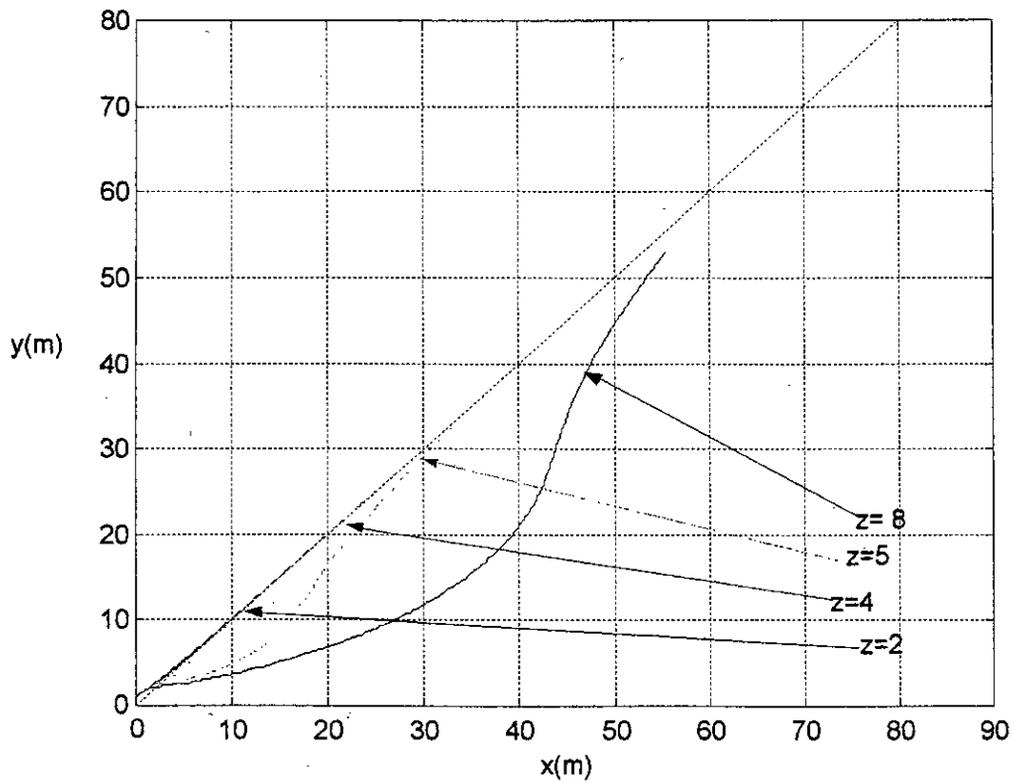


Fig.2.20. robot type (2,0), test de robustesse

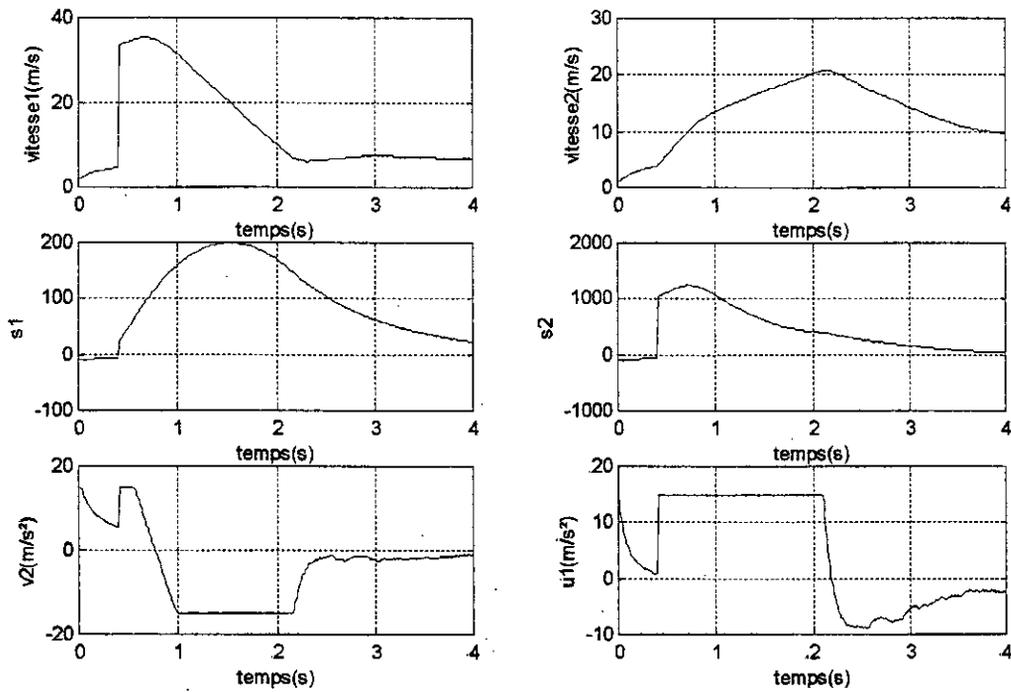


Fig.2.21. robot type (2,0), essai pour z=8

2.4 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre la manière de synthétiser une loi de commande par mode de glissement continu, et nous l'avons appliquée à deux types de robots mobiles, i.e. le (3,0) et le (2,0). Puis nous avons effectué une série de simulations qui visent à appréhender le comportement des deux robots dans les deux modes de fonctionnement, i.e. régulation et poursuite (d'une droite et d'un cercle). Enfin, pour faire le lien avec le monde réel, nous avons effectué une étude de robustesse pour bien analyser les capacités de la commande à assurer la stabilité et les performances au système perturbé.

Les résultats obtenus prouvent que la commande par mode de glissement continue permet d'avoir des convergences rapides, des performances très acceptables (i.e. erreurs statiques nulles, faibles erreurs de poursuites, réponses rapides et non oscillatoires) et aussi une grande robustesse vis-à-vis des imperfections de modélisations et autres perturbations dues à l'environnement du robot. Sans oublier que la commande est assez gourmande en énergie.

Ceci étant dit pour le cas continu. Nous essayons de nous intéresser au cas de la commande par mode de glissement discret dans notre prochain chapitre.

Chapitre 3

Modes Glissants Discrets

3.1 Introduction

Dans l'implémentation de la commande par mode de glissement discret, l'organe de commutation est remplacé par un calculateur qui fait varier la structure du système à des instants discrets, ceci est évidemment différent du cas continu où les commutations sont exécutées à n'importe quel instant ; i.e. dès que la trajectoire d'état traverse la surface de glissement.

En conséquence à cela, un régime glissant non idéal apparaît, ce dernier est de nature différente comparé à celui apparaissant en régime glissant continu et qui est dû à l'imperfection et les retards engendrés par les composants de commutation .

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les modes glissants discrets, de définir les conditions d'existence et de convergence du régime glissant. Puis nous allons appliquer cela à un robot mobile de type (3.0), qui sera désormais commandé par un calculateur numérique. Une série de simulations sera faite dans le cas de la régulation et la poursuite des trajectoires.

Enfin, nous illustrons les avantages et inconvénients de la commande glissante discrète, et ceci en comparant les performances engendrées par les deux types de commande (continue et discrète) appliquées au robot mobile de type (3.0).

3.2 Fondements Théoriques

3.2.1 Formulation discrète d'un système continu

Considérons le système continu suivant :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + D v(t) \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, (A, B) étant une paire commandable et $v(t)$ étant la perturbation.

La discrétisation de ce système avec une période d'échantillonnage T sera :

$$x((k+1)T) = F(kT) . x(kT) + G(kT) . u(kT) + H(kT) . v(kT) \quad (3.2)$$

avec les nouvelles matrices F, G, H qui sont directement déductible des matrices A, B, D .

3.2.2 Conditions d'existence du régime glissant discret

Comme nous avons pu le voir précédemment, la condition nécessaire et suffisante d'existence du régime glissant dans le cas continu est la suivante[70] :

$$S(x) . \dot{S}(x) < 0 \quad (3.3)$$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour l'existence du régime glissant discret, et pour cause, prenons l'exemple suivant :

Soit

$$S(k) = \tau(-2)^k \quad (3.4)$$

avec $\tau > 0$

$$\text{donc ; } \dot{S}(k) = -2\tau(-2)^k \quad (3.5)$$

Ce qui implique que $S(k) . \dot{S}(k) < 0$ et ceci $\forall k > 0$.

Mais en réalité $S(k)$ diverge lorsque $k \rightarrow \infty$.

Cependant, nous remarquons que la condition (3.3) assure que les points $S(k)$ se dirigent toujours vers $S(k)=0$, mais elle ne garantit pas que $|S(k)|$ soit décroissant.

Pour y remédier ; nous définissons une fonction de Lyapunov discrète [41] :

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^2 \quad (3.5)$$

La dérivée temporelle de cette fonction peut être approximée par :

$$dV_k = \frac{V_{k+1} - V_k}{T} \quad (3.6)$$

avec T étant la période d'échantillonnage.

Nous avons aussi :

$$dS_k = \frac{S_{k+1} - S_k}{T} \quad (3.7)$$

la loi de commande stabilisant (3.1) doit satisfaire :

$dV_k < 0 \Rightarrow V_{k+1} - V_k < 0$ et par conséquent :

$$\frac{1}{2} (S_{k+1})^2 < \frac{1}{2} (S_k)^2 \quad (3.8)$$

$$\text{si on prend : } \Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k \quad (3.9)$$

on aura

$$(S_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k \Delta S_{k+1} + (\Delta S_{k+1})^2 \quad (3.10)$$

et l'inéquation (3.9) peut être réécrite comme suit :

$$|S(k+1)| < |S(k)| \quad (3.11)$$

Cette double inéquation constitue la condition nécessaire et suffisante d'existence du régime glissant discret.

Elle est aussi équivalente à ces deux inéquations :

$$[S(k+1) - S(k)] \text{sign}(S(k)) < 0 \quad (3.12a)$$

$$[S(k+1) - S(k)] \text{sign}(S(k)) \geq 0 \quad (3.12b)$$

Remarque 1 La condition (3.12a) correspond exactement à la condition d'existence du régime glissant en continu, i.e. (3.3) ; en fait, la condition (3.12a) assure le mode quasi glissant sur la surface de glissement[61], on l'appelle la condition de glissement. Quant à (3.12b) qui elle, assure la convergence des trajectoires d'état vers la surface de glissement. Il est à noter aussi que si le système est initialisé en dehors de la région du mode glissant, la convergence de $|S(k)|$ vers zéro n'est pas garantie, par exemple ; si $S(k)=0,5+0,001^k$, on voit bien que $S(k)$ vérifié (3.11), Mais elle converge vers (0.5) malgré cela.

Afin de définir une condition globale de glissement nous nous referons à la condition générale proposée par Slotine dans le cas continu [62], et qui est :

$$S(t).\dot{S}(t) \leq -\eta|S(t)| \quad (3.13)$$

son approximation discrète est :

$$S_k.\Delta S_k < -T\eta|S_k| \quad (3.14)$$

Même dans le cas où la convergence de $|S(k)|$ vers zéro n'est pas vérifié.

Exemple Prenons $S_k = k(-1)^k (T\eta + 0.001)$

On a $|S_k| \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$, et ceci que S_k satisfait la relation (3.14).

Donc, pour assurer la convergence de $|S(k)|$ la condition suivante est proposée :

$$|\Delta S_k| < \sigma T \text{ pour tout } S_k \quad (3.15a)$$

$$S_k \Delta S_k < -\eta T |S_k| \text{ pour tout } |S_k| > \sigma T \quad (3.15b)$$

$$\text{avec } 0 < \eta < \sigma$$

la condition (3.15) est appelée condition d'existence du mode quasi glissant ; l'explication est que le point représentant l'évolution du système ne glisse pas parfaitement sur la surface, mais le mouvement est compris dans une bande définie par $|S_k| < 2\sigma T$.

Dans ce qui suit, trois théorèmes importants seront présentés [41] :

Théorème 1 Selon la condition (3.15a) ($\Delta S_k < \sigma T$) pour tout S_k

Si $|S_n| < \sigma T$ à l'instant $k = n$; donc :

$$S_n \cdot S_{n+1} > 0 \text{ et } S_n \cdot S_{n-1} > 0 \quad (3.16)$$

Théorème 2 Selon la condition (3.15a) et (3.15b)

Si : $|S_n| < \sigma T$ à l'instant $k = n$; donc :

$$|S_{k+1}| < |S_n| - nT \quad (3.17)$$

Théorème 3 Selon la condition (3.15a) et (3.16) : il existe un temps fini n tel que :

$$|S_k| < 2\sigma T \quad \text{pour tout } k \geq n. \quad (3.18)$$

3.2.3 Synthèse de la loi de commande par mode de glissement discret

Plusieurs contributions ont été fournies dans ce domaine, citons parmi elles : l'approche discrète de Lyapunov par Furuta [28], Sira ramirez [61].

Nous avons opté dans notre étude pour la technique de Gao [31], et qui se distingue des autres par le fait qu'elle ne fait pas appel à une expression analytique de la condition de glissement, cette dernière demande beaucoup de délicatesse pour déterminer la commande qui la satisfait, mais au contraire, dans cette technique, une dynamique de la surface de glissement en boucle fermée est d'abord posée, puis on tire directement l'expression de la commande. Cette méthode est l'équivalente discrète de la méthode utilisée au chapitre précédent (concernant les modes glissants en continu).

Rappelons que la commande par mode de glissement discrète doit satisfaire l'existence du mode quasi glissant, i.e. permettre à la trajectoire d'état du système de satisfaire les trois points suivants [31] :

1. partant d'un point initial quelconque, le point représentatif de l'évolution du système doit rejoindre et traverser la surface de glissement en un temps fini.

2. la première traversée de la surface de glissement doit être obligatoirement suivie d'une autre traversée de la même surface mais dans le sens contraire, et ceci doit se répéter pendant chaque période d'échantillonnage. Le mouvement résultant étant une sorte de zigzag autour de la surface de glissement.
3. l'amplitude du chaque zigzag ne doit jamais accroître, et ceci afin de garder toujours la trajectoire d'état dans une bande bien précise autour de la surface de glissement.

Considérons maintenant le système linéaire mono entrée discret suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.19)$$

où x est un vecteur de dimension n , A et B étant de dimensions $(n \times n)$ et $(n \times 1)$ respectivement.

Nous posons à présent la dynamique de la surface de glissement en boucle fermée qui est la suivante :

$$S(k+1) - S(k) = -qTS(k) - wT\text{sign}(S(k)) \quad (3.20)$$

$q, w > 0$, T étant la période d'échantillonnage

$$\text{et } 1 - qT > 0 \quad (3.21)$$

L'inéquation (3.21) permettant de satisfaire la troisième tâche citée au paragraphe précédent.

D'autre part, Nous définissons la surface de glissement qui est égale à :

$$S(k) = c^T x(k) \quad (3.22)$$

ce choix est de la sorte car la commande est synthétisée afin de stabiliser le système, mais nous verrons plus tard que tout cela est extensible pour permettre au système de poursuivre des trajectoires.

La relation (3.20) peut être réécrite comme suit :

$$c^T x(k+1) - c^T x(k) = -qTS(k) - wT\text{sign}(S(k)) \quad (3.23)$$

puis en utilisant la relation (3.19) nous aboutissons à :

$$c^T Ax(k) + c^T Bu(k) - c^T x(k) = -qTS(k) - wT\text{sign}(S(k))$$

d'où on tire l'expression de la commande :

$$u(k) = -(c^T B)^{-1} [c^T A x(k) - c^T x(k) + q T c^T x(k) + w T \text{sign}(c^T x(k))] \quad (3.24)$$

3.3 Application au robot mobile de type (3,0)

Nous nous proposons dans cette partie, de commander le robot mobile de type (3,0) par un ordinateur numérique. Pour ce faire il faut d'abord trouver le modèle discret du robot, la manière d'obtenir ce dernier sera présentée au paragraphe 1. Rappelons aussi que le robot en question est un système non linéaire, ceci nous pose problème, car nous savons que la méthode de synthèse de la DVSC (i.e. discrete variable structure control) nécessite un système linéaire[31]. Pour y remédier, nous sommes contraints de définir d'abord une commande discrète visant à linéariser le système, chose qui fera l'objet du deuxième paragraphe. Puis nous passons, au paragraphe 3, à la synthèse de la DVSC proprement dite. Les simulations seront effectuées dans le cas d'une régulation, puis pour une poursuite d'une trajectoire rectiligne et enfin, une poursuite d'un cercle. Une étude de robustesse viendra clôturer ce sous chapitre.

3.3.1 Discrétisation du modèle cinématique du robot mobile de type (3,0)

Soit le modèle cinématique du robot en continu :

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos\theta - \eta_2 \sin\theta \\ \dot{y} = \eta_1 \sin\theta + \eta_2 \cos\theta \\ \dot{\theta} = \eta_3 \\ \dot{\eta}_1 = v_1 \\ \dot{\eta}_2 = v_2 \\ \dot{\eta}_3 = v_3 \end{cases}$$

La discrétisation de ce système avec un pas d'échantillonnage T revient à approximer la dérivée temporelle $\dot{q}(t)$ par $dq(k) \cong \frac{q(k+1) - q(k)}{T}$, ce qui amène notre modèle à s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + T[\eta_1(k) \cos(\theta(k)) - \eta_2(k) \sin(\theta(k))] \\ y(k+1) = y(k) + T[\eta_1(k) \sin(\theta(k)) + \eta_2(k) \cos(\theta(k))] \\ \theta(k+1) = \theta(k) + T\eta_3(k) \\ \eta_1(k+1) = \eta_1(k) + Tu_1(k) \\ \eta_2(k+1) = \eta_2(k) + Tu_2(k) \\ \eta_3(k+1) = \eta_3(k) + Tu_3(k) \end{cases}$$

Ce dernier étant non linéaire, donc pour synthétiser une DVSC nous devons d'abord le linéariser, ceci fera l'objet du prochain paragraphe.

3.3.2 Linéarisation du modèle cinématique discret du robot mobile de type (3,0)

Pour obtenir un modèle entrées/sorties linéaire, on calcule successivement les valeurs futures des sorties, jusqu'à l'apparition d'une des commandes dans les expressions de ces valeurs futures.

Ceci est illustré ci-après dans le cas du robot mobile de type (3,0) :

On part, tout d'abord, du modèle cinématique discret du robot :

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + T[\eta_1(k) \cos(\theta(k)) - \eta_2(k) \sin(\theta(k))] \\ y(k+1) = y(k) + T[\eta_1(k) \sin(\theta(k)) + \eta_2(k) \cos(\theta(k))] \\ \theta(k+1) = \theta(k) + T\eta_3(k) \\ \eta_1(k+1) = \eta_1(k) + Tu_1(k) \\ \eta_2(k+1) = \eta_2(k) + Tu_2(k) \\ \eta_3(k+1) = \eta_3(k) + Tu_3(k) \end{cases} \quad (3.25)$$

avec les variables de sorties qui sont : x, y, θ , puis on procède comme suit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + T[\eta_1(k) \cos(\theta(k)) - \eta_2(k) \sin(\theta(k))] \\ x(k+2) &= x(k+1) + T[\eta_1(k+1) \cos(\theta(k+1)) - \eta_2(k+1) \sin(\theta(k+1))] \end{aligned}$$

En utilisant le modèle cinématique (25), on obtient :

$$x(k+2) = x(k+1) + T[(\eta_1(k) + Tu_1(k))\cos(\theta(k+1)) - (\eta_2(k) + Tu_2(k))\sin(\theta(k+1))] \quad (3.26)$$

On fait de même pour les deux autres variables de sorties restantes, i.e. :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) + T[\eta_1(k)\sin(\theta(k)) + \eta_2(k)\cos(\theta(k))] \\ y(k+2) &= y(k+1) + T[\eta_1(k+1)\sin(\theta(k+1)) + \eta_2(k+1)\cos(\theta(k+1))] \end{aligned}$$

Puis, on substituant les expressions de $\eta_1(k+1)$ et $\eta_2(k+1)$, on trouve :

$$y(k+2) = y(k+1) + T[(\eta_1(k) + Tu_1(k))\sin(\theta(k+1)) + (\eta_2(k) + Tu_2(k))\cos(\theta(k+1))] \quad (3.27)$$

même chose pour θ :

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \theta(k) + T\eta_3(k) \\ \theta(k+2) &= \theta(k+1) + T\eta_3(k+1) \\ \theta(k+2) &= \theta(k+1) + T(\eta_3(k) + Tu_3(k)) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Maintenant, on réécrit les résultats précédents sous forme matricielle, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(k+2) \\ y(k+2) \\ \theta(k+2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T^2 \cos(\theta(k+1)) & -T^2 \sin(\theta(k+1)) & 0 \\ T^2 \sin(\theta(k+1)) & T^2 \cos(\theta(k+1)) & 0 \\ 0 & 0 & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} x(k+1) + T\eta_1(k)\cos(\theta(k+1)) - T\eta_2(k)\sin(\theta(k+1)) \\ y(k+1) + T\eta_1(k)\sin(\theta(k+1)) + T\eta_2(k)\cos(\theta(k+1)) \\ \theta(k+1) + T\eta_3(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Soit le retour d'état non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2 \cos(\theta(k+1)) & -T^2 \sin(\theta(k+1)) & 0 \\ T^2 \sin(\theta(k+1)) & T^2 \cos(\theta(k+1)) & 0 \\ 0 & 0 & T^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} - \left[\begin{aligned} &x(k+1) + T\eta_1(k)\cos(\theta(k+1)) - T\eta_2(k)\sin(\theta(k+1)) \\ &y(k+1) + T\eta_1(k)\sin(\theta(k+1)) + T\eta_2(k)\cos(\theta(k+1)) \\ &\theta(k+1) + T\eta_3(k) \end{aligned} \right] \\ + \begin{pmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

où v_i représentent les nouvelles entrées de commande .

Si on remplace dans l'expression (3.29), on aboutit au système multi variable linéaire et découplé suivant :

$$\begin{cases} x(k+2) = u_1(k) \\ y(k+2) = u_2(k) \\ \theta(k+2) = u_3(k) \end{cases} \quad (3.31)$$

En choisissant les nouveaux vecteurs d'état tels que :

$$X_1(k) = X(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix},$$

$$X_2(k) = Y(k) = \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{pmatrix},$$

$$X_3(k) = \Theta(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \theta(k+1) \end{pmatrix}$$

La représentation d'états de chaque sous système sera alors :

$$X_1(k+1) = A_1 X_1(k) + b_1 u_1(k)$$

$$X_2(k+1) = A_2 X_2(k) + b_2 u_2(k)$$

$$X_3(k+1) = A_3 X_3(k) + b_3 u_3(k)$$

(3.32)

avec : $A_1 = A_2 = A_3 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = B_2 = B_3 = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.3.3 Commande par mode de glissement discret pour le robot mobile de type (3,0)

On passe maintenant, au calcul de la commande par mode de glissement discret pour le système linéaire (3.32).

Pour se faire, on définit les surfaces suivantes :

$$S_i(k) = c_i^T E_i(k), \quad i=1,2,3$$

avec c_i sont des vecteur de dimension (n^*1) , et $E_i(k) = X_i(k) - X_{desiré}(k)$.

On a :

$$S_i(k+1) - S_i(k) = c_i^T E_i(k+1) - c_i^T E_i(k) = c_i^T (X_i(k+1) - X_{desiré}(k+1)) - c_i^T (X_i(k) - X_{desiré}(k))$$

$$S_i(k+1) - S_i(k) = c_i^T (AX_i(k) + bu_i(k) - X_{desiré}(k+1)) - c_i^T (X_i(k) - X_{desiré}(k)) \quad (3.33)$$

D'un autre coté, pour que les modes glissants existent, la relation suivante doit être vérifiée :

$$S_i(k+1) - S_i(k) = -q_i T S_i(k) - w_i \text{sign}(S_i(k+1)) \quad (3.34)$$

avec : $q_i, w_i > 0$ et $1 - q_i T > 0$.

Et l'expression de la commande sera calculée directement en faisant l'égalité entre (3.33) et (3.34) :

$$u_i(k) = -(c_i^T b)^{-1} (c_i^T A X_i(k) - c_i^T X_{\text{désiré}}(k+1) - (1 - q_i T) c_i^T E_i(k) + w_i T \text{sign}(c_i^T E_i(k))) \quad (3.35)$$

Comme pour le cas continu, on se propose là aussi, de faire évoluer le robot dans un mode de fonctionnement en point à point (i.e. régulation), puis en poursuite de trajectoire (rectiligne et circulaire). Notons que la seule variante entre ces modes sera l'expression de la consigne ; qui sera égale aux coordonnées d'un point fixe ($(x_{\text{désiré}}, y_{\text{désiré}}, \theta_{\text{désiré}}) = (2.5.2. \pi)$) dans le cas de la régulation, puis aux équations cartésiennes d'une droite de pente unité ($y = x$), et d'un cercle dans le plan, de centre (0,0) et de rayon égal à 10m.

La période d'échantillonnage choisie est de 0.01s, et qui représente une bonne période pour l'échantillonnage des systèmes mécaniques.

Les figures (3.1) et (3.2) présentent les résultats relatifs à la régulation, quant à la poursuite de trajectoire rectiligne et circulaire, et bien, elles sont illustrées par les figures (3.3), (3.4) et (3.5), (3.6) respectivement.

Quant aux résultats ; on constate là aussi des performances assez satisfaisantes, avec des temps de convergences finis. Et des erreurs statiques acceptables en régulation. Aussi, les erreurs de poursuites de la droite sont correctes, chose qui n'est pas partagée par le mode de poursuite du cercle, et où l'erreur est assez significative (1.5m) mais qui reste comme même bien admissibles vu la rapidité de la poursuite.

Les commandes ne dépassant pas les 15m/s² restent comme même admissibles et réalisables, malgré qu'elles sont comme même énergétiques.

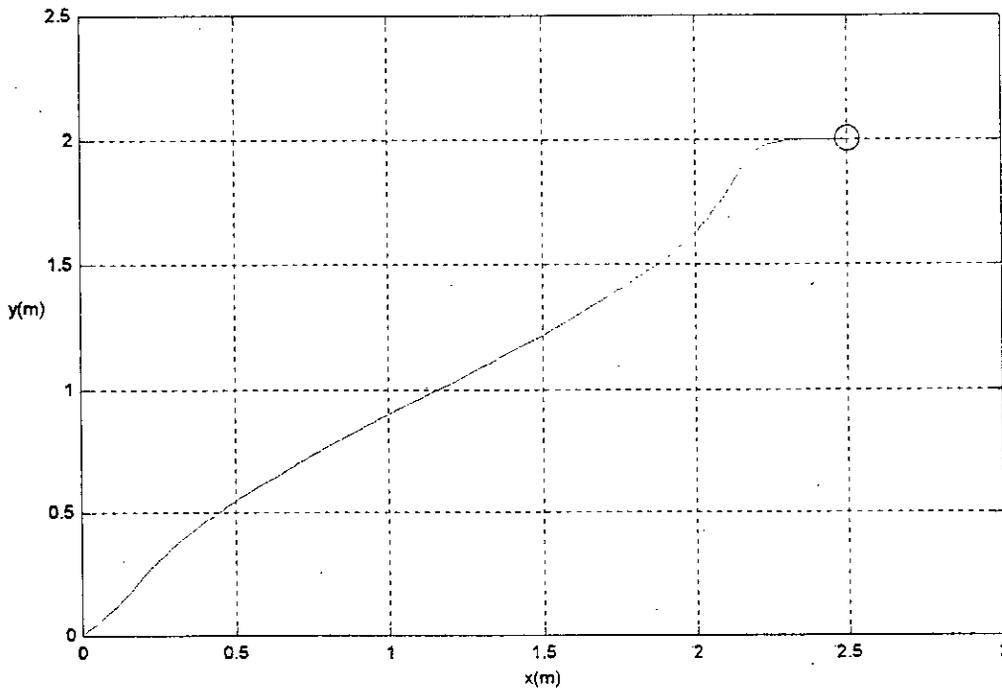
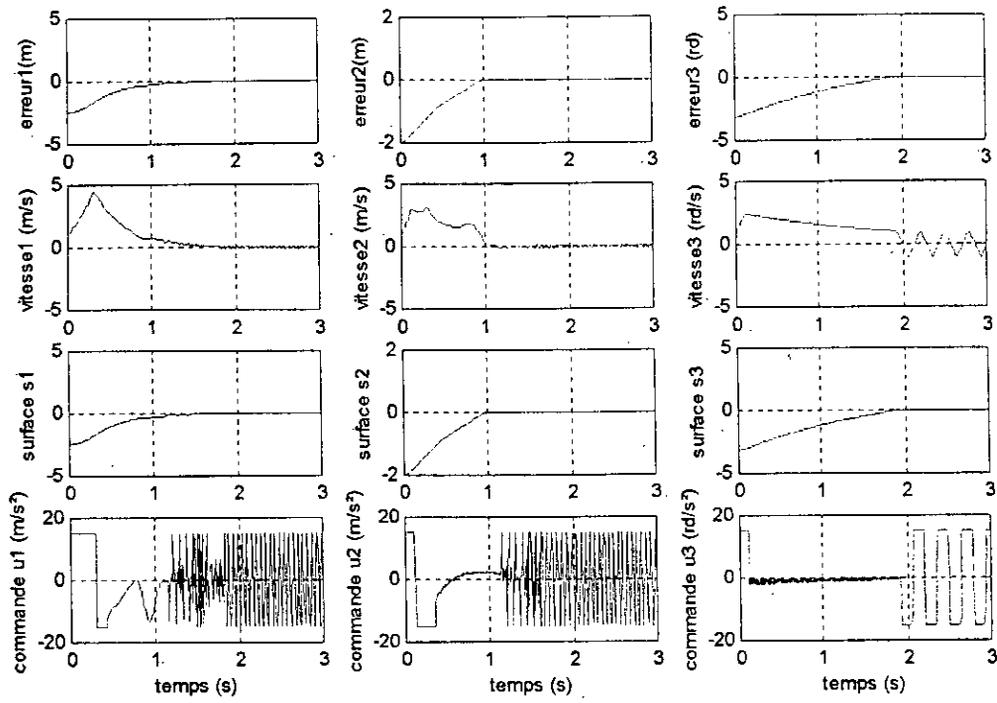


Fig.3.1. robot type(3,0) « cas discret » en régulation, essai initialisé à [0 0 0 1 1 1]

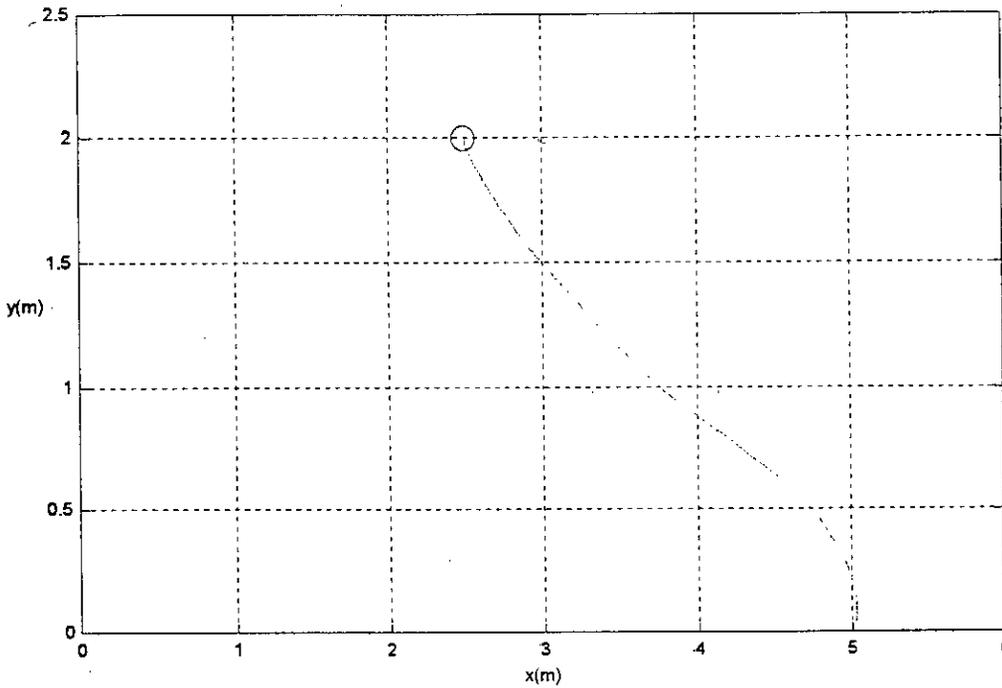
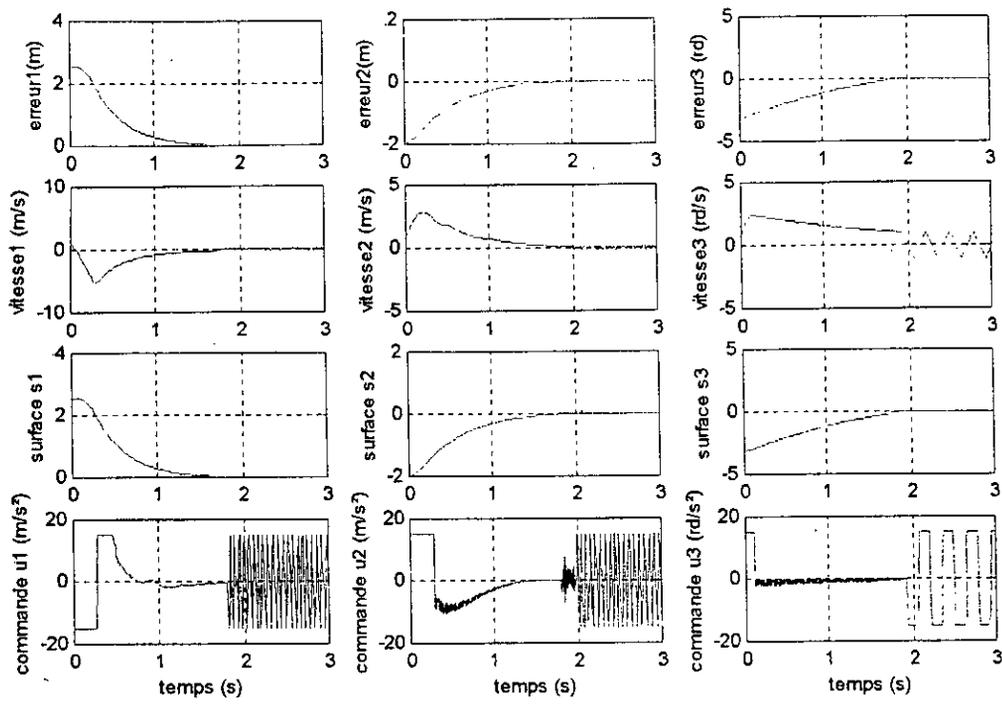


Fig. 3.2. robot type(3,0) « cas discret » en régulation, essai2 initialisé à [5 0 0 1 1 1]

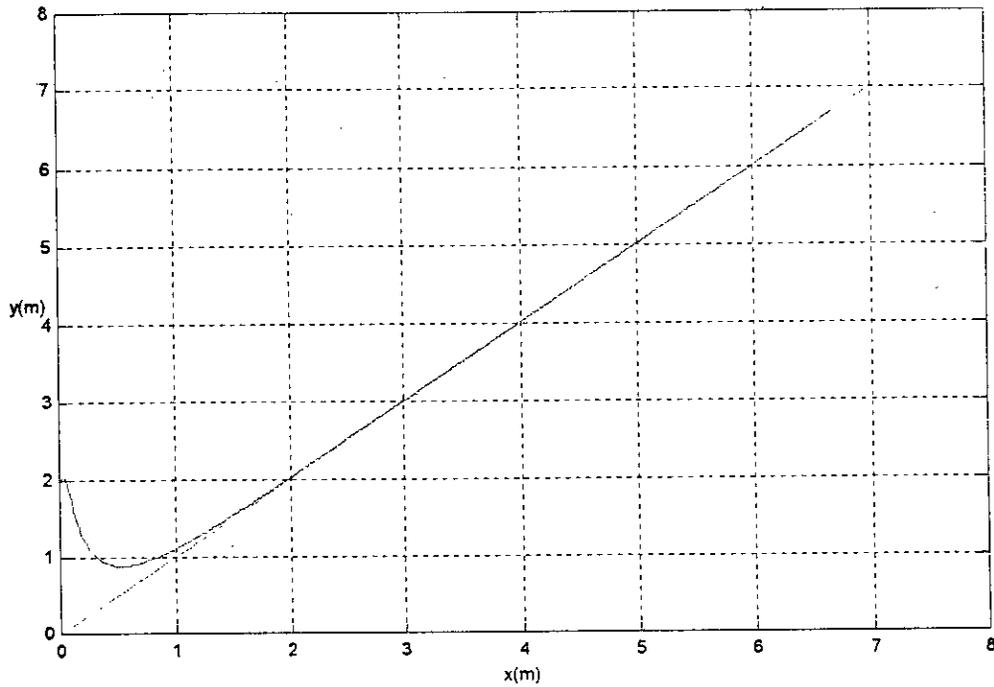
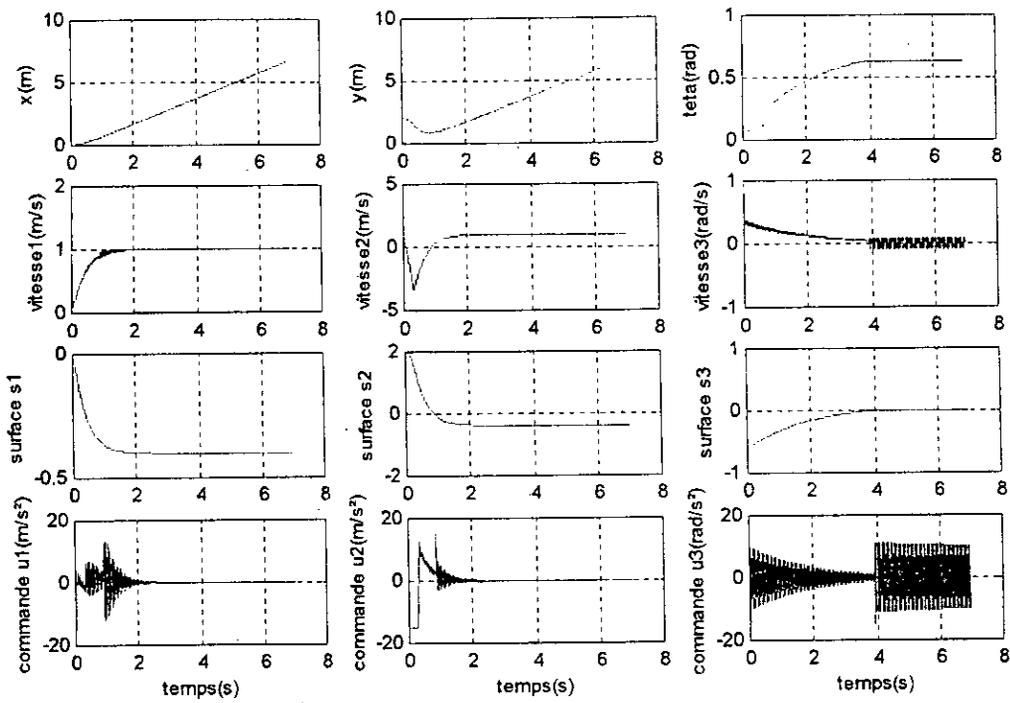


Fig. 3.3. robot type(3,0) « cas discret » en poursuite d'une droite, essai initialisé à [0 2 0 1 1 1]

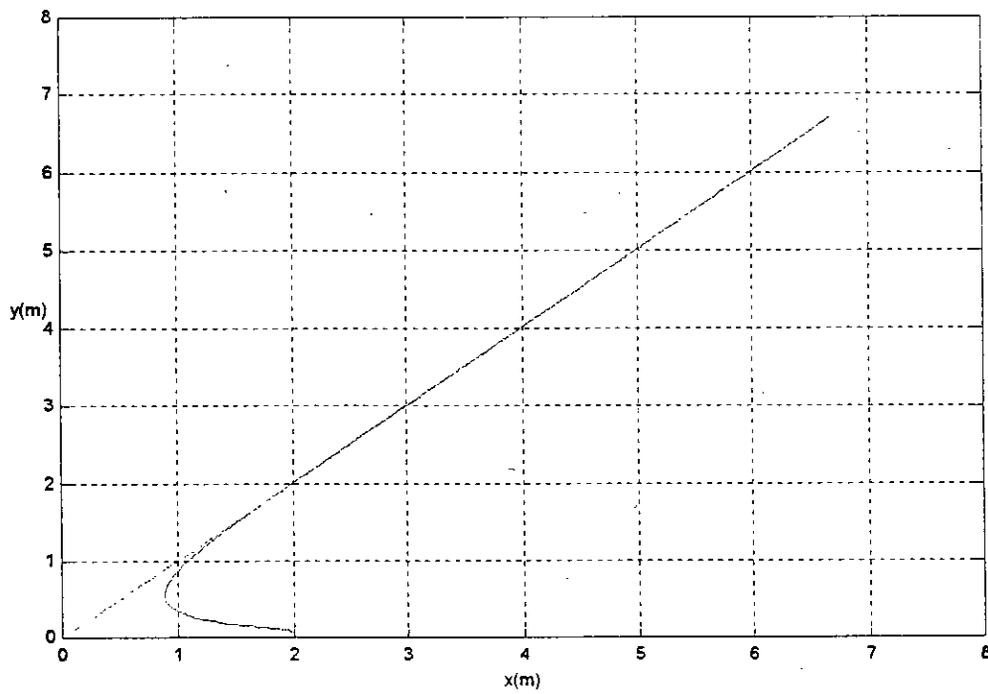
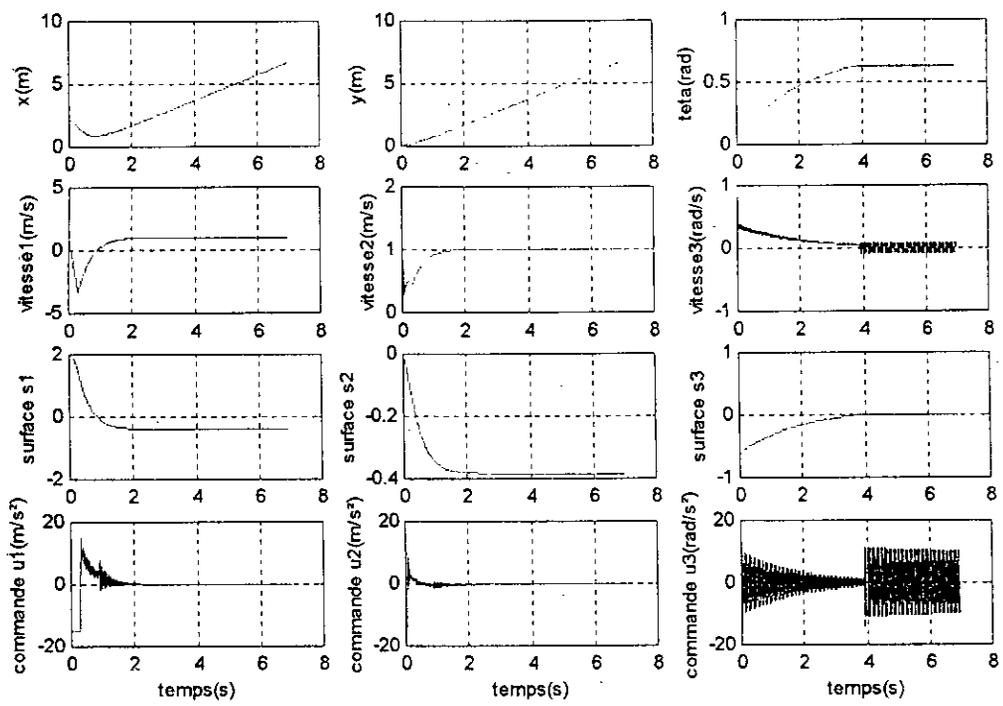


Fig. 3.4. robot type(3,0) « cas discret » en poursuite d'une droite, essai2 initialisé à [2 0 0 1 1 1]

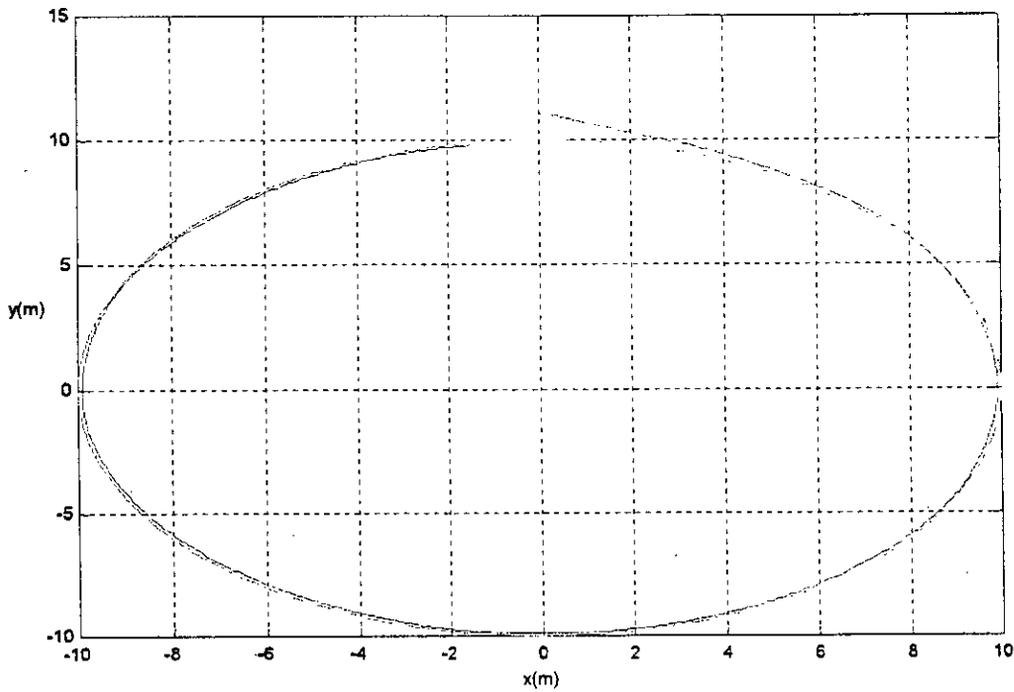
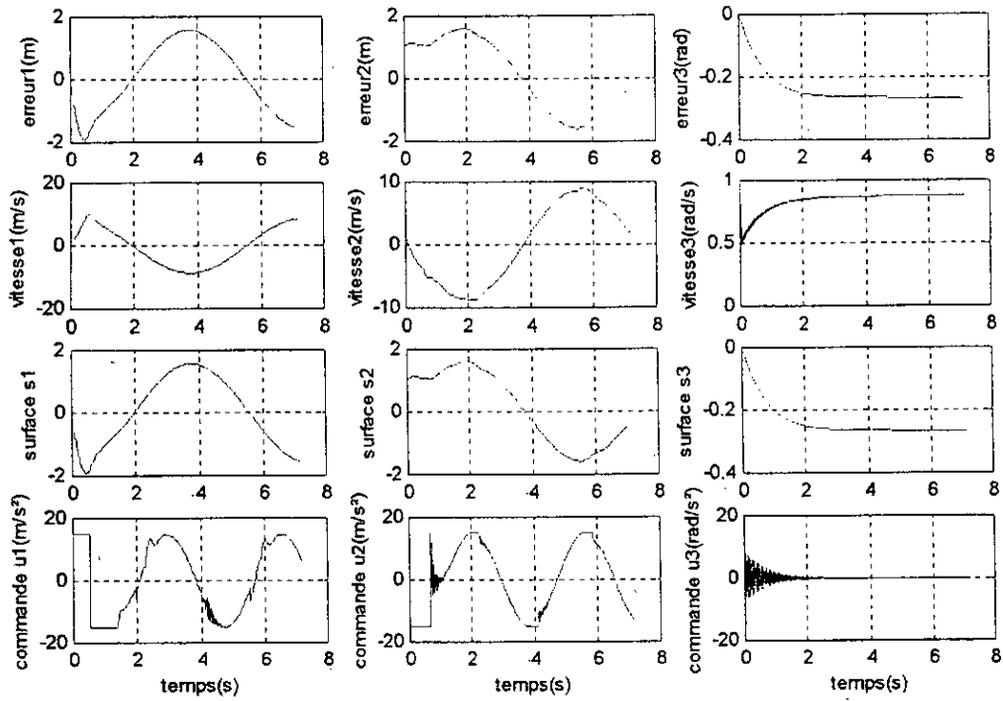


Fig. 3.5. robot type(3,0) « cas discret » en poursuite d'un cercle, essai initialisé à [0 11 0 1 1 1]

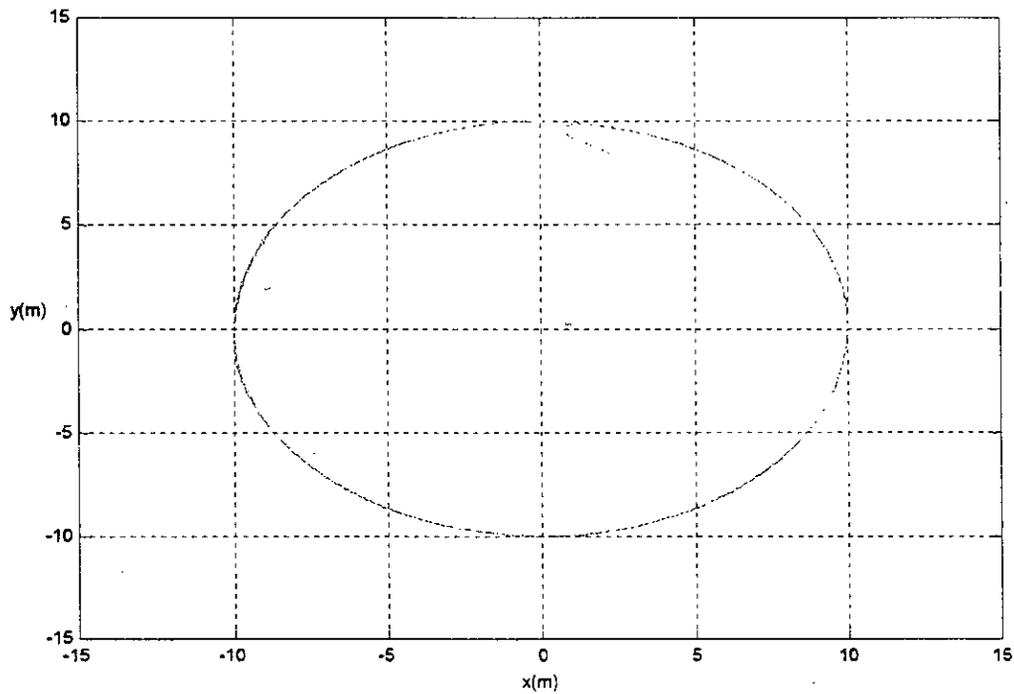
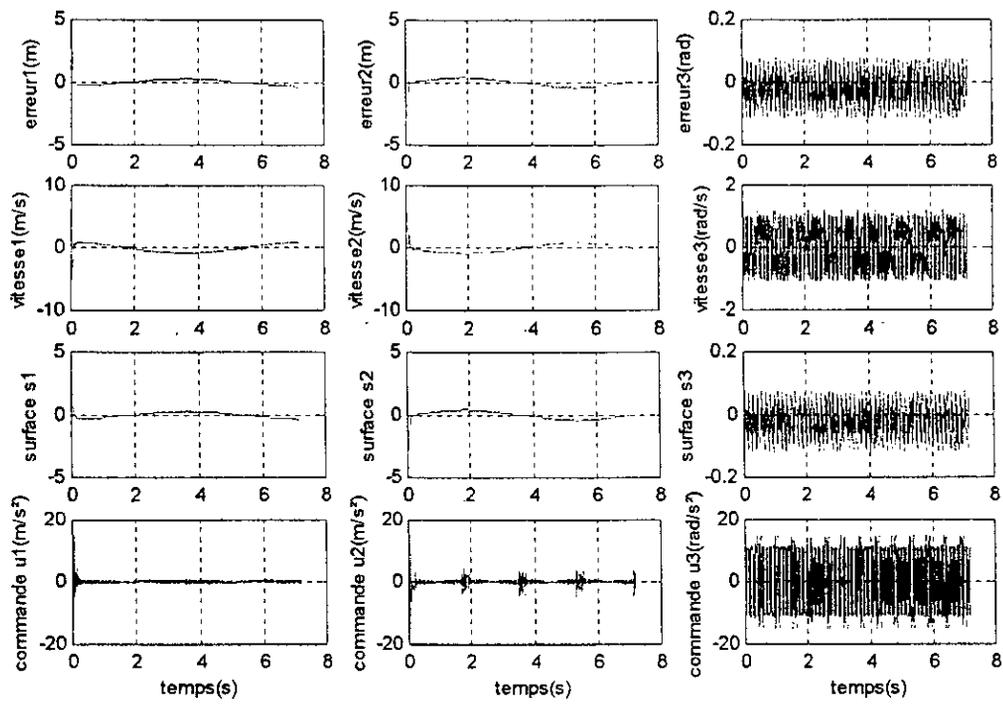


Fig. 3.6. robot type(3,0) « cas discret » en poursuite d'un cercle, essai2 initialisé à [3 7 0 1 1 1]

3.3.4 Etude de la robustesse

On se propose ici d'étudier les performances de la commande par mode de glissement discret relatives à la robustesse. i.e. on introduit une perturbation au système puis on observe si la loi de commande assure toujours la stabilité et les performances ou non. Les essais seront effectués pour le robot de type (3,0) dans le mode de fonctionnement de poursuite de trajectoires.

Le modèle cinématique discret du robot perturbé est le suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + T[\eta_1(k)\cos(\theta(k)) - \eta_2(k)\sin(\theta(k))] \\ y(k+1) = y(k) + T[\eta_1(k)\sin(\theta(k)) + \eta_2(k)\cos(\theta(k))] + P \\ \theta(k+1) = \theta(k) + T\eta_3(k) \\ \eta_1(k+1) = \eta_1(k) + Tu_1(k) \\ \eta_2(k+1) = \eta_2(k) + Tu_2(k) \\ \eta_3(k+1) = \eta_3(k) + Tu_3(k) \end{cases} \quad (3.36)$$

Où la perturbation est représenté par le signal P , qui est généré comme suit :

$$P = \begin{cases} 0; & 0 \leq t \leq D/3 \\ z * \text{moyenne}(|y(i)_{0 \leq i < D/3}|); & D/3 < t \leq D \end{cases} \quad (3.37)$$

où D représente la durée totale de la simulation.

L'étude peut se résumer donc, en l'augmentation du coefficient z (i.e. l'amplitude du signal de perturbation) et voir son influence sur les réponses du système. La figure (3.7) montre les résultats des différentes simulations dans le cas d'une poursuite d'un cercle. Quant à la figure (3.9), et bien, elle illustre les essais pour une poursuite d'une trajectoire rectiligne. Les figures (3.8) et (3.10) montrent l'évolution des caractéristiques du système (vitesses, surfaces et commandes) pour la plus grande valeur du coefficient z .

Quant aux résultats, Nous constatons que la loi de commande assure toujours aussi bien la stabilité du système, et ceci malgré les fortes valeurs du coefficients z .

Il faut aussi noter que les performances ont été bien conservées aussi.

Nous concluons cette étude en mettant l'accent sur les bonnes capacités de robustesse de la loi de commande par mode de glissement discret.

Une comparaison entre les deux lois de commande par mode de glissement (continu et discret) fera notre objet d'intéressement dans la prochaine partie.

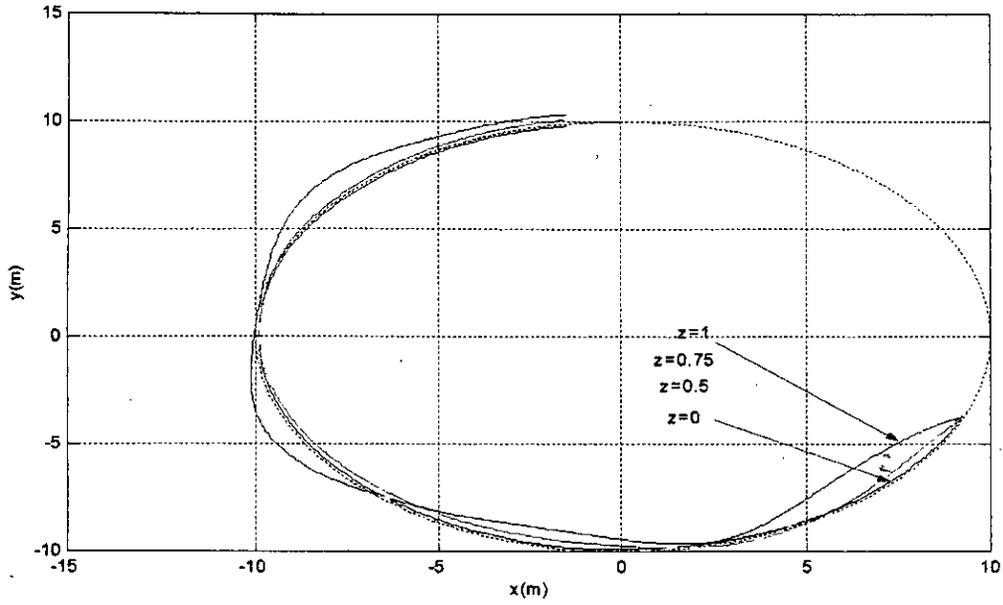


Fig.3.7. robot type(3,0) en discret, test de robustesse

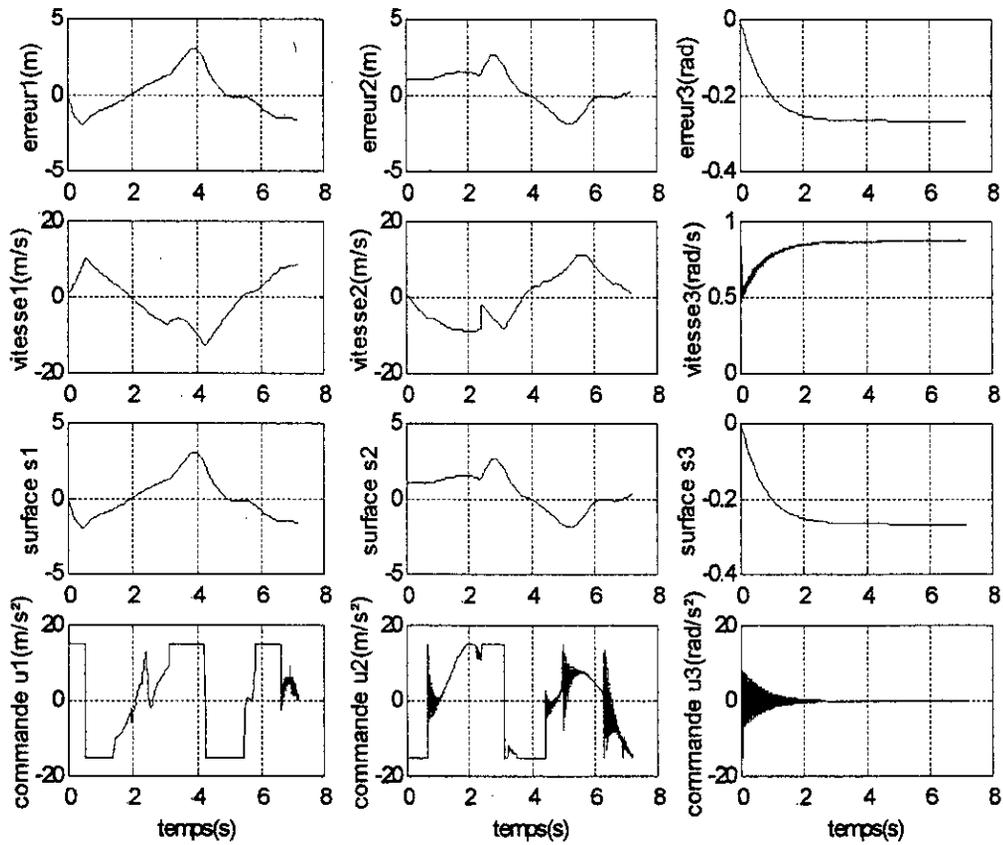


Fig.3.8. robot type (3,0) en discret, essai pour $z=1$

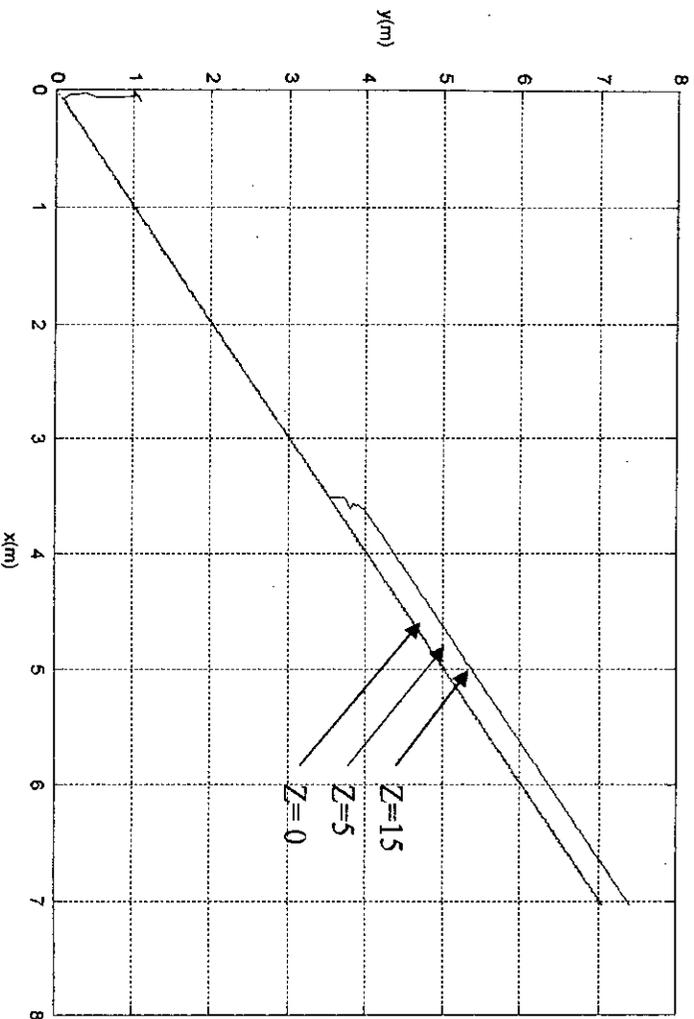


Fig.3.9. robot type(3,0) en discret, test de robustesse
Cas d'une poursuite de droite

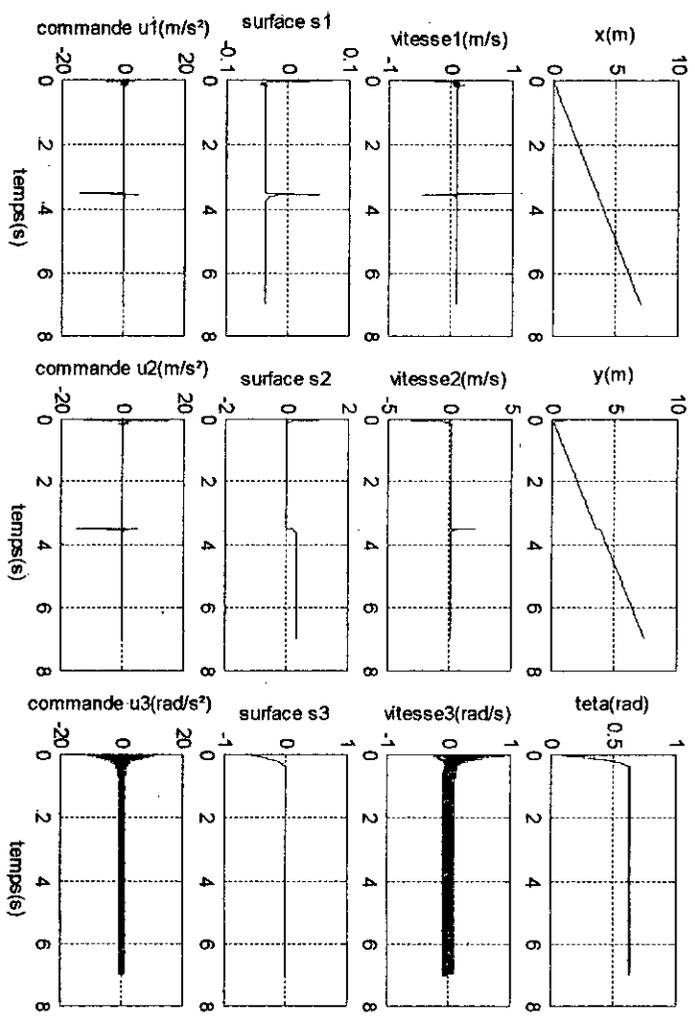


Fig.3.10. robot type(3,0) en discret, z=15

3.3.5 Comparaison entre la commande par mode de glissement continu et discret

Cette partie présente une étude comparative entre les performances du robot mobile de type (3,0) qui sera contrôlé par une commande par mode de glissement continu puis discret. Et qui permettra de voir laquelle des deux commandes est la plus intéressante, ceci est fait selon la qualité des performances, la faisabilité et la consommation de l'énergie.

Cette étude se basera sur une superposition des graphes représentant l'évolution du robot dans les différents modes de fonctionnement (i.e. en régulation (fig. 3.11) et en poursuite de trajectoire (fig.3.12)), ainsi qu'une comparaison des capacités de robustesse engendrées par les deux types de commandes (effectuée pour une poursuite de cercle, en gardant la même valeur de du coefficient z , i.e. $z=1$ (fig. 3.13) et $z=1.5$ (fig.3.14)).

Les résultats de ces essais sont résumés dans le tableau suivant :

caractéristiques	Commande continue	Commande discrète
Temps de réponse	Court	Court
Allure de la réponse (dépassements, oscillations...)	Bonne	bonne
Chattering sur la réponse	Très faible	Faible
Erreur statique	Très faible	Très faible
Profil des vitesses	Très bon	Très bon
Erreur de poursuite	Très faible	Moins faible
Chattering sur les surfaces	Faible	Faible
Préservation de la stabilité en présence des perturbations	Très bonne	Très bonne
Préservation des performances en	Très bonne	Moins bonne

présence des perturbations		
Chattering sur les commandes	Existant	Existant
Energie développée par les commandes	Acceptable	Acceptable mais plus élevée

Ces résultats nous permettent de confirmer les bonnes performances des deux commandes sur le plan général, mais en s'y intéressant de plus près, on constate que la commande par mode de glissement discret accuse une grande consommation d'énergie, et un moins bon rejet de perturbations qu'en continu. Néanmoins, elle assure une très bonne stabilité robuste au système. Ceci s'explique par le fait que l'effet de la commande par mode de glissement discret n'intervient qu'à des instants bien définis (instants d'échantillonnage).

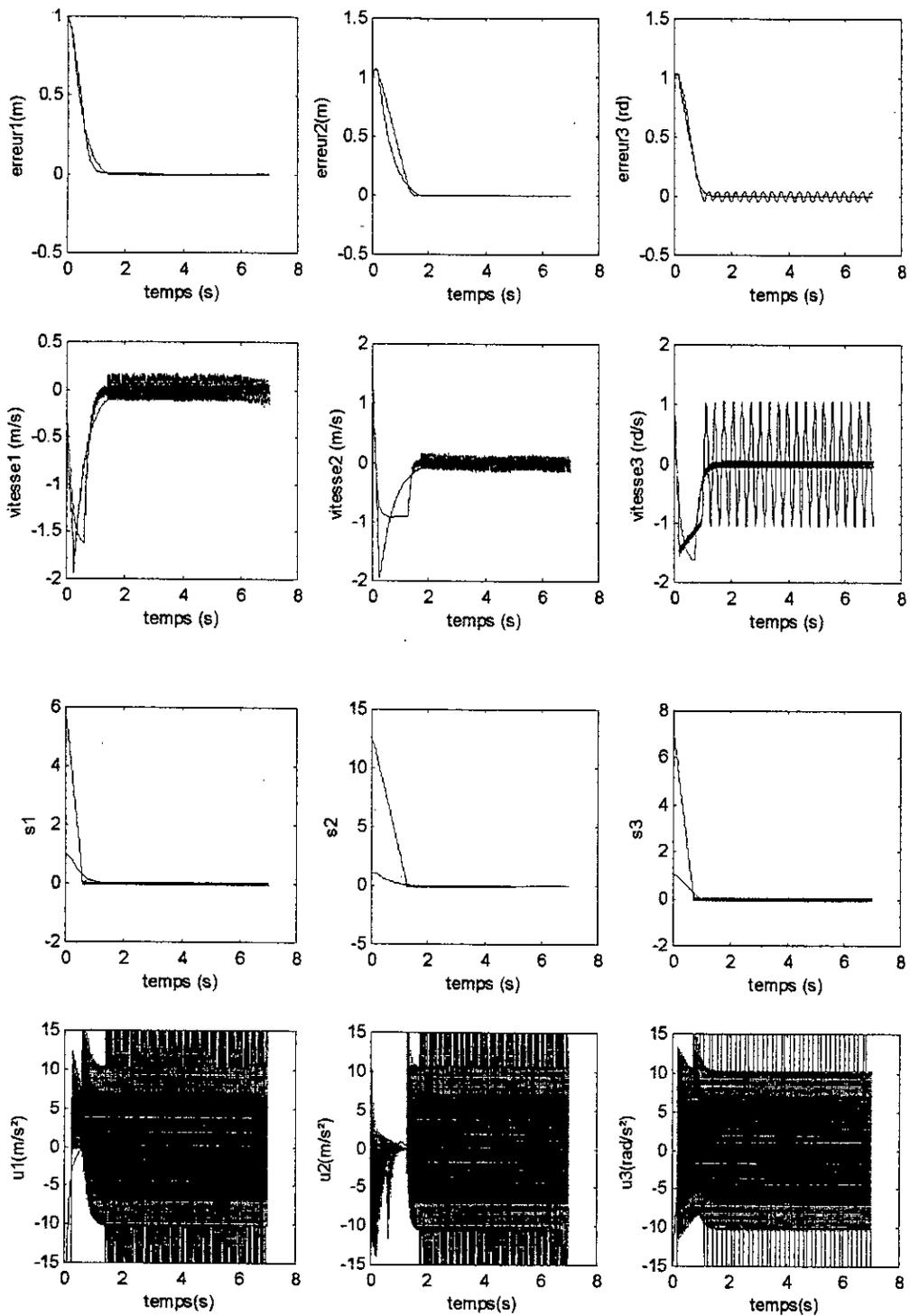


Fig. 3.11. Robot type (3,0), cas discret en bleu, et cas continu en rouge.
 Comparaison en régulation
 Initialisé à [1 1 1 1 1 1]

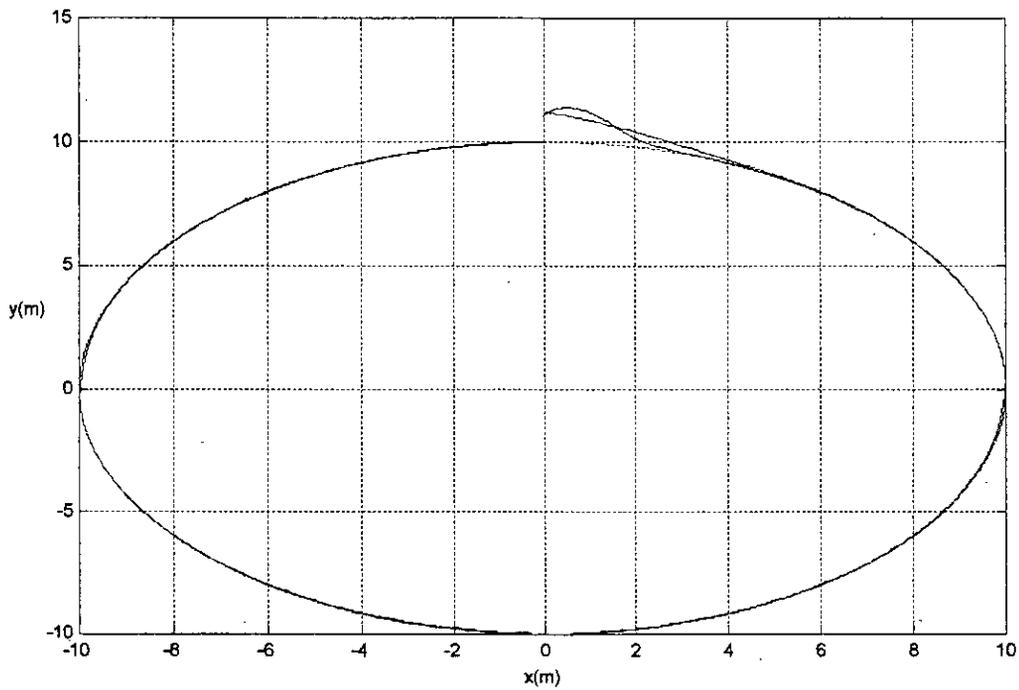
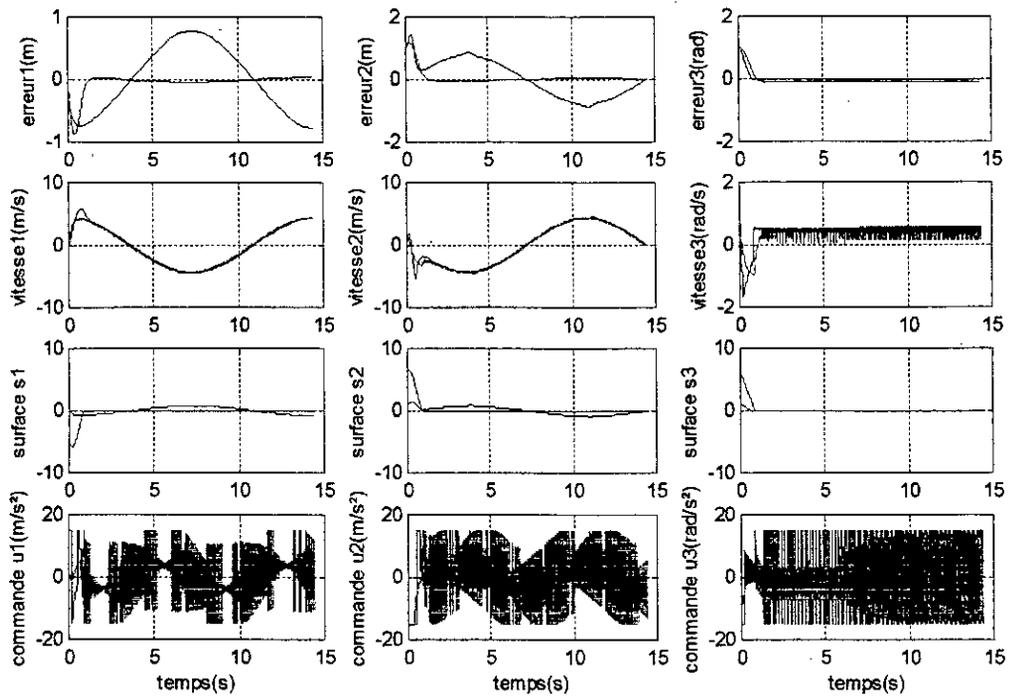


Fig. 3.12. Robot type(3,0), cas discret en bleu, cas continu en rouge.
 Comparaison en poursuite de cercle
 initialisé à [0 11 0 1 1 1]

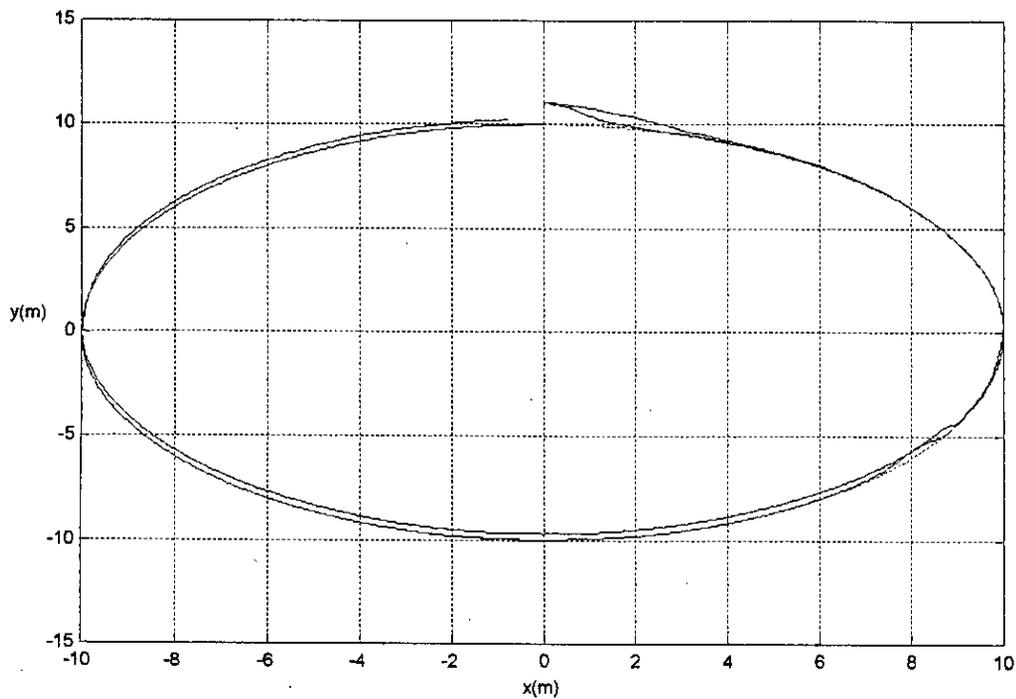


Fig. 3.13. Robot type (3,0), cas discret en bleu, cas continu en rouge.
 Comparaison entre la robustesse des deux commandes

$Z=1$
 initialisé à $[0 \ 11 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$

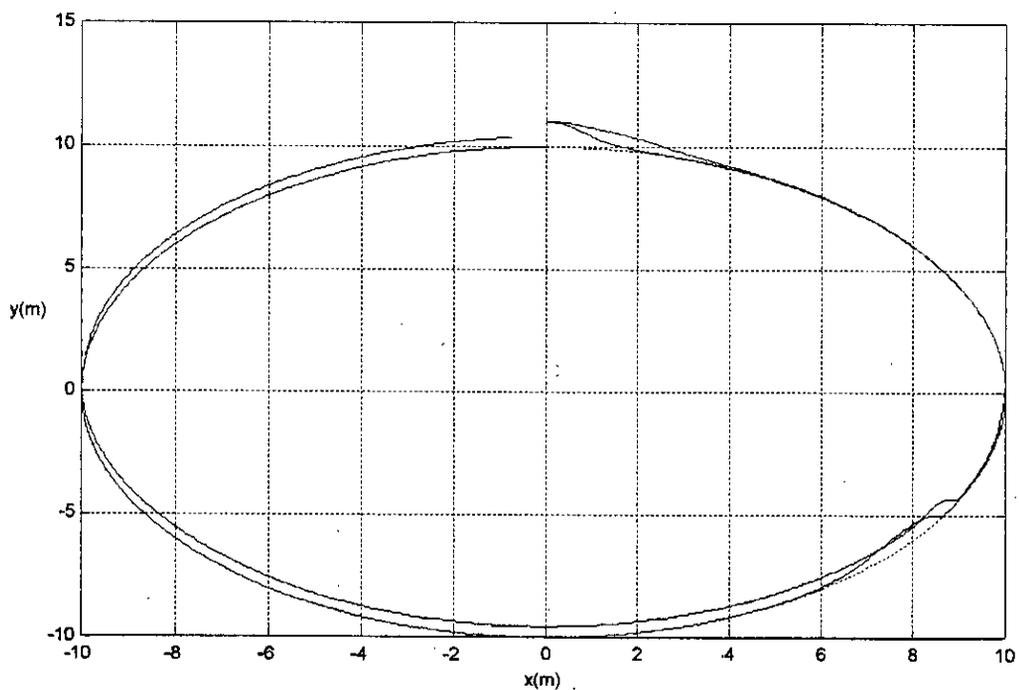


Fig. 3.14. Robot type (3,0), cas discret en bleu, cas continu en rouge.
 Comparaison entre la robustesse des deux commandes

$Z=1.5$
 initialisé à $[0 \ 11 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$

3.4 Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre, les modes glissants discrets. Ainsi, nous avons pu établir la définition de la commande par mode de glissement discret, et les conditions qui permettent son existence et sa convergence. Puis, dans le but de valider tous ces outils théoriques, nous avons appliqué cette commande discrète au robot mobile de type (3,0), dont le modèle cinématique présente des non linéarités. Chose qui nous a poussé à le linéariser juste après sa discrétisation. La série de simulations effectuée, a permis de tester les réponses du robot qui était contraint à faire du point à point, puis à suivre des trajectoires rectiligne et circulaire. Aussi, une étude de robustesse a permis d'étudier les capacités de la commande à rejeter les perturbations, dues à l'environnement du robot. Et enfin, une comparaison a été effectuée entre les deux types de la commande par mode de glissement (i.e. en continu et en discret), et ceci afin de justifier l'intérêt d'implémenter une commande continue ou discrète.

Les résultats obtenus affirment les bonnes performances assurées par la commande par mode de glissement discret, et ceci malgré les problèmes bien connus qui sont liés à l'échantillonnage des systèmes continus, et qui causent comme même quelques inconvénients qui sont : présence du chattering, commande très énergétique et difficulté à assurer une bonne robustesse des performances.

Conclusion Générale

Les travaux présentés dans ce mémoire ont conduit à la réalisation d'algorithmes robustes pour la commande des robots mobiles. D'une manière plus précise, il s'agissait d'utiliser les régimes glissants continus et discrets afin de commander les robots mobiles de type (3,0) et (2,0). Notre contribution se situe à plusieurs niveaux.

Nous avons vu dans le chapitre 1 la manière de modéliser et classer les robots mobiles.

Quant au chapitre 2 et 3, ils ont présenté les outils théoriques permettant d'appréhender le fonctionnement des modes glissants continus et discrets ; ainsi, les conditions d'existence et de convergence de ces modes ont été revues. Puis, nous nous sommes penchés sur l'application de ces commandes aux robots mobiles de types (3,0) et (2,0) dans le cas continu, alors que nous avons appliqué la commande par mode de glissement discret au robot de type (3,0).

Les simulations ont été effectuées pour différents modes de fonctionnement, i.e. régulation et poursuite de trajectoires rectiligne et circulaire. Aussi, des essais testant la robustesse ont été accomplis, ainsi qu'une étude comparative entre la commande glissante continue et discrète.

Les résultats obtenus ont montrés la bonne qualité des réponses du système commandé que ce soit en régulation mais également en poursuite de trajectoires. Aussi, ces simulations ont prouvé l'efficacité des deux commandes (continue et discrète) par rapport au rejet des perturbations extérieures, i.e. elles assurent une grande robustesse au processus commandé, tout en remarquons un désavantage de garantir une robustesse des performances par la commande par mode de glissement discret.

Le développement futur de ces commandes consiste tout d'abord à faire diminuer le chattering au niveau de la commande, ceci peut se faire

CONCLUSION GENERALE

comme étudié dans [36], et aussi en introduisant la théorie des modes glissants d'ordre supérieur. Ainsi que l'amélioration de la propriété de robustesse pour le cas de la commande par mode de glissement discret qui fera certainement l'objet d'autres recherches dans ce sens.

Références Bibliographiques

- [1] C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato, and M. Jamshidi, Survey of Robust Control for Rigid Robots, IEEE Cont. Sys. pp. 24-28, 1991.
- [2] J. Ackermann, and V. Utkin, "Sliding Mode Control Design Based on Ackermann's Formula," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.43, No.2, pp. 234-236, 1998.
- [3] ActivMedia Robotics, LLC. Pioneer 2 Mobile Robot- Operations Manual, Vers. 4, Sept. 1999.
- [4] L. E. Aguilar, T. Hamel, and P. Soueres, "Robust path following control for wheeled robots via sliding mode techniques," in Proc. 1997 IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (IROS'97), pp. 1389-1395, Sept. 1997.
- [5] L. E. Aguilar, P. Soueres, M. Courdesses, and S. Fleury, "Robust path- following control with exponentiel stability for mobile robots," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat., pp. 3279-3284, May1998.
- [6] J. Angeles, Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Springer Verlag, 1 997.
- [7] H. Arai, K. Tanie and N. Shiroma, 'Nonholonomic Control of a Three-DOF Planar Underactuated Manipulator', IEEE Trans. Robotics & Automat., vol. 14, No. 5, pp. 681-694, Oct. 1998.
- [8] E. Badreddin, "Recursive behavior-based architecture for mobile robots", Robotics and Autonomous Systems, Vol. 8, pp. 165-176, 1991. Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [9] A. Bartoszewicz, "A comment on A Time-Varying Sliding Surface for Fast and Robust Tracking Control of Second-Order Uncertain Systems," Automatica, 31, No. 12, pp. 1893 -1895, 1995.
- [10] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 43, No. 2, pp. 241-246, Feb. 1998.
- [11] A. Bloch and S. Drakunov, "Tracking in nonholonomic dynamic systems via sliding modes," in Proc. IEEE Int. Conf. Decision Contr., pp. 2103-2106. Dec. 1995.
- [12] A. Bloch and S. Drakunov, "Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes," in Proc. IEEE Int. Conf. Decision Contr., pp. 2961-2963, Dec. 1994.
- [13] M. Bouchoucha, « Commande à Structure Variable et par Algorithmes Génétiques. Application à des systèmes électromécanique». Thèse de Magistère, EMP, Oct. 1999.
- [14] K. Bouyoucef, La Commande à Structure Variable par Régime Glissant et à Logique Floue appliquée à un Robot Manipulateur. Thèse de Magistère No. d'ordre: 14/99-M/EL, USTHB. Rapporteur: M'. Hamerlain M.
- [15] R. W. Brockett, 'Asymptotic Stability and Feedback stabilisation', in *Differential Geometric Control Theory*, eds. Boston: Birkhauser, , pp. 181-191, 1983.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [16] H. Bühler, Réglage par mode de glissement. Presses Polytechniques romandes, Lausanne, Suisse. 1986.
- [17] G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel, 'Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots', IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 1, Feb. 1996.
- [18] J. A. Chacal B. and H. Sira-Ramirez, "On the sliding mode control of wheeled mobile robots," in Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man. Cybem., pp. 1938-1943, Sept. 1994.
- [19] T-H. Chang and Y. Hurmuzlu, "Sliding Control without Reaching Phase and its Application to Bipedal Locomotion", Report Mech. Eng. Depart. South. Methodist Univ. -Dallas, TX, Feb. 1998.
- [20] T. H. Chang, and Y. Hurmuzlu, "Sliding Control Without Reaching Phase and Its Application to Bipedal Locomotion", J. of Dynamic Sys., Measur. and Control, Vol. 115, pp. 447-455, 1993.
- [21] B. D'Andrea-Novel, G. Bastin, and G. Campion, "Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat., pp. 2527-2532, 1992.
- [22] R. A DeCarlo., B. H. Zak and G. P. Matthews, (1988) "Variable structure control on nonlinear multivariable systems: A tutorial". Proc. IEEE, Vol.76, pp. 212-232, 1988.
- [23] C. M. Dorling and A. S. I. Zinobar, "Two Approaches to Hyperplane Design in Multivariable structure control systems, Int. J. Contr., Vol. 44, No. 01, pp. 65-82, 1986.
- [24] C. Edwards and S. Spurgeon, Sliding Mode Control: Theory and Applications. Ed., London: Springer-Verlag, 1998.
- [25] A. F. Filippov, "Differential Equations with Discontinuous right hand side", *Mathematicheskii Sbornik*, Vol. 51, pp.99-128, 1960.
- [26] B. Fernandez , J. K. Hedrick," Control of multivariable non-linear systems by the sliding mode method", *Int. J. Contr.*, Vol. 46, No. 3, pp.1019-1040, 1987.
- [27] M. Fliess, "Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 35, pp. 994-1001, 1990.
- [28] K. Furuta , 'Sliding Mode Control of a Discrete System', *Syst. & Contr. Letters* 14, pp. 145-152, 1990.
- [29] K. Furuta and Y. Pan, "Variable Structure Control with Sliding Sector", *Automatica*, Vol. 36, No. 1, pp.211-228, 1999.
- [30] W. Gao, and J. C. Hung, 'Variable structure control of nonlinear systems: A new approach'. *IEEE. Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 45-56, Feb. 1993.
- [31] W. Gao, and J. C. Hung, 'Discrete-Time Variable Structure Control Systems', *IEEE. Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 42, No.2, pp. 117-122, Apr. 1995.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [32] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 2nd ed., USA-Canada, 1980.
- [33] J. Guldner and V. I. Utkin, "Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields," *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 11, pp. 247--254, Apr. 1995.
- [34] M. Hamerlain, 'Commande Hiérarchisée à model de référence et à structure variable d'un robot manipulateur à muscles artificiels'. Thèse de Doctorat, N° d'ordre 223, GARI/DGE/INSA, Toulouse France, Jan.1993.
- [35] M. Hamerlain, "The new robust control using the Generalized Variable Structure", 1995 IEEE Int. Symp. on Industr. Electron., Vol. 1, pp. 344-351, Athens- Greece, Jul. 10- 14, 1995.
- [36] M. Hamerlain, " Switching on the derivative of control to reduce chatter ", journal IEE Control Theory Application Vol.148, n°1, January 2001.
- [37] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.
- [38] U. Itkis, *Control System Variable Structure*, Keter Publishing House, 1976.
- [39] Z. P. Jiang and H. Nijmeijer, 'Tracking control of Mobile Robots: A Case study in Backstepping', *Automatica*, Vol. 33, No. 7, pp. 1393-1399, 1997.
- [40] Z. P. Jiang, and J.-B. Pomet, "Combining backstepping and time-varying techniques for a new set of adaptive controllers," in *Proc. IEEE Int. Conf. Decision Contr.*, pp. 2207-2212, Dec. 1994.
- [41] M. Kemiha, " on wheeled mobile robots controls. Application of sliding mode control and discrete sliding mode control", these de majister-EMP- 2001.
- [42] F. L. Lewis, C. T. Abdallah and D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Company, 1993.
- [43] A. Loria, E. Panteley, and A. Teel , 'A New Notion of Persistency-of-Excitation for UGAS of NLTV Systems : Application to Stabilization of Nonholonomic Systems', *European Control Conference 1999*, pp. No. 500, 1999.
- [44] X-Y. Lu and S. Spurgeon, 'Robustness of static sliding mode control for nonlinear systems', *Int. J. Contr.*, Vol. 72, No. 15, pp. 1343-1353, 1999.
- [45] J. Luo and P. Tsotras, 'Exponentially Convergent Controllers for n-Dimensional Nonholonomic Systems in Power Form, 1997 American Control Conference, Albuquerque, NM, June 4-6, 1997.
- [46] C. Mira, "systèmes asservis non linéaires", Hermès, Paris, 1990
- [47] D. Mitzova, « synthèse d'algorithmes de commandes à structure variable, application à un moteur asynchrone », rapport de DEA INSA/DGE septembre 1990.
- [48] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer -Verlag, 1990.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [49] B. O'Dell, "Fuzzy Sliding Mode Control: A critical Review", Report-Paper: ACL-97-001, Advanced Controls Laboratory, Oklahoma State University, 1 May 1997.
- [50] Ü. Özniger, 'Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control'. Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 247. Edited by K-K. D. Young, Springer-Verlag, 1999.
- [51] Y. Pan, K. Furuta , 'Invariant Sliding Sector for Discrete-Time Variable Structure Control'. To be presented at ASCC'2000.
- [52] E. Panteley, E. Lefeber, A. Loria and H. Nijmeijer, 'Exponential tracking control of a mobile car using a cascaded approach', 1998.
- [53] D-W. Park and S-B Choi, "Moving sliding surfaces for higher-order variable structure systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 72, No. 11, pp. 960-970, 1999.
- [54] J. P. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems and Control Letters*, 18 (1992) 147--158.
- [55] A. Pruski, 'Robotique Générale'. Ed. Ellipses, 1987.
- [56] H. Richter, "Hyperplane Design in Observer-Based Discrete-Time Sliding Mode Control", Laboratory Report : ACL-98-002, Advanced Controls Laboratory, School of Mechanical & Aerospace Engineering, Oklahoma State University, OK, USA, 1998.
- [57] N. Sarkar, X. Yun, and V. Kumar, "Dynamic Path Following: A New Control Algorithm for Mobile Robots", *Proc. 32d Conf. Dec. Contr.*, pp. 2670-2675. San Antonio- TX, Dec. 1993.
- [58] S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, 'On the Stability of Discrete-Time Sliding Mode Control Systems', *IEEE Trans. Aut.Contr.*, Vol. AC- 32, No. 10, Oct. 1987.
- [59] H. Sira-Ramirez, "On the Dynamical Sliding Mode Control of Nonlinear Systems", *Int. J. Contr.*, vol. 57, No. 5, pp.1039-1061, 1993.
- [60] H. Sira-Ramirez, Differential geometric methods in variable-structure control, *Int. J. Contr.*, vol. 48, No. 4, pp.1359-1390, 1988.
- [61] H. Sira-Ramirez, , "Discrete Variable Structure Control of Nonlinear Systems", *Int. J. Systems Sci.*, vol. 18, No. 9, pp.1673-1689, 1987.
- [62] J. J. E. Slotine, and W. Li, "Applied Nonlinear Control". Englewood Cliffs- New Jersey, PrenticeHall, 1991.
- [63] M. W. Spong, and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, New York, John Wiley & sons, 1989.
- [64] C.-Y. Su and Y. Stepanenko, "Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 609--614, Mar. 1994.
- [65] H.-S. Shim, J.-H. Kim, and K. Koh, "Variable structure control of nonholonomic wheeled mobile robots," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, pp. 1694-1699, May 1995.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [66] H. J. Sussmann, "A general theorem on local controllability", *SLIMJ Contr. Optimization*, vol.25, no. 1, pp. 158-194, 1987.
- [67] C. Y. Tang and E. A. Misawa, 'Discrete Variable Structure Control for Linear Multivariable Systems: The Output Feedback Case', Report Paper ACL-98-008, Advanced Controls Laboratory, School of Mechanical & Aerospace Engineering, Oklahoma State University, May 05, 1998.
- [68] A. Tayebi and A. Rachid, 'Adaptive controller for non-holonomic mobile robots with matched uncertainties', *Advanced Robotics*, Vol. 14, No. 2, pp. 105-118, Sep. 2000.
- [69] A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid, "A Simple Control Law for The Path Following Problem of a Wheeled Mobile Robot". A research paper presented at the 6th Int. Symp. on Robotics and Manufacturing, held in Montpellier- France, May 28-30, 1996. Reported by Editors: M. Jamshidi, F. Pin and P. Dauchez, in: *Robotics and Manufacturing*, Vol.6., pp. 799-804. The American Society of Mechanical Engineers-NY, 1996.
- [70] V. I. Utkin., "Variable structure systems with sliding modes". *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.AC-22, pp. 212-222. 1977.
- [71] V. I. Utkin, "Sliding Modes in Control and Optimization ". Berlin, Springer-Verlag, 1992.
- [72] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray, and J. P. Laumond, "Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints". *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 39, No. 1, pp.216-222, Jan. 1994.
- [73] Y. Yamamoto and X. Yun, 'Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator', *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 39, No. 6, pp. 1326-1332, June 1994.
- [74] J.-M. Yang and J.-H. Kim, 'Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of nonholonomic Wheeled Mobile Robots', *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 3, pp. 578- 588 , Jun. 1999.
- [75] J.-M. Yang and J.-H. Kim, 'Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of nonholonomic Wheeled Mobile Robots', 1998 *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 578-588, Leuven, Belgium 1998.
- [76] K.K. D. Young, "Controller Design for Manipulators using Theory of VSS", *IEEE Trans. Sys. Man & Cyber.*, Vol. 08, No. 02, pp. 101 - 109, Feb. 1978.
- [77] X. Yun and N. Sarkar, 'Unified Formulation of Robotic Systems with Holonomic and Nonholonomic Constraints', *IEEE Trans. Robotics & Autom.*, Vol. 14, No. 4, pp. 640-650, Aug. 1998.
- [78] A. S. I. Zinober, 'Variable Structure and Lyapunov Control'. Ed., London: Springer-Verlag, 1994.

ANNEXE 1 : Les systèmes holonomes et non holonomes[41]

Beaucoup de systèmes mécaniques sont sujets à des contraintes de position et/ou vitesse ; c'est-à-dire que plusieurs relations entre les positions et/ou vitesses des différents points du système doivent être satisfaites pendant tout le mouvement . Ces contraintes sont dites holonomes si on peut les intégrer et on aboutit donc à des relations algébriques liant les différentes coordonnées de position. Ces dernières peuvent être éliminés par un changement de variables approprié, et le système est dit holonome. Dans le cas de contraintes non intégrables, l'élimination n'est pas possible, et les contraintes doivent être prises en considération lors de la modélisation , le système est alors dit non holonome.

Exemples de systèmes holonomes et non holonomes

Le robot manipulateur est l'exemple typique d'un système holonome, alors que le robot mobile l'est pour la classe des systèmes non holonomes (fig. 1.1). Une comparaison qualitative entre un système holonome (le bras



manipulateur) et un système non holonome (la chaise roulante), et qui bougent tous les deux dans un plan X-Y est effectuée ci-après. (fig. 1.2-1.3).

Quelle est la différence entre un système holonome et un système non holonome ?

le résultat du manque d'intégrabilité des contraintes non holonomes induit un manque de correspondance entre les variables cartésiennes et les variables articulaires. En effet, dans le cas d'un bras manipulateur série ; les variables articulaires donnent une image précise de la position de l'organe final du robot (fig. 1.3), alors que le déplacement angulaire des roues d'un robot mobile ne peut prétendre préciser la position et l'orientation du robot (fig. 1.2) , en d'autres termes :

ANNEXE 1. LES SYSTEMES HOLONOMES ET NON HOLONOMES

- avec un système holonome ; lorsque les variables articulaires retournent à leurs valeurs d'origine ; les valeurs de position retournent elles aussi à leur point initial, alors que ceci n'est pas vérifié lorsqu'il s'agit d'un système non holonome.
- En général, la position du point final d'un système non holonome dépend du chemin suivi.
- Pour un système holonome, les relations liant les variables internes et celles de la position/orientation sont des équations algébriques, alors qu'elles sont de nature différentielle pour les systèmes non holonomes.
- Cette dernière distinction a plusieurs conséquences quant à la procédure à suivre lors de la synthèse d'une loi de commande.

En conclusion, les robots mobiles sont des exemples types de systèmes mécaniques dont les conditions du contact des roues avec le sol sont régies par des contraintes sur les vitesses, et qui ne sont pas intégrables.

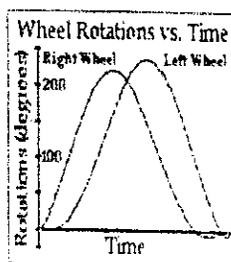


Fig.1.2 : chaise roulante non holonome : les valeurs initiales et finales des angles de rotations des roues sont identiques. Mais la position de la chaise a changé

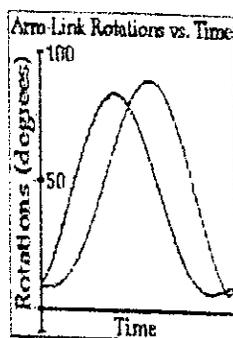


Fig.1.3 : bras manipulateur holonome : les valeurs initiales et finales des variables articulaires sont identiques, la rotation de chaque articulation étant égale à dix degrés. Mais la position finale de l'organe terminal est, et doit être la même que sa position initiale.

ملخص

العمل يخص دراسة طريقة التحكم بطور الانزلاق، و طور الانزلاق المكتم بالروبوتات المتحركة. و هو مقسم إلى ثلاثة أقسام: القسم الأول يتطرق إلى أنظمة الوصف التحريكية والديناميكية العامة المتعلقة بالروبوتات المتحركة. القسم الثاني يصف كيفية التحكم في هذه الروبوتات بطريقة طور الانزلاق المستمر. أما القسم الأخير، فهو يبرر تطبيق طريقة التحكم بطور الانزلاق المكتم في الروبوتات المتحركة. النتائج تؤكد الجودة العالية للأنظمة المتحكمه بطور الانزلاق المستمر و المكتم، كما تبرز أيضا خاصية صلابة التحكم العالية.

كلمات مفتاحية: روبوت متحرك، التحكم المتين بطور الانزلاق المستمر، التحكم المتين بطور الانزلاق المكتم.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré à la commande par mode de glissement continu et discret des robots mobiles. Il est divisé en trois parties : la première présente les aspects de la modélisation et de la classification des robots mobiles. La seconde introduit la commande par mode de glissement continu, et son application aux robots mobiles. Quant à la troisième ; elle présente l'application de la commande par mode de glissement discret aux robots mobiles. Les simulations effectuées confirment les bonnes qualités des systèmes commandés par mode de glissement, ainsi que leur grande propriété de robustesse.

Mot clés : robots mobiles, commande robuste par mode de glissement continu, commande robuste par mode de glissement discret.

Abstract

The work presented in this report is dedicated to the control of mobile robots by continuous sliding mode and discrete sliding mode. It is divided into three parts: the first presents the aspects of the modelling and the classification of the mobile robots. The second one introduces the continuous sliding mode control of mobile robots. As for the third; it presents the application of the discrete sliding mode control of mobile robots. Made simulations confirm the good qualities of systems controlled by sliding mode, as well as their good property of robustness.

Keywords: mobile robots, continuous robust sliding mode control, discrete robust sliding mode control.