

6/04

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la recherche scientifique

## ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

### Département de Génie Mécanique

### PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie mécanique

#### Thème :

## OPTIMISATION DES DEPORTS DANS LES TRAINS EPICYCLOIDAUX

#### Proposé par :

Mr H.BELHANECHÉ  
Mr M.BOUAZIZ

#### Présenté par :

M<sup>elle</sup> BECHATA Maliya

Promotion : Septembre 2004

## ملخص

هذا العمل يهدف إلى تقديم طريقة عددية لإيجاد معاملات الديبور في التران الايبسيكلويدال و ذلك باستعمال برنامج عددي يسمى متلاب 6.5

هذه الطريقة تهدف إلى إيجاد أصغر قيمة لمعاملات الديبور التي تحقق بعض الشروط و هذا من اجل تحقيق أحسن سير آلية.

**كلمات مفتاحية** التران الايبسيكلويدال, الديبور, توسيع, أسنان اسطوانية.

## RESUME

Ce travail consiste à présenter une méthode numérique d'optimisation des coefficients de déport dans les trains épicycloïdaux, avec l'utilisation d'un programme numérique appelé le logiciel MATLAB 6.5.

Cette méthode recherche la plus petite valeur des coefficients de déport qui satisfait certaines conditions afin d'assurer un bon fonctionnement du mécanisme.

**Mots clés:** Trains épicycloïdaux, déport, optimisation, engrenages cylindriques.

## ABSTRACT

This work consists to show a numerical way to optimise the coefficient of deport in epicyclical train gear with the use of numerical program called the software MATHLAB 6.5.

This way research small value of the coefficient of deports which satisfied some conditions in order to assure a good functioning mechanism.

**Key word:** Epicyclical train gear, deport, optimisation, cylindrical gears.

# REMERCIEMENTS

Je remercie très vivement mon promoteur Mr M. Bouaziz, et mon co-promoteur Mr H. Belhanache pour leurs encouragements, leurs suivis et pour les conseils qu'ils m'ont apporté pour la réalisation de ce projet.

Je tiens à remercier mon professeur Mr M. Madani, pour l'honneur qu'il m'a fait en président le Jury, je remercie également les autres membres des Jurys pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des enseignants qui ont contribués à ma formation, sans oublier tout le personnel de la bibliothèque.

Enfin, je tiens à exprimer ma très vive gratitude à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce projet de fin d'études.

# DEDICACES

## Je dédie ce travail

**A:**

Ma chère maman, ma chère grande mère Zahia et, mon cher grand père  
Hamid

A la mémoire de ma chère grande mère Ouerdia

A toute ma famille et mes amis :

Abdelwahab, Abderahmane, Chafik, Fella, Foufou, Hakim, Hassina,  
Ikram, Imène, Kamal, Karim, Karima, Nacéra, Rachid, Ramzi,  
Rostom, Sihème et Zhor

**Maliya**

## NOMENCLATURES

- $\alpha$  : Angle de pression [°].
- $\alpha'$  : Angle de pression de fonctionnement [°].
- $Z$  : Nombre de dents.
- $Z_1$  : Nombre de dents du pignon.
- $Z_2$  : Nombre de dents de la roue.
- $p$  : Pas circonférentiel [mm].
- $d$  : Diamètre primitif [mm].
- $d_1$  : Diamètre primitif du pignon [mm].
- $d_2$  : Diamètre primitif de la roue [mm].
- $r_1$  : Rayon primitif du pignon [mm].
- $r_2$  : Rayon primitif de la roue [mm].
- $d'_1$  : Diamètre primitif de fonctionnement du pignon [mm].
- $d'_2$  : Diamètre primitif de fonctionnement de la roue [mm].
- $r'_1$  : Rayon primitif de fonctionnement du pignon [mm].
- $r'_2$  : Rayon primitif de fonctionnement de la roue [mm].
- $d_b$  : Diamètre de base [mm].
- $d_{b1}$  : Diamètre de base du pignon [mm].
- $d_{b2}$  : Diamètre de base de la roue [mm].
- $r_{b1}$  : Rayon de base du pignon [mm].
- $r_{b2}$  : Rayon de base de la roue [mm].
- $h_a$  : Hauteur de saillie [mm].
- $h_f$  : Hauteur du creux [mm].
- $d_a$  : Diamètre de tête [mm].
- $D_f$  : Diamètre du pied [mm].
- $S$  : Epaisseur de dentaire [mm].

- $e$  : Intervalle du creux [mm].  
 $b$  : Largeur de denture [mm].  
 $y, j$  : Coefficients de la saillie.  
 $\omega_1$  : Vitesse angulaire du pignon [rad / s].  
 $\omega_2$  : Vitesse angulaire de la roue [rad / s].  
 $v_1$  : Déport du pignon [mm].  
 $v_2$  : Déport de la roue [mm].  
LPT : Ligne primitive de taillage.  
LR : Ligne de référence.  
LPT<sub>1</sub> : Ligne primitive de taillage du pignon.  
LPT<sub>2</sub> : Ligne primitive de taillage de la roue.  
CPT : Cercle primitif de taillage.  
CPT<sub>1</sub> : Cercle primitif de taillage du pignon.  
CPT<sub>2</sub> : Cercle primitif de taillage de la roue.  
 $C_1$  : Cercle primitif du pignon.  
 $C_2$  : Cercle primitif de la roue.  
 $C_a$  : Cercle de tête.  
 $C_{a1}$  : Cercle de tête du pignon.  
 $C_{a2}$  : Cercle de tête de la roue.  
 $C_b$  : Cercle de base.  
 $C_{b1}$  : Cercle de base du pignon.  
 $C_{b2}$  : Cercle de base de la roue.  
 $q$  : Point de rebroussement.  
 $P'_1$  : Branche fictive.  
 $m_n$  : Module réel [mm].  
 $R_2$  : Repère lié à la roue.  
 $J_f$  : Jeu normal au fond de la dent [mm].  
 $m_{nor}$  : Module normalisé [mm].

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
<u>CHAPITRE I: RAPPELS GEOMETRIQUES SUR LES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURES DROITES</u>	3
I.1. Introduction	3
I.2. Profil de denture	4
I.2.1. Propriétés de la développante de cercle	4
I.3. Profils conjugués	4
I.4. Surface de denture	5
I.5. Cylindre primitif d'une roue, crémaillère génératrice	6
I.6. Surfaces conjuguées de deux roues	6
I.7. Paramètres définissant une denture droite	6
I.7.1. Engrenage extérieur	7
I.7.1.1. Définition du module	7
I.7.1.2. Eléments géométriques d'une denture extérieure exprimés en fonction du module	7
I.7.2. Engrenage intérieur	9
I.7.2.1. Eléments géométriques d'une denture intérieure exprimés en fonction du module	8
I.8. Conditions d'engrènement de deux roues	8
I.9. Etude de l'engrènement	8
I.9.1. Continuité d'engrènement	8
I.9.1.1. Denture droite extérieure	11
I.9.1.2. Denture droite intérieure	13
I.10. Phénomène d'interférence	13
I.10.1. Interférence primaire	13
I.10.1.1. Dentures droites extérieures	16
I.10.1.2. Dentures droites intérieures	17
I.10.2. Interférence secondaire	20
I.11. Epaisseur de denture	20
I.11.1. Epaisseur de denture définie sur le cercle de diamètre $d$	21
I.11.2. Epaisseur de base	21
I.11.3. Epaisseur de tête	21
I.12. Conclusion	
<u>CHAPITRE II: CORRECTIONS DE DENTURE</u>	22
II.1. Introduction	22
II.2. Crémaillère génératrice normalisée	23
II.2.1. Disposition des lignes LR et LPT	24
II.2.2. Convention de signe pour $v$ et $x$	22
II.2.3. Expression de l'épaisseur de denture et de l'intervalle	25
II.3. Entraxe normal	25
II.4. Entraxe de fonctionnement	27
II.5. Denture déportée sans variation d'entraxe	27

II.5. 1. Engrenage extérieur	28
II.5.2. Engrenage intérieur	28
II.6. Denture déportée avec variation d'entraxe	29
II.6.1. Engrenage extérieur	31
II.6. 2. Engrenage intérieur	32
II.7. Rognage des dentures	32
II.7.1. Dentures extérieures	33
II.7.2. Dentures intérieures	33
II.8. Conclusion	
<b>CHAPITRE III: GLISSEMENT SPECIFIQUES</b>	34
III.1. Introduction	34
III.2. Glissement relatif	36
III.3. Vitesse de glissement relatif	37
III.4. Glissement spécifique	37
III.5. Application à un engrenage à dentures extérieures	38
III.5.1. Vitesse de glissement	39
III.5.2. glissement relatif	39
III.5.3. glissement spécifique	42
III.5. 4. Equilibrage de l'usure	
III.5. 4. 1. Equilibrage de l'usure par l'égalisation des glissements spécifiques maximums	42
III.6. Application à un engrenage à dentures intérieures	43
III.6.1. Vitesse de glissement	44
III.6.2. glissement relatif	44
III.6.3. glissement spécifique	44
III.7. Conclusion	44
	47
<b>CHAPITRE IV: OPTIMISATION DES COEFFICIENTS DE DEPORT</b>	
IV.1. Introduction	48
IV.2. Critère d'optimisation	48
IV.3. Conditions à respecter	49
IV.3.1. Glissement spécifique maximum	50
IV.3.2. Somme des coefficients de dépports	51
IV.3.3. Epaisseur de tête	52
IV.3.4. L'interférence	52
IV.3.5. Rapport de conduite	53
IV.4. Présentation sommaire du problème	53
IV.5. Organigramme de résolution	54
IV.6. Exemples d'application et interprétations	55
<b>CHAPITRE V: GENERALITES SUR LES TRAINS EPICYCLOIDAUX</b>	
V.1. Introduction	59
V.2. Les épicycles	59
V.3. Les Trains épicycloïdaux	59
V.3.1. Définition	59
V.3.2. Constitution	60
V.4. Train ordinaire	60
V.5. Train épicycloïdal plan	61
V.6. Différents types de trains épicycloïdaux plans	61
V.6.1. Relations géométriques	62

# CHAPITRE I

## RAPPELS GEOMETRIQUES SUR LES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURES DROITES

### I.1. INTRODUCTION

Les engrenages sont des éléments de transmission de mouvement et de puissance couramment utilisés en construction mécanique. Leur utilisation est très répandue, par exemple, dans les domaines des machines-outils, automobiles et aéronautiques.

Pratiquement dans tous les mécanismes de transmission mécanique, on trouve un couple d'engrenages pour transmettre un mouvement de rotation d'un axe à un autre qui peuvent être parallèles, concourants ou quelconques. Les engrenages cylindriques à denture droite sont les plus utilisées [7].

### I.2. PROFIL DE DENTURE

Pour les engrenages cylindriques, on rencontre différents types de profils : en épicycloïde, à arc de cercle, à développantes de cercle, etc. De nos jours, la denture presque exclusivement utilisée est celle dont le profil est à développante de cercle pour ses avantages pratiques tels que la simplicité de génération, l'insensibilité aux erreurs d'entraxe, etc.

La développante de cercle est obtenue en faisant rouler sans glisser la droite ( $\Delta$ ) sur un cercle  $C_b$  appelé cercle de base (figure 1). Par définition, on a donc :

$$\text{arc } TQ = \overline{TM}$$

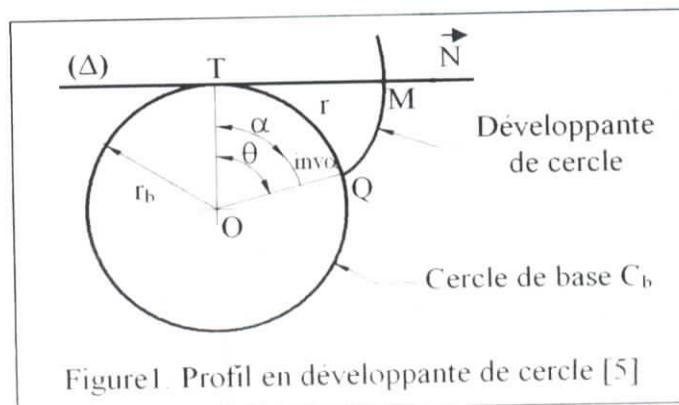
Q étant le point de rebroussement du profil.

Il vient:  $r_b \theta = r_b \text{tg} \alpha$

D'où :  $\theta = \text{tg} \alpha$

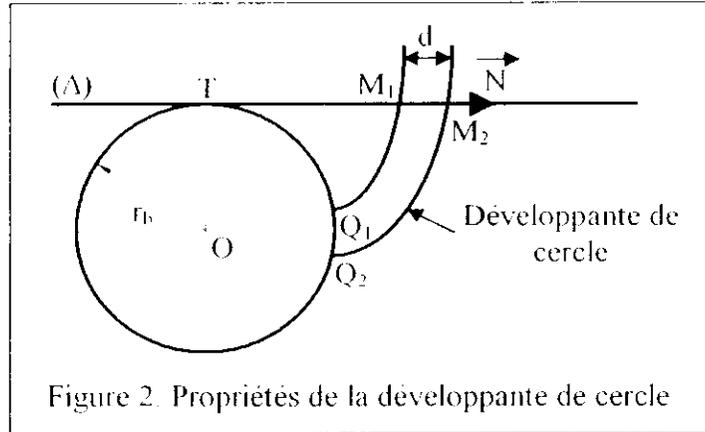
On désigne par involute ( $\alpha$ ) (notée  $\text{inv} \alpha$ ;  $\alpha$  est donné en radians) la fonction définie par :

$$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$$



### 1.2.1. PROPRIETES DE LA DEVELOPPANTE DE CERCLE

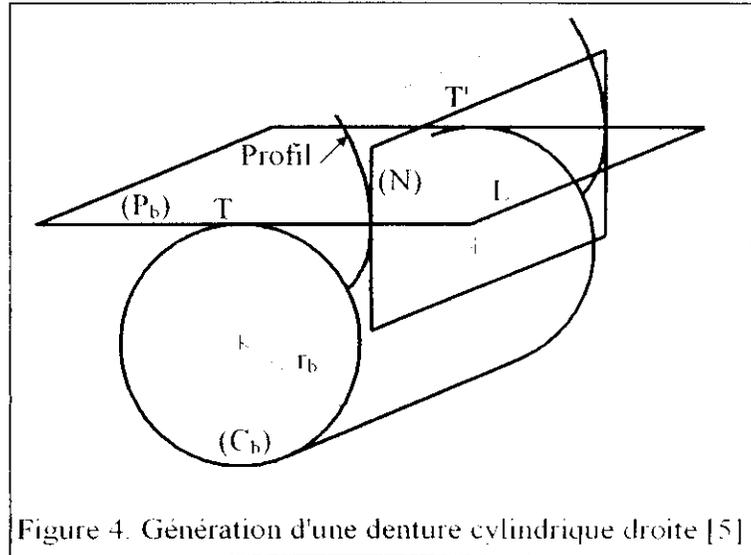
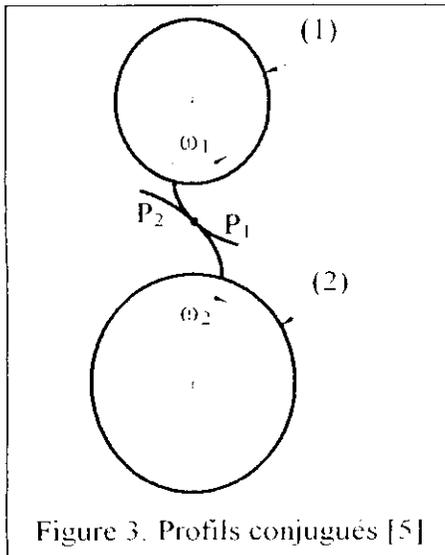
- Les développantes d'un même cercle de base sont parallèles entre elles et séparées par une distance  $d$  (figure 2).
- La normale  $\vec{N}$  à la développante est portée par l'axe instantané de rotation  $(\Lambda)$ .
- Le rayon de courbure au point  $M$  est égal à  $TM$  ( $T$  est le centre instantané de rotation)
- La développante de cercle ne peut pas avoir de point à l'intérieur du cercle de base (cercle développé).



### 1.3. PROFILS CONJUGUES

Soient  $P_1$  un profil lié au solide (1) et  $P_2$  un profil lié au solide (2) (figure 3).

Si au cours des rotations des engrenages (1) et (2) autour de leurs axes, les profils  $P_1$  et  $P_2$  restent constamment tangents, on dit que ces derniers sont conjugués. La denture à développante de cercle assure cette conjugaison.



### 1.4. SURFACE DE DENTURE

La surface de denture est obtenue en faisant rouler sans glisser sur le cylindre de base un plan  $(P_b)$  dit plan de base et auquel est lié un plan  $(N)$  dit plan génération perpendiculaire à  $(P_b)$  (figure 4). L'intersection  $(L)$  de  $(N)$  et  $(P_b)$  est parallèle à l'axe instantané de rotation  $TT'$ .

La surface de denture peut être considérée comme engendrée par la droite  $(L)$  lorsque le plan  $P_b$  roule sans glisser sur  $(C_b)$ . Toutes ses génératrices sont donc parallèles à l'axe du cylindre. On obtient ainsi une denture droite.

## I.5. CYLINDRE PRIMITIF D'UNE ROUE, CREMAILLERE GENERATRICE

La figure 5 représente un cylindre ( $C_p$ ) dit primitif de même axe que le cylindre de base avec un rayon  $r_p > r_b$ , et un plan (P) tangent à ce cylindre et faisant un angle  $\alpha$  avec le plan ( $P_b$ ).

En faisant rouler sans glisser le plan ( $P_b$ ) sur le cylindre ( $C_b$ ), la vitesse de translation du plan ( $P_b$ ) est:  $V_b = r_b \omega$  et celle du plan (P) sur le cylindre ( $C_p$ ) est:  $V_p = r_p \omega$ . Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{V_b}{V_p} = \frac{r_b \omega}{r_p \omega} = \frac{r_b}{r_p} \quad (1.1)$$

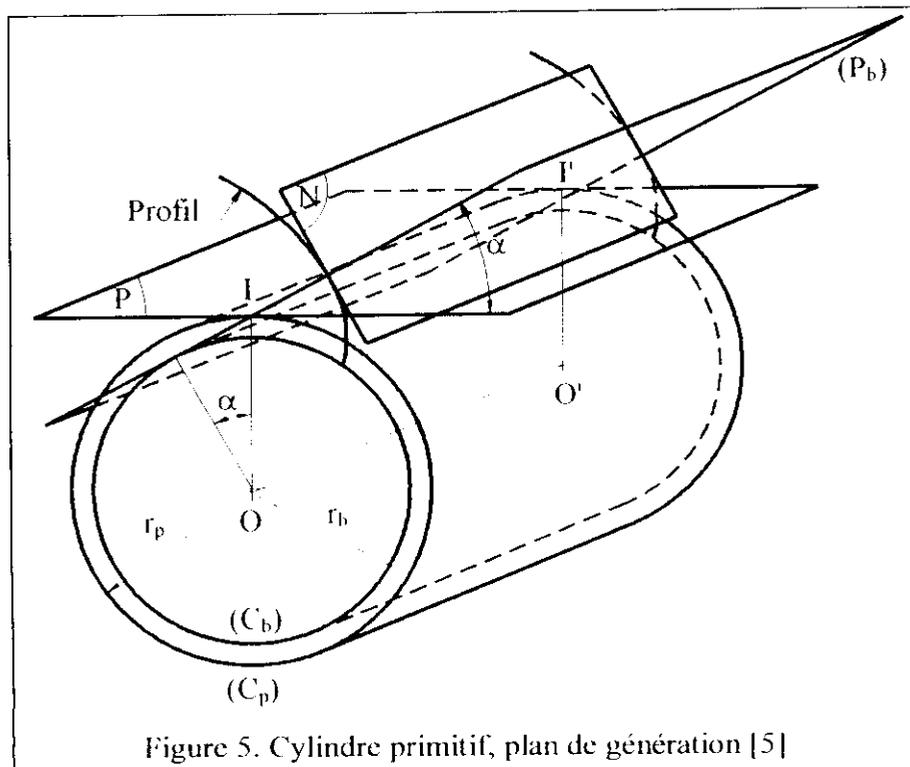
$r_p$  et  $r_b$  étant constant donc:  $V_b / V_p = \text{const.}$

Cette relation montre que si le plan de base se déplace à une vitesse  $\omega$ , le plan primitif se déplace également à la même vitesse  $\omega$  constante. D'autre part, ces deux plans faisant un angle  $\alpha$  constant, il vient:

$$\frac{V_b}{V_p} = \frac{r_b}{r_p} = \cos \alpha \quad (1.2)$$

$\alpha$  est appelé angle de pression.

Le plan (N) et la surface de denture étant constamment tangents, ce sont les surfaces conjuguées. Le plan (N) constitue le plan de denture de la crémaillère génératrice.



Au cours du roulement sans glissement de ( $P_b$ ) sur ( $C_b$ ), le point M (figure 6) se déplace sur (A). Cette droite est appelée ligne d'action, le plan ( $P_b$ ) est le plan d'action.

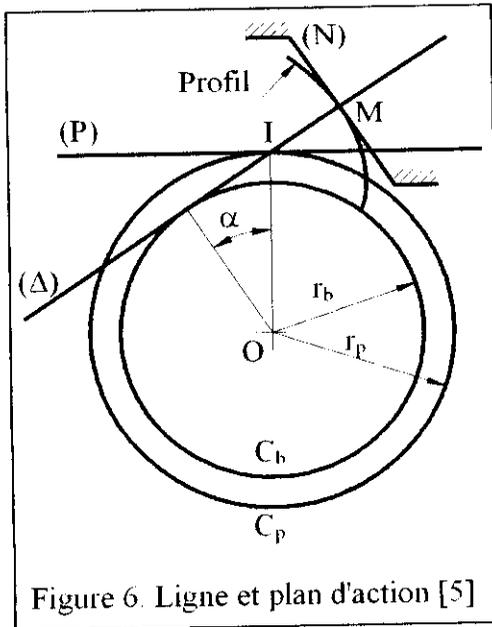


Figure 6. Ligne et plan d'action [5]

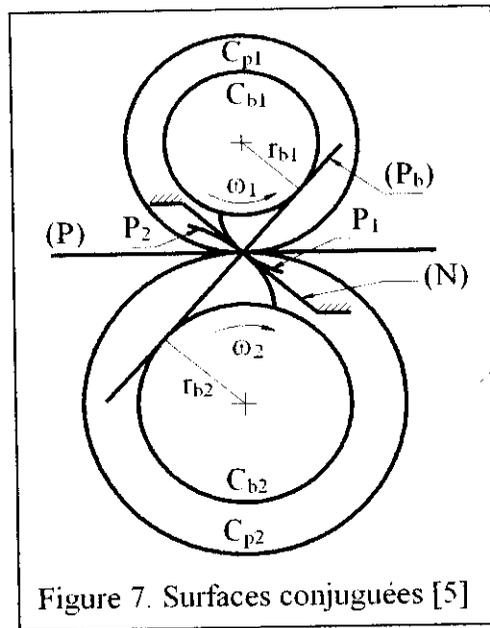


Figure 7. Surfaces conjuguées [5]

## I.6. SURFACES CONJUGUES DE DEUX ROUES

La figure 7 représente deux roues dont les cercles de base ( $C_{b1}$ ) et ( $C_{b2}$ ) sont tangents au plan ( $P_b$ ) et les cercles primitifs ( $C_{p1}$ ) et ( $C_{p2}$ ) sont tangents au plan ( $P$ ). On a :

$$\cos \alpha = \frac{r_{b1}}{r_{p1}} = \frac{r_{b2}}{r_{p2}} \quad (I.3)$$

Par conséquent, les deux roues ont la même crémaillère génératrice définie par les plans ( $P$ ) et ( $N$ ).

Le plan ( $N$ ) reste constamment tangent aux surfaces ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) liées respectivement à ( $C_{b1}$ ) et ( $C_{b2}$ ) : Ces surfaces roulent et glissent l'une sur l'autre en restant tangentes.

## I.7. PARAMETRES DEFINISSANT UNE DENTURE DROITE

### I.7.1. ENGRENAGE EXTERIEUR

Les paramètres caractéristiques de l'engrenage extérieur sont représentés dans la figure 8.

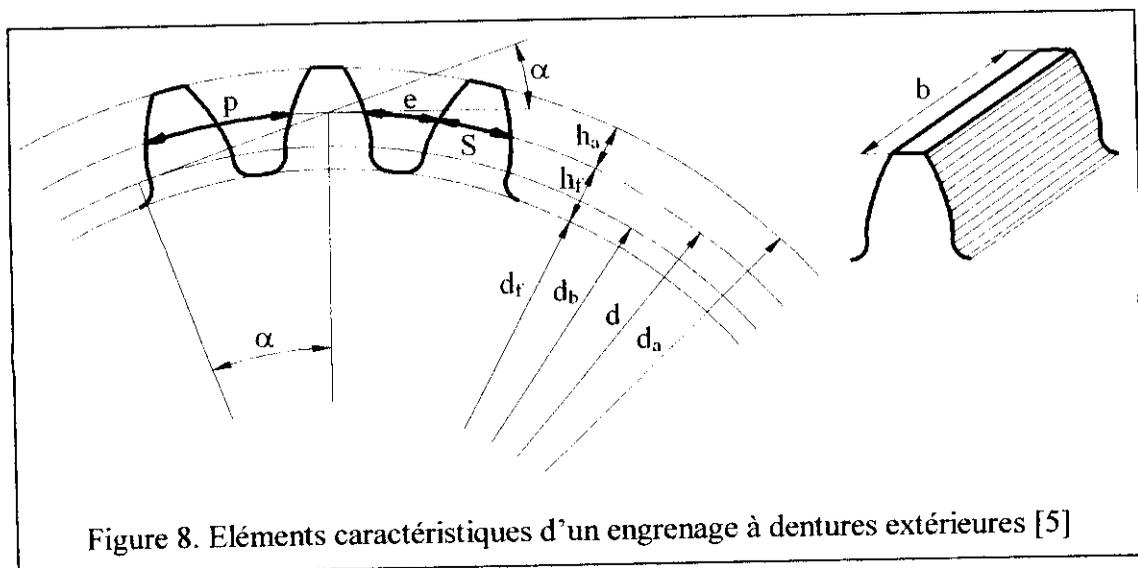


Figure 8. Eléments caractéristiques d'un engrenage à dentures extérieures [5]

### 1.7.1.1. DEFINITION DU MODULE

On a :  $\pi d = pZ$

On définit le module de la denture (exprimé en millimètres) par le rapport :

$$m = \frac{d}{Z} = \frac{p}{\pi} \quad (1.4)$$

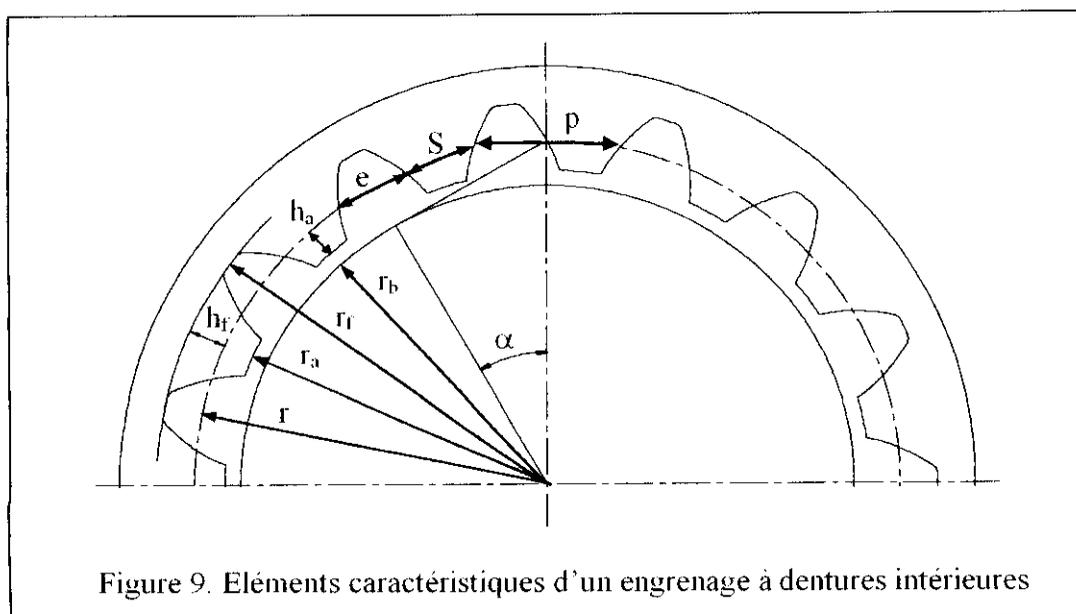
### 1.7.1.2. ELEMENTS GEOMETRIQUES D'UNE DENTURE EXTERIEURE EXPRIMES EN FONCTION DU MODULE

- Diamètre primitif :  $d = mZ$
- Hauteur de saillie :  $h_a = y \cdot m$
- Hauteur de creux :  $h_f = (y + j)m$ . Pour une denture normale :  $y = 1$  et  $j = 0,25$
- Diamètre de tête :  $d_a = d + 2h_a = m(Z + 2y)$
- Diamètre de pied :  $d_f = d - 2h_f = m[Z - 2(y + j)]$
- Pas :  $p = \pi m$
- Epaisseur de denture :  $S = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$  pour une denture normale
- Intervalle de creux :  $e = p - S = \frac{\pi m}{2}$
- Largeur de denture :  $b = km$ ;  $k = 6$  à  $16$  (8 à 12 : valeurs courantes)

**Remarque:** Pour une denture normalisée, l'angle de pression  $\alpha = 20^\circ$ .

### 1.7.2. ENGRENAGE INTERIEUR

Les paramètres caractéristiques de l'engrenage intérieur sont représentés dans la figure 9.



### 1.7.2.1. ELEMENTS GEOMETRIQUES D'UNE DENTURE INTERIEURE EXPRIMES EN FONCTION DU MODULE

- Diamètre primitif :  $d = mZ$
- Hauteur de saillie :  $h_a = y \cdot m$
- Hauteur de creux :  $h_f = (y + j)m$ . Pour une denture normale :  $y = 1$  et  $j = 0,25$
- Diamètre de tête :  $d_a = d - 2h_a = m(Z - 2y)$
- Diamètre de pied :  $d_f = d + 2h_f = m[Z + 2(y + j)]$
- Epaisseur de denture :  $s = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$  pour une denture normale
- Intervalle de creux :  $e = p - s = \frac{\pi m}{2}$

### 1.8. CONDITIONS D'ENGRENEMENT DE DEUX ROUES

- Les deux surfaces actives doivent être conjuguées
- L'angle de pression doit être commun aux deux roues
- Les pas circonférentiels doivent être égaux :

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{d_1}{Z_1} = \frac{d_2}{Z_2} \Rightarrow \text{module commun.}$$

### 1.9. ETUDE DE L'ENGRENEMENT

Considérons l'engrènement des deux profils conjugués  $P_1$  (menant) et  $P_2$  (mené). On sait que la ligne d'action passe le point I de contact des deux cercles primitifs et inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la tangente commune aux deux cercles primitifs.

#### 1.9.1. CONTINUITÉ D'ENGRENEMENT

##### 1.9.1.1. DENTURE DROITE EXTERIEURE

- **Début d'engrènement:**

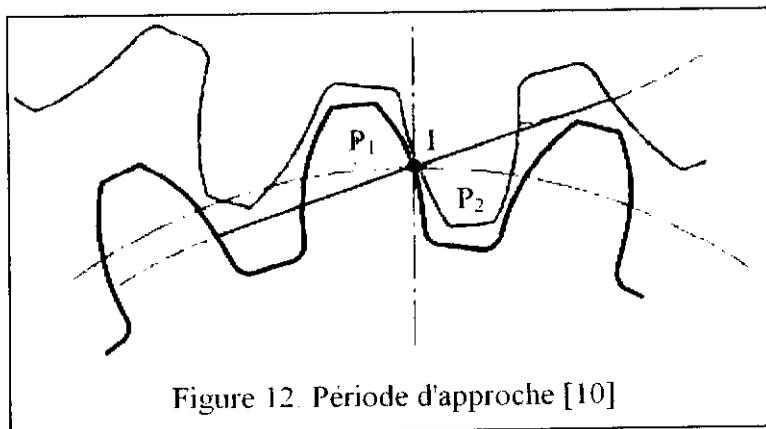
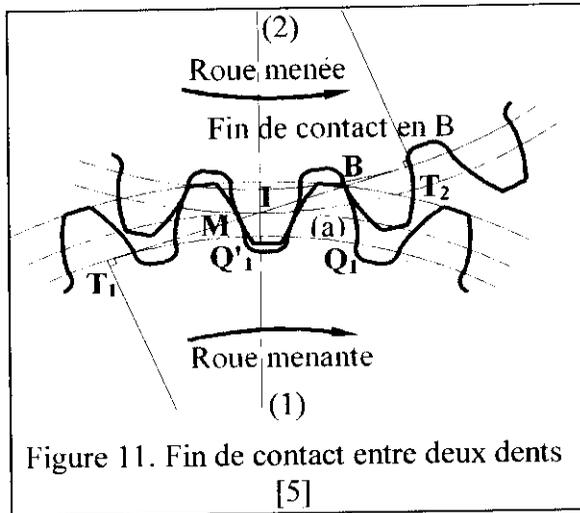
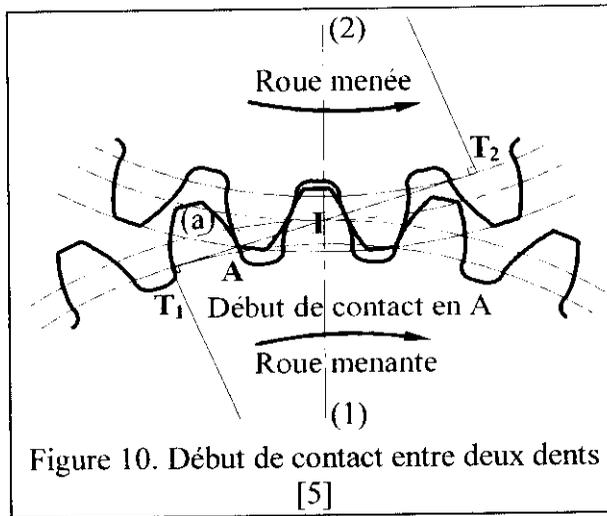
Le profil  $P_2$  est attaqué à sa pointe A par le profil  $P_1$ . La figure 10 représente le début d'engrènement de la dent (a) du pignon (1).

- **Point de contact en I:**

La période d'approche est celle qui est comprise entre le début de l'engrènement jusqu'au moment où le point de contact est en I. la figure 11 représente cette période d'approche.

- **Fin d'engrènement:**

Le profil  $P_1$  est en contact, par sa pointe B avec le profil  $P_2$ . La figure 12 représente la fin d'engrènement de la dent (a) du pignon (1).



Pour assurer la continuité d'engrènement, il faut que lorsque les profils conjugués  $P_1$  et  $P_2$  cessent d'être en contact, un autre couple de profils conjugués soit déjà en engrènement, ce qui signifie qu'il y a toujours au moins un couple de dents en prise.

**a) Pas mesuré sur la ligne d'action : MB**

On a (figure 11) :  $MB = T_1B - T_1M$  (I.5)

Or:  $T_1B = \text{arc } T_1Q_1$  (I.6)

Et:  $T_1M = \text{arc } T_1Q'_1$  (I.7)

Donc:  $MB = \text{arc } T_1Q_1 - \text{arc } T_1Q'_1$  (I.8)

D'où :  $MB = P_b$  (pas de base) (I.9)

Comme :  $P_b = \frac{\pi d_b}{Z} = \frac{\pi d \cos \alpha}{Z} = p \cos \alpha$  (I.10)

$p$  étant le pas circulaire mesuré sur le cercle primitif.

On a donc :  $MB = p \cos \alpha$  (I.11)

**b) longueur d'approche :**

Elle est définie par le segment AI.

Soit :  $g_f = AI$

**c) longueur de retraite :**

Elle est définie par le segment IB.

Soit :  $g_a = IB$

**d) longueur de conduite :**

C'est le segment AB.

On a :  $AB = AI + IB = g_f + g_a$  (I.12)

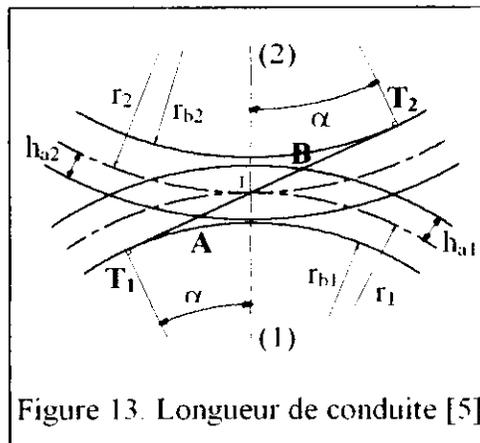


Figure 13. Longueur de conduite [5]

**e) condition de continuité d'engrènement :**

Pour qu'il ait continuité de conduite, il faut :  $AB > MB$ , soit :

$$\epsilon_\alpha = \frac{AB}{MB} = \frac{g_f + g_a}{p \cos \alpha} > 1$$
 (I.13)

$\epsilon_\alpha$  est le rapport de conduite.

**\* Détermination de AB :**

$$AB = AI + IB$$
 (I.14)

$$g_f = AI = AT_2 - IT_2 = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha$$
 (I.15)

$$g_a = IB = T_1B - T_1I = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha$$
 (I.16)

D'où :  $AB = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - (r_1 + r_2) \sin \alpha$  (I.17)

**Remarques :**

- pour une denture normalisée, on a :  $h_{a1} = h_{a2} = 1 m$  et  $\alpha = 20^\circ$ .
- Il est souhaitable en pratique d'avoir  $\epsilon_\alpha \geq 1,3$ .

En posant :  $h_{a1} = y_1 m$   
 $h_{a2} = y_2 m$

Et en tenant compte de :  $r_1 = \frac{mZ_1}{2}$   
 $r_2 = \frac{mZ_2}{2}$

Il vient :

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[ \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + y_1^2 + Z_1 y_1} + \sqrt{\frac{Z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + y_2^2 + Z_2 y_2} - \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \sin \alpha \right]$$
 (I.18)

En posant de plus  $N_1 = \frac{Z_1}{y_1}$  et  $N_2 = \frac{Z_2}{y_2}$ , on aura :

$$\varepsilon_\alpha = y_1 U_1 + y_2 U_2 \quad (I.19)$$

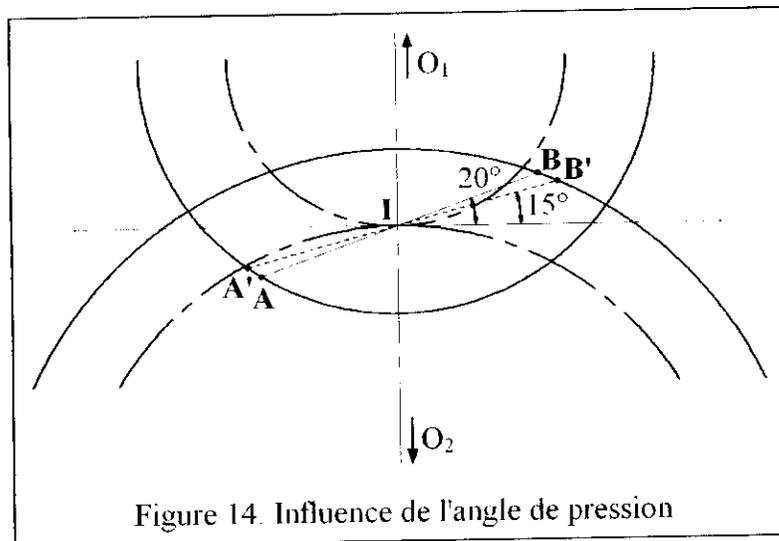
$U_1$  et  $U_2$  sont les valeurs particulières de la fonction :

$$U_i = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \frac{1}{N_i}}{\sin \alpha + \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{4} + \frac{1}{N_i^2} + \frac{1}{N_i}}} \quad i = \overline{1,2} \quad (I.20)$$

obtenues respectivement pour:  $N = N_1$  et  $N = N_2$

### Remarques:

- Les abaques [1] permettent de déterminer les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  pour des valeurs données de l'angle de pression.
- Le rapport de conduite croît avec les saillies; il croît également si le rayon primitif de l'un des éléments de l'engrenage augmente. Par contre, une augmentation de l'angle de pression a pour effet une diminution du rapport de conduite (figure 14).



### 1.9.1.2. DENTURE DROITE INTERIEURE

La figure 15 représente l'engrènement de deux profils conjugués  $P_1$  et  $P_2$  d'un engrenage intérieur, dont la ligne d'action est tangente aux cercles de base en  $T_1$  et  $T_2$  respectivement. Le pignon est supposé être l'organe menant, le contact entre  $P_1$  et  $P_2$  commence en A, au sommet du profil  $P_2$  et se termine en B, au sommet du profil  $P_1$  [10].

Comme pour l'engrenage extérieur on retrouve:

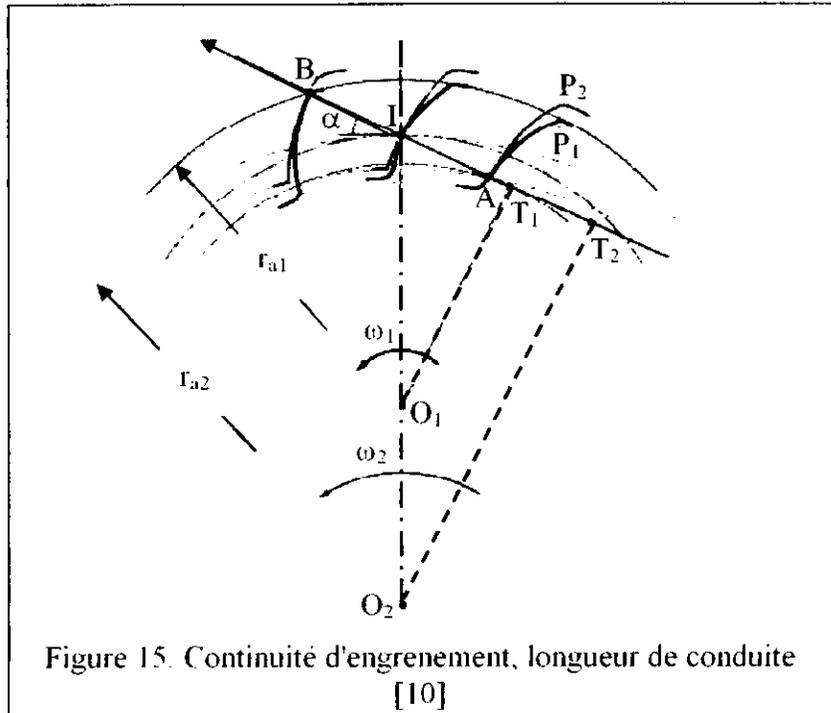
- La longueur d'approche:  $AI = g_f$
- La longueur de retraite:  $IB = g_a$
- La longueur de conduite:  $AB = g_f + g_a$

Tous calculs faits, conduira à:

$$AB = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - (r_1 - r_2) \sin \alpha \quad (I.21)$$

Le rapport de conduite est donné par:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[ \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + y_1^2 + Z_1 y_1} - \sqrt{\frac{Z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + y_2^2 + Z_2 y_2} - \left( \frac{Z_1 - Z_2}{2} \right) \sin \alpha \right] \quad (1.22)$$



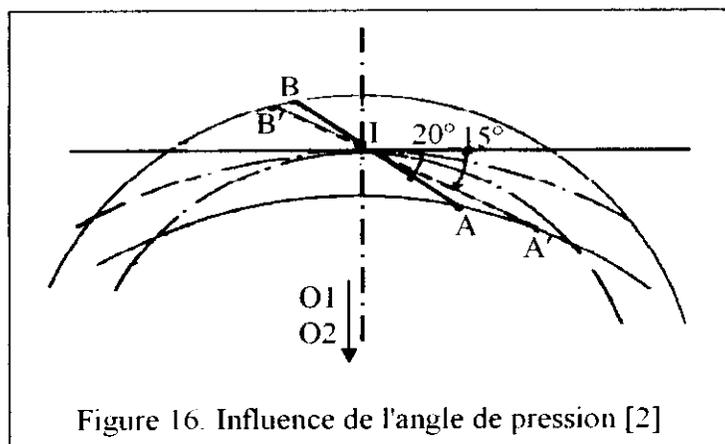
En posant de plus  $N_1 = \frac{Z_1}{y_1}$  et  $N_2 = \frac{Z_2}{y_2}$

Et en convenant du signe:  $N_1 > 0$  et  $N_2 < 0$ , on aura :

$$\varepsilon_\alpha = y_1 U_1 + y_2 U_2 \quad (1.23)$$

### Remarques:

- Le rapport de conduite augmente si le rayon primitif du pignon est augmenté, et diminue si le rayon primitif de la roue est augmenté.
- Une augmentation de l'angle de pression entraîne une diminution du rapport de conduite (figure 16) [1].



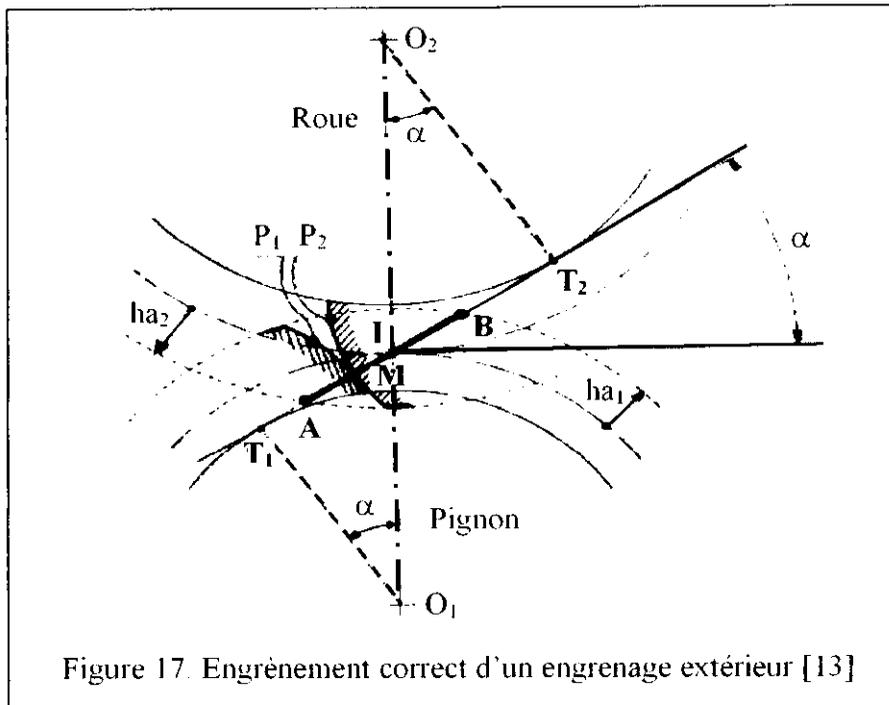
## I.10. PHENOMENE D'INTERFERENCE

Pour engrener correctement, les deux profils de denture en contact doivent rester constamment tangents. Dans le cas de denture à développante de cercle, le lieu des points de contact est la droite  $T_1T_2$ . On dit qu'il y a interférence quand le point de contact  $M$  est à l'extérieur du segment  $T_1T_2$ .

### I.10.1. INTERFERENCE PRIMAIRE

#### I.10.1.1. DENTURES DROITES EXTERIEURES

Considérons l'engrènement de deux profils conjugués d'un engrenage extérieur (figure 17). Lorsque le point de contact  $M$  est entre  $T_1$  et  $T_2$ , les deux profils  $P_1$  et  $P_2$  sont conjugués.

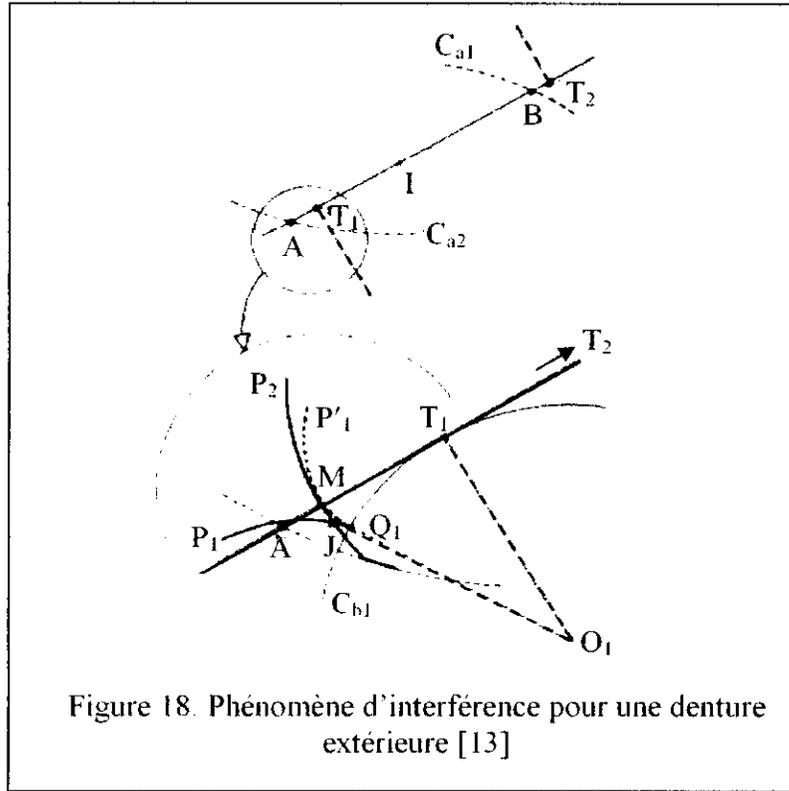


Lorsque ce point est à l'extérieur du point  $T_1$  (figure 18), le profil  $P_2$  a son centre de courbure en  $T_2$  et le profil  $P_1$  a son centre de courbure en  $T_1$ . Ce n'est donc plus le profil  $P_1$  qui est conjugué avec  $P_2$ , mais une branche fictive  $P'_1$  symétrique de  $P_1$  par rapport à  $O_1Q_1$ .

Comme  $T_1M < T_2M$ , le point  $Q_1$  est à l'intérieur de la denture. Les deux profils  $P_1$  et  $P_2$  n'étant pas seulement tangents, mais ils se coupent en  $J$ : il y a interférence d'engrènement.

#### Remarque:

- On constate le même phénomène si le point de contact  $M$  est à l'extérieur de  $T_1T_2$  du côté de  $T_2$ . Cette interférence est dite également interférence théorique.



Pour éviter cette interférence, il suffit que le segment de conduite AB soit situé à l'intérieur du segment d'action  $T_1T_2$ , ce qui peut se vérifier par les deux conditions:

$$AI < IT_1 \quad \text{et} \quad IB < IT_2$$

$$AI < IT_1 \Rightarrow \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha < r_1 \sin \alpha \quad (I.24)$$

$$IB < IT_2 \Rightarrow \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha < r_2 \sin \alpha \quad (I.25)$$

Supposons :  $h_{a1} = y_1 m_n$   
 $h_{a2} = y_2 m_n$

Comme  $r_1 = \frac{m_n Z_1}{2}$  et  $r_2 = \frac{m_n Z_2}{2}$ , on aura :

$$m_n \left[ \sqrt{\left(\frac{Z_2}{2} + y_2\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} - \left(\frac{Z_2}{2}\right) \sin \alpha \right] < \left(\frac{m_n Z_1}{2}\right) \sin \alpha \quad (I.26)$$

D'où :

$$\sqrt{\left(\frac{Z_2}{2} + y_2\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} < \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right) \sin \alpha \quad (I.27)$$

Et :

$$m_n \left[ \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + y_1\right)^2 - \left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} - \left(\frac{Z_1}{2}\right) \sin \alpha \right] < \left(\frac{Z_2}{2}\right) \sin \alpha \quad (I.28)$$

$$\text{D'où : } \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + y_1\right)^2 - \left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} < \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right) \sin \alpha \quad (1.29)$$

Si  $Z_1 < Z_2$ , le risque d'interférence se situe du côté du point A. Il faut donc prendre la relation (1.27):

$$\sqrt{\left(\frac{Z_2}{2} + y_2\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} < \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right) \sin \alpha$$

$$\text{Il vient : } \left(\frac{Z_2}{2} + y_2\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha < \left(\frac{Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1Z_2}{4}\right) \sin^2 \alpha \quad (1.30)$$

$$\text{D'où : } Z_1^2 + 2Z_1Z_2 - \frac{4y_2}{\sin^2 \alpha} (y_2 + Z_2) > 0 \quad (1.31)$$

En résolvant cette inéquation par rapport à  $Z_1$ , le discriminant est:

$$\Delta' = Z_2^2 + \frac{4y_2}{\sin^2 \alpha} (y_2 + Z_2) \quad (1.32)$$

Pour éviter donc l'interférence théorique, la valeur de  $Z_1$  doit satisfaire la condition:

$$Z_1 > -Z_2 + \sqrt{Z_2^2 + \frac{4y_2}{\sin^2 \alpha} (y_2 + Z_2)} \quad (1.33)$$

Lorsque  $Z_2$  augmente, l'interférence correspondant au cas le plus défavorable se produit pour  $Z_2 = \infty$  (la roue (2) est une crémaillère). Dans ce cas, l'équation du second degré en  $Z_1$  peut être écrite sous la forme :

$$Z_2 \left( \frac{Z_1^2}{Z_2} + 2Z_1 \right) - \frac{4y_2Z_2}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{y_2}{Z_2} + 1 \right) > 0 \quad (1.34)$$

Il vient :

$$Z_1 > \frac{2y_2}{\sin^2 \alpha} \quad (1.35)$$

Pour une denture normalisée, on a :  $y = 1$  et  $\alpha = 20^\circ$ . Ce qui donne:

$$Z_1 > \frac{2 \times 1}{\sin^2(20)} = 17,1 \quad ; \quad \text{soit } Z_{1\text{limite}} = 17 \text{ dents.}$$

Si  $Z_1 < 17$  et  $Z_2 = \infty$ , on dit qu'il y a interférence de taillage.

### Remarques:

- Le risque d'interférence théorique augmente:

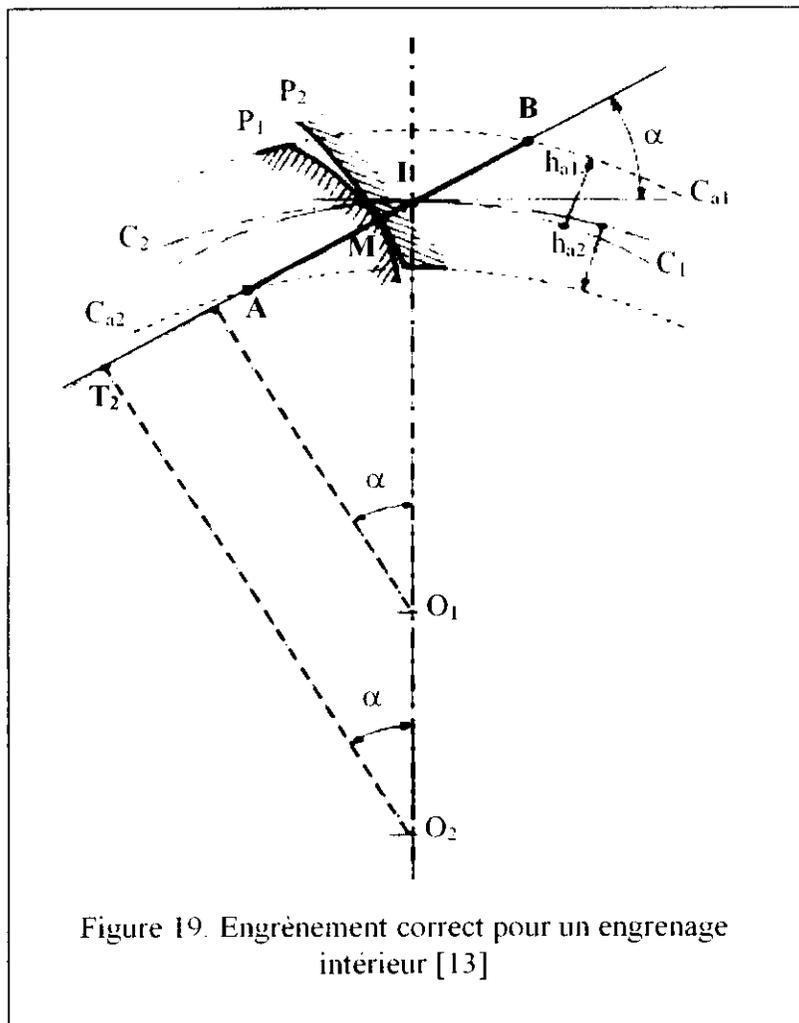
- Soit si  $Z_2$  augmente.
- Soit si  $Z_1$  diminue.
- Soit si  $\alpha$  diminue.

- Pour éviter l'interférence théorique, on peut :

- Réduire la saillie  $h_{a2}$  de la roue pour ramener le point A à l'intérieur de  $T_1T_2$ .
- Corriger les dentures.

### I.10.1.2. DENTURES DROITES INTERIEURES

Considérons l'engrènement de deux profils conjugués d'un engrenage intérieur (figure 19). Lorsque le point de contact M est à l'extérieur de  $T_1$  et  $T_2$ , les deux profils  $P_1$  et  $P_2$  sont conjugués.



Lorsque ce point est à l'intérieur de  $T_1$  (figure 20), le profil  $P_2$  a son centre de courbure en  $T_2$  et le profil  $P_1$  a son centre de courbure en  $T_1$ . Ce n'est donc plus le profil  $P_1$  qui est conjugué avec  $P_2$ , mais une branche fictive  $P'_1$  symétrique de  $P_1$  par rapport à  $O_1Q_1$ .

Comme  $T_1M < T_2M$ , le point  $Q_1$  est à l'intérieur de la denture. Les deux profils  $P_1$  et  $P_2$  n'étant pas seulement tangents, mais ils se coupent en J: il y a interférence d'engrènement.

Pour éviter cette interférence, il suffit que le segment de conduite  $T_1T_2$  soit situé à l'extérieur du segment d'action AB, ce qui peut se vérifier par la condition suivante:

$$AI < IT_1$$

$$AI < IT_1 \Rightarrow r_2 \sin \alpha - \sqrt{(r_2 - h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} < r_1 \sin \alpha \quad (1.36)$$

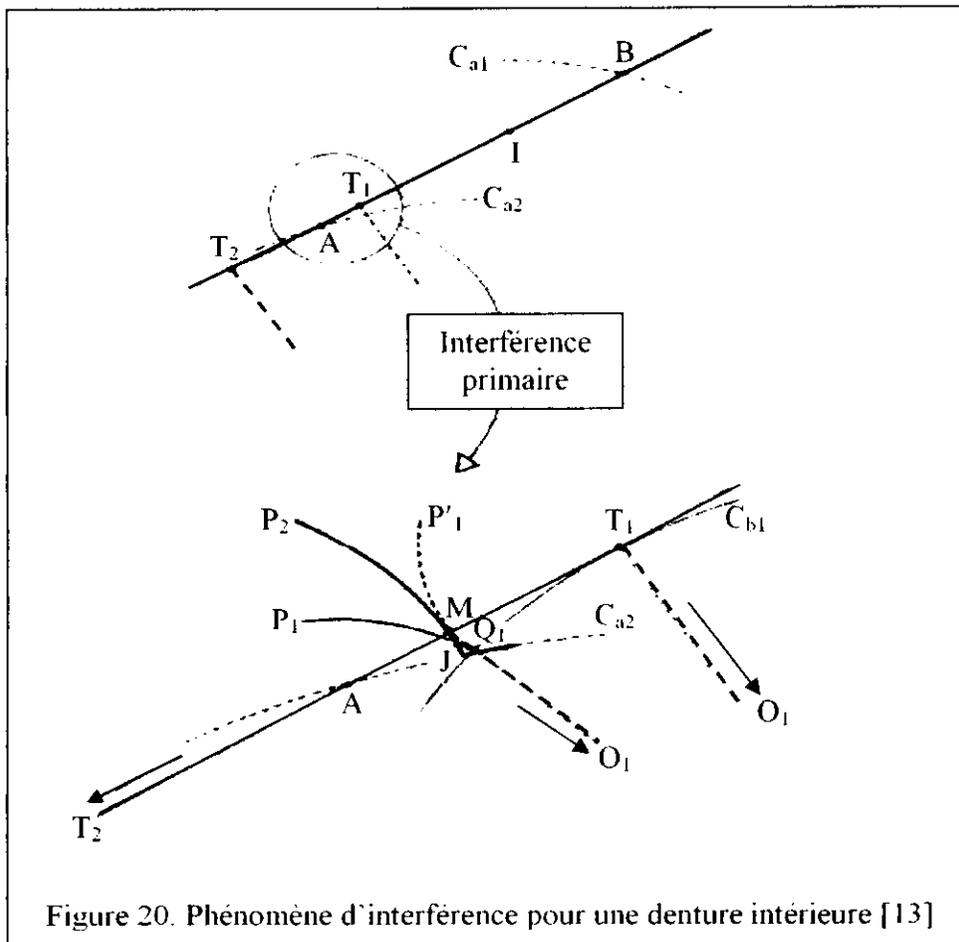
Supposons que :  $h_{a2} = y_2 m_n$

Comme  $r_1 = \frac{m_n Z_1}{2}$  et  $r_2 = \frac{m_n Z_2}{2}$ , on aura finalement:

$$Z_1^2 - 2Z_1 Z_2 - \frac{4y_2}{\sin^2 \alpha} (y_2 - Z_2) \quad (I.37)$$

**Remarques:**

- L'équation (I.37) est traduite graphiquement par des abaques [14].
- Plus  $Z_2$ ,  $Z_1$  ou  $\alpha$  sont faibles, plus le risque d'interférence primaire augmente



**I.10.2. INTERFERENCE SECONDAIRE**

Cette interférence apparaît lorsque les nombres de dents du pignon et de la roue sont trop voisins.

Soit B (figure 21), le point de la ligne d'action où le profil  $P_1$  du pignon échappe le profil  $P_2$  de la roue. Ces profils continuent à se tangenter en D sur la ligne d'action.

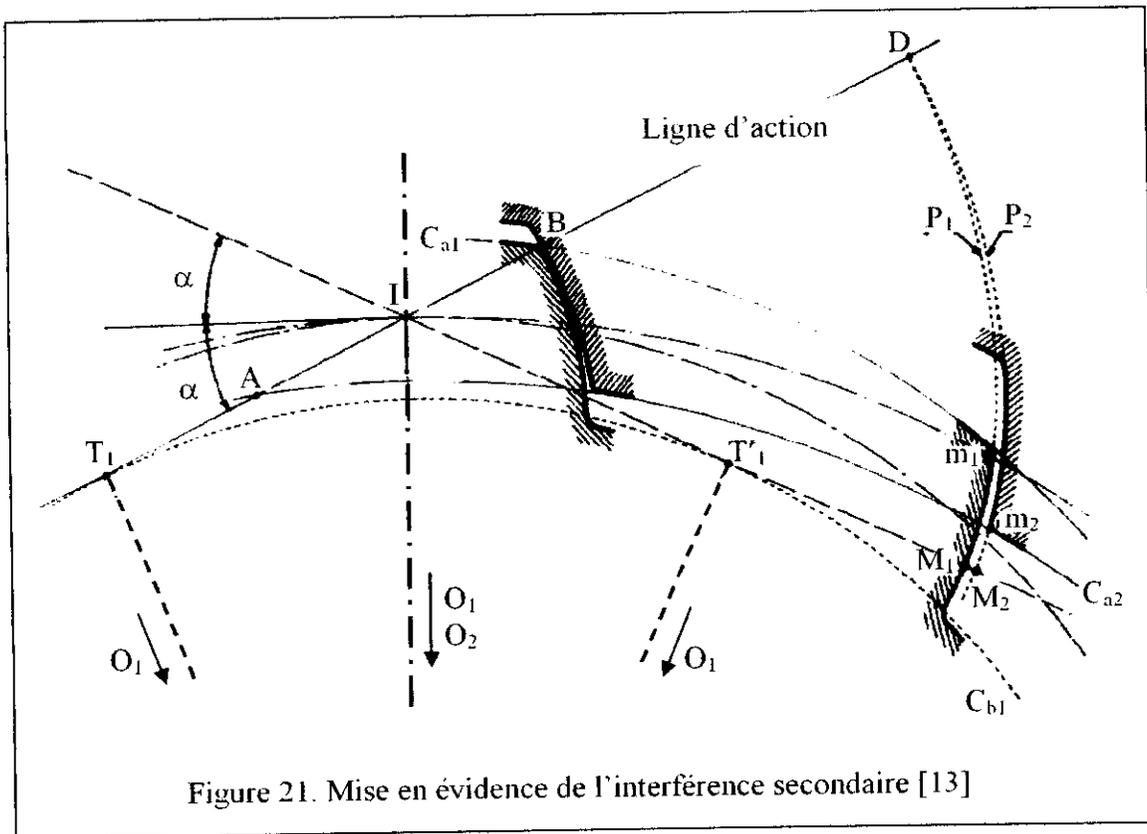


Figure 21. Mise en évidence de l'interférence secondaire [13]

Soit  $IT'_1$  la ligne symétrique de  $IT_1$  par rapport à la tangente en I aux primitifs ; cette ligne coupe perpendiculairement les profils  $P_1$  et  $P_2$  en  $M_1$  et  $M_2$  (figure 22).

Calculons  $\overline{M_1M_2}$  sur le support orienté  $\vec{IT'_1}$  :

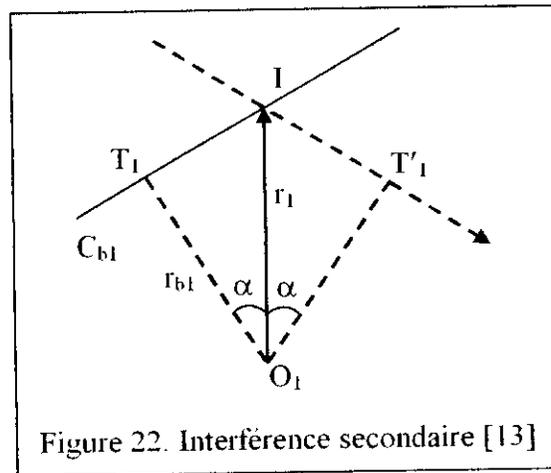


Figure 22. Interférence secondaire [13]

$$\text{On à : } \overline{IM_1} = \overline{IT'_1} + \overline{T'_1M_1} = \overline{IT'_1} + (\overline{T_1T'_1} + \overline{T'_1M_1}) - \overline{T_1T'_1} \quad (\text{I.38})$$

$$\text{Donc : } \overline{IM_1} = r_{b1} \cdot \text{tg} \alpha + (r_{b1} \cdot \text{tg} \alpha + \overline{ID}) - 2r_{b1} \cdot \alpha \quad (\text{I.39})$$

$$\text{D'où : } \overline{IM_1} = \overline{ID} + 2r_{b1} \cdot (\text{tg} \alpha - \alpha) \quad (\text{I.40})$$

$$\text{Et : } \overline{IM_2} = \overline{ID} + 2r_{b2} \cdot (\text{tg} \alpha - \alpha) \quad (\text{I.41})$$

Donc: 
$$\overline{M_1 M_2} = \overline{IM_2} - \overline{IM_1} = 2(r_{b2} - r_{b1}) \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \quad (I.42)$$

Or : 
$$\begin{cases} r_{b1} = m_n \frac{Z_1}{2} \cos \alpha \\ r_{b2} = m_n \frac{Z_2}{2} \cos \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{inv} \alpha \end{cases}$$

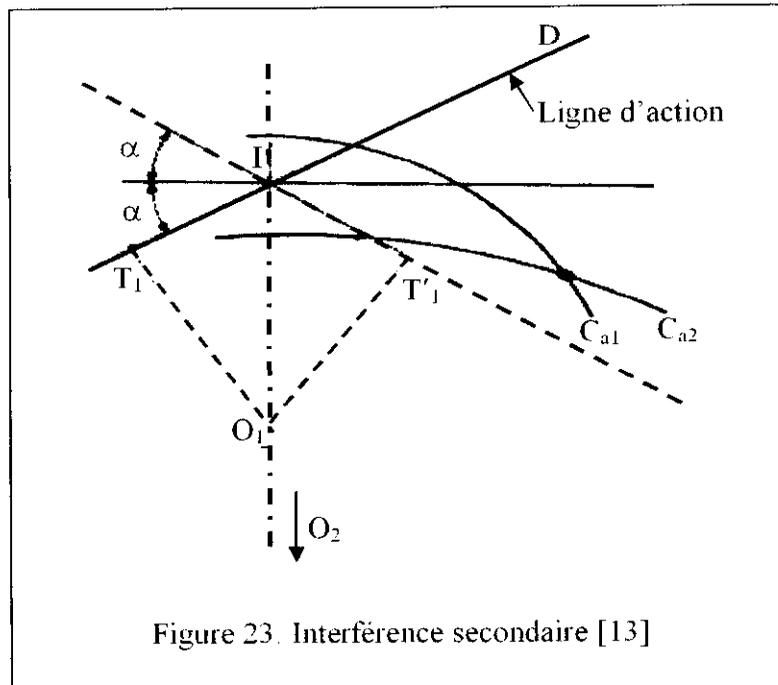
Finalement : 
$$\overline{M_1 M_2} = m_n (Z_2 - Z_1) \operatorname{inv} \alpha \cdot \cos \alpha \quad (I.43)$$

**Remarque:**

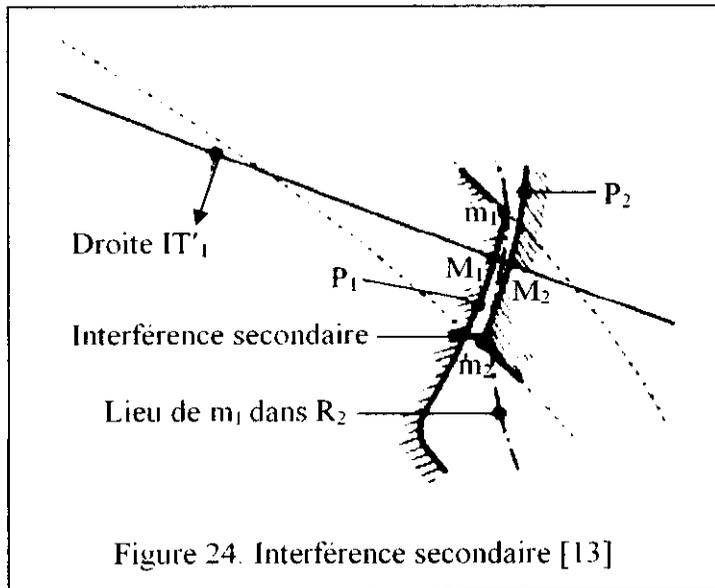
La distance  $\overline{M_1 M_2}$  est une constante positive, ce qui montre que les profils  $P_1$  et  $P_2$  ne peuvent pas se toucher sur  $IT'_1$  et au dessus de cette ligne, à part en D.

**Conséquences :**

- Si les sommets  $m_1$  et  $m_2$  des dents arrivent à s'échapper au dessus de  $IT'_1$  et par conséquent les cercles de tête se coupent eux-mêmes sur ou au dessus de  $IT'_1$ , aucune interférence secondaire n'est à craindre (figure 23).



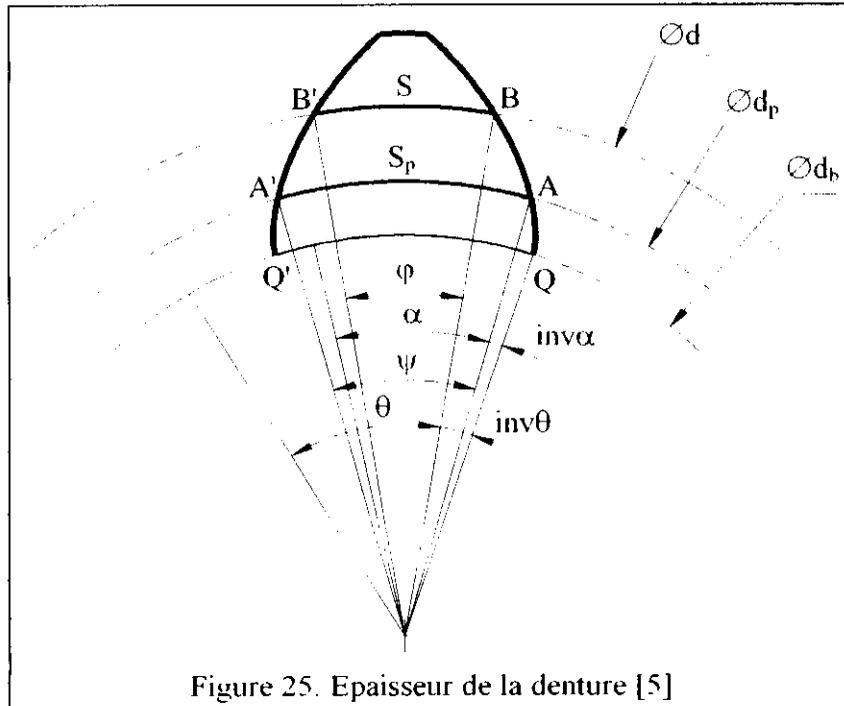
- Par contre, si  $(Z_2 - Z_1)$  et  $\alpha$  sont faibles, il se peut que, en dessous de  $IT'_1$ , la trochoïde lieu de  $m_1$  dans le repère  $R_2$  lié à la roue puisse venir couper le profil  $P_2$  (figure 24).



## I.11. EPAISSEUR DE DENTURE

### I.11.1. EPAISSEUR DE DENTURE DEFINIE SUR LE CERCLE DE DIAMETRE $d$

Soient :  $S_p = \text{arc } AA'$  : Epaisseur curviligne de denture sur cercle primitif. de diamètre  $d_p$   
 Et  $S = \text{arc } BB'$  : Epaisseur curviligne de denture sur cercle de diamètre  $d$  (quelconque)  
 (figure 25).



On a :

$$S = \frac{d}{2} \varphi \quad (I.44)$$

Et

$$\varphi = \psi - 2(\text{inv}\theta - \text{inv}\alpha) \quad (I.45)$$

Comme :

$$S_p = \frac{d_p}{2} \psi \quad (1.46)$$

D'où :

$$S = d \left[ \frac{S_p}{d_p} - (\text{inv}\theta - \text{inv}\alpha) \right] \quad (1.47)$$

Ou encore :

$$S = r \left[ \frac{S_p}{r_p} + 2(\text{inv}\alpha - \text{inv}\theta) \right] \quad (1.48)$$

### 1.11.2. EPAISSEUR DE BASE

Elle est définie sur le cercle de base. Elle correspond donc à  $\theta = 0$  et  $d = d_b$ . On a alors:

$$S_b = d_b \left( \frac{S_p}{d_p} + \text{inv}\alpha \right) = r_b \left( \frac{S_p}{r_p} + 2 \text{inv}\alpha \right) \quad (1.49)$$

### 1.11.3. EPAISSEUR DE TETE

Elle est définie sur le cercle de tête. Elle est obtenue en prenant  $d = d_a$  et  $\theta = \theta_{\max}$  tel que  $d_a \cos\theta_{\max} = d_b$ . On a alors :

$$S_a = d_a \left[ \frac{S_p}{d_p} - (\text{inv}\theta_{\max} - \text{inv}\alpha) \right] = r_a \left[ \frac{S_p}{r_p} - 2(\text{inv}\theta_{\max} - \text{inv}\alpha) \right] \quad (1.50)$$

## 1.12. CONCLUSION

Le phénomène d'interférence conduit à des contacts s'effectuant dans de très mauvaises conditions, donnant lieu à des variations de vitesse angulaire, à des vibrations intenses et à une usure très rapide. Il peut même conduire à un coincement entre les dentures si le jeu entre elles est faible ou nul.

Dans le chapitre suivant, on va décrire un procédé qui permet d'éliminer cette interférence avec l'utilisation des outils normalisés.

# CHAPITRE II

## CORRECTIONS DE DENTURE

### II.1. INTRODUCTION

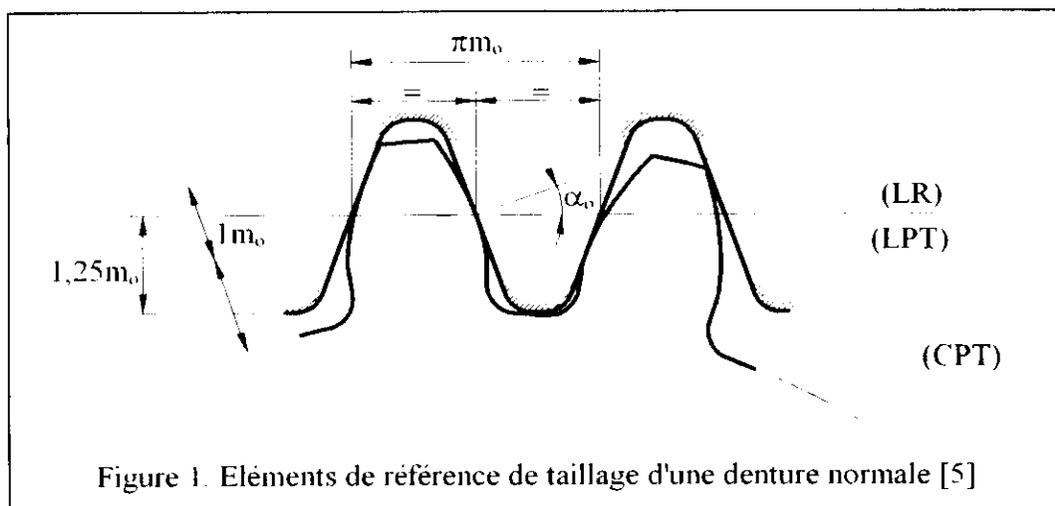
On a vu dans le chapitre précédent, que pour éviter l'interférence théorique, il faut :

- Soit choisir  $Z_1 > Z_{1 \text{ limite}}$
- Soit réduire la saillie d'une quantité convenable.
- Soit corriger la denture.

Considérons le dernier cas.

### II.2. CREMAILLE REGENERATIVE NORMALISEE

Soit un outil crémaillère de taillage normalisé, de module  $m_o$ , destiné à tailler une denture cylindrique droite dont les caractéristiques sont définies par la figure 1.



#### II.2.1. DISPOSITION DES LIGNES LR ET LPT

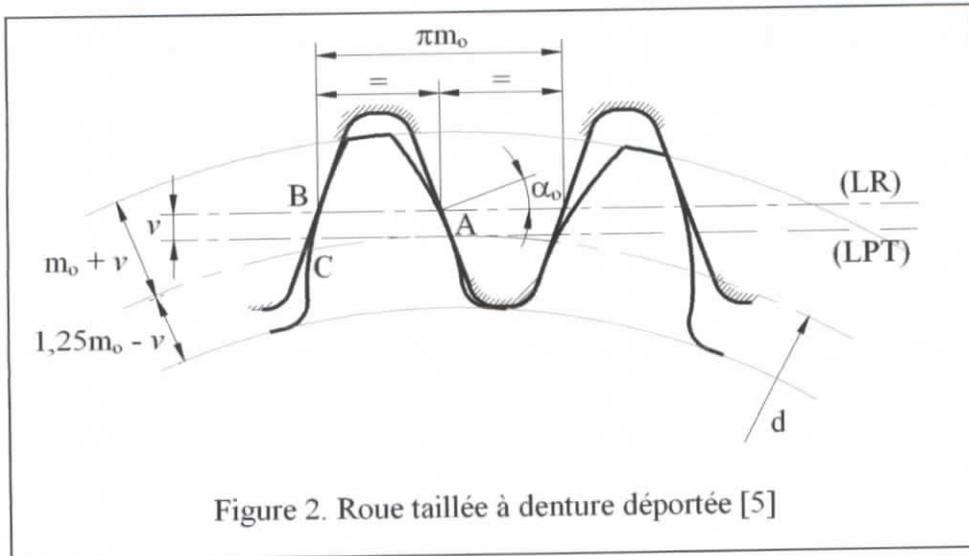
Deux cas peuvent se présenter :

- 1) Les lignes LR et LPT sont confondues : dans ce cas, au cours de taillage, la ligne LR roule sans glisser sur le cercle primitif. On obtient sur la roue taillée, une denture normale (figure 1).
- 2) Les lignes LR et LPT sont distantes d'une quantité  $v$ . C'est la ligne LPT qui roule sans glisser sur le cercle primitif (figure 2). On obtient sur la roue taillée, une denture dite déportée.

Sur la roue taillée à denture déportée, les hauteurs de saillie et de creux deviennent :

- Saillie:  $h_a = m_o + v$
- Creux:  $h_f = 1,25m_o - v$

$v$  est appelé déport et  $x = v/m_o$  coefficient de déport.



Sur le cercle primitif la valeur du rayon est la même que pour une denture normale :

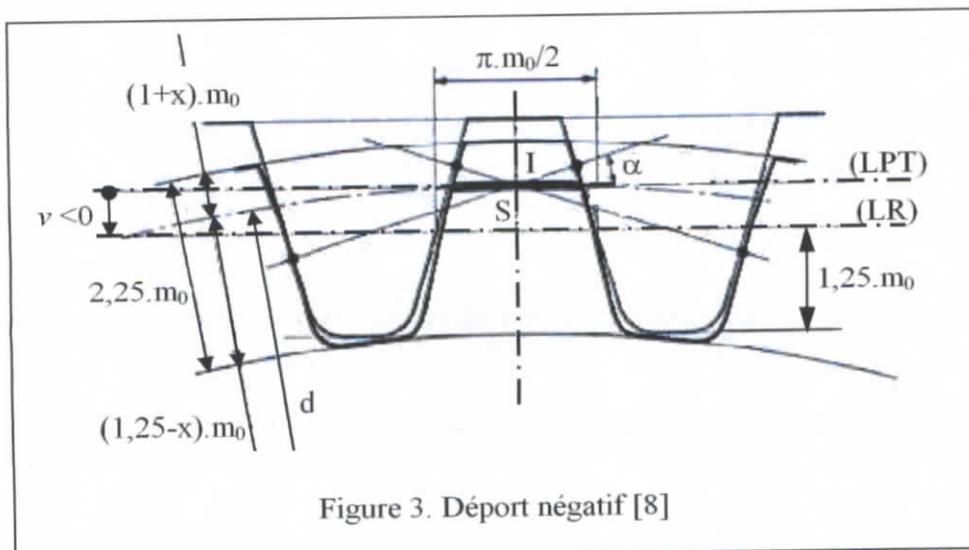
$$r_p = \frac{m_o Z}{2} \quad (\text{II.1})$$

Dans ce cas, on aura :

- Epaisseur  $\neq$  intervalle
- Epaisseur + intervalle =  $\pi m_o$
- Saillie  $\neq m_o$
- Creux  $\neq 1,25m_o$
- Saillie + creux =  $1,25m_o$

## II.2. 2. CONVENTION DE SIGNE POUR $v$ ET $x$

- Si la ligne de référence est à l'extérieur du cercle primitif (figure 2), on a :  $v > 0 \Rightarrow x > 0$ .
- Si la ligne de référence coupe le cercle primitif (figure 3), on a :  $v < 0 \Rightarrow x < 0$ .



**Remarques:**

- L'épaisseur de tête diminue lorsque le déport augmente. Il convient donc de ne pas exagérer sa valeur pour éviter une dent trop pointue.
- L'épaisseur de tête augmente lorsque le déport diminue. Il convient donc de ne pas exagérer sa valeur pour éviter le problème d'interférence (figure 4).

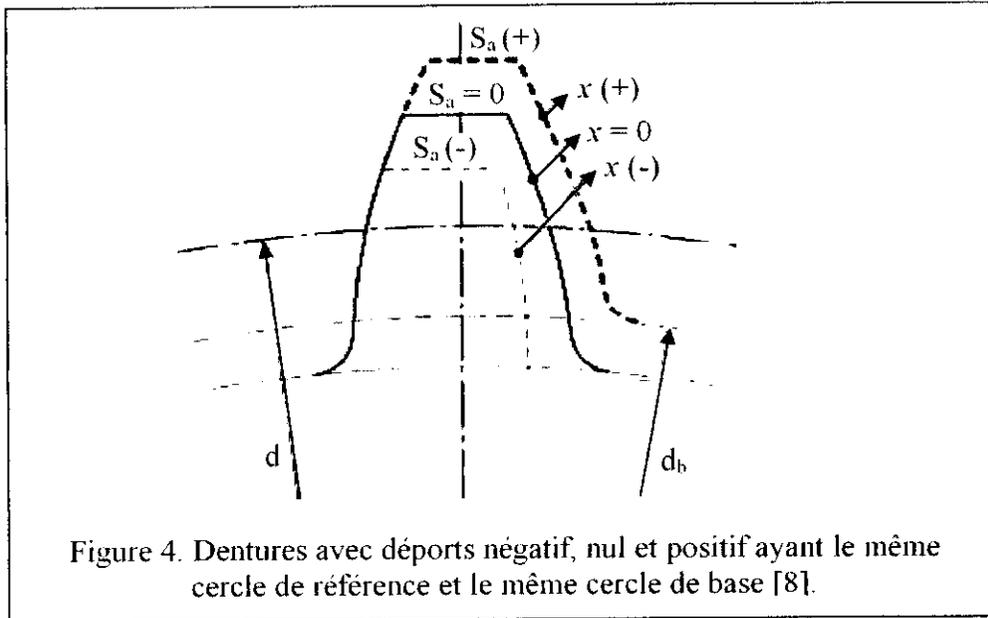


Figure 4. Dentures avec déports négatif, nul et positif ayant le même cercle de référence et le même cercle de base [8].

**II.2. 3. EXPRESSION DE L'ÉPAISSEUR DE DENTURE ET DE L'INTERVALLE**

Le roulement sans glissement de la ligne primitive de taillage sur le cercle primitif (figure 2) donne :

$$\text{arc AC} = AB \tag{II.2}$$

Donc: 
$$S_p = AB \tag{II.3}$$

Ou encore (figure 5):

$$AB = \frac{\pi m_o}{2} + 2vtg\alpha_o \tag{II.4}$$

D'où : 
$$S_p = \frac{\pi m_o}{2} + 2vtg\alpha_o \tag{II.5}$$

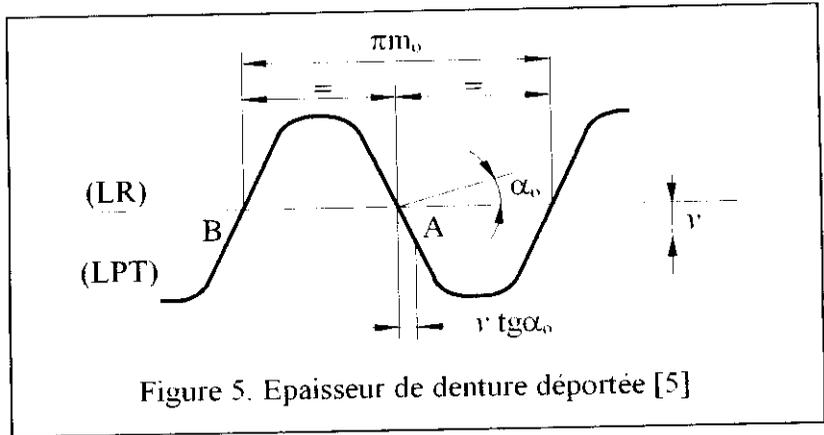
Comme  $v = xm_o$ , l'épaisseur peut être écrite sous la forme :

$$S_p = m_o \left( \frac{\pi}{2} + 2xtg\alpha_o \right) \tag{II.6}$$

L'intervalle de denture sur le cercle primitif est donné par:

$$e_p = \frac{\pi m_o}{2} - 2vtg\alpha_o \tag{II.7}$$

D'où: 
$$e_p = m_o \left( \frac{\pi}{2} - 2xtg\alpha_o \right) \tag{II.8}$$



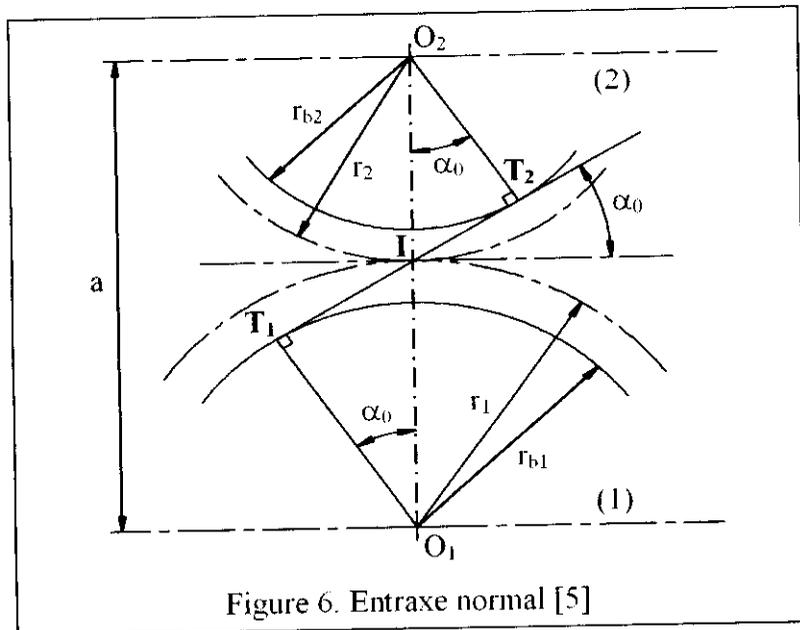
**Remarques :**

- Si  $v > 0 \Rightarrow S_p > e_p$
- Si  $v < 0 \Rightarrow S_p < e_p$

**II.3. ENTRAXE NORMAL**

Soient deux roues de centre  $O_1$  et  $O_2$ ,  $d_1$  et  $d_2$  leurs diamètres primitifs respectifs (figure 6). L'entraxe normal est :

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_0 Z_1 + m_0 Z_2}{2} = m_0 \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \tag{II.9}$$



**II.4. ENTRAXE DE FONCTIONNEMENT**

On considère deux roues de centre  $O_1$  et  $O_2$  taillées par un outil crémaillère défini par l'angle  $\alpha_0$  et le module  $m_0$ .

La roue (1) est réalisée avec un déport  $v_1$ , la roue (2) avec un déport  $v_2$ . I est le point de tangence de leurs cercles de fonctionnement  $d'_1$  et  $d'_2$  (figure 7).

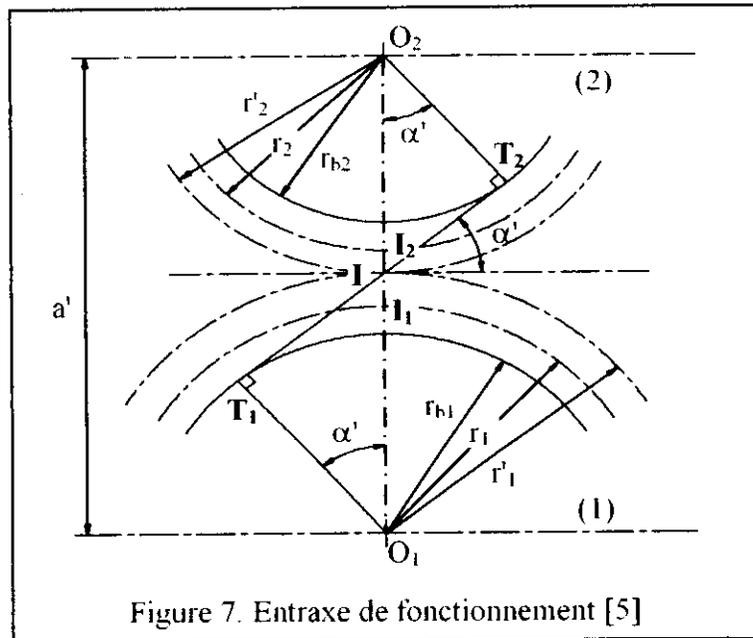


Figure 7. Entraxe de fonctionnement [5]

L'entraxe de fonctionnement est:

$$a' = \frac{d'_1 + d'_2}{2} = m' \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Le diamètre de base du pignon et de la roue exprimés par les paramètres de fonctionnement, sont donnés par:

$$d_{b1} = m_0 Z_1 \cos \alpha_0 = d'_1 \cos \alpha' \quad (\text{II.11})$$

$$d_{b2} = m_0 Z_2 \cos \alpha_0 = d'_2 \cos \alpha' \quad (\text{II.12})$$

En faisant la somme des équations (II.11) et (II.12) membre à membre, on aura:

$$2a \cos \alpha_0 = 2a' \cos \alpha' \quad (\text{II.13})$$

Finalement la relation entre l'entraxe normal et l'entraxe de fonctionnement est donnée par:

$$\frac{a'}{a} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \Rightarrow \frac{m'}{m_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \Rightarrow m' = m_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \quad (\text{II.14})$$

### • DISCUSSION:

1) Si  $x_1 + x_2 = 0$ . Il en résulte :  $a = a'$ .

On dit que la denture est déportée sans variation d'entraxe. Dans ce cas, les cercles primitifs de taillage sont aussi les cercles primitifs de fonctionnement.

2) Si  $x_1 + x_2 \neq 0$ . Il en résulte :  $a \neq a'$ .

On dit que la denture est déportée avec variation d'entraxe. Dans ce cas, les cercles de fonctionnement ne constituent plus les cercles primitifs de taillage.

Deux cas peuvent se présenter :

- $x_1 + x_2 > 0$ . Par conséquent  $a' > a$
- $x_1 + x_2 < 0$ . Par conséquent  $a' < a$

## II. 5. DENTURE DEPORTEE SANS VARIATION D'ENTRAXE

Cette correction permet d'améliorer une construction existante sans effectuer des calculs importants.

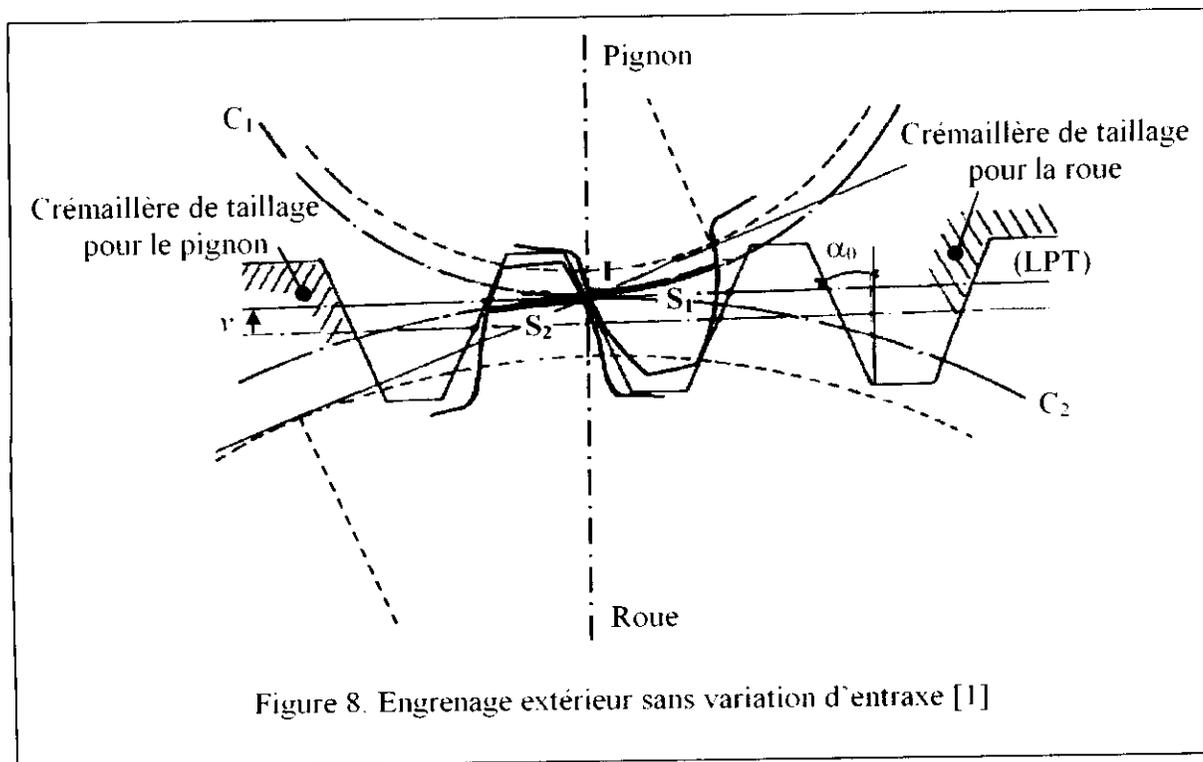
Le taillage des engrenages s'effectue de telle façon que le déport positif pour le pignon ait la même valeur que le déport négatif pour la roue.

### II.5. 1. ENGRENAGE EXTERIEUR

La figure 8 représente un engrenage extérieur à denture déportée sans variation d'entraxe;

La ligne de référence de la crémaillère génératrice est décalée par rapport à la ligne primitive de taillage d'une quantité  $v$ .

$C_1$  et  $C_2$  sont les deux cercles primitifs de taillage et de fonctionnement.



On a les relations suivantes:

$$S_1 = m_0 \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \quad (\text{II.15})$$

$$S_2 = m_0 \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \quad (\text{II.16})$$

**Remarque:**  $x$  est pris en valeur algébrique.

La condition fondamentale pour que l'entraxe de fonctionnement coïncide avec l'entraxe normal est que la somme des épaisseurs  $S_1$  et  $S_2$  sur les cercles primitifs de taillage soit égale au pas de la crémaillère génératrice.

Soit: 
$$S_1 + S_2 = \pi m_0 \tag{II.17}$$

$\Rightarrow$  
$$x_1 + x_2 = \pi m_0 \tag{II.18}$$

### II.5.2. ENGRENAGE INTERIEUR

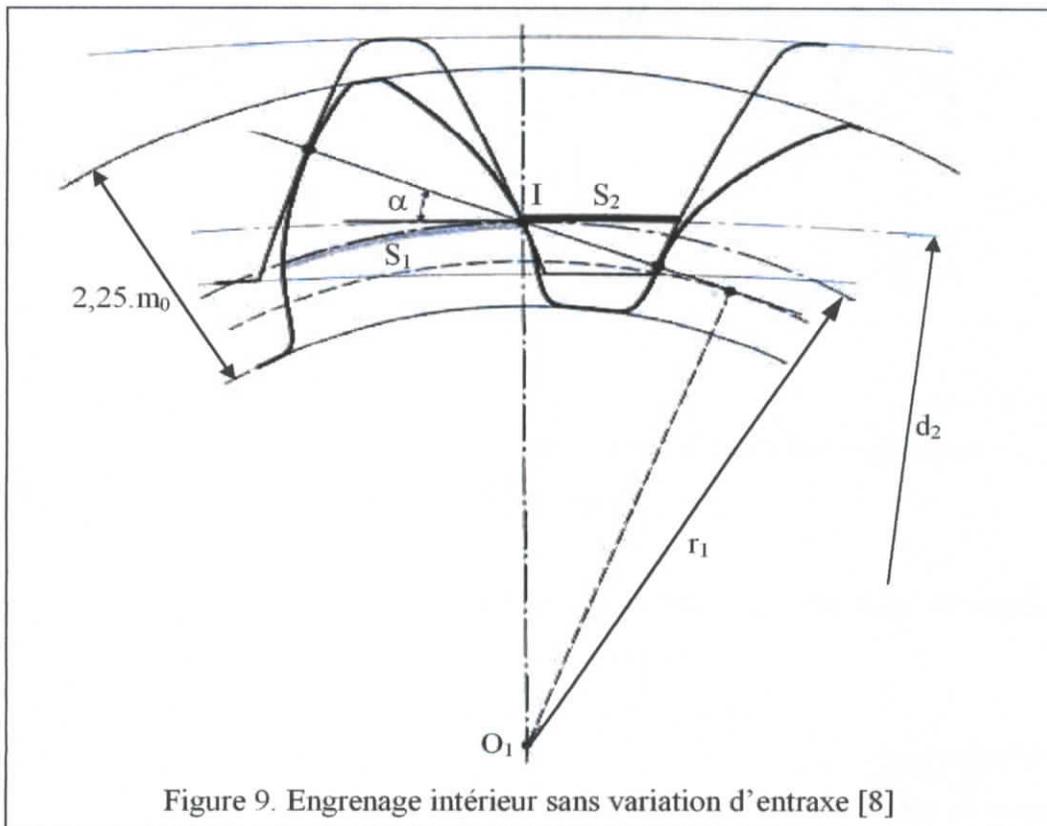
Pour un engrenage intérieur à denture déportée sans variation d'entraxe de la figure 9, les relations précédentes deviennent:

$$a = m_0 \left( \frac{Z_2 - Z_1}{2} \right) \tag{II.19}$$

$$S_1 = m_0 \left( \frac{\pi}{2} + 2xtg\alpha_0 \right) \tag{II.20}$$

$$S_2 = m_0 \left( \frac{\pi}{2} - 2xtg\alpha_0 \right) \tag{II.21}$$

La condition  $S_1 + S_2 = \pi m_0$  implique:  $x_1 - x_2 = \pi m_0$



### II. 6. DENTURE DEPORTEE AVEC VARIATION D'ENTRAXE

On est contraint dans certains cas de s'adapter aux conditions imposées par l'étude, telles par exemple : transmission de l'effort, usure, durée de vie, etc. Ceci implique la nécessité de procéder à la correction de la denture avec variation d'entraxe.



L'entraxe réalisé sur la figure 10 est égal à :

$$a_1 = r_1 + r_2 + x_1 m_0 + x_2 m_0 \quad (\text{II.26})$$

D'où :

$$a_1 = a + (x_1 + x_2) m_0 \quad (\text{II.27})$$

On constate que cet entraxe ne peut pas être adopté comme entraxe de fonctionnement car les dents du pignon et de la roue ne se touchent pas. Il est donc nécessaire de rapprocher les deux éléments jusqu'à un certain entraxe, dit entraxe de fonctionnement  $a'$ .

L'entraxe de fonctionnement  $a'$  est donc plus grand que l'entraxe normal  $a$ , mais plus petit que  $a_1$ .

L'augmentation d'entraxe ( $a'-a$ ) est toujours plus petite que la somme des déplacements de profils :

$$a'-a < (x_1 + x_2) m_0 \quad (\text{II.28})$$

Les épaisseurs  $S'_1$  et  $S'_2$  sur les cercles primitifs de fonctionnement (figure 11), sont données en fonction des épaisseurs  $S_1$  et  $S_2$  sur les cercles primitifs de taillage par les relations suivantes :

$$S'_1 = r'_1 \left( \frac{S_1}{r_1} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right) \quad (\text{II.29})$$

$$S'_2 = r'_2 \left( \frac{S_2}{r_2} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right) \quad (\text{II.30})$$

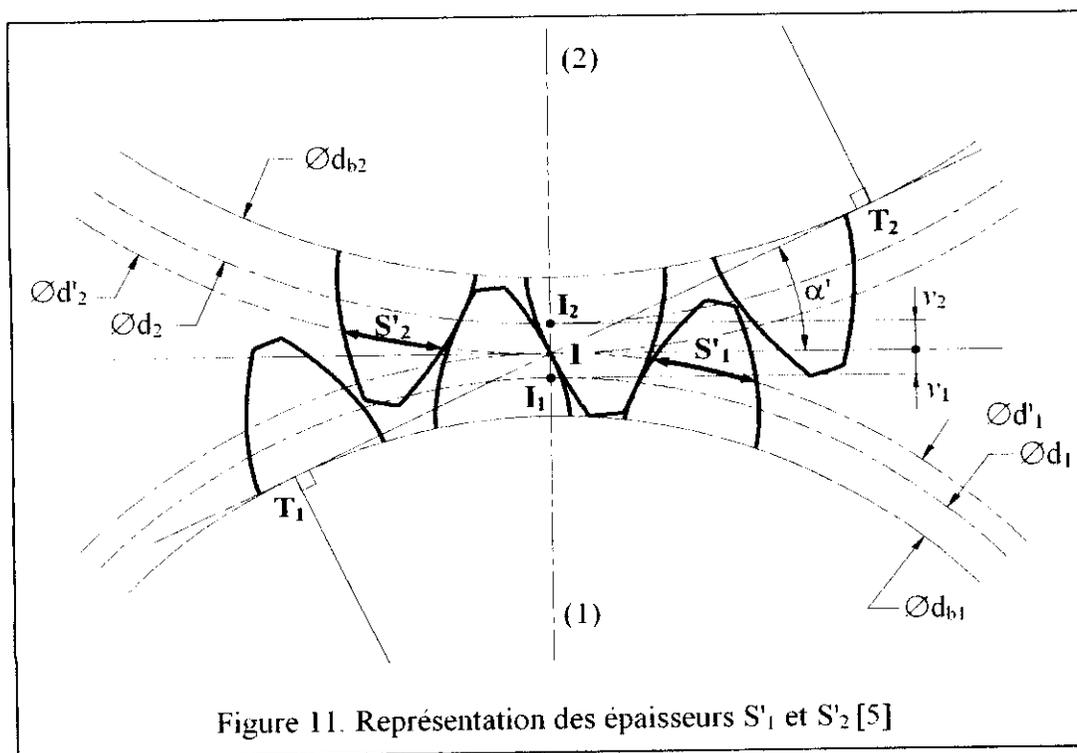


Figure 11. Représentation des épaisseurs  $S'_1$  et  $S'_2$  [5]

La condition de roulement sans glissement en I associée au jeu angulaire nul (figure 11) permet d'écrire:

$$S'_1 + S'_2 = \pi m' \quad (II.31)$$

En remplaçant les équations (II.14), (II.29) et (II.30) dans (II.31), on aura:

$$r'_1 \left( \frac{S_1}{r_1} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right) + r'_2 \left( \frac{S_2}{r_2} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right) = \pi m_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha'} \quad (II.32)$$

Finalement, on obtient :

$$\text{inv}\alpha' = \text{inv}\alpha_0 + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \text{tg}\alpha_0 \quad (II.33)$$

## II. 6. 2. ENGRENAGE INTERIEUR

La figure 13 schématise la génération de la denture déportée d'un pignon et d'une roue à partir de la même crémaillère génératrice normale, et avec deux déports  $v_1$  et  $v_2$  positifs.

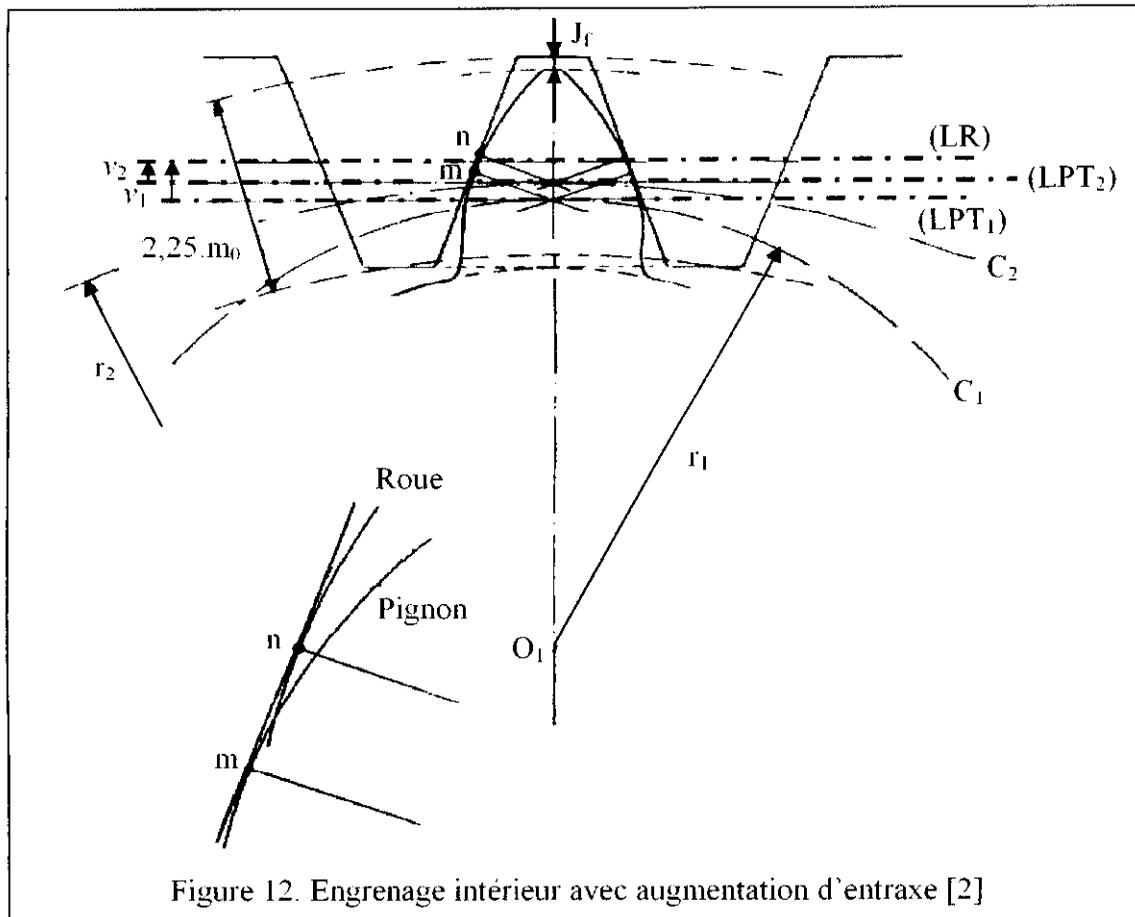


Figure 12. Engrenage intérieur avec augmentation d'entraxe [2]

L'entraxe réalisé sur la figure 12 est égal à :

$$a_1 = r_2 - r_1 - (x_1 - x_2).m_0 \quad (II.34)$$

D'où:

$$a_1 = a + (x_2 - x_1)m_0 \quad (II.35)$$

On constate que cet entraxe ne peut pas être adopté comme entraxe de fonctionnement car les dents du pignon et de la roue ne se touchent pas. Il est nécessaire de diminuer cet entraxe.

L'augmentation d'entraxe ( $a'-a$ ) est toujours plus petite, en valeur algébrique, que la différence des déplacements de profils :

$$a'-a < (x_2 - x_1).m_0 \quad (\text{II.36})$$

L'épaisseur  $S_2$  sur le cercle primitif de taillage  $C_2$  est:

$$S_2 = m_0 \left( \frac{\pi}{2} - 2x_2 \text{tg} \alpha_0 \right) \quad (\text{II.37})$$

Les épaisseurs  $S'_1$  et  $S'_2$  sur les cercles primitifs de fonctionnement sont données en fonction des épaisseurs  $S_1$  et  $S_2$  sur les cercles primitifs de taillage par les relations suivantes:

$$S'_1 = r'_1 \left( \frac{S_1}{r_1} + 2(\text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha') \right) \quad (\text{II.38})$$

$$S'_2 = r'_2 \left( \frac{S_2}{r_2} - 2(\text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha') \right) \quad (\text{II.39})$$

Or: 
$$S'_1 + S'_2 = \pi m' \quad (\text{II.40})$$

En remplaçant les équations (II.14), (II.38) et (II.39) dans (II.40), on aura:

$$r'_1 \left( \frac{S_1}{r_1} + 2(\text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha') \right) + r'_2 \left( \frac{S_2}{r_2} - 2(\text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha') \right) = \pi m_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \quad (\text{II.41})$$

Finalement, on obtient:

$$\text{inv} \alpha' = \text{inv} \alpha_0 + 2 \frac{x_2 - x_1}{Z_2 - Z_1} \text{tg} \alpha_0 \quad (\text{II.42})$$

## II.7. ROGNAGE DES DENTURES

Cette méthode consiste à réduire la saillie du pignon et de la roue afin de conserver un jeu de  $0,25.m_0$  au fond des dents.

### II.7.1. DENTURES EXTERIEURES

Le facteur  $K$  de réduction de la saillie pour une denture extérieure est donné par (voir Annexe I) :

$$K = \frac{Z_1 + Z_2}{2} (B - B_v) \quad (\text{II.43})$$

**Remarque:**

- La valeur  $Km_0$  correspond à la quantité dont il faut réduire (si  $\sum x > 0$ ), ou augmenter (si  $\sum x < 0$ ) les saillies du pignon et de la roue si l'on veut conserver le jeu normal de  $0.25m_0$  au fond des dents [5].

La hauteur de la saillie rognée est donnée par :

$$h_{ar1} = m_0(1 + x_1 - Km_0) \quad (\text{II.44})$$

Le diamètre de tête rogné est donné par :

$$d_{ar1} = 2r_1 + 2h_{ar1} \quad (\text{II.45})$$

En remplaçant les équations (II.22) et (II.44) dans (II.45), on obtient:

$$d_{ar1} = m_0 Z_1 + 2m_0(1 + x_1 - Km_0) \quad (\text{II.46})$$

D'où:

$$d_{ar1} = m_0[Z_1 + 2(1 + x_1) - K] \quad (\text{II.47})$$

## II.7.2. DENTURES INTERIEURES

Le facteur  $K'$  de réduction de la saillie pour une denture intérieure est donné par (voir Annexe I) :

$$K' = \frac{Z_2 - Z_1}{2}(B - B_v) \quad (\text{II.48})$$

La hauteur de la saillie rognée est donnée par :

$$h_{ar2} = m_0(1 - x_2 - K'm_0) \quad (\text{II.49})$$

Le diamètre de tête rogné est donné par :

$$d_{ar2} = 2r_2 - 2h_{ar2} \quad (\text{II.50})$$

En remplaçant les équations (II.24) et (II.49) dans (II.50), on obtient:

$$d_{ar2} = m_0 Z_2 + 2m_0(1 + x_2 - K'm_0) \quad (\text{II.51})$$

D'où:

$$d_{ar2} = m_0[Z_2 + 2(1 + x_2) - K'] \quad (\text{II.52})$$

## II.8. CONCLUSION

L'utilisation des dentures corrigées permet :

- D'éliminer les interférences, tout en conservant une hauteur normale des dents et donc sans diminution sensible du rapport de conduite.
- D'augmenter la résistance des dents.
- D'adapter les engrenages aux conditions imposées et de monter les roues à des entraxes imposés par la construction.

Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser au phénomène qui se produit lors de l'engrènement des profils conjugués.

# CHAPITRE III

## GLISSEMENT SPECIFIQUE

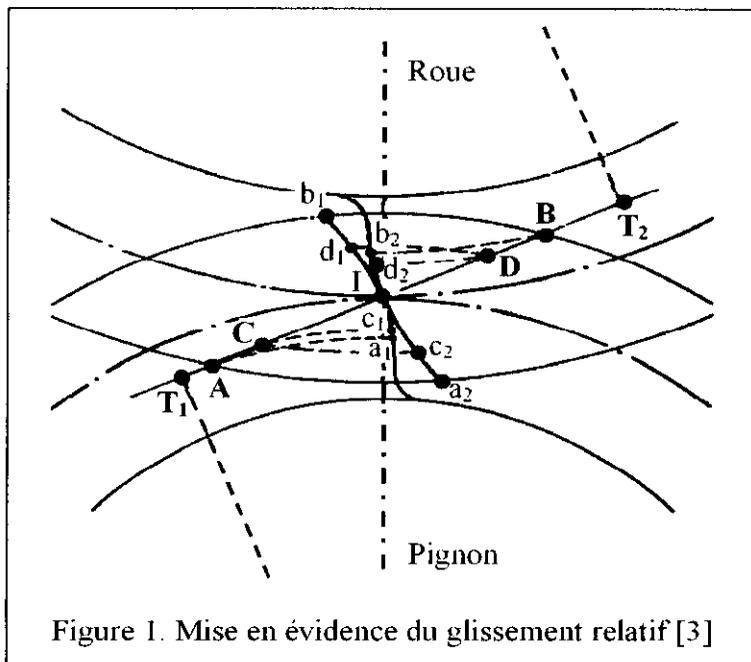
### III.1. INTRODUCTION

Dans un engrenage, l'usure de la denture dépend de multiples facteurs tels que la charge, l'état de surface de la dent, la lubrification, la vitesse de rotation, etc. Ces facteurs provoquent une usure égale suivant la longueur des profils.

Mais seulement, l'usure des profils peut être accélérée par le glissement des dents en prises l'une par rapport à l'autre. Par conséquent, l'engrènement n'est pas un roulement pur des profils conjugués, mais il est accompagné d'un glissement relatif qui occasionne la perte de puissance par frottement.

### III.2. GLISSEMENT RELATIF

La figure 1 représente l'engrènement d'un couple de profils conjugués dont la ligne d'action est tangente en  $T_1$  et  $T_2$  aux cercles de base du pignon (1) et de la roue (2).



Au point A de la ligne d'action, ce sont les points  $a_1$  et  $a_2$  qui sont en contact; au point C, ce sont les points  $c_1$  et  $c_2$ .

Les arcs  $a_1c_1$  et  $a_2c_2$  se correspondent pendant le temps nécessaire pour le déplacement du point de contact de A à C. D'où le glissement relatif  $dg_{AC}$  :

$$dg_{AC} = a_2c_2 - a_1c_1 \quad (III.1)$$

Les arcs  $d_1b_1$  et  $d_2b_2$  se correspondent pendant le temps nécessaire pour le déplacement du point de contact de D à B. D'où le glissement relatif  $dg_{DB}$  :

$$dg_{DB} = d_1b_1 - d_2b_2 \quad (III.2)$$

**Remarque:**

- Les relations (III.1) et (III.2) montrent que le glissement change de signe de part et d'autre du point primitif.

Les figures 2 et 3 représentent l'engrenement d'un couple de profils conjugués pour un engrenage extérieur et intérieur respectivement.

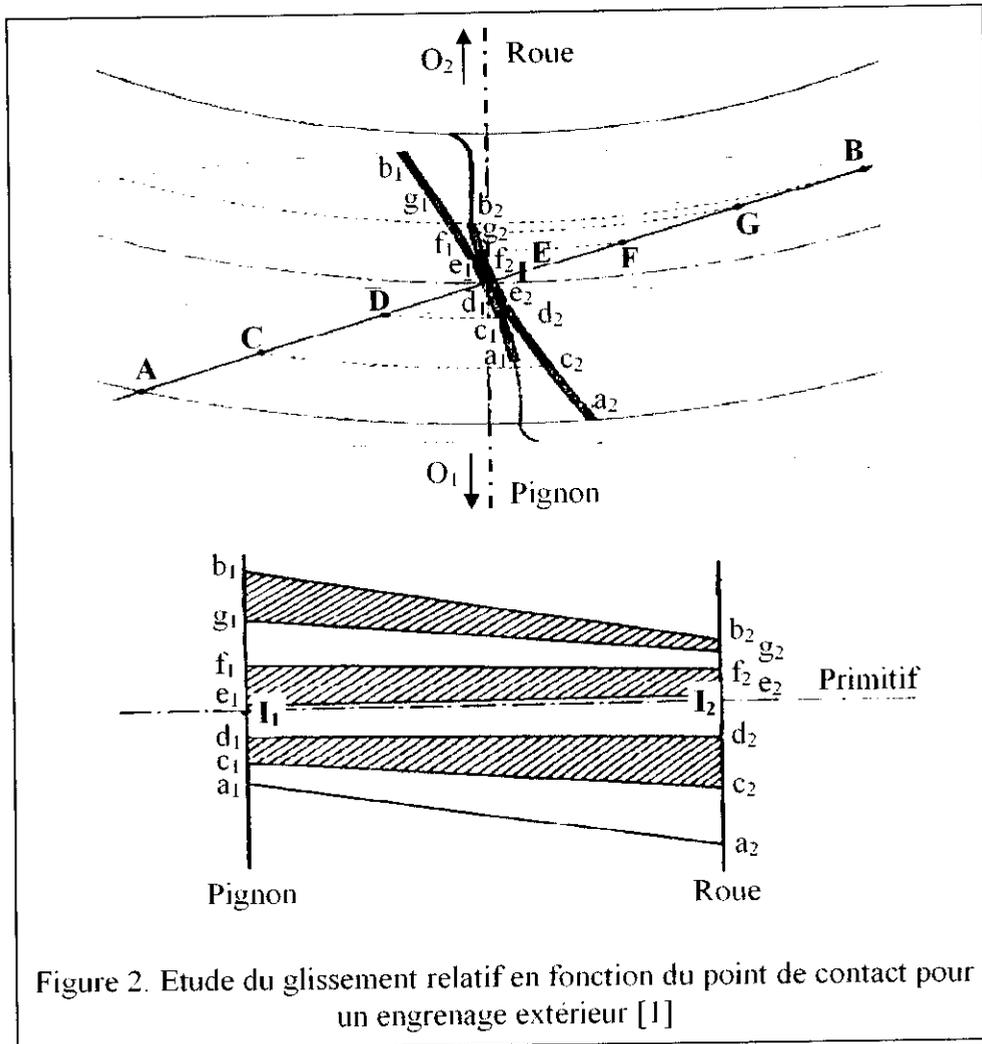


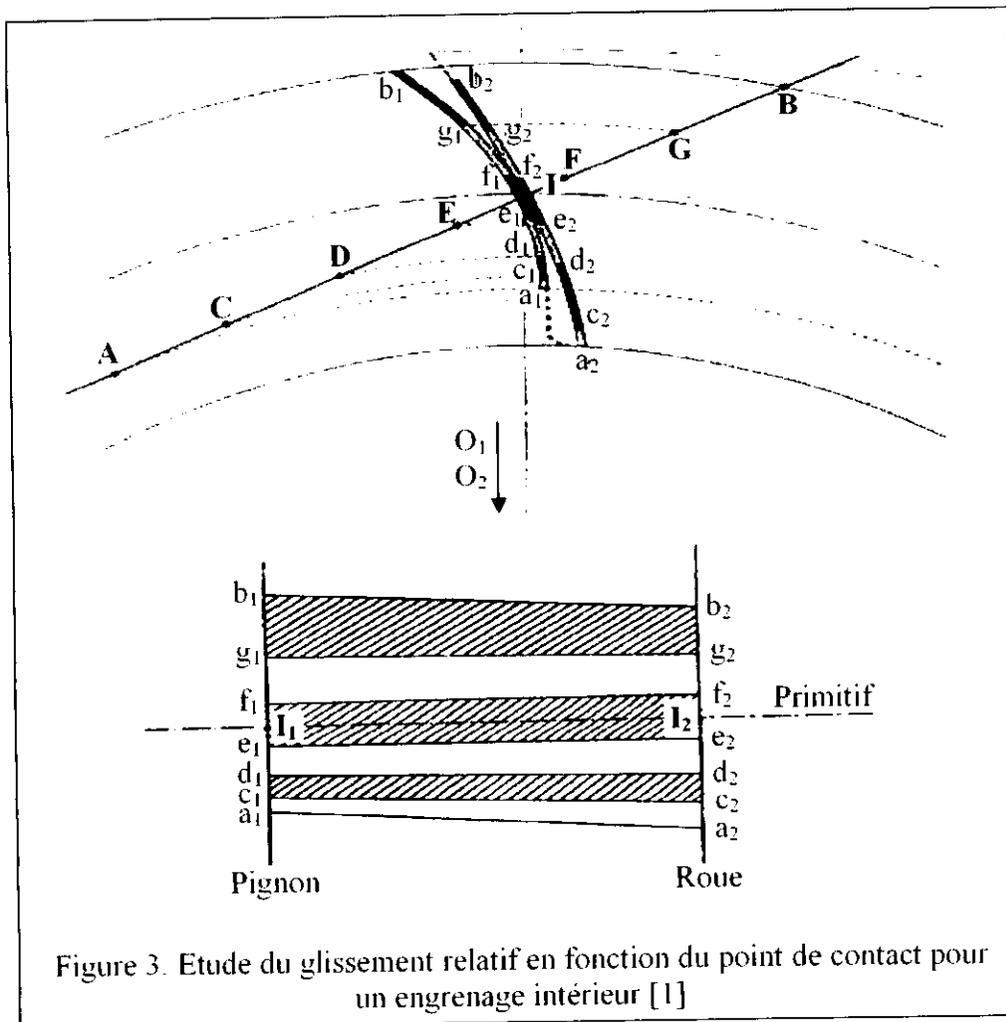
Figure 2. Etude du glissement relatif en fonction du point de contact pour un engrenage extérieur [1]

Soient C, D, E, F et G les points de division de la partie utile AB de la ligne d'action :

Les points  $a_1$   $c_1$   $d_1$   $e_1$   $f_1$   $g_1$  et  $b_1$  du profil du pignon sont obtenus en rabattant les points A, C, D, E, F, G et B sur ce profil au moyen d'arcs de cercle de centre  $O_1$ .

De même, les points  $a_2$   $c_2$   $d_2$   $e_2$   $f_2$   $g_2$  et  $b_2$  du profil de la roue sont obtenus en rabattant les points A, C, D, E, F, G et B sur ce profil au moyen d'arcs de cercle de centre  $O_2$ .

Les points  $a_1$   $c_1$   $d_1$   $e_1$   $f_1$   $g_1$  et  $b_1$  correspondent respectivement aux points  $a_2$   $c_2$   $d_2$   $e_2$   $f_2$   $g_2$  et  $b_2$ . Ceci signifie qu'il y a correspondance entre les arcs.



Pour mieux faire apparaître le glissement relatif des deux profils, il est plus commode de développer ces deux profils suivant deux droites parallèles comme il est fait en bas des figures 2 et 3. Par conséquent on peut faire les remarques suivantes :

- Le glissement s'annule en I.
- Le glissement augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point primitif.
- Le glissement relatif est plus important dans l'engrenage extérieur.

### III.3. VITESSE DE GLISSEMENT RELATIF

La vitesse de glissement  $V_g$  est égale, à chaque instant, au produit de la vitesse angulaire de la rotation  $\bar{\Omega}$  par la distance du point de contact au point primitif.

$$V_g = (\omega_1 \pm \omega_2).T \quad (\text{III.3})$$

T est la distance du point de contact au point primitif.

#### Remarque:

- Le signe (+) pour un engrenage extérieur, le signe (-) pour un engrenage intérieur.

### III.4. GLISSEMENT SPECIFIQUE

Si on considère le contact entre les points A et C (figure 1), le glissement relatif est égal à :  $(a_2c_2 - a_1c_1)$ . Ce dernier aura une influence plus néfaste sur le pignon que sur la roue, car il sera réparti sur un arc  $a_1c_1$  plus petit que  $a_2c_2$ . Donc il est intéressant de faire apparaître un rapport important (glissement / roulement) pour toutes les questions d'usure. Ce rapport est appelé: glissement spécifique.

- Glissement spécifique  $gs1$  pour le pignon :

$$gs1 = \frac{a_1c_1 - a_2c_2}{a_1c_1} \quad (III.4)$$

- Glissement spécifique  $gs2$  pour la roue :

$$gs2 = \frac{a_1c_1 - a_2c_2}{a_2c_2} \quad (III.5)$$

#### Remarque :

- Lorsque le contact se rapproche du pied de la dent du pignon (figure 2), l'arc de roulement du profil de la roue augmente alors que l'arc de roulement du profil du pignon diminue: le glissement spécifique augmente lorsque le contact se rapproche du pied des dents.

### III.5. APPLICATION A UN ENGRENAGE A DENTURES EXTERIEURES

Considérons l'engrènement d'un couple de profils conjugués (figure 4) dont le point de contact entre les deux surfaces de dentures est M. Le vecteur  $\vec{u}$  est porté par la ligne d'action.

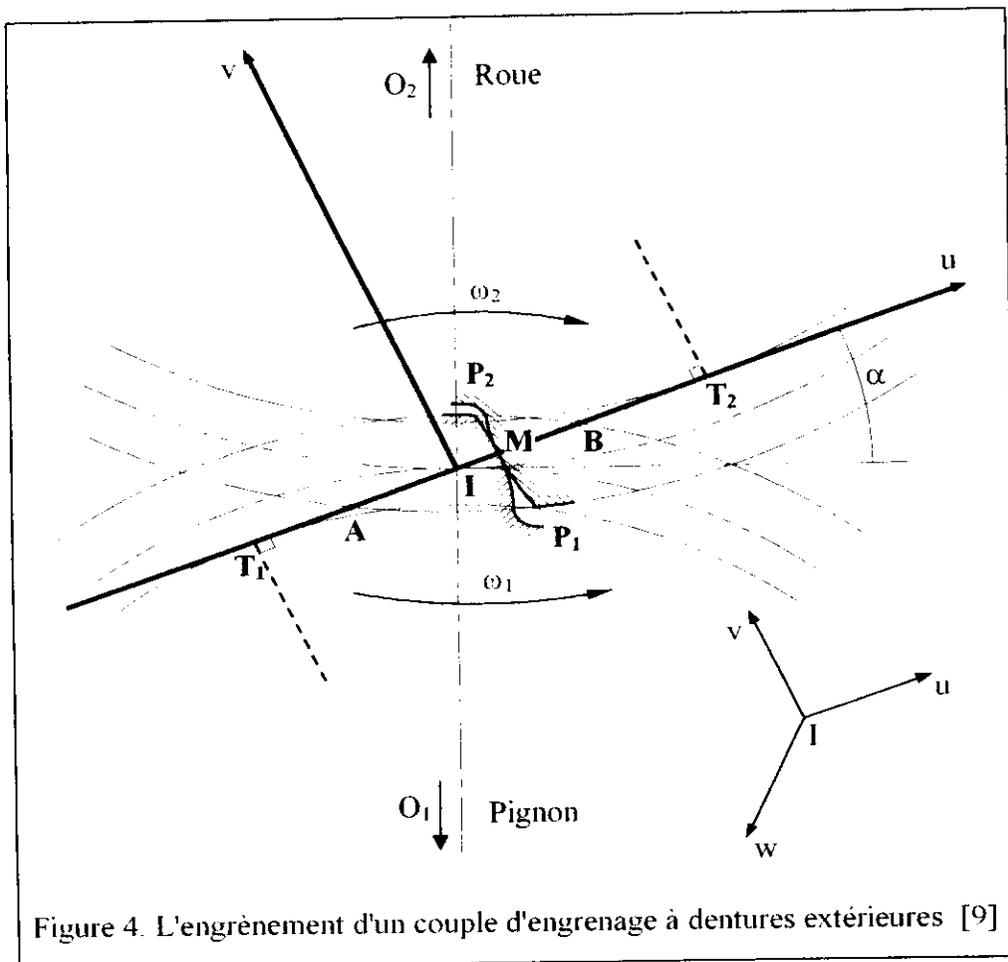


Figure 4. L'engrènement d'un couple d'engrenage à dentures extérieures [9]

### III.5.1. VITESSE DE GLISSEMENT

La vitesse de glissement est la vitesse relative du point de contact M.

On a :

$$\overrightarrow{V_{1,2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(M)} - \overrightarrow{V_2^0(M)} \quad (\text{III.6})$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{V_1^0(M)} = \overrightarrow{V_1^0(I)} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{IM} \quad (\text{III.7})$$

Et :

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} = \overrightarrow{V_2^0(I)} + \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{IM} \quad (\text{III.8})$$

En considérant le roulement sans glissement des cercles primitifs (ou cercles de fonctionnement dans le cas où  $x_1+x_2 \neq 0$ ), on aura :

$$\overrightarrow{V_1^0(I)} - \overrightarrow{V_2^0(I)} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\omega_2}) \wedge \overrightarrow{IM} \quad (\text{III.10})$$

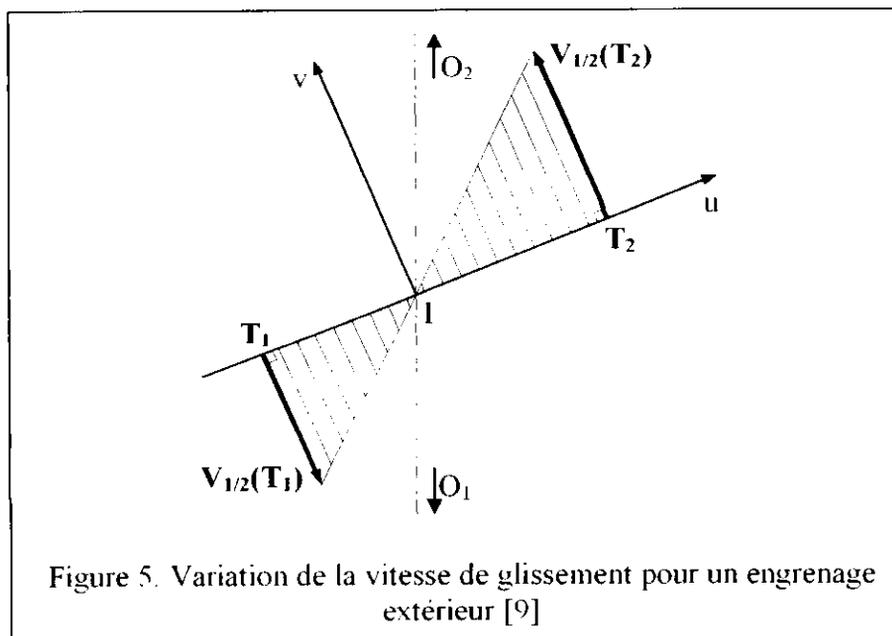
Dans le repère (I, u, v, w) (figure 4), la vitesse relative  $\overrightarrow{V_{1/2}(M)}$  aura pour composantes :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 - (-\omega_2) \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} IM \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (\omega_1 + \omega_2)IM \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Soit :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = [(\omega_1 + \omega_2)IM] \vec{v} \quad (\text{III.12})$$

La figure 5 illustre la variation de la vitesse de glissement pour un engrenage extérieur.



### III.5.2. GLISSEMENT RELATIF

Pendant le temps  $dt$ , le glissement relatif global au point M est donné par :

$$dg = V_{1/2}(M) \cdot dt \quad (\text{III.13})$$

D'où :

$$dg = [(\omega_1 + \omega_2)IM] \cdot dt \quad (\text{III.14})$$

### III.5.3. GLISSEMENT SPECIFIQUE

On a (équation III.6) :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(M)} - \overrightarrow{V_2^0(M)}$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{V_1^0(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1M} \quad (\text{III.15})$$

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} = \overrightarrow{V_2^0(T_2)} + \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2M} \quad (\text{III.16})$$

Il vient :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1M} - \overrightarrow{V_2^0(T_2)} - \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2M} \quad (\text{III.17})$$

Ou encore :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_1^0(T_1)} - \overrightarrow{V_2^0(T_2)} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1M} - \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2M} \quad (\text{III.18})$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{V_1^0(T_1)} = \overrightarrow{V_1^0(O_1)} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1T_1} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1T_1} \quad (\text{III.19})$$

$$\text{Et : } \overrightarrow{V_2^0(T_2)} = \overrightarrow{V_2^0(O_2)} + \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2T_2} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2T_2} \quad (\text{III.20})$$

( $O_1$  et  $O_2$ , fixes / bâti)

Comme  $\overrightarrow{\omega_1} \perp \overrightarrow{O_1T_1}$  et  $\overrightarrow{\omega_2} \perp \overrightarrow{O_2T_2}$ , les vitesses  $\overrightarrow{V_1^0(T_1)}$  et  $\overrightarrow{V_2^0(T_2)}$  sont donc les vitesses tangentielles respectivement en  $T_1$  et  $T_2$ . Elles sont dirigées suivant l'axe  $\vec{u}$ . Par conséquent, le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V_1^0(T_1)} - \overrightarrow{V_2^0(T_2)} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1T_1} - \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2T_2} \quad (\text{III.21})$$

est nul puisque le vecteur  $\overrightarrow{V_{1/2}(M)}$  est dirigé suivant l'axe  $\vec{v}$ .

Il s'ensuit :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1M} - \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2M} \quad (\text{III.22})$$

Compte tenu du fait que  $\overrightarrow{\omega_1} \perp \overrightarrow{T_1M}$  et  $\overrightarrow{\omega_2} \perp \overrightarrow{T_2M}$ , cette relation montre que tout se passe comme si l'on a un roulement avec glissement de deux cercles de centres respectifs  $T_1$  et  $T_2$  (figure 6). Ce qui permet d'écrire que le vecteur vitesse du point M est donné par :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = \overrightarrow{V_{T_1}(M)} - \overrightarrow{V_{T_2}(M)} \quad (\text{III.23})$$

Avec :

$$\overrightarrow{V_{i1}}(M) = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1 M} \quad (\text{III.24})$$

Et

$$\overrightarrow{V_{i2}}(M) = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2 M} \quad (\text{III.25})$$

Le développement de ces produits vectoriels donne :

$$\overrightarrow{V_{i1}}(M) = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{T_1 M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} T_1 M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \cdot T_1 M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_{i2}}(M) = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{T_2 M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -T_2 M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \cdot T_2 M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

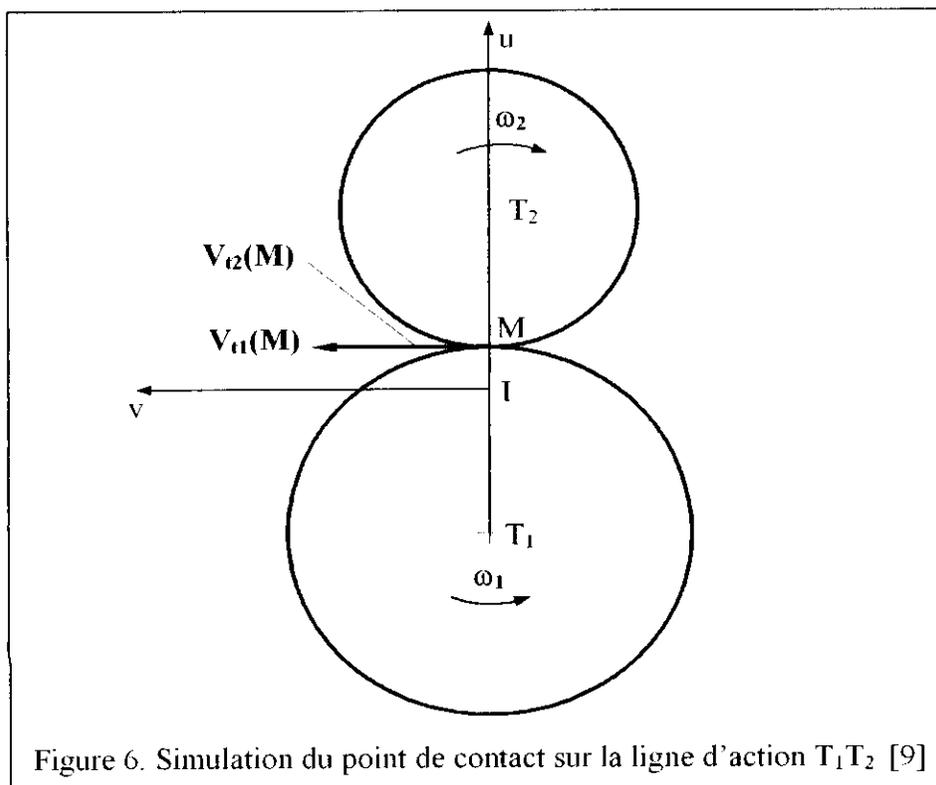
Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{i/2}}(M) = (\omega_1 \cdot T_1 M - \omega_2 \cdot T_2 M) \vec{v} = [V_{i1}(M) - V_{i2}(M)] \vec{v} \quad (\text{III.26})$$

**Remarque:** Les quantités  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $T_1 M$  et  $T_2 M$  sont ici en valeurs arithmétiques.

En prenant maintenant  $T_1 M$  et  $T_2 M$  en valeurs algébriques, on aura :

$$\overrightarrow{V_{i/2}}(M) = (\omega_1 \cdot T_1 M + \omega_2 \cdot T_2 M) \vec{v} \quad (\text{III.27})$$



Pendant le temps  $dt$ , le glissement du point M :

- Sur le cercle de centre  $T_1$  est :  $ds_1 = V_{11}(M) \cdot dt = \omega_1 \cdot T_1 M \cdot dt$  (III.28)

- Sur le cercle de centre  $T_2$  est :  $ds_2 = V_{12}(M) \cdot dt = \omega_2 \cdot T_2 M \cdot dt$  (III.29)

On définit le glissement spécifique par :

- Pour le pignon 1 :  $gs_1 = \frac{dg}{ds_1} = \frac{V_{1/2}(M) \cdot dt}{V_{11}(M) \cdot dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{11}(M)}$  (III.30)

- Pour la roue 2 :  $gs_2 = \frac{dg}{ds_2} = \frac{V_{1/2}(M) \cdot dt}{V_{12}(M) \cdot dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{12}(M)}$  (III.31)

En remplaçant les vitesses de glissement par leurs expressions, on obtient :

- Pour le pignon 1 :  $gs_1 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 M + \omega_2 \cdot T_2 M}{\omega_1 \cdot T_1 M} = 1 - \frac{\omega_2 \cdot MT_2}{\omega_1 \cdot T_1 M}$  (III.32)

Ou encore :

$$gs_1 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)IM}{\omega_1 \cdot T_1 M} = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \cdot \frac{IM}{T_1 I + IM}$$
 (III.33)

- Pour la roue 2 :  $gs_2 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 M + \omega_2 \cdot T_2 M}{\omega_2 \cdot T_2 M} = 1 - \frac{\omega_1 \cdot MT_1}{\omega_2 \cdot T_2 M}$  (III.34)

Ou encore :

$$gs_2 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)IM}{\omega_2 \cdot T_2 M} = \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \frac{IM}{-IT_2 + IM}$$
 (III.35)

**\*) Variation de  $gs_1$  et  $gs_2$  :**

En I :  $gs_1 = gs_2 = 0$

En  $T_1$  :  $gs_1 \rightarrow -\infty$  ;  $gs_2 = 1$

En  $T_2$  :  $gs_1 = 1$  ;  $gs_2 \rightarrow -\infty$

La figure 7 représente la variation des glissements spécifiques  $gs_1$  et  $gs_2$ .

**Remarques :**

- Les glissements spécifiques caractérisent l'usure, ils prennent des valeurs élevées aux pieds des dents :

En A, au pied de la dent du pignon 1.

En B, au pied de la dent de la roue 2.

- Le glissement spécifique maximum sur les dents du pignon  $gs_{1 \max}$  est nettement plus élevé que le glissement spécifique maximum sur les dents de la roue  $gs_{2 \max}$ .

- Les glissements spécifiques maximaux en A et B sont mal équilibrés.

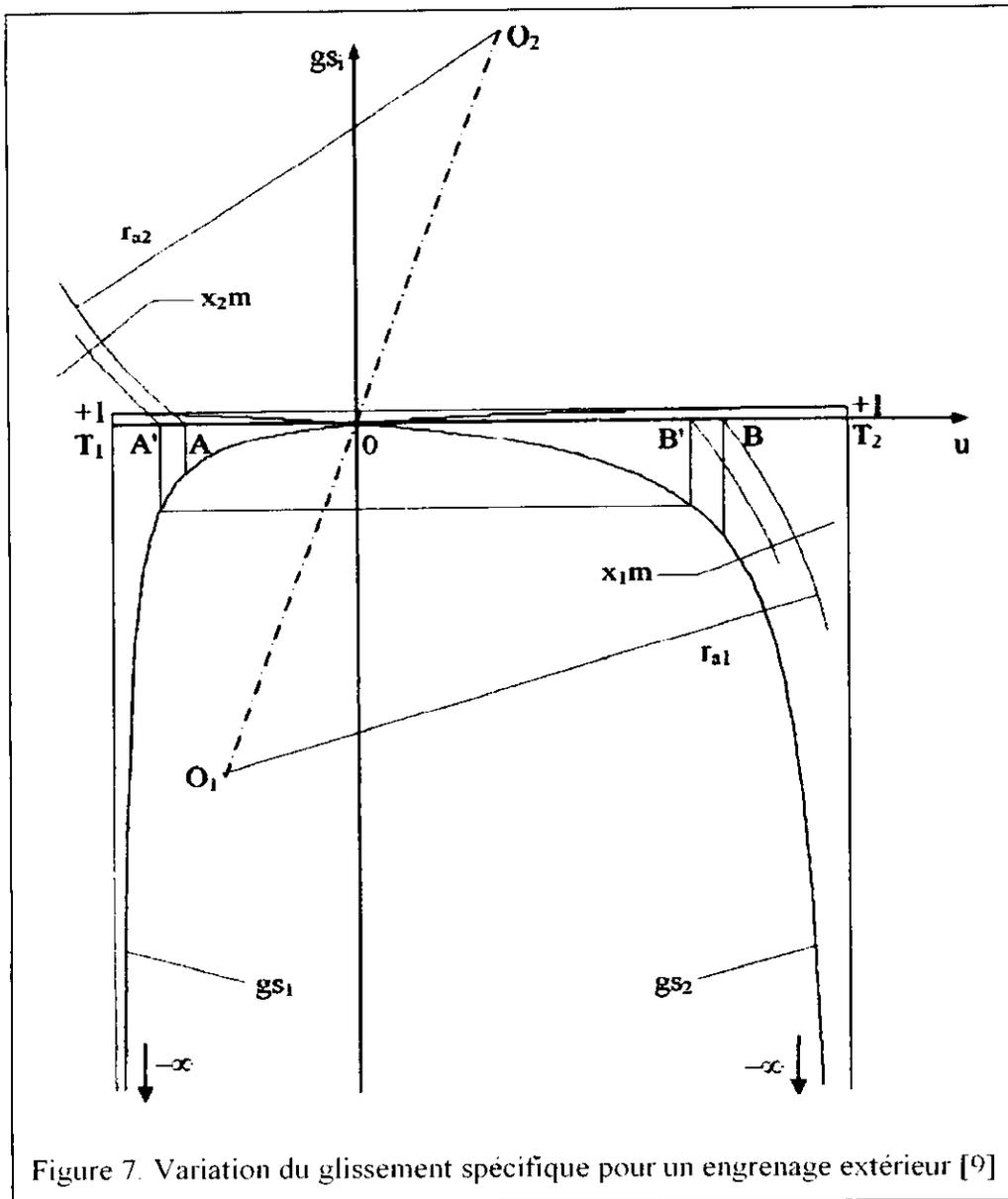


Figure 7. Variation du glissement spécifique pour un engrenage extérieur [9]

### III. 5. 4. EQUILBRAGE DE L'USURE

#### III. 5. 4. 1. Equilibrage de l'usure par l'égalisation des glissements spécifiques maximums

Afin d'avoir la même usure sur le pignon et la roue, on fait un équilibrage des glissements spécifiques maximums.

On sait que le glissement spécifique maximum est situé au pied de la dent, en A pour la roue menante, et en B pour la roue menée (figure 7).

On a donc :

• En A :

$$gs_1 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 A + \omega_2 \cdot T_2 A}{\omega_1 \cdot T_1 A} = \frac{(\omega_1 + \omega_2) IA}{\omega_1 \cdot T_1 A} \quad (III.36)$$

• En B :

$$gs_2 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 B + \omega_2 \cdot T_2 B}{\omega_2 \cdot T_2 B} = \frac{(\omega_1 + \omega_2) IB}{\omega_2 \cdot T_2 B} \quad (III.37)$$

Pour équilibrer ces glissements spécifiques maximums, on réalise une correction de denture de façon à avoir l'égalité entre les glissements spécifiques de la roue et du pignon.

$$gs_1 = gs_2 \Rightarrow \frac{\omega_1 \cdot T_1 A + \omega_2 \cdot T_2 A}{\omega_1 \cdot T_1 A} = \frac{\omega_1 \cdot T_1 B + \omega_2 \cdot T_2 B}{\omega_2 \cdot T_2 B} \quad (\text{III.38})$$

Il vient:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot T_1 A \cdot T_2 B + \omega_2^2 T_2 A \cdot T_2 B = \omega_1^2 \cdot T_1 A \cdot T_1 B + \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot T_1 A \cdot T_2 B \quad (\text{III.39})$$

D'où :

$$\omega_2^2 T_2 A \cdot T_2 B = \omega_1^2 \cdot T_1 A \cdot T_1 B \quad (\text{III.40})$$

En désignant par rayon de courbure :

$$\begin{aligned} \rho_{1A} &= T_1 A \\ \rho_{1B} &= T_1 B \\ \rho_{2A} &= T_2 A \\ \rho_{2B} &= T_2 B \end{aligned}$$

Finalement, on aura :

$$\omega_1^2 \cdot \rho_{1A} \cdot \rho_{1B} = \omega_2^2 \rho_{2A} \cdot \rho_{2B} \quad (\text{III.41})$$

### III.6. APPLICATION A UN ENGRENAGE A DENTURES INTERIEURES

Considérons l'engrènement d'un couple de profils conjugués (figure 8) dont le point de contact entre les deux surfaces de dentures est M. Le vecteur  $\vec{u}$  est porté par la ligne d'action.

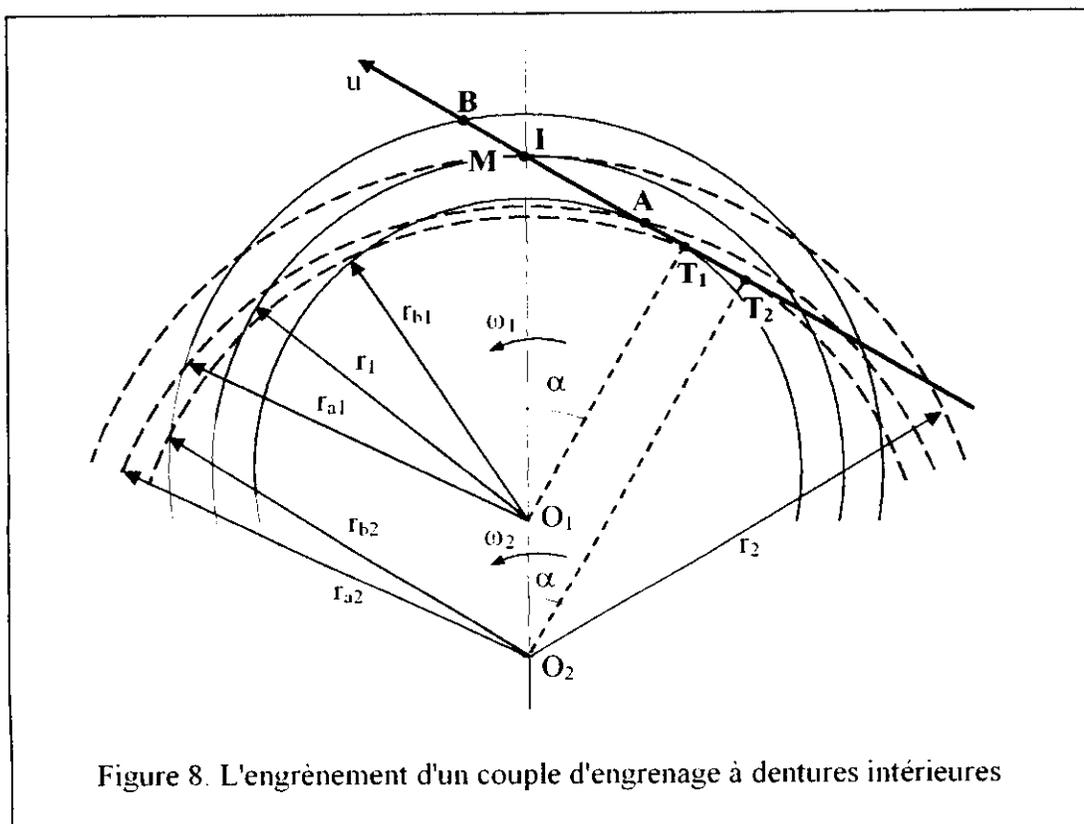


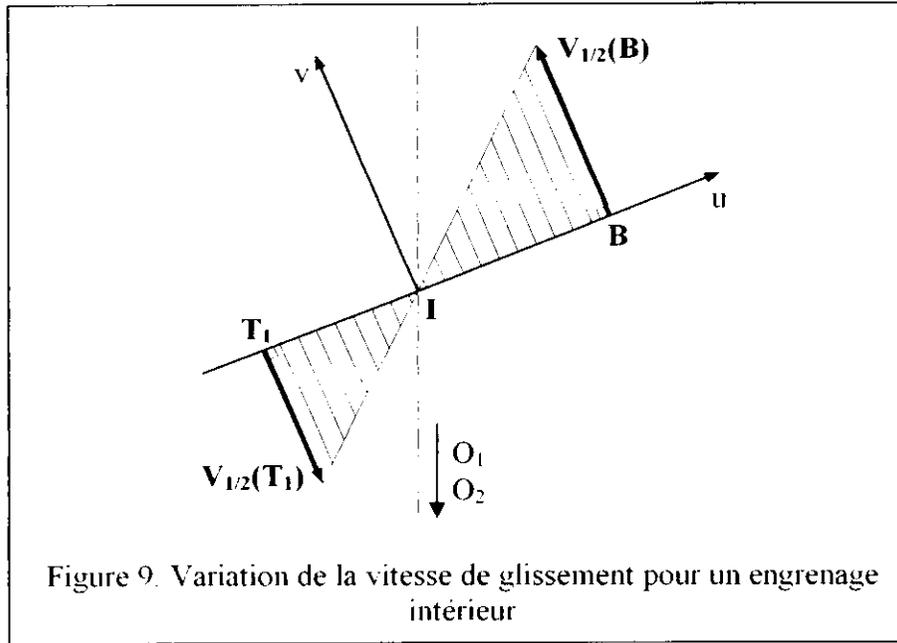
Figure 8. L'engrènement d'un couple d'engrenage à dentures intérieures

### III.6.1. VITESSE DE GLISSEMENT

En procédant par la même façon pour la détermination de la vitesse du glissement pour un engrenage extérieur, on aura :

$$\overline{V_{1/2}(M)} = [(\omega_1 - \omega_2)IM]\vec{v} \quad (III.42)$$

La figure 9 illustre la variation de la vitesse de glissement pour un engrenage intérieur.



### III.6.2. GLISSEMENT RELATIF

Pendant le temps dt, le glissement relatif global au point M est donné par :

$$dg = V_{1/2}(M) \cdot dt \quad (III.43)$$

D'où :

$$dg = [(\omega_1 - \omega_2)IM] \cdot dt \quad (III.44)$$

### III.6.3. GLISSEMENT SPECIFIQUE

On a (équation III.23) :

$$\overline{V_{1/2}(M)} = \overline{V_{11}(M)} - \overline{V_{12}(M)}$$

Avec :

$$\overline{V_{11}(M)} = \overline{\omega_1} \wedge \overline{T_1M}$$

Et :

$$\overline{V_{12}(M)} = \overline{\omega_2} \wedge \overline{T_2M}$$

La figure 10 montre que tout se passe comme si l'on a un roulement avec glissement de deux cercles de centres respectifs T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub>.

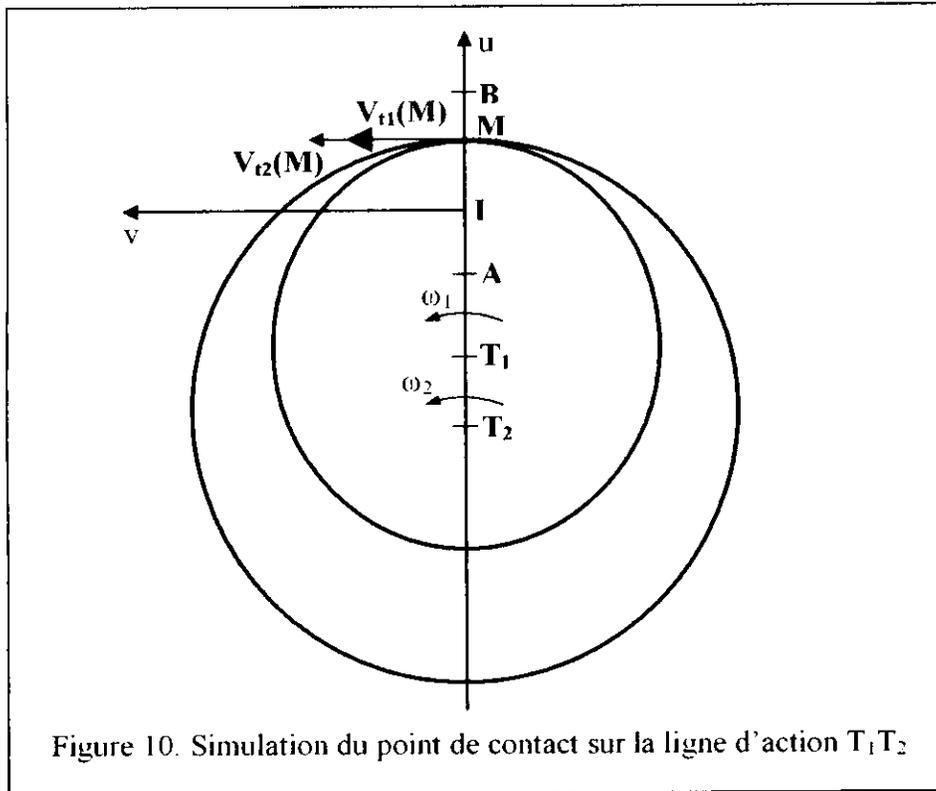


Figure 10. Simulation du point de contact sur la ligne d'action  $T_1T_2$

Le développement de ces produits vectoriels donne :

$$\overrightarrow{V_{11}(M)} = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{T_1M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} T_1M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \cdot T_1M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_{12}(M)} = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{T_2M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} T_2M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \cdot T_2M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\omega_1 \cdot T_1M - \omega_2 \cdot T_2M) \vec{v} = [V_{11}(M) - V_{12}(M)] \vec{v} \quad (\text{III.45})$$

**Remarque:** Les quantités  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $T_1M$  et  $T_2M$  sont ici en valeurs arithmétiques.

En prenant maintenant  $T_1M$  et  $T_2M$  en valeurs algébriques, on aura :

$$\overrightarrow{V_{1/2}(M)} = (\omega_1 \cdot T_1M - \omega_2 \cdot T_2M) \vec{v} \quad (\text{III.46})$$

Pendant le temps  $dt$ , le glissement du point  $M$  :

- Sur le cercle de centre  $T_1$  est :  $ds_1 = V_{11}(M) \cdot dt = \omega_1 \cdot T_1M \cdot dt \quad (\text{III.47})$

- Sur le cercle de centre  $T_2$  est :  $ds_2 = V_{12}(M) \cdot dt = \omega_2 \cdot T_2M \cdot dt \quad (\text{III.48})$

On définit le glissement spécifique par :

• Pour le pignon 1 : 
$$gs_1 = \frac{dg}{ds_1} = \frac{V_{1/2}(M) \cdot dt}{V_{t1}(M) \cdot dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{t1}(M)} \quad (\text{III.49})$$

• Pour la roue 2 : 
$$gs_2 = \frac{dg}{ds_2} = \frac{V_{1/2}(M) \cdot dt}{V_{t2}(M) \cdot dt} = \frac{V_{1/2}(M)}{V_{t2}(M)} \quad (\text{III.50})$$

En remplaçant les vitesses de glissement par leurs expressions, on obtient :

• Pour le pignon 1 : 
$$gs_1 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 M - \omega_2 \cdot T_2 M}{\omega_1 \cdot T_1 M} = 1 - \frac{\omega_2 \cdot T_2 M}{\omega_1 \cdot T_1 M} \quad (\text{III.51})$$

Ou encore : 
$$gs_1 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)IM}{\omega_1 \cdot T_1 M} = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \cdot \frac{IM}{T_1 I + IM} \quad (\text{III.52})$$

• Pour la roue 2 : 
$$gs_2 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 M - \omega_2 \cdot T_2 M}{\omega_2 \cdot T_2 M} = -1 + \frac{\omega_1 \cdot T_1 M}{\omega_2 \cdot T_2 M} \quad (\text{III.53})$$

Ou encore : 
$$gs_2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)IM}{\omega_2 \cdot T_2 M} = \left(-1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \frac{IM}{T_2 I + IM} \quad (\text{III.54})$$

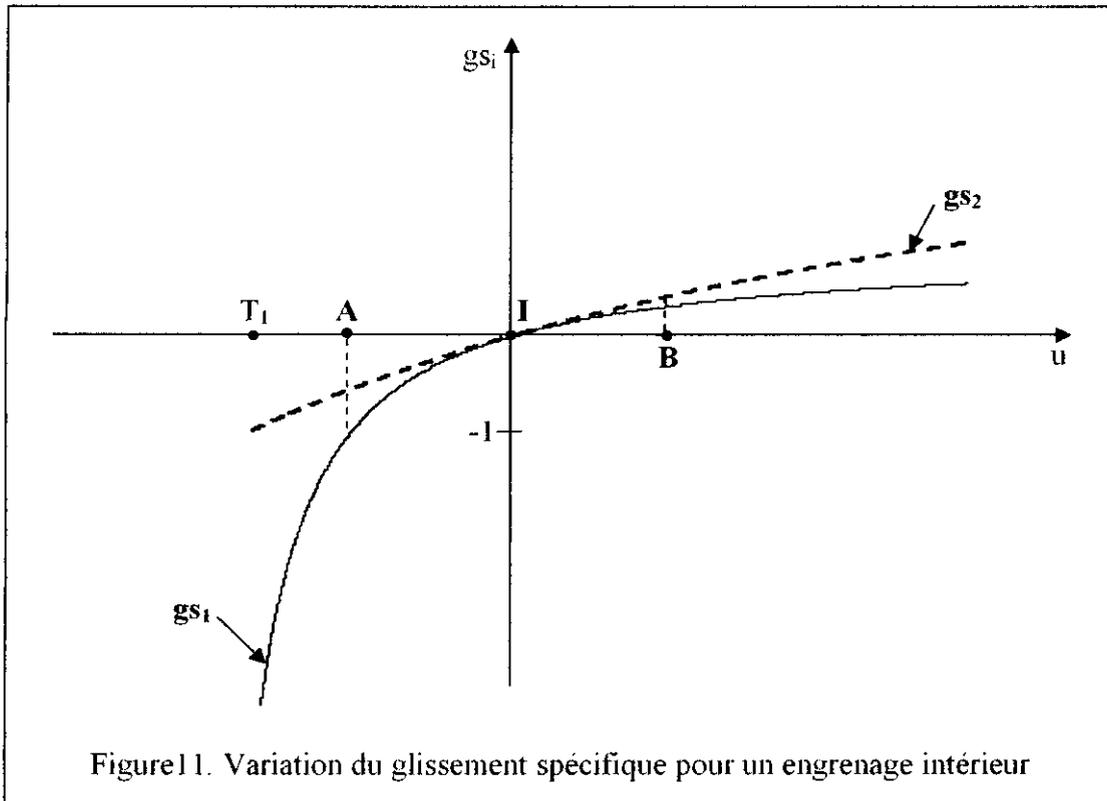
**\*) Variation de  $gs_1$  et  $gs_2$  :**

En  $T_1$  :  $gs_1 \rightarrow -\infty$  ;  $gs_2 = -1$

En I :  $gs_1 = gs_2 = 0$

**Remarque:** Il ne peut y avoir de contact entre  $T_1$  et  $T_2$  (phénomène d'interférence).

La figure 11 représente la variation des glissements spécifiques  $gs_1$  et  $gs_2$ .



#### Remarques :

- D'après la figure 11, on remarque que le glissement spécifique est maximum en A simultanément pour le pignon et pour la roue, c'est-à-dire au début d'engrènement; ce résultat diffère de celui obtenu pour les engrenages extérieurs.
- Le glissement spécifique maximum sur les dents du pignon  $gs_{1 \max}$  est nettement plus élevé que le glissement spécifique maximum sur les dents de la roue  $gs_{2 \max}$ .
- L'équilibrage des glissements spécifiques maximums n'est possible que pour les engrenages extérieurs [13] car les deux courbes  $gs_1$  et  $gs_2$  évoluent dans le même sens.

### III.7. CONCLUSION

L'équilibrage des glissements spécifiques maximums pour les engrenages extérieurs est obtenu en faisant une correction de denture  $x_1$  pour le pignon et  $x_2$  pour la roue. Par conséquent, le fonctionnement des engrenages déportés permet d'améliorer le glissement sur le profil de la dent ainsi que sa durée de vie.

Pour les engrenages intérieurs, il n'est pas possible d'équilibrer les glissements spécifiques maximums. On se contente alors de ne pas dépasser une limite de 2,5 à 3 [6].

La relation (III.41) est difficilement exploitable pour le choix des coefficients de déport optimums, on préfère donc utiliser la méthode d'optimisation proposé par Eitel Lauria [11].

# CHAPITRE IV

## OPTIMISATION DES COEFFICIENTS DE DEPORT

### IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on présente une méthode numérique pour l'obtention du coefficient de déport optimal. A cet effet, il faut définir le critère d'optimisation et en même temps tenir compte d'un certain nombre de conditions. Ces dernières sont apportées par la géométrie des dentures et les conventions techniques.

On choisit un problème classique de la théorie des engrenages dont les solutions habituelles sont les abaques et les diagrammes [1]. Il s'agit de la détermination des coefficients de déport  $x_1$  et  $x_2$  dans les engrenages extérieurs à denture droite avec les données suivantes :

- Caractéristique de taillage du pignon à partir de la crémaillère génératrice ( $\alpha_0$ ).
- Nombres de dents des roues ( $Z_1, Z_2$ ).
- L'entraxe de fonctionnement imposé ( $a'$ ).

### IV. 2. CRITERE D'OPTIMISATION

Le critère d'optimisation utilisé est le critère d'usure ou le critère relatif à l'égalité du glissement spécifique maximum sur le pignon  $gs_1$  et la roue  $gs_2$ . Ceci revient à dire que la fonction F a la forme suivante:

$$F(x_1, x_2) = (|gs_1m| - |gs_2m|)^2 \quad (IV.1)$$

Il est évident que la fonction F est égale à zéro quand les glissements spécifiques  $gs_1$  et  $gs_2$  sont égaux. Cela réduit le problème à la détermination des valeurs des coefficients de déport qui annulent cette fonction.

### IV.3. CONDITIONS A RESPECTER

L'équilibrage de l'usure n'est pas le seul critère d'optimisation, il est nécessaire de déterminer :

- La valeur des glissements spécifiques maximums (critère d'usure).
- La valeur de la somme des coefficients de déport (entraxe imposé).
- La valeur de l'épaisseur de tête afin d'éviter une denture pointue.
- Les conditions pour éviter l'interférence de taillage avec l'outil crémaillère et obtenir un contact qui s'effectue sur les profils des dentures en développante de cercle.
- La valeur du rapport de conduite.

### IV.3.1. GLISSEMENT SPECIFIQUE MAXIMUM

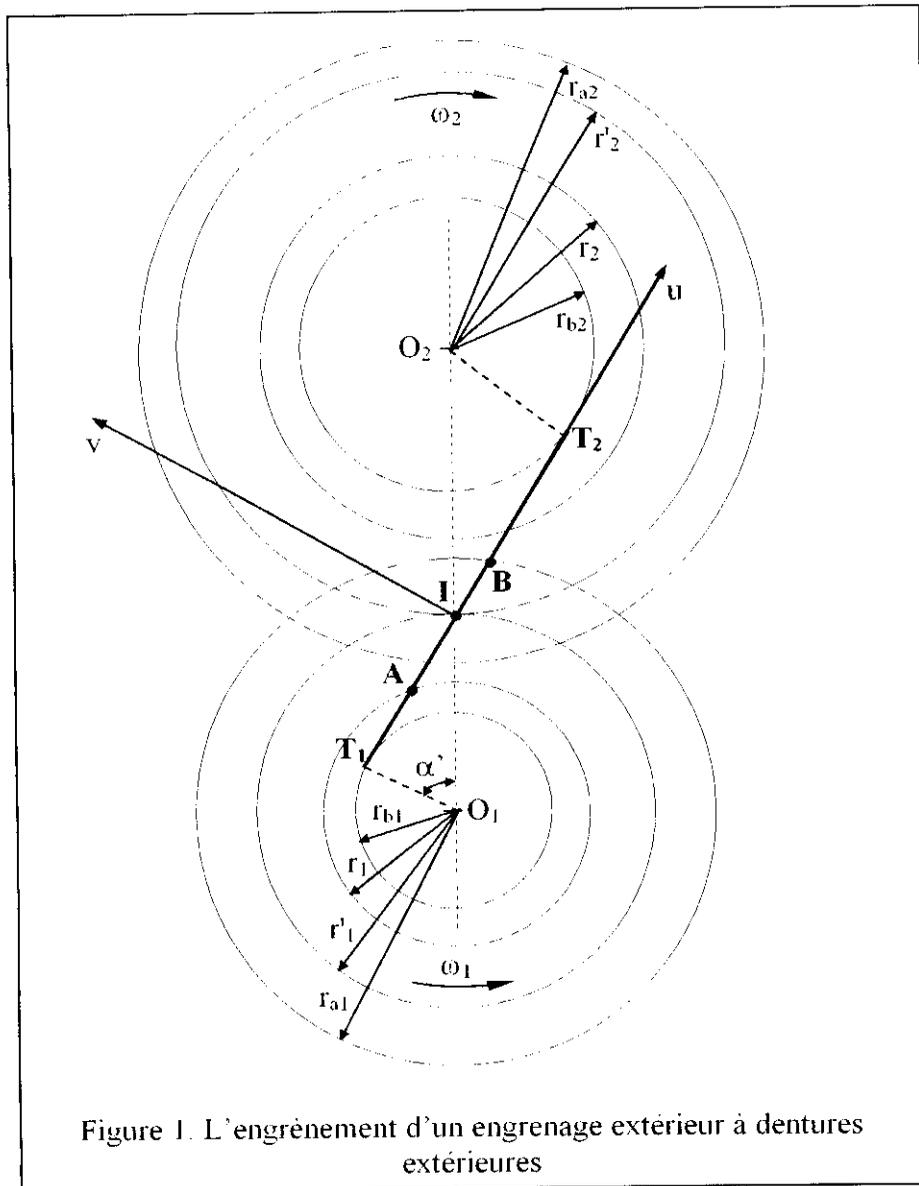
Les glissements spécifiques maximums pour le pignon et la roue sont donnés par (chapitre3) :

$$gs_1 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 A + \omega_2 \cdot T_2 A}{\omega_1 \cdot T_1 A} = 1 - u \cdot \frac{AT_2}{T_1 A} \quad (IV.2)$$

$$gs_2 = \frac{\omega_1 \cdot T_1 B + \omega_2 \cdot T_2 B}{\omega_2 \cdot T_2 B} = 1 - \frac{1}{u} \cdot \frac{T_1 B}{BT_2} \quad (IV.3)$$

Avec (figure1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_2}{\omega_1} = u \\ BT_2 = T_1 I + IT_2 - T_1 B = (r'_1 \sin \alpha' + r'_2 \sin \alpha' - \sqrt{ra_{r1}^2 - r_{b1}^2}) \\ T_1 B = \sqrt{ra_{r1}^2 - r_{b1}^2} \\ T_1 A = T_1 I + IT_2 - AT_2 = r'_1 \sin \alpha' + r'_2 \sin \alpha' - \sqrt{ra_{r2}^2 - r_{b2}^2} \\ AT_2 = \sqrt{ra_{r2}^2 - r_{b2}^2} \\ m' = \frac{2a'}{Z_1 + Z_2} \\ r'_1 = m' \cdot \frac{Z_1}{2} \\ r'_2 = m' \cdot \frac{Z_2}{2} \\ x_2 = \sum x - x_1, \quad x_1 \text{ variable (L'expression de } \sum x \text{ est donnée par l'équation IV.5)} \\ m_{nor} = m' - m_0 \\ r_1 = m_{nor} \cdot \frac{Z_1}{2} \\ r_2 = m_{nor} \cdot \frac{Z_2}{2} \\ h_{ar1} = m_{nor} (1 + x_1 - Km_{nor}) \quad (\text{Pour l'expression de K, voir ANNEXE I}) \\ h_{ar2} = m_{nor} (1 + x_2 - Km_{nor}) \\ r_{ar1} = r_1 + h_{ar1} \\ r_{ar2} = r_2 + h_{ar2} \\ r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha_0 \\ r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha_0 \\ a = r_1 + r_2 \\ \alpha' = \arccos\left(\frac{a}{a'} \cdot \cos \alpha\right) \end{array} \right.$$



### IV.3.2. SOMME DES COEFFICIENTS DE DEPOT

La relation entre les angles de pression et de fonctionnement pour une denture extérieure déportée est donnée par :

$$\text{inv}\alpha' = \text{inv}\alpha_0 + 2 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \text{tg}\alpha_0 \quad (\text{IV.4})$$

Finalement la somme des coefficients de dépôts est donnée par :

$$\sum x = x_1 + x_2 = \frac{Z_1 + Z_2}{2\text{tg}\alpha_0} (\text{inv}\alpha' - \text{inv}\alpha_0) \quad (\text{IV.5})$$

Avec:

$$\begin{cases} \text{inv}\alpha' = \text{tg}\alpha' - \alpha' \\ \text{inv}\alpha_0 = \text{tg}\alpha_0 - \alpha_0 \end{cases}$$

### IV.3.3. EPAISSEUR DE TETE

L'épaisseur de tête du pignon est donnée par (chapitre1):

$$S_{a1} = r_{a1} \left[ \frac{S_1}{r_1} + 2(\text{inv} \alpha' - \text{inv} \alpha_{a1}) \right] \quad (\text{IV.6})$$

Avec: 
$$\begin{cases} \alpha_{a1} = \arccos\left(\frac{r'_1 \cos \alpha'}{ra_{r1}}\right) \\ S_1 = m_0 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \text{tg} \alpha_0\right) \end{cases}$$

La limite adoptée pour l'épaisseur de tête du pignon est:

$$S_{a1} \geq 0,2 m_0 \quad (\text{IV.7})$$

### IV.3.4. L' INTERFERENCE

a) Pour éviter l'interférence de taillage avec l'outil crémaillère, il faut que (figure 2):

$$T_1 L_1 \geq 0. \quad (\text{IV.8})$$

$L_1$ : Le point limite des développantes, déterminé en taillage par un outil crémaillère sur la ligne d'action.

Or :

$$T_1 L_1 = T_1 I - L_1 I \quad (\text{IV.9})$$

Avec :

$$\begin{cases} h_{f1} = m_0 \cdot (1,25 - x_1) \\ h_{fu} = h_{f1} - 0,25 \cdot m_0 = m_0 \cdot (1 - x_1) \\ L_1 I = \frac{h_{fu}}{\sin \alpha_0} \\ T_1 I = r_{b1} \text{tg} \alpha_0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient:

$$T_1 L_1 = r_{b1} \text{tg} \alpha_0 - \frac{m_0 \cdot (1 - x_1)}{\sin \alpha_0} \quad (\text{IV.10})$$

b) Pour obtenir un contact qui s'effectue sur les profils des dents en développante de cercle, il faut que :

$$T_1 A - T_1 L_1 \geq 0 \quad (\text{IV.11})$$

On obtient finalement:

$$r'_1 \sin \alpha' + r'_2 \sin \alpha' - \sqrt{ra_{r2}^2 - r_{b2}^2} - r_{b1} \text{tg} \alpha_0 + \frac{m_0 \cdot (1 - x_1)}{\sin \alpha_0} \geq 0 \quad (\text{IV.12})$$

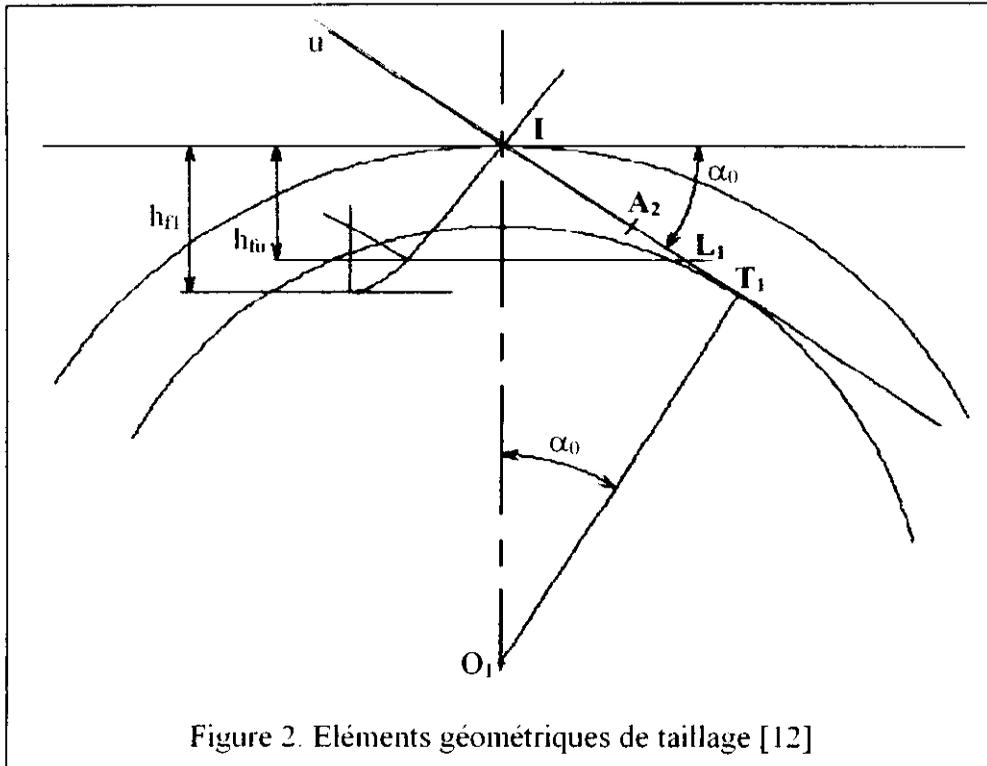


Figure 2. Eléments géométriques de taillage [12]

#### IV.3.5. RAPPORT DE CONDUITE

Le rapport de conduite est donné par :

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{AI + IB}{\pi \cdot m_0 \cdot \cos \alpha_0} \quad (IV.13)$$

Avec:

$$\begin{cases} AI = AT_2 - IT_2 = \sqrt{ra_{r2}^2 - rb_2^2} - r'_2 \cdot \sin \alpha' \\ IB = T_1B - T_1I = \sqrt{ra_{r1}^2 - rb_1^2} - r'_1 \cdot \sin \alpha' \end{cases}$$

A partir d'une convention technique usuelle [1], on adopte:

$$\varepsilon_{\alpha} \geq 1,3 \quad (IV.14)$$

#### IV.4. PRESENTATION SOMMAIRE DU PROBLEME

En résumé, on cherche à minimiser la fonction F:

$$F(x_1, x_2) = [gs_1 - gs_2]$$

Et en tenant compte des conditions :

$$\sum x = x_1 + x_2 = \frac{Z_1 + Z_2}{2tg\alpha_0} (\text{inv}\alpha' - \text{inv}\alpha_0)$$

$$S_{a1} - 0,2 m_0 \geq 0$$

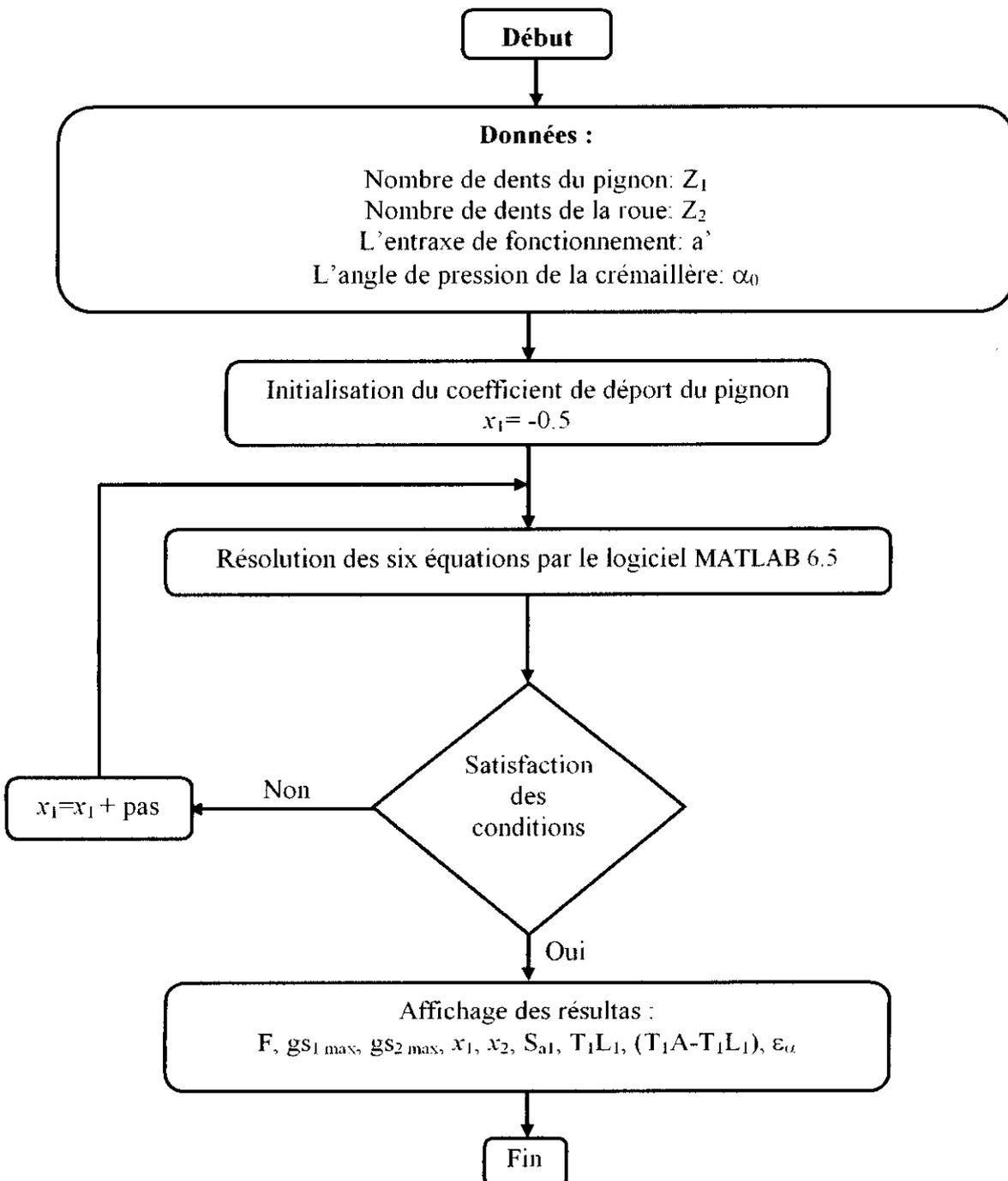
$$rh_1 \cdot tg\alpha_0 - \frac{m_0 \cdot (1 - x_1)}{\sin \alpha_0} \geq 0$$

$$r'_1 \sin \alpha' + r'_2 \sin \alpha' - \sqrt{ra_{r2}^2 - r_b2^2} - rb_1 \lg \alpha_0 + \frac{m_0 \cdot (1 - x_1)}{\sin \alpha_0} \geq 0$$

$$\varepsilon_\alpha - 1,3 \geq 0$$

La méthode de résolution consiste à utiliser un ensemble de valeurs de  $x_1$ , puis vérifier la satisfaction des six conditions citées ci-dessus. Quand la vérification est positive, on calcule la valeur de la fonction F. Le procédé doit continuer jusqu'à l'obtention d'une valeur zéro pour F. Dans ce dernier cas, les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  sont les solutions du problème.

#### IV.5. ORGANIGRAMME DE RESOLUTION



## IV.6. EXEMPLES D'APPLICATION ET INTERPRETATIONS

Pour les données suivantes :

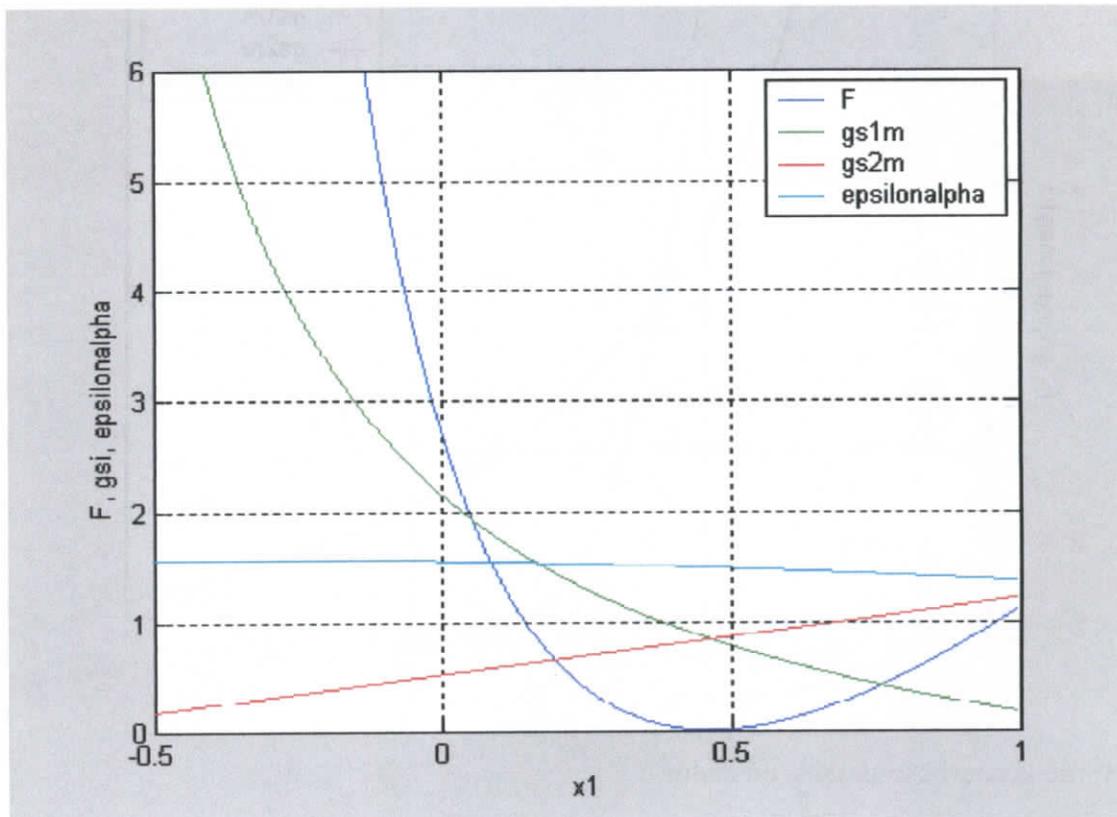
1<sup>er</sup> cas):  $\alpha_0=20^\circ$

$Z_1=24$  dents

$Z_2=85$  dents

$a'=138,62$  mm

On aura le graphe suivant :



A partir de la courbe ci-dessus, on déduit :

$$x_1 = 0,4678$$

$$x_2 = 0,5390$$

Et  $\sum x = 1,0068$

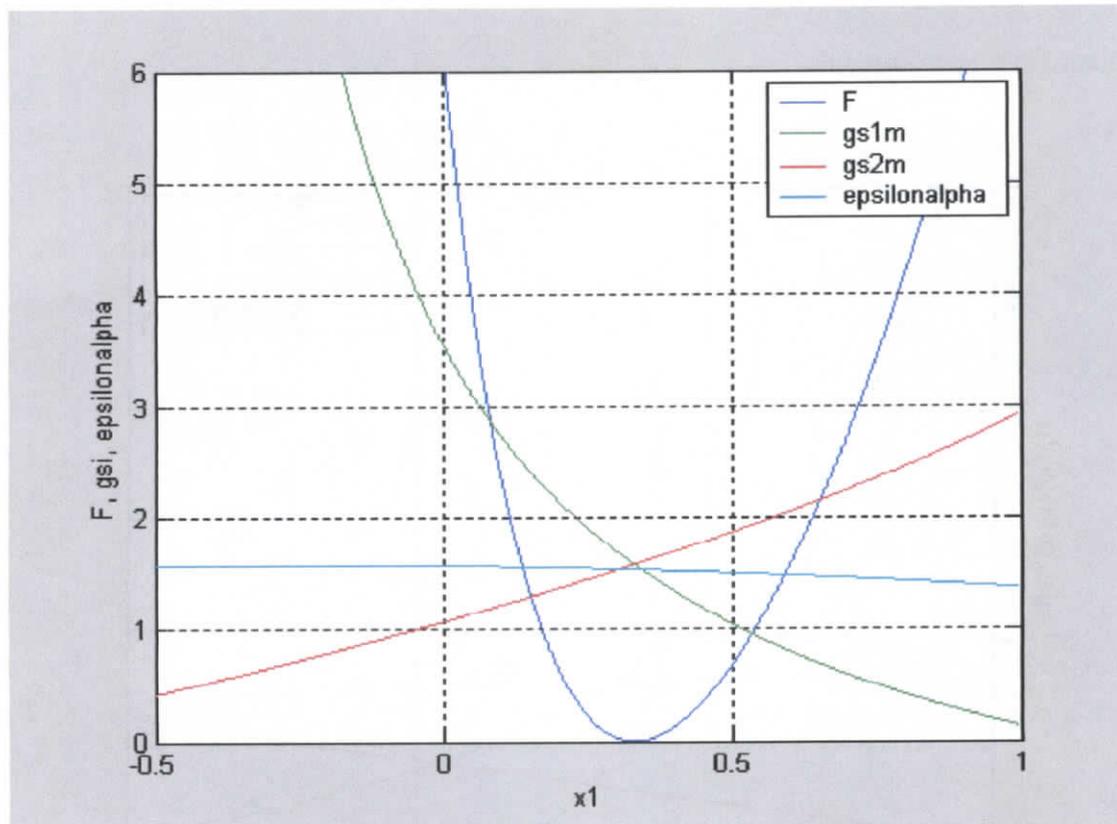
2<sup>ème</sup> cas):  $\alpha_0=20^\circ$

$Z_1=20$  dents

$Z_2=40$  dents

$a'=91,04$  mm

On aura le graphe suivant :



A partir de la courbe ci-dessus, on déduit :

$$x_1 = 0,3332$$

$$x_2 = 0,0280$$

Et  $\sum x = 0,3612$

#### • Coefficients de déport :

Le déport de denture ayant une influence sur la forme des dents et, aussi sur les caractéristiques de fonctionnement :

- Un coefficient de déport trop petit donne lieu à une interférence de taillage [17]. La valeur exacte qui produit cette interférence, pour un nombre de dent donné, est la limite géométrique inférieure du coefficient du déport.

- Un coefficient de déport trop élevé produit une dent pointue. La valeur exacte du coefficient qui, pour un nombre de dent donné conduit à la dent pointue est la limite géométrique supérieure du coefficient de déport.

Pour des raisons de facilité d'utilisation, on remplace ces limites géométriques par des limites conventionnelles considérées comme absolues qui sont inférieures aux limites géométriques.

Le rapport technique ISO [16], se fixe des limites supérieures et inférieures du coefficient de déport choisit:

- Les limites conventionnelles sont celles qui ne peuvent être dépassées en aucun cas.
- Les limites recommandées sont celles à l'intérieur desquelles il n'y a aucun risque de fonctionnement défectueux et, par conséquent, aucune nécessité d'effectuer des vérifications quelconques.

Pour le premier cas, le nombre de dents du pignon est de 24 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de  $-0,066$  et la limite conventionnelle supérieure est de  $0,74$ .
- La limite recommandée inférieure est de  $0,15$  et la limite recommandée supérieure est de  $0,6$ .

Or la valeur du coefficient de déport du pignon obtenue après exécution du programme donne une valeur de  $0,4678$ . Cette valeur est bonne car elle appartient aux bornes supérieure et inférieure de la limite recommandée.

Le nombre de dents de la roue est de 85 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de  $-0,5$  et la limite conventionnelle supérieure est de  $1$ .
- La limite recommandée inférieure est de  $-0,5$  et la limite recommandée supérieure est de  $0,6$ .

Or la valeur du coefficient de déport de la roue obtenue après exécution du programme donne une valeur de  $0,5390$ . Cette valeur est bonne car elle appartient aux bornes supérieure et inférieure de la limite recommandée.

Pour le deuxième cas, le nombre de dents du pignon est de 20 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de  $0$  et la limite conventionnelle supérieure est de  $0,7$ .
- La limite recommandée inférieure est de  $0,25$  et la limite recommandée supérieure est de  $0,6$ .

Or la valeur du coefficient de déport du pignon obtenue après exécution du programme donne une valeur de  $0,3332$ . Cette valeur est bonne car elle appartient aux bornes supérieure et inférieure de la limite recommandée.

Le nombre de dents de la roue est de 40 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de -0,33 et la limite conventionnelle supérieure est de 0,9.

- La limite recommandée inférieure est de -0,25 et la limite recommandée supérieure est de 0,6.

Or la valeur du coefficient de déport de la roue obtenue après exécution du programme donne une valeur de 0,0280. Cette valeur est bonne car elle appartient aux bornes supérieure et inférieure de la limite recommandée.

#### • Somme des coefficients de déport :

Le choix de la somme des coefficients de déport dépend des conditions d'entraxe ou des conditions de fonctionnement souhaitées. Des sommes trop élevées ou trop faibles des coefficients de déport peuvent être néfastes au bon fonctionnement de l'engrenage [16].

Pour le premier cas, la somme des dents du pignon et de la roue est de 109 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de -0,345 et la limite conventionnelle supérieure est de 1,5

- La limite recommandée inférieure est de 0 et la limite recommandée supérieure est de 1.

Or la somme des coefficients de déport obtenue après exécution du programme donne une valeur de 1,0068. Cette valeur correspond à un cas spécial car elle appartient à la zone des valeurs comprises entre ces deux types de limites.

Pour le deuxième cas, la somme des dents du pignon et de la roue est de 60 dents. D'après la figure 2 du rapport technique ISO [16] :

- La limite conventionnelle inférieure est de -0,1 et la limite conventionnelle supérieure est de 1,33

- La limite recommandée inférieure est de 0 et la limite recommandée supérieure est de 1.

Or la somme des coefficients de déport obtenue après exécution du programme donne une valeur de 0,3612. Cette valeur est bonne car elle appartient aux bornes supérieure et inférieure de la limite recommandée.

# CHAPITRE V

## GENERALITES SUR LES TRAINS EPICYCLOÏDAUX

### V.1. INTRODUCTION

On désigne par train épicycloïdal ou engrenage planétaire, un système de transmission de puissance entre deux ou plusieurs arbres dont certains tournent non seulement autour de leur propre axe, mais aussi autour d'un autre axe.

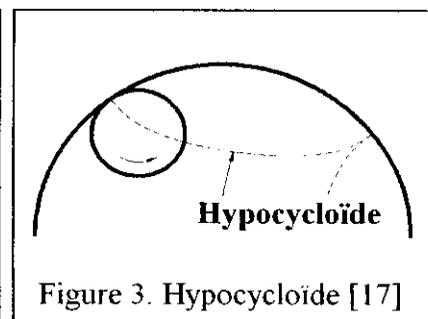
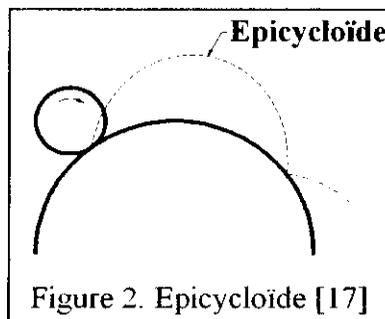
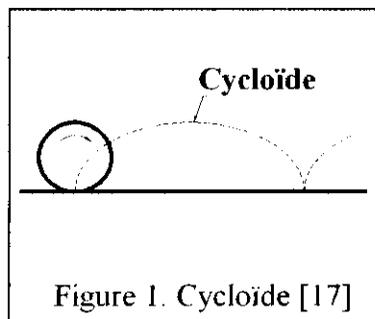
Ces systèmes se trouvent dans de nombreux mécanismes, en particulier, dans les machines-outils, les différentiels d'automobiles, les réducteurs et les multiplicateurs, les boîtes de vitesses, etc. Ils permettent des rapports de transmission élevés avec un encombrement réduit.

### V.2. LES EPICYCLES

1) **Cycloïde** : C'est la trajectoire décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite (figure 1).

2) **Epicycloïde** : C'est la trajectoire décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle (figure 2)

3) **Hypocycloïde** : C'est la trajectoire décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle (figure 3).



### V.3. LES TRAINS EPICYCLOÏDAUX

#### V.3.1. DEFINITION

Un train épicycloïdal est un train d'engrenages comportant un pignon animé d'une rotation autour de son axe et d'une rotation autour d'un axe fixe.

### V.3.2. CONSTITUTION

• **Train épicycloïdal simple** (figure 4):

- 1 : planétaire.
- 2 : satellite.
- 3 : porte satellite (châssis).

• **Train hypocycloïdal simple** (figure 5):

- 1 : planétaire (couronne).
- 2 : satellite.
- 3 : porte satellite (châssis).

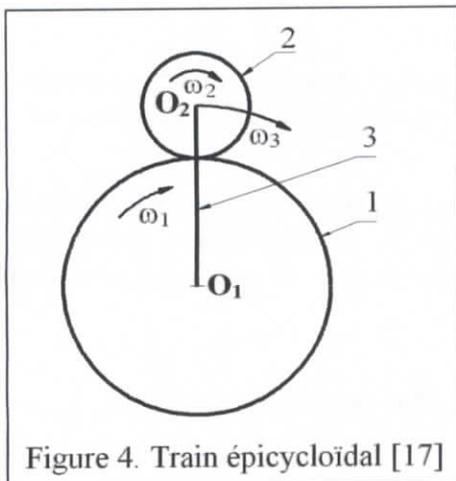


Figure 4. Train épicycloïdal [17]

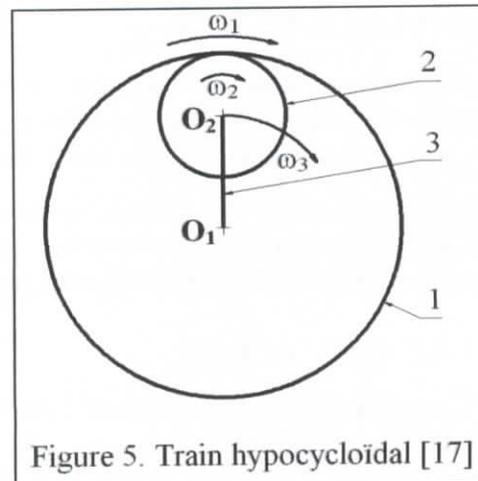


Figure 5. Train hypocycloïdal [17]

**Remarque :**

On désigne communément par train épicycloïdal un train épicycloïdal proprement dit ou un train hypocycloïdal.

### V.4. TRAIN ORDINAIRE

Un train d'engrenages est dit ordinaire quand, pendant le fonctionnement, toutes les roues dentées tournent autour d'un axe fixe par rapport au carter principal, lui-même lié au bâti O (figure6).

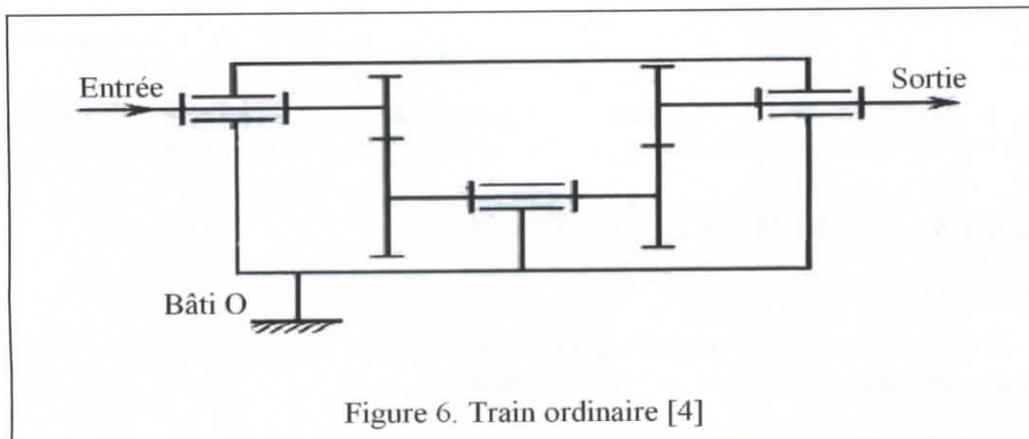
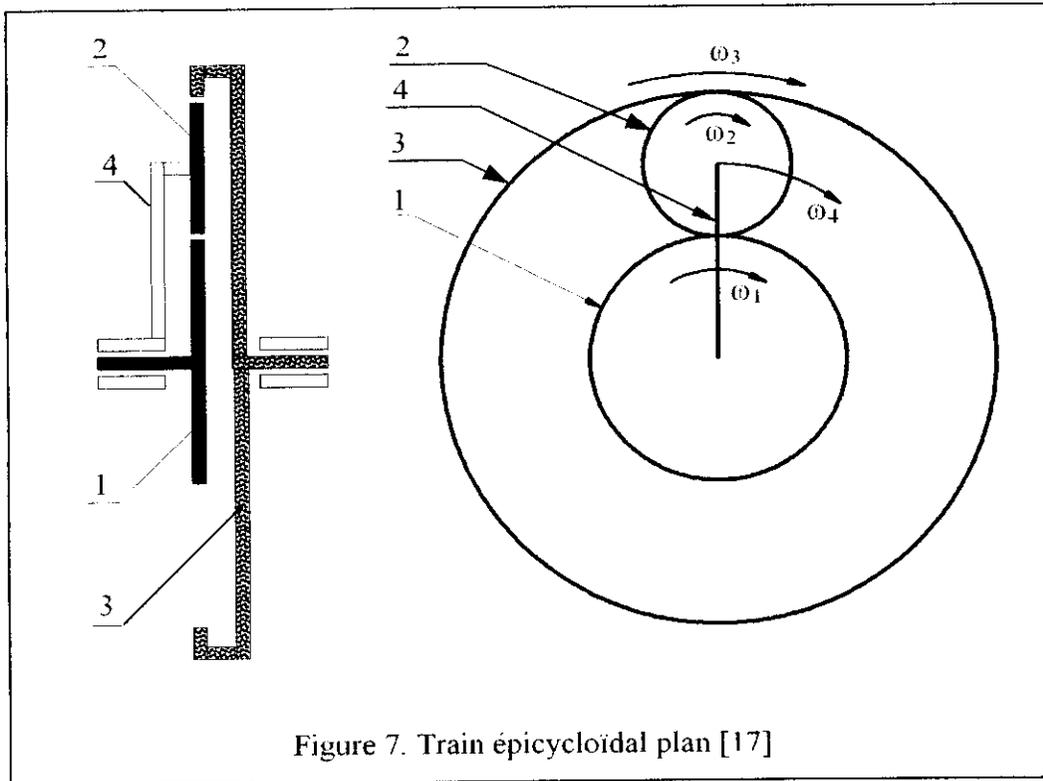


Figure 6. Train ordinaire [4]

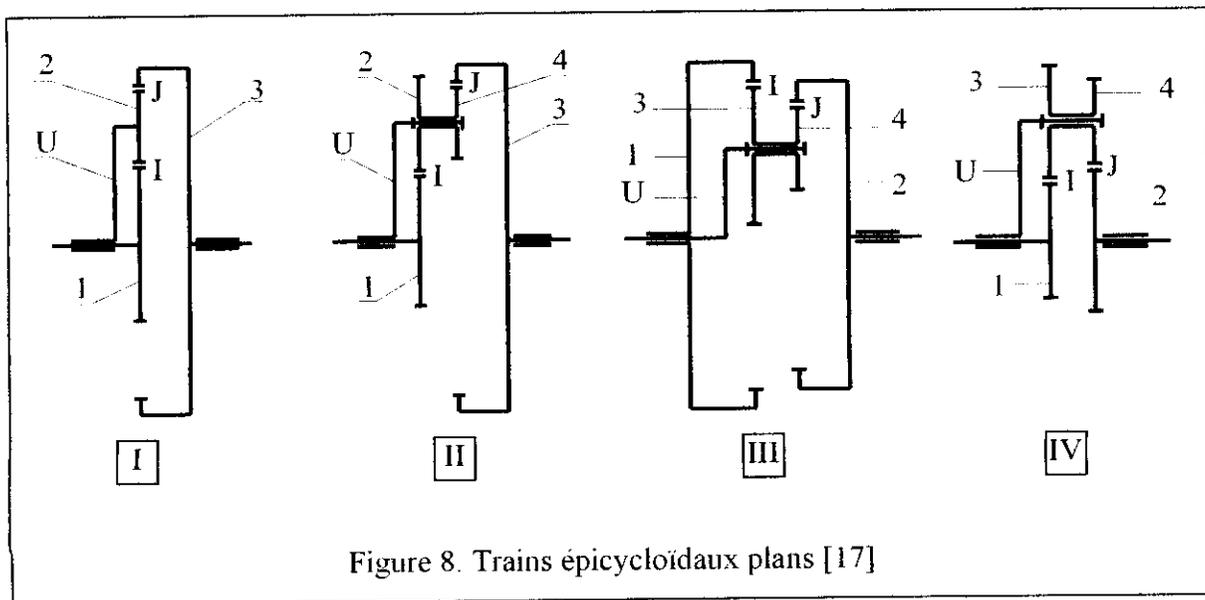
## V.5. TRAIN EPICYCLOÏDAL PLAN

On appelle train épicycloïdal plan tout train utilisant des engrenages à dentures cylindriques droites dont les arbres sont tous parallèles (figure 7).



## V.6. DIFFERENTS TYPES DE TRAINS EPICYCLOÏDAUX PLANS

On distingue principalement quatre types (figure 8).



### V.6.1. RELATIONS GEOMETRIQUES

Le rayon du cercle décrit par le centre de rotation du satellite étant commun à deux engrènements, le montage sera possible si l'on a :

- **Type I :**  $r_1 + r_2 = r_3 - r_2 \Rightarrow r_3 - r_1 = 2r_2$
- **Type II :**  $r_1 + r_2 = r_3 - r_4$
- **Type III :**  $r_1 - r_3 = r_2 - r_4$
- **Type IV :**  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$

### V.6.2. RELATIONS CINEMATIQUES

#### Type I :

Le roulement sans glissement en I permet d'écrire (figure 9):

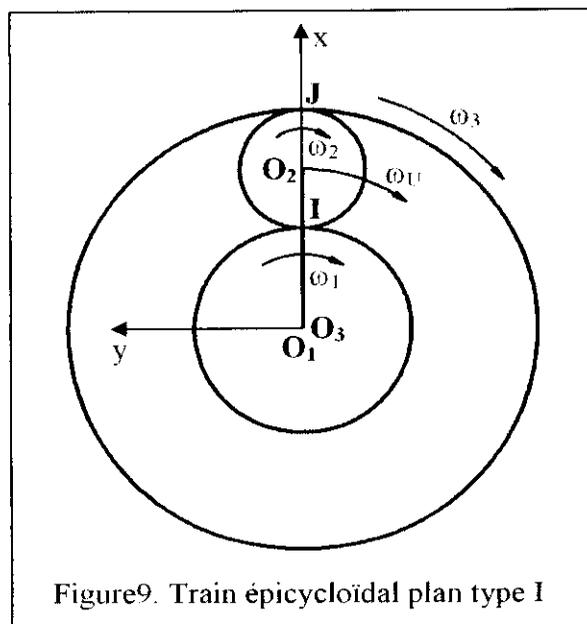
$$\overrightarrow{V_{1/2}(I)} = \overrightarrow{V_1^0(I)} - \overrightarrow{V_2^0(I)} = \vec{0} \quad (V.1)$$

Avec:

$$\overrightarrow{V_1^0(I)} = \overrightarrow{V_1^0(O_1)} + \overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1 I} \quad (V.2)$$

Donc:

$$\overrightarrow{V_1^0(I)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \cdot r_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (V.3)$$



Et: 
$$\overrightarrow{V_2^0(I)} = \overrightarrow{V_2^0(O_2)} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2 I} = \overrightarrow{\Omega_u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2 I} \quad (V.4)$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{V_2^0(I)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_u \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_1 + r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (r_1 + r_2)\omega_u - r_2\omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Finalement: } r_1\omega_1 - (r_1 + r_2)\omega_u + r_2\omega_2 = 0 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Il vient : } \frac{\omega_2 - \omega_u}{\omega_1 - \omega_u} = -\frac{r_1}{r_2} \quad (\text{V.7})$$

Le roulement sans glissement en J permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{2/3}(J)} = \overrightarrow{V_2^0(J)} - \overrightarrow{V_3^0(J)} = \vec{0} \quad (\text{V.8})$$

$$\text{Avec: } \overrightarrow{V_2^0(J)} = \overrightarrow{V_2^0(O_2)} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2J} = \overrightarrow{\Omega_u} \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2J} \quad (\text{V.9})$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{V_2^0(J)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_u \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_1 + r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (r_1 + r_2)\omega_u + r_2\omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

$$\text{Et: } \overrightarrow{V_3^0(J)} = \overrightarrow{V_3^0(O_1)} + \overrightarrow{\Omega_3} \wedge \overrightarrow{O_3J} \quad (\text{V.11})$$

$$\text{Donc: } \overrightarrow{V_3^0(J)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_3 \cdot r_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.12})$$

$$\text{D'où: } (r_1 + r_2)\omega_u + r_2\omega_2 - \omega_3 r_3 = 0 \quad (\text{V.13})$$

$$\text{Or: } r_1 + r_2 = r_3 - r_2 \quad (\text{V.14})$$

$$\text{Donc: } r_3(\omega_u - \omega_3) + r_2(\omega_2 - \omega_1) = 0 \quad (\text{V.15})$$

$$\text{Il vient : } \frac{\omega_3 - \omega_u}{\omega_2 - \omega_u} = \frac{r_2}{r_3} \quad (\text{V.16})$$

$$\text{Finalement: } \frac{\omega_3 - \omega_u}{\omega_1 - \omega_u} = -\frac{r_1}{r_3} \quad (\text{V.17})$$

**Remarque:** L'équation (V.17) est appelée formule de Willis.

Comme les engrenages sont à denture droite et leurs modules sont égaux, on a donc :

$$r_1 = \frac{mZ_1}{2} \quad \text{et} \quad r_3 = \frac{mZ_3}{2}$$

La formule de Willis peut alors être écrite sous la forme :

$$\frac{\omega_3 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = -\frac{Z_1}{Z_3} \quad (\text{V.18})$$

La vitesse du porte- satellite U est :

$$\omega_U = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{\omega_3 r_3 - \omega_2 r_2}{r_3 - r_2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_3 r_3}{r_1 + r_3} \quad (\text{V.19})$$

### Remarque :

On aurait obtenu la formule de Willis en immobilisant le châssis. Dans ce cas, le train épicycloïdal se comportera comme un train d'engrenages ordinaire. La vitesse du planétaire 3 sera  $(\omega_3 - \omega_U)$ , celle du planétaire 1 sera  $(\omega_1 - \omega_U)$ . Comme ces deux planétaires vont tourner en sens inverse, le rapport de transmission de vitesse vaut alors:

$$\frac{\omega_3 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = -\frac{r_1}{r_3}$$

### Type II :

Le roulement sans glissement en I permet d'écrire:

$$\overrightarrow{V_{2/1}(I)} = \overrightarrow{V_2^0(I)} - \overrightarrow{V_1^0(I)} = \vec{0} \quad (\text{V.20})$$

Ce qui donne :  $\omega_2 r_2 = \omega_U (r_1 + r_2) - \omega_1 r_1 = (\omega_U - \omega_1) r_1 + \omega_U r_2 \quad (\text{V.21})$

Le roulement sans glissement en J permet d'écrire:

$$\overrightarrow{V_{4/3}(J)} = \overrightarrow{V_4^0(J)} - \overrightarrow{V_3^0(J)} = \vec{0} \quad (\text{V.22})$$

Il vient :  $\omega_4 r_4 = \omega_3 r_3 - \omega_U (r_3 - r_4) = (\omega_3 - \omega_U) r_3 + \omega_U r_4 \quad (\text{V.23})$

Or:  $\omega_3 = \omega_4$ , donc :  $\omega_2 r_2 r_4 = (\omega_U - \omega_1) r_1 r_4 + \omega_U r_2 r_4 = (\omega_3 - \omega_U) r_2 r_3 + \omega_U r_2 r_4 \quad (\text{V.24})$

Finalement:  $\frac{\omega_3 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = -\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3} \quad (\text{V.25})$

En adoptant le même module pour tous les engrenages, l'équation (V.25) devient :

$$\frac{\omega_3 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = -\frac{Z_1 Z_4}{Z_2 Z_3} \quad (\text{V.26})$$

### Type III :

Le roulement sans glissement aux points I et J donne respectivement :

$$\omega_3 r_3 = (\omega_1 - \omega_U) r_1 + \omega_U r_3 \quad (\text{V.27})$$

$$\omega_4 r_4 = (\omega_2 - \omega_U) r_2 + \omega_U r_4 \quad (\text{V.28})$$

En éliminant  $\omega_3$  et en tenant compte que  $\omega_3 = \omega_4$ , on obtient :

$$(\omega_1 - \omega_U)r_1r_4 + \omega_U r_3r_4 = (\omega_2 - \omega_U)r_2r_3 + \omega_U r_3r_4 \quad (V.29)$$

Finalemment: 
$$\frac{\omega_2 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3} \quad (V.30)$$

En adoptant le même module pour tous les engrenages, cette relation devient :

$$\frac{\omega_2 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = \frac{Z_1 \cdot Z_4}{Z_2 \cdot Z_3} \quad (V.31)$$

#### **Type IV :**

Le roulement sans glissement aux points I et J donne respectivement :

$$\omega_3 r_3 = (\omega_U - \omega_1)r_1 + \omega_U r_3 \quad (V.32)$$

$$\omega_4 r_4 = (\omega_U - \omega_2)r_2 + \omega_U r_4 \quad (V.33)$$

En éliminant  $\omega_3$  et en tenant compte que  $\omega_3 = \omega_4$ , on obtient :

$$(\omega_U - \omega_1)r_1r_4 + \omega_U r_3r_4 = (\omega_U - \omega_2)r_2r_3 + \omega_U r_3r_4 \quad (V.34)$$

Finalemment: 
$$\frac{\omega_2 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3} \quad (V.35)$$

En adoptant le même module pour tous les engrenages, cette relation devient :

$$\frac{\omega_2 - \omega_U}{\omega_1 - \omega_U} = \frac{Z_1 \cdot Z_4}{Z_2 \cdot Z_3} \quad (V.36)$$

#### **Remarques:**

- Dans le train I, le nombre de contacts extérieurs vaut 1. Si la roue 1 est menante, la roue 3 est menée, le satellite 2 est à la fois menant et mené.
- Dans le train II, le nombre de contacts extérieurs vaut 1. Si la roue 1 est menante, le pignon 2 est mené, le pignon 4 est à la fois menant et mené.
- Dans le train III, le nombre de contacts extérieurs vaut zéro. Si la roue 1 est menante, les roues 2, 3 et 4 se comportent comme dans le train II.
- Dans le train IV, le nombre de contacts extérieurs vaut 2. Si la roue 1 est menante, les roues 2, 3 et 4 se comportent comme dans le train II.

La formule de Willis peut être alors écrite sous la forme générale suivante :

$\frac{\text{vitesse de sortie} - \text{vitesse du porte satellite}}{\text{vitesse d'entrée} - \text{vitesse du porte satellite}} = (-1)^n \frac{\text{produit des roues menantes}}{\text{produit des roues menées}}$
---

n étant le nombre de contacts extérieurs

# CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a présenté une méthode d'optimisation des coefficients de déport applicable seulement dans les engrenages cylindriques à dentures extérieures.

Pour les engrenages intérieurs, il n'est pas possible de réaliser cette application car on ne peut pas équilibrer les glissements spécifiques maximums. Dans ce cas, on se contente de ne pas dépasser une limite de 2,5 à 3.

Il est difficile de réussir à tout améliorer par le choix des déports de dentures [12]:

- Accroître la conduite,
- Augmenter la résistance des dents,
- Assurer une conduite sur les arcs en développante de cercle et,
- Equilibré et réduire les glissements spécifiques.

Le choix des déports doit s'orienter sur l'équilibrage et la réduction des valeurs des glissements spécifiques.

Pour les trains épicycloïdaux, l'optimisation sera faite pour un seul couple d'engrenage extérieur composé d'un planétaire et d'un satellite. Le résultat obtenu pour le satellite sera le même que pour la couronne à condition qu'il soit dans les limites admissibles.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. HENRIOT: Traité théorique et pratique des engrenages, tomes 1. Dunod 1979, France. Pages [117-243] et [587-662].
- [2] G. HENRIOT: Engrenages, Conception, Fabrication, Mise en œuvre, Dunod 1999, France. Pages [116-206] et [497-559].
- [3] G. HENRIOT: Manuel pratique des engrenages. Dunod 1965, France. Pages [22-123] et [198-207].
- [4] F. ESNAULT : Construction mécanique, Transmission de puissance. Tome 1: Principe. Dunod 1994, France. Pages [65-80].
- [5] M. BOUAZIZ: Transmission de puissance par engrenages. Cours construction mécanique 4<sup>ème</sup> année. ENP.
- [6] J. DUFAILLY : Etude géométrique des engrenages cylindriques de transmission de puissance. Ellipses, 1997, France. Pages [28 -138].
- [7] M. BOUAZIZ: Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle. Thèse de doctorat d'état, ENP 1996.
- [8] G. HENRIOT: Engrenages parallèles. Technique d'Ingénieur BM5621, volume BD4.
- [9] M. BOUAZIZ: Glissement spécifique. Cours construction mécanique Post-Graduation. ENP.
- [10] G. HENRIOT: Engrenages parallèles. Technique d'Ingénieur BM5620, volume BD4.

[11] EITEL H. LAURIA: Une application de l'optimisation mathématique au calcul des engrenages. 3<sup>ème</sup> congrès mondial des engrenages et des transmissions. France 1992.

[12] LE BORZEC: Choix des déports de dentures en engrenage cylindrique. Bulletin N° 76: Décembre 1980. France. Pages [21-49].

[13] A. LAGRUE : Transmissions mécaniques à paramètres variables. Département de Génie Mécanique, INSA de Lyon, 1998. France. Pages [83-258].

[14] C. MACABREY : Le formulaire des engrenages. DUNOD, 1988. France. Pages [6-79].

[15] M. BARREAU : Calculez vos engrenages. Lavoisier, 1982. France. Pages [93-103].

[16] Rapport technique ISO/TR 4467-1982 (F) : Déport des dentures des roues cylindriques pour engrenages extérieurs réducteurs et multiplicateurs.

[17] M. BOUAZIZ: Trains épicycloïdaux. Cours construction mécanique 4<sup>ème</sup> année. ENP.

# ANNEXE I

## CALCUL DU FACTEUR DE REDUCTION DE LA SAILLIE

### I. DENTURES EXTERIEURES

\*) Calcul du facteur K de réduction de la saillie pour une denture extérieure :

#### I.1) Facteur B:

L'entraxe  $a_1$  réalisé sur la figure 11 du chapitre 2 est égal à:

$$a_1 = a + (x_1 + x_2)m_0 \quad (1)$$

D'où:

$$a_1 - a = (x_1 + x_2)m_0 \quad (2)$$

Or :

$$a = m_0 \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right) \Rightarrow m_0 = \frac{2a}{Z_1 + Z_2} \quad (3)$$

En remplaçant (3) dans (2), on obtient:

$$a_1 - a = \frac{2a(x_1 + x_2)}{Z_1 + Z_2} \quad (4)$$

On pose:

$$B = 2 \frac{\sum x}{Z_1 + Z_2} \quad (5)$$

Donc:

$$a_1 = a(B + 1) \quad (6)$$

#### I.2) Facteur $B_v$ :

La relation entre l'entraxe de fonctionnement et l'entraxe normal (II.14) est donnée par:

$$a' = a \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} \quad (7)$$

En faisant la soustraction de la quantité "a" de part et d'autre l'équation (7), on aura:

$$a' - a = a \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} - 1 \right) \quad (8)$$

On pose:

$$B_v = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'} - 1 \quad (9)$$

Donc:

$$a' = a(B_v + 1) \quad (10)$$

### I.3) Facteur K :

La différence entre les deux équations (6) et (10) donne:

$$a_1 - a' = a(B - B_v) \quad (11)$$

Soit:

$$a_1 - a' = m_0 \frac{Z_1 + Z_2}{2} (B - B_v) \quad (12)$$

On pose:

$$K = \frac{Z_1 + Z_2}{2} (B - B_v) \quad (13)$$

D'où:

$$a_1 - a' = Km_0 \quad (14)$$

## II. DENTURES INTERIEURES

\*) Calcul du facteur K' de réduction de la saillie pour une denture intérieure :

### II.1) Facteur B' :

L'entraxe  $a_1$  réalisé sur la figure13 du chapitre2 est égal à:

$$a_1 = a - (x_1 - x_2)m_0 \quad (15)$$

D'où:

$$a_1 - a = (x_2 - x_1)m_0 \quad (16)$$

Or :

$$a = m_0 \left( \frac{Z_2 - Z_1}{2} \right) \Rightarrow m_0 = \frac{2a}{Z_2 - Z_1} \quad (17)$$

En remplaçant (17) dans (16), on obtient:

$$a_1 - a = \frac{2a(x_2 - x_1)}{Z_2 - Z_1} \quad (18)$$

On pose:

$$B' = 2 \frac{\sum x}{Z_2 - Z_1} \quad (19)$$

Donc:

$$a_1 = a(B + 1) \quad (20)$$

### II.3) Facteur K' :

La différence entre les deux équations (20) et (10) donne:

$$a_1 - a' = a(B' - B_v) \quad (21)$$

Soit:

$$a_1 - a' = m_0 \frac{Z_2 - Z_1}{2} (B - B_v) \quad (22)$$

On pose:

$$K' = \frac{Z_2 - Z_1}{2} (B - B_v) \quad (23)$$

D'où:

$$a_1 - a' = K' m_0 \quad (24)$$

**Remarques :**

- Les abaques [1] donnent directement la relation entre B et B<sub>v</sub>, pour un angle de pression de 20° et pour des dentures extérieures ou intérieures.

- Les formules (13) et (23) permettent de calculer rapidement la valeur du facteur de réduction de la saillie.