

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Mécanique

5/04



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

*Projet de fin d'étude*

Pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en Mécanique

***Simulation numérique d'un  
écoulement turbulent sur une  
plaque plane partiellement  
poreuse***

Proposé et dirigé par :

Mr. S. LARBI  
Mr. H. BELHANACHE

Etudié par :

N. DJEGHRI

Promotion : Juin 2004

E.N.P 10, Avenue Hassen-Badi, EL HARRACH, ALGER

في هذا البحث، قمنا بدراسة الاهتياج على صفحة مستوية و مدى تأثير إدخال جزء نفوذ للتحكم في القشرة الحدية. لقد قمنا بتفصيل الحل الرقمي بواسطة الحجوم المحدودة "Volumes finis"، الخوارزمية SIMPLE استعمل لحل معادلات Reynolds مع النمذجة K- $\epsilon$ ، النتائج استغلّت من طرف البرنامج الصناعي FLUENT

مفتاح الكلمات : الاهتياج، القشرة الحدية، K- $\epsilon$ ، الحجوم المحدودة، FLUENT، SIMPLE

## RESUME :

Dans cette étude, nous avons traité la turbulence sur une plaque plane, et l'effet d'introduire une section poreuse pour contrôler la couche limite. Nous avons détaillé la résolution numérique par volumes finis, l'algorithme SIMPLE a été utilisé pour résoudre les équations de Reynolds avec une modélisation k- $\epsilon$ , les résultats sont exploités avec le code industriel FLUENT.

**Mots clés :** turbulence, couche limite, k- $\epsilon$ , volume finis, SIMPLE, FLUENT.

## ABSTRACT :

In this study, we treated turbulence on a flat plate, and the effect of introduce a porous section to control the boundary layer. We detailed the numerical resolution by finite volume, the SIMPLE algorithm was used to solve the Reynolds equations with a k- $\epsilon$  modelisation, and the results are exploited with FLUENT.

**Keywords :** turbulence, boundary layer, k- $\epsilon$ , finite volume, SIMPLE, FLUENT.

## Remerciements

*Je remercie Dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à faire ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer vivement ma profonde gratitude à Mr: S.LARBI et H.BELHANECHÉ pour leurs confiances, leurs suivi et pour leurs qualités humaines exceptionnelles qui m'on permis de mener à bien ce travail.*

*Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.*

# Sommaire

## Nomenclature

## Introduction générale

2

## Chapitre I : Contrôle de la couche limite en aérodynamique

I.1- Introduction	5
I.2- Concept de la couche limite	5
I.2.1- Estimation de l'épaisseur de la couche limite	7
I.2.2- Définition d'autres épaisseurs caractérisant la couche limite	9
I.2.3- Point de séparation	11
I.2.4- Etude de la transition	13
I.3- Méthode de contrôle de la couche limite	16
I.3.1- Mouvement de la paroi	17
I.3.2- Accélération de la couche limite	18
I.3.3- L'aspiration	19
I.3.4- Forme aérodynamique	22
I.3.5- injection d'un gaz différent	23

## Chapitre II : Phénoménologie et modélisation de la turbulence

II.1- Description phénoménologique de la turbulence	25
II.1.1- La turbulence en mécanique des fluides	25
II.1.2- La caractéristique majeure du régime turbulent	26
II.1.2.1- Observations	26
II.1.2.2- Mesures	28
II.1.3- Traits distinctifs de l'agitation turbulente	29
II.1.3.1- Taille supramoléculaire	30
II.1.3.2- Comportement aléatoire	31
II.1.3.3- Structure tridimensionnelle	32
II.1.3.4- Intermittence	33
II.1.3.5- Dynamique non linéaire	34
II.1.3.6- Energetique dissipative	35
II.1.4- Proposition de définition	35
II.2- Modélisation de la turbulence	37
II.2.1- effet de la turbulence sur les équations de Navier-Stokes (équations de Reynolds)	37
II.2.2- Modeles de turbulence	43
II.2.3- Le modèle à zero equations	46
II.2.4- Le modèle à deux équations	48
II.2.4.1- Equation régissant l'énergie cinétique K d'écoulement moyen	50
II.2.4.2- Equation régissant l'énergie cinétique turbulente k	52
II.2.4.3- Les équations du modèle k-ε	53
II.2.4.4- Evaluation du modèle k-ε	57

IV.3- Couche limite sur la plaque (lois de paroi)	57
IV.3.1- Sous couche visqueuse	59
IV.3.2- Couche logarithmique	60
IV.3.3- Couche externe	61

### Chapitre III : Présentation de la méthode des volumes finis

III.1- Introduction	66
III.2- La méthode des volumes finis pour le problème de diffusion	66
III.2.1- Diffusion unidimensionnelle	66
III.2.2- Diffusion bidimensionnelle	70
III.3- La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion	73
III.3.1- Convection-diffusion unidimensionnelle en régime stationnaire	74
III.3.2- Le schéma « différence centrée »	76
III.3.3- Le schéma « upwind »	78
III.3.4- Le schéma « hybrid »	81
III.3.5- Le schéma « power-law »	82
III.3.6- Le schéma « quadratic upwind »(schéma « Quick »)	84

### Chapitre IV : Résolution numérique

IV.1- Introduction	88
IV.2- Algorithme de solution pour l'accouplement pression*-vitesse dans les écoulements stationnaires	88
IV.2.1- Grille décalée	91
IV.2.2- Les équations du moment	94
IV.2.3- L'algorithme SIMPLE	99
IV.3- Application de l'algorithme SIMPLE pour le modèle de turbulence k-ε-Standard	105
IV.4- Implémentation des conditions aux limites	108
IV.4.1- Condition d'admission	108
IV.4.2- Condition d'échappement	112
IV.4.3- Condition de la paroi imperméable	115
IV.4.4- Condition de symétrie	120
IV.4.5- Condition de la section poreuse	121

### Chapitre V : Résultats et analyses

Bibliographie

Annexe

## NOMENCLATURE

- $a_{nb}$  : Coefficient du voisin de P dans l'équation discrétisée ;  
 $a_{i(W,E,P)}$  : Coefficient pour les nœuds W, E et P ;  
 $A[m^2]$  : aire de la face de contrôle ;  
 $D[kg.m^{-2}.s^{-1}]$  : Conductance de diffusion ;  
E : face est ;  
 $I[kg.m^{-2}.s^{-1}]$  : flux convectif de la masse par unité de surface ;  
 $k[m^2/s^2]$  : énergie cinétique turbulente par unité de masse ;  
 $K[m^2/s^2]$  : énergie cinétique turbulente moyenne par unité de masse ;  
 $\mathbf{n}$  : vecteur normal à la surface.  
N : face nord ;  
 $p[Pa]$  : pression ;  
 $p' [Pa]$  : pression fluctuante ;  
 $Pe$  : nombre de Péclet ;  
Re : nombre de Reynolds  
 $R_{ij}[N/m^2]$  : tension de Reynolds.  
S : face sud ;  
 $S_\phi$  : terme source général ;  
 $S_M$  : terme source des forces de volume ;  
 $S_p$  : terme source lié au point P ;  
 $S_u$  : terme source partiel ;  
 $U^*$  [m/s] : vitesse de frottement.  
 $U^+$  [m/s] : vitesse réduite (variable de paroi).  
 $\mathbf{u}[m/s]$  : vecteur vitesse ;  
 $u[m/s]$  : vitesse selon  $x$  ;  
 $u'[m/s]$  : vitesse fluctuante selon  $x$  ;  
 $v[m/s]$  : vitesse selon  $y$  ;  
 $v'[m/s]$  : vitesse fluctuante selon  $y$  ;  
 $y^+$  : coordonnées réduites (variable de paroi).  
W : face ouest
- $\ell_m [m]$  : longueur de mélange.  
 $\rho [kg/m^3]$  : masse volumique  
 $\mu [Poiseuille . Pa.s]$  : viscosité dynamique  
 $\nu [m^2/s]$  : viscosité cinématique.  
 $\nu_T [m^2/s]$  : viscosité cinématique turbulente.  
 $\varepsilon [m^2/s^3]$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.  
 $\delta [m]$  : Epaisseur de la couche limite.  
 $\tau_w [N/m^2]$  : contrainte de frottement.  
 $\kappa$  : Constante de Von Karman.  
 $\phi$  : porosité de la paroi  
 $\phi$  : extensité spécifique  
 $\phi_p$  : valeur de  $\phi$  au point P ;

## Introduction générale



Le mot turbulence fait songer à agitation, désordre, chaos. L'évolution spatiale ou temporelle de nombreux phénomènes est caractérisée par l'absence apparente d'ordre, la coexistence d'échelles très différentes, l'impossibilité d'une reproduction et d'une prévision détaillées. Un tel comportement est qualifié de turbulent.

Les écoulements fluides en offrent les illustrations les plus courantes, et ce sont des hydrauliciens, en particulier J. Boussinesq et O. Reynolds, qui ont identifié vers la fin du XIXe siècle deux régimes d'écoulement, l'un régulier ou laminaire, l'autre irrégulier ou turbulent, jouissant de propriétés très différentes, notamment pour la diffusion des grandeurs attachées au fluide. La méthode statistique fut naturellement utilisée pour ce problème aux applications nombreuses et importantes, par des chercheurs comme L. Prandtl, G. I. Taylor, T. Von Karman, A. N. Kolmogorov, A. A. Townsend, S. Corrsin et R. H. Kraichnan. Nous possédons aujourd'hui une assez bonne description phénoménologique de la turbulence des fluides, une compréhension générale de sa dynamique, et des méthodes approchées de prévision de ses effets. L'approche statistique n'a cependant pas connu dans ce domaine un succès aussi complet que dans d'autres. Un écoulement turbulent combine en effet des structures tourbillonnaires dont les échelles couvrent une gamme large et continue, et qui sont toutes en forte interaction par suite de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes. L'effet des petites structures limite donc la prédictibilité des grosses, dont l'influence compromet l'universalité du comportement statistique des petites.

L. Landau avait associé le chaos turbulent à la présence d'un très grand nombre de degrés de liberté, mis en jeu après un nombre équivalent de bifurcations des solutions des équations de Navier-Stokes. D. Ruelle et F. Takens ont introduit en 1971 des conceptions radicalement nouvelles sur la nature et le mécanisme d'apparition de la turbulence, qui étendent considérablement le domaine d'application de cette notion: La turbulence est associée ici à un comportement chaotique intrinsèque des systèmes dynamiques dissipatifs, caractérisé par un *attracteur étrange* dans l'espace des phases. Objet de vérifications, riche de possibilités bien qu'encore éloignée des calculs pratiques, cette conception offre un cadre théorique unifié à l'étude du comportement chaotique de systèmes aussi différents que ceux de la chimie, de l'optique, de l'aérodynamique, de la dynamique des populations, par exemple.

L'étude de la couche limite est primordiale compte tenu des effets de la viscosité qui apparaissent proches des parois. Elle concerne notamment les moyens de son contrôle. On sait que la traînée d'un avion vient en partie des frottements de l'air provoqués par la couche limite qui se forme sur les surfaces du fuselage et de la voilure. Le long d'une surface exposée au vent relatif, cette couche tend en effet à s'épaissir jusqu'à développer de la turbulence, et donc de la traînée. Une diminution de l'épaisseur de la couche limite entraînera donc une diminution de la consommation en carburant.

Depuis les essais américains sur le jet-stream [1], les ingénieurs s'accordent pour dire que le meilleur moyen de stabiliser cette couche est le concept de laminarité hybride : l'adoption d'un profil laminaire (système passif) et l'aspiration de la couche limite par microperforation (système actif). Aujourd'hui le système passif est bien connu, le concept de laminarité hybride est encore mal maîtrisé ; pour cela AIRBUS [2] réalise en ce moment des essais sur des A-320 en utilisant une section poreuse sur 20% de la corde de dérive en bord d'attaque, à où la turbulence se crée habituellement.

Néanmoins, l'étude d'un problème incluant un écoulement externe et un milieu poreux, passe par la connaissance des paramètres de l'écoulement externe et ceux relatifs aux phénomènes de transfert dans le milieu poreux.

Le but de mon travail est d'étudier l'écoulement externe en régime turbulent et la résolution des équations de couches limites dynamique, en régime permanent, en considérant le cas d'une plaque plane perméable.

Notre travail est divisé en cinq chapitres principaux. Dans le chapitre I, je me suis intéressé au concept de la couche limite et des moyens de son contrôle. Au chapitre II, j'ai présenté la description phénoménologique de la turbulence et les méthodes de sa modélisation. Le chapitre III, traite la méthode numérique de résolution des équations de convection-diffusion (méthodes des volumes finis) en régime permanent. Dans le chapitre IV, j'ai appliqué la méthode des volumes finis à mon cas discrets. Finalement, les résultats obtenus ainsi que leurs interprétations sont données dans le chapitre V, et enfin une conclusion pour terminer notre étude.

# *Chapitre I*

*Contrôle de la couche limite en  
aérodynamique*

## **I.1- Introduction :**

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre en évidence les caractéristiques générales d'un écoulement visqueux pour introduire ensuite le concept de la couche limite. En d'autres termes, on citera les grandeurs physiques qui vont influencer d'une manière ou d'une autre, le développement de la couche limite. On citera également toutes les grandeurs qui la caractérisent afin d'expliquer tous les phénomènes qui peuvent apparaître dans un écoulement tel que : le point de séparation, la transition ou bien la turbulence.

Compte tenu du fait que la couche limite se développe dans tout écoulement autour d'un obstacle, il est intéressant de citer les différentes méthodes pour le contrôle de celle-ci, c'est-à-dire les méthodes adéquates à utiliser dans un cas bien précis d'écoulement afin de retarder ou si c'est possible d'empêcher le décollement de l'écoulement sur la paroi pour minimiser les pertes d'énergie.

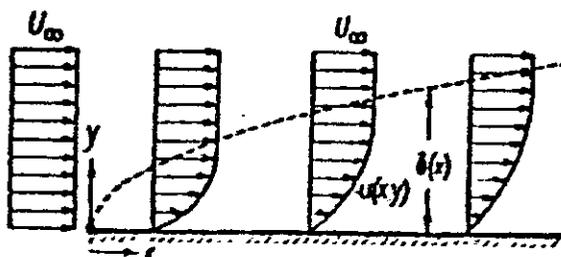
## **I.2- Concept de la couche limite :**

Dans le cas d'un mouvement de fluide où la distribution des pressions déterminée expérimentalement est en accord avec la théorie des fluides parfaits, l'influence de la viscosité pour des nombres de Reynolds élevés est plus appréciable dans une couche limite très mince, c'est-à-dire que l'influence de la viscosité n'est pas d'une grande importance à partir d'une certaine distance de la paroi. Si la condition de non-glissement n'est pas satisfaite dans un fluide réel, alors il n'y aura pas une grande différence entre le champ d'écoulement d'un fluide parfait et celui d'un fluide réel.

En réalité, à cause de la viscosité du fluide, les particules fluides vont adhérer à la paroi, celles-ci vont retarder dans leurs mouvements les particules qui sont encore au dessus, et qui, elles même, vont retarder celles qui sont encore au dessus. Jusqu'à atteindre une certaine distance de la paroi ou l'effet des frottements devient nul. La couche ainsi délimitée est appelée couche limite, le concept de la couche limite fut introduit par L. Prandtl en 1904 [3].

Dans cette couche, la vitesse du fluide est zéro au niveau de la plaque et va en augmentant jusqu'à atteindre sa valeur maximum qui correspond à la vitesse de l'écoulement sans frottement. On remarque aussi que l'épaisseur de cette couche croit le long de la plaque dans la direction de l'écoulement.

La figure (I.1) montre la distribution des vitesses dans la couche limite dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane.



**Figure I.1 : Distribution des vitesses dans la couche limite**

Donc on déduit que le gradient de vitesse est important dans la couche limite, ce qui entraîne des contraintes de cisaillement pour les fluides de faibles viscosités, mais ce phénomène devient pratiquement nul à l'extérieur de la couche limite.

Cet aspect physique suggère que l'écoulement d'un fluide avec une faible viscosité peut être divisé en deux régions pour l'analyse mathématique ; la première région est celle où les frottements sont pris en considération donc dans la couche limite mince près de la

paroi, et la deuxième est celle où les frottements peuvent être négligés et où la théorie des fluides parfaits peut être appliquée avec une bonne approximation. Une telle suggestion nous permet de simplifier considérablement les équations qui gouvernent l'écoulement.

Cependant, dans certains cas, la décélération des particules fluides dans la couche limite n'arrive pas nécessairement le long de la paroi, ce qui entraîne une augmentation considérable de l'épaisseur de la couche limite donc un renversement de l'écoulement. Les particules fluides seront alors dirigées vers l'extérieur. Ce phénomène est appelé décollement de la couche limite et il est accompagné de formation de tourbillons et de grande perte d'énergie.

### I.2.1-Estimation de l'épaisseur de la couche limite :

L'épaisseur de la couche limite qui ne subit pas de séparation, c'est-à-dire le cas laminaire, peut être estimée en négligeant les effets de viscosité à l'extérieur de la couche limite, donc les forces de frottement peuvent être négligées par rapport aux forces d'inertie.

Dans ce qui suit, on va rappeler quelques résultats [4]. Les forces d'inertie par unité de volume sont données par  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ , le gradient  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est proportionnel à  $\frac{U}{l}$  pour une plaque de longueur  $l$  ( $U$  est la vitesse de l'écoulement loin de la paroi), donc les forces d'inertie sont proportionnelles à  $\frac{\rho U^2}{l}$ .

D'autre part, les forces de frottement par unité de surface sont données par  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$  donc égale à  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  et le gradient de vitesse  $\frac{\partial u}{\partial y}$  dans une direction perpendiculaire à

la paroi est de l'ordre de  $\frac{U}{\delta}$  ( $\delta$  représente l'épaisseur de la couche limite laminaire), donc les forces de frottement par unité de surface sont proportionnelles à  $\mu \frac{U}{\delta^2}$ .

A partir de la condition d'égalité entre les forces de frottement et les forces d'inertie, on obtient :

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \approx \frac{\rho U^2}{l}$$

Donc l'épaisseur de la couche limite est tel que :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu l}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \quad (I.1)$$

Selon Blasius [4], le facteur de proportionnalité est égale à 5 approximativement (on le déterminera ultérieurement). Donc pour un écoulement laminaire, on a :

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \quad (I.2)$$

Pour une plaque plane de longueur  $l$ , l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite dynamique est donnée par :

$$\delta^* = \frac{\delta}{l} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} = \frac{5}{\sqrt{Re_l}} \quad (I.3)$$

Ou  $Re_l$  représente le nombre de Reynolds relatif à toute la plaque. L'équation (I.1) montre que  $\delta$  est proportionnelle à  $\sqrt{\nu}$  et à  $\sqrt{l}$ , donc en remplaçant  $l$  par  $x$ , on remarque que l'épaisseur de la couche limite croit effectivement le long de la plaque.

D'autre part, l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite (ou le nombre de Reynolds apparaît bien) décroît avec le nombre de Reynolds, c'est-à-dire pour un  $Re$  très grand,  $\delta^*$  tend vers zéro et on retombe dans le cas d'un fluide parfait ( $\nu$  pratiquement nul).

On peut maintenant estimer la contrainte de cisaillement  $\tau_0$  au niveau de la paroi et donc l'effort de frottement global. D'après ce qu'on a vu précédemment, on a :

$$\tau_0 \sim \mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu l}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{l}} \quad (I.4)$$

On voit bien que  $\tau_0$  est proportionnelle à  $U^{3/2}$ . On obtient alors la contrainte adimensionnelle de cisaillement par rapport à  $\rho U^2$  :

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_l}} \quad (I.5)$$

L'effort total de frottement  $D$  est égale à  $b l \tau_0$  ou  $b$  représente la largeur de la plaque, en utilisant l'équation (I.4), on aura :

$$D \sim b \sqrt{\mu \rho U^3 l}$$

De cette dernière expression, on voit que l'effet de frottement global est proportionnel à  $U^{3/2}$  et  $l^{1/2}$  signifie que si on double la longueur  $l$  de la plaque, l'effort de frottement ne va pas doubler. Ce phénomène peut être expliquer par le fait qu'il y a moins de frottement en s'éloignant de la paroi car dans ce cas l'épaisseur de la couche limite va en augmentant.

Le coefficient de frottement adimensionnel est donné par l'expression suivante :

$$C_D \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U l}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_l}} \quad (I.6)$$

D'après les résultats de Blasius, le facteur de proportionnalité est d'ordre de 1,328, donc le coefficient de frottement adimensionnel s'écrit :

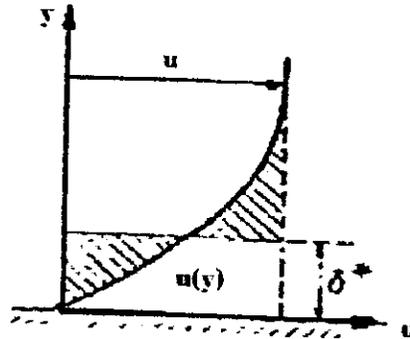
$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_l}} \quad (I.7)$$

### I.2.2- Définition d'autres épaisseurs caractérisant la couche limite :

La définition de la couche limite est d'une certaine manière arbitraire, parce que la transition de la vitesse de l'intérieur vers l'extérieur de la couche limite se fait d'une manière asymptotique [5]. Ceci est sans importance pratique car la vitesse dans la couche limite atteint

une valeur proche de celle loin de la paroi à partir d'une très petite distance de celle-ci. Cette distance sera définie pour une valeur  $\frac{u}{U} = 0.99$ .

On définit également l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  qui est utilisé parfois (Figure I.2), elle est définie par :



**Figure I.2 : Epaisseur de déplacement**

$$\delta_1 = \delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (1.8)$$

Cette épaisseur indique la distance à laquelle les lignes de courant sont divisées à causes de la formation de la couche limite.

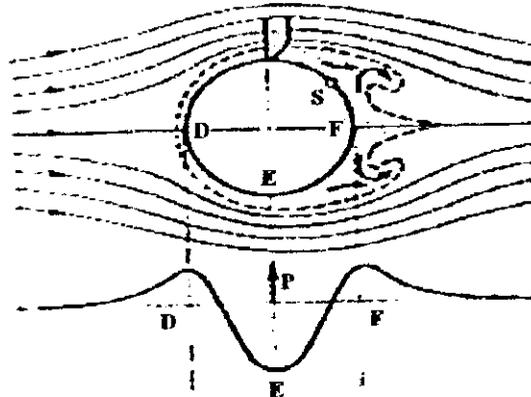
On définit aussi l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_2$  par :

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Cette épaisseur mesure la perte de quantité de mouvement due à la couche limite relativement à l'écoulement extérieur.

### I.2.3- Point de séparation :

Pour expliquer le phénomène très important de séparation de la couche limite, considérons le cas d'un écoulement autour d'un cylindre (Figure I.3)



**Figure I.3 :** *Écoulement autour d'un cylindre*

Dans ce cas d'écoulement, les particules fluides sont accélérées dans la demi-portion DE et elles sont décélérées dans la portion EF. De la même manière, il y a diminution de la pression sur la portion DE et augmentation de pression sur la portion EF. Au début du mouvement, l'écoulement se rapproche d'un écoulement sans frottement d'où le fait que la couche limite qui se limite se forme à une épaisseur très mince.

A l'extérieur de la couche limite, il y a une transformation de pression en énergie cinétique sur la portion DE et le contraire se produit sur la portion EF pour qu'une particule arrive en F avec la même vitesse qu'elle avait en D. Une particule fluide qui se trouve à l'intérieur de la couche limite sera soumise au même phénomène parce que le gradient de pression agit également à l'intérieur de la couche limite.

A cause des forces de frottement, les particules se trouvant à l'intérieur de la couche limite consomment presque toute leur énergie cinétique sur la portion DE, ce qui les empêche de surmonter l'augmentation de pression sur la portion EF. De ce fait, les particules

au contact de la paroi auront tendance à s'arrêter et influencer les couches suivantes. Ce phénomène engendre un mouvement opposé au mouvement externe et qui aura tendance à faire décoller l'écoulement de la paroi.

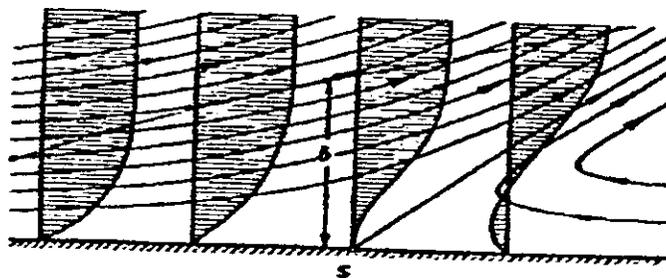
Pour le cas d'un écoulement sur une plaque plane, le même phénomène se produit. Les couches de frottement retardées qui se forment à l'intérieur de la couche limite donnent souvent naissance à la formation de tourbillons. La formation des tourbillons est intimement liée avec le gradient de pression, c'est à dire que lorsqu'on a une chute de pression dans la direction de l'écoulement, celui-ci devient accéléré. Ce qui entraîne en même temps l'accélération des particules fluides se trouvant à l'intérieur de la couche limite et l'écoulement restera laminaire.

Par contre si la chute de pression se produit dans le sens opposé de l'écoulement, celui-ci sera retardé et les particules fluides de la couche limite seront encore plus retardées.

Après entière consommation de leur énergie cinétique, les particules se trouvant à l'intérieur de la couche limite auront tendance à se retourner d'où la formation d'un écoulement en retour au voisinage immédiat de la paroi.

Ce phénomène s'amplifiera graduellement et entraînera le décollement de l'écoulement extérieur de la paroi.

La figure (I.4) montre la distribution des vitesses lors du décollement de la couche limite.



**Figure I.4 : Distribution des vitesses lors du décollement**

Le point S représente le point de séparation, c'est le point où l'écoulement extérieur se décolle de la paroi. Ce point est déterminé par la condition suivante:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

La détermination du point de séparation peut se faire avec des calculs exacts c'est à dire par intégration des équations de la couche limite.

Dans le paragraphe (I.3), on essaiera de citer et d'expliquer les méthodes utilisées pour prévenir le phénomène de décollement de la couche limite.

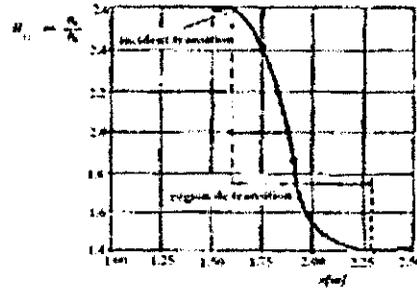
### **I.2.4- Etude de la transition :**

Pour l'étude de la transition, on se limitera au cas d'un écoulement sur une plaque plane. Le processus de transition sur une plaque plane horizontale a d'abord été étudié par J.M Burgers [6], Van Der Hegge Zijnen [7] et plus tard par M Hansen [8] et plus en détail par H.L Dryden [9]. Nous savons que l'épaisseur de la couche limite croît proportionnellement à  $\sqrt{x}$ .

Près du bord d'attaque la couche limite est toujours laminaire (sauf dans le cas d'une plaque avec une épaisseur finie, où il y a séparation au niveau du bord d'attaque si aucune précaution n'est prise pour l'éviter), pour devenir turbulente à partir d'une certaine distance.

La transition entraîne aussi un changement notable de la forme des courbes des distributions des vitesses. On peut voir ce changement sur la figure (I.3) qui a été tracée à partir de mesures effectuées par G.B Schubauer et P.S Klebanoff [10] dans un écoulement de très faible intensité de turbulence, et on remarque que la zone de transition s'étend sur une région allant de  $3 \cdot 10^6$  à  $4 \cdot 10^6$  pour le nombre de Reynolds.

Dans cette zone le profil de la couche limite passe de celui d'un écoulement laminaire entièrement développée à celui d'un écoulement turbulent entièrement développé.

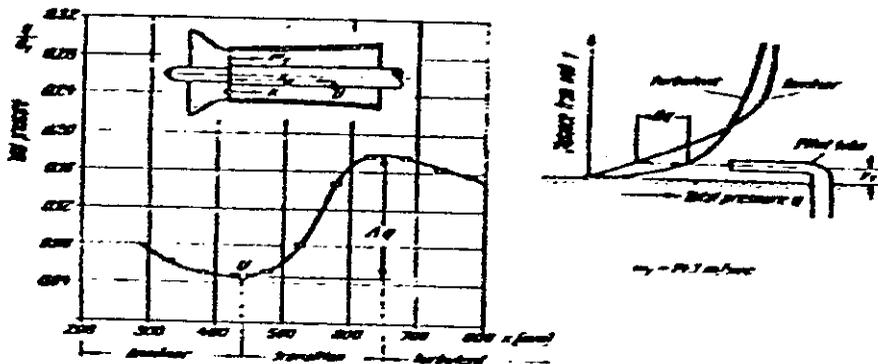


**Figure I.5 :** Variation du facteur de forme en fonction de  $x(m)$

Le processus de transition entraîne une grande diminution du facteur de forme  $H_{12} \approx \frac{\delta_1}{\delta_2}$  (figure I.5) [4] avec  $\delta_1$  : épaisseur de déplacement et  $\delta_2$  : épaisseur de la quantité de mouvement.

Dans le cas de la plaque plane, le facteur de forme décroît de  $H_{12} \approx 2,6$  en régime laminaire à  $H_{12} \approx 1,4$  en régime turbulent [4].

Le changement de profil de vitesses dans la zone de transition peut être utilisé pour la détermination du point de transition, ou plutôt la zone de transition. Ce principe peut être expliqué à l'aide de la figure (I.6) [4].



**Figure I.6 :** Principe de détermination du point de transition

Un tube de Pitot est déplacé parallèlement à la paroi à une distance qui correspond à la différence maximum entre les vitesses en régime laminaire et turbulent. Lors du mouvement du tube à travers la zone de transition, dans le sens de l'écoulement, il est enregistré une soudaine augmentation de la pression totale. La transition sur une plaque plane entraîne un changement remarquable sur la résistance à l'écoulement ; le coefficient de frottement.

Dans un écoulement laminaire, le coefficient de frottement est proportionnel à 1,5 la puissance de la vitesse [4], alors qu'en régime turbulent cette proportion croît à 1,85.

D'autres travaux effectués par H.W Emmons [11] et G.B Schubauer et P.S Klebanoff [10] ont montré que dans le cas d'une plaque plane le processus de transition est intermittent et consiste en une séquence de zones laminaires et turbulentes.

Le gradient de pression le long de la paroi exerce une grande influence sur la position du point de transition dans la couche limite. Lorsque nous avons une diminution de pression (l'écoulement est accéléré), la couche limite reste généralement laminaire. Néanmoins une faible augmentation de la pression engendrera toujours le phénomène de transition. En tenant compte de ce fait, il est toujours possible de réduire le coefficient de frottement sur des corps dits minces (ailes) en déplaçant aussi loin que possible le point de transition. Ceci peut être réalisé en faisant un choix convenable et judicieux de la forme ou du profil et de la distribution de pression correspondante.

Le coefficient de frottement de corps possédant une importante longueur initiale ou l'écoulement est laminaire peut être réduit de moitié ou plus. La position du point de transition et donc l'ordre de grandeur du coefficient de frottement peuvent être modifiés par d'autres moyens qu'on verra dans le paragraphe suivant

### **I.3- Méthodes de contrôle de la couche limite :**

Le contrôle de la couche limite consiste à prévoir et prévenir l'apparition du phénomène de séparation et la formation des tourbillons. Le problème de contrôle de la couche limite est devenu très important récemment, en particulier dans le domaine de l'aéronautique.

Dans un écoulement autour d'un obstacle quelconque, la séparation est un phénomène indésirable car il est accompagné d'une forte perte d'énergie, c'est pour cette raison que plusieurs méthodes ont été élaborées et étudiées pour prévenir la séparation.

A première vue et comme nous l'avons vu au paragraphe précédent (paragraphe 1.2.4) sur l'apparition de la turbulence, la méthode la plus simple et la plus évidente est celle qui consiste à animer la paroi d'un mouvement de même sens que le sens de l'écoulement pour réduire la différence entre la vitesse des particules fluides et la paroi, mais cette méthode a montré ses limites lors de son application pour des cas pratiques.

Plusieurs méthodes de contrôle de la couche limite ont été développées expérimentalement et aussi sur la base de considérations théoriques. Nous citerons ainsi

- Accélération de la couche limite
- Aspiration de la couche limite
- Conception de forme convenable du solide (aérodynamique)
- Injection d'un gaz différent

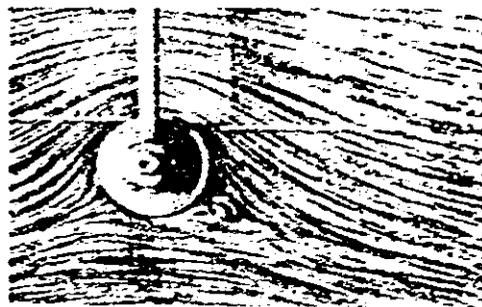
Dans ce qui suit, nous nous proposons de détailler chaque méthode et de tirer une conclusion sur le domaine d'application de chacune d'elles.

### **I.3.1- Mouvement de la paroi :**

On a vu que l'apparition de la séparation est dû en grande partie à la différence entre la vitesse du fluide et la vitesse de la paroi, donc la méthode la plus évidente pour prévenir la séparation consiste à éliminer cette différence c'est à dire à animer la paroi avec une certaine vitesse de même direction que celle de l'écoulement.

Prandtl fut le premier à mettre en évidence ce principe et il a constaté que cette méthode donnait des résultats satisfaisants lorsqu'il a mis un cylindre circulaire en rotation dans un courant fluide.

La figure (I.7) [4], montre un cylindre en rotation placé dans un courant fluide dont la direction forme un angle droit avec l'axe du cylindre.



**Figure I.7 : Écoulement autour d'un cylindre en rotation**

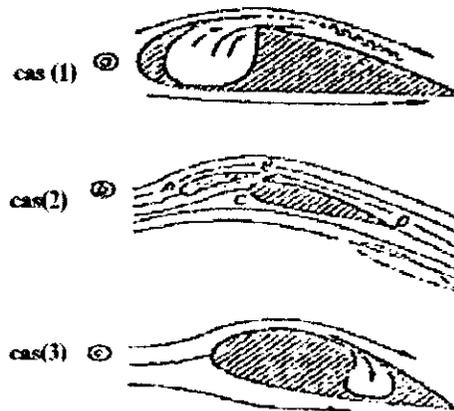
On remarque que sur le coté supérieur où le fluide et la paroi du cylindre ont la même direction, que la séparation est complètement éliminée. Par contre sur le coté inférieur ou le fluide a une direction opposé à celle de la paroi du cylindre, la séparation se développe mais d'une manière incomplète.

limites lors de son utilisation dans des domaines pratiques du fait que son application est plus ou moins compliquée pour d'autres formes que celle de la forme cylindrique.

C'est pour cette raison que cette méthode n'a pas été développée et fut remplacée par d'autres méthodes plus avantageuses.

### **L.3.2- Accélération de la couche limite :**

Une autre alternative fut établie pour prévenir la séparation et qui consiste à fournir une certaine énergie aux particules fluides qui ont tendance à être retardées dans la couche limite. Cette énergie peut être fournie à l'aide d'une pompe spéciale placée à l'intérieur de la paroi ou bien en déviant l'énergie exigée à partir de l'écoulement principal. Cette dernière solution peut être obtenue en reliant la région retardée avec une région à haute pression à l'aide d'un obstacle placé à l'amont de la paroi.



**Figure L8 : Contrôle de la couche limite par refoulement (1), déviation (2)  
et aspiration (3)**

refoulement à l'aide d'une fente (cas 1) faite sur la paroi, mais dans ce cas il est obligatoire de faire attention à la forme de la fente afin d'éviter la formation des tourbillons après la section de sortie.

Dans le cas (2), une déviation de l'écoulement principal est réalisée à l'aide d'un obstacle. Une première couche limite se forme sur la partie A-B mais elle est portée dans l'écoulement principal avant l'apparition de la séparation. A partir du point C, une autre couche limite se forme qui n'aura à surmonter qu'une partie de l'accroissement de pression et c'est ainsi qu'on atteindra le point D sans l'apparition du point de séparation.

Le cas (3) montre l'effet d'une aspiration à l'aide de trou réalisé sur la paroi, mais on étudiera ce cas dans ce qui suit avec plus de détails.

### **I.3.3- L'aspiration :**

Cette méthode consiste à aspirer du fluide de l'intérieur de la paroi à l'aide de pores placés à des endroits judicieux. Par ce moyen on empêche l'accumulation de fluide retardé et on diminue la pression dans la partie entourant la fente et c'est ainsi que le décollement est empêché. Néanmoins cette méthode ne nous permet pas d'économiser de résistance.

On peut voir l'effet de l'aspiration sur la figure (1.9) [3], où un cylindre est placé dans un écoulement et l'aspiration est appliquée sur un seul côté.

# *Chapitre II*

*Phénoménologie et modélisation de  
la turbulence*

## II.1- Description phénoménologique de la turbulence :

### II.1.1- La turbulence en mécanique des fluides :

Deux traits s'imposent d'emblée à toute étude de la «turbulence» en mécanique des fluides :

- l'évidence du phénomène ;
- la diversité de ses manifestations.

Contrairement à d'autres phénomènes de la physique macroscopique, l'observation de la turbulence en mécanique des fluides relève, en effet, d'expérience de la vie « vie courante ». De fait, c'est sous ce régime que se présente la plupart des écoulements « naturels » des fluides usuels que sont l'air et l'eau. Cette évidence du phénomène n'en paraîtra que plus paradoxale en regard des difficultés de compréhension et de modélisation qui se poseront ultérieurement.

Le second élément majeur à se signaler de prime abord est celui de l'extrême diversité des manifestations de la turbulence dans les mouvements de fluides. La nature est la première à fournir une très grande variété d'illustrations à travers, par exemple :

- les mouvements de fluides « biologiques » tels que le sang dans toute une hiérarchie de vaisseaux en « macro-circulation » ;
- les mouvements de « géofluides » : vent atmosphérique, courant fluviaux, marins. ...
- Les mouvements de fluides stellaires : circulations gazeuses autour des planètes, gaz de la photosphère du soleil, jets de plasma d'étoiles ...

Le monde industriel ou celui du laboratoire apportent eux aussi leurs contributions à cette diversité dans des secteurs tels que :

- l'hydraulique : hydrodynamique des crevasses, coques, ouvrages, machines ...
- l'aéronautique : voilures d'avions, moteurs, turbomachines ...
- L'énergétique et la thermique : combustion, fours, échangeurs ...

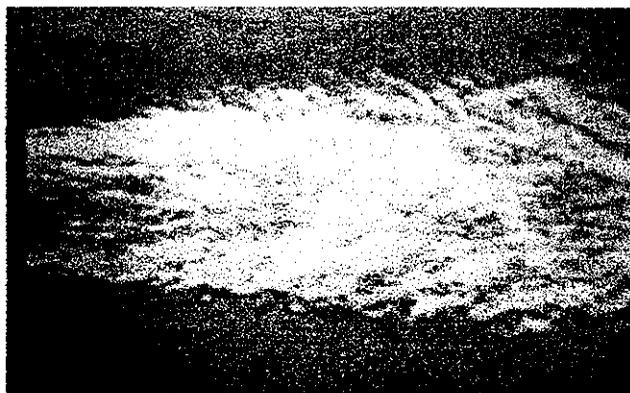
- Le génie des procédés : génie chimique, pétrolier, nucléaire ....

Ainsi, tant par la nature des fluides mis en jeu que par les conditions de mouvement, il existe une très grande variété d'écoulements turbulents. En dépit de cette diversité ils présentent tous un certain nombre de propriétés communes, ce qui justifie de considérer qu'ils constituent une même *classe* ou *régime* de mouvement spécifique. Nous allons progressivement dégager les traits distinctifs de cet ensemble.

## II.1.2- La caractéristique majeure du régime turbulent :

### II.1.2.1- Observations :

La figure ci-dessus (figure II.1) fournit une illustration typique de l'état de turbulence du mouvement d'un fluide réel.



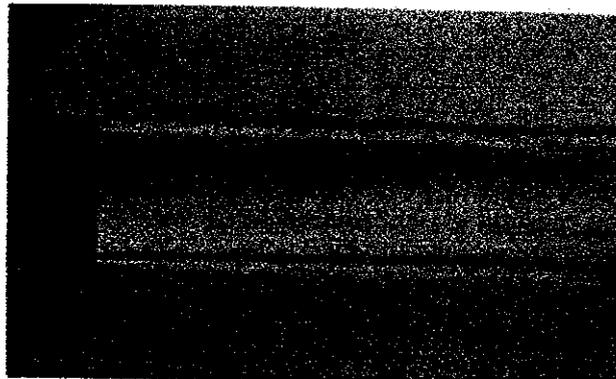
**Figure II.1 :** Visualisation par interférométrie différentielle d'un jet de gaz carbonique à nombre de Reynolds de 50 000. (Régime turbulent)

Il s'agit, en l'occurrence d'un mélange de 20% d'air et de 80% de gaz carbonique s'écoulant, sous forme de jet libre, dans l'atmosphère au repos à température et pression quasi

constante. Il suffit de préciser ici que l'écoulement est dirigé verticalement vers le bas, de sorte que l'inertie du jet se conjugue aux forces de gravité dans le sens du mouvement.

Le nombre de Reynolds rapporté au diamètre du tube et à la vitesse sur l'axe est de l'ordre de 50 000.

Cette visualisation révèle la caractéristique essentielle du régime : l'agitation *turbulente*. Elle se manifeste par des mouvements désordonnés tridimensionnels présents, à l'échelle du milieu continu, dans tout le champ de l'écoulement. Ce trait caractéristique et distinctif du régime turbulent est encore plus patent lorsque l'on compare la visualisation à celle connue du régime laminaire.



**Figure II.2 :** Visualisation par interférométrie différentielle d'un jet de gaz carbonique à nombre de Reynolds de 2000. (Régime laminaire)

En raison de l'existence au sein même de l'écoulement de nombreux mouvements secondaires d'aspect chaotique, le jet turbulent ne donne pas l'apparence d'une organisation forte à l'échelle macroscopique (supra-moléculaire). Par opposition, le régime laminaire – tel qu'on l'observe pour la même configuration d'écoulement avec un nombre de Reynolds de l'ordre de 2 000 – présente un degré de « régularité » macroscopique élevé. L'écoulement se fait en effet par « glissement » de lames fluides les unes sur les autres. Les seuls échanges entre lames, qui résultent de l'agitation moléculaire, conduisent à une diffusion du jet non

perceptible à l'échelle du continu, contrairement à ce que l'on peut observer en régime turbulent.

### II.1.2.2- Mesures :

La visualisation est un moyen de diagnostic rapide du désordre macroscopique typique de *l'agitation turbulente*. Les techniques expérimentales modernes, (anémométrie fil chaud, vélocimétrie laser,.....) permettent d'en apprécier et d'en quantifier les effets par la mesure « locale et instantanée » des fonctions du champ de l'écoulement.

A titre d'exemple, la figure II.3 présente l'enregistrement temporel, obtenu par anémométrie fil chaud, de la vitesse axiale de l'air circulant dans un tuyau lors de changements de régime laminaire / turbulent.

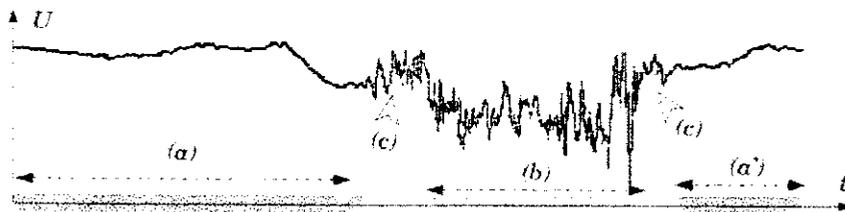
La « régularité structurelle » de l'écoulement laminaire se traduit par un signal présentant des variations de faible amplitude et très basses fréquences, comme on peut le noter sur les séquences (a) et (a') de la figure II.3.

Par comparaison, la phase turbulente (b) affiche un aspect chaotique prononcé, avec des oscillations de forte amplitude et de plus hautes fréquences.

Il apparaît en outre que le passage de l'état laminaire à celui de turbulent, et inversement, ne se fait pas « instantanément » mais nécessite une certaine période *de transition*. Dans le cas d'une transition amenant la turbulence, l'instauration de ce régime est précédée d'une séquence d'amplification d'oscillations périodiques (c).

Enfin, on note que la « valeur moyenne » du signal lors des épisodes laminaires est supérieure à celle prise au cours de séquence turbulente. Rappelons que la mesure présentée est celle de la vitesse d'un fluide au centre d'un tuyau dont le débit reste fixe. Une telle variation ne peut donc s'expliquer que par la redistribution complète du profil de vitesse

sur toute la section de la conduite lors du changement de régime. Nous verrons ultérieurement qu'il s'agit là de la conséquence d'une autre manifestation de l'agitation turbulente : la « diffusion ».



**Figure II.3 :** Mesure par anémométrie à fil chaud de l'évolution temporelle de la vitesse sur l'axe d'une conduite lors de la transition de régime (c) entre laminaire (a) et turbulent (b).

Quelle que soit la configuration d'écoulement, les enregistrements des fonctions du mouvement témoignent de l'apparition systématique, en régime turbulent, de fluctuations erratiques tant en amplitude qu'en fréquence, en tous points analogues à celles de l'exemple qui vient d'être discuté. Elles sont donc intrinsèques à ce régime et constituent, en quelque sorte la « signature électronique » locale de l'agitation turbulente.

On étend cette proposition, en considérant plus généralement que

L'agitation turbulente imprime à toute fonction (macroscopique) du champ de l'écoulement (vitesse, pression, température, masse volumique ...) des fluctuations erratiques intrinsèques à ce régime.

### II.1.3- Traits distinctifs de l'agitation turbulente :

Comme nous venons de le voir, le régime turbulent est caractérisé par la présence au sein même de l'écoulement, de mouvements secondaires responsables d'une agitation macroscopique dite « agitation turbulente ». Ainsi, la turbulence n'est pas liée à la nature

physique du fluide mais à son mode de mouvement. L'agitation présente les traits distinctifs suivants :

- Taille supra-moléculaire
- Comportement aléatoire
- Structure tridimensionnelle
- Présence intermittente
- Dynamique non linéaire
- Energétique dissipative

### II.1.3.1- Taille supra-moléculaire :

S'agissant de l'agitation turbulente d'ordre macroscopique, la taille des tourbillons qui la composent est bornée inférieurement par la viscosité ( $\nu = \mu / \rho$ ) du fluide. Cette limite inférieure correspond à l'équilibre entre forces d'inertie et viscosité des plus petits mouvements d'agitation présents à l'échelle du continu. En d'autres termes, désignant par  $\eta$  et  $v$  les caractéristiques de longueur et de vitesse de tels mouvements, la limite **macroscopique** s'obtient pour :

$$\eta \times v / \nu \approx 1 \quad (\text{II.1})$$

Quant à l'agitation moléculaire de niveau microscopique, nous désignerons par  $l_m$  une échelle de longueur, et  $v_m$  une échelle de vitesse caractéristiques. La théorie cinétique des gaz fournit alors, en choisissant pour échelles précédentes le libre parcours moyen et la célérité du son, l'estimation suivante :

$$v \approx l_m \times v_m \quad (\text{II.2})$$

Comparant les deux estimations, on tire que :  $l_m / \eta \approx v / v_m$

Si la vitesse de référence  $v_m$  est de l'ordre de la célérité du son  $a$ , l'échelle de vitesse  $v$  reste elle, en situation isovolume, très inférieure à la vitesse d'ensemble  $U$  de l'écoulement. Pour les évolutions à faible nombre de Mach ( $M=U/a \ll 1$ ) considérées ici, on a donc :

$$l_m / \eta \ll M \ll 1$$

Ainsi, l'agitation turbulente s'exerce à un niveau supra-moléculaire qui rend son traitement justiciable de l'approche du *milieu continu*.

### II.1.3.2- comportement aléatoire :

Pour une première introduction « simple » de ce comportement, nous adopterons le point de vue de l'expérimentateur.

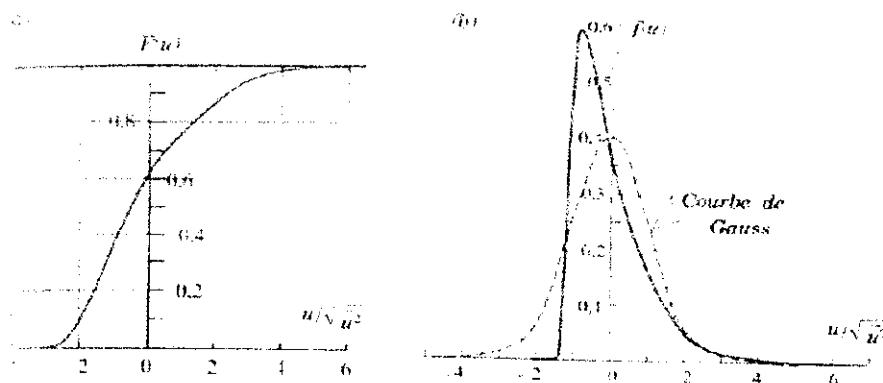
En régime laminaire, les caractéristiques de l'écoulement (vitesse, pression, température...) sont des fonctions déterministes de l'espace et du temps, au sens où la répétition d'un mouvement réel à partir de conditions initiales et aux limites identiques redonne des valeurs identiques à ces fonctions, aux seules incertitudes de mesures près.

En régime turbulent, il n'en va plus ainsi. Divers réalisations d'un « même écoulement » fournissent, pour toute grandeur prise en deux points et des instants homologues, non pas une valeur, mais un ensemble de valeurs : la mesure cesse donc d'être répétitive et son résultat devient aléatoire. On est conduit alors à adopter une approche statistique en s'intéressant aux lois de probabilité de cet ensemble de valeurs.

En illustration de cette approche, on présente, à la figure suivante (II.4), un exemple de telles lois, en termes de densité de probabilité  $f(u)$  et fonction de répartition en probabilité  $F(u)$  de fluctuations de vitesse  $u$ . par fluctuation, on entend tout écart à une valeur moyenne, notion dont il existe plusieurs définitions mais qu'il est inutile d'explicitier ici, ou il suffit de noter que l'opérateur de moyenne est désigné par une notation surlignée.

Les résultats présentés se rapportent aux fluctuations longitudinales de vitesse (dans le sens de l'écoulement) en couche limite sur plaque plane, à une distance normale à la paroi de 0,05 mm. En ce point, on observe que les propriétés statistiques de l'agitation turbulente peuvent assez sensiblement s'écarter de celles d'un état gaussien, ainsi que le met particulièrement bien en évidence la fonction densité de probabilité telle que, par définition :

$$\text{Probabilité que : } [u < \text{fluctuation de vitesse} < u + du] = f(u) \equiv dF(u)$$



**Figure II.4:** fonctions de répartition (a) et densité de probabilité (b) des fluctuations de vitesse dans une couche limite turbulente, adapté de Marcillat [12]

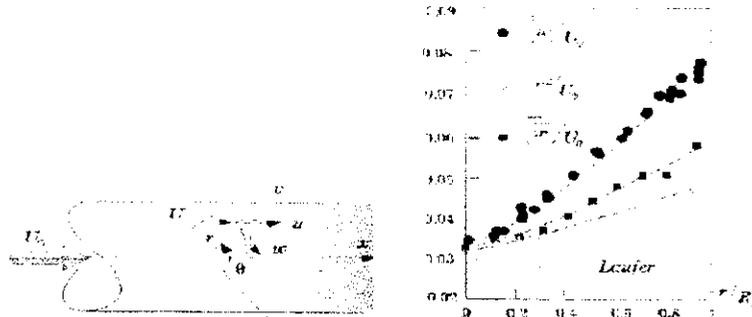
### II.1.3.3- Structure tridimensionnelle :

Nous ne traiterons dans notre projet que les écoulements turbulents dont l'agitation possède naturellement une structure tridimensionnelle.

Considérant par exemple l'écoulement établi en conduite cylindrique de section circulaire, la vitesse du mouvement d'ensemble se traduit, en coordonnées cylindriques ( $x$ ,  $r$ ,  $\theta$ ) à la seule composante  $\overline{U_x}(r)$  pour un champ moyen permanent. Mais le champ fluctuant

instantané conserve trois composantes non nulles ( $u_x, u_r, u_\theta$ ) dont les écarts types

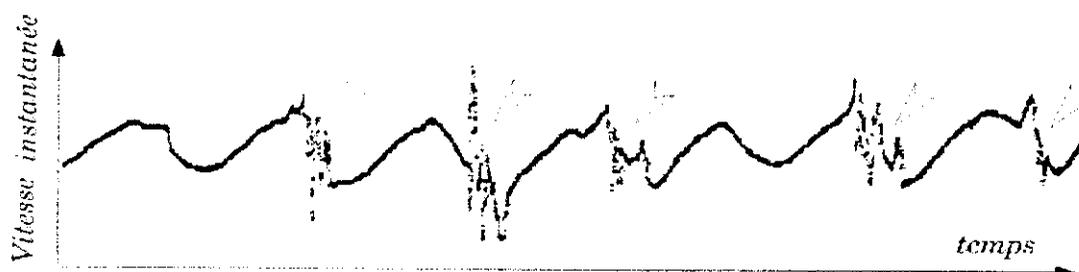
$\sqrt{u_x^2}, \sqrt{u_r^2}, \sqrt{u_\theta^2}$  Se distribuent continûment à travers la section droite (voir figure II.5).



**Figure II.5:** profils des écart types de fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent en conduite à  $Re = 54\ 000$ [12].

#### II.1.3.4- Intermittence :

L'enregistrement ci-dessous (figure II.6) présente la composante longitudinale de la vitesse à la périphérie du sillage d'un cylindre en régime de transition. Il dégage un fort caractère périodique associé au passage des tourbillons de Von Karman qui s'échappent alternativement de part et d'autres du cylindre. On note néanmoins (flèches) l'apparition de séquences turbulentes caractérisées par la présence d'oscillations d'amplitudes et de fréquences variables. Cependant, la suite des instants où surviennent de tels épisodes reste aléatoire. On dit alors qu'il y a *intermittence* de la turbulence.



**Figure II.6:** Intermittence de frontière dans le sillage d'un cylindre

Ainsi, le caractère turbulent peut ne pas être présent à tout instant ni en tout point du champ. Différents types d'intermittence peuvent être distingués :

- l'intermittence de régime, ou l'état de turbulence en un point du champ peut être ou non s'observer au cours du temps lors de la transition laminaire-turbulent (cas de l'exemple antérieur),
- l'intermittence de petite échelle, associée aux structures dissipatives,
- l'intermittence de frontière, à grande échelle, pour des écoulements turbulents non confinés, traduisant la nature aléatoire de forme et position de la frontière libre.

### II.1.3.5- Dynamique non linéaire :

Les mouvements d'agitation ne doivent pas être considérés comme se « superposant » (au sens usuel de la théorie des écoulements à potentiel) au mouvement d'ensemble.

En fait, il y a interaction entre tous les mouvements présents dans l'écoulement selon une dynamique qui, comme nous le verrons ultérieurement reste régie par les équations de Navier Stokes. L'intégralité de ces interactions sera donc soumise aux non linéarités de ce modèle. Pour le champ de vitesse, on retrouvera en particulier des effets non linéaires à travers les termes d'advection et de pression.

### II.1.3.6- Energie dissipative :

Rappelons tout d'abord qu'en évolution isovolume, et selon un résultat classique de mécanique des fluides, le montant local  $\Phi$  du taux de dissipation s'exprime simplement par :

$$\Phi = 2 \mu S_{ij} S_{ij} \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Le champ des vitesses de déformation  $S_{ij}$  intègre, en régime turbulent, les contributions de tous les mouvements présents au sein du fluide. Il en résulte un taux de dissipation propre à l'agitation turbulente qui vient s'ajouter à celui du mouvement d'ensemble.

S'agissant du taux de dissipation par fluctuations turbulentes on peut faire à son propos les mêmes observations que pour l'énergie cinétique des mouvements d'agitation : cette quantité scalaire a pour montant total la somme des contributions de toutes les classes de structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement. On peut donc également parler de « spectre de dissipation ». Cependant, compte tenu de l'ordre de grandeur de la viscosité  $\mu$  pour les fluides usuels, seuls les « tourbillons » présentant des vitesses de déformations importantes auront une contribution spectrale significative. Nous verrons qu'il s'agit des « petits tourbillons » dont le montant énergétique est par ailleurs peu élevé.

### II.1.4- Proposition de définition :

Donner une définition générale et précise de la turbulence en mécanique des fluides reste encore, en l'état actuel des connaissances une question ouverte. La proposition

suiivante ne cherche donc pas à clore définitivement le sujet, mais plus simplement à rassembler synthétiquement les éléments essentiels dégagés précédemment. Ainsi peut on retenir que :

la turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux où des mécanismes internes d'échange d'énergie assurent la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques.

## II.2- Modélisation de la turbulence :

### II.2.1- effet de la turbulence sur les équations de Navier-Stockes (équations de Reynolds)

D'abord nous définissons  $\Phi$  la moyenne d'une propriété d'écoulement  $\varphi$  comme suit:

$$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt \quad (\text{II.4})$$

Dans la théorie nous devrions prendre la limite de l'intervalle de temps  $\Delta t$  proche à l'infini, mais  $\Delta t$  est assez grand s'il excède les échelles de temps des variations les plus lentes (dus aux plus grands tourbillons) de la propriété  $\varphi$ . Cette définition de la moyenne d'une propriété d'écoulement est adéquate pour des écoulements moyens réguliers. Dans des écoulements dépendant du temps la moyenne d'une propriété par rapport au temps  $t$  est prise pour être la moyenne des valeurs instantanées de la propriété sur un grand nombre d'expériences identiques répétées: appelé 'moyenne d'ensemble'.

La propriété d'écoulement  $\varphi$  est dépendante du temps et peut être considéré comme somme du composant moyen  $\Phi$  et d'un composant fluctuant dans le temps  $\varphi'$  avec la valeur moyenne nulle; par conséquent :  $\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t)$ . Dorénavant nous ne noterons pas la dépendance de temps de  $\varphi$  et  $\varphi'$  explicitement, ainsi nous écrivons :  $\varphi = \Phi + \varphi'$ . La moyenne dans le temps de la fluctuation  $\varphi'$  est par définition nul:

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt \equiv 0 \quad (\text{II.5})$$

L'information concernant la partie fluctuante de l'écoulement peut, par exemple, être obtenue à partir de la racine carrée de la moyenne carrée (*rms : root-mean-square*) des fluctuations:

$$\varphi_{rms} = \sqrt{\overline{(\varphi')^2}} = \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\varphi')^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

Les valeurs de rms des composants de vitesse sont d'une importance particulière puisqu'elles peuvent être facilement mesurées avec une sonde de vitesse sensible aux fluctuations turbulentes (par exemple un anémomètre de fil chaud) et aux circuits électriques simples. L'énergie cinétique  $k$  (par unité de masse) liée à la turbulence est définie comme:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (\text{II.7})$$

L'intensité turbulente  $T_i$  est liée à l'énergie cinétique et à la vitesse de référence  $U_{ref}$  d'écoulement moyen comme suit:

$$T_i = \frac{\left( \frac{3}{2} k \right)^{1/2}}{|U_{ref}|} \quad (\text{II.8})$$

Avant de dériver les équations moyennes d'écoulement pour un écoulement turbulent nous récapitulons après les règles qui régissent les moyennes dans le temps des propriétés fluctuantes  $\varphi = \Phi + \varphi'$  et  $\psi = \Psi + \psi'$  et leurs combinaisons, dérivés et intégrales:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi'} &= \overline{\psi'} = 0; & \overline{\Phi} &= \Phi; & \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} &= \frac{\partial \Phi}{\partial s}; & \overline{\int \varphi ds} &= \int \Phi ds \\ \overline{\varphi + \psi} &= \Phi + \Psi; & \overline{\varphi\psi} &= \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'}; & \overline{\varphi\Psi} &= \Phi\Psi; & \overline{\varphi'\Psi} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Ces rapports peuvent être facilement vérifiés par application de (II.4) et (II.5) et en notant que le fonctionnement 'moyenne-temporelle' est lui-même une intégration et que donc l'ordre du temps faisant la moyenne et encore une autre intégration ou différentiation peut être permutée. Puisque  $div$  et  $grad$  sont les deux différentiations, les règles ci-dessus peuvent être prolongées à une quantité vectorielle de fluctuation  $a = A + a'$  et sa combinaison avec une grandeur scalaire de fluctuation  $\varphi = \Phi + \varphi'$ .

$$\begin{aligned}\overline{div(a)} &= divA ; \overline{div(\varphi a)} = \overline{div(\varphi a)} = div(\Phi A) + div(\overline{\varphi' a'}) ; \\ \overline{div(grad(\varphi))} &= div(grad\Phi)\end{aligned}\quad (II.10)$$

Pour illustrer l'influence des fluctuations turbulentes sur l'écoulement moyen nous considérons la continuité instantanée et les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible avec viscosité constante. Ainsi, nous prenons les coordonnées cartésiennes de sorte que le vecteur  $\mathbf{u}$  de vitesse ait le composant  $u$  suivant  $x$ , le composant  $v$  suivant  $y$  et le composant  $w$  suivant  $z$ :

$$div \mathbf{u} = 0 \quad (II.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(u \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu div grad u \quad (II.12.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + div(v \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu div grad v \quad (II.12.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div(w \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu div grad w \quad (II.12.c)$$

Pour étudier les effets des fluctuations, nous remplaçons dans les équations (II.11) et (II.12a-c) les variables  $\mathbf{u}$  (par conséquent aussi  $u$ ,  $v$  et  $w$ ) et  $p$  d'écoulement par la somme d'un composant moyen et d'un autre de fluctuation. Ainsi

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'; \quad u = U + u'; \quad v = V + v'; \quad w = W + w'; \quad p = P + p'$$

Alors la moyenne-temporelle est prise en appliquant les règles indiquées sur (II.10). Vu l'équation de continuité (II.11) nous notons que  $\overline{\text{div } \mathbf{u}} = \text{div } \mathbf{U}$ . Ceci rapporte l'équation de continuité pour l'écoulement moyen.

$$\text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Un processus semblable est maintenant suivi pour l'équation du moment de  $x$  (II.12.a). Les moyennes-temporelles des différents termes dans cette équation peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u}}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \overline{\text{div}(\mathbf{u} \mathbf{u})} = \text{div}(U \mathbf{U}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \overline{v \text{div grad } u} = v \text{div grad } U \end{aligned}$$

La substitution de ces résultats donne l'équation moyenne-temporelle du moment de  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U \mathbf{U}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \text{div grad } U \quad (\text{II.14.a}) \\ \text{(I)} \quad \text{(II)} \quad \text{(III)} \quad \text{(IV)} \quad \text{(V)} \end{aligned}$$

La répétition de ce processus sur les équations (II.12.b) et (II.12.c) rapporte les équations moyennes-temporelles de  $y$  et de  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(V \mathbf{U}) + \text{div}(\overline{\mathbf{v}' \mathbf{u}'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \text{div grad } V \quad (\text{II.14.b}) \\ \text{(I)} \quad \text{(II)} \quad \text{(III)} \quad \text{(IV)} \quad \text{(V)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underset{\text{(I)}}{\text{div}(W\mathbf{U})} + \underset{\text{(II)}}{\text{div}(\overline{w'u'})} = -\underset{\text{(IV)}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}} + \underset{\text{(V)}}{\nu \text{div grad } W} \quad (\text{II.14.c})$$

Il est important de noter que les termes (I), (II), (IV) et (V) dans (II.14.a-c) apparaissent également dans les équations instantanées (II.12.a-c), mais le processus de faire la moyenne-temporelle a introduit les nouveaux termes (III) dans les équations moyennes-temporelles des moments résultants. Les termes concernés par les produits des vitesses de fluctuation constituent le transfert convectif du moment dû aux fluctuations de vitesses. Il est usuel de mettre ces termes dans le membre droit des équations (II.14.a-c) pour refléter leur rôle en tant que tensions turbulentes supplémentaires sur les composants moyens  $U$ ,  $V$  et  $W$  de vitesse:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div grad } U + \left[ -\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (\text{II.15.a})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div grad } V + \left[ -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (\text{II.15.b})$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div grad } W + \left[ -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \quad (\text{II.15.c})$$

Les termes supplémentaires des tensions ont été inscrits dans une écriture normale pour clarifier leur structure. Elles résultent en six tensions supplémentaires, de trois tensions normales et de trois tensions de cisaillement:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\rho \overline{u'^2} & \tau_{yy} &= -\rho \overline{v'^2} & \tau_{zz} &= -\rho \overline{w'^2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'} & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -\rho \overline{u'w'} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Ces contraintes turbulentes supplémentaires se nomment les tensions de Reynolds. Dans des écoulements turbulents, les tensions normales  $-\rho\overline{u'^2}$ ,  $-\rho\overline{v'^2}$ ,  $-\rho\overline{w'^2}$  sont toujours différentes de zéro parce qu'ils contiennent des fluctuations carrées de vitesse. Les fluctuations indépendantes, la moyenne-temporelle de leur produit serait zéro. Cependant, les tensions de cisaillement turbulents sont également non nulles et habituellement très grandes comparées aux tensions visqueuses dans un écoulement turbulent. L'ensemble des équations (II.15.a-c) s'appelle les équations de Reynolds. Les termes de transport turbulents supplémentaires semblables surgissent quand nous dérivons une équation de transport pour une quantité scalaire arbitraire. L'équation de transport de la moyenne-temporelle pour la grandeur scalaire  $\phi$  est:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi\mathbf{U}) = \text{div}(\Gamma_{\phi}^* \text{grad}) + \left[ -\frac{\partial(\overline{u'\phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'\phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'\phi'})}{\partial z} \right] + S_{\phi} \quad (\text{II.17})$$

avec  $\Gamma_{\phi}^*$  et  $S_{\phi}$  représentent le coefficient de diffusion et le terme source respectivement.

Jusqu'ici nous avons supposé que la densité fluide est constante, mais dans des écoulements pratiques la densité moyenne peut changer et la densité instantanée montre toujours des fluctuations turbulentes. Bradshaw et autres (1981) ont montré que les petites fluctuations de densité ne semblent pas affecter l'écoulement de manière significative. Si les fluctuations de vitesse de *rms* sont de l'ordre de 5% de la vitesse moyenne elles prouvent que les fluctuations de densité sont sans importance jusqu'aux nombres de Mach autour de 3 à 5. Nous avons :

**Equation de continuité:**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{U}) = 0 \quad (\text{II.18})$$

**Equations de Reynolds:**

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \text{div}(\rho U\mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } U) + \left[ -\frac{\partial(\overline{\rho u'^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx} \quad (\text{II.19.a})$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \text{div}(\rho V \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } V) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{v'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] + S_{My} \quad (\text{II.19.b})$$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \text{div}(\rho W \mathbf{W}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } W) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{w'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{w'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right] + S_{Mz} \quad (\text{II.19.c})$$

**Equations de transport du scalaire  $\Phi$  :**

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \Phi \mathbf{V}) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad } \Phi) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u'\Phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'\Phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w'\Phi'})}{\partial z} \right] + S_{\Phi} \quad (\text{II.20})$$

Avec  $S_{\Phi}$ ,  $S_{Mx}$ ,  $S_{My}$ ,  $S_{Mz}$  représentent les termes sources dues aux forces extérieures et à la gravités

## II.2.2- modèles de turbulence :

Un modèle de turbulence est un procédé mathématique pour fermer le système des équations moyennes d'écoulement (II.18), (II.19.a-c) et (II.20) de sorte que plus ou moins, de grandes variétés de problèmes d'écoulements puissent être calculées. Pour la plupart des applications, il est inutile de résoudre les détails des fluctuations turbulentes. Seulement les effets de la turbulence sur l'écoulement moyen sont habituellement recherchés. En particulier, nous avons besoin toujours des expressions pour les tensions de Reynolds dans les équations (II.19.a-c) et les termes scalaires turbulents de transport dans l'équation (II.20). Pour qu'un modèle de turbulence soit utile dans un code de CFD d'usage universel il doit avoir une large applicabilité, précis, simple et économique pour se mettre en marche. Les modèles de turbulence les plus communs sont classifiés comme suit:

- \* Simulation des grands tourbillons
- \* Modèles classiques:

Basé sur des équations (moyenne temporelle) de Reynolds

1. modèle à zéro équations - modèle de longueur de mélange
2. modèle à deux équations - modèle de k-ε

Les modèles classiques emploient les équations de Reynolds développées dans le paragraphe précédent et forment la base des calculs de turbulence en codes actuellement disponibles de CFD. La simulation des grands tourbillons (large eddy simulations) sont les modèles de turbulence où les équations dépendant du temps de l'écoulement sont résolues pour l'écoulement moyen et les plus grands tourbillons, et où les effets des plus petits tourbillons sont modélisés. Il est clair que les plus grands tourbillons agissent fortement avec l'écoulement moyen et contiennent la majeure partie de l'énergie, ainsi cette approche résulte d'une bonne modélisation des effets de la turbulence.

La simulation des grands tourbillons (large eddy simulation) est actuellement à l'étape de la recherche et les calculs sont trop coûteux pour mériter la considération dans le calcul de tout usage.

Pour les modèles classiques, les modèles de longueur de mélange et de k-ε sont actuellement de loin les plus extensivement employés et validés. Ils sont basés sur la présomption qu'il existe une analogie entre l'action des tensions visqueuses et des tensions de Reynolds sur l'écoulement moyen. Les deux tensions apparaissent du côté droit de l'équation du moment et dans la loi de Newton de la viscosité, les tensions visqueuses sont prises pour être proportionnelle au taux de déformation des éléments fluides. Pour un fluide incompressible ceci donne :

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.21})$$

Afin de simplifier la notation, la prétendue notation de suffixe a été employée ici. La convention de cette notation est que  $i$  ou  $j = 1$  correspond à la direction  $x$ ,  $i$  ou  $j = 2$  la direction  $y$  et  $i$  ou  $j = 3$  la direction  $z$ .

Par exemple:

On observe expérimentalement que la turbulence se délabre à moins qu'il y ait de cisaillement dans un écoulement incompressible isotherme. En outre, les tensions turbulentes augmentent à mesure que le taux moyen de déformation augmente. Boussinesq en 1877 a proposé lui que des tensions de Reynolds pourraient être liées aux taux moyens de déformation. En utilisant la notation de suffixe nous obtenons:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.22})$$

Le transport turbulent de la chaleur, de la masse et d'autres propriétés scalaires est modélisé pareillement. La formule (II.22) montre que le transport turbulent du moment est assumé proportionnel aux gradients moyens de la vitesse (c.-à-d. gradients de moment par unité de masse). Par analogie le transport turbulent d'une grandeur scalaire est pris pour être proportionnel au gradient de la valeur moyenne de la quantité transportée. Dans la notation de suffixe nous obtenons :

$$-\overline{\rho u'_i \varphi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (\text{II.23})$$

Où  $\Gamma_t$ , est la diffusivité turbulente.

Puisque le transport du moment turbulent de la chaleur ou la masse est dû au même mécanisme - mélange de tourbillons - nous comptons que la valeur de la diffusivité turbulente,  $\Gamma_t$ , est près de celle de la viscosité  $\mu_t$  turbulente. Nous introduisons un nombre turbulent de Prandtl/Schmidt défini comme suit:

$$\sigma_t = \frac{\mu_t}{\Gamma_t} \quad (\text{II.24})$$

Les expériences dans beaucoup d'écoulements ont montré que ce rapport est souvent presque constant. La plupart des procédures de CFD assument ceci et emploient des valeurs d'environ 1.

### II.2.3- Le modèle à zéro équations :

Pour des raisons dimensionnelles nous supposons que la viscosité turbulente cinématique, qui a la dimension  $m^2/s$ , peut être exprimée comme produit d'une échelle de vitesse turbulente et d'une échelle de longueur. Si une échelle de vitesse et une échelle de longueur suffisent pour décrire les effets de l'analyse de turbulence, ceci rapporte :

$$\nu_t = C \mathcal{G} \ell \quad (\text{II.26})$$

Où  $C$  est une constante adimensionnelle de proportionnalité. Naturellement la viscosité turbulente dynamique est donnée par :

$$\mu_t = C \rho \mathcal{G} \ell$$

La majeure partie de l'énergie cinétique de la turbulence est contenue dans les plus grands tourbillons, et l'échelle de longueur  $\ell$  de turbulence est donc caractéristique de ces tourbillons qui agissent avec l'écoulement moyen. Si nous acceptons qu'il y ait une relation forte entre l'écoulement moyen et le comportement des plus grands tourbillons nous pouvons essayer de lier l'échelle caractéristique de vitesse des tourbillons avec les propriétés moyennes d'écoulement. Ceci s'est avéré très juste pour les écoulements turbulents bidimensionnels simples où le seul gradient moyen significatif de vitesse est  $\frac{\partial U}{\partial y}$  et la seule tension de Reynolds significatif est  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'}$ . Pour de tels écoulements, il est au moins dimensionnellement correct de déclarer cela ; si l'échelle de longueur des tourbillons est  $\ell$ ,

$$\mathcal{G} = c \ell \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{II.27})$$

Où  $c$  est une constante adimensionnelle. La valeur absolue est prise pour s'assurer que l'échelle de vitesse est toujours une quantité positive indépendamment du signe du gradient de vitesse.

En combinaison (II.26) et (II.27) et en absorbant les deux constantes  $C$  et  $c$  qui figure dans la prochaine formule dans une nouvelle échelle de longueur  $\ell_m$ , nous obtenons :

$$v_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{II.28})$$

C'est le modèle de longueur de mélange de Prandtl. En utilisant la formule (II.22) et en notant que  $\frac{\partial U}{\partial y}$  est le seul gradient de vitesse moyen significatif, la tension de Reynolds est décrite par :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\overline{\rho u'v'} = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{II.29})$$

La turbulence est une fonction de l'écoulement, et si la turbulence change, il est nécessaire de tenir compte de ceci dans le modèle de mélange de longueur en changeant  $\ell_m$ . Pour une catégorie substantielle des écoulements turbulents simples qui incluent les écoulements turbulents libres et les couches limites turbulentes, ceci peut être archivé au moyen de formules algébriques simples.

Le modèle de longueur de mélange peut être également utilisé pour prévoir le transport des quantités scalaires turbulentes. Le seul terme du transport turbulent qui importe dans les écoulements bidimensionnels pour lesquels la longueur de mélange est utile est modélisée comme suit :

$$-\overline{\rho v' \phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{II.30})$$

Où  $\Gamma_i = \mu_i / \sigma_i$  et  $\nu_i$  est trouvé depuis (II.28). Rodi (1980) recommande des valeurs pour  $\sigma_i$  de 0,9 pour les écoulements près des parois, 0,5 pour les jets et les couches de mélange et 0,7 dans des jets axisymétriques. Pour notre cas (plaque plane) la couche logarithmique (voir paragraphe II.3.2) est caractérisé par :  $\frac{y}{\delta} \leq 0.22$  avec  $\ell_m = \kappa y [1 - \exp(-y/26)]$  et la couche externe par :  $\frac{y}{\delta} \geq 0.22$  avec  $\ell_m = 0.09 \delta$  ; (y représente la distance entre la limite de la couche limite et la paroi)

La longueur de mélange est clairement très utile dans les écoulements où les propriétés de turbulence se développent proportionnellement à une échelle moyenne de longueur d'écoulement, de sorte que le  $\ell_m$  puisse être décrit comme fonction de la position par le moyen de formule algébrique simple. Ceci explique sa popularité universelle dans les calculs des écoulements autour des sections d'aile. Les modifications sophistiquées des formules pour que  $\ell_m$  décrive les effets des gradients de pression, séparation à échelle réduite et soufflement ou aspiration de la couche limite sont disponibles. Le modèle de longueur de mélange comme ceux développés par Baldwin et Lomax (1978) et Cebeci et Smith (1974) sont les modèles les plus largement répandus de turbulence dans le calcul externe d'aérodynamique dans l'industrie aérospatiale.

#### II.2.4- Le modèle à deux équations (k-ε) :

Dans les couches minces cisillées bidimensionnelles, les changements du sens d'écoulement sont toujours si lents que la turbulence peut s'ajuster sur des conditions locales. Si la convection et la diffusion des propriétés de turbulence peuvent être négligés, il est possible d'exprimer l'influence de la turbulence sur l'écoulement moyen en termes de longueur de mélange.

Si la convection et la diffusion ne sont pas négligeables (comme c'est le cas par exemple en recyclage des écoulements) une prescription algébrique pour la longueur de

mélange n'est plus faisable, Le modèle de longueur de mélange manque dans ce genre de généralité.

Le modèle k-ε mise sur les mécanismes qui affectent l'énergie cinétique turbulente. Quelques définitions préliminaires sont exigées, l'énergie cinétique instantanée par unité de masse  $k(t)$  d'un écoulement turbulent est la somme de l'énergie cinétique moyenne par unité de masse  $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$  et de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse  $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  :

$$k(t) = K + k$$

Dans les développements ci-dessous nous devons intensivement employer le taux de déformation et les tensions turbulentes. Pour faciliter les calculs suivants il est commun d'écrire les composants du taux de déformation  $e_{ij}$  et des tensions  $\tau_{ij}$  dans des tenseurs (matrices) sous la forme suivante :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

La décomposition du taux de déformation de l'élément fluide dans un écoulement turbulent d'un composant moyen et d'un autre fluctuant,  $e_{ij}(t) = E_{ij} + e'_{ij}$ , donne les éléments matriciels suivants :

$$e_{xx}(t) = E_{xx} + e'_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} ;$$

$$e_{yy}(t) = E_{yy} + e'_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} ;$$

$$e_{zz}(t) = E_{zz} + e'_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} ;$$

$$e_{xy}(t) = E_{xy} + e'_{xy} = e_{yx}(t) = E_{yx} + e'_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right]$$

$$e_{xz}(t) = E_{xz} + e'_{xz} = e_{zx}(t) = E_{zx} + e'_{zx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right]$$

$$e_{yz}(t) = E_{yz} + e'_{yz} = e_{zy}(t) = E_{zy} + e'_{zy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right]$$

Le produit d'un vecteur  $a$  et d'un tenseur  $b_{ij}$  est un vecteur  $c$  dont les composants peuvent être calculés par l'application des règles ordinaires de l'algèbre matriciel:

$$ab_{ij} \equiv a_i b_{ij} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{21} & a_3 b_{31} \\ a_1 b_{12} & a_2 b_{22} & a_3 b_{32} \\ a_1 b_{13} & a_2 b_{23} & a_3 b_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}^T = c_j = c$$

Le produit scalaire de deux tenseurs  $a$  et  $b$  est évalué comme suit :

$$a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} + a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}$$

Nous avons employé la convention de la notation de suffixe où la direction de  $x$  est dénotée par l'indice inférieur 1, la direction de  $y$  par 2 et la direction de  $z$  par 3. Il peut être remarquer que les produits sont constitués en prenant l'excédent de la somme des valeurs possibles de chaque suffixe répété.

#### II.2.4.1- Equation régissant l'énergie cinétique $K$ d'écoulement moyen :

Une équation pour l'énergie cinétique moyenne  $K$  peut être obtenue en multipliant l'équation de Reynolds (III.15.a) du composant  $x$  par  $U$ , l'équation du composant  $y$  par  $V$  et l'équation du composant  $z$  par  $W$ .

Après avoir ajouté les résultats ensemble et une quantité algébrique considérable il peut montrer que l'équation moyenne temporelle régissant l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement est comme suit (Tennekes et Lumley, 1972):

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \text{div}(\rho K \mathbf{U}) = \text{div}(-P\mathbf{U} + 2\mu \mathbf{U} E_{ij} - \rho \mathbf{U} \overline{u'_i u'_j}) - 2\mu E_{ij} E_{ij} + \rho \overline{u'_i u'_j} E_{ij} \quad (\text{II.31})$$

(I)            (II)                            (III) (IV)                            (V)                            (VI)                            (VII)

Ou dans le langage littéraire, pour l'énergie cinétique moyenne  $K$ , nous prenons

Taux de variation de $K$	-	transport de $K$ par convection	=	transport de $K$ par pression	+	transport de $K$ par les tensions visqueuses	+	transport de $K$ par les tensions de Reynolds
				taux de - dissipation de $K$		production + de la turbulence		

Tous les termes de transport (III), (IV) et (V) sont caractérisés par l'aspect de la divergence et il est dans les habitudes courantes de les mettre ensemble à l'intérieur d'une paire de parenthèses. Les effets des tensions visqueuses sur  $K$  ont été coupés en deux partis: notez (IV), est le transport de  $K$  dû aux tensions visqueuses, et le terme (VI), est la dissipation visqueuse d'énergie cinétique moyenne  $K$ .

Les deux termes qui contiennent les tensions de Reynolds  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  expliquent les effets de la turbulence: le terme (V) est le transport turbulent de  $K$  au moyen des tensions de Reynolds et (VII) est le terme de production de turbulence où la diminution nette de  $K$  due au travail de déformation par la production des tensions de Reynolds. Dans les écoulements où le nombre de Reynolds est élevé, les termes turbulents (V) et (VII) sont toujours beaucoup plus grands que leurs contreparties visqueuses (IV) et (VI).

**II.2.4.2- Equation régissant l'énergie cinétique turbulente  $k$  :**

La multiplication de chacune des équations de Navier stockes instantanées par les composants de fluctuation appropriés de vitesse (c.-à-d. équation du composant  $x$  multipliée par  $u'$  etc.) et l'addition de tous les résultats, suivis de répétition de ce processus sur les équations de Reynolds, la soustraction des deux équations donnant droit et la remise en ordre très substantielle rapporte l'équation pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  (Tennekes et Lumley, 1972):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}k) = \text{div}(-\overline{p' \mathbf{u}'} + 2\overline{\mu \mathbf{u}' e'_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u'_i \cdot u'_i u'_j}) - 2\overline{\mu e'_{ij} \cdot e'_{ij}} - \rho \overline{u'_i u'_j \cdot E_{ij}} \quad (\text{II.32})$$

(I)      (II)      (III)    (IV)      (V)      (VI)      (VII)

Dans d'autre terme, nous avons pour l'énergie cinétique  $k$  :

Taux de variation de $k$	+	transport de $k$ par convection	=	transport de $k$ par pression	+	transport de $k$ par les tensions visqueuses	+	transport de $k$ par les tensions de Reynolds
				taux de - dissipation de $k$	+	production de la turbulence		

Les équations (II.31) et (II.32) sont très semblables à bien des égards, cependant, l'aspect des quantités amorcées du côté droit de l'équation  $k$  prouve que des changements à l'énergie cinétique turbulente sont principalement régis par des interactions turbulentes. Les termes (VII) dans les deux équations sont égales dans la grandeur, mais opposées dans le signe. Dans deux couches minces cisillées nous avons trouvé que la seule tension de

Reynolds significative  $-\overline{\rho u'v'}$  était habituellement positive si le terme principal de  $E_{ij}$  dans un tel écoulement, le gradient moyen de vitesse  $\partial U / \partial y$ , est positif. Par conséquent le terme (VII) donne une contribution positive dans l'équation  $k$  et représente le terme de production. Dans l'équation de  $K$ , cependant, le terme est négatif, tellement il détruit l'énergie cinétique de l'écoulement moyen. Ceci exprime mathématiquement la conversion de l'énergie cinétique moyenne dans l'énergie cinétique turbulente.

Le terme de viscosité de dissipation (V) :

$$-2\mu\overline{e'_{ij}e'_{ij}} = -2\mu\left(\overline{e'_{11}{}^2} + \overline{e'_{22}{}^2} + \overline{e'_{33}{}^2} + \overline{e'_{12}{}^2} + \overline{e'_{13}{}^2} + \overline{e'_{23}{}^2}\right)$$

Donne une contribution négative à (II.32) en raison de l'aspect des sommes carrées des taux de déformation fluctuantes  $e'_{ij}$ . La dissipation de l'énergie cinétique turbulente est provoquée par le travail effectué par les plus petits tourbillons contre les tensions visqueuses. Le taux de dissipation par unité de masse, dont les dimensions sont  $m^2/s^3$ , est d'importance capitale dans l'étude de la dynamique de turbulence et il est dénoté ci près

$$\varepsilon = 2\nu\overline{e'_{ij}e'_{ij}} \quad (\text{II.33})$$

C'est toujours le terme principal de destruction dans l'équation d'énergie cinétique turbulente, d'un ordre de grandeur semblable à celui du terme de production et jamais négligeable. En revanche, quand le nombre de Reynolds est élevé, le terme visqueux de transport (IV) dans (II.32) est toujours très petit comparé au terme turbulent de transport (VI).

#### II.2.4.3- Les équations du modèle k-ε :

Il est possible de développer d'autres équations de transport pour toutes autres quantités de turbulence comprenant le taux de dissipation visqueuse  $\varepsilon$  (voire Bradshaw et al, 1981). L'équation de  $\varepsilon$  exacte, contient beaucoup de termes inconnus et immensurables. Le

modèle standard de k- $\varepsilon$  (Launder et Spalding, 1974) a deux équations, une pour k et une pour  $\varepsilon$  basé sur notre meilleure compréhension des processus appropriés causant des changements à ces variables.

Nous employons k et  $\varepsilon$  pour définir une échelle de vitesse  $\mathcal{G}$ , et une échelle de longueur  $\ell$  représentative de la turbulence à grande échelle, comme suit :

$$\mathcal{G} = k^{\frac{1}{2}} \quad \text{Et} \quad \ell = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$$

On pourrait remettre en cause la validité d'employer la variable  $\varepsilon$  'petits tourbillons' pour définir l'échelle de longueur 'grands tourbillons'. Nous sommes autorisés de faire ceci parce qu'aux nombres élevés de Reynolds le taux auquel les grands tourbillons extraient l'énergie de l'écoulement moyen est précisément lié au taux de transfert d'énergie à travers le spectre d'énergies jusqu'à des tourbillons « dissipation » plus petits. Si ce n'était pas le cas, l'énergie à certaines échelles de turbulence pourrait se développer ou diminuer sans limite. Ceci ne se produit pas dans la pratique et ne justifie pas l'utilisation de  $\varepsilon$  dans la définition de  $\ell$ .

Appliquant la même approche que dans le modèle de longueur de mélange, nous indiquant la viscosité de tourbillons comme suit :

$$\mu_t = C_\mu \rho \mathcal{G} \ell = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.34})$$

Où  $C_\mu$  est une constante adimensionnelle.

Le modèle standard emploie les équations suivantes utilisées pour k et  $\varepsilon$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad}(k) \right] + 2\mu E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (\text{II.35})$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad}(\varepsilon) \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.36})$$

En d'autres termes les équations peuvent s'écrire :

Taux de variation de $k$ ou de $\varepsilon$	+ Transport de $k$ ou de $\varepsilon$ par convection	=	Transport de $k$ ou de $\varepsilon$ par diffusion	+ Taux de production de $k$ ou de $\varepsilon$	- Taux de destruction de $k$ ou de $\varepsilon$
--	---	---	--	---	--

Les équations contiennent cinq constantes  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$  et  $C_{2\varepsilon}$ . Le modèle standard k- $\varepsilon$  emploie des valeurs pour les constantes après compréhension et ajustage de précision des données pour un éventail d'écoulement turbulent :

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_k = 1.00; \quad \sigma_\varepsilon = 1.30; \quad C_{1\varepsilon} = 1.44; \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

(II.37)

Le terme de production dans l'équation de  $k$  est dérivé du terme exact de production dans (II.32) par substitution de (II.22). Une forme modélisée des principaux procédés de transport dans les équations de  $k$  et de  $\varepsilon$  apparaît du côté droit. Les termes de transport turbulent sont représentés en utilisant le gradient de diffusion (voir II.23). Les nombres de Prandtl  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  relient les diffusivités de  $k$  et de  $\varepsilon$  à la viscosité tourbillonnaire  $\mu_t$ . Le terme de pression (III) de l'équation exacte de  $k$  ne peut pas être mesurée directement. Son effet est pris en compte dans l'équation (II.35) dans le terme du gradient de diffusion.

La production et la destruction de l'énergie cinétique turbulente sont toujours étroitement liées. Le taux de dissipation  $\varepsilon$  est grand là où la production de  $k$  est grande. L'équation de  $\varepsilon$  (II.36) suppose que les termes de production et de destruction sont proportionnels aux termes de production et de destruction de l'équation de  $k$  (II.35). L'adoption d'une telle forme s'assure que  $\varepsilon$  augmente rapidement si  $k$  augmente rapidement et qu'il diminue suffisamment vite pour éviter des valeurs négatives (non physiques) d'énergie cinétique turbulente si  $k$  diminue.

Le facteur  $\varepsilon/k$  dans les termes de production et de destruction rend ces termes dimensionnellement corrects dans l'équation de  $\varepsilon$ .

Pour calculer les tensions de Reynolds avec le modèle  $k-\varepsilon$  (II.34-II.36), une relation améliorée de Boussinesq est employée :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (\text{II.38})$$

La comparaison avec l'équation (II.22) prouve que cette forme a un terme supplémentaire du côté droit, ce qui concerne  $\delta_{ij}$ , le nombre de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $j = i$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $j \neq i$ ). Le terme sert à rendre la formule applicable aux tensions de Reynolds normales pour lesquels  $i=j$  et par conséquent pour  $\tau_{xx} = -\overline{\rho u'^2}$ ,  $\tau_{yy} = -\overline{\rho v'^2}$  et  $\tau_{zz} = -\overline{\rho w'^2}$ .

Nous considérons un écoulement incompressible et explorons le comportement de la première partie de (II.38) par elle-même. Si nous additionnons ceci à toutes les tensions normales (c-à-d laissez  $i = 1, 2$  et  $3$  tout en conservant  $i=j$ ) nous trouvons, en utilisant la continuité, qu'elle est égale à zéro, du fait que

$$2\mu_t E_{ij} = 2\mu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] = 2\mu_t \text{div} \mathbf{U} = 0 \quad (\text{II.39})$$

Clairement dans n'importe quel écoulement la somme des tensions normales  $-\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  est égale au moins deux fois l'énergie cinétique de turbulence par unité de volume ( $-2\rho k$ ).

#### II.2.4.4- Evaluation du modèle k- $\epsilon$ :

##### - Avantages :

- c'est un modèle de turbulence simple d'emploi pour lequel, seulement, les valeurs initiales et/ou de limites doivent être fournies.

- il a d'excellente performance dans le domaine industriel.

- bien établie, il a fait preuve d'une multitude de vérification.

##### - Désavantages :

- son implémentation est beaucoup plus coûteuse que le modèle de longueur de mélange (deux extra équations PDE).

- il a de faible performance dans plusieurs cas importa

- quelque écoulements confinés.

- écoulement rotationnel.

#### II.3- Couche limite sur la plaque (lois de paroi) :

En raison de la présence d'un contact solide-fluide le comportement de l'écoulement et la structure de la turbulence sont considérablement différents des écoulements turbulents libres. L'analyse dimensionnelle a considérablement aidé à corréler les données expérimentales. Dans les écoulements turbulents cisailés minces de couche limite, le nombre de Reynolds basé sur une échelle  $L$  dans le sens d'écoulement  $Re_L$ , est toujours très grand (par exemple  $U = 1 \text{ m/s}$ ,  $L = 0,1 \text{ m}$  et  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  donne  $Re_L = 10^5$ ). Ceci implique que les forces d'inertie sont primordialement plus grandes que les forces visqueuses à cette échelle.

Si nous formons un nombre de Reynolds basé sur une distance  $y$  loin de la paroi ( $Re_y = U y / \nu$ ) nous voyons que si la valeur de  $y$  est de l'ordre de  $l$ , l'argument ci-dessus se tient. Les forces d'inertie dominant dans l'écoulement loin de la paroi. Comme  $y$  diminue à zéro, cependant, un nombre de Reynolds basé sur  $y$  diminuera également à zero, mais juste avant

que  $y$  atteigne zéro il y aura une gamme de valeurs de  $y$  pour lesquels  $Re_y$  est d'ordre 1. À cette distance de la paroi et plus au moins proche, les forces visqueuses seront égales dans l'ordre de grandeur aux forces d'inertie ou plus grandes.

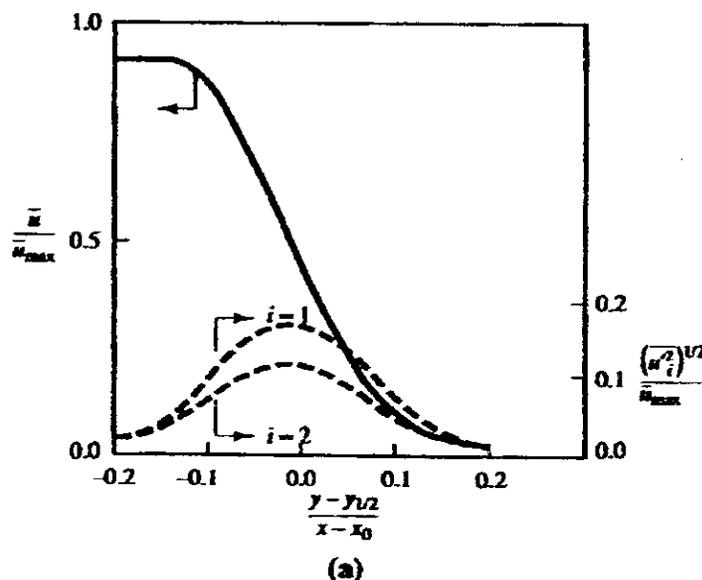
Résumons, dans les écoulements le long des contacts solides-fluides, il y a habituellement une région substantielle d'écoulement où l'inertie est prépondérante loin de la paroi et une couche mince dans lesquelles les effets visqueux sont prépondérants.

Près de la paroi, l'écoulement est influencé par les effets visqueux et ne dépend pas des paramètres libres de jet. La vitesse moyenne d'écoulement dépend seulement de la distance  $y$  de la paroi, de la densité du fluide  $\rho$ , de la viscosité  $\mu$  et de la contrainte de cisaillement de la paroi  $\tau_w$ . Ainsi

$$U = f(y, \rho, \mu, \tau_w)$$

L'analyse dimensionnelle montre que

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = f\left(\frac{\rho u_\tau y}{\mu}\right) = f(y^+) \quad (\text{II.40})$$



**Figure II.7 :** Distributions des vitesses moyennes et les propriétés de turbulence d'une couche de mélange bidimensionnelle

La formule (II.40) s'appelle **loi de paroi** et contient la définition de deux importants groupes adimensionnels que sont  $u^+$  et  $y^+$ . Notons que l'échelle appropriée de la vitesse est

$u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ , appelé vitesse de frottement.

Loin de la paroi nous nous attendons à ce que la vitesse à un point soit influencée par l'effet de retardement de la paroi par la valeur de l'effort de cisaillement, mais pas par la viscosité elle-même. L'échelle de longueur appropriée à cette région est la couche limite d'épaisseur  $\delta$ . Dans cette région nous avons

$$U = g(y, \delta, \rho, \tau_w) \quad (\text{II.41})$$

L'analyse dimensionnelle apporte :

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

La forme la plus utile émerge si nous voyons la contrainte de cisaillement de la paroi comme cause d'un déficit de vitesse  $U_{\max} - U$  qui diminue, plus nous rapprochons du bord de la couche limite. Ainsi

$$\frac{U_{\max} - U}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (\text{II.42})$$

Cette formule s'appelle la **loi de défaut de vitesse**.

### II.3.1- Sous-couche visqueuse : la couche fluide en contact avec une paroi lisse :

Sur la surface solide, le fluide est stationnaire. Les mouvements tourbillonnants turbulents doivent également s'arrêter très près de la paroi. En l'absence des effets turbulents la contrainte de cisaillement (de Reynolds) du fluide le plus proche de la paroi est dominée par le cisaillement visqueux. Cette couche est dans la pratique extrêmement mince ( $y^+ < 5$ ) et

nous pouvons supposer que la contrainte de cisaillement est approximativement constante et égale à la contrainte de cisaillement de la paroi dans toute la couche. Ainsi :

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cong \tau_w$$

Après intégration en ce qui concerne  $y$  et application de la condition au limite  $U = 0$  si  $y = 0$  nous obtenons un rapport linéaire entre la vitesse moyenne et la distance à la paroi :

$$U = \frac{\tau_w y}{\mu}$$

Après quelques simples réarrangements, et l'utilisation des définitions de  $y'$  et  $u'$ . Ceci mène à

$$y' = u' \tag{II.43}$$

En raison du rapport linéaire entre la vitesse et la distance à la paroi la couche fluide à côté de la paroi est souvent connue comme **sous-couche linéaire** (sous-couche visqueuse).

### II.3.2- Couche logarithmique : la région turbulente près d'une paroi lisse :

En dehors de la sous-couche visqueuse ( $30 < y^+ < 500$ ) une région existe où la viscosité et les effets turbulents sont tous les deux importants. La contrainte de cisaillement  $\tau$  change lentement avec la distance  $y$  à la paroi, et dans cette région intérieure on suppose qu'elle est constante et égale à la contrainte de cisaillement de la paroi. Encore une prétention concernant l'échelle de longueur de la turbulence (la longueur de mélange  $\ell_m = \kappa y$ , voir la section II.2.3. page 48 et Schlichting, 1979) nous permet de dériver une forme dimensionnellement correcte du rapport fonctionnel entre  $u'$  et  $y^+$ .

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B = \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa y^+) \tag{II.44}$$

Des valeurs numériques pour les constantes sont trouvées par les mesures. Nous trouvons  $\kappa = 0.4$  et  $B = 5,5$  (ou  $E = 9,8$ ) pour les parois lisses; la rugosité des parois cause une diminution de la valeur de B. les valeurs de  $\kappa$  et de  $B$  sont des constantes universelles valides pour tous les écoulements turbulents près des parois lisses au nombre de Reynolds élevé. En raison du rapport logarithmique entre  $u^+$  et  $y^+$ , la formule (II.44) s'appelle souvent la *loi logarithmique* et la couche où  $y^+$  prend des valeurs entre 30 et 500; *la couche de la loi logarithmique*.

### II.3.3- Couche externe - la région à inertie dominante loin de la paroi :

Les mesures expérimentales prouvent que la loi logarithmique est valide dans la région  $0,02 < y/\delta < 0,2$ . Pour les grandes valeurs de  $y$  la loi de défaut de vitesse (II.42) fournit la forme correcte. Dans la région de chevauchement la loi logarithmique et de défaut de vitesse deviennent égales. Tennekes et Lumley (1972) prouvent qu'un chevauchement assorti est obtenu en assumant la forme logarithmique suivante:

$$\frac{U_{\max} - U}{u_{\tau}} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A \tag{II.45}$$

Où  $A$  est une constante. Cette loi, de défaut de vitesse s'appelle souvent la *loi du sillage*.

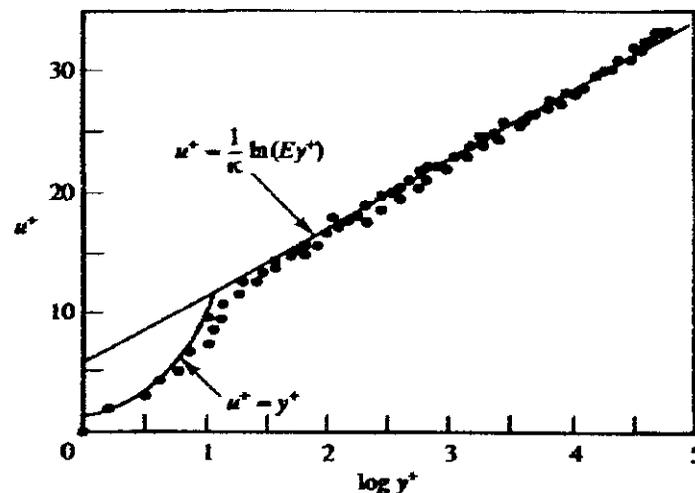
La figure (II.8) de Schlichting (1979) montre l'accord étroit entre les équations théoriques (II.43) et (II.44) dans leurs secteurs respectifs de validité et de données expérimentales.

La couche limite turbulente sur une plaque plane se compose de deux régions:

\* La région intérieure: 10 à 20 % de toute l'épaisseur de la couche limite, la contrainte de cisaillement est (presque) constante et égale à la contrainte de cisaillement de la paroi  $\tau_w$ . Dans cette région, il y a trois zones; par ordre de distance croissante de la paroi nous avons:

- la sous-couche linéaire (visqueuse): les contraintes visqueuses dominent l'écoulement à côté de la paroi.
- la couche d'amortisseur (tampon): les contraintes visqueuses et turbulentes sont de la même grandeur.
- la couche de loi logarithmique : les tensions turbulentes (de Reynolds) dominant.

\* La région externe ou loi de sillage de la couche: écoulement à inertie dominante loin de la paroi, libre des tensions visqueuses.

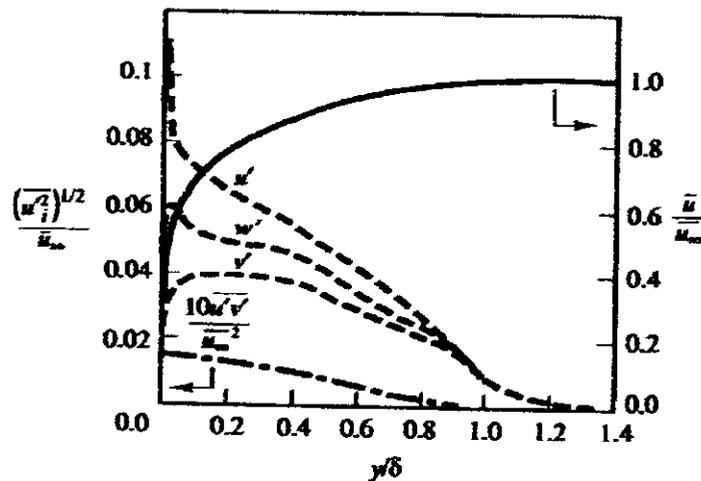


**Figure II.8 :** distribution de la vitesse près de la paroi solide

La figure IV.9 montre les données de distribution de la vitesse moyenne et la propriété de turbulence pour une couche limite sur une plaque plane en imposant une pression constante (Klebanoff, 1955).

La vitesse moyenne est maximale loin de la paroi et diminue brusquement dans la région  $\frac{y}{\delta} \leq 0.2$  due à la condition de non glissement. Les valeurs élevées de  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  et  $-\overline{u'v'}$  sont trouvés à côté de la paroi où les grands gradients moyens de vitesse s'assurent que la production de turbulence est grande. Les mouvements tourbillonnants et les fluctuations de

vitesse associées sont, cependant, également sujet à la condition de non glissement sur la paroi. Par conséquent toutes les tensions turbulentes diminuent brusquement à zéro dans cette région. La turbulence est anisotropique proche de la paroi puisque le procédé de production crée principalement le composant  $\overline{u'^2}$ . Ceci est confirmé par le fait que c'est le plus grand des fluctuations de la moyenne carrée sur la figure II.9.



**Figure II.9 :** distribution de la vitesse moyenne et les propriétés de turbulence pour une plaque plane à gradient de pression nul

Dans notre cas (couche limite sur une plaque plane) les propriétés de la turbulence tendent asymptotiquement vers zéro à mesure que  $\frac{y}{\delta}$  augmente au-dessus d'une valeur de 0,8. Les valeurs de *rms* de toutes les vitesses de fluctuation deviennent presque égales, ici indiquant que la structure de turbulence devient plus isotrope loin de la paroi.

La structure multi-couche est un dispositif universel des couches limites turbulentes près des parois solides. Monin et Yaglom (1971) ont tracé les données de Klebanoff et de Laufer dans la région proche de la paroi et ont trouvé non seulement la distribution universelle de vitesse moyenne mais également que les données pour les tensions

de Reynolds pour les plaques planes s'effondrent sur une courbe simple si elles ne sont pas dimensionner avec l'échelle de vitesse approprié  $u_\tau$ .

Entre ces couches distinctes il y a des zones intermédiaires qui s'assurent que les diverses lois de distribution de vitesse fusionnent doucement. [Schlichting (1979) et White (1991)].

# *Chapitre III*

*Présentation de la méthode des  
volumes finis*

### III.1- Introduction :

Nous avons choisi la méthode des volumes finis, pour résoudre notre problème de couche limite, à cause de sa facilité d'utilisation dans les situations les plus complexes.

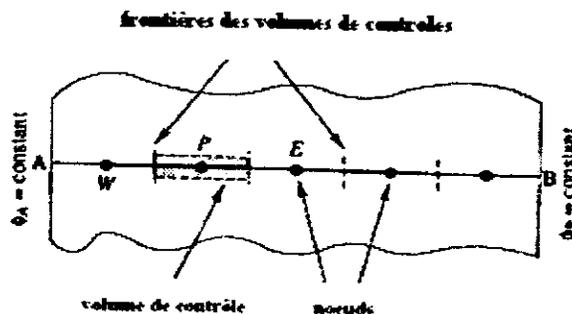
### III.2- La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion :

#### III.2.1- diffusion unidimensionnelle :

Considérons la diffusion en régime permanent de la propriété physique  $\phi$  dans le domaine unidimensionnel définie sur la figure suivante. Le processus est gouverné par :

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion et  $S$  est le terme de source. Les valeurs de  $\phi$  aux frontières A et B sont connues.



**Figure III.1**

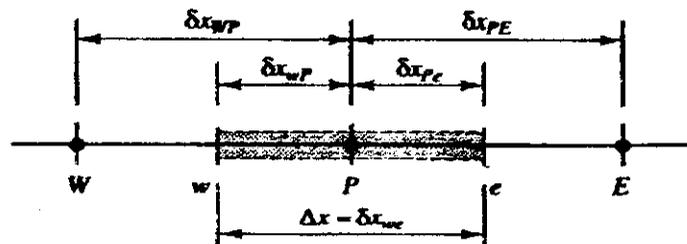
### Etape 1 : Génération du maillage.

La première étape dans la méthode des volumes finis est de diviser le domaine en volumes discrets de contrôle. Mettant un certain nombre de points nodaux dans l'espace entre A et B. Les frontières (ou les faces) des volumes de contrôle sont placées à mi-chemin entre les noeuds adjacents. Ainsi chaque noeud est entouré par un volume ou une cellule de contrôle. Il est dans les habitudes courantes d'installer des volumes de contrôle près du bord du domaine de telle manière que les frontières physiques coïncident avec les frontières de volume de contrôle.

A ce niveau, il est approprié d'établir un système de notation. La convention habituelle des méthodes de CFD est montrée sur la figure III.1.

Les points nodaux généraux sont identifiés par  $P$  et ses voisins les plus proches dans une géométrie unidimensionnelle, les noeuds à l'ouest et à l'est, sont identifiés par  $W$  et  $E$  respectivement.

La face latérale *ouest* du volume de contrôle est mentionnée par ' $w$ ' et la face latérale *est* du volume de contrôle par ' $e$ '. Les distances entre les noeuds  $W$  et  $P$ , et entre les noeuds  $P$  et  $E$ , sont identifiées par  $\delta x_{WP}$  et  $\delta x_{PE}$  respectivement. De même, les distances entre la face ' $w$ ' et le point  $P$  et entre  $P$  et la face ' $e$ ' sont dénotés par  $\delta x_{wp}$  et  $\delta x_{pe}$  respectivement. La figure III.2 montre que la largeur de volume de contrôle est  $\Delta x = \delta x_{we}$ .



**Figure III.2**

## Etape 2 : discrétisation.

L'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation (III.1) sur le volume de contrôle qui donne l'équation discrétisée pour les nœuds internes  $P$ . Pour le volume de contrôle défini précédemment ceci donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.2})$$

Ici  $A$  est l'aire de la section de passage du volume de contrôle au niveau des faces,  $\Delta V$  est le volume et  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de la source  $S$  à travers le volume de contrôle.

C'est un dispositif très attrayant de la méthode des volumes finis en sachant que l'équation (III.2) indique que le flux diffusif de  $\phi$  partant de la face *est* sans le flux diffusif de  $\phi$  entrant dans la face *ouest* est égal à la génération de  $\phi$ , c.-à-d. qu'elle constitue l'équation d'équilibre pour  $\phi$  à travers le volume de contrôle.

Afin de dériver les formes utiles des équations, les coefficients de diffusion d'interface  $\Gamma$  et le gradient  $\frac{d\phi}{dx}$  à l'est et à l'ouest sont exigés.

Après qu'ils soient bien établis, les valeurs de la propriété  $\phi$  et le coefficient de diffusion sont définis et évalués aux points nodaux. Pour calculer les gradients (et par conséquent les flux) aux faces du volume de contrôle, une distribution des propriétés approximative entre les points nodaux est employée. Les approximations linéaires semblent être la manière évidente et la plus simple de calculer des valeurs d'interface et des gradients. Cette pratique est du type différence centrée (voir l'annexe).

Dans une grille uniforme, les valeurs linéairement interpolées pour  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_w$  sont indiquées comme ceci :

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \quad (\text{III.3})$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad (\text{III.4})$$

Et les termes du flux diffusif :

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) \quad (\text{III.5})$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) \quad (\text{III.6})$$

Dans des situations pratiques, comme on le verra plus tard, le terme source  $S$  peut être une fonction de la variable dépendante  $\phi$ . Dans ces cas-ci, la méthode des volumes finis approxime le terme de source au moyen d'une loi linéaire de la forme :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p \phi_p \quad (\text{III.7})$$

En remplaçant les équations (III.5), (III.6) et (III.7) dans l'équation (III.2) on aura :

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + (S_u + S_p \phi_p) = 0 \quad (\text{III.8})$$

Après quelques réarrangements on a :

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p\right) \phi_p = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E + S_u \quad (\text{III.9})$$

En identifiant les coefficients de  $\phi_W$  et de  $\phi_E$  dans l'équation (III.9) comme  $a_w$  et  $a_e$ , et le coefficient de  $\phi_p$  comme  $a_p$ , l'équation ci-dessus peut être re-écrite :

$$\boxed{a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + S_u} \quad (\text{III.10})$$

Où

$a_w$	$a_e$	$a_p$
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_w + a_e - S_p$

Les valeurs de  $S_u$  et  $S_p$  peuvent être obtenues à partir du modèle de source (III.7) :  $\bar{S}\Delta V = S_u - S_p\phi_p$ . Les équations (III.7) et (III.10) représentent la forme discrétisée de l'équation (III.1). Ce type d'équation est central à tous les développements ultérieurs.

### Etape 3 : Solution des équations.

La discrétisation des équations sous la forme (III.10) doit être faite pour chacun des nœuds. Pour les volumes de contrôles adjacents aux limites physiques du système, une modification appropriée est nécessaire. Une fois les équations écrites on obtient un système d'équations linéaires qui doit être résolu.

#### III.2.2- diffusion bidimensionnelle :

La méthodologie utilisée en dérivant les équations discrétisées dans le cas unidimensionnel peut être facilement étendue aux problèmes bidimensionnels. Pour illustrer la technique, considérons l'équation bidimensionnelle de diffusion stationnaire donnée ci après :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (\text{III.11})$$

Une portion de la grille bidimensionnelle utilisée pour la discrétisation est montrée à la figure suivante :

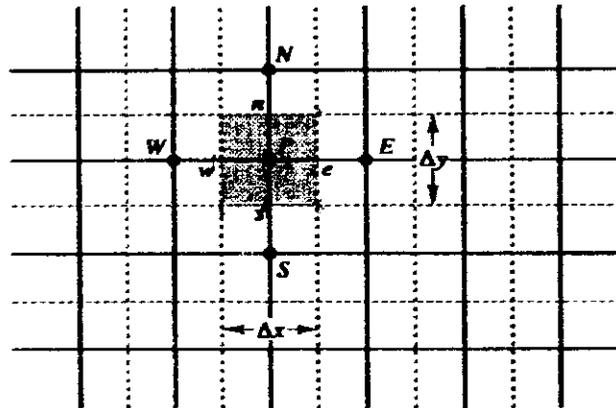


Figure III.3

En plus des nœuds voisins *est* (E) et *ouest* (W), le nœud général P a maintenant également les nœuds voisins *nord* (N) et *sud* (S). La même notation que dans l'analyse unidimensionnelle est employée pour les faces et les dimensions de cellules. Quand l'équation ci-dessus est formellement intégrée sur le volume de contrôle, nous obtenons.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_V S_p dV = 0 \quad (\text{III.12})$$

Ainsi, notons que  $A_e = A_w = \Delta y \times 1$  et  $A_n = A_s = \Delta x \times 1$ , nous obtenons :

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.13})$$

Comme avant, cette équation représente l'équilibre de génération de  $\phi$  dans le volume de contrôle et le flux à travers ses faces de cellules.

En utilisant les approximations présentés dans la section précédente nous pouvons écrire des expressions pour le flux à travers les faces du volume de contrôle.

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{ouest} = \Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{est} = \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{sud} = \Gamma_s A_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{nord} = \Gamma_n A_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} \quad (\text{III.17})$$

En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation, nous obtenons :

$$\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.18})$$

Quand le terme source est représentée dans la forme linéaire  $\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \phi_P$ , cette équation peut être réarrangée comme suit :

$$\left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \phi_S + \left( \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_N + S_u \quad (\text{III.19})$$

L'équation (III.19) est maintenant moulée dans l'équation générale des noeuds intérieurs

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u \quad (\text{III.20})$$

Où

$a_W$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_P$
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$

### III.3- La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion :

Dans les problèmes où le flux de fluide joue un rôle significatif nous devons expliquer les effets de la convection. L'équation de la convection-diffusion en régime stationnaire :

$$\text{div}(\rho \mathbf{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (\text{III.21})$$

L'intégration formelle sur le volume de contrôle donne :

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{III.22})$$

Cette équation représente le bilan de flux sur le volume de contrôle. Le membre gauche donne le flux convectif net et le membre droit contient le flux diffusif net et la génération ou la destruction de la propriété  $\phi$  dans le volume de contrôle.

Le problème principal dans la discrétisation des termes convectifs est le calcul de la valeur de la propriété transporté  $\phi$  aux faces du volume de contrôle et de son flux convectif à travers ces frontières. Dans le paragraphe précédent nous avons introduit la méthode de la différence centrée afin d'obtenir les équations discrétisés pour la diffusion et les termes sources du membre droit de l'équation (III.22). Il semblerait évident d'écarter cette pratique, qui a tellement bien fonctionné pour des problèmes de diffusion, pour les termes convectifs. Cependant, le procédé de diffusion affecte la distribution de la quantité transportée le long de ses gradients dans toutes les directions, tandis que les propagations de convection influencent seulement dans le sens d'écoulement. Cette différence cruciale se manifeste dans une limite supérieure à la taille de grille, qui dépend de la force relative de la convection et de la diffusion. pour le calcul de la convection-diffusion stable avec le schéma différence centrale.

Naturellement, nous présentons également un certain nombre de pratique de discrétisation des effets convectifs qui permettent la stabilité dans le calcul sous certaines restrictions.

Dans l'analyse courante aucune référence ne sera faite à l'évaluation des vitesses de faces. On suppose qu'elles sont connues 'de façon ou d'autre'.

### III.3.1- Convection-diffusion unidimensionnel en régime stationnaire :

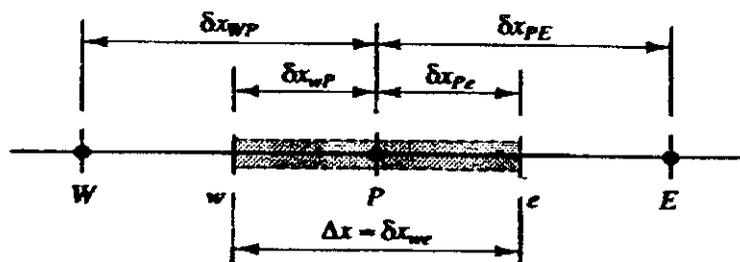
En l'absence des sources, la convection-diffusion stationnaire de la propriété  $\phi$  dans un domaine unidimensionnel donné, le champ d'écoulement  $u$  est régi par :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{III.23})$$

L'écoulement doit encore satisfaire à l'équation de continuité, alors :

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Nous considérons un volume de control unidimensionnel (figure III.4) et nous utilisons la même notation introduite dans le paragraphe précédent (III.2). Notre attention est focalisée sur le nœud général  $P$ , les nœuds voisins sont identifiés par  $W$  et  $E$  et les faces du volume de control par  $w$  et  $e$ .



**Figure III.4 :** volume de contrôle autour du nœud P.

L'intégration de l'équation de transport (III.23) sur le volume de control de la figure III.4 donne :

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (\text{III.25})$$

Et l'intégration de l'équation de continuité donne aussi :

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (\text{III.26})$$

Pour obtenir une équation discrétisée du problème de convection-diffusion nous devons approximer les termes de l'équation (III.25). Il est commode de définir deux variables F et D pour représenter le flux de masse convectif par unité de surface et la conductance de diffusion aux faces de cellules :

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III.27})$$

Les valeurs aux faces des cellules des variables F et D peuvent être écrit comme :

$$F_w = (\rho u)_w, \quad F_e = (\rho u)_e \quad (\text{III.28})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}, \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III.29})$$

Nous développons cette technique en assumant que  $A_w = A_e = A$  et en employant l'approche différence centrée pour représenter la contribution du terme diffusif du membre droit.

La convection-diffusion intégrée de l'équation (III.25) peut être réécrite maintenant comme :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.30})$$

et l'intégration de l'équation de continuité devient :

$$F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.31})$$

Nous supposons également que le champ de vitesse 'est connu d'une façon ou d'une autre', qui prend soin des valeurs de  $F_e$  et de  $F_w$ . Afin de résoudre l'équation (III.30), nous devons calculer la propriété transportée  $\phi$  à la face e et w, différents schémas seront proposés pour répondre à cette fin dans les prochaines sections.

### III.3.2- Le schéma « différence centré » :

L'approximation différence centrée a été employée pour représenter les termes de diffusion qui apparaissent dans le membre droit de l'équation (III.30) et il semble logique d'essayer une interpolation linéaire pour calculer les valeurs aux faces des cellules pour les termes convectifs dans le membre gauche de cette équation.

Pour une grille uniforme nous pouvons écrire les valeurs aux faces des cellules de la propriété  $\phi$  comme

$$\phi_e = \frac{(\phi_P - \phi_E)}{2} \quad (\text{III.32})$$

$$\phi_w = \frac{(\phi_W - \phi_P)}{2} \quad (\text{III.33})$$

La substitution de ces expressions dans les termes de convection de (III.30) rapporte :

$$\frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.34})$$

Ceci peut être réarrangé pour donner

$$\begin{aligned} \left[ \left( D_w - \frac{F_e}{2} \right) + \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_p &= \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_w + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \\ \left[ \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_p &= \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_w + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Identifiant les coefficients de  $\phi_w$  et de  $\phi_E$  comme  $a_w$  et  $a_E$ , les expressions du schéma différence centré pour l'équation de convection-diffusion sont :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E \quad (\text{III.36})$$

Où

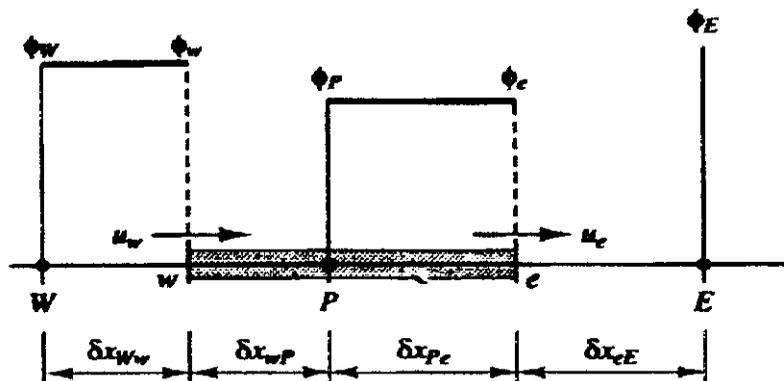
$a_w$	$a_E$	$a_p$
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_w + a_E + (F_e - F_w)$

On peut facilement remarquer que l'équation (III.36) pour les problèmes de convection-diffusion stationnaire, prend la même forme générale que l'équation (III.10) pour les problèmes de diffusion pure. La différence est que les coefficients de l'équation (III.36) contiennent des termes supplémentaire pour expliquer la convection. Pour résoudre un problème de convection- diffusion unidimensionnel nous écrivons les équations de la forme (III.36) pour tous les noeuds de grille. Ceci rapporte un ensemble d'équations algébriques qui est résolu pour obtenir la distribution de la propriété transportée  $\phi$ .

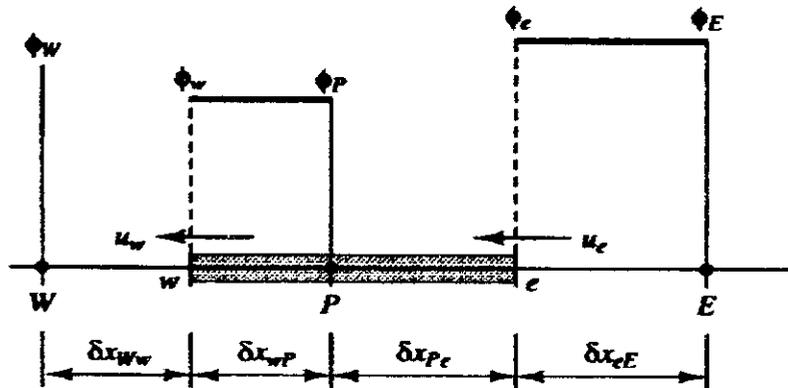
### III.3.3- Le schéma « upwind » :

Une des insuffisances principales du schéma « différence centré » est son incapacité à identifier le sens de l'écoulement. La valeur de la propriété  $\phi$  à la face *ouest* de la cellule est toujours influencée par  $\phi_p$  et  $\phi_w$  dans le schéma « différence centré ». Dans un écoulement fortement convectif de l'*ouest* à l'*est*, le traitement ci-dessus est peu convenable parce que la face *ouest* de la cellule devrait recevoir beaucoup d'influence du noeud  $W$  que du noeud  $P$ .

Le schéma upwind tient compte du sens de l'écoulement en déterminant la valeur à la face de la cellule: la valeur convectif de  $\phi$  à la face de la cellule est prise pour être égal à la valeur au noeud amont. Sur la figure III.5, nous montrons les valeurs nodales employées pour calculer les valeurs aux faces des cellules quand l'écoulement est dans la direction positive (*ouest* à l'*est*) et sur la figure III.6 ceux pour la direction négative.



**Figure III.5.**



**Figure III.6.**

Quand l'écoulement est dans la direction positive,  $u_w > 0, u_e > 0$  ( $F_w > 0, F_e > 0$ ) le schéma upwind donne :

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_P \tag{III.37}$$

et l'équation discrétisée (III.30) devient :

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \tag{III.38}$$

ce qui peut être réarrangé comme

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \tag{III.39}$$

pour donner

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \tag{III.40}$$

Quand l'écoulement est dans la direction négative,  $u_w < 0, u_e < 0$  ( $F_w < 0, F_e < 0$ ) le schéma donne :

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_E \tag{III.41}$$

Maintenant l'équation est

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_w) \tag{III.42}$$

où

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_w + (D_e - F_e) \phi_E \tag{III.43}$$

Identifiant les coefficients de  $\phi_w$  et de  $\phi_E$  comme  $a_w$  et  $a_E$ , les expressions du schéma upwind pour l'équation de convection-diffusion sont

$$a_P \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E \tag{III.44}$$

avec le coefficient central

$$a_P = a_w + a_E + (F_e - F_w) \tag{III.45}$$

et les coefficients voisins :

	$a_w$	$a_E$
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	$D_e$
$F_w < 0, F_e < 0$	$D_w$	$D_e - F_e$

Une forme de notation plus appropriée pour les coefficients voisins du schéma upwind qui couvre les deux sens d'écoulement est donnée ci-dessous

$a_w$	$a_E$
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

### III.3.4- Le schéma « hybrid » :

Le schéma hybrid de Spalding (1972) est basé sur une combinaison des deux derniers schémas « différence centré » et « upwind ». Le schéma « différence centré », qui est précis au second ordre, est utilisé pour les petits nombres de Peclet ( $Pe < 2$ ) (III.46) et le schéma « upwind », qui est précis au premier ordre mais qui ne tient pas compte du transportivisme (voir Annexe A), est utilisé pour les grands nombres de Peclet ( $Pe > 2$ ). Comme avant, nous allons développer la discrétisation de l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle sans termes de source. Cette équation peut être interprétée comme équation d'équilibre des flux. Le schéma « hybrid » emploie par morceaux des formules basées sur le nombre local de Peclet pour évaluer le flux net par chaque face du volume de contrôle. Le nombre de Peclet est évalué à la face du volume de contrôle. Par exemple, pour une face *ouest*

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{wp}} \quad (\text{III.46})$$

La formule du schéma « hybrid » pour le flux net par unité de surface à travers la face *ouest* est comme suit :

$$\begin{aligned} q_w &= F_w \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_p \right] && \text{pour } -2 < Pe_w < 2 \\ q_w &= F_w A_w \phi_w && \text{pour } Pe_w \geq 2 \\ q_w &= F_w A_w \phi_p && \text{pour } Pe_w \leq -2 \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

On peut facilement voir que pour les faibles nombres de Peclet, c'est équivalent d'utiliser le schéma « différence centré » pour les termes de convection et de diffusion, mais

quand  $|Pe| > 2$  il est équivalent au schéma « upwind » pour la convection et régler la diffusion à zéro. La forme générale de l'équation est :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \quad (\text{III.48})$$

Le coefficient central est donné ci-après

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

Après certains re-arrangements, il est facile d'établir que les coefficients voisins pour le schéma « hybrid » pour la convection-diffusion unidimensionnelle stationnaire peuvent être écrits comme suit:

$a_w$	$a_e$
$\max \left[ F_w, \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

### III.3.5- Le schéma « power-law » :

Le schéma « power-law » de Patankar (1980) est une approximation plus précise de la solution exacte unidimensionnelle et produit de meilleurs résultats que le schéma « hybrid ». Dans ce schéma la diffusion est placée égale à zéro quand le nombre de  $Pe$  des cellules excède 10. Si  $0 < Pe < 10$ , le flux est évalué en employant une expression polynomiale, par exemple, le flux net par unité de surface à la face *ouest* du volume de contrôle est évalué en utilisant :

$$q_w = F_w [\phi_w - \beta_w (\phi_p - \phi_w)] \quad \text{pour } 0 < Pe < 10 \quad (\text{III.49})$$

là où  $\beta_w = (1 - 0.1Pe_w)^5 / Pe_w$

et  $q_w = F_w \phi_w \quad \text{pour } Pe > 10 \quad (\text{III.50})$

Les coefficients de l'équation discrétisée unidimensionnelle employant le schéma « power-law » pour la convection-diffusion stationnaire sont donnés par :

Coefficient central:

$$a_p = a_w + a_E + (F'_e - F'_w)$$

et

$a_w$	$a_E$
$D_w \max \left[ 0, (1 - 0.1  Pe_w )^5 \right] + \max [F'_w, 0]$	$D_e \max \left[ 0, (1 - 0.1  Pe_e )^5 \right] + \max [-F'_E, 0]$

Les propriétés du schéma « power-law » sont semblables à ceux du schéma « hybrid ». Le schéma « power-law » est plus précis pour les problèmes unidimensionnels puisqu'il essaye de représenter la solution exacte plus étroitement. Ce schéma s'est avéré utile dans les calculs pratiques d'écoulement et peut être employé comme alternative pour couvrir de toutes les manières le schéma « hybrid ». Quelques codes commerciaux de CFD, par exemple la version FLUENT 4.22, emploie ce schéma comme le schéma par défaut pour les calculs d'écoulement (FLUENT Users' Manual, 1992).

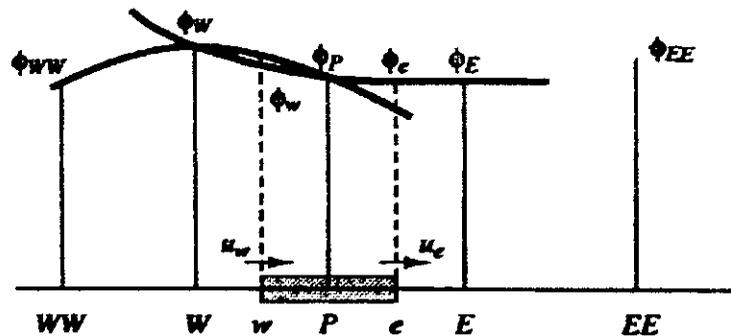
### III.3.6- Schéma d'ordre supérieur pour les problèmes de convection-diffusion :

L'exactitude des schémas « hybrid » et « upwind » est seulement de premier ordre en termes d'erreur de troncature des séries de Taylor (Taylor Series Truncation Error : TSTE). L'utilisation des quantités du schéma « upwind » s'assure que les schémas sont très stables et obéissent à la condition de transportivité mais l'exactitude de premier ordre les rend enclins aux erreurs numériques de diffusion. De telles erreurs peuvent être minimisées en utilisant la discrétisation d'ordre supérieur. Les schémas d'ordre supérieur concernent des points éloignés

et réduisent les erreurs de la discrétisation en apportant une influence plus large. Le schéma « différence centré » qui a l'exactitude du second ordre s'est avéré instable et ne possède pas la propriété de transportivisme.

### III.3.6.1- Le schéma « quadratic upwind » (le schéma « Quick »):

Le schéma « Quick » de Leonard (1979) emploie une interpolation quadratique en trois points pour les valeurs aux faces des cellules. La valeur à la face du volume de contrôle de  $\phi$  est obtenue à partir d'une fonction quadratique encadrée par deux nœuds (de chaque côté de la face) et du nœud sur l'ascendant.



**Figure III.7.**

Par exemple, quand  $u_w > 0$  et  $u_e > 0$  un ajustement quadratique par  $WW$ ,  $W$  et  $P$  est utilisé pour évaluer  $\phi_w$ , et une autre équation quadratique ajustée par  $W$ ,  $P$  et  $E$  pour calculer  $\phi_e$ .

Pour  $u_w < 0$  et  $u_e < 0$  les valeurs de  $\phi$  sur  $W$ ,  $P$  et  $E$  sont utilisées pour  $\phi_w$  et les valeurs sur  $P$ ,  $E$  et  $EE$  pour  $\phi_e$ . On peut montrer que pour une grille uniforme, la valeur de  $\phi$  à

la face de la cellule entre deux noeuds encadrants  $i$  et  $i-1$ , et le noeud ascendant  $i-2$  est donné par formule suivante :

$$\phi_{face} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} \quad (III.51)$$

Quand  $u_w > 0$ , les noeuds encadrants pour la face *ouest* « w » sont W et P, le noeud ascendant, est WW (figure III.7), et

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \quad (III.52)$$

Quand  $u_e > 0$ , les noeuds encadrants pour la face *est* ' e ' sont P et E, le noeud ascendant est W, ainsi

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (III.51)$$

Les termes de diffusion peuvent être évalués en utilisant le gradient de la parabole appropriée. Il est intéressant de noter, que sur une grille uniforme cette pratique donne la même expression comme le schéma « différence centré » pour la diffusion. Si  $F_w > 0$  et  $F_e > 0$  et si nous employons les équations (III.50-III.51) pour les termes convectifs et le schéma « différence centré » pour les termes de diffusion, l'équation de transport discrétisée de convection-diffusion unidimensionnel (III.30) peut être écrite comme :

$$\left[ F_e \left( \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \right) - F_w \left( \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) \right] = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

Qui peut être réarrangé pour donner

$$\left[ D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e \right] \phi_P = \left[ D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \right] \phi_W + \left[ D_e - \frac{3}{8}F_e \right] \phi_E - \frac{1}{8}F_w \phi_{WW} \quad (III.52)$$

Ceci est maintenant écrit sous le format standard pour des équations discrétisées

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} \tag{III.53}$$

où

$a_W$	$a_E$	$a_{WW}$	$a_P$
$D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$-\frac{1}{8}F_w$	$a_w + a_e + a_{ww} + (F_e - F_w)$

Pour  $F_w < 0$  et  $F_e < 0$ , le flux à travers les frontières *ouest* et *est*, est donné par les expressions

$$\begin{aligned} \phi_w &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_E \\ \phi_e &= \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE} \end{aligned} \tag{III.54}$$

La substitution de ces deux formules pour les termes convectifs dans l'équation discrétisée de convection-diffusion (III.30) ensemble dans le schéma « différence centré » pour les termes de diffusion, et après remise en ordre comme ci-dessus, les coefficients seront:

$a_W$	$a_E$	$a_{EE}$	$a_P$
$D_w + \frac{3}{8}F_w$	$D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_w$	$\frac{1}{8}F_e$	$a_w + a_e + a_{ee} + (F_e - F_w)$

### IV.1- Introduction :

La présentation d'une résolution numérique détaillée de notre cas discret « turbulence sur une plaque partiellement poreuse » (voir. figure IV.1) est primordiale dans la maîtrise du phénomène (sujet), ceci nous amène à résoudre les équations de Reynolds dans un champ turbulent et puis établir les conditions aux limites.

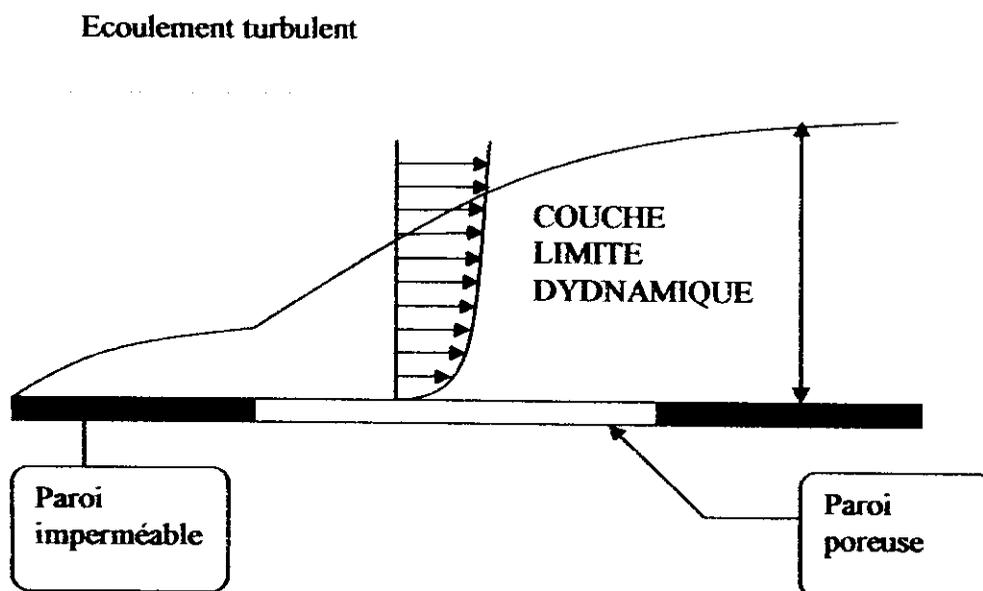


Figure IV.1 : écoulement turbulent sur une plaque partiellement poreuse

### IV.2- Algorithmes de solution pour l'accouplement Pression-Vitesse dans les écoulements stationnaires :

La convection d'une variable scalaire  $\phi$  dépend de la magnitude et de la direction du champ local de vitesse. En général le champ de vitesse n'est pas cependant connu et n'émerge pas en tant qu'élément du processus global de solution avec toutes autres variables

d'écoulement. Dans ce paragraphe nous regardons les stratégies les plus populaires pour calculer le champ entier d'écoulement.

Les équations de transport pour chaque composant de vitesse (équations du moment) peuvent être dérivées de l'équation générale de transport en remplaçant la variable  $\phi$  par  $u$  et  $v$  respectivement. Le champ de vitesse doit, naturellement, satisfaire l'équation de continuité. Considérons les équations régissant un écoulement stationnaire laminaire bidimensionnel:

Equation du moment (x) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (\text{IV.7})$$

Equation du moment (y)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (\text{IV.8})$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Le terme du gradient de pression, qui forme le principal terme de source de l'équation du moment dans la plupart des écoulements importants, a été écrit séparément pour faciliter la discussion qui suit.

La solution de l'ensemble des équations (IV.7-IV.9) nous présente deux nouveaux problèmes:

- les termes convectifs des équations du moment contiennent des quantités non linéaires, par exemple le premier terme de l'équation (IV.7) est la dérivée par rapport à  $x$  de  $\rho u^2$ .

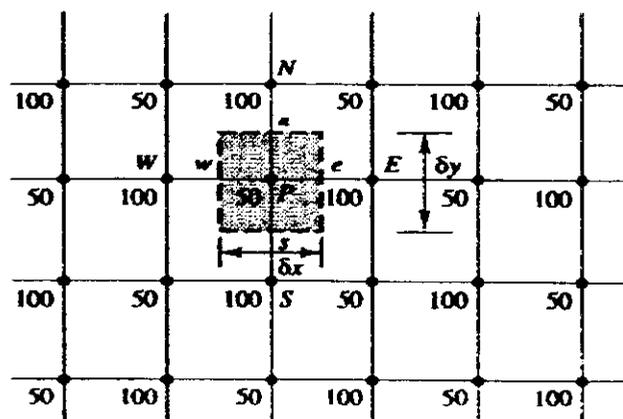
- chacune des trois équations est couplée d'une façon complexe, parce que chaque composant de vitesse apparaît dans chaque équation du moment et aussi dans l'équation de continuité. La grande complexité de résolution est due au rôle joué par la pression. Elle apparaît dans les deux équations du moment, mais il est évident qu'il n'y a pas d'équation (transport ou autre) pour la pression.

Si le gradient de pression est connu, le processus d'obtenir les équations discrétisées des vitesses à partir des équations du moment est semblable à celui pour n'importe quel autre scalaire, et les schémas basés sur ceux expliqués en chapitre III sont applicables. Dans les calculs d'écoulements de tout usage, nous souhaitons également calculer le champ de pression en tant qu'élément de la solution, ainsi son gradient n'est pas connu à l'avance. Si l'écoulement est compressible l'équation de continuité peut être employée comme équation de transport pour la densité. La pression peut alors être obtenue à partir de la densité et de la température en employant l'équation d'état  $p = p(\rho, T)$ . Cependant, si l'écoulement est incompressible la densité est constante et par définition non liée à la pression. Dans ce cas-ci, couplant entre pression et vitesse introduit une contrainte sur la solution du champ d'écoulement: si le champ de la pression correct est appliqué dans les équations du moment le champ de vitesse résultant devrait satisfaire la continuité.

Le lien pression-vitesse peut être résolu en adoptant une stratégie de solution itérative telle que l'algorithme SIMPLE de Patankar et de Spalding (1972). Dans cet algorithme les flux convectifs par unité de masse  $I'$  à travers les faces des cellules sont évalués à partir des composants suggérés de vitesse. En outre, un champ suggéré de pression est employé pour résoudre une équation de moment et une autre de correction de pression, déduite de l'équation de continuité, est résolue pour obtenir un champ de correction de pression qui est employé alternativement pour mettre à jour les champs de vitesse et de pression. Pour commencer le procédé itératif nous employons les champs initiaux suggérés pour les champs de vitesse et de pression. Comme l'algorithme procède, notre but doit être d'améliorer graduellement ces derniers champs devinés suggérés. Le processus est réitéré jusqu'à la convergence des champs de vitesse et de pression.

### IV.2.1- La grille décalée :

Le procédé de solution pour le transport d'une propriété générale  $\phi$  développé en chapitre III sera naturellement incorporé pour résoudre les équations du moment. Le développement n'est pas complètement clarifié puisqu'il y a des problèmes liés aux termes sources de pression des équations du moment qui ont besoin d'un traitement spécial. La méthode des volumes finis commence, comme d'habitude, par la discrétisation sur le domaine d'écoulement des équations appropriées de transport (IV.7-IV.9). D'abord nous devons décider où stocker les vitesses. Il semble logique de définir ces derniers aux mêmes emplacements que les variables scalaires telles que la pression, l'énergie cinétique turbulente et l'énergie de dissipation turbulente. Cependant, si les vitesses et les pressions, toutes les deux, sont définies aux noeuds d'un volume de contrôle ordinaire, un champ de pression fortement non-uniforme peut agir comme un champ uniforme dans les équations discrétisées de moment. Ceci peut être démontré avec la situation bidimensionnelle simple représentée sur la figure IV.5, où une grille uniforme est employée pour la simplicité. Supposons que nous avons obtenu d'une façon ou d'une autre un champ fortement irrégulier de pression avec des valeurs comme représenté sur la figure IV.5, où un maillage uniforme est adopté pour simplifier l'étude :



**Figure IV.5 :** champ de vérification du maillage de la pression

Si les pressions sur  $e$  et à  $w$  sont obtenues par interpolation linéaire le gradient de pression  $\frac{\partial p}{\partial x}$  dans l'équation du moment de  $u$  est donnée par

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{p_E + p_P}{2}\right) - \left(\frac{p_P + p_W}{2}\right)}{\delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x} \quad (\text{IV.10})$$

De même, le gradient  $\frac{\partial p}{\partial y}$  de pression pour l'équation du moment de  $v$  est évalué comme

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_N - p_S}{2\delta y} \quad (\text{IV.11})$$

La pression au noeud central  $P$  n'apparaît pas dans (IV.10) et (IV.11).

Substituant les valeurs appropriées du champ de pression sur la figure IV.5 dans Les formules (IV.10-IV.11), nous constatons que tous les gradients sont nuls à tous les points nodaux quoique le champ de pression montre des oscillations spatiales dans les deux directions. En conséquence, ce champ de pression donnerait la même source du moment (zéro) dans les équations discrétisées comme champ uniforme de pression. Ce comportement est évidemment non-physique.

Il est clair que, si les vitesses sont définies aux noeuds scalaires de grille, l'influence de la pression ne soit pas correctement représentée dans les équations du moment. Un remède pour ce problème consiste à employer une grille décalée pour les composants de vitesse (Harlow et Welch, 1965). L'idée est d'évaluer des variables scalaires, telles que la pression, la densité, la température etc., aux points nodaux ordinaires mais de calculer les composants de la vitesse sur des grilles décalées centrer sur les faces des cellules. L'arrangement pour un calcul bidimensionnel d'écoulement est montré sur la figure IV.6. Les variables scalaires, y compris la pression, sont stockées aux noeuds marqués par (●). Les vitesses sont définies aux faces des cellules (scalaires) entre les noeuds et sont indiquées par des flèches. Les flèches horizontales (→) indiquent les emplacements pour les vitesses de  $u$  et

les flèches verticales (↑) dénotent ceux pour les vitesses de  $v$ . En plus de la notation de  $E, W, N$  et  $S$  la figure IV.6 introduit également un nouveau système de notation basé sur une numérotation des lignes de grille et des faces des cellules. Il sera expliqué et employé plus tard dans ce paragraphe.

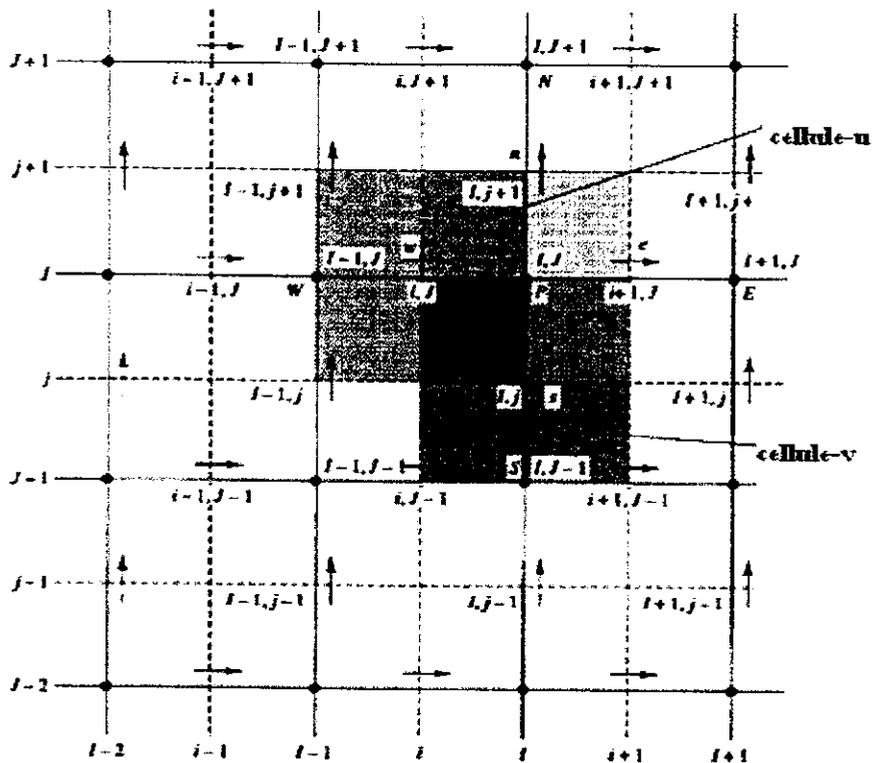


Figure IV.6

Pour le moment nous continuons à employer la notation originale de  $E, W, N$  et de  $S$ ; les vitesses  $u$  sont stockées aux faces scalaires  $e$  et  $w$  des cellules et les vitesses  $v$  aux faces  $n$  et  $s$ . Dans un écoulement tridimensionnel le composant  $w$  est évalué aux faces  $t$  et  $b$  des cellules.

Nous observons que les volumes de contrôle pour  $u$  et  $v$  sont différents des volumes de contrôle des scalaires. Les volumes de contrôles des scalaires désignés parfois sous le nom des volumes de contrôle de pression parce que, comme nous verrons plus tard,

l'équation de continuité est transformée en équation de correction de pression, qui est évaluée sur les volumes de contrôle des scalaires.

Dans l'arrangement de grille décalé, les noeuds de pression coïncident avec les faces des cellules du volume de contrôle de  $u$ . Le terme du gradient de pression  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est donné par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_w}{\delta x_u} \quad (\text{IV.12})$$

où  $\delta x_u$ , est la largeur du volume de contrôle de  $u$ . De même  $\frac{\partial p}{\partial y}$  pour le volume de contrôle de  $v$  est indiqué par :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_s}{\delta y_v} \quad (\text{IV.13})$$

Où  $\delta y_v$  est la largeur du volume de contrôle de  $v$ .

Si nous considérons le champ de vérification de la pression encore, la substitution des valeurs nodales appropriées de pression dans les équations (IV.12) et (IV.13) rapporte maintenant très significativement un gradient de pression non nul. L'échelonnage de la vitesse évite le comportement peu réaliste de l'équation du moment pour les oscillations spatiales des pressions. Un autre avantage de l'arrangement décalé de grille est qu'il produit des vitesses exactement aux emplacements où elles sont exigées pour le calcul des scalaires transport convection-diffusion. Par conséquent, aucune interpolation n'est nécessaire pour calculer les vitesses aux faces des cellules des scalaires.

#### IV.2.2- Les équations du moment :

Comme ça a été affiché précédemment, si le champ de pression est connu, la discrétisation des équations de vitesse et le procédé de solution suivant est semblable à celle

d'une équation scalaire. Puisque la grille de vitesse est décalée la nouvelle notation basée sur la ligne de grille et la numérotation des faces de cellules sera employée. Sur la figure IV.6 les lignes de grille continues sont numérotées par des majuscules. Dans la direction de  $x$  la numérotation est ...,  $I-1, I, I+1$ ... Etc. et dans la direction de  $y$  ...,  $J-1, J, J+1$ ... etc. Les lignes discontinues qui construisent les faces scalaires des cellules sont dénotées par les lettres minuscules ...,  $i-1, i, i+1$ ... et ...,  $j-1, j, j+1$  de  $j$ ... dans la direction  $x$  et  $y$  respectivement.

Un système souscrit basé sur cette numérotation nous permet de définir les emplacements des faces des noeuds et des cellules de grille avec précision. Les noeuds de scalaires, situés à l'intersection de deux lignes de grille, sont identifiés par deux majuscules: par exemple le point P dans Figure IV.6 est dénoté  $I, J$ . Les vitesses  $u$  sont stockées aux faces e et w d'un volume contrôle d'un scalaire. Celles-ci sont situées à l'intersection d'une ligne définissant une frontière de cellules et d'une ligne de grille et sont donc définies par une combinaison d'une lettre minuscule et une lettre capitale: par exemple la face w de la cellule autour du point P est identifiée près  $i, J$ .

Pour les mêmes raisons les emplacements de stockage pour les vitesses  $v$  sont une combinaisons d'une lettre capitale et d'une autre minuscule: par exemple la face s est donnée près  $I, j$ .

Nous pouvons employer des grilles décalées en avant ou en arrière de vitesse. Les grilles uniformes sur la figure IV sont décalées vers l'arrière depuis la location  $i$  pour la vitesse  $u_{i,j}$  est à une distance de  $-\frac{1}{2\delta x_u}$  du noeud scalaire  $I, J$ . De même, la location  $j$  pour la vitesse  $v$ ,  $v_{I,j}$  est de  $-\frac{1}{2}\delta y_v$  du noeud  $I, J$ . Exprimé dans un nouveau système de coordonnées, l'équation du moment pour la vitesse  $u$  à l'emplacement  $I, J$  est donné par

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{P_{I,J} - P_{I+1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u$$



$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \quad (\text{IV.15.a})$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \quad (\text{IV.15.b})$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) v_{i-1,j} \right] \quad (\text{IV.15.c})$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i-1,j+1}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left( \frac{\rho_{i-1,j+1} + \rho_{i-2,j+1}}{2} \right) v_{i-1,j+1} \right] \quad (\text{IV.15.d})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \quad (\text{IV.15.e})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{IV.15.f})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j-1} + \Gamma_{i,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (\text{IV.15.g})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{i-1,j+1} + \Gamma_{i,j+1} + \Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j}}{4(y_{j+1} - y_j)} \quad (\text{IV.15.h})$$

Les formules (IV.15) montrent que là où les variables scalaires ou les composants de vitesse ne sont pas disponibles à une face du volume de contrôle de  $u$ , alors on procède par interpolation. Pendant chaque itération les composants de  $u$  et de  $v$  employés pour évaluer les expressions ci-dessus sont ceux obtenus comme résultats de l'itération précédente (ou du champ proposé dans la première itération). Il convient de noter que les valeurs connus de  $u$  et de  $v$  contribuent aux coefficients  $a$  dans l'équation (IV.14).

Par analogie l'équation du moment de  $v$  devient :

$$a_{i,j} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (\rho_{i,j-1} - \rho_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (\text{IV.16})$$

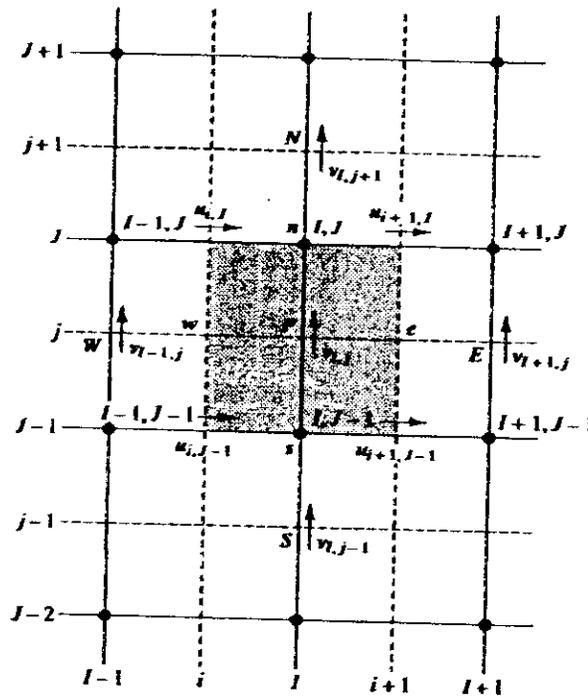


Figure IV.8 : volume de contrôle de  $v$

Les coefficients  $a_{i,j}$  et  $a_{nb}$  contiennent encore des combinaisons du flux convectif par unité de masse  $F$  et la conductibilité diffusive  $D$  aux faces des cellules du volume de contrôle. Leurs valeurs sont obtenues par le même procédé faisant la moyenne adoptée pour le volume de contrôle de  $u$  et sont indiqués ci-dessous:

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j-1} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right] \quad (\text{IV.17.a})$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right] \quad (\text{IV.17.b})$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j-2}}{2} \right) v_{i,j-1} + \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} \right] \quad (\text{IV.17.c})$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j} + F_{i,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} \right] \quad (\text{IV.17.d})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})} \quad (\text{IV.17.e})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I+1,J-1} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)} \quad (\text{IV.17.f})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,J-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (\text{IV.17.g})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,J}}{y_{j+1} - y_j} \quad (\text{IV.17.h})$$

Encore à chaque itération les valeurs de  $F'$  sont calculées en utilisant les composants de  $u$  et de  $v$  résultant de l'itération précédente.

En donnant un champ de pression  $p$ , les équations discrétisées du moment (IV.14) et (IV.16) peuvent être écrites pour chaque volume de contrôle de  $u$  et de  $v$  et résolues pour obtenir les champs de vitesse.

Si le champ de pression est correct, le champ de vitesse résultant satisfera la continuité. Comme le champ de pression est inconnu, nous avons besoin d'une méthode pour calculer la pression

### IV.2.3- L'algorithme SIMPLE :

SIMPLE « **Semi-Implicit for Pressure-Linked Équations** » proposé par Patankar et Spalding (1972) est essentiellement un procédé de « proposer-et-corriger » pour le calcul de la pression sur l'arrangement décalé de grille introduit ci-dessus.

Pour initier le calcul SIMPLE, un champ de pression  $p^*$  est suggéré. Les équations du moment discrétisées (IV.14) et (IV.16) sont résolues en utilisant le champ de pression suggéré  $p^*$  pour rapporter les composants de la vitesse  $u^*$  et  $v^*$  comme suit:

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (\text{IV.18})$$

$$a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (\text{IV.19})$$

Maintenant nous définissons la correction  $p'$  comme la différence entre le champs de pression correct et le champs de pression suggéré, de sorte que

$$p = p^* + p' \quad (\text{IV.20})$$

De même, nous définissons les corrections de vitesse  $u'$  et  $v'$  pour rapporter les vitesses correctes  $u$  et  $v$  aux vitesses devinées  $u^*$  et  $v^*$

$$u = u^* + u' \quad (\text{IV.21})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{IV.22})$$

La substitution du champ de pression correct  $p$  dans les équations du moment rapporte le champ correct de vitesse ( $u, v$ ). Les équations discrétisées du moment (IV.14) et (IV.16) lient les champs corrects de vitesse avec le champ correct de pression.

La soustraction des équations (IV.18) et (IV.19) de (IV.14) et (IV.16) respectivement, donne

$$a_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{i-1,j} - p_{i-1,j}^*) - (p_{i,j} - p_{i,j}^*)] A_{i,j} \quad (\text{IV.23})$$

$$a_{i,j} (v_{i,j} - v_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{i,j-1} - p_{i,j-1}^*) - (p_{i,j} - p_{i,j}^*)] A_{i,j} \quad (\text{IV.24})$$

En utilisant les formules de correction (IV.20-IV.23), les équations (IV.23-IV.24) peuvent être réécrites comme suit:

$$a_{i,j} u'_{i,j} = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) A_{i,j} \quad (\text{IV.25})$$

$$a_{i,j} v'_{i,j} = \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) A_{i,j} \quad (\text{IV.26})$$

En ce point, une approximation est introduite:  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  et  $\sum a_{nb} v'_{nb}$  sont négligés pour simplifier les équations (IV.25) et (IV.26) pour la corrections des vitesses. Omission de ces derniers termes est l'approximation principale de l'algorithme SIMPLE. Nous obtenons

$$u'_{i,j} = d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (\text{IV.27})$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (\text{IV.28})$$

où :

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (\text{IV.29})$$

Les équations (IV.27) et (IV.28) décrivent les corrections à appliquer aux vitesses par les formules (IV.21) et (IV.22), ce qui donne :

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (\text{IV.30})$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (\text{IV.31})$$

Des expressions similaires existent pour  $u_{i+1,j}$  et  $v_{i,j+1}$  :

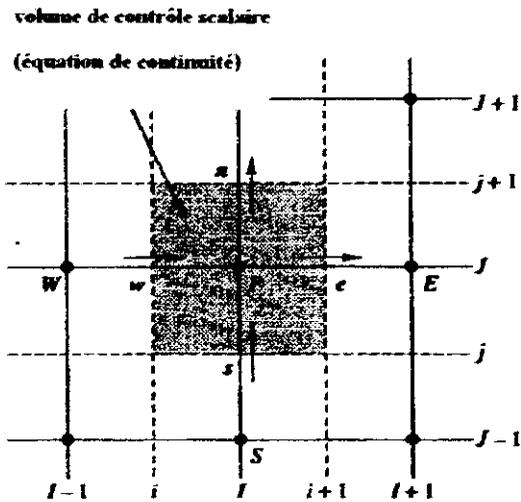
$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \quad (\text{IV.32})$$

$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \quad (\text{IV.33})$$

où

$$d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \quad (\text{IV.34})$$

Jusqu'ici nous avons seulement considéré les équations du moment, comme mentionné avant, le champ de vitesse est sujet également à la contrainte qu'il devrait satisfaire l'équation de continuité (IV.9). La continuité est satisfaite dans la forme discrétisée pour le volume de contrôle du scalaire comme représenté sur la figure IV.9 :



**Figure IV.9 :** volume de contrôle du scalaire pour l'équation discrétisée de continuité

$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \tag{IV.35}$$

La substitution des vitesses corrigées des équations (IV.30-IV.33) dans l'équation de continuité (IV.35) donne

$$\begin{aligned} & [\rho_{i+1,J} A_{i+1,J} (u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J} (p'_{I,J} - p'_{I+1,J})) - \rho_{i,J} A_{i,J} (u^*_{i,J} + d_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}))] + \\ & [\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1} (p'_{I,J} - p'_{I,j+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (v^*_{I,j} + d_{I,j} (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}))] = 0 \end{aligned} \tag{IV.36}$$

Ceci peut être arrangé comme suit :

$$\begin{aligned} & [(\rho d A)_{i+1,J} + (\rho d A)_{i,J} + (\rho d A)_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j}] p'_{I,J} = (\rho d A)_{i+1,J} p'_{I+1,J} + (\rho d A)_{i,J} p'_{I-1,J} \\ & + (\rho d A)_{I,j-1} p'_{I,j-1} + (\rho d A)_{I,j} p'_{I,j-1} + [(\rho d A)_{i,J} - (\rho d A)_{i+1,J} + (\rho d A)_{I,j} - (\rho d A)_{I,j+1}] \end{aligned} \tag{IV.37}$$

En identifiant les coefficients de  $p'$ , cette dernière équation peut s'écrire comme suis :

$$a_{i,j} p'_{i,j} = a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (IV.38)$$

Où :

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

Et ils sont récapitulé comme suit :

$a_{i+1,j}$	$a_{i-1,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j-1}$	$b'_{i,j}$
$(\rho dA)_{i+1,j}$	$(\rho dA)_{i-1,j}$	$(\rho dA)_{i,j+1}$	$(\rho dA)_{i,j-1}$	$(\rho dA)_{i,j} - (\rho dA)_{i+1,j} + (\rho dA)_{i,j} - (\rho dA)_{i,j+1}$

L'équation (IV.38) représente l'équation de continuité comme équation pour la correction du champ de pression  $p'$ . Le terme source  $b'$  représente la continuité du déséquilibre résultant du champ incorrect de vitesse  $u^*$ ,  $v^*$ . En résolvant l'équation (IV.38), le champ de correction de la pression peut être obtenu à tous les points (nœuds). Une fois que le champ de correction de pression est connu, le champ correct de pression peut être obtenu en utilisant des composants de formule (IV.20) et de la vitesse par les formules de correction (IV.30-IV.33).

L'omission des termes telles que  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  dans la dérivation n'affecte pas la solution finale parce que les corrections de pression et des vitesses seront pratiquement toutes nulles dans une solution convergée donnant :  $p^* - p$ ,  $u^* - u$  et  $v^* - v$ .

L'équation de correction de pression est susceptible à la divergence à moins qu'une certaine sous-relaxation soit employée pendant le processus itératif, et la nouvelle pression est obtenue comme suit :

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (IV.39)$$

Où  $\alpha_p$  est le facteur de sous-relaxation de la pression. Si nous choisissons  $\alpha_p$  égal à 1 le champ de pression suggéré est corrigé par  $p'$ . Cependant, la correction  $p'$  est souvent trop grande pour des calculs stables, en particulier quand le champ suggéré  $p^*$  est très loin de

la solution finale. Une valeur de  $\alpha_p$  égale à zéro n'appliquerait aucune correction, ce qui est également indésirable. La prise de  $\alpha_p$  entre 0 et 1 nous permet d'ajouter au champ suggéré  $p^*$  une fraction du champ de correction qui est assez grand pour faire avancer le procédé itératif d'amélioration, mais assez petit pour assurer le calcul stable.

Les vitesses sont également sous-relaxées. Les nouveaux composants  $u$  et  $v$  de la vitesse itérativement améliorée sont obtenus à partir :

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad (IV.40)$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \quad (IV.41)$$

Où  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  sont les facteurs de sous-relaxation de  $u$  et de  $v$  avec des valeurs entre 0 et 1,  $u$  et  $v$  sont les composants corrigés de vitesse sans relaxation et  $u^{(n-1)}$  et  $v^{(n-1)}$  représentent leurs valeurs obtenues dans la précédente itération. Après quelques simples développements il peut être montré qu'avec la sous-relaxation l'équation du moment prend la forme

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{l-1,j} - p_{l,j}) A_{l,j} + b_{l,j} + \left[ (1 - \alpha_u) \frac{a_{l,j}}{\alpha_u} \right] u_{l,j}^{(n-1)} \quad (IV.42)$$

Et l'équation discrétisée du moment de  $v$

$$\frac{a_{l,j}}{\alpha_v} v_{l,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{l,j-1} - p_{l,j}) A_{l,j} + b_{l,j} + \left[ (1 - \alpha_v) \frac{a_{l,j}}{\alpha_v} \right] v_{l,j}^{(n-1)} \quad (IV.43)$$

L'équation de correction de pression est également affectée par sous-relaxation de la vitesse et peut être montré que les termes de  $d$  de l'équation de correction de pression deviennent

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}\alpha_u}{a_{i,j}} \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}\alpha_u}{a_{i+1,j}} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}\alpha_v}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}\alpha_v}{a_{i,j+1}}$$

Notons que dans ces formules  $a_{i,j}$ ,  $a_{i+1,j}$ ,  $a_{i,j}$  et  $a_{i,j+1}$  sont les coefficients centraux des équations discrétisées de la vitesse aux positions  $(i,J)$ ,  $(i+1,J)$ ,  $(I,j)$  et  $(I,j+1)$  d'une cellule d'un scalaire concentré sur  $P$ .

Un choix correct des facteurs de sous-relaxation est essentiel pour rentabiliser les simulations. Une valeur trop grande de  $\alpha$  peut mener aux solutions itératives oscillantes ou même divergentes et une valeur qui est trop petite peut causer une convergence extrêmement lente.

Malheureusement, les valeurs optimales des facteurs de sous-relaxation dépendent de l'écoulement et doivent être cherchées sur une base de cas par cas.

### IV.3- Application de l'algorithme SIMPLE pour le modèle de turbulence $k$ - $\varepsilon$ standard :

Si nous récapitulons les équations de transports des variables de l'écoulement ( $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ) nous trouvons :

Pour les vitesses  $u$  et  $v$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho (v + v_t) \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \rho (v + v_t) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) \quad (\text{IV.44})$$

Pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho v \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \rho \varepsilon \quad (\text{IV.45})$$

Convection

Diffusion

Production

Dissipation

Pour l'énergie de dissipation turbulente  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (IV.46)$$

Convection
Diffusion
Production
Dissipation

L'équation convection-diffusion d'une variable de l'écoulement  $\phi$  telle  $U_i, U_j, k$  et  $\varepsilon$  est :

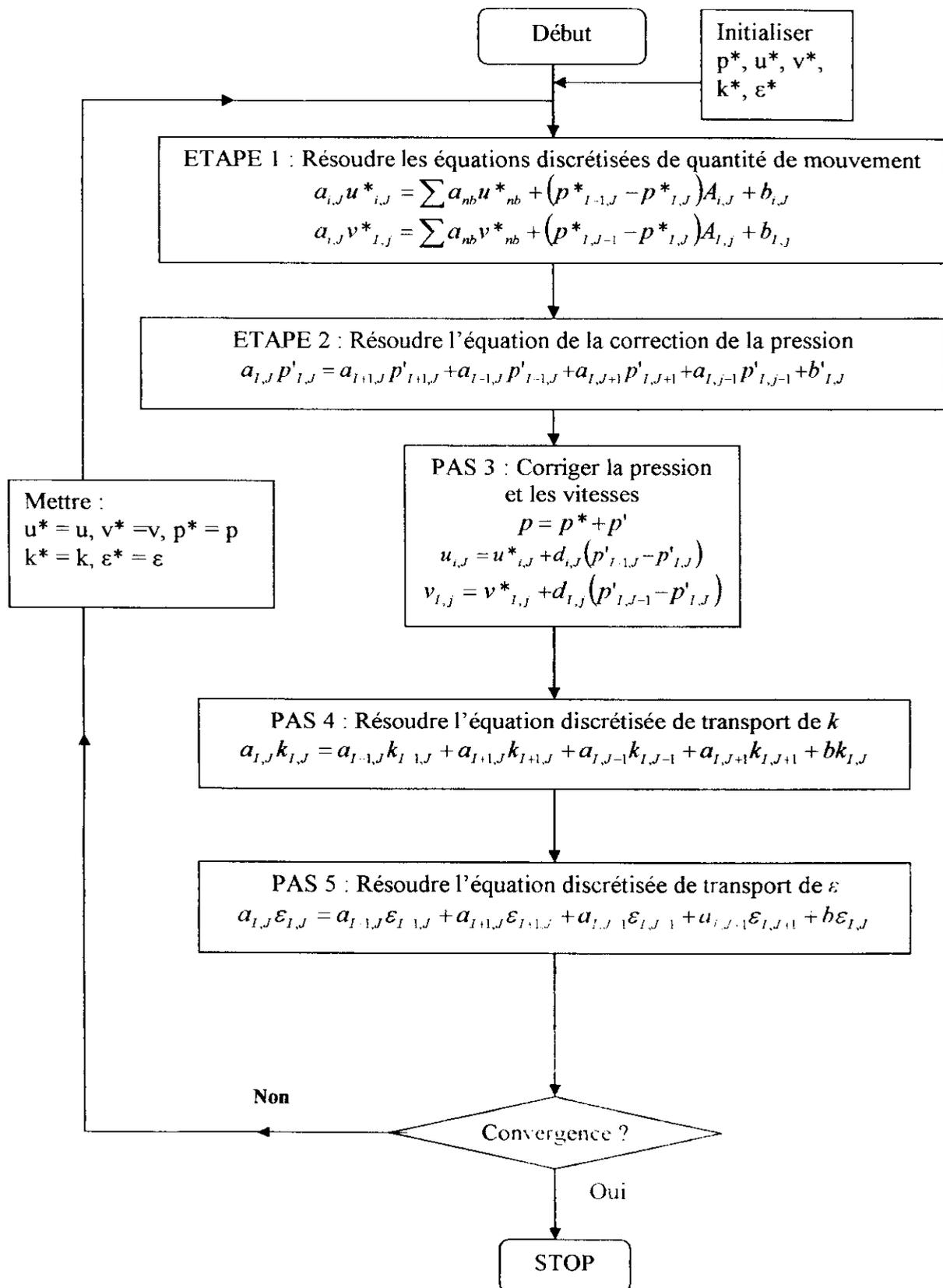
$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (IV.47)$$

On remarque que, dans la mise en forme des équations pour chaque variable  $\phi$ , tous les termes non convectifs et non diffusifs, sont inclus dans le terme source  $S_\phi$ . Le tableau suivant (Tableau IV.1) recense chaque terme de l'équation (IV.47) pour les différentes grandeurs calculées dans le cas de l'utilisation du modèle  $k-\varepsilon$

Grandeur transportée	$\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
Quantités de mouvement selon $x_i$	$U_i$	$\rho(\nu + \nu_t)$	$-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ $-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_1} \delta_{ij} + \rho k \delta_{ij} \right)$
Energie cinétique turbulente	$k$	$\rho \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right)$	$G - \rho \varepsilon$
Taux de dissipation turbulent	$\varepsilon$	$\rho \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right)$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$

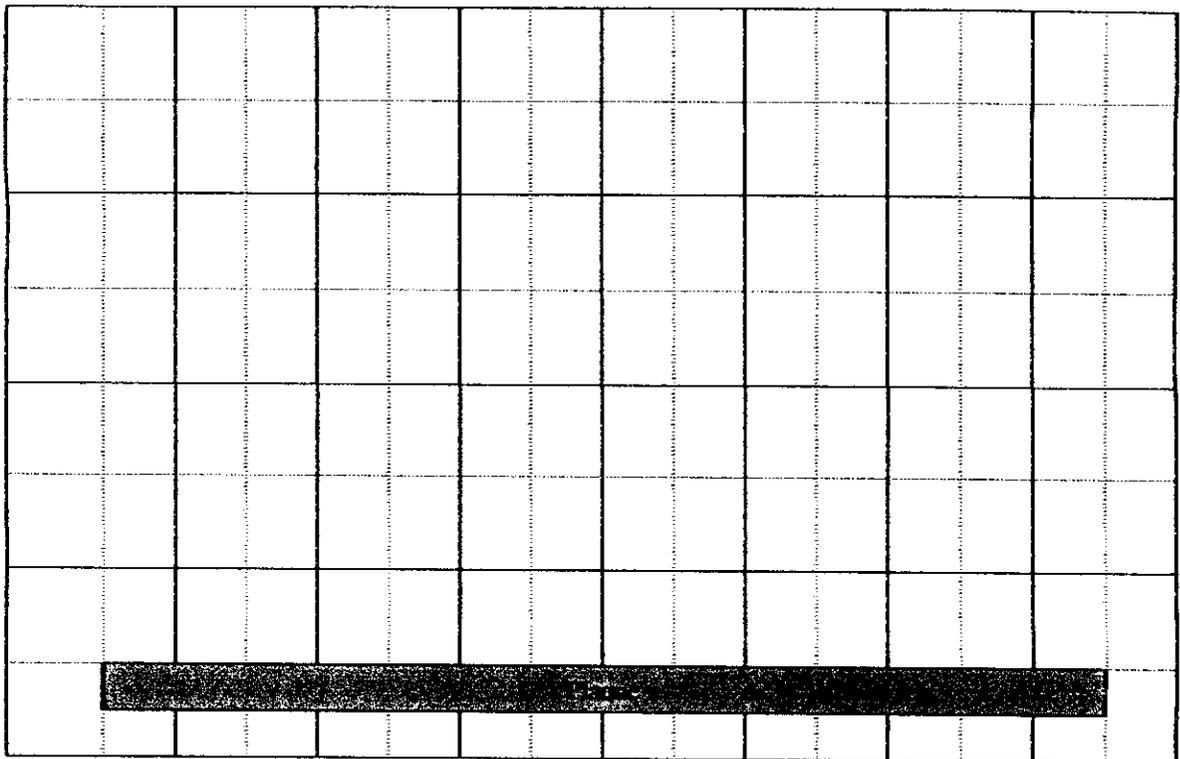
**Tableau IV.1**

L'application de l'algorithme **SIMPLE** à notre modèle de turbulence est le suivant :



#### IV.4- Implémentation des conditions aux limites :

Le maillage approprié pour une grille décalée est le suivant

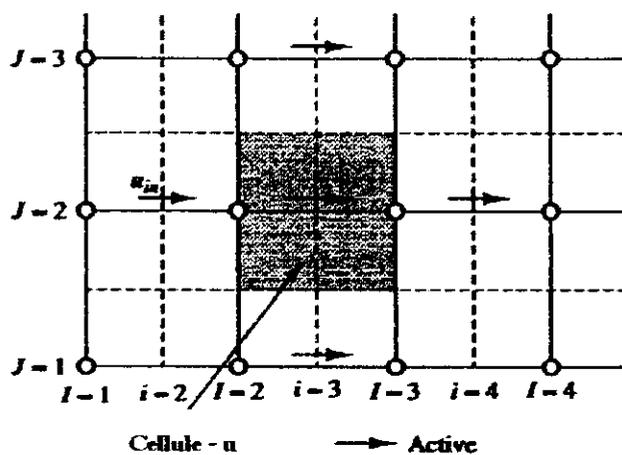


**Figure IV.10 :** maillage du champ d'écoulement

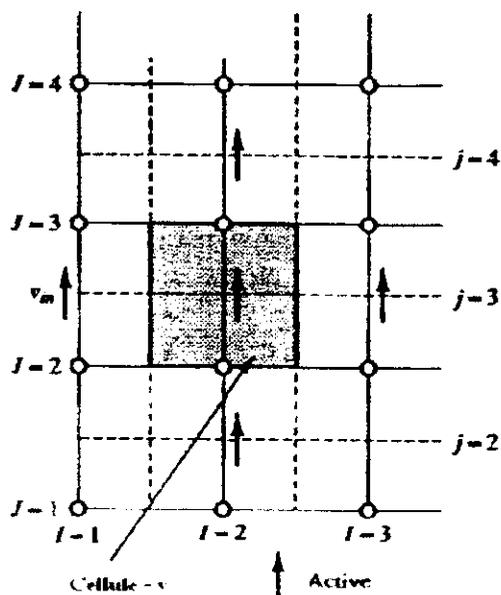
##### IV.4.1- Condition d'admission :

La distribution de toutes les variables d'écoulement doit être indiquée aux frontières d'admission. Dans notre étude de la plaque plane nous discutons le cas d'une admission perpendiculaire à la direction  $x$ . Les figures IV.11 à IV.14 montrent l'arrangement de grille à proximité immédiate d'une admission pour les équations du moment de  $u$  et  $v$  et les équations de correction de pression et de scalaire. On assume que la direction de l'écoulement

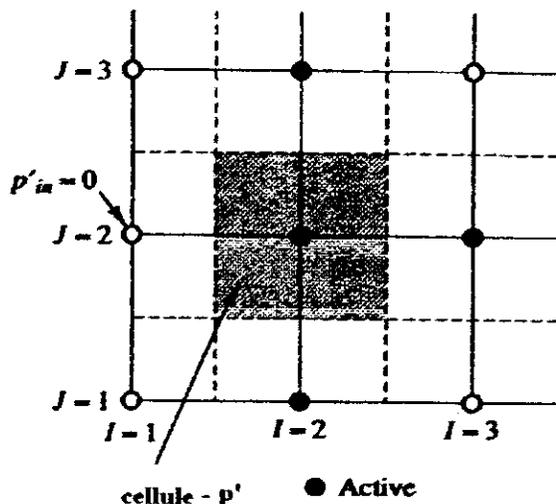
est largement, de gauche à droite dans les figures. Comme mentionné, la grille se prolonge en dehors de la frontière physique et les noeuds suivant la ligne  $I = 1$  (ou  $i = 2$  pour la vitesse  $u$ ) sont employés pour stocker les valeurs d'admission des variables d'écoulement (indiquées par  $u_{in}$ ,  $v_{in}$  et  $p'_{in}$ ). Juste en aval de ce noeud supplémentaire nous commençons à résoudre l'équation pour la première cellule interne, qui est ombragée.



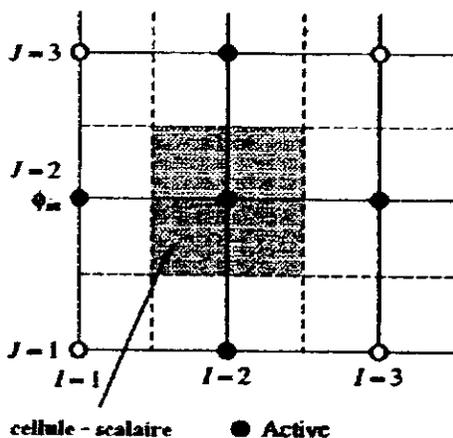
**Figure IV.11 :** cellule de  $u$  à l'admission



**Figure IV.12 :** cellule de  $v$  à l'admission



**Figure IV.13 :** cellule de la correction de pression à l'admission



**Figure IV.14 :** cellule du scalaire à l'admission

Les diagrammes montrent également les voisins actifs et les faces des cellules qui sont représentées dans l'équation discrétisée pour la cellule ombragée assumant que le schéma hybrid est employé. Par exemple, sur la figure IV.11 les vitesses voisines actives sont données au moyen des flèches et les faces actives de pression par des points pleins. Les figures indiquent que tous les liens aux noeuds voisins demeurent actifs pour la première cellule de  $u$ ,  $v$  et  $\phi$ , ainsi pour adapter ces variables à la condition d'admission, il est inutile de faire des modifications à leurs équations discrétisées. La figure IV.13 prouve que le lien avec

la frontière est supprimé dans l'équation de correction de la pression en plaçant ses coefficients égaux à zéro. Puisque la vitesse est connue à l'admission, il n'est également pas nécessaire de faire une correction de la vitesse ici et par conséquent nous avons :

$$u^*_w = u^*_w \quad (\text{IV.48})$$

dans la source associée à la correction de pression (IV.38).

### **Pression de référence :**

Le champ de pression obtenu en résolvant l'équation de correction de pression ne donne pas les pressions absolues (Patankar, 1980). Il est courant, de fixer la pression absolue à un noeud d'admission et de placer la correction de pression à zéro à ce noeud. Après avoir indiqué une valeur de référence le champ de pression absolue à l'intérieur du domaine peut maintenant être obtenu.

### **Évaluation de $k$ et de $\varepsilon$ aux frontières d'admission :**

Les simulations les plus précises peuvent seulement être réalisées en assurant des valeurs mesurées de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et du taux de dissipation  $\varepsilon$ . cependant, si nous exécutons le calcul de conception d'ensemble, de telles données ne sont pas disponible. Dans ce cas-ci les codes commerciaux de CFD estiment souvent l'évaluation de  $k$  et de  $\varepsilon$ , basée sur une intensité de turbulence - typiquement entre 1 et 6% - et une échelle de longueur.

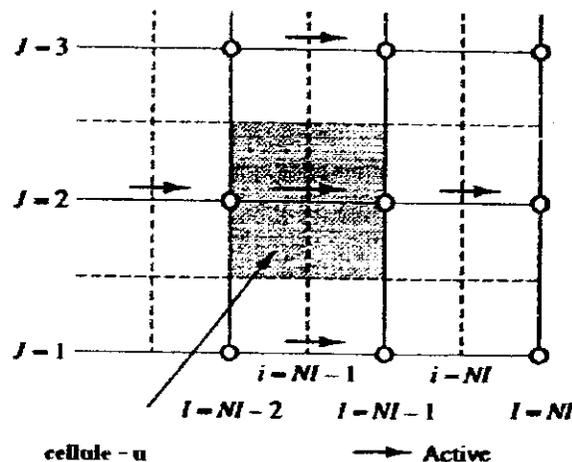
### **Frontières d'admission perpendiculaires à la direction de $x$ :**

La procédure ci-dessus n'est pas limitée à une condition d'admission perpendiculaire à la direction de  $y$ . Quand nous avons une admission perpendiculaire à la direction de  $x$ , le composant de la vitesse  $v$ , pour lequel la valeur  $v_{in}$  d'admission est disponible sur  $j = 2$ , remplace le composant  $u$  de la vitesse et les calculs commencent à  $j = 3$ . Les

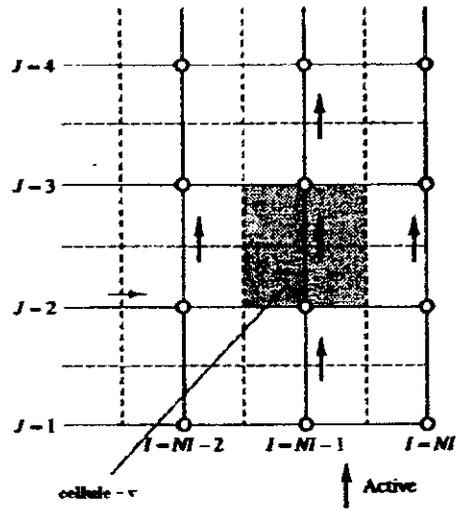
valeurs d'admission des variables restantes sont stockées à  $J = 1$  et la solution commence à  $J = 2$ . Elles sont autrement traitées comme ci-dessus.

#### IV.4.2- Conditions d'échappement :

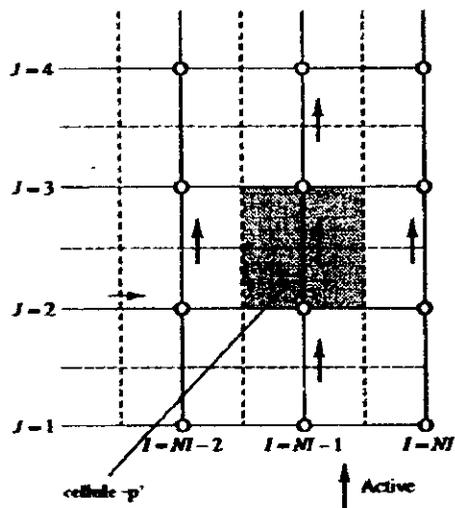
Les conditions d'échappement peuvent être employées en même temps que les conditions d'admission. Si l'emplacement de l'échappement est choisi loin des perturbations géométriques, l'écoulement atteint souvent un état entièrement développé où aucun changement ne se produit dans le sens d'écoulement. Dans une telle région nous pouvons mettre une surface d'échappement et déclarer que les gradients de toutes les variables (excepté la pression) sont nuls dans le sens d'écoulement. Il est normalement possible de rendre une prévision raisonnablement précise du sens d'écoulement loin des obstacles. Ceci nous donne l'occasion de localiser la surface d'échappement perpendiculaire à la direction de l'écoulement et de prendre les gradients dans la direction normale à la surface d'échappement nuls. Les figures IV.15 à IV.18 montrent les arrangements de grille près d'une telle frontière d'échappement.



**Figure IV.15 :** cellule de  $u$  à l'échappement



**Figure IV.16 :** cellule de  $v$  à l'échappement



**Figure IV.17 :** cellule de la pression de correction à l'échappement

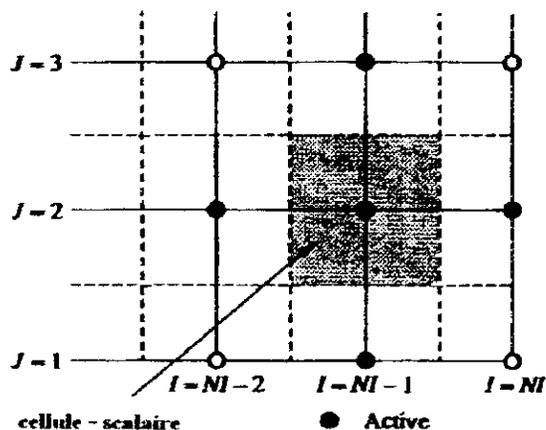


Figure IV.18 : cellule du scalaire à l'échappement

Nous avons ombragé les dernières cellules d'échappement, pour laquelle une équation discrétisée est résolue, et, comme avant, nous avons noirci les voisins et les faces actives.

Si  $NI$  est le nombre totale de noeuds dans la direction des  $x$ , les équations sont résolues jusqu'au cellules  $I$  (ou  $i$ ) =  $NI - 1$ . Avant que les équations appropriées soient résolues, les valeurs des variables d'écoulement au prochain noeud ( $NI$ ), juste en dehors du domaine, sont déterminés par extrapolation à partir de l'intérieur sur l'acceptation du gradient nul au plan d'échappement.

Pour les équations de  $v$  et des scalaires, ceci implique de placer le  $v_{NI,j} = v_{NI-1,j}$  et  $\phi_{NI,j} = \phi_{NI-1,j}$ . Les figures IV.16 et IV.18 montrent que tous les liens sont activés pour ces derniers variables, ainsi leurs équations peuvent être résolues normalement.

Un traitement spécial devrait être pris dans le cas de la vitesse  $u$ . Le calcul de  $u$  au plan  $i = Ni$  d'échappement en supposons un gradient nul donne

$$u_{NI,j} = u_{NI-1,j} \tag{IV.49}$$

Pendant les cycles d'itération de l'algorithme SIMPLE, il n'y a aucune garantie que ces vitesses conserveront la masse dans le domaine de calcul dans l'ensemble. Pour s'assurer que la continuité globale est satisfaite, le flux de masse totale sortant du domaine ( $M_{out}$ ) est d'abord calculé en additionnant toutes les vitesses extrapolées d'échappement (IV.49). Pour avoir le flux de masse sortant égal au flux de masse entrant dans le domaine, tous les composants de vitesse d'échappement  $u_{NI,J}$  de (IV.49) sont multipliés par le rapport  $M_{in}/M_{out}$ . Ainsi les vitesses d'échappements avec la correction de continuité sont indiquées près :

$$u_{NI,J} = u_{NI-1,J} \frac{M_{in}}{M_{out}} \quad (IV.50)$$

Ces valeurs sont plus tard employées comme vitesses voisines dans les équations discrétisées du moment pour  $u_{NI,J}$ . La vitesse d'échappement n'est pas corrigée au moyen de l'équation de correction de pression. Par conséquent dans l'équation discrétisée de la correction de la pression  $p'$  (IV.38) le lien avec le plan de sortie (*est*) est supprimé en mettant  $\alpha_E = 0$ . La contribution du terme source dans cette équation est calculée normalement, notant que  $u^*_E = u_E$  ; et aucune modification supplémentaire n'est exigée.

#### IV.4.3- Condition de la paroi imperméable :

La paroi est la frontière la plus commune produite dans les problèmes d'écoulement de fluide confiné. Dans cette section nous considérons une paroi imperméable parallèle à la direction  $x$ . Les figures IV.19 à IV.21 illustrent les détails de grille dans les régions proches de la paroi pour le composant de la vitesse  $u$  (parallèle à la paroi), pour le composant de la vitesse  $v$  (perpendiculaire à la paroi) et pour les variables scalaires

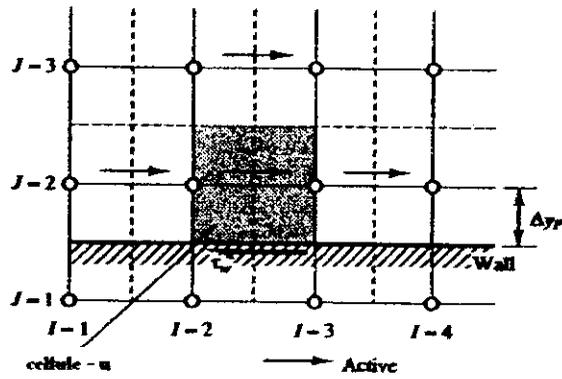


Figure IV.19 : cellule de u sur la plaque

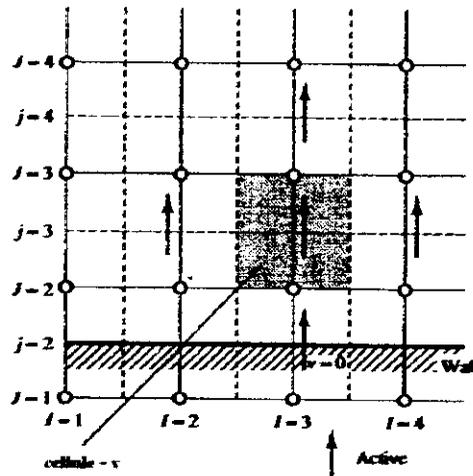


Figure IV.20 : cellule de v sur la plaque

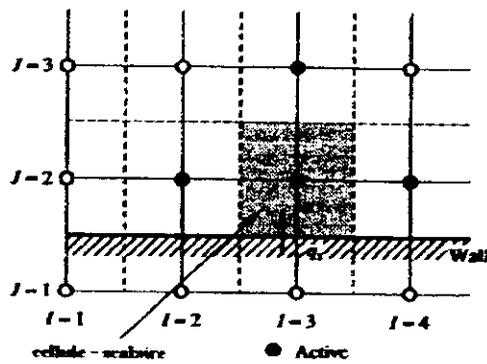


Figure IV.21 : cellule du scalaire sur la plaque

La condition de non glissement ( $u = v = 0$ ) est approprié pour les composants de la vitesse aux parois imperméables. Le composant normal de la vitesse peut simplement être placé nul à la frontière ( $j = 2$ ) et l'équation discrétisée du moment à la prochaine cellule de  $v$  dans l'écoulement ( $j = 3$ ) peut être évalué sans modification. Puisque la vitesse de la paroi est connue il est également inutile de faire une correction de pression ici. Dans l'équation discrétisée de  $p'$  (IV.38) pour la cellule la plus proche de la paroi, le lien de la paroi (*sud*) est, donc, supprimer en mettant  $\alpha_s = 0$  et nous prenant  $v^*_s = v_s$  dans son terme de source.

Pour toutes autres variables, des sources spéciales sont construites, la forme précise dépend de : « si l'écoulement est laminaire ou turbulent ». En chapitre 3 nous avons étudié la structure multicouche de la couche limite turbulente près de la paroi. Immédiatement à côté de la paroi nous avons une sous-couche visqueuse extrêmement mince suivi de la couche d'amortissement et du noyau turbulent. Le nombre de points de maille exigés pour résoudre tous les détails dans une couche turbulente de frontière serait prohibitivement grand et normalement nous utilisons des fonctions de paroi introduites en paragraphe II pour représenter l'effet des frontières de paroi.

L'implémentation des conditions de frontière de paroi dans des écoulements turbulents commence par l'évaluation de

$$y^+ = \frac{\Delta y_p}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\text{IV.51})$$

où  $\Delta y_p$  est la distance du noeud  $P$  le plus proche de la paroi solide (voir la figure IV.19). Un écoulement proche de la paroi est pris pour être laminaire si  $y^+ < 11,63$ . On assume que la contrainte de cisaillement de la paroi est entièrement visqueuse. Si  $y^+ > 11,63$  l'écoulement est turbulent et l'approche de fonction de paroi est employée. Ce critère met le changement de l'écoulement laminaire au turbulent proche de la paroi dans la couche d'amortissement entre les régions linéaires et de loi logarithmiques d'une couche turbulente de paroi. La valeur exacte de  $y^+ = 11,63$  est l'intersection du profil linéaire et de la loi logarithmique ainsi elle est obtenue à partir de la solution de :

$$y^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (\text{IV.52})$$

Dans cette formule,  $\kappa$  est la constante de Von Karman (0,4187) et  $E$  est une constante d'intégration qui dépend de la rugosité de la paroi. Pour les parois lisses avec une contrainte de cisaillement constante,  $E$  a une valeur de 9,793.

### Écoulement laminaire / Sous-couche Linéaire

Les conditions de paroi décrites sous cette rubrique s'appliquent dans deux cas: pour des solutions de :

(i) équations laminaires d'écoulement et (ii) équations turbulentes d'écoulement quand  $y^+ \leq 11.63$ . Dans les deux cas, l'écoulement proche de la paroi est pris pour être laminaire. La force de la paroi est incluse dans l'équation discrétisée du moment de  $u$  comme source. La valeur de la contrainte de cisaillement de la paroi est obtenue à partir de :

$$\tau_w = \mu \frac{u_p}{\Delta y_p} \quad (\text{IV.53})$$

où  $u_p$  est la vitesse au noeud de grille. La figure (IV.23) illustre que cette formule est fondée sur l'hypothèse que la vitesse change linéairement avec la distance à la paroi dans un écoulement laminaire.

La force de cisaillement  $F_s$  est maintenant donnée par :

$$F_s = -\tau_w A_{Cell} = -\mu \frac{u_p}{\Delta y_p} A_{Cell} \quad (\text{IV.54})$$

où  $A_{Cell}$  est le section de la paroi du volume de contrôle. Le terme source appropriée dans l'équation de  $u$  est défini par :

$$S_p = -\frac{\mu}{\Delta y_p} A_{Cell} \quad (\text{IV.55})$$

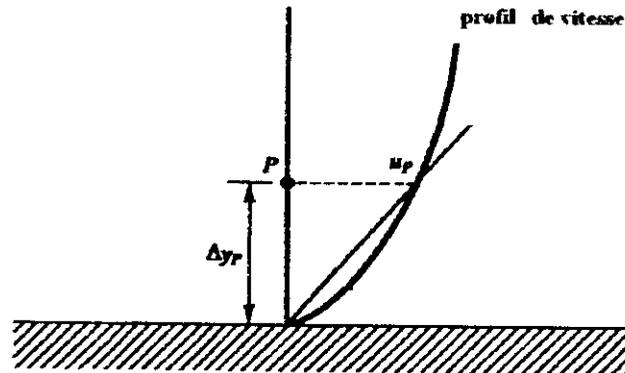


Figure IV.23 : distribution de la vitesse près de la paroi

### Écoulement Turbulent :

Si la valeur de  $y^+$  est plus grande que 11,63, le noeud  $P$  est considéré dans la région de la loi logarithmique de la couche limite turbulente. Dans cette région, la fonction de paroi liée à la loi logarithmique est employée pour calculer la contrainte de cisaillement et d'autres variables. Les formules ont été appliquées de différentes manières mais les relations suivantes (Tableau IV.2) donnent les rapports optimums des relations près de la paroi.

-Equation du moment tangentiel à la paroi :

$$\text{- contrainte de cisaillement de la paroi } \tau_w = \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} u_p / u^+ \quad (\text{IV.56})$$

$$\text{- force de la paroi } F_s = -\tau_w A_{\text{cell}} = -(\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} u_p / u^+) A_{\text{cell}} \quad (\text{IV.57})$$

-Equation du moment normal à la paroi :

$$\text{- vitesse normale} = 0$$

-Equation de l'énergie cinétique turbulente :

$$\text{- la source nette de } k \text{ par unité de volume} = (\tau_w u_p - \rho C_\mu^{3/4} k_p^{3/2} u^+) \Delta V / \Delta y_p \quad (\text{IV.58})$$

-Equation du taux de dissipation :

$$\text{- la valeur nodale } \varepsilon_p = C_\mu^{3/4} k_p^{3/2} / (\kappa \Delta y_p) \quad (\text{IV.59})$$

Tableau IV.2

Ces rapports devraient être employés en même temps que les distributions universelles de vitesse des écoulements turbulents près de la paroi :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ly^+) \quad (\text{IV.60})$$

Par ordre de leur apparence dans le tableau IV.2, les variables sont traitées comme suit dans leurs équations :

-composant de la vitesse  $u$  parallèle à la paroi. Le lien avec la paroi (*sud*) est supprimé en plaçant  $a_s = 0$  et la force de la paroi  $F_s$  de (IV.57) est introduite dans l'équation discrétisée du moment de  $u$  comme terme source, ainsi

$$S_p = -\frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{u^+} A_{cell} \quad (\text{IV.61})$$

Pour l'équation de  $k$ . Le lien à la limite est supprimé, nous avons placé  $a_s = 0$ . Dans la relation (IV.58) le deuxième terme contient  $k^{3/2}$ . Il est linéarisé comme  $k^*{}^{1/2} k_p$  où  $k^*$  est la valeur de  $k$  à la fin de l'itération précédente, qui rapporte les termes sources suivantes dans l'équation de  $k$  :

$$S_p = -\frac{\rho C_\mu^{3/4} k_p^{*1/2} u^+}{\Delta y_p} \Delta V \quad S_u = \frac{\tau_w u_p}{\Delta y_p} \Delta V \quad (\text{IV.62})$$

Pour l'équation de  $\varepsilon$ . Dans l'équation discrétisée de  $\varepsilon$  le noeud près de la paroi est fixé à la valeur donnée par (IV.59) en plaçant  $S_p$  et  $S_u$ , comme suit:

$$S_p = -10^{30} \quad S_u = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa \Delta y_p} \times 10^{30} \quad (\text{IV.63})$$

#### IV.4.4- Condition de symétrie :

Les conditions à une frontière de symétrie sont caractérisé par:

(i) débit nul à travers la frontière et (ii) aucun flux scalaire à travers la frontière.

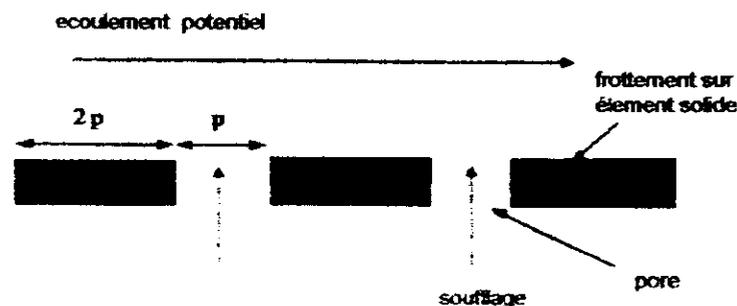
Dans l'implémentation, les vitesses normales sont placées nulles à une frontière de symétrie et les valeurs de toutes autres propriétés justes en dehors du domaine de solution ( $I$  ou  $i = 1$ ) sont pris égales à leurs valeurs au noeud le plus proche juste à l'intérieur du domaine ( $I$  ou  $i = 2$ ):

$$\phi_{1,j} = \phi_{2,j} \quad (\text{IV.64})$$

Dans les équations de  $p'$ , le lien avec le côté de frontière de symétrie est annulé par ajustement, du coefficient approprié, à zéro; aucune modification supplémentaire n'est exigée.

#### IV.4.5- Condition de la section poreuse [14] :

La plaque poreuse est représentée, dans notre modélisation, comme une succession bidimensionnelle de deux types d'éléments (figure IV.24). Le premier est un élément solide sur lequel se produit le frottement solide-fluide. Le second est une source par laquelle arrive une quantité de fluide. Ce second élément représente un pore. Ainsi, la couche limite soumise à l'effusion ou de l'aspiration est le résultat du mélange de deux écoulements (écoulement pariétal et injection). L'injection modifie l'écoulement principal en apportant une masse et une quantité d'énergie. Simultanément, ce mélange est soumis au frottement sur les éléments solides.



**Figure IV.24 :** Modélisation discrète de la surface de la plaque poreuse.

Les conditions aux limites correspondantes aux éléments solides et aux pores sont de deux types. Au-dessus d'un élément solide (première cellule du maillage), l'écoulement est régi par la loi de paroi classique. A la sortie d'un pore, la vitesse longitudinale, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de  $k$  sont nuls. Dans un pore, la vitesse verticale,  $U_{2w}$  est imposée de façon à ce que le débit injecté corresponde au taux d'injection désiré :

$$U_{2w} = \frac{F(\rho U_1)_e}{\rho_w \varphi} \quad (\text{IV.65})$$

Avec :

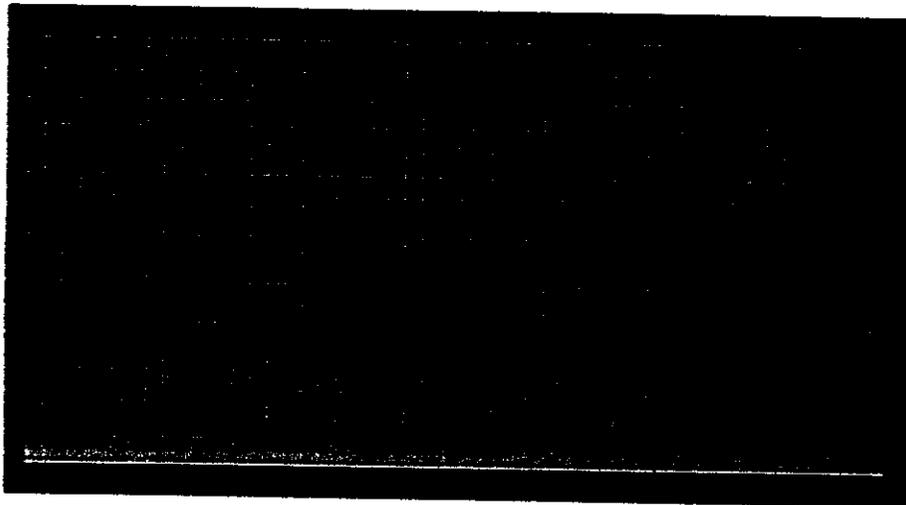
$F$  = le taux d'injection

$\varphi$  = la porosité de la paroi

La résolution de l'algorithme SIMPLE pour le modèle  $k-\varepsilon$  a été faite en utilisant la méthode des volumes finis moyennant le logiciel FLUENT.

Les résultats présentés sont relatifs aux distributions de vitesses et des paramètres de turbulence.

Avant de commencer le traitement des résultats, nous avons pris le soin d'adopter un maillage approprié qui prend en considération les effets de la paroi et ceci par le moyen d'une grille non-uniforme comme le montre la figure.V.1.



**Figure.V.1 : Maillage non-uniforme**

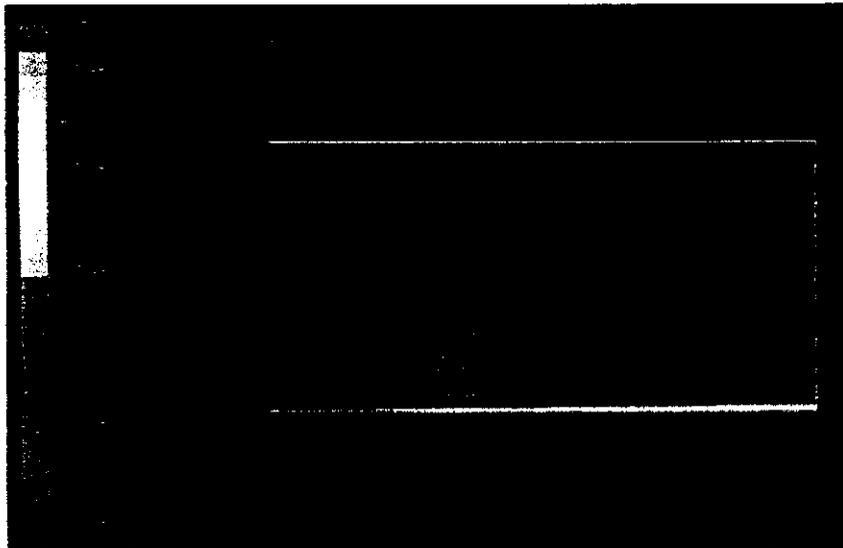
Pour s'assurer de la turbulence de notre écoulement nous avons pris un nombre de Reynolds supérieure à  $5 \cdot 10^5$  ; comme suit :

- Longueur de la plaque :  $l = 1\text{m}$  ;
- Viscosité de l'air :  $\nu = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m.s}$  ;

-Vitesse de l'écoulement :  $U = 50\text{m/s}$  ;

Le nombre de Reynolds,  $Re = U \cdot l / \nu = 50 \cdot 1 / 1.7894 \cdot 10^{-5} = 2,79 \cdot 10^6$  (turbulence assurée)

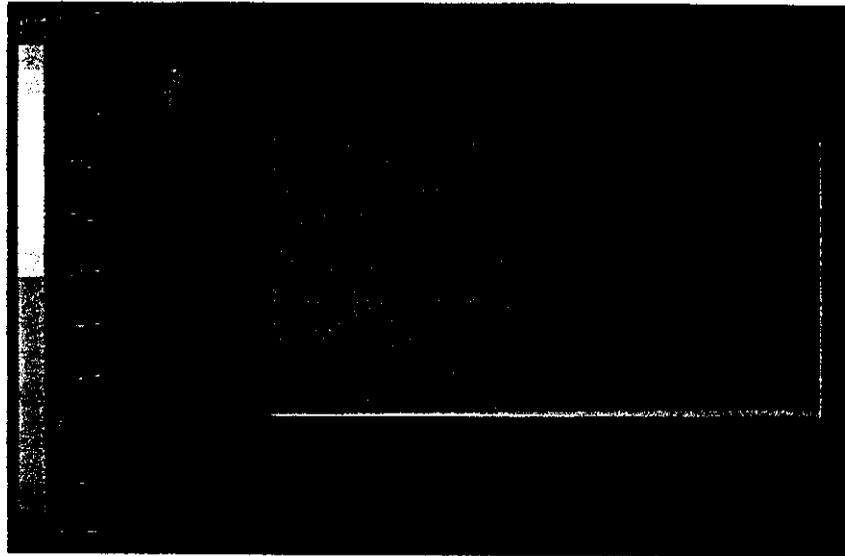
Nous avons choisi l'algorithme SIMPLE pour le découplage « vitesse- pression » et le schéma « upwind » de premier ordre, avec des coefficients de sous-relaxation différents, pour toutes les équations de transport. Nous allons maintenant étudier le comportement de l'écoulement sur une plaque plane sans la section poreuse, afin de déterminer l'endroit sur lequel il faut agir pour contrôler la couche limite. Pour la cas d'une plaque plane parallèle à l'écoulement rappelons que l'apparition du phénomène du décollement est quasiment inexistante car elle présente (plaque plane) la limite inférieure de la traînée parasite [15], donc, notre seul but pour le cas d'une plaque plane est de retarder l'apparition de la couche limite turbulente par l'introduction de la porosité.



**Figure.V.2** : Iso-vitesses pour  $Re = 9,173 \cdot 10^7$

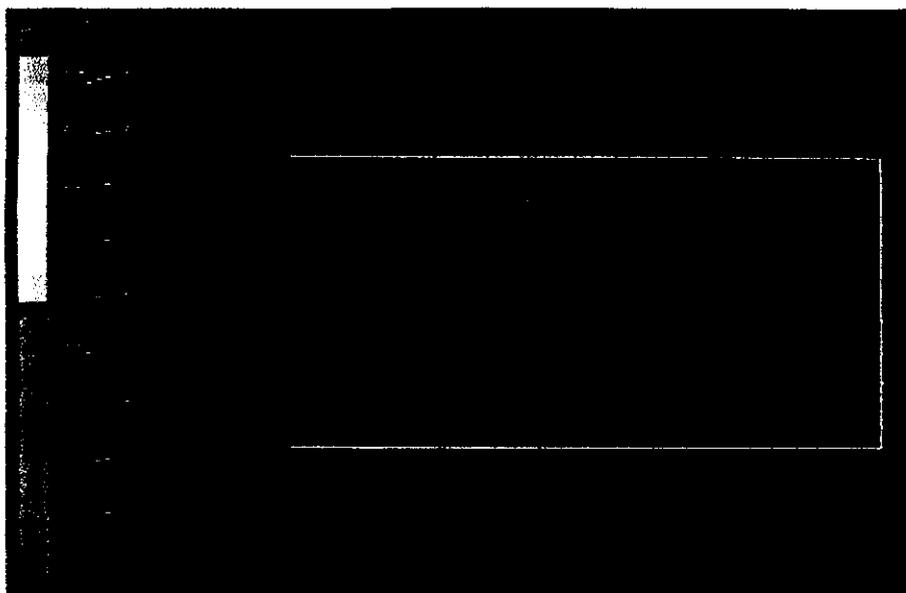
Nous voyons bien la formation d'une couche limite mince turbulente à partir de 0.4m du bord d'attaque, un zoom sur fluent donnera une meilleure lecture. Les résultats obtenus par le code de calcul vont dans le même sens physique des phénomènes, Ainsi, nous

pourrons dire que la résolution de notre problème a été bien menée, car elle concorde avec nos prévisions.



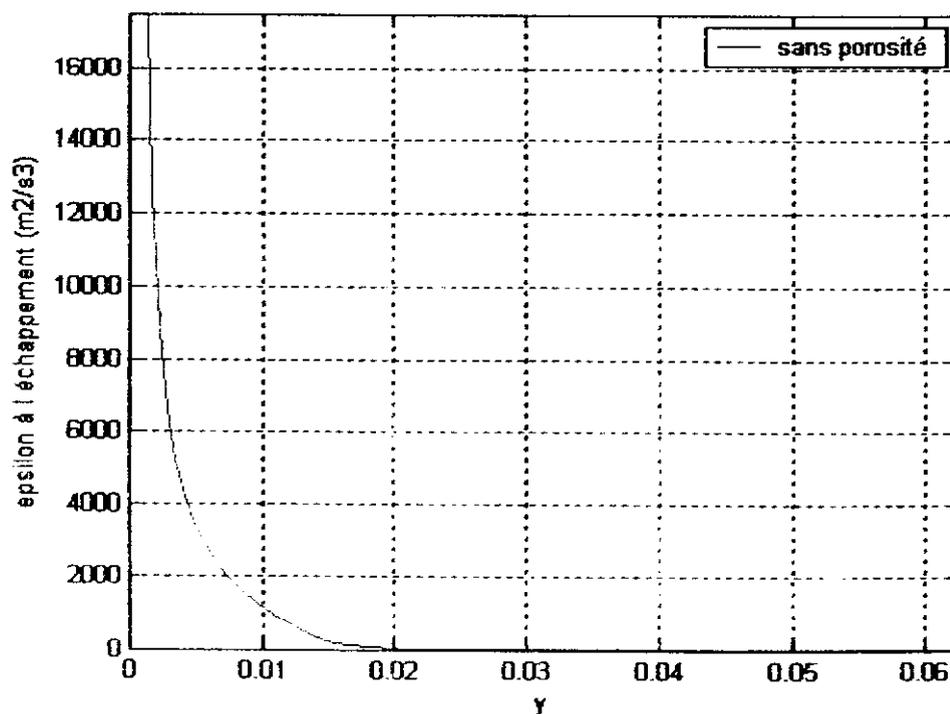
**Figure.V.3 :** Distribution de l'énergie cinétique turbulente « k ».

Nous voyons très bien que notre simulation caractérise très bien la théorie, car l'énergie cinétique turbulente  $k$  est maximale dans la phase finale de la couche limite turbulente et qui correspond aux vitesses turbulentes maximales, puisqu'il est démontré dans la théorie que  $k$  est proportionnelle aux carrés des vitesses turbulentes. Nous remarquons aussi que le régime laminaire proprement dit n'existe pas réellement, puisque nous avons une faible production de turbulence à partir du bord d'attaque.



**Figure.V.4 :** Distribution du taux de dissipation turbulent «  $\epsilon$  ».

On remarque que le taux de dissipation turbulent n'apparaît pas bien dans la figure précédente et pour cela nous allons faire sortir un graphe qui nous donnera l'allure du taux de dissipation à l'extrême droite (échappement) de la plaque plane (Figure.V.5):

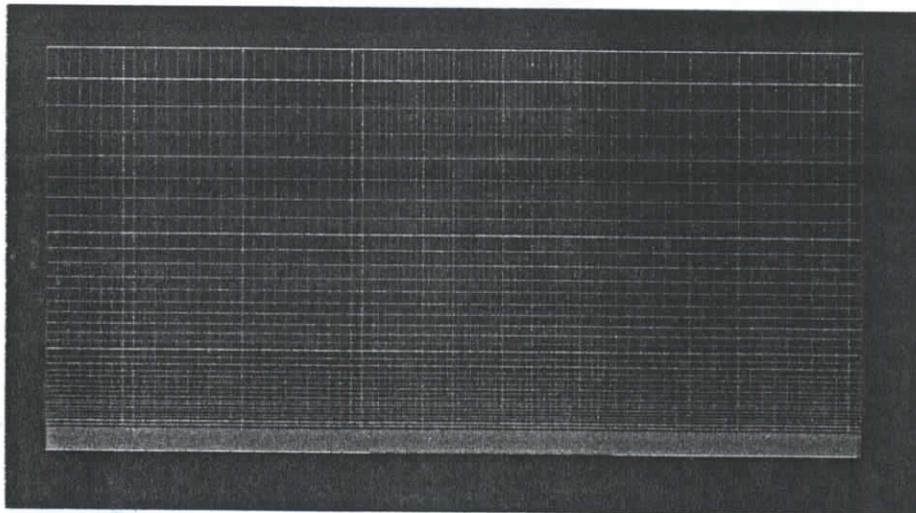


**Figure.V.5 :** taux de dissipation turbulent à l'échappement.

On remarque effectivement, que le taux de dissipation turbulent contrairement à l'énergie cinétique turbulente  $k$ , est plus important au niveau de la plaque, et il diminue très rapidement pour quasiment s'annuler au milieu de l'épaisseur de la couche limite, ce qui confirme les prévisions théoriques, puisque le taux de dissipation est proportionnel au gradient de vitesses turbulentes.

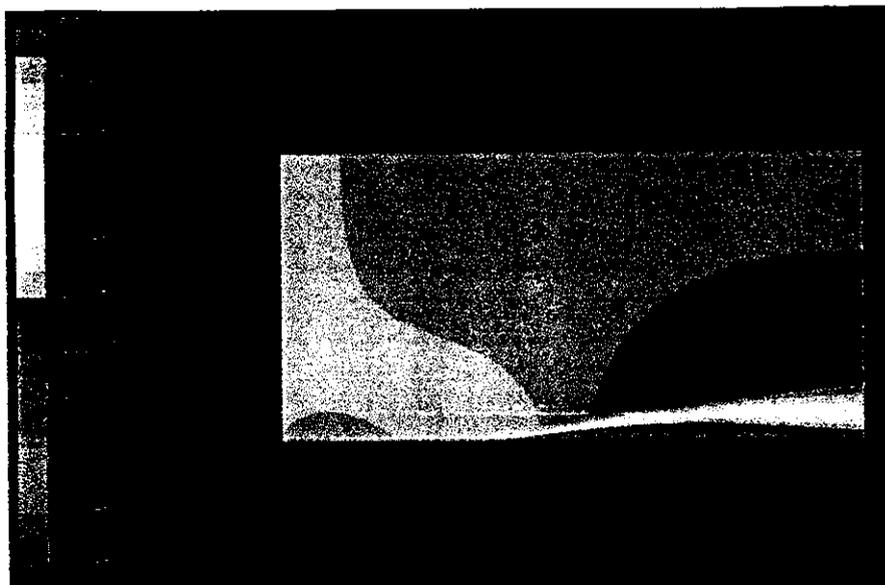
Après avoir simulé le comportement de l'écoulement sur une plaque plane sans porosité, nous avons pu remarquer que la couche limite turbulente proprement dite apparaît à 0.4m du bord d'attaque et à ce point précis nous allons introduire notre section poreuse qui mesurera 0.3m pour essayer d'établir l'effusion et l'aspiration d'un fluide.

Le maillage utilisé pour considérer les effets de la paroi et celle de la porosité est donné par la figure.V.6 suivante.

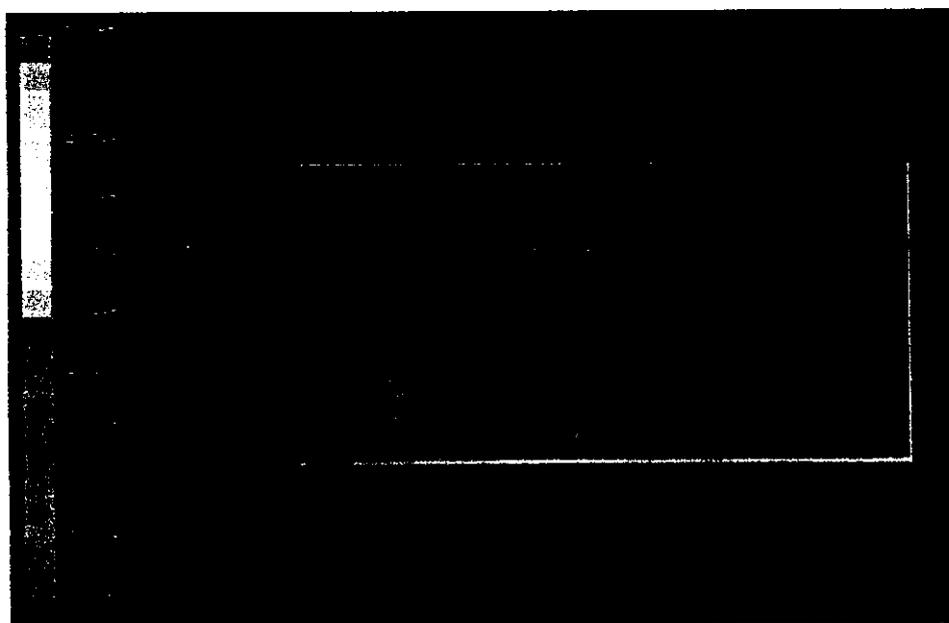


**Figure.V.6 :** Maillage de la plaque avec la porosité

Nous allons faire une simulation comparative entre l'aspiration et l'effusion avec une vitesse d'injection où d'aspiration de 0.5m/s :



**Figure.V.7** : Iso-vitesse pour l'effusion

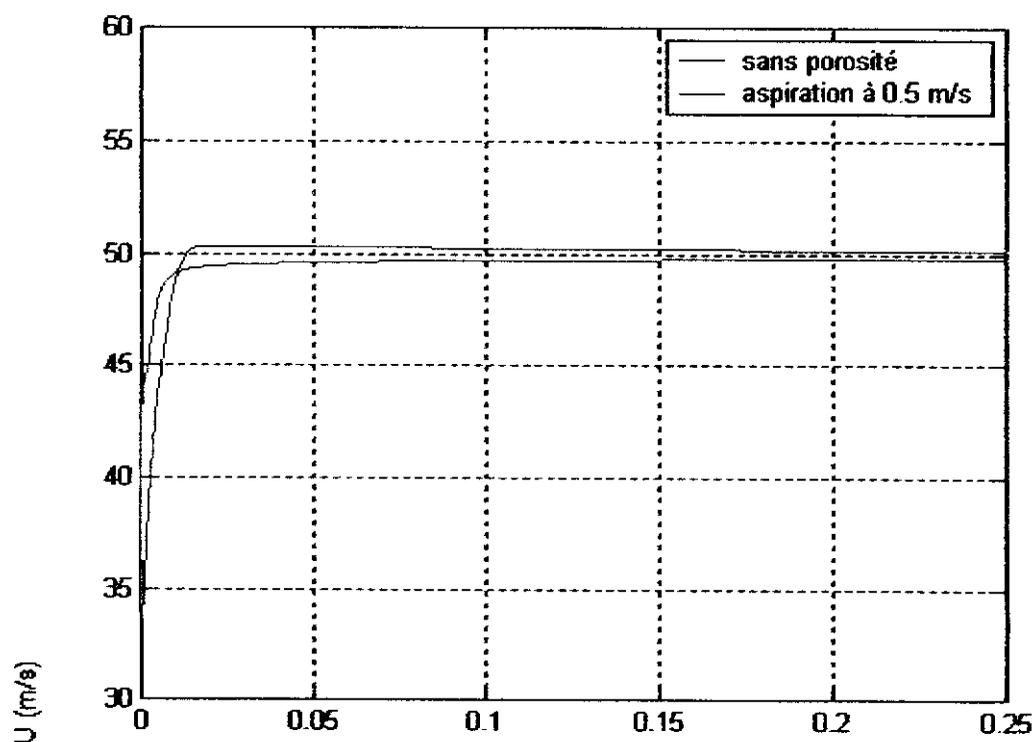


**Figure.V.8** : Iso-vitesse pour l'aspiration

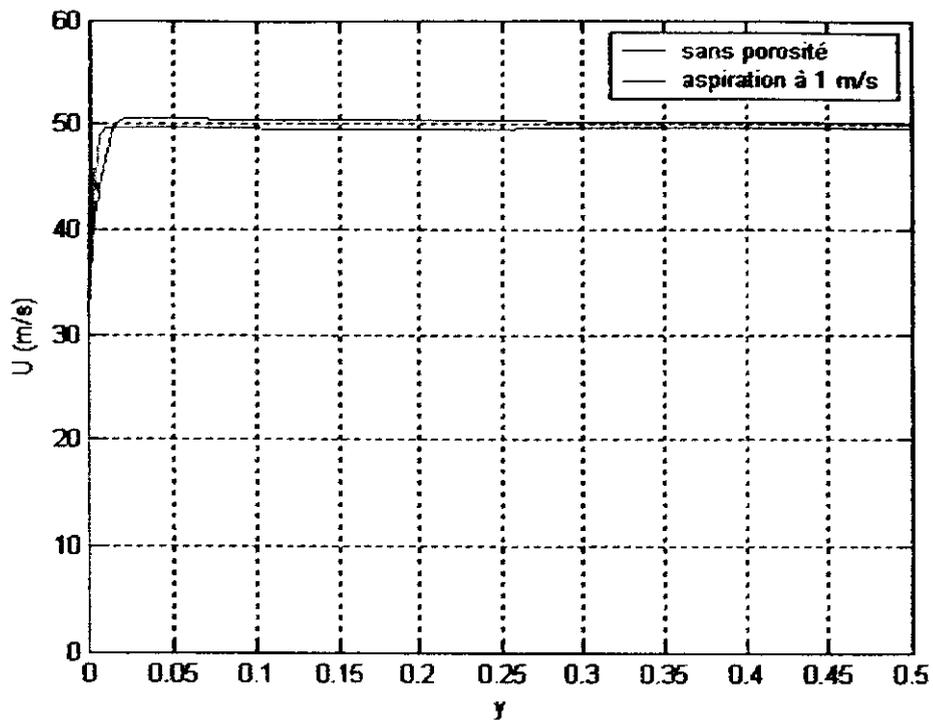
On remarque que l'effusion favorise l'apparence de la turbulence et engendre un retardement de l'écoulement : les couches supérieures glissent sur les couches retardées pour

donner cette allure, par contre l'aspiration de l'écoulement favorise le retardement de la transition et fait diminuer l'épaisseur de la couche limite, donc elle fournit un moyen très intéressant de contrôler la couche limite comme on peut le voir sur la figure V.8.

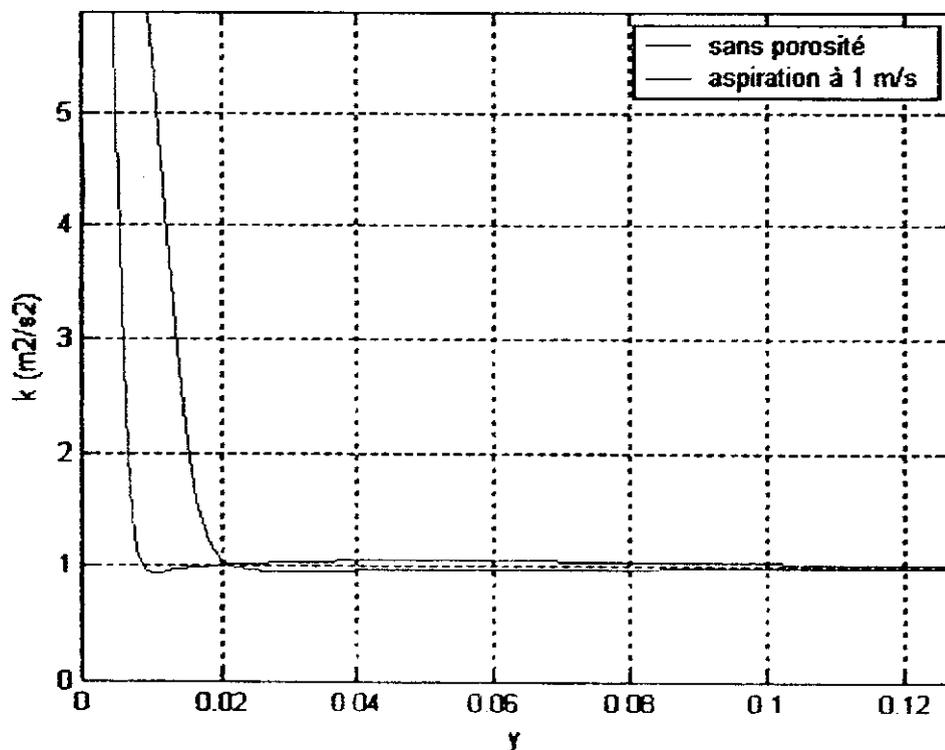
Nous allons maintenant fournir les courbes comparatives pour la distribution des vitesses et les paramètres de turbulence pour clarifier un peu plus nos résultats.



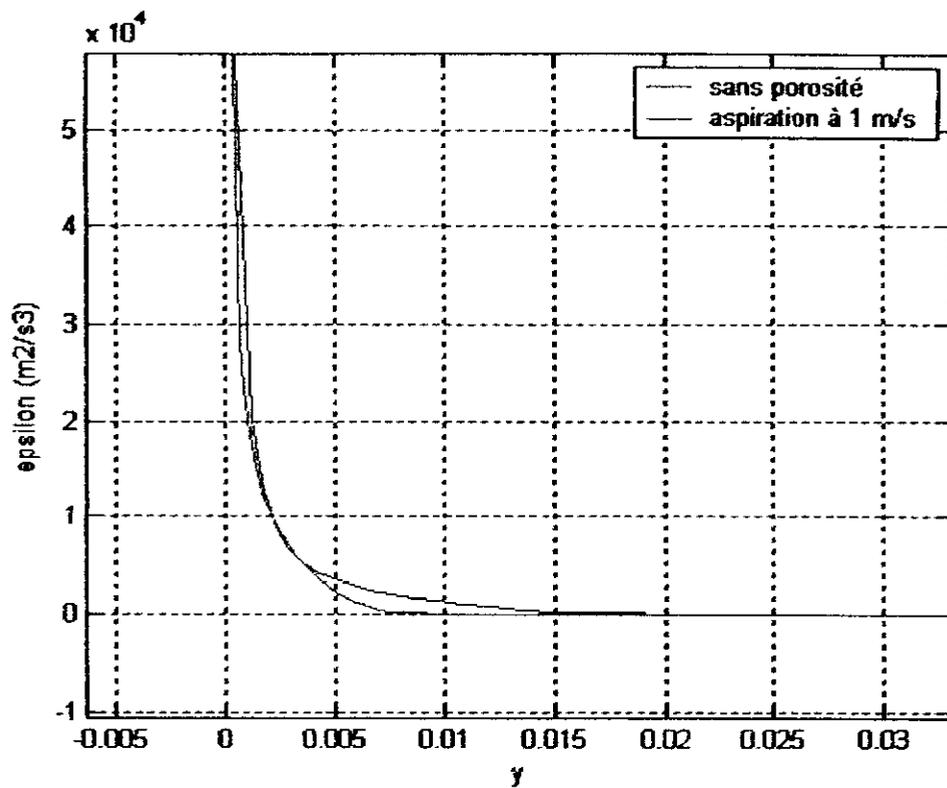
**Figure V.9 :** vitesses d'échappement (aspiration 0.5m/s)



**Figure.V.10** : vitesses d'échappement (aspiration 1m/s)



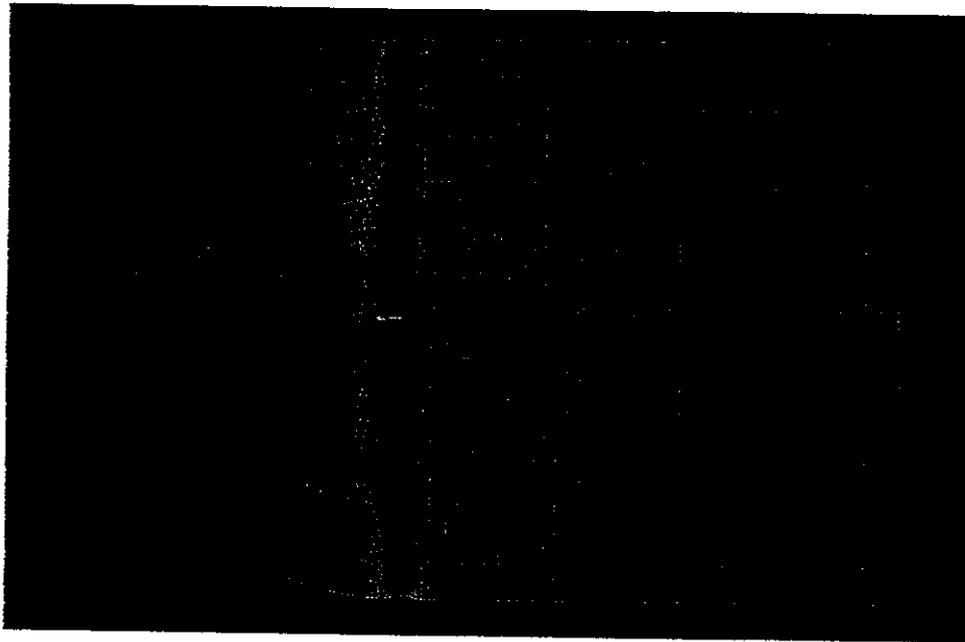
**Figure.V.11** : énergies cinétiques turbulentes à l'échappement



**Figure.V.12** : taux des dissipations turbulents à l'échappement

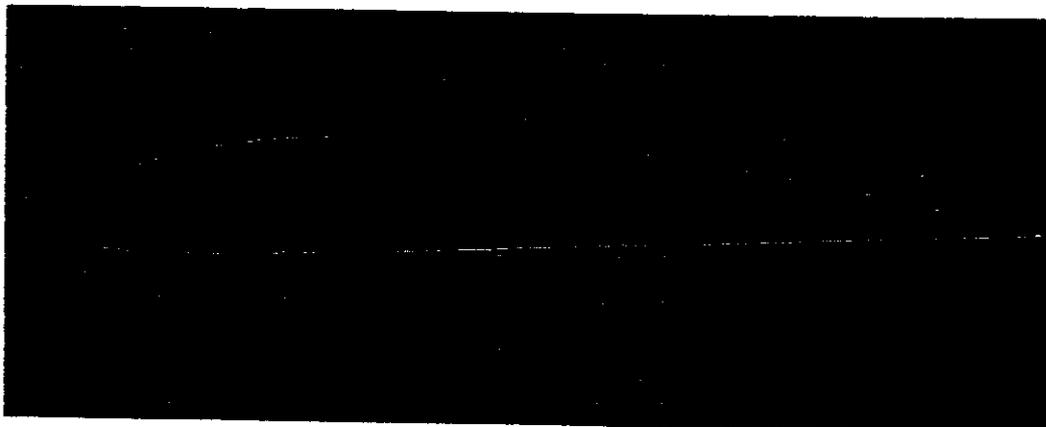
On remarque très bien que l'aspiration a favorisé l'atténuation des effets de la turbulence sur la plaque plane et ceci en diminuant la couche limite, son énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation turbulent  $\epsilon$ .

Afin de voir le phénomène de décollement et de se rapprocher beaucoup plus de la réalité pratique, nous nous sommes intéressés à la configuration d'un écoulement laminaire sur une aile d'avion. Le maillage a été défini afin de considérer l'effet du contact fluide-solide. Le profil de l'aile nous a été communiqué par l'université de KENTUCKY [16].

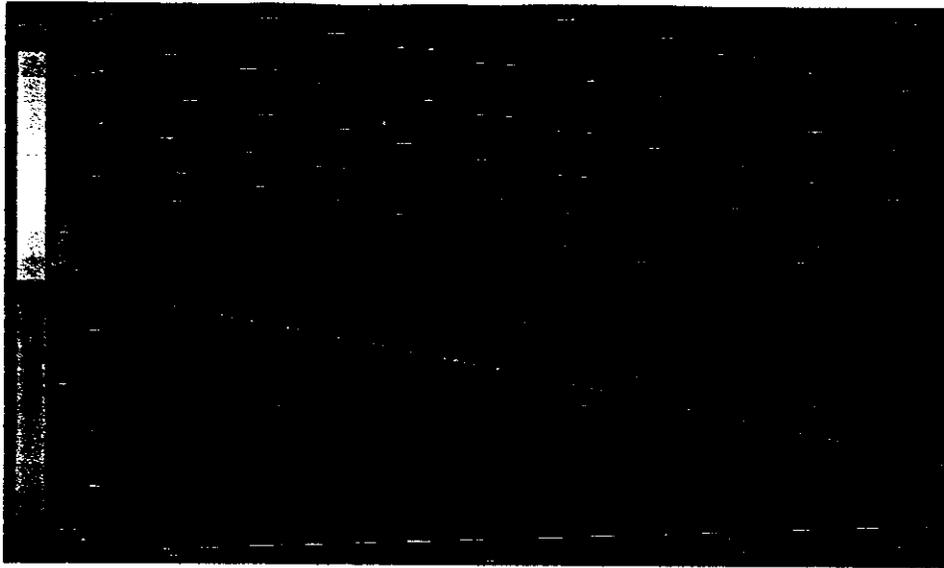


**Figure V.13 :** Maillage de l'aile

Un zoom sur la figure V.13 rapporte ceci :

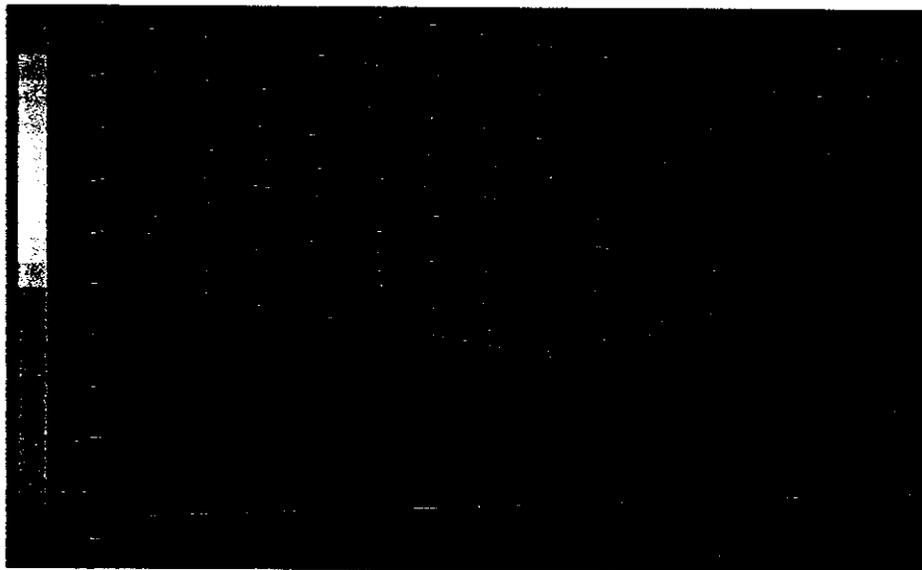


**Figure V.14 :** aile d'avion NACA 0012



**Figure.V.14** : Profil de vitesse

La figure.V.14 montre clairement le phénomène de décollement. Afin de remédier à cette situation, appliquons une aspiration sur cette zone afin de l'atténuer ou de le supprimer carrément.



**Figure.V.15** : suppression du décollement

Nous notons que l'aspiration a bien fait disparaître le décollement de l'aile.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce mémoire a consisté en l'étude d'un écoulement turbulent sur une plaque plane partiellement poreuse. Les résultats obtenus ont permis globalement de caractériser cet écoulement turbulent sur la plaque plane et d'observer le phénomène d'apparition de la couche limite. L'introduction de la section poreuse avait pour objectif de contrôler la couche limite que ce soit du décollement ou de la transition au régime turbulent, qui sont deux phénomènes nuisibles en aérodynamique.

Pour le cas de la plaque plane, puisque le phénomène du décollement est quasiment inexistant, nous nous sommes fixés sur le contrôle de la transition. Pour le décollement nous avons établi une simulation sur une aile d'avion avec une incidence de  $10^\circ$ . La banque de données concernant le profil NACA de cette aile nous a été fournie par l'université de KENTUCKY [16].

Compte tenu de la complexité de la résolution numérique de ce problème, le Code Industriel FLUENT, sur lequel nous nous sommes familiarisés nous a permis de résoudre ces problèmes en obtenant des résultats cohérents avec la réalité physique.

Toutefois les simplifications que nous avons adoptées pour résoudre le problème de la porosité, surtout dans le choix de son modèle, nous permettent d'avoir des résultats intéressants mais qui restent cependant dans le cadre d'une approche du problème réel. Dans cette optique nous proposons que ce travail soit complété dans le futur, en considérant un modèle plus élaboré d'interaction écoulement – structure poreuse avec prise en charge du transfert de matière.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1]- **Encyclopédie Universalis** (2004).
- [2]- **M. Quiret**, La laminarité hybride, *Revue air et cosmos*, P-15, Paris (1998).
- [3]- **L. Prandtl**, Guide à travers la mécanique des fluides, *Dunod* (1952).
- [4]- **H. Schlichting**, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill (1979).
- [5]- **F. M. WHITE**, *Viscous fluid flow*, Mc Graw Hill, Inc (1991).
- [6]- **J. M. Burgers**, *Proceedings of the first international congress for applied mechanics*, P-113, Delft (1924).
- [7]- **Van der Hegge Zijnen**, *Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface*, Thesis Delft (1924)
- [8]- **M. Hansen**, *Die geschwindigkeitsverteilung in der grenzschicht an der langesangeströmten ebenen platte*, *NACA TM* (1930).
- [9]- **H. L. Dryden**, *Recent investigation of the problem of transition*, *Zeitschrift für Flugwissenschaften* (1956).
- [10]- **P. S. Klebanoff**, G. B. Schubauer, *Contribution on the mechanics of boundary layer transition*, *NACA* (1956).
- [11]- **H. W. Emmons**, A. E. Bryson, *The laminar-turbulent transition in a boundary layer*, *Journal of the Aeronautical Sciences* (1951).
- [12]- **P. Chassaing**, *Turbulence en mécanique des fluides, analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Collection POLYTECH de l'INP de Toulouse (2000).
- [13]- **H. K. Versteeg**, **W. Malalasekera**, *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method* (1995).
- [14]- **Jérôme Bellettre**, Thèse doctorat, *Transferts de masse et de chaleur dans la couche limite pariétale et à l'intérieur d'une paroi poreuse plane soumise à de l'effusion ou de la transpiration* (1998).
- [15]- <http://www.bls.fr/amatech/aerotechnique/trainees2/sommaire.htm>.
- [16]- **University of KENTUCKY**, <http://www.engr.uky.edu/~jd/jacob/me599/>

## I- Introduction :

La défaillance du schéma « différence centré » dans certains cas comportant la convection et la diffusion combinées nous force à jeter un coup d'oeil plus détaillé aux propriétés des schémas discrétisés. En théorie on peut obtenir des résultats numériques qui sont indistincts de la solution exacte de l'équation de transport quand le nombre de cellules est infiniment grand, indépendamment de la méthode employée. Cependant, dans des calculs pratiques nous pouvons seulement employer un nombre fini (parfois tout à fait petit) de cellules et nos résultats numériques seront seulement physiquement réalistes quand notre schéma discrétisé a certaines propriétés fondamentales. Les plus importants sont:

- le conservatisme.
- le critère de la frontière
- le transportivisme

### I.1- Conservatisme

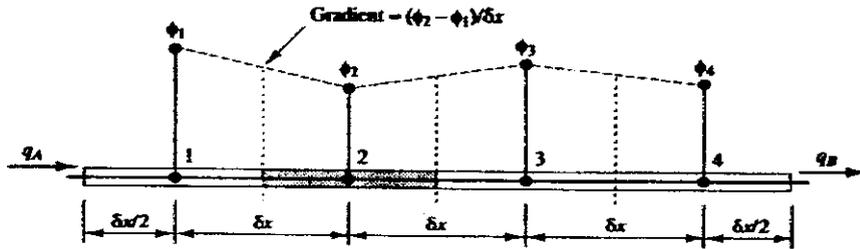
L'intégration de l'équation de convection-diffusion sur un nombre fini de volumes de contrôles rapporte un ensemble d'équations discrétisées de conservation concernant les flux de la propriété transporté  $\phi$  à travers les faces des volumes de contrôles. Pour assurer la conservation de  $\phi$  pour le domaine entier de notre solution, le flux de  $\phi$  quittant un volume de contrôle à travers une certaine face doit être égal au flux de  $\phi$  entrant dans le volume de contrôle adjacent par la même face. Pour réaliser ceci, le flux à travers une face commune doit être représenté d'une façon cohérente (par une et même expression) dans des volumes de contrôle adjacents.

Par exemple, considérons le problème de diffusion stationnaire et unidimensionnel sans les termes source représentées sur le figure 5,7.

Les flux à travers les frontières du domaine sont dénotés par  $q_A$  et  $q_B$ . Considérons maintenant quatre volumes de contrôle et appliquons le schéma « différence centré » pour calculer le flux diffusif à travers les faces de cellules. L'expression pour le flux quittant l'élément autour du noeud

2 à travers sa face *ouest* est  $\Gamma_{w2}(\phi_2 - \phi_1)/\delta x$  et le flux entrant à travers sa face *est* est

$\Gamma_{e2}(\phi_3 - \phi_2)/\delta x$ . Un équilibre global du flux peut être obtenu en additionnant le flux net à travers chaque volume de contrôle et en tenant compte des flux limites pour les volumes de contrôle des nœuds 1 et 4.



**Figure A.1**

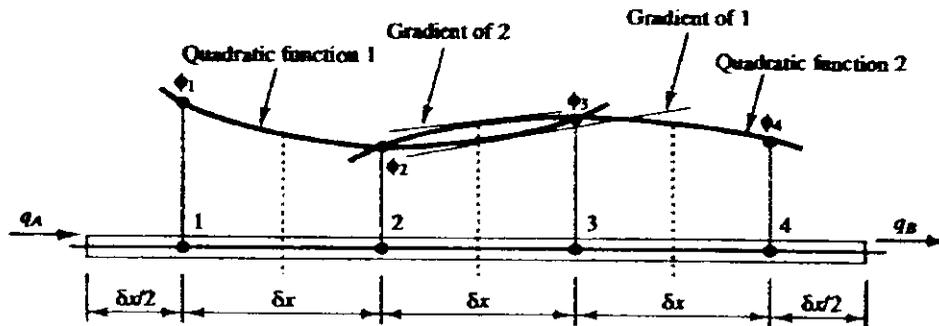
$$\left[ \Gamma_{e1} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} - q_A \right] + \left[ \Gamma_{e2} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} - \Gamma_{w2} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} \right] + \left[ \Gamma_{e3} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} - \Gamma_{w3} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} \right] + \left[ q_B - \Gamma_{w4} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} \right] = q_B - q_A \quad (\text{A.1})$$

Depuis  $\Gamma_{e1} = \Gamma_{w2}$ ,  $\Gamma_{e2} = \Gamma_{w3}$  et  $\Gamma_{e3} = \Gamma_{w4}$ , les flux à travers les faces des volumes de contrôles sont exprimés d'une façon consistante et s'annulent par paires une fois additionnés sur le domaine entier. Seulement les deux flux  $q_A$  et  $q_B$  de frontière demeurent dans l'équilibre global ainsi l'équation (B.1) exprime la conservation globale de la propriété  $\phi$ . L'uniformité des flux assure la conservation de  $\phi$  au-dessus du domaine entier pour la formulation « différence centré » du flux diffusif.

Les formules inconsistantes d'interpolation du flux, génèrent des schémas peu convenables qui ne satisfaits pas la conservation globale. Par exemple, considérons la situation où une formule quadratique d'interpolation, basée sur les valeurs des nœuds 1, 2 et 3 est employée pour le volume de contrôle n°2, et un profil quadratique, basé sur des valeurs aux points 2, 3 et 4 est employé pour le volume de contrôle n°3.

Comme représenté sur la figure B.1, les profils quadratiques résultants peuvent être tout à fait différents.

En conséquence, les valeurs du flux calculées à la face *est* du volume de contrôle n°2 et à la face *ouest* du volume de contrôle n°3 peuvent être inégales si les gradients des deux courbes sont différents aux faces de la cellule. Si c'est le cas, les deux flux ne s'annulent pas une fois additionnés, et la conservation globale n'est pas satisfaite. L'exemple ne devrait pas suggérer que l'interpolation quadratique soit entièrement mauvaise.



**Figure A.2**

### 1.2- Critère de la frontière :

$a_w$	$a_E$	$a_P$
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_w + a_E + (F_e - F_w)$

Les équations discrétisées à chaque point nodal représentent un ensemble d'équations algébriques qui doit être résolu. Des techniques numériques itératives sont employées pour résoudre de grands ensembles d'équation. Ces méthodes commencent le processus de résolution à partir d'une distribution suggérée de la variable  $\phi$  et performe les mises à jour successives jusqu'à ce que une solution convergée soit obtenue. Scarborough (1958) a prouvé qu'une condition suffisante pour la convergence d'une méthode itérative peut être exprimé en termes de valeurs des coefficients des équations discrétisées :

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} \leq 1 \quad \text{dans tous les nœuds} \quad \text{et} \quad \frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} < 1 \quad \text{dans tous les nœuds} \quad (\text{A.1})$$

Ici  $a_p$ , est le coefficient du noeud central P (c-à-d.  $a_p - S_p$ ) et la sommation dans le numérateur est assurée tous les noeuds voisins ( $nb$ ). Si les schémas produisent des coefficients qui satisfont le critère ci-dessus, la matrice résultante de ces coefficients est diagonalement dominante. Pour réaliser la dominance diagonale nous avons besoin de grandes valeurs du coefficient net ( $a_p - S_p$ ), ainsi la pratique de linéarisation des termes de source devrait s'assurer que le  $S_p$  est toujours négatif. Si c'est le cas,  $-S_p$  est toujours positif et s'ajoute à  $a_p$ .

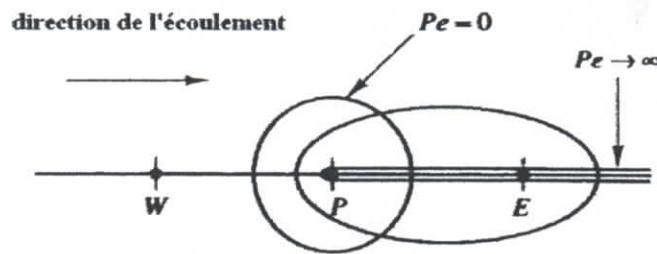
La dominance diagonale est un dispositif souhaitable pour satisfaire les critères de la frontière. Ceci veut dire qu'en l'absence des sources les valeurs nodales internes de la propriété  $\phi$  devraient être liées par ses valeurs aux limites. Par conséquent dans un problème de conduction stationnaire sans sources et avec les températures de frontières de  $500^\circ \text{C}$  et de  $200^\circ \text{C}$ , tous les valeurs intérieures de T devraient être moins de  $500^\circ \text{C}$  et plus grands que  $200^\circ \text{C}$ . Une autre condition essentielle pour le critère de la frontière, est que tous les coefficients des équations discrétisées devraient avoir le même signe (habituellement tous positifs). Physiquement, ceci implique qu'une augmentation de  $\phi$  à un noeud devrait avoir comme conséquence une augmentation de  $\phi$  aux noeuds voisins. Si le schéma de la discrétisation, ne répond pas aux exigences du critère de la frontière, il est possible que la solution ne converge pas du tout ou, si elle converge, elle contient des « fluctuations ».

#### IV- Transportivisme :

La propriété du transportivisme d'un écoulement (Roache, 1976) peut être illustrée en considérant une source constante de  $\phi$  à un point P comme représenté sur la figure A.1. Nous définissons le nombre adimensionnel de Peclet de la cellule comme une mesure des forces relatives à la convection et à la diffusion:

$$P_e = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} \quad (\text{A.2})$$

Où  $\delta x$  = longueur caractéristique (largeur de la cellule). Les lignes sur la figure A.1 indiquent la forme générale des contours d'un  $\phi$  constant (disant  $\phi = 1$ ) pour différentes valeurs de  $P_e$ .



**Figure A.3**

Considérons deux cas extrêmes pour identifier l'ampleur de l'influence du noeud ascendant P au noeud descendant E:

- aucunes convection et une diffusion pure ( $P_e = 0$ )
- aucunes diffusion et une convection pure ( $P_e \rightarrow \infty$ )

Dans le cas de la diffusion pure le fluide est stagnant ( $P_e = 0$ ) et les contours de la Constant  $\phi$  seront des cercles concentriques avec P à leur centre puisque le procédé de diffusion tend à étendre  $\phi$  dans toutes les directions. Les conditions au noeud est E seront influencées par ceux du noeud amont P et également par des conditions des nœuds aval. À mesure que  $P_e$  augmente les contours se déforment de circulaire à elliptique et sont décalées dans la direction de l'écoulement comme indiqué sur la figure A.3. L'influencer devient de plus en plus Polarisé vers la direction ascendante aux grands nombres de  $P_e$  de sorte que le noeud E soit fortement influencé par des conditions de P, mais par contre les conditions à P éprouvera une influence faible ou aucune des conditions de E. Dans le cas de la convection pure ( $P_e \rightarrow \infty$ ) les contours elliptiques sont complètement étirés dans le sens d'écoulement. Toute la propriété  $\phi$  provenant de la source P est

immédiatement transportée en aval vers le E. Ainsi la valeur de  $\phi$  à E est affectée seulement par des conditions ascendantes et puisqu'il y a aucune diffusion  $\phi_E$  est égal à  $\phi_P$ .

Il est très important que le rapport entre la magnitude du nombre de Peclet et la direction de l'influencer, connue sous le nom de transportivisme, soit soutenu dans le schéma de discrétisation.

## II- Évaluation du schéma « différence centré » pour des problèmes de convection-diffusion

### II.1- Conservatisme

Le schéma « différence centrée » emploie des expressions consistantes pour évaluer les flux convecteurs et diffusifs aux faces des volumes de contrôles. Les discussions dans la section précédente prouvent que le schéma est conservateur.

### II.2- Critère de la frontière

a) Les coefficients internes de l'équation discrétisé de transport (chapitre III) sont :

$a_w$	$a_E$	$a_p$
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_w + a_E + (F_e - F_w)$

Un champ unidimensionnel stationnaire d'écoulement est également régi par l'équation de continuité discrétisée (chapitre III). Cette équation déclare que  $(F_e - F_w)$  égale à zéro quand le champ d'écoulement satisfait la continuité. Ainsi l'expression pour  $a_p$  dans (chapitre III) devient égale à  $a_p = a_w + a_E$ . Les coefficients du schéma « différence centrée » satisfont le critère de Scarborough (A.1).

b) Avec  $a_E = D_e - F_e / 2$ , la contribution convective au coefficient *est* est négatif, si la convection domine il est possible que  $a_E$  soit négatif. En ajoutant que  $F_w > 0$  et  $F_c > 0$  (c.-à-d. l'écoulement est unidirectionnel), pour que  $a_E$  soit positif  $D_e$  et  $F_e$  doivent satisfaire la condition suivante:

$$F_e / D_e = P_e < 2 \quad (\text{A.3})$$

Si le nombre de Peclet  $P_e$  est plus grand que 2 le coefficient *est* sera négatif. Ceci viole une des Conditions pour le critère de la frontière et peuvent mener à une solution physiquement impossible

### II.3- Transportivisme

Le schéma « différence centrée » introduit l'influence au noeud P des directions de tous ses voisins pour calculer le flux convecteur et diffusif. Ainsi le schéma n'identifie pas la direction de l'écoulement ou la force de diffusion relative à la convection. Il ne possède pas la propriété de transportivisme aux grands nombres de Peclet  $P_e$ .

### II.4- Exactitude

L'erreur de troncation de la série de Taylor du schéma « différence centrée » est de deuxième ordre (voir le paragraphe V). La condition pour des coefficients positifs dans le schéma « différence centrée » (comme donné à la formule (A.3)) implique que le schéma sera stable et précis seulement si  $P_e = F/D < 2$ . Il est important de noter que le nombre de Peclet des cellules, comme défini par (A.2), est une combinaison des propriétés fluides ( $\rho$  et  $\Gamma$ ), une propriété d'écoulement ( $u$ ) et une propriété de la grille de calcul ( $\delta x$ ). Ainsi pour des valeurs données de  $\rho$  et de  $\Gamma$  il est seulement possible de satisfaire la condition (A.3) si la vitesse est petite, par conséquent le nombre de Reynolds est bas dans la diffusion dominée, ou si l'espacement de grille est petit.

En raison de cette limitation, le schéma « différence centrée » n'est pas une pratique appropriée de discrétisation pour des calculs d'usage.

### **III. Evaluation du schéma « upwind »**

#### **III.1- Conservatisme**

Le schéma upwind emploie des expressions conformes pour calculer les flux par les faces de cellules: donc on peut facilement montrer que la formulation est Conservatrice

#### **III.2- Le critère de la frontière**

Les coefficients de l'équation discrétisée sont toujours positifs et satisferont les conditions pour le critère de la frontière. Quand l'écoulement satisfait la continuité, le terme  $(F_e - F_w)$  dans  $a_p$  (voir Chapitre III) est égale à zéro et donne  $a_p = a_w + a_e$ , qui est souhaitable pour les solutions itératives stables. Tous les coefficients sont positifs et la matrice de coefficient est diagonalement dominante, par conséquent pas d'agitations se produisant dans la solution.

#### **III.3- Transportivisme**

Le transportivisme est établis dans la formulation.

#### **III.4- Exactitude**

Le schéma « upwind » est de premier ordre dans les séries Taylor de troncation d'erreur. En raison de sa simplicité le schéma « upwind » a été largement appliqué dans des calculs de CFD. Il peut être facilement prolongé à des problèmes multidimensionnels par l'application répétée de la stratégie d'upwind incorporée dans les coefficients de l'équation ( chapitre III. ) dans chaque direction. Un inconvénient important du schéma est qu'il produit des résultats

incorrects quand l'écoulement n'est pas aligné avec les lignes de grille. L'erreur résultante a une apparence équivalente à une diffusion et désigné sous le nom de *l'erreur de diffusion*.

#### **IV- Evaluation du schéma « hybrid »**

le schéma « hybrid » exploite les propriétés favorables des schémas « upwind » et « différence centrée ». il commute au schéma « upwind » quand le schéma « différence centrée » produit des résultats imprécis aux nombres élevés de  $Pe$ . Le schéma est entièrement conservateur, Il répond à l'exigence du transportivisme en employant une formulation d'upwind pour les grands nombres de Peclet. Ce schéma produit des solutions physiquement réalistes et il est fortement stable en comparaison avec les schémas d'ordre plus supérieur. Le schéma « hybrid » a été largement répandu dans diverses procédures de calcul de la dynamique des fluides (CFD) et s'est avéré très utile pour prévoir des écoulements pratiques. L'inconvénient est que l'exactitude en terme d'erreur de troncation de la série de Taylor est seulement de premier ordre.