

10/03

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en Automatique

Promotion : Juin 2003

MODELISATION ET DIMENSIONNEMENT D'UN ROBOT MANIPULATEUR COMPORTANT UNE BOUCLE CINEMATIQUE

Proposé et dirigé par :

M^r H. CHEKIREB
M^r M. TADJINE

Etudié par :

M^r BENAÏSSA M^{ed} Kamel
M^r BOUDJEMAA Abdel Malek

Laboratoire de Commande des Processus

E.N.P. 10, Avenue Hassen-Badi, El-Harrach , Alger

Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce travail aux êtres les plus chers à mon cœur :

Mes parents

Mes frères et sœurs spécialement Wassila

Ma grande mère

Mon cousin Rafik

Mon copain Redha .

BOUDJEMAA Abdel Malek

*A la mémoire de ma tante Ghania,
Surtout à toi ma très chère Maman*

BENAÏSSA M^{ed} Kamel

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Le travail présenté dans ce mémoire s'est déroulé au sein du laboratoire de commande des processus à l'école Nationale polytechnique D'Alger.

Il nous est particulièrement agréable de témoigner notre infinie reconnaissance à Monsieur H.CHEKIREB et Monsieur M.TADJINE, pour avoir bien voulu nous diriger et nous assister dans notre travail et pour nous avoir fait profiter de leurs précieux conseils.

Nous tenons également à remercier Monsieur M.CHAKIR, pour l'aide et la disponibilité qu'il nous a accordée tous le long de l'élaboration de ce mémoire.

Nos vifs remerciements, s'adressent à Monsieur BELKASMI du Département du Génie Mécanique, pour ses précieux conseils, sans les quels notre travail serait inachevé.

Enfin, nous ne pouvons oublier nos amis Mounib, Meriem, Hichem, Mounir, Boualem et Saïd ; qui sont pour beaucoup dans l'aboutissement de notre projet grâce à leurs présences et encouragements.

Résumé :

Les travaux présentés dans ce mémoire, concernent la modélisation et le dimensionnement d'un robot manipulateur comportant une boucle cinématique fermée .

Nous avons d'abord, fait une présentation structurelle et conceptuelle de notre robot, puis nous avons calculer ses modèles géométriques direct et inverse selon une méthode de description géométrique spécifique au robot à structure fermée, ensuite nous avons trouvé les modèles différentiels et étudié les positions singulières.

Nous avons, alors, calculer le modèle dynamique en se basant sur le formalisme de Newton-Euler, et déduit les expressions des couples moteurs .

Finalement, nous avons réalisé un dimensionnement statique en se basant sur les lois de la RDM, et donc établie des valeurs initiales pour les paramètres géométriques de la structure du robot, et vérifier leurs validités par une simulation dynamique .

Mots Clés :

Robots manipulateur à structure fermée – Modèle géométrique, cinématique et dynamique
Formalisme de Newton-Euler – dimensionnement statique – Lois de la RDM .

Abstract :

The works presented in this thesis, cover the modelling and the dimensioning of a cinematic closed chain robot manipulator.

First, we give a structural and conceptual presentation of our robot, than we calculate the Kinematics models (direct and inverse ones) using a specific geometrical description method of the closed loop robots, than we found the differential models and study the singular positions.

We obtained the dynamic model using the Newton-Euler algorithm, and present the expressions of the motors torques of the manipulator.

Finally, we make a static dimensioning based on the RDM lows, and establish the initial values of the geometrical parameters of the structure, and verify their validity bay a dynamic simulation .

Key Words :

Closed chain robot manipulator – Kinematics ,differential and dynamic models
Newton-Euler algorithm – static dimensioning – the RDM lows.

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى تمثيل و حساب الأبعاد الهيكلية لذراع رطل ألي أحتوي على حلقة حركية مغلقة. لقد قمنا بتقديم الهيكل ثم قمنا بالتمثيل الهندسي مستعملين طريقة خاصة بالأذرة ذات الحلقة مغلقة ثم عرضنا لتمثيل التفاضلي الذي سمح بدراسة الوضعيات الخاصة ثم عرضنا التمثيل التحريك للذراع بواسطة طريقة Newton-Euler و كتبنا عبارات عزوم المحركات. و أخيرا قمنا بحساب الأبعاد الهيكلية و هذا باستعمال قوانين مقاومة المواد و استعمال هذه الأبعاد في عملية المحاكاة.

الكلمات المفاتيح:

ذراع ذو حلقة حركية مغلقة- التمثيل: الهندسي-الحركي و التحريك- طريقة Newton-Euler حساب الأبعاد- قوانين مقاومة المواد.

TABLE DES MATIERES



Introduction générale.....	1
Chapitre1 : Présentation de la structure.....	3
1.1. Introduction.....	3
1.2. Robot articulé.....	3
1.3. Concept des robots à structure fermée.....	3
1.4. La structure proposée.....	4
1.4.1. Le choix du matériau.....	5
1.4.2. Les moteurs.....	6
1.4.3. La stabilité de la structure.....	7
1.5. Volume de travail.....	8
1.6. Conclusion.....	9
Chapitre 2: Etude géométrique du robot.....	10
2.1. Introduction.....	10
2.2. Modèle géométrique direct (MGD).....	10
2.2.1. Formalisme de description géométrique.....	11
2.2.2. MGD des robots à structure fermée.....	14
2.3. Calcul MGD de la structure.....	14
2.4. Equations de contrainte de fermeture de la boucle.....	17
2.5. Formulation du MGD de la structure.....	18
2.5.1 .Equations de position.....	19
2.5.2. Equations d'orientation.....	19
2.6. Modèle géométrique inverse (MGI).....	21
2.6.1. Positionnement du problème.....	21
2.6.2. Modèle géométrique inverse des robots à structure fermée..	22
2.7. Calcul du modèle géométrique inverse	22
2.8. Modèle cinématique direct (MCD).....	26
2.8.1. Introduction.....	26
2.8.2. Modèle cinématique des robots à structure fermée.....	26

2.9. Matrice Jacobienne de base.....	27
2.9.1. Obtention de la matrice Jacobienne.....	27
2.9.2. Calcul de la Jacobienne.....	28
2.9.3. Forme simplifiée de la Jacobienne.....	30
2.9.4. Les équations de la contraintes cinématiques.....	31
2.10. Modèle cinématique inverse (MCI).....	31
2.11. Utilisation de la matrice pseudo inverse.....	31
2.12. Les positions singulières.....	31
i . Première position singulière.....	32
ii . Seconde position singulière.....	33
2.13. Conclusion.....	34
 chapitre3 : Etude dynamique du robot.....	 37
3.1. introduction.....	38
3.2. Modèle dynamique inverse (MDI).....	37
3.3. Description de la structure.....	38
3.4. Obtention du modèle dynamique.....	39
3.4.1. Formalisme de Lagrange.....	40
3.4.2. Formalisme de Newton-Euler.....	40
Algorithme de Newton- Euler.....	41
i . La récurrence avant.....	41
ii. La récurrence arrière.....	42
3.5. Calcul du modèle dynamique.....	43
3.5.1. La récurrence avant.....	43
3.5.2. La récurrence arrière.....	55
3.6. Equations de la contrainte de fermeture de la boucle.....	65
3.7. Conclusion.....	69
 Chapitre4 : Dimensionnement de la structure du robot.....	 70
4.1. Introduction.....	70
4.2. Dimensionnement statique.....	70
4.3. Définitions.....	70
4.4. Application des lois de la RDM.....	71
4.5. Calcul des paramètres.....	78

2.6. Calcul des masses des corps	81
4.7. Simulation.....	81
4.7.1. Types de mouvements.....	81
4.7.2. Interpolation de degré cinq.....	82
4.7.3. Résultats de la simulation.....	83
4.8. Conclusion.....	84
Conclusion générale.....	85
Références bibliographiques.....	87
Annexes	
Annexe A.....	90
Annexe B.....	91
Annexe C.....	93

INTRODUCTION GENERALE :



Si l'idée d'utiliser des machines plus ou moins sophistiquées pour faciliter le travail de l'homme est très ancienne, le principe d'une machine programmable est plus récent (boîte à musique à cylindre interchangeable, orgue de barbarie, piano, machine à tricoter avec bandes perforées).

Le rêve de l'homme de créer des êtres mécaniques rappelant le comportement des êtres vivants a conduit des mécaniciens adroits et talentueux à développer des automates humanoïdes.

Le terme « **robot** » vient du mot slave « robota » qui signifie travail forcé ou corvée ; cette dénomination a été utilisée par l'écrivain tchèque Karel Capek dans sa pièce futuriste « les robots universels de Rossum » au début des années 20 pour désigner des machines automatiques appelées à remplacer l'homme dans les tâches les plus pénibles.

Quelques soit son domaine , le robot actuel n'a rien d'un androïde , si ce n'est que l'on recourt toujours à la technologie de l'anatomie humaine pour décrire ses éléments de structures : bras , coude , avant-bras, poignet , main ; il est vrai qu'il semble difficile de faire mieux que la nature en ce qui concerne la mobilité, le positionnement , la préhension avec délicatesse ou force , néanmoins , les chercheurs s'efforcent de s'y rapprocher le plus , en réalisant des architectures et des modèles plus adaptés aux besoins des industriels .

L'objectif principal de ce travail est le dimensionnement d'un bras manipulateur poly-articulé (4R) , contenant une boucle cinématique , la conception de cette structure fait partie des perspectives du L.C.P à l'ENP , d'autant plus que l'automate programmable dessiné à sa commande a déjà fait l'objet d'une étude antérieure .

Même si un tel travail se destine plus a un mécanicien nous tenterons de déterminer les dimensions initiales de cette structure et d'apporter des suggestions sur sa conception .

Notre travail est composé de quatre chapitres tel que :

- Le **premier chapitre** : décrit une étude structurelle de notre bras manipulateur , après une présentation des concept des robots à boucle fermé et leurs propriétés , nous sommes passés à l'étude de la structure proposées et les problèmes qui sont liés à sa conception : la symétrie , l'équilibre statique , le choix du matériau
- Dans le **deuxième chapitre** , de brefs rappels sur les outils mathématiques et méthodes de descriptions géométriques et cinématiques des robots sont présentés . Ensuite les modèles géométrique direct et inverse , qui ne diffèrent pas beaucoup de ceux des porteurs sériels , puis les modèles cinématiques direct et leurs inverse sont développés et utilisés pour l'étude de singularité de la structure .
- Dans le **troisième chapitre** nous déduisons les équations dynamiques du robot en utilisant le formalisme de Newton Euler ; un algorithme itératif , qui permet d'exprimer les charges appliquées à chaque corps de la structure dans les trois dimensions .Ce qui présente un intérêt indéniable pour la conception .
- Enfin dans le **quatrième et dernier chapitre**, nous tentons de calculer les paramètres géométriques des différents éléments du robot, par un dimensionnement statique, dans un premier lieu en appliquant les lois de la RDM, puis nous décidons avec des simulations, sur la suffisance ou non des moteurs mis a notre disposition.

Chapitre 1 :

Présentation de la structure du robot

1.1. Introduction :

La motivation première de notre travail est le dimensionnement d'un robot à chaîne cinématique fermée. Bien qu'une telle étude reviendrait plus de droit à un mécanicien, on pourrait, dans un premier lieu, tenter le calcul des paramètres géométriques des éléments constituant le robot.

Pour mener au mieux ce calcul, nous nous devons de définir, tous d'abord, le concept ainsi que l'aspect de notre robot, et de ce fait mettre en évidence les propriétés structurelles de ce dernier.

1.2. Robot articulé :

Les robots articulés se composent d'un assemblage de trois éléments : un bâti rotatoire horizontal qui supporte un bras à deux articulations. Cet arrangement copie tout simplement le bras humain. La pince, située en bout de bras, imite la main, attachée à l'avant bras du robot par un poignet. L'épaule est souvent munie d'un degré de liberté de rotation horizontale.

Du fait que ce genre de robot possède trois axes de rotation principaux, sa résolution volumique dépend largement de sa position de travail ; elle reste de toute façon mauvaise en bout de bras, puisque s'y accumulent les résolutions des trois articulations, en revanche, ce type de robot possède une excellente souplesse, ce qui en explique le succès dans l'industrie de ce type de systèmes robotisés.

1.3 Concept des robots à structure fermée :

Les robots industriels les plus répandus sont ceux du type sériels [16], c'est-à-dire que leur structure mobile est une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté ; chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit même de l'articulation.

Ce type de robots a pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simple sur le plan des calculs liées à leur commande. Par contre, ses principaux défauts se résument ci-dessous :

- Inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs, organes de transmission,...)
- Manque de rigidité par la mise en série d'éléments élastiques, et donc une précision réduite.

Dans le but de remédier à ces inconvénients, un nouveau concept de robot comportant une boucle fermée a vu le jour. Toutes les articulations de la boucle n'étant pas indépendantes, il est possible de choisir celles qu'on veut motoriser ; ceci permet de ramener les moteurs vers la base fixe, donc de diminuer les masses en mouvement sans devoir ajouter des transmissions compliquées qui dégradent les performances. De plus, cette boucle apporte à la structure une rigidité mécanique élevée, donc une meilleure précision ; cependant l'espace de travail est plus réduit pour ce type de robot.



Figure 1.1 *Le robot industriel IRB 1400(Firme ABB)*

1.4 La structure proposée :

Le bâti du robot est constitué d'un bras horizontal cylindrique C1 , supporté par une barre verticale C2 , ils sont reliés à deux autres barres C3 et C4 , chacune parallèle à l'une des deux premières respectivement, de sorte à former un parallélogramme. Tout l'ensemble est monté sur un support fixe, de sorte à pouvoir effectuer une rotation horizontale par rapport à ce dernier.

Toutes les articulations du corps sont rotoïdes, les deux corps C2 et C3 sont entraînés par des moteurs- réducteurs situés sur la base. Les autres articulations de la boucle ne sont pas motorisées. A l'extrémité de la barre horizontale, un moteur donne un mouvement de rotation au poignet.

Nous ferons en sorte d'avoir une symétrie pour chaque corps de la structure par rapport à un axe ou un plan, afin d'avoir des tenseurs d'inertie diagonaux, ce qui simplifie considérablement l'expression du modèle dynamique du robot. Les moteurs et les engrenages sont disposés de façon à garder le centre de gravité de chaque barre sur son axe de symétrie.

Les schémas suivants décrivent au mieux la structure du robot, et mettent en évidence les efforts réalisés sur les symétries des différents éléments de la structure .

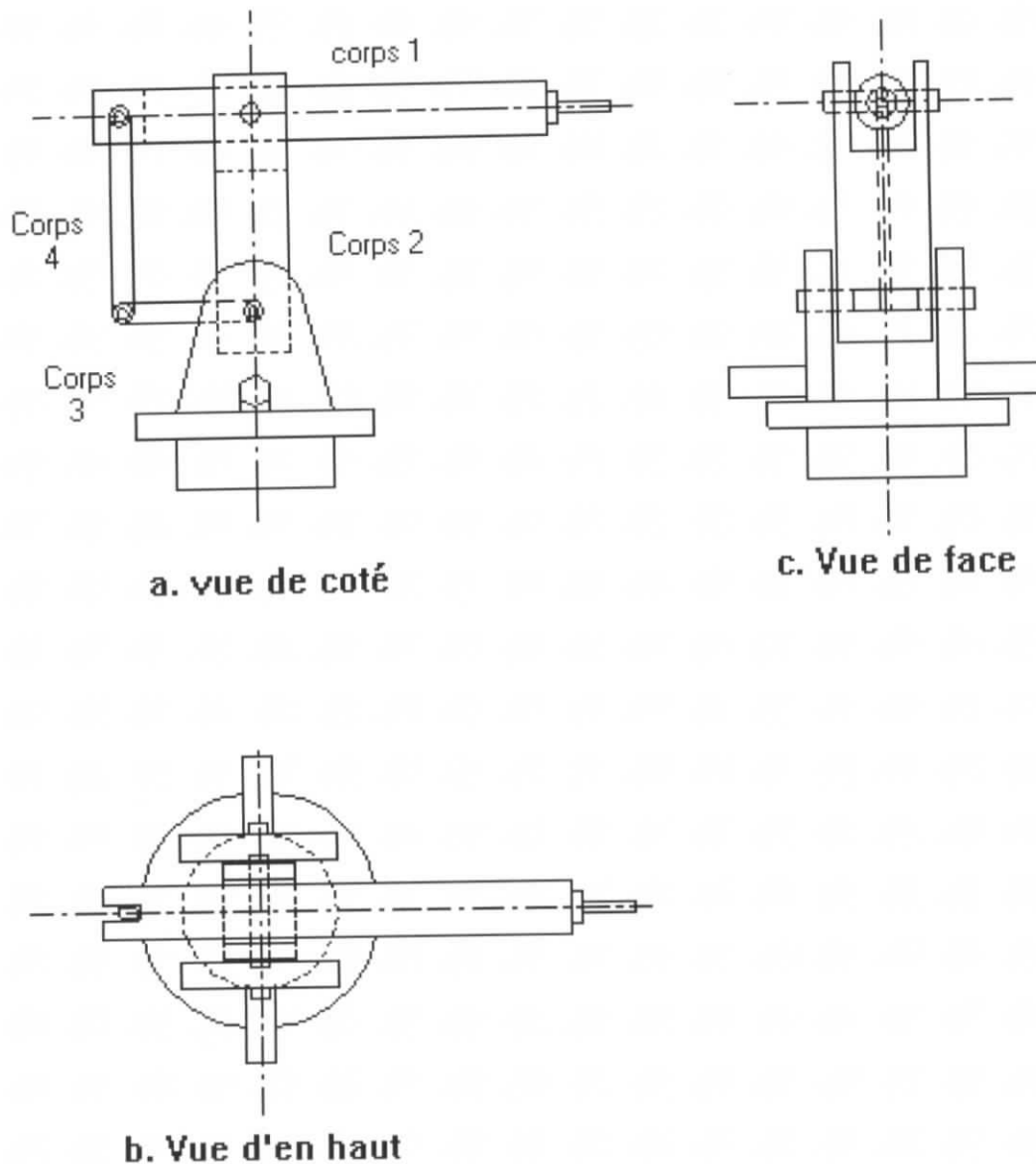


Figure 1.3 Les trois vues de la structure

1.4.1 Le choix du matériau :

Dans le soucis, de concevoir une structure rigide, et pas trop lourde à la fois , nous nous sommes intéressés à distinguer parmi plusieurs matériaux, celui qui convient le mieux. Après l'étude des caractéristiques physiques de quelques matériaux (tableau 1.1).

<i>matériau</i>	<i>Désignation SVM</i>	ρ (kg/m^3)	E (Gpa)	ρ/E (m^2/s^2)
Aluminium	EN AW-Al 99.5 O	2700	69	39.13
Alliage d'aluminium	EN AW-Al MgSi T6	2700	70	38.57
Acier inoxydable	X20Cr13	7900	200	39.5
Cuivre recuit	-	8900	120	74.16
Alliages cuivre-zinc	CuZn38Pb2(demi-dur)	8500	80	106.25
Alliages cuivre-étain	G-CuSn10	8800	90	97.77
Zinc laminé	-	7100	85	83.52

Tableau 1.1 Valeurs des caractéristiques mécaniques de principaux métaux et alliages

ρ : masse volumique.

E : module d'élasticité.

ρ/E : rigidité spécifique.

Notre choix se porte particulièrement sur un alliage d'aluminium (*EN-WA-Al-O*), car il présente une bonne rigidité, pour une masse volumique relativement faible. De plus, il est très disponible sur le marché ; il est d'ailleurs utilisé dans beaucoup d'applications tel que : les cadres des fenêtres, panneaux, le mobilier,... etc.

1.4.2 Les moteurs :

Nous avons à notre disposition des moteurs-réducteurs DC identiques *PITTMAN GM 9236*, avec une masse de 0,6 Kg chaque un, et un rapport de réduction de 65.5. Les autres caractéristiques sont données dans [25].

Bien, qu'en réalité, c'est en dernier qu'on effectue le dimensionnement et le choix des actionneurs, en fonction des besoins du cahier des charges (vitesses, accélérations, charge utile...). On se propose malgré tous, de calculer les éléments du robot en tenant compte de ces actionneurs, pour pas tomber dans un sur-dimensionnement ou une insuffisance.

1.4.3 La stabilité de la structure :

Les robots industriels interagissent fortement avec leur environnement, et notamment avec le champ des forces de pesanteur. Ce dernier, comme on le sait, provoque des sollicitations variables et non-linéaires sur la plupart des articulations d'une structure robotisée, en raison même de sa nature morphologique.

Ces sollicitations extérieures causent de nombreux inconvénients. Nous évoquerons essentiellement l'usure rapide des organes moteurs, les problèmes de vibrations qui conduisent à des risques de rupture, ainsi qu'à des difficultés de commande ou encore de sécurité (effondrement de structure lors de l'arrêt brusque des moteurs).[27]

Les concepteurs proposent actuellement deux familles de solutions. La première consiste à équilibrer les structures à l'aide de contrepoids. La deuxième fait quant à elle appel à l'utilisation de transmissions mécaniques irréversibles du type vis-écrou .

La première consiste à La compensation de l'effet des poids des barres par l'ajout d'une masse M et d'une chaîne cinématique en parallélogramme [27]. Mais nous rejetons cette solution car, d'une part la structure contient déjà une boucle, et d'autre part nous voulons que la masse en mouvement soit la plus réduite possible, et malheureusement, cette solution présente l'inconvénient d'augmenter l'inertie globale des charges.

Manifestement, il était donc nécessaire de s'orienter vers des solutions pénalisant aussi peu que possible l'inertie des charges

La solution que nous proposons est l'utilisation d'engrenages irréversibles. C.à.d : le mouvement n'est permis que dans un seul sens (des moteurs vers les barres métalliques). Un engrenage irréversible est un engrenage hélicoïdal ayant un angle d'hélice particulier [11,13], et il doit être dimensionné de manière à compenser l'effet des forces de la pesanteur à l'état statique, c'est à dire lorsque les moteurs sont à l'arrêt .

1.5. Volume de travail :

Le volume de travail représente tout la zone atteignable par l'outil placé à l'extrémité du bras. Ce sont les limitations dues aux dimensions des constituants et leur aspect technologique qui fixeront les limites du volume de travail.

Nous nous sommes inspirés du robot **IRB 1'400** de la firme **ABB** (figure 1.1) pour imaginer l'aspect de notre structure, c'est pourquoi leurs volumes de travail sont similaires :

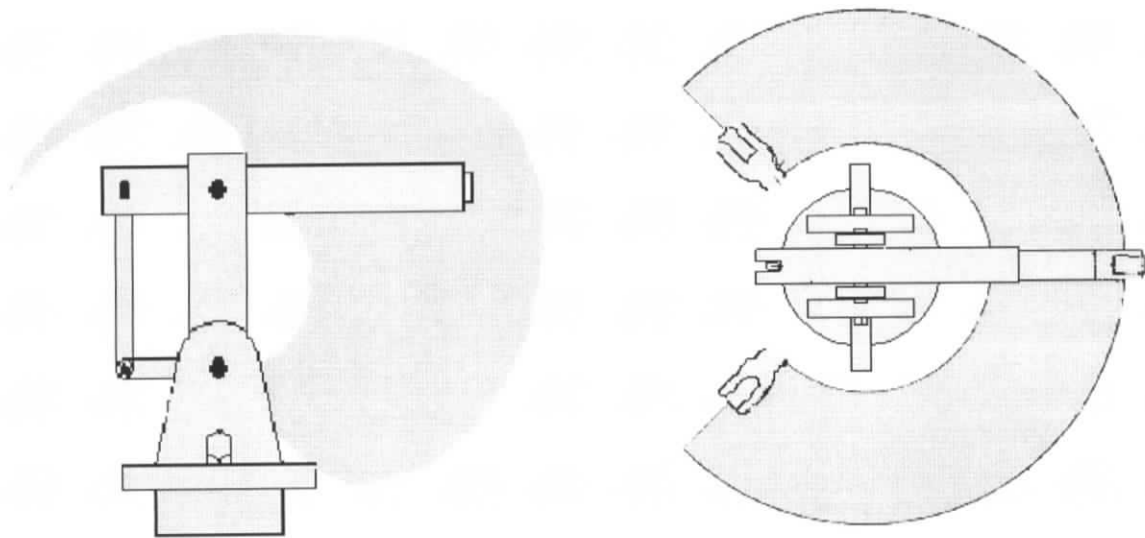


Figure 1.4 Espace de travail du robot

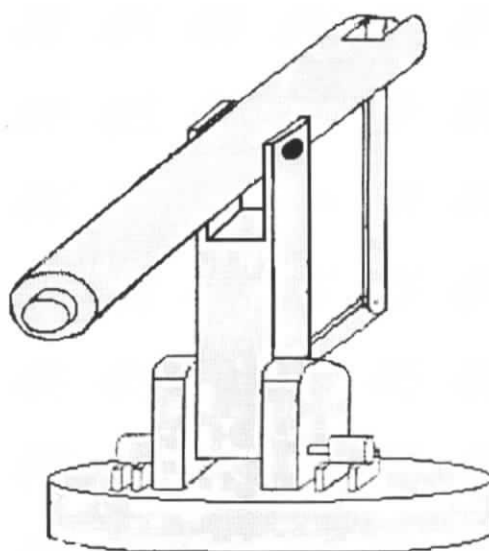


Figure 1.5 Perspective de la structure

1.6. Conclusion :

Dans ce premier chapitre nous avons mis en évidence les propriétés des robots à structure fermée. Et partant de là, nous avons tenter d'imaginer une structure qui respecte des règles de symétrie pour chaque constituant afin de simplifier les modèles mathématiques du robot.

Au problème d'équilibre statique, nous avons apporté la proposition de l'utilisation d'engrenages irréversibles.

Tout cela est utile et suffisant pour élaborer les différents modèles du robot, cependant, il est nécessaire de dimensionner les éléments de la structure en utilisant les lois de la RDM.

Chapitre 2 :

Etude géométrique du robot

2.1. Introduction :

L'analyse cinématique d'un système consiste à déterminer la position, la vitesse et l'accélération à tout instant des mécanismes qui le composent. L'ensemble des paramètres qui définissent le système à instant donné constitue son *Etat*.

En robotique l'analyse cinématique détermine l'état de l'outil terminal en fonction de celui des articulations, des segments qui constituent le bras, ainsi que les dérivées des grandeurs qui caractérisent l'évolution du bras dans le temps.

Nous présentons dans ce chapitre la méthodologie à suivre pour décrire la structure géométrique des robots à chaîne cinématique fermée. Le problème du calcul des modèles géométrique directe et inverse de notre structure est ensuite abordé, ainsi que le problème de la résolution des équations de contrainte de fermeture de boucle, et des positions singulières. Enfin, nous nous intéressons à établir le modèle cinématique directe et inverse.

2.2 Modèle géométrique direct (MGD) :

Le modèle géométrique direct décrit la situation instantanée de l'organe terminal et des barres constituant le robot, en fonction des positions angulaires des articulations motorisées. En d'autres termes, le MGD exprime la relation géométrique entre le vecteur de coordonnées articulaires, noté \mathbf{q} , et le vecteur de coordonnées opérationnelles, noté \mathbf{X} .

Le modèle géométrique directe est défini par la relation suivante :

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{q}) \quad 2.1$$

Soient $R_I = \{O_I, x_I, y_I, z_I\}$ et $R_J = \{O_J, x_J, y_J, z_J\}$ deux repères orthonormés. La relation permettant de passer du repère R_J au repère R_I est caractérisée par une matrice de transformation homogène de dimension (4x4) définie par :

$${}^J T_I = \begin{bmatrix} {}^J s_I & {}^J n_I & {}^J a_I & {}^J p_I \\ s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad 2.2$$

Où les termes ${}^J s_I$, ${}^J n_I$, ${}^J a_I$, ${}^J p_I$ représentent d'une part les vecteurs unitaires des axes x_I , y_I et z_I du repère R_J défini dans le repère R_I et d'autre part le vecteur exprimant l'origine de R_J dans R_I .

La matrice jT_i qui définit le repère R_j dans le repère R_i , est souvent partitionnée en faisant apparaître une matrice (3x3) d'orientation de R_j dans R_i , notée jA_i . Et un vecteur de translation caractérisant la position de l'origine du repère R_j dans le repère R_i , noté jP_i .

Plusieurs représentations sont possibles pour définir le vecteur X . Si l'on suppose qu'à l'organe terminal est associé un repère R_n défini dans un repère absolu R_0 par la matrice de transformation 0T_n , le vecteur X peut être constitué de certains éléments de la matrice 0T_n .

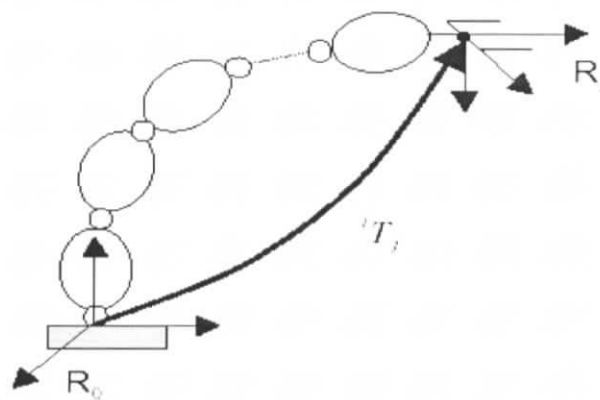


Figure 2.1 Transformation entre l'organe terminal et le repère absolu

2.2.1. Formalisme de description géométrique :

Ce paragraphe présente une méthode pour décrire la géométrie des robots. Dans la littérature [15,9,16] plusieurs méthodes sont proposées pour aboutir à la description des chaînes cinématiques ; la plus répandue est la description de Denavit-Hartenberg . Mais cette méthode, développée pour des structures ouvertes simples, présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée à des structures fermées . C'est pour quoi, dans ce travail, nous utilisons une description basée sur la notation de Khalil et Kleinfinger, qui présente l'avantage d'une certaine simplicité et qui fait appel à un nombre de paramètres minimum.

Une structure ouverte simple est composée de $n+1$ corps notés C_0, C_1, \dots, C_n et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du robot, tandis que le corps C_n est le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} . (figure 2.2)

Cette méthode de description repose sur les hypothèses suivantes :

- Les corps sont supposés rigides. Ils sont connectés par des articulations supposées idéales (sans jeu mécanique, sans élasticité et sans frottement) .
- Le repère R_j est connecté au corps C_j .
- La variable de l'articulation j est notée q_j .

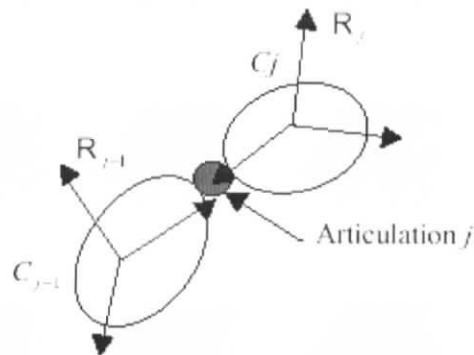


Figure 2.2 Articulation connectant deux corps

Le repère R_j lié au corps C_j est défini de sorte que :

- L'axe z_j est porté par l'articulation j .
- L'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} .

Si les axes z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires, le choix de x_j n'est pas unique : En général, des considérations de symétrie ou de simplicité permettent un choix rationnel.

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants : (figure 2.3)

- α_j angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1}
- d_j distance entre les axes z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1}
- θ_j angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j
- r_j distance entre les axes x_{j-1} et x_j le long de z_j

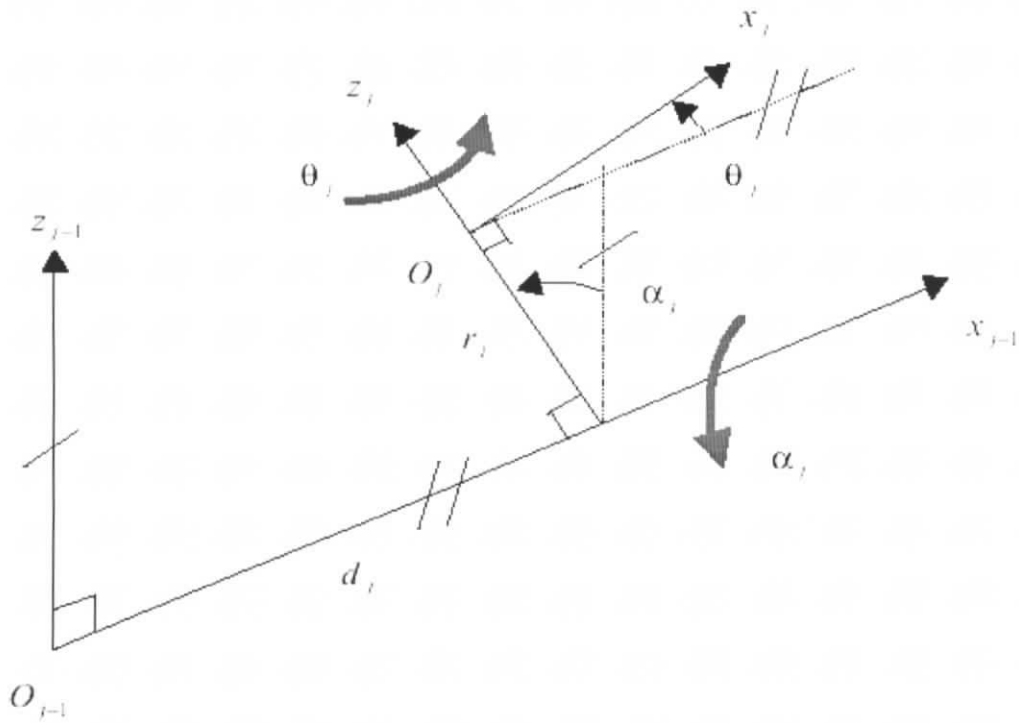


Figure 2.3 Paramètres géométriques suivant Khalil et Kleinfinger

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ième}}$ articulation est définie soit par θ_j , soit par r_j , selon le type de cette articulation, ce qui se traduit par la relation :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j$$

avec : $\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{si l'articulation est rotoïde} \\ 1 & \text{si l'articulation est prismatique} \end{cases}$

La matrice de transformation exprimant le repère R_j dans le repère R_{j-1} est donnée par la relation:

$${}^{j-1}T_j = \text{Rot}(x, \alpha_j) \cdot \text{Trans}(x, d_j) \cdot \text{Rot}(z, \theta_j) \cdot \text{Trans}(z, r_j) \quad 2.3$$

On obtient alors :

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.4$$

Il est à noter, que dans toutes nos équations $\sin(\theta_i)$ et $\cos(\theta_i)$ sont remplacés par S_i et C_i respectivement .

Remarques :

- Pour le repère R_0 , le choix le plus simple consiste à prendre R_0 confondu avec R_1 quand $q_1 = 0$. Ce qui signifie que l'axe z_0 est confondu avec z_1 et $O_1 = O_0$ quand l'articulation 1 est une rotoïde. Par contre z_0 et z_1 sont portés par le même axe, x_0 est parallèle à x_1 quand l'articulation 1 est prismatique ; dans ce cas, les paramètres d_1 et α_1 seront nuls.

- Pour une articulation prismatique, l'axe z_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de l'axe dans l'espace peut être quelconque. On le place de telle sorte que d_j ou bien d_{j-1} soit nulle .

- Lorsque z_j est parallèle à z_{j+1} , on place x_j de telle sorte que r_j ou r_{j+1} soit nul .

- Cette méthode de description impose une configuration «zéro» du robot qui ne correspond pas nécessairement avec la position «zéro» du codeur.

2.2.2 Modèle géométrique direct des robots à structure fermée :

Pour un robot à structure fermée, le MGD est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires motorisées. La matrice de transformation jT_0 d'un organe terminal j est la composition des matrices de transformation exprimant le repère R_j du corps terminal dans le repère de base R_0 en prenant le chemin le plus court (*chaîne directe*) entre le repère terminal et la base.

Si la matrice de transformation est exprimée en fonction des articulations non motorisées, il faut établir des relations supplémentaires entre ces variables non motorisées et l'ensemble des variables motorisées. Ceci revient à résoudre les équations de fermeture de boucle .La solution de ces équations est donnée au § 2.4 .

2.3. Calcule du MGD de la structure :

Il faut préciser, que sur notre robot (figure 2.4) les articulations 2 et 5 sont indépendantes , et que les articulations 6, 7 et 3 ne sont pas motorisées.

Avec : $\mu_j = 1$ articulation motorisée .

0 articulation non motorisée .

- Les articulations 7 et 8 sont les même ,on procède à la coupe sur ces dernières .

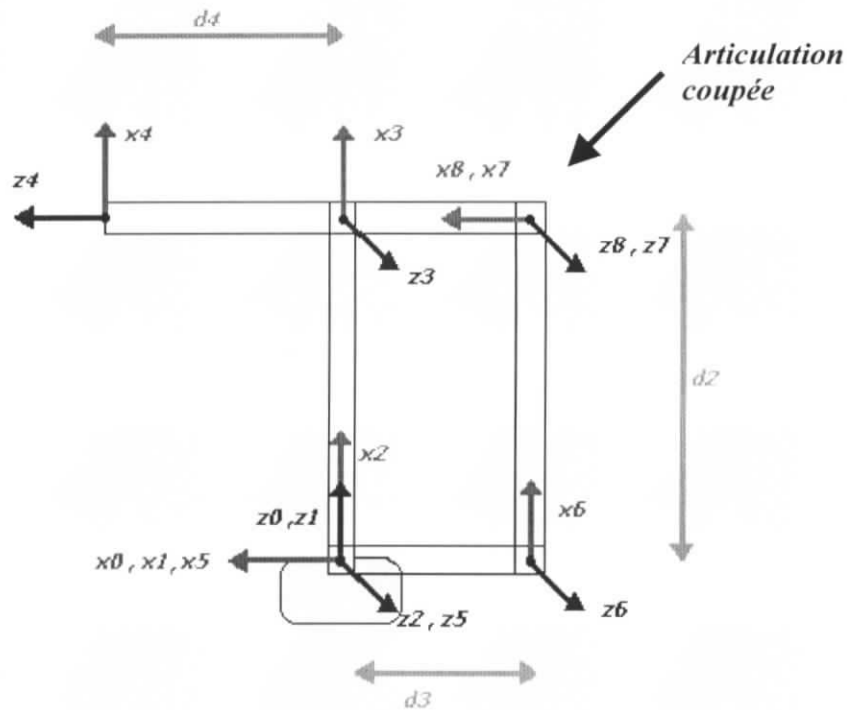


Figure 2.4 Configuration géométrique des axes du robot suivant Khalil et Kleinfinger

Suivant la description de Khalil et Kleinfinger, nous reportons les paramètres géométriques du robot sur les tableaux suivants :

j	μ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	1	0	0	θ_1	0
<i>Chaîne principale</i>					
2	1	$-\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	d_2	θ_3	0
4	1	$-\pi/2$	0	θ_4	d_4
<i>Chaîne secondaire</i>					
5	1	$-\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	0	d_3	θ_6	0
7	0	0	d_2	θ_7	0

Tableau 2.1 Paramètres géométriques du robot

De ce fait , selon la formule 2.4, nous trouvons :

- Pour la chaîne principale : $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s2 & -c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & d2 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & -s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d4 \\ -s4 & -c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour la chaîne secondaire : $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 3$

$${}^1T_5 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s5 & -c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & d3 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6

$${}^6T_7 = \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & d2 \\ s7 & c7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^7T_3 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & -d3 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4. Equations de contrainte de fermeture de la boucle :

Les boucles de type parallélogramme ont trois variables passives, dans ce cas, il est possible d'appliquer une méthode spécifique simple. En effet on utilise le fait que si les corps Ck1, Ck2, Ck3 et Ck4 constituent un parallélogramme et si les corps Ck1 et Ck3 sont parallèles (figure. 2.5), alors la matrice d'orientation de dimension (3x3) qui définit la rotation entre les repères k1 et k3 est constante ; il de même pour celle entre k2 et k4 .

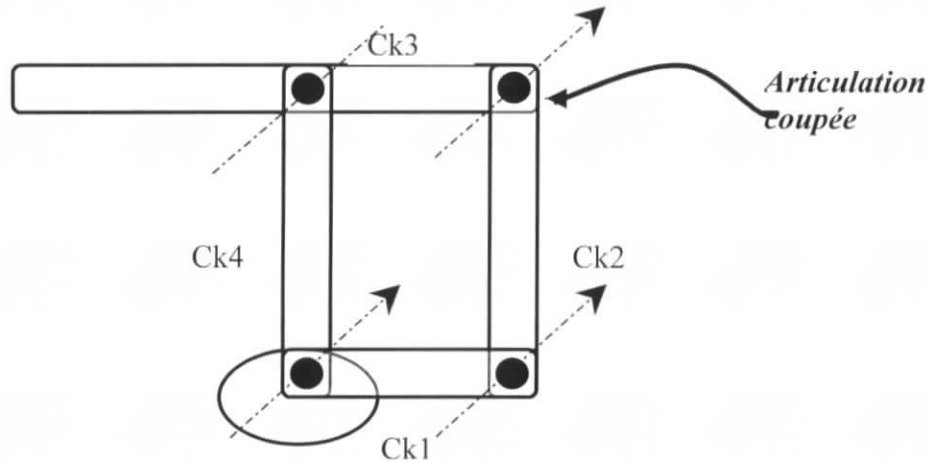


Figure 2.5 Structure du type parallélogramme

On déduit les équations de contrainte suivantes :

$${}^{k1}A_{k3} = \text{Rot}(u, \theta_{c1}) = \text{constante}$$

$${}^{k2}A_{k4} = \text{Rot}(u, \theta_{c2}) = \text{constante}$$

$${}^k A_{k+B} = {}^k A_{k3} \cdot {}^{k3} A_{k2} \cdot {}^{k2} A_{k4} \cdot {}^{k4} A_{k+B} = I_3$$

Par application sur notre structure:

$${}^5 A_3 = {}^5 A_1 {}^1 A_2 {}^2 A_3 = \text{rot}(z, -\theta_5 + \theta_2 + \theta_3) = \text{rot}(z, \pi/2) \quad 2.7a$$

$${}^2 A_6 = {}^2 A_1 {}^1 A_5 {}^5 A_6 = \text{rot}(z, -\theta_2 + \theta_5 + \theta_6) = \text{rot}(z, 0) \quad 2.7b$$

$${}^7 A_8 = {}^7 A_6 {}^6 A_5 {}^5 A_1 {}^1 A_2 {}^2 A_3 {}^3 A_8 = I_3 \quad 2.7c$$

Les relations 2.7 permettent donc de calculer les trois variables passives θ_3 , θ_6 , et θ_7 .

Nous aurons donc :

$$\theta_3 = \pi/2 - \theta_2 + \theta_5 \quad 2.8a$$

$$\theta_6 = \theta_2 - \theta_5 \quad 2.8b$$

$$\theta_7 = \pi/2 + \theta_3 = \pi - \theta_2 + \theta_5 \quad 2.8c$$

Ces dernières relations peuvent s'établir en écrivant directement les relations entre les angles du parallélogramme .

2.5. Formulations du MGD de la structure :

Le modèle géométrique direct est donné par la matrice de transformation associée a la chaîne directe, définissant le corps terminal du robot dans le repère de la base .

$$MGD = {}^0 T_4 = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot {}^2 T_3 \cdot {}^3 T_4 = \begin{bmatrix} r1 & r2 & r3 & r4 \\ r5 & r6 & r7 & r8 \\ r9 & r10 & r11 & r12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.9$$

Avec :

$$\begin{aligned} r1 &= S1.S4 + C1.(C2.C3 - S2.S3) . C4 \\ r2 &= C4.S4 - C1.(C2.C3 - S2.S3) .S4 \\ r3 &= C1.(- C2.C3 - S2.C3) \\ r4 &= C1.(-C2.S3 - S2.C3) .d4 + C1.d2.C2 \\ r5 &= (C2.C3 - S2.S3) . C4.S1 - C1.S4 \\ r6 &= -(C2.C3 - S2.C3) . S1.S4 - C1.C4 \\ r7 &= (-C2.S3 - S2.C3) . S1 \\ r8 &= S1.[(-C2.S3 - S2.C3) . d4 + d2.C2] \\ r9 &= -(C2.S3 + S2.C3) . C4 \\ r10 &= (C2.S3 + S2.C3) .S4 \\ r11 &= S2.S3 - C2.C3 \\ r12 &= (S2.S3 - C2.S3) . d4 - d2.S2 \end{aligned} \quad 2.10$$

2.5.1. Equations de position :

On peut dire que la quatrième colonne de la matrice de transformation 0T_4 , donne la position de l'organe terminal du manipulateur, d'où :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2.11$$

Alors :

$$P_x = C1.(-C2.S3 - S2.C3) .d4 + C1.d2.C2 \quad 2.12a$$

$$P_y = S1.[(-C2.S3 - S2.C3) .d4 + d2.C2] \quad 2.12b$$

$$P_z = (S2.S3 - C2.S3) .d4 - d2.S2 \quad 2.12c$$

2.5.2. Equations d'orientation :

La situation de l'organe terminal est spécifiée aussi par les cosinus directeurs constituant la matrice de orientation :

$${}^0A_4 = \begin{bmatrix} {}^0s_4 & {}^0n_4 & {}^0a_4 \end{bmatrix} \quad 2.13$$

D'après la formule 2.9 , on aura:

$$\begin{aligned} Sx &= S1.S4 + C1.(C2.C3 - S2.S3) .C4 \\ Sy &= (C2.C3 - S2.S3) .C4.S1 - C1.S4 \\ Sz &= -(C2.S3 + S2.C3) .C4 \end{aligned} \quad 2.14$$

$$\begin{aligned} nx &= C4.S4 - C1.(C2.C3 - S2.S3) .S4 \\ ny &= -(C2.C3 - S2.C3) .S1.S4 - C1.C4 \\ nz &= (C2.S3 + S2.C3) .S4 \end{aligned} \quad 2.15$$

$$\begin{aligned} \alpha_x &= C1.(-C2.C3 - S2.C3) \\ \alpha_y &= (-C2.S3 - S2.C3) .S1 \\ \alpha_z &= S2.S3 - C2.C3 \end{aligned} \quad 2.16$$

Et sachant que la matrice 0A_4 , d'après la description des angles de Roulis -Tangage-Lacet possède aussi la forme suivante :

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} C\phi C\beta & C\phi S\beta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\beta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\beta & S\phi S\beta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\beta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\beta & C\beta S\psi & C\beta C\psi \end{bmatrix} \quad 2.17$$

De sorte que :

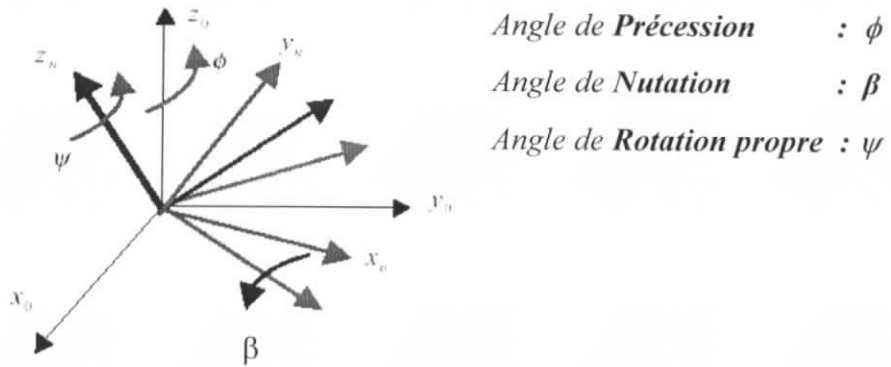


Figure 2.6 Description des angles de Roulis -Tangage-Lacet

En faisant l'analogie entre la forme numérique 2.12 et la forme littérale 2.13 de la matrice 0A_4 nous trouvons :

$$-S\phi .sx + C\phi .sy = 0 \quad 2.18$$

On en déduit les expressions des angles de Roulis -Tangage-Lacet en fonction de cosinus directeurs:

$$\phi = \text{atan2} (sy, sx) \quad 2.19a$$

$$\phi' = \text{atan2} (-sy, -sx) = \phi + 180^\circ \quad 2.19b$$

Il y a une situation singulière, dans le cas où : $sx = sy = 0$, alors on aura : $\beta = \pm \pi/2$

$$\beta = \text{atan2} (-sz, C\phi .sx + S\phi .sy) \quad 2.20$$

$$\psi = \text{atan2} (S\phi .ax - C\phi .ay, -S\phi .nx + C\phi .ny) \quad 2.21$$

Où **atan2** est une fonction mathématique (Fortan, Matlab...) qui calcule l'arc tangente à partir de la donnée de deux arguments.

2.6. Modèle géométrique inverse (MGI) :

2.6.1. Position du problème :

Considérons la matrice 0T_E spécifiant la position du repère de l'effecteur par rapport à un repère de référence supposé être, pour nous, le repère R_0 . D'une façon générale, on a :

$${}^0T_E = {}^0T_n(q) \cdot E \quad 2.22$$

E: matrice d'orientation de l'effecteur.

La détermination du modèle géométrique inverse consiste, pour ${}^E T_0$ et E connues, à déterminer le vecteur q qui place le robot dans la situation désirée. On est donc amené à résoudre l'équation suivante :

$${}^0T_n = {}^0T_E \cdot E^{-1} \quad 2.23$$

Sachant qu'en fonction du nombre de degré de liberté du robot, certaines positions ne sont pas possibles, dans l'espace opérationnel.

La résolution de l'équation peut conduire à plusieurs cas :

- Absence de solution si la situation désirée est en dehors du volume de travail du robot.
- Une infinité de solutions si le robot est redondant vis à vis de la tâche ou s'il se trouve dans des configurations singulières.
- Un nombre fini de solution.

Il existe plusieurs méthodes permettant de résoudre le problème :

- Méthode de Paul
- Méthode de Peiper
- Méthode générale de Raghavan et Roth.

Il n'est pas toujours possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse.

Dans ce cas, on est amené à calculer une solution particulière par des procédures numériques. La solution obtenue est locale et dépend des conditions initiales.

2.6.2. Modèle géométrique inverse des robots à structure fermée :

Le MGI d'un robot à structure fermée, est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer les coordonnées des articulations motorisées, en fonction de la situation de son organe terminal.

On détermine, tout d'abord, la solution des variables articulaires de la chaîne directe entre la base et l'organe terminal, considérée alors, comme une chaîne ouverte simple, en fonction de la situation désirée, en utilisant la méthode de Paul, présentée plus bas.

Puis, on établit les relations entre les variables des articulations motorisées, de la chaîne directe, et les variables non motorisées qui ne sont pas dans la chaîne directe, en résolvant les équations de contrainte des boucles fermées.

2.7. Calcul du modèle géométrique inverse:

Les méthodes pour calculer le MGI sont nombreuses, nous nous intéressons à une en particulier, celle de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient à la plupart des robots industriels.

La matrice de transformation homogène de notre robot est donnée par :

$${}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) \cdot {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \cdot {}^2\mathbf{T}_3(q_3) \cdot {}^3\mathbf{T}_4(q_4) \quad 2.24$$

Soit alors U_0 la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.25$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) \cdot {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \cdot {}^2\mathbf{T}_3(q_3) \cdot {}^3\mathbf{T}_4(q_4) \quad 2.26$$

Pour trouver les solutions, Paul a proposer de pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation 2.26 , par les matrices ${}^jT_{j-1}$ pour j variant de 1 à 3, opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche.

La solution des ces équations demande de l'intuition, mais l'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les principaux types rencontrés sont peu nombreux [15,20]. Certains types ont une solution évidente, qui sont présentées en Annexe A.

En s'appuyant sur la formule 2.9, nous avons les équation de positions :

$$\begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r4 \\ r8 \\ r12 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2.27$$

En multipliant par 1T_0 les éléments de gauches on aura :

$$\begin{aligned} U_1 &= C1.px + S1.py \\ U_2 &= -S1.px + C1.py \\ U_3 &= pz \end{aligned} \quad 2.28$$

Les éléments de droite seront la 4eme colonne de 1T_4 donc on aura le résultat suivant :

$$\begin{aligned} T_1 &= (-C2.C3 - C2.C3).d4 + d2.C2 \\ T_2 &= 0 \\ T_3 &= (S2.S3 - C2.C3).d4 - d2.S2 \end{aligned} \quad 2.29$$

En identifiant U_2 et T_2 , on trouve les deux solutions suivantes pour θ_1 :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{atan2}(py , px) \\ \theta'_1 &= \theta_1 + 180^\circ \end{aligned} \quad 2.30$$

En pré-multipliant par 2T_1 les éléments de gauche :

$$\begin{aligned}U1 &= c2.(s1.py + c1.px) - s2.pz \\U2 &= -s2.(s1.py + c1.px) - c2.pz \\U3 &= -(px.s1 - py.c1)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Et les éléments de droite seront la 4ème colonne de 2T_4 :

$$\begin{aligned}T1 &= d2 - S3d4 \\T2 &= C3.d4 \\T3 &= 0\end{aligned}\tag{2.32}$$

On peut calculer θ_2 et θ_3 , en considérant les deux premières équations et en résolvant un système de type 6 (se référer à l'Annexe A) on obtient d'abord une équation en θ_2 , telle que :

$$X.S2 + Y.C2 = Z\tag{2.33}$$

Avec :

$$\begin{aligned}X &= 2.pz.d2 \\Y &= -2B_1.d2 \\Z &= (d4)^2 - (d2)^2 - (pz)^2 - (B_1)^2 \\B_1 &= px.C1 + py.S1\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}C2 &= \frac{y.z - \varepsilon.x.\sqrt{x^2+y^2-z^2}}{x^2+y^2} \\S2 &= \frac{x.z - \varepsilon.y.\sqrt{x^2+y^2-z^2}}{x^2+y^2}\end{aligned}\tag{2.34}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$

On obtient donc deux solutions de la forme :

$$\theta_2 = \text{atan2}(S2, C2)\tag{2.35}$$

Connaissant θ_2 , on peut calculer θ_3 , de la même façon à partir de :

$$S3 = \frac{pz.S2 - B1.C2 + d2}{d4} \quad 2.36$$

$$C3 = \frac{-B1.S2 - pz.C2}{d4}$$

Et l'on obtient :

$$\theta_3 = \text{atan2}(S3, C3) \quad 2.37$$

Pour ce qui est de θ_4 , nous remarquons simplement que :

$$\frac{S4}{C4} = \frac{-r10}{r9} = \frac{-nz}{Sz} \quad 2.38$$

D'où :

$$\theta_4 = \text{atan2}(S4, C4) \quad 2.39$$

Les solutions trouvées doivent respecter les contraintes imposées par les butées articulaires.

2.8. Modèle cinématique direct (MCD) :

2.8.1. Introduction :

Soit X le vecteur de coordonnées opérationnelles de dimension $(m \times 1)$, et q le vecteur des variables articulaires de dimension $(n \times 1)$. Le modèle cinématique direct établit la relation entre les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Donnant la relation :

$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \quad 2.41$$

Où $J(q)$ est la matrice Jacobienne de dimension $(m \times n)$ obtenue par dérivation de X par rapport à q . On a donc :

$$J(q) = \partial X / \partial q \quad 2.42$$

La même matrice $J(q)$ intervient dans le calcul du modèle différentiel qui donne les variations dX des variables opérationnelles en fonction des variations des variables articulaires dq . Tel que :

$$dX = J(q) dq \quad 2.43$$

Les intérêts de la matrice Jacobienne sont multiples :

- Elle sert au calcul du modèle différentiel inverse, en offrant la possibilité d'une solution locale des variables articulaires q , connaissant le vecteur X .
- Elle facilite l'étude des singularités.
- Elle permet le calcul de l'espace opérationnel accessible.
- Elle donne une relation liant les efforts exercés par l'organe effecteur et les forces et couples exercés aux articulations.

2.8.2. Modèle cinématique des robots à structure fermée :

Ce modèle permet de décrire les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses des articulations motorisées. On établit tout d'abord le modèle cinématique de la chaîne directe entre la base et l'organe terminal en procédant comme pour les robots à chaîne ouverte simple. On écrit ensuite les relations de contrainte entre les vitesses des articulations motorisées de la chaîne directe et les vitesses des articulations non motorisées qui n'appartiennent pas à la chaîne directe.

Deux méthodes sont envisageables :

- On dérive les relations entre ces variables si elles existent, relations obtenues lors du calcul du modèle géométrique direct .
- On utilise une méthode fondée sur le calcul de la vitesse des repères R_i associés aux articulations.

C'est cette deuxième méthode que nous détaillons. Pour la mettre en œuvre, on calcule depuis la racine de la boucle, les contributions des vitesses des coordonnées articulaires sur les vitesses des repères successifs .

2.9. Matrice Jacobienne de base

On peut obtenir la matrice Jacobienne par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation et de rotation V_n et ω_n du repère R_n , représentant les éléments de réduction du torseur cinématique du repère R_n , et les vitesses articulaires \mathcal{Q} :

$$V_n = \begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J_n \cdot \mathcal{Q} \quad 2.44$$

On note que V_n est la dérivée par rapport au temps du vecteur P_n . En revanche, ω_n ne représente pas la dérivée d'une représentation quelconque de l'orientation.

2.9.1. Obtention de la matrice jacobienne :

Considérons la J^{ieme} articulation d'une chaîne articulée. La vitesse \mathcal{Q} induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation V_j et la vitesse de rotation ω_j .

Les vitesses angulaires et de translations sont données par les formules de récurrences suivantes , pour $j = 1, \dots, n$:

$${}^j \omega_j = {}^{j-1} A_{j-1} \cdot {}^{j-1} \omega_{j-1} + \dot{\theta}_j \cdot a_j \quad 2.45a$$

$${}^j V_j = {}^j A_{j-1} ({}^{j-1} V_{j-1} + \omega_{j-1} \times {}^{j-1} P_j) \quad 2.45b$$

Ou ${}^j a_j$ est le vecteur unitaire $[0 \ 0 \ 1]^T$. On initialise la récurrence avec les vitesses de translation et de rotation (généralement nulles) de la base du robot V_0 et ω_j , puis on remonte l'arborescence .

En projetant les éléments obtenus par les relations 2.45 dans un repère R_i , on obtient le jacobien ${}^i J_n$ de dimension $(6 \times n)$, tel que :

$${}^i V_n = {}^i J_n \dot{\phi} \quad 2.46$$

2.9.2. Calcul de la Jacobienne :

A partir des expressions 2.45, on procède au calcul, articulation par articulation, sur la chaîne principale, et l'on obtient:

Pour $j=0$:

$${}^0 \omega_0 = {}^0 V_0 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 2.47$$

Pour $j=1$:

$${}^1 \omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T \quad \text{et} \quad {}^1 V_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 2.48$$

Pour $j=2$:

$${}^2 \omega_2 = [-S_2 \dot{\theta}_1 \quad -C_2 \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T \quad \text{et} \quad {}^2 V_2 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 2.49$$

Pour $j=3$:

$${}^3 \omega_3 = [(-C_2 S_3 - S_2 C_3) \dot{\theta}_1 \quad (S_2 S_3 - C_2 C_3) \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^T$$

et 2.50

$${}^3 V_3 = [d_2 S_3 \dot{\theta}_2 \quad d_2 C_3 \dot{\theta}_2 \quad d_2 C_2 \dot{\theta}_1]^T$$

Pour $j=4$:

$${}^4 \omega_4 = \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) S_4 - (C_2 S_3 + C_3 S_2) C_4 \dot{\theta}_1 \\ (C_2 S_3 + C_3 S_2) \dot{\theta}_1 S_4 - C_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ (S_2 S_3 - C_2 C_3) \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad 2.51$$

$${}^4V_4 = \begin{bmatrix} d4[(C2.S3 + S2.C3)\dot{\theta}_1 S4 - C4.(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] - d2.C2.\dot{\theta}_1 S4 + d2.C4.S3.\dot{\theta}_2 \\ d4[(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3).S4 + (C2.S3 + S2.C3).C4\dot{\theta}_1] - d.2S3.S4\dot{\theta}_2 - d2.C2.C4\dot{\theta}_1 \\ d2.C3\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 2.51$$

On apporte des simplifications sur ces expressions, en se referant a la relation 2.8a, qui donne :

$$\theta_3 = \pi/2 - \theta_2 + \theta_5 \quad 2.52$$

De ce fait , on aura la relation trigonométrique :

$$(C2S3 + C3S2) = C5 \quad 2.53$$

Et de même :

$$(S2S3 - C2C3) = S5 \quad 2.54$$

Arrivant à l'indice 4 , on peut exprimer la matrice Jacobienne de la structure, écrivant (par rapport au repère R_4) le vecteur $\dot{X}_4 = [{}^4V_4 \ \omega_4]$ sous la forme d'un produit matriciel :

$$\dot{X}_4 = J_4 . \dot{\theta} \quad 2.55$$

$$\text{Ou : } \dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4]^T$$

Et :

$$J_4 =$$

$$\begin{bmatrix} d4S4C5 - d2C2S4 & -d4C4 + d2S3C4 & -d4C4 & 0 \\ d4C4C5 - d2C2S4 & d4S4 - d2S3S4 & d4S4 & 0 \\ 0 & d2C3 & 0 & 0 \\ -C5C4 & -S4 & -S4 & 0 \\ C5S4 & -C4 & -C4 & 0 \\ S5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.56$$

2.9.3. Forme simplifiée de la Jacobienne :

En général, on exprime V_n et ω_n soit dans le repère R_n (comme nous l'avons fait), soit dans le repère R_0 . La matrice Jacobienne correspondante est notée ${}^n J_n$ ou ${}^0 J_n$ respectivement. Ces matrices peuvent être calculées en utilisant une matrice ${}^i J_n$, $i=1\dots n$, grâce à la relation suivante qui transforme la matrice Jacobienne entre les repères :

$${}^s J_n = \begin{bmatrix} {}^s A_i & 0_3 \\ 0_3 & {}^s A_i \end{bmatrix} {}^i J_n \quad 2.57$$

Où ${}^s A_i$ est la matrice d'orientation, de dimension (3x3), du repère R_i exprimée dans le repère R_s .

Les deux matrices ${}^i J_n$ et ${}^s J_n$ ayant les mêmes positions singulières, on cherche pratiquement à utiliser le repère R_i qui simplifie les éléments de la matrice ${}^i J_n$.

En générale, on obtient la Jacobienne la plus simple lorsque l'on prend :

$$i = [\text{partie entière de } n / 2].$$

Pour notre structure on aura :

$${}^2 J_4 = \begin{bmatrix} {}^2 A_4 & 0_3 \\ 0_3 & {}^2 A_4 \end{bmatrix} \quad 2.58$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -C3d4 & -C3d4 & 0 \\ 0 & -S3d4+d2 & -S3d4 & 0 \\ -(C5d4-C2d2) & 0 & 0 & 0 \\ -(C3C5+S3S5) & 0 & 0 & -S3 \\ -S3C5(S4+C4S4) & S3(C4S4-S4^2) & S3(S4C4-S4^2) & C3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.59$$

2.9.4. Les équations de contraintes cinématiques :

Le calcul des contraintes sur les vitesses peut se faire, soit, en projetant toutes les vitesses dans le repère terminal, soit dans le repère de la base, ou bien tous simplement par dérivation des contraintes de positions données par la formule 2.8. Et on aura donc :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_3 &= -\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 &= \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_7 &= -\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_5\end{aligned}\quad 2.60$$

2.10. Modèle cinématique inverse (MCI) :

Le modèle cinématique inverse permet de déterminer, dans le voisinage d'une configuration q , les vitesses articulaires $\dot{\phi}$ qui assurent une vitesse opérationnelle \dot{X} imposée.

Dans le cas régulier, on a :

$$\dot{\phi} = J^{-1}(q) \cdot \dot{X}$$

2.61

Pour obtenir le MCI, on inverse le MCD en résolvant un système d'équations linéaires. La mise en œuvre, peut être faite de façon analytique ou numérique.

Lorsque la matrice Jacobienne n'est pas carrée (comme c'est le cas pour notre robot), on utilise la méthode de la pseudo-inverse pour calculer le vecteur $\dot{\phi}$.

2.11. Utilisation de la matrice pseudo inverse :

On appelle *pseudo inverse* de la Jacobienne J la matrice généralisée J^+ . Et qui permet d'écrire :

$$\dot{\phi} = J^+ \cdot \dot{X} \quad 2.62$$

Les propriétés de la pseudo inverse et la méthode de son calcul sont détaillées dans l'Annexe B.

Après calcul , on aura , la matrice suivante

$$J^+ = \begin{bmatrix} dS3.C2/(S4^2+S3.C5) & S3.C5.(S4^2.C2+S3.C5) & (C5.C2^2+d_4.C_2)d_2 & 0 \\ (C5.C2^2+d_2.S3^2.C_2)d_4 & S3.C4/(S4^2.d_4+d_2.C5) & (S4^2.d_4+d_2.S3.C2) & 1 \\ S3.C5/(S4^2.C4+C3.C5) & (S4^2.d_4+d_2.C5) & (C5.d_2^2+d_4.S3.C_4)d_4 & S3.C5.C2^2 \\ 1/(S4^2.S3.d_4+d_2.C5) & d_2.C2 & 0 & d_2.(C3^2+S5.C2-S3.S4) \\ (S4^2.d_2+d_1.C5) & 0 & d_4.S4.C5 & 0 \\ S3.C4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.63$$

2.12. Les positions singulières :

On dit qu'un robot présente une singularité, lorsqu'il perd localement la possibilité d'engendrer une vitesse le long et autour de certaines directions.

En une position singulière donnée, il n'existe pas de vitesse articulaire qui puisse engendrer une vitesse opérationnelle suivant cette dernière direction avec le modèle cinématique inverse classique ; car il peut donner des vitesses articulaires importantes, incompatibles avec les caractéristiques des actionneurs.

Lorsque le robot est non redondant, les singularités d'ordre un sont solution de l'égalité $\det(J) = 0$. Dans notre cas, le robot est redondant, elles sont données par les solution de l'égalité $\det(J.J^T) = 0$.

Généralement, dans la littérature [20,16], il est montré qu'un porteur 3R , possède deux singularités typiques, mais comme notre structure diffère d'une structure sérielle ordinaire, nous développons les calculs, pour avoir les résultats :

$$\det ({}_2J^A \cdot {}_2J^{A^T}) = -d3.d4.S3.(C5.d4-C2.d2) \quad 2.64$$

Se présente pour nous, comme prédit, deux positions singulières, l'une correspondant à $S3=0$, et l'autre correspondant à $(C5.d4-C2.d2)$.

i. Première position singulière :

Lorsque $S3=0$ (figure 2.7), le robot est en extension maximale et se trouve sur une frontière du volume de travail : il s'agit d'une singularité du coude , qui n'a pas été mise en évidence dans le modèle géométrique inverse.

Dans cette configuration le modèle cinématique ne permet pas de commander une vitesse radiale au poignet. La seconde ligne de la Jacobienne est nulle.

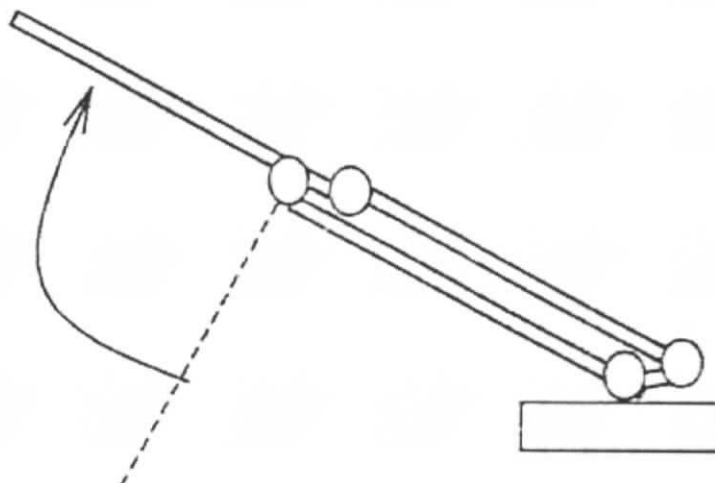


Figure 2.7 Première singularité du porteur

ii. Deuxième position singulière :

La singularité $(C5.d4 - C2.d2) = 0$ (figure 2.8), correspond à une configuration dans laquelle le centre du poignet est confondu avec l'axe Z_0 (singularité de l'épaule). On a $P_x = P_y = 0$; dans cette configuration, le modèle cinématique ne permet pas de commander une vitesse selon la normale au plan contenant les points O_2 , O_3 et O_4 . La troisième ligne de la Jacobienne est nulle. Le point P se trouve sur l'axe z pour toutes les valeurs de θ_1 .

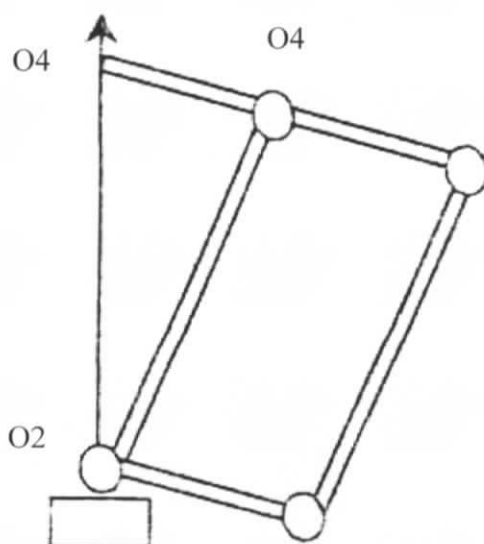


Figure 2.8 Deuxième singularité du porteur

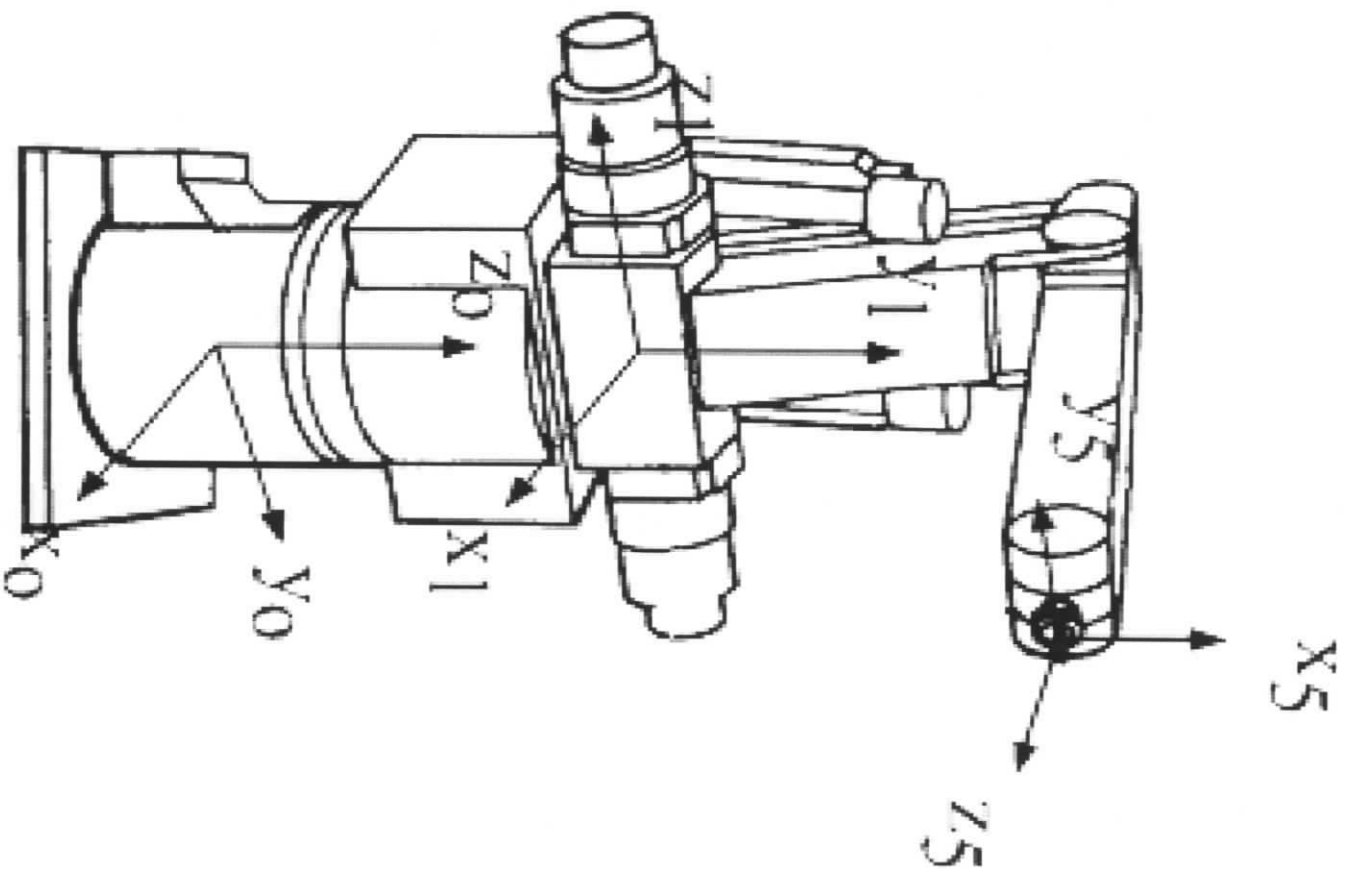


Figure 2.9 vue en 3D de la structure

2.13. Conclusion :

Au cours de ce chapitre, nous avons mis en évidence les différentes caractéristiques géométriques du robot hybride, la méthode de description présentée dans ce chapitre permet de modéliser les robots à chaînes complexes avec les mêmes notations, utilisées pour les chaînes ouvertes simples.

Nous avons montré que le calcul des modèles géométriques direct et inverse des robots à structure fermée se ramenait au calcul des modèles géométriques d'une structure sérielle avec et la résolution d'équations de fermeture des boucles.

Nous avons ensuite montrer la manière d'établir le modèle cinématique de telles structures et comment obtenir directement les relations de contrainte de vitesse.

La formulation du MCI c'est faite par la technique de la pseudo-inverse, spécifique au robot redondant. Nous avons alors étudiés les singularités du robot, qui représentent la limitation mécanique articulaire, et mathématique de notre robots; singularités qui s'apparentent à celles des robots séries.

Ces modèles reste néanmoins insuffisant pour une description parfaite des mouvements du robot, d'ou la nécessité d'une étude dynamique, présentée dans le prochain chapitre.

Chapitre 3 :

Etude dynamique du robot

3.1. Introduction :

Un robot est avant tout un générateur de déplacement de son organe terminal ; Néanmoins les corps du robot sont soumis à des efforts extérieurs, en particulier leur propre poids, ainsi qu'à des efforts dynamiques lors des phases d'accélération et de décélération, ou bien à des efforts d'interaction avec l'environnement dans lequel l'organe terminal effectue un travail. Les deux modèles calculés précédemment, s'avèrent insuffisant pour décrire toutes les interactions dues au mouvement, d'où la nécessité d'une modélisation dynamique .

Le modèle dynamique calcule les torseurs aux niveau des liaisons en fonction des variables cinématiques articulaires (q_i, \dot{q}_i et \ddot{q}_i), des paramètres géométriques, des groupes de paramètres inertiels du robot et des efforts extérieurs exercés par l'environnement sur l'organe terminal.

Dans ce chapitre, on va déterminer les équations différentielles du mouvement du robot, nécessaires à la détermination des torseurs au niveau des liaisons, en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Ce dernier donne des formulations récurrentes très adaptées pour construire le modèle dynamique inverse, qui présente un intérêt pratique indéniable, aussi bien pendant la conception (dimensionnement de la structure et des motorisations), que lors de l'utilisation : les résultat peuvent être exploités par une commande évoluée pour améliorer la précision dynamique.

3.2. Modèle dynamique inverse (MDI):

Le modèle dynamique est la relation entre les couples appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e, m_e) \quad 3.1$$

Tel que :

- Γ : Vecteur des (couples/forces) des actionneurs.
- q : Vecteur des positions articulaires.
- \dot{q} : Vecteur des vitesses articulaires.
- \ddot{q} : Vecteur des d'accélérations articulaires.
- f_e, m_e : Vecteur représentant l'effort extérieur (forces/moments) qu'exerce le robot sur son environnement.

Dans ce qui suit, on convient d'appeler *modèle dynamique inverse*, ou tout simplement *modèle dynamique*, la relation de la forme 3.1

Parmi les applications de ce modèle :

- La simulation .
- Le dimensionnement des actionneurs et détermination des capacités de charge.
- l'identification des paramètres inertiels et des paramètres de frottement du robot.
- La commande .

3.3. Description de la structure :

La géométrie du robot est décrite par la méthode indiquée au Chapitre 2 . Le système est composé de 5 corps mobiles, et de 6 articulations, dont 4 seulement sont motorisées.

En vue de la lourdeur du calcul à effectuer afin d'obtenir le modèle dynamique, on se contentera dans notre étude, dans un premier lieu, de modéliser le porteur uniquement . C-à-d, on supprime la motorisation du poignet, et de ce fait on aura une structure à 3 degrés de liberté. Par conséquent, on construit une structure arborescente équivalente à 3 articulations, en coupant la boucle à l'une des articulations, et pour des raisons de simplicité, on effectue la coupure sur une articulation non motorisée .

Au tous début, il serait utile d'introduire les principales notations utilisées dans les prochains paragraphes :

- ${}^j \mathbf{a}_j$: vecteur unitaire suivant l'axe z_j .
- ${}^j \mathbf{F}_j$: résultante des forces extérieures sur les corps C_j .
- ${}^j \mathbf{f}_j$: résultante du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par son antécédent et par l'actionneur j .
- ${}^j \mathbf{f}_{e_j}$: résultante du torseur dynamique exercé par le corps j sur l'environnement.
- ${}^j \mathbf{F}_{s_j}$: paramètre de frottement sec de l'articulation j .
- ${}^j \mathbf{F}_{v_j}$: paramètre de frottement visqueux de l'articulation j .
- \mathbf{g} : accélération de la pesanteur.
- $\mathbf{I}a_j$: moment d'inertie de l'actionneur j et de son réducteur ressentis par l'articulation.

${}^J \mathbf{J}_j$: tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j , on suppose que les matrices ${}^J \mathbf{J}_j$ pour chaque corps sont diagonales et que les corps ont une forme symétrique, de telle sorte que :

$${}^J \mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} XX_j & 0 & 0 \\ 0 & YY_j & 0 \\ 0 & 0 & ZZ_j \end{bmatrix} \quad 3.2$$

\mathbf{M}_j : masse du corps C_j .

${}^J \mathbf{MS}_j$: premier moment d'inertie du corps C_j autour de l'origine du repère R_j avec ${}^J \mathbf{MS}_j = [MX_j \ MY_j \ MZ_j]^T$.

${}^J \mathbf{m}_j$: moment du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par son antécédent et par l'actionneur autour de O_j .

${}^J \mathbf{me}_j$: moment du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur son environnement autour de O_j .

${}^J \dot{\mathbf{V}}_j$: accélération du point O_j .

${}^J \omega_j$: vitesse de rotation du corps C_j .

${}^J \dot{\omega}_j$: accélération de rotation du corps C_j .

3.4. Obtention du modèle dynamique :

Plusieurs formalismes ont été élaborés pour le modèle dynamique des robots [9,7,10], les formalismes les plus souvent utilisés sont :

- Le formalisme de Lagrange
- Le formalisme de Newton-Euler

3.4.1. Formalisme de Lagrange :

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, et permet d'avoir directement les relations entre les couples moteurs des articulations et les mouvements. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad 3.3$$

Γ_i : Le couple des forces extérieures (couple actif) s'exerçant sur l'articulation i .

L : Le Lagrangien du système égale à $L=E-U$.

E : L'énergie cinétique totale du système.

U : L'énergie potentielle totale du système.

3.4.2 Formalisme de Newton-Euler :

Les équation de Newton–Euler expriment le torseur dynamique en O_j , en utilisant les paramètres inertiels M_j , M_{sj} et J_j . Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_j &= M_j \ddot{\mathcal{X}}_{G_j} \\ M_{G_j} &= I_{G_j} \ddot{\omega}_j + \omega_j \times (I_{G_j} \omega_j) \end{aligned} \quad 3.4$$

Cette méthode permet de calculer le modèle dynamique des robots en ligne, elle est fondée sur une double récurrence :

- La **récurrence arrière**, de l'effecteur vers la base, permet le calcul des couples des actionneurs en exprimant pour les corps le bilan des efforts.
- Une **récurrence avant**, de la base du robot vers l'effecteur, calcule successivement les vitesses et les accélérations des corps, puis leur torseur dynamique.

3.5. Algorithme de Newton-Euler :

Pour utiliser pratiquement l'algorithme de Newton-Euler, il faut projeter dans un même repère les vecteurs et tenseurs qui apparaissent dans une même équation.

Nous prenons ici, le choix de Luh et al. [16] ,[15] qui consiste à projeter les grandeurs relatives à un corps, dans le repère qui lui est lié.

3.5.1. La récurrence avant : *Lorsque $j=1 \dots n$.*

Elle permet de calculer F_j et M_j à partir des relations 3.4. Pour cela il faut calculer d'abord ω_j , $\dot{\omega}_j$ et \dot{V}_j . Les formules de composition des vitesses donnent :

$${}^j \omega_{j-1} = {}^j A_{j-1} \cdot {}^{j-1} \omega_{j-1} \tag{3.5}$$

$${}^j \omega_j = {}^j \omega_{j-1} + \overline{\sigma_j} \cdot \dot{\theta}_j \cdot {}^j a_j \tag{3.6}$$

$${}^j \dot{\omega}_j = {}^j \dot{\omega}_{j-1} + \dot{\theta}_j \cdot {}^j a_j \tag{3.7}$$

$${}^j \dot{\omega}_j = {}^j A_{j-1} \cdot {}^{j-1} \dot{\omega}_{j-1} + \overline{\sigma_j} (\ddot{\theta}_j \cdot {}^j a_j + {}^j \omega_{j-1} \wedge \dot{\theta}_j \cdot {}^j a_j) \tag{3.8}$$

$${}^j \dot{\omega}_j = {}^j A_{j-1} \cdot {}^{j-1} \dot{\omega}_{j-1} + (\ddot{\theta}_j \cdot {}^j a_j + {}^j \omega_{j-1} \wedge \dot{\theta}_j \cdot {}^j a_j) \tag{3.9}$$

$${}^j \dot{V}_j = {}^j A_{j-1} ({}^{j-1} \dot{V}_{j-1} + {}^{j-1} U_{j-1} \cdot {}^{j-1} P_j) \tag{3.10}$$

$${}^j \dot{V}_j = {}^j A_{j-1} ({}^{j-1} \dot{V}_{j-1} + {}^{j-1} \dot{\omega}_{j-1} \wedge {}^{j-1} P_j + {}^{j-1} \omega_{j-1} \wedge {}^{j-1} \omega_{j-1} \wedge {}^{j-1} P_j) \tag{3.11}$$

et ${}^j U_j = {}^j \dot{\omega}_j + \hat{\omega}_j \cdot \hat{\omega}_j$.

La résultante des forces extérieures a chaque corps j est donnée par:

$${}^j F_j = M_j \cdot {}^j \dot{V}_j + {}^j U_j \cdot MS_j \tag{3.12}$$

$${}^j F_j = M_j \cdot {}^j \dot{V}_j + \dot{\omega}_j \wedge MS_j + \omega_j \wedge \omega_j \wedge MS_j \tag{3.13}$$

La résultante des moments extérieurs est donnée par:

$${}^j M_j = {}^j J_j \cdot \dot{\omega}_j + \omega_j \wedge ({}^j J_j \cdot \omega_j) + MS_j \wedge \dot{V}_j \tag{3.14}$$

On suppose que les valeurs initiales des vitesses et des accélérations à $j=0$ sont:

$$\omega_0 = 0, \quad \dot{\omega}_0 = 0, \quad \dot{V}_0 = -g \quad \text{et} \quad \hat{h} \cdot V = h \wedge V \tag{3.15}$$

L'introduction de la matrice jU_j , ainsi que l'utilisation de certains de ces éléments dans le calcul de jM_j , permet de réduire le nombre des opérations de calculs.

3.5.2. La récurrence arrière : *Lorsque : $j = n...1$.*

Les équations composant la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrits à l'origine O_j (figure 3.1) :

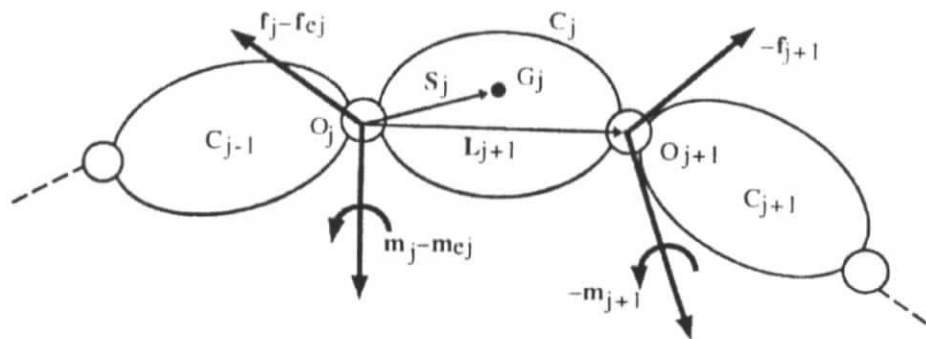


Figure 3.1 Bilan des efforts aux centres de gravités.

On peut faire intervenir l'effet de la gravité sans avoir à la prendre en compte dans le bilan des efforts, pour cela on prend :

$$\mathcal{V}_0 = -g \tag{3.16}$$

D'où l'on tire les équations suivantes :

$${}^j f_j = {}^j F_j + {}^j f_{j+1} + {}^j f_{e_j} \tag{3.17}$$

$${}^{j-1} f_j = {}^{j-1} A_j {}^j f_j \tag{3.18}$$

$${}^j m_j = {}^j M_j + {}^j A_{j+1} {}^{j+1} m_{j+1} + {}^j P_{j+1} \times {}^j f_{j+1} + {}^j m_{e_j} \tag{3.19}$$

On obtient alors les couples Γ_j en projetant, suivant la nature de l'articulation j , les vecteur f_j ou m_j sur l'axe du mouvement. On ajoute les termes correctifs représentant l'effet des frottements et des inerties des actionneurs, ce qui donne :

$$\Gamma_j = (\overline{\sigma_j} {}^j m_j)^T {}^j a_j + F s_j \text{sign}(\dot{\theta}_j) + F v_j \dot{\theta}_j + I a_j \ddot{\theta}_j \tag{3.20}$$

$$\Gamma_j = {}^j m_j^T {}^j a_j + F s_j \text{sign}(\dot{\theta}_j) + F v_j \dot{\theta}_j + I a_j \ddot{\theta}_j \quad (\overline{\sigma_j} = 1) \tag{3.21}$$

Cette récurrence est initialisée par les efforts $f_{n+1} = 0$ et $m_{n+1} = 0$.

3.6. Calcul du modèle dynamique :

On commence tout d'abord, par faire une coupure au niveau de l'articulation 8, qui est une articulation passive (Figure 3.2). Et de ce fait, on aura deux chaînes, et l'on appliquera l'algorithme d'abord pour la première chaîne : $j=0,1,2,3$, puis : $j=0,1,5,6$, pour la deuxième chaîne.

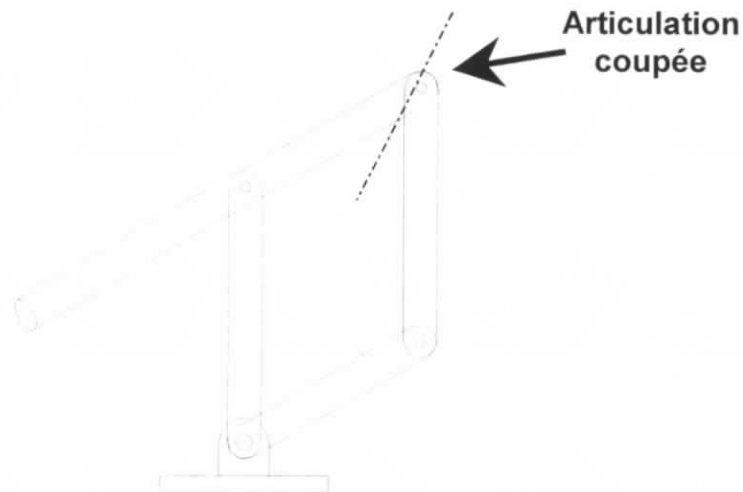


Figure 3.2 Schéma de la structure parallélogramme

3.6.1. La récurrence avant :

On démarre avec la première chaîne composée du corps 1, 2 et 3, comme c'est montré dans la (figure 3.3). Et on applique les formules données plus haut.

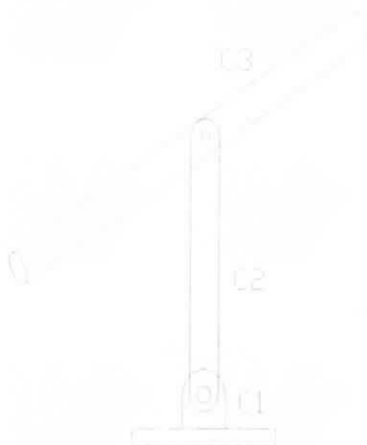


Figure 3.3 Schéma de la première chaîne de la structure

• Pour le Corps 1 :

On a tout d'abord : ${}^0\omega_0=0, \quad {}^0\dot{\omega}_0=0$ et ${}^0\dot{V}_0=-g.$ 3.22

$${}^1\omega_0 = {}^1A_0 {}^0\omega_0 = 0,$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1\omega_0 + \dot{\theta}_1 {}^1a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} .$$
 3.23

avec : ${}^1A_0 = \begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 \\ -S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^0P_1=0.$ 3.24

Alors on obtient l'accélération angulaire du corps 1.

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1A_0 {}^0\dot{\omega}_0 + (\ddot{\theta}_1 {}^1a_1 + {}^1\omega_0 \wedge \dot{\theta}_1 {}^1a_1).$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} .$$
 3.25

Et l'accélération de translation du corps 1 sera:

$${}^1\dot{V}_1 = {}^1A_0 ({}^0\dot{V}_0 + {}^0U_0 {}^0P_1).$$

$${}^1\dot{V}_1 = {}^1A_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \text{donc :} \quad {}^1\dot{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} .$$
 3.26

Pour la résultante des forces extérieures, on aura:

$${}^1F_1 = M_1 {}^1\dot{V}_1 + {}^1U_1 {}^1MS_1.$$

$${}^1F_1 = M_1 {}^1\dot{V}_1 + \dot{\omega}_1 \wedge {}^1MS_1 + \omega_1 \wedge ({}^1\omega_1 \wedge {}^1MS_1).$$

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -MY_1\ddot{\theta}_1 - MX_1\dot{\theta}_1^2 \\ -MY_1\dot{\theta}_1^2 + MX_1\ddot{\theta}_1 \\ -M_1g \end{bmatrix}. \quad 3.27$$

Et pour la résultante des moments extérieurs sur le corps 1 :

$${}^1M_1 = {}^1J_1 \dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \wedge ({}^1J_1 \omega_1) + {}^1MS_1 \wedge {}^1\dot{V}_1,$$

$${}^1M_1 = \begin{bmatrix} XX_1 & 0 & 0 \\ 0 & YY_1 & 0 \\ 0 & 0 & ZZ_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} XX_1 & 0 & 0 \\ 0 & YY_1 & 0 \\ 0 & 0 & ZZ_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} MX_1 \\ MY_1 \\ MZ_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad 3.28$$

D'où :

$${}^1M_1 = \begin{bmatrix} -MY_1g \\ MX_1g \\ \ddot{\theta}_1 ZZ_1 \end{bmatrix} \quad 3.29$$

• Pour le Corps 2 :

On aura : ${}^2\omega_1 = {}^2A_1 {}^1\omega_1$

$${}^2\omega_1 = \begin{bmatrix} -S2\dot{\theta}_1 \\ -C2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.30$$

Avec: ${}^2A_1 = \begin{bmatrix} C2 & 0 & -S2 \\ -S2 & 0 & -C2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et ${}^1P_2 = 0.$ 3.31

Et on a : ${}^2\omega_2 = {}^2\omega_1 + \dot{\theta}_2 {}^2a_2$

$$\text{Alors : } {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} -S2\dot{\theta}_1 \\ -C2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad 3.32$$

Et l'accélération angulaire du deuxième corps sera :

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2A_1 {}^1\dot{\omega}_1 + (\ddot{\theta}_2 {}^2a_2 + {}^2\omega_1 \wedge \dot{\theta}_2 {}^2a_2).$$

$$\text{D'où : } {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -C2\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 - S2\ddot{\theta}_1 \\ S2\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 - C2\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 3.33$$

Et l'accélération de translation du corps 2 sera:

$${}^2\dot{V}_2 = {}^2A_1 ({}^1\dot{V}_1 + {}^1U_1 {}^1P_2).$$

On aura : ${}^2\dot{V}_2 = {}^2A_1 {}^1\dot{V}_1$ (Car ${}^1P_2=0$)

$${}^2\dot{V}_2 = \begin{bmatrix} S2g \\ C2g \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.34$$

Pour la résultante des forces extérieures on aura:

$${}^2F_2 = M_2 {}^2\dot{V}_2 + {}^2U_2 {}^2MS_2.$$

$${}^2F_2 = M_2 {}^2\dot{V}_2 + \dot{\omega}_2 \wedge {}^2MS_2 + \omega_2 \wedge (\omega_2 \wedge {}^2MS_2).$$

$${}^2F_2 = \begin{bmatrix} gM_2S_2 - C_2^2MX_2\dot{\theta}_1^2 + C_2(MY_2S_2\dot{\theta}_1^2 - MZ_2\ddot{\theta}_1) - MX_2\dot{\theta}_2^2 - MY_2\ddot{\theta}_2 \\ gM_2C_2 + C_2S_2MX_2\dot{\theta}_1^2 + MX_2\ddot{\theta}_2 - MY_2(S_2^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + MZ_2S_2\ddot{\theta}_1 \\ -MZ_2\dot{\theta}_1^2 + (C_2MX_2 - C_2MY_2)\ddot{\theta}_1 - 2(MY_2C_2 + MX_2S_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 3.35$$

Et pour la résultante des moments extérieurs sur le corps 2:

$${}^2M_2 = {}^2J_2 {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \wedge ({}^2J_2 {}^2\omega_2) + {}^2MS_2 \wedge {}^2\dot{V}_2.$$

$${}^2M_2 = \begin{bmatrix} gC_2MZ_2 + C_2(Y_2 - Z_2 - XX_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - S_2XX_2\ddot{\theta}_1 \\ gMZ_2S_2 - C_2YY_2\ddot{\theta}_1 - S_2(XX_2 - YY_2 - ZZ_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ g(C_2MX_2 - S_2MY_2) + C_2S_2\dot{\theta}_1^2(Y_2 - XX_2) + ZZ_2\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 3.36$$

• Pour le Corps 3 :

$${}^3\omega_2 = {}^3A_2 {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} -C_3S_2\dot{\theta}_1 - S_3C_2\dot{\theta}_1 \\ S_2S_3\dot{\theta}_1 - C_2C_3\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1 \\ -C_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 3.37$$

On pose :

$$S_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3) = S_3C_2 + S_2C_3 \quad \text{et} \quad C_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3) = C_2C_3 - S_2S_3. \quad 3.38$$

Et comme :

$${}^3A_2 = \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^2P_3 = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad 3.39$$

$${}^3\omega_3 = {}^3\omega_2 + \dot{\theta}_3 {}^3a_3.$$

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} -S23\dot{\theta}_1 \\ -C23\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad 3.40$$

Ainsi l'accélération angulaire du 3ème corps est donner par:

$${}^3\dot{\omega}_3 = {}^3A_2 {}^2\dot{\omega}_2 + (\ddot{\theta}_3 {}^3a_3 + {}^3\omega_2 \wedge \dot{\theta}_3 {}^3a_3),$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} -C3S2\dot{\theta}_1 - S3C2\dot{\theta}_1 \\ S2S3\dot{\theta}_1 - C2C3\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S23\dot{\theta}_1 \\ -C23\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad 3.41$$

Alors l'accélération de translation du Corps 3 est:

$${}^3\dot{V}_3 = {}^3A_2 {}^2\dot{V}_2 + {}^3A_2 {}^2U_2 {}^2P_3,$$

$${}^3\dot{V}_3 = {}^3A_2 {}^2\dot{V}_2 + {}^3A_2 ({}^2\dot{\omega}_2 \wedge {}^2P_3 + {}^2\omega_2 \wedge ({}^2\omega_2 \wedge {}^2P_3)),$$

$${}^3\dot{V}_3 = \begin{bmatrix} -S23\dot{\theta}_1 \\ -C23\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad 3.42$$

Et la résultante des forces extérieures au Corps 3 est donnée par :

$${}^3F_3 = M_3 {}^3\dot{V}_3 + U_3 {}^3MS_3,$$

$${}^3F_3 = \begin{bmatrix} F31 \\ F32 \\ F33 \end{bmatrix}. \quad 3.43$$

De sorte que :

$$F31 = \ddot{\theta}_1((C23S23MY_3 - c_{23}^2 MX_3) - M_3 d_2 C2C23) - M_3 C3 d_2 \dot{\theta}_2^2 - (M_3 d_2 S3 - C23MZ_3) \ddot{\theta}_1 - MX_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 - MY_3(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + gM_3 S23. \quad 3.43a$$

$$F32 = d_2 M_3 (C2S23\dot{\theta}_1^2 + C3\ddot{\theta}_2 + S3\dot{\theta}_2^2) + C23S23MX_3\dot{\theta}_1^2 + MZ_3S23\ddot{\theta}_1 + MX_3(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - MY_3(S23^2\dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) + gC23M_3. \quad 3.43b$$

$$F33 = d_2(C2\ddot{\theta}_1 - 2S2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)M_3 - C23^2MZ_3\dot{\theta}_1^2 + C23(MX_3\dot{\theta}_1 - 2MY_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) - S23MY_3\ddot{\theta}_1 - (MX_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + MZ_3S23\dot{\theta}_1^2)S23. \quad 3.43c$$

Et pour la résultante des moments extérieurs sur le corps 3:

$${}^3M_3 = {}^3J_3 {}^3\dot{\omega}_3 + {}^3\omega_3 \Lambda^3 J_3 {}^3\omega_3 + {}^3MS_3 \Lambda^3 \dot{V}_3.$$

$${}^3M_3 = \begin{bmatrix} M31 \\ M32 \\ M33 \end{bmatrix}. \quad 3.44$$

Tel que :

$$M31 = -d_2 C2S23MZ_3\dot{\theta}_1^2 - d_2 S3MZ_3\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1(d_2 C2MY_3 - S23XX_3) - 2d_2 S2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 MY_3 - gC23MZ_3 + C23\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(YY_3 - ZZ_3 - XX_3) - d_2 S3MZ_3\ddot{\theta}_2. \quad 3.44a$$

$$M32 = -C2C23d_2\dot{\theta}_1^2 MZ_3 - d_2 C3MZ_3\dot{\theta}_2^2 - \ddot{\theta}_1(d_2 C2MX_3 - C23YY_3) + d_2 S3MZ_3\ddot{\theta}_2 + gMZ_3S23 - S23(XX_3 - YY_3 - ZZ_3)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2d_2 S2MX_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2. \quad 3.44b$$

$$M33 = (d_2 C2(C23MY_3 + S23MX_3) + C23S23(YY_3 - XX_3))\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 d_2(C3MY_3 + S3MX_3) + \ddot{\theta}_2((C3MX_3 - S3MY_3) + ZZ_3) + ZZ_3\ddot{\theta}_3 + g(C23MX_3 - MY_3S23). \quad 3.44c$$

Quant à la deuxième chaîne composée du corps 5 et 6, comme il est montré dans la (figure 3.4) :



Figure 3.4 Schéma de la seconde chaîne de la structure

• Pour le Corps 5 :

$${}^0\omega_0 = 0, \quad {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \quad \text{et} \quad {}^0\dot{V}_0 = -g$$

$${}^5\omega_1 = {}^5A_1 \cdot {}^1\omega_1.$$

$${}^5\omega_1 = 0.$$

$$\text{Avec} \quad {}^5A_0 = \begin{bmatrix} C5 & 0 & -S5 \\ -S5 & 0 & -C5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^0P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.45$$

$${}^5\omega_5 = {}^5\omega_1 + \dot{\theta}_5 \cdot {}^5a_5 = {}^5\omega_1 + \dot{\theta}_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$${}^5\dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} -S5\dot{\theta}_1 \\ -C5\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad 3.46$$

Et pour l'accélération angulaire on aura:

$${}^5\ddot{\omega}_5 = {}^5A_1 \cdot ({}^1\ddot{\omega}_1 + (\ddot{\theta}_5 \cdot {}^5a_5 + {}^5\omega_1 \wedge \dot{\theta}_5 \cdot {}^5a_5)).$$

$${}^5\ddot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} -C5\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_5 - S5\ddot{\theta}_1 \\ S5\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_5 - C5\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix}. \quad 3.47$$

Alors l'accélération de translation du corps sera :

$${}^5\dot{V}_5 = {}^5A_1 \cdot ({}^1\dot{V}_1 + {}^1U_1 \cdot {}^1P_5).$$

$${}^5\dot{V}_5 = {}^5A_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}.$$

$${}^5\dot{V}_5 = \begin{bmatrix} g.S5 \\ g.C5 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad 3.48$$

La résultante des forces extérieures au corps 5 est :

$${}^5F_5 = M_5 \cdot {}^5\dot{V}_5 + {}^5U_5 \cdot {}^5MS_5.$$

$${}^5F_5 = M_5 \cdot {}^5\dot{V}_5 + {}^5\dot{\omega}_5 \wedge {}^5MS_5 + {}^5\omega_5 \wedge ({}^5\omega_5 \wedge {}^5MS_5)$$

$${}^5 F_5 = \begin{bmatrix} gM_5 S_5 - C_5^2 M X_5 \dot{\theta}_1 + C_5 (M Y_5 S_5 \dot{\theta}_1^2 - M Z_5 \ddot{\theta}_1) - M X_5 \dot{\theta}_5^2 - M Y_5 \ddot{\theta}_1 \\ g C_5 M_5 + C_5 S_5 M X_5 \ddot{\theta}_1 - M X_5 \ddot{\theta}_5 - M Y_5 (S_5^2 \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_5^2) + M Z_5 S_5 \ddot{\theta}_1 \\ -C_5^2 M Z_5 \dot{\theta}_1^2 + C_5 (M X_5 \ddot{\theta}_1 - 2 M Y_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5) - (2 M X_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + (M Y_5 \ddot{\theta}_1 + M Z_5 S_5 \dot{\theta}_1^2)) S_5 \end{bmatrix} \quad 3.49$$

La résultante des moments extérieurs sur le corps 5 alors est donnée par :

$${}^5 M_5 = {}^5 J_5 \cdot {}^5 \dot{\omega}_5 + {}^5 \omega_5 \wedge ({}^5 J_5 \cdot {}^5 \omega_5) + {}^5 M S_5 \wedge {}^5 \dot{V}_5$$

$${}^5 M_5 = \begin{bmatrix} -g M Z_5 C_5 + C_5 (Y Y_5 - Z Z_5 - X X_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - S_5 X X_5 \ddot{\theta}_1 \\ g M Z_5 S_5 - C_5 Y Y_5 \ddot{\theta}_1 - S_5 (X X_5 - Y Y_5 - Z Z_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ g (C_5 M X_5 - S_5 M Y_5) + C_5 S_5 \dot{\theta}_1^2 (Y Y_5 - X X_5) Z Z_5 \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad 3.50$$

• Pour le Corps 6 :

$${}^6 \omega_5 = {}^6 A_5 \cdot {}^5 \omega_5$$

$${}^6 \omega_5 = \begin{bmatrix} -S_5 \dot{\theta}_1 \\ -C_5 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad 3.51$$

Avec ${}^6 A_5 = \begin{bmatrix} C_6 & S_6 & 0 \\ -S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^5 P_6 = \begin{bmatrix} d_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3.52

$${}^6 \omega_6 = {}^6 \omega_5 + \dot{\theta}_6 {}^6 a_6$$

$${}^6 \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} -S56\dot{\theta}_1 \\ -C56\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}. \quad 3.53$$

$${}^6 \dot{\omega}_6 = {}^6 A_5 {}^5 \dot{\omega}_5 + (\ddot{\theta}_6 {}^6 a_6 + {}^6 \omega_5 \Lambda \dot{\theta}_6 {}^6 a_6).$$

$${}^6 \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} -S56\dot{\theta}_1 - C56\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) \\ S56\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) + C56\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6 \end{bmatrix}. \quad 3.54$$

Et l'accélération de translation du corps sera:

$${}^6 \dot{V}_6 = {}^6 A_5 ({}^5 \dot{V}_5 + {}^5 U_5 {}^5 P_6).$$

$${}^6 \dot{V}_6 = {}^6 A_5 ({}^5 \dot{V}_5 + {}^5 \dot{\omega}_5 \Lambda {}^5 P_6 + {}^5 \omega_5 \Lambda {}^5 \omega_5 \Lambda {}^5 P_6).$$

$${}^6 \dot{V}_6 = \begin{bmatrix} gC56 + d_3(S6\ddot{\theta}_5 - C6\dot{\theta}_5^2 + C5C56\dot{\theta}_1^2) \\ -gC56 + d_3(C5S56\dot{\theta}_1 C6\ddot{\theta}_5 + S6\dot{\theta}_5^2) \\ d_3(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5) \end{bmatrix}. \quad 3.55$$

La résultante des forces extérieures est donnée par :

$${}^6 F_6 = M_6 {}^6 \dot{V}_6 + {}^6 U_6 {}^6 M S_6.$$

$${}^6F_6 = M_6 {}^6\dot{V}_6 + {}^6\dot{\omega}_6 \wedge {}^6MS_6 + {}^6\omega_6 \wedge ({}^6\omega_6 \wedge {}^6MS_6).$$

$${}^6F_6 = \begin{bmatrix} F61 \\ F62 \\ F63 \end{bmatrix}. \quad 3.56$$

$$\begin{aligned} F61 = & -d_3(C5^2C6\dot{\theta}_1^2 - C5S5S6\dot{\theta}_1^2 + C6\dot{\theta}_5^2 - S6\ddot{\theta}_5)M_6 + gC56M_6 - C5^2C6(C6MX_6 - S6MY_6)\dot{\theta}_1^2 \\ & + C5(C6^2MY_6S5\dot{\theta}_1^2 + C6(2MX_6S5S6\dot{\theta}_1^2 - MZ_6\ddot{\theta}_1) - MY_6S5S6^2\dot{\theta}_1^2) - C6MY_6S5^2S6\dot{\theta}_1^2 \\ & + MX_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1^2 - (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2) - MY_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) + MZ_6S5S6\ddot{\theta}_1. \end{aligned} \quad 3.56a$$

$$\begin{aligned} F62 = & d_3(C5^2S6\dot{\theta}_1^2 + C5C6S5\dot{\theta}_1^2 + C6\ddot{\theta}_5 + S6\dot{\theta}_5^2)M_6 - gC56M_6 + C5^2(C6MX_6 - S6MY_6)S6\dot{\theta}_1^2 \\ & + C5(C6^2MX_6S5\dot{\theta}_1^2 - 2C6MY_6S5S\dot{\theta}_1^2 + MZ_6S6\ddot{\theta}_1) - C6^2MY_6S5^2\dot{\theta}_1^2 + C6(MZ_6S5\ddot{\theta}_1 \\ & - MX_6S5^2S6\dot{\theta}_1^2) + MX_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) - MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2. \end{aligned} \quad 3.56b$$

$$\begin{aligned} F63 = & d_3(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5)M_6 - C5^2MZ_6\dot{\theta}_1^2 + C5(C6(MX_6\ddot{\theta}_1 - 2MY_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) \\ & - (2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1)S6) - (C6^2MZ_6S5\dot{\theta}_1^2 + C6(2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1) \\ & + (MX_6\ddot{\theta}_1 - (2MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - MZ_6S5S6\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_1)S6)S5. \end{aligned} \quad 3.56c$$

Pour la résultante des moment extérieurs sur le corps 6, on aura :

$${}^6M_6 = {}^6J_6 {}^6\dot{\omega}_6 + {}^6\omega_6 \wedge ({}^6J_6 {}^6\omega_6) + {}^6MS_6 \wedge {}^6\dot{V}_6.$$

$${}^6M_6 = \begin{bmatrix} M61 \\ M62 \\ M63 \end{bmatrix} \quad 3.57$$

$$\begin{aligned} M61 = & d_3(-C5^2MZ_6S6\dot{\theta}_1^2 + C5(MY_6\ddot{\theta}_1 - C_6MZ_6S5\dot{\theta}_1^2) - C6MZ_6\ddot{\theta}_5 - 2MY_6S5\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 - S6MZ_6\dot{\theta}_5^2) \\ & - gC56MZ_6 + C56(Y\dot{Y}_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - Z\dot{Z}_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5)) - S56XX_6. \end{aligned} \quad 3.57a$$

$$\begin{aligned} M62 = & d_3(-C5^2C6MZ_6\dot{\theta}_1^2 + C5(MZ_6S5S6\dot{\theta}_1^2 - MX_6\ddot{\theta}_1) - C6MZ_6\dot{\theta}_5^2 + 2MX_6S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 \\ & + MZ_6S6\ddot{\theta}_5) + gS56MZ_6 - C56YY_6 + S56(Z\dot{Z}_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - X\dot{X}_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) \end{aligned} \quad 3.57b$$

$$\begin{aligned} M63 = & d_3(C5^2(C6MY_6\dot{\theta}_1^2 + MX_6S6\dot{\theta}_1^2) + C5(C6S5MX_6\dot{\theta}_1^2 - MY_6S5S6\dot{\theta}_1^2) + C6(MX_6\ddot{\theta}_5 + MY_6\dot{\theta}_5^2) \\ & + MX_6S6\dot{\theta}_5^2 - MY_6S6\ddot{\theta}_5) + g(C5(C6MX_6 - S6MY_6) - C6MY_6S5 - MX_6S6S5) + C56S65(Y\dot{Y}_6 - X\dot{X}_6) \\ & + Z\dot{Z}_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5). \end{aligned} \quad 3.57c$$

3.6.2. La récurrence arrière :

On démarre avec la première chaîne, et donc par calculer la force du torseur dynamique du dernier corps de la chaîne qui est le corps 3 .

- **Pour le Corps 3 :**

D'après les formules 3.17, 3.18 et 3.19 données plus haut :

$${}^3f_3 = {}^3F_3 + {}^3f_4 + {}^3fe_3 \quad 3.58$$

Avec ${}^3f_4 = 0$, car le corps C3 est un corps terminal dans la première chaîne, et il n'a donc pas d'interaction avec un corps antécédent .

$${}^3 f_3 = {}^3 F_3 + {}^3 f_{e_3} \quad {}^3 f_3 = \begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} \quad 3.59$$

Et les composantes du torseur dynamique au niveau du corps 3 sont :

$$f_{31} = \dot{\theta}_1((C23S23MY_3 - C23^2MX_3) - M_3C2d_2\dot{\theta}_2^2 - (M_3d_2S3 - C23MZ_3)\ddot{\theta}_1 - MX_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - MY_3(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3)) + f_{ex_3} + gM_3S23. \quad 3.59a$$

$$f_{32} = d_2M_3(C2C23\dot{\theta}_1^2 + C3\ddot{\theta}_2 + S3\dot{\theta}_2^2) + gC23M_3 + C23S23MX_3\dot{\theta}_1^2 + MZ_3S23\ddot{\theta}_1 + MX_3(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - MY_3(S23^2\dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) + f_{ey_3}. \quad 3.59b$$

$$f_{33} = d_2(C2\ddot{\theta}_1 - 2S2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)M_3 - C23^2MZ_3\dot{\theta}_1^2 + C23(MX_3\ddot{\theta}_1 - 2MY_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) - (2MX_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + MY_3\ddot{\theta}_1 + MZ_3S23\dot{\theta}_1^2)S23 + f_{ez_3}. \quad 3.59c$$

Nous avons aussi :

$${}^2 f_3 = {}^2 A_3 {}^3 f_3$$

$${}^2 f_3 = \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{z3} \end{bmatrix}. \quad 3.60$$

Et ses composantes sont données par :

$$f_{x3} = -d_2(C2^2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)M_3 - C23^2C3MX_3\dot{\theta}_1^2 + C23(C3(MY_3S23\dot{\theta}_1 - MZ_3\ddot{\theta}_1) - MX_3S23S3\dot{\theta}_1^2) \\ + (C3f_{ex3} - S3f_{ey3}) - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)_2(S3MY_3 + C3MX_3) - (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3)(MX_3S3 + C3MY_3) \\ - MZ_3S23S3\ddot{\theta}_1 - S23^2S3MY_3\dot{\theta}_1^2 + gM_3S2. \quad 3.60a$$

$$f_{y3} = d_2(C2S2\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)M_3 - C23^2S3MX_3\dot{\theta}_1^2 + C23(C3S23MX_3\dot{\theta}_1^2 + (MY_3S23\dot{\theta}_1 - MZ_3\ddot{\theta}_1)S3) \\ + (S3f_{ex3} + f_{ey3}C3) + (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3)(C3MX_3 - S3MY_3) - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)_2(S3MX_3 + C3MY_3) \\ - C3MY_3S23^2\dot{\theta}_1^2 + C3S23MZ_3\ddot{\theta}_1 + gM_3C2. \quad 3.60b$$

$$f_{z3} = d_2M_3(C2\ddot{\theta}_1 - 2S2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - MZ_3\dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(MY_3C23 + MX_3S23) + \ddot{\theta}_1(MX_3C23 - MY_3S23) \\ 3.60c$$

Le moment du torseur dynamique du corps 3 sera :

$${}^3 m_3 = {}^3 M_3 + {}^3 A_4 {}^4 m_4 + {}^3 m_{e3} + {}^3 P_4 \Lambda^3 f_4.$$

$${}^3 m_3 = \begin{bmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix}. \quad 3.61$$

Dont les composantes sont :

$$m_{31} = -d_2C2S23MZ_3\dot{\theta}_1^2 - d_2S3MZ_3\dot{\theta}_2^2 + \ddot{\theta}_1(d_2C2MY_3 - S23XX_3) - d_2S3MZ_3\ddot{\theta}_2 \\ - 2d_2S2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2MY_3 - gC23MZ_3 + C23\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(YY_3 - ZZ_3 - XX_3) + m_{ex3}. \quad 3.61a$$

$$\begin{aligned}
m_{32} = & -C_2 C_{23} d_2 \dot{\theta}_1^2 MZ_3 - d_2 C_3 MZ_3 \dot{\theta}_2^2 - \ddot{\theta}_1 (d_2 C_2 M X_3 - C_{23} Y Y_3) + d_2 S_3 MZ_3 \ddot{\theta}_2 \\
& - S_{23} (X X_3 - Y Y_3 - Z Z_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2 d_2 S_2 M X_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_{e y_3} + g M Z_3 S_{23} .
\end{aligned} \quad 3.61b$$

$$\begin{aligned}
m_{33} = & (d_2 C_2 (C_{23} M Y_3 + S_{23} M X_3) + C_{23} S_{23} (Y Y_3 - X X_3)) \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 d_2 (C_3 M Y_3 + S_3 M X_3) \\
& + \ddot{\theta}_2 ((C_3 M X_3 - S_3 M Y_3) + Z Z_3) + Z Z_3 \ddot{\theta}_3 + g (C_{23} M X_3 - S_{23} M Y_3) + m_{e z_3} .
\end{aligned} \quad 3.61c$$

Et comme le couple est donné par la relation :

$$\Gamma_3 = {}^3 m_3^T {}^3 a_3 + F_{S3} \text{sign}(\dot{\theta}_3) + F_{V3} \dot{\theta}_3 + I a_3 \ddot{\theta}_3 \quad 3.62$$

On aura donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 = & \ddot{\theta}_2 ((C_3 M X_3 - S_3 M Y_3) + Z Z_3) + (Z Z_3 + I a_3) \ddot{\theta}_3 + g (C_{23} M X_3 - M Y_3 S_{23}) + m_{e z_3} \\
& + F_{V3} \dot{\theta}_3 + F_{S3} \text{sign}(\dot{\theta}_3) + (d_2 C_2 (C_{23} M Y_3 + S_{23} M X_3) + C_{23} S_{23} (Y Y_3 - X X_3)) \dot{\theta}_1^2 \\
& + \dot{\theta}_2^2 d_2 (C_3 M Y_3 + S_3 M X_3) .
\end{aligned} \quad 3.63$$

- **Pour le Corps 2 :**

Le moment du torseur dynamique du corps 2 est:

$${}^2 m_2 = {}^2 M_2 + {}^2 A_3 {}^3 m_3 + {}^2 P_3 \wedge {}^2 f_3 + {}^2 m_{e 2} . \quad 3.64$$

$${}^2 m_2 = \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \end{bmatrix} . \quad 3.65$$

Dont les composantes sont :

$$\begin{aligned}
m_{21} = & -\dot{\theta}_1^2 MZ_3 d_2 S_{23} + \ddot{\theta}_1 (d_2 C_2 (C_3 M Y_3 + S_3 M X_3) + C_{23} S_3 Y Y_3 - C_3 S_{23} X X_3) \\
& - \ddot{\theta}_2 d_2 MZ_3 - g C_2 MZ_2 - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (d_2 C_3 S_2 M Y_3 + d_2 S_3 C_2 M X_3) + C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (Y Y_2 - X X_2 - Z Z_2) \\
& + \dot{\theta}_2^2 d_2 C_3 S_3 MZ_3 - m_{e y_3} S_3 + C_{23} C_3 (X X_3 - Y Y_3 + Z Z_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + C_3 m_{e x_3} + m_{e x_2}
\end{aligned} \quad 3.65a$$

$$\begin{aligned}
m_{22} = & (-d_2(C_{23}\ddot{\theta}_1 - 2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2))M_3 + C_2(-C_{23}C_3M_{Z_3}\dot{\theta}_1^2 - C_3M_{X_3}\ddot{\theta}_1 + S_3M_{Y_3}\ddot{\theta}_1 - M_{Z_3}S_2S_3\dot{\theta}_1^2) \\
& + C_2^2M_{Z_3}\dot{\theta}_1^2 - C_{23}(M_{X_3}\ddot{\theta}_1 - 2M_{Y_3}\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) - C_3^2M_{Z_3}\dot{\theta}_2^2 + 2C_3S_2M_{X_3}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - fe_{z_3} \\
& + 2M_{X_3}S_2S_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + M_{Y_3}(S_2^2\ddot{\theta}_1 - 2S_2S_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + M_{Z_3}(S_2^2 - S_3^2)\dot{\theta}_1^2 d_2 + gM_{Z_2}S_2 \\
& - C_2Y_{Y_2}\ddot{\theta}_1 + C_{23}(-C_3Y_{Y_3}\ddot{\theta}_1 - S_3(X_{X_3} - Y_{Y_3} + Z_{Z_3})\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) + C_3(mey_3 - S_{23}(X_{X_3} \\
& - Y_{Y_3} - Z_{Z_3})\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) + mex_3S_3 + me_{y_2} - S_2(X_{X_2} - Y_{Y_2} - Z_{Z_2})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - S_3S_{23}X_{X_3}\ddot{\theta}_1. \quad 3.65b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{23} = & \dot{\theta}_1^2 (d_2C_2(C_{23}M_{Y_3} + S_{23}M_{X_3}) - d_2(S_3C_{23}^2M_{X_3} + S_3S_{23}^2M_{Y_3}) + d_2C_{23}S_{23}(C_3M_{X_3} + S_3M_{Y_3}) \\
& + d_2^2C_2S_2M_3 + M_{X_3}d_2S_3 + C_2S_2(Y_{Y_2} - X_{X_2}) - C_{23}S_{23}(X_{X_3} - Y_{Y_3})) - \dot{\theta}_3^2 M_{Y_3}C_3d_2 \\
& + \ddot{\theta}_3(Z_{Z_3} + d_2(M_{X_3}C_3 - M_{Y_3}S_3)) + d_2(C_3fe_{y_3} + S_3fe_{x_3}) + g(C_2M_{X_2} - S_2M_{Y_2}) + me_{z_2} \\
& + me_{z_3} + C_2d_2gM_3. \quad 3.65c
\end{aligned}$$

Le couple du corps 2 est donné par la relation :

$$\Gamma_2 = {}^2m_2 T_2^T a_2 + I_{a_2} \ddot{\theta}_2 + F_{v_2} \dot{\theta}_2 + F_{s_2} \text{sign}(\dot{\theta}_2). \quad 3.66$$

Et de ce fait on trouve le couple :

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 = & \dot{\theta}_1^2 (d_2C_2(C_{23}M_{Y_3} + S_{23}M_{X_3}) - d_2(S_3C_{23}^2M_{X_3} + S_3S_{23}^2M_{Y_3}) + d_2C_{23}S_{23}(C_3M_{X_3} \\
& + M_{Y_3}S_3) + d_2^2C_2S_2M_3 + M_{X_3}d_2S_3 + C_2S_2(Y_{Y_2} - X_{X_2}) - C_{23}S_{23}(X_{X_3} - Y_{Y_3})) - \dot{\theta}_3^2 M_{Y_3}C_3d_2 \\
& + \ddot{\theta}_1 d_2 M_{Z_3} S_2 + \ddot{\theta}_2 (I_{a_2} + d_2^2 M_3 + 2d_2(M_{X_3}C_3 - M_{Y_3}S_3) + Z_{Z_2} + Z_{Z_2}) \\
& + \ddot{\theta}_3 (Z_{Z_3} + d_2(M_{X_3}C_3 - M_{Y_3}S_3)) + d_2(C_3fe_{y_3} + S_3fe_{x_3}) + g(C_2M_{X_2} - S_2M_{Y_2}) \\
& - 2M_{Y_3}C_3d_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + d_2C_2gM_3 + me_{z_2} + me_{z_3} + F_{v_3}\dot{\theta}_3 + F_{s_2}\text{sign}(\dot{\theta}_2) \quad 3.67
\end{aligned}$$

• Pour le Corps 1 :

Le moment du torseur dynamique du corps 1 est donné par :

$${}^1m_1 = {}^1M_1 + {}^1A_2^2m_2 + {}^1P_2 \wedge {}^1f_2 + {}^1me_1. \quad 3.68$$

Comme ${}^1P_2=0$ alors on aura:

$${}^1m_1 = {}^1M_1 + {}^1A_2 {}^2m_2 + {}^1me_1 .$$

$${}^1m_1 = \begin{bmatrix} m11 \\ m12 \\ m13 \end{bmatrix} . \quad 3.69$$

Dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} m11 = & (d_2(C_2\ddot{\theta}_1 - 2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2))M_3S_2 + C_2^2(C_2C_3S_3MZ_3\dot{\theta}_1^2 + C_3(MY_3\ddot{\theta}_1 - MZ_3S_2\ddot{\theta}_1) + MX_3S_3\ddot{\theta}_1) \\ & + C_2(C_2C_3S_2MZ_3\dot{\theta}_1^2 - C_3^2MZ_3\ddot{\theta}_1 + C_3(MX_3S_2\ddot{\theta}_1 - (2MY_3S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + MZ_3S_3(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2))) \\ & - (C_2C_3^2MZ_3\dot{\theta}_1^2 - C_2C_3(MX_3\ddot{\theta}_1 - 2MY_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) - (C_2C_3^2MZ_3\dot{\theta}_1^2 - C_2C_3(MX_3\ddot{\theta}_1 \\ & - 2MY_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) - C_3^2MZ_3\dot{\theta}_2^2 + 2C_3MX_3S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - fe_{z_3} + (2MX_3S_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) \\ & - MY_3(2S_2S_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - S_2\ddot{\theta}_1) + MZ_3(s_{23}^2 - s_3^2)\dot{\theta}_1))s_2)d_2 + g(-c_2^2MZ_2 - MY_1 - MZ_2S_2^2) \\ & - C_2^2(XX_2 - YY_2 + ZZ_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + C_2(-C_2C_3(C_3(XX_3 - YY_3 + ZZ_3)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - S_3YY_3\ddot{\theta}_1) \\ & + C_3(mex_3 - S_2C_3XX_3\ddot{\theta}_1) + mex_2 - me_{y_3}S_3 + S_2(YY_2 - XX_2)\ddot{\theta}_1 + (C_3YY_3\ddot{\theta}_1 - S_3(XX_3 - YY_3 \\ & + ZZ_3) - C_3(me_{y_3} - S_2C_3S_2(XX_3 - YY_3 - ZZ_3)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) + mex_1 - (mex_3S_3 + me_{y_2} \\ & - S_2(XX_2 - YY_2 - ZZ_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - S_2C_3S_2XX_3\ddot{\theta}_1)S_2 . \end{aligned} \quad 3.69a$$

$$\begin{aligned} m12 = & -d_2^2(C_2(C_2C_3S_3 - C_3S_2C_3)\dot{\theta}_1^2 - \ddot{\theta}_2)M_3 + d_2(gC_2M_3 + C_2(C_2C_3MY_3 + MX_3S_2C_3)\dot{\theta}_1^2 - C_2C_3^2S_3MX_3\dot{\theta}_1^2 \\ & + C_2C_3(C_3MX_3S_2\dot{\theta}_1^2 + (MY_3S_2\dot{\theta}_1^2 - MZ_3\ddot{\theta}_1)S_3) + C_3(fe_{y_3} + MX_3(2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - MY_3(S_2C_3^2\dot{\theta}_1^2 \\ & + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_3^2) + MZ_3S_2\ddot{\theta}_1) + (fe_{x_3} + MX_3(\dot{\theta}_1^2 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) - MY_3(2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3))S_3) + g(C_2MX_2 \\ & + MX_1 - MY_2S_2) + C_2S_2\dot{\theta}_1^2(YY_2 - XX_2) - C_2C_3S_2\dot{\theta}_1^2(XX_3 - YY_3) + me_{y_1} + me_{z_2} + me_{z_3} + \\ & + ZZ_2\ddot{\theta}_2 + ZZ_3(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) . \end{aligned} \quad 3.69b$$

$$\begin{aligned}
 m13 = & \ddot{\theta}_1 (d_2^2 C_2^2 M_3 + d_2 C_2^2 (MX_3 C_3 - MY_3 S_3) - C_2 S_2 d_2 (MY_3 C_3 + MX_3 S_3) + d_2 C_2 (C_2 M X_3 \\
 & - S_2 M Y_3 + Z Z_1 + S_2^2 X X_3 + S_2^2 X X_2 + Y Y_3 C_2^2 + Y Y_2 C_2^2) + \ddot{\theta}_2 S_2 d_2 M Z_3 + C_2 S_2^2 d_2 M Z_3) \\
 & + \dot{\theta}_2^2 C_3 C_2 M Z_3 d_2 + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (-d_2 C_2 (M X_3 S_2 + M Y_3 C_2) + 2 C_2 S_2 S_2 (X X_3 - Y Y_3) \\
 & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-2 d_2^2 S_2 C_2 M_3 + 2 C_2 S_2 d_2 (M Y_3 S_3 + C_3 M X_3) + d_2 C_2 f e z_3 - C_2 M e y_3 - m e x_3 S_2 \\
 & - m e x_2 S_2 - m e y_2 C_2) .
 \end{aligned} \tag{3.69c}$$

Et le couple du corps C1 est donné par :

$$\Gamma_1 = (\overline{\sigma}_1^{-1} m_1)^T a_1 + F_{s1} \text{sign}(\dot{\theta}_1) + F_{v1} \dot{\theta}_1 + I a_1 \ddot{\theta}_1 . \tag{3.70}$$

D'ou, on trouve l'expression du couple 1 :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 = & \ddot{\theta}_1 (I a_1 + d_2^2 C_2^2 M_3 + d_2 C_2^2 (M X_3 C_3 - M Y_3 S_3) - C_2 S_2 d_2 (M Y_3 C_3 + M X_3 S_3) \\
 & + d_2 C_2 (C_2 M X_3 - S_2 M Y_3) + Z Z_1 + S_2^2 X X_3 + S_2^2 X X_2 + Y Y_3 C_2^2 + Y Y_2 C_2^2) \\
 & + \ddot{\theta}_2 S_2 d_2 M Z_3 + \dot{\theta}_1^2 (C_2^3 M Z_3 d_2 - C_2 M Z_3 d_2 + S_3^2 M Z_3 d_2 + C_2 S_2^2 d_2 M Z_3) \\
 & + \dot{\theta}_2^2 C_3 C_2 M Z_3 d_2 + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (-d_2 C_2 (M X_3 S_2 + M Y_3 C_2) + 2 C_2 S_2 S_2 (X X_3 - Y Y_3) \\
 & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-2 d_2^2 C_2 S_2 M_3 + 2 C_2 S_2 d_2 (M Y_3 S_3 + C_3 M X_3) + 2 S_2^2 d_2 (C_3 M Y_3 + S_3 M X_3) \\
 & + 2 S_2 C_2 (X X_2 - Y Y_2)) + d_2 C_2 f e z_3 - C_2 M e y_3 - m e x_3 S_2 - m e x_2 S_2 - m e y_2 C_2 + F_{v1} \dot{\theta}_1 \\
 & + F_{s1} \text{sign}(\dot{\theta}_1) .
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Avec la seconde chaîne, nous commençons par le Corps 6

- **Pour le Corps 6 :**

$${}^6 f_6 = {}^6 F_6 + {}^6 f e_6 + {}^6 f_7 . \tag{3.72}$$

Avec ${}^6 f_7 = 0$ car le corps C6 c'est un corps terminal pour cette chaîne.

Alors on obtient la force du torseur dynamique du corps 6 :

$${}^6f_6 = \begin{bmatrix} f61 \\ f62 \\ f63 \end{bmatrix} \quad 3.73$$

$$\begin{aligned} f61 = & -d_3(C5^2C6\dot{\theta}_1^2 - C5S5S6\dot{\theta}_1^2 + C6\dot{\theta}_5^2 - S6\ddot{\theta}_5)M_6 + gC56M_6 - C5^2C6(C6MX_6 - S6MY_6)\dot{\theta}_1^2 \\ & + C5(C6^2MY_6S5\dot{\theta}_1^2 + C6(2MX_6S5S6\dot{\theta}_1^2 - MZ_6\ddot{\theta}_1) - MY_6S5S6^2\dot{\theta}_1^2) - C6MY_6S5^2S6\dot{\theta}_1^2 \\ & + MX_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1^2 - (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2) - MY_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) + MZ_6S5S6\ddot{\theta}_1 + fe_{x_6} \end{aligned} \quad 3.73a$$

$$\begin{aligned} f62 = & d_3(C5^2S6\dot{\theta}_1^2 + C5C6S5\dot{\theta}_1^2 + C6\ddot{\theta}_5 + S6\dot{\theta}_5^2)M_6 - gC56M_6 + C5^2(C6MX_6 - S6MY_6)S6\dot{\theta}_1^2 \\ & + C5(C6^2MX_6S5\dot{\theta}_1^2 - 2C6MY_6S5S6\dot{\theta}_1^2 + MZ_6S6\ddot{\theta}_1) - C6^2MY_6S5^2\dot{\theta}_1^2 + C6(MZ_6S5\ddot{\theta}_1 \\ & - MX_6S5^2S6\dot{\theta}_1^2) + MX_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) - MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + fe_{y_6} \end{aligned} \quad 3.73b$$

$$\begin{aligned} f63 = & d_3(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5)M_6 - C5^2MZ_6\dot{\theta}_1^2 + C5(C6(MX_6\ddot{\theta}_1 - 2MY_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) \\ & - (2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1)S6) - (C6^2MZ_6S5\dot{\theta}_1^2 + C6(2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1) \\ & + (MX_6\ddot{\theta}_1 - (2MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - MZ_6S5S6\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_1)S6)S5 + fe_{z_6} \end{aligned} \quad 3.73c$$

Et le moment du torseur dynamique est donné par:

$${}^6m_6 = {}^6M_6 + {}^6A_7 {}^7m_7 + {}^6P_7 \wedge {}^6P_7 + {}^6me_6 \quad 3.74$$

$${}^6m_6 = \begin{bmatrix} m61 \\ m62 \\ m63 \end{bmatrix} \quad 3.75$$

Dont les composantes sont :

$$m61 = d_3(-C5^2 MZ_6 S6 \dot{\theta}_1^2 + C5(MY_6 \ddot{\theta}_1 - C_6 MZ_6 S5 \dot{\theta}_1^2) - C6 MZ_6 \ddot{\theta}_5 - 2MY_6 S5 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_1 - S6 MZ_6 \dot{\theta}_5^2) - gC56 MZ_6 + C56(YY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5)) - S56 XX_6 + mex_6. \quad 3.75a$$

$$m62 = d_3(-C5^2 C6 MZ_6 \dot{\theta}_1^2 + C5(MZ_6 S5 S6 \dot{\theta}_1^2 - MX_6 \ddot{\theta}_1) - C6 MZ_6 \dot{\theta}_5^2 + 2MX_6 S5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + MZ_6 S6 \ddot{\theta}_5) + gS56 MZ_6 - C56 YY_6 + S56(ZZ_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - XX_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) + mey_6 \quad 3.75b$$

$$m63 = d_3(C5^2(C6 MY_6 \dot{\theta}_1^2 + MX_6 S6 \dot{\theta}_1^2) + C5(C6 S5 MX_6 \dot{\theta}_1^2 - MY_6 S5 S6 \dot{\theta}_1^2) + C6(MX_6 \ddot{\theta}_5 + MY_6 \dot{\theta}_5^2) + MX_6 S6 \dot{\theta}_5^2 - MY_6 S6 \ddot{\theta}_5) + g(C5(C6 MX_6 - S6 MY_6) - C6 MY_6 S5 - MX_6 S6 S5) + C56 S65(YY_6 - XX_6) + ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) + mez_6. \quad 3.75c$$

On calcul, donc le couple selon :

$$\Gamma_6 = I_{a_6} \ddot{\theta}_6 + F_{v_6} \dot{\theta}_6 + F_{s_6} \text{sign}(\dot{\theta}_6) + {}^6 m_6 {}^T {}^6 a_6. \quad 3.76$$

On trouve alors :

$$\Gamma_6 = d_3(C5^2(C6 MY_6 \dot{\theta}_1^2 + MX_6 S6 \dot{\theta}_1^2) + C5(C6 S5 MX_6 \dot{\theta}_1^2 - MY_6 S5 S6 \dot{\theta}_1^2) + C6(MX_6 \ddot{\theta}_5 + MY_6 \dot{\theta}_5^2) + MX_6 S6 \dot{\theta}_5^2 - MY_6 S6 \ddot{\theta}_5) + g(C5(C6 MX_6 - S6 MY_6) - C6 MY_6 S5 - MX_6 S6 S5) + C56 S65(YY_6 - XX_6) + ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) + mez_6 + F_{v_6} \dot{\theta}_6 + F_{s_6} \text{sign}(\dot{\theta}_6) + I_{a_6}. \quad 3.77$$

• **Pour le Corps 5 :**

$${}^5 f_6 = {}^5 A_6 {}^6 f_6$$

$${}^5 f_6 = \begin{bmatrix} f61 \\ f62 \\ f63 \end{bmatrix}. \quad 3.78$$

Dont les composantes sont :

$$f61 = -d_3(C5^2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_5^2) M_6 + gM_6 S5 - C5^2(C6 MX_6 - MY_6 S6) \dot{\theta}_1^2 + (C5 C6^3 S5 MY_6 \dot{\theta}_1^2 + C6^2(MX_6 S5 S6 \dot{\theta}_1^2 - MZ_6 \ddot{\theta}_1) + C6 MY_6 S5 S6^2 \dot{\theta}_1^2 + (MX_6 S5 S6 \dot{\theta}_1^2 - MZ_6 \ddot{\theta}_1) S6^2) + C6(fex_6 - MX_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 - MY_6(\ddot{\theta}_6 + \ddot{\theta}_5)) - (fey_6 + MX_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) - MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2) S6. \quad 3.79$$

$$\begin{aligned}
f62 = & d_3(C5S5\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_5^2)M_6 + gC5M_6 + (C5C6^2MX_6S5\dot{\theta}_1 - C6^2MY_6S5S6\dot{\theta}_1 + C6S5S6^2\dot{\theta}_1 \\
& - MY_6S5S6^3\dot{\theta}_1) - C6^3S5^2MY_6\dot{\theta}_1 - C6^2(MX_6S5S6\dot{\theta}_1 - MZ_6\ddot{\theta}_1)S5 + C6(fe_{y6} + MX_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6)) \\
& + MY_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1 - (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2) + (fe_{x6} - MX_6(S5^2S6^2 + (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2) - MY_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) \\
& + MZ_6S5S6\ddot{\theta}_1)S6
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
fe63 = & d_3(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5)M_6 - C5^2MZ_6\dot{\theta}_1^2 + C5(C6(MX_6\ddot{\theta}_1 - 2MY_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) - (2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) \\
& + MY_6\ddot{\theta}_1)S6) - C6_2MZ_6S5_2\dot{\theta}_1^2 - 2C6(MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1)S5 + fe_{z6} \\
& - (MX_6\ddot{\theta}_1 - 2MY_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - MZ_6S5S6\dot{\theta}_1)\dot{\theta}_1)S5S6.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Et le moment du torseur dynamique du corps 5 est :

$${}^5m_5 = {}^5M_5 + {}^5A_6 {}^6m_6 + {}^5P_6 {}^5f_6 + {}^5me_5. \tag{3.82}$$

$${}^5m_5 = \begin{bmatrix} m51 \\ m52 \\ m53 \end{bmatrix}. \tag{3.83}$$

Dont les composantes sont :

$$\begin{aligned}
m51 = & d_3(C5(-C6^2MZ_6S5\dot{\theta}_1^2 + C6MY_6\ddot{\theta}_1 + MX_6S6\ddot{\theta}_1 - MZ_6S5S6^2\dot{\theta}_1) - C6^2MZ_6\ddot{\theta}_5 - 2MY_6S5\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 \\
& - (2MX_6S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + MZ_6S6\ddot{\theta}_5)S6) + gC5(-C6^2MZ_6 - MZ_5 - MZ_6S6^2) + C5(-C6^2XX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \\
& + C6S5\ddot{\theta}_1(Y Y_6 - X X_6) - S6_2Y Y_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - X X_5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + (Y Y_5 - Z Z_5)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5) \\
& - S5\ddot{\theta}_1(Y Y_6S6_2 + X X_5) + C5_6C6(Y Y_6 - Z Z_6)(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - C6_2S5X X_6\ddot{\theta}_1 \\
& + C6(mex_6 + S5S6(X X_6 - Y Y_6)(\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6))) - me_{y6}S6 + S5S6S6(X X_6 - Z Z_6)(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \\
& + mex_5
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
m52 = & -d_3^2(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5)M_6 + d_3(C5(C6(2MY_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - 2MX_6\dot{\theta}_1) + (2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1)S6) \\
& + C6^2MZ_6(S5^2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_5^2) + C6(2MX_6\dot{\theta}_1(2\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + MY_6\ddot{\theta}_1)S5 - fe_{z6} + (MX_6S5\ddot{\theta}_1 - (2MY_6S5\dot{\theta}_1(2\dot{\theta}_5 \\
& + \dot{\theta}_6) - MZ_6(S5^2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_5^2)S6))S6) + g(C6^2MZ_6 + MZ_5 + MZ_6S6^2)S5 - C5(C6^2Y Y_6\ddot{\theta}_1 + C6S6(X X_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -YY_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6)+(S6^2XX_6+YY_5)\ddot{\theta}_1+C56S6(Y Y_6-ZZ_6)(\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_5)+C6^2S5Y Y_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6)+C6(mey_6 \\
& -S5S6(XX_6-YY_6)\ddot{\theta}_1-S56(XX_6-ZZ_6)(\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6))+mez_6S6+S5(S6^2XX_6(\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6) \\
& -(XX_5-YY_5-ZZ_5)\dot{\theta}_5)\dot{\theta}_1+mey_5
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
m53=& (C5S5\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_6)M_6+d_3(gC5M_6+C5^2(C6MY_6+S6MX_6)\dot{\theta}_1+C5(C6^3MX_6-C6^2MY_6S6 \\
& +C6MX_6(S6^2+1)-MY_6S6(S6^2+1))S5\dot{\theta}_1-C6^3MY_6S5^2-C6^2(MX_6S5S6\dot{\theta}_1-MZ_6\ddot{\theta}_1)S5 \\
& +C6(fey_6+MX_6(2\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)+MY_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6-\dot{\theta}_6^2))+fex_6-MX_6(S5^2S6^2\dot{\theta}_1 \\
& +(2\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6)\dot{\theta}_6)-(MY_6(2\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)-MZ_6S5S6\ddot{\theta}_1)S6)+g(C5(C6MX_6+MX_5-MY_6S6) \\
& -(C6MY_6+MX_6S6+MY_5)S5)-C5S5(XX_5-YY_5)\dot{\theta}_1-C56S56(XX_6-YY_6)+mez_6+ZZ_5\ddot{\theta}_5 \\
& ZZ_6(\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)+mez_5.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Et comme le vecteur de position P est nul, l'expression du couple sera :

$$\Gamma_5 = I a_5 \ddot{\theta}_5 + F_{v5} \dot{\theta}_5 + F_{s5} \text{sign}(\dot{\theta}_5) + {}^5 m_5 \text{ }^T 5 a_5. \tag{3.87}$$

Alors, le 5ème couple est donné par:

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 =& (C5S5\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_6)M_6+d_3(gC5M_6+C5^2(C6MY_6+S6MX_6)\dot{\theta}_1+C5(C6^3MX_6-C6^2MY_6S6 \\
& +C6MX_6(S6^2+1)-MY_6S6(S6^2+1))S5\dot{\theta}_1-C6^3MY_6S5^2-C6^2(MX_6S5S6\dot{\theta}_1-MZ_6\ddot{\theta}_1)S5 \\
& +C6(fey_6+MX_6(2\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)+MY_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6-\dot{\theta}_6^2))+fex_6-MX_6(S5^2S6^2\dot{\theta}_1 \\
& +(2\dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6)\dot{\theta}_6)-(MY_6(2\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)-MZ_6S5S6\ddot{\theta}_1)S6)+g(C5(C6MX_6+MX_5-MY_6S6) \\
& -(C6MY_6+MX_6S6+MY_5)S5)-C5S5(XX_5-YY_5)\dot{\theta}_1-C56S56(XX_6-YY_6)+mez_6+ZZ_5\ddot{\theta}_5 \\
& +ZZ_6(\ddot{\theta}_5+\ddot{\theta}_6)+mez_5+F_{v5}\dot{\theta}_5+F_{s5}\text{sign}(\dot{\theta}_5)+\dot{\theta}_5 I a_5.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

3.7. Equations de contrainte de fermeture de la boucle :

Dans le cas, ou on veut exprimer les positions et les vitesses des corps de la structure fermée en fonction des positions et vitesses des l'articulations motorisées . Dans notre cas, On calcule les couples articulaires à partir des couples de la structure arborescente équivalente Γ_{ar} , majorés par les couples articulaires nécessaires pour respecter les contraintes de fermeture de la boucle Γ_c .

Soit en notant Γ le vecteur des couples aux articulations du système fermé :

$$\Gamma = \Gamma_{ar}(q_{ar}, \dot{q}_{ar}, \ddot{q}_{ar}) + \left[\frac{\partial \phi(q_{ar})}{\partial q_{ar}} \right]^T \lambda. \quad 3.89$$

Soit les variables articulaires tel que:

q_{ar} : variable articulaire de la structure arborescente équivalente.

q_a : variable articulaire motorisée dite active.

q_p : variable articulaire non motorisés dite passive.

Ou $\phi(q)=0$ représente les P équations de contrainte de fermeture de la boucle.

$$\left[\frac{\partial \phi(q_{ar})}{\partial q_{ar}} \right] = [W_a \ W_p] \quad 3.90$$

Γ_{ar} Constitue le modèle dynamique de la structure arborescente ouverte équivalente en fonction de q_{ar}, \dot{q}_{ar} et \ddot{q}_{ar} . Sa forme générale est donnée par :

$$\Gamma_{ar} = A_{ar} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + H_{ar}. \quad 3.91$$

A_{ar} :matrice d'inertie de la structure arborescente.

H_{ar} :vecteur des forces et couples centrifuges.

On note que le vecteur $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_p]^T$ contient les multiplicateur de Lagrange. nous utilisons les méthodes qui tiennent compte du fait que les couples des articulations passives du système fermés sont nuls, ce qui permet d'écrire que :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ 0_{p \times 1} \end{bmatrix} \quad 3.92$$

Γ_m Contenant les couples délivrés par les N moteurs. On écrit que :

$$\Gamma_{ar} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} \quad 3.93$$

Où Γ_a et Γ_p désignent les vecteurs des éléments relatifs aux articulations respectivement actives et passives. L'équation 3.92 devient alors :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ 0_{p \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_a^T \lambda \\ W_p^T \lambda \end{bmatrix} \quad 3.94$$

On a donc un système de N équations où les inconnues sont Γ_m et λ . On utilise la partie inférieure de l'équation 3.94 pour déterminer les multiplicateurs de Lagrange ce qui donne :

$$\lambda = -[W_p^T]^{-1} \Gamma_p. \quad 3.95$$

On obtient les couples aux actionneurs du système fermé en portant ce résultat dans la partie supérieure de l'égalité 3.940, soit :

$$\Gamma_m = \Gamma_a - W_a^T [W_p^T]^{-1} \Gamma_p. \quad 3.96$$

on a :

$$W = -W_p^{-1} W_a. \quad 3.97$$

On déduit que :

$$\Gamma_m = \Gamma_a + W^T \Gamma_p = \begin{bmatrix} I_N & W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix}. \quad 3.98$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} I_N & W^T \end{bmatrix} \Gamma_{ar} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial q_a}{\partial q_a} \right]^T \\ \left[\frac{\partial q_p}{\partial q_a} \right]^T \end{bmatrix} \Gamma_{ar} \quad 3.99a$$

$$\Gamma_m = G^T \Gamma_{ar} \quad 3.99b$$

Ou G étant le jacobien des variables articulaires de la structure arborescente par rapport au variables active, et définie comme :

$$G = \frac{\partial q_{ar}}{\partial q_a} \quad 3.100$$

La relation 3.89 Constitue le modèle dynamique inverse des systèmes a boucle cinématique fermée. Γ_{ar} est calculé de façon performante avec l'algorithme de Newton-Euler décrit précédemment .

Après avoir calculer le modèle dynamique de la structure arborescente, il ne reste qu'a calculé la matrice jacobienne G des variables q_{ar} par rapport aux variables q_a .

On rappelle que :

$$\begin{aligned} q_a &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] && \text{variables actives.} \\ q_p &= [\theta_3 \ \theta_6] && \text{variables passives.} \\ q_{ar} &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_5 \ \theta_6] && \text{variables articulaires .} \end{aligned}$$

Et des équations de contrainte de fermeture de la boucle parallélogramme calculées au chapitre2 , les formules 2.8a et 2.8b, donnent :

$$\theta_3 = \theta_5 + \frac{\pi}{2} - \theta_2 . \quad \text{Et} \quad \theta_6 = -\theta_5 + \theta_2 .$$

A partir de ces la relation nous obtenons:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{donc : } G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 3.101$$

On déduit de la relation 3.99b les couples moteurs :

$$\Gamma_{m1} = \Gamma_{ar1} . \quad 3.102a$$

$$\Gamma_{m2} = \Gamma_{ar2} - \Gamma_{ar3} + \Gamma_{ar6} . \quad 3.102b$$

$$\Gamma_{m5} = \Gamma_{ar3} + \Gamma_{ar5} - \Gamma_{ar6} . \quad 3.102c$$

Ou Γ_{arj} représente le couple de l'articulation j pour la structure arborescente équivalente .

Alors les couple motorisé seront donnés comme suit : (Nous nous basons sur les expressions de couples simplifiés , calculés dans l'annexe C)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m2} = & \dot{\theta}_1^2 (d_2 C_2 C_2 M_3 - d_2 S_3 S_2^2 M_3) + d_2 C_2 S_2 S_3 M_3 + F_{v2} \dot{\theta}_2 + F_{s2} \text{sign}(\dot{\theta}_2) \\
& d_2^2 C_2 S_2 M_3 + C_2 S_2 (Y Y_2 - X X_2) - C_2 S_2 S_3 (X X_3 - Y Y_3) - \dot{\theta}_3^2 M_3 C_3 d_2 \\
& + \ddot{\theta}_2 (I a_2 + d_2^2 M_3 - 2 d_2 M_3 S_3 + Z Z_3 + Z Z_2) + d_2 C_2 g M_3 + m e z_2 + m e z_3 + \\
& \ddot{\theta}_3 (Z Z_3 - d_2 M_3 S_3) + d_2 (C_3 f e y_3 + S_3 f e x_3) + g C_2 M X_2 - 2 M Y_3 C_3 d_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& - \ddot{\theta}_2 (-S_3 M Y_3 + Z Z_3) - (Z Z_3 + I a_3) \ddot{\theta}_3 + g M Y_3 S_2 S_3 + m e z_3 - F_{v3} \dot{\theta}_3 - F_{s3} \text{sign}(\dot{\theta}_3) \\
& - (d_2 C_2 C_2 M_3 - C_2 S_2 S_3 (Y Y_3 - X X_3)) \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2 d_2 C_3 M_3 \\
& + d_3 (C_5^2 M X_6 S_6 \dot{\theta}_1^2 + C_5 C_6 S_5 M X_6 \dot{\theta}_1^2 + C_6 M X_6 \ddot{\theta}_5 + Z Z_6 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) + m e z_6 + F_{v6} \dot{\theta}_6 \\
& + F_{s6} \text{sign}(\dot{\theta}_6) + I a_6 + M X_6 S_6 \dot{\theta}_5^2) + g (C_5 C_6 M X_6 - M X_6 S_6 S_5) + C_5 S_6 S_5 (Y Y_6 - X X_6) \quad 3.103a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m5} = & \ddot{\theta}_2 (-S_3 M Y_3 + Z Z_3) + (Z Z_3 + I a_3) \ddot{\theta}_3 - g M Y_3 S_2 S_3 + m e z_3 + F_{v3} \dot{\theta}_3 + F_{s3} \text{sign}(\dot{\theta}_3) \\
& + (d_2 C_2 C_2 M_3 + C_2 S_2 S_3 (Y Y_3 - X X_3)) \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 d_2 C_3 M_3 \\
& + (C_5 S_5 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_6) M_6 + d_3 (g C_5 M_6 + C_5^2 S_6 M X_6 \dot{\theta}_1^2 + C_5 C_6^3 M X_6 \\
& + C_6 M X_6 (S_6^2 + 1)) S_5 \dot{\theta}_1^2 - C_6^2 M X_6 S_5 S_6 \dot{\theta}_1^2 S_5 + C_6 (f e y_6 + M X_6 (2 \ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6))_1^2 \\
& + (f e x_6 - M X_6 (S_5^2 S_6^2 \dot{\theta}_1^2 + (2 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_6)) + g (C_5 (C_6 M X_6 + M X_5) \\
& - M X_6 S_6 S_5) - C_5 S_5 (X X_5 - Y Y_5) \dot{\theta}_1^2 - M X_6 S_6 S_5 - C_5 S_5 (X X_5 - Y Y_5) \dot{\theta}_1^2 \\
& - C_5 S_5 S_6 (X X_6 - Y Y_6) + m e z_6 + Z Z_5 \ddot{\theta}_5 + Z Z_6 (\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) + m e z_5 + F_{v5} \dot{\theta}_5 + F_{s5} \text{sign}(\dot{\theta}_5) + \ddot{\theta}_5 I a_5 \\
& - d_3 (C_5^2 M X_6 S_6 \dot{\theta}_1^2 + C_5 C_6 S_5 M X_6 \dot{\theta}_1^2 + C_6 M X_6 \ddot{\theta}_5 + M X_6 S_6 \dot{\theta}_5^2) - g (C_5 C_6 M X_6 - M X_6 S_6 S_5) \\
& - C_5 S_6 S_5 (Y Y_6 - X X_6) - Z Z_6 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) - m e z_6 - F_{v6} \dot{\theta}_6 - F_{s6} \text{sign}(\dot{\theta}_6) - I a_6 \quad 3.103b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m1} = & \ddot{\theta}_1(I_{a1} + d_2^2 C_2^2 M_3 - d_2 C_2^2 M Y_3 S_3 - C_2 S_2 d_2 M Y_3 C_3 - d_2 C_2 S_2 S_3 M Y_3 + Z Z_1 + \\
& S_2 S_3^2 X X_3 + S_2^2 X X_2 + Y Y_3 C_2 S_3^2 + Y Y_2 C_2^2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) d_2 C_2 M Y_3 C_2 S_3 + 2 C_2 S_3 S_2 S_3 (X X_3 - Y Y_3) + \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-2 d_2^2 C_2 S_2 M_3 + 2 C_2 S_2 d_2 M Y_3 S_3 + 2 S_2^2 d_2 C_3 M Y_3 + 2 S_2 C_2 (X X_2 - Y Y_2)) + \\
& d_2 C_2 f e z_3 - C_2 S_3 m e y_3 - m e x_3 S_2 S_3 - m e x_2 S_2 - m e y_2 C_2 + F_v \dot{\theta}_1 + F_s \text{sign}(\dot{\theta}_1). \quad 3.103c
\end{aligned}$$

Conclusion :

Au cours de ce chapitre, nous avons abordé l'étude du modèle dynamique en nous basant sur le formalisme de Newton-Euler. Ce dernier est un algorithme itératif qui donne une formulation complète des interactions dues aux mouvements, car il permet d'exprimer les charges appliquées à chaque corps dans les trois dimensions.

Ce modèle est d'une très grande importance pour le robot, car utilisé dans les différentes stratégies de commande, offrant une meilleure maîtrise du mouvement, puisqu'il donnent accès aux positions, vitesses, accélérations et aux variations des couples au niveau des articulations.

Ce modèle fournit également les forces et les couples exercés sur chaque barre, qui sont indispensables pour un dimensionnement de la structure du robot, qui fait l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4 :

Dimensionnement de la structure du robot

4.1. Introduction :

Généralement, les robots industriels sont dimensionnés mécaniquement afin de respecter la précision requise en dépit des déformations causées par les efforts statiques et dynamiques. Les efforts statiques correspondent au poids du robot et à la charge utile, alors que les efforts dynamiques sont liés à l'inertie en translation et en rotation des corps en mouvement.

En réalité, le but de ce chapitre est de d'abord l'aspect mécanique de la structure. Et d'étudier, au sens large, les contraintes appliquées au robot, et le calcul des éléments en fonction de ces dernières. On se proposera d'abord de calculer les paramètres relatifs aux différents corps du robot, partant des lois de la RDM appliquée en statique, puis on vérifie leurs validités par la simulation du Modèle dynamique et on s'assure que les moteurs prennent en charge les couples générés avec ces paramètres.

4.2. Dimensionnement statique :

La statique a pour objet la résolution des problèmes relatifs à l'équilibre des systèmes matériels indéformables. Cette résolution peut s'effectuer par des méthodes analytiques ou graphiques.

L'écriture des équations d'équilibre nécessite de définir sans ambiguïté le système matériel que l'on veut étudier, et de faire l'inventaire des forces appliquées en équilibre, cet inventaire comprendra :

- Les forces extérieures directement appliquées, généralement connues ;
- Les forces de volume, dues à l'action de la pesanteur ;
- Les forces de liaison ou action de contact, généralement inconnues ;

4.3. Définitions :

Flexion Une poutre est sollicitée en flexion chaque fois que sa ligne moyenne fléchit soit : - La poutre est sur deux appuis soumise à des résultantes.

- La poutre est encastree soumise à des résultantes.

Traction ou compression : Une poutre est sollicitée en traction (ou en compression) simple lorsqu'elle est soumise à deux forces égales et directement opposées.

Cisaillement : La section normale F d'un solide est soumise à un cisaillement simple quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à l'effort tranchant T dans le plan F . L'effort tranchant étant, pour les poutres droites, la dérivée du moment de flexions par rapport à l'abscisse x .

Lorsqu'une poutre est sollicitée en flexion simple, une répartition d'effort tranchant se superpose alors à la répartition des moments fléchissant.

4.4. application des lois de la RDM :

Le Corps 3 :

Le corps 3 a une forme cylindrique creuse de longueur (L_1+L_2) et de diamètre extérieur D et intérieur d ; à l'extrémité de ce corps est placée une masse m (la charge utile) qui génère une force gravitationnelle P . Nous avons les deux réactions R_1 et R_2 des deux barres verticales aux points a et b respectivement, comme il c'est montré dans la figure 4.1. Ce corps est essentiellement sous l'effet de deux types de contraintes, une flexion et des cisaillements, l'effet des autres sollicitations est négliger.

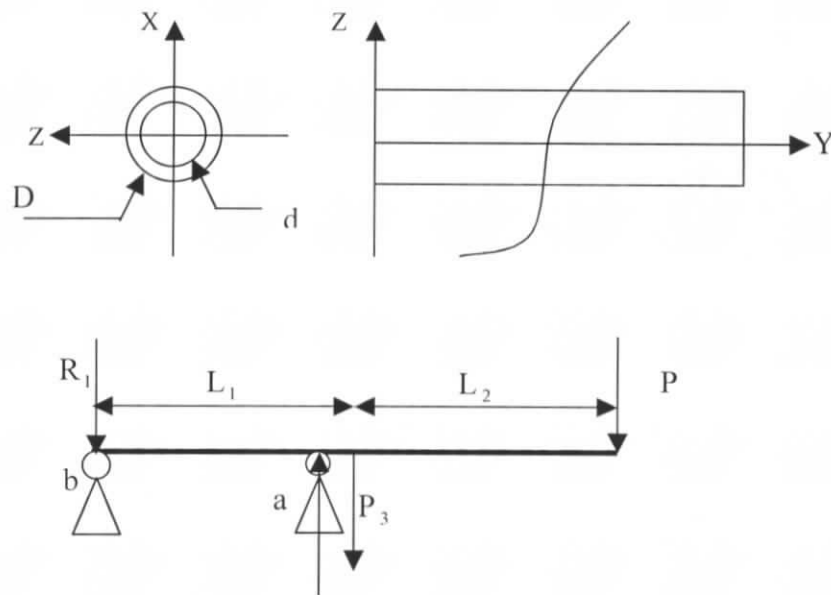


Figure. 4.1 Représentation des forces appliquées au le corps3

A l'équilibre on doit avoir :

$$\sum_i M_i = 0 \quad 4.1$$

$$\sum_i F_i = 0 \quad 4.2$$

Les M_i et les F_i se sont respectivement les moments et les forces qui sollicitent la poutre.

La projection par rapport au point b nous donne :

$$-R_2 L_1 + P_3 \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{2} + P \cdot (L_1 + L_2) = 0$$

$$R_2 = \left(\frac{P_3}{2} + P \right) \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{L_1} \quad 4.3$$

Par rapport au point a , la projection nous donne :

$$R_1 - R_2 + P_3 + P = 0$$

$$R_1 = R_2 - P_3 - P$$

$$R_1 = \left(\frac{P_3}{2} + P \right) \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{L_1} - P_3 - P \quad 4.4$$

P_3 : est le poids propre du cylindre.

$$P_3 = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (L_1 + L_2) \quad 4.5$$

ρ : la masse volumique du matériau utilisé.

i. La flexion :

Le corps 3 est soumis à un moment fléchissant M_{f3} , qu'on essaye le déterminer d'après le diagramme des moments de flexion à la figure 4.2.

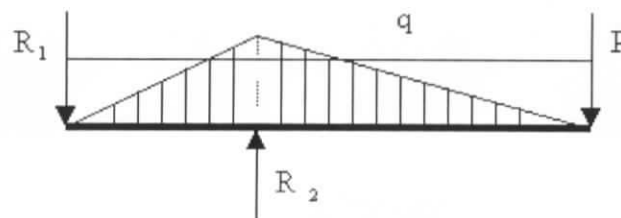


Figure.4.2 Diagramme des moments de fléchissants du corps 3

q :charge répartie due au poids propre du cylindre tel que :

$$q = \rho \cdot g \cdot S = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{(D^2 - d^2)}{4} \quad 4.6$$

Le moment fléchissant M_{f3} est calculer sur deux portions de la longueur du cylindre :

- $0 \leq x \leq L_1$:

$$M_{f31} = -R_1 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad 4.7$$

- $L_1 \leq x \leq L_2$:

$$M_{f32} = -R_1 \cdot x + R_2 \cdot (x - L_1) - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad 4.8$$

De la relation (4.7) le moment fléchissant est maximum pour $x = L_1$

$$M_{fMax_1} = -R_1 \cdot L_1 - \rho \cdot g \cdot \frac{\pi}{8} \cdot (D^2 - d^2) \cdot L_1^2 \quad 4.9$$

La contrainte de flexion σ_f est donner par :

$$\sigma_{f31} = \frac{M_{fmax_1} \cdot (-D)}{I_3} \quad 4.10a$$

$$\sigma_{f32} = \frac{M_{fmax_2} \cdot D}{I_3} \quad 4.10b$$

I_3 :l'inertie de section du corps 3

la condition limite de flexion sur la première et la deuxième portion est respectivement :

$$\sigma_3 f_1 \leq \frac{\sigma_e}{F_s} \quad 4.11a$$

$$\sigma_3 f_2 \leq \frac{\sigma_e}{F_s} \quad 4.11b$$

σ_e :caractéristique du matériau.

F_s :coefficient de sécurité

ii. Le cisaillement :

Comme le montre le diagramme des efforts tranchants de la figure 4.3 notre corps est soumis à deux cisaillements sur les deux portions.

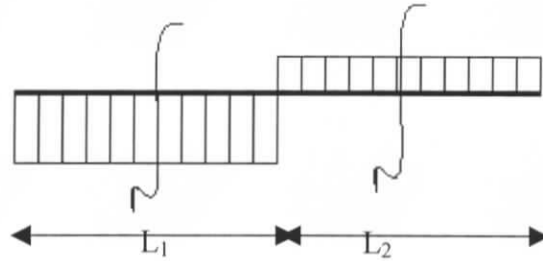


Figure. 4.3 Diagramme de cisaillement sur le corps 3

- Pour le 1er cisaillement $0 \leq x \leq L_1$:

L'effort tranchant T_1 est donnée par :

$$T_1 = \frac{\partial M_{f31}}{\partial x}$$

$$T_1 = -R_1 - q \cdot x \tag{4.12}$$

T_1 est maximum pour $x=L_1$

$$T_{1max} = -R_1 - q_1 \cdot L_1 \tag{4.14}$$

La contrainte maximale de cisaillement τ_{1max} est donnée par :

$$\tau_1 = \frac{T_{1max}}{S} \tag{4.15}$$

S : la section du cylindre.

La condition limite de cisaillement :

$$\tau_1 \leq \frac{\sigma_e}{Fs \cdot \sqrt{3}} \tag{4.16}$$

- Pour le 2ème cisaillement ($L_1 \leq x \leq L_2$) :

L'effort tranchant de la deuxième portion est :

$$T_2 = \frac{\partial M_{f32}}{\partial x}$$

$$T_2 = -R_1 + R_2 - q \cdot x \tag{4.17.a}$$

T_2 est maximum pour $x=L_2$:

$$T_2 = -R_1 + R_2 - q \cdot L_2 \quad 4.17.b$$

Et la contrainte de cisaillement est donnée par

$$\tau_2 \leq \frac{\sigma_e}{F_s \cdot \sqrt{3}} \quad 4.18$$

Le Corps 6 :

C'est une barre creuse de section S carrée, ses deux longueurs intérieure et extérieure notée b et a respectivement, sa longueur est L_3 . Elle est soumise essentiellement à une traction ; l'effort normal maximum est dû à l'effort de traction situé au point c, comme le montre la figure 4.4.

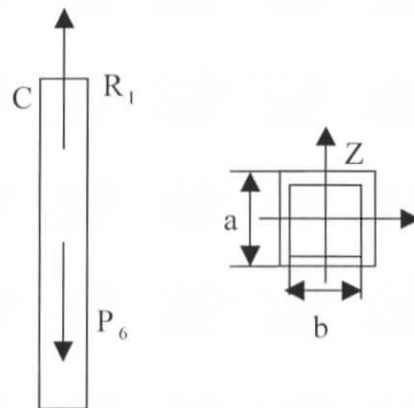


Figure 4.4 Représentation des forces appliquées sur le corps 6

L'effort de traction est donné par : $F = R_1$

Et d'après la relation 4.4

$$F = R_1 = \left(\frac{P_3}{2} + P\right) \cdot \frac{(L_1 + L_2)}{L_1} - P_3 - P \quad 4.18$$

Et la contrainte due à la traction :

$$\sigma_T = \frac{F}{S} \quad 4.19.a$$

On peut écrire donc :

$$\sigma_T = \frac{R_1}{a^2 - b^2} \quad 4.19.b$$

La condition limite due à la traction est :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_e}{F_s} \quad 4.20$$

Le Corps2 :

Le corps 2 est une barre creuse de section carrée, de longueur L_3 . elle est soumise essentiellement à l'effet d'une compression .l'effort normal F_c de compression situé au point e .

On va supposer que le corps 2 est encasté de l'autre extrémité, comme il est montré à la figure 4.5.

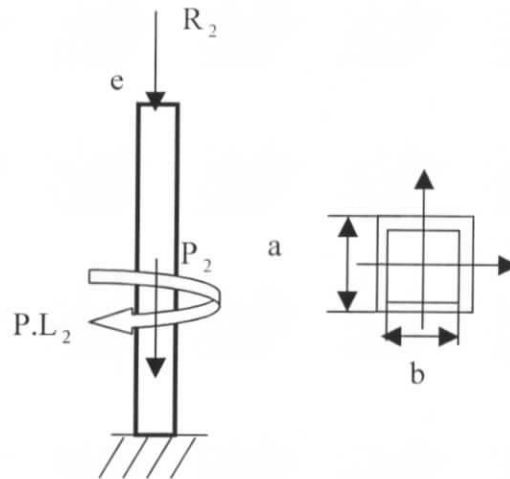


Figure. 4.5 Représentation des forces appliquées au corps 2

L'effort de compression F_c est donné par :

$$F_c = R_2 + P_2 \quad 4.21$$

P_2 : le poids propre de la barre.

$$P_2 = \rho \cdot g \cdot L_3 \cdot (a^2 - b^2) \quad 4.22$$

La contrainte due à la compression :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S}$$

D'où

$$\sigma_c = \frac{R_2 + P_2}{(a^2 - b^2)} \quad 4.23$$

La condition limite de compression :

$$\sigma_c \leq \frac{\sigma_e}{F_s}$$

Donc :

$$\frac{R_2 + P_2}{(a^2 - b^2)} \leq \frac{\sigma_e}{F_s} \quad 4.24$$

Le Corps 5 :

Ce corps est une barre creuse de longueur L_2 et de section carrée S , ses deux longueurs intérieure et extérieure sont notées b et a respectivement, elle est soumise essentiellement à deux contraintes : une flexion et un cisaillement .comme c'est montrer dans la figure 4.6 .On suppose que le corps 5 est encastré d'un côté.

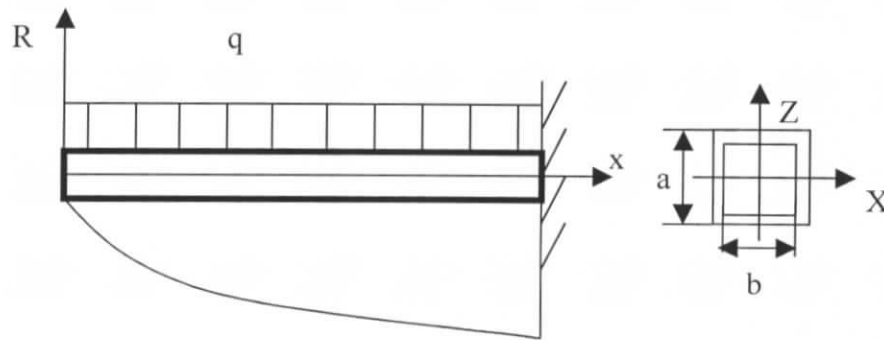


Figure. 4.6 Diagramme de flexion du corps 5

i. La flexion :

On calcule le moment fléchissant M_{f5} :

$$M_{f5} = R \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} \quad 4.25$$

Le moment M_{f5} est maximum pour $x=L_1$

$$M_{f_{\max}} = R \cdot L_1 + q \cdot \frac{L_1^2}{2} \quad 4.26$$

La contrainte due a la flexion maximum s'écrit :

$$\sigma_f = \frac{M_{f_{\max}}}{I_5} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \quad 4.27$$

$$I_5 = \frac{a^4 - b^4}{12} \quad 4.28$$

I_5 : l'inertie du corps 5.

ii. Le cisaillement :

Comme le montre le diagramme des efforts tranchants de la figure 4.7, la 5^{ème} barre est sous l'effet d'un cisaillement suivant l'axe x.

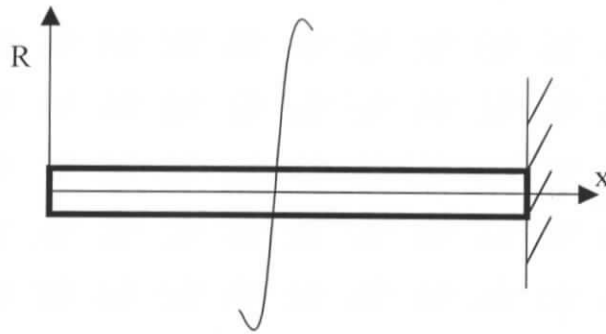


Figure .4.7 Diagramme de cisaillement du corps5

D'après la relation 4.12 on a :

$$T_5 = R + q \cdot x \quad 4.29$$

$$T_5 = R_1 - \rho \cdot g \cdot S \cdot x \quad 4.30$$

L'effort T_5 est maximum pour $x=0$

$$T_{5\max} = R_1 \quad 4.31$$

La contrainte due au cisaillement est alors :

$$\tau_T = \frac{R_1}{a^2 - b^2} \quad 4.32$$

2.5. Calcul des paramètres :

Dans ce paragraphe nous allons calculer les paramètres inconnus des éléments de notre structure (rayon, épaisseur, longueur...) selon les conditions de contraintes maximales.

Pour initialiser les calculs nous fixons les longueurs de barres : $L_1=0.2\text{m}$, $L_2=0.4\text{m}$, $L_3=0.4\text{m}$, et nous cherchons à déterminer le reste des paramètres. (nous considérons une charge utile de 1 Kg).

Les caractéristiques mécaniques de notre alliage :

La masse volumique de notre matériau $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.

Module d'élasticité E de notre matériau $E = 70 \text{ Gpa}$.

Contrainte maximale du matériau $\sigma_e = 250 \text{ Mpa}$.

Le Corps3 :

On veut déterminer le diamètre minimum pour que le cylindre résiste aux contraintes citées plus haut. En fixant le diamètre intérieur d du cylindre à $d=0.06m$, on cherchera les conditions que doit satisfaire le diamètre extérieur .

Pour la flexion :

D'après la relation 4.10 on a :

$$\sigma_{fMax1} = \frac{M_{fmax} \cdot (-D)}{I_3 \cdot 2} \tag{4.33}$$

Donc on aura :

$$\sigma_{fMax1} = \left[\frac{-R_1 L_1 - \rho \cdot g \frac{(D^2 - d^2) \cdot \pi \cdot L_1^2}{8}}{\pi(D^4 - d^4)} \right] \cdot \frac{(-D)}{2} \cdot 64 \quad \text{et} \quad \sigma_{fMax1} \leq \frac{\sigma_e}{F_s} \tag{4.34}$$

On prendra toujours : $F_s=2$ pour s'accorder une certaine plage de sécurité

Alors on trouve la condition : $D_{min} \geq 0.06002m$.

On prendra alors : $D=6.4cm$.

On remplace cette valeur dans la relation 4.9 pour les vérifications , et on aura les moments de flexion M_{1f} et M_{2f} :

$$M_{1f} = 4.473 \text{ N/m} .$$

$$M_{2f} = 8.544 \text{ N/m} .$$

La deuxième contrainte de flexion avec cette valeur du diamètre D donne:

$$\sigma_{2f} = 1.459 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 .$$

Et elle vérifie la condition : $\sigma_{2f} \leq \frac{\sigma_e}{F_s} = 1.25 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ 4.35

Pour le cisaillement :

On remplace la valeur trouvé pour D dans la condition de limite de cisaillement on aura :

$$\tau_1 = 1.5033 \text{ N/m}^2 \quad \text{et} \quad \tau_2 = 43936 \text{ N/m}^2 . \tag{4.36}$$

$$\tau_1 \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3} F_c}$$

$$\frac{\sigma_e}{\sqrt{3} F_c} = 7.2169 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$$

Les deux condition $\tau_1 \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3} F_c}$ et $\tau_2 \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3} F_c}$ sont vérifiées.

La valeur du diamètre calculée s'avère suffisante pour résister aux contraintes étudiées

Le Corps 6 :

On va fixer le diamètre intérieur b , et déterminer celui extérieur de sorte à vérifier les conditions des contraintes maximales.

On prend $b=0.02\text{m}$,

D'après la relation 4.19.b et 4.20.

$$\frac{R_1}{a^2-b^2} \leq \frac{\sigma_e}{Fs} \quad 4.37$$

On trouvera que : $a \geq 0.020005 \text{ m}$.

Alors on peut prendre $a=2.6\text{cm}$, et être sûr qu'avec cette dimension, le corps résiste bien à la contrainte de traction.

Le Corps 2 :

On fixe la grandeur du carré intérieur et on essaye de déterminer celle du carré extérieur.

On prend $b=7 \text{ cm}$.

D'après la relation 4.26 :

$$\frac{R_2+P_2}{a^2-b^2} \leq \frac{\sigma_e}{Fs} \quad 4.38$$

On trouvera la condition : $a \geq 0.070001\text{m}$

On peut prendre $a=0.074\text{m}$, et être sûr que c'est suffisant pour résister à la compression.

Le Corps 5 :

On procède de la même manière que pour les autres corps et on fixe : $b=0.01\text{m}$

Pour la flexion :

De la relation 4.27 la contrainte maximale de flexion :

$$\left[\frac{R_1 - \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot L_1}{a^4 - b^4} \right] \frac{12 \cdot a}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sigma_e}{Fs} \quad 4.39$$

Alors on trouve la condition : $a \geq 0.01 \text{ m}$

Pour le cisaillement

On peut prendre $a=1.4 \text{ cm}$ et calculer la contrainte de cisaillement τ_t :

$$\tau_t = 3.3592 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Et cette valeur vérifie la condition sur le cisaillement $\tau_t < \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}Fc} = 7.2169 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

2.6. Calcul des masses des corps :

On se propose de calculer les poids des différentes barres avec les paramètres déterminés précédemment :

Le corps3 :

$$M_3 = \rho \cdot (L_1 + L_2) \cdot S = \rho \cdot \frac{\pi}{4} (L_1 + L_2) \cdot (D^2 - d^2)$$

$$M_3 = 0.631 \text{ kg}$$

Le corps 6 :

$$M_6 = \rho \cdot L_3 \cdot S = \rho \cdot L_3 \cdot (a^2 - b^2)$$

$$M_6 = 0.298 \text{ kg}$$

le corps 2 :

$$M_2 = \rho \cdot L_3 \cdot S = \rho \cdot L_3 \cdot (a^2 - b^2)$$

$$M_2 = 0.622 \text{ kg}$$

Le corps5 :

$$M_5 = \rho \cdot L_1 \cdot S = \rho \cdot L_1 \cdot (a^2 - b^2).$$

$$M_5 = 0.251 \text{ kg}$$

On constate que les masses des différents corps du robot sont plus qu'acceptables, ceci est dû aux qualités de l'alliage d'aluminium ; et on estime que le poids total du robot, même comprenant tout le reste des composants, ne dépassera pas le 10 Kg

4.7.Simulation :

Afin de pouvoir vérifier si les paramètres calculés sont bien acceptés en dynamique ; c.à.d, que les actionneurs sont capables de délivrer les couples engendrés par les inerties et torseurs relatifs aux valeurs choisies en statique, nous choisissons de considérer les maximums des couples fournis par le moteur le plus chargé lors d'un déplacement, selon une trajectoire donnée, avec un mouvement curviligne déterminé (nous considérons les maximums positifs et négatifs des couples). Et de ce fait, constater si ces valeurs maximums ne dépassent pas les valeurs maximums que peuvent délivrer nos moteurs.

4.7.1.Types de mouvement :

Le type de mouvement, comme la forme des trajectoires, joue un grand rôle sur les couples moteur et l'amplitude de l'erreur de poursuite, les valeurs des facteurs vitesse et accélération des mouvements en fonction du temps sont des caractéristiques importantes à analyser lors du choix d'un mouvement curviligne.

Fischer et Dayer ont étudiés plusieurs types de mouvements curvilignes pour différentes trajectoires du robot ; les principaux sont cités ci-dessous :

Le mouvement à profil de vitesse trapézoïdal, a pour avantages sont facteur accélération bas et sa simplicité, mais il a l'inconvénient d'une 3eme dérivée infinie lorsque l'accélération passe instantanément d'une valeur constante à une autre valeur constante ; ce fait conduit à des discontinuités de couple impossibles à réaliser et a une excitation importante de la structure mécanique ;

Le mouvement d'interpolation polynomiale, à accélération sinusoïdale, appelé également mouvement cycloïdal à cause du mécanisme permettant de le générer à partir d'un arbre tournant à vitesse constante ; ce mouvement est facile à calculer et la troisième dérivée est finie ;

Le mouvement à « jerk » (3eme dérivée) sinusoïdal, très doux dans les variations d'accélération et de freinage, a l'inconvénient de conduire à des pertes de temps importantes lors de ces phases ;

Sur la base de ces expériences, nous choisissons d'effectuer les tests dynamiques en utilisant un mouvement d'interpolation polynomiale.

4.7.2. Interpolation de degré cinq :

Pour notre robot, il est nécessaire d'assurer la continuité des accélérations afin d'éviter d'exciter la mécanique. On dit alors que le mouvement est de classe C^2 [15] , il faut satisfaire six contraintes et le polynôme d'interpolation doit être de degré cinq . Avec les contraintes supplémentaires :

$$\begin{cases} \ddot{r}(0) = 0 \\ \ddot{r}(t_f) = 0 \end{cases} \quad 4.44$$

$$r(t) = 10 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \quad 4.45$$

$$|\tau_{j\max}| = \frac{15 \cdot |D_j|}{8 \cdot t_f} \quad 4.46$$

$$|\tau_{j\max}| = \frac{10 \cdot |D_j|}{\sqrt{3} \cdot t_f^2} \quad 4.47$$

4.7.3. Résultats de la simulation :

Nous constatons par la visualisation des résultats de la simulation du modèle dynamique, qui présente les allures des couples moteurs exigés, en réponse un des échelons avec un mouvement d'interpolation polynomiale de degré 5 d'une accélération de *** rad/sec, que la plus grande valeur du couple moteur est demandée au moteur de la 2^{ème} articulation, d'une valeur d'environ 8 N.m , et qui reste donc plus petite que la valeur maximum que donne notre moteur, qui de 9 N.m . Cependant, on ne peut pas dire que ces deux valeurs soient trop éloignées ; c'est pourquoi, on émet la proposition de dimensionner des réducteurs (prévus initialement) de sorte à ne plus se soucier des valeurs de couples a ne pas dépasser

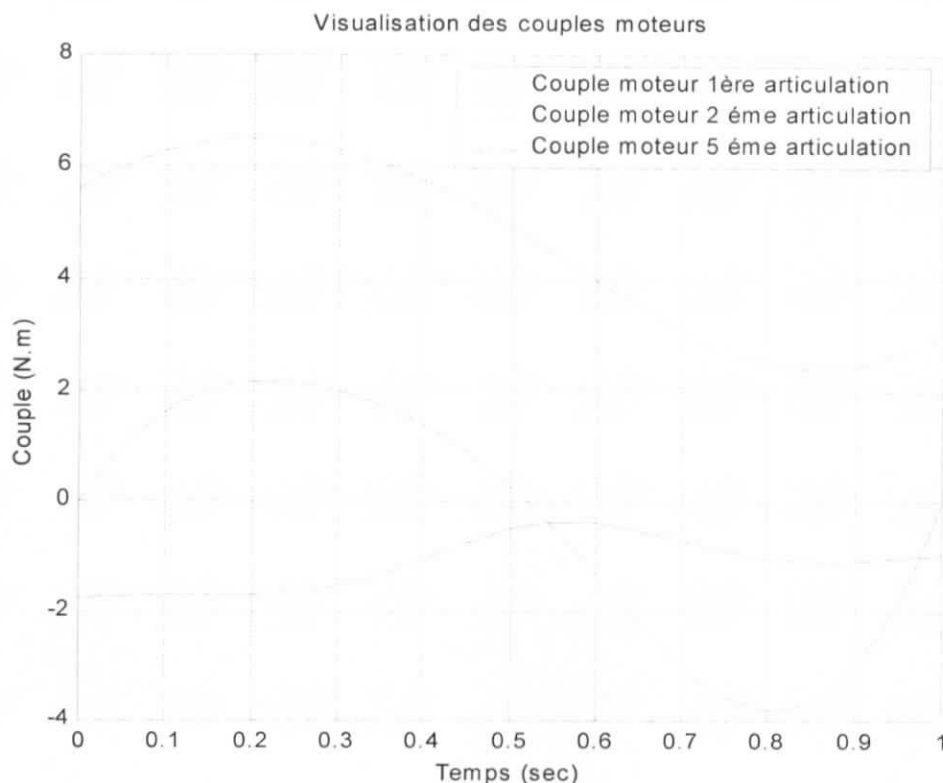


Figure 4.8 Réponse de couples moteurs

4.8. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons mis en évidence les différentes contraintes sur la structure du robot, et de là, nous avons calculé en la statique. Les dimensions des différents corps de la structure. Puis, nous avons vérifié les moteurs pouvait fournir les couples, trouvés par la simulation des modèles dynamique avec les dimensions calculées.

Conclusion

Générale

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES :

La maîtrise de la conception et du fonctionnement de mécanismes robotisés a toujours été un facteur important du progrès et technologique.

Les travaux développés dans ce mémoire concernant la modélisation et le dimensionnement d'un robot manipulateur comportant une boucle cinématique plane. L'introduction de cette boucle cinématique a pour objectif de ramener des moteurs à la base afin de diminuer la masse en mouvement et rigidifier la structure du robot. Le comportement du porteur est un peu différent de celui d'un porteur série, mais pas aussi complexe que celui d'un robot parallèle

La structure que nous avons modélisée et dimensionnée est présentée dans le premier chapitre. Les particularités qu'elle présente par rapport à cette dernière sont la symétrie de la structure global par rapport à un plan et la stabilité à l'état statique.

Dans le chapitre suivants, nous avons déterminé les modèles géométriques et cinématiques directs et inverses respectivement (MGD, MGI, MCD, et MCI) , ce qui a permis l'étude des singularités du robot. Ces dernières ne sont pas trop différentes de celles d'un robot série.

Le modèle dynamique est ensuite déterminé en exploitant le formalisme de Newton-Euler dans le chapitre suivant. Ce qui nous a permis d'obtenir un bilan des charges appliquées à la structure, et d'enduire les expressions des couples moteurs des articulations. Ce modèle est très utile aussi pour le dimensionnement de la structure et des actionneurs.

L'apport original de ce travail peut être résumé par les points suivants :

- Mise en évidence d'une cinématique formant un parallélogramme de l'espace ;
- Proposition d'une géométrie de robot dotée d'un large potentiel industriel ;
- Etude des caractéristiques géométriques et dynamiques de ce robot et proposition de règles pour son dimensionnement géométrique ;
- Proposition de solutions constructives adaptées à ce concept ;

Comme perspectives à ce travail nous proposons :

- Réaliser un dimensionnement plus vigoureux, et cherche les valeurs optimales des paramètres géométriques, des constituants du robot.
- Essayer d'autres types de trajectoires pour la simulation et distinguer celles qui sont les plus contraignantes.
- Extraire par simulation les charges maximales appliquées sur le robot et en déduire les positions et les variables articulaires correspondantes et appliquer dessus les lois de la RDM pour voir si la structure résiste vraiment à toutes les charges.

Nous proposons aussi l'utilisation de logiciels qui donnent des résultats plus exactes, tel que des logiciels de RDM qui donnent les calculs directs.

Ou des Logiciels de conception et de simulation dynamique (CFAO) : ou les contraintes sont prises en charge automatiquement

Références

Bibliographiques

- [1] **Bagher.M.A.**,« Contribution à la prise en compte du comportement multi-Technologique des robots industriels dans le contexte d'une architecture de commande décentralisée »,thèse de doctorat ,Université d'Aix Marseille 2 Faculté des sciences technologiques, Saint-Jérôme ,2000 .
- [2] **Boissonnat .J.D., Marlet J-P.**,«Technique de la Robotique : Architectures et commandes»,HERMES,Paris,1988.
- [3] **Caen,R. ,Lajoie-Mazenc, M. ; Trannoy,B. .**, « Actionneurs en robotique » , Techniques de l'ingénieur, (S3) R776O.
- [4] **Chakir, M.**,« Modélisation d'un robot manipulateur comportant une boucle cinématique», PFE, ENP, LCP ,2002.
- [5] **Clavel, R. .**,« Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté », Thèse de doctorat à L'EPFL, Lausanne ,1991.
- [6] **Clavel,R. .**,« DELTA a fast robot with parallel geometry » ,Int. Symposium on Industrial Robots, JFS Publications, pp 91-100, 1988.
- [7] **Coiffet, P.**,« La Robotique Principes et applications »,HERMES (1986).
- [8] **Coiffet, P. .**,« Robots : définitions et classification », Techniques de l'ingénieur, (S3) R770O.
- [9] **Craig, J-E.**,« Introduction to Robotics », Addison – Wesley Publishing company, 1989.
- [10] **Delpedro.M. .**,« Eléments de mécanique des structures» ,Presses Polytechnique de Romandes, Lausanne, 2001 .
- [11] **Fayolle, M.**,« Aspects mécaniques en robotique », Techniques de l'ingénieur (BT2) B7 19O.
- [12] **Gorla, B. ; Renaud, M. .**, « Modèles des robots manipulateurs application à leur commande », CEPADUES édition ,1984.
- [13] **Henriot,G. .**,« Engrenages : Eléments pratiques de définition, de dessin et de calcul », Techniques de l'ingénieur (BD4) B636.
- [14] **Kerguignas.M.**,«Résistance des Matériaux »,Dunod, université,1977
- [15] **Khalil W ; Dombre E.**, « Modélisation, identification et commande des robots », Edition Hermès 1998
- [16] **Lallemand .J-P.; Zegloul. S.**; “Robotique : Aspects fondamentaux , Modélisation mécanique - CAO Robotique – Commande», Masson, Paris,1994.

- [17] **Lamarche, L.** ; « Robotique : Notes de cours », Département de Génie Mécanique (2001/O8), fichier pdf, (www.mec.estmtl.ca).
- [18] **Le Borzec, R.** ; « Réducteurs de vitesse et engrenages », Techniques de l'ingénieur (BD3) B564O.
- [19] **Léon J.C.**, « Modélisation des courbes et surfaces pour la CFAO », Edition Hermès ,1986
- [20] **Liégeois, A.**, « Modélisation et commande de robots manipulateurs », Techniques de l'ingénieur (D3) S773O.
- [21] **Marlet, J-P.** ., « Les robots parallèles », HERMES, 1990.
- [22] **McKerrow, P-J.**, «Introduction to Robotics », Addison – Wesley, 1989.
- [23] **Miller,K.; Stevens, B.**,«Modeling of Dynamics and model based control of DELTA; Direct-Drive Parallel Robot », Journal of Robotics and Mechatronics Vol., 7 No.4, 1995.
- [24] **Miller, K.; Clavel, R.**, « The Lagrange –based model of delta-4 robot dynamics”, Journal of Robotics and Mechatronics Vol.8, pp 49-54, 1992.
- [25] **PITTMAN, Catalog.**,“Bulletin LCG : DC Gear Motors, sériesGM800, GM9000, GM14900”, fichier pdf, (www.pittmannet.com).
- [26] **Pruski, A.**, «Robotique générale », ELLIPSE, Paris, 1988.
- [27] **Pruvost .J.C.**, « Point en Robotique »,Technique et Documentation (Lavoisier),Paris ,1985.
- [28] **Restrepo.P.P.**, « Contribution à la Modélisation, Identification et Commande des Robots à Structure Fermée : Application au RobotACMA SR400 » , Thèse de doctorat à Ecole Centrale de Nantes,1996
- [29] **Salahoulhadj, a.** .,« Conception d'un robot pour l'application du soudage par point » , PFE ,ENP, 2001
- [30] **Timoshenko.S.P.** .,« Résistances des matériaux », Tome 1 :théorie et problèmes , Dunod ,Paris,1990.

Annexes

Annexe A

Types d'équations rencontrées dans le calcul du MGI

Par expérience Paul est arrivé à établir, que pour les systèmes robotisés, les résolutions de équations liées au MGI se ramènent très souvent, à résoudre des types d'équations récurrents, présentés dans le tableau suivant :

Type 1	$Xr_i=Y$	$r_i=X/Y$ et $\theta_i=\pi/2$
Type 2	$X S_i+C_i=Z$	$\theta_i=ATAN2(\sqrt{1-(C_i^2,C_i)})$
Type 3	$X_1 S_i+Y_1 C_i=Z_1$ $X_2 S_i+Y_2 C_i=Z_2$	$\theta_i=ATAN2(S_i,C_i)$ $\theta_i=ATAN2(\frac{Z_1 Z_2}{X_1 X_2})$
Type4	$X_1 r_j S_i=Y_1$ $X_2 r_j C_i=Y_2$	$r_j=\pm\sqrt{(Y_1/X_1)^2+(Y_2/X_2)^2}$ $\theta_i=ATAN(\frac{Y_1}{X_1 r_j}, \frac{Y_2}{X_2 r_j})$
Type5	$X_1 S_i=Y_1+Z_1 r_j$ $X_2 C_i=Y_2+Z_2 r_j$	Après des combinaisons entre les deux équations le système se ramène a une équation du type3
Type6	$W S_i=X C_i+Y S_i+Z_1$ $W C_i=X S_i-Y C_i+Z_2$	Le système est ramené à la forme : $B_1 S_i+B_2 C_i=B_3$ θ_i est trouvé à partir d'une équation du type 2 . et θ_j d'une équation du type 3
Type7	$W_1 C_j+W_2 S_j=X C_i+Y S_i+Z_1$ $W_1 S_j+W_2 C_j=X S_i-Y C_i+Z_2$	Le système se ramène à des équations de type 6 et 2
Type8	$X C_i+Y C_j=Z_1$ $X S_i+Y S_j=Z_2$	$\theta_i = ATAN2(S_i,C_i)$ $\theta_j = ATAN2(\sqrt{1-(C_i^2,C_j)})$

Tableau A1.1 Types d'équations rencontrées avec la méthode de Paul

Annexe B

Méthode de résolution fondée sur la matrice pseudo-inverse

A2.1. Définition

On appelle pseudo-inverse de \mathbf{W} la matrice inverse généralisée \mathbf{W}^+ qui est telle que :

- $\mathbf{W} \mathbf{W}^+ \mathbf{W} = \mathbf{W}$
- $\mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^+$
- $(\mathbf{W}^+ \mathbf{W})^T = \mathbf{W}^+ \mathbf{W}$
- $(\mathbf{W} \mathbf{W}^+)^T = \mathbf{W} \mathbf{W}^+$

On démontre que la pseudo-inverse existe toujours est unique. Toutes les solutions d'un système sont donnée par :

$$\xi = \mathbf{W}^+ \mathbf{Y} + (\mathbf{I} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W}) \mathbf{Z} \quad \text{A2.1}$$

Le premier terme $\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}$ constitue la solution générale de norme euclidienne $\|\xi\|$ minimale.

Le second terme $(\mathbf{I} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W}) \mathbf{Z}$, est la projection d'un élément arbitraire \mathbf{Z} de \mathfrak{R}^n sur le noyau de \mathbf{W} et n'affecte pas donc la valeur de \mathbf{Y} .

On montre que $(\mathbf{I} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W})$ est de rang $(n-r)$, par conséquent lorsque le robot est redondant, ce terme permet d'optimiser des critères sans perturber la tâche.

A2.2. Méthode de calcul de la pseudo-inverse :

On partitionne la matrice \mathbf{W} comme suit :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{A2.2}$$

La matrice \mathbf{W}_{11} étant régulière et de rang maximal et de dimension $(r \times r)$, r étant le rang de la matrice \mathbf{W} .

$$\text{t.q :} \quad \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} \\ \mathbf{W}_{21} \end{bmatrix} \quad \text{A2.4}$$

$$\mathbf{W}_2 = [\mathbf{W}_{12} \quad \mathbf{W}_{22}] \quad \text{A2.5}$$

On montre que la pseudo-inverse est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{W2}^T (\mathbf{W1}^T \mathbf{W} \mathbf{W2}^T)^{-1} \mathbf{W1}^T \quad \text{A2.6}$$

Lorsque \mathbf{W} est de rang maximal, cette relation se simplifie de la façon suivante :

- si $m > n$: $\mathbf{W} = \mathbf{W1} \Rightarrow \mathbf{W}^+ = (\mathbf{W1} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$, (\mathbf{W}^+ est alors l'inverse à gauche de \mathbf{W});
- si $m < n$: $\mathbf{W} = \mathbf{W2} \Rightarrow \mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^{-1}$, (\mathbf{W}^+ est alors l'inverse à droite de \mathbf{W});
- si $m = n$: $\mathbf{W} = \mathbf{W1} = \mathbf{W2} \Rightarrow \mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^{-1}$.

Si \mathbf{W} n'est pas de rang r , on utilise les matrices de permutation orthogonales \mathbf{L} et \mathbf{C}

Telle que : $\mathbf{W}^+ = \mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{L}^+$.

Annexe C

Formulation simplifié du modèle dynamique

Nous cherchons à améliorer les expressions du modèle dynamique, et ce en simplifiant les expressions des M_j et jF_j et des couples. Et ça en simplifiant le premier moment d'inertie.

Le premier moment d'inertie d'un corps C_j autour de l'origine du repère R_j peut être écrit sous la forme :

$$MS_j = \mathbf{M}_j \cdot S_j. \quad A3.1$$

$$S_j = O_j G_j. \quad A3.2$$

$$MS_j^T = [MX_j \ MY_j \ MZ_j].$$

S_j : vecteur ayant pour origine O_j et pour extrémité le centre de la masse du corps C_j .

le module du vecteur S_j , $|S_j| = L/2$

L : la longueur du corps i .

M_j : masse du corps.

Le corps 1 :

les composante de 1MS_1 suivant l'axe O_1X et O_1Y sont nuls sauf la composante suivant O_1Z . Alors :

$${}^1MS_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ MZ_1 \end{bmatrix}. \quad A3.3$$

La force et le moment du corps 1 seront:

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \cdot g \end{bmatrix}. \quad A3.4$$

$${}^1M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ZZ_1\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}. \quad A3.5$$

Le corps2:

Les composantes de 2MS_2 suivant l'axe O_2Z et O_2Y sont nulles sauf la composante suivante O_2X .

$${}^2MS_2 = \begin{bmatrix} MX_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A3.6$$

Alors la force et le moment du corps 2 deviennent :

$${}^2F_2 = \begin{bmatrix} gM_2S_2 - C_2^2MX_2\dot{\theta}_1^2 - MX_2\dot{\theta}_2^2 \\ gM_2C_2 + C_2S_2MX_2\dot{\theta}_1^2 + MX_2\ddot{\theta}_2 \\ C_2MX_2g - 2MX_2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad A3.7$$

$${}^2M_2 = \begin{bmatrix} C_2(Y_2 - ZZ_2 - XX_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - S_2XX_2\ddot{\theta}_1 \\ -C_2YY_2\ddot{\theta}_1 - S_2(XX_2 - YY_2 - ZZ_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ gC_2MX_2 + C_2S_2\dot{\theta}_1^2(YY_2 - XX_2) + ZZ_2\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad A3.8$$

Le corps 3:

les composantes de 3MS_3 suivant l'axe O_3X et O_3Z , sont nulles sauf la composante suivante O_3Y .

$${}^3MS_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ MY_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad A3.9$$

Alors l'expression de la force et du moment au corps 3 deviennent

$${}^3F_3 = \begin{bmatrix} F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix}. \quad A3.10$$

$$F31 = \dot{\theta}_1^2 (C23S23MY_3 - M_3 d_2 C23C2) - M_3 C3 d_2 \dot{\theta}_2^2 + g M_3 S23 - M_3 d_2 S3 \ddot{\theta}_1 - M Y_3 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \quad A3.10a$$

$$F32 = d_2 M_3 (C2S23 \dot{\theta}_1^2 + C3 \ddot{\theta}_2 + S3 \dot{\theta}_2^2) + g C23 M_3 - M Y_3 (S23^2 \dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) \quad A3.10b$$

$$F33 = d_2 (C2 \ddot{\theta}_1 - 2S2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) M_3 - 2C23 M Y_3 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - M Y_3 \ddot{\theta}_1 S23 \quad A3.10c$$

$${}^3 M_3 = \begin{bmatrix} M31 \\ M32 \\ M33 \end{bmatrix} \quad A3.11$$

$$M31 = \ddot{\theta}_1 (d_2 C2 M Y_3 - S23 X X_3) - 2 d_2 S2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 M Y_3 + C23 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (Y Y_3 - Z Z_3 - X X_3) \quad A3.11a$$

$$M32 = \ddot{\theta}_1 C23 Y Y_3 - S23 (X X_3 - Y Y_3 - Z Z_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad A3.11b$$

$$M33 = (d_2 C2 C23 M Y_3 + C23 S23 (Y Y_3 - X X_3)) \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 d_2 C3 M Y_3 - \ddot{\theta}_2 (S3 M Y_3 - Z Z_3) + Z Z_3 \ddot{\theta}_3 - g M Y_3 S23 \quad A3.11c$$

Le corps 5 :

Les composantes de ${}^5 M S_5$ suivant l'axe $O_5 Z$ et $O_5 Y$ sont nulles sauf la composante suivante $O_5 X$

$${}^5 M S_5 = \begin{bmatrix} M X_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A3.12$$

alors on la résultante de la force et des moment au corps 5 sont

$${}^5 F_5 = \begin{bmatrix} g M_5 S5 - C5^2 M X_5 \dot{\theta}_1^2 - M X_5 \dot{\theta}_5^2 \\ g C5 M_5 + C5 S5 M X_5 \ddot{\theta}_1 - M X_5 \ddot{\theta}_5 \\ C5 M X_5 \ddot{\theta}_1 - 2 M X_5 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad 3.13$$

$${}^5 M_5 = \begin{bmatrix} C5 (Y Y_5 - Z Z_5 - X X_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - S5 X X_5 \ddot{\theta}_1 \\ C5 Y Y_5 \ddot{\theta}_1 - S5 (X X_5 - Y Y_5 - Z Z_5) \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_5 \\ g C5 M X_5 + C5 S5 \dot{\theta}_1^2 (Y Y_5 - X X_5) Z Z_5 \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad A3.14$$

Pour le corps 6 :

Les composantes de 5MS_5 suivant l'axe O_6Z et O_6Y sont nulles sauf la composante suivante O_6X .

$${}^6MS_6 = \begin{bmatrix} MX_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad A3.16$$

La force et le moment au corps 6 sont :

$${}^6F_6 = \begin{bmatrix} F61 \\ F62 \\ F63 \end{bmatrix}. \quad A3.1$$

$$F61 = -d_3(C5^2C6\dot{\theta}_1^2 - C5S5S6\dot{\theta}_1^2 + C6\dot{\theta}_5^2 - S6\ddot{\theta}_5)M_6 + gC56M_6 - C5^2C6^2MX_6\dot{\theta}_1^2 \\ + 2C5C62MX_6S5S6\dot{\theta}_1^2 + MX_6(-S5^2S6^2\dot{\theta}_1^2 - (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2). \quad A3.17a$$

$$F62 = d_3(C5^2S6\dot{\theta}_1^2 + C5C6S5\dot{\theta}_1^2 + C6\ddot{\theta}_5 + S6\dot{\theta}_5^2)M_6 - gC56M_6 + C5^2C6MX_6S6\dot{\theta}_1^2 \\ + C5C6^2MX_6S5\dot{\theta}_1^2 - MX_6S5^2S6\dot{\theta}_1^2 + MX_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6). \quad A3.17b$$

$$F63 = d_3(C5\ddot{\theta}_1 - 2S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5)M_6 + C5C6MX_6\ddot{\theta}_1 - 2MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)S6 - 2C6MX_6\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \\ + MX_6\ddot{\theta}_1S6S5C6. \quad A3.17c$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} M61 \\ M62 \\ M63 \end{bmatrix} \quad A3.18$$

$$M61 = d_3(-C5^2MZ_6S6\dot{\theta}_1^2 + C5(MY_6\ddot{\theta}_1 - C_6MZ_6S5\dot{\theta}_1^2) - C6MZ_6\ddot{\theta}_5 - 2MY_6S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 - S6MZ_6\dot{\theta}_5^2) \\ - gC56MZ_6 + C56(Y_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5)) - S56XX_6. \quad A3.18a$$

$$M62 = d_3(-C5^2C6MZ_6\dot{\theta}_1^2 + C5(MZ_6S5S6\dot{\theta}_1^2 - MX_6\ddot{\theta}_1) - C6MZ_6\dot{\theta}_5^2 + 2MX_6S5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 \\ + MZ_6S6\ddot{\theta}_5) + gS56MZ_6 - C56YY_6 + S56(ZZ_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) - XX_6(\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)) \quad A3.18b$$

$$\begin{aligned}
M63 = & d_3(C5^2MX_6S6\dot{\theta}_1^2 + C5C6S5MX_6\dot{\theta}_1^2 + C6MX_6\ddot{\theta}_5 + MX_6S6\dot{\theta}_5^2) \\
& + g(C5C6MX_6 - MX_6S6S5) + C56S65(Y\dot{Y}_6 - X\dot{X}_6) + ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) .
\end{aligned} \tag{A3.18c}$$

Alors, nous les nouvelles expressions des couples sont données par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 = & \ddot{\theta}_2(-S3MY_3 + ZZ_3) + (ZZ_3 + Ia_3)\ddot{\theta}_3 - gMY_3S23 + me_{z3} + F_{v3}\dot{\theta}_3 + F_{s3}\text{sign}(\dot{\theta}_3) \\
& + (d_2C2C23MY_3 + C23S23(Y\dot{Y}_3 - X\dot{X}_3))\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2d_2C3MY_3.
\end{aligned} \tag{A3.19}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 = & \dot{\theta}_1^2(d_2C2C23MY_3 - d_2S3S23^2MY_3) + d_2C23S23S3MY_3 + F_{v2}\dot{\theta}_2 + F_{s2}\text{sign}(\dot{\theta}_2) \\
& + d_2^2C2S2M_3 + C2S2(Y\dot{Y}_2 - X\dot{X}_2) - C23S23(X\dot{X}_3 - Y\dot{Y}_3) - \dot{\theta}_3^2MY_3C3d_2 \\
& + \ddot{\theta}_2(Ia_2 + d_2^2M_3 - 2d_2MY_3S3 + ZZ_3 + ZZ_2) + d_2C2gM_3 + me_{z2} + me_{z3} \\
& + \ddot{\theta}_3(ZZ_3 - d_2MY_3S3) + d_2(C3fey_3 + S3fex_3) + gC2MX_2 - 2MY_3C3d_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3.
\end{aligned} \tag{A3.20}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 = & \ddot{\theta}_1(Ia_1 + d_2^2C2^2M_3 - d_2C2^2MY_3S3 - C2S2d_2MY_3C3 - d_2C2S23MY_3 + ZZ_1 \\
& + S23^2XX_3 + S2^2XX_2 + Y\dot{Y}_3C23^2 + Y\dot{Y}_2C2^2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)d_2C2MY_3C23 + 2C23S23(X\dot{X}_3 - Y\dot{Y}_3) \\
& + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(-2d_2^2C2S2M_3 + 2C2S2d_2MY_3S3 + 2S2^2d_2C3MY_3 + 2S2C2(X\dot{X}_2 - Y\dot{Y}_2)) \\
& + d_2C2fe_{z3} - C23me_{y3} - me_{x3}S23 - me_{x2}S2 - me_{y2}C2 + F_{v1}\dot{\theta}_1 + F_{s1}\text{sign}(\dot{\theta}_1) .
\end{aligned} \tag{A3.21}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 = & (C5S5\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_6)M_6 + d_3(gC5M_6 + C5^2S6MX_6\dot{\theta}_1^2 + C5C6^3MX_6 \\
& + C6MX_6(S6^2 + 1))S5\dot{\theta}_1^2 - C6^2MX_6S5S6\dot{\theta}_1^2S5 + C6(fey_6 + MX_6(2\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6))_1^2 \\
& + (fex_6 - MX_6(S5^2S6^2\dot{\theta}_1^2 + (2\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)\dot{\theta}_6) + g(C5(C6MX_6 + MX_5) \\
& - MX_6S6S5) - C5S5(X\dot{X}_5 - Y\dot{Y}_5)\dot{\theta}_1 - MX_6S6S5) - C5S5(X\dot{X}_5 - Y\dot{Y}_5)\dot{\theta}_1^2 \\
& - C56S56(X\dot{X}_6 - Y\dot{Y}_6) + me_{z6} + ZZ_5\ddot{\theta}_5 + ZZ_6(\ddot{\theta}_5 + \ddot{\theta}_6) + me_{z5} + F_{v5}\dot{\theta}_5 + F_{s5}\text{sign}(\dot{\theta}_5) + \ddot{\theta}_5Ia_5.
\end{aligned} \tag{A3.22}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 = & d_3(C5^2MX_6S6\dot{\theta}_1^2 + C5C6S5MX_6\dot{\theta}_1^2 + C6MX_6\ddot{\theta}_5 + MX_6S6\dot{\theta}_5^2) - gC56MX_6 \\
& + C56S65(Y\dot{Y}_6 - X\dot{X}_6) + ZZ_6(\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_5) + me_{z6} + F_{v6}\dot{\theta}_6 + F_{s6}\text{sign}(\dot{\theta}_6) + Ia_6.
\end{aligned} \tag{A3.23}$$