

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/01

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

D.E.R de GENIE ELECTRIQUE

OPTION : AUTOMATIQUE

Pour l'obtention de diplôme :  
d'ingénieur d'état en automatique

PROJET DE FIN D'ETUDE

La Commande Prédictive Généralisée  
appliquée à une colonne d'absorption

Présenté par :

M. A. BOULEROUAH

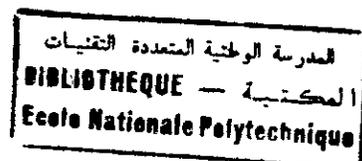
Proposé et dirigé par :

M. R. ILLOUL  
M. A. SELATNIA

PROMOTION  
JUN 2001

Ecole nationale polytechnique  
10, avenue Hassan Badi, BP 182 El Harrach Alger  
Tel : 021 52 14 98 Fax : 021 52 29 73

# TABLE DES MATIERES



## INTRODUCTION

### CHAPITRE I : MODELE DYNAMIQUE DE LA COLONNE D'ABSORPTION

Introduction	
I-1 : la colonne d'absorption, son environnement son fonctionnement	4
I-2 : principe	5
I-3 : bilan de matière en phase liquide	10
I-4 : l'expression de $C_A$ et des densités de flux en phase liquide	
I-4-1 : cas d'une réaction de pseudo-premier ordre	11
I-5 : équation du modèle	15
I-5-1 : bilan sur la phase gazeuse	16
I-5-2 : bilan sur la phase liquide	17
I-5-3 : conditions aux limites	18
I-6 : détermination de paramètres de transfert de matière	
I-6-1 : l'aire interfacial $a$	19
I-7 : modèle général	20
Conclusion	23

### CHAPITRE II : SIMULATION ET IDENTIFICATION

Introduction	
II-1 : la résolution de l'équation aux dérivées partielles	24
II-2 : résultats de simulation	26
II-3 : l'identification	28
II-3-1 : structure du modèle candidat	29
II-3-2 : choix des entrées pour l'identification	31
II-3-3 : les méthodes de l'identification récursive	32
II-3-3-1 : l'algorithme de moindres carrés récursif	33
II-4 : résultats de l'identification	36
II-4-1 : structure générale	37
Conclusion	38

### CHAPITRE III : LA COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE

Introduction	39
III-1 : l'algorithme de commande	40
III-2 : bref aperçu de l'évolution de la commande prédictive	44
III-3 : La Commande prédictive généralisée simple	
III.3.1 : Modèle linéaire de procédé	45
III.3.2 : Calcul de prédicteur	46
III.3.3 : Equations diophantines	48
III.3.4 : lois de commande	50
III.3.5 : la GPC vue comme un placement de pôles	54
III.3.6 : Résultat de simulation	56
III.3.6.1 étude d'un système stable en boucle ouverte	57
III.3.6.2 étude d'un système à phase non-minimale	63

III.3.6.3 étude d'un système instable en boucle ouverte	66
III.3.6.4 étude d'un système instable en boucle ouverte et à phase non-minimale	70
III.3.7 synthèse et discussion	74
III.3.7.1 horizon initial de prédiction N1	74
III.3.7.2 horizon maximal de prédiction N2	75
III.3.7.4 coefficient de pondération $\lambda$	75
Conclusion	76
CHAPITRE IV : APPLICATION DE LA GPC SUR LA COLOONE D'ABSORPTION	
Introduction	77
IV-1 : la simulation	77
IV.2 Synthèse et discussion	82
Conclusion	82
CONCLUSION	84
ANNEXE	86
BIBLIOGRAPHIE	94

*à ma très chère mère ;*

*à mon père ;*

*à mes frères et sœurs ;*

*à tous mes amis ;*

*à toute ma famille ;*

*Je dédie ce travail.*

## *Avant-propos*

*Cette thèse a été préparée au laboratoire de l'automatique, et au laboratoire de génie chimie de l'Ecole Nationale Polytechnique.*

*Je ne voudrais pas commencer ce mémoire sans dire combien je suis reconnaissant à Monsieur R.ILLOUL, enseignant au département de génie électrique pour l'aide précieux qu'il m'a apporté pour réaliser ce travail ainsi que ses nombreux conseils, ont largement contribué à l'élaboration de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma très grande admiration et de ma profonde gratitude.*

*Monsieur A.SLATNIA enseignant au département de génie chimie. J'ai été particulièrement sensible à l'intérêt qu'il a montré envers ce travail et je lui suis très reconnaissant pour les remarques et les critiques constructives qu'il a été amené à formuler sur ce mémoire.*

*Mes très sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

# INTRODUCTION GENERALE

Ces dernières années la commande des systèmes industriels a connu des développements importants sur le plan théorique et pratique. Plusieurs travaux furent concrétisés, pour sa part la recherche dans la dynamique et le contrôle des procédés de séparation a connu également un développement remarquable [1] [2].

L'un des problèmes rencontrés dans le domaine de la commande des processus a été celui de la colonne d'absorption, le principal obstacle était sa modélisation.

Au départ différents modèles mathématiques simples ont été proposés, mais les équations aux dérivées partielles obtenues étaient trop approximatives et ne pouvaient représenter réellement le fonctionnement d'une colonne d'absorption, au fur et à mesure que la recherche dans ce domaine se développa, on obtint des modèles mathématiques de plus en plus performants et on put passer même à simulation. Les modèles obtenus bien qu'ils soient plus performants que les modèles initiaux donnaient toujours de mauvais résultats en simulation.

Il a fallu attendre les années 70 pour arriver à un modèle mathématique plus approprié. Ce modèle a été programmé, différents tests de démarrage de la colonne ont été effectués. Ainsi à partir de cette date, plusieurs études ont été effectuées, les premières concernent uniquement le démarrage de la colonne et les autres les réponses des colonnes autour de leur point de fonctionnement nominal [2].

Aussi différents algorithmes de commande furent proposés, des exigences d'ordre pratique et économiques viennent depuis quelques années favoriser la commande adaptative, et diverses applications furent réalisées avec succès dans le domaine de l'absorption.

Le travail qui est présenté dans ce mémoire vise double objectifs, celui d'expliquer les différents aspect conduisant à une modélisation simple d'une colonne d'absorption et celui de présenter les principes de base de la théorie de la commande prédictive généralisée.

Le processus d'absorption se déroule dans une colonne à garnissage faisant partie d'une unité de pilote d'absorption, située à l' ENP . Ce processus comprend le transfert du gaz carbonique d'une phase gazeuse ( un mélange air + CO<sub>2</sub> ) à une phase liquide. Les deux phase coulent à contre-courant à travers la colonne. Pour faire augmenter la puissance d'absorption de liquide, il été ajouté une amine ( MEA ), qui réagit chimiquement (réversible du seconde ordre ) avec le CO<sub>2</sub> absorbé, pour formé un carbamate. C'est surtout cette réaction chimique , couplée au transfert de matière physique , qui rend difficile la modélisation du phénomène d'absorption. Pour raison économiques, le CO<sub>2</sub> ainsi que l'amine sont régénérés par le chauffage de la solution de carbamate dans une colonne de régénération.

Le problème qui a formé le point de départ de cette étude, est formulé de façon générale, la détermination d'une commande GPC pour le problème d'absorption. Plus précisément dans le cas d'une perturbation mesurable affectant la composition du gaz à épurer, il nous faut élaborer une commande de débit de l'absorbant introduit pour satisfaire les spécifications concernant le gaz épuré à la sortie de la colonne .

Ce mémoire est divisé en trois chapitres regroupés en deux parties , la première relative aux processus physique , à sa description et à sa modélisation ainsi qu'au différentes aspect de la simulation, la seconde traitant les problèmes posés par le calcul d'une commande GPC.

Le premier chapitre présente l'unité pilote ainsi que les différentes réactions qui se produisent dans la colonne afin d'obtenir les équations de notre modèle. Nous développons ainsi un modèle mathématique décrivant le processus d'absorption.

Le second chapitre présente la simulation et l'identification de l'unité pilote. L'analyse du comportement du système initial décrit par des équations aux dérivées partielles est faite par la résolution de ces équations. Le modèle mathématique est obtenu par l'identification.

Le chapitre trois traite le développement de l'algorithme de base de la GPC. La commande est élaborée à partir de la minimisation d'un critère quadratique multiple basé sur l'écart entre la sortie prédite et la référence. L'efficacité du système est testée sur quatre types de systèmes.

Le chapitre quatre, traite l'application de la commande prédictive généralisée, étudiée dans le troisième chapitre, à la colonne d'absorption du premier chapitre. Les différents résultats obtenus par cette méthode sont illustrés et expliqués par la suite.

Finalement une conclusion générale termine ce mémoire.

## Chapitre I

# MODEL DYNAMIQUE DE LA COLONNE D'ABSORPTION

**Introduction :**

Les processus physico-chimiques sont très répandus en pratique et l'on sait que leur modélisation mathématique devrait en toute rigueur faire appel à des équations aux dérivées partielles. Ce caractère réparti est rarement retenu sur le plan industriel car il conduit à des modèles de connaissance en général trop compliqués pour être utilisable.

Très souvent, on envisage alors dès le départ un modèle de conduite ( de type boîte noire ) dans la majeure partie des cas. Mais l'amélioration souhaitée des performances peut amener à garder le plus longtemps possible le modèle de connaissance, et à ne le simplifier que le plus tard possible au niveau de l'algorithme de commande [1] [2].

**I.1 La colonne d'absorption , son environnement, son fonctionnement :**

Le processus d'absorption étudié ici consiste à retirer d'un mélange gazeux ( air + CO<sub>2</sub> ) le gaz acide (CO<sub>2</sub>) qu'il contient, en utilisant un liquide de lavage (monoéthanolamine + eau ) les deux phases (gaz , liquide) opérant à contre-courant.

Cette absorption est réalisée dans une colonne en verre, mesurant 1.26 mètre de hauteur et 75 mm de diamètre intérieur. Des plateaux en PVC sont disposés tous les 630mm dans le but de recentrer le liquide et de permettre la prise d'échantillons liquides et gazeux. la colonne est garnie d'anneaux Raschig de 10mm de diamètre pour améliorer la surface de contact entre phase, elle permet de traiter un débit de l'ordre de 1441.56 l/h de gaz contenant approximativement 30% en volume de CO<sub>2</sub> .l'amplitude des perturbations en composition du mélange à traiter est de l'ordre de 10%.

Le mélange gazeux à épurer est introduit en fond de colonne et le liquide de lavage (MEA + eau) en tête. Ce liquide va se charger en gaz carbonique et nous aurons donc en tête de

colonne le gaz épuré et en fond de colonne le produit de la réaction entre le CO<sub>2</sub> et MEA chargé de CO<sub>2</sub>. par mesure d'économie la (M.E.A) est régénérée (épuré de CO<sub>2</sub> qu'elle contient) par élévation de température (110°C) puis recyclée dans le pilote. La pression de travail à l'intérieur de la colonne est de l'ordre de 1.2 bars. Il n'est donc pas question d'extrapoler à une colonne de type industriel (fonctionnant à des pressions élevées de l'ordre de 70bars et de dimension beaucoup plus importantes) les résultats obtenus sur ce pilote de laboratoire.

Optimiser le fonctionnement de la colonne consiste à minimiser, pour des perturbations intervenant sur la composition du gaz à l'entrée, le débit de (M.E.A) nécessaire pour maintenir impérativement le pourcentage de CO<sub>2</sub> dans le gaz épuré, inférieur à une limite tolérable pour l'utilisation ultérieure, sous la contrainte de ne pas dépasser la valeur maximale du débit liquide qui conduirait à l'engorgement de la colonne.

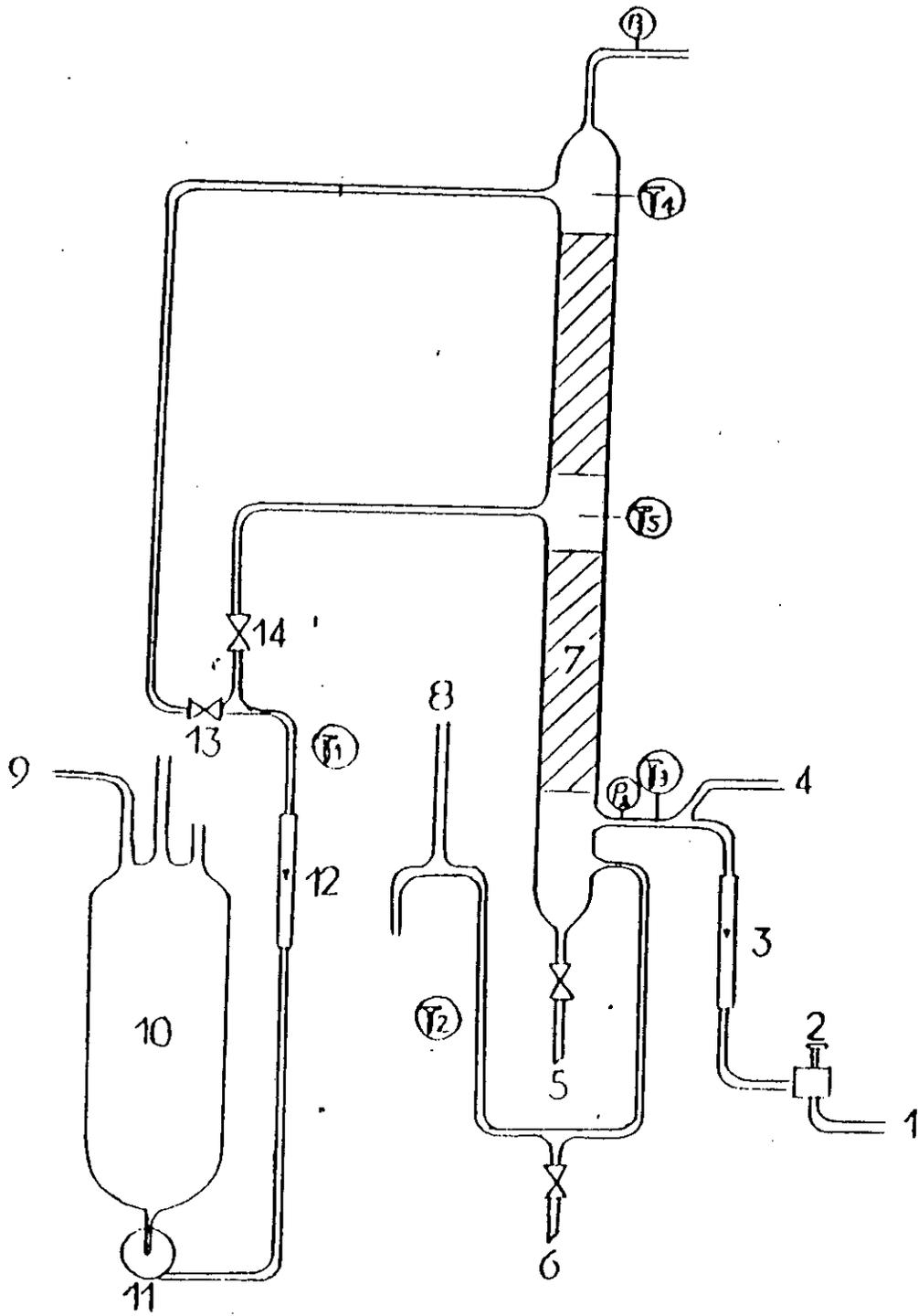
## **1.2. Principe :**

L'absorption d'un gaz accompagnée d'une réaction chimique en phase liquide permettra d'améliorer l'efficacité de la séparation (par exemple l'absorption du CO<sub>2</sub> dans une solution aqueuse de soude, amine ... etc), et la sélectivité de la séparation (par exemple l'absorption du CO<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>S dans des solutions d'éthanolamine).

La réaction chimique modifie le profil des concentrations à proximité de l'interface et de ce fait affecte le flux de transfert vers la phase où se déroule la réaction (voir la figure I.1).

La réaction à étudiée étant la suivante :

Le schéma 1 et 2 montre le schéma de l'unité pilote d'absorption étudié.



Schema 3 : colonne d'absorption

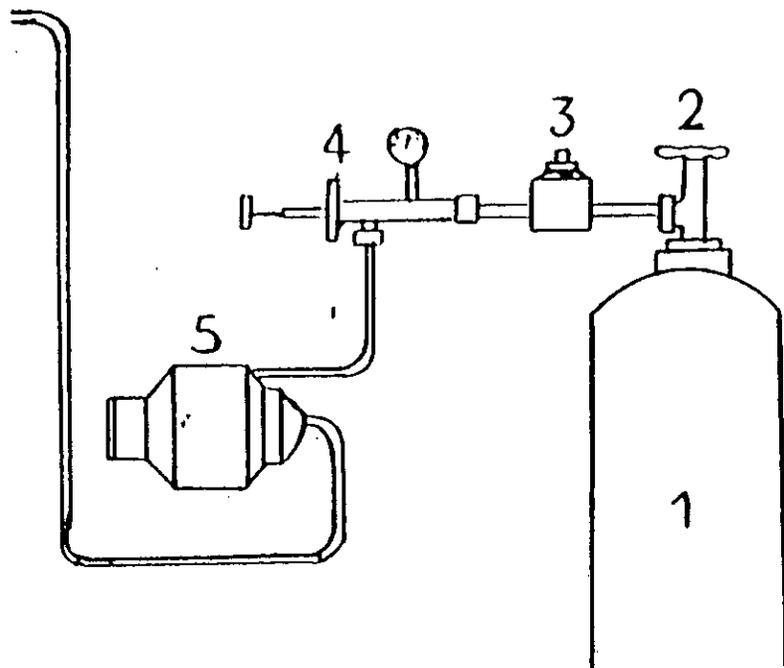


Schéma 4 : Circuit de gaz carbonique

1. Arrivée d'air,
2. Détendeur,
3. Débitmètre phase gazeuse (air),
4. Arrivée de gaz carbonique,
5. Vanne de vidange de la colonne,
6. Vanne de vidange du siphon,
7. Garnissage,
8. Orifice de sécurité ouvert à l'atmosphère,
9. Alimentation d'eau,
10. Bac d'alimentation,
11. Pompe d'alimentation de la colonne en eau,
12. Débitmètre phase liquide (eau),
13. Vanne d'alimentation des deux garnissages,
14. Vanne d'alimentation de premier garnissage,

**Sondes thermométriques :**

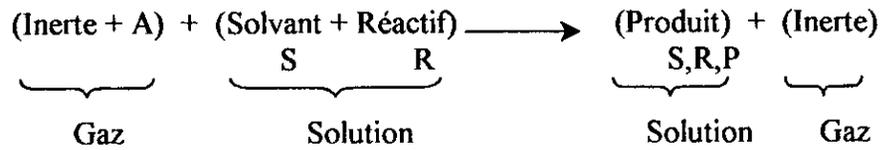
- T1. entrée du liquide,
- T2. sortie du liquide,
- T3. entrée de la phase gazeuse,
- T4. sortie de la phase gazeuse,
- T5. fraction de colonne séparant les deux garnissages,

**Prise de pression :**

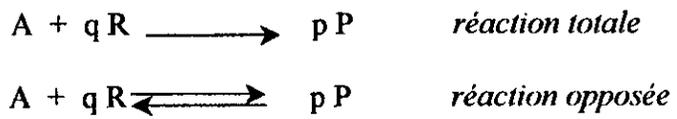
- P1. prise de pression au sommet de la colonne ( pression atmosphérique),
- P2. prise de pression à la base de la colonne,

**Circuit de gaz carbonique :**

1. Bouteille de gaz carbonique,
2. robinet d'ouverture,
3. raccord,
4. détendeur,
5. compteur à gaz,
6. élément de sécurité,
7. manomètre à eau,
8. manomètre à mercure,
9. orifice d'admission du CO<sub>2</sub> dans le circuit,



Au cours de laquelle le soluté A réagit avec le réactif R en solution pour donner le produit P d'après les réactions suivantes :



Comme toute opération de transfert de matière, l'absorption avec réaction chimique peut être décomposée en plusieurs étapes :

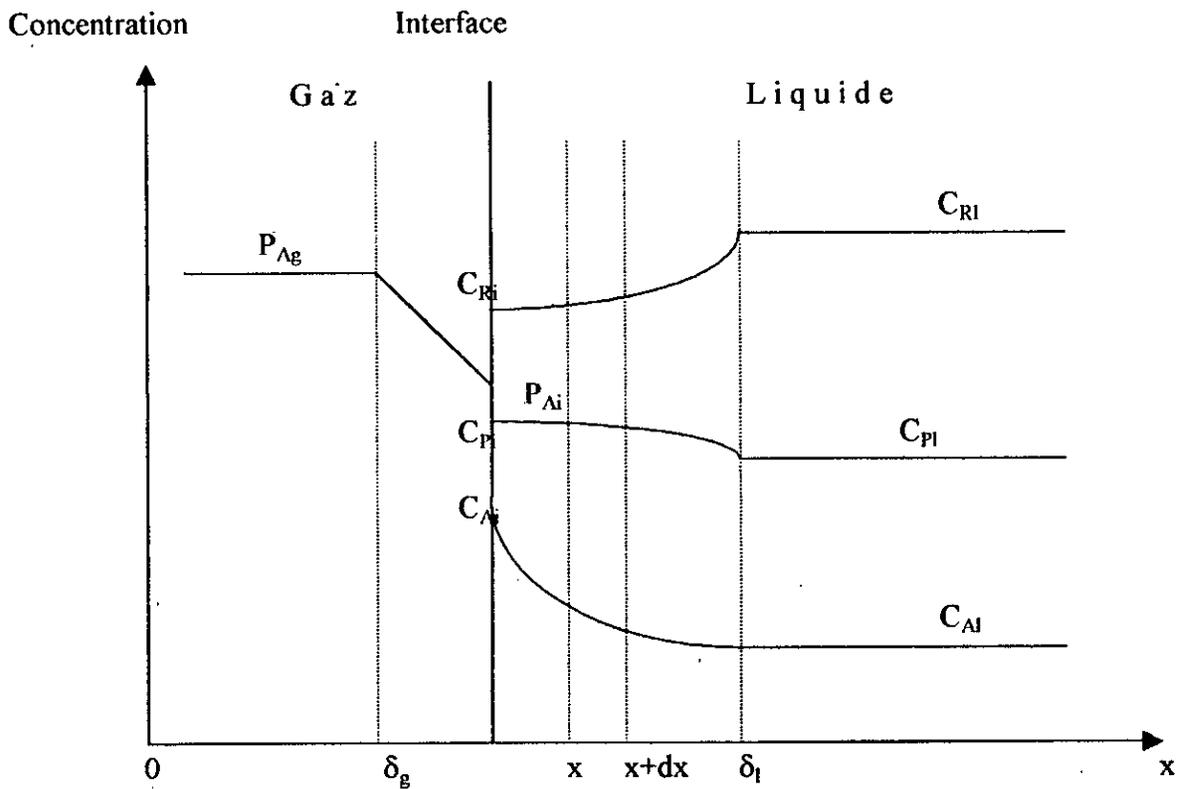


Figure I.1 : Profil des concentrations pour le transfert de matière avec réaction chimique.



différentielle suivante :

$$D_{Al} \left[ \frac{d^2 C_A(x)}{dx^2} \right] + v_A r_A = 0 \quad (1-4)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} x = 0 & ; C_A(0) = C_{Ai} \\ x = \delta_1 & ; C_A(\delta_1) = C_{Ai} \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation (4) est plus au moins complexe suivant la forme de l'équation de vitesse.

#### 1.4. Expressions de $C_A$ et des densités de flux en phase liquide :

##### 1.4.1. Cas de réaction de pseudo-premier ordre :

Soit la réaction irréversible d'ordre 1 par rapport à chacun des deux réactifs : A et B. Donc la vitesse de réaction peut s'écrire de la manière suivante :

$$r_A = k C_A(x) C_R(x) = k' C_A(x) \quad \text{avec : } k' = k C_R(x)$$

où :

$k$  : constante de vitesse de réaction ;

$k'$  : constante de la réaction de pseudo-premier ordre ;

$C_A(x)$  : concentration du composé A dans la phase liquide ;

$C_R(x)$  : concentration du composé R dans la phase liquide.

D'où, en considérant que  $v_A = -1$ , l'équation (4) s'écrira comme suit :

$$D_{Al} \left[ \frac{d^2 C_A(x)}{dx^2} \right] - k C_A(x) C_R(x) = 0 \quad (1-5)$$

En supposons que  $D_{Al}$ ,  $k$  et  $C_{Rl}$  sont constantes en phase liquide, c'est-à-dire :

$$C_R(x) = C_{Rl} = \text{constante}$$

l'équation (5) devient :

$$D_{Ai} \left[ \frac{d^2 C_A(x)}{d x^2} \right] - k C_A(x) C_{Ri} = 0 \quad (I-6)$$

Avec les conditions aux limites :

$$x = 0 ; C_A(0) = C_{Ai}$$

$$x = \delta_1 ; C_A(\delta_1) = C_{Ai}$$

La solution générale de l'équation (6) s'écrit :

$$C_A(x) = \beta_1 \exp(\alpha x) + \beta_2 \exp(-\alpha x) \quad (I-7)$$

avec :

$$\alpha = \left( \frac{k C_{Ri}}{D_{Ai}} \right)^{1/2}$$

Les conditions aux limites permettent de calculer les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  :

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = C_{Ai} \\ \beta_1 \exp(\alpha \delta_1) + \beta_2 \exp(-\alpha \delta_1) = C_{Ai} \end{cases}$$

En résolvant ces deux équations et en remplaçant dans l'équation (7), la concentration  $C_A(x)$  en phase liquide a pour expression :

$$C_A(x) = \frac{C_{Ai} \operatorname{sh}(\alpha x) + C_{Ai} \operatorname{sh}[\alpha(\delta_1 - x)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} \quad (I-8)$$

Et le gradient de  $C_A(x)$  s'exprime alors par :

$$\frac{d C_A(x)}{d x} = \frac{\alpha C_{Ai} \operatorname{ch}(\alpha x) - \alpha C_{Ai} \operatorname{ch}[\alpha(\delta_1 - x)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} \quad (I-9)$$

On en déduit le flux traversant l'interface :

$$[F_A]_{x=0} = -D_{Al} \left[ \frac{d C_A(x)}{d x} \right]_{x=0} = \frac{D_{Al}}{\delta_l} \frac{\alpha \delta_l \operatorname{ch}(\alpha \delta_l)}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_l)} \left[ C_{Ai} \frac{C_{Al}}{\operatorname{ch}(\alpha \delta_l)} \right]$$

On peut également exprimer le flux à l'autre extrémité du film, pour  $x = \delta_l$  :

$$[F_A]_{x=\delta_l} = -D_{Al} \left[ \frac{d C_A(x)}{d x} \right]_{x=\delta_l} = k_A \frac{\alpha \delta_l}{\operatorname{th}(\alpha \delta_l)} \left[ \frac{C_{Ai}}{\operatorname{ch}(\alpha \delta_l)} - C_{Al} \right]$$

Le terme  $(\alpha \delta_l)$  représente un nombre dimensionnel, appelé nombre de HATTA (Ha), qui est définie par la formule suivante :

$$\alpha \delta_l = \text{Ha} = \frac{\sqrt{k C_{R1} D_{Al}}}{k_A}$$

avec :

$D_{Al}$  : coefficient de diffusion du composé A dans la phase liquide ;

$\delta_l$  : épaisseur du film coté phase liquide ;

$k_A$  : coefficient de transfert du composé A dans la phase liquide, dans le cas où il n'y a pas de réaction chimique.

On peut alors exprimer la vitesse d'absorption de A, par unité de temps et par unité d'aire interfaciale, en présence de réaction chimique en fonction du nombre de HATTA :

$$[F_A]_{x=0} = k_A \frac{\text{Ha}}{\operatorname{th}(\text{Ha})} \left[ C_{Ai} \frac{C_{Al}}{\operatorname{ch}(\text{Ha})} \right] \quad (\text{I-10})$$

On sait que le flux sans réaction chimique a pour formule :

$$[F_A^*]_{x=0} = k_A (C_{Ai} - C_{Al})$$

Considérant la grandeur G comme étant le rapport des flux avec et sans réaction chimique, c'est-à-dire :

$$G = \frac{[F_A]_{x=0}}{[F_A^*]_{x=0}} = \frac{\text{Ha}}{\operatorname{th}(\text{Ha})} \frac{1 - \frac{\zeta}{\operatorname{ch}(\text{Ha})}}{1 - \zeta} \quad \text{avec : } \zeta = C_{Al}/C_{Ai}$$

A partir de cette relation, on peut dire que si  $Ha \geq 0,3$  alors  $G \neq 1$ .

Pour examiner la valeur du flux de A à  $x = \delta_l$ , puis rapporter sa valeur à celle du flux à  $x = 0$ , on fait le rapport suivant :

$$J = \frac{[F_A]_{x=\delta_l}}{[F_A]_{x=0}} = \frac{1 - \zeta \operatorname{ch}(Ha)}{\operatorname{ch}(Ha) - \zeta}$$

Suivant les valeurs du nombre de HATTA, en utilisant les rapports G et J, trois cas existent :

1)  $Ha < 0,3 \rightarrow$  *Réaction lente* :  $\operatorname{ch}(Ha)$  et J tendent vers 1, la réaction se déroule essentiellement au cœur de la phase liquide. Dans ce cas :

$$[F_A]_{x=0} \approx [F_A^*]_{x=0} = k_A (C_{Ai} - C_{Al})$$

C'est-à-dire  $G \approx 1$ .

2)  $0,3 < Ha < 5 \rightarrow$  *Cas intermédiaire* : on utilise l'expression (I-10).

3)  $Ha > 5 \rightarrow$  *Réaction rapide* : la valeur de  $\zeta$  sera faible, la réaction se déroule

essentiellement dans le film. Dans ce cas :

$$J \approx \frac{1}{\operatorname{ch}(Ha)} \quad \text{et} \quad G \approx Ha$$

le flux d'absorption par unité d'aire interfaciale pourra être calculé avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} [F_A]_{x=0} &\approx C_{Ai} k_A Ha = C_{Ai} \sqrt{k C_{Rl} D_{Al}} \\ &= C_{Ai} \sqrt{k' D_{Al}} \end{aligned}$$

**I.5 Equation du modèle.**

Les équations de base donnant le profil hydrodynamique des deux films gaz et liquide (établies et validées lors de l'étude de la DTS.) sont complétées par les termes traduisant le transfert de matière suivie d'une réaction chimique irréversible du  $(n,m)^{ieme}$  ordre en phase liquide de type :



Avec A le soluté de gaz et B le réactif en phase liquide.

Les deux phase gaz et liquide, en contact, sont affectées respectivement de l'indice g et l. le transfert du soluté gazeux a lieu dans la phase gazeuse vers la phase liquide. Les concentrations respectives du constituant qui transfère sont notées  $c_g$  et  $c_l$ .

On effectue un bilan en soluté sur chaque phase pour une tranche élémentaire de hauteur  $dz$  comme le montre la figure (I-2).

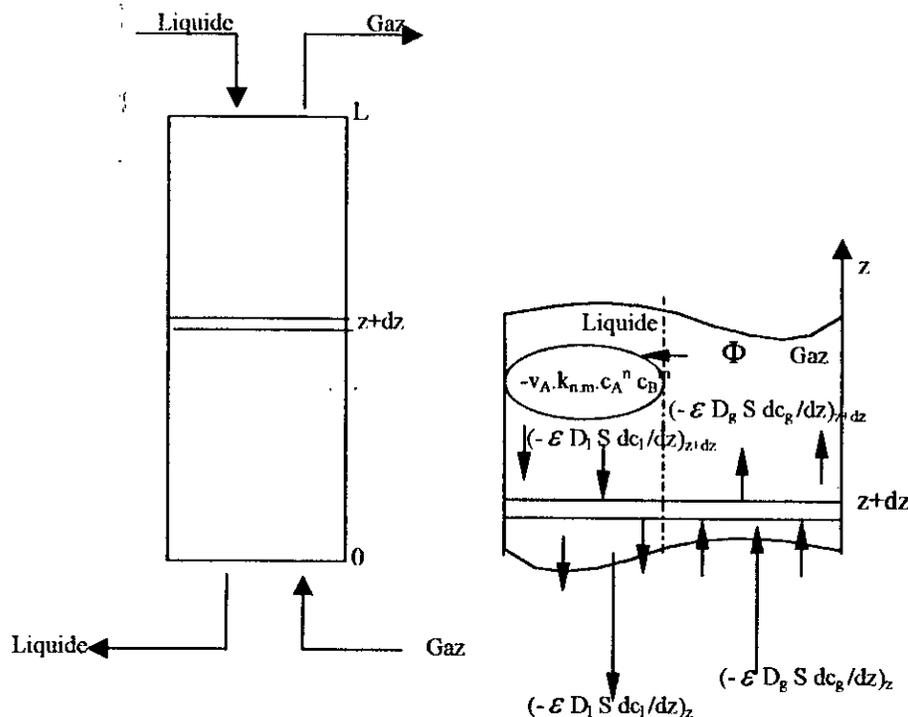


Figure I-2. bilan de matière sur une tranche élémentaire

**I.5.1 Bilan sur la phase gazeuse.**

Le bilan en soluté gazeux sur la phase gazeuse est donné par l'équation générale suivante :

Soluté à l'entrée = soluté à la sortie + soluté transféré

Avec :

Entrée : flux convectif à z + flux du à la dispersion axiale à z .

$$= (G c_g)_z + (-D_g S \epsilon_g dc_g / dz)_z$$

sortie : flux convectif à z+dz + flux du à la dispersion à z + dz

$$= (G c_g)_{z+dz} + (-D_g S \epsilon_g dc_g / dz)_{z+dz}$$

$\Phi$  : le flux exprimant le transfert de matière.

S : la section de la colonne.

G : le débit volumique.

$D_g$  : coefficient de dispersion axiale.

Soit le bilan sur la phase gazeuse :

$$\left( G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} \right)_z = \left( G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} \right)_{z+dz} + \Phi dv$$

$$G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} = \left( G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left( G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} \right)_{z+dz} + \Phi dv$$

$$G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} = G c_g - D_g S \epsilon_g \frac{dc_g}{dz} + G \frac{dc_g}{dz} dz - D_g S \epsilon_g \frac{d^2 c_g}{dz^2} dz + \Phi dv$$

$$-D_g S \epsilon_g \frac{d^2 c_g}{dz^2} + \frac{G}{S} \frac{dc_g}{dz} + \Phi = 0$$

soit  $U_g = G/S$ , la vitesse moyenne d'écoulement, alors l'équation III-1 s'écrit :

$$-D_g S \epsilon_g \frac{d^2 c_g}{dz^2} + U_g \frac{dc_g}{dz} + \Phi = 0$$

pour exprimer le régime transitoire dans l'expression on a ajouté le terme  $\frac{dc_g}{dt}$

$$-D_g \cdot \epsilon_g \cdot \frac{d^2 c_g}{dz^2} + U_g \cdot \frac{dc_g}{dz} + \Phi = \frac{dc_g}{dt} \quad (I-11)$$

### 1.5.2 bilan sur la phase liquide .

Comme pour la phase gazeuse on applique l'équation de bilan suivante :

Soluté à l'entrée + soluté transféré + réaction chimique = soluté à la sortie

Avec :

sortie : flux convectif à  $z + dz$  + flux du à la dispersion à  $z + dz$

$$= (L c_l)_{z+dz} + (-D_l S \epsilon_l \frac{dc_l}{dz})_{z+dz}$$

réaction chimique =  $v_A \cdot k_{n,m} c_A^n \cdot C_B^m$

Entrée : flux convectif à  $z$  + flux du à la dispersion à  $z$

$$= (L c_l)_z + (-D_l S \epsilon_l \frac{dc_l}{dz})_z$$

le flux exprimant le transfert de matière est noté  $\Phi$

Soit

$$\left( L \cdot c_l - D_l \cdot S \epsilon_l \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_{z+dz} - k_{n,m} c_l^n \cdot c_B^m + \Phi \, dv = \left( L \cdot c_l - D_l \cdot S \epsilon_l \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_z$$

$$-D_l \cdot \epsilon_l \cdot \frac{d^2 c_l}{dz^2} + \frac{L}{S} \cdot \frac{dc_l}{dz} - k_{n,m} c_l^n \cdot c_B^m + \Phi = 0$$

pour exprimer le régime transitoire dans l'expression on a ajouté le terme  $\frac{dc_l}{dt}$

$$-D_l \cdot \epsilon_l \cdot \frac{d^2 c_l}{dz^2} + U_l \cdot \frac{dc_l}{dz} - k_{n,m} c_l^n \cdot c_B^m + \Phi = \frac{dc_l}{dt} \quad (I-12)$$

1.5.3 Conditions aux limites.

La colonne fonction à contre courant, le gaze circule de bas en haut alors que le liquide s'écoule du haut vers bas, figure I-3.

⇒ Bas de colonne  $z = 0$ .

$$\left( c_g - \frac{D_g \epsilon_g}{U_g} \cdot \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=0} = c_g^e \tag{I-13}$$

$$\left( \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=0} = 0 \tag{I-14}$$

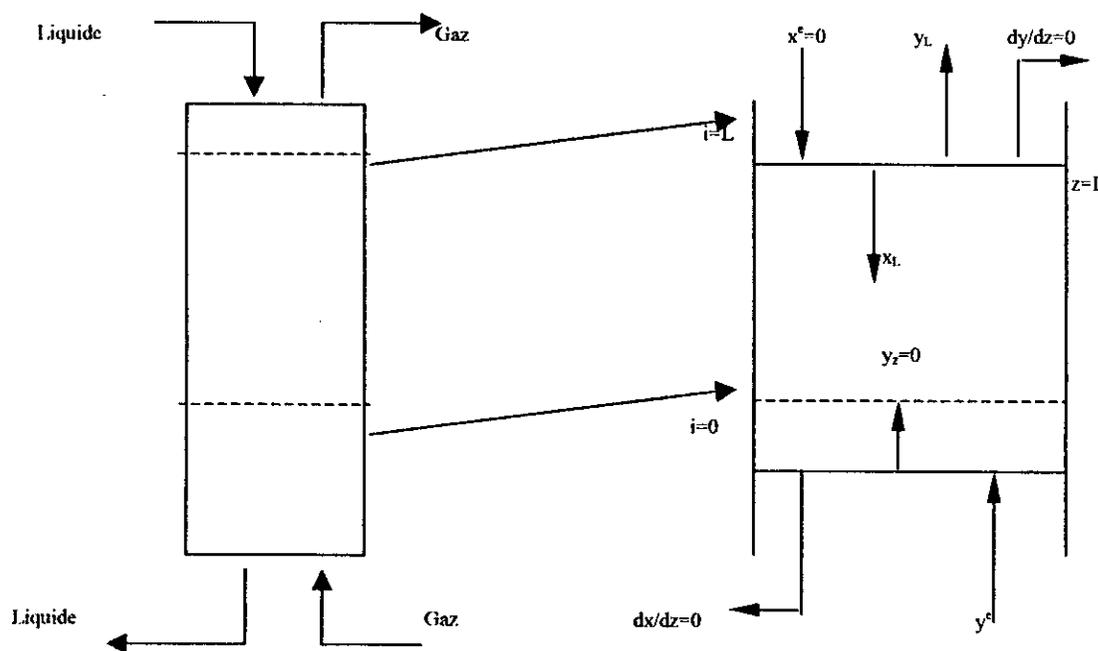


Figure I-3. condition aux limites

⇒ haut de colonne  $z = L$  (  $L$  : hauteur totale de la colonne )

$$\left( c_l - \frac{D_l \epsilon_l}{U_l} \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=L} = c_l^e \tag{I-15}$$

$$\left( \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=L} = 0 \tag{I-16}$$

le système d'équation aux dérivées partielles SI, représente ainsi le modèle mathématique de la colonne à garnissage. Cette modélisation de la colonne va nous permettre de déterminer les paramètres de transfert de matière, en l'occurrence l'aire interfaciale  $a$  et le coefficient de transfert de matière coté liquide  $k_l a$ .

système SI : modèle de la colonne à garnissage

$$-D_g \cdot \varepsilon_g \cdot \frac{d^2 c_g}{dz^2} + U_g \cdot \frac{dc_g}{dz} + \Phi = \frac{dc_g}{dt} \quad (I-11)$$

$$-D_l \cdot \varepsilon_l \cdot \frac{d^2 c_l}{dz^2} + U_l \cdot \frac{dc_l}{dz} - k_{n,m} c_l^n \cdot c_B^m + \Phi = \frac{dc_l}{dt} \quad (I-12)$$

$$\left( c_g - \frac{D_g \cdot \varepsilon_g}{U_g} \cdot \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=0} = c_g^e \quad (I-13)$$

$$\left( \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=0} = 0 \quad (I-14)$$

$$\left( c_l - \frac{D_l \cdot \varepsilon_l}{U_l} \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=L} = c_l^e \quad (I-15)$$

$$\left( \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=L} = 0 \quad (I-16)$$

## 1.6 Détermination de paramètres de transfert de matière.

### 1.6.1 L'aire interfaciale $a$ .

Dans le cas d'une réaction du pseudo-premier ordre et en régime de réaction rapide, décrit dans le paragraphe III-1.4, l'expression du flux, d'après l'équation III-1 est :

$$\Phi = a \sqrt{(D_A \cdot k_1)} \cdot C_A = F_A a.$$

dans le cas où l'équilibre physique est établi à l'interface et pour des faibles concentrations de soluté, alors on peut exprimer cet équilibre par une droite de la forme :

$$c_g = m \cdot C_{Ai}$$

(m est déduit de la constante de Henry)

donc le système d'équations -SI- s'écrit :

$$-D_g \cdot \varepsilon_g \cdot \frac{d^2 c_g}{dz^2} + U_g \cdot \frac{dc_g}{dz} + \frac{a \sqrt{(D_A k_1)} c_g}{m} = \frac{dc_g}{dt} \quad (I-17)$$

$$-D_l \cdot \varepsilon_l \cdot \frac{d^2 c_l}{dz^2} + U_l \cdot \frac{dc_l}{dz} - k_l \cdot c_l + \frac{a \sqrt{(D_A k_1)} c_g}{m} = \frac{dc_l}{dt} \quad (I-18)$$

$$\left( c_g - \frac{D_g \cdot \varepsilon_g}{U_g} \cdot \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=0} = c_g^e \quad (I-19)$$

$$\left( \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=0} = 0 \quad (I-20)$$

$$\left( c_l - \frac{D_l \cdot \varepsilon_l}{U_l} \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=L} = c_l^f \quad (I-21)$$

$$\left( \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=L} = 0 \quad (I-22)$$

la résolution de système nous fournit le profil des concentrations du soluté gazeux dans les deux phases le long de la colonne. la concentration du gaz à la sortie de la colonne ( déterminée par analyse infrarouge de la phase gazeuse ) sera le critère de résolution. La valeur de l'aire interfaciale est celle qui correspond à une différence minimum entre la concentration calculée, à  $z = L$ , et celle mesurée expérimentalement au même point.

### I.7 Modèle général :

A partir de bilans de matière sur la phase gazeuse et sur la phase liquide nous pouvons établir les équations générales décrivant le comportement des variables d'état en fonction des variables indépendantes ( hauteur de la colonne (z) et temps (t) ). Les équation ne sont valable

que sous les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est turbulent (homogénéité radiale).
- L'absorption s'effectue de façon isotherme, les valeurs numériques correspondant à une température de 25°C.

les équations générales sont les suivantes :

$$-D_g \cdot \varepsilon_g \cdot \frac{d^2 c_g}{dz^2} + U_g \cdot \frac{dc_g}{dz} + \frac{a \sqrt{(D_A k_1)} c_g}{m} = \frac{dc_g}{dt} \quad (I-17)$$

$$-D_l \cdot \varepsilon_l \cdot \frac{d^2 c_l}{dz^2} + U_l \cdot \frac{dc_l}{dz} - k_1 \cdot c_l + \frac{a \sqrt{(D_A k_1)} c_g}{m} = \frac{dc_l}{dt} \quad (I-18)$$

$$\left( c_g - \frac{D_g \varepsilon_g}{U_g} \cdot \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=0} = c_g^e \quad (I-19)$$

$$\left( \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=0} = 0 \quad (I-20)$$

$$\left( c_l - \frac{D_l \varepsilon_l}{U_l} \cdot \frac{dc_l}{dz} \right)_{z=L} = c_l^e \quad (I-21)$$

$$\left( \frac{dc_g}{dz} \right)_{z=L} = 0 \quad (I-22)$$

$$\frac{dL}{dt} = \alpha L + \beta u(t) \quad (I-23)$$

Les coefficients des équations (I-11), (I-12), ont les expressions suivants :

$$\varepsilon_g + \varepsilon_l = 0.75$$

$$k_1 = 5.868 \text{ m}^3/\text{mol}$$

$$a = 424.9 [1 - \exp(-3.41 (V_{st})^{0.2})]$$

$$U_l = V_{st} = 226.47 \text{ L}$$

$$U_g = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Le tableau I-1 donne la signification et les valeurs éventuelles des symboles figurant dans les équations :

a	aire interfaciale	$m^2.m^{-1}$
$D_{CO_2}$	diffusivité du dioxyde de carbone	$m^2.s^{-1}$
$D_g$	coefficient de dispersion axial coté gaz	$m^2.s^{-1}$
$D_l$	coefficient de dispersion axial coté liquide	$m^2.s^{-1}$
Ha	nombre ou critère de HATTA	
$J_l$	débit massique du liquide	$kg.m^2.s^{-1}$
$J_g$	débit massique du gaz	$kg.m^2.s^{-1}$
$k_l$	constante cinétique de pseudo-premier ordre	$s^{-1}$
k	constante cinétique de seconde ordre	$m^3.kmol^{-1}.s^{-1}$
$k_L$	coefficient de transfert de matière coté liquide	$m.s^{-1}$
$k_\infty$	constante cinétique à dilution infinie	$s^{-1}$
$U_l$	vitesse spécifique d'écoulement du liquide	$m.s^{-1}$
$U_g$	vitesse spécifique d'écoulement du gaz	$m.s^{-1}$
$\varepsilon_g$	retenue total du gaz	
$\varepsilon_l$	retenue total du liquide	

### Conclusion

A partir des bilans matière et à partir de la théorie relative au transfert de matière dans une réaction chimique, nous avons développé un modèle mathématique décrivant le processus d'absorption de  $\text{CO}_2$  dans une colonne à garnissage opérant à contre courant.

Le modèle consiste en une équation de premier ordre et deux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui ont un caractère non linéaire.

Les paramètres qui nous concernent sont la commande du débit  $L$  et les perturbations dans la concentration de  $\text{CO}_2$  en entrée  $c_g$ .

## Chapitre II

# SIMULATION ET IDENTIFICATION

**Introduction :**

Le modèle mathématique du processus d'absorption est constitué par un système de trois équations aux dérivées partielles. Généralement, l'analyse de comportement des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles se fait à partir de la solution de ces équations.

Sauf dans les cas simples solubles analytiquement, les méthodes de résolution sont fondées essentiellement sur l'approximation du système initial (aux dimensions infinies) par un ensemble d'équations différentielles ordinaires (aux dimensions finies).

Vu la complexité de ces équations différentielles, pour notre système on a opté à une résolution analytique avec des approximations.

**II.1 la résolution des équations aux dérivées partielles :**

Considérant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + B \frac{\partial u}{\partial z} + C u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

nous cherchons la solution par la méthode de séparation des variables en posons :

$$u = \Phi(z) \Gamma(t). \quad (\text{II.2})$$

portons dans l'équation (II.1) nous obtenons :

$$A \Phi''(z) \Gamma(t) + B \Phi'(z) \Gamma(t) + C \Phi(z) \Gamma(t) = \Phi(z) \Gamma'(t) \quad (\text{II.3})$$

Ou

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{A \Phi'(z) + B \Phi'(z) + C \Phi(z)}{\Phi(z)} = -k \quad (\text{II.4})$$

comme le premier membre de cette équation ne dépend pas de  $z$ , et le second de  $t$ , ils sont par conséquent égaux à un nombre constant que nous désignerons par  $k$ .

ainsi l'égalité (II.4) donne deux équations :

$$\Gamma'(t) + k \Gamma(t) = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$A \Phi'(z) + B \Phi'(z) + (C+k) \Phi(z) = 0 \quad (\text{II.6})$$

La solution générale de l'équation (II.5) sera :

$$\Gamma(t) = C_0 \exp(-k \cdot t) \quad (\text{II.7})$$

La solution générale de l'équation (II.6) sera :

$$\Phi(z) = C_1 \exp(k_1 \cdot z) + C_2 \exp(k_2 \cdot z) \quad (\text{II.8})$$

Portons les expressions (II.7), (II.8) dans (II.2) :

$$u(z,t) = C_0 \exp(-k \cdot t) [C_1 \exp(k_1 \cdot z) + C_2 \exp(k_2 \cdot z)].$$

A partir des conditions initiales et les conditions aux limites nous trouvons l'expression de la solution finale de notre système d'équations aux dérivées partielles :

$$u(z,t) = (1 - \exp(-k \cdot t)) [C1 \exp(k1 \cdot z) + C2 \exp(k2 \cdot z)].$$

Où le coefficient  $k$  a une valeur fixe et les coefficients  $k1$ ,  $k2$ ,  $C1$  et  $C2$  sont en fonction de la commande ( le débit).

## II.2 Résultats de simulation :

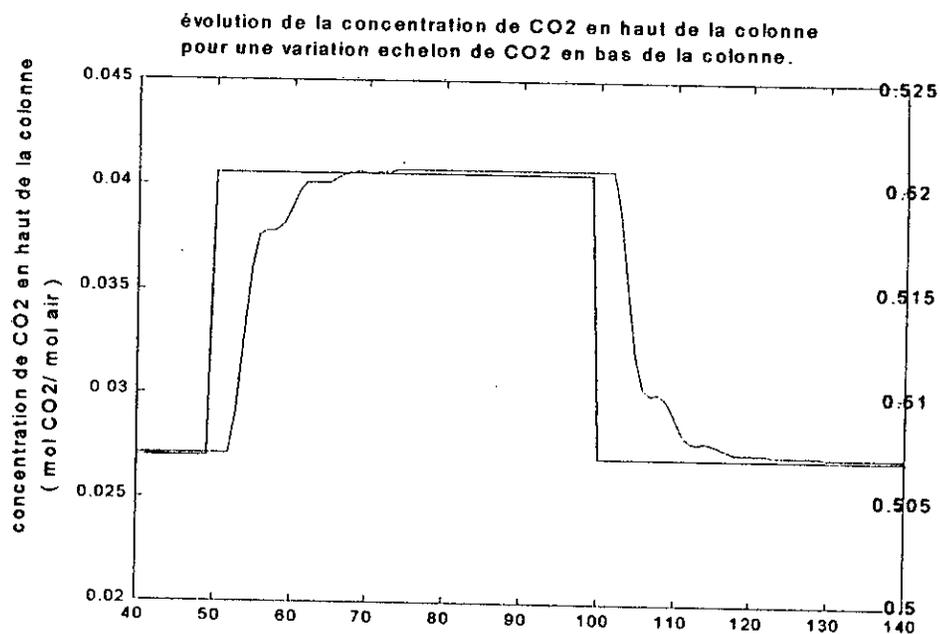
Quelques résultats des simulations sont indiqués sur les figures (II.1),

(II.2)

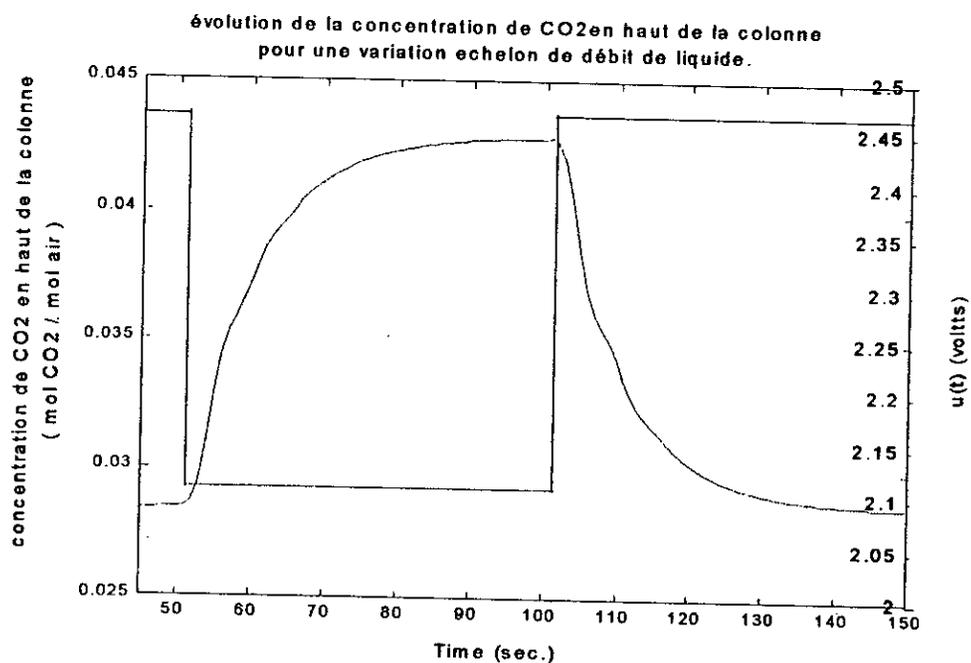
la figure (II.1) montre la réponse de  $y_T(t)$  ( concentration en haut de la colonne ) à un changement en échelon de  $y_F(t)$  ( concentration en bas de la colonne ). l'évolution de  $y_T$  a été calculée pendant le régime transitoire , cette évolution nous indique les phénomènes suivants :

- dispersion fictive : les petites oscillations sont un exemple de la dispersion fictive c'est à dire qu'elle entraîne un écoulement non monotone de  $y_T$  figure (II.1).
- diffusion fictive négligeable : la forme de la réponse illustre bien le caractère purement convectif du transport axial de matière dans le modèle mathématique, autrement dit, la diffusion fictive introduit par la résolution approchée est négligeable.

La figure (II.2) montre l'évolution de  $y_T$  pour une variation échelon de la commande  $u(t)$ , où la débit est commandé par un servo-valve , le signal d'entrée de du servo-valve est une tension  $u(t)$ , où  $(0 < u(t) < 5 \text{ volts})$ .



fig(II.1)



fig(II.2)

### II.3 L'identification :

Les méthodes de commande des processus dynamiques requièrent toutes des connaissances à priori plus au moins importantes sur les comportements dynamiques des systèmes. Ces dernières peuvent être extraites soit :

Soit d'un modèle de connaissance dont le contenu est une traduction directe des diverses lois physico-chimiques liant les entrées au sorties de celui ci.

D'un modèle de représentation qui se présente comme un formalisme mathématique et paramétrique capable de représenter les propriétés dynamique du système.

Cependant, l'élaboration d'un tel modèle nécessite donc la constitution d'un ensemble de mesures entrées-sorties qui permettront de déduire des méthodes de traitement approprié, pour les valeurs optimales des paramètres du système [10] [8].

La disponibilité d'un calculateur numérique permet de mettre en place des algorithmes performants, ayant une formulation récursive adaptées aux problèmes d'identification en temps réel . Cette approche moderne pour l'identification des modèles des procédés élimine tous les défauts des méthode classiques ( l'impossibilité de modéliser les perturbations, réduction de précision, signaux tests d'amplitude non tolérée par les installations industrielles, . . . etc.) et offre d'autre possibilités telles que :

- Suivi des variations des paramètres des procédés en temps réel offrant ainsi des perspectives quant à la commande de celui-ci en adaptatif.
- Identification des modèles des perturbations.
- Modélisation des bruits capteurs en vue de leur minimisation.
- Détection et mesure des fréquences de vibration.
- Analyse spectrale des signaux.

Un modèle échantillonné à paramètres ajustable est implémenté sur le ordinateur, on appelle l'erreur de prédiction, l'erreur entre la sortie  $y(t)$  du système et la sortie prédite  $\hat{y}(t)$ , cette erreur est utilisée par un algorithme d'adaptation qui à chaque instant d'échantillonnage va modifier les paramètres du modèle afin de la minimiser.

L'entrée d'excitation du système est en général une séquence binaire pseudo aléatoire de très faible niveau (non nuisible pour le système) engendrée par ce ordinateur.

Une fois le modèle obtenu, une validation objective peut être faite par des tests statistiques sur l'erreur de prédiction  $\varepsilon(t)$  et la sortie prédite  $\hat{y}(t)$ .

Le test de validation permet pour un procédé donné de choisir le meilleur modèle, respectivement la meilleur structure et le meilleur algorithme pour l'estimation des paramètres.

### II.3.1 structure du modèle candidat :

Le choix d'un modèle candidat peut se faire tout en bénéficiant d'un modèle de connaissance mal connu (boite grise), comme il peut se faire également toute en considérant le système comme une boite noire [4] [10].

La forme générale des modèle candidats utilisé est le suivant :

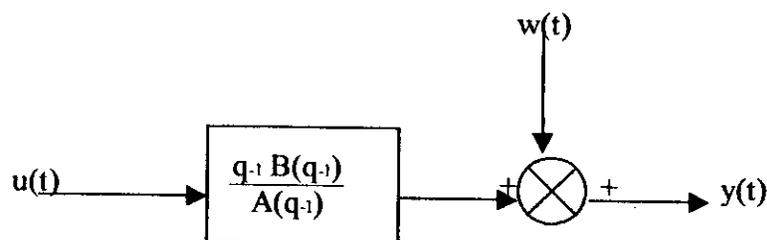


fig (II.1) : forme générale d'un modèle candidat.

$$y(t+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + w(t) \quad (\text{II.11})$$

où :

$y(t)$  : sortie du système.

$u(t)$  : entrée du système.

Les polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  sont donnée par les expressions suivantes :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

Avec:

$w(t)$  : perturbation du système constitué de deux signaux, l'un est déterministe et l'autre stochastique.

$$w(t) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1}) G(q^{-1})} e(t)$$

les polynômes :  $C(q^{-1})$  et  $G(q^{-1})$  sont donnée par :

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$$G(q^{-1}) = 1 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{ng} q^{-ng}$$

Avec:

$v(t)$  : entrée de perturbation déterministe (mesurable).

$e(t)$  : est un bruit blanc discret de moyenne nulle et de variance finie.

### II.3.2 Choix des entrée pour l'identification :

Un aspect très important en identification est le fait que la convergence de l'erreur de prédiction (même cas sans bruit) n'implique pas nécessairement la convergence des paramètres vers les paramètres optimaux du système.

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi(t) = 0$$

telle que :

$$\theta^T \phi(t) = y(t+1)$$

$$\hat{\theta}^T \phi(t) = \hat{y}(t+1)$$

avec :

$\theta$  : les paramètres réel du système.

$\hat{\theta}(t+1)$  : les paramètres estimés.

$\phi(t)$  : l'ensemble de données de mesures (vecteur d'observation).

Alors, on voit bien qu'il existe un ensemble de points dans l'espace des paramètres définies par :

$$D_c = \{ \theta : [\hat{\theta} - \theta]^T \phi(t) = 0 \}$$

Telle que l'équation (II.15) soit satisfaite (orthogonalité de l'erreur paramétriques et du vecteur d'observation), on se propose alors de définir les caractéristiques de l'entrée d'excitation qui permettent de réduire cette espace à un seul point.

En règle générale, ceci revient à appliquer (au moins un certain temps) un signal d'entrée suffisamment riche en fréquence, contenant au moins ( $n/2$  où  $n$  : est le nombre des paramètres à estimer) sinusoïdes distinctes (fréquences distinctes).

Le signal le plus appropriée à atteindre cette finalité est qui soit physiquement réalisable est une séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A) qui engendré facilement par un ordinateur numérique [4].

### II.3.3 Les méthodes d'identification récursive :

Les développements de plusieurs méthodes d'identifications trouvent leur origine en grande partie dans le fait que des estimations biaisées peuvent être obtenues, avec les méthodes d'identification de base (MCR, Gradient).

Le phénomène de biais est totalement lié à la structure du prédicteur, la nature des composantes du vecteur d'observation  $\phi(t)$  et la façon dont l'erreur de prédiction et respectivement d'adaptation sont engendrées.

Ainsi les propriétés de convergence en présence de perturbations aléatoires sont conditionnées par le choix d'algorithmes d'adaptation paramétrique, par conséquent on peut distinguer trois types de méthodes qui sont basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction, ou sur la décorrélation du vecteur d'observation et de l'erreur de prédiction, rendant par ce fait :

$$E \left\{ \phi(t) \varepsilon(t+1) \right\}_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

Les algorithmes sont répartie sur trois méthodes qui sont les suivantes :

1. les méthodes dite d'équation d'erreur.
2. les méthodes d'erreur de sortie.
3. les méthode de variable instrumentale.

Chacune de ces méthodes est adaptée pour certaines type de perturbation. dans cette étude on s'intéresse à la première catégorie (MCR) qui est bien adaptée aux modèle (ARMAX).

### II.3.3.1 L'algorithme de moindre carré récursif :

Il s'agit d'estimer le vecteur des paramètres  $\hat{\theta}$  à l'instant t pour qu'il minimise la somme des carrées des écarts entre le procédé et le modèle de prédiction sur un horizon de t mesures .

Le modèle de procédé étant de type (ARMA) :

$$y(t) = \frac{q^{(-d+1)} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t)$$

le modèle sous forme vectorielle :

$$y(t) = \theta^T \phi(t)$$

le prédicteur ajustable est :

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T \phi(t)$$

on définit l'erreur de prédiction apriori par l'équation (II.16) :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^T \phi(t)$$

le critère à minimiser est :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^l [\varepsilon(i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^l [y(i) - \hat{\theta}(i)^T \phi(i-1)]^2 \end{aligned}$$

L'algorithme qui satisfait à cet objectif est :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \varepsilon(t+1)$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+1) &= \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \\ &= \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \end{aligned}$$

avec :

$\varepsilon(t+1)$  : l'erreur de prédiction à posteriori .

$\hat{\theta}(0)$  ,  $\phi(0)$  : les conditions initiales.

$\hat{\theta}(t+1)$  : le vecteur des paramètres estimé à l'instant (t+1).

$\phi(t+1)$  : le vecteur des observations.

$F(t)$  : le gain d'adaptation paramétrique ( $F(0) > 0$ )

**Remarque :**

L'algorithme des moindres carrés récurrents développé est approprié pour l'estimation des paramètres inconnus mais constants, car la matrice  $F(t)$  décroît dans le temps.

Donnant ainsi de moins en moins de poids aux nouvelles mesures, en conséquence ce type d'algorithmes (à gain décroissant) ne conviendra pas pour les systèmes variants dans le temps. Une manière de remédier à ce problème est de reconsidérer le critère à minimiser, en introduisant un facteur  $\lambda$  (dit facteur d'oubli) [4] :

$$J = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} [y(i) - \hat{\theta}^T(t) \phi(i-1)]^2$$

Avec :

$$\lambda < 1.$$

La minimisation de ce critère par rapport aux estimées, donne exactement le même algorithme que (II.19) pour l'estimation des paramètres.

Exception faite sur l'estimation du gain d'adaptation qui devient :

$$F^{-1}(t+1) = \lambda_1(t) F^{-1}(t) + \lambda_2(t) \phi(t) \phi^T(t)$$

Avec :

$$0 < \lambda_1(t) < 1, \quad 0 < \lambda_2(t) < 2, \quad F(0) > 0$$

$\lambda_1$  : tend à augmenter F.

$\lambda_2$  : tend à diminuer F.

on se servant de lemme d'inversion matricielle (II.20) s'écrit :

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1} \left[ F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi(t)^T F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \right]$$

Différents algorithmes peuvent être obtenue en fonction des valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

#### II.4 résultats de l'identification :

Nous avons utilisé le modèle de connaissance d'une colonne d'absorption a fin de l'identifier avec un modèle de représentation candidat soit la forme générale de la figure (II.1).

Une excitation est effectuée avec deux séquence binaires pseudo aléatoires (SPBA), mutuellement décorrélées de longueur 8, la période d'échantillonnage est d'une minute (le processus est lent) cependant la période d'une (SPBA) est de 36 fois la période d'échantillonnage ( la plus long impulsion permet largement de faire atteindre au système son régime statique).

L'identification est supposée être faite en temps réel (fig : II.1), sur un horizon de trois fois la longueur maximale de la (SPBA) autour du point de fonctionnement nominal.

(  $\Delta Cg = \pm 10\%$  )

**II-4-1 Structure générale :**

L'algorithme d'identification utilisé est le MCR à trace constante .

Trace(F(0)) = N.Gi.

N : nombre des paramètres à identifier.

Gi : Gain initial.

N=6 ; Gi = 1000 et les paramètres initiaux:

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

les paramètres optimaux obtenus :

$$\theta^T = [1 \ -1.8688 \ 0.8592 \ 0 \ -0.2813 \ 0.1347];$$

la figure (II.1) vient approuver la validité de modèle de représentation obtenu.

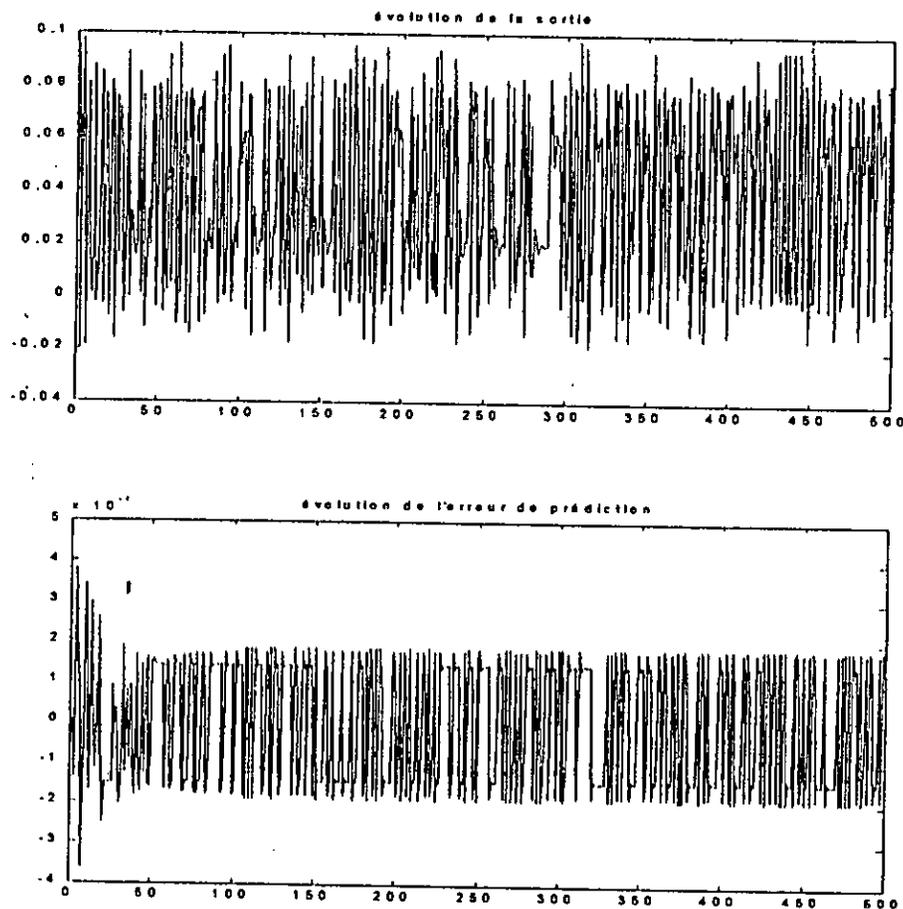


fig (II.2) : résultats de simulation pour l'identification

**conclusion**

la connaissance d'un processus physico-chimique passe en particulier par la mise en place d'un modèle mathématique aussi fidèle que possible, la validation de ce modèle ne pouvant être réalisée que par une simulation de celui-ci.

dans cette partie on a traité la simulation de notre système exprimé par des équations aux dérivées partielles après avoir résolu ce dernier par la méthode de séparation des variables. en suite on a élaboré un modèle de représentation pour l'identification qui traduit directement les divers lois physico-chimiques liant l'entrée et la sortie.

Les résultats obtenus par la simulation nous montre qu'on a un système stable, qui présente quelques petites oscillations qui sont dû à la dispersion axiale,

Pour l'identification les résultats montrent que l'erreur de prédiction est acceptable et que les paramètres du modèle estimé convergent vers les vrais paramètres.

Il est à noter que l'identification effectuée est primordiale et présente un double avantage, celui d'estimer l'ordre de notre système ( condition suffisante pour la garantie de la stabilité et la convergence de l'algorithme de commande qui vont être appliqués par la suite ) et celui d'étudier l'effet de la structure choisie pour l'identification de notre système .

## Chapitre III

# LA COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE

**Introduction :**

Le principe de la commande prédictive la rend séduisante pour de nombreuses applications que ce soit comme une commande linéaire ou non linéaire. La commande prédictive non linéaire (Rawlings et al. 1994) est souvent traitée comme un problème d'optimisation avec contraintes sur l'état de la commande où l'on recherche une commande minimisant un critère techno-économique.

La commande prédictive généralisée (CPG) proposée par (Clarke et al. 1987a), (Clarke et al. 1987b) fait partie des méthodes de commande utilisables comme commande adaptative. Pour être utilisée, elle doit donc être couplée à une méthode d'identification d'un modèle de procédé ; si l'identification est réalisée en ligne la commande réalisée est adaptative. (Bitmead et al. 1990) ont consacré un ouvrage à la CPG et étudié en particulier l'interaction entre l'identification paramétrique et le choix du schéma de commande, insistant sur l'intérêt de les combiner pour la robustesse de l'ensemble, plutôt que de s'exciter sur un aspect très pointu soit de l'identification, soit de la commande, d'autant plus la que l'identification devra être réalisée en boucle fermée. (Bitmead et al. 1990) parlent de synergie entre l'identification par les Moindres Carrés Récursifs et la Commande linéaire Quadratique, c'est à dire que la robustesse de la combinaison est supérieur à celle obtenue en les appliquant séparément. D'autre part, cette méthode a été utilisée avec succès dans les applications industrielles sous différents formes (Richalet et al 1978), Clarke 1988), (Rafilamanana et al 1992), (Defaye et al 1993), (Lelann et al 1994). Parmi les avantages essentiels de la commande prédictive généralisée, Clarke et al. 1987a) mentionne qu'elle peut s'appliquer à des procédés retard pur variable, des procédé à non-minimum de phase et qu'elle ne pose pas de problèmes apparents lorsque le modèle du procédé comporte trop de paramètres, contrairement au placement de pôles ou à la commande linéaire quadratique [8] [10] [12].

La commande prédictive doit son nom au fait qu'elle tient compte des prédictions des

sorties futures du procédé et parfois également des commandes futures. Les sorties et les commandes sont prédites sur un horizon fini.

### III.1 L'Algorithme de commande :

L'algorithme de commande à variance minimale (VM) a été proposé par Astrom [3]. cet algorithme est basé sur une prédiction à  $d$  pas ou  $d$  est le retard pur du système (nombre multiple de la période d'échantillonnage du processus). Cette commande est basée sur un critère quadratique, qui minimise la variance de l'erreur de prédiction entre la sortie de système et la référence désirée.

Pour obtenir des résultats optimaux par cette commande, il est nécessaire d'avoir une connaissance exacte du retard de processus à commander, mais dans la plupart des cas cette tâche reste difficile, autre inconvénient de cette commande est que son domaine d'application est très restreint (ne s'applique que pour les modèles à phase minimale).

En pratique, la détermination du retard pour les systèmes non linéaires et les systèmes variants dans le temps (LTVS : Linear Time Varying Systems) demeure une tâche très difficile. Le comportement à phase non minimale est (PNM) lié en général d'une part aux choix de la période d'échantillonnage, d'autre part au comportement du système continu.

Clarke [5],[6] montre qu'un échantillonnage rapide, d'un système continu à phase minimale, aboutit à un système discret à zéros instable (système à phase non minimale) et ceci dans les cas où la différence des degrés entre le numérateur et le dénominateur est égale à un.

La commande à variance minimale généralisée (GMV) a apporté une solution à ce problème. cette dernière est basée sur la minimisation d'un critère à variance minimale, augmenté d'un terme de pondération qui pénalise la commande [7] [8] [9]. Le critère de cette commande est  $J$  défini par [7] [8].

$$J = E \left\{ P [ w(t+d) - Y(t+d) ]^2 + Q [ u(t) - u(t-1) ]^2 / t \right\}$$

avec :

$E[\cdot]$  : espérance mathématique.

$u(t)$ ,  $y(t)$  et  $w(t)$  : sont respectivement signal l'entrée, signal la sortie et signal de référence .

$P$  et  $Q$  : sont des polynôme de pondération.

$(./t)$  : information disponible.

La pondération apportée par la (GMV) conduit à un modèle en boucle fermée, dont la dynamique dépend essentiellement du polynôme  $PB+QA$  ou  $A$  et  $B$  sont des polynômes caractérisant le système. Le choix du polynôme  $Q$  est arbitraire, dans le cas où ce dernier se réduit à une constante, On peut utiliser la méthode du lieu des racines pour fixer les pôles du système en boucle fermée.

La commande à placement de pôles (PP) ne nécessite pas une connaissance précise du retard et le modèle à phase non minimale ne lui pose pas de problèmes. Dans le premier cas, il suffit d'augmenter l'ordre du modèle de représentation pour prendre en compte l'incertitude sur la valeur du retard. l'inconvénient de cette méthode est le manque de robustesse numérique dans la résolution de l'équation diophantine qui nécessite l'inversion d'une matrice. la singularité de cette matrice est du d'une part à la présence de facteur commun des polynômes du modèle, d'autre part aux choix de ces degrés.

Une nouvelle commande est apparue comme solution possible pour le problème de variation du retard, et à l'instabilité des zéros des processus. C'est la commande prédictive étendue (LRP : long- range prédiction), qui a comme idée de base pour sa stratégie de commande, la minimisation de l'erreur de prédiction sur un horizon de temps fini.

Ainsi on aboutit à un algorithme de commande insensible aux variations du temps du retard et qui n'exige pas la stabilité des zéros du système.

La prédiction sur un horizon de temps supérieur ou égale aux retard, permet d'obtenir des commandes plus douces et donc d'améliorer le fonctionnement du procédé considéré.

Plusieurs algorithmes de commande sont bâtis sur le choix de l'horizon de prédiction de l'erreur de sortie.

Richalet [10] a proposé la méthode (IDCOM : IDentification\_COMmande ).il a utilisé le concept de prédiction étendu (LRP) comme un outil de synthèse efficace de la commande. Cette dernière est basée sur une modélisation du procédé par réponse impulsionnelle (weihing-sequence models ), couplé a la synthèse d'une trajectoire de référence représentant le comportement désiré en boucle fermée et ne considérant aucune pondération sur les actions de commande. Le problème inhérent à cette méthode est qu'elle ne garantit pas la stabilité des systèmes instables en boucle ouverte ou à phase non minimale.

L'algorithme ( DMC : Dynamic Matrix Control ) a été proposé par Cutler et Ramaker [11] au cour des années 80. la prédiction ce fait a laide d'un modèle de réponse indicielle sur un horizon égale à l'ordre de procédé. Les erreurs de prédiction sont incluses dans le critère quadratique à minimiser.

Clarke et Zhang [12] ont fait le développement et la comparaison de quatre types d'algorithmes de commande à savoir IDCOM, DMC, PCA (Predictive Contrôle Algorithme ) et la commande prédictive généralisée (GPC : Generalized Predictive Control). Carlos [13] reprend le travail de Clarke en présentant un survey sur les modèle et les algorithmes de commandes ainsi que leur applications dans le domaine industriel. Il compare la DMC, MAC ( Modele Algorithme Control ), IMC ( Internal Model Control ) et LQ (Lineair Quadratic ).

La commande prédictive généralisée GPC est une méthode relativement récente et l'un de dernier membres de la famille des commandes à horizon étendu (LRHPC : Long-

Range Horizon predictive control ), basée sur la minimisation d'un critère quadratique au sens d'un horizon fuyant, avec l'hypothèse qu'il existe un horizon au delà duquel les incréments de commande futur sont nuls. La GPC se base sur cinq concepts :

- le modèle de prédiction utilisé CARIMA ( Controlled Autoregressive Integral
- Mouving Average ) il incorpore un effet intégrale dans le but d'éliminer l'écart
- permanent et l'effet des perturbation constantes.
- l'utilisation de prédicteurs à horizon fini de prédiction supérieur au temps du retard et à la limite inférieure est égale à l'ordre du système.
- Résolution récursive de l'équation diaphontine.
- introduction de la pondération sur les incréments de commande dans le critère.
- Le choix de l'horizon de commande à partir duquel tous les incréments sont pris égaux à zéros.

La puissance et la performante de la GPC réside dans la combinaison des ces cinq concept, qui sont issus de plusieurs algorithmes, elle est très réussie en pratique [3][4][8][10].

La plupart des algorithmes de commande à prédiction étendue sont des cas particuliers de la GPC, et peuvent être trouvés par certains choix des paramètres de synthèse, à savoir, l'horizon de prédiction, horizon de commande et la pondération : ce qui fait la puissance de la GPC [16]. Un exemple, la GMV développée par Clarke [7][8] pour des systèmes à retard connu peut être vue comme un cas particulier de la GPC [2], où seulement un seul signal de commande est pondéré et les deux horizons de prédiction  $N_1$  et  $N_2$  sont égaux au retard du système.

L'approche de la commande à horizon étendu de Ydstie [11] et l'algorithme EPSAC de Dekeyser [5] sont obtenus par un choix judicieux des horizons de prédiction et de commande, avec une pondération nulle.

### III.2 Bref aperçu de l'évolution de la commande prédictive :

La commande prédictive n'est pas apparue subitement , mais apparaît plutôt comme une évolution à travers le correcteur à minimum de variance ( Astrom 1970 ) et le régulateur auto-réglant de ( Astrom et Wittenmark 1973 ) obtenue par minimisation de critère :

$$J(u, t) = E \left\{ \left[ y(t+d+1) - w(t+d+1) \right]^2 \right\}$$

ou  $w$  est le signal de référence à poursuivre par la sortie et  $d$  le retard de la sortie par rapport à la commande ( excluant le retard unitaire minimum de la sortie par rapport à la commande ).

La minimisation de critère fournit la commande  $u(t)$  à appliquer . le régulateur ainsi obtenu ne convient que pour les systèmes à phase minimale. A fin de l'étendre aux systèmes à phase non minimale , la commande à minimum de variance généralisée a été proposée par ( Clarke et Gawthrop 1975 ) , ( Clarke et Gawthrop 1979 ) , en introduisant une pénalité sur la commande , d'ou le nouveau critère :

$$J(u, t) = E \left\{ \left[ y(t+d+1) - w(t+d+1) \right]^2 + \lambda u(t)^2 \right\}$$

ou encore :

$$J(u, t) = E \left\{ \left[ y(t+d+1) - w(t+d+1) \right]^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \right\}$$

en introduisant la variation  $\Delta u(t)$  de la commande , pour garantir une erreur statique nulle dans le cas d'une référence constante non nulle . ( Ydstie 1984 ) a modifié cette commande en introduisant un horizon étendu , applicable à des systèmes à phase non minimale , mais non à des systèmes instables en boucle ouverte. La commande la plus proche de GPC est la commande prédictive de ( Peterka 1984 ) pour un horizon de prédiction infini , d'ou un développement différent . ( Clarke et al. 1987a ) , ( Clarke et al. 1987b ) ont introduit la commande prédictive généralisée qui minimise le critère suivant :

$$J(u, t) = E \left\{ \sum_{j=N1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{Nu} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\}$$

ou  $N1$  et  $N2$  sont les horizons minimum et maximum de coût et  $Nu$  l'horizon de commande ( fig 15.1 ) ; ces horizons sont finis ,  $\lambda(j)$  est une séquence de pondération de la commande.

Dans la GPC, seule la première commande calculée  $u(t)$  est appliquée et les commandes suivantes  $u(t+1), \dots$  sont seulement calculées en boucle ouverte. la minimisation est ainsi répétée au pas suivant. le calcul de la commande nécessite de connaître les consignes futures, et le but de la commande est d'amener grâce aux prédictions, les sorties futures aussi proches que possible des consignes.

### III.3 La Commande prédictive généralisée simple :

#### III.3.1 Modèle linéaire de procédé :

Le comportement dynamique du procédé et de son environnement peut être décrit par une équation aux différences de la forme :

$$A(q^{-1}) y(t) = q^{-1} B(q^{-1}) u(t) + q^k D(q^{-1}) v(t) + C(q^{-1}) e(t) \quad (I-1)$$

avec :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = d_0 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd}$$

Où :

$D$  représente le nombre de périodes d'échantillonnage contenu dans le retard. Les grandeurs  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  et  $e(t)$  représentent respectivement, à l'instant  $t$ , la sortie de procédé, la commande appliquée au procédé, la perturbation mesurable et une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie.

Le modèle polynomial (I-1) peut prendre la forme :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + X(t) \quad (I-2)$$

ou  $X(t)$  regroupe les termes relatifs aux perturbations lorsque  $d$  est prise égal à 1.

Le terme  $X(t)$  qui est un modèle à moyenne glissante MA ( Moving Average ), peut s'écrire sous la forme [11] :

$$X(t) = C(q^{-1}) \xi(t) \quad (I-3)$$

Où  $\xi(t)$  est une séquence aléatoire non corrélée.

Ainsi l'équation (I-2) devient :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + C(q^{-1}) \xi(t) \quad (I-4)$$

Ce modèle est appelée modèle CARMA ( controlled autoregressive and moving average ). Lorsque les éventuelles perturbations stationnaires sont annulées par l'introduction d'une action intégrale, l'équation (I-3) devient :

$$X(t) = C(q^{-1}) \frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (I-5)$$

Où :

$\Delta = 1 - q^{-1}$  est l'opérateur de différence.

Ainsi nous obtenons un modèle CRIMA (controlled autoregressive and integrated moving average) :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + C(q^{-1}) \frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (I-6)$$

### III.3.2 Calcul de prédicteur :

Le modèle (I-6) est utilisé dans l'étude de la commande prédictive généralisée. Pour simplifier les calculs, le polynôme  $C(q^{-1})$  est pris égal à 1 [11], et le modèle (I-6) s'écrit :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + \frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (I-7)$$

L'écriture de l'équation (I-1) à l'instant  $t+j$  est obtenue en multipliant les deux membres de

cette équation par  $q^j$ , nous obtenons :

$$A(q^{-1}) y(t+j) = B(q^{-1}) u(t+j-1) + \frac{\xi(t+j)}{\Delta} \quad (I-8)$$

Le polynôme  $A(q^{-1})$  étant différent de zéros, nous pouvons effectuer la division de la relation (I-8) par  $A(q^{-1})$ , et nous aurons :

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j-1) + \frac{1}{A(q^{-1}) \Delta} + \xi(t+j) \quad (I-8bis)$$

le terme  $\frac{1}{A(q^{-1}) \Delta}$  peut être décomposé en deux parties. Cette décomposition peut être obtenu à l'aide de l'algorithme d'Euclide qui permet d'effectuer la division de 1 par le polynôme  $A(q^{-1}) \Delta$  jusqu'à l'ordre  $j$  [24], soit :

$$\frac{1}{A(q^{-1}) \Delta} = E_j(q^{-1}) + q^j \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1}) \Delta} \quad (I-9)$$

les polynômes  $E_j$  et  $F_j$  sont définis de manière unique et sont de degré respectifs  $(j-1)$  et  $\deg(A(q^{-1}))$  [11] [24] [29] [51], et  $j$  est l'intervalle de prédiction. ces polynômes sont de la forme :

$$E_j(q^{-1}) = e_0 + e_1 q^{-1} + \dots + e_{j-1} q^{-(j-1)}$$

$$F_j(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{na} q^{-na}$$

L'équation (I-9) peut s'écrire aussi sous la forme:

$$E_j(q^{-1}) A(q^{-1}) \Delta + q^j F_j(q^{-1}) = 1 \quad (I-10)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (I-8) par  $E_j(q^{-1}) \Delta$  nous aurons :

$$E_j(q^{-1}) \Delta A(q^{-1}) y(t+j) = E_j(q^{-1}) \Delta B(q^{-1}) u(t+j-1) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) \quad (I-11)$$

Et en remplaçant  $E_j(q^{-1}) \Delta A(q^{-1})$  par son expression (I-10),  $y(t+j)$  devient :

$$y(t+j) = E_j(q^{-1}) \Delta B(q^{-1}) u(t+j-1) + F_j(q^{-1}) y(t) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) \quad (I-12)$$

le produit de  $E_j(q^{-1})$  par  $\xi(t+j)$  nous donne :

$$E_j(q^{-1}) \xi(t+j) = e_0 \xi(t+j) + e_1 \xi(t+j-1) + \dots + e_{j-1} \xi(t+1)$$

Cette dernière expression nous montre que les composantes du bruit sont toutes dans le futur. Le terme  $E_j(q^{-1}) \zeta(t+j)$  représente la partie non prédictible. Donc le prédicteur, compte tenu des informations connues à l'instant  $t$ , s'écrit :

$$\hat{y}(t+j/t) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) + F_j(q^{-1}) y(t) \quad (I-13)$$

avec

$$G_j(q^{-1}) = E_j(q^{-1}) B(q^{-1}) \quad (I-13bis)$$

**Remarque:**

Les polynômes  $\Delta A(q^{-1})$  et  $q^{-j}$  sont premiers entre eux. D'après Bezout, il existe deux polynômes uniques  $E_j(q^{-1})$  et  $F_j(q^{-1})$  qui vérifient l'équation (I-10) et  $\deg E_j = \deg(q^{-j}) - 1 = j - 1$

et  $\deg F_j = \deg(A\Delta) - 1$ .

$\hat{y}(\cdot/t)$  est la notion du prédicteur qui n'est fonction que des informations disponibles à l'instant  $t$ .

### III.3.3 Equations diophantines :

Le calcul de prédicteur nécessite la connaissance des polynômes  $E_j(q^{-1})$  et  $F_j(q^{-1})$ ; ces derniers représentent la solution de l'équation (I-10) appelée équation diophantine. Pour trouver les polynômes  $E_j$  et  $F_j$ , nous allons résoudre l'équation (I-10) en procédant par récurrence. Nous supposons donc que nous connaissons les polynômes  $E_j$  et  $F_j$  à l'ordre  $j$  et nous allons essayer de trouver les polynômes  $E_{j+1}$  et  $F_{j+1}$  à l'ordre  $j+1$ .

Posons :

$$\tilde{A} = A \Delta$$

Les deux équations diophantines à l'ordre  $j$  et  $j+1$  s'écrivent:

$$1 = E_j \tilde{A} + q^{-j} F_j \quad (I-14)$$

$$1 = E_{j+1} \tilde{A} + q^{-(j+1)} F_{j+1} \quad (I-15)$$

la différence membre à membre nous donne:

$$0 = \tilde{A} (E_{j+1} - E_j) + q^{-j} (q^{-1} F_{j+1} - F_j) \quad (I-16)$$

d'après l'équation (I-16) nous constatons que  $q^j$  divise le polynôme  $\tilde{A}(E_{j+1} - E_j)$ , or  $q^j$  et  $\tilde{A}$  sont premiers entre eux. Ceci nous permet d'écrire :

$$E_{j+1} - E_j = r_j q^j \tag{I-17}$$

En remplaçant  $(E_{j+1} - E_j)$  par son expression dans (I-16) nous aurons :

$$q^j (q^{-1} F_{j+1} - F_j + \tilde{A} r_j) = 0$$

il ressort de l'équation précédente :

$$F_{j+1} = q ( F_j - \tilde{A} r_j ) \tag{I-18}$$

Sachant que :

$$F_{j+1} = f_{j+1,0} + f_{j+1,1} q^{-1} + \dots + f_{j+1,na} q^{-na}$$

$$F_j = f_{j,0} + f_{j,1} q^{-1} + \dots + f_{j,na} q^{-na}$$

$$q \tilde{A} r_j = ( 1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{na+1} q^{-(na+1)} ) q r_j$$

en identifiant les coefficients des polynômes  $F_{j+1}$  et  $q ( F_j - \tilde{A} r_j )$ , nous tirons les relations récurrentes suivantes :

$$r_j = f_{j,0}$$

et

$$f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - \tilde{a}_{i+1} r_j \tag{I-19}$$

avec  $i = 0, 1, \dots, \text{deg}(F_{j+1}(q^{-1})) - 1$

ces relations déterminent le polynôme  $F_{j+1}$ , de (I-17) et (I-13bis) nous retrouvons :

$$E_{j+1}(q^{-1}) = E_j(q^{-1}) + q^j r_j \tag{I-20}$$

$$G_{j+1}(q^{-1}) = B(q^{-1}) E_{j+1}(q^{-1}) \tag{I-21}$$

Les conditions initiales étant pour  $j = 1$ :

$$1 = E_1(q^{-1}) \tilde{A}(q^{-1}) + q^1 F_1(q^{-1}) \tag{I-22}$$

le coefficient  $a_0$  étant égal à 1, pour que cette identité (équation I-22) soit vérifiée, il faut que le coefficient  $e_{1,0}$  de  $E_1(q^{-1})$  soit égal à 1.

$$E_1(q^{-1}) = 1$$

$$F_1(q^{-1}) = q ( 1 - \tilde{A}(q^{-1}) ) \tag{I-23}$$

### III.3.4 lois de commande :

Dans la plupart des cas, on cherche à minimiser les fluctuations de la sortie par rapport à la consigne et à réduire les amplitudes des variations du signal de commande. Cet objectif est aussi celui de la commande prédictive généralisée qui est basée sur la minimisation d'un critère quadratique de la forme :

$$J(N1, N2) = E \left\{ \sum_{j=N1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{Nu} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (I-24)$$

ou

$w(t+j)$  est une séquence de référence

$N1$  est l'horizon minimum de prédiction

$N2$  est l'horizon maximum de prédiction

$\lambda(j)$  est une séquence de coefficients de pondération.

$J$  est l'horizon de prédiction.

Cette fonction coût (I-24) dépend de l'erreur de sortie prédite et de la variation du signal de commande. Réécrivons la sortie sur un horizon allant de  $N1$  à  $N2$  :

$$y(t+N1) = G_{N1}(q^{-1}) \Delta u(t+N1-1) + F_{N1}(q^{-1}) y(t) + E_{N1}(q^{-1}) \xi(t+N1)$$

$$y(t+N1+1) = G_{N1+1}(q^{-1}) \Delta u(t+N1) + F_{N1+1}(q^{-1}) y(t) + E_{N1+1}(q^{-1}) \xi(t+N1+1)$$

$$y(t+j) = G_{N2}(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) + F_{N2}(q^{-1}) y(t) + E_{N2}(q^{-1}) \xi(t+j)$$

en observant  $y(t+j)$  nous constatons qu'il est composé de trois termes ; le premier dépend des actions de commande futures, le seconde dépend des signaux mesurés et filtres et le dernier dépend des signaux de bruit futurs.

Soit  $h(t+j)$  la composante de  $y(t+j)$  regroupant les signaux connus, telle que [11] :

$$h(t+N1) = (G_{N1}(q^{-1}) - g_{N1,0}) \Delta u(t) + F_{N1}(q^{-1}) y(t)$$

$$h(t+N1+1) = q (G_{N1+1}(q^{-1}) - q^{-1} g_{N1+1,1} - g_{N1+1,0}) \Delta u(t) + F_{N1+1}(q^{-1})y(t) \quad (I-25)$$

avec

$$G_i(q^{-1}) = g_{i0} + g_{i1} q^{-1} + \dots ; \deg(G_i) = \deg(E_i) + \deg(B) = i - 1 + \deg(B)$$

Les équations précédentes nous permettent d'écrire le prédicteur sous la forme vectorielle :

$$\hat{y} = G \hat{u} + h \quad (I-26)$$

avec

$$G = \begin{bmatrix} g_{N1-1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{N1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ou  $g_j = g_{ij}, j = 0, 1, \dots$

et

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t+N1-1) \\ \Delta u(t+N1) \\ \dots \\ \Delta u(t+N2-1) \end{bmatrix} \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+N1) \\ \hat{y}(t+N1+1) \\ \dots \\ \hat{y}(t+N2) \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h(t+N1) \\ h(t+N1+1) \\ \dots \\ h(t+N1) \end{bmatrix}$$

Ainsi pour un horizon de prédiction compris entre N1 et N2, le critère quadratique s'écrit :

$$J = J(N, N2) = (\hat{y} - w)^T (\hat{y} - w) + \lambda(j) \tilde{u}^T \tilde{u} \quad (I-27)$$

en remplaçant  $\hat{y}$  par son expression et en supposant que la séquence de coefficients de pondération  $\lambda(j)$  est une constante  $\lambda$ , le critère devient :

$$J = (G\tilde{u} + h - w)^T (G\tilde{u} + h - w) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u} \quad (I-28)$$

La minimisation de ce critère permet d'obtenir la loi de commande suivante :

$$\tilde{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - h) \quad (I-29)$$

le premier élément de  $\tilde{u}$  est  $\Delta u(t)$  tel que la présente commande  $u(t)$  soit donnée par :

$$u(t) = u(t-1) + \bar{g}^T (w - h) \quad (I-30)$$

ou  $\bar{g}^T$  est la premier ligne de  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ .

nous supposons qu'il existe un horizon  $N_u$  au delà duquel les incréments de commande futur sont nuls, c'est à dire :

$$\Delta u(t + j - 1) = 0 \quad \text{pour } j > N_u$$

$N_u$  est appelé l'horizon de commande. Cette hypothèse est introduite pour limiter le volume de calcul. En effet l'utilisation de  $N_u < N_2$  réduit les calculs, le vecteur  $\bar{u}$  devient de dimension  $N_u$  et les équation de prédiction sont réduites à :

$$\hat{y} = G_1 \hat{u} + h$$

avec

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1-1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{N_1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_u-2} & \dots & \dots & g_0 & 0 & \dots \\ g_{N_u-1} & \dots & \dots & \dots & g_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_2-1} & \dots & \dots & g_{N_2-N_u} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (I-31)$$

cette matrice qui était au départ de dimension  $(N_2 - N_1 + 1 \times N_2 - N_1 + 1)$  est devenue de dimension  $(N_2 - N_1 + 1 \times N_u)$ . La loi de commande, tenant compte de cette nouvelle matrice, s'écrit :

$$\bar{u} = (G_1^T G_1 + \lambda I)^{-1} G_1^T (w - h) \quad (I-32)$$

la dimension de la matrice à devient alors  $(N_u \times N_u)$ . Si on prend  $N_u = 1$ , la matrice se réduit à un scalaire et le problème de l'inversion est ainsi supprimé.

Jusqu'ici nous avons maintenu le retard égal à un, cette valeur du retard est due à l'échantillonnage. Supposons, qu'il existe un retard dans la fonction de transfert, celui-ci est introduit dans le modèle décrit par la relation (I-7) mais ne change pas la procédure de développement de la commande prédictive généralisée. Le modèle (I-7) s'écrit :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t - d - 1) + \frac{\xi(t)}{\Delta}$$

Dans ce cas les équations de prédiction s'écrivent de la manière suivante :

$$y(t+j) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + F_j(q^{-1}) y(t) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) \tag{I-33}$$

avec :  $j = N1 \dots N2$ .

l'équation (I-32) peut prendre la forme :

$$y(t+j) = q^{-d} G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) + F_j(q^{-1}) y(t) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j)$$

posons :

$$q^{-d} G_j(q^{-1}) = G_{j-d}(q^{-1})$$

les équations de prédiction deviennent :

$$y(t+j) = G_{j-d}(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) + F_j(q^{-1}) y(t) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j)$$

la loi de commande devient :

$$\tilde{u} = (G2^T G2 + \lambda I)^{-1} G2^T (w - h) \tag{I-34}$$

avec

$$G2 = \begin{bmatrix} g_{N1-d-1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{N1-d} & \dots & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{Nu-2} & \dots & \dots & g_0 & 0 & \\ g_{Nu-1} & \dots & \dots & \dots & g_0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2-d-1} & \dots & \dots & g_{N2-Nu-d} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

en fait, seule la première commande est appliquée réellement ; on en déduit donc :

$$u(t) = u(t-1) + g^T (w - h) \tag{I-35}$$

ou  $g$  est le premier rang de la matrice  $(G2^T G2 + \lambda I)^{-1} G2^T$ .

selon ( Clarke et al.1987a ), l'horizon de commande  $Nu$  est un paramètre très important

Néanmoins, il suffit en générale de le prendre égal à 1, sauf pour les systèmes complexes ou Nu devra être choisi égale au nombres de pôles instables ou mal amortis. Pour apporter plus d'amortissement, il faut augmenter  $\lambda$ .

### III.3.5 la GPC vue comme un placement de pôles :

La formulation de la loi de commande GPC sous la forme canonique RST, dont la structure est illustrée sur la figure (fig : III. 1), et l'expression des équations du système en boucle Fermée, permettent d'étudier ses caractéristiques et ses spécifications de commande [1] [2] [23] [26] [29].

En utilisant les résultats obtenus lors de la synthèse de l'algorithme de base, concernant la commande à appliquer au système, on aboutit à la somme suivante après quelques manipulation mathématiques [1] [2].

$$\Delta u(t) = \sum_{i=1}^{N2} g_i \{w(t+i) - y(t+i/t)\}$$

Comme seule la première ligne de la matrice  $\Gamma = (G2^T G2 + \lambda I)^{-1} G2^T$  est utilisée pour la commande effective  $u(t)$  les éléments de cette ligne sont particularisés et seront notés  $g_i$  dans ce paragraphe ( $i = 1, 2, \dots, N2$ ) de l'équation (I-34), on déduit la variation de la commande :

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= \sum_{i=1}^{N2} g_i \{w(t+i) - y(t+i/t)\} \\ &= \sum_{i=1}^{N2} g_i \left\{ \frac{\Gamma_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(t-1) + w(t+i) - \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) \right\} \end{aligned}$$

que on peut transformer sous forme RST classique pour le placement de pôles (fig 1)

$$\left\{ C(q^{-1}) + \sum_{i=1}^{N2} g_i q^{-i} \Gamma_i(q^{-1}) \right\} \Delta u(t) = \left\{ C(q^{-1}) \sum_{i=1}^{N2} g_i q^{-N2+i} \right\} w(t+N2) - \left\{ \sum_{i=1}^{N2} g_i F_i \right\} y(t)$$

$$S \Delta u(t) = C(q^{-1}) T w(t+N2) - R y(t)$$

en posant les polynômes R, S, T du placement de pôles :

$$R = \sum_{i=1}^{N2} g_i F_i$$

$$S = C(q^{-1}) + \sum_{i=1}^{N2} g_i q^{-i} \Gamma_i(q^{-1})$$

$$T = \sum_{i=1}^{N2} g_i q^{-N2+i}$$

la fonction de transfert du système en boucle fermée, exprimé en fonction de l'expression de R, S, et T s'écrit :

$$y(t) = \frac{B T}{S A \Delta + B R} w(t) + \frac{S}{S A \Delta + B R} \xi(t)$$

l'expression analytique des polynômes de la structure canonique RST ne permet pas une analyse facile du comportement en boucle fermée du système à commander. l'expression en boucle fermée d'un système pour différentes valeurs des paramètres de synthèse de la GPC est présentes en annexe 1.

la commande prédictive généralisée peut donc être présentée comme un placement de pôles particulier minimisant un critère. En utilisant le modèle de procédé (I-6), il vient :

$$(A \Delta S + q^{-1} B R) y(t) = B C T w(t + N2 - 1) + C \xi(t)$$

comme d'autre part, en explicitant  $R$  et  $S$ , et en utilisant l'équation (I-), on a :

$$A \Delta S + q^{-1} B R = C \left\{ A \Delta + \sum_{i=1}^{N2} g_i q_{i-1} (B - A \Delta G_i) \right\}$$

Et on obtient:

$$\left\{ A \Delta + \sum_{i=1}^{N2} g_i q_{i-1} (B - A \Delta G_i) \right\} y(t) = B T w(t + N2 - 1) + S \xi(t)$$

$$A_c y(t) = B T w(t + N2 - 1) + S \xi(t)$$

qui montre que la sortie en boucle fermée ne dépend pas du polynôme  $C$ . La condition de stabilité est que le polynôme  $A_c$  ait ses racines à l'intérieur du cercle unité. L'influence des paramètres  $N1$ ,  $N2$ ,  $Nu$ , et  $\lambda$  est complexe. Il est facile de vérifier que le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée est égal à 1.

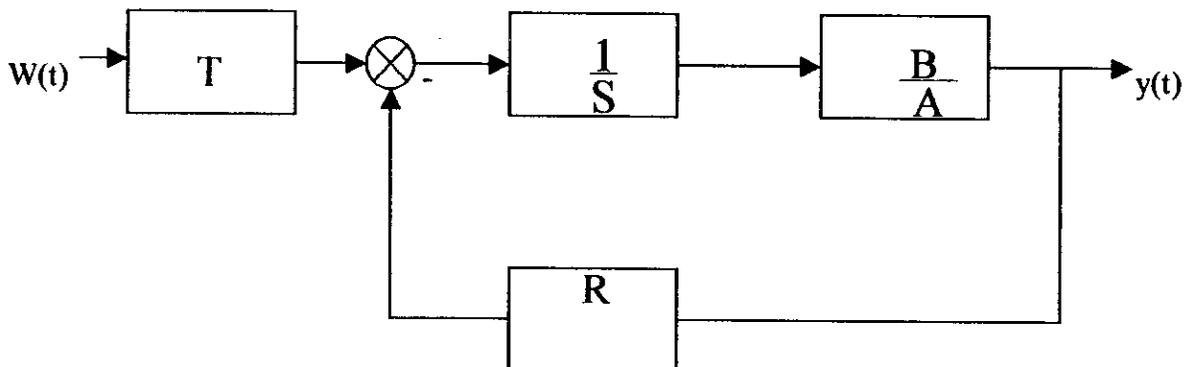


Fig III.1 : structure du régulateur RST.

### III.3.6 Résultat de simulation :

Dans cette partie l'objectif principal est d'étudier l'influence des paramètres de synthèse de la GPC sur plusieurs systèmes, à savoir, le coefficient de pondération de la commande  $\lambda$ , l'horizon initial de prédiction  $N1$ , l'horizon maximal de prédiction  $N2$  et

l'horizon de commande  $N_u$ . En effet le choix de ces paramètres influent considérablement sur les performances du système. L'algorithme de commande GPC a été appliqué à quatre types de système :

- Système stable en boucle ouverte.
- Système instable en boucle ouverte.
- Système à phase non-minimale.
- Système instable et à phase non-minimale.

Le but est de tester l'efficacité de la GPC et d'obtenir des résultats suffisamment généraux concernant le choix des paramètres  $\lambda$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_u$ .

Le signal de référence  $w(t)$  imposée aux systèmes est un signal carré, pour chaque cas, on choisit une période de simulation de 100 échantillons.

Pour chaque type de système et pour chaque paramètres de commande choisi, on présente les résultats de simulation concernant l'évolution de la sortie et de la commande correspondante.

### III.3.6.1 étude d'un système stable en boucle ouverte :

soit le système suivant, représenté par sa fonction de transfert discrète .

$$y(t) = \frac{0.5q^{-1} - 0.1q^{-2}}{1 - 1.3q^{-1} + 0.42q^{-2}} u(t)$$

les poles et les zéros de système sont stables ayant pour valeur :

$$p_1 = 0.1, p_2 = 0.4 \text{ et } z = 0.2$$

la figure (1.1) représente la simulation de ce système en boucle ouverte, pour une entrée échelon, la figure montre que le régime statique est établi à 4

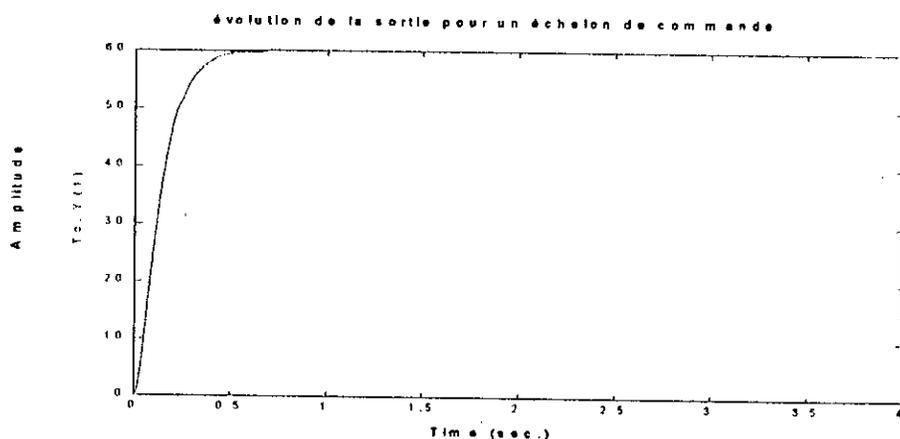


fig : évolution de la sortie pour un échelon de commande

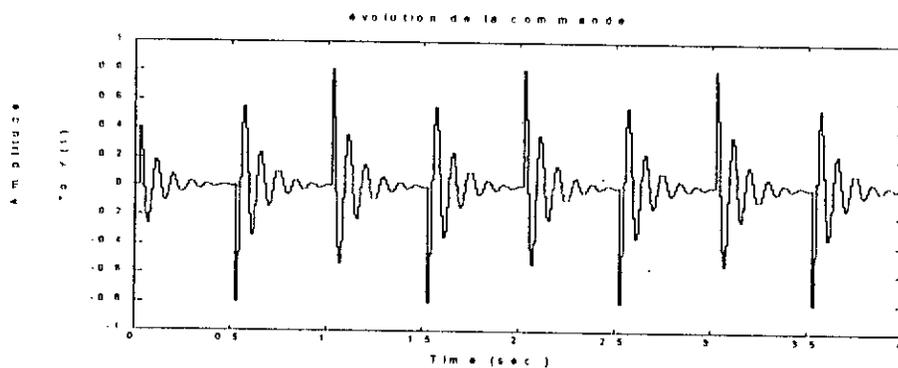
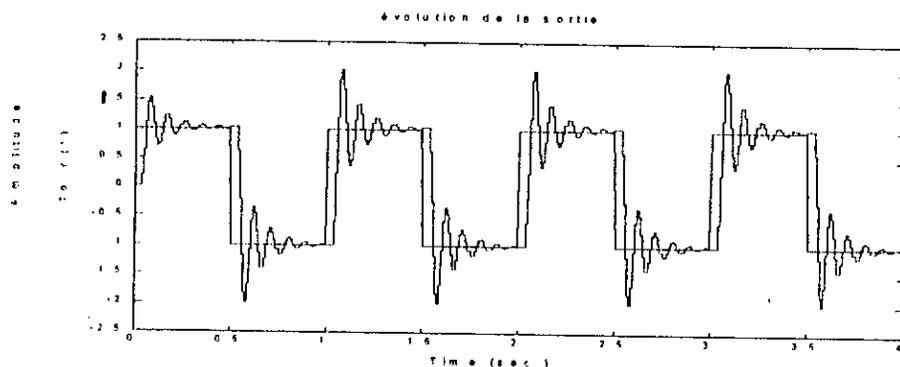


fig III.2 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=1, Nu=1, \lambda = 1$ .

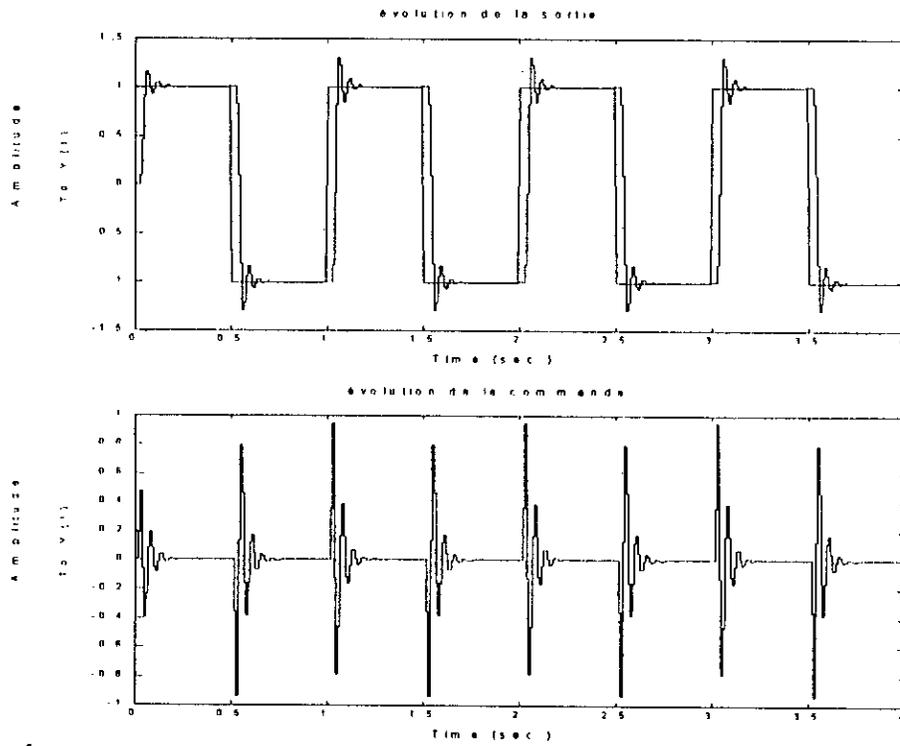


fig III.3 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=2, Nu=1, \lambda = 1$ .

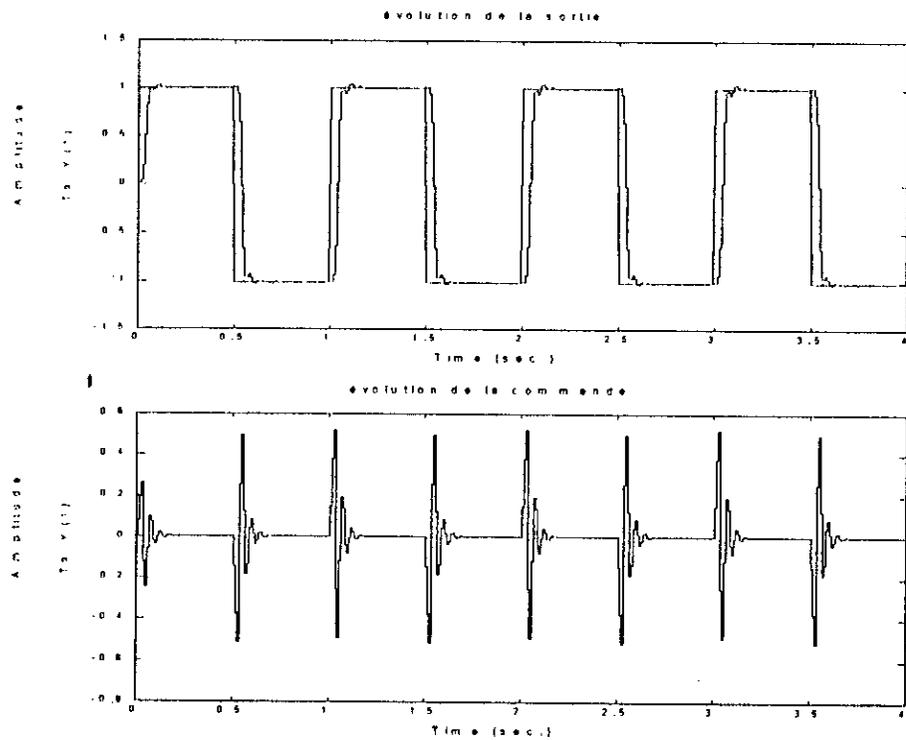


fig III.4 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=3, Nu=1, \lambda = 1$ .

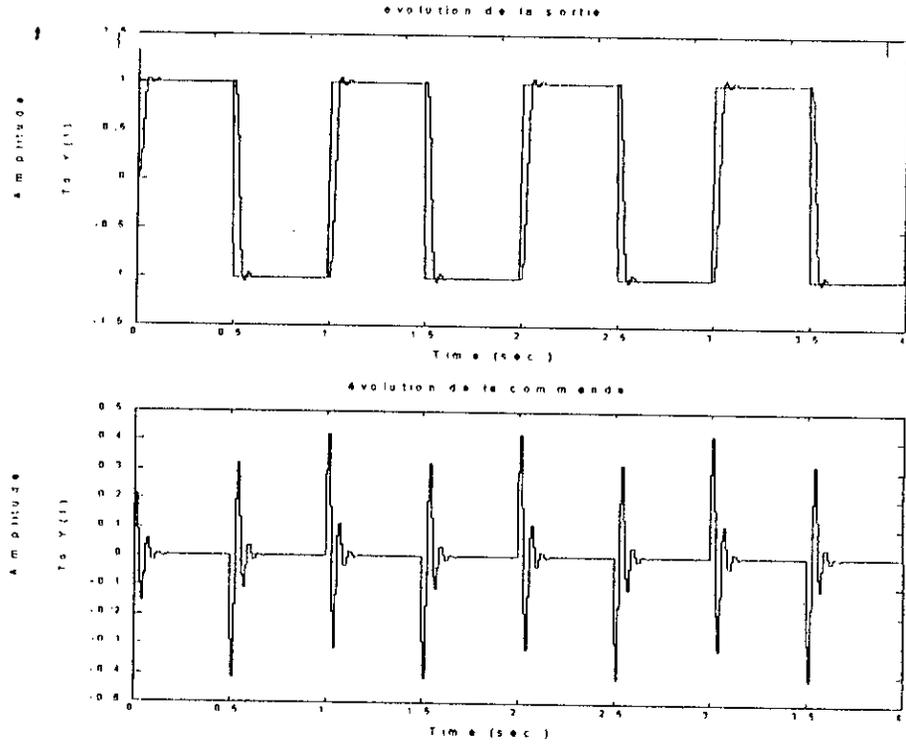


fig III.5 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=4, Nu=2, \lambda = 1$ .

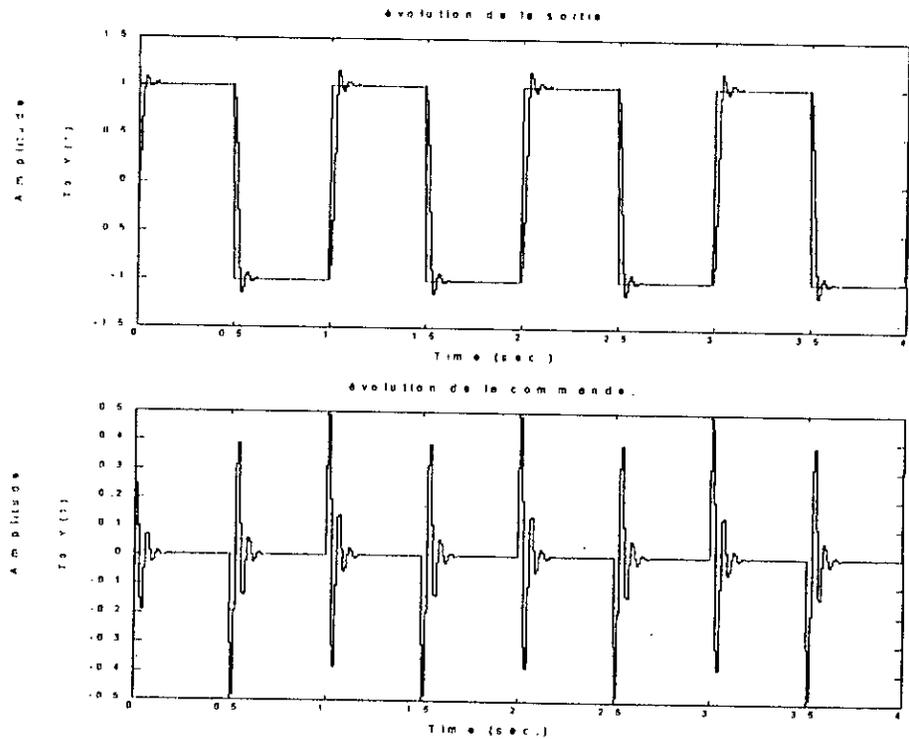


fig III.6 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=4, Nu=4, \lambda = 1$ .

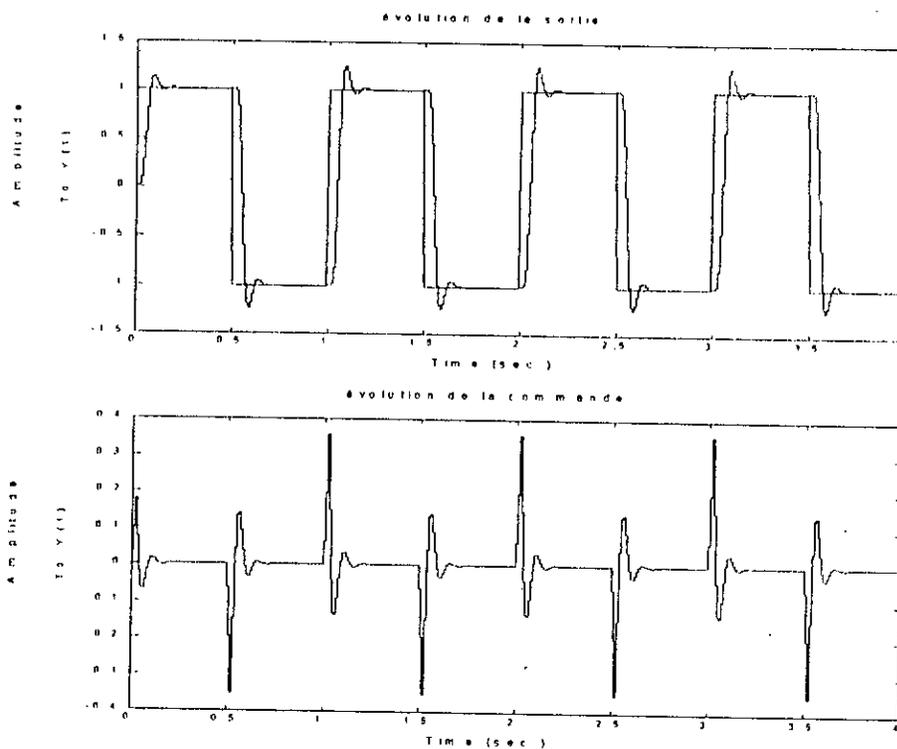


fig III.7 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=3$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 10$ .

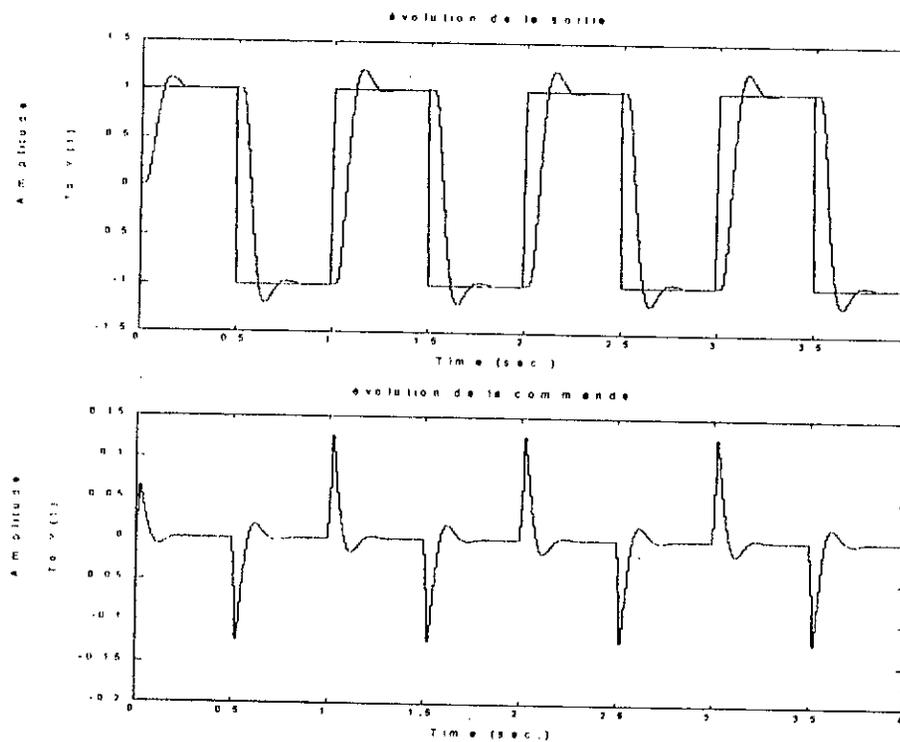


fig III.8 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=3$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 50$ .

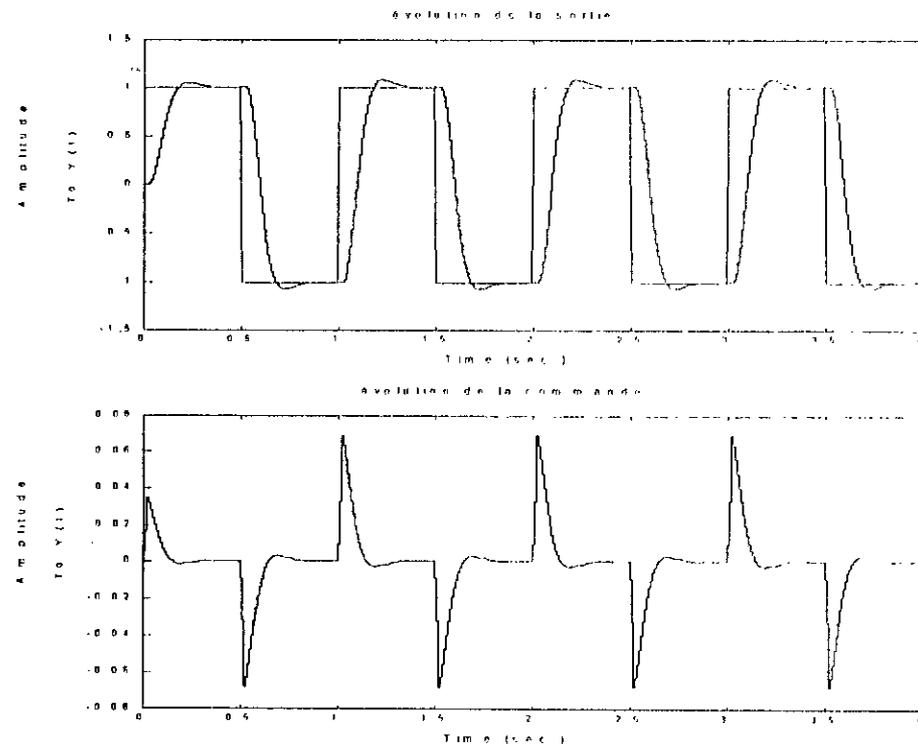


fig III.9 : présente la sortie et la commande d'un système stable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=3$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 100$ .

Les figures (III.2), (III.3), (III.4), montrent l'évolution du système simulé pour plusieurs valeurs de l'horizon de prédiction respectivement pour  $N2=1$ ,  $N2=2$ ,  $N2=3$  en gardant  $N1=1$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda=1$ . Cette augmentation a influencé sur la dynamique de sortie et le temps de réponse. On constate que les pics et l'effort de la commande diminuent. En effet, ces pics peuvent être dangereux pour le système lors d'un changement de la consigne.

L'influence de l'augmentation de  $Nu$  sur l'effort de la commande est montrée sur les figures (III.5), (III.6), en effet, on constate que les performances de sortie sont affectées.

La diminution de l'effort et des pics de commande peut être aussi obtenue par l'introduction d'une pondération sur la commande. L'influence du paramètre  $\lambda$  est montrée sur les figures (III.7), (III.8), (III.9). Ce paramètre ne doit pas être changé si les commandes sont douces et réalisables, autrement dit la réponse du système sera affectée du point de vue dynamique. On dit qu'il n'y a pas lieu de pondérer la commande.

III.3.6.2 étude d'un système à phase non-minimale.

Soit le système suivant :

$$y(t) = \frac{q^{-1} + 2.5q^{-2}}{1 - 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}} u(t)$$

les pôles et les zéros de système ayant pour valeur :

pôles :  $p_1 = 0.5$  ,  $p_2 = 0.6$  stables.

Zéros :  $z = -2.5$  instable

Les figures (III.10)...(III.14) représente la simulation de ce système, le signal d'entrée est signal carré.

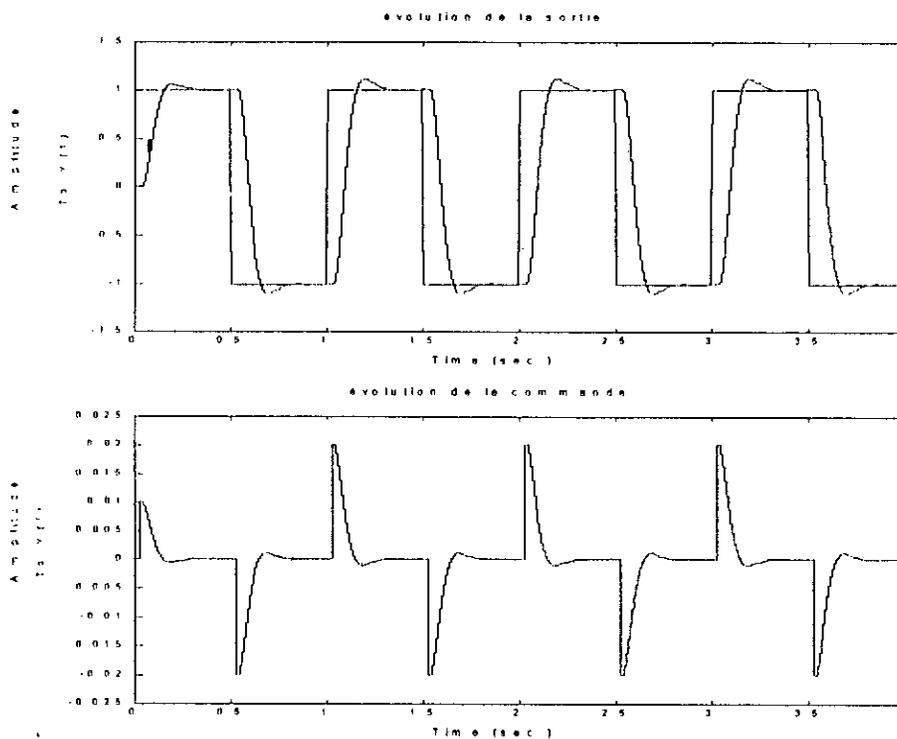


fig III.10 : présente la sortie et la commande d'un système PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=1$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 100$ .

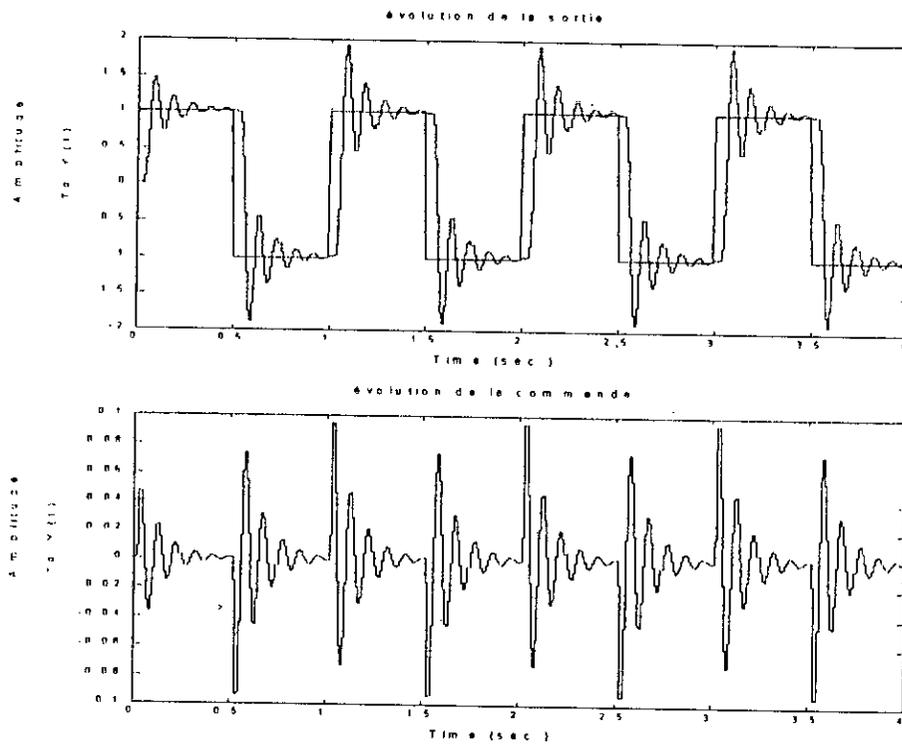


fig III.11 : présente la sortie et la commande d'un système PNM pour  $N1=1, N2=2, Nu=1, \lambda = 100$ .

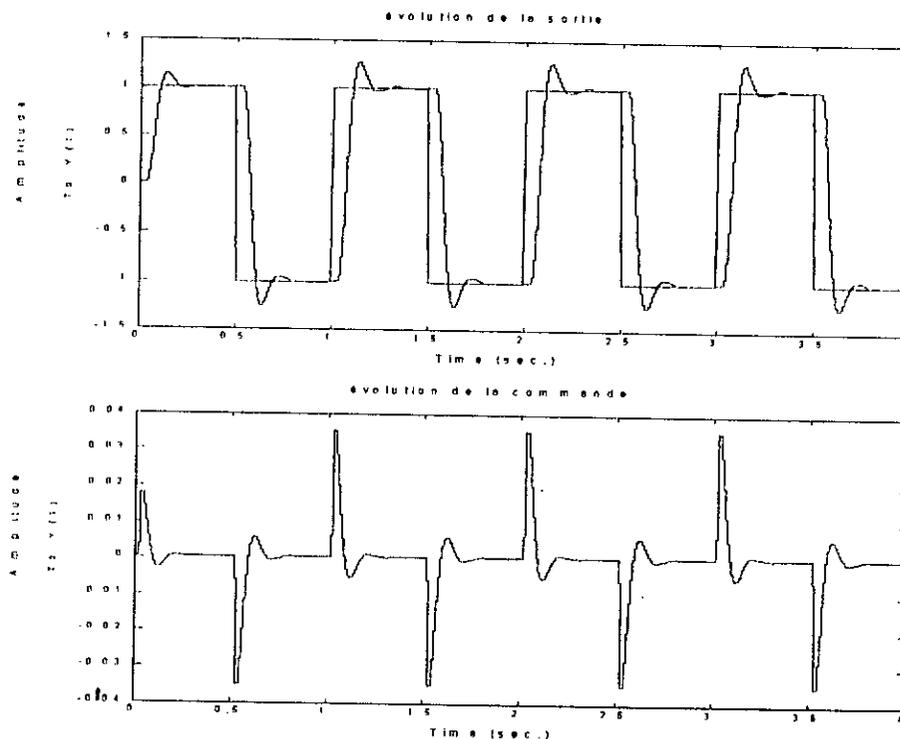


fig III.12 : présente la sortie et la commande d'un système PNM pour  $N1=1, N2=2, Nu=1, \lambda = 300$ .

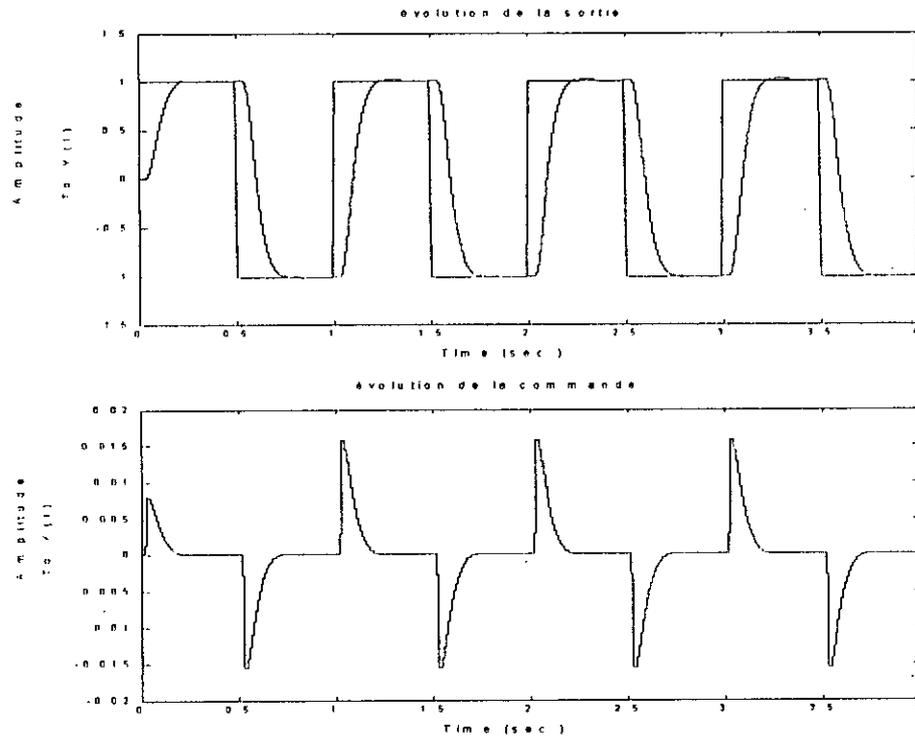


fig III.13 : présente la sortie et la commande d'un système PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=2$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 700$ .

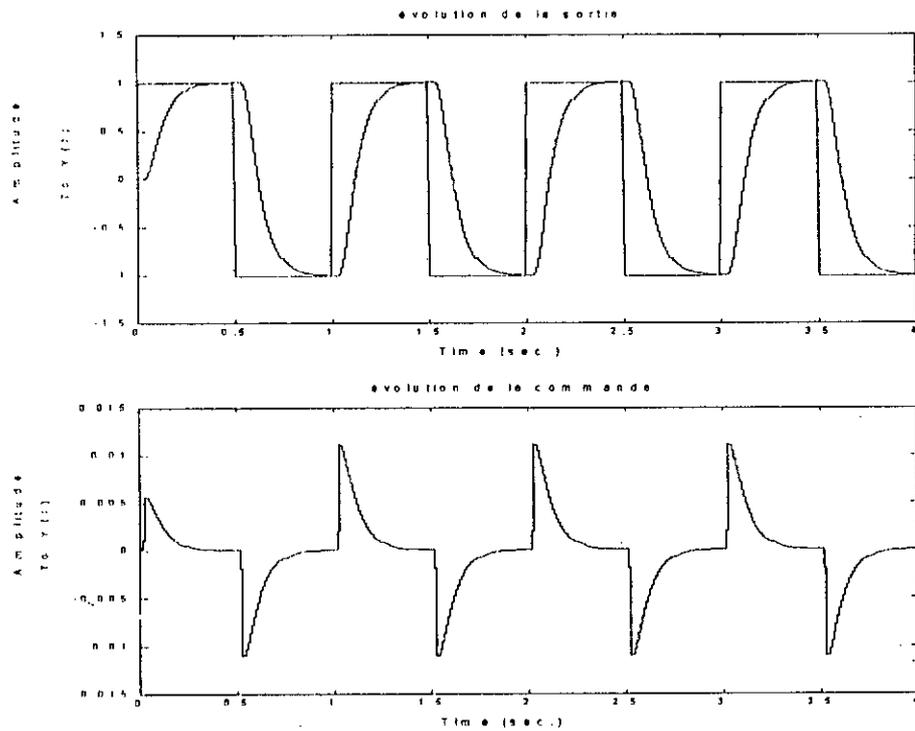


fig III.14: présente la sortie et la commande d'un système PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=2$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 1000$ .

L'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée est multiple de polynôme  $B$ , ce que exige donc pour avoir des commandes et des réponses stables que les zéros de  $B(q^{-1})$  soient à l'intérieur du cercle unité. Pour remédier à ce problème dans le cas de la GMV l'introduction d'une pondération est nécessaire, par contre pour la GPC il suffit d'augmenter  $N2$  ou tous simplement d'introduit une pondération.

L'augmentation de  $N2$  illustrée sur les figures (III.10), (III.11) rend la réponse du système très rapide.

Par contre l'introduction du paramètre  $\lambda$  peut être interprété comme un coefficient qui limite les fluctuations de commande et rend la réponse du système appréciable. Les figures (III.12), (III.13), (III.14) nous montre l'influence de  $\lambda$ .

### III.3.6.3 étude d'un système instable en boucle ouverte.

Soit le système instable suivant :

$$y(t) = \frac{q^{-1} + 0.2 q^{-2}}{1 - 1.7 q^{-1} + 0.3 q^{-2}} u(t)$$

les pôles et les zéros de système ayant pour valeur :

pôles :  $p_1 = 1.5$ ,  $p_2 = 0.2$  instables.

Zéros :  $z = -0.2$  stable

Les figures (III.15)...(III.20) représente la simulation de ce système, le signal d'entrée est signal carré.

Les résultats de simulation concernant ce système, montre l'influence des paramètres  $N2$  et  $\lambda$  sur la sortie et la commande. L'instabilité des pôles en BO n'ont aucun effet sur la dynamique en BF.

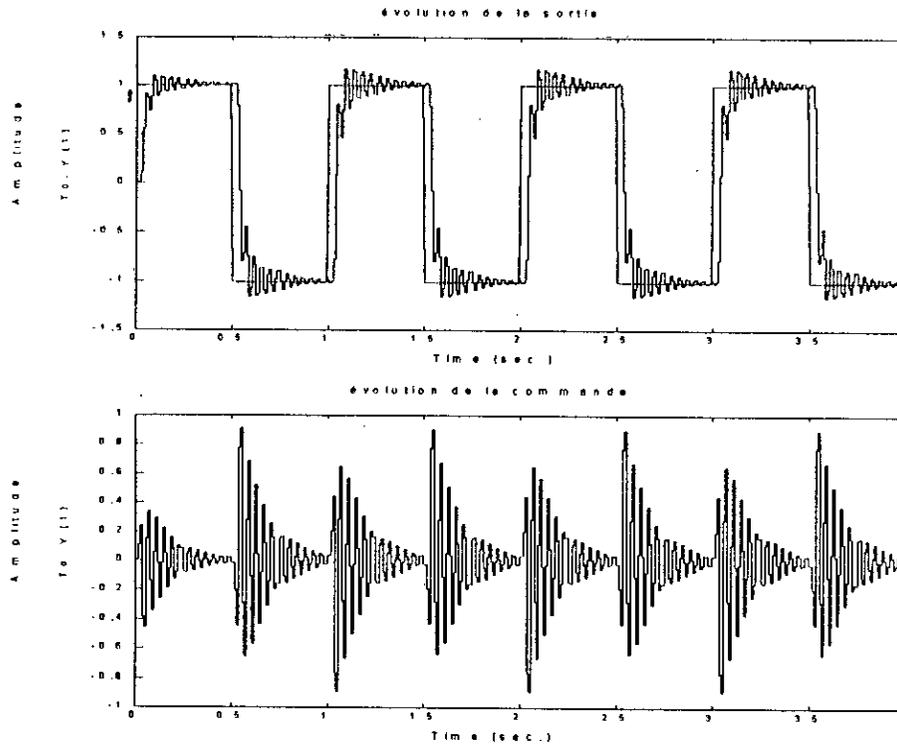


fig III.15: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=2, Nu=1, \lambda = 0$ .

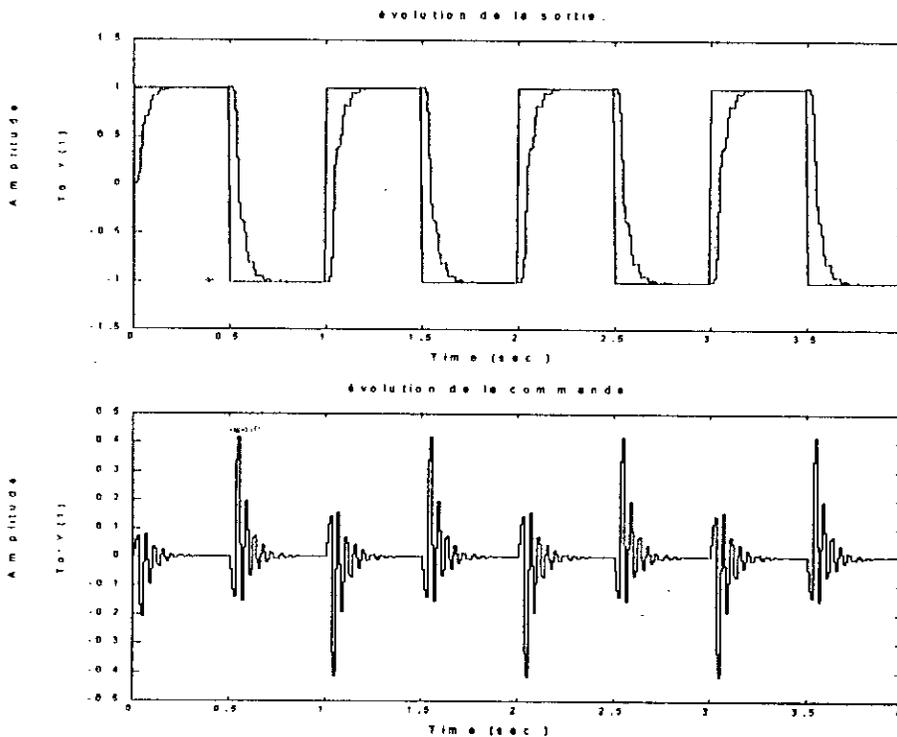


fig III.16: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1, N2=3, Nu=1, \lambda = 0$ .

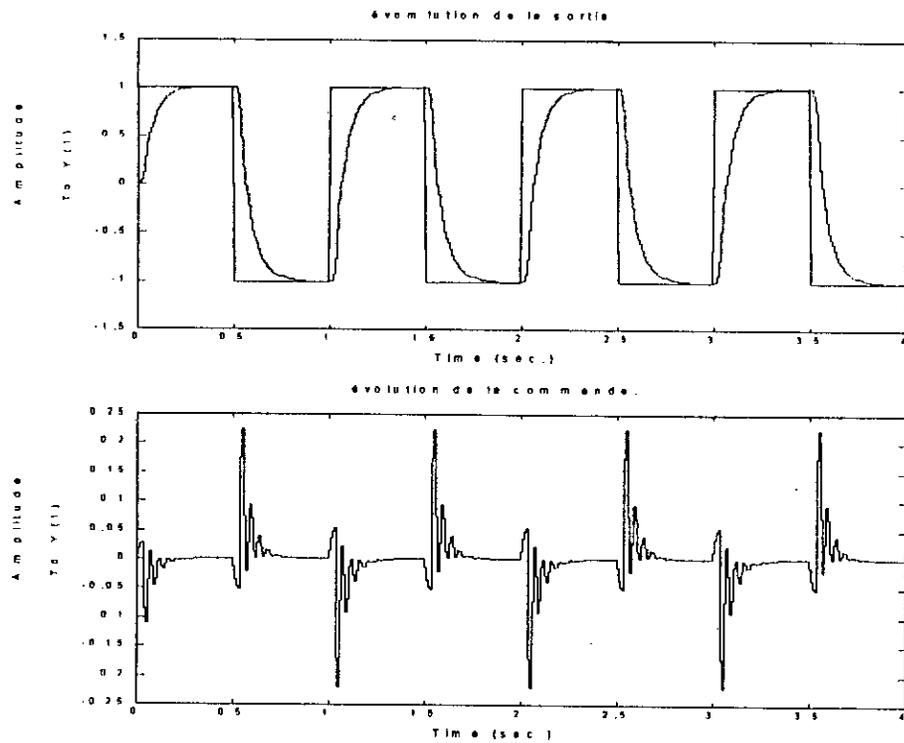


fig III.17: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 0$ .

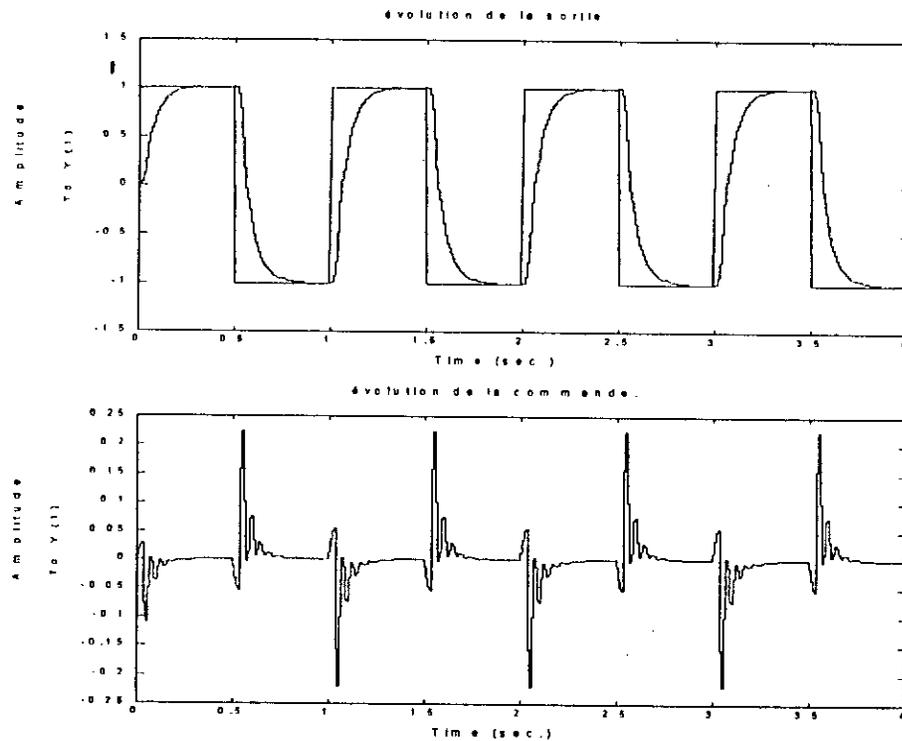


fig III.18: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 10$ .

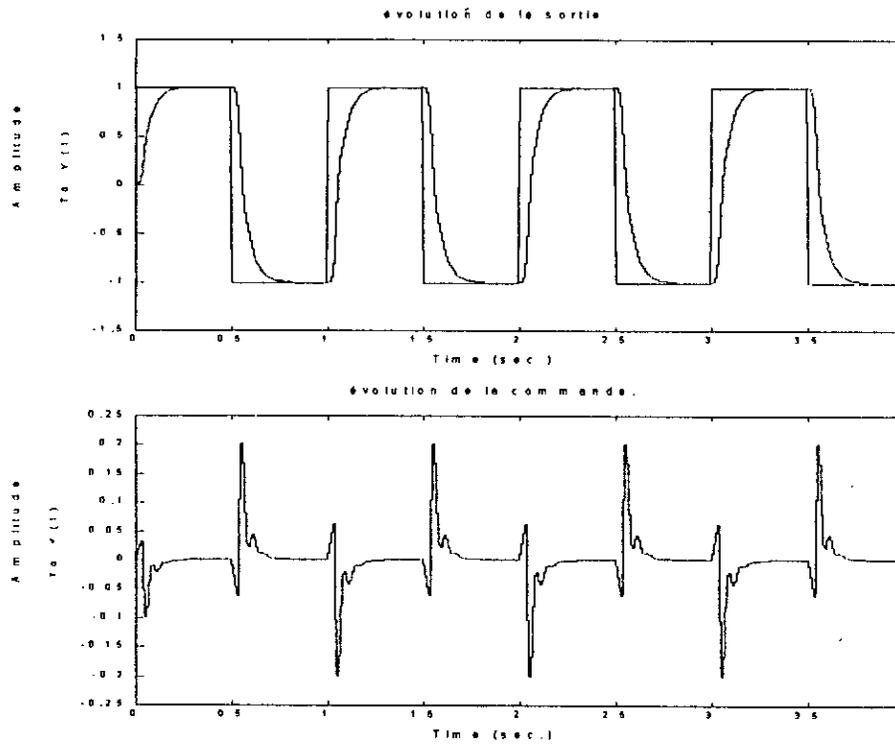


fig III.19: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 50$ .

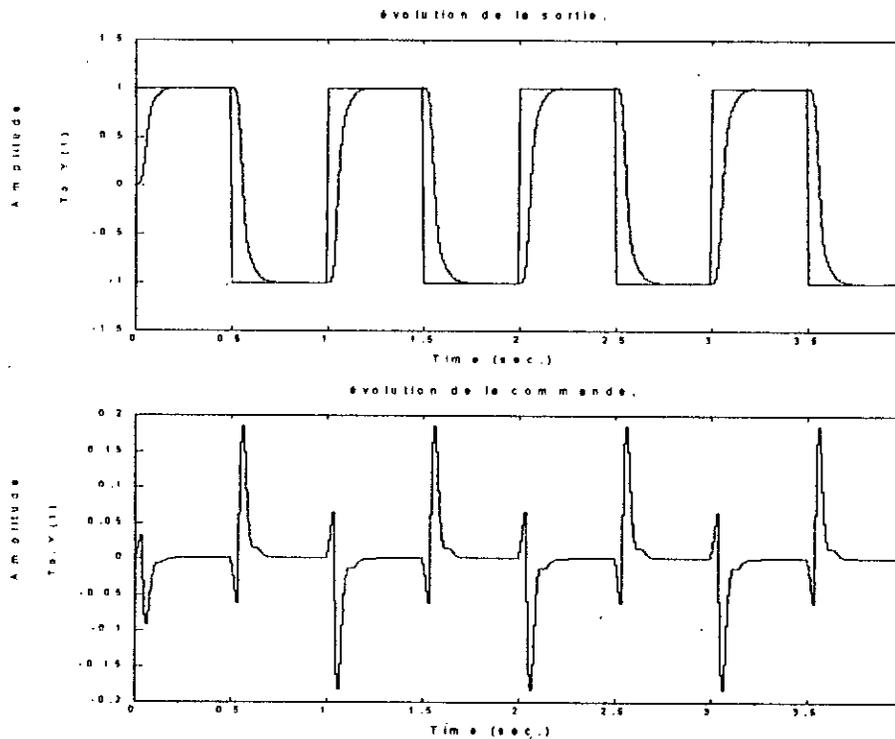


fig III.20: présente la sortie et la commande d'un système instable en boucle ouverte pour  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 100$ .

### III.3.6.4 étude d'un système instable en boucle ouverte et à phase non-minimale.

Soit le système instable suivant :

$$y(t) = \frac{q^{-1} + 2q^{-2}}{1 - 1.9q^{-1} + 0.6q^{-2}} u(t)$$

les pôles et les zéros de système ayant pour valeur :

pôles :  $p_1 = 1.5$  ,  $p_2 = 0.4$  instables.

Zéros :  $z = -2$  instable

Les figures (III.15)...(III.20) représente la simulation de ce système, le signal d'entrée est signal carré.

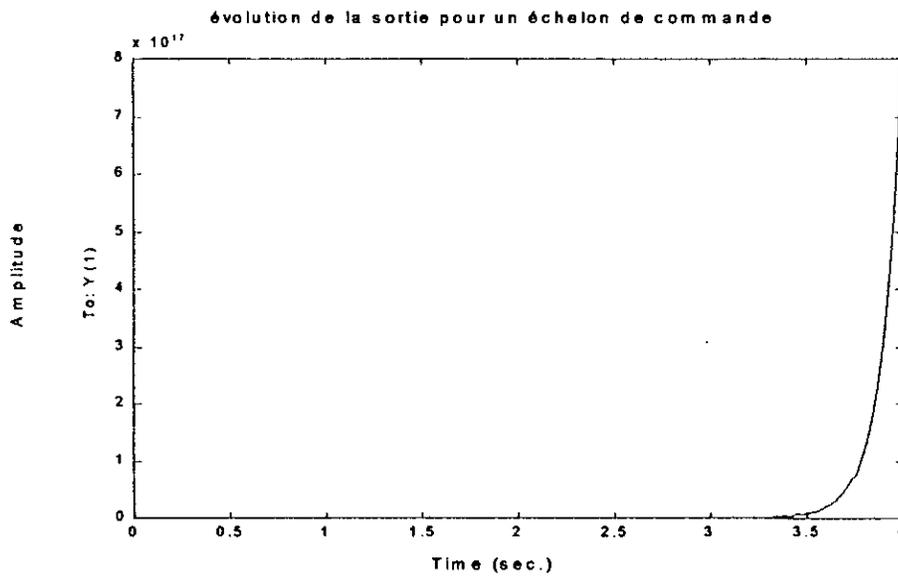


fig : évolution de la sortie pour un échelon de commande

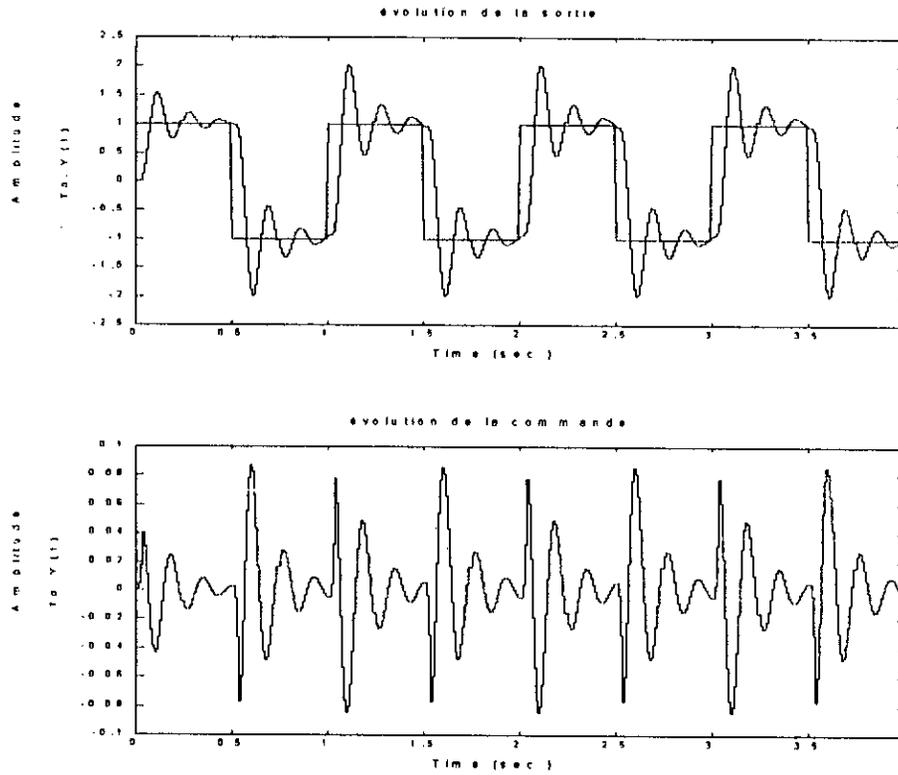


fig III.21: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=3$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 200$ .

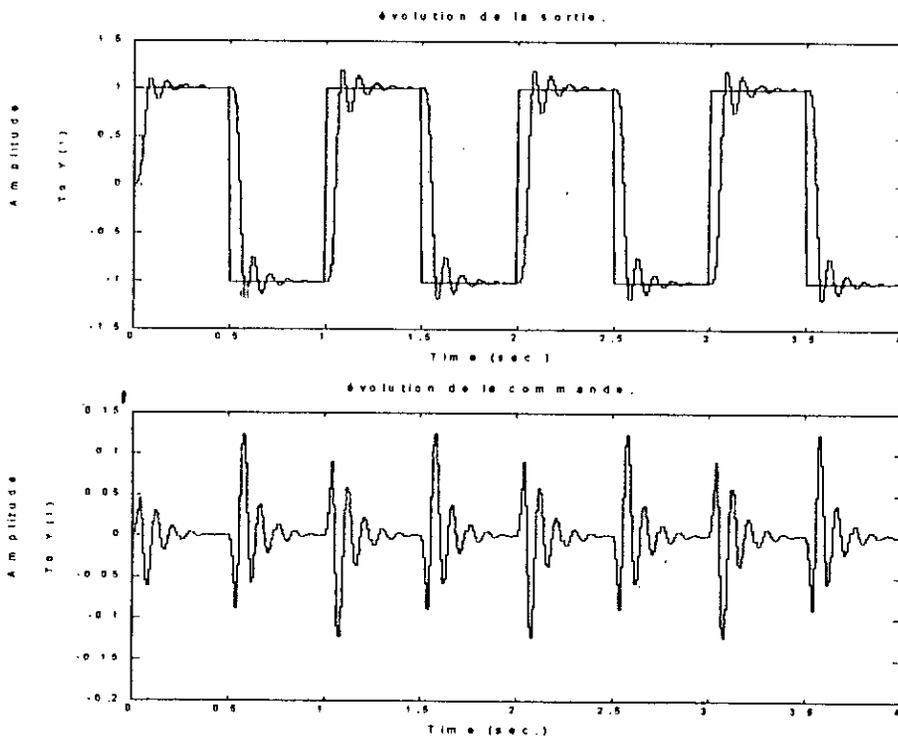


fig III.22: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 200$ .

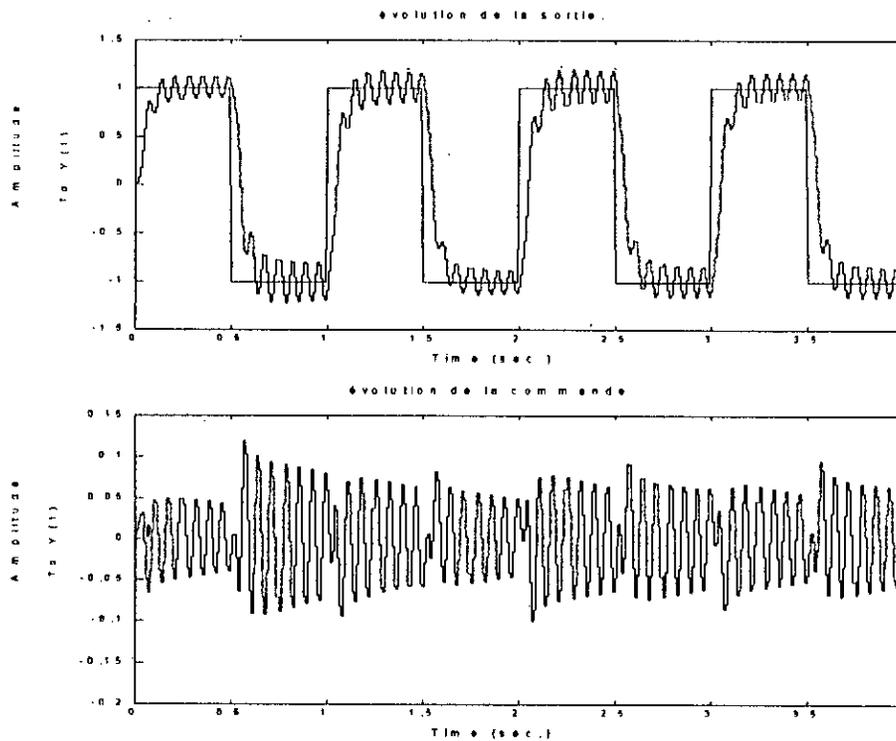


fig III.23: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=5$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 200$ .

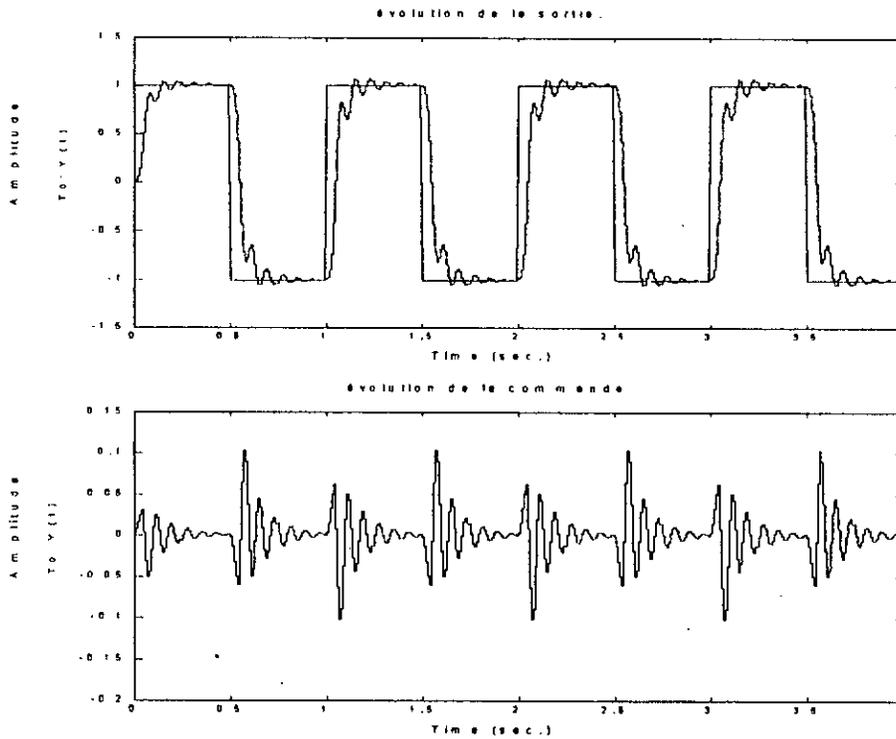


fig III.24: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=5$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 300$ .

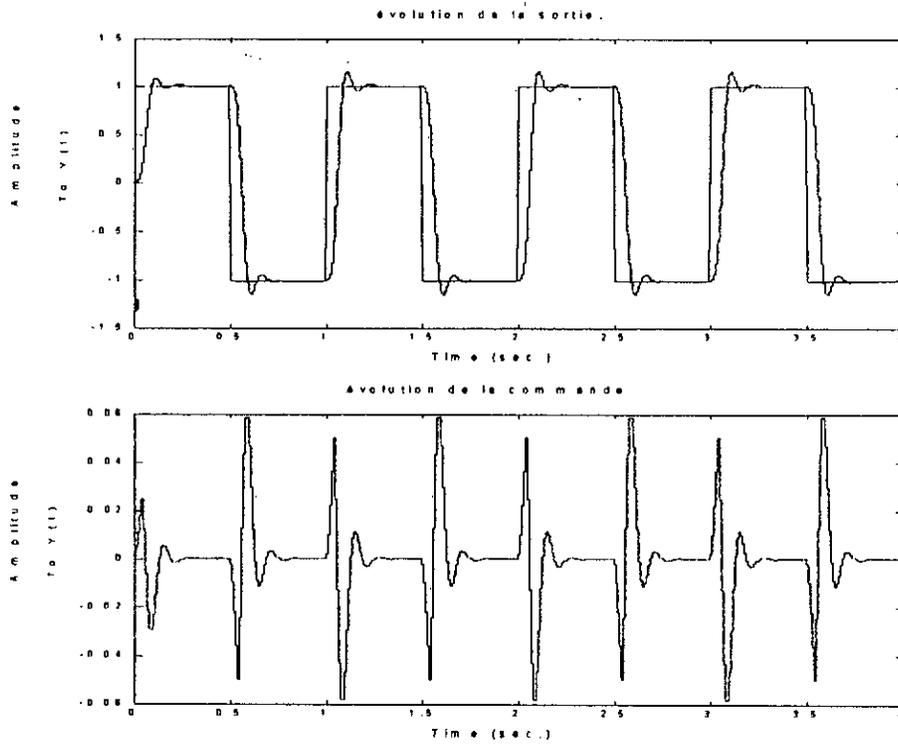


fig III.25: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=5$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 600$ .

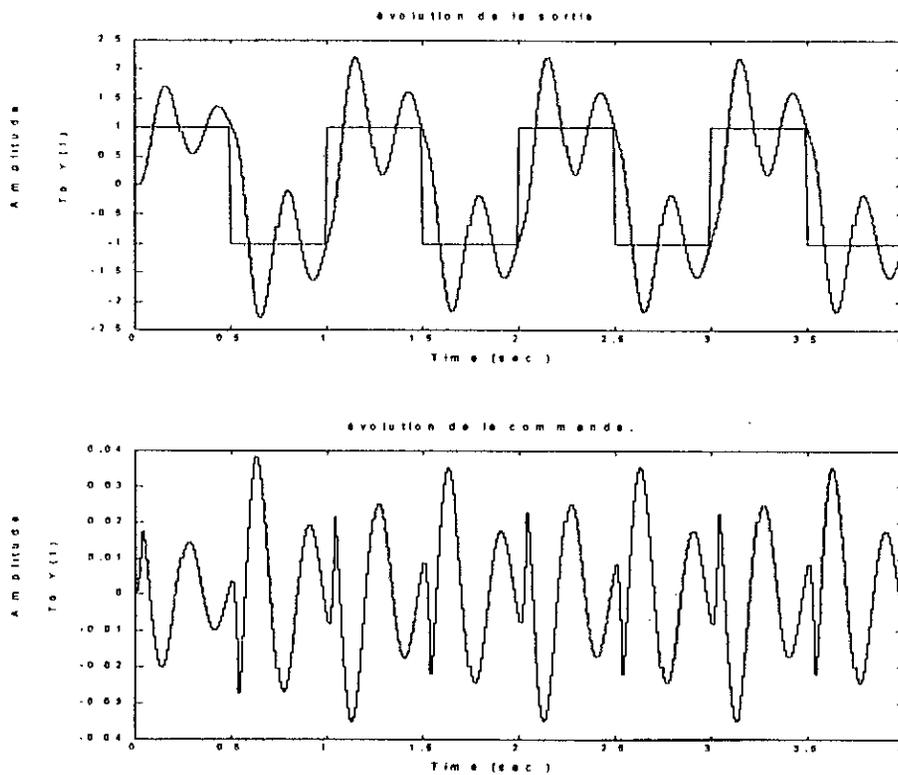


fig III.26: présente la sortie et la commande d'un système instable et à PNM pour  $N1=1$ ,  $N2=5$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 900$ .

Les figures (III.21), (III.22), (III.23), présente l'effet du paramètre  $N_2$  sur la commande et la sortie d'un système instable et PNM. L'influence de l'augmentation de  $N_2$  est identique aux autres système étudiés précédemment.

Le choix du paramètre  $\lambda$  est très délicat. En effet , ils varie sur un intervalle qu'il faut déterminer .

pour les valeurs de  $N_1=1$ ,  $N_2= 5$ ,  $N_u=1$ , le paramètre  $\lambda$  varie entre 200 et 900 les valeurs prises hors de cette intervalle détériorent les performances en boucle fermée. Les figures (III.23) ... (III.26)présentent les réponses respectivement pour  $\lambda =200$ ,  $\lambda =300$ ,  $\lambda =600$ ,  $\lambda =900$ .

### III.3.7 synthèse et discussion :

Les quatre systèmes étudiier nous ont montré l'efficacité de la GPC vis à vis du problème de stabilité d'un système causée par les pôles et les zéros instables de ce dernier. Le choix des paramètres de synthèse détermine l'efficacité de la GPC et qui demeure une tache délicate.

#### III.3.7.1 horizon initial de prédiction $N_1$ .

Le paramètre  $N_1$ , doit toujours satisfaire l'inégalité suivante :  $N_1 \cdot T_e \geq \text{retard}$  ( $T_e$  : période d'échantillonnage du système ). Si le retard du système est connu il n'y pas de raisons pour imposer une valeur différent  $N_1$ , autrement dit , des calculs inutiles seront effectués. Dans le cas ou le retard est inconnu ,  $N_1$  doit être mit à un pour renfermer toutes valeurs possible du retard.

Donc :

$$N_1 = \frac{\text{retard du système}}{\text{période d'échantillonnage}}$$

**III.3.7.2 horizon maximal de prédiction N2.**

Le paramètre N2, généralement prend une valeur supérieur au degré de B

Dans la commande des systèmes, le régime établi peut être atteint avec des commandes douces si on augmente N2. En règle générale N2 est choisie de façon à correspondre au temps de montée du système.

Pour tous les procédés stables, la dynamique de régulation devient plus rapide lorsque l'horizon de prédiction diminue.

Pour certains systèmes une valeur de N2 assez petite, ne fournira pas un réglage stable.

Donc :

$$N2 = \frac{\text{Temps de montée}}{\text{période d'échantillonnage}}$$

**III.4.7.3 horizon de commande Nu.**

On a constaté pour les différents systèmes étudiés que la valeur de Nu=1 donne de bons résultats. L'augmentation de Nu ne fait que rendre la commande plus active et importante.

L'augmentation de Nu introduit une énorme complexité de calcul d'où un temps de calcul très important, on a intérêt donc à fixer Nu le plus petit possible (Nu=1), pour éviter l'inversion de la matrice  $(G^T G + \lambda I)^{-1}$ .

**III.3.7.4 coefficient de pondération  $\lambda$  :**

on peut constater que dans l'algorithme de GPC le paramètre  $\lambda$  introduit une atténuation des variations brusques de la commande. il permet aussi de donner plus ou moins de poids à la commande de façon à assurer de bonnes réponses lorsque le système de départ est à phase non-minimale. le coefficient  $\lambda$  ne peut être lié qu'au gain du système à régler, c'est à dire plus le gain du système est grand plus la commande doit être pondérée, ( $\lambda$  est important).

**Conclusion :**

Dans ce chapitre on a développé une étude théorique de l'algorithme de commande prédictive généralisée de base , puis une étude a été menée sur quatre types de système présentant chacun des particularités . Des résultat sur le rôle des paramètres de synthèse ont été tirés de l'algorithme GPC.

L' étude menée dans ce chapitre nous permet d'affirmer que l'algorithme de la GPC est capable de commander beaucoup de types des systèmes, ceci grâce à un choix judicieux des paramètres de synthèse, qui permet d'obtenir des commandes douces et une bonne poursuite de la référence. Le choix de la pondération et de l'horizon de prédiction ont donc une grande influence sur les performances des système commandés par la GPC. Pour une dynamique spécifiée une certaine attention doit donc être accordée à leur choix.

## Chapitre IV

# APPLICATION DE LA (GPC) SUR LA COLONNE D'ABSORPTION

**Introduction.**

Le domaine d'application de la commande prédictive généralisée depuis l'algorithme de base jusqu'à des versions plus élaborées s'est étendu à de nombreux domaines robotiques, électrique et autres, mais elle n'a investi le domaine génie chimique que très récemment grâce aux travaux de Najim et V.Ruiz(1987).

Dans le cadre de notre travail, nous avons choisi de poursuivre les investigations dans ce domaine en étudiant une colonne d'absorption d'utilisation très répandue dans le domaine industriel.

**IV.1 La simulation :**

Après avoir étudié en détail le développement et les performances de la GPC, on se propose dans cette partie d'appliquer l'algorithme de base au modèle de la colonne d'absorption, présenté dans le premier chapitre.

Le modèle de la colonne d'absorption a été simulé après avoir résolu les équations aux dérivées partielles, et l'algorithme de commande est appliqué avec une période d'échantillonnage de  $T_e = 1s$ .

La simulation de la colonne d'absorption dans le deuxième chapitre nous a montré que notre système se comporte comme un système de premier ordre.

La structure nonlinéaire et les dynamiques des modèles de connaissance de la colonne nécessitent l'application de l'algorithme d'identification MCR à trace constante de gain égal à 100.

L'étude par simulation nous montre les performances de l'algorithme de commande qui atténue correctement les perturbations.

A partir du choix des paramètres de synthèse de la GPC, les résultats de simulation concernant la colonne d'absorption sont présentés.

La figure (III.1) montre l'évolution de la sortie  $y_T(t)$  et la commande. On a choisi comme signal de référence un signal carré de période  $T=100s$  au tour du point nominal. les paramètres de la GPC sont indiqués pour chaque figure

**Remarque :**

- Tous les résultats ont été réalisés pour  $N1=1$  ;
- $N1, N2, Nu$  et  $\lambda$  représentent les paramètres de synthèse de la commande a savoir.
  - $N1$  : est l'horizon initial de prédiction .
  - $N2$  : est l'horizon maximal de prédiction.
  - $Nu$  : est l'horizon de commande.
  - $\lambda$  : est la pondération de la commande.

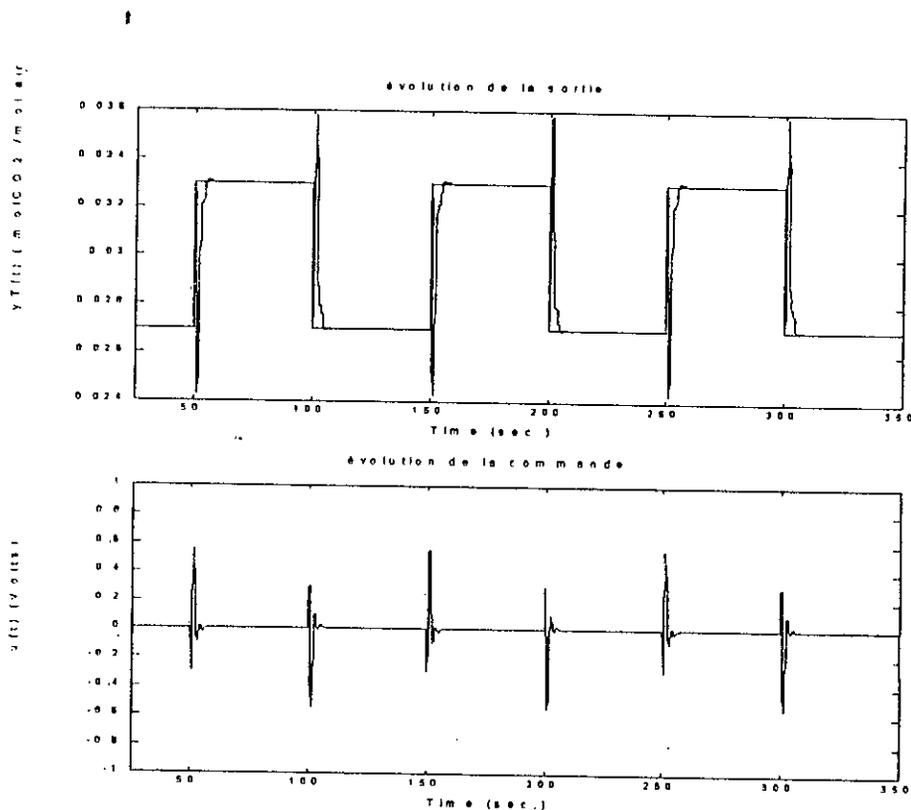


fig (IV.1) : évolution de  $u(t)$  et  $y_T(t)$  de  $CO_2$  en haut de la colonne pour leur référence avec  $N1=1, N2=1, Nu=1, \lambda = 1$ .

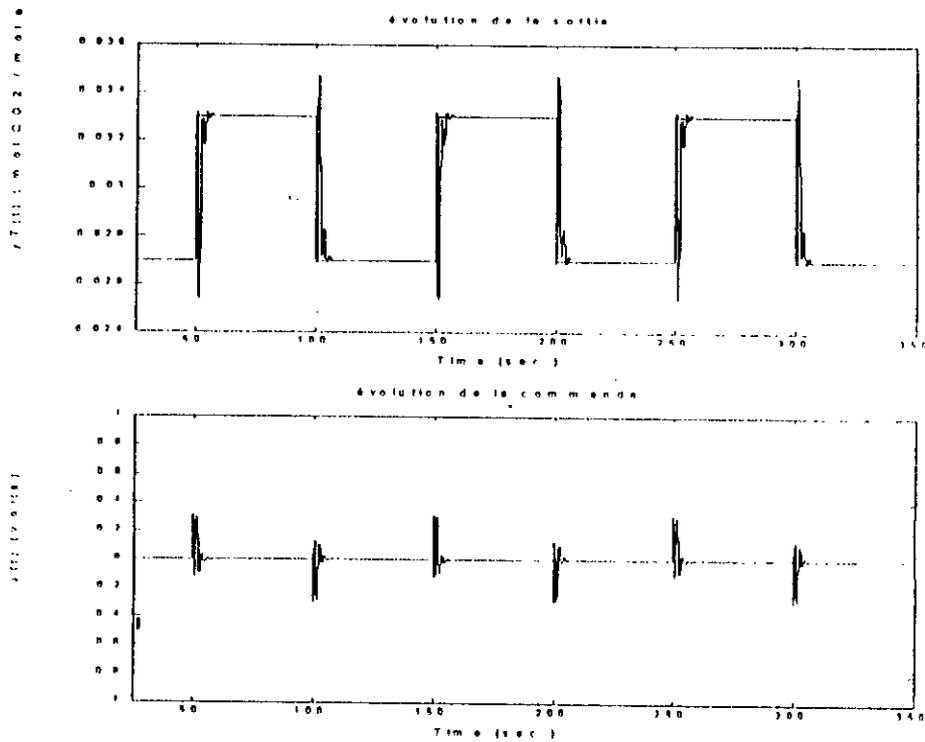


fig (IV.2) : évolution de  $u(t)$  et  $y_T(t)$  de CO<sub>2</sub> en haut de la colonne pour leur référence avec  $N_1=1$ ,  $N_2=2$ ,  $N_u=1$ ,  $\lambda = 1$ .

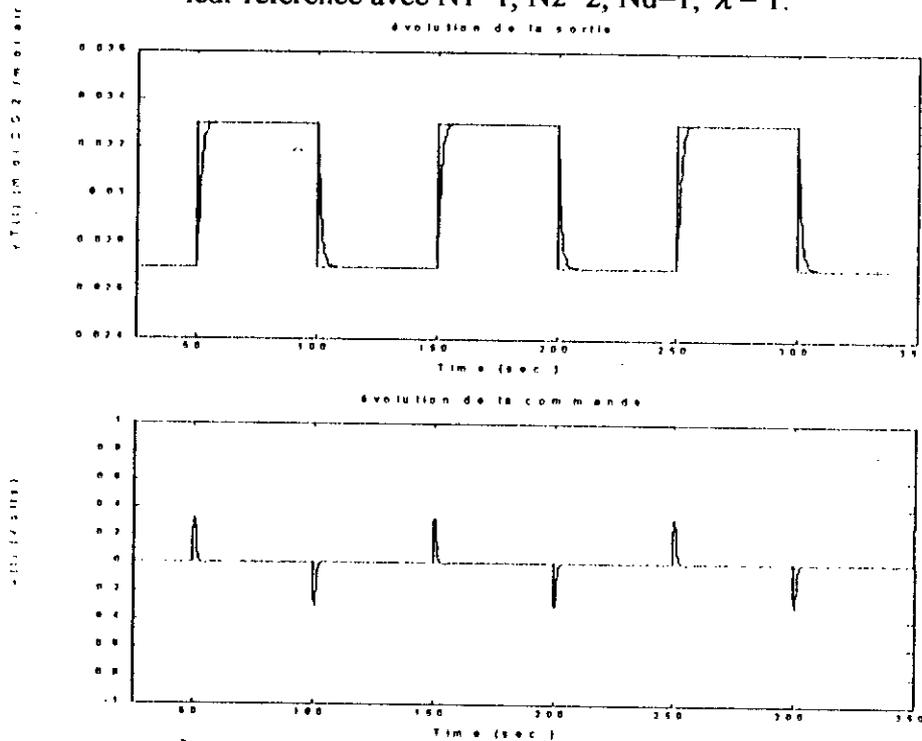


fig (IV.3) : évolution de  $u(t)$  et  $y_T(t)$  de CO<sub>2</sub> en haut de la colonne pour leur référence avec  $N_1=1$ ,  $N_2=4$ ,  $N_u=1$ ,  $\lambda = 1$ .

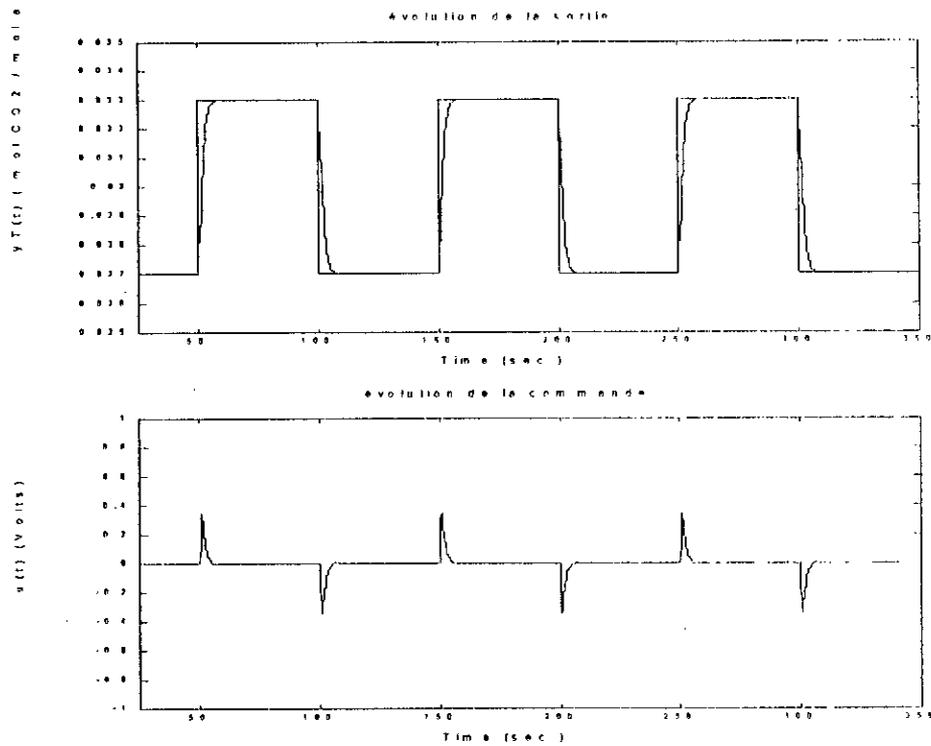


fig (IV.4) : évolution de  $u(t)$  et  $y_T(t)$  de CO<sub>2</sub> en haut de la colonne pour leur référence avec  $N_1=1, N_2=1, Nu=1, \lambda = 5$ .

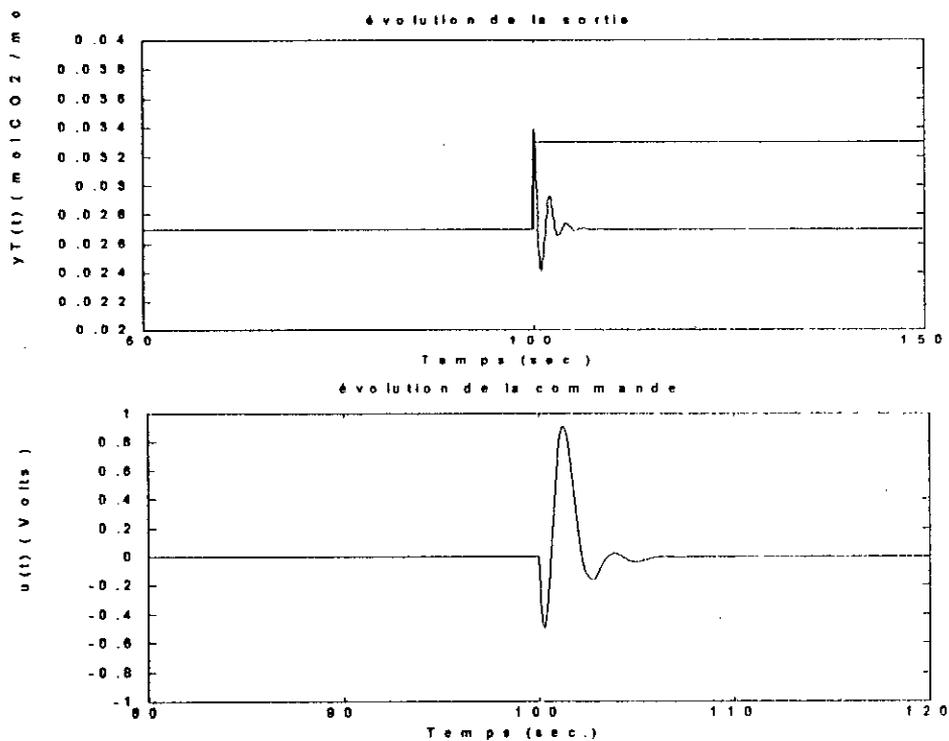


fig (IV.5) : évolution de CO<sub>2</sub> en haut de la colonne  $y_T(t), u(t)$  pour une perturbation de 10% avec  $N_1=1, N_2=1, Nu=1, \lambda = 1$ .

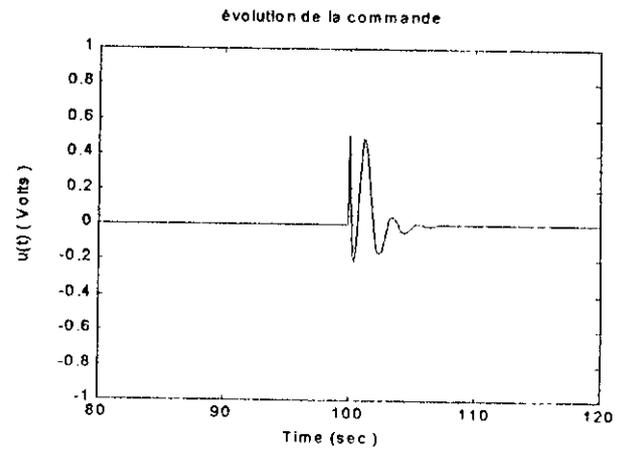
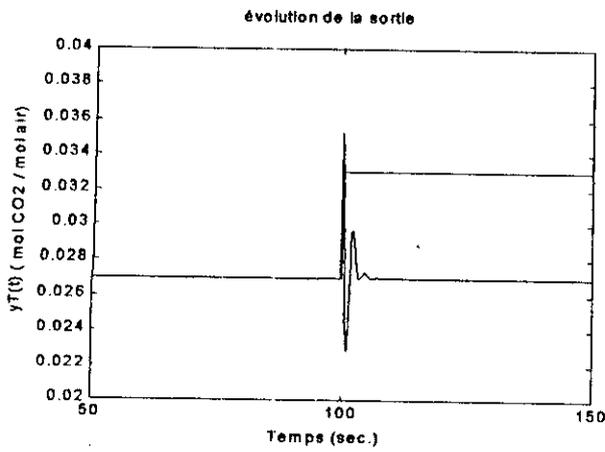


fig (IV.6) : évolution de CO2 en haut de la colonne  $y_T(t)$ ,  $u(t)$  pour une perturbation de 10% avec  $N1=1$ ,  $N2=2$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 1$ .

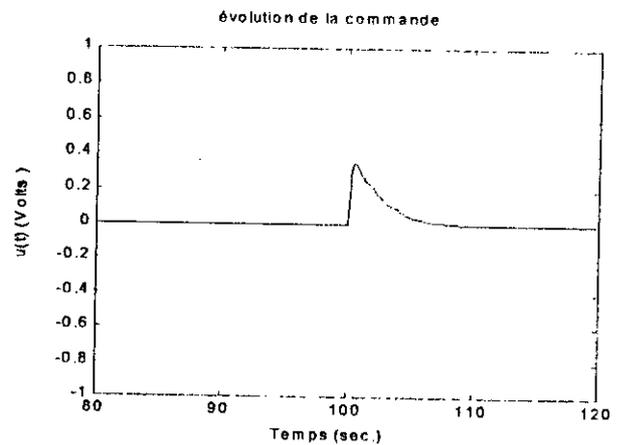
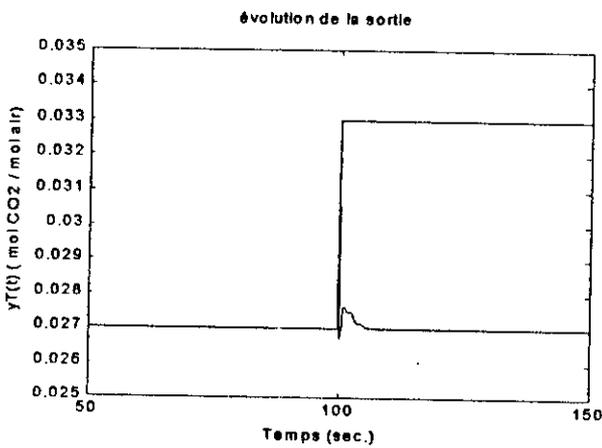


fig (IV.8) : évolution de CO2 en haut de la colonne  $y_T(t)$ ,  $u(t)$  pour une perturbation de 10% avec  $N1=1$ ,  $N2=4$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 1$ .

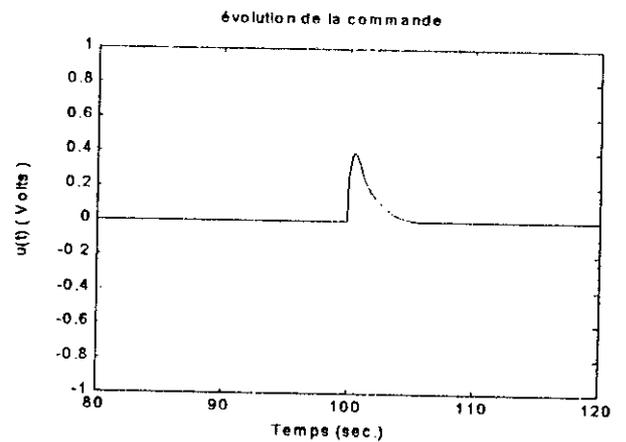
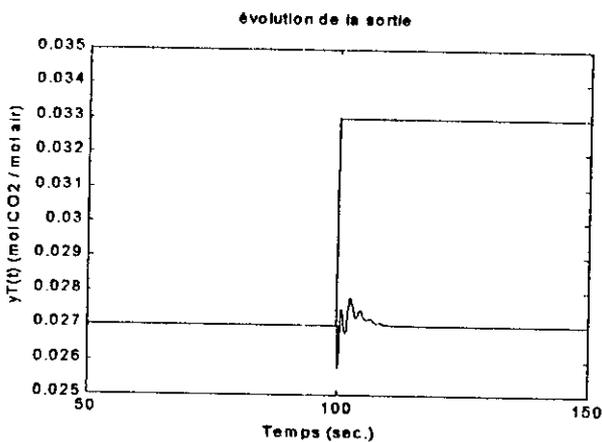


fig (IV.7) : évolution de CO2 en haut de la colonne  $y_T(t)$ ,  $u(t)$  pour une perturbation de 10% avec  $N1=1$ ,  $N2=1$ ,  $Nu=1$ ,  $\lambda = 10$ .

## IV.2 Synthèse et discussion.

Une augmentation de  $N2 = 4$ , figure (IV.3), améliore nettement l'évolution de la commande par comparaison avec les figures (IV.1) et (IV.2). Les mêmes résultats peuvent être obtenus en changeant légèrement la valeur du paramètre  $\lambda =$ , figure (IV.4).

Les résultats précédents montrent l'influence de l'augmentation du paramètre  $N2$  vis à vis de la dynamique de poursuite et des oscillations de la commande.

Pour tester l'efficacité de la GPC face à des perturbations échelon, on applique au cours de l'évolution de la sortie en régime établi un échelon de 10% de la valeur nominale. Les résultats de simulation de la figure (IV.5), réalisés sur notre système, montrent que cette variation de consigne est correctement suivie. Cette compensation est due à la présence d'un intégrateur dans le modèle CARIMA imposée par la GPC. Nous avons déjà noté que cet intégrateur joue un double rôle à savoir, réduire l'écart permanent et éliminer les perturbations constantes.

Les figures (IV.5) (IV.6) montrent l'effet de  $N2$  et  $\lambda$  sur la sortie. La figure (IV.7) montre que la GPC a bien compensé l'échelon de perturbation introduit au cours du régime permanent.

## Conclusion.

Ce chapitre a été consacré à l'application de la loi de commande prédictive généralisée à la colonne d'absorption. En effet la sortie de cette dernière est la concentration en  $CO_2$ , qui évolue dans un espace à deux dimensions ( $z$  : la hauteur de la colonne,  $t$  : temps). Dans notre étude nous sommes contents d'un résultat (seule valeur de  $z = 1.26m$  (hauteur fixe)).

Après un bref aperçu sur les différents travaux effectués jusqu'à présent par plusieurs chercheurs sur la GPC, nous décrivons le modèle de représentation échantillonné monovarié à partir des équations non linéaires.

L'influence des paramètres de la GPC sur la réponse du système, notamment celle de  $\lambda$  et de  $N_2$ , nous permet de confirmer l'une des caractéristiques de la GPC qui est aussi un de ses problèmes majeurs à savoir l'aspect aléatoire de la recherche des paramètres de commande optimaux. Nous précisons toutefois que le système que nous avons tenté de réguler est stable et qu'il présente les caractéristiques d'un système du premier ordre.

Pour le problème de la poursuite, au cours de nos simulations nous avons fait varier les paramètres de la GPC pour aboutir aux conclusions énumérées ci-dessous.

L'horizon minimal de prédiction  $N_1$  est maintenu à 1, qui représente le retard du système. Dans notre cas le retard est inclus dans la première période d'échantillonnage.

L'horizon de commande  $N_u$  n'exerce aucune influence sur la dynamique du système, suite à quoi  $N_u$  est maintenu égale à 1.

Contrairement à  $N_1$  et  $N_u$ , l'horizon maximum de prédiction  $N_2$  et le facteur de pondération  $\lambda$  exercent une très grande influence sur la réponse du système de sorte qu'ils lui imposent sa dynamique.

En effet en faisant varier  $N_2$  de 1 à 4, on constate que l'augmentation de  $N_2$  procure au système à régler une dynamique plus rapide, moins oscillatoire et adoucit les commandes. Les mêmes résultats sont obtenus pour le paramètre  $\lambda$ , avec un plus grand effort de commande.

En fin, on a aussi montré que la GPC peut faire face à une variation de consigne. Dans le cas de perturbation de type particulier et mesurable, la spécification du polynôme  $\Delta$  (dans le modèle CARIMA) autre que  $1-q^{-1}$ , permet une compensation totale de cette perturbation.

**CONCLUSION  
GENERALE**

Dans toute cette étude nous avons voulu étudier les performances de la GPC appliquées à la colonne d'absorption.

Il nous a d'abord fallu définir un modèle mathématique du processus d'absorption avec un double objectif : d'une part un modèle adéquat qui nous permet d'identifier des paramètres physico-chimiques inconnus, et acquérir une meilleure compréhension du caractère de processus, d'autre part ce modèle doit rendre possible l'identification d'un modèle adéquat pour la commande par GPC.

Le modèle mathématique de processus d'absorption sur lequel nous nous sommes basés repose sur l'hypothèse d'un transport axial de  $\text{CO}_2$ , en phase gaz et en phase liquide, purement convectif. En outre nous avons tenu compte de la relation entre le débit de l'absorbant et la concentration du gaz.

L'analyse du comportement dynamique est effectuée par simulation, à l'aide d'un ordinateur, d'un modèle approximatif. La nécessité de l'utilisation des modèles approximatifs vient du fait que l'ensemble des équations aux dérivées partielles constituant le modèle, ne se prête pas à une résolution analytique. La simulation de la réponse de la concentration du gaz épuré, causée par une variation en forme d'échelon du débit d'absorbant, ou de la concentration de gaz à épurer, nous a permis d'étudier les caractéristiques de ces modèles.

Dans la dernière partie on s'est intéressé à l'étude des performances de la commande prédictive généralisée. L'étude par simulation de quatre types de procédé à paramètres connus, présentant chacun une particularité, a montré que l'algorithme peut faire face aux

problèmes de commande des systèmes instables et à phase non-minimale. Ceci grâce aux paramètres de synthèse de la GPC, qui constituent la puissance de l'algorithme.

La relation entre les pôles et le choix des paramètres de synthèse n'étant pas explicité en général, ou ne pas spécifier à l'avance une dynamique de sortie. Pour certains choix spécifiques des paramètres, la GPC peut se ramener à quelque algorithmes comme celui à placement de pôles, à variance minimale généralisée et à horizon étendu de Ydstie.

L'application de la GPC a montré que malgré la dynamique défavorable du modèle en boucle ouverte ( instable et à phase non-minimale ), de très bons résultats ont été obtenus et ceci par un choix spécifique des paramètres de synthèse.

En appliquant la GPC à notre modèle de la colonne d'absorption et pour un choix judicieux de  $N_2$  et  $\lambda$ , nous constatons qu'une bonne poursuite de la consigne et une bonne réjection des perturbations est obtenus avec un effort de commande modéré.

En perspective ce travail n'est qu'une première étape, d'autres pourront venir, en affinant la dynamique de la colonne d'absorption, en faisant varier ses caractéristiques et en introduisant éventuellement une mesure de débit de  $CO_2$  en entrée pour faire de la compensation par 'feedforward'.

# ANNEXE

## Introduction

L'étude qui a été menée dans le premier chapitre nous a montré qu'il est très difficile de faire une analyse détaillée sur la stabilité du système en boucle fermée. En effet l'étude met en évidence l'équation caractéristique du système, cette dernière est fonction des polynômes R, S et T de la structure du régulateur RST. L'étude est délicate vu la complexité de cette équation caractéristique. Cette complexité augmente au fur et à mesure qu'on modifie les paramètres de synthèse de la GPC.

Dans cette annexe nous examinons l'effet des paramètres de la GPC à savoir N1, N2, Nu et  $\lambda$  ainsi que le retard du système sur la stabilité de la sortie en boucle fermée.

Soit le système suivant :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1)$$

Avec :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

La résolution de l'équation diaphantine nous donne :

$$E_j = 1 + e_1 q^{-1} + \dots + e_{j-1} q^{-(j-1)}$$

$$F_j = f_{0,j} + f_{1,j} q^{-1} + \dots + f_{n,j} q^{-n}$$

Suivant la valeur de N1, N2 et Nu la matrice G est de la forme suivante :

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2-1} & g_{N2-2} & \dots & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad \text{pour } N1=1 \quad Nu=N2 \quad \text{et } N2 \text{ quelconque}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{N1} & g_{N1-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2-1} & g_{N2-2} & \dots & \dots & g_{N1-1} \end{bmatrix} \quad \text{pour } Nu=N2, N1 \text{ et } N2 \text{ quelconque}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N1-1} & g_{N1-2} & 0 & \dots & 0 \\ g_{N1} & g_{N1-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2-1} & g_{N2-2} & \dots & \dots & g_{N1-Nu} \end{bmatrix} \quad \text{pour } Nu, N1 \text{ et } N2 \text{ quelconque}$$

pour différentes valeurs de  $N1$ ,  $N2$  et  $Nu$  la matrice  $G$  devient :

$$N1 = N2 = Nu = 1 \quad \Rightarrow \quad G = [g_0]$$

$$N1 = 1, N2 = 2, Nu = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 + b_0 e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

$$N1 = 1, N2 = 2, Nu = 2 \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ b_1 + b_0 e_1 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

$$N1 = N2 = 2, Nu = 2 \quad \Rightarrow \quad G = [g_1]$$

$$N1 = N2 = Nu = 2' \quad \Rightarrow \quad G = [g_0]$$

### 1.1 Effet de $Nu$ .

si  $N1 = 1$ ,  $N2 = 2$  et  $Nu = 2$  on a :

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

Le calcul de la commande aboutit à l'expression suivante :

$$\Delta u = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f)$$

avec

$$(G^T G + \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} g_0^2 + g_1^2 + \lambda & g_0 g_1 \\ g_0 g_1 & g_0^2 \lambda \end{bmatrix}^{-1}$$

si  $\lambda = 0$  et  $b_0 = 0$  cette matrice est non inversible d'où le choix de  $Nu = 1$ .

## 1.2 Effet de N2 avec $Nu = 1$ .

### 1.2.1 Cas ou $N1 = N2 = 1$ .

on a  $G = [g_0]$  donc  $\Delta u(t) = \frac{g_0}{g_0^2 + \lambda} [w - f(t + 1)]$

les polynômes R, S et T sont obtenus à partir de la formule suivante.

$$(g_0^2 + \lambda + q^{-1} g_{fin}) \Delta u(t) = g_0 [w - F_1 y(t)]$$

avec  $g_{fin}$  sont les derniers élément du polynôme  $G_j$ .

et

$$R = F$$

$$S = g_0^2 + \lambda + q^{-1} g_{fin}$$

$$T = g_0$$

le système en boucle fermée donne :

$$H_{BF} = \frac{BT}{SA \Delta + q^{-1} BR}$$

Le polynome caractéristique est :

$$P_c = SA \Delta + q^{-1} BR = B g_0 + \lambda A \Delta$$

$$\text{D'ou } y_{BF} = \frac{B g_0}{g_0 B + \lambda A \Delta} w$$

Si  $\lambda = 0$  et le système est à phase non-minimale l'équation caractéristique du système en boucle fermée est instable.

### 1.2.2 Cas ou $N1 = 1, N2 = 2$ .

L'expression de la commande devient :

$$\Delta u(t) = \frac{1}{g_0^2 + g_1^2 + \lambda} (g_0 \quad g_1) \begin{pmatrix} w - f(t+1) \\ w - f(t+2) \end{pmatrix}$$

on obtient l'expression du polynôme R, S et T suivant :

$$R = g_0 F_1 + g_1 F_2$$

$$S = g_0^2 + g_1^2 + \lambda + q^{-1} (g_0 g_{f1} + g_1 g_{f2})$$

$$T = g_0 + g_1$$

L'équation caractéristique est :

$$P_c = SA \Delta + q^{-1} BR = B (g_0 q^{-1} + g_1) - g_1 g_0 A \Delta + q^{-1} \lambda A \Delta$$

$$\text{D'ou } y_{BF} = \frac{q^{-1} B (g_0 + g_1)}{B (g_0 q^{-1} + g_1) - g_1 g_0 A \Delta + q^{-1} \lambda A \Delta} w$$

De cette manière on peut faire une étude de stabilité, pour différents choix de  $\lambda$ .

### 1.2.1 Cas ou $N1 = 1, N2 = 3$ .

La forme de la commande est :

$$\Delta u(t) = \frac{1}{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + \lambda} (g_0 \ g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} w - f(t+1) \\ w - f(t+2) \\ w - f(t+3) \end{pmatrix}$$

dont les polynômes R, S et T sont :

$$R = g_0 F_1 + g_1 F_2 + g_2 F_3$$

$$S = g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + \lambda + q^{-1} (g_0 g_{f1} + g_1 g_{f2} + g_2 g_{f3})$$

$$T = g_0 + g_1 + g_2$$

L'équation caractéristique est :

$$P_c = B (g_0 q^{-2} + g_1 q^{-1} + g_2) - g_1 g_0 A \Delta + g_2 A \Delta (g_0 + g_1 q^{-1}) + q^{-2} \lambda A \Delta$$

D'ou

$$y_{BF} = \frac{q^{-2} B (g_0 + g_1 + g_2)}{B (g_0 q^{-2} + g_1 q^{-1} + g_2) - g_1 g_0 A \Delta + g_2 (g_0 + g_1 q^{-1}) A \Delta + q^{-2} \lambda A \Delta} w$$

pour avoir une forme générale de la fonction de transfert en boucle fermée nous examinons le cas  $N_2 = 4$ , tel que la commande, l'équation caractéristique et la sortie en boucle fermée sont respectivement :

$$\Delta u(t) = \frac{1}{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + \lambda} (g_0 \ g_1 \ g_2 \ g_3) \begin{pmatrix} w - f(t+1) \\ w - f(t+2) \\ w - f(t+3) \\ w - f(t+4) \end{pmatrix}$$

$$P_c = B (g_0 q^{-3} + g_1 q^{-2} + g_2 q^{-1} + g_3) - g_1 g_0 A \Delta + g_2 A \Delta (g_0 + g_1 q^{-1}) + g_3 A \Delta (g_0 + g_1 q^{-1} + g_2 q^2) + q^{-3} \lambda A \Delta$$

$$y_{BF} = \frac{q^{-3} B (g_0 + g_1 + g_2 + g_3)}{P_c} w$$

sous une forme générale la fonction de transfert du système en boucle fermée est :

$$y_{BF} = \frac{q^{-(N2-1)} B \sum_{i=1}^{N2} g_{i-1}}{B \sum_{i=1}^{N2} g_{i-1} q^{-(N2-1)} - A \Delta \sum_{i=1}^{N2} g_i \sum_{k=1}^i q^{-(k-1)} g_{k-1} + \lambda A \Delta q^{-(N2-1)}} w$$

### 1.3 Effet de N1.

#### 1.3.1 Cas ou N1=2 N2=2 Nu=1

la matrice  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T = (g_1^2 + \lambda)^{-1} g_1$

la commande s'écrit :

$$\Delta u(t) = \frac{g_1}{g_1^2 + \lambda} [w - f(t+2)]$$

avec  $f(t+2) = g_1 F_2 y(t)$

donc :

$$R = g_1 F_2$$

$$S = g_1^2 + \lambda + q^{-1} g_1 g_{fin2}$$

$$T = g_1$$

L'équation caractéristique donne :

$$P_c = SA \Delta + q^{-1} BR = B g_1 - g_1 g_0 A \Delta + q^{-1} \lambda A \Delta$$

La sortie est

$$y_{BF} = \frac{B g_1}{p_c} w$$

### 1.3.2 Cas ou $N_1=3$ $N_2=3$ $N_u=1$

l'expression de la commande :

$$\Delta u(t) = \frac{g_2}{g_2^2 + \lambda} [w - f(t+3)]$$

la sortie en boucle fermée :

$$y_{BF} = \frac{q^{-1} g_2 B}{g_0 [B - (g_0 + g_1 q^{-1}) A \Delta] + q^{-2} \lambda A \Delta} w$$

sous une forme plus générale dans le cas ou  $N_1=N_2 \geq \text{retard}$ , la fonction de transfert

est :

$$y_{BF} = \frac{g^{N_2-1} B}{g^{N_2-1} (B - A \Delta) \sum_{i=1}^{N_2} g^{i-2} q^{-(i-2)} + \lambda A \Delta q^{-(N_2-1)}} w$$

### 1.4 Effet du retard.

Dans le cas ou  $N_1=N_2=2$  on introduit un retard de 1 dans le système, c'est à dire  $b_0=0$ .

Sachant que :

$$y_{BF} = \frac{q^{-1} g_1 B}{g_1 [B - g_0 A \Delta] + q^{-1} \lambda A \Delta} w$$

et  $G_1 = g_0 + q^{-1} g_{fin1} = E_1 B$  donc  $g_0=0$

et 
$$y_{BF} = \frac{g_1 B}{g_1 B + q^{-1} \lambda A \Delta} w$$

si  $\lambda = 0$  étant donné que le système est à phase non-minimale la sortie du système est instable. Par contre si  $N1=N2=3$  en gardant le même retard la fonction de transfert en boucle fermée donne :

$$y_{BF} = \frac{g_2 B}{g_2 (B + g_1 q_1 \lambda A \Delta)} w$$

qui peut être stable suivant la position des pôles de l'équation caractéristique

Dans ce chapitre on a représenté l'effet de choix de  $N1$ ,  $N2$  et  $Nu$  sur le polynôme caractéristique et la dynamique en boucle fermée . cette analyse permet de choisir ces paramètres , en fonction de la complexité du calcul dans le cas d'une implémentation pratique.

REFERENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R.VAN DER WEG  
Sur la modélisation et l'optimisation d'une colonne d'absorption  
Thèse d'université. Toulouse 1976
- [2] D.PINGLOT  
Commande optimale et sous optimale d'un système hyperbolique non linéaire :  
colonne d'absorption  
thèse d'université. Toulouse 1984
- [3] N.BALI  
Etude des performances de la commande prédictive généralisée  
'application aux robots manipulateurs PUMA et SCARA'  
Thèse de magistère, ENP Alger 1995
- [4] I.D.LANDAU  
Identification et commande des système à l'aide des progiciels PIM et PC-Reg  
Hermes 1988
- [5] F.BENMILOUD  
Simulation de la commande prédictive généralisée d'un actionneur asynchrone  
Thèse de magister, ENP Alger 1994
- [6] BORDNEUVE-GUIBE  
Commande prédictive adaptative : Application à des procédés thermique  
Thèse de doctorat d'Etat de université Paul Sabatier de Toulouse 1990
- [7] K.J.ASTROM  
Introduction to stocastic control theory  
Academi press 1970
- [8] D.W.CLARKE  
Application of generalized predictive control to industrial process  
IEEE C.S.M pp 49-55 ,1988
- [9] M.M'SAAD & al  
A suitable generalized adaptive controller case study: control of a flexible arm  
Automatica, Vol.29, N°3, pp 589-608 ,1993
- [10] D.W.CLARKE & C.MOHTADI  
Propreties of generalized predictive control  
Automatica, Vol.25, pp 859-875 ,1989
- [11] K.J.ASTROM & B.WITTENMARK  
Computer controlled systsms: theory and design  
Prentice Hall ,1990
- [12] R.R.BITMEAD & al  
Adaptive optimal control:the thinking Man's GPC  
Prentice Hall ,1990

## ملخص:

قمنا في هذا العمل بالتحكم في أسطوانة امتصاص، هذه الأسطوانة استعملت لاستخراج  $CO_2$  بالامتصاص بواسطة سائل MEA عنصر التحكم المستعمل هو سائل MEA. استعملنا أولا المعادلات الواصفة للاسطوانة وذلك بواسطة المعادلات ذات المشتق الجزئي. المعادلات الواصفة تحصلنا عليها بتحويل خطي حول نقطة التشغيل عن طريق المطابقة باستعمال MCR. خوارزمية الضبط المستعمل هو من نوع GPC. لقد بينا أن نتائج مرضية حصل عليها بالمتابعة والضبط وهذا باختيار ملائم لعناصر النظام الكلمات المفتاحية: التحكم المسبق العام، أسطوانة امتصاص

### Résumé :

Ce projet de fin d'études traite de la modélisation et de la commande d'une colonne d'absorption. Cette colonne est utilisée pour retirer le  $CO_2$  par absorption avec une solution de MEA, la commande utilisée est le débit de la solution.

Nous développons d'abord un modèle de la colonne d'absorption par une équation aux dérivées partielles. Le modèle sera obtenu par une linéarisation autour du point de fonctionnement avec identification par moindres carrés récursifs.

L'algorithme de commande utilisé sera du type prédictif avec horizon étendu (GPC).

Nous montrons que des résultats satisfaisants sont obtenus en poursuite et en régulation en effectuant un choix judicieux des paramètres de synthèse

**Mots clés :** Commande prédictive généralisée, colonne d'absorption.

### Abstract :

This project deals with modeling and control of an absorption packed column.

This column is used to decrease the concentration of  $CO_2$  in a gas mixture by absorption with MEA. The flow rate of MEA is the selected control variable.

We first develop a model of the absorption column by a set of partial differential equations.

The command model is obtained by linearizing around the set point, the identification is done using least square algorithms. The control algorithm selected is the generalized predictive control GPC.

We should that the results are satisfactory in by wise choice of the synthesis parameters of GPC.

**Keywords :** Generalized predictive control , absorption column.