

12/02

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire du Projet de Fin d'Etudes
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Automatique.

Thème :

**MODELISATION D'UN ROBOT
MANIPULATEUR COMPORTANT UNE
BOUCLE CINEMATIQUE**

Proposé et dirigé par :
H.CHEKIREB
M.TADJINE

Etudié par :
CHAKIR Messaoud

PROMOTION JUIN 2002

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACE :

A :

** * * Maman * * **

REMERCIEMENTS:



Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon promoteur , Monsieur H.CHEKIREB, pour avoir bien voulu me diriger et m'assister dans mon travail.

D'autre part, il est de mon devoir d'exprimer toute ma reconnaissance pour mon co-promoteur , Monsieur M.TADJINE, pour ses conseils et son assistance tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens également à remercier Messieurs AMICHE et MADANI, du département du génie Mécanique pour leur aide et leur disponibilité, sans laquelle ce travail serait inachevé.

Je remercie également très vivement Monsieur LARBES , chef du département de langue, qui par ses remarques pertinentes et ses orientations a su donner une dimension en plus à ce mémoire.

Je remercie aussi l'ensemble de mes enseignants vers lesquels va toute ma reconnaissance et sympathie.

Enfin, que tous les amis que j'ai bien malencontreusement et involontairement oublié de citer, trouvent ici l'expression de mon amitié et de ma sympathie.

في إطار مشروع إنجاز ذراع آلية صناعية ذات 6 درجات للحرية (محورية) قمنا في هذا العمل بتحديد النماذج الرياضية للذراع المذكورة بعد إدراج بعض التعديلات عليها و هذه النماذج هي : النموذج الهندسي المباشر و العكسي ، النموذج الحركي المباشر و العكسي ، و النموذج الديناميكي (أو التحريك) كما قمنا باستنتاج المصفوفة العنقودية و استعملنا هذه الأخيرة في دراسة المواضيع الأحادية . كلمات مفاتيح ، ذراع آلية ، نموذج هندسي ، حركي تحريك .

Résumé :

Dans le cadre d'un projet de conception d'un bras de robot industriel à six degrés de liberté (rotoïde ou pivot), nous déterminons dans ce mémoire les différents modèles mathématiques de la structure mécanique articulée après l'introduction de quelques modifications du point de vue construction. Ces modèles sont : les modèles géométriques direct et inverse, les modèles cinématiques direct et inverse, et en fin le modèle dynamique. Nous étudions également les singularités du robot après déduction de la matrice Jacobienne.

Mots clés : robot industriel, modèles, géométrique, cinématique, direct, inverse, dynamique.

Abstract:

In this work, we determine the mathematical models of an industrial six degrees of freedom robot arm after making some modifications of the mechanical structure. These models are the direct and inverse kinematics, the velocity model and the dynamics. We also, study the singularities after deduction of the Jacobian matrix.

Key words: industrial robot arm, models, kinematics, velocity, direct, inverse, dynamics.



Position du problème

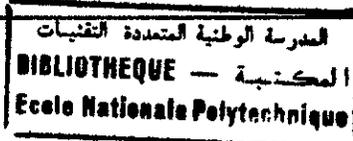
Chapitre 1

1.1	Introduction.....	1
1.2	Structure Mécanique Articulée(SMA).....	1
1.3	SMA initiale.....	1
1.4	Problèmes de cette SMA.....	2
	1) Structure.....	2
	2) Jonctions.....	2
	3) Moteurs.....	2
	4) Poignet.....	3
1.5	Solutions possibles.....	3
	1) Lourdeur.....	3
	2) Stabilité, rigidité et liaisons.....	5
1.6	Choix d'une nouvelle SMA.....	6
	a) Changements au niveau de la base.....	6
	b) Changements au niveau du poignet.....	6
1.7	Allure du volume de travail.....	9
1.8	Conclusion.....	10

Chapitre 2

2.1	Introduction.....	11
2.2	Modèle géométrique direct (MGD).....	11
	2.2.1 Obtention du MGD.....	12
	2.2.2 Robots manipulateurs avec boucle cinématique.....	14
	2.2.3 Calcul du MGD de la structure.....	14
	i. Paramètres D-H et transformations homogènes.....	17
	ii. Position.....	21
	iii. Orientation.....	21
	2.2.4 Conclusion.....	22

2.3	Modèle géométrique inverse.....	23
2.3.1	Détermination de θ_1 θ_2 et θ_3	23
2.3.2	Orientation.....	25
2.3.3	Détermination de θ_4 θ_5 et θ_6	26
2.3.4	Problèmes du MGI.....	28
	1) Problème de géométrie.....	28
	2) Problème de mécanique.....	28
	3) Problème mathématique.....	28
2.4	Conclusion.....	29
Chapitre 3		
3.1	Introduction.....	30
3.2	Modèle cinématique direct (MCD).....	30
3.2.1	Obtention du MCD.....	31
3.2.2	Structure contenant une boucle plane.....	32
3.2.3	Calcul du MCD de la structure.....	32
	1) Porteur.....	32
	i. Chaîne principale.....	32
	ii. Chaîne secondaire.....	33
	2) Poignet.....	34
3.2.4	Matrice Jacobienne.....	35
3.2.5	Jacobienne par rapport à R_0	36
	a- Calcul de 0v_6	36
	b- Calcul de ${}^0\omega_6$	37
	c- Formation de la matrice.....	37
3.3	Etude des singularités.....	37
3.3.1	Singularités du porteur.....	38
	i. Première singularité du porteur.....	38
	ii. Deuxième singularité du porteur.....	39
3.3.2	Singularités du poignet.....	41
3.4	Calcul du MCI.....	42
3.5	Conclusion.....	43



Chapitre 4

4.1	Introduction	44
4.2	Modèle dynamique inverse.....	44
4.3	Obtention du modèle dynamique.....	44
4.4	Equations de Lagrange.....	45
4.5	Evaluation des différents termes impliqués.....	46
4.6	Conclusion.....	82
	Conclusion générale et perspectives.....	83
	Bibliographie.....	85
	Annexes	

Position du problème :

La maîtrise de la conception et du fonctionnement de mécanismes complexes motorisés, ou «machines » a toujours été un facteur important du progrès technologique dans divers domaines : transports, production industrielle, travaux publics, exploration et travail en milieux hostiles, etc.

Ces machines sont destinées à augmenter les possibilités de l'homme dans la rapidité de ses déplacements et de ses actions, et pour l'amplification de sa force et de son champ d'action, notamment dans l'accomplissement de tâches pénibles, dangereuses et/ou répétitives. Les fonctions généralement concernées sont :

- Le **déplacement** à plus ou moins longue distance sur terre, sur mer, dans l'air et sous l'eau ;
- La **manipulation** au sens large du terme :
 1. Déplacer un outil pour saisir des objets ou de la matière, les transporter et les déposer.
 2. Exercer des efforts sur l'environnement.
- La combinaison des deux fonctions précédentes.

Un robot manipulateur peut donc être considéré d'une manière générale vu par son environnement, comme un générateur de mouvements et d'efforts dans les diverses directions de l'espace.

Sur le plan des applications les plus courantes on peut distinguer :

- Les *robots industriels* travaillant généralement à poste fixe, de manière totalement autonome, et dont les tâches sont programmées sur le site par apprentissage, ou bien hors ligne en utilisant un langage spécialisé ou des moyens de conception assistée par ordinateur ;
- Les *robots pour l'intervention et l'exploration en milieu hostile* et mal connu (nucléaire, planétaire, sous-marin) qui sont le plus souvent téléopérés mais peuvent être dotés d'une certaine autonomie locale compte tenu des difficultés relatives aux délais des transmissions et à leur faible bande passante.

Dans tous ces cas où les robots manipulateurs ne sont pas directement téléopérés et doivent posséder une certaine autonomie d'action, leurs systèmes de commande automatique doivent connaître et compenser les imprécisions éventuelles puisque l'opérateur humain n'est pas directement dans la boucle d'asservissement, pour s'adapter aux caractéristiques des machines et de leur environnement. Pour cela, il est nécessaire de passer par une *modélisation mathématique* précise de la géométrie et de la dynamique des bras manipulateurs.

Ce travail a pour but la détermination des modèles mathématique d'un bras manipulateur 6R contenant une boucle plane. Il s'agit d'une structure existant dans le L.C.P à l'ENP, destinée à être commandée par un automate programmable dont l'étude fait l'objet d'autres travaux. Il est donc tout à fait normal que les recherches bibliographiques soient orientées vers les ouvrages qui traitent de la modélisation des robots. Les buts de ces recherches bibliographiques étaient :

- S'initier à la robotique i.e. : comprendre ce qu'un robot[1,8,26], comment il fonctionne[10,14], quels sont les types de robots et comment peut-on les classer[8]...etc.
- Comment modéliser un robot, quels sont les modèles qu'on peut définir pour un robot, quelles sont les hypothèses introduites généralement pour simplifier la tâche sans réduire la validité des résultats[11,17].
- Identifier le type de la structure du robot projeté afin de pouvoir profiter des travaux déjà existants.
- Appliquer les méthodologies de modélisation qu'on a tirées de la bibliographie pour la détermination des modèles de notre structure.

En s'impliquant dans le travail, nous avons constaté que la structure présente quelques problèmes et que certaines hypothèses simplificatrices ou de base (c.à.d nécessaire pour la validité des résultats) ne sont pas satisfaites. D'où la nécessité d'une analyse du mécanisme avant d'entamer la modélisation. Ainsi le travail est organisé dans quatre chapitres comme suit :

Un premier chapitre portant sur l'analyse de la structure et qui fait appel à des connaissances en mécanique de construction. Nous détaillons les problèmes qu'elle présente tel que la qualité réduite de la découpe, la lourdeur, l'instabilité statique...ect. Et nous proposons des solutions qui rendent la structure symétrique, rigide, à poignet sphérique...ect.

Dans le deuxième chapitre, sont développés le modèle géométrique direct MGD et son inverse le MGI après un bref rappel des outils mathématiques utilisés. Bien qu'il s'agisse d'un porteur différentiel (ce qui est dû à la boucle qu'il contient), les résultats dans leur forme générale ne diffèrent pas trop de ceux d'un porteur série[14].

Dans le troisième chapitre, nous déterminons le modèle cinématique direct. La matrice jacobienne est déduite puis utilisée dans l'étude des singularités. Le modèle cinématique inverse est obtenu par inversion du modèle direct.

En fin dans le quatrième et dernier chapitre, nous déduisons les équations dynamiques du robot en utilisant le formalisme de Lagrange. Le modèle est présenté sous sa forme brute, c'est à dire non optimisée. Contrairement aux deux modèles précédents, la vérification du modèle dynamique ne peut se faire analytiquement, mais plutôt par une comparaison impliquant des méthodes numériques.

Chapitre 1 :
Analyse de la structure

1.1 Introduction :

Le but de ce travail est la modélisation d'un robot 6R à chaîne cinématique fermée. Bien que la conception de ce genre de structure doive être étudiée par une équipe de spécialistes (mécanicien, électronicien, automaticien, informaticien, etc...), on peut travailler en décentralisé, chacun sur un axe donné, puis combiner les résultats finaux pour construire le robot. Comme nous l'avons dit dans la position du problème, avant d'entamer la modélisation, une analyse de la structure est faite pour mettre en évidence les problèmes que nous avons constatés et proposer des solutions.

1.2 Structure mécanique articulée(SMA) :

Bien que la mesure des performances des robots soit un domaine normalisé[24], il n'est pas nécessaire de consulter ces normes- comme nous allons le constater ! - pour déduire sur la qualité réduite de la SMA disponible.

1.3 SMA initiale :

La figure 3.1 représente la SMA dont nous disposons, elle est faite de barres minces en acier et contient une chaîne cinématique fermée pour ramener le moteur de l'axe 3 vers la base. Les liaisons étant toutes rotoïdes [1,10].

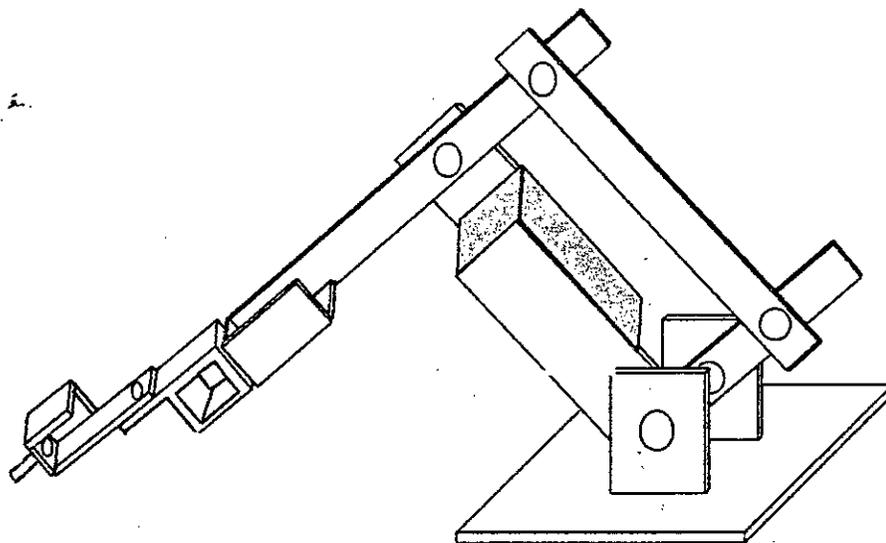


Fig.1.1 La SMA initiale.

1.4 Problèmes de cette SMA:

1) Structure :

- **Choix et qualité :**

Les barres métalliques constituant la SMA sont découpées et soudées et les trous sont percés d'une manière un petit peu non précise ce qui diminue la qualité de l'ensemble lorsqu'il est monté. En plus l'absence de symétrie rend difficile la détermination des différents modèles (cf. paramètres D-H dans le Chapitre 2) et en particulier le modèle dynamique car les tenseurs d'inertie ne sont pas diagonaux.

- **Lourde:**

A cause des poids des barres en acier en particulier la barre n°3 (cf. fig.1.1.1) ; en plus des poids des moteurs qui pèsent 0,6 Kg chacun[22] et qui sont portés par la structure qui devient alors très lourde pour être entraînée par les dits moteurs bien qu'elle ne soit pas encore chargée.

- **Instable:**

C'est un ensemble de pendules inverses se trouvant au point d'équilibre instable(2) de la figure 1.2 et qui sous l'effet de la pesanteur cherchent à rejoindre (les frottements au niveau des articulations sont vaincus par ce phénomène) le point d'équilibre stable (1).

2) Jonctions:

- **Qualité :**

Elles présentent des jeux, qu'on peut constater en vibrant la structure à la main.

- **Dimensions :**

D'autre part, les dimensions des axes et des clavettes ne conviennent pas très bien aux axes des moteurs, car à ce niveau également il y a du jeu.

3) Moteurs:

Nous disposons de 6 moteur-réducteurs DC identiques, dont les caractéristiques sont données dans[22], or :

- Le dimensionnement des actionneurs vient en dernier (après avoir calculer le modèle dynamique) en fonction des spécifications du cahier des charges (vitesses, accélérations...) [3,15] et les moteurs dont nous disposons peuvent ne pas être

suffisants comme ils peuvent présenter un sur dimensionnement ce qui signifie une perte d'argent.

- Comme les moteurs sont portés par la structure, leur volume (donc leur poids) doit diminuer en allant de la base à l'effecteur, mais ce n'est pas le cas car ils sont identiques.

4) Poignet:

- L'orientation se fait selon la configuration Z-X-Z, [9] mais les axes ne sont pas concourants c'est à dire qu'ils ne se coupent pas en un point commun [15,26] et les moteurs sont portés par le poignet ce qui le rend très lourd. Le 4^{ième} moteur entraîne le 5^{ième} et le 6^{ième} en plus de la charge : le choix n'est donc pas optimal.

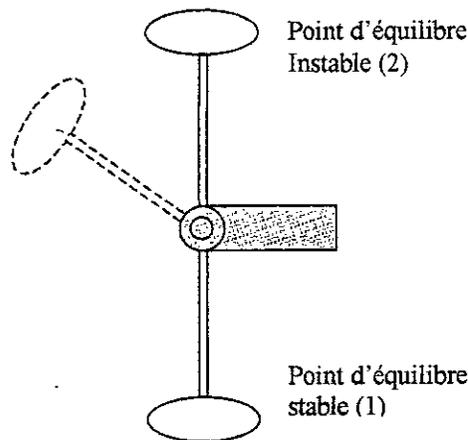


Fig. 1.2 Effet pendule inverse

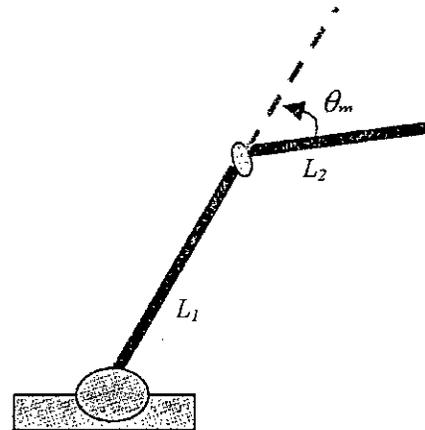


Fig. 1.3 Porteur série 2R plan

1.5 Solutions possibles :

1) lourdeur :

- Si on veut garder la même SMA, on joue sur le matériau en suivant les indications du tableau suivant contenant les caractéristiques de masse et rigidité de quelques matériaux.

Matériau	E: Gpa (module de Young)	ρ :103kg/m ³ (masse volumique)	E/ ρ :107m ² /s ² (rigidité spécifique)
Carbure de Bore	4.5	2.4	19.9
Béryllium	2.9	1.9	15.3
Alumine	3-4	3.7-3.8	7.9-11
Carbure de Titane	4.0-4.5	5.7-6.0	7-9
Carbure de Tungstène	5.5	16	3.4
Acier	2.1	7.8	2.7
Aluminium	0.72	2.8	2.6
Magnésium	0.45	1.9	2.4

- On peut ramener le moteur de l'axe 4 à la base et adopter un système de transmission par courroies par exemple[10] ; mais cela change un petit peu la structure comme l'indique la figure ci-après :

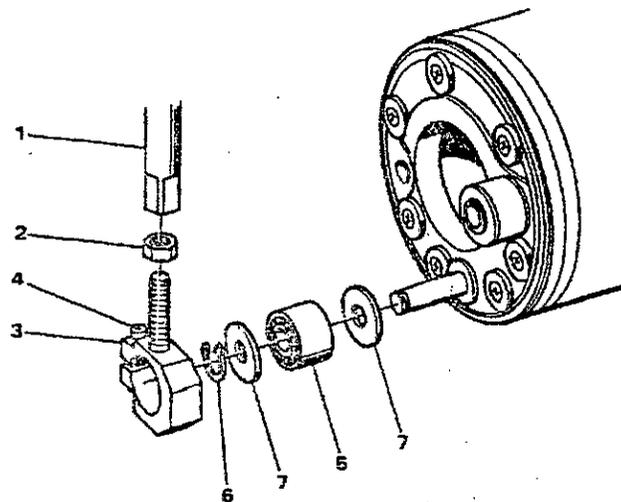
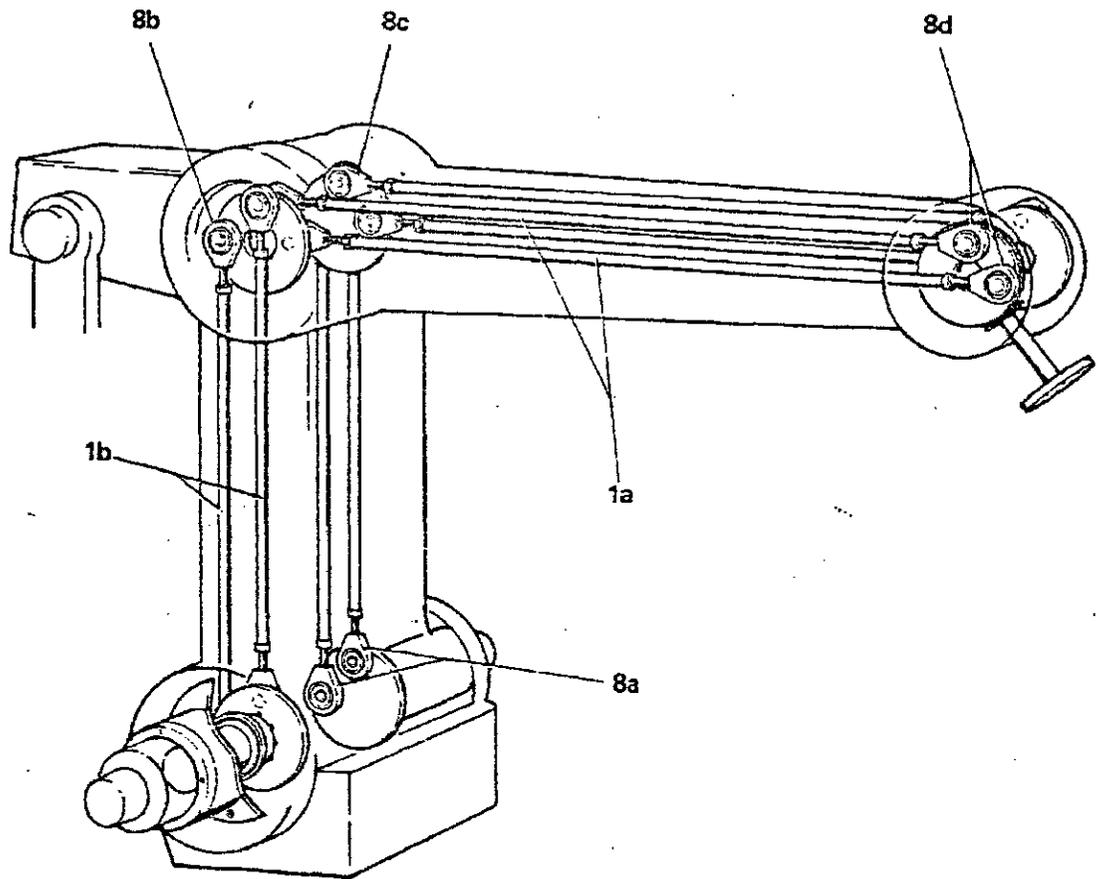


Fig. 1.4 Ajout de transmissions à la structure.

2) Stabilité, rigidité et liaisons :

- Une première façon d'équilibrer la SMA est l'utilisation de contrepoids. La compensation de l'effet des poids des barres est assurée [7,14] par l'ajout d'une masse M et d'une chaîne cinématique en parallélogramme (fig1.5.b). Mais nous rejetons cette solution car d'une part la SMA contient déjà une boucle et d'autre part nous voulons que la masse en mouvement soit la plus réduite que possible pour avoir une dynamique relativement simple.

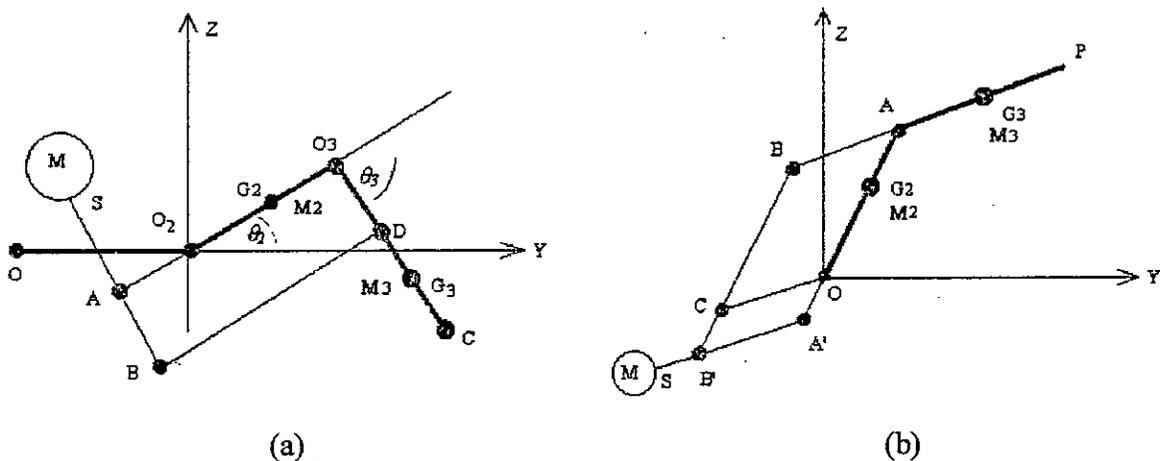


Fig. 1.5 Equilibrage statique d'un porteur (a) sériel, (b) à boucle cinématique.

- Nous trouvons également une façon d'équilibrer par des ressorts[14], mais elle est conseillée surtout pour les manipulateurs ayant une liaison prismatique d'axe vertical.
- La solution que nous proposons est l'utilisation d'engrenages irréversibles. c-à-d : le mouvement n'est permis que dans un seul sens (des moteurs vers les barres métalliques). Un engrenage irréversible est un engrenage hélicoïdal ayant un angle d'hélice particulier[10,12] (cf. annexe A) et il doit être dimensionné de manière à compenser l'effet de la pesanteur à l'état statique c'est à dire lorsque les moteurs sont à l'arrêt(formule4.5)[7].
- Pour augmenter la rigidité de la SMA on doit :
 - Changer le matériau ;
 - Redimensionner les barres en utilisant les lois de l'RDM ;
 - Ajouter des éléments assurant en même temps la symétrie de la structure.

1.6 Choix d'une nouvelle SMA :

Nous gardons la même forme du porteur à chaîne plane fermée. Les modifications sont faites surtout à la base et au niveau du poignet dans le but d'avoir une symétrie pour chaque corps de la structure par rapport à un axe ou un plan car si tel est le cas les tenseurs d'inertie sont diagonaux ce qui simplifie énormément le calcul de la dynamique.

a) Changements au niveau de la base :

les éléments ajoutés sont ;

- ◆ Deux engrenages irréversibles disposés d'une manière symétrique par rapport à l'axe de la base. Ils assurent la stabilité de la structure à l'état statique.
- ◆ Des barres métalliques sont ajoutées de manière symétrique également pour rigidifier la base.
- ◆ Les poids des éléments ajoutés font que le centre de masse de la structure globale soit plus proche de la base, on dit que la structure est lestée.

Ainsi , la nouvelle base du robot aura la forme suivante:

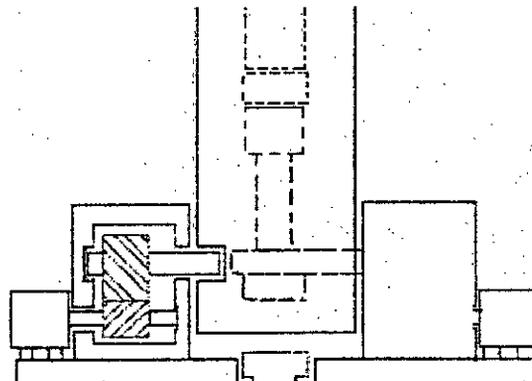


Fig. 1.6 La base du robot après modification

b) Changements au niveau du poignet :

les caractéristiques du poignet idéal sont[15] :

- 3 degrés de liberté
- posséder un centre de poignet (i.e. point d'intersection des 3 axes de rotation)
- posséder un grand espace de travail .
- actionneurs agissant à distance
- compact, léger et rigide
- coût de fabrication faible
- robuste.

La réalisation d'un tel poignet peut se faire à l'aide d'engrenages coniques comme illustré dans la figure suivante.

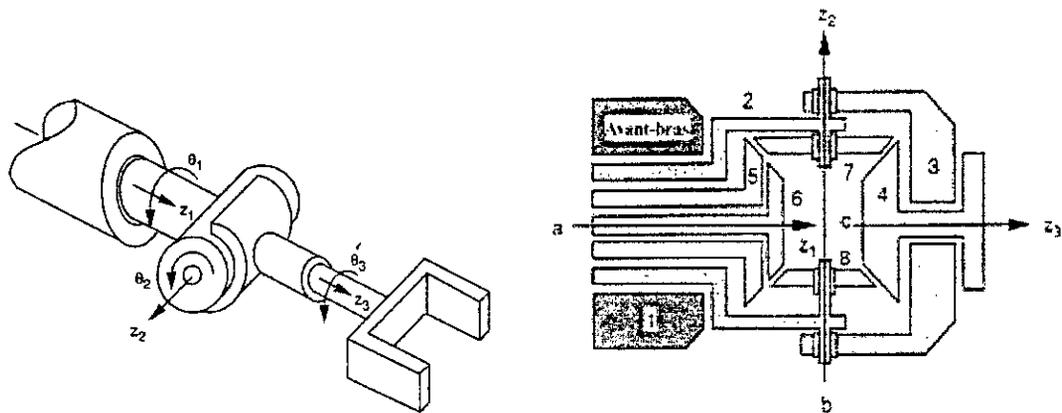


Fig. 1.7 Poignet à axe concourant.

Pour notre cas, nous nous sommes inspirés du modèle du poignet du robot Puma [19].

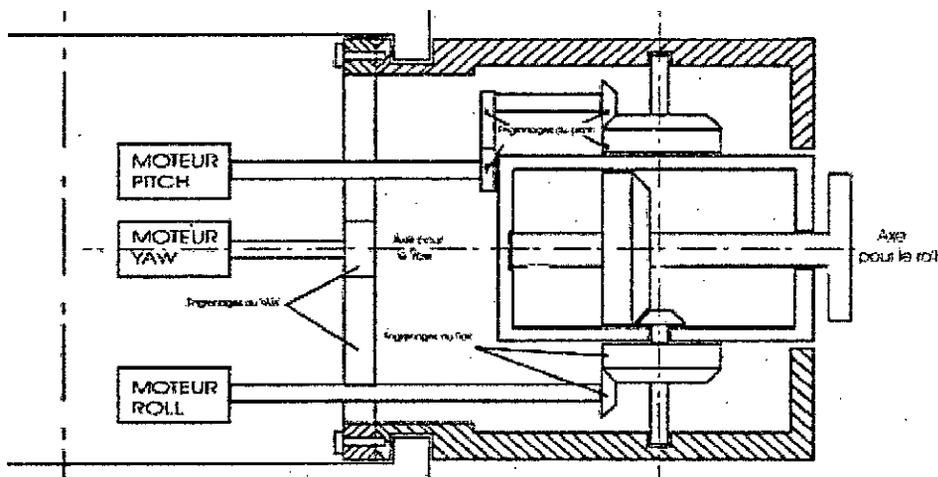


Fig. 1.8 Le poignet du robot (ressemble au poignet du PUMA)

Les schémas suivants décrivent la structure d'une manière globale et mettent en évidence sa symétrie et son poignet sphérique :

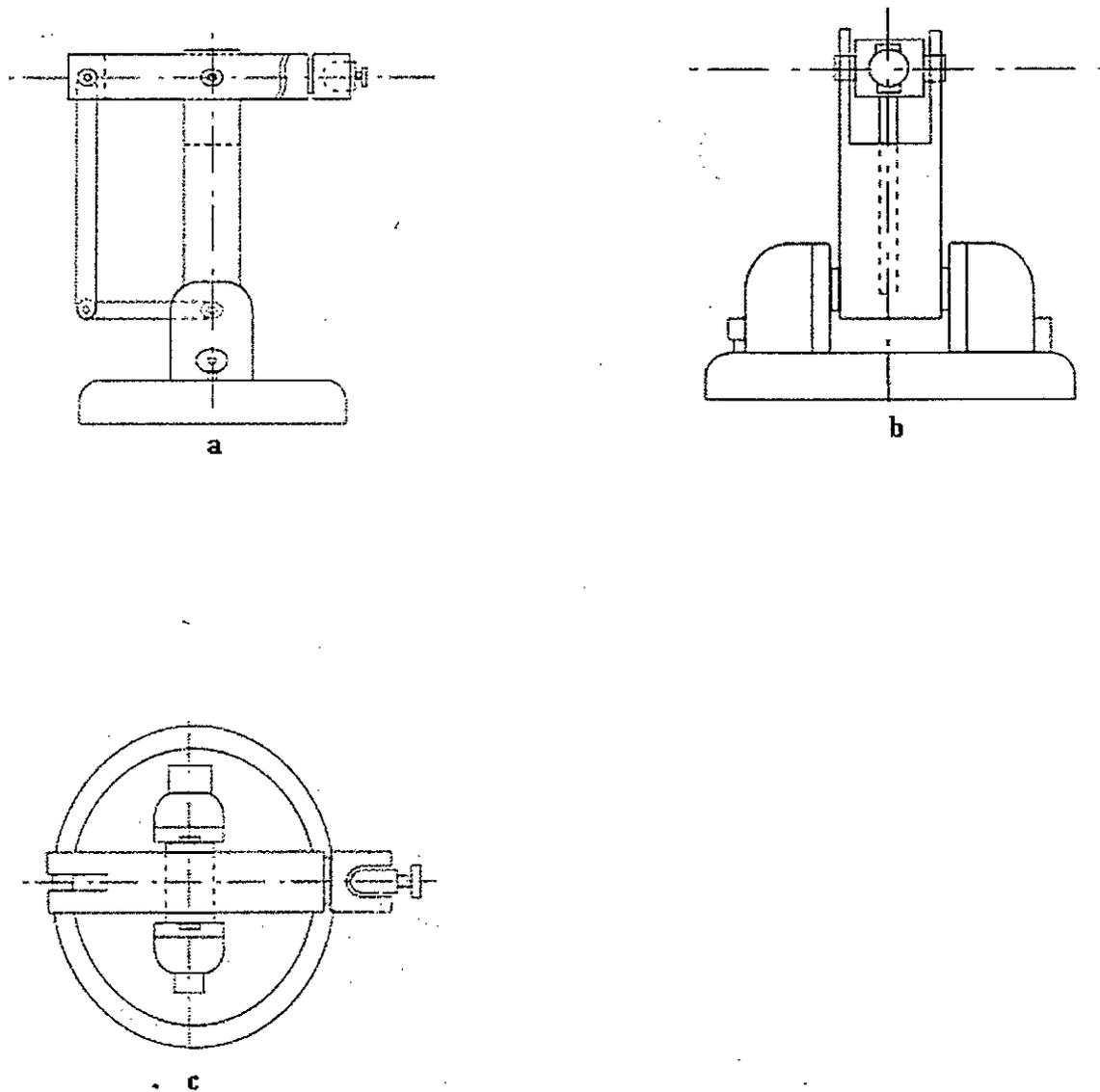


Fig. 1.9 Trois vues différentes de la structure.

a : Vue de face

b: Vue de droite

c: Vue d'en haut

1.7 Allure du volume de travail :

Ce robot ressemble à ceux de la famille **IRB** de la firme **ABB**. La forme de son espace de travail est donc similaire à celle du robot **IRB 1400** par exemple soit :

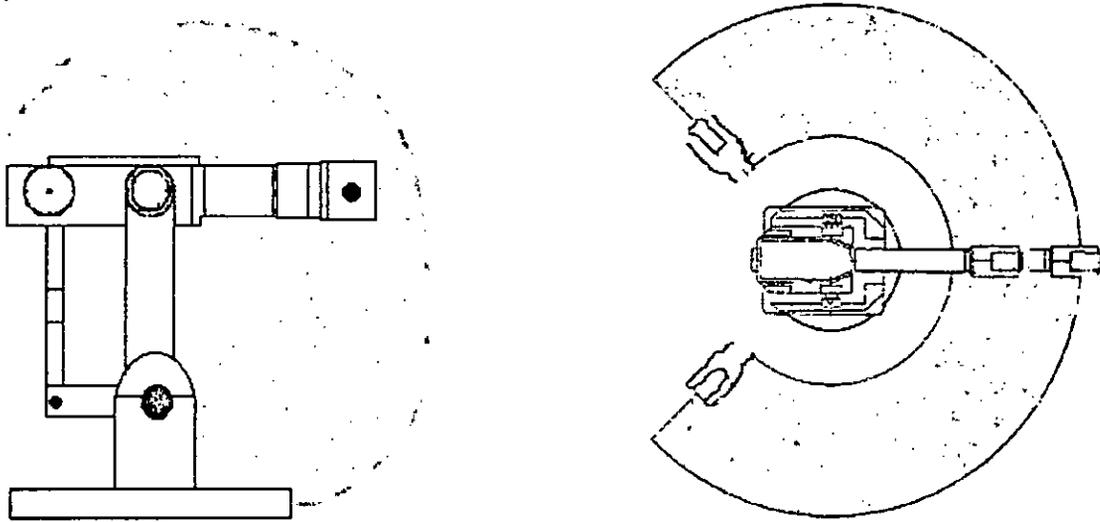


Fig.1.10 Volume du travail du robot à boucle plane

Remarque :

Les schémas donnés ci-dessus sont suffisants pour la suite du travail (élaboration des différents modèles), mais ne donnent pas d'indications sur l'aspect technologique. Cette tâche dépasse le cadre de ce travail et fait appel à des connaissances approfondies en mécanique de construction. Nous supposerons dans la suite que les moteurs et les réducteurs sont disposés de manière à garder le centre de gravité de chaque barre de la structure sur son axe de symétrie (figure ci-après)

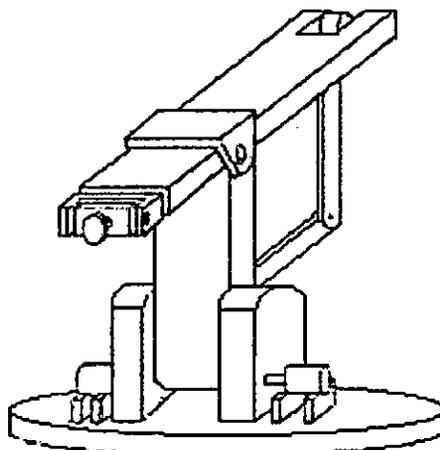


Fig. 1.11 Perspective de la structure.

1.8 Conclusion :

Dans ce premier chapitre nous avons essayé d'apporter des améliorations à la structure pour assurer une bonne rigidité et une symétrie partielle (au niveau de chaque barre) et globale (la structure lorsqu'elle est montée) afin que la modélisation puisse être simple et fiable. L'utilisation d'engrenage irréversible semble être la meilleure solution pour le problème de la stabilité statique. Néanmoins, il faut passer par la modélisation dynamique pour pouvoir faire un bon dimensionnement de la structure. Le dimensionnement est un problème de taille car il fait appel à des connaissances approfondies en mécanique de construction.

En fin, notons que ce type de structure est très utilisé dans l'industrie : fabrication d'automobile, soudage, manutention...ect.[4,9,15]

Chapitre 2 :
Modèles géométriques,
Direct et Inverse

2.1 Introduction :

La cinématique est la discipline qui traite le mouvement sans tenir compte des forces qui le génèrent. Elle met en jeu la position, la vitesse, l'accélération et toutes les dérivées d'ordre supérieur des variables décrivant la position d'un mobile. En conséquence, pour étudier la cinématique, nous devons connaître les propriétés géométriques et les équations temporelles du mouvement[9].

Dans ce chapitre, nous déterminons la position et l'orientation instantanées des barres constituant le robot. On associe à chaque corps i du mécanisme un repère orthonormé direct $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ noté R_i . Les repères particuliers sont celui de la base R_0 et, celui R_n ($n=6$) de l'organe terminal. On note θ_i $i=1...6$, les variables de positions angulaires des moteurs actionnant les articulations actives. Ces variables définissent la configuration instantanée du mécanisme. [7,11]

2.2 Modèle géométrique direct (MGD) :

Il exprime la position et l'orientation du repère R_{outil} lié à l'outil, relativement au repère fixe en fonction des variables articulaires motorisées θ_i du mécanisme. L'élément fondamental qui décrit la position et l'orientation d'un repère R_j d'origine O_j , dans un repère R_i peut se mettre sous la forme d'une matrice de dimension (4x4) appelée matrice de transformation homogène(d'autres approches existent)[9,17] :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i \overline{X}_j & {}^i \overline{Y}_j & {}^i \overline{Z}_j & {}^i \overline{O_i O_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.1$$

où les composantes des vecteurs sont mesurées dans R_i .

Dans cette matrice, la quatrième colonne est la représentation d'un vecteur en coordonnées homogènes (quatre composantes) [17].

La matrice (3,3) suivante :

$${}^i R_j = \begin{bmatrix} {}^i \overline{X}_j & {}^i \overline{Y}_j & {}^i \overline{Z}_j \end{bmatrix} \quad 2.2$$

représente la rotation entre les deux repères. Ses éléments sont les cosinus directeurs i.e. les cosinus des angles respectifs entre les vecteurs unitaires des deux repères : R_i, R_j . Pour spécifier une rotation cette matrice présente un nombre surabondant de paramètres (9), qui doivent être reliées par les six contraintes exprimants que le repère est orthonormé. On peut donc en pratique ne spécifier que trois paramètres, par exemple, les angles de lacets, tangage, et roulis $[\lambda, \theta, \rho]$ respectivement (fig.2.1).

la matrice de rotation est [17] :

$${}^j R = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \rho - \sin \lambda \sin \theta \sin \rho & -\sin \lambda \cos \theta & \cos \lambda \sin \rho + \sin \lambda \sin \theta \cos \rho \\ \sin \lambda \cos \rho + \cos \lambda \sin \theta \sin \rho & \cos \lambda \cos \theta & \sin \lambda \sin \rho - \cos \lambda \sin \theta \cos \rho \\ -\cos \theta \sin \rho & \sin \theta & \cos \theta \cos \rho \end{bmatrix} \quad 2.3$$

Notons qu'il y a 24 conventions pour la représentation de l'orientation d'un repère par rapport à un autre. On trouve ces conventions détaillées dans [9].

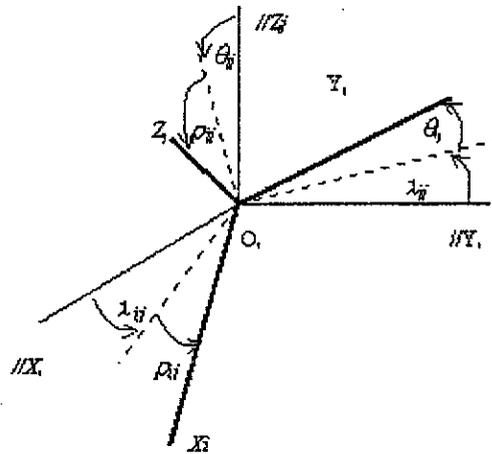


Fig. 2.1 Angles de lacet, tangage et roulis.

2.2.1 Obtention du MGD :

Pour une structure ouverte (ou série), dans le repère de la base, la position et l'orientation de l'élément terminal s'obtiennent par le produit des matrices (4x4), correspondant à la composition des changements de repères successifs le long de la chaîne

$${}^0_{outil}T = {}^0_1T {}^1_2T \dots {}^{n-1}_nT {}^n_{outil}T \quad 2.4$$

Il est usuel de représenter les matrices de transformations qui font passer d'un corps au suivant au moyen du formalisme de Denavit et Hartenberg modifié par Khalil [17,23]. La figure 2.2 montre les paramètres intervenant dans le transfère. Ces paramètres sont :

α_i angle entre Z_{i-1} et Z_i (rotation autour de X_{i-1});

a_{i-1} distance entre Z_{i-1} et Z_i le long de X_{i-1} ;

θ_i angle entre X_{i-1} et X_i (rotation autour de Z_i);

d_i distance entre X_{i-1} et X_i le long de Z_i .

La composition des transformations élémentaires conduisant du repère R_{i-1} au repère R_i conduit à la matrice de passage (composantes exprimées dans R_{i-1}) :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.5$$

Au cours de la modélisation, nous aurons besoin de la matrice inverse de ${}^i T$ c'est à dire ${}^j T$ qui sachant que la matrice ${}^j R$ est unitaire i.e. : $\det({}^j R) = 1$ et ${}^j R^{-1} = {}^j R^T = {}^j R$

S'écrit :

$${}^i T = \begin{bmatrix} {}^i R & : & {}^i P_j \\ \dots & : & \dots \\ 0 & : & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^j T = \begin{bmatrix} {}^j R & : & -{}^j R^T {}^i P_j \\ \dots & : & \dots \\ 0 & : & 1 \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Où ${}^i P_j$ est le vecteur position du repère j exprimé dans le repère i .

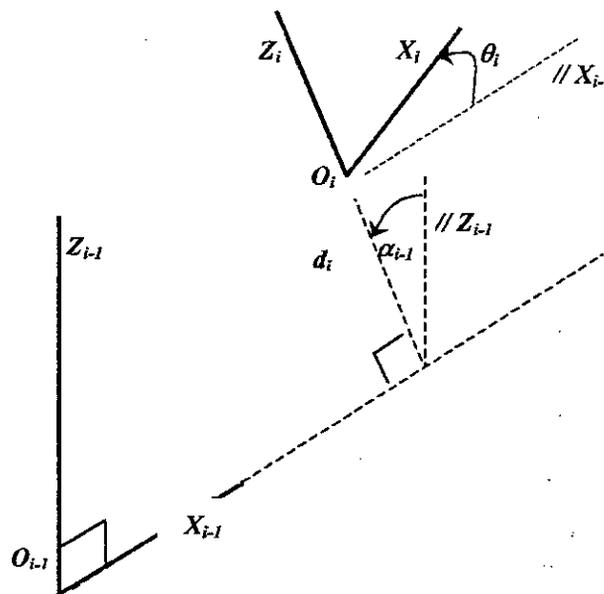


Fig.2.2 Les paramètres de Denavit- Hartenberg.

2.2.2 Robots manipulateurs avec boucle cinématique plane :

C'est le cas de la structure que nous étudions, et il est possible de décrire la situation de l'outil, par rapport à la base, par le produit des matrices de la chaîne principale (§ 2.2.3) comme pour une structure sérielle [9,17]. Mais certaines variables articulaires (paramètres θ_i de la formulation de Denavit et Hartenberg) ne sont pas directement actionnées par les moteurs et il faut les exprimer en fonction des θ_i actifs et porter le résultat dans les matrices de passage de la chaîne principale.

2.2.3 Calcul du MGD de la structure:

Afin de faciliter la compréhension des étapes du calcul, nous définissons ci-après les différents paramètres du porteur :

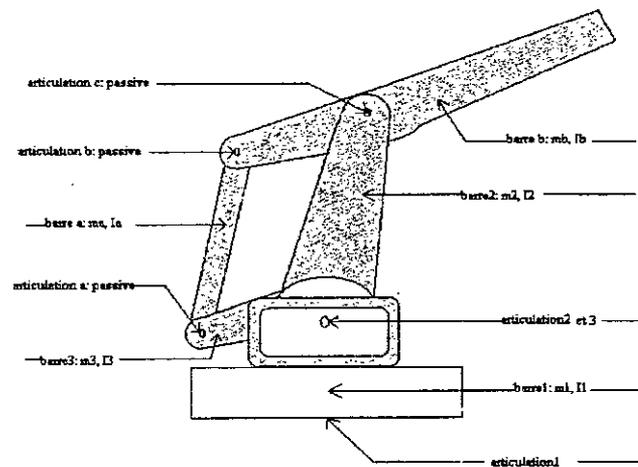


Fig.2.3 Définition des éléments du porteur

- Les articulations 2 et 3 sont indépendantes.
- Les 3 éléments restant (ceux du poignet), seront notés 4, 5 et 6 respectivement.
- P est le point d'intersection des axes du poignet.

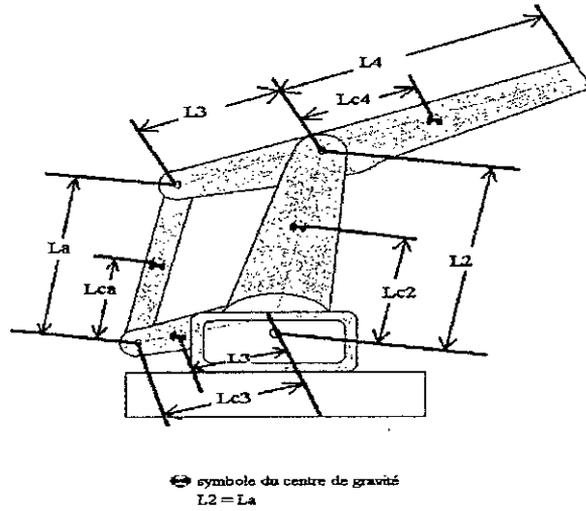


Fig.2.4. Paramétrage du porteur.

Ainsi, nous pouvons définir les axes du manipulateur comme dans la figure suivante :

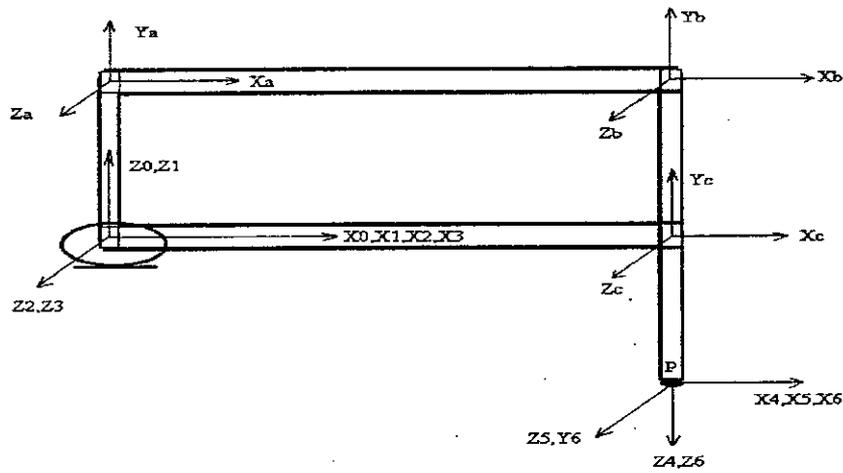


Fig.2.5 Axes du robot suivant les conventions DH

Les articulations 1, 2 et 3 font une rotation de θ_1, θ_2 et θ_3 respectivement, et la structure prend une nouvelle configuration :

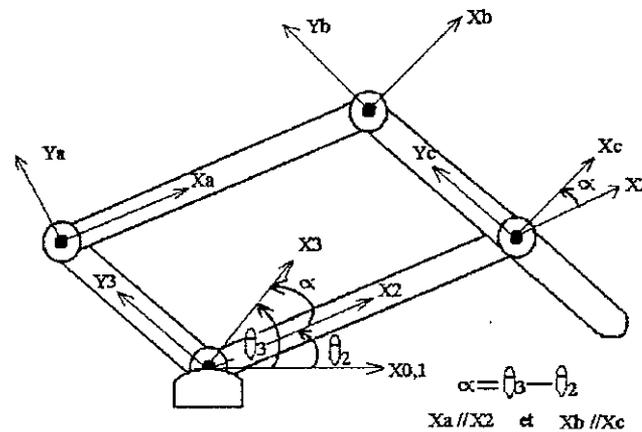


Fig.2.6 Configuration de la structure assurant la position.

Ce type de structure est dit "différentiel" car l'angle entre X_c et X_2 est de : $\alpha = \theta_3 - \theta_2$. Le diagramme suivant décrit la propagation des mouvements de la base vers l'effecteur, il met en évidence l'effet des deux chaînes, principale (1,2,c) et secondaire (1,3,a,b,c) sur la position du point P :

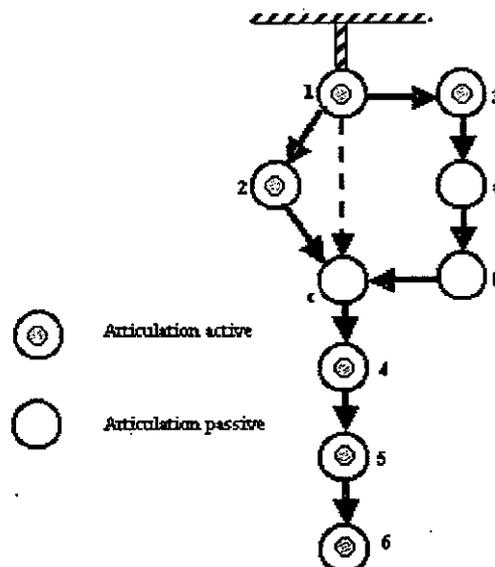


Fig.2.7 Propagation des mouvements de la structure.

i. Paramètres de D-H et transformations homogènes :

Les tableaux suivants définissent les paramètres de D.H de chaque chaîne, puis ceux résultant de la combinaison des deux mouvements.

- Chaîne principale : $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow c \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$;

	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i		α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1		1	0	0	θ_1
2	$\pi/2$	0	0	θ_2		3	$\pi/2$	0	θ_2
c	0	L_2	0	α		c	0	Translation*: [$L_2C\alpha, L_2S\alpha, 0$]	0

paramètres D-H pour chaque chaîne

*: la transformation homogène 3_0T ne peut pas être obtenue directement par la forme(2.5) générale de ${}^{i-1}_iT$, nous l'obtenons en écrivant la matrice d'orientation et le vecteur position séparément(2.6). C'est également le cas pour les transformations de la chaîne secondaire car les axes ne respectent pas les conventions D-H.

	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$\pi/2$	0	0	θ_2
C	0	L_4	0	$\alpha = \theta_3 - \theta_2$
4	$\pi/2$	0	L_4	θ_4
5	$-\pi/2$	0	0	θ_5
6	$\pi/2$	0	0	θ_6

Paramètres D-H pour la chaîne principale.

Par suite nous déterminons les transformations homogènes en injectant ces paramètres dans la formule (2.5) mais en remplaçant $\sin(\theta_i)$ et $\cos(\theta_i)$ par S_i et C_i respectivement de sorte que :

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1}d_i \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 {}^0_1T &= \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2_cT &= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & L_2 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^c_4T &= \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_4 \\ S4 & C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4_5T &= \begin{bmatrix} C5 & -S5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S5 & -C5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^5_6T &= \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S6 & C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

- Chaîne secondaire : 1 → 3 → a → b → c → ...6;

Celles-ci ne sont pas déterminées par les conventions D-H (donc par 2.5) car les axes ne correspondent pas, mais plutôt connaissant la matrice d'orientation des deux repères et leur position relative(2.6) ; nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 {}^1_3T &= \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^3_aT &= \begin{bmatrix} C\alpha & S\alpha & 0 & 0 \\ -S\alpha & C\alpha & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 {}^a_bT &= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & L_2 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^b_cT &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarque :

A cause de la chaîne fermée en c les transformations que nous avons élaborées doivent vérifier une contrainte mathématique due à cette contrainte mécanique, à savoir :

$${}^1T_c = {}^1T_2 \cdot {}^2T_c = {}^1T_3 \cdot {}^3T_a \cdot {}^aT_b \cdot {}^bT_c T \quad 2.9.a$$

C'est le cas !, et nous avons :

$${}^1T_c = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & L_2 C2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S3 & C3 & 0 & L_2 S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.9.b$$

Ceci peut être un moyen de vérification des calculs.

Calculs intermédiaires :

Dans la suite des calculs nous aurons besoin de :

$${}^0T_6 = \underbrace{{}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_c}_{{}^0T_c} \times \underbrace{{}^cT_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6}_{{}^cT_6}$$

$${}^0T_c = \begin{bmatrix} C1C3 & -C1S3 & S1 & L_2 C1C2 \\ S1C3 & -S1S3 & -C1 & L_2 S1C2 \\ S3 & C3 & 0 & L_2 S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.10$$

nous aurons aussi besoin de :

$${}^cT_0 = ({}^0T_c)^{-1} = \begin{bmatrix} C1C3 & S1C3 & S3 & -L_2 C\alpha \\ -C1S3 & -S1S3 & C3 & L_2 S\alpha \\ S1 & -C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.11$$

$${}^cT_6 = \begin{bmatrix} C4C5C6 - S4S6 & -C4C5S6 - S4C6 & C4S5 & 0 \\ S5C6 & -S5S6 & -C5 & -L4 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & S4S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.12$$

en fin :

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} C1C3 & -C1S3 & S1 & L_2C1C2 \\ S1C3 & -S1S3 & -C1 & L_2S1C2 \\ S3 & C3 & 0 & L_2S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

2.13

$$\begin{bmatrix} C4C5C6-S4S6 & -C4C5S6-S4C6 & C4S5 & 0 \\ S5C6 & -S5S6 & -C5 & -L4 \\ S4C5C6+C4S6 & -S4C5S6+C4C6 & S4S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$r_{11} = [C3 \cdot (C4 \cdot C5 \cdot C6 - S4 \cdot S6) - S3 \cdot S5 \cdot C6] \cdot C1 + S1 \cdot (S4 \cdot C5 \cdot C6 + C4 \cdot S6)$$

$$r_{12} = [C3 \cdot (-C4 \cdot C5 \cdot S6 - S4 \cdot C6) + S3 \cdot S5 \cdot S6] \cdot C1 + S1 \cdot (-S4 \cdot C5 \cdot S6 + C4 \cdot C6)$$

$$r_{13} = (C3 \cdot C4 \cdot S5 + S3 \cdot C5) \cdot C1 + S1 \cdot S4 \cdot S5$$

$$r_{21} = [C3 \cdot (C4 \cdot C5 \cdot C6 - S4 \cdot S6) - S3 \cdot S5 \cdot C6] \cdot S1 + (-S4 \cdot C5 \cdot C6 - C4 \cdot S6) \cdot C1$$

$$r_{22} = [C3 \cdot (-C4 \cdot C5 \cdot S6 - S4 \cdot C6) + S3 \cdot S5 \cdot S6] \cdot S1 + (S4 \cdot C5 \cdot S6 - C4 \cdot C6) \cdot C1$$

$$r_{23} = (C3 \cdot C4 \cdot S5 + S3 \cdot C5) \cdot S1 - C1 \cdot S4 \cdot S5$$

$$r_{31} = S3 \cdot (C4 \cdot C5 \cdot C6 - S4 \cdot S6) + C3 \cdot S5 \cdot C6$$

$$r_{32} = S3 \cdot (-C4 \cdot C5 \cdot S6 - S4 \cdot C6) - C3 \cdot S5 \cdot S6$$

$$r_{33} = S3 \cdot C4 \cdot S5 - C3 \cdot C5$$

$$r_{14} = C1 \cdot (L_4 \cdot S3 + L_2 \cdot C2) = P_x$$

$$r_{24} = S1 \cdot (L_4 \cdot S3 + L_2 \cdot C2) = P_y$$

$$r_{34} = L_2 \cdot S2 - L_4 \cdot C3 = P_z$$

ii. Position :

Ayant trouvé la matrice 0T , les composantes de la 4^{ème} colonne donnent la position du porteur (point P auquel sera attaché un effecteur), soit :

$$\begin{cases} X = C1 \cdot (L_2 C2 + L_4 S3) \\ Y = S1 \cdot (L_2 C2 + L_4 S3) \\ Z = L_2 S2 - L_4 C3 \end{cases} \quad 2.14$$

iii. Orientation :

Il s'agit de trouver les expressions des angles d'Euler $(Z, X, Z)_{\psi, \beta, \varphi}$ à partir de la matrice d'orientation 0A du repère R_6 par rapport au repère fixe R_0 . Pour ce faire, nous devons comparer la forme numérique de 0A et sa forme littérale qui s'écrit d'une manière générale [9,13] :

$${}^i_j A = \begin{bmatrix} C\psi C\varphi - S\psi C\beta S\varphi & -C\psi S\varphi - S\psi C\beta C\varphi & S\psi S\beta \\ S\psi C\varphi + C\psi C\beta S\varphi & -S\psi S\varphi + C\psi C\beta C\varphi & -C\psi S\beta \\ S\beta S\varphi & S\beta C\varphi & C\beta \end{bmatrix} \quad 2.15$$

Cas 1 : $\left| \frac{{}^0A_{33}}{S\beta} \right| \neq 1$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{{}^0A_{33}}{S\beta} \right), \text{ avec } 0 < \gamma < \pi \Rightarrow \beta = \pm \gamma$$

on a en suite :

$$S\psi = \frac{{}^0A_{13}}{S\beta}, \quad C\psi = \frac{-{}^0A_{23}}{S\beta} \Rightarrow \psi = \text{ATAN2} \left(\frac{{}^0A_{13}}{S\beta}, \frac{-{}^0A_{23}}{S\beta} \right) \quad 2.16$$

de même on trouve :

$$\varphi = \text{ATAN2} \left(\frac{{}^0A_{31}}{S\beta}, \frac{{}^0A_{32}}{S\beta} \right) \quad 2.17$$

Nous avons donc deux triplets de solutions :

- 1) $\beta = \beta_1 = +\gamma \Rightarrow \psi = \psi_1, \varphi = \varphi_1.$
- 2) $\beta = \beta_2 = -\gamma \Rightarrow \psi = \psi_2 = \psi_1 + \pi, \varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + \pi$

Cas 2 : $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{33} \right| = 1$

La situation est dite singulière[14] car, $\beta = 0$ ou π et (φ, ψ) ne sont pas déterminés indépendamment mais leur somme ou leur différence. Ainsi :

✓ Pour, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{33} = 1$; $\beta = 0$; et la 1^{ière} colonne de $\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A$ donne :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{11} = C\psi C\varphi - S\psi S\varphi = C(\psi + \varphi) \\ \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{21} = S\psi C\varphi + C\psi S\varphi = S(\psi + \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi + \varphi = ATAN2(\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{21}, \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{11}) \quad 2.18$$

✓ Et pour, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{33} = -1$; $\beta = \pi$ et nous obtenons de la même manière :

$$\psi - \varphi = ATAN2(\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{21}, \begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} A_{11}) \quad 2.19$$

Remarque : position de l'effecteur

Le poignet du robot est utilisé pour porter une pièce ou un outil avec lequel on exerce un effort sur l'environnement. Si on se trouve dans une station de travail, on ne doit pas se contenter de la connaissance de la pose de l'outil relativement à la base. Une description de la position et l'orientation de l'outil dans toute la station est nécessaire. Soit R_s le repère de la station, $R_B = R_0$, $R_p = R_4$, R_{OU} ceux de la base, poignet et outil respectivement. On peut alors déduire la pose de l'outil en écrivant que[9] : ${}^S T = {}^B T^{-1} {}^B T_P {}^P T_{OU}$.

2.2.4 Conclusion :

Arrivant à cette étape, on peut écrire le MGD sous la forme d'une application non linéaire de la forme :

$$\mathbf{X} = f(\boldsymbol{\theta}) \quad 2.20$$

où \mathbf{X} est le vecteur des variables opérationnelles et $\boldsymbol{\theta}$ celui des variables articulaires.

Le formalisme D-H est le plus adéquat car d'une part les transformations homogènes sont directement obtenues et peuvent facilement être programmées dans le cas où l'on utiliserait un logiciel de calcul symbolique tel que : Maple, Mathematica, Mathcad Professional...etc. Et, d'autre part, pour la structure qu'on étudie, les paramètres a_{i-1} et d_i sont presque tous nuls et $\alpha_{i-1} = 0$ ou $\pm\pi/2$ ce qui rend le calcul plus aisé.

En général, c'est \mathbf{X} qui est connu et on veut connaître quelles sont les variations articulaires qui vont le générer ; ce qui nécessite l'inversion du MGD (2.20) lorsque c'est possible. On obtient alors ce que l'on appelle : MGI Modèle Géométrique Inverse.

2.3 Modèle géométrique inverse(MGI) :

Dans la section précédente, nous avons résolu le problème dans le sens directe, c'est à dire trouver les relations qui donnent la position et l'orientation de l'effecteur par rapport au repère fixe en fonction de l'ensemble des variables articulaires. Dans cette section nous traitons le problème inverse qui est relativement plus difficile pour ce genre de robots[9,18].

Problème : pour une pose(position et orientation) donnée de l'effecteur, quelles sont les valeurs des variables articulaires correspondantes ? La réponse à cette question est assurée par le MGI.

2.3.1 Détermination de θ_1 , θ_2 et θ_3

Pour déterminer ces trois paramètres, nous devons résoudre le système d'équations non linéaires(2.14) connaissant la position du point $P(X, Y, Z)$. Il n'y a pas de méthode systématique pour la résolution de tels systèmes, mais dans le cas particulier où les axes du poignet sont concourants, il y a toujours une solution [3,9,15].

On peut faire une première simplification en éliminant θ_1 soit :

$$\rho = X^2 + Y^2 + Z^2 = L_4^2 + L_2^2 + 2L_4L_2(S_3C_2 - S_2C_3) = L_4^2 + L_2^2 + 2L_4L_2 S(3-2) = L_4^2 + L_2^2 + 2L_4L_2 S\alpha$$

Avec la troisième équation il vient en posant $R = (\rho - L_4^2 - L_2^2)/2L_4L_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_3C_2 - S_2C_3 = R \\ L_2S_2 - L_4C_3 = Z \\ \text{et} \\ \left. \begin{array}{l} S_2^2 + C_2^2 = 1 \\ S_3^2 + C_3^2 = 1 \end{array} \right\} \text{équations de contraintes} \end{array} \right. \quad 2.21$$

Une façon de résoudre le système 2.21 c'est de procéder par substitution, ce qui donne à la fin une seule équation à une seule indéterminée mais fortement non linéaire. Nous avons préféré utiliser un logiciel de calcul symbolique pour réaliser cette tâche :

- *Le Mathcad 2000 professional* n'a pas pu répondre.
- *Le Maple V* a donné plusieurs solutions selon la formulation du problème.

La solution la plus intéressante est donnée ci-après (nous retenons uniquement l'expression de $S2$ et $C3$ car $C2$ et $S3$ se déduisent des équations de contraintes et il n'est pas utile d'utiliser les expressions compliquées de Maple V. Cette solution est détaillée dans l'annexe B.

$$\left(\begin{array}{l} \lambda \text{ est un paramètre solution de l'équation : } \rho\lambda^2 - 2Z(RL_4 + L_2)\lambda + L_4^2(R^2 - 1) + Z^2 = 0 ; \\ S2 = \lambda \text{ et } C3 = (L_2S2 - Z)/L_4 ; \text{ puis } C2 = \pm\sqrt{1 - S2^2} \quad S3 = \pm\sqrt{1 - C3^2} \text{ donc :} \\ \theta_2 = ATAN2(S2, C2) \text{ et } \theta_3 = ATAN2(S3, C3) \end{array} \right) \quad 2.22$$

Cette méthode donne deux solutions pour θ_2 et deux solutions pour θ_3 et θ_1 se détermine d'une manière unique des équations de X et Y de 2.14 :

$$C1 = \frac{X}{L_4S3 + L_2C2} ; S1 = \frac{Y}{L_4S3 + L_2C2} \Rightarrow \theta_1 = ATAN2(S1, C1) \quad 2.23$$

Remarque importante :

Dans le cas d'un porteur série, tel que le PUMA par exemple [17], le MGI donne pour une même position du point P , 4 configurations possibles, parmi lesquelles sera choisie une configuration optimale au sens d'un critère donné, une course minimale par exemple [7]. Dans le cas d'un porteur comportant une chaîne fermée comme le différentiel que nous étudions, la situation diffère un peu : mathématiquement, on trouve effectivement quatre solutions, mais qui ne sont pas toutes réalisable physiquement (considérations mécaniques) à cause- entre autres - des plages de variations restreintes des variables articulaires [6].

2.3.2 Exemple numérique :

Supposons : $L_2 = L_4 = 0,4$ m et calculons ; $\theta_1 \theta_2 \theta_3$ pour $Y = 0, X = Z = 0,4$ m.

Solution :

$$\rho = X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,32 \Rightarrow R=0 \Rightarrow 0,32(\lambda^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

• $\lambda = 0$:

$$\Rightarrow S_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \pm 1 \Rightarrow \theta_2 = 0 \text{ ou } \pi$$

$$C_3 = \lambda - 1 = -1 \Rightarrow S_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = \pi$$

Pour les deux couples (θ_2, θ_3) obtenus, on calcul θ_1 et on obtient:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, \pi) \text{ ou } (\pi, \pi, \pi)$$

• $\lambda = 1$:

$$\Rightarrow S_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi/2$$

$$C_3 = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow S_3 = \pm 1 \Rightarrow \theta_3 = \pm \pi/2$$

On obtient également deux triplets de solutions soit :

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \pi/2, \pi/2) \text{ ou } (\pi, \pi/2, -\pi/2)$$

Nous obtenons donc quatre solutions comme pour le porteur série du PUMA, mais qui ne sont pas toutes réalisables, et il va falloir choisir laquelle nous utilisons dans la commande de la structure. Toutes les solutions sont regroupées dans le tableau suivant :

	λ			
	0		1	
θ_1	0	π	π	0
θ_2	0	π	$\pi/2$	$\pi/2$
θ_3	π	π	$-\pi/2$	$\pi/2$
Solution	<i>rejetée</i>	<i>rejetée</i>	<i>rejetée</i>	<i>acceptée</i>
Raison	<i>Butée mécanique</i>	<i>Butée mécanique</i>	<i>Butée mécanique</i>	<i>L'unique solution</i>

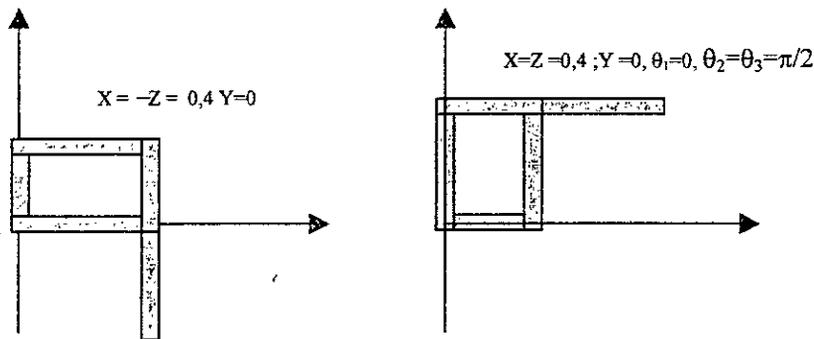


Fig. 2.8 Configuration donnée par l'unique solution du MGI.

2.3.3 Détermination de θ_4 , θ_5 et θ_6 :

Connaissant la pose vers laquelle on veut aller, on peut construire la matrice de transformation homogène 0_6T et l'écrire sous une forme numérique :

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous voulons avoir la matrice c_6T sous une forme numérique. Pour cela, nous utilisons les formules (2.10 et 2.11) donnant c_6T et son inverse 0_6T :

$${}^c_6T = ({}^0_6T)^{-1} \cdot {}^0_6T = {}^c_0T \cdot {}^0_6T = \begin{bmatrix} C1C3 & S1C3 & S3 & -L_2C\alpha \\ -C1S3 & -S1S3 & C3 & L_2S\alpha \\ S1 & -C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.24

$$= \begin{bmatrix} r^*_{11} & r^*_{12} & r^*_{13} & r^*_{14} \\ r^*_{21} & r^*_{22} & r^*_{23} & r^*_{24} \\ r^*_{31} & r^*_{32} & r^*_{33} & r^*_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$r_{11}^* = r_{11}C1C3 + r_{21}S1C3 + r_{31}S3; r_{12}^* = r_{12}C1C3 + r_{22}S1C3 + r_{32}S3$$

$$r_{13}^* = r_{13}C1C3 + r_{23}S1C3 + r_{33}S3$$

$$r_{21}^* = -r_{11}C1S3 - r_{21}S1S3 + r_{31}C3; r_{22}^* = -r_{12}C1S3 - r_{22}S1S3 + r_{32}C3$$

$$r_{23}^* = -r_{13}C1S3 - r_{23}S1S3 + r_{33}C3$$

$$r_{31}^* = r_{11}S1 - r_{21}C1; r_{32}^* = r_{12}S1 - r_{22}C1; r_{33}^* = r_{13}S1 - r_{23}C1$$

$$r_{14}^* = r_{14}C1C3 + r_{24}S1C3 + r_{34}S3 - L_2C\alpha; r_{24}^* = -r_{14}C1S3 - r_{24}S1S3 + r_{34}C3 + L_2S\alpha$$

$$r_{34}^* = r_{14}S1 - r_{24}C1$$

En comparant avec la forme littérale donnée par (2.12), on peut écrire :

- si $|r_{23}^*| \neq 1$ alors $S5 \neq 0$

$$C5 = -r_{23}^* \Rightarrow S5 = \pm \sqrt{1 - C5^2} \Rightarrow \theta_5 = ATAN2(S5, C5) \quad \text{deux solutions} \quad 2.25$$

en suite :

$$C4 = \frac{r_{13}^*}{S5}; S4 = \frac{r_{33}^*}{S5} \Rightarrow \theta_4 = ATAN2(S4, C4) \quad 2.26$$

en fin :

$$C6 = \frac{r_{21}^*}{S5}; S6 = \frac{-r_{22}^*}{S5} \Rightarrow \theta_6 = ATAN2(S6, C6) \quad 2.27$$

Nous avons donc deux triplets de solutions pour le poignet, deux pour θ_5 et un couple (θ_4, θ_6) .

- si $|r_{23}^*| = 1$ alors $S5 = 0$

$$\underline{C5=1}$$

$$C4C6 - S4S6 = r_{11}^* = C(\theta_4 + \theta_6)$$

$$S4C6 + C4S6 = r_{31}^* = S(\theta_4 + \theta_6); \Rightarrow \theta_4 + \theta_6 = ATAN2(r_{31}^*, r_{11}^*) \quad 2.28$$

$$C5 = -1$$

$$-C4C6 - S4S6 = r_{11}^* = -C(\theta_4 - \theta_6)$$

$$-S4C6 + C4S6 = r_{31}^* = S(\theta_4 - \theta_6); \Rightarrow \theta_6 - \theta_4 = \text{ATAN2}(r_{31}^*, -r_{11}^*) \quad 2.29$$

2.3.4 Problèmes du MGI :

Lors de la résolution du problème inverse, on rencontre en générale, les problèmes suivant :

1) problème de géométrie :

Si nous choisissons un point (X, Y, Z) n'appartenant pas à l'espace atteignable du robot, le système 2.21 ne possède pas de solutions. En effet, si par exemple on désire aller vers un point pour lequel : $\rho = X^2 + Y^2 + Z^2$ et $R = (\rho - L_4^2 - L_2^2) / 2L_4L_2 > 1$; alors la 1^{ière} équation du système 2.21 n'est pas résolvable.

2) Problème de mécanique :

Lorsque nous avons résolu le problème du point de vue géométrie, nous avons supposé que les variables articulaires peuvent effectuer une rotation de 360°. Dans la réalité, pour des raisons liées à la construction mécanique du robot, θ_1 est souvent voisin de cette valeur mais ce n'est pas le cas pour θ_2 et θ_3 . En conséquence, le volume atteignable par P et le nombre de solutions réalisables seront réduits.

3) Problème mathématique :

C'est le problème de singularités. Supposons que $X=Y=0$ et que Z est quelconque.

L'équation $Z = L_2C2 + L_4S3 = 0$ présente une indétermination quant à θ_1 i.e. On a une infinité de solutions.

Ces problèmes doivent être pris en considération lors de la programmation des tâches du robot. Il n'est pas nécessaire de continuer les calculs si on connaît que le point désiré sort de l'espace atteignable. Les problèmes de butées mécaniques peuvent être gérés soit d'une manière *Hard* par des fins de course par exemple, soit d'une manière *Soft* via la programmation.

2.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons déterminé pour le robot hybride, les modèles géométriques direct et inverse, c'est à dire, nous avons élaboré les moyens de passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel et inversement. Pour le MGI nous avons mis en évidence les problèmes qui doivent être pris en considération lors de la programmation d'une tâche pour le robot.

En faisant les calculs, nous n'avons pas trouvé une grande différence entre nos résultats et ceux que nous trouvons dans la littérature concernant les robots de type série[1,14,19] La boucle fermée que contient la structure n'influe pas grandement sur sa géométrie du point de vue mathématique, mais elle influe sur son espace de travail en particulier.

Chapitre 3 :
Vitesse et Matrice
Jacobienne

3.1 Introduction :

le modèle géométrique que nous avons élaboré dans le chapitre précédent, pose deux grandes catégories de problèmes[7] :

- 1) La non-linéarité de l'équation $X=f(\theta)$ entraîne des difficultés d'obtention du transformateur de coordonnées inverse. Le robot est soumis à la restriction d'être résolvable.
- 2) Si on se contente des modèles géométriques pour faire la commande du robot, il s'avère qu'on ne contrôle pas la vitesse de déplacement du robot. Dans les applications courantes, il est très important de connaître la durée d'exécution d'une tâche ou plus exactement d'en être maître. D'où la nécessité de contrôler les vitesses.

Dans ce chapitre, nous allons considérer la façon avec laquelle se déplace le manipulateur d'un point à un autre. Pour ce faire, nous devons déterminer le modèle cinématique(ou encore différentiel[4]) du robot qui nécessite le calcul des vitesses linéaire et angulaire de chaque barre le constituant. Les résultats, permettrons d'exprimer les vitesses de l'espace opérationnel en fonction de celles de l'espace articulaire(modèle cinématique direct MCD) sous une forme linéaire qui met en évidence ce qu'on appelle «la matrice jacobienne du robot». L'inversion de cette matrice jacobienne, lorsque cela est possible, permet d'exprimer les vitesses articulaires en fonction des vitesses opérationnelles(modèle cinématique inverse MCI). Lorsque l'inversion n'est pas possible, c'est à dire que le déterminant de la jacobienne est nul, on se trouve dans une situation dite «singulière».

3.2 Modèle cinématique direct MCD :

Ce modèle décrit les vitesses de l'organe terminal en fonction des dérivées, par rapport au temps, des variables actives. La vitesse instantanée du corps solide qui constitue l'organe terminal relativement à la base est entièrement déterminée par la vitesse :

$$\dot{\vec{O}}_{outil} = \frac{d\vec{O}_0\vec{O}_{outil}}{dt} \quad 3.1$$

du point de référence de l'organe terminal par rapport au repère de la base, et par la vitesse de rotation instantanée ${}^0[\vec{\Omega}_{outil}] = {}^0[\vec{\Omega}_n]$ de cet organe terminal .

Il faut noter que les composantes de ce vecteur ne sont pas les dérivées par rapport au temps, de vraies variables d'orientation, comme les angles de roulis, tangage et lacet bien qu'elle leur

soient liées. Il en est de même des cosinus directeurs de la matrice d'orientation de l'organe terminal. Le choix de la vitesse de rotation instantanée permet dans un premier temps de s'affranchir d'un quelconque ensemble de variables d'orientation[7].

3.2.1 Obtention du MCD :

Dans le cas d'une structure sérielle, Les vitesses de l'organe terminal sont obtenues par composition des vitesses des corps constituant la chaîne cinématique. Si toutes les articulations sont rotides, nous appliquons l'algorithme suivant[9] :

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}Z_{i+1} \\ {}^{i+1}v_{i+1} &= {}^{i+1}R \cdot ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1}) \end{aligned} \quad 3.2$$

où :

${}^{i+1}R = ({}_{i+1}^i R)^T$ = matrice d'orientation du repère R_{i+1} par rapport au repère R_i .

${}^i v_i$ = vitesse linéaire du repère R_i par rapport au repère fixe R_0 exprimée dans R_i .

${}^i \omega_i$ = vitesse de rotation du repère R_i par rapport au repère fixe R_0 exprimée dans R_i .

${}^i P_{i+1}$ = vecteur position du repère R_{i+1} par rapport au repère R_i .

Les équations (3.2), appliquées successivement depuis la base jusqu'à l'extrémité de la chaîne ($i=0 \dots 5$), permettent d'exprimer les vitesses de l'organe terminal en fonction des dérivées des variables de configuration. Sous forme matricielle, on a :

$${}^0 \begin{bmatrix} \dot{O}_n \\ \dot{\Omega}_n \end{bmatrix} = {}^0 J(Q) \cdot \dot{Q} \quad 3.3$$

Avec ${}^0 J$ matrice de dimensions (6, n), c'est-à-dire (6, 6) pour un robot non redondant ;

Q vecteur - matrice colonne (n,1) dont les composantes sont les θ_i .

La matrice ${}^0 J$ est fonction des θ_i puisque les équations qui permettent de calculer les vitesses dans le repère de la base font intervenir les matrices de passage ${}^{i-1}T$ qui contiennent ces variables de configuration.

Le membre de droite de l'équation(3.3) n'est autre que le vecteur "vitesse des coordonnées opérationnelles". On obtient ainsi finalement une relation de la forme :

$$\dot{X} = J(Q) \cdot \dot{Q} \quad 3.4$$

$J(Q)$ est ainsi la matrice *jacobienne* de la fonction vectorielle f qui définit le modèle géométrique direct(2.20) $X=f(Q)$ quand il existe explicitement.

3.2.2 Structure contenant une boucle plane :

Comme il a été écrit plus haut (§ 2.2.2), il existe une chaîne principale qui conduit de la base vers l'extrémité, mais alors certaines articulations de cette chaîne sont passives (non motorisées directement). Il est cependant possible d'écrire un modèle cinématique direct en fonction de toutes les variables articulaire, motorisées ou non, puis d'utiliser les relations entre les variables des articulations passives et les coordonnées θ_i motrices, ainsi que leurs dérivées, pour "éliminer" les première et obtenir une matrice jacobienne comme dans l'équation (3.4).

3.2.3 Calcul du MCD de la structure :

Ayant trouvé toutes les transformations ${}^i T$, dans le chapitre précédent, on calcul les vitesses de chaque élément de la structure par les formules(3.2). Les résultats de l'application de ces formules sont les suivant :

1) Porteur.

i. Pour la chaîne principale : 0,1,2, c :

$i=0$

$$\text{repère } R_0 \text{ fixe} \Rightarrow {}^0\omega_0 = {}^0v_0 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 3.5$$

$$\Rightarrow {}^1\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T \text{ et } {}^1v_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 3.6$$

$i=1$

$${}^2\omega_2 = [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T \text{ et } {}^2v_2 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad 3.7$$

$i=c$

$${}^c\omega_c = [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_3]^T \text{ et } {}^c v_c = [L_2 S\alpha\dot{\theta}_2 \ L_2 C\alpha\dot{\theta}_2 \ -L_2 C2\dot{\theta}_1]^T \quad 3.8$$

ii. Pour la chaîne secondaire 0,1,3, a, b, c:

$i=0,1$ mêmes résultats.

$i=1$

$${}^3\omega_3 = [S3\dot{\theta}_1 \quad C3\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_3]^T \text{ et } {}^3v_3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad 3.9$$

$i=3$

$${}^a\omega_a = [S2\dot{\theta}_1 \quad C2\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T \text{ et } {}^av_a = [-L_3C\alpha\dot{\theta}_3 \quad -L_3S\alpha\dot{\theta}_3 \quad L_3S3\dot{\theta}_1]^T \quad 3.10$$

$i=a$

$${}^b\omega_b = [S3\dot{\theta}_1 \quad C3\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_3]^T \text{ et } {}^bv_b = [L_2S\alpha\dot{\theta}_2 - L_3\dot{\theta}_3 \quad L_2C\alpha\dot{\theta}_2 \quad (L_3S3 - L_2C2)\dot{\theta}_1]^T \quad 3.11$$

$i=b$

$${}^c\omega_c = [S3\dot{\theta}_1 \quad C3\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_3]^T \text{ et } {}^cv_c = [L_2C\alpha\dot{\theta}_2 \quad L_2S\alpha\dot{\theta}_2 \quad -L_2C2\dot{\theta}_1]^T \quad 3.12$$

Pour le point d'intersection des deux chaînes principale et secondaire(c), nous retrouvons le même résultat ; ce qui vérifie les contraintes(2.9.a)

Remarque :

Pour tester la validité des résultats concernant le calcul des vitesses des éléments du porteur en particulier, on peut utiliser le principe de super position. En effet, ce dernier est pris en considération d'une manière implicite lorsqu'il s'agit d'une structure sérielle (formules 3. 2). Pour notre structure, la vérification doit se faire en particulier en le point c où se manifeste l'effet des deux chaînes principale et secondaire. Ce calcul est présenté dans l'annexe C.

2) Poignet :

$i=c$

$${}^4\omega_4 = \begin{bmatrix} S3C4\dot{\theta}_1 + S4\dot{\theta}_3 \\ -S3S4\dot{\theta}_1 + C4\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 - C3\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^4v_4 = \begin{bmatrix} L_2C4S\alpha\dot{\theta}_2 + L_4C4\dot{\theta}_3 - S4(L_2C2 + L_4S3)\dot{\theta}_1 \\ -L_2S4S\alpha\dot{\theta}_2 - L_4S4\dot{\theta}_3 - C4(L_2C2 + L_4S3)\dot{\theta}_1 \\ -L_2C\alpha\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 3.13$$

$i=4$

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} (S3C4C5 + C3S5)\dot{\theta}_1 + S4C5\dot{\theta}_3 - S5\dot{\theta}_4 \\ (-S3C4S5 + C3C5)\dot{\theta}_1 - S4S5\dot{\theta}_3 - C5\dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 + C4\dot{\theta}_3 - S3S4\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } {}^5v_5 = \begin{bmatrix} [-S4C5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 + [L_2(C4C5S\alpha + S5C\alpha)]\dot{\theta}_2 + (L_4C4C5)\dot{\theta}_3 \\ [S4S5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 + [L_2(-C4S5S\alpha + C5C\alpha)]\dot{\theta}_2 - (L_4C4S5)\dot{\theta}_3 \\ [-C4(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 - (L_2S4S\alpha)\dot{\theta}_2 - (L_4S4)\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad 3.14$$

$i=5$

$${}^6\omega_6 = \begin{bmatrix} [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]\dot{\theta}_1 + (S4C5C6 + C4S6)\dot{\theta}_3 - S5C6\dot{\theta}_4 + S6\dot{\theta}_5 \\ [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]\dot{\theta}_1 + (-S4C5S6 + C4C6)\dot{\theta}_3 + S5S6\dot{\theta}_4 + C6\dot{\theta}_5 \\ (S3C4S5 - C3C5)\dot{\theta}_1 + S4S5\dot{\theta}_3 + C4\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$${}^6v_6 = \begin{bmatrix} b_{11}\dot{\theta}_1 & b_{12}\dot{\theta}_2 & b_{13}\dot{\theta}_3 \\ b_{21}\dot{\theta}_1 & b_{22}\dot{\theta}_2 & b_{23}\dot{\theta}_3 \\ b_{31}\dot{\theta}_1 & b_{32}\dot{\theta}_2 & b_{33}\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad 3.15.a$$

avec :

$$b_{11} = [-(S4C5C6 + C4S6)(L_2C2 + L_4S3)] ; b_{12} = [L_2[C6(C4C5S\alpha + S5C\alpha) - S4S6S\alpha]] \\ b_{13} = [L_4(C4C5C6 - S4S6)]$$

$$b_{21} = [(S4C5S6 + C4C6)(L_2C2 + L_4S3)] ; b_{22} = [L_2[-S6(C4C5S\alpha + S5C\alpha) - S4C6S\alpha]] \\ b_{23} = [-L_4(C4C5S6 + S4C6)]$$

$$b_{31} = [-S4S5(L_2C2 + L_4S3)] ; b_{32} = [L_2(C4S5S\alpha - C5C\alpha)] ; b_{33} = L_4C4S5 \quad 3.15.b$$

3.2.4 Matrice Jacobienne :

Arrivant à l'indice 6, on peut exprimer la matrice Jacobienne du robot (par rapport au repère R_6) en écrivant le vecteur \dot{X} (vitesse des variables opérationnelles) sous la forme d'un produit matriciel :

$${}^6\dot{X} = \begin{bmatrix} {}^6v_6 \\ {}^6\omega_6 \end{bmatrix} = {}^6J \cdot \dot{\theta} \quad 3.16$$

$$\text{où } \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$${}^6J = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & \vdots & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \vdots & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \vdots & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad 3.17$$

où les coefficients b_{ij} sont ceux définis plus haut pour la vitesse linéaire 6v_6 (3.15.a et b) et :

$$d_{11} = [C6(S3C4C5 + C3S5) - C3S4S6] ; d_{21} = [-S6(S3C4C5 + C3S5) - C3S4C6]$$

$$d_{31} = (S3C4S5 - C3C5) ;$$

$$d_{12} = d_{22} = d_{32} = 0 ;$$

$$d_{13} = (S4C5C6 + C4S6) ; d_{23} = (-S4C5S6 + C4C6) ; d_{33} = S4S5 \quad 3.18$$

$$e_{11} = -S5C6 ; e_{21} = S5S6 ; e_{31} = C5 ;$$

$$e_{12} = S6 ; e_{22} = C6 ; e_{33} = 1$$

$$e_{13} = e_{23} = e_{32} = 0 \quad 3.19$$

3.2.5 Jacobienne par rapport à R_0 :

Pour déterminer l'expression de la matrice jacobienne par rapport au repère de la base, nous devons exprimer les vitesses v_6 et ω_6 par rapport au repère R_0 .

a) Calcul de 0v_6 :

Ayant 4v_4 on a calculé suivant les formules (3.2)

$${}^5v_5 = {}^5R_4 [{}^4v_4 + \underline{0}] \text{ et } {}^6v_6 = {}^6R_5 [{}^5v_5 + \underline{0}] \text{ car } {}^4P_5 = {}^5P_6 = \underline{0}$$

$$\text{donc } {}^6v_6 = {}^6R_5 {}^5R_4 {}^4v_4 = {}^6R_4 {}^4v_4 ; \quad 3.20$$

$$\text{d'où } {}^0v_6 = {}^0R_6 {}^6v_6 = {}^0R_6 {}^6R_4 {}^4v_4 = {}^0R_4 {}^4v_4 = {}^0v_4 \Rightarrow {}^6v_6 = {}^0v_4$$

Il suffit donc de calculer 0v_4 :

$${}^0v_4 = {}^0v_6 = {}^0R_4 {}^4v_4 = {}^0R_4 {}^cR_4 {}^c v_4 = \begin{bmatrix} -S1(L_2C2 + L_4S3) & -L_2C1S2 & L_4C1C3 \\ C1(L_2C2 + L_4S3) & -L_2S1S2 & L_4S1C3 \\ 0 & L_2C2 & L_4S3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad 3.21$$

avec :

$${}^0R_4 = \begin{bmatrix} C1C3C4 + S1S4 & -C1C3S4 + S1C4 & C1S3 \\ S1C3C4 - S - C1S4 & -S1C3S4 - C1C4 & S1S3 \\ S3C4 & -S3S4 & -C3 \end{bmatrix} \quad 3.22$$

Remarque :

Le même résultat est trouvé par dérivation directe des équations (2.14) donnant la position du point P en fonction des trois premières variables articulaires ; ce qui est rassurant quant à la validité des calculs en plus de la vérification du principe de superposition (annexe C).

b) Calcul de ${}^0\omega_6$:

$$\begin{aligned} {}^6\omega_6 &= {}^6R \cdot {}^5\omega_5 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T = {}^6R \cdot \left[{}^5R \cdot {}^4\omega_4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}^T \right] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T \\ &= {}^6R \cdot \left[{}^4\omega_4 + {}^4R \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}^T \right] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T \text{ donc:} \end{aligned} \quad 3.23$$

$${}^0\omega_6 = {}^0R \cdot {}^6\omega_6 = {}^0R \cdot \left[{}^4\omega_4 + {}^4R \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}^T \right] + {}^0R \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T$$

le calcul donne :

$${}^0\omega_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S1 & C1S3 & (S1C4 - C1C3S4) & [C1(C3C4S5 + S3C5) + S1S4S5] \\ 0 & 0 & -C1 & S1S3 & -(C1C4 + S1C3S4) & [S1(C3C4S5 + S3C5) - C1S4S5] \\ 1 & 0 & 0 & -C3 & -S3S4 & (S3C4S5 - C3C5) \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta} \quad 3.24$$

avec toujours : $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T$

c) Formation de la matrice :

Par suite on peut écrire la matrice Jacobienne par rapport à R_0 , soit

$${}^0J = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ D & E \end{bmatrix} \quad 3.25.a$$

avec B , D et E des matrices déduites des expressions (3.21 et 3.24). Notons par passage que :

$$\det(J) = \det(B) \det(E) \quad 3.25.b$$

3.3 Etude des singularités :

Comme il a été dit plus haut, les singularités sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice jacobienne 0J donnée par la formule (3.25). Il est montré dans la littérature qu'un porteur type $3R$ possède deux singularités et qu'un poignet sphérique possède une seule singularité [14]. Ici, comme le porteur que nous étudions diffère un peu d'un porteur série par la boucle en parallélogramme qu'il contient, nous allons développer le calcul pour retrouver ce résultat.

3.3.1 Singularités du porteur :

Nous devons annuler le déterminant de la sous matrice B de la Jacobienne, soit :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -S1(L_2C2 + L_4S3) & -L_2C1S2 & L_4C1C3 \\ C1(L_2C2 + L_4S3) & -L_2S1S2 & L_4S1C3 \\ 0 & L_2C2 & L_4S3 \end{vmatrix} = L_2L_4[L_2C2 + L_4S3] \cdot C(\theta_3 - \theta_2) \quad 3.26$$

$$= L_2L_4[L_2C2 + L_4S3] \cdot C\alpha = 0 \Rightarrow C\alpha = 0 \text{ ou } [L_2C2 + L_4S3] = 0$$

Donc comme prédit, le porteur possède deux singularités, l'une correspondant à $C\alpha=0$, Et l'autre correspondant à $L_2C2+L_4S3=0$.

i. Première singularité du porteur

Elle est illustrée d'une manière qualitative par la figure 3.1 :

$$C\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \theta_3 - \theta_2 = \pm \pi/2 \Rightarrow \theta_3 = \theta_2 \pm \pi/2. \quad 3.27$$

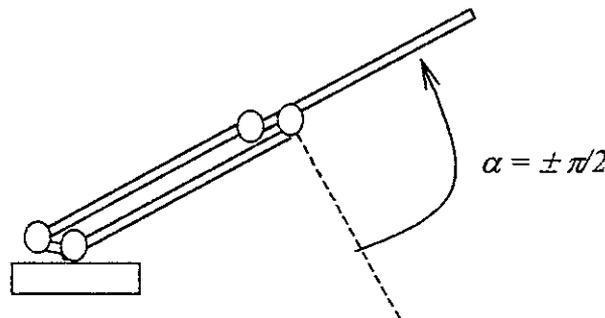


Fig.3.1 Première singularité du porteur.

Or, par construction cette situation n'est pas possible, les plages de variation de θ_3 et de θ_2 donc de α sont liées par une relation de la forme : $-\theta_m < (\theta_3 - \theta_2) = \alpha < \theta_m$ tel que $\theta_m < \pi/2$; il en découle, que cette singularité n'est pas comprise dans la plage de variation permise pour le couple (θ_3, θ_2) , comme le montre la figure suivante :

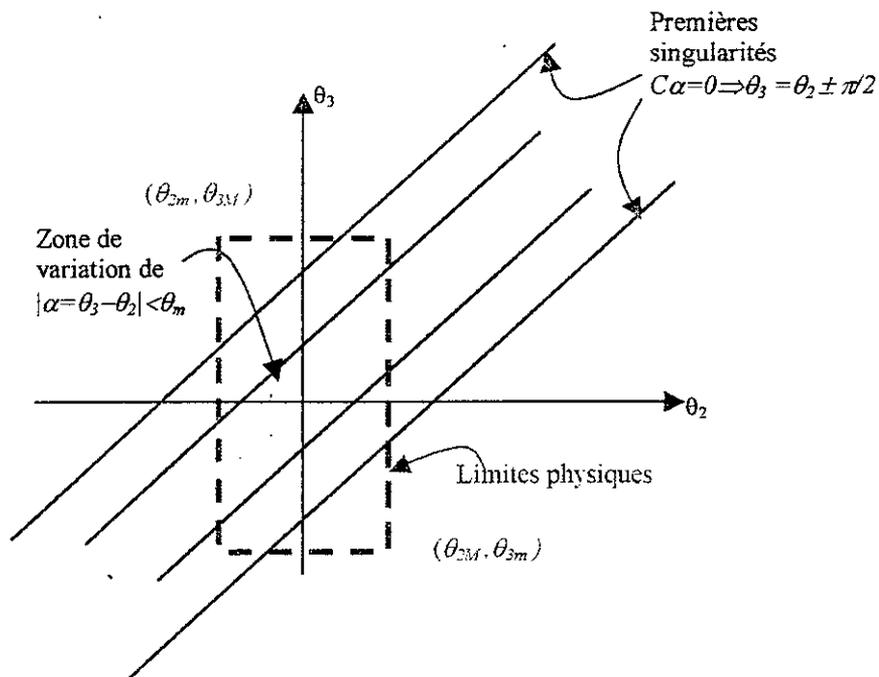


Fig.3.2 1^{ière} singularité zones de variation des articulations.

ii. Deuxième singularité du porteur :

La deuxième singularité correspondant à :

$$L_2 C_2 + L_4 S_3 = 0 \Rightarrow S_3 = -(L_2 / L_4) C_2 = S\alpha \tag{3.28.a}$$

$$\text{avec } \alpha = -\arcsin[(L_2 / L_4) C_2] \tag{3.28.b}$$

Cette singularité est représentée par la figure 3.3, elle correspond à $X = Y = 0$ dans le MGD (formule 2.14), donc le point P se trouve sur l'axe des Z du référentiel fixe R_0 pour toutes les valeurs de θ_1 .

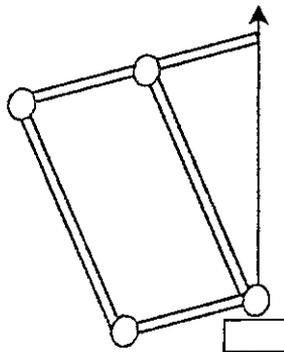


Fig. 3.3 Deuxième singularité du porteur.

En fonction des longueurs L_2 et L_4 on peut calculer deux solutions :

$$1) L_4 > L_2 \Rightarrow$$

$$\theta_3 = \alpha \text{ ou } \theta_3 = \pi - \alpha \text{ avec } \alpha \text{ définie plus haut(3.28.b).}$$

$$2) L_4 = L_2 \Rightarrow$$

$$\theta_3 = \theta_2 - \pi/2 \quad \text{ou} \quad \theta_3 = 3\pi/2 - \theta_2 \quad 3.29$$

Ce qui donne les courbes de la figure ci-après.

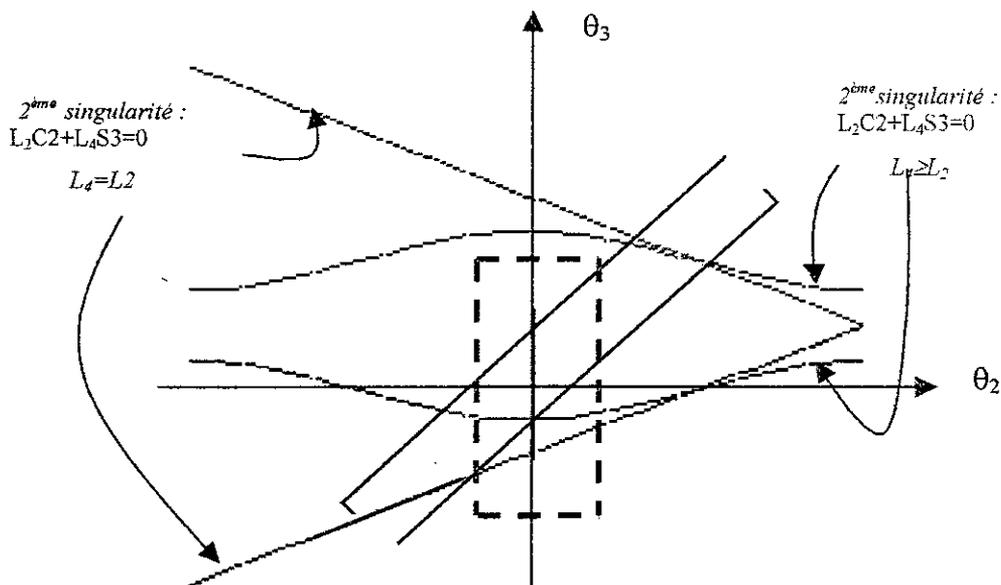


Fig.3.4 2^{ème} singularité et zones de variation.

Remarque :

Nous retrouvons ici les deux fameuses singularité d'un porteur série 3R [11,14,17] bien qu'il s'agisse d'un différentiel contenant une boucle fermée. La différence néanmoins, réside dans la possibilité d'atteindre ces singularités. En effet, les limitations des plages de variation des articulations dues aux butées mécaniques, font en sorte que la 1^{ère} singularité ne puisse pas être atteinte. Ceci peut être déduit des courbes représentant la première singularité (fig3.2) car elles ne coupent pas la zone de variation permise pour θ_2 et θ_3 . Par contre la deuxième singularité(fig.3.4) peut être atteinte car les courbes «singulières» coupent ladite zone de variation.

3.3.2 Singularités du poignet :

Nous devons annuler le déterminant de la sous matrice E de la Jacobienne, soit :

$$\begin{bmatrix} C1 \cdot S3 & (S1 \cdot C4 - C1 \cdot C3 \cdot S4) & [C1 \cdot (C3 \cdot C4 \cdot S5 + S3 \cdot C5) + S1 \cdot S4 \cdot S5] \\ S1 \cdot S3 & -(C1 \cdot C4 + S1 \cdot C3 \cdot S4) & S1 \cdot (C3 \cdot C4 \cdot S5 + S3 \cdot C5) - C1 \cdot S4 \cdot S5 \\ -C3 & -S3 \cdot S4 & (S3 \cdot C4 \cdot S5 - C3 \cdot C5) \end{bmatrix}$$

$$= -S5 = 0 \Rightarrow \sin(\theta_5) = 0 \tag{3.30}$$

Le poignet possède donc une seule singularité pouvant avoir lieu pour trois valeurs différentes de θ_5 qui font que les axes des articulations 4 et 6 se superposent. La figure suivante représente l'état du poignet dans les trois cas possibles $\theta_5 = 0, \pm \pi$ et la figure 3.6 démontre qu'effectivement théoriquement cette singularité a lieu pour trois valeurs de θ_5 impliquant $S5 = 0$.

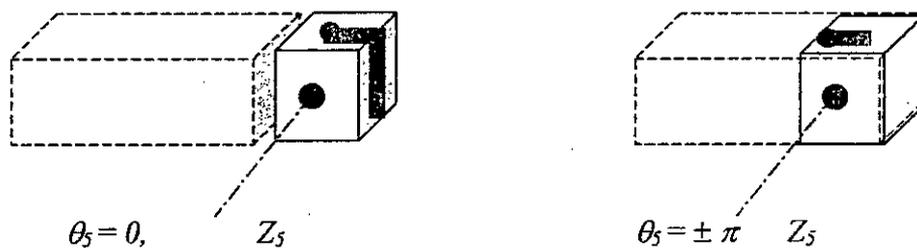


Fig. 3.5 Singularités du poignet.

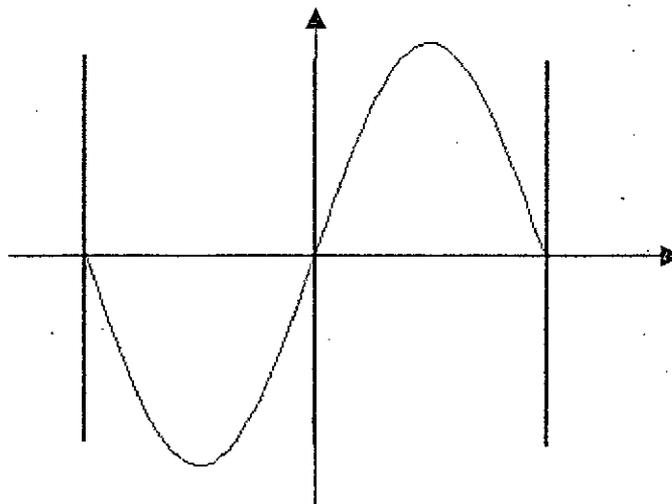


Fig. 36 Les 3 cas de singularité pour le poignet.

3.4 Calcul du MCI :

En supposant connu le profil de vitesse que va avoir l'effecteur dans l'espace opérationnel, quelle est la loi de vitesse que vont suivre les articulations θ_i ? Pour répondre à cette question, nous devons calculer le modèle cinématique inverse MCI. Ce modèle peut être obtenu soit par dérivation du MGI soit par inversion de la matrice Jacobienne 0J quand c'est possible[9,17]. Pour notre robot à 6 ddl, la matrice Jacobienne est carrée et possède donc une matrice inverse ${}^0J^{-1}$ en dehors des singularités[9,17,19]. La détermination de J^{-1} (l'exposant «0» est omis car il n'y a pas risque de confusion) est relativement aisée vue la forme de la matrice J donnée par (3.25.a et b). En effet, au lieu d'inverser une matrice (6x6), on inverse deux matrices (3x3). Soit :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} B^* & A^* \\ D^* & E^* \end{bmatrix} \quad 3.31$$

Et soit l'équation $JJ^{-1} = J^{-1}J = Id_6 = \text{Identité (6x6)}$ qu'on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} B & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^* & A^* \\ D^* & E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \cdot B^* & B \cdot A^* \\ D \cdot B^* + E \cdot D^* & D \cdot A^* + E \cdot E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad 3.32$$

d'où le système d'équations :

$$\begin{cases} B \cdot B^* = \mathbf{1}_{3 \times 3} \Rightarrow B^* = B^{-1} \\ B \cdot A^* = \mathbf{0}_{3 \times 3} \Rightarrow A^* = \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ D \cdot A^* + E \cdot E^* = \mathbf{1}_{3 \times 3} \Rightarrow E \cdot E^* = \mathbf{1}_{3 \times 3} \Rightarrow E^* = E^{-1} \\ D \cdot B^* + E \cdot D^* = \mathbf{0}_{3 \times 3} \Rightarrow D^* = -E^{-1} \cdot D \cdot B^* = -E^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} \end{cases} \quad 3.33$$

avec :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-S1}{L_2C2 + L_4S3} & \frac{C1}{L_2C2 + L_4S3} & 0 \\ \frac{-C1S3}{L_2C\alpha} & \frac{-S1S3}{L_2C\alpha} & \frac{C3}{L_2C\alpha} \\ \frac{C1C2}{L_4C\alpha} & \frac{S1C2}{L_4C\alpha} & \frac{S2}{L_4C\alpha} \end{bmatrix} \quad 3.34$$

$$E^{-1} = \frac{1}{S5} \begin{bmatrix} -(-C1S3S5 + C1C3C4C5 + S1S4C5) & (S1S3S5 - S1C3C4C5 + C1S4C5) & -(C3S5 + S3C4C5) \\ S5(S1C4 - C1C3S4) & -S5(C1C4 + S1C3S4) & -S3S4S5 \\ S1S4 + C1C3C4 & S1C3C4 - C1S4 & S3C4 \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous pouvons écrire le MCI sous une forme matricielle similaire à (3.4) :

$$\dot{Q} = J(Q) \cdot \dot{X} \quad 3.35$$

3.5 Conclusion :

Au cours de ce deuxième chapitre nous avons élaboré les deux modèles cinématiques direct et inverse pour le robot hybride à boucle plane. Comme pour les modèles géométriques, la présence de la boucle plane ne change pas grand chose quant aux résultats généraux que nous connaissons sur les robots séries[14]. En effet, l'algorithme que nous avons utilisé, est destiné aux robots sériels[9] ; l'astuce était de l'appliquer à chacune des chaînes principale et secondaire après avoirs trouver les bonnes transformations homogènes en exprimant les articulations passives en fonctions des articulations motorisées. La validité du résultat est testée par deux méthodes : vérification du principe de superposition et dérivation du MGD (annexe C)

Nous avons également déduis les expressions des deux matrices jacobienne en écrivant le MCD et le MCI sous une forme matricielle. En suite l'annulation du déterminant de la jacobienne nous a permit d'étudier les singularités du robot et de les comparer avec celles d'un robot série 6R. Elles sont identiques[14] : deux singularités pour le porteur et une seule pour le poignet sphérique.

En fin, il faut noter que le modèle cinématique offre l'avantage d'une linéarisation du modèle géométrique et d'un accès vitesses de déplacement du robot. Néanmoins une bonne commande de ce dernier, nécessite la connaissance de sa dynamique.

Chapitre 4 :
Modèle dynamique

4.1 Introduction :

Bien que plusieurs robots industriels commandés par des stratégies se basant sur les deux modèles que nous avons déjà calculés pour notre structure fonctionnent de manière suffisamment correcte pour être d'une grande utilité[7,17], ils présentent quand même certains problèmes issus de la dynamique, et qui se traduisent par des dépassements, des oscillations, des difficultés à régler les gains d'asservissement...etc.

En outre, un bon dimensionnement de la structure du robot et des actionneurs, ne peut se faire sans la connaissance la plus complète des équations dynamiques du robot car elles constituent le lien entre les paramètres dynamiques (masses, moments d'inertie..) de la structure et les effort extérieurs qui lui sont appliqués y compris ceux provenant des actionneurs. D'où la nécessité d'une modélisation dynamique de la structure qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

4.2 Modèle dynamique inverse [4] :

Le **modèle dynamique inverse** permet de connaître les couples instantanés des moteurs lors de mouvements selon des trajectoires données avec des équations de mouvement curviligne déterminé. Ce modèle dynamique permettra d'obtenir les informations suivantes :

- Valeur du **couple** à fournir à tout instant par chaque moteur afin de minimiser l'erreur par rapport à la consigne.
- Valeurs des **couples maximums** fournis par le moteur le plus chargé pour une tâche déterminée ; ces informations seront utiles lors du choix des moteurs et lors du dimensionnement de la structure et des transmissions (réducteurs entre autres).
- La **puissance maximum** délivrée par le moteur le plus chargé fournira une information importante pour le choix des moteurs et le dimensionnement de l'amplificateur.
- Mise en évidence de l'influence des dimensions du robot sur les couples moteurs et possibilité de proposer des rapports de longueurs les mieux adaptés.

4.3 Obtention du modèle dynamique :

Le modèle dynamique peut être obtenu par plusieurs méthode[9,20,21] dont le formalisme de Lagrange qui se base sur l'énergie réelle du robot $L = T - U$. soit la différence entre l'énergie cinématique et l'énergie potentielle du robot.

4.4 Equations de Lagrange [7]:

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir directement les relations entre les efforts moteurs aux articulations et les mouvements. Par rapport aux équations de Newton, on prend au passage les informations sur les efforts de réaction aux articulations qui sont utiles au dimensionnement des parties mécaniques, mais n'interviennent pas dans un modèle utile à la commande automatique puisque les corps sont supposés indéformables. Il s'agit de N ($N=6$ pour la structure que nous étudions) équations différentielles non linéaires du second ordre obtenues à partir de :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i + Q_i \quad 4.1$$

L : fonction de Lagrange = $T - U$ (énergie cinétique - énergie potentielle) du mécanisme.

Q_i : le couple de pesanteur s'exerçant sur l'articulation i .

Γ_i : le couple des forces extérieures (couple actif) s'exerçant sur l'articulation i .

Le Lagrangien représente l'énergie réelle du système, soit la différence entre son énergie cinétique T et son énergie potentielle U ; mais comme nous avons supposé les corps solides rigides, ils n'emmagasinent pas de l'énergie interne (comme un ressort qui se comprime). Donc :

$$L = T \quad 4.2$$

Pour la structure que nous avons, l'énergie cinétique totale est égale à la somme des énergies cinétique de chacun des corps [7,21] :

$$T = \sum_{k=1}^N T_k \quad 4.3$$

Dès lors le système d'équations peut s'écrire pour le départ des calculs à effectuer, sous la forme :

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_k}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T_k}{\partial \theta_i} = \Gamma_i + Q_i \quad 4.4$$

4.5 Evaluation des différents termes impliqués :

Q_i : est donné par [7,27] par la relation :

$$Q_i = \sum_{k=1}^N g \cdot m_k \cdot \frac{\partial Z_{ck}}{\partial \theta_i} \quad 4.5$$

g : accélération de la pesanteur.

m_k : masse du corps n° k

Z_{ck} : altitude du centre de masse du corps n° k dans le repère de référence.

Γ_i : c'est une donnée, un couple provenant soit des actionneurs, soit de l'environnement, soit des deux.

T_i : l'énergie cinétique du corps i , elle se décompose en deux termes :

$$T_i = {}^R T_i + {}^T T_i \quad 4.6$$

Tel que :

$${}^R T_i = \frac{1}{2} ({}^i \omega_i)^T \cdot I_i \cdot ({}^i \omega_i) = \text{énergie cinématique de rotation.}$$

$${}^T T_i = \frac{1}{2} m_i ({}^i v_{ci})^T \cdot ({}^i v_{ci}) = \text{énergie cinématique de translation.}$$

$$I_i = \begin{pmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{pmatrix} = \text{tenseur d'inertie de la barre } i$$

${}^i v_{ci}$ = vitesse du centre de gravité de la barre i exprimée dans le repère i

I_i est diagonal car les barres possèdent des plans ou axes de symétrie (contrainte de construction) [9].

Le calcul des ${}^i v_{ci}$ est présenté dans l'annexe D. Elles sont données par :

$${}^i v_{ci} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{ci} \quad 4.7$$

Pour déterminer le modèle dynamique il va falloir calculer l'énergie totale de la structure et dériver par rapport aux variables articulaires θ_i , leur vitesse et par rapport au temps ; mais l'expression de l'énergie total est tellement compliquée qu'il est très difficile de faire le calcul en une seule fois pour une articulation. On procède donc par étape :

- Calculer pour l'étape i les énergies correspondantes ${}^R T_i$ et ${}^T T_i$.
- Dériver par rapport à toutes les variables.
- Rassembler les termes correspondant à la même variable θ_i de manière à obtenir les équations dynamiques sous une nouvelle forme plus exploitable [7] :

$$\sum_{k=1}^N \left\{ A_{ik} \ddot{\theta}_k + B_{ik} \dot{\theta}_k^2 + \sum_{j=k+1}^N C_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \right\} = Q_i + \Gamma_i \quad ; \quad i=1 \dots N \quad 4.8$$

Ainsi, en appliquant les formules données plus haut, et en utilisant les expressions des vitesses trouvées dans la partie précédente et celles des centres de gravité (annexeD), on trouve :

$i=1,$

$${}^T T_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^T T_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial^T T_1}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$$

$${}^R T_1 = \frac{1}{2} \cdot I_{1z} \cdot \dot{\theta}_1^2 \Rightarrow \frac{\partial^R T_1}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial^R T_1}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial^R T_1}{\partial \theta_1} = I_{1z} \cdot \dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = I_{1z} \cdot \ddot{\theta}_1$$

$i=2,$

$${}^T T_2 = \frac{1}{2} m_2 L_{c2}^2 \cdot (\dot{\theta}_2^2 + C_2^2 \dot{\theta}_1^2) \Rightarrow \frac{\partial^T T_2}{\partial \theta_{i \neq 2}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^T T_2}{\partial \dot{\theta}_{i=1,2}} = 0$$

$$\frac{\partial^T T_2}{\partial \theta_2} = -m_2 L_{c2}^2 C_2 S_2 \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_2 L_{c2}^2 C_2^2 \cdot \ddot{\theta}_1 - 2m_2 L_{c2}^2 C_2 S_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 L_{c2}^2 \cdot \ddot{\theta}_2$$

$${}^R T_2 = \frac{1}{2} \cdot (I_{2x} S_2^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{2y} C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{2z} \dot{\theta}_2^2) \Rightarrow \frac{\partial^R T_2}{\partial \theta_{i \neq 2}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^R T_2}{\partial \dot{\theta}_{i=1,2}} = 0$$

$$\frac{\partial^R T_2}{\partial \theta_2} = C_2 S_2 (I_{2x} - I_{2y}) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_{2x} S_2^2 + I_{2y} C_2^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2C_2 S_2 (I_{2x} - I_{2y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = I_{2z} \cdot \ddot{\theta}_2$$

$i=3$,

$${}^R T_3 = \frac{1}{2} \cdot (I_{3x} S_3^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{3y} C_3^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{3z} \dot{\theta}_3^2) \Rightarrow \frac{\partial^R T_3}{\partial \theta_{i \neq 3}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^R T_3}{\partial \dot{\theta}_{i \neq 1,3}} = 0$$

$$\frac{\partial^R T_3}{\partial \theta_3} = C_3 S_3 (I_{3x} - I_{3y}) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_3}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_{3x} S_3^2 + I_{3y} C_3^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2C_3 S_3 (I_{3x} - I_{3y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_3}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = I_{3y} \cdot \ddot{\theta}_3$$

$${}^T T_3 = \frac{1}{2} m_3 L_{c3}^2 \cdot (\dot{\theta}_3^2 + S_3^2 \dot{\theta}_1^2) \Rightarrow \frac{\partial^T T_3}{\partial \theta_{i \neq 3}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^T T_3}{\partial \dot{\theta}_{i \neq 1,3}} = 0$$

$$\frac{\partial^T T_3}{\partial \theta_3} = -m_3 L_{c3}^2 C_3 S_3 \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_3}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_3 L_{c3}^2 S_3^2 \cdot \ddot{\theta}_1 + 2m_3 L_{c3}^2 C_3 S_3 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_3}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_3 L_{c3}^2 \cdot \ddot{\theta}_3$$

$i=a$

$${}^R T_a = \frac{1}{2} \cdot (I_{ax} S_2^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{ay} C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{az} \dot{\theta}_2^2) \Rightarrow \frac{\partial^R T_a}{\partial \theta_{i \neq 2}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^R T_a}{\partial \dot{\theta}_{i \neq 1,2}} = 0$$

$$\frac{\partial^R T_a}{\partial \theta_2} = C_2 S_2 (I_{ax} - I_{ay}) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_a}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_{ax} S_2^2 + I_{ay} C_2^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2C_2 S_2 (I_{ax} - I_{ay}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_a}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = I_{az} \cdot \ddot{\theta}_2$$

$${}^T T_a = \frac{1}{2} m_a L_{ca}^2 \cdot \left[L_3^2 C^2 \alpha \cdot \dot{\theta}_3^2 + (L_{ca} \dot{\theta}_2 - L_3 S \alpha \dot{\theta}_3)^2 + (L_3 S 3 - L_{ca} C 2)^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^T T_a}{\partial \theta_{i \neq 2,3}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^T T_a}{\partial \dot{\theta}_{i \neq 1,2,3}} = 0$$

$$\frac{\partial^T T_a}{\partial \theta_2} = m_a \left[L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_{ca} S 2 \cdot (L_3 S 3 - L_{ca} C 2) \dot{\theta}_1^2 \right]$$

$$\frac{\partial^T T_a}{\partial \theta_3} = m_a \left[-L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_{ca} C 3 \cdot (L_3 S 3 - L_{ca} C 2) \dot{\theta}_1^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_a}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_a \left[(L_3 S 3 - L_{ca} C 2) \cdot \ddot{\theta}_1 - 2 L_{ca} S 2 \cdot (L_3 S 3 - L_{ca} C 2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 L_3 C 3 (L_3 S 3 - L_{ca} C 2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_a}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_a \left[L_{ca}^2 \cdot \ddot{\theta}_2 - L_3 L_{ca} S \alpha \ddot{\theta}_3 + L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_3^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_a}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_a \left[L_3^2 \cdot \ddot{\theta}_3 - L_3 L_{ca} S \alpha \ddot{\theta}_2 - L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_3 L_{ca} C \alpha \dot{\theta}_2^2 \right]$$

$i=c$,

$${}^R T_C = \frac{1}{2} \left[I_{cx} S_3^2 \dot{\theta}_1^2 + I_{cy} C_3^2 \dot{\theta}_2^2 + I_{cz} \dot{\theta}_3^2 \right]$$

On trouve les mêmes résultats que pour ${}^R T_3$ mais il faut remplacer l'indice «3» par l'indice «c» dans les composantes de I_c :

$$\frac{\partial^R T_c}{\partial \theta_3} = C 3 S 3 (I_{cx} - I_{cy}) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_c}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_{cx} S_3^2 + I_{cy} C_3^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2 C 3 S 3 (I_{cx} - I_{cy}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_c}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = I_{cz} \cdot \ddot{\theta}_3$$

$${}^r T_c = \frac{1}{2} m_c \left[(L_2 C_2 + L_{cc} S_3)^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 + L_{cc} \dot{\theta}_3^2 + 2L_2 L_{cc} S \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right] \Rightarrow \frac{\partial^r T_c}{\partial \theta_{i=2,3}} = 0, \frac{\partial^r T_c}{\partial \dot{\theta}_{i=1,2,3}} = 0$$

$$\frac{\partial^r T_c}{\partial \theta_2} = m_c \left[-L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - L_2 S_2 \cdot (L_2 C_2 + L_{cc} S_3) \dot{\theta}_1^2 \right]$$

$$\frac{\partial^r T_c}{\partial \theta_3} = m_c \left[L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_{cc} C_3 \cdot (L_2 C_2 + L_{cc} S_3) \dot{\theta}_1^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^r T_c}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_c \left[(L_2 C_2 + L_{cc} S_3)^2 \cdot \ddot{\theta}_1 - 2L_2 S_2 \cdot (L_2 C_2 + L_{cc} S_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2L_{cc} C_3 (L_3 S_3 - L_{cc} C_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^r T_c}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_c \left[L_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + L_2 L_{cc} S \alpha \ddot{\theta}_3 - L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_3^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^r T_c}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_c \left[L_2 L_{cc} S \alpha \cdot \ddot{\theta}_2 + L_{cc}^2 \cdot \ddot{\theta}_3 + L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_2 L_{cc} C \alpha \dot{\theta}_2^2 \right]$$

$i=4,$

$${}^R T_4 = \frac{1}{2} \left[I_{4x} (S_3 C_4 \dot{\theta}_1 + S_4 \dot{\theta}_3)^2 + I_{4y} (-S_3 S_4 \dot{\theta}_1 + C_4 \dot{\theta}_3)^2 + I_{4z} (\dot{\theta}_4 - C_3 \dot{\theta}_1)^2 \right] \Rightarrow \frac{\partial^R T_4}{\partial \theta_{i=3,4}} = 0, \frac{\partial^R T_4}{\partial \dot{\theta}_{2,5,6}} = 0$$

$$\frac{\partial^R T_4}{\partial \theta_3} = S_3 C_3 (C_4^2 I_{4x} + S_4^2 I_{4y} - I_{4z}) \dot{\theta}_1^2 + C_3 C_4 S_4 (I_{4x} - I_{4y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + S_3 I_{4z} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4$$

$$\frac{\partial^R T_4}{\partial \theta_4} = [S_3^2 C_4 S_4 \dot{\theta}_1^2 + S_3 (S_4^2 - C_4^2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - S_4 C_4 \dot{\theta}_3^2] (I_{4y} - I_{4x})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_4}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = [S_3^2 (C_4^2 I_{4x} + S_4^2 I_{4y}) + C_3^2 I_{4z}] \ddot{\theta}_1 + S_3 C_4 S_4 (I_{4y} - I_{4x}) \ddot{\theta}_3 - C_3 I_{4z} \ddot{\theta}_4 + 2S_3 C_3 (C_4^2 I_{4x} + S_4^2 I_{4y} - I_{4z}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$$+ 2S_3^2 C_4 S_4 (I_{4y} - I_{4x}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [S_3 (S_4^2 - C_4^2) (I_{4x} - I_{4y}) + S_3 I_{4z}] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + C_3 C_4 S_4 (I_{4x} - I_{4y}) \dot{\theta}_3^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_4}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = S_3 C_4 S_4 (I_{4x} - I_{4y}) \ddot{\theta}_1 + (C_4^2 I_{4x} + S_4^2 I_{4y}) \ddot{\theta}_3 + C_3 C_4 S_4 (I_{4x} - I_{4y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + S_3 (C_4^2 - S_4^2) (I_{4x} - I_{4y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4$$

$$+ 2C_4 S_4 (I_{4x} - I_{4y}) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_4}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = I_{4z} \ddot{\theta}_4 - C_3 I_{4z} \ddot{\theta}_1 + S_3 I_{4z} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$${}^T T_4 = \frac{1}{2} m_4 \left[(L_2 C_2 + (L_4 + L_{c4}) S_3)^2 \dot{\theta}_1^2 + (L_2 S \alpha \dot{\theta}_2 + (L_4 + L_{c4}) \dot{\theta}_3)^2 + L_2^2 C \alpha^2 \dot{\theta}_2^2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^T T_4}{\partial \theta_{i \neq 2,3}} = 0, \quad \frac{\partial^T T_4}{\partial \dot{\theta}_{i \neq 1,2,3}} = 0$$

$$\frac{\partial^T T_4}{\partial \theta_2} = m_4 \left[-L_2 S 2(L_2 C_2 + (L_4 + L_{c4}) S_3) \dot{\theta}_1^2 - L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right]$$

$$\frac{\partial^T T_4}{\partial \theta_3} = m_4 \left[(L_4 + L_{c4}) C_3 (L_2 C_2 + (L_4 + L_{c4}) S_3) \dot{\theta}_1^2 + L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_4}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_4 \left[(L_2 C_2 + (L_4 + L_{c4}) S_3) \ddot{\theta}_1 - L_2 S 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (L_4 + L_{c4}) C_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_4}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_4 \left[L_2 \ddot{\theta}_2 + L_2 (L_4 + L_{c4}) S \alpha \ddot{\theta}_3 - L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_3^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^T T_4}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_4 \left[L_2 (L_4 + L_{c4}) S \alpha \ddot{\theta}_2 + (L_4 + L_{c4})^2 \ddot{\theta}_3 + L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - L_2 (L_4 + L_{c4}) C \alpha \dot{\theta}_2^2 \right]$$

$i=5$

$${}^R T_5 = \frac{1}{2} \left\{ I_{5x} \left[(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \dot{\theta}_1 + (S_4 C_5) \dot{\theta}_3 - S_5 \dot{\theta}_4 \right]^2 + I_{5y} \left[(-S_3 C_4 S_5 + C_3 C_5) \dot{\theta}_1 - (S_4 S_5) \dot{\theta}_3 - C_5 \dot{\theta}_4 \right]^2 \right. \\ \left. + I_{5z} \left[-S_3 S_4 \dot{\theta}_1 + C_4 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 \right]^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_{1,2,6}} = 0; \quad \frac{\partial^R T_5}{\partial \dot{\theta}_{2,4,6}} = 0$$

$$\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_3} = \left[(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5)(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) I_{5x} - (-S_3 C_4 S_5 + C_3 C_5)(C_3 C_4 S_5 + S_3 C_5) I_{5y} + C_3 S_3 S_4^2 I_{5z} \right] \dot{\theta}_1^2 \\ + \left[(C_3 C_4 S_4 C_5^2 - S_3 S_4 C_5 S_5) I_{5x} + (C_3 C_4 S_4 S_5^2 + S_3 S_4 C_5 S_5) I_{5y} - C_3 C_4 S_4 I_{5z} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ + \left[(-S_3 C_4 C_5 S_5 + C_3 S_5^2) I_{5x} + (C_3 C_4 C_5 S_5 + S_3 C_5^2) I_{5y} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - [(C_3 S_4) I_{5z}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5$$

$$\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_4} = \left[-S_3 S_4 C_5 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) I_{5x} + S_3 S_4 S_5 (-S_3 C_4 S_5 + C_3 C_5) I_{5y} + S_3^2 C_4 S_4 I_{5z} \right] \dot{\theta}_1^2 \\ + \left[(C_4 S_4 C_5^2) I_{5x} + (C_4 S_4 S_5^2) I_{5y} - (C_4 S_4) I_{5z} \right] \dot{\theta}_3^2 + \left[(C_4 C_5 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4^2 C_5^2) I_{5x} \right. \\ \left. - (C_4 S_5 (-S_3 C_4 S_5 + C_3 C_5) + S_3 S_4^2 S_5^2) I_{5y} + (S_3 S_4^2 - S_3 C_4^2) I_{5z} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ + \left[(S_3 S_4 C_5 S_5) (I_{5x} - I_{5y}) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - \left[(C_4 C_5 S_5) (I_{5x} - I_{5y}) \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \left[(S_3 C_4) I_{5z} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - \left[(S_4) I_{5z} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_5} = & [(S3C4C5 + C3S5)(-S3C4S5 + C3C5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1^2 - [(S_4^2 C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_3^2 \\ & + [S5C5(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_4^2 + [S4C5(-S3C4S5 + C3C5) - S4S5(S3C4C5 + C3S5)](I_{5x} - I_{5y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - [S5(-S3C4S5 + C3C5) + C5(S3C4C5 + C3S5)](I_{5x} - I_{5y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [S4(S_5^2 - C_5^2)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_1} \right) = & [(S3C4C5 + C3S5)^2 I_{5x} + (-S3C4S5 + C3C5)^2 I_{5y} + (S_3^2 S_4^2) I_{5z}] \ddot{\theta}_1 \\ & + [C4S5(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} - S4C5(-S3C4S5 + C3C5) I_{5y} - (S3S4C4) I_{5z}] \ddot{\theta}_3 \\ & - [S5(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} + C5(-S3C4S5 + C3C5) I_{5y}] \ddot{\theta}_4 + [2(C3C4C5 - S3S5)(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} \\ & - (C3C4S5 + S3C5) I_{5y} + 2(S3C3S_4^2) I_{5z}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [(C3C4S4C_5^2 - S3S4S5C5) I_{5x} + (C3C4S4S_5^2 + S3S4S5C5) I_{5y} \\ & - (C3S4C4) I_{5z}] \dot{\theta}_3^2 + [(S3S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_4^2 + [-S3S4C5(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} + (S3S4S5) I_{5y} \\ & + (S_3^2 S4C4) I_{5z}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [(S3C4C5 + C3S5)(2(C3C5 - S3C4S5) I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [S3(C_4^2 - S_4^2)(C_5^2 I_{5x} + S_5^2 I_{5y}) \\ & + S3(S_5^2 I_{5x} + C_5^2 I_{5y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [(C3S4(C_5^2 - S_5^2) - 2S3C4S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y}) - C3S4 I_{5z}] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\ & - [(2C3S5C5 + S3C4(C_5^2 - S_5^2))(I_{5x} - I_{5y}) + S3C4 I_{5z}] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_3} \right) = & [S4C5(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} - S4S5(-S3C4S5 + C3C5) I_{5y} - S3C4S4 I_{5z}] \ddot{\theta}_1 \\ & + [S_4^2 (C_5^2 I_{5x} + S_5^2 I_{5y}) + C_4^2 I_{5z}] \ddot{\theta}_3 - [(S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \ddot{\theta}_4 + [C4 I_{5z}] \ddot{\theta}_5 \\ & + [C3C4S4(C_5^2 I_{5x} + S_5^2 I_{5y} - I_{5z}) - (S3S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + [S3(C_4^2 - S_4^2)(C_5^2 I_{5x} + S_5^2 I_{5y} - I_{5z}) + (C3C4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & + [(C3S4(C_5^2 - S_5^2) - 2S3C4S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [2S_4^2 C5S5(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\ & + [2S4C4(C_5^2 I_{5x} + S_5^2 I_{5y} - I_{5z})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [S4((C_5^2 - S_5^2)(I_{5x} - I_{5y}) + I_{5z})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\ & - [(C4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_4} \right) = & [-S5(S3C4C5 + C3S5) I_{5x} - C5(-S3C4S5 + C3C5) I_{5y}] \ddot{\theta}_1 - [(S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \ddot{\theta}_3 \\ & + [(S_5^2 I_{5x} + C_5^2 I_{5y})] \ddot{\theta}_4 + [S3(S_5^2 I_{5x} + C_5^2 I_{5y}) - (C3C4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [(S3S4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & - [(2C3C5S5 + S3C4(C_5^2 - S_5^2))(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [(C4C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [S4(C_5^2 - S_5^2)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\ & + [(2C5S5)(I_{5x} - I_{5y})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_5}{\partial \theta_5} \right) = I_{5z} \ddot{\theta}_5$$

$${}^T T_5 = \frac{1}{2} m_5 ({}^5 v_{c5})^T \cdot ({}^5 v_{c5}) = \frac{1}{2} m_5 [A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2C(C5A + S5B)]$$

avec :

$$A = \{(L_2 S \alpha C 4) \dot{\theta}_2 + (L_4 C 4) \dot{\theta}_3 - S 4(L_2 C 2 + L_4 S 3) \dot{\theta}_1\}$$

$$B = (L_2 C \alpha) \dot{\theta}_2 ; C = L_{c5} [\dot{\theta}_5 + C 4 \dot{\theta}_3 - S 3 S 4 \dot{\theta}_1]$$

$$D = -[(L_2 S \alpha S 4) \dot{\theta}_2 + (C 4(L_2 C 2 + L_4 S 3) + L_{c5}(S 3 C 4 C 5 + C 3 S 5)) \dot{\theta}_1 + (L_4 S 4 + L_{c5} S 4 C 5) \dot{\theta}_3 - L_{c5} \dot{\theta}_5]$$

Nous allons dériver terme à terme par rapport à chaque variable :

$$\frac{\partial {}^T T_5}{\partial \theta_{1,6}} = \frac{\partial {}^T T_5}{\partial \dot{\theta}_6} = 0$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial A^2}{\partial \theta_2} = m_5 \times$$

$$\{-[L_2 C 2 S 2 S_4^2 (L_2 C 2 + L_4 S 3)] \dot{\theta}_1^2 - [L_2^2 C_4^2 C \alpha S \alpha] \dot{\theta}_2^2 + [L_2^2 S 2 S \alpha C 4 S 5 + L_2 C \alpha C 4 S 4 (L_2 C 2 + L_4 S 3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_2 L_4 S 2 C 4 S 5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [L_2 L_4 C \alpha C_4^2] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial B^2}{\partial \theta_2} = m_5 [L_2^2 C \alpha S \alpha] \dot{\theta}_2^2 ; \frac{m_5}{2} \frac{\partial C^2}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial D^2}{\partial \theta_2} = m_5 \times$$

$$\{-[L_2 S 2 C_4^2 (L_2 C 2 + L_4 S 3) + L_2 L_{c5} S 2 C 4 (C 3 C 4 C 5 + S 3 S 5)] \dot{\theta}_1^2 - [L_2^2 S_4^2 C \alpha S \alpha] \dot{\theta}_2^2 - [L_2 C \alpha C 4 S 4 (L_2 C 2 + L_4 S 3) + L_2^2 S 2 S \alpha C 4 S 5 + L_2 L_{c5} C \alpha S 4 (S 3 C 4 C 5 + C 3 S 5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [L_2 S 2 C 4 S 4 (L_4 + L_{c5} C 5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [L_2 L_{c5} S 2 C 4 S 5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - [L_2 C \alpha S_4^2 (L_4 + L_{c5} C 5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [L_2 L_{c5} C \alpha S 4 S 5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial 2C(C5A + S5B)}{\partial \theta_2} = m_5 L_2 L_{c5} \times$$

$$\{-[S 2 S 3 S_4^2 C 5] \dot{\theta}_1^2 - [S 3 S 4 (S \alpha S 5 - C \alpha C 4 C 5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [S 2 C 4 S 4 C 5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [S 2 S 4 C 5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [C 4 (S \alpha S 5 - C \alpha C 4 C 5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [(S \alpha S 5 - C \alpha C 4 C 5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial A^2}{\partial \theta_3} = m_5 \times$$

$$\{[L_4 C 3 S_4^2 (L_2 C 2 + L_4 S 3)] \dot{\theta}_1^2 - [L_2 L_4 S \alpha C 3 C 4 S 4 + L_2 C \alpha C 4 S 4 (L_2 C 2 + L_4 S 3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [L_2^2 C 3 C 4 S 4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [L_2^2 C_4^2 S \alpha C \alpha] \dot{\theta}_2^2 + [L_2 L_4 C \alpha C_4^2] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \theta_3} = -m_5 [L_2^2 C \alpha S \alpha] \dot{\theta}_2^2$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \theta_3} = m_5 L_{c5}^2 \{ [C3S3S4^2] \dot{\theta}_1^2 - [C3C4S4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [C3S4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \theta_3} = m_5 \times$$

$$\begin{aligned} & \{ [C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)] [L_4C3C4 + L_{c5}(C3C4C5 - S3S5)] \dot{\theta}_1^2 \\ & + [L_2C\alpha S4(C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)) + L_2S\alpha S4(L_4C3C4 + L_{c5}(C3C4C5 - S3S5))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + [S4(L_4 + L_{c5}C5)(L_4C3C4 + L_{c5}(C3C4C5 - S3S5))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [L_{c5}S5(L_4C3C4 + L_{c5}(C3C4C5 - S3S5))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & + [L_2^2 C \alpha S \alpha S_4^2] \dot{\theta}_2^2 + [L_2 C \alpha S_4^2 (L_4 + L_{c5} C5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [L_2 L_{c5} C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial 2\mathbf{C}(C5A + S5B)}{\partial \theta_3} = m_5 \times$$

$$\begin{aligned} & \{ [L_{c5}C3S4^2C5(L_2C2 + L_4S3) + L_4L_{c5}C3S3S4^2C5] \dot{\theta}_1^2 - [L_{c5}C3S4(L_2S\alpha C4C5 + L_2C\alpha S5) \\ & + L_{c5}S3S4(L_2C\alpha C4C5 - L_2S\alpha S5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [2L_4L_{c5}C3C4S4C5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [L_4L_{c5}C3S4C5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ & + [L_{c5}C4(L_2C\alpha C4C5 - L_2S\alpha S5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [L_2L_{c5}(C\alpha C4C5 - S\alpha S5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \theta_4} = m_5 \times$$

$$\begin{aligned} & \{ [C4S4(L_2C2 + L_4S3)^2] \dot{\theta}_1^2 + [L_2S\alpha(C_4^2 - S_4^2)(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_4(C_4^2 - S_4^2)(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + [L_2^2 S^2 \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_2^2 + [2L_2L_4C4S4S\alpha] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [L_4^2 C_4 S_4] \dot{\theta}_3^2 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \theta_4} = 0$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \theta_4} = m_5 L_{c5}^2 \{ [S_3^2 C_4 S_4] \dot{\theta}_1^2 - [S_3(C_4^2 - S_4^2)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [S_3 C_4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [S_4 C_4] \dot{\theta}_3^2 - [S_4] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \theta_4} &= m_5 \times \\ &\{ [C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)] [S4(L_2C2 + L_4S3) - L_{c5}S3S4C5] \dot{\theta}_1^2 \\ &+ [L_2C4S\alpha [C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)] \\ &+ [L_2S4S\alpha [S4(L_2C2 + L_4S3) - L_{c5}S3S4C5]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &+ [C4(L_4 + L_{c5}C5) [C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)] \\ &+ S4(L_4 + L_{c5}C5) [S4(L_2C2 + L_4S3) - L_{c5}S3S4C5]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &- [L_{c5}S5(S4(L_2C2 + L_4S3) - L_{c5}S3S4C5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [L_2^2 S^2 \alpha S4C4] \dot{\theta}_2^2 + [2L_2C4S4S\alpha(L_4 + L_{c5}C5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ &- [L_2L_{c5}S\alpha C4S5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + [C4S4(L_4 + L_{c5}C5)] \dot{\theta}_3^2 - [L_{c5}C4S5(L_4 + L_{c5}C5)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{2} \frac{\partial 2\mathbf{C}(C5\mathbf{A} + S5\mathbf{B})}{\partial \theta_4} &= m_5 L_{c5} \times \\ &\{ [2S3C4S4C5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1^2 + [L_2S\alpha S3C5(S_4^2 - C_4^2) - L_2C\alpha S3C4S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_4S3S_4^2C5 \\ &+ S_4^2C5(L_2C2 + L_4S3) - L_4S3C_4^2C5 - C_4^2C5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [2L_4C4S4C5] \dot{\theta}_3^2 \\ &- [2L_2C4S4C5S\alpha + L_2S4C\alpha S5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \theta_5} = \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \theta_5} = \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \theta_5} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{2} \frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \theta_5} &= m_5 \times \\ &\{ [L_{c5}(-S3C4S5 + C3C5)] [C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5)] \dot{\theta}_1^2 \\ &+ [L_2L_{c5}S4S\alpha(-S3C4S5 + C3C5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_{c5}S4(L_4 + L_{c5}C5)(-S3C4S5 + C3C5) \\ &- L_{c5}S4S5(C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ &- [L_{c5}^2S5(-S3C4S5 + C3C5) + L_{c5}C5(C4(L_2C2 + L_4S3) + L_{c5}(S3C4C5 + C3S5))] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ &- [L_2L_{c5}S\alpha S_4^2S5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [L_2L_{c5}S\alpha S4C5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - [L_{c5}S_4^2S5(L_4 + L_{c5}C5)] \dot{\theta}_3^2 \\ &+ [L_{c5}S4C5(L_4 + L_{c5}C5) + L_{c5}^2S4S_5^2] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [L_{c5}^2S5C5] \dot{\theta}_4^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{2} \frac{\partial 2\mathbf{C}(C5\mathbf{A} + S5\mathbf{B})}{\partial \theta_5} &= m_5 L_{c5} \times \\ &\{ - [S3S_4^2S5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1^2 - [L_2S3S4(C\alpha C5 - S\alpha C4S5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &+ [C4S4S5(L_2C2 + L_4S3) + L_4S3C4S4S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [S4S5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ &+ [L_2C4(C\alpha C5 - S\alpha C4S5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [L_2(C\alpha C5 - S\alpha C4S5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - [L_4C_4^2S5] \dot{\theta}_3^2 \\ &- [L_4C4S5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ S_4^2 (L_2 C_2 + L_4 S_3)^2 \ddot{\theta}_1 - L_2 S_4 C_4 C \alpha (L_2 C_2 + L_4 S_3) \ddot{\theta}_2 - L_4 C_4 S_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \ddot{\theta}_3 \right\}$$

$$- \left[2L_2 S_2 S_4^2 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[2L_4 C_3 S_4^2 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[2S_4 C_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3)^2 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4$$

$$+ \left[L_2^2 S_2 C \alpha C_4 S_4 - L_2^2 C_2 S \alpha C_4 S_4 - L_2 L_4 S_3 S \alpha \right] \dot{\theta}_2^2 + \left[L_2^2 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 S \alpha + L_2 L_4 C_4 S_4 C_3 C \alpha \right. \\ \left. + L_2 L_4 S_2 C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \left[L_2^2 C_2 C \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 S_3 C \alpha (C_4^2 - S_4^2) \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \left[L_4^2 C_3 C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_3^2 \\ - \left[L_4^2 S_3 (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 C_2 (C_4^2 - S_4^2) \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_5 L_{c5}^2 \times$$

$$\left\{ S_3^2 S_4^2 \ddot{\theta}_1 - S_3 S_4 C_4 \ddot{\theta}_3 - S_3 S_4 \ddot{\theta}_5 \right\} + \left[2S_3 C_3 S_4^2 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[2S_3^2 C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - \left[C_3 C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_3^2 \\ - \left[S_3 (C_4^2 - S_4^2) \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \left[C_3 S_4 \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - \left[S_3 C_4 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial 2\mathbf{C}(C5\mathbf{A} + S5\mathbf{B})}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ 2 \left[L_2 L_{c5} C_2 S_3 S_4^2 C_5 + L_4 L_{c5} S_3^2 S_4^2 C_5 \right] \ddot{\theta}_1 - \left[L_2 L_{c5} S_3 S_4 (S \alpha C_4 C_5 + C \alpha S_5) \right] \ddot{\theta}_2 \right. \\ \left. - \left[2L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c5} C_2 C_4 C_5 S_5 \right] \ddot{\theta}_3 - \left[L_2 L_{c5} C_2 S_4 C_5 + L_4 L_{c5} S_3 S_4 C_5 \right] \ddot{\theta}_5 \right. \\ \left. - 2 \left[L_2 L_{c5} S_2 S_3 S_4^2 C_5 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \left[L_2 L_{c5} C_2 C_3 S_4^2 C_5 + 2L_4 L_{c5} S_3 C_3 S_4^2 C_5 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \right. \\ \left. + 4 \left[L_{c5} S_3 S_4 C_4 C_5 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - 2 \left[L_{c5} S_3 S_4^2 S_5 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \right. \\ \left. + \left[L_2 L_{c5} S_3 S_4 (C \alpha C_4 C_5 - S \alpha S_5) \right] \dot{\theta}_2^2 - \left[L_2 L_{c5} C_3 C \alpha S_4 S_5 - L_2 L_{c5} S_3 S \alpha S_4 S_5 \right. \right. \\ \left. \left. + L_2 L_{c5} S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c5} C_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c5} S_2 C_4 C_5 S_5 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right. \\ \left. - \left[L_2 L_{c5} S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) C_5 + L_2 L_{c5} S_3 C \alpha C_4 S_5 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \left[L_2 L_{c5} S_3 C \alpha S_4 C_5 \right. \right. \\ \left. \left. - L_2 L_{c5} S_3 S \alpha C_4 S_4 S_5 - L_2 L_{c5} S_2 S_4 C_5 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - \left[2L_4 L_{c5} C_3 C_4 S_4 C_5 \right] \dot{\theta}_3^2 \right. \\ \left. - \left[2L_4 L_{c5} S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5 - L_2 L_{c5} C_2 S_4 C_5 S_5 \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \left[L_2 L_{c5} C_2 C_4 (C_5^2 - S_5^2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_4 S_5 + L_4 L_{c5} C_3 S_4 C_5 \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - \left[L_{c5} C_4 C_5 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \right. \\ \left. + \left[L_{c5} S_4 S_5 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right] \dot{\theta}_5^2 \right\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_5 \times$$

$$\begin{aligned} & \left\{ C_4(L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right\}^2 \ddot{\theta}_1 + \left[L_2^2 C_2 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 S \alpha C_4 S_4 \right. \\ & + L_2 L_{c5} S_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c5} C_3 S \alpha S_4 S_5 \left. \right] \ddot{\theta}_2 + \left[L_4 + L_{c5} C_5 \right] \left[C_4 S_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) \right. \\ & + L_{c5} S_4 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \left. \right] \ddot{\theta}_3 - \left[L_2 L_{c5} C_2 C_4 S_5 + L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_5 + L_{c5}^2 S_5 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right] \ddot{\theta}_4 \\ & - \left[(2L_2 S_2 C_4) \left\{ C_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right\} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & - 2 \left[L_{c5} (S_3 S_5 - C_3 C_4 C_5) - L_4 C_3 C_4 \right] \left\{ C_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - 2 \left\{ C_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right\} \left[S_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} S_3 S_4 C_5 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & - 2 \left\{ C_4 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5} (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) \right\} \left[L_{c5} (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ & - \left[L_2^2 C_4 S_4 (C_2 C \alpha + S_2 S \alpha) + (L_2 S_3 C \alpha C_4 S_4) (L_4 + L_{c5} C_5) + L_2 L_{c5} C_3 C \alpha S_4 S_5 \right] \dot{\theta}_2^2 \\ & + \left[L_2^2 C_2 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 C_3 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_{c5} C_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 \right. \\ & + L_2 L_{c5} S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 - L_2 L_{c5} S_3 S \alpha S_4 S_5 + L_2 L_{c5} C_3 C \alpha S_4 S_5 - L_2 L_4 S_2 C_4 S_4 \\ & - L_2 L_{c5} S_2 S_4 C_4 C_5 \left. \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left[L_2^2 C_2 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) \right. \\ & + L_2 L_{c5} S_3 S \alpha C_5 (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_{c5} C_3 S \alpha C_4 S_5 + L_2 L_{c5} S_2 C_4 S_5 \left. \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ & + \left[L_2 L_{c5} C_3 S \alpha S_4 C_5 - L_2 L_{c5} S_3 S \alpha S_4 C_4 S_5 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + \left[L_4^2 C_3 S_4 + L_4 L_{c5} C_3 S_4 C_5 \right. \\ & + L_4 L_{c5} C_3 C_4 S_4 C_5 - L_4 L_{c5} S_3 S_4 S_5 + L_{c5}^2 C_3 S_4 C_4 C_5 - L_{c5}^2 S_3 S_4 C_4 C_5 \left. \right] \dot{\theta}_3^2 \\ & + \left[L_2 L_4 C_2 (C_4^2 - S_4^2) + L_4^2 S_3 C_4 + L_2 L_{c5} C_2 (C_4^2 - S_4^2) C_5 + L_4 L_{c5} S_3 C_4 C_5 + L_4 L_{c5} S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5 \right. \\ & + L_{c5}^2 S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5 + L_{c5}^2 C_3 (C_4^2 - S_4^2) S_5 + L_{c5}^2 C_3 C_4 C_5 S_5 - L_{c5}^2 S_3 S_5^2 \left. \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ & + \left[L_2 L_{c5} C_2 C_4 S_4 S_5 - L_2 L_{c5} S_3 S_4 S_5 - L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_4 S_5 + L_4 L_{c5} C_3 S_4 C_5 - 2L_{c5}^2 S_3 C_4 S_4 C_5 S_5 \right. \\ & - L_{c5}^2 C_3 S_4 C_4 S_5 \left. \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + \left[L_2 L_{c5} C_2 S_4 S_5 + L_4 L_{c5} S_3 S_4 S_5 + L_{c5}^2 S_3 S_4 C_5 S_5 \right] \dot{\theta}_4^2 \\ & - \left[L_4 L_{c5} S_3 C_4 + L_{c5}^2 S_3 C_4 (C_5^2 - S_5^2) + 2L_{c5}^2 C_3 C_5 S_5 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_5 \times$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[L_2^2 C_2 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 S \alpha C_4 S_4 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[L_2^2 S^2 \alpha C_4^2 \right] \ddot{\theta}_2 + \left[L_2 L_4 C_4^2 S \alpha \right] \ddot{\theta}_3 \right. \\ & + \left[L_2^2 S_2 S \alpha C_4 S_4 + L_2^2 C_2 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 C \alpha C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left[L_2^2 C_2 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 C_3 S \alpha C_4 S_4 \right. \\ & + L_2 L_4 S_3 C \alpha C_4 S_4 \left. \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \left[L_2^2 C_2 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - \left[2L_2^2 S \alpha C \alpha C_4^2 \right] \dot{\theta}_2^2 \\ & + \left[2L_2^2 S \alpha C \alpha C_4^2 - L_2 L_4 C \alpha S_4^2 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \left[2L_2^2 S^2 \alpha C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \left[L_2 L_4 C \alpha C_4^2 \right] \dot{\theta}_3^2 - \left[2L_2 L_4 S \alpha C_4 S_4 \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \} \end{aligned}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_5 \times \left\{ \left[L_2^2 C^2 \alpha \right] \ddot{\theta}_2 + \left[2L_2^2 S \alpha C \alpha \right] \dot{\theta}_2^2 - \left[2L_2^2 S \alpha C \alpha \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = 0;$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [L_2^2 C_2 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_{c_5} S_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c_5} C_3 S \alpha S_4 S_5] \ddot{\theta}_1 + [L_2^2 S^2 \alpha S_4^2] \ddot{\theta}_2 \\ & + [L_2 L_4 S \alpha S_4^2 + L_2 L_{c_5} S \alpha S_4^2 C_5] \ddot{\theta}_3 - [L_2 L_{c_5} S \alpha S_4 S_5] \ddot{\theta}_4 - [L_2^2 C_2 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 C \alpha C_4 S_4 \\ & + L_2 L_{c_5} S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c_5} C_3 C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_2^2 C_2 C \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 C_3 S \alpha C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 C \alpha C_4 S_4 \\ & + L_2 L_{c_5} C_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 + L_2 L_{c_5} S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 - L_2 L_{c_5} S_3 S \alpha S_4 S_5 + L_2 L_{c_5} C_3 C \alpha S_4 C_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + [L_2^2 C_2 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_{c_5} S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_{c_5} C_3 S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & + [L_2 L_{c_5} C_3 S \alpha S_4 C_5 - L_2 L_{c_5} S_3 S \alpha C_4 S_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [2L_2^2 S \alpha C \alpha S_4^2] \dot{\theta}_2^2 + [2L_2^2 S \alpha C \alpha S_4^2 - L_2 L_4 C \alpha S_4^2 \\ & - L_2 L_{c_5} C \alpha S_4^2 C_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [2L_2^2 S^2 \alpha C_4 S_4 + L_2 L_{c_5} C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + [L_2 L_4 C \alpha S_4^2 + L_2 L_{c_5} C \alpha S_4^2 C_5] \dot{\theta}_2^2 \\ & + [2L_2 L_{c_5} S \alpha C_4 S_4 C_5 + 2L_2 L_4 S \alpha C_4 S_4 - L_2 L_{c_5} C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [L_2 L_{c_5} S \alpha S_4^2 S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\ & - [L_2 L_{c_5} S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_4^2 - [L_2 L_{c_5} S \alpha S_4 C_5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial 2\mathbf{C}(\mathbf{AC5} + \mathbf{BS5})}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_5 L_2 L_{c_5} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - [S \alpha C_4 C_5 S_3 S_4 + S_3 S_4 C \alpha S_5] \ddot{\theta}_1 + [S \alpha C_4^2 C_5 + C \alpha C_4 S_5] \ddot{\theta}_3 + [S \alpha C_4 C_5 + C \alpha S_5] \ddot{\theta}_5 \\ & + [S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 - S_3 S \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [C_3 S \alpha C_4 S_4 C_5 + S_3 C \alpha C_4 S_4 C_5 + C_3 C \alpha S_4 S_5 - S_3 S \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - [S_3 S \alpha (C_4^2 - S_4^2) + S_3 C \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [S_3 S \alpha C_4 S_4 S_5 - S_3 C \alpha S_4 C_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [C \alpha C_4^2 C_5 - S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ & + [S \alpha S_5 - C \alpha C_4 C_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + [C \alpha C_4^2 C_5 - S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_3^2 - [2S \alpha C_4 S_4 C_5 + C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [C \alpha C_4 C_5 \\ & - S \alpha C_4^2 S_5 + C \alpha C_4 C_5 - S \alpha S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - [S \alpha S_4 C_5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + [C \alpha C_5 - S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_5^2 \} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - [L_2^2 C_2 C_4 S_4 + L_2 L_4 S_3 C_4 S_4] \ddot{\theta}_1 + [L_2 L_4 S \alpha C_4^2] \ddot{\theta}_2 + [L_4^2 C_4^2] \ddot{\theta}_3 + [L_2^2 S_2 C_4 S_4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_2 L_4 C_3 C_4 S_4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + [L_2^2 C_2 (C_4^2 - S_4^2) + L_2 L_4 S_3 (C_4^2 - S_4^2)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - [L_2 L_4 C \alpha C_4^2] \dot{\theta}_2^2 + [L_2 L_4 C \alpha C_4^2] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [2L_2 L_4 S \alpha C_4 S_4] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ & - [2L_4^2 S_4 C_4] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = 0;$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_5 L_{c_5}^2 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - [S_3 S_4 C_4] \ddot{\theta}_1 + [C_4^2] \ddot{\theta}_3 + [C_4] \ddot{\theta}_5 - [C_3 S_4 C_4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [S_3 (C_4^2 - S_4^2)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - [2C_4 S_4] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [S_4] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(L_4 S_4 + L_{c5} S_4 C_5) (L_2 C_2 C_4 + L_4 S_3 C_4 + L_{c5} S_3 C_4 C_5 + L_{c5} C_3 S_5) \right] \ddot{\theta}_1 + [L_2 L_4 S \alpha S_4^2 + L_2 L_{c5} S \alpha S_4^2 C_5] \ddot{\theta}_2 \\ & + [S_4^2 (L_4 + L_{c5} C_5)^2] \ddot{\theta}_3 - [L_4 L_{c5} S_4 S_5 + L_{c5}^2 S_4 C_5 S_5] \ddot{\theta}_4 - [L_2 S_2 C_4 S_4 (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + [S_4 (L_4 + L_{c5} C_5) (L_4 C_3 C_4 + L_{c5} C_3 C_4 C_5 - L_{c5} S_3 C_4 S_5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [S_4 (L_4 + L_{c5} C_5) (L_4 S_3 S_4 + L_{c5} S_3 S_4 C_5 + L_2 C_2 C_4) \\ & - C_4 (L_4 + L_{c5} C_5) (L_2 C_2 C_4 + L_4 S_3 C_4 + L_{c5} S_3 C_4 C_5 + L_{c5} C_3 S_5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [L_{c5} S_4 (L_4 + L_{c5} C_5) (C_3 C_5 - S_3 C_4 S_5) \\ & - (L_2 S_4 S_5) (L_2 C_2 C_4 + L_4 S_3 C_4 + L_{c5} S_3 C_4 C_5 + L_{c5} C_3 S_5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [L_2 S_4^2 C \alpha (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_2^2 \\ & + [L_2 S_4^2 C \alpha (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [2 L_2 S \alpha C_4 S_4 (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - [L_2 L_{c5} S \alpha S_4^2 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + [2 C_4 S_4 (L_4 + L_{c5} C_5)^2] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ & - [2 L_{c5}^2 S_4^2 C_5 S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - [L_{c5} C_4 S_5 (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_4^2 + [L_4 L_{c5} S_4 C_5 + L_{c5}^2 S_4 (C_5^2 - S_5^2)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial 2\mathbf{C}(\mathbf{AC5} + \mathbf{BS5})}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - [L_2 L_{c5} C_2 C_4 S_4 C_5 + 2 L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_4 C_5] \ddot{\theta}_1 + [L_2 L_{c5} S \alpha C_4^2 C_5] \ddot{\theta}_2 + [2 L_4 L_{c5} C_4^2 C_5] \ddot{\theta}_3 \\ & + [L_4 L_{c5} C_4 C_5] \ddot{\theta}_5 + [L_2 L_{c5} S_2 C_4 S_4 C_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [2 L_4 L_{c5} C_3 C_4 S_4 C_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - [L_2 L_{c5} C_2 (C_4^2 - S_4^2) C_5 + 2 L_4 L_{c5} S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [L_{c5} C_4 S_4 S_5 (L_2 C_2 + 2 L_4 S_3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ & - [L_2 L_{c5} C \alpha C_4^2 C_5] \dot{\theta}_2^2 + [L_2 L_{c5} C \alpha C_4^2 C_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [2 L_2 L_{c5} C \alpha C_4 S_4 C_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - [L_2 L_{c5} S \alpha C_4^2 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \\ & - [4 L_2 L_{c5} C_4 S_4 C_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [2 L_2 L_{c5} C_4^2 S_5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - [L_4 L_{c5} S_4 C_5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - [L_4 L_{c5} C_4 S_5] \dot{\theta}_5^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial 2\mathbf{C}(\mathbf{AC5} + \mathbf{BS5})}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = 0;$$

$$\frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = m_5 \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - [L_2 L_{c5} C_2 C_4 S_5 + L_4 L_{c5} S_3 C_4 S_5 + L_{c5}^2 C_4 S_3 C_5 S_5 + L_{c5}^2 C_3 S_5^2] \ddot{\theta}_1 - [L_2 L_{c5} S \alpha S_4 S_5] \ddot{\theta}_2 \\ & - [L_4 L_{c5} S_4 S_5 + L_{c5}^2 S_4 C_5 S_5] \ddot{\theta}_3 + [L_{c5}^2 S_5^2] \ddot{\theta}_4 + [L_2 L_{c5} S_2 C_4 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [L_4 L_{c5} C_3 C_4 S_5 \\ & + L_{c5}^2 C_3 C_4 C_5 S_5 - L_{c5}^2 S_3 S_5^2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [L_2 L_{c5} C_2 S_4 S_5 + L_4 L_{c5} S_3 S_4 S_5 + L_{c5}^2 S_3 S_4 C_5 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & - [L_{c5} C_4 C_5 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c5}^2 C_4 S_3 (C_5^2 - S_5^2) + L_{c5}^2 C_3 C_5 S_5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [L_2 L_{c5} C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_2^2 \\ & - [L_2 L_{c5} C \alpha S_4 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [L_2 L_{c5} S \alpha C_4 S_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - [L_2 L_{c5} S \alpha S_4 C_5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - [L_{c5} C_4 S_5 (L_4 + L_{c5} C_5)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ & - [L_4 L_{c5} S_4 C_5 + L_{c5}^2 S_4 (C_5^2 - S_5^2)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + [2 L_{c5}^2 C_5 S_5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \dot{\theta}_5}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \dot{\theta}_5}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial \dot{\theta}_5}\right) = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \dot{\theta}_4}\right) = m_5 L_{c5}^2 \times \left\{ \ddot{\theta}_5 + [C4] \ddot{\theta}_3 - [S3S4] \ddot{\theta}_1 - [S3C4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - [C3S4] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [S4] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial 2\mathbf{C}(\mathbf{AC5} + \mathbf{BS5})}{\partial \dot{\theta}_5} \right) &= m_5 \times \\ &\left\{ -[L_{c5}S4C5(L_2C2 + L_4S3)] \ddot{\theta}_1 + [L_2L_{c5}(S\alpha C4C5 + C\alpha S5)] \ddot{\theta}_2 + [L_2L_{c5}C4C5] \ddot{\theta}_3 \right. \\ &+ [L_2L_{c5}S2S4C5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [L_4L_{c5}C3S4C5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - [L_{c5}C4C5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ &+ [L_{c5}S4S5(L_2C2 + L_4S3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - [L_2L_{c5}(C\alpha C4C5 - S\alpha S5)] \dot{\theta}_2^2 + [L_2L_{c5}(C\alpha C4C5 - S\alpha S5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ &\left. - [L_2L_{c5}S\alpha S4C5] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - [L_2L_{c5}(S\alpha C4S5 - C\alpha C5)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - [L_2L_{c5}S4C5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [L_2L_{c5}C4S5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \right\} \end{aligned}$$

$${}^6\omega_6 = [{}^6\omega_{61} \quad {}^6\omega_{62} \quad {}^6\omega_{63}]^T,$$

avec :

$${}^6\omega_{61} = [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]\dot{\theta}_1 + (S4C5C6 + C4S6)\dot{\theta}_3 - S5C6\dot{\theta}_4 + S6\dot{\theta}_5,$$

$${}^6\omega_{62} = [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]\dot{\theta}_1 + (-S4C5S6 + C4C6)\dot{\theta}_3 + S5S6\dot{\theta}_4 + C6\dot{\theta}_5,$$

$${}^6\omega_{63} = (S3C4S5 - C3C5)\dot{\theta}_1 + S4S5\dot{\theta}_3 - C5\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6$$

et :

$${}^R T_6 = \frac{1}{2} (I_{6x} \cdot ({}^6\omega_{61})^2 + I_{6y} \cdot ({}^6\omega_{62})^2 + I_{6z} \cdot ({}^6\omega_{63})^2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial {}^R T_6}{\partial \theta_{1,2}} = 0 \\ \frac{\partial {}^R T_6}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^R T_6}{\partial \theta_3} &= [I_{6x} [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] [C6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4S6] \\ &+ I_{6y} [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6] [-S6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4C6] \\ &+ I_{6z} (S3C4S5 - C3C5)(C3C4S5 + S3C5)]\dot{\theta}_1^2 + [I_{6x} [C6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4S6] (S4C5C6 + C4S6) \\ &+ I_{6y} [-S6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4C6] (-S4C5S6 + C4C6) + I_{6z} (S4S5)(C3C4S5 + S3C5)]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\ &+ [(-S5C6)[C6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4S6]I_{6x} + [-S6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4C6](S5S6)I_{6y} \\ &(C3C4S5 + S3C5)(C5)I_{6z}]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + [S6[C6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4S6]I_{6x} \\ &+ C6[-S6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4C6]I_{6y}]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + [(C3C4S5 + S3C5)I_{6z}]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^R T_6}{\partial \theta_4} &= [I_{6x} [-(S3S4C5C6 + S3C4S6)[C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] + I_{6y} [(S3S4C5S6 - S3C4C6) \times \\ &[-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]] + I_{6z} [-S3S4S5(S3C4S5 - C3C5)]\dot{\theta}_1^2 \\ &+ [I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(C4C5C6 - S4S6)] - I_{6y} [(-S4C5S6 + C4C6)(C4C5S6 + S4C6)] + I_{6z} [C4S4S5^2]]\dot{\theta}_3^2 \\ &+ [I_{6x} [(C4C5C6 - S4S6)[C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] - (S3S4C5C6 + S3C4S6)(S4C5C6 + C4S6)] \\ &+ I_{6y} [(S3S4C5S6 - S3C4C6)(-S4C5S6 + C4C6) - (C4C5S6 + S4C6)[-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]] \\ &+ I_{6z} [C4S5(S3C4S5 - C3C5) - S3S4^2S5^2]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + [I_{6x} [S5C6(S3S4C5C6 + S3C4S6)] \\ &+ I_{6y} [S5S6(S3S4C5S6 - S3C4C6)] - I_{6z} [S3S4C5S5]]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + [I_{6x} [-S5C6(C4C5C6 - S4S6)] \\ &- I_{6y} [S5S6(C4C5S6 + S4C6)] + I_{6z} [C4C5S5]]\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + [-I_{6x} [S6(S3S4C5C6 + S3C4S6)] \\ &+ I_{6y} [C6(S3S4C5S6 - S3C4C6)]]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + [I_{6x} [S6(C4C5C6 - S4S6)] - I_{6y} [C6(C4C5S6 + S4C6)]]\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 \\ &+ [-I_{6z} [S3S4S5]]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_6 + [I_{6z} [C4S5]]\dot{\theta}_3\dot{\theta}_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^R T_6}{\partial \theta_5} = & [I_{6x} [(-S3C4S5C6 + C3C5C6) [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] + I_{6y} [(S3C4S5S6 - C3C5S6) \times \\
& [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]] + I_{6z} [(S3C4S5 - C3C5)(S3C4C5 + C3S5)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + [-I_{6x} [S4S5C6(S4C5C6 + C4S6)] + I_{6y} [S4S5S6(-S4C5S6 + C4C6)] + I_{6z} [S_4^2 C5S5]] \dot{\theta}_3^2 \\
& + [I_{6x} (C5S5C_6^2) + I_{6y} (C5S5S_6^2) - I_{6z} (C5S5)] \dot{\theta}_4^2 + [I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(-S3C4S5C6 + C3C5C6) \\
& - (S4S5C6) [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] + I_{6y} [(S3C4S5S6 - C3C5S6)(-S4C5S6 + C4C6) \\
& + (S4S5S6) [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6]] + I_{6z} [S4S5(S3C4C5 + C3S5) + S4C5(S3C4S5 - C3C5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + [I_{6x} [-C5C6 [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] - S5C6(-S3C4S5C6 + C3C5C6)] \\
& + I_{6y} [C5S6 [-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6] + S5S6(S3C4S5S6 - C3C5S6)] + I_{6z} [C5(S3C4C5 + C3S5) \\
& - S5(S3C4S5 - C3C5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [I_{6x} [S4S_3^2 C_6^2 - C5C6(S4C5C6 + C4S6)] + I_{6y} [S4S_3^2 S_6^2 + C5S6(-S4C5S6 + C4C6)] \\
& + I_{6z} [S4C_5^2 - S4S_5^2]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [I_{6x} [S6(-S3C4S5C6 + C3C5C6)] + I_{6y} [C6(S3C4S5S6 - C3C5S6)]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + [I_{6x} [-S4S5C6S6] + I_{6y} [S4S5C6S6]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + [I_{6x} [-C5C6S6] + I_{6y} [C5C6S6]] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
& + [I_{6z} (S3C4C5 + C3S5)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + [I_{6z} S4C5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 - [I_{6z} S5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^R T_6}{\partial \theta_6} = & [-I_{6x} [[C_6 \tilde{C}_6 (S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]] \\
& - I_{6y} [[-S6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4C6] [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] \dot{\theta}_1^2 \\
& + [I_{6x} [[C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] (-S4C5S6 + C4C6) - [S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6] \times \\
& (S4C5C6 + C4S6)] + I_{6y} [[S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6] (S4C5C6 + C4S6) \\
& - [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] (-S4C5S6 + C4C6)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + [I_{6x} [S5S6 [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] + S5C6 [S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]] \\
& + I_{6y} [-S5C6 [S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6] - S5S6 [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
& + [I_{6x} [C6 [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6] - S6 [S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]] \\
& + I_{6y} [S6 [S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6] - C6 [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
& + [I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(-S4C5S6 + C4C6)] - I_{6y} [(S4C5C6 + C4S6)(-S4C5S6 + C4C6)]] \dot{\theta}_3^2 \\
& + [[S5S6(S4C5C6 + C4S6) - S5C6(-S4C5S6 + C4C6)] (I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& + [[C6(S4C5C6 + C4S6) + S6(-S4C5S6 + C4C6)] (I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - [S_5^2 C6S6 (I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_4^2 \\
& + [S5(S_6^2 - C_6^2) (I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + [S6C6 (I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_6}{\partial \theta_1} \right) &= [I_{6x} [C_6 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6]^2 + I_{6y} [S_6 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]^2 \\
&+ I_{6z} [S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5]^2] \dot{\theta}_1 + [I_{6x} [S_3 C_4 S_4 C_5^2 C_6^2 + S_3 C_4^2 C_5 C_6 S_6 + C_3 S_4 C_5 S_5 C_6^2 + C_3 C_4 S_5 C_6 S_6 \\
&- S_3 S_4^2 C_5 C_6 S_6 - S_3 C_4 S_4 S_6^2] + I_{6y} [S_3 C_4 S_4 C_5^2 S_6^2 + C_3 S_4 C_5 S_5 S_6^2 + S_3 S_4^2 C_5 C_6 S_6 - S_3 C_4^2 C_5 C_6 S_6 \\
&- C_3 C_4 S_5 C_6 S_6 - S_3 C_4 S_4 C_6^2] + I_{6z} [S_3 C_4 S_4 S_5^2 - C_3 S_4 C_5 S_5]] \dot{\theta}_3 - [I_{6x} [S_3 C_4 C_5 S_5 C_6^2 + C_3 S_4^2 C_6^2 \\
&- S_3 S_4 S_5 C_6 S_6] + I_{6y} [S_3 C_4 C_5 S_5 C_6^2 + C_3 S_4^2 S_6^2 + S_3 S_4 S_5 C_6 S_6] - I_{6z} [S_3 C_4 S_5 C_5 - C_3 C_5^2]] \dot{\theta}_4 \\
&+ I_{6x} [S_3 C_4 C_5 C_6 S_6 + C_3 S_5 C_6 S_6 - S_3 S_4 S_6^2] - I_{6y} [S_3 C_4 C_5 C_6 S_6 + C_3 S_5 C_6 S_6 + S_3 S_4 C_6^2] \dot{\theta}_5 \\
&+ [I_{6z} (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] \dot{\theta}_6 + [2I_{6x} [(S_3 C_4 C_5 C_6 + C_3 S_5 C_6 - S_3 S_4 S_6)(C_3 C_4 C_5 C_6 - S_3 S_5 C_6 - C_3 S_4 S_6)] \\
&+ 2I_{6y} [(S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 S_5 S_6 + S_3 S_4 C_6)(C_3 C_4 C_5 S_6 - S_3 S_5 S_6 + C_3 S_4 C_6)] \\
&+ 2I_{6z} [(S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)(C_3 C_4 S_5 + S_3 C_5)]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [2I_{6x} [(S_3 C_4 C_5 C_6 + C_3 S_5 C_6 - S_3 S_4 S_6) \times \\
&(-S_3 S_4 C_5 C_6 - S_3 C_4 S_6)] + 2I_{6y} [(S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 S_5 S_6 + S_3 S_4 C_6)(-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6)] \\
&+ 2I_{6z} [(S_3 C_4 S_5)(-S_3 S_4 S_5)]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [2I_{6x} [(S_3 C_4 C_5 C_6 + C_3 S_5 C_6 - S_3 S_4 S_6)(-S_3 C_4 S_5 C_6 + C_3 C_5 C_6)] \\
&+ 2I_{6y} [(S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 S_5 S_6 + S_3 S_4 C_6)(-S_3 C_5 S_5 S_6 + C_3 C_5 S_6)] + 2I_{6z} [(S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 S_5 S_6 + S_3 S_4 C_6) \times \\
&(-S_3 C_4 S_5 S_6 + C_3 C_5 S_6)] + 2I_{6z} [(S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5)]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
&- [2[(S_3 C_4 C_5 C_6 + C_3 S_5 C_6 - S_3 S_4 S_6)(S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 S_5 S_6 + S_3 S_4 C_6)](I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\
&+ [I_{6x} [C_3 C_4 S_4 C_5^2 C_6^2 + C_3 C_4^2 C_5 C_6 S_6 - S_3 S_4 C_5 S_5 C_6^2 - S_3 C_4 S_5 C_6 S_6 - C_3 S_4^2 C_5 C_6 S_6 - C_3 C_4 S_4 S_6^2] \\
&+ I_{6y} [C_3 C_4 S_4 C_5^2 S_6^2 - S_3 S_4 C_5 S_5 S_6^2 + C_3 S_4^2 C_5 C_6 S_6 - C_3 C_4^2 C_5 C_6 S_6 + S_3 C_4 S_5 C_6 S_6 - C_3 C_4 S_4 C_6^2] \\
&I_{6z} [C_3 C_4 S_4 S_5^2 + S_3 S_4 C_5 S_5]] \dot{\theta}_3^2 + [I_{6x} [S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5^2 C_6^2 - 4S_3 C_4 S_4 C_5 C_6 S_6 - S_3 (C_4^2 - S_4^2) S_6^2 + S_3 S_5^2 C_6^2] \\
&+ I_{6y} [S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_5^2 S_6^2 + 4S_3 C_4 S_4 C_5 C_6 S_6 - S_3 (C_4^2 - S_4^2) C_6^2 + S_3 S_5^2 S_6^2] + I_{6z} [S_3 (C_4^2 - S_4^2) S_5^2 + S_3 C_5^2]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
&+ [I_{6x} [-2S_3 C_4 S_4 C_5 S_5 C_6^2 - S_3 C_4^2 S_5 C_6 S_6 + C_3 S_4 (C_5^2 - S_5^2) C_6^2 + 2C_3 C_4 C_5 C_6 S_6 + S_3 S_4^2 S_5 C_6 S_6 \\
&- S_3 S_5 C_6 S_6 - C_3 S_4 S_6^2] + I_{6y} [-2S_3 C_4 S_4 C_5 S_5 S_6^2 + C_3 S_4 (C_5^2 - S_5^2) S_6^2 - S_3 S_4^2 S_5 C_6 S_6 + S_3 C_4^2 S_5 C_6 S_6 \\
&- 2C_3 C_4 C_5 C_6 S_6 + S_3 S_5 C_6 S_6 + C_3 S_4 C_6^2] + I_{6z} [2S_3 C_4 S_4 C_5 S_5 - C_3 S_4 (C_5^2 - S_5^2)]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&+ [I_{6x} [-2S_3 C_4 S_4 C_5^2 C_6 S_6 + S_3 C_4^2 C_5 (C_6^2 - S_6^2) - 2C_3 S_4 C_5 S_5 C_6 S_6 + C_3 C_4 S_5 (C_6^2 - S_6^2) \\
&- S_3 S_4^2 C_5 (C_6^2 - S_6^2) - 2S_3 C_4 S_4 C_6 S_6] + I_{6y} [2S_3 C_4 S_4 C_5^2 C_6 S_6 + 2C_3 S_4 C_5 S_5 C_6 S_6 + S_3 S_4^2 C_5 (C_6^2 - S_6^2) \\
&- S_3 C_4^2 C_5 (C_6^2 - S_6^2) - C_3 C_4 S_5 (C_6^2 - S_6^2) + 2S_3 S_4 C_4 C_6 S_6] + I_{6z} [C_3 C_4 S_5 + S_3 C_5]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 \\
&- [I_{6x} [-S_3 S_4 C_5 S_5 C_6^2 - S_3 C_4 S_5 C_6 S_6] + I_{6y} [-S_3 S_4 C_5 S_5 S_6^2 + S_3 C_4 S_5 C_6 S_6] + I_{6z} [S_3 S_4 C_5 S_5]] \dot{\theta}_4^2 \\
&- [I_{6x} [S_3 C_4 (C_5^2 - S_5^2) C_6^2 + 2C_3 C_5 S_5 C_6^2 + S_3 C_4 S_6^2] + I_{6y} [S_3 C_4 (C_5^2 - S_5^2) S_6^2 + 2C_3 C_5 S_5 C_6^2 + S_3 C_4 C_6^2] \\
&- I_{6z} [S_3 C_4 (C_5^2 - S_5^2) + 2C_3 C_5 S_5]] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - [I_{6x} [-2S_3 C_4 C_5 S_5 C_6 S_6 - 2C_3 S_5^2 C_6 S_6 - S_3 S_4 S_5 (C_6^2 - S_6^2)] \\
&+ I_{6y} [2S_3 C_4 C_5 S_5 C_6 S_6 + 2C_3 S_5^2 C_6 S_6 + S_3 S_4 S_5 (C_6^2 - S_6^2)] + I_{6z} [S_3 S_4 S_5]] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \\
&+ [I_{6x} [-S_3 C_4 S_5 C_6 S_6 + C_3 C_5 C_6 S_6] - I_{6y} [-S_3 C_4 S_5 C_6 S_6 + C_3 C_5 C_6 S_6]] \dot{\theta}_5^2 \\
&+ [[S_3 C_4 C_5 (C_6^2 - S_6^2) + C_3 S_5 (C_6^2 - S_6^2) - 2S_3 S_4 C_6 S_6](I_{6x} - I_{6y}) + I_{6z} [S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5]] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_6}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= [I_{6x} [S3C4S4C_5^2 C_6^2 + S3C_4^2 C5C6S6 + C3S4C5S5C_6^2 + C3C4S5C6S6 \\
&- S3S_4^2 C5C6S6 - S3C4S4S_6^2] + I_{6y} [S3C4S4C_5^2 S_6^2 + C3S4C5S5S_6^2 + S3S_4^2 C5C6S6 \\
&- S3C_4^2 C5C6S6 - C3C4S5C6S6 - S3C4S4C_6^2] + I_{6z} [S3C4S4S_5^2 - C3S4C5S5] \ddot{\theta}_1 \\
&+ [I_{6x} [S4C5C6 + C4S6]^2 + I_{6y} [-S4C5S6 + C4C6]^2 + I_{6z} [S_4^2 S_5^2] \ddot{\theta}_3 \\
&+ [-I_{6x} [S4C5S5C_6^2 + C4S5C6S6] + I_{6y} [-S4C5S5S_6^2 + C4S5C6S6] + I_{6z} [S4C5S5] \ddot{\theta}_4 \\
&+ [I_{6x} [S4C5C6S6 + C4S_6^2] + I_{6y} [-S4C5C6S6 + C4C_6^2] \ddot{\theta}_5 + [I_{6z} [S4S5] \ddot{\theta}_6 \\
&+ [I_{6x} [C3C4S4C_5^2 C_6^2 + C3C_4^2 C5C6S6 - S3S4C5S5C_6^2 - S3C4S5C6S6 - C3S_4^2 C5C6S6 \\
&- C3C4S4S_6^2] + I_{6y} [C3C4S4C_5^2 S_6^2 - S3S4C5S5S_6^2 + C3S_4^2 C5C6S6 - C3C_4^2 C5C6S6 \\
&+ S3C4S5C6S6 - C3C4S4C_6^2] + I_{6z} [C3C4S4S_5^2 + S3S4C5S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
&+ [I_{6x} [S3(C_4^2 - S_4^2) C_5^2 C_6^2 - 4S3C4S4C5C6S6 + C3C4C5S5C_6^2 - C3S4S5C6S6 \\
&- S3(C_4^2 - S_4^2) S_6^2] + I_{6y} [S3(C_4^2 - S_4^2) C_5^2 S_6^2 + C3C4C5S5S_6^2 + 4S3C4S4C5C6S6 \\
&+ C3S4S5C6S6 - S3(C_4^2 - S_4^2) C_6^2] + I_{6z} [S3(C_4^2 - S_4^2) S_5^2 - C3C4C5S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
&+ [I_{6x} [-2S3C4S4C5S5C_6^2 - S3C_4^2 S5C6S6 + C3S4(C_5^2 - S_5^2) C_6^2 + C3C4C5C6S6 \\
&+ S3S_4^2 S5C6S6] + I_{6y} [-2S3C4S4C5S5S_6^2 + C3S4(C_5^2 - S_5^2) S_6^2 - S3S_4^2 S5C6S6 \\
&+ S3C_4^2 S5C6S6 - C3C4C5C6S6] + I_{6z} [2S3C4S4C5S5 - C3S4(C_5^2 - S_5^2)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
&+ [[-2S3C4S4C_5^2 C6S6 + S3C_4^2 C5(C_6^2 - S_6^2) - 2C3S4C5S5C6S6 + C3C4S5(C_6^2 - S_6^2) \\
&- S3S_4^2 C5(C_6^2 - S_6^2) - 2S3C4S4C6S6] (I_{6x} - I_{6y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\
&+ [2I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(C4C5C6 - S4S6)] - 2I_{6y} [(-S4C5S6 + C4C6)(C4C5C6 + S4C6)] \\
&+ 2I_{6z} [C4S4S_5^2] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [2I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(-S4S5C6)] + 2I_{6y} [(-S4C5S6 + C4C6)(S4S5S6)] \\
&+ 2I_{6z} [S_4^2 C5S5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + [2I_{6x} [(S4C5C6 + C4S6)(-S4C5S6 + C4C6)] \\
&- 2I_{6y} [(-S4C5S6 + C4C6)(S4C5C6 + C4S6)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + [-I_{6x} [C4C5S5C_6^2 - S4S5C6S6] \\
&+ I_{6y} [-C4C5S5S_6^2 - S4S5C6S6] + I_{6z} [C4C5S5] \dot{\theta}_4^2 + [-I_{6x} [S4(C_5^2 - S_5^2) C_6^2 + S4S_6^2] \\
&+ I_{6y} [-S4(C_5^2 - S_5^2) S_6^2 - S4C_6^2] + I_{6z} [S4(C_5^2 - S_5^2)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + [I_{6x} [2S4C5S5C6S6 - C4S5(C_6^2 - S_6^2)] \\
&- I_{6y} [2S4C5S5C6S6 - C4S5(C_6^2 - S_6^2)] - I_{6z} [C4S5] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 - [[-S4S5C6S6] (I_{6x} - I_{6y}) \dot{\theta}_5^2 \\
&+ [[S4C5(C_6^2 - S_6^2) + 2C4C6S6] (I_{6x} - I_{6y}) + I_{6z} [S4C5] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_6}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = & [-I_{6x} [S3C4C5S5C_6^2 + C3S_5^2C_6^2 - S3S4S5C6S6] - I_{6y} [S3C4C5S5S_6^2 + C3S_5^2S_6^2 + S3S4S5C6S6] \\
& + I_{6z} [S3C4C5S5 - C3C_5^2] \dot{\theta}_1 + [-I_{6x} [S4C5S5C_6^2 + C4S5C6S6] + I_{6y} [-S4C5S5S_6^2 + C4S5C6S6] \\
& + I_{6z} [S4C5S5] \dot{\theta}_3 + [I_{6x} [S_5^2C_6^2] + I_{6y} [S_5^2S_6^2] + I_{6z} [C_5^2] \dot{\theta}_4 - [S5C6S6](I_{6x} - I_{6y}) \ddot{\theta}_5 + [I_{6z} [C5] \ddot{\theta}_6 \\
& + [-I_{6x} [C3C4C5S5C_6^2 - S3S_5^2C_6^2 - C3S4S5C6S6] - I_{6y} [C3C4C5S5S_6^2 - S3S_5^2S_6^2 + C3S4S5C6S6] \\
& + I_{6z} [C3C4C5S5 + S3C_5^2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [-I_{6x} [-S3S4C5S5C_6^2 - S3C4S5C6S6] - I_{6y} [-S3S4C5S5S_6^2 + S3C4S5C6S6] \\
& - I_{6z} [S3S4C5S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + [-I_{6x} [S3C4(C_5^2 - S_5^2)C_6^2 + 2C3C5S5C_6^2 - S3S4C5C6S6] \\
& - I_{6y} [S3C4(C_5^2 - S_5^2)S_6^2 + 2C3C5S5S_6^2 + S3S4C5C6S6] + I_{6z} [S3C4(C_5^2 - S_5^2) + 2C3C5S5] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
& + [2S3C4C5S5C6S6 + 2C3S_5^2C6S6 + S3S4S5(C_6^2 - S_6^2)](I_{6x} - I_{6y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\
& + [-I_{6x} [C4C5S5C_6^2 - S4S5C6S6] - I_{6y} [C4C5S5S_6^2 + S4S5C6S6] + I_{6z} [C4C5S5] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& + [-I_{6x} [S4(C_5^2 - S_5^2)C_6^2 + C4C5C6S6] + I_{6y} [-S4(C_5^2 - S_5^2)S_6^2 + C4C5C6S6] + I_{6z} [S4(C_5^2 - S_5^2)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
& + [2S4C5S5C6S6 - C4S5(C_6^2 - S_6^2)](I_{6x} - I_{6y}) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + [2C5S5[C_6^2 I_{6x} + S_6^2 I_{6y} - I_{6z}]] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
& - [2S_5^2C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 - [C5C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_5^2 - [S5(C_6^2 - S_6^2)(I_{6x} - I_{6y})] + I_{6z} [S5] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_6}{\partial \dot{\theta}_5} \right) = & [[S3C4C5C6S6 + C3S5C6S6](I_{6x} - I_{6y}) - S3S4(S_6^2 I_{6x} + C_6^2 I_{6y})] \ddot{\theta}_1 \\
& + [S4C5C6S6(I_{6x} - I_{6y}) + C4(S_6^2 I_{6x} + C_6^2 I_{6y})] \ddot{\theta}_3 - [S5C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \ddot{\theta}_4 + [S_6^2 I_{6x} + C_6^2 I_{6y}] \ddot{\theta}_5 \\
& + [[C3C4C5C6S6 - S3S5C6S6](I_{6x} - I_{6y}) - C3S4(S_6^2 I_{6x} + C_6^2 I_{6y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + [-S3S4C5C6S6(I_{6x} - I_{6y}) - S3C4(S_6^2 I_{6x} + C_6^2 I_{6y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
& + [(-S3C4S5C6S6 + C3C5C6S6)(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [[S3C4C5(C_6^2 - S_6^2) + C3S5(C_6^2 - S_6^2) \\
& - 2S3S4C6S6](I_{6x} - I_{6y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + [I_{6x} [C4C5C6S6 - S4S_6^2] + I_{6y} [-C4C5C6S6 - S4C_6^2]] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& - [S4S5C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + [[S4C5(C_6^2 - S_6^2) + 2C4C6S6](I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 \\
& - [C5C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - [S5(C_6^2 - S_6^2)(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + [2C6S6(I_{6x} - I_{6y})] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6
\end{aligned}$$

et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^R T_6}{\partial \dot{\theta}_6} \right) = I_{6z} \ddot{\theta}_6$$

$${}^T T_6 = \frac{1}{2} m_6 (v_{c6})^T \cdot (v_{c6}) = \frac{1}{2} m_6 (v_{c61}^2 + v_{c62}^2 + v_{c63}^2);$$

nous allons dériver terme à terme par rapport à chaque variable sachant que :

$$\begin{aligned} v_{c61} = & -[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \\ & + L_2 [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 + [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_3 \\ & + [L_{c6} S_5 S_6] \dot{\theta}_4 + [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \theta_2} \right) = m_6 \{ & - [[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \times \\ & [L_2 S_2 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)] \dot{\theta}_1^2 + [L_2^2 S_2 [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ & - [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \times \\ & L_2 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [L_2 S_2 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)] \times \\ & [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + [L_2 L_{c6} S_2 S_5 S_6 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & + [L_2 L_{c6} S_2 C_6 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ & [L_2^2 [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2^2 \\ & + [L_2 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ & + [L_2 L_{c6} S_5 S_6 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ & + [L_2 L_{c6} C_6 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \theta_3} \right) = m_6 \{ & - [[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \times \\ & [-L_4 C_3 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) + C_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1^2 \\ & + [[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \times \\ & L_2 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] + L_2 [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] \times \\ & [-L_4 C_3 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) + C_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] [-L_4 C_3 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ & + L_{c6} [S_6(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) + C_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + [L_{c6} S_5 S_6 [-L_4 C_3 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) + C_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ & + [L_{c6} C_6 [-L_4 C_3 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) + C_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\ & - [L_2^2 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2^2 \\ & - [L_2 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ & - [L_2 L_{c6} S_5 S_6 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ & - [L_2 L_{c6} C_6 [-C \alpha C_4 C_5 C_6 + S \alpha S_5 C_6 + C \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \theta_4} \right) = m_6 \{ & \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \times \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} [-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6] \right] \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \times \\
& L_2 [S_\alpha S_4 C_5 C_6 + S_\alpha C_4 S_6] - \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} [-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6] \right] \times \\
& L_2 [S_\alpha C_4 C_5 C_6 + C_\alpha S_5 C_6 - S_\alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[L_4 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) \right] \times \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \\
& - \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} [-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6] \right] \times \\
& \left[L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& - \left[L_{c6} S_5 S_6 \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} [-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6] \right] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
& - \left[L_{c6} C_6 \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} [-S_3 S_4 C_5 S_6 + S_3 C_4 C_6] \right] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
& - \left[L_2^2 [S_\alpha C_4 C_5 C_6 + C_\alpha S_5 C_6 - S_\alpha S_4 S_6] [S_\alpha S_4 C_5 C_6 + S_\alpha C_4 S_6] \right] \dot{\theta}_2^2 \\
& - \left[L_2 [S_\alpha C_4 C_5 C_6 + C_\alpha S_5 C_6 - S_\alpha S_4 S_6] \left[L_4 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) \right] \right. \\
& \left. + L_2 [S_\alpha S_4 C_5 C_6 + S_\alpha C_4 S_6] \left[L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \right] \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& - \left[L_2 L_{c6} S_5 S_6 [S_\alpha S_4 C_5 C_6 + S_\alpha C_4 S_6] \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \left[L_2 L_{c6} C_6 [S_\alpha S_4 C_5 C_6 + S_\alpha C_4 S_6] \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \\
& - \left[L_4 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) \right] \left[L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \right] \dot{\theta}_3^2 \\
& - \left[L_{c6} S_5 S_6 \left[L_4 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) \right] \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& - \left[L_{c6} C_6 \left[L_4 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) \right] \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \theta_5} \right) = m_6 \{ \\
& - \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \times \\
& [S_4 S_5 C_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} S_6 (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + [L_2 [S_4 C_4 C_5 C_6 + C_4 S_5 C_6 - S_4 S_4 S_6] [S_4 S_5 C_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} S_6 (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] \\
& - [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \times \\
& [L_2 [-S_4 C_4 S_5 C_6 + C_4 C_5 C_6] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [S_4 S_5 C_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} S_6 (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] \times \\
& [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] - [-L_4 C_4 S_5 C_6 + L_{c6} S_4 S_5 S_6] \times \\
& [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& + [S_4 S_5 C_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} S_6 (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] [L_{c6} S_5 S_6] - [L_{c6} C_5 S_6] \times \\
& [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
& + [S_4 S_5 C_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} S_6 (S_3 C_4 S_5 - C_3 C_5)] [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
& + [L_2^2 [-S_4 C_4 S_5 C_6 + C_4 C_5 C_6] [S_4 C_4 C_5 C_6 + C_4 S_5 C_6 - S_4 S_4 S_6]] \dot{\theta}_2^2 \\
& + [-L_4 C_4 S_5 C_6 + L_{c6} S_4 S_5 S_6] [L_2 [S_4 C_4 C_5 C_6 + C_4 S_5 C_6 - S_4 S_4 S_6]] \\
& + L_2 [-S_4 C_4 S_5 C_6 + C_4 C_5 C_6] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + [L_{c6} C_5 S_6] [L_2 [S_4 C_4 C_5 C_6 + C_4 S_5 C_6 - S_4 S_4 S_6]] + L_2 [-S_4 C_4 S_5 C_6 + C_4 C_5 C_6] [L_{c6} S_5 S_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
& + [L_2 [-S_4 C_4 S_5 C_6 + C_4 C_5 C_6] [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \times \\
& [-L_4 C_4 S_5 C_6 + L_{c6} S_4 S_5 S_6] \dot{\theta}_3^2 + [L_{c6} C_5 S_6] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \\
& + [-L_4 C_4 S_5 C_6 + L_{c6} S_4 S_5 S_6] [L_{c6} S_5 S_6] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + [-L_4 C_4 S_5 C_6 + L_{c6} S_4 S_5 S_6] [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
& + [L_{c6} C_5 S_6] [L_{c6} S_5 S_6] \dot{\theta}_4^2 + [L_{c6} C_5 S_6] [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \theta_6} \right) = m_6 \{ & \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6] \right] \times \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \dot{\theta}_1^2 \\
& + \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \times \\
& L_2 [S_{\alpha} C_4 C_5 S_6 + C_{\alpha} S_5 S_6 + S_{\alpha} S_4 C_6] - L_2 [S_{\alpha} C_4 C_5 C_6 + C_{\alpha} S_5 C_6 - S_{\alpha} S_4 S_6] \times \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \times \\
& \left[L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_5 S_6) \right] - \left[L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \right] \times \\
& \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\
& - \left[L_{c6} S_5 C_6 \right] \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \\
& + \left[L_{c6} S_5 S_6 \right] \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
& + \left[L_{c6} S_6 \right] \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6] \right] \\
& - \left[L_{c6} C_6 \right] \left[(L_2 C_2 + L_4 S_3)(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6] \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
& - \left[L_2^2 [S_{\alpha} C_4 C_5 C_6 + C_{\alpha} S_5 C_6 - S_{\alpha} S_4 S_6] [S_{\alpha} C_4 C_5 S_6 + C_{\alpha} S_5 S_6 + S_{\alpha} S_4 C_6] \right] \dot{\theta}_2^2 \\
& - \left[L_2 [S_{\alpha} C_4 C_5 S_6 + C_{\alpha} S_5 S_6 + S_{\alpha} S_4 C_6] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \right] \\
& + L_2 [S_{\alpha} C_4 C_5 C_6 + C_{\alpha} S_5 C_6 - S_{\alpha} S_4 S_6] [L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_5 S_6)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + [L_2 L_{c6} S_5 C_6 [S_{\alpha} C_4 C_5 C_6 + C_{\alpha} S_5 C_6 - S_{\alpha} S_4 S_6] - L_2 L_{c6} S_5 S_6 [S_{\alpha} C_4 C_5 S_6 + C_{\alpha} S_5 S_6 + S_{\alpha} S_4 C_6]] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
& - [L_2 L_{c6} S_6 [S_{\alpha} C_4 C_5 C_6 + C_{\alpha} S_5 C_6 - S_{\alpha} S_4 S_6] + L_2 L_{c6} C_6 [S_{\alpha} C_4 C_5 S_6 + C_{\alpha} S_5 S_6 + S_{\alpha} S_4 C_6]] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \\
& - \left[[L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_5 S_6)] [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \right] \dot{\theta}_3^2 \\
& + [L_{c6} S_5 C_6 [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] - L_{c6} S_5 S_6 \times \\
& [L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_5 S_6)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - [L_{c6} S_6 [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \\
& + L_{c6} C_6 [L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_5 S_6)] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + [L_{c6}^2 S_5^2 C_6 S_6] \dot{\theta}_4^2 \\
& + [L_{c6}^2 S_5 (C_6^2 - S_6^2)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - [L_{c6}^2 C_6 S_6] \dot{\theta}_5^2
\end{aligned}$$

$$v_{c62} = [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6) - L_{c6} [C_6(S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) - S_3 S_4 S_6]] \dot{\theta}_1 \\ - L_2 [S \alpha C_4 C_5 S_6 + C \alpha S_5 S_6 + S \alpha S_4 C_6] \dot{\theta}_2 - [L_4 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)] \dot{\theta}_3 \\ + [L_{c6} S_5 C_6] \dot{\theta}_4 - [L_{c6} S_6] \dot{\theta}_5 = B_1 \dot{\theta}_1 - B_2 \dot{\theta}_2 - B_3 \dot{\theta}_3 + B_4 \dot{\theta}_4 - B_5 \dot{\theta}_5$$

pour ne pas alourdir la suite des calculs, il est utile d'utiliser de nouvelles notations comme nous allons le faire :

$$\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_i} \right) = m_6 v_{c6} \frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_i}$$

d'où :

$$\frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_2} = -L_2 S_2 (S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6) \dot{\theta}_1 + L_2 [C \alpha C_4 C_5 S_6 - S \alpha S_5 S_6 + C \alpha S_4 C_6] \dot{\theta}_2 \\ = -A_1 \dot{\theta}_1 + A_2 \dot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_2} \right) = m_6 \left\{ (A_1 B_1) \dot{\theta}_1^2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (A_1 B_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - (A_1 B_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + (A_1 B_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \right. \\ \left. - (A_2 B_2) \dot{\theta}_2^2 - (A_2 B_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (A_2 B_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - (A_2 B_5) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \right\}$$

$$\frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_3} = [L_2 C_3 (S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6) - L_{c6} [C_6 (C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5) - C_3 S_4 S_6]] \dot{\theta}_1$$

$$- L_2 [C \alpha C_4 C_5 S_6 + S \alpha S_5 S_6 + C \alpha S_4 C_6] \dot{\theta}_2 = A_1 \dot{\theta}_1 - A_2 \dot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_3} \right) = m_6 \left\{ (A_1 B_1) \dot{\theta}_1^2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (A_1 B_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + (A_1 B_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - (A_1 B_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \right. \\ \left. + (A_2 B_2) \dot{\theta}_2^2 + (A_2 B_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - (A_2 B_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + (A_2 B_5) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \right\}$$

$$\frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_4} = [(L_2 C_2 + L_4 S_3)(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + L_{c6} [S_3 S_4 C_5 C_6 + S_3 C_4 S_6]] \dot{\theta}_1$$

$$- L_2 [-S \alpha S_4 C_5 S_6 + S \alpha C_4 C_6] \dot{\theta}_2 - [L_4 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) + L_{c6} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6)] \dot{\theta}_3$$

$$= A_1 \dot{\theta}_1 - A_2 \dot{\theta}_2 - A_3 \dot{\theta}_3 \Rightarrow \dot{\theta}_3$$

$$\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_4} \right) = m_6 \left\{ (A_1 B_1) \dot{\theta}_1^2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (A_1 B_3 + A_3 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + (A_1 B_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - (A_1 B_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \right. \\ \left. + (A_2 B_2) \dot{\theta}_2^2 + (A_2 B_3 + A_3 B_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - (A_2 B_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + (A_2 B_5) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + (A_3 B_3) \dot{\theta}_3^2 - (A_3 B_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + (A_3 B_5) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_5} &= -[S_4 S_5 S_6 (L_2 C_2 + L_4 S_3) + L_{c6} [C_6 (-S_3 C_4 S_5 + C_3 C_5)]] \dot{\theta}_1 \\
&+ L_2 [S \alpha C_4 S_5 S_6 - C \alpha C_5 S_6] \dot{\theta}_2 + [L_4 C_4 S_5 S_6 + L_{c6} S_4 S_5 C_6] \dot{\theta}_3 + [L_{c6} C_5 C_6] \dot{\theta}_4 \\
&= -A_1 \dot{\theta}_1 + A_2 \dot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_3 + A_4 \dot{\theta}_4 \Rightarrow \\
\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_5} \right) &= m_6 \left\{ (A_1 B_1) \dot{\theta}_1^2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (A_1 B_3 + A_3 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + (A_4 B_1 - A_1 B_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \right. \\
&+ (A_1 B_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - (A_2 B_2) \dot{\theta}_2^2 - (A_2 B_3 + A_3 B_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (A_2 B_4 - A_4 B_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - (A_2 B_5) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \\
&\left. - (A_3 B_3) \dot{\theta}_3^2 + (A_3 B_4 - A_4 B_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - (A_3 B_5) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + (A_4 B_4) \dot{\theta}_4^2 - (A_4 B_5) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{c62}}{\partial \theta_6} &= [(L_2 C_2 + L_4 S_3) (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + L_{c6} [S_6 (S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5) + S_3 S_4 C_6]] \dot{\theta}_1 \\
&- L_2 [S \alpha C_4 C_5 C_6 + C \alpha S_5 C_6 - S \alpha S_4 S_6] \dot{\theta}_2 - [L_4 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + L_{c6} (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)] \dot{\theta}_3 \\
&- [L_{c6} S_5 S_6] \dot{\theta}_4 - [L_{c6} C_6] \dot{\theta}_5 = A_1 \dot{\theta}_1 - A_2 \dot{\theta}_2 - A_3 \dot{\theta}_3 - A_4 \dot{\theta}_4 - A_5 \dot{\theta}_5 \Rightarrow \\
\frac{m_6}{2} \left(\frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \theta_6} \right) &= m_6 \left\{ (A_1 B_1) \dot{\theta}_1^2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (A_1 B_3 + A_3 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + (A_1 B_4 - A_4 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \right. \\
&- (A_1 B_5 + A_5 B_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + (A_2 B_2) \dot{\theta}_2^2 + (A_2 B_3 + A_3 B_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + (A_4 B_2 - A_2 B_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
&+ (A_2 B_5 + A_5 B_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + (A_3 B_3) \dot{\theta}_3^2 + (A_4 B_3 - A_3 B_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + (A_3 B_5 + A_5 B_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&\left. - (A_4 B_4) \dot{\theta}_4^2 + (A_4 B_5 - A_5 B_4) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + (A_5 B_5) \dot{\theta}_5^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$v_{c63} = -[S4S5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 + L_2[S\alpha C4S5 - C\alpha C5]\dot{\theta}_2 + [L_4C4S5]\dot{\theta}_3$$

$$= -B1\dot{\theta}_1 + B2\dot{\theta}_2 + B3\dot{\theta}_3$$

$$\frac{\partial v_{c63}}{\partial \theta_2} = [L_2S2S4S5]\dot{\theta}_1 - L_2[C\alpha C4S5 + S\alpha C5]\dot{\theta}_2 = A1\dot{\theta}_1 - A2\dot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \theta_2} = m_6 \left\{ -(A1B1)\dot{\theta}_1^2 + (A1B2 + A2B1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (A1B3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - (A2B2)\dot{\theta}_2^2 - (A2B3)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \right\}$$

$$\frac{\partial v_{c63}}{\partial \theta_3} = -[L_4C3S4S5]\dot{\theta}_1 + L_2[C\alpha C4S5 + S\alpha C5]\dot{\theta}_2 = -A1\dot{\theta}_1 + A2\dot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \theta_3} = m_6 \left\{ (A1B1)\dot{\theta}_1^2 - (A1B2 + A2B1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (A1B3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + (A2B2)\dot{\theta}_2^2 + (A2B3)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \right\}$$

$$\frac{\partial v_{c63}}{\partial \theta_4} = -[C4S5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 - [L_2S\alpha S4S5]\dot{\theta}_2 - [L_4S4S5]\dot{\theta}_3$$

$$= -A1\dot{\theta}_1 - A2\dot{\theta}_2 - A3\dot{\theta}_3 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \theta_4} = m_6 \left\{ (A1B1)\dot{\theta}_1^2 + (A2B1 - A1B2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (A3B1 - A1B3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 - (A2B2)\dot{\theta}_2^2 \right.$$

$$\left. - (A2B3 + A3B2)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - (A3B3)\dot{\theta}_3^2 \right\}$$

$$\frac{\partial v_{c63}}{\partial \theta_5} = -[S4C5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 + L_2[S\alpha C4C5 + C\alpha S5]\dot{\theta}_2 + [L_4C4C5]\dot{\theta}_3$$

$$= -A1\dot{\theta}_1 + A2\dot{\theta}_2 + A3\dot{\theta}_3 \Rightarrow$$

$$\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \theta_5} = m_6 \left\{ (A1B1)\dot{\theta}_1^2 - (A1B2 + A2B1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (A1B3 + A3B1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + (A2B2)\dot{\theta}_2^2 \right.$$

$$\left. + (A2B3 + A3B2)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + (A3B3)\dot{\theta}_3^2 \right\}$$

La dernière étape du calcul concerne la dérivation de ${}^T T_6$ par rapport aux vitesses articulaires, nous allons le faire en considérant chaque composante du vecteur vitesse instantanée v_{c6} à part :

$$v_{c61} = -[(L_2C2 + L_4S3)(S4C5C6 + C4S6) + L_{c6}[S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]]\dot{\theta}_1$$

$$+ L_2[S\alpha C4C5C6 + C\alpha S5C6 - S\alpha S4S6]\dot{\theta}_2 + [L_4(C4C5C6 - S4S6) + L_{c6}(-S4C5S6 + C4C6)]\dot{\theta}_3$$

$$+ [L_{c6}S5S6]\dot{\theta}_4 + [L_{c6}C6]\dot{\theta}_5 = -A1\dot{\theta}_1 + A2\dot{\theta}_2 + A3\dot{\theta}_3 + A4\dot{\theta}_4 + A5\dot{\theta}_5$$

avec :

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_2} = -L_2 S2(S4C5C6 + C4S6)$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_3} = L_4 C3(S4C5C6 + C4S6) + L_{c6} [S6(C3C4C5 - S3S5) + C3S4C6]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_4} = (L_2 C2 + L_4 S3)(C4C5C6 - S4S6) + L_{c6} [-S3S4C5S6 + S3C4C6]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_5} = -S4S5C6(L_2 C2 + L_4 S3) + L_{c6} [S6(-S3C4S5 + C3C5)]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_6} = (L_2 C2 + L_4 S3)(-S4C5S6 + C4C6) + L_{c6} [C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_2} = L_2 [-C\alpha C4C5C6 + S\alpha S5C6 + C\alpha S4S6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_3} = L_2 [C\alpha C4C5C6 - S\alpha S5C6 - C\alpha S4S6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_4} = -L_2 [S\alpha S4C5C6 + S\alpha C4S6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_5} = L_2 [-S\alpha C4S5C6 + C\alpha C5C6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_6} = -L_2 [S\alpha C4C5S6 + C\alpha S5S6 + S\alpha S4C6]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_4} = -[L_4 (S4C5C6 + C4S6) + L_{c6} (C4C5S6 + S4C6)]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_5} = [-C4S5C6 L_4 + S4S5S6 L_{c6}]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_6} = -[L_4 (C4C5S6 + S4C6) + L_{c6} (S4C5C6 + C4S6)]$$

$$\frac{\partial A4}{\partial \theta_5} = L_{c6} C5S6 ; \quad \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} = L_{c6} S5C6 ; \quad \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} = -L_{c6} S6$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_6 \left\{ (A_1^2) \ddot{\theta}_1 - (A1A2) \ddot{\theta}_2 - (A1A3) \ddot{\theta}_3 - (A1A4) \ddot{\theta}_4 - (A1A5) \ddot{\theta}_5 \right. \\
&+ \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} + A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 - \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 \\
&- \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&- \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 - \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_4^2 - \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A4}{\partial \theta_5} + \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} A5 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
&- \left. \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 - \left[A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_5^2 - \left[A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c61}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \tilde{m}_6 \left\{ -(A1A2) \ddot{\theta}_1 + (A_2^2) \ddot{\theta}_2 + (A2A3) \ddot{\theta}_3 + (A2A4) \ddot{\theta}_4 + (A2A5) \ddot{\theta}_5 \right. \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} + A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&+ \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_4^2 + \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A2 \frac{\partial A4}{\partial \theta_5} + \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} A5 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
&+ \left. \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + \left[A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_5^2 + \left[A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 \right\}
\end{aligned}$$

$$v_{c62} = -A1\dot{\theta}_1 + A2\dot{\theta}_2 + A3\dot{\theta}_3 + A4\dot{\theta}_4 + A5\dot{\theta}_5$$

avec :

$$A1 = -[(L_2C2 + L_4S3)(S4C5S6 - C4C6) - L_{c6}[C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]]$$

$$A2 = -L_2[S\alpha C4C5S6 + C\alpha S5S6 + S\alpha S4C6]$$

$$A3 = -[L_4(C4C5S6 + S4C6) + L_{c6}(S4C5C6 + C4S6)]$$

$$A4 = [L_{c6}S5C6]$$

$$A5 = -[L_{c6}S6]$$

avec :

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_2} = L_2S2(S4C5S6 - C4C6)$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_3} = -[L_4C3(S4C5S6 - C4C6) - L_{c6}[C6(C3C4C5 - S3S5) - C3S4S6]]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_4} = -[(L_2C2 + L_4S3)(C4C5S6 + S4C6) + L_{c6}[-S3S4C5C6 + S3C4S6]]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_5} = [S4S5S6(L_2C2 + L_4S3) + L_{c6}[C6(-S3C4S5 + C3C5)]]$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_6} = -[(L_2C2 + L_4S3)(S4C5C6 + C4S6) + L_{c6}[S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_2} = -L_2[-C\alpha C4C5S6 + S\alpha S5S6 - C\alpha S4C6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_3} = -L_2[C\alpha C4C5S6 - S\alpha S5S6 + C\alpha S4C6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_4} = -L_2[-S\alpha S4C5S6 + S\alpha C4C6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_5} = -L_2[-S\alpha C4S5S6 + C\alpha C5S6]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_6} = -L_2[S\alpha C4C5C6 + C\alpha S5C6 - S\alpha S4S6]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_4} = -[L_4(-S4C5S6 + C4C6) + L_{c6}(C4C5C6 - S4S6)]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_5} = [L_4C4S5S6 + L_{c6}S4S5C6]$$

$$\frac{\partial A3}{\partial \theta_6} = -[L_4(C4C5C6 - S4S6) + L_{c6}(-S4C5S6 + C4C6)]$$

$$\frac{\partial A4}{\partial \theta_5} = L_{c6}C5C6 ; \quad \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} = -L_{c6}S5S6 ; \quad \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} = -L_{c6}C6$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_6 \left\{ (A_1^2) \ddot{\theta}_1 - (A1A2) \ddot{\theta}_2 - (A1A3) \ddot{\theta}_3 - (A1A4) \ddot{\theta}_4 - (A1A5) \ddot{\theta}_5 \right. \\
&+ \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + \left[2A1 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} + A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 - \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 \\
&- \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&- \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 - \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_4^2 - \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A4}{\partial \theta_5} + \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} A5 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
&- \left. \left[A4 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 - \left[A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_5^2 - \left[A5 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c62}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_6 \left\{ - (A1A2) \ddot{\theta}_1 + (A_2^2) \ddot{\theta}_2 + (A2A3) \ddot{\theta}_3 + (A2A4) \ddot{\theta}_4 + (A2A5) \ddot{\theta}_5 \right. \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\
&- \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 - \left[A2 \frac{\partial A1}{\partial \theta_6} + A1 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} + A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&+ \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + \left[2A2 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_4^2 + \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} + A2 \frac{\partial A4}{\partial \theta_5} + \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} A5 \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
&+ \left. \left[A4 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A4}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + \left[A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_5^2 + \left[A5 \frac{\partial A2}{\partial \theta_6} + A2 \frac{\partial A5}{\partial \theta_6} \right] \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 \right\}
\end{aligned}$$

$$v_{c63} = A1\dot{\theta}_1 + A2\dot{\theta}_2 + A3\dot{\theta}_3$$

avec :

$$A1 = -[S4S5(L_2C2 + L_4S3)]$$

$$A2 = L_2[S\alpha C4S5 - C\alpha C5]$$

$$A3 = L_4C4S5$$

donc :

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_2} = L_2S2S4S5 ; \quad \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} = -L_4C3S4S5 ; \quad \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} = -C4S5(L_2C2 + L_4S3)$$

$$\frac{\partial A1}{\partial \theta_5} = -S4C5(L_2C2 + L_4S3) ; \quad \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} = -L_2[C\alpha C4S5 + S\alpha C5] ; \quad \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} = L_2[C\alpha C4S5 + S\alpha C5]$$

$$\frac{\partial A2}{\partial \theta_4} = -L_2S\alpha S4S5 ; \quad \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} = L_2[S\alpha C4C5 + C\alpha S5] ; \quad \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} = -L_4S4S5 ; \quad \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} = L_4C4C5$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_6 \left\{ (A_1^2) \ddot{\theta}_1 + (A_2 A_1) \ddot{\theta}_2 + (A_3 A_1) \ddot{\theta}_3 \right. \\ &+ \left[2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \left[2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 \\ &+ \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_3} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_3} + A_3 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_4} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_5} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 \\ &+ \left[A_3 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 + \left[A_1 \frac{\partial A_3}{\partial \theta_4} + A_3 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \left[A_1 \frac{\partial A_3}{\partial \theta_5} + A_3 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_6 \left\{ (A_2 A_1) \ddot{\theta}_1 + (A_2^2) \ddot{\theta}_2 + (A_3 A_2) \ddot{\theta}_3 \right. \\ &+ \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_3} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_4} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \\ &+ \left[A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_5} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + \left[2A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 + \left[2A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_3} + A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left[2A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ &+ \left[2A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + \left[A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_3^2 + \left[A_2 \frac{\partial A_3}{\partial \theta_4} + A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \left[A_2 \frac{\partial A_3}{\partial \theta_5} + A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_6}{2} \frac{\partial v_{c63}^2}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_6 \left\{ (A3A1)\ddot{\theta}_1 + (A3A2)\ddot{\theta}_2 + (A_3^2)\ddot{\theta}_3 \right. \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left[A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left[A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \left[A1 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A3 \frac{\partial A1}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \\
&+ \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_2} \right] \dot{\theta}_2^2 + \left[A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_3} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left[A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} + A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
&+ \left. \left[A2 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} + A3 \frac{\partial A2}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + \left[2A3 \frac{\partial A3}{\partial \theta_4} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \left[2A3 \frac{\partial A3}{\partial \theta_5} \right] \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \right\}
\end{aligned}$$

Arrivé à ce stade, on peut former le membre de droite des équations de Lagrange donnant la dynamique de la structure, mais il faut compléter en écrivant les termes exprimant l'effet de la pesanteur (Energie Potentielle) et qui vont constituer le membre droit des dites équations. Autrement dit, il faut calculer les Q_i donnés par :

$$Q_i = \sum_{k=1}^N g m_k \frac{\partial Z_{c_k}}{\partial \theta_i} \quad 4.9$$

Où :

M_k = masse de la barre k ;

N = nombre de barres de la SMA ;

G = accélération de la pesanteur ;

Z_{c_k} = altitude du centre de masse du corps k dans le repère fixe R_0 .

Chaque centre de gravité est l'origine d'un repère ayant la même orientation que celui lié à la barre correspondante (cf fig.xx). Z_{c_k} est la 3^{ième} composante du vecteur position du centre C_k qui est déterminé par la multiplication des transformations homogènes :

$${}^0T_2 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_2 \quad ; \quad {}^0T_3 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_3 \cdot {}^3T_3 \quad ; \quad {}^0T_{ca} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_3 \cdot {}^3T_a \cdot {}^aT_{ca}$$

$${}^0T_{cc} = {}^0T_c \cdot {}^cT_{cc} \quad ; \quad {}^0T_{c4} = {}^0T_c \cdot {}^cT_{c4} \quad ; \quad {}^0T_{c5} = {}^0T_c \cdot {}^cT_{c5} \quad ; \quad {}^0T_{c6} = {}^0T_c \cdot {}^cT_{c6}$$

avec

$${}^3T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_{c3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^2T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{c2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^aT_{ca} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{ca} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^cT_{cc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_{cc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^cT_{c4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{c4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^cT_{c5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_{c5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^cT_{c6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{c6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons alors :

$$Z_{c1} = -L_{c1} \quad ; \quad Z_{c2} = L_{c2}S2 \quad ; \quad Z_{c3} = L_{c3}C3 \quad ; \quad Z_{ca} = L_{ca}S2 + L_3C3 \quad ; \quad Z_{cc} = L_2S2 - L_{cc}C3 \quad ;$$

$$Z_{c4} = L_2S2 - (L_4 + L_{c4})C3 \quad ; \quad Z_{c5} = L_2S2 - L_4C3 + L_{c5}(S3C4S5 - C3C5)$$

$$Z_{c6} = L_2S2 - L_4C3 + L_{c6}(S3C4S5 - C3C5)$$

Par suite :

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = [m_2L_{c2} + m_aL_{ca} + (m_c + m_4 + m_5 + m_6)L_2]C2$$

$$Q_3 = [-m_3L_{c3} + m_4(L_4 + L_{c4}) + m_5(L_4 + L_{c5}C5) - m_aL_3 + m_cL_{cc}]S3 + [m_5L_{c5}C4S5]C3$$

$$Q_4 = [-S3S4S5][m_5L_{c5} + m_6L_{c6}]$$

$$Q_5 = [S3C4C5 + C3S5][m_5L_{c5} + m_6L_{c6}]$$

$$Q_6 = 0$$

Arrivant à cette étape, nous avons établi tous les termes nécessaires pour écrire le modèle dynamique de la structure et le mettre sous une forme plus exploitable.

4.6 Conclusion :

Le modèle dynamique est d'une très grande importance pour un robot car il est utilisé dans différentes stratégies de commande offrant une meilleure maîtrise du mouvement puisqu'elles donnent accès aux positions, vitesses, accélérations et aux variations des couples au niveau des articulations. Ce modèle fournit également les forces et les couples exercés sur chaque barre, ce qui est d'une grande utilité pour le dimensionnement de la structure du robot et des actionneurs.

Nous avons dans ce chapitre exploité le formalisme de Lagrange pour déterminer les équations dynamiques de la structure à chaîne plane fermée. Nous avons procédé par étapes car l'expression du lagrangien est très compliquée (elle contient 32 paramètres dynamiques entre masses et moments d'inertie). Ainsi, par dérivation, nous avons établi tous les termes intervenant dans la formule(4.4) pour chacune des barres constituant la structure.

Le résultat tel que présenté dans ce chapitre, constitue le modèle dynamique dans son état brut ; c'est à dire que nous n'avons pas encore déduit les termes constituant les matrices de la formule(4.8). Ce travail peut être fait ultérieurement mais après vérifications des équations par une méthode numérique se basant sur l'algorithme de Newton-Euler par exemple. Un exemple de vérification pour le robot parallèle Delta, se trouve dans [21] (voir également[4,5,20]). Il faut néanmoins prévoir une certaine tolérance lors de la comparaison, car les approches des deux méthodes diffèrent.

Conclusion générale et perspectives :

Les modèles mathématiques des robots manipulateurs sont utilisés dans les mémoires de commande des robots industriels modernes. Ces modèles sont engendrés par un grand nombre de systèmes de conception et de fabrication assistées par ordinateur (CFAO) utilisés pour simuler le comportement de mécanismes complexes ou pour programmer hors ligne les robots industriels.

Dans ce mémoire sont développés les modèles mathématiques d'un robot manipulateur hybride c'est à dire comportant une boucle cinématique plane. L'introduction cette boucle cinématique a pour objectif de ramener le moteur du troisième axe à la base pour diminuer la masse en mouvement et rigidifier la structure du robot. Le comportement du porteur (dit différentiel) est un peu différent de celui d'un porteur série 3R[14] mais n'est pas aussi complexe que celui d'un robot parallèle[6,18].

La structure que nous avons modélisée est présentée dans le premier chapitre. C'est une version améliorée de la structure existant au LCP. Les avantages qu'elle présente par rapport à cette dernière sont la symétrie de la structure globale par rapport à un plan et un poignet sphérique assurant l'existence d'une solution pour la cinématique inverse[3,9,27].

Dans les deux chapitres suivants (chapitre 2 et 3), nous avons déterminé les modèles géométriques et cinématiques directs et inverses respectivement (MGD, MGI, MCD et MCI). La matrice jacobienne et son inverse ont été déduites ce qui a permis l'étude des singularités du robot. Celles-ci ne sont pas différentes de celles d'un robot 6R série. Les résultats sont vérifiés analytiquement dans les annexes B et C.

Le modèle dynamique est déterminé en exploitant le formalisme de Lagrange dans le dernier chapitre. Ce modèle est très utile pour le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Nous avons établi les termes contribuant dans ce modèle sans toutefois déduire les matrices de la formule (4. 8).

Ainsi, comme perspective de ce travail nous pouvons citer :

- La vérification du modèle dynamique par une méthode numérique en utilisant l'algorithme de Newton-Euler par exemple (ou un autre tel que le principe d'Hamilton[20]). Le modèle est alors jugé bon s'il donne à un pourcentage près, les mêmes couples aux articulations que ceux donnés par le calcul numérique (on admet 10% comme écart maximum dans [20]).
- Déduire les matrices intervenant dans le modèle en l'écrivant sous une forme linéaire par rapport aux paramètres dynamiques. Ceci est avantageux pour l'identification des paramètres de la structure après construction et assemblage.
- Optimiser les paramètres dynamiques (longueurs et masses) suivant les exigences du cahier des charges qui spécifie les contraintes[3,15] de manière à pouvoir dimensionner le reste des éléments de la structure (réducteurs et autres).
- ...etc.

Références
Bibliographiques

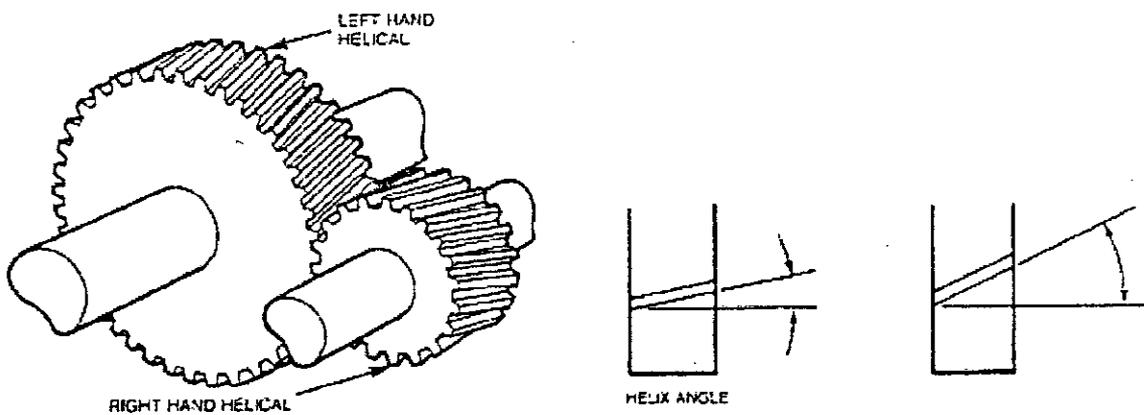
- [1] **Asada, H.; Slotine, J-J- E.**, “Robot analysis and control”, *John Wiley & Sons, (1986)*.
- [2] **Caen, R. ; Lajoie-Mazenc, M. ;Trannoy,B.**, “Actionneurs en robotique”, *Techniques de l'ingénieur, {S3} R7760*.
- [3] **Çakir, M.**, “ Conception des systèmes Robotisés”, *Rapport interne, ENP, LCP (2002)*.
- [4] **Clavel, R.**, “Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté”, *Thèse de doctorat à L'EPFL, Lausanne (1991)*.
- [5] **Clavel, R.**, “DELTA a fast robot with parallel geometry”, *8th Int. Symposium on Industrial Robots, IFS Publications, pp 91-100 ,(1988)*.
- [6] **Clavel, R.**, “Robots Parallèles”, *Techniques de l'ingénieur, {S3} R7710*.
- [7] **Coiffet, P.**, “La Robotique, Principes et applications”, *HERMES, (1986)*.
- [8] **Coiffet, P.**, “Robots : définitions et classification”, *Techniques de l'ingénieur, {S3} R7700*.
- [9] **Craig, J-E.**, “Introduction to Robotics”, *Addison – Wesley Publishing company, (1989)*.
- [10] **Fayolle, M.**, “Aspects mécaniques en robotique”, *Techniques de l'ingénieur { BT2} B7190*.
- [11] **Gorla, B. ; Renaud, M.**, “Modèles des robots manipulateurs : application à leur commande”, *CEPADUES édition (1984)*.
- [12] **Henriot, G.**, “Engrenages : Eléments pratiques de définition, de dessin et de calcul”, *Techniques de l'ingénieur {BD4} B636*.
- [13] **Koren, Y.**, “La robotique pour ingénieur”, *Mc, Graw,Hill, Paris,(1986)*.
- [14] **Lallemand, J-P. ; Zegloul, S.**, “Robotique : Aspects fondamentaux, Modélisation mécanique- CAO Robotique- Commande”, *Masson, Paris,(1994)*.
- [15] **Lamarche, L.**, “Robotique : Notes de cours”, *Département de Génie Mécanique(2001/08), fichier pdf,(www.mec.estmtl.ca)*.
- [16] **Le Borzec, R.**, “Réducteurs de vitesse à engrenages”, *Techniques de l'ingénieur { BD3} B5640*

- [17] **Liégeois, A.**, “Modélisation et commande de robots manipulateurs”, *Techniques de l'ingénieur {s3} S7730*.
- [18] **Marlet, J-P.**, “Les robots parallèles”, *HERMES, (1990)*.
- [19] **McKerrow, P-J.**, “Introduction to Robotics”, *Addison – Wesley, (1989)*.
- [20] **Miller, K.; Stevens, B.**, “Modeling of Dynamics and Model-Based Control of DELTA Direct-Drive Parallel Robot”, *Journal of Robotics and Mechatronics Vol.7 No.4, (1995)*.
- [21] **Miller, K.; Clavel, R.**, “The Lagrange-based model of delta-4 robot dynamics”, *Journal of Robotics and Mechatronics Vol.8, pp 49-54, (1992)*.
- [22] **PITTMAN**, Catalog, “Bulletin LCG: DC Gear Motors, series GM8000, GM9000, GM14900 ”, *fichier pdf, (www.pittmannet.com)*.
- [23] **Pruski, A.**, “Robotique générale”, *ELLIPSE, Paris, (1988)*.
- [24] **Quinet, J-F.**, “Evaluation des performances des robots manipulateurs”, *Techniques de l'ingénieur {S3} R7800*.
- [25] **Salahouelhadj, A.**, “Conception d'un robot pour l'application du soudage par point”, *PFE, ENP (2001)*
- [26] **Vibet, C.**, “Robots : principes et contrôle”, *ELLIPSE, Paris, (1987)*.
- [27] **Wolovitch, W-A.**, “Robotics: basic analysis and design ”, *Holt, Rinnehart and Wiston, (1987)*.

Annexes

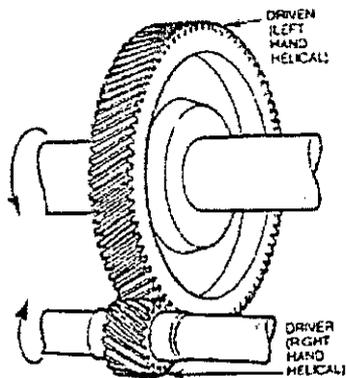
A1 Les Engrenages hélicoïdaux irréversibles :

Les engrenages hélicoïdaux se retrouvent le plus souvent lorsque les arbres sont en position parallèle. Les engrenages hélicoïdaux sont similaires aux engrenages cylindriques droits, à l'exception que les dents sont taillées à angle par rapport à l'axe de rotation de la roue. L'angle d'un engrenage hélicoïdal est appelé *l'angle d'hélice* qui dépend des conditions de design et de la position relative des arbres. Pour des engrenages montés sur arbres parallèles, on aboutit à un engrenage hélicoïdal irréversible statiquement, si l'angle d'hélice dépasse 84° [livre sur engrenages]. L'engrenage doit être dimensionné de manière à vaincre un certain effort dû à la pesanteur par exemple comme dans notre cas. [2,10,12]

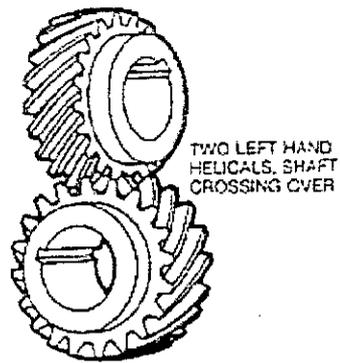


Engrenage hélicoïdal et angle d'hélice

Pour assurer le fonctionnement, on doit avoir entre autre le même angle d'hélice et les deux roues doivent être de mains opposées. Des engrenages de mains opposées vont opérer sur des arbres parallèles, tel que montré sur la figure suivante. La main d'un engrenage est déterminée par le côté d'inclinaison de la dent lorsque l'engrenage est à l'horizontale et l'axe de l'arbre à la verticale.



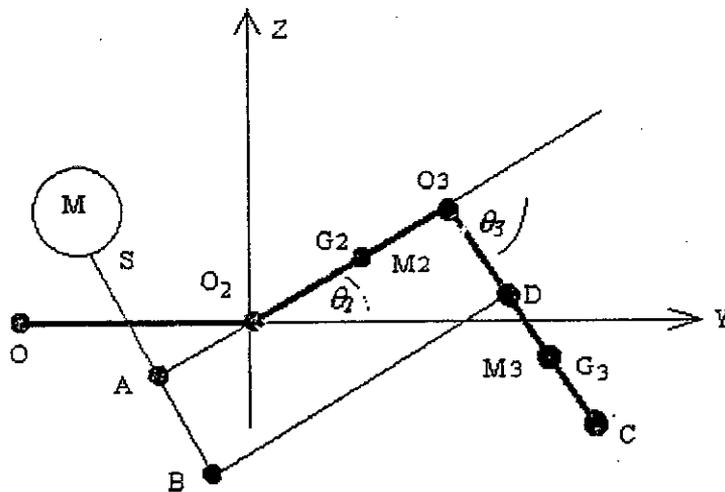
Engrenage à mains opposées



Engrenages à main. non opposées.

A2 Stabilisation de la structure par contre poids :

La méthode d'équilibrage par parallélogramme est très utilisée. Dans le cas d'un porteur série, on ajoute à la structure un parallélogramme articulé ABDO3 comme il est indiqué dans la figure suivante :



les données sont :

$O_2 O_3 = L_2$ et sa masse est M_2 (centre de masse = G_2)

$C O_3 = L_3$ et sa masse est M_3 (centre de masse = G_3)

Les tiges SB BD sont supposées de masses négligeables devant M_2 , M_3 et M .

Détermination du MGI pour le porteur

Nous avons trouvé le système donné par (2.21)

$$(1) \begin{cases} S_3 C_2 - S_2 C_3 = R \\ L_2 S_2 - L_4 C_3 = Z \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} C_2^2 + S_2^2 = 1 \\ C_3^2 + S_3^2 = 1 \end{cases}$$

la résolution du sous-système (1) par rapport à S_3 et C_3 donne :

$$(3) \begin{cases} S_3 = -\frac{1}{L_4 C_2} [-L_4 R + S_2 (Z - L_2 S_2)] \\ C_3 = -\frac{1}{L_4} [(Z - L_2 S_2)] \end{cases}$$

le sous système (2) devient:

$$C_2^2 = 1 - S_2^2 \quad (4)$$

$$C_2^2 (Z - L_2 S_2)^2 + [-L_4 R + S_2 (Z - L_2 S_2)]^2 = L_4^2 C_2^2 \quad (5)$$

en combinant (4) et (5) on tombe sur l'équation:

$$(1 - S_2^2) (Z - L_2 S_2)^2 + [-L_4 R + S_2 (Z - L_2 S_2)]^2 = L_4^2 (1 - S_2^2) \quad (6)$$

qui devient après simplifications :

$$(L_2^2 + L_4^2 + 2RL_2L_4)S_2^2 - 2Z(L_2 + L_4R)S_2 + Z^2 + R^2L_4^2 - L_4^2 = 0 \quad (7)$$

or sachant que:

$$(L_2^2 + L_4^2 + 2RL_2L_4) = \rho$$

il suffi de poser dans l'équation (7) $S_2 = \lambda$ pour retrouver l'équation (2.22) et les résultats qui en découlent:

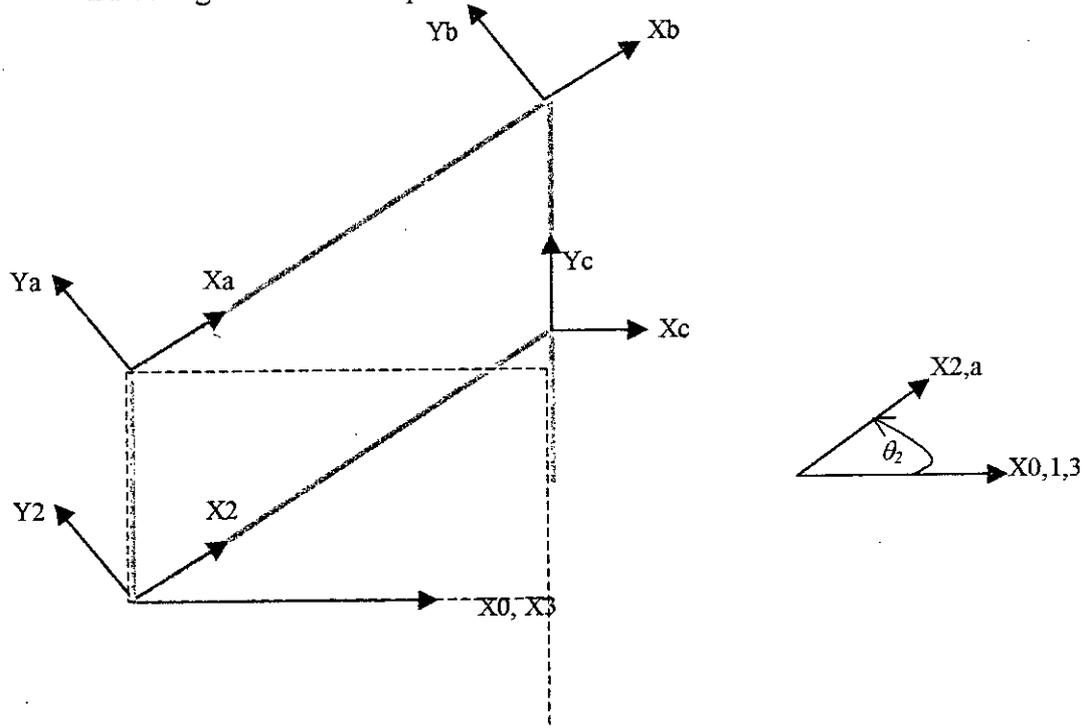
$$\rho \lambda^2 - 2Z(L_2 + L_4R)\lambda + [Z^2 + L_4^2(R^2 - 1)] = 0 \quad (8)$$

C1 Vérification du principe de superposition pour le porteur:

Pour vérifier le principe de superposition, on considère l'effet de chacune des articulations θ_1 θ_2 θ_3 séparément. Comme les effets des articulations ne s'exercent pas en le même endroit, on doit prendre en considération leur position finale après l'application de chaque rotation.

1) Vitesses dues à θ_2 uniquement (θ_1 θ_3 sont nulles ainsi que leurs dérivées).

La configuration dans laquelle se trouve le robot est la suivante :



Et les transformations homogènes correspondantes sont :

$${}^1_2T_{\theta_2} = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^2_cT_{\theta_2} = \begin{bmatrix} C2 & S2 & 0 & L_2 \\ -S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^c_bT_{\theta_2} = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

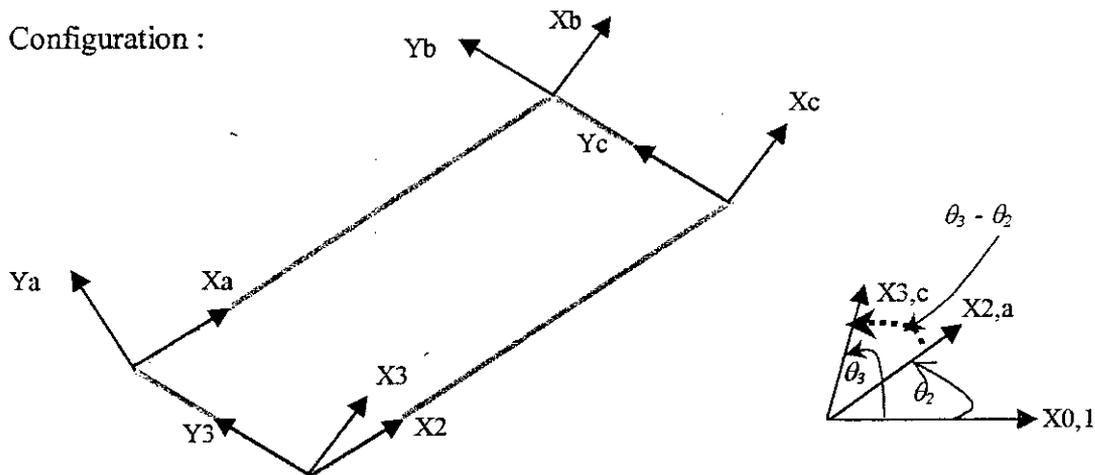
$${}^b_aT_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant les formules de calcul des vitesses (3.2), on trouve :

$$\begin{aligned}
 {}^0v_{0/\theta_2} &= {}^0\omega_{0/\theta_2} = [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^1v_{1/\theta_2} &= {}^1\omega_{1/\theta_2} = [0 \ 0 \ 0]^T \\
 {}^2v_{2/\theta_2} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^2\omega_{2/\theta_2} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_2]^T \\
 {}^c v_{c/\theta_2} &= [-L_2 S 2\dot{\theta}_2 \quad L_2 C 2\dot{\theta}_2 \quad 0]^T ; & {}^c \omega_{c/\theta_2} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\
 {}^b v_{b/\theta_2} &= [0 \ L_2 \dot{\theta}_2 \quad 0]^T ; & {}^b \omega_{b/\theta_2} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_2]^T \\
 {}^a v_{a/\theta_2} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^a \omega_{a/\theta_2} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_2]^T
 \end{aligned}$$

2) vitesses dues à θ_3 uniquement ($\theta_1=0$ et θ_2 Cte. \Rightarrow Dérivées nulles).

Configuration :



Les transformations sont :

$${}^1T_{0,1} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^3T_{1,2} = \begin{bmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & 0 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^aT_{3,c} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^bT_{c,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^cT_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 C\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 S\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où on trouve les vitesses suivantes :

$$\begin{aligned}
 {}^0v_{0/\theta_3} &= {}^0\omega_{0/\theta_3} = [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^1v_{1/\theta_3} &= {}^1\omega_{1/\theta_3} = [0 \ 0 \ 0]^T \\
 {}^3v_{3/\theta_3} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^3\omega_{3/\theta_3} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_3]^T \\
 {}^av_{a/\theta_3} &= [-L_3C\alpha\dot{\theta}_3 \ -L_3S\alpha\dot{\theta}_3 \ 0]^T ; & {}^a\omega_{a/\theta_3} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\
 {}^bv_{b/\theta_3} &= [-L_3\dot{\theta}_3 \ 0 \ 0]^T ; & {}^b\omega_{b/\theta_3} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_3]^T \\
 {}^cv_{c/\theta_3} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^c\omega_{c/\theta_3} &= [0 \ 0 \ \dot{\theta}_3]^T
 \end{aligned}$$

3) vitesses dues à θ_1 uniquement (θ_2 et θ_3 sont constants donc à dérivées nulles)

La configuration est la même que la précédente, et on obtient les transformations suivantes :

$${}^3T_{\theta_1} = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^aT_{\theta_1} = \begin{bmatrix} C\alpha & S\alpha & 0 & 0 \\ -S\alpha & C\alpha & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^bT_{\theta_1} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^cT_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^2T_{\theta_1} = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^dT_{\theta_1} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & L_2 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'application des formules donne les vitesses :

$$\begin{aligned}
 {}^0v_{0/\theta_1} &= {}^0\omega_{0/\theta_1} = [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^1v_{1/\theta_1} &= {}^1\omega_{1/\theta_1} = [0 \ 0 \ 0]^T \\
 {}^2v_{2/\theta_1} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^2\omega_{2/\theta_1} &= [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ 0]^T \\
 {}^3v_{3/\theta_1} &= [0 \ 0 \ 0]^T ; & {}^3\omega_{3/\theta_1} &= [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ 0]^T \\
 {}^av_{a/\theta_1} &= [0 \ 0 \ L_3S3\dot{\theta}_1]^T ; & {}^a\omega_{a/\theta_1} &= [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ 0]^T \\
 {}^bv_{b/\theta_1} &= [0 \ 0 \ L_3S3\dot{\theta}_1 - L_2C2\dot{\theta}_1]^T ; & {}^b\omega_{b/\theta_1} &= [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ 0]^T \\
 {}^cv_{c/\theta_1} &= [0 \ 0 \ -L_2C2\dot{\theta}_1]^T ; & {}^c\omega_{c/\theta_1} &= [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ 0]^T
 \end{aligned}$$

Vérification de la vitesse en c par le chemin : (1-2-c) :

$${}^c v_{c/\theta_1} = {}^c R_{/\theta_1} \left[{}^2 v_{2/\theta_1} + {}^2 \omega_{2/\theta_1} \times {}^2 P_c \right]$$

$$\text{avec : } {}^2 P_c = [L_2 \quad 0 \quad 0]^T \text{ et } {}^c R_{/\theta_1} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^c \omega_{c/\theta_1} = {}^c R_{/\theta_1} {}^2 \omega_{2/\theta_1}$$

ce qui donne :

$${}^c v_{c/\theta_1} = [0 \quad 0 \quad -L_2 C 2\dot{\theta}_1]^T$$

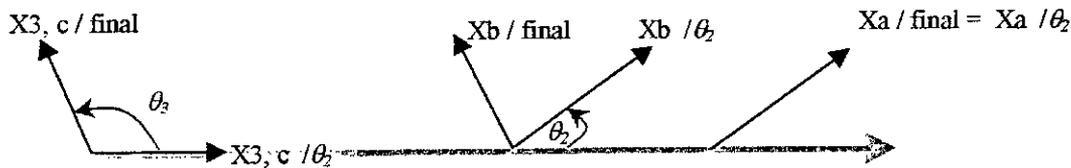
et :

$${}^c \omega_{c/\theta_1} = [\sin(\alpha + \theta_2)\dot{\theta}_1 \quad \cos(\alpha + \theta_2)\dot{\theta}_1 \quad 0]^T = [S3\dot{\theta}_1 \quad C3\dot{\theta}_1 \quad 0]^T$$

En effet, on retrouve les mêmes vitesses pour les deux chemins : (1,2,c) et (1,3,a,b,c)

Calcul des vitesses résultantes :

A partir du schéma ci-après représentant les axes des différents repères dans la dernière configuration on déduit les matrices d'orientation suivantes :



$${}^{3/\theta_2} R = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 \\ S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^{c/\theta_2} R = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 \\ S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{b/\theta_2} R = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^{a/\theta_2} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où l'on calcule les vitesses pour chaque liaison :

Liaison 0 :

$${}^0v_0 = {}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

Liaison 1 :

$${}^1v_1 = [0 \ 0 \ 0]^T ; {}^1\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T$$

Liaison 2 :

$${}^2v_2 = [0 \ 0 \ 0]^T ; {}^2\omega_2 = {}^2v_{2/\theta_1} + {}^2v_{2/\theta_2} = [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$$

Liaison 3 :

$${}^3v_3 = [0 \ 0 \ 0]^T ; {}^3\omega_3 = {}^3v_{3/\theta_1} + {}^3v_{3/\theta_3} = [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_3]^T$$

Liaison a :

$${}^a v_a = {}^a v_{a/\theta_1} + \left({}_{a/\theta_2}^a R \right) {}^a v_{a/\theta_2} + {}^a v_{a/\theta_3} = [-L_3 C\alpha \dot{\theta}_3 \ -L_3 S\alpha \dot{\theta}_3 \ L_3 S3\dot{\theta}_1]^T$$

$${}^a \omega_a = {}^a \omega_{a/\theta_1} + \left({}_{a/\theta_2}^a R \right) {}^a \omega_{a/\theta_2} + {}^a \omega_{a/\theta_3} = [S2\dot{\theta}_1 \ C2\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$$

Liaison b :

$${}^b v_b = {}^b v_{b/\theta_1} + \left({}_{b/\theta_2}^b R \right) {}^b v_{b/\theta_2} + {}^b v_{b/\theta_3} = [-L_3 \dot{\theta}_3 + L_2 S\alpha \dot{\theta}_2 \ L_2 C\alpha \dot{\theta}_2 \ L_3 S3\dot{\theta}_1 - L_2 C2\dot{\theta}_1]^T$$

$${}^b \omega_b = {}^b \omega_{b/\theta_1} + \left({}_{b/\theta_2}^b R \right) {}^b \omega_{b/\theta_2} + {}^b \omega_{b/\theta_3} = [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_3]^T$$

Liaison c :

$${}^c v_c = {}^c v_{c/\theta_1} + \left({}_{c/\theta_2}^c R \right) {}^c v_{c/\theta_2} + {}^c v_{c/\theta_3} = [L_2 S\alpha \dot{\theta}_2 \ L_2 C\alpha \dot{\theta}_2 \ -L_2 C2\dot{\theta}_1]^T$$

$${}^c \omega_c = {}^c \omega_{c/\theta_1} + \left({}_{c/\theta_2}^c R \right) {}^c \omega_{c/\theta_2} + {}^c \omega_{c/\theta_3} = [S3\dot{\theta}_1 \ C3\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_3]^T$$

En fin, puisque pour toutes les barres du porteur, nous trouvons les mêmes vitesses que celles que nous avons calculées dans la chapitre 2, nous pouvons dire que le principe de superposition est vérifié et que le modèle cinématique que nous avons élaboré pour la structure est correcte.

C2 Obtention du MCD par dérivation du MGD

Nous voulons vérifier le MGD. Puisque nous venons de voir que le MCD est correcte, nous dirons que le MGD est correcte si par dérivation de ce dernier par rapport au temps, nous retrouvons la vitesse linéaire du (porteur point P) i.e. ${}^0v_4 = {}^0v_6$.

le MGD est donné par (2.14)

$$\begin{cases} X = C_1 \cdot (L_2 C_2 + L_4 S_3) \\ Y = S_1 \cdot (L_2 C_2 + L_4 S_3) \\ Z = L_2 S_2 - L_4 C_3 \end{cases}$$

d'où par dérivation:

$$\begin{cases} \dot{X} = -S_1 \cdot (L_2 C_2 + L_4 S_3) \dot{\theta}_1 - L_2 C_1 S_2 \dot{\theta}_2 + L_4 C_1 C_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{Y} = C_1 \cdot (L_2 C_2 + L_4 S_3) \dot{\theta}_1 - L_2 S_1 S_2 \dot{\theta}_2 + L_4 S_1 C_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{Z} = L_2 C_2 \dot{\theta}_2 + L_4 S_3 \dot{\theta}_3 \end{cases}$$

ce système se met sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = {}^0v_4 \begin{bmatrix} -S_1(L_2 C_2 + L_4 S_3) & -L_2 C_1 S_2 & L_4 C_1 C_3 \\ C_1(L_2 C_2 + L_4 S_3) & -L_2 S_1 S_2 & L_4 S_1 C_3 \\ 0 & L_2 C_2 & L_4 S_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

qui est identique à la formule 3..0 donc le MGD ainsi que le MCD sont corrects

Calcul des vitesses des centres de masses des différentes barres.

En appliquant successivement la formule (4.7) :

$${}^i v_{ci} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{ci}$$

on trouve:

$${}^1 v_{c1} = 0$$

$${}^2 v_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & L_{c2} \dot{\theta}_2 & -L_{c2} C2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^3 v_{c3} = \begin{bmatrix} -L_{c3} \dot{\theta}_3 & 0 & L_{c3} S3 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^a v_{ca} = \begin{bmatrix} -L_3 C\alpha \dot{\theta}_3 & (L_{ca} \dot{\theta}_2 - L_3 S\alpha \dot{\theta}_3) & (L_3 S3 - L_{ca} C2) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^c v_{cc} = \begin{bmatrix} L_2 S\alpha \dot{\theta}_2 + L_{cc} \dot{\theta}_3 & L_2 C\alpha \dot{\theta}_2 & -(L_2 C2 + L_{cc} S3) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^4 v_{c4} = \begin{bmatrix} -S4(L_2 C2 + (L_4 + L_{c4})S3) + C4(L_2 S\alpha \dot{\theta}_2 + (L_4 + L_{c4})\dot{\theta}_3) \\ -C4(L_2 C2 + (L_4 + L_{c4})S3) - S4(L_2 S\alpha \dot{\theta}_2 + (L_4 + L_{c4})\dot{\theta}_3) \\ L_2 C\alpha \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^5 v_{c5} = \begin{bmatrix} C5A + S5B + C \\ -S5A + C5B \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \{(L_2 S\alpha C4) \dot{\theta}_2 + (L_4 C4) \dot{\theta}_3 - S4(L_2 C2 + L_4 S3) \dot{\theta}_1\}$$

$$\mathbf{B} = (L_2 C\alpha) \dot{\theta}_2 ; \mathbf{C} = L_{c5} [\dot{\theta}_5 + C4 \dot{\theta}_3 - S3 S4 \dot{\theta}_1]$$

$$\mathbf{D} = -\{(L_2 S\alpha S4) \dot{\theta}_2 + (C4(L_2 C2 + L_4 S3) + L_{c5}(S3 C4 C5 + C3 S5)) \dot{\theta}_1 + (L_4 S4 + L_{c5} S4 C5) \dot{\theta}_3 - L_{c5} \dot{\theta}_5\}$$

$${}^6v_{c6} = [v_{c61} \quad v_{c62} \quad v_{c63}]$$

avec :

$$\begin{aligned} v_{c61} = & -[(L_2C2 + L_4S3)(S4C5C6 + C4S6) + L_{c6}[S6(S3C4C5 + C3S5) + S3S4C6]]\dot{\theta}_1 \\ & + L_2[S\alpha C4C5C6 + C\alpha S5C6 - S\alpha S4S6]\dot{\theta}_2 + [L_4(C4C5C6 - S4S6) + L_{c6}(-S4C5S6 + C4C6)]\dot{\theta}_3 \\ & + [L_{c6}S5S6]\dot{\theta}_4 + [L_{c6}C6]\dot{\theta}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{c62} = & [(L_2C2 + L_4S3)(S4C5S6 - C4C6) - L_{c6}[C6(S3C4C5 + C3S5) - S3S4S6]]\dot{\theta}_1 \\ & - L_2[S\alpha C4C5S6 + C\alpha S5S6 + S\alpha S4C6]\dot{\theta}_2 - [L_4(C4C5S6 + S4C6) + L_{c6}(S4C5C6 + C4S6)]\dot{\theta}_3 \\ & + [L_{c6}S5C6]\dot{\theta}_4 - [L_{c6}S6]\dot{\theta}_5 = B1\dot{\theta}_1 - B2\dot{\theta}_2 - B3\dot{\theta}_3 + B4\dot{\theta}_4 - B5\dot{\theta}_5 \end{aligned}$$

$$v_{c63} = -[S4S5(L_2C2 + L_4S3)]\dot{\theta}_1 + L_2[S\alpha C4S5 - C\alpha C5]\dot{\theta}_2 + [L_4C4S5]\dot{\theta}_3$$

Ces vitesses sont utilisées dans le chapitre 4 pour calculer l'énergie cinétique de translation de chaque barre afin qu'elle soit utilisée dans la détermination des équations dynamiques.

ملخص :

في إطار مشروع إنجاز ذراع آلية صناعية ذات 6 درجات للحرية (محمورية) قمنا في هذا العمل بتحديد النماذج الرياضية للذراع المذكورة بعد إدراج بعض التعديلات عليها و هذه النماذج هي : النموذج الهندسي المباشر و العكسي ، النموذج الحركي المباشر و العكسي ، و النموذج الديناميكي (أو التحريك) كما قمنا باستنتاج المصفوفة اليعقوبية و استعملنا هذه الأخيرة في دراسة المواضيع الأحادية . كلمات مفاتيح ، ذراع آلية ، نموذج هندسي ، حركي تحريك .

Résumé :

Dans le cadre d'un projet de conception d'un bras de robot industriel à six degrés de liberté (rotoïde ou pivot), nous déterminons dans ce mémoire les différents modèles mathématiques de la structure mécanique articulée après l'introduction de quelques modifications du point de vue construction. Ces modèles sont : les modèles géométriques direct et inverse, les modèles cinématiques direct et inverse, et en fin le modèle dynamique. Nous étudions également les singularités du robot après déduction de la matrice Jacobienne.

Mots clés : robot industriel, modèles, géométrique, cinématique, direct, inverse, dynamique.

Abstract:

In this work, we determine the mathematical models of an industrial six degrees of freedom robot arm after making some modifications of the mechanical structure. These models are the direct and inverse kinematics, the velocity model and the dynamics. We also, study the singularities after deduction of the Jacobian matrix.

Key words: industrial robot arm, models, kinematics, velocity, direct, inverse, dynamics.