

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT : GÉNIE MÉCANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ÉTUDES :

**SIMULATION NUMÉRIQUE DE  
LA MICROFILTRATION  
PAR LA  
MÉTHODE DES  
VOLUMES FINIS**

PROPOSÉ PAR :

. MR LARBI  
. MR BELHANACHE

ÉTUDIÉ PAR : BOUANOUK LOTFI

## Dédicaces

*Je dédie mon travail à :*

*Ma tendre mère*

*Pour l'éducation qu'elle*

*M'a apporté et pour tous ses sacrifices*



## REMERCEMENTS

*Je remercie avant tous Allah, le tout puissant, de m'avoir donné le succès et la volonté pour faire ce travail.*

*Mes premiers remerciements vont naturellement à mes promoteurs Messieurs S. LARBI et H. BELHANECHÉ pour avoir accepté de m'encadrer dans ce mémoire ,et pour leurs qualités humaines exceptionnelles qui m'ont permis de mener à bien ce travail .*

*Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué , de près ou de loin , à la réalisation de ce travail , spécialement ADDAD Abdelaziz, BENTRAD Hocine et BESSALEM Sofiane .*

*Mes vifs remerciements vont également à :*

- ◆ *Monsieur le Président et Messieurs les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir évaluer mon travail .*
- ◆ *Ma mère , mon père et tous mes frères pour leurs soutiens permanents , et spécialement Kouceilla.*
- ◆ *Je tiens à remercier mes amis pour leur profonde amitié et spécialement ceux de ma promotion :*  
*Samy Beck..., Sofiane, Shaouli, Samir ,Adlane, Sinkouhi, Ribouh, Djamel ,moumene, Hmizou, Sempouli, Sniksou, Nabil th..., Cherif, Azzedine, Smail, Mokrane, Amine.*
- ◆ *Ma gratitude va aussi à tous mes enseignants du primaire jusqu'à ma dernière année au département de Mécanique .*

## ملخص

إن التصفية من أكثر الأساليب انتشارا في الصناعة، ولها مكان في أغلب الميادين التكنولوجية. في هذه المذكرة كانت دراستنا متعلقة بالتصفية الميكرونية. لقد تمت بطريقة رقمية، محاكاة المشكلة الهيدروديناميكية للتصفية الميكرونية وهذا باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. لحل معادلات Navier-Stokes، تم استعمال الخوارزمية " SIMPLE ".  
الحلول المتحصل عليها توافق بطريقة جيدة ما هو موجود في المراجع والكتب.

الكلمات المفتاحية: تصفية ميكرونية، معادلات Navier-Stokes، طريقة الحجوم المنتهية، خوارزمية CFD، SIMPLE

## RESUME

La filtration est l'un des procédés les plus utilisés en industrie, et il trouve son application dans plusieurs technologies. Dans le présent mémoire, nous avons traité la Microfiltration. Une simulation numérique du problème hydrodynamique a été faite, en utilisant la Méthode des Volumes Finis. L'algorithme SIMPLE a été utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Les résultats obtenus sont en concordance avec la littérature.

**Mots clés :** Microfiltration, Equation de Navier-Stokes, Méthode des Volumes Finis, Algorithme SIMPLE, CFD

## ABSTRACT

Filtration is one of the most important process in the industry, and it's used in many field of technolgy. In this work, we focus our study on Microfiltration, thus we have simulate numericly the hydrodynamic problem of Microfiltration with Finite Volume Method. The standard SIMPLE algorithm was used to solve Navier-Stokes equations. The obtained results are in good accordance with the related publication.

**Keywords :** Microfiltration, Navier-Stokes equations, Finite Volume Method, SIMPLE algorithm, CFD

# Table des Matières

## NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE.....	2
----------------------------	---

## CHAPITRE I : FILTRATION ET MICROFILTRATION

I.1 INTRODUCTION.....	4
I.2 TECHNOLOGIE DE FILTRATION PAR MEMBRANES.....	5
I.2.1 Définition.....	5
I.2.2 Structure de la Membrane [3].....	5
I.2.2.1 Membranes Poreuses.....	5
I.2.2.2 Membranes Denses.....	6
I.2.2.3 Membrane à porteurs.....	7
I.2.3 Configuration de l'écoulement dans une membrane sélective [4].....	7
I.2.4 La force motrice dans une membrane.....	8
I.2.5 Procédés à Membrane utilisant le gradient de pression comme source de la force motrice[4].....	9
I.2.5.1 Osmose Inverse (OI).....	9
I.2.5.2 Nanofiltration (NF).....	10
I.2.5.3 Ultrafiltration (UF).....	10
I.2.5.4 Microfiltration (MF).....	11
I.3 CONFIGURATION DES MEMBRANES [4, 16].....	12
I.3.1 Membrane à ouverture spirale(Sepralator).....	12
I.3.2 Configuration en fibres creuses (tubulaire, capillaire...).....	13
I.3.3 Module à membrane s plates.....	13
I.4 LIMITATIONS ET CONTRAINTES TECHNOLOGIQUES[3].....	15
I.5 LA MICROFILTRATION.....	15
I.5.1 Caractéristique de base de la Microfiltration[14, 16].....	16
I.5.1.1 Principe.....	16
I.5.1.2 Les Membranes.....	16
I.5.2 L'installation industrielle typique [11, 12].....	18
I.5.3 Conditions de fonctionnement [13, 14].....	19
I.5.4 Les applications industrielles (Alimentaire, pharmaceutique, autre... ).....	19
I.5.4.1 Dans l'industrie alimentaire.....	19
I.5.4.2 Dans l'industrie pharmaceutique.....	19
I.5.4.3 Dans d'autres industries.....	19
I.5.5 Mécanisme de transfert en Microfiltration et théorie associée.....	20
I.5.5.1 Mécanisme du type capillaire[ 10]......	20
I.5.5.2 Phénomène de Polarisation.....	21

## CHAPITRE II : EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

II.1	EQUATION GOUVERNANTE D'UN ÉCOULEMENT DE FLUIDE ET D'UN TRANSFERT DE CHALEUR [17,20]...	24
II.1.1	<i>Conservation de la masse</i> .....	24
II.1.2	<i>variations d'une propriété associée à une particule fluide et pour un élément fluide [17]</i> .....	26
II.1.3	<i>L'équation de la quantité de mouvement</i> .....	28
II.1.4	<i>L'équation d'énergie</i> .....	31
II.2	EQUATIONS DE NAVIER-STOKES [17].....	34
II.3	FORME DIFFÉRENTIELLE ET INTÉGRALE DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT .....	36
II.4	CONDITIONS AUX LIMITES[20] .....	37
II.4.1	<i>Les trois sortes de conditions aux limites</i> .....	38
II.4.1.1	Condition de Neumann.....	38
II.4.1.2	Condition de Fourier.....	38
II.4.1.3	Condition de Dirichlet.....	38
II.4.1.4	Quelques considérations mathématiques sur les C.L.....	39
II.5	MODÈLE MATHÉMATIQUE UTILISÉ ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRE.....	40
II.5.1	<i>Modèle physique</i> .....	40
II.5.2	<i>Modèle mathématique</i> .....	41

## CHAPITRE III : PRESENTATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

III.1	INTRODUCTION.....	46
III.2	LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS POUR LES PROBLÈMES DE DIFFUSION.....	46
III.2.1	<i>régime permanent</i> .....	46
III.2.1.1	Principes d'une « bonne » discrétisation.....	50
III.2.1.2	Choix du maillage.....	51
III.2.1.3	Linéarisation du terme source .....	52
III.2.1.4	Prise en compte des conditions aux limites.....	54
III.2.2	<i>Régime transitoire</i> .....	56
III.2.2.1	Stabilité du schéma de discrétisation temporelle.....	58
III.2.2.2	Forme de l'équation discrétisée avec le schéma totalement implicite.....	60
III.2.2.3	Géométrie bidimensionnelle. ....	60
III.3	LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS POUR LES PROBLÈMES DE CONVECTION-DIFFUSION.....	61
III.3.1	<i>Mise en évidence des instabilités liées aux discrétisations centrées</i> .....	62
III.3.2	<i>Choix d'une variation locale</i> .....	64
III.3.2.1	Le schéma upwind (ou différentiation amont) .....	64
III.3.2.2	Le schéma exponentiel et le schéma puissance (power law).....	65
III.3.3	<i>Forme générale de la discrétisation (régime permanent, 1D)</i> .....	68
III.3.4	<i>Discrétisation d'un problème de transport convecto-diffusif dans le cas général</i> .....	68

## CHAPITRE IV : RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DISCRETISE

IV.1	INTRODUCTION.....	73
IV.2	L'ALGORITHME DE THOMAS (TDMA) .....	74
IV.3	APPLICATION DU TDMA POUR UN PROBLÈME BIDIMENSIONNEL (TDMA LIGNE PAR LIGNE).....	76

## CHAPITRE V : APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUME FINIS AU CAS TRAITE

V.1	NÉCESSITÉ D'UNE PROCÉDURE PARTICULIÈRE.....	79
V.2	LES PROBLÈMES LIÉS À LA DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES[17,20] .....	80
V.3	LES PROBLÈMES LIÉS À LA DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE .....	81
V.4	UNE SOLUTION À TOUS NOS PROBLÈME : LES MAILLAGES DÉCALÉS[16,17,18] .....	82
V.5	DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES .....	85
V.6	CORRECTIONS DE PRESSION ET CORRECTIONS DE VITESSE .....	85
V.7	DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE À L'ÉQUATION DE CORRECTION DE PRESSION .....	86
V.8	L'ALGORITHME DU SIMPLE.....	87

## CHAPITRE VI : RESULTATS ET DISCUSSIONS

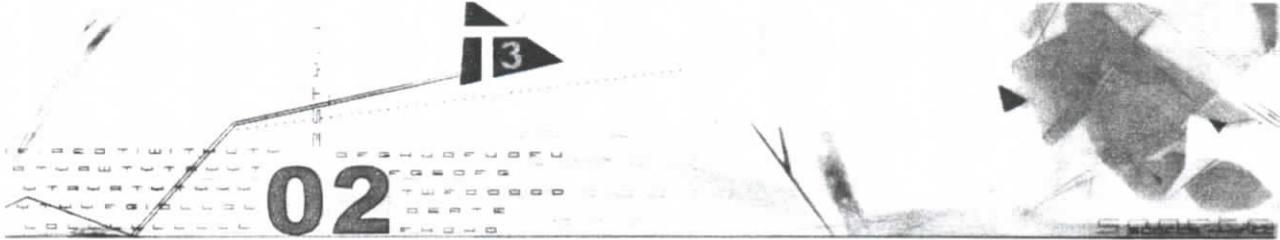
VI.1	OPTIMISATION DES PARAMÈTRES LIÉS À LA SIMULATION.....	90
VI.1.1	<i>Optimisation du maillage</i> .....	90
VI.1.2	<i>Optimisation du temps de calcul</i> .....	90
VI.1.3	<i>L'optimisation associée au programme utilisé pour la résolution</i> .....	90
VI.2	SIMULATION DANS LE CAS DE PAROIS IMPERMÉABLES (PROB1).....	92
VI.2.1	<i>Vérification de la bonne marche du programme</i> .....	92
VI.2.2	<i>Simulation du problème « Prob1 »</i> .....	93
VI.2.3	<i>Interprétation</i> .....	97
VI.3	SIMULATION DE LA MICROFILTRATION « PROB2 ».....	97
VI.3.1	<i>Position du problème « Prob2 »</i> .....	97
VI.4	SIMULATION DU PROBLÈME « PROB3 ».....	107

CONCLUSION.....111

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

# NOMENCLATURE :



## Nomenclature

- a** : vecteur quelconque;
- $a_{nb}$  : coefficient du voisin de P dans l'équation discrétisée;
- $a_{i(W,E,P)}$  : coefficients pour les noeuds W,E et P;
- $A$  : aire de la face du volume de controle;
- $A_i$  : coefficients pour TDMA;
- B** : face du bas (bottom);
- c** : chaleur spécifique;
- $C'_{1,2,3...}$  : coefficients pour TDMA;
- $C_{1,2,3...}$  : coefficients pour TDMA;
- $C_0$  : concentration moyenne du soluté dans la solution;
- $C_m$  : concentration du soluté près de la membrane ;
- d** : diamètre du pore;
- $D_e$  : conductance de diffusion;
- E** : face est;
- E** : énergie;
- $f$  : coefficient de pondération;
- F** : flux convectif de la masse par unité de surface;
- g** : gravité;
- h** : coefficient de transfert convectif;
- i** : énergie interne;
- $J_{x,y,z}$  : flux d'une propriété;
- $J_{e,w}$  : flux d'une propriété à la face e,w;
- k** : coefficient de conduction thermique;
- n** : vecteur normal à la surface;
- n** : face du volume de controle;
- N** : face nord;
- p** : pression;
- $P_e$  : nombre de péclét;
- q** : flux de chaleur;
- $q_{x,y,z}$  : flux de chaleur en x,y et z;
- $R_e$  : nombre de Reynolds de l'écoulement;
- $R_{ef}$  : nombre de Reynolds de filtration;
- $R_{ex}$  : Vitesse adimensionnelle suivant x;
- $R_{ey}$  : Vitesse adimensionnelle suiivant y;
- S** : face sud;
- S** : terme source total;
- $S_c$  : terme source partiel;
- $S_E$  : terme source associé à l'énergie;

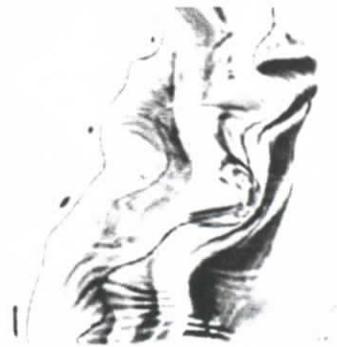
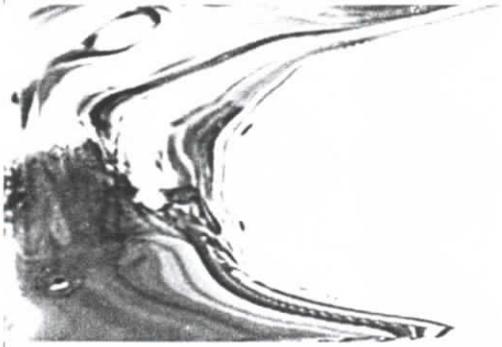
$S_i$  : terme source associé à l'énergie interne;  
 $S_M$  : terme source des forces de volume;  
 $S_{M_{x,y,z}}$  : terme source relatif à l'équation de quantité de mouvement;  
 $S_p$  : terme source lié au point P;  
 $S_\phi$  : terme source général;  
 $\bar{S}$  : terme source moyen;  
 $S_u$  : terme source partiel;  
t : temps;  
T : face top;  
u : vecteur vitesse;  
u : vitesse selon x;  
v : vitesse selon y;  
w : vitesse selon z;  
V : volume de la cellule;  
 $\bar{V}$  : vecteur de vitesse instantanée;  
W : face west;  
 $\delta_{x_j}$  : distance entre i et j ,avec (i,j = faces);

Lettres grecques :

$\alpha_j$  : coefficient pour le TDMA;  
 $\beta_j$  : coefficient pour le TDMA;  
 $\gamma$  : facteur de polarisation;  
 $\Gamma$  : coefficient de diffusion;  
 $\Gamma_{e,w}$  : coefficient de diffusion sur les facettes e,w...;  
 $\delta_i$  : arête d'un élément fluide ,avec (i=x,y,z);  
 $\varepsilon$  : porosité de la membrane;  
 $\mu$  : viscosité dynamique du perméat;  
 $\rho$  : masse volumique;  
 $\tau$  : facteur de tortuosité;  
 $\tau_{ij}$  : tenseur de contrainte ,avec (i,j=x,y,z);  
 $\varphi$  : densité de flux;  
 $\phi$  : extensité spécifique;  
 $\phi_i$  : extensité spécifique en i ,avec (i=x,y,z);  
 $\phi^*$  : valeur réactualisée de  $\phi$ ;  
 $\phi_p$  : valeur de  $\phi$  au point P;  
 $\phi_0$  : valeur connue de  $\phi$ ;  
 $\phi_B$  : valeur de  $\phi$  donnée sur la paroi;

المدرسة الوطنية المتعددة الفتيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION GENERALE



**L**a filtration est un procédé qui est très présent dans l'industrie ,son application touche des domaines très variés .

Dans ce présent mémoire nous nous intéressons à l'une des méthodes de filtration qui a vu le jour il y a quelques années, il s'agit de la Microfiltration.

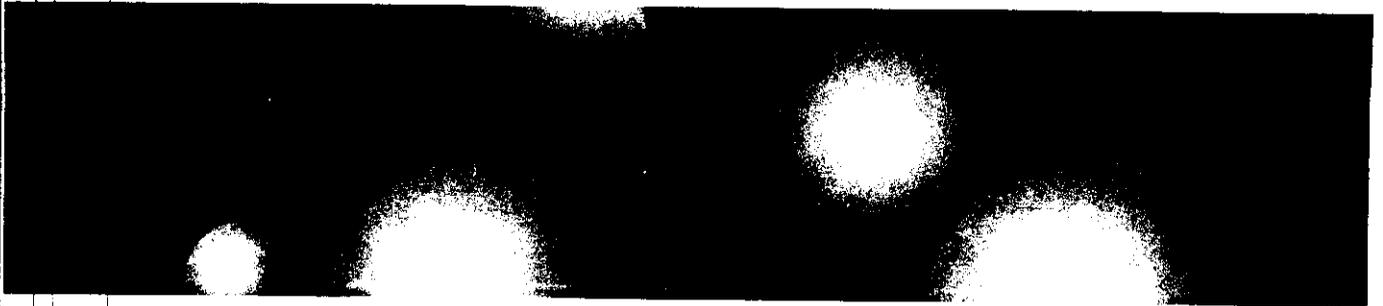
Après une présentation de la Microfiltration, nous avons pris la peine de donner quelques rappels théoriques nécessaires pour l'étude de ce procédé .La Méthode des Volumes Finis est ensuite présentée puis appliquée pour résoudre le problème hydrodynamique lié à la Microfiltration, à savoir la résolution des équations de Navier & Stokes .

Le problème étudié est un écoulement entre deux plaques microporeuses. Nous avons résolu une série de problèmes caractérisés par des conditions aux limites différentes, à l'entrée et à la paroi .Des résultats très satisfaisants ont été obtenus et représentés avec un logiciel de visualisation de données de la nouvelle génération .On a complété la recherche en traitant un problème précis qui a été traité dans la littérature avec autre méthode numérique (la Méthode des Eléments Finis) et ce , pour évaluer et valider davantage notre programme numérique.

Les résultats obtenus , sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

# CHAPITRE I :

## FILTRATION ET MICROFILTRATION



## I.1 Introduction

La filtration intervient dans de nombreux procédés de fabrication depuis la pharmacie jusqu'à l'industrie pétrolière en passant par la climatisation des locaux, la chimie, l'agro-alimentaire, le traitement des minerais, etc.

Les nombreux produits solides cristallisés fabriqués par les industries chimiques, pharmaceutique, alimentaire, minéralurgique sont généralement obtenus par filtration classique (sous vide ou sous pression) ou par filtration centrifuge c'est-à-dire essorage.

Certaines opérations (filage) exigent des liqueurs tout à fait exemptes de particules solides et, dans ce cas, les filtres de sécurité sont indispensables.

La filtration en lit épais concerne les suspensions fines résultant du traitement de certaines eaux usées ou encore des liqueurs provenant de l'attaque de certains minerais et partiellement clarifiées par décantation.

La filtration convective (technologie de membrane) s'impose pour les solutions ioniques (eau dessalée par osmose inverse), les solutions macromoléculaires, les dispersions complexes (eaux usées industrielles, produits alimentaires traités par Ultrafiltration, Nanofiltration ou microfiltration).

L'air doit être stérilisé par filtration avant de pénétrer dans les ateliers de préparation de médicaments et, dans l'industrie nucléaire, il doit également être débarrassé par filtration des particules radioactives dangereuses pour le personnel.

Dans les industries chimique et pétrolière, il est courant de chercher à débarrasser un gaz des vésicules liquides (huiles par exemple) qu'il peut avoir entraînées, ce qui est réalisé par passage à travers des matelas dévésiculeurs (vapeur de chaudière à primage, vapeur de colonne à distiller, vapeur avant compression, etc.) [1].

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la filtration convective autrement dit la technologie de filtration par membrane, qu'on traitera de manière générale. Par la suite, nous allons approfondir davantage notre recherche sur la microfiltration, thème lié principalement au présent projet.

## I.2 Technologie de filtration par Membranes

### I.2.1 Définition

La filtration par membrane peut être définie, en gros, comme un procédé de séparation qui permet de séparer un fluide contenant une mixture de deux composants et plus, moyennant un milieu semi-perméable [2], à travers le quel le fluide appelé «préfilt» sera divisé en deux portions, (cf. Fig. 1.1) .

La première : appelée « *concentrat* » est la partie du fluide qui contient des espèces qui ne passent pas à travers la membrane.

La seconde : « *perméat* » est la partie du fluide qui traverse la membrane et qui contient les espèces ayant traversé la membrane.

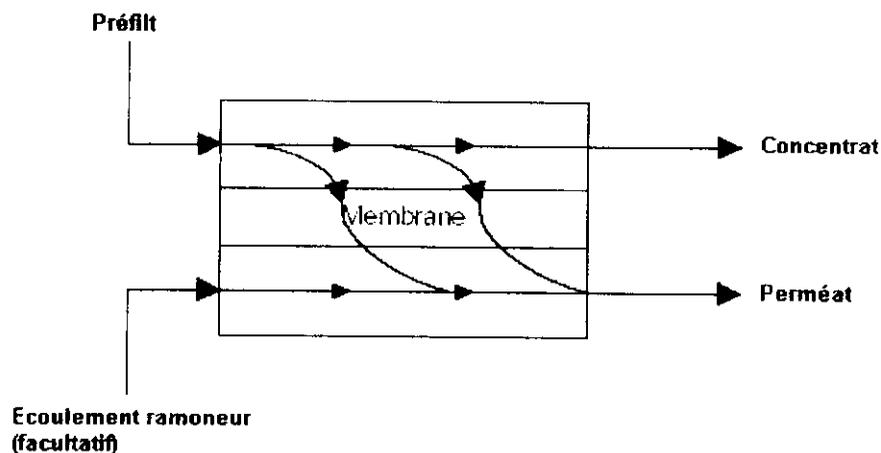


Fig. 1.1. Base de la filtration par Membrane

Plus précisément les membranes peuvent être classées selon le «préfilt» qu'elles auront à traiter, le mécanisme de filtration, les forces mises en jeu, la structure et la composition chimique de la membrane, et enfin la géométrie de construction.

### I.2.2 Structure de la Membrane [3]

Selon la matière de base qui constitue une membrane, celle-ci possède des caractéristiques intrinsèques différentes, elles sont classées en trois catégories:

#### I.2.2.1 Membranes Poreuses

Ce sont des membranes dont la dimension des pores se situe entre  $0,1$  et  $10 \mu m$  ce qui détermine principalement la caractéristique de la séparation. Une haute sélectivité peut être

obtenue quand la taille des molécules du soluté est plus grande que celle des pores de la membrane (fig. 1.2).

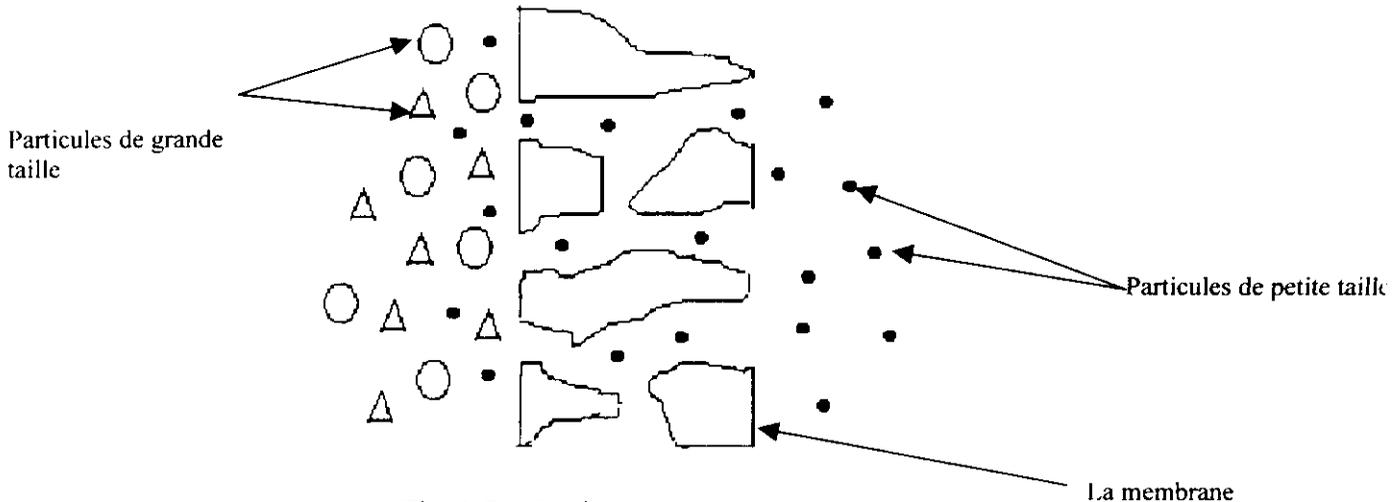


Fig. 1.2. Membrane poreuse

### 1.2.2.2 Membranes Denses

Ces membranes sont capables de séparer des molécules de mêmes dimensions, ceci est valable pour les gaz ainsi que pour les liquides. Les membranes denses ne contiennent pas de pores. Le mécanisme de transport se fait par celui de la *solubilisation-diffusion* qui signifie que le composant se dissout dans la membrane et puis se diffuse à travers elle. La séparation résulte donc de la différence dans la diffusivité et/ou dans la solubilité des composants. Ces membranes sont utilisées dans la séparation des gaz (voir fig. 1.3).

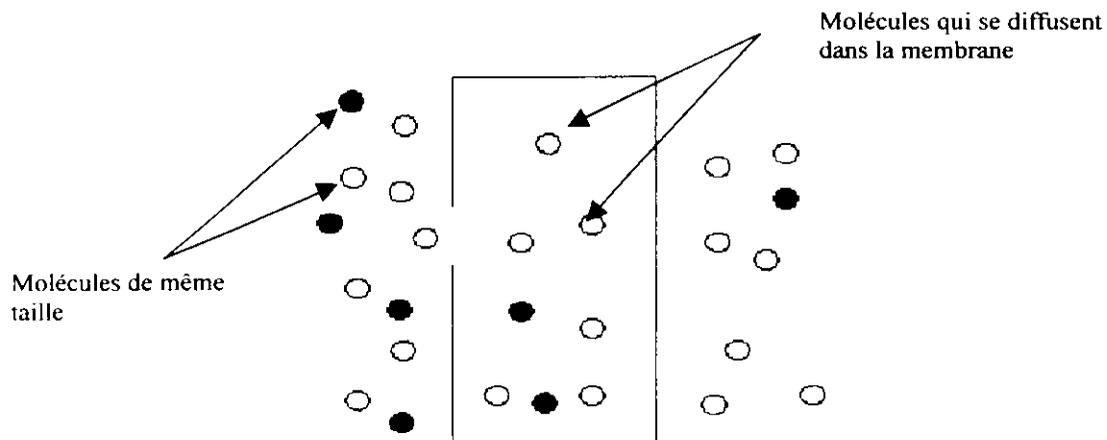


Fig. 1.3. Membrane dense sans porosité apparente

### 1.2.2.3 Membrane à porteurs

Dans ce type de membrane, la séparation se fait grâce à des molécules dites porteuses qui forment une barrière, c'est la membrane, où certaines molécules du préfilt ne peuvent pas passer la barrière de la membrane mais elles sont retenues en elle. Les molécules formant la membrane présentent une certaine affinité envers quelques molécules du préfilt, elles seront donc retenues à l'intérieure de la membrane, ceci nous offre une grande et précise sélectivité. Ce genre de membrane permet aussi bien de filtrer les liquides que les gaz.

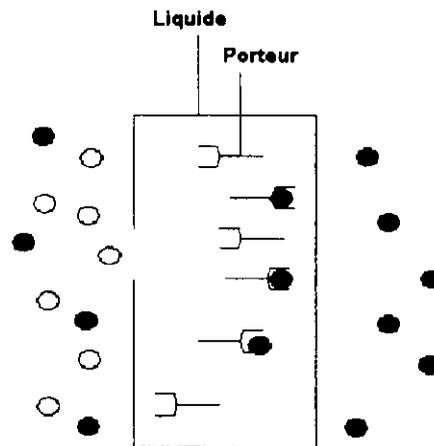


Fig. 1.4. Membrane à porteur

### 1.2.3 Configuration de l'écoulement dans une membrane sélective [4]

Lors d'une filtration classique, la suspension à traiter (*préfilt*) est amenée perpendiculairement au média filtrant : une accumulation de matières se produit formant une couche qui diminue la porosité et aussi le débit de filtration.

Dans le cas des techniques à membranes, l'écoulement du fluide à filtrer est continu et tangentiel

La filtration tangentielle assure un filtrage continu et diminue considérablement l'épaisseur de la couche de matière qui se forme à l'interface de la membrane.

Selon le cas le flux valorisé est le *perméat* (deminéralisation des eaux) ou le *concentrat* (extraction des protéines du lactosérum ; concentration du jus de fruits...)

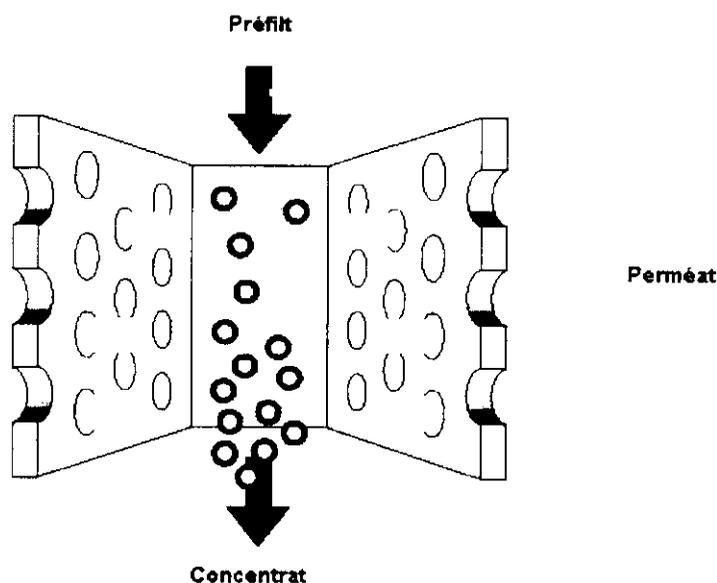


Fig. 1.5. Filtration Tangentielle

### 1.2.4 La force motrice dans une membrane

Le phénomène de transport dans une membrane est provoqué par une force dite *force motrice* (driven force) [5] qui agit directement sur les particules du fluide à filtrer, généralement le flux de transport à travers la membrane est proportionnel à cette force. Comme il est détaillé dans le Tableau 1 , les procédés de filtration par membrane peuvent être classés selon le type de force qui assure le mécanisme de transport.

Tableau 1.1 : Classification des processus à membrane suivant les contraintes appliquées [6].

Contrainte Utilisée	Gradient de pression	Gradient de concentration	Gradient de Température	Gradient de Potentiel électrique
<b>Processus à membrane</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Microfiltration</li> <li>• Ultrafiltration</li> <li>• Nanofiltration</li> <li>• Osmose Inverse</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pervaporation</li> <li>• Filtration des gazes</li> <li>• Dialyse</li> <li>• Membrane liquide</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Thermo - osmose</li> <li>• Membrane de distillation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Electrodialyse</li> <li>• Electro-osmose</li> </ul>

Dans tout ce qui suit nous allons nous intéresser aux membranes utilisant le gradient de pression comme force motrice. Pour commencer nous présentons, ci-après, les différentes membranes utilisées, qui sont classées selon la dimension des particules qu'elles peuvent retenir . Nous allons trouver les différentes appellations suivantes : **Osmose Inverse**, **Ultrafiltration**,

**Nanofiltration, Microfiltration.**, nous pouvons préciser à ce niveau que cette catégorie de membranes travaille selon la configuration de filtration tangentielle ,explicitée précédemment [4].

- On note par *MW* (*Molar weight*) la masse molaire d'une molécule .

## 1.2.5 Procédés à Membrane utilisant le gradient de pression comme source de la force motrice[4]

### 1.2.5.1 Osmose Inverse (OI)

C'est le premier procédé de séparation à écoulement tangentiel à être largement commercialisé. L'Osmose Inverse ne laisse pas passer la majorité des contaminants de nature organique et filtre jusqu'à 99.9 % les fluides contenant des ions dissous (Fig. 1.6), c'est un moyen très efficace et opérationnel dans des conditions extrêmes.

La « OI » peut purifier les fluides pour atteindre un niveau de pureté remarquable avec une seule passe, le niveau de pureté extrême est atteint dès la deuxième passe.

Lors du processus, la pression appliquée varie de **3,4 à 69 bar**, c'est cette pression élevée qui produit la force nécessaire par unité de surface qui assure l'écoulement à travers la membrane. La filtration par « OI » présente beaucoup d'avantages dont :

- L'économie importante d'énergie comparée aux autres procédés tels que la distillation et l'échangeur d'ions.

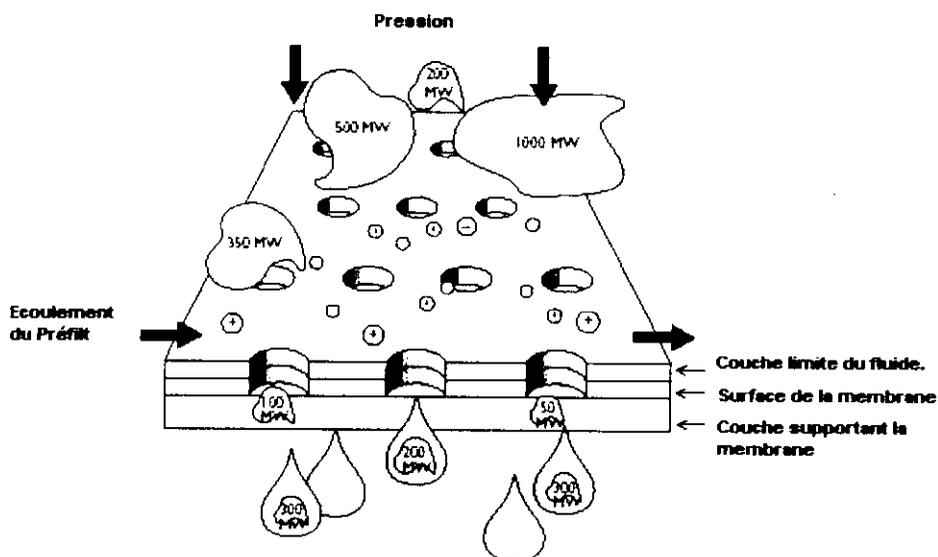


Fig. 1.6 Osmose Inverse

### I.2.5.2 Nanofiltration (NF)

C'est un procédé qui permet de filtrer les composants organiques de l'ordre de 250 MW à 1000 MW, et aussi les quelques sels (sels divalents), elle a la caractéristique de faire passer l'eau à pression moindre que celle nécessaire pour l'Osmose Inverse (Fig. 1.7). La NF est un procédé économique pour produire de l'eau douce sans pour autant être affectée par une éventuelle pollution produite par les systèmes de régénération, elle a aussi la particularité de pouvoir donner une eau avec des proportions bien définies en sels minéraux. Généralement, les pressions appliquées varient de 5 à 15 bar.

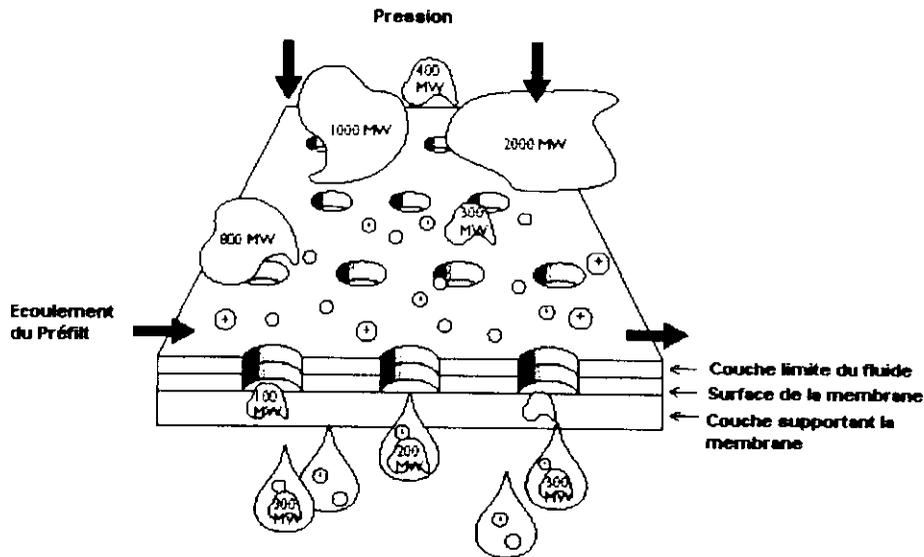


Fig. 1.7. Nanofiltration

### I.2.5.3 Ultrafiltration (UF)

C'est un procédé similaire à l'Osmose Inverse et à la Nanofiltration, mais il ne permet pas de rejeter les ions (Fig. 1.8). L'Ultrafiltration rejette les solutés de plus de 1000 MW. A cause des dimension des pores dans la membrane, L'UF impose une pression d'utilisation plus basse : 0,7 à 6,9 bar. L'UF rejette les composés organiques, colloïdes, bactéries, et pyrogènes, mais elle laisse passer la plupart des ions et les petits composés organiques comme le sucre .

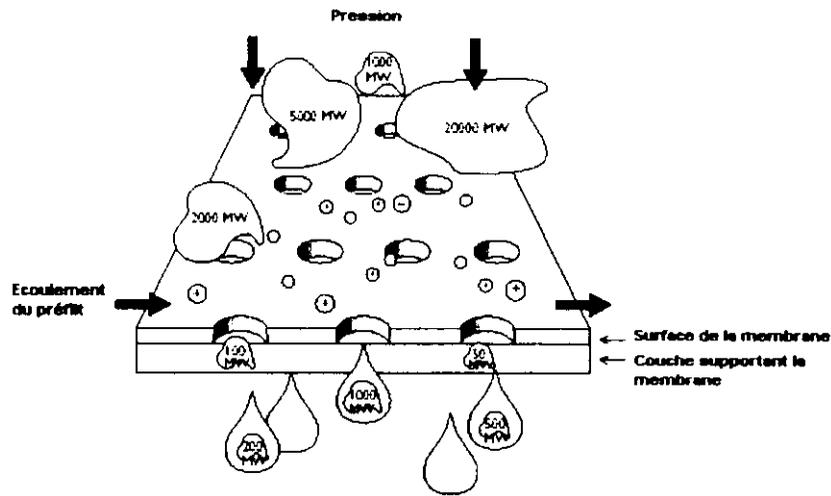


Fig. 1.8. Ultrafiltration

#### 1.2.5.4 Microfiltration (MF)

Les membranes associées à ce type de procédé sont des filtres absolus étalonnés avec des pores de l'ordre de  $0,1$  à  $3 \mu m$ . Elles sont fabriquées essentiellement à base de polymère, métal, disque de céramique ou bien en cartouche de fibre plissée, la MF est actuellement disponible en configuration à écoulement tangentiel (Fig. 1.9). Les pressions optimales de travail sont évaluées de  $0,3$  à  $3 \text{ bar}$ .

La configuration tangentielle de l'écoulement dans la membrane allonge d'une façon très significative sa durée de vie, comparée à une disposition en écoulement forcé (écoulement perpendiculaire à la surface), la première solution permet de faire un auto-nettoyage des surfaces filtrantes. Le système de configuration à écoulement tangentiel (première solution) coûte relativement cher comparé à la MF, exécutée avec le système de filtre à écoulement forcé, mais ceci est récupéré largement sur les frais de l'installation et de l'exploitation où ils sont nettement moins chers.

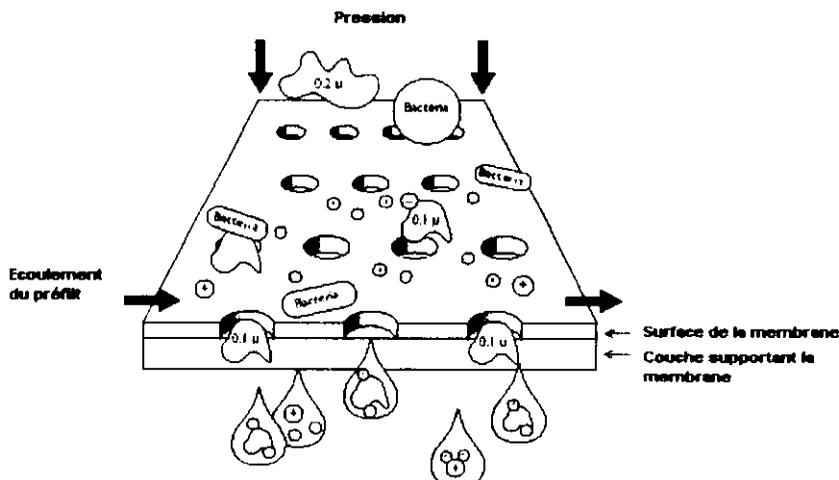


Fig. 1.9. Microfiltration

Selon le type de membrane, les matières utilisées pour la construction diffèrent, le Tableau 2 [3] donne les matière associées à chaque type de filtration .

Tableau 1.2 : Matière de la membrane pour diverses demandes.

Matière	Procédé de séparation
Plyproylene	Microfiltration (MF)
Polysulfone	Ultrafiltration (UF)
Polyamide	Osmose Inverse (OI)
Polyacrylonitrile	Ultrafiltration
Cellulose	Microfiltration, Ultrafiltration, Osmose Inverse

### 1.3 Configuration des membranes [4,16]

Les membranes à écoulement tangentiel sont fabriquées en différentes configurations. On cite par exemple les configurations suivantes : en fibres creuses (tubulaires et capillaires), à ouverture spirale.

#### 1.3.1 Membrane à ouverture spirale(Sepralator)

Les Sepralators ont pris depuis longtemps une grande part du marché. ils sont les plus solides et résistent bien aux pressions de fonctionnement appliquées . La conception en forme de spirale permet un contact optimum surface – fluide, et une dynamique remarquable du fluide, ce qui assure une filtration optimum. Le design Sepralator est disponible pour les membranes OI, NF, UF, et MF . Les separators (Fig. 1.10) sont faciles à nettoyer, leur plus grand avantage est l’auto- nettoyage assuré par l’écoulement turbulent à travers les surfaces actives, ce qui permet l’allongement de la durée de vie de la membrane. Le système à ouverture spirale offre un vaste choix pour la matière de la membrane et il permet aussi de bien adapter le système pour les besoins de la purification.

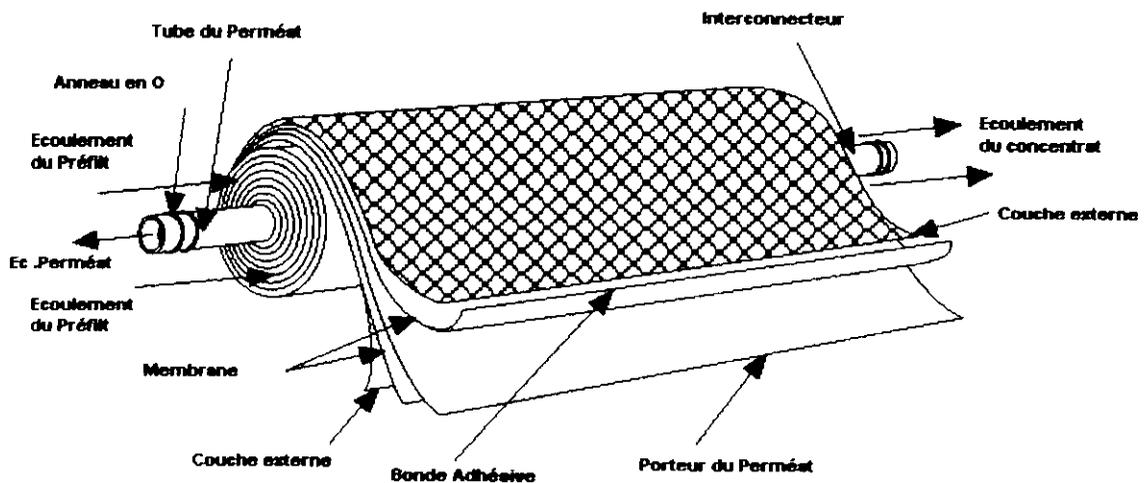


Fig. 1.10. Module de membrane à ouverture spirale

### 1.3.2 Configuration en fibres creuses (tubulaire, capillaire...)

Les fibres creuses sont des éléments très fins qui ont une dimension de l'ordre du diamètre ( $d$ ) du poil du cheveu humain ( $d < 0,5mm$ ), on trouve aussi le modèle dit capillaire ( $d \sim 0,5- 5 mm$ ) et aussi le modèle tubulaire ( $d \sim 5-15 mm$ ), tous ces modèles sont disponibles en différents calibres.

L'avantage de ce type de membrane est le volume de passage du fluide, qui est grand et permet un filtrage maximum. Malheureusement, ce type de membrane comporte des inconvénients :

- La fabrication est très coûteuse et délicate en même temps ; dans certains cas pour utiliser des pressions de filtration élevées, on est contraint d'augmenter le diamètre des fibres, ce qui réduit la précision de la filtration engagée.
- Le système présente souvent une non uniformité de la filtration à l'intérieur d'une seule membrane. Il y a formation d'une couche (gel) au niveau de la surface qui réduit sensiblement le débit de filtration.

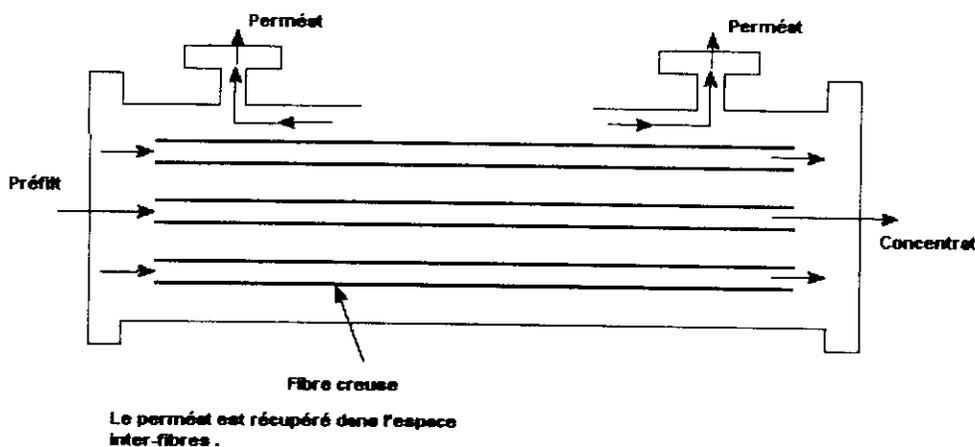


Fig. 1.11. Module de membrane à fibres creuses

### 1.3.3 Module à membrane s plates

Le module plat est constitué de plusieurs membranes de forme plane ,et de supports empilés. Le fluide s'écoule entre les membranes de deux supports adjacents (Fig. 1.12). L'épaisseur de l'espace inter-membrane est de quelques millimètres.

Ce type de membrane est facile à maintenir. La surface de contact membrane-liquide est très grande vu la géométrie plane de la membrane ceci est l'un des avantage de ce type de membrane. Le nettoyage par des produits chimiques est nécessaire en cas d'encrassement.

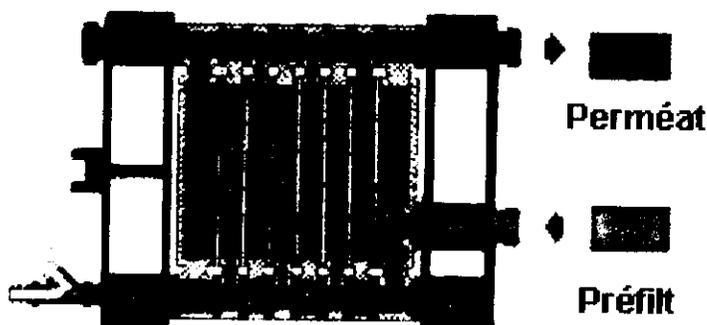


Fig. 1.12. Module de membrane plate

Le tableau 1.3 qui suit donne les caractéristiques technologiques de quelques modèles de membrane.

Tableau 1.3 : Caractéristiques de quelques modules de membrane [3]

Module	ouverture spirale	tubulaire	Capillaire
Résistance à l'encrassement	Modéré	forte	faible
Nettoyage	Facile	Très facile	Difficile
Coût relatif	Bas	Haut	Bas
Application principale	OI, NF, UF	NF, UF, MF	OI, NF

La pression, la température et le débit, sont des grandeurs qui jouent un rôle important dans la séparation avec membrane. Pour un certain gradient de pression élevée, la concentration au niveau de la surface active de la membrane atteint une valeur critique, ainsi il y aura formation d'une couche sous forme de gel appelée «couche gâteau» [1,5,6,7,8,9,10], dans ces conditions, le flux volumétrique atteint une valeur limite appelé « flux critique » qui dépend du débit de l'écoulement et du coefficient de diffusion du corps dissous dans le *préfilt*.

Arrivé à ce stade, une augmentation de pression non seulement ne fournira pas un flux additionnel, mais peut conduire à des couches de précipitation dans les pores, ce qui risque de produire des endommagements irréversibles dans les membranes. Par conséquent, le fonctionnement aux pressions élevées menant à limiter le comportement du flux n'est pas recommandé [1].

La couche précipitée juste au dessus de la couche de gel est connue sous le nom de **Polarisation de Concentration** (*concentration polarisation*) [1,5,6,8,9] qui est une accumulation de corps dissous non- imprégnés et rejetés à l'interface de la membrane, en somme, on peut dire que la couche de la polarisation de concentration est inévitable mais son épaisseur varie selon la taille des particules dans le *préfilt* et surtout du débit de l'écoulement dans la membrane, en ce qui concerne la couche « gâteau » qui est plus dense, son apparition dépend de la pression d'utilisation et aussi de la taille des particules dans la solution, à cet effet des abaques existent pour mieux choisir le type de membrane à utiliser pour une filtration donnée [4,9].

Le fonctionnement à haute- pression peut mener aux dommages de la membrane et les basses pressions ne produiront pas assez de gradient de pression pour obtenir la sélectivité désirée, de même, les débits et la dynamique du fluide jouent un rôle essentiel, en effet les écoulements en régime turbulent sont exigés, dans certains cas, pour éviter la polarisation et l'encrassement. La modification et la gestion extérieures appropriées de la dynamique du fluide sur la surface de la membrane sont nécessaires pour éviter l'encrassement, d'autres solutions sont apportées dans certains cas, elles sont résumées dans le Tableau 1.4 qui suit :

Tableau 3 : Méthodes couramment utilisées pour réduire l'encrassement des membranes[7].

<b>Méthode</b>	<b>Référence</b>
<b>Méthode directe</b>	<b>Auteurs</b>
Nettoyage hydraulique et chimique régulier.	Porter 1990
Ecoulement Impulsif.	Bourthanon et al . 1991
Augmentation de la turbulence de l'écoulement.	Shen et Probstein 1979
Génération de vortex .	Mallubhotla et Belfort 1997
Membrane rotative et vibrante .	Reed et al . 1997

## I.4 Limitations et contraintes technologiques[3]

Nous citons ici les limitations générales dans la technologies de séparation avec membrane:

- ◆ Un nettoyage fréquent est exigé à cause des sédiments qui peuvent se déposer sur les surfaces actives de la membrane.
- ◆ La fluctuation de la concentration n'est pas bien contrôlée par la membrane.
- ◆ La température et les effets de pH sur la diffusivité des composants du fluide doivent toujours être considérés.
- ◆ La pression de fonctionnement (*0,3 – 14 bar*) pour les membranes poreuses, (*3- 80 bar*) pour les membranes non poreuses
- ◆ La température.
  - ◇ Eviter d'opérer à des températures du fluide proches du point de fusion de la membrane.
  - ◇ Les membranes en plastique peuvent être utilisées pour des températures inférieures à 200 ° C
  - ◇ Des membranes en céramique sont nécessaires pour des filtrations aux températures élevées.

## I.5 La Microfiltration

Nous avons défini précédemment la Microfiltration qui est un type de filtration utilisant les membranes sélectives, comme bien d'autres types. Toutefois, chaque type possède des membranes adaptées et des applications industrielles spécifiques. Dans ce paragraphe, nous présentons en premier lieu, les caractéristiques de base du processus de Microfiltration en citant

les applications industrielles les plus courantes. Ensuite, nous allons donner un des modèles théoriques utilisés pour calculer le flux à travers la membrane (Densité de flux de filtration).

## 1.5.1 Caractéristique de base de la Microfiltration[14,16]

### 1.5.1.1 Principe

- La Microfiltration est un procédé physique de séparation entre une phase finement divisée et une phase liquide, qui utilise une membrane.
- La Microfiltration s'applique à la séparation de particules de 0,1 à 10 $\mu$ m.
- La séparation de particules plus petites fait appel à l'Ultrafiltration ou à la Nanofiltration.
- La migration des produits d'un côté à un autre de la membrane est obtenue par une différence de pression.
- La différence de pression appliquée est généralement < 3 bars.
- La filtration est généralement de type tangentielle, c'est à dire que le fluide circule parallèlement à la membrane, contrairement à la filtration classique qui est dite frontale.
- La filtration tangentielle rappelle le , permet de limiter l'accumulation de dépôts qui obturent la surface de filtration.

### 1.5.1.2 Les Membranes

La (Fig. 1.13) est une image réelle, prise avec un microscope électronique, d'une surface de membrane de microfiltration caractérisée par des pores capillaires. Cette membrane possède des pores de forme presque cylindrique, mais avec une répartition assez aléatoire. Ces membranes sont des filtres absolus, ils sont commercialisés en forme de film mince fait en polycarbonate et en polyester.

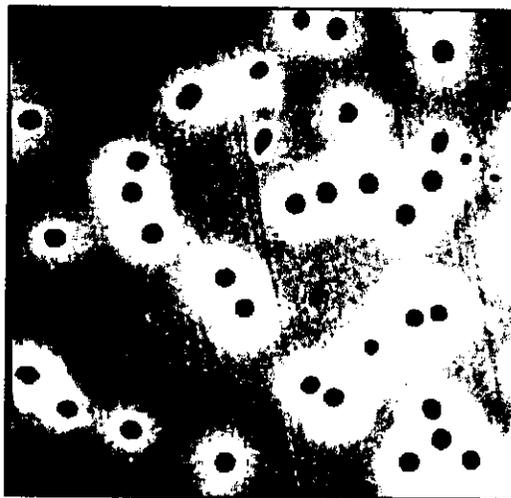


Fig. 1.13. Pores Capillaires

La (Fig. 1.14) est une image au microscope électronique de la surface d'une membrane de Microfiltration à pores tortueux. Cette membrane possède une surface relativement rugueuse et elle possède un espace vide assez grand comparé à celui des pores capillaires. toutefois ce type de membrane sont des filtres absolus, elle sont commercialisées et sont disponibles en plusieurs matériaux : PVC , PVDF , PTFE , variété de composés en cellulose Nylon, polyethersulfone , polypropylène et beaucoup d'autres matériaux .

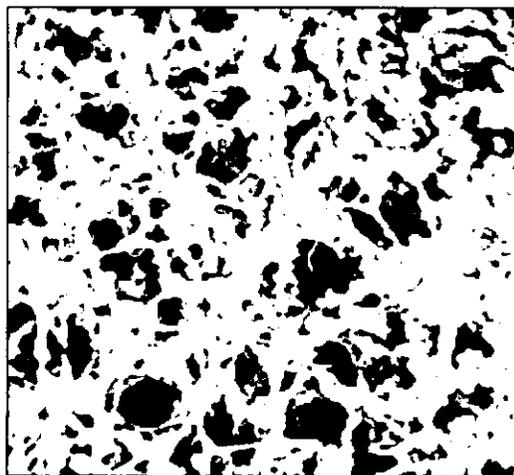


Fig. 1.14. Pores Tortueux

Les membranes sont dites symétriques lorsqu'elles sont constituées d'une peau (couche filtrante), déposée sur un support de même nature.

Elles sont dites asymétriques et composites si la peau n'est pas de même nature que le support.

Les membranes sont caractérisées par:

- la porosité et l'épaisseur de la couche filtrante dont dépend le débit de perméat.
- le diamètre des pores et leur répartition dont dépend l'efficacité de séparation.
- le matériau employé dont dépend la résistance mécanique, chimique et thermique et la facilité de nettoyage.

Les membranes peuvent être organiques:

- acétate de cellulose ;
- polyamides aromatiques ;
- polysulfone ;
- esters de cellulose ;
- cellulose ;
- nitrate de cellulose ;
- PVC ;
- polypropylène .

ou minérales:

- céramique frittée ;
- métal fritté ;
- carbone ;
- verre.

Les membranes minérales présentent une meilleure résistance:

- à la corrosion, au pH (0 à 14) et aux solvants.
- mécanique à des températures supérieures à 100°C
- à l'abrasion
- à la pression
- aux lavages à contre-courant

Toutefois, elles sont plus onéreuses que les membranes organiques.

### 1.5.2 L'installation industrielle typique [11,12]

Une installation industrielle typique pour la Microfiltration (Fig. 1.15) fonctionne comme suit :

Avant tout, l'équipement de filtration est placé dans une boucle où circule sous pression, le fluide. Une pompe de circulation est utilisée à cet effet., la boucle peut incorporer un échangeur de chaleur destiné à maintenir constante la température du fluide.

- En mode d'opération « batch », le produit à filtrer est introduit au départ pour remplir la boucle.
- En mode de fonctionnement continu, le produit à filtrer est introduit régulièrement dans la boucle par une pompe d'alimentation.
- Une recirculation du concentrat est parfois exécutée pour obtenir les concentration recherchée pour ce dernier.
- Des manomètres sont placés pour mesurer la pression du fluide dans les conduites.
- Un réservoir de préfilt alimente le circuit de filtration à travers la pompe .
- Des conduites transportent le perméat vers un réservoir pour le stoker.

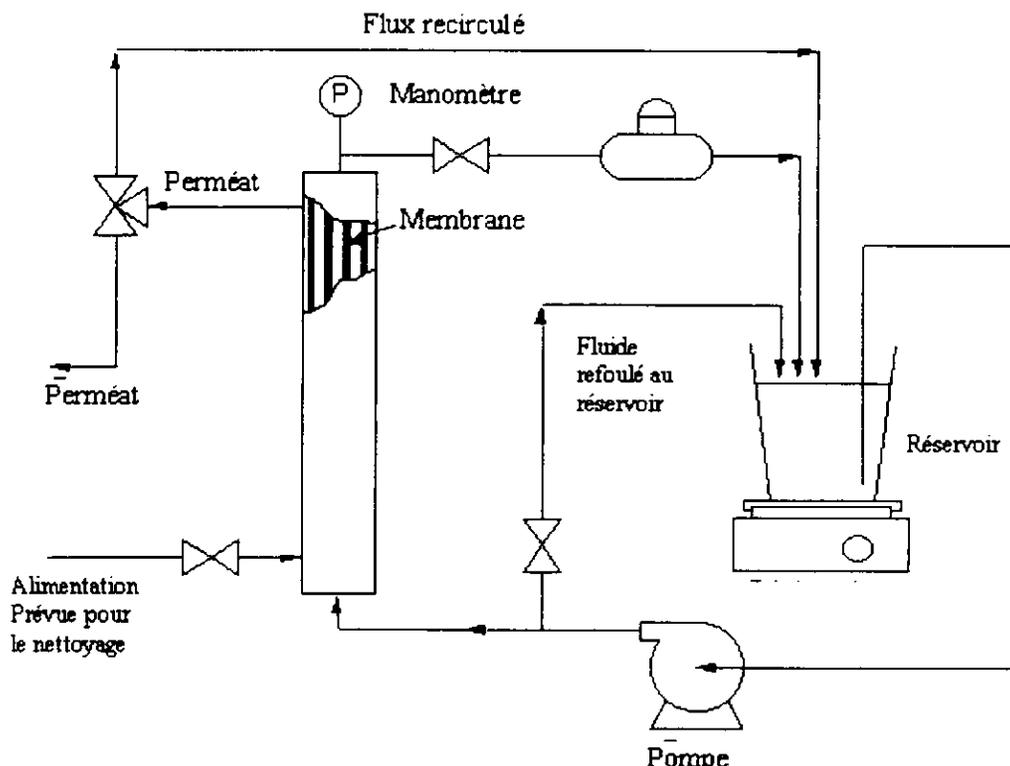


Fig. 1.15 Schéma d'une installation de Microfiltration

### **I.5.3 Conditions de fonctionnement [13,14]**

La différence de pression est souvent voisine de 1bar et généralement inférieure à 3bars.  
Les débits de perméat vont de 50 à 5000 litres/m<sup>2</sup>.h . C'est la formation de dépôts qui limite la filtration.

Le débit augmente lorsque:

- la pression augmente jusqu'à une valeur au delà de laquelle il se stabilise avant de décroître (Flux critique)
- lorsque la température augmente (viscosité plus faible du liquide)
- la concentration du produit à retenir diminue (colmatage plus faible)
- la vitesse de circulation augmente (régime turbulent)
- des fluctuations de débit ou de pression sont provoquées (apparition de turbulence)
- il existe une affinité entre le solvant et la membrane

### **I.5.4 Les applications industrielles (Alimentaire, pharmaceutique, autre... )**

#### **I.5.4.1 Dans l'industrie alimentaire**

- élimination des lipides.
- élimination des bactéries.
- extraction des levures.
- élimination de la pectine des jus de fruits.
- clarification et stabilisation des vins.

#### **I.5.4.2 Dans l'industrie pharmaceutique**

- production d'eau stérile.
- concentration d'enzymes, de vaccins et de virus.
- fractionnement du sang.

#### **I.5.4.3 Dans d'autres industries**

- traitement d'effluents de lavage de la laine ou de tanneries.
- desasphaltage des pétroles bruts.
- récupération de catalyseurs en phase liquide.
- épaissement de boues jusqu'à 50% de matière sèche.

### 1.5.5 Mécanisme de transfert en Microfiltration et théorie associée

L'étude des phénomènes présents lors de la filtration par membrane est très complexe, il reste jusqu'à présent un domaine de recherche, néanmoins plusieurs modèles théoriques existent et donnent en pratique des résultats acceptables. Plusieurs théories ont été avancées pour décrire les transferts de matière à travers les membranes perméables, et expliquer le mécanisme de la sélectivité des membranes. Nous donnons ci-après un modèle qui sera utilisé par la suite lors de la résolution du problème traité, il s'agit d'un modèle qui est basé sur la notion de «**capillaires**» qui, en fonction de leurs dimensions, arrêtent ou laissent passer certaines molécules ou particules ; ce dernier s'applique relativement bien aux membranes de Microfiltration.

#### 1.5.5.1 Mécanisme du type capillaire[10].

Cette théorie, la plus ancienne et la plus simple, consiste à considérer les membranes comme un milieu poreux constitué d'une multitude de *capillaires* ; dans ce cas, *sélectivité et perméabilité peuvent être déterminées à partir du diamètre des pores, du nombre de pores et de leur courbe de distribution*. C'est le cas de la Microfiltration.

##### - Calcul du Flux de Perméat

Le flux de solvant à travers une telle membrane peut être déterminé par la **loi de Poiseuille [10]** :

$$J = \frac{\pi d^4 N \Delta P}{128 \mu z}$$

avec  $J$  ( $m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ ) débit - volume de perméat par unité de surface de membrane,  
 $d$  ( $m$ ) diamètre de pore,  
 $\mu$  ( $Pa \cdot s$ ) viscosité dynamique de perméat,  
 $\Delta P$  ( $Pa$ ) différence de pression,  
 $z$  ( $m$ ) épaisseur effective de la membrane,  
 $N$  ( $m^{-2}$ ) nombre de pores par unité de surface de membrane.

Le nombre de pores par unité de surface peut être relié à la porosité par la relation :

$$N = \frac{4\varepsilon}{\pi d^2 \tau}$$

avec  $\varepsilon$  porosité de la membrane (égale au rapport du volume total des pores de la membrane à son volume apparent),  
 et  $\tau$  facteur de tortuosité (égal au rapport de longueur moyenne d'un pore à l'épaisseur de la membrane)

d'où 
$$J = \frac{\varepsilon d^2 \Delta P}{32 \mu \tau z}$$

*Valeur numérique*

En **Microfiltration** on arrive à des débits allant jusqu'à  $4400 \text{ l/h.m}^2$  et plus.

**I.5.5.2 Phénomène de Polarisation.**

**Nature du phénomène.**

Les membranes utilisées ayant la propriété d'effectuer des séparations à l'échelle moléculaire ou particulaire, il va y avoir accumulation progressive des espèces (molécules ou particules) arrêtées à la surface de la membrane. C'est le phénomène de **polarisation de concentration** (Fig. 1.16).

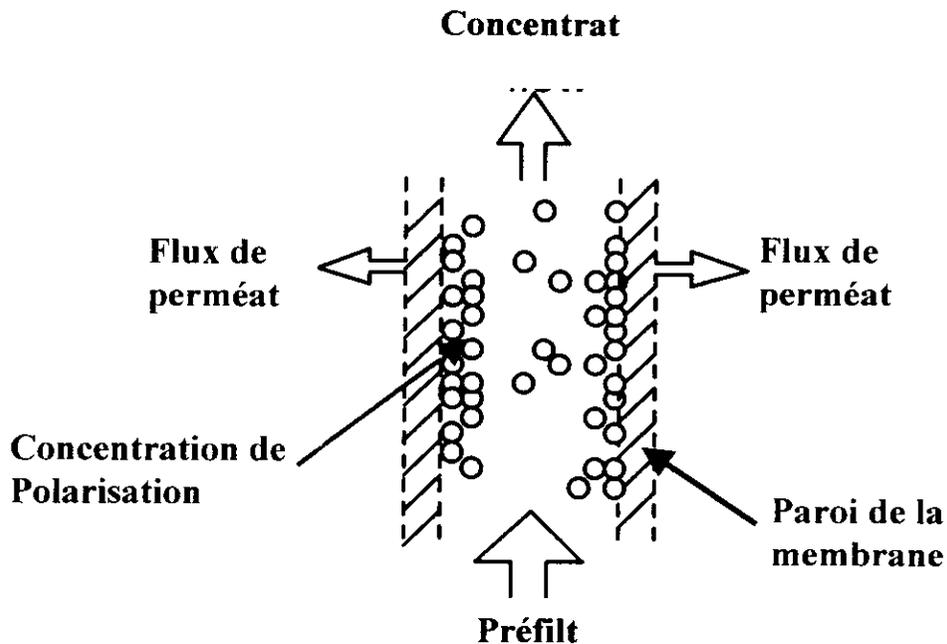


Fig. 1.16. Polarisation en filtration tangentielle[11]

Si l'on appelle  $C_m$  la concentration du soluté arrêté près de la membrane et  $C_0$  la concentration moyenne du soluté dans la solution, le **facteur de polarisation** est défini par la relation :

$$\gamma = C_m / C_0$$

La polarisation est un **phénomène réversible** qui disparaît si le gradient de transfert est annulé. Les conséquences du phénomène de polarisation sont données ci-après.

### **Diminution du flux de Perméat**

Une augmentation de la concentration près de la membrane va se traduire par une **augmentation de la pression osmotique** de la solution et une **diminution de la pression efficace**. Le flux de perméat étant directement proportionnel à la pression efficace va donc diminuer. Cet effet est surtout sensible en osmose inverse où les pressions osmotiques jouent un rôle important mais il est presque négligeable en microfiltration.

On peut avoir aussi, une diminution du flux à cause de la résistance supplémentaire à la filtration provenant des dépôts résultant d'une augmentation de la concentration.

### **Variation de la sélectivité**

Une augmentation de la concentration près de la membrane peut se traduire soit par une augmentation de la concentration dans le perméat, soit par une diminution lorsqu'il y a dépôt et que celui-ci joue le rôle d'une deuxième membrane.

# **CHAPITRE II :**

## **EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES**



Dans ce chapitre nous allons développer les équations de base relatives à un écoulement de fluide , un transfert de chaleur , à partir des lois de conservation de la masse ,de la quantité de mouvement , de l'énergie et celle de la matière , correspondant à trois lois de la physique classique :

- La loi de Lavoisier ,
- La deuxième loi de Newton ,
- Le premier principe de la thermodynamique .

## II.1 Equation gouvernante d'un écoulement de fluide et d'un transfert de chaleur [17,20]

Le fluide sera considéré comme un milieu continu.

Nous considérant un élément de fluide avec les côtés  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$  (Figure 2.1).

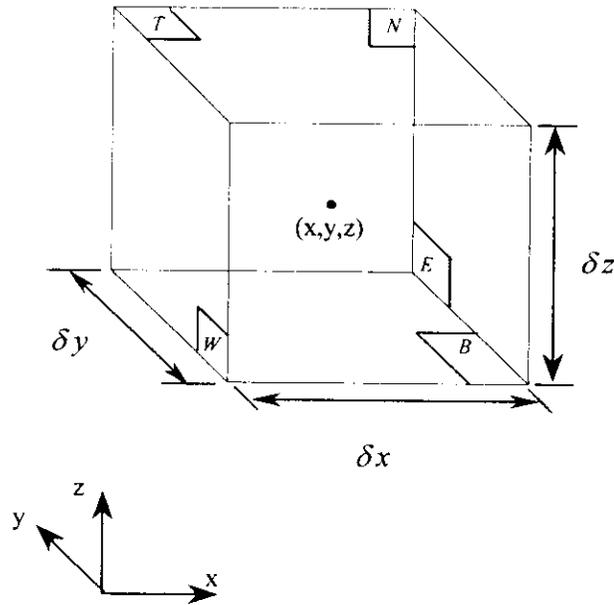


Fig. II.1 L'élément de volume pour les lois de conservation

Les six faces noté  $N, S, E, W, T, B$  veulent dire Nord, Sud , Est , West , Top , Bottom .le repère de référence est représenté sur la figure .

### II.1.1 Conservation de la masse

Avant d'établir les équations de conservation de la masse on écrit le bilan de masse pour un élément fluide :

Accumulation de la masse dans l'élément fluide.	=	Flux net de la masse vers l'élément fluide.
---	---	---

L'accumulation de la masse dans l'élément de volume du fluide est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.1})$$

le débit massique passant à travers les faces de l'élément du fluide est donné par le produit de la masse volumique, surface et la composante de vitesse normale à la face .

D'après la (Fig. II.2) on peut voir que le débit massique net traversant les faces de l'élément est donné par :

$$\begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Le flux entrant vers l'élément produit une accumulation de la masse à l'intérieur de celui-ci, il prend donc un signe positif, par contre le flux quittant l'élément prend le signe négatif.

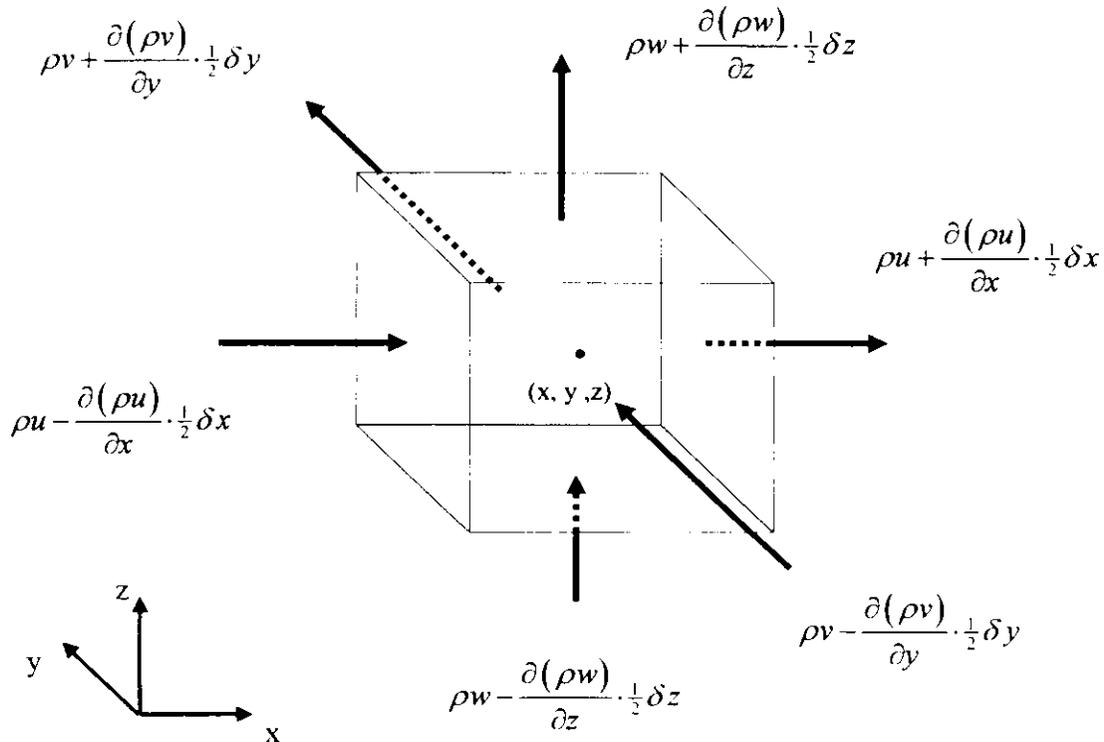


Fig. II.2 Bilan de masse pour volume de contrôle

L'accumulation de la masse à l'intérieur de l'élément (2.1) est égalisé avec le débit massique net de la masse vers l'élément (2.2), puis en divisant sur le volume de l'élément et en réarrangeant l'expression, nous aurons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.3})$$

ou bien en écriture vectorielle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

L'équation (II.4) traduit la conservation de la masse en régime transitoire. Le premier terme à gauche traduit la variation de la masse volumique dans le temps, par unité de volume. Le second terme décrit le débit net de la masse s'écoulant à travers ses faces, il est appelé le terme *convectif*.

Pour un **fluide incompressible** la masse volumique  $\rho$  est constante et l'équation (II.4) devient :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (\text{II.5})$$

### II.1.2 variations d'une propriété associée à une particule fluide et pour un élément fluide [17]

La conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie, traduisent des propriétés pour une particule fluide, chaque propriété de chaque particule est fonction de la position ( $x, y, z$ ) de celle-ci, et du temps  $t$ .

Soit  $\phi$  la valeur d'une propriété par unité de masse. La dérivée particulaire de  $\phi$ , en respectant le temps qui suit la particule fluide, s'écrit :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Si la particule fluide suit un écoulement on a alors :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi \quad (\text{II.6})$$

$D\phi/Dt$  Définit le taux de variation d'une propriété  $\phi$  par unité de masse, comme dans le cas de l'équation de conservation de la masse, on est intéressé par un développement des équations par unité de volume, le taux de variation d'une propriété  $\phi$  par unité de volume pour une particule fluide est donnée par le produit de  $D\phi/Dt$  et de la masse volumique  $\rho$ , ainsi :

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi \right) \quad (\text{II.7})$$

Généralement lors des calculs utilisant les équations de conservation pour résoudre les problèmes d'écoulement de fluide, on se base sur la variation des propriétés pour un élément fluide stationnaire dans l'espace, cet élément est appelé le **volume de contrôle**.

Par exemple l'équation de conservation de la masse contient la masse par unité de volume (i.e. la masse volumique  $\rho$ ) comme grandeur conservée. La somme du taux de variation de la masse volumique et du terme convectif dans l'équation de conservation de la masse (II.4) pour un élément de fluide est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u})$$

La généralisation de ces termes pour une grandeur arbitraire de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) \quad (\text{II.8})$$

La formule (II.8) exprime le taux de variation de  $\phi$  par unité de volume plus le flux net de  $\phi$  à travers l'élément fluide par unité de volume. Maintenant on réécrit l'équation précédente pour illustrer la relation qui la lie à la dérivée particulière de  $\phi$  :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (\text{II.9})$$

Le terme  $\phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right]$  est égal à zéro car on a une conservation de la masse (II.4), en quelques mots, la relation (II.9) veut dire:

Variation de $\phi$ d'un élément fluide	+	Flux net d'écoulement de $\phi$ à travers un élément fluide	=	Variation de $\phi$ pour une particule fluide
---	---	---	---	---

Pour généraliser la procédure à l'équation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie, on remplace par les propriétés associées à chaque équation comme il a été défini en (II.7) et (II.9) ceci donne

Tableau II.1 : Ecriture conservative de équations de quantité de mouvement et de l'énergie

Qté de mouvement selon $x$	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u})$
Qté de mouvement selon $y$	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u})$
Qté de mouvement selon $z$	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u})$
Energie	$\rho \frac{DE}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \mathbf{u})$

**Remarque** : l'écriture sous la forme conservative (divergence) est plus pratique lorsqu'il s'agit de l'application de la méthode des volumes finis. pour cela on adoptera à partir de maintenant que cette forme d'écriture.

### II.1.3 L'équation de la quantité de mouvement

La seconde loi de Newton stipule que la variation de la quantité de mouvement pour une particule fluide est égal à la somme des forces agissant sur cette particule.

Variation de la quantité de mouvement d'une particule fluide	=	Somme de forces agissantes sur une particule fluide
--	---	---

La variation de la quantité de mouvement dans les directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par unité de volume pour une particule fluide sont donnés par

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (\text{II.10})$$

Nous avons deux types de forces agissantes sur une particule fluide :

● **forces de surface**

- les forces de pression
- les forces de viscosité

• **forces de volume**

- forces de gravité
- force centrifuge
- force de Coriolis
- force électromagnétique

Les forces de surface sont représentées par un terme séparé dans l'équation de quantité de mouvement, les forces de volume quand à elles, sont introduite dans l'équation sous la forme d'un terme appelé terme source.

L'état des contraintes sur un élément fluide est défini par la pression et les neufs composantes des contraintes de viscosité voir Figure 2.3 . La pression qui est une contrainte normale est notée par  $p$ . Les contraintes de viscosité sont noté  $\tau$ .

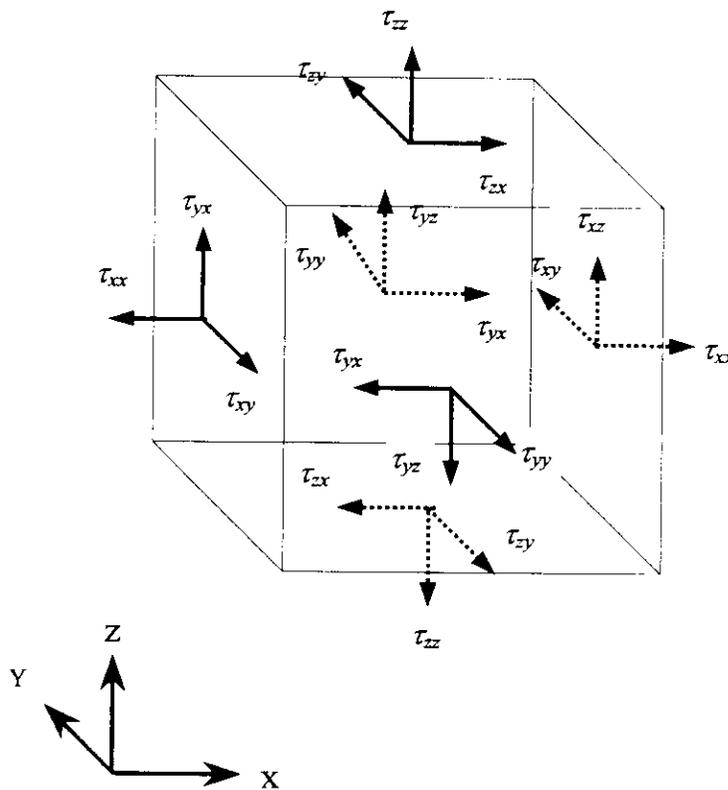


Fig. II.3 Tenseur de contrainte pour un élément fluide

Avant tout, nous considérons les composantes selon la direction  $x$ .

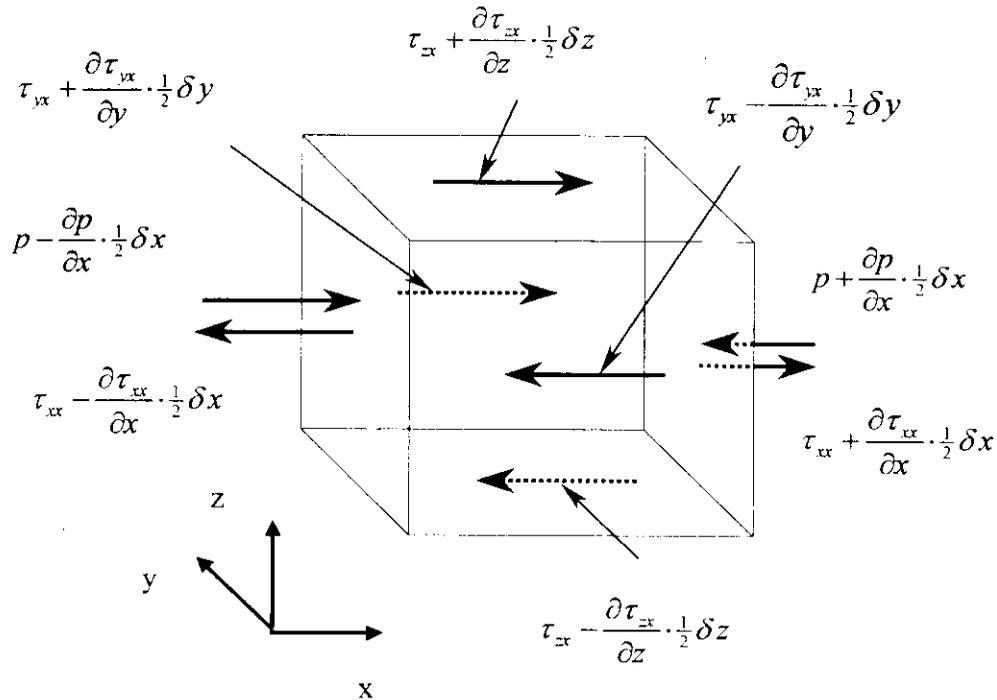


Fig. II.4 Composantes de contrainte suivant  $x$

Sur les faces ( $E$ ,  $W$ ) nous avons

$$\begin{aligned} & \left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[ \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta x \delta z \\ & = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

la résultante des forces dans la direction des  $x$  agissant sur les faces ( $N$ ,  $S$ ) est :

$$-\left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.12})$$

Enfin la résultante des forces, dans la direction des  $x$  agissant sur les faces  $T$  et  $B$ , est donnée par :

$$-\left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.13})$$

La force totale par unité de volume du fluide dû aux contraintes de surface est égale à la somme de (II.11), (II.12) et (II.13)diviser par le volume  $\delta x\delta y\delta z$  :

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \quad (\text{II.14})$$

L'influence des forces de volume sera défini dans un terme appelé terme source noté  $S_{Mx}$  dans la direction des  $x$  , par unité de volume et de temps.

Finalement l'équation de la quantité de mouvement dans la direction des  $x$ , s'écrit :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (\text{II.15})$$

de la même façon on peut vérifier la validité des équations de la quantité de mouvement selon les directions  $y$  et  $z$  qui s'écrivent comme suit :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (\text{II.16})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz} \quad (\text{II.17})$$

Par définition, une contrainte de compression prend un signe négatif c'est le cas de la pression dans les équations ci-dessus.

Les effets des contraintes de surface apparaissent explicitement dans les équations ; les termes sources  $S_{Mx}$ ,  $S_{My}$  et  $S_{Mz}$  dans (II.15), (II.16) et (II.17) tiennent compte des forces de volume, par exemple si on considère qu'il y a contribution de la force de gravité on écrit :

$$S_{Mx} = 0, S_{My} = 0$$

$$\text{et } S_{Mz} = -\rho g.$$

## II.1.4 L'équation d'énergie

l'équation d'énergie est déduite à partir du premier principe de la thermodynamique, nous écrivons :

Variation de l'énergie de la particule fluide	=	Flux net de chaleur ajouté à la particule fluide	+	Flux net de travail effectué sur l'élément fluide
---	---	--	---	---

Comme précédemment, nous allons dériver une équation qui traduit l'élévation de l'énergie pour une particule fluide par unité de volume, elle est donnée par :

$$\rho \frac{DE}{Dt} \quad (\text{II.18})$$

### Travail fait par les forces de surface

Le taux du travail effectué sur la particule fluide à l'intérieur de l'élément par les forces de surfaces est égal au produit de la composante de la force et de la vitesse dans la direction de la force.

Par exemple, les forces données par (II.11),(II.12) et (II.13) agissantes toutes dans la direction  $x$ , produisent le travail

$$\begin{aligned} & \left[ \left( pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right. \\ & \quad \left. - \left( pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{yx} u - \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) - \left( \tau_{yx} u + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{zx} u - \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) - \left( \tau_{zx} u + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta z \end{aligned}$$

Le taux net du travail effectué par ces forces de surface, agissant dans la direction des  $x$ ., est donné par :

$$\left[ \frac{\partial [u(-p + \tau_{xx})]}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.19})$$

De la même façon on aura l'expression du taux net du travail effectué par les forces agissantes suivant  $y$  et  $z$  :

$$\left[ \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial [v(-p + \tau_{yy})]}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.20})$$

et

$$\left[ \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial [w(-p + \tau_{zz})]}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.21})$$

Le taux global du travail effectué par unité de volume sur une particule fluide par toutes les forces de surface est donné par la somme de (II.19), (II.20) et (II.21) divisée par le volume de l'élément  $\delta x \delta y \delta z$ . Les termes contenant la pression peuvent être écrits tous ensemble d'une manière plus compacte :

$$-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} = -\text{div}(\rho \mathbf{u})$$

Ce qui nous amènent à écrire l'expression du taux global de travail effectué sur la particule fluide par les forces de surface :

$$[-\text{div}(\rho \mathbf{u})] + \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \\ + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \end{array} \right] \quad (\text{II.22})$$

## Flux d'énergie dû à la conduction de chaleur

le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  a trois composantes  $q_x, q_y$  et  $q_z$

Le flux net de transfert de chaleur vers la particule dû à l'écoulement de chaleur dans la direction des  $x$  est donné par la différence entre le flux de chaleur entrant par la face W, et le flux de chaleur sortant pas la face E :

$$\left[ \left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.23})$$

De manière similaire ,on a le flux net dans la direction  $y$  et  $z$  :

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.24})$$

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (\text{II.25})$$

En sommant (II.23), (II.24) et (II.25) et en divisant sur le volume  $\delta x \delta y \delta z$  on aura

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div} \mathbf{q} \quad (\text{II.26})$$

La loi de Fourier lie le flux de chaleur au gradient de température, ainsi :

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

Sous forme vectorielle on écrit :

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T \quad (\text{II.27})$$

En combinant (II.26), (II.27) on aura le flux de chaleur transmis à la particule fluide dû à la conduction de chaleur :

$$-\text{div } \mathbf{q} = -\text{div}(k \text{ grad } T) \quad (\text{II.28})$$

## Equation d'énergie

L'énergie d'un fluide est définie comme la somme de son énergie interne  $i$  de son énergie cinétique  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$  et de son énergie potentielle.

La contribution de l'énergie potentielle sera représentée dans l'équation par un terme source  $S_E$  par unité de volume et de temps.

La conservation d'énergie d'une particule fluide est écrite en égalisant le taux de variation de l'énergie d'une particule fluide (II.18) et la somme des flux nets de travail fait sur la particule fluide (II.22) plus le flux net d'addition de chaleur vers le fluide (II.28)

plus le taux d'augmentation d'énergie du à la source. **L'équation d'énergie** s'écrit alors :

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\text{div}(\rho \mathbf{u}) + \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \\ + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \end{array} \right] + \text{div}(k \text{ grad } T) + S_E \quad (\text{II.29})$$

Après quelques développement et en supposant que le fluide est incompressible, nous aurons  $i = cT$ , où  $c$  est la chaleur spécifique et  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , ceci nous permet d'écrire l'équation de chaleur avec :  $S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot S_M$

$S_M$  : terme source des forces de volume.

## II.2 Equations de Navier-Stokes [17]

Nous supposons que le fluide est isotrope.

Dans un fluide Newtonien les contraintes de viscosité sont proportionnelles au taux de déformation. Les neuf composantes des contraintes de viscosité s'écrivent, comme suit, pour un fluide incompressible :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

La substitution de ces contraintes de cisaillements (II.30) dans (II.19),(II.20) et (II.21) donne les équations appelées équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{My} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + S_{Mz} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

il est pratique de réarranger les termes des contraintes de viscosité comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & = \text{div}(\mu \text{grad } u) + s_{Mx} \end{aligned}$$

La contribution de ces contraintes est représentée par un terme source  $s_M$  qui est ajouté à celui des forces de volume  $S_M$ , calculé précédemment, d'où le terme source final :

$$S_M = S_M + s_M \quad (\text{II.34})$$

Les **équations de Navier -Stokes** peuvent être écrites sous une forme pratique pour la méthode des volumes finis :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx} \quad (\text{II.35})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My} \quad (\text{II.36})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{ grad } w) + S_{Mz} \quad (\text{II.37})$$

Si nous utilisons le modèle de Newton pour les contraintes de viscosité dans l'équation d'énergie (II.29) et après quelques réarrangements

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \text{div}(k \text{ grad } T) + \Phi + S_i \quad (\text{II.38})$$

Tous les effets dus à la viscosité sont décrits par un terme appelé fonction de dissipation obtenu après quelques développements, il égale à :

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div } \mathbf{u})^2 \quad (\text{II.39})$$

La fonction de dissipation n'est jamais négative, elle représente une source de l'énergie interne due au travail de déformation sur la particule fluide.

### II.3 Forme différentielle et intégrale des équations de transport

D'après ce qui précède on peut remarquer que toutes les équations de transport d'une propriété  $\phi$  s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi \quad (\text{II.40})$$

où la grandeur scalaire  $\phi$  peut être une température, une concentration, etc.

On a donc :

Accumulation de $\phi$ dans l'élément fluide	+ Flux net d'écoulement de $\phi$ à travers l'élément fluide	=	Variation de $\phi$ due à la diffusion	+ Variation de $\phi$ due aux sources
--	--	---	---	--

Cette équation (appelée équation de convection-diffusion) est utilisée comme un **point de départ** pour le développement en volumes finis dont l'étape clé est l'intégration de (II.40) sur un élément de volume et en choisissant pour chaque  $\phi$  un coefficient de diffusion et un terme source approprié, l'intégration s'écrit

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{II.41})$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\int_{CV} \text{div } \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (\text{II.42})$$

En appliquant le théorème de Gauss dans (II.41), on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_{CV} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{II.43})$$

Pour le cas d'un régime permanent on a :

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_{CV} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{II.44})$$

Pour le cas transitoire une intégrale supplémentaire est nécessaire évidemment, c'est celle du temps :

$$\int_M \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \rho \phi dV \right) dt + \int_M \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt = \int_M \int_{CV} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA dt + \int_M \int_{CV} S_\phi dV dt \quad (\text{II.45})$$

## II.4 Conditions aux limites[20]

La résolution, par une méthode analytique ou numérique, de l'équation de transport convecto-diffusif nécessite la détermination de ses conditions initiales et aux limites. Il existe fondamentalement trois types de conditions aux limites (ou en abrégé C.L), qui portent sur la détermination de la densité de flux d'extensité à la frontière du système étudié. Par ailleurs, la nature de l'équation, elliptique ou parabolique, par rapport aux différentes variables d'espace et de temps, impose le nombre (et en partie le type) de C.L nécessaires.

Nous allons tout d'abord passer en revue les différentes catégories de conditions aux limites, puis nous examinerons les exigences mathématiques de l'équation aux dérivées partielles en ce qui concerne ces conditions aux limites. précisant qu'une densité de flux peut être de deux types :

- *Diffusif* : il s'écrit  $\bar{\phi} = -\Gamma \bar{\nabla} \phi$  où  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion.

- *Convectif* : il s'écrit  $\bar{\phi} = \rho \phi \bar{\mathbf{V}}$

où  $\rho$  est la masse volumique du système,  
 $\phi$  l'extensité spécifique (par unité de masse),  
 $\bar{\mathbf{V}}$  le vecteur vitesse instantané.

## II.4.1 Les trois sortes de conditions aux limites

À la frontière du système étudié, la densité de flux d'extensité normale  $\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$  est donnée par l'une des trois conditions aux limites suivantes :

### II.4.1.1 Condition de Neumann

La condition de Neumann exprime la connaissance de la valeur de  $\varphi$  en un point de la frontière et s'écrit par conséquent en ce point

$$\varphi = cte \quad (\text{II.46})$$

La condition de Neumann est fréquemment utilisée :

- lorsque des mesures expérimentales de flux ont été réalisées,
- sous la forme  $\varphi = 0$ , pour représenter les conditions de symétrie,
- également sous la forme  $\varphi = 0$ , pour simuler :
  - l'adiabaticisme (transport de chaleur),
  - l'imperméabilité (transport de matière),
  - le frottement nul (ou glissement parfait) à la surface libre d'un écoulement (transport de qté de mouvement.).

### II.4.1.2 Condition de Fourier

La condition de Fourier exprime l'existence d'une relation entre la densité de flux normale et extensité spécifique en un point de la surface, et s'écrit de la manière générale :

$$\varphi = f(\phi) \quad (\text{II.47})$$

### II.4.1.3 Condition de Dirichlet

La condition aux limites de Dirichlet peut être considérée comme une forme asymptotique de la c. 1. de Fourier linéarisée, avec une valeur infinie du coefficient de transfert. Elle exprime en fait la connaissance de la valeur de l'extensité en un point de la frontière :

$$\phi = cte \quad (\text{II.48})$$

- en transport de matière, pour exprimer l'équilibre thermodynamique avec une phase de composition connue,
- en transport de chaleur, lorsque des mesures de température sont disponibles, ou pour exprimer un contact parfait avec un milieu dont la température est connue,
  - en mécanique des fluides, pour simuler une vitesse imposée, ou une vitesse nulle en un point au contact d'une paroi solide immobile.

#### II.4.1.4 Quelques considérations mathématiques sur les C.L

De manière générale, notons tout d'abord que l'écriture de conditions aux limites est nécessaire sur l'ensemble de la frontière du système étudié. Par contre, à l'intérieur même du système, la continuité de la densité de flux de transport à l'interface entre deux matériaux est une évidence physique, qui ne nécessite pas l'écriture de C.L particulières. Seule une éventuelle résistance de contact sera modélisée par le biais de l'existence entre les deux matériaux d'une densité de flux de la forme :

$$\varphi = h(\phi_1 - \phi_2) \quad (\text{II.49})$$

où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les valeurs de l'extensité spécifique massique  $\phi$  en deux points infiniment voisins, mais appartenant à des milieux différents, et  $h$  un coefficient de transfert qui traduit la résistance inter-faciale (on parle alors de transferts conjugués).

Une exception importante à la règle précédente (nécessité de C.L sur l'ensemble des frontières) concerne les équations paraboliques par rapport à une variable d'espace  $x$ , en se rapprochant du fait que mathématiquement, **l'équation parabolique** correspond à une dérivée première ( $\Rightarrow$  1 seule C.L.) alors que **l'équation elliptique** correspond à une dérivée seconde ( $\Rightarrow$  2 C.L.).

## II.5 Modèle mathématique utilisé et conditions aux frontière

Dans cette partie nous allons énoncer en premier lieu le problème physique traité dans ce projet puis en mettra en équation les phénomènes qui lui sont inhérents en précisant les conditions aux limites caractérisant notre domaine d'étude..

### II.5.1 Modèle physique

#### Présentation.

Notre domaine d'étude est une membrane de Microfiltration type « module plat » ,physiquement , c'est une sorte de conduite de section rectangulaire de longueur  $L$  et de largeur  $H$  voir figure , à parois partiellement perméables possédants des pores microscopiques (de  $0.3$  à  $1.7\mu\text{m}$ ) ; un fluide s'écoule à l'intérieur de la membrane ; le sens de l'écoulement est fixé de la gauche vers la droite.

Un système de coordonnées cartésiennes en 2 dimensions  $(x, y)$  s'adapte très bien à notre domaine d'étude ,donc on va l'adopter pour simuler notre problème .

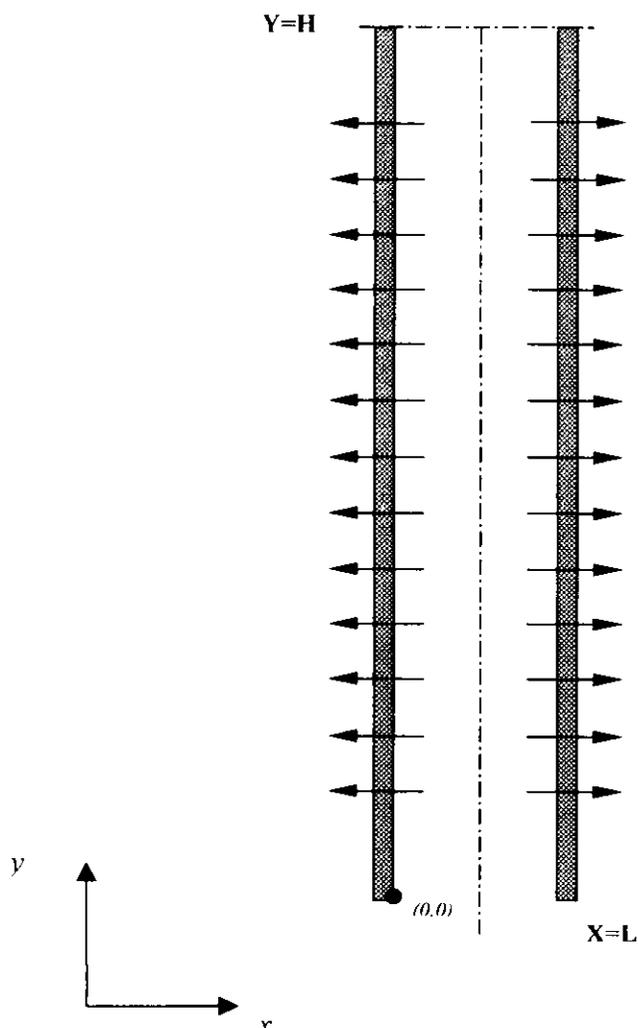


Fig. II. schéma du domaine d'étude

**Position du problème.**

Les équations régissant ce type de problème - précédemment cité- sont de nature très complexe , vue la présence d'une interférence entre un écoulement de fluide et un transfert de matière , encore ce dernier est rendu plus compliqué a cause de l'apparition d'une couche « concentration de polarisation » formé par l'accumulation des particules en suspension dans le préfilt ( voir chapitre). Dénombrable théories ,parfois très poussé, ont été avancées pour mettre en évidence l'influence de cette couche sur le problème global ( référence). Pour notre part nous nous contenterons de résoudre le problème dynamique de la Microfiltration, en variant les nombres de Reynolds de l'écoulement libre et celui de la filtration ,et les paramètres intrinsèque de la membrane qui ont une influence directe sur la vitesse de filtration.

**II.5.2 Modèle mathématique**

Vue la complexité de l'étude complète et rigoureuse de la Microfiltration tangentielle qui est un travail de spécialiste , nous allons poser quelques hypothèses simplificatrices mais qu'il n'affecte pas les résultat obtenus de manière à changer l'aspect global du problème.

*A/ Hypothèse sur le fluide.*

- Fluide Newtonien.
- Fluide incompressible .
- Ecoulement permanent.
- Régime d'écoulement laminaire.
- Ecoulement isotherme.
- Les propriétés physiques intrinsèques du fluide sont supposées constantes (masse volumique, viscosité )
- Les forces gravité sont négligées devant celle des pressions

*B/Hypothèse sur les parois.*

- La paroi est considérée comme un solide indéformable.
- Le matériau qui la constitue est isotrope.

En plus si les parois sont perméables on suppose que :

- La distribution des pores à l'interface de la paroi poreuse est uniforme ,cela veut dire que le nombre de pores par unité de surface est constant.
- Les parois ne sont siège d'aucune réaction chimique.
- L'effet de la « concentration polarisation » et de la couche « gâteau » sur le flux de filtration est négligé .

### Les équations gouvernantes

En se basant sur les hypothèses précédentes les équations qui régissent le problème sont :

- **Equation de continuité :**

Cette équation traduit la conservation de la masse dans le domaine d'étude, c'est à dire , l'équilibre du bilan massique entrante et la masse sortante pour chaque volume de contrôle. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- **Equation du mouvement :**

Le fluide étant Newtonien, donc son mouvement est régi par les équation générales de Navier-Stokes .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \end{aligned}$$

et on a encore :

$$\text{Le Fluide est incompressible} \Rightarrow \begin{cases} S_u = 0 \\ S_v = 0 \end{cases}$$

La densité  $\rho = cte$

donc les équations se simplifient pour donner :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

### Adimensionnement des équations :

Les changements de variable suivant sont adoptés :

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{u_0 \cdot H}{\nu}, \quad v^* = \frac{v_0 \cdot H}{\nu}, \quad P = \frac{P \cdot H}{\rho \nu^2}$$

L'introduction des grandeurs adimensionnelles, ci-dessus, nous permet de faire figurer les nombres adimensionnelles qui gèrent l'écoulement.

Donc on aura :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

- **Equation du mouvement :**

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

avec :  $u^* = \frac{u \cdot H}{v} = R_{e,x}$  et  $v^* = \frac{v \cdot H}{v} = R_{e,y}$

où:  $R_{e,x}, R_{e,y}$  les nombres de Reynolds suivant les direction  $x, y$  respectivement

Les Conditions aux limites :

- Conditions aux limites dynamiques :

Soit :

$\bar{U}$  : la vitesse moyenne à l'entrée.

$\bar{U}_s$  : la vitesse moyenne à la sortie.

$V_f$  : la vitesse de filtration

$Q_0$  : le débit à l'entrée.

$Q_s$  : le débit à la sortie.

$Q_f$  : le débit de la filtration.

En se basant sur la configuration de la

Pour  $x = 0$   $u = \bar{U}, v = 0.$

Pour  $y = 0.$   $u = 0, v = -V_f.$

Pour  $x = L$   $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0.$

Pour  $y = H.$   $u = 0, v = V_f.$

Par conservation du débit volumique on peut écrire :

$$Q_0 = Q_f + Q_s \Rightarrow \bar{U} \cdot H = 2 \cdot V_f \cdot L + \bar{U}_s \cdot H$$

# **CHAPITRE III :**

## **PRESENTATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS**



## III.1 Introduction

Le résultat obtenu à partir de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles est un ensemble fini de valeurs qui permet de reconstruire la forme de la solution.

La méthode des volumes finis, que nous utiliserons dans ce projet, permet d'obtenir un système d'équations algébriques, ou système discrétisé, dont les inconnues sont les valeurs de la grandeur recherchée en un nombre fini de points du domaine d'étude. Cet ensemble de points constitue le maillage du domaine. Le système d'équations algébriques est obtenu à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ, dont nous appellerons  $\phi$  l'inconnue. Pour ce faire, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la façon dont  $\phi$  varie entre deux points du système discret, c'est-à-dire de choisir une **loi de variation locale**. Il s'agira ensuite de savoir résoudre ce système d'équations algébriques (c'est le but du chapitre).

Dans ce chapitre, nous allons en premier lieu nous attacher à décrire une méthode numérique permettant de résoudre la forme générale de l'équation de conservation (2.40) dans le cadre des transports purement diffusifs, la méthode sera ensuite complétée par la prise en compte des phénomènes de transport convectifs. La méthode que nous allons décrire s'appelle la méthode des volumes finis, elle a vu le jour il y a une trentaine d'années, au début la méthode était connue sous le nom de « méthode de différence finis spéciale ». En 1972 deux chercheurs américains (Patankar [18,19] & Spalding) ont publié dans le journal *Mass & Heat Transfer* une nouvelle méthode très pratique pour résoudre les équations de Navier-Stokes (Algorithme SIMPLE), la méthode a eu un énorme succès. Actuellement l'algorithme SIMPLE est utilisé par défaut par la plupart des logiciels de simulation de la dynamique des fluides (Computational Fluid Dynamics).

De nombreux problèmes se situent déjà dans la classe des phénomènes de transport par diffusion, nous citerons : le transport de chaleur par conduction et le transport de masse par diffusion, pour la classe des phénomènes de transport par convection nous pouvons citer par exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite donnée. Bien évidemment en pratique on peut avoir des problèmes qui associent les deux classes c'est les problèmes de convection-diffusion.

## III.2 La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion

### III.2.1 régime permanent

Ici nous allons développer la méthode des volumes finis pour le plus simple des problèmes de transport qui est la diffusion pure en régime permanent. L'équation qui gouverne ce phénomène peut être dérivée facilement de l'équation générale (II.40) pour une extensité  $\phi$ , en omettant le terme transitoire et le terme convectif. Ceci donne :

$$\text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_{\phi} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Pour bien illustrer la méthode on a choisi d'étudier le problème unidimensionnel. le phénomène est gouverné par l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{III.2})$$

où  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion et  $S$  est le terme source. Comme montré sur la (Fig III.1) les valeurs de la variable sont connues aux frontières physiques du domaine d'étude.

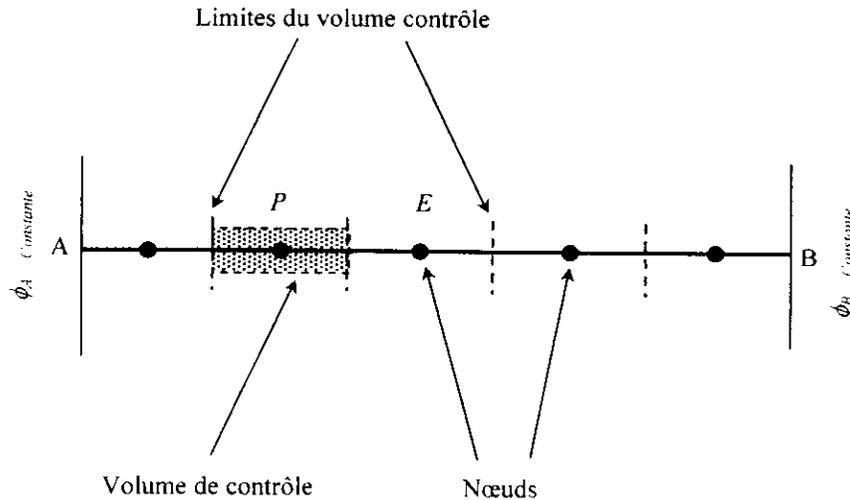


Fig. III.1 Maillage d'un domaine unidimensionnel

### Etape 1: Génération du maillage.

Nous appelons *East* le premier voisin du point *P* dans la direction des *x* croissants et *West* le premier voisin dans direction des *x* décroissants. Les deux traits verticaux en pointillé délimitent le volume de contrôle associé à *P*. Les frontières du volume de contrôle sont représentées par les lettres minuscules *e* et *w*. Les distances entre les nœuds *W* et *E* et entre *P* et *E*, sont notées par  $\delta x_{wP}$  et  $\delta x_{PE}$ , respectivement. De manière similaire les distances entre les faces *w* et *P* et entre *P* et la face *e* sont notées par  $\delta x_{wP}$  et  $\delta x_{Pe}$  respectivement. la Figure 4.2 montre que la largeur du volume de contrôle est  $\Delta x = \delta x_{we}$

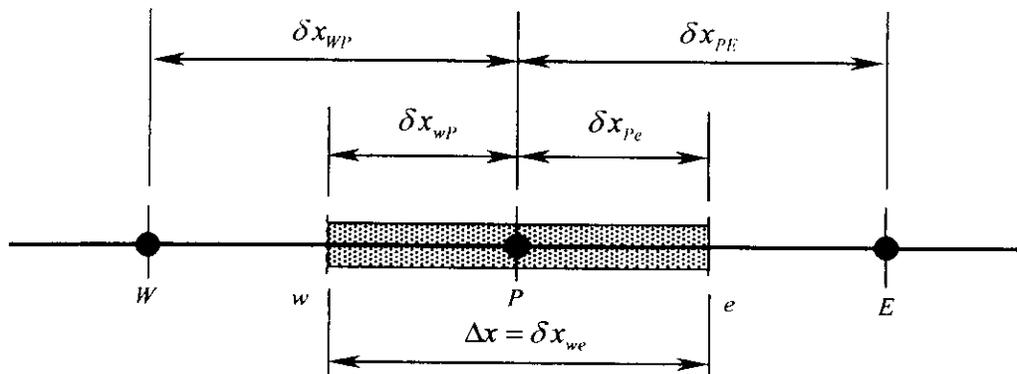


Fig. III.2 Notations associées à un volume de contrôle

**Etape 2: Discrétisation.**

L'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation (III.2) sur le volume de contrôle qui donne l'équation discrétisée pour les nœuds internes  $P$ . Pour le volume de contrôle défini précédemment ceci donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.3})$$

Ici  $A$  est l'aire de la section de passage du volume de contrôle au niveau des faces,  $\Delta V$  est le volume et  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de la source  $S$  à travers le volume de contrôle.

Pour poursuivre la discrétisation de l'équation, il est maintenant nécessaire de choisir une loi de variation locale pour  $\phi$ . Deux lois possibles sont représentées sur la (Fig III.3). Pour la loi de la (Fig. III.3) a, où l'on suppose que l'extensité est constante dans chaque volume de contrôle,  $d\phi/dx$  n'est pas définie aux points frontières du volume de contrôle ( $w$  et  $e$ ), tandis que la loi de la (Fig III.3) b où l'on suppose une variation linéaire de  $\phi$  entre deux points du maillage, permet le calcul de  $d\phi/dx$ .

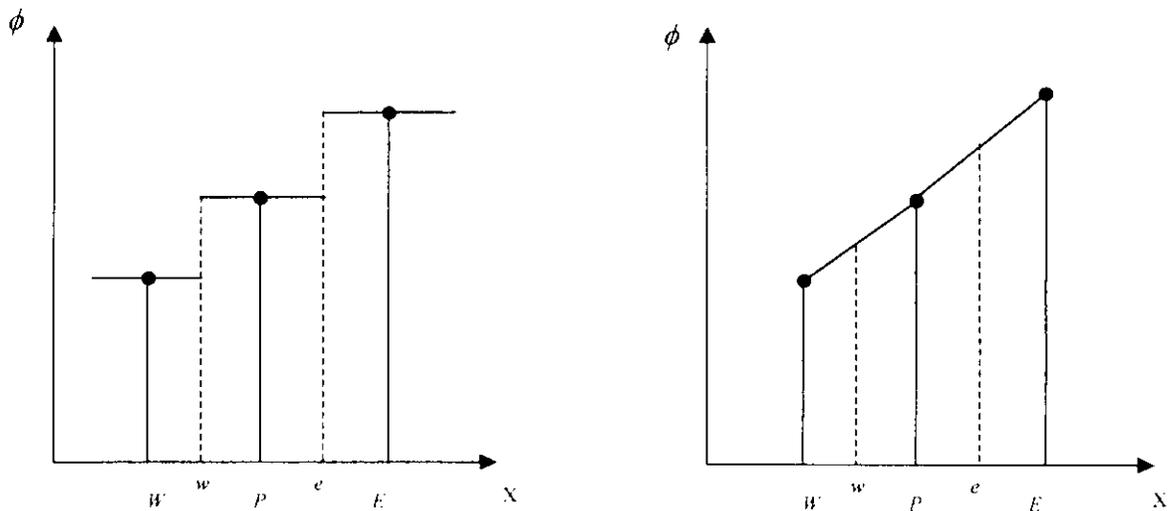


Fig. III.3 Lois de variation locales

En adoptant cette loi de variation linéaire type différence centrée (voir Annexe II), les termes de flux diffusif s'écrivent :

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (\text{III.4})$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (\text{III.5})$$

Où  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_w$  sont les valeurs du coefficient de diffusion sur les faces  $e$  et  $w$  du volume de contrôle.

Dans les cas pratiques, comme on va le voir après, le terme source  $S$  peut être une fonction de la variable dépendante  $\phi$ . Dans tous les cas la méthode des volumes finis approxime le terme source par une loi linéaire de la forme :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p \quad (\text{III.6})$$

En remplaçant les équations (III.4),(III.5)et (III.6) dans l'équation (III.3) on aura

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (III.7)$$

Après quelques réarrangements on a :

$$\left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u \quad (III.8)$$

en notant par  $a_w$ ,  $a_E$  et  $a_p$  les coefficients associés aux valeurs aux nœuds  $\phi_w$ ,  $\phi_E$  et  $\phi_P$  respectivement l'équation devient :

$$a_p \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E + S_u \quad (III.9)$$

Où

$$a_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w ; \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e ; \quad a_p = a_w + a_E - S_p$$

### Etape 3: Solution des équations

La discrétisation des équations sous la forme (III.9) doit être faite pour chaque nœud.

Pour les volumes de contrôle adjacents aux limites physiques du système une modification appropriée est nécessaire. Une fois les équations écrites on obtient un système d'équation linéaire qui doit être résolu (c'est l'objet du chapitre IV)

#### *commentaires :*

1 – L'équation (III.9) est la forme standard que nous adopterons pour l'écriture d'une équation discrétisée. La variable  $\phi$  au point P apparaît à gauche de l'équation, tandis que la variable des nœuds voisins et la constante  $b$  apparaissent à droite. Comme nous le verrons plus loin (chapitre III), le nombre des voisins augmente avec la complexité de la géométrie du problème (2D). Nous noterons de façon générale une équation discrétisée sous la forme :

$$a_p \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (III.10)$$

où l'indice  $nb$  ( neighbour ) désigne un voisin du point P. la sommation portant sur tous les voisins de P.

2 – La liberté de choix en ce qui concerne les lois de variation locale montre qu'il est possible d'obtenir un grand nombre de forme d'équations discrétisées pour une même équation aux dérivées partielles et un même maillage. Il est cependant important de respecter deux règles.

- a) Le choix de la loi de variation locale d'une grandeur doit avoir un sens physique. Par exemple dans un problème de diffusion de la chaleur sans terme source, les extremums de la température se situent sur les frontières du domaine (Fig. III.4).

b) Il faut toujours s'assurer que la conservation globale est vérifiée. Nous développerons ce point par la suite.

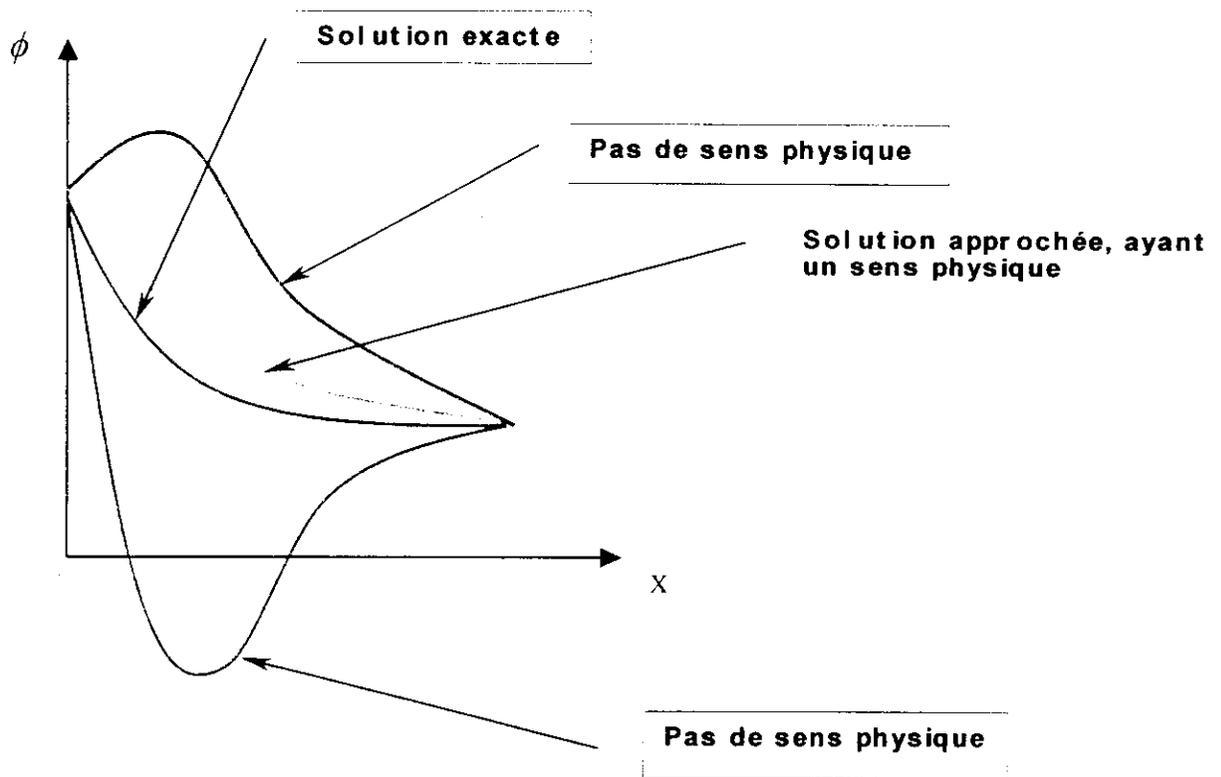


Fig. III.4 Exemple de lois de variation locale avec ou sans sens physique

### III.2.1.1 Principes d'une « bonne » discrétisation

- Consistance aux frontières d'un volume de contrôle

Quand une frontière est commune entre deux volumes de contrôle, la valeur du flux à travers cette frontière doit être la même. En effet, dans le cas contraire, le bilan global sur le domaine ne serait pas vérifié. Ce principe peut facilement être mis en défaut. Par exemple, pour le volume de contrôle de la (Fig. III.2), la valeur de  $d\phi/dx$  aux frontières de la cellule aurait pu être calculée en choisissant une loi de variation locale quadratique déterminée à partir des points W, P et E. La valeur de  $d\phi/dx$  calculée à partir du même type de loi pour la cellule voisine serait alors différente comme le montre la (Fig. III.5) :

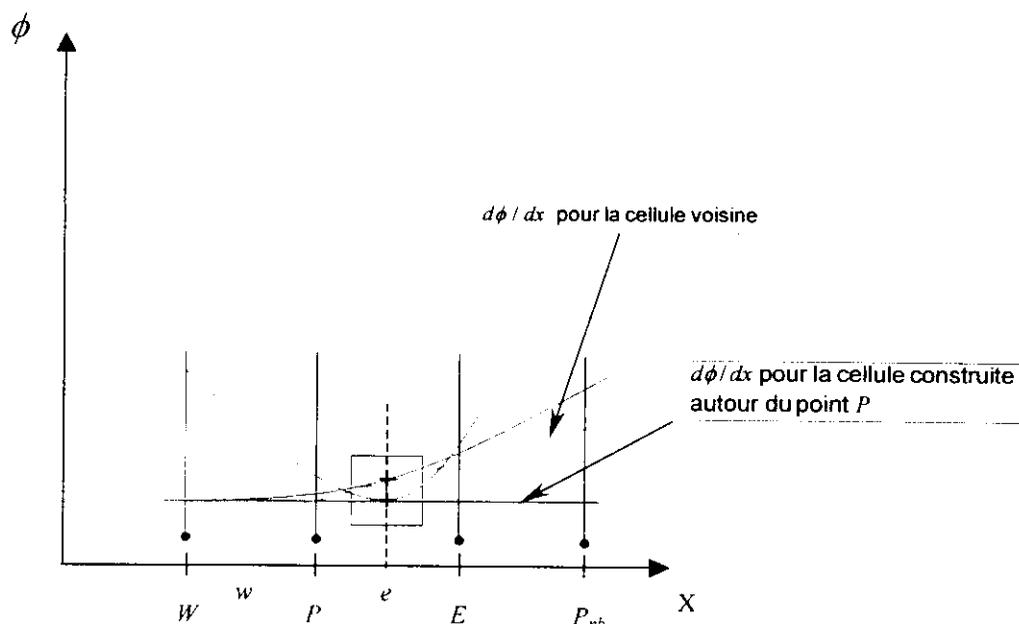


Fig. III.5 Inconsistance des flux à la frontière

- Positivité des coefficients  $a_P$  et  $a_{nb}$

Sachant que la valeur de la variable  $\phi$  au point P est essentiellement influencée par celle de ses voisins immédiats, on comprend que si nous perturbons la variable en un point voisin de P, la variable au point P devra être modifiée dans le même sens que celui de la perturbation. Les signes de  $a_P$  et  $a_{nb}$  doivent donc être identiques (cf. équation (III.10)).

Par convention, nous choisissons que  $a_P$  et  $a_{nb}$  soient toujours de signe positif. Nous verrons qu'il peut arriver que ce principe ne soit pas respecté, ce qui conduit à des phénomènes d'oscillation.

- Somme des coefficients voisins.

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante  $\phi$ . Si  $C$  est une constante arbitraire, la fonction  $\phi + C$  vérifie aussi les équations différentielles. Cette propriété est aussi valable pour les équations discrétisées. Ceci conduit à :

$$a_P = \sum_{nb} a_{nb} \quad (\text{III.11})$$

### III.2.1.2 Choix du maillage

La distance entre deux points du maillage n'est pas obligatoirement constante. Si cette distance est constante, on parle de maillage régulier, sinon de maillage irrégulier. Le choix du maillage dépend du problème posé ; dans une zone où  $\phi$  varie fortement, il sera nécessaire

d'employer des mailles fines, tandis que des mailles plus larges pourront être utilisées dans des zones de variations plus faibles. Bien qu'il n'existe pas de règle stricte, il ne faut pas passer brusquement d'une maille très fine à une maille beaucoup plus large. En pratique, le rapport des dimensions entre deux mailles voisines doit être compris entre 1/3 et 3.

### III.2.1.3 Linéarisation du terme source

Quand le terme source dépend de  $\phi$ , la meilleure méthode consiste à exprimer  $\bar{S}$ , dans chaque volume de contrôle, sous la forme :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_p \quad (\text{III.12})$$

Le choix d'une telle approximation se justifie par le fait que nous conservons la linéarité du système discrétisé ; c'est à dire que la discrétisation conduit à un système linéaire.

Quand  $S$  est une fonction **non linéaire** de  $\phi$ , il est nécessaire de la linéariser, les valeurs de  $S_c$  et  $S_p$  pouvant dépendre de  $\phi$ . Il faut alors travailler avec une **méthode itérative**. A chaque itération, les valeurs de  $S_c$  et  $S_p$  sont réactualisées avec les dernières valeurs obtenues pour  $\phi$ , que nous noterons  $\phi^*$ . Plusieurs méthodes de discrétisation du terme source peuvent être envisagées ; nous en présentons quelques unes.

*Exemple 1 :*

$S = 5 - 4 \phi$  Les différentes possibilités sont :

1)  $S_c = 5$   $S_p = -4$

C'est la forme recommandée et la plus naturelle

2)  $S_c = 5 - 4 \phi_p^*$   $S_p = 0$

Cette méthode ( $S_p = 0$ ) peut être utilisée systématiquement, quelle que soit la forme de  $S(\phi)$ . Pour l'exemple cité, elle conduira à des temps de calcul plus longs que la précédente. Cependant, c'est parfois la seule applicable lorsque la forme de  $S$  est trop complexe.

3)  $S_c = 5 + 7 \phi_p^*$   $S_p = -11$

Cette méthode, qui ralentit artificiellement la convergence, n'offre de ce fait qu'un intérêt très limité !

*Exemple 2 :*  $S_c = 5 + 7 \phi_p$

1)  $S_c = 3$   $S_p = 7$

Cette forme n'est pas acceptable, car  $S_p$  est positif, ce qui peut rendre le coefficient  $a_p$  négatif, ce qui est « interdit » (cf chapitre 3.2.1.1). Si le problème peut être résolu sans processus d'itérations, la solution sera correcte, mais sinon, cette méthode sera la cause de divergence.

$$2) S_c = 3 + 7 \phi_p^* \quad S_p = 0$$

Cette technique est souvent la meilleure quand  $dS/d\phi$  est positif.

$$3) S_c = 3 + 9 \phi_p^* \quad S_p = -2$$

On crée ici artificiellement une valeur de  $S_p$  négative.

Exemple 3 :  $S_c = 4 - 5 \phi^3$

$$1) S_c = 4 - 5 \phi_p^{*3} \quad S_p = 0$$

C'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre, mais elle ne prend pas en compte la dépendance de  $S$  par rapport à  $\phi$ .

$$2) S_c = 4 \quad S_p = -5 \phi_p^{*2}$$

Cela paraît juste ,mais en fait, il y a mieux :

3) la méthode recommandée :

$$S = S(\phi_p^*) + \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^* (\phi_p - \phi_p^*) = 4 - 5(\phi_p^*)^3 - 15(\phi_p^*)^2 (\phi_p - \phi_p^*)$$

$$\text{d'où} \quad S_c = 4 + 10\phi_p^{*3} \quad S_p = -15\phi_p^{*2}$$

La (Fig. III.2) représente ces 3 méthodes. on voit que la 3<sup>ème</sup> méthode donne la meilleure estimation de  $S$  autour du point  $\phi_p^*$ .

La méthode recommandées est  $S_c = S(\phi^*) + \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^* (\phi^*)$ ,  $S_p = \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^*$  dès que  $\frac{dS}{d\phi}$  est négatif.

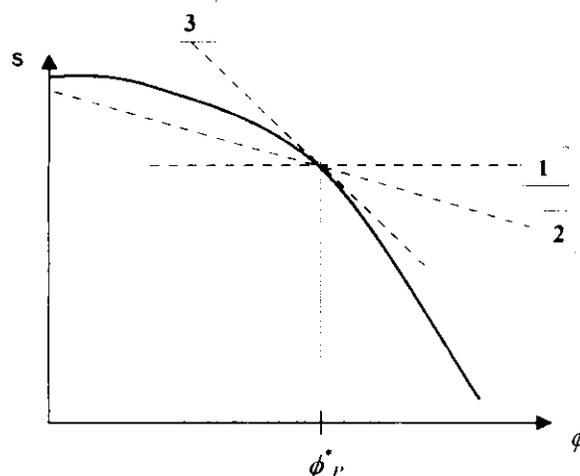


Fig. III.6 Les trois possibilités de linearisation du terme source de l'exemple 3

### III.2.1.4 Prise en compte des conditions aux limites

Considérons le maillage de la (Fig. III.3). A chacune des frontières correspond un point du maillage. Les autres points sont appelés des points internes. Autour de chaque point interne est construit un volume de contrôle. Pour ces points, l'équation (III.1) est discrétisée sous la forme de l'équation (III.2). Dans deux de ces équations, intervient la valeur de  $\phi$  sur une frontière.

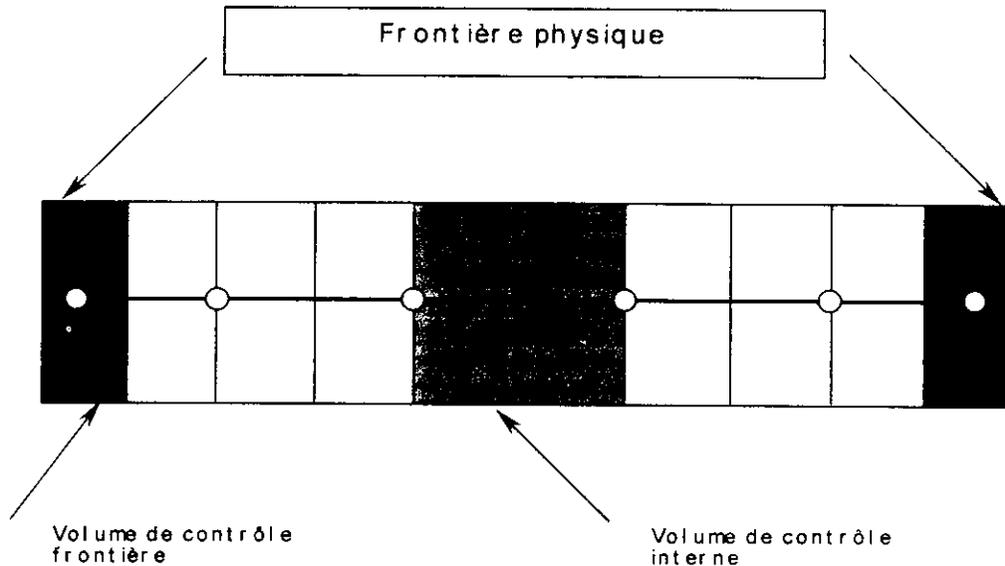


Fig. III.7 Volumes de contrôle pour un point interne et pour un point frontière

Comme le traitement d'un point frontière ne dépend pas de sa localisation, nous allons nous intéresser au point B. Les trois types de conditions aux limites couramment utilisées sont détaillées au chapitre II)

Pour la Condition de Dirichlet.

$$\phi_B = \phi_0 \quad \text{où } \phi_0 \text{ est connu}$$

On a la valeur de  $\phi$  qui est imposée au point B, il n'est pas nécessaire d'écrire des relations supplémentaires.

Dans le cas contraire, nous obtenons une nouvelle équation discrétisée par intégration de l'équation sur le volume de contrôle frontière du point B (Fig. III.8).

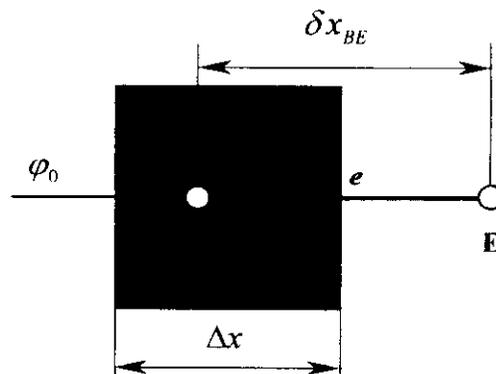


Fig. III.8 Volume de contrôle frontière construit autour du point B

Cette intégration s'exprime sous la forme :

$$\left( \Gamma_e \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_B + (S_C + S_P \phi_B) \Delta x = 0 \quad (\text{III.13})$$

soit encore :

$$\Gamma_e \frac{(\phi_E - \phi_B)}{\delta x_{PE}} - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_B + (S_C + S_P \phi_B) \Delta x = 0$$

La suite de la discrétisation dépend du type de condition à la frontière.

a) Condition de Neumann :

$$-\left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) = \varphi_0$$

Dans ce cas (III.13) prend la forme discrétisée suivante :

$$a_B \phi_B = a_E \phi_E + b$$

$$\text{avec: } a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

$$b = S_C \Delta x + \varphi_0 \quad (\text{III.14})$$

$$a_B = a_E - S_P \Delta x \quad (\text{III.15})$$

b) Condition Mixte :

on prendra par exemple celle de Fourier rencontrée en transfert de chaleur :

$$-\left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_B = \frac{h}{C_p} (\phi_f - \phi_B) \quad (\text{III.16})$$

l'équation (III.13) est discrétisée sous la forme :

$$a_B \phi_B = a_E \phi_E + b$$

$$\text{avec: } a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

$$b = S_C \Delta x + \frac{h}{C_p} \phi_{ext} \quad (\text{III.17})$$

$$a_B = a_E - S_p \Delta x + \frac{h}{C_p} \quad (\text{III.18})$$

L'écriture des bilans sur les volumes de contrôle frontière et sur les volumes internes nous fournit le nombre nécessaire d'équations discrétisées par rapport au nombre d'inconnues.

### III.2.2 Régime transitoire

Pour un phénomène purement diffusif, monodirectionnel, la forme générale de l'équation de conservation (2.40) s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + S \quad (\text{III.19})$$

La discrétisation du terme source ayant été largement discutée dans la section précédente, nous supposons dans cette partie que S est nul.

L'équation discrétisée est obtenue par intégration en espace, sur le volume de contrôle de la (Fig. III.2) et en temps, entre deux instants t et t+Δt. Il vient :

$$\int_w^{e'} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dx = \int_w^{e'} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dt \quad (\text{III.20})$$

soit encore :

$$\int_w^{e'} [(\rho\phi)_{t+\Delta t} - (\rho\phi)_t] dx = \int_w^{e'} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (\text{III.21})$$

On remarquera que la relation (III.21) est la forme intégrale de l'équation aux dérivées partielles (III.19) . Il s'agit maintenant de choisir des lois de variation locale en temps et en espace, pour obtenir l'équation discrétisée.

La partie gauche de la relation (III.21) est discrétisée en choisissant une loi de variation locale du type de la (Fig. II.3) ( $\rho\phi$  constant dans une cellule). L'équation (III.21) s'écrit avec cette loi :

$$[(\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0] \Delta x = \int_w^{e'} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (\text{III.22})$$

L'exposant <sup>0</sup> désignera les valeurs prises à l'instant t et l'exposant <sup>1</sup> celles prises à l'instant t+Δt.

Pour discrétiser la partie droite de l'équation (III.22), il faut tout d'abord choisir une loi de variation locale de  $\left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)$  en fonction du temps. Les deux types de loi de la (Fig. II.3) peuvent être envisagés :

- avec une loi de variation locale du type constante nous obtenons

$$\int_w^{e'} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^0 \quad (\text{III.23})$$

ou

$$\int^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 \quad (\text{III.24})$$

- avec une loi de type linéaire il vient :

$$\int^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^0 \right] \quad (\text{III.25})$$

Ces trois possibilités peuvent s'écrire sous une forme générale :

$$\int^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \left[ f \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 - (1-f) \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^0 \right] \Delta t \quad (\text{III.26})$$

où  $f$  est un coefficient de pondération qui varie entre 0 et 1. Les trois lois données ci-dessus correspondent respectivement à  $f=0$ ,  $f=1$  et  $f=0,5$ . Ces trois valeurs aboutissent à des schémas classiques appelés respectivement **schéma explicite** ( $f=0$ ), schéma de **Crank-Nicolson** ( $f=0,5$ ) et schéma **totalemment implicite** ( $f=1$ ). Les trois lois de variation locale correspondant à ces trois schémas sont représentées sur la (Fig. III.9).

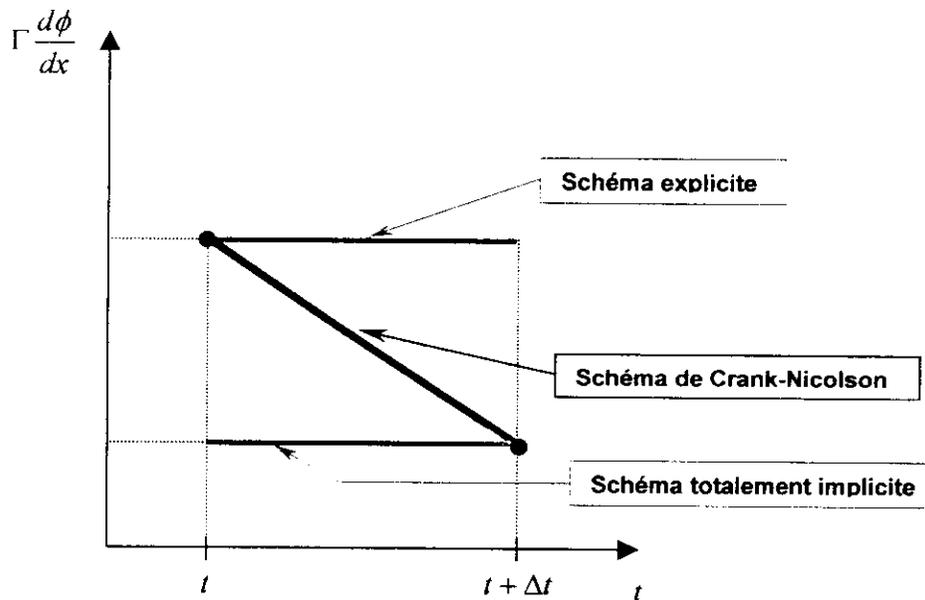


Fig. III.9 Lois de variation locale pour la discrétisation en temps

L'équation (III.22) est maintenant discrétisée sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[ (\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} = & f \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^1 - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^1 \right] \\ & + (1-f) \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^0 - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^0 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Les différentes valeurs de  $\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$  sont déterminées comme d'habitude à partir d'une loi de variation locale linéaire ; il vient :

$$a_p^1 \phi_p^1 = f a_E^1 \phi_E^1 + f a_W^1 \phi_W^1 + b \quad (\text{III.28})$$

avec :

$$a_E^1 = \frac{\Gamma_e^1}{\delta x_{pE}} \quad a_W^1 = \frac{\Gamma_w^1}{\delta x_{wP}} \quad a_E^0 = \frac{\Gamma_e^0}{\delta x_{pE}} \quad a_W^0 = \frac{\Gamma_w^0}{\delta x_{wP}}$$

$$a_p^0 = \rho^0 \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad b = a_p^0 \phi_p^0 + (1-f) \left[ a_E^0 (\phi_E^0 - \phi_p^0) - a_W^0 (\phi_p^0 - \phi_W^0) \right]$$

$$a_p^1 = \rho^1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + f a_E^1 + f a_W^1$$

### III.2.2.1 Stabilité du schéma de discrétisation temporelle

Examinons plus en détail les trois principaux schémas : explicite, Crank-Nicolson et totalement implicite. Dans toute la discussion qui suit, nous considérerons que  $\Gamma$  et  $\rho$  sont constants, et ne distinguerons donc plus  $a_E^0$  et  $a_E^1, \dots$

Le schéma explicite est obtenu en posant  $f = 0$  dans l'équation (III.28) soit :

$$a_p \phi_p^1 = a_E \phi_E^0 + a_W \phi_W^0 + (a_p - a_E - a_W) \phi_p^0 \quad (\text{III.29})$$

La valeur de  $\phi_p$  à l'instant  $t + \Delta t$  ne dépend pour ce schéma que des valeurs de  $\phi$  à l'instant précédent. Ainsi, le calcul de  $\phi$  à chaque pas de temps ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire. Cependant le schéma explicite souffre d'une sérieuse limitation. En effet, si l'on perturbe  $\phi_p^0, \phi_p^1$  doit suivre la perturbation dans le même sens (voir §. III.2.1.1). Pour ce faire, il faut que :

$$a_p - a_E - a_W > 0$$

,ce qui signifie , en considérant un maillage régulier ,que le pas de temps ne doit pas dépasser la valeur limite :

$$\Delta t < \rho \frac{\Delta x^2}{2\Gamma} \quad (\text{III.30})$$

Si cette condition n'est pas remplie ,des solutions sans aucun sens physique peuvent être obtenues.

La condition (III.30) est un critère classique de stabilité du schéma explicite ; elle a pu être retrouvée ici uniquement à partir de considérations physiques. Ce critère peut conduire à des temps de calcul longs car plus on veut raffiner le maillage, plus il faut réduire le pas de temps.

Nous allons illustrer la différence entre les trois schémas à partir d'un problème simple. Nous considérons dans l'équation discrétisée (III.28) que  $\phi_E$  et  $\phi_W$ , sont bloqués à zéro. Dans ce cas, pour un maillage régulier, nous déduisons de (III.28) la relation :

$$\frac{\phi_p^1}{\phi_p^0} = \frac{1 - \lambda(1-f)}{1 + \lambda f} \quad (\text{III.31})$$

avec :  $\lambda = \frac{2\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2}$

Le fait que  $\phi_E$  et  $\phi_w$ , soient toujours nuls nécessite que  $\phi_p$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. La raison de la suite géométrique  $(\phi_p)^i$  doit donc être en valeur absolue inférieure à 1. Les variations de  $\phi_p^1 / \phi_p^0$  en fonction de  $\lambda$ , pour les trois schémas, sont représentées sur la (Fig III.10.). On voit sur cette figure que seul le schéma totalement implicite conduit à des valeurs positives quelle que soit la valeur de  $\lambda$ . Pour des grandes valeurs de  $\lambda$ , le schéma de Crank-Nicolson donne pour  $\phi_p^1 / \phi_p^0$  une valeur comprise entre -1 et 0, ce qui signifie que les valeurs de  $\phi$  vont osciller entre des valeurs positives et négatives en tendant vers 0. Le rapport  $\phi_p^1 / \phi_p^0$  devient inférieur à -1 avec le schéma explicite si  $\lambda > 2$ ; les oscillations de  $\phi$  ne sont alors plus amorties et la solution diverge.

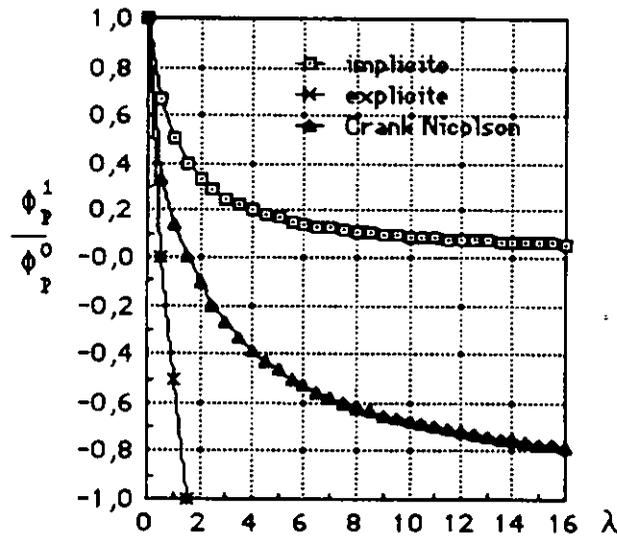


Fig. III.10 Comparaison des schéma explicite, Crank-Nicolson et implicite

Ainsi, le schéma totalement implicite répondant aux critères de simplicité et de réalité physique de la solution, nous l'utiliserons de préférence dans toute la suite. Il est cependant reconnu que le schéma de Crank-Nicolson est plus précis que le schéma implicite pour des petits pas de temps. Ce résultat était prévisible car pour de petits pas de temps les variations de  $\phi$  en fonction du temps sont presque linéaires, tandis que le schéma implicite décrit des variations exponentielles.

Remarquons enfin que la stabilité " inconditionnelle " du schéma totalement implicite n'est assurée en toute rigueur que pour un système linéaire.

### III.2.2.2 Forme de l'équation discrétisée avec le schéma totalement implicite

Si nous réintégrons le terme source que nous avons supposé nul pour la présentation du schéma dans l'équation (III.28), en supposant toujours  $\rho$  et  $\Gamma$  constants, nous obtenons la forme générale de l'équation discrétisée avec le schéma totalement implicite :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (\text{III.32})$$

$$a_F = \frac{\Gamma_c}{(\delta x)_c}$$

$$a_E = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t}$$

$$a_p \phi_p = a_E + a_W + a_p^0 - S_p \Delta x$$

$$b = S_c \Delta x + a_p^0 \phi_p^0$$

Dans l'équation (III.32), le lecteur averti remarquera que si  $\Delta t$  tend vers l'infini, on retrouve la forme générale de l'équation discrétisée obtenue dans le cas du régime permanent.

### III.2.2.3 Géométrie bidimensionnelle.

Une portion d'un maillage bidimensionnel est représentée sur la (Fig. III.11). Pour le point P, ses voisins dans la direction  $x$  sont notés E et W, tandis que ses voisins dans la direction  $y$  sont notés N et S (*North* et *South*). Le volume de contrôle construit autour du point P est hachuré sur la (Fig. III.11), son épaisseur dans la direction  $z$  est supposée unitaire. Les notations introduites au chapitre II (Fig. III-2) s'étendent facilement au cas bidimensionnel.

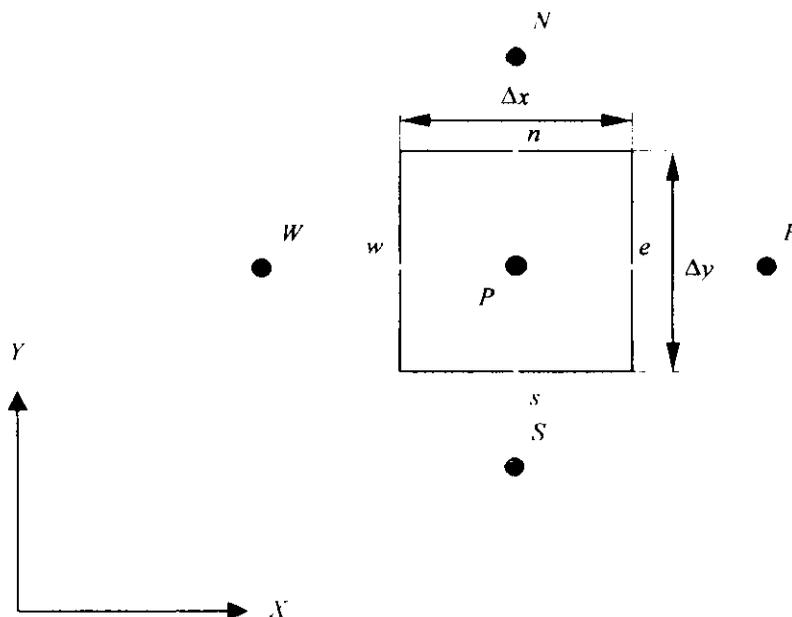


Fig. III.11 Volume de contrôle pour une géométrie bidimensionnelle

Pour des phénomènes purement diffusifs et pour une géométrie bidimensionnelle, l'équation de conservation (2.40) s'écrit

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + S \quad (\text{III.33})$$

De même qu'au paragraphe (voir §. III.2.2), l'équation discrétisée est obtenue par intégration en espace et en temps, il vient

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_n^s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dx dy &= \int_w^e \int_n^s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy dt \\ &+ \int_w^e \int_n^s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dy dx dt \\ &+ \int_w^e \int_n^s \int_t^{t+\Delta t} S dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_n^s [(\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0] dx dy &= \int_w^e \int_n^s \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dy dt \\ &+ \int_w^e \int_n^s \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_s \right] dx dt \\ &+ \int_w^e \int_n^s \int_t^{t+\Delta t} S dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

En choisissant d'utiliser le schéma totalement implicite, on obtient :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.36})$$

avec:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} & a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} & a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \end{aligned}$$

$$a_p^0 = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_p \phi_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^0$$

### III.3 La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion

Nous avons vu au (§. III.2) la forme générale de la discrétisation d'un problème purement diffusif. Nous allons montrer maintenant comment une équation de transport convecto-diffusif

est discrétisée. Nous supposons dans ce chapitre que le champ de vitesse est connu. Le problème de convection-diffusion se présente sous la forme générale : trouver un champ scalaire  $\phi(x,y,t)$  dont l'évolution en temps et en espace est régie par l'équation aux dérivées partielles du second ordre (2.40)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi$$

A la quelle est associé un jeu de conditions initiales  $\phi_0(x,y)$  et de conditions aux limites à la frontière du domaine .

### III.3.1 Mise en évidence des instabilités liées aux discrétisations centrées

Pour ne pas avoir à faire intervenir les problèmes liés à la discrétisation des dérivées en temps et par souci de simplicité, on considère dans cette partie un problème de transport monodirectionnel en régime stationnaire, à coefficients constants, sans terme source et avec une vitesse  $u$  constante, soit :

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{sur } [0,L] \quad (\text{III.37})$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad (\text{III.38})$$

$$\phi(L) = \phi_L \quad (\text{III.39})$$

Sur un maillage à pas constants  $\Delta x$  du segment  $[0,L]$ , construisons la discrétisation par les volumes finis. L'intégration de l'équation (3.37) sur un volume de contrôle donne :

$$(\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \Gamma_w \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (\text{III.40})$$

Il peut paraître naturel d'utiliser, comme dans le chapitre III, une loi de variation locale du type linéaire pour estimer  $\phi$  et  $(\partial\phi/\partial x)$  sur les faces du volume de contrôle. En considérant que les faces de la cellule sont au milieu des segments (W,P) et (P,E), on obtient :

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (\text{III.41})$$

Et d'après (III.40) et (III.41) ,

$$(\rho u)_e \left( \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \right) - (\rho u)_w \left( \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) = \Gamma_e \frac{\phi_E + \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_w \frac{\phi_P + \phi_W}{\Delta x} \quad (\text{III.42})$$

soit .en mettant (III.42) sous la forme classique que nous avons adopté :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III.43})$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} - \frac{\rho u_e}{2} \quad (\text{III.44})$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} + \frac{\rho u_w}{2} \quad (\text{III.45})$$

$$a_p = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} + \frac{\rho u_e}{2} + \frac{\Gamma_w}{\Delta x} - \frac{\rho u_w}{2} \quad (\text{III.46})$$

Le type de schéma que nous obtenons s'appelle un schéma centré .

On voit d'après (3.44) et (3.45) que soit  $a_E$ , soit  $a_W$  peuvent devenir négatifs, suivant le signe du nombre de Péclet local, défini par  $Pe = (\rho u \Delta x / \Gamma)$ . En effet, si  $Pe > 2$ , alors  $a_E$  est négatif et si  $Pe < -2$ ,  $a_W$  est négatif. Ce résultat est en contradiction avec la règle de positivité des coefficients  $a_p$  et  $a_{nb}$  que nous avons définie dans les sections précédentes. Rappelons que cette " règle " correspond au fait que si l'on perturbe un point, le système doit nécessairement répondre dans le sens d'un amortissement de la perturbation. Le fait de ne plus satisfaire cette loi conduit à une solution qui oscille, du type de la (Fig. III.12).

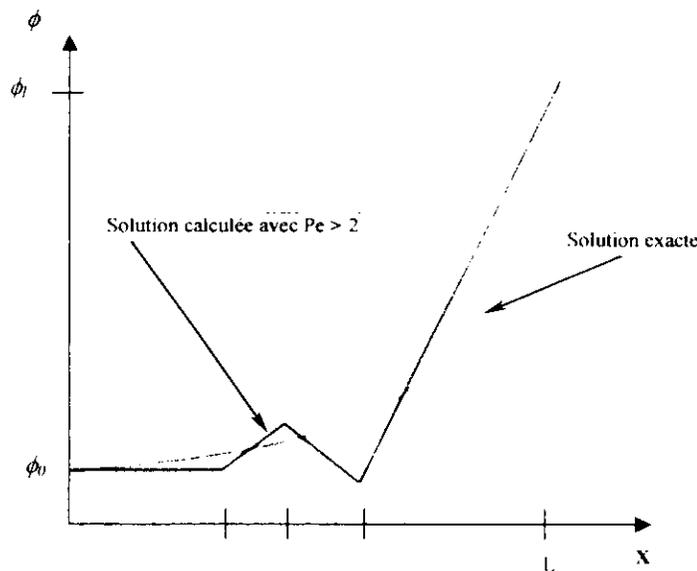


Fig. III.12 Phénomènes d'oscillations apparaissant avec un schéma centré

si l'on prend par exemple  $(\rho u)_e = (\rho u)_w = 4$  et  $(\Gamma_e / \Delta x) = (\Gamma_w / \Delta x) = 1$  suivant les valeurs de  $\phi_E$  et  $\phi_W$ , nous obtenons pour  $\phi_p$  :

- avec  $\phi_E = 200$  et  $\phi_W = 100$ ,  $\phi_p = 50$
- avec  $\phi_E = 100$  et  $\phi_W = 200$ ,  $\phi_p = 250$ .

De tels résultats ne sont pas physiquement acceptables. En effet, nous devrions trouver des valeurs de  $\phi_p$  comprises entre 100 et 200. On voit que le choix d'une loi de variation locale du type linéaire a ses limites!

En résumé, le schéma centré, résultant du choix d'une loi de variation locale du type linéaire, conduit à des oscillations lorsque le nombre de Péclet local devient en valeur absolue supérieur à 2. Nous allons maintenant rechercher des lois de variation locale mieux adaptées aux problèmes de convection-diffusion.

### III.3.2 Choix d'une variation locale

#### III.3.2.1 Le schéma upwind (ou différentiation amont)

Cette technique consiste à choisir une loi de variation locale de type, pour calculer les termes diffusifs et une loi d'un autre type (Fig. III.13), pour calculer les termes convectifs.

$$\phi_e = \phi_p \quad \text{si} \quad (\rho u)_e > 0 \tag{III.47}$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si} \quad (\rho u)_e < 0 \tag{III.48}$$

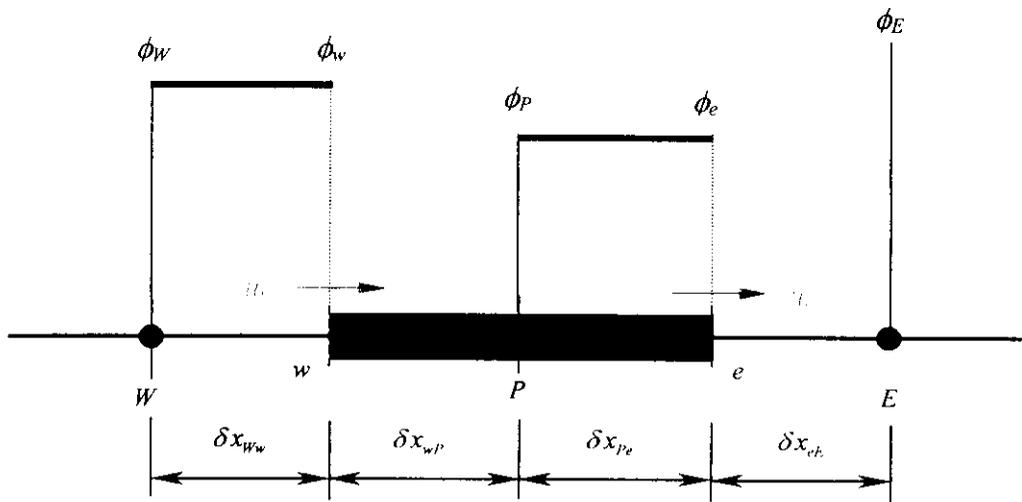


Fig. III.13-a Cas où  $(\rho u)_e > 0$ .

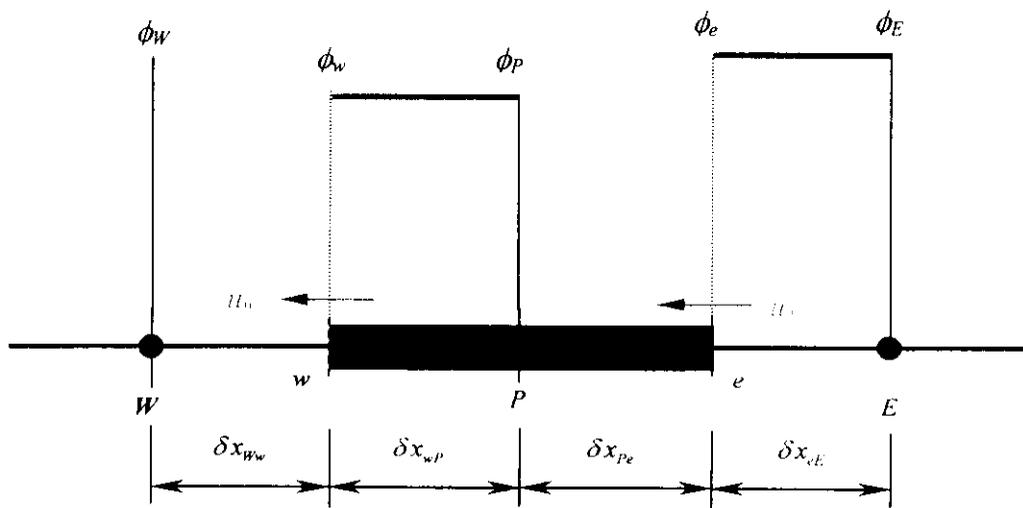


Fig. III.13-b Cas où  $(\rho u)_e < 0$ .

On choisit ainsi deux lois de variation locale différentes pour discrétiser les termes diffusifs et les termes convectifs. Le choix de ces lois est fait en découplant le phénomène diffusif du phénomène convectif. En effet, si le transport est purement diffusif, une loi variation locale du type linéaire par morceaux est pleinement justifiée. De même, nous avons vu que si le phénomène est purement convectif, la valeur en amont de l'écoulement prévaut dans le domaine considéré.

Le terme  $(\rho u)_e \phi_e$  de l'équation (III.40) est ainsi discrétisé sous la forme :

$$(\rho u)_e \phi_e = (\rho u)_e \phi_p \quad \text{si} \quad (\rho u)_e > 0 \quad (\text{III.49})$$

$$(\rho u)_e \phi_e = (\rho u)_e \phi_E \quad \text{si} \quad (\rho u)_e < 0 \quad (\text{III.50})$$

(III.49) et (III.50) peuvent encore s'écrire en introduisant la notation :

$$F_e = (\rho u)_e \quad \text{et} \quad \|A, B\| = \text{Max}(A, B)$$

sous la forme :

$$F_e \phi_e = \phi_w \|F_e, 0\| - \phi_p \|-F_e, 0\| \quad (\text{III.51})$$

On a de même sur la face ouest :

$$F_w \phi_w = \phi_w \|F_w, 0\| - \phi_p \|-F_w, 0\| \quad (\text{III.52})$$

L'équation (III.40) s'écrit alors, en introduisant la notation  $D_e = \Gamma_e / (\delta x)_e$ , pour le cas général :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \quad (\text{III.53})$$

$$\text{avec:} \quad a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III.54})$$

$$a_w = D_w + \|-F_w, 0\| \quad (\text{III.55})$$

$$\begin{aligned} a_p &= D_e + \|-F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| \\ &= a_E + a_w + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Or, l'équation de continuité en régime stationnaire s'écrit :

$$\text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad F_e = F_w$$

Par conséquent,  $a_p = a_E + a_w$ . Le système discrétisé (III.53) - (III.56) vérifie bien les "règles" définies auparavant, notamment la positivité des coefficients.

### III.3.2.2 Le schéma exponentiel et le schéma puissance (power law)

L'idée de ces schémas consiste à utiliser la même loi de variation locale pour estimer  $(\rho u)_e \phi_e$  et  $(\Gamma(\partial\phi/\partial x))_e$ . Nous avons vu dans le paragraphe V-3-2 qu'il n'était pas possible d'employer sans précaution une loi du type linéaire par morceaux. De la même manière que cette loi avait été choisie car elle est solution du problème de diffusion pure 1-D, nous allons prendre comme loi de variation locale, la solution du problème de convection-diffusion local ; soit pour la face est d'un volume de contrôle, la solution du système :

$$(\rho u)_e \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Gamma_e \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{sur} \quad [x_p, x_E] \quad (\text{III.57})$$

$$\phi(x_p) = \phi_p \quad (\text{III.58})$$

$$\phi(x_E) = \phi_E \quad (\text{III.59})$$

d'où la loi de variation locale :

$$\frac{\phi(x) - \phi_E}{\phi_p - \phi_E} = \frac{\exp\left(P_e \frac{(x - x_p)}{(\delta x)_e}\right) - \exp(P_e)}{1 - \exp(P_e)} \quad (\text{III.60})$$

où :

$$P_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e}$$

Nous devons calculer  $J_e = (\rho u)_e \phi_e - (\Gamma_e \partial \phi / \partial x)_e$ , avec la loi de variation locale (III.60),

on voit que :

$$J = (\rho u)_e \phi - \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

est constant entre  $x_p$  et  $x_E$ . En effet, (III.57) peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (\rho u)_e \phi - \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.61})$$

L'expression de  $J$  ne dépend pas de la localisation de la face du volume de contrôle.

Finalement,  $J_e$  s'exprime sous la forme :

$$J_e = F_e \left( \phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (\text{III.62})$$

avec :

$$F_e = (\rho u)_e \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e} \quad (\text{III.63})$$

On obtient de même pour  $J_w$  :

$$J_w = F_w \left( \phi_w + \frac{\phi_w - \phi_p}{\exp(P_w) - 1} \right) \quad (\text{III.64})$$

avec :

$$F_w = (\rho u)_w \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}$$

$$P_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w (\delta x)_w}{\Gamma_w} \quad (\text{III.65})$$

L'équation (III.40) s'écrit avec ce type de loi de variation locale :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \quad (\text{III.66})$$

où

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \quad (\text{III.67})$$

$$a_W = \frac{F_w \exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right)}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \quad (\text{III.68})$$

$$a_p = a_E + a_W + F_e - F_w \quad (\text{III.69})$$

Ce schéma, appelé schéma exponentiel, nous garantit d'obtenir la solution exacte du problème monodirectionnel (III.40) quelle que soit la valeur du nombre de Péclet. Cependant, il est peu utilisé car il nécessite le calcul de fonctions exponentielles. Nous présentons maintenant un schéma ayant le même comportement que le schéma exponentiel, mais moins gourmand en temps de calcul.

Pour cela, étudions  $a_E$  en fonction de  $P_e$ , d'après (III.67), il vient :

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (\text{III.70})$$

$$\text{Si } P_e \rightarrow +\infty \quad \frac{a_E}{D_e} \rightarrow 0$$

$$\text{Si } P_e \rightarrow -\infty \quad \frac{a_E}{D_e} \rightarrow -P_e$$

Une bonne approximation du schéma exponentiel a été proposée par Patankar [18,19]. C'est le schéma puissance ( en anglais , power law). Dans ce schéma,  $(a_E / D_e)$  s'exprime ainsi :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } & P_e < -10 & \text{alors} & \frac{a_E}{D_e} = -P_e \\ & -10 < P_e < +10 & \text{alors} & \frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \\ & 0 < P_e < +10 & \text{alors} & \frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1P_e)^5 \\ \text{Si } & P_e > -10 & \text{alors} & \frac{a_E}{D_e} = 0 \end{array} \quad (\text{III.71})$$

Ce schéma a été construit de façon :

- à retrouver les deux asymptotes de la loi exponentielle,
- à conserver la valeur de la tangente pour  $P_e = 0$ ,
- à raccorder la fonction aux asymptotes ,en choisissant les nombres de  $P_e$  valant  $-10$  et  $10$ .

### III.3.3 Forme générale de la discrétisation (régime permanent, 1D)

Que ce soit avec le schéma upwind ou avec le schéma exponentiel, lorsque nous écrivons la forme finale de l'équation discrétisée ( équations (III.53) et (III.66) ), le coefficient  $a_p$  n'est pas automatiquement égal à  $a_E + a_W$ . Il est d'usage courant de transformer l'équation (III.40) en lui rajoutant le terme  $\phi_p \text{div}(\rho u)$ , soit  $-F_e \phi_p + F_w \phi_p$  :

$$F_e (\phi_c - \phi_p) - F_w (\phi_w - \phi_p) = \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_c - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (\text{III.72})$$

Avec cette nouvelle forme de l'équation (III.40), nous avons à calculer sur la face est du volume de contrôle le terme :

$$F_e (\phi_c - \phi_p) - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_c = J_e - F_e \phi_p \quad (\text{III.73})$$

On trouve, pour le schéma upwind :

$$J_e - F_e \phi_p = (D_e + \|-F_e, 0\|) (\phi_p - \phi_E) \quad (\text{III.74})$$

,pour le schéma exponentiel :

$$J_e - F_e \phi_p = \left( \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \right) (\phi_p - \phi_E) \quad (\text{III.75})$$

et pour le schéma power law :

$$J_e - F_e \phi_p = \left( D_e \left\| 0, (1 - 0.1 |P_e|)^5 \right\| + \|-F_e, 0\| \right) (\phi_p - \phi_E) \quad (\text{III.76})$$

Nous obtenons ainsi l'équation (III.72) sous la forme discrétisée :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III.77})$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III.78})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\| \quad (\text{III.79})$$

$$a_p = a_E + a_W \quad (\text{III.80})$$

où  $A$  est une fonction du nombre de Péclet local et qui dépend du type de schéma :

Pour le schéma centré  $A(|P|) = 1 - 0.5|P|$

Pour le schéma upwind  $A(|P|) = 1$

Pour le schéma exponentiel  $A(|P|) = |P| / [\exp(|P|) - 1]$

Pour le schéma power law  $A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1|P|)^5 \right\|$

L'équation (III.80) est la forme générale d'une équation discrétisée dans le cas d'un transport convecto-diffusif 1-D en régime permanent .

### III.3.4 Discrétisation d'un problème de transport convecto-diffusif dans le cas général

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour discrétiser l'équation (III.38) sous sa forme générale. Nous appelons  $J_x$  la somme des flux convectifs et diffusifs dans la direction  $x$  et  $J_y$  la même somme dans la direction  $y$ , soit :

$$J_x = \left( \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Delta y$$

$$J_y = \left( \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Delta x$$

En employant ces notations, l'équation (III.38) est réécrite pour une géométrie bidimensionnelle sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \tag{III.81}$$

L'intégration de l'équation (III.81) entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$  sur le volume de contrôle de la (Fig. III.9) , nous donne :

$$\frac{(\rho_p \phi_p - \rho_p^0 \phi_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \tag{III.82}$$

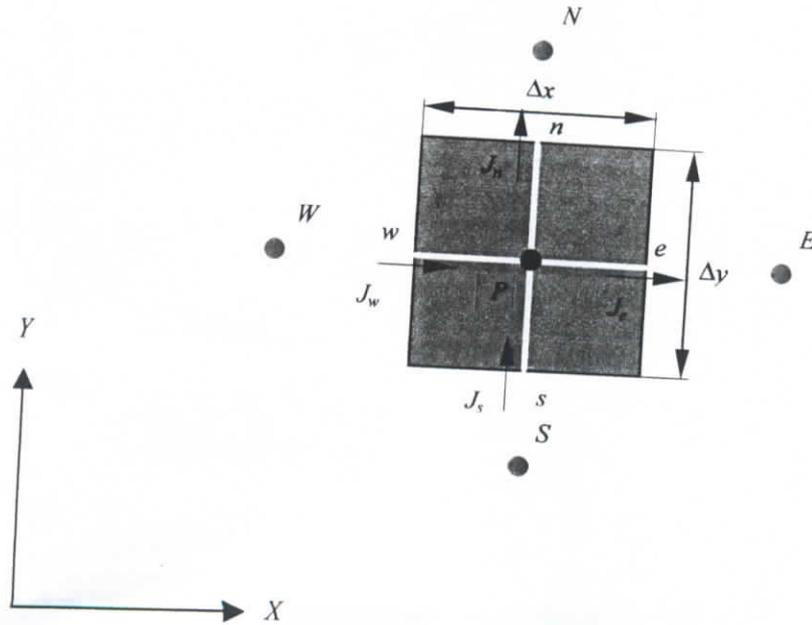


Fig. III.9. Volume de contrôle pour le cas 2D.

Par ailleurs, l'équation de conservation de la masse s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{III.83}$$

Si nous l'intégrons sur le même volume de contrôle , il vient :

$$\frac{(\rho_p - \rho_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \tag{III.84}$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \tag{III.85}$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \tag{III.86}$$

$$F_n = (\rho u)_n \Delta x \tag{III.87}$$

$$F_s = (\rho u)_s \Delta x \quad (\text{III.88})$$

En multipliant l'équation (III.84) par  $\phi_p$ , puis en la soustrayant de (III.82), il vient :

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) \\ = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

L'hypothèse de l'uniformité des flux  $J_x$  et  $J_y$  sur les faces du volume de contrôle nous permet d'utiliser les résultats de la partie (III.40). On peut donc exprimer :

$$J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E)$$

$$J_w - F_w \phi_p = a_W (\phi_p - \phi_W)$$

avec :  $a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\|$$

où :  $D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y$  et  $D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \Delta y$

Nous obtenons finalement l'équation discrétisée :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.90})$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III.91})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\| \quad (\text{III.92})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (\text{III.93})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\| \quad (\text{III.94})$$

$$a_p^0 = \rho_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III.95})$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^0 \quad (\text{III.96})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \quad (\text{III.97})$$

Les grandeurs  $F_e, F_w, F_n, F_s$  sont définies en (III.85) - (III.88), les conductances  $D$  sont définies par :

$$D_e = \frac{\Gamma_c}{(\delta x)_c} \Delta y$$

$$D_e = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \Delta y$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta x)_n} \Delta x$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta x)_s} \Delta x$$

et les nombres de Péclet locaux par :

$$P_e = \frac{F_c}{D_e}; P_w = \frac{F_w}{D_w}; P_n = \frac{F_n}{D_n}; P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

L'extension au cas tridimensionnel est obtenu en adoptant la même démarche .

# **CHAPITRE IV :**

## **RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME DISCRÉTISÉ**

## IV.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les méthodes utilisées pour discrétiser les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide et celle du transfert thermique, celles-ci aboutissent à un système d'équations linéaires qu'il faut résoudre.

La complexité et la taille des équations trouvées dépendent à la fois de la dimension du problème (1D, 2D, 3D) et du nombre de nœuds présents dans le domaine d'étude et enfin de la méthode utilisée pour la discrétisation.

Ainsi n'importe quelle méthode de résolution peut être utilisée pour résoudre le système algébrique. Toutefois, l'espace mémoire disponible sur le calculateur (ordinateur) est une contrainte à ne pas négliger ; dans cette optique on est obligé de choisir une méthode qui opère avec le minimum d'espace mémoire. Avant tout on dira qu'il existe deux types de méthode de résolution des systèmes algébriques : **méthode directe** , **méthode indirecte** .

Un exemple simple d'une méthode directe est celui de la règle de Cramer et l'élimination de Gauss. Le nombre d'opérations effectuées lors de la résolution d'un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues pour le cas des méthodes directes est évalué à  $N^3$  , ajouté à cela la nécessité de stocker au même temps les  $N^2$  valeurs des coefficients des équations dans l'espace mémoire.

Les méthodes itératives basées sur une répétition d'un algorithme relativement simple qui converge vers la solution après un certain nombre de répétitions appelées « itérations » ; il faut préciser que la convergence est assurée si et seulement si le système à résoudre vérifie des critères bien déterminés , c'est les « critères de convergence ». L'atout de ce genre de méthode est la réduction considérable des valeurs à stocker dans l'espace mémoire, autrement dit, seuls les coefficients non nuls seront stockés.

En ce qui concerne la méthode des volumes finis, le système obtenu est intrinsèquement tri-diagonal encore dans des problèmes réels le nombre d'équations avoisine les 100000 voir 1 million, dans ces conditions une méthode itérative apparaît comme la plus adaptée et surtout la plus économique.

Les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss- Seidel sont faciles à programmer mais elles sont très lentes pour un système d'équation large donc elles sont déconseillées lorsqu'il s'agit du calcul en dynamiques des fluides (**Computational Fluid Dynamics** ou **CFD**).

Thomas (1949) a développé un algorithme rapide ,pour les systèmes tri-diagonaux ,qui porte son nom « **algorithme de Thomas** » il est appelé aussi **Tri Diagonal Matrix Algorithm (TDMA)**. Cet algorithme est une méthode directe pour les problèmes en 1D mais il est appliqué de manière itérative pour les problèmes 2D et 3D, il a la particularité de nécessiter un minimum de stockage mémoire et de coût, il est actuellement recommandé pour les systèmes issus de la discrétisation par la méthode des volumes finis.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le TDMA pour les problèmes 1D et 2D.

## IV.2 L'algorithme de Thomas (TDMA)

Nous considérons un système d'équation tri-diagonal :

$$\phi_1 = C_1 \quad (IV.1a)$$

$$-\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 = C_2 \quad (IV.1b)$$

$$-\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 = C_3 \quad (IV.1c)$$

$$-\beta_4\phi_3 + D_4\phi_4 - \alpha_4\phi_5 = C_4$$

$$\dots \dots \dots = \dots \dots \dots$$

$$-\beta_n\phi_{n-1} + D_n\phi_n - \alpha_n\phi_{n+1} = C_n \quad (IV.1n)$$

$$\phi_{n+1} = C_{n+1} \quad (IV.1n+1)$$

Les valeurs des variables  $\phi_1$  et  $\phi_{n+1}$  ci dessus sont des valeurs aux limites connues. La forme générale de chacune des équations est :

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \quad (IV.2)$$

Les équations de (IV.1b – n) sont réécrites comme suit :

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (IV.3a)$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (IV.3b)$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (IV.3c)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n}\phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

Ces équations peuvent être résolues par une élimination en avant et une substitution en arrière. **L'élimination en avant** consiste à éliminer  $\phi_2$  de **Erreur! Source du renvoi introuvable.** par une substitution à partir de **Erreur! Source du renvoi introuvable.** pour trouver :

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left( \frac{\beta_3 \left( \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (IV.4a)$$

Si on adopte la notation suivante :

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \text{ et } C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{IV.4b})$$

l'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.** peut être écrite comme suit :

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left( \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{IV.4c})$$

Si on pose :

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \text{ et } C'_3 = \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}$$

l'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.** peut être écrite comme :

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \quad (\text{IV.5})$$

La formule **Erreur! Source du renvoi introuvable.** est utilisée pour éliminer  $\phi_3$  de **Erreur! Source du renvoi introuvable.**, la procédure est répétée jusqu'à la dernière équation. Ceci est l'élimination en avant.

Pour la **substitution en arrière**, on utilise la forme générale de récurrence de **Erreur! Source du renvoi introuvable.** :

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j \quad (\text{IV.6a})$$

où :

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{IV.6b})$$

$$C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{IV.6c})$$

Les formules ci-dessus peuvent être appliquées aux points  $j=1$  et  $j=n+1$  en donnant les valeurs suivantes à  $A$  et  $C'$  :

$$A_1 = 0 \text{ et } C'_1 = \phi_1$$

$$A_{n+1} = 0 \text{ et } C'_{n+1} = \phi_{n+1}$$

Pour résoudre le système d'équations on doit avant tout le réarranger sous la forme de l'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.** et  $\alpha_j, \beta_j, D_j$  et  $C'_j$  sont alors identifiées. Les valeurs de  $A_j$  et  $C'_j$  sont calculées de manière séquentielle en allant de  $j=2$  à  $j=n$  en utilisant (IV.6b-c). La connaissance de la valeur de  $\phi$  à  $n+1$  nous permet de calculer le reste des variables dans l'ordre  $(\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2)$  à partir de la relation de récurrence **Erreur! Source du renvoi introuvable.** Cette méthode est simple à incorporer dans un programme de CFD.

Dans le développement ci-dessus du TDMA les valeurs aux frontières  $\phi_1$  et  $\phi_{n+1}$  sont supposées connues. Lorsqu'il s'agira d'une condition frontière type «flux imposé», par exemple en  $j=1$ , le coefficient  $\beta_2$  dans **Erreur! Source du renvoi introuvable.** est annulé et le flux à travers la frontière est incorporer dans le terme source  $C_2$ . La valeur réelle de la variable à la frontière n'est

pas utilisée directement dans la formulation. L'absence du premier ou du dernier terme n'affecte pas l'application du TDMA sous la forme présentée ci-dessus.

### IV.3 Application du TDMA pour un problème bidimensionnel (TDMA ligne par ligne)

Le TDMA est appliqué de manière itérative pour résoudre les problèmes en 2D. On considère la grille sur la (Fig. IV.1) et l'équation générale discrétisée d'un phénomène de transport écrit

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_s \phi_s + a_n \phi_n + b \tag{IV.7}$$

Pour résoudre le système, le TDMA est appliqué le long des lignes choisies, dans notre cas, on choisit les lignes  $(n - s)$ , pour cela on réarrange **Erreur! Source du renvoi introuvable.** comme suit :

$$-a_p \phi_p + a_s \phi_s - a_n \phi_n = a_w \phi_w + a_e \phi_e + b \tag{IV.8}$$

Le côté droit de l'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.** est supposé temporairement connu. L'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.** est sous la forme de (IV.2) où  $\alpha_j \equiv a_n$ ,  $\beta_j \equiv a_s$ ,  $D_j \equiv a_p$  et  $C_j \equiv a_w \phi_w + a_e \phi_e + b$ . Maintenant la résolution peut se faire sur la ligne  $(n - s)$  pour  $j = 2, 3, 4, \dots, n$  comme montré sur la (Fig. IV.1)

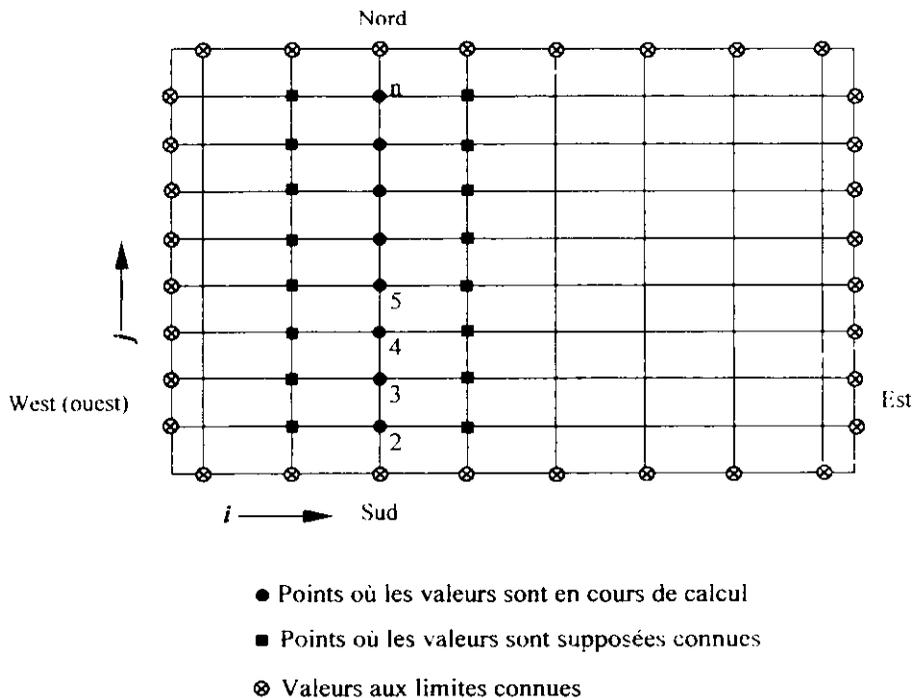


Fig. IV.1 application ligne par ligne de l'algorithme TDMA

De manière séquentielle le calcul est transféré à la ligne ( $n - s$ ) adjacente. La direction du passage de l'une à l'autre est appelée ligne de balayage. Si cette ligne avance du côté «West» à celui «East», les valeurs de  $\phi_w$  sont toujours connues à partir du calcul de la ligne précédente. Les valeurs des  $\phi_e$  sont inconnues donc la procédure doit être itérative. A chaque cycle d'itération  $\phi_e$  possède la valeur obtenue de l'itération précédente ou bien celle de la valeur initiale donnée si le calcul est à la première itération (e.g..zero). La procédure ligne par ligne est répétée jusqu'à convergence, ce qui veut dire que la solution  $X_k (\phi_1^k, \phi_2^k, \phi_3^k, \dots, \phi_n^k)$  du système où :  $X_k$  est le vecteur solution à l'itération  $k$ , vérifie la relation suivante ( $\varepsilon$  l'erreur de troncature) :

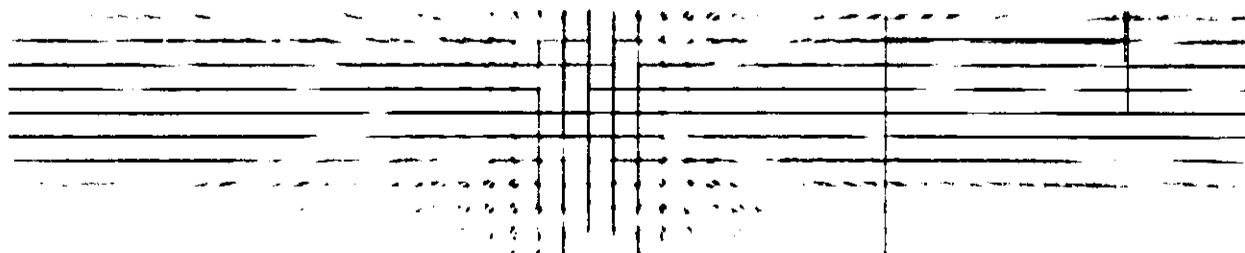
$$\text{Max}_p \left| \phi_p^k - \phi_p^{k-1} \right| < \varepsilon$$

ou bien la relation :

$$\sum_p \left| \phi_p^k - \phi_p^{k-1} \right| \leq \varepsilon$$

# CHAPITRE V :

## APPLICATION DE LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS AU CAS TRAITÉ



Nous avons vu au chapitre III, la méthodologie à suivre pour discrétiser les équations de transport avec la méthode des volumes finis (MFV), avant cela à la fin du chapitre II, nous avons posé notre problème physique et nous lui avons donné un model mathématique. Il s'agissait de l'écoulement à travers une conduite à parois poreuses. Toutefois, l'application de la MFV telle qu'elle est donnée au chapitre 3 pose quelques problèmes. en particulier lorsqu'il s'agit de calculer le champ de vitesse qui a été précédemment supposé connu.

Dans ce chapitre, nous montrons dans un premier temps la principale difficulté inhérente au calcul du champ de vitesse et celui du champ de pression. Ensuite, après avoir donné une solution pour ce problème, nous utiliserons un algorithme général pour la simulation numérique du problème physique : l'algorithme du SIMPLE, qui a été présenté par Patankar[18,19] & Spalding (1972).

Les résultats obtenus et leurs discussions seront l'objet du chapitre suivant.

## V.1 Nécessité d'une procédure particulière

Pour un problème de mécanique des fluides non couplé (écoulement isotherme ou adiabatique réversible sans transfert de masse), et dans le cas d'un fluide newtonien et incompressible, le système d'équations à résoudre pour un problème 2D est :

- *Conservation de la masse :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{V.1})$$

Ou bien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{V.2})$$

- *Conservation de la quantité de mouvement :*

$$\text{Pour } i = 1 \text{ à } 2 \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \text{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = \text{div}(\mu \text{ grad } u_i) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i \quad (\text{V.3})$$

Ou bien ,explicitement :

suisant x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (\text{V.4})$$

suisant y :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (\text{V.5})$$

Les equations de Navier-Stokes (V.3) sont bien du type de l'équation (II.40). Il est donc possible de les discrétiser par la méthode des volumes finis. De plus, nous voulons garder

notre méthode de résolution des systèmes discrétisés (TDMA ligne par ligne), ce qui fait qu'à chaque itération, les équations (V.3) discrétisées vont nous fournir une estimation des deux composantes de la vitesse pour un champ de pression donné. Par contre, cette estimation de la vitesse ne vérifie pas forcément l'équation de conservation de la masse (V.2). Nous allons alors modifier le champ de pression pour faire en sorte d'obtenir un champ de vitesse vérifiant l'équation (V.2). Ce dernier ne vérifiera alors plus a priori les équations (V.3), d'où l'utilisation d'une procédure itérative du type :

**1** - Résolution des équations discrétisées (V.3) avec un champ de pression estimé, ce qui nous donne une estimation de  $\mathbf{u}$ .

**2** - Modification du champ de pression et du champ de vitesse pour que l'équation de conservation de la masse soit vérifiée.

**3** - Retour en **1** si le champ de vitesse a été modifié à l'étape **2**.

Si le champ de vitesse n'est pas modifié à l'étape **2**, nous avons obtenu un champ de vitesse à la fois compatible avec la conservation de la quantité de mouvement et avec la conservation de la masse : le problème est résolu.

Il faut donc chercher une méthode permettant de faire une correction de pression et de vitesse dans l'étape **2**. Mais auparavant, nous allons voir que la discrétisation de l'équation (V.3) nécessite des précautions encore à cause de la pression.

## V.2 Les problèmes liés à la discrétisation des équations de Navier-Stokes[17,20]

Supposons que les équations (V.3) soient discrétisées en utilisant les mêmes volumes de contrôle pour toutes les composantes de la vitesse et des autres champs scalaires. Cela veut dire notamment, que nous calculons la pression aux mêmes points que la vitesse.

Pour discrétiser l'équation (V.3), par exemple pour la direction  $x$ , nous adoptons la démarche vue au chapitre 3. En particulier, il nous faut estimer le terme :

$$-\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = -\iint_A n_x \cdot p dA \quad (\text{V.6})$$

où  $n_x$  est la composante dans la direction  $x$  de la normale sortante du volume de contrôle  $V$ . Le terme de l'équation (V.6) se discrétise en supposant la pression uniforme sur les faces  $w$  et  $e$  du volume de contrôle, pour une géométrie bidimensionnelle, nous obtenons :

$$-\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = -[p_e \Delta y - p_w \Delta y] \quad (\text{V.7})$$

Soit, si les faces  $w$  et  $e$  sont respectivement au milieu des segments  $[W,P]$  et  $[P,E]$  :

$$-\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left[ \frac{p_P + p_W}{2} - \frac{p_E + p_P}{2} \right] \Delta y = \left[ \frac{p_W - p_E}{2} \right] \Delta y \quad (\text{V.8})$$

Ce résultat signifie que la discrétisation de l'équation de conservation des équations de Navier-Stokes, fait intervenir non pas la différence de pression entre deux points voisins, mais entre les points  $W$  et  $E$ .

Par exemple, le champ de pression donné sur la (Fig. V.1) est compatible avec un champ de vitesse nul. Une telle solution n'est bien évidemment pas physiquement acceptable.

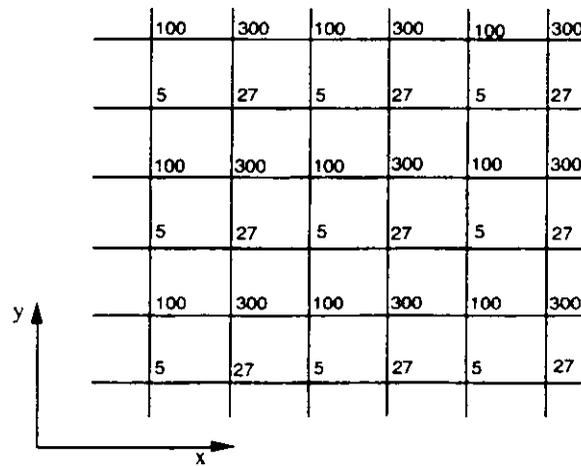


Fig. V.1 Exemple d'un champ de pression compatible avec l'équation de conservation de la masse mais sans réalité physique

Ainsi, la discrétisation des équations de Navier-Stokes, en considérant que toutes les variables sont calculées sur les mêmes points du maillage, nous conduit à une mauvaise prise en compte du terme source correspondant aux forces de pression exercées sur le volume de contrôle.

### V.3 Les problèmes liés à la discrétisation de l'équation de conservation de la masse

Le même problème survient quand on discrétise l'équation de conservation de la masse. Pour une géométrie monodirectionnelle, l'équation (V.2) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{V.9}$$

En intégrant (V.9) sur le volume de contrôle construit autour du point  $P$ , il vient :

$$u_e - u_w = 0 \tag{V.10}$$

soit :

$$\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} = \frac{u_E - u_W}{2} = 0 \tag{V.11}$$

De fait, le champ de vitesse de la figure 2 vérifie l'équation (V.11). Un tel champ de vitesse n'a bien sûr aucun sens physique.



Fig. V.2 Exemple d'un champ de vitesse qui vérifie l'équation de conservation de la masse, mais qui n'a pas de sens physique

Il faut donc chercher une solution qui permette de résoudre les deux problèmes que nous venons de mettre en évidence.

## V.4 Une solution à tous nos problème : les maillages décalés[16,17,18]

Il est possible de pallier aux deux gros problèmes décrits précédemment en se rappelant que toutes les inconnues ne doivent pas être nécessairement calculées sur les mêmes points. Nous pouvons par exemple utiliser un maillage pour les vitesses et un autre pour les grandeurs scalaires. La solution que nous proposons consiste à calculer les composantes de la vitesse en des points situés sur les faces des volumes de contrôle. Ainsi, les composantes (notées  $u$ ) dans la direction  $x$  du champ de vitesse sont calculées sur les faces des volumes de contrôle ayant leur normale dans la direction  $x$  (Fig. V.3). De même, nous illustrons sur la (Fig. V.4) la localisation des points où l'on calcule les composantes (notées  $v$ ) de la vitesse dans la direction  $y$ .

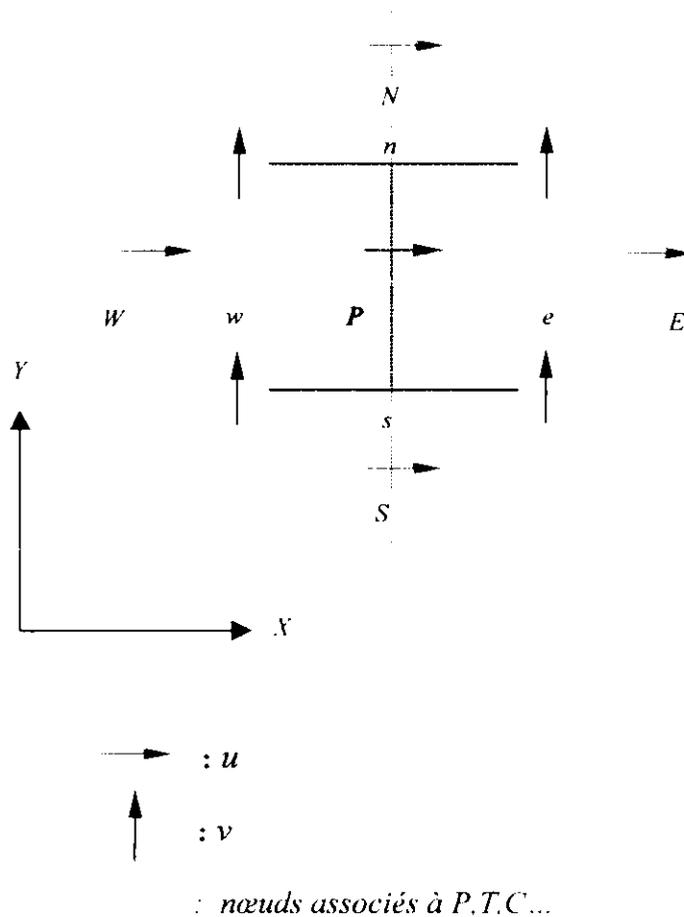


Fig. V.3 Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation d l'équation de conservation d la quantité de mouvement dans la direction  $x$

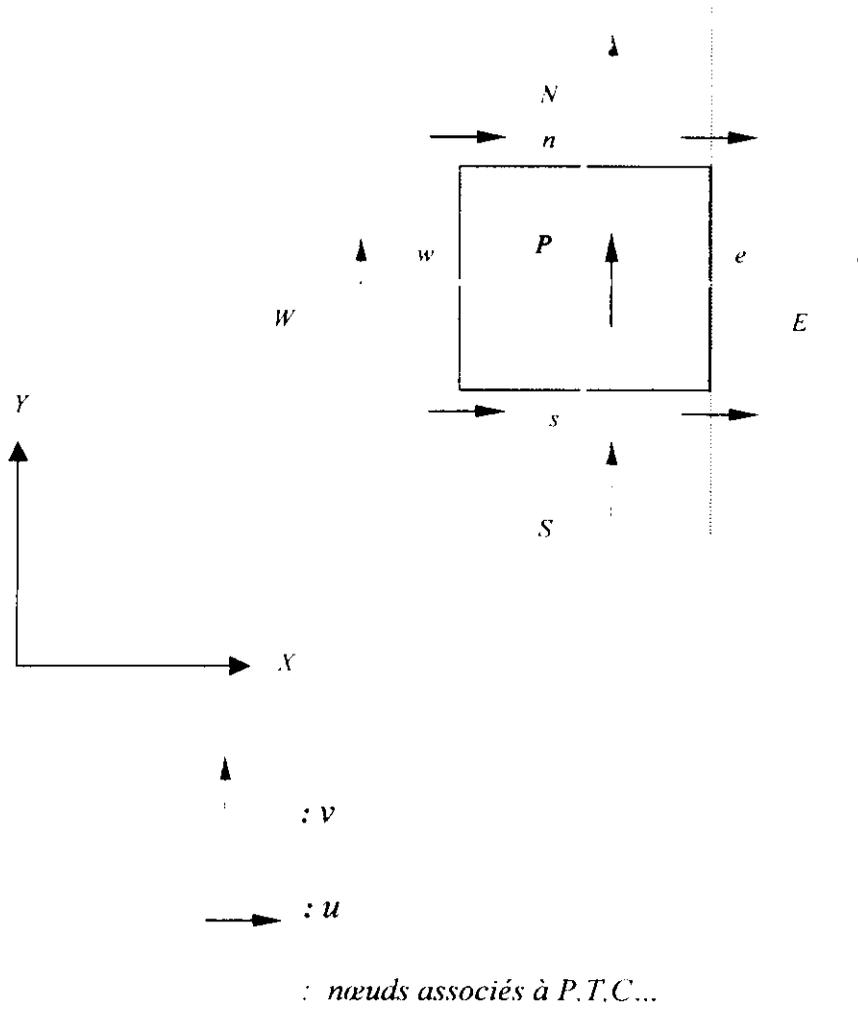
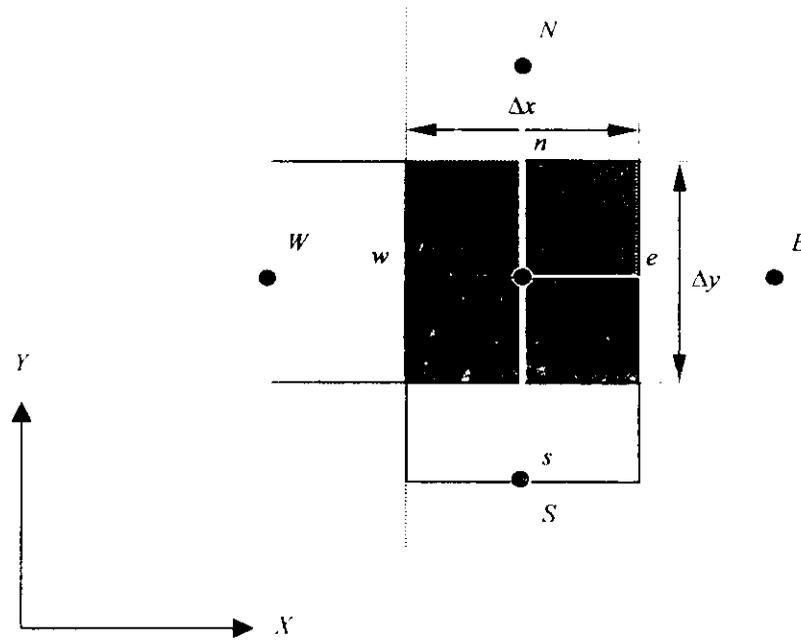


Fig. V.4 Volume d contrôle utilisé pour la discrétisation d l'équation de conservation d la quantité de mouvement dans la direction  $y$



Volume de contrôle associé aux propriétés scalaires ( $P, T, C, \dots$ )

Volume de contrôle associé à la vitesse  $u$

Volume de contrôle associé à la vitesse  $v$

+  +  =

+  =

+  =

Fig. V.5 Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de conservation d'une grandeur scalaire et pour la conservation de la masse.

La (Fig. V.5) représente les trois volumes de contrôle utilisés pour la discrétisation des grandeurs scalaires et pour la conservation de la masse et ceux des deux vitesses  $u$  et  $v$ . En résumé, le volume gris est utilisé pour discrétiser les équations de conservation des grandeurs scalaires : équation de transport de la chaleur, des constituants et équation de conservation de la masse ; le volume de contrôle (Fig. V.3) est utilisé pour discrétiser l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction  $x$ , et le volume de contrôle (Fig. V.4) pour discrétiser la même équation mais dans la direction  $y$ .

Avec ce choix des maillages décalés, le calcul des forces de pression pour la discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, fait apparaître la différence de pression entre deux points voisins du maillage. Il en est de même pour l'équation

de conservation de la masse. Ceci vient du fait, qu'il n'y a plus à faire d'interpolation pour calculer  $p_e$  et  $p_w$ , ou pour calculer  $u_e$  et  $u_w$ .

On remarquera que le choix de la localisation du calcul des composantes de la vitesse est idéal pour la discrétisation de l'équation de transport d'un champ scalaire. En effet, la discrétisation des flux convectifs sur chacune des faces d'un volume de contrôle, nécessite la connaissance de la composante du champ de vitesse dans la direction normale à la face du volume de contrôle.

## V.5 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Nous nous plaçons pour toute la suite du chapitre, dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle cartésienne. Nous utilisons la méthode générale vue au chapitre III, pour discrétiser les équation de Navier-Stokes. Pour la direction  $x$ , nous discrétisons l'équation sur le volume de contrôle de la (Fig. V.3). Par rapport au calcul de l'équation discrétisée d'un champ scalaire, une différence vient du fait qu'il est nécessaire d'interpoler certaines vitesses sur les faces du volume de contrôle n° 2. Nous obtenons ainsi une équation discrétisée de la forme :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_p - p_f) A_e$$

avec :  $A_e = \Delta y$  (V.12)

De même, l'intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction  $y$ , sur le volume de contrôle n° 3, donne :

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_p - p_N) A_n$$

avec :  $A_n = \Delta x$  (V.13)

Nous noterons dans tous les développements qui vont suivre  $u^*$ ,  $v^*$ , les solutions des systèmes discrétisés (V.12) et (V.13) obtenus pour un champ de pression  $p^*$  :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_p^* - p_f^*) A_e$$
 (V.14)

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_p^* - p_N^*) A_n$$
 (V.15)

## V.6 Corrections de pression et corrections de vitesse

Nous avons montré en (V.1) qu'il était possible d'adopter une démarche itérative passant par des corrections de pression se répercutant elles-mêmes par des corrections de vitesse. Appelons  $p'$  la différence entre la pression recherchée  $p$  et sa dernière estimation  $p^*$  :

$$p = p^* - p' \quad (V.16)$$

$p'$  sera appelée la correction de pression. Maintenant, nous allons voir comment relier cette correction de pression à une correction de vitesse.

Soient  $u'$  et  $v'$ , les corrections de vitesse correspondant à la correction de pression  $p'$  :

$$u = u^* + u' \quad v = v^* + v' \quad (V.17)$$

Si nous soustrayons (V.14) de (V.12), il vient :

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + b + (p'_p - p'_E) A_e \quad (V.18)$$

S'il est possible de négliger le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  dans (V.18), nous obtenons une relation simple entre la correction de vitesse et la correction de pression :

$$u'_e = (p'_p - p'_E) \frac{A_e}{a_e} = (p'_p - p'_E) d_e \quad (V.19)$$

$$\text{avec : } d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

soit encore :

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_p - p'_E) \quad (V.20)$$

Nous obtiendrions de même pour l'autre composante de la vitesse :

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_p - p'_N) \quad (V.21)$$

Les équations (V.20) et (V.21) traduisent comment une variation de pression agit sur le champ de vitesse.

## V.7 De l'équation de conservation de la masse à l'équation de correction de pression

L'intégration de l'équation de conservation de la masse (V.2), pour une géométrie bidimensionnelle, sur le volume de contrôle de la (Fig. V.5) en prenant un schéma "fully implicit" donne :

$$\frac{(\rho_p^0 - \rho_p) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (V.22)$$

Si nous substituons les expressions (V.20) et (V.21) dans (V.22), nous obtenons une équation discrétisée portant sur les corrections de pression de la forme :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (V.23)$$

$$\text{avec : } a_E = \rho_e d_e \Delta y \quad (V.24)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \quad (V.25)$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x \quad (V.26)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \quad (V.27)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (V.28)$$

$$b = \frac{(\rho_p^0 - \rho_p) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_e - (\rho u^*)_w] \Delta y + [(\rho v^*)_n - (\rho v^*)_s] \Delta x \quad (V.29)$$

L'équation (V.23) représente la correction à apporter au champ de pression, pour que le champ de vitesse vérifie l'équation de conservation de la masse. Cependant, quand nous avons établi la relation entre correction de pression et correction de vitesse à partir de la

relation (V.18), nous avons négligé le terme  $\sum a_{nb}u'_{nb}$ . De fait, il est nécessaire d'utiliser une procédure itérative pour résoudre le système d'équation discrétisée.

## V.8 L'algorithme du SIMPLE

Contrairement à ce que pourrait penser le lecteur, SIMPLE ne veut pas dire simple, mais "**Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations**", ce qui change tout, évidemment.

Cet algorithme a été mis au point par Patankar [18,19] et Spalding (1972). L'algorithme se déroule suivant la séquence suivante :

- 1 - Estimer un champ de pression  $p'$ .
- 2 - Résoudre les systèmes discrétisés pour la conservation de la quantité de mouvement (équations V.14, V.15). Le résultat étant  $u^*, v^*$ .
- 3 - Résoudre l'équation de correction de pression (V.23). Le résultat est  $p'$ .
- 4 - Calculer le nouveau champ de pression  $p = p^* + p'$ .
- 5 - Calculer  $u$  et  $v$  à partir des équations (V.20) et (V.21).
- 6 - Résoudre les équations discrétisées correspondant aux autres grandeurs scalaires (température, concentration).
- 7 - Avec cette nouvelle valeur du champ de pression, faire  $p^* = p$ , et retourner en 2 jusqu'à convergence.

On pourrait faire remarquer que nous avons négligé le terme  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  dans l'équation (V.18). En fait, cela n'est pas grave. En effet, lorsque l'algorithme du SIMPLE aura atteint sa convergence, le terme  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  sera nul, de même que les corrections de pression d'ailleurs. L'algorithme est appelé semi implicite ... du fait de devoir itérer entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et celle de conservation de la masse.

De fait, le critère de convergence dans cet algorithme doit être choisi avec soin, il faut s'assurer que les corrections de pression sont négligeables, un bon indicateur est le terme source  $b$  dans l'équation de correction de pression (équation (V.23)).

Des problèmes de divergence peuvent également survenir, il est donc parfois nécessaire de relaxer la pression. Dans ce cas, la nouvelle valeur de la pression dans l'étape 4 est obtenue par :

$$p = p^* + \alpha_p p'$$

où  $\alpha_p$  est un coefficient de relaxation de l'ordre de 0,8. Par contre, pour garder un champ de vitesse qui vérifie l'équation de conservation de la masse, il ne faut surtout pas relaxer les

termes de correction de vitesse. Il est important de travailler tout au long du processus itératif avec un champ de vitesse conservatif car nous avons utilisé cette propriété pour élaborer le schéma discrétisé d'une équation de transport d'une grandeur scalaire au chapitre 3. Il est par contre possible et même conseillé de relaxer  $u^*$ ,  $v^*$ , un coefficient de relaxation de l'ordre de 0.5 étant couramment utilisé. On donne ci-dessous l'organigramme de l'algorithme SIMPLE :

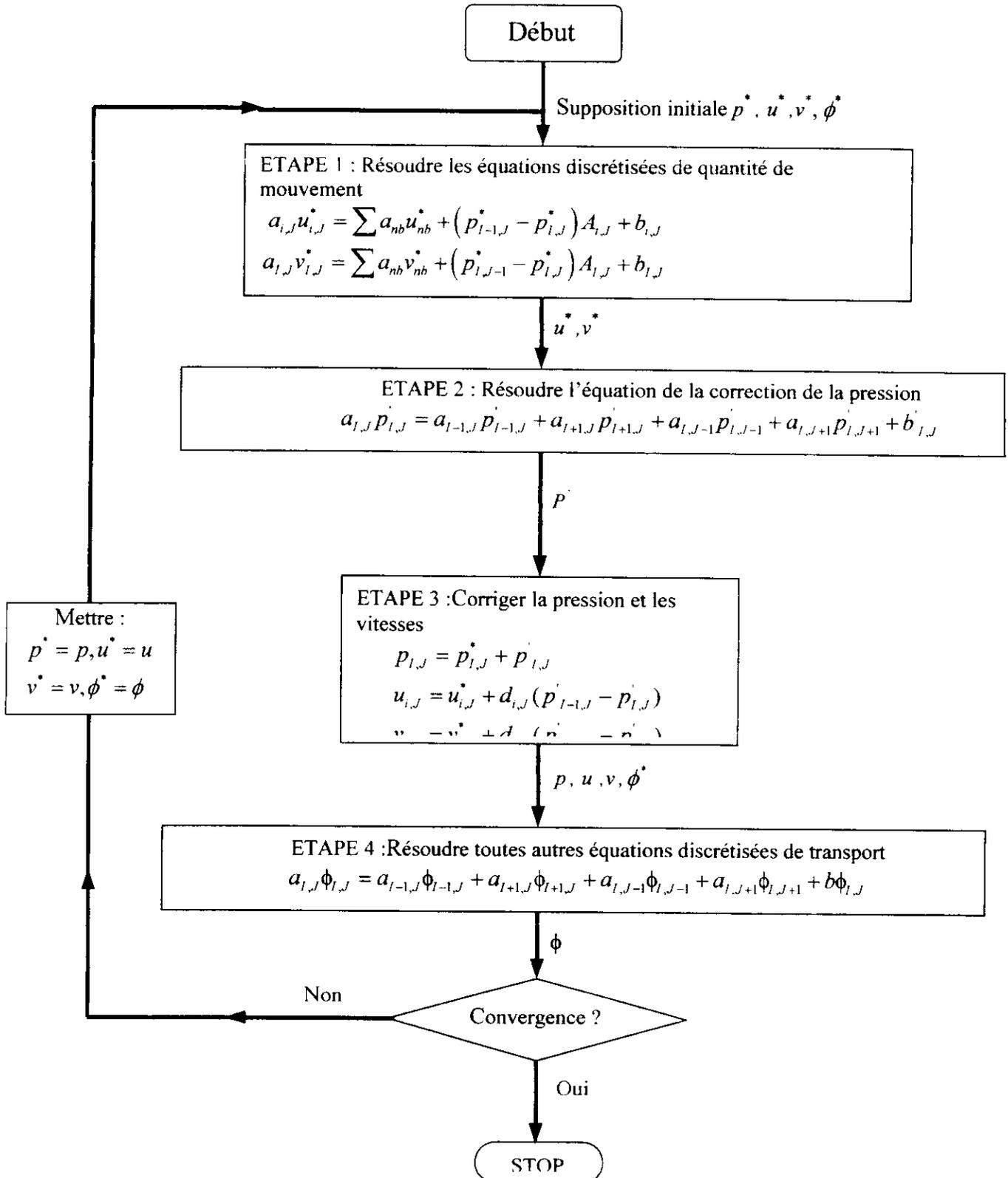
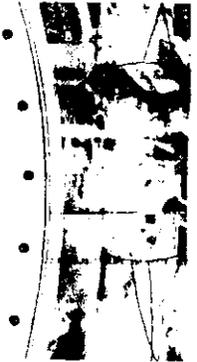


Fig. V.6 Organigramme de l'algorithme SIMPLE

# CHAPITRE VI :

## RESULTATS ET DISCUSSIONS



Dans ce chapitre nous présentons les résultats des simulations obtenues en exécutant notre programme Fortran « Code SIMPLE », pour ce faire nous avons suivi la logique suivante :

L'étude est divisée en 5 parties principales suivantes :

- VI. 1 : Optimisation des paramètres liés à la simulation
- VI. 2 : Simulation dans le cas des parois imperméables.
  - VI. 2.1: Vérification de la bonne marche du programme. (simulation du problème Prob1)
- VI.3: Simulation de la Microfiltration.
  - VI.3.1 : Simulation du problème Prob2 (qui contient Prob2.0 Prob 2.1, Prob 2.2, Prob 2.3)
- VI.4: Simulation du problème Prob3
- VI.5 : Discussions des résultats pour chaque problème.

## VI.1 Optimisation des paramètres liés à la simulation

### VI.1.1 Optimisation du maillage

.La qualité des résultats obtenus par le programme dépend principalement du type du maillage adopté . Après d'innombrable essai ,nous avons pu avoir un maillage optimal pour simuler nos problèmes , les critères d'optimisation sont les suivants :

- Les zones du domaine où les variables à calculer varient brutalement nécessitent un maillage raffiné , pour cela nous avons utilisé des fonctions spéciales injecté dans le programme. Les zones concernées sont : la paroi – surtout lors du problème de paroi perméable – , les zones où les conditions aux limites sont posées (entrée ,sortie par exemple).
- Il faut tenir compte de la capacité du matériel informatique ( ordinateur ),utilisé pour le calcul, pour éviter des problèmes de dépassement de mémoire alloué par l'ordinateur au calcul.

### VI.1.2 Optimisation du temps de calcul

Cette étape consiste à bien choisir deux choses :

- Le nombre d'itérations nécessaire et suffisant pour que le programme converge.
- Les valeurs initiales attribuées aux variables pour lancer la procédure itérative du code SIMPLE.

### VI.1.3 L'optimisation associée au programme utilisé pour la résolution

Pour notre résolution le maillage optimisé (Fig. V1.1) est caractérisé par :

- ✓ Un maillage type rectangulaire non uniforme à **30 × 60 nœuds (horizontale × verticale)**
- ✓ Des fonctions périodiques de type cosinus sont utilisées pour le raffinement du maillage .

Pour le nombre d'itérations :

- ✓ Le nombre d'itérations dépend des problèmes à résoudre, il varie entre **250 et 9000** itérations.

Le matériel de calcul utilisé est un ordinateur PC ayant les caractéristiques suivantes:

- CELERON 333 MHZ ,
- 128 M de RAM ,
- Mémoire Cache 512 Ko
- Carte Graphique TNT 16M de RAM

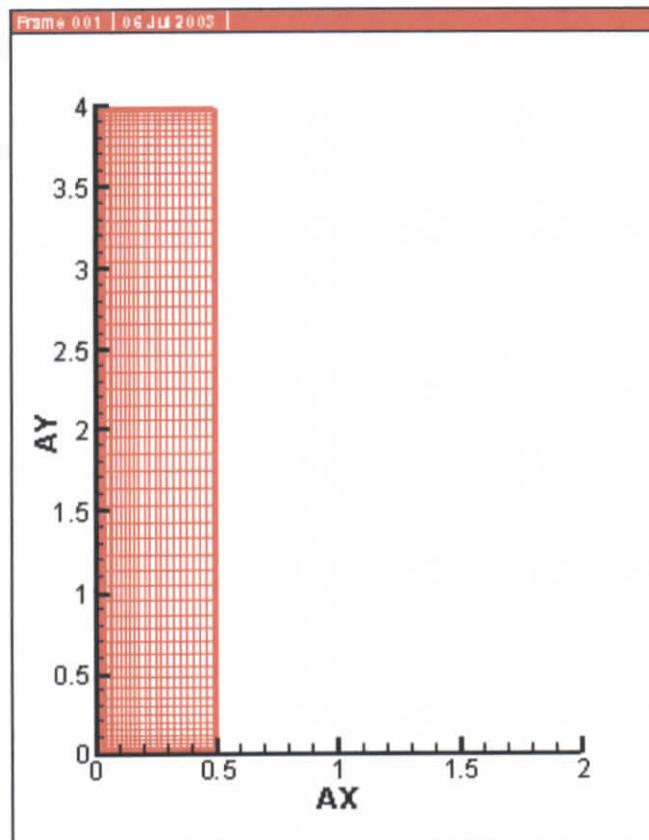


Fig. VI.1 Maillage optimisé pour nos résolutions

**Remarque importante.**

- *Dans tout ce qui suit, on va résoudre les problèmes avec le maillage ci-dessus ,et pour la moitié du domaine ,car les problèmes traités sont tous symétriques.*
- *La disposition du domaine est prise en verticale pour s'approcher du cas d'une membrane plate en pratique, où une disposition en colonne est utilisée.*

## VI.2 Simulation dans le cas de parois imperméables (prob1)

### VI.2.1 Vérification de la bonne marche du programme

Nous avons choisi de simuler le problème d'écoulement entre 2 plaques imperméables et de calculer la longueur d'établissement dynamique. Grâce à quelques essais effectués avec des nombres de Reynolds différents et des domaines différents aussi, nous avons eu une corrélation ou bien une équation semi-empirique qui donne la longueur d'établissement en fonction des nombres de Reynolds.

Cette équation a été comparée par analogie avec une relation du même type trouvée dans la littérature [21,23], mais seulement cette relation est donnée pour un tube, car une relation pour un problème entre 2 plaques n'a pas été trouvée au cours de notre recherche bibliographique.

Par analyse dimensionnelle on peut écrire que :

$$L_e = f(d, V, \rho, \mu) \quad \text{avec } v = Q/A$$

$Q$  : le débit dans la conduite  
 $A$  : Section droite de la conduite  
 $L_e$  : Longueur d'établissement.

$$\text{Donc : } L_e = g(\rho v d / \mu) = g(Re)$$

Pour un écoulement laminaire dans un tube on a le coefficient de corrélation  $c$  comme suit [21,23] :

$$L_e / d = c \cdot Re = 0.06 Re$$

Pour notre programme les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :  
 On note par  $c'$  le coefficient de corrélation obtenu par le programme qui est égale à :

$$c' = Y_{L_e} / H \cdot Re \quad \text{où : } Y_{L_e} = \text{longueur d'établissement}$$

$H$  : Distance entre les deux plaques analogue à  $d$  pour le tube.

Tableau VI.1 Résultats des essais obtenus avec le programme pour le Prob 1

<b>Re</b>	<b>X<sub>H/2</sub>/H</b>	<b>Y<sub>Le</sub>/H</b>	<b>c</b>	<b>c'</b>
<b>50</b>	<b>0.5</b>	<b>15</b>	<b>0.06</b>	<b>0.05560194</b>
<b>100</b>	<b>0.5</b>	<b>15</b>	<b>0.06</b>	<b>0.05182372</b>
<b>150</b>	<b>0.5</b>	<b>15</b>	<b>0.06</b>	<b>0.05261688</b>
<b>200</b>	<b>0.5</b>	<b>25</b>	<b>0.06</b>	<b>0.05093879</b>
<b>250</b>	<b>0.5</b>	<b>25</b>	<b>0.06</b>	<b>0.050000004</b>
<b>300</b>	<b>0.5</b>	<b>25</b>	<b>0.06</b>	<b>0.05032965</b>

On remarque que suivant x :le rapport  $X_{1/2}/H = 0.5$  ,car l'étude se fait pour la moitié du domaine vu la symétrie du problème.

On estime  $c'$  par la valeur moyenne calculée en utilisant tous les  $c'$  obtenus ,on trouve :

$$c' = 5,18851 \cdot 10^{-2}$$

Donc pour notre programme on a une relation semi- empirique, qui est valable pour l'écoulement entre deux plaques. :

$$Y_{Le} / H = c' \cdot Re = 0.0518851 \cdot Re$$

Avec cette démarche nous validons notre programme .

### VI.2.2 Simulation du problème « Prob1 ».

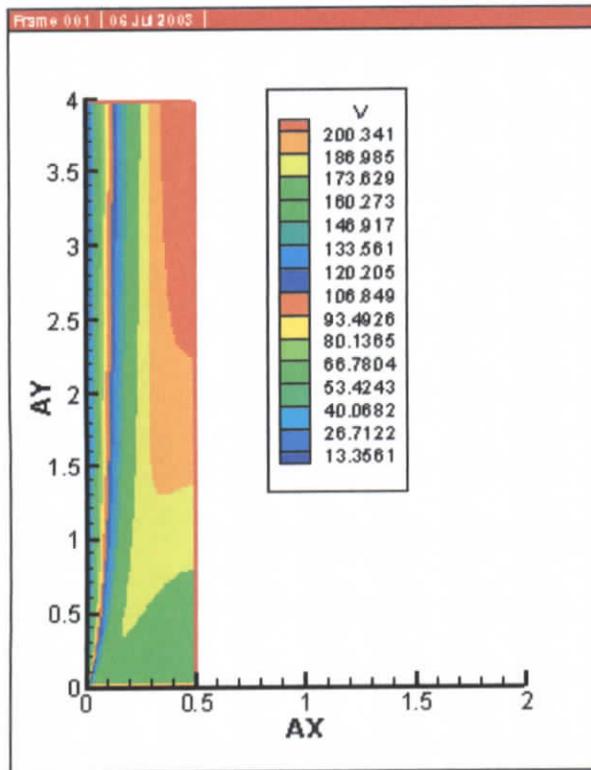
#### Position du problème « Prob1 ».

Dans le problème Prob 1 ,on va simuler un écoulement entre 2 plaques imperméables verticales pour mettre en évidence le développement des profils de vitesses, l'étude se fait pour la moitié du domaine l. Les données suivantes sont utilisées :

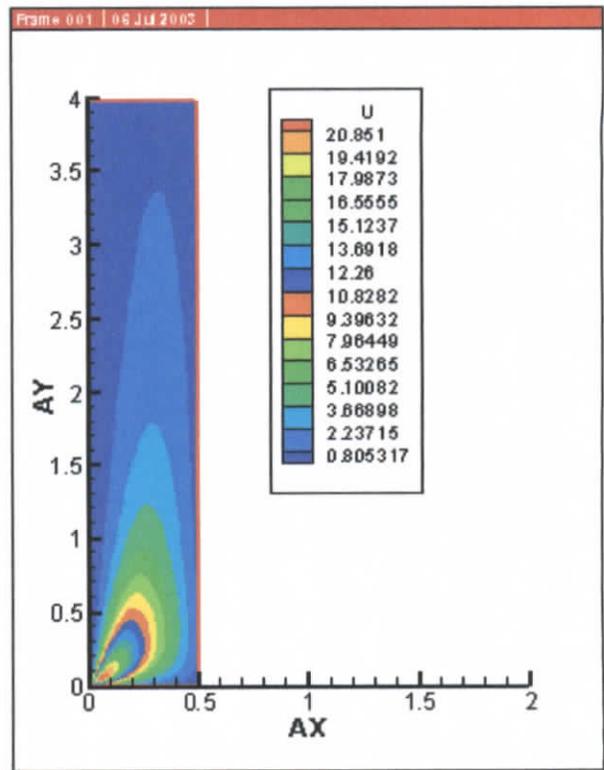
- Re =150 uniforme à l'entrée (en bas)
- $Y^* = 4$
- $X^* = 0,5$

Le domaine comme on l'avait précisé est symétrique par rapport à l'axe vertical.

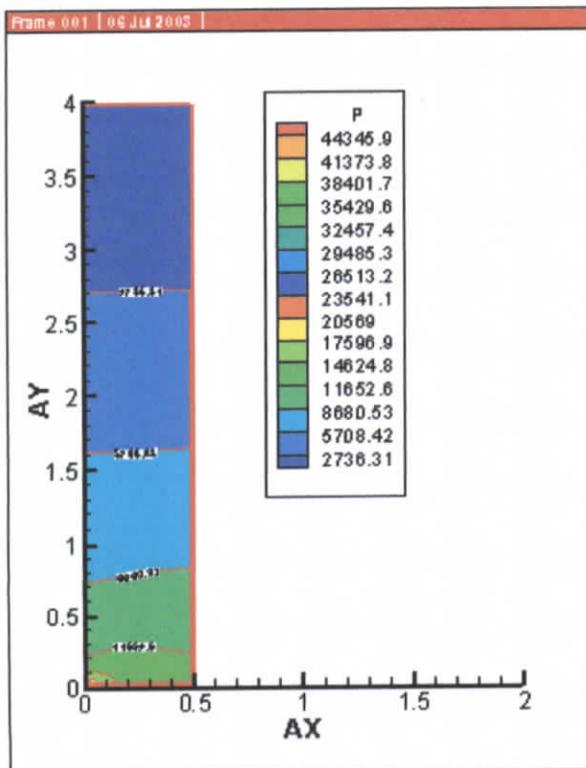
RESULTATS de « Prob1 » en dimension SI



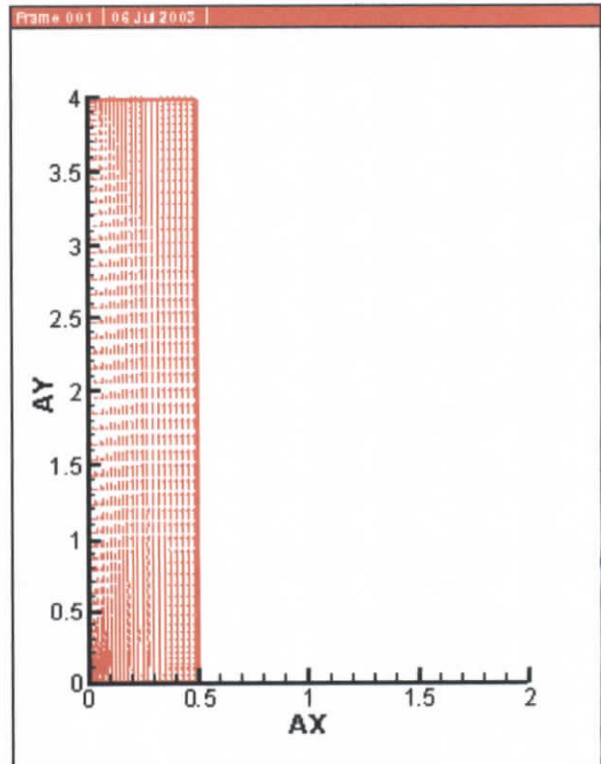
Contour de  $Re_y$



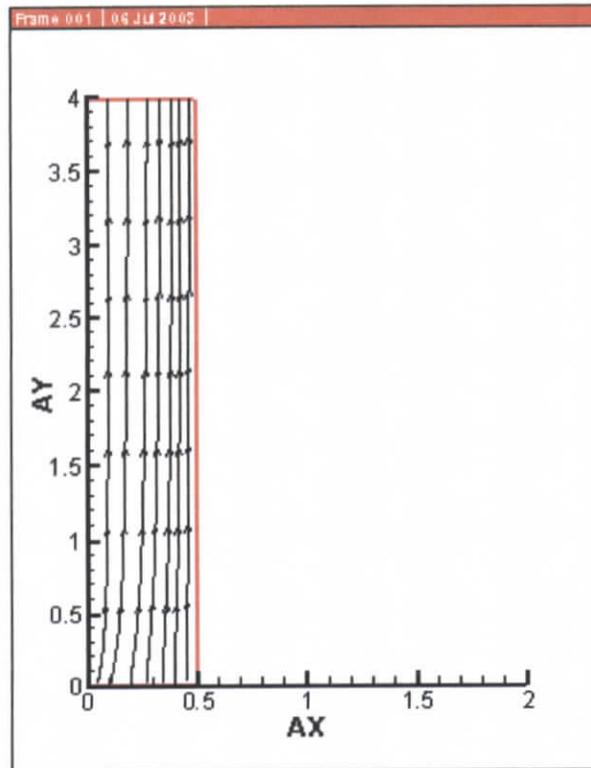
Contour de  $Re_x$



Distribution de Pression

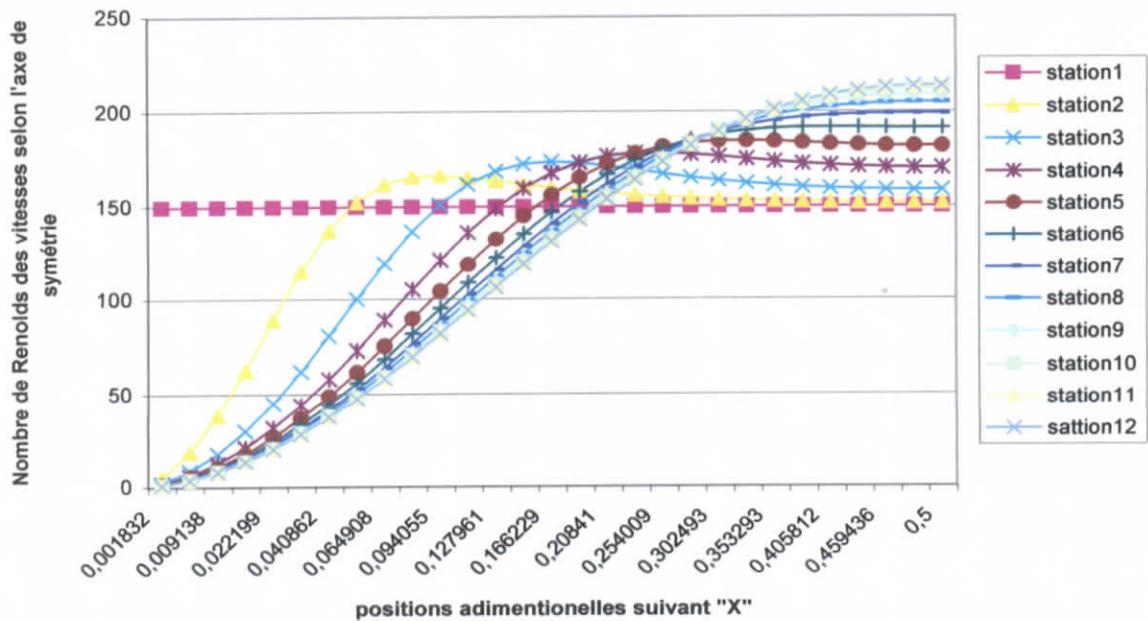


Profils de la résultante des vitesses



Lignes de courant

developpement des profils de vitesses axiales pour un nombre de Reynolds uniforme (Re=150) à l'entrée .



Dans le graphe ci-dessus une « station » veut dire une section droite donnée du domaine ,qui est perpendiculaire à l'axe de symétrie . Par souci de lisibilité du graphe, deux stations successives sont distantes de 5 nœuds ,autrement dit nous représentons les résultats par pas de 5 nœuds. Dans cette optique nous pouvons vérifier que si le nombre de station est égale à 12 , ce qui est le cas sur le graphe ci-dessus , donc  $12 \times 5 = 60$  nœuds ,qui est le nombre de tous les nœuds utilisés pour la direction verticale.

### VI.2.3 Interprétation.

Paramètres d'exécution du programme

**Nombre d'itérations optimisé = 250.**

**Temps de calcul associé = 22.790000 s**

Dans cette partie nous avons résolu numériquement le problème d'écoulement entre 2 deux plaques imperméable avec imposition d'un champs de vitesse uniforme à l'entrée. Les résultats obtenus sont en accord avec la théorie, celle-ci prévoit un développement des profils de la vitesse axiale , les profils se développent effectivement à mesure qu'on avance vers la sortie .Si la longueur du domaine était supérieure ou égale à la longueur d'établissement dynamique  $L_e$ , le profil serai parfaitement parabolique ,pour notre cas, la longueur du domaine est de 4 fois la largeur, on vérifie par la relation semi-empirique de notre programme que pour  $Re = 150$  ( imposé à l'entrée) :  $Y_{1,e}/H = 0.0518851 \times 150 = 7.782$  donc la longueur d'établissement n'est pas atteinte pour le Probl.

## VI.3 Simulation de la Microfiltration « Prob2 »

### VI.3.1 Position du problème « Prob2 ».

Dans la série de Prob 2 ,on va résoudre le problème hydrodynamique de l'écoulement au sein d'une membrane de Microfiltration type module plat , il est considéré comme un écoulement entre 2 plaques perméables verticales, l'étude se fait pour la moitié du domaine. Les données suivantes sont utilisées pour toute les série de Prob 2 :

- $Y^* = 4$
- $X^* = 0.5$

#### Prob 2.0 : résolution pour la membrane « a »

-  $Re = 150$  ;

- la **membrane « a »** possède les caractéristique suivantes :

$$d = 1000 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ m.}$$

$$N = 10^{13} \text{ pores / m}^2$$

$$\tau = 5$$

$$\varepsilon = 39,25\%$$

$$z = 2 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

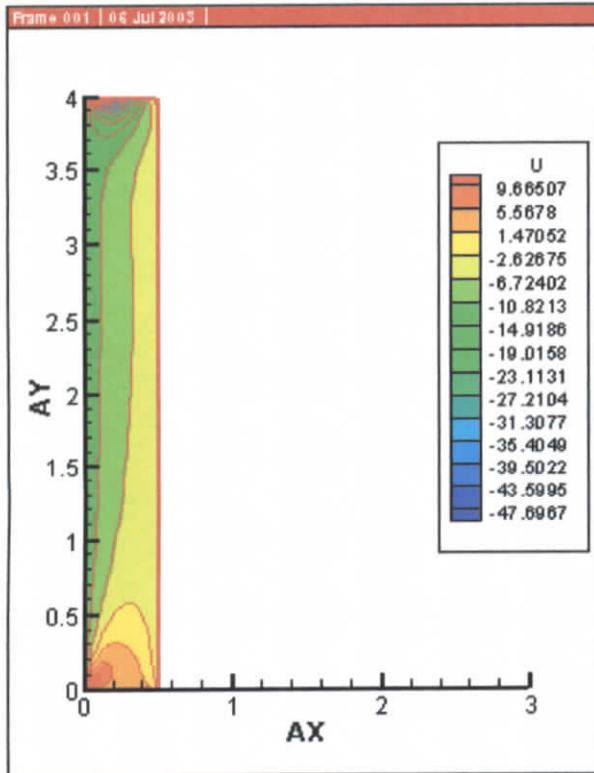
$$\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu = 10^{-6} \text{ m}$$

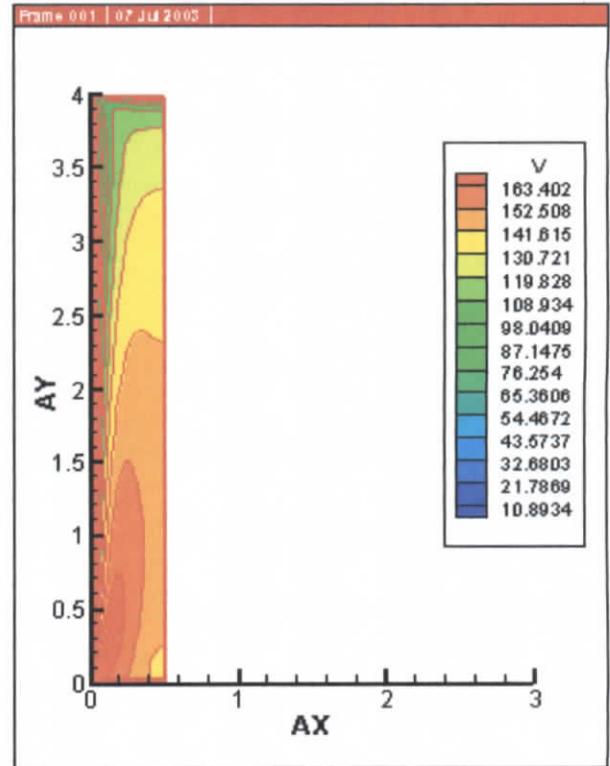
La valeur de  $J$  est :  $1.22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$

Ceci correspond à un nombre de Renolds :  $Re_f = -12,3$

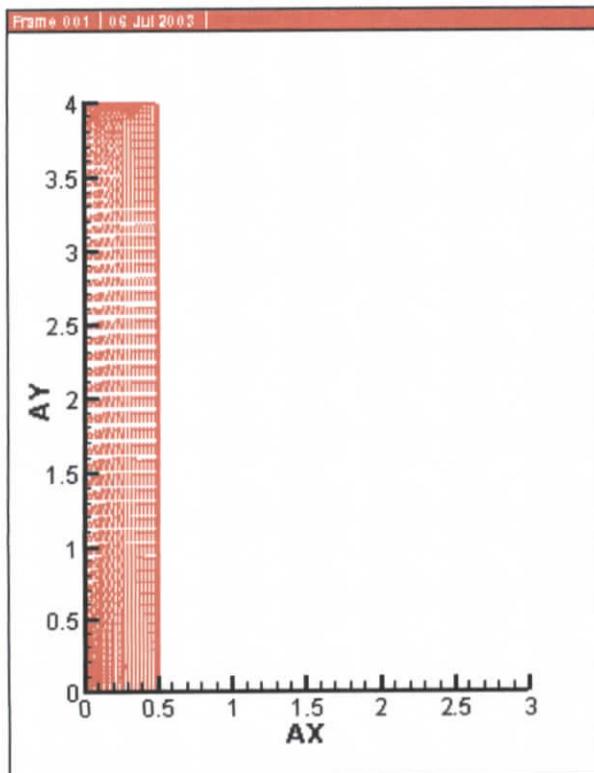
**RESULTATS pour « Prob2.0 » en dimension SI**



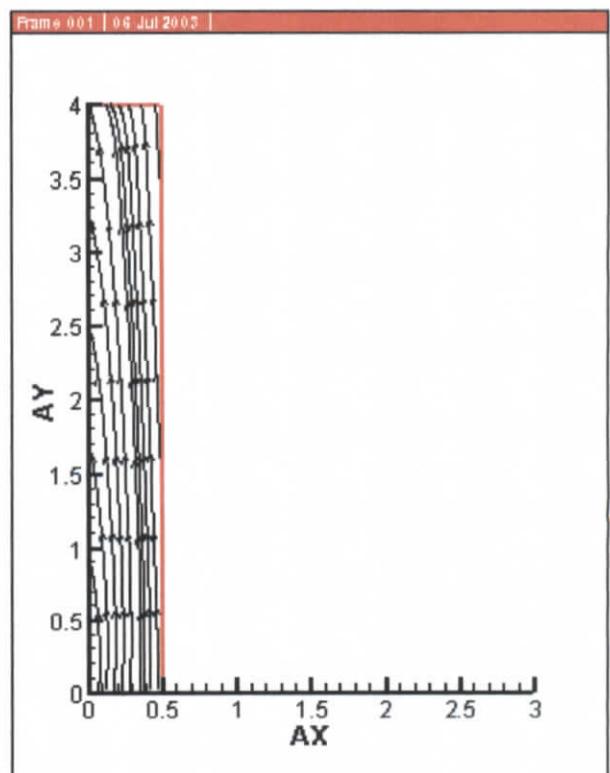
**Contour de  $Re_x$**



**Contour de  $Re_y$**

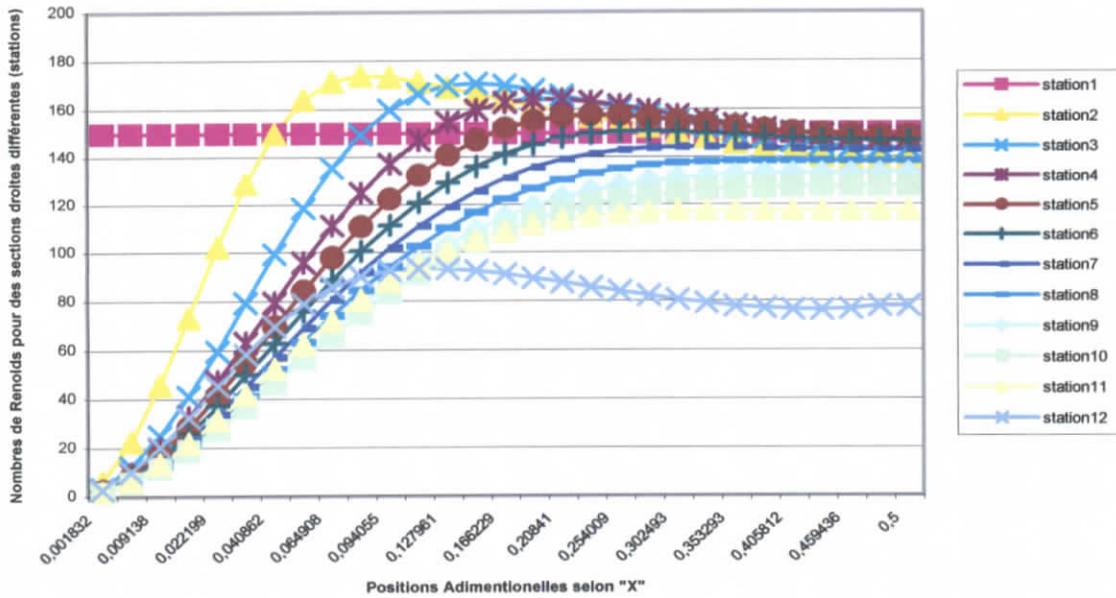


**Profils de la résultante des vitesses**



**Ligne de courant**

Profils des vitesses adimensionelles suivant l'axe du domaine, pour des sections droites différentes



**Interprétation.**

Paramètres d'exécution du programme :

**Nombre d'itérations optimisé = 600.**

**Temps de calcul associé = 110.410 s**

Dans cette partie nous avons résolu le problème hydrodynamique lié à la Microfiltration en supposant un profil uniforme à l'entrée .Dans le prob2.0 on a imposé un nombre de Reynolds identique à celui imposé pour le « prob1 »  $Re = 150$  ,le domaine d'étude est le même.

Lors de la résolution du (prob2.0) nous avons constaté que les profils de la résultante de la vitesse subissent une sorte d'aplatissement à mesure qu'on avance ,de l'entrée vers la sortie du domaine (du bas vers le haut) et cela pour un nombre de Reynolds de filtration  $Re_f = -12,27$ .

- A l'inverse du prob1 où ces mêmes profils se développent pour atteindre le profil établi (parabolique) .
  - Les lignes de courant qui étaient parallèles à l'axe pour le prob1 ,se dirigent vers la paroi poreuse et cela est causé par le flux imposé à la paroi .
- en comparant les résultats obtenus dans le Prob1 et ceux de Prob2.0 ,on voit bien l'influence de la paroi poreuse sur l'écoulement .

**-Série de problèmes (Prob2.1, Prob2.2 et Prob2.3)**

On donne ci-après les données associée à chaque problème :

**Prob2.1.**

-  $R_e = 500$  (entrée) ;

la **membrane « a »** [10] qui possède les caractéristique suivantes :

$$d = 1000 \overset{0}{\text{Å}} = 10^{-7} m.$$

$$N = 10^{13} \text{ pores} / m^2$$

$$\tau = 5$$

$$\varepsilon = 39,25\%$$

$$z = 2 \mu m = 2 \cdot 10^{-6} m$$

$$\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 Pa$$

$$\mu = 10^{-6} m$$

La valeur de  $J$  est :  $1.22 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s \cdot m^{-2}$

**Prob2.2.**

la **membrane « b »** [10,12] qui possède les caractéristique suivantes a été simulée:

$$R_e = 500$$

$$d = 1000 \overset{0}{\text{Å}} = 2 \cdot 10^{-7} m.$$

$$N = 2 \cdot 10^{13} \text{ pores} / m^2$$

$$\tau = 5$$

$$\varepsilon = 54\%$$

$$z = 2 \mu m = 2 \cdot 10^{-6} m$$

$$\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 Pa$$

$$\mu = 10^{-6} m$$

La valeur de  $J$  est :  $6.750 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s \cdot m^{-2}$

**Prob2.3.**

la **membrane « c »** [10,12] qui possède les caractéristique suivantes à été simulée:

$$R_e = 500$$

$$d = 1000 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ m.}$$

$$N = 2.2 \cdot 10^{13} \text{ pores / m}^2$$

$$\tau = 5$$

$$\varepsilon = 62\%$$

$$z = 2 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu = 10^{-6} \text{ m}$$

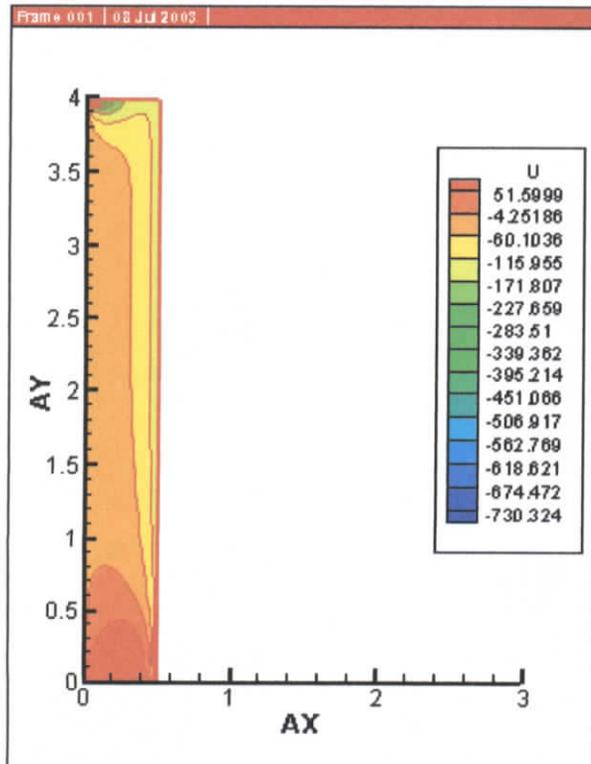
La valeur de  $J$  est :  $9.3775 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$

### RESULTATS de la Série « Prob2.1 , Prob2.1 , Prob2.1 » en dimensions SI

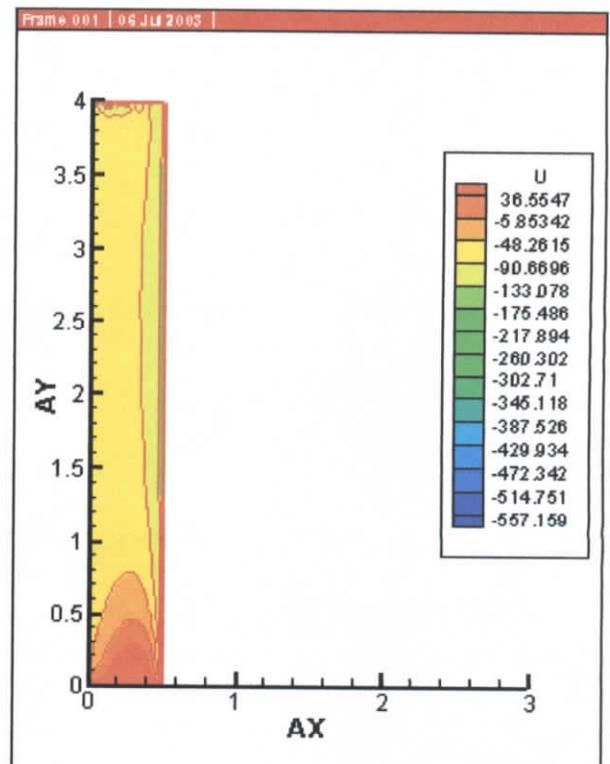
Après l'exécution les nombre de filtration calculés pour chaque membrane sont :

- Pour la membrane « a » on a :  $R_{ef} = -12.67$   
 -Nombre d'itérations optimisé = 4000.  
 -Temps de calcul associé = 454.070 s
- Pour la membrane « b » on a :  $R_{ef} = -67.5$   
 -Nombre d'itérations optimisé = 6000.  
 -Temps de calcul associé = 487.740000 s
- Pour la membrane « c » on a :  $R_{ef} = -93.8$   
 -Nombre d'itérations optimisé = 9000.  
 -Temps de calcul associé = 740.390 s

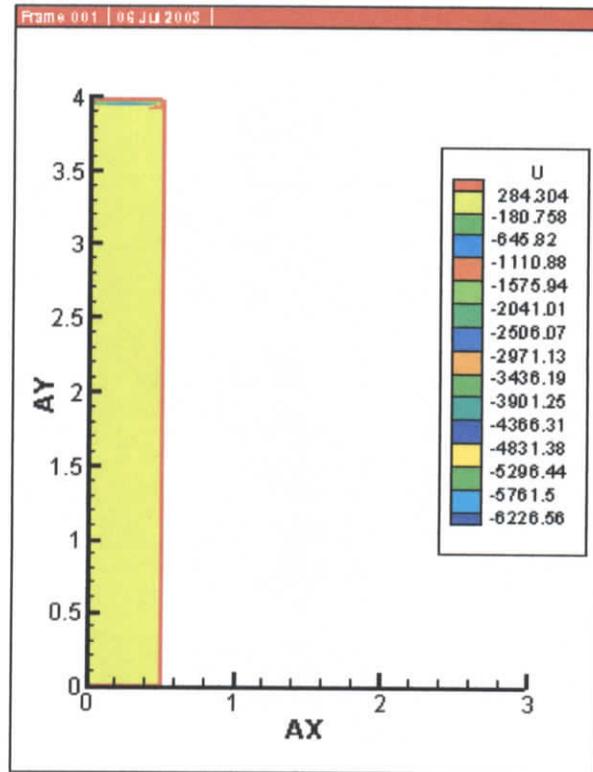
✓ Contour de  $Re_x$



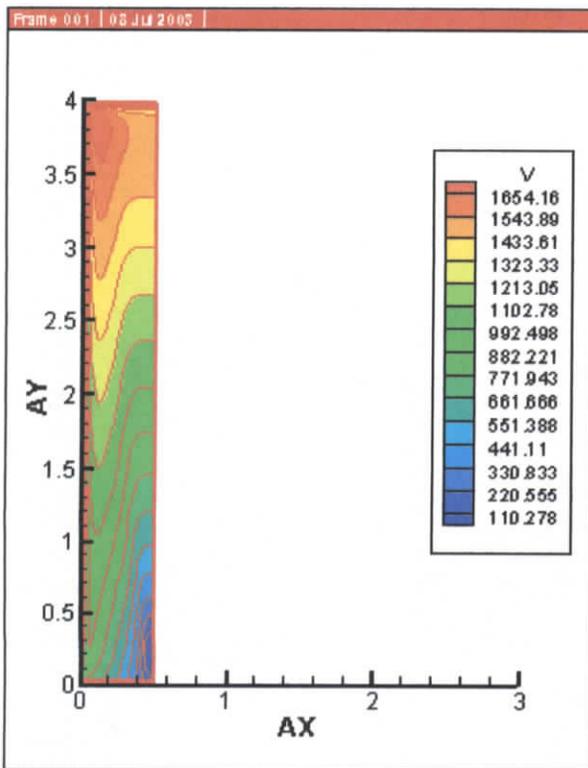
Prob2.1



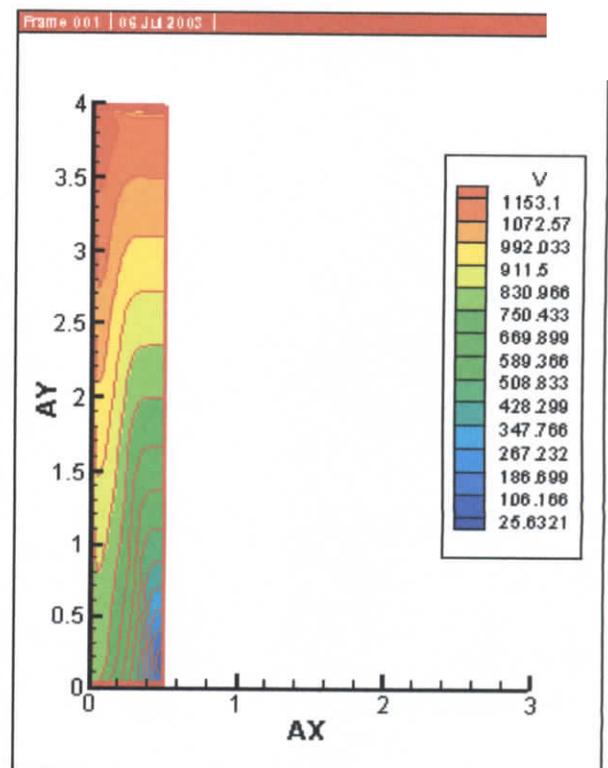
prob2.2



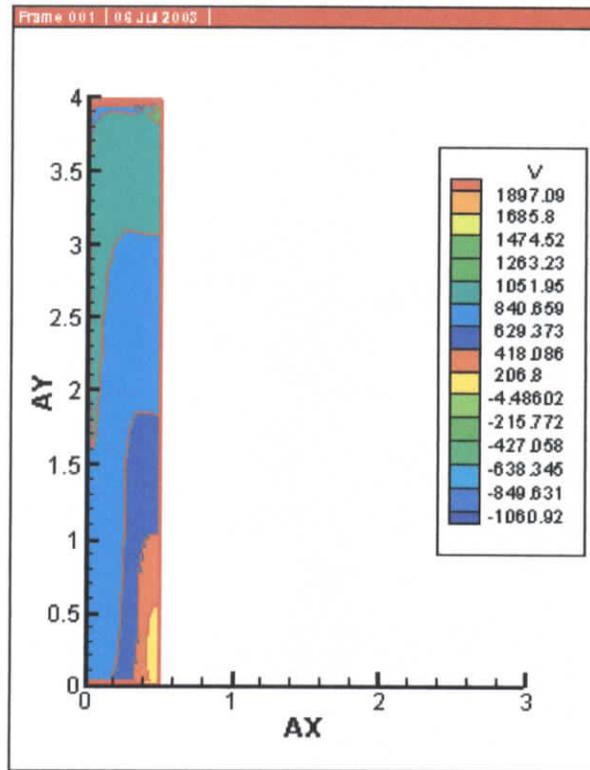
Prob2.3  
✓ Contour de  $Re_y$



Prob2.1

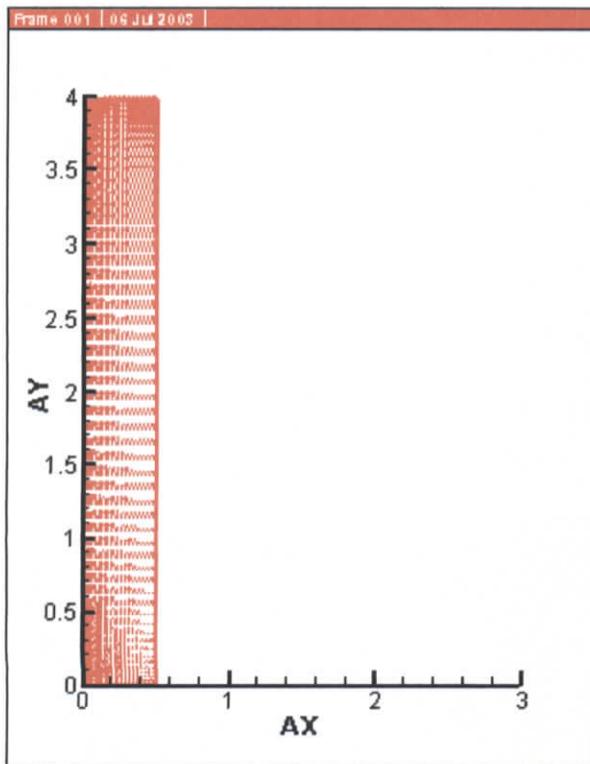


prob 2.2

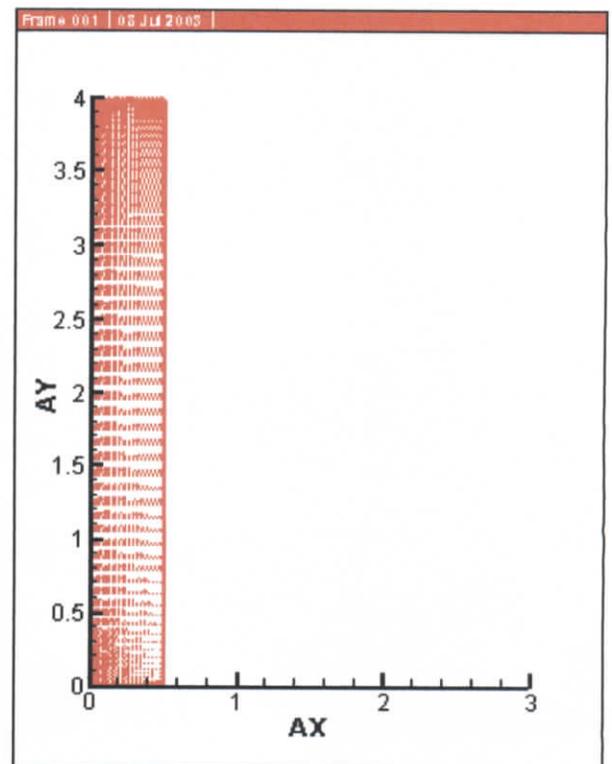


Prob2.3

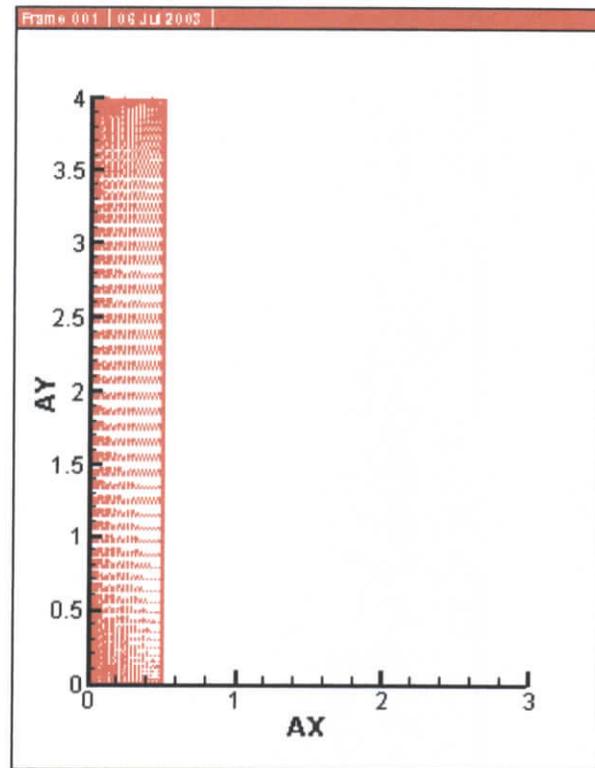
✓ Profils du vecteur vitesse adimensionnelle



Prob2.1

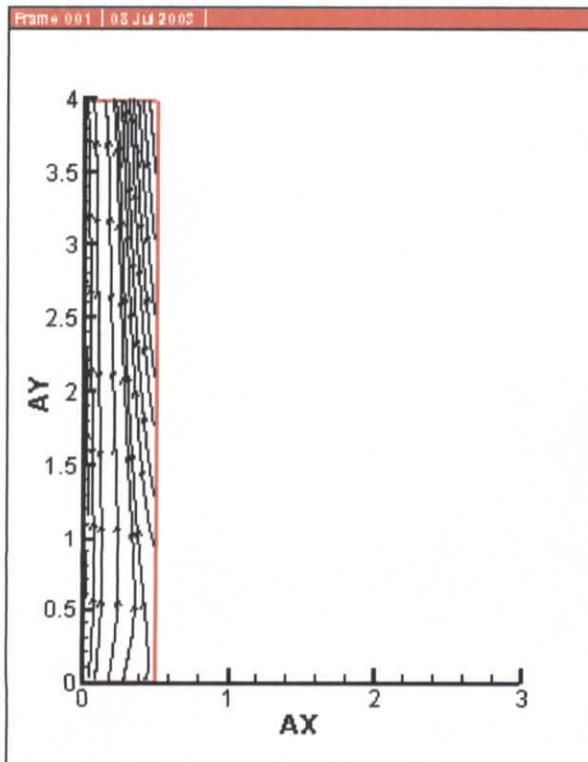


prob2.2

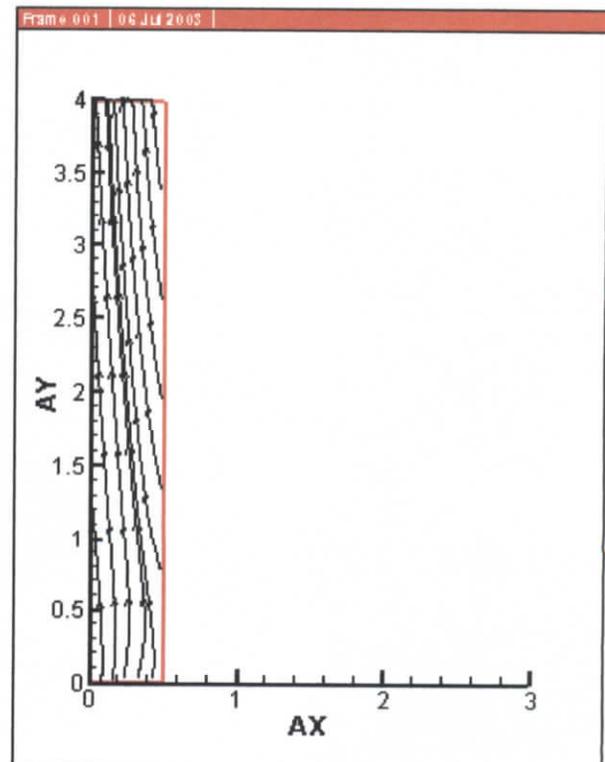


Prob2.3

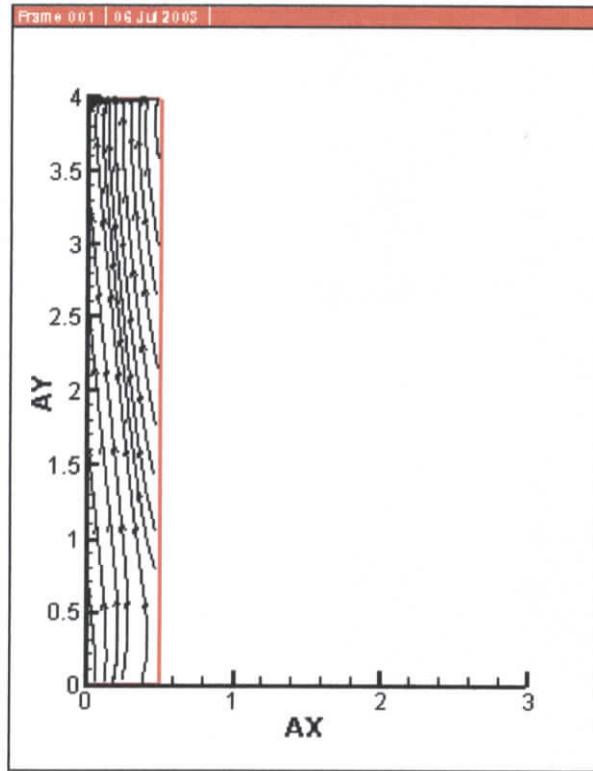
✓ Lignes de courant



Prob2.1

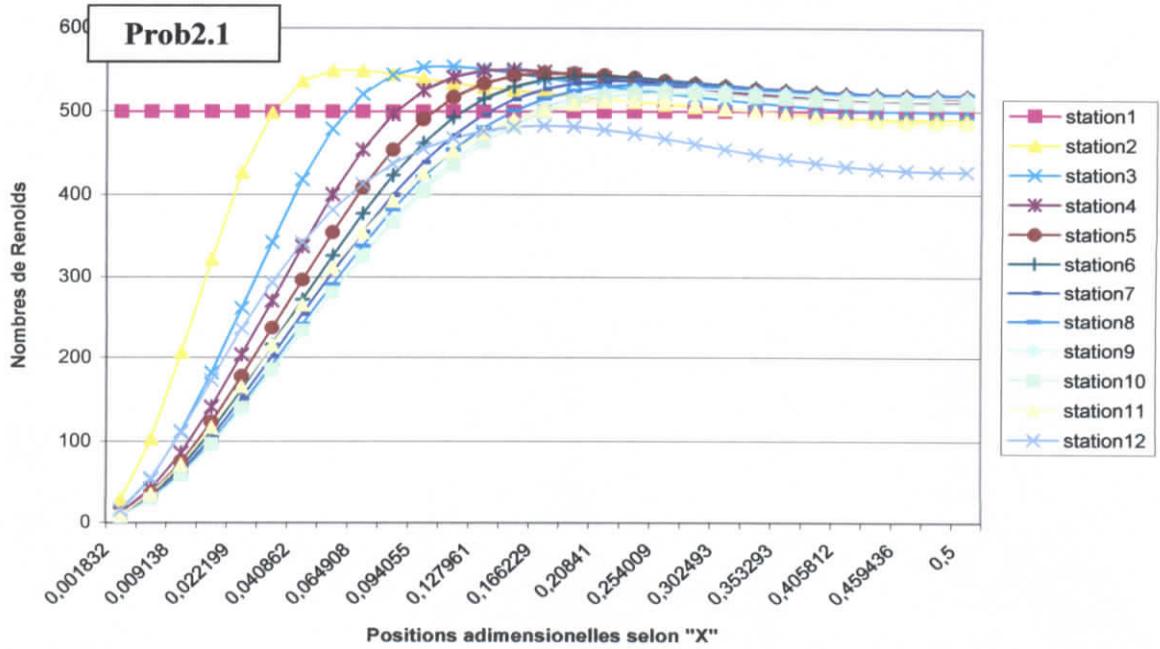


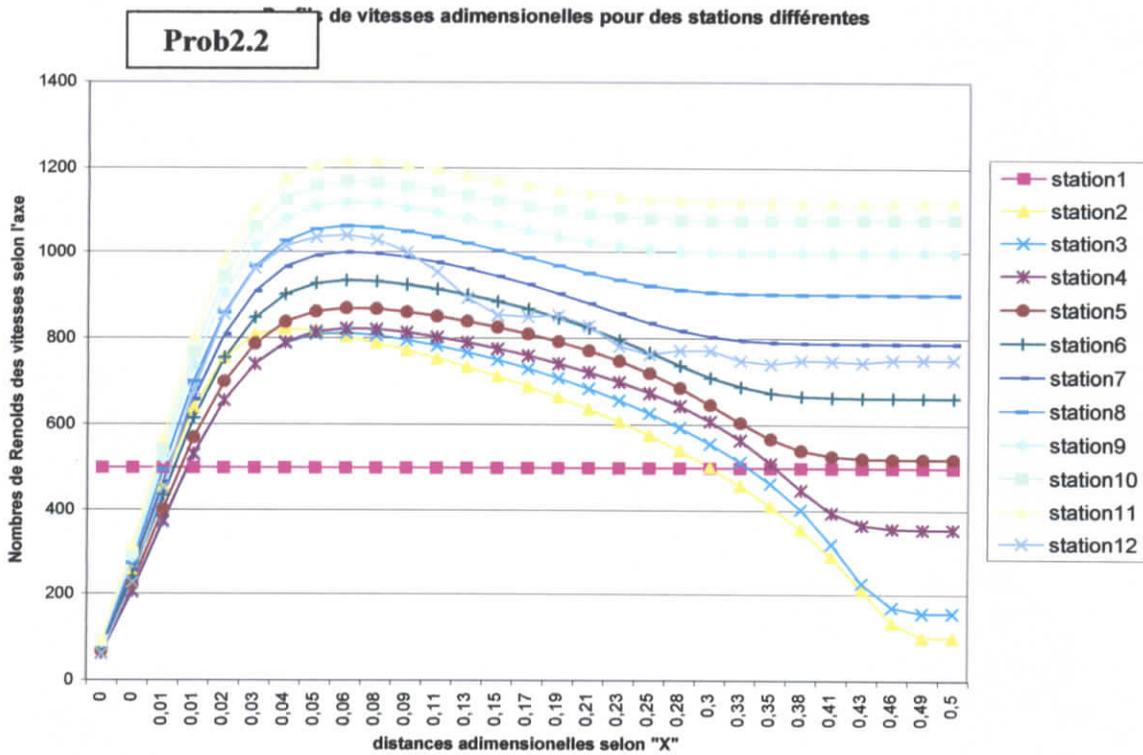
prob2.2



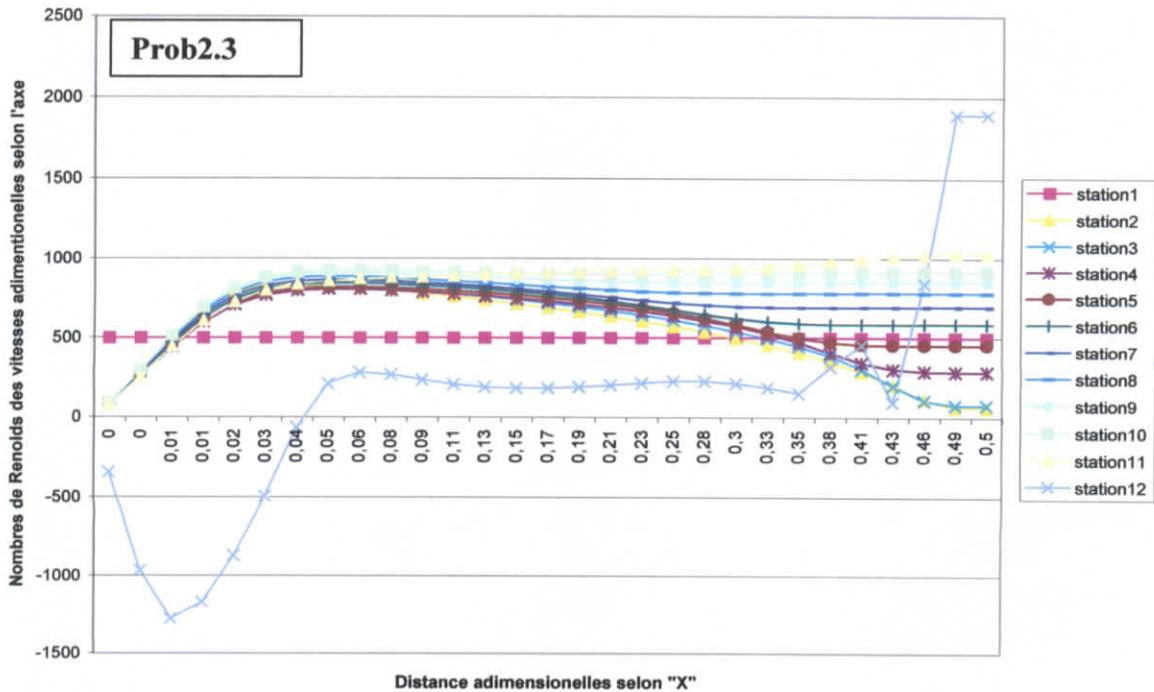
Prob2.3

Profils de vitesses adimensionnelles suivant l'axe l'axe du domaine ,pour des sections droites différentes





Profils des vitesses adimensionnelles pour des stations différentes.



## Interprétation pour les prob 2.1 – prob 2.3

Le but des prob2.1-prob2.3 est de mettre en évidence l'influence de la porosité de la paroi sur l'écoulement dans le domaine d'étude ,à cet effet ,nous avons pris un même nombre de Reynolds pour les 3 problèmes ,chaque problème traite une membrane donnée qui possède une porosité différente des deux autres ,mais en gardant les même dimensions du domaine d'étude .Les résultats obtenus en ce qui concerne le nombre de Reynolds de Microfiltration  $R_f$  sont les suivant :

membrane a :  $R_f = -12..67$

membrane b :  $R_f = -67.5$

membrane c :  $R_f = -93.8$

Ceci prouve clairement ,que la valeur de  $R_f$  est proportionnelles à la valeur de la porosité et ceci est donné par le modèle de porosité qu'on a adopté (modèle capillaire) .

En comparant les résultats obtenus lors de la résolution des problèmes 2.1 à2.3 on peut dire que :

L'augmentation de la porosité de la paroi ,qui impose par conséquent un nombre de Reynolds de filtration plus grand ,influe de manière significative sur l'écoulement ,l'influence est comme suit :

- Pour les profils de vitesses :A mesure que la porosité augmente les profils de la vitesse axiale s'aplatissent davantage jusqu'à atteindre une épaisseur très petite ,ceci est du à deux chose :

1-Le flux imposé à la paroi aspire le fluide ;l'information se propage jusqu'à l'axe ,et le vecteur vitesse subi la déviation de sa vitesse axiale ,ceci réduit cette dernière .

2-A mesure qu'on avance vers la sortie ,le débit  $R_e$  diminue ,car il y a un débit qui sort du domaine à travers les parois .Par conservation du débit volumique ' $R_s$ ' le nombre de Reynolds à la sortie sera égale à  $R_s = R_e - 2R_f$  ,cette diminution du débit influe directement sur la vitesse axiale et donne une diminution de cette dernière .

- Pour les lignes de courants :Plus la porosité augmente plus les lignes de courants de l'écoulement ,sont déviées vers les parois .Pour le cas prob2.3 cette déviation est importante vu la grande porosité de la membrane.

On peut expliquer cela par le faite que la condition de flux impose à la paroi provoque une aspiration du fluide dont l'influence s'étant jusqu'à l'axe ,et la vitesse axiale se voit ,pour le cas extrême ,devenir nulle ,à ce moment là la vitesse est perpendiculaire à l'axe .

## VI.4 Simulation du problème « Prob3 »

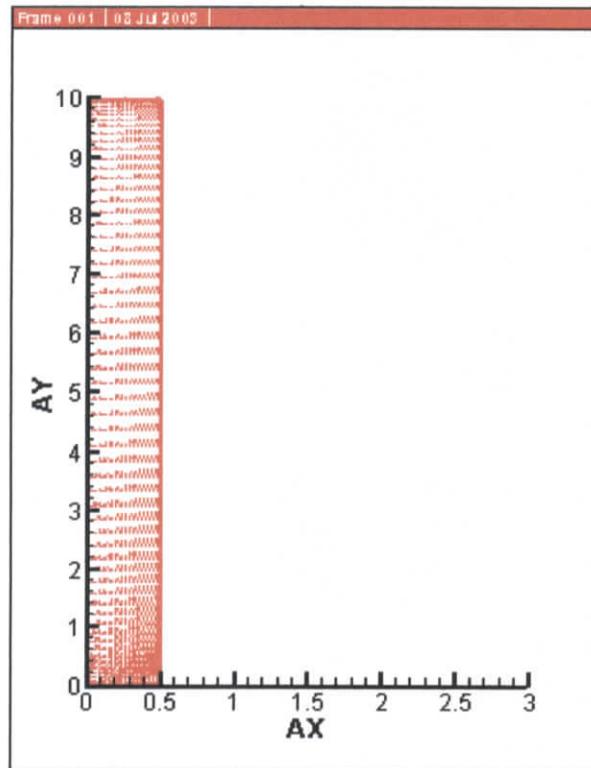
Le but du prob3 est de monter la concordance entre les résultats obtenus par notre programme qui est basé sur la méthode des volumes finis ,avec ceux obtenus par l'auteur [24]qui a résolu un problème relativement analogue au notre en utilisant la méthode des éléments finis ,en imposant un profil parabolique à l'entrée .

Pour comparer nos résultats à ceux publié par [24] ,nous devons utiliser les mêmes donnée du problème posé par l'auteur[24] , à savoir :

- Un profils de vitesses axiales parabolique à l'entrée ( écoulement développé)
- Un nombre de Reynolds entre  $R_e=900$ ,et  $R_e=1000$ .
- Les dimension du domaine complet sont : largeur = 0.05m et longueur = 0.5m
- Une paroi micro-poreuse dont le diamètre des pores varie entre  $10^{-7}$  m et  $10^{-8}$  m

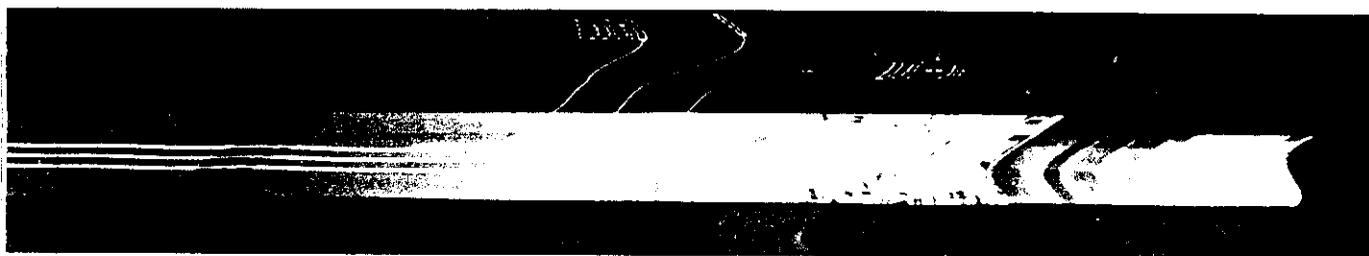
CHAPITRE VI.

Le résultat est représenté ci-dessous pour  $R_e = 990$  ,  $R_f = -12.25$



# ANNEXE I :

## PRÉCISION DE LA SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT



Dans le chapitre III une supposition à profile linéaire a été utilisée pour le calcul des gradients  $(\partial\phi/\partial x), (\partial\phi/\partial y)$  etc. Sur les faces du volume de contrôle .Pour des problèmes de diffusion simples ,la pratique donnait des résultats de précision acceptable même pour un maillage grossier .Dans l'exemple 4.3 nous avons aussi observé qu'on pouvait améliorer le résultat en raffinant le maillage .Pour améliorer l'exactitude de la solution le raffinement du maillage s'avère l'outil principal qui est à la disposition de l'utilisateur de la CFD .L'utilisateur accompli avant tout une simulation d'un maille grossière pour qu'il ait une impression de l'ensemble des caractéristiques de la solution .Par la suite ,le maillage est raffiné ,en plusieurs étapes ,jusqu'à l'obtention d'un maillage qui donne le même résultat que le précédent .Les résultats sont alors indépendants du maillage .Ici on a brièvement ,démontrer la base théorique de cette méthode d'amélioration de la précision et comparer l'ordre des systèmes de discrétisation tel une mesure d'efficacité.

Considérons le maillage unidimensionnel uniforme de pas  $(\Delta x)$  , représenté par la A.1.

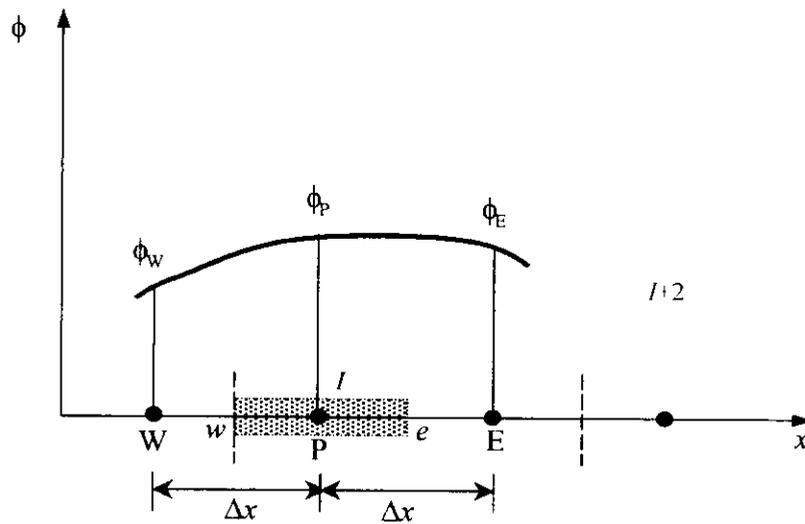


Fig. A.1

Pour une fonction  $\phi(x)$  le développement des séries de Taylor de  $\phi(x + \Delta x)$  au voisinage du point  $i$  en  $x$  est :

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (A.1)$$

Dans notre notation ,on utilise des valeurs discrètes , $\phi_p$  et  $\phi_E$  , pour  $\phi(x)$  et  $\phi(x + \Delta x)$  respectivement ,donc l'équation A.1 peut s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_E = \phi_p + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_p \Delta x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_p \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (A.2)$$

On réarrangent l'équation :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \Delta x = \phi_E - \phi_P - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x^2}{2} - \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x}{2} - \dots$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + \text{terme tronquer} \quad (\text{A.4})$$

En négligeant les termes tronqués ,qui impliquent la multiplicité du facteur  $\Delta x$  ,on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \quad (\text{A.5})$$

L'erreur entraînée dans l'approximation ( A.5 ) est due à la négligence des termes tronqués. La formule (A.3) suggère que l'erreur de troncation peut être réduite en diminuant  $\Delta x$  .

En général ,les termes tronqués d'un système tronqué contiennent des facteurs  $\Delta x^n$  . La puissance n de  $\Delta x$  gouverne le taux , quand l'erreur tend vers zéro ,d'où le raffinement du maillage ,se dernier se fait alors appeler ordre de la différence d'approximation .Par conséquent ,l'équation (A.5) est dite du premier ordre dans  $\Delta x$  ,on écrit alors :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{A.6})$$

Puisqu'elle utilise des valeurs aux points E et P(quand  $X_E > X_P$ ) ,pour évaluer le gradient  $(\partial\phi/\partial x)$  au point P ,la formule(A.6) est dite formule de première différence ,en considérant le point P.

De la même manière ,on peut tirer une formule de deuxième différence pour  $(\partial\phi/\partial x)$  au point P ,on utilisant :

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (\text{A.7})$$

Après calculs ,on trouve la formule de deuxième différence pour  $(\partial\phi/\partial x)$  au point P :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{A.8})$$

Les équations (A.7) et (A.8) sont toutes deux du premier ordre de précision .Les formules de première et de deuxième différence décrites ,impliquent des valeurs de  $\phi$  en seulement deux points .

en retranchant l'équation (A.7) de (A.8) ,nous obtenons :

$$\phi(x + \Delta x) - \phi(x - \Delta x) = 2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \Delta x + \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.9})$$

Une troisième formule pour  $(\partial \phi / \partial x)_P$  peut être obtenue en réarrangeant l'équation (A.9), telle que :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P = \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{A.10})$$

L'équation (A.10) utilise des valeurs en E et en W pour évaluer le gradient au point P, et elle est appelée formule de différence centrale. La formule de différence centrale est de précision de second ordre. La dépendance quadratique de l'erreur dans l'intervalle du maillage signifie qu'après le raffinement de ce dernier l'erreur diminue plus rapidement dans le système de différence du second ordre de précision, que dans le système du premier ordre de précision.

Dans la procédure de discrétisation du volume fini développé dans la partie...le gradient dans la face cellulaire, par exemple en 'e', été évalué en utilisant :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} = \frac{\phi_E - \phi_P}{2(\Delta x/2)} \quad (\text{A.11})$$

En comparant les formules (A.10) et (A.11), on peut facilement reconnaître que l'équation (A.11) évalue le gradient en un point milieu entre P et E, en utilisant la formule de différence centrale en 'e', par conséquent sa précision est du second ordre, pour les maillage uniformes.

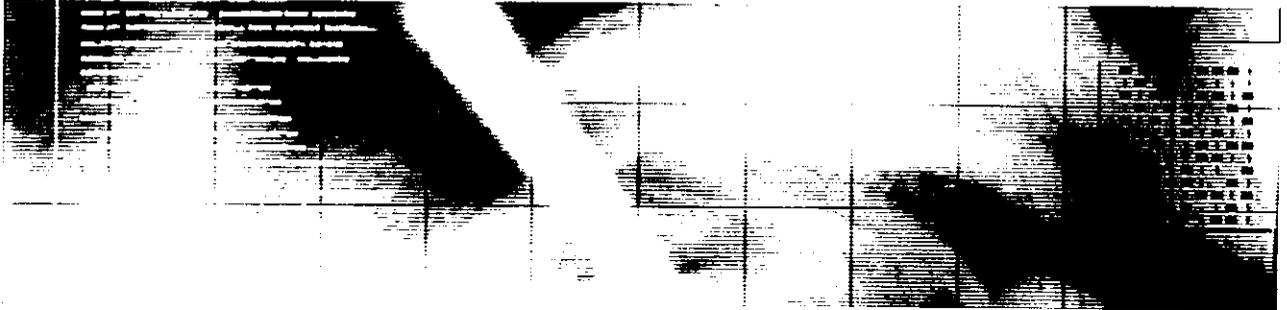
$$\phi_e = \frac{3}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \quad (\text{A.12})$$

$$\phi_E = \phi_e + \frac{1}{2}\Delta x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}\Delta x \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + O(\Delta x^3) \quad (\text{A.13})$$

$$\phi_E = \phi_e - \frac{1}{2}\Delta x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}\Delta x \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + O(\Delta x^3) \quad (\text{A.14})$$

$$\phi_E = \phi_e - \frac{3}{2}\Delta x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e + \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2}\Delta x \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + O(\Delta x^3) \quad (\text{A.15})$$

# BIBLIOGRAPHIE :



## BIBLIOGRAPHIES

- [1] J.P. Duroudier.  
« Pratique de la filtration », Hermes Science Publication, Paris (1999)
- [2] J. Mallevalle, P.E. Odendall, and M.R. Wiesner.  
« Water treatment membrane processes ».1999. McGraw-Hill, New York.
- [3] S. Milidovich and al.  
« Membrane Separation and ultrafiltration », CHE-396 Senior Design Report.USA
- [4] Osmonics, Inc.  
« Osmonics Pure Water Handbook »,2<sup>nd</sup> Edition.1991. Minnetonka. USA
- [5] M. Mulder.  
« Basic Principles of Membrane Technology »,Kluwer Academic Publishers,Dordrecht.1991. The Netherlands
- [6] S. Casani and al.  
« Cross Flow filtration of Fruit Juice », Working Report N° 13. University of Denmark. 2000. Denmark.
- [7] H. Zhou and D.W. Smith.  
« Advanced technologies in water and wastewater treatment », 2002. NRC Canada.
- [8] S. Bhattacharjee,A.S. Kim, and M. Elimelech.  
« Concentration Polarization of Interacting Solute particles in Crossflow membrane Filtration », Journal of Colloid and Interface Science, Volume 212, April 1999, pages 81-99.
- [9] L. Song,M. Elimelech.  
« Theory of concentration polarisation in cross flow filtration », J.Chem, Soc. Faraday Trans. 1995, pages 3389-3398.

- [10] A. Maurel.  
«Techniques separatives à membranes », Technique de l'ingénieur, ref. J 2 790.  
Index Avril 2000.
- [11] A.G. Fane and J. M. Radovich  
« Membrane systems in Separation Process in Biotechnology », ed. by J.A. Asenjo, Marcel Dekkar, New York, 1990.
- [12] Url : <http://www.solvaymembranes.com/infocus/whataremembranes/>
- [13] URL : <http://www.schoonoverinc.com/products>
- [14] URL : <http://www.h2oinnovation.com>
- [15] URL : <http://www.pall.com/laboratory/combichem/>
- [16] URL : <http://www.Osmonics.com>
- [17] H.K. Versteeg & W. Malalasekera  
« An introduction to Computational Fluid Dynamics –The Finite Volume Method- », ed. by Prentice Hall,England, 1995.
- [18] Suhas V. Patankar  
« Numerical Heat Transfer and Fluid Flow », ed. by Hemisphere PublishingCorporation, New York, 1980.
- [19] Suhas V. Patankar  
« Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer », ed. by Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1988.
- [20] A. Jardy, H. Combeau et JP. Bellot  
« Simulation Numerique des Phenomenes de Transport », Cour de l'Ecole des Mines de Nancy.France,2001.

[21] H. Schlichting

« Boundary-Layer Theory », ed. by McGraw-Hill, New York, 1968.

[22] R W.Fox & A.T. McDonald

« Introduction to Fluid Mechanics », ed. by John Wiley & Sons , Inc,USA,1994.

[23] Frank M. White

« Fluid Mechanics », ed. by McGraw-Hill Companies, USA, 2001.

[24] V. Nassehi

« Modeling of Combined Navier Stokes and Darcy Flow in Cross Membrane Filtration », Chemical Engineering Science ,Vol 53,No 6, pp,1253-1265, 1998