

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
 MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

BIBLIOTHEQUE — المكتبة
 Ecole Nationale Polytechnique

Filière : Electronique

Spécialité : Signaux et Systèmes

Option : Systèmes de Traitement de l'Information

Sujet :

**Exploitation de la Diversité Spatiale et Fréquentielle
 pour
 l'Estimation des Paramètres de Propagation
 dans
 les Systèmes de Communications à Multiporteuses**

Présenté par :

Mr. AOUADA Saïd

Ingénieur d'Etat en Génie Electrique de l'INELEC

Devant le Jury constitué de MM. :

A. ZERGUERRAS	Professeur, Chargé de Recherche, Président	(E.N.P.)
A. BÉLOUHRANI	Docteur d'Etat, Chargé de Recherche, Rapporteur	(E.N.P.)
H. BOUSBIA-SALAH	Chargé de Recherche, Chargé de Cours	(E.N.P.)
B. BOUSSEKSOU	Chargé de Recherche, Chargé de Cours	(E.N.P.)
M. DJEDDOU	Chargé de Cours	(E.M.P.)



Remerciements

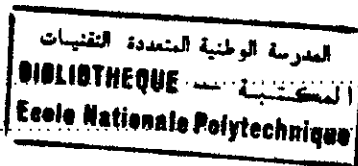
Je tiens à remercier mon rapporteur et professeur, Dr. A. Belouchrani, pour ses conseils et enseignements, pour ses encouragements et son aide sur tous les plans.

Je remercie également les membres de ma famille pour leur aide, et plus particulièrement mon frère Rostom pour son engagement et son intérêt.

Merci à tous ceux qui, de loin ou de près, ont fait que l'aboutissement de ce travail soit possible.

Table des matières

Résumé.....	IV
Notations.....	V
Chapitre 1 : Introduction à la transmission sans fils à multiporteuses.....	1
1.1. Introduction.....	1
1.2. Environnement de transmission sans fils.....	3
1.2.1. Etallement tridimensionnel du canal.....	4
1.2.2. Modèle du canal dans un environnement de transmission sans fils.....	8
1.3. Système de transmission à multiporteuses.....	10
1.3.1. Modulation à multiporteuses.....	11
1.3.2. La démodulation.....	13
Chapitre 2 : Estimation des paramètres de propagation.....	16
2.1. Transmission de données sans fils à multiporteuses.....	16
2.1.1. Modèle du canal.....	17
2.1.2. Estimation du canal.....	20
2.1.2.1. Estimation du canal par les moindres carrés.....	20
2.1.2.2. Estimation aveugle du canal.....	20
2.1.2.2.1. Méthode du maximum de vraisemblance.....	21
2.1.2.2.2. Méthode du sous-espace canal.....	23
2.2. Estimation conjointe des paramètres de propagation.....	26
2.2.1. Modèle du canal pour l'estimation conjointe.....	26
2.2.2. Formulation mathématique du problème de l'estimation conjointe.....	28
2.2.3. Conditions d'identifiabilité.....	29
2.2.4. Considération de la largeur de bande de cohérence.....	29
2.2.5. Estimation conjointe en utilisant les principes de 2D-MUSIC.....	31
2.2.6. Estimation conjointe en utilisant les principes de 2D-ESPRIT.....	35
2.2.6.1. Algorithme FSI-JADE-ESPRIT (Frequency-Shift-Invariance JADE).....	35
2.2.6.2. Algorithme MC-JADE-ESPRIT (Multicarrier JADE).....	40
2.2.6.3. Estimation du sous-espace canal.....	43
2.2.6.4. Diagonalisation conjointe.....	44



2.2.6.4.1. Méthode "T".....	44
2.2.6.4.2. Méthode "Q".....	45
2.2.6.5. Cas de décalages temporels identiques.....	45
2.2.6.6. Remarques.....	46
Chapitre 3 : La borne de Cramer-Rao.....	48
3.1. Introduction.....	48
3.2. Généralités.....	48
3.3. Calcul de la borne de Cramer-Rao pour MC-JADE.....	51
Chapitre 4 : Simulations.....	55
4.1. Introduction.....	55
4.2. Illustration de la fonction bidimensionnelle de 2D-MUSIC.....	55
4.3. Performances élémentaires de MC-JADE-ESPRIT.....	58
4.3.1. Effet de la puissance du bruit.....	58
4.3.2. Comparaison avec SI-JADE.....	58
4.3.3. Comparaison avec FSI-JADE-ESPRIT.....	60
4.3.4. Résolution de l'algorithme.....	61
Chapitre 5 : Conclusion.....	64
Références.....	65
Annexe A : Produit de Kronecker.....	67
Annexe B : Algorithme SI-JADE (Shift-Invariance JADE).....	68
Annexe C : Calcul de la borne de Cramer-Rao pour MC-Jade (Détails).....	71
Annexe D : Liste des publications.....	74
Glossaire.....	75

ملخص :

إن تخصيص القنوات المتعددة المسارات مطهر أساسي من مطهر نقل المعلومات اللاسلكي. هذا التخصص يستلزم إدراك عناصر الانتشار المتعدد المسارات. فيما يلي ندرس التقدير التثاني للروايا و التواصل الرمنية المتعلقة بأنظمة الفواصل الرمنية المتعلقة بأنظمة المواصلات المتعددة الواترات الحاملة في بيئة متعددة المسارات. عكس الأنظمة الأحادية الواتر الحامل، تتحمل الأنظمة المتعددة الواترات أقدلات مختلفة مع تزايد عدد الواترات، و عليه، أخذت هذه المرة بعين الاعتبار. تستعمل طرق التقدير المدروسة التنوع الفضائي و الواتر في فضلا عن التوت بالنسبة للاستحباب الواتر في الذين يميزان هذه الأنظمة. يحصل التقدير التثاني بتطبيق طرق القضاء الجازمي المشابهة لطريقة ESPRIT الثائية البعد. تستعمل تظاهرات لتوضيح النتائج الأساسية لطرق القضاء من خلال مقارنات مع Cramer-Rao.

ABSTRACT

Characterizing multipath channels is a key issue for wireless data transmission. This characterization implies the knowledge of the multipath propagation parameters. We investigate joint angle and delay estimation methods for multicarrier communication systems in a multipath environment. In contrast to single-carrier systems, multicarrier systems undergo different fading as the number of carriers increases, so provision is made to cope with this particularity. The methods exploit space and frequency diversity as well as frequency shift invariance properties associated with the multicarrier systems. Closed-form estimation is achieved by applying subspace-based 2-D ESPRIT-like techniques. Simulations are used to assess basic performances of the algorithms through comparison with the Cramer-Rao bound.

RESUME

La caractérisation des canaux à trajets multiples est un aspect fondamental pour la transmission sans fils de données. Cette caractérisation implique la connaissance des paramètres de propagation à trajets multiples. Nous examinons des méthodes d'estimation conjointe des angles et des délais temporels d'arrivée, pour des systèmes de communication à multiporteuses dans un environnement à trajets multiples. Contrairement aux systèmes à porteuse unique, les systèmes à multiporteuses subissent des atténuations différentes pour des nombres croissants de porteuses. Cette particularité est prise en considération. Les méthodes exploitent la diversité spatiale et fréquentielle ainsi que l'invariance aux décalages fréquentiels associés aux systèmes multiporteuses. Une estimation analytique est obtenue en appliquant des techniques sous-espace similaires à 2-D ESPRIT. Les performances élémentaires des algorithmes sont illustrées par des simulations à travers des comparaisons avec la borne de Cramer-Rao.

Mots clés

Transmission sans fils, Modulation Multiporteuses, Estimation conjointe, Paramètres de propagation, Diversité Fréquentielle, Diversité Spatiale, 2D-ESPRIT, 2D-MUSIC, Borne de Cramer-Rao.

Notations

θ_q Angle d'arrivée correspondant au q -ème trajet

τ_q Décalage temporel correspondant au q -ème trajet

$\beta_c(q)$ Atténuation complexe correspondant au q -ème trajet et à la porteuse d'indice c

$\mathbf{a}(\theta)$ Vecteur de la réponse de l'antenne aux angles d'arrivée des trajets multiples

$\mathbf{G}(\tau)$ Matrice des échantillons de la forme d'onde, décalés par l'effet des trajets multiples

\mathbf{S}_c Matrice des symboles transmis sur la porteuse d'indice c

\mathbf{Y}_c Matrice des échantillons du signal reçu par l'antenne sur la porteuse c

\mathbf{H}_c Matrice des échantillons du canal de transmission correspondant à la porteuse d'indice c

\mathbf{Z}_c Matrice des échantillons du bruit additif (bruit thermique des capteurs de l'antenne,...) sur la porteuse d'indice c

\mathbf{N}_c Matrice des échantillons du bruit d'estimation du canal correspondant à la porteuse d'indice c

T_m Étalement temporel du canal

B_{coh} Largeur de bande de cohérence du canal

T Période symbole

C Nombre de fréquences porteuses

M Nombre d'éléments de l'antenne réceptrice

L Largeur du canal de transmission

Q Nombre de trajets multiples

μ Nombre de porteuses dont les atténuations sont identiques

m Nombre de blocs de μ porteuses possédant la même atténuation complexe

\otimes Produit de Kronecker

\circ Produit de Khatri-Rao (Produit de Kronecker inter-colonnes)

$*$ Transposition conjuguée complexe

T Transposition de matrice

\Re partie réelle

\Im Partie imaginaire

\dagger Pseudo-Inverse de Moore-Penrose

$\lfloor \rfloor$ Partie entière

$E \{ \}$ Espérance mathématique

Chapitre 1

Introduction à la transmission sans fils à multiporteuses

1.1. Introduction

Avec l'avènement de la radiodiffusion au début du 20^e siècle, la transmission sans fils de données (Wireless Data Transmission) a suscité un intérêt croissant auprès de la communauté des chercheurs en traitement du signal. Depuis les années 1990, les tendances des travaux de recherche sont essentiellement orientées vers l'exploration des diversités inhérentes dans les systèmes à sorties multiples. Ces derniers peuvent être vus comme des systèmes à multicapteurs¹, des systèmes d'acquisition de données multicanaux ou encore des systèmes à échantillonnage fractionnel. La transmission de données par ce type de systèmes se fait normalement à travers un canal caractérisé par des trajets multiples (Multipath Channels). La modélisation des canaux à trajets multiples est de ce fait fondamentale pour plusieurs applications telles que les "communications sans fils", "le radar", "le sonar" et "l'exploration sismique".

La technologie émergente, parfois appelée "Antenne Intelligente (Smart Antenna)" ou plus précisément "Traitement Spatio-Temporel (Space-Time Processing)" s'est très vite avérée critique pour l'amélioration des performances et de l'aspect économique de ces systèmes. Le traitement simultané en temps et dans l'espace des signaux de sortie des éléments de l'antenne procure trois avantages essentiels. Le premier est le gain de l'antenne qui se traduit par une réception plus importante de l'énergie du signal par les capteurs multiples, améliorant ainsi le Rapport Signal sur Bruit (Signal-to-Noise Ratio : SNR). Le deuxième avantage consiste en la diversité spatiale, ce qui permet de combattre l'atténuation par sélectivité spatiale. Enfin, le traitement spatio-temporel contribue à la réduction des interférences des canaux adjacents.

Les paramètres de propagation à travers des trajets multiples incluent entre autres, les "Angles ou Direction d'Arrivée (Direction Of Arrival: DOA)" et les "Décalages Temporel d'Arrivée (Time Difference Of Arrival: TDOA)". Il est

¹Antennes à éléments multiples par exemple.

évident que l'estimation de ces paramètres à partir d'une antenne multicapteurs est essentielle dans les applications mentionnées préalablement, où les paramètres estimés procurent une meilleure caractérisation du canal de transmission pour les traitements ultérieurs. Le traitement spatio-temporel y joue un rôle fondamental vu les avantages qu'il présente.

L'estimation conjointe des angles et des décalages temporels d'arrivée (Joint Angle and Delay Estimation: JADE) a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, où des solutions itératives [1] et d'autres analytiques plus attrayantes pour le traitement en temps réel [2, 3] ont été proposées. Tous ces algorithmes supposent des systèmes à modulation sur une porteuse unique (Single Carrier Modulation: SCM). Dans les systèmes à multiporteuses (MultiCarrier Modulation: MCM) tels que la "Télédiffusion Numérique Terrestre (Digital Television Terrestrial Broadcasting: DTTB)" ou la "Radiodiffusion Numérique Terrestre (Digital Audio Broadcasting: DAB)", le signal transmis est soumis aux effets d'un canal à propagation multitrajets, causés par les obstacles terrestres distants et la nature hexogène du milieu [5, 6].

Les méthodes d'estimation conjointe associées aux systèmes à porteuse unique sont, évidemment, applicables aux systèmes à multiporteuses, mais elles n'exploitent pas la diversité fréquentielle disponible et offerte par le nombre total des porteuses. Les méthodes proposées dans [2, 3, 4] reposent sur la connaissance et l'exploitation des informations temporelles et spatiales, c.à.d., la géométrie de l'antenne et la fonction de modulation. Les données du canal sont restructurées. Cette restructuration réduit le problème à un cas pouvant être résolu par une méthode similaire à ESPRIT. Pour la modulation à multiporteuses, ces algorithmes, appliqués à chaque porteuse séparément, procurent une estimation multiple des paramètres, cependant au prix de calculs répétés.

Dans ce travail de thèse de Magister, nous examinerons l'estimation conjointe des paramètres de propagation multitrajets associés aux systèmes à multiporteuses. Pour cela, on considère un système à une source émettrice unique et une antenne receptrice multicapteurs unique. Le modèle du canal dérivé correspondant au système en question, souligne la "diversité fréquentielle" du système. Tout comme pour les systèmes à porteuse unique, le modèle pour l'estimation conjointe dans les systèmes à multiporteuses exploite la stationarité des paramètres sur le temps de cohérence du canal. Ce modèle est le résultat du fait que les angles et les décalages temporels d'arrivée sont les mêmes sur toutes les porteuses. La principale différence entre ce modèle et celui correspondant au système à porteuse unique, réside dans le fait que l'atténuation complexe attribuée à chaque trajet est différente d'une porteuse à une autre, du fait que deux porteuses séparées en fréquence par un intervalle supérieur à la largeur de bande de cohérence du canal sont atténuées différemment. L'espacement uniforme entre les porteuses résulte en une invariance par rapport aux décalages fréquentiels qui, en combinaison avec une géométrie d'antenne

connue, permet une estimation analytique des paramètres.

Le présent mémoire est donc organisé de la manière suivante: Les définitions essentielles des paramètres caractérisant l'environnement (canal) de transmission sans fils seront exposées dans ce qui suit ainsi que les principes de modulation et de démodulation à multiporteuses. Les notions du chapitre 1 seront ensuite exploitées dans le chapitre 2 pour développer analytiquement le modèle du canal de transmission de données sans fils à multiporteuses. Une fois le modèle du canal développé, la formulation du problème de l'estimation conjointe des paramètres de propagation sera introduite. Différentes techniques d'estimation y seront introduites en mettant l'accent sur l'exploitation des principes de la méthode ESPRIT. L'indice de performance des méthodes basées sur ESPRIT et développées dans ce chapitre sera calculé dans le chapitre suivant, à savoir le chapitre 3. Cet indice est en fait la "Borne de Cramer-Rao". Pour illustrer ces performances, des exemples de simulation seront présentés et commentés dans le chapitre 4, en mettant toujours l'accent sur les techniques basées sur ESPRIT. Enfin, une conclusion synthétique fera l'objet du chapitre 5.

1.2. Environnement de transmission sans fils

Un schéma de canal de transmission à trajets multiples est illustré dans la figure 1.1. Le signal émis se propage vers l'antenne réceptrice à travers différents trajets, chacun se caractérisant par ses propres décalage et atténuation. Ces trajets aboutissent vers le récepteur avec des angles d'arrivée variables. Les trajets composites induisent un canal différent au niveau de chaque élément de l'antenne réceptrice, du fait des différences de phases relatives des trajets.

En pratique la propagation à travers les trajets multiples est perçue de différentes manières. La conception d'un système de communication sans fils par exemple, suppose que le récepteur (antenne ou capteurs) ne reçoit que l'énergie qui lui est transmise directement. Cependant, le signal transmis est souvent sujet à des réflexions, réfractions ou dispersions dues à des objets statiques ou mobiles, faisant du signal total reçu une combinaison linéaire de versions décalées et pondérées du signal transmis.

Dans un système radar, le même phénomène est observé, où le récepteur reçoit le signal réfléchi par la cible dans différentes directions.

Le sonar représente le moyen le plus efficace pour la radiographie sous-marine. Il se base sur un ensemble de capteurs acoustiques sous-marins appelés "hydrophones". Comme la propagation d'une onde acoustique dans l'eau est soumise à de nombreuses variations, les enregistrements du sonar sont en fait

le résultat de la propagation d'un même signal via des trajets différents.

En sismologie d'exploration, de manière similaire au sonar, un signal d'excitation est généré à la surface de la terre. Un ensemble de "géophones" est ensuite utilisé pour recevoir la superposition des signaux réfléchis et/ou réfractés.

1.2.1. Étalement tridimensionnel du canal

La propagation à trajets multiples se traduit par l'étalement du signal en trois dimensions. Le "décalage temporel", le "décalage fréquentiel" et le "décalage spatial".

Avec le mouvement du récepteur (de l'émetteur ou des réflecteurs), la réponse impulsionnelle du canal de transmission est sujette à des fluctuations aléatoires. Aussi, comme le nombre de réflecteurs influant sur chaque trajet est très important, la réponse impulsionnelle du canal peut être considérée comme un processus aléatoire gaussien complexe de moyenne nulle.

Soit $C(\tau, t)$ la réponse impulsionnelle continue dans le temps du canal de transmission à trajets multiples vers une antenne omnidirectionnelle. $C(\tau, t)$ est considérée comme gaussienne et variable dans le temps. En admettant que le canal est stationnaire au sens large, sa fonction de corrélation est une fonction du temps et de la différence temporelle d'arrivée Δt , c.à.d.

$$\phi_C(\tau_1, \tau_2, \Delta t) = E \{C^*(\tau_1, t)C(\tau_2, t + \Delta t)\} \quad (1.1)$$

où $E \{.\}$ représente l'espérance mathématiques.

Dans un modèle de canal stationnaire au sens large et à dispersions non corrélées, l'équation (1.1) devient

$$\begin{aligned} \phi_C(\tau_1, \tau_2, \Delta t) &= \phi_C(\tau_1, \Delta t)\delta(\tau_1 - \tau_2) \\ &= \phi_C(\tau, \Delta t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pour $\Delta t = 0$, on obtient $\phi_C(\tau, 0) = \phi_C(\tau)$. Cette fonction de corrélation est un indicateur de la puissance reçue en fonction du décalage relatif τ . Elle est appelée "profil d'intensité multi-trajets" (voir figure 1.2). Ici, l'intervalle T_m

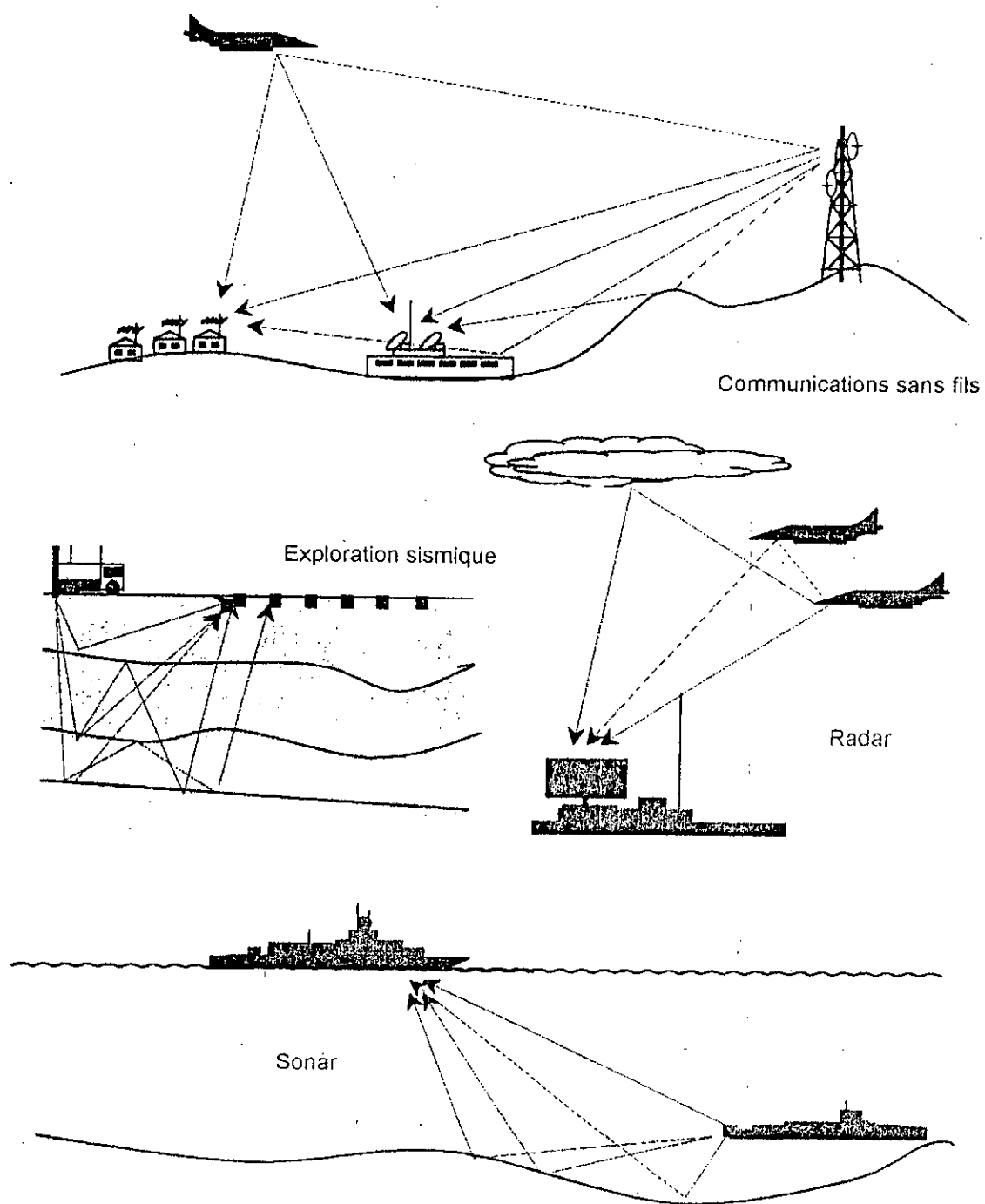


Figure 1.1: Exemples de systèmes de transmission à trajets multiples.

des valeurs de τ sur lequel le profil est significatif, est appelé "étalement temporel" du canal. L'étalement temporel est le résultat de l'arrivée de plusieurs versions décalées et pondérées du signal transmis sur le récepteur.

De manière similaire, on peut examiner le canal dans le domaine fréquentiel. Ainsi, on considère la transformée de Fourier de la fonction de corrélation (1.2) par rapport au décalage τ . En se rappelant la stationnarité au sens large du canal, la transformée de Fourier en question est

$$\Phi_C(f, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\tau, \Delta t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.3)$$

Pour $\Delta t = 0$, on obtient $\Phi_C(f, 0) = \Phi_C(f)$. L'intervalle fréquentiel, noté B_{coh} sur lequel cette fonction d'autocorrélation est significative est appelé "largeur de bande de cohérence" du canal. Il est approximativement égal à $B_{coh} = \frac{1}{T_m}$, vu la relation entre les domaines temporel et fréquentiel de la transformée de Fourier.

Si la largeur de bande du signal transmis est supérieure à la largeur de bande de cohérence du canal, les trajets multiples provoquent des atténuations à sélectivité fréquentielle, c.à.d., les fréquences du signal transmis seront atténuées différemment.

Aussi, si deux fréquences porteuses sont séparées par un intervalle fréquentiel inférieur à la largeur de bande de cohérence du canal, elles sont considérées comme atténuées identiquement. Inversement, deux porteuses séparées par un intervalle supérieur à la largeur de bande de cohérence sont considérées comme atténuées différemment.

Pour avoir une indication sur la variation de la réponse fréquentielle du canal en fonction du temps, on considère la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $\Phi_C(f, \Delta t)$ par rapport à Δt . Celle-ci est donnée par

$$S_C(f, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_C(f, \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (1.4)$$

La fonction non négative $S_C(0, \lambda) = S_C(\lambda)$ est appelée "spectre de puissance Doppler" ou "étalement fréquentiel" du canal.

La largeur de bande du spectre de puissance Doppler est désignée par B_d et le "temps de cohérence du canal" est approximativement égal à $T_{coh} = \frac{1}{B_d}$, ce

qui correspond à l'intervalle de temps sur lequel le canal est considéré comme relativement constant.

L'étalement fréquentiel est le résultat de la mobilité de l'utilisateur ainsi que les réflecteurs locaux qui se situent aux voisinage du mobile. Ce décalage fréquentiel provoque une atténuation à sélectivité temporelle.

Pour une porteuse f_c , le temps de cohérence peut être obtenu par [3]

$$t_{coh} = \frac{c}{v f_c} \quad (1.5)$$

où c est la vitesse de la lumière et v est la vitesse de l'utilisateur.

Le décalage spatial du canal réfère à l'étalement des angles d'arrivée sur les éléments de l'antenne réceptrice. Il est montré en outre que l'étalement angulaire est proportionnel au décalage temporel et inversement proportionnel à la séparation entre l'émetteur et le récepteur. L'étalement angulaire provoque une atténuation à sélectivité spatiale. Il est aussi caractérisé par la distance de cohérence qui lui est inversement proportionnelle.

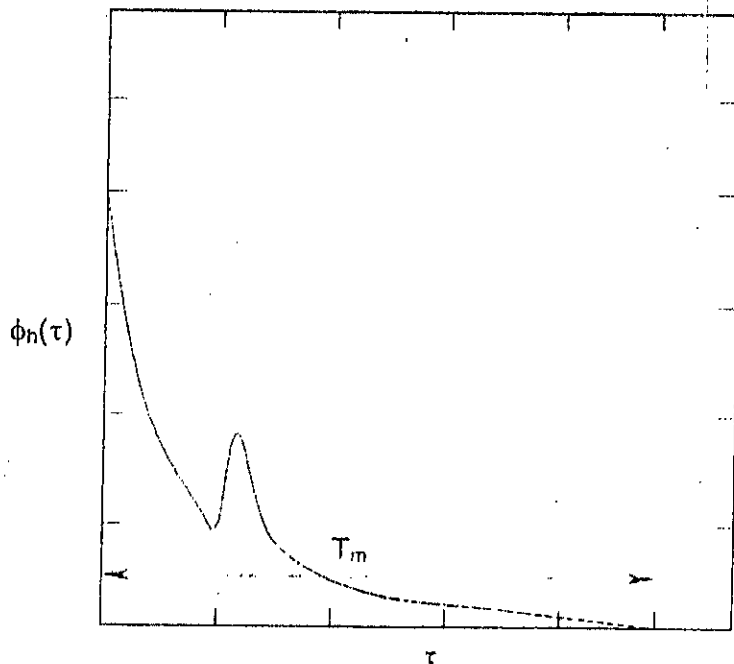


Figure 1.2: Exemple d'une courbe de profil d'intensité.

1.2.2. Modèle du canal dans un environnement de transmission sans fils

Pour un utilisateur unique, on développe ici un modèle de canal, en considérant une antenne à éléments multiples. Le schéma du modèle du canal obtenu est illustré sur la figure 1.3. On note que le canal $\mathcal{C}(t)$ est stationnaire sur l'intervalle d'étude, c.à.d., sur son temps de cohérence T_{coh} . En supposant un modèle de canal à nombre discret et fini de trajets, on peut exprimer $\mathcal{C}(t)$ par

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{q=1}^Q \beta_q(t) \delta(t - \tau_q) \quad (1.6)$$

où $\beta_q(t)$ et τ_q désignent l'atténuation complexe et le décalage temporel du q -ème trajet, respectivement. Q est le nombre total de trajets et $\delta(\cdot)$ est la fonction de Dirac.

Soit $x(t)$ l'équivalent en bande de base du signal transmis. $x(t)$ dépend de la fonction de modulation et des données informationnelles transmises. Pour une modulation linéaire, on peut écrire

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT) s[k]. \quad (1.7)$$

où $s[k]$ désigne les symboles transmis, T la période symbole et $g(t)$ la forme d'onde de modulation effective et continue dans le temps, qui inclut les effets des filtres de transmission et de réception.

On considère une antenne à M éléments. En omettant le bruit, le signal en bande de base au i -ème élément de l'antenne, $y_i(t)$, peut être exprimé par

$$y_i(t) = \sum_{q=1}^Q a_i(\theta_q) \beta_q(t) x(t - \tau_q) \quad (1.8)$$

où $a_i(\theta_q)$ est la réponse du i -ème capteur au q -ème trajet incident d'un angle θ_q . Donc, l'équation (1.8) peut être réécrite de la manière suivante

$$y_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^Q a_i(\theta_q) \beta_q(t) g(t - \tau_q - kT) s[k] \quad (1.9)$$

Ce signal peut être aussi réécrit comme suit

$$y_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] h_i(t - kT) \quad (1.10)$$

où $h_i(t)$ est la réponse impulsionnelle composite en bande de base du canal entre l'émetteur et le i -ème élément de l'antenne et qui se traduit par la convolution du canal physique et la forme d'onde, c.à.d., $h_i(t) = \mathcal{C}(t) * g(t)$. De manière plus explicite

$$h_i(t) = \sum_{q=1}^Q a_i(\theta_q) \beta_q(t) g(t - \tau_q) \quad (1.11)$$

Enfin, de manière similaire, en considérant les M éléments de l'antenne, on peut écrire la réponse impulsionnelle du canal sous forme matricielle comme

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_q) \beta_q(t) g(t - \tau_q) \quad (1.12)$$

où

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_M(t) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

et

$$\mathbf{a}(\theta_q) = \begin{bmatrix} a_1(\theta_q) \\ a_2(\theta_q) \\ \vdots \\ a_M(\theta_q) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

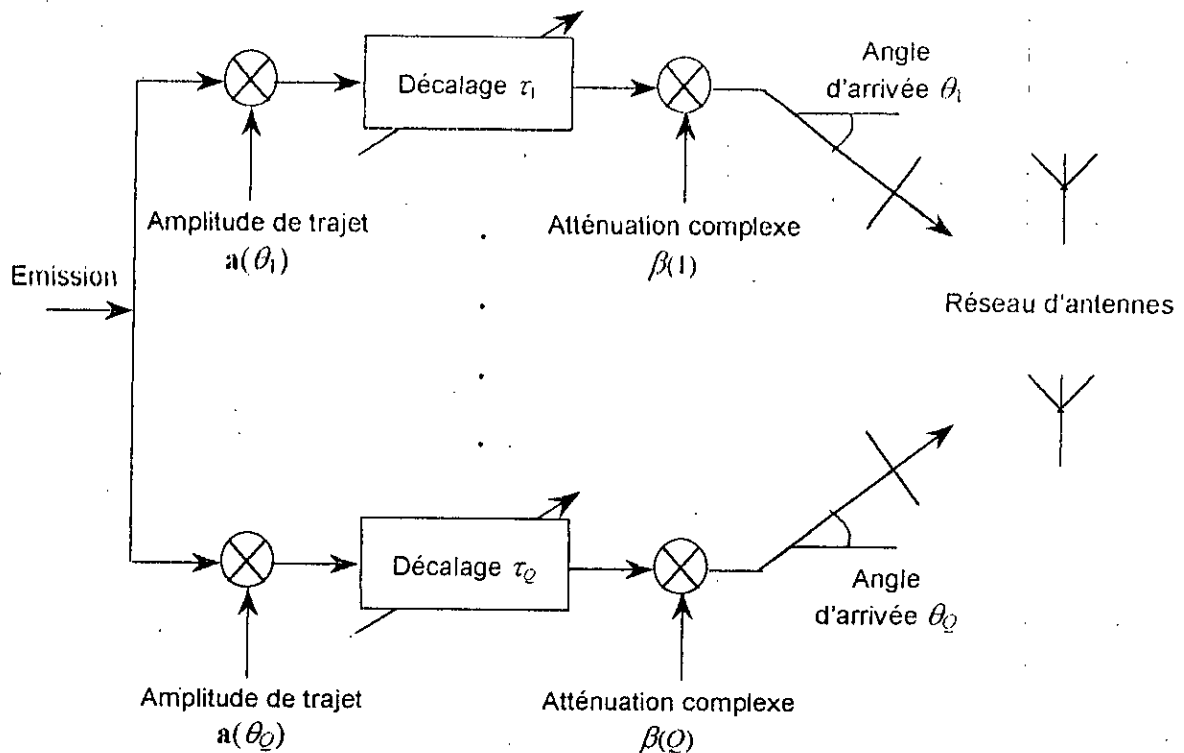


Figure 1.3: Schéma d'un modèle de canal de transmission multitrajets.

1.3. Système de transmission à multiporteuses

Le développement de la transmission de données à multiporteuses trouve son origine au milieu des années 1960, dans des applications militaires de systèmes de communications HF. Cette technique fut proposée plus tard pour palier aux problèmes d'égalisation et d'optimisation de largeur de bande de transmission dans les systèmes radio mobiles. En Radiodiffusion Numérique, avec une modulation QPSK, la méthode est adoptée pour la transmission et se situe actuellement en phase finale de normalisation. La transmission à multiporteuses devient également un standard pour les systèmes de Transmission Numérique sur Paires Torsadées. Avec le développement des circuits de Transformée de Fourier Rapide, des implémentations efficaces des systèmes à multiporteuses sont devenues possibles.

Les systèmes à multiporteuses sont désignés de manières différentes suivant les applications. En Transmission Numérique sur Paires Torsadées par exemple, ces systèmes sont plus connus sous le nom "DMT (Digital Multi Tone)". En Radiodiffusion et en Télédiffusion Numérique Terrestre, ils sont connus sous l'acronyme "OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex)".

1.3.1. Modulation à multiporteuses

Le principe général de la modulation à multiporteuses est illustré sur la figure 1.4. Le concept est de transformer de l'information sérielle en des entrées de débit plus faible, modulées par un nombre de porteuses orthogonales.

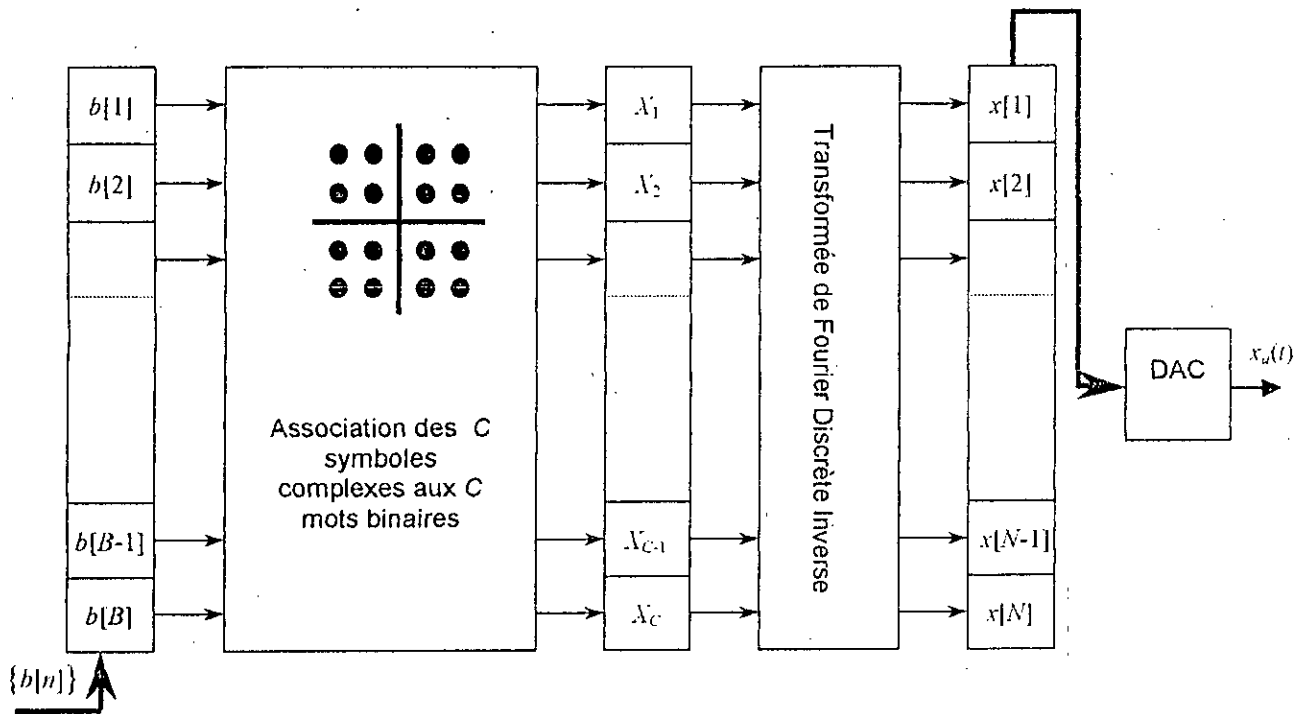


Figure 1.4: Diagramme fonctionnel de la modulation à multiporteuses.

Dans ce qui suit, nous décrivons de manière simplifiée le principe général de la modulation à multiporteuses.

On considère une séquence informationnelle binaire à transmettre $b[\kappa]$ à un rythme $R = \frac{1}{T_b}$. Cette séquence est sectionnée en blocs de B bits. Chaque mot est de ce fait de longueur $T = BT_b$.

Soit C le nombre total des porteuses qui sont équi-espacées de Δf . Le bloc de B bits est utilisé pour moduler, en modulation d'amplitude complexe, les C porteuses. Pour ce faire, le bloc est divisé en C mots binaires qui vont être affectés aux C porteuses. Ainsi, on associe au c -ème mot un symbole complexe X_c .

La porteuse modulée d'ordre c est donc définie par

$$x_{a,c}(t) = \Re \left[X_c e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (1.15)$$

et le signal analogique total correspondant est

$$x_a(t) = \sum_{c=1}^C x_{a,c}(t) \quad (1.16)$$

Le signal analogique (1.16) est engendré de manière numérique en utilisant une Transformée de Fourier Rapide Inverse (IFFT) d'ordre N . La transformée inverse est en fait utilisée pour produire une séquence de durée N , $x[n]$, d'échantillons de $x_a(t)$ pris avec une période d'échantillonnage T_s . Ceci suppose la relation suivante

$$NT_s = T \quad (1.17)$$

La transformée de Fourier discrète inverse d'une séquence $X(i)$ de durée N est classiquement définie par

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) e^{j2\pi \frac{ni}{N}} \quad (1.18)$$

De plus, pour une séquence $x[n]$ réelle, les coefficients de Fourier $X(i)$ doivent satisfaire

$$X(i) = X^*(N-i) \quad \frac{N}{2} \leq i \leq N-1 \quad (1.19)$$

Ainsi

$$x[n] = \frac{1}{N} \left\{ x(0) + (-1)^n x\left(\frac{N}{2}\right) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} 2\Re \left[x(i) e^{j2\pi \frac{ni}{N}} \right] \right\} \quad (1.20)$$

En omettant les termes $i = 0$ et $i = \frac{N}{2}$ et en comparant (1.20) avec (1.15) et (1.16), on déduit que

$$X_c = \frac{2X(c)}{N} \quad 1 \leq c \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (1.21)$$

Il est clair à ce niveau que le nombre de porteuses est lié à l'ordre de la transformée de Fourier inverse de la manière suivante

$$C = \frac{N}{2} - 1 \quad (1.22)$$

et les C porteuses sont données par

$$f_c = c\Delta f \quad c = 1, \dots, C \quad (1.23)$$

avec

$$\Delta f = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T} \quad (1.24)$$

1.3.2. La démodulation

A la réception, de manière réciproque au signal émis (1.16), le signal analogique total est donné par

$$y_a(t) = \sum_{c=1}^C \Re \left[Y_c e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (1.25)$$

où Y_c est le symbole complexe reçu sur la c -ème porteuse et qui inclut l'effet du canal de transmission sur le symbole émis, X_c .

Pour effectuer la démodulation, on procède d'abord à l'échantillonnage du signal $y_a(t)$ avec un rythme $\frac{1}{T_s}$, de manière identique à l'émission, avec T_s définie préalablement. Cet échantillonnage aboutit donc vers une séquence $y[n]$.

Comme $NT_s = T$, chaque N échantillons de $y[n]$ correspondent à une période symbole et à un bloc de B bits de $b[\kappa]$.

A ce niveau, on applique une Transformée de Fourier Rapide (FFT) d'ordre N à chaque bloc de N échantillons de $y[n]$ pour obtenir les coefficients de Fourier $Y(i)$ définis par

$$Y(i) = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi \frac{ni}{N}} \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (1.26)$$

Enfin, de manière similaire à la modulation, les symboles complexes à la réception sont liés aux coefficients de Fourier comme suit

$$Y_c = \frac{2Y(c)}{N} \quad 1 \leq c \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (1.27)$$

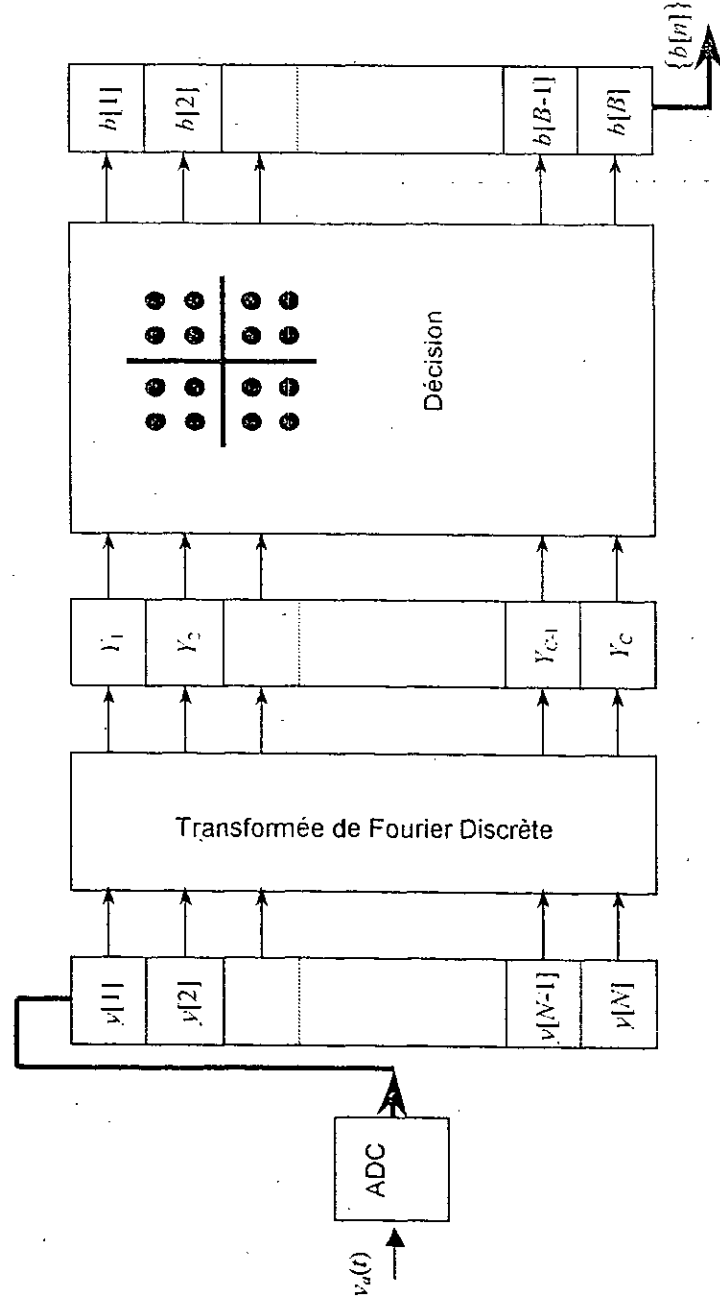


Figure 1.5: Diagramme fonctionnel de la démodulation à multiporteuses.

Chapitre 2

Estimation des paramètres de propagation

2.1. Transmission de données sans fils à multi-porteuses

Au niveau du récepteur, les sorties sont échantillonnées à un rythme égal à la fréquence symbole. Ces échantillons, ainsi que les symboles émis, si ceux-ci sont connus, sont pratiquement les seules informations disponibles pour effectuer l'estimation des paramètres de propagation. Ces informations sont d'abord directement utilisées pour l'estimation non-paramétrique du canal de transmission. Les données obtenues sont ensuite utilisées comme une base pour une estimation paramétrique plus détaillée de la structure du canal. Une représentation schématique du processus d'estimation est illustrée sur la figure 2.6.

Les hypothèses majeures faites sur l'environnement à trajets multiples sont résumées comme suit:

- Le signal émis provient d'une source unique.
- L'environnement multitrajets est un environnement spéculaire, c.à.d., le nombre de rayons distincts est fini et discret.
- Le nombre de trajets est connu.
- Les signaux sont à bande étroite par rapport à l'antenne.
- La structure de la réponse de l'antenne est connue.
- La forme d'onde de modulation est connue.

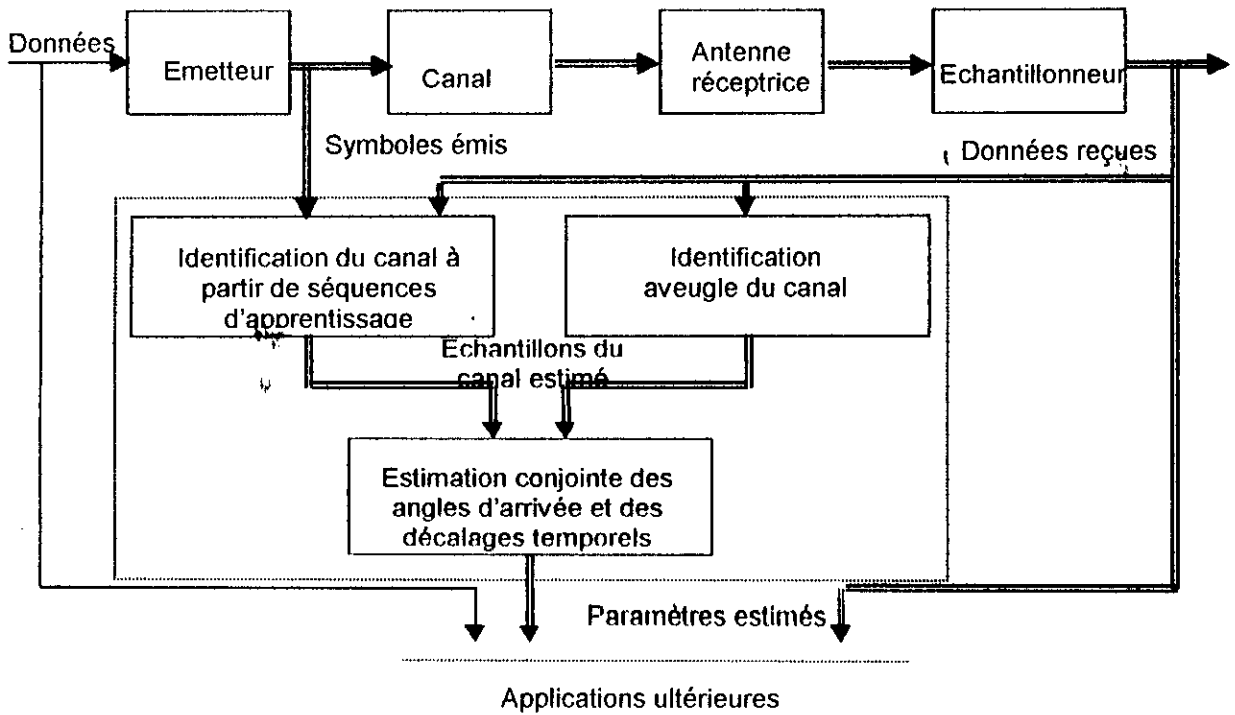


Figure 2.6: Processus d'estimation.

2.1.1. Modèle du canal

On considère une source unique à multiporteuses qui émet un signal sur les C porteuses. A partir du signal analogique transmis (1.7) et (1.16), l'équivalent passe-bas de l'enveloppe complexe de ce même signal est donné par

$$x(t) = \sum_{c=1}^C \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_c[k] g(t - kT) e^{2\pi j \frac{c}{T} t} \quad (2.28)$$

où

- $s_c[k]$ est le k -ème symbole véhiculé par la porteuse c ,
- $\{s_c[k]\}$, $c = 1, \dots, C$ sont indépendants d'une porteuse à une autre et de distribution identique,
- $g(t)$ est la forme d'onde de modulation,
- T est la durée du symbole,
- La séparation fréquentielle entre deux porteuses est $\Delta f = \frac{1}{T}$.

En utilisant les données émises telles qu'elles ont été définies plus haut, on développe le modèle du canal.

Dans ce qui suit, le canal est variable dans le temps et sujet aux atténuations. Cependant, il est considéré comme stationnaire pendant son temps de cohérence T_{coh} .

Il est à noter que pour le système à multiporteuses, comme plusieurs porteuses sont utilisées, il est plus sûr de considérer la plus haute porteuse f_c pour l'approximation du temps de cohérence du canal par (1.5).

En admettant une parfaite restitution du temps d'échantillonnage et des phases des porteuses, l'enveloppe complexe passe bas du signal reçu sur une antenne à M éléments au temps t peut être écrite suivant (1.16) et (1.25) de la manière suivante

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{c=1}^C \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_c[k] \mathbf{h}_c(t - kT) e^{j2\pi \frac{c}{T} t} + \mathbf{z}(t) \quad (2.29)$$

où

$$\mathbf{h}_c(t) = \begin{bmatrix} h_{c,1}(t) \\ h_{c,2}(t) \\ \vdots \\ h_{c,M}(t) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

est le canal de transmission associé à la porteuse c et $\mathbf{z}(t)$ est un bruit additif, blanc et gaussien.

On admet que le temps de cohérence du canal T_{coh} s'étend sur K périodes symboles.

Q est le nombre de trajets. Chaque trajet est caractérisé par une direction d'arrivée θ_q , un décalage temporel d'arrivée τ_q et une atténuation complexe $\beta_c(q)$, qui varie d'une porteuse à une autre, avec $q = 1, \dots, Q$.

Pour simplifier, on suppose que les éléments de l'antenne ainsi que les réflecteurs se situent sur un même plan dans l'espace et que ces derniers sont suffisamment loin afin que θ_q soit l'angle d'arrivée du q -ème trajet.

Le canal $\mathbf{h}_c(t)$ peut donc être modélisé suivant (1.12) par [9]

$$\mathbf{h}_c(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_q) \beta_c(q) g(t - \tau_q) e^{-j2\pi \frac{c}{T} \tau_q} \quad (2.31)$$

où $\mathbf{a}(\theta_q)$ est le vecteur de dimension $(M \times 1)$ de la réponse de l'antenne au q -ème trajet et conformément aux désignations précédentes, $g(t)$ est la forme d'onde de modulation de durée finie. On admet que $g(t)$ est non nulle sur L_g périodes symboles, c.à.d., sur $t \in [0, L_g T)$. De ce fait, la longueur du canal est LT , où $L = L_g + \frac{\tau_{max}}{T}$ et $\tau_{max} = [\max(\tau_q); 1 < q < Q]$.

On considère que les sorties de l'antenne sont reçues en parallèle sur chaque porteuse après démodulation.

Enfin, si on collecte K échantillons sur chaque porteuse, ceci peut être exprimé sous forme matricielle de dimension $(M \times K)$ comme suit

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{H}_c \mathbf{S}_c + \mathbf{Z}_c \quad c = 1, \dots, C \quad (2.32)$$

où

$$\mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_c(0) & \mathbf{y}_c(T) & \dots & \mathbf{y}_c((K-1)T) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{y}_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_c[k] \mathbf{h}_c(t - kT) e^{j2\pi \frac{c}{T} t} + \mathbf{z}_c(t)$$

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_c(0) & \mathbf{h}_c(T) & \dots & \mathbf{h}_c((L-1)T) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} s_c[0] & s_c[1] & \dots & s_c[K-1] \\ s_c[-1] & s_c[0] & \dots & s_c[K-2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_c[-L+1] & s_c[-L+2] & \dots & s_c[K-L] \end{bmatrix}$$

et \mathbf{Z}_c est la matrice appropriée représentant le bruit.

Les estimées prérequises des échantillons du canal de transmission peuvent être obtenues soit par des méthodes d'identification non-paramétriques classiques, soit par des méthodes aveugles.

2.1.2. Estimation du canal

Généralement, dans les systèmes à multiporteuses, on utilise des séquences d'apprentissage pour estimer les échantillons de la réponse impulsionnelle du canal [6, 7]. Si les symboles des données \mathbf{S}_c , $c = 1, \dots, C$, sont connus par apprentissage et $K \geq M$, une estimée de la matrice des échantillons de la réponse impulsionnelle \mathbf{H}_c dans (2.32) peut être obtenue pour $c = 1, \dots, C$, en utilisant l'estimation par les moindres carrés. L'estimation aveugle des échantillons du canal est également possible au cas où \mathbf{S}_c n'est pas disponible.

2.1.2.1. Estimation du canal par les moindres carrés

Ici, la séquence des symboles émis est connue. Des situations typiques incluent le fonctionnement du radar ou du sonar où un signal connu est émis vers une cible éventuelle. Les copies reçues du signal émis procurent des informations sur la position et la vitesse de la cible [15]. En exploration géophysique, les enregistrements reçus sont également des copies décalées et amplifiées d'un signal (explosion) connu.

L'estimée par les moindres carrés de la matrice des échantillons du canal \mathbf{H}_c , $c = 1, \dots, C$, est donnée par

$$\hat{\mathbf{H}}_c = \mathbf{Y}_c \mathbf{S}_c^* (\mathbf{S}_c \mathbf{S}_c^*)^{-1} \quad (2.33)$$

où * désigne la transposition conjuguée complexe.

2.1.2.2. Estimation aveugle du canal

Dans le second cas, le signal transmis peut être inconnu, encombrant ou sans intérêt. De telles situations sont principalement rencontrées dans plusieurs systèmes d'égalisation où la capacité du canal est à prendre en considération.

Plusieurs méthodes d'estimation aveugle sont disponibles dans [10] et [11]. Les détails relatifs aux conditions d'identifiabilité y sont relatés de manière

explicite. Dans ce qui suit, deux méthodes des plus utilisées et qui sont applicables à notre cas sont résumées.

2.1.2.2.1. Méthode du maximum de vraisemblance

Cette méthode est une approche classique, utilisée pour l'estimation de n'importe quel type de paramètre dont la fonction de densité de probabilité est connue.

Le signal reçu sur chaque fréquence porteuse peut être réécrit sous une forme vectorielle de la manière suivante

$$\mathbf{y}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{c,1} \\ \mathbf{y}_{c,2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{c,M} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

où $\mathbf{y}_{c,i}$ est le vecteur constitué des échantillons du signal reçu sur la c -ème porteuse par le i -ème élément de l'antenne, c.à.d.,

$$\mathbf{y}_{c,i} = \begin{bmatrix} y_{c,i}(0) \\ y_{c,i}(T) \\ \vdots \\ y_{c,i}((k-1)T) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où

$$y_{c,i}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_c[k] h_{c,i}(t - kT) e^{j2\pi \frac{c}{T} t} + z_{c,i}(t) \quad (2.36)$$

Le signal (2.34) peut être factorisé comme suit

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{H}_c^M \mathbf{s}_c + \mathbf{z}_c \quad (2.37)$$

où \mathbf{s}_c est le vecteur des symboles transmis sur la c -ème porteuse

$$\mathbf{s}_c = \begin{bmatrix} s_c[-L+1] \\ s_c[-L+2] \\ \vdots \\ s_c[K-1] \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

et \mathbf{H}_c^M est une matrice de Sylvester généralisée, dont la structure est donnée par

$$\mathbf{H}_c^M = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_c^{(1)} \\ \mathbf{H}_c^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_c^{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où

$$\mathbf{H}_c^{(i)} = \begin{bmatrix} h_{c,i}((L-1)T) & \dots & h_{c,i}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{c,i}((L-1)T) & \dots & h_{c,i}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{c,i}((L-1)T) & \dots & h_{c,i}(0) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

est la matrice de Sylvestre de dimension $K \times (L + K - 1)$ du canal correspondant au i -ème élément de l'antenne.

Comme la sortie de notre système est entachée d'un bruit additif Gaussien, la fonction de densité de probabilité de \mathbf{y}_c est donnée par

$$\mathcal{P}(\mathbf{y}_c) = \frac{1}{\pi^{MK} \sigma_{z_c}^{2(MK)}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{z_c}^2} \|\mathbf{y}_c - \mathbf{H}_c^M \mathbf{s}_c\|_2^2\right) \quad (2.40)$$

où $\sigma_{z_c}^2$ est la variance commune des éléments de la matrice du bruit \mathbf{Z}_c .

Les estimées à maximum de vraisemblance de \mathbf{H}_c^M et \mathbf{s}_c sont ces arguments qui maximisent la fonction de densité de probabilité $\mathcal{P}(\mathbf{y}_c)$, c.à.d.

$$\left(\hat{\mathbf{H}}_c^M, \hat{\mathbf{s}}_c\right) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{H}_c^M, \mathbf{s}_c} \{\mathcal{P}(\mathbf{y}_c)\} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{H}_c^M, \mathbf{s}_c} \|\mathbf{y}_c - \mathbf{H}_c^M \mathbf{s}_c\|_2^2 \quad (2.41)$$

Pour n'importe quel \mathbf{H}_c^M donnée, l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{s}_c est donnée par

$$\mathbf{s}_c = \left[(\mathbf{H}_c^M)^* \mathbf{H}_c^M \right]^{-1} (\mathbf{H}_c^M)^* \mathbf{y}_c \quad (2.42)$$

Sous les conditions nécessaires d'identifiabilité (voir [11]), l'estimée (2.42) est utilisée dans (2.41) pour enfin obtenir

$$\mathbf{H}_c^M = \underset{\mathbf{H}_c^M}{\operatorname{argmin}} \left(\left\| \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}_c^M \left[(\mathbf{H}_c^M)^* \mathbf{H}_c^M \right]^{-1} (\mathbf{H}_c^M)^* \right] \mathbf{y}_c \right\|^2 \right) \quad (2.43)$$

L'implémentation de la méthode du maximum de vraisemblance est présentée par plusieurs auteurs [11]. Elle est itérative par sa nature, cependant des techniques d'implémentation alternatives existent aussi.

2.1.2.2.2. Méthode du sous-espace canal

Cette méthode applique la séparation des sous-espaces signal et bruit. La motivation pour cette méthode réside dans le fait que la sortie du système linéaire est une convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle du canal. Comme cette réponse impulsionnelle est un signal utile (du fait que la convolution est commutative), la considération de son propre sous-espace, c.à.d., le sous-espace canal est logiquement justifiée.

L'approche sous-espace suggère que la réponse impulsionnelle du canal est déterminée de manière unique à un coefficient scalaire prêt, par l'espace nul ou noyau de \mathbf{H}_c^M . La détermination de cet espace nul peut être obtenue à travers l'évaluation de la matrice de covariance des données reçues.

Pour l'évaluation de cette matrice de covariance, on reformule le modèle du système (2.38) comme suit:

$$\mathbf{y}_c(n) = \mathbf{H}_c^M \mathbf{s}_c(n) + \mathbf{z}_c(n) \quad (2.44)$$

où $n = 0, 1, \dots, K - W$ et W est un paramètre entier déterminant la longueur du vecteur

$$\mathbf{y}_c(n) = \begin{bmatrix} y_{c,1}(n) \\ y_{c,2}(n) \\ \vdots \\ y_{c,M}(n) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

tel que

$$\mathbf{y}_{c,i}(n) = \begin{bmatrix} y_{c,i}(n) \\ y_{c,i}(n+1) \\ \vdots \\ y_{c,i}(n+W-1) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Le vecteur $\mathbf{s}_c(n)$ est donc donné par

$$\mathbf{s}_c(n) = \begin{bmatrix} s_c[n-L+1] \\ s_c[n-L+2] \\ \vdots \\ s_c[n+W+K-1] \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

La structure correspondante de la matrice de Sylvester généralisée \mathbf{H}_c^M est une extension de celle décrite par (2.38), où les dimensions sont $MW \times (W + K + L - 1)$ au lieu de $MK \times (K + L - 1)$.

La matrice de covariance $\mathcal{R}_{\mathbf{y}_c}$ est définie comme

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_c} = E \{ \mathbf{y}_c(n) \mathbf{y}_c^*(n) \} \quad (2.48)$$

et peut être approximée par

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{y}_c} = \frac{1}{K-W+1} \sum_{n=0}^{K-W} \mathbf{y}_c(n) \mathbf{y}_c^*(n) \quad (2.49)$$

Evidemment, la structure de cette matrice est la suivante (sous réserve que le bruit soit de moyenne nulle)

$$\tilde{\mathcal{R}}_{y_c} = \mathbf{H}_c^M \mathcal{R}_{s_c} (\mathbf{H}_c^M)^* + \sigma_{z_c}^2 \mathbf{I} \quad (2.50)$$

Si la matrice de covariance de la séquence d'entrée \mathcal{R}_{s_c} est de rang complet, l'espace nul de \mathbf{H}_c^M peut être calculé à partir de la décomposition en vecteurs propres de la matrice de covariance $\tilde{\mathcal{R}}_{y_c}$.

Ainsi, si λ_j , $j = 1, \dots, MW$ sont les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{R}}_{y_c}$, Il résulte que pour $W = L + 1$, elles peuvent être arrangées de la manière suivante

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{L+W+1} = \lambda_{L+W+2} = \dots = \lambda_{MW} = \sigma_{z_c}^2 \quad (2.51)$$

avec la décomposition en valeurs propres classique de $\tilde{\mathcal{R}}_{y_c}$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{y_c} = \mathbf{E}_c \Lambda_c \mathbf{E}_c^* \quad (2.52)$$

On désigne par \mathbf{V}_c et \mathbf{W}_c les partitions de \mathbf{E}_c qui correspondent aux ensembles $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{L+W}\}$ et $\{\lambda_{L+W+1}, \dots, \lambda_{MW}\}$ respectivement, et à partir de l'équation caractéristique d'une matrice décomposée, on obtient la relation suivante

$$\tilde{\mathcal{R}}_{y_c} \mathbf{W}_c = \mathbf{H}_c^M \mathcal{R}_{s_c} (\mathbf{H}_c^M)^* \mathbf{W}_c + \sigma_{z_c}^2 \mathbf{W}_c = \sigma_{z_c}^2 \mathbf{W}_c \quad (2.53)$$

ce qui implique que

$$(\mathbf{H}_c^M)^* \mathbf{W}_c = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

Pour intégrer la présence du bruit au niveau de la sortie de notre système, la méthode sous-espace calcule la solution aux moindres carrés de (2.54), c.à.d.

$$(\mathbf{h}_c)_{\text{CS}} = \operatorname{argmin}_{\|\mathbf{h}_c\|=1} \|\mathbf{W}_c^* \mathbf{H}_c^M\|^2 \quad (2.55)$$

2.2. Estimation conjointe des paramètres de propagation

2.2.1. Modèle du canal pour l'estimation conjointe

Dans ce qui suit, on considère que les échantillons de la réponse impulsionnelle du canal sont estimés avec une précision acceptable. Le canal estimé peut être donné par

$$\tilde{\mathbf{H}}_c = \mathbf{H}_c + \mathbf{N}_c \quad (2.56)$$

où \mathbf{N}_c est la matrice du bruit d'estimation.

En omettant le bruit d'estimation, les estimées du canal $\tilde{\mathbf{H}}_c$, $c = 1, \dots, C$, peuvent être factorisés suivant (2.31) comme suit

$$\mathbf{H}_c := \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) \operatorname{diag}[\mathbf{e}_c(\tau)] \mathbf{G} \quad c = 1, \dots, C \quad (2.57)$$

où

$$\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) = \left[\beta_c(1)\mathbf{a}(\theta_1) \quad \beta_c(2)\mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \beta_c(Q)\mathbf{a}(\theta_Q) \right] \quad (2.58)$$

avec

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_Q \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_Q \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(-\tau_1) & g(T - \tau_1) & \dots & g(L(T - 1) - \tau_1) \\ g(-\tau_2) & g(T - \tau_2) & \dots & g(L(T - 1) - \tau_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(-\tau_Q) & g(T - \tau_Q) & \dots & g(L(T - 1) - \tau_Q) \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{e}_c(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \frac{c}{T} \tau_1} \\ e^{-j2\pi \frac{c}{T} \tau_2} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{c}{T} \tau_Q} \end{bmatrix} \quad c = 1, \dots, C$$

où $\text{diag}[\mathbf{e}_c(\tau)]$ est une matrice diagonale dont les éléments sont ceux du vecteur $\mathbf{e}_c(\tau)$.

Si on superpose toutes les matrices \mathbf{H}_c correspondant à toutes les C porteuses, on obtiendra une matrice \mathcal{H} de dimension $(MC \times L)$, dont la structure est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_C \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}(\theta, \tau) \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où

$$\mathbf{U}(\theta, \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\theta) \text{diag} [\mathbf{e}_1(\tau)] \\ \mathbf{A}_2(\theta) \text{diag} [\mathbf{e}_2(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{A}_C(\theta) \text{diag} [\mathbf{e}_C(\tau)] \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Enfin, on inclut la matrice du bruit d'estimation \mathcal{N} , qui est définie de manière appropriée suivant (2.61) et (2.56), c.à.d., les matrices \mathbf{N}_c sont superposées pour former \mathcal{N} .

Ainsi, le modèle dans (2.61) devient

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathbf{U}(\theta, \tau) \mathbf{G} + \mathcal{N} \quad (2.63)$$

Ce modèle est associé à l'estimation conjointe des angles et des décalages temporels d'arrivée pour un système à multiporteuses et sera noté dans ce qui suit "modèle MC-JADE (Multi-Carrier Joint Angle and Delay Estimation)".

2.2.2. Formulation mathématique du problème de l'estimation conjointe

La considération d'une base \mathbf{E} de l'espace colonne de la matrice des données \mathcal{H} dans (2.61) implique qu'il existe une matrice carrée \mathbf{T} de dimension Q , non singulière et qui satisfait

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}(\theta, \tau) \mathbf{T} \quad (2.64)$$

Donc, l'estimation conjointe des paramètres θ et τ à partir du modèle MC-JADE (2.61) peut être conduite en résolvant l'optimisation de forme générale [2]

$$\{\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{T}}\} = \underset{\mathbf{U}, \mathbf{T}}{\text{argmin}} \|\mathbf{E} - \mathbf{U}(\theta, \tau) \mathbf{T}\|_F^2 \quad (2.65)$$

Plusieurs algorithmes, développés pour l'estimation de l'angle d'arrivée uniquement et qui traitent le problème (2.65), peuvent être appliqués pour le problème de l'estimation conjointe dans les systèmes à multiporteuses.

L'utilisation d'une recherche multidimensionnelle est possible pour la résolution du problème (2.65) [2].

Il est à noter que contrairement aux systèmes à porteuse unique, même si la géométrie de l'antenne et la forme d'onde de modulation sont connues, la méthode MUSIC bidimensionnelle [13] ne peut pas être appliquée au modèle (2.61). En effet, le continuum $U(\theta, \tau)$ ne peut pas être évalué du fait que les atténuations complexes β_c , $c = 1, \dots, C$ présentes dans $U(\theta, \tau)$ soient inconnues.

2.2.3. Conditions d'identifiabilité

Tout comme pour le modèle d'estimation des angles d'arrivée et le modèle d'estimation conjointe pour les systèmes à porteuse unique [2, 3], la condition la plus importante pour l'identifiabilité des paramètres est que la matrice des données \mathcal{H} de dimension $(MC \times L)$ soit de rang Q , avec $Q < MC$ et $Q \leq L$. Ceci se traduit par le fait que $U(\theta, \tau)$ doit avoir strictement plus de lignes que de colonnes et être de rang complet et, \mathbf{G} doit avoir plus de colonnes que de lignes et être de rang complet.

Le nombre de trajets distincts dans un environnement dit "spécular" est typiquement entre 10 et 12, c.à.d., comme le nombre de porteuses C est souvent beaucoup plus important, il n'est pas nécessaire d'avoir plus d'éléments d'antenne que de trajets.

Cependant, la condition de rang complet sur \mathbf{G} ainsi que la factorisation du canal (2.57) impliquent que tous les décalages temporels doivent être distincts. Si deux trajets possèdent le même décalage, le rang de $\tilde{\mathcal{H}}$ devient $Q - 1$ et les angles correspondants ne peuvent pas être identifiés correctement. Dans ce cas, un "Lissage Spatial" (Spatial Smoothing) [3] peut procurer la solution en effectuant une extension des données du canal sur chaque porteuse de manière à garder le rang de \mathcal{H} égal au nombre de trajets Q . Pour une antenne uniforme et linéaire (ULA), ce cas est décrit dans la sous-section 2.2.6.5.

2.2.4. Considération de la largeur de bande de cohérence

Pour pouvoir estimer les paramètres de propagation à partir du modèle du canal (2.61), il est requis de mieux caractériser la matrice $U(\theta, \tau)$.

Si les atténuations complexes $\beta_c(q)$ étaient les mêmes pour toutes les porteuses, il aurait été possible de les factoriser de $\mathbf{U}(\theta, \tau)$ et procéder de manière similaire à l'estimation conjointe pour les systèmes à porteuse unique. Cependant, dans notre modèle ces atténuations ne sont pas égales.

Il est évident que deux porteuses séparées par un intervalle inférieur à la largeur de bande de cohérence B_{coh} du canal subissent la même atténuation. Si l'étalement temporel du canal est T_m (exprimé en fonction de la période symbole T), la largeur de bande de cohérence du canal est approximativement l'inverse de T_m , c.à.d.,

$$B_{coh} = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{nT}$$

L'étalement temporel du canal est obtenu à partir de son profil d'intensité multitrajets où T_m est l'intervalle sur lequel ce profil a une valeur significative.

On rappelle que la séparation fréquentielle entre porteuses est $\Delta f = \frac{1}{T}$. Toutes les porteuses qui s'étendent dans un intervalle de fréquences égal à la largeur de bande de cohérence du canal peuvent être considérées comme étant atténuées de la même manière. Donc, il est raisonnable de supposer que le nombre de porteuses ayant la même atténuation est

$$\mu = \left\lfloor \frac{B_{coh}}{\Delta f} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor \quad (2.66)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

A cette condition, le nombre de blocks de μ porteuses qui partagent les mêmes coefficients d'atténuation complexes est évidemment $m = \left\lfloor \frac{C}{\mu} \right\rfloor$.

Ainsi, il est clair qu'il existe m plutôt que C différents $\beta(i)$ et $\mathbf{A}_i(\theta)$, avec $i = 1, \dots, m$.

Si on considère uniquement les premières $m\mu$ porteuses dans la dérivation du modèle MC-JADE (2.63) (n est souvent inférieur à 1 et $m\mu$ est égal à C au plus), on obtient un modèle MC-JADE réduit de dimension ($Mm\mu < L$), obéissant à la factorisation suivante

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu} &= \mathbf{U}_{m\mu}(\theta, \tau)\mathbf{G} + \mathcal{N}_{m\mu} \\ &:= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(\tau) \circ \mathbf{A}_1(\theta) \\ \mathcal{F}_2(\tau) \circ \mathbf{A}_2(\theta) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_m(\tau) \circ \mathbf{A}_m(\theta) \end{bmatrix} \mathbf{G} + \mathcal{N}_{m\mu}\end{aligned}\quad (2.67)$$

où

$$\mathbf{A}_i(\theta) = \left[\beta_1(i)\mathbf{a}(\theta_1) \quad \beta_2(i)\mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \beta_Q(i)\mathbf{a}(\theta_Q) \right]$$

$$\mathcal{F}_i(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_1^i & \phi_2^i & \dots & \phi_Q^i \\ \phi_1^{i+1} & \phi_2^{i+1} & \dots & \phi_Q^{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{i+\mu-1} & \phi_2^{i+\mu-1} & \dots & \phi_Q^{i+\mu-1} \end{bmatrix}$$

avec

$$\phi_q = e^{-j2\pi \frac{\tau q}{T}} \quad (2.68)$$

et o désigne le produit de Khatri-Rao, c.à.d., un produit de Kronecker inter-colonnes.

2.2.5. Estimation conjointe en utilisant les principes de 2-D MUSIC

La méthode MUSIC (Multiple Signal Classification) se base sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des données.

Dans notre cas, les données sont les estimées du canal de transmission, c.à.d, la matrice $\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}$ définie par (2.67).

Rappelons cependant que cette méthode trouve ces limites du fait que la condition de connaissance de l'expression de la matrice $\mathbf{U}_{m\mu}(\theta, \tau)$ n'est

pas satisfaite. En effet, les coefficients d'atténuation complexes $\beta_q(c)$, $c = 1, \dots, C$; $q = 1, \dots, Q$, sont des paramètres inconnus et ne sont pas communs à toutes les porteuses. Leur absence dans la factorisation (2.57) et (2.63), et donc leur contribution dans le continuum de la matrice $\mathbf{U}_{m\mu}(\theta, \tau)$ rend l'estimation de θ et τ impossible.

Définissons pour $i = 1, \dots, m$ les matrices suivantes:

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \mathcal{U}_i(\theta, \tau) \overline{\mathbf{G}} + \mathcal{N}_i \quad (2.69)$$

où

$$\mathcal{U}_i(\theta, \tau) = \mathcal{F}_i(\tau) \circ \mathbf{A}(\theta) \quad (2.70)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) & \dots & \mathbf{a}(\theta_Q) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

et

$$\overline{\mathbf{G}}_i := \text{diag}(\beta(i)) \mathbf{G} \quad (2.72)$$

Avec cette factorisation, l'application de la méthode MUSIC devient possible pour le modèle du canal $\tilde{\mathcal{H}}_i$, $i = 1, \dots, m$. L'estimation finale consiste à évaluer la moyenne des m estimées obtenues pour chaque paramètre.

On définit les vecteurs $\tilde{h}_i(n)$, pour $n = 1, \dots, L$ comme étant les colonnes de la matrice $\tilde{\mathcal{H}}_i$. De manière plus explicite

$$\tilde{\mathcal{H}}_i := \begin{bmatrix} \tilde{h}_i(1) & \tilde{h}_i(2) & \dots & \tilde{h}_i(L) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

La matrice de covariance des données $\tilde{\mathcal{H}}_i$ est définie comme

$$\mathcal{R}_{h_i} := E \left\{ \tilde{h}_i(t) \tilde{h}_i^*(t) \right\} \quad (2.74)$$

En pratique, cette matrice de covariance est inconnue mais peut être estimée à partir des données disponibles comme suit :

$$\tilde{\mathcal{R}}_{h_i} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \tilde{h}_i(n) \tilde{h}_i^*(n) \quad (2.75)$$

Sous les conditions que $M\mu > Q$ et que le bruit est de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\mathcal{N}m\mu}^2$, la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance (2.75) est donnée par

$$\tilde{\mathcal{R}}_{h_i} = \mathcal{U}_i(\theta, \tau) \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{G}}} \mathcal{U}_i^*(\theta, \tau) + \sigma_{\mathcal{N}m\mu}^2 \mathbf{I} \quad (2.76)$$

Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m\mu}$ les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathcal{R}}_{h_i}$.

Comme le rang de $\mathcal{U}_i(\theta, \tau) \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{G}}} \mathcal{U}_i^*(\theta, \tau)$ est Q , il résulte que

$$\lambda_j > \sigma_{\mathcal{N}m\mu}^2, \quad j = 1, \dots, Q \quad (2.77)$$

et

$$\lambda_j = \sigma_{\mathcal{N}m\mu}^2, \quad j = Q + 1, \dots, M\mu \quad (2.78)$$

Les matrices dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$ et $\lambda_{Q+1}, \dots, \lambda_{M\mu}$ sont notés

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_Q \right] \quad (2.79)$$

et

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{w}_{Q+1} \quad \mathbf{w}_{Q+2} \quad \dots \quad \mathbf{w}_{M\mu} \right] \quad (2.80)$$

respectivement.

Les colonnes de ces matrices étant orthonormées, elles vérifient la relation suivante

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* + \mathbf{W}\mathbf{W}^* = \mathbf{I} \quad (2.81)$$

On observe facilement que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{h_i} \mathbf{W} = \sigma_{N_{m\mu}}^2 \mathbf{W} \quad (2.82)$$

ce qui implique que

$$\mathcal{U}_i^*(\theta, \tau) \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (2.83)$$

On définit les vecteurs $\mathbf{u}_i(\theta_q, \tau_q)$, $q = 1, \dots, Q$, comme étant les colonnes de la matrice $\mathcal{U}_i(\theta, \tau)$. Cette définition nous amène à une réécriture équivalente de (2.83)

$$\mathbf{u}_i^*(\theta, \tau) \mathbf{W}\mathbf{W}^* \mathbf{u}_i(\theta, \tau) = 0 \quad \theta = \theta_1, \dots, \theta_Q; \quad \tau = \tau_1, \dots, \tau_Q \quad (2.84)$$

On définit enfin la fonction bidimensionnelle suivante

$$f_i(\theta, \tau) = \mathbf{u}_i^*(\theta, \tau) \mathbf{W} \mathbf{W}^* \mathbf{u}_i(\theta, \tau) \quad (2.85)$$

L'algorithme 2D-MUSIC consiste à évaluer la fonction $f_i(\theta, \tau)$ pour différentes valeurs de θ et τ sur un intervalle prédéfini, en gardant les Q valeurs qui minimisent cette fonction.

Cette méthode nous permet donc d'obtenir m estimées de chaque paramètre. Il suffit d'évaluer la moyenne pour obtenir nos estimées définitives c.à.d.:

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i \quad (2.86)$$

et

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\tau}_i \quad (2.87)$$

2.2.6. Estimation conjointe en utilisant les principes de 2-D ESPRIT

2.2.6.1. Algorithme FSI-JADE-ESPRIT (Frequency Shift Invariance)

Comme il a été indiqué précédemment, pour estimer les décalages temporels et les angles d'arrivée des trajets, il est nécessaire de recourir à des recherches multidimensionnelles. Si l'antenne est linéaire et uniforme (ULA) ou bien possède une structure de doublet ESPRIT, les paramètres peuvent être estimés conjointement de manière analytique en utilisant une méthode similaire à ESPRIT.

Pour la géométrie ULA, le vecteur $\mathbf{a}(\theta_q)$ est donné par

$$\mathbf{a}(\theta_q) = \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_q \\ \vdots \\ \psi_q^{M-1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

où

$$\psi_q = e^{j2\pi\Delta \sin\theta_q} \quad (2.89)$$

et Δ est l'espacement entre les capteurs de l'antenne, exprimé en longueur d'onde.

Définissons pour $i = 1, \dots, m$, les matrices suivantes:

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \mathbf{U}_i(\psi, \phi) \mathbf{G} + \mathcal{N}_i \quad (2.90)$$

où

$$\mathbf{U}_i(\psi, \phi) = \mathcal{F}_i(\psi) \circ \mathbf{A}_i(\phi) \quad (2.91)$$

avec

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_q \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

et

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

La méthode d'estimation conjointe "Frequency Shift Invariance JADE (FSI-JADE)" consiste à appliquer une méthode similaire à 2D-ESPRIT à chaque bloc $\tilde{\mathcal{H}}_i$ de $\tilde{\mathcal{H}}_{m \times \mu}$ et consécutivement pondérer les m estimées des paramètres.

Afin d'exploiter la structure favorable de la matrice $\mathcal{U}_i(\psi, \phi)$, on définit les matrices de sélection appropriées

$$\mathcal{J}_{\psi_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\psi_i} \\ \mathbf{J}'_{\psi_i} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{J}_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\phi_i} \\ \mathbf{J}'_{\phi_i} \end{bmatrix}$$

Sans bruit, ces matrices de sélection doivent satisfaire les relations suivantes

$$\mathcal{J}_{\psi_i} \mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\psi_i} \mathcal{H}_i \\ \mathbf{J}'_{\psi_i} \mathcal{H}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\psi_i} \\ \mathcal{U}_{\psi_i} \Psi \end{bmatrix} \mathbf{G} \quad (2.94)$$

et

$$\mathcal{J}_{\phi_i} \mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\phi_i} \mathcal{H}_i \\ \mathbf{J}'_{\phi_i} \mathcal{H}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\phi_i} \\ \mathcal{U}_{\phi_i} \Phi \end{bmatrix} \mathbf{G} \quad (2.95)$$

où

$$\mathcal{U}_{\psi_i} = \mathbf{J}_{\psi_i} \mathbf{U}_i(\psi, \phi)$$

$$\mathcal{U}_{\phi_i} = \mathbf{J}_{\phi_i} \mathbf{U}(\psi, \phi)$$

et

$$\Psi = \text{diag}[\psi] \quad (2.96)$$

$$\Phi = \text{diag}[\phi] \quad (2.97)$$

On peut aisément déduire à partir de (2.103) et (2.95) que les matrices de sélection sont définies comme

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\psi_i} = \mathbf{I}_\mu \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{(M-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(M-1,1)} & \mathbf{I}_{M-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}'_{\psi} = \mathbf{I}_\mu \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{(M-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(M-1,1)} & \mathbf{I}_{M-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.98)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mu-1} & \mathbf{0}_{(\mu-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(\mu-1,1)} & \mathbf{I}_{\mu-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_M \\ \mathbf{J}'_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mu-1} & \mathbf{0}_{(\mu-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(\mu-1,1)} & \mathbf{I}_{\mu-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_M \end{cases} \quad (2.99)$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker², \mathbf{I}_i est une matrice identité de dimension i et $\mathbf{0}_{i,j}$ une matrice d'éléments nuls de dimensions $(i \times j)$.

Les relations (2.103) et (2.95) impliquent qu'il existe une matrice \mathbf{P}_i qui satisfait la condition que $\mathbf{T}_i = \mathbf{G}\mathbf{P}_i$ est non singulière et de dimension Q , telle que

$$\Gamma_{\Psi_i} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\psi_i} \\ \Gamma'_{\psi_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\psi_i} \\ \mathcal{U}_{\psi_i} \Psi \end{bmatrix} \mathbf{T}_i$$

$$\Gamma_{\Phi_i} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\phi_i} \\ \Gamma'_{\phi_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\phi_i} \\ \mathcal{U}_{\phi_i} \Phi \end{bmatrix} \mathbf{T}_i$$

constituent des bases de l'espace colonne de \mathcal{H}_i , c.à.d., du sous-espace canal. Ainsi, pour les matrices

²Voir Annexe A pour la définition.

$$\Gamma'_{\psi_i} - \lambda \Gamma_{\psi_i} = \mathcal{U}_{\psi_i} [\Psi - \lambda \mathbf{I}_Q] \mathbf{T}_i$$

$$\Gamma'_{\phi_i} - \lambda \Gamma_{\phi_i} = \mathcal{U}_{\phi_i} [\Phi - \lambda \mathbf{I}_Q] \mathbf{T}_i$$

Les valeurs de λ pour lesquelles le rang n'est plus complet, sont les éléments diagonaux de Ψ and Φ respectivement. Celles ci sont obtenues en procédant à la diagonalisation conjointe des matrices

$$\Gamma_{\psi_i}^\dagger \Gamma'_{\psi_i} = \mathbf{T}_i^{-1} \Psi_i \mathbf{T}_i$$

et

$$\Gamma_{\phi_i}^\dagger \Gamma'_{\phi_i} = \mathbf{T}_i^{-1} \Phi \mathbf{T}_i$$

où \dagger dénote la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

La correspondance correcte entre les ψ 's et les ϕ 's est garantie par le fait que les matrices $\Gamma_{\psi_i}^\dagger \Gamma'_{\psi_i}$ et $\Gamma_{\phi_i}^\dagger \Gamma'_{\phi_i}$ partagent les colonnes de \mathbf{T}_i^{-1} comme vecteurs propres communs.

Enfin, les estimées définitives de θ et τ sont obtenues en évaluant la moyennes des m estimées obtenues, c.à.d

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i$$

et

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\tau}_i$$

2.2.6.2. Algorithme MC-JADE-ESPRIT (MultiCarrier JADE)

La méthode que nous décrivons ici, se base sur les principes d'ESPRIT tout comme la méthode FSI-ESPRIT, mais par rapport à cette dernière, elle offre l'avantage de procéder au traitement en une seule étape. Ceci est rendu possible en réajustant les matrices de sélection de manière à inclure les m coefficients d'atténuation complexes, évitant ainsi d'évaluer m estimées et permettant par la même d'exploiter un modèle mieux conditionné et plus informatif. En effet, la matrice d'information est de dimension $Mm\mu \times L$ (modèle MC-JADE) au lieu de $M\mu \times L$.

Avec les définitions des paramètres (2.68) et (2.89), il est plus approprié de réécrire (2.67) comme

$$\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu} = \mathbf{U}(\psi, \phi)\mathbf{G} + \mathcal{N}_{m\mu} \quad (2.100)$$

où

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_q \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

et

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

La matrice $\mathbf{U}(\psi, \phi)$ rappelle une structure de Vandermonde, excepté pour les coefficients d'atténuation complexes.

Afin d'exploiter la structure favorable de la matrice $\mathbf{U}(\psi, \phi)$, de la même manière que pour ESPRIT standard et FSI-ESPRIT décrite dans la section précédente, on peut définir les matrices de sélection appropriées

$$\mathcal{J}_\psi = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\psi \\ \mathbf{J}'_\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{J}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\phi \\ \mathbf{J}'_\phi \end{bmatrix}$$

de manière à ce que, sans bruit

$$\mathcal{J}_\psi \mathcal{H}_{m\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\psi \mathcal{H}_{m\mu} \\ \mathbf{J}'_\psi \mathcal{H}_{m\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\psi \\ \mathcal{U}_\psi \Psi \end{bmatrix} \mathbf{G}$$

$$\mathcal{J}_\phi \mathcal{H}_{m\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\phi \mathcal{H}_{m\mu} \\ \mathbf{J}'_\phi \mathcal{H}_{m\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\phi \\ \mathcal{U}_\phi \Phi \end{bmatrix} \mathbf{G} \quad (2.103)$$

où

$$\mathcal{U}_\psi = \mathbf{J}_\psi \mathbf{U}(\psi, \phi)$$

$$\mathcal{U}_\phi = \mathbf{J}_\phi \mathbf{U}(\psi, \phi) \quad (2.104)$$

et

$$\Psi = \text{diag}[\psi] \quad (2.105)$$

$$\Phi = \text{diag}[\phi] \quad (2.106)$$

A partir de (2.103) et (2.103), les matrices de sélection sont clairement définies comme

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\psi = \mathbf{I}_{m\mu} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{(M-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(M-1,1)} & \mathbf{I}_{M-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}'_\psi = \mathbf{I}_{m\mu} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{(M-1,1)} \\ \mathbf{0}_{(M-1,1)} & \mathbf{I}_{M-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.107)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\phi = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M(\mu-1)} & \mathbf{0}_{(M(\mu-1),M)} \\ \mathbf{0}_{(M(\mu-1),M)} & \mathbf{I}_{M(\mu-1)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}'_\phi = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M(\mu-1)} & \mathbf{0}_{(M(\mu-1),M)} \\ \mathbf{0}_{(M(\mu-1),M)} & \mathbf{I}_{M(\mu-1)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.108)$$

Les relations (2.103) et (2.103) impliquent qu'il existe une matrice \mathbf{P} qui satisfait la condition que $\mathbf{T} = \mathbf{GP}$ est non singulière et de dimension Q , telle que

$$\Gamma_\Psi = \begin{bmatrix} \Gamma_\psi \\ \Gamma'_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\psi \\ \mathcal{U}_\psi \Psi \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

$$\Gamma_\Phi = \begin{bmatrix} \Gamma_\phi \\ \Gamma'_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\phi \\ \mathcal{U}_\phi \Phi \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

constituent des bases de l'espace colonne de $\mathcal{H}_{m\mu}$, c.à.d., du sous-espace canal. Ainsi, pour les matrices

$$\Gamma'_\psi - \lambda \Gamma_\psi = \mathcal{U}_\psi [\Psi - \lambda \mathbf{I}_Q] \mathbf{T}$$

$$\Gamma'_\phi - \lambda \Gamma_\phi = \mathcal{U}_\phi [\Phi - \lambda \mathbf{I}_Q] \mathbf{T}$$

les valeurs de λ pour lesquelles le rang n'est plus complet, sont les éléments diagonaux de Ψ et Φ respectivement. Celles ci sont obtenues en procédant à la diagonalisation conjointe des matrices

$$\Gamma_{\psi}^{\dagger} \Gamma'_{\psi} = \mathbf{T}^{-1} \Psi \mathbf{T}$$

et

$$\Gamma_{\phi}^{\dagger} \Gamma'_{\phi} = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T}$$

La correspondance correcte entre les ψ 's et les ϕ 's est garantie par le fait que les matrices $\Gamma_{\psi}^{\dagger} \Gamma'_{\psi}$ et $\Gamma_{\phi}^{\dagger} \Gamma'_{\phi}$ partagent les colonnes de \mathbf{T}^{-1} comme vecteurs propres communs.

2.2.6.3. Estimation du sous-espace canal

En présence du bruit, on doit faire face au problème d'estimation du sous-espace canal et de sa dimension.

L'approche la plus directe est de calculer la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) de $\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Q & \mathbf{E}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_Q^H \\ \mathbf{F}_o^H \end{bmatrix}$$

où Σ_Q contient les Q valeurs singulières dominantes et les matrices unitaires \mathbf{E} , \mathbf{F} sont partitionnées de la manière qui en découle.

Il est démontré que la meilleure approximation au rang Q de $\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}$ à la norme de Frobenius [12] est donnée par $\hat{\mathcal{H}}_{m\mu} = \mathbf{E}_Q \Sigma_Q \mathbf{F}_Q^H$, et une base du sous-espace canal estimé est obtenue à partir des Q vecteurs singuliers gauches, c.à.d., à partir des colonnes de \mathbf{E}_Q . Pour simplifier, on omettra l'indice Q , en se rappelant que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q$.

Donc, l'estimation des paramètres ψ et ϕ se réduit à la diagonalisation conjointe des matrices $\mathcal{E}_{\psi}^{\dagger} \mathcal{E}'_{\psi}$ et $\mathcal{E}_{\phi}^{\dagger} \mathcal{E}'_{\phi}$, au lieu de $\Gamma_{\psi}^{\dagger} \Gamma'_{\psi}$ et $\Gamma_{\phi}^{\dagger} \Gamma'_{\phi}$ respectivement, où

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\psi = \mathbf{J}_\psi \mathbf{E} \\ \mathcal{E}'_\psi = \mathbf{J}'_\psi \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.109)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\phi = \mathbf{J}_\phi \mathbf{E} \\ \mathcal{E}'_\phi = \mathbf{J}'_\phi \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.110)$$

2.2.6.4. Diagonalisation conjointe

Dans ce qui suit on décrira deux techniques de diagonalisation conjointe qui s'adaptent à la résolution de notre problème. Ces méthodes, ainsi que d'autres, sont décrites dans [2, 3, 4] et les références qui s'y rapportent.

2.2.6.4.1. Méthode "T" [2, 3, 4]

Cette méthode est la plus facile à implémenter et à décrire. Le problème de diagonalisation conjointe des matrices réelles $\mathcal{E}_\psi^\dagger \mathcal{E}'_\psi$ et $\mathcal{E}'_\phi \mathcal{E}_\phi^\dagger$ peut se réduire à la diagonalisation de la matrice complexe

$$(\mathcal{E}'_\phi \mathcal{E}_\phi^\dagger) + j (\mathcal{E}_\psi^\dagger \mathcal{E}'_\psi) = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{\Phi} + j \mathbf{\Psi}) \mathbf{T} \quad (2.111)$$

Donc, il est clair que la partie réelle des valeurs propres de (2.111) procure l'estimée de $\mathbf{\Phi}$ et la partie imaginaire résulte en l'estimée de $\mathbf{\Psi}$.

A partir de la décomposition (2.111), la méthode "T" garantit l'utilisation d'une seule matrice de transformation \mathbf{T} . Cependant, elle ne garantit pas que cette matrice soit réelle. Ceci implique que dans des cas critiques, il est possible que la partie imaginaire de (2.111) résulte en une contribution dans l'estimée de $\mathbf{\Phi}$ et, de manière similaire, la partie réelle de (2.111) résulte en une contribution dans l'estimée de $\mathbf{\Psi}$.

La méthode "T" est limitée à la diagonalisation conjointe de seulement deux matrices différentes. Il apparaît que cette méthode ne convient pas au cas de l'estimation conjointe du décalage temporel, de l'élévation et de l'azimut d'arrivée.

2.2.6.4.2. Méthode "Q"[2, 3, 4]

Cette méthode se base sur la décomposition conjointe de Schur des matrices $\mathcal{E}'_{\psi}\mathcal{E}'_{\psi}$ et $\mathcal{E}'_{\phi}\mathcal{E}'_{\phi}$, c.à.d.,

$$\mathcal{E}'_{\psi}\mathcal{E}'_{\psi} = \mathbf{Q}\mathbf{R}_{\Psi}\mathbf{Q}^* \quad (2.112)$$

et

$$\mathcal{E}'_{\phi}\mathcal{E}'_{\phi} = \mathbf{Q}\mathbf{R}_{\Phi}\mathbf{Q}^* \quad (2.113)$$

où \mathbf{Q} est une matrice unitaire, et \mathbf{R}_{Ψ} et \mathbf{R}_{Φ} sont des matrices triangulaires supérieures dont les diagonales sont les éléments de Ψ et Φ respectivement.

La méthode "Q" consiste à procéder à la décomposition de Schur de la première matrice, c.à.d, $\mathcal{E}'_{\psi}\mathcal{E}'_{\psi}$, déterminant ainsi les matrices \mathbf{Q} et \mathbf{R}_{Ψ} .

$$\mathbf{Q}^* (\mathcal{E}'_{\psi}\mathcal{E}'_{\psi}) \mathbf{Q} = \mathbf{R}_{\Psi} \quad (2.114)$$

La matrice \mathbf{Q} est ensuite appliquée à la seconde matrice $\mathcal{E}'_{\phi}\mathcal{E}'_{\phi}$, ce qui produit une matrice triangulaire supérieure imparfaite, approximativement égale à \mathbf{R}_{Φ} .

Cette méthode est plus avantageuse que la méthode "T" car elle peut être facilement étendue au cas de plusieurs matrices. Cette méthode demeure toutefois sous-optimale du fait qu'elle utilise des matrices légèrement différentes pour diagonaliser les deux matrices $\mathcal{E}'_{\psi}\mathcal{E}'_{\psi}$ et $\mathcal{E}'_{\phi}\mathcal{E}'_{\phi}$.

2.2.6.5. Cas de décalages temporels identiques

Si r trajets partagent les mêmes décalages temporels, le rang de \mathcal{H} sera $Q - r$. Un lissage spatial des échantillons du canal sur chaque porteuse peut être conduit afin de permettre une estimation correcte des paramètres. Donc, pour un d donné, satisfaisant $r \leq d < M$, on définit $H_c^{(i)}$ comme la matrice qui consiste des rangées $i, \dots, M - i + 1$ de \mathbf{H}_c , pour $1 \leq i \leq d$, et

$$H_c := \begin{bmatrix} H_c^{(1)} & H_c^{(2)} & \dots & H_c^{(d)} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de dimension $(M - d + 1 \times dL)$ et de factorisation

$$H_c = \mathbf{A}_c(\theta) \text{diag}[\mathbf{e}_c(\tau)] \mathcal{G} \quad (2.115)$$

avec

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \Psi \mathbf{G} & \dots & \Psi^{d-1} \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

où Ψ est défini dans (2.105) et $\mathbf{A}_c(\theta)$ est similaire à la définition (2.58) excepté que maintenant, seulement $M - d + 1$ rangées existent. Avec cette définition de H_c , \mathcal{H} peut être reconstruite en superposant les matrices H_c , $c = 1, \dots, C$

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_C \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Maintenant, même avec r délais identiques, la matrice \mathcal{G} est de rang complet, c.à.d., il est nécessaire d'avoir $d \geq r$ pour garder \mathcal{H} de rang Q . Dans ce cas, l'estimation des paramètres ψ et ϕ procède de la même manière, avec la condition que $M \leq d+1$ et les matrices de sélection appliquent $M' = M - d + 1$ au lieu de M .

2.2.6.6. Remarques

Si la forme d'onde de modulation est supposée connue, les coefficients d'atténuation complexes peuvent être estimés linéairement en utilisant l'estimation par les moindres carrés, en traitant les échantillons du canal sur chaque porteuse séparément.

Afin de permettre la sélection des données reçues (2.67), il doit exister au moins une paire de capteurs, c.à.d., $M \geq 2$, et le rapport de la largeur de

bande de cohérence à la séparation fréquentielle interporteuses doit être au moins 2 : 1, c.à.d., $\frac{B_{coh}}{\Delta f} \geq 2$ ou $\mu \geq 2$. La dernière condition peut être satisfaite en augmentant suffisamment le nombre de porteuses, augmentant ainsi la longueur du symbole. MC-JADE-ESPRIT permet l'estimation de paramètres associés à un nombre considérable de trajets avec seulement 2 capteurs, pourvu que les conditions d'identifiabilité de la sous-section 2.2.3 soient satisfaites.

Chapitre 3

La borne de Cramer-Rao

3.1. Introduction

La borne de Cramer-Rao est une borne inférieure sur la variance de n'importe quel estimateur non biaisé.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de revoir brièvement les considérations et les définitions principales qui régissent la borne de Cramer-Rao, pour ensuite la calculer pour notre problème d'estimation conjointe.

3.2. Généralités

Comme la totalité des informations utiles s'intègre dans les données observées ainsi que la fonction de distribution de probabilité de ces données, il est clair que la précision de l'estimation dépend directement de la fonction de distribution.

En effet, on ne peut pas prévoir l'estimation de n'importe quel paramètre avec une précision voulue si sa fonction de distribution de probabilité n'en dépend que faiblement, où dans le cas extrême, pas du tout. Généralement, plus la fonction de distribution de probabilité est influencée par le paramètre à estimer, plus l'estimation est précise.

On suppose que la fonction de distribution de probabilité $\mathcal{P}(\xi, \eta)$ satisfait la condition de "régularité" suivante

$$E \left[\frac{\partial \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] = 0 \quad \forall \eta \quad (3.1)$$

où l'espérance mathématique est prise par rapport à $\mathcal{P}(\xi, \eta)$, ξ est l'ensembles

des observations et η est le paramètre à estimer. Sous cette condition, la variance de l'estimateur non biaisé η doit satisfaire

$$\text{var}(\eta) \geq \frac{1}{-L \left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right]} \quad (3.2)$$

où la dérivée est évaluée pour la vraie valeur de η et l'espérance est prise par rapport à $\mathcal{P}(\xi, \eta)$.

Comme il est commun de supposer un bruit blanc gaussien, il est intéressant de calculer la borne de Cramer-Rao correspondante.

Ainsi, on suppose qu'un signal déterministe avec un paramètre inconnu η est observé dans un environnement bruité, où le bruit est gaussien et blanc. Ceci correspond donc à

$$\xi [n] = \chi [n, \eta] + z [n] \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.3)$$

La dépendance du signal $\chi [n, \eta]$ du paramètre η est notée explicitement. La fonction de vraisemblance est

$$\mathcal{P}(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (\xi [n] - \chi [n, \eta])^2 \right\} \quad (3.4)$$

où σ^2 est la variance du signal $\chi [n, \eta]$.

L'application de la dérivée une première fois à la fonction caractéristique résulte en

$$\frac{\partial \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (\xi [n] - \chi [n, \eta]) \frac{\partial \chi [n, \eta]}{\partial \eta} \quad (3.5)$$

et la dérivée seconde résulte en

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (\xi [n] - \chi [n, \eta]) \frac{\partial^2 \chi [n, \eta]}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \chi [n, \eta]}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \quad (3.6)$$

L'espérance mathématique de la dérivée seconde est de ce fait donnée par

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \chi[n, \eta]}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.7)$$

Ainsi, la borne sur la variance $\text{var}(\eta)$ devient

$$\text{var}(\eta) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \chi[n, \eta]}{\partial \eta} \right)^2} \quad (3.8)$$

L'expression de la borne de Cramer-Rao (3.8) décrit la dépendance du signal $\chi[n, \eta]$ du paramètre η . Ainsi, les signaux qui varient sensiblement avec la variation du paramètre inconnu engendrent des estimateurs précis.

Les résultats ainsi obtenus, peuvent être étendus au cas général d'un vecteur de p paramètres inconnus.

L'estimateur vecteur η de dimension $p \times 1$ est supposé non biaisé. La borne de Cramer-Rao sur les éléments du vecteur des paramètres inconnus permet de borner l'estimée sur chaque élément.

La borne de Cramer-Rao sur l'estimateur η_i est donnée par

$$\text{var}(\eta_i) \geq \left[\mathbf{F}^{-1}(\eta) \right]_{i,i} \quad (3.9)$$

où $\mathbf{F}(\eta)$ est la matrice d'information de Fisher (Fisher Information Matrix: FIM), de dimension $p \times p$ qui est définie comme suit

$$[\mathbf{F}(\eta)]_{i,j} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{P}(\xi, \eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right] \quad (3.10)$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, p$, en évaluant (3.9) avec les vraies valeurs de η .

3.3. Calcul de la borne de Cramer-Rao pour MC-JADE

La Borne de Cramer-Rao pour le problème d'estimation conjointe à partir du modèle MC-JADE (2.63), peut être calculée comme suit, en tenant compte des éléments de la section précédente :

Définissons le vecteur des paramètres comme

$$\begin{bmatrix} \sigma_N^2 \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où

$$\eta := \begin{bmatrix} \Re\{\beta(1)\} \\ \Im\{\beta(1)\} \\ \vdots \\ \Re\{\beta(m)\} \\ \Im\{\beta(m)\} \\ \theta \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

et $\Re\{\cdot\}$ et $\Im\{\cdot\}$ désignent les parties réelles et imaginaires respectivement.

Dans notre cas, les données sont les estimées du canal $\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}$. Ces données sont entachées du bruit d'estimation

$$\mathcal{N}_{m\mu} := \begin{bmatrix} \mathbf{n}(1) & \mathbf{n}(2) & \dots & \mathbf{n}(L) \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{n}(i), i = 1, \dots, L$ sont des processus aléatoires gaussiens complexes, stationnaires, de moyennes nulles et temporellement non-correlés. Il en résulte que les données $\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}$ sont également des processus gaussiens aléatoires.

La fonction de vraisemblance des données relatives à cette formulation est

$$\mathcal{L}\{\tilde{\mathcal{H}}_{m\mu}\} = \frac{1}{(2\pi)^{Mm\mu L} \left(\frac{\sigma_N^2}{2}\right)^{Mm\mu L}} \times \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^L \mathbf{n}^*(i)\mathbf{n}(i)\right\} \quad (3.13)$$

et la deuxième fonction caractéristique correspondante est

$$\Lambda = \ln \mathcal{L} = -Mm\mu L \ln \pi - Mm\mu L \ln \sigma_{\mathcal{N}}^2 - \frac{1}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} \sum_{i=1}^L \mathbf{n}^*(i) \mathbf{n}(i) \quad (3.14)$$

Les dérivées de la fonction caractéristique Λ par rapport aux paramètres inconnus peuvent être obtenues en utilisant les résultats de [13],[2],[14], comme suit

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\sigma_{\mathcal{N}}^2)} = -\frac{Mm\mu L}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} + \frac{1}{\sigma_{\mathcal{N}}^4} \sum_{i=1}^L \mathbf{n}^*(i) \mathbf{n}(i) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{2}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} \sum_{i=1}^L \Re \{ \mathcal{G}(i) \mathbf{D}^* \mathbf{n}(i) \}$$

avec $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau})$, et

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\beta} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} \quad (Mm\mu \times 2(m+1)Q)$$

$$\mathbf{D}_{\beta} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Re\{\beta(1)\}} & \mathbf{D}_{\Im\{\beta(1)\}} & \dots & \mathbf{D}_{\Re\{\beta(m)\}} & \mathbf{D}_{\Im\{\beta(m)\}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\Re\{\beta(i)\}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Re\{\beta(i)_1\}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Re\{\beta(i)_q\}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\Im\{\beta(i)\}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Im\{\beta(i)_1\}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Im\{\beta(i)_q\}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau_q} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}(i) := \mathbf{I}_{2(m+1)} \otimes \mathbf{g}(i)$$

En utilisant les résultats de [13],[2], on obtient

$$\begin{aligned} E \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (\sigma_{\mathcal{N}}^2)} \right)^2 \right] &= \frac{Mm\mu L}{\sigma_{\mathcal{N}}^4} \\ E \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \right)^T \right] &= \frac{2}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} \sum_{i=1}^L \Re [\mathcal{G}^*(i) \mathbf{D}^* \mathbf{D} \mathcal{G}(i)] \end{aligned}$$

La matrice d'Information de Fisher pour les paramètres inconnus est donnée par

$$FIM = E(\omega^T \omega) \quad (3.16)$$

où

$$\omega := \begin{bmatrix} \sigma_{\mathcal{N}}^2 \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

et l'inverse de la matrice CRB pour ces mêmes paramètres est obtenue, après quelques développements, par

$$CRB^{-1}(\eta) = \frac{2}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} \sum_{i=1}^L \{\Re [\mathcal{G}^*(i) \mathbf{D}^* \mathbf{D} \mathcal{G}(i)]\}$$

Enfin, La matrice CRB pour les paramètres d'intérêt, $CRB(\theta, \tau)$, est la partition de dimension $2Q$ inférieure droite de la matrice $CRB(\eta)$ (pour l'ordre des paramètres décrit dans (3.12)) et les bornes sont obtenues par les éléments diagonaux.

Il est à noter que pour $c = 1, \dots, C$, si les éléments du bruit \mathbf{Z}_c sont indépendants et identiquement distribués, complexes et de distribution normale de variance commune σ_Z^2 et si les symboles vérifient $\mathbf{S}_c \mathbf{S}_c^* = K \mathbf{I}_L$, \mathbf{N}_c seront complexes, blancs, gaussiens et i.i.d. d'une porteuse à une autre et d'un trajet à un autre, avec une variance $\sigma_N^2 = \frac{\sigma_Z^2}{K}$ [2, 3].

Chapitre 4

Simulations

4.1. Introduction

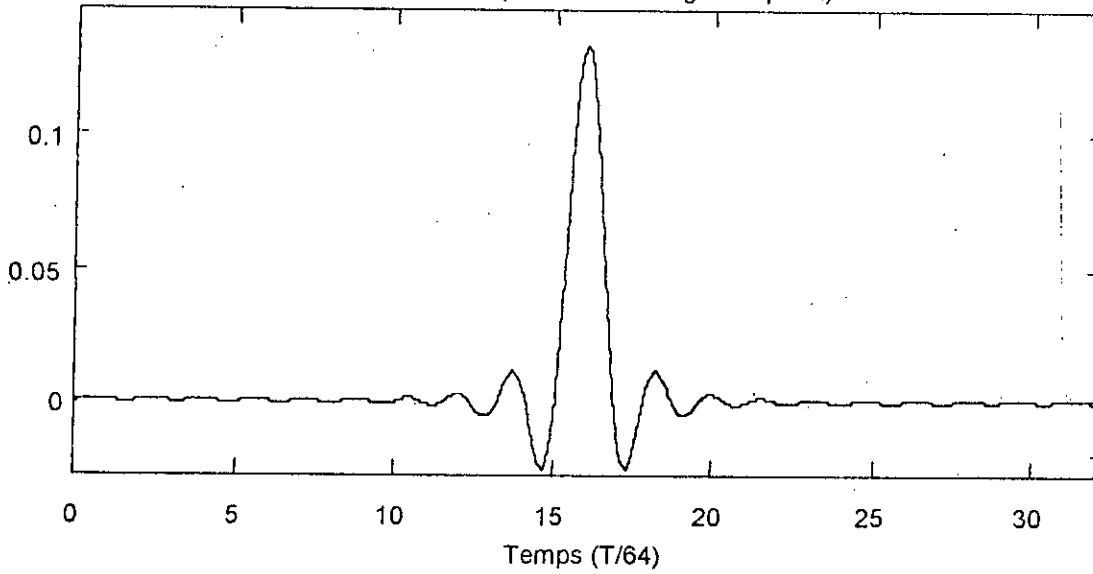
Dans ce qui suit, on présente quelques résultats de simulation qui illustrent les performances des trois algorithmes d'estimation conjointe, à savoir 2D MUSIC, FSI-JADE-ESPRIT et MC-JADE-ESPRIT. Plus précisément, notre intérêt se focalise sur la dernière méthode pour les avantages qu'elle présente par rapport aux deux autres. Dans toutes les expériences relatives à MC-JADE-ESPRIT, l'erreur quadratique est moyennée (Mean Square Error : MSE) sur 500 réalisations indépendantes de Monte Carlo et comparée à la borne de Cramer-Rao (CRB). Afin de faciliter la comparaison, les différentes courbes correspondant au même paramètre à estimer sont mises en évidence par une même couleur. Dans toutes les expériences, le canal de transmission est d'abord estimé par la méthode directe des moindres carrés.

4.2. Illustration de la fonction bidimensionnelle de 2D MUSIC

On considère une antenne de $M = 2$ éléments. L'espacement entre éléments est égal à la moitié de la longueur d'onde. Le nombre de trajets est $Q = 3$ avec les paramètres suivants: $\theta = [-15^\circ \ 0^\circ \ 25^\circ]^T$, $\tau = [0.015 \ 0.078 \ 0.234]^T T$. Les atténuations complexes sont générées par une distribution complexe gaussienne de moyenne nulle et de variance $[0.4 \ 0.3 \ 0.3]^T$. La longueur du canal est de moitié la longueur du symbole T , qui est normalisée à $T = 1$. La forme d'onde est un cosinus augmenté avec un facteur d'évanouissement de 0.25 (voir figure 4.7). Le nombre de porteuses est $C = 64$, avec $\mu = 8$. La méthode de diagonalisation conjointe est la méthode "Q" telle qu'elle a été définie dans [2, 3, 4]. Le rapport signal sur bruit (Signal to Noise Ratio : SNR) utilisé est de 25dB. Le nombre de points de l'intervalle sur lequel est évalué le continuum est fixé à 200.

Sur la figure 4.8, les angles d'arrivée ainsi que les décalages temporels réels sont marqués par une croix. Les tâches bleues représentent les valeurs

Réponse impulsionnelle du filtre correspondant à la forme d'onde de modulation (avec un décalage temporel)



Réponse fréquentielle du filtre correspondant à la forme d'onde de modulation

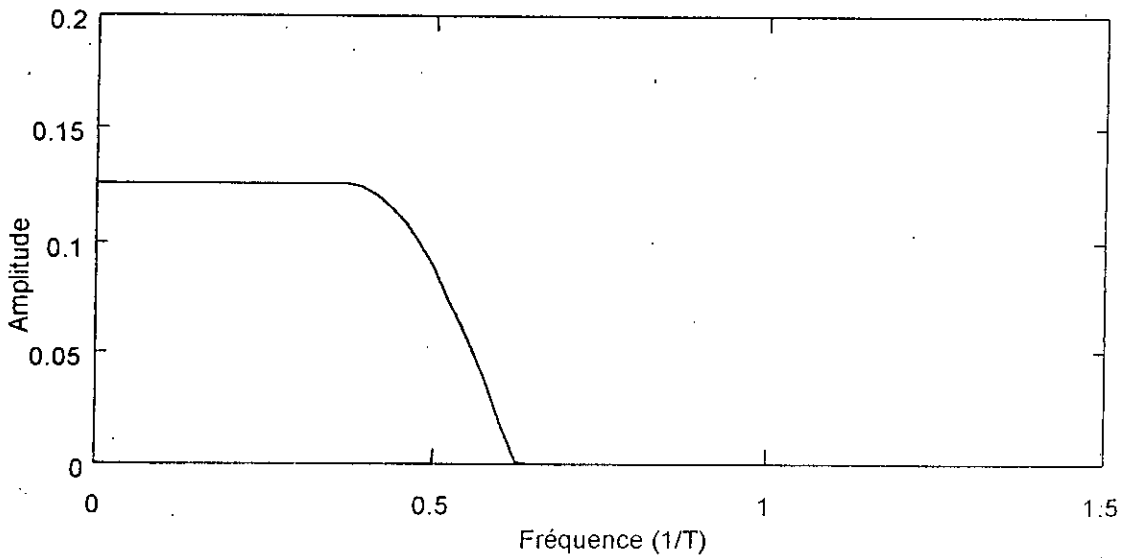


Figure 4.7: Forme d'onde de modulation: cosinus augmenté.

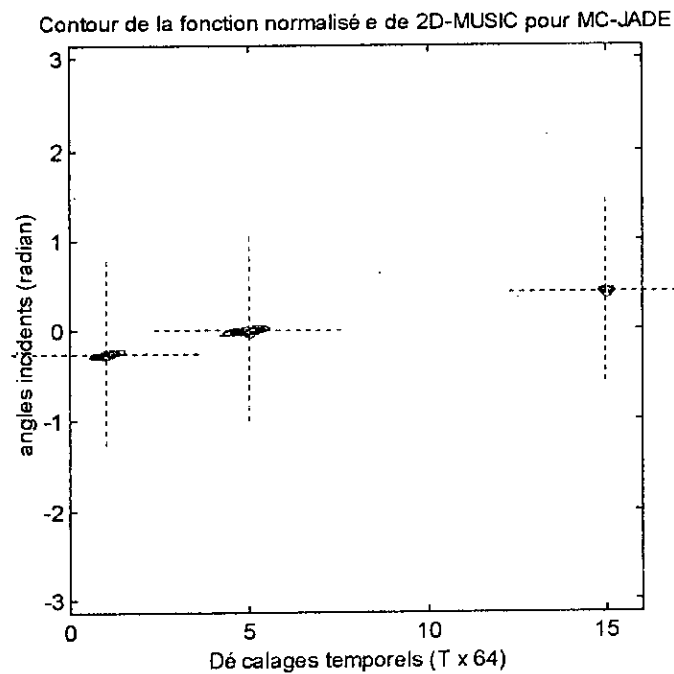


Figure 4.8: Contour de la fonction bidimensionnelle de 2D-MUSIC.

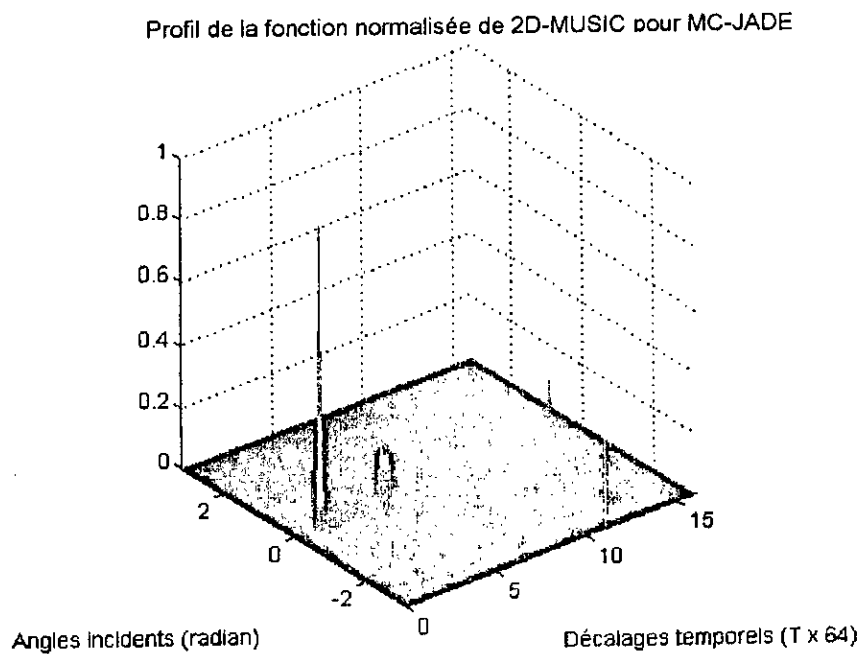


Figure 4.9: Profil de la fonction bidimensionnelle de 2D MUSIC.

supérieures du contour de la fonction bidimensionnelle de 2D-MUSIC (plus précisément la moyenne des $m = 8$ contours obtenus). On remarque que les paramètres ont été retrouvés avec une précision relativement appréciable (pour le rapport signal sur bruit fixé. Il est à noter que cette précision est dépendante du rapport signal sur bruit ainsi que du conditionnement de la matrice des données. Elle est également proportionnelle au nombre de points de l'intervalle sur lequel est évaluée la fonction bidimensionnelle.

4.3. Performances élémentaires de MC-JADE-ESPRIT

On considère une antenne de $M = 2$ éléments. L'espacement entre éléments est égal à la moitié de la longueur d'onde. Le nombre de trajets est $Q = 3$. La longueur du canal est de moitié la longueur du symbole T . La forme d'onde est un cosinus augmenté avec un facteur d'évanouissement de 0.25. Le nombre de porteuses est $C = 64$, avec $\mu = 8$. La méthode de diagonalisation conjointe est la méthode "Q".

4.3.1. Effet de la puissance du bruit

Les figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13 montrent l'effet de la puissance du bruit sur l'erreur quadratique moyenne (MSE) des paramètres estimés pour les valeurs réelles suivantes : pour le premier cas (4.10), $\theta = [-20^\circ \ 0^\circ \ 25^\circ]^T$, $\tau = [0 \ 0.062 \ 0.234]^T T$ et les atténuations complexes sont générées par une distribution complexe gaussienne de moyenne nulle et de variance $[0.3 \ 0.4 \ 0.4]^T$. Pour le deuxième cas (4.12), $\theta = [-15^\circ \ 0^\circ \ 25^\circ]^T$, $\tau = [0 \ 0.078 \ 0.234]^T T$. Les atténuations complexes sont générées par une distribution complexe gaussienne de moyenne nulle et de variance $[0.4 \ 0.3 \ 0.4]^T$.

On constate, dans deux exemples, que l'estimation est fortement sensible à la puissance du bruit et est erronée pour des rapports signal sur bruit faibles. Avec la réduction de l'effet du bruit, la différence avec la CRB est de 2 à 3 dB.

4.3.2. Comparaison avec SI-JADE

Pour le système décrit par les paramètres du premier cas de l'exemple précédent, on trace l'erreur quadratique moyenne relative à l'estimation des paramètres sur la première porteuse, en fonction de la puissance du bruit additif, pour SI-JADE [3]. Cette dernière méthode s'applique à l'estimation conjointe des paramètres de propagation dans des systèmes à porteuse unique. Les paramètres

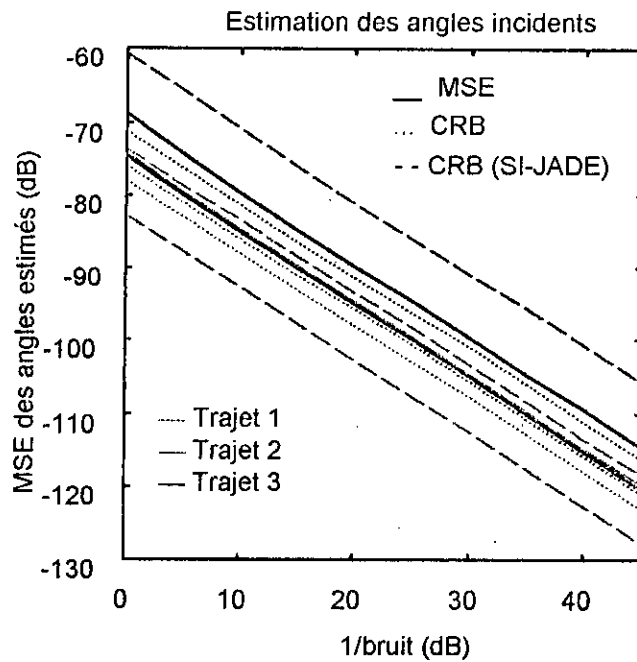


Figure 4.10: Estimation des angles d'arrivée (MC-JADE-ESPRIT vs SI-JADE).

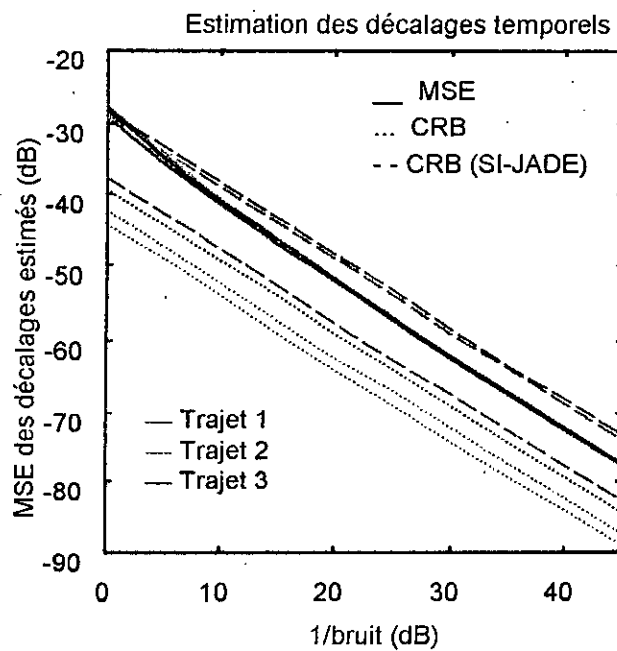


Figure 4.11: Estimation des décalages temporels (MC-JADE-ESPRIT vs SI-JADE).

de superposition relatif à SI-JADE, définis dans [3] sont $m_1 = 5$ et $m_2 = 1$. La CRB de SI-JADE est tracée sur les figures 4.10 et 4.11 par une ligne discontinue. Il est à noter que pour des puissances de bruits faibles, l'erreur quadratique moyenne des paramètres de MC-JADE-ESPRIT est inférieure à la CRB de SI-JADE, ce qui implique une plus grande précision d'estimation de MC-JADE-ESPRIT qui est principalement due à une quantité d'informations plus importante.

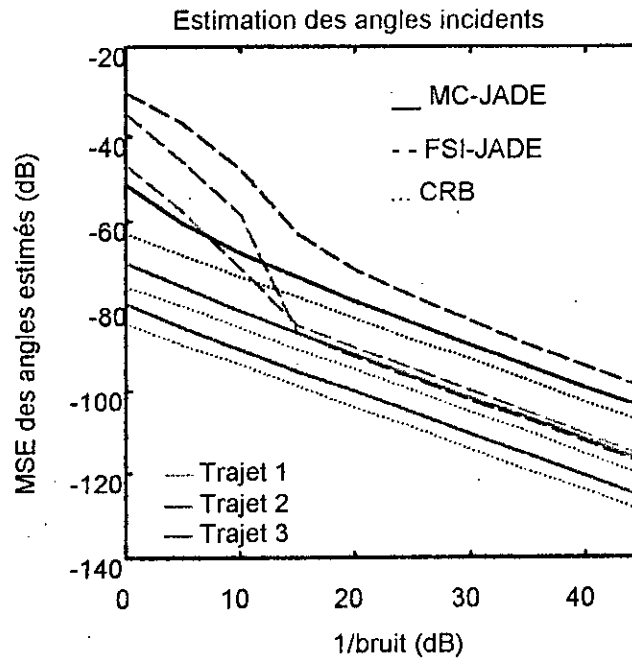


Figure 4.12: Estimation des angles d'arrivée (MC-JADE-ESPRIT vs FSI-JADE-ESPRIT).

4.3.3. Comparaison avec FSI-JADE-ESPRIT

Sur les figures 4.12 et 4.13, on a tracé l'erreur quadratique moyenne correspondant à FSI-JADE-ESPRIT, en fonction de la puissance du bruit aditif, en utilisant une ligne discontinue. Evidemment, comme MC-JADE-ESPRIT implique des traitements sur l'ensemble des porteuses, les données sont mieux conditionnées que pour FSI-JADE-ESPRIT, où des traitements parallèles sont effectués sur des blocs de données réduits. En effet, pour MC-JADE-ESPRIT, la matrice de la signature spatio-temporelle $\mathbf{U}_{m\mu}(\theta, \tau)$ est de dimension $Mm\mu \times Q$, tandis que pour FSI-JADE-ESPRIT, on a m matrices $\mathbf{U}_i(\theta, \tau)$ de dimension $M\mu \times Q$, or $Mm\mu > M\mu$. Donc, pour le même système, la méthode MC-JADE-ESPRIT est plus précise.

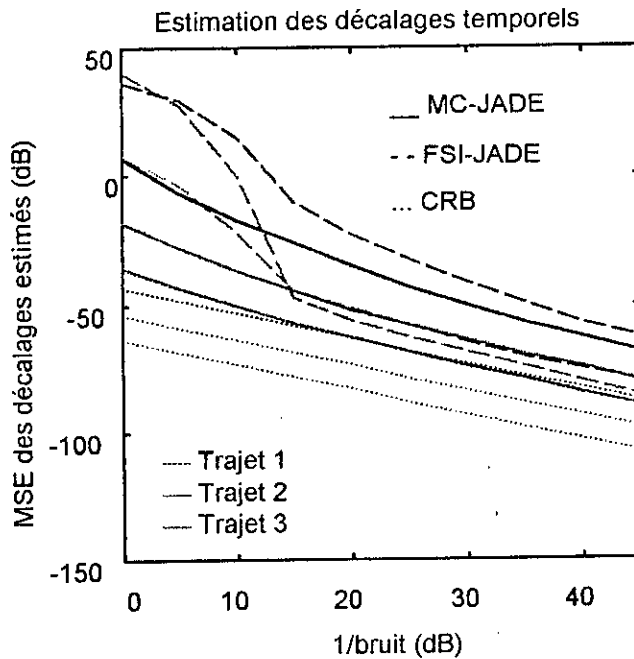


Figure 4.13: Estimation des décalages temporels (MC-JADE-ESPRIT vs FSI-JADE-ESPRIT).

4.3.4. Résolution de l'algorithme

On examine l'effet de l'espacement entre les angles d'arrivée sur la précision de l'estimation. A cet effet, on considère le cas d'une antenne de $M = 2$ éléments. Le nombre de trajets est fixé à $Q = 2$, où on garde les décalages temporels fixés à $\tau = [0 \ 0.2]^T T$, et l'angle du premier trajet fixé à 0. L'angle du second trajet est variable. Les atténuations complexes sont générées de la même manière que pour l'expérience précédente, avec une puissance du bruit fixée à -20 dB. Tous les autres paramètres sont inchangés. Les figures 4.14 et 4.15, montrent que la précision de l'estimation s'améliore avec des angles bien séparés.

On examine aussi l'effet de la séparation entre les décalages temporels sur l'estimation. On utilise pour cela un nombre de capteurs $M = 4$ et on fixe les angles d'arrivée à $\theta = [0^\circ \ 15^\circ]^T$ et le décalage du premier trajet à 0, tandis que le second délais est variable. L'effet de l'espacement temporel est montré sur les figures 4.16 et 4.17. Il est clair que pour des séparations réduites, des ambiguïtés surgissent et la condition de rang complet sur la matrice des échantillons de la forme d'onde n'est plus satisfaite, ce qui résulte en une estimation erronée. Ici, aucun lissage spatial n'est appliqué. Pour des décalages temporels bien espacés, l'estimation ne dépend que de la puissance du bruit.

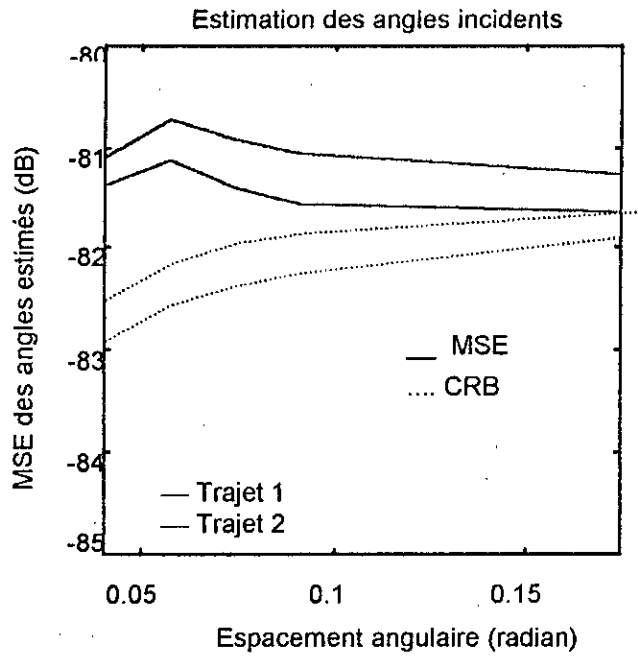


Figure 4.14: Effet de l'espacement angulaire sur la précision de l'estimation des angles d'arrivée.

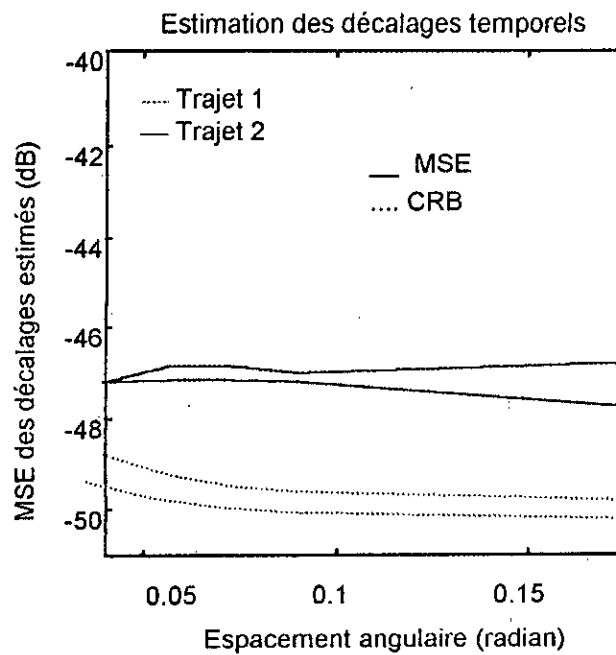


Figure 4.15: Effet de l'espacement angulaire sur la précision de l'estimation des décalages temporels.

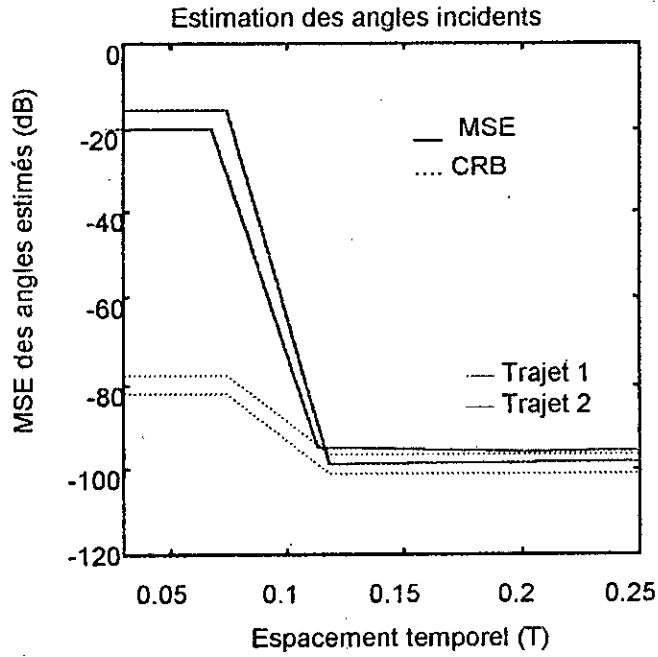


Figure 4.16: Effet de l'espacement entre décalages temporels sur la précision de l'estimation des angles d'arrivée.

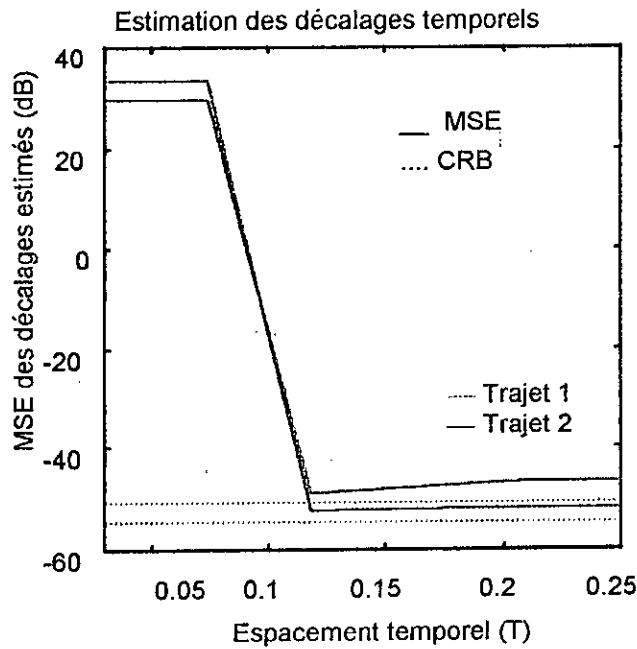


Figure 4.17: Effet de l'espacement entre décalages temporels sur la précision de l'estimation des décalages temporels.

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle approche pour l'estimation conjointe des paramètres de propagation quand des systèmes à multiporteuses sont employés. La particularité liée à ces systèmes qui se traduit par la variation des atténuations complexes d'une porteuse à une autre a été prise en considération, aboutissant vers un modèle mathématique décrivant le canal de transmission (modèle MC-JADE).

Les techniques 2D-MUSIC, FSI-JADE-ESPRIT et MC-JADE-ESPRIT exploitent les diversités fréquentielle et spatiale, ainsi que l'invariance aux décalages fréquentiels qui résulte de l'espacement fréquentiel uniforme des porteuses.

La technique 2D-MUSIC se traduit par l'évaluation d'une fonction caractéristique bidimensionnelle, du fait de l'estimation conjointe de deux paramètres différents. Les points critiques de cette fonction sont généralement obtenus avec des précisions appréciables mais au prix de moyens de calculs parallèles et itératifs, ce qui exclut l'application des principes de 2D-MUSIC pour l'estimation en-ligne.

Les techniques à base d'ESPRIT procurent des estimations analytiques. L'avantage principal de ces techniques est le traitement en une seule étape. De plus, contrairement à FSI-JADE-ESPRIT où des traitements parallèles sont nécessaires, MC-JADE-ESPRIT procure une estimation plus précise avec un seul ensemble de données, mieux conditionné, ce qui privilégie cette technique pour une estimation en temps réel.

Cependant, l'estimation conjointe des paramètres de propagation dans les systèmes à multiporteuses demeure sous-optimale du fait que l'estimation du canal de transmission est prérequise pour l'application de l'algorithme.

Références

- [1] M. Wax and A. Leshem, "Joint Estimation of Time Delays and Directions of Arrival of Multiple Reflections of a Known Signal", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, NO. 10, October 1997.
- [2] M. C. Vanderveen, A. J. van der Veen and A. Paulraj, "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communications", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, NO.3, March 1998.
- [3] A. J. van der Veen, M. C. Vanderveen, and A. Paulraj, "Joint Angle and Delay Estimation Using Shift-Invariance Techniques" *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, NO.2, February 1998.
- [4] A. J. van der Veen, M. C. Vanderveen and A. Paulraj, "Joint Angle and Delay Estimation Using Shift Invariance Properties" *IEEE Signal Processing Letters*", vol. 4, NO. 5, May 1997.
- [5] Y. Wu and B. Caron, "Digital Terrestrial Broadcasting", *IEEE Communications Magazine*, vol. 32, NO. 5, May 1994.
- [6] H. Sari, G. Karam and I. Jeanclaude, "Transmission Techniques for Digital Terrestrial TV Broadcasting", *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, NO. 2, February 1995.
- [7] J. A. C. Bingham, "MultiCarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come", *IEEE Communications Magazine*, vol. 28, NO. 5, May 1990.
- [8] I. Kalet, "The Multitone Channel", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, NO. 2, February 1989.
- [9] L. Vandendorpe and O. van de Wiel, "MIMO DFE Equalization for Multitone DS/SS Systems over Multipath Channels", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 14, NO.3, April 1996.
- [10] A. Belouchrani and M. G. Amin, "Blind Source Separation Based on Time-Frequency Signal Representations", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, NO. 11, november 1998.

- [11] K. Abed-Meraim and Y. Hua, "Blind Identification of Multi-Input Multi-Output System Using Minimum Noise Subspace", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, NO. 1, January 1997.
- [12] M. Haardt and J. A. Nossek, "Unitary ESPRIT: How to Obtain Increased Estimation Accuracy with a Reduced Computational Burden", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, NO. 5, May 1995.
- [13] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, Maximum Likelihood, and the Cramer-Rao Bound", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, NO. 5, May 1989.
- [14] S. M. Kay, "*Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*", Prentice-Hall, 1993.
- [15] M. Djeddou and A. Belouchrani, "Parameter for Low-Elevation Angle Tracking in Radar Systems", *DAT'2000*, Réghaïa, Algeria, May, 21st-23rd, 2000.
- [16] S. Aouada and A. Belouchrani, "A Frequency Shift Invariance (FSI) Technique for Joint Angle and delay Estimation In Multicarrier Wireless Communications", *ICEE'2000*, Boumerdès, Algeria, November, 4th-6th, 2000.
- [17] S. Aouada and A. Belouchrani, "Estimation of Propagation Parameters In Multicarrier Wireless Communications Using 2D-ESPRIT-Like Techniques", *ICEE'2000*, Boumerdès, Algeria, November, 4th-6th, 2000.

Annexe A

Produit de Kronecker

Soit \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux matrices de dimensions $M_x \times N_x$ et $M_y \times N_y$ respectivement.

Le produit de Kronecker entre \mathbf{X} et \mathbf{Y} dans cet ordre, noté $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$, est la matrice \mathbf{K} , de dimension $M_x M_y \times N_x N_y$, qui est définie comme suit

$$\mathbf{K} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} := \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1,1)} & \mathbf{K}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{K}^{(1,N_x)} \\ \mathbf{K}^{(2,1)} & \mathbf{K}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{K}^{(2,N_x)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}^{(M_x,1)} & \mathbf{K}^{(M_x,2)} & \dots & \mathbf{K}^{(M_x,N_x)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où

$$\mathbf{K}^{(i,j)} = x_{i,j} \mathbf{Y} \quad (2)$$

pour $i = 1, \dots, M_x$ et $j = 1, \dots, N_x$.

Annexe B

Algorithme SI-JADE [3, 4] (Shift-Invariance JADE)

SI-JADE est une technique d'estimation conjointe qui s'applique à des systèmes à porteuse unique et qui utilise les principes de 2D-ESPRIT.

Pour une porteuse unique ($c = 1$ par exemple), le modèle matriciel du canal de transmission est donné par

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{A}(\theta)\overline{\mathbf{G}}_1 \quad (1)$$

où $\mathbf{A}(\theta)$ et $\overline{\mathbf{G}}_1$ sont définies par (2.71) et (2.72) respectivement.

A partir de \mathbf{H}_1 on construit une matrice de Henkel \mathcal{H} , en décalant à gauche et en superposant des copies de \mathbf{H}_1 . Plus précisément, pour des entiers m_1 et m_2 qui vérifient

$$\begin{aligned} 2 \leq m_1 \leq L \\ 1 \leq m_2 \leq M - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

on définit pour $1 \leq i \leq m_2$ et $1 \leq j \leq m_1$, les partitions de \mathbf{H}_1 comme

$$\mathbf{H}_1^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,i,j} & \cdots & \{\mathbf{H}_{1,i,L-m_1+j}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{1,M-m_2+i,j} & \cdots & \mathbf{H}_{1,M-m_2+i,L-m_1+j} \end{bmatrix} \quad (3)$$

La matrice de Henkel est définie comme

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1,1)} & \dots & \mathbf{H}_1^{(m_2,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(1,m_1)} & \dots & \mathbf{H}_1^{(m_2,m_1)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matrice \mathcal{H} a pour factorisation l'expression suivante:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta) \\ \mathbf{A}(\theta)\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\theta)\Phi^{m_1-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_1 & \Psi\overline{\mathbf{G}}_1 & \dots & \Psi^{m_2-1}\overline{\mathbf{G}}_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

où Ψ et Φ sont définies par (2.105) et (2.106) respectivement.

Tout comme pour FSI-JADE-ESPRIT et MC-JADE-ESPRIT, on définit les matrices de sélection appropriées, à savoir

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\psi = \mathbf{I}_{m_1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-m_2-1} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_1 & \mathbf{I}_{M-m_2-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}'_\psi = \mathbf{I}_{m_1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 & \mathbf{I}_{M-m_2-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1-1} & \mathbf{0}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{M-m_2} \\ \mathbf{J}'_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 & \mathbf{I}_{m_1-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{M-m_2} \end{cases} \quad (7)$$

A partir de là, la technique SI-JADE est finalement conclue de manière similaire aux autres techniques à base de 2D-ESPRIT.

L'expression de la CRB pour SI-JADE est donnée par les éléments diagonaux de la matrice inverse de

$$CRB^{-1}(\eta) = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^{LN} \Re \{ \mathcal{S}^*(i) \mathbf{D}^* [\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^t] \mathbf{D} \mathcal{S}(i) \}$$

avec $\eta = [\theta^T \ \tau^T]$, le vecteur des paramètres, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} \end{bmatrix}$ et $\mathcal{S}(i) = \mathbf{I}_2 \odot \mathbf{s}(i)$, où $\mathbf{s}(i)$ est la i -ème colonne de la matrice \mathbf{S} . La matrice \mathbf{V} quant à elle, est définie par

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta) \\ \mathbf{A}(\theta)\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\theta)\Phi^{m_1-1} \end{bmatrix}$$

Annexe C

Calcul de la borne de Cramer-Rao pour MC-JADE (Détails)

On développe dans ce qui suit, à partir des résultats de [13],[2] et [14] la matrice de la borne de Cramer-Rao.

La fonction caractéristique Λ définie par (3.14), peut être réécrite de manière plus explicite comme suit :

$$\Lambda = \ln L = -Mm\mu L \ln \pi - Mm\mu L \ln \sigma_N^2 - \frac{1}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^L [\mathbf{h}(i) - \mathbf{U}\mathbf{g}(i)]^T [\mathbf{h}(i) - \mathbf{U}\mathbf{g}(i)] \quad (1)$$

Les dérivées de la fonction Λ par rapport aux paramètres inconnus peuvent être obtenues comme suit :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\sigma_N^2)} = -\frac{Mm\mu L}{\sigma_N^2} + \frac{1}{\sigma_N^4} \sum_{i=1}^L \mathbf{n}^*(i) \mathbf{n}(i) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_k} = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{k=1}^{2(Q+m)} \Re \left[\mathbf{g}^*(i) \frac{d\mathbf{U}^*}{d\eta_k} \mathbf{n}(i) \right] = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{k=1}^{2(Q+m)} \Re \left[\mathbf{g}^*(i) \mathbf{d}^*(\eta_k) \mathbf{n}(i) \right] \quad (3)$$

De manière plus compacte, on peut réécrire la dernière dérivée comme

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^L \Re \{ \mathbf{G}^*(i) \mathbf{D}^* \mathbf{n}(i) \} \quad (4)$$

Afin de compléter le calcul de la borne de Cramer-Rao pour le modèle MC-JADE, on a recours aux relations suivantes :

$$1) \ E[\mathbf{n}^*(i) \mathbf{n}(i) \mathbf{n}^*(j) \mathbf{n}(j)] = \begin{cases} (Mm\mu)^2 \sigma_N^4 & i \neq j \\ Mm\mu(Mm\mu + 1) \sigma_N^4 & i = j \end{cases} \quad (5)$$

$$2) \ E[\mathbf{n}^*(i) \mathbf{n}(i) \mathbf{n}^T(j)] = 0 \quad \text{pour tous } i \text{ et } j. \quad (6)$$

$$3) \begin{cases} \Re(\mathbf{g})\Re(\mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} [\Re(\mathbf{gh}^T) + \Re(\mathbf{gh}^*)] \\ \Im(\mathbf{g})\Im(\mathbf{h}^T) = -\frac{1}{2} [\Re(\mathbf{gh}^T) - \Re(\mathbf{gh}^*)] \\ \Re(\mathbf{g})\Im(\mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} [\Im(\mathbf{gh}^T) - \Im(\mathbf{gh}^*)] \end{cases} \quad (7)$$

4) Soit une matrice complexe carrée non-singulière \mathbf{P} dont l'inverse est notée \mathbf{Q} , c.à.d., $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$. Ces deux matrices vérifient

$$\begin{bmatrix} \Re(\mathbf{P}) & -\Im(\mathbf{P}) \\ \Im(\mathbf{P}) & \Re(\mathbf{P}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{Q}) & -\Im(\mathbf{Q}) \\ \Im(\mathbf{Q}) & \Re(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

En utilisant (5), on obtient

$$\begin{aligned} E \left[\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \sigma_N^2} \right)^2 \right] &= \frac{(Mm\mu L)^2}{\sigma_N^4} - 2 \frac{Mm\mu L}{\sigma_N^6} \sum_{i=1}^L E[\mathbf{n}^*(i)\mathbf{n}(i)] + \frac{1}{\sigma_N^4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[\mathbf{n}^*(i)\mathbf{n}(i)\mathbf{n}^*(j)\mathbf{n}(j)] = \\ &= \frac{(Mm\mu L)^2}{\sigma_N^4} - 2 \frac{(Mm\mu L)^2}{\sigma_N^4} + \frac{Mm\mu L}{\sigma_N^4} [(L-1)Mm\mu - (Mm\mu + 1)] = \\ &= \frac{Mm\mu L}{\sigma_N^4} \end{aligned} \quad (9)$$

En utilisant (6), on note que $\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \sigma_N^2}$ n'est corrélée avec aucune des autres dérivées.

En utilisant (7) et le fait que $E[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}^T(j)] = 0$ pour tous i et j , on obtient

$$E \left[\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \eta} \right)^T \right] = \frac{4}{\sigma_N^4} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \Re[E(G^*(i)\mathbf{D}^*\mathbf{n}(i)\mathbf{n}^*(j)\mathbf{D}G(j))] = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^N \Re[G^*(i)\mathbf{D}\mathbf{D}G(i)] \quad (10)$$

On introduit à présent les notations suivantes :

$$\mathbf{P} = \frac{2}{\sigma_N^2} \mathbf{U}^* \mathbf{U} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \quad (12)$$

et

$$\Delta_i = \frac{2}{\sigma_N^2} \text{UDG}(i) \quad (13)$$

La matrice de CRB est définie donc par

$$\text{CRB} = \left(E(\omega^T \omega) \right)^{-1} \quad (14)$$

Cette matrice est structurée comme suit :

$$\text{CRB} = \begin{bmatrix} \frac{Mm\mu L}{\sigma_N^4} & 0 & \dots & 0 & & \\ & \Re(\mathbf{P}) - \Im(\mathbf{P}) & & & \Re(\Delta_1) & \\ 0 & \Im(\mathbf{P}) & \Re(\mathbf{P}) & 0 & 0 & \Im(\Delta_1) \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \Re(\mathbf{P}) - \Im(\mathbf{P}) & \Re(\Delta_1) & \\ & & & \Im(\mathbf{P}) & \Re(\mathbf{P}) & \Im(\Delta_1) \\ \Re(\Delta_1)^T & \Im(\Delta_1)^T & \dots & \Re(\Delta_L)^T & \Im(\Delta_L)^T & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \quad (15)$$

A partir de (8) et des propriétés standards de l'inverse d'une matrice partitionnée, on déduit que, pour les paramètres inconnus η

$$\begin{aligned} \text{FIM} = \text{CRB}^{-1}(\eta) &= \mathbf{\Omega} - \begin{bmatrix} \Re(\Delta_1)^T & \Im(\Delta_1)^T & \dots & \Re(\Delta_L)^T & \Im(\Delta_L)^T \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{Q}) - \Im(\mathbf{Q}) & & & 0 \\ \Im(\mathbf{Q}) & \Re(\mathbf{Q}) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \Re(\mathbf{Q}) - \Im(\mathbf{Q}) \\ & & & \Im(\mathbf{Q}) & \Re(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\Delta_1) \\ \Im(\Delta_1) \\ \vdots \\ \Re(\Delta_1) \\ \Im(\Delta_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

On observe que

$$\begin{bmatrix} \Re(\Delta)^T & \Im(\Delta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{Q}) - \Im(\mathbf{Q}) \\ \Im(\mathbf{Q}) & \Re(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\Delta_1) \\ \Im(\Delta_1) \end{bmatrix} = \Re(\Delta^* \mathbf{Q} \Delta) \quad (17)$$

Ceci induit l'expression suivante

$$\text{CRB}^{-1}(\eta) = \frac{2}{\sigma_N^2} \sum_{i=1}^L \left\{ \Re \left[G^*(i) \mathbf{D}^* \mathbf{D} G(i) \right] \right\} \quad (18)$$

Annexe D

Liste des publications

- S. Aouada and A. Belouchrani, "Joint Estimation of Propagation Parameters in Multicarrier Systems", *SSAP'2000*, Poconos, PA, USA, August, 14th-16th, 2000.
- S. Aouada and A. Belouchrani, "A Frequency Shift Invariance (FSI) Technique for Joint Angle and Delay Estimation In Multicarrier Wireless Communications", *ICEE'2000*, Boumerdès, Algeria, November, 4th-6th, 2000.
- S. Aouada and A. Belouchrani, "Estimation of propagation Parameters In Multicarrier Wireless Communications Using 2D-ESPRIT-Like Techniques", *ICEE'2000*, Boumerdès, Algeria, November, 4th-6th, 2000.
- S. Aouada and A. Belouchrani, "Joint Estimation of Propagation Parameters In Multicarrier Wireless Communications", *IEEE Transactions on Signal Processing*, under review.

Glossaire

Smart Antenna (Antenne Intelligente) : Traitement des données reçues dans le temps (échantillons) et sur l'espace (éléments distincts de l'antenne) au niveau de la réception.

Rapport signal sur bruit : Rapport de la puissance du bruit sur celle du signal transmis

JADE (Joint angle and Delay Estimation) : Estimation conjointe des angles d'arrivée et des décalages temporels par un même algorithme.

SCM (Single carrier Modulation) : Modulation sur fréquence porteuse unique.

MCM (MultiCarrier Modulation) : Modulation sur fréquences porteuses multiples et orthogonales. MCM suppose une répartition des symboles transmis sur les différentes porteuses.

DTTB (Digital Terrestrial Television Broadcasting) : Télédiffusion Numérique Terrestre.

DAB (Digital audio Braodcasting) : Radiodiffusion Numérique Terrestre.

ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) : algorithme d'estimation analytique des paramètres de signaux (propagation, fréquences d'harmonique,...) présentant des propriétés d'invariance rotationnelle.

MUSIC (Multiple Signal Characterization) : Algorithme itératif d'estimation des paramètres de signaux présentant des propriétés de diversité spatiale ou fréquentielle.

SI-ESPRIT (Shift-Invariance ESPRIT) : Algorithme ESPRIT bidimensionnel adapté à l'estimation conjointe des paramètres de propagation pour des systèmes SCM.

FSI-JADE-ESPRIT (Frequency-Shift-Invariance ESPRIT) : Algorithme ESPRIT bidimensionnel adapté à l'estimation conjointe des paramètres de propagation pour des systèmes MCM, exploitant les propriétés d'invariances aux décalages fréquentiels et induisant des estimées multiples. Cet algorithme est l'objet du présent travail de Magister.

MC-JADE-ESPRIT (MultiCarrier Joint angle and Delay Estimation ESPRIT) : Algorithme ESPRIT bidimensionnel adapté à l'estimation conjointe des paramètres de propagation pour des systèmes MCM, exploitant les propriétés d'invariances aux décalages fréquentiels. Cet algorithme est l'objet du présent travail de Magister. MC-JADE-ESPRIT procure la solution à la variation des atténuations complexes avec le nombre de porteuses.

Borne de Cramer-Rao : Borne inférieure sur la variance d'un estimateur non biaisé.

QPSK (Quadratic Phase-Shift Keeing) : Modulation d'Amplitude complexe quadratique.

DMT (Digital MultiTone) : Acronyme alternatif à MCM, utilisé notamment dans la Transmission Numérique sur Paires Torsadée.

OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) : Acronyme alternatif de MCM, utilisé en DAB et DTTB.