

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique



Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTERE

Spécialité : ÉNERGETIQUE

THEME

**INFLUENCE DES REGIMES D'ÉCOULEMENT SUR LES PERFORMANCES
ÉNERGETIQUES DES CHEMINÉES SOLAIRES**

Présenté par

Mourad GAHGAH

Ingénieur d'Etat en génie mécanique

Soutenu le : 16 décembre 2008

Jury :

Président :	Pr. M. Haddadi	Professeur	E.N.P
Rapporteurs :	Dr. S. Larbi	Maître de Conférence	E.N.P
	Dr. A. Bouhdjar	Directeur de recherche	C.D.E.R
Examineur :	Dr. M. Belhamel	Directeur de recherche	C.D.E.R
	Dr. B. Benkoussas	Maître de Conférence	E.N.P
	Dr. A. Smaili	Maître de Conférence	E.N.P
Invité:	Mr. B. Gadouche	CREDEG	SONELGAZ

إهداء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ

صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ ﴾

سورة النمل الآية 19

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى الذين كانا السبب في وجودي، و سندا لجهودي

والدي العزيزين حفظهما الله و أطال الله في عمرهما

إلى الأخت الغالية سميرة

إلى إخوتي منير، رضوان، نورالدين و حمزة

إلى زوجتي التي قاسمتني هذا العمل

إلى جميع أهلي و زملائي في الدراسة و خاصة رفيق دربي زوبير
الكريمي

إلى كل من نسيه قلبي و لم ينسه قلبي

مراد قحقح



REMERCIEMENTS

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de Magister ont été effectués au sein du département de Génie Mécanique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (ENP).

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Messieurs LARBI Salah et BOUHDJAR Amor, respectivement Maître de Conférence et Directeur de recherche, pour m'avoir encadré durant la préparation de ce mémoire. Leur grande disponibilité, leur grande vivacité et leur engagement scientifique m'ont aidé à me dépasser durant ces années.

Mes remerciements vont aux membres de jury qui ont pris soin d'examiner le travail présenté dans ce mémoire : Monsieur HADDADI Mourad, Professeur à l'ENP, pour l'intérêt qu'il a porté au travail effectué en acceptant d'être président du jury de ce mémoire, Monsieur BELHAMEL Maïouf, Directeur de recherche au CDER, Monsieur BENKOUSSAS Bouzid, Maître de conférences à l'ENP et Monsieur SMAILI Arezki, Maître de conférences à l'ENP. Mes remerciements vont également à Monsieur GADOUCHE Brahim, Ingénieur au CREDG (Sonelgaz) pour avoir accepté notre invitation et pour l'intérêt qui la manifesté au sujet traité dans ce manuscrit.

Je tiens à présenter mes vifs remerciements aux personnes qui m'ont aidé durant la préparation du mémoire surtout Monsieur Safer Nabil Belkacem de l'URER.MS d'Adrar.

Merci aussi à tous mes collègues et amis de l'Ecole Nationale Polytechnique surtout : LAKHAL Rachid, NOUNI redouane, MESSAOUDI Salim, HADIDI Nacer, RABIA, Fouad et Melle AIT KACI) que Je leur exprime ma profonde sympathie et leur en souhaitant beaucoup de chance pour leurs travaux.

ملخص:

تتمثل هذه الأطروحة في محاولة وضع قاعدة مبدئية للدراسات الديناميكية لما يسمى بالمذاخن الشمسية المستعملة في توليد الكهرباء و لهذا قسمت المذكورة الى قسمين:

القسم الاول : تم فيه انشاء خوارزمية للحسابات لدراسة جريان الهواء في النظام المتوازن عبر جهاز يشبه هندسيا وحدات المذاخن الشمسية قصد ايجاد الحقل الحرارى و التوزيع الحرارى و قد تم استعمال طريقة عددية مرتكزة اساسا على مفهوم الحجوم المنتهية و ذلك لمعالجة المعادلات الرياضية المترجمة لظاهرة الحمل الطبيعي مع فرضية كون الجريان , غير انتقالي ذا بعدين.

القسم الثانى : تم فيه انشاء خوارزمية للحسابات لدراسة جريان الهواء في النظام الهائج عبر جهاز يشبه هندسيا وحدات المذاخن الشمسية قصد ايجاد الحقل الحرارى و التوزيع الحرارى و قد تم استعمال طريقة عددية مرتكزة اساسا على مفهوم الحجوم المنتهية و ذلك لمعالجة المعادلات الرياضية المترجمة لظاهرة الحمل الطبيعي مع فرضية كون الجريان , غير انتقالي ذا بعدين.

الكلمات المفتاحية : للدراسات الدينامية , المذاخن الشمسية , الوسائط الهندسية و الفيزيائية , الحقل الحرارى , التوزيع الحرارى , الحمل الطبيعي, الجريان هادئ انتقالي

RESUME : Le travail présenté dans le cadre de cette étude est relatif à une étude d'écoulements dans une cheminée solaire par voie de simulation numérique. La modélisation du problème a été établie moyennant l'utilisation d'une approche basée sur l'étude des écoulements dans une cavité ouverte constituée d'un disque et d'un cylindre. L'analyse du problème est relative au développement d'un code de calcul, avec variables adimensionnelles en coordonnées généralisées, pour la simulation de l'écoulement d'air dans la cheminée, avec prise en compte des deux régimes d'écoulements (laminaire et turbulent). Les aspects, thermique et hydrodynamique de l'écoulement ont été traités dans le cadre de cette étude, à travers la résolution des équations de la dynamique des fluides, par utilisation de la méthode des volumes finis avec des conditions aux limites adéquates. Il est à souligner que l'originalité de ce travail réside dans la modélisation, mathématique et numérique, des écoulements laminaire et turbulent, dans une géométrie complexe, avec variables adimensionnels, dans le souci de la généralisation des résultats. Notons, que la littérature sur l'aspect dynamique des fluides, en général, et l'écoulement turbulent en particulier dans les cheminées solaires, est très pauvre. En effet, les travaux publiés se contentent de l'utilisation de logiciels industriels, tel que Fluent, avec variables dimensionnelles, sans une modélisation mathématique fine, du phénomène physique. Ce travail constitue alors une plateforme d'analyse des performances énergétiques des cheminées solaires, avec prise en compte de l'aspect thermo- fluide ayant lieu dans les centrales de production d'énergie de type cheminée solaire en régime permanent.

Mots clés : Centrale cheminée solaire, laminaire, turbulent, comportement thermo-hydrodynamique, méthode des volumes finis.

ABSTRACT: The present work is related to a numerical simulation of flows in solar chimney. The Mathematical modelling approach used is based on flows in an opened enclosure with two components: a cylinder and a disc. This analysis consists in developing a computer software with dimensionless variables, and in generalized coordinates, in order to simulate an air flow in a chimney, by taking into account the different flow regimes (laminar and turbulent flows). Thermal hydrodynamic aspect of flows is also analysed, by solving the fluid dynamics equations, using finite volume method with adequate boundary conditions. The originality of this study is related to the mathematical and the numerical modelling of laminar and turbulent flows, taking place in a complex geometry, like solar chimney power plant, with dimensionless variables. We must underline that published works in fluid dynamics fields are, in general very poor, particularly in turbulent flows. The most part of works use industrial computer software, like Fluent software, and without any mathematical modelling of physical phenomena. This study constitute a corn stone in understanding the solar chimney efficiency, with thermo- fluid aspect analysis, that take place in solar chimney power plant and in steady state conditions.

Keys words: Solar chimney power plant, laminar, turbulent, thermohydrodynamic behaviour, the finite volume method.

Nomenclature

A_{coll}	Section transversale collecteur	m^2
A_{tr}	Section transversale de la tour	m^2
c_p	Capacité calorifique massique à pression constante de l'air	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C_{\varepsilon_3}$	Coefficients	
d_h	Diamètre hydraulique	m
h_{in}	La hauteur à l'entrée du capteur	m
g	Accélération gravitationnel	$m.s^{-2}$
G_K	Terme de la génération de la turbulence dû au gradient de température	
\dot{m}	Débit massique	$kg.s^{-1}$
h_c	Coefficient d'échange par convection	
k	Energie cinétique turbulente	$m^2.s^{-2}$
k_p	Energie cinétique proche de la paroi	$m^2.s^{-2}$
L	Longueur	m
$L[...]$	Approximation numérique	
I	Irradiation solaire	W/m^2
I_{it}	Intensité turbulente	
PK	Terme de la génération de la turbulence due à la vitesse moyenne de turbulence	
P	Centre du volume de contrôle	
p	Pression	N/m^2
p'	Correction de la pression	
Δp	Différence de pression entre la base et l'environnement voisinant	Pa
R_{coll}	Rayon	m
T	Température	K
ΔT	Différence de température entre le sol et l'ambiance	K
v_c	Vitesse de l'air à l'entrée de la cheminée	$m.s^{-1}$
(u, v)	Composantes physiques des vitesses	$m.s^{-1}$
(u', v')	Correction des composantes des vitesses	
(U, V)	Composantes covariantes des vitesses	$m.s^{-1}$
(u^*, v^*)	Composantes adimensionnelles des vitesses	
S	Terme source	$m.s^{-1}$

Les nombres adimensionnels

Pr	Nombre de <i>Prandtl</i>	
Gr	Nombre de <i>Grashof</i>	
Ra	Nombre de <i>Rayleigh</i>	
Pe	Nombre de <i>Péclet</i>	
Re	Nombre de <i>Reynolds</i>	

Symboles grecs

α_p	Coefficient de relaxation pour la pression	
α_u	Coefficient de relaxation pour la vitesse axiale	
α_v	Coefficient de relaxation pour la vitesse radiale	
$(\tau\alpha)$	Rendement effectif	
β	Coefficient volumique de dilatation thermique	K^{-1}
λ	Conductivité thermique du fluide	$W.m^{-1}.K^{-1}$
λ_t	Conductivité thermique turbulente	$W.m^{-1}.K^{-1}$
ρ	Densité de l'air	$kg.m^{-3}$
η	Rendement	
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique	$m^2.s^{-3}$
ε_p	Taux de dissipation proche de la paroi	$m^2.s^{-3}$
(r, θ, z)	Système de coordonnées cylindriques	
(ξ, η)	Système de coordonnées généralisées	
μ	La viscosité dynamique du fluide	$kg.s^{-1}.m^{-1}$
μ_t	La viscosité dynamique turbulente du fluide	
α, β, γ	Tenseurs métriques	
ϕ	Variable indépendante générale	
$\tau_{i,j}$	Taux de déformation	
$\Gamma\phi$	Diffusivité	

Indices

<i>coll</i>	Collecteur	
<i>sc</i>	Cheminée solaire	
<i>tot</i>	Total	
<i>wt</i>	Turbine	

Exposant

*	Variable adimensionnelle	
---	--------------------------	--

Liste des Figures

Figure 1.1 : prototype de cheminée solaire installée à Manzanares – Espagne	18
Figure 2.1 : les principales composantes d'une cheminée solaire : le capteur solaire, la tour cheminée et la turbine de vent à la base de la cheminée.	27
Figure 2.2 : transformation du plan physique (r, z) au plan de travail (ξ, η)	29
Figure 2.3 : domaine de physique et condition aux limites	34
Figure 2.4 : Volume de contrôle près de la paroi	36
Figure 2.5 : Discrétisation des conditions aux limites dans le plan transformé.	39
Figure 3.1 Maillage global curviligne avec la zone de jonction.	42
Figure 3.2 : Transformation du domaine d'étude	43
Figure 3.3 : Volume de contrôle sur un domaine bidimensionnel.	43
Figure 3.4 : Alternance des volumes de contrôle.	44
Figure 3.4 : type de maillage utilisé	50
Figure 4.1 : Modèle réduit de la cheminée	56
Figure 4.2 : Isotherme pour un $Ra = 10^4$	57
Figure 4.3 : Isotherme pour un $Ra = 10^5$	57
Figure 4.4 : Isotherme pour un $Ra = 10^6$	58
Figure 4.5 : Isotherme pour un $Ra = 10^7$	58
Figure 4.6 : Isotherme pour un $Ra = 10^8$	59
Figure 4.7 : L'épaisseur de la couche thermique dans le régime laminaire à $r = 0.08$ Pour des $Ra = 10^4, 10^5, 10^8$	59
Figure 4.8 : (a) contour de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^4$	60
Figure 4.9 : (a) contour de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^5$	60
Figure 4.10 : (a) contour de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^6$	61
Figure 4.11 : (a) contour de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^7$	61
Figure 4.12 : (a) contour de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^8$	62
Figure 4.13 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^4$	62
Figure 4.14 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^5$	63
Figure 4.15 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^6$	63

Figure 4.16 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^7$	64
Figure 4.17 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^4$	65
Figure 4.18 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^5$	65
Figure 4.19 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^6$	66
Figure 4.20 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^7$	66
Figure 4.21 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^4$	67
Figure 4.22 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^5$	67
Figure 4.23 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^6$	68
Figure 4.24 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^7$	68
Figure 4.25 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^8$	69
Figure 4. 26 : Isotherme pour un $Ra = 10^9$	70
Figure 4. 27 : Isotherme pour un $Ra = 10^{11}$	70
Figure 4.28 : La variation de l'épaisseur de la couche thermique pour $Ra = 10^9$ et $Ra = 10^{11}$	71
Figure 4.29 : Contour de la vitesse V pour $Ra = 10^9$	72
Figure 4.30 : Contour de la vitesse U pour $Ra = 10^9$	72
Figure 4.31 : Contour de la vitesse V pour $Ra = 10^{11}$	73
Figure 4.32 : Contour de la vitesse U pour $Ra = 10^{11}$	73
Figure 4.33 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^9$	74
Figure 4.34 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^{11}$	74
Figure 4.35 : Variation de l'épaisseur de la couche thermique entre le régime laminaire et le turbulent à $r = 0.08$ Pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6, 10^9$	75
Figure 4.36 : la zone de transition du régime laminaire au régime turbulent	76
Figure 4.37 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^8$	76
Figure 4.38 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^9$	77
Figure 5.1 : la puissance délivrée en fonction de Ra	81
Figure 5.2 : La variation de la puissance et de la vitesse pour une journée type Concernant le prototype de Manzanares	82

Liste des Tableaux

Tableau 2.1 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans le plan (ory)	28
Tableau 2.2 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans les coordonnées curviligne	30
Tableau 2.3 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans le plan (Orz)	31
Tableau 2.4 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans le plan (Orz)	33
Tableau 2.5 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ de l'équation de transport en régime turbulent dans les coordonnées curviligne.	33
Tableau 5.1 : variation de la puissance en fonction du nombre de Rayleigh	80

INTRODUCTION GENERALE

13

CHAPITRE I.

GENERALITES

Introduction.....	16
I.1. Solutions technologiques.....	16
I.2. Description de la cheminée solaire.....	17
I.3. Les approches numériques de la turbulence.....	18
I-3.1. La simulation numérique directe.....	18
I-3.2. La simulation des grandes structures de turbulence.....	18
I-3.3. Les méthodes statistiques.....	19
I-3.4. Concept de la viscosité turbulente.....	20
I-3.5. Modèle à deux équations de transport.....	20
I.4. Travaux antérieurs, page d'histoire.....	20
I.5. Objectif du travail.....	24

CHAPITRE II.

ETUDE DYNAMIQUE D'UNE CENTRALE
CHEMINÉE SOLAIRE

Formulation mathématique du problème	
II.1. Introduction	26
II.2. Définition du problème	26
II.3. Hypothèses simplificatrices	27
II.4. cas laminaire	
II.4.1. Modélisation mathématique	27
II.4.1.1. Equation de continuité	27
II.4.1.2. Equation de conservation de quantité de mouvement.....	28
II.4.1.3. Equation de conservation de l'énergie	28
II.4.2. Transformation en coordonnées curvilignes	28
II.4.3. Forme adimensionnel des équations	30
II.4.3.1. Equation de continuité	30
II.4.3.2. Equation de conservation de quantité de mouvement	30
II.4.3.3. Equation de conservation de l'énergie	31
II.5. Cas turbulent	
II.5.1. Modélisation mathématique	31
II.5.1.1. Equation de continuité	32
II.5.1.2. Equation de conservation de quantité de mouvement	32
II.5.1.3. Equation de conservation de l'énergie	32
Modèle de la turbulence $k - \varepsilon$	
II.5.1.4. Equation de conservation de l'énergie cinétique turbulente k	32
II.5.1.5. Equation de taux de dissipation ε	32

II.5.2. Transformation en coordonnées curvilignes	33
II.6. Conditions aux limites	33
II.6.1. Choix des conditions relatives à la vitesse et à la pression d'entrée	34
II.6.2. Cas laminaire	34
II.6.2.1. Condition d'entrée	34
II.6.2.2. Condition de sortie	35
II.6.2.3. Condition à l'axe de symétrie	35
II.6.2.4. Condition près des parois solides	35
II.6.3. Cas turbulent	
II.6.3.1. Modèle à faible nombre de Reynolds	35
II.6.3.2. Fonction de paroi	36
II.6.3.3. Condition à la limite sur la température	37
II.6.3.4. Conditions aux limites de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation	
II.6.3.4.1 Conditions à l'entrée	37
II.6.3.4.2 Condition à la sortie	38
II.6.3.4.3 Condition proche des parois solides	38
II.6.3.4.4 Conditions de symétrie	38
II.7. Calcul du nombre de Nusselt moyen	39

CHAPITRE III.

METHODE DE RESOLUTION

III.1. Introduction	42
III.2. Principe de la méthode	42
III.3. Discrétisation du domaine de calcul.....	42
III.3.1. Discretisation des équations	43
III.3.1.1. Discretisation spatiale	43
III.3.1.2. La dérivée de l'équation approximative	44
III.3.1.3. Résolution du système linéaire	46
III.4. Technique de sous-relaxation	47
III.5. Critère de convergence	49
III.6. Application de l'algorithme de calcul	49
III.6.1. Développement de l'Algorithme	49
III.6.2. Maillage	50
III.6.3. Traitement du couplage pression-vitesse	51
III.6.4. Méthode de type prédiction-correction	51
III.6.5. Résumé des étapes de l'algorithme	52
a-Cas laminaire	52
b-Cas turbulent	52
Organigramme I : Cas laminaire	53
Organigramme II : Cas turbulent	53

CHAPITRE IV.	RESULTATS ET DISCUSION
IV.1. Introduction	56
IV.2. Résultats et interprétation	56
IV.2.1. Régime laminaire	56
IV.2.1.1. Influence du nombre de Rayleigh	56
IV.2.1.1.1. Champs de température	56
IV.2.1.1.2. Profils de température à différentes sections de la cheminée	59
IV.2.1.1.3. Vecteur et champs de vitesse	60
IV.2.1.1.4. Profile de la vitesse	62
- Vitesse radiale	62
- Vitesse axiale	64
IV.2.1.1.5. Contour de la pression	67
IV.2.2. Régime turbulent	
IV.2.2.1. Influence du nombre de Rayleigh	69
IV.2.2.1.1. Champs de température	69
IV.2.2.1.2. Champs de la vitesse	71
IV.2.2.1.3. Profile de la vitesse	74
IV.3. Détermination de la zone de transition du régime laminaire au régime turbulent	75
CHAPITRE V.	CALCUL DES PERFORMANCES ENRGETIQUE DE LA CCS ET VALIDATION DES RESULTATS
V.1. Introduction	79
V.2. Calcul de la puissance	79
V.2.1. Calcul des performances de composant de la CCS	79
V.2.1.1. Capteur solaire	79
V.2.1.2. Tour cheminée	79
V.2.1.2. Turbine	79
V.3. Objectif	80
V.4. Validation	81
Conclusion générale	84
BibLiOGRAPHiE	85
Annexe A	88
Annexe B	94

Introduction générale

Les applications solaires ont pris de l'ampleur ces dernières années, dans le but de trouver des systèmes économiques en matière de consommation énergétique et développer des techniques moins coûteuses et durables utilisant cette source d'énergie inépuisable par excellence. Le développement de ces techniques touche à plusieurs sciences, telle que : la mécanique des fluides, le transfert de chaleur, la dynamique des gaz et autres. De même, il a été appliqué dans notre étude un développement numérique de la dynamique des fluides dans une cheminée solaire assimilée à une cavité ouverte.

Donc, de ce qui suit, nous étudierons la dynamique des fluides dans une cavité ouverte chauffée par le bas. L'air admis dans la cavité est chauffé par le rayonnement solaire pour obtenir un écoulement donnant naissance à une énergie cinétique. Celle-ci est transformée en énergie mécanique qui est transformée en énergie électrique. En procédant à une amélioration du rendement global de cette technique, il nous est apparu essentiel de considérer une géométrie curviligne pour donner à l'écoulement une allure plus naturelle. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'un écoulement incompressible, qui est modélisée mathématiquement par des équations de Navier-Stokes, représenté par l'équation de continuité, les équations de mouvement et l'équation d'énergie.

Le travail consiste donc, à trouver les composantes de vitesse, de pression et de température de l'écoulement sur un nombre fini de points du domaine d'étude, sous des conditions aux limites imposées. La méthode de volumes finis a été utilisée dans la discrétisation, où on obtient les équations approximatives qui prennent des propriétés constantes sur chaque élément de maillage, qui est appelé volume de contrôle. Différents schémas numériques tels que : schéma centré *CDS*, schéma décentré aval *UDS* et schéma décentré aval avec fonction de poids *WUDS*, sont utilisés dans l'approximation numérique.

Le travail présenté dans ce mémoire se compose de cinq chapitres :

Le premier chapitre, présenté sous forme d'étude bibliographique et page d'histoire sur les travaux antérieurs effectués durant les dernières décennies sur les cheminées solaire et expose les différentes procédures adaptées dans le développement numérique et expérimentale.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation d'un écoulement incompressible dans une cavité ouverte, gouvernée par les équations de *Navier – Stokes*. Ces dernières sont déduites des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Vu la forme géométrique imposée de la cavité, les équations résultantes sont transformées en coordonnées curvilignes. Dans le but de généraliser les résultats obtenus pour différentes conditions et géométries, les équations obtenues sont écrites sous forme adimensionnelle.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique d'un écoulement incompressible dans une cavité ouverte curviligne. Les équations décrivant l'écoulement sont écrites sous forme générale de variable ϕ [23]. La méthode de volumes finis choisi dans notre travail décrite par Patankar [6], qui consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes élémentaires, et l'équation générale est intégrée sur chaque volume de contrôle pour obtenir des équations qui sont appelées : **équations discrétisées**.

Dans ce type de problème, le maillage est défini sur un domaine d'étude curviligne. Le schéma correspondant à ce type de domaine est appelé schéma à 9 points ou schéma *VF9*. Deux codes de calcul sont développés pour mettre en exécution les équations décrivant le problème, tout en utilisant l'Algorithme de pression appelé *SIMPLE* pour résoudre l'équation de correction pression-vitesse.

Le quatrième chapitre consacré à l'interprétation des résultats obtenus, par les deux codes de calcul simulant les deux régimes d'écoulement, à savoir le régime laminaire et le régime turbulent en convection naturelle dans une cheminée solaire.

Cinquième chapitre, dans ce dernier chapitre on calcule les performances énergétiques de la cheminée solaire en matière de puissance et rendement suivie d'une validation des résultats par comparaison aux résultats expérimentaux.

Ce mémoire est doté de plusieurs annexes, où on présente le développement mathématique suivi dans l'élaboration des équations de *Navier - Stocks* dans les différents systèmes de coordonnées utilisées.

Chapitre I

Sommaire du chapitre

☞ INTRODUCTION

☞ SOLUTION TECHNOLOGIQUE

☞ DESCRIPTION DE LA CHEMINEE SOLAIRE

☞ LES APPROCHES NUMERIQUES DE LA
TURBULENCE

☞ TRAVAUX ANTERIEURS ET PAGE
D'HISTOIRE

☞ OBJECTIFS DE TRAVAIL

GENERALITES

Depuis le feu de bois, la traction animale, les moulins crétois et la marine à voile, toutes les sources énergétiques disponibles pour assurer le développement humain étaient renouvelables jusqu'à la *révolution industrielle* du XIX^{ème} siècle. Cette dernière a précisément été marquée par l'accès massif aux ressources fossiles et non renouvelables (charbon, pétrole, gaz, nucléaire) pendant plus d'un siècle. Chacun sait que cette révolution a profondément bouleversé l'ensemble des activités et habitudes humaines et a largement contribué à structurer les rapports sociaux, politiques et stratégiques sur l'ensemble de la planète. Nous atteignons aujourd'hui les limites du modèle de développement productiviste fondé sur deux postulats, dont nous savons aujourd'hui avec certitude qu'ils sont faux : celui du caractère inépuisable des ressources énergétiques classiques et de la neutralité environnementale de leur utilisation. En effet, nous avons pris conscience que nous vivons sur une planète à ressources énergétiques finie. L'être humain peut la détruire ou la sauvegarder.

Si nous choisissons le développement durable, c'est à dire l'accès équitable aux ressources sans épuisement de la planète, alors une stratégie économe en énergie basée largement sur les énergies renouvelables est indispensable et inéluctable. Ce choix n'est pas seulement une vue de l'esprit pour le long terme, il détermine les conditions de la paix ou de la guerre dans moins d'une génération. L'épuisement à terme des ressources fossiles et fissiles, leur impact négatif sur l'environnement ainsi que notre volonté de paix et de justice imposent donc une deuxième révolution énergétique.

La continuité d'approvisionnement en énergie, son coût, et la neutralité de son utilisation vis-à-vis de l'environnement sont les trois objectifs clefs de toute politique énergétique de tout pays du monde. Comme la demande mondiale en énergie augmente exponentiellement, les ressources d'énergies conventionnelles sont exposées à l'épuisement dans un futur proche. De plus, la prévision en matière de la population mondiale qui se voit vers la hausse qui a tendance à doubler tout les 60 ans, ce qui revient à un taux de croissance de 1,2 à 2% par an, table 1.

Tableau 1: population, énergie et demande en électricité [7]

Année	Population (billions)	Demande en énergie (MMBDOE)*	Demande en électricité % de la demande en énergie
1970	3.6	100	6
1985	4.8	200	9
1995	5.3	300	15
2000	6.1	350	30
2050	12	700	62

* Signifie des millions de baril équivalent de pétrole par jour

1.1. Solutions technologiques

La solution qu'on peut envisager pour remédier à ce problème est de retourner aux ressources naturelles et l'énergie solaire en est une. Elle est renouvelable par excellence. L'énergie solaire est d'un intérêt primordial pour un grand nombre de pays, y compris l'Algérie, disposant d'un très fort ensoleillement pour lequel elle peut jouer un rôle majeur dans le futur proche. De plus si l'effort de Recherche et de Développement est poursuivi et encouragé, la part de cette source d'énergie pourrait se révéler encore bien supérieure à long terme [7]. Dans cet axe, ces dernières décennies la recherche dans ce domaine a pris une sérieuse avance et c'est devenu à la mode. Cette tendance est le résultat de plusieurs facteurs multiples et complexe, les conflits politiques ont influencés l'utilisation correcte et rationnelle des ressources naturelle fossiles ou autres, dont l'urgence de trouver une source inépuisable et renouvelable et au même temps pour remédier aux problèmes de la distribution inégale d'énergie et par la suite trouver une issue pour échapper à la domination des géants du pétrole qui contrôlent la politique énergétique

dans le monde !? Bien que même la technologie des énergies renouvelables (E.R) si elle n'est pas bien assimilée et contrôlée par les pays en voie de développement elles resteraient à jamais dépendant des plus forts ! Et l'histoire énergétique se répète. Parmi ces ressources inépuisables, on trouve par excellence l'énergie solaire qui a attiré l'intérêt des chercheurs en l'utilisant dans plusieurs disciplines et sous plusieurs formes, citant à titre d'exemple : le solaire thermique et le solaire photovoltaïque, comme deux grands axes de l'application solaire. Parmi les technologies solaires les plus rentables, on trouve la technologie de centrale à cheminée solaire. (Schlaich, 1995). Mais quand on parle de la production de l'électricité, il faut faire la différence entre la petite production et la grande production centralisée de l'électricité. Dans le premier cas on parle d'une production de l'ordre de 100 kW maximum.

La production centralisée signifie des centrales solaires à grande capacité de production allant de 10 à 500 MW/jour.

Selon la situation actuelle, on compte deux grands groupes pour la production de l'électricité solaire :

❖ Production d'électricité à grande échelle centralisée

- Systèmes répartis de capteurs (DCS) avec les capteurs paraboliques de cuvette,
- Systèmes centraux récepteur (CRS) avec des héliostats,
- Cheminée solaire avec des capteurs en verre ou film plastique.

❖ Production d'électricité décentralisée à petite échelle

- Système de Dish/Stirling (D/S)
- Systèmes Photovoltaïque (PV)

Tous les systèmes précédemment cités sont des centrales thermiques solaires à l'exception des systèmes photovoltaïques. En outre, les cheminées solaires et les systèmes photovoltaïques ont la capacité d'utiliser le rayonnement solaire diffus qui suggère que la cheminée solaire fournisse la seule technologie pour l'utilisation à grande échelle dans les régions caractérisées par un rayonnement solaire global où la fraction diffuse est importante.

I.2. Description de la cheminée solaire

La cheminée solaire fonctionne comme une centrale à vapeur dont le fluide caloporteur est l'air à la place de l'eau. Elle est composée d'un capteur solaire radial, d'une tour centrale cheminée et d'un ou plusieurs aérogénérateurs, figure 1.1. L'air circulant dans le capteur solaire est chauffé par le sol absorbant le rayonnement solaire, et ensuite acheminé vers le centre de la cheminée, en continuant sa trajectoire vers le haut de la tour cheminée tout en faisant tourner l'aérogénérateur qui produit de l'énergie électrique.



Figure 1.1 : Prototype de cheminée solaire installée à Manzanares – Espagne [45]

Des études numériques, analytiques et expérimentales ont été entreprises pour bien comprendre le comportement des cheminées solaires afin de bien construire un prototype qui réalise le meilleur rendement en matière de production de l'électricité. Citant à titre d'exemple le prototype installé à Manzanares - Espagne (1982) par *Schlaich* figure 1.1, qui a fonctionné jusqu'à 1989 en alimentant la dite région produisant une puissance de 50 KW.

I.3. Les approches numériques de la turbulence

La plupart des écoulements rencontrés dans le domaine de la pratique industrielle sont de nature turbulente et beaucoup de phénomènes tels que le transfert de chaleur ou de masse sont liés au mouvement du fluide, donc leur étude nécessite le calcul préalable de l'écoulement considéré.

On présente, ici quelques méthodes de prédétermination des variables d'écoulement turbulent [44].

I.3.1. La simulation numérique directe

Dans les équations de Navier-Stokes, le fluide est considéré comme un milieu continu par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, on peut trouver les solutions des équations de Navier Stokes par leurs résolutions sur toutes les échelles de l'écoulement : des échelles énergétiques aux échelles dissipatives. A partir de la loi de Kolmogorov, on peut montrer que le rapport entre l'échelle des gros tourbillons et l'échelle de Kolmogorov est proportionnelle à $Re^{3/4}$, c'est-à-dire pour capturer toutes les échelles qui apparaissent dans l'écoulement turbulent, il faut utiliser une grille de calcul avec un nombre de points dans chaque direction de l'écoulement de l'espace, proportionnelle à $Re^{3/4}$ c'est à dire dans un écoulement tridimensionnelle le nombre de points sur une grille est de l'ordre de $Re^{9/4}$. On peut aussi montrer que le temps de calcul est proportionnel à $Re^{11/4}$. Ainsi, en regardant le coût de calcul en place mémoire et en temps CPU, on comprend bien que ce type de simulation est envisageable pour des écoulements turbulent relativement simples [45].

I.3.2. La simulation des grandes structures de turbulence

Comme dans le cas précédent, en moyennant les équations de Navier-stokes à l'aide de la moyenne spatiale filtre, on obtient un système ouvert pour les variables d'écoulement. Le tenseur de contrainte qui résulte de la non linéarité des équations de Navier-stokes après avoir pris la moyenne à une expression analogue que celle obtenue en moyennant temporellement les équations, mais il ne modélise pas le même phénomène physique. En fait, ce tenseur ne rend

compte que des fluctuations à petite échelle, plus petite que la maille de calcul qu'on va choisir, en correspondance avec la largeur du filtre choisi, qui seront plus faciles à modéliser ayant un caractère universel [30].

I.3.3. Les méthodes statistiques

Dans un écoulement turbulent, on distingue trois classes d'échelles de mouvement : les mouvements d'ensembles (mouvement global de l'écoulement), mouvement d'agitation turbulent, mouvement d'agitation moléculaire. Une idée, qui peut être envisagée est de prédéterminer des paramètres statiques, des variables d'écoulement pour lesquelles il existe un déterminisme statique afin de résoudre les équations de la dynamique des fluides.

Dans les écoulements turbulents les vitesses changent sensiblement pour un incrément de temps infinitésimal. Il est très difficile de capturer les fines perturbations qui subsistent sur une telle échelle et la résolution demande un matériel de calcul puissant qui n'est pas toujours disponible. En effet, pour étudier l'évolution du mouvement d'une particule fluide dans un écoulement turbulent, une approche statistique à été proposé par *sir Reynolds (1895)*.

Cette approche consiste à : considérer que la valeur instantané d'une grandeur ϕ est séparée en une valeur moyenne $\bar{\phi}$ et une fluctuation ϕ' [9].

D'où :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.16)$$

Avec $\bar{\phi} = \frac{1}{t} \int_0^t \phi dt$

Si u la composante de la vitesse suivant la direction r :

$$u_r = \bar{u}_r + u'_r \quad (2.17)$$

Où :

u'_r : est la fluctuation de la vitesse

\bar{u}_r : est la moyenne de la vitesse

Donc, la détermination de la double corrélation ($\overline{u'v'}$) est le principal problème rencontré dans le calcul des écoulements turbulents. On ne peut le déduire de l'équation exacte de transport, car ceci contient des corrélations d'ordre supérieur ($\overline{u'v'w'}$). La fermeture du système d'équations ne peut être donc obtenue par l'appel à des équations d'ordre supérieur. Par conséquent la modélisation de la turbulence doit être introduite à un certain niveau, ceci consiste à approcher les contraintes de *Reynolds*.

Les moyens de fermeture utilisés font intervenir: soit des équations de transports de contraintes de *Reynolds*, soit le concept de la viscosité turbulente. Parmi les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente on cite :

- ♦ Les modèles à zéro équation de transport,
- ♦ Les modèles à une équation de transport,
- ♦ Les modèles à deux équations de transport.

I.3.4. Concept de la viscosité turbulente

La plus ancienne des hypothèses de la modélisation de la turbulence et qui est devenue aujourd'hui une proposition de grande importance est le concept de *Boussinesq* (1877).

Par analogie à la viscosité moléculaire dans les écoulements laminaires, les contraintes turbulentes sont liées aux gradients des vitesses moyennes par le biais d'un coefficient appelé viscosité turbulente μ_t :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

La viscosité turbulente comme l'indique son nom dépend de l'état de la turbulence, en tout point du domaine d'écoulement, donc, elle n'est pas une propriété de fluide lui-même, mais une propriété de la turbulence, elle varie sensiblement d'un point à un autre et d'un écoulement à un autre.

Cependant, l'introduction de l'hypothèse de *Boussinesq*, seule, ne peut en aucun cas constituer un modèle de turbulence, seulement elle fournit une structure de travail pour une construction de la sorte. Le problème qui se pose maintenant est la détermination de la distribution de la viscosité turbulente. Stimulé à la théorie cinétique des gaz, le concept de la viscosité turbulente a été conçu pour présumer une analogie entre le mouvement moléculaire et le mouvement turbulent des tourbillons analogue aux molécules se heurtent et échangent donc une quantité de mouvement. La viscosité moléculaire est proportionnelle à la vitesse moyenne et le libre parcours moyen des molécules, par conséquent la viscosité turbulente est considérée proportionnelle à une vitesse caractéristique du mouvement fluctuant V et à une longueur typique ou une échelle de longueur caractéristique L : $\nu_t \propto VL$.

L'échelle caractéristique des fluctuations de vitesse et l'étude typique des longueurs ont été postulées à partir de plusieurs hypothèses.

I.3.5. Modèle à deux équations de transport

Dans le but d'éliminer les besoins de spécifier la longueur caractéristique plusieurs chercheurs l'ont obtenue à partir d'une équation de transport pour le paramètre $k^m L^n$ analogue à l'équation de l'énergie turbulente k ces modèles sont dits modèles à deux équations de transport. Parmi ces derniers, on cite le modèle $k - \varepsilon$ proposé par *Jones et Launder* [9] où :

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L} \quad \text{où } m = \frac{3}{2} \text{ et } n = -1$$

I.4. Travaux antérieurs

La centrale solaire cheminée solaire est une machine conduite pour la génération de courant électrique. Elle convertit l'énergie solaire en courant électrique dans un procédé complexe de transfert thermique près l'interaction du sol, source de chaleur. Le verre reflète le rayonnement infrarouge du sol (effet de serre), ceci crée une grande différence de densité entre la sortie de collecteur et l'atmosphère. Les turbines convertissent l'énergie cinétique en énergie mécanique produisant un courant électrique par un générateur. (*Schlaich, 1986*) & (*Becker, 2002*) [11].

Cette nouvelle technologie de production de l'électricité présente un domaine où interagissent plusieurs disciplines et un savoir faire dans plusieurs domaines, à savoir la construction métallique, le Génie civile, le calcul des turbines etc...

Par ailleurs, ces dernières années, différents auteurs ont effectués des travaux sur les centrales cheminées solaires. Pour ce qui est des études expérimentales, elles se résument pratiquement sur les expériences faites sur les prototypes de Manzanares en Espagne, de la Chine et du Botswana, dans ce sens, des études fondamentales du système espagnol ont été menées par :

Bernardes et al. [3] ont présenté une analyse théorique d'une (CCS), opérant en convection naturelle en régime laminaire et permanent. Afin de prévoir le comportement thermo-hydrodynamique de l'air, les conditions de température à l'admission ont été imposées de façon à garantir un écoulement laminaire régulier le long du dispositif. Le modèle mathématique a été analysé par la méthode des volumes finis dans des coordonnées généralisées.

Bernardes & al. [4] ont effectué une recherche bibliographique fructueuse, résumant la quasi totalité des efforts théorique et pratique déployés sur le fonctionnement des cheminées solaires. Ils ont développé à la base de cette bibliographie un modèle mathématique pour un écoulement d'air unidimensionnel dans une cheminée solaire afin de décrire son comportement énergétique via l'estimation de la puissance produite sous les différentes conditions de construction, de fonctionnement et d'environnement, susceptible de récolter les informations nécessaires pour le design d'une centrale électrique commerciale optimisée à grande échelle. L'auteur a validé son modèle mathématique par les résultats expérimentaux de la centrale cheminée solaire de Manzanares. Ils ont conclu que la puissance produite augmente avec l'augmentation de la hauteur de la cheminée, la surface et la transmissivité de la couverture transparente du capteur solaire. Le maximum de puissance produite est obtenu avec un facteur de chute de pression au niveau de la turbine de 0.97. L'influence des autres paramètres de fonctionnement tels que le facteur de pénétration de chaleur dans le sol, la distance entre l'absorbeur et la couverture, le double vitrage, la surface et l'épaisseur du système de stockage d'eau est insignifiant sur l'énergie électrique produite.

Haaf et al. [12] dans lesquelles une brève discussion du bilan énergétique, des critères de conception et de l'analyse du coût ont été présentés. Dans une autre étude, *Haaf [13]* a présenté les résultats de quelques essais préliminaires sur le système Espagnole.

Depuis, des efforts considérables ont été déployés pour dimensionner et estimer les performances énergétiques des cheminées solaires pour démontrer leur faisabilité ainsi que leur rentabilité.

Mullet [14] a présenté une analyse sur l'évaluation du rendement global d'une (CCS).

Padki et Sherif [15] ont conduit une recherche sur la viabilité de produire de l'électricité par les cheminées solaires à moyenne et grande échelle.

Schlaich & al. [16] ont mené des travaux sur la possibilité d'exploiter les données expérimentales du prototype de Manzanares pour prévoir les caractéristiques des installations plus grandes allant de 5-30 jusqu'à 100 MW.

Yan & al. [17] ont développé un modèle analytique pour un calcul qualitatif des performances des centrales (CCS), dans lequel des corrélations ont été utilisées dans la formulation mathématique des équations du débit d'écoulement, la vitesse de l'air, la puissance

délivrée et le rendement thermodynamique. Le modèle mathématique sur la turbine de la cheminée solaire la simule comme une turbine éolienne. Le rendement théorique maximum égal à $16/27$ ou de 59% d'après la limite de *Betz*.

Padki et Sherif [18] ont mené une étude sur l'influence des paramètres géométriques sur les performances énergétiques de la cheminée solaire. Aussi, ils ont étudié la faisabilité de l'implantation d'une CCS dans une région rurale afin de les alimenter en électricité.

En vue de prédire les performances d'une cheminée solaire pilote à grande échelle au Gainesville en Floride, *Pasumarthi et Sherif* [19] présente une étude théorique d'une cheminée solaire typique basée sur un modèle d'écoulement unidimensionnel pour étudier l'effet des différents paramètres de fonctionnement et de construction sur la température de l'air, la vitesse de l'air et la puissance produite par la cheminée solaire. Par ailleurs, l'auteur adopté le modèle limite de *Betz* pour la turbine dans la cheminée.

Pasumarthi et Sherif [20], ils présentent cette fois-ci les résultats expérimentaux effectués sur un prototype de cheminée solaire de démonstration à échelle réduite, concluant que la puissance produite par une cheminée solaire est directement proportionnelle au produit du gradient de température et du débit d'air ainsi elle est fonction des dimensions de la CCS. Par ailleurs, l'augmentation de la puissance produite peut être obtenue en augmentant la surface de captation ou en augmentant la hauteur de la cheminée. En outre, l'augmentation de la hauteur de la tour de la cheminée solaire se révèle très délicate de point de vue construction et les défis à affronter sont énormes sans une augmentation significative en matière de débit. Pour cela, on a recours à d'autres artifices, tels que l'adjonction d'obstacles dans le conduit de passage d'air pour améliorer le débit d'écoulement. Néanmoins, le modèle mathématique validé, en l'appliquant au prototype de Manzanares en Espagne avec un risque d'erreur de 20 % sur la vitesse et de 5 à 9% sur la puissance produite.

Kreetz [21] a présenté un modèle numérique pour déterminer l'apport du stockage de l'eau dans le collecteur. Ses résultats présentent l'utilité de prolonger le fonctionnement de la cheminée solaire en période nocturne en utilisant une énergie d'appoint.

Padki et Sherif [22], ont développé un modèle analytique afin de réduire l'erreur en matière de puissance d'une cheminée solaire à 6 %. Ce résultat est validé en l'affrontant à un modèle numérique général basé sur un système unique d'équations différentielles de conservation de quantité de mouvement, d'énergie et de masse régissant l'écoulement unidimensionnel de l'air chaud dans la tour de la cheminée solaire.

Pastohr & al. [23] ont utilisé *FLUENT* pour modéliser une centrale CCS installée à Manzanares, dans le but d'effectuer une analyse avec plus de détail dans la description du mode de fonctionnement et la détermination du rendement de système. Ils confirment que la chute de pression à la turbine et le débit massique, éléments décisifs sur l'efficacité du système, ne peuvent être déterminé uniquement par l'accouplement de toutes les parties d'une centrale CCS. Les résultats numériques avec *FLUENT* se rapproche à celle obtenue par un modèle simple proposé par les auteurs. Ce qui conduit à conclure qu'on peut employer ce dernier pour des études paramétriques des CCS.

Gannon & Von Backström [24] présentent une comparaison thermodynamique entre une CCS et une centrale à turbine à gaz. Afin de définir les limites de fonctionnement, ils ont simulé le système en question à un cycle thermodynamique standard idéal d'un gaz parfait isentropique. En outre ils introduisent les pertes de charges à travers les systèmes ainsi que les pertes

cinétiques à la sortie de la cheminée afin de bien simuler les conditions réelles de fonctionnement d'une C.C.S, tout en adoptant un modèle simple qui inclue le fort couplage entre débit d'air et élévation de la température à travers le collecteur. Ils remarquèrent que le système fonctionne entre deux cas extrêmes de puissance nulle : premièrement, une variation de température de 0°C, résultant d'une importante augmentation de débit d'air, et deuxièmement, une importante augmentation de température induisant un débit d'air nul.

Von Backström & Gannon [25], ont présenté une approche pour un écoulement compressible unidimensionnelle pour le calcul des variables thermodynamiques en fonction de la hauteur de la tour, de la rugosité (frottement) des parois, des pertes additionnelles, et de la variation de la section de passage.

Des analyses des performances des centrales (CCS) ont été aussi menées par *Kröger & Buys [26]* et par *Gannon et Von Backström [27]*.

Schlaich & al. [28] présentent une étude économique des centrales (CCS) ; en décrivant une théorie simplifiée sur les (CCS). Puis ils présentent de réalisation et de fonctionnement du prototype de Manzanares. Cette étude a tracé les grandes lignes des études technico-économiques de base pour des futures installations (CCS). Cette étude est employée dans le développement du prototype de l'Australie. Les auteurs ont bien répondu sur les questions soulevées concernant la technologie des CCS en exposant les inconvénients ! Tout en justifiant les avantages que peut apporter un tel système.

Dai & al. [29] présentent dans leur travail une méthode itérative basée sur un modèle global de connaissance régissant l'écoulement d'air dans une cheminée solaire typique fictive fonctionnant dans trois sites de l'ouest de la chine. Afin de prévoir les performances de la cheminée solaire, les auteurs ont préféré présenter une simple méthode se basant sur le modèle théorique des capteurs à air bien connues dans la littérature solaire. Ces modèles tiennent compte de la captation solaire, gain utile de fonctionnement et de la puissance électrique à la sortie de la turbine. Les auteurs montrent en conclusion que :

- La puissance produite est fortement influencée par l'augmentation de la radiation solaire en comparaison avec la température ambiante.
- La puissance produite augmente d'une manière non linéaire avec l'augmentation de la surface de captation et de la hauteur de la tour cheminée. Une augmentation devient moins sensible dans le cas des cheminées à grande échelle par rapport aux cheminées de faibles tailles.
- Une centrale cheminée solaire constituée d'un capteur à air de 500 m de rayon et d'une tour de 200 m de hauteur de 10 m de diamètre est capable de produire de 110 à 190 kW électrique.

Gannon et Von Backström [30] ont également étudié les performances des turbines utilisées dans les centrales (CCS).

Pretorius & al. [32] ont également développé un modèle numérique simulant les centrales CCS à grande échelle en indiquant qu'une plus grande production d'énergie possible en optimisant la forme et la hauteur de la couverture du collecteur.

Une étude prolongée *Pretorius & al. [33]* est faite en utilisant le même modèle numérique précédent [32] pour évaluer l'influence de diverses expressions et d'autres variables sur les performances d'une centrale CCS. Dans cet article les auteurs ont discuté l'évaluation des performances d'une centrale CCS à grande échelle. Donc, ils conclurent:

- Que l'introduction d'une nouvelle expression pour le coefficient de transfert fait réduire la production annuelle de presque 11.7 %.
- Une toiture de meilleure qualité augmente la production de 3.4 %
- Un coefficient plus réaliste pour les pertes à l'admission de la turbine augmente la production annuelle de 0.6%.

Von Backström & al. [34] ont présenté une étude analytique déterminant les conditions de fonctionnement optimales pour que la puissance d'écoulement soit au maximum. Un premier modèle se basant sur un schéma en puissance suppose que la pression est proportionnel au débit majoré de m , où m est un nombre négatif entre 0 et -1, et que la chute de pression de système est proportionnelle à la puissance n , où $n = 2$. Il a été démontré que l'hypothèse de potentielle de pression constante ($m = 0$) peut mener à une sous-estimation du rendement d'une centrale cheminée solaire, comparé aux analyses présentées dans le présent papier. Mais le plus important a été que ces deux analyses prévoient que la puissance est au maximum pour un débit assez faible et une chute de pression à travers la turbine très élevée que prévue par la prétention d'un potentiel de pression.

Denantes & al. [35] ont conclu dans leur article que les turbines contre rotation (counter-rotating) offrent un meilleur rendement pour des facteurs de charge plus élevés par rapport aux turbines simple, comme ils confirment que l'avantage principal de ce type de turbine dans les systèmes cheminés solaires est son les performances de sortie (off-design performance). En considérant que des centrales cheminée solaires seront fonctionnelles la plus part du temps sous une intensité solaire de moins de $800\text{W}/\text{m}^2$, les systèmes à turbine counter-rotating seront avantageux par rapport aux systèmes turbines simple (single-runner) de point de vue aussi bien du rendement que de la production électrique annuelle. Un autre avantage est la réduction du couple sur chaque axe comparé à la turbine single-runner.

1.5. Objectifs du travail

La maîtrise des outils d'analyse mathématique et numérique des centrales (CCS) tel que la modélisation et la simulation, énergétique ou dynamique est indispensable. Ce présent travail est une plate forme numérique permettant de simuler le comportement de la cheminée solaire en cours de réalisation au sein de l'Unité de Recherche des Energies Renouvelables en Milieu saharien d'Adrar.

Le développement et précéder par un travail approfondi [36], par la suite, les objectifs tracés dans ce travail se résume à :

- ♦ Développer un code de calcul pour chaque régime d'écoulement : laminaire et turbulent en adoptant la technique de génération de maillage dans le traitement des équations gouvernantes.
- ♦ Etudier l'influence du nombre de Rayleigh Ra sur les propriétés thermo-hydrodynamiques de l'écoulement de l'air dans la cheminée solaire.
- ♦ La détermination de la phase de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
- ♦ Calculer les performances énergétiques de la CCS à savoir, la puissance.
- ♦ Validation des résultats numériques obtenus avec ceux disponibles de la littérature.

Chapitre II

Sommaire du chapitre

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

- Introduction
- Modèle mathématique
 - ❖ Cas laminaire
 - ❖ Cas turbulent

TRANSFORMATION EN COORDONNEES CURVILIGNES

CONDITIONS AUX LIMITES

- ❖ Cas laminaire
- ❖ Cas turbulent

**FORMULATION
MATHEMATIQUE DU
PROBLEME**

Ce chapitre vise à donner un cadre théorique et méthodologique de modélisation mathématique adoptée dans ce mémoire. Il donne ainsi la ligne directrice suivie dans la première partie.

Les concepts et procédures que nous définissons ici sont utilisés pour quantifier numériquement les grandeurs physiques d'écoulement dans les cavités ouvertes appliquées aux cheminées solaires, et estimer l'influence des corrections sur chaque grandeur de modèle de turbulence proposées afin d'évaluer la prédictivité de l'outil CFD dans un contexte industriel.

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

II.1 Introduction

Quel que soit le type d'écoulement, les équations générales de bilans (masse, quantité de mouvement et d'énergie) sont applicables. La résolution analytique de ces équations aux dérivées partielles, généralement couplées, est très délicate voire n'existe pas. Alors les résolutions numériques s'imposent. Ceci est vrai pour les écoulements laminaires ; cela devient une règle générale pour les écoulements turbulents. En effet, les fluctuations dans le régime turbulent des paramètres thermo-hydrodynamiques du fluide introduisent des inconnues supplémentaires qui compliquent de façon très importante la résolution. La méthode la plus employée actuellement dans les problèmes industriels est la méthode statistique dans laquelle on ne s'intéresse plus qu'aux valeurs moyennes des paramètres de l'écoulement. Du fait de la non-linéarité des équations de base, cette méthode impose de modéliser les fluctuations et d'introduire un certain nombre d'équations supplémentaires, dites équations de fermeture, et de coefficients qui nécessitent un calage sur l'expérience. Parmi les différents modèles étudiés et proposés par les spécialistes, le plus courant est celui qui utilise la notion de viscosité turbulente qui est introduite dans les équations de fermeture basées sur les transferts de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation ε .

Du fait de la viscosité, toute présence de paroi matérielle implique une évolution relativement forte dans le champ des vitesses. Dans les écoulements internes, pour lesquels les parois délimitent une zone d'écoulement relativement forte, tout le champ des vitesses est soumis à des gradients.

Pour étudier l'écoulement autour d'un axe de symétrie Oz , il suffit d'étudier l'écoulement dans un plan variant rationnellement par rapport à l'axe Oz , pour cela, il faut transformer les équations de base en coordonnées cylindriques afin de préciser l'étude sur le plan (Orz) par l'application de la condition d'axisymétrie $\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0$.

Dans ce chapitre on expose les équations mathématiques gouvernant l'écoulement laminaire et turbulent dans les cheminées solaires.

Les équations résultantes sont transformées en coordonnées curvilignes pour pouvoir poser de manière exacte les conditions aux limites et obtenir des résultats de meilleure qualité.

Remarque : Dans ce travail les équations de base sont écrites directement en coordonnées cylindrique.

II.2. Définition du problème

Une centrale cheminée solaire (CCS) est une installation de production d'énergie à base d'une technique rudimentaire de création et de stabilisation de l'effet thermosiphon. L'air à l'intérieur du collecteur, chauffé par effet de serre, remonte sous l'effet du gradient de densité, à travers la tour de cheminée solaire. Donc, une centrale cheminée solaire type, se compose essentiellement

d'un capteur solaire appelée (*Greenhouse*), d'une tour de cheminée et d'un aérogénérateur (turbine), figure (2.1).

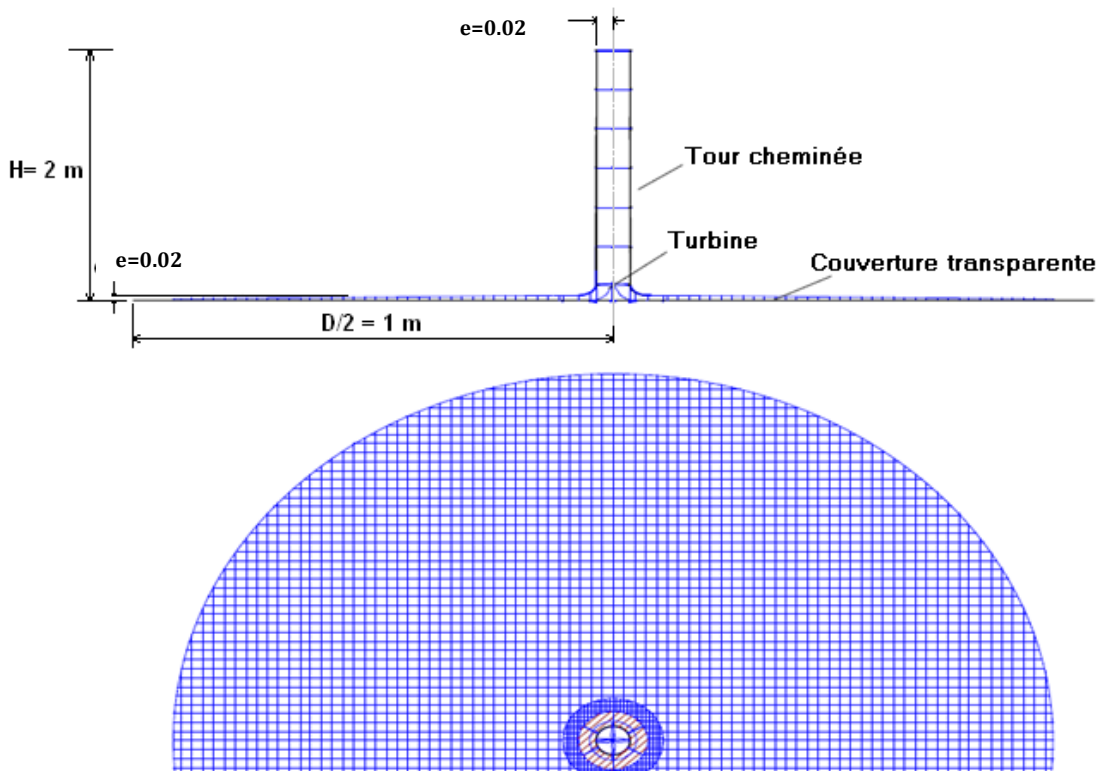


Figure 2.1 : les principales composantes d'une cheminée solaire : le capteur solaire, la tour cheminée et la turbine de vent à la base de la cheminée.

II.3. Hypothèses simplificatrices :

Les hypothèses considérées dans la formulation mathématique sont basées sur [3] :

- ✓ Le fluide est supposé visqueux et newtonien et obéit aux approximations de Boussinesq,
- ✓ Les parois de la tour cheminée sont supposées adiabatiques ($q = 0$),
- ✓ Du fait que les vitesses sont relativement faibles en convection naturelle, le terme de la dissipation visqueuse est négligeable,
- ✓ L'écoulement incompressible axisymétrique en régime stationnaire,
- ✓ L'effet du rayonnement solaire est négligeable.
- ✓ Les propriétés thermo-physiques ν, λ, β, c_p du fluide sont supposées constantes.

II.4. Cas laminaire :

II.4.1. Modèle mathématique

II.4.1.1. Equation de continuité :

Le principe de conservation sur une unité de volume mène à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

II.4.1.2. Equation de conservation de quantité de mouvement

Suivant l'axe Or :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{2\mu u}{r^2} \quad (2.2)$$

Suivant l'axe Oz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \rho g \quad (2.3)$$

Le terme source dans l'équation de quantité de mouvement suivant z résulte de la variation de densité, obtenue de l'approximation de **Boussinesq**. Avec $p' = p - p_0$ et $\beta = 1/T_0$ introduisons ces définitions dans l'équation (2.3)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g\rho_0\beta(T - T_0) \quad (2.4)$$

II.4.1.3. Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u T)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.5)$$

L'équation de transport dans les coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme générale pour une grandeur générique ϕ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u \phi)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S^\phi + P^\phi \quad (2.6)$$

Tableau 2.1 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans le plan (Orz) [2]

Equation de	ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant r	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial r}$	$-\frac{2\mu u}{r^2}$
Quantité de mouvement suivant z	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial z}$	$g\rho_0\beta(T - T_0)$
Energie	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	0	0

II.4.2. Transformation en coordonnées curvilignes

Les coordonnées curvilignes d'un point sont reliées aux coordonnées cylindriques au moyen de deux équations de transformation ξ et η , coordonnées curvilignes représentent respectivement les lignes de courant et les équipotentielles de l'écoulement. [3]

De ce fait, la transformation en coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme suivante ($J = r$).

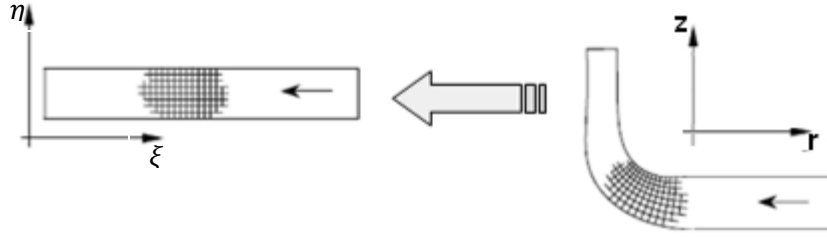


Figure 2.2 : transformation du plan physique (r, z) en plan de travail (ξ, η)

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(r, z) \\ \eta &= \eta(r, z)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Le Jacobéen de transformation est donné par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{vmatrix} = \xi_r \eta_z - \eta_r \xi_z = (r_\xi z_\eta - r_\eta z_\xi)^{-1}\quad (2.8)$$

On peut démontrer que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = J \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -J \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = J \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = J \frac{\partial r}{\partial \xi}\quad (2.9)$$

Les composantes du tenseur métrique sont données par :

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 = r_\eta^2 + z_\eta^2 \\ \gamma &= r_\xi^2 + z_\xi^2 & \beta &= r_\xi r_\eta + z_\xi z_\eta \\ g_{ij} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Les composantes covariantes de la vitesse sont données par :

$$U = uz_\eta - vr_\eta\quad (2.11)$$

$$V = ur_\xi - vz_\xi\quad (2.12)$$

Nous utilisons les relations présentées en *Annexe A* (transformation en coordonnées curvilignes) ainsi on utilise les relations (2.9) et (2.10) pour obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma^\phi r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^\phi r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma^\phi r ((\xi_r)^2 + (\xi_z)^2) \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left(\Gamma^\phi r ((\xi_z \eta_z + \xi_r \eta_r)) \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma^\phi r ((\xi_z \eta_z + \xi_r \eta_r)) \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left(\Gamma^\phi r ((\eta_r)^2 + (\eta_z)^2) \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\
&= \frac{J}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma^\phi r J \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma^\phi r \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{J}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma^\phi r J \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \Gamma^\phi r \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dans ce sens nous appliquons les transformations générales aux équations dans les coordonnées curvilignes, pour obtenir l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r \phi U_1)}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r \phi U_2)}{\partial \eta} \\
&= -P^\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma^\phi J r \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma^\phi J r \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right) \\
&+ S^\phi
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les expressions des termes sources et de la diffusivité des équations généralisées sont données dans Le tableau 2.2.

Tableau 2.2 : les valeurs de ϕ , Γ^ϕ , P^ϕ et S^ϕ Pour l'équation de transport dans les coordonnées curviligne

Equation de	ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité e mouvement suivant ξ	u	μ	$\left(r_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} - r_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)$	$-\frac{2\mu u_1}{J r^2}$
Quantité e mouvement suivant η	v	μ	$\left(z_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} - z_\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)$	$-\frac{\rho_0 g \beta (T - T_0)}{J}$
Energie	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	0	0

II.4.3. Forme adimensionnelle des équations

Les équations adimensionnelles sont formulées dans une forme conservative, dont l'avantage est de simplifier le problème, en regroupant les paramètres qui affectent l'écoulement au niveau des nombres adimensionnelles tels que : le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh, en adimensionalisant par rapport à des échelles de référence, les variables adimensionnelles sont données comme suit :

$$r^* = \frac{r}{d_h}, z^* = \frac{y}{d_h}, u^* = \frac{u}{v_{ref}}, v^* = \frac{v}{v_{ref}}, T^* = \frac{T - T_0}{T_{sl} - T_0}, p^* = \frac{p}{\rho_0 v_{ref}^2}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2.15}$$

Avec : $d_h = \frac{4A_{coll}}{P_{coll}}$ et $v_{ref} = \sqrt{g\beta(T_{sl} - T_0)d_h}$

Les équations de Navier-Stokes deviennent [5] :

II.4.3.1. Equation de continuité

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial z^*} = 0 \tag{2.16}$$

II.4.3.2. Equation de conservation de quantité de mouvement

Suivant l'axe Or :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\rho^* r^* u^* v^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(\rho^* u^* v^*)}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Gr^{0.5}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial^2(\mu^* r^* u^*)}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2(\mu^* u^*)}{\partial z^{*2}} - \frac{2u^*}{r^{*2} Gr^{0.5}} \right] \quad (2.17)$$

Suivant l'axe Oz :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\rho^* r^* u^* v^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* v^*)}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Gr^{0.5}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial^2(\mu^* r^* v^*)}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2(\mu^* v^*)}{\partial z^{*2}} - T^* \right] \quad (2.18)$$

II.4.3.3. Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\rho^* u^* T^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* T^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{Pr Gr^{0.5}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial^2(r^* T^*)}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2(T^*)}{\partial z^{*2}} \right] \quad (2.19)$$

II.4.4. Les nombres adimensionnels :

Le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{v_0}{a} \quad (2.20)$$

Le nombre de Grashof :

$$Gr = \frac{d_h \rho_0^2 g \beta \Delta T}{\mu_0^2} \quad (2.21)$$

L'équation de transport adimensionnelle s'écrit sous la forme générale pour une grandeur générique ϕ :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\rho^* r^* u^* \phi^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* \phi^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \Gamma \phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\Gamma \phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \right) + S \phi^* + P \phi^* \quad (2.22)$$

Tableau 2.3 : les valeurs de ϕ , $\Gamma\phi$, $P\phi$ et $S\phi$ pour l'équation de transport dans le plan (Orz) [2]

Equation de	ϕ^*	$\Gamma\phi^*$	$P\phi^*$	$S\phi^*$
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant r^*	u^*	$\frac{1}{Gr^{0.5}}$	$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*}$	$-\frac{2u^*}{r^{*2} Gr^{0.5}}$
Quantité de mouvement suivant z^*	v^*	$\frac{1}{Gr^{0.5}}$	$-\frac{\partial p^*}{\partial z^*}$	T^*
Energie	T^*	$\frac{1}{Pr Gr^{0.5}}$	0	0

II.5. Cas turbulent:

II.5.1. Modélisation mathématique

Les équations gouvernantes dans le régime turbulent sont toujours les équations de Navier-Stokes la continuité et l'équation d'énergie, en ajoutant deux équations de transport dites équations de fermeture du modèle $k - \varepsilon$ standard.

II.5.1.1. Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

II.5.2.2. Equation de conservation de quantité de mouvement

Suivant l'axe Or :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\mu_t + \mu) r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu_t + \mu) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{2(\mu_t + \mu)u}{r^2} \quad (2.24)$$

Suivant l'axe Oz :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial z} \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\mu_t + \mu) r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu_t + \mu) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g\rho_0\beta(T - T_0) \end{aligned} \quad (2.25)$$

II.5.3.3. Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u T)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu_t}{Pr_t} + \frac{k}{c_p} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\mu_t}{Pr_t} + \frac{k}{c_p} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.26)$$

En plus, deux équations pour l'équation de l'énergie k et le taux de dissipation ε sont introduites :

II.5.3.4. Equation de l'énergie cinétique turbulente k

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\rho u k)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho v k)}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] + G_k + Pk - \rho\varepsilon \end{aligned} \quad (2.27)$$

II.5.3.5. Equation du taux de dissipation ε

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\rho u \varepsilon)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho v \varepsilon)}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} Pk - c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Avec

$$Pk = (\mu_t + \mu) \left[2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

$$G_k = -\frac{\mu_t}{Pr_t} g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.30)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Avec : $f_\mu = \mathbf{1}$ [39].

Tableau 2.4 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ pour l'équation de transport dans le plan (Orz)

Equation	ϕ	Γ	P^ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant r	u	$\mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial r}$	$-\frac{2(\mu + \mu_t)u}{r^2}$
Quantité de mouvement suivant z	v	$\mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial z}$	$-\rho_0 \beta g(T - T_0)$
Energie	T	$\frac{\lambda + \lambda_t}{C_p}$	0	0
Energie cinétique turbulente k	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t}$	0	$Pk + G_k - \rho \varepsilon$
Dissipation d'énergie cinétique	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	0	$\frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon_1} Pk + C_{\varepsilon_3} G_k) - \left(C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \right)$

II.5.2. Transformation en coordonnées curvilignes (régime turbulent)

La procédure mathématique suivie dans la transformation en coordonnées curviligne des équations gouvernant le régime turbulent est la même suivie dans le développement laminaire.

Utilisant les équations du (2.7) - (2.13), l'équation de transport s'écrit comme cité dans l'équation (2.14).

Les expressions des termes sources et de la diffusivité des équations généralisées sont données dans le tableau 2.5.

 Tableau 2.5 : les valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi$ et S^ϕ de l'équation de transport en régime turbulent dans les coordonnées curviligne.

Equation de	ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant ξ	u	$\mu + \mu_t$	$\left(r_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} - r_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)$	$-\frac{2(\mu + \mu_t)u_1}{Jr^2}$
Quantité de mouvement suivant η	v	$\mu + \mu_t$	$\left(z_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} - z_\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)$	$-\frac{\rho g}{J}$
Energie	T	$\frac{\lambda + \lambda_t}{C_p}$	0	0
Energie cinétique turbulente k	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t}$	0	$\frac{Pk + G_k - \rho \varepsilon}{J}$
Dissipation d'énergie cinétique	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	0	$\frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon_1} Pk + C_{\varepsilon_3} G_k) - \left(C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon}{k} \right)$

II.6. Conditions aux limites

Dans toute frontière du domaine de calcul, les conditions aux limites sont indispensables pour résoudre les équations différentielles. Il y a six frontières dans ce problème exprimées dans le plan physique figure 2.3, à savoir, la section d'entrée, la section de sortie, la paroi sud ou paroi chauffée, l'axe de symétrie, paroi adiabatique de la cheminée et paroi nord du capteur (paroi transparente).

II.6.1. Choix des conditions relatives à la vitesse et à la pression d'entrée

Le choix des conditions relatives à la vitesse u et à la pression p à l'entrée de la conduite a posé un problème aux chercheurs qui se sont intéressés à la détermination des écoulements de convection naturelle dans les cavités ouvertes. Certains comme *Miyataka et Fujii, Aung et al, Chang et al [37]*, ont supposé une valeur nulle de la pression à l'entrée de la cavité étudiée, tandis que d'autres comme *El-Shaarawi et Negm et Aihara* l'ont prise égale à $-\frac{1}{2}\rho u_e^2$ quand le profil de la vitesse à l'entrée est uniforme, ou égale à $-\frac{\pi}{Q}\int_0^R u_e^3 r dr$ quand le profil de la vitesse est parabolique comme le cas de *Desrayand et Fchera [37]*.

J. R. Dryer [37], lors de l'étude du développement d'un écoulement de convection naturelle à l'intérieur d'un cylindre vertical, a examiné les conditions à l'entrée pour les trois cas suivant :

- ❖ Un profil de vitesse uniforme et une pression nulle ;
- ❖ Un profil de vitesse uniforme et une pression égale à $-\frac{1}{2}\rho u_e^2$;
- ❖ Un profil de vitesse parabolique et une pression égale à $-\frac{\pi}{Q}\int_0^R u_e^3 r dr$.

II.6.2. Cas laminaire

La figure 2.3 expriment les conditions aux limites de type *Neumann* et *Dirichlet*, décrites sur le plan physique.

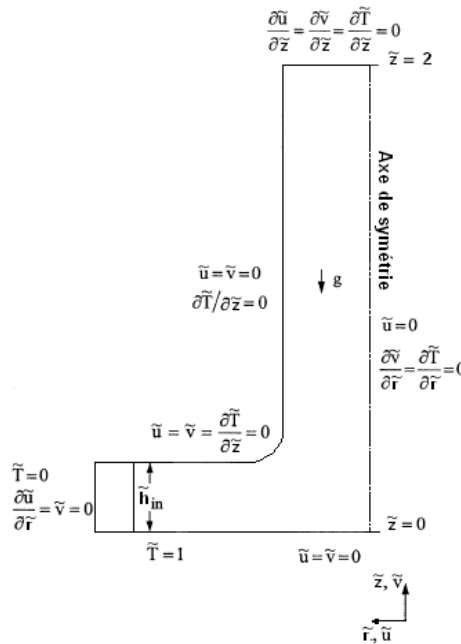


Figure 2.3 : domaine de calcul et condition aux limites

II.6.2.1. Condition d'entrée :

A la section d'entrée, l'écoulement et les conditions aux limites thermiques ne sont pas bien définis puisque l'écoulement à l'intérieur de la cheminée est induit par les forces de flottabilité. Le profil d'entrée est déduit des données expérimentales. Pour cela, dans la présente étude on va prendre la condition d'entrée suivante : *vitesse uniforme à l'entrée avec pression nulle*.

$$\begin{aligned} u &= u, \\ v &= 0 \\ T &= T_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

II.6.2.2. Condition de sortie

La condition de sortie est de type Newman :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{2.33}$$

II.6.2.3. Condition à l'axe de symétrie

A l'axe de symétrie, il n'y a pas de variation par rapport à r pour les variables v, T , mais la vitesse u est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}u &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0\end{aligned}\tag{2.34}$$

II.6.2.4. Condition aux parois solides :

La condition des vitesses nulles est imposée aux parois solides, La condition sur la température est différente de celle des autres parois figure 2.3.

$$\begin{aligned}u &= 0, \\ v &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}T &= T_{sl} \\ T &= T_c \\ T &= T_{tr}\end{aligned}\tag{2.36}$$

II.6.3. Cas turbulent

Il est à noter que pour les autres frontières : axe de symétrie, la sortie et de l'entrée les conditions aux limites en matière de vitesse radiale, axiale et la température sont prises les même que pour le régime laminaire.

Ce pendent, au niveau de la frontière sud et nord, les parois solides exercent sur le fluide un cisaillement. Les conditions pour la vitesse u sont présentées ci-dessous figure 2.4, pour cela il existe deux méthodes de traitement près des parois solides :

II.6.3.1. Modèle à faible nombre de Reynolds

Dans ce cas les équations de transport doivent être intégrées sur des volumes de contrôles se trouvant dans la sous couche laminaire ou l'effet de la viscosité est très important, ce qui demande un très grand nombre de nœuds pour capter les grandes variations qui dominent dans cette région et ce qui devient très coûteux en temps de calcul et en matériels utilisés. Pour ces raisons on a opté pour la méthode dite '*loi de paroi*'.

II.6.3.2. Fonction de paroi

Les volumes de contrôle d'intégration aux frontières se situent, dans ce cas, dans la couche turbulente figure 2.4 et des lois empiriques sont utilisées. Le traitement adopté est basé dans notre cas sur la fonction de paroi.

Considérant un volume de contrôle près de la paroi nord, figure 2.4, les suppositions suivantes sont faites :

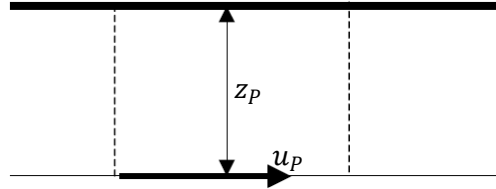


Figure 2.4 : Volume de contrôle près de la paroi

a). La vitesse u_p à la distance z de la paroi varie suivant la loi logarithmique

$$\frac{U_p}{u_\tau} = \frac{1}{r} \text{Log}(EZ^+) \quad (2.37)$$

Tel que :

r : Constante de Van-Karman $r = 0.42$

$E = 9$: Pour une paroi lisse.

u_τ : Vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$

Z^+ : Distance adimensionnelle à la paroi $Z^+ = \frac{\rho z_p u_\tau}{\mu}$

b). Les transports par convection et par diffusion de la turbulence sont négligeables d'où la supposition de l'équilibre locale :

$$\left. \begin{aligned} Pk &= \rho \varepsilon \\ -\overline{uv} \frac{\partial u}{\partial z} &= \varepsilon \\ C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 &= \varepsilon \\ \mu_\tau \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 &= \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_t} \\ \tau_p^2 &= \rho^2 C_\mu k_p^2 \\ \tau_p^2 &= \rho^2 C_\mu^{1/2} k_p \end{aligned} \right\} (2.38)$$

En combinant les équations (2.37) et (2.38), on déterminera l'expression de u_p et par la suite celle de la viscosité près de la paroi.

$$\begin{aligned} U_\tau &= \frac{x u_\tau}{\text{Log} \left(\frac{E \rho u_\tau z_p}{\mu} \right)} = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \\ \frac{x U_\tau}{\text{Log} \left(\frac{E \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} z_p}{\mu} \right)} &= C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

D'où :

$$\tau_p = \frac{xu_\tau C \mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\text{Log} \left(\frac{E \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} z_p}{\mu} \right)} \quad (2.40)$$

De cette dernière égalité on tire l'expression de la viscosité près de la paroi.

$$\mu_{tp} = \frac{xu_p C \mu^{1/4} k_p^{1/2} z_p}{\text{Log} \left(\frac{E \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} z_p}{\mu} \right)} \quad (2.41)$$

II.6.3.3. Condition à la limite sur la température

La température suit une loi logarithmique près de la paroi *Ming Tingzhen* [37] :

$$T^+ = P_{rt} (u^+ + B) + \frac{1}{2} \rho \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{3/2}}{\dot{q}_s} (P_{rt} u_p^2 + (P_r - P_{rt} u_c^2)) (Z^+ < Z_T^+) \quad (2.42)$$

Où B est calculé par la formulé donnée par Jayatilleke [46]

$$B = 9.24 \left(\left(\frac{P_r}{P_{rt}} \right)^{3/4} - 1 \right) \left(1 + 0.28 e^{-0.007 \frac{P_r}{P_{rt}}} \right) \quad (2.43)$$

Remarque

Le développement fait sur la condition de vitesse radiale pour la paroi sud et nord dans la partie capteur, est adopté pour la vitesse axiale pour la paroi solide de la tour cheminée. De même pour la condition à la limite de la température.

II.6.3.4. Conditions aux limites de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation

II.6.3.4.1. Conditions à l'entrée

La condition initiale de l'énergie turbulente et le taux de dissipation sont évalués en considérant les approximations de *Prandtl* :

$$\begin{aligned} k &= I_{it} u^2 \\ \varepsilon &= \frac{k^{1.5}}{\delta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Où : I_{it} , est l'intensité turbulente.

II.6.3.4.2. Condition à la sortie

On supposera que le régime est établi (écoulement développé) ce qui se traduit par la non variation par rapport à l'axe de symétrie, donc on a :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0$$

La même remarque faite sur la condition de vitesse doit être prise en considération dans le régime turbulent.

II.6.3.4.3 Condition proche des parois solides

Pour les nœuds situés près de la paroi sud, l'énergie cinétique turbulente k est tirée de l'expression (2.44) :

$$k_p = \frac{\tau_p}{\rho C \mu^{1/2}} \quad (2.46)$$

Avec

τ_p : Donnée par l'expression (2.40) :

Le taux de dissipation ε pour les nœuds aux frontières de la paroi sud est donné par la formule empirique :

$$\varepsilon_p = \frac{C \mu^{3/4} k_p^{3/2}}{x z_p} \quad (2.47)$$

II.6.3.4.4. Conditions de symétrie

Près de l'axe de symétrie, il n'y a pas de variation par rapport à r pour les variables u, v, k, ε .

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$$

	a) Paroi Nord	b) Paroi Sud	c) Paroi Est	d) Paroi Ouest
Vitesse				
Température				
Energie cinétique k				
Dissipation ε				

Figure 2.5 : Discrétisation des conditions aux limites dans le plan transformé.

II.7. Calcul du nombre de Nusselt moyen

D'après le premier principe de la thermodynamique :

La quantité de chaleur cédée par la paroi est égale à celle reçue par le fluide entre l'entrée et la sortie de la cheminée solaire.

$$A_{ab} h_m (T_p - T_0) = 2\pi\rho c_p \int_0^{d_h} u(T - T_0) dz \quad (2.49)$$

Avec :

$$A_{ab} = 2\pi d_h R$$

h_m : représente le coefficient moyen d'échange de la chaleur par convection.

Le nombre de Nusselt moyen est défini par la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{2h_m d_h}{\lambda} \quad (2.50)$$

L'écriture de second membre de l'équation (2.49) sous la forme adimensionnelle, et la substitution de h_m et A_{ab} dans cette équation nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$2\pi d_h R \frac{\lambda \overline{Nu}}{2d_h} (T_p - T_0) = 2\pi \lambda d_h (T_p - T_0) \int_0^1 u^* T^* z dz \quad (2.51)$$

Le nombre de Nusselt moyen est donnée par :

$$\overline{Nu} = \frac{2d_h}{R} \int_0^1 u^* T^* z dz^* \quad (2.52)$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 u^* T^* z dz^*$ on a utilisé la méthode des trapèzes.

Chapitre III

Sommaire du chapitre

INTRODUCTION

LA METHODE DES VOLUME FINIS

- ✚ Principe de la méthode
- ✚ Discrétisation du domaine d'étude
 - ◆ Positionnement du problème
 - ◆ Discrétisation du domaine de calcul
 - ◆ Discrétisation des conditions aux limites
- ✚ Calcul de la puissance

**METHODE
DE RESOLUTION**

III.1. Introduction

L'équation générale représentant le système d'équations différentielles non linéaires est définie sur un domaine rectangulaire de type elliptique couplée, avec des conditions aux limites de type *Neumann* et *Dirichlet* homogènes et non homogènes, la résolution analytique de ce type d'équation n'existe pas jusqu'à ce jour, de ce fait le recours à la solution numérique permet de résoudre ce problème ; parmi ces méthodes utilisées on trouve, la méthode des volumes finis, présentée par *Patankar (1980)*. Elle est basée sur l'intégration des équations précédentes sur des volumes finis obtenus par découpage du domaine de calcul de l'écoulement.

Cette méthode tend à linéariser les systèmes d'équations aux dérivées partielles développées dans le chapitre précédent, en systèmes algébriques, pour cela on donne un ensemble fini de sous domaines K appelés cellules ou volume de contrôle.

Dans la suite de ce chapitre, on expose la procédure d'utilisation de la méthode de volumes finis, pour obtenir les équations discrètes.

III.2. Principe de la méthode

La méthode de volumes finis est basée sur le principe de conservation de la variable dépendante ϕ sur chaque volume élémentaire.

La solution approchée obtenue par cette méthode est une fonction constante par morceaux, d'où l'équation générale du problème est intégrée sur chaque volume de contrôle, pour obtenir l'équation discrète qui contient les valeurs de ϕ dans le domaine d'étude.

Donc, le principe de la méthode de volumes finis apparaît ici par application au problème de convection-diffusion non linéaire à la variable dépendante ϕ écrite en coordonnées généralisées en deux dimensions.

La figure 3.3 illustre une partie du maillage dans la zone jonction.

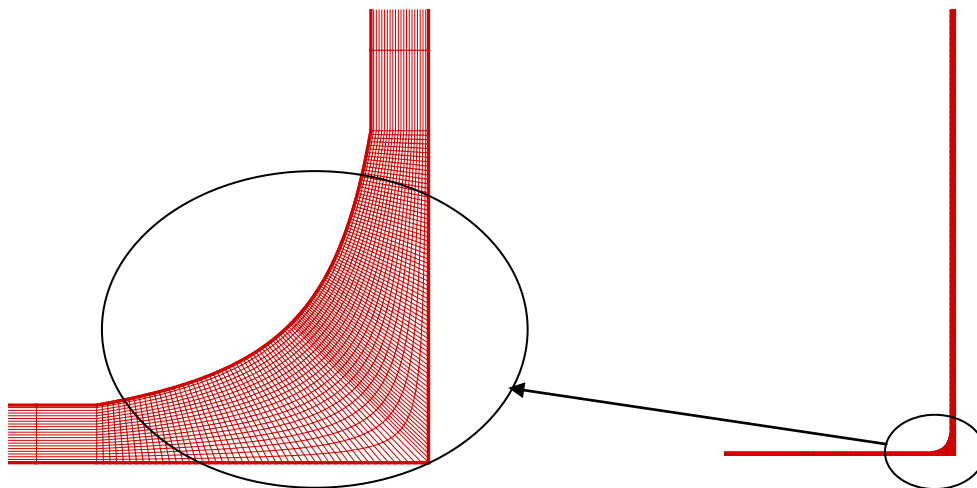


Figure 3.1 Maillage global curviligne avec la zone de jonction.

III.3. Discrétisation du domaine de calcul

Les équations obtenues précédemment sont définies dans le domaine de calcul suivant des coordonnées appelées coordonnées généralisées. Le but est de trouver les grandeurs physiques telles que définies dans le domaine de calcul figure 3.2 (a).

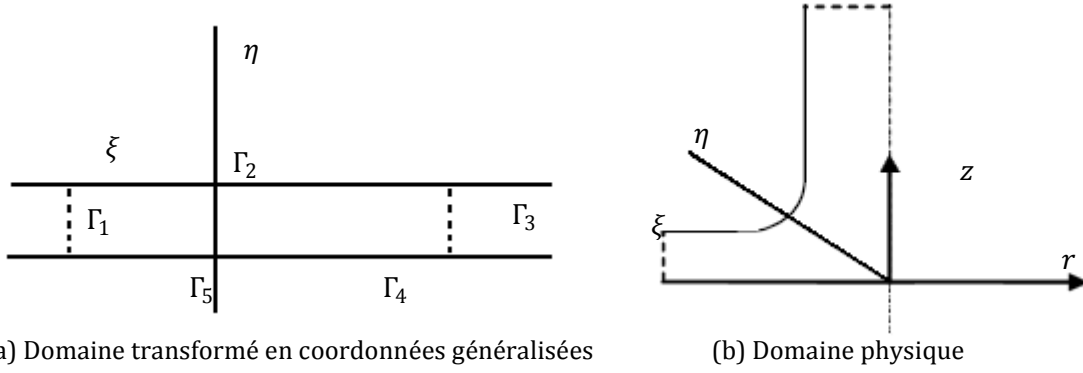


Figure 3.2 : Transformation du domaine d'étude.

Γ_i : représente le nombre de frontières pour la discrétisation des conditions aux limites imposées dans le plan physique.

III.3.1. Discretisation des équations

III.3.1.1. Discretisation spatiale

L'équation de transport à discrétiser décrivant le problème est donnée par (3.1)

L'équation de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) écrite en coordonnées généralisées bidimensionnelles est donnée par l'équation (3.1), dont les termes sont définis dans le tableau 2.2.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r \phi U)}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r \phi V)}{\partial \eta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma^\phi J r \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma^\phi J r \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right) + \frac{S^\phi}{J} + \frac{P^\phi}{J} \quad (3.1)$$

Le réseau du maillage bidimensionnel indiquée sur la figure 3.3, d'où, une cellule \hat{K}_{ij} est représentée par son centre (i, j) , les points $(i + 1, j)$ et $(i - 1, j)$ sont les centres des cellules qui représentent (Est et Ouest) de volume \hat{K}_{ij} suivant la direction ξ , $(i, j + 1)$ et $(i, j - 1)$ sont les centres de cellules aux voisinages de \hat{K}_{ij} qui représentent (Nord et Sud) suivant la direction η .

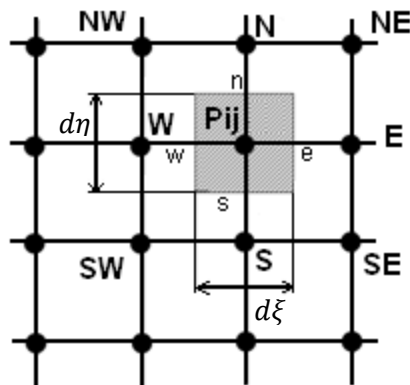


Figure 3.3 : Volume de contrôle sur un domaine bidimensionnel.

On note par P le centre du volume de contrôle de la variable ϕ et E, W, N et S les nœuds voisins des volumes de contrôle adjacents. Ces nœuds seront les lieux de stockage des variables scalaires (P, k, \dots).

Au milieu de chaque segment reliant deux nœuds adjacents qu'on note par e, w, n et s , on stocke les variables vectorielles.

Donc, pour chaque nœud, on associe trois volumes de contrôles alternés schématisés dans la figure 3.4.

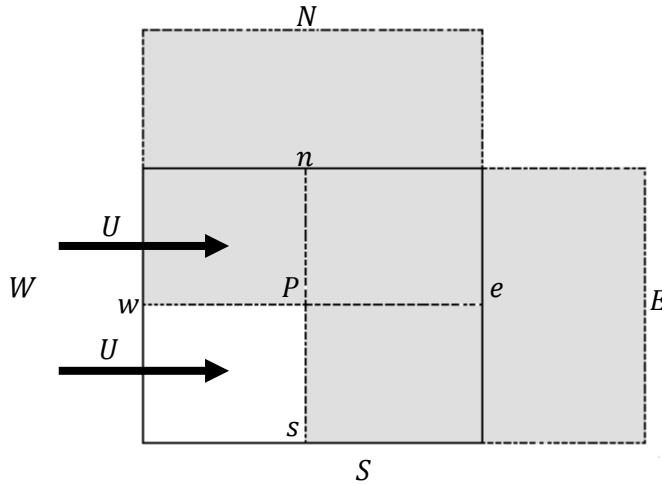


Figure 3.4 : Alternance des volumes de contrôle.

III.3.1.2. La dérivée de l'équation approximative

Les équations de conservation dans la variable primitive ϕ écrite dans les coordonnées généralisées en deux dimensions, ont la forme de l'équation (3.2) dont les termes sont définis dans le *tableau 2.2*. À l'adoption d'une formulation implicite, l'intégration de l'équation (3.1) dans l'espace, pour un volume élémentaire P , suivant la figure 3.3, donne :

$$\begin{aligned} \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w - \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s \\ = \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e - \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w + \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n \\ - \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s + rL|\hat{S}^\phi + \hat{P}^\phi|\Delta\xi\Delta\eta \end{aligned} \quad (3.2)$$

Remarque : pour plus de détails sur le développement mathématique voir Annexe B

En utilisant le schéma *WUDS (Weighted Upstream Differencing Scheme)* comme une méthode d'interpolation et de stockage des variables et en introduisant les expressions de ϕ et ces dérivés dans l'équation (3.3), on obtien l'équation discrétisée pour un élément de volume [23] :

$$A_P \phi_P = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N - A_s \phi_S + A_{neP} \phi_{NE} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{seP} \phi_{SE} + A_{sw} \phi_{SW} + B \quad (3.3)$$

Où bien sous la forme :

$$A_P \phi_P = \sum A_{NB} \phi_{nb} + B \quad (3.4)$$

Les coefficients sont donnés par :

$$A_e = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) + \frac{(D_1 \bar{\beta})_e}{\Delta \xi} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \quad (3.5)$$

$$A_w = \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \frac{(D_1 \bar{\beta})_w}{\Delta \xi} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} \quad (3.6)$$

$$A_n = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) + \frac{(D_3 \bar{\beta})_n}{\Delta \eta} + \frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} - \frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} \quad (3.8)$$

$$A_s = \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \frac{(D_3 \bar{\beta})_s}{\Delta \eta} + \frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} - \frac{(D_4)_e}{4\Delta \eta} \quad (3.9)$$

$$\dot{M}_e = (r\rho U)_e \Delta \eta \quad (3.10)$$

$$\dot{M}_s = (r\rho U)_s \Delta \eta \quad (3.11)$$

$$\dot{M}_n = (r\rho U)_n \Delta \xi \quad (3.12)$$

$$\dot{M}_w = (r\rho U)_w \Delta \xi \quad (3.13)$$

$$A_{ne} = -\frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} \quad (3.14)$$

$$A_{se} = -\frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \quad (3.15)$$

$$A_{nw} = -\frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} \quad (3.16)$$

$$A_{sw} = \frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \quad (3.17)$$

$$B = rL[\hat{S}^\phi + \hat{P}^\phi] \Delta \xi \Delta \eta \quad (3.18)$$

$$D_1 = rJ\alpha\Gamma^\phi \Delta \eta$$

$$D_2 = rJ\beta\Gamma^\phi \Delta \eta$$

$$D_3 = rJ\alpha\Gamma^\phi \Delta \xi$$

$$D_4 = rJ\beta\Gamma^\phi \Delta \xi$$

Dans le schéma de *WUDS*, les coefficients $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ conservent l'équilibre entre la diffusion et la convection, ces coefficients dépendent du nombre de **Péclet**, reliant le flux convectif et diffusif. Les expressions de α et β sont données par les équations (3.19) et (3.20) qui sont basées sur le schéma exponentiel, qui utilise la fonction d'interpolation obtenue de la solution exacte du problème adimensionnel convection - diffusion, avec :

$$\alpha = \frac{Pe^2}{10 + 2Pe^2} \quad (3.19)$$

$$\beta = \frac{1 + 0.005Pe^2}{1 + 0.005Pe^2} \quad (3.20)$$

A noter que le paramètre α varie entre -0.5 et $+0.5$, et il a toujours le même signe que la vitesse ; la valeur de β varie entre 0 et 1 [3]

Le terme de pression est évalué en utilisant le schéma différences centrée, il en résulte :

$$L[\hat{P}^u] = \left[\begin{array}{c} \frac{P_E - P_P}{\Delta\xi} y_\eta - \frac{P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}}{4\Delta\xi} y_\xi \\ \frac{P_N - P_P}{\Delta\eta} r_\xi - \frac{P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW}}{4\Delta\eta} r_\eta \end{array} \right] \quad (3.21)$$

$$L[\hat{P}^v] = \left[\begin{array}{c} \frac{P_E - P_P}{\Delta\xi} y_\eta - \frac{P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}}{4\Delta\xi} y_\xi \\ \frac{P_N - P_P}{\Delta\eta} r_\xi - \frac{P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW}}{4\Delta\eta} r_\eta \end{array} \right] \quad (3.22)$$

Et les termes $L[\hat{S}^u]$ est donné par :

$$L[\hat{S}^u] = -\frac{2\mu\mu_P}{J_P r_P^2} \quad (3.23)$$

$$L[\hat{S}^v] = -g\rho_0\beta(T_P - T_0) \quad (3.24)$$

III.3.1.3. Résolution du système linéaire

La résolution des équations discrètes dans le cas bidimensionnel est faite par la méthode de balayage ligne par ligne ou colonne par colonne, appelé Algorithme de Thomas (*TriDiagonal-Matrix Algorithm*) ou *TDMA*.

La désignation *TDMA* exprime que les coefficients de la matrice sont nuls sauf dans trois diagonales de la matrice [6].

L'équation discrète (3.3) représente un système creux, et peut être réécrite sous forme matricielle représentée par une matrice creuse à 9 diagonales de la forme :

$$\begin{bmatrix} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \end{bmatrix}$$

L'équation (3.1) est écrite sous une forme plus commode pour ces procédures, données par :

$$a_m \phi_m + b_m \phi_{m+1} + c_m \phi_{m-1} = d_m \quad (3.25)$$

Pour $m = 1, \dots, N$, cette équation exprime une relation entre la variable ϕ_m et les variables adjacentes ϕ_{m+1} et ϕ_{m-1} . Pour faire apparaître les conditions aux limites on prend :

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0$$

Le système tri-diagonal est représenté par la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{N-1} & \mathbf{a}_{N-1} & \mathbf{b}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_N & \mathbf{a}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_N \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Cherchons une équation de récurrence entre ϕ_m et ϕ_{m+1} . Sous la forme suivante :

$$\phi_m = P_m \phi_{m+1} + Q_m \quad (3.27)$$

qui permet de balayer les lignes dans un sens.

La détermination des coefficients Q_m et P_m , dépend de la détermination des valeurs de Q_{m-1} et P_{m-1} , d'après l'équation (3.27), on a

$$\phi_{m-1} = P_{m-1}\phi_m + Q_{m-1} \quad (3.28)$$

Substituant les équations (3.27) et (3.28) dans l'équation (3.25) on trouve les expressions des coefficients Q_m et P_m suivantes :

$$P_m = \frac{-b_m}{a_m + c_m P_{m-1}} \quad (3.29)$$

$$Q_m = \frac{d_m - c_m Q_{m-1}}{d_m + c_m P_{m-1}} \quad (3.30)$$

Les équations (3.27) et (3.28) sont des relations qui permettent, après la connaissance de P_1 et Q_1 , de déterminer toutes les valeurs de P_m et Q_m . Alors l'équation (3.3), se résout en commençant par la face ouest et en terminant par la face est, tel que :

$$a_m = A_{i,j} \quad b_m = A_{i+1,j} \quad c_m = -A_{i-1,j} \quad (3.31)$$

$$d_m = A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_{ne} \phi_{NE} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{se} \phi_{SE} + A_{sw} \phi_{SW} + B \quad (3.32)$$

Quand le balayage est fait sur les colonnes, les coefficients sont donnés par :

$$a_m = A_{i,j} \quad b_m = -A_{i,j+1} \quad c_m = -A_{i,j-1} \quad (3.33)$$

$$d_m = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_{ne} \phi_{NE} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{se} \phi_{SE} + A_{sw} \phi_{SW} + B \quad (3.34)$$

La détermination de P_1 et Q_1 dépend de la détermination du coefficient c_1 , qui est nul sur les volumes fictifs de la face ouest du domaine du calcul, dans le cas de calcul ligne par ligne où les volumes fictifs de la face sud, dans le cas de calcul colonne par colonne, d'après les équations (3.27) et (3.28), nous avons :

$$P_1 = -\frac{b_1}{a_1} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.35)$$

Pour les éléments volumes définissant les frontières, Est et Nord, l'équation approximative ne dépend pas de la variable à droite et la variable au-dessus, respectivement. Par conséquent, b_m donné par l'équation (3.31) et (3.33) sont nuls, l'équation (3.27) donne alors :

$$\phi_N = Q_N \quad (3.36)$$

Où N indique les volumes de frontière à l'est dans le cas calcul ligne par ligne, et les volumes de frontière nord dans le cas de calcul colonne par colonne.

III.4. Technique de sous-relaxation

La technique de sous-relaxation est régulièrement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter la divergence du processus itératif. L'expérience numérique à montrer que, dans le calcul des problèmes complexes, les changements trop rapides des valeurs de ϕ d'une itération à une autre peut provoquer des instabilités numériques. Par conséquent, pour minimiser les risques de divergence, il est recommandé d'amortir l'amplitude de ces changements en utilisant la technique de sous-relaxation.

Comme nous l'avons vu précédemment, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$A_P \phi_P = \sum_i A_i \phi_i + S_c \Delta V \quad (3.37)$$

Si nous notons ϕ_P^n la valeur de ϕ_P à l'intérieure de l'énème itération, il est possible d'écrire :

$$\phi_P^n = \phi_P^{n+1} + \left[\frac{\sum_i A_i \phi_i + S_c \Delta V}{A_P} - \phi_P^{n-1} \right] \quad (3.38)$$

Le terme entre parenthèse peut être interprété comme la variation de ϕ_P de l'itération $(n-1)$ à l'itération (n) , cette variation peut être amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_P^n = \phi_P^{n+1} + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_i A_i \phi_i + S_c \Delta V}{A_P} - \phi_P^{n-1} \right] \quad (3.39)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{A_P}{\alpha_\phi} \phi_P^n = \sum_i A_P \phi_P^n + S_c \Delta V + \frac{1 - \alpha_\phi}{\alpha_\phi} \phi_P^{n-1} \quad (3.40)$$

Cette sous relaxation est donc appliquée à toutes les variables, hormis la pression, cette dernière vu la particularité de cette variable, elle est traitée d'une manière différente tenant compte de l'Algorithme de couplage vitesse-pression, pour cela, on multipliant tout simplement la correction de la pression p' par le facteur de sous relaxation :

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (3.41)$$

Où α_ϕ facteur de sous-relaxation doit être choisi entre 0 et 1, et il peut prendre des valeurs différentes d'une variable à une autres.

Plus les facteurs de correction sont faibles, plus la sous-relaxation est forte et plus la convergence est lente. D'autre part, plus ils sont fort, plus la sou-relaxation est faible cela donne plus de chance de faire intervenir des instabilités dans le processus itératif. Il faut savoir donc, que le choix de ces facteurs est essentiel et important pour le bon déroulement de la procédure itérative.

Remarques

1- Le mot semi-implicite dans le nom *SIMPLE* a été utilisé pour exprimer la non prise en compte du terme $\sum A_{nb} ((\phi)_{nb} - (\phi)_{nb}^*)$. Ce terme représente une influence indirecte ou implicite de correction de la pression sur la vitesse ; les corrections de la pression sur les bords peuvent influencer sur les corrections de vitesses adjacentes, et déduisent une correction de la vitesse sur les points considérés. On ne prend pas en considération cette influence suivant un schéma partiellement implicite [6].

La négligence de tout terme peut être inacceptable, si la solution finale ne serait pas une solution vraie des formes discrètes des équations de mouvement et l'équation de continuité. Donc on déduit que la solution finale donnée par *SIMPLE* ne contient pas une erreur résultant de la négligence du terme $\sum A_{nb} ((\phi)_{nb} - (\phi)_{nb}^*)$.

Dans la solution finale donnée par *SIMPLE*, on obtient un champ de pression correspondant au champ de vitesse précédent u^* et v^* qui satisfait l'équation de continuité. La construction de l'équation de p' devient indépendante de la correction de la solution finale.

III.5. Critère de convergence

Une procédure est dite convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle converge lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est vérifié.

Le critère de convergence utilisé dépend du résidu de l'équation de continuité. En toute rigueur, le résidu correspond à la somme, sur toutes les mailles, des erreurs effectuées sur l'équation discrétisée lorsque les variables déterminées par le processus sont réintégréées dans l'équation discrétisée.

Il est donné par définition par :

$$RESOR(\phi) = \sum_{i,j} |RES| \quad (3.42)$$

$$RES = \sum_{i=1}^{i=N} \left[A_{i,j} \phi_{i,j} - \sum (A_{nb_i} \phi_{NB_i}) - B_i \right]$$

$RESOR(\phi)$: est la somme des résidus normalisés en valeurs absolue de l'équation ϕ associée à tous les volumes de contrôle du domaine.

III.6. Application de l'algorithme de calcul

Le travail fait est valable pour n'importe quelle grandeur transportable, et comme la pression n'a pas sa propre équation, on peut déterminer le champ de pression, en utilisant l'équation de continuité.

En ce donnant un champ initial de pression, l'équation algébrique résultante de l'équation de continuité contiendra des fluctuations de pression. Les fluctuations calculées permettent par la suite de corriger la pression donnée initialement. Pour cela on utilise l'Algorithme de correction de pression *SIMPLE* : *Sem – Implicit – Method – for – Pressure – Linked – Equation*.

III.6.1. Développement de l'Algorithme

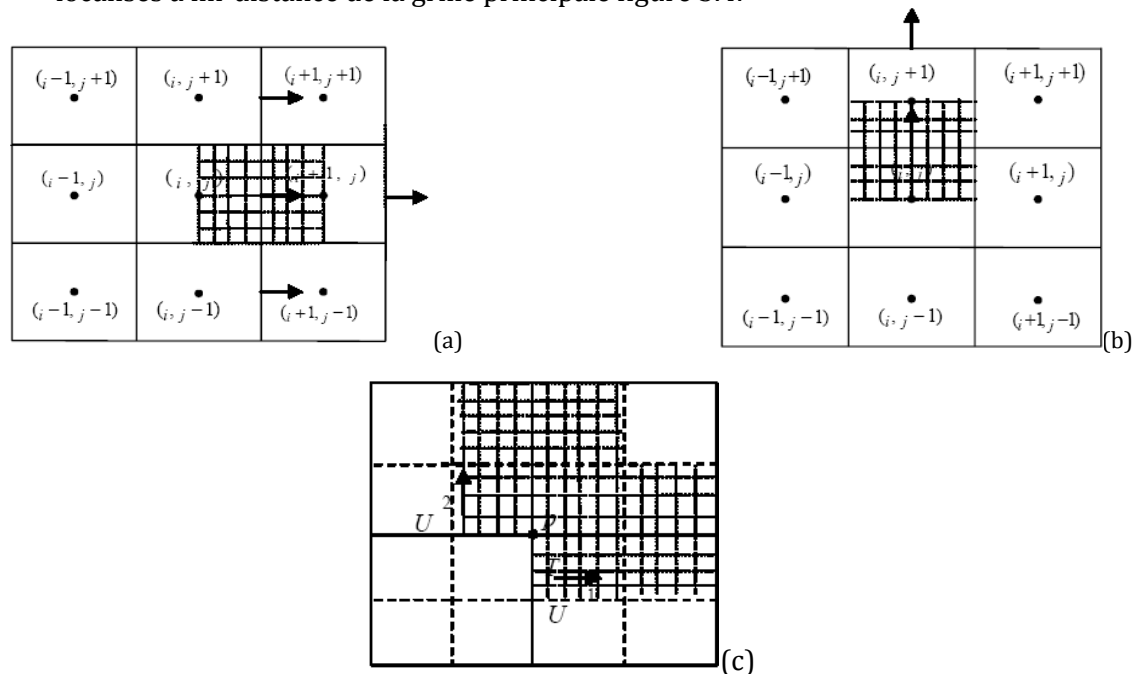
Le processus itératif suppose qu'on donne un champ de pression estimé p^* et ainsi on peut en déduire un champ de vitesse correspondant, dans ces conditions le champ de vitesse $\vec{u}^* = (u^*, v^*)$ qui vérifie l'équation de conservation de la masse. Dans ce sens, il faut donc procéder à la correction de pression p^* et par conséquent la correction de la vitesse \vec{u}^* de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite [6].

Ceci est l'objet du présent algorithme. Le calcul des champs de vitesse et de pression se fait à l'aide des équations de quantités des mouvements et de continuité discrétisées sur un maillage dont le choix soit convenable pour la bonne marche du programme.

Afin de rendre possible l'application de l'algorithme, il est indispensable que les champs de vitesses soit discrétisé sur une grille décalée figure 3.4. Ainsi, nous allons décrire les deux réseaux de points de leur utilisation pour mieux discrétiser les différentes équations aux dérivées partielles gouvernant le problème physique.

Le choix de grille favorise d'une part les propriétés de conservation en passant d'un volume de contrôle à un autre, et d'autre part facilite la résolution numérique du système d'équations et le traitement des conditions aux limites. Deux grilles différentes sont donc définies de la manière suivante :

- ❖ Une grille dite principale pour le calcul des variables T et P .
- ❖ Une grille dite décalée pour évaluer les champs de vitesse u et v dont les nœuds sont localisés à mi-distance de la grille principale figure 3.4.



(a) Volume de contrôle pour l'équation de mouvement suivant ξ , maillage décalé East
 (b) Volume de contrôle pour l'équation de mouvement suivant η , maillage décalé Nord
 (c) Volume de contrôle principal pour l'équation de continuité et de l'énergie

Figure 3.4 : type de maillage utilisé

III.6.2. Maillage

Une bonne prédétermination des échelles et de longueur des structures cohérentes passe par une définition correcte du maillage.

Notre étude concerne un écoulement dans un corps complexe, un maillage soigné sera utiliser, car le choix du maillage à une influence considérable sur la qualité des résultats obtenus. Sa génération demande donc le plus grand soin afin qu'il possède certains qualités essentielles :

- ❖ Il doit être suffisamment dense pour obtenir une précision satisfaisante,
- ❖ Les lignes de maillages doivent être régulières, toute discontinuité importante de la pente ou un point anguleux étant à éviter,
- ❖ L'orthogonalité doit être préservée tant que possible pour minimiser les erreurs de biais de l'évaluation des dérivées spatiales,
- ❖ Le resserrement des lignes doit être suffisant dans les régions présentant de forts gradients,
- ❖ Les frontières doivent être représentées de façon précise.

Lors de la génération de maillage, nous nous efforcerons donc de respecter le plus possible ces caractéristiques en gardant à l'esprit les limites imposées par le matériel (i.e. espace mémoire et temps de calcul).

Donc, d'une manière explicite l'algorithme de résolution fonctionne de la manière suivante :

III.6.3. Traitement du couplage pression-vitesse

L'une des contraintes majeures que l'on rencontre lors de la résolution numérique des problèmes de fluides incompressibles est la satisfaction de la conservation de la masse. Le champ de vitesse doit en effet être à **divergence nulle** pour satisfaire l'équation de continuité. Notons ici que ce problème, parfois désigné sous l'appellation 'condition de déstabilisé'. Ce problème qui est une conséquence de l'absence d'une équation indépendante pour la pression.

Dans le cadre d'une formulation en variables primitives, on distingue les méthodes directes, les méthodes de type « prédiction-correction », les méthodes de projection et la méthode du Lagrangien augmenté.

III.6.4. Méthode de type prédiction-correction

Cette méthode est la plus utilisée, elle conduit à une équation de correction de pression (*SIMPLE* et ses différentes variantes, *PISO* etc...) ces dernières peuvent être mises en œuvre sur des grilles décalées ou non décalées.

La discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement se mettent alors sous la forme générale suivante :

$$a_e u_e = \sum a_{voisin\ s} u_{voisin\ s} + A_e (p_P - p_E) + b_u$$

$$a_n u_n = \sum a_{voisin\ s} v_{voisin\ s} + A_n (p_P - p_N) + b_v$$

L'équation de continuité est quant à elle discrétisée comme suit :

$$(\rho A)_e - (\rho A)_w + (\rho A)_n - (\rho A)_s$$

Les trois équations précédentes peuvent s'écrire respectivement sous la forme matricielle :

$$A_e(u)u = A_{voisin\ s}(u)u + C_p^u b_u$$

$$A_n(v)v = A_{voisin\ s}(v)v + C_p^v b_v$$

$$M(u)u + M(v)v = 0$$

La technique de prédiction-correction utilise un champ de pression estimé p^* qui permet de déterminer les valeurs de la vitesse à l'étape 'e' prédiction en résolvant le système :

$$A_e(u)u^* = A_{voisin\ s}(u)u^* + C_p^u b_u$$

$$A_e(v)v^* = A_{voisin\ s}(v)v^* + C_p^v b_v$$

Ces vitesses prédites ne satisfaisant pas l'équation de continuité, on corrige la pression en écrivant $p = p^* + p'$. Cette correction de pression entraîne une correction de vitesses :

$$u = u^* + u'$$

$$\text{Et } v = v^* + v'$$

En soustrayant membre à membre les deux systèmes précédents, on obtient une relation entre les différentes corrections conduisant à exprimer les corrections de vitesse sous la forme :

$$u' = (A_e(u) - A_{(voisin\ S)}(u))^{-1} C_p^u$$

$$v' = (A_e(v) - A_{(voisin\ S)}(v))^{-1} C_p^v$$

En introduisant ces relations dans l'équation de continuité, on arrive à l'équation de correction de pression suivante :

$$Q_{p'} = -(M^u u^* + M^v v^*)$$

Avec

$$Q = M^u (A_e(u) - A_{(voisin\ S)}(u))^{-1} + M^v (A_e(v) - A_{(voisin\ S)}(v))^{-1}$$

La résolution de l'équation précédente permet de calculer une pression corrigée pour l'itération suivante de l'algorithme. Une façon simple de procéder consiste à considérer que la correction de vitesse en un point n'est pas affectée par les corrections des vitesses de ses voisins. L'inversion de matrice dans l'opérateur Q se ramène alors simplement à l'inversion de $A_e(u)$ qui est diagonale. Cette simplification est utilisée dans notre algorithme de calcul qui nécessite de fortes sous-relaxations pour converger.

III.6.5. Résumé des étapes de l'algorithme

a- Cas laminaire

- 1- Lire la définition du maillage, les conditions aux frontières et construire les grilles principale et décalée pour l'équation de la correction de pression et les deux équations de mouvement.
- 2- Donner un champ de pression estimé p^* ,
- 3- Calculer les composantes intermédiaires de la vitesse u^* et v^* aux nœuds de leurs grilles décalées par la résolution des équations de conservation de quantité de mouvement,
- 4- Résoudre l'équation de correction de la pression, qui donne la correction de pression p' nécessaire pour corriger le champ de vitesse (u, v) afin de satisfaire l'équation de continuité.
- 5- Calculer le champ de pression p en additionnant p' à p^* .
- 6- Calculer les composantes de vitesse u et v à l'aide des équations de correction de la vitesse directement ou par la correction des vitesses covariantes

$$U_{i+1/2,j}, U_{i-1/2,j}, V_{i+1/2,j} \text{ et } V_{i-1/2,j}$$
- 7- Résoudre l'équation discrète pour la température ou pour une autre variable φ si elle influence le champ de l'écoulement par l'intermédiaire des termes sources et des propriétés physiques du fluide.
- 8- Poser $p^* = p$ et reprendre l'exécution à l'étape 2 en répétant toute la procédure jusqu'à ce que la condition de convergence soit remplie.

b- Cas turbulent

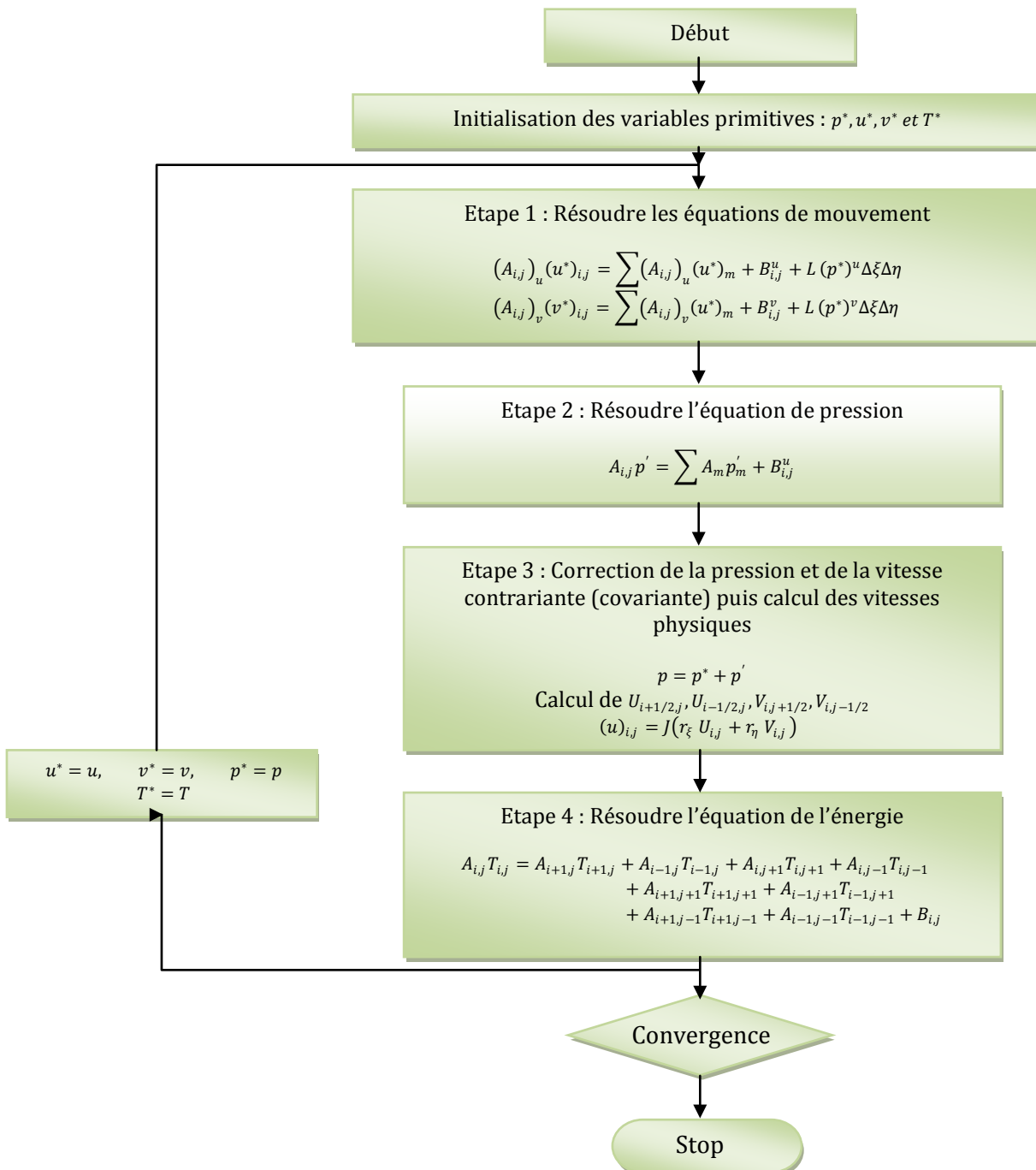
Séquence des opérations itératives

Les étapes sont les suivantes :

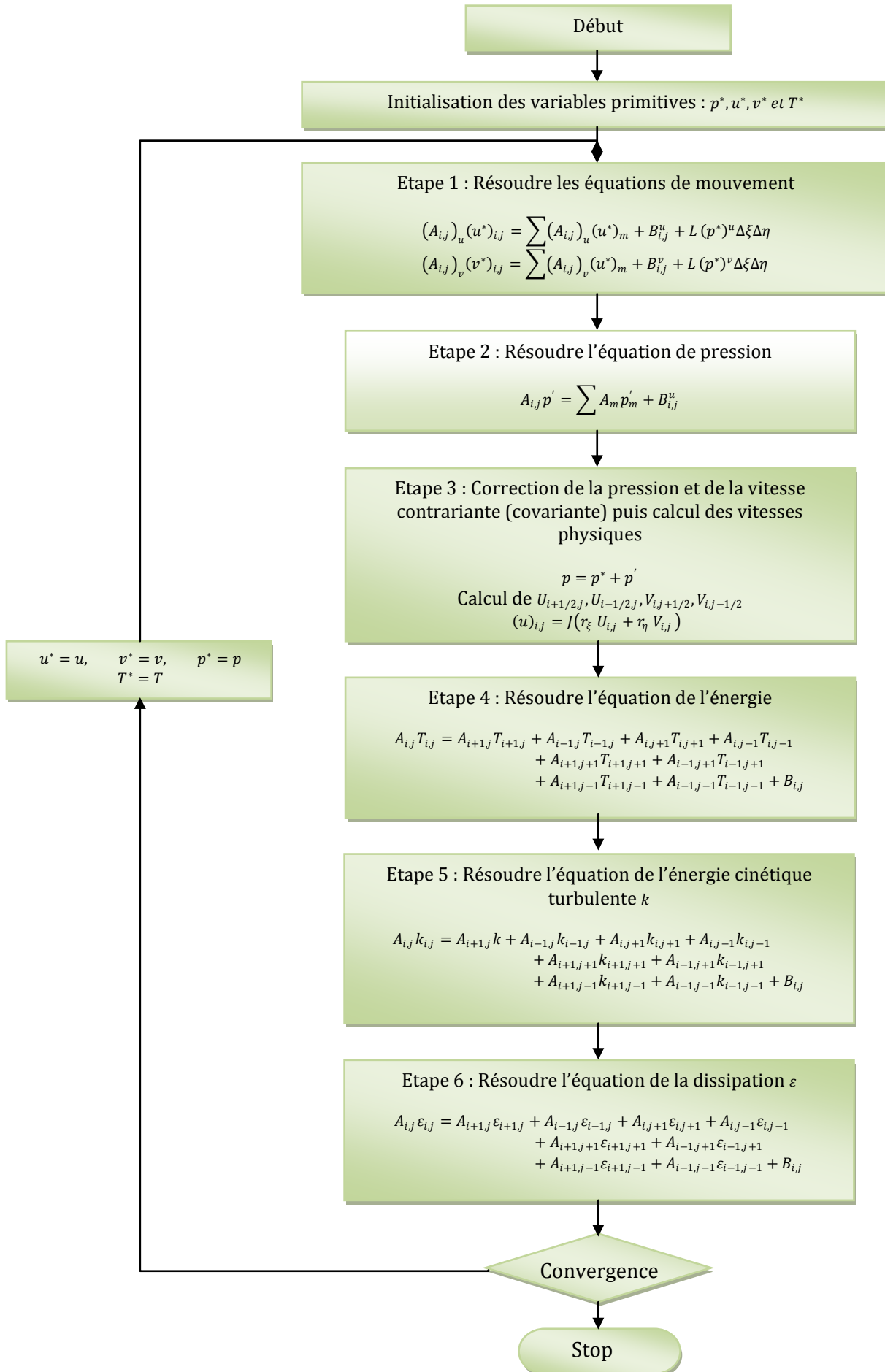
- 1- Donner un champ de pression initiale p .
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour les vitesses u et v
- 3- Résoudre l'équation de la correction de pression p
- 4- Corriger $p : p = p^* + p'$

- 5- Corriger les champs des composantes de vitesses u et v en utilisant les formules de corrections.
- 6- Résoudre l'équation de transport de l'énergie turbulente k .
- 7- Résoudre l'équation de transport de taux de dissipation ε .
- 8- Prendre le champ de pression p comme une nouvelle estimation et reprendre le calcul à partir de l'étape de 2 jusqu'à la convergence.

ORGANIGRAMME I Cas laminaire



ORGANIGRAMME II Cas turbulent



Chapitre IV

Sommaire du chapitre

Introduction

RESULTATS ET INTERPRETATION

- ❖ Régime laminaire
- ❖ Régime turbulent

**RESULTATS ET
DISCUSION**

IV.1. INTRODUCTION

Les résultats numériques sont obtenus pour une géométrie curviligne en utilisant le code de calcul écrit en langage Fortran. Les profils des différentes grandeurs de notre écoulement sont présentés sous forme de graphes.

IV.2. RESULTATS ET INTERPRETATION

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques obtenus dans le cas de la géométrie curviligne de la cavité. En utilisant un maillage de 270×22 , les dimensions adoptées dans le développement sont : la hauteur de la cheminée, $H_{sc} = 2 \text{ m}$, diamètre du capteur $D_{coll} = 2 \text{ m}$, la hauteur de la section d'entrée dans le capteur solaire $h_{in} = 0.02 \text{ m}$ le rayon de la section de passage dans la cheminée $R = 0.02 \text{ m}$, figure 4.1. Avec les propriétés thermo-physiques du fluide (air) sont supposé constante.

$$cp = 1006 \frac{J}{kgK} \text{ et } \beta = 3331 \times 10^{-6}$$

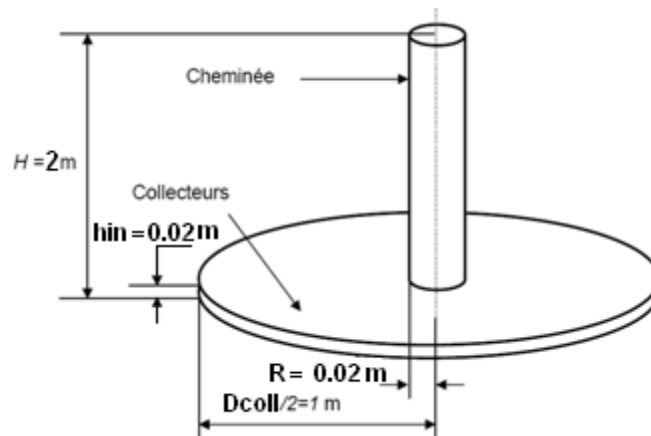


Figure 4.1 : modèle réduit de la cheminée.

L'objectif du travail consiste à étudier l'influence du nombre de *Rayleigh* R_a sur les variables primitives de l'écoulement : vitesses, température, pression, en vue de calculer les performances énergétiques de la cheminée solaire (puissance) ; et de déterminer le nombre de *Rayleigh* critique caractérisant la phase transitoire entre les deux régimes d'écoulement, laminaire et turbulent. Il à noter que les résultats obtenus à partir des codes de calcul sont donnés sous forme dimensionnelle. Nous nous intéressons à donner les différents résultats dans la zone de jonction (coude) pour l'intérêt qu'elle présente pour l'emplacement de l'aérogénérateur.

IV.2.1. REGIME LAMINAIRE

IV.2.1.1. INFLUENCE DU NOMBRE DE RAYLEIGH

Dans cette étude l'influence du nombre de Rayleigh est analysée dans la gamme $10^4 - 10^8$ sur les variables thermo-hydrodynamiques de l'écoulement.

IV.2.1.1.1 Champs de température

Les figures (4.2-4.6) représentent le contour de la température le long de la cheminée solaire, pour différents nombre de Rayleigh, on voit bien que l'épaisseur maximale des iso-contours diminue au fur et à mesure que R_a augmente, ceci est dû à l'augmentation de l'échange de chaleur qui est emporté influencé par l'augmentation des vitesses le long du capteur solaire.

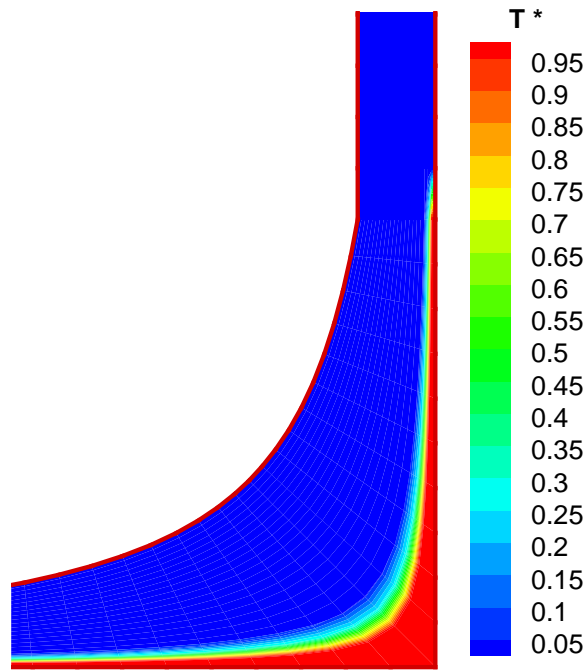


Figure 4. 2 : Isothermes pour un $Ra = 10^4$

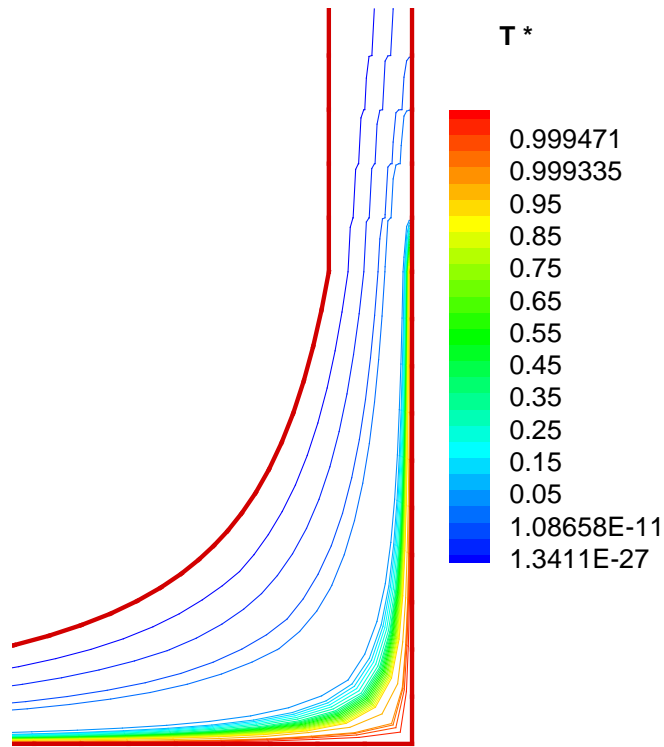


Figure 4. 3 : Isothermes pour un $Ra = 10^5$

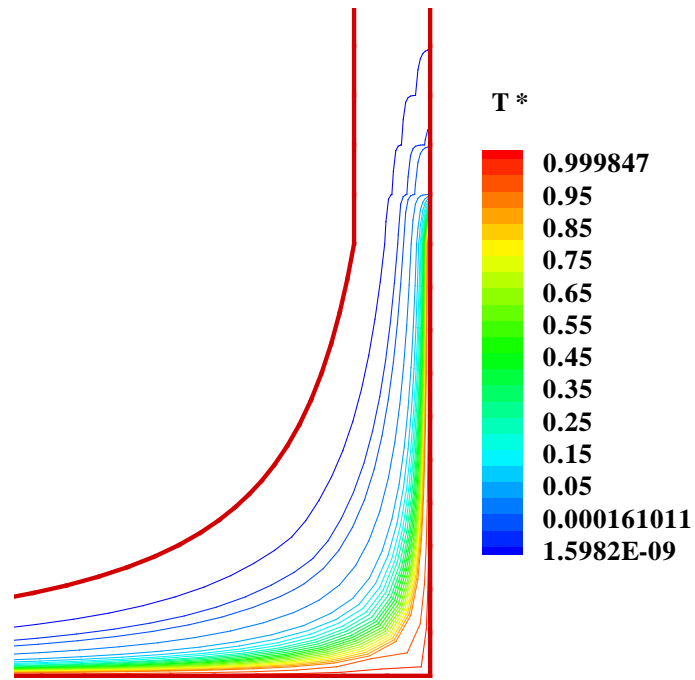


Figure 4.4 : Isothermes pour un $Ra = 10^6$

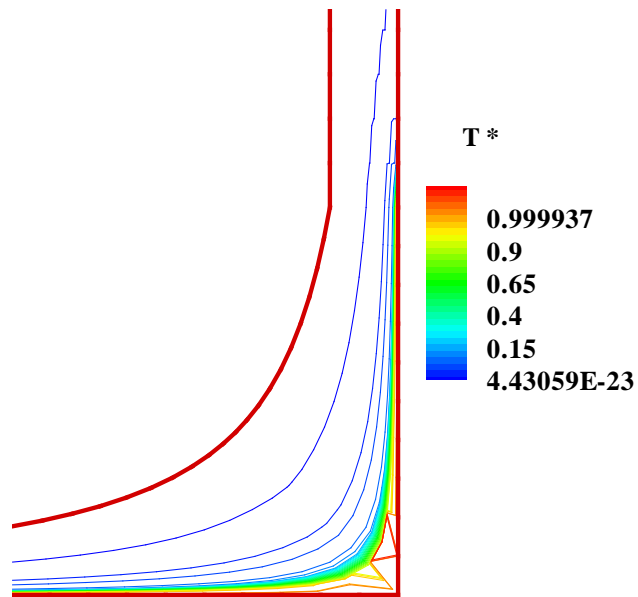


Figure 4.5 : Isothermes pour un $Ra = 10^7$

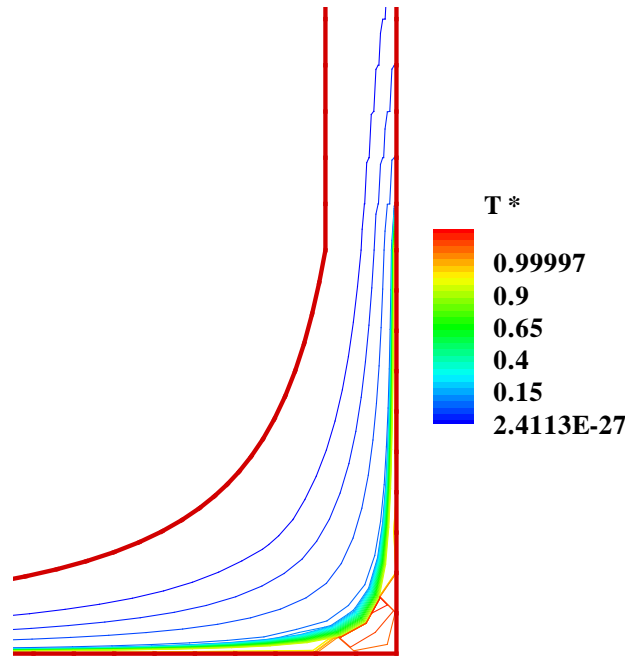


Figure 4.6 : Isothermes pour un $Ra = 10^8$

IV.2.1.1.2. Profils de température à différentes sections de la cheminée

Les figures 4.7, représente la distribution de la température adimensionnelle à travers la cheminée solaire pour différents nombre de Rayleigh à la section $r = 0.008 \text{ m}$. La variation de l'épaisseur de la couche thermique le long du capteur est sensiblement influencée par la variation du nombre de *Rayleigh*, cette variation en matière de grandeur et de forme, ceci est dû à l'effet du à la variation du flux de masse, plus la variation est grande plus cette épaisseur est faible, donc la couche thermique est inversement proportionnelle au flux de masse. Ce dernier résultat est bien exprimé dans la figure 4.35, où on observe que l'allure de la température suit une allure plus amortie, en allant vers des *Rayleigh* plus grands jusqu'à arriver au régime turbulent où le flux de masse est maximal.

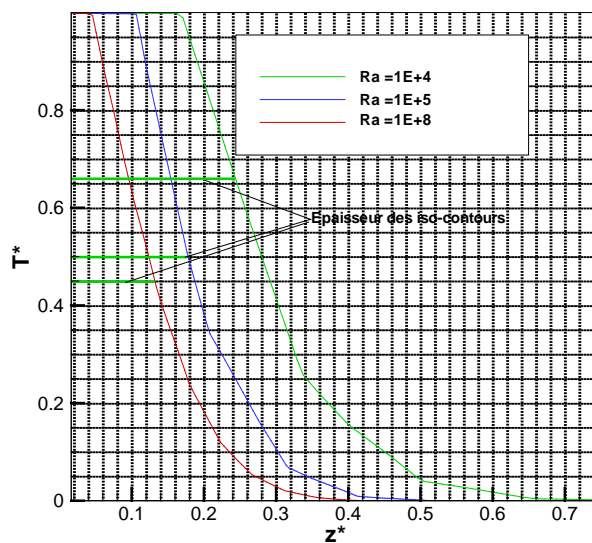


Figure 4.7 : L'épaisseur de la couche thermique dans le régime laminaire à $r = 0.08$
 Pour des $Ra = 10^4, 10^5, 10^8$

IV.2.1.1.3. Vecteur et champs de vitesse

Les figures 4.8 – 4.12, représentent l'évolution de champs et de vecteur de vitesse le long de la cheminée solaire, pour différents nombres de Rayleigh. On remarque, que la forme du vecteur vitesse est presque parabolique où son maximum est plus proche de la paroi chaude, où son maximum est atteinte à l'entrée de la cheminée, et qu'il vari proportionnellement avec Ra . On conclu donc, que la détermination du nombre de Rayleigh optimale est capital dans la recherche des vitesses maximales.

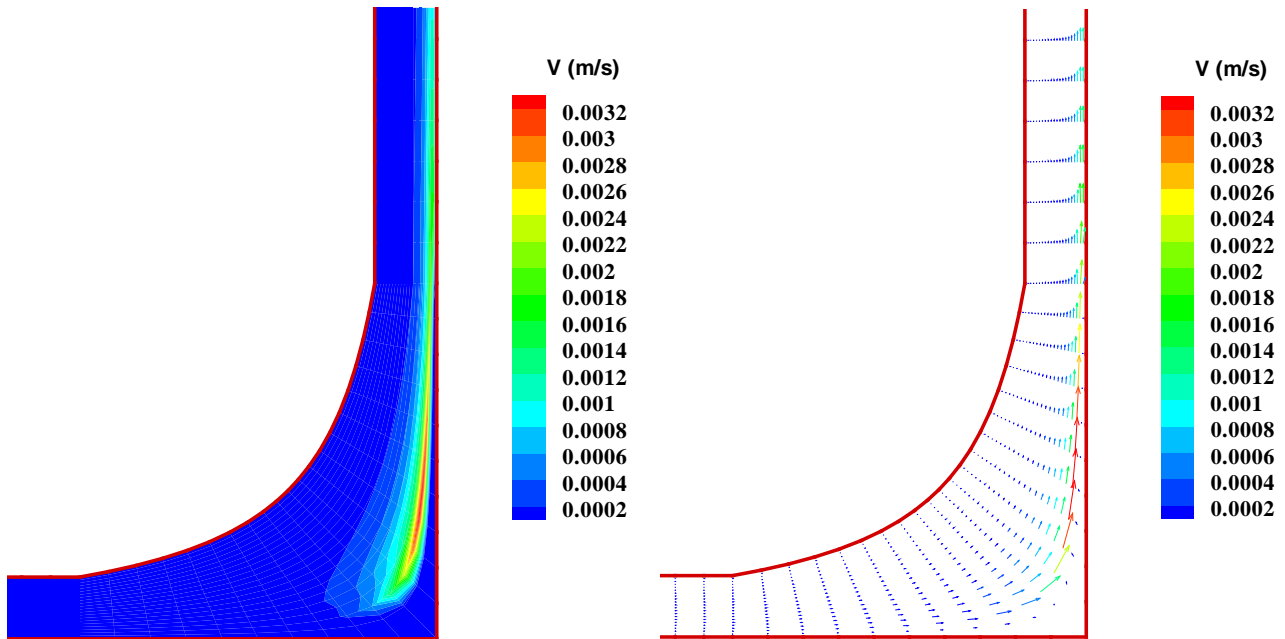


Figure 4.8 : (a) contours de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^4$

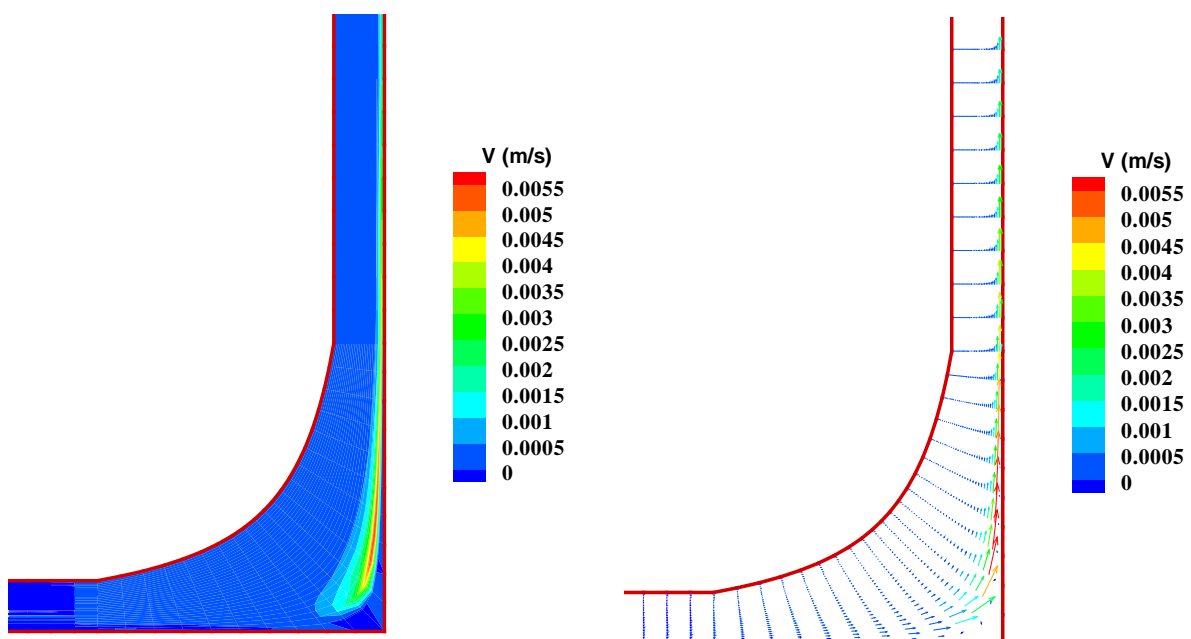


Figure 4.9 : (a) contours de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^5$

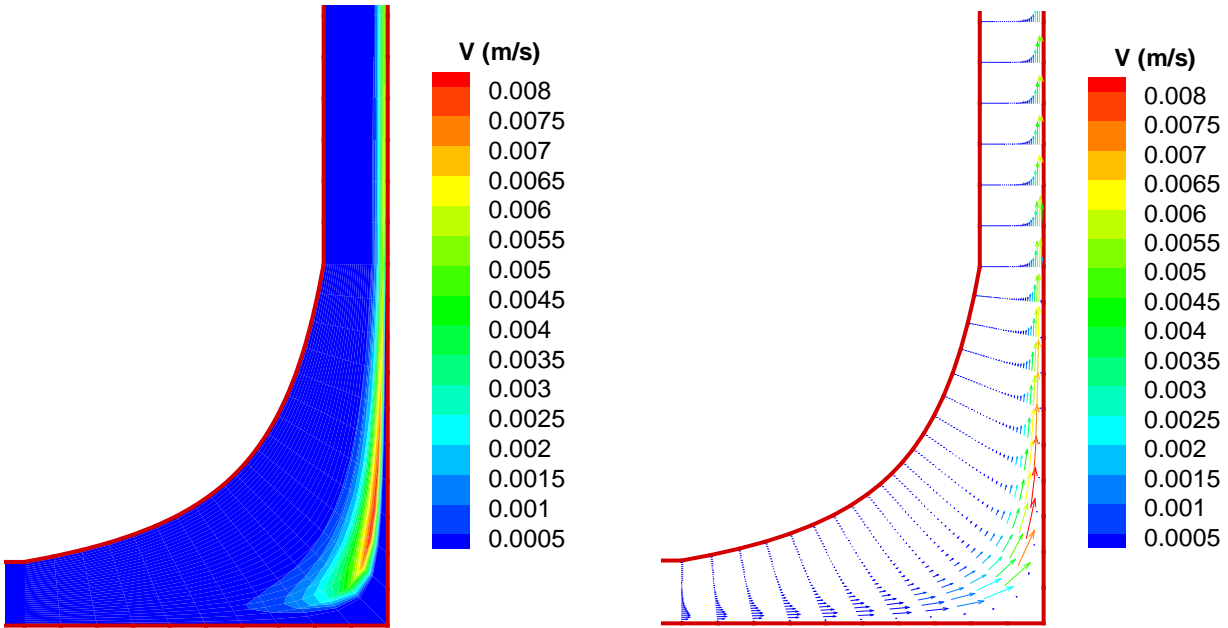


Figure 4.10 : (a) contours de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^6$

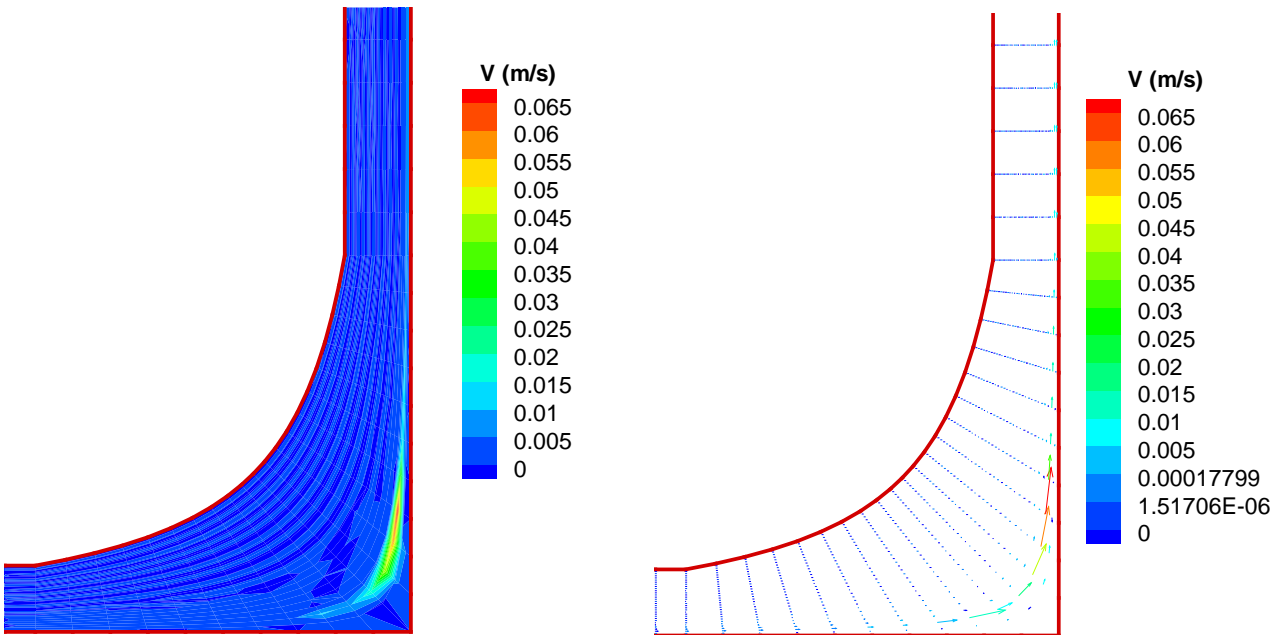


Figure 4.11 : (a) contours de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^7$

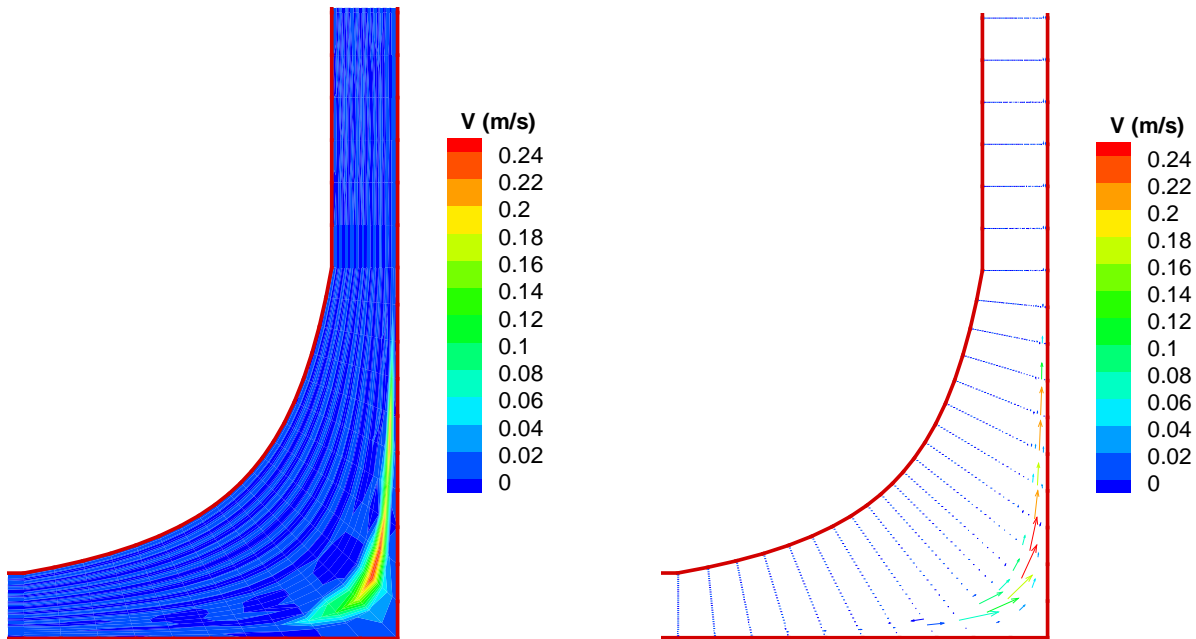


Figure 4.12 : (a) contours de la vitesse V , (b) vecteur de la vitesse V pour $Ra = 10^8$

IV.2.1.1.4. Profil de vitesse

➤ Vitesse radiale

Les figures (4.13-4.17), représentent le développement de la vitesse radiale à différentes sections du collecteur, on remarque que le profil de la vitesse varie sensiblement avec la variation du nombre de Rayleigh, pour avoir un profil bien développé à la sortie du collecteur. Ce développement suit une loi parabolique aux sections proche de l'entrée du collecteur où il est déformé à la sortie sous l'effet de la source chaude. Plus le nombre de Rayleigh est grand plus la déformation est prononcée.

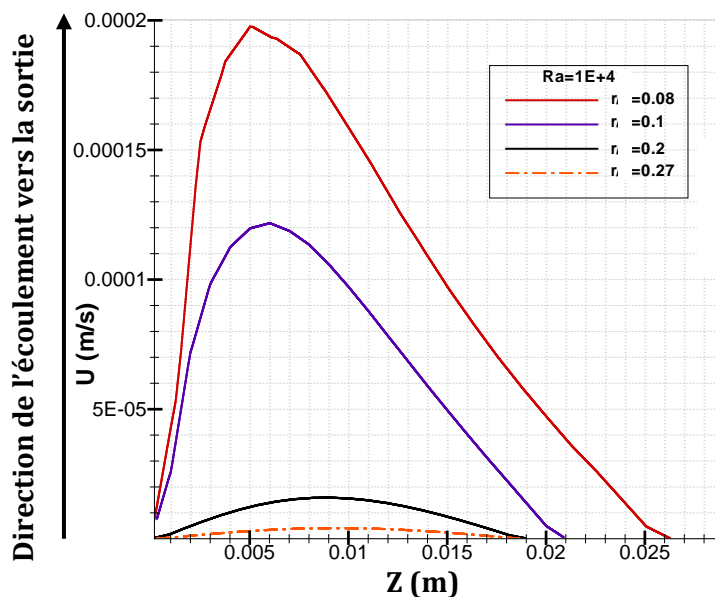


Figure 4.13 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^4$

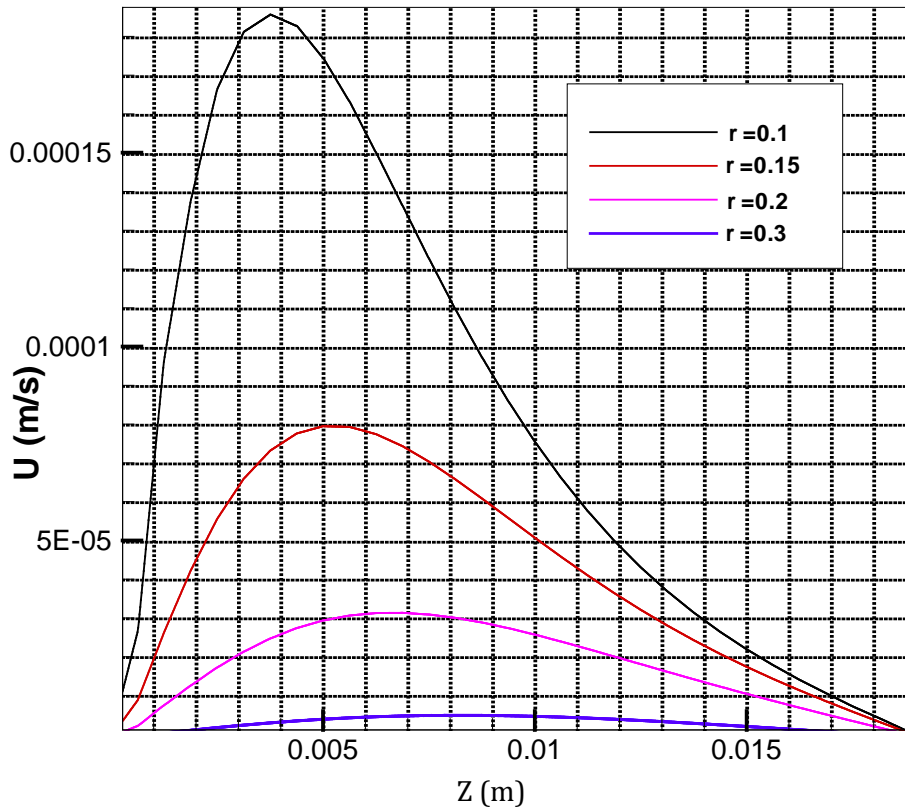


Figure 4.14 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^5$

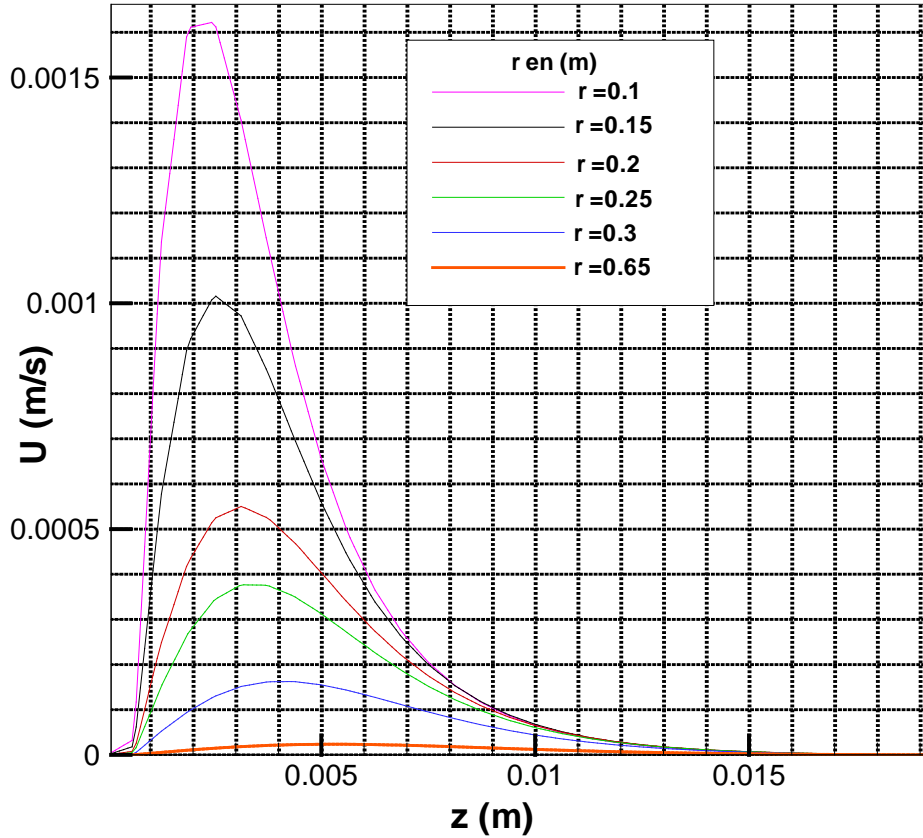


Figure 4.15 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^6$

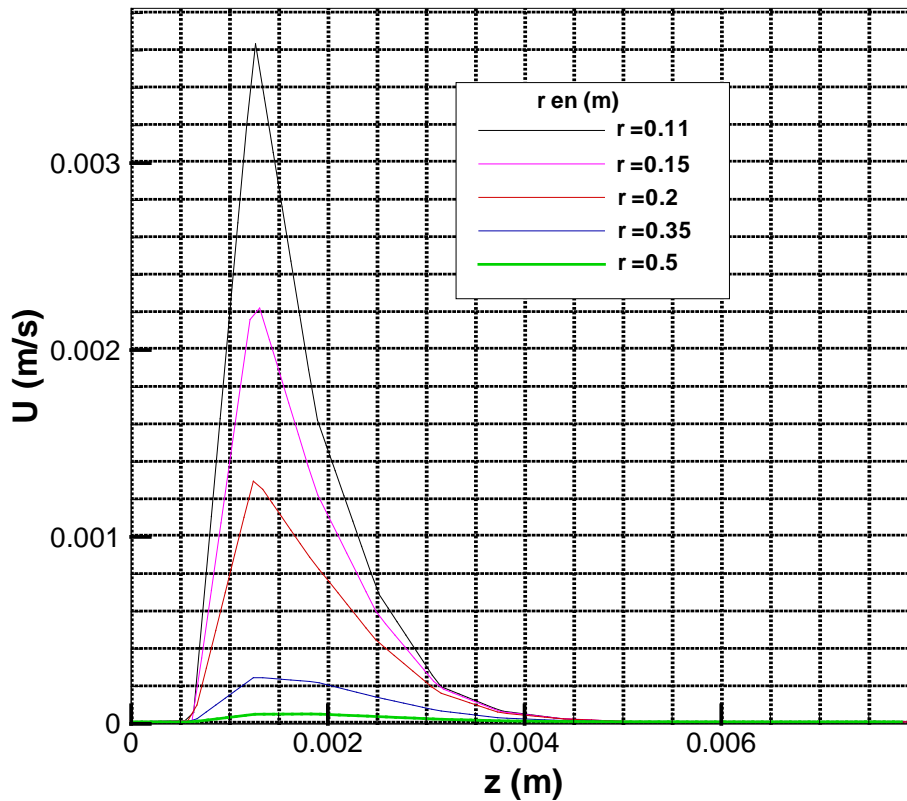


Figure 4.16 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^7$

➤ Vitesse axiale

Les figures (4.18-4.20) et la figure 4.37, représentent Le développement de la vitesse axiale à différentes sections de la tour cheminée, on remarque que le profil de la vitesse axiale varie aussi sensiblement avec la variation du nombre de Rayleigh, on remarque que la profile da la vitesse axiale est développé à l'entrée de la cheminée pour avoir un profil affaibli à la sortie de la tour. Ce résultat montre bien l'effet que joue la cheminée dont l'atténuation de la vitesse jusqu'à l'évacuation complète de l'air au milieu extérieur.

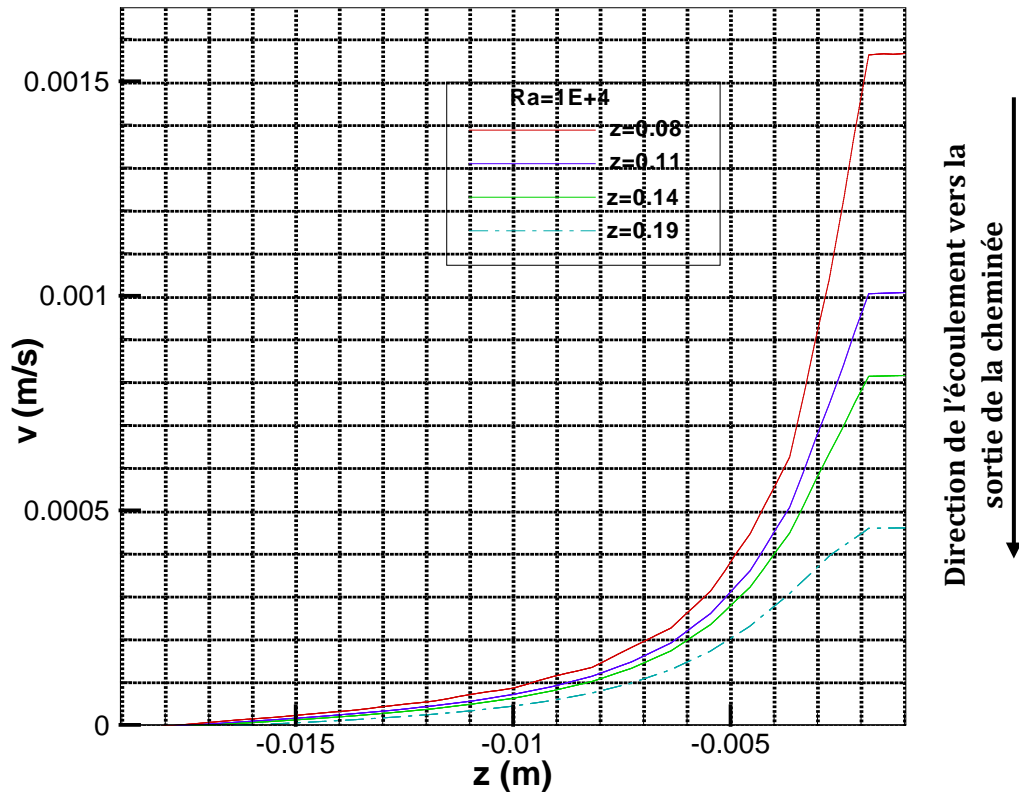


Figure 4.17 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^4$

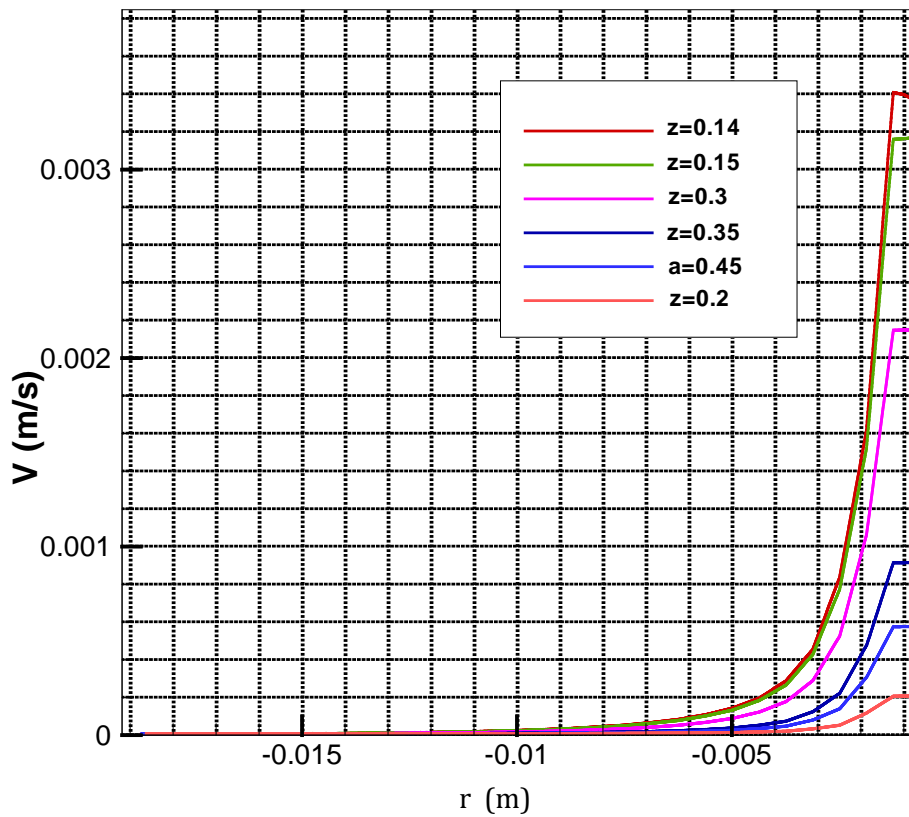


Figure 4.18 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^5$

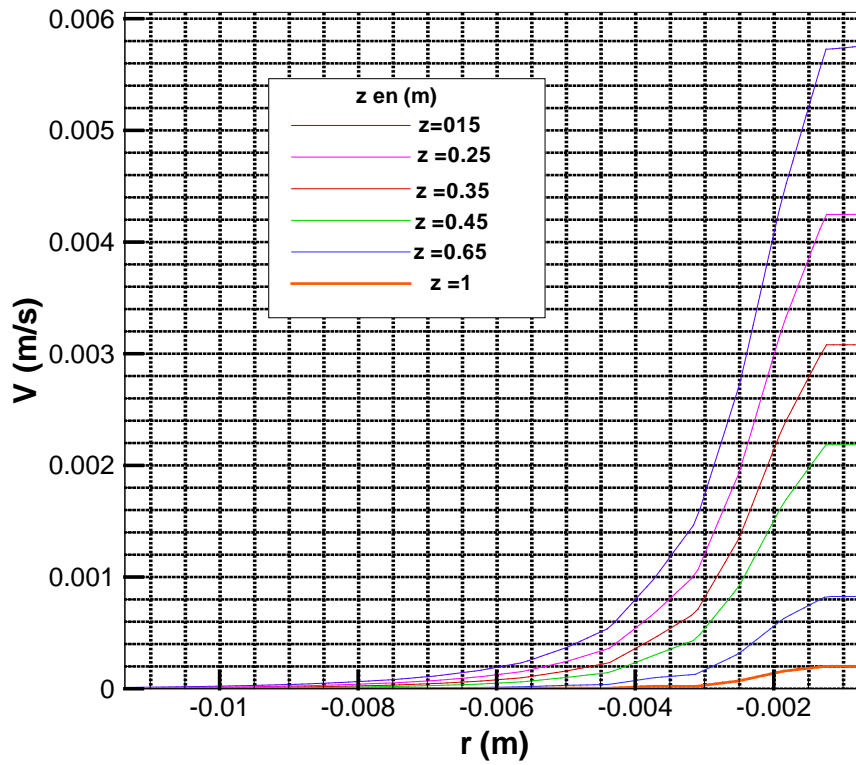


Figure 4.19 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^6$

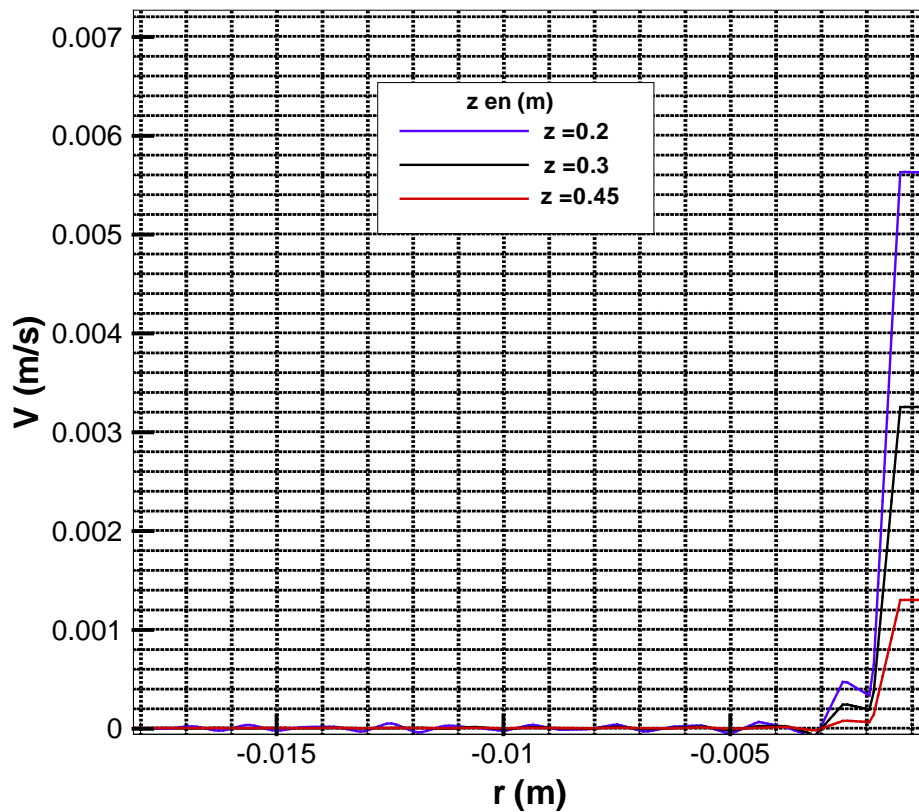


Figure 4.20 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^7$

IV.2.1.1.5. Contour de la pression

La figure 4.21-4.25, représente le contour de pression le long de la zone de jonction où la différence de pression est plus grande. Ce contour nous permet de déterminer la section qui nous réalise le meilleur Δp , pour un emplacement optimal de la turbine tout en profitant du maximum de vitesse axiale générée, afin d'avoir une meilleure puissance.

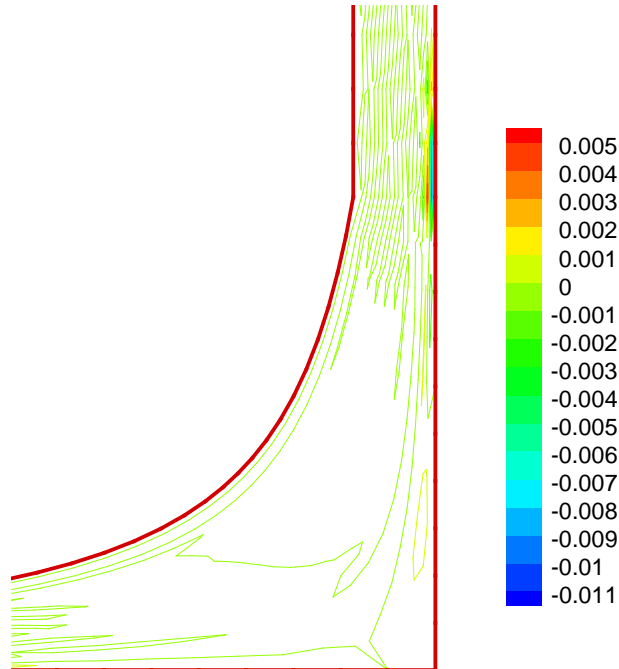


Figure 4.21 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^4$

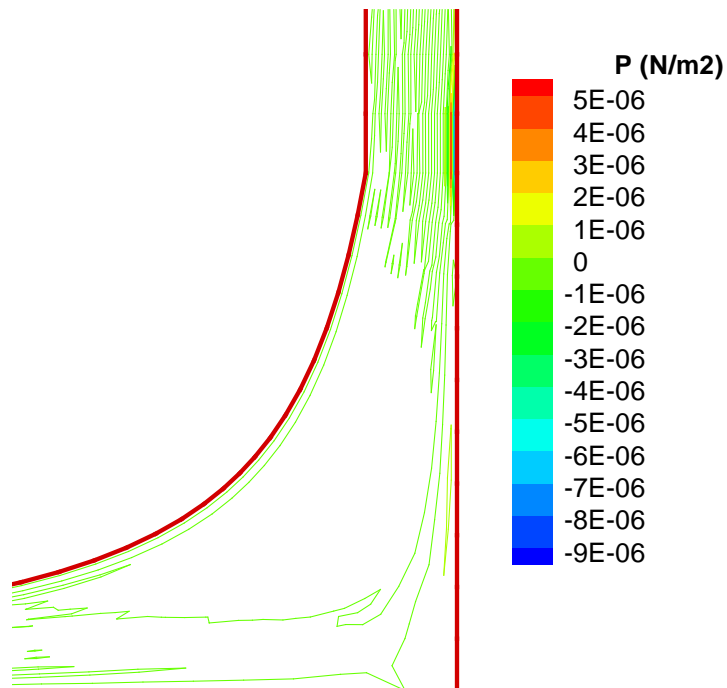


Figure 4.22 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^5$

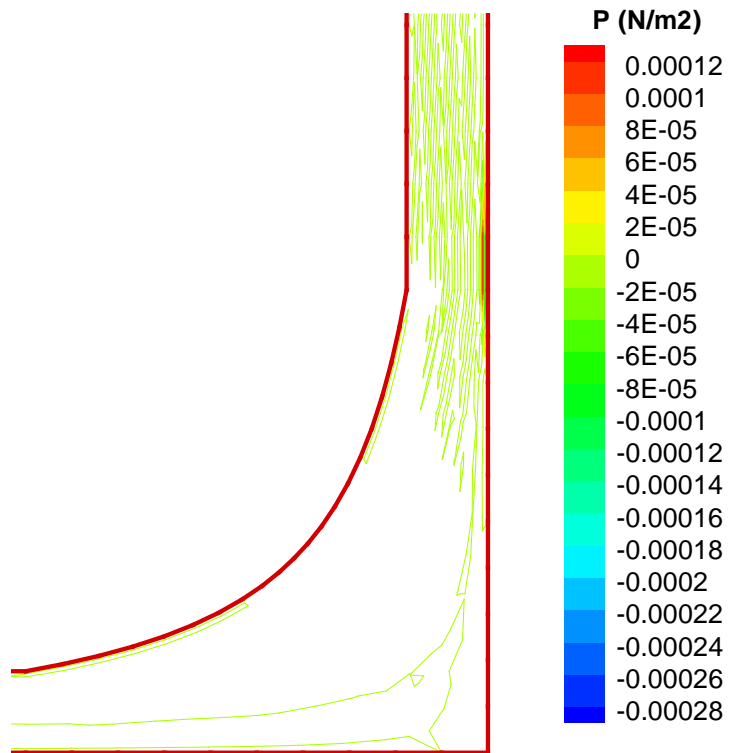


Figure 4.23 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^6$

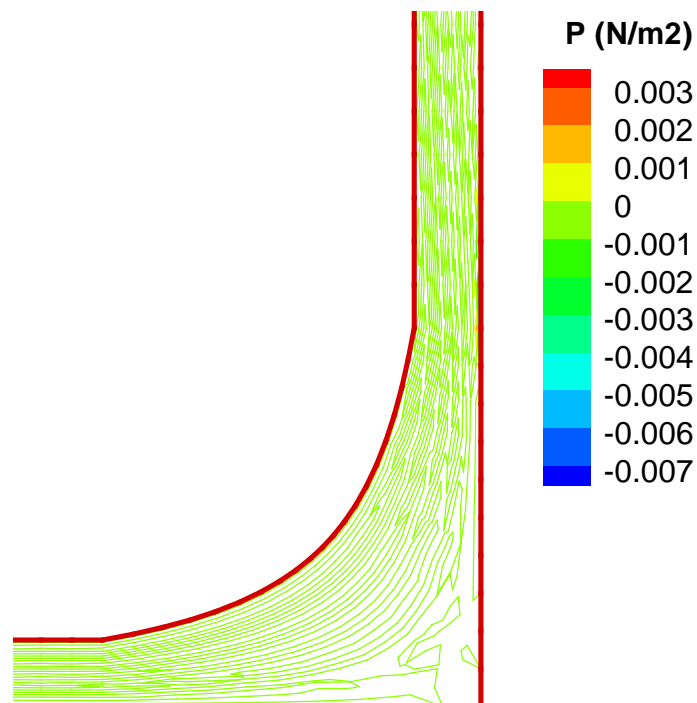


Figure 4.24 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^7$

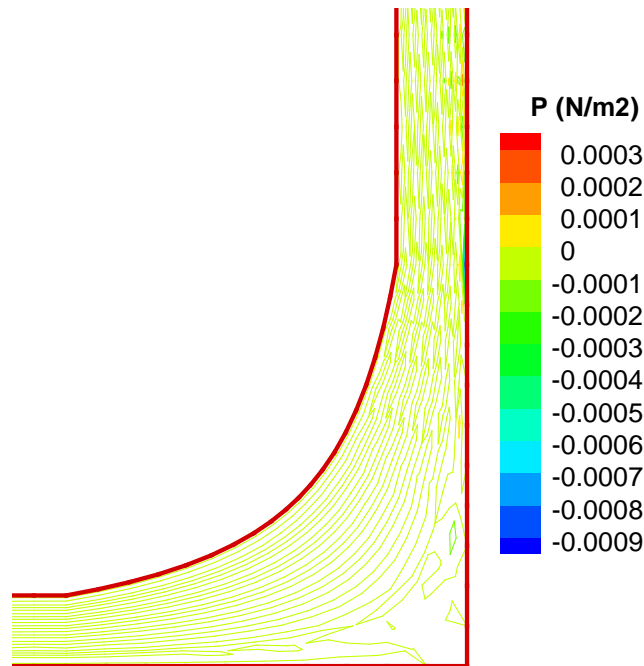


Figure 4.25 : Contour de la pression en N/m^2 , $Ra = 10^8$

IV.2.2. REGIME TURBULENT

IV.2.2.1. Influence du nombre de Rayleigh

On présente les figures montrant l'influence du nombre de Rayleigh dans la gamme turbulente sur les variables de l'écoulement : vitesse, pression et température. Les nombres de Rayleigh étudiés sont de $Ra = 10^9$ et $Ra = 10^{11}$. La limitation de l'étude à $Ra = 10^{11}$, repose sur l'étude expérimentale sur la cheminée solaire de Manzanares qui fonctionne avec un $Ra = 10^{11}$.

IV.2.2.1.1. Champs de température

Les figures (4.26, 4.27), représentent le contour de température, pour différents $Ra = 10^9$ et 10^{11} , on remarque bien que de l'épaisseur thermique ne subit pas une grande variation et que cette épaisseur est atteinte dès l'entrée au régime turbulent ce résultat est confirmé par la figure 4.28. Cela est expliqué par l'effet des grandes vitesses générées dans le régime turbulent qui favorise la domination du transfert de chaleur par convection par rapport à la conduction, ce qui diminue la propagation de la chaleur vers les couches supérieures de l'écoulement.

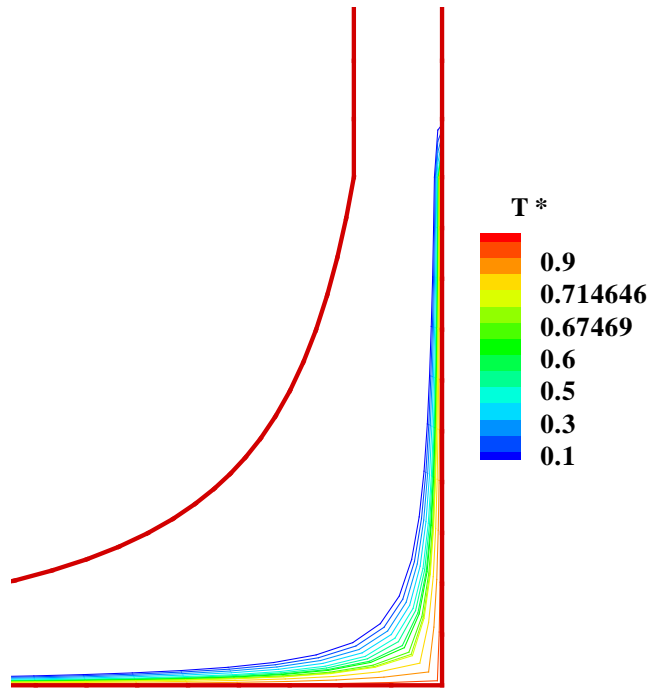


Figure 4.26 : Isothermes pour un $Ra = 10^9$

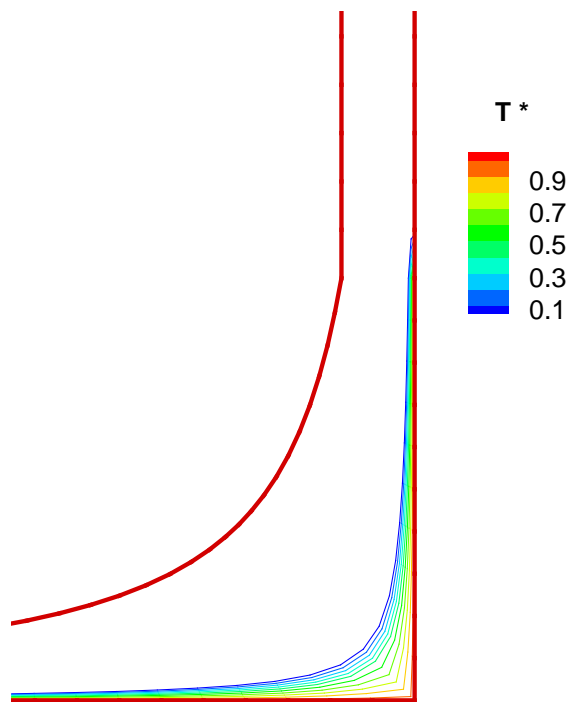


Figure 4.27 : Isothermes pour un $Ra = 10^{11}$

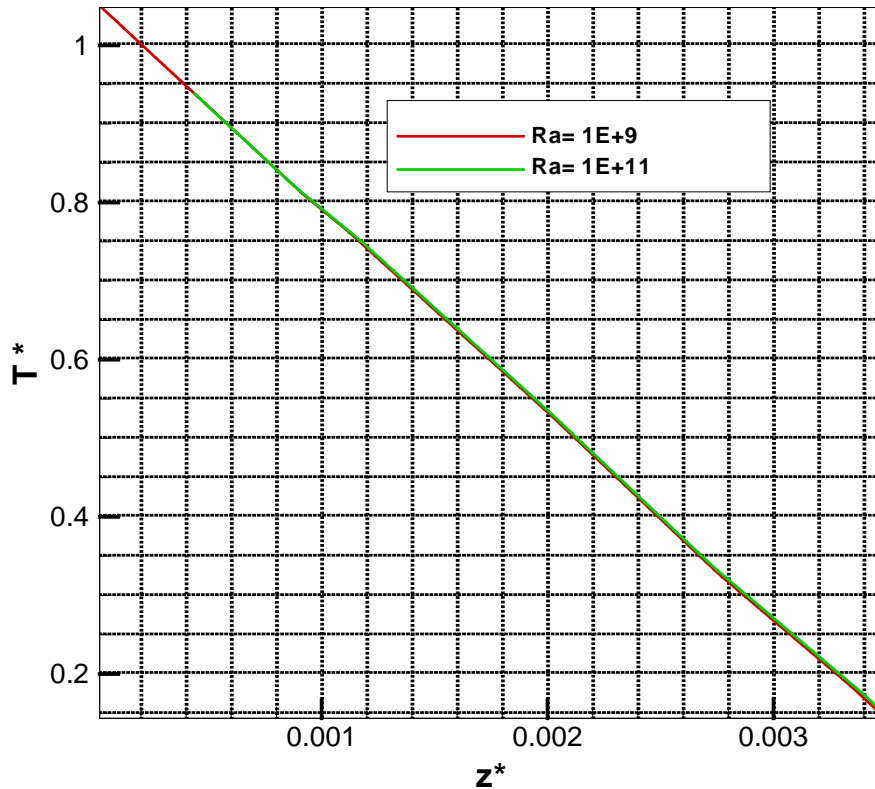


Figure 4.28 : La variation de l'épaisseur de la couche thermique pour $Ra = 10^9$ et $Ra = 10^{11}$

IV.2.2.1.2. Champs de vitesse

Les figures 4.29 - 4.32, représentent l'évolution de champ de vitesse dans la zone de jonction de la cheminée solaire où la vitesse est maximale, pour différents nombres de Rayleigh. On remarque, que les vitesses prends des directions aléatoire ce qui explique l'apparition des tourbillons à la place de la forme lise obtenue au régime laminaire, l'effet du nombre de Rayleigh sur les vitesses est nettement visible. La vitesse maximale est de l'ordre de grandeur de $V = 7 \text{ m/s}$ pour un $Ra = 10^{11}$.

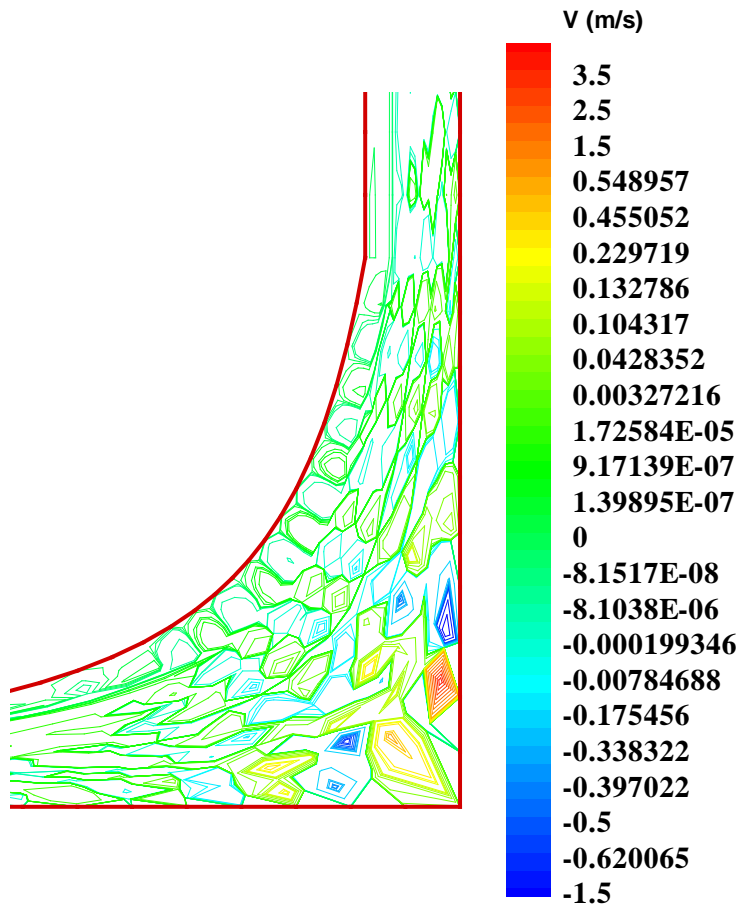


Figure 4.29 : Contours de la vitesse V pour $Ra = 10^9$

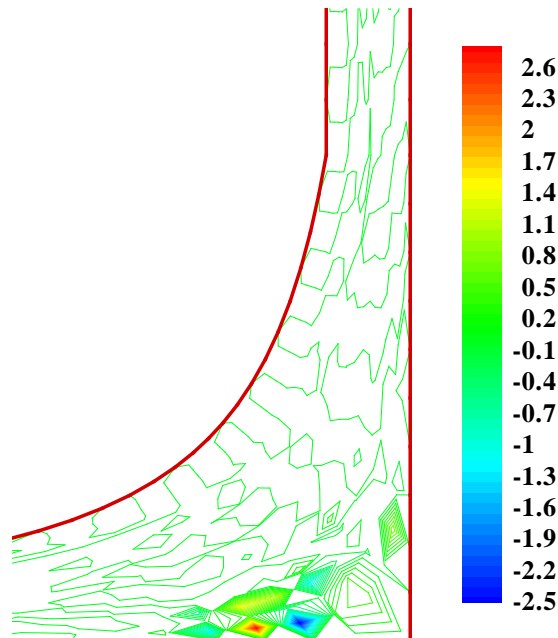


Figure 4.30 : Contours de la vitesse U pour $Ra = 10^9$

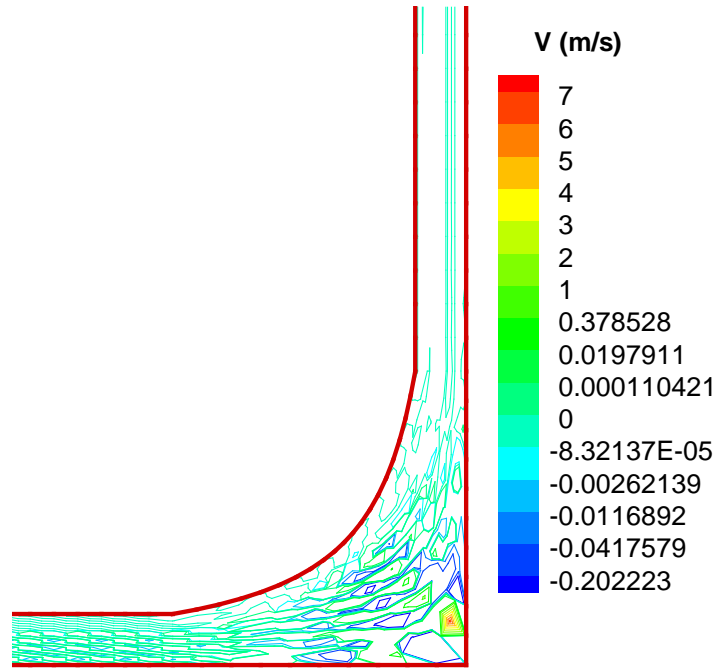


Figure 4.31 : Contours de la vitesse V pour $Ra = 10^{11}$

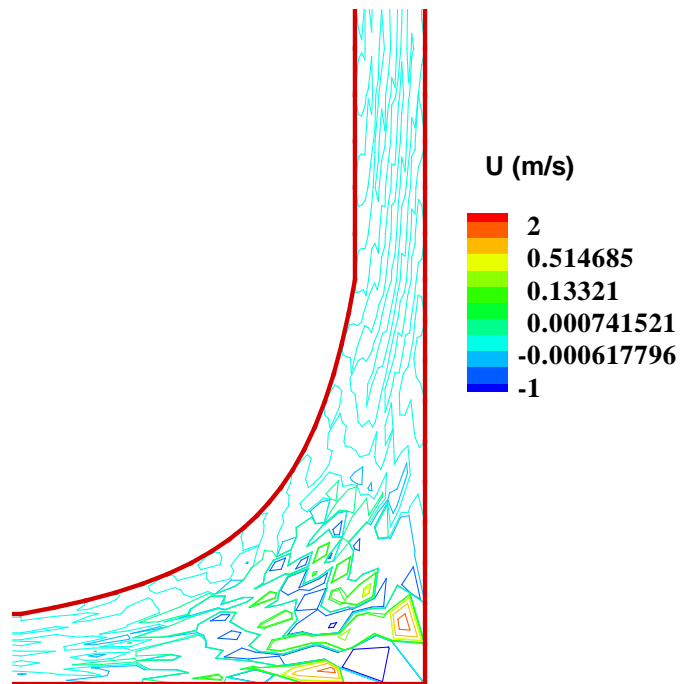


Figure 4.32 : Contours de la vitesse U pour $Ra = 10^{11}$

IV.2.2.1.3. Profil de vitesse

Les figures 4.33, 4.34, représentent la distribution de la vitesse dimensionnelle à travers la cheminée à différentes sections du la tour, on remarque bien que la perturbation s'amplifie en allons vers les grandes valeurs de Ra jusqu'à disparition complète du profile lisse des vitesses obtenue au régime laminaire. On voit bien que la perturbation est complètement développée à $Ra = 10^{11}$.

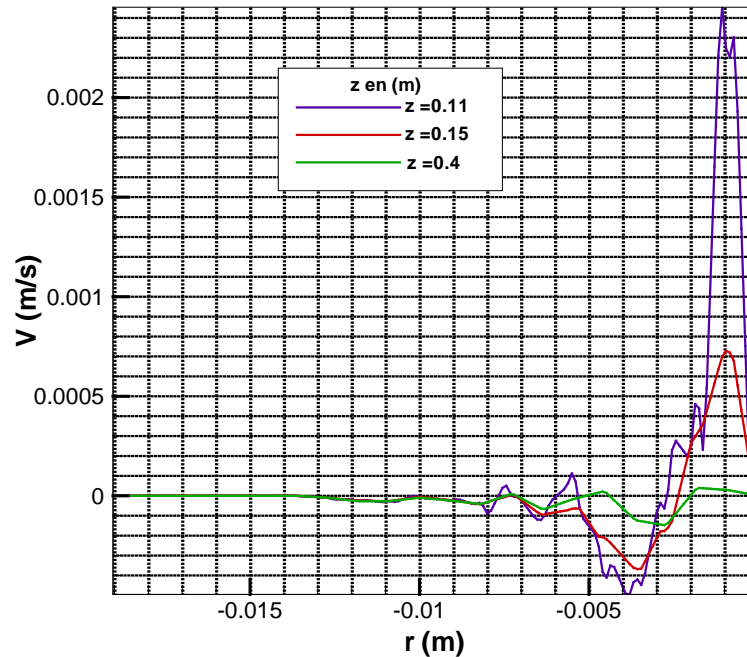


Figure 4.33 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^9$

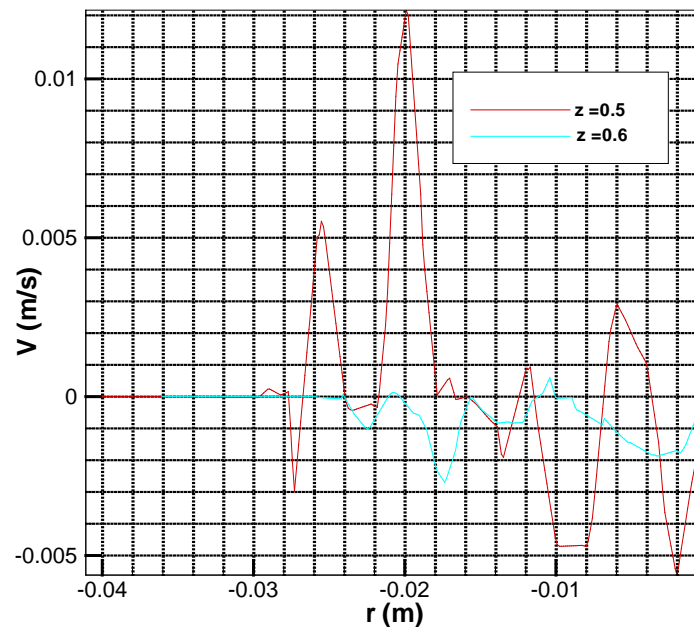


Figure 4.34 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^{11}$

IV.3. Détermination de la zone de transition du régime laminaire au régime turbulent

L'étude de la phase de transition est importante dans la détermination du nombre de Rayleigh critique caractérisant le passage d'un régime un autre, cette phase est très délicate à étudier. Vue cette instabilité de cette phase, il est important d'éviter de faire fonctionner notre installation dans cette phase. Car le comportement prend une forme transitoire où les grandeurs physiques suivent des lois très aléatoire. Donc, pour bien détecter cette zone, on présente le comportement de l'épaisseur de la couche thermique et de la vitesse pour la gamme de Rayleigh [$10^4 - 10^9$]. La figure 4.35, montre la diminution de l'épaisseur de la couche thermique entre le régime laminaire et le régime turbulent, on constate que cette variation subit une forte diminution entre $Ra = 10^8$ et $Ra = 10^9$ figure 4.36. En plus, la figure 4.33, et les figures (4.36 - 4.39) montrent le début des perturbations dans les vitesses axiales et radiale jusqu'à arrivé au développement de la perturbation à $Ra = 10^9$. Donc, on peut conclure que la phase de transition se situe dans la gamme $Ra = 10^8$ à $Ra = 10^9$ et le Rayleigh critique et $Ra_c = 10^9$. Ce qui justifie bien le choix de la gamme du régime turbulent.

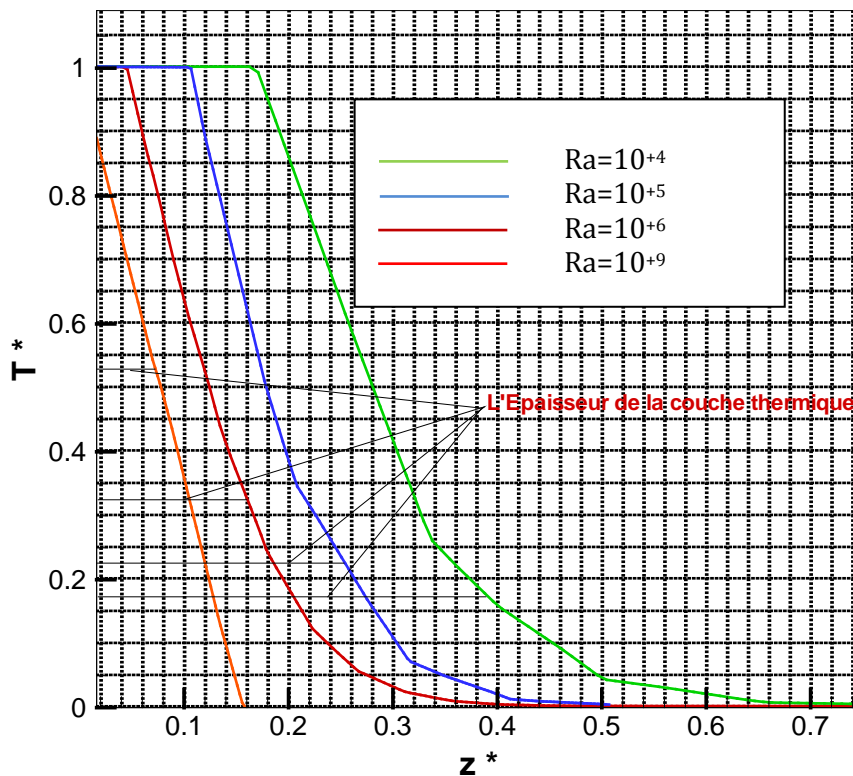


Figure 4.35 : Variation de l'épaisseur de la couche thermique entre le régime laminaire et le turbulent à $r = 0.08$ Pour des $Ra = 10^4, 10^5, 10^6, 10^9$

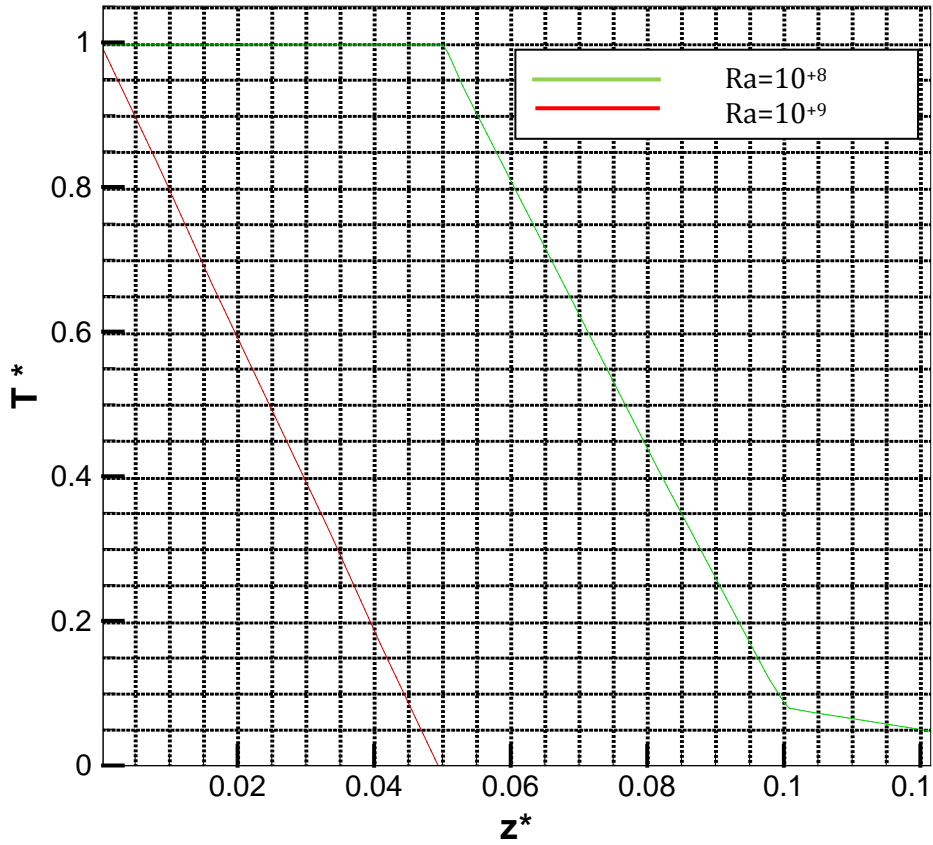


Figure 4.36 : la zone de transition du régime laminaire au régime turbulent

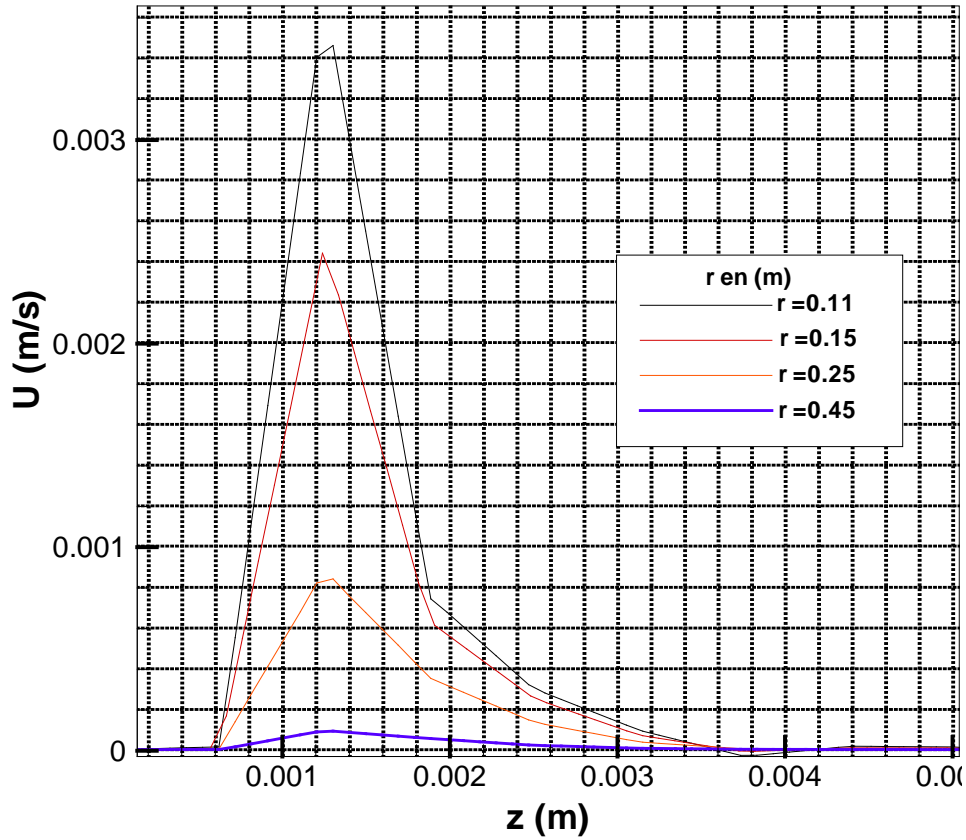


Figure 4.37 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^8$

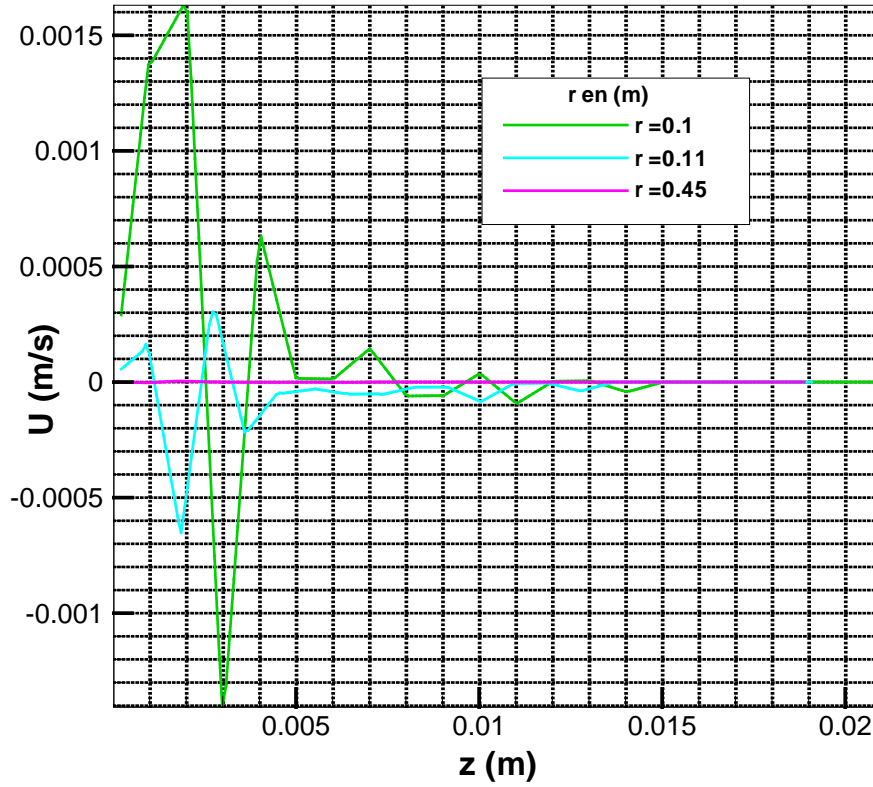


Figure 4.38 : Evolution du profil de la vitesse U à différentes positions de r pour $Ra = 10^9$

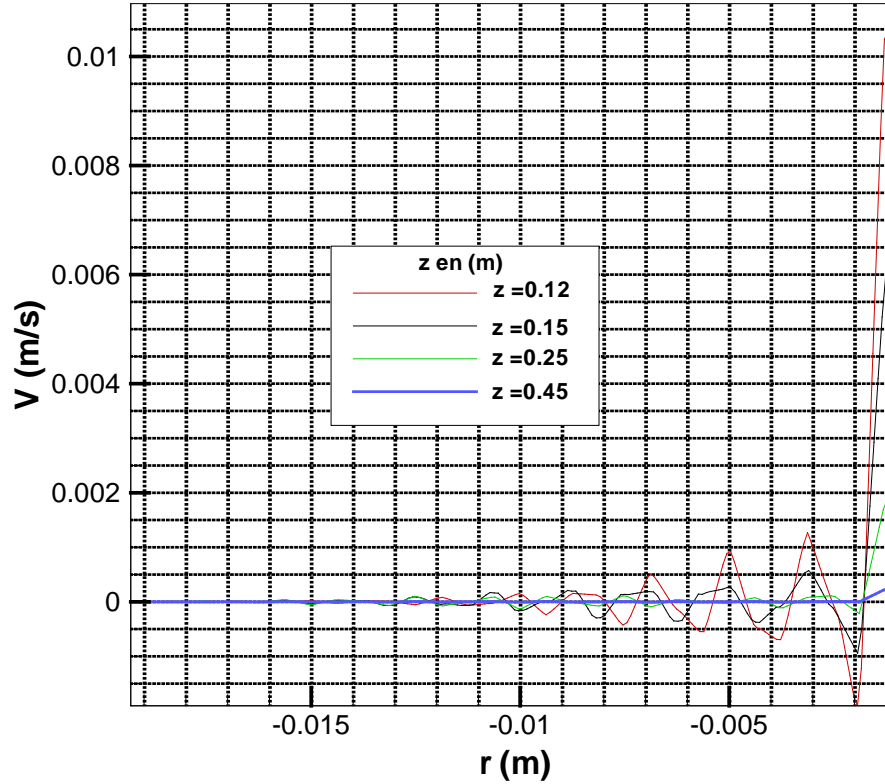


Figure 4.39 : Evolution du profil de la vitesse V à différentes positions de z pour $Ra = 10^8$

Chapitre V

Sommaire du chapitre

Introduction

Calcul des performances énergétiques de la CCS

- ❖ Calcul de la puissance
- ❖ Calcul du rendement

Validation des résultats

***CALCUL DES
PERFORMANCES DE LA
CCS ET VALIDATION DES
RESULTATS***

V.1. Introduction

Dans ce chapitre on présente les performances énergétiques de la cheminée solaire en matière de puissance générée par la turbine, afin de prédire la puissance électrique produite par notre cheminée solaire.

V.2. Calcul de la puissance

V.2.1. Calcul des performances de composant de la CCS

V.2.1.1. Capteur solaire

Il est constitué du sol, surface d'absorption de chaleur, couverte par une couche transparente à une hauteur h_{in} . Le capteur solaire est ouvert à sa périphérie. A son centre est placée la base de la tour cheminée.

L'équation d'énergie est donnée par,

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p\Delta T = (\tau\alpha)A_{coll}I - hc\Delta T_a A_{coll} = \eta_{coll}A_{coll}I \quad (5.1)$$

h_c : Coefficient d'échange de chaleur par convection.

Où, \dot{m} est le débit massique de l'air chaud traversant la cheminée solaire, il est donnée par,

$$\dot{m} = \rho_{coll}A_c v_c \quad (5.2)$$

Donc,

$$\eta_{coll} = (\tau\alpha) - \frac{hc}{I}\Delta T_a \quad (5.3)$$

Où,

ΔT_a : Différence de température le sol et l'ambiance elle est prise comme valeur moyenne.

V.2.1.2. Tour cheminée

La cheminée elle-même est un moteur thermique. L'efficacité de la cheminée, c.-à-d. la conversion de la chaleur dans l'énergie cinétique, est pratiquement indépendant de l'élévation de la température de l'air dans le collecteur. Elle est essentiellement déterminée par la température ambiante au niveau du sol et à la taille de la cheminée.

D'après J. Schlaich [1], l'efficacité de cheminée est exprimée comme suit :

$$\eta_{sc} = \frac{P_{tot}}{\dot{Q}} = \frac{gH_{sc}}{c_p T_0} \quad (5.4)$$

D'où,

$$P_{tot} = \eta_{sc}\dot{Q} = \frac{gH_{sc}}{T_0}\rho_{coll}v_c\Delta T A_c \quad (5.5)$$

V.2.1.3. Turbine

Les turbines sont souvent placées à la base de la tour. L'utilisation des turbines sert à convertir l'énergie cinétique de l'air s'écoulant à l'intérieur de la cheminée en une énergie mécanique de rotation. Utilisation du rendement mécanique des turbines sous forme d'énergie de rotation peut être dérivée de l'écoulement de l'air dans la cheminée. Les turbines dans une cheminée solaire ne

fonctionnent pas avec la vitesse étagée comme dans les convertisseurs conventionnels d'énergie éolienne, mais plutôt, à pression-étagé comme dans un turbogénérateur, ou comme une centrale hydroélectrique, où la pression statique est convertie par une turbine intégrée en énergie de rotation utile.

La puissance mécanique maximale donnée par la turbine est donnée par [10],

$$P_{wt\ max} = \frac{2}{3} v_c A_c \Delta P_{tot} \quad (5.7)$$

En utilisant le développement précédent sur le capteur et la tour cheminée, la puissance de la turbine peut être exprimée en fonction du rayonnement solaire est le rendement du capteur,

$$P_{wt\ max} = \frac{2 A_{coll} g H_{sc}}{3 c_p T_0} \eta_{coll} I \quad (5.8)$$

On multipliant $P_{wt\ max}$ par le rendement de la turbine η_{wt} , la puissance électrique produite est donc donnée par [29],

$$P_e = \frac{2 A_{coll} g H_{sc}}{3 c_p T_0} \eta_{wt} \eta_{coll} I \quad (5.8)$$

V.3. Objectif

Le paramètre principal qui gouverne l'écoulement convectif est le nombre de *Rayleigh* qui compare les forces de flottabilité (force d'Archimède) aux forces visqueuses, et il est proportionnel au gradient de température appliqué.

On a tout d'abord étudié l'influence de la variation du nombre de *Rayleigh* sur la puissance développée, en faisant changer les dimensions de la géométrie et en gardant le gradient de température (ΔT) constant. Tableau 5.1

Tableau 5.1: Variation de la puissance en fonction du nombre de Rayleigh.

		P_{tur} (W)	P_{elec} (W)
$Ra = 10^6$		0.4788	0.4070
H_{sc}	4 m		
R_{coll}	2 m		
h_{in}	0.04 m		
$Ra = 10^7$		3.83	3.256
H_{sc}	8 m		
R_{coll}	4 m		
h_{in}	0.08 m		
$Ra = 10^8$		43.63	37.09
H_{sc}	18 m		
R_{coll}	9 m		
h_{in}	0.18 m		
$Ra = 10^9$		3830	3256
H_{sc}	80 m		
R_{coll}	40 m		
h_{in}	0.4 m		
$Ra = 10^{11}$		$0.8667 \cdot 10^5$	$0.4721 \cdot 10^5$
H_{sc}	194.6 m		
R_{coll}	122 m		
h_{in}	1.85 m		

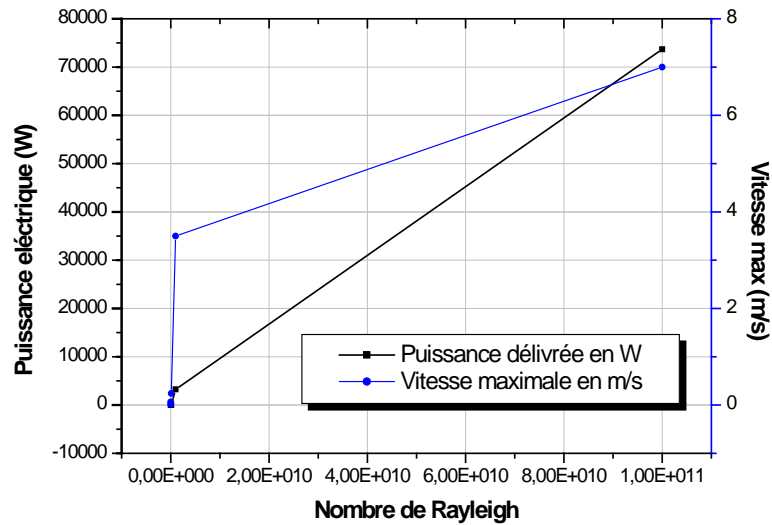


Figure 5.1 : la puissance délivrée en fonction de Ra

Le tableau 5.1, présente l'influence des dimensions de la géométrie sur la puissance délivrée par la cheminée solaire étudié. Les résultats sont traduits en graphe figure 5.1, qui montre l'effet de la hauteur de la cheminée, le diamètre du collecteur et la hauteur de la section d'entrée, traduites par le nombre de Rayleigh. Ceci nous mène à conclure que dans la réalisation d'une cheminée solaire, il faut bien calculer les dimensions afin d'avoir une puissance optimale.

V.4. Validation

En effet, la puissance délivrée par notre calcul appliqué au prototype de Manzanares est de 47.21 KW pour un éclairement de 1000 W/m² et un gradient de température $\Delta T = 20$ K, il se trouve que le prototype installé par J. Schlaich à Manzanares développe une puissance de 50 KW pour le même éclairement et le même gradient de température ΔT [28]. L'écart type entre la puissance calculée est mesurée est de 5.58%, cette différence est dû principalement à l'hypothèse qui considère le régime d'écoulement stationnaire incompressible, d'autre part le type les propriétés thermo-physiques de la couverture transparente utilisée dans le capteur de Manzanares.

Tableau 5.2 : Dimensions et données techniques du prototype de Manzanares [28]

Hauteur de la tour	195.6 m
Rayon de la tour	5.08 m
Rayon moyen du collecteur	122 m
La hauteur du collecteur	1.85 m
Nombre de pales de la turbine	4
Profile de des pales de la turbine	FX W-151-A
Augmentation de température dans le collecteur	$\Delta T = 20$ K
Puissance produite	50 KW
Couverture en plastique	4000 m ²
Couverture en vitrage	6000 m ²

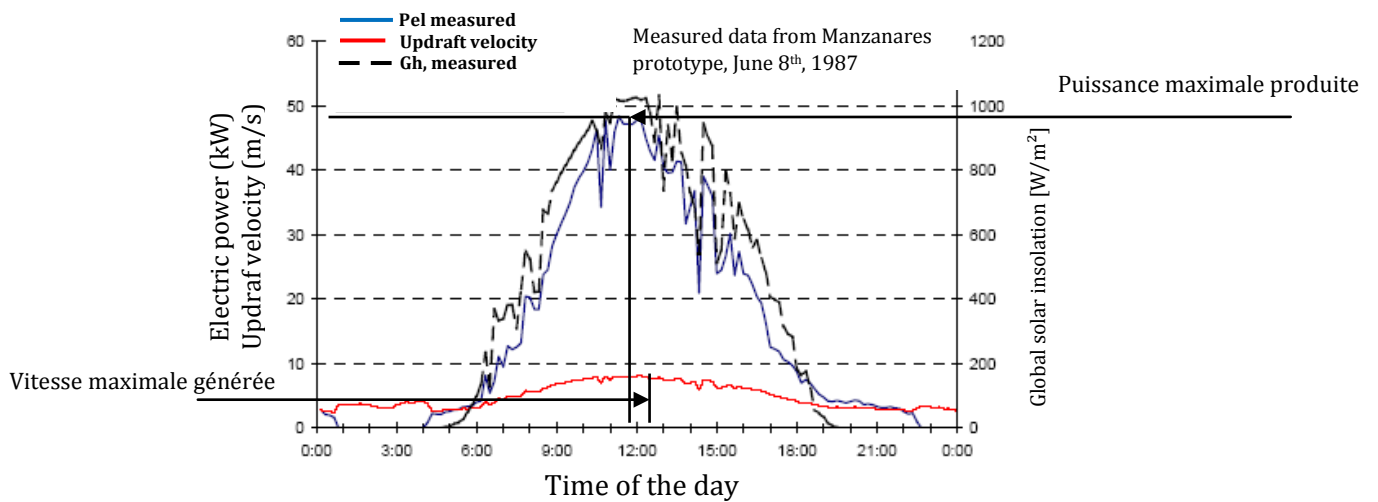


Figure 5.2 : La variation de la puissance et de la vitesse pour une journée type
Concernant le prototype de Manzanares [45]

La figure 5.2, montre la variation de la puissance électrique produite et la vitesse maximale générée par rapport au rayonnement solaire. On remarque que $P_{max} \approx 50 \text{ kW}$ et vitesse maximale et aux alentours de 9m/s.

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

L'énergie solaire est d'un intérêt primordial pour un grand nombre de pays, y compris l'Algérie, disposant d'un très fort ensoleillement, pour laquelle elle peut jouer un rôle majeur dans le futur proche. De plus si l'effort de Recherche et de Développement est poursuivi et encouragé, la part de cette source d'énergie pourrait se révéler encore bien supérieure à long terme.

Depuis un certain nombre d'années, plusieurs prototypes ont vu le jour dans les laboratoires, pour bien comprendre le comportement hydrodynamique et thermique des centrales cheminées solaires, même des installations de grande nature en été réalisé telle la centrale CCS de Manzanares en Espagne. Dans cet axe, notre travail vient pour apporter une contribution aux études de simulation et de modélisation des CCS.

Le travail présenté dans ce manuscrit concerne d'une part, la simulation numérique du régime laminaire dans une cavité ouverte simulée a une cheminée solaire et d'autre part, la modélisation du régime d'écoulement turbulent pour la même géométrie.

Cette étude est d'une grande importance pour comprendre le comportement dynamique et thermique de l'écoulement à travers du CCS. L'étude numérique du régime laminaire nous a permis de comprendre le phénomène physique et le comportement de la CSS vis-à-vis de la nature du régime d'écoulement.

Entre autre, cette étude nous à permis d'analyser la variation du nombre de Ra, et de déterminer sa valeur critique qui caractérise la phase de transition au régime turbulent.

Par ailleurs, la simulation numérique adoptée dans l'étude est précédée par un développement mathématique des Equations de Navier-Stokes en coordonnées généralisées.

Les résultats obtenus par notre code de calcul ont été validés par rapport à ceux obtenus expérimentalement sur le site de Manzanares. Un bon accord a été observé entre les deux.

Il est à souligner que les performances, en termes de puissance d'une cheminée solaire, sont fortement influencées par d'autres paramètres tels :

- les dimensions de la tour, la surface du collecteur, sa hauteur et sa section d'entrée,
- Le rendement du collecteur,
- le rendement de la turbine.

Perspectives

La présente étude offre pour la suite de nombreuses perspectives. L'un des points important, à notre sens, est de développer un code de calcul en régime instationnaire, à 2 et à 3D. Avec prise en compte des transferts thermiques avec le sol et l'environnement de la centrale. Une telle étude est capitale pour une meilleure approche du phénomène physique observé expérimentalement sur site.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Schlaich, The solar chimney: Electricity from the sun. In: Maurer C, editor. Germany: Geislingen; 1995.
2. H. K. Versteeg & Wmalalase, An introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method, LONGMAN, Angland, 1995
3. M. Aurelio dos Bernardes, Numerical analysis of natural laminar convection in a radial solar heater, *Int. J. thermal Sci.* Vol 38, pp. 42-52, 1999.
4. M. A. dos. Bernardes, VOB, G. Weinrebe, Thermal and technical analyses of solar chimneys, *solar Energy* Vol.75, pp. 511-524, 2003.
5. J. Padet, *Principes des transferts convectifs*, Ed. Polytechnique, Paris, 1997.
6. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Ed. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
7. J. Schlaich, *Survey of energy resources*, World Energy Council, 1998.
8. J. Schlaich, *Tension structures for solar electricity generation*.
9. N. B. Safer, *Simulation Numérique d'un jet de fluide compressible*, mémoire de magistère, Université de M'Sila, 2005
10. M. Tingzhen, Liu Wei, Xu Guoling, Xiong Yanbin, Guan Xuhu, Pan Yuan, Numerical simulation of the solar chimney power plant systems coupled with turbine, *Renewable Energy*, 2007.
11. J. Schlaich, *Solar thermal electricity technology*. *Engineering Structures Int.* Vol. 4, pp. 76-81, 1994.
12. W. Haaf, K. Friedrich, G. Mayr, and J. Schlaich, *Solar Chimneys, Part I: Principle and Construction of the Pilot Plant in Manzanares*. *Solar Energy*, Vol. 2, pp. 3-20, 1983.
13. W. Haaf, *Solar towers, Part II: Preliminary Test Results from the Manzanares Pilot Plant*. *Solar Energy*, Vol. 2, pp. 141-161, 1984.
14. L.B. Mullet, *The solar chimney overall efficiency, design and performance*. *Int. J. Ambient Energy*, Vol. 8, pp. 35–40, 1987.
15. M.M. Padki, and S.A. Sherif, *Solar chimneys for medium-to-large scale power generation*, *Proc. Manila Int. Symp. on the Development and Management of Energy Resources*, Manila, Philippines, Vol. 1, pp. 432-437, 1989.

16. J. Schlaich, W. Schiel, K. Friedrich, Abschlussbericht Aufwindkraftwerk: Übertragbarkeit der Ergebnisse von Manzanares auf größere Anlagen. BMFT-Foerderkennzeichen 03242490. Schlaich Bergermann und Partner, 1990.
17. M.Q. Yan, S.A. Sherif, G.T. Kridli, S.S. Lee. and M.M. Padki, Thermo-fluid analysis of solar chimneys. *Industrial Applications of Fluid Mechanics-1991*, ASME, New York, Vol. 132, pp. 125-130, 1991.
18. M.M. Padki and S.A. Sherif, A mathematical model for solar chimneys, *Proc. 1992 Int. Renewable Energy Conf.*, M. S. Audi (Ed.), University of Jordan, Faculty of Engineering and Technology, Amman, Jordan, Vol. 1, pp. 289-294, 1992.
19. N. Pasumarthi, S.A. Sherif, Experimental and Theoretical Performance of a Demonstration Solar Chimney Model –Part I: Mathematical Model Development. *Int. J. Energy Res.*, Vol. 22, pp. 277-288, 1998.
20. N. Pasumarthi, S.A. Sherif, Experimental and Theoretical Performance of a Demonstration Solar Chimney Model –Part II: Experimental and theoretical results and economic analysis, *Int. J. Energy Res.*, Vol. 22, pp. 443-461, 1998.
21. Kreetz, H., Theoretische Untersuchungen und Auslegung eines tempor, Diplomarbeit TU Berlin, Berlin, 1997.
22. M.M. Padki, S.A. Sherif, On a Simple Analytical Model for Solar Chimneys, *Int. J. Energy Researche*, Vol. 23, pp. 345-349, 1999.
23. H. Pastohr, O. Kornadt, K. Gürlebeck, Numerical and analytical calculations of the temperature and flow field in the upwind power plant, *Int. J. Energy Researche*. Vol. 28, pp. 495–510, 2004.
24. A.J. Gannon, T.W. Von Backström, Solar chimney cycle analysis with system loss and solar collector performance, *Journal of Solar Energy Engineering*, ASME, Vol. 122, pp. 133–137, 2000.
25. T. W. Von Backström, A.J. Gannon, Compressible flow through solar power plant chimneys, ASME, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 122, pp. 138–145, 2000.
26. D. G. Kröger, J.D. Buys, Performance evaluation of a solar chimney power plant, *Solar World Congress ISES 2001*, Adelaide, 2001.
27. T.W. Von Backström, C.F. Kirstein, L.A. Pillay, The Influence of some secondary effects on solar chimney power plant performance, In: *ISES 2003 Solar World Congress*, Sweden, 2003.
28. J. Schlaich, R. Bergermann, W. Schiel, G. Weinrebe, Design of commercial solar tower systems – utilization of solar induced convective flows for power generation, In: *Proceedings of the International Solar Energy Conference*, Kohala Coast, United States, pp. 573–581, 2003.
29. Y. J. Dai, H.B. Huang, R. Z. Wang, Case study of Solar Chimney Power Plants in Northwestern Regions of China, *Renewable Energy* Vol. 28, pp. 1295-1304, 2003.
30. T.W. Von Backström, A.J. Gannon, Solar Chimney Turbine Characteristics, *Solar Energy* Vol. 76, pp. 235-241, 2004.
31. J.P. Pretorius, D. G. Kröger, J.D. Buys, T.W. Von Backström, Solar tower power plant performance characteristics, In: *Proceedings of the ISES EuroSun2004*, International Sonnenforum 1, Freiburg, Germany, pp. 870–879, 2004.
32. J. P. Pretorius, D.G. Kröger, Critical evaluation of solar chimney power plant performance, *Solar Energy* Vol. 80, pp. 535–544. 2006.

33. T. W. Von Backström, T. P. Fluri, Maximum fluid power condition in solar chimney power plants – An analytical approach, *Solar Energy* Vol. 80, pp. 535-544, 2006.
34. F. Denantes, E. Bilgen, Counter-rotating turbines for solar chimney power plants, *Renewable Energy* Vol. 31, pp. 1873-1891, 2006.
35. R. Eymard, T. Galouet and R. Herbin, Finite Volume Methode, publication, 97-19 LATP, UMR 6632, Handbook of Numerical Analysis, Edition: P. G. Ciarlet, J. L. Lion, Marseille, 1997.
36. Maurizio Quadrio, Paolo Luchini, Direct numerical simulation of the turbulent flow in a pipe with annular cross section, *European Journal of Mechanics Fluids* Vol. 21, pp. 413–427, 2002.
37. R. Ben-mansour, M.A. Habib, H.M. badr, and S. Anwar, Comparison of different turbulence models and flow boundary conditions in predicting turbulent natural convection in a vertical channel with isoflux plates.
38. D. Jiroveanny, Analyse théorique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente, thèse Doctorat, Université de Grenoble 1992.
39. C. Philip and P. R. Woodward, The piecewise parabolic method (PPM) gaz dynamical simulations, *journal of computational physics* Vol. 54, pp. 174.201, 1984.
40. A. Smirnov, Hedra: A Control-Volume Finite-Element PDE Solver, West Virginia University Edition, November 3, 2001.
41. N. Doudi, Simulation numérique des écoulements dans une cavité ouverte curviligne, mémoire de magistère, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université d'Ouargla, 2006.
42. M. Si Ameur, turbulent structures in a slightly compressible mixing flow, Thèse de doctorat d'Etat, Université de Batna. Batna-Algérie. 2000.
43. D. Knight and H. Yan, Large eddy simulation of compressible turbulent flows, proceeding of the CIMNE, Barcelona Spain 2002.
44. C. Jayatilleke, The Influence of prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer, *Prog Heat Mass Transfer* Vol. 1, pp. 193–321, 1969.
45. J. Schlaich. R. Bergermann, W. Schiel, G. Weinrebe, Design of Commercial Solar Updraft Tower Systems—Utilization of Solar Induced Convective Flows for Power Generation, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 127, pp 117-124, February 2005.

Annexe A

A.1. Hypothèse de Boussinesq

Après qu'il fût établi expérimentalement que les contraintes turbulentes augmentaient avec l'augmentation moyenne des éléments du fluide, Boussinesq proposa une relation entre les contraintes de Reynolds et le taux de déformation, qui a été étendue par la suite :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho K + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \delta_{ij}$$

k : Étant l'énergie cinétique associée à la turbulence.

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ (Delta le Kronecker)}$$

μ_t : est la viscosité dynamique turbulente

Notons que dans l'hypothèse de Boussinesq μ_t est un scalaire isotrope, ce qui n'est pas tout à fait vrai.

Alors, les modèles de turbulence conduisent à l'adoption d'équations de transport des quantités de la turbulence, (k, ε, ω et $\tilde{\nu}$), pour résoudre la viscosité turbulente.

- ❑ Modèle de turbulence à une équation de transport : le modèle *Spalart-Allmaras*.
- ❑ Modèle de turbulence à deux équations de transport : les modèles $k - \varepsilon$ standard et ses variantes *RNG et Realizable* puis les modèles $k - \omega$ standard et $k - \omega SST$.
- ❑ Modèle de turbulence à cinq (05) équations de transport (sept (07) équations en 3D): le modèle RSM (Reynolds Stress Model).

Cette approximation considère que l'écoulement est incompressible dans tout le système, excepté pour le terme des forces de flottabilité dans le flux vertical. Pour déterminer l'expression mathématique de la force flottabilité, nous utilisons l'expression donnant la densité :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$$

Où ρ_0 est la densité de fluide à la température T_0

Avec $p = p' + p_0$.

A.2. MODELISATION D'UN ECOULEMENT CURVILIGNE

A.2.1. Système de coordonnées

A.2.1.1. Matrice de passage

Désignons par $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ notre système de coordonnées curvilignes de la base covariante $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, et par (ξ^1, ξ^2, ξ^3) un autre système de coordonnées curvilignes de la base covariante $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la transformation de système ζ^i au système ξ^i est caractérisée par la matrice de passage de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, dont les composantes sont :

$$\alpha_i^m = \frac{\partial \zeta^m}{\partial \xi^i}$$

Les composantes covariantes $(g_{ij})_\xi$ du tenseur métrique dans le système ξ^i s'obtiennent à partir des composantes covariantes $(g_{mn})_\zeta$ du tenseur métrique dans le système ζ^i par la formule :

$$(g_{ij})_\xi = \alpha_i^m \alpha_j^n (g_{mn})_\zeta$$

Cette équation traduit l'invariance de la norme d'un vecteur quelconque par rapport au choix du système de coordonnées. Sachant que la longueur d'un élément de vecteur \vec{dp} , s'écrit :

$$\begin{aligned} |\vec{dp}| &= dS^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial \zeta^n} d\zeta^n \right) \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial \zeta^m} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial \zeta^n} \right) d\zeta^m d\zeta^n \\ |\vec{dp}| &= d\zeta^m d\zeta^n (g_{mn})_\zeta \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur métrique $(g_{mn})_\zeta$ sont données par :

$$(g_{mn})_\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons que le système cylindrique ζ est un système orthogonal, alors toutes les $(g_{mn})_\zeta$ où $m \neq n$ sont nulles, ainsi les composantes $(g_{ij})_\xi$ s'écrivent, compte tenue de la symétrie de révolution $\frac{\partial(\dots)}{\partial \xi^2} = 0$ sous la forme :

$$(g_{mn})_\zeta = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\begin{cases} g_{11} = (r_{\xi^1})^2 + (y_{\xi^1})^2 \\ g_{13} = r_{\xi^1} r_{\xi^3} + y r_{\xi^3} \\ g_{22} = r^2 \\ g_{31} = g_{13} \\ g_{33} = (r_{\xi^3})^2 + (y_{\xi^3})^2 \end{cases}$$

Les composantes covariantes du tenseur métrique $(g^{ij})_{\xi}$ se déduisent des composantes covariantes $(g_{ij})_{\xi}$ par la relation :

$$g_{im} g^{mj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On peut écrire cette relation sous une forme matricielle :

$$g^{ij} = g^{ji} = \frac{\text{cof}(g^{ij})}{|g_{pq}|} = \frac{\text{cof}(g_{ij})}{g}$$

A.2.1.2. Opérateurs usuels dans un repère curviligne

Avant d'écrire les équations dans un système de coordonnées curvilignes, il faut donner les expressions de tous les opérateurs utilisés en coordonnées curvilignes.

A.2.1.3. Dérivée covariante ou gradient d'une fonction scalaire

Considérons une fonction scalaire $\phi(M)$, la variation de ϕ due à la variation de $\partial \vec{M} = \delta \xi^i \vec{e}_i$ peut s'écrire :

$$\phi(M + \delta M) - \phi M = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^i} d\xi^i = \delta \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

Où le vecteur $\vec{\nabla} \phi$ définis par ses composantes est appelé le gradient de ϕ :

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^i} d\vec{e}^i = \nabla_i \phi \vec{e}^i \quad \text{a.1}$$

L'opérateur ∇_i appliqué à un scalaire représente la dérivation partielle par rapport à $\xi^i : \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi^i}$

a- Divergence de V

Aux termes de calcul tensoriel, la variation de \vec{V} est obtenue par la contraction du tenseur $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$, on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \nabla_k V^k = \frac{\partial V^k}{\partial \xi^k} + \Gamma_{kl}^k V^l \quad \text{a.2}$$

Or on peut montrer que l'opérateur de contraction de l'indice haut avec l'un des indices bas appliquée au symbole de Christoffel donne :

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^k}$$

L'équation (a. 2) devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V^k}{\partial \xi^k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^k} V^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} V^k)}{\partial \xi^k} \quad \text{a.3}$$

b- Rotationnel de V

En désignant par Ω le rotationnel de V :

$$\Omega = \nabla \times V$$

En calcul tensoriel, le vecteur rotationnel Ω est appelé vecteur adjoint V obtenu par le produit contracté du tenseur de Levy-chivita η avec le tenseur $\nabla \times V$

$$\Omega = \eta(V \cdot \nabla)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \Omega^k &= \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)^{ijk} [\nabla_i V_j - \nabla_j V_i] = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)^{ijk} \left[\frac{\partial V_j}{\partial \xi^i} - \Gamma_{ij}^l V_l - \frac{\partial V_i}{\partial \xi^j} - \Gamma_{ij}^l V_l \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)^{ijk} \left[\frac{\partial V_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial V_i}{\partial \xi^j} \right] \end{aligned} \quad \text{a.4}$$

Il faut noter que $\Gamma_{lm}^j g^{il} - \Gamma_{lm}^i g^{jl}$ n'est pas nul en générale.

c- Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs peut s'écrire de façon différente à l'aide de leurs composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{V} &= U_i \vec{e}^i \cdot V^j \vec{e}_j = U_i \cdot V^j \\ &= U^i \vec{e}_i \cdot V_j \vec{e}^j = U^i \cdot V_j \\ &= U_i \vec{e}^i \cdot V_j \vec{e}^j = U_i \cdot V_j g^{ij} \\ &= U^i \vec{e}_i V^j \vec{e}_j = U^i V^j g_{ij} \end{aligned} \quad \text{a.5}$$

Rappelons que :

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}, \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = g^{ij}$$

Transformation de terme $div(\rho \Phi \vec{V})$

On applique la relation (a. 3) sur $\rho \Phi \vec{V}$, on obtient :

$$div(\rho \Phi \vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \rho \Phi V^k)}{\partial \xi^k} \quad \text{a.6}$$

Transformation de terme $div(\Gamma^\Phi \overrightarrow{grad} \Phi)$

On a :

$$div(\Gamma^\Phi \overrightarrow{grad} \Phi) = \overrightarrow{grad}(\Gamma^\Phi) \overrightarrow{grad}(\Phi) + \Gamma^\Phi \Delta \Phi \quad \text{a.7}$$

Pour calculer $\Delta \vec{V}$, on utilise la relation vectorielle suivante :

$$\Delta \vec{V} = -\nabla_x(\nabla_x \vec{V}) + \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \quad \text{a.8}$$

D'après la relation de $rot \vec{V}$ et de $(\nabla \cdot \vec{V})$, en déduit que :

$$\Delta \vec{V} = \left\{ g^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\partial(\sqrt{g} V^l)}{\partial \xi^l} \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial V_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial V_i}{\partial \xi^j} \right) g_{kk} \right\} - \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi^k} - \frac{\partial V_k}{\partial \xi^i} \right) g_{jj} \right\} \right] \right\} \vec{e}_i \quad \text{a.9}$$

Convenons que si i représente 1, 2 ou 3, alors j représente 2, 3 ou 1 et k représente 3, 1 ou 2.

A.2.1.4. Composantes de la vitesse dans l'espace physique

On suppose que (u_r, u_θ, u_y) sont les coordonnées de la vitesse dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_y$, alors :

$$u_r^2 = u_r \vec{u}_r u_r \vec{u}_r = V^1 \vec{e}_1 \cdot V_1 \vec{e}^1 = V^1 V_1 = V^1 V^1 g_{11} = V_1 V_1 g_{11} = (V^1)^2 \quad \text{a.10}$$

$$u_\theta^2 = u_\theta \vec{u}_\theta u_\theta \vec{u}_\theta = V^2 \vec{e}_2 \cdot V_2 \vec{e}^2 = V^2 V_2 = V^2 V^2 g_{22} = V_2 V_2 g_{22} = (V^2)^2 r^2 = \frac{(V^2)^2}{r^2} \quad \text{a.11}$$

Alors $u_r = V^1, u_\theta = V^2 r$, et de même $u_y = V^3 = V_3$

Et on peut trouver aussi $\vec{e}_r = \vec{e}_1, \vec{e}_\theta = \vec{e}_2$ et $\vec{e}_y = \vec{e}_3$

$$\overrightarrow{grad}(\Gamma^\Phi) \overrightarrow{grad} \phi = \overrightarrow{grad} \left(\frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial \xi^i} \vec{e}^i \right) \frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial \xi^i} \vec{e}^i = g^{ij} \frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial \xi^i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \quad \text{a.12}$$

Nous substituons g^{ij} d'après l'expression de la matrice de tenseur métrique dans l'équation précédent, on obtient :

$$\overrightarrow{grad}(\Gamma^\Phi) \overrightarrow{grad} \phi = \frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Gamma^\Phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{a.13}$$

Pour calculer le terme $div(\Gamma^\Phi \overrightarrow{grad} \phi)$, on utilise les relations (a.9) et (2.10), alors :

- suivant la direction \vec{e}_r , nous avons :

$$\begin{aligned} div(\mu \overrightarrow{grad} u_1) &= \overrightarrow{grad} \mu \overrightarrow{grad} u_1 + \mu \Delta \vec{V} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu r \partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu \partial u_1}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu \partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\mu u_1}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \text{a.14}$$

- suivant la direction \vec{e}_θ , nous avons :

$$\begin{aligned} div(\mu \overrightarrow{grad} u_2) &= \overrightarrow{grad} \mu \overrightarrow{grad} u_2 + \mu \Delta \vec{V} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu r \partial u_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu \partial u_2}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu \partial u_2}{\partial y} \right) - \frac{\mu u_2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \text{a.15}$$

- suivant la direction \vec{e}_y , nous avons :

$$\begin{aligned} div(\Gamma^\Phi \overrightarrow{grad} u_3) &= \overrightarrow{grad} \mu \overrightarrow{grad} u_3 + \mu \Delta \vec{V} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu r \partial u_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu \partial u_3}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad \text{a.16}$$

Alors l'équation générale de la transformation en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_1\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_2\phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_3\phi)}{\partial y} = P^\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma^\phi \frac{r\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma^\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + S^\phi \quad \text{a.17}$$

Le tableau présenté dans le *chapitre 3* illustre les expressions $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi, S^\phi$ selon l'équation considérée.

Tableau a.1 : valeurs de $\phi, \Gamma^\phi, P^\phi, S^\phi$ pour l'équation de transport en coordonnées cylindriques

Equation de	ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité e mouvement suivant r	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial r}$	$-\frac{2\mu u_1}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}$
Quantité e mouvement suivant θ	u_2	μ	$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$	$-\frac{2\mu u_2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}$
Quantité e mouvement suivant y	u_3	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	$-\rho_0 g$
Energie	T	$\frac{k}{C_p}$	0	0

ANNEXE B

B. Discrétisation des équations**B.1. Discrétisation du schéma volume finis**

L'équation générale de transport :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r\rho\phi U^1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r\rho\phi U^2) \\ = P^\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Jr\rho\Gamma^\phi \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - Jr\rho\Gamma^\phi \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Jr\rho\Gamma^\phi \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - Jr\rho\Gamma^\phi \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + S^\phi \end{aligned} \quad (\text{b.1})$$

Si on cherche à discrétiser les équations sur deux dimensions avec la méthode des volumes finis, on subdivise le domaine d'étude par des cellules dite mailles.

L'opérateur de Laplace Δ , peut être représenté comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta p = \nabla \cdot \nabla p = \frac{\partial^2 p}{(\partial \xi^i)^2} = (p_{,i})_{,i} \\ \Delta p = p_{,ii} \end{aligned} \quad (\text{b.2})$$

Le théorème de Gauss-Ostrogradsky pour une fonction ϕ et $\widehat{K}_{ij} \in \mathcal{Y}$ avec \mathcal{Y} le maillage, donne :

$$\int_{\widehat{K}_{ij}} \nabla \phi d\xi = \int_{\partial \widehat{K}_{ij}} \phi n_{\widehat{K}_{ij}} d\zeta(\xi) = \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \int_{\partial \widehat{K}_{ij}} \phi(\xi) n_{\widehat{K}_{ij},\sigma} d\zeta(\xi) \quad (\text{b.3})$$

Où :

$d\zeta$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial \widehat{K}_{ij}$.

$\varepsilon_{\widehat{K}_{ij}}$ l'ensemble des sommets inclus dans $\partial \widehat{K}_{ij}$

Pour $\sigma \in \partial \widehat{K}_{ij}$, $n_{\widehat{K}_{ij},\sigma}$ le vecteur normal sur σ dirigé vers l'extérieur de \widehat{K}_{ij} . De même on trouve que (Smirnov [42]).

B.2. Discrétisation du terme de convection

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r\rho\phi U^1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r\rho\phi U^2) \quad (\text{b.5})$$

On fait l'intégration de terme (b.5), après la multiplication de l'équation (3.1) par r , sur un volume de contrôle quelconque représenté par \widehat{K}_{ij} .

Par l'application du théorème de Gauss-Ostrogradsky, on obtient :

$$\int_{\widehat{K}_{ij}} \left(\frac{\partial(r\rho\phi U^1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(r\rho\phi U^2)}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_s^n ([r\rho\phi U^1]_w^e) d\eta + \int_w^e ([r\rho\phi U^2]_s^n) d\xi \\
 &= ([r\rho\phi U^1]_e - [r\rho\phi U^1]_w) \Delta\eta + ([r\rho\phi U^2]_s - [r\rho\phi U^2]_n) \Delta\xi \\
 &= \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s
 \end{aligned} \tag{b.6}$$

Dont $\dot{M}_{e,w,s,n}$ sont données dans le chapitre 3.

B.3. Discrétisation du terme de diffusion

Le terme de diffusion est représenté par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Jr\rho\Gamma\phi\alpha \frac{\partial\phi}{\partial\xi} - Jr\rho\Gamma\phi\beta \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Jr\rho\Gamma\phi\alpha \frac{\partial\phi}{\partial\eta} - Jr\rho\Gamma\phi\beta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) \tag{b.7}$$

On intègre (b. 7) sur un volume de contrôle. Commençons par la première partie :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\hat{K}_{ij}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(rJ\Gamma\phi\alpha \frac{\partial\phi}{\partial\xi} - rJ\Gamma\phi\beta \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) d\xi d\eta \\
 &= \int_{\hat{K}_{ij}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left([rJ\Gamma\phi\alpha \frac{\partial\phi}{\partial\xi}]_w^e - [rJ\Gamma\phi\beta \frac{\partial\phi}{\partial\eta}]_w^e \right) d\eta \\
 &= \left\{ (rJ\Gamma\phi\alpha)_e \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right)_e - (rJ\Gamma\phi\alpha)_w \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right)_w - (rJ\Gamma\phi\beta)_e \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_e + (rJ\Gamma\phi\beta)_w \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_w \right\} \Delta\eta
 \end{aligned} \tag{b.8}$$

La deuxième partie :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\hat{K}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(rJ\Gamma\phi\gamma \frac{\partial\phi}{\partial\eta} - rJ\Gamma\phi\beta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) d\xi d\eta \\
 &= \left\{ (rJ\Gamma\phi\gamma)_e \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_e - (rJ\Gamma\phi\gamma)_w \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_w - (rJ\Gamma\phi\beta)_e \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right)_e + (rJ\Gamma\phi\beta)_w \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right)_w \right\} \Delta\xi
 \end{aligned} \tag{b.9}$$

Terme source

Au même titre que le terme de convection, le terme source est calculé par différence centré de second ordre :

$$\int_{\hat{K}_{ij}} (S^\phi + P^\phi) d\xi d\eta \tag{b.10}$$

Suivant la direction ξ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{K}_{ij}} \left[\left(y_\eta \frac{\partial p}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\mu u}{Jr} \right] d\xi d\eta \\
& \int_s^n ([y_\eta p]_e - [y_\eta p]_w) d\eta - \int_s^n ([y_\xi p]_e - [y_\xi p]_w) d\xi - 2 \left(\frac{\mu u}{Jr} \right) \Delta \xi \Delta \eta \\
& = y_\eta (p_e - p_w) \Delta \eta^2 - y_\eta (p_n - p_s) \Delta \xi^2 - 2 \left(\frac{\mu u}{Jr} \right) \Delta \xi \Delta \eta \\
& = \left[\frac{y_\eta (p_e - p_w)}{\Delta \xi} - \frac{y_\xi (p_n - p_s)}{\Delta \eta} - 2 \left(\frac{\mu u}{Jr} \right) \right] \Delta \xi \Delta \eta
\end{aligned} \tag{b.11}$$

Suivant la direction η :

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{K}_{ij}} \left[\left(r_\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - r_\eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{g \rho_0 \beta (T - T_0)}{J} \right] d\xi d\eta \\
& = \left[\frac{r_\xi (p_e - p_w)}{\Delta \eta} - \frac{r_\eta (p_n - p_s)}{\Delta \xi} + \frac{g \rho_0 \beta (T - T_0)}{J} \right] \Delta \xi \Delta \eta
\end{aligned} \tag{b.12}$$

On peut trouver :

$$\begin{aligned}
p_e - p_w &= \frac{p_E - p_W}{2} \\
p_n - p_s &= \frac{p_N - p_S}{2}
\end{aligned} \tag{b.13}$$

Pour estimer les valeurs de ϕ et ses dérivées sur les faces de volumes de contrôles, nous utilisons les définitions suivantes : [3]

$$\phi_e = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) \phi_E \tag{b.14}$$

$$\phi_w = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) \phi_W + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right) \phi_P \tag{b.15}$$

$$\phi_n = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) \phi_N \tag{b.16}$$

$$\phi_s = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) \phi_S + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right) \phi_P \tag{b.17}$$

Les dérivées de ϕ résultants du terme du flux diffusif sont données par :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \bar{\beta}_e \frac{\phi_e - \phi_P}{\Delta \xi} \tag{b.18}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta \xi} \tag{b.19}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n = \bar{\beta}_n \frac{\phi_n - \phi_P}{\Delta \eta} \quad (\text{b.20})$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s = \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_s}{\Delta \eta} \quad (\text{b.21})$$

Les autres dérivées de ϕ sont calculées par la différence finie comme suit :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \frac{\phi_{NE} + \phi_N - \phi_{SE} - \phi_S}{4\Delta \eta} \quad (\text{b.22})$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \frac{\phi_{NW} + \phi_N - \phi_{SW} - \phi_S}{4\Delta \eta} \quad (\text{b.23})$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\phi_{NE} - \phi_E - \phi_{NW} - \phi_S}{4\Delta \xi} \quad (\text{b.24})$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\phi_E + \phi_{SE} - \phi_S - \phi_{SW}}{4\Delta \xi} \quad (\text{b.25})$$