

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie mécanique

Thème :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE REDUCTEUR A ENGRENAGES. INFLUENCE DES ECARTS DE FORME.

Proposé et dirigé par :

Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI

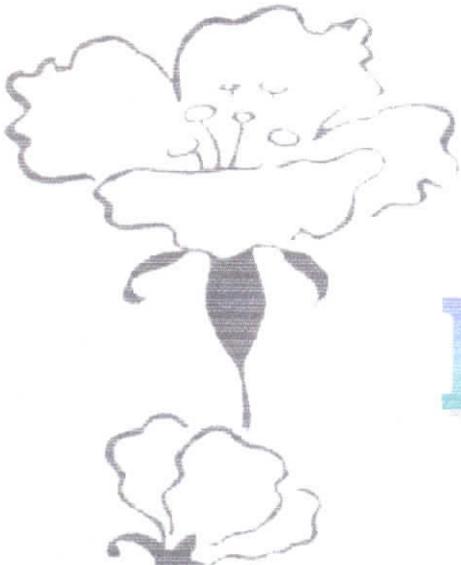
Etudié par :

MECHEKOUR El-Haddi

PROMOTION

- Juin 2002 -

E.N.P 10, Avenue Pasteur, El-Harrach, Alger



Dédicace

Je dédie ce travail à
mes parents
à qui je dois énormément
et que je ne remercierai
jamais assez,
à mes frères et ma sœur
et à tous mes amis.

MECHEKOUR EL-HADDI

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.

Au début de ce mémoire, j'exprime ma profonde gratitude envers tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à ma formation et aux résultats aux quels nous sommes parvenus.

Je tiens à remercier mes promoteurs Monsieur H.BELHANECHÉ et Monsieur S.LARBI, pour leurs encouragements, leurs suivis et pour tous les conseils qu'ils m'ont apportés tous le long de mon travail pour réaliser ce projet. Ainsi que Monsieur le professeur S.RECHAK qui m'a conseillé et apporté son aide à chaque fois que j'on avais besoin.

Je tiens également à remercier messieurs les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.

Mes remerciements vont également à mes collègues et amis de la promotion.

تهدف دراستنا هذه الى انجاز برنامج عددي، يسمح بدراسة السلوك الديناميكي لمخفض السرعات ذات التسنينات الأسطوانية ذي الأسنان المستقيمة أو الحلزونية. هذا البرنامج يسمح الأخذ بعين الاعتبار المقاييس المؤثرة على التوظيف، مثل العيوب الهندسية. النتائج المحصل عليها تسمح بدراسة تأثير عيوب الشكل على الجهد الديناميكي المطبق على التلامس الهرتزي، و ذلك بإستعمال النموذج كتلة – نابض.

كلمات الرئيسية : سلوك ديناميكي، مخفض، تسنينات، عيوب الشكل، جهد ديناميكي، خطأ في النقل، صلابة التسنن، نموذجة

Résumé

L'objet de ce travail est l'élaboration d'un code de calcul, qui permet d'étudier le comportement dynamique de réducteur à engrenages cylindriques, à dentures droites ou hélicoïdales. Ce logiciel permet de tenir compte des paramètres qui influent sur le fonctionnement, tels que les erreurs géométriques.

Les résultats obtenus ont permis d'étudier l'influence des défauts de forme sur l'effort dynamique appliqué sur le contact Hertzien, en utilisant le modèle masse – ressort.

Mots-clés : comportement dynamique, réducteur, engrenages, écarts de forme, effort dynamique, erreur de transmission, raideur d'engrènement, modélisation.

Abstract

The object of this work is the development of a computer code, which makes it possible to study the dynamic behavior of cylindrical gear reducer with right or helicoid teeth. This software allows taking account of the parameters, which influence operation, such as the geometrical errors.

The results obtained have allowed of studying the influence of the defects of form on the dynamic stress applied to the Hertzien contact, by using the model mass – spring.

Keywords: dynamic behavior, reducer, gears, variations of form, dynamic stress, error of transmission, stiffness of engaging, modeling.

Tables des matières

Tables des matières	
Nomenclature	
Introduction Générale	2
Chapitre I Etude bibliographique	
I. 1. Introduction	6
I. 2. Approches expérimentales	6
I. 2. 1. Approche mécanique de la flexion de la dent	6
I. 2. 2. Approche optique	7
I. 3. Approches analytiques	8
I. 4. Approches numériques	8
I. 5. Conclusion	9
Chapitre II Ecart de forme	
II. 1. Introduction	11
II. 2. Discrétisation des surfaces d'attaque	11
II. 3. Conclusion	14
Chapitre III Etude cinématique	
III. 1. Introduction	16
III. 2. Hypothèses générales	16
III. 3. Cinématique des corps rigides avec écarts de forme	16
Chapitre IV Raideur d'engrènement	
IV. 1. Introduction	22
IV. 2. Raideur de liaison	22
IV. 3. Influence du film lubrifiant	22
IV. 4. Méthode de discrétisation	24
IV. 5. Conclusion	26

Chapitre V Modélisation masses – ressorts du réducteur

V. 1. Introduction	28
V. 2. Erreur de transmission	29
V. 3. Equations du mouvement	31
V. 3. 1. Calcul des énergies cinétique et de déformation	31
V. 3. 2. Amortissement	35
V. 3. 3. Utilisations des équations de Lagrange	36
V. 4. Conclusion	38

Chapitre VI Présentation du logiciel

VI. 1. Introduction	40
VI. 2. Description	40

Chapitre VII Analyse des résultats

VII. 1. Introduction	44
VII. 2. Données géométriques du réducteur	44
VII. 3. Analyse des résultats sans erreurs géométriques	46
VII. 3. 1. Raideur d'engrènement	46
VII. 3. 2. Etude analytique	47
VII. 3. 3. Analyse des résultats numériques	48
VII. 4. Analyse des résultats avec erreurs géométriques	54
VII. 4. 1. Introduction	54
VII. 4. 2. Etude analytique	55
VII. 4. 3. Analyse des résultats numériques	57
VII. 5. Conclusion	61

Conclusion générale

Bibliographie

Annexes

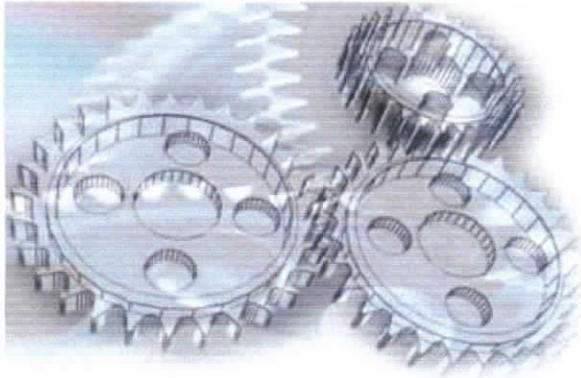
Annexe I	Paramètres géométriques des engrenages cylindriques à profils en développante de cercle
Annexe II	Résolution pas à pas, schéma implicite H.H.T.
Annexe III	Méthode des perturbations

Nomenclature

- $b_{1,2}$: largeurs du pignon et de la roue (mm)
 $[C]$: matrice amortissement (kg/s)
 C_e : couple d'entrée (N.mm)
 C_s : couple de sortie (N.mm)
 $C_{\phi i}$: amortissement modal (kg/s)
 D : fonction de dissipation due au travail des forces visqueuses
 $E_{1,2}(i,j)$: erreur géométrique relative au pignon et à la roue (μm)
 E_{12} : erreur géométrique totale relative au pignon et à la roue (μm)
 $E_{\acute{e}q}$: module d'élasticité équivalent $\frac{1}{E_{\acute{e}q}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$
 $E_{r,1,2}$: erreur dans le plan d'action (μm)
 $\{F\}$: vecteur des forces extérieures (N)
 $F_d(t)$: effort dynamique instantané (N)
 F_s : effort statique (N)
 $G_{1,2}$: module de cisaillement des matériaux constituant le pignon et la roue
 G^* : paramètre du matériau = $\alpha E_{\acute{e}q}$
 h : épaisseur du film lubrifiant (μm)
 H_m^* : paramètre d'épaisseur du film = $\frac{h}{R_x}$
 I : point primitif
 $I_{1,2}$: inerties de masse par unité de longueur des arbres moteur et récepteur (kg.mm)
 $I_{e1,2}$: moments d'inertie du pignon et de la roue (kg.mm²)
 I_m, I_f : inertie de masse du moteur et du frein (charge résistante) (kg.mm²)
 $J_{1,2}$: inerties polaires des arbres moteur et récepteur (kg.mm²)
 $[K]$: matrice raideur (N/mm)
 $k(t)$: raideur d'engrènement (N/mm)
 $K(i,j)$: raideur élémentaire (N/mm)

- k_L : raideur du film lubrifiant (N/mm)
 k_m : raideur moyenne (N/mm)
 k_{max} : raideur maximale (N/mm)
 k_{ϕ_i} : raideur modale (N/mm)
 $L_{1,2}$: longueurs de l'arbre moteur et récepteur (mm)
 $[M]$: matrice masse (kg)
 $m_{1,2}$: masses du pignon et de la roue (kg)
 m_{no} : module normal (mm)
 m_{to} : module apparent (mm)
 m_{ϕ_i} : masse modale (kg)
 $\vec{n}_{1,2}$: normales extérieures aux profils en contact
 P_b : pas de bas (mm)
 P_{bn} : pas de base réel (mm)
 P_{bt} : pas de base apparent (mm)
 P_x : pas axial (mm)
 q_i : coordonnées généralisées du système
 R : rapport de l'effort dynamique maximal sur l'effort statique
 $r(t)$: rapport de l'effort dynamique instantané sur l'effort statique
 $R_{1,2}$: rayons de l'arbre moteur et de l'arbre récepteur (mm)
 $R_{b1,2}$: rayons de base du pignon et de la roue (mm)
 $R_{a1,2}$: rayons de tête du pignon et de la roue (mm)
 R_x : rayon de courbure au point de contact (mm)
 T : énergie cinétique ($kg \cdot mm^2/s^2$)
 $T_{1,2}$: intersection de la ligne d'action avec les cylindres de base du pignon et de la roue
 $T'_{1,2}$: point de début et fin d'engrènement
 T_m : période d'engrènement (Hz)
 U : énergie de déformation (énergie potentielle)
 $u_{1,2}$: vitesses tangentielles des deux surfaces S_1 et S_2 (mm/s)
 U^* : paramètre de vitesse $= \frac{\mu_0(U_1+U_2)}{E_{\text{eq}}R_x}$
 W : travail virtuel des forces extérieures généralisées
 W^* : paramètre de charge normale $= \frac{W}{E_{\text{eq}}R_xL}$

$\{X\}$: vecteur déplacement (mm)
$\{X_{st}\}$: vecteur déplacement statique (mm)
$Z_{1,2}$: nombre de dents du pignon et de la roue
$Zo(t)$: erreur géométrique suivant le profil de la denture (μm)
$\dot{\cdot}, \ddot{\cdot}$: dérivée première et seconde par rapport au temps
α	: coefficient de piézoviscosité $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$
α_0	: angle de pression de taillage (degré)
α_n	: angle de pression normal (degré)
α_t	: angle de pression apparent (degré)
β_0	: angle d'hélice de taillage (degré)
β_b	: angle d'hélice de base (degré)
$\Delta(i,j)$: erreur de transmission (mm)
ε	: facteur d'amortissement
ε_t	: rapport de conduite total
ε_α	: rapport de conduite
ε_β	: rapport de recouvrement
$\{\phi_i\}$: vecteurs propres (modes propres)
$\phi(t)$: fonction représentant les variations de la raideur d'engrènement
μ_0	: viscosité à pression relative nulle de l'huile (kg/mm.s)
$\nu_{1,2}$: coefficients de Poisson relatifs aux matériaux 1 et 2
$\theta_{1,2}$: petite perturbation (torsion) du pignon et de la roue (rd)
$\theta^t_{1,2}$: angles de rotation total du pignon et de la roue (rd)
θ_e	: petite perturbation (torsion) de l'arbre au niveau du moteur (rd)
θ_s	: petite perturbation (torsion) de l'arbre au niveau du frein (rd)
$\rho_{1,2}$: masses volumiques du pignon et de la roue (kg/mm ³)
$\rho_{a1,2}$: masses volumiques de l'arbre moteur et récepteur (kg/mm ³)
$\Omega_{1,2}$: vitesse de rotation à l'entrée et à la sortie du réducteur (rd/s)
$\omega_{1,2,\dots}$: pulsations naturelles du réducteur (rd/s)
ω_e	: pulsation des erreurs géométriques (rd/s)
ω_m	: pulsation d'engrènement (rd/s)



INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Les transmissions de puissance par engrenages ont depuis longtemps été largement utilisées du fait de leur rendement élevé et de leur grande précision, mais aussi pour leur faible encombrement et leur faible rapport poids/puissance transmise.

Théoriquement, dans les engrenages, les flancs de deux dentures en prise roulent sans glisser l'un sur l'autre, et le rapport des vitesses de rotation reste constant du début jusqu'à la fin de la prise. Les profils correspondants sont dits conjugués. Les engrenages ainsi construits, s'ils sont correctement lubrifiés, ne s'usent pas, assurent la transmission du mouvement avec un excellent rendement, et n'engendrent pas de vibration de torsion dans les arbres, ni de nuisance sonore. Les deux profils conjugués employés dans la pratique sont les profils épicycloïdaux, en petite mécanique de précision, et les profils en développante de cercle, dans les applications industrielles.

Depuis une vingtaine d'années, les engrenages ont subi des perfectionnements techniques et technologiques afin d'améliorer leur fonctionnalité tant en durée de vie, résistance et capacité de charge qu'en rapport spécifique poids/puissance. Depuis peu, une nouvelle pression technologique s'applique à ces mécanismes avec une réduction du niveau sonore ou vibratoire transmis. Ces excitations que l'on veut réduire au maximum, ont pour grandeur représentative l'erreur de transmission qui est influencée par plusieurs paramètres (les défauts géométriques, les défauts de montage, les conditions de travail), ces phénomènes vibratoires peuvent être vus comme des pertes de puissance du mécanisme. Donc, il faut modéliser le comportement dynamique des engrenages pour trouver un compromis entre tous les paramètres qui influent sur notre mécanisme, pour qu'ils puissent travailler dans des conditions optimales.

Pour des raisons de simplicité, les travaux de modélisation du comportement dynamique des engrenages se sont, dès l'origine, orientés vers des représentations à paramètres concentrés. Les engrenages sont assimilés à des cylindres rigides liés par une

raideur d'engrènement, qui représente de manière plus ou moins précise, les contributions de l'ensemble des parties déformables.

D'un point de vue théorique, la représentation de type paramètres concentrés n'est représentative que des premiers modes d'un système, et ne tient compte des contributions des corps d'engrenages que d'une manière approximative, l'analyse exacte relevant de la mécanique des milieux continus. Mais ce type d'approche n'a toutefois jamais été réellement mis en cause pour les géométries conventionnelles et a été largement confirmé par l'expérimentation.

Les limites propres à ces modèles concernant les applications aéronautiques et d'une manière générale les structures allégées avec en particulier des roues à voiles minces.

Notre étude a pour but de modéliser le comportement dynamique d'un réducteur à engrenages à axes parallèles, en mettant au point un outil numérique permettant la simulation de celui-ci. Etant donné, que l'on a vu la difficulté qui existe dans ce type de mécanisme du fait qu'il y a plusieurs paramètres qui rentrent en jeu et qu'ils induisent des phénomènes qui se superposent. Nous allons étudier seulement l'influence de l'écart de forme, qui est un défaut géométrique, tout en sachant que ceux-ci sont les principales causes de fonctionnement anormal, c'est-à-dire s'éloignant du fonctionnement théoriquement désiré.

Nous avons adopté dans notre étude une modélisation masses – ressorts à quatre degrés de liberté de torsion, la flexion n'intervient pas car les raideurs de flexion des arbres sont supposées suffisamment grandes.

Dans ce travail, nous présentons au chapitre I une étude bibliographique détaillée qui montre l'évolution de la modélisation du comportement des engrenages.

Le chapitre II est consacré à la modélisation des écarts de forme.

Dans le chapitre III on étudie la cinématique des engrenages, les différentes vitesses du point de contact sont déterminées ainsi que l'erreur cinématique.

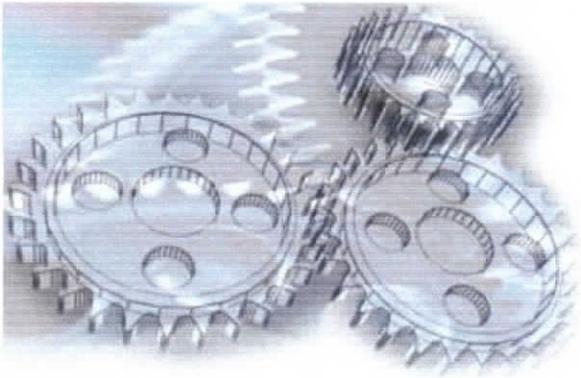
Dans le chapitre VI on présente la méthode de discrétisation qui va nous permettre de déterminer la raideur d'engrènement.

Dans le chapitre V on a établi le modèle mathématique à partir du système physique en appliquant les équations de Lagrange, sans oublier qu'afin d'obtenir des déplacements et

des efforts finis pour les vitesses critiques, on a introduit des termes d'amortissement à partir d'hypothèses raisonnables sur la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement (hypothèse de Basile).

Le chapitre VI est réservé à la présentation du programme numérique et les fonctions de ses différentes parties.

Enfin, le chapitre VII fait l'objet de l'analyse des résultats obtenus grâce au logiciel développé, et leur comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des perturbations (méthode analytique).



CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. 1. Introduction

Le souci d'avoir des engrenages toujours performants malgré les conditions extrêmes dans lesquels ils travaillent, impose aux chercheurs d'approfondir leurs études dans ce domaine, en prenant compte du maximum de paramètres pouvant influencer le fonctionnement de ces organes mécaniques.

Les approches utilisées dans l'étude du comportement des engrenages à profil en développante de cercle, dans les conditions de fonctionnement, sont de trois types : expérimentale, analytique et numérique. Nous allons voir dans les paragraphes suivant le développement de ces différentes approches.

Dans notre travail, nous avons utilisé une approche numérique pour étudier le comportement dynamique d'un réducteur. Les différentes étapes de la modélisation ont été détaillées dans les chapitres qui vont suivre.

I. 2. Approches expérimentales

Les travaux expérimentaux sont d'une importance capitale dans l'identification des paramètres influents sur les déplacements et la résistance à la rupture des dentures. Les résultats sont obtenus soit en utilisant les jauges de déformation [1], soit par photoélasticité [2] ou par la méthode holographique [3].

I. 2. 1. Approche mécanique de la flexion de la dent

La flexion des dents d'engrenages a été étudiée dès 1938 par **WALKER** [4] afin de résoudre le problème de modification du profil des dents. Cette étude a été réalisée sur un appareil d'essai présenté sur la figure I.1.

La charge est appliquée à la dent à l'aide d'une dent de crémaillère qui peut agir à différentes profondeurs, mais la valeur de la flexion est obtenue au moyen d'un micromètre palpant un galet introduit dans l'entre dent, près du sommet. Cet appareil permet de mesurer la flexion des dents en tout point de la ligne d'action.

Le domaine expérimental a connu un développement continu avec l'apparition des dispositifs de mesure et des méthodes capables de mieux traduire les phénomènes de déformation [5], [6].

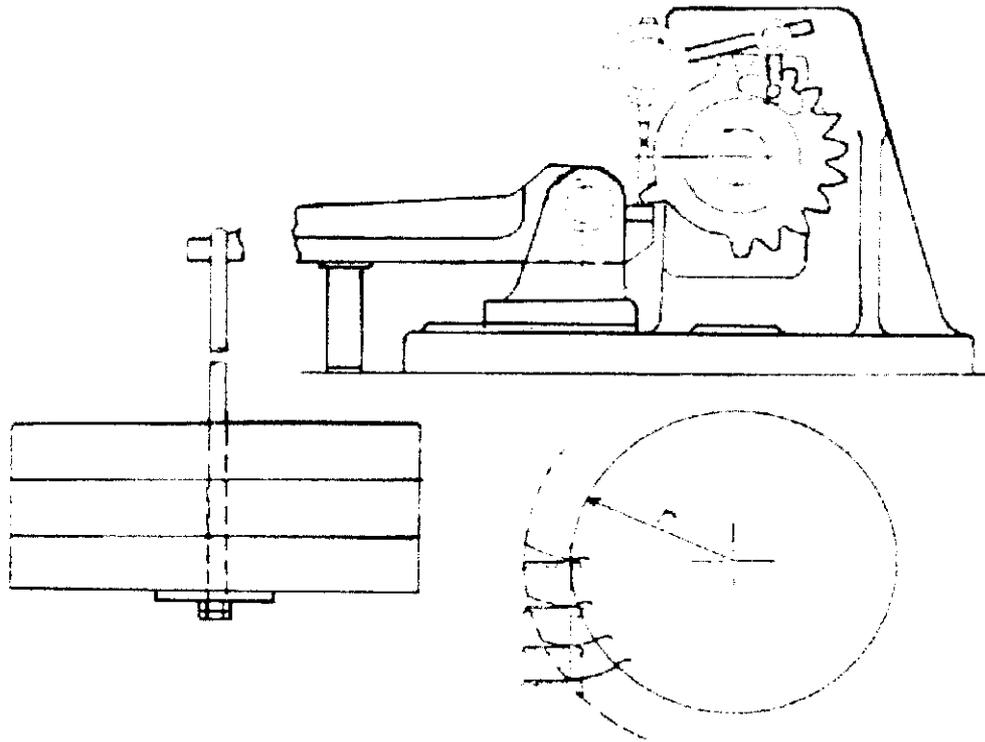


Figure 1.1. Dispositif d'essai

I. 2. 2. Approche optique

Il existe plusieurs méthodes optiques qui peuvent être appliquées à la mesure du déplacement. On peut citer d'entre elles les méthodes Moiré [7], Moiré interférométrique [7] ou encore Moiré holographique [8].

Cependant, les méthodes optiques n'ont pas donné des résultats satisfaisants qu'à partir de 1980, où on a perfectionné ces méthodes grâce à l'apparition de nouveaux instruments optiques, pour arriver à des résultats en accord avec ceux obtenus par les méthodes numériques [9], [10], [11], [12], [13].

BELHANECHÉ [3] a étudié le comportement statique d'engrenages à axes parallèles à denture droite par la méthode optique de granularité « Speckle » et l'interférométrie holographique par réflexion. Il a mesuré les déplacements au voisinage du contact de deux dents et la raideur statique, puis, il a fait l'analyse vibratoire statique d'une seule roue et ensuite de deux roues en prise. Les résultats qu'il a obtenus sont très proches des résultats numériques [11], [12].

I. 3. Approches analytiques

L'étude théorique essaie de traiter le problème complexe des déformations des dents d'engrenages, en introduisant la géométrie particulière des dents d'engrenages et en prenant compte du maximum de paramètres influent le comportement des engrenages en statique et en dynamique.

La plus part des travaux effectués dans la méthode analytique du problème [14], [15], consistent à utiliser des modèles comme des plaques, poutres, masses-ressorts, ces analyses faites en bidimensionnel ne tiennent pas compte des paramètres suivant la largeur des engrenages, ni ceux de fabrication ou de montage.

Dans le domaine dynamique, **CORNELL** [16] a modélisé l'engrenage par des éléments composés d'une partie rigide massive qui représente la masse de l'arbre de la jante et la denture et d'une partie flexible qui traduit la flexibilité globale de l'engrenage. Il a aussi examiné l'effet de la modification de profil, des défauts de fabrication sur les contraintes.

TOBE [17] a utilisé la théorie des plaques d'épaisseurs variables, mais cette méthode appliquée au calcul des engrenages reste très limitée à cause des grandes difficultés pour des structures de géométrie variables où les charges appliquées sont irrégulières.

D'autres méthodes ont été utilisées comme celle du potentiel complexe [18].

I. 4. Approches numériques

De nombreux travaux ont été effectués dans le domaine numérique surtout avec la méthode des éléments finis [9], [10], [11], [19], [20], [21] et par l'application des équations intégrales (méthodes des éléments frontières) par **BREBIA** [22].

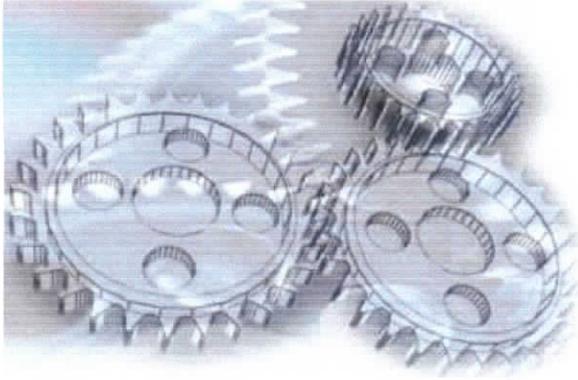
Par la suite plusieurs études sont apparues dont on peut citer celles de **WILCOX** et **COLEMAN** [10], **VELEX** [11] et **SAINSOT** [12], qui ont utilisé la méthode mixte de résolution par couplage de deux méthodes numériques (méthode de **NEWMARK** et éléments finis d'effet global et local) avec différents types de modélisation.

I. 5. Conclusion

L'importance des engrenages dans tous les domaines de leur application, incite les chercheurs à approfondir leur étude en tenant compte de toutes les phénomènes qui peuvent parvenir que se soit en statique ou en dynamique, et cela dans le souci de rendre ces

organes mécaniques les plus fiables, les plus performants et qui produisent le moins possible de nuisance.

En résumé, l'étude bibliographique nous a montré qu'il faut sans cesse essayer d'améliorer les recherches, et cela en utilisant de nouvelles technologies et en prenant en compte tous les paramètres qui influent le comportement des engrenages dans le cas réel.



CHAPITRE II ECARTS DE FORME

II. 1. Introduction

Les erreurs géométriques sont des écarts de forme, à la fois dans le plan d'action (c'est-à-dire des écarts dans le sens de la largeur des dents) et par rapport aux développantes de cercle théoriques.

Ce sont des erreurs inévitables qui varient selon le procédé de fabrication et des traitements de surface. Des analyses ont montré que les écarts de forme sont couramment de l'ordre de 5 à 20 microns. Certains écarts peuvent être conseillés puisqu'ils permettent l'amélioration du comportement vibratoire de réducteur. Parmi ces écarts, on peut citer les corrections des profils et les bombés [13].

II. 2. Discrétisation des surfaces d'attaque

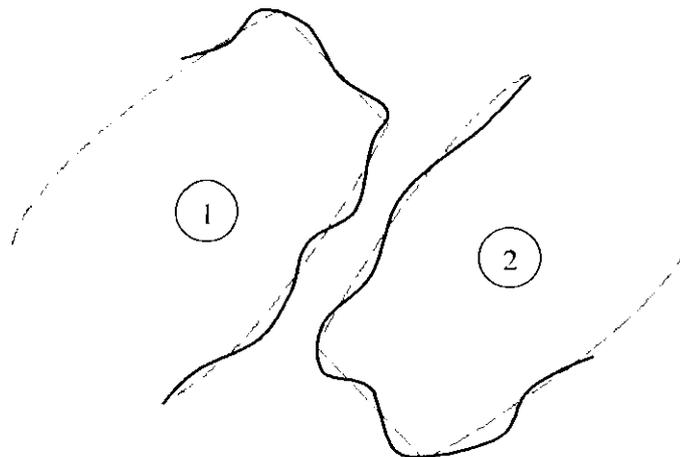
Les écarts géométriques sont considérés dépendants des trois directions de l'espace.

Dans le repère $R_0(P_1, X_0, Y_0, Z_0)$, (voir fig.II.1) [13]. L'écart géométrique en un point matériel $M(x_0, y_0, z_0)$ appartenant à la surface d'attaque d'une dent est donné par :

$$\vec{E}(x_0, y_0, z_0) = E_x(x_0, y_0, z_0)\vec{X}_0 + E_y(x_0, y_0, z_0)\vec{Y}_0$$

où $E_x(x_0, y_0, z_0)$: écarts géométriques suivant la direction \vec{X}_0 au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface d'attaque.

$E_y(x_0, y_0, z_0)$: écarts géométriques suivant la direction \vec{Y}_0 au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface d'attaque.



Ecarts de profils $z_0(t)$

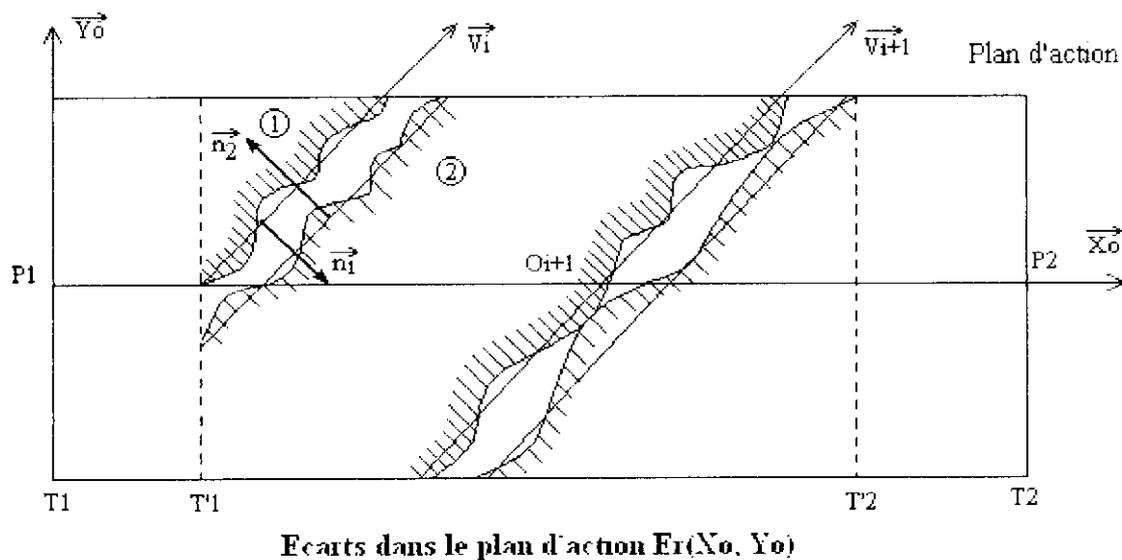


Figure II. 1. Ecart géométrique

Le procédé de discrétisation consiste à partager la surface d'attaque d'une dent en petites surfaces élémentaires d'aire $\Delta S = \Delta v \cdot \Delta Z$ (voir figure II.2.). Nous proposons la notation indicielle suivante :

Soient i, j et k les indices tels que :

i : indique le numéro de la dent (numéro de la ligne de contact).

j : indique le numéro de segment suivant la largeur de la dent.

k : indique le numéro de segment suivant la développante de cercle.

Chaque surface élémentaire de la surface d'attaque est représentée par trois indices permettant sa localisation.

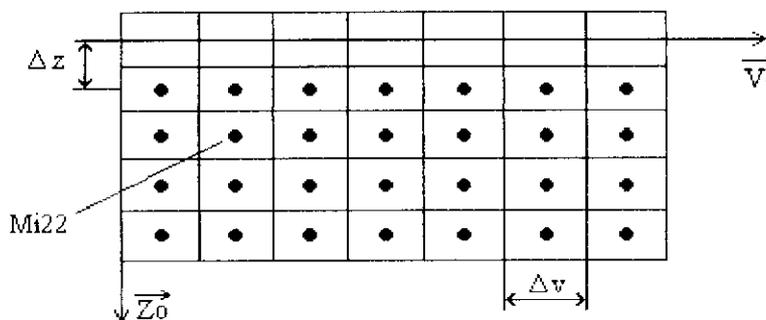


Figure II. 2 : Discrétisation de la surface d'attaque de la dent $n^{\circ}i$

$$M(x_0, y_0, z_0)R_0 \xleftrightarrow{\text{notation}} M_{ijk}$$

Un point matériel $M(x_0, y_0, z_0)R_0$ peut être défini par trois paramètres i, j et k .

Une surface élémentaire S_{ijk} est centrée en M_{ijk} .

L'écart géométrique au point M_{ijk} est la projection sur la normale extérieure, au profil de la distance maximale séparant le point théorique, dans la condition où les dents sont géométriquement parfaites et le point réel M_{ijk} appartenant au parallélépipède rectangle de base S_{ijk} et de hauteur unitaire.

Dans ces conditions, l'erreur ne peut être que normale au profil, et pour un point $M(x_0, y_0, z_0)R_0$ elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_0, y_0, z_0) = & E_x(x_0, y_0, z_0) \vec{X}_0 + E_y(x_0, y_0, z_0) \vec{Y}_0 \\ & - E(x_0, y_0, z_0) \vec{n} \end{aligned} \quad (II.1)$$

où \vec{n} : la normale extérieure au profil au point M_{ijk} .

$E(x_0, y_0, z_0)$: écart géométrique normal.

L'indépendance proposée entre les écarts géométriques suivant la largeur de la denture et les écarts géométriques par rapport à la développante de cercle permet une séparation de variables dans l'expression de l'écart géométrique normal. Cette séparation conduit à écrire l'écart géométrique normal comme le produit de deux termes indépendants.

$$E(x_0, y_0, z_0) = E_r(x_0, y_0) z_0(t) \quad (II.2)$$

Le premier terme représente la variation normale des erreurs dans le plan d'action (dans le sens de la largeur des dents).

Le deuxième terme représente la variation normale des erreurs par rapport aux profils en développantes de cercle.

Le signe de l'erreur en un point M appartenant à une ligne de contact est déterminé par les normales extérieures aux deux profils au point considéré.

- Pour le pignon :

\vec{n}_1 : la normale extérieure au profil $[P_1]$ au point considéré. L'écart géométrique normal au point M du pignon est donné par :

$$E_1(x_0, y_0, z_0) = E_{r1}(x_0, y_0) z_{01}(t) \quad (II.3)$$

- Pour la roue :

\vec{n}_2 : la normale extérieure au profil $[P_2]$ au point considéré. L'écart géométrique normal au point M de la roue est donné par :

$$E_2(x_0, y_0, z_0) = E_{r2}(x_0, y_0) z_{02}(t) \quad (II.4)$$

$E_1(x_0, y_0, z_0)$ et $E_2(x_0, y_0, z_0)$ seront notées dans ce qui suit $E_1(i, j)$ et $E_2(i, j)$ pour raison de simplification.

L'erreur totale en un point M appartenant aux deux engrenages à l'instant t est donnée par :

$$E_{12}(i, j) = E_1(i, j) + E_2(i, j) \quad (II.5)$$

La différence d'erreur entre deux points $M(i, j)$ et M_C à l'instant donné t vaut :

$$\delta E_{12}(i, j) = E_{12}(i, j) - E_{12}(i_{M_C}, j_{M_C}) \quad (II.6)$$

Si M_C représente le point vérifiant, à l'instant t la condition suivante :

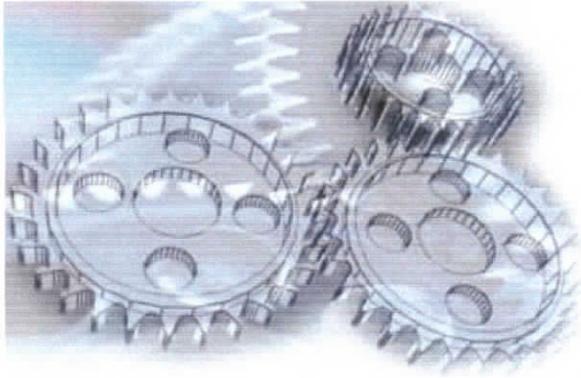
$$E_{12}(i_{M_C}, j_{M_C}) = \max_{i,j} E_{12}(i, j)$$

alors : $\delta E_{12}(i, j) < 0$

C'est cette différence d'erreur qui va apparaître dans la suite de nos calculs. Théoriquement, le maximum de $E_{12}(i, j)$ peut être atteint en plusieurs points, il suffit de prendre l'un de ces points.

II. 3. Conclusion

Les écarts de forme que nous venons de voir vont faire apparaître des perturbations supplémentaires qui s'ajoutent aux efforts extérieurs, et c'est précisément ce que nous allons étudier dans les chapitres suivants et, bien sur, nous allons essayer de voir l'influence de ces erreurs géométriques sur le comportement du réducteur.



CHAPITRE III ETUDE CINEMATIQUE

III. 1. Introduction

La cinématique des corps rigides définit l'état de référence à partir duquel on calcule les déformations élastiques et les erreurs géométriques d'où l'utilité du paragraphe.

Il nous paraît nécessaire de poser quelques hypothèses préalables [13]. Pour toutes ces études on choisit les repères suivants :

Repères :

$R_1(O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ lié au pignon

$R_2(O_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ lié à la roue

$R_0(P_1, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

(voir figure III.1)

III. 2. Hypothèses générales

- Pas d'erreur de montages : les axes géométriques d1 et d2 coïncident avec les axes instantanés de rotation.
- Les paliers sont rigides. La flexion des arbres moteur et récepteur est négligeable.
- Les contacts entre les profils actifs se font sur le plan d'action.
- Les normales aux différents points de contact, entre profils actifs, font un angle β_b avec l'axe (P_1, \vec{Y}_0) .

III. 3. Cinématique des corps rigides avec écarts de forme

A – Vitesse du point de contact M appartenant au solide S_1

Dans le repère R_0 :

$$\vec{P_1M} = \vec{P_1O_1} + \vec{O_1M} + \vec{E}_i(M)$$

$$\vec{V}_1^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O_1M} + \frac{d}{dt}(\vec{E}_i(M)) \quad (III.1)$$

$$\vec{V}^0(O_1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}_1^0(M) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O_1M} + \frac{d}{dt}(\vec{E}_i(M))$$

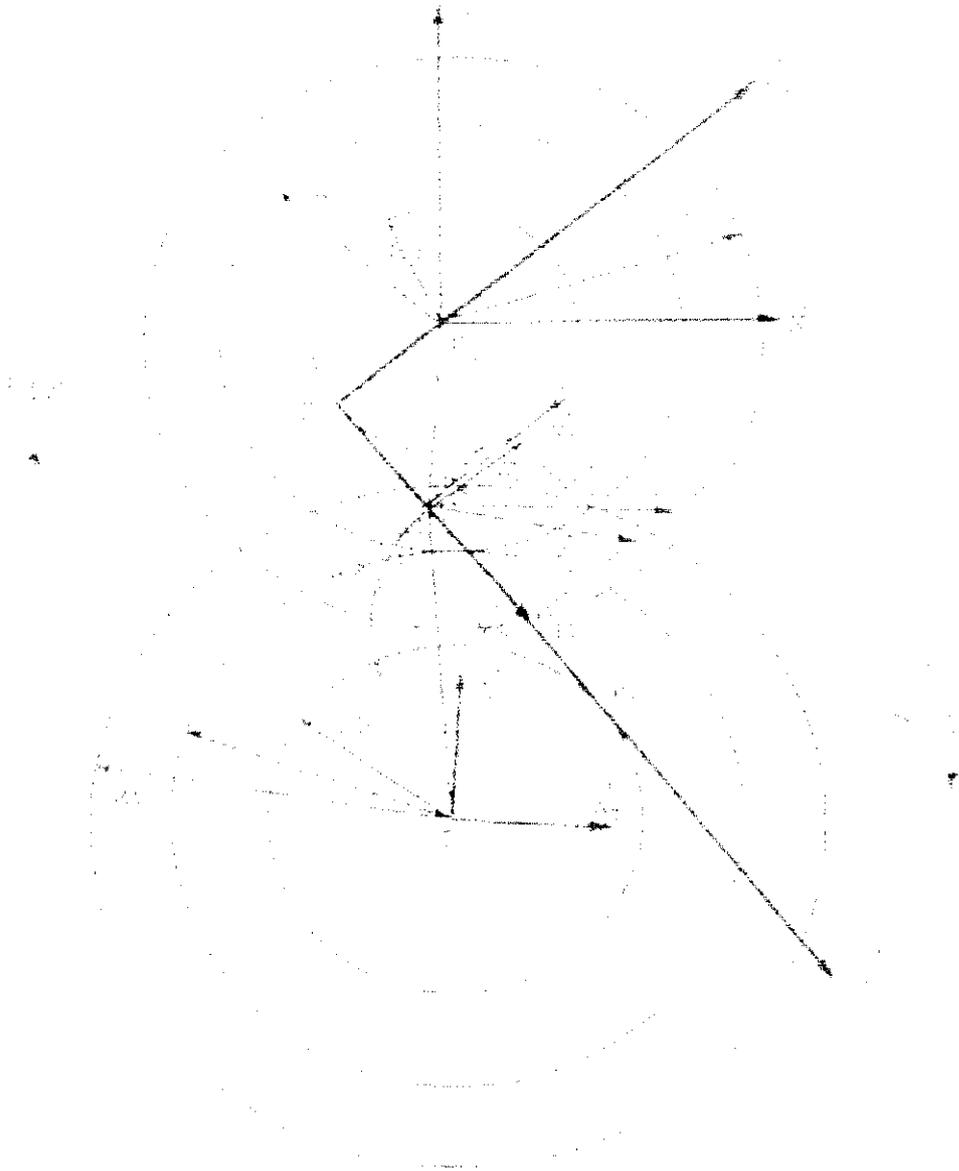


Figure III. 1. Schéma du réducteur

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{P_1M} \quad (\text{III.2})$$

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{bl} \end{pmatrix}_{R_o} \quad \overrightarrow{P_1M} = \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m - 0 \end{pmatrix}_{R_o}$$

$$\text{On obtient : } \overrightarrow{O_1M} = \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ -R_{bl} \end{pmatrix}_{R_o}$$

$$\overrightarrow{\Omega_l} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_l \\ 0 \end{pmatrix}_{R_o}$$

$$\vec{V}_1^0(M) = \begin{bmatrix} -R_{b1} \Omega_1 + \frac{d}{dt}(E_{1X}(M)) \\ \frac{d}{dt}(E_{1Y}(M)) \\ -X_m \Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \quad (III.3)$$

$E_{1X,Y}$: Représentent les composantes de l'écart géométrique normal au point de contact M, relatif au pignon dans le repère R_0 .

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \cos(\beta_b) \vec{X}_0 - \sin(\beta_b) \vec{Y}_0 \\ \vec{V}_1^0(M) \vec{n}_1 &= \begin{bmatrix} -R_{b1} \Omega_1 \\ 0 \\ X_m \Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \begin{bmatrix} \cos(\beta_b) \\ -\sin(\beta_b) \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} + \frac{d}{dt}(E_1(M)) \vec{n}_1 \end{aligned} \quad (III.4)$$

On a :

$$\vec{E}_1(M) \vec{n}_1 = E_1(M)$$

$E_1(M)$: représente l'écart géométrique relatif au pignon suivant la normale au point M du profil [P1].

$$\vec{V}_1^0(M) \vec{n}_1 = -R_{b1} \Omega_1 \cos(\beta_b) + \dot{E}_1(M) \quad (III.5)$$

$\vec{V}_1^0(M) \vec{n}_1$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact M du solide S_1 .

B – Vitesse du point de contact M appartenant au solide S_2

Dans le repère R_0 :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 M &= \vec{P}_1 O_1 + \vec{O}_1 O_2 + \vec{O}_2 M + \vec{E}_2(M) \\ \vec{V}_2^0(M) &= \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O}_2 M + \frac{d}{dt}(\vec{E}_2(M)) \end{aligned} \quad (III.6)$$

$$\vec{V}^0(O_2) = \vec{0}$$

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O}_2 M + \frac{d}{dt}(\vec{E}_2(M))$$

$$\vec{O}_2 M = \vec{O}_2 P_2 + \vec{P}_2 P_1 + \vec{P}_1 M \quad (III.7)$$

$$\overrightarrow{O_2P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{b2} \end{pmatrix}_{R_0} \quad \overrightarrow{P_2P_1} = \begin{pmatrix} -T_1T_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \quad \overrightarrow{P_1M} = \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m = 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

On obtient : $\overrightarrow{O_2M} = \begin{pmatrix} X_m - T_1T_2 \\ Y_m \\ R_{b2} \end{pmatrix}_{R_0}$

$$\overrightarrow{\Omega_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} = \begin{bmatrix} R_{b2} \Omega_2 + \frac{d}{dt}(E_{2X}(M)) \\ \frac{d}{dt}(E_{2Y}(M)) \\ -\Omega_2 (X_m - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \quad (III.8)$$

$E_{2X,Y}$: représentent les composantes de l'écart géométrique normal au point de contact M, relatif à la roue dans le repère R_0 .

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} R_{b2} \Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2 (X_m - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta_b) \\ -\sin(\beta_b) \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} + \frac{d}{dt}(E_2(M)) \cdot \overrightarrow{n_1} \quad (III.9)$$

On a :

$$\overrightarrow{E_2(M)} \cdot \overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{E_2(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} = E_2(M)$$

$E_2(M)$: représente l'écart géométrique relatif à la roue suivant la normale au point M du profil [P2].

$$\overrightarrow{V_2^0(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} = R_{b2} \Omega_2 \cos(\beta_b) - \dot{E}_2(M) \quad (III.10)$$

$\overrightarrow{V_2^0(M)} \cdot \overrightarrow{n_1}$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact M du solide S_2 .

C – Conclusion

D'après l'équation de compatibilité des corps rigides, il vient :

$$\overrightarrow{V_2^1(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{V_2^0(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} - \overrightarrow{V_1^0(M)} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$$

$$-R_{b1} \Omega_1 \cos(\beta_b) + \dot{E}_1(M) - R_{b2} \Omega_2 \cos(\beta_b) + \dot{E}_2(M) = 0$$

par suite :

$$\Omega_2(t) = - \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \Omega_1 + \frac{[\dot{E}_1 + \dot{E}_2](M)}{R_{b2} \cos(\beta_b)}$$

On pose :

$$\begin{aligned} & \dot{E}_{12}(M) = \dot{E}_1(M) + \dot{E}_2(M) \\ \Omega_2(t) &= - \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \Omega_1 + \frac{\dot{E}_{12}(M)}{R_{b2} \cos(\beta_b)} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

La vitesse de rotation Ω_2 de la roue menée dépend du temps. Cette variation de Ω_2 provient de la variation de l'erreur géométrique au cours du temps.

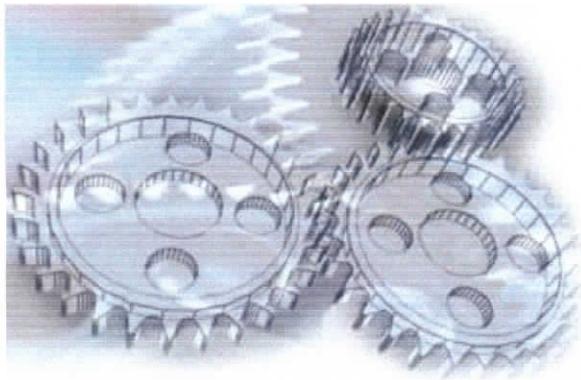
D – Conséquences

En analysant l'expression de la vitesse de rotation de l'arbre de sortie, on constate que dans le cas où on n'aurait pas d'écart géométrique, le deuxième terme de l'équation disparaît et on retrouve l'expression pour l'engrenage indéformable et géométriquement parfait :

$$R_{b1} \Omega_1 + R_{b2} \Omega_2 = 0 \quad (\text{III.12})$$

Dans le cas où il existerait des écarts géométriques, on distingue deux cas :

- Les écarts de forme sont indépendants de la position sur la développante du cercle, donc du temps, (par exemple les bombés ou défauts d'angle d'hélice). Ce type d'écart de forme n'a pas d'influence sur la vitesse de rotation à la sortie et la relation (III.12) est conservée.
- Les erreurs (ou écarts) de forme varient en cours d'engrènement (dépendant du temps), (par exemple erreurs sinusoïdales des profils), Ω_2 dépend du temps par conséquent une excitation supplémentaire vient perturber le système réducteur.



CHAPITRE IV RAIDEUR D'ENGRENNEMENT

IV. 1. Introduction

L'étude statique a pour but principal la détermination des raideurs permettant la représentation la plus fidèle possible du comportement dynamique d'engrenages en prises.

Le calcul de ces termes de raideur passe évidemment par une analyse des déformations sous différentes charges. Dans cette étude, la raideur d'engrènement est supposée linéaire. La raideur constitue une donnée du problème.

IV. 2. Raideur de liaison

La transmission des charges par engrenages se fait dans le plan d'action par l'engrènement d'un ou plusieurs couples de dents. L'engrènement d'un ou plusieurs couples de dents entraîne une variation de la raideur au cours du temps. A partir des valeurs de déplacements normaux sous différentes charges, il est possible de déterminer les raideurs selon le plan d'action directement utilisables pour le calcul vibratoire [11]. On distingue pour chacun des engrenages trois raideurs distinctes supposées linéaires :

- k_l : raideur de voile,
- k_f : raideur de flexion des dents,
- k_h : raideur hertzienne ou de contact liant deux dents en prise.

La raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_{l1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{l2}} + \frac{1}{k_{f2}} \quad (\text{IV.1})$$

On montrera dans la suite que l'influence de la raideur du lubrifiant est négligeable.

IV. 3. Influence du film lubrifiant

Dans le contact entre profils adjacents, la présence de frottement entraîne des efforts tangentiels sur les profils et des pertes de puissance conduisant à un dégagement de calories. Pour réduire le coefficient de frottement entre profils actifs et par suite diminuer les efforts tangentiels et faciliter l'évacuation de la chaleur dégagée, les contacts sont lubrifiés.

L'épaisseur minimale du film d'huile au centre de contact hertzien lubrifié (galet-plan), lorsque les effets de bord sont négligeables, est donnée dans la solution élastohydrodynamique exacte de Dowson et Higginson [20] par :

$$H_m^* \approx 0,985 U^{*0,7} G^{*0,6} W^{*-0,13} \quad (\text{IV.2})$$

Dans les conditions où les vitesses tangentielles sont constantes et les matériaux sont fixés, l'épaisseur minimale du film lubrifiant est donnée par :

$$H_m^* = C_1 W^{*-0,13} \rightarrow W^* = C_2 H_m^{*-7,692} \quad (\text{IV.3})$$

La raideur du film d'huile est donnée par :

$$k_L = \left| \frac{\partial W}{\partial H_m^*} \right| = 7,692 C_2 H_m^{*-8,692} \quad (\text{IV.4})$$

h est de l'ordre de quelques microns de même pour H_m^* .

Les raideurs associées aux deux engrenages sont de l'ordre de 10^8 N/m tandis que k_L est de l'ordre de 10^{50} N/m, ce qui implique : $k_L \gg k_1, k_2$. (voir figure IV.1.)

La raideur du film est très grande donc le film est très peu déformable.

La lubrification modifie très peu la raideur de liaison, donc on peut négliger son effet sur le calcul de la raideur équivalente.

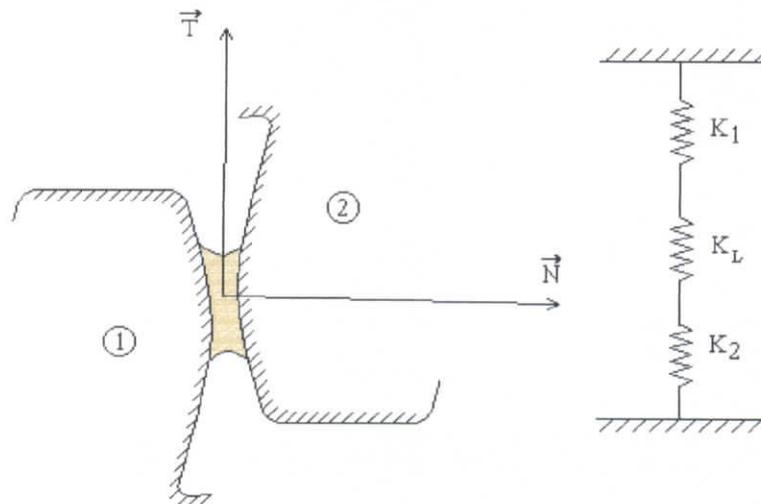


Figure IV.1. Influence du lubrifiant

IV. 4. Méthode de discrétisation

L'idée fondamentale pour le calcul instantané de la raideur est d'effectuer une discrétisation des lignes de contact. Cette opération consiste à subdiviser chaque ligne de contact en plusieurs segments possédant chacun une raideur élémentaire [11] (voir figure IV.2.)

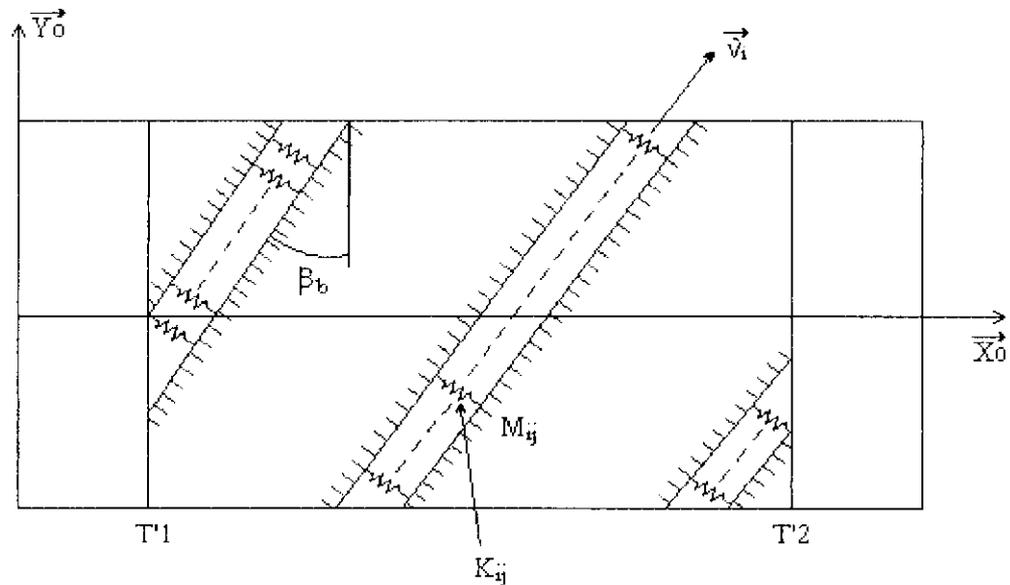


Figure IV. 2. Discrétisation des lignes de contact

Connaissant la valeur de la raideur moyenne d'un couple de dents en prise et le nombre de segments de la discrétisation par ligne de contact, une simple division de la raideur moyenne par le nombre des segments par ligne de contact donne la valeur de la raideur d'un segment. L'augmentation du nombre des segments entraîne des changements plus continus (ou dérivable) de la valeur instantanée de la raideur d'engrènement.

La valeur de la raideur variant d'un segment à un autre, (les raideurs des segments extrêmes sont moins importants que celles des segments milieux), il est possible d'introduire une fonction permettant de moduler la répartition de la raideur le long des lignes de contact.

Afin de décrire le défilement des lignes de contact sur le plan d'action et d'assurer la continuité de l'engrènement, des lignes de contact fictives sont introduites. (voir figure IV.3.)

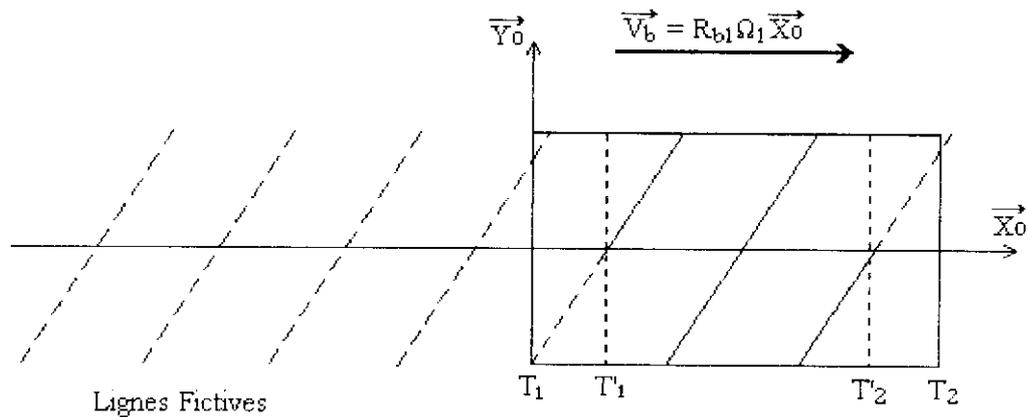


Figure IV.3. Défilement des lignes de contact dans le plan d'action

La fenêtre d'engrènement est la surface rectangulaire appartenant au plan d'action de largeur égale à la largeur minimale des deux engrenages et de longueur $T'_1 T'_2$. La fenêtre d'engrènement est le lieu géométrique où les différents couples de dents adjacentes entrent en engrènement.

Un paramètre L_{ij} est introduit dans l'expression de la raideur élémentaire, ce paramètre vaut 1 si le segment de discrétisation appartient à la fenêtre d'engrènement, 0 dans le cas contraire.

Vu l'existence des erreurs géométriques (écarts de forme), le contact ne se fait pas en tous les points de lignes de contact appartenant à la fenêtre d'engrènement. Cet effet est traduit par l'introduction d'un nouveau paramètre P_{ij} qui vaut 1 si le segment de la discrétisation considéré est en contact, 0 dans le cas contraire.

L'expression finale des raideurs élémentaires est donnée par :

$$K(i,j) = \frac{k_m}{N} F_i(n_j) L_{ij} P_{ij} \quad (\text{IV.5})$$

k_m : raideur moyenne d'un couple de dents en contact.

N : nombre de segments par ligne de contact.

$F_i(n_j)$: fonction associée à la i ème ligne permettant de moduler la répartition de la raideur sur la ligne de contact.

L_{ij} : paramètre permettant de décrire le défilement des lignes de contact sur le plan d'action, donc de simuler l'engrènement par :

$$\begin{aligned} L_{ij} &= 1 && \text{si} && T'_1 T'_2 < X_0(M_{ij}) < T_1 T_2 \\ L_{ij} &= 0 && \text{dans le cas contraire} \end{aligned}$$

P_{ij} : paramètre permettant de décrire si on a contact au segment centré au point M_{ij} , donc de simuler le contact par :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= 1 && \text{si on a contact au segment considéré} \\ P_{ij} &= 0 && \text{dans le cas contraire} \end{aligned}$$

i : indice indiquant le numéro de la ligne de contact.

j : indice indiquant le numéro du segment de la ligne de contact.

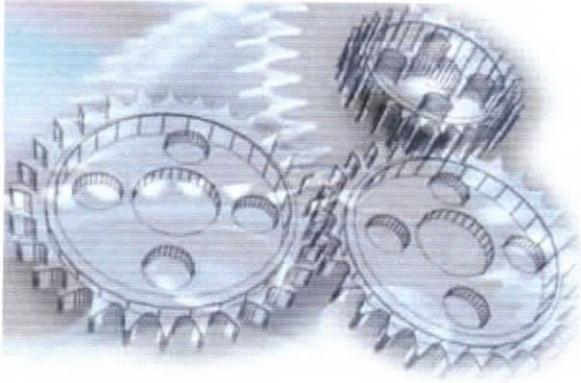
La raideur globale (raideur d'engrènement) à l'instant t est la somme de toutes les raideurs élémentaires :

$$K(t) = \sum_{i,j}^N K(i,j) \quad (\text{IV.6})$$

IV. 5. Conclusion

Le nombre de segments existants dans la fenêtre d'engrènement varie en fonction du temps, donc la raideur globale dépend du temps, et l'augmentation de nombre de discrétisation par ligne de contact entraîne une continuité meilleure pour la raideur globale.

L'existence des erreurs géométriques et la condition de contact en un point $M(i,j)$ peuvent faire intervenir les variables d'état du système et la raideur d'engrènement peut dépendre des variable du système.



CHAPITRE V MODELISATION MASSES – RESSORTS DU REDUCTEUR

V. 1. Introduction

A partir des résultats statiques de déflexions sous charge, nous allons étudier la construction d'un modèle représentatif des différentes approches de l'analyse dynamique existante dans la littérature.

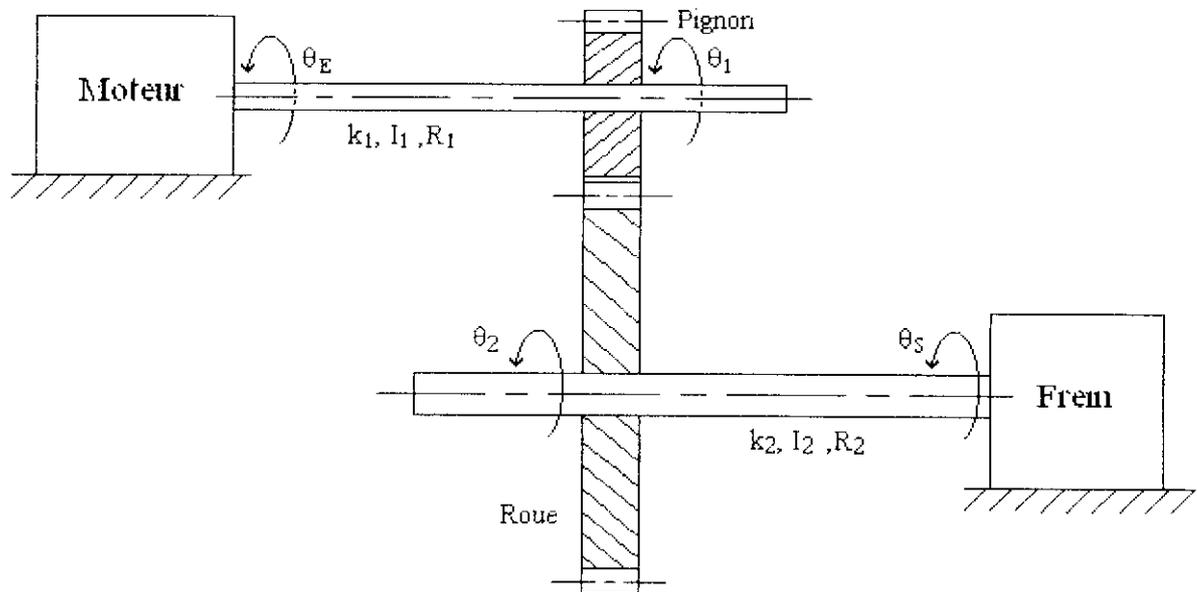


Figure V. 1. Modélisation masses – ressorts du réducteur

Une série d'hypothèses est formulée [13].

- Les perturbations par rapport aux mouvements nominaux, dans les conditions des corps rigides, sont caractérisés par des petites rotations (vibration de torsion).
- Les équations développées découlent de la modélisation masses – ressorts du système mécanique.
- Il n'y a pas d'erreurs de montage dans les engrenages qui fonctionnent en régime lubrifié.

La formulation du problème dynamique par les équations de Lagrange sera systématiquement utilisée.

Le modèle utilisé est représenté dans la figure V.1. Notre système possède quatre degrés de liberté de torsion : deux rotations instantanées des cylindres de bases des deux engrenages par rapport à l'état de référence, et deux perturbations en torsion, toujours par rapport à l'état de référence, au niveau du moteur et du niveau du frein.

V. 2. Erreur de transmission

L'erreur de transmission est définie comme la déviation de position des engrenages en cours de fonctionnement, par rapport à la position qu'occupent les deux engrenages s'ils sont indéformables et géométriquement parfaits.

L'erreur de transmission est mesurée généralement comme étant l'écart linéaire, dans le plan d'action, normale aux lignes de contact. Par convention, l'erreur de transmission est comptée positivement si le contact entre le couple de dents est maintenu et négativement si on a perte de contact (séparation des deux dents adjacentes).

L'erreur de transmission en un point M appartenant aux deux solides S_1 et S_2 est défini par [11] :

$$\Delta(M) = d^{Ro} \overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{n_1} + d^{Ro} \overrightarrow{O_2M} \cdot \overrightarrow{n_2} \quad (V.1)$$

$d^{Ro} \overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{n_1}$: représente la variation normale (suivant $\overrightarrow{n_1}$) du point de contact M (point de référence dans la condition des corps rigides sans écarts géométriques) appartenant à la roue n°1 par rapport à l'état de référence.

$d^{Ro} \overrightarrow{O_2M} \cdot \overrightarrow{n_2}$: représente la variation normale (suivant $\overrightarrow{n_2}$) du point de contact M (point de référence dans la condition des corps rigides sans écarts géométriques) appartenant à la roue n°2 par rapport à l'état de référence.

Un point M peut être défini par (i, j) avec :

- i : le numéro de ligne contenant le point M,
- j : le numéro de segment contenant le point M.

$$\theta_1^i = \Omega_1 \cdot t + \theta_1$$

$$\theta_2^j = \Omega_2 \cdot t + \theta_2$$

$$d^{Ro} \overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{n_1} = \frac{\partial^{Ro} \overrightarrow{O_1M}}{\partial \theta_1^i} \cdot \overrightarrow{n_1} \cdot d\theta_1^i + \frac{\partial^{Ro} \overrightarrow{O_1M}}{\partial E_1} \cdot \overrightarrow{n_1} \cdot dE_1 \quad (V.2)$$

par rapport aux références : corps rigides, sans erreurs de forme. Une variation de l'angle total de torsion $\partial \theta_1^i$, entraîne un déplacement du point M appartenant au solide S_1 , donné par :

$$\frac{\partial^{Ro} \overrightarrow{O_1M}}{\partial \theta_1^i} = - R_{b1} \cos(\beta_b) \partial \theta_1^i \overrightarrow{n_1} \quad (V.3)$$

$$\frac{\partial^{R_0} \overline{O_1 M}}{\partial \theta_1^i} \cdot \overline{n_1} = R_{b1} \cos(\beta_b) \quad (V.4)$$

Une variation de l'erreur de forme ∂E_1 entraîne un déplacement du point M appartenant au solide S_1 , donné par :

$$\partial^{R_0} \overline{O_1 M} = \partial E_1 \cdot \overline{n_1} \quad (V.5)$$

$$\frac{\partial^{R_0} \overline{O_1 M}}{\partial E_1} \cdot \overline{n_1} = 1 \quad (V.6)$$

$$d\theta_1^i = \Omega_1 (t + dt) + \theta_1 - \Omega_1 t - \theta_{1ref} \quad (\theta_{1ref} = 0)$$

$$d\theta_1^i = \theta_1 + \Omega_1 dt \quad (V.7)$$

$$dE_1 = E_1 - E_{1ref} = E_1 \quad (E_{1ref} = 0) \quad (V.8)$$

En reportant (V.7), (V.8), (V.6) et (V.4) dans (V.2), il vient :

$$d^{R_0} \overline{O_1 M} \cdot \overline{n_1} = -R_{b1} (\theta_1 + \Omega_1 dt) \cos(\beta_b) + E_1 \quad (V.9)$$

De même :

$$d^{R_0} \overline{O_2 M} \cdot \overline{n_2} = -R_{b2} (\theta_2 + \Omega_2 dt) \cos(\beta_b) + E_2 \quad (V.10)$$

On obtient :

$$\Delta(M) = \Delta(i,j) = -\cos(\beta_b) [R_{b1} \Omega_1 + R_{b2} \Omega_2] dt - \cos(\beta_b) [R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2] + E_{12}(i,j) \quad (V.11)$$

Avec :

$$E_{12}(i,j) = E_1(i,j) + E_2(i,j)$$

Or, on un point de contact M_C , on a :

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}} \Omega_1 + \frac{\dot{E}_{12}(M_C)}{R_{b2} \cos(\beta_b)} \quad (V.12)$$

En introduisant (V.12) dans (V.11), il vient :

$$\Delta(i,j) = -\cos(\beta_b) [R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2] + E_{12}(i,j) - E_{12}(M_C) \quad (V.13)$$

Soit :

$$\delta E_{12}(i,j) = E_{12}(i,j) - E_{12}(M_C)$$

$$\Delta(i,j) = -\cos(\beta_b) [R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2] + \delta E_{12}(i,j) \quad (V.14)$$

$\delta E_{12}(i,j)$ représente l'erreur géométrique au point $M(i,j)$ par rapport à un point de contact dans les conditions de corps rigides M_C . Donc, le paramètre important n'est pas

l'écart absolu du point M par rapport aux développantes de cercle théoriques mais l'écart relatif à un point de contact dans les conditions des corps rigides.

V. 3. Equations du mouvement

Les équations de Lagrange qui donnent les équations du mouvement du système sont :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (\text{V.15})$$

V. 3. 1. Calcul des énergies cinétique et de déformation

a. Arbre moteur

La figure V.2. représente le schéma de l'arbre moteur.

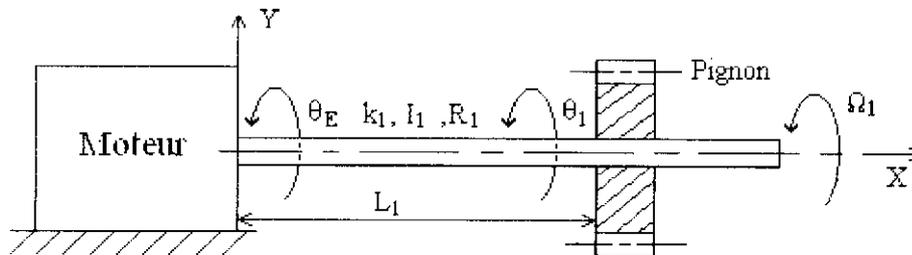


Figure V.2. Arbre moteur

L'hypothèse de variation linéaire de l'angle de torsion suivant la longueur de l'arbre est retenue.

Les conditions aux limites sont :

$$\theta'(0) = \theta_E$$

$$\theta'(L_1) = \theta_1$$

D'où :

$$\theta'(x) = \left(1 - \frac{x}{L_1} \right) \theta_E + \frac{x}{L_1} \theta_1 \quad 0 \leq x \leq L_1$$

L'énergie de déformation de l'arbre moteur est donnée par :

$$U_1 = \frac{1}{2} G_1 J_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$U_1 = \frac{1}{2} G_1 J_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{\theta_1 - \theta_E}{L_1} \right)^2 dx$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_1 - \theta_E)^2 \quad (\text{V.16})$$

L'énergie cinétique de l'arbre moteur est donnée par :

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} I_1 \left(\frac{\partial \theta^1}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$T_1 = \frac{I_1}{2} \int_0^{L_1} \left[\left(1 - \frac{x}{L_1} \right) \dot{\theta}_E + \frac{x}{L_1} \dot{\theta}_1 \right]^2 dx$$

$$T_1 = \frac{I_1 L_1}{6} (\dot{\theta}_E^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_E) \quad (\text{V.17})$$

Remarque : La vitesse de rotation de l'arbre moteur dans les conditions de fonctionnement des corps rigides Ω_1 , est constante. Sa contribution dans le calcul de l'énergie cinétique n'est pas introduite dans (V.17), car elle disparaît après les dérivations dans les équations de Lagrange.

b. Arbre récepteur

La figure V.3. représente le schéma de l'arbre récepteur.

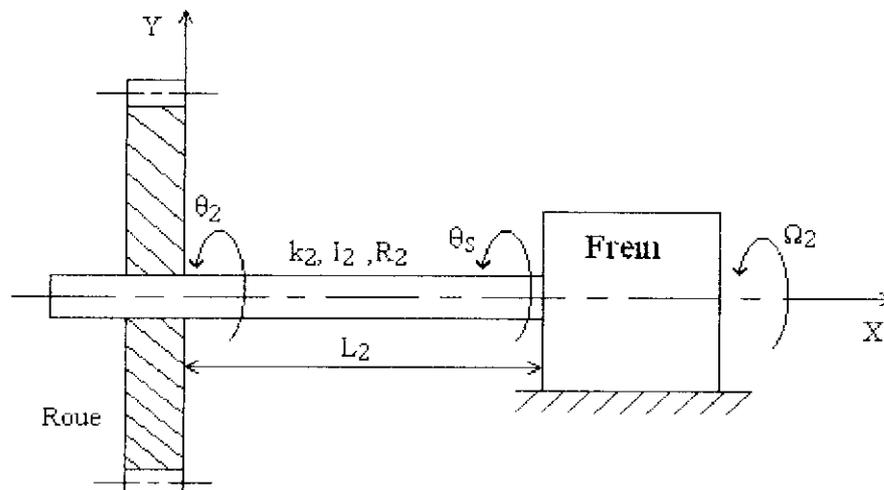


Figure V.3. Arbre récepteur

Vu l'existence des écarts géométriques sur les dentures, la vitesse de rotation de l'arbre récepteur peut dépendre du temps. θ_2 et θ_s restent toujours des petites perturbations par rapport à l'état de fonctionnement des corps rigides.

On a toujours l'hypothèse de variation linéaire de l'angle de torsion suivant la longueur de l'arbre.

Les conditions aux limites sont :

$$\theta'(0) = \theta_2 + \theta_R$$

$$\theta'(L_2) = \theta_s + \theta_R$$

θ_R : angle de torsion de l'arbre s'il est indéformable

$$\theta'(x) = \left(1 - \frac{x}{L_2}\right) \theta_2 + \frac{x}{L_2} \theta_s + \theta_R \quad 0 \leq x \leq L_2$$

L'énergie de déformation de l'arbre moteur est donnée par :

$$U_2 = \frac{1}{2} G_2 J_2 \int_0^{L_2} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2} G_2 J_2 \int_0^{L_2} \left(\frac{\theta_s - \theta_2}{L_2}\right)^2 dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_s - \theta_2)^2 \quad (\text{V.18})$$

L'énergie cinétique de l'arbre moteur est donnée par :

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} I_2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$T_2 = \frac{I_2}{2} \int_0^{L_2} \left[\left(1 - \frac{x}{L_2}\right) \dot{\theta}_2 + \frac{x}{L_2} \dot{\theta}_s + \Omega_2 \right]^2 dx$$

$$T_2 = \frac{I_2 L_2}{6} (\dot{\theta}_s^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_s \dot{\theta}_2) + \frac{I_2 L_2}{2} \Omega_2 (\dot{\theta}_s + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} I_2 L_2 \Omega_2^2 \quad (\text{V.19})$$

c. Moteur

L'énergie cinétique du moteur est donnée par :

$$T_m = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{V.20})$$

Le moteur est supposé rigide par suite :

$$U_m = 0 \quad (\text{V.21})$$

d. Frein

L'énergie cinétique du frein est donnée par :

$$T_F = \frac{1}{2} I_F (\dot{\theta}_S + \Omega_2)^2 \quad (\text{V.22})$$

de même le frein est supposé indéformable par suite :

$$U_F = 0 \quad (\text{V.23})$$

e. Engrenages

L'énergie de déformation au niveau de l'engrènement est donnée par :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} \Delta_{ij}^2 \quad (\text{V.24})$$

avec :

$$\Delta_{ij} = -\cos(\beta_b) [R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2] + \delta E_{12}$$

L'énergie cinétique des engrenages est donnée par :

$$T_e = \frac{1}{2} I_{e1} (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{e2} (\dot{\theta}_2)^2$$

$$T_e = \frac{1}{2} I_{e1} (\Omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{e2} (\Omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{V.25})$$

f. Réducteur

A partir des équations (V.16), (V.18), (V.21), (V.23) et (V.24) l'énergie de déformation totale est :

$$U_T = \frac{1}{2} \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_1 - \theta_F)^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_S - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} \Delta_{ij}^2 \quad (\text{V.26})$$

L'énergie cinétique totale, calculée à partir des équations (V.17), (V.19), (V.20), (V.22) et (V.25), est :

$$T_T = \frac{I_1 L_1}{6} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_F^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_F) + \frac{I_2 L_2}{6} (\dot{\theta}_S^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_S \dot{\theta}_2) + \frac{I_2 L_2}{2} \Omega_2 (\dot{\theta}_S + \dot{\theta}_2)$$

$$+ \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_F^2 + \frac{1}{2} I_F (\dot{\theta}_S + \Omega_2)^2 + \frac{1}{2} I_{e1} (\Omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{e2} (\Omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{V.27})$$

Certains termes d'énergie cinétique sont supprimés de l'équation (V.27), car ils disparaissent au cours de dérivations par rapport aux coordonnées généralisées et au temps dans les équations de Lagrange.

V. 3. 2. Amortissement

Vu l'existence de dissipation d'énergie dans l'ensemble réducteur et afin d'obtenir des déplacements et des efforts finis pour les vitesses critiques, il est nécessaire d'introduire des termes d'amortissement.

L'amortissement est introduit d'une manière globale directement dans les équations du mouvement. Pour définir l'amortissement équivalent dans le réducteur, on a posé les deux hypothèses suivantes :

- Une approximation des efforts dissipatifs par des efforts d'amortissement visqueux équivalents, dissipant la même quantité d'énergie par cycle pour une excitation harmonique, est retenue.
- Nous supposons que la matrice amortissement visqueux équivalente est orthogonale par rapport aux modes propres du système à l'arrêt.

Le réducteur peut être caractérisé par des modes réels $\{\Phi_i\}$ qui correspondent à une matrice raideur constante moyenne (matrice raideur à l'arrêt).

- **Matrice amortissement visqueux équivalente**

Pour une matrice raideur à l'arrêt, il vient :

$$\{\Phi_i\}^T [C] \{\Phi_j\} = 0 \quad i \neq j$$

$$\{\Phi_i\}^T [C] \{\Phi_i\} = 2 \varepsilon_{\Phi_i} (k_{\Phi_i} m_{\Phi_i})^{1/2} = 2 \varepsilon_{\Phi_i} m_{\Phi_i} \omega_i$$

avec :

$$k_{\Phi_i} = \{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_i\} \quad \text{raideur modale}$$

$$m_{\Phi_i} = \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\} \quad \text{masse modale}$$

Dans la base modale (modes à l'arrêt), la matrice amortissement s'écrit :

$$[C_{\Phi_i}] = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (V.28)$$

par suite :

$$[C] = [\Phi]^T [C_{\Phi}] [\Phi]^{-1} \quad (V.29)$$

$$[M] = [\Phi]^T [M_{\Phi}] [\Phi]^{-1}$$

$$[\Phi]^{-1} = [M_{\Phi}]^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (V.30)$$

$$[\Phi]^T = [M] [\Phi] [M_{\Phi}]^{-1} \quad (V.31)$$

En remplaçant (V.30) et (V.31) dans (V.29), il vient :

$$[C] = ([M] [\Phi] [M_{\Phi}]^{-1}) [C_{\Phi}] ([M_{\Phi}]^{-1} [\Phi]^T [M])$$

$$[C] = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2 \varepsilon_{\Phi_i} \omega_i}{m_{\Phi_i}} \right\} ([M] \{\Phi_i\}) ([M] \{\Phi_i\})^T$$

En conclusion, à partir de l'hypothèse de l'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres de la structure (connue sous le nom d'hypothèse de Basile), il est possible de déterminer les termes d'amortissement dans la base modale et physique.

V. 3. 3. Utilisations des équations de Lagrange

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_1} = \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_1 - \theta_E) + \cos^2(\beta_b) R_{b1} (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) \sum_{ij} k_{ij} - \cos(\beta_b) R_{b1} \sum_{ij} k_{ij} \delta E_{ij} \quad (V.32)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_2} = \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_2 - \theta_S) + \cos^2(\beta_b) R_{b2} (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) \sum_{ij} k_{ij} - \cos(\beta_b) R_{b2} \sum_{ij} k_{ij} \delta E_{ij} \quad (V.33)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_E} = \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_E - \theta_1) \quad (V.34)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_S} = \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_S - \theta_2) \quad (V.35)$$

soit :

$$\left\{ \frac{\partial U_T}{\partial \theta_i} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial U_T}{\partial \theta_1} & \frac{\partial U_T}{\partial \theta_2} & \frac{\partial U_T}{\partial \theta_E} & \frac{\partial U_T}{\partial \theta_S} \end{array} \right]^T$$

$$\{X\} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_E \quad \theta_S]^T$$

$$\left\{ \frac{\partial U_T}{\partial \theta_i} \right\} = [K] \{X\} + \{F_1\} \quad (V.36)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{G_1 J_1}{L_1} + \cos^2(\beta_b) R_{b1}^2 \sum_{ij} k_{ij} & \cos^2(\beta_b) R_{b1} R_{b2} \sum_{ij} k_{ij} & -\frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 \\ \cos^2(\beta_b) R_{b1} R_{b2} \sum_{ij} k_{ij} & \frac{G_2 J_2}{L_2} + \cos^2(\beta_b) R_{b2}^2 \sum_{ij} k_{ij} & 0 & -\frac{G_2 J_2}{L_2} \\ -\frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 & \frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{G_2 J_2}{L_2} & 0 & \frac{G_2 J_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (V.37)$$

$$\{F_1\} = -\cos(\beta_b) \sum_{ij} k_{ij} \delta E_{ij} [R_{b1} \quad R_{b2} \quad 0 \quad 0]^T \quad (V.38)$$

$$\frac{\partial T_T}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, E, S \quad (V.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = \left[\frac{L_1 l_1}{3} + I_{e1} \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{L_1 l_1}{6} \ddot{\theta}_E \quad (V.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = \left[\frac{L_2 l_2}{3} + I_{e2} \right] \ddot{\theta}_2 + \frac{L_2 l_2}{6} \ddot{\theta}_S + \left[\frac{L_2 l_2}{2} + I_{e2} \right] \dot{\Omega}_2 \quad (V.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}_E} \right] = \frac{L_1 l_1}{6} \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{L_1 l_1}{3} + I_m \right] \ddot{\theta}_E \quad (V.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}_S} \right] = \frac{L_2 l_2}{6} \ddot{\theta}_2 + \left[\frac{L_2 l_2}{3} + I_F \right] \ddot{\theta}_S + \left[\frac{L_2 l_2}{2} + I_F \right] \dot{\Omega}_2 \quad (V.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \left[\frac{\partial T_T}{\partial \theta_i} \right] = [M] \{\ddot{X}\} + \{F_2\} \quad (V.53)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1 l_1}{3} + I_{e1} & 0 & \frac{L_1 l_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{L_2 l_2}{3} + I_{e2} & 0 & \frac{L_2 l_2}{6} \\ \frac{L_1 l_1}{6} & 0 & \frac{L_1 l_1}{3} + I_m & 0 \\ 0 & \frac{L_2 l_2}{6} & 0 & \frac{L_2 l_2}{3} + I_F \end{bmatrix} \quad (V.54)$$

$$\{F_2\} = \dot{\Omega}_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_2 l_2}{2} + I_{e2} & 0 & \frac{L_2 l_2}{2} + I_F \end{bmatrix}^T \quad (V.55)$$

Le travail virtuel des forces extérieures est :

$$\begin{aligned}\delta W &= -C_E \delta\theta_E - C_S \delta\theta_S \\ \frac{\delta W}{\delta\theta_E} &= -C_E \\ \frac{\delta W}{\delta\theta_S} &= -C_S \\ \left\{ \frac{\delta W}{\delta\theta_i} \right\} &= \{F\} = [0 \ 0 \ -C_E \ -C_S]^T\end{aligned}\quad (V.56)$$

On propose une fonction de dissipation qui prend en compte le travail des forces visqueuses équivalentes tel que :

$$\left[\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} \right] = [C] \{\dot{X}\} \quad (V.57)$$

Finalement, nous arrivons à partir des équations précédentes à la formulation des équations de Lagrange sous la forme matricielle comme suite :

$$\begin{aligned}[M] \{\ddot{X}\} + \{F_2\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} + \{F_1\} &= \{F\} \\ [M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} &= \{F\} - \{F_1\} - \{F_2\}\end{aligned}$$

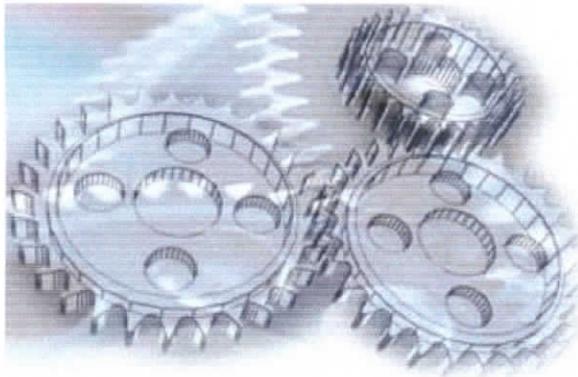
$\{F_1\}$: représente un effort supplémentaire causé par les écarts de forme.

$\{F_2\}$: représente un effort supplémentaire causé par l'erreur cinématique.

V. 4. Conclusion

Cette étude dynamique, nous a permis d'établir un modèle mathématique modélisant le système physique étudié, grâce à l'utilisation des équations de Lagrange. Cette formulation nous a conduit à un système d'équations différentielles linéaires à quatre degrés de liberté.

Nous pouvons maintenant résoudre ce système en utilisant des méthodes numériques, qui seront présentées dans le chapitre consacré à la présentation du logiciel.



CHAPITRE VI PRESENTATION DU LOGICIEL

VI. 1. Introduction

Pour analyser le comportement dynamique d'un réducteur, avec écarts géométriques, un logiciel de calcul est développé.

Ce logiciel est écrit en langage Delphi.

VII. 2. Description

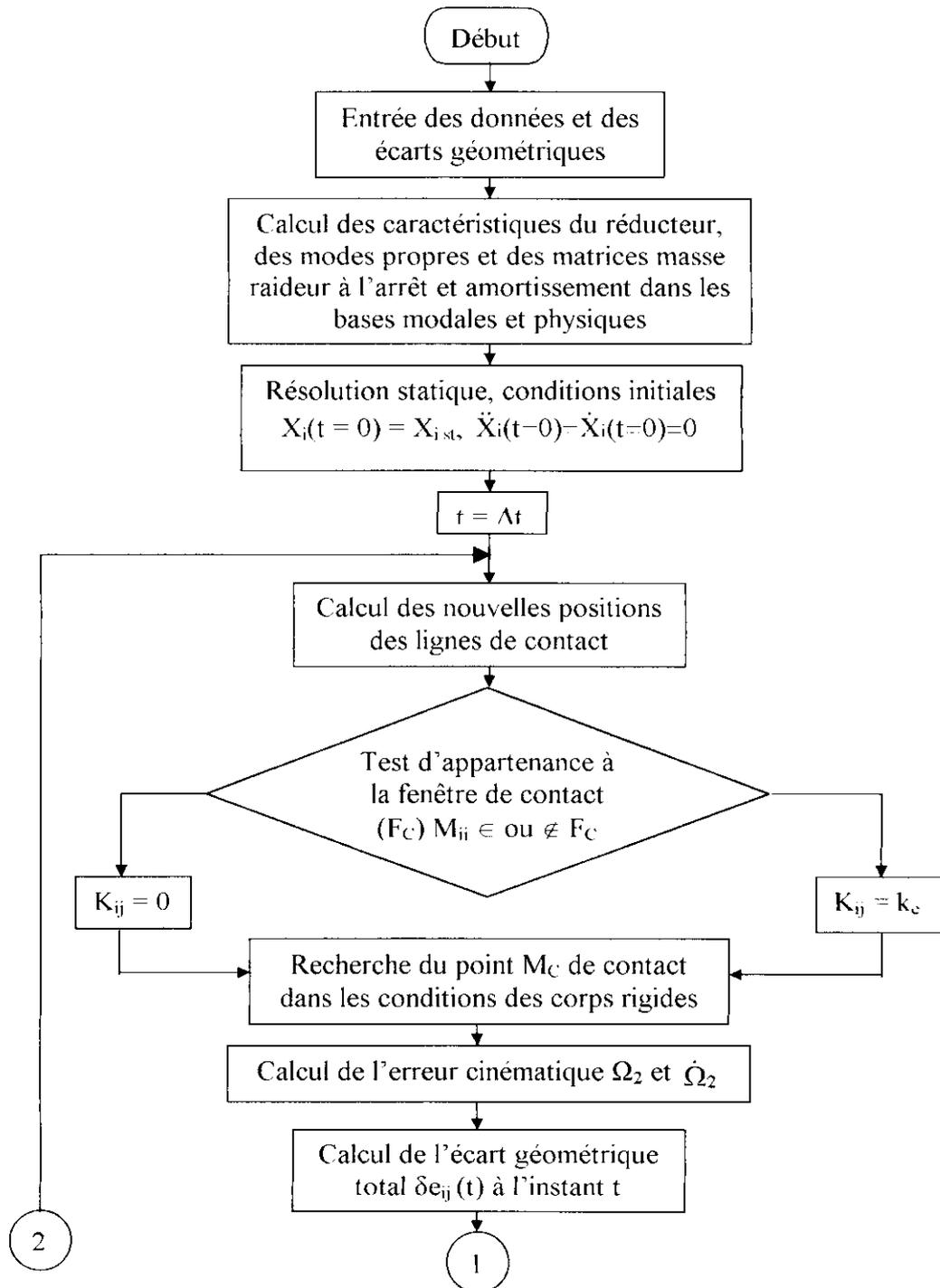
Notre logiciel est composé de plusieurs fonctions qui permettent à l'utilisateur de sélectionner le traitement désiré.

Les parties essentielles qui constituent le logiciel sont :

1. Une partie préparation qui réalise :
 - L'entrée des caractéristiques du réducteur,
 - L'entrée des écarts géométriques,
 - Calcul des paramètres géométriques du réducteur,
 - Calcul des matrices masse et raideur,
 - Calcul des valeurs et vecteurs propres,
 - Calcul de la matrice d'amortissement,
 - Recherche des conditions initiales par une résolution statique.

2. Une partie résolution numérique du problème contenant :
 - Calcul des déplacements de la ligne de contact,
 - Calcul des écarts géométriques,
 - Calcul de la raideur instantanée,
 - Résolution par la méthode pas à pas de H.H.T.,
 - Récupération des résultats,
 - Traçage des courbes.

On peut voir dans la figure VI.1. l'organigramme du logiciel.



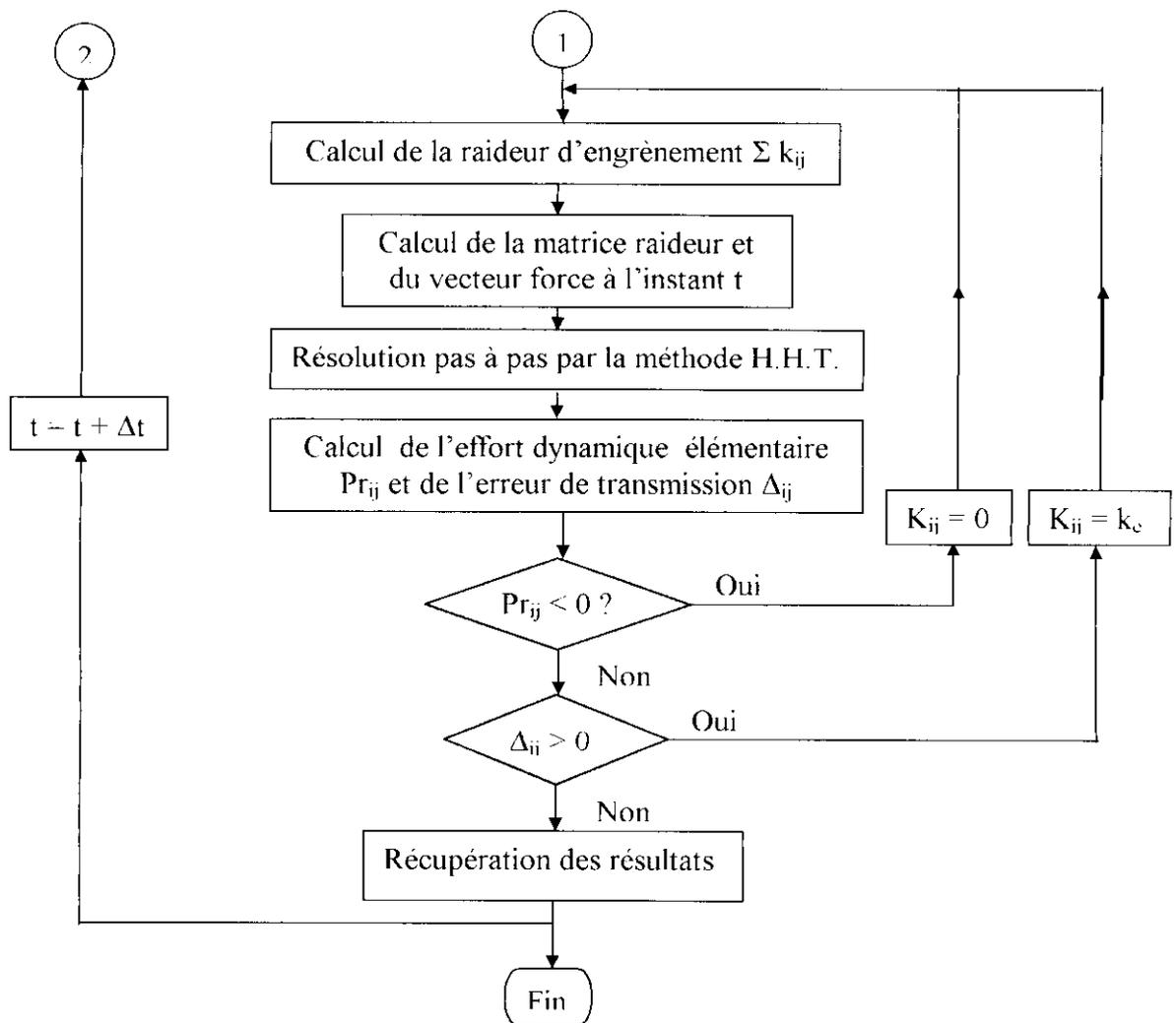
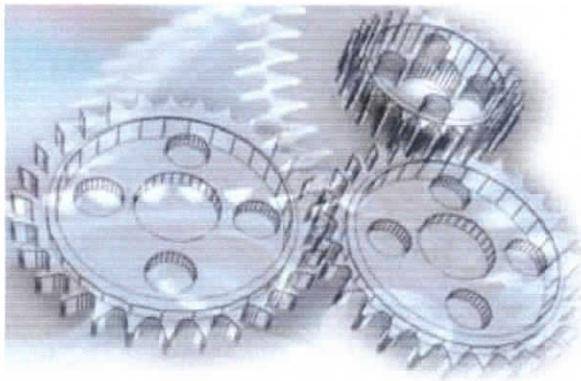


Figure VI.1. Organigramme du logiciel



CHAPITRE VII ANALYSE DES RESULTATS

VII. 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec le logiciel développé au cours de cette étude. Puis, nous allons les comparer aux résultats obtenus avec une méthode approchée appelé la méthode des perturbations (Annexe III).

VII. 2. Données géométriques du réducteur

Pour faciliter la comparaison des résultats analytiques et numériques, on propose l'étude du réducteur possédant les paramètres suivants :

– Nombre de dents du pignon	: $Z_1 = 28$
– Nombre de dents de la roue	: $Z_2 = 56$
– Angle de pression de taillage	: $\alpha_0 = 20^\circ$
– Module normal de taillage	: $m_{no} = 4 \text{ mm}$
– Coefficients de déports	: $x_1 = x_2 = 0$
– Coefficients de saillie	: $h_{a1} = h_{a2} = 1$
– Coefficients de creux	: $h_{f1} = h_{f2} = 1$
– Largeurs du pignon et de la roue	: $b_1 = b_2 = 40 \text{ mm}$
– Masses volumiques du pignon et de la roue	: $\rho_1 = \rho_2 = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
– Longueur de l'arbre moteur	: $L_1 = 120 \text{ mm}$
– Longueur de l'arbre récepteur	: $L_2 = 220 \text{ mm}$
– Masses volumiques des arbres moteur et récepteur	: $\rho_{a1} = \rho_{a2} = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
– Raideur d'un couple de dent	: $K_C = 7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}$
– Modules de cisaillement des arbres moteur et récepteur	: $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
– Rayon de l'arbre moteur	: $R_{am} = 40 \text{ mm}$
– Rayon de l'arbre récepteur	: $R_{ar} = 80 \text{ mm}$

- Inertie de masse du moteur : 3.10^6 kg.mm^2
- Inertie de masse du frein : 2.10^7 kg.mm^2
- Couple moteur et couple résistant : $C_1 = C_2 = 3.10^5 \text{ N.mm}$
- Angle d'inclinaison d'hélice : β (variable)
- Vitesse de rotation du pignon : Ω_1 (variable)

La première partie de notre programme nous permet de calculer les caractéristiques des engrenages, grâce aux relations géométriques cités dans l'Annexe I. Nous obtenons les résultats présentés dans le tableau suivant :

Tableau VII. 1. caractéristiques des engrenages du réducteur en fonction de l'angle d'inclinaison de l'hélice

β [degré]		0	10	18	22	30
$R_{1,2}$ [mm]	R_1	56,000	56,864	58,882	60,398	64,663
	R_2	112,000	113,728	117,764	120,796	129,326
$R_{b1,2}$ [mm]	R_{b1}	52,623	53,338	54,992	56,221	59,612
	R_{b2}	105,246	106,675	109,985	112,443	119,225
$R_{a1,2}$ [mm]	R_{a1}	60,000	60,864	62,882	64,398	68,663
	R_{a2}	116,000	117,728	121,764	124,796	133,326
P_{bt} [mm]		11,809	11,969	12,340	12,616	13,377
$T_1 T_2$ [mm]		57,459	59,138	63,137	66,210	75,161
$T_1 T'_1$ [mm]		8,681	9,337	10,890	12,074	15,484
$T_2 T'_2$ [mm]		28,635	29,821	32,641	34,805	41,088
$T'_1 T'_2$ [mm]		20,144	19,981	19,606	19,331	18,589
ε_T		1,706	2,222	2,572	2,725	2,981
E [mm]		168,000	170,592	176,646	181,194	193,990

VII. 3. Analyse des résultats sans erreurs géométriques

VII. 3. 1. Raideur d'engrènement

Comme on l'a vu aux chapitres précédents, la raideur d'engrènement dépend du temps et cela est due principalement au fait que la longueur de contact varie au cours du temps.

La raideur se présente donc sous la forme d'une fonction périodique de période d'engrènement T_m . (voir figure VII.1.)

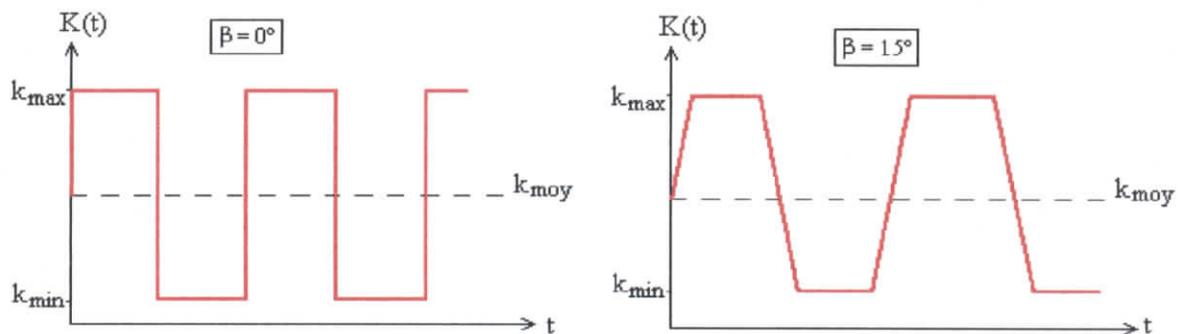


Figure VII.1. Variation de l'engrènement au cours du temps

La raideur d'engrènement peut s'écrire comme suit :

$$K(t) = k_{moy} + k_a \Phi(t) = k_{moy} (1 + \alpha \Phi(t)) \quad (VII.1)$$

Avec

k_{moy} : Raideur moyenne

$$k_a = k_{max} - k_{moy}$$

$$\alpha = k_a / k_{moy}$$

$\Phi(t)$: Fonction périodique de période T_m , représente la variation de la raideur d'engrènement en cours du temps.

Pour les engrenages droits la variation de la raideur est en créneau vue qu'il y a un ou deux couples de dents en prise. La longueur de contact passe brusquement d'une valeur minimale égale à la largeur de la denture à une valeur maximale égale à deux fois la largeur de la denture, (voir figure VII.1.). La fonction $\Phi(t)$, dans ce cas, est une fonction en créneau. Elle est discontinue en certains points.

Pour les engrenages hélicoïdaux, contrairement aux engrenages droits, la longueur de contact passe progressivement de sa valeur minimale à sa valeur maximale, (voir figure VII.1.).

VII. 3. 2. Etude analytique

L'étude analytique effectuée dans l'Annexe III, en utilisant une méthode approchée (méthode de perturbation) permet d'approcher la solution exacte du système différentiel, non amorti, suivant :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K(t)] \{X\} = \{F_0\} \quad (\text{VII.2})$$

par la solution suivante :

$$\{X(t)\} = \{X_{st}\} + \alpha \{X_0(X_{st}, k_{moy})\} \sum_n \frac{a_n \cos(n\omega_m t + \phi_n) + b_n \sin(n\omega_m t + \phi_n)}{k_{moy} \left[1 - \left(\frac{n\omega_m}{\omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{VII.3})$$

L'erreur de transmission est donnée par :

$$\Delta(t) = -\cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} \{X(t)\} \quad (\text{VII.4})$$

$$F_d(t) = K(t) \Delta(t) = k_{moy} (1 + \alpha \phi(t)) \Delta(t) \quad (\text{VII.5})$$

$$F_d(t) = -k_{moy} (1 + \alpha \phi(t)) \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} \{X(t)\}$$

$$F_d(t) = -k_{moy} \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} \{1 + \alpha \phi(t)\} (\{X_0(t)\} + \alpha \{X_1(t)\})$$

$$F_d(t) = -k_{moy} \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} (\{X_0(t)\} + \alpha \{X_1(t)\} + \alpha \phi(t) \{X_0(t)\} + \alpha^2 \phi(t) \{X_1(t)\})$$

L'ordre α^0 :

$$F_{d0}(t) = -k_{moy} \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} \{X_0(t)\} \quad (\text{VII.6})$$

L'ordre α^1 :

$$F_{d1}(t) = -k_{moy} \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} (\{X_1(t)\} + \phi(t) \{X_0(t)\}) \quad (\text{VII.7})$$

L'ordre α^2 :

$$F_{d2}(t) = -k_{moy} \cos(\beta_b) \{b_{b1}, b_{b2}, 0, 0\} (\phi(t) \{X_1(t)\}) \quad (\text{VII.8})$$

$$F_d(t) = F_{d0}(t) + \alpha F_{d1}(t) + \alpha^2 F_{d2}(t) \quad (\text{VII.9})$$

Il y a possibilité de résonance d'effort pour les excitations vérifiant :

$$n \omega_m = \omega_i \quad \rightarrow \quad \omega_m = \frac{\omega_i}{n} \quad i=1, n$$

- $n = 1$ correspondant à l'excitation d'engrènement fondamentale,
- $n = 2$ correspondant à l'excitation d'engrènement double,
- $n = 3$ correspondant à l'excitation d'engrènement triple.

VII. 3. 3. Analyse des résultats numériques

a. Effort dynamique

L'étude analytique des équations du mouvement donne une solution approchée de la forme :

$$F_d(t) = F_s + \alpha \{F_0\} \sum_n c_n \cos(n\omega_m t + \psi_n) + d_n \sin(n\omega_m t + \psi_n) \quad (\text{VII.10})$$

Numériquement, la réponse temporelle $F_d(t)$ est une fonction périodique de période T_m . Le développement de la fonction en série de Fourier permet d'écrire la réponse sous la forme :

$$F_d(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos(n\omega_m t + \phi_n) + g_n \sin(n\omega_m t + \phi_n) \quad (\text{VII.11})$$

On a effectué une analyse fréquentielle de la réponse pour avoir une idée de l'importance des harmoniques qui la constituent, (voir figure VII.2. et figure VII.3.). Cette analyse est relative à une Vitesse de rotation donnée. Un changement de la Vitesse entraîne un changement du spectre de la réponse.

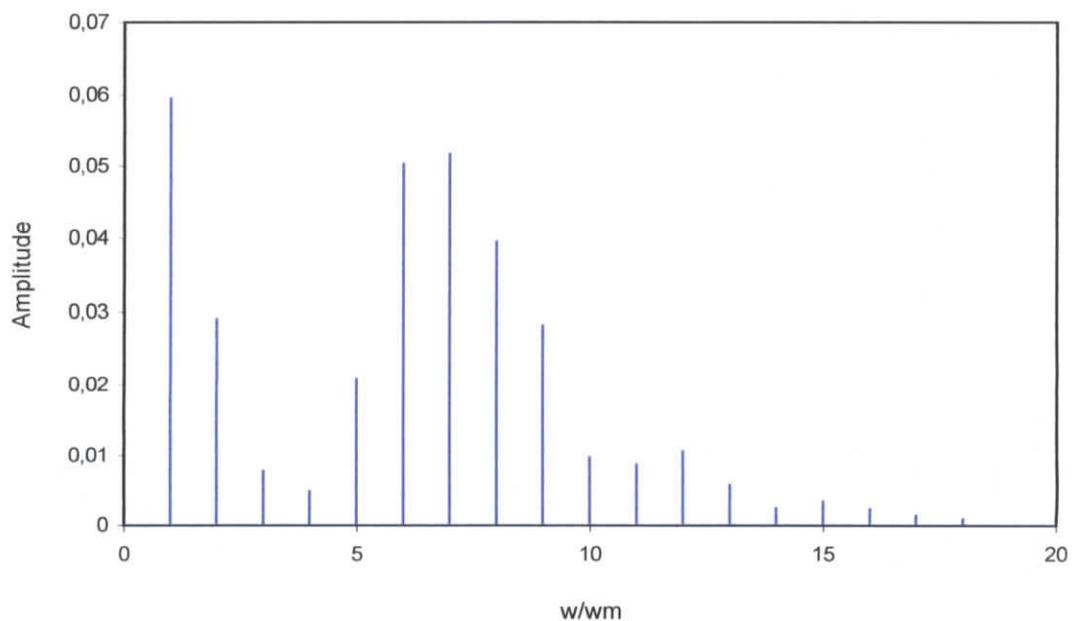


Figure VII.2. Les 20 premières fréquences pour $\beta = 0^\circ$

n'est plus perturbé. Mais ceci est beaucoup plus compliqué à réaliser car il faut tenir compte :

1. des déformations élastiques et des corrections qui modifient sensiblement le rapport de conduite,
2. des variations de couple en fonction de Vitesse (ou du temps).

c. Influence des coefficients d'amortissement sur l'effort dynamique

La figure VII.7. montre l'influence des coefficients d'amortissement sur la réponse, on constate qu'une diminution du coefficient d'amortissement entraîne une augmentation de l'effort dynamique, les coefficients d'amortissement retenus, pour approximer l'énergie dissipée sont compris entre 0,01 et 0,2.

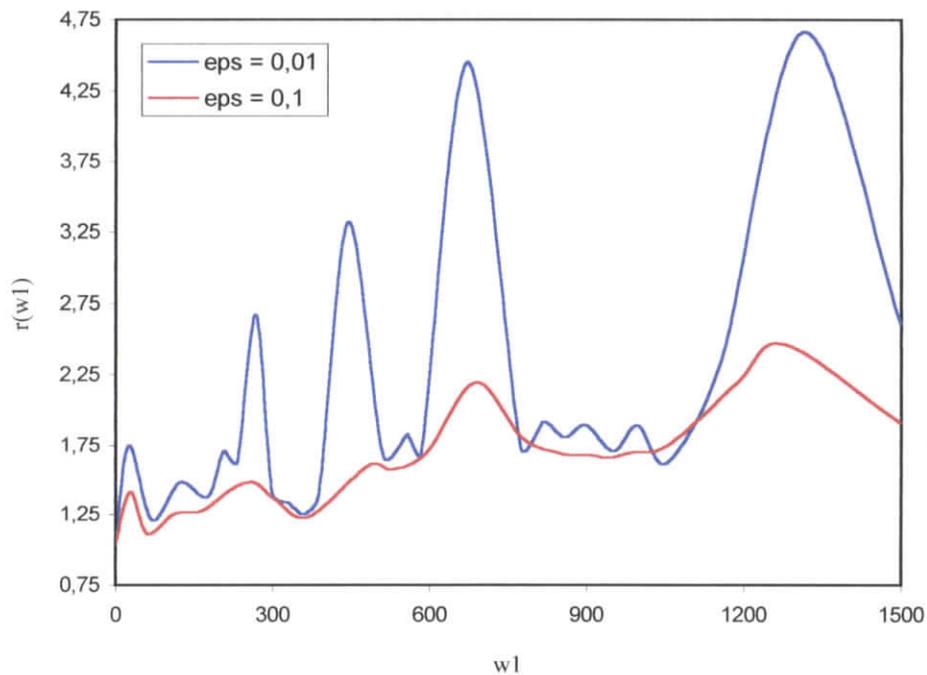


Figure VII.7. Courbes de réponse en Vitesses de rotations pour différents coefficients d'amortissement ($\beta = 0^\circ$).

d. Erreur de transmission

La figure VII.8. montre l'influence de l'angle d'hélice sur l'erreur de transmission. Une augmentation du rapport de conduite total assure une continuité meilleure de l'erreur de transmission.

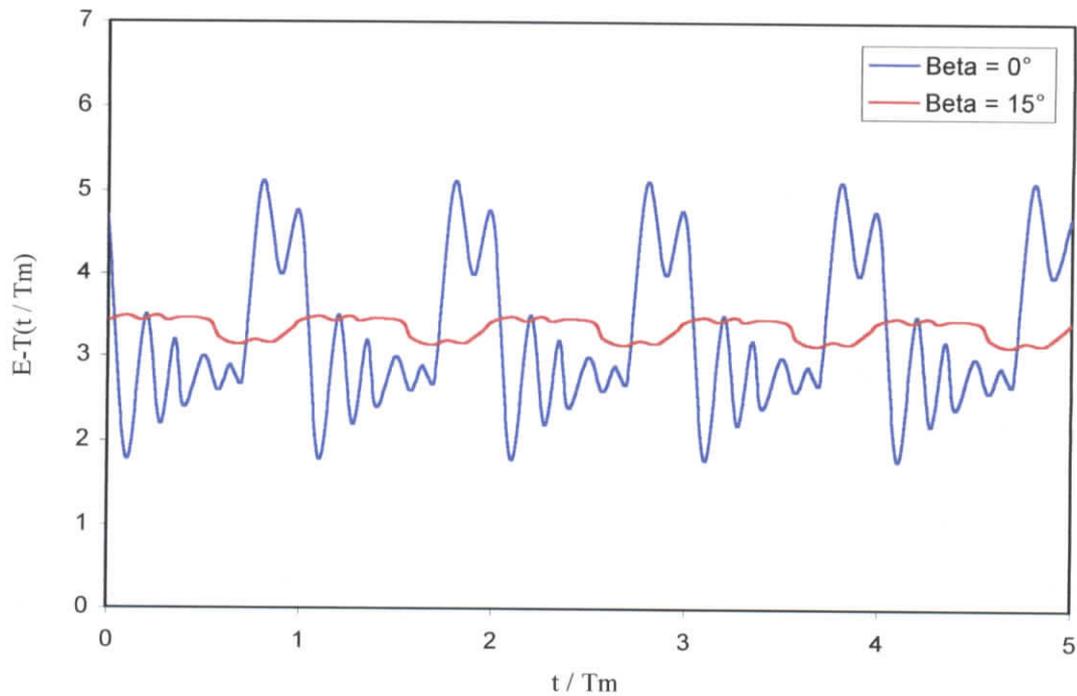


Figure VII.8. Variation de l'erreur de transmission pour différents angles d'hélice ($\beta = 0^\circ$ et 15°).

VII. 4. Analyse des résultats avec erreurs géométriques

VII. 4. 1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux écarts géométriques dans le sens de la largeur de la denture : écarts axiaux ou écarts dans le plan d'action.

En ce qui concerne la direction selon la développante de cercle, les profils de denture sont supposés parfaits. Les premiers points d'engrènement sur le plan d'action sont les points définis par la cinématique des corps rigides.

On propose, dans cette étude, l'analyse de l'influence de certains types d'écarts axiaux sur le comportement dynamique du réducteur. Les écarts choisis sont des modifications de forme réalistes conformes aux ordres de grandeurs rencontrés dans l'industrie de l'engrenage [25]. Nous traitons les types d'écarts de forme suivants, (voir figure VII.9. et VII.10.) :

- Défaut d'angle d'hélice,
- Erreurs axiales sous forme d'ondulations sinusoïdales.

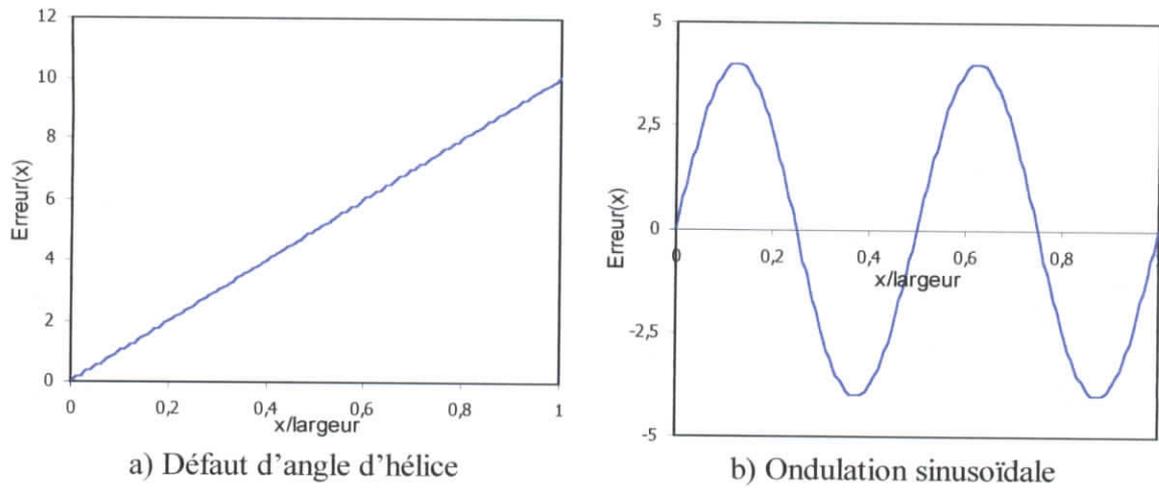


Figure VII.9. Différents types d'écarts de forme

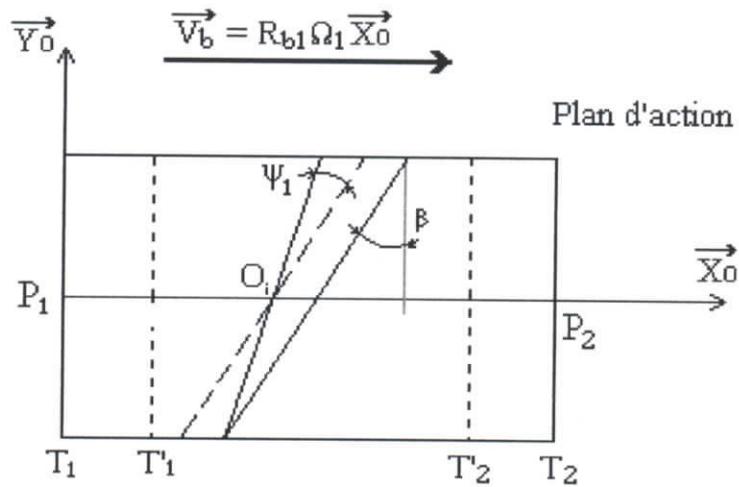


Figure VII.10. Défaut d'angle d'hélice ψ_1

VII. 4. 2. Etude analytique

Dans le cas, avec des écarts de forme axiale, le système différentiel associé à notre modèle (non amorti) est de la forme :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K(t,x)] \{X\} = \{F_0\} + \{F_1(t,x)\} \quad (\text{non linéaire}) \quad (\text{VII.12})$$

Dans le cas où la longueur de contact est maximale, la matrice raideur ne dépend pas des variables d'état. Le système différentiel devient linéaire. Il est de la forme :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K(t)] \{X\} = \{F_0\} + \{F_1(t)\} \quad (\text{VII.13})$$

la solution analytique du système différentiel (1) ou (2) est indéterminée. Une solution approchée, dans le cas du système linéaire (2) est recherchée en utilisant la méthode des perturbations [3], (méthode approchée). La solution pour des écarts sous forme d'ondulations sinusoïdales est trouvée sous la forme, (Annexe 3) :

$$\begin{aligned} \{X(t)\} = & \{X_0\} + \sum_i \{X_i\} \sin(i \cdot \omega_m \cdot t) + \{Y_i\} \cos(i \cdot \omega_m \cdot t) \\ & + \alpha \left[\sum_j \{\gamma_j\} \cos(j \cdot \omega_m \cdot t) + \{\beta_j\} \sin(j \cdot \omega_m \cdot t) \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.14})$$

Le résultat approché est en concordance avec le résultat numérique. Même si les ondulations sinusoïdales n'interviennent pas directement dans la périodicité de la solution, elles causent des perturbations dans la répartition des harmoniques de pulsations $n\omega_m$ qui constituent la solution (de période T_m).

La figure VII.11. montre que, pour une Vitesse de rotation de 200 rd/s, les ondulations sinusoïdales sur la largeur de la denture, n'a pas d'influence sur le spectre de $X(t)$ dans le cas des engrenages droits. Par contre, pour les engrenages hélicoïdaux, (figure VII.12) et pour la même Vitesse de rotation, le spectre de la réponse $r(t)$ est modifié. De nouvelles harmoniques prennent de l'importance, ($\omega = 4 \omega_m, 5 \omega_m$ et $6 \omega_m$). Une explication possible peut se baser sur le fait que pour les engrenages droits, l'entrée des couples de dents en contact est instantanée par contre pour les engrenages hélicoïdaux, on a une entrée progressive des ondulations sinusoïdales qui affectent, dans ce cas, le déroulement de l'engrènement.

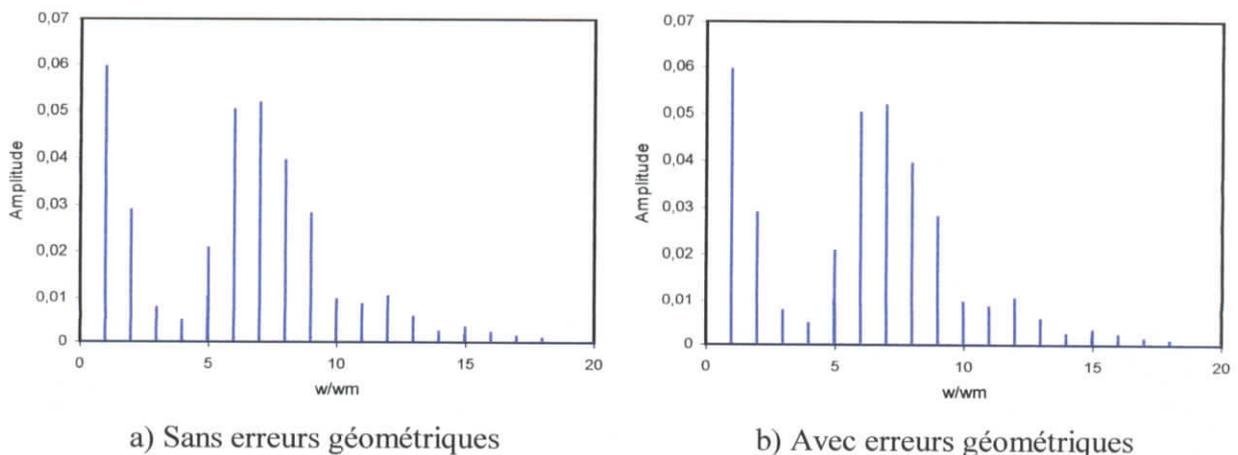


Figure VII. 11. Influence des ondulations sinusoïdales sur le spectre fréquentiel de la réponse $r(t)$ dans le cas des engrenages droits ($\beta=0^\circ$)

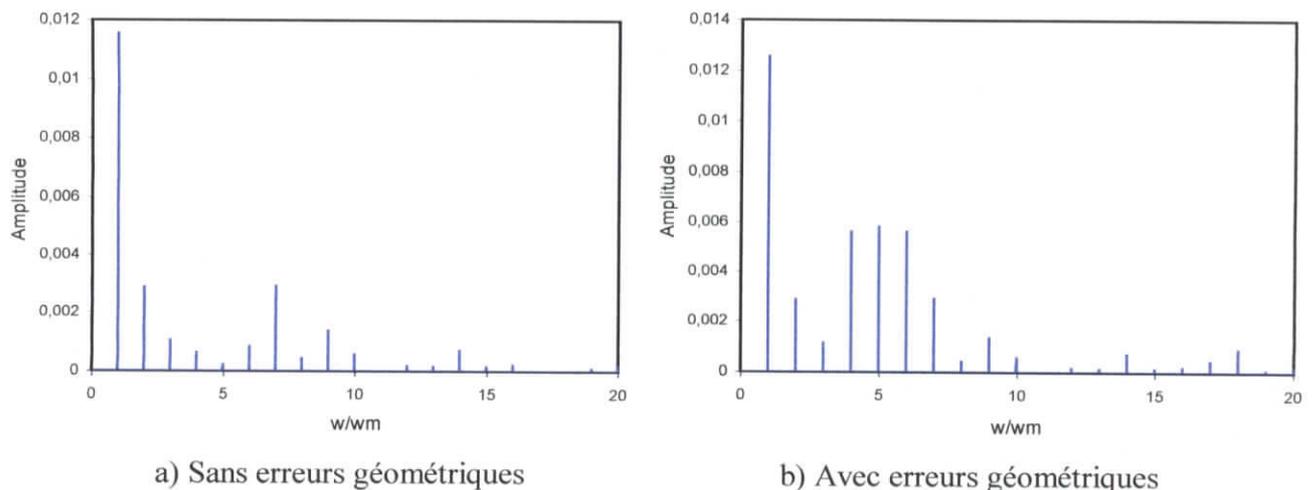


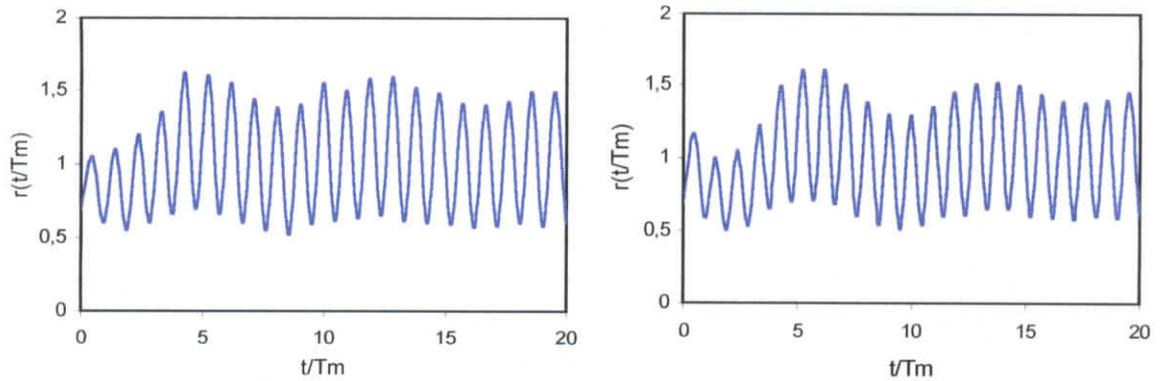
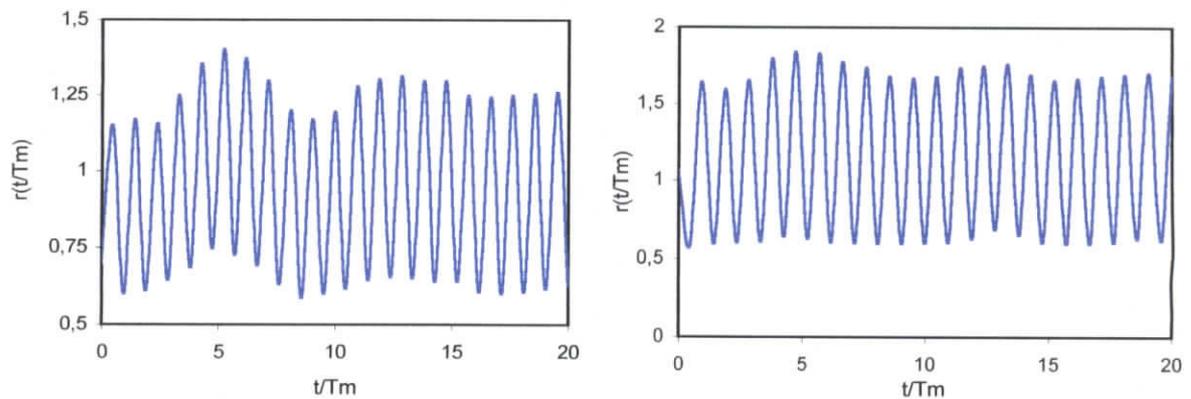
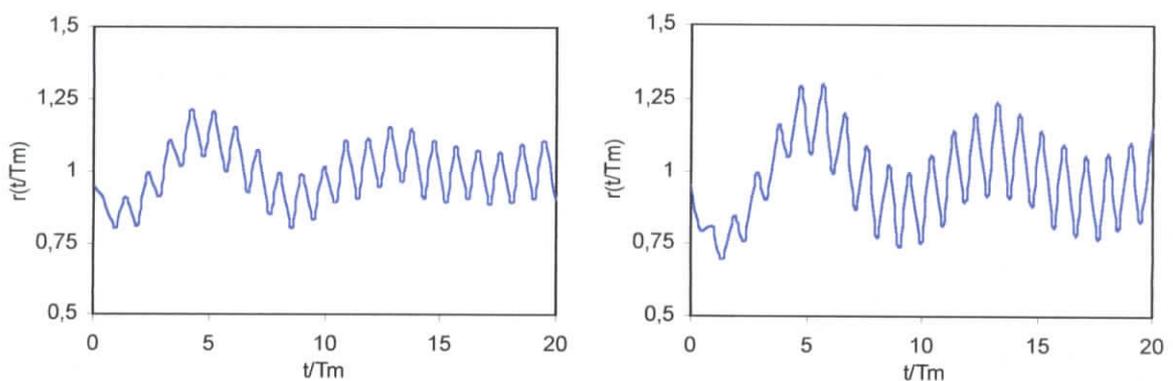
Figure VII. 12. Influence des ondulations sinusoïdales sur le spectre fréquentiel de la réponse $r(t)$ dans le cas des engrenages hélicoïdaux ($\beta=15^\circ$)

VII. 4. 3. Analyse des résultats numériques

Les résultats présentés dans les figures VII.13, VII.14, VII.15 et VII.16, nous permettent d'analyser les effets négatifs ou positifs des différents écarts de forme sur l'effort dynamique.

On constate d'après ces résultats que les engrenages droits supportent mieux les erreurs axiales. Globalement le coefficient dynamique $r(t)$ diminue en passant des engrenages droits aux engrenages hélicoïdaux. Une explication possible serait la modification du rapport de conduite. Pour les engrenages droits, le rapport de conduite n'est pas affecté pour les écarts de forme, par contre, pour les engrenages hélicoïdaux les écarts géométriques le réduisent sensiblement. La largeur de denture intervenant dans le calcul du rapport de conduite, cette réduction est d'autant plus importante que l'angle d'hélice soit plus grand.

Relativement aux ondulations sinusoïdales les défauts d'angle d'hélice sont plus dangereux. Car l'aire de contact est plus réduite et la charge n'est pas symétriquement répartie, donc il aura une apparition d'un moment suivant \vec{Z}_0 . il y a une forte concentration de chargement.

a) Défaut d'angle d'hélice $\psi = 3 \cdot 10^{-4}$ rdb) Défaut d'angle d'hélice $\psi = 5 \cdot 10^{-4}$ rd**Figure VII. 13.** Influence du défaut d'angle d'hélice sur la répartitionDes efforts dynamiques dans le cas des engrenages droits ($\beta=0^\circ$)a) Ondulation sinusoïdale d'amplitude 10μ b) Ondulation sinusoïdale d'amplitude 5μ **Figure VII. 14.** Influence d'ondulation sinusoïdale sur la répartitionDes efforts dynamiques dans le cas des engrenages droits ($\beta=0^\circ$)a) Défaut d'angle d'hélice $\psi = 3 \cdot 10^{-4}$ rdb) Défaut d'angle d'hélice $\psi = 5 \cdot 10^{-4}$ rd**Figure VII. 15.** Influence du défaut d'angle d'hélice sur la répartitionDes efforts dynamiques dans le cas des engrenages hélicoïdaux ($\beta=15^\circ$)

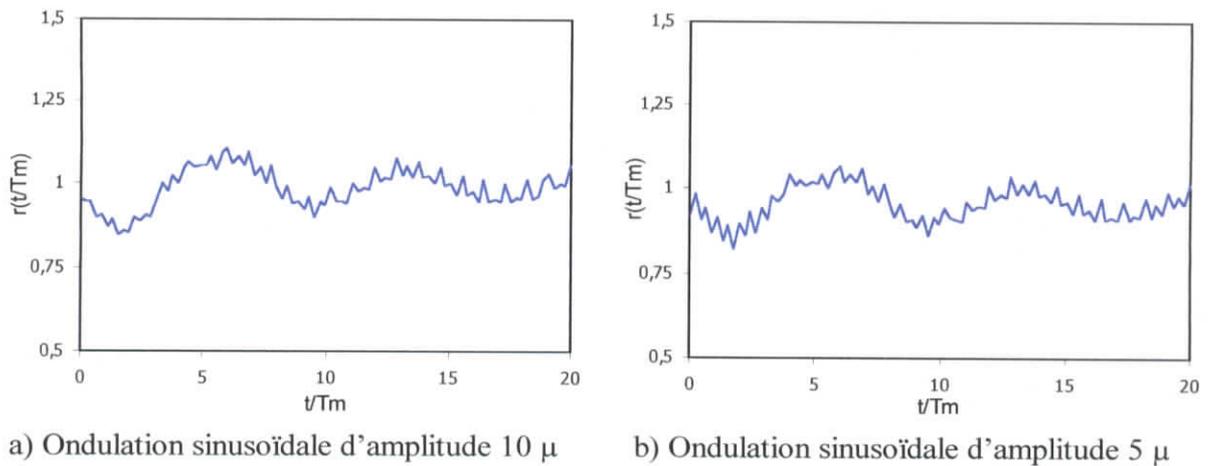
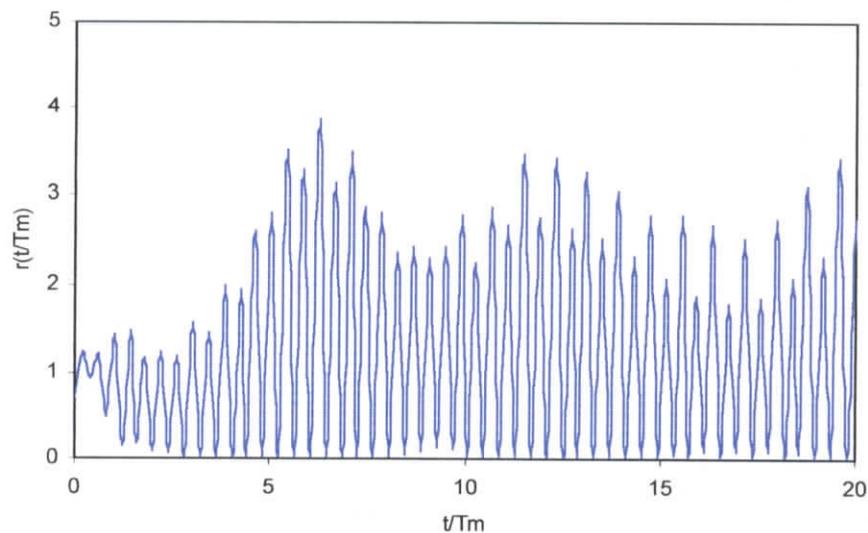


Figure VII. 16. Influence d'ondulation sinusoïdale sur la répartition
Des efforts dynamiques dans le cas des engrenages hélicoïdaux ($\beta=15^\circ$)

Dans certaines conditions de fonctionnement, (couple faible, amplitude de l'écart importante et/ou voisinage d'une vitesse critique), l'aire de contact peut être instantanément nulle (voir Figure VII.17). Dans ce cas, la roue et le pignon ne sont plus en contact. Le retour en contact s'accompagne d'un impact, on est en présence d'un fonctionnement avec succession de chocs.



a) Défaut d'angle d'hélice $\psi = 5 \cdot 10^{-4}$ rd

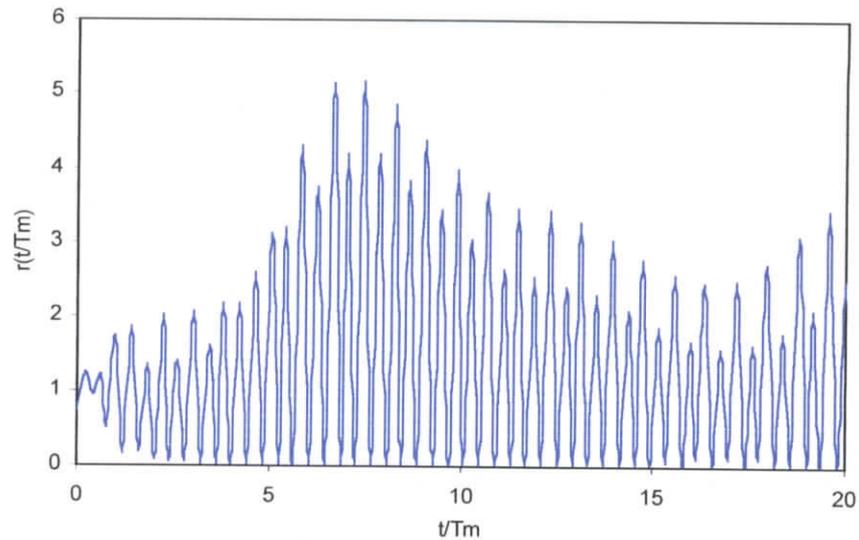
b) Ondulation sinusoïdale d'amplitude 5 μ

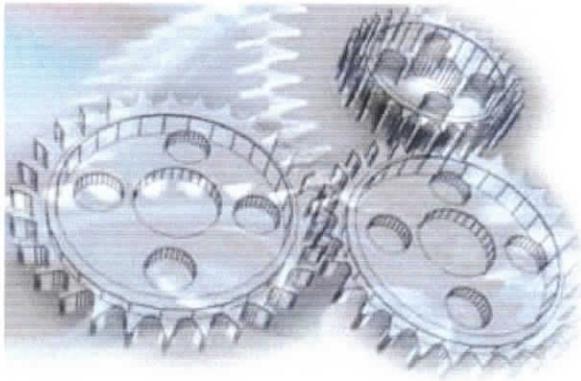
Figure VII. 17. Perte de contact total, fonctionnement avec une succession d'impacts dans le cas des engrenages droits ($\beta=0^\circ$)
 ($\Omega_1 = 800$ rd/s $C_e = 200$ Nm $Eps = 0,1$)

VII. 5. Conclusion

Les résultats obtenus nous permettent de faire les remarques suivantes :

- Pour les défauts d'angle d'hélice, on constate que la distribution de charge sur un couple de dents est concentrée sur l'une des extrémités. La dent n'étant que partiellement chargée ce qui entraîne une réduction du rapport de conduite suite à la diminution de la largeur de contact.
- Pour des erreurs sous forme d'ondulations sinusoïdales, on retient celles conduisent à la réduction de l'aire de contact et du rapport de conduite, pour les engrenages hélicoïdaux.

Dans les deux cas ces écarts induisent des perturbations supplémentaires sur le réducteur, modifiant ainsi le spectre fréquentiel de la réponse de l'effort dynamique et augmentant les efforts dynamiques sur les dentures.



CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le présent travail a consisté en le développement d'un modèle mathématique relatif au comportement dynamique des engrenages par application des équations de Lagrange au réducteur à engrenages, à axes parallèles, dans le cas parfait et avec des erreurs géométriques.

Ce modèle nous a permis à développer un code de calcul qui détermine les différents paramètres géométriques du réducteur, et calcule les paramètres qui influent sur le comportement dynamique de réducteur.

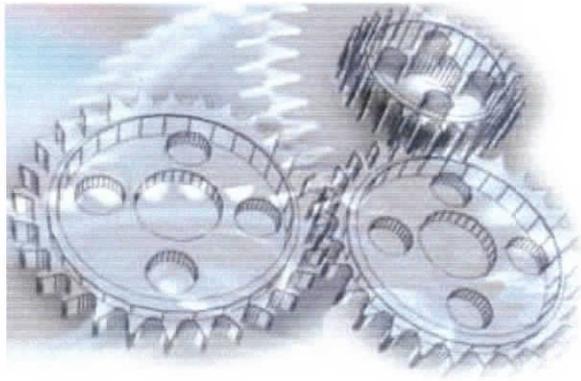
La comparaison de nos résultats à ceux obtenus par ailleurs, a montrée une bonne corrélation.

On a obtenu des résultats dans les cas de couple faible, d'amplitude de l'écart importante et/ou au voisinage d'une vitesse critique qui montre qu'il y a perte de contact suivie par des chocs, ce qui est en accord avec les constatations expérimentales.

Dans le cadre de ce travail, nous avons considéré l'hypothèse que le contact s'effectue dans le plan d'action de l'engrènement. Celle-ci est acceptable sous réserve que les dents soient corrigées, ce qui limite l'application de notre modèle dans le cas où les dents ne seraient pas corrigées ou dans le cas où il y aurait un supplément de correction.

Comme complément à ce travail, il serait judicieux d'approfondir cette étude en introduisant l'effet des différentes corrections de profil des dents sur le comportement dynamique d'un réducteur. On peut envisager aussi d'étendre ce modèle au cas des engrenages larges en prenant en considération la flexion de ces derniers.

Les résultats théoriques obtenus doivent être vérifiés expérimentalement, dans ce contexte une simulation doit être envisagée.



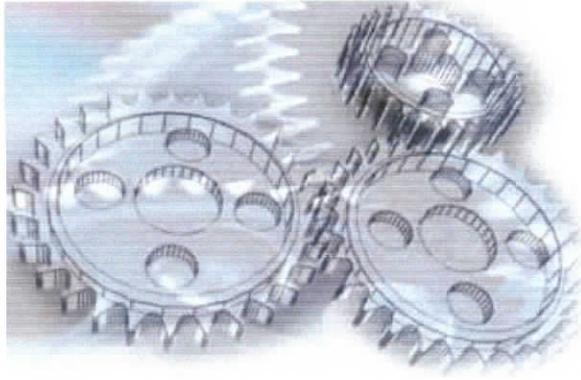
BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **H. WINTER**, "The measurement of situat^e strains at gear teeth. Influence of fillet radius on stress and tooth strength", Journal of Engineering for Industry, Trans. A.S.M.E., feb. 1974.
- [2] **M.A. JACOBSON**, "Bending stresses in spur gear teeth : proposed new design factors based on photo-elastic investigation", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, n°169, 1955.
- [3] **H. BELHANECHÉ**, "Contribution à l'étude du comportement statique et vibratoire des engrenages à axes parallèles à denture droite par speckle et holographie", Thèse de docteur-ingénieur, I.N.S.A. Lyon 1988.
- [4] **M.H. WALKER**, "Flexion des dents et modification du profil", Société d'Etudes de l'Industrie de l'Engrenage, n°11, 1938, p.24-41.
- [5] **C. WEBER**, "The deformation of loaded gears and the effect of their load – carrying capacity", Part I, department of science and industrial research, sponsored research (Germany), n°3, London 1949.
- [6] **A.Y. ATTIA**, "Deflection of spur gear, cut in thin rims", Journal of Engineering for Industry, Trans. A.S.M.E., nov. 1964, p.333 – 342.
- [7] **R. DESAILLY**, "Mesure des déplacements par méthodes optiques, synthèse des limitations", Journées extensométrie, G.A.M.C., C.A.S.T. Lyon 1985, p.1-25.
- [8] **C.A. SCIAMMARELLA, J.A. GILBERT**, "A holographic Moiré technique to obtain separate patterns for components of displacement", Exp. Mech., juin 1976, p.215-220.
- [9] **K.L. WANG, H.S. CHENG**, "Numerical solution of the dynamic load, film thickness and surface temperatures in spur gears", Part I : analysis, Part II : results, Journal of Mechanical Design, Trans. A.S.M.E., vol. 103, n°1, 1981, p.177-193.
- [10] **L. WILCOX, W. COLMAN**, "Application of finite elements to the analysis of gear tooth stresses", Journal of Engineering for Industry, 1973.
- [11] **Ph. VELEX**, "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles", Thèse de Doctorat, I.N.S.A. Lyon, 1988.
- [12] **Ph. SAINOT**, "Analyse du contacte entre denture d'engrenages cylindriques de réducteurs", Thèse de doctorat, I.N.S.A. de Lyon, 1989.

- [13] **M. MAATAR**, "Analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages", Thèse de D.E.A., I.N.S.A. de Lyon, juillet 1991.
- [14] **J.J. COY, C.H.U. CHIH-CHAO**, "A method of selecting grid size to account for Hertz deformation in finite element analysis of spur gears", *Journal of Mechanical Design*, Trans. A.S.M.E., vol. 104, 1982, p.759-766.
- [15] **A.A. OLAKOREDE**, "Répartition de charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques, application de la méthode des prismes finis en CAO", Thèse de doctorat, I.N.S.A. Lyon 1990.
- [16] **R.W. CORNELL**, "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth", *Journal of Mechanical Design*, Trans. A.S.M.E., vol. 103, n°2, 1981, p.447-459.
- [17] **T. TOBE, M. KATO, K. INOUE**, "Bending of stub cantilever plate and some applications to strength of gear teeth", *Journal of Mechanical Design*, Trans. A.S.M.E., 1981.
- [18] **A. CARDOU, G.V. TORDION**, "Numerical implementation of complex potential for gear tooth stress analysis", *Journal of Mechanical Design*, Trans. A.S.M.E., vol.103, 1981.
- [19] **I. KAZUNORI, H. FUJIO**, "Dynamic behavior of heavy-loaded spur gears", *Journal of Engineering for Industry*, may 1974.
- [20] **G. CHABERT, T. DANG, R. MATHIS**, "An evaluation of stresses and deflection of gear teeth under strain", *Journal of Engineering for Industry*, feb 1974, p.85-92.
- [21] **D. DOWSON, G.R. HIGGINSON**, "A numerical solution to the hylastohydrodynamic problem", *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1959, p.6-15.
- [22] **C.A. BREBIA, M.A. WALKER**, "Boundary element technique in engineering", New York, Newnes, Butterworths, 1980.
- [23] **K. SATORI, J.F. RIGAL, D. PLAY**, "Modèle global de comportement dynamique pour la conception des boîtes de transmission", Lab. C.A.S.M., I.N.S.A. de Lyon.
- [24] **F. KÜÇÜKAY**, "Dynamic behaviour of high speed gears", Institute for Mechanics, Technical University of Munich, 1984.
- [25] **D. REMOND**, "Inventaire des sources et des causes d'excitation dans les transmissions par engrenages", Chapitre I, Publications CETIM, 1991, p.1-38.
- [26] **Ph. VELEX**, "Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages", Chapitre II, Publications CETIM, 1991, p.39-93.

-
- [27] **G. HENRIOT**, "Traité théorique et pratique des engrenages", Tome I, Paris, Dunod 1979.
- [28] **H. BELHANECHÉ**, "Cours de mécanique analytique", 3^{ème} année génie mécanique, E.N.P, 1999-2000.
- [29] **G. COFFIGNAL**, "Mécanique non-linéaire et éléments finis", fascicule 7, E.N.S.A.M. Paris, 24 mars 2002.
- [30] **K. ENGØ, A. MARTHINSEN**, "Application of geometric integration to some mechanical problems", Norwegian research laboratory, march 1997.



ANNEXES

PARAMETRES GEOMETRIQUES DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A PROFILS EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

1. Engrenages cylindriques à denture droite

En chaque point de l'engrènement, les géométries et les vitesses de surfaces de dentures ainsi que la charge transmise varient. Il a été montré que pour des engrenages cylindriques droits à axes parallèles, on peut représenter un point donné de l'engrènement en régime permanent par le contact entre deux cylindres d'axes parallèles munis des mêmes charges, géométries et vitesses. (figure 1.)

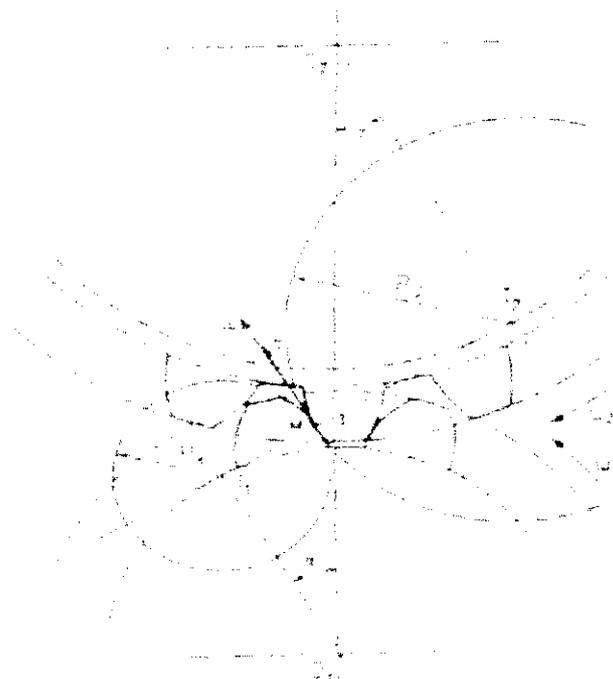


Figure 1. Simulation d'engrènement

Cette simulation est utilisée pour une analyse point par point des paramètres de contact au cours de l'engrènement, à partir de connaissance en ces points des paramètres constituant l'état mécanique.

Généralement, on choisit cinq points :

- T''_1 : Premier point de l'engrènement en pied de pignon avec deux couples de dents en prise ;
- T''_1 : Point de transition entre pied de pignon et primitif, de deux à un couple de dents en prise, la charge normale étant supposée transmise par un seul couple de dents ;
- I : Point de contact confondu avec le primitif ;
- T''_2 : Point de transition entre primitif et sommet de pignon, de un à deux couples de dents en prise, ici encore la charge normale est supposée transmise par un seul couple de dents ;
- T'_2 : Dernier point de l'engrènement au sommet du pignon avec deux couples de dents en prise.

En chaque point du profil, il faut définir :

- Les rayons de courbure des deux dents antagonistes au point de contact : R_1, R_2 .
- Les vitesses respectives des deux massifs : U_1, U_2 .
- La charge par unité de longueur, normale en contact : w/L (figure 2.).

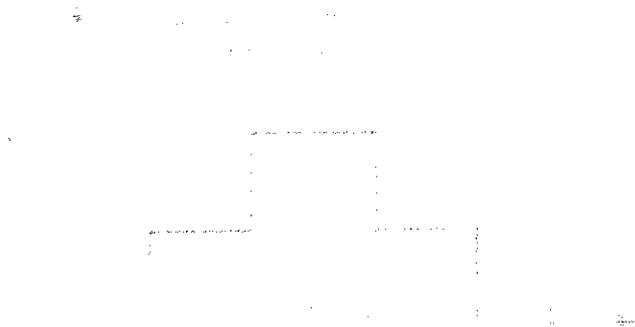


Figure 2. Diagramme de charge

Pour cela, il faut connaître les caractéristiques de taillage et de fonctionnement de l'engrenage, qui sont les suivants :

- Le nombre de dents Z_1, Z_2 ;
- Les coefficients de déports x_1, x_2 ;
- L'angle de pression de taillage α_0 ;
- Le module de taillage M_0 ;

- La largeur de l'engrenage le plus étroit L ;
- Les coefficients des saillies des dents y_{a1}, y_{a2} ;
- Les coefficients des creux des dents y_{f1}, y_{f2} ;
- La vitesse d'entrée ω_1 .

Les caractéristiques du matériau et du lubrifiant doivent également être connues :

- Les coefficients de Poisson ν_1, ν_2 ;
- Les modules d'Young E_1, E_2 ;
- La viscosité à l'entrée du contact μ ;
- Le coefficient de piézoviscosité α ;
- Le coefficient de frottement f ;
- Les masses volumiques ρ_1, ρ_2 .

Avec ces données, on peut définir :

- Les rayons primitifs nominaux : $r_i = \frac{M_0 Z_i}{2} \quad i = 1,2$
- Les rayons de base : $r_{bi} = r_i \cos(\alpha_0) \quad i = 1,2$
- Les rayons de tête : $r_{ai} = r_i + M_0(x_i + y_{ai}) \quad i = 1,2$
- Le pas de bas : $P_b = \pi M_0 \cos(\alpha_0) \quad i = 1,2$
- L'angle de pression de fonctionnement : $\text{inv}(\alpha') = \text{inv}(\alpha_0) + \frac{2(x_1 + x_2)}{Z_1 + Z_2} \tan(\alpha_0)$
- L'entraxe : $E = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos(\alpha')}$
- Le module de fonctionnement : $M' = M_0 \frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha')}$
- Les rayons primitifs fonctionnement : $r'_i = \frac{M' Z_i}{2} \quad i = 1,2$
- Les longueurs :
$$\begin{cases} T_1 T_2 = \sqrt{E^2 - (r_{b1} + r_{b2})^2} \\ T_1 T'_1 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ T_2 T'_2 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ T'_1 T'_2 = T_1 T_2 - T_1 T'_1 - T_2 T'_2 \end{cases}$$

- Le rapport de conduite : $\varepsilon_\alpha = \frac{T_1 T_2}{P_b}$
- Le module d'Young équivalent : $\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$

On peut calculer les caractéristiques de l'engrènement en $(n+1)$ points du profil. Pour cela, on divise la ligne d'action entre T_1 et T_2 en n segments de longueur $p = \frac{T_1 T_2}{n}$.

On a alors en chaque point :

$$R_1 = T_1 T_1 + ip \quad i=0, n$$

$$R_2 = T_1 T_2 - R_1$$

$$U_1 = R_1 \omega_1$$

$$U_2 = R_2 \omega_2$$

Le rayon de courbure équivalent est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La charge appliquée est déterminée par le diagramme de charge choisie.

Ainsi on peut déterminer :

- L'épaisseur minimale du film fluide (Dowson - Higginson)

$$h_m = 0,98 \alpha^{0,6} E_{eq}^{0,03} \mu^{0,7} (U_1 + U_2)^{0,7} Re_{eq}^{0,43} \left(\frac{W}{L} \right)^{-0,13}$$

- La pression de Hertz au centre du contact

$$P_0 = \frac{2}{\pi a} \left(\frac{W}{L} \right) \quad \text{avec :} \quad a = \left(\frac{8 Re_{eq} (W)}{\pi E_{eq} (L)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Les glissements spécifiques
 - Glissement spécifique par rapport au pignon

$$g_{s1} = \frac{U_1 - U_2}{U_1}$$

- Glissement spécifique par rapport à la roue

$$g_{s2} = \frac{U_1 - U_2}{U_2}$$

- Glissement spécifique absolu

$$g_s = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

2. Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale

Par rapport aux engrenages droits, les engrenages hélicoïdaux ont la particularité d'avoir une charge par unité de longueur qui varie peu pendant l'engrènement. Par contre, au niveau du contact, il faut prendre en compte le fait que les rayons de courbure des dents varient d'une extrémité à une autre de la ligne de contact, bien que leur somme reste constante (figure 3.).

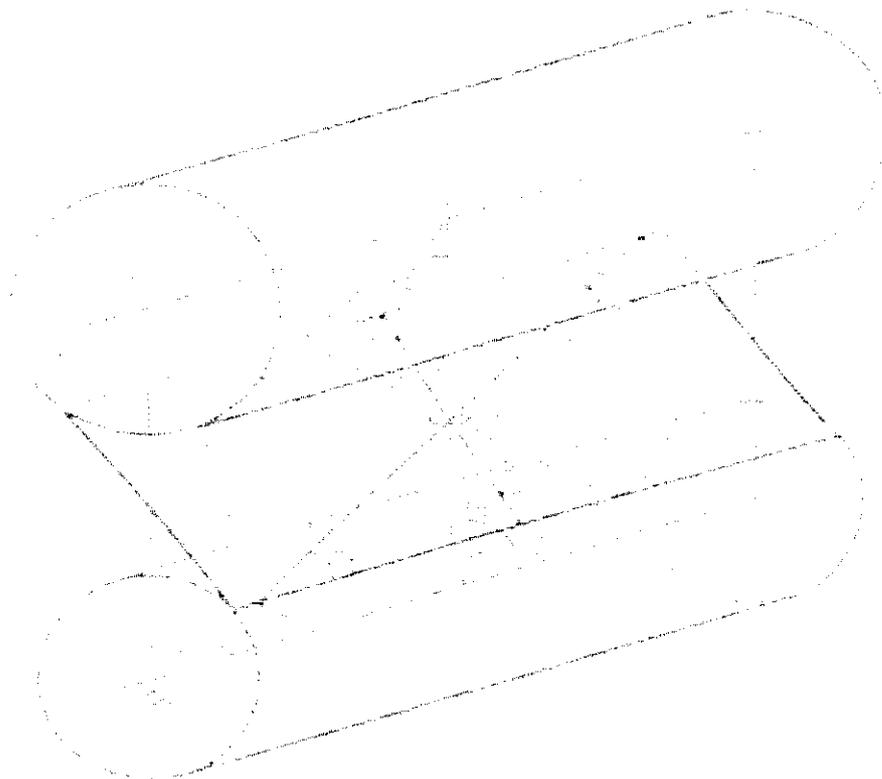


Figure 3. Simulation du contact entre dentures hélicoïdales

Le contact entre deux dents d'engrenage hélicoïdal ne sera donc plus représenté par le contact entre deux cylindres, mais par le contact entre deux cônes de sommets S_1 et S_2 , de même conicité β_b .

En un point M de la ligne de contact défini par ses distances T_1M et T_2M aux axes des cônes, les rayons de courbure de ces cônes sont $(T_1M/\cos \beta_b)$ et $(T_2M/\cos \beta_b)$, les centres de courbure des surfaces étant normaux au contact.

Au voisinage du point M, les deux cônes eux-mêmes peuvent être remplacés par deux cylindres de rayon $R_1 = T_1 M / \cos \beta_b$ et $R_2 = T_2 M / \cos \beta_b$, soumis à une charge par unité de longueur w/L , que l'on peut considérer comme constante.

L est la longueur de la ligne de contact, cette longueur varie légèrement durant l'engrènement.

Pour être dans les conditions les plus défavorables, on prend la longueur minimale qui est :

$$L = \frac{v \cdot T_1 T_2}{\sin(\beta_b)} + \frac{v' \cdot \varepsilon}{\cos(\beta_b)} \quad \text{si } P_x > \varepsilon + \varepsilon' \cotan(\beta_b)$$

$$\text{ou } L = \frac{v \cdot T_1 T_2}{\sin(\beta_b)} + \frac{v' \cdot \varepsilon}{\cos(\beta_b)} + \frac{\varepsilon + \varepsilon' \cotan(\beta_b) - P_x}{\cos(\beta_b)} \quad \text{si } P_x < \varepsilon + \varepsilon' \cotan(\beta_b)$$

avec P_x : Pas axial ;

$v, v', \varepsilon, \varepsilon'$ tels que : $l = v \cdot P_x + \varepsilon$

$$T_1 T_2 = v' \cdot P_{bt} + \varepsilon'$$

P_{bt} : Pas de base apparent

l : Largeur de l'engrenage.

Dans un premier temps, les caractéristiques de l'engrenage sont déterminées dans le plan réel (ou normal) et dans le plan apparent (ou tangentiel). Pour cela, il faut connaître :

- Le nombre de dents Z_1, Z_2 ;
- Les coefficients de déports x_1, x_2 ;
- L'angle de pression normal de taillage α_{n0} ;
- Le module normal de taillage M_{n0} ;
- L'angle d'hélice β_0 ;
- La largeur de l'engrenage l ;
- Les coefficients des saillies des dents y_{a1}, y_{a2} ;
- Les coefficients des creux des dents y_{f1}, y_{f2} ;
- La vitesse d'entrée ω_1 ;
- La puissance transmise Q ;
- Les coefficients de Poisson ν_1, ν_2 ;
- Les modules d'Young E_1, E_2 ;

- La viscosité à l'entrée du contact μ ;
- Le coefficient de piézoviscosité α ;
- Le coefficient de frottement f ;
- Les masses volumiques ρ_1, ρ_2 .

On peut alors calculer :

- L'angle de pression apparent de taillage : $\alpha_{t0} = \arctan\left(\frac{\tan(\alpha_{n0})}{\cos(\beta_0)}\right)$
- L'angle d'hélice de base : $\beta_b = \arctan(\tan(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_{t0}))$
- Le module apparent de taillage : $M_{t0} = \frac{M_{n0}}{\cos(\beta_0)}$
- Les rayons primitifs nominaux : $r_i = \frac{M_{t0} Z_i}{2} \quad i = 1, 2$
- Les rayons de base : $r_{bi} = r_i \cos(\alpha_{t0}) \quad i = 1, 2$
- Les rayons de tête : $r_{ai} = r_i + M_{n0}(x_i + y_{ai}) \quad i = 1, 2$
- Le pas de base réel : $P_{bn} = \pi M_{n0} \cos(\alpha_{n0})$
- Le pas de bas apparent : $P_{bt} = \pi M_{t0} \cos(\alpha_{t0})$
- Le pas axial : $P_x = \frac{P_{bn}}{\sin(\beta_b)}$
- L'angle de pression de fonctionnement : $\text{inv}(\alpha'_t) = \text{inv}(\alpha_{t0}) + \frac{2(x_1 + x_2)}{(Z_1 + Z_2)} \tan(\alpha_{t0})$
- L'entraxe : $E = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos(\alpha'_t)}$
- L'angle d'hélice de fonctionnement : $\beta' = \arctan\left(\frac{\tan(\beta_b)}{\cos(\alpha'_t)}\right)$
- L'angle de pression normal de fonctionnement : $\alpha'_n = \arctan(\tan(\alpha'_t) \cdot \cos(\beta'))$
- L'entraxe de fonctionnement : $E' = E \frac{\cos(\alpha_{t0})}{\cos(\alpha'_t)}$
- Le module réel de fonctionnement : $M'_n = \frac{2 \cdot E'}{Z_1 + Z_2} \cos(\beta_0)$
- Le module apparent de fonctionnement : $M'_t = \frac{M'_n}{\cos(\beta')}$
- Les rayons primitifs de fonctionnement : $r'_i = \frac{M'_t Z_i}{2} \quad i = 1, 2$

- Les longueurs :
$$\begin{cases} T_1 T_2 = \sqrt{E^2 - (r_{b1} + r_{b2})^2} \\ T_1 T'_1 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ T_2 T'_2 = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ T'_1 T'_2 = T_1 T_2 - T_1 T'_1 - T_2 T'_2 \end{cases}$$
- Le rapport de conduite :
$$\varepsilon_\alpha = \frac{T'_1 T'_2}{P_{bt}}$$
- Le rapport de recouvrement :
$$\varepsilon_\beta = \frac{l \cdot \tan(\beta')}{\pi M'_1}$$
- Le rapport de conduite total :
$$\varepsilon_I = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$
- Le module d'Young équivalent :
$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$
- La longueur minimale de la ligne de contact : L

On peut déterminer les caractéristiques de l'engrènement en (n+1) points du profil.

Pour cela, on divise la ligne d'action entre T'_1 et T'_2 en n segments de longueur $p = \frac{T'_1 T'_2}{n}$.

On a alors en chaque point : $R_i = (T_1 T'_1 + ip) / \cos(\beta_b)$ $i = 0, n$

$$R_2 = T_1 T'_2 / \cos(\beta_b) \quad R_1$$

$$U_1 = R_1 \omega_1 \cos(\beta_b)$$

$$U_2 = R_2 \omega_2 \cos(\beta_b)$$

Le rayon de courbure équivalent est :
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La charge appliquée est déterminée par le diagramme de charge choisie.

Ainsi on peut déterminer :

- L'épaisseur minimale du film fluide (Dowson - Higginson)

$$h_m = 0,98 \alpha^{0,6} E_{eq}^{0,03} \mu^{0,7} (U_1 + U_2)^{0,7} Re_{eq}^{0,43} \left(\frac{W}{L} \right)^{-0,13}$$

- La pression de Hertz au centre du contact

$$P_0 = \frac{2}{\pi a} \left(\frac{W}{L} \right) \quad \text{avec :} \quad a = \left(\frac{8}{\pi} \frac{Re_{eq}(W)}{E_{eq}(L)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Les glissements spécifiques

- Glissement spécifique par rapport au pignon

$$g_{s1} = \frac{U_1 - U_2}{U_1}$$

- Glissement spécifique par rapport à la roue

$$g_{s2} = \frac{U_1 - U_2}{U_2}$$

- Glissement spécifique absolu

$$g_s = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

RESOLUTION PAS A PAS, SCHEMA IMPLICITE H.H.T.

1. Schéma implicite de Newmark

Soit le système du second ordre :

$$\ddot{Y} = f(Y, \dot{Y}, t)$$

Le schéma implicite de Newmark [11] est construit on faisant un développement de Taylor aux vecteurs déplacement et vitesse à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$, on obtient ainsi :

$$\{Y_1\} = \{Y_0\} + \Delta t \{\dot{Y}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{Y}_0\} + \frac{1}{6} (6\beta) \Delta t^3 \{\ddot{Y}_0\} + O(\Delta t^4)$$

$$\{\dot{Y}_1\} = \{\dot{Y}_0\} + \Delta t \{\ddot{Y}_0\} + \frac{1}{2} (2\gamma) \Delta t^2 \{\ddot{Y}_0\} + O(\Delta t^3)$$

β et γ sont des facteurs de pondération utilisés dans le but de stabiliser la solution.

On posant :

$$\{\ddot{Y}_0\} = \frac{\{\dot{Y}_1\} - \{\dot{Y}_0\}}{\Delta t}$$

L'algorithme de Newmark s'écrit :

$$\{Y_1\} = \{Y_0\} + \Delta t \{\dot{Y}_0\} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{Y}_0\} + \beta \{\ddot{Y}_1\} \right] \quad (1)$$

$$\{\dot{Y}_1\} = \{\dot{Y}_0\} + \Delta t \left[(1-\gamma) \{\ddot{Y}_0\} + \gamma \{\ddot{Y}_1\} \right] \quad (2)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable pour :

$$\gamma \geq 0,5 \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2$$

Mais ne possède aucune propriété d'amortissement des erreurs.

Les utilisations classiques sont :

- $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$, ce qui correspond à une approximation linéaire de l'accélération sur Δt .

- $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$, ce qui correspond à une approximation constante de l'accélération qui est égale à la valeur moyenne de l'accélération sur Δt . Il s'agit de la méthode des trapèzes.

2. Schéma implicite de Hilber – Hugues - Taylor (H.H.T.)

Ce schéma vient pour améliorer le schéma précédent en introduisant un amortissement numérique des erreurs. Ce dernier s'écrit :

$$\{Y_1\} = \{Y_0\} + \Delta t \{\dot{Y}_0\} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{Y}_0\} + \beta \{\ddot{Y}_1\} \right] \quad (3)$$

$$\{\dot{Y}_1\} = \{\dot{Y}_0\} + \Delta t \left[(1-\gamma) \{\ddot{Y}_0\} + \gamma \{\ddot{Y}_1\} \right] \quad (4)$$

$$\ddot{Y}_1 = (1+\alpha) f(Y_1, \dot{Y}_1, t) - \alpha f(Y_0, \dot{Y}_0, t) \quad (5)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2 \quad (7)$$

α doit être choisie entre 0 et -0,33 de façon à assurer un amortissement suffisant et à conserver la stabilité du schéma, l'amortissement optimal est obtenu pour $\alpha = -0,25$.

3. Application du schéma implicite HHT à notre système

Nous avons :

$$\{X_1\} = \{X_0\} + \Delta t \{\dot{X}_0\} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{X}_0\} + \beta \{\ddot{X}_1\} \right] \quad (8)$$

$$\{\dot{X}_1\} = \{\dot{X}_0\} + \Delta t \left[(1-\gamma) \{\ddot{X}_0\} + \gamma \{\ddot{X}_1\} \right] \quad (9)$$

$$\ddot{X}_1 = (1+\alpha) f(X_1, \dot{X}_1, t) - \alpha f(X_0, \dot{X}_0, t) \quad (10)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2$$

$$\alpha = -0,25 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{3}{4} \quad \beta = \frac{25}{64}$$

Si $\alpha = 0$, on retrouve le schéma de Newmark.

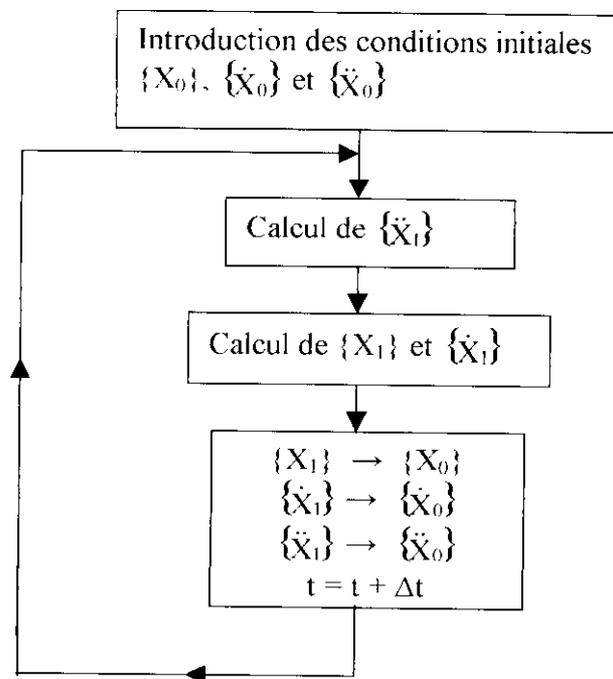
L'étude dynamique conduit à une équation différentielle de la forme suivante :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{F(t)\} \quad (11)$$

à l'instant $t = t_1$, on remplace $\{X_1\}$ et $\{\dot{X}_1\}$ par leurs valeurs, il vient :

$$\begin{aligned} & \left[[M] + \gamma \cdot (1+\alpha) \cdot \Delta t \cdot [C] + \beta \cdot (1+\alpha) \cdot \Delta t^2 \cdot [K] \right] \{\ddot{X}_1\} = - (1+\alpha) \left\{ [C] \left(\{\dot{X}_0\} + \Delta t \cdot (1-\gamma) \cdot \{\ddot{X}_0\} \right) \right. \\ & \left. + [K] \left(\{X_0\} + \Delta t \cdot \{\dot{X}_0\} + \Delta t^2 \cdot (0.5 - \beta) \cdot \{\ddot{X}_0\} \right) - \{F(t)\} \right\} + \alpha \left\{ [C] \{\dot{X}_0\} + [K] \{X_0\} - \{F(t_0)\} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Connaissant $\{\ddot{X}_1\}$, on calcule $\{X_1\}$ et $\{\dot{X}_1\}$ d'après (8) et (9).



Organigramme de l'algorithme de la méthode HHT

METHODE DES PERTURBATIONS

Soit le système différentiel non amorti associé à notre modèle :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K(t, X)] \{X\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

Dans le cas où le système serait linéaire, la matrice raideur ne dépend pas des variables d'état, le système différentiel s'écrit :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K(t)] \{X\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

$$[K(t)] = [K_C] + k(t) [K_e] = [K_C] + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \quad (3)$$

où $k(t)$: raideur d'engrènement,

k_m : raideur d'engrènement moyenne,

$\alpha = \frac{k_e}{k_m}$: coefficient sans dimension $\ll 1$.

$$F(t) = \{F_0\} + \{F_1(t)\} + \{F_2(t)\} \quad (4)$$

$\{F_0\}$: vecteur des efforts extérieurs,

$\{F_1(t)\}$: représente un effort supplémentaire causé par les écarts de forme,

$\{F_2(t)\}$: représente un effort supplémentaire causé par l'erreur cinématique.

Le système différentiel associé à notre modèle peut s'écrire :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_C] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = \{F_0\} + \{F_1(t)\} + \{F_2(t)\} \quad (5)$$

Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 : Sans écarts de forme

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_C] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = \{F_0\} \quad (6)$$

$\phi(t)$ est périodique de période T_m (période d'engrènement), donc elle admette un développement en série de Fourier.

$$\phi(t) = \sum_{n=0} a_n \cos(n \omega_m t) + b_n \sin(n \omega_m t) \quad (7)$$

Il a été prouvé que les équations différentielles à coefficients périodiques n'admettent pas de solutions analytiques exactes. Une solution approchée peut être envisagée en utilisant des méthodes approchées telle que la méthode des perturbations [3]. En formulant l'hypothèse d'un α petit devant l'unité, ce qui est le cas des engrenages, il est possible de décomposer la solution de l'équation en une partie principale et une somme de perturbations de poids décroissants, soit :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha \{X_1\} + \alpha^2 \{X_2\} + \dots$$

On se limite à l'ordre 1 :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha \{X_1\} \quad (8)$$

En introduisant (8) en (6), il vient :

$$\begin{aligned} & [M] \{\ddot{X}_0\} + \alpha [M] \{\ddot{X}_1\} + [K_C] \{X_0\} + \alpha [K_C] \{X_1\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X_0\} \\ & + \alpha (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X_1\} = \{F_0\} \\ & \left[[M] \{\ddot{X}_0\} + ([K_C] + [K_m]) \{X_0\} \right] + \alpha \left[[M] \{\ddot{X}_1\} + ([K_C] + [K_m]) \{X_1\} + \phi(t) [K_m] \{X_0\} \right] \\ & + \alpha^2 \left[\phi(t) [K_m] \{X_1\} \right] = \{F_0\} \end{aligned}$$

soit : $[K_g] = [K_C] + [K_m]$

En négligeant les termes en α^2 , (α petit), en identifiant les termes de même ordre, il vient :

- Ordre α^0 :

$$[M] \{\ddot{X}_0\} + [K_g] \{X_0\} = \{F_0\} \quad (9)$$

La solution en régime permanent de cette équation coïncide avec la solution statique pour une raideur moyenne $\{X_{st}\}$.

- Ordre α^1 :

$$[M] \{\ddot{X}_1\} + [K_g] \{X_1\} = [K_m] \phi(t) \{X_{st}\}$$

Posons : $\{A\} = [K_m] \{X_{st}\}$

$$[M] \{\ddot{X}_1\} + [K_g] \{X_1\} = \{A\} \sum_{n=0} a_n \cos(n \omega_m t) + b_n \sin(n \omega_m t) \quad (10)$$

On revient à une équation différentielle à excitation périodique dont on connaît la solution :

$$\{X_i(t)\} = \sum_n \{A_n\} \cos(n \omega_m t + \phi_n) + \{B_n\} \sin(n \omega_m t + \phi_n)$$

La solution générale en régime permanent sera :

$$\{X(t)\} = \{X_{st}\} + \alpha \sum_n \{A_n\} \cos(n \omega_m t + \phi_n) + \{B_n\} \sin(n \omega_m t + \phi_n) \quad (11)$$

Si $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ sont les fréquences propres du système. On constate la possibilité de résonance en $\omega_m = \Omega_i/n, i = 1, 2, 3, \dots$

Cas 2 : Avec écarts de forme suivant la largeur des dents seulement

Le système différentiel devient, en restant dans le cas linéaire :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_C] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = \{F_0\} + \{F_1\} \quad (12)$$

En utilisant le théorème de superposition, il suffit de résoudre le système suivant :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_C] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = \{F_1\} \quad (13)$$

$$\{F_1(t)\} = \sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij} \{V_1\}$$

$$\sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij} = \int_0^{L_c} k(x) \delta e(x) dx$$

- Cas d'un défaut d'angle d'hélice :

$$k(x) = k_0$$

$$\delta e(x) = e_0 x$$

$$\sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij} = \int_0^{L_c(t)} k_0 e_0 x dx = \frac{k_0 e_0}{2} L_c^2(t)$$

$$L_c(t) = L_0 + \sum_{i=1} a_i \cos(i \omega_m t) + b_i \sin(i \omega_m t)$$

Utilisons encore le théorème de superposition. Il suffit de chercher la réponse à une harmonique de $\sin(i \omega_m t)$.

$$\{F_{1i}\} = \frac{k_0 e_0}{2} a_i^2 \sin^2(i \omega_m t) \{V_1\} = \frac{k_0 e_0}{2} a_i^2 (1 - \cos(2 i \omega_m t)) \{V_1\} \quad (14)$$

(13) devient :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_C] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = (1 - \cos(2 i \omega_m t)) \{V_1\}$$

La méthode des perturbations limitée à l'ordre 1 donne :

$$[M] \{\ddot{X}_0\} + [K_g] \{X_0\} = \{V_i\} - \{V_i\} \cos(2 i \omega_m t) \quad (15)$$

$$[M] \{\ddot{X}_1\} + [K_g] \{X_1\} = -\phi(t) \{X_0\} \quad (16)$$

La solution de (15) est :

$$\begin{aligned} \{X_0\} &= \{X_c\} - \{X_i\} \cos(2 i \omega_m t) \\ -\phi(t) \{X_0\} &= -\phi(t) \{X_c\} + \phi(t) \{X_i\} \cos(2 i \omega_m t) \end{aligned}$$

$\phi(t)$ est périodique de période T_m d'où $-\phi(t) \{X_c\}$ peut s'écrire :

$$-\phi(t) \{X_c\} = \sum_i \{C_i\} \cos(i \omega_m t) + \{D_i\} \sin(i \omega_m t)$$

De même $-\phi(t) \cos(2 i \omega_m t) \{X_i\}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -\phi(t) \cos(2 i \omega_m t) \{X_i\} &= \sum_j \{\alpha_j\} \sin[(2i+j) \omega_m t] + \{\beta_j\} \sin[(2i-j) \omega_m t] \\ &+ \{\gamma_j\} \cos[(2i+j) \omega_m t] + \{\lambda_j\} \cos[(2i-j) \omega_m t] \end{aligned}$$

La solution générale de (12) est de la forme :

$$\{X(t)\} = \{X_c\} - \{X_i\} \cos(2 i \omega_m t) + \alpha \sum_{ij} \{h_{ij}\} \sin[(2i \pm j) \omega_m t] + \{g_{ij}\} \cos[(2i \pm j) \omega_m t] \quad (17)$$

- Cas d'un écart sous forme d'ondulation sinusoïdale :

$$k(x) = k_0$$

$$\delta e(x) = e_0 \sin(\omega_x x)$$

$$\sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij} = \int_0^{L_c(t)} k_0 e_0 \sin(\omega_x x) dx = \frac{k_0 e_0}{\omega_x} (1 - \cos(\omega_x L_c(t)))$$

Le théorème de superposition nous permet de chercher uniquement la réponse à l'harmonique de $\sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij}$, $f(t) = \sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij}$ est périodique de période T_m , ($f(t+T_m) = f(t)$) car $L_c(t)$ est périodique (T_m). Il suffit de résoudre le système suivant :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K_c] \{X\} + (1 + \alpha \phi(t)) [K_m] \{X\} = \{V_i\} \sin(i \omega_m t) \quad (18)$$

La méthode de perturbation limitée à l'ordre 1 donne :

$$[M] \{\ddot{X}_0\} + [K_g] \{X_0\} = \{V_i\} \sin(i \omega_m t) \quad (19)$$

$$[M] \{\ddot{X}_i\} + [K_g] \{X_i\} = - \phi(t) \{X_0\} \quad (20)$$

La solution de (19) est :

$$\{X_0\} = \{X_i\} \sin(i \omega_m t) - \phi(t) \{X_0\} = \sum_j \{C_j\} \sin[(i \pm j) \omega_m t] + \{D_j\} \cos[(i \pm j) \omega_m t]$$

La solution générale de (12) est :

$$\{X(t)\} = \{X_0\} + \sum_i \{H_i\} \sin(i \omega_m t) + \{G_i\} \cos(i \omega_m t) + \alpha \sum_j \{\lambda_j\} \cos(j \omega_m t) + \{\gamma_j\} \sin(j \omega_m t)$$