

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**D.E.R: Génie Electrique et informatique**

**Option: AUTOMATIQUE.**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Projet de fin d'études**  
**Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état**  
**en Automatique**



**Commande des Systèmes en Cascade par**  
**la Méthode de Lyapunov ,**  
**Appliquée aux Systèmes Physiques.**

**Proposé et dirigé par :**

**M H. CHEKIREB**  
**M M. TADJINE**

**Etudié par :**

**M L.MEZENNER**

**Promotion : septembre 2000**

**E.N.P 10, Avenue Hassen-Badi, B.P.182 EL HARRACH, ALGER**

*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*D.E.R: Génie Electrique et informatique*

*Option: AUTOMATIQUE.*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Projet de fin d'études**  
*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Automatique*

**Thème**

***Commande des Systèmes en Cascade par  
la Méthode de Lyapunov ,  
Appliquée aux Systèmes Physiques.***

***Proposé et dirigé par :***

***M' H. CHEKIREB  
M' M. TADJINE***

***Etudié par :***

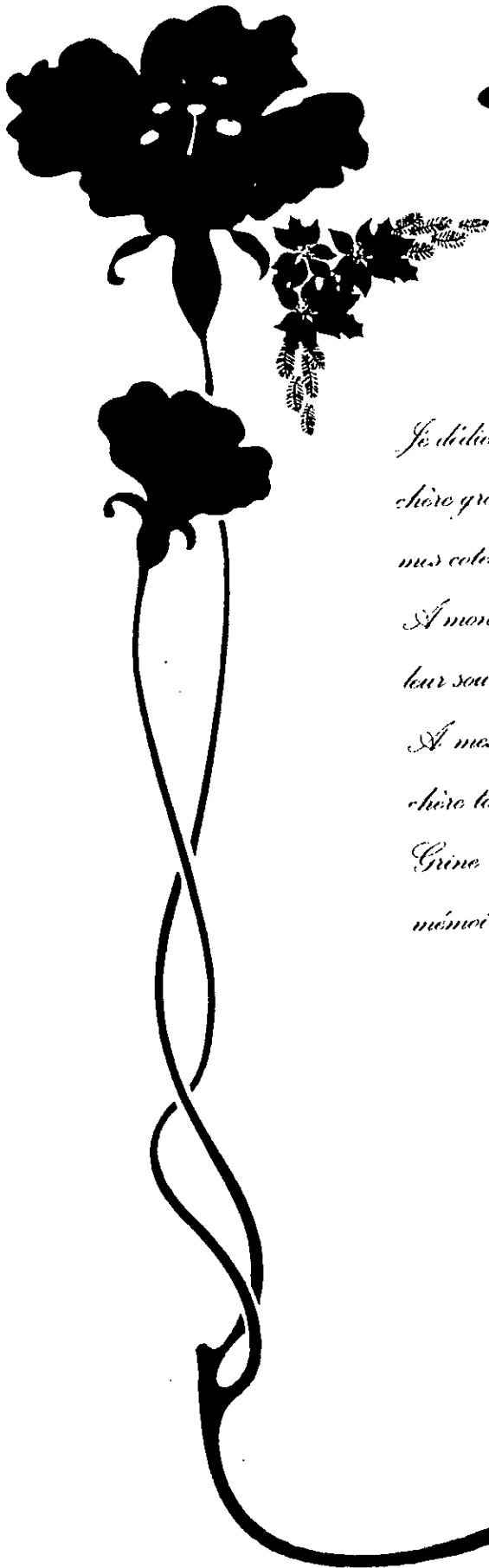
***M' L.MEZENNER***

***Promotion: septembre 2000***

***E.N.P 10, Avenue Hassen-Badi, B.P.182 EL HARRACH, ALGER***

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique






*Véhicules*

*Je dédie ce travail à ma très chère mère, et ma très chère grand mère (D. Mouda), qui ont été toujours à mes côtés*

*À mon cher père, et mes chers frères et sœurs pour leur soutien moral.*

*À mes chers oncles (Hocine et Amar), et ma chère tante (Saïda), sans jamais oublier la famille Gine Saïdi, et la famille Mezennor, et à la mémoire de notre défunt Sofiane.*





### Remerciements

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mes promoteurs Mr H. Chokrob et Mr M. Tadjeo, pour toutes leur aide et orientations précieuses, avec beaucoup de sympathie et de gentillesse.

Je remercie les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

A tous mes amis que j'ai connus pendant les années de mes études.

A ceux qui m'ont aidé de loin ou de près pour la réalisation de ce projet.


A la promotion d'Automatique de l'année 2000, le groupe inséparable.

A mes amis de longue date de Dhah et Polytech.

A mes amis de l'équipe de sport de l'École.

A tous ceux qui me sont chers

Sans jamais oublier ma chère mère, et ma chère grand mère, mon père, mes frères mes sœurs, mes oncles et mes tantes.





المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*À celles, qui sont mes symboles idéaux  
de l'amour, de la patience et du sacrifice,  
À ma très chère mère, et ma très chère  
grand mère, sans elles rien ne serait  
pareil...*



# Sommaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## Introductions générale

---

### Chapitre I: généralités sur la stabilisation des systèmes non linéaire et position du problème.

---

I-1- Points d'équilibre.....	1
I-2- Stabilité et stabilité asymptotique au sens de Lyapunov.....	2
I-2-1-Stabilité au sens de Lyapunov.....	2
I-2-2-Stabilité asymptotique en sens de Lyapunov .....	3
I-2-3-Système exponentiellement stable.....	3
I-3- Stabilité locale et globale.....	3
I-4-Analyse de la stabilité par Lyapunov.....	4
I-4-1-Méthode indirecte ou de Linéarisation.....	5
I-4-2-Méthode directe de Lyapunov.....	7
I-5-Synthèse de la loi de commande par Lyapunov.....	8
I-11-Position de problème.....	9
I-12-Etude de systèmes en cascades en monovariabiles.....	9
I-13-Extention aux cas multivariabiles.....	10
Conclusion.....	11

### Chapitre II: cas de suspension active e voiture.

---

Introduction.....	12
II-1-Modèle de suspension passive.....	13
II-2-simulation et interprétation.....	15
II-3-Modèle d'une suspension active.....	18
II-4-synthèse de loi de commande.....	19

II-5-Imulation et interprétation.....	23
Conclusion.....	32

### *Chapitre III: Système biologique.*

Introduction.....	33
III-1-Situation de problème.....	34
III-2-Modèle dynamique de bioréacteur.....	34
III-3-La dynamique du chémostat.....	37
III-4-Facteurs influençants le système (la croissance).....	38
III-5-Equation de modèle étudié.....	39
III-6-Changement de variable.....	40
III-7-Interprétation a vide.....	41
III-8- Commande du bioréacteur.....	42
III-9-Mise en œuvre de la commande.....	44
III-10-Résultats de simulation et Interprétation.....	47
Conclusion .....	58

### *Chapitre IV: Réacteur nucléaire de type PWR.*

Introduction.....	59
IV-1-déscription d'un réacteur nucléaire.....	60
IV-2-Modèle du réacteur nucléaire.....	62
IV-2-1-Modèle Neutronique.....	62
IV-2-2-Equation cinétiques.....	66
IV-2-3-Modèle thermique.....	67
IV-3-Simulation en boucle ouvert.....	73
IV-4-Mise en œuvre de la commande.....	75
IV-5-Simulation et interprétation.....	78
Conclusion.....	86



*Conclusion générale.*

---

*Annexe A:*

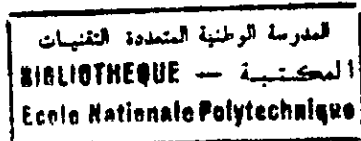
*Annexe B:*

*Annexe C:*

---

*Référence bibliographiques.*

# Introduction Générale



L'avènement de nouvelles techniques a fait apparaître au cours des dernières décennies la mise en œuvre industrielle de plus en plus importante de nouveaux systèmes et procédés. Le recours à des méthodes performantes de surveillance et de contrôle, en vue d'une automatisation de ces systèmes, est ainsi devenu une nécessité. Par ailleurs, c'est pour assurer de meilleures performances aux objectifs désirés que ces nouvelles techniques ont été développées.

Ce sont les travaux de " *Cauchy* " qui ont été à l'origine de l'étude des systèmes linéaires et c'est au nom du français " *Henry Poincaré* " qu'il faut associer les méthodes fondamentales d'analyse non linéaire sans oublier le mathématicien russe " *A.M. Lyapunov* ", fondateur de la théorie de la stabilité dans son ouvrage « Le problème général de la stabilité de mouvement -The general problem of motion stability -1882». [8]

Vers les années 50, l'ingénieur était conscient que la majorité des systèmes étaient non linéaires mais ils ne disposaient que des méthodes d'analyse et de synthèse linéaires. C'est partant de ces insuffisances dans la théorie que la recherche dans l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires a connu un grand développement ces der grâce aux mathématiciens déjà cités. [4]

Ces dernières années, la recherche dans la synthèse des systèmes non linéaire se fait entre autre par l'étude de différentes classes de systèmes et en particulier celles qui recouvraient la modélisation de la plus large classe possible de systèmes physiques. En particulier les systèmes en cascade sont représentatifs d'une large catégorie de systèmes physiques. Un cas simple de système en cascade est celui pour lequel l'entrée apparaît sur un premier sous-système et sa sortie agit comme entrée pour le deuxième sous-système. De nombreux exemples de systèmes physiques en cascade peuvent être trouvés dont ceux traités dans ce mémoire.

L'objectif de cette thèse consiste en l'étude, la conception, l'analyse et la mise en œuvre de lois de commandes pour assure une bonne poursuite de la trajectoire en considérant différents systèmes linéaires et non linéaires en cascade. On a pris des exemples physique différents : réacteur biologique, réacteur nucléaire et suspension active. Les résultats obtenus pour chaque système sont étudiés de façon détaillée.

Ce mémoire est divisé en quatre parties :

Dans le premier chapitre, on présente les méthodes d'analyse de la stabilité et de synthèse des systèmes non linéaires avec une vue sur la méthode de *Lyapunov* directe, indirecte ou de linéarisation.

Dans le second chapitre, c'est le cas de la suspension active d'un véhicule (constituant un système linéaire en cascade) qui est traité en considérant la théorie de *Lyapunov*. La commande est appliquée avec et sans test de robustesse et on étudie également les performance du réglage.

Dans la troisième chapitre, un second exemple de système en cascade qui est étudié, mais cette fois, son modèle est non linéaire. Il s'agit d'un réacteur biologique pour lequel on effectue la même étude que pour le système précédent.

Dans le quatrième chapitre, un nouvel exemple de système non linéaire en cascade est traité. On considère cette fois le cas d'un réacteur nucléaire avec lequel on effectue toujours la même méthode basée sur la théorie de *Lyapunov*.

A decorative border with floral motifs in the corners and a central scrollwork design.

# Chapitre I

## Généralités sur la stabilité des systèmes et position du problème

**Chapitre 1 :****Généralités sur la stabilisation des systèmes non linéaire  
Et position du problème.****I-1- Points d'équilibre :**

La dynamique des systèmes non linéaires peut être représentée par une équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (I-1)$$

où  $x$  est le vecteur d'état.

$u$  est le vecteur de commande.

$f$  est un champ de vecteur non linéaire et Lipchitzien.

- Si la variable  $t$  apparaît explicitement dans (I-1), le système est dit non autonome, Sinon il est autonome.
- Si le signal de commande  $u = 0$  alors le système est dit libre sinon il est forcé.

Définition : le point  $(x_e, u_e)$  est un point d'équilibre du système (I-1) ssi :

$$0 = f(x_e, u_e, t) \quad \forall t \geq 0 \quad (I-2)$$

**Remarque :**

En général, on suppose que le point d'équilibre est l'origine  $(x_e, u_e) = (0, 0)$ . Si ce n'est pas le cas, le point d'équilibre  $(x_e, u_e)$  peut être ramené à l'origine par la transformation :

$$z = x - x_e, v = u - u_e$$

Dans ce cas on a :

$$\dot{z} = f(z + x_e, v + u_e, t) \quad \text{avec} \quad f(0,0,t) = 0$$

### ***I-2-Stabilité et stabilité asymptotique au sens de Lyapunov .[4] [5]***

On dit qu'un système est stable si ,déplacé de sa position d'équilibre , il tend à y revenir.

Et instable ,s'il tend à s'en écarter d'avantage.

#### ***I-2-1-Stabilité au sens de Lyapunov. .***

Soit le système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t), & \forall t \\ f(0,t) &= 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

Soit aussi le point d'équilibre  $x_e = 0$  tq:  $\forall t \quad f(0,t) = 0$ .

Alors le point d'équilibre est dit stable au sens de *Lyapunov* si :

$$\forall t_0, \forall \varepsilon, \exists \eta, \text{ tq: } \|x(t)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0 \quad (1-4)$$

C'est a dire : l'origine d'un système est (L- Stable) ssi une faible perturbation dans les conditions initiales entraîne une faible perturbation de la trajectoire ultérieure.

**I-2-2-Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov.**

Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (I-3) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, s'il est :

1- stable .

2-  $\exists R, t_q : \forall \|x(t_0)\| < R \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$  (I-5).

**Remarque :**

La stabilité asymptotique emporte évidemment la stabilité simple. La stabilité asymptotique est donc une notion plus restrictive que la stabilité tout court.

Tout équilibre asymptotique stable est stable ; mais inversement un équilibre peut être L-stable sans l'être asymptotique.

**I-3-3-Système exponentiellement stable : [6]**

Soit le système suivant (I-5), dont l'origine est exponentiellement stable si :

$$\exists \alpha, \lambda, t_q : \|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (\text{I-6})$$

**I-3-Stabilité locale et globale.**

Pour un système non linéaire, un point d'équilibre possède un domaine de stabilité, habituellement défini comme l'ensemble des conditions initiales  $x(0)$  à partir desquelles valent les équations de la L-stabilité : le système reviendra à sa position d'équilibre après en avoir été écarté d'une manière telle que le point représentant son état soit resté à l'intérieur du dit domaine. Mais s'il a été écarté au de ce domaine, il se rendra à une autre position d'équilibre, ou tendra vers l'infini.

Le problème de stabilité non linéaire comporte ainsi deux étapes :

- Déterminer la stabilité ou l'instabilité de la position d'équilibre : problème de la stabilité locale.
- Si l'équilibre est stable, trouver le domaine de stabilité ; problème de la stabilité globale.

### **Remarque :**

Dire qu'un équilibre possède la stabilité locale, c'est affirmer seulement que la position d'équilibre est stable.

Dire qu'il possède la stabilité globale, c'est affirmer que toutes les valeurs que peuvent prendre les variables appartiennent au domaine de stabilité.

La stabilité globale est dite illimitée si ce domaine comprend tout l'espace.

### **I-4-Analyse de la stabilité par Lyapunov :[7]**

Pour la commande d'un système, la première et importante question qui se pose concernant ces propriétés c'est s'il stable. *Lyapunov* a introduit deux méthodes permettant d'analyser la stabilité du point d'équilibre  $x_e = 0$  sans résoudre l'équation différentielle (I-3) :

- La méthode indirecte : dite aussi la méthode de linéarisation elle s'intéresse à la stabilité locale au tour d'un point d'équilibre.
- La méthode directe : c'est une généralisation du concept d'énergie des systèmes mécaniques. Elle s'intéresse à la stabilité globale.

#### **I-4-1-Méthode indirecte ou de linéarisation .**

La méthode indirecte de *Lyapunov* concerne la stabilité locale des systèmes non linéaires. Considérons le système libre et autonome :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \tag{I-7}$$



avec  $f(x)$  est une fonction continue et dérivable. On s'intéresse à la stabilité du point d'équilibre  $x_e = 0$ .

Le développement de Taylor de  $f(x)$  au voisinage de  $x=0$  s'écrit donc :

$$\dot{x} = f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + f_h(x) \quad (I-8)$$

où  $f_h(x)$  contient les termes de grand ordre et est négligé au voisinage de 0.

Notons que le premier terme du développement du Taylor  $f(0)$  est nul, car le  $x_e = 0$  est un point d'équilibre. Utilisons la matrice constante  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ .

On aura :

$$\dot{x} = Ax \quad (I-9)$$

Cette expression est l'approximation linéaire du système original non linéaire au tour du point d'équilibre  $x_e = 0$ .

- Le résultat de cette méthode peut s'énoncer comme suit :

- Si le système linéarisé (I-9) est asymptotiquement stable alors le systèmes non linéaire est localement asymptotiquement stable.
- Si le système linéarisé (I-9) est stable alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou instabilité du système non linéaire.
- Si le système linéarisé (I-9) est instable alors le système original (I-7) est instable aussi.

**Remarque :**

Pour certains cas, la première méthode de *Lyapunov* est insuffisante, comme l'exemple  
Suivant:

$$\dot{x} = ax + bx^2 \quad (I-10)$$

La Linéarisation de ce système au tour de l'origine ( $x=0$ ) est:

$$\dot{x} = ax$$

pour :

$a < 0 \Rightarrow$  le système asymptotiquement stable.

$a > 0 \Rightarrow$  le système stable.

$a = 0 \Rightarrow$  on ne peut rien dire.

On remarque que pour la troisième propriété, le système (I-10) s'écrit sous la forme:

$$\dot{x} = bx^2.$$

Donc on ne peut rien indiquer sur la stabilité des systèmes non linéaires .

Un autre inconvénients de la première méthode de *Lyapunov*, c'est qu'elle ne renseigne que sur la stabilité de la position d'équilibre ;c'est à dire la stabilité locale et non pas sur les écarts que le système est capable d'encaisser.

**I-4-2-Méthode directe de Lyapunov.[5]**

La philosophie de base de cette méthode est l'extension mathématique de la fondamentale observation physique : 'si l'énergie totale d'un système donné décroît continuellement, alors le système doit éventuellement tendre vers un point d'équilibre'; ce qui permet de tirer des conclusions sur la stabilité du système.

L'idée de cette méthode c'est de construire pour le système une fonction (scalaire dérivable), qui est l'image de l'énergie du système puis de montrer que cette fonction est décroissante au cours

du temps. La principale caractéristique de cette méthode c'est de permettre d'analyser la stabilité d'un système non linéaire sans connaître explicitement les solutions des équations différentielles qui le décrivent.

Pour tester la stabilité d'un système non linéaire, *Lyapunov* a annoncé un théorème qui est le suivant :

Le système autonome :  $\dot{x} = f(x)$  ; a un point d'équilibre  $x=0$  globalement asymptotique stable s'il existe une fonction scalaire réelle  $V(x)$  continue avec une dérivée partielle par rapport au temps  $\dot{V}$  continue ayant les propriétés suivantes :

$$-V(0) = 0$$

$$-V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$- \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \quad (\text{radialement non bornée}) \text{ pour } \|x\| \rightarrow \infty$$

$$-\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

(I-11)

### I-5-Synthèse de loi de commande par Lyapunov .[7]

La méthode de *Lyapunov*, originalement introduite comme un outil d'analyse, est devenue un outil pour la synthèse de lois de commande. Plusieurs techniques sont basées sur l'idée de synthétiser la commande pour qu'une fonction de *Lyapunov* donnée et sa dérivée ont certaines propriétés qui garantissent la convergence vers un point d'équilibre.

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (1-12)$$

Ce système peut se réécrire de manière générale sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) u \quad (1-13)$$

où les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  sont continus. Ici l'objectif est de déterminer une loi de commande  $u(x)$  de telle sorte que le point d'équilibre  $x=0$  soit asymptotiquement stable. Pour ce faire, on va chercher une fonction de *Lyapunov* notée  $V(x, t)$  qui soit définie positive. Ensuite on va déduire la loi de commande  $u(x)$  qui vérifie que la dérivée  $\dot{V}(x, t)$  soit définie négative.

Dans la majorité des problèmes de stabilité des systèmes, on cherche une commande qui garanti la convergence de l'erreur de poursuite  $e = x - x_r$  vers 0 ( $e \rightarrow 0$ ).

Considérons le système (1-1), et soit  $x_r$  l'état de référence de  $x$ , on désire ramener  $x$  vers  $x_r$ . Pour ce la, calculons l'erreur " e".

$$e = x - x_r$$

et on aura :

$$\dot{e} = fe(e, u).$$

Finalement, la fonction de *Lyapunov*  $V(e)$  est calculée de telle sorte que :  $\dot{V}(e) < 0$ .

**I-8-Extension au cas multivariable .**

Par extension du développement précédent aux systèmes multivariables, on peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f_1(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} = f_2(\xi, \eta) \\ y = h(\eta) = \eta \end{cases} \quad 0 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq p \quad (\text{I-15})$$

On faisant varier  $i$  de 1 à  $m$ , et  $j$  1 à  $p$ ; on abouti à les formes matricielles suivantes :

$$f_1 = [f_{1,1} \dots f_{1,p}]^T, f_2 = [f_{2,1} \dots f_{2,m}]^T,$$

$$f_2 = [f_{2,1} \dots f_{2,m}]^T, u = [u_1 \dots u_m]^T,$$

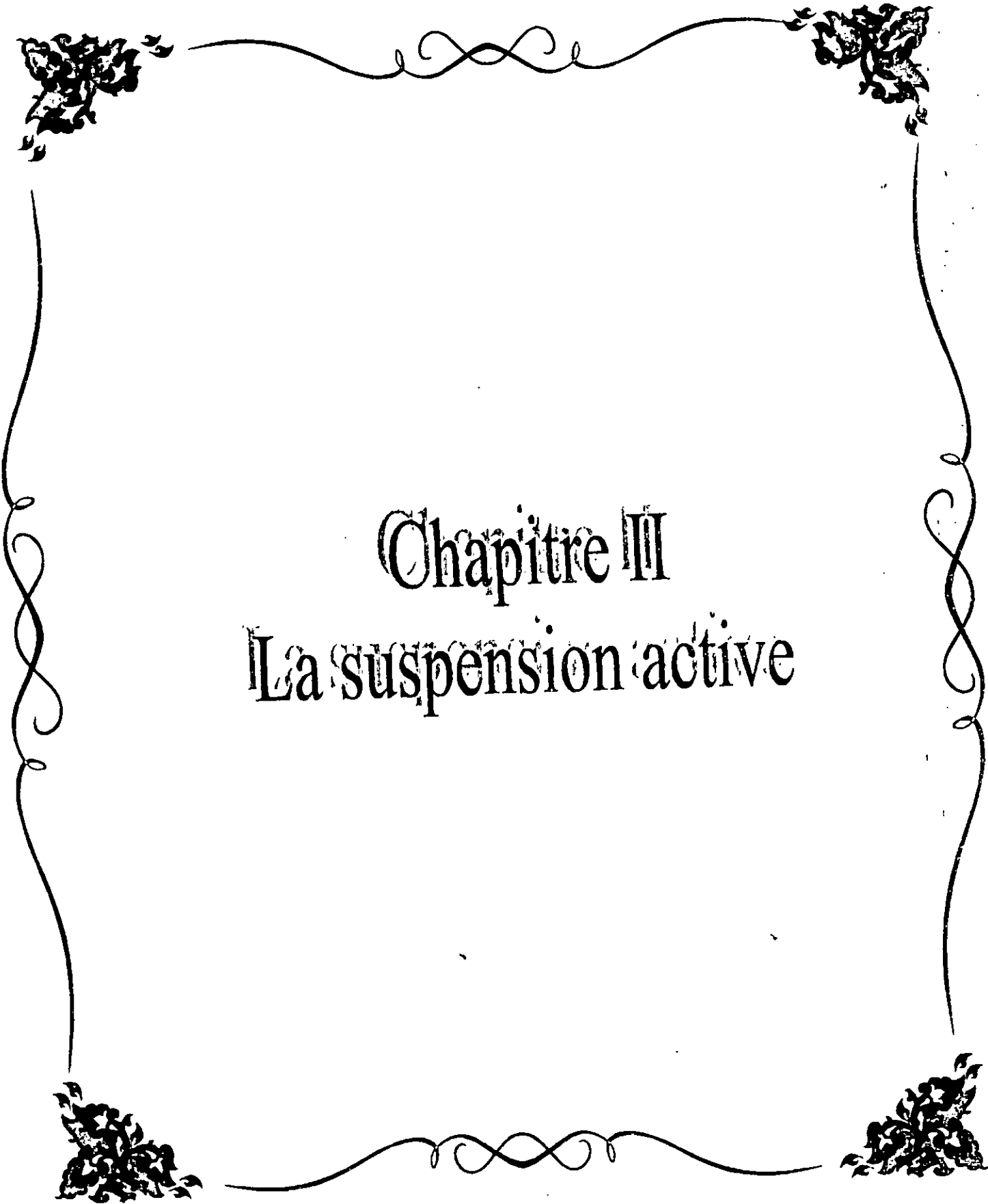
$$g = \begin{bmatrix} g_{1,1} & \dots & g_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{p,1} & \dots & g_{p,m} \end{bmatrix}$$

**Conclusion:**

Dans ce chapitre nous avons vu que la stabilité est une notion fondamentale, pour l'analyse des systèmes et synthèses de leurs commandes. Cette étude est très complexe pour les systèmes non linéaires, alors on introduit les deux méthodes de *Lyapunov* pour déterminer la stabilité des systèmes.

On a aussi posé le problème de trajectoire et synthèse de la commande spécifiquement pour une classe des systèmes en cascade, qui représentent plusieurs systèmes physiques.

Dans les prochains chapitres, on va aborder la synthèse par *Lyapunov* qui nous offre une solution pour commander quelques systèmes physiques non linéaires en cascade (suspension active, système biologique et réacteur nucléaire).



Chapitre III  
La suspension active

## Chapitre II :

### *Cas d'une Suspension de voiture*

#### **Introduction :**[1][2]

La classe des systèmes en cascade est abordée en traitant le cas simple d'un modèle physique linéaire : celui de la suspension active d'un véhicule.

En général, l'objectif idéal d'une suspension de véhicule est d'une part de minimiser l'accélération verticale que subit le passager (confort) en ayant recours à un système simple (souple) et d'autre part de maximiser le contact entre la surface de la route et les roues (sécurité) d'où la nécessité d'un système rigide (raide).

D'un point de vue technique, il est évident que le confort et la sécurité ne peuvent être améliorés sans limitation. N'importe quel système de suspension - lors de sa conception - est limité par une distance ; appelée *espace d'excursion* de la suspension.

Une des approches pour régler le problème de suspension est de fixer les éléments passifs à l'usinage pour des situations moyennes de la route, d'où les performances de confort restent limitées. Et puisque elles abordent les différentes routes de la même manière, alors on aura du gaspillage d'énergie. Une telle classe de suspension est dite " passive".

Une autre classe de suspension, bien plus adaptée et plus performante ( tel que des éléments actifs pourvoyant d'énergie) sont introduits dans la structure générale des systèmes de suspension " actifs ". Dans ce dernier cas, un actionneur génère une force sous la demande d'une stratégie de commande élaborée par micro-ordinateur à partir d'informations mesurées sur la réponse du véhicule, ainsi que les perturbation de la route.



### II-1- Modèle d'une suspension passive.

La suspension qui équipe la plupart des véhicules classiques, en ce moment (même moderne) est réalisée à l'aide d'éléments passifs. Ces éléments sont :

- des amortisseurs visqueux,
- des barres de torsion,
- des ressorts à caractère fixe.

Si on limite l'étude au mode vertical de fonctionnement, et pour le cas d'un quart d'une voiture à quatre roues, le modèle physique représentatif du système avec sa suspension, est donné par la figure (II-1).

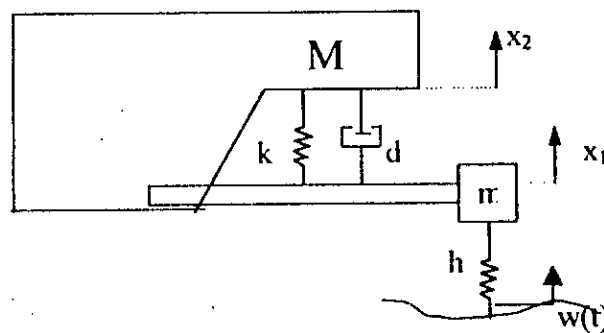


Figure (II-1): Modèle d'un système à suspension passive

En écrivant dans le plan vertical, le bilan des forces agissant sur la suspension, et d'après la loi de Newton on a :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + h(w - x_1). \\ m \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

Avec  $M$  : Le quart de la masse du véhicule.

$m$  : La masse d'une roue du véhicule.

$h$  : La constante de Raideur de la pneumatique de la roue.

$k$  et  $d$  : Raideur et facteur d'amortissement des paramètres intrinsèques.

$x_1$  et  $x_2$  : Vecteurs d'état du système.

$w$  : Forme de la route (irrégularités du sol), elle est considérée comme un bruit blanc intégré [2].

### Remarques :

- On suppose que les deux masses ( $M$  et  $m$ ) sont des corps rigides et leur mouvement est décrit par des variations absolues  $x_1$  et  $x_2$ , à partir de leurs positions d'équilibre respectives.
- Le contact de la roue avec le sol est supposé limité en un point.
- $w(t)$  qui est due aux irrégularités de la route, est supposée avoir de faibles amplitudes.
- Les paramètres  $M$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $h$  et  $d$  sont supposés invariants dans le temps.

En posant  $x_1 = x_3$  et  $x_2 = x_4$ , les équations qui représente le fonctionnement de notre système dans l'espace d'état s'écrivent :

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + D.w(t)$$

$$y(t) = C.x(t)$$

$$\text{Avec : } x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(h+k)}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & \frac{d}{m} \\ \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & \frac{d}{M} & -\frac{d}{M} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

$A$  : La matrice de la dynamique du véhicule

$D$  : Matrice de la perturbation

$C$  : Matrice de sortie ou d'observation

Ainsi, la dynamique d'une suspension passive est représentée par un système linéaire multivariable.

## II-2- Simulations et interprétations

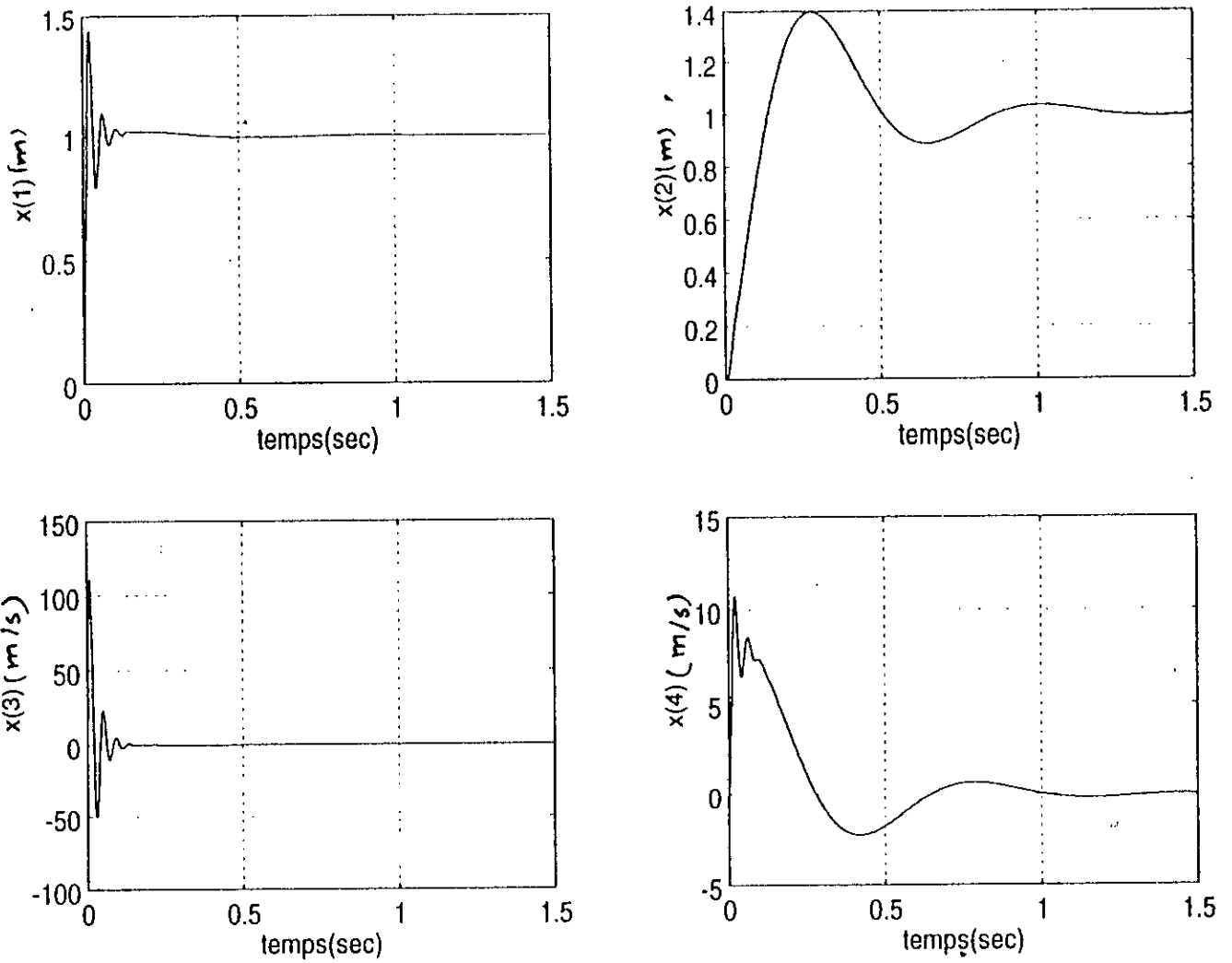
L'exemple traité en simulation concerne un chariot de transport de malade caractérisé par les paramètres suivants:

$$M = 35 \text{ Kg} , \quad m = 3,3 \text{ Kg} , \quad h = 80000 \text{ N/m} , \quad k = 3000 \text{ N/m} , \quad d = 250 \text{ N.s/m} .$$

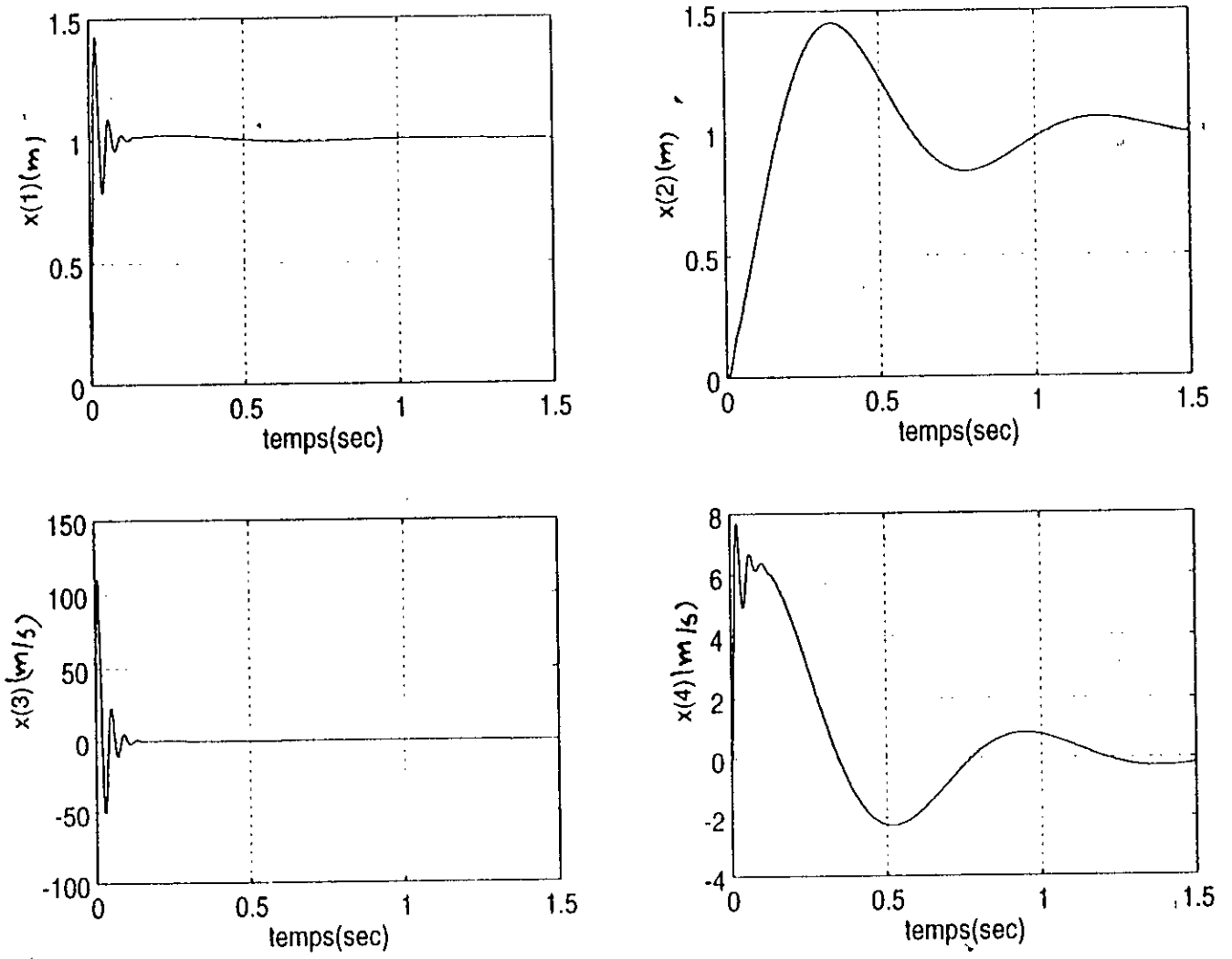
Les essais sont effectués en supposant la perturbation  $w(t)$  comme étant un échelon unité et considérant des conditions initiales nulles sur les variables d'état.

Les résultats de la simulation obtenus sans application de la charge (figure (II-3)) et avec application de la charge (figure (II-4)) que les grandeurs  $(x_1)$  et  $(x_2)$  présentent de fort dépassement (40 à 50 %), de plus la grandeur  $x_1$  est très oscillatoire. Il est à remarquer l'application de la charge ralentit le système par la réponse lente de  $x_2$  d'où la dégradation du confort.

- Après une description de notre système (suspension passive), on a abouti à un modèle linéaire autonome du 2<sup>ème</sup> ordre, avec  $w(t)$  est l'entrée du système (perturbation) qui déstabilise le système mais aussi une entrée de référence pour  $x_1$  et  $x_2$ . Pour ce type de système, on ne peut pas intervenir pour régler ces problèmes (sans commande). Alors l'idée est d'introduire une force active  $U(t)$  par un actionneur.



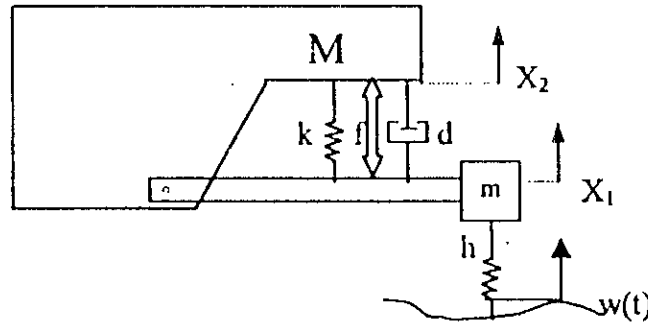
Figure(II-3). Réponses du système de la suspension passive



Figure(II-4). Réponses du système de la suspension passive avec application de une charge  $M=50$  Kg

### II-3- Modèle d'une suspension active :

Une représentation utilisée pour un système de suspension active, est donnée par la figure (II-2).



Figure(II-2) : Modèle d'un système à une suspension active .

Dans ce modèle est introduite une entre extérieure au système a suspension passive pour pouvoir le commander. Alors, est incorporé un actionneur en parallèle avec le système à suspension passive, Figure (II-2). Le système à suspension active est commandé par un microprocesseur en ligne, sur la base d'information recueillies sur le relief du sol (sous la roue) et l'état  $x$  du système.

L'équation qui régit le mouvement linéaire est donnée dans ce cas par :[21]

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + h(w - x_1) - f. \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f. \end{cases}$$

Sous forme d'équations d'état, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B.f(t) + D.w(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

avec :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0. \\ B &= [0, 0, -1/m, 1/M]^T. \end{aligned}$$

$f(t)$  : est un signal de commande.

$A, D, C, x(t)$  et  $w(t)$  sont les mêmes que ceux de la relation (II-2).

Après une description du système de suspension active, on aboutit un système linéaire de deuxième ordre. Donc il nous reste à synthétiser une loi de commande par la méthode de *Lyapunov* et voir quelles sont les performances atteintes.

#### II-4- Synthèse de loi de commande : [3]

La dynamique de suspension active prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{(h+k)}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{d}{m}x_3 + \frac{d}{m}x_4 + \frac{h}{m}w(t) - \frac{1}{m}u_1 \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{M}x_1 - \frac{k}{M}x_2 + \frac{d}{M}x_3 - \frac{d}{M}x_4 + \frac{1}{M}u_2 \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

considérons le changement de variable, qui nous permettant d'écrire (II-4) sous la forme (I-15).

$$\begin{cases} \zeta_1 = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \zeta_1 + \alpha_4 \zeta_2 + \lambda w(t) + \alpha_5 u_1 \\ \zeta_2 = \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2 + \beta_3 \zeta_1 + \beta_4 \zeta_2 + \beta_5 u_1 \\ \eta_1 = \zeta_1 \\ \eta_2 = \zeta_2 \\ y_1 = h_1(\eta) = \eta_1 \\ y_2 = h_2(\eta) = \eta_2 \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

avec :

$$\begin{aligned} (\zeta_1, \zeta_2) &= (x_3, x_4) \\ (\eta_1, \eta_2) &= (x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -\frac{h+k}{m}, \quad \alpha_2 = \frac{k}{m}, \quad \alpha_3 = -\frac{d}{m}, \quad \alpha_4 = \frac{d}{m}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{m}.$$

$$\beta_1 = \frac{k}{M}, \quad \beta_2 = -\frac{k}{M}, \quad \beta_3 = \frac{d}{M}, \quad \beta_4 = -\frac{d}{M}, \quad \beta_5 = \frac{1}{M}.$$

$$\lambda = \frac{h}{m}.$$

Les variables à régler sont les dépassements  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

**Première étape:**

Introduisons les variables d'erreurs :

$$e_1 = \eta_1 - \eta_{d,1}.$$

$$e_2 = \eta_2 - \eta_{d,2}.$$
(II-6)

le but est de converger ces erreurs vers zéros.

On a :

$$e_1 = \eta_1 - y_{d,1} = \zeta_1 - \eta_{d,1}.$$

$$e_2 = \eta_2 - y_{d,2} = \zeta_2 - \eta_{d,2}.$$
(II-7)

considérons les commandes virtuelles suivantes :

$$\psi_1 = \zeta_1.$$

$$\psi_2 = \zeta_2.$$
(II-8)

On aura :

$$e_1 = \psi_1 - \eta_{d,1}.$$

$$e_2 = \psi_2 - \eta_{d,2}.$$
(II-9)

pour assurer la convergence vers zéro des variables  $(e_1, e_2)$ , considérons les fonctions de

*Lyapunov* suivantes:

$$V_1 = 0.5 e_1^2$$

$$V_2 = 0.5 e_2^2$$
(II-10)

leurs dérivées temporelles sont données par :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1.$$

$$\dot{V}_2 = e_2 \dot{e}_2.$$
(II-11)



Pour assurer la convergence il faut que ces dérivées soient négatives, pour cela il suffit que les commandes virtuelles, prennent les valeurs désirées suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{1,d} &= -q_1 e_1 + \eta_{d,1} \\ \psi_{2,d} &= -q_2 e_2 + \eta_{d,2} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

En remplaçant ces commandes virtuelles par ses valeurs, les expressions des dérivées des fonctions de *Lyapunov* deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -q_1 e_1^2 < 0 \quad \forall e_1 \neq 0 \\ \dot{V}_2 &= -q_2 e_2^2 < 0 \quad \forall e_2 \neq 0 \text{ avec : } q_1 \text{ et } q_2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

**Deuxième étape :** 'Détermination des commandes'.

Dans cette étape il faut calculer le vecteur de commande "u" de manière à ce que  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  prennent les valeurs désirées  $\psi_{1,d}$  et  $\psi_{2,d}$ .

Considérons les variables erreurs  $z_1$  et  $z_2$  comme suit :

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1 - \psi_{1,d} \\ z_2 &= \psi_2 - \psi_{2,d} \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Pour cette étape les fonctions de *Lyapunov* du système augmentes suivantes :

$$\begin{aligned} V_{1,a} &= V_1 + 0.5 z_1^2 \\ V_{2,a} &= V_2 + 0.5 z_2^2 \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}_{1,a} &= -q_1 e_1^2 + e_1 z_1 + z_1 \dot{z}_1 \\ \dot{V}_{2,a} &= -q_2 e_2^2 + e_2 z_2 + z_2 \dot{z}_2 \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

### II-5- Simulations et Interprétations des Résultats :

Avec les commandes synthétisées auparavant, il est désormais possible de simuler le nouveau système grâce à un retour d'information suivant les expressions trouvées en (II-20). Nous simulerons ces réponses pour des références des déplacements  $x_1$  et  $x_2$  en valeurs relatives (représente 10 cm), et avec les mêmes valeurs des paramètres de suspension passive. Les résultats des simulations obtenus sont donnés par les figures (II-5), (II-6), (II-7), (II-8), (II-9), (II-10), (II-11) et (II-12).

On remarque que les dépassements  $x_1$  et  $x_2$  convergent vers leurs références de manière très satisfaisante, avec un phénomène de broutement sur les grandeurs  $x_3$  et  $x_4$  suite à la forte discontinuité de la commande contenant la fonction " Sign ". Pour atténuer cet effet indésirable, la fonction " Sign " est remplacée par la fonction " Erf " qui ressemble à la fonction " Smooth ", et qui est définie par :

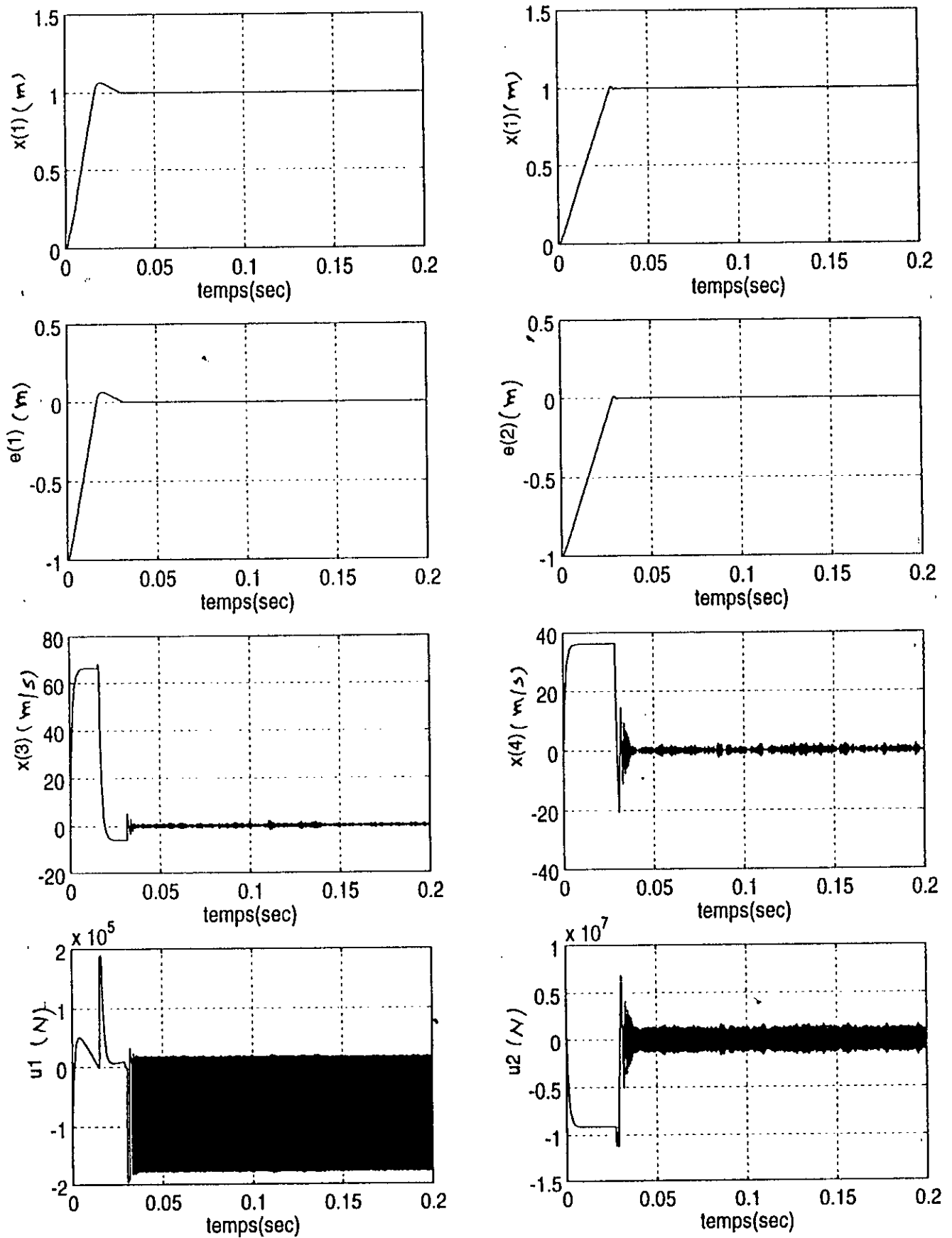
$$\text{Erf (error function)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt .$$

En conséquence les  $x_3$  et  $x_4$  qui représentent la vitesse deviennent importantes, ce qui veut dire que l'énergie (la force) à fournir devient aussi très grande.

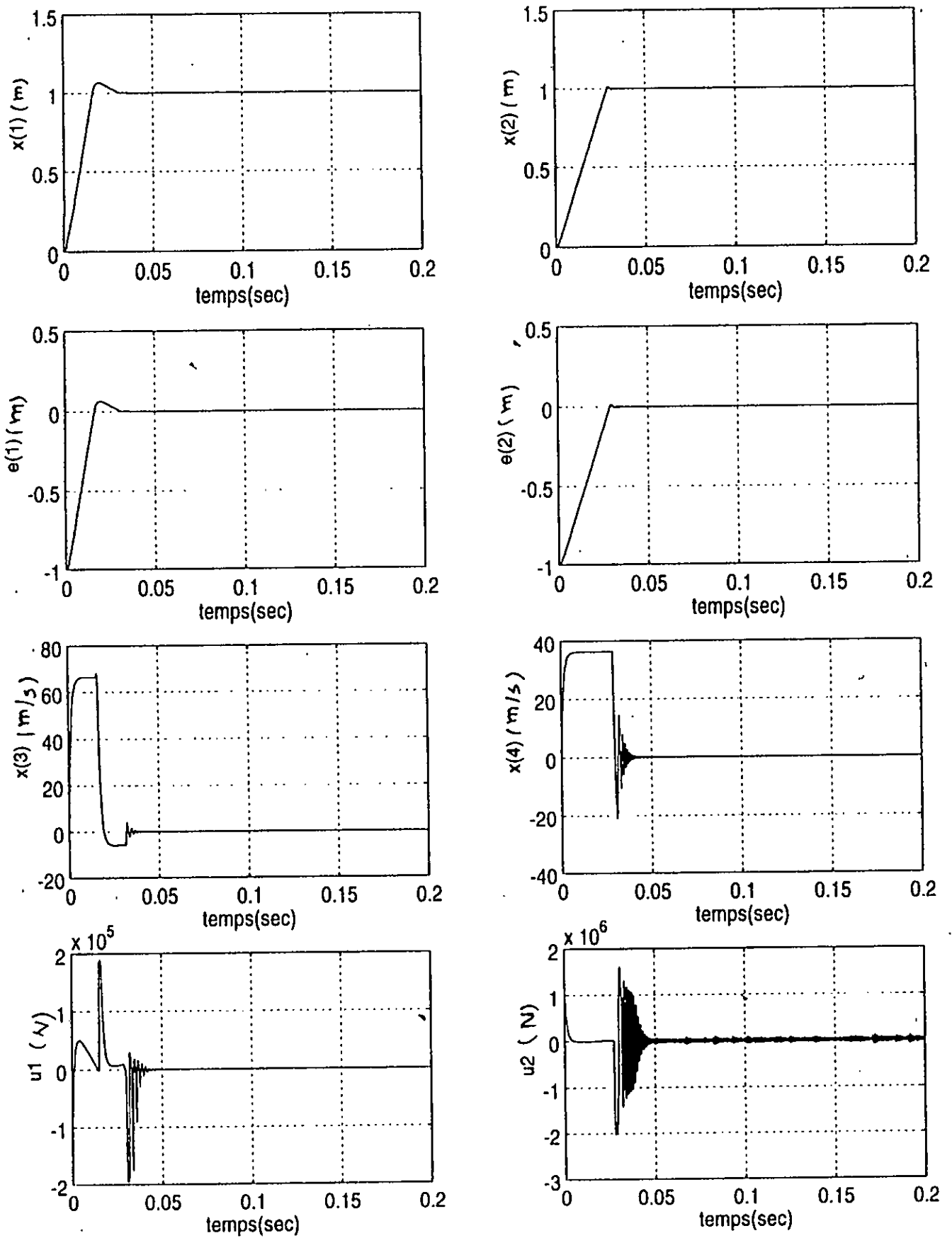
Une autre remarque concernant le signal de commande est qu'elle a une grande fréquence (voir figure (II-5)), d'où le risque de diminuer les mêmes performances de la commande car l'actionneur n'agit pas de manière désirée.

D'autre part, l'introduction de  $w$  sous forme d'échelon provoque l'agissements de l'actionneur pour compenser le déplacement vertical du véhicule. Ce dernier donne la même force malgré la forme plat de la route ( $w(t) = \text{Cte}$ ).

Le test de la robustes vis à vis des paramètres du système n'influence pas les performances du réglage, et le système reste toujours stable. On peut dire que la commande est robuste.



Figure(II-5). Réponses du système de la suspension active à un échelon unité ( en utilisant la fonction 'Sign').



Figure(II-6). Réponses du système de la suspension active à un échelon unité ( en utilisant la fonction 'Erf').

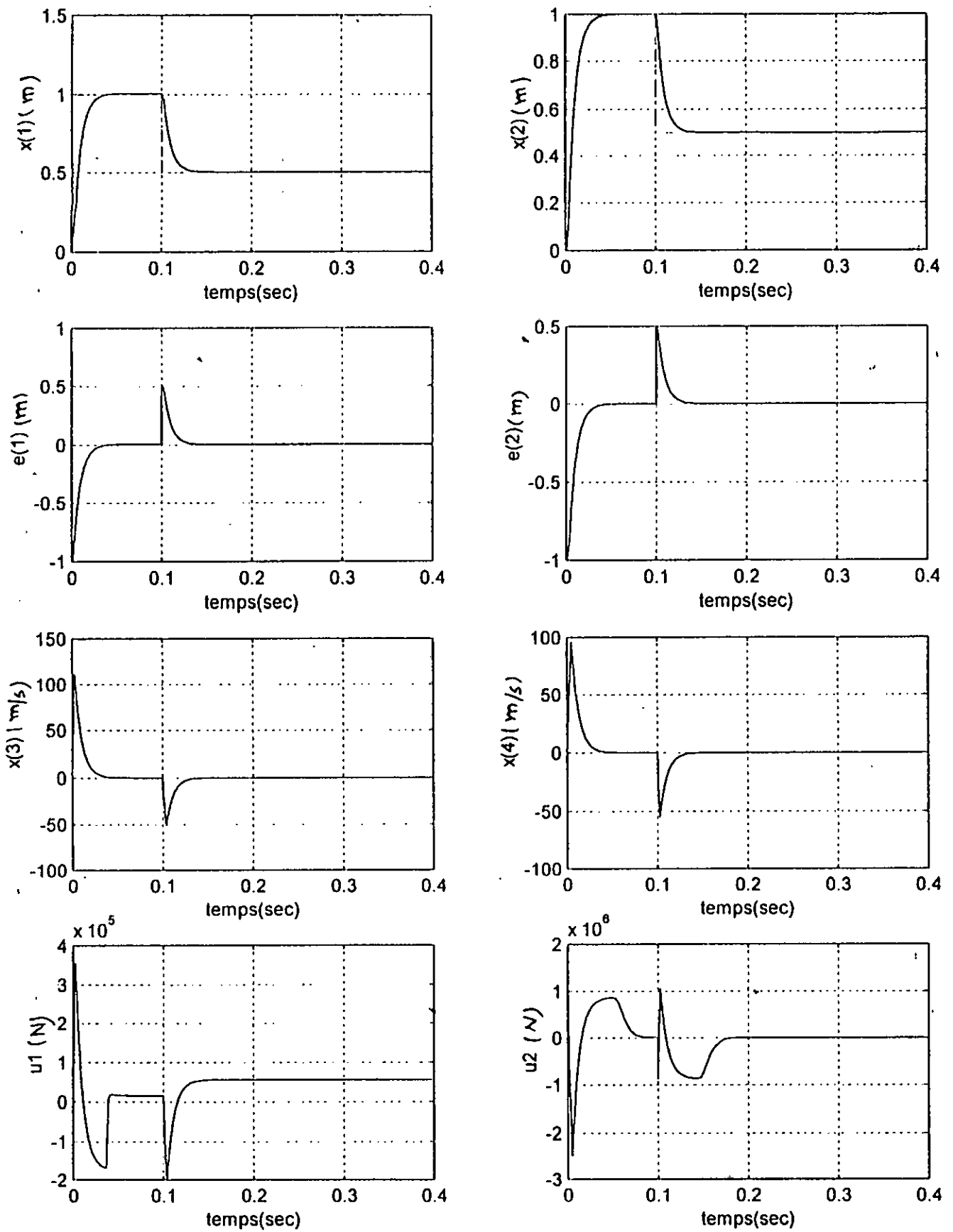
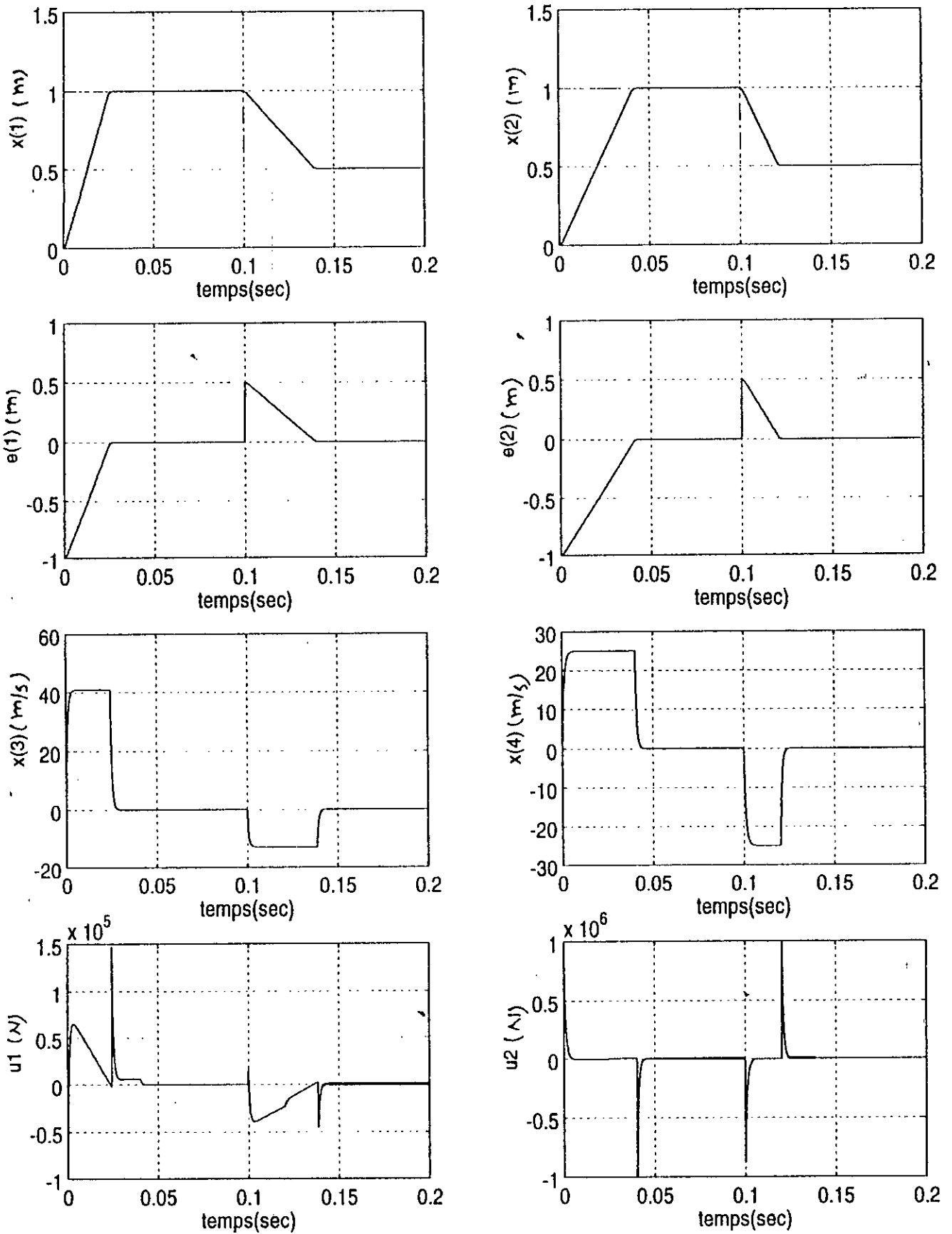
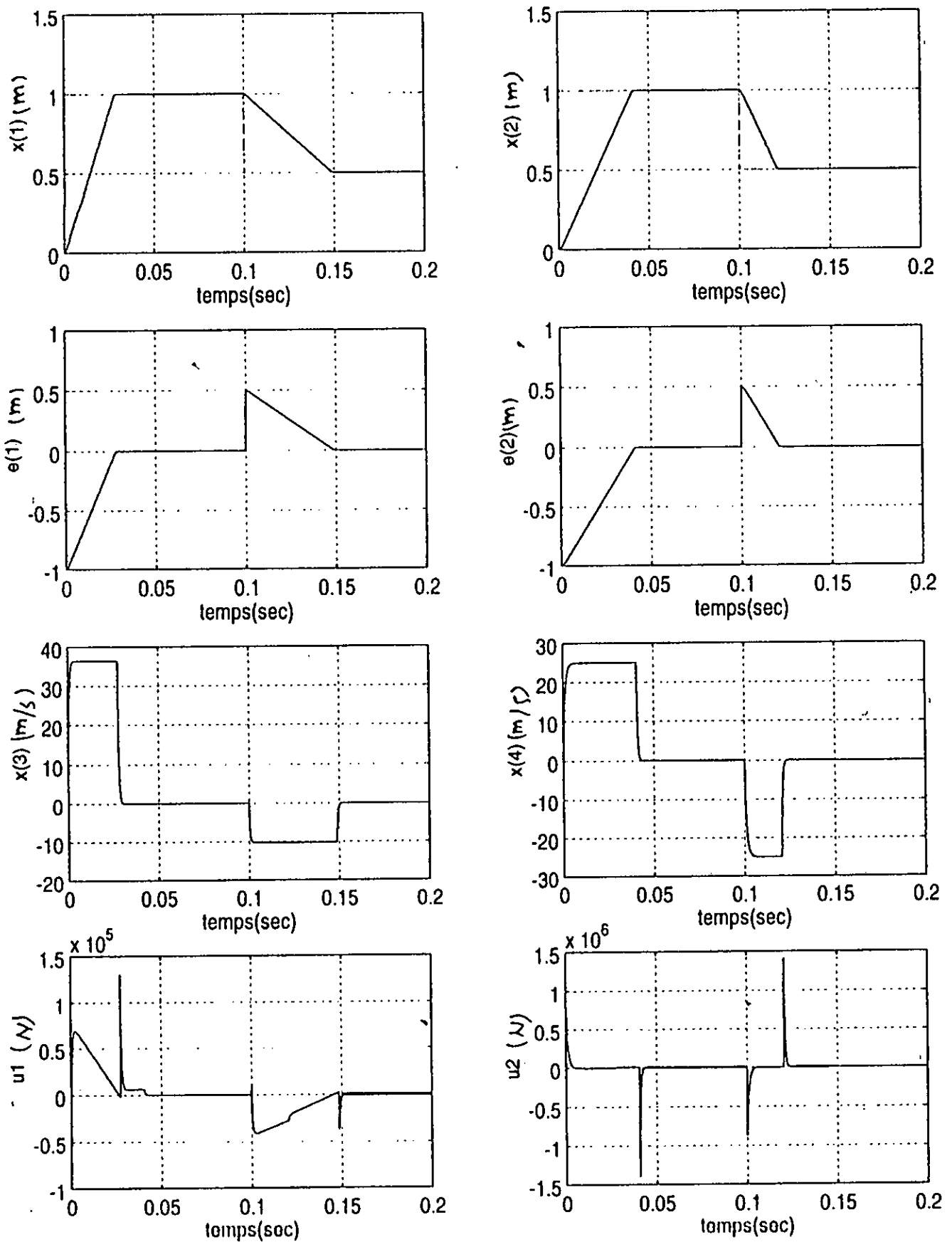


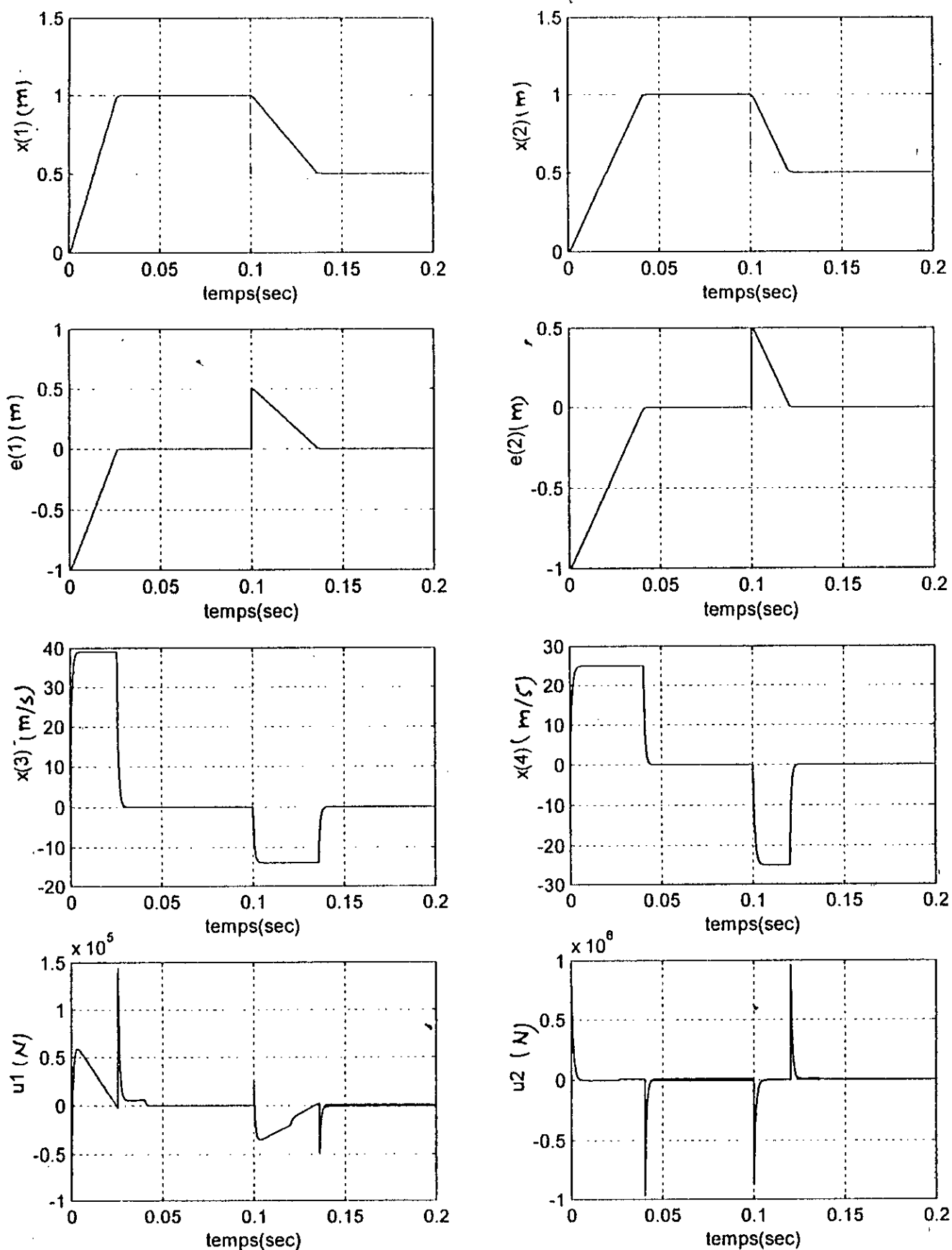
Fig. (III-7): Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire ( $x_{r,1}=x_{r,2}=u(t)-0.5u(t-0.1)$ ).



Figure(II-8). Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire ( $x_{r,1} = x_{r,2} = u(t) - 0.5u(t-0.1)$ ) avec  $M = 50$  Kg.

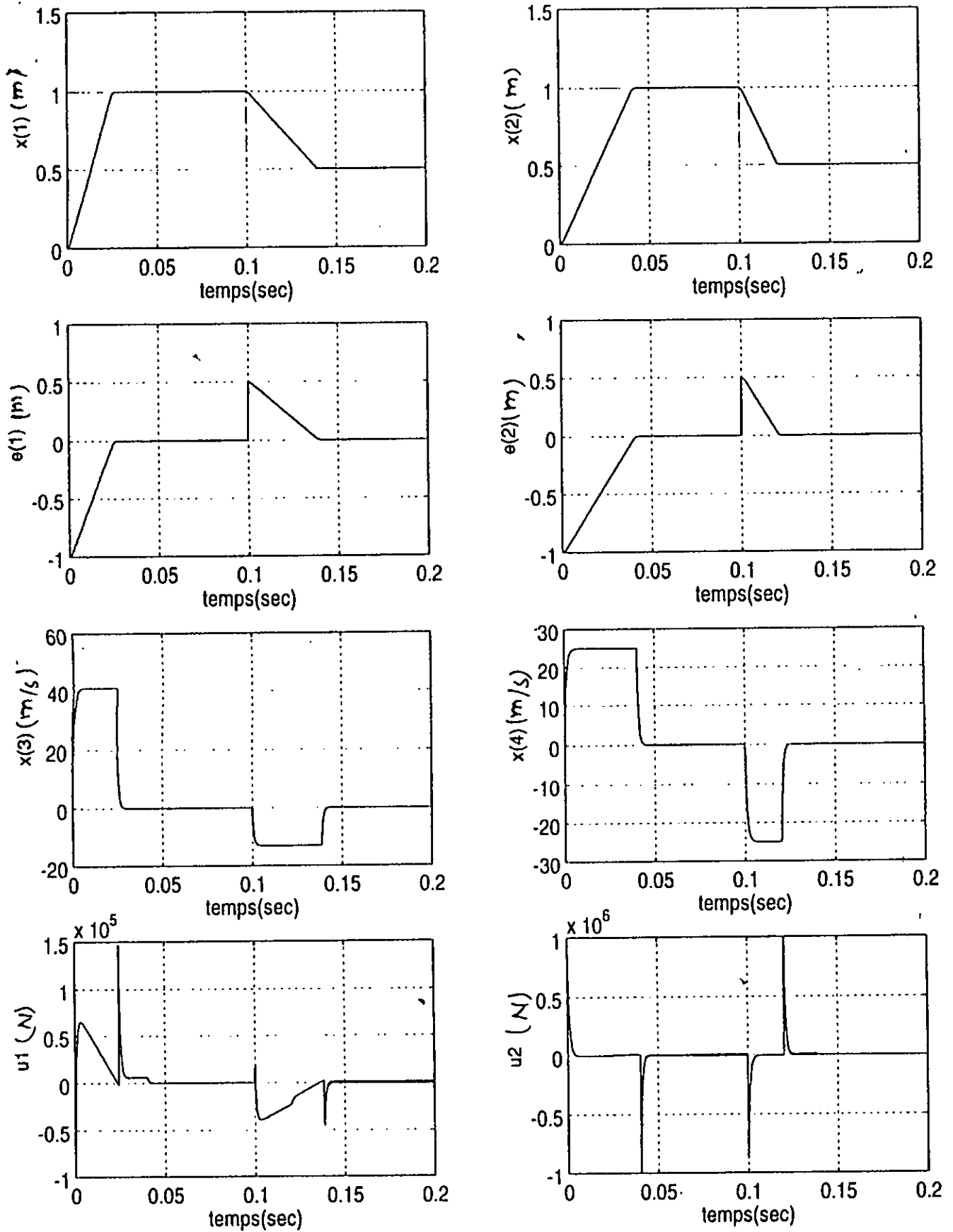


Figure(II-9). Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire ( $x_{1,2}$   $u(1)=0.5u(1-0.1)$ ) avec dégradation de  $k = 72000$  N/m.

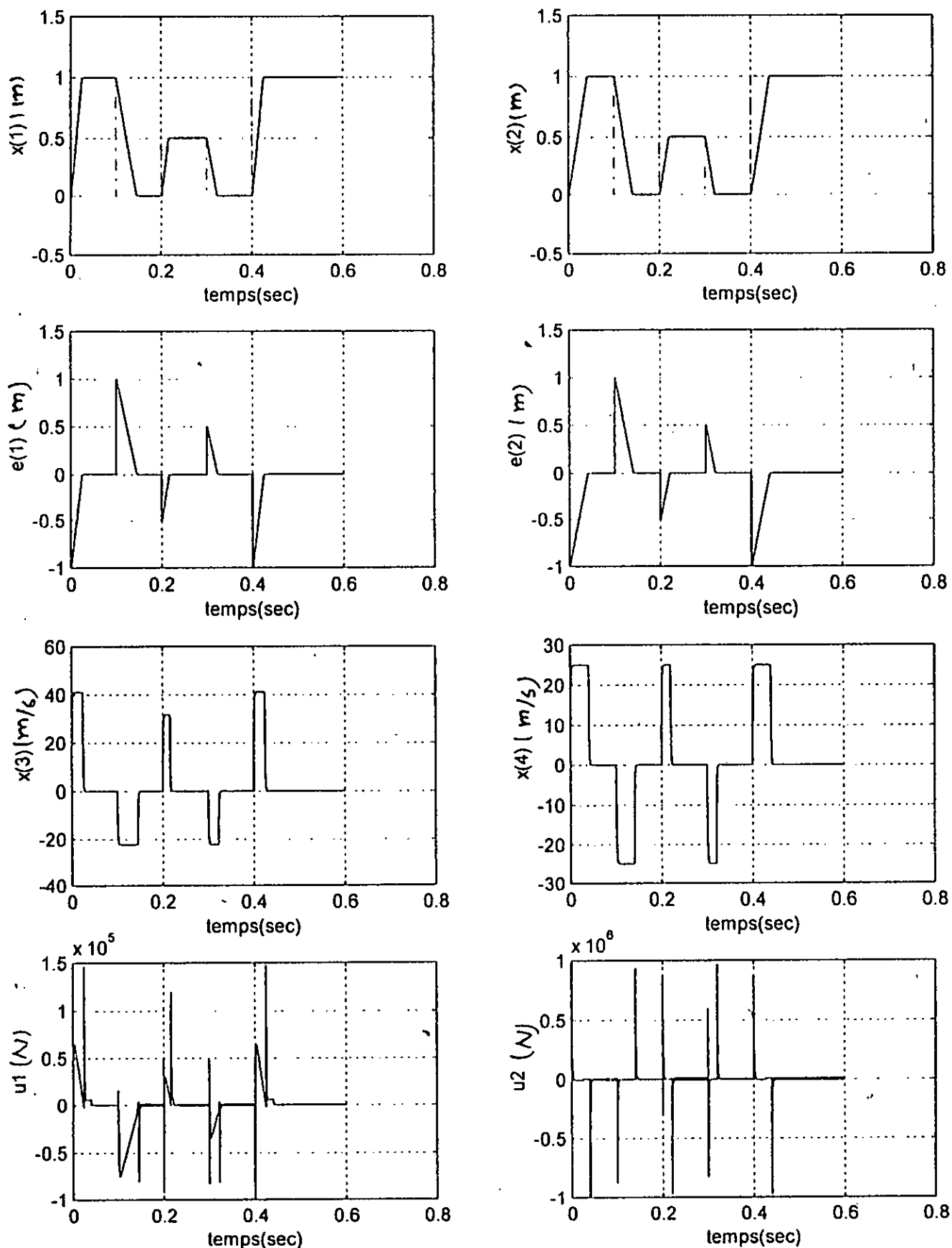


Figure(II-10). Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire ( $x_{r,1}=x_{r,2}=u(t)-0.5u(t-0.1)$ ) avec diminution de  $m=2.3$  Kg.





Figure(II-11). Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire ( $x_{r,1}=x_{r,2}=u(t)-0.5u(t-0.1)$ ) avec diminution de  $k= 2500 \text{ N/m}$ .



Figure(II-12). Réponses du système de la suspension active en régime de poursuite d'une nouvelle trajectoire(Somme de plusieurs écheons).

**Conclusion :**

Les simulation des grandeurs à régler montrent qu'on a effectué une régulation des déplacements avec un temps de réponse et un dépassement satisfaisant (une grande précision). En présence des variations paramétriques, l'étude montre que ces dernières n'ont pas d'influence sur les performances du réglage. On conclut que notre commande synthétisée est très robuste et les performances du système sont satisfaisantes.



Chapitre III  
Système biologique

**Chapitre III:****Système biologique :****Les phytoplanctons****Introduction :**

L'évolution et la grande capacité de production dans le domaine biotechnologique démontre l'intérêt socio-économique de ce dernier, on cite comme exemples :

- l'argo alimentaire (vin, fromage, arômes).
- la chimie (enzymes, acides organiques et amines).
- l'énergie.

Un procédé biotechnologique peut être décrit de la façon suivante :

A l'intérieur d'un bio-réacteur, une population de micro-organismes (la biomasse) se développe en consommant certains nutriments (le substrat), dans des conditions physico-chimiques favorables (température, pH, aération, etc..). Or le but de cette culture peut être :

- La production de biomasse (levures..).
- La production d'un produit de synthèse (antibiotique..).
- La dépollution par voie biologique (consommation des substances polluantes par la biomasse).

Dans le contexte de ce chapitre est présenté, en premier lieu, le fonctionnement d'un procédé biotechnologique et sa modélisation. En second lieu, est abordé le problème de la commande basée sur la méthode de *Lyapunov* pour imposer à la grandeur à commander de suivre la trajectoire désirée.

### **III-1-Situation du problème :**

La validation des systèmes biologiques est un problème épineux, dont la réponse reste encore à trouver. La difficulté réside dans la comparaison entre les résultats expérimentaux souvent évasifs et ceux des modèles non linéaires et leurs complexités .

Dans le cadre de cette étude, on veut synthétiser une commande par *Lyapunov* (commande non linéaire en cascade) au modèle correspondant, et voire quelle sont les conditions nécessaires pour que ce système converge exponentiellement.

Le système biologique utilisé par Droop-Model [11] présente la description de la croissance des cellules ' phytoplantoniques ', sous nutriment limité dans un réacteur continu (chemostat).

- Les phytoplanctons [12] sont des planctons végétaux , qui désignent l'ensemble des organismes entraînés par les déplacements d'eau. Ils transforment l'énergie solaire en matière vivante. Ils jouent aussi un rôle prépondérant dans l'équilibre de l'écosystème ceci en dehors de leur capacité à neutraliser les substances polluantes. Et grâce à quelques espèces de ces êtres vivants, l'eau de mer recèle des vitamines et des substances antibiotiques.

Dans notre étude du bioréacteur utilisé (chémostat) on s'intéresse à la détermination d'un modèle dynamique approché, répondant le mieux possible au compromis précision-compléxité.

### **III-2-Modèle dynamique de bio réacteur (chemostat).[13][14]**

L'étude des micro-organismes et le choix des composés organiques sont fonction du but que l'on veut atteindre, bien sûr on recherchera en conséquence les conditions optimales de culture afin d'obtenir la qualité maximale, de produire rapidement et au meilleur coût.

Notre procédé de fermentation se déroule dans un réacteur continu, c'est à dire que l'alimentation ou l'admission du milieu neuf se fait de façon continue.

A l'intérieur de ce réacteur, une croissance accrue des micro-organismes se déroule, ceci au cours de la phase exponentielle, le milieu s'appauvrit en substances nutritives; tandis que les produits du métabolisme microbien s'accumulent. Si l'on renouvelle le milieu dans le fermenteur en apportant du milieu neuf et en retirant le milieu utilisé contenant les cellules formées, la culture se maintient indéfiniment en phase exponentielle, réalisant un état stationnaire apparent. c'est le cas des cultures continues (figure: (III-1) )

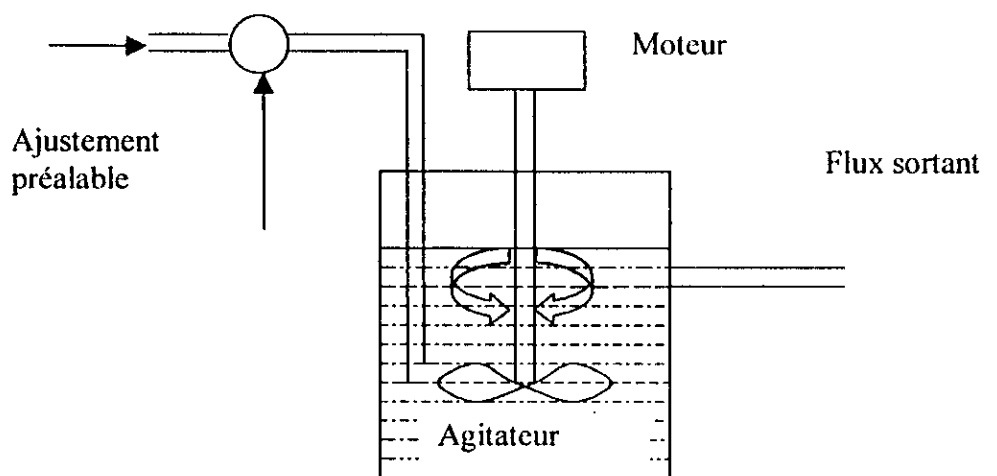


figure (III-1) :Chémostat.

La théorie des croissances microbiennes continues en milieu renouvelé a été établie par Monod en 1950.

Soit  $V$  le volume du récipient de la culture et  $W$  le débit du milieu neuf provenant du réservoir, le taux horaire de dilution  $D$  a la valeur suivante :

$$D = \frac{W}{V} \quad (\text{III-1})$$

Dans un tel système deux facteurs opposés agissent sur la population  $N$  :

- les cellules en division,  $N$  augmente proportionnellement au taux de croissance  $\mu_{\max}$ .

$$\frac{dN}{dt} = \mu_{\max} N \quad (\text{III-2})$$

- l'apport du milieu neuf tend à abaisser  $N$  proportionnellement au taux de dilution  $D$ .

$$\frac{dN}{dt} = -D N \quad (\text{III-3})$$

la variation globale de la population est la somme de ces deux dérivées partielles qui représentent les deux tendances.

$$\frac{dN}{dt} = (\mu_{\max} - D) N \quad (\text{III-4})$$

Trois éventualité peuvent se présenter :

- le taux de dilution est supérieur au taux de croissance du micro-organisme  $D > \mu_{\max}$ .

Dans ces conditions, les micro-organismes ne peuvent pas compenser par leur division la dilution de la culture par le milieu neuf,  $\frac{dN}{dt} < 0$ , la population diminue progressivement jusqu'à devenir nulle.

- le taux de dilution est ajusté de telle façon que  $D = \mu_{\max}$ . On a  $\frac{dN}{dt} = 0$ ,

les micro-organismes sont en cultures continues au taux de croissance maximum.

La population reste constante à un certain niveau, n'importe lequel, compris dans la phase exponentielle. Il n'y a pas de facteur limitant.

- le taux de la dilution est inférieur au taux de croissance,  $D < \mu_{\max}$ , donc  $\frac{dN}{dt} > 0$ . de ce fait

la population augmente, mais la concentration du facteur limitant est diminuée et ne peut plus assurer le taux de croissance maximal. Dans ces conditions le taux de croissance diminue jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur que  $D = \mu$ , ce qui entraînera  $\frac{dN}{dt} = 0$ . La population

alors est autostabilisée dans un chemostat. Ce qui compte est la concentration du facteur limitant dans la réception de culture.



**III-3-La dynamique de chemostat :**

Soit  $D$  le taux de dilution,  $S_0$  la concentration initiale du substrat à l'intérieur du réservoir,  $S$  la concentration en substrat résiduel dans l'effluent,  $N$  la concentration stationnaire de la population dans la récipient de culture.

Le rendement de la culture  $R = N/(S_0 - S)$ , puisque tout ce qu'il entre dans la récipient de culture est égal à ce qui sort :

$$N = R (S_0 - S) \quad (\text{III-5})$$

$$dN = -R dS. \quad (\text{III-6})$$

Considérons une variation  $dS/dt$ , de la concentration du substrat dans le récipient de culture.

$$\text{On a : } \frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dN}{dS} \quad (\text{III-7})$$

$$\text{Or : } \frac{dN}{dt} = (\mu - D) N \quad (\text{III-8})$$

$$\text{Et } \frac{dS}{dN} = -\frac{1}{R} \quad (\text{III-9})$$

$$\text{Donc } \frac{dS}{dN} \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{R} N (\mu - D) \quad (\text{III-10})$$

$$\text{Ou : } \frac{dS}{dt} = \frac{N}{R} (D - \mu) \quad (\text{III-11})$$

Comme :

$$\mu = \mu_{\max} \left( \frac{S}{S + k_s} \right),$$

on peut écrire :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{N}{R} \left[ D - \mu_{\max} \left( \frac{S}{S + k_s} \right) \right] \quad (\text{III-12})$$

à l'équilibre  $\frac{dS}{dt} = 0$ , donc :

$$D = \mu_{\max} \left( \frac{S}{S + k_s} \right) \quad (\text{III-13})$$

On en déduit la valeur de S :

$$S = k_s \left( \frac{D}{\mu_{\max} - D} \right) \quad (\text{III-14})$$

Ce qui signifie qu'à l'équilibre la concentration en substrat ne dépend que du taux de dilution, La concentration  $S_0$  dans le milieu frais n'intervenant pas.

Comme  $k_s$  est faible, la valeur de S est également faible, ce qui fait que la concentration cellulaire à l'équilibre N est très voisine de la valeur suivante :

$$N = R S_0 .$$

### III-4-Facteurs influençant sur le système (la croissance).[13]

#### La Température :

Chaque micro-organisme exige une température déterminée pour sa croissance optimale. L'éventail des températures utiles est très large, s'étendant de :  $-5$  à  $+80^\circ$ . L'influence de la température sur la vitesse de croissance des micro-organismes peut être interprétée à la lumière de ce qui se passe dans le cas des réactions chimiques double en effet pour une augmentation de température de  $10^\circ\text{C}$ .

Cette relation suit la loi d'Arrhenius :

$$\log_{10}(v) = \frac{-\Delta H}{2303 r T} + C . \quad (\text{III-15})$$

Dans laquelle :

V : vitesse de réaction.

$\Delta H$  : l'énergie d'activation(entalpie).

r : la constante des gaz parfaits.

T : la température absolue.

C : la constante d'intégration.

**Remarque :**

Il existe d'autres facteurs importants influençant sur la croissance ; comme le taux de croissance dépend étroitement du milieu dans lequel on cultive, c'est à dire du substrat source de l'azote (minéraux), du pH, etc....

**III-5-Equation du Modèle étudié :**

Finalement, après l'étude de la dynamique du chémostat, on aboutit à un modèle d'un bioréacteur correspondant à notre système qu'est décrit par les équations suivantes : [11]

$$(\Sigma_D) \begin{cases} \dot{S}(t) = D [S_i - S(t)] - \rho_m \frac{S(t)N(t)}{k_p + S(t)} \\ \dot{N}(t) = \mu_m \left[1 - \frac{k_Q}{Q(t)}\right] N(t) - D N(t). \\ \dot{Q}(t) = \rho_m \frac{S(t)}{k_p + S(t)} - \mu_m [Q(t) - k_Q] \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

avec :

S : concentration de nutriment (facteur limitant) [ $\text{Kg}/\text{m}^3$  (MKSA)].

N : concentration cellulaire (biomasse) [ $\text{Kg}/\text{m}^3$  (MKSA)].

Q : le taux cellulaire ayant consommé le nutriment, mis en évidence par la mesure de la intracellulaire du nutriment [C].

D : volume qui est lié à la dilution (l'entre de système) .

$\mu_m$  : le taux de croissance.

$\rho_m, k_p, S_i$  et  $k_Q$  sont des constantes biologiques et physiologique bien définies.

**III-6-Changement de variable :**

Considérons le changement suivant, des variables du système ( $\Sigma_D$ ) :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (\rho_m N / S_i), & a_1 &= k_p / S_i, \\ \zeta_2 &= (S / S_i), & a_2 &= \mu_m, \\ \eta &= (Q / k_Q) & a_3 &= \rho_m / k_Q. \end{aligned} \quad \text{avec} \quad D = D_0 + u$$

on aboutit à un système monovarié de la forme:

$$\dot{\sum} D \begin{cases} \dot{\xi} = f_1(\zeta, \eta) + g(\zeta, \eta) u . \\ \dot{\eta} = f_2(\zeta, \eta) . \\ y = h(\eta) = \eta \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

avec :

$$f_1(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2(1-1/\eta)\zeta_1 - D_0\zeta_1 \\ D_0(1-\zeta_2) - \zeta_1\zeta_2/(a_1 + \zeta_2) \end{bmatrix} \quad g(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} -\zeta_1 \\ 1 - \zeta_2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(\zeta, \eta) = a_3\zeta_2/(a_1 + \zeta_2) - a_2(\eta - 1)$$

Dans notre étude, le choix de la sortie est différent de celui présenté dans [11]. On désire avoir  $Q$  comme sortie .

Analytiquement  $Q$  est proportionnel aux deux facteurs : biomasse et substrat, et comme  $Q$  est la partie cellulaire ayant consommé le substrat, alors il est judicieux de prendre  $Q$  comme sortie pour certains cas des culture biologiques comme : biomasse, productions des matières vivantes, productions des antibiotiques etc..

Ainsi ce changement de la sortie nous permet d'écrire le modèle sous une autre forme, comme il est présenté dans(III-17).

### III-7- Interprétation à vide:

Le modèle obtenu est un système d'équations différentielles non linéaires. Les figures (III-3) et (III-4) représentent les simulations du modèle en boucle ouverte, en considérant deux expériences ( a et b), pour des paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  donnés par le tableau (III-1), avec l'entrée  $D$  sinusoïdale, de pulsation et d'amplitude variables:

Paramètres	$a_1$	$a_2$	$a_3$	T	D
Unités	/	Jour <sup>-1</sup>	Jour <sup>-1</sup>	Heures	Jour <sup>-1</sup>
Expérience a	0.02	4.18	5.32	8	1.71 (1+0.6 sin (2 (π /T) t))
Expérience b	0.02	3.64	7.21	12	1.2 (1+0.4 sin (2 (π /T) t))

Tableau (III-1) : Paramètres du système pour les expériences a et b.

En comparant les résultats des différentes simulations, on retient que:

Ce modèle fonctionne normalement si l'entrée varie lentement (inférieur à jour<sup>-1</sup>), sinon les cellules ne se divisent pas en même temps (division non synchronisée), elles produisent une large oscillation dans la biomasse (division anarchique). On remarque un comportement instable du système représenté par la figure (III-4), pour l'expérience (a), dû à une variation de 30 % paramètre  $a_2$ . De ce fait, le choix des paramètres  $a_1, a_2$  et  $a_3$  ne peut pas être fait de façon arbitraire.

On remarque aussi que la courbe de croissance (III-3) suit le schéma classique de croissance des micro-organismes (III-2-1). En effet, on a:

- **phase de latence:** En général, la croissance des bactéries ne se manifeste pas habituellement par trouble visible, qu'après un certain temps. Dans cette phase, la biomasse  $N = \text{cte} = N(0)$ , où  $N(0)$  est la concentration cellulaire à l'instant  $t=0$ , le micro-organisme est en phase d'adaptation  $\frac{dN}{dt} = 0$ , la vitesse de croissance  $\mu_m = 0$ , ce qui provoque l'augmentation de  $S$  (substrat), avec un retard d'adaptation  $Q$ .

En général on désire toujours à minimiser cette phase .

- **phase exponentielle:** A la phase de latence succède une seconde phase dite d'accélération, ou exponentielle. La concentration ou la biomasse augmente de façon de plus en plus significative .

$\mu_m$  croit jusqu'à atteindre le maximum ,  $S$  et  $O$  s'adaptent mieux au milieu .

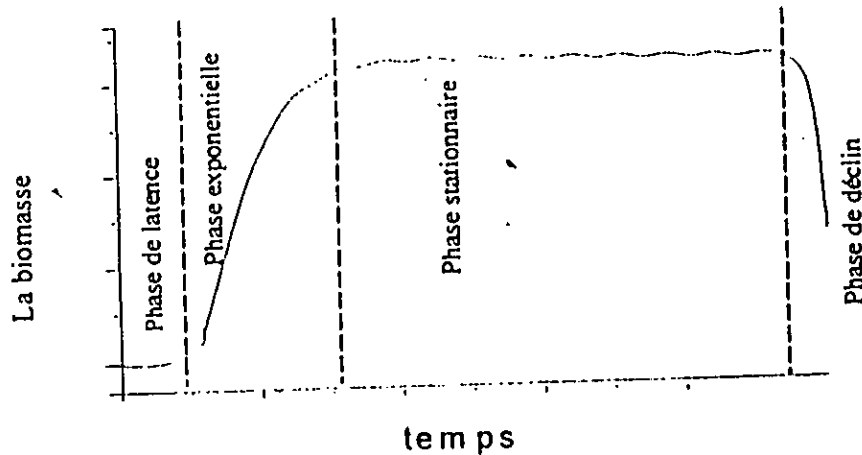
lorsque  $\mu_m = \mu_{\max}$  le temps de dédoublement prend au contraire une valeur minimale .

- **phase maximale (stationnaire) :** La phase exponentielle ne dure que quelques instants (quelques heures) le milieu devient de moins en moins favorable à la croissance  $N = N(\max) = \text{cte}$ . cette phase est aussi caractérisée par  $\mu_m$ ; l'arrêt de la croissance peut survenir théoriquement soit parce qu'un aliment indispensable est épuisé, soit par suite de l'accumulation de métabolites toxiques pouvant abaisser le pH par exemple.

$Q$  et  $S$  restent constantes .

- Phase de déclin : Dans nos figures cette phase n'apparaît pas, on essaye toujours de l'éviter, mais en réalité on ne peut pas l'ignorer parce qu'il y aura mort cellulaire suite à l'épuisement du milieu de culture est à la production d'enzymes protéolytique, c'est à dire :

$$\frac{dN}{dt} < 0.$$



Figure(III-2-1) : Le schéma classique de croissance des micro-organismes

### Conclusion :

Nous avons formulé un modèle dynamique pour notre système biologique (réacteur continu). On retient que ce modèle a été élaboré à l'équilibre. Son comportement en régime transitoire est remarquable; si l'entrée ne varie pas rapidement  $D < (\text{jour})^{-1}$  et que le choix des paramètres est bien spécifié.

Rappelons que dans le domaine des commandes des procédés basés sur l'utilisation des modèles mathématiques, il est souvent utile de trouver un bon compromis entre la simplicité du modèle et sa précision; ce qui est l'objet de la partie suivante.

### III-8- Commande du bioréacteur :

Cette partie est consacrée au contrôle des variables d'états dans les bioprocédés. On désire maintenir la variable d'état du processus proche d'une valeur de référence spécifiée à l'avance, malgré les perturbations dues aux variations paramétriques dans la cinétique du processus.

Notre biréacteur commandé peut être représenté comme sur la figure (III-3) (commande par un ordinateur). La boucle du système asservi est clairement apparente : elle se compose successivement du réacteur, d'un ensemble de capteurs et instruments de mesure, du calculateur et d'un actionneur. Le système en boucle fermée est défini comme étant la combinaison du processus et de la commande à l'intérieur de la boucle d'asservissement.

Ainsi le processus est commandé par un ordinateur qui règle le débit du substrat d'alimentation. L'algorithme de contrôle a pour fonction de déterminer, à chaque instant, l'action de commande, sur la base des informations collectées en temps réel par les capteurs ou fournies par l'utilisateur ou par le clavier.

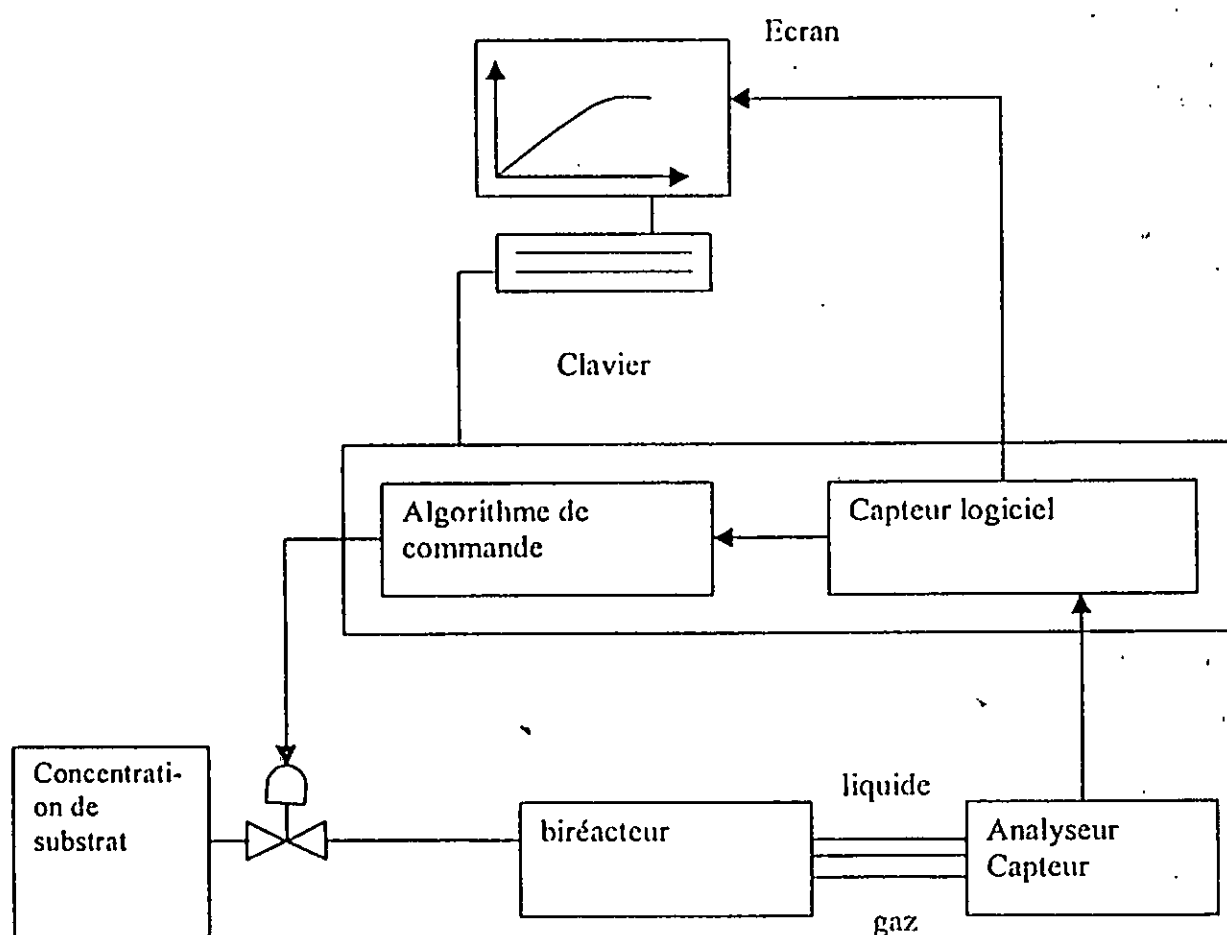


Figure (III-2) : Commande par ordinateur d'un bioréacteur.

**III-9- Mise en œuvre de la commande :**

On a :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\zeta_1 - D_0\xi_1 - \xi_1 u \\ \dot{\zeta}_2 = D_0(1 - \xi_2) - \frac{\xi_1 \xi_2}{a_1 + \xi_2} + (1 - \xi_2)u \\ \dot{\eta} = a_3 \frac{\xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) \end{cases} \quad \text{(III-18)}$$

L'erreur est donnée par :

$$e = \eta - \eta_d \quad \text{(III-19)}$$

En dérivant la variable erreur e , on a :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\eta} - \dot{\eta}_d \\ \dot{e} &= a_3 \frac{\xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) - \dot{\eta}_d \end{aligned} \quad \text{(III-20)}$$

On prend la commande virtuelle comme suit :

$$\psi = a_3 \frac{\xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) \quad \text{(III-21)}$$

L'expression de la dérivée de l'erreur devient alors :

$$\dot{e} = \psi - \dot{\eta}_d \quad \text{(III-22)}$$

Considérons la fonction de *Lyapunov* suivante :

$$V = \frac{e^2}{2} \Rightarrow \dot{V} = e \cdot \dot{e} = e(\psi - \dot{\eta}_d) \quad \text{(III-23)}$$

Si la commande virtuelle prend la valeur désirée suivante :



$$\psi_d = -q_1 e + \eta_d \quad (\text{III-24})$$

La condition de stabilité est vérifiée par la fonction de *Lyapunov* :

$$\dot{V} = -q_1 e^2 < 0 \quad (\text{III-25})$$

Pour le calcul de la loi de commande, considérons le changement de variable suivant :

$$z = \psi - \psi_d \quad (\text{III-26})$$

Cette dernière équation s'écrit aussi :

$$z = a_3 \frac{\xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) - \psi_d$$

En dérivant l'expression précédente, on a :

$$\dot{z} = a_3 \frac{a_1}{(a_1 + \xi_2)^2} \dot{\xi}_2 - a_2 \dot{\eta} - \dot{\psi}_d \quad (\text{III-27})$$

Avec  $\dot{\psi}_d = -q_1 \dot{e} + \dot{\eta}_d$

Ce qui conduit à :

$$\dot{\psi}_d = -q_1 \left( \frac{a_3 \xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) - \eta_d \right) + \dot{\eta}_d \quad (\text{III-28})$$

On en déduit l'équation suivante:

$$\dot{z} = \frac{a_1 a_3}{(a_1 + \xi_2)^2} \left[ D_0(1 - \xi_2) - \frac{\xi_1 \xi_2}{a_1 + \xi_2} + (1 - \xi_2) u \right] - a_2 \left[ \frac{a_3 \xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) \right] + q_1 \left( \frac{a_3 \xi_2}{a_1 + \xi_2} - a_2(\eta - 1) - \eta_d \right) - \dot{\eta}_d$$

On impose à  $z$  le comportement suivant :

$$\dot{z} = -e - K \text{sign}(z)$$

$$z = -(\eta - \eta_d) - K \text{sign}(z)$$

(III-29)

or:

$$\dot{z} = \frac{D_0 a_1 a_3 (1 - \xi_2)(a_1 + \xi_2) - a_3 a_1 \xi_1 \xi_2}{(a_1 + \xi_2)^3} + \frac{(1 - \xi_2) a_1 a_3}{(a_1 + \xi_2)^2} u + \frac{a_3 \zeta_2 (q_1 - a_2)}{(a_1 + \zeta_2)} - a_2 (\eta - 1)(a_2 + q_1) - q_1 \eta_d - \ddot{\eta}_d$$

On pose :

$$A = \frac{(1 - \xi_2) a_1 a_3}{(a_1 + \xi_2)^2}$$

$$B = \frac{D_0 a_1 a_3 (1 - \xi_2)(a_1 + \xi_2) - a_3 a_1 \xi_1 \xi_2}{(a_1 + \xi_2)^3} + \frac{a_3 \zeta_2 (q_1 - a_2)}{(a_1 + \zeta_2)} - a_2 (\eta - 1)(a_2 + q_1) - q_1 \eta_d - \ddot{\eta}_d$$

Enfin la loi de commande est donnée par :

$$u = -\frac{1}{A} [B + e + K \text{sign}(z)] \quad \text{(III-30)}$$

### III-10-Simulations et interprétations des résultats :

Les figures(III-5), (III-6), (III-7), (III-8), (III-9),(III-10), (III-11) et (III-12) représentent l'évolution des grandeurs du processus biologique caractérisé par les paramètres de l'expérience (a), lorsqu'il est soumis à la commande non linéaire.

On remarque que le phénomène de l'évolution (la croissance ) pour la biomasse(N), le substrats (S) et le taux ayant réellement consommé le substrat(Q), se déroule de façon identique que les autres micro-organismes.

On note aussi, un phénomène d'oscillations à haute fréquence ou chattering dû à la discontinuité de la fonction ' Sign '(figure:III-6), on a donc remplacé cette fonction par la fonction 'Erf' .

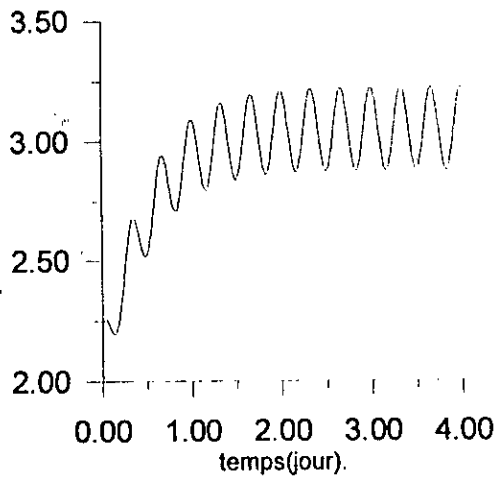
En temps normal, on a vu pour l'entrée  $D > \text{jour}^{-1}$ , le système possède un phénomène d'oscillations déstabilisantes, voir figures.(III-3) et( III-4). Donc l'entrée doit être  $D < \text{jour}^{-1}$ .

- Pour une référence  $Q_r = 0.9 e^{-0.25t} + 1.5$ , on arrive à lisser la sortie Q qui suit bien la trajectoire. La commande appliquée permet d'atténuer les oscillations même pour les conditions précédentes, assurant ainsi un bon fonctionnement du système(système stable).

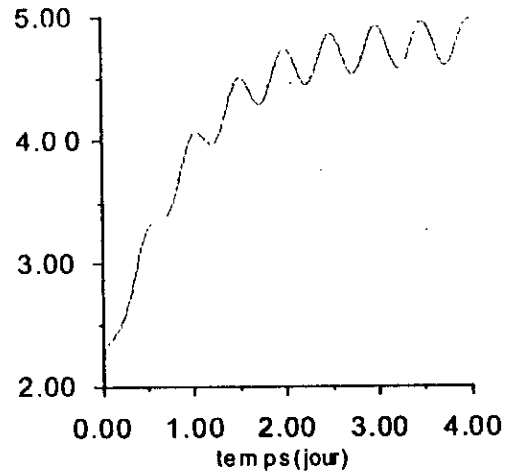
- Pour une référence  $Q_r = 1.5$  : on remarque qu'il n'y presque pas de phase de latence. En effet, en forçant la sortie Q à atteindre une valeur fixe en ignorant la partie exponentielle, on arrive à faire converger la biomasse N et Q plus rapidement vers leurs valeurs stationnaires. On peut dire que notre commande appliquée a une grande influence sur l'évolution du procédé.

- **Test de robustesse :**

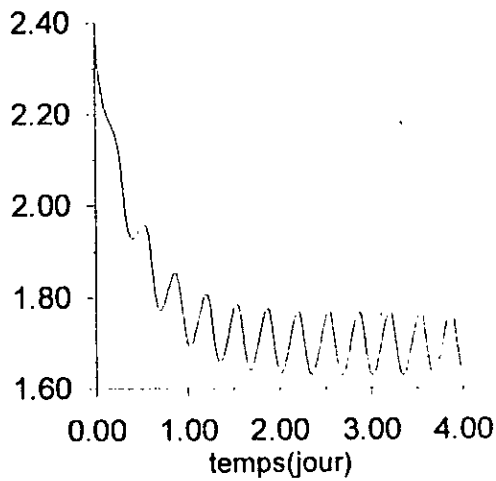
Nous avons testé la robustesse du contrôleur en présence d'incertitudes paramétriques. Les figures (III-9) et (III-10) montrent les résultats d'une simulation obtenus lorsqu'on fait une erreur de 30% sur le paramètre  $a_2 - \mu_m$  ( le taux cellulaire ), tandis que les autres conditions sont les même que pour le cas des figures (III-7)et (III-8). Une autre perturbation de  $\delta_{\mu} = 3$  a été appliquée à  $t = 0.1$ -(jour).-Le contrôleur conduit parfaitement le système à son nouveau régime.



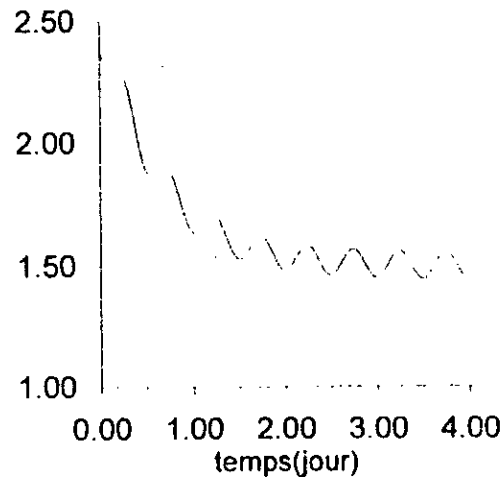
L'évolution de la biomasse(exp : a ).



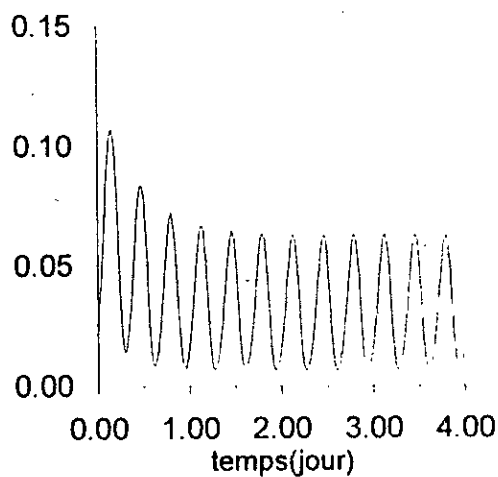
L'évolution de la biomasse(exp : b )



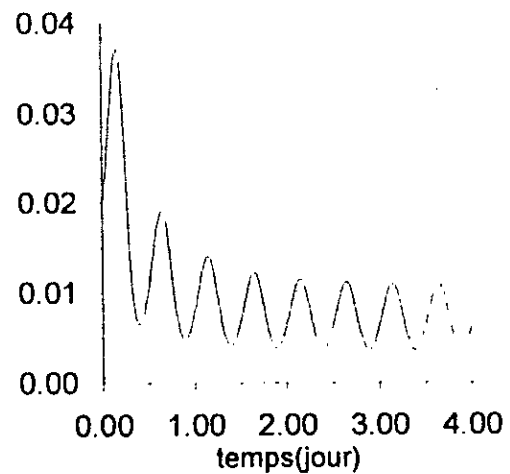
L'évolution de Q (exp : a )



L'évolution de Q (exp : b)

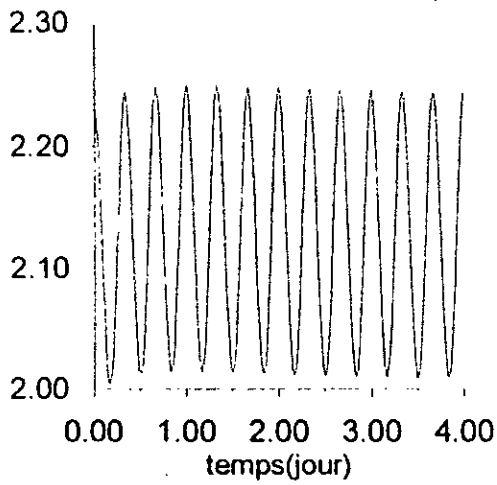


L'évolution de substrat (exp :a )

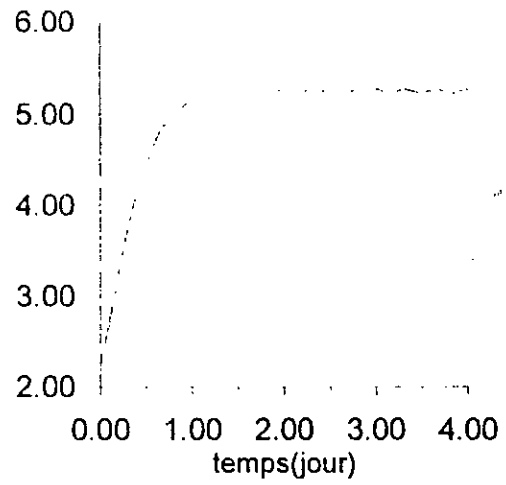


L'évolution de substrat (exp :b)

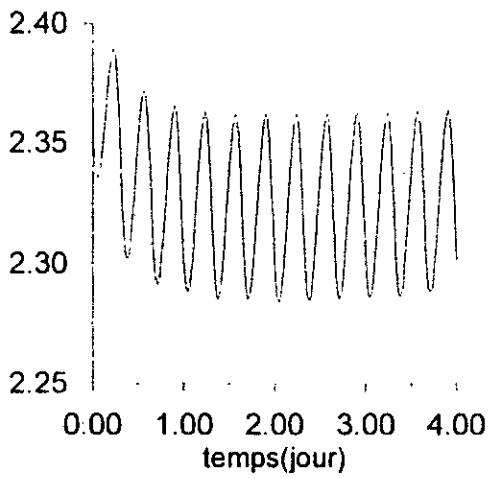
Figure.(III-3):Réponses de système biologique pour deux expériences ' a ' et ' b ', avec l'entre D (la dilution) est différentes pour chacune .



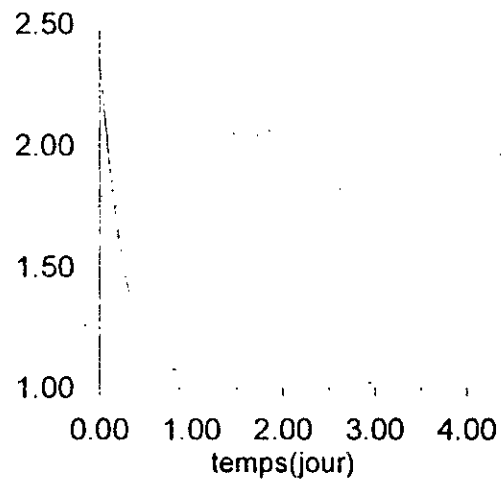
L'évolution de la biomasse(*exp : a*).



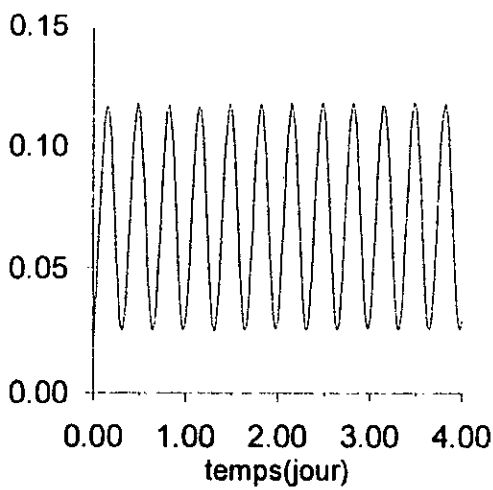
L'évolution de la biomasse(*exp : a*).



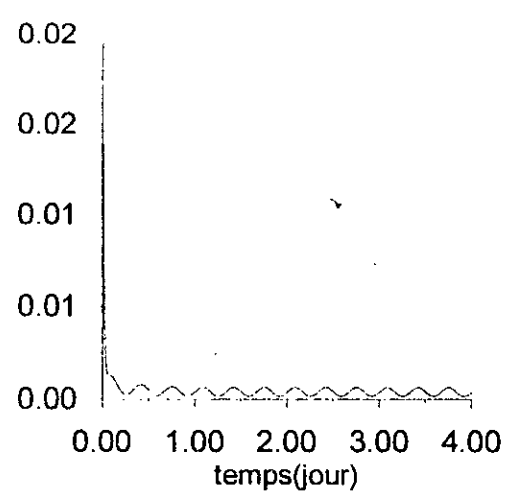
L'évolution de Q (*exp : a*)



L'évolution de Q (*exp : a*)

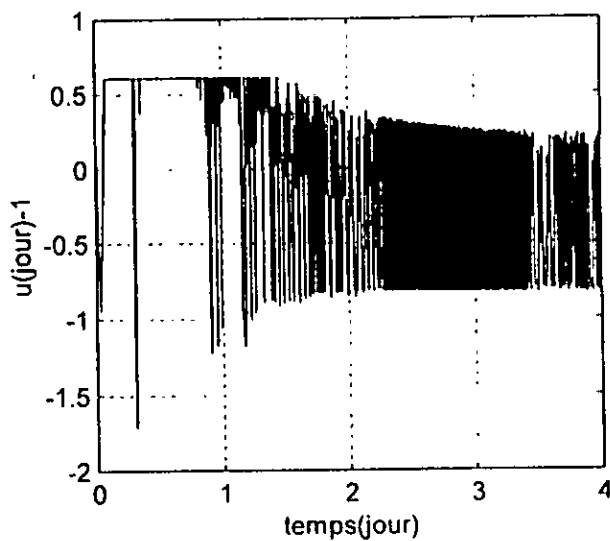
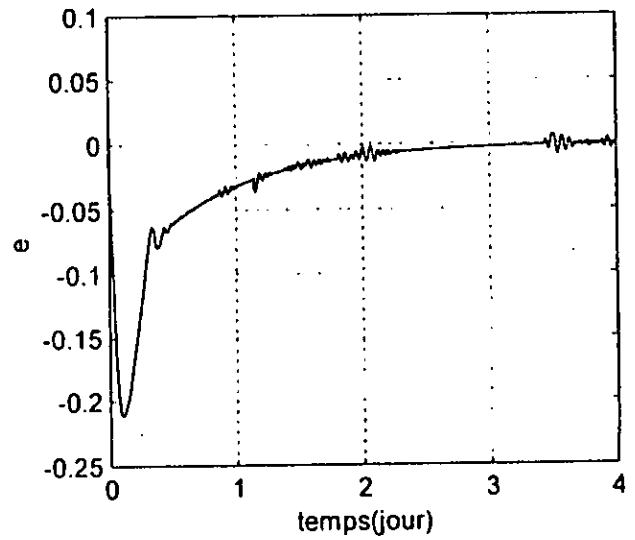
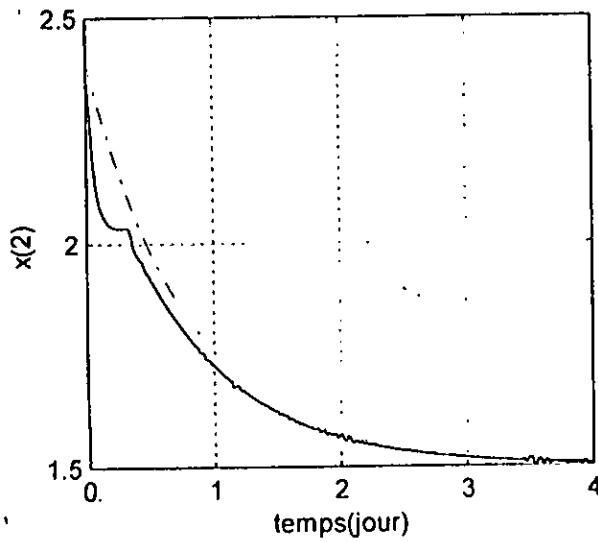
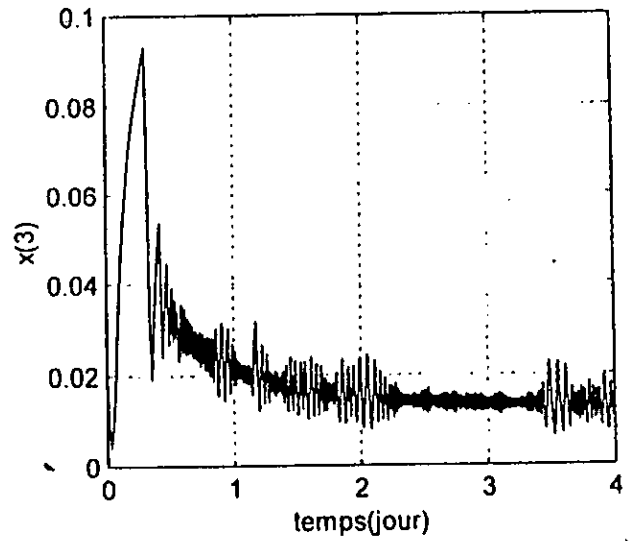
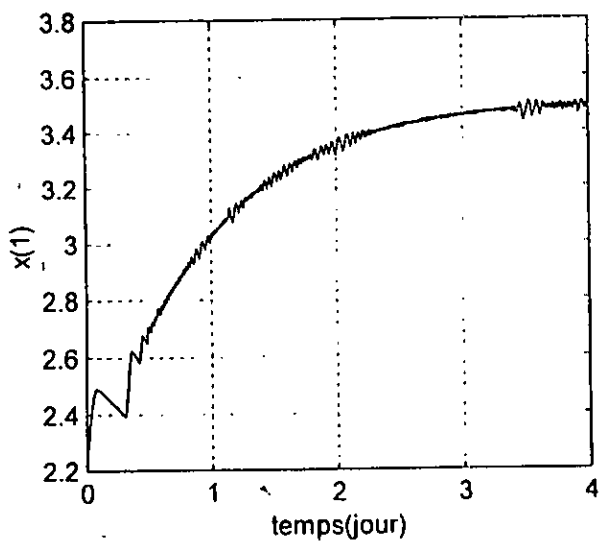


L'évolution de substrat (*exp : a*)

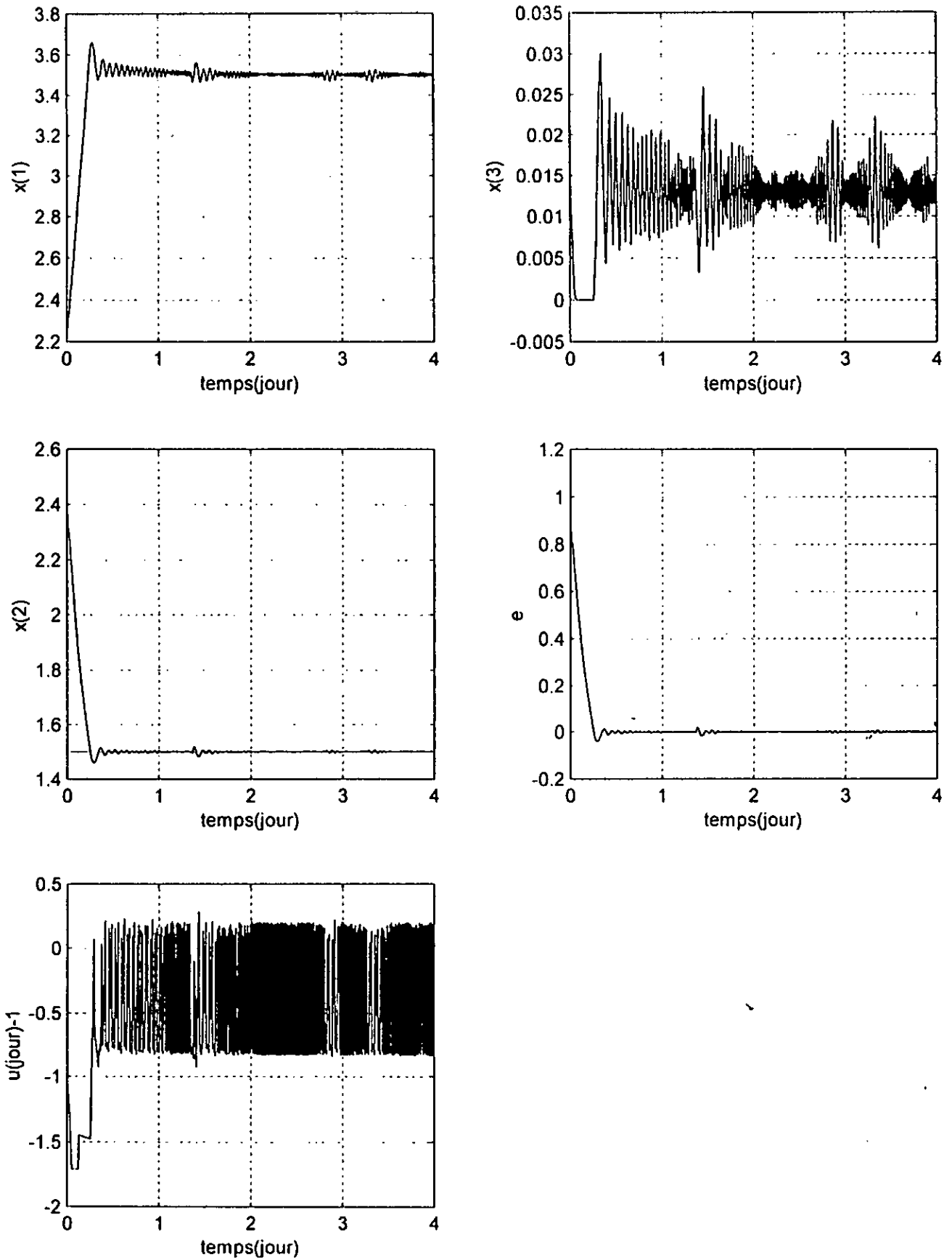


L'évolution de substrat (*exp : a*)

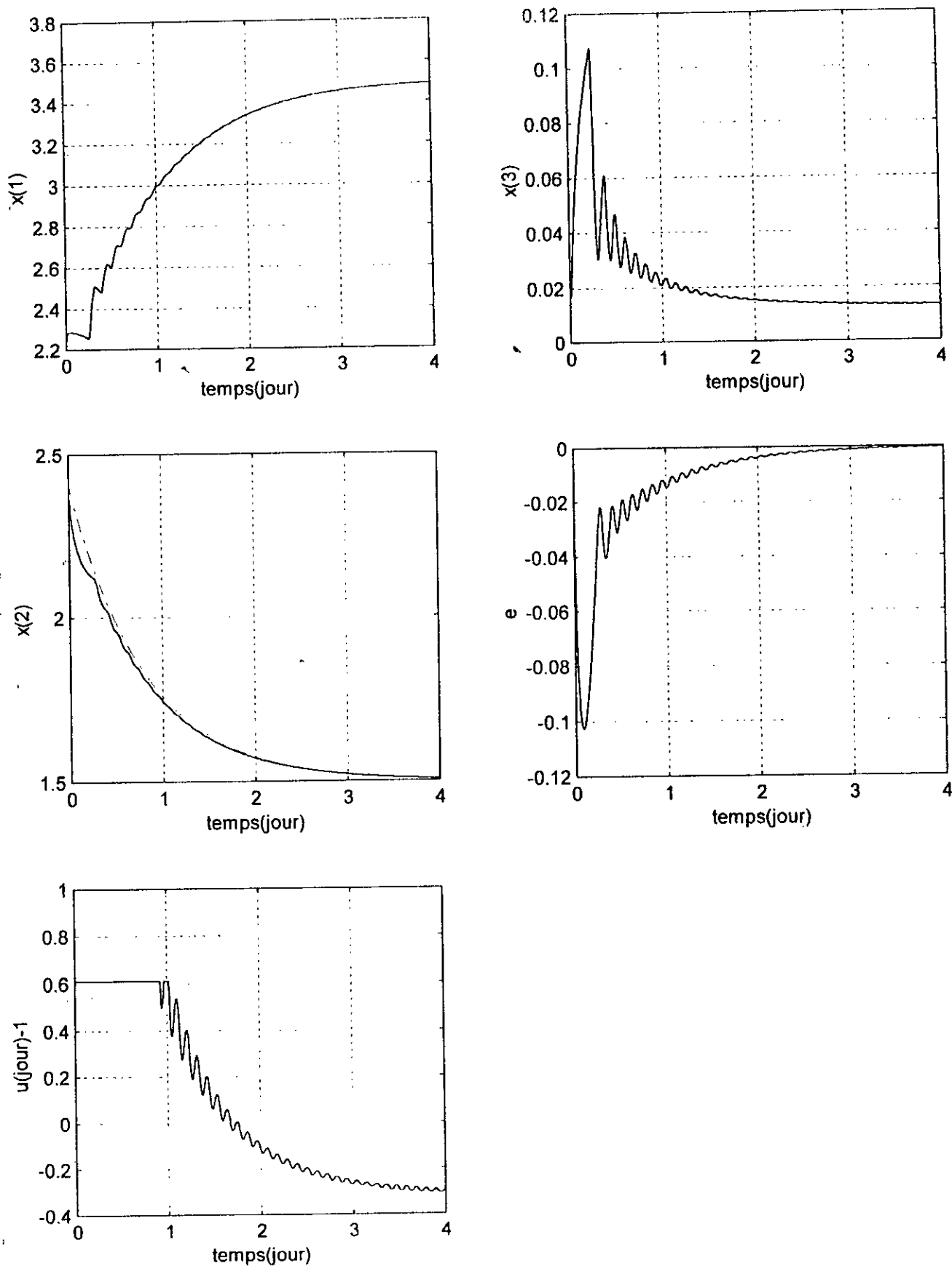
Figure.(III-4): Réponses du système biologique: à droite système stable, et à gauche système instable.



Figure(III-5). Réponses du système biologique à une exponentielle ( $y_r = 0.9 e^{-0.25t} + 1.5$ ), en utilisant la fonction 'Sign'.



Figure(III-6). Réponses du système biologique à un échelon ( $y_r=1.5$ ), en utilisant la fonction avec la fonction 'Sign'.



Figure(III-7). Réponses du système biologique à une exponentielle ( $y_r = 0.9 e^{-0.25t} + 1.5$ ) en utilisant la fonction 'Erf'.



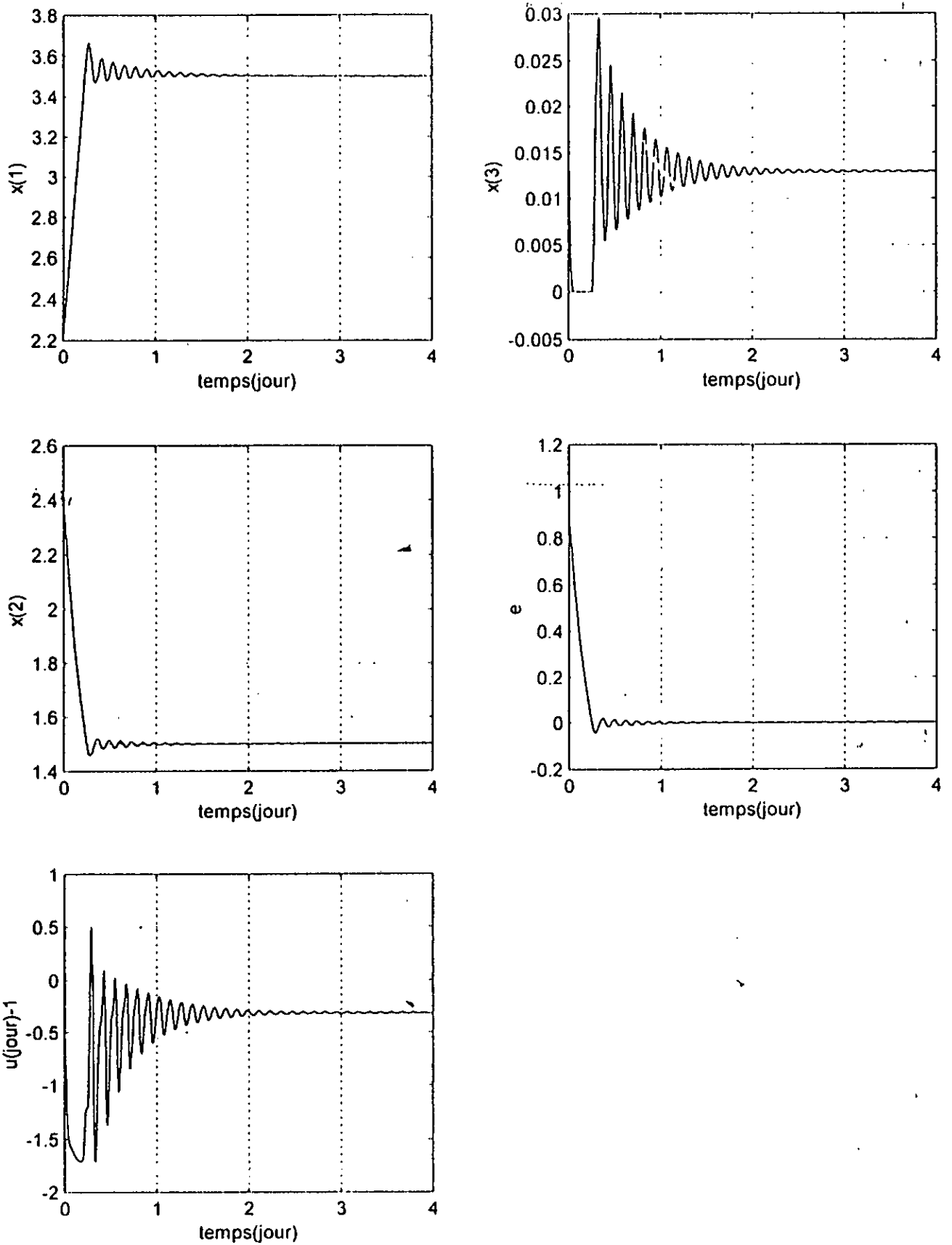


Figure (III-8). Réponses du système biologique à un échelon ( $y_r=1.5$ ), en utilisant la fonctions 'Erf'

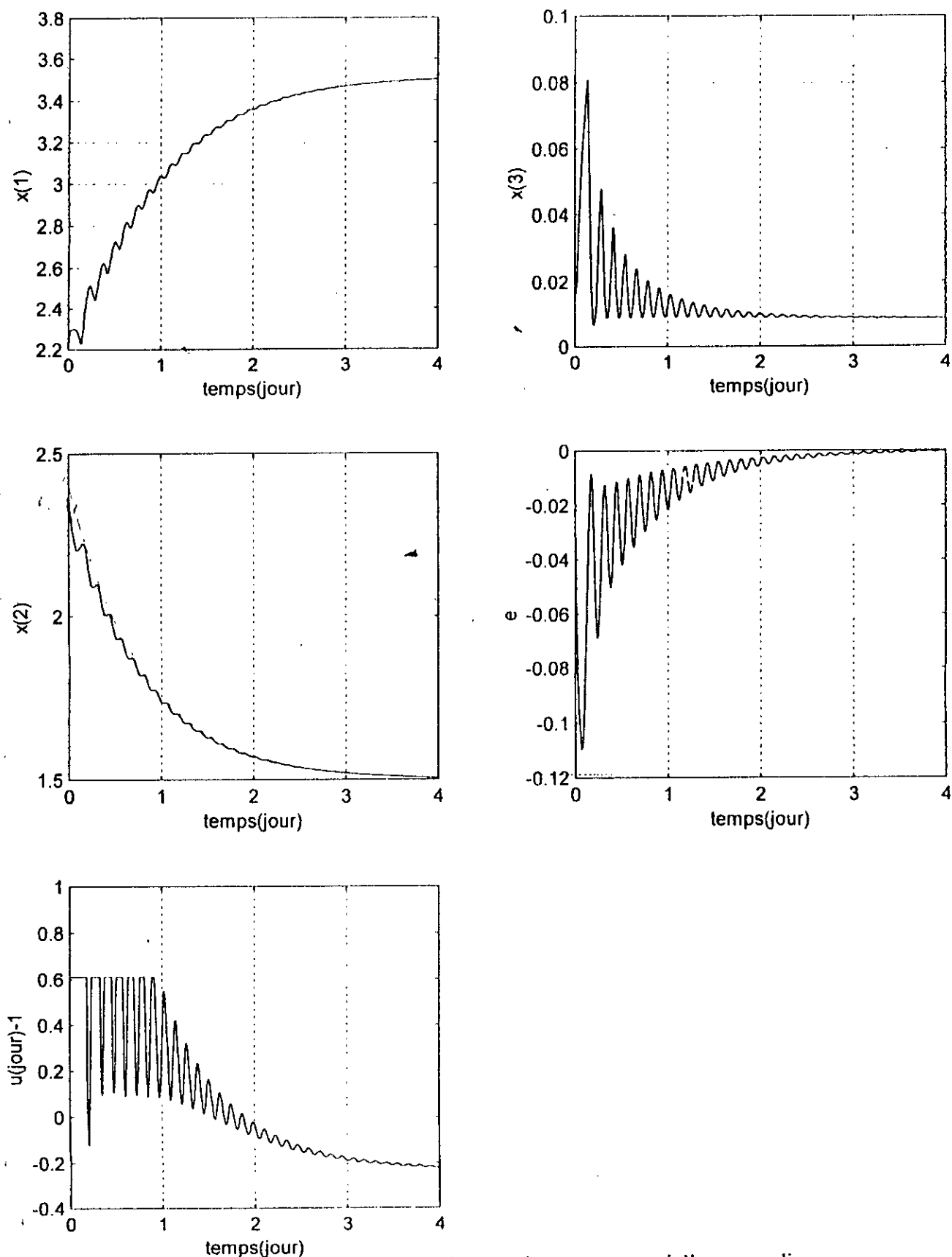
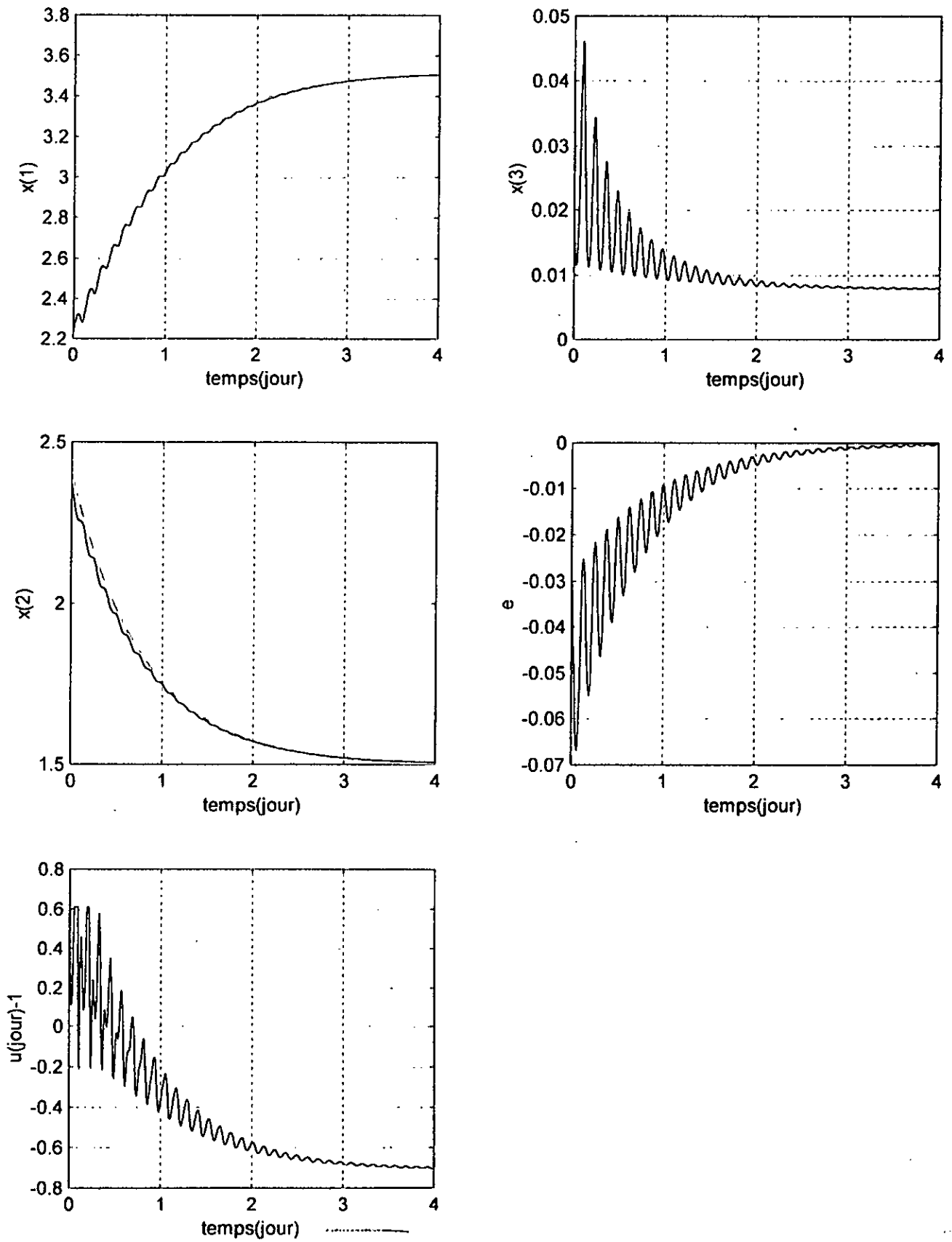
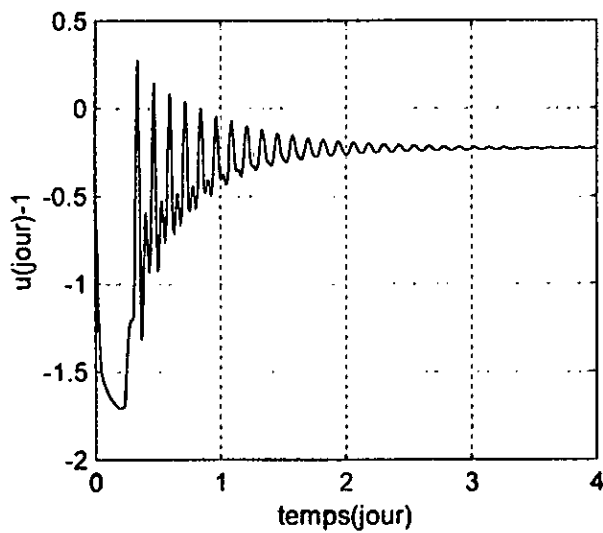
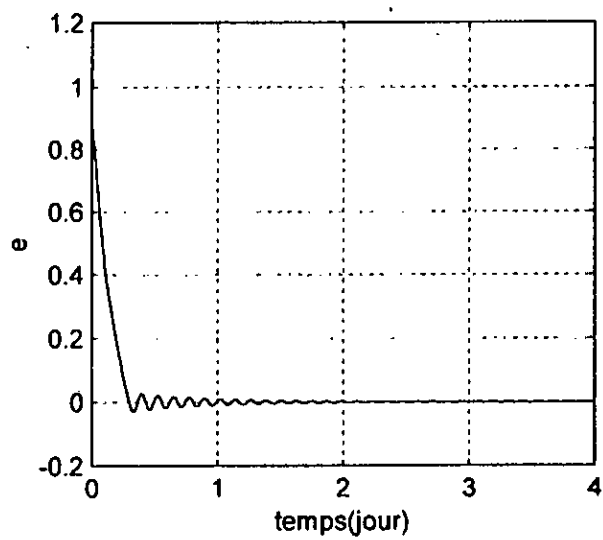
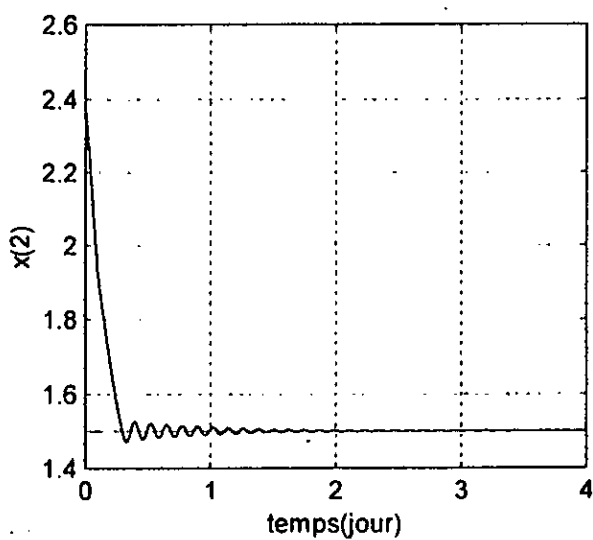
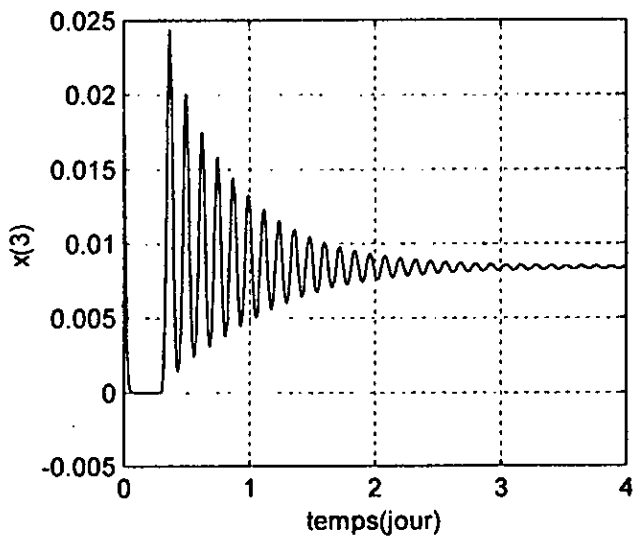
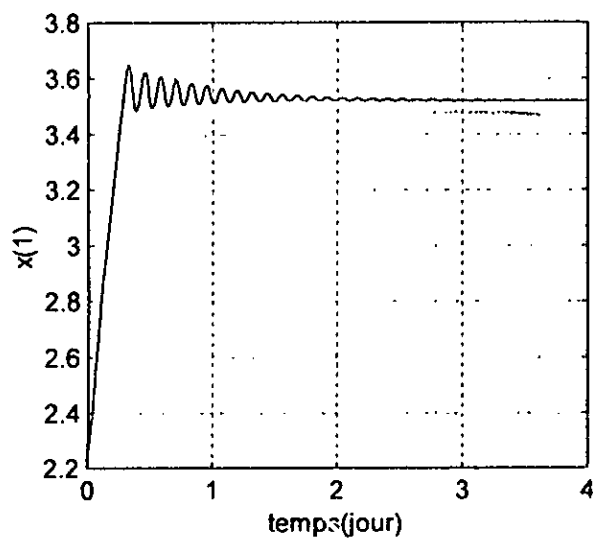


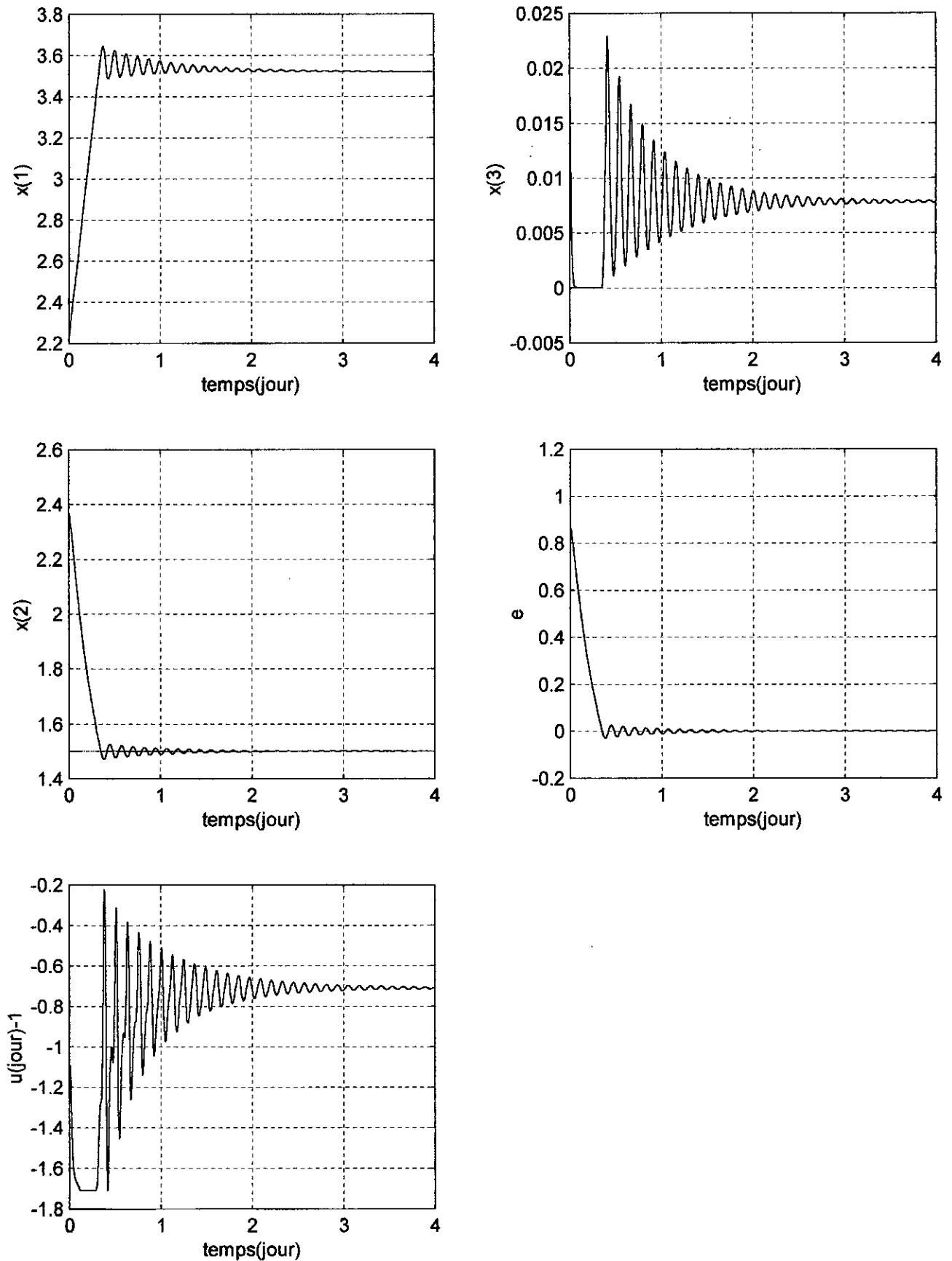
Figure (III-9). Réponses du système biologique en à une exponentielle, en appliquons une perturbation vis à vis le paramètre  $a_2$  (une variation de 30%) à  $t=0.1$ .



Figure(III-10). Réponses du système biologique a une exponentielle, on applique une perturbation vis à vis le paramètre  $a_2$  (une variation de 30%) à  $t=0$ .



Figure(III-11). Réponses du système biologique à un échelon, on applique une perturbation vis à vis le paramètre  $a_2$  (une variation de 30%) à  $t=0.1$ .



Figure(III-12). Réponses du système biologique à un échelon, on applique une perturbation vis à vis le paramètre  $a_2$  (une variation de 30%) à  $t=0$ .

**Conclusion :**

Comme deuxième application de système physique en cascade, nous avons présenté le cas du bioréacteur. Nous avons décrit le comportement dynamique de ce bioprocédé et synthétisé une commande non linéaire par *Lyapunov* qu'on a testé sur le système biologique. Les résultats des simulations sont très satisfaisants ( système évolue parfaitement à son nouveau régime ou bien les trajectoires désirées, bonne précision, robustesse...). On peut conclure que cette commande s'adapte bien aux systèmes biologiques .



# Chapitre IV

## Réacteur nucléaire de type PWR

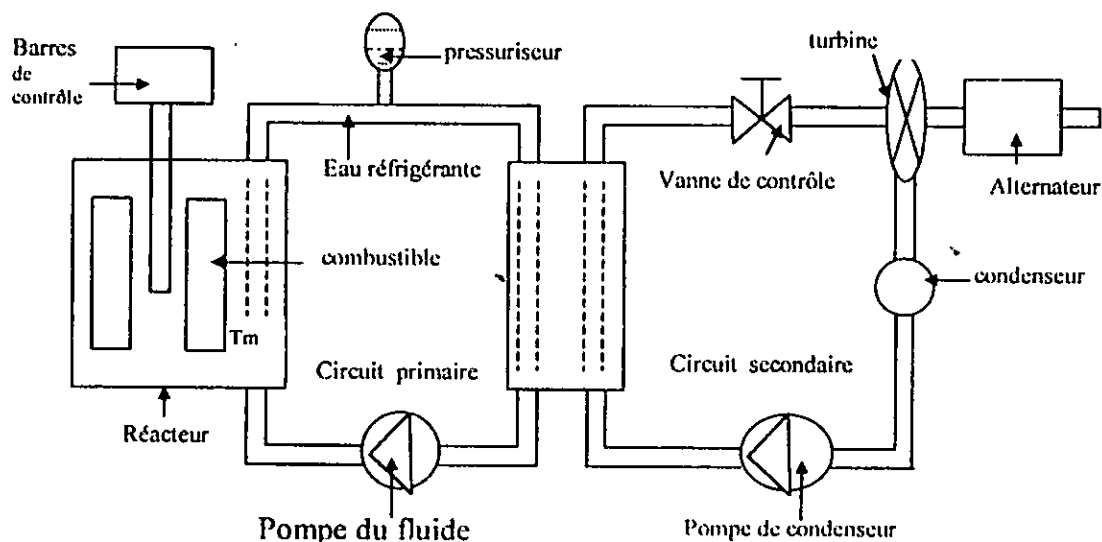
## Chapitre IV :

### Réacteur nucléaire de type PWR

#### Introduction :

Comme toutes les centrales thermiques, les centrales nucléaires sont destinées généralement à la production d'électricité et quelques fois, à la production de la chaleur utilisée directement dans l'industrie. Les différences essentielles entre les divers types de centrales nucléaires portent sur le réacteur : c'est à dire le choix du combustible nucléaire ou bien la manière par laquelle la chaleur est produite, déterminent pratiquement les matériaux et les équipements de l'installation.

Un grand nombre de ces centrales emploient de l'eau ordinaire sans pression comme modérateur et comme fluide caloporteur, ainsi elles utilisent de l'uranium comme combustible nucléaire pour produire l'énergie thermique (cette énergie étant produite par la fission de l'isotope 235 qui se trouve dans la proportion de 0.7 % dans l'uranium naturel). Cette description de centrale correspond à celle dite PWR (pressurised water reactor). L'originalité des centrales à eau pressurisée réside dans le fait qu'elles comportent deux circuits d'eau sous pression séparés (figure:IV-1).



Figure(IV-1) : Schéma du réacteur nucléaire de type PWR



## ***IV-1-Description et fonctionnement d'une centrale nucléaire:***

### ***IV-1-1-Principe:***

Une centrale nucléaire comme toute centrale thermique, est conçue pour récupérer l'énergie provenant d'une réaction (fission) sous forme de chaleur et la communiquer le plus souvent à de l'eau, qui se transforme alors en vapeur. Celle-ci est ensuite détendue dans une turbine qui entraîne un alternateur produisant de l'électricité. Alors, l'énergie produite par fission des atomes de l'uranium subit trois transformations :

- Transformation thermique (production de vapeur).
- Transformation mécanique (entraînement de turbine).
- Production de l'électricité (entraînement de l'alternateur).

Une centrale nucléaire de type PWR 900 MWE, utilise l'oxyde d'uranium  $UO_2$  légèrement enrichi de  $U^{235}$  comme combustible, et l'eau ordinaire comme caloporteur et modérateur.

### ***IV-1-2-Principaux circuits d'une centrale nucléaire:***

#### ***a) Circuit primaire:***

Le circuit primaire comprend les éléments suivants:

- Le réacteur contenant le combustible représentant la partie active de l'installation.
- Le cœur du réacteur comporte 264 crayons combustibles disposés en carré, le cœur est divisé en trois parties d'enrichissements, les combustibles les plus enrichis étant placés dans la zone extérieure. Le combustible, qui demeure pendant trois années dans le réacteur, est renouvelé par tiers tous les ans, le combustible neuf étant placé à l'extérieur.
- Des espaces libres sont prévus pour guider la grappe de 24 crayons absorbants destinés au contrôle du réacteur; les crayons sont tenus, à leur partie supérieure par un système de maintien appelé araignée.
- Les échangeurs qui transmettent au circuit secondaire la chaleur produite par le circuit primaire. Ces échangeurs au nombre de trois ou quatre constituent les générateurs de vapeur de la centrale.

- Le pressuriseur dont le rôle est de maintenir une pression suffisamment élevée pour éviter l'ébullition de l'eau autour du combustible (contrôle les variations de la pression et de volume du fluide primaire). A cet effet, pour maintenir la pression à la valeur convenable (150 bars environ), on peut soit utiliser des cannes chauffantes (placées à l'intérieur du pressuriseur), soit au contraire asperger l'intérieur d'eau froide
- Les pompes (une par échangeur) assurent la circulation d'eau dans le circuit primaire. Ces pompes sont entraînées par des moteurs asynchrones à cage munis de volants d'inertie de masse importante, lesquelles continuent à fonctionner pendant un certain temps, en cas de panne de courant.

#### **Les barres de contrôle :**

Le contrôle du cœur s'effectue à l'aide de barres de contrôle qui jouent un triple rôle. Certaines permettent de maintenir le coefficient de multiplication du cœur égal à l'unité en cours de fonctionnement : ce sont les barres de pilotage. D'autres permettent d'assurer un arrêt rapide de la réaction en chaîne : ce sont les barres de sécurité; en fonctionnement, elles sont normalement sorties du cœur. D'autres enfin permettent de compenser l'usure du combustible et la perte de réactivité au cours de la montée en température : ce sont les barres de compensation.

Les barres de pilotage doivent pouvoir permettre des variations de réactivité précises et très faibles, de l'ordre du pcm. En disposant d'un grand nombre de barres de contrôle identiques et de plusieurs vitesses de manœuvre, on peut leur faire généralement jouer les rôles de barres de pilotage, de barres de compensation et de barres de sécurité.

#### **b) Circuit secondaire:**

Ce circuit présente beaucoup d'analogies avec le circuit eau-vapeur d'une centrale classique. Il en diffère cependant par la nature de la vapeur qui d'une part est humide et d'autre part a une température plus basse, donc une pression plus basse.

Comme une grande partie de la détente a lieu en milieu humide, on doit utiliser des matériaux qui résistent à la corrosion-érosion et mettre en place des ailettes récupératrices d'eau avec un circuit de drainage.

La première conséquence de la température plus basse est une diminution du rendement thermique en vertu du principe de Carnot.

Par ailleurs, comme il faut obtenir la même puissance des turbines avec une pression plus faible, on doit augmenter le débit de vapeur, ce qui entraîne des dimensionnements plus importants des vaines vapeurs.

Comme on doit maintenir à un certain niveau les contraintes centrifuges, on arrive à la conclusion suivante:

La vitesse des turboalternateurs des centrales nucléaires est ramenée à 1500 tr/min.

### ***c) Circuit de refroidissement des condenseurs :***

Les modèles de refroidissement sont les mêmes que pour les centrales classiques, si le débit de l'eau est suffisant, on utilise le cycle ouvert, avec restitution de l'eau à la rivière ou à la mer. Dans le cas contraire (ce qui est le plus fréquent), on utilise le cycle fermé avec l'aide d'un réfrigérant atmosphérique.

## ***IV-2- Modèle du Réacteur :***

### ***IV -2- 1- Modèle Neutronique:***

#### ***Rappel sur la neutronique:***

Les équations cinétiques du modèle du réacteur peuvent être obtenues à partir du phénomène de la fission nucléaire.

#### ***a) – La fission :***

Quand un neutron est absorbé par un noyau fissile ( $U^{235}$  par exemple), ce dernier se transforme en noyau instable qui se scinde en deux noyaux avec émission de 2 à 3 neutrons avec dégagement d'une énergie très importante (autour de 200 Mev). Ce type d'interaction particulier neutron-noyau est appelé réaction de fission.

**b)- Réaction en chaîne :**(figure : IV.2).

On sait que la fission de certains noyaux lourds libère plus de deux nouveaux neutrons qui peuvent, dans certaines conditions, causer la fission de nouveaux noyaux. Il est donc théoriquement possible d'envisager une " réaction en chaîne ". En conséquence, la composition du réacteurs doit être choisie de telle sorte que les neutrons émis par fission aient une probabilité suffisante de provoquer de nouvelles fissions. Or, certains d'entre eux sont absorbés définitivement par divers matériaux non fissiles qui doivent être utilisés pour réaliser le cœur de réacteur : matériaux de structure, réfrigérant et le modérateur qui a un double rôle, il maintient la réaction en chaîne en ralentissant les neutrons, c'est à dire les transforme en neutrons thermiques et transforme l'énergie nucléaire en énergie thermique.

De plus, les matières fissiles elles-mêmes peuvent absorber des neutrons sans subir de fission; ce phénomène, appelé capture, apparaît avec une certaine probabilité, variable avec l'énergie des neutrons.

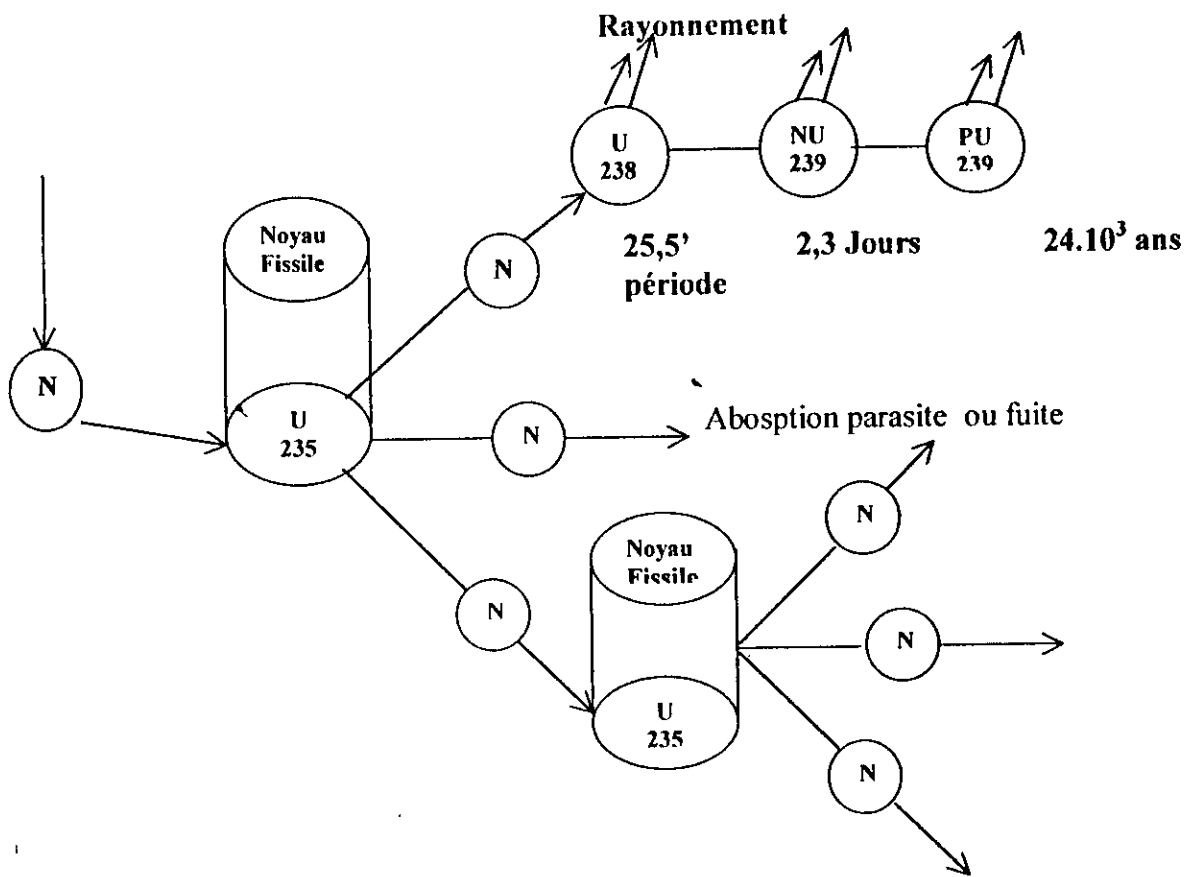


Figure.IV-2. Schéma simplifié de la fission du noyau U

**c)- Puissance neutronique:**

La fission d'un atome d'uranium 235 libère en moyenne une énergie de 200 Mev. la fission de tous les noyaux des atomes contenus dans 1g d' $U^{235}$  en 24 heures, correspond à une puissance libérée de  $0,97 \cdot 10^6$  W.

**d)- Notion de la réactivité:**

Le nombre de neutrons varie d'une génération à l'autre après que le phénomène de fission a lieu. Un facteur k peut être défini comme le rapport de la génération précédente, il permet de dire dans quel sens évolue la réaction en chaîne. On distingue trois cas:

- Etat sous critique:  $0 < k < 1$ , De génération en génération, le nombre de neutrons de la réaction en chaîne diminue. La réaction s'arrête..
- Etat critique:  $k = 1$ , le nombre de neutrons reste constant, la réaction en chaîne est stable.
- Etat sur critique  $k > 1$  : Le nombre de neutrons ne cesse de croître, la réaction en chaîne diverge

On définit la réactivité ' $\rho$ ' par la formule suivante:

$$\rho = k - 1/k$$

Dans le fonctionnement, normal d'un réacteur,  $k$  est voisin de 1.

$$\rho \approx k - 1$$

#### e)- Neutrons prompts et neutrons retardés:

Les neutrons libérés à chaque fission sont classés en neutrons prompts et neutrons retardés. Ces neutrons prompts sont émis instantanément au moment de la fission (autour de 99%). Le reste des neutrons ( $\sim 1\%$ ) est émis après un retard pouvant atteindre plusieurs dizaines de secondes, ce sont les neutrons retardés émis lors de la désintégration des produits de fissions.

On définit le facteur  $\beta$  comme la fraction des neutrons retardés par rapport à tout les neutrons émis (pour l' $U^{235}$ ,  $\beta = 0,007606 = 706,6$  pcm). On classe généralement en six catégories les différents types de noyaux radioactif issus de la fission, appelés noyaux précurseurs parce que chacun de ces noyaux, en se désintégrant, est à l'origine de l'émission d'un neutron retardé. chaque groupe de neutrons retardés est caractérisé par:

$$\beta_i = \frac{\text{fraction émise à partir de noyau précurseur } (i)}{\text{fraction totale}}$$

On a donc:

$$\sum_{i=1}^6 \beta_i = \beta$$

**IV-2-2- Equations cinétiques :**

Soit  $\theta$  la durée de vie d'une génération de neutrons (le temps qui s'écoule en moyenne entre sa naissance par fission et sa disparition donnant lieu à une nouvelle fission) et 'N' le nombre de neutrons de la génération à l'instant 't', la nouvelle génération sera caractérisée, après un temps  $\theta$  par :

$k N(t) (1 - \beta)$  neutrons prompts.

En posant ;  $\lambda_i$  : Probabilité de désintégration des noyaux précurseurs 'i'

$C_i(t)$  : Nombre de noyaux précurseurs (i) à l'instant t.

$\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \theta$  : Nombre de noyaux précurseurs qui se sont désintégrés pendant le temps

$\theta$  égale au nombre des noyaux retardés apparus pendant  $\theta$ .

$k N(t) \beta_i$  : Nombre de noyaux fissiles 'i' apparus lors des désintégrations des noyaux fissiles, pendant le temps  $\theta$ .

$$N(t + \theta) = k N(t) (1 - \beta) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \theta \quad (IV-1)$$

$$C_i(t + \theta) = - \lambda_i C_i(t) \theta + N(t) k \beta_i \quad (IV-2)$$

En passant à la limite on trouve :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\theta} N(t) + \sum_{i=1}^6 C_i(t) \lambda_i \quad (IV-3)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{N(t)}{\theta} \beta_i - \lambda_i C_i \quad i = 1, \dots, 6 \quad (IV-4)$$

Ces équations décrivant l'évolution du nombre de neutrons. Compte tenu de ces deux équations et du fait que la puissance nucléaire est proportionnelle à la densité neutronique les équations cinétiques retenues sont :

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\theta} p_n(t) + \sum_{i=1}^6 C_i(t) \lambda_i \quad (IV-5)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\theta} p_n(t) - \lambda_i C_i \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{IV-6})$$

L'équation définissant la réactivité  $\rho$  est :

$$\rho = \rho_B - \alpha_u (T_u - T_{u0}) - \alpha_m (T_m - T_{m0}) \quad (\text{IV-7})$$

$\rho_B$ : réactivité des barres de contrôles

$\alpha_u$ : coefficient DOPPLER (l'échauffement du combustible);

$\alpha_m$ : coefficient modérateur ;

$T_u$ : température d'uranium ;

$T_{u0}$ : valeur nominale de la température du combustible ;

$T_m$ : température du modérateur ;

$T_{m0}$ : valeur nominale de la température du modérateur.

### IV-2-3 Modèle Thermique :

L'énergie générée au sein du crayon combustible migre à travers celui-ci, cette énergie est transmise au modérateur par l'intermédiaire de la gaine :

La variation de l'énergie d'un milieu = énergie produite – transfert.

On peut en déduire que le transfert thermique dans le cœur est caractérisé par la variation de l'énergie dans le combustible, puis la variation de l'énergie dans la gaine et enfin la variation de l'énergie dans le modérateur.

La variation de l'énergie dans le combustible est égale à l'énergie nucléaire par la fission au sein de l'uranium diminuée de l'énergie transmise par conduction à la gaine qui l'entoure.

D'où :

$$M_u C_u \frac{dT_u}{dt} = K p_n - \frac{1}{R_{ug}} (T_u - T_g) \quad (\text{IV-8})$$

La variation de l'énergie dans la gaine est égale à l'énergie cédée par le combustible à la gaine diminuée de l'énergie transmise par convection au modérateur.



D'où :

$$M_g C_g \frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{R_{ug}} (T_u - T_g) - \frac{1}{R_{gm}} (T_g - T_m) \quad (\text{IV-9})$$

La variation de l'énergie dans le modérateur est égale à l'énergie que lui a cédé la gaine diminuée de l'énergie transmise au circuit primaire.

D'où :

$$M_m C_m \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_{gm}} (T_g - T_m) - C_m Q_m (T_c - T_s) \quad (\text{IV-10})$$

Et la température moyenne du modérateur est à tout instant égale à :

$$T_m = \frac{T_s + T_c}{2} \quad (\text{IV-11})$$

Finalement la thermique du cœur est régie par des équations suivantes :

$$\begin{cases} M_u C_u \frac{dT_u}{dt} = K p_n - \frac{1}{R_{ug}} (T_u - T_g) \\ M_g C_g \frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{R_{ug}} (T_u - T_g) - \frac{1}{R_{gm}} (T_g - T_m) \\ M_m C_m \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_{gm}} (T_g - T_m) - C_m Q_m (T_c - T_s) \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

avec:  $T_m = \frac{T_s + T_c}{2}$  ;  $K_{ug} = \frac{1}{R_{ug}}$  ;  $K_{gm} = \frac{1}{R_{gm}}$

et :

$T_c$  : Température d'entrée du fluide caloporteur ;

$T_s$  : Température de sortie du fluide caloporteur ;

$Q_m$ : Débit de l'eau dans le cœur ;  
 $K$  : Facteur de conversion (watt-calorie);  
 $p_n$ : Puissance nucléaire dans le cœur ;  
 $R_u$  : Résistance thermique (Uranium-gaine);  
 $M_u$  : Masse de l'uranium,  
 $C_u$  : Chaleur massique de l'uranium.  
 $T_g$  : Température de la gaine ;  
 $R_{gm}$  : Résistance thermique (gaine-modérateur);  
 $T_m$  : Température moyenne du modérateur.

On remarque que la masse de la gaine est négligeable devant celle de l'uranium et du fluide primaire ce qui revient à négliger les constantes de temps liées aux échanges (combustible - gaine) devant les constantes de temps des transitoires que l'on va étudier.

D'où :

$$K_{ug} (T_u - T_g) - K_{gm} (T_g - T_m) = 0 \quad (IV-13)$$

Le modèle thermique devient en remplaçant  $T_g$  de l'équation (IV.13) et  $T_s$  de l'équation (IV.11).

$$M_u C_u \frac{dT_u}{dt} = K p_n - K_{um} (T_u - T_m) \quad (IV-14)$$

Avec :

$$T_g = \frac{K_{ug}}{K_{ug} + K_{gm}} T_u + \frac{K_{gm}}{K_{ug} + K_{gm}} T_m$$

$$M_m C_m \frac{dT_m}{dt} = K_{gm} \left( \frac{K_{ug}}{K_{ug} + K_{gm}} T_u + \frac{K_{gm}}{K_{ug} + K_{gm}} T_m - T_m \right) - Q_m C_m (T_m - T_s)$$

Or :

$$K_{um} = \frac{K_{gm} K_{ug}}{K_{ug} + K_{gm}} \quad \text{et} \quad T_m = \frac{T_s + T_g}{2} \quad \Rightarrow \quad T_g = 2T_m - T_s$$

$$M_m C_m \frac{dT_m}{dt} = K_{um} (T_u - T_m) - 2Q_m C_m (T_m - T_s) \quad (IV-15)$$

$K_{um}$  : représente le coefficient de transmission globale du combustible vers le fluide primaire.

D'ou le modèle du réacteur retenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_n}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\theta} p_n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i \\ \frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\theta} p_n - \lambda_i C_i \\ M_u C_u \frac{dT_u}{dt} = K p_n - K_{um} (T_u - T_m) \\ M_m C_m \frac{dT_m}{dt} = K_{um} (T_u - T_m) - 2Q_m C_m (T_m - T_s) \\ \rho = \rho_B - \alpha_u (T_u - T_{u0}) - \alpha_m (T_m - T_{m0}) \\ T_m = \frac{T_s + T_c}{2} \end{array} \right. \quad (IV-16)$$

Le modèle mathématique (IV.16) peut être simplifié en remarquant qu'on peut utiliser les équations cinétiques à 2 groupes de neutrons retardés.

Les constantes de désintégration sont calculées à l'aide des relations suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{\sum_{i=1}^3 \beta_i \alpha_i} \quad ; \quad \beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{\sum_{i=1}^6 \beta_i \alpha_i} \quad ; \quad \beta_1 = \sum_{i=1}^3 \beta_i \quad ; \quad \beta_2 = \sum_{i=1}^6 \beta_i$$

Le système simplifié est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_n}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\theta} p_n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i \\ \frac{dC_1}{dt} = \frac{\beta_1}{\theta} p_n - \lambda_1 C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{\beta_2}{\theta} p_n - \lambda_2 C_2 \end{array} \right. \quad (IV-17)$$

Et en remplaçant  $\rho$  par son expression on aura le système final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_n}{dt} = \frac{(\rho_B - \alpha_u(T_u - T_{u0}) - \alpha_m(T_m - T_{m0}) - \beta)}{\theta} p_n + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ \frac{dC_1}{dt} = \frac{\beta_1}{\theta} p_n - \lambda_1 C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{\beta_2}{\theta} p_n - \lambda_2 C_2 \\ \frac{dT_u}{dt} = \frac{K}{M_u C_m} p_n - \frac{K_{um}}{M_u C_u} (T_u - T_m) \\ \frac{dT_m}{dt} = \frac{K_{um}}{M_m C_m} (T_u - T_m) - \frac{2Q_m}{M_m} (T_m - T_s) \end{array} \right. \quad (\text{IV-18})$$

En le mettant sous forme d'état avec :

$$X^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5] = [P_n \ C_1 \ C_2 \ T_u \ T_m]$$

$$U = \rho_B$$

La commande U est la réactivité des barres de contrôle.

si on note  $T_s$  par  $T_0$  la température de l'eau à la sortie du circuit primaire.

On aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\theta} (\alpha_u T_{u0} + \alpha_m T_{m0} - \beta) x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 - \frac{\alpha_u}{\theta} x_1 x_4 - \frac{\alpha_m}{\theta} x_1 x_5 + \frac{x_1}{\theta} U \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\beta_1}{\theta} x_1 - \lambda_1 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{\beta_2}{\theta} x_1 - \lambda_2 x_3 \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{K}{M_u C_u} x_1 - \frac{K_{um}}{M_u C_u} (x_4 - x_5) \\ \frac{dx_5}{dt} = \frac{K_{um}}{M_m C_m} (x_4 - x_5) - \frac{2Q_m}{M_m} (x_5 - T_0) \end{array} \right.$$

qui a la forme bilinéaire suivant :

$$X = f(X) + g(X) U ; \quad (\text{IV-19})$$

avec :

$$f(X) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\theta} (\alpha_u T_{u0} + \alpha_m T_{m0} - \beta) x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 - \frac{\alpha_u}{\theta} x_1 x_4 - \frac{\alpha_m}{\theta} x_1 x_5 \\ \frac{\beta_1}{\theta} x_1 - \lambda_1 x_2 \\ \frac{\beta_2}{\theta} x_1 - \lambda_2 x_3 \\ \frac{K}{M_u C_u} x_1 - \frac{K_{um}}{M_u C_u} (x_4 - x_5) \\ \frac{dx_5}{dt} = \frac{K_{um}}{M_m C_m} (x_4 - x_5) - \frac{2Q_m}{M_m} x_5 + \frac{2Q_m}{M_m} T_0 \end{bmatrix}$$

et:

$$g(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**IV-3-Simulation en boucle ouvert :**

Nous remplaçons les paramètres du système par les coefficients valeurs numériques, suivant :

$$a_1 = -\frac{\alpha_u}{\theta} = -3 \cdot 10^{-5} / 4 \cdot 10^{-5}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_m}{\theta} = -3 \cdot 10^{-4} / 4 \cdot 10^{-5}$$

$$a_3 = \frac{\alpha_u T_{uo} + \alpha_m T_{m0} - \beta}{\theta} = (-0,0064 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 430,13 + 3 \cdot 10^{-4} \cdot 288,6) / 4 \cdot 10^{-5}$$

$$a_4 = \lambda_1 = 0,087. \quad a_5 = \lambda_2 = 0,71. \quad a_6 = \frac{1}{\theta} \cdot 10^{-5} = 0,25.$$

$$b_1 = \frac{\beta_1}{\theta} = 71,5. \quad b_2 = -\lambda_1 = -0,087.$$

$$c_1 = \frac{\beta_1}{\theta} = 88,5. \quad c_2 = -\lambda_2 = -0,71.$$

$$d_1 = \frac{K}{M_u C_u} = 0,0391. \quad d_2 = -\frac{K_{um}}{M_u C_u} = -0,184.$$

$$e_1 = \frac{K_{um}}{M_m C_m} = 0,385. \quad e_2 = -\frac{2 \cdot Q_m}{M_m} = -11,75. \quad e_3 = -\frac{2 \cdot Q_m}{M_m} \cdot T_0 = -3222,9.$$

En introduisant les coefficients ci dessous le système prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (a_1 x_3 + a_2 x_4 + a_3) x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3 + a_6 x_1 u \\ x_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ x_3 = c_1 x_1 + c_2 x_3 \\ x_4 = d_1 x_1 + d_2 (x_4 - x_5) \\ x_5 = e_1 x_4 + e_2 x_5 + e_3 \end{array} \right. \quad (\text{IV-20})$$

Le tableau ci - dessous présente les valeurs des états du système a deux points fonctionnements :

	P(MW)	C <sub>1</sub> (MW)	C <sub>2</sub> (MW)	Tu (°C)	Tm (°C)
100 %	2700	22 189 60	336550	868,9	302,8
25%	675	554 741	84137	430,13	288,6

Pour notre simulation nous avons choisi comme état initial celui à 25% (pour P, C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>) fonctionnement normal.

La figure (IV.3) présente l'évolutions des états, suite à l'introduction d'un échelon de commande  $u = 5$  pcm.

D'après cette figure on peut dire que le système est stable pour ces conditions initiales.

#### IV-4- Mise en œuvre de la commande :

Pour réécrire le système (IV.20) sous notre forme (I-17), on considère le changement de variable suivant :

$$\zeta = x_1.$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] = [x_1, x_2, x_3, x_4]$$

le système (IV.20) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta} = f(\zeta, \eta) + g(\zeta, \eta) u, \quad f = (a_4 \eta_3 + a_2 \eta_4 + a_3) \zeta + a_4 \eta_1 + a_5 \eta_2; \quad g = a_6 \zeta \\ \dot{\eta}_1 = f_1(\zeta, \eta); \quad f_1 = b_1 \zeta + b_2 \eta_1. \\ \dot{\eta}_2 = f_2(\zeta, \eta). \quad f_2 = c_1 \zeta + c_2 \eta_2. \\ \dot{\eta}_3 = f_3(\zeta, \eta). \quad f_3 = d_1 \zeta + d_2 (\eta_3 - \eta_4). \\ \dot{\eta}_4 = f_4(\zeta, \eta). \quad f_4 = e_1 \eta_3 + e_2 \eta_4 + e_3. \\ y = \eta_4. \end{array} \right. \quad (IV-21)$$

l'objectif est de régler la température du modérateur  $\eta_4$ .

Soit  $y_d$  la valeur désirée de la sortie  $y$  et soit l'erreur de réglage donnée par :

$$e = \eta_4 - y_d \quad (IV-22)$$

$$e = \eta_4 - y_d = f_4 - y_d \quad (IV-23)$$

$e$  peut être encore écrit sous la forme :

$$e = f_4 - y_d + \zeta - \zeta.$$

on note  $\psi(\zeta, \eta)$  le terme suivant :

$$\psi(\zeta, \eta) = f_4(\zeta, \eta) + \zeta \quad (IV-24)$$

d'où  $e$  peut s'écrire sous la forme :

$$e = \psi - y_d - \zeta \quad (IV-25)$$

soit la fonction de *Lyapunov* suivante



$$V = \frac{1}{2} e^2 \quad (IV-26)$$

$$\dot{V} = e \dot{e} = e(\dot{\psi} - \dot{y}_d - \dot{\zeta}) \quad (IV-27)$$

si on impose à  $\psi$  la valeur désirée  $\psi_d$  donnée par :

$$\psi_d = y_d - q \cdot \text{sign}(e) \quad (IV-28)$$

$$\dot{V} = e(-q \cdot \text{sign}(e) - \dot{\zeta}) = -q \cdot e \cdot \text{sign}(e) - e \dot{\zeta}$$

$$\dot{V} = -q|e| - e \dot{\zeta} \quad (IV-29)$$

$$\text{si } q \gg |\dot{\zeta}| \Rightarrow \dot{V} < 0 \quad \forall e \neq 0 \quad (IV-30)$$

d'où  $e \rightarrow 0$  donc  $y \rightarrow y_d$ .

#### détermination de la commande :

Il faut calculer la commande 'u' de manière à ce que  $\psi$  prenne la valeur  $\psi_d$ . Pour ce la on introduit la variable erreur .

$$z = \psi_d - \psi \Rightarrow \psi = \psi_d - z \quad (IV-31)$$

d'où la relation (IV.25) s'écrit alors :

$$e = \psi_d - z - y_d - \zeta \quad (IV-32)$$

soit la fonction de Lyapunov augmentée :

$$V_a = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} z^2 \quad (IV-33)$$

$$\dot{V}_a = e \dot{e} + z \dot{z} \quad (IV-34)$$

$$\dot{V}_a = e(\dot{\psi}_d - \dot{y}_d - \dot{\zeta}) - e \dot{z} + z \dot{z}$$

$$\dot{V}_a = -q|e| - e \dot{\zeta} - e \dot{z} + z \dot{z} \quad (IV-35)$$

si on impose à  $z$  la dynamique suivante :

$$\dot{z} = -k \operatorname{sign}(z). \quad (\text{IV-36})$$

$\dot{V}_a$  devient :

$$\dot{V}_a = q|e| - e\zeta - e z + e z - k|z|. \quad (\text{IV-37})$$

avec :

$$q \gg |\zeta| \quad \text{et} \quad k > 0$$

$$\dot{V}_a < 0 \quad \forall e \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall z \neq 0$$

$$\Rightarrow z \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \rightarrow \psi_d.$$

Calcul de la commande :

On a :

$$\dot{z} = \dot{\psi}_d - \dot{\psi}.$$

avec :

$$\ddot{\psi}_d = \ddot{y}_d.$$

$$\dot{\psi} = f_4 + \zeta, \quad f_4 = e_1 f_3 + e_2 f_4.$$

$$\psi = e_1 f_3 + e_2 f_4 + f + g u.$$

or de (IV-35) on a:

$$\dot{z} = -k \operatorname{sign}(z).$$

D'où:

$$-k \operatorname{sign}(z) = \ddot{y}_d - (e_1 f_3 + e_2 f_4 + f + g u). \quad (\text{IV-38})$$

$$\Rightarrow u = 1/g [\ddot{y}_d - (e_1 f_3 + e_2 f_4 + f) - e + k \operatorname{sign}(z)]. \quad (\text{IV-39})$$

### ***IV-5-Simulations et Interprétations:***

Les résultats de simulations sont indiqués sur les figures (IV-4), (IV-5), (IV-6), (IV-7), (IV-8) et (IV-9). On remarque que l'application de la commande synthétisée porte des améliorations remarquables sur le comportement dynamique du système, ce qui apparaît clairement sur les figures précédentes où on constate des faibles dépassements sur le palier et une poursuite parfaite des consignes de températures avec un temps de réponse satisfaisant.

Quant à la commande, on remarque qu'elle présente des oscillations et un phénomène de broutement (chattering) dû à la discontinuité de la fonction 'Sign', alors on a remplacé cette dernière par la fonction 'Erf' dans quelques simulations, où on a pu constater une diminution des chattering ainsi que la précision [voir figure (IV-4)].

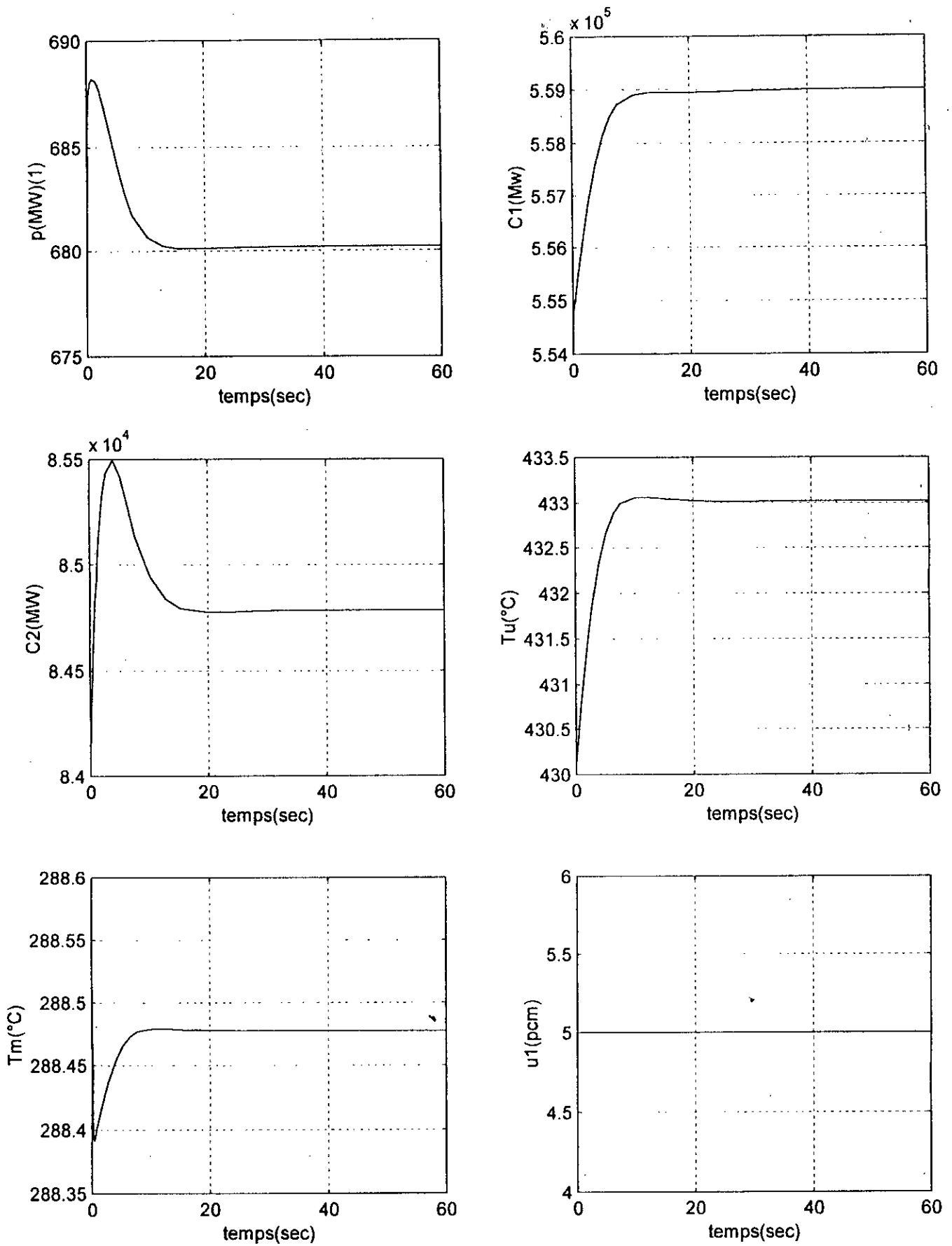
La figure (IV-7) montre l'évolution des états pour une consigne  $y_r = 30^\circ\text{C}$ , on remarque que les variables d'états  $p, C_1, C_2$  et  $T_u$  convergent vers des valeurs négatives. Vu que la relation entre  $T_m$  et les autres variables d'états est linéaire, toute diminution ou augmentation de la température de  $T_m$  engendre effectivement une diminution ou augmentation des autres variables d'état. Or, ces variables ne sont pas contrôlables, ce qui peut être un inconvénient.

#### ***Test de robustesse :***

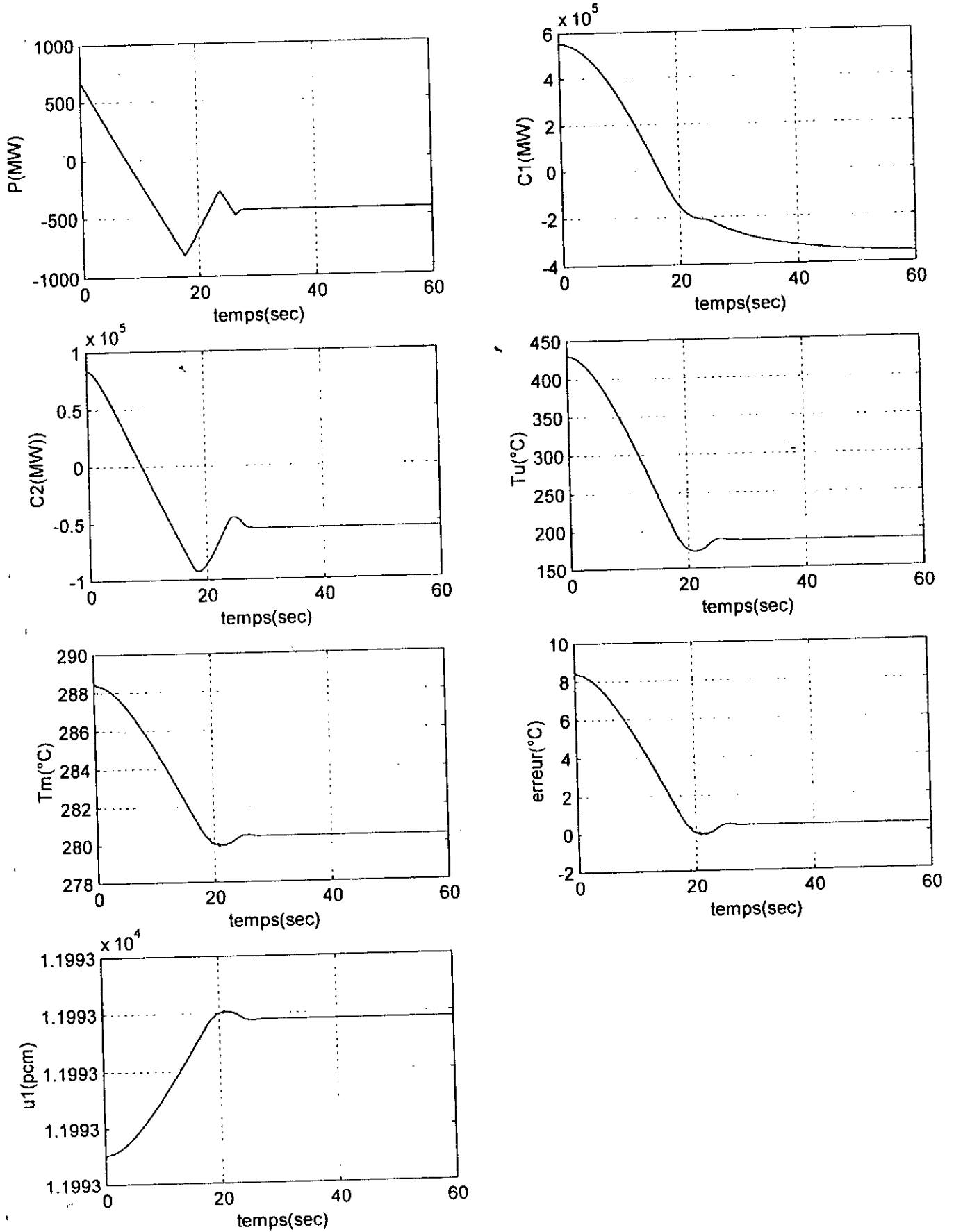
Pour valider cette méthode, nous avons été amenés à effectuer un test de robustesse, vis-à-vis des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , un changement de 30% est appliqué au système à  $t = 0$ .

Les résultats de simulations sont représentés sur les figures (IV-8) et (IV-9).

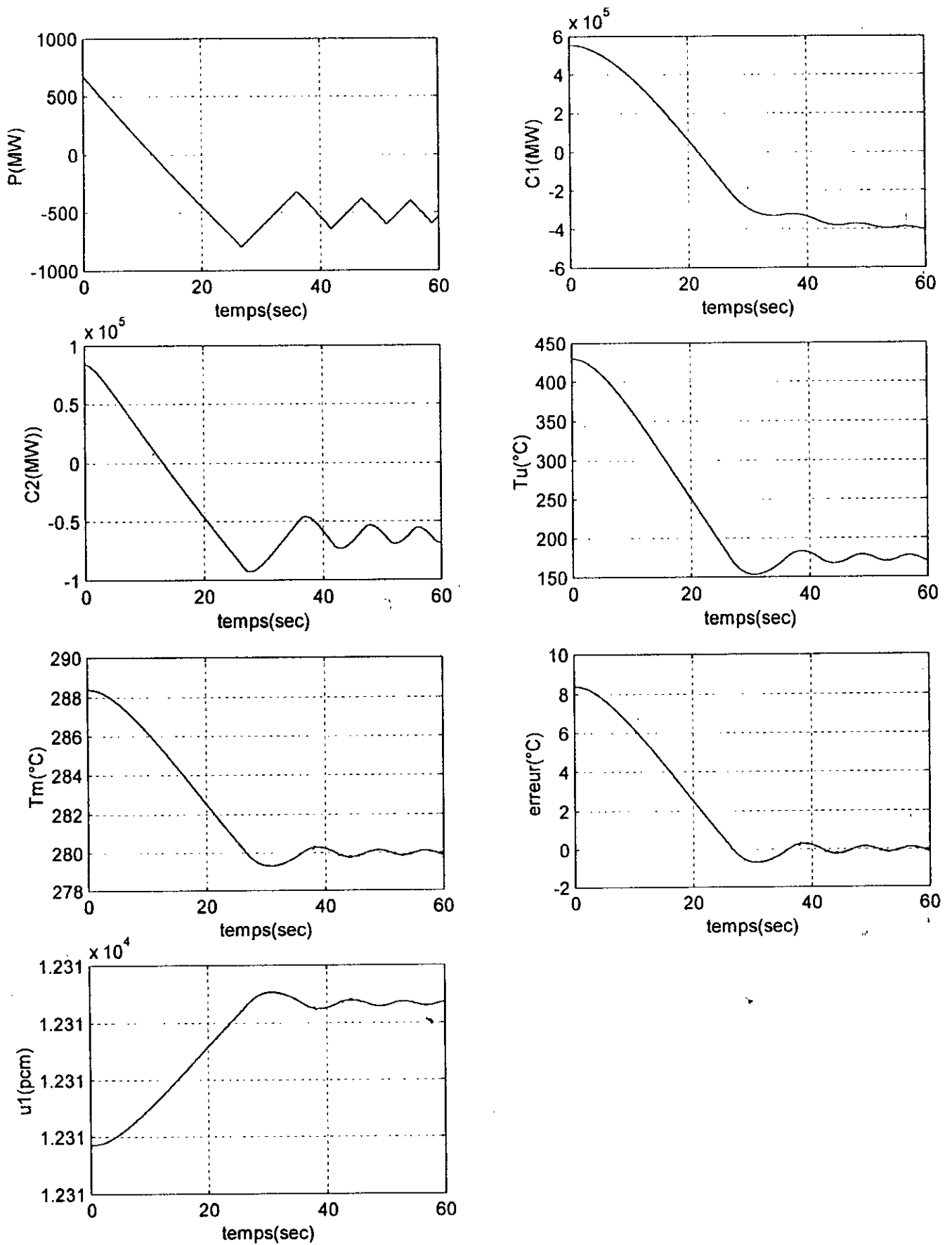
D'après la comparaison des résultats obtenus après le changement de ces paramètres, avec ceux obtenus sans perturbation, on remarque que cette dernière n'influe presque pas sur la convergence de la trajectoire du système, et la stabilité est toujours garantie. Ce qui signifie que la loi de commande est robuste.



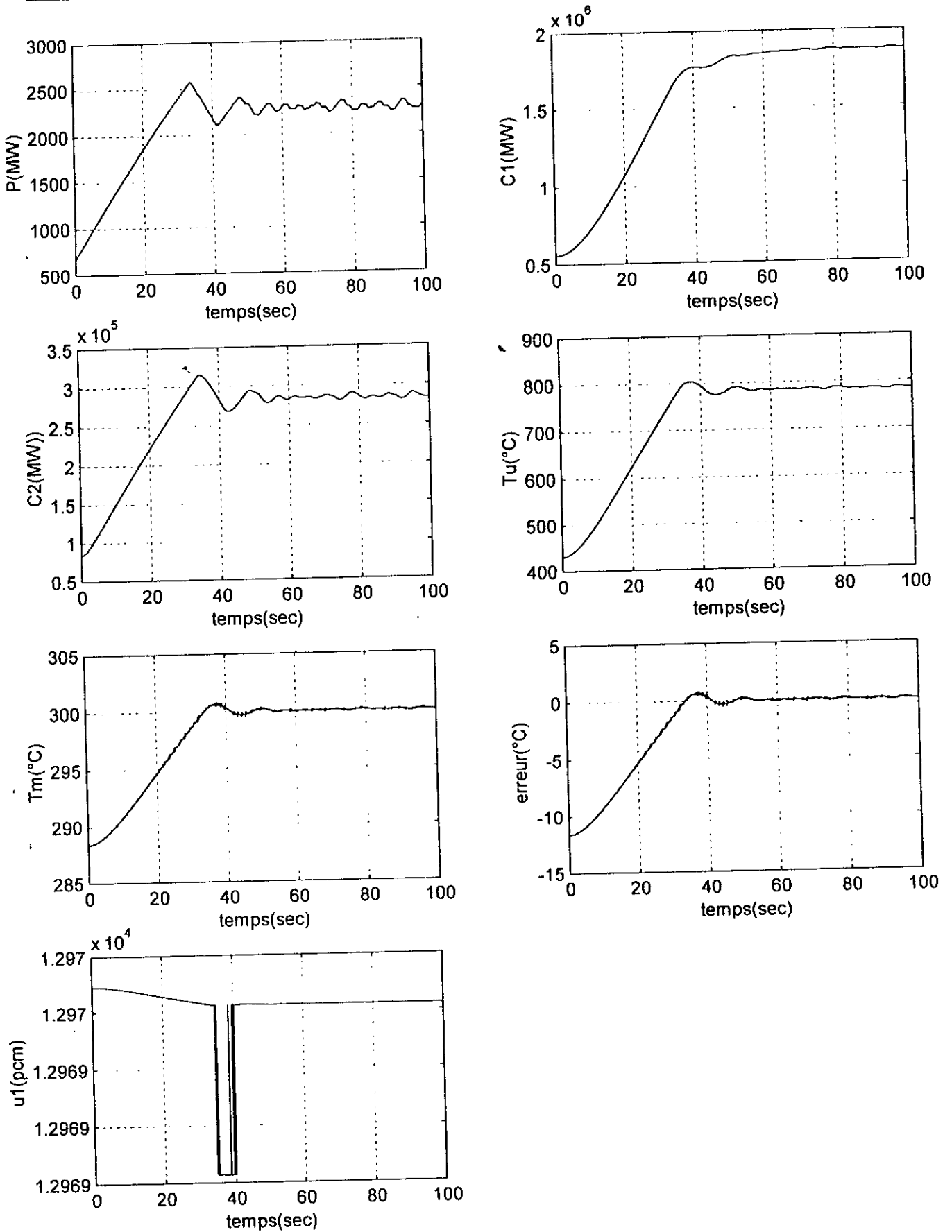
Figure(IV-3).Réponses du système en boucle ouverte



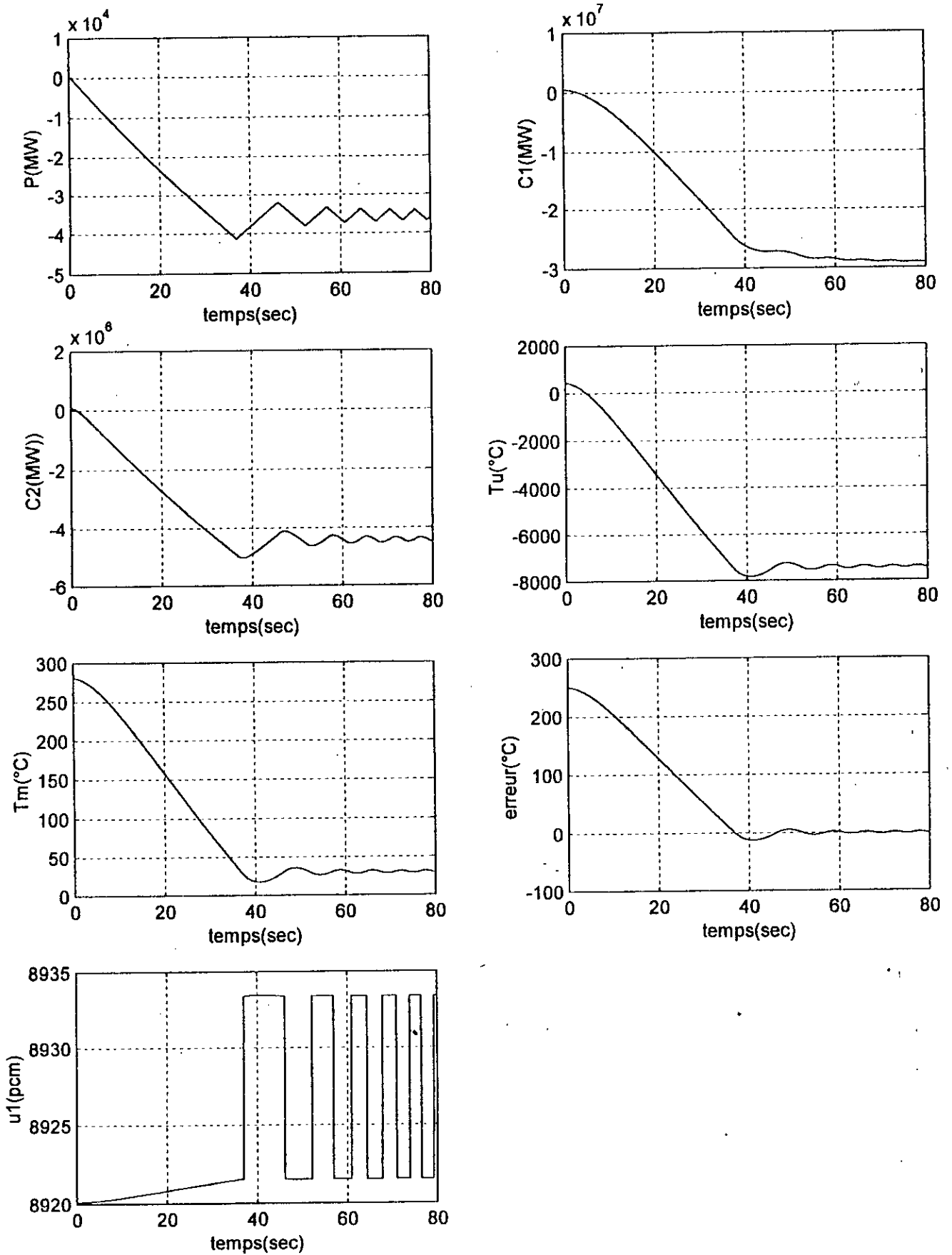
Figure(IV-4). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r=280^\circ\text{C}$ ), en utilisant la fonction 'Erf'.



Figure(IV-5). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r=280^\circ\text{C}$ ), en utilisant la fonction 'Sign'.

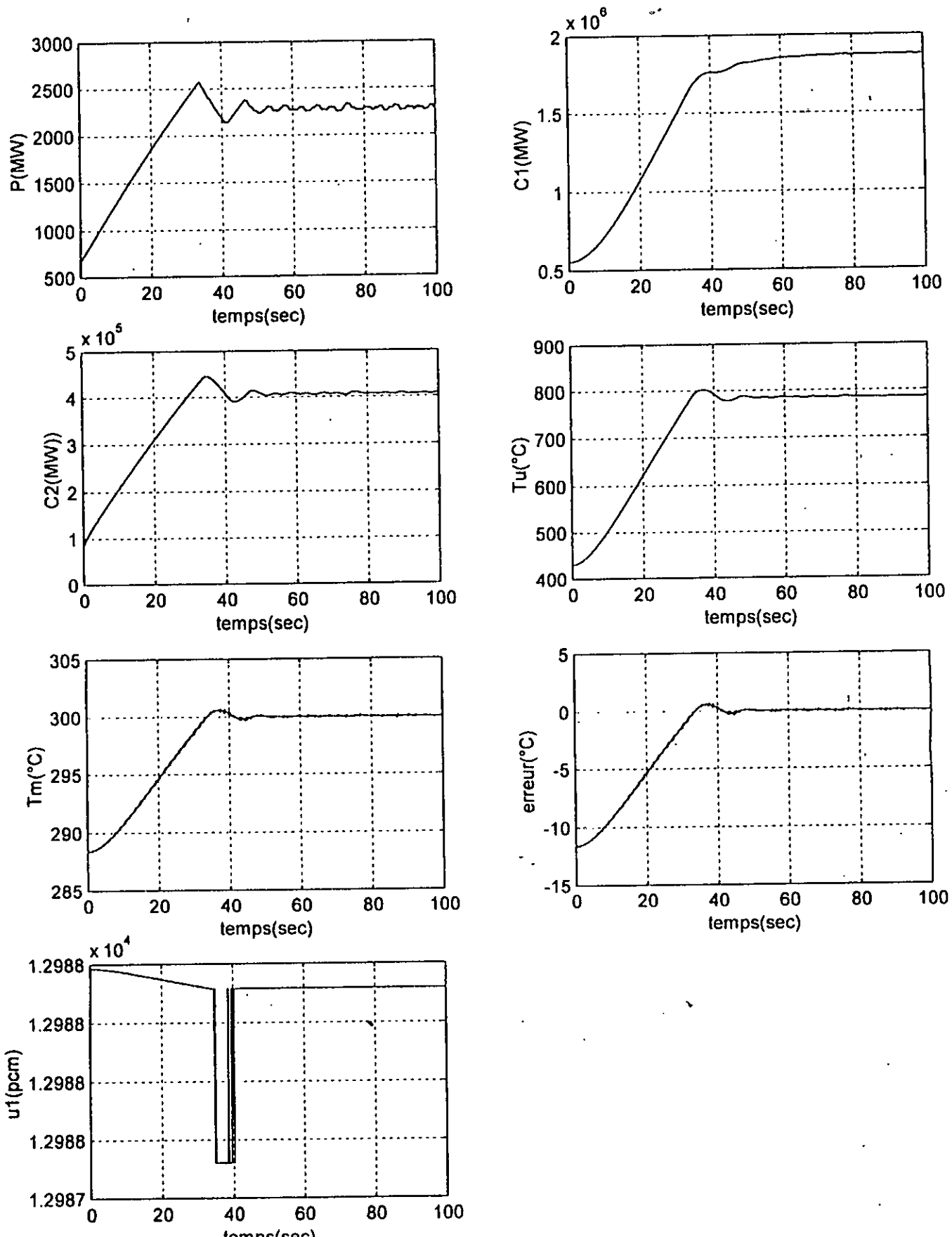


Figure(IV-6). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r = 300^\circ\text{C}$ ).

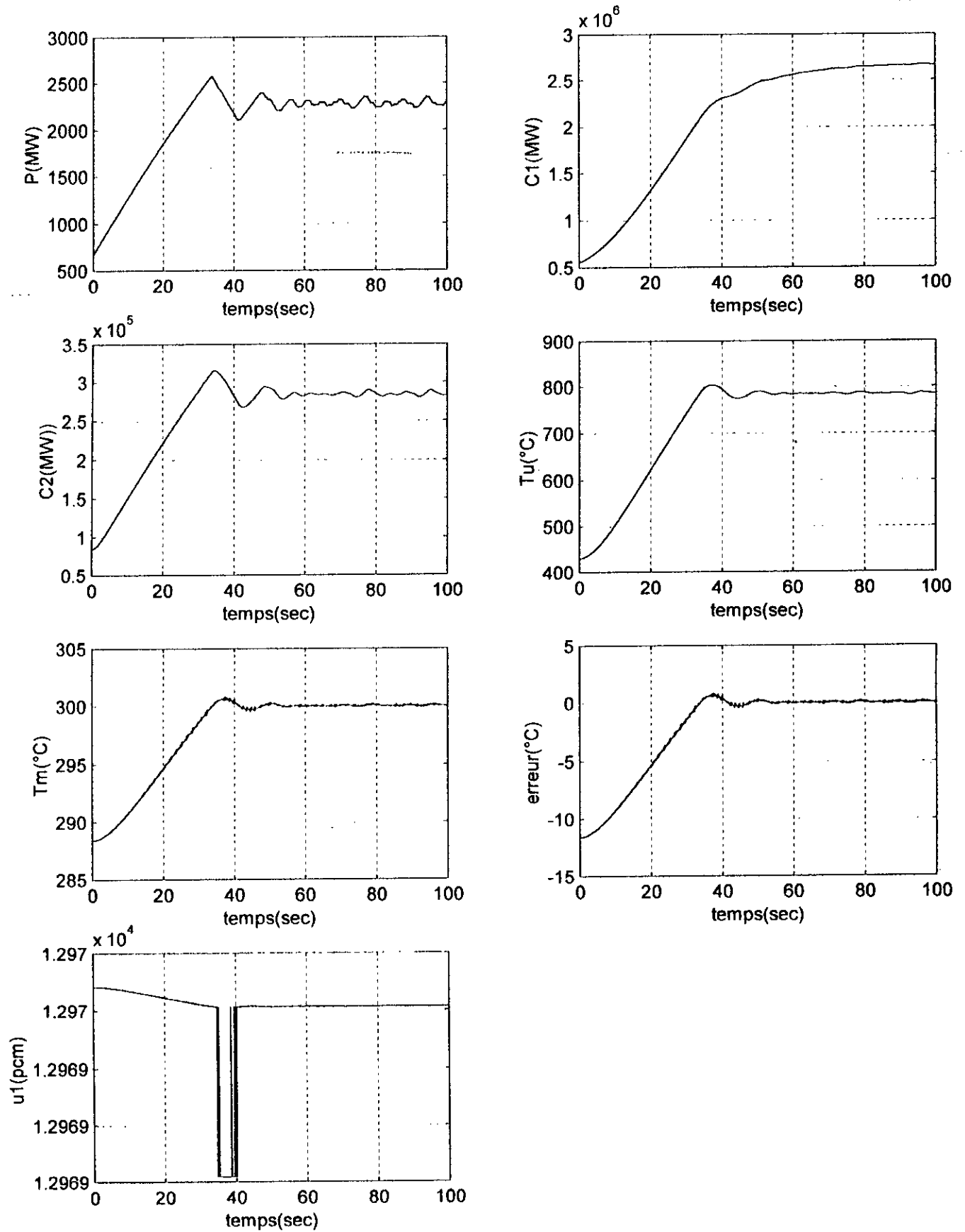


Figure(IV-7). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r = 30^\circ\text{C}$ ).





Figure(IV-8). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r = 300^{\circ}C$ ), avec une variation de 30% de paramètre  $Mu$ .



Figure(IV-9). Réponses du système à un échelon de  $T_m$  ( $y_r=300^{\circ}C$ ), avec une variation de 30 % de paramètre  $Q_m$ .

**Conclusion .**

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la théorie de *Lyapunov* pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante pour un réacteur nucléaire de type PWR. La difficulté de construction de la fonction de *Lyapunov* ainsi que l'importance de développer la technique de commande pour ce système en cascade ont été mises en évidences.

Après implémentation de cette loi de commande, bien qu'on ne puisse pas agir sur certaines variables d'état; les résultats de simulation sont très satisfaisants.

Des tests de robustesse vis à vis des variations paramétriques ont été effectués pour voir les limites de cette loi de commande. On a vérifiée que cette commande est robuste.

# Conclusion Générale

Ce travail a été consacré à la commande d'une classe de système en cascade, par la méthode de *Lyapunov* proche de celle du *Backstepping*. Nous avons développé la loi de commande qui assure le régime de poursuite d'une trajectoire désirée.

Nous nous sommes intéressés à des systèmes physiques dont le modèle peut se mettre sous la forme en cascade considérée dans ce travail. Ces systèmes sont : suspension active (système linéaire), réacteur biologique et réacteur nucléaire de type PWR (système non linéaire). A partir du modèle physique de chaque système est développée la forme en cascade considérée par un choix approprié des états et des sorties.

Ainsi, l'objectif recherché revient à :

- maintenir le confort et la sécurité dans le cas de la suspension active .
- imposer une trajectoire exponentielle au taux cellulaire consommant le substrat, dans le cas du bioréacteur.
- Réguler la température du cœur du réacteur nucléaire.

Les résultats de la simulation de la commande de ces systèmes par la méthode de *Lyapunov* ont montré que les objectifs désirés sont obtenus avec rapidité et une précision satisfaisante.

L'introduction de variation paramétrique ont révélé que la loi de commande ainsi synthétisée est robuste.

Certaines perspectives peuvent envisagées à partir de cette étude :

- La commande adaptative par la méthode de *Lyapunov* afin d'éviter surdimensionnement de la commande et d'assurer une meilleure adaptation au profil de la route dans le cas de la suspension active .
- De nombreux systèmes biologiques ont modèle similaire à celui du bioréacteur présenté dans notre étude. Ainsi, cette méthode peut s'étendre à d'autres problème de la biologie et de l'écologie. Néanmoins, certains états du système peuvent être difficiles à mesurer (cas de la biomasse), il serait judicieux de recourir à un observateur dans ce cas.
- Pour le cas du réacteur nucléaire, la commande par la méthode du *Backstepping* en ayant recours aux systèmes majorants peut permettre de manipuler des puissances plus admissibles .

**Annexe A:**

Indices	Signification	Valeur unité
m	Masse d'une roue du véhicule	3.3Kg
M	Masse d'un quart du véhicule	35Kg
h	constante de Raideur de la pneumatique de la roue	80000N/m
K	constante de Raideur du véhicule	3000N/m
d	constante de d'amortissement du véhicule	250N/m
w	Forme de la route, perturbation pour le système à suspension	1→10 cm
$u_1$ et $u_2$	Signaux de commande	N
$x_1$ et $x_2$	Les dépassements (les sortie de système)	cm
A,B,C,D	Matrices d'états décrivant le système	
X	Vecteur d'états	

**Tableau des paramètres de la suspension active**

**Annexe B:**

Indices	Signification
Droop- Model	Système biologique étudié
Les Phytoplanctons	Des planctons végétaux
Chemostat	Un bioréacteur continu
N	La biomasse (concentration cellulaire)
S	Le substrat (concentration de nutriment)
Q	Taux cellulaire ayant consommé le nutriment
D	Volume qui lié à la dilution
R	Rendement de culture
$\mu_m$	Le taux de croissance
$S_i$	Concentration initiale de nutriment dans le réacteur
$\rho_m, k_Q$ et $k_p$	Constantes biologiques physiologiques
v	Vitesse de la réaction
$\Delta H$	Entalpie (énergie d'activation)
r	La constante de gaz parfaits
T	Température absolue
C	Constante d'intégration
$\zeta_1$	$\rho_m N / S_i$
$\zeta_2$	$S / S_i$
$\eta$	$Q / k_Q$

**Tableau des paramètres du système biologique**

## Annexe C:

Symbole	Définition	valeur	unité
$P_0$	Puissance nominale à 100 %	2700	Mw
$\beta$	Fraction totale des neutrons retardés	640	Pcm
$\theta$	Durée de vie moyenne d'un neutrons	$4.105^5$	Sec
$\lambda_1$	Probabilité de désintégration des noyaux précurseurs (1)	0.087	Sec <sup>-1</sup>
$\lambda_2$	Probabilité de désintégration des noyaux précurseurs (2)	0.71	Sec <sup>-1</sup>
$\alpha_u$	Coefficient de DOPPLER	3	Pcm/°C
$\alpha_m$	Coefficient modérateur	30	Pcm/°C
$\beta_1$	Fraction des neutrons retardés du groupe (1)	286	Pcm
$\beta_2$	Fraction des neutrons retardés du groupe (2)	354	Pcm
K	Coefficient d'échange (watt-calorie)	0.24	Mw/°C
$M_u$	Masse du combustible	82.93	Tonnes
$C_u$	Chaleur massique du combustible	77.1	Cal/°C.sec
$M_m$	Masse du modérateur	10.59 E 3	Kg
$C_m$	Chaleur massique du modérateur	10.59 E 3	Cal/°C.sec
$R_{um}$	Résistance thermique Uranium-modérateur	2.46 E-3	m <sup>2</sup> .°C.sec/Cal
$R_{gm}$	Résistance thermique gaine-modérateur	1.83E-3	m <sup>2</sup> .°C.sec/Cal
$R_{ug}$	Résistance thermique Uranium-gaine	6.2 E-4	m <sup>2</sup> .°C.sec/Cal
$Q_m$	Débit d'eau dans le cœur	61.7 E 3	Kg/sec
$\rho_0$	Réactivité d'équilibre	0	pcm
$T_e$	Température de l'eau primaire à l'entre du cœur	284	°C
$T_s$	Température de l'eau primaire à la sortie du cœur	321.6	°C
$T_m$	Température moyen dans le cœur de réacteur	302.8	°C

Tableau des paramètres du réacteur nucléaire.

## **Bibliographie :**

- [1] *M.krstic.I.kanellakopoulos et P.kokotovic*, « Non linear and adaptive control design » , Inc 1995 .
- [2] *N.Louam*, « Conception d'un système à suspension active pour un chariot de transport de malade », Fist Maghrebin Congress of Mecanics CMM'96,23-26 march,pp307-312,Ghardaia, Algeria.
- [3] *H.Chekireb et M.Tadjine*, « Commande non linéaire par la méthode de lyapunov de la Machine Asynchrone ».ICEL Oran, Novembre 2000.
- [4] *J.C. Gille*, « Introduction aux système asservis non linéaires »,université de Laval, Québec. Département de génie électrique, Québec, mars 1977.
- [5] *Hassen.K.Khalil*, « Non linear systems », seconde edition. Mechigan state universuty 427-k48 1996.
- [6] *Had.Miloud.F et Gherbi.S*, « Commande adaptative décentralisée par la technique du backstepping.: Application en Robotique » .ENP, département de génie électrique PFE Juin1998.
- [7] *Jean- Jacques, E-Slotine, Weiping-Li*, « Applied non linear control » ,New Jersey 1991..
- [8] *A.Messaoudi*, « La stabilité des système non linéaire par la théorie de Lyapunov: Théorie et Applications » . ENP, département de génie électrique PFE Juin1998.
- [9] *Luyben.W.L*, « Process Hermes modelling simulation and control » ,Copyright©1990;2<sup>nd</sup> ed.
- [10] *Hansrued Buller*, « Conception de systèmes automatiques » 1988.



- [11] *O. Bernard, G. Saalet et A. Sciandra* « non linear observers for a class of biological systems » IEEE Transaction on automatic control, Vol 43 N°=08 august 1998.
- [12] *J.P. Ehrhardt, G. Seguin*, « Le plancton composition, écologie, pollution », BORDAS, Paris 1978.
- [13] *Henri Leclere, Jean Louis-Gaillard*, « Microbiologie générale, la bactérie et le monde bactérien », Doin éditeurs Paris 1995.
- [14] *Viller Riviere*, « Réacteur chimique, et les applications industrielles de la Microbiologie ». Paris 1979.
- [15] *J.C. Gille*, « Système Asservis non linéaires », © Dunod 1967 .
- [16] *Boukhari Bengherzal*, « Commande prédictive généralisée application à un modèle non linéaire d'un réacteur nucléaire de type PWR », ENP, département de génie électrique PFE 1996.
- [17] *John, E. Gibson*, « Non linear control », Ph,D Coyrighr© 1963.
- [18] *Tali Maamar(Nadia)*, « Modélisation Analyse et Commande d'un procédé Biotechnologique à gradient spatial de concentration », Toulouse 1994.
- [19] *Alberto Isidori*, « Non lineare control sytems », an introduction 2<sup>nd</sup> edition springer-verlag, pp 183-195 Rome, march 1989.
- [20] *V-M-Popov*, « L'hyperstabilité des systèmes automatiques », Dunod 1973.
- [21] *Adamou*, « application de la commande adaptative sur un système à suspension active d'un véhicule roulant », ENP, département de génie électrique PFE 1999.
- [22] *Nasri Karim*, « la commande adaptative par modèle de référence appliquée à une suspension active », ENP, département de génie électrique PFE 1999.

*Bibliographie*

---

- [23] *Henk Nijmeijer, Arjan vander Scharft*, « Non linear Dynamical control systemes ».Spirger-verlag, New York Inc1990.
- [24] *Th-Margoulova* , « les centrales nucléaires, technique Soviétique » deuxième édition 1983.
- [25] *J-De Ladonchamps et J.J.Verdeau*, « Réacteur nucléaire à eau pressurisée »,Masson et Cie, éditeurs 120, Bd Saint-Germain, Paris 1972.

### Résumé :

Dans ce mémoire, on présente une approche d'analyse et de synthèse de commandes stabilisantes basée sur la théorie de Lyapunov au cas d'une classe de systèmes en cascade.

On a considéré pour cette dernière classe de systèmes trois modèles physiques différents : suspension d'une voiture (modèle linéaire), système biologique (modèle non - linéaire) et enfin un réacteur nucléaire de type PWR (Modèles non linéaire).

Pour chacun de ces systèmes, la commande a permis d'assurer la poursuite de la référence considérée et des tests de robustesse vis à vis des variations paramétriques ou des perturbations extérieures ont été effectuées avec succès.

**Mots Clés :** Lyapunov, Système en cascade, suspension de voiture, système biologique, réacteur nucléaire (PWR).

### Abstract

In this work, we present an approach for analysis and control synthesis based on Lyapunov theory and adapted for a class of cascade systems.

For this class of systems, three physical models were considered : Car suspension (Linear model), biological system ( Nonlinear model) and nuclear reactor (Nonlinear model).

For each of this systems, the control insures the following trajectory and tests of robustness with parametric variations of external disturbances have been done with success.

**Key words :** Lyapunov, Cascade system, Car suspension, Biological system, Nuclear reactor (PWR).

### ملخص :

في هذه المذكرة، تم تقديم طريقة للتحليل و إستخلاص إشارة التحكم لضمان الإستقرار بناء على نظرية LYAPUNOV في حالة نظام على نمط الرتل.

إعتبرنا فيما يخص هذا النوع من الأنظمة ثلاثة نماذج فيزيائية مختلفة : نظام إرتكاز سيارة (نظام خطي)، نظام بيولوجي (نظام لا خطي)، مفاعل نووي PWR (نظام لا خطي) بالنسبة لكل من هذه الأنظمة، نظام التحكم سمح بضمان ملاحقة المسار كما أن إختبار المتانة بالنسبة لتغيرات الثوابت أو بالنسبة للتشويش الخارجي تم بنجاح.

**كلمات مفتاحية :** LYAPUNOV ، ، نظام على الرتل، نظام إرتكاز سيارة، نظام بيولوجي، مفاعل نووي PWR