

19/99

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
D.E.R Génie Electrique et Informatique



PROJET DE FIN D'ÉTUDES

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

COMMANDE ROBUSTE H_{∞} DÉCENTRALISÉE
APPLICATION EN ROBOTIQUE

Proposé et dirigé par :

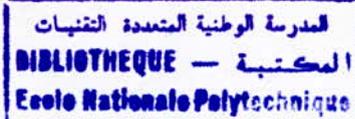
Mr M. TADJINE
Mr D. BOUKHETALA

Étudié par :

Mr OMAR MESSAS

Année Universitaire : 1998 / 1999

SOMMAIRE



	page
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE 1 : Théorie et Propriétés des systèmes linéaires bouclés	3
1-1 Rappels sur les espaces normés	4
1-2 Décomposition en valeurs singulières	6
1-3 Les espaces d'Hilbert	7
1-4 L'espace de Hardy H_∞	7
1-5 La stabilité interne	8
1-6 Factorisation copremière sur RH_∞ (coprime factorization)	10
1-7 Propriétés d'un feedback	13
Conclusion	19
CHAPITRE 2 : La Commande H_∞ Centralisée	20
2-1 Marges classique de stabilité de gain et de phase	21
2-2 Définition de la robustesse	24
2-3 Le théorème des petits gains (small gain theorem)	25
2-4 Stabilité sous des incertitudes non-structurées stables	26
2-5 Equivalence entre stabilité robuste et performances nominales	32
2-6 Performances robustes	32
2-7 Rappel historique sur la commande H_∞	34
2-8 Objectif de synthèse (la sensibilité mixte)	35
2-9 Le problème H_∞ standard	36
2-10 Résolution du problème standard : Algorithme de Glover - Doyle	37
2-11 Mise sous forme standard	40
2-12 Synthèse par factorisation première	42
Conclusion	47
CHAPITRE 3 : La commande H_∞ Décentralisée	48
3-1 Positionnement du problème	49
3-2 Résolution du problème par la commande H_∞	50
3-3 La commande H_∞ décentralisée sur systèmes non linéaire	55
Conclusion	59
CHAPITRE 4 : Application au Robot Puma 560	60
4-1 Modélisation	61
4-2 Génération des trajectoires	70
4-3 La linéarisation	70

4 - 4	Synthèse des commandes H_{∞} décentralisées	73
4 - 5	Commande par réseau de modèles locaux	95
	Conclusion	96
	CONCLUSION GENERALE	97
	Bibliographie	98

Résumé :

A travers ce travail , nous avons présenté une nouvelle méthode de décentralisation basée sur une factorisation spéciale du système, elle consiste en un produit de deux matrices de transfert, la première étant stable et la seconde étant diagonale, et le système des contrôleurs décentralisés se fera donc sur la matrice de transfert diagonale, tandis que la matrice de transfert stable sera considérée comme incertitude multiplicative. Nous avons présenté deux techniques de synthèse qui sont la méthode de sensibilité mixte ou la méthode de Mc Farlane et Glover.

Nous avons appliqué notre méthode de décentralisation sur le Robot PUMA 560 en synthétisant trois contrôleurs décentralisés relatifs à trois points de fonctionnement, puis, afin de commander le robot sur une large plage de fonctionnement, nous avons utilisé la technique du réseau de modèles locaux (LMN) pour atteindre notre objectif. Après avoir effectué ce travail, nous avons constaté que notre méthode de décentralisation est très facile à appliquer et elle procure de très bons résultats.

Mots clés : commande décentralisée, factorisation, incertitudes multiplicatives, LMN.

Abstract :

In this work, we have presented a new method of decentralization based on a special factorization which consists on wire the transfer matrix of the system in a product of a stable transfer matrix and a digonal transfer matrix, hence, the decentralized controller is synthetised for the diagonal system to stablize it and also the original transfer matrix, and the modified stable transfer matrix is considered as a multiplicative uncertainty.

We have proposed two techniques on synthesis, the first is the mixed sensitivity and the second is the method of Mc Farlane and Glover.

We have applied our method of decetralization to robot PUMA 560, by synthesis three controllers relatively for three equilibrium points, and to control the robot on a large set of work, we have introduced the technique of local model network (LMN) to arise our goal.

Finally, we have concluded that our method of decentralization is very easy and procure a very good results.

Key words : Decentralized control, factorization, multiplicative uncertainty, LMN.

ملخص :

في هذا العمل، لقد قدمنا طريقة جديدة للتحكم اللامركزي متميزة بتحليل خاص، حيث نكتب مصفوفة النقل للجملة على شكل جداء بين مصفوفة النقل لجملة مستقرة و مصفوفة نقل لجملة قطرية. ثم نقوم بايجاد تحكّات على الجملة القطرية لاستقرارها هي والجملة الأصلية كذلك، بينها نعتبر مصفوفة النقل المستقرة كغير محقق جدائي.

لقد قدمنا طريقتان للتحصل على التحكّات ألا وهما طريقة Mixed Sensitivity ، و طريقة Mc Farlane et Glover لقد طبقنا طريقتنا للتحكم اللامركزي على Robot Puma 560 وهذا بتشكيل ثلاثة تحكّات لثلاث نقاط عمل، ثم لتحكم Robot على مجال عمل واسع، استعملنا طريقة (LMN) للوصول الى هدفنا.

استنتجنا عن طريق هذا العمل، أن طريقتنا للتحكم اللامركزي سهلة جداً للاستعمال و تعطي نتائج جد اجابية.

مفاتيح الكلمات : التحكم اللامركزي، تحليل، غير محقق جدائي (LMN).

Remerciements



Je remercie mes promoteurs, messieurs : M. Tadjine et D. Boukhetala, pour leurs conseils et efforts durant toute l'année.

Je remercie aussi tous le personnel de la bibliothèque de l'ENP, et plus particulièrement :Kamel et Krimo le Barcelonais ; qui ont été plus que disponibles durant mon cursus universitaire.

Enfin, je dis à tous ceux qui ont contribué de n'importe quelle manière à la réalisation de ce travail :Merci, et encore merci.

Omar MESSAS

Dédicaces



Je dédie ce travail avant tout, à ma mère ; qui m'a tout donné, et à qui je dois tout. Je ne saurai dire à quel point elle m'a aidé ; sans elle, ce travail n'aurait pas vu le jour, et j'espère qu'un jour, j'aurai l'occasion de la remercier davantage.

Je dédie aussi ce travail, à mon père ; pour sa disponibilité, pour les moyens qu'il m'a fournis, et que sans sa contribution, ce travail n'aurait pas cette bonne finition, et j'espère qu'un jour, je pourrai aussi le remercier davantage.

Je tiens également à dédier mon travail, à :Othman, Mounia, Lamia, Hayet et Saïd, sans oublier le petit Lounes ; pour leurs encouragements, leur sympathie, ainsi que pour leur soutien.

Enfin, je dédie très sincèrement mon travail, à tout les passionnés des Sciences et des Mathématiques. Je termine ces quelques lignes par cette célèbre citation d'Albert Einstein, qui a plus d'un sens comme on pourrait le croire:

« Si la relativité se révèle juste, les Allemands diront que je suis Allemand, les Suisses que je suis citoyen Suisse, et les Français que je suis un grand homme de sciences. Si la relativité se révèle fausse, les Français diront que je suis suisse, les Suisses que je suis allemand, et les Allemands que je suis juif. »

Omar Messas

INTRODUCTION GENERALE

La commande automatique d'un système nécessite souvent la connaissance du modèle mathématique qui décrit son comportement, cependant, il est certain que ce modèle n'est pas une représentation parfaite de la dynamique du système réel car les phénomènes physiques ne sont pas tous décrits par des équations et il existe par conséquent des dynamiques non modélisés qui ne figurent pas dans les équations, mais encore parfois nous avons besoin d'un modèle qui ne soit pas trop compliqué et qu'il reste représentatif; à ce moment là, nous sommes contraints de faire des simplifications sur le modèle, afin de le simplifier, ce qui impliquera forcément une erreur, celle ci est faite volontairement.

Dans une chaîne de commande, nous disposons toujours de capteurs pour mesurer les signaux et comme les capteurs sont souvent à base d'électronique, ils produisent toujours des bruits (généralement de hautes fréquences) nuisibles au système de commande.

Nous venons donc de voir que les modèles mathématiques ne regroupent pas explicitement toutes ces sources d'incertitudes, alors, la question qui nous vient à l'esprit : est-ce que la commande qui a été synthétisée sur le modèle mathématique qui est entaché d'erreurs sera t – elle aussi efficace sur le modèle réel ?

Nous dirons que les commandes qui réalisent cette exigence sont appelées commandes robustes, car elles arrivent à commander une classe de systèmes incertains mais dont l'incertitude est bornée.

L'idée H_∞ :

L'idée H_∞ peut être résumée en pensant que si nous avons un modèle d'un système où les paramètres sont incertains, donc, pour chaque valeur possible d'un paramètre, nous obtenons un modèle mathématique et à ce moment là, on peut dire que nous avons non pas un seul système mais plutôt plusieurs modèles mathématiques ou plus généralement une classe de systèmes dont le système original en fait partie.

Parmi tous ces systèmes, il en existe certainement un qui soit le plus défavorable par rapport aux autres dans le sens du degré de stabilité, selon qu'il soit proche ou loin du point critique ou même des performances. Alors si, on arrive à stabiliser le système le plus défavorable (Worst case) on est certain que tous les autres systèmes seront stabilisés et par conséquent, nous aurons la stabilité du système réel !

Mais pour mesurer ces cas défavorables, il est nécessaire de disposer d'un outil de mesure des cas défavorables et il s'agit bien entendu de la norme H_∞ .

La commande H_∞ consiste à stabiliser un système dit nominal ainsi qu'une classe de systèmes incertains dont l'incertitude est bornée et de norme infinie, inférieure à 1.

Objectif du travail :

Notre objectif est de synthétiser une commande H_∞ décentralisée puis de l'appliquer au robot Puma 560. Il est maintenant reconnu que les commandes décentralisées sont d'une importance considérable dans le domaine industriel et plus particulièrement en robotique où

elles sont largement utilisées. Pour ce faire, nous avons introduit une nouvelle technique de décentralisation basée sur les incertitudes avec une synthèse H_∞ par facteurs coprimes normalisées pour atténuer les incertitudes imposées. L'application de notre méthode est assez facile et concerne même les systèmes instables et / ou à phase non minimale, mais en plus, elle transforme un problème de commande d'un système multivariable ($n \times n$) en synthèse de commande d'un seul système monovariable, car tous les systèmes de la diagonale étant tous les mêmes.

En premier lieu, nous poserons le problème de la décentralisation, ensuite, nous verrons la résolution de ce problème avec toutes les démonstrations, puis, nous verrons enfin comment appliquer un contrôleur décentralisé sur un système non linéaire par la technique du LMN (local model network).

Organisation du travail :

Dans le chapitre 1, nous avons donné les éléments de base sur les systèmes linéaires bouclés, que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, nous trouverons la construction élémentaire de la commande robuste H_∞ centralisée, où nous trouverons la représentations des incertitudes avec les conditions de stabilité robuste et de performances robustes, la formulation du problème standard ainsi que sa solution, et enfin, la méthode de Mc Farlane et Glover.

Dans le chapitre 3, nous avons posé notre problème de décentralisation, puis, nous l'avons résolu en élaborant un certain nombre de théorèmes.

Dans le chapitre 4, nous avons appliqué notre méthode de décentralisation sur le robot Puma 560.

INTRODUCTION GENERALE

La commande automatique d'un système nécessite souvent la connaissance du modèle mathématique qui décrit son comportement, cependant, il est certain que ce modèle n'est pas une représentation parfaite de la dynamique du système réel car les phénomènes physiques ne sont pas tous décrits par des équations et il existe par conséquent des dynamiques non modélisés qui ne figurent pas dans les équations, mais encore parfois nous avons besoin d'un modèle qui ne soit pas trop compliqué et qu'il reste représentatif ; à ce moment là, nous sommes contraints de faire des simplifications sur le modèle, afin de le simplifier, ce qui impliquera forcément une erreur, celle ci est faite volontairement.

Dans une chaîne de commande, nous disposons toujours de capteurs pour mesurer les signaux et comme les capteurs sont souvent à base d'électronique, ils produisent toujours des bruits (généralement de hautes fréquences) nuisibles au système de commande.

Nous venons donc de voir que les modèles mathématiques ne regroupent pas explicitement toutes ces sources d'incertitudes, alors, la question qui nous vient à l'esprit : est-ce que la commande qui a été synthétisée sur le modèle mathématique qui est entaché d'erreurs sera t – elle aussi efficace sur le modèle réel ?

Nous dirons que les commandes qui réalisent cette exigence sont appelées commandes robustes, car elles arrivent à commander une classe de systèmes incertains mais dont l'incertitude est bornée.

L'idée H_∞ :

L'idée H_∞ peut être résumée en pensant que si nous avons un modèle d'un système où les paramètres sont incertains, donc, pour chaque valeur possible d'un paramètre, nous obtenons un modèle mathématique et à ce moment là, on peut dire que nous avons non pas un seul système mais plutôt plusieurs modèles mathématiques ou plus généralement une classe de systèmes dont le système original en fait partie.

Parmi tous ces systèmes, il en existe certainement un qui soit le plus défavorable par rapport aux autres dans le sens du degré de stabilité, selon qu'il soit proche ou loin du point critique ou même des performances. Alors si, on arrive à stabiliser le système le plus défavorable (Worst case) on est certain que tous les autres systèmes seront stabilisés et par conséquent, nous aurons la stabilité du système réel !

Mais pour mesurer ces cas défavorables, il est nécessaire de disposer d'un outil de mesure des cas défavorables et il s'agit bien entendu de la norme H_∞ .

La commande H_∞ consiste à stabiliser un système dit nominal ainsi qu'une classe de systèmes incertains dont l'incertitude est bornée et de norme infinie, inférieure à 1.

Objectif du travail :

Notre objectif est de synthétiser une commande H_∞ décentralisée puis de l'appliquer au robot Puma 560. Il est maintenant reconnu que les commandes décentralisées sont d'une importance considérable dans le domaine industriel et plus particulièrement en robotique où

elles sont largement utilisées. Pour ce faire, nous avons introduit une nouvelle technique de décentralisation basée sur les incertitudes avec une synthèse H_∞ par facteurs coprimés normalisés pour atténuer les incertitudes imposées. L'application de notre méthode est assez facile et concerne même les systèmes instables et / ou à phase non minimale, mais en plus, elle transforme un problème de commande d'un système multivariable ($n \times n$) en synthèse de commande d'un seul système monovisible, car tous les systèmes de la diagonale étant tous les mêmes.

En premier lieu, nous poserons le problème de la décentralisation, ensuite, nous verrons la résolution de ce problème avec toutes les démonstrations, puis, nous verrons enfin comment appliquer un contrôleur décentralisé sur un système non linéaire par la technique du LMN (local model network).

Organisation du travail :

Dans le chapitre 1, nous avons donné les éléments de base sur les systèmes linéaires bouclés, que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, nous trouverons la construction élémentaire de la commande robuste H_∞ centralisée, où nous trouverons la représentations des incertitudes avec les conditions de stabilité robuste et de performances robustes, la formulation du problème standard ainsi que sa solution, et enfin, la méthode de Mc Farlane et Glover.

Dans le chapitre 3, nous avons posé notre problème de décentralisation, puis, nous l'avons résolu en élaborant un certain nombre de théorèmes.

Dans le chapitre 4, nous avons appliqué notre méthode de décentralisation sur le robot Puma 560.

CHAPITRE 1

Théorie et propriétés des systèmes linéaires bouclés

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons présenter brièvement les outils mathématiques nécessaires pour aborder rigoureusement la théorie H_∞ , nous donnerons quelques éléments essentiels de la théorie des systèmes linéaires bouclés. Les théorèmes présentés ne seront pas tous démontrés, soit parce que la démonstration est assez encombrante et n'intervient aucunement à la compréhension du théorème ou bien, elle est triviale et ne nécessite pas d'être donnée.

Nous commencerons par un bref rappel sur les espaces vectoriels normés (normes vectorielles et matricielles), puis nous parlerons des espaces d'Hilbert (surtout à travers des exemples qui nous seront utiles juste après), ensuite, nous verrons superficiellement un type particulier d'espace de Hardy à savoir, l'espace H_∞ . Nous tenons à préciser que nous insisterons le plus sur les définitions ainsi que sur les nuances, qui peuvent exister entre les différents espaces sus - cités plutôt que sur l'aspect mathématique pur (pour plus de détails, voir [41], [10]), puis nous introduirons la notion de stabilité interne et la factorisation coprime ; enfin, nous poserons le problème de rejet des perturbations.

1.1 Rappels sur les espaces normés

Définition 1.1 : Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On appelle norme sur E , toute application N définie de E dans \mathbb{R} et satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
- $\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Le couple (E, N) s'appelle espace normé.

La norme N est désignée par $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1 :

1. Le module dans \mathbb{C} est une norme.

$$2. \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

En particulier, quand $p = 1, 2, \infty$ on a alors :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad ;$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad .$$

La notion de norme se veut d'être la généralisation de la notion habituelle de longueur qu'on rencontre dans la géométrie Euclidienne, et son utilisation dans les domaines de traitement de signal, d'optimisation et d'autres, est devenue quasiment classique pour mesurer « la

longueur » des vecteurs. De même, on serait contraint de donner une notion similaire pour les opérateurs matriciels.

Définition 1.2 : Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice à éléments complexes, alors la norme matricielle induite ou subordonnée par la p-norme vectorielle est définie par :

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Exemple 1.2 : En particulier pour $p = 1, 2, \infty$ les normes matricielles induites sont alors :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{somme des colonnes})$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{somme des lignes}).$$

Cette appellation « norme matricielle induite » par la p-norme est due au fait qu'on a défini la norme matricielle (nouvelle notion) par le biais d'une norme vectorielle (notion classique).

Nous soulignerons l'intérêt que peut apporter la notion de norme matricielle induite en disant que pour les systèmes décrits par l'approche entrée / sortie où les vecteurs sont munis de la p-norme que ce soit pour les entrées que pour les sorties, alors l'amplification ou le gain, entre l'entrée et la sortie, est mesuré par la norme matricielle induite.

Les espaces Euclidiens $\|\cdot\|_2$ possèdent des propriétés intéressantes ;

Lemme 1.1 [41] : soit $x \in F^n, y \in F^m$;

1. On suppose que $n \geq m$; alors $\|x\|_2 = \|y\|_2$ si et seulement si, il existe une matrice $U \in F^{n \times m}$ telle que $x = Uy$ et $U^*U = I$.
2. On suppose que $n = m$ alors $|x^*y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, et en plus l'égalité a lieu si et seulement si, il existe $\alpha \in F$ tel que $x = \alpha y$ ou bien quand $y = 0$.
3. $\|x\|_2 \leq \|y\|_2$ si et seulement si, il existe une matrice $\Delta \in F^{n \times m}$ avec $\|\Delta\|_2 \leq 1$ et telle que $x = \Delta y$ et en plus $\|x\|_2 < \|y\|_2$ si et seulement si $\|\Delta\|_2 < 1$.
4. $\|U \cdot x\|_2 = \|x\|_2$ pour toute matrice unitaire de dimension appropriée.

A titre d'information, il existe des normes matricielles qui ne sont pas induites, l'une des plus usuelles est la norme de Frobenius définie par :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Lemme 1.2 [41] : soient A, B deux matrices de dimensions appropriées

1. $\rho(A) \leq \|A\|_2$ (valable pour toute norme induite ou de Frobenius).
2. $\|A \cdot B\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ et en particulier $\|A \cdot A^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \Leftrightarrow \|A^{-1}\|_2 \geq \|A\|_2^{-1}$ avec A inversible (ce résultat est très important et demeure vraie pour toute norme induite).
3. $\|U \cdot A \cdot V\|_2 = \|A\|_2$ et $\|U \cdot A \cdot V\|_F = \|A\|_F$ pour toutes les matrices unitaires U, V de dimensions appropriées.

$$4. \|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_F \text{ et } \|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_2 .$$

1.2 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières est largement utilisée dans l'analyse matricielle, les valeurs singulières donnent une bonne indication sur le « gabarit » des matrices.

Théorème 1.3 [41] : Soit $A \in F^{m \times n}$, il existe des matrices unitaires $U = [u_1, \dots, u_m] \in F^{m \times m}$ et $V = [v_1, \dots, v_n] \in F^{n \times n}$ telles que :

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V \text{ avec } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_p \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \quad ; \quad p = \min(n, m) .$$

Preuve : Sans perte de généralité posons $m \geq n$ et soit $\|A\| = \sigma$; d'après la définition d'une norme matricielle, il existe un vecteur $z \in F^n$ tel que :

$$\|A \cdot z\| = \sigma \cdot \|z\| .$$

D'après le lemme 1.1 ; $\exists \tilde{U} \in F^{m \times n}$ vérifiant $\tilde{U}^* \tilde{U} = I$ et $\|A \cdot z\| = \sigma \|\tilde{U} \cdot z\| \Rightarrow A \cdot z = \sigma \tilde{U} \cdot z$.

Soient $x = \frac{z}{\|z\|} \in F^n$; $y = \frac{\tilde{U} \cdot z}{\|\tilde{U} \cdot z\|} \in F^m$ nous obtenons alors $A x = \sigma y$.

On peut toujours construire (complément orthogonal) :

$$V = [x \ V_1] \in F^{n \times n}$$

$$U = [y \ U_1] \in F^{m \times m}$$

des matrices unitaires donc $U^* A V$ doit avoir la structure suivante :

$$A_1 = U^* A V \text{ avec } A_1 = \Sigma .$$

C.Q.F.D.

Définition 1.3 : On définit les valeurs singulières supérieures et inférieures de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|A x\|_2$$

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|A x\|_2$$

Lemme 1.4 [41] : Supposons que A, Δ soient des matrices carrées, alors :

1. $|\underline{\sigma}(A + \Delta) - \underline{\sigma}(A)| \leq \bar{\sigma}(\Delta)$
2. $\underline{\sigma}(A \Delta) \geq \underline{\sigma}(A) \underline{\sigma}(\Delta)$
3. $\bar{\sigma}(A^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A)}$ si A est inversible.
4. $\max(\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)) \leq \bar{\sigma}([A \ B]) \leq \sqrt{2} \max(\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)) .$

1.3 Les espaces d'Hilbert

Dans cette section, nous allons présenter succinctement les espaces d'Hilbert en essayant seulement de rappeler les définitions, théorèmes et propriétés de base.

Définition 1.4 : Un produit scalaire de deux vecteurs x, y noté $\langle x, y \rangle$ admet les propriétés suivantes :

1. $\langle x, x \rangle$ réel ≥ 0
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. la fonction $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Définition 1.5 : On appelle espace d'Hilbert, tout espace vectoriel complet muni d'une norme associée à un produit scalaire.

Définition 1.6 : On appelle espace de Banach, tout espace normé où toute suite de Cauchy est convergente, en d'autre terme, il s'agit d'un espace métrique complet muni de la distance associée à la norme, on pourrait conclure alors, que tout espace d'Hilbert est un espace de Banach, mais la réciproque est fausse.

Exemple 1.2 :

- L'espace $L_\infty[0, \infty]$ comporte toutes les suites bornées $x = (x_0, x_1, \dots)$ munies de la norme L_∞ définie par :

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$$
- L'espace $L_\infty(I)$ contient toutes les fonctions $x(t)$ mesurables au sens de Lebesgue et définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$\|x\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in I} |x(t)|$$
 Où ess signifie la borne essentielle.
- L'espace $L_\infty(j\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour matrice de fonctions ou scalaire, bornée essentiellement sur $j\mathbb{R}$ et munie de la norme :

$$\|F\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)]$$

Il est à noter, qu'il y a une différence majeure entre l'espace $L_\infty(I)$, qui est dans le domaine temporel, tandis que l'espace $L_\infty(j\mathbb{R})$, qui est dans le domaine fréquentiel mais par contre, on peut passer d'un espace à l'autre, grâce à la transformée de Fourier ou le théorème de Plancherel.

- L'espace RL_∞ est un sous espace de $L_\infty(j\mathbb{R})$ et qui contient toutes les matrices de transferts qui appartiennent bien sur à l'espace $L_\infty(j\mathbb{R})$ mais en plus, elles doivent être propres, réelles rationnelles, et sans pole sur l'axe imaginaire.

1.4 L'espace de Hardy H_∞

Définition 1.7 : Soit $S \subset \mathbb{C}$ une partie ouverte et soit $f_i(s)$ une fonction à valeurs complexes, alors f est dite analytique au point $z_0 \in S$, si elle est différentiable en z_0 et aussi différentiable sur un voisinage de z_0 .

Si c'est le cas, alors f admet des dérivées continues et par conséquent, f admet une représentation en série de puissance au voisinage z_0 , la réciproque est aussi valable, si f admet une représentation en série de puissance, alors f est analytique.

Définition 1.8 : On dit que f est analytique sur S , si f est analytique en tout point de S .

Définition 1.9 : On dit qu'une matrice de fonction est analytique, si toutes ces composantes sont analytiques.

Définition 1.10 : On appelle espace de Hardy H_∞ tout sous espace fermé de $L_\infty(j\mathbb{R})$ où les matrices de transfert sont bornées et analytiques dans le demi-plan droit ouvert et la norme H_∞ est définie par :

$$\|F\|_\infty = \sup_{\Re(\sigma) > 0} \bar{\sigma}[F(j\omega)] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)] \quad (\text{pour la démonstration voir Francis [10]}).$$

Définition 1.11 : L'espace RH_∞ est un sous espace de H_∞ et qui, en plus, contient toutes les matrices de transfert réelles, propres rationnelles et stables (pas de pôle sur le demi-plan fermé droit).

1.5 La stabilité interne

Soient x, \hat{x} les vecteurs d'états de G, \hat{K} respectivement et écrivons alors les équations d'états de la figure (1.1) avec ω_1, ω_2 nulles ;

$$\dot{x} = Ax + B e_1 \quad (1.1.a)$$

$$e_2 = Cx + D e_1 \quad (1.1.b)$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} e_2 \quad (1.1.c)$$

$$e_1 = \hat{C} \hat{x} + \hat{D} e_2 \quad (1.1.d)$$

Définition 1.12 : Le système de la figure (1.1) est dit stable intérieurement, si le point origine $(\dot{x}, \dot{\hat{x}}) = (0, 0)$ est asymptotiquement stable, c'est-à-dire les états (x, \hat{x}) convergent vers zéro pour toutes les conditions initiales où $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$.

Il est à noter, que la stabilité interne est une notion propre à l'espace d'état mais une simple manipulation des équations (1.1.b) et (1.1.d) donne :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \hat{C} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

l'existence de la matrice inverse est garantie par le fait que le feedback soit bien défini, si on substitue l'équation (1.2) dans les équations (1.1.b) et (1.1.d), nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -\hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \hat{C} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La stabilité interne est donc équivalente à dire que \tilde{A} possédant toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert.

Lemme 1.5 [41] : Le système de la figure (1.1) avec G, \hat{K} stabilisables et détectables est stable intérieurement si et seulement si \tilde{A} est une matrice d'Hurwitz.

Comme il a déjà été dit plus haut, la notion de stabilité interne est propre à l'espace d'état. Cependant, il est aussi intéressant de transcrire cette notion dans le domaine fréquentiel par le biais des matrices de transfert.

Le feedback de la figure (1.1) est décrit par :

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Il est intuitif de dire que si le système est stable intérieurement, alors pour toute entrée bornée, la sortie sera aussi bornée ; le lemme suivant présente cette idée avec un peu plus de rigueur.

Lemme 1.6 [41] : Le système de la figure (1.1) est stable intérieurement si et seulement si la matrice de transfert :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} (I - \hat{K}G)^{-1} & \hat{K}(I - G\hat{K})^{-1} \\ G(I - \hat{K}G)^{-1} & (I - G\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I + \hat{K}(I - G\hat{K})^{-1}G & \hat{K}(I - G\hat{K})^{-1} \\ (I - G\hat{K})^{-1}G & (I - G\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

de (ω_1, ω_2) vers (e_1, e_2) appartient à RH_∞ .

La stabilité interne donne une garantie sur la bornitude des variables internes si on injecte à l'entrée des signaux bornés.

Il existe certains cas particuliers intéressants qui facilitent la vérification de la stabilité interne.

Corollaire 1.7 [41] : Supposons que $\hat{K} \in RH_\infty$ alors le système de la figure (1.1) est stable intérieurement si et seulement si :

- le feedback est bien posé.
- $G(I - \hat{K}G) \in RH_\infty$.

Ce corollaire traduit le fait que la vérification de la stabilité interne se fait uniquement sur la matrice de transfert et ceci sous la condition d'un feedback bien défini.

Corollaire 1.8 [41] : De même pour $G \in RH_\infty$, le système de la figure (1.1) est stable intérieurement si et seulement si :

- le feedback est bien posé,
- $\hat{K}(I - G\hat{K}) \in RH_\infty$.

Corollaire 1.9 [41] : Supposons que $G \in RH_\infty$, $\hat{K} \in RH_\infty$ alors le système de la figure (1.1) est stable intérieurement si et seulement si :

$$(I - \hat{K}G)^{-1} \in RH_\infty.$$

Plus généralement, on définit :

n_k = nombre de pôles à $Re \geq 0$ de $\hat{K}(s)$.

n_p = nombre de pôles à $Re \geq 0$ de $G(s)$.

Théorème 2.11 [41] : Le système est stable intérieurement si et seulement si :

1. le feedback est bien posé.
2. le nombre de pôles appartenant au demi-plan droit fermé de $G(s)\hat{K}(s) = n_p + n_k$.
3. $\Phi(s) = \det(I - G(s)\hat{K}(s))$ a tout ses zéros dans le demi-plan gauche ouvert càd que $(I - G(s)\hat{K}(s))^{-1} \in RH_\infty$.

La version MIMO du théorème de stabilité de Nyquist devient évidente, nous n'allons pas la donner car nous n'aurons pas besoin de ce théorème pour le reste, toutefois, il est possible de le trouver dans [32], [35].

1.6 Factorisation copremière sur RH_∞ (Coprime factorization)

Nous rappelons que deux polynômes $m(s), n(s)$ à coefficients réels sont dits premiers entre eux si le plus grand diviseur commun est égal à 1, en d'autre sens, et d'après le théorème de Bezout : deux polynômes m, n sont copremiers, s'il existe deux polynômes $x(s), y(s)$, tels que $xm + yn = 1$, ceci restera valable si $x, y \in RH_\infty$, alors ils sont dits copremiers entre eux s'il existe $m, n \in RH_\infty$, tels que l'égalité de Bezout est satisfaite.

D'un point de vue plus général ;

Définition 1.13 : Deux matrices M, N appartenant à RH_∞ sont dites copremières à droite si elles ont le même nombre de colonnes et s'il existe deux matrices $X_d, Y_d \in RH_\infty$ telles que :

$$\begin{bmatrix} X_d & Y_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = X_d M + Y_d N = I \quad (1.7)$$

De la même manière, on dit que deux matrices $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$ sont copremières à gauche si elles ont le même nombre de lignes et s'il existe deux matrices $X_g, Y_g \in RH_\infty$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \end{bmatrix} = \tilde{M} X_g + \tilde{N} Y_g = I \quad (1.8)$$

Soit G une matrice réelle, propre et rationnelle, la factorisation copremière à droite de G est :

$$G = N M^{-1} \quad (1.9)$$

appelée « *right coprime factorization* » ou « *rcf* », où M, N sont copremières à droite sur \mathcal{RH}_∞ .

De même pour la factorisation copremière à gauche de G est :

$$G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad (1.10)$$

appelée « *left coprime factorization* » ou « *lcf* », où \tilde{M}, \tilde{N} sont copremières à gauche sur \mathcal{RH}_∞ .

Une matrice réelle, propre et rationnelle admet une double factorisation copremière (double coprime factorization) si elle admet une « *lcf* » et une « *rcf* », c'ad :

$$\begin{aligned} G &= N M^{-1} \\ &= \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \end{aligned} \quad (1.11)$$

et X_d, Y_d, X_g, Y_g existent et telles que :

$$\begin{bmatrix} X_d & Y_d \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y_g \\ N & X_g \end{bmatrix} = I \quad (1.12)$$

avec M, \tilde{M} carrées et non singulières.

Théorème 1.11 [41] : Supposons que $G(s)$ soit une matrice de transfert réelle, propre et rationnelle, avec :

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (1.13)$$

stabilisable et détectable.

Soient F, L telles que $A+BF$ et $A+LC$ soient stables et définissons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & -Y_g \\ N & X_g \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B-L \\ \hline F & I \quad 0 \\ C+DF & D \quad I \end{array} \right] \\ \begin{bmatrix} X_d & Y_d \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A+LC & -(B+LD) \quad L \\ \hline F & I \quad 0 \\ C & -D \quad I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

alors $G = N M^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ sont des (rcf) et (lcf) respectivement et vérifient donc (2.22) .

Preuve : Il suffit de vérifier que (1.14) réalise (1.12).

C.Q.F.D.

Nous verrons plus tard l'importance de la factorisation copremière ou coprime, mais maintenant, nous allons voir, comment obtient-on la stabilité interne avec la factorisation coprime.

Lemme 1.12 [41] : Considérons le système décrit par la figure (1.1) et supposons que G, \hat{K} admettent des (rcf) et (lcf) comme suit :

$$\begin{aligned} G &= N M^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \\ \hat{K} &= U V^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U} \end{aligned} \quad (1.15)$$

alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. le feedback est stable intérieurement .
2. $\begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix}$ est inversible dans RH_{∞} .
3. $\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ est inversible dans RH_{∞} .
4. $\tilde{M} V - \tilde{N} U$ est inversible dans RH_{∞} .
5. $\tilde{V} M - \tilde{U} N$ est inversible dans RH_{∞} .

En combinant le lemme (1.3) avec le théorème (1.2), nous obtenons ;

Corollaire 1.13 [41] : Soit G une matrice de transfert réelle, propre et rationnelle et $G = N M^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ des (rcf) et (lcf) respectivement, alors il existe un contrôleur :

$$\hat{K}_0 = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \quad (1.16)$$

avec $U_0, V_0, \tilde{U}_0, \tilde{V}_0 \in RH_{\infty}$, telles que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

en plus, soient F, L telles que $A + BF, A + LC$ soient stables, alors nous obtenons une réalisation de la forme :

$$\begin{bmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A+BF & B & -L \\ \hline F & I & 0 \\ C+DF & D & I \end{array} \right] \quad (1.18)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A+LC & -(B+LD) & L \\ \hline F & I & 0 \\ C & -D & I \end{array} \right]$$

1.7 Propriétés d'un feedback

Dans ce paragraphe, nous donnerons un certain nombre de propriétés relatives aux feedback. Nous commencerons par introduire la notion de sensibilité d'une fonction de transfert par rapport à un paramètre, puis nous justifierons la définition de la sensibilité dans le cas monovarié ainsi que dans le cas multivarié, c'est alors que nous présenterons le problème de rejet des perturbations.

Soit $G(s, \alpha)$ une fonction de transfert comportant un paramètre α susceptible de varier légèrement (incertitude sur la valeur de α).

On définit la sensibilité de la fonction de transfert $G(s, \alpha)$ par rapport aux variations de α par :

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{1}{G(s, \alpha)} \cdot \frac{\partial G(s, \alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{G(s, \alpha)} \cdot \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{G(s, \alpha + \Delta \alpha) - G(s, \alpha)}{\Delta \alpha} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Cette définition veut tout simplement dire que la sensibilité de la fonction de transfert $G(s, \alpha)$ est égale au quotient qui existe entre la variation de la fonction de transfert G par rapport à la variation de α et la fonction de transfert elle-même ; ce qui semble assez intuitif.

Si nous prenons comme fonction de transfert la boucle ouverte, nous aurons alors :

$$L_o = k G(s) \quad (1.20)$$

où le contrôleur est supposé être un gain proportionnel, alors la sensibilité de la boucle ouverte par rapport à k qu'on notera :

$$S_o(k) = \frac{1}{L_o} \frac{\partial L_o}{\partial k} = \frac{1}{k} \quad (1.21)$$

La boucle fermée par ailleurs est définie par :

$$G_f(s) = \frac{k G(s)}{1 + k G(s)} \quad (1.22)$$

La sensibilité de la boucle fermée par rapport à k notée :

$$S_f = \frac{1}{G_f(s)} \frac{\partial G_f(s)}{\partial k} = \frac{1}{k(1+kG(s))} \quad (1.23)$$

Dans un système de commande, nous avons affaire à une boucle fermée (un feedback), il serait alors logique de travailler avec S_f mais compte tenu du fait que le système a priori soit en boucle ouverte et en plus la majorité des méthodes classiques de synthèses utilisent la boucle ouverte, on préfère alors *définir la fonction de sensibilité comme étant le rapport entre S_f et S_o*

$$S = \frac{S_f}{S_o} = \frac{1}{1+kG(s)} \quad (1.24)$$

D'une manière générale on définit la fonction de sensibilité par :

$$S = \frac{1}{1+KG} \quad (1.25)$$

Justification :

Dans ce qui a été fait plus haut, nous avons considéré une variation paramétrique sur le gain seulement, d'une manière plus générale, considérons une fonction de transfert décrite par :

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s+b_i)}{\prod_{i=1}^n (s+a_i)} \quad ; (m \leq n) \quad (1.26)$$

Si nous supposons qu'il y a variation paramétrique sur les pôles ou les zéros (nous ne ferons la démonstration que pour le cas des zéros, la démonstration est identique pour le cas des pôles).

Soit :

$$L_o = KG(s) \quad (1.27)$$

$$S_o = \frac{1}{L_o} \frac{\partial L_o}{\partial b_j}$$

pour la boucle fermée :

$$\begin{aligned}
 S_f &= \frac{1+KG}{KG} \frac{\partial \left(\frac{L_o}{1+L_o} \right)}{\partial b_j} \\
 &= \frac{1+L_o}{L_o} \frac{L_o S_o (1+L_o) - L_o L_o S_o}{(1+L_o)^2} \\
 &= \frac{S_o}{1+L_o}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Définir donc la fonction de sensibilité par (1.25) est assez raisonnable.

Pour le cas multivariable, il suffit d'extrapoler la notion de gain de pôles et de zéros, on définit donc la fonction de sensibilité d'une manière encore plus générale par :

$$S = (I + KG)^{-1} \tag{1.29}$$

Après avoir défini rigoureusement la notion de fonction de sensibilité, nous allons à présent discuter des propriétés d'un feedback, pour cela, considérons le schéma suivant :

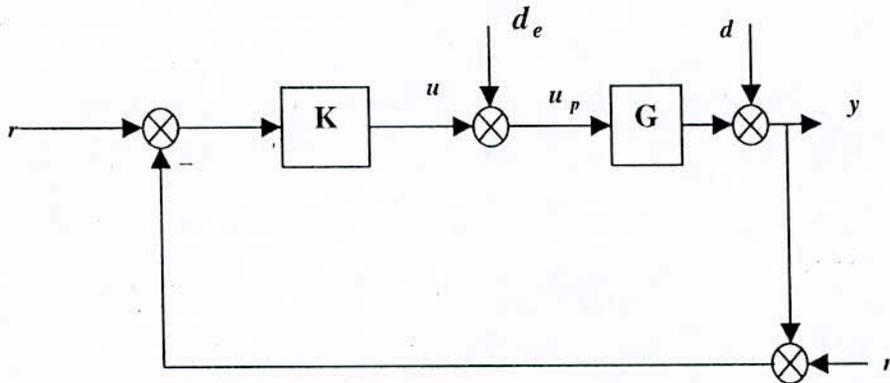


Figure 1.1 configuration standard d'un feedback .

On définit la matrice de transfert de la boucle ouverte en entrée L_e ainsi que celle de sortie L_s ,

$$L_e = KG \tag{1.30}$$

$$L_s = GK \tag{1.31}$$

L_e est obtenue en se mettant en entrée (en ouvrant la boucle en entrée) et L_s est obtenue en se mettant à la sortie (en ouvrant la boucle en sortie).

On définit la matrice de sensibilité en entrée comme étant la matrice de transfert de d_e vers u_p et la matrice de sensibilité en sortie comme étant la matrice de transfert de d vers y ;

$$S_e = (I + L_e)^{-1} \quad ; \quad u_p = S_e d_e \quad (1.32)$$

$$S_s = (I + L_s)^{-1} \quad ; \quad y = S_s d \quad (1.33)$$

Les matrices de sensibilité complémentaires en entrée et en sortie sont définies par :

$$T_e = I - S_e = L_e (I + L_e)^{-1} \quad (1.34)$$

$$T_s = I - S_s = L_s (I + L_s)^{-1} \quad (1.35)$$

Le terme de sensibilité complémentaire est utilisé pour la raison unique que, $T = I - S$.
si le système est stable intérieurement, alors, il est facile de vérifier les équations suivantes :

$$y = T_s (r - n) + S_s G d_e + S_s d \quad (1.36)$$

$$r - y = S_s (r - d) + T_s n - S_s G d_e \quad (1.37)$$

$$u = K S_s (r - n) - K S_s d - T_e d_e \quad (1.38)$$

$$u_p = K S_s (r - n) - K S_s d + S_e d_e \quad (1.39)$$

Ces quatre équations résument l'utilité d'avoir une structure feedback mais aussi, elles montrent clairement et directement où faut-il agir pour obtenir les objectifs voulus, par exemple, l'équation (1.36) montre que l'effet de la perturbation d sur la sortie y peut être réduit en assurant un S_s *petit* (S_s représente le transfert entre d et y), de même pour l'équation (1.39), l'effet de la perturbation d_e sur l'entrée de commande du système, peut être réduit en mettant la matrice de transfert qui les relie, petite, c'est à dire S_e *petit*.

Dire petit pour une matrice de transfert sur une plage fréquentielle, se traduit facilement par la notion de valeurs singulières, par exemple mettre $\bar{\sigma}(S_s) < 1$ sur une certaine plage de fréquence, signifie que nous avons désensibilisé l'effet de la perturbation d sur la sortie sur cette plage de fréquence choisie.

On dira alors qu'un bon rejet des perturbations en sortie y se traduit par :

$$\bar{\sigma}(S_s) = \bar{\sigma}((I + G K)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + G K)} \quad (\text{rejetter } d \text{ en sortie } y) \quad (1.40)$$

$$\bar{\sigma}(S_s G) = \bar{\sigma}((I + G K)^{-1} G) = \bar{\sigma}(S_e G) \quad (\text{rejetter } d_e \text{ en entrée}) \quad (1.41)$$

qui doivent être petites.

Un bon rejet des perturbations en entrée u_p se traduit par :

$$\bar{\sigma}(S_e) = \bar{\sigma}((I + K G)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + K G)} \quad (\text{rejetter } d_i \text{ en entrée}) \quad (1.42)$$

$$\bar{\sigma}(S_e K) = \bar{\sigma}(K (I + G K)^{-1}) = \bar{\sigma}(K S_s) \quad (\text{rejetter } d \text{ en sortie}) \quad (1.43)$$

qui doivent être petites surtout en basses fréquences où d et d_e sont significants.

NB : $K S_s = S_e K$.

Il est à noter que :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(GK) - 1 &\leq \underline{\sigma}(I + GK) \leq \underline{\sigma}(GK) + 1 \\ \underline{\sigma}(KG) - 1 &\leq \underline{\sigma}(I + KG) \leq \underline{\sigma}(KG) + 1 \end{aligned} \quad (1.44)$$

alors :

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(GK) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_s) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1} \quad \text{si } \underline{\sigma}(GK) > 1 \quad (1.45)$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KG) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_e) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KG) - 1} \quad \text{si } \underline{\sigma}(KG) > 1 \quad (1.46)$$

ces deux équations sont équivalentes à :

$$\bar{\sigma}(S_s) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \quad (1.47)$$

$$\bar{\sigma}(S_e) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KG) \gg 1 \quad (1.48)$$

supposons que G , K soient inversibles alors :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(KG) \gg 1 &\Leftrightarrow \bar{\sigma}(S_s G) = \bar{\sigma}((I + GK)^{-1} G) \\ &\approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}(KG) \gg 1 &\Leftrightarrow \bar{\sigma}(K S_s) = \bar{\sigma}(K(I + GK)^{-1}) \\ &\approx \bar{\sigma}(G^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(G)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

En résumé :

De bonnes performances à la sortie y se traduisent en général par le fait d'avoir un grand gain de boucle ouverte de sortie $\underline{\sigma}(L_s) = \underline{\sigma}(GK) \gg 1$ sur la bande de fréquences où d est significatif afin de le désensibiliser et un grand gain aussi pour le contrôleur $\underline{\sigma}(K) \gg 1$ sur la bande de fréquences où d_e est significatif afin de le désensibiliser.

De même, pour avoir de bonnes performances à l'entrée du système c'est-à-dire u_p , il est souhaitable d'avoir un grand gain de boucle ouverte en entrée $\underline{\sigma}(L_e) = \underline{\sigma}(KG) \gg 1$ sur la bande de fréquences où d_e est significatif afin de le désensibiliser et un grand gain aussi pour le système $\underline{\sigma}(G) \gg 1$ sur la bande de fréquences où d est significatif afin de le désensibiliser.

Dans le cas multivariable nous avons en général $S_s \neq S_e$ donc $\bar{\sigma}(S_s)$ petit n'implique pas forcément que $\bar{\sigma}(S_e)$ soit petit, mais dans le cas monovariable tout est équivalent.

On peut conclure en disant : Pour avoir une bonne synthèse multivariable (monovariable) pour un feedback, il est souhaitable d'avoir un grand gain de la boucle ouverte et éventuellement un grand gain du contrôleur.

La synthèse d'un système de commande n'est pas aussi directe comme on pourrait le croire ; il est souvent nécessaire d'accomplir des compromis que ce soit sur les bandes fréquentielles où il faut un certain gain élevé tandis que sur d'autres, il faut un gain faible ; par exemple, le compromis le plus significatif concerne la commande et la réduction des erreurs par rapport à la stabilité d'un système décrit par un modèle incertain, ainsi, supposons que le modèle perturbé s'écrit sous la forme $(I+\Delta)G$ avec Δ stable et supposons par ailleurs que le système dit nominal G soit stable càd que la boucle fermée avec $\Delta=0$ soit stable.

Le système perturbé en boucle fermée est stable si :

$$\det(I+(I+\Delta)GK) = \det(I+GK) \det(I+\Delta T_s) \quad (1.51)$$

n'admet pas de zéros à partie réelle positive ; ceci est réalisé en général en mettant $\bar{\sigma}(\Delta T_s)$ petit sur la bande de fréquence où Δ est significatif (en général sur les hautes fréquences où le modèle est assez mal connu) et par conséquent $\bar{\sigma}(L_s)$ doit être petit sur cette bande fréquentielle (hautes fréquences).

Un autre compromis concerne le conflit entre le rejet des perturbations et la réduction des bruits de mesure comme on peut le voir dans l'équation (1.36) ; mettre $\underline{\sigma}(L_s(j\omega))$ grand sur une large bande fréquentielle pour atténuer l'effet de d rendrait l'effet de l'erreur due au bruit n grand et nous obtenons :

$$y = T_s(r-n) + S_s G d_e + S_s d \approx r-n \quad (1.52)$$

il est à signaler que n est en général significatif en hautes fréquences, alors mettre $\underline{\sigma}(L_s(j\omega)) \gg 1$ ou $\underline{\sigma}(L_e(j\omega)) \gg 1$ à l'extérieur de la bande passante du système càd $\bar{\sigma}(G(j\omega)) \ll 1$ peut rendre u assez important, ce qui causera la saturation des actionneurs et ceci peut se voir grâce à :

$$\begin{aligned} u &= K S_s (r-n-d) - T_e d_e = S_e K (r-n-d) - T_e d_e \\ &\approx G^{-1} (r-n-d) - d_e \end{aligned} \quad (1.53)$$

NB : $S_e = (I+KG)^{-1}$; $S_e K G G^{-1} = T G^{-1} \approx G^{-1}$ ($T=1$ à l'extérieur de la bande passante du système).

Aussi le gain du contrôleur $\bar{\sigma}(K)$ ne doit pas être trop grand sur la bande fréquentielle où $\bar{\sigma}(L_s)$ ou $\bar{\sigma}(L_e)$ sont petits pour ne pas également saturer les actionneurs ; en effet, si nous avons $\bar{\sigma}(L_s(j\omega)) \ll 1$ ou $\bar{\sigma}(L_e(j\omega)) \ll 1$, alors :

$$u = K S_s (r-n-d) \approx K (r-n-d) \quad (1.54)$$

par conséquent, il est souhaitable de ne pas avoir $\underline{\sigma}(K)$ trop grand sur les fréquences où la boucle ouverte présente un gain très grand.

Ce qu'il faut retenir

De bonnes performances sur une bande fréquentielle basse $(0, \omega_l)$ se traduit par :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(GK) &>> 1 \\ \underline{\sigma}(KG) &>> 1 \\ \underline{\sigma}(K) &>> 1\end{aligned}\tag{1.55}$$

et une bonne « robustesse » (nous définirons cette notion au chapitre 3) avec un bon rejet des bruits de mesure est souhaitable en hautes fréquences (ω_h, ∞) par les conditions :

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(GK) &<< 1 \\ \overline{\sigma}(KG) &<< 1 \\ \overline{\sigma}(K) &\leq M\end{aligned}\tag{1.56}$$

avec M pas très grand et ω_l, ω_h des pulsations qui dépendent de la nature du système, de notre connaissance du système ainsi que de notre connaissance de l'activité des perturbations.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons donné tous les éléments théoriques nécessaires sur les systèmes linéaires afin de pouvoir les exploiter plus loin dans la théorie H_∞ .

Les notions essentielles à retenir sont :

- la définition de norme H_∞ ,
- la stabilité interne (notion importante dans la théorie H_∞).
- comment réaliser le rejet des perturbations, la réduction des bruits de mesure, la réduction des effets des incertitudes sur toute une plage de fréquence sans que cela n'affecte sur la stabilité ou sur la saturation des actionneurs.

CHAPITRE 2
LA COMMANDE H_∞
CENTRALISEE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons décrire d'une manière brève les systèmes incertains dont l'incertitude est dite non structurée (les incertitudes structurées existent bien évidemment, mais elles ne font pas l'objet de notre étude, voir par exemple [35], [41]); nous entendons par incertitude non structurée, toute incertitude dont nous connaissons seulement son maximum d'amplitude mais dont nous ignorons totalement sa structure (c'est le cas le plus courant en pratique), contrairement aux incertitudes structurées.

Nous commencerons par montrer comment les marges classiques de gain et de phase ne sont pas suffisantes pour indiquer une bonne robustesse, par conséquent, il est nécessaire de modifier notre façon de voir les systèmes perturbés (c'est toute la théorie de la robustesse qui répond à cette exigence) ; ainsi, pour présenter la théorie de la robustesse, nous introduirons en premier lieu la présentation des modèles incertains classiques, puis nous présenterons des tests de stabilité robuste, basés principalement sur le théorème des petits gains, qui sera présenté d'une manière assez claire, c'est alors, que nous verrons l'équivalence entre le problème de stabilité robuste et le problème de performances nominales et enfin, nous présenterons la notion de performances robustes.

Nous donnerons les démonstrations dans le cas où celles ci contribuent à l'assimilation des théorèmes.

2.1. Marges classiques de stabilité de gain et de phase

Soit $L(s)$ une fonction de transfert et considérons le feedback représenté sur la figure (2.1)

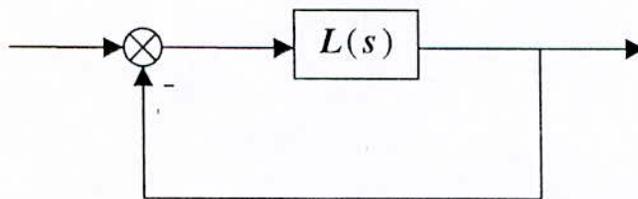


Figure 2.1

Supposons que le système présente une boucle fermée stable avec $L(s) = L_0(s)$, alors on dira que le système admet :

- une marge de gains k_{\min} , k_{\max} si la boucle fermée reste stable pour $L(s) = k L_0(s)$ où $k_{\min} < k < k_{\max}$ mais instable si $L(s) = k_{\max} L_0(s)$ et $L(s) = k_{\min} L_0(s)$ où $0 \leq k_{\min} \leq 1$ et $k_{\max} \geq 1$.
- une marge de phase Φ_{\min} , Φ_{\max} si la boucle fermée est stable pour tout $L(s) = e^{-j\Phi} L_0(s)$ avec $\Phi_{\min} < \Phi < \Phi_{\max}$, mais instable pour $L(s) = e^{-j\Phi_{\max}} L_0(s)$ et pour $L(s) = e^{-j\Phi_{\min}} L_0(s)$ où $-\pi \leq \Phi_{\min} \leq 0$ et $0 \leq \Phi_{\max} \leq \pi$.

Sur la figure (2.2), on voit clairement les marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist de la boucle ouverte où k_{\min} , k_{\max} représentent de combien le gain de la boucle ouverte peut augmenter ou diminuer sans déstabiliser le système, de même Φ_{\min} , Φ_{\max} représentent de combien une avance de phase ou retard de phase de la boucle ouverte est toléré sans déstabiliser le système.

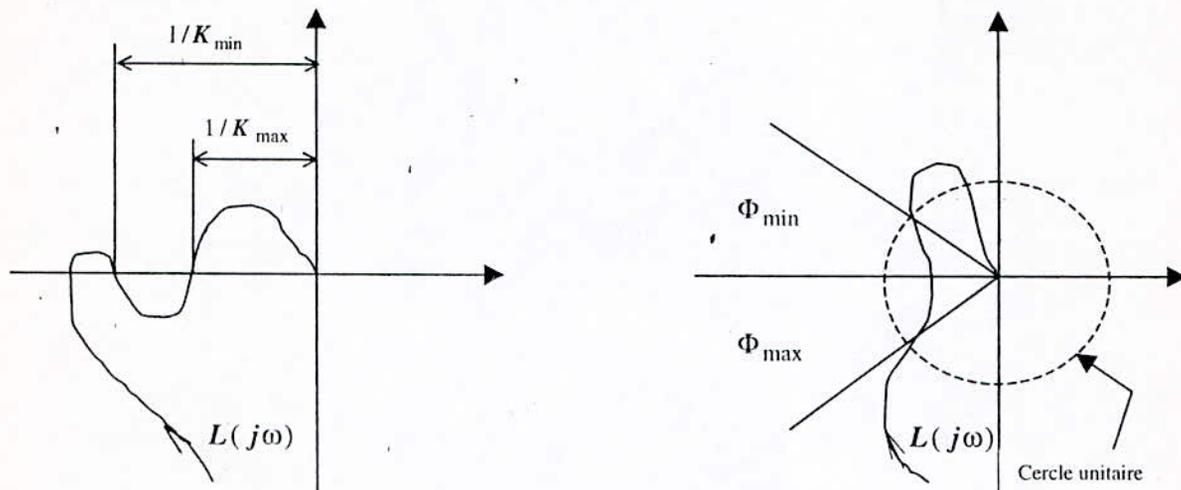


Figure 2.2

Cependant, les marges de gain et de phase seules, peuvent parfois être insuffisantes pour indiquer correctement la robustesse d'un système, l'exemple suivant explique cette proposition [41].

Soit le système dynamique :

$$G = \frac{a-s}{as-1} \quad , \quad a > 1 \quad (2.1)$$

avec un contrôleur K qui stabilise G .

Soit maintenant $L = GK$ et considérons le contrôleur :

$$K = \frac{b+s}{bs+1} \quad , \quad b > 0 \quad (2.2)$$

il est facile de vérifier que la boucle fermée sera stable pour :

$$\frac{1}{a} < b < a \quad (2.3)$$

calculons maintenant les marges de stabilité suivant les cas :

1. $b = 1$, ce cas équivaut à $K = 1$ et les marges de stabilité sont faciles à calculer

$$k_{\min} = \frac{1}{a}, k_{\max} = a, \Phi_{\min} = -\pi, \Phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right) = \theta$$

pour a très grand, on voit bien que les marges de gain et de phases sont aussi grandes.

2. $\frac{1}{a} < b < a$ et $b \rightarrow a$, dans ce cas nous avons

$$k_{\min} = \frac{1}{ab} \rightarrow \frac{1}{a^2}, k_{\max} = ab \rightarrow a^2, \Phi_{\min} = -\pi, \Phi_{\max} \rightarrow 0$$

une très grande marge de gain mais une très petite marge de phase.

3. $\frac{1}{a} < b < a$ et $b \rightarrow \frac{1}{a}$ dans ce cas nous avons

$$k_{\min} = \frac{1}{ab} \rightarrow 1, k_{\max} = ab \rightarrow 1, \Phi_{\min} = -\pi, \Phi_{\max} = 2\theta$$

une très grande marge de phase mais une très petite marge de gain.

Si on considère une application numérique avec :

$a = 2$ et $b = 1, b = 1,9, b = 0,55$ respectivement, la réponse fréquentielle de la boucle ouverte chaque cas est représenté sur la figure (2.3).

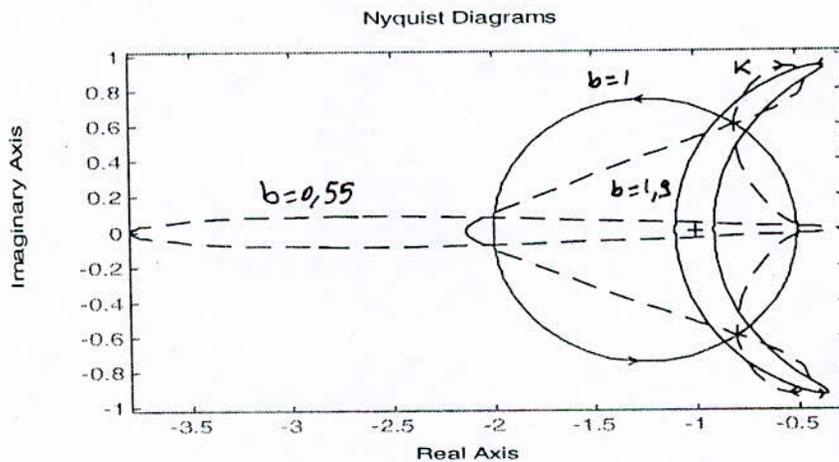


Figure 2.3

Pour bien montrer que les marges de gain et de phase peuvent être une mauvaise indication de la robustesse, considérons alors un contrôleur K dit **mauvais** vérifiant :

$$k_{\min} < \frac{1}{a}, k_{\max} > a, \Phi_{\min} = -\pi, \Phi_{\max} > \theta$$

un tel contrôleur est donné par exemple par :

$$K = \frac{s+3,3}{3,3s+1} \cdot \frac{s+0,55}{0,55s+1} \cdot \frac{1,7s^2+1,5s+1}{s^2+1,5s+1,7} \tag{2.4}$$

La réponse fréquentielle de la boucle ouverte du système avec le contrôleur K (dit mauvais) est aussi représentée sur la figure (2.3) par '...':

Il est facile de voir que le contrôleur K présente les mêmes marges de gain et de phase qu'avec le cas du contrôleur $K = 1$, mais par contre, le lieu de Nyquist de la boucle ouverte avec le contrôleur K est beaucoup plus proche du point critique $(-1, 0)$ qu'avec le contrôleur $K = 1$ et par conséquent, une légère variation des paramètres entraîne une variation simultanée du gain et de la phase, ce qui risque de déstabiliser un système, mais peut être pas l'autre, donc, pour les mêmes marges de gain et de phase, nous avons une robustesse complètement différente, alors, nous pouvons dire que les marges de gain et de phase ne sont pas toujours de bons indicateurs de robustesse, surtout lorsqu'elles varient simultanément, il est alors nécessaire de redéfinir la notion de robustesse.

2.2 Définition de la robustesse

Pour commander les systèmes, l'ingénieur a besoin d'avoir une connaissance assez précise du système ; et le moyen le plus naturel, c'est d'avoir un modèle mathématique du système. Cependant, la nature physique n'est pas complètement décrite par des équations (un grand nombre de phénomènes physiques ne peuvent jusqu'à présent être représentés par des équations), ce qui implique une certaine marge d'erreurs entre le modèle mathématique et le système réel que nous ne pourrons jamais connaître avec une exactitude parfaite ; ce qui nous condamne à travailler avec ce qu'on appelle : **les modèles incertains**.

Définition 2.1 : On définit les modèles incertains comme étant un ensemble de modèles mathématiques dont on connaît dès le départ un modèle dit nominal et une incertitude bornée .

$$\Pi = \{ G_\Delta = f(G, \Delta), G \in \Pi ; \forall \Delta / \beta < \sigma(\Delta) < \alpha \} \quad (2.5)$$

Le modèle nominal est le modèle le plus disponible (bien défini et généralement le plus simple mais aussi assez représentatif des dynamiques du système), donc, il est naturel de vouloir synthétiser les commandes sur le modèle nominal, mais la question qui se pose :

Est-ce que la commande qui a été synthétisée en utilisant le modèle nominal avec succès sera t – elle aussi efficace sur le modèle réel dont on est certain, qu'il est différent du modèle nominal ?

Alors, les commandes qui réalisent ceci sont appelées **commandes robustes** et l'efficacité en question se définit comme étant *la préservation de la stabilité et un certain degré de performances*.

On peut donc dire : *Une commande robuste est une commande qui est capable de stabiliser avec un certain degré de performances une classe de systèmes incertains .*

Définition 2.2 : Supposons que Π représente l'ensemble des modèles incertains d'un système, supposons que $G \in \Pi$, soit le modèle nominal et K son contrôleur ; alors, le système en boucle fermée possède :

- **une stabilité nominale** : si K procure une stabilité interne pour G .
- **une stabilité robuste** : si K procure une stabilité interne pour tout $G_\Delta \in \Pi$.
- **des performances nominales** : si les performances visées sont satisfaites pour G .
- **des performances robustes** : si les performances visées sont satisfaites pour tout $G_\Delta \in \Pi$

En résumé :

Pour commander un système réel avec succès à partir d'un modèle mathématique (qui approxime le phénomène physique) dit nominal, il est nécessaire d'avoir une stabilité nominale, des performances nominales et aussi une stabilité robuste avec des performances robustes, mais ceci pour une certaine classe d'incertitudes dont le gabarit est défini dès le départ par sa norme ; les incertitudes non structurées impliquent la connaissance unique de $\overline{\sigma}(\Delta)$ et $\underline{\sigma}(\Delta)$ c'à-d les valeurs minimales et maximales des incertitudes sans plus.

2.3 Le théorème des petits gains (small gain theorem, Zames 1966)

Considérons le système de la figure (2.4) :

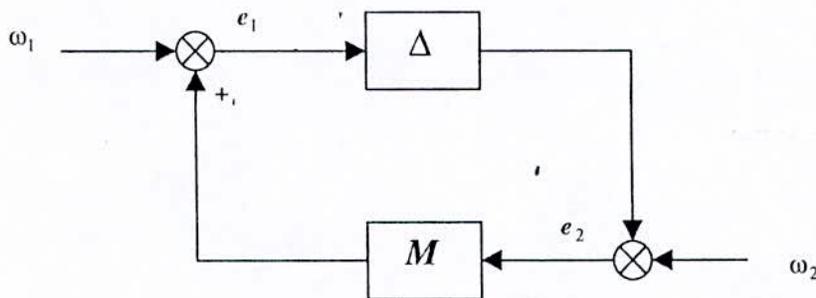


Figure 2.4 Théorème des petits gains

Théorème 2.1 (Small gain theorem) [41] : Supposons que $M \in RH_\infty$, $\gamma > 0$, alors le système interconnecté de la figure (2.4) est dit bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta(s) \in RH_\infty$ avec :

- 1) $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma \Leftrightarrow \|M(s)\| < \gamma$.
- 2) $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma \Leftrightarrow \|M(s)\| \leq \gamma$.

Preuve : Il y a plusieurs démonstrations dont l'une est assez simple où la mise en œuvre du théorème de stabilité de Nyquist version MIMO facilite sensiblement la démonstration voir par exemple [35].

Corollaire 2.2 [41] : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) le système est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in H_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$.
- 2) le système est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$.
- 3) le système est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in C^{q \times p}$ avec $\|\Delta\| < 1/\gamma$.
- 4) $\|M\|_\infty \leq \gamma$.

2.4 Stabilité sous des incertitudes non structurées stables

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment obtient-on une stabilité robuste, face aux différents types d'incertitudes non structurées à savoir, incertitude additive, multiplicative et coprime ; nous utiliserons à chaque fois le théorème des petits gains ainsi que certains résultats du chapitre 1 sur la stabilité interne et le feedback bien défini . Dans ce qui suit, nous considérerons des incertitudes modulées de la forme $W_1 \Delta W_2$.

On rappelle que :

$$S_s = (I + GK)^{-1}, T_s = I - S_s$$

$$S_e = (I + KG)^{-1}, T_e = I - S_e$$

et un feedback est bien défini et stable intérieurement si et seulement si

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I + KG)^{-1} & -K(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1}G & (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \in RH_\infty$$

pour tout $G \in \Pi$

2.4.1 Incertitudes additives

Si on suppose que le modèle incertain présente la forme suivante dite additive :

$$G_\Delta = G + W_1 \Delta W_2 \tag{2.6}$$

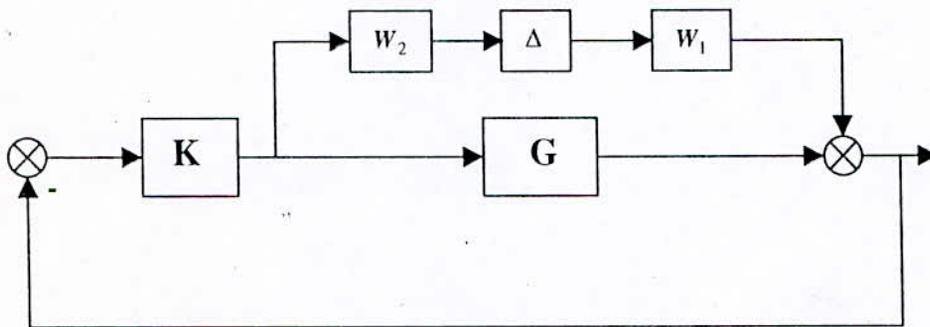


Figure 2.5 Incertitudes additives

Théorème 2.3 [41] : Soit $\Pi = \{G + W_1 \Delta W_2 ; \Delta \in RH_\infty\}$ et soit K un contrôleur stabilisant G alors, le système en boucle fermée sera bien défini et stable intérieurement pour tout $\|\Delta\|_\infty < 1$ si et seulement si $\|W_2 K S_s W_1\|_\infty \leq 1$.

Preuve : Soit $G_\Delta = G + W_1 \Delta W_2 \in \Pi$,alors, d'après le lemme 1.6

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G_\Delta & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I + K S_s W_1 \Delta W_2)^{-1} S_e & -K S_s (I + W_1 \Delta W_2 K S_s)^{-1} \\ (I + S_s W_1 \Delta W_2 K)^{-1} S_s (G + W_1 \Delta W_2) & S_s (I + W_1 \Delta W_2 K S_s)^{-1} \end{bmatrix}$$

est bien défini et stable intérieurement si :

$$(I + \Delta W_2 K S_s W_1)^{-1} \in RH_\infty$$

puisque :

$$\begin{aligned} \det(I + K S_s W_1 \Delta W_2) &= \det(I + W_1 \Delta W_2 K S_s) \\ &= \det(I + \Delta W_2 K S_s W_1) \end{aligned}$$

mais $(I + \Delta W_2 K S_s W_1)^{-1} \in RH_\infty$ est garanti si :

$$\|\Delta W_2 K S_s W_1\|_\infty < 1 \quad (\text{théorème des petits gains})$$

alors $\|W_2 K S_s W_1\|_\infty \leq 1$ est une condition suffisante pour la stabilité robuste .

Pour montrer la condition nécessaire, la stabilité robuste implique :

$$K(I + G_\Delta K)^{-1} = K S_s (I + W_1 \Delta W_2 K S_s)^{-1} \in RH_\infty$$

pour tout Δ admissible .

$$\Delta W_2 K (I + G_\Delta K)^{-1} W_1 = I - (I + \Delta W_2 K S_s W_1)^{-1} \in RH_\infty$$

pour tout Δ admissible .

En utilisant une seconde fois le théorème des petits gains ; la boucle fermée est stable pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ seulement si $\|W_2 K S_s W_1\|_\infty \leq 1$.

C.Q.F.D.

2.4.2 Incertitudes multiplicatives

Nous considérons maintenant le modèle du système décrit par :

$$G_\Delta = (I + W_1 \Delta W_2) G \quad (2.7)$$

avec $W_1, W_2, \Delta \in RH_\infty$

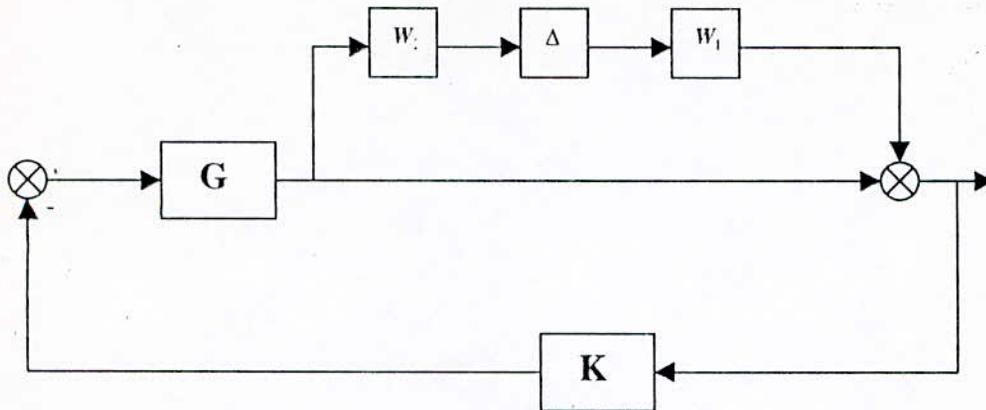


Figure 2.6 Incertitudes multiplicatives

Théorème 2.4 [41] : Soit $\Pi = \{(I+W_1 \Delta W_2)G ; \Delta \in RH_\infty\}$ et soit K un contrôleur qui stabilise le modèle nominal G alors :

- 1) le système en boucle fermée est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty < 1$ si et seulement si $\|W_2 T_s W_1\|_\infty \leq 1$.
- 2) la stabilité robuste du système en boucle fermée pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ n'implique pas nécessairement $\|W_2 T_s W_1\|_\infty < 1$.
- 3) le système en boucle fermée est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ seulement si $\|W_2 T_s W_1\|_\infty < 1$.
- 4) si on suppose enfin que ni G ni K n'a de pôles sur l'axe imaginaire, alors, le système en boucle fermée est bien défini et stable intérieurement pour tout $\Delta \in RH_\infty$ avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ si et seulement si $\|W_2 T_s W_1\|_\infty < 1$.

2.4.3 Incertitudes par facteurs coprimés

Considérons un système décrit par sa factorisation copremière gauche

$$G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad (2.8)$$

si on considère maintenant le système suivant :

$$G_\Delta = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N) \quad (2.9)$$

Il s'agit là d'un système incertain décrit par facteurs coprimés, nous pouvons doré et déjà distinguer l'utilité de la factorisation copremière ; en effet, c'est la seule factorisation qui peut modéliser des systèmes incertains instables, car jusqu'à présent, nous avons considéré que le système nominal ainsi que les systèmes incertains possédaient le même nombre de pôles

instables tandis qu'avec la factorisation copremière le système nominal ainsi que les systèmes incertains n'ont pas forcément le même nombre de pôles instables (résultat très important).

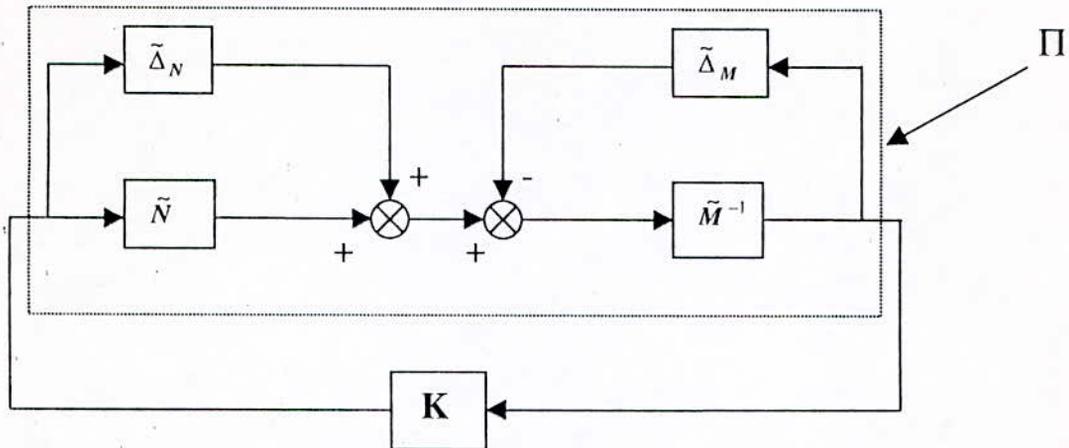


Figure 2.7 Incertitudes par facteurs coprimés

Théorème 2.5 [41] : Soit $G_\Delta = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$ avec $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{\Delta}_M, \tilde{\Delta}_N \in RH_\infty$, les matrices de transferts \tilde{M}, \tilde{N} constituent une (lcf) de G càd $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ et K stabilise intérieurement le système nominal G , on définit $\Delta = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_N & \tilde{\Delta}_M \end{bmatrix}$, alors, le système en boucle fermée est bien défini et stable intérieurement pour tout $\|\Delta\|_\infty < 1$, si et seulement si :

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq 1 \tag{2.10}$$

Preuve : Soit $K = UV^{-1}$ une (rcf) sur RH_∞ , en utilisant le lemme 1.3, on pourra dire donc que le système en boucle fermée est stable intérieurement, si et seulement si :

$$\left((\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)U + (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)V \right)^{-1} \in RH_\infty \tag{2.11}$$

puisque K stabilise G alors $(\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \in RH_\infty$ donc (2.11) est réalisée si et seulement si :

$$\left(I + (\tilde{\Delta}_N U + \tilde{\Delta}_M V) (\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \right)^{-1} \in RH_\infty \tag{2.12}$$

en utilisant le théorème des petits gains (2.12) est vraie pour tout $\|\Delta\|_\infty < 1$ si et seulement si :

$$\left\| \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq 1 .$$

C.Q.F.D.

2.4.4 Récapitulatif

La table (2.1), résume l'ensemble des conditions pour la stabilité robuste des différents types de systèmes incertains, où Π est l'ensemble de tous les systèmes incertains, $G \in \Pi$ est le système nominal et K est le contrôleur qui stabilise intérieurement le système nominal G .

Cette table comporte différents types d'incertitudes physiques ainsi que de leurs emplacement dans la chaîne de commande, par exemple, la représentation $G_\Delta = (I + W_1 \Delta W_2)G$ dans la première ligne est souvent utilisée pour les erreurs en sortie en hautes fréquences HF, qui couvre des dynamiques HF non modélisées des capteurs et aussi celles du système ; elle concerne en général les processus de diffusion, les processus à retard, les processus électromécaniques à résonance. Pour le cas de la deuxième ligne, elle couvre le même type d'incertitudes mais cette fois ci en entrée. Les deux cas de la troisième et quatrième ligne ; $G(I + W_1 \Delta W_2)^{-1}$, $(I + W_1 \Delta W_2)^{-1}G$, elles représentent les variations du modèle (dynamique) comme les erreurs en basses fréquences BF produites par les variations dues aux conditions de fonctionnement comme l'usure ou le vieillissement.

L'utilisation de la table 2.1 se fait de la manière suivante :

étant donné : un système nominal et l'ensemble des modèles incertains

alors : la stabilité robuste en boucle fermée est assurée

si et seulement si : les tests de stabilité robuste.

Dans le tableau 2.1, nous n'avons pas cité le cas d'incertitudes sur le nombre de pôles ou de zéros appartenant au demi-plan droit, mais cependant, les incertitudes qui existent dans la table 2.1 couvrent parfaitement ce genre de choses comme nous allons le voir à travers ces deux exemples.

Exemple 2.1 : Supposons un système incertain où l'incertitude réside dans le nombre de pôles appartenant au demi - plan droit et il est décrit par :

$$G_\Delta = \left\{ \frac{1}{s-\delta} \mid \delta \in \mathbb{R} ; |\delta| \leq 1 \right\}$$

alors, le système $G_1 = \frac{1}{s-1} \in G_\Delta$ admet un pôle sur le demi - plan droit et tandis que

$G_2 = \frac{1}{s+1} \in G_\Delta$ n'admet pas de pôles sur le demi-plan droit et par conséquent, nous pouvons

couvrir cette incertitude par un feedback incertain de la forme

$$G_\Delta \in \Pi = \left\{ \frac{G}{1+\delta G} ; \delta \in RH_\infty, \|\delta\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Exemple 2.2 : Considérons le système perturbé suivant : $G_\Delta = \frac{s+1+\alpha}{(s+2)(s+1)}$; $|\alpha| \leq 2$

Cet ensemble de systèmes incertains a la particularité de ne pas avoir le même nombre de zéros pour le cas où $\alpha=0$, nous n'avons pas de zéros sur le demi-plan droit, tandis que dans le cas où $\alpha=-1$, nous avons un zéro sur le demi-plan droit. Ce système incertain peut être couvert par une incertitude multiplicative de la forme :

$$G_\Delta \in \Pi = \left\{ \frac{1}{s+2} \left(1 + \frac{2\delta}{s+1} \right), \delta \in RH_\infty, \|\delta\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

$W_1 \in RH_\infty \quad W_2 \in RH_\infty \quad \Delta \in RH_\infty \quad \ \Delta\ _\infty < 1$		
L'ensemble des modèles incertains Π	Représentation du type d'incertitudes	Tests de stabilité robuste
$(I+W_1 \Delta W_2) G$	Erreurs de sortie (capteurs) . Dynamiques HF négligées . Incertainité sur les zéros du demi-plan droit .	$\ W_2 T_s W_1\ _\infty \leq 1$
$G (I+W_1 \Delta W_2)$	Erreurs en entrée (actionneurs) . Dynamiques HF négligées . Incertainités sur les zéros du demi-plan droit .	$\ W_2 T_e W_1\ _\infty \leq 1$
$(I+W_1 \Delta W_2)^{-1} G$	Erreurs paramétriques en BF Incertainités sur les pôles du demi-plan droit	$\ W_2 S_s W_1\ _\infty \leq 1$
$G (I+W_1 \Delta W_2)^{-1}$	Erreurs paramétriques en BF Incertainités sur les pôles du demi-plan droit	$\ W_2 S_e W_1\ _\infty \leq 1$
$G + W_1 \Delta W_2$	Erreurs de modèles additives Dynamiques HF négligées. Incertainités sur les zéros du demi-plan droit	$\ W_2 K S_s W_1\ _\infty \leq 1$
$G (I+W_1 \Delta W_2 G)^{-1}$	Erreurs paramétriques en BF Incertainités sur les pôles du demi-plan droit	$\ W_2 S_s G W_1\ _\infty \leq 1$
$(\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$ $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ $\Delta = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_N & \tilde{\Delta}_M \end{bmatrix}$	Erreurs paramétriques en BF Dynamiques négligées HF Incertainités sur les pôles et les zéros du demi-plan droit	$\left\ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} S_s \tilde{M}^{-1} \right\ _\infty \leq 1$
$(N + \Delta_N) (M + \Delta_M)^{-1}$ $G = N M^{-1}$ $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix}$	Erreurs paramétriques en BF Dynamiques négligées HF Incertainités sur les pôles et les zéros du demi-plan droit	$\ M^{-1} S_e \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix}\ _\infty \leq 1$

Table 2.1 Conditions de stabilité robuste .

2.5 Equivalence entre stabilité robuste et performances nominales

Le problème de stabilité robuste peut être regardé comme étant un problème de performances nominales.

Par exemple, le problème de stabilité robuste, face à une perturbation multiplicative en sortie, peut être traité comme un problème de rejet de bruits des capteurs et vice versa ; voir figure 2.8.

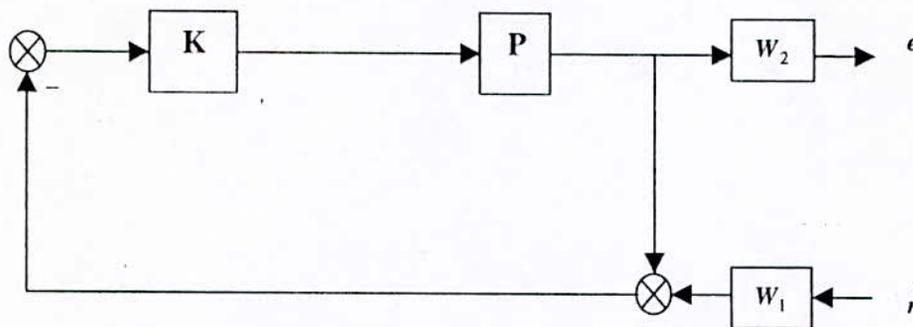


Figure 2.8

Il est clair que pour une stabilité robuste, face à une incertitude multiplicative avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, est réalisée si et seulement si la norme H_∞ de la matrice de transfert de ω vers z , c'est à dire $\|T_{z\omega}\|_\infty < 1$.

et puisque

$$T_{z\omega} = T_{en} \quad (2.13)$$

donc

$$\|T_{z\omega}\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\|n\|_2 \leq 1} \|e\|_2 = \|W_2 T_s W_1\|_\infty \leq 1 \quad (2.14)$$

Ce résultat donne une idée sur l'équivalence entre la stabilité robuste et les performances nominales, il peut être généralisé, mais nous n'allons pas le démontrer, voir []. On conclut donc en disant que *les problèmes de stabilité robuste et performances nominales sont équivalents*.

2.6 Performances robustes

Considérons le système incertain de la figure 2.9 avec Π , comme ensemble de systèmes incertains, G est le système nominal.

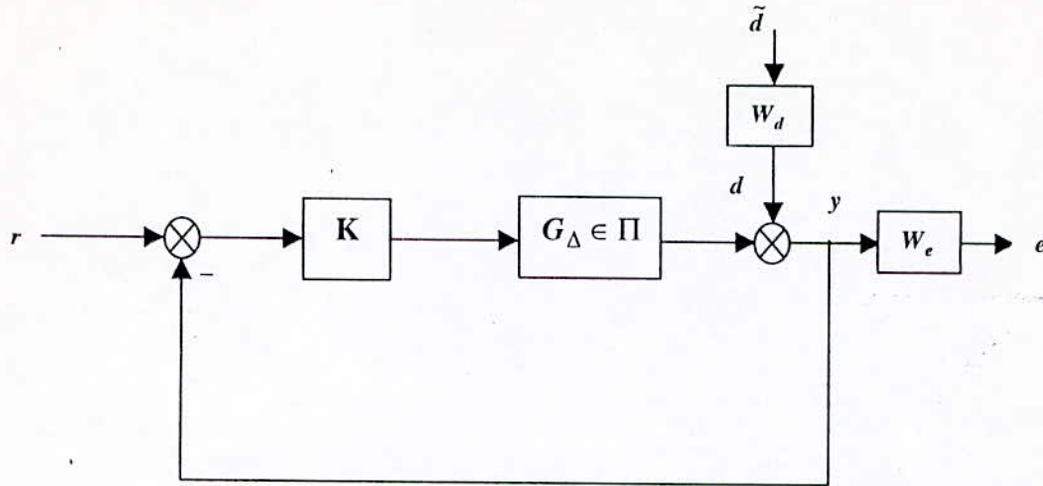


Figure 2.9 Diagramme pour performances robustes .

Le critère de performance H_∞ sera le suivant :

Etant donné une perturbation \tilde{d} , notre objectif sera de *minimiser au maximum l'énergie du signal d'erreur e le plus défavorable (worst case error)* , en supposant que l'énergie de \tilde{d} est inférieure à 1.

$$\sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \|e\|_2 \leq \epsilon \tag{2.15}$$

pour un ϵ aussi petit que possible , en introduisant une pondération W_e , nous pouvons sans problème de perte de généralité poser $\epsilon = 1$, alors *le critère de performances robustes* , dans ce cas, *implique que le système soit déjà stable robustement en boucle fermée* , mais qu'en plus , on doit vérifier que :

$$\|T_{e\tilde{d}}\|_\infty \leq 1 \quad \forall G_\Delta \in \Pi \tag{2.16}$$

Revenons maintenant au cas de l'incertitude multiplicative en sortie (les autres cas s'obtiennent par le même procédé).

Le modèle incertain est défini par :

$$G_\Delta = \{ (I + W_1 \Delta W_2) G \in \Pi ; \Delta \in RH_\infty , \|\Delta\|_\infty < 1 \}$$

avec $W_1 , W_2 \in RH_\infty$.

Pour cette classe de systèmes nous avons :

$$T_{e\tilde{d}} = W_e S_s (I + W_1 \Delta W_2 T_s)^{-1} W_d \tag{2.17}$$

et donc nous obtenons des performances robustes si et seulement si :

$$\|W_2 T_s W_1\|_\infty \leq 1 \quad (2.18)$$

et par conséquent, nous aurons : $\|T_{ed}\|_\infty \leq 1$, $\forall \Delta \in RH_\infty ; \|\Delta\|_\infty < 1$.

Cependant, il existe des conditions suffisantes relativement plus faciles à réaliser en bornant l'une ou l'autre inégalité du théorème suivant.

Théorème 2.6 [41] : supposons que $G_\Delta = \{(I + W_1 \Delta W_2) G \in \Pi ; \Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty < 1\}$ et K stabilise intérieurement G , alors, les performances robustes sont garanties, si l'une ou l'autre des deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) pour toute fréquence ω :

$$\bar{\sigma}(W_d) \cdot \bar{\sigma}(W_e S_s) + \bar{\sigma}(W_1) \cdot \bar{\sigma}(W_2 T_s) \leq 1 \quad (2.19)$$

2) pour toute fréquence ω :

$$k(W_1^{-1} W_d) \cdot \bar{\sigma}(W_e S_s W_d) + \bar{\sigma}(W_2 T_s W_1) \leq 1 \quad (2.20)$$

où W_1, W_d sont supposées inversibles et $k(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}$.

Remarque 2.1 : Il n'est pas difficile de montrer que chacune des deux inégalités devient une condition nécessaire pour un système monovarié.

On peut conclure en disant qu'il y a entre ces problèmes une certaine équivalence .

Problème Performances nominales P N \Leftrightarrow Problème Stabilité robuste S R .

Problème Performances robustes P R \Leftrightarrow Problème Stabilité robuste S R .

2.7 Rappel historique sur la commande H_∞

On peut probablement dire que l'approche H_∞ est dans le domaine de la commande robuste, le sujet qui a donné lieu au plus grand nombre de publications depuis le milieu des années 80. Cela n'est pas un hasard, car c'est une façon très intuitive de formuler la problématique de la robustesse.

Tout a commencé par un article de Zames en 1981 et suivi par d'autres articles écrits par, ou en collaboration avec le même auteur [12] , [13] . Ces articles ont été mal compris par beaucoup quand ils sont parus et ils ne concernaient pas le problème de robustesse mais plutôt celui de rejet des perturbations. C'est Kimura qui, en 1984 a formulé le premier le problème de robustesse [26], la nouveauté qu'il a apportée, réside dans le fait que l'utilisation explicite du cadre H_∞ , a permis à Kimura de résoudre le problème de synthèse, grâce à une technique d'interpolation dite de nevanlinna-pick. L'article de Francis et Doyle [11] ainsi que le livre de Francis [10], tous deux parus en 1987, ont fait une très bonne synthèse des travaux parus jusqu'à cette date et les ont unifiés, grâce à l'importante notion de **Problème standard**, qui est due à Doyle.

La plupart des travaux et idées dans le domaine de l'automatique tournaient autour du théorème de Zames 1966, quant aux outils mathématiques, ils sont relativement anciens comme les espaces H_p , dits **espaces de Hardy**, sont connus depuis les années 30. La méthode d'interpolation de Nevanlinna-Pick est connue depuis les années 20.

La résolution du **problème standard** a progressé d'une manière très importante en 1988 avec l'algorithme de **Glover – Doyle** [8] , [9] , qui utilise la représentation d'état, et qui donne une solution très proche de la commande LQG. Puis une autre façon de résoudre le problème de la commande robuste dans le cadre H_∞ , a été développée par **Mc Farlane et Glover** [34] en 1990, qui ont utilisé la **factorisation coprime normalisée** (la factorisation coprime existait déjà, elle a été introduite pour la première fois par Vidyasagar), mais la nouveauté résidait dans le fait qu'elle soit particulière, car ils ont bien traduit le problème de commande robuste en facteurs coprimés normalisés. Ce qu'il y a de particulier dans cette méthode, c'est qu'elle utilise les concepts classiques de l'automatique traditionnelle dans la synthèse du contrôleur et ceci via la technique du Loop Shaping.

2.8 Objectifs de synthèse (la sensibilité mixte)

Nous avons vu dans le chapitre 1.7 les objectifs à atteindre pour avoir un bon rejet des perturbations, une admissibilité des commandes pour ne pas saturer les actionneurs ainsi qu'une bonne robustesse vis à vis des incertitudes et des dynamiques négligées (supposées situées en hautes fréquences).

Nous rappelons chacune de ces exigences ; il faut minimiser :

$$\sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \|e\|_2 = \|W_e S_s W_d\|_\infty \quad (\text{rejet des perturbations}) \quad (2.15)$$

$$\sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \|\tilde{u}\|_2 = \|W_u K S_s W_d\|_\infty \quad (\text{admissibilité des commandes}) \quad (2.16)$$

$$\|W_1 T_s W_2\|_\infty \quad (\text{la robustesse}) \quad (2.17)$$

Si on désire réaliser ces trois exigences à la fois, il faudra alors minimiser :

$$\left\| \begin{array}{c} W_e S_s W_d \\ W_u K S_s W_d \\ W_1 T W_2 \end{array} \right\|_\infty \quad (2.18)$$

C'est ce qu'on appelle communément **Le problème de sensibilité mixte**.

En effet, il est appelé problème de sensibilité car il fait intervenir les fonctions de sensibilité S, T pour des objectifs différents c'est à dire mixtes, et ceci va se faire en imposant des gabarits à $S_s, K S_s, T_s$ par un choix adéquat des pondérations $W_i, i = 1, 2, e, d, u$.

2.9 Le problème H_∞ standard

Considérons le schéma-bloc représenté sur la figure 2.10, le processus est un système comportant 2 ensembles d'entrées et 2 ensembles de sorties. Le vecteur ω représente toutes les entrées extérieures, tels que signaux de référence, perturbations, bruits de mesures. Le vecteur u représente les commandes. Les sorties z représentent les erreurs de régulation qu'on souhaite maintenir à 0. Enfin y représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

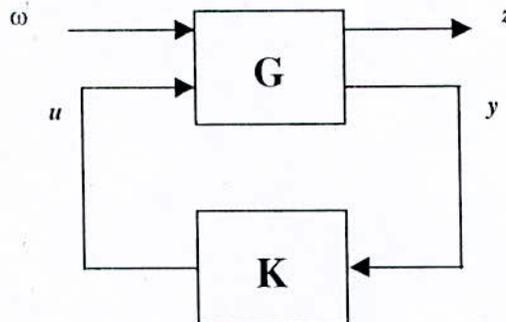


Figure 2.10 : Problème standard H_∞

Si on partitionne la matrice de transfert G de la manière suivante :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

La figure 2.10 traduit les choses suivantes :

$$z = G_{11} \omega + G_{12} u \quad (2.19)$$

$$y = G_{21} \omega + G_{22} u \quad (2.20)$$

$$u' = K y \quad (2.21)$$

En substituant (2.20) dans (2.21) puis (2.21) dans (2.19) nous obtenons le transfert entre ω et z :

$$z = \left[G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} G_{21} \right] \omega \quad (2.22)$$

Cette expression se présente sous la forme d'une LFT (linear fractional transformation) (pour plus de détails sur les LFT voir []) et donc :

$$e = T_{z\omega} \omega \quad (2.23)$$

Donc l'un des objectifs du correcteur sera de minimiser l'effet des signaux extérieurs sur les erreurs de régulation au sens H_∞ c'est ce qui nous mène à définir :

Le problème standard H_∞ : Trouver un contrôleur K réel rationnel et propre qui minimise la norme H_∞ de la matrice $T_{z\omega}$ sous la contrainte que K stabilise G .

En d'autres termes, étant donné, G et $\gamma > 0$, trouver K qui stabilise G et assure :

$$\|T_{z\omega}\|_\infty < \gamma$$

avec :

$$T_{z\omega} = G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} G_{21} .$$

2.10 Résolution du problème standard : Algorithme de Glover – Doyle

Considérons le schéma du problème standard sur la figure 2.10. G et K étant toutes deux propres réelles et rationnelles. K est supposé garantir la stabilité interne du feedback (voir 1.5). Nous nous intéresserons exclusivement aux contrôleurs qui soient stabilisables et détectables ; les contrôleurs qui vérifient les propriétés énoncées plus haut sont dits admissibles.

Suppositions sur G :

Supposons qu'il existe une représentation d'état correspondant au schéma standard 2.10

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \\ u \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

avec $\omega \in R^{m_1}$; $u \in R^{m_2}$; $z \in R^{p_1}$; $y \in R^{p_2}$; $x \in R^n$.

On définit la matrice Hamiltonienne $H = \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ avec P et Q symétriques. On note $X = Ric(H)$ la solution de l'équation de Riccati associée à la matrice Hamiltonienne H .

$$X A + A^T X - X P X + \dot{Q} = 0 \quad (2.25)$$

Où X est symétrique et on dit que X est stabilisante si les valeurs propres de $A - P X$ ont tous une partie réelle strictement négatives.

Pour résoudre le problème standard, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

- 1) (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable.
- 2) $\text{rang}(D_{12}) = \dim(u)$.
- 3) $\forall \omega \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$.
- 4) $\forall \omega \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + m_1$.

La vérification de ces hypothèses permet de s'assurer qu'on cherche à résoudre un problème bien posé ou bien défini (voir annexe) :

- L'hypothèse 1) est classique, elle garantit la stabilité interne du système bouclé.
- L'hypothèse 2) est une condition suffisante pour que le contrôleur soit propre ; en effet le fait d'avoir D_{12} de rang plein signifie que toutes les commandes interviennent dans la régulation.
- L'hypothèse 3) implique que G_{12} n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire pour garantir l'existence d'une solution de l'équation de Riccati (la réciproque n'est pas vraie n'est pas une représentation minimale).
- L'hypothèse 4) traduit les mêmes exigences que 3) mais avec G_{21} .

D'autres conditions supplémentaires :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0, \quad D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ D_{22} &= 0, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ces conditions ne sont pas nécessaires mais elles simplifient considérablement la résolution du problème standard et on rajoute qu'il est toujours possible de se ramener à une telle forme en faisant un changement de variables.

Les deux théorèmes suivants permettent de décrire toutes les solutions du problème standard.

Théorème 2.7 [8] : Le système décrit par (2.24) et vérifiant les hypothèses 1) – 4) avec les conditions (2.26) peut être stabilisé par un correcteur $K(s)$ assurant $\|T_{z\omega}\|_\infty < \gamma$ si et seulement si :

- 1) La matrice Hamiltonienne $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe une unique matrice $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$.
- 2) La matrice Hamiltonienne $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe une unique matrice $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$.

3) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$, où ρ désigne le rayon spectrale.

Théorème 2.8 [8] : Sous les conditions du théorème 2.7, l'ensemble de tous les correcteurs rationnels $K(s)$ stabilisant le système et satisfaisant $\|T_{z\omega}\|_\infty < \gamma$ est donné par :

$$K = F_l(K_a, \Phi) \tag{2.27.a}$$

Où F_l est une LFT, $\Phi(s)$ est une matrice de transfert $m_2 \times p_2$ propre et stable arbitrairement, vérifiant $\|\Phi\|_\infty < \gamma$, et $K_a(s)$ admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ u \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T & Z_\infty B_2 \\ -B_2^T X_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y \\ y_a \end{bmatrix} \tag{2.27.b}$$

avec

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2 \tag{2.27.c}$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \tag{2.27.d}$$

Les principales caractéristiques de ces solutions sont les suivantes :

- comme dans un problème LQG traditionnel, le correcteur est déduit de la résolution de deux équations algébriques de Riccati mais ici les solutions dépendent de γ choisis.
- les différents correcteurs sont choisis en fonction d'une matrice de transfert décrite via une LFT conformément au schéma de la figure 2.4.
- parmi tous ces correcteurs, on peut distinguer celui correspondant à $\Phi = 0$, appelé correcteur central $K_0(s)$ et défini par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T \\ -B_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

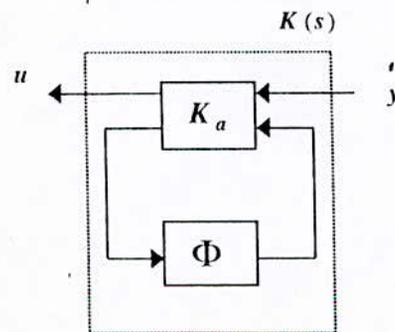


Figure 2.11 : Structure des correcteurs résolvant le problème standard

Ce correcteur a le même ordre que le système.

- La valeur optimale γ_{opt} de γ en dessous de laquelle l'une des trois conditions du théorème 2.7 n'est plus satisfaite, constitue la valeur minimale $\|T_{z\omega}\|_\infty$.
- En pratique, les équations de Riccati permettant le calcul de X_∞ et Y_∞ peuvent être mal conditionnées, notamment au voisinage de la valeur optimale γ_{opt} , ce qui introduit des difficultés numériques.

L'avant dernière remarque conduit à concevoir un algorithme permettant d'approcher par dichotomie la valeur optimale, et d'obtenir ainsi un correcteur proche du correcteur optimal du problème standard [9] :

La γ -itération :

- Choisir deux valeurs γ_{inf} et γ_{sup} et une tolérance η . γ_{inf} doit être tel que l'une des conditions du théorème 4.1 ne soit pas vérifiée, alors qu'elles doivent toutes l'être pour γ_{sup} .
- Tester les conditions pour $\gamma = \frac{\gamma_{inf} + \gamma_{sup}}{2}$. si elles sont vérifiées, poser $\gamma_{sup} = \gamma$, sinon poser $\gamma_{inf} = \gamma$.
- Si la différence entre les deux dernières valeurs de γ est supérieure à η , retourner en b).
- Calculer le correcteur central pour la dernière valeur de γ vérifiant les conditions.

2.11 Mise sous forme standard

Nous allons voir maintenant comment un problème de sensibilité mixte peut être ramené à un problème standard, en considérant le schéma-bloc de la figure 2.12, dans lequel le seul signal externe est la référence r . Le vecteur z a trois composantes : z_1 correspond aux signaux d'erreurs ε filtrés, qu'on souhaite maintenir à 0, z_2 , z_3 sont obtenus de même en filtrant les commandes u et les sorties y . Il est facile de vérifier que :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} r \quad (2.29)$$

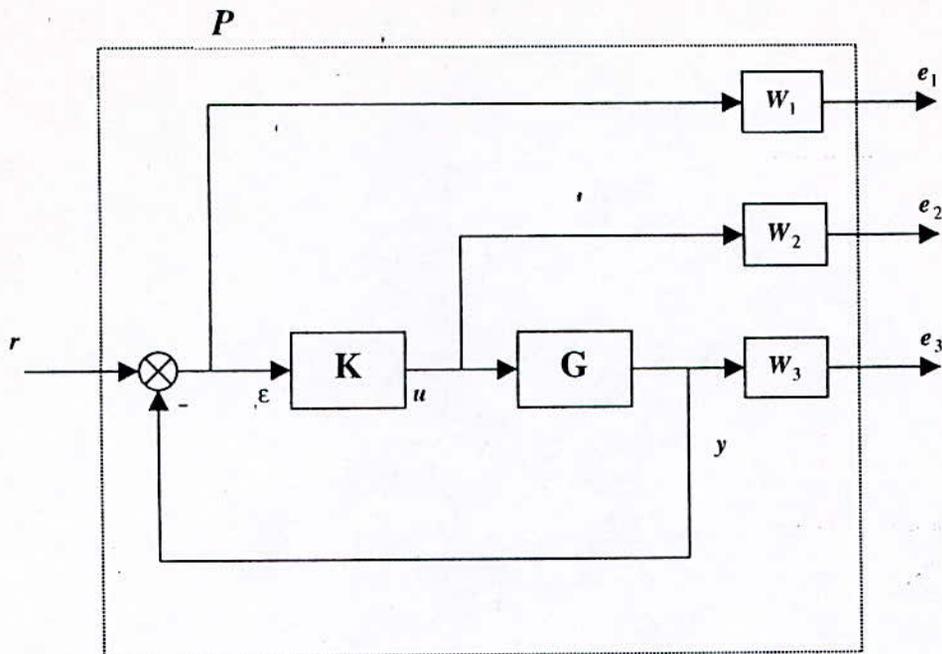


Figure 2.12 Mise sous forme standard du problème de sensibilité mixte

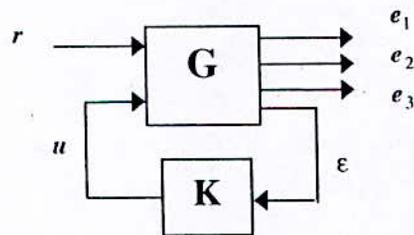


Figure 2.13 La forme standard

Il faut donc déterminer la matrice $P(s)$ du problème standard permettant d'obtenir l'identité

$$\begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \equiv T_{zr}$$

Pour cela il suffit d'écrire les signaux z_1, z_2, z_3 et l'entrée du correcteur ϵ en fonction de la référence r et de la commande u :

$$\begin{cases} z_1 = W_1 (r - G u) \\ z_2 = W_2 u \\ z_3 = W_3 G u \\ \epsilon = r - G u \end{cases} \quad (2.30)$$

on a donc :

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_1 & \vdots & -W_1 G \\ 0 & \vdots & W_2 \\ 0 & \vdots & W_3 G \\ \dots & \dots & \dots \\ I & \vdots & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

La résolution du problème standard conduit alors à :

$$\|T_{zr}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.32)$$

ce qui assurera simultanément $\|W_1 S\|_\infty < \gamma$, $\|W_2 K S\|_\infty < \gamma$, $\|W_3 T\|_\infty < \gamma$. On en déduit que si le problème standard admet une solution pour $\gamma < 1$, alors les gabarits spécifiés pour les fonctions de sensibilité sont respectés. Si par contre nous obtenons un $\gamma > 1$, alors il faudra multiplier les matrices de pondérations par $1/\gamma$.

Les principales caractéristiques de ce problème sont :

- Les fonctions de pondérations permettent de modéliser de façon fine 3 des matrices de transfert du système bouclé, en utilisant les notions classiques de gain, bande passante et précision.
- Seul le comportement du système vis-à-vis de la référence est considéré. Le comportement vis-à-vis d'une perturbation qui se situe en entrée n'est pas maîtrisé.
- Un des inconvénients de la dernière remarque, est que le correcteur déduit de ce problème compense par des zéros les pôles stables du système. Ce point peut être gênant dans le cas de pôles lents ou mal amortis, car alors ceux-ci réapparaissent comme pôles du transfert $S G$ entre l'entrée et la sortie du système et par conséquent toutes perturbations agissant en entrée provoquerait un régime transitoire catastrophique.

2.12 Synthèse par factorisation première

Nous nous apprêtons maintenant à étudier la dernière méthode de synthèse qui est basée sur la factorisation première normalisée, cette méthode a été introduite par Mc Farlane et Glover et elle a la réputation d'être facile à appliquer mais en plus, elle offre des solutions que d'autres méthodes sont incapables de réaliser, et enfin, elle donne des résultats beaucoup plus fiables.

Définition 2.3 : Soit $G(s)$ la matrice de transfert d'un système. La factorisation première à gauche normalisée (nlcf) de $G(s)$ est constituée de matrices de transfert $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$ propres et stables telles que :

$$\begin{cases} G(s) = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \\ \forall s \in jR \quad \tilde{M} \tilde{M}^* + \tilde{N} \tilde{N}^* = I \end{cases} \quad (2.33)$$

De même, la factorisation première à droite normalisée (nrdf) de $G(s)$ est constituée de matrices de transfert $M(s)$, $N(s)$ propres et stables telles que :

$$\begin{cases} G(s) = NM^{-1} \\ \forall s \in jR \quad M^*M + N^*N = I \end{cases} \quad (2.34)$$

Les matrices constituant ces deux factorisations peuvent être construites à partir d'une représentation d'état minimale de $G(s)$ ([9], [34]). Soit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. On a alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = C(sI - A + YC^T C)^{-1} [B \quad -YC^T] + [0 \quad I] \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -B^T X \end{bmatrix} (sI - A + BB^T X)^{-1} B + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

où X et Y sont des matrices définies positives solutions des équations de Riccati :

$$A^T X + X A - X B B^T X + C^T C = 0 \quad (2.37.a)$$

$$A Y + Y A^T - Y C^T C Y + B B^T = 0 \quad (2.37.b)$$

Proposition 2.9 [34] (Vidyasagar) : Les facteurs coprimés gauches normalisés \tilde{M} , \tilde{N} d'une matrice de transfert $G \in R$, existent et sont uniques pour une multiplication à gauche par une matrice unitaire.

Positionnement du problème :

Exprimons le modèle nominal du système à réguler à partir de ses facteurs coprimés à gauche, soit $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$.

Si nous revenons à ce qui a été fait au chapitre 2.4.3, où nous avons exposé le problème de la robustesse sur un système incertain décrit par une factorisation coprime, puis nous avons donné la condition de stabilité robuste. Rappelons maintenant les résultats acquis dans le chapitre 2.4.3.

Considérons la famille de systèmes incertains décrite par :

$$G_\Delta = \left\{ G \in \Pi ; G_\Delta = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N) ; \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_N & \tilde{\Delta}_M \end{bmatrix} \right\|_\infty < \varepsilon \right\} \quad (2.38)$$

On rappelle que cette forme de représentation des incertitudes à l'avantage d'englober des incertitudes ayant un nombre différent de pôles instables avec le système nominal, ce qui n'est pas le cas des incertitudes additives et multiplicatives.

Le problème de stabilité robuste correspondant à la figure 2.14, est de trouver la plus grande valeur de ε notée ε_{\max} tels que tous les modèles dans l'ensemble G_Δ puissent être stabilisés par le même correcteur K .

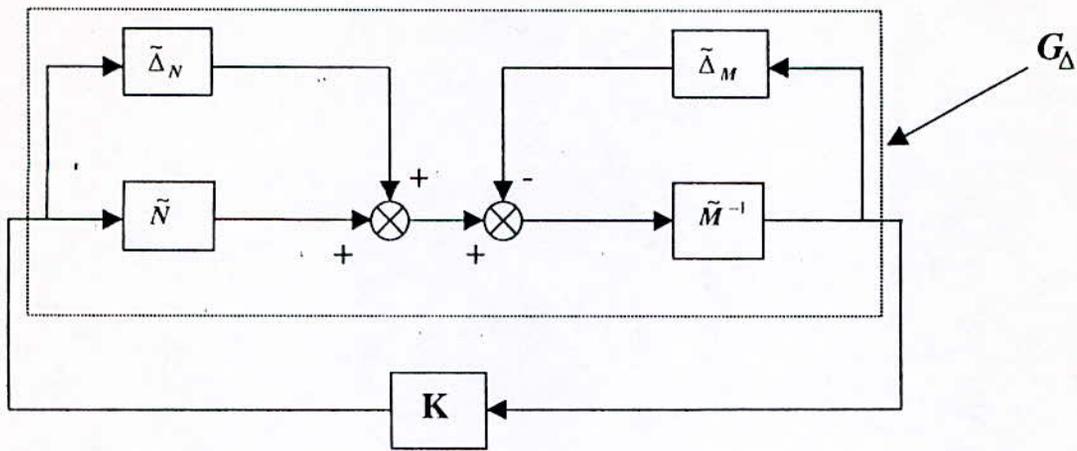


Figure 2.14 Stabilisation par facteurs coprimés

En utilisant les résultats du chapitre 2.4.3, on en déduit le problème de stabilité robuste :

Trouver $K(s)$ stabilisant $G(s)$ et tel que :

$$\gamma_{\min} = \epsilon_{\max}^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \tilde{M} \right\|_{\infty} \quad (2.39)$$

Les facteurs coprimés étant normalisés, donc vérifiant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}^* \\ \tilde{N}^* \end{bmatrix} = I \quad (2.40)$$

l'égalité (2.39) peut alors s'écrire :

$$\gamma_{\min} = \epsilon_{\max}^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \begin{bmatrix} I & G \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.41)$$

on reconnaît un problème H_∞ standard particulier, avec un critère 4 blocs mais sans fonctions de pondérations.

La solution du problème :

Ce problème peut bien sur être résolu par la méthode de Glover – Doyle et les γ - itérations. Cependant, Mc Farlane et Glover ont montré en utilisant le théorème d'extension de Nehari [41], [17] que la valeur minimale de γ est connue à l'avance :

$$\gamma_{\min} = \varepsilon_{\max}^{-1} = \sqrt{1 + \lambda_{\sup}(Y X)} \quad (2.42)$$

où λ_{\sup} désigne la plus grande valeur propre, et X, Y sont les solutions des équations 2.37.

De plus, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$, le correcteur central stabilisant tous les modèles dans G_Δ , est donné par :

$$\begin{aligned} K(s) &= B^T X (sI - A + BB^T X - \gamma^2 Z Y C^T C)^{-1} \gamma^2 Z Y C^T \\ Z &= (I + Y X - \gamma^2 I)^{-1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

On remarque la simplicité de cette solution, comparée à celle de Glover – Doyle. De plus, les équations de Riccati 2.37 sont en général beaucoup mieux conditionnées, et par conséquent, plus faciles à résoudre, que celles du théorème 2.7.

Comme aucune fonction de pondération ne peut être introduite dans le critère 2.41, le réglage des performances est obtenu en effectuant un modelage en boucle ouverte (**loop-shaping**) du processus, avant de calculer le correcteur.

L'algorithme est donc le suivant :

- i) ajouter à la matrice $G(s)$ du système à réguler un pré-compensateur $W_1(s)$ et / ou un post-compensateur $W_2(s)$ (figure 2.15.a), de sorte que les valeurs singulières du système augmenté $G_a(s) = W_2(s) G(s) W_1(s)$ présentent une forme satisfaisante : typiquement, on assurera du grand gain en basses fréquences (par exemple au moyen d'une action intégrale), du faible gain dans les hautes fréquences, et on choisira la fréquence de passage à 0 dB, qui correspond à peu près à la bande passante du système bouclé.
- ii) à partir des factorisations premières de $G_a(s)$, appliquer les résultats précédents pour calculer ε , puis un correcteur $K(s)$ assurant une valeur de ε légèrement inférieure à ε_{\max} :

$$\gamma = \varepsilon^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + W_2 G W_1 K)^{-1} [I \quad W_2 G W_1] \right\|_{\infty} \quad (2.44)$$

- iii) la structure de correction est obtenue en combinant le correcteur K et les filtres W_1, W_2 en adoptant en général le schéma d'implantation de la figure 2.15.b.

On notera que toute la connaissance issue de l'Automatique fréquentielle traditionnelle peut être utilisée lors de la phase i). Par ailleurs, la valeur de ε_{\max} obtenue à l'étape ii), constitue un indicateur de robustesse (puisque'elle définit la taille de l'ensemble G_Δ mais aussi de performance : en effet, le critère 2.41 contient quatre fonctions de transfert différentes du système bouclé, dont la norme H_∞ sera au plus, égale à ε^{-1} ; de plus, Mc Farlane et Glover

ont montré que l'écart entre les valeurs singulières de $(W_2 G W_1)K$ ou $K(W_2 G W_1)$ - boucle ouverte finale et celles de $W_2 G W_1$ - boucle ouverte choisie à l'étape i), est d'autant plus faible que ϵ est grand. En pratique, une valeur comprise entre 0.3 et 0.5 peut être considérée comme satisfaisante.

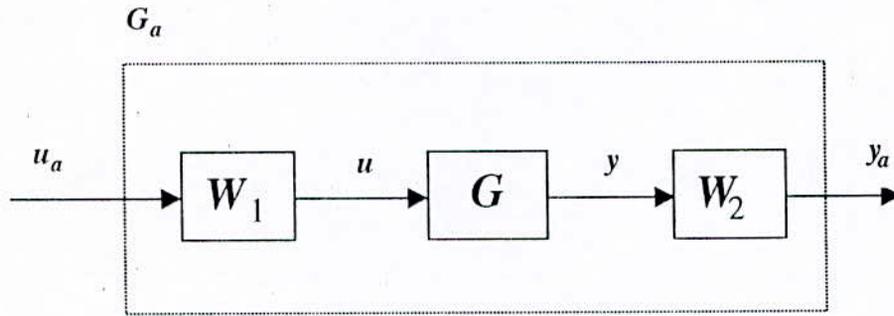


Figure 2.15.a. Modelage de la boucle

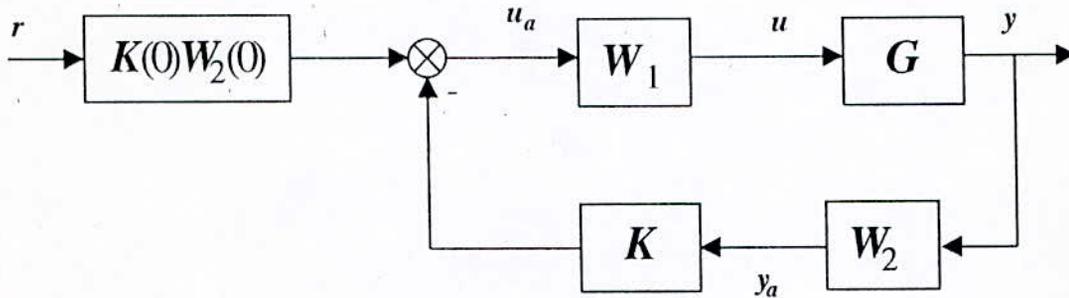


Figure 2.15.b Synthèse par H_∞ loop – shaping

Remarque 4.1 :

Cette méthode de loop – shaping a une justification mathématique qu'on peut trouver dans [41] , [19], ainsi que diverses applications, surtout dans le domaine de la navigation. Cependant, cette méthode peut parfois présenter certaines limitations, notamment lorsque le système est mal conditionné, c'est à dire qu'il y a une grande différence entre $\bar{\sigma}(G)$ et $\underline{\sigma}(G)$; à ce moment là, il n'est plus possible d'utiliser l'algorithme qu'on vient de décrire en haut, mais plutôt, il serait préférable d'utiliser l'algorithme de Freudenberg qu'on peut trouver dans [19].

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé la notion de robustesse pour des incertitudes non structurées avec des conditions de stabilité. Nous avons vu que les problèmes de stabilité robuste et performances nominales sont équivalents et pour commander un système, il est nécessaire de garantir la robustesse à priori. La commande H_∞ traduit les objectifs de synthèse d'une manière très intuitive et plus encore, elle permet de résoudre des problèmes plus généraux, grâce au problème standard. Enfin, nous avons vu que Mc Farlane et Glover ont bien posé le problème de stabilité robuste par facteurs coprimes normalisés, mais en plus, ils ont donné naissance à une technique de synthèse très efficace qui utilise le concept du Loop Shaping.

CHAPITRE 3

LA COMMANDE H_∞ DECENTRALISEE

INTRODUCTION

A travers ce nouveau chapitre, nous nous proposons de présenter la commande H_∞ décentralisée. Tout le monde reconnaît l'importance et l'utilité de la décentralisation dans le domaine industriel et notamment en robotique où elle est largement utilisée et cela est dû à sa grande fiabilité.

Cependant, concevoir une méthode de décentralisation n'est pas souvent facile à faire surtout lorsque le système est fortement couplé et ceci constitue parfois un véritable challenge. Plusieurs travaux ont été faits dans ce domaine avec diverses techniques de commandes comme l'adaptatif, le glissement ou la commande non linéaire d'une manière générale. Parmi ces travaux nous citons celui de Sérraji [37], Silljak [15], Chen et Han [4], Morrari et Zafiriou [35], et plus récemment Koshiba et al [27], Ikeda et al [20]. Mais à chaque fois, il y a des limitations ou des restrictions comme par exemple dans Morrari et Zafiriou où la décentralisation ne concerne que des systèmes stables et à phase minimale ce qui n'est pas toujours le cas, dans Sérraji où il a supposé que les interconnexions ayant une dynamique à peu près constante.

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle technique de décentralisation basée sur les incertitudes avec une synthèse H_∞ par facteurs coprimes normalisées pour atténuer les incertitudes imposées. L'application de notre méthode est assez facile et concerne même les systèmes instables et / ou à phase non minimale, mais en plus, elle transforme un problème de commande d'un système multivariable ($n \times n$) en synthèse de commande d'un seul système monovisible, car tous les systèmes de la diagonale étant tous les mêmes.

En premier lieu, nous poserons le problème de la décentralisation, ensuite, nous verrons la résolution de ce problème avec toutes les démonstrations, puis, nous verrons enfin comment appliquer un contrôleur décentralisé sur un système non linéaire par la technique du LMN (local model network).

3.1 Positionnement du problème

Soit un système linéaire multivariable représenté par sa matrice de transfert carrée :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où G_{ij} étant des fonctions de transfert propres, réelles, rationnelles, et ayant le même polynôme dénominateur.

Notre objectif est :

- 1) trouver une factorisation de la forme : $G(s) = P(s) \cdot G_D(s)$, où $P \in RH_\infty$ et telle que:

$$G_D(s) = g_d \cdot I \quad (3.2)$$

où g_d est une fonction de transfert propre, réelle, rationnelle et I est la matrice identité de dimension $(n \times n)$.

- 2) trouver un contrôleur diagonal de la forme :

$$K_D(s) = k_d \cdot I \quad (3.3)$$

qui stabilise le système $G_D(s)$ ainsi que le système $G(s)$.

avec k_d est une fonction de transfert propre, réelle rationnelle et I est la matrice identité de dimension $(n \times n)$.

3.2 Résolution du problème par la commande H_∞

Comme nous l'avons dit plus haut, notre première étape consiste à trouver un système diagonal $G_D(s) = g_d \cdot I$ où tous les éléments de la diagonale sont identiques ; pour cela, nous avons établi le théorème suivant.

Théorème 3.1 : Etant donné une matrice de transfert $G(s)$, alors la factorisation :

$$G(s) = P(s) \cdot G_D(s) \quad (3.4)$$

où $G_D(s)$ est une matrice de transfert diagonale, $P(s) \in RH_\infty$

est toujours possible.

Preuve : Proposons-nous de construire les matrices G_D^* , P qui vérifient (3.4).

$$G = P \cdot G_D \Rightarrow G_{ij} = P_{ij} \cdot g_d$$

Posons :

$$G_{ij} = \frac{\text{num}(G_{ij})}{\text{den}(G_{ij})} \text{ et soit } g_d = \frac{\text{num}(g_d)}{\text{den}(G_{ij})} \quad (3.5)$$

où :

$$d^\circ(\text{num}(G_{ij})) \leq d^\circ(\text{num}(g_d)) \leq d^\circ(\text{den}(G_{ij})) \quad (3.6)$$

et $\text{num}(g_d)$ est un polynôme d'Hurwitz.

alors :

$$P_{ij} = \frac{\text{num}(G_{ij})}{\text{num}(g_d)} \in RH_\infty \quad (3.7)$$

C.Q.F.D.

D'après la construction qui est faite dans le théorème 3.1, on constate les choses suivantes :

- les systèmes $G_D(s)$, $G(s)$ possèdent les mêmes modes.
- $G_D(s)$ est un système toujours à phase minimale.
- le but de cette factorisation est de décomposer le système en produit de deux systèmes ; le premier étant stable et le second ayant tous les modes du système original, mais en plus, il est diagonal avec le même élément sur toute la diagonale.

Exemple 3.1 : Soit le système multivariable suivant :

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} (s-3)(s-1) & (s+4) & (s+2) \\ (s-3) & (s-1)^2 & (s+3)^2(s+2)^2 \\ 2 & 1 & (s+5) \end{bmatrix}$$

On voit bien qu'il s'agit d'un système instable à phase non minimale.

$$\text{d'après (3.5) et (3.7)} \quad g_d = \frac{\text{num}(g_d)}{s^2(s+1)(s-2)}, \quad P_{ij} = \frac{\text{num}(G_{ij})}{\text{num}(g_d)}$$

$\text{num}(g_d)$ sera choisi de manière à vérifier (3.6) et que tous ses zéros appartiennent au demi-plan gauche ouvert et par conséquent, nous avons pris : $\text{num}(g_d) = (s+2)(s+3)(s+4)$.

$$G_D(s) = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{s^2(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} (s-3)(s-1) & (s+4) & (s+2) \\ (s-3) & (s-1)^2 & (s+3)^2(s+2)^2 \\ 2 & 1 & (s+5) \end{bmatrix}$$

il est facile de vérifier l'égalité (3.4).

Théorème 3.2 : Etant donné une matrice de transfert $G(s)$, $W \in RH_\infty$, $\|\Delta\|_\infty < 1$, G_D une matrice diagonale alors la factorisation $G = (I+W\Delta)G_D$ est toujours possible.

Preuve : D'après le théorème 3.1, on a $G = P G_D$, donc si on pose $\tilde{\Delta} = P - I \in RH_\infty$, nous aurons $G = (I + \tilde{\Delta}) G_D$ et on peut toujours trouver une matrice $W \in RH_\infty$ telle que $\tilde{\Delta} = W \Delta$ où $\|\Delta\|_\infty < 1$.

C.Q.F.D.

Corollaire 3.3 : Il existe un contrôleur H_∞ décentralisé qui stabilise G_D et G .

Preuve : Etant donné $\|\Delta\|_\infty < 1$, alors, d'après le théorème 2.4, si K_D stabilise G_D et si $\|WT\|_\infty \leq 1$, alors, K_D stabilise aussi G et comme G_D est diagonale alors, le contrôleur est décentralisé.

C.Q.F.D.

cette forme traduit le fait qu'on peut considérer Δ comme incertitude multiplicative donc, si on désire maintenant réaliser l'étape 2 de notre problème, il suffit donc de vérifier le théorème 2.4 :

K_D stabilise G_D et $\|WT\|_\infty \leq 1$ pour $\|\Delta\|_\infty < 1$ pour qu'on soit sûr qu'il puisse aussi stabiliser $G(s)$.

Cette solution peut se faire à l'aide de la sensibilité mixte sans problème, cependant, nous avons détourné ce problème et nous avons résolu un problème équivalent.

Théorème 3.4 : Il existe un contrôleur H_∞ par facteurs coprimés normalisés qui est décentralisé et qui stabilise à la fois G_D et G .

Preuve : Soit le modèle nominal G_D ; d'après la proposition 2.9 G_D admet une factorisation coprime normalisée à gauche ; $G_D = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$.

Il existe $\tilde{\Delta}_M, \tilde{\Delta}_N \in RH_\infty$ telles que :

$$G = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N) \quad (5.9)$$

En effet G admet aussi d'après la proposition 2.9 une factorisation coprime normalisée à gauche donc $G = \tilde{M}_G^{-1} \tilde{N}_G$ et par conséquent $\tilde{\Delta}_M = \tilde{M}_G - \tilde{M}$ et $\tilde{\Delta}_N = \tilde{N}_G - \tilde{N}$. C'est à dire que $\tilde{\Delta}_M, \tilde{\Delta}_N$ sont les complémentaires de \tilde{M}, \tilde{N} par rapport aux facteurs coprimés normalisés de G , en d'autres termes, ils représentent ce qu'il manque à G_D pour qu'il soit égal à G .

D'après la solution du problème de stabilisation robuste (voir chapitre 2.12) :

Si $\|[\tilde{\Delta}_M \quad \tilde{\Delta}_N]\|_\infty < \varepsilon$ alors :

Il existe un contrôleur K stabilisant G_D et toute la famille $G = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$ (qui englobe G) et vérifiant $\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + G_D K)^{-1} \tilde{M} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$. Cependant $\|[\tilde{\Delta}_M \quad \tilde{\Delta}_N]\|_\infty$ n'est pas toujours inférieur à 1.

Si $\|[\tilde{\Delta}_M \quad \tilde{\Delta}_N]\|_\infty > 1$:

Soit le système diagonal \hat{G}_D vérifiant :

$$\hat{G}_D = W \cdot G_D \quad (5.10)$$

avec W une matrice de gain diagonale, constante, arbitraire et vérifiant $W = \rho \cdot I$ où ρ est le gain constant différent de 1 et I est la matrice identité.

Toujours d'après la proposition 2.9 de Vidyasagar, \hat{G}_D admet lui aussi une décomposition en facteurs coprimes normalisés :

$$\hat{G}_D = \hat{M}^{-1} \hat{N} \quad (3.11)$$

$\exists U, V \in RH_\infty$ telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_D &= U \hat{M}_D \\ \tilde{N}_D &= V \hat{N}_D \end{aligned} \quad (3.12)$$

En injectant (3.12) dans (3.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} G &= (U \hat{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (V \hat{N} + \tilde{\Delta}_N) \\ &= (\hat{M} + U^{-1} \tilde{\Delta}_M)^{-1} U^{-1} V (\hat{N} + V^{-1} \tilde{\Delta}_N) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On définit :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_M &= U^{-1} \tilde{\Delta}_M \\ \hat{\Delta}_N &= V^{-1} \tilde{\Delta}_N \end{aligned} \quad (3.14)$$

et d'après (3.10) et (3.12) :

$$U^{-1} V = W^{-1} \quad (3.15)$$

En injectant (3.14) et (3.15) dans (3.13) et en utilisant le fait que la matrice W^{-1} est une matrice de gain proportionnelle à la matrice identité (par $1/\rho$) nous obtenons alors :

$$G = W^{-1} (\hat{M} + \hat{\Delta}_M)^{-1} (\hat{N} + \hat{\Delta}_N) \quad (3.16)$$

En choisissant W , on choisira aussi U, V et par conséquent d'après (3.14) on pourra toujours avoir :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\hat{\Delta}_M) &< 1/\sqrt{2} \\ \bar{\sigma}(\hat{\Delta}_N) &< 1/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

d'après les propriétés des valeurs singulières, il en découle de (3.17) que : $\|[\hat{\Delta}_M \quad \hat{\Delta}_N]\|_\infty < 1$, il en est de même si on voulait avoir $\|[\hat{\Delta}_M \quad \hat{\Delta}_N]\|_\infty < \varepsilon$.

Si nous considérons maintenant que \hat{G}_D est le système nominal et non pas G_D , avec comme incertitudes $\hat{\Delta}_M, \hat{\Delta}_N$ vérifiant $\|[\hat{\Delta}_M \quad \hat{\Delta}_N]\|_\infty < 1$ alors d'après le théorème de stabilité robuste par facteurs coprimes normalisés, il existe un contrôleur K qui stabilise \hat{G}_D et toute la

famille $G_\Delta = (\hat{M} + \hat{\Delta}_M)^{-1} (\hat{N} + \hat{\Delta}_N)$, et comme \hat{G}_D est diagonal alors $K = K_D$ l'est aussi et le contrôleur qui stabilisera G ne sera rien d'autre que $W K_D$.

C.Q.F.D.

Notre méthode de décentralisation nécessite certains commentaires :

- Etant donné un système linéaire défini par sa matrice de transfert, alors il est toujours possible de trouver un modèle diagonal vérifiant (3.16) où les incertitudes sont bornées et de norme infinie inférieure à 1, et par conséquent, il existe un contrôleur H_∞ décentralisé qui puisse commander le système original.
- A travers le théorème 3.3, nous avons contourné le problème de démontrer $\|W T\|_\infty \leq 1$ (qui peut être résolu par Glover – Doyle), en démontrant qu'il est toujours possible de commander un modèle diagonal et le modèle original, ce qui résout le problème posé.
- Concernant la matrice de gain W , on peut l'introduire à la sortie du contrôleur, mais si pour $W = 1$ le système ne se stabilise pas, il est préférable d'utiliser la commande à sensibilité mixte car, pour déterminer la matrice de gain W , il est nécessaire d'abord de factoriser G, G_D en facteurs coprimés normalisés puis ensuite, déterminer $\tilde{\Delta}_N, \tilde{\Delta}_M$ et enfin calculer $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_N), \bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_M)$ pour qu'on puisse déterminer W ce qui est très fastidieux.
- Il était toutefois possible de faire dès le départ $G = \tilde{M}_G^{-1} \tilde{N}_G = (M_d + \tilde{\Delta}_M)^{-1} (N_d + \tilde{\Delta}_N)$ c'est à dire qu'on décompose \tilde{M}_G, \tilde{N}_G en une partie diagonale M_d, N_d ajoutée au reste $\tilde{\Delta}_M, \tilde{\Delta}_N$, puis on constitue le modèle diagonal $M_d^{-1} N_d$ et on lui synthétise un régulateur diagonal, (M_d, N_d ne sont pas forcément normalisées), cependant, nous aurons à faire plusieurs synthèses (siso), mais par contre, si on décompose le système en utilisant la factorisation du théorème 3.3, nous aurons le même système (siso) sur la diagonale et par conséquent une seule synthèse (siso) est seulement nécessaire.

Résumé de la méthode :

- 1) Etant donné un système linéaire défini par sa matrice carrée G , on factorise $G = P G_D$ où $P \in RH_\infty$ et G_D est une matrice diagonale avec $G_{ij} = \frac{\text{num}(G_{ij})}{\text{den}(G_{ij})}$, $g_d = \frac{\text{num}(g_d)}{\text{den}(G_{ij})}$,
 $G_D = g_d \cdot I$, $d^\circ(\text{num}(G_{ij})) \leq d^\circ(\text{num}(g_d)) \leq d^\circ(\text{den}(G_{ij}))$ et
 $P_{ij} = \frac{\text{num}(G_{ij})}{\text{num}(g_d)} \in RH_\infty$.
- 2) Synthétiser un contrôleur H_∞ par facteurs coprimés normalisés k_d sur g_d .
- 3) Le contrôleur final décentralisé qui stabilise G sera $W K_D$ où $K_D = k_d I$ et $W = \rho I$ est une matrice de gain constante qu'on insère à la sortie de K_D et qu'on ajuste pour avoir la stabilité.

3.3 La commande H_∞ décentralisée sur systèmes non linéaires

Les systèmes physiques ont tous un modèle non linéaire (les systèmes physiques qui ont un modèle de connaissance linéaire n'est valable que pour une plage de fréquence en général BF) et si on désire commander des systèmes non linéaires par les méthodes linéaires qu'on a vus, il est nécessaire de disposer d'un modèle linéaire qui soit aussi proche que possible du modèle non linéaire pour qu'il le reflète correctement et un des moyens les plus faciles pour le faire, c'est de linéariser le système non linéaire autour d'un point d'équilibre.

3.3.1 La linéarisation :

Soit un système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.18)$$

Où $f : D \rightarrow R^n$ une fonction continûment différentiable d'un domaine $D \subset R^n$ vers R^n , et supposons que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre pour le système et qu'il appartient à D , et donc $f(0) = 0$.

D'après le théorème de la valeur moyenne [25] :

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{\xi} x \quad (3.19)$$

Où $\xi \in]0, x[$.

L'égalité (3.19) est valable pour tout $x \in D$ tel que le segment $[0, x] \subset D$ (ensemble convexe) et comme $f_i(0) = 0$, on peut donc écrire :

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{\xi} x = \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_0 x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{\xi} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_0 \right] x$$

donc :

$$f(x) = Ax + g(x) \quad (3.20)$$

Où $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0$ et

la fonction g_i vérifie :

$$\|g_i(x)\| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{\xi} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_0 \right\| \|x\|$$

par continuité de $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ on peut écrire que :

$$\frac{\|g_i(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ quand } \|x\| \rightarrow 0.$$

Ce résultat nous permet alors d'approximer le système non linéaire (3.18) par son modèle linéarisé au voisinage du point d'équilibre.

$$\dot{x} = A x \quad \text{où} \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 .$$

Le théorème suivant nous renseigne sur la stabilité du point d'équilibre du système non linéaire en examinant la stabilité du système linéarisé.

Théorème 3.4 [25] : Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système non linéaire $\dot{x} = f(x)$ où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continûment différentiable et D est un voisinage de l'origine.

Soit $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ alors :

- 1) Le point origine est asymptotiquement stable si $\text{Re } \lambda_i < 0$ pour toutes les valeurs propres de A .
- 2) Le point origine est instable si $\text{Re } \lambda_i > 0$ pour une ou plusieurs valeurs propres de A .

Remarque 3.1 : il suffit d'examiner les valeurs propres du système linéarisé c'est à dire de la matrice A , pour être au courant de la stabilité du système non linéaire, cependant, le cas où A admet une ou plusieurs valeurs propres sur l'axe imaginaire, à ce moment là, on ne peut rien dire concernant la stabilité du système non linéaire, car dans ce cas là uniquement, les termes négligés lors de la linéarisation ont une influence directe sur la stabilité (pour plus de détails consulter [38]).

Remarque 3.2 : nous avons traité le cas où $\dot{x} = f(x)$, toutefois, les propositions qui ont été faites demeurent inchangées pour un système commandé de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ où le point d'équilibre est une paire $(0, 0)$ ou plus généralement (x^*, u^*) vérifiant $f(x^*, u^*) = 0$, et le théorème 3.4 s'applique à ce moment là au système linéaire en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ u &= G x \end{aligned} \quad (3.21)$$

Où $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*}$ et $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}$.

On écrira alors (3.21) sous la forme :

$$\dot{x} = (A + B G) x \quad (3.22)$$

et par conséquent on appliquera le théorème 3.4 sur $A + B G$.

En réalité dans le système linéarisé (3.21) on devrait remplacer x, u par $\delta x, \delta u$ où :

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^* \\ \delta u &= u - u^* \end{aligned} ,$$

mais par simplicité, on gardera la forme (3.21).

Dans notre cas, nous travaillons avec H_∞ par retour de sortie et le schéma de commande est donc le suivant :

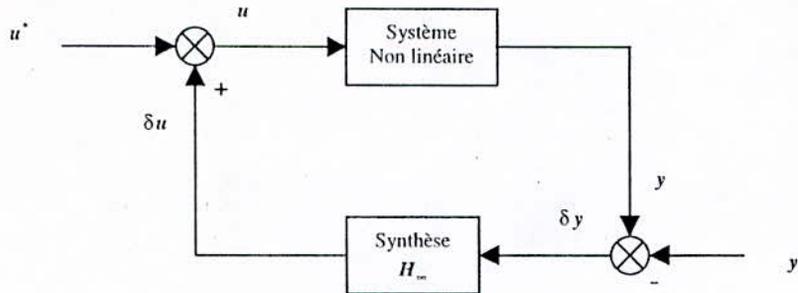


Figure 3.1 Schéma de commande d'un système non linéaire

3.3.2 Commande par réseau de modèles locaux :

Comme on vient de voir, le modèle linéaire n'est valable qu'au voisinage d'un point d'équilibre, mais en pratique il est intéressant de pouvoir commander le système sur une large plage de fonctionnement alors, pour essayer de satisfaire cette exigence, on linéarise le système non linéaire autour de plusieurs points d'équilibre (s'ils existent), on obtient ainsi plusieurs modèles linéaires, c'est alors qu'on synthétise pour chaque modèle son contrôleur linéaire. Enfin, pour pouvoir travailler sur toute la plage choisie, on commutera entre ces contrôleurs selon la valeur de la référence, c'est ce qu'on appelle commande par réseau de modèles locaux ou LMN (local model network). Nous ferons les commutations grâce à des pondérations qu'on attribuera aux contrôleurs selon la valeur de la référence c'est à dire qu'on donnera l'importance à un contrôleur plutôt qu'à un autre selon la référence voir figure 3.2.

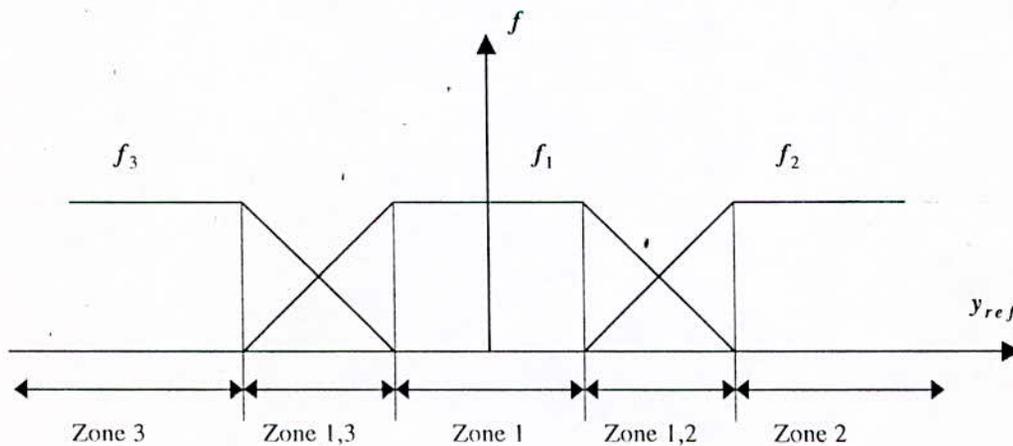


Figure 3.2 Schéma des pondérations de LMN

$$u = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3$$

Sur la zone 1 : le contrôleur K_1 est utilisé.

Sur la zone 2 : le contrôleur K_2 est utilisé.

Sur la zone 3 : le contrôleur K_3 est utilisé.

Sur la zone 1,2 : les contrôleurs K_1 , K_2 sont utilisés.

Sur la zone 1,3 : les contrôleurs K_1 , K_3 sont utilisés.

3.3.3 La commande H_∞ adaptative décentralisée :

Nous proposons une autre méthode pour commander un système non linéaire par un contrôleur linéaire décentralisé. Nous avons eu l'idée d'associer la commande H_∞ à la commande adaptative mais nous n'avons pas pu l'appliquer par manque de temps.

Le schéma de commande est le suivant :

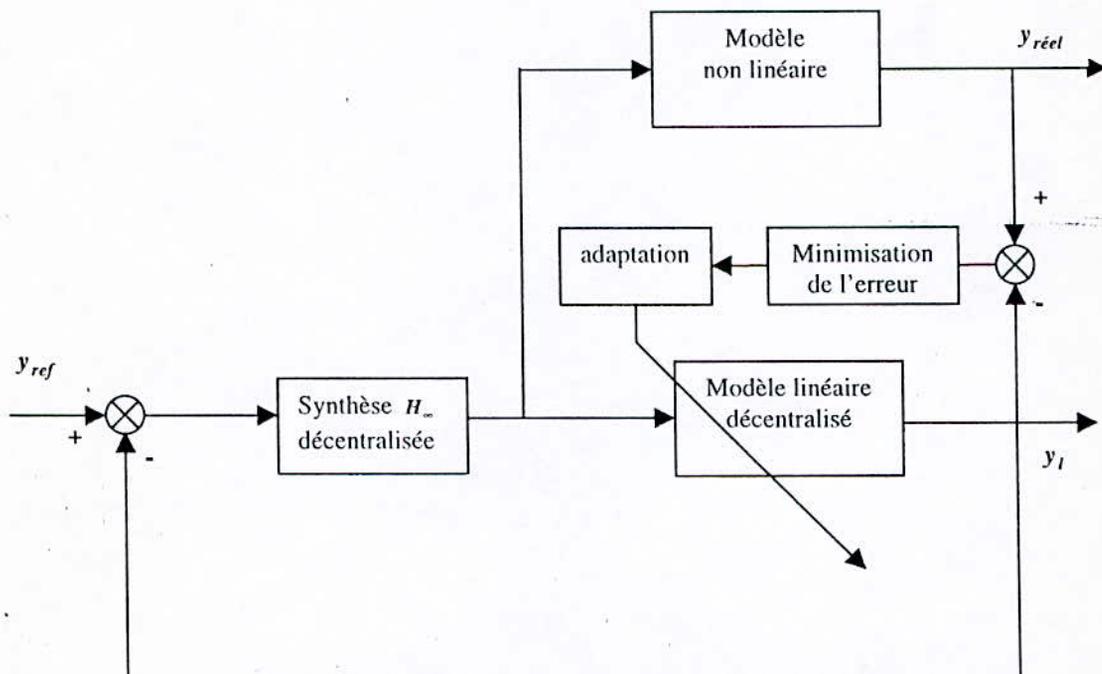


Figure 3.3 Schéma de la commande H_∞ adaptative

La méthode :

1. Choisir la structure du modèle linéaire.
2. Établir la loi d'adaptation paramétrique.
3. Initialiser les paramètres.
4. Choisir le pré – compensateur W pour faire la synthèse par H_∞ Loop – Shaping sur le modèle linéaire initialisé.
5. Appliquer le schéma de commande de la figure 3.3 pour chaque itération.

Comme on vient de voir, la méthode consiste à poser un modèle linéaire décentralisé, identifier ses paramètres à chaque itération en minimisant l'erreur (par exemple par moindres carrés) puis faire la synthèse par NCF (normalised coprime factors) pour chaque itération afin de l'appliquer au système.

Remarque 3.3 : pour le cas du robot Puma 560, les linéarisations ont montré que les fonctions de transfert ont la structure $G(s) = \frac{b_1 + b_2 s^2}{s^2 (a_1 + s^2)}$, ce qui pourrait être le modèle linéaire à identifier.

CONCLUSION

Nous avons vu que notre méthode de décentralisation est assez facile à appliquer, elle consiste en un choix pertinent d'une incertitude multiplicative grâce à la factorisation de théorème 3.1 pour qu'ensuite on effectue la synthèse décentralisée par H_∞ , mais en plus, la synthèse ne se fera que sur un seul système monovarié, car nous avons fait en sorte que la matrice de transfert du système nominal soit diagonale où tous les éléments de celles ci soient égaux, ce qui facilite considérablement le travail. La synthèse centralisée nécessite un choix des pondérations multivariées par essais – erreurs ce qui n'est pas facile à réaliser tandis qu'avec notre méthode le choix est beaucoup plus facile. Enfin pour commander un système non linéaire par le biais d'un contrôleur linéaire sur une large plage de fonctionnement, nous avons vu que la technique du réseau de modèles locaux s'applique aisément surtout en décentralisé. Enfin, nous avons proposé une méthode que nous n'avons pas pu appliquer par manque de temps, qui est la commande H_∞ adaptative décentralisée et qui consiste à poser un modèle linéaire décentralisé, identifier ses paramètres puis lui synthétiser une commande H_∞ afin de l'appliquer au système non linéaire, refaire tout ça à chaque itération.

CHAPITRE 4

APPLICATION
AU
ROBOT PUMA 560

INTRODUCTION

Après avoir : défini l'idée H_∞ , introduit les notions de base des systèmes linéaires, mettre en évidence les objectifs d'une commande à savoir : les performances, la robustesse et l'admissibilité ; tous cela dans un cadre H_∞ , mettre tous ces objectifs dans une problématique qui admet pour solution : soit la méthode de Glover – Doyle, sensibilité mixte ou H_∞ loop – shaping, proposer une méthode de décentralisation basée sur un choix pertinent des incertitudes, il est temps maintenant d'appliquer un certain nombre d'idées présentées sur un système physique qui est en l'occurrence le robot Puma 560.

Nous verrons en premier lieu la modélisation dynamique du robot, ensuite nous parlerons des trajectoires utilisées en robotique, puis afin de pouvoir travailler avec les méthodes linéaires qui ont été vues ; il est impératif de linéariser le modèle de Puma. Après cela, nous entamerons enfin la synthèse des commandes H_∞ décentralisées en présentant à chaque fois : comment synthétiser, justification des choix, présentation des simulations linéaires et non linéaires de chaque point d'équilibre accompagnées de quelques commentaires.

4.1 Modélisation

Depuis la nuit des temps, l'homme a toujours essayé de reproduire ses propres tâches en utilisant les outils qui étaient à sa disposition ; avec le développement de nouvelles techniques en électronique, et en informatique, il réussit à donner naissance à une nouvelle discipline, qui est la robotique.

Le mot robot vient du mot tchèque « **ROBOTA** », qui signifie ouvrier travailleur, on peut définir un robot comme étant un système mécanique, composé de corps mobiles reliés par des actionneurs, qui lui donnent des capacités de mouvement dans l'espace physique. Il est équipé de capteurs multiples ; les mesures obtenues permettent de construire des représentations de l'état du système, et de l'environnement dans lequel il évolue.

On s'intéresse dans ce paragraphe à la modélisation d'un bras manipulateur **PUMA 560**, en vue de le commander. Cette étape est très importante, elle fait appel à différentes techniques tel que le formalisme de EULER-LAGRANGE.

Avant d'entamer la modélisation du bras manipulateur, il est nécessaire de prendre en considération les hypothèses suivantes :

1. Les frottements sont linéaires par rapport à la vitesse et de nature visqueuse.
2. les différentes liaisons sont rigides.
3. Les actionneurs sont idéaux, i.e., la force généralisée est proportionnelle au signal de commande.

Les capteurs ont un gain unitaire, et sont de dynamique négligée.

La modélisation dynamique est l'aboutissement d'une combinaison entre les différentes lois qui régissent le mouvement du bras manipulateur, elle est établie en vue d'une simulation sur micro-ordinateur, avant l'implémentation de la commande sur le bras réel, et cela dans le but de synthétiser une commande qui satisfait les performances désirées.

Elle fait appel à différentes approches entre- autres, on citera celle de NEWTON-EULER ou celle de d'EULER-LAGRANGE ; cette dernière sera utilisée pour modéliser notre bras manipulateur.

4.1.1 FORMALISME D'EULER-LAGRANGE

L'approche d'EULER-LAGRANGE permet d'exprimer convenablement les équations générales du mouvement d'un bras manipulateur, celle-ci permet une meilleure manipulation des équations mises sous forme matricielle, afin de les programmer.

L'équation d'EULER-LAGRANGE est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = T_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

où L est le LAGRANGIEN qui s'exprime par :

$$L = E_c - E_p \quad (4.2)$$

E_c : énergie cinétique totale de toutes les liaisons.

E_p : énergie potentielle totale de toutes les liaisons.

E_D : énergie de dissipation en cas de présence de frottement visqueux.

T_i : force généralisée de la $i^{\text{ème}}$ articulation.

n : nombre de degrés de liberté.

q_i : coordonnée généralisée d'ordre i .

\dot{q}_i : dérivée de la coordonnée généralisée.

a) Energie cinétique

Le calcul de l'énergie cinétique demande une connaissance de la vitesse de chaque liaison ; ayant un point de la liaison i définie par ses coordonnées r_i^i dans le repère R_i , l'expression de la vitesse est :

$$V_0^i = \frac{d r_0^i}{d t} \quad (4.3)$$

$$r_0^i = T_0^i r_i^i \quad (4.4)$$

Comme la liaison n'est pas flexible, on a $\frac{d r_i^i}{d t} = 0$ donc :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \frac{d q_j}{d t} r_i^i \quad (4.5)$$

Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$V_0^i = \sum_{j=i}^i [U_{ij} \dot{q}_j] r_i^i \quad (4.6)$$

tel que

$$U_{ij} = \begin{cases} T_{j-1}^i Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j \geq i \end{cases} \quad (4.7)$$

avec :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

L'énergie cinétique de l'élément (i) de la liaison (i) est :

$$d E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace} (V_i V_i^T) d m \quad (4.9)$$

en développant l'expression précédente, on obtient alors :

$$d E_{C_i} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} (r_i^i r_i^i)^T dm \right) U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4.10)$$

l'énergie cinétique de la liaison (i) est :

$$E_{C_i} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} J_i U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (4.11)$$

avec :

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

L'énergie cinétique des actionneurs est donnée par :

$$E_{C_a} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 \quad (4.13)$$

où I_i caractérise un moment d'inertie.

L'énergie cinétique totale est décrite par :

$$E_{C_t} = \sum_{i=1}^n E_{C_i} + E_{C_a} \quad (4.14)$$

b) Energie potentielle :

Elle est exprimée par la relation suivante :

$$E_p = \sum_{i=1}^n -m_i g^T r_0^i = - \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (4.15)$$

avec

$$g^T = [0 \quad 0 \quad 9.81 \quad 1] \quad (4.16)$$

L'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{v_i} \dot{q}_i^2 \quad (4.17)$$

où f_{vi} est le coefficient de frottement visqueux. L'expression finale du LAGRANGIEN est :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{trace}(U_{ij} J_i U_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (4.18)$$

En appliquant la formule d'Euler-Lagrange à la fonction Lagrangienne donnée par la relation (1.32), on obtient la force (couple) généralisée :

$$T_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{trace}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \text{trace}(U_{jkl} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ij} + f_{vi} \dot{q}_i \quad (4.19)$$

avec :

$$U_{ijk} = \begin{cases} T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & k \leq j \leq i \\ T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & j \leq k \leq i \\ 0 & j < i < k \end{cases} \quad (4.20)$$

l'expression matricielle s'écrit sous la forme :

$$T = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_{m0} \quad (4.21)$$

avec :

- $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'inertie symétrique et définie positive.
- $N \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à l'accélération de coriolis et centrifuge.
- $G \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à la gravitation.
- $T_{m0} \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à l'effet de la charge.
- $T \in \mathbb{R}^n$: vecteur des forces généralisées.

4.1.2 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT PUMA 560 [33]

Le calcul du modèle dynamique explicite à été effectué à l'aide de l'approche présentée précédemment, ce manipulateur réalise trois mouvements rotationnels, le premier dans le plan horizontal, le second et le troisième suivant deux axes verticaux. Le modèle dynamique est le suivant :

$$T = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_{m0}$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ \dots & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ & I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_9 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2 I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2^2 + (2 I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (I_5 c_{23}) \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1^2 - (I_4 s_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_3^2 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1^3 + (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i) & s_i &= \sin(q_i) \\ c_{ij} &= \cos(q_i + q_j) & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3} + I_{xx1} + m_1 d_2^2 + I_{M1} \\ I_2 &= I_{yy3} - I_{xx3} + I_{yy1} - I_{xx1} + m_1 l_3^2 \\ I_3 &= I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2 + m_1 l_2^2 \\ I_4 &= m_3 l_2 l_3 + 2 m_1 l_2 l_3 \\ I_5 &= 0.5 m_3 l_3 d_2 + m_1 l_3 d_2 \\ I_6 &= 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2 + m_1 d_2 l_2 \\ I_7 &= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2 + I_{zz1} + m_1 (l_2^2 + l_3^2) + I_{M1} \\ I_8 &= I_{zz3} + I_{zz1} + m_1 l_3^2 \\ I_9 &= I_8 + I_{M3} \end{aligned} \tag{4.26}$$

La matrice ΔM représentant les effets de l'effecteur, est donnée par les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \Delta M_{11} &= I_{xx1} + m_1 d_2^2 + I_{M1} + (I_{yy1} - I_{xx1} + m_1 l_3^2) c_{23}^2 + m_1 l_2^2 c_2^2 + 2 m_1 l_2 l_3 c_2 c_{23} \\ \Delta M_{12} &= m_1 l_3 d_2 s_{23} + m_1 d_2 l_2 s_2 \\ \Delta M_{13} &= m_1 l_3 d_2 s_{23} \\ \Delta M_{22} &= I_{zz1} + m_1 (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2} + 2 m_1 l_2 l_3 c_3 \\ \Delta M_{23} &= I_{zz1} + m_1 l_3^2 + m_1 l_2 l_3 c_3 \\ \Delta M_{33} &= I_{zz1} + m_1 l_3^2 + I_{M3} \end{aligned} \tag{4.27}$$

I_{mi} moment d'inertie des différents moteurs.

$I_{xx1}, I_{yy1}, I_{zz1}$ moments d'inertie total par rapport aux principaux axes de l'effecteur.

Le vecteur des couples additifs T_{m0} représente l'effet de la charge, il est calculé par la matrice Jacobienne, cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur.

$$J_j(q) = \frac{\partial P}{\partial q_j} \tag{4.28}$$

avec :

$$P = [c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_2 \quad s_1(l_2 c_2 + l_2 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})]^T \quad (4.29)$$

et

$$J(q) = [J_1(q) \quad J_2(q) \quad J_3(q)] \quad (4.30)$$

on déduit donc la matrice Jacobienne :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 & -c_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -c_1(l_3 s_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 & -s_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -s_1(l_3 s_{23}) \\ 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_3 c_{23}) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Le couple dû à l'effet de la charge est :

$$T_{m0} = m_0 J^T(q) [J(q) \ddot{q} + j(q, \dot{q}) \dot{q} + g] \quad (4.32)$$

avec $g = [0 \quad 0 \quad 9.81]^T$

Les paramètres réels du bras de robot PUMA 560 [33]

a) masses des différentes liaisons :

$$\begin{array}{lll} m_2 = 17.40 \text{ kg} & m_3 = 5.04 \text{ kg} & m_4 = 0.82 \text{ kg} \\ m_5 = 0.35 \text{ kg} & m_6 = 0.09 \text{ kg} & m_t = m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg} \end{array}$$

b) paramètres géométriques :

$$d_2 = 149.09 \text{ mm} \quad l_2 = 431.8 \text{ mm} \quad l_3 = 433.07 \text{ mm}$$

c) paramètres d'inerties :

N° de la liaison	$I_{xxi} (kg m^2)$	$I_{yyi} (kg m^2)$	$I_{zzi} (kg m^2)$	$I_{mi} (kg m^2)$
1	-	$350 \cdot 10^{-3}$	-	1.14
2	$130 \cdot 10^{-3}$	$524 \cdot 10^{-3}$	$539 \cdot 10^{-3}$	4.71
3	$192 \cdot 10^{-3}$	$15.4 \cdot 10^{-3}$	$212 \cdot 10^{-3}$	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	-
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	-
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	-

Tableau 4.1 - Paramètres d'inertie pour le robot PUMA 560

4.1.3 RESULTATS DE SIMULATION

La figure (4.1) montre le comportement des différentes articulations du bras de robot soumises à aucune excitation, sans charge, elle met en évidence le caractère instable du robot.

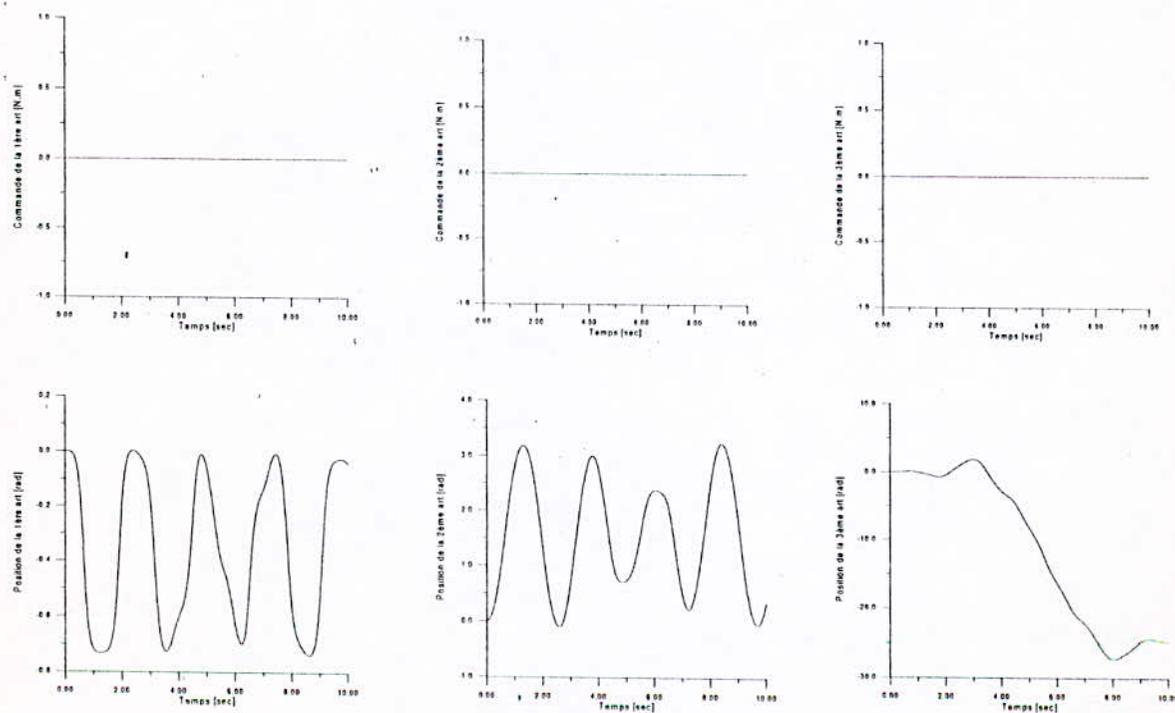


Figure 4.1

4.2 Génération des trajectoires

Le but de la commande d'un bras manipulateur est de déplacer l'outil terminal(charge), d'un point à un autre et cela en suivant une trajectoire donnée, cette dernière doit répondre aux exigences de continuité en position, vitesse et accélération, et cela à cause du comportement dynamique du bras manipulateur

Il existe deux trajectoires standard en robotique, la trajectoire polynomiale, et la trajectoire cycloïdale, toutefois nous avons choisi de travailler avec la trajectoire cycloïdale, car elle ne demande pas un effort énergétique important.

Nous présentons ici l'expression analytique de la trajectoire cycloïdale :

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t_F) + \frac{\Delta}{2 \cdot \pi} \cdot [\omega \cdot t - \sin(\omega \cdot t)] & t_0 \leq t \leq t_F \\ \theta(t_F) & t \geq t_F \end{cases} \quad (4.33)$$

avec : $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{t_F}$, $\Delta = \theta(t_F) - \theta(t_0)$.

4.3 La linéarisation

Soit le modèle dynamique du robot Puma :

$$T = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) \quad (4.34)$$

Le point d'équilibre :

Le point d'équilibre vérifie : $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$ donc :

$$T^* = G(q^*) \quad (4.35)$$

N'importe quel point d'équilibre du modèle (4.34) vérifie (4.35).

La linéarisation de (4.34) autour d'un point d'équilibre est donnée par :

$$\delta T_i = \sum_{j=1}^3 M_{ij}^* \delta \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right|_* \delta q_j \quad (4.36)$$

$$\delta T_i = T_i - T_i^*$$

avec : $\delta \ddot{q}_i = \ddot{q}_i$

$$\delta q_i = q_i - q_i^*$$

on peut aussi mettre (4.36) d'une manière plus condensée :

$$\delta T = M^* \delta \ddot{q} + \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_* \delta q \quad (4.37)$$

où $\frac{\partial G}{\partial q}$ est la matrice jacobienne.

$$\delta \ddot{q} = -M^{*-1} \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_* \delta q + M^{*-1} \delta T \quad (4.38)$$

M^{*-1} existe toujours car M est une matrice définie positive.

Remarque 4.1 : Si on examine le modèle non linéaire de Puma, on constate qu'il est indépendant de q_1 et par conséquent il en est de même pour le choix du point d'équilibre.

Si on pose :

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta q_1 \\ x_2 &= \dot{x}_1 \\ x_3 &= \delta q_2 \\ x_4 &= \dot{x}_3 \\ x_5 &= \delta q_3 \\ x_6 &= \dot{x}_5 \\ U &= \delta T \\ X_1 &= [x_1 \quad x_3 \quad x_5]^T \\ X_2 &= [x_2 \quad x_4 \quad x_6]^T \end{aligned}$$

(4.38) devient :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -M^{*-1} \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_* X_1 + M^{*-1} U \\ Y = X_1 \end{cases} \quad (4.39)$$

le système linéarisé est mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + B U \\ Y = C X \end{cases} \quad (4.40.a)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots \\ -M^{*-1} \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40.b)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ M^{*-1} \end{bmatrix}$$

$$C = [I \quad \vdots \quad 0]$$

$$X = [X_1^T \quad \vdots \quad X_2^T]^T$$

les équations (4.40) expriment le modèle linéarisé dans l'espace d'état, et le modèle qui lui correspond dans le domaine fréquentiel sera la matrice de transfert G entre U et Y :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.41)$$

Dans notre travail, nous avons choisi de commander le robot sur une large plage de fonctionnement, pour cela nous allons linéariser autour de 3 points d'équilibre :

$$O_1(q_1, 0, 0)$$

$$O_2(q_1, \pi/4, -\pi/4)$$

$$O_3(q_1, -\pi/4, \pi/4)$$

comme on l'a souligné dans la remarque 4.1, les points d'équilibre sont indépendants de q_1 .

Nous donnons directement les modèles linéarisés d'après 4.40 et 4.41.

Notation : $G^k = [G_{ij}^k]$ représente la matrice de transfert du point d'équilibre O_k , et toute matrice munie d'un indice supérieur A^k est relative à O_k .

$$G^1 = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 & G_{33}^1 \end{bmatrix}$$

avec : $G_{11}^1 = \frac{0.1858}{s^2}$, $G_{22}^1 = \frac{0.1381}{s^2}$, $G_{33}^1 = \frac{0.8936}{s^2}$, $G_{23}^1 = G_{32}^1 = \frac{-0.1248}{s^2}$,
 $G_{12}^1 = G_{13}^1 = G_{21}^1 = G_{31}^1 = 0$.

$$G^2 = \begin{bmatrix} G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{13}^2 \\ G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{23}^2 \\ G_{31}^2 & G_{32}^2 & G_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$G_{11}^2 = \frac{0.2427s^2 + 1.376}{s^2(s^2 + 5.758)}, \quad G_{12}^2 = \frac{-0.0231s^2}{s^2(s^2 + 5.758)}, \quad G_{13}^2 = \frac{0.0172s^2}{s^2(s^2 + 5.758)},$$

$$\text{avec : } G_{22}^2 = \frac{0.1417s^2}{s^2(s^2 + 5.758)}, \quad G_{33}^2 = \frac{0.8589s^2 + 4.496}{s^2(s^2 + 5.758)}, \quad G_{23}^2 = \frac{-0.1052s^2}{s^2(s^2 + 5.758)},$$

$$G_{21}^2 = G_{12}^2, \quad G_{31}^2 = G_{13}^2, \quad G_{32}^2 = G_{23}^2.$$

$$G^3 = \begin{bmatrix} G_{11}^3 & G_{12}^3 & G_{13}^3 \\ G_{21}^3 & G_{22}^3 & G_{23}^3 \\ G_{31}^3 & G_{32}^3 & G_{33}^3 \end{bmatrix}$$

$$G_{11}^3 = \frac{-0.2427s^2 + 1.397}{s^2(s^2 - 5.758)}, \quad G_{12}^3 = \frac{-0.1331}{s^2(s^2 - 5.758)}, \quad G_{22}^3 = \frac{-0.1417s^2}{s^2(s^2 - 5.758)},$$

$$\text{avec : } G_{32}^3 = \frac{0.6056}{s^2(s^2 - 5.758)}, \quad G_{33}^3 = \frac{-0.8589s^2 + 4.946}{s^2(s^2 - 5.758)},$$

$$G_{21}^3 = G_{32}^3 = G_{13}^3 = G_{31}^3 = 0.$$

Nous disposons maintenant de 3 matrices de transfert : G^1, G^2, G^3 relatives aux 3 points d'équilibre : $O_1(q_1, 0, 0)$, $O_2(q_1, \pi/4, -\pi/4)$, $O_3(q_1, -\pi/4, \pi/4)$.

4.4 Synthèse des commandes H_∞ décentralisées

Modèle O_1 :

Nous disposons d'une matrice de transfert 3×3 instable pour synthétiser les commandes :

Etape 1 : Décentraliser :

La décentralisation passe par la factorisation de G^1 décrite par le théorème 3.1 : il existe une matrice $P^1 \in RH_\infty$ ainsi qu'une matrice diagonale $G_D^1 = g_d^1 I$ telles que :

$$G^1 = P^1 G_D$$

$$\text{avec : } g_d^1 = \frac{1}{s^2} \quad \text{et} \quad P_{ij}^1 = \frac{\text{num}(G_{ij}^1)}{\text{num}(g_d^1)}; \quad P = \begin{bmatrix} 0.1858 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1381 & -0.1248 \\ 0 & -0.1248 & 0.8936 \end{bmatrix}.$$

la synthèse se fera donc sur $g_d^1 = \frac{1}{s^2}$ uniquement.

Etape 2 synthétiser le contrôleur :

En utilisant le théorème 3.4 qui nous assure l'existence d'un contrôleur H_∞ décentralisé et la méthode de Mc Farlane et Glover comme technique de synthèse.

$g_d^1 = \frac{1}{s^2}$, il s'agit d'un double intégrateur ce qui nous assurera un grand gain en basses fréquences donc un bon rejet des perturbations, et l'insertion d'un filtre passe bas comme un pré - compensateur assurera une bonne robustesse mais pour qu'il y ait un bon compromis, il est nécessaire de faire quelques réglages sur les paramètres du filtre, pour notre cas, après plusieurs essais nous avons retenu : $W_1 = \frac{400(s+2)}{s+20}$.

Les réponses fréquentielles :

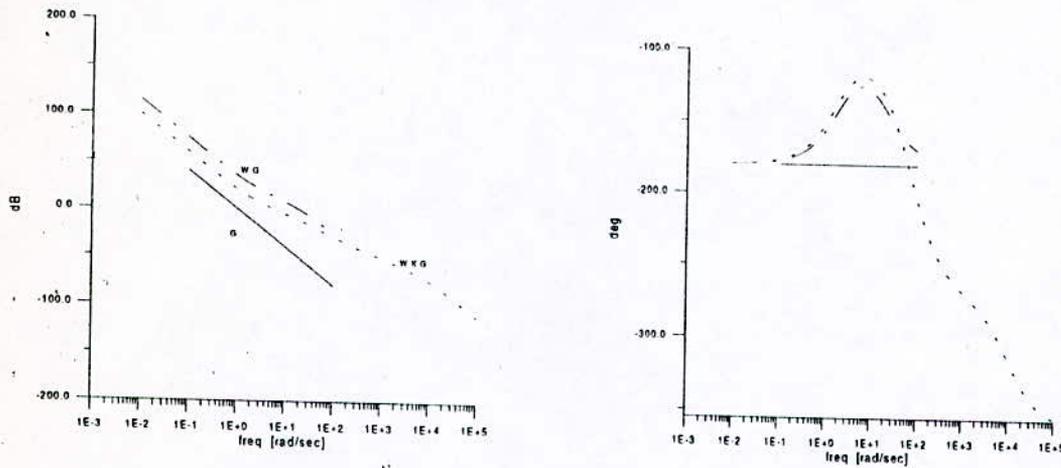
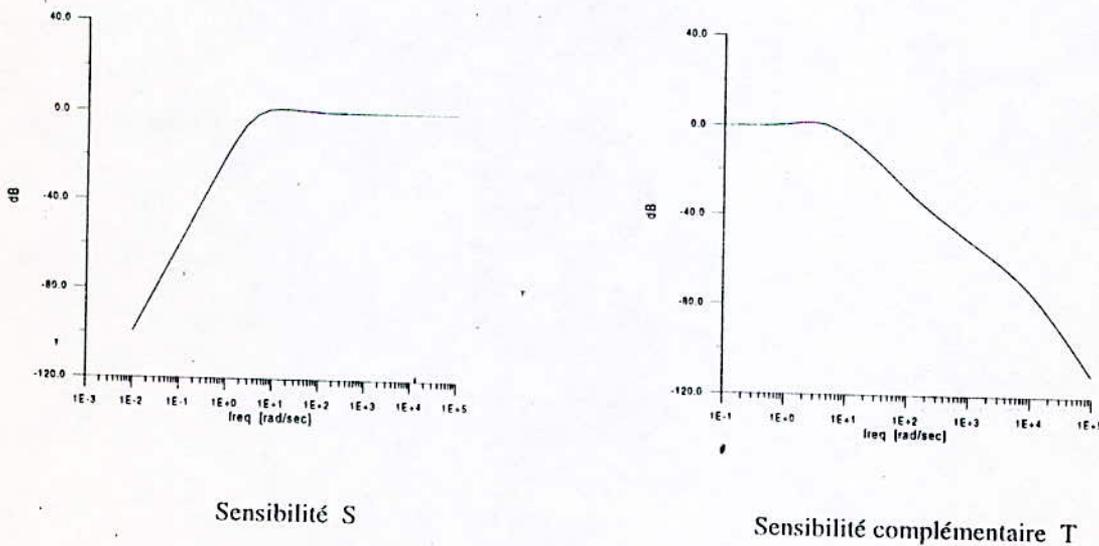


Figure 4.2



Sensibilité S

Sensibilité complémentaire T

Figure 4.3

On remarque que l'insertion du pré - compensateur a permis au système d'améliorer ses marges de gains et de phase, quant au système avec le contrôleur H_∞ , on vient bien que son module se situe entre le module du système nominal et celui du système pré - compensé en basses fréquences BF et il est au-dessus de tous en hautes fréquences HF, ce qui signifie que le système avec contrôleur H_∞ a opté pour un rejet des perturbations moindre que celle prévue par le pré - compensateur et une robustesse plus prononcée et ceci se confirme en examinant l'indice de robustesse (mais aussi de performance) $\epsilon = 0.5166$, qui est au-dessus de 0.5.

On remarque aussi que les amplitudes des fonctions de sensibilité S et sensibilité complémentaires sont assez proche des représentations idéales, ce qui implique un bon rejet des perturbations en basses fréquences et une bonne robustesse en haute fréquence ainsi donc une bonne robustesse face aux incertitudes multiplicatives.

Simulation linéaire :

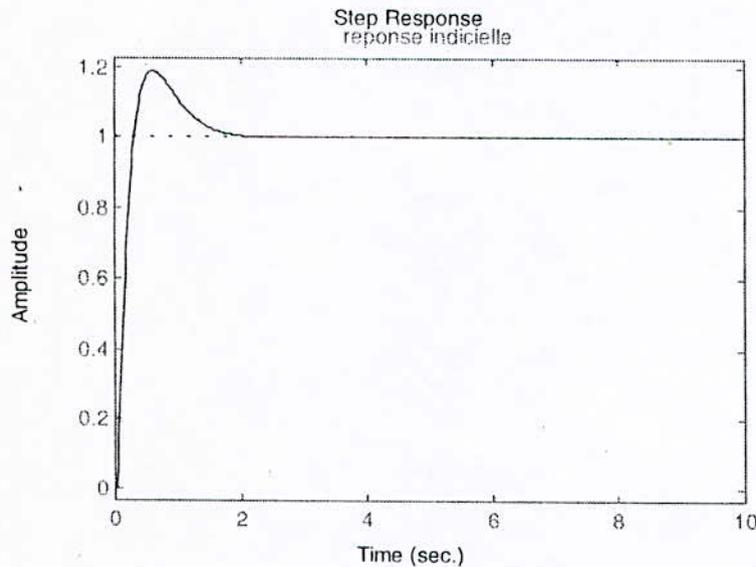


Figure 4.4

La réponse indicielle montre que le système est stabilisé rapidement, mais il y a un pic en transitoire (résultat prévu) car le contrôleur a réduit les performances pour avoir plus de robustesse, et rappelons qu'il est difficile d'avoir une meilleure synthèse car le système est un double intégrateur et il possède une paire de pole sur l'axe imaginaire et dans ce cas, les performances sont touchées.

L'expression du contrôleur dans l'espace d'état :

$$ak_1 = \begin{bmatrix} -52.0313 & 8.5544 \\ 8.3565 & -3.4268 \end{bmatrix}, \quad bk_1 = \begin{bmatrix} -7.2337 \\ 0.7776 \end{bmatrix}, \quad ck_1 = [-7.064 \quad 0.7773], \quad dk_1 = -1.6573.$$

Etape 3 application au système non linéaire :

Après avoir déterminé le contrôleur décentralisé de G_D^1 , il faut à présent l'appliquer sur le système non linéaire suivant le schéma mais en plus d'après le théorème 3.4, il faut insérer une matrice de gain qu'on ajustera par essais.

Il faut signaler une chose, c'est que la structure du contrôleur n'est pas exactement que celle donnée dans la méthode de Glover – Mc Farlane car nous n'avons pris que le correcteur H_∞ et nous avons remplacé les filtres par des gains, on notera enfin que cette procédure sera appliquée sur les autres cas.

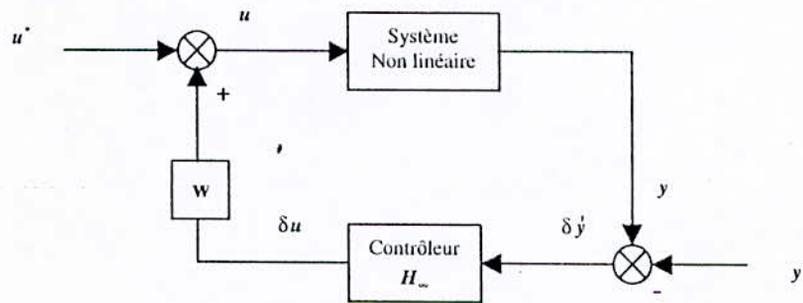


Figure 4.5 Schéma de commande décentralisée sur système non linéaire

Ce schéma sera réutilisé aussi pour les deux autres cas.

Simulations non linéaires :

Nous avons effectué des simulations non linéaires en choisissant comme référence une trajectoire cycloïdale pour chaque articulation :

$$\begin{cases} q_d^i(0) + \frac{D_i}{2\pi} \left[2\pi \frac{t}{t_f} - \sin\left(2\pi \frac{t}{t_f}\right) \right] & \text{pour } 0 \leq t \leq t_f \\ q_d^i(t_f) & \text{pour } t_f < t_f \end{cases}$$

où : $D_i = q_d^i(t_f) - q_d^i(0)$, t_f est le temps d'arrivée.

pour un t_f donné, nous avons un certain effort de commande.

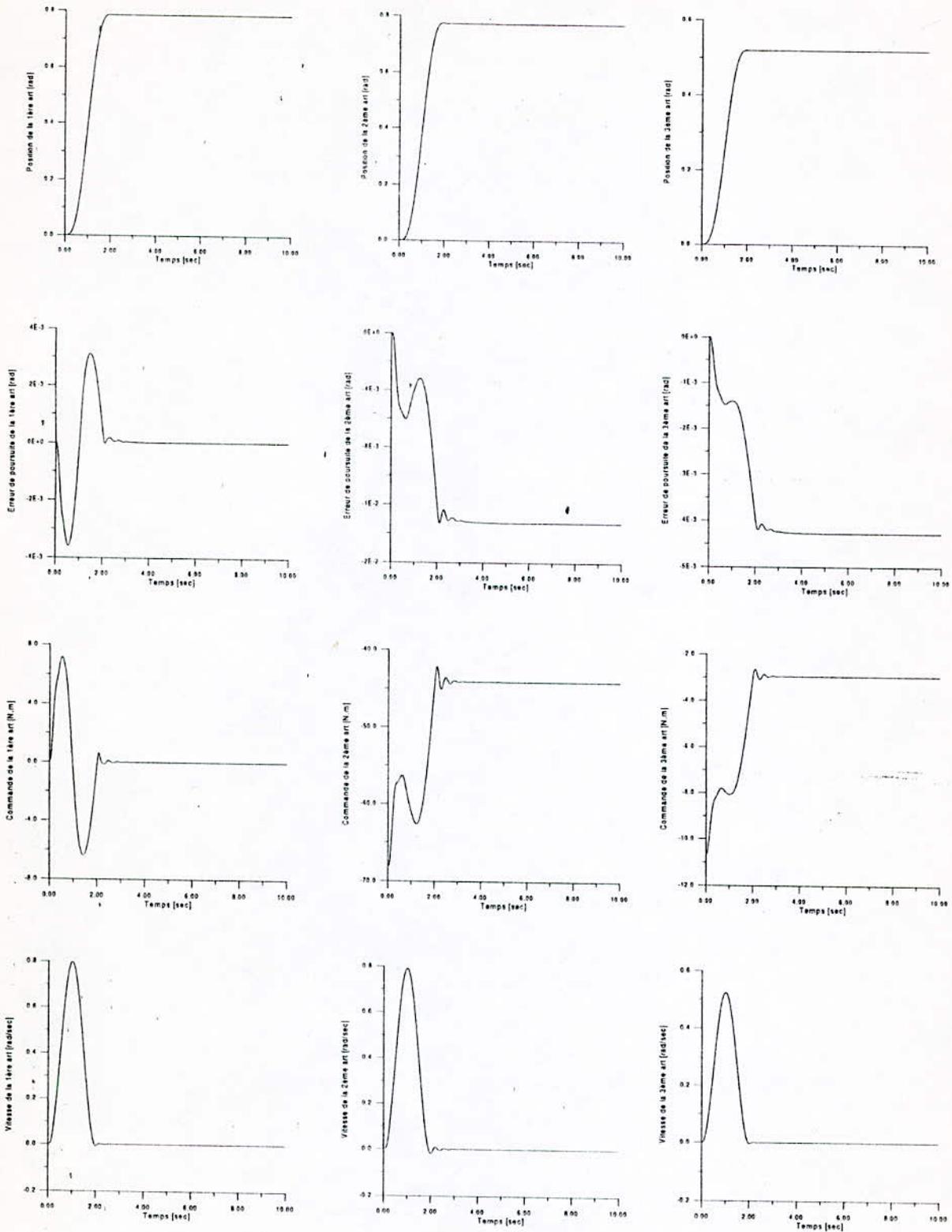


Figure 4.6

Test de rupture 1, $u_2 = 0 ; u_3 = 0 :$

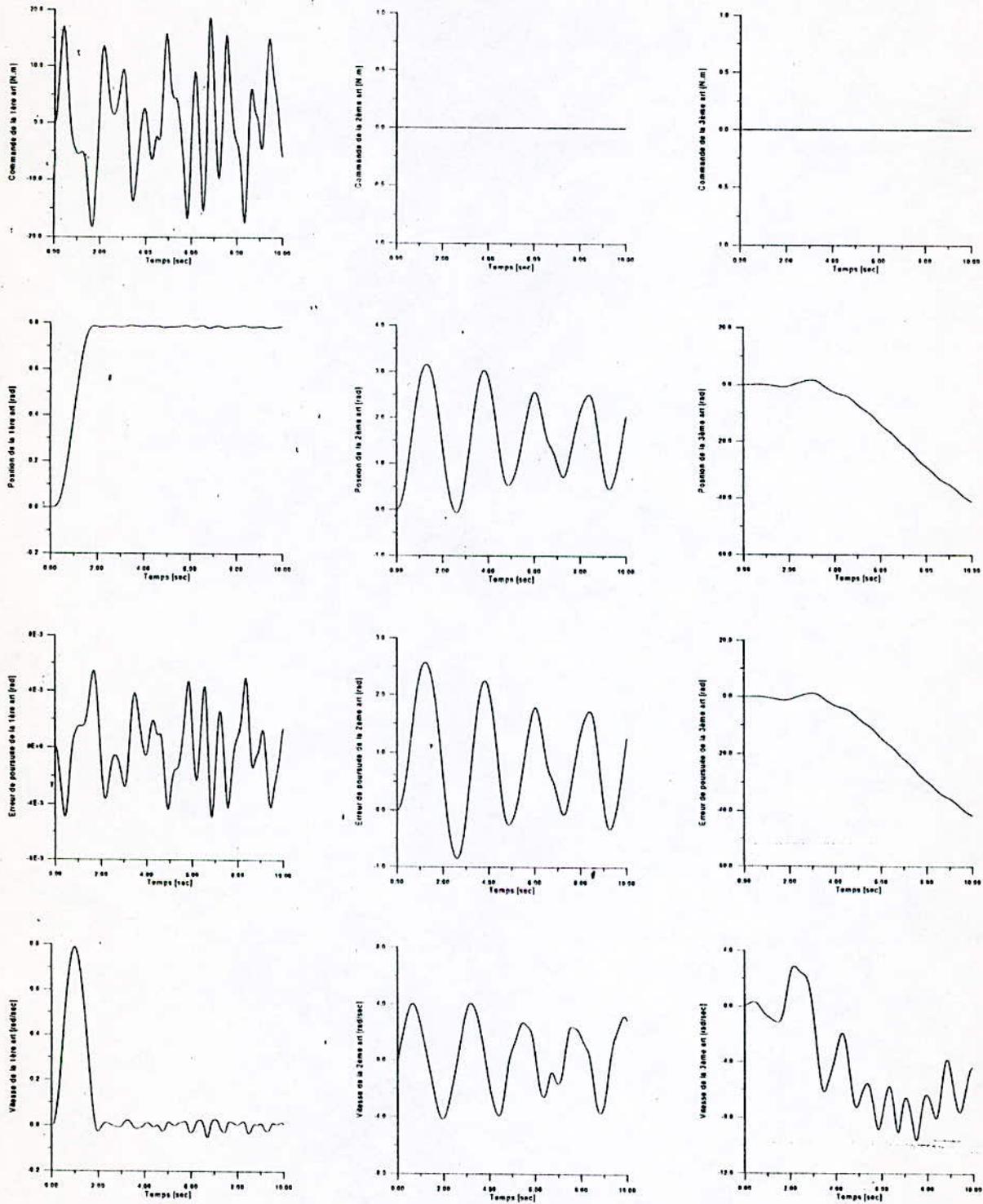


Figure 4.7.a

Test de rupture 2, $u_1 = 0$; $u_3 = 0$:

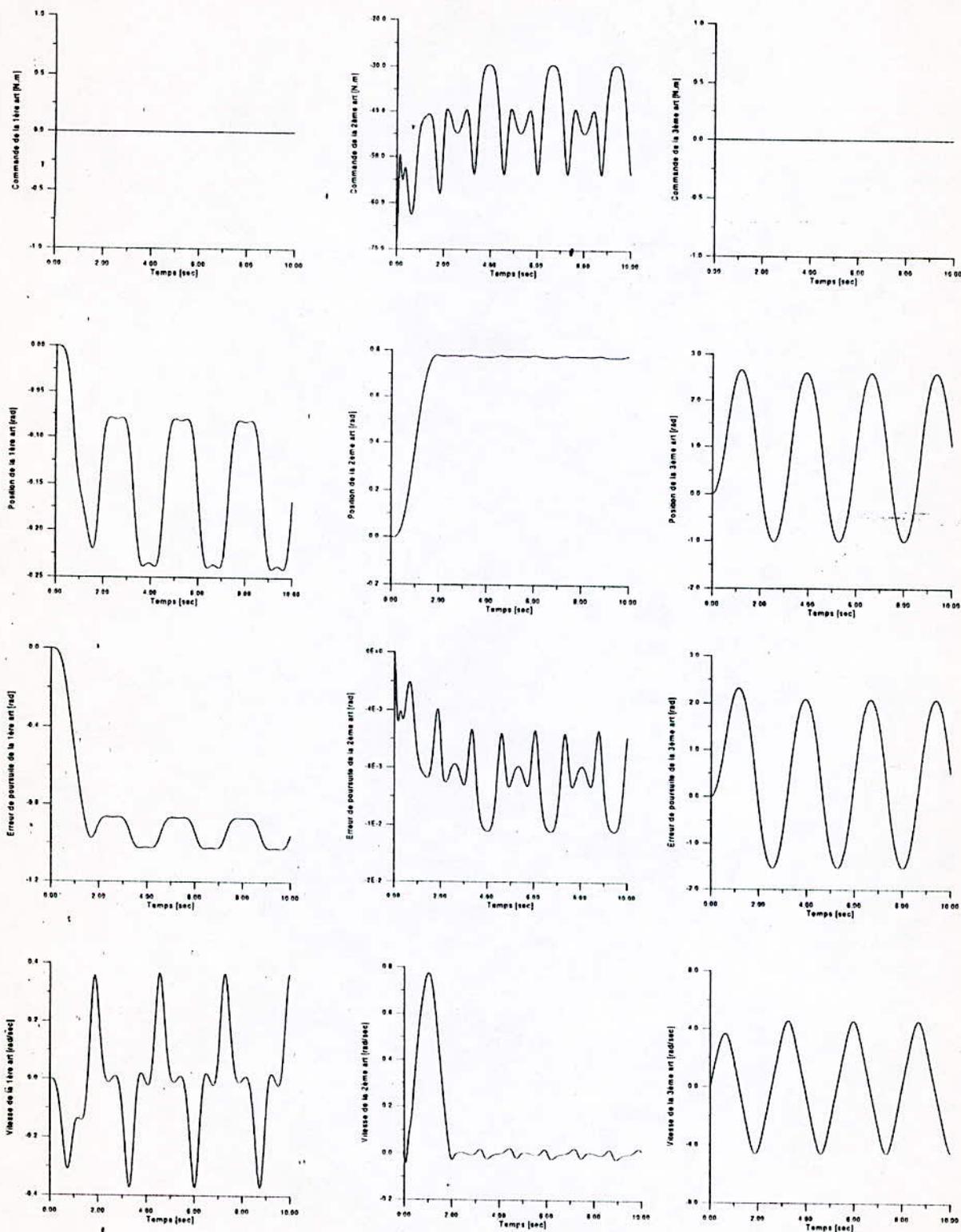


Figure 4.7.b

Test de rupture 3, $u_1 = 0; u_2 = 0 :$

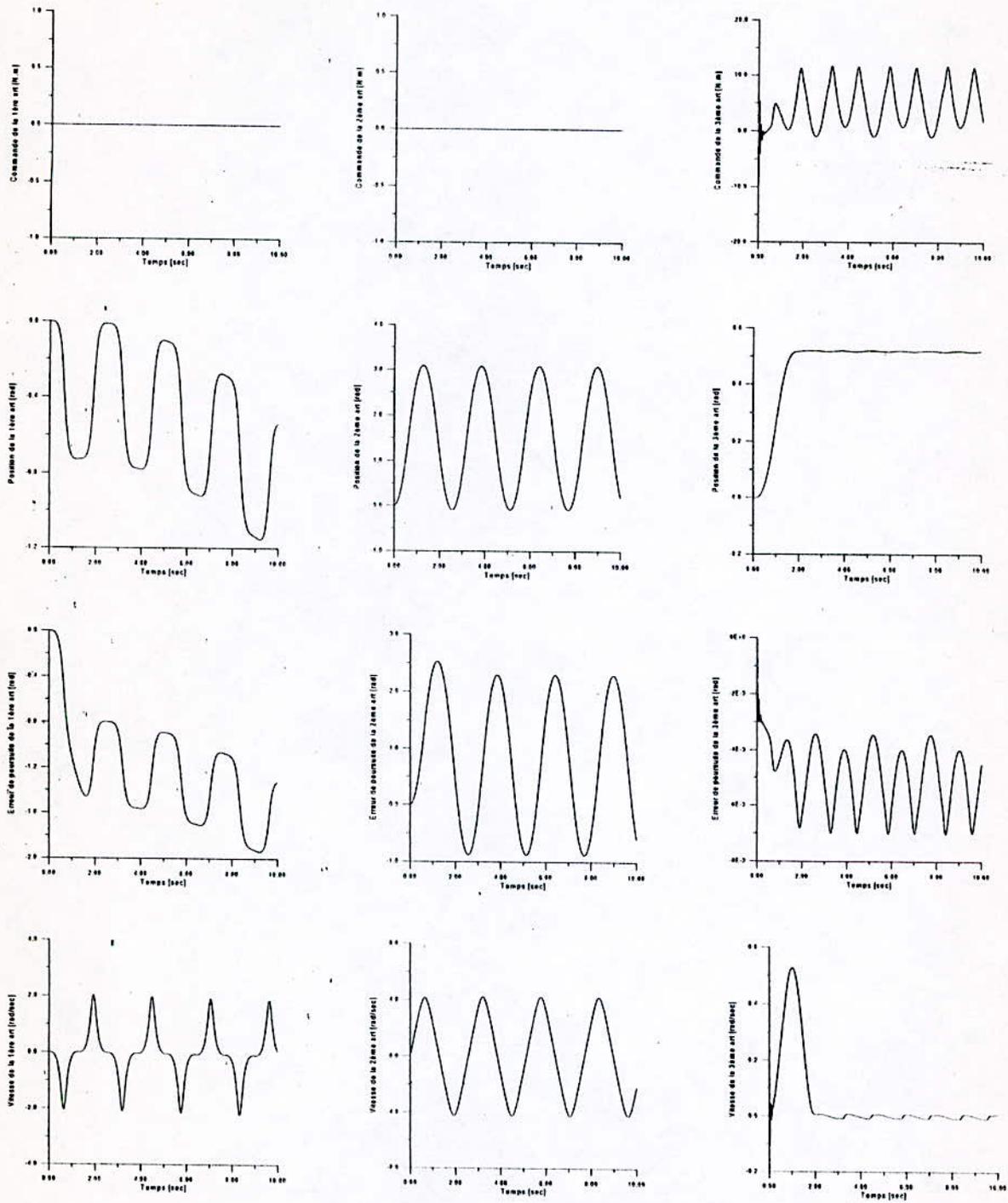


Figure 4.7.c

Les simulations non linéaires de la figure 4.6 ont montrées que nous avons :

- Un bon suivi de trajectoires
- Des réponses rapides
- Des commandes admissibles
- Une erreur statique constante de l'ordre de 10^{-3} , qui peut être réduite.

Les tests de ruptures de la figure 4.7 sur chaque commande ont montrées qu'il y a dégradation des performances ainsi que de la stabilité due au fait que le robot Puma 560 soit fortement couplé ; nous avons certes appliqués des commandes décentralisées mais le couplage existe réellement dans le comportement dynamique du robot et par conséquent il est impossible de le faire disparaître, mais malgré cela nous pouvons dire que les commandes décentralisées que nous avons synthétisées répondent plutôt bien aux tests de ruptures comparées à d'autres commandes décentralisées comme dans [] où les réponses sont quasiment oscillatoires.

Modèle O_2 :

Nous disposons d'un modèle instable à phase non minimale.

Etape 1 : Décentraliser :

La décentralisation nécessite l'utilisation du théorème 3.1 : il existe une matrice $P^2 \in RH_\infty$ ainsi qu'une matrice diagonale $G_d^2 = g_d^2 I$ telles que :

$$G^2 = P^2 G_d^2$$

$$\text{avec : } g_d^2 = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 (s^2 + 5.758)}$$

$$P_{ij}^2 = \frac{\text{num}(G_{ij}^2)}{\text{num}(g_d^2)} ; P_{11}^2 = \frac{0.2427s^2 + 1.376}{s^2 + 7s + 12} ; P_{12}^2 = \frac{-0.0231s^2}{s^2 + 7s + 12}$$

$$P_{13}^2 = \frac{0.0172s^2}{s^2 + 7s + 12} ; P_{21}^2 = P_{12}^2 ; P_{22}^2 = \frac{0.1417s^2}{s^2 + 7s + 12} ; P_{23}^2 = \frac{-0.1052s^2}{s^2 + 7s + 12} ;$$

$$P_{31}^2 = P_{13}^2 ; P_{32}^2 = P_{23}^2 ; P_{33}^2 = \frac{0.8589s^2 + 4.496}{s^2 + 7s + 12}$$

la synthèse se fera donc sur $g_d^2 = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 (s^2 + 5.758)}$ uniquement.

Etape 2 synthétiser le contrôleur :

On utilise le théorème 3.4 qui nous assure l'existence d'un contrôleur H_∞ décentralisé et la méthode de Mc Farlane et Glover comme technique de synthèse.

$g_d^2 = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 (s^2 + 5.758)}$ comporte un double intégrateur ce qui nous garantira un grand gain en

basses fréquences donc un bon rejet des perturbations, et l'insertion d'un filtre passe bas comme pré - compensateur garantira une bonne robustesse, mais pour qu'il y ait un bon

compromis il est nécessaire de faire quelques réglages sur les paramètres du filtre, pour ce cas, après plusieurs essais nous avons retenus : $W_2 = \frac{160(0.5s+1)}{(0.009s+1)}$.

Les réponses fréquentielles :

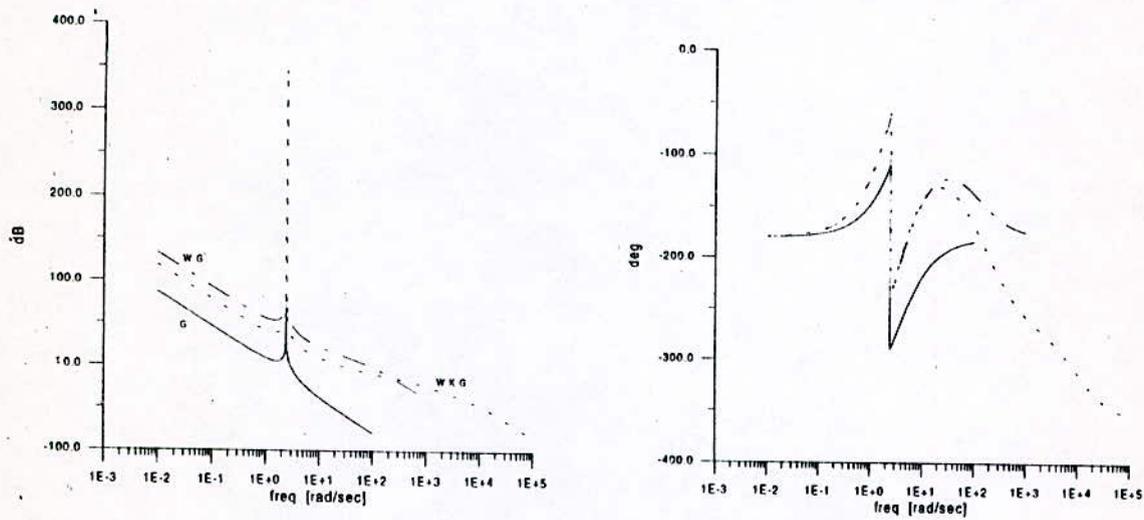
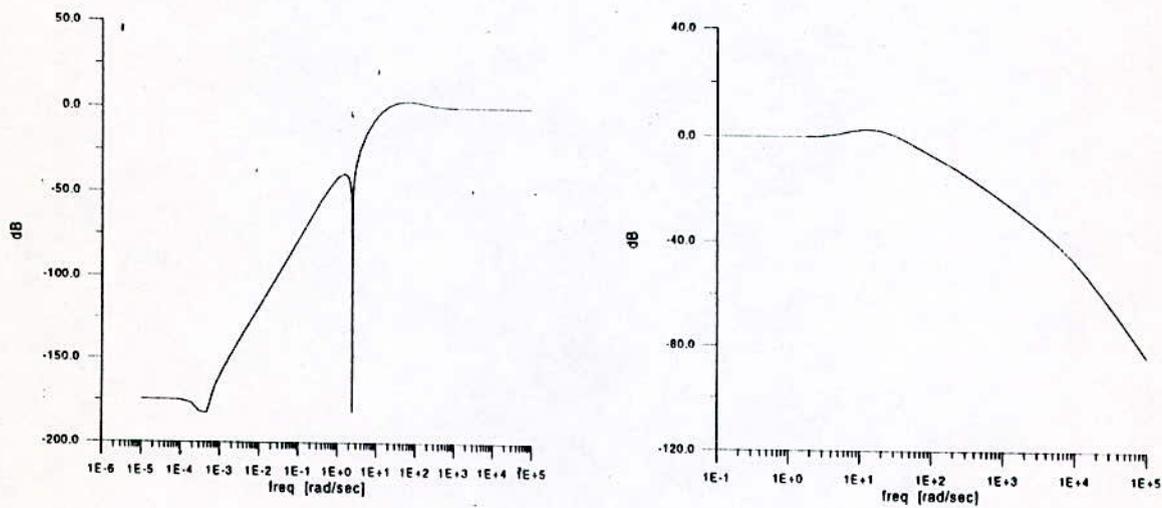


Figure 4.8



Sensibilité S'

Sensibilité complémentaire T

Figure 4.9

On remarque que l'insertion du pré-compensateur a permis au système d'améliorer ses marges de gain et de phase, on remarque aussi un pic qui est due à la présence de la paire de pole sur l'axe imaginaire, enfin les fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire présentent des formes assez satisfaisantes. L'indice de robustesse (performances) $\varepsilon = 0.53$ ce qui implique que nous avons un bon compromis robustesse/performances.

Simulation linéaire :

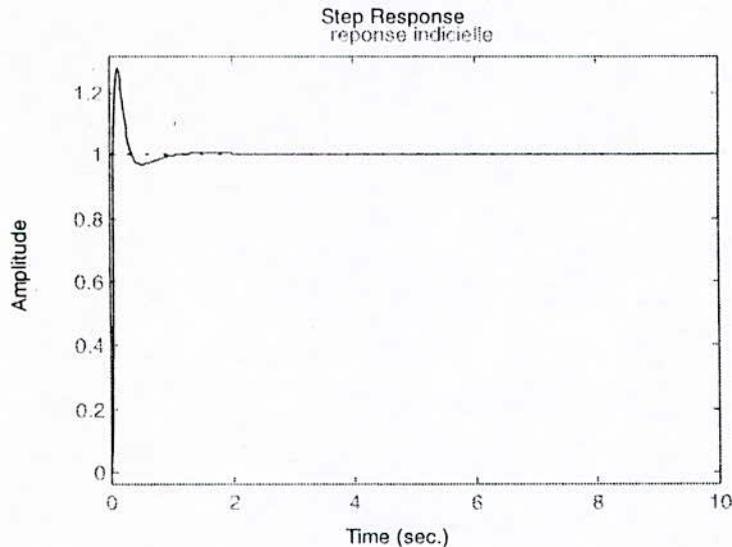


Figure 4.10

La réponse indicielle montre que le système est stabilisé rapidement mais avec un pic non négligeable et la raison de cela est la présence de la paire de pole imaginaire ce qui complique le compromis robustesse/performances du système ainsi on a constaté après plusieurs essais qu'il était difficile de faire mieux.

L'expression du contrôleur dans l'espace d'état :

$$\begin{aligned}
 ak_2 &= \begin{bmatrix} -247.9965 & 46.0761 & -6.6702 & 1.7601 \\ 45.2726 & -15.1696 & 4.1132 & -0.9486 \\ 6.5497 & -4.1106 & -1.5248 & 0.9794 \\ 1.7283 & -0.9480 & -0.9794 & -0.7484 \end{bmatrix} ; \quad bk_2 = \begin{bmatrix} -14.73 \\ 1.8509 \\ 0.2297 \\ 0.0746 \end{bmatrix} ; \\
 ck_2 &= [-14.4639 \quad 1.8489 \quad -0.2297 \quad 0.0621] ; \quad dk_2 = -1.5831
 \end{aligned}$$

Étape 3 application au système non linéaire :

Comme dans le cas du premier point d'équilibre, on applique le contrôleur décentralisé au système non linéaire en utilisant le même schéma de commande.

Simulations non linéaires :

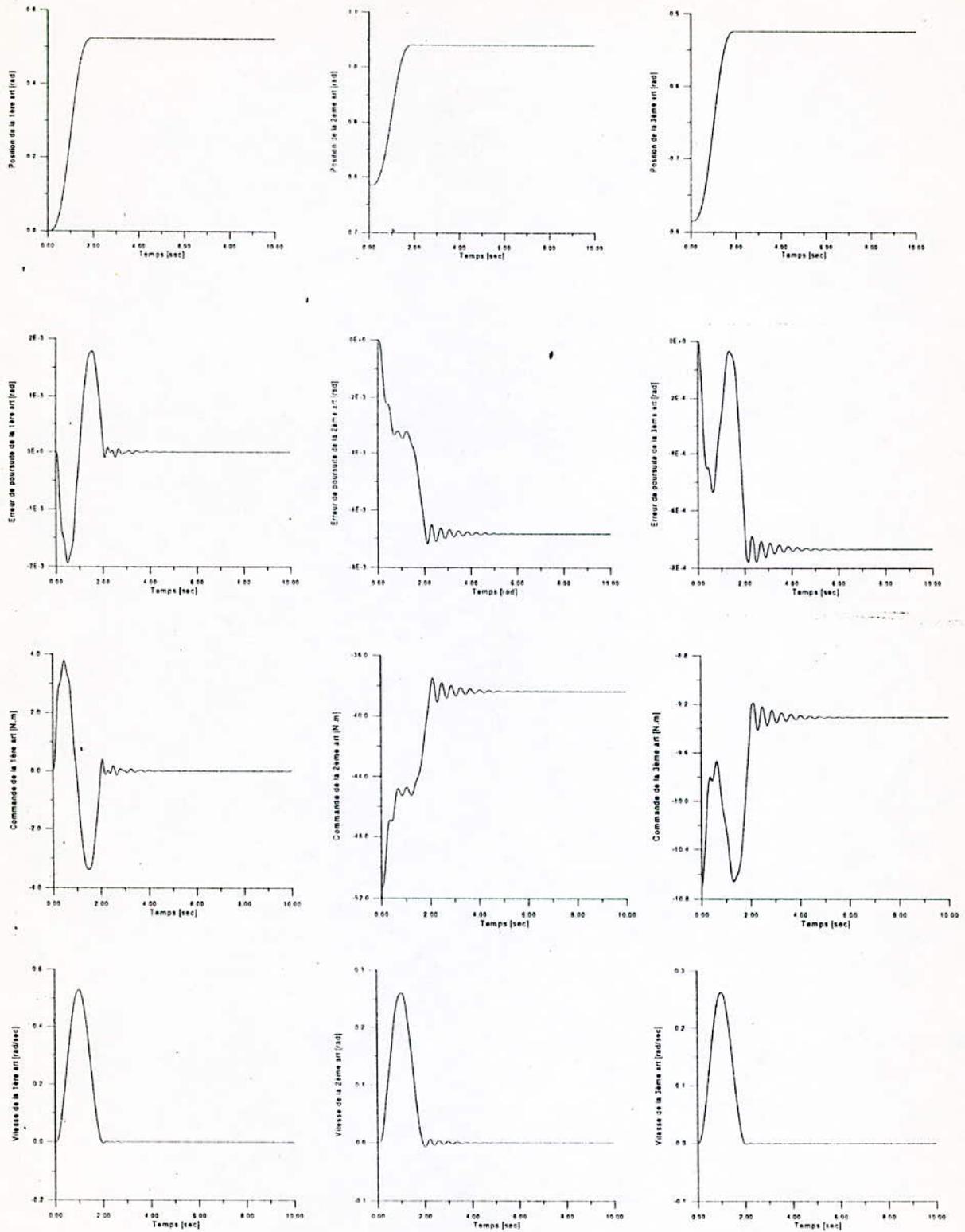


Figure 4.11

Test de rupture 1, $u_2 = 0$; $u_3 = 0$:

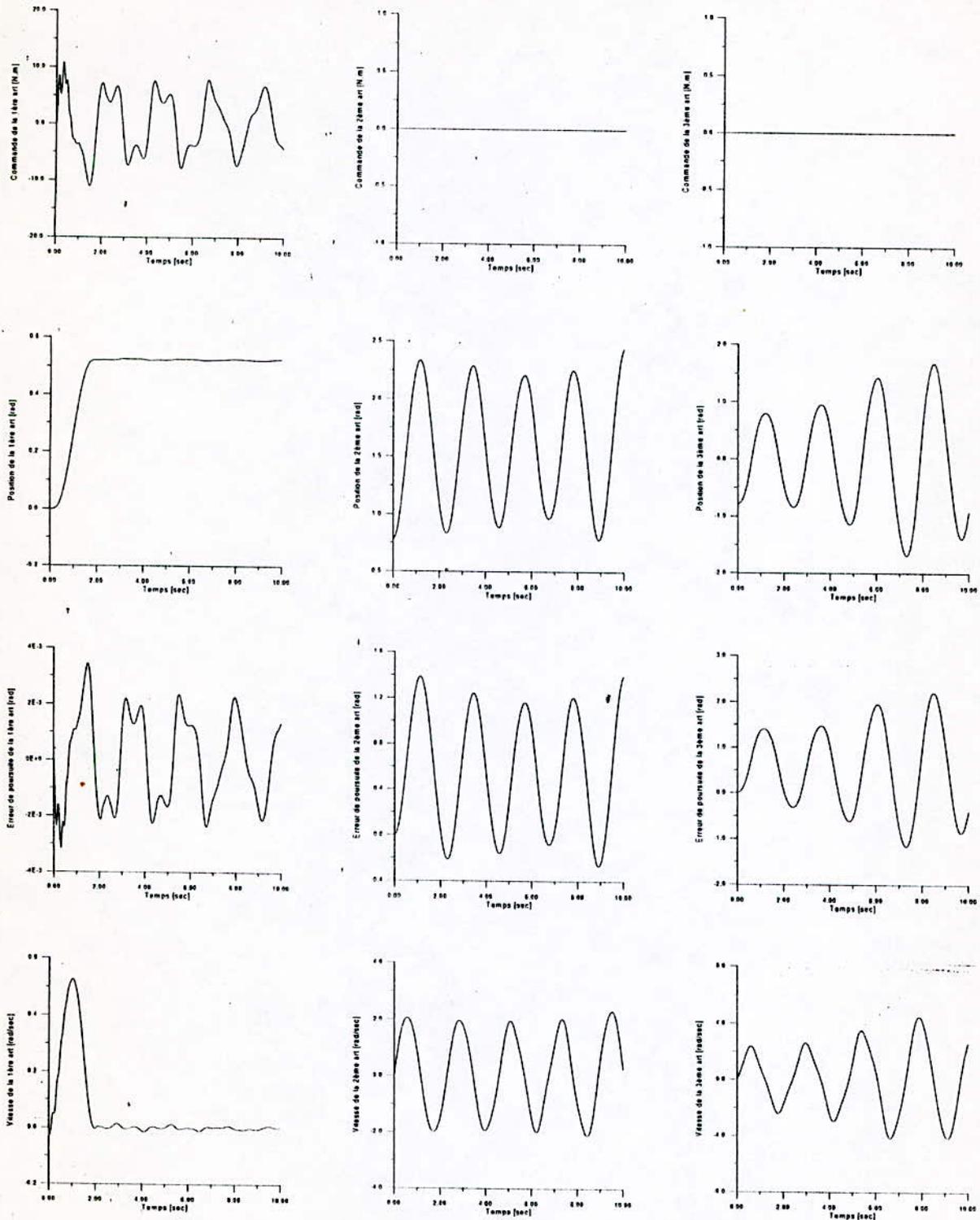


Figure 4.12.a

Test de rupture 2, $u_1 = 0$; $u_3 = 0$:

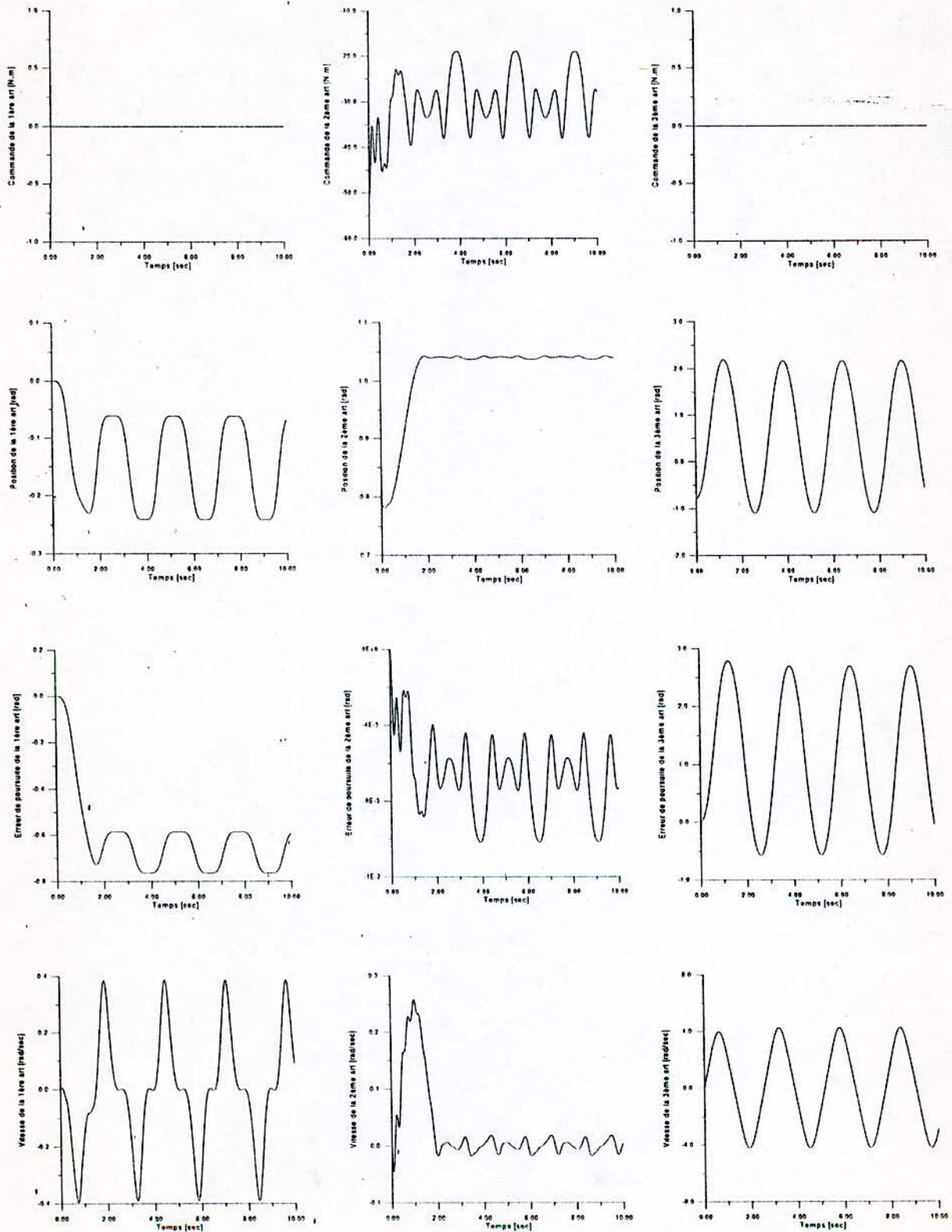


Figure 4.12.b

Test de rupture 3, $u_1 = 0 ; u_2 = 0 :$

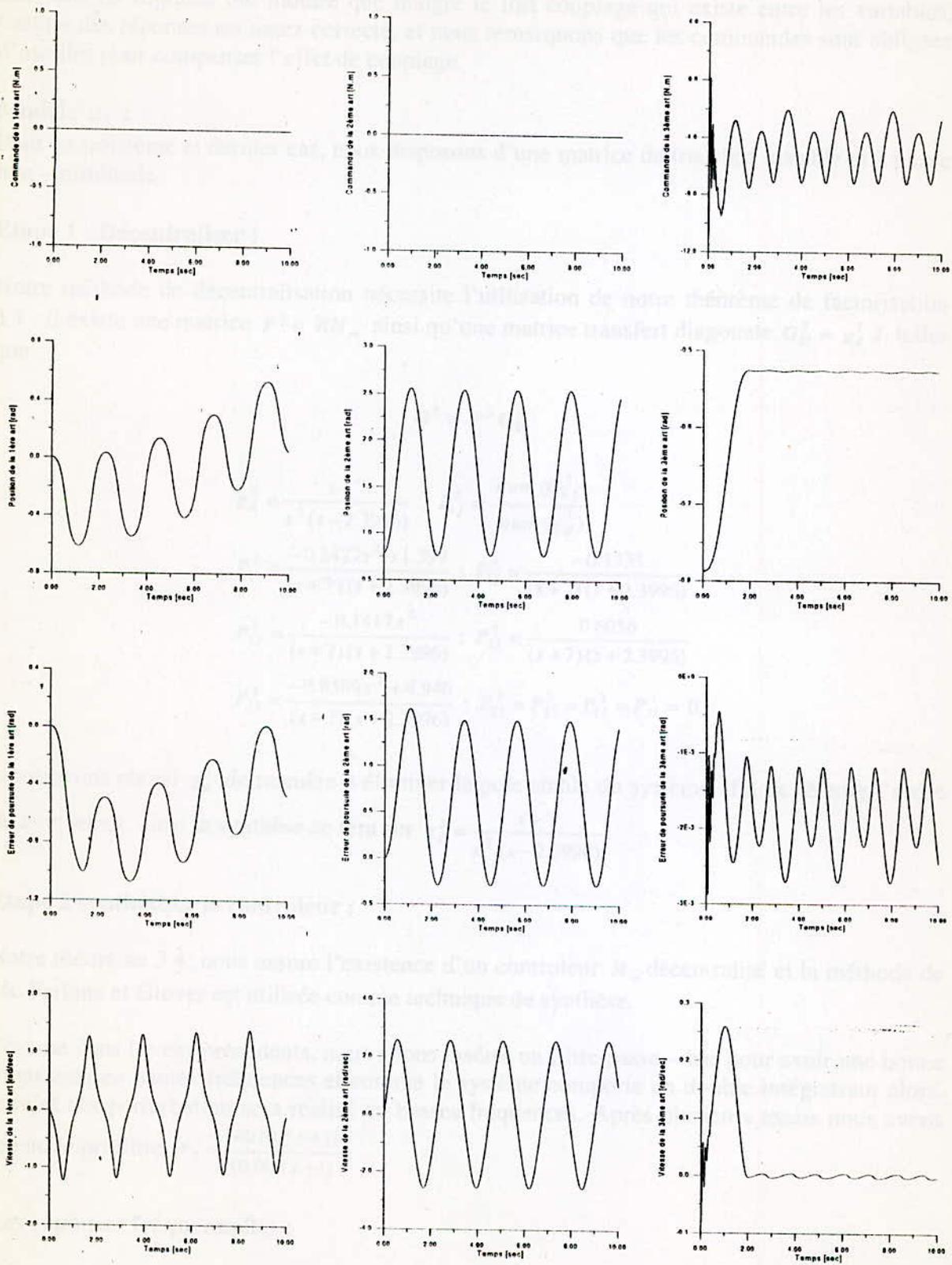


Figure 4.12.c

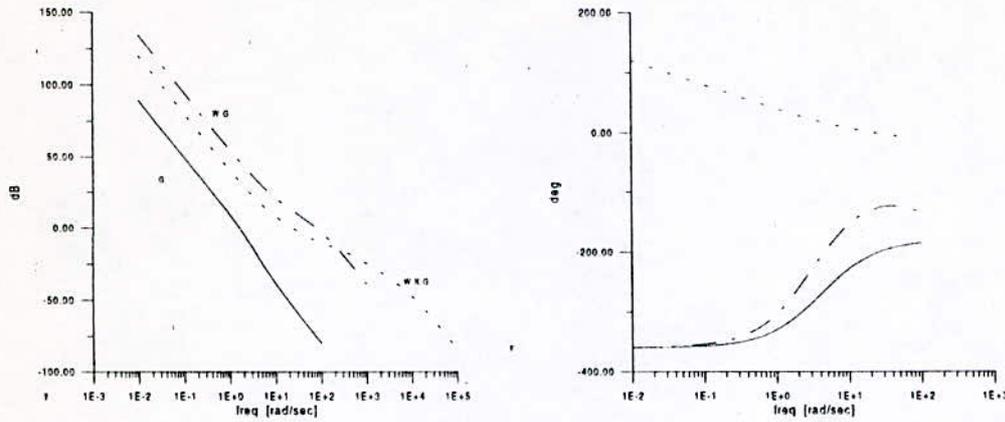


Figure 4.13

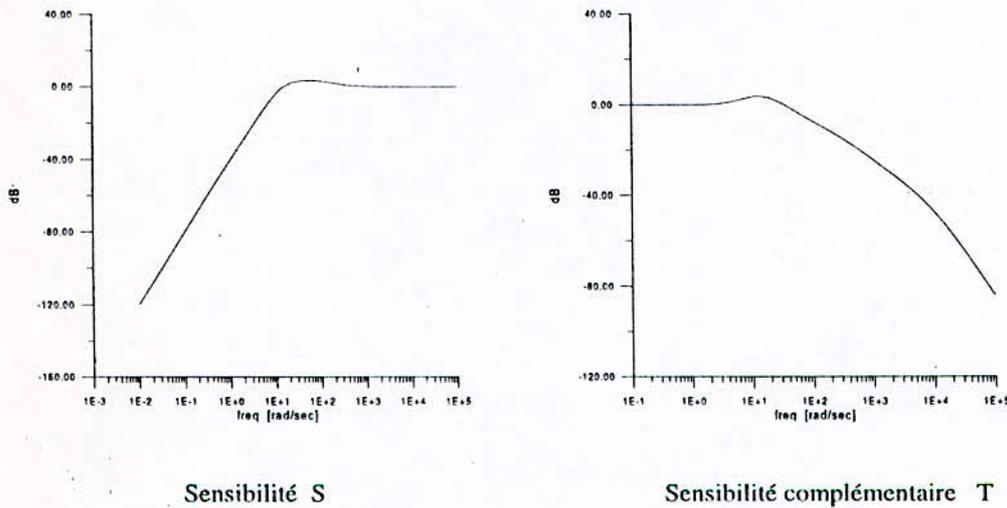


Figure 4.14

On remarque que le modelage de la boucle ouverte par le pré – compensateur à permis au système d’avoir de bonnes fonctions de sensibilité S et sensibilité complémentaire T ce qui signifie qu’on a réalisé un bon compromis robustesse/performances comme le montre l’indice de compromis $\epsilon = 0.5365$. Concernant le système avec contrôleur, on constate que le contrôleur H_{∞} a stabilisé le système et a amélioré ses performances.

Simulation linéaire :

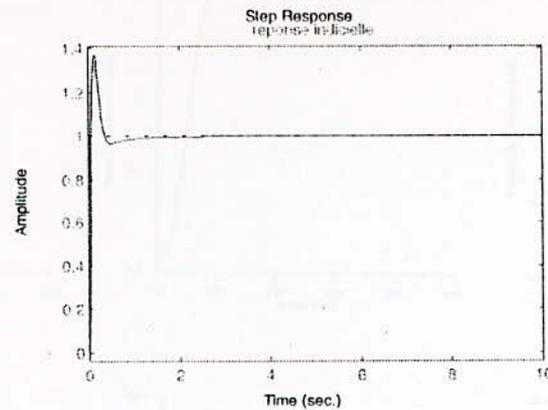


Figure 4.15

La réponse indicielle montre que le système est stabilisé en boucle fermée et on constate aussi un pic en transitoire qui est nécessaire de garder car, si on essaie de diminuer ce pic, c'est la stabilité ainsi que la robustesse qui diminueront d'une manière conséquente ; après plusieurs essais, nous avons jugé que la stabilité et le compromis robustesse/performances sont les plus importants.

L'expression du contrôleur dans l'espace d'état :

$$\begin{aligned}
 ak_3 &= \begin{bmatrix} -243.0133 & 64.6048 & -4.9971 \\ 63.673 & -25.0277 & 3.1879 \\ 4.9198 & -3.1848 & -1.3133 \end{bmatrix} ; & bk_3 &= \begin{bmatrix} 14.1326 \\ -2.6502 \\ -0.1684 \end{bmatrix} \\
 ck_3 &= [13.9140 \quad -2.6473 \quad 0.1684] ; & dk_3 &= -1.5730
 \end{aligned}$$

Étape 3 application au système non linéaire :

Comme pour les cas précédents, l'application du contrôleur H_∞ décentralisé sur le système non linéaire nécessite l'utilisation du même schéma de commande.

Nous allons faire évoluer les articulations du robot à partir de $\{0, -45^\circ, 45^\circ\}$ vers $\{30^\circ, -30^\circ, 60^\circ\}$ en suivant une trajectoire cycloïdale.

Simulations non linéaires :

Test de rupture 1, $u_2 = 0; u_3 = 0$:

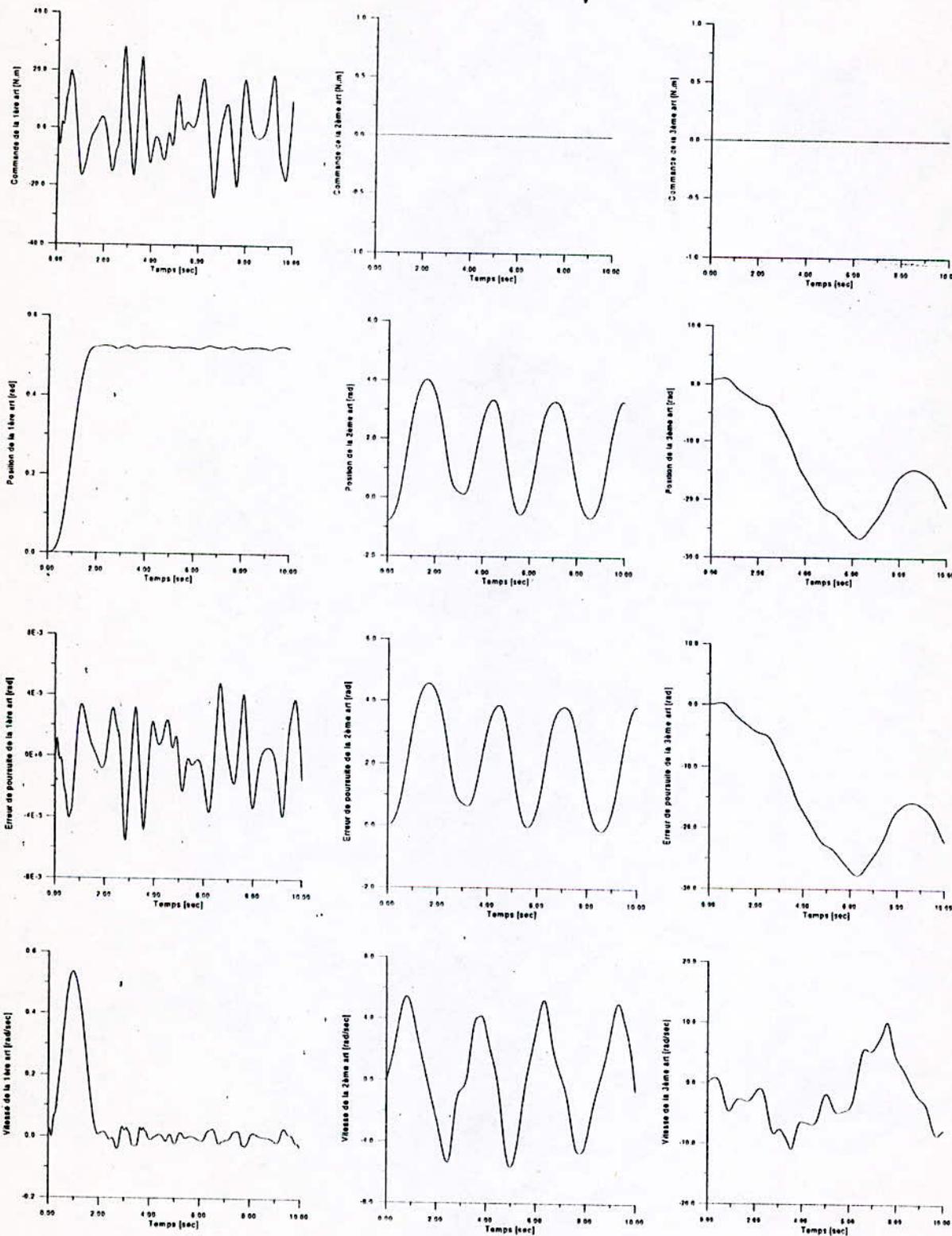


Figure 4.17.a

Test de rupture 2, $u_1 = 0; u_3 = 0$:

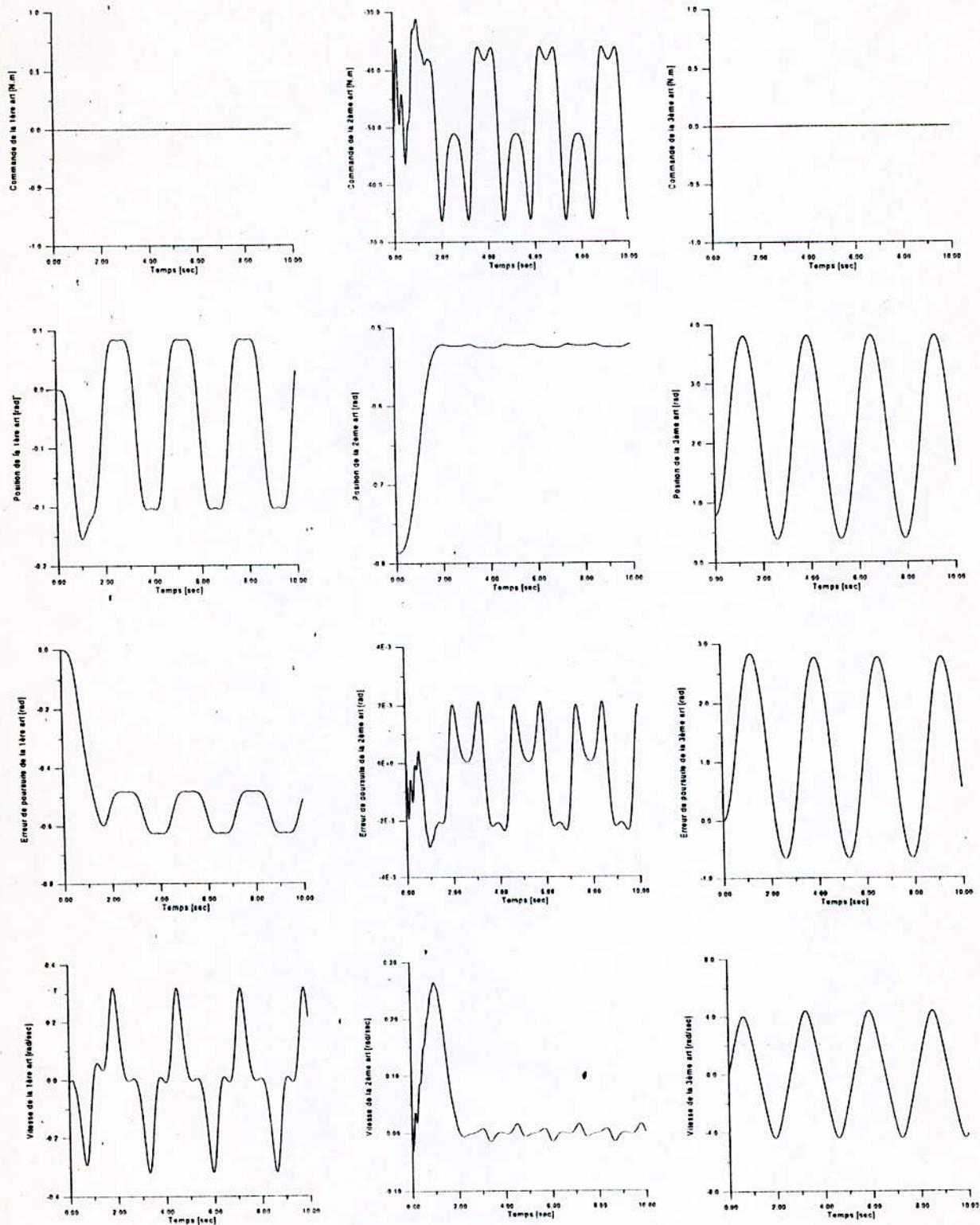


Figure 4.17.b

Test de rupture 3, $u_1 = 0; u_2 = 0$:

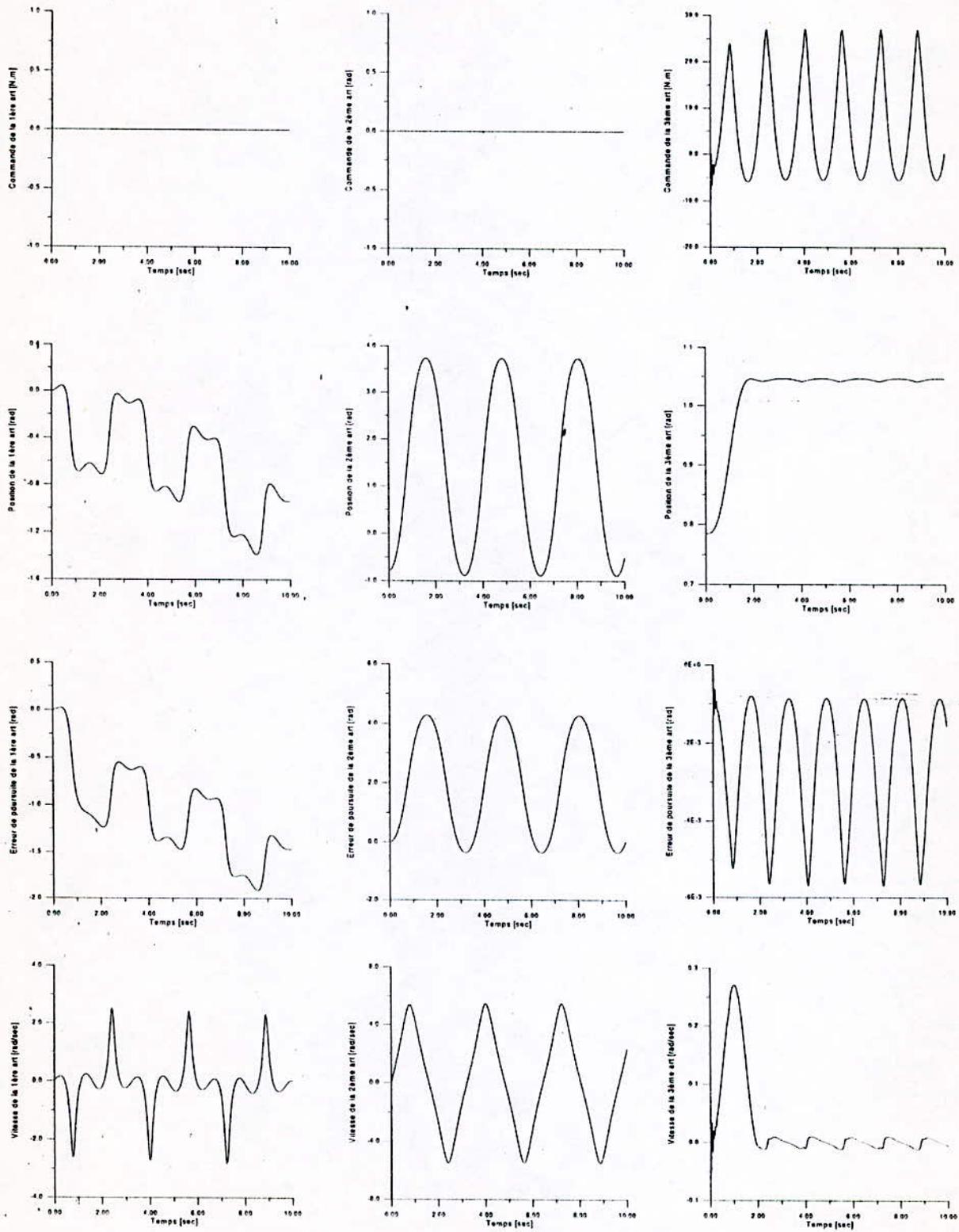


Figure 4.17.c

On constate que les réponses sont rapides, précises, de formes idéales et les commandes sont admissibles. L'erreur statique est fixe de l'ordre de 10^{-3} et il est possible de la réduire d'avantage.

Les tests de ruptures ont montré que malgré le fort couplage qui existe entre les variables, la commande essaie de donner une allure assez correcte à la position de l'articulation, on peut dire donc que la décentralisation est bonne.

4.5 Commande par réseaux de modèles locaux (local model network) :LMN) :

On adoptera les notations suivantes :

$U^1 = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1]^T$ est le vecteur de commande du premier point O_1 .

$U^2 = [u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2]^T$ est le vecteur de commande du second point O_2 .

$U^3 = [u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3]^T$ est le vecteur de commande du troisième point O_3 .

$T = [T_1 \quad T_2 \quad T_3]^T$ est le vecteur couple qui est appliqué au robot.

$q_d = [q_{d1} \quad q_{d2} \quad q_{d3}]^T$ est la référence.

On commandera le robot de la manière suivante :

T_1 n'est pas spécifié car le modèle du robot est indépendant de q_1 .

$$T_2 = \begin{cases} u_2^1 & \text{si } -15^\circ \leq q_{d2} \leq 15^\circ \\ \frac{\pi}{12} (u_2^2 - u_2^3) & \text{si } 15^\circ < q_{d2} < 30^\circ \\ \frac{\pi}{12} (u_2^1 - u_2^3) & \text{si } -30^\circ < q_{d2} < -15^\circ \\ u_2^2 & \text{si } 30^\circ \leq q_{d2} \\ u_2^3 & \text{si } q_{d2} \leq -30^\circ \end{cases}$$

$$T_3 = \begin{cases} u_3^1 & \text{si } -15^\circ \leq q_{d3} \leq 15^\circ \\ \frac{\pi}{12} (u_3^3 - u_3^1) & \text{si } 15^\circ < q_{d3} < 30^\circ \\ \frac{\pi}{12} (u_3^1 - u_3^2) & \text{si } -30^\circ < q_{d3} < -15^\circ \\ u_3^3 & \text{si } 30^\circ \leq q_{d3} \\ u_3^2 & \text{si } q_{d3} \leq -30^\circ \end{cases}$$

Trajectoire de Lehavy [] : Le test de capacité de poursuite peut être réalisé pour exciter toute la dynamique du robot. Lehavy a proposé une trajectoire cycloïdale test, les différentes articulations se déplacent de la position $\{-50^\circ, -135^\circ, 135^\circ\}$ vers la position $\{45^\circ, -85^\circ, 30^\circ\}$ en un temps de 1.5 sec.

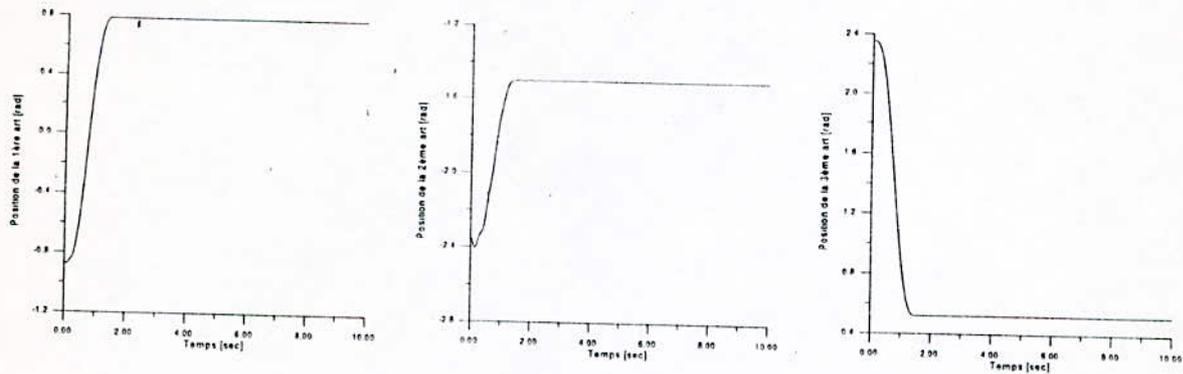


Figure 4.18

On constate que les réponses sont très satisfaisantes et donc le système commandé à une grande capacité de suivre.

CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous avons appliqués la commande H_∞ décentralisée, nous avons vu que les réponses sont très satisfaisantes et rapides, nous avons vu aussi qu'il était possible de commander le robot sur une large plage de fonctionnement avec de très bonnes performances par la technique du réseau de modèles locaux. Tout ce qu'on peut conclure c'est que notre méthode de décentralisation est efficace et procure de très bons résultats.

CONCLUSION GENERALE

A travers ce travail, nous avons créé une nouvelle méthode de décentralisation basée sur un choix pertinent des incertitudes multiplicatives dans le but de décentraliser. Nous avons démontré qu'il existe toujours un contrôleur H_∞ décentralisé synthétisé, soit par la méthode de Mc Farlane et Glover ou bien par la sensibilité mixte. Notre méthode transforme un problème de synthèse multivariable qui est très souvent difficile, en une synthèse sur un seul et unique système monovariable tout en préservant les modes du système ce qui est très intéressant car les contrôleurs de chaque sous système seront tous identiques (mais pas les commandes), il faut aussi souligner le fait que nous avons des commandes par retours de sorties, ce qui nous évite l'insertion d'un observateur.

L'application de notre méthode sur le robot Puma 560 a donné de très bons résultats que ce soit en rapidité, précision, mais aussi sur la simplicité des commandes. La commande du robot par la technique du réseau de modèles locaux (LMN) nous a permis de le commander sur une large plage de fonctionnement avec de très bonnes performances comparables à celles d'une commande non linéaire.

Une fois de plus, la commande H_∞ a montré que les méthodes linéaires ont une capacité remarquable de s'appliquer sur des problèmes délicats avec des résultats impressionnants. Enfin, vu le succès invraisemblable de la théorie H_∞ , il serait intéressant de se poser la question : *faudrait-il reconstruire à nouveau la théorie des systèmes linéaires en la reformulant par l'approche H_∞ ?*

Perspectives :

Nous proposons les choses suivantes comme perspectives aux projets avenir :

- Appliquer la commande H_∞ adaptative décentralisée que nous avons décrite brièvement dans le chapitre 3.
- Appliquer la commande H_∞ floue décentralisée sur un système non linéaire en synthétisant 3 contrôleurs H_∞ décentralisés, relatifs à 3 points de fonctionnement puis d'introduire la commande floue, afin de l'appliquer sur un système non linéaire, selon l'évolution de la référence ; qu'elle soit proche, très proche, loin, ou très loin du point de fonctionnement.
- Appliquer la commande H_∞ non linéaire décentralisée sur le robot Puma 560 et comparer les résultats obtenus avec les résultats de notre méthode que ce soit en performances ou en facilité d'application.
- Résoudre le problème de décentralisation 3.1, par les incertitudes structurées.

Bibliographie

- [1] Boissonat, J-D., B. Faverjon, et J-P. Merlet (1988). *Techniques de la robotique : Architectures et commandes*. Hermes, Paris.
- [2] Borne, P., A. Rachid (1994). *Systèmes de régulations : La commande robuste*. Masson, Paris.
- [3] Bourlès, H. et F. Aioun (1993). " Approche H_∞ et μ - synthèse ," Ecole d'été d'Automatique de Grenoble.
- [4] Chen, Y.H., M.C. Han (1993). " Decentralized control design for interconnected uncertain systems," *Control and dynamic systems*, Vol. 56.
- [5] Chiang, R.Y., M.G. Safonov (1992). *Robust control toolbox*. The Math Works, Inc., Natick.
- [6] Chung Fung Lu (1994). *H_∞ optimization*. Prentice Hall, New Jersey.
- [7] Doyle, J. (1996). " Robust and optimal control ," *Conf. Decision control*., Kobe, Japan.
- [8] Doyle, J., K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis (1989). "State – space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 34, pp. 831-847.
- [9] Duc, G., A. Rachid (1994). *Systèmes de régulations : Analyse de robustesse et synthèse d'une commande dans le cadre H_∞* . Masson, Paris.
- [10] Francis, A.B. (1987). "A course in H_∞ theory," *Lectures notes in control and information sciences*, Vol. 88. Springer – Verlag : New York.
- [11] Francis, A.B., J. Doyle (1987). "Linear control theory with an H_∞ optimality criterion," *SIAM J. Control and Optimization*., Vol. 25, pp. 815-844.
- [12] Francis, A.B., J.W. Helton, G. Zames (1984). " H_∞ - optimal feedback controllers for linear multivariable systems," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 10, pp. 888-900.
- [13] Francis, A.B., G. Zames (1984). "On H_∞ - optimal sensitivity theory for siso feedback systems," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 1, pp. 9-16.
- [14] Friedland, B. (1987). *Control system design*. Mc Graw – Hill. New York.
- [15] Gavel, D.T., D.D. Siljak (1989). "Decentralized adaptive control : structural conditions for stability," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 34, pp. 413-426.
- [16] Gharbi, S., F. Hadj Miloud (1998). *Commande adaptative décentralisée par la technique du Backstepping, application en robotique*. Projet de fin d'études. ENP.

- [17] Glover, K., D. Mc Farlane (1989). "Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞ - Bounded uncertainty," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 34, pp. 821-830.
- [18] Haddad, A.H. (1987). "Editorial, why H_∞ - Infinity," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 32, pp. 850.
- [19] Hyde, R.A. (1991). *The application of robust control to VSTOL aircraft*. PhD Thesis, Girton college, Cambridge University.
- [20] Ikeda, M., G. Zhai, Y. Fujisaki. (1996). "Decentralized H_∞ controller design for large - scale systems : A matrix inequality approach using homotopy method," *Conf. Decision Control*,. Kobe, Japan.
- [21] Jonckheere, E.A., G. Y, C. Chiang. (1996). " H_∞ control of crippled aircraft in lateral motion with throttles only," *Conf. Decision Control*,. Kobe, Japan.
- [22] Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice - Hall, New york.
- [23] Keel, L.H., S.P. Bhattacharyya. (1997). "Robust, fragile, or optimal?," *IEEE Trans. Auto. Control*. Vol. 42, pp 1098-1105.
- [24] Khadir, T. (1998). *Commande robuste par H_∞ , Théorie et applications*. Projet de fin d'études. ENP.
- [25] Khallil, H. (1996). *Non linear systems*. Prentice - Hall. New Jersey.
- [26] Kimura, H. (1984). "Robust stabilizability for a class of transfer functions," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 29, pp. 788-793.
- [27] Koshiba, R., S. Shin, N. Sebe (1996). "Relationship between decentralizd and centralized designs in Mixed sensitivity problem," *Conf. Decision Control*,. Kobe, Japan.
- [28] Kwakernaak, H (1993). "Robust control - Mixed sensitivity optimization," Ecole d'été d'Automatique de Grenoble.
- [29] Li, C-J. (1989). "An efficient method for linearization of dynamic models of robot manipulators," *IEEE Trans. Robotics and Automation*. Vol. 5, pp. 397-408.
- [30] Lim, K.Y., M. Eslami. (1987). "Robust adaptive controller designs for robot manipulator systems," *IEEE J. Robotics and Automation*,. Vol. 3, pp. 54-66.
- [31] Lin, F., D. Brandt. (1998). "An optimal control approach to robust control of robot manipulators," *IEEE Trans. Robotics and Automation*,. Vol. 14, pp. 69-77.
- [32] Maciejowski, J.M. (1989). *Multivariable feedback design*. Addison - Wesley, England.

- [33] Madani, T., S. Amrati. (1997). *Commande décentralisée à structure variable, application en robotique*. Projet de fin d'études. ENP.
- [34] Mc Farlane, D., K. Glover. (1990). "Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions," *Lectures notes in control and information sciences*. Springer – Verlag.
- [35] Morrarj, M., E. Zafiriou. (1989). *Robust process control*. Prentice – Hall. New Jersey.
- [36] Mush, H.E., M. Steiner. (1998). "Tuning advanced PID controllers via direct H_{∞} - Norm minimization," *Int. Conf. Robotics and Automation*. Leuven. Belgium.
- [37] Seraji, H. (1989). "Decentralized adaptive control of manipulators : Theory, simulation, and experimentation," *IEEE Trans Robotics and Automation*, Vol. 5, pp. 183-201.
- [38] Slotine, J-J.E., W. Li. (1991). *Applied non linear control*. Prentice – Hall. New Jersey.
- [39] Spong, M.W., M. Vidyasagar. (1987). "Robust linear compensator design for non linear robotic control," *IEEE Trans Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 345-350.
- [40] Vibet, C. (1987). *Robots Principe et contrôle*. Ellipses. Paris.
- [41] Zhou, K., J. Doyle., K. Glover. (1996). *Robust and optimal control*. Prentice – Hall. New Jersey.