

13/99

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DU GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE

OPTION : AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

Thème

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**ETUDE DE L'INTERACTION ENTRE  
L'IDENTIFICATION ET LA  
COMMANDE ROBUSTE  
THEORIE ET APPLICATIONS**

Proposé par:

M. TADJINE  
M. BOUKHETALA

Etudié par:

M<sup>Elle</sup> Samia MAZA

JUIN 1999

ENP, 10 Avenue Hassen BADI El-Harrach Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DU GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE

OPTION : AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

**Thème**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**ETUDE DE L'INTERACTION ENTRE  
L'IDENTIFICATION ET LA  
COMMANDE ROBUSTE  
THEORIE ET APPLICATIONS**

Proposé par:

M. TADJINE  
M. BOUKHETALA

Etudié par:

M<sup>Elle</sup> Samia MAZA

**JUIN 1999**

ENP, 10 Avenue Hassen BADI El-Harrach Alger



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

***L'Homme qui apprend doit croire***  
***Celui qui sait doit examiner***

ROGER BACON

## ***DEDICACE***

*A* ma chère mère, source d'amour et de sacrifice,

*A* la mémoire de mon père,

*A* mes frères et sœurs, en Algérie et à l'étranger,

*A* mes deux petits neveux et nièce,

*A* tous mes amis, particulièrement: Nassima<sup>2</sup>, Naziha et  
Khadidja,

*Je* dédie ce modeste travail



## *Remerciements*

*Je* remercie humblement mes promoteurs; Monsieur Tadjine et Monsieur Boukhetala pour leurs aides et conseils, tout au long de mon projet de fin d'étude, particulièrement, Monsieur Tadjine pour son soutien moral.

Je remercie également l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Toute personne qui a participé, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire.

Et enfin, ma gratitude et mes remerciements les plus chaleureux aillent à ma sœur Zahia, sans elle, je n'aurai jamais pu terminer à temps.

العمل يخلص دراسة الطرق الجديدة الخاصة بالمطابقة المتينة . يمكن تقسيمه الى ثلاثة أقسام، القسم الأول خاص بتذكير عن المطابقة الوسطية بطريقة خطأ التكهن حيث يعطى المبدأ المطابقة في الحلقة المغلقة . في القسم الثاني تقدم طريقتين لإستخلاص التحكم المتين ب  $H_\infty$  و  $H_2$  ، القسم الثالث تدرس العلاقة بين المطابقة و التحكم المتين لاجل تحسين مزايا التحكم ، أين يعطي مرشح مطابقة الذي يسمح بهذا التحسين، تعطى أيضا لتكهن الحد الأعلى لخطأ المطابقة مع مثال. الخوارزميات المعطاة المجرية على عدة أمثلة .

كلمات المفتاح : التحكم المتين ، مطابقة الحلقة المغلقة ، المطابقة من أجل التحكم ، خطأ التكهن .

### Résumé:

Le travail présenté dans ce mémoire, est consacré à l'étude des nouveaux concepts d'identification robuste récemment introduits. Il est divisé en trois parties; dans la première, les éléments de l'identification paramétrique par erreur de prédiction sont donnés, ainsi que le critère d'identification en boucle fermée. La seconde partie est dédiée à l'étude de deux lois de commande robustes par  $H_\infty$  et  $H_2$ , deux méthodes de synthèse  $H_\infty$  sont données. La troisième partie concerne l'interaction entre l'identification et la commande robuste en vue d'améliorer les performances du système de commande, un filtre d'identification permettant d'orienter l'identification vers la commande est donné, et une méthode d'estimation de la borne supérieure de l'erreur de modélisation est donné avec une application. L'efficacité du schéma itératif proposé est testée sur plusieurs exemples.

**Mots clés:** commande robuste - identification en boucle fermée - identification pour la Commande - incertitude de modèle.

### Abstract:

In this work, we are interesting at the recently introduced methods of iterative identification and control design. It can be divided into three parts; in the first one, we recall some basic elements in the parametric identification via the prediction error method, and the criterion of a closed loop identification is introduced. The second part is devoted to the study of the two robust control laws  $H_\infty$  and  $H_2$ , where two methods of  $H_\infty$  synthesis are given. The third part concerns the study of the interplay between system identification and robust control design, in view of performance enhancement. A suitable identification filter allowing this interplay is deduced, and method of estimation of the upper bound on model uncertainty is given with an application. The efficiency of the given iterative scheme is tested on several examples.

**Key words:** robust control - closed loop identification - control oriented identification - model uncertainty.



# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1. Rappel sur l'identification des systèmes</b>	<b>3</b>
1.1. Introduction.....	3
1.2. Que veut-on dire par: "identification des systèmes?".....	3
1.3. Comment identifier un système dynamique?.....	4
1.4. Exemples.....	10
Conclusion.....	15
<b>2. Synthèse de lois de commande par <math>H_\infty</math> et <math>H_2</math></b>	<b>16</b>
2.1 Introduction.....	16
2.2. Etude de la commande $H_\infty$ .....	16
2.2.1 Introduction.....	16
2.2.2. Principe de commande $H_\infty$ .....	18
2.2.3. Synthèse par sensibilité mixte.....	19
2.2.4. synthèse par factorisations première.....	28
2.3. Etude de commande $H_2$ .....	34
2.3.1. Introduction.....	34
2.3.2. Principe de commande LQG.....	34
2.3.3. Interprétation de commande LQG dan le domaine fréquentiel: $H_2$ .....	40
2.4. Résolution du problème standard.....	44
Conclusion.....	48
<b>3. Identification pour la commande robuste</b>	<b>49</b>
3.1 Introduction.....	49
3.2. Affinement itératif des commandes $H_\infty$ et $H_2$ .....	49
3.2.1. Nécessité d'un schéma itératif.....	51
3.2.2. L'algorithme de Gevers.....	55
3.2.3. Algorithme d'affinement itératif des commandes $H_\infty$ et $H_2$ .....	58
3.3. Estimation de la borne supérieure sur l'erreur de modélisation.....	60



3.3.1. Formulation du problème.....	61
3.3.2. Hypothèses et informations à priori.....	61
3.4 Exemple.....	64
conclusion.....	65
<b>4. Applications</b>	<b>66</b>
4.1 Introduction.....	66
4.2. Principe général des simulations.....	66
4.3. Implémentation des schémas itératifs.....	67
4.3.1. Application à un modèle d'ordre 7.....	68
4.3.2. Application à un système de transmission flexible.....	76
4.3.3. Application à un bras flexible à un degré de liberté.....	85
4.3.4. Application à un système multivariable.....	94
Conclusion.....	98
<b>Conclusion générale</b>	<b>99</b>
<b>Annexe A</b>	
<b>Annexe B</b>	
<b>Références bibliographiques</b>	

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction générale

## *Introduction générale*

Le modèle linéaire d'un procédé physique, aussi précis soit il est inévitablement différent du système réel, vu les caractéristiques non linéaires de ce dernier, ainsi que les dynamiques négligées lors de la modélisation.

De ce fait, le régulateur synthétisé à base de ce modèle, selon le principe de l'équivalence certaine, ne réalise pas (souvent) les performances attendues, une fois implémenté sur le système réel, et dans le pire des cas, il déstabilise carrément la boucle de commande.

La prise en considération des erreurs de modélisation s'est avérée nécessaire pour remédier à une telle situation. C'est ce qui a donné naissance à la théorie de la commande robuste, au début des années 80, et dans laquelle la synthèse du régulateur se fait en anticipant les imperfections du modèle nominal (identifié), c'est à dire en tenant compte de manière explicite des erreurs de modélisation, afin d'assurer la robustesse en stabilité du système de commande.

Assurer la stabilité robuste n'est pas une fin en soi, d'autres objectifs concernant les performances du système doivent être atteints, on parle alors de performances robustes.

Les performances sont robustes, si le système bouclé composé du modèle nominal et du régulateur, décrit au mieux le système bouclé composé du même régulateur et du procédé réel, ce qui rend crucial le problème d'élaboration d'un modèle nominal adéquat, tenant compte de l'objectif de commande, pour la synthèse de systèmes de commande performants. Ceci fait que les problèmes d'identification et de commande sont deux problèmes conjointement liés.

Or les méthodes classiques d'identification et de commande se sont développées dans deux directions complètement séparées, sans tenir compte de l'objectif commun qui est la commande des systèmes.

Ainsi, au cours de ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de l'interaction entre l'identification et la commande [3,12,13,14], pour essayer d'élaborer des lois de commande réalisant de bonnes performances aussi bien pour le modèle nominal que pour le procédé réel, ceci en les liant explicitement. Ils ont développé des algorithmes



Nous nous sommes intéressés dans ce travail, au problème de l'interaction entre l'identification et la commande robuste par  $H_\infty$  et  $H_2$ , ainsi qu'au problème d'estimation de la borne supérieure de l'erreur de modélisation. Pour cela, on l'a divisé en quatre chapitres :

Au premier chapitre, on donne un résumé sur l'identification paramétrique par erreur de prédiction, on introduira la notion d'identification en boucle fermée, et de filtre d'identification. deux exemples sont donnés pour illustrer la procédure utilisée pour identifier un système donné.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de deux lois de commande robuste, à savoir la commande par  $H_\infty$  et la commande  $H_2$ . On présentera le principe de chacune d'entre elles, et la résolution du problème  $H_\infty/H_2$  standard sera donnée.

Deux méthodes de synthèse par  $H_\infty$  sont données, et une comparaison entre les deux commandes est faite.

Le chapitre 3 est réservé à l'étude de l'interaction entre l'identification et la commande robuste, un premier algorithme d'affinement itératif (algorithme de Gevers) est donné, à partir duquel sera déduit celui des deux commandes étudiées.

Par ailleurs, une idée sur l'utilisation de l'identification dans l'estimation de la borne supérieure de l'erreur de modélisation est présentée, avec un exemple de simulation.

Et enfin; au chapitre 4, les schémas d'affinement itératif sont implémentés sur des exemples de procédés, et leur efficacité est testée.

On terminera par une conclusion générale.

A l'annexe [A], est donné un rappel sur les structures de modèles, ainsi que deux démonstrations pour le critère d'identification en boucle fermée.

La résolution du problème  $H_\infty$  standard par les factorisations premières, ainsi qu'un bref rappel sur les valeurs singulières, sont donnés à l'annexe [B].

# Chapitre 1:



## CHAPITRE 1 : Rappel sur l'identification des systèmes .

### 1.1.Introduction:

La modélisation du comportement des processus, joue un rôle important dans la science et la technologie. La connaissance de ces modèles permet de prédire et d'analyser les sorties futures du processus, et d'agir sur ce dernier, de sorte qu'il ait le comportement désirée, ces deux objectifs de la modélisation, sont appelées: la prédiction et la commande .

Ce chapitre a pour objectif, de souligner l'importance de l'identification des systèmes, et de montrer comment procéder pour identifier un processus donné. On s'intéressera à l'identification paramétrique par erreur de prédiction.

### **1.2. Que veut on dire par: "identification des systèmes"?**

Principalement, il y a deux moyens pour obtenir un modèle du système: modélisation de boîte blanche (*white box modeling*) et de boîte noire (*black box modeling*). [1].

La première méthode, est une combinaison des lois physiques qui gouvernent les systèmes, et une description des relations existantes entre les différents composants, qui forment ce système.

La deuxième méthode, c'est à dire la modélisation de boîte noire, les signaux d'entrée et de sortie du système sont mesurés, est un modèle mathématique est construit pour décrire le comportement mesuré, sans tenir compte de la structure interne du système, et sans décrire les processus physiques responsables du comportement observé. Cette méthode est aussi dite: modélisation expérimentale, ou bien identification des systèmes. Et en pratique, ces deux méthodes sont souvent combinées. [3].

Donc, l'identification nous permet de construire des modèles mathématiques de systèmes dynamiques, à base de données mesurées.

### **Historique:**

Historiquement, plusieurs disciplines sont à l'origine de l'identification des systèmes:

- En électronique, dans les applications industrielles, les systèmes étaient décrits par le moyen des diagrammes de Bode et de Nyquist, et qui sont faciles à obtenir, en utilisant un signal d'entrée sinusoïdale, de fréquence croissante. Ceci peut être interprété comme étant une méthode d'identification non paramétrique.



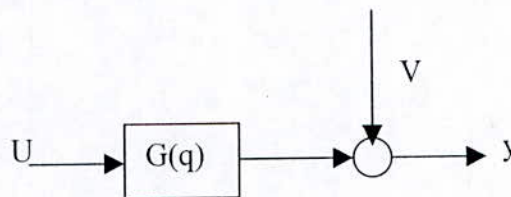
- Dans l'industrie aérienne, il a été reconnu que les paramètres du système varient avec la hauteur, et qu'il est judicieux d'implémenter une loi de commande adaptative, basée sur un modèle à paramètres variables (lentement) dans le temps, obtenu par une identification en temps réel (on-line identification).

D'autres disciplines telles que la théorie de signal, les mathématiques et les statistiques ont contribué à l'évolution de cet axe de recherche qui est l'identification des systèmes.

### 1.3. Comment identifier un système dynamique?

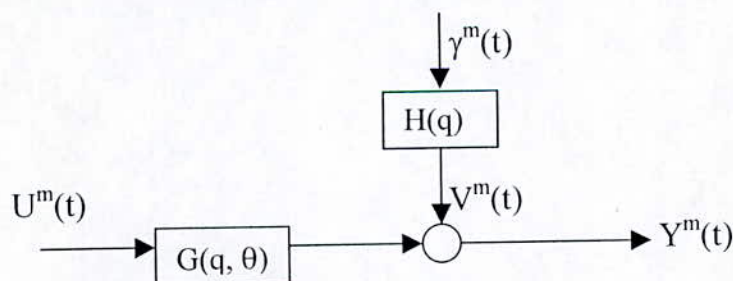
Ceci se fait essentiellement, en ajustant les paramètres d'un modèle donné, jusqu'à ce que sa sortie coïncide, aussi bien que possible, avec la sortie mesurée.

Le schéma standard le plus utilisé en identification, est celui de la figure (1.1). Les signaux de sortie  $y$ , et d'entrée  $u$  mesurés, sont utilisés pour identifier le système. Tous les efforts qui ne sont pas causés par les entrées mesurables  $u$ , sont modélisés par un terme additif:  $V$ , sur la sortie  $y$  du système [1,2].



**Figure (1.1):** Configuration standard du procédé réel.

Lors de la phase d'identification, on cherche à trouver les paramètres  $\theta$  du modèle  $G(q, \theta)$ , qui estiment au mieux le comportement dynamique du procédé réel, (figure (1.2))



**Figure (1.2):** Système modélisé.

Suivant quel critère, et au moyen de quelles techniques, ces paramètres sont-ils calculés? Selon [1], une structure de modèle est d'abord choisie.

La structure de modèles générale est la suivante:

$$A(q) y(t) = q^{-k} \frac{B(q)}{F(q)} \cdot U(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (1.1)$$

où:  $q^{-1}$  est l'opérateur retard.

Et: A, B, C, D et F sont des polynômes en  $q^{-1}$

Avec:

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

Et les polynômes C, D et F ont des expressions similaires au polynôme A, avec des degrés:  $n_c$ ,  $n_d$ , et  $n_f$  respectivement.

k: est le retard du système.

La perturbation additive V est modélisée par filtrage d'un bruit blanc  $e(t)$  par un filtre H.

Le bruit blanc est un signal aléatoire, présent dans toutes les fréquences et avec la même énergie.

La structure (1.1) donne naissance à  $2^5 = 32$  différentes structures possibles, selon les polynômes A, B, C, D et F.

Par exemple: les structures ARX, ARMAX, Erreur de sortie, équation de l'erreur, Box-Jenkins, ...etc. (voir annexe(A))

Les coefficients de ces polynômes sont les paramètres à estimer; on les regroupe dans le vecteur paramètre  $\theta$ .

De manière générale, on paramétrise le modèle du système comme suit (figure (1.2)):

$$Y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (1.2)$$

Le vecteur  $\theta$  appartient à un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ , où d représente la dimension du vecteur  $\theta$ , c'est à dire:  $\theta \in D_\mu \subset \mathbb{R}^d$ .

(1.2) est donc un ensemble de modèles, et l'estimation nous fournira un membre de cet ensemble.

On peut prédire en la valeur de la sortie du système à l'instant  $t+1$ , compte tenu de l'information disponible aux instants:  $S \leq t$ .

$$\hat{y}(t+1/t, \theta) = H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) u(t) + (1 - H^{-1}(q, \theta)) y(t) \quad (1.3)$$



Et il est possible de calculer les expressions, pour des prédicteurs de valeurs plus lointaines dans le future:  $\hat{y}(t+2/t)$ ,  $\hat{y}(t+3/t)$ .....  $\hat{y}(t+k/t)$ .

Compte tenu de (1.2) et (1.3), l'expression de l'erreur de prédiction est donnée par:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t / \theta) = H(q, \theta)^{-1} [y(t) - G(q, \theta) u(t)] \quad (1.4)$$

Le meilleur modèle est celui dont le vecteur de paramètre  $\theta$ , minimise la norme de l'erreur de prédiction et qui est donnée par (1.4).

De manière générale, on utilise le critère d'identification par erreur de prédiction, consistant en la sommation des carrés des erreurs de prédiction filtrées:  $\varepsilon_F$ :

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_F(t, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [L(q)(y(t) - \hat{y}(t / \theta))]^2 \quad (1.5. a)$$

et

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_F(t, \theta)^2 \quad (1.5. b)$$

Le filtre  $L(q)$  dénommé: "filtre d'identification", permet d'orienter la précision du modèle vers certaines plages de fréquences, où l'erreur de prédiction sera d'avantage pénalisée.

Pour mieux comprendre son interprétation, exprimons (1.5) dans le domaine fréquentiel, par le biais de la relation de Parseval.

Pour un signal stationnaire donné  $x(t)$ , on a ceci:

$$E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(\omega) d\omega \quad (1.6)$$

avec:  $E$  dénote l'espérance mathématique  
 $\phi_x$  le spectre de fréquence du signal  $x(t)$

**Remarque:**

- Si le signal  $x(t)$  n'est pas stochastique (voir [1] pour un rappel sur les processus stochastique), l'espérance mathématique n'a pas de sens, et peut être omise.
- Soit le signal  $w(t)$  stationnaire, ayant pour spectre  $\phi_w(\omega)$  et soit  $G(q)$  une fonction de transfert stable, telle que:

$$S(t) = G(q) w(t)$$



Alors  $S(t)$  est stationnaire ayant pour spectre :

$$\phi_s(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \phi_w(\omega) \quad (1.7)$$

Dans [1], il est montré que pour un nombre infini de mesures ( $N \rightarrow \infty$ ), la minimisation du critère (1.5.a) est équivalente à celle du critère suivant:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\varepsilon_F}(\omega) d\omega \quad (1.8.a)$$

et  $\theta_N$  converge vers  $\theta_0$  tel que:

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\varepsilon_F}(\omega) \quad (1.8.b)$$

$\phi_{\varepsilon_F}(\omega)$  étant la densité spectrale de puissance de l'erreur filtrée:

$$\varepsilon_F = L(q) (y(t) - y(t/\theta))$$

En supposant que le signal de commande  $u$  et le bruit  $V$  sont décorrélés (c'est possible, puisque le système est en boucle ouverte), alors (1.8.a) s'écrit de manière explicite, en utilisant (1.7), comme suit:

$$J_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ |G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \phi_u(\omega) + \phi_v(\omega) \right] \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} d\omega \quad (1.9)$$

De (1.9), il est clair que le rôle de  $L(q)$  est d'amplifier des zones de fréquences particulières, où l'on veut pénaliser plus l'erreur de modélisation, (c'est à dire les fréquences où l'on exige une plus grande précision du modèle), et de là, on voit l'importance du choix de ce filtre (ceci sera confirmé au chapitre 3).

### Cas des systèmes multivariables:

Si le système possède  $m$  entrées et  $p$  sorties, c'est à dire que le vecteur entrée  $u(t)$  est de dimension  $m$ , et le vecteur de sortie de dimension  $p$ , le système sera décrit par une matrice de fonctions de transfert, et il est représenté comme dans (1.2) par:

$$Y(t) = G(q, \theta) u(t) + H(q, \theta) e(t). \quad (1.10)$$

Où:  $G$  est une matrice de dimension  $p \times m$ , et dont les éléments sont des fonctions rationnelles en  $q$ .

Par exemple, si le système est donné par l'équation au différence suivante:

$$Y(t) + A_1 y(t-1) + \dots + A_{n_a} y(t-n_a) = B_1 u(t-1) + \dots + B_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (1.11.a)$$

Avec les  $A_i$ , ( $i=1, n_a$ ) sont des matrices  $P \times P$ , et les  $B_i$ , ( $i=1, n_b$ ) des matrices  $P \times m$ .

Le vecteur paramètre  $\theta$ , devient une matrice de dimension  $(n_a p + n_b m) \times p$ .

$$\theta = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{n_a} \ B_1 \ \dots \ B_{n_b}]^T. \quad (1.11.b)$$

en posant:

$$A(q) = I + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_a} q^{-n_a}. \quad (1.11.c)$$

$$B(q) = B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_b} q^{-n_b}.$$

Les matrices de transfert sont alors données par:

$$G(q, \theta) = A^{-1}(q) B(q) \quad ; \quad H(q, \theta) = A^{-1}(q) \quad (1.11.d)$$

A, B sont des matrices polynomiales.

Pour identifier un système multivariable, on peut utiliser la procédure d'écrite précédemment pour les systèmes SISO, pour identifier chaque transfert de la matrice G.

Il existe d'autres méthodes permettant de donner le modèle du système, par sa représentation d'état.

**Remarque:**

Il existe des méthodes d'identification non paramétriques, telles que: la méthode de corrélation et d'analyse spectrale, dans cette dernière, une estimation de la fonction de transfert est donnée par:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \quad (1.12)$$

en un nombre fini de fréquences  $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$

avec: 
$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N y(t) e^{-j\omega t} \quad (1.13.a)$$

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-j\omega t} \quad (1.13.b)$$

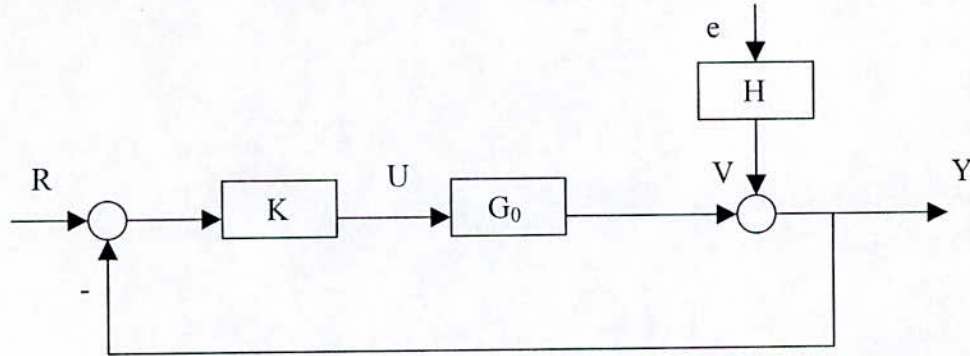
désignent les transformées de Fourier discrètes de Y(t), U(t) respectivement (avec  $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ ), N étant la longueur de la séquence U(t) (ou y(t)).[3]

$\hat{G}$  est appelée l'estimée empirique de la fonction de transfert (*Empirical transfer function estimate* ETFE).



**1.2 Identification en boucle fermée:**

Dans le cas d'une identification en boucle fermée (figure (1.3)), le signal de commande et la perturbation v ne sont plus indépendants(à cause de la boucle de retour):



**Figure (1.3): système en boucle fermée.**

K représente la fonction de transfert du régulateur.

Le signal de commande est donné par l'équation:

$$U = (1 + K G)^{-1} K (r - y) \tag{1.14}$$

Et sachant que:

$$Y = G_0 K (1 + G_0 K)^{-1} r + (1 + G_0 K)^{-1} V \tag{1.15}$$

L'erreur de prédiction s'écrit alors:

$$\varepsilon_r(t, \theta) = [(G_0(q) - G(q, \theta))K(q) r(t) + (1 + G(q, \theta)V(t))](1 + G_0(q)K(q))^{-1} H^{-1}(q)L(q) \tag{1.16}$$

et qui s'écrit, dans le domaine fréquentiel (quand le nombre de mesures tend vers l'infini), selon Parseval, comme suit:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left[ |(G_0 - G)K(1 + G_0K)^{-1}|^2 \phi_r + |(1 + GK)(1 + G_0K)^{-1}|^2 \phi_v \right] |H^{-1}L|^2 \right\} d\omega \tag{1.17}$$

Elle peut également s'écrire de la manière suivante, (Annexe A):

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left| \frac{S_0 - S}{S} \right|^2 \phi_r + \left| \frac{S_0}{S} \right|^2 \phi_v \right\} d\omega \tag{1.18}$$

où  $S_0$  et  $S$ , désignent respectivement les fonctions sensibilité réelle et modélisée:

$$S_0 = (1 + KG_0)^{-1} \quad \text{et} \quad S = (1 + KG)^{-1}.$$



Le vecteur paramètre  $\theta$  doit donc minimiser le critère ci dessus.

**Remarque:**

1. Quand l'identification est réalisée en boucle fermée, le modèle identifié sera très précis dans la plage de fréquence entourant la fréquence de coupure de la boucle ( $KG_0 = -1$ ), car un grand poids  $y$  est mis [11].
2. Dans la plage de fréquence où  $\phi_r \gg \phi_v$ , le modèle identifié en boucle fermée, minimise la norme  $H_2$  (chapitre 2) de la différence entre les transferts en boucle ouverte  $KG_0$  et  $KG$ , pondérée par la fonction sensibilité.

**1.3. Validation du modèle:**

comment savoir si le modèle obtenu est bon?

Ceci peut se faire de plusieurs manières, par exemple comparer le modèle obtenu avec d'autres méthodes d'identification non paramétrique (corrélation, analyse spectrale).

On peut aussi se guider par les informations à priori, sur le comportement du système. Mais le moyen le plus approprié et le plus utilisé, est la comparaison de la sortie du modèle, à celle mesurée, pour l'ensemble de données non utilisées pour l'identification, cet ensemble donné est appelé: données de validation, ou "*Validation DATA*" [2].

**1.4. Exemples:**

Dans ce qui suit, on va identifier un système SISO, et un autre MIMO, afin de mieux comprendre ce qui a été dit précédemment.

Pour cela, on va se donner un modèle mathématique, supposé être le système réel à identifier.

**1. Système SISO:**

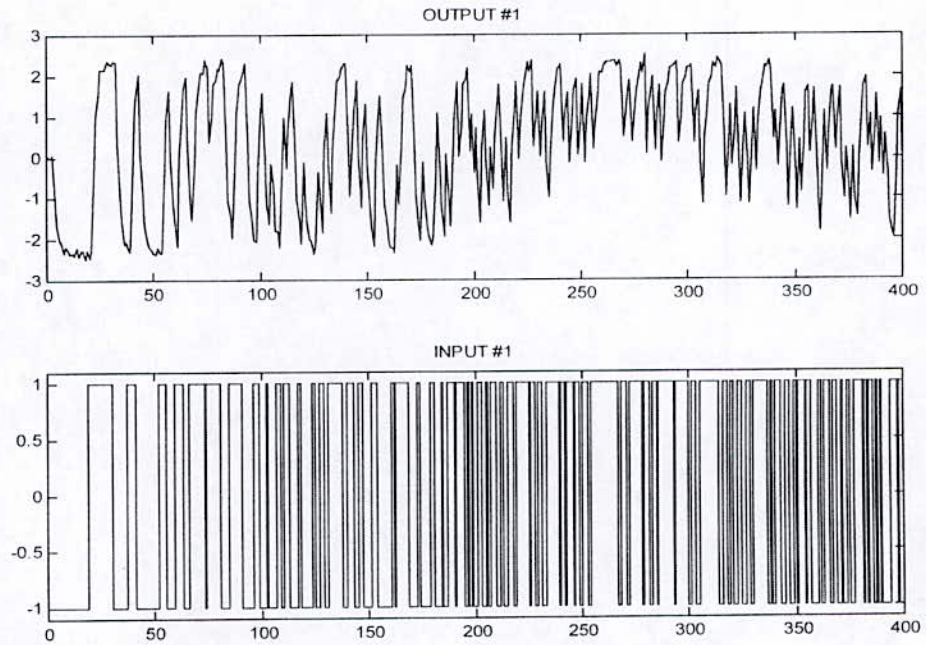
Soit le système donné par la fonction de transfert suivante:

$$G_0(z) = \frac{z + 1}{(z - 0.5)(z - 0.2)(z + 0.1)(z + 0.7)}$$

Et on va utiliser comme perturbation, un bruit coloré résultant par le passage d'un bruit blanc par le filtre passe haut suivant:

$$H(z) = \frac{0.5 - 0.5z}{1 + 9z}$$

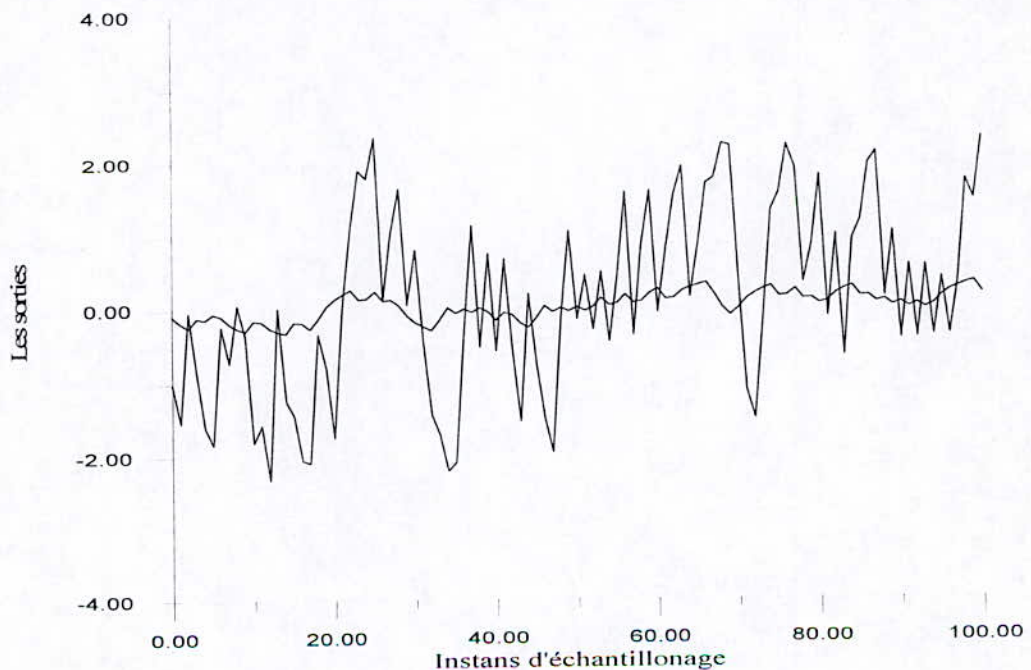
On utilise comme signal d'entrée, une séquence binaire pseudo-aléatoire SBPA, de longueur 2000, dont 1000 seront utilisés pour l'identification.



**Figure (1.4):** Les données entrée-sortie.

On va choisir la structure ARX pour identifier ce système, par l'algorithme des moindres carrés, et on prendra comme degrés pour les polynômes A et B:4 et 2 respectivement ,avec un retard nul .

En comparant la sortie réelle du système à celle du modèle obtenu, on voit qu'elles sont nettement différentes(figure (1.5)).

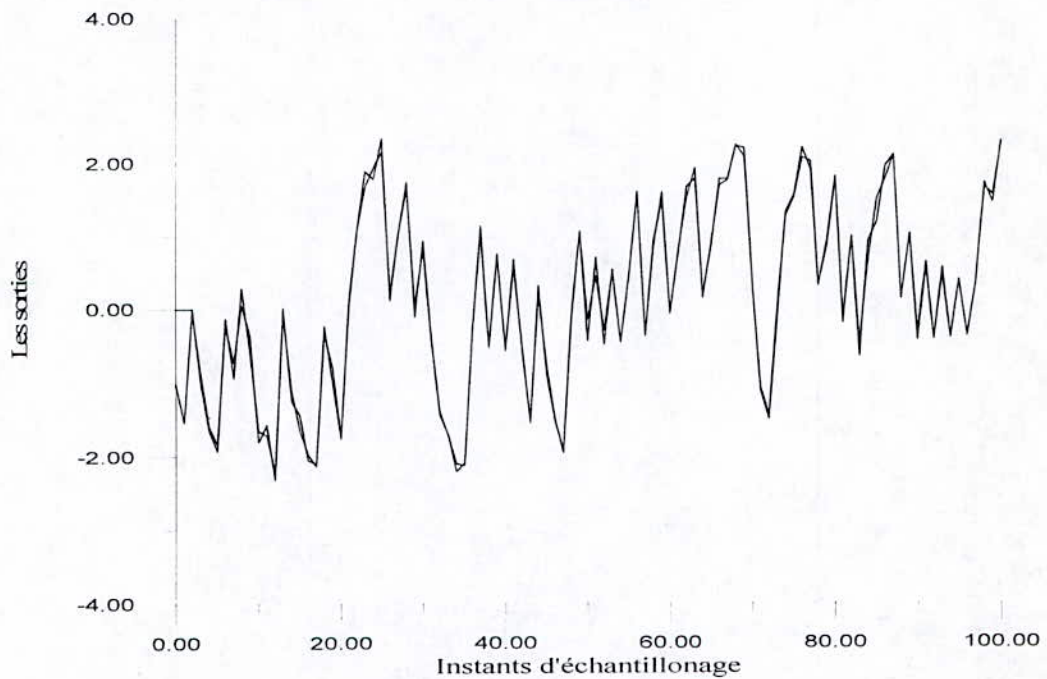


**Figure (1.5):** Les réponses simulées (-.-) et réelles ( \_ ) pour le modèle 1.



De là, on voit que la structure choisie n'est pas la bonne, puisque le modèle ne reproduit pas bien les données, donc il faut choisir une autre structure.

En utilisant la structure (1.1), avec les degrés:[0 2 0 2 3], on obtient ceci:



**Figure (1.6): Les réponses simulées (-) et réelles ( \_ ) pour le modèle 2.**

On constate que la sortie de ce modèle coïncide avec la sortie réelle, ce qui montre que ce modèle décrit bien le système réel.

La fonction de transfert du modèle est la suivante:

$$G(s) = \frac{1.0072 z + 0.9807}{z^4 + 0.3402 z^3 - 0.4965 z^2}$$

2. *Système MIMO :*

Prenons maintenant le système multivariable suivant:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en utilisant deux entrées SBPA, on va identifier chaque transfert ( $U_i, Y_l$ );  $i, l = 1, 2$ , selon la procédure décrite précédemment.

Les structures de modèles ainsi que les degrés de chaque fonction de transfert, ont été choisis comme suit:

Posons d'abord:  $D = [n_a \ n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ k]$

Transfert ( $u_1, y_1$ ): structure à erreur de sortie(oe), avec  $n_a = 2, n_b = 1$ , et  $k = 0$ ;

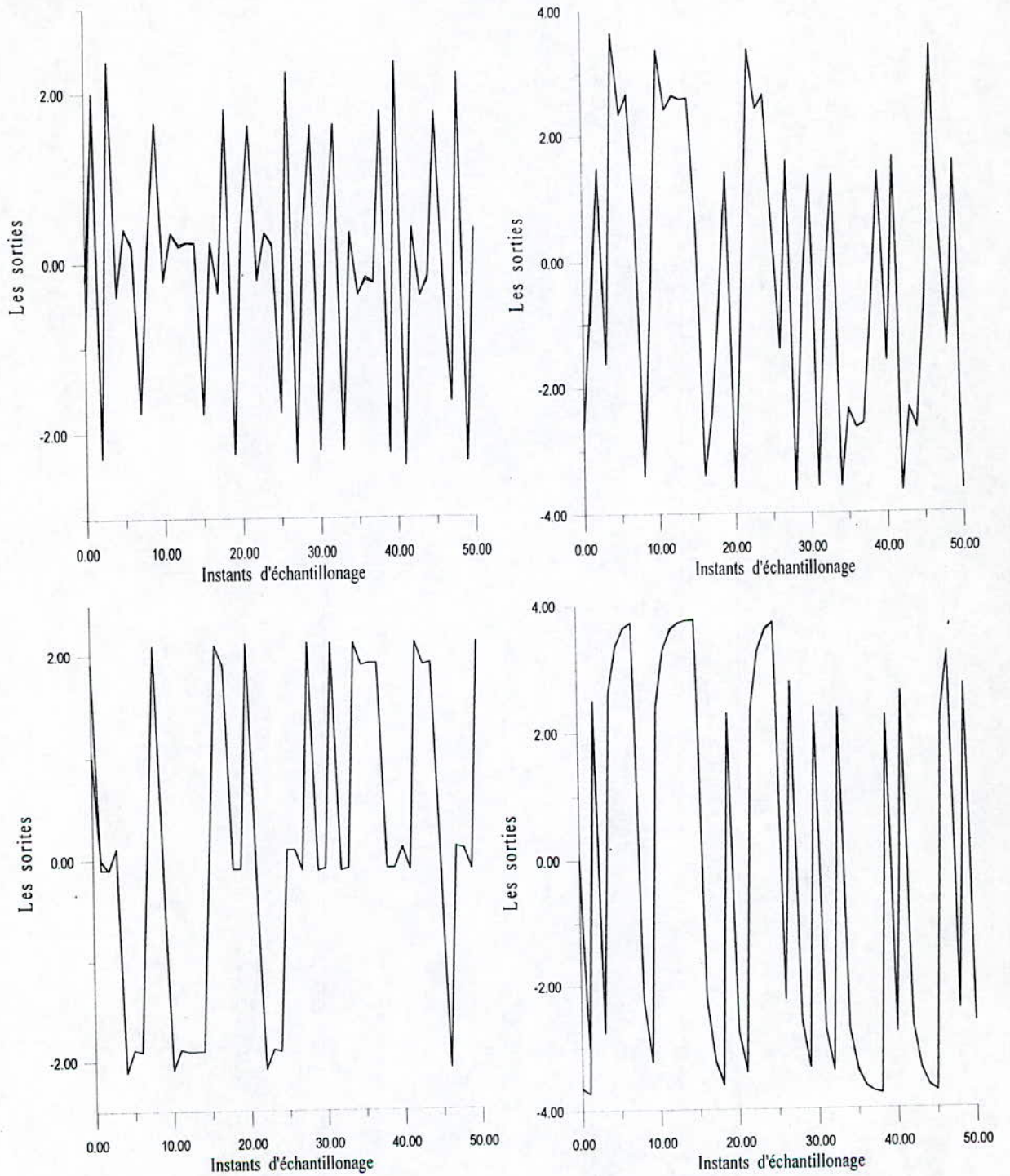


Transfert(u1, y2): structure ARMAX, avec  $D=[1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ;

Transfert(u2, y1): structure ARMAX, avec  $D=[2 \ 2 \ 0 \ 0]$ ;

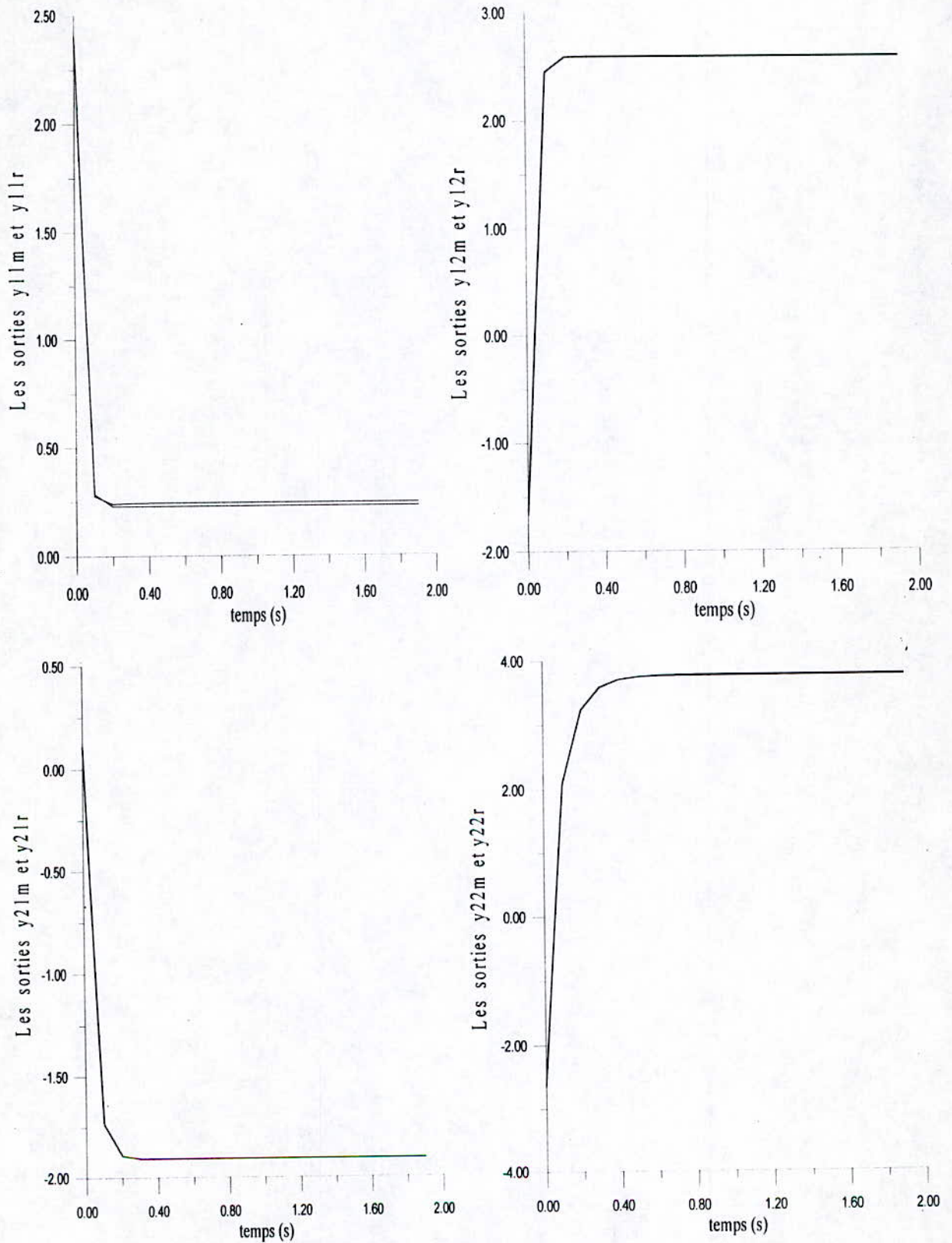
Transfert(u2, y2): structure ARMAX, avec  $D=[1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ .

La figure suivante montre la comparaison entre les sorties du modèle et du système réel:



**Figure (1.7):** Les réponses simulées (--) et réelles (—).

Les sortie du modèle et du système réel multivariable sont parfaitement confondues, ce qui montre que le modèle décrit bien le système; ceci est confirmée par les réponses indicielles du système réel et du modèle:



**Figure (1.8):** Les réponses Indicielles du modèle (---) et réelles (—)

Dans les exemples précédents, on a vu comment le choix de la structure de modèles et des degrés des polynômes influent sur la qualité du modèle identifié, et que la comparaison entre les sorties réelles et simulées constitue un bon moyen de validation.

Donc en résumé, les étapes à suivre pour l'identification d'un système sont les suivantes:

1. Effectuer des expériences sur le processus à identifier, et collecter les données entrées/sorties.
2. Prêtraitement des données (par exemple filtrage des données pour favoriser certaines fréquences, mais cette phase n'est pas obligatoire).
3. Choisir une structure de modèle.
4. Calculer le meilleur modèle de cette structure.
5. Examen des propriétés du modèle, et validation. Si le modèle est mauvais, refaire l'étape 3 ou 1.

### **Conclusion:**

Dans ce chapitre, on a présenté les éléments essentiels permettant la modélisation mathématique de procédés physiques, par l'utilisation de jeu de données entrée/sortie.

On a constaté qu'une telle modélisation, ne se soucie pas en quoi le modèle servira.

Une méthode d'identification paramétrique par erreur de prédiction a été présentée, où la notion de filtre d'identification, ainsi que son rôle à favoriser certaines fréquences pour l'identification ont été introduits.

on verra au chapitre trois, qu'un choix approprié d'un tel filtre, permet de lier explicitement les phases d'identification et de commande.



# Chapitre 2:

## CHAPITRE 2: Synthèse de lois de commande par $H_\infty$ et $H_2$

### 2.1. Introduction:

L'un des premiers problèmes à résoudre, en automatique, fût la modélisation des processus physiques, pour pouvoir les commander. Une solution à ce problème de modélisation par le biais de l'identification, a été développée au premier chapitre.

Du fait que cette représentation mathématique, se base essentiellement sur des hypothèses simplificatrices (telles que la linéarisation, l'idéalisation des organes de mesure et de commande...etc.), on dit que le système est soumis à des phénomènes perturbateurs [4]. Et c'est là, qu'est apparu le problème de robustesse.

La robustesse est définie comme étant, la propriété d'invariance des performances (dont la stabilité vient en premier lieu) du système de commande en dépit des variations de ce dernier par rapport à son modèle nominale.

Et le régulateur est dit robuste, s'il arrive à maintenir la stabilité du système face aux erreurs de modélisation (incertitudes sur le modèle), et à assurer des performances admissibles.

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux commandes robustes, il sera donc divisé en deux parties :

la première est réservée pour l'étude de la commande  $H_\infty$ , on présentera le principe de cette commande, et on donnera deux méthodes de synthèse, l'une par sensibilité mixte et l'autre par factorisation première.

Dans la seconde partie, on présentera le principe de la commande  $H_2$ , et ceci à partir de la commande optimale LQG, et de son extension au domaine fréquentiel.

### 2.2. Etude de la commande $H_\infty$ :

#### 2.2.1. Introduction:

Le problème de la commande  $H_\infty$ , est de synthétiser des régulateurs, permettant d'atteindre différents objectifs, concernant la robustesse de la stabilité, et des performances satisfaisantes, en minimisant la norme infinie de certaines fonctions.

Définissons d'abord mathématiquement cette norme.

$H_\infty$  est un membre de la famille des espaces  $H_p$ , introduits par le mathématicien Hardy. Il est défini comme étant l'espace des fonctions  $F(s)$ , de la variable complexe  $s$ , analytiques et bornées dans le demi plan droit ( $\text{Re } s > 0$ ), dans le sens :

$$\sup \{ \| F \| : \text{Re } s > 0 \} < \infty$$



$$\| F \| = \{ \sup | F(j\omega) | ; \omega \in \mathbb{R} \}$$

et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\|F\|_\infty \geq 0$
- $\|F\| = 0 \Leftrightarrow F=0$
- $\|\alpha F\|_\infty = |\alpha| \|F\| \quad ; \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- $\|F+Q\|_\infty \leq \|F\|_\infty + \|Q\|_\infty.$
- $\|F.Q\|_\infty \leq \|F\|_\infty . \|Q\|_\infty.$

Cette dernière propriété est très importante, car elle est utilisée dans tous les théorèmes de stabilité robuste [5].

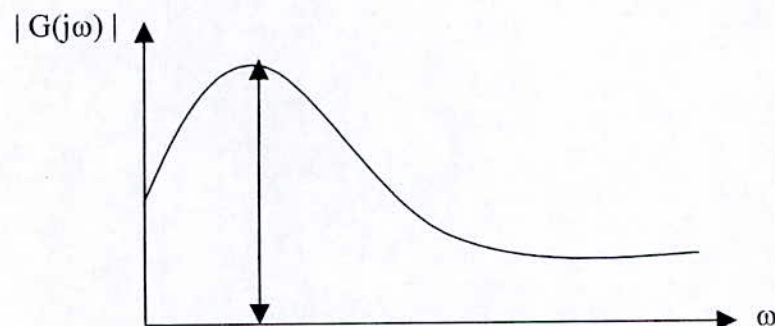
Pour les systèmes multivariables, on définit la norme  $H_\infty$  d'une matrice de fonctions de transfert propres et stables comme suit:

$$\| G \|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma} ( G(j\omega) ) \quad (2.1).$$

$\bar{\sigma}$  étant la plus grande valeur singulière de la matrice  $G(s)$ . (Annexe [B]).

#### interprétation physique de la norme $H_\infty$ [4]:

Dans le cas monovarié, la norme  $H_\infty$  est la valeur maximale du module de  $G(j\omega)$  (figure(2.1)).



**Figure(2.1):** Définition de la norme  $H_\infty$  dans le cas monovarié.

Supposons que le signal d'entrée du système,  $u(t)$  soit d'énergie finie; c'est à dire:

$$\| u(t) \|_2^2 = \int_0^\infty u^*(t) u(t) dt < \infty$$

Si :

$$y(t) = g(t) * u(t) ;$$

avec: \* désigne le produit de convolution,  
et  $G(s)$  est stable et propre, alors on ceci:

$$\| G \|_\infty = \text{SUP}_{\|u(t)\|_2 \leq 1} \| G(t) * u(t) \|_2 = \text{SUP}_{\|u(t)\|_2 \leq 1} \| y(t) \|_2. \quad (2.2).$$

La norme  $H_\infty$  d'une matrice de transfert, mesure donc l'énergie maximale du signal de sortie  $y(t)$ , lorsque le signal d'entrée est d'énergie inférieure ou égale à 1.

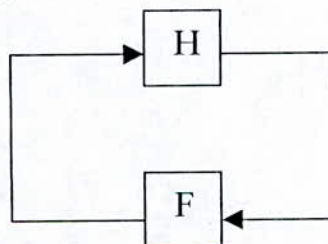
**2.2.2. Principe de la commande  $H_\infty$ :**

On sait que le modèle mathématique, aussi précis soit il, est inévitablement différent du système réel, et que le modèle nominale associé à la plus grande erreur de modélisation induisent ensemble une famille de modèles, dont le système réel fait parti. Si on arrive à synthétiser une commande qui stabilise ce modèle (avec la plus grande incertitude), alors on est sûr de stabiliser chaque membre de cette famille, en particulier le système étudié, c'est à dire on commande le pire des cas : « Worst case control » .

Dans ce qui suit, on va donner le théorème de base sur lequel se base l'étude de la stabilité robuste, puis on présentera deux approches de synthèse  $H_\infty$  .

**Théorème des petits gains[5]:**

Soit le système représenté par :



**Figure (2.2)**



Pour  $H(s)$  et  $F(s)$  des matrices de transfert propres et stables, si :

$$\bar{\sigma}(H(j\omega)) \bar{\sigma}(F(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in \mathcal{R}$$

alors le système est stable.

Ou, en termes de normes  $H_\infty$ :

$$\|H\|_\infty \|F\|_\infty < 1$$

### 2.2.3 Synthèse par sensibilité mixte:

On va d'abord voir, comment représenter dans ce cas, les incertitudes sur les modèles, et ceci pour pouvoir utiliser le théorème des petits gains, dans l'analyse de la robustesse de la stabilité.

#### 2.2.3.1 Modélisation des incertitudes d'un système bouclé :

Les incertitudes affectant le système qu'on désire commander sont de deux types :

- Les incertitudes structurées: le système est caractérisé par un vecteur de paramètre  $\theta$ , avec  $\theta \in \Theta$ , où  $\Theta$  est l'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$  (qui est mal connu).  
L'incertitude structurée affecte donc, la connaissance de certains paramètres physiques bien localisés (exemple: la masse, l'inertie, le centre de gravité... etc.) .
- Les incertitudes non structurées: elles sont dues aux dynamiques négligés (non linéarité, idéalisation des éléments de commande... etc.).

Dans le cadre de la commande  $H_\infty$ , on représente le système perturbé par une matrice de transfert nominale, et une incertitude non structurée sous forme de matrice de transfert linéaire invariante  $\Delta(s)$ .

Une incertitude non structurée est une incertitude qui n'est connue que par une majoration de sa norme :

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < \delta(j\omega) ; \quad \forall \omega \in \mathcal{R} \quad (2.3).$$

donc :

$$\Delta = \{ \Delta(j\omega) \quad , \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \delta(j\omega) \} \quad (2.4).$$

$\Delta$  représente un ensemble infini de matrices de transfert [5].

Le principal modèle d'incertitude est représenté à la figure (2.1), où le bloc "H" représente le système de commande dont on veut étudier la robustesse, et le bloc " $\Delta_H$ " représente l'erreur de modélisation (perturbation de la dynamique) du système de commande et qui est supposée inconnue mais stable.

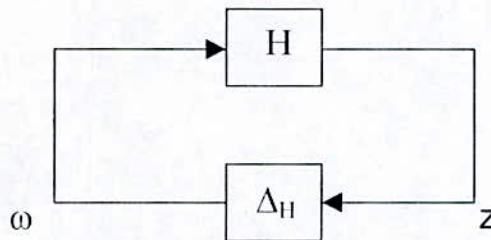


Figure (2.3) : le principal modèle perturbation

Ce modèle d'incertitude peut être déduit en considérant plusieurs types d'incertitudes. Dans ce qui suit, on présentera deux types d'incertitudes :

a) incertitudes additives :

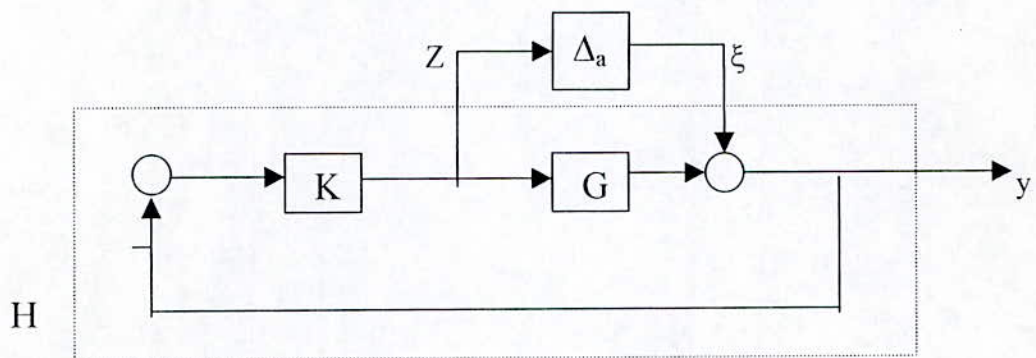


Figure (2.4) : système bouclé avec incertitude additive

G : Matrice de transfert nominale.

$\Delta_a$  : incertitude additive vérifiant :

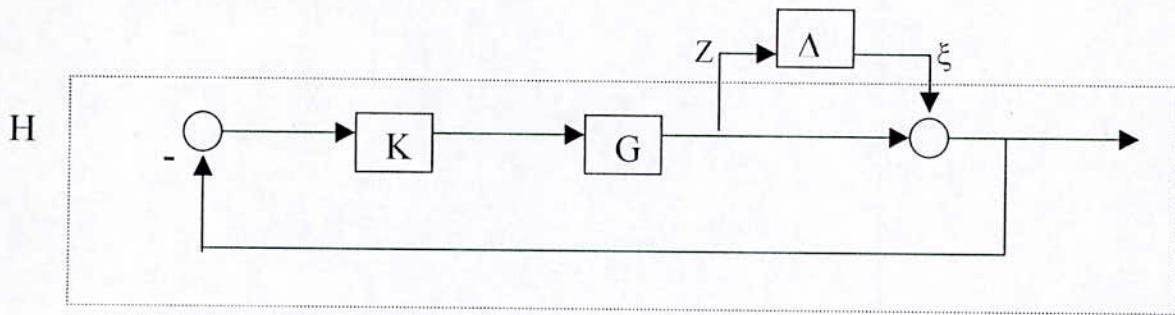
$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) < \delta_a(j\omega) \tag{2.5}$$

et le système perturbé est donné par :

$$G_p(s) = \{ G(s) + \Delta_a(s) / \bar{\sigma}_a(\Delta_a(s)) < \delta_a(s) \} \tag{2.6}$$



**b) Incertitude multiplicative :**



**Figure(2.5) :système bouclé avec incertitude multiplicative.**

Et exactement de la même manière, le système perturbé est donné par :

$$G_p(s) = \{ (I + \Delta_m)G(s) , \bar{\sigma}(\Delta_m(s)) \leq \delta_m(s) \} \quad (2.7).$$

Notons que ces incertitudes sont caractérisées par une borne supérieure sur leurs valeurs singulières qui est supposée connue. Au chapitre trois on présentera une méthode d'estimation de cette borne sur l'erreur de modélisation.

**2.2.3.2 Analyse de la stabilité robuste et des performances:**

**a/ Etude de la stabilité robuste:**

En supposant que le modèle nominal bouclé est stable, et en appliquant le théorème des petits gains, énoncé précédemment, au système perturbé en boucle fermée de la figure (2.3), avec  $\Delta$  un bloc linéaire stable.

Pour que le système en boucle fermée de la figure (2.3) soit stable, il suffit d'avoir:

$$\| \Delta \|_\infty \| H \|_\infty < 1 \quad (2.8)$$

**a.1) Cas d'une incertitude additive :**

D'après le schéma de la figure (2.4), où le bloc H représente le transfert entre Z et  $\xi$ , avec :

$$H = K(I + GK)^{-1} = KS. \quad (2.9).$$

S représente la fonction de sensibilité du système.

Le bloc  $\Delta_a$  est propre et stable, vérifiant:

$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) \leq \delta_a(j\omega) ; \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (2.10).$$

alors nous avons:

les hypothèses précédentes étant vérifiées, et sachant que  $K(s)$  stabilise le modèle nominal, le système perturbé demeure stable, sous l'effet de  $\Delta_a$  vérifiant (2.10), si :

$$\|KS\|_\infty \|\delta_a\|_\infty < 1 \quad (2.11)$$

### a.2) Cas d'une incertitude multiplicative :

Exactement de la même manière, et d'après la figure (2.5), le transfert  $H$  est donné par :

$$H = KG(I+GK)^{-1} = T. \quad (2.12)$$

$T$  est appelé la fonction sensibilité complémentaire du système.

Le bloc  $\Delta_m$  est propre et stable vérifiant :

$$\bar{\sigma}(\Delta_m(j\omega)) \leq \delta_m(j\omega); \quad \forall \omega \in \mathfrak{R}. \quad (2.13)$$

Nous avons le résultat suivant:

Les hypothèses précédentes étant vérifiées, et sachant que  $K(s)$  stabilise le modèle nominal, le système perturbé demeure stable, sous l'effet de  $\Delta_m$  vérifiant (2.13), si :

$$\|T\|_\infty \|\delta_m\|_\infty < 1 \quad (2.14)$$

### Remarque:

Le problème d'analyse de la stabilité robuste peut être formulé autrement dans le cas où on ne possède pas d'informations sur la borne supérieure de l'incertitude. Prenons le cas de l'erreur multiplicative, on ne connaît pas la borne de  $\Delta_m$ , mais on veut que le système soit stable pour la plus grande incertitude possible. La condition de stabilité robuste s'écrit :

$$\|\delta(j\omega)\|_\infty < 1/\|T(j\omega)\|_\infty \quad (2.15)$$

Maximiser l'incertitude revient donc à minimiser  $\|T\|_\infty$ . Donc le problème de stabilité robuste optimale consiste à trouver un régulateur  $K(s)$  stabilisant  $G$  et tel que :

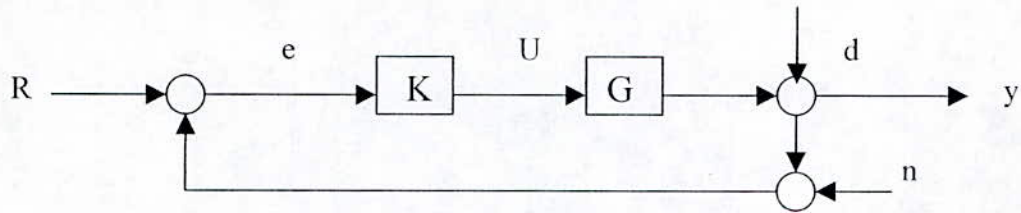
$$\|GK(I+GK)\|_\infty \text{ est minimale.}$$

C'est le problème de la commande  $H_\infty$  optimale.



**B/Etude des performances:**

Soit le système de commande suivant :



**Figure (2.6)**

On a ceci :

$$Y = GK (I+GK)^{-1} (r - n) + (I+GK)^{-1} d = T (r - n) + S d$$

$$U = K (I+GK)^{-1} (r - n - d) = K S (r - n - d)$$

$$E(s) = (I+GK)^{-1} (r - n - d) = S (r - n - d)$$

$$T(s) + S(s) = I$$

(2.16)

D'après ces relations existantes entre les différents signaux en boucle fermée, on a ceci:

- Pour avoir une bonne poursuite, c'est à dire  $e \approx 0$ , il faut minimiser  $\| S \|_\infty$ , et il en est de même pour le rejet de perturbations.
- Pour atténuer les bruits de mesure, il faut minimiser  $\| T \|_\infty$ .
- Pour limiter l'amplitude de la commande, il faut minimiser  $\| KS \|_\infty$ .

A cause de la complémentarité de S et T (S est la fonction sensibilité et T la fonction sensibilité complémentaire), on ne peut pas minimiser  $\| T \|_\infty$  et  $\| S \|_\infty$  dans la même plage de fréquences, pour satisfaire les exigences citées, un compromis donc doit être fait .

De façon générale, la théorie suppose l'existence de fonctions de transfert  $W_s$  et  $W_T$ , telles que les objectifs précédents sont réalisés (y compris la stabilité), si le régulateur K assure:

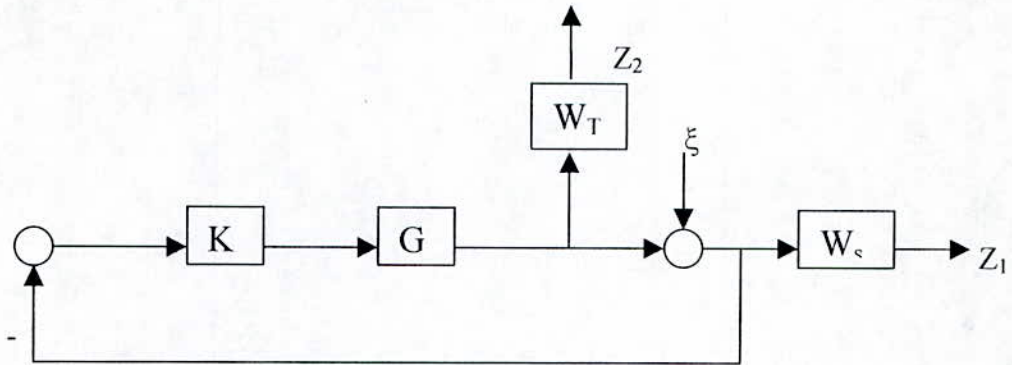
$$\| W_s S \|_\infty \text{ et } \| W_T T \|_\infty \text{ sont minimums.}$$

Avec  $W_s$  et  $W_T$  sont respectivement des filtres passe bas et passe haut, on verra après comment les choisir (ils servent à faire un loop shaping).

Le problème revient donc à trouver un régulateur  $K(s)$ , stabilisant le système nominal  $G(s)$  et minimisant  $J(s)$ , avec :

$$J(s) = \left\| \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.17)$$

Notons que ce critère représente la matrice de transfert entre  $\xi$  et  $Z'=[Z_1 \ Z_2]$  de la figure ci-dessous :



**Figure(2.8) :système bouclé fictif.**

En effet, on a:

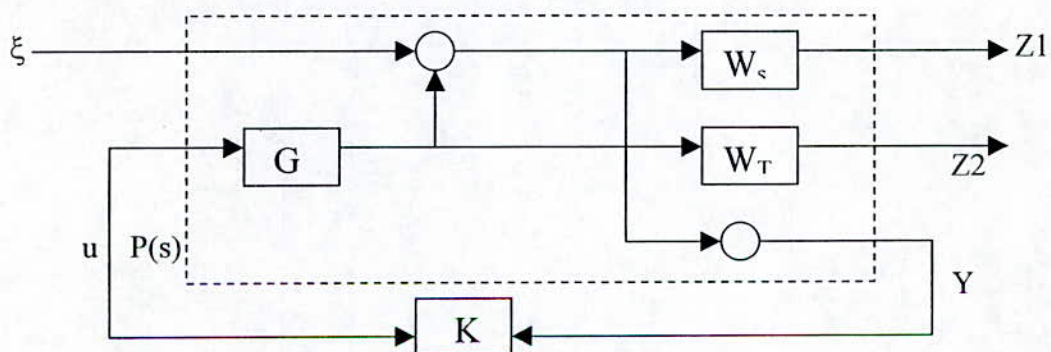
$$Z_1 = W_s S \xi \quad \text{et} \quad Z_2 = -W_T T \xi.$$

Où  $\xi$  est une entrée quelconque, et  $Z_1, Z_2$  des sorties quelconques.

posons: 
$$G_{zw} = \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.18.a)$$

on a ainsi : 
$$Z = G_{z\xi}(s) \xi. \quad (2.18.b)$$

Le schéma précédent peut être réarranger de la manière suivante :



**Figure (2.9)**



Où:

$$P(s): \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_s & W_T G \\ 0 & W_T G \\ -I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

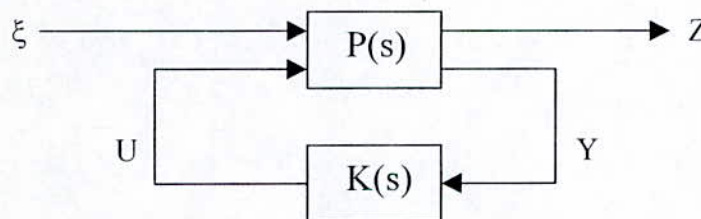
$P(s)$  est le système augmenté, qui nous permet de générer  $Z$  correspondant aux objectifs de commande.

### 2.2.3.3. Problème de la commande $H_\infty$ standard :

Dans ce qui a précédé, on a vu comment traduire les différents objectifs à atteindre (le cahier de charge), sous forme de minimisation de normes infinies.

une forme standard regroupant tous les problèmes de la commande  $H_\infty$  est utilisée, pour éviter de traiter chaque problème indépendamment.

Soit le schéma général de la figure suivante :



**Figure(2.10) :schéma standard.**

C'est le schéma standard sur lequel a été développée la théorie  $H_\infty$ , il a été proposé pour la première fois en 1984 par Doyle, il contient deux blocs; l'un représente le modèle général du processus (incluant des pondérations), et l'autre le régulateur à synthétiser.

Les entrées se composent d'entrées de commande  $U$  et d'entrées exogènes  $\xi$ . La différence entre les deux, est que le régulateur ne peut manipuler les entrées exogènes .

De même, les sorties se partagent en deux: les sorties  $Y$  mesurées et bouclées à travers  $K$ , et les sorties  $Z$  à contrôler.

Le retour de sortie  $U=-K(s)Y$ , engendre le transfert en boucle fermée  $Z =G_{z\xi} \xi$ .

**Problème [10] :**

Le problème  $H_\infty$  standard consiste à trouver un régulateur  $K(s)$  stabilisant, et tel que la matrice de transfert de  $\xi$  vers  $Z$ , vérifie :

$$\|G_{Z\xi}\| < \gamma; \quad \gamma \text{ étant un scalaire positif.} \quad (2.20)$$

D'après (2.20), il est clair que plus  $\gamma$  est petit, meilleure est la robustesse.

Le problème  $H_\infty$  optimale étant difficile à résoudre directement, le problème  $H_\infty$  standard peut fournir une solution sous optimale, ceci en cherchant le plus petit  $\gamma$  à travers l'algorithme de « $\gamma$ -itération».

**2.2.3.4. Choix des fonctions de pondération[6]:**

Tout le problème de la commande  $H_\infty$ , réside dans le choix adéquat des pondérations fréquentielles, car il n'existe pas de méthode systématique permettant un choix direct. Il faut donc procéder de manière itérative.

On peut se guider du cahier de charges, pour faire un choix à priori, tel que le comportement asymptotique des différents transferts en boucle fermée, et la bande passante désirée.

Nous donnons ci-après des pondérations paramétrisées, dont les paramètres seront optimisés selon le cahier de charges.

**Filtres de type:**  $W(s) = \bullet [(s + \bullet) / (s + \bullet)]$  et  $W(s) = [\bullet / (s + \bullet)]$ :

Pour le premier transfert, on a trois degrés de liberté, et on cherche son expression, en fonction des paramètres suivants:

$$\begin{cases} G_0 = |W(0)| \\ G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(j\omega)| \\ \omega_c / |W(j\omega)| = 1 \end{cases} \quad (2.21).$$

ces paramètres ont un sens pour un cahier de charges donné, par exemple  $G_0$  et  $G_\infty$  peuvent être les gains désirés en basses et en hautes fréquences respectivement, de la fonction sensibilité ou sensibilité complémentaire.

L'expression du premier transfert est donnée par:



$$W(s) = \frac{G_\infty \sqrt{|G_0^2 - 1|} s + G_0 \omega_c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{\sqrt{|G_0^2 - 1|} s + \omega_c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}} \quad (2.22)$$

L'utilisation des valeurs absolues, nous permet d'avoir une expression valable aussi bien pour un filtre passe bas que pour un filtre passe haut.

Pour le second transfert, nous n'avons que deux degrés de liberté, et nous cherchons l'expression en fonction des paramètres suivants:

$$\begin{cases} G_0 = |W(0)| \\ \omega_c / |W(\omega_c)| = 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

l'expression du second transfert est donnée par:

$$W(s) = \frac{G_0 \omega_c}{\sqrt{G_0^2 - 1} s + \omega_c} \quad (2.24)$$

avec:  $G_0 > 1$ .

Dans [6], on donne aussi une forme de pondération du second ordre, paramétrisant tout type de filtres, et dans [5], on montre comment choisir  $W_s$ , connaissant la bande passante et l'erreur statique désirées.

Ainsi connaissant les spécifications du cahier de charges concernant la forme des fonctions  $S$  et  $T$  ( $S$  petite en basses fréquences et  $T$  en hautes fréquences), on peut faire un choix à priori des fonctions poids, puis les ajuster de manière à réaliser les différents compromis.

#### Remarque :

La complexité du régulateur (son ordre) étant dépendante de l'ordre de  $G$  et de  $W_S$  et  $W_T$ , (l'ordre du régulateur est égale à l'ordre du modèle nominale  $G$  plus l'ordre de  $W_S$  et  $W_T$ ), il est préférable de choisir des fonctions de pondération d'ordre 1.

**2.2.4. Synthèse par factorisations premières:**

Dans ce qui suit, on va présenter une autre méthode de synthèse, basée sur l'algorithme de McFarlane [7].

**2.2.4.1. Modélisation des incertitudes à partir de factorisation première:**

Ce type de représentation a été introduit à partir de la factorisation première d'une matrice de transfert que nous allons présenter en premier lieu:

**Définition (2.2.4.1):** Deux matrices de transfert:  $N(s)$  et  $M(s)$  de  $H_\infty$ , constituent une factorisation première à droite d'une matrice de transfert  $G(s)$ , de dimension  $p \times m$  si et seulement si:

- $M(s)$  est carrée et inversible.
- $\forall s \in \mathbb{C}, G(s) = N(s) M^{-1}(s)$
- il existe deux matrices  $U'(s) \in H_\infty, V'(s) \in H_\infty$  telles que:

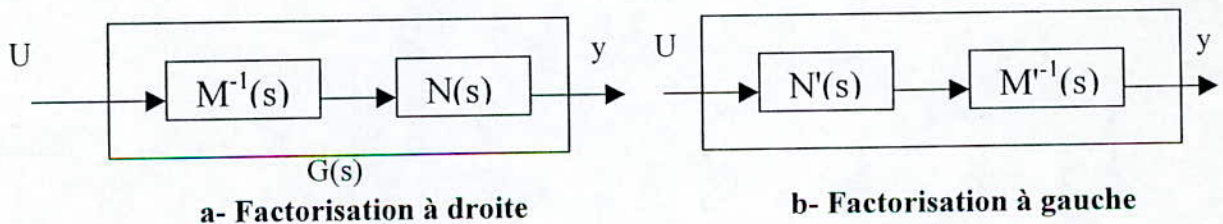
$$\forall s \in \mathbb{C}, V'(s)M(s) + U'(s)N(s) = I$$

Puisque le produit matriciel n'est pas commutatif, on définit la factorisation première à gauche comme suit:

**Définition (2.2.4.2):** Deux matrices de transfert  $M'(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  et  $N'(s) \in H_\infty$  constituent une factorisation première à gauche d'une matrice de transfert rationnelle  $G(s)$  de dimensions  $p \times m$  si et seulement si:

- $M'(s)$  est carrée, et inversible pour presque tout  $s \in \mathbb{C}$
- $\forall s \in \mathbb{C}, G(s) = M'(s)^{-1} N'(s)$
- $\exists U(s) \in \mathfrak{RH}_\infty, V(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  telles que:

$$\forall s \in \mathbb{C} M'(s) V(s) + N'(s) U(s) = I.$$



**Figure (2.11): Représentation par factorisations premières**



Si en plus, on a les propriétés suivantes:

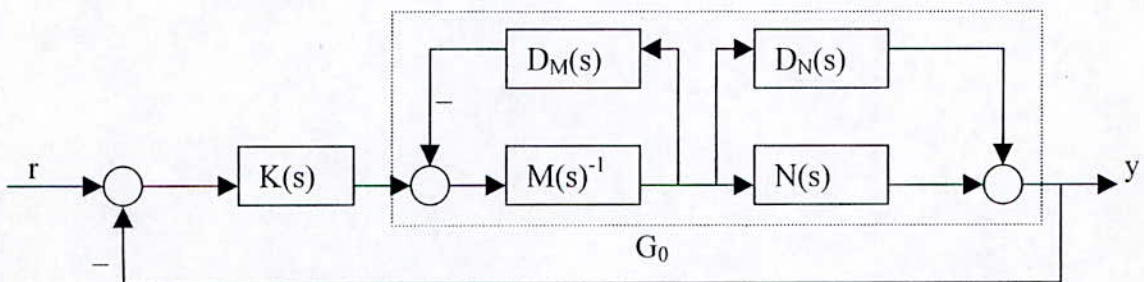
$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{C}: N(-s)^T N(s) + M(-s)^T M(s) &= I_m. \\ \forall s \in \mathbb{C}: N'(-s) N'^T(s) + M'(-s) M'^T(s) &= I_p. \end{aligned} \tag{2.27}$$

la factorisation première à droite ( respectivement à gauche) est normalisée.

Supposons que le modèle nominal du système est donnée par la matrice de transfert  $G(s)$ , et que cette dernière est perturbée (sous l'effet d'erreur de modélisation) en  $G_0(s)$  la matrice  $G(s)$  étant factorisée, sous l'une des deux formes normalisées précédentes, on peut représenter les incertitudes de modélisation par des perturbations de norme bornée, sur chacun des deux facteurs, on aura ainsi:

- Pour la factorisation à droite:

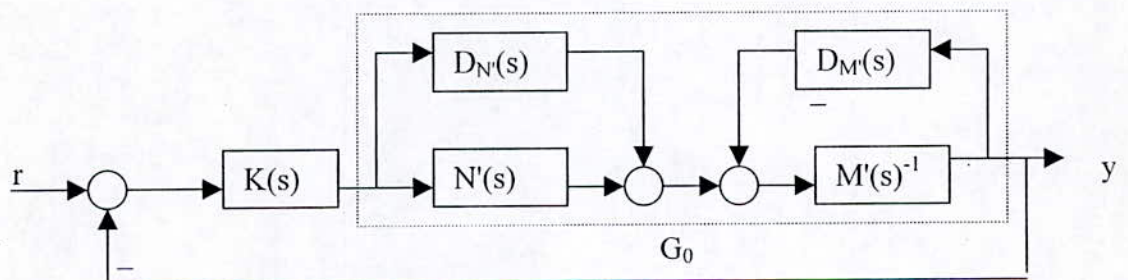
$$G(s) = (N(s) + D_N(s)) (M(s) + D_M(s))^{-1} ; \left\| \begin{matrix} D_M(j\omega) \\ D_N(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty < \delta(\omega) \tag{2.28}$$



**Figure (2.12):** Système bouclé incertain avec factorisation à droite.

- Pour la factorisation à gauche:

$$G_0(s) = (M'(s) + D_{M'}(s))^{-1} (N'(s) + D_{N'}(s)) ; \left\| \begin{matrix} D_{M'}(j\omega) \\ D_{N'}(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty < \delta(\omega) \tag{2.29}$$



**Figure (2.13):** Système bouclé incertain avec factorisation à gauche.

**Remarque:**

Les matrices  $M$ ,  $N$ ,  $M'$  et  $N'$  formant les factorisations à droite et à gauche, sont stables, pour tout  $G(s)$ .

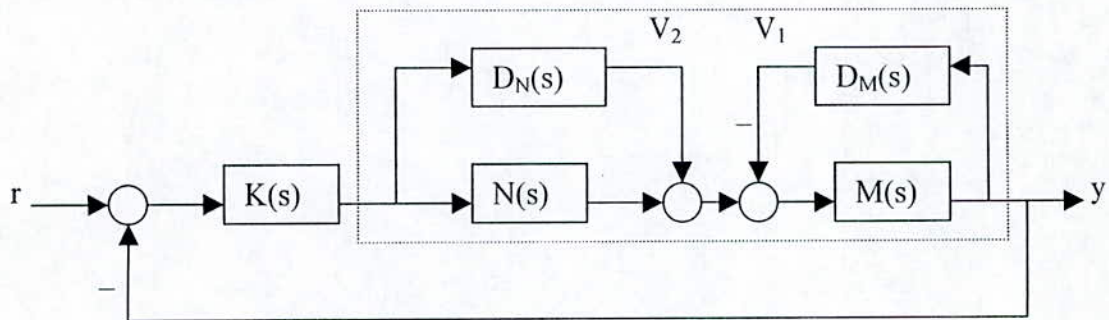
**2.2.4.2 Conditions de stabilité robuste d'un système bouclé modélisé par factorisations premières:**

Nous allons considérer le cas de la factorisation à gauche, et le même traitement peut se faire pour la factorisation à droite.

Soient les matrices de transfert nominale et perturbée:

$$G(s) = M^{-1}(s) N^{-1}(s) ; G_0(s) = (M(s) + D_M(s))^{-1} (N(s) + D_N(s)) \quad (2.30).$$

D'après la figure suivante:



**Figure (2.14): Représentation des incertitudes par factorisations premières.**

On a:

$$V = V_1 + V_2 = \begin{bmatrix} D_M & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Il est facile de montrer que:

$$Y = (I + GK)^{-1} M^{-1}V ; \text{ et} \quad (2.32)$$

$$U = -K (I + GK)^{-1} M^{-1}V$$

D'où:

$$Z = -\begin{bmatrix} -y \\ u \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} M^{-1}V \quad (2.33)$$

Aussi, le schéma de la figure (2.14), peut se transformer comme suit:



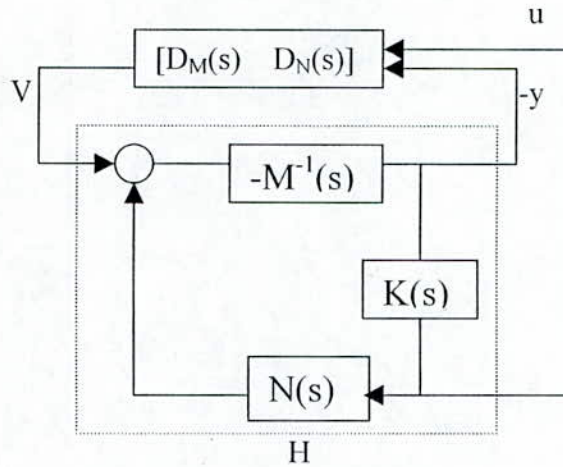


Figure (2.15)

D'après le théorème des petits gains, si la condition suivante est vérifiée:

$$\|H_\infty\| \|D\|_\infty < 1,$$

alors le système de la figure (2.15) est stable.

De manière générale, on a le théorème suivant:

**Théorème[7]:**

Le système bouclé de la figure (2.14) est stable pour toutes incertitudes  $D_M(s)$  et  $D_N(s)$ , telles que:

$$\left\| \begin{matrix} D_M(s) \\ D_N(s) \end{matrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

si la condition suivante est réalisée:

$$J = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty < 1 / \varepsilon \tag{2.34}$$

En utilisant le fait que pour  $[M \ N]$  normalisé:

$$\|H \cdot [M \ N]\|_\infty = \|H\|_\infty \tag{2.35}$$

et:

$$M^{-1} [M \ N] = [I \ G] \tag{2.36}$$

Alors J peut s'écrire comme suit:

$$J = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \begin{bmatrix} I & G \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.37)$$

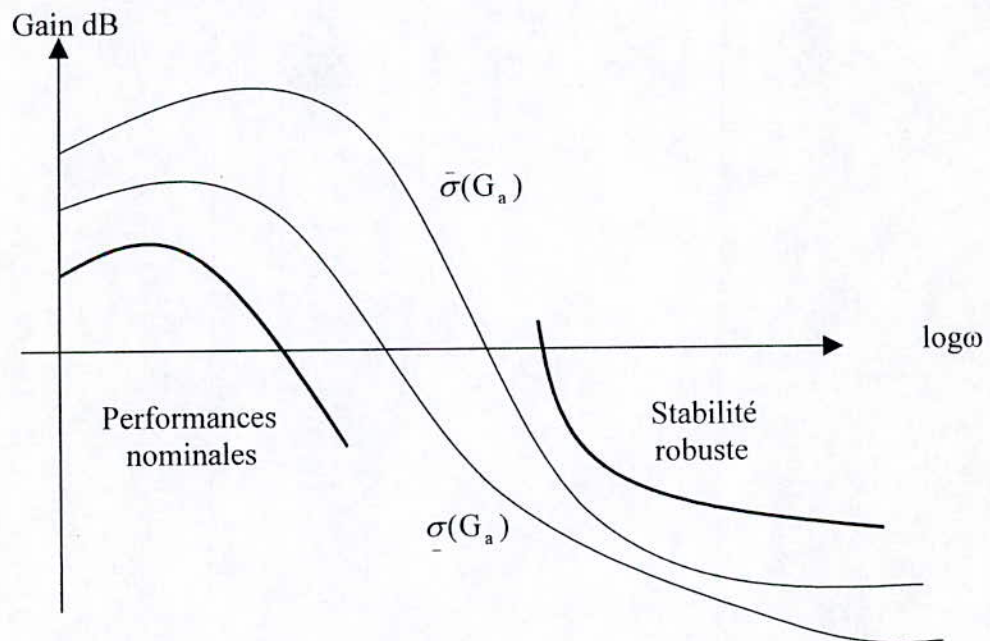
On voit l'avantage d'une telle représentation, où le critère à minimiser  $J$ , contient les transferts  $S$ ,  $KS$ ,  $SG$  et  $KSG$  qui expriment différents objectifs.

Le problème est donc de maximiser  $\varepsilon$  (ce qui revient à minimiser  $\gamma = 1/\varepsilon$ ), et ceci se fait de manière directe, contrairement au problème standard, dont la solution passe par l'algorithme de: " $\gamma$ -itération".

### Procédure de synthèse par "Loop-shaping":

L'inconvénient des résultats cités, est que la solution au problème  $H_\infty$  et donnée sans les pondérations  $W_1$  et  $W_2$ , or l'utilisation de fonctions poids est essentielle pour gérer le compromis performances nominales / robustesse.

Pour remédier à cette situation, on effectue un modelage des valeurs singulières du processus (Loop-shaping), comme dans la figure suivante:



**Figure (2.16):** Loop shaping.

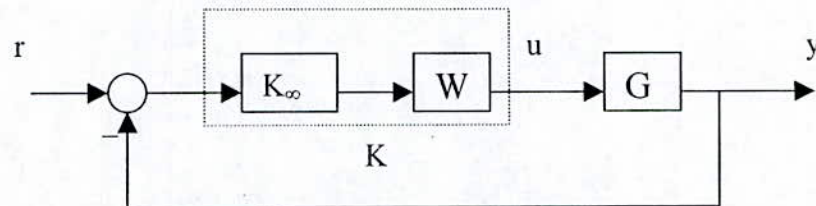


La démarche à suivre est donc:

1. Rajouter au système  $G(s)$ , un précompensateur  $W(s)$ , afin d'ajuster le compromis performance / robustesse, en modelant les valeurs singulières du système augmenté

$$G_a(s) = G(s)W(s)$$

2. A partir des factorisations premières de  $G_a(s)$ , déterminer le correcteur  $H_\infty$ .
3. Le correcteur final, résulte par combinaison du compensateur  $K_\infty$  (trouvé à l'étape 2), et le filtre  $W$  selon la figure:



**Figure (2.17)**

En conclusion:

La commande  $H_\infty$  est une commande linéaire qui prend en considération le problème de robustesse de manière explicite, et permet d'atteindre des objectifs concernant la norme  $H_\infty$  de transferts en boucle fermée.

Nous avons présenté les deux approches de synthèse de la commande  $H_\infty$ , la résolution du problème à sensibilité mixte, sera présentée à la fin du chapitre (pour pouvoir la comparer avec celle de la commande  $H_2$ ), par contre, la résolution par les facteurs premières est donnée à l'annexe [B].

### 2.3. Etude de la commande $H_2$ (LQG) :

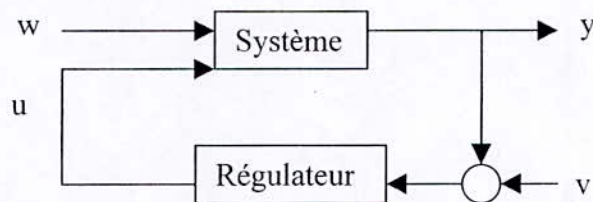
#### 2.3.1. Introduction :

La commande quadratique Gaussienne LQG, est une technique d'optimisation moderne, basée sur la représentation d'état du système, pour synthétiser des régulateurs optimaux (au sens  $H_2$ ).

Combinant des méthodes mathématiques élégantes, et des considérations pratiques, elle offre une solution au problème de commande des systèmes multivariables, et permet de faire le compromis performance en régulation et d'énergie de la commande, et de prendre en considération les bruits de mesure et de procédé.

#### 2.3.2. Principe de la commande LQG :

Le problème de synthèse LQG, concerne le problème de régulation suivant:



**Figure (2.18)**

Le but est de réguler, la sortie du système  $y$  autour de zéro (en l'absence de signal de référence).

Le système est soumis à deux entrées : le bruit du processus  $w$  et la commande  $u$ , et le régulateur, utilise les mesures bruitées  $y_v = y + v$ , pour générer cette commande le système est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y = Cx + Du + v \end{cases} \quad (2.38)$$

$w$  et  $v$  sont considérés des bruits blancs, de moyenne nulle.

Le régulateur LQG consiste d'un gain de retour d'état optimal, et d'un observateur d'état optimal de Kalman.

Ces deux derniers peuvent être synthétisés indépendamment, selon le principe de séparation [8,9]



Pour cela, on donnera un petit aperçu sur le problème de la commande optimale LQR (déterministe), et sur l'estimateur d'état optimal de Kalman, puis on combinera les deux pour former le régulateur LQG, et enfin, on présentera l'extension du problème LQG au domaine fréquentiel où on formulera le problème de la commande optimale  $H_2$ .

### **2.3.2.1 Formulation du problème de la commande optimale LQR [ 8,9]:**

le problème peut être formulé comme suit :

étant donné un système, représenté dans l'espace d'état par :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (2.39)$$

où :  $x$  : désigne le vecteur des états du processus à commander.

$u$  : est la commande

$A$  et  $B$  : désignent respectivement les matrices dynamiques et de commande.

L'objectif est de trouver une loi de commande, par retour d'état :

$$U(t) = - G x(t) \quad (2.40)$$

Où  $G$  est la matrice gain appropriée, pour satisfaire les diverses contraintes imposées, et ceci en minimisant un critère de performances spécifié  $J$  ( ou fonction coût), exprimée sous une forme quadratique de l'état, plus une seconde forme quadratique de la commande  $U$ , c'est à dire :

$$J = \int_t^T [x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)] d\tau \quad (2.41)$$

avec  $Q$  et  $R$  sont deux matrices définies positives symétriques dites : matrices de pondération.

Dans (2.42), la borne inférieure de l'intégrale est l'instant présent  $t$ , et la borne supérieure  $T$  est l'instant finale.

La quantité :  $(T-t)$ , désigne l'intervalle de la commande.

#### **Interprétation du critère $J$ :**

Dans le critère  $J$ , le premier terme quadratique en  $x$ , c'est à dire  $(x^T Q x)$ , exprime la pénalité sur la déviation des états, par rapport à l'origine (qui est la valeur désirée), ceci exprime le problème de régulation.

Et pour le second terme, qui représente le coût de la commande (cost of control), la matrice R, permet de pénaliser l'amplitude (et donc l'énergie) de la commande.

La solution optimale au problème de régulation LQ, donne la loi des commandes suivante :

$$U(t) = - R^{-1} B^T K(t) x(t) \quad (2.42)$$

C'est un retour d'état, où  $K(t)$  est une matrice symétrique définie positive, et solution de l'équation différentielle non linéaire de Riccati, définie comme suit :

$$-\dot{K}(t) = A^T K(t) + K(t) A - K(t) B R^{-1} B^T K(t) + Q \quad (2.43)$$

Ceci, suppose bien sûr l'accessibilité de tous les états à la mesure.

Une autre situation possible est celle où l'on ne s'intéresse qu'aux états qui influent sur la sortie du système :

$$Y = C^T x$$

c'est à dire les états mesurables.

Donc en prenant  $Q = CC^T$ , le critère (2.41) devient :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [y^T(s) y(s) + u^T(s) R u(s)] ds \quad (2.44)$$

**Solution au régime permanent :**

On formule le problème de la commande LQ, à horizon infini comme suit :

Trouver la loi de commande :  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [t, \infty]$ , pour le système donné par (2.38), qui minimise l'indice de performance :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^\infty [x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)] d\tau \quad (2.45)$$

dans ce problème, on s'intéresse au comportement du système, à partir de l'instant initiale (actuel), jusqu'au régime permanent.

L'équation différentielle de Riccati (2.43), devient dans ce cas :

$$KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q = 0 \quad (2.46)$$

Dite équation algébrique de Riccati, et la commande optimale est alors donnée par :

$$U(t) = - R^{-1} B^T K x(t) \quad (2.47)$$



On constate que, contrairement à (2.42), le gain optimale de (2.47) est constant, et K est la solution de l'équation (2.46), symétrique définie positive.

Pour que le problème de régulation à horizon infini ait une solution, il suffit d'avoir ceci [8]:

- Le système est asymptotiquement stable ou,
- Le système défini par (A,B) est commandable, et par (A,C) est observable.

Quand la loi de commande (2.47) est utilisée pour commander le processus dynamique (2.38), le comportement dynamique en boucle fermée, est régi par :

$$\dot{x} = Ax - BGx = A_c x \quad (2.48)$$

Où :

$$G = R^{-1} B^T K \quad \text{et} \quad A_c = A - BG \quad (2.49)$$

$A_c$  est la matrice dynamique en boucle fermée, elle a toutes ses valeurs propres dans le demi plan gauche.

Pour pouvoir appliquer la commande (2.47), par retour d'état, il faut avoir accès de tous les états à la mesure, or en pratique, ce n'est pas le cas pour la majorité des systèmes.

Pour remédier à ce problème, on a introduit un système dynamique dont les états sont des estimations des états du système à commander. Ce système est appelé : observateur d'état.

### **2.3.2.2. L'observateur optimale de Kalman :**

Luenberger a montré que pour n'importe quel système linéaire observable, on peut construire un estimateur d'état, ou observateur, ayant la propriété que l'erreur d'estimation (la différence entre l'état actuel du système et l'état de l'observateur) tend vers zéro, aussi rapidement qu'on le désire. Cette technique de synthèse est équivalente au placement de pôle classique, pour la synthèse d'un retour d'état.

#### **Structure d'un observateur :**

Soit le système dynamique d'écrit par :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.50)$$

Supposons qu'on ne peut mesurer qu'une partie de ses états, c'est à dire :

$$y = Cx \quad (2.51)$$

Où la dimension l du vecteur d'observation y, est inférieure à la dimension n du vecteur d'état x.

Pour pouvoir implémenter la loi de commande par retour d'état :  $u = -Gx$ , on a besoin de la mesure de tous les états, pour cela, on construit un système dynamique, qui donne des estimations  $\hat{x}$  de ces états, le meilleur moyen pour construire un tel système et de rendre ces estimations, la sortie du système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + Bu + L(y - C \hat{x}) \\ &= A_o \hat{x} + Bu + Ly\end{aligned}\tag{2.52}$$

avec :  $A_o = A - LC$ . L'expression de l'observateur est similaire au processus (2.50) à un terme près. L'équation différentielle de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A_o e\tag{2.53}$$

donc, pour que l'erreur d'estimation tende asymptotiquement vers zéro, il faut que la matrice  $A_o$  ait toutes ses valeurs propres, dans le demi plan gauche, c'est la matrice dynamique en boucle fermée (par similitude à la commande par retour d'état), donc la matrice  $L$  doit être choisie, de sorte que  $A_o$  soit stable.

Pour rester dans l'optimalité, on va voir comment  $L$  est choisi de manière optimale dans le cas d'un filtre de Kalman.

Kalman et Bucy ont traité le problème de synthèse d'observateurs optimaux pour des systèmes représentés, de manière plus réaliste, par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fv \\ y = Cx + w \end{cases}\tag{2.54}$$

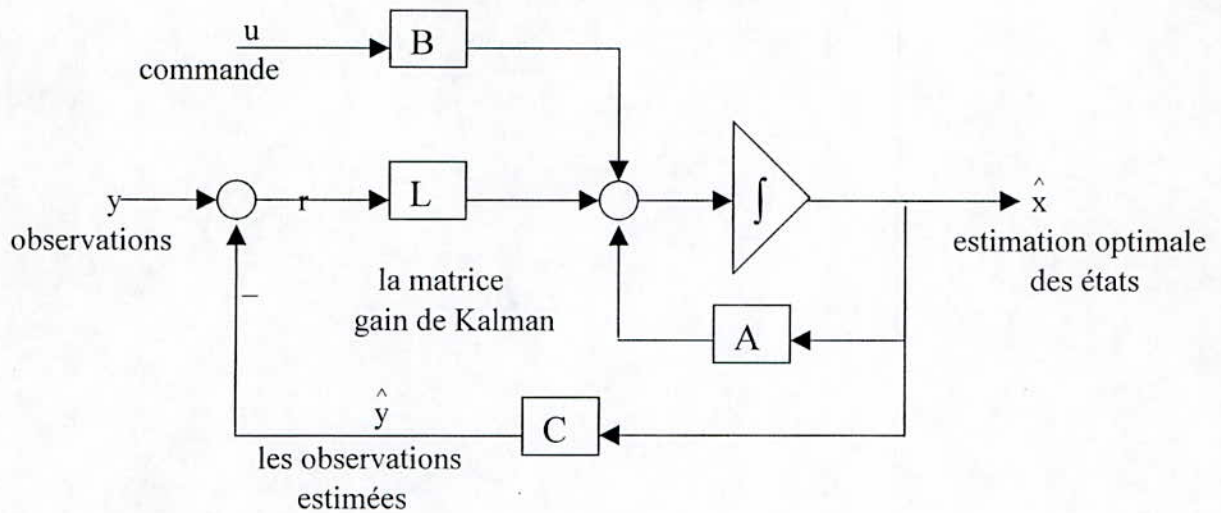
Où :  $u$  est une entrée connue,  $v$  et  $w$  sont des bruits blancs ayant des densités spectrales connues:

$$E(w^T w) = W, \quad E(v^T v) = V$$

Ils donnent pour solution à ce problème, l'estimateur optimal d'état, représenté à la figure (2.17) et décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + Bu + L(y - C \hat{x})\tag{2.55}$$





**Figure (2.17) : structure d'un observateur optimale ( Filtre de Kalmane)**

Le gain optimal de Kalman  $L$  est obtenu, en minimisant la matrice de covariance de l'erreur  $P$ , avec :

$$P = E ((x - \hat{x})(x - \hat{x})^T)$$

Qui vérifie (en considérant un horizon infini), l'équation algébrique de Riccati :

$$AP + PA^T + FVF^T - PC^T W^{-1} CP = 0 \quad (2.56)$$

La matrice est définie positive, et l'équation (2.56) admet une telle solution, sous les conditions :

- le système est asymptotiquement stable, ou
- le système défini par la paire  $(A, B)$  est observable, et celui défini par la paire  $(A, FV^{1/2})$  est commandable [8].

### **2.3.2.3. La synthèse LQG :**

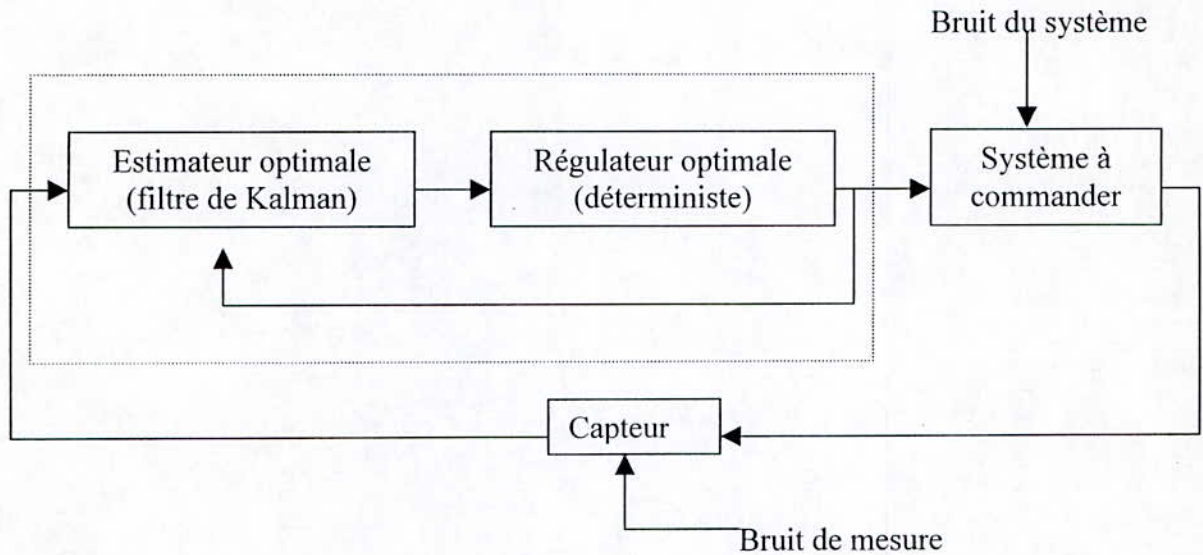
Les deux méthodes citées précédemment, permettent la synthèse d'une loi de commande stochastique, utilisant un retour de sortie au lieu d'un retour d'état, qui optimise les performances, en présence des perturbations.

D'après le théorème de séparation [8], pour optimiser les performances en présence de perturbations, bruit blanc, il suffit de synthétiser le régulateur optimale déterministe, tout en ignorant le bruit, puis utiliser le filtre de Kalman, pour estimer les états qui ne sont pas accessibles.

La solution au problème est obtenue en résolvant les deux équations de Riccati suivantes : (la première pour le gain optimale du retour, la seconde pour le gain de Kalman[9]):

$$\begin{aligned} A^T K + KA - KBR^{-1}B^T K + C^TQC &= 0 \\ AP + PA^T - PC^T W^{-1}CP + FVF &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Le régulateur LQG est une combinaison, donc d'un retour d'état optimal, et d'un filtre de Kalman (figure (2.18)).



**Figure (2.18) : Structure d'un système de commande par LQG**

Et le système en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= (A - BG - LC)\hat{x} + Ly \\ U &= -G\hat{x} \end{aligned} \tag{2.58}$$

**2.3.3. Interprétation de la commande LQG dans le domaine fréquentiel : la commande  $H_2$**

donnons d'abord une définition mathématique de la norme  $H_2$ .  
On définit la norme  $H_2$  d'une matrice  $F(j\omega)$ , comme suit :

$$\|F(j\omega)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (F^*(j\omega) F(j\omega)) d\omega \tag{2.59}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 (F(j\omega)) d\omega \tag{2.60}$$

$q = \min(m, n)$ , et  $\dim (F) = m * n$

$\sigma_i$  : désignent les valeurs singulières de la matrice  $F$ .

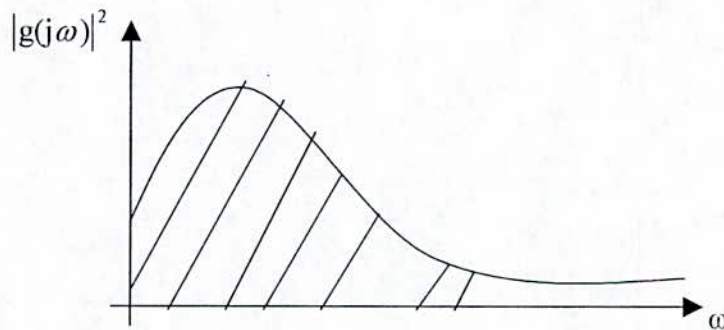


**Interprétation physique de la norme  $H_2$  :**

En terme déterministe, la norme  $H_2$  d'un système linéaire stable est égale à l'intégrale carrée de la réponse impulsionnelle, c'est à dire l'énergie totale du signal obtenu, en réponse à une impulsion de Dirac.

D'un point de vue stochastique, c'est la puissance du signal de sortie, en réponse à un bruit blanc Gaussien normalisé.

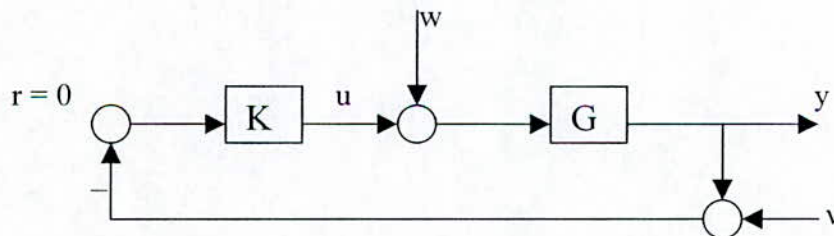
Pour un système monovariante, la norme  $H_2$ , est la racine carrée de la surface présentée ci-dessous :



**Figure (2.19) : la norme  $H_2$  pour un système monovariante**

**2.3.3.1. Régulateur LQG et la norme  $H_2$  :**

Considérons le système bouclé, avec perturbations stochastiques  $w$  et  $v$ , de la figure suivante, où  $v$  et  $w$  sont des bruits blancs de moyennes nulles, et de matrices de covariance :  $V$  et  $W$  respectivement.



**Figure (2.20) : Diagramme bloc du système bouclé.**

On a ceci :

$$Y(s) = (I + GK)^{-1} G w(s) - (I + GK)^{-1} GK V(s) \tag{2.61}$$

$$U(s) = - (I + GK)^{-1} G w(s) - (I + GK)^{-1} K V(s) \tag{2.62}$$

Ou encore, en en terme de sensibilité, et sensibilité complémentaire :

$$Y(s) = SG W(s) - T V(s) \tag{2.63}$$

$$U(s) = - T W(s) - SK V(s) \tag{2.64}$$

L'objectif de la commande LQG, est de minimiser la fonction coût suivante :

$$J = \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^\infty [y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t)] dt \right.$$

c'est à dire : régulation de la sortie autour du zéro, avec un effort minimum.

En appliquant le théorème de Parseval, ce critère devient :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ( y^*(j\omega) Q y(j\omega) + u^*(j\omega) R u(j\omega) ) d\omega \tag{2.65}$$

en utilisant le fait que :

$$\phi_w(\omega) = \sqrt{W} \quad , \quad \phi_y(\omega) = \sqrt{V}$$

et les équations (2.63) et (2.64), le critère (2.65) devient :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \text{trace}[\sqrt{Q} S G \sqrt{W}] + \text{trace}[\sqrt{R} T \sqrt{W}] + \text{trace}[\sqrt{Q} T \sqrt{V}] + \text{trace}[\sqrt{R} S K \sqrt{V}] \right\} d\omega$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum \sigma_i^2(\sqrt{Q} S G \sqrt{W}) + \sum \sigma_i^2(\sqrt{R} T \sqrt{W}) + \sum \sigma_i^2(\sqrt{Q} T \sqrt{V}) + \sum \sigma_i^2(\sqrt{R} S K \sqrt{V}) \right\} d\omega \tag{2.66}$$

ici  $\sqrt{Q}$ ,  $\sqrt{R}$ ,  $\sqrt{W}$  et  $\sqrt{V}$  sont les facteurs spectraux de Q, R, W et V respectivement [9]:

On constate que la commande LQG minimise une somme pondérée, de termes contenant les fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire, qui caractérisent les performances du système en boucle fermée, dans le domaine fréquentiel.

Les matrices de pondération (Q, R, W et V) , permettent d'établir les différents compromis, pour les fonctions S et T.

On constate, d'après la définition de la norme  $H_2$  (équations (2.59) et (2.60), et d'après l'équation (2.66), que la commande LQG, permet de minimiser la norme  $H_2$  , des fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire pondérées.

Dans (2.66), les matrices Q et R sont constantes. en réalité, elles peuvent dépendre de la fréquence, tout en restant définies positives. Et on peut donc former un critère de performance, comme pour la commande  $H_\infty$  , où l'on s'intéresse à la minimisation des fonctions sensibilité S et sensibilité complémentaire T, dans certaine plages de fréquences; soit :

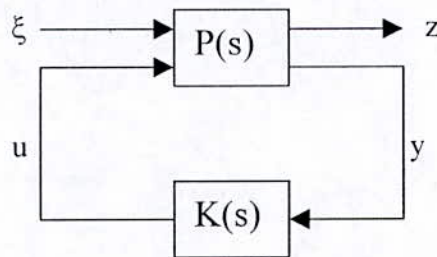


$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum \sigma_i^2 [W_S S] + \sum \sigma_i^2 [W_T S] \right\} d\omega \tag{2.67}$$

où  $W_S$  et  $W_T$  sont choisis de la même manière que pour la commande  $H_\infty$ , et c'est là le problème de la commande  $H_2$ .

**Problème de la commande  $H_2$  standard[4, 10]:**

Le problème de synthèse  $H_2$ , est similaire à celui de la commande  $H_\infty$ . Etant donné le système bouclé augmenté, représenté par la forme standard (figure (2.21)) :



**Figure (2.21) : Forme standard.**

Trouver un régulateur  $K(s)$ , stabilisant le modèle nominal et minimisant :

$$\|F_e(P, K)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{trace}[F_e^*(j\omega)F_e(j\omega)] d\omega \tag{2.68}$$

où  $F_e$ , est le transfert entre  $\xi$  et  $z$ .

$$z = F_e(P, K) \xi = (P_{11} + P_{12} K(I - P_{22} K) P_{21})^{-1} \xi,$$

avec :  $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$  constitue une partition de  $P(s)$

En conclusion :

L' idée de base de la commande  $H_2$ , vient de la transformation du problème de la commande LQG (qui est typiquement temporelle), en un problème dans le domaine fréquentiel, puis de l'utilisation de pondérations fréquentielles, au lieu de matrices de pondération constantes. Puis cette idée a été généralisée pour inclure une classe de problèmes plus vaste, cherchant à optimiser d'autres matrices de transfert, en particulier, la matrice  $F_e(P, K)$  comme pour le problème de la commande  $H_\infty$ .

Dans ce qui suit, on va présenter la résolution du problème standard de la commande  $H_\infty$  et  $H_2$ , on présentera la solution du problème  $H_2$  en premier lieu, puis celle de la commande  $H_\infty$  et ceci pour pouvoir les comparer.

#### 2.4. résolution du problème standard [4] :

soit le schéma standard de la figure (2.21), où  $P(s)$  désigne le modèle nominale augmenté par les fonctions poids, cette opération peut se faire automatiquement par le Toolbox "*robust control*" de Matlab.

##### 2.4.a. Solution dans le cas d'un retour d'état :

dans ce cas, on suppose l'accessibilité de tous les états à la mesure, et le système augmenté précédent, est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1\xi + B_2u \\ Z = C_1x + D_{12}u \\ y = x \end{cases} \quad (2.69)$$

Le problème d'optimisation est donc de trouver un compensateur stabilisant et minimisant le critère suivant :

$\min_K \ F_c(P, K)\ _\alpha \quad (2.70)$
<p>où : <math>\alpha = 2</math> (synthèse <math>H_2</math>) ou <math>\alpha = \infty</math> (synthèse <math>H_\infty</math>)  <math>F_c(P, K)</math> étant le transfert entre <math>\xi</math> et <math>Z</math>.</p>

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- a)  $(A, B_2)$  est stabilisable
- b)  $(A, C_1)$  est détectable
- c)  $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$

Ces dernières ont l'interprétation suivante :

Les deux premières hypothèses sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution.

La troisième permet de simplifier l'expression de la solution.

##### 2.4.a.1. Retour d'état $H_2$ :

Pour  $\alpha = 2$ , le critère (2.71) est quadratique et correspond à la minimisation de l'énergie du signal de sortie  $Z$ .

Les hypothèses précédentes étant satisfaisantes, il existe un retour d'état optimal  $F_2$ , tel que :

$$F_2 = +B_2^T X_2 \quad (2.71)$$



$X_2$  étant la solution de l'équation de Riccati définie positive dont l'Hamiltonien est donné par :

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & + B_2 B_2^T \\ + C_1^T C_1 & - A^T \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

La commande est donnée par :

$$\begin{aligned} u &= -F_2 x \\ &= -B_2^T X_2 x \end{aligned} \quad (2.73)$$

on voit bien qu'il s'agit de la commande optimale LQ, avec  $Q = C_1^T C_1$  et  $R = B_2 B_2^T$

**Remarque :**

L'Hamiltonien d'une équation de Riccati de la forme :

$$A^T X + XA + XRX - Q = 0$$

S'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$$

**2.4.a.2. Retour d'état  $H_\infty$ :**

Le problème de la commande  $H_\infty$  standard, est de trouver un compensateur tel que:

$$\|F_c(P, K)\|_\infty < \gamma$$

$\gamma$  étant un scalaire positif.

Les hypothèses précédentes étant satisfaites, il existe un retour d'état stabilisant  $F_\infty$  tel que:

$$F_\infty = B_2^T X_\infty \quad (2.74)$$

$X_\infty$  étant la solution définie positive de l'équation de Riccati, dont l'Hamiltonien est donné par:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T \\ C_1^T C_1 & - A^T \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

La commande est alors donnée par:

$$\begin{aligned} U &= -F_\infty x \\ &= -B_2^T X_\infty x \end{aligned} \quad (2.76)$$

**Remarque:**

- La minimisation de  $\gamma$  se fait de manière itérative, par l'algorithme de  $\gamma$ -itération, et ceci est possible sous Matlab, grâce au programme: "hinftol" du Toolbox 'robust control'.
- D'après (2.75) et (2.72), on constate que lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , la solution du problème  $H_\infty$  tend vers celle de la commande  $H_2$ .

**2.4.b. Solution dans le cas d'un retour de sortie:**

En général, on ne peut pas mesurer tous les états, on utilise alors la sortie, qui est une combinaison linéaire du vecteur d'état et du vecteur perturbation.

Le système augmenté est donné par:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 \xi + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} \xi \end{cases} \quad (2.77)$$

On émet les hypothèses suivantes:

- $(A, B_2)$  est stabilisable, et  $(A, C_2)$  détectable.
- $(A, B_1)$  est stabilisable, et  $(A, C_1)$  détectable.
- $D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$
- $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Ces hypothèses ont la même interprétation que dans le cas d'un retour d'état, les deux premières sont nécessaires pour l'existence d'une solution, les deux autres servent à simplifier la solution.

**2.4.b.1. Retour de sortie  $H_2$ :**

Dans ce cadre de principe de séparation (commande - estimation) est vérifié. On a d'une part la synthèse d'un retour d'état et d'autre part, celle d'un estimateur, ce qui revient donc à résoudre deux équations de Riccati.

Les hypothèses précédentes étant réalisées, il existe un compensateur stabilisant  $K_2(s)$ , réalisant (2.70) si et seulement si:



- il existe une solution  $X_2$  définie positive et symétrique à l'équation de Riccati dont l'Hamiltonien:

$$\begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

- Il existe une solution  $Y_2$  définie positive et symétrique à l'équation de Riccati dont l'Hamiltonien:

$$\begin{bmatrix} A^T & -C_2 C_2^T \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Le compensateur optimal  $K$  a pour représentation d'état:

$$K_2 = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_2 F_2 + L_2 C_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right] \quad (2.80)$$

avec:  $F_2 = -B_2^T X_2$  et  $L_2 = -Y_2 C_2^T$

### 2.4.b.2. Retour de sortie $H_\infty$ :

De la même manière, les hypothèses émises étant réalisées, il existe un compensateur Stabilisant  $K_\infty$ , tel que:  $\|F_e(P, K)\|_\infty < \gamma$ , si et seulement si:

- Il existe une solution  $X_\infty = X_\infty^T \geq 0$  pour l'équation de Riccati d'Hamiltonien:

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

- Il existe une solution  $Y_\infty = Y_\infty^T \geq 0$  pour l'équation de Riccati d'Hamiltonien:

$$\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2 C_2^T \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

- $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

Avec  $\rho$  désigne le rayon spectral, c'est à dire la plus grande valeur propre.

Le compensateur  $K_\infty$ , est donné par sa représentation d'état:

$$K_\infty = \left[ \begin{array}{c|c} A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z L_\infty C_2 & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} F_\infty &= -B_2^T X_\infty \\ \text{avec: } L_\infty &= -Y_\infty C_2^T \\ Z_\infty &= (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty) \end{aligned}$$

**Remarque:**

Ici aussi, on constate que lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , le compensateur  $H_\infty$  tend vers celui de  $H_2$  à retour de sortie

**Comparaison:**

Les lois de commande synthétisées par les deux techniques  $H_2$  et  $H_\infty$ , présentent des caractéristiques similaires; sauf que pour la seconde, il a introduction d'un terme supplémentaire au niveau de la représentation d'état du compensateur  $H_\infty$ , et d'un terme de couplage ( $\rho (X_\infty Y_\infty)$ ).

Le compensateur  $H_2$  est optimal et se calcule directement à partir des équations de Riccati (en Matlab, ceci est possible grâce au problème 'H2LQG' de "Robust control toolbox") contrairement à celui de la commande  $H_\infty$ , qui se fait de manière itérative.

**Conclusion:**

Dans ce chapitre, on a étudié deux commandes robustes, se basant sur la minimisation d'une norme quadratique ou infinie, d'un certain critère, résultant par augmentation du modèle nominale par pondérations fréquentielles, ces dernières permettent de gérer les différents compromis de robustesse et de performances. Tout le problème consiste à choisir des pondérations adéquates.

Ainsi, après avoir présenté les éléments d'identification et de commande qui se font indépendamment, dans le prochain chapitre, on va voir comment les lier explicitement, pour essayer de réaliser une robustesse en performances.



# Chapitre 3:

## Chapitre 3: Identification pour la commande robuste.

### 3.1) Introduction:

On a présenté au chapitres précédents, les deux éléments essentiels d'une démarche classique d'automatisation de procédés, savoir l'identification (modélisation mathématique), et la synthèse de régulateurs.

On a vu que dans une telle démarche, ces deux étapes sont effectuées indépendamment, et par conséquent, la synthèse basée sur le modèle identifié en boucle ouverte, n'est pas optimale compte tenu du coût réalisé en boucle fermée avec le procédé réel.

Dans ce chapitre, on va essayer de montrer qu'en liant explicitement les deux phases de commande et d'identification, en orientant cette dernière vers la commande, on peut améliorer les performances réalisées, on parle alors *d'identification pour la commande robuste*.

On va commencer par donner la structure générale d'un schéma itératif d'identification et de commande, puis on donnera le premier algorithme d'affinement itératif de la commande quadratique proposé par Gevers [12]( repris et amélioré dans [13]), et qu'on adaptera aux deux commandes robustes  $H_2$  et  $H_\infty$ .

On présentera aussi un autre aspect très intéressant de l'identification orientée commande robuste, et qui consiste en l'estimation de la borne supérieure sur l'erreur de modélisation, celle-ci qui joue un rôle important dans la théorie de la commande robuste, en particulier la commande  $H_\infty$ .

### 3.2) Affinement itératif des commandes $H_\infty$ et $H_2$ :

#### **Motivation:**

Les performances d'un système de commande donné, composé d'un procédé  $G$  et d'un compensateur  $K$ , sont les propriétés de ce système bouclé, telles que: la réponse indicielle (temps de réponse, erreur statique), les formes des fonctions sensibilité  $S$  et sensibilité complémentaire  $T$  (rejet de perturbation / robustesse et poursuite)...etc.



On exprime les performances qu'on désire réaliser, dans un critère  $J(G,K)$ , auquel est associée  $\| \cdot \|_B$  [14], permettant la mesure du coût en performances réalisées.

La loi de commande permettant l'atteinte de ces performances, doit minimiser cette fonction coût. "cost function".

Un exemple de critères typiques qui sont souvent utilisés dans la synthèse de lois de commande, est celui du problème de poursuite et rejet de perturbations de la commande LQ, dont le critère de performance s'écrit comme suit:

$$J(G,K) = \int_0^{\infty} [y(t) - r(t) + \sqrt{\lambda} U(t)]^T$$

$\lambda$  étant un scalaire positif.

La norme considérée est la norme quadratique:

$$\| J \|_B = \| J(G,K) \|_2$$

Avec

$$\| x \|_2^2 = E(x^T(t)x(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E(x^T x)$$

E: est l'espérance mathématique.

Un autre exemple est celui du problème de stabilisation robuste (chapitre 2), où le critère et la norme considérés sont:

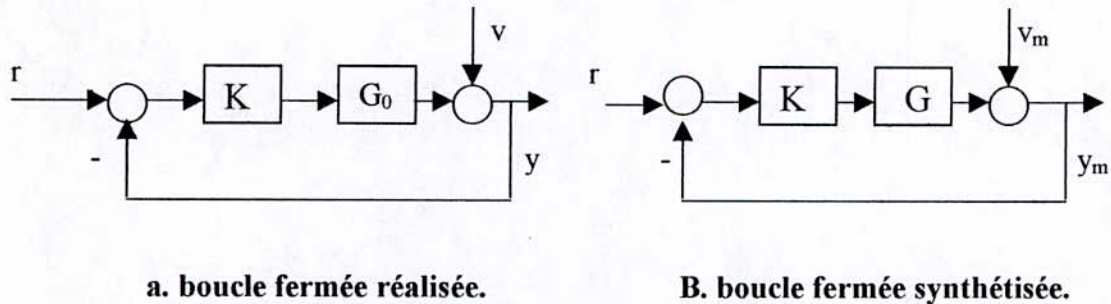
$$J(G,K) = [ W GK(I + GK)^{-1} ] \text{ et } \| J(G,K) \|_B = \| J(G,K) \|_{\infty}$$

W étant une fonction de pondération.

De là, on réalise que les performances d'un système donné sont mesurées en boucle fermée. L'objectif final d'un régulateur étant de réaliser des performances requises pour le système réel, il serait intéressant d'utiliser l'information supplémentaire disponible en boucle fermée, pour essayer d'affiner les performances réalisées.

**3.2.1. Nécessité d'un schéma itératif:**

Soient les boucles de commandes synthétisée et réalisée suivantes:



**Figure (3.1).**

Où  $G_0$  est le système réel qu'on désire commander,  $G$  est son modèle nominal et  $K$  est le régulateur.

Tout problème de commande revient à optimiser un certain critère, dit **critère global** dont la valeur dépend du système  $G$  et du régulateur choisi  $K$ :

$$J_{\text{global}} = J(\text{système, régulateur}). \tag{3.1}$$

Ainsi, si le système réel  $G_0$  est connu, le régulateur optimal  $K_{\text{opt}}$  est celui qui minimise le critère global:

$$J_{\text{opt}} = \arg \min_K J(G_0, K) = J(G_0, K_{\text{opt}}). \tag{3.2}$$

Mais en réalité, le système réel  $G_0$  n'est connu que par un modèle approximatif  $G$ . on dispose aussi d'une méthode de synthèse d'un régulateur  $K$  optimal vis à vis de ce dernier (c'est à dire le modèle estimé  $G$ ).

Le **coût estimé "designed cost"** est alors donné par:

$$J_e = J(G, K(G)) \tag{3.3}$$

le **coût réalisé "achieved cost"** peut être évalué en appliquant le régulateur calculé au système réel:

$$J_r = J(G_0, K(G)) \tag{3.4}$$



Du fait que le système réel  $G_0$  est inconnu, il est impossible d'atteindre directement  $J_{opt}$ , donc logiquement, nos efforts devraient tendre vers la minimisation du coût réalisé (3.4) qui lui est mesurable, le problème est donc de:

*" Trouver le modèle  $G$  et le régulateur  $K$ , minimisant le coût réalisé pour le système  $G_0$  à savoir  $J(G_0, K(G))$  " .*

les méthodes classiques de commande, sont en fait orientées vers la minimisation de  $J(G, K(G))$  (principe de l'équivalence certaine).

On doit chercher donc un modèle  $G$ , pour synthétiser un compensateur  $K(G) = K$ , tel que le modèle et le système commandés, aient tous les deux de bonnes performances, en d'autres termes, on cherche à optimiser  $\|J(G_0, K)\|$  et  $\|J(G, K)\|$ , (avec  $J$  et  $\|\cdot\|$  sont choisis selon la commande utilisée).

La minimisation de  $J_{global}$ , est équivalente à celle de  $J(G, K)$ , si le système bouclé composé du modèle nominal  $G$  et du régulateur  $K$ , décrit avec précision, la boucle fermée réalisée, composée du même régulateur, et du système réel.

En utilisant les inégalités triangulaires suivantes [2??,3??]:

$$\left| \|J(G, K)\| - \|J(G_0, K) - J(G, K)\| \right| \leq \|J(G_0, K)\| \leq \|J(G, K)\| + \|J(G_0, K) - J(G, K)\| \quad (3.5)$$

avec:

$\|J(G_0, K) - J(G, K)\|$ : désigne la dégradation en performance qui est due au fait que  $K$  a été synthétisé à base de  $G$  et non pas de  $G_0$ .

Il est clair que pour minimiser le critère global  $J(G_0, K)$ , on doit minimiser simultanément  $\|J(G, K)\|$  et  $\|J(G_0, K) - J(G, K)\|$  par rapport au régulateur et au modèle, en même temps, c'est à dire qu'on doit avoir ceci:

$$1. \|J(G, K)\| \text{ est petit.} \quad (3.6)$$

$$2. \|J(G_0, K) - J(G, K)\| \ll \|J(G, K)\| \quad (3.7)$$

La condition (3.6) implique la réalisation de bonnes performances nominales, (et c'est là le rôle du régulateur), et (3.7) celle de performances robustes. Si cette dernière est satisfaite, le système  $G_0$  et le modèle  $G$  auront des performances similaires (en boucle fermée).

Par ailleurs, si:

$$\| J(G_0, K) \| \approx \| J(G, K) \| \not\approx (G_0, K) \text{ et } (G, K) \text{ ont les mêmes performances.}$$

En effet, prenant comme critère de performance celui qui consiste en la minimisation de la norme  $H_\infty$  de la fonction sensibilité  $S$ . notons par  $S_0$  et  $S$  les fonctions sensibilité du système réel et du modèle nominal respectivement.

Le système réel et son modèle, ont des performances similaires si la différence entre ces deux fonctions est faible en toutes fréquences, et par conséquent si le maximum de cette différence (à savoir  $\| S_0 - S \|_\infty$ ) est petit.

Ceci n'est évidemment pas le cas si les maximums de ces fonctions sont égaux.

Afin d'établir (3.6) et (3.7), on propose la forme générale des schémas itératifs, proposés par différents auteurs, utilisant l'inégalité triangulaire (3.5).

Une optimisation simultanée sur  $G$  (identification) et sur  $K$  (commande) est effectuée, pour minimiser (3.6) et (3.7) (et par conséquent, minimiser  $\| J(G_0, K) \|$ ) et ceci d'une manière itérative telle que à l'étape  $(i + 1)$ , le modèle et régulateur sont donnés par:

$$G_{i+1} = \arg \min_{G^*} \| J(G, K_i) - J(G^*, K_i) \| \tag{3.8}$$

$$K_{i+1} = \arg \min_{K^*} \| J(G_{i+1}, K^*) \| \tag{3.9}$$

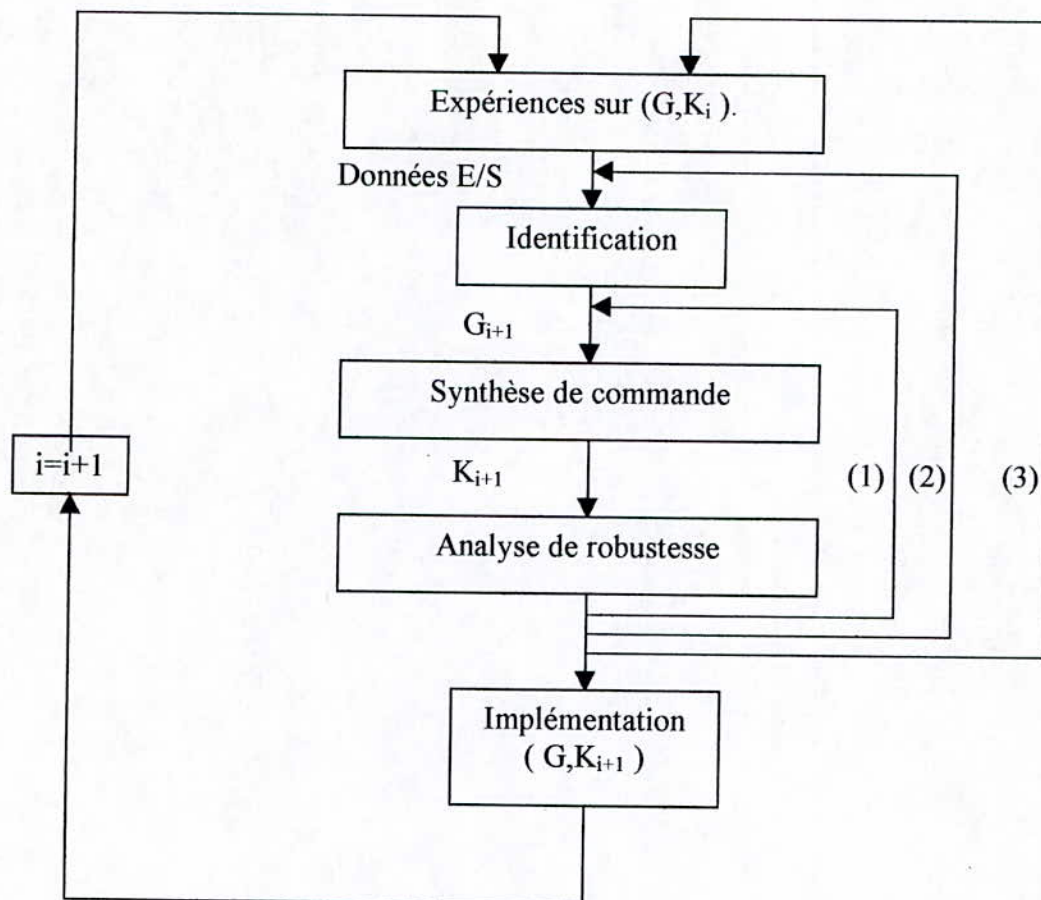
**Remarques:**

- ◆ On voit bien que le critère d'identification (3.8) dépend du critère de commande  $J$  et de la norme  $\| . \|$  choisie, ce qui montre bien que l'identification est orientée vers la commande, et qu'on a besoin d'effectuer des mesures en boucle fermée (sur  $(G, K_i)$ ).
- ◆ En principe,  $P_{i+1}$  est calculé de manière à optimiser  $\| J(G, K_{i+1}) - J(G^*, K_{i+1}) \|$  par rapport à  $G^*$ . Comme on ne dispose pas encore de  $K_{i+1}$ , on utilise  $K_i$ , c'est ce qui a motivé l'utilisation de schémas itératifs. On arrête ce processus d'identification et de commande s'il y a amélioration des performances.

Pour initialiser cet algorithme itératif, on prend le modèle identifié en boucle ouverte (ou en boucle fermée si le système est instable en boucle ouverte), c'est l'itération 0.

La structure de base des schémas itératifs, est représentée à la figure(3.2) suivante:





**Figure(3.2):** Schéma itératif d'identification et de commande.

**Remarques:**

Si le test de robustesse n'est pas satisfaisant, il faut faire l'un des points suivants:

- 1- Refaire la synthèse d'un nouveau régulateur, en cherchant d'autre fonctions de pondération par exemple.
- 2- Refaire l'identification, pour obtenir un modèle plus précis(par exemple en augmentant son ordre).
- 3- Refaire la phase d'expérimentation(par exemple changer le signal d'excitation....etc).

Au cours de ces dernières années, plusieurs schémas itératifs de différentes commandes, ont été proposés ([12,13,15]), dans ce qui suit, on va donner l'algorithme de Gevers, puis celui des commandes  $H_2$  et  $H_\infty$ .

**3.2.2 l'algorithme de Gevers[12]:**

Dans ce cas, le critère de performance à minimiser est donné par :

$$\|J^*\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_0 - r)^2 + \lambda u_0^2 \tag{3.10}$$

$y_0$  et  $u_0$  sont la sortie et l'entrée du système réel.

et de même, le critère locale (pour le modèle nominal) est:

$$\|J\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y - r)^2 + \lambda u^2 \tag{3.11}$$

où  $y$  et  $u$  désignent la sortie et l'entrée du modèle.

Notons que les deux critères (3.10) et (3.11) représentent la norme quadratique des vecteurs suivants:

$$J^*_{LQ} = \begin{bmatrix} (y_0 - r) \\ \sqrt{\lambda} u_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_{LQ} = \begin{bmatrix} (y - r) \\ \sqrt{\lambda} u \end{bmatrix}$$

$\lambda$  étant un scalaire positif.

Ainsi, la dégradation en performances, selon (3.3), s'écrit comme suit:

$$J^* - J = \begin{bmatrix} (y_0 - r) \\ \sqrt{\lambda} u_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (y - r) \\ \sqrt{\lambda} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_0 - y) \\ \sqrt{\lambda}(u_0 - u) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\|J^* - J\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_0 - y)^2 + \lambda(u_0 - u)^2.$$

Elle peut être écrite sous la forme suivante [12,14]??:

$$\|J^* - J\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |S_0 H_0|^2 (1 + \lambda |K|^2) \phi_{e_0} + |K S_0 (G_0 - G) S|^2 (1 + \lambda |K|^2) \phi_r \right\} d\omega \tag{3.13}$$

On veut identifier un modèle minimisant (3.4), le critère d'identification doit dépendre de  $K$  et  $G$ , donc elle doit être effectuée en boucle fermée.

le critère d'identification en boucle fermée par erreur de prédiction s'écrit comme suit (annexe [A]):



$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |S(G_0 - G)K|^2 (\phi_r + \phi_v) + \phi_v \right\} \frac{|L|^2}{|H(\theta)|^2} d\omega \quad (3.14)$$

Le modèle identifié doit donc minimiser (3.13) et (3.14), pour cela, on fusionne les deux critères en choisissant un filtre d'identification adéquat, qui fait coïncider (3.13) avec (3.14),

Le filtre est choisi de la manière suivante :

$$|L(\theta)|^2 = (1 + \lambda |K|^2) |S(\theta)|^2 = \frac{1 + \lambda |K|^2}{|1 + KG(\theta)|^2} \quad (3.15)$$

On constate que ce filtre d'identification dépend lui même du modèle à identifier (L dépend du vecteur  $\theta$ ).

Comme on ne possède pas encore le modèle, on fait recours à une solution itérative approximative, et qui consiste en l'utilisation de l'estimation à l'étape précédente, c'est à dire:  $L(\theta) = L(\theta_{i-1})$ , de cette manière là, le préfiltre est fixe.

En ce qui concerne la commande, le régulateur LQ est obtenu en minimisant la fonction coût (3.11).

Cependant, pour minimiser d'avantage (3.13), et satisfaire l'inégalité (3.7), on modifie le critère local, en y rajoutant des pondérations  $F_1$  et  $F_2$ , permettant de l'orienter vers le critère global:

$$\|J\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [F_1(q) (y(t) - r(t))]^2 + \lambda [F_2(q) U(t)]^2 \quad (3.16)$$

avec:

$$F_1(e^{j\omega}) = \left[ \frac{\phi_y - r}{\phi_{y_0} - r} \right]^{1/2}, \quad F_2(e^{j\omega}) = \left[ \frac{\phi_u}{\phi_{u_0}} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

$\phi$  désigne le spectre de fréquence des signaux considérés en boucle fermée.

Avec un tel choix de  $F_1$  et  $F_2$ , on force le critère local à ressembler le critère de performances global, en utilisant les spectres des signaux du système et du modèle opérants ensemble en boucle fermée en boucle fermée.

Ainsi, à l'étape de synthèse, on peut espérer l'atteinte d'une similarité entre les performances synthétisées, et les performances réalisées.

En résumé:

le principal objectif de cette synthèse itérative, est d'utiliser l'information disponible en boucle fermée (les signaux en B.F), pour définir des objectifs communs aux deux étapes d'identification et de commande .

les étapes à suivre à la  $(i+1)^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme itératif de Gevers [12], sont résumées ci-dessous:

1. Effectuer l'expérience en boucle fermée ,avec un régulateur  $K_i$  fixe (synthétisé à l'étape  $i$ ), agissant sur le système réel  $G_0$ , et une référence  $r$ , selon la figure (3.1), pour générer l'ensemble de données  $\{y_0, u_0\}$  de longueur  $N$ .
2. Effectuer des simulations en boucle fermée ,avec le même régulateur  $K_i$  ,agissant sur le modèle  $G_i(\theta)$ , avec la même référence  $r$ , pour générer l'ensemble de données  $\{y, u\}$  de longueur  $N$  .
3. Calculer le filtre d'identification  $L_i(q)$  selon (3.15).
4. Avec les ensembles de données obtenues par expérimentation et simulation, et en utilisant la minimisation par erreur de prédiction, identifier le modèle  $G_{i+1}(\theta)$  en utilisant  $L_i(q)$ .
5. calculer les fonctions poids  $F_1$  et  $F_2$ , par identification des spectres des signaux  $(y_0 - r)$ ,  $U_0$ ,  $(y - r)$ , et  $U$ .
6. synthétiser un régulateur  $K_{i+1}$ , à base de  $G_{i+1}$ , et des spectres de fréquences des signaux identifiés en boucle fermée.



**3.2.3. Algorithme d'affinement itératif des commandes  $H_2$  et  $H_\infty$  :**

On va procéder de la même manière que précédemment, pour affiner ces deux commandes.

Soit le critère de performances unifié des deux commandes  $H_2$  et  $H_\infty$  :

$$\|J\|_\alpha = \|F(G, K)\|_\alpha = \left\| \begin{matrix} W_s S \\ W_T T \end{matrix} \right\|_\alpha \quad (3.18).$$

Où  $\alpha=2$  pour la commande  $H_2$ , et  $\alpha=\infty$  pour la commande  $H_\infty$ .

Notons par  $S_0$ ,  $T_0$ ,  $S$  et  $T$ , les fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire respectivement du système réel, et du modèle nominal.

La dégradation en performances pour les commandes  $H_2$  et  $H_\infty$ , s'écrit comme suit:

$$J^* - J = \begin{bmatrix} W_s (S_0 - S) \\ W_T (T_0 - T) \end{bmatrix} \quad (3.19).$$

et en terme de norme  $H_2$  :

$$\begin{aligned} \|J^* - J\|_2 &= \left\| \begin{matrix} W_s (S_0 - S) \\ W_T (T_0 - T) \end{matrix} \right\|_2 \\ &= \|W_s (S_0 - S)\|_2 + \|W_T (T_0 - T)\|_2 \end{aligned} \quad (3.20).$$

Le critère d'identification en boucle fermée, par erreur de prédiction est donné par:

$$V_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |K(\omega)S(\omega, \theta)|^2 |G_0(\omega) - G(\omega, \theta)|^2 (\phi_r(\omega) + \phi_v(\omega)) + \phi_v(\omega) \right\} \frac{|L(\omega)|^2}{|H(\omega)|^2} d\omega \quad (3.21)$$

*Problème:*

Trouver un modèle, par identification, minimisant (3.20) et (3.21), en choisissant un filtre d'identification adéquat, permettant de rendre ces deux critères similaires.

Ceci est réalisé en prenant:

$$|L(\omega)|^2 = \frac{|H(\omega)S(\omega)|^2 (\gamma^* |W_s|^2 + |W_T|^2)}{\phi_r(\omega) + \phi_v(\omega)} \quad (3.22)$$

$a=0$  Pour la commande  $H_2$ , et  $a=1$  pour la commande  $H_\infty$ .

$\phi_r$  et  $\phi_v$  représentent respectivement les spectres fréquentiels de la référence  $r(t)$  et du bruit  $V(t)$ .

**Remarques:**

- Ne disposant pas d'une méthode d'identification  $H_\infty$ , on est amené à utiliser à la place, la norme  $H_2$ .

- On constate que le filtre d'identification dépend du spectre de bruit, qui lui est inconnu, l'hypothèse simplificatrice qui est souvent utilisée (reposant sur le fait qu'en général, les bruits sont des signaux hautes fréquences) est de considérer que  $\phi_v(\omega) < \phi_r(\omega)$  dans la bande passante du système, et le filtre peut alors s'écrire comme suit:

$$|L(\omega)|^2 = \frac{|H(\omega)S(\omega)|^2 \left( \gamma^a |W_s(\omega)|^2 + |W_T(\omega)|^2 \right)}{\phi_r(\omega)} \quad (3.23)$$

avec  $a = 0$  pour le cas de la commande  $H_2$ , et  $a = 1$  pour le cas de la commande  $H_\infty$ .

On résume dans ce qui suit, la procédure d'affinement itératif des commandes  $H_2$  et  $H_\infty$ , en citant les étapes à suivre à la  $(i+1)^{\text{ème}}$  itération; et ceci après avoir identifié un premier modèle du système réel (en boucle ouverte dans le cas où le système est stable), et synthétisé un régulateur  $K_0$  à base de ce dernier.



1. Appliquer le régulateur  $K_i$ , calculé à l'itération  $i$ , au système réel  $G_0$ , réaliser des mesures entrée-sortie en boucle fermée, pour obtenir le fichier E/S:  $\{y_0, u_0\}$
2. Parallèlement, simuler le modèle obtenu à l'itération  $i$ , en boucle fermée avec le régulateur  $K_i$ , pour générer l'ensemble de données E/S:  $\{y_0, u_0\}$
3. Calculer le filtre d'identification  $L_i$  selon les formules:

$$|L_i|^2 = |HS|^2 \frac{|W_s|^2 + |W_T|^2}{\phi_r} ; \quad \text{pour la commande } H_2.$$

$$|L_i|^2 = |HS|^2 \frac{|\gamma_i W_s|^2 + |W_T|^2}{\phi_r} ; \quad \text{pour la commande } H_\infty.$$

4. Identifier un nouveau modèle  $G_{i+1}$  en utilisant  $L_i$ .
  5. A base de ce modèle, synthétiser un régulateur  $K$  par  $H_\infty$  ou  $H_2$ , selon la procédure décrite au chapitre 2.
- Arrêter le processus, s'il y a atteint des performances désirées.

### 3.3. Estimation de la borne supérieure sur l'erreur de modélisation:

L'identification permet la construction de modèles mathématiques d'un système donné, à partir de données mesurées, cependant, pour pouvoir juger la qualité du modèle, et pour tirer le meilleur profit de la théorie de la commande robuste (se basant sur les erreurs de modélisation pour synthétiser des lois de commande robustes), on a besoin d'une estimation de l'incertitude sur le modèle.

Dans ce qui suit, on va présenter une méthode d'identification robuste, permettant de délivrer une estimation de la borne supérieure sur l'erreur de modèle [3].

**3.3.1. Formulation du problème:**

On a vu au chapitre précédent, pour synthétiser une loi de commande robuste, par exemple par  $H_\infty$ , on suppose l'existence d'un ensemble de modèles, centré autour du modèle nominale, et auquel le système réel appartient.

Notre objectif est d'estimer la taille de cet ensemble.

Supposons que le système est décrit par:

$$Y(t) = G_0(q) u(t) + v(t) \quad (3.24)$$

$Y(t)$  étant le signal de sortie,  $u(t)$  signal d'entrée borné et  $v(t)$  un bruit additif.

$G_0$  est la fonction de transfert du système, linéaire, invariant dans le temps, et stable.

Notre problème d'identification (dite identification  $H_\infty$  [3]) est formulé comme suit:

Etant donné un ensemble de mesures de  $N$  paires entrées-sorties  $y(t), u(t); t=0, \dots, N-1$ , trouver un modèle  $G(e^{j\omega})$  et un borne  $\delta(\omega) \in \mathbb{R}$ , tel que:

$$|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})| \leq \delta(\omega) \quad ; \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]. \quad (3.25)$$

**3.3.2. Hypothèses et information à priori:**

On suppose que le système est décrit par (3.24), avec  $G$  une fonction de transfert stable, qui peut s'écrire comme suit:

$$G_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_0(k) z^{-k} \quad (3.26)$$

$g_0(k)$  étant la réponse impulsionnelle du système.

Notons les intervalles de temps discrets pour les signaux entrées sorties comme suit, avec  $Z$  est l'ensemble des entiers:

$$\begin{aligned} T^N &= Z \cap [0, N - 0] \\ T_{N_s}^N &= Z \cap [N_s, N + N_s - 1] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$N$  et  $N_s$  sont des entiers.



Et on notera:

$$\bar{u} = \text{Sup}_{t \in T^{N+N_s}} |u(t)| \quad (3.28)$$

La transformée de Fourier Discrète en N points d'un signal x(t) défini sur  $T^N$ , est donnée par:

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{N}t}; \text{ pour } k \in T^N. \quad (3.29)$$

on va adopter un nombre d'hypothèses sur le système, et les données générées:

1. Il existe une paire de réels  $\{M, \rho\} \in \mathbb{R}$  tels que:

$$|g_0(k)| \leq M \rho^{-k} \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

2. Il existe  $\bar{u}^p$ , tel que:  $|u(t)| \leq \bar{u}^p, \quad \forall t < 0$

3. Il existe  $\bar{V}\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ , tel que:  $\left|V\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right| \leq \bar{V}\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad \forall k \in T^N$

### 3.3.3. La borne de l'erreur discrète:

Pour estimer cette erreur, nous allons considérer une représentation intermédiaire des données, dans le domaine fréquentiel, et ceci par le biais de l'estimée empirique de la fonction de transfert EEFT (chapitre 1). Rappelons que la EEFT est le rapport de la transformée de Fourier discrète TFD du signal d'entrée sur celle du signal de sortie.

On peut écrire l'inégalité suivante:

$$\left|G_0(e^{j\omega_k}) - G(e^{j\omega_k})\right| \leq \left|G_0(e^{j\omega_k}) - \hat{G}(e^{j\omega_k})\right| + \left|\hat{G}(e^{j\omega_k}) - G_0(e^{j\omega_k})\right| \quad (3.30)$$

$G_0$  étant la fonction de transfert du système réel,  $G$  celle du modèle nominale obtenu par identification et  $\hat{G}$  dénote l'EEFT.

Si on arrive à majorer les deux termes de droite de (3.30), on bornera l'erreur de modélisation.

Etant donné  $G(e^{j\omega})$  et  $\hat{G}(e^{j\omega_k})$ , le second terme de la somme de (3.30) est connue.

Il reste à borner le terme  $|G_0 - \hat{G}|$ .

Une borne sur  $|G_0 - \hat{G}|$  sera donnée, en considérant les erreurs dues aux entrées passées inconnues (conditions initiales inconnues du système), et au bruit additif.

Pour cela, on va utiliser un signal d'excitation, partiellement périodique dont la première partie sera omise dans l'estimation .

**Définition [3]:**

Un signal  $x$  partiellement périodique, est un signal ayant la première partie égale à la dernière partie:  $x = [x_1 \ x_2 \ x_1]$ .

En prenant  $x_1$  de longueur  $N_s$ , et  $[x_2 \ x_1]$  de longueur  $N$ , (et c'est ce dernier qui sera utilisé pour l'identification), on a le théorème suivant:

**Théorème [3]:**

Considérons un système SISO, satisfaisant les hypothèses citées plus haut, en utilisant un signal partiellement périodique, et l'estimation:

$$\hat{G}\left(\frac{2\pi l}{N}\right) = \frac{Y\left(\frac{2\pi l}{N}\right)}{U\left(\frac{2\pi l}{N}\right)}, \text{ pour } l \in \left\{ q \in T^N / U\left(\frac{2\pi q}{N}\right) \neq 0 \right\}$$

La borne suivante sur l'erreur, est satisfaite:

$$\left| G_0\left(\frac{2\pi l}{N}\right) - \hat{G}\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \right| \leq \alpha\left(\frac{2\pi l}{N}\right)$$

avec:

$$\alpha\left(\frac{2\pi l}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\bar{u}^p + \bar{u}}{\left| u\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \right|} \frac{M\rho(1-\rho^N)}{(\rho-1)^2} \rho^{-N_s} + \frac{V\left(\frac{2\pi l}{N}\right)}{\left| u\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \right|} \tag{3.31}$$



**Remarques:**

- L'utilisation d'un signal partiellement périodique permet la réduction du rapport Bruit-signal:

$$\bar{V}(\omega_k) / U_N(\omega_k).$$

- la borne sur l'erreur obtenue est discrète, la borne continue est obtenue en faisant l'interpolation.

**3.3.4 Exemple:**

Pour illustrer les résultats cités plus haut, une simulation est faite sur un système d'ordre 2:

$$G_0(q) = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}}$$

Ce dernier a été identifié par un modèle ARX d'ordre 2, on obtient le modèle nominal suivant:

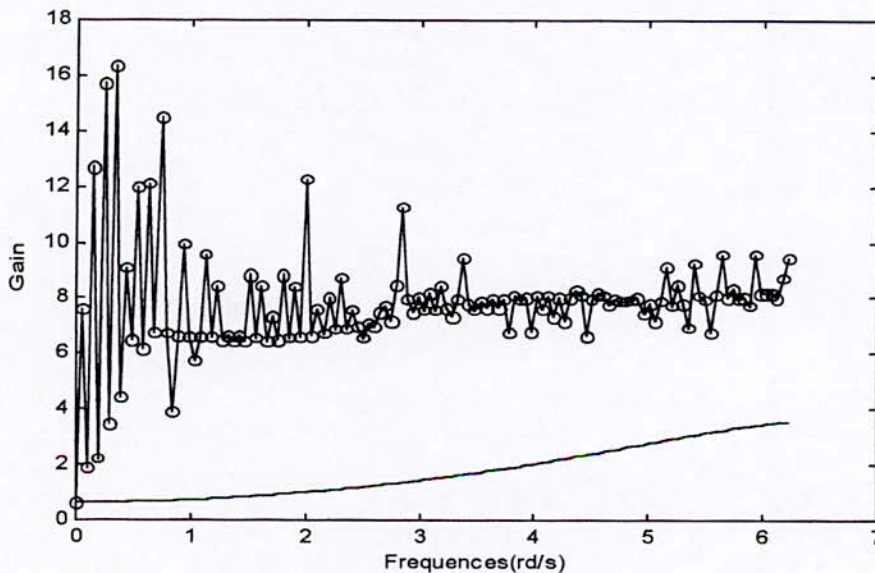
$$G(q) = \frac{1.0764q^{-1} + 0.7582q^{-2}}{1 - 1.2778q^{-1} + 0.4966q^{-2}}$$

la réponse impulsionnelle du système vérifie la relation:  $g_0(k) \leq Mp^{-k}$ ;  $\forall k \in \mathbb{N}$ ; avec:  $M=270$ , et  $\rho=1.2$ . notre signal d'entrée est un signal partiellement périodique, tel que:

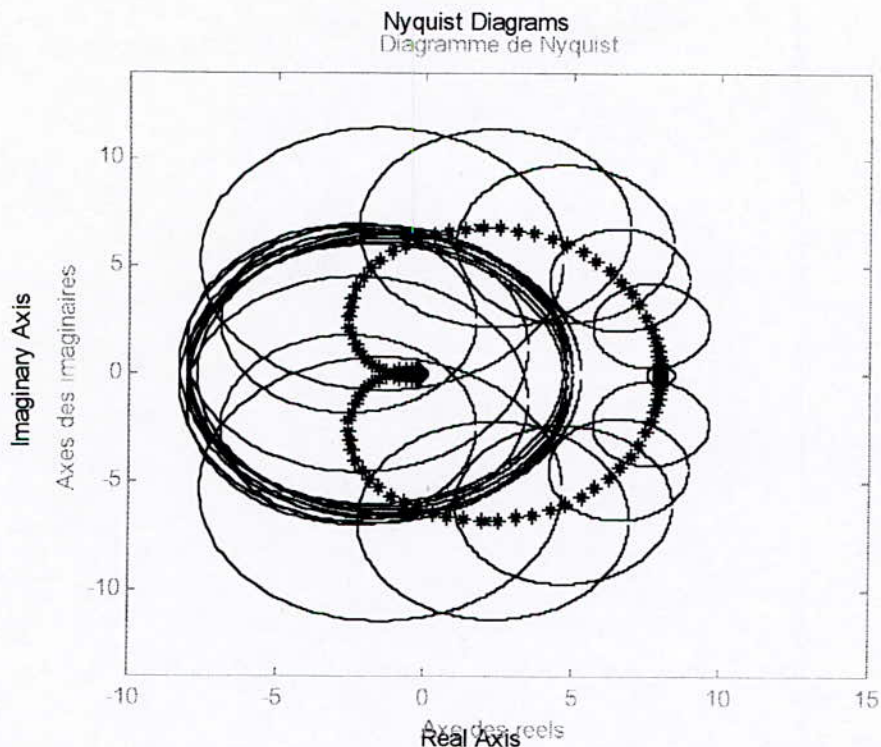
$$\bar{U} = \bar{U}^p = 0.5, N=4096 \text{ et } N_s = 50.$$

Pour l'estimation de la borne  $\bar{V}(\omega_k)$ , d'après [3] le choix:  $\bar{V}(\omega_k) = 3\sqrt{\phi_v(\omega_k)}$  est valide avec une probabilité de 99.99%, et ceci pour un bruit de distribution normale.

Ainsi après avoir donné les informations à priori, et en utilisant la relation (3.30) et (3.31), on pu trouver une estimation de la borne supérieure de l'erreur de modélisation. A la figure (3.3) on a relevé l'erreur réelle et la borne supérieure estimée, alors que la figure (3.4), représente le lieu de Nyquist du modèle nominal ainsi que les disques d'incertitude (dont le rayon est la borne estimée).



**Figure (3.3):** la borne supérieure de l'erreur (-o-) et l'erreur réelle (--).



**Figure (3.4):** Lieu de Nyquist du modèle nominal et disques d'incertitude.

On a effectué l'estimation en 128 points pour les fréquences comprises entre: 0 et 6.2309rd/s. La borne trouvée est supérieure à l'erreur réelle, on a remarqué que les informations à priori influent beaucoup sur cette estimation, ce qui rend l'étape d'émission d'hypothèses à la fois importante et difficile. Notons aussi que la longueur du signal d'entrée  $N$ , a un effet important dans le calcul de l'estimée empirique, en effet, on a pris plusieurs valeurs pour  $N$ , on a constaté que plus  $N$  est grand, meilleure est l'estimation de la fonction de transfert empirique, et plus petite est l'erreur due à cette dernière, est par conséquent la borne supérieure trouvée réduite.

### **Conclusion:**

Ce chapitre a été consacré à l'étude de l'identification orientée commande robuste. On a présenté dans la première partie, la procédure à suivre pour lier explicitement les phases d'identification et de commande, dans le but d'assurer une robustesse en performances. Ce lien est établi en orientant l'identification vers la commande par un choix adéquat du filtre d'identification. On a également vu que cette procédure nécessite un algorithme itératif.

La deuxième partie de ce chapitre, a été motivée par les récents travaux concernant l'estimation d'une borne déterministe sur l'erreur de modélisation, on y a souligné l'importance d'un bon choix d'hypothèses à priori. Un exemple d'estimation a été donné.

Dans le prochain chapitre, on va implémenter les schémas itératifs trouvés, à des exemples de procédés réels, notons toutefois que ces algorithmes risquent de diverger.



# Chapitre 4:

## CHAPITRE 4: APPLICATIONS.

### 4.1. introduction:

Dans le présent chapitre, on va mettre à l'épreuve les schémas d'affinement itératifs des deux commandes robustes  $H_\infty$  et  $H_2$  et ceci au moyen de simulations informatiques.

On va appliquer ces schémas à des exemples de procédés, pour voir l'amélioration que peuvent apporter ces algorithmes aux performances réalisées.

### 4.2. Principe général des simulations:

En simulation, le procédé réel est représenté par un modèle:

$$G_0(q) = q^{-d} \frac{B_0(q)}{A_0(q)}$$

$B_0$  et  $A_0$  étant des polynômes en  $q^{-1}$ .

Ce modèle joue le rôle du procédé réel, il est nommé *le procédé simulé*.

On identifie ce dernier par un autre modèle:

$$G(q) = q^{-d} \frac{B(q)}{A(q)}$$

Ce modèle est pris d'ordre inférieur à celui du procédé  $G_0$ . un tel choix permet d'approcher la situation réelle, car le modèle d'un système réel ne traduit jamais tout à fait sa dynamique.

Avec cette technique, c'est à dire la sous modélisation, on peut étudier l'effet de pertes de dynamiques sur les performances.

### **Synthèse en temps discret:**

Pour obtenir un correcteur  $H_\infty/H_2$  numérique, on suit les étapes suivantes[6]:

- Appliquer la transformation bilinéaire ( $T_e$  étant la période d'échantillonnage):

$$z \rightarrow \frac{2/T_e + s}{2/T_e - s}$$

pour obtenir la fonction de transfert équivalente du modèle en continu.



- Effectuer la synthèse  $H_\infty / H_2$  pour déterminer le correcteur  $K(s)$  en temps continu.
- Obtenir le correcteur numérique  $K(z)$  en appliquant la transformation bilinéaire inverse:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

au régulateur  $K(s)$ .

**Factorisation spectrale:**

Pour le calcul du filtre d'identification L:

$$|L(\omega)|^2 = \frac{|H(\omega)S(\omega)|^2 \left( \gamma^a |W_s(\omega)|^2 + |W_T(\omega)|^2 \right)}{\phi_r(\omega)}$$

il faut trouver une fonction de transfert R, telle que:

$$R(q^{-1})R^*(q) = W_s(q^{-1})W_s^*(q) \gamma^a + W_T(q^{-1})W_T^*(q).$$

Où  $a=1$  pour la commande  $H_\infty$  et  $a=0$  pour la commande  $H_2$ .

$R^*$  dénote le complexe conjugué de R, et de même pour  $W_s^*$  et  $W_T^*$ .

Ce problème est connu sous le nom de *factorisation spectrale*.

Une façon de procéder consiste à calculer les pôles et les zéros de la fonction de transfert à factoriser, ils se présentent par paires inverses conjugués. Il suffit alors de ne garder que les zéros et pôles stables pour obtenir R [8].

Ainsi l'expression du filtre L se trouve déterminée.

**4.2. Implémentation des schémas itératifs:**

Après avoir présenter les outils essentiels utilisés dans les simulations, on va passer à l'implémentation des algorithmes itératifs, notons que nous ne possédons aucune garantie sur la convergence de ces algorithmes.

**4.2.1. Application à un modèle d'ordre 7:**

On a repris l'exemple étudié dans [13]. Il s'agit d'un système d'ordre 7, stable mais à phase non minimale.

Les coefficients des polynômes  $A_0$  et  $B_0$  sont, en puissances croissante de  $q^{-1}$ , avec  $d=0$ :

$$a_0 = [1 \ 0.0049 \ -0.0848 \ -0.1953 \ 0.1450 \ -0.0159 \ -0.0505 \ 0.0145]$$

$$b_0 = [0 \ 0.5 \ 1.5059 \ 0.8575 \ 0.0897 \ 0.5463 \ 0.0738 \ 0.0002].$$

On va identifier un premier modèle d'ordre 3:  $n_a = 3$ ,  $n_b = 3$ , et  $d=0$  (on a bien une sous modélisation), commun aux deux commandes étudiées.

**a. Algorithme itératif de la commande  $H_\infty$  :**

A base du premier modèle, on synthétise un correcteur  $H_\infty$  en choisissant comme fonctions de pondération:

$$W_s = 100 \frac{0.01s + 1}{900s + 1} \quad \text{et} \quad W_T = 2500 \frac{s + 1}{s + 300}$$

choix effectué après avoir essayé plusieurs poids, on présentera après les difficultés rencontrées lors du choix de ces filtres.

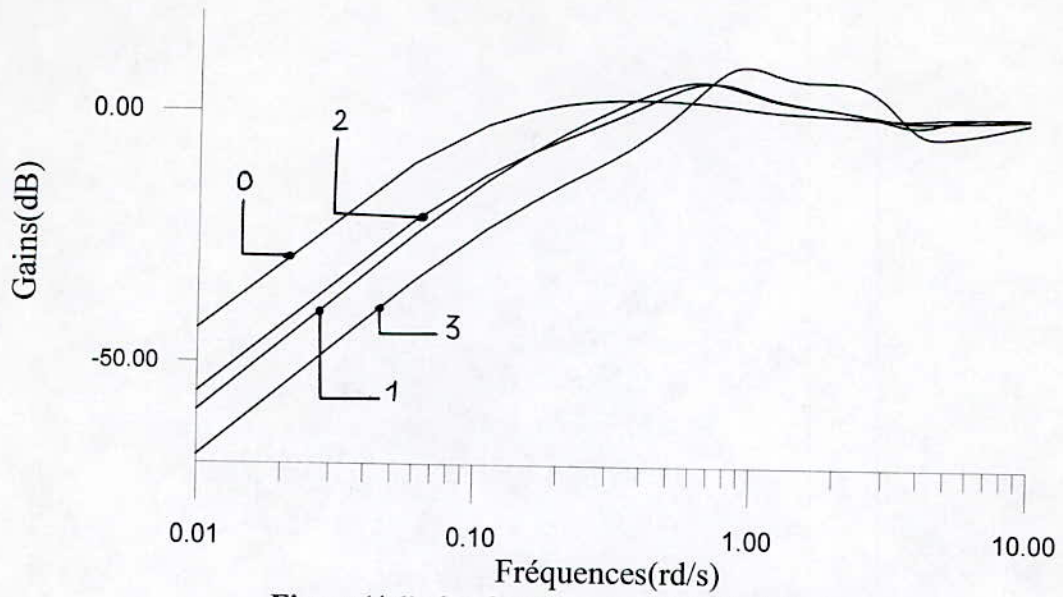
Sur les figures: (4.1) et (4.2), on a relevé les tracés des fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire réalisées des quatre premières itérations, et les filtres d'identification ainsi que les réponses indicielles du procédé réel ont été relevés au figures (4.3) et (4.4).

On a relevé aussi dans le tableau (4.1), les fréquences de coupure, les bandes d'atténuation, et les marges de modules (maximum de la fonction sensibilité, permettant d'analyser la robustesse) réalisées.

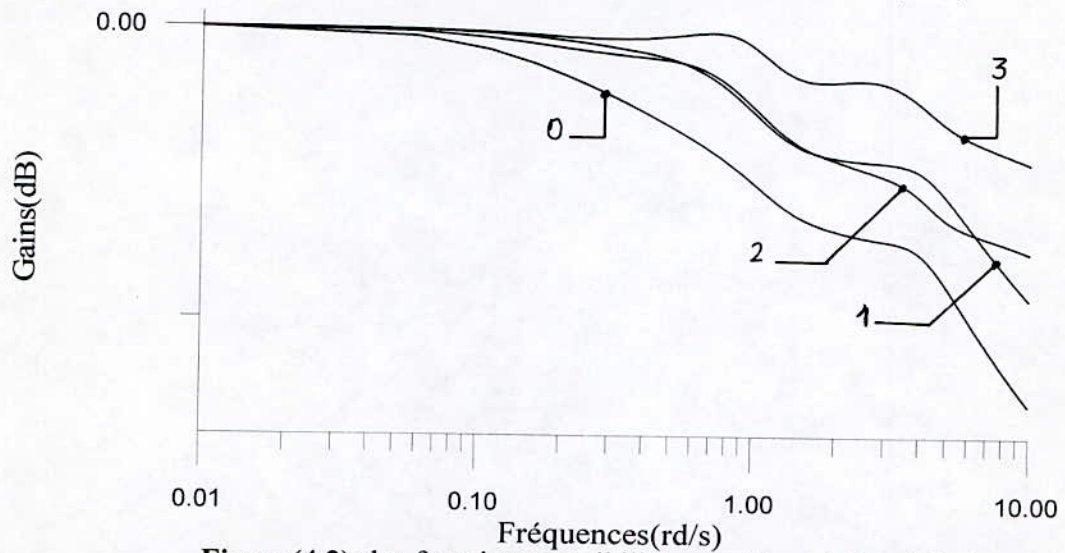
Itération	Fréquences de coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	0.01	0.149	1.1568
1	0.036	0.291	1.3904
2	0.021	0.344	1.3734
3	0.042	0.531	1.6302

**Tableau (4.1)**

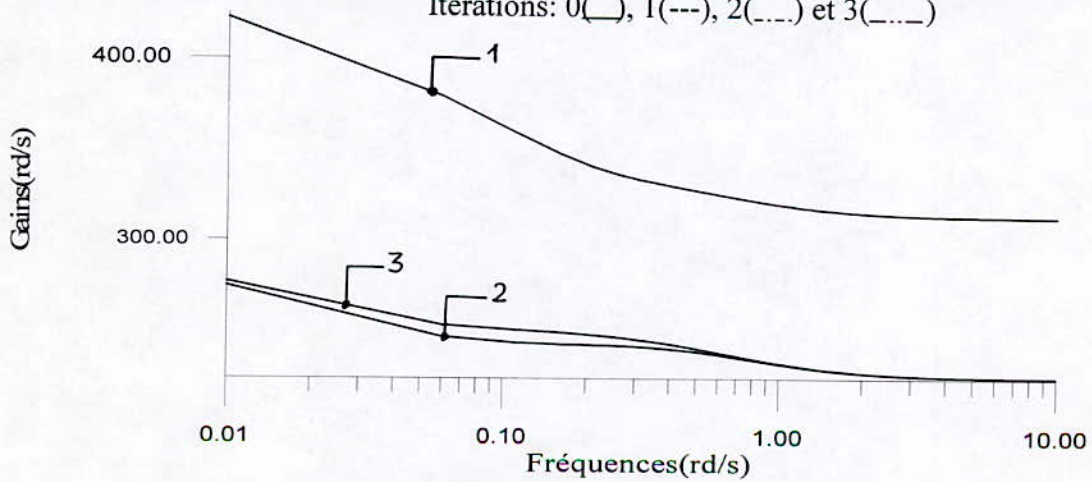




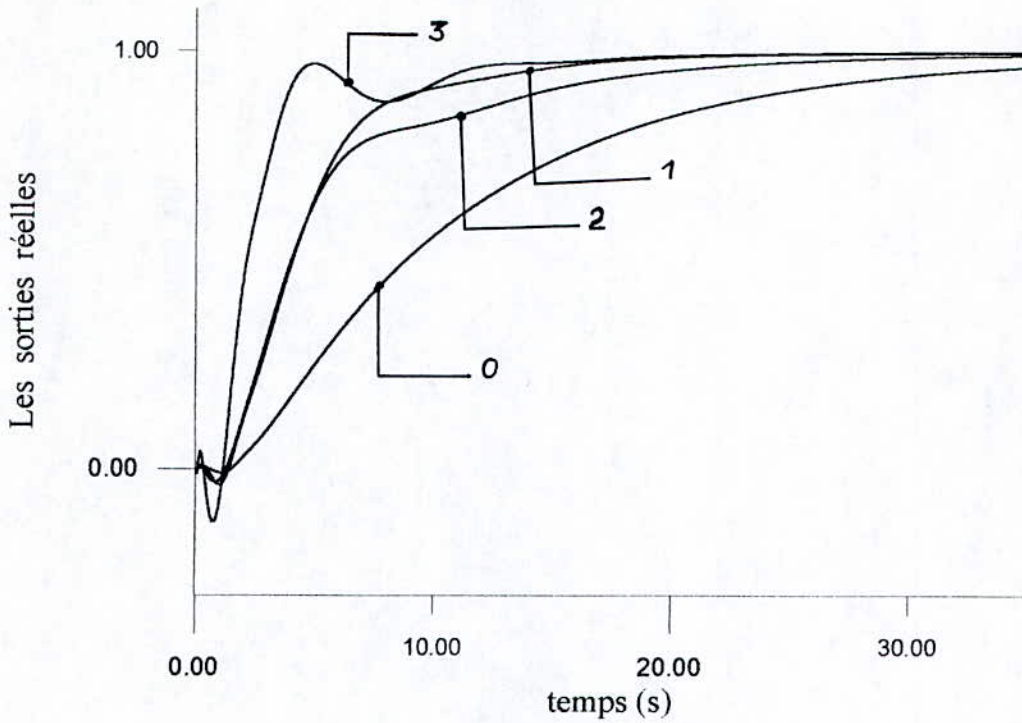
**Figure(4.1):** les fonctions sensibilité réalisées  
Itérations: 0(—), 1(---), 2(....) et 3(.....)



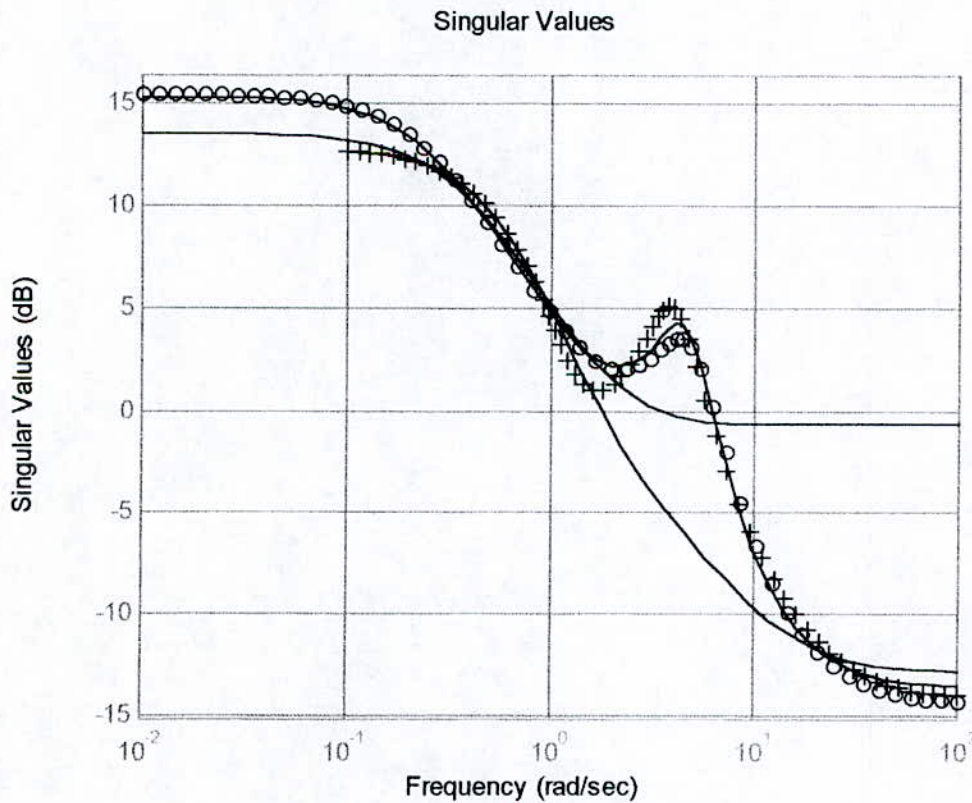
**Figure(4.2):** les fonctions sensibilité complémentaire réalisées  
Itérations: 0(—), 1(---), 2(....) et 3(.....)



**Figure(4.3):** les filtres d'identification  
Itérations: 1(—), 2(---)et 3(.....)



**Figure(4.4):** les réponses indicielles réalisées  
 Itérations: 0(—), 1(---), 2(-·-·-) et 3(-·-·-)



**Figure(4.5):** Tracés de Bode du système réel (+) et des modèles nominaux:  
 Itérations: 0(□), 1(-.-), 2(-- --) et 3(o).



L'observation des différentes courbes permet de faire les remarques suivantes:

- La première itération (identification en boucle ouverte, et synthèse du premier régulateur), donne déjà un assez bon résultat (réponse bien amortie avec erreur statique de l'ordre de  $10^{-3}$ ) que l'on peut attribuer aux bonnes caractéristiques de la commande considérée.
- On constate une amélioration de la fonction sensibilité (aplatissement de la fonction sensibilité) au cours des itérations, ce qui se traduit par une amélioration des performances, ceci au pris d'une diminution de robustesse (fonctions sensibilité complémentaire plus importantes en haute fréquences).

Ces résultats se trouvent confirmés en observant le tableau (4.1), la dernière itération donne la meilleure forme de la fonction sensibilité mais avec une marge de module importante (le pic le plus important).

- Après une amélioration des performances à la première itération, la deuxième donne des performances moindres, notons qu'entre les itérations on a rejeté plusieurs régulateurs ayant des performances pauvres, et parfois déstabilisants le système réel.
- Les tracés de Bode des modèles successifs superposés au système réel, montre une légère détérioration du modèle par rapport au premier modèle (identifié en boucle ouverte), et qui est le meilleur, ceci implique que le meilleur choix du modèle (celui qui assure une bonne robustesse) n'est pas celui qui décrit au mieux la dynamique du système en boucle ouverte, et même mieux, la dernière itération qui donne de bons résultats, nous fournit un modèle qui décrit bien le système en hautes fréquences, ce qui n'est pas le cas pour l'identification classique.

#### **b. Algorithme itératif de la commande $H_2$ :**

On suit les mêmes étapes que pour la commande  $H_\infty$ , mais en plus, on a utilisé les filtres de commande  $F_1$  et  $F_2$  de l'algorithme de Gevers, ceci après les avoir estimés.

Une manière classique d'estimation du spectre d'un signal  $x(t)$ , est de le modéliser par un bruit blanc  $e(t)$  filtré par une fonction de transfert auto-regressive (structure AR):

$$x(t) = \frac{1}{P_x(q^{-1})} e(t)$$

les paramètres de  $P_x$  sont estimés par identification, le spectre du signal est alors donné par:

$$\phi_x(\omega) = \frac{1}{|P_x(e^{j\omega})|^2}$$

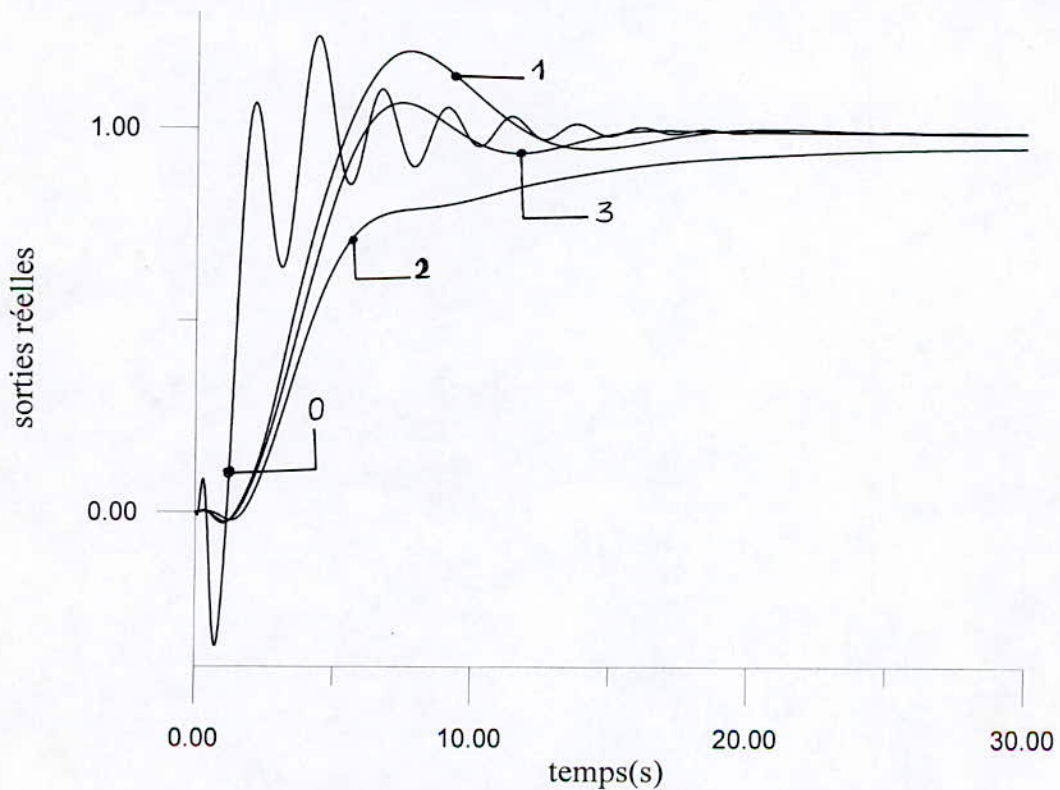
Après avoir effectué plusieurs essais pour trouver des pondérations satisfaisantes, on a relevé comme précédemment les différents tracés de Bode des quatre premières itérations, et le tableau (4.2), résume les performances réalisées.

Itération	Fréquences de Coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	1.93	0.6070	3.9716
1	0.55	0.2935	1.8818
2	0.10	0.3060	1.4985
3	0.50	0.3025	1.7977

**Tableau (4.2)**

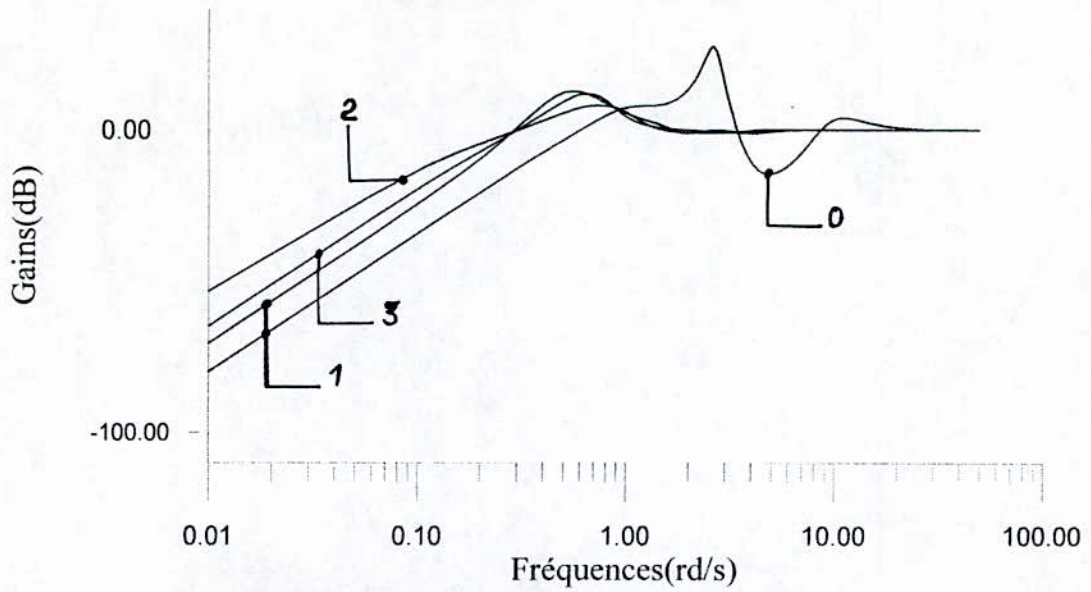
Aux figures (4.7) et (4.8) sont représentées les fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire respectivement, les figures (4.9) et (4.10) représentent respectivement les filtres de commande et les filtres d'identification. Les tracés de Bode des modèles nominaux sont illustrés à la figure (4.11).

ci-dessous sont données les réponses indicielles réelles.

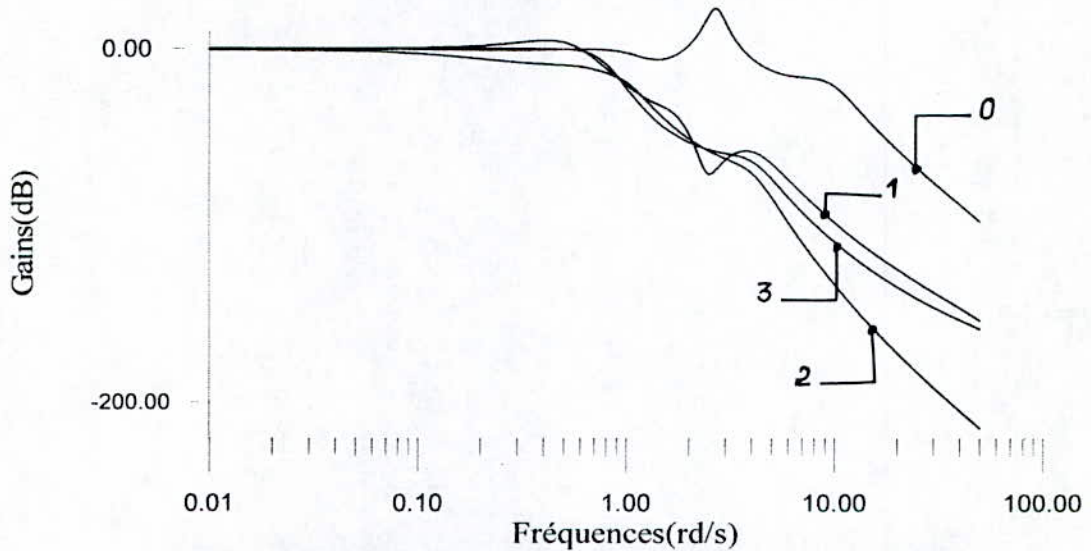


**Figure(4.6):** Les réponses indicielles réalisées;  
Itérations: 0(—), 1(---), 2(-·-·-) et 3(- - -)

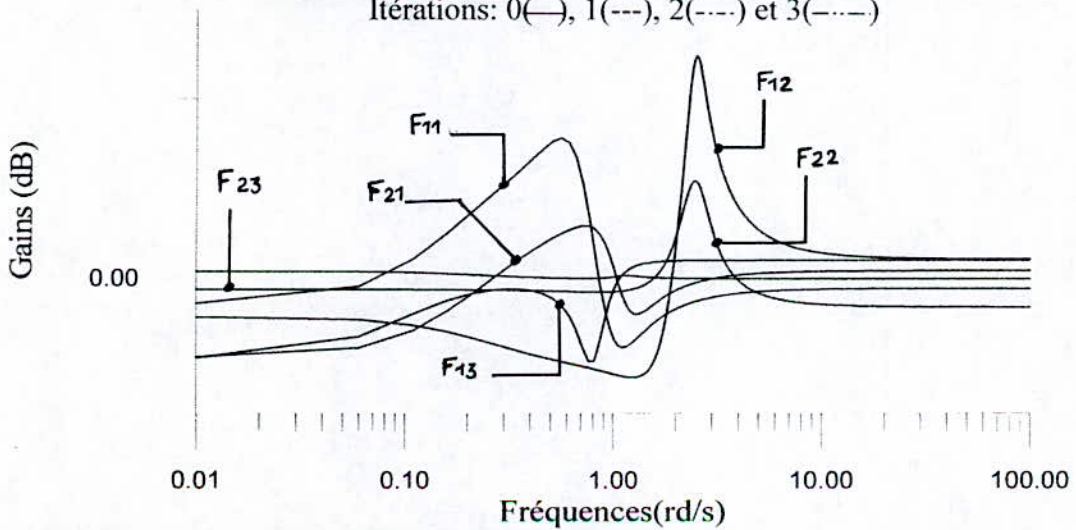




**Figure(4.7):** Les fonctions sensibilité réalisées;  
Itérations: 0(—), 1(---), 2(-.-.-) et 3(-.-.-.-)

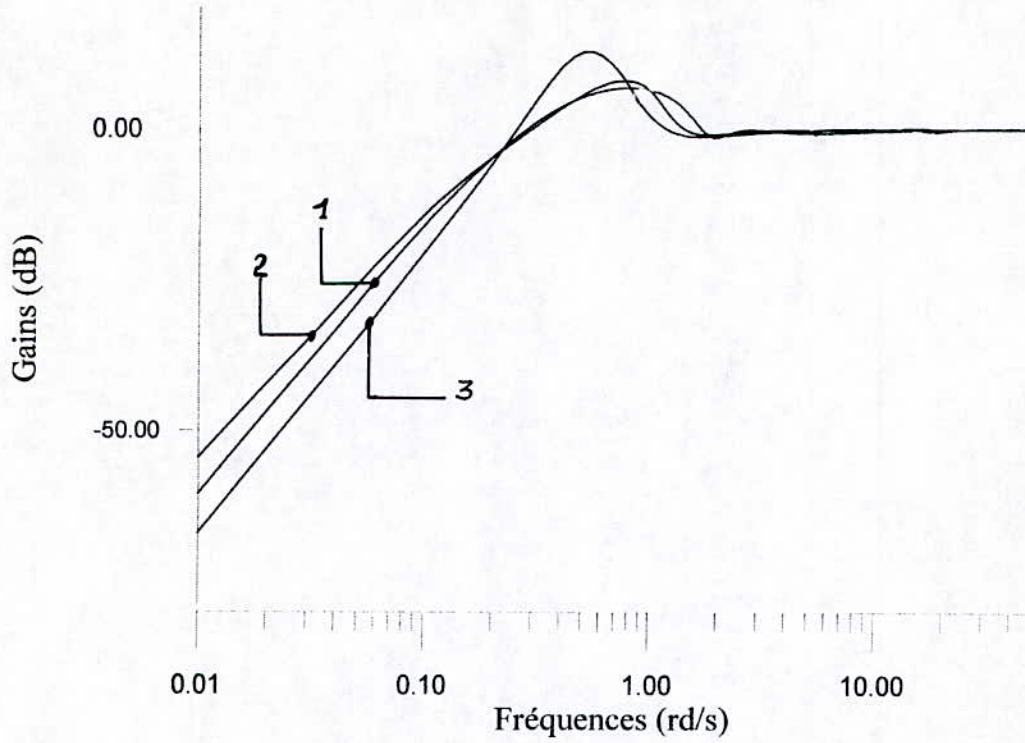


**Figure(4.8):** Les fonctions sensibilité complémentaire réalisées;  
Itérations: 0(—), 1(---), 2(-.-.-) et 3(-.-.-.-)

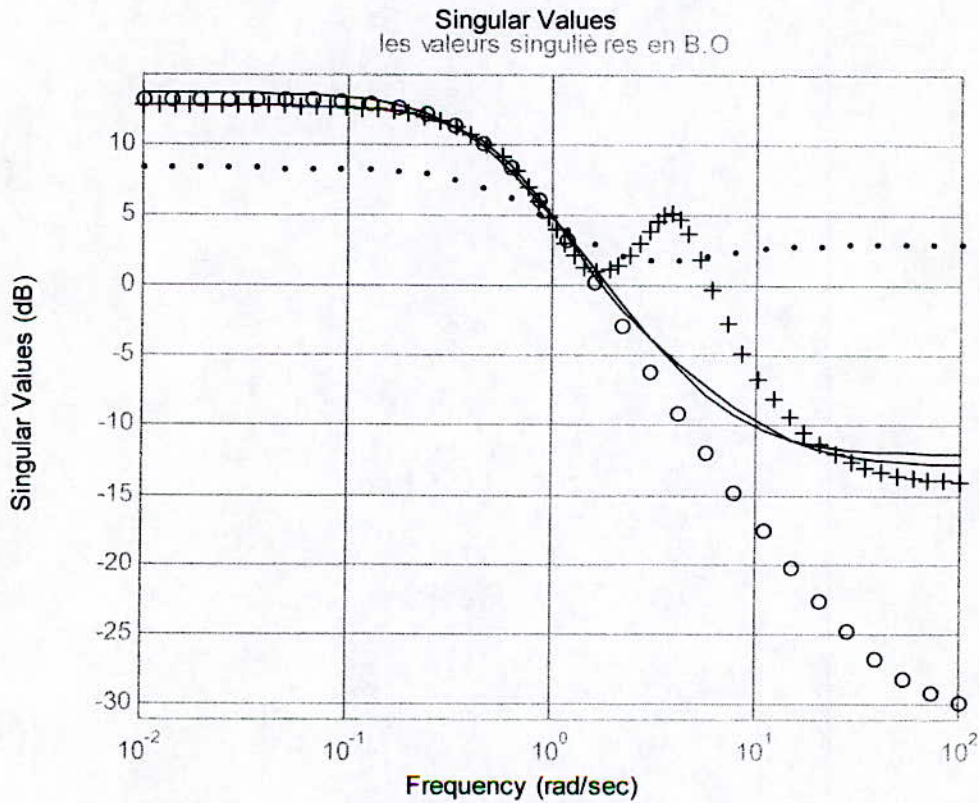


**Figure(4.9):** Les filtres de commande F1 et F2; itérations: 1(—), 2(-.-.-) et 3(-.-.-.-)





**Figure(4.10):** Filtrés d'identification;  
itérations:1(—), 2(-- ) et 3(- . ).



**Figure(4.11):** Les tracés de Bode du système réel (+), et des modèles nominaux;  
Itérations:0(—), 1(....), 2(o) et 3(- . -).

En observant les résultats trouvés, on peut faire les remarques suivantes:

- La première itération (itération 0), donne une réponse indicielle oscillatoire, bien que la réponse nominale soit aperiodique (bien amortie), d'où le pic dans la réponse fréquentielle du système en boucle fermée (la fonction sensibilité complémentaire), cette fonction est moins faible en hautes fréquences que les autres fonctions des itérations suivantes.
- La fonction sensibilité de la première itération est faible en basses fréquences avec une plus large bande d'atténuation, mais un avec un pic important.
- La deuxième itération est meilleure que la première, avec un pic inférieur, une fonction sensibilité presque aussi faible en basse fréquences que la première itération, avec un pic beaucoup moins important. Par contre l'itération suivante est mauvaise (par rapport aux autres), le système répond plus lentement, et la fonction sensibilité est plus importante.
- La dernière itération est la meilleure, le système répond plus rapidement, la fonction sensibilité est aussi faible en basse fréquences que celle de l'itération 0, et avec un pic moindre, en plus que la fonction sensibilité complémentaire est nettement plus faible (que l'itération 0) en hautes fréquences, ce qui implique une meilleure robustesse.
- Ici aussi on constate la différence entre les modèles identifiés en boucle ouverte et boucle fermée, en particulier l'itération 1 qui est très différente par rapport au système réel et aux autres modèles, alors que le résultat de cette itération est satisfaisant, se confirme le résultat cité précédemment (pour le cas de la commande  $H_\infty$ ).

#### Remarques:

- L'utilisation des filtres de commande ne fait que compliquer le choix des fonctions poids, en plus ils n'ont pas d'influence dans la synthèse, car leur effet est négligeable devant les poids  $W_s$  et  $W_T$ , pour cela on les a pas utilisé aux autres applications.
- Les résultats relevés aux différents tableaux sont calculés de manière approximatifs.

A la vue de ces résultats, on peut conclure que le choix d'un schéma itératif est bénéfique.

Dans ce qui suit, on va appliquer ces schémas à des exemples de procédés réels.



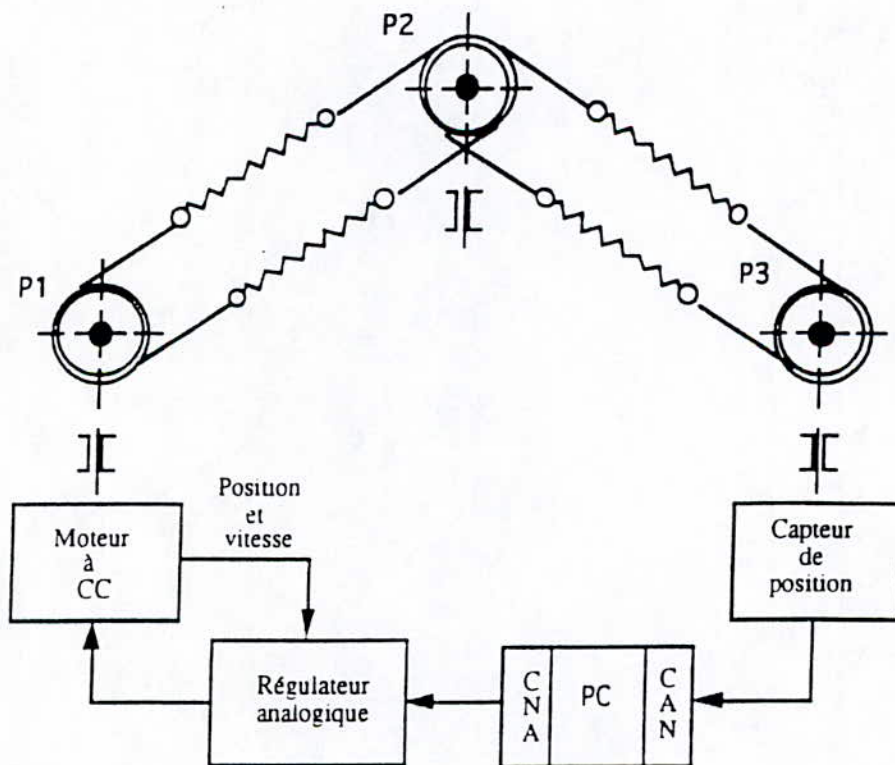
**4.2.2 Application à un système de transmission flexible:**

le procédé à commander est un système de transmission flexible [11], composé de trois poulies (P1, P2, P3) reliées par deux courroies comportant chacune deux ressorts comme l'indique la figure (4.12). Le mouvement de la poulie (P1) est généré par un moteur à courant continu qui est localement asservi par un régulateur analogique.

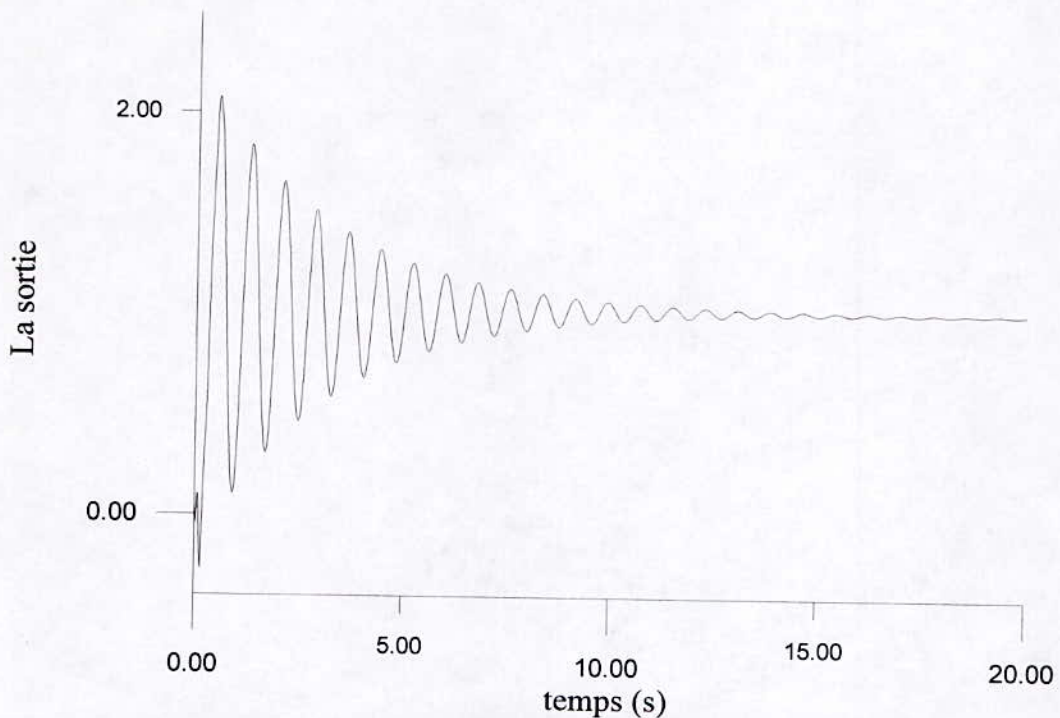
La sortie  $y(t)$  à commander est la position angulaire de la poulie P3. La commande  $u(t)$  représente la consigne de la position angulaire de la poulie P1.

La complexité du problème de commande considéré, est due au comportement oscillatoire du procédé à commander.

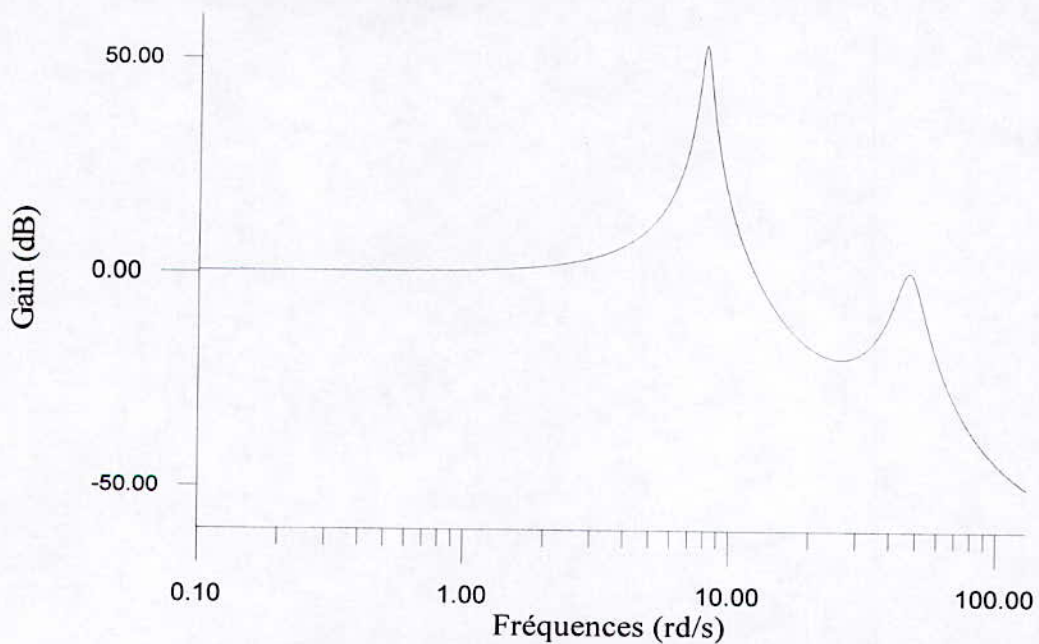
En effet, en observant la réponse indicielle et fréquentielle (figures (4.13) et (4.14) respectivement) du système en boucle ouverte, on constate qu'il est très oscillatoire et qu'il possède deux pics de résonance aux alentours des fréquences: 8rd/s et 46.78rd/s (le deuxième étant beaucoup moins important).



**Figure (4.12):** Système de transmission flexible.



**Figure (4.13):** La réponse indicielle du système en boucle ouverte.



**Figure (4.14):** La réponse fréquentielle du système en boucle ouverte.

Le procédé simulé est un système d'ordre 4, à phase non minimale (ayant trois zéros instables:  $Z1=9.9961$ ,  $Z2=-6.7896$ ,  $Z3=-1.6523$ ), donné par la fonction de transfert suivante:

$$P_0 = \frac{-175.2186z^3 + 272.3089z^2 + 12820.3237z^1 + 19649.246}{41649.3127z^4 - 34385.006z^3 + 15224.4481z^2 - 23669.557z + 32999.0025}$$

La période d'échantillonnage est égale à 70ms.



On identifie un premier modèle pour les deux commandes, par la structure (1.1) (chapitre 1), avec les degrés:  $n_a = 2$ ,  $n_b = 2$ ,  $n_c = 2$ ,  $n_d = n_f = 0$ ,  $d = 1$ .

**a. Algorithme itératif de la commande  $H_\infty$  :**

On a synthétisé un correcteur  $H_\infty$ , tel que les fonctions poids sont choisies comme suit:

$$W_s(s) = 1500 \frac{10^{-4}s + 1}{400s + 1} \quad \text{et} \quad W_T(s) = 500 \frac{(s + 10)(s + 50)}{(s + 100)^2}$$

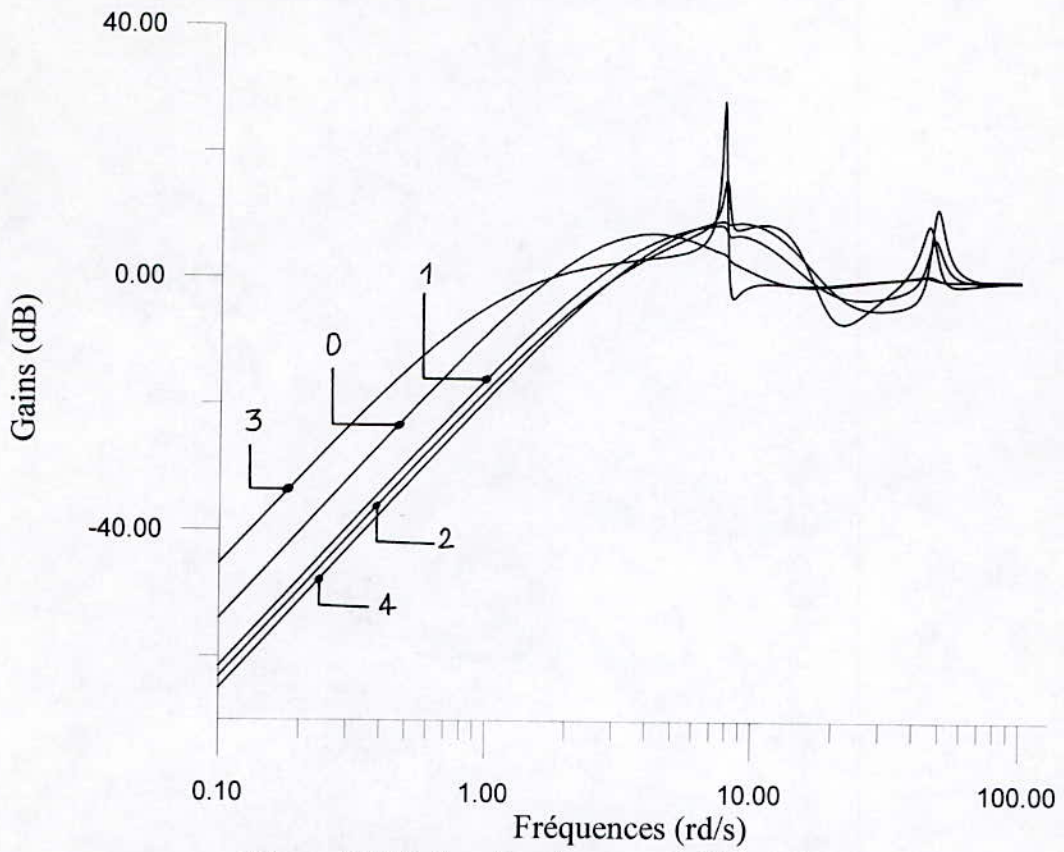
Les performances réalisées à la première itération (itération 0) sont déjà très satisfaisantes (voir figures ci-dessous), en gardant les mêmes poids, la deuxième itération (itération 1) est aussi bonne, ce qui implique que l'algorithme itératif présente un caractère de convergence. Ceci nous a incité à exiger de meilleures performances à chaque itération.

En effet, on a refait la deuxième itération (et par la suite la troisième itération), après avoir changé les pondérations fréquentielles, les résultats n'étaient pas décevants, car effectivement il y a amélioration par rapport à l'itération première.

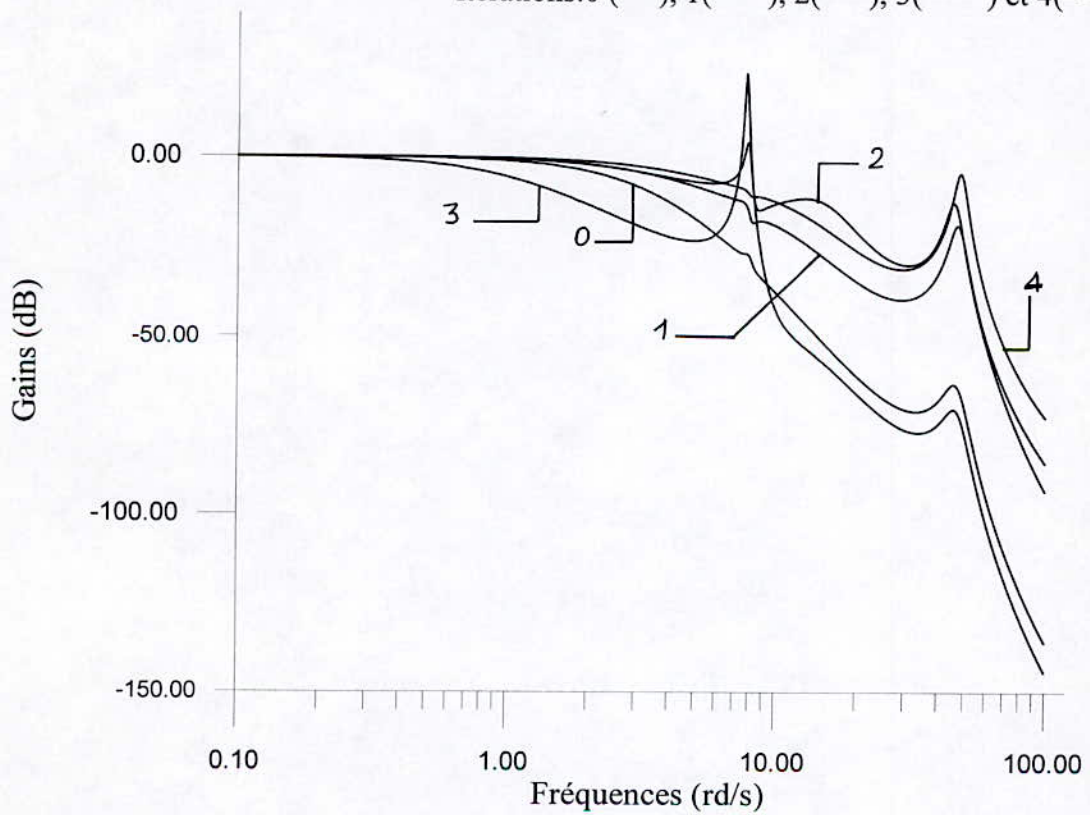
L'algorithme devient vite divergent à l'itération suivante (quatrième itération), car déjà sans changement des fonctions poids (c'est à dire ne pas essayer d'améliorer les performances), le système réel devient instable. On a refait alors la synthèse en sacrifiant les performances, pour assurer la robustesse, on a obtenu une réponse moins performante que les autres.

A la dernière itération qu'on a effectué, l'algorithme redevient convergent, et on réalise des performances meilleures.

Les performances réalisées sont résumées au tableau (4.3), et les tracés de Bode des fonctions sensibilité, sensibilité complémentaire, et des filtres d'identification pour les cinq premières itérations sont données aux figures (4.15), (4.16), et (4.17) respectivement. Et les réponses indicelles réalisées sont représentées à la figure (4.18).

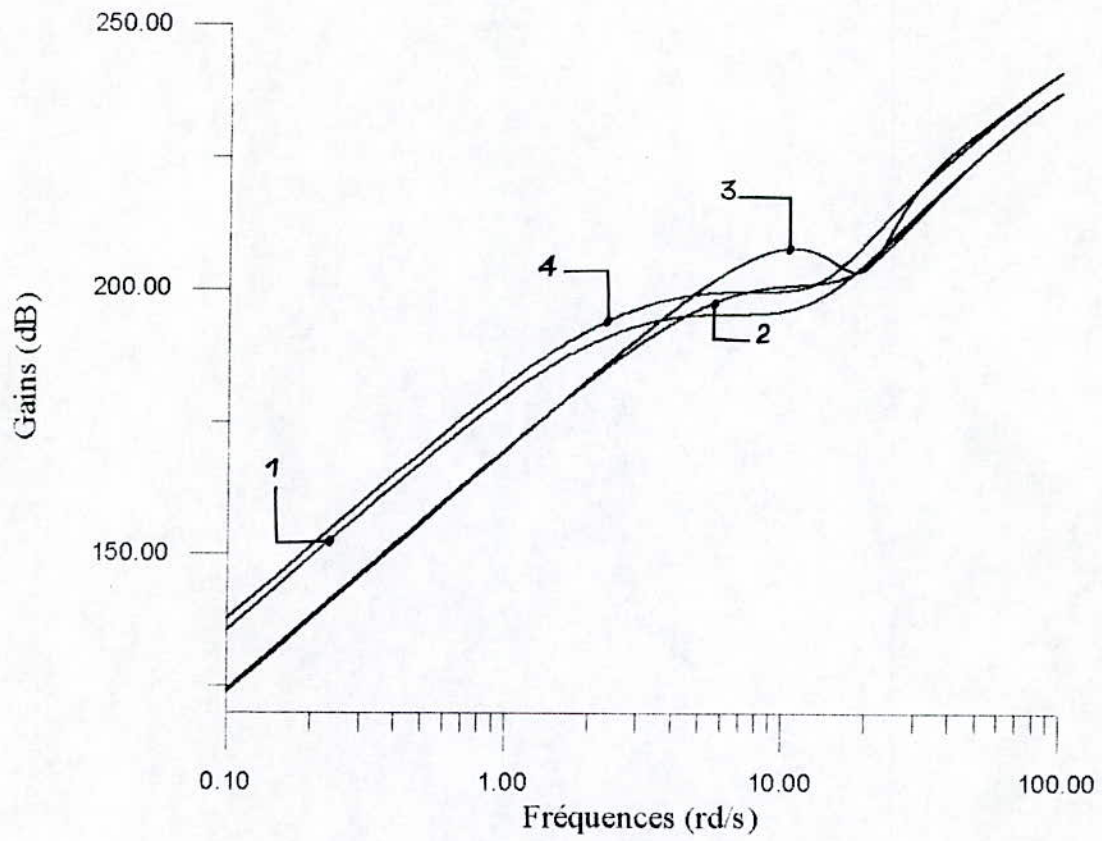


**Figure (4.15):** Les fonctions sensibilité réalisées;  
Itérations: 0 (—), 1(---), 2(----), 3(-----) et 4(--).

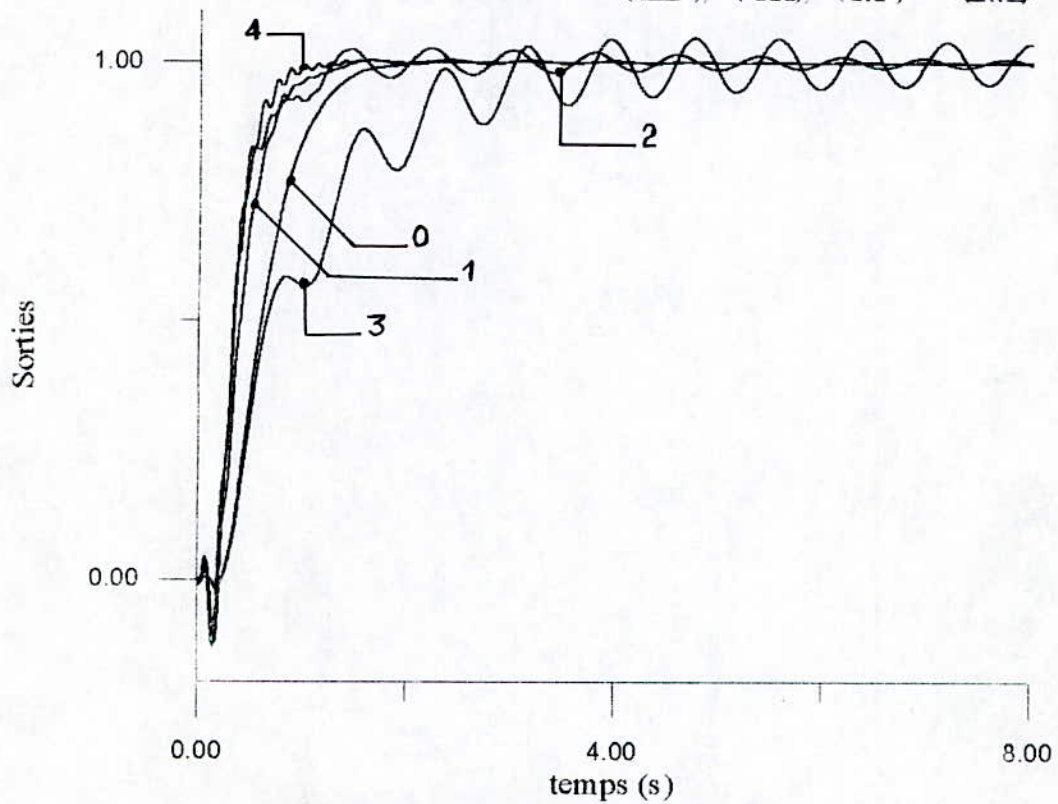


**Figure (4.16):** Les fonctions sensibilité complémentaire réalisées;  
Itérations: 0 (—), 1(---), 2(----), 3(-----) et 4(--).





**Figure (4.17):** Les filtres d'identification;  
Itérations: 1( — ), 2( - - - ), 3( - · - · ) et 4( - - - ).



**Figure (4.18):** Les réponses indicielles réalisées;  
Itérations: 0( — ), 1( - - - ), 2( - · - · ), 3( - - - ) et 4( - - - ).

Itération	Fréquences de coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	0.21	1.72	1.429
1	0.32	2.57	1.535
2	0.31	2.99	2.195
3	0.06	1.71	4.087
4	0.44	2.98	1.586

**Tableau(4.3)**

L'observation des résultats obtenus, montre qu'il y a amélioration des performances aux cours des itérations, la rapidité du système et l'aplatissement de la fonction sensibilité augmentent, ainsi que la bande d'atténuation du système, sauf pour la troisième itération, où il y a dégradations des performances (réponse oscillatoire, et une bande d'atténuation faible avec une marge de module importante).

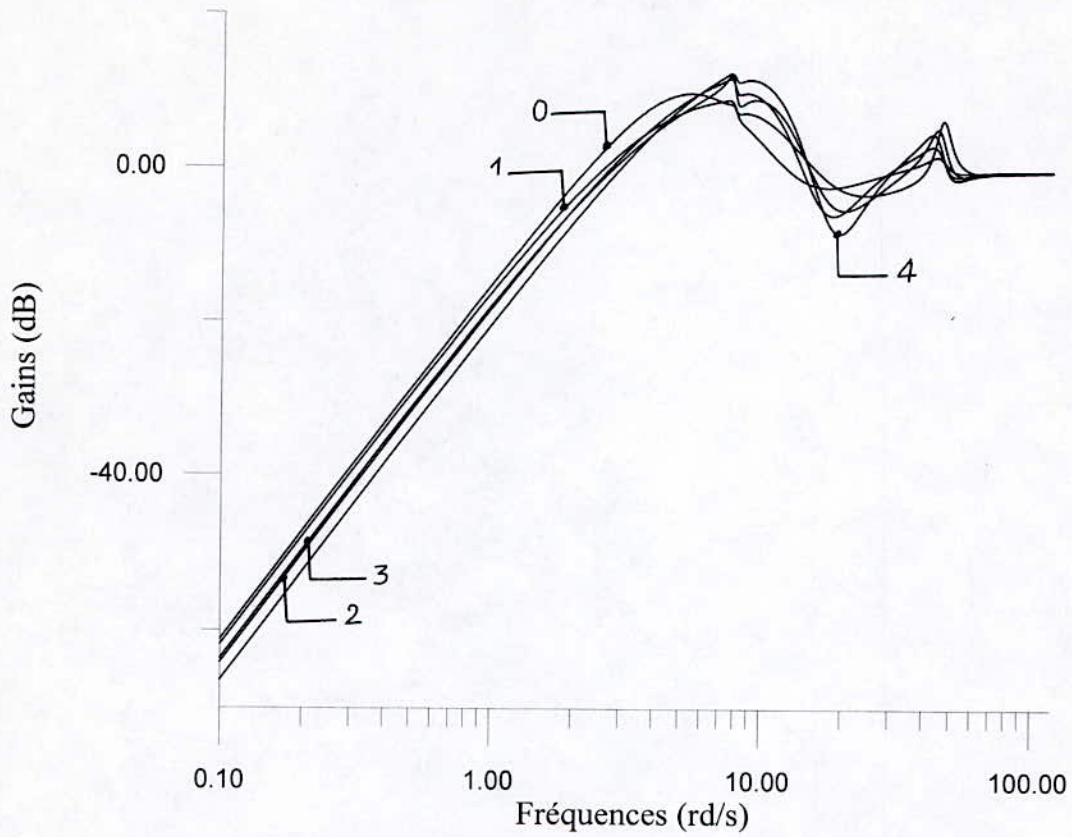
La dernière itération nous fournit la meilleure réponse (système rapide bien amorti, large bande d'atténuation avec une marge de module relativement faible).

#### **b. Algorithme itératif de la commande $H_2$ :**

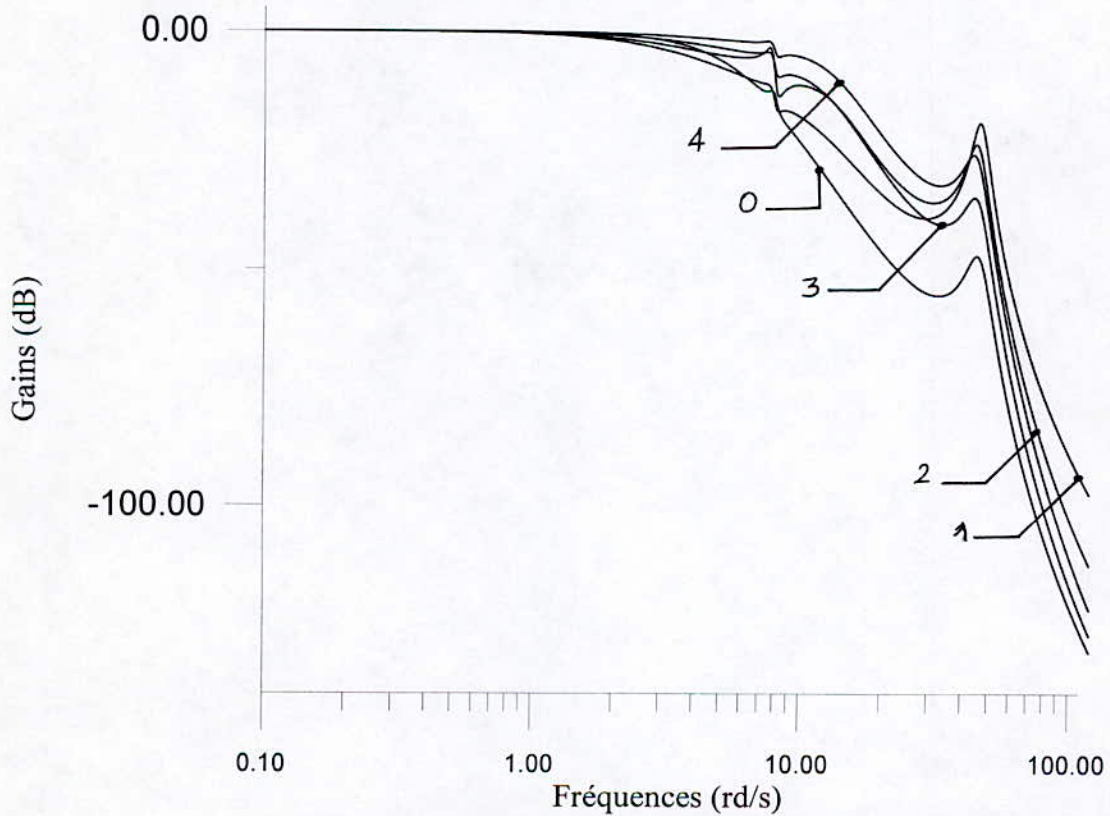
On a suivi les mêmes étapes que pour la commande précédente, l'algorithme présente un caractère de convergence meilleur (sans changement de pondérations, il y a convergence), ce résultat encourageant nous a incité à demander plus de performances à chaque itération (ceci en cherchant à chaque étapes les pondérations adéquates). Le schéma itératif ne nous a pas déçu.

Les performances réalisées sont résumées au tableau (4.4), les différentes réponses du système ainsi que les filtres d'identification, pour les cinq premières itérations, sont données au figures (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22).

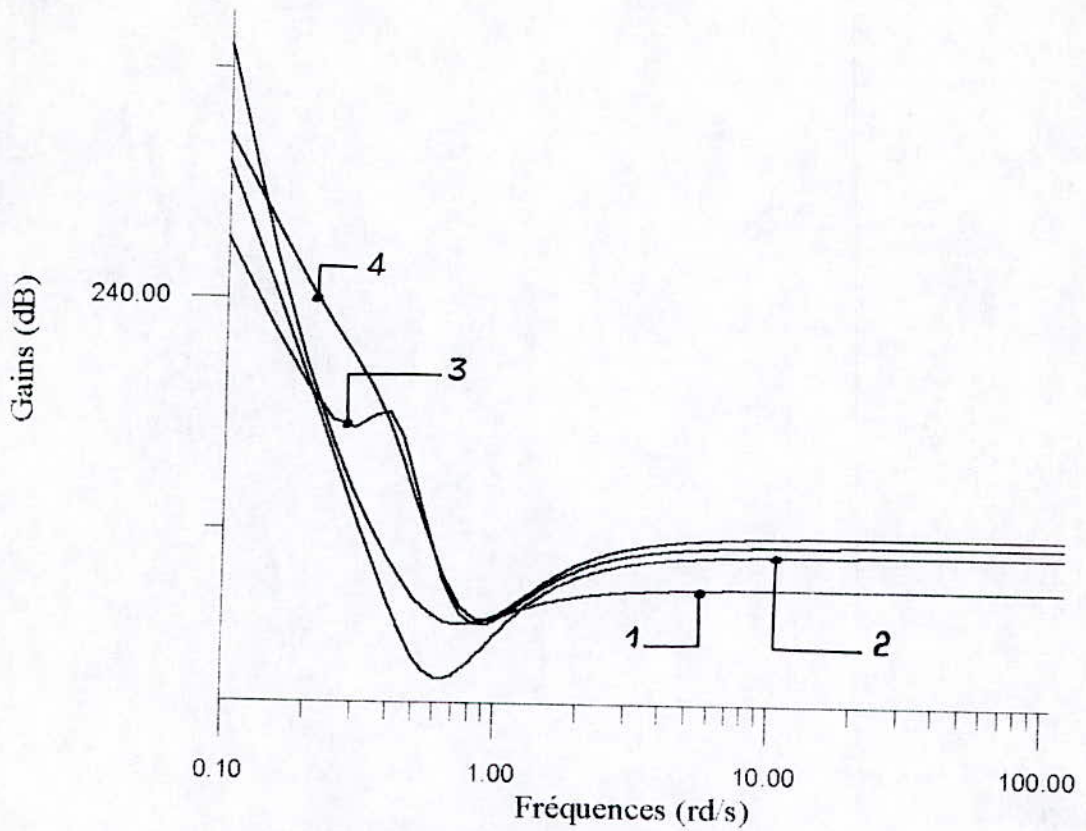




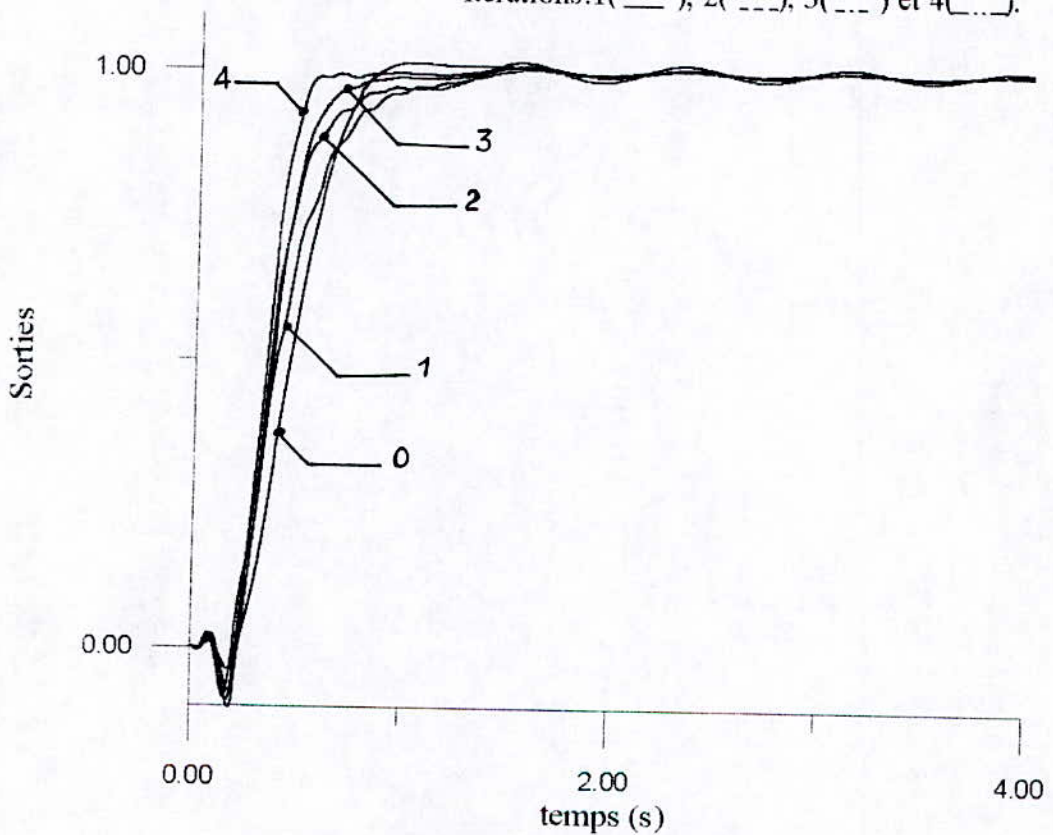
**Figure (4.19):** les fonctions sensibilité réalisées;  
Itérations:0 (—), 1(--- ), 2( ----), 3(-----) et 4(--).



**Figure (4.20):** Les fonctions sensibilité complémentaire réalisées;  
Itérations:0 (—), 1(--- ), 2( ----), 3(-----) et 4(--).



**Figure (4.21):** Les filtres d'identification;  
Itérations: 1( — ), 2( --- ), 3( -.- ) et 4( -.-.- ).



**Figure (4.22):** Les réponses indicielles réalisées;  
Itérations: 0 ( — ), 1( --- ), 2( -.- ), 3( -.-.- ) et 4( -.- ).



Itération	Fréquences de coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	0.35	2.26	1.632
1	0.20	2.59	1.568
2	0.23	2.81	1.842
3	0.32	2.74	1.797
4	0.49	2.99	1.869

**Tableau (4.4)**

On constate que la première itération est déjà très satisfaisante (système rapide et bien amorti, avec un très léger dépassement de l'ordre de 1.2%), les itérations qui s'en suivent sont bonnes. le pic résonnant du procédé en boucle ouverte a disparu, et toutes les réponses sont presque apériodiques.

La dernière itération est la meilleure; la bande d'atténuation est large, ainsi que la bande passante du système, avec une marge de module un peu plus importante que les autres.

Pour tester l'efficacité de ce schéma itératif, on a pris les pondérations fréquentielles de la dernière itération, et on a refait la synthèse du régulateur de l'itération 0 (à base du modèle identifié en boucle ouverte) en utilisant ces fonctions poids, le résultat obtenu est surprenant: le système est instable. Ceci veut dire quoi?

Si on exige des performances dès le départ (en choisissant de tels filtres), on tombe dans l'instabilité (alors qu'on souhaitait réaliser des performances robustes). Ceci montre que c'est le schéma itératif qui fait que les performances soient améliorées (et non pas les fonctions poids par exemple), ce qui confirme encore une fois ce qui a été dit pour la première application, le meilleur modèle choisi, n'est pas nécessairement celui qui traduit le mieux la dynamique du système en boucle ouverte.

En observant les résultats obtenus pour les deux commandes, on voit que les performances réalisées avec la commande  $H_2$  sont aussi bonnes (et parfois meilleures) que celles réalisées avec la commande  $H_\infty$ , ce qui montre la robustesse de la commande  $H_2$  d'un côté, et de l'autre côté on réalise que c'est pas parce que la commande  $H_\infty$  minimise la valeur maximale du gain de certaines fonctions (chapitre 2), qu'elle est sensée être meilleure que la commande  $H_2$  qui elle minimise la valeur moyenne.

### 4.2.3 application à un bras flexible à un degré de liberté:

Le système en question est un bras flexible à un degré de liberté [17], il est composé de deux bandes flexibles d'aluminium reliés par dix ponts d'acier. Le bras est monté rigidement à une extrémité sur l'axe d'un moteur à courant continu; à l'autre extrémité est fixée une diode infrarouge permettant de connaître la position angulaire du bout du bras (figure(4.23)).

L'axe du moteur est localement asservi en position par régulateur analogique PD.

Le but recherché est de commander la position du bout du bras en agissant sur la position de l'axe du moteur.

Là aussi le système exhibe un mouvement oscillatoire dû à la présence de trois modes de résonance (figures (4.24) et (4.25)), il est d'ordre 6, stable mais à phase non minimale (zéros instables:  $Z_1=3.5901$ ,  $Z_2=0.8969+1.4892i$ , et  $Z_3=0.8969-1.4892i$ ), il est donné par la fonction de transfert suivante:

$$G_0(z) = \frac{-0.0203z^{-4} + 0.1004z^{-3} - 0.1442z^{-2} + 0.1361z^{-1} + 0.0965}{1 - 1.5883z^{-1} + 0.91036z^{-2} - 0.5936z^{-3} + 0.9528z^{-4} - 1.3009z^{-5} + 0.7629z^{-6}}$$

L'identification en boucle ouverte est faite par un modèle de la structure (1.1), avec les degrés:  $n_a=3$ ,  $n_b=2$ ,  $n_c=2$  et  $k=1$  ( $k$  étant la retard du système).

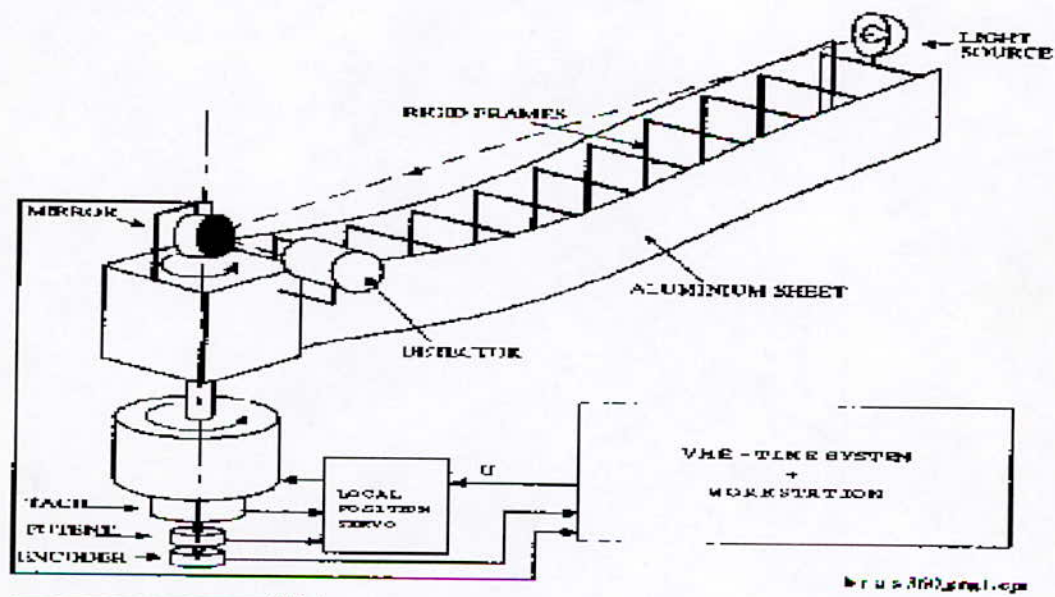
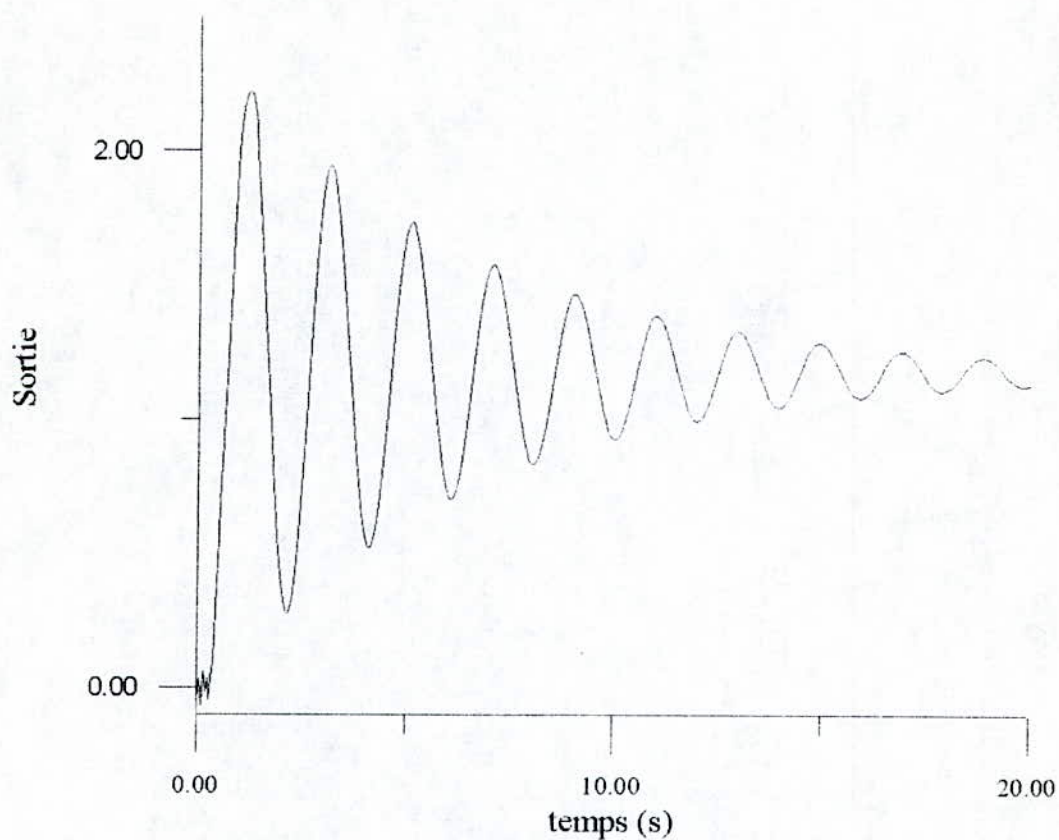
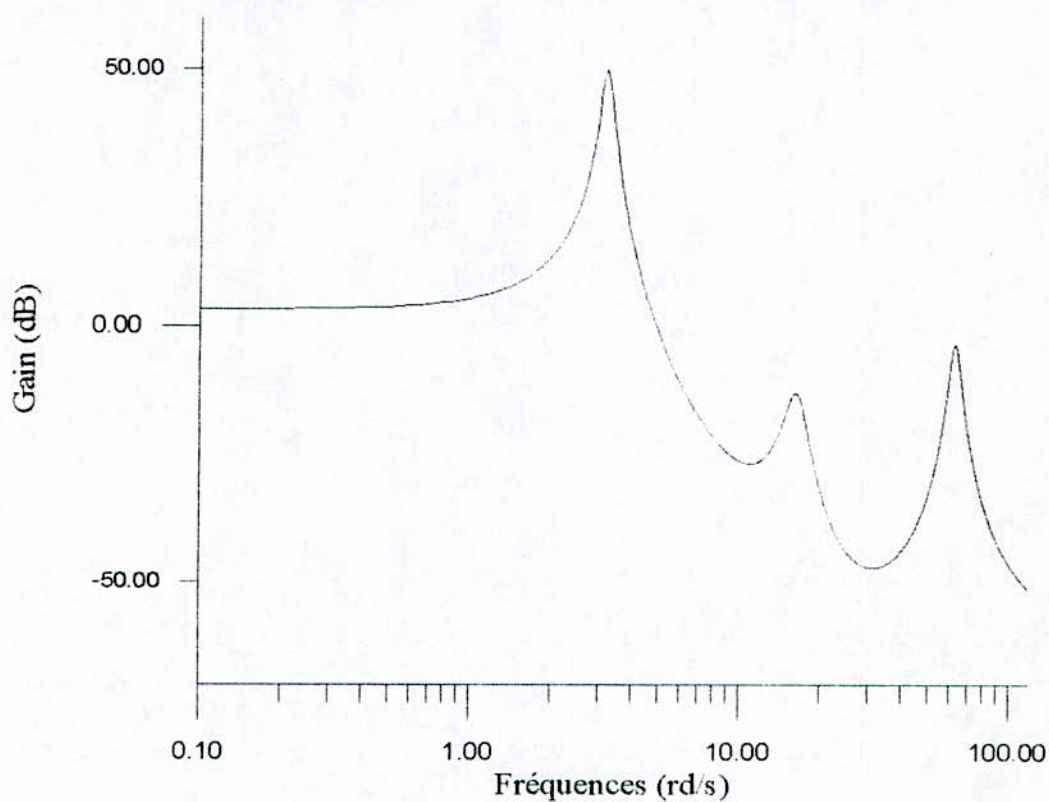


Figure (4.23): Bras flexible à un degré de liberté.





**Figure (4.24):** La réponse indicielle du procédé réel en boucle ouverte.



**Figure (4.25):** Diagramme de Bode du procédé en boucle ouverte.



### a. Affinement itératif de la commande $H_\infty$ :

A base du premier modèle, on a synthétisé un compensateur  $H_\infty$  (par sensibilité mixte), on a réalisé la première itération avec succès, le modèle et le système réel sont stables tout deux, avec des performances satisfaisantes, on est passé à l'itération suivante en effectuant la factorisation spectrale pour le calcul du filtre d'identification, lequel on a utilisé pour identifier un premier modèle en boucle fermée (même procédure que celle utilisée pour les autres applications). Mais à l'étape de synthèse, le système réel devient instable, on a essayé un grand nombre de fonctions poids pour essayer de le stabiliser, et bien que le compensateur trouvé à chaque fois, présentait une bonne robustesse vis à vis du modèle nominale, le système demeure instable, donc notre algorithme itératif est divergent.

On a essayé d'utiliser la synthèse par factorisations premières, qui est plus robuste, d'un point de vue numérique, que la synthèse par sensibilité mixte.

On a vu au chapitre2 qu'une telle synthèse, permet la minimisation de la norme  $H_\infty$  du critère suivant:

$$J = \begin{bmatrix} S & SG \\ KS & T \end{bmatrix}$$

S et T étant les fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire du système (après lui avoir effectué un *loopshaping*)

pour le critère d'identification en boucle fermée, on va considérer, comme pour le problème de sensibilité mixte, la minimisation de:

$$\left\| \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

ainsi la dégradation en performance s'écrit:

$$\left\| \begin{bmatrix} S_0 - S \\ T_0 - T \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

$S_0$  et  $T_0$  étant les fonctions sensibilité et sensibilité complémentaire du système réel, et S et T celles du modèle nominale. Ainsi le filtre d'identification s'écrit (voir chapitre2):

$$|L_i|^2 = \frac{|HS|^2}{\phi_r}$$

i indique le numéro de l'itération. donc on a pas à effectuer la factorisation spectrale contrairement au problème de la commande  $H_\infty$  par sensibilité mixte. Effectivement, il s'est avéré que la synthèse par factorisation première est plus robuste numériquement, et algorithme d'affinement itératif devient convergent.

La synthèse est plus facile, il suffit de choisir un filtre adéquat pour donner la forme désirée du gain de boucle ouverte.

Après avoir effectué plusieurs essais, on a choisi la pondération suivante:

$$W(s) = \frac{9.9999s + 2999.849}{1300s + 2.9998}$$

et au cours des itérations, on essaye d'affiner les performances. Comme précédemment, on relève à chaque itérations les fonctions  $S_0$  et  $T_0$  (figures (4.26) et (4.27)), les filtres d'identification et les réponses indicelles (figures (4.28) et (4.29)).

D'après les résultats obtenus, on voit qu'il y a amélioration des performances par rapport à la première itération qui n'est pas très satisfaisante.

En observant les réponses fréquentielles du système en boucle fermée, on constate l'atténuation des pics résonants au cours des itérations, ce qui donne des réponses plus amorties (en comparaison avec l'itération0).

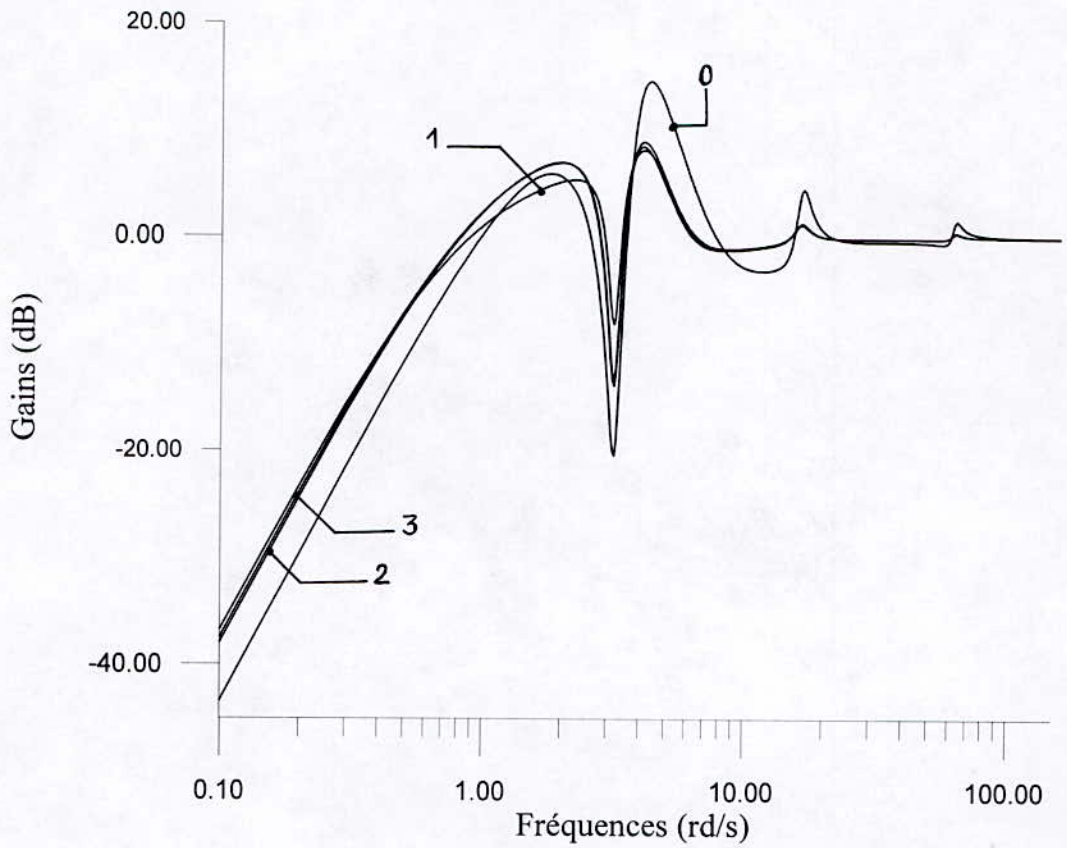
Les résultats résumés dans le tableau (4.5) montrent que la marge de module réalisée à la deuxième itération est meilleure que la première, puis au itérations suivantes elle augmente légèrement, le système devient plus rapide, l'aplatissement de la fonction sensibilité est pratiquement le même pour les trois dernière itérations.

Les performances obtenues ne sont pas aussi bonnes que pour le système de transmission flexible, car ce bras flexible est plus difficile à commander.

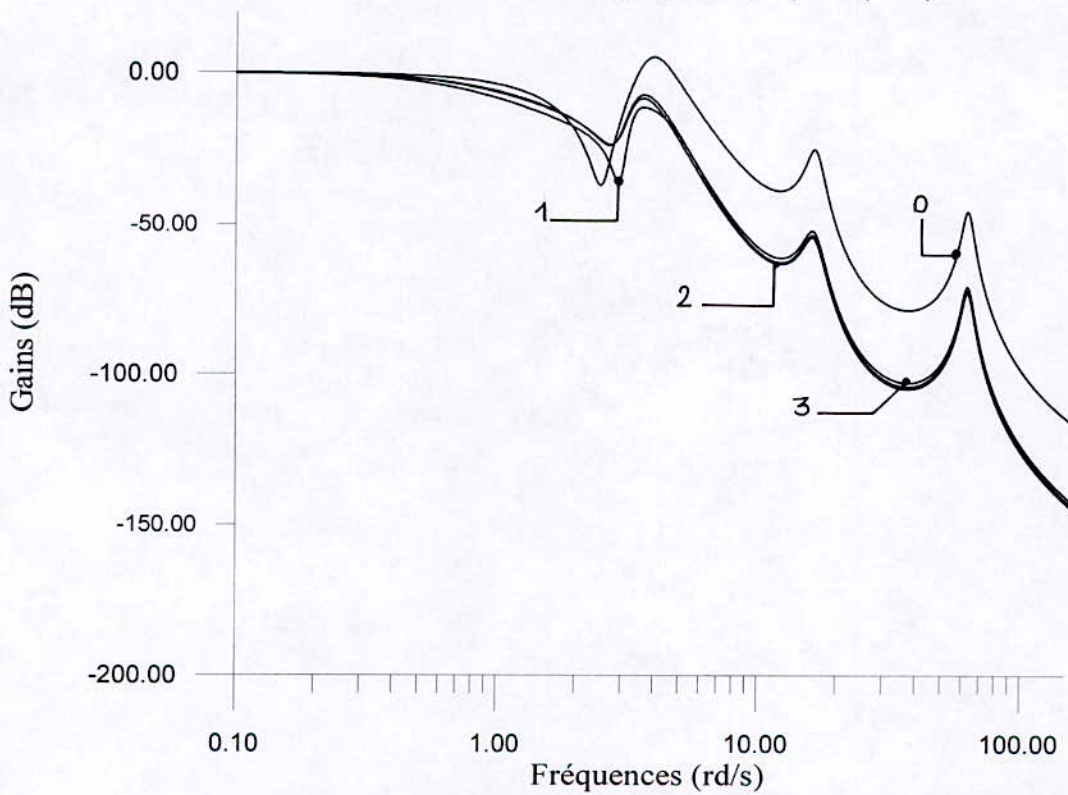
Itération	Fréquences de Coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	0.085	3.570	2.062
1	0.020	0.900	1.494
2	0.030	0.815	1.512
3	0.030	0.815	1.548

**Tableau (4.5)**

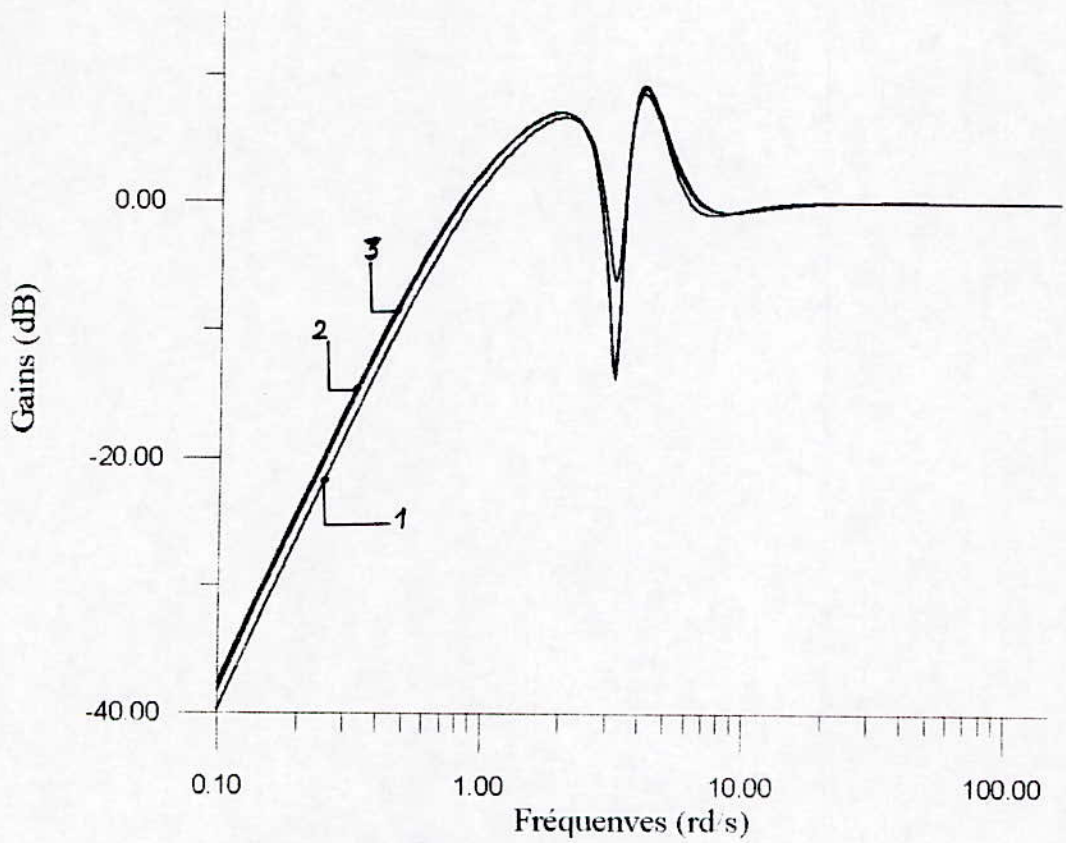




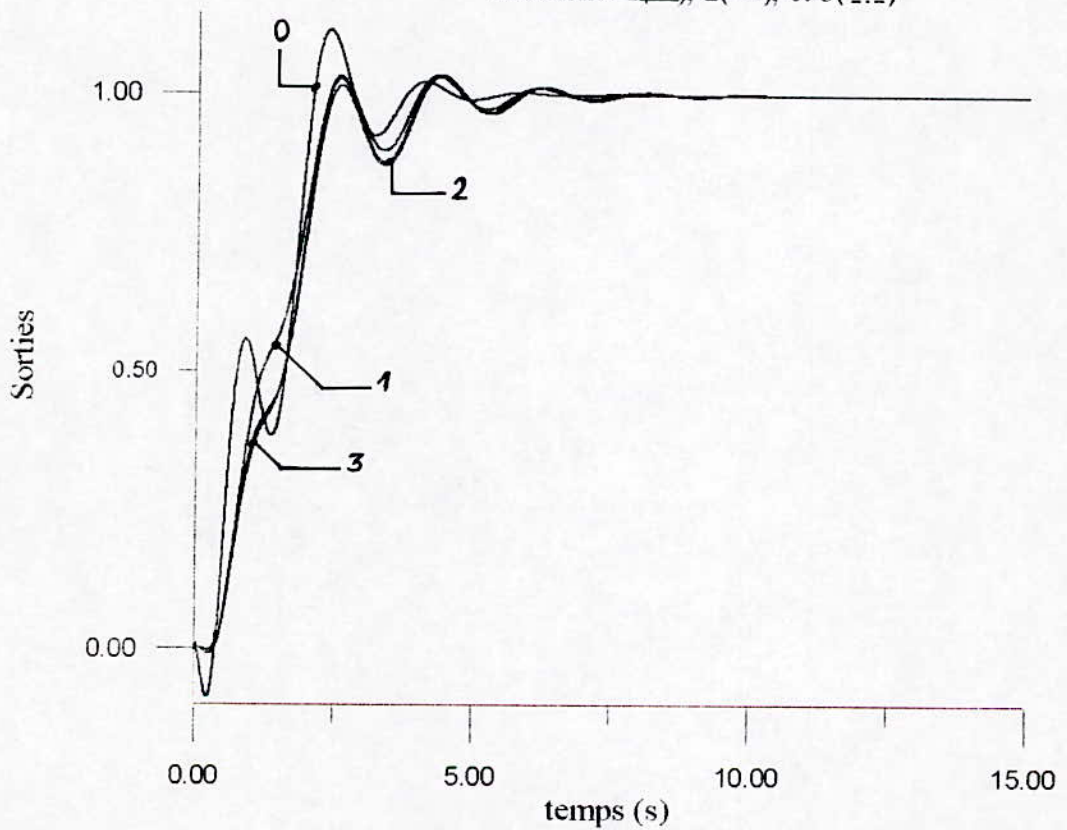
**Figure(4.26):** les fonctions sensibilité réalisées  
Itérations: 0(→), 1(---), 2(----) et 3(-----)



**Figure(4.27):** les fonctions sensibilité complémentaire réalisées  
Itérations: 0(→), 1(---), 2(----) et 3(-----)



**Figure(4.28):** les filtres d'identification;  
Itérations: 1(—), 2(---), et 3(....)



**Figure(4.29):** les réponses indicielles réalisées;  
Itérations: 1(—), 2(---), et 3(....)



### b. Affinement itératif de la commande $H_2$ :

En suivant toujours les mêmes étapes, on a réalisé cinq itérations, ici on a pas eu le problème rencontré avec la synthèse  $H_\infty$  à sensibilité mixte, où il y avait divergence de l'algorithme itératif. Ceci montre bien qu'on ne possède aucune information à priori sur la convergence d'un tel algorithme, ni de la manière avec laquelle il converge (si c'est le cas).

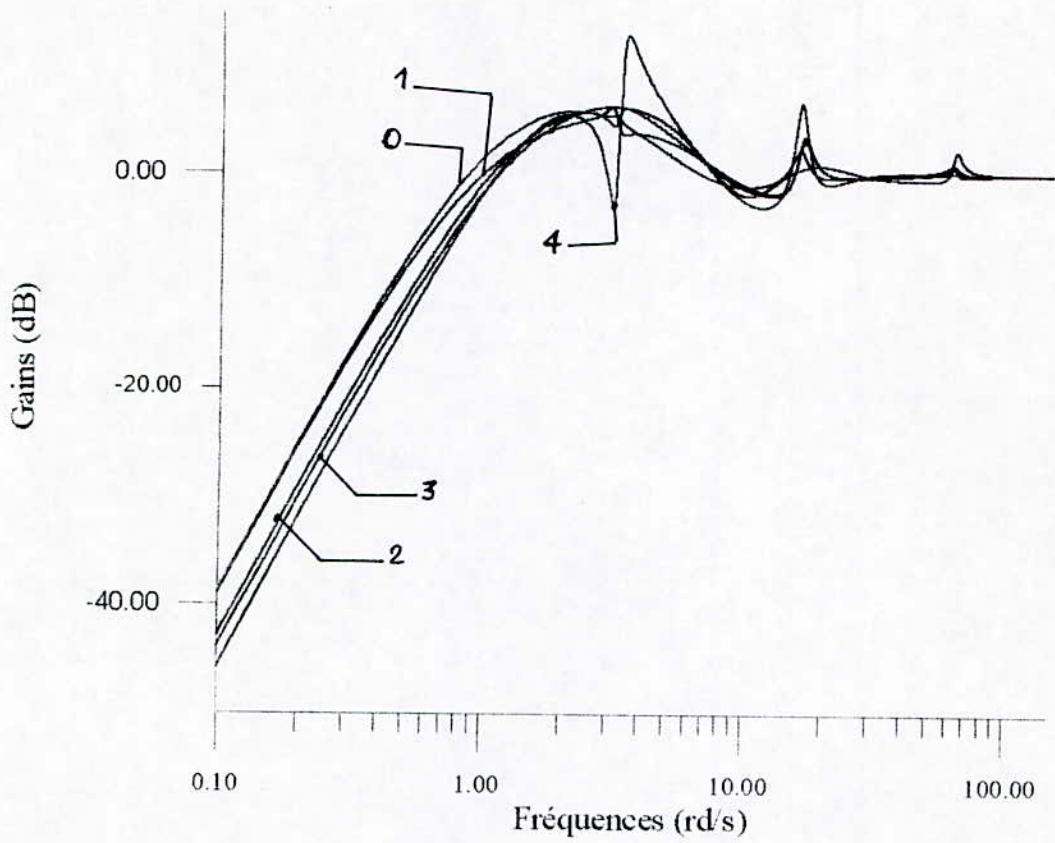
D'après les résultats obtenus, on peut constater que les performances atteintes par le système dans ce cas sont meilleures que celles de la commande  $H_\infty$ , la première itération est déjà assez bonne (rapide et amortie), il y a amélioration à la seconde itération, puis dégradation des performances (même par rapport à l'itération 0), où le système commence à osciller, avec un dépassement de l'ordre de 10%, puis l'algorithme reprend ces performances en charge, en les améliorant au deux dernières itérations.

La bande d'atténuation se trouve élargit à chaque itérations, et les fonctions sensibilité sont bien réduites en basses fréquences (atténuation de plus de -40dB/décade), ce qui implique une meilleure atténuation des perturbations.

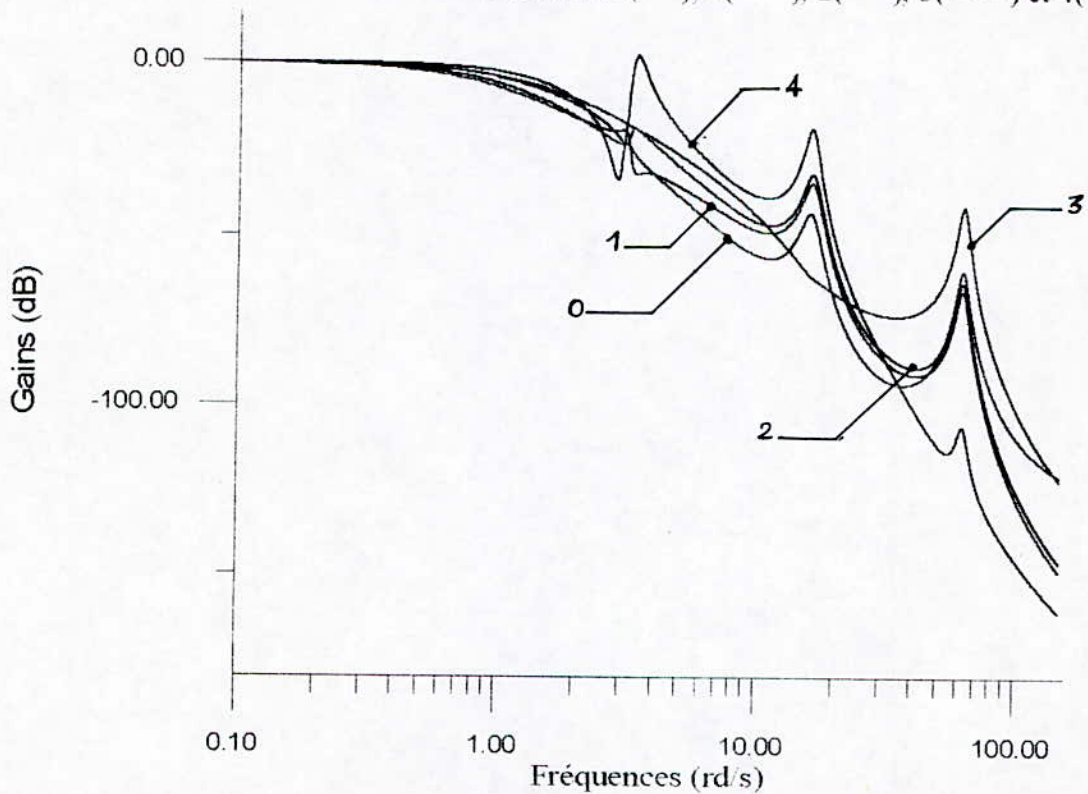
Dans le tableau ci-dessous sont résumées les performances réalisées avec la commande  $H_2$  affinée.

Itération	Fréquences de coupure (rd/s)	Bandes d'atténuation (rd/s)	Marges de module
0	0.033	0.878	1.332
1	0.029	1.002	1.364
2	0.066	1.073	1.351
3	0.140	1.132	1.903
4	0.072	1.151	1.363

**Tableau(4.6)**

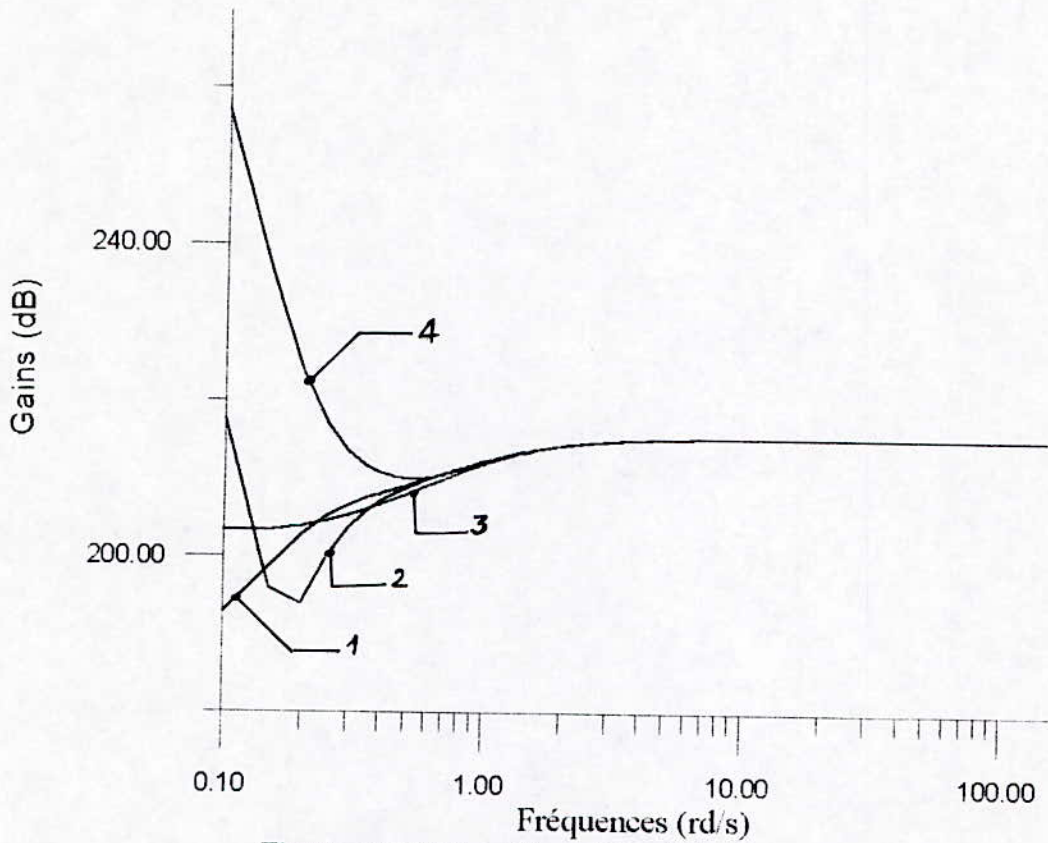


**Figure (4.30):** Les fonctions sensibilité réalisées;  
 Itérations: 0 (—), 1(---), 2( - · - ), 3(-----) et 4(···).

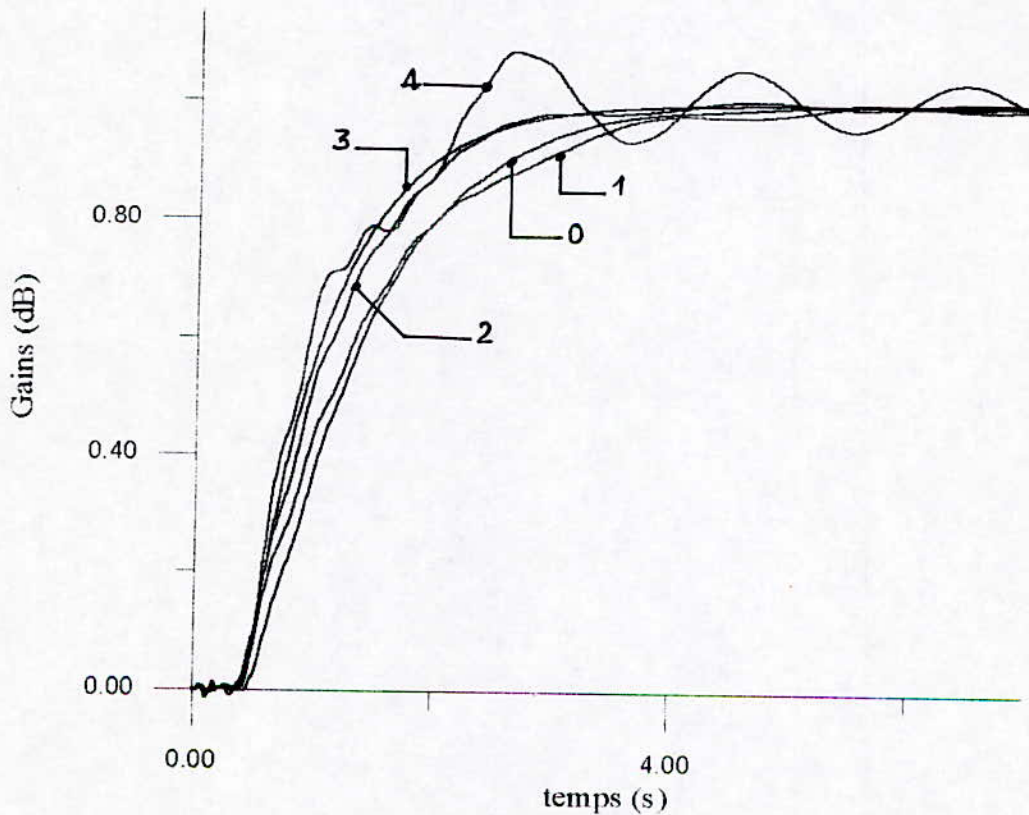


**Figure (4.31):** Les fonctions sensibilité complémentaire réalisées;  
 Itérations: 0 (—), 1(---), 2( - · - ), 3(-----) et 4(···).





**Figure (4.32):** Les filtres d'identification;  
Itérations: 1 (—), 2(---), 3(---), et 4(----).



**Figure (4.33):** Les réponses indicielle réalisées:  
Itérations: 0 (—), 1(---), 2(---), 3(----) et 4(----).

**Difficulté rencontrée lors du choix des pondérations fréquentielles:**

La difficulté majeure réside dans le choix des fonctions poids, à cause des diverse contraintes; car il faut chercher les fonctions adéquates réalisant les différents compromis robustesse/performances, mais en plus ce choix est limité à cause de la factorisation spectrale et de l'ordre du correcteur, et par conséquent celui du filtre d'identification.

Pour pouvoir faire la factorisation spectrale, il faut que la fonction de transfert à factoriser soit propre, or parfois on n'arrive pas à stabiliser, ou à améliorer les performances du système que si  $W_T$  est impropre, ce qui limite donc le choix.

Aussi le degré du régulateur étant dépendant de celui du modèle et des fonctions  $W_s$  et  $W_T$ , et puisque le filtre dépend de la fonction sensibilité du modèle, son ordre se trouve par conséquent augmenté.

En plus de cela, il faut refaire ce choix à chaque itération, pour assurer la convergence de l'algorithme itératif.

**4.2.4. Application un système multivariable:**

Pour tester l'applicabilité des schémas itératifs dans la synthèse de commandes multivariables, on a pris le modèle mathématique d'un avion qui existe dans [10].

Il s'agit d'un modèle linéaire d'ordre 6, à deux entrées et deux sorties.

Le modèle en boucle ouverte est instable, il faut donc le stabiliser d'abord, pour pouvoir l'identifier.

Le système est décrit dans l'espace d'état comme suit:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0226 & -36.617 & -18.897 & -32.09 & 3.2509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.98310 & -0.0007 & -0.1708 & -0.005 \\ 0.0123 & 11.720 & -2.6316 & 0.0009 & -31.604 & 22.396 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

on a pris directement comme régulateur de stabilisation, le correcteur  $H_\infty$  à sensibilité mixte de [10].



Après avoir stabilisé le système, on a effectué une identification en boucle fermée, en injectant des SBPA en amont du système, pour mieux exciter sa dynamique.

Le problème de cette identification est dû au fait qu'on ne peut pas effectuer la procédure d'identification des systèmes multivariables décrite au chapitre 1, on est amené à utiliser soit des modèles dans l'espace d'état, or ces derniers donnent souvent de mauvais résultats, soit les autres algorithmes d'identification paramétriques des systèmes multi-entrées et mono-sortie, et là on aura beaucoup de paramètres à spécifier, ce qui rend la tâche difficile.

Après avoir identifié le modèle du système, on a synthétisé un correcteur  $H_\infty$  par la méthode des facteurs premiers à base de ce modèle, puis on l'a appliqué au système réel, on a constaté une dégradation des performances par rapport au modèle nominal (système plus lent et plus oscillant).

Pour effectuer la première itération, on a identifié un nouveau modèle, avec filtrage par la fonction sensibilité du modèle (puisque c'est le filtre d'identification qu'on a trouvé dans le cas d'une synthèse  $H_\infty$  par les facteurs premiers), mais cette fois-ci en utilisant la méthode décrite au premier chapitre, c'est à dire identification de chaque transfert de la matrice de transfert. En faisant la conversion de la forme fonction de transfert à la forme espace d'état, l'ordre du modèle devient très important, on le réduit alors en utilisant l'instruction '*balmr*' du toolbox '*robust control*'.

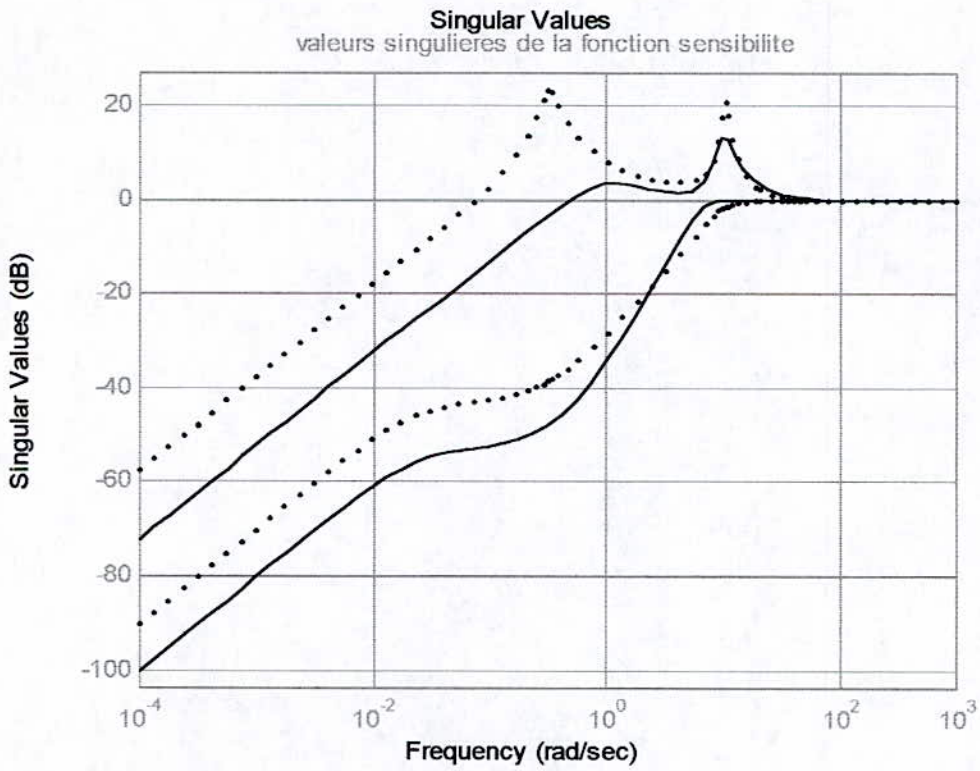
Un nouveau correcteur a été synthétisé à base de ce dernier, on n'a pu stabiliser le système que très difficilement, après avoir effectué plusieurs essais.

A partir de cette dernière itération, notre algorithme itératif diverge. En effet, on a effectué plusieurs tentatives pour essayer de le stabiliser, mais sans résultat positif.

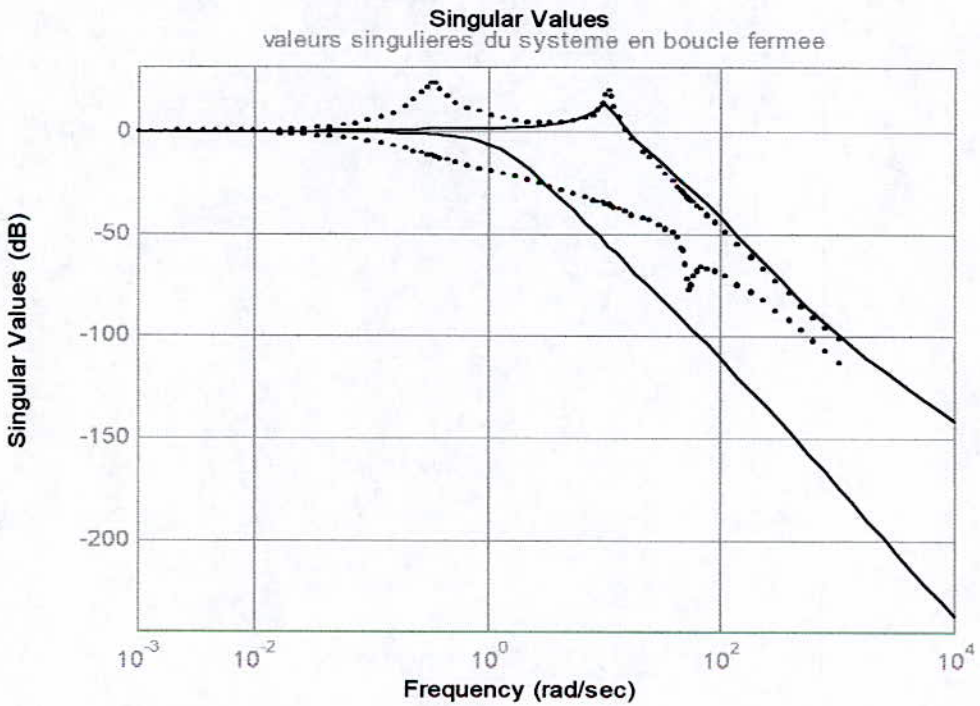
De ce fait, on n'a relevé que les résultats des deux premières itérations; au figures (4.34) et (4.35) sont données les valeurs singulières des matrices fonction sensibilité et sensibilité complémentaire réalisées, et les réponses indicielles sont relevées à la figure (4.36).

L'observation de ces résultats, montre qu'il y a dégradation des performances par rapport à la première itération, et que l'algorithme itératif n'a pas pu les affiner.

Ceci peut être dû au modèle obtenu par identification qui n'est pas très précis, car le fait que le système soit multivariable et bouclé, rend l'identification difficile et moins précise que dans le cas des systèmes monovariables.

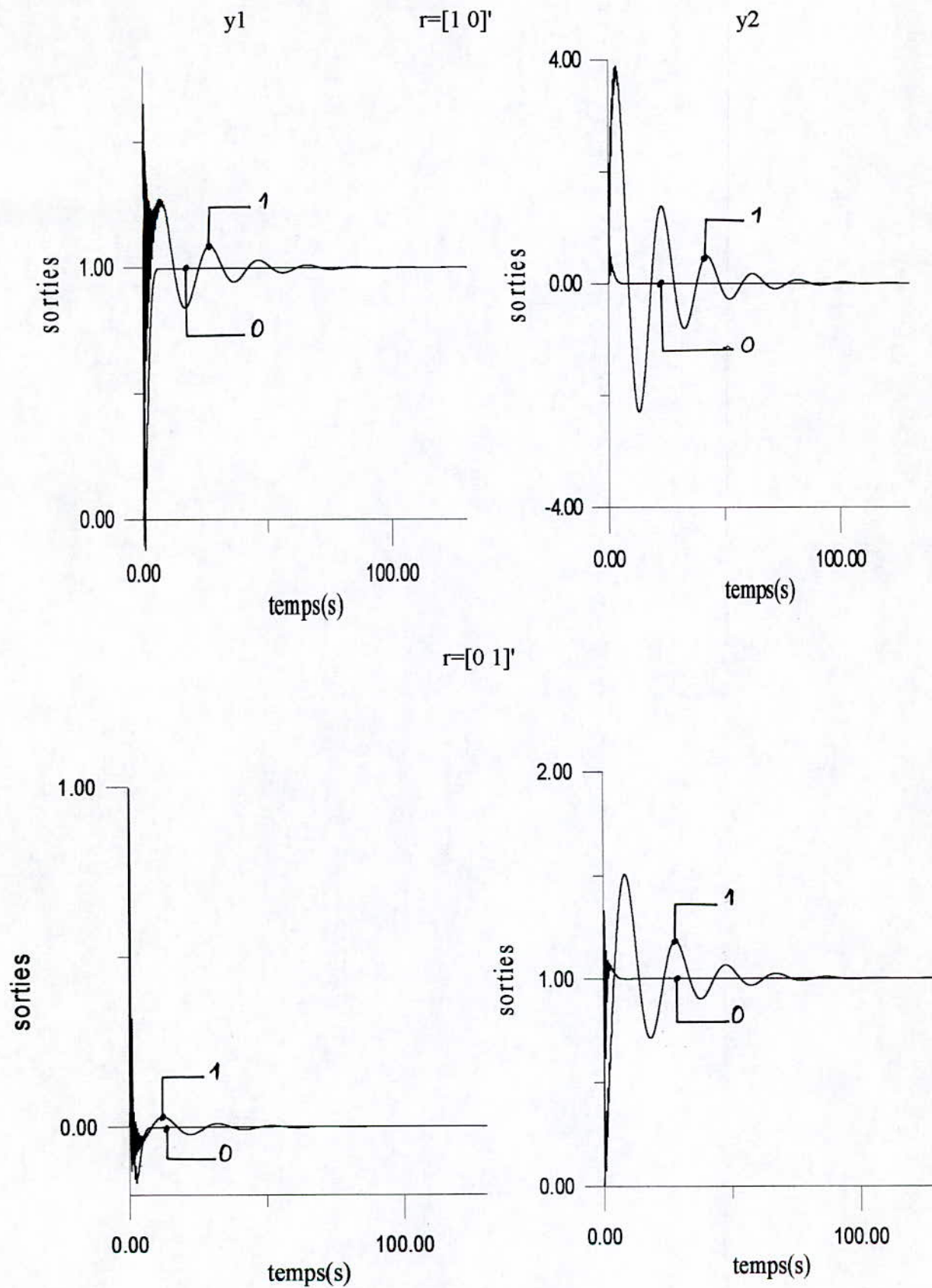


**Figure (4.34):** Les valeurs singulieres des fonction sensibilite realisees  
Iterations: 0 (—), et 1 (···).



**Figure (4.35):** Les valeurs singulieres des sensibilite complementaires.  
Iterations: 0 (—), 1 (···).





**Figure (4.36):** Les réponses indicielles réalisées  
Itérations: 0 (—), et 1 (---)

Pour la commande  $H_2$ , on a réalisé la première itération avec succès, on a effectué la factorisation spectrale de chaque élément de la matrice de fonctions de transfert:  $|W_s|^2 + |W_T|^2$  pour calculer le filtre d'identification qui a été utilisé pour identifier le deuxième modèle, mais notre algorithme itératif diverge rapidement.

En parallèle, on a essayé d'appliquer cet algorithme au modèle non linéaire d'un hélicoptère [5] instable en boucle ouverte, après l'avoir stabilisé par un PID (puis par un correcteur  $H_\infty$  synthétisé à base du modèle linéarisé autour du point 0.5), un modèle a été identifié, pour lequel plusieurs régulateurs (même décentralisés) ont été calculés et implémentés sur le système réel, mais sans succès: le système demeure instable. Etant limité par le temps, on n'a pas pu aller au delà.

### **4.3. Conclusion:**

Ce chapitre a été consacré à l'application des schémas itératifs, développés au troisième chapitre, à différents exemple de procédés.

Il a été montré que les schémas d'affinement itératifs, permettent l'amélioration des performances du système de commande, mais sans aucune garantie à priori sur la convergence de ces algorithmes.

L'application de ces schémas itératifs sur un système multivariable, n'a pas donné de résultats satisfaisants, ceci peut avoir comme cause, l'imprécision du modèle identifié en boucle fermée.



**Conclusion générale**

## Conclusion générale

Dans ce travail, on a présenté l'intérêt de lier explicitement les deux phases d'identification et de commande, pour réaliser des systèmes de commande performants, et ceci en orientant l'identification et la commande vers la minimisation d'un critère de performance réalisé et non modélisé.

On a montré la nécessité d'utiliser des schémas itératifs, pour affiner les performances du procédé réel. On a vu que ces algorithmes itératifs risquent de diverger, et que leur convergence est souvent oscillatoire.

On a vu un autre aspect intéressant de l'*identification pour la commande robuste*, qui consiste en l'estimation de la borne supérieure de l'erreur de modélisation, cette dernière jouant un rôle important dans la théorie de la commande robuste.

Cette étude nous permet de faire les conclusions suivantes:

- L'identification et la commande étant deux problèmes conjointement liés, ils doivent être traités comme tel.
- Le meilleur modèle identifié en boucle ouverte, n'est pas forcément le meilleur en boucle fermée.
- Bien que la commande  $H_2$  minimise une moyenne au lieu d'une valeur maximale, elle a prouvé son efficacité et sa robustesse.
- L'utilisation d'un schéma d'affinement itératif est bénéfique, dans la mesure où il y a amélioration des performances réalisées, mais leur convergence reste non garantie.

Pour compléter ce travail, nous proposons:

- D'approuver la convergence des algorithmes itératifs pour les systèmes multivariables.
- Appliquer le schéma itératif au modèle non linéaire du simulateur d'hélicoptère, et à d'autres systèmes non linéaires.
- Utiliser l'estimation de la borne supérieure continue de l'incertitude sur le modèle, pour la synthèse d'une loi de commande robuste par  $H_\infty$  par exemple.
- Appliquer les algorithmes itératifs à d'autres types de commandes.



# **Annexes**

## ANNEXE A

### I. Rappel sur les structures de modèles:

Pour pouvoir estimer les fonctions de transfert G et H de (A.I.1), on les paramétrise comme des fonctions rationnelles du délai  $q^{-1}$ , les structures de modèles paramétriques selon la structure générale (1.1)[1]:

$$Y(t) = G(q)U(t) + H(q)e(t) \quad (\text{A.I.1})$$

◆ **ARX:** c'est le modèle le plus souvent utilisé, avec:

$$G(q) = q^{-n_k} \frac{B(q)}{A(q)}; \quad H(q) = \frac{1}{A(q)} \quad (\text{A.I.2})$$

où A et B sont des polynômes en  $q^{-1}$ :

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (\text{A.I.3})$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (\text{A.I.4})$$

Où  $n_a$  et  $n_b$  sont respectivement les degrés des polynômes A et B; et  $n_k$  est le retard du système.

◆ **ARMAX:** la structure ARMAX est semblable à ARX, mais elle est plus générale; elle s'écrit comme suit:

$$A(q) y(t) = B(q) u(t - n_k) + C(q) e(t) \quad (\text{A.I.5})$$

ici, A(q) et B(q) sont données par (A.I.3) et (A.I.4), et C(q) par:

$$C(q) = 1 + C_1 q^{-1} + \dots + C_{n_c} q^{-n_c}. \quad (\text{A.I.6})$$

◆ **Structure à erreur de sortie:** obtenue par:

$$Y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - n_k) + e(t) \quad (\text{A.I.7})$$

avec:

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}. \quad (\text{A.I.8})$$

◆ **Structure de BOX-JENKINS (B.J):** elle est donnée par:

$$Y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (\text{A.I.9})$$

avec:

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}. \quad (\text{A.I.10})$$

◆ **Structure AR:** utilisée pour l'identification des signaux:

$$A(q) Y(t) = e(t) \quad (\text{A.I.11})$$

Et tous ces modèles sont des cas spéciaux du cas général:

$$A(q) Y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (\text{A.I.12})$$

## II. Démonstration de (1.18):

On a vu au chapitre 1 que le critère d'identification en boucle fermée, s'écrit comme suit:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left[ \left| (G_0 - G)K(1 + G_0K)^{-1} \right|^2 \phi_r + \left| (1 + GK)(1 + G_0K)^{-1} \right|^2 \phi_v \right] |H^{-1}L|^2 \right\} d\omega \quad (\text{A.II.1})$$

On a:

$$(G_0 - G)K(1 + G_0K)^{-1} = (G_0 - G)K(1 + G_0K)^{-1} (1 + GK)^{-1} (1 + GK) \quad (\text{A.II.2})$$

posons:

$$S_0 = (1 + G_0K)^{-1}, S = (1 + GK), T_0 = G_0K(1 + G_0K)^{-1} \text{ et } T = GK(1 + GK)^{-1}$$

On a la relation suivante:

$$\begin{aligned} S_0 - S &= \frac{1}{1 + G_0K} - \frac{1}{1 + GK} \\ &= \frac{K(G - G_0)}{(1 + G_0K)(1 + GK)} \end{aligned} \quad (\text{A.II.3})$$

Des relations (A.II.2) et (A.II.3), on obtient:

$$(G_0 - G)K(1 + G_0K)^{-1} = \frac{S_0 - S}{S} \quad (\text{A.II.4})$$

D'où (A.II.1) devient:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left| \frac{S_0 - S}{S} \right|^2 \phi_r + \left| \frac{S_0}{S} \right|^2 \phi_v \right\} d\omega \quad (\text{A.II.5})$$

## III. Démonstration de (3.14):

Le critère d'identification en boucle ouverte s'écrit:



$$J_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ |G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \phi_u(\omega) + \phi_v(\omega) \right] \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} d\omega \quad (\text{A.III.1})$$

On sait que:

$$U = KS_0(r + v)$$

En supposant que la référence  $r$  et le bruit  $v$  sont décorrélés, on peut écrire:

$$\phi_u = |KS_0|^2 (\phi_r + \phi_v) \quad (\text{A.III.2})$$

En remplaçant (A.III.2) dans (A.III.1), on obtient:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |S(G_0 - G)K|^2 (\phi_r + \phi_v) + \phi_v \right\} \frac{|L|^2}{|H(\theta)|^2} d\omega \quad (\text{A.III.3})$$

**Remarque:**

De cette dernière relation, on peut retrouver (A.II.5), en remarquant que:

$$\begin{aligned} |1 + (G_0 - G)KS_0|^2 \phi_v &= \left| 1 + \frac{S_0 + S}{S} \right|^2 \phi_v \\ &= \left| \frac{S_0}{S} \right|^2 \phi_v \end{aligned}$$

## ANNEXE B

### I. Rappel sur les valeurs singulières:

Dans la théorie de la commande, les pôles de la fonction de transfert, et les valeurs propres de la matrice  $A$  dans la représentation d'état, jouent un rôle important pour l'analyse de la stabilité. Il en est de même pour les valeurs singulières dans l'analyse de la stabilité robuste des systèmes multivariables: le gain des systèmes multivariables n'a pas d'expression déterminé, mais il est borné entre deux limites, ces limites sont la plus grande et la plus petite valeur singulière [5]. Dans ce qui suit, on donne un bref rappel sur les valeurs singulières.

Soit la matrice rectangulaire  $A$  de rang  $r$ , et telle que  $A \in C^{m \cdot n}$ . les valeurs singulières de  $A$  notées  $\sigma_i$  sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^* A$ ; où  $A^*$  désigne la transposée conjuguée de  $A$ , c'est à dire :

$$\sigma_i [A] = [\sigma_i (A^* A)]^{1/2}.$$

Les valeurs singulières sont ordonnées souvent de sorte que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n.$$

La plus grande valeur singulière  $\sigma_1$  est notée:  $\overline{\sigma}(A) = \sigma_1$ , et la plus petite est notée :  $\underline{\sigma}(A) = \sigma_n$ .

On cite quelques propriétés des valeurs singulières :

$$(a) \overline{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

$$(b) \underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne usuelle, et  $X$  est un vecteur de  $C^n$ .

(c) si  $A^{-1}$  existe alors :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(A) &= 1 / \overline{\sigma}(A^{-1}) \\ \overline{\sigma}(A) &= 1 / \underline{\sigma}(A^{-1}) \end{aligned}$$

$$(d) \overline{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \overline{\sigma}(A)$$

$$(e) \overline{\sigma}(A + B) \leq \overline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(B)$$

$$(f) \underline{\sigma}(AB) \leq \underline{\sigma}(A) \cdot \underline{\sigma}(B)$$

$$(g) \Sigma \sigma^2 = \text{tracé}(A^* A)$$

## II. Résolution du problème $H_\infty$ à partir des factorisations premières [7]:

Soit le système G donné par la forme compacte:

$$G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (\text{B.II.1})$$

Le correcteur stabilisant G, et vérifiant:

$$J = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} [I \ G] \right\|_\infty < \gamma = \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{B.II.2})$$

est déduit de la résolution de deux équations de Riccati, qui ne dépendent pas de  $\gamma$ , contrairement au problème de sensibilité mixte.

L'existence du correcteur est assurée, si les conditions:

(A, B) stabilisable et (C, A) détectable,

sont satisfaisantes.

Il est alors donné par la représentation d'état suivante:

$$K = \begin{bmatrix} A + BB^T + \varepsilon^{-2}Z^{-1}YC^T C & \varepsilon^{-2}Z^{-1}YC^T \\ B^T X & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.II.3})$$

X et Y étant les solutions des équations de Riccati suivantes:

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XBB^T X + C^T C &= 0 \\ AY + YA^T - YC^T CY + B^T B &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.II.4})$$

et:

$$Z = I + YX - \varepsilon^{-2}I \quad (\text{B.II.5})$$

avec:

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\max} = \gamma_{\min}^{-1} = \left[ \sqrt{1 + \lambda_{\max}(XY)} \right]^{-1} \end{cases} \quad (\text{B.II.6})$$



# Références

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

- [1] L. Ljung. System identification: Theory for the User, prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, USA, 1987.
- [2] L. Ljung. System identification toolbox, for use with Matlab, the Math Works Inc, 1995.
- [3] D. de Vries. Identification of Model Uncertainty for Control Design, PHD Thesis, Delft University, the Netherlands, 1994.
- [4] C. Samblancat. Commande Robuste Multivariable Application à l'hélicoptère, Thèse d'état, ENSAE Toulouse, 1991.
- [5] T. Khadir. Commande robuste par  $H_\infty$  Théorie et applications, projet de fin d'études, ENP Alger, 1998.
- [6] S. Font. Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis: optimisation  $H_\infty$  et approche symbolique de la forme standard, SUPELEC, Paris, 1995.
- [7] J. Duc. Robustesse des systèmes linéaires multivariables, Notes de cours, SUPELEC, Paris, 1993.
- [8] B. Friedland. Control systems design: an introduction to state space methods, Mc Graw Hill, 1987.
- [9] C. Fang Lin. Advanced Control Systems design, prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1994.
- [10] R.Y. Chiang, M.G. Safonov. Robust control toolbox, the Math Works Inc, 1998.
- [11] M. Tadjine, Commande LQG/LTR et Identification Robuste: Formulation avec l'Opérateur Delta. Thèse de Doctorat, Grenoble, 1994.

- [12] M. Gevers, R.R. Bitmead, Z. Zang, A.G. Partenen. Experimental Restricted Complexity Controller Design, IFAC Symposium on System Identification, Denmark, 1994.
- [13] A. Partenen, R.R. Bitmead. Two Stage Iterative Identification/Controller Design and Direct Experimental Controller Refinement, IEEE Transactions on Automatic Control, 1993.
- [14] M.J. Van Den Hof and J.R. Shrama. Approximate Identification and Control Closed Loop issues, IFAC Symposium on System Identification, Denmark, 1994.
- [15] J.R. Shrama. Approximate Identification and Control Design with application to a Mechanical System, PHD Thesis, Delft University, The Netherlands, 1992.
- [16] A. Hoffmann. Affinement Itératif de la Commande GPC étude et évaluation expérimentale. Mémoire de fin d'étude, Grenoble, 1993.
- [17] M. M'saad, J. Chebassier, M. Tadjine. An Alternative Iterative Scheme For Robust Mixed Sensitivity optimisation, Proc. IEE Control Conference, Coventry, U.K, 1994