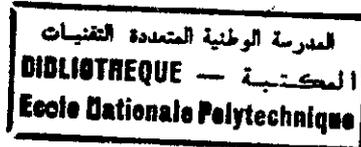


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



**Ecole Nationale Polytechnique**

**THESE DE MAGISTER**

Spécialité: Electronique

Option : Acquisition et traitement de l'information

Présentée par : Zoubir Abdeslem BENSELAMA  
Ingenieur d'état en Electronique.

**METHODES D'INVERSION DU SIGNAL SISMIQUE**

Soutenue en JUILLET 97 ; devant le Jury d'examen composé de

Mr **B. DERRAS**

Mlle **M.GUERTI**

Mr **D. BERKANI**

Mr **K. AMMOUR**

Mr **A.GUESSOUM**

Maitre de conférence

Président

Examineur

Examineur

Examineur

Rapporteur

## REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance à Mr B. DERRAS maître de conférence à l'Ecole nationale polytechnique d'ALGER, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse

Monsieur D.BERKANI maître de conférence à l'Ecole nationale polytechnique d'ALGER et Directeur de la D.E.R (E.N.P) qui me fait l'honneur de participer au jury

Madame M.GUERTI maître de conférence à l'Ecole nationale polytechnique d'ALGER et chef du département d'électronique (E.N.P) pour sa collaboration éclairée dans l'examen de cette thèse

Monsieur K.AMMOUR maître de conférence à Université de BLIDA pour son concours avisé dans l'examen de cette thèse

Que Monsieur A.GUESSOUM, maître de conférence à université de BLIDA, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour sa constante disponibilité, son soutien permanent et ses précieux conseils prodigués au cours de l'accomplissement de ce travail

J'aimerais exprimer ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance à l'égard de Monsieur R.HEDJAR, Chargé de cours au centre universitaire de DJELFA pour son aide, ses précieux conseils et encouragements.

Je ne saurai oublier dans mes remerciements Mr M.A. BENCHERCHALI Mr M. BOUDEHEB, Mr A. FERDJOUNI, Mr N. KHORISSI pour leur collaboration Qu'il trouvent ici l'expression de ma très profonde gratitude

Je tient à remercier Melle A.BENSELAMA qui ma accordé toute son aide lors de la rédaction et le tirage de cette thèse.

Ma gratitude va, enfin, vers tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail

## Dédicaces

- A la mémoire de ma mère
- A mon père
- A ma Famille
- A mes frères et mes soeurs
- A tous mes amis

Zoubir Abdeslem . BENSELAMA

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE :</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : TRAITEMENT DU SIGNAL SISMIQUE</b>	
1 Introduction.	3
2 Principe de base.	3
2-1 Ondes sismique.	3
2-2 Impulsion sismique.	3
2-3 Bruit sismique .	4
2-4 Représentation du sous-sol.	6
2-4-1 Notion d'impédance acoustique.	6
2-4-2 Vitesse de propagation.	6
2-4-3 Coefficient de réflexion.	7
2-5 Trace sismique.	7
3 Modélisation de la dispersion d'onde	8
3-1 Représentation du procédé.	8
3-2 Réflexion a la limite de deux couche.	9
3-3 Couche multiple.	11
4 Représentation des signaux .	17
4-1 Description des modèle	17
4-2 Représentation des modèles linéaire discret	18
4-3 Modèle moyenne glissante.	19
4-4 Modèle auto régressif	19
4-5 Représentation dans l'espace d'état	20
4-5-1 Equation d'état dans le cas du système discret	20
4-5-2 Représentation des modèles A.R.M.A. dans l'espace d'état	21
4-6 Représentation du modèle A.R par les équation d'état.	23
5 Conclusion	25

<b>4 Déconvolution des signaux sismiques par la méthode du maximum de vraisemblance</b>	66
4-1 Modèle de description	66
4-2 Estimation de Q par la méthode de maximum de vraisemblance	69
4-3 Détection S.M.L.R	70
4-4 Estimation des paramètre de l'ondelette et des variance $\rho$ et $\sigma$	74
4-4-1 Méthode d'optimisation	75
4-4-2 Calcul du gradient	76
4-4-3 Calcul de la matrice du HESSIEN	78
4-5 Estimation du paramètre $\lambda$	79
4-5-1 Estimation des amplitudes	80
<b>5 Conclusion</b>	81

## CHAPITRE IV : SIMULATION ET RESULTATS

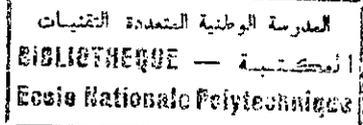
1 Introduction	84
2 Algorithme d'inversion	84
3 Déconvolution	91
3-1 Déconvolution prédictive	92
3-1-2 Algorithme de déconvolution prédictive	94
3-2 Déconvolution par le filtre de kalman	102
3-2-1 Estimation des paramètre ( $a_i$ ) de l'ondelette	102
3-2-2 Simulation et résultats de l'estimation des paramètres $a_i$ de l'odelette	104
3-2-3 Déconvolution par le filtre de kalman	109
a) Génération des signaux sismiques	110

b) Estimation des paramètres de l'ondelette	111
c)- Deconvolution des signaux sismique	112
3-3 Déconvolution par la méthode du maximum de vraisemblance	116
3-3-1 Détecteur S.M.L.R	117
3-3-2 Estimation des paramètre de l'ondelette	120
4 Conclusion	123
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	124
ANNEXE I Calcul du coût $J(\theta)$ pour la méthode de l'inversion	125
II Estimation des coefficients de réflexion et la matrice de covariance pour le lissage	126
III Détecteur de seuil	130
IV La fonction logarithme népérien de vraisemblance pour les système dynamique	134
V Lissage optimal a intervalle fixe	137

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION GENERALE

## INTRODUCTION GENERALE



L'exploration (ou prospection) pétrolière a pour but la découverte d'accumulations d'hydrocarbures liquides ou gazeux exploitables. Ces gisements se rencontrent plus au moins profondément dans les bassins sédimentaires où il sont reconnus par des forages. Le pétrole et le gaz ne peuvent généralement pas être détectés directement à partir de la surface, aussi la localisation des forages d'exploration est précédée d'une série d'opérations de reconnaissance aboutissant à la définition d'une implantation de sondage.

Au cours de son histoire, qui couvre un peu plus d'un siècle, la recherche pétrolière est passée par trois stades principaux.

Au début les forages ont été implantés au voisinage immédiat d'indices de bitume présents à la surface du sol; c'était un procédé de prospection directe.

A la suite de différentes observations il apparut que le pétrole et le gaz se rencontraient de préférence, sinon généralement, au sein des anticlinaux, ces grandes voûtes de l'architecture du sous-sol (cette règle anticlinale traduit la première intervention de la géologie).

Aujourd'hui les techniques d'exploration reposent sur la sismique réfraction et réflexion. C'est un outil qui est basé sur une source d'onde émise à la surface de la terre (détonation), et un capteur qui recueille les signaux réfléchis par les différents interfaces du sous-sol.

Ce principe de prospection sismique par la réfraction a été indiqué pour la première fois par BELAR en 1901 et fut appliqué par l'Allemand MINTROP durant la guerre (1914 - 1918) en utilisant un sismographe pour le repérage de l'artillerie ennemie. La découverte d'un dôme de sel, TEXAS (USA), en 1920 par ce dernier, a favorisé un développement croissant de celle-ci, puis à partir de 1927 grâce à E.A EKHART, J.C KARCHER et B.Mc CALLUM, elle est supplantée par la sismique réflexion qui devint un outil performant au service de la recherche pétrolière. Cet outil permet d'avoir des informations sur la nature et l'état du sous-sol, et favorise l'étude des structures situées aux grandes profondeurs; son principe de base est fondé sur la propagation d'ondes élastiques à travers la terre. Cette propagation dépend des propriétés élastiques des roches. Les informations obtenues en surface ne renferment pas uniquement le signal utile mais y intervient aussi un ensemble de bruits et de distorsions rendant ainsi l'interprétation difficile[1],[2].

Pour remédier à ce phénomène, une série de traitements sismiques s'avère nécessaire; la déconvolution et l'inversion en sont des opérations importantes. Dès 1950, une équipe de recherche du M.I.T (Massachusetts Institut of Technology) s'attela à étudier leur application, et en 1953 ROBINSON [3] publia ses résultats sur les filtres inverses (déconvolution). A partir de 1960, grâce au développement de l'électroniques et de l'informatique, ce traitement métamorphosa entièrement le visage de la prospection rendant ainsi la manipulation d'énormes quantités de données sismiques économiquement possible.

Plusieurs techniques ont été développées par la suite pour solutionner ce problème [4],[5]. Certaines méthodes aboutissent, à l'aide de certaines hypothèses simplificatrices, à un algorithme de déconvolution en présence de bruit [6]. Cependant, l'inconvénient majeur de la déconvolution est qu'elle ne tient pas compte des réflexions multiples. Des

améliorations successives furent apportées en relaxant de plus en plus les hypothèses de départ. Des méthodes dites d'inversion furent développées qui tiennent compte des réflexions multiples, du phénomène d'absorption et de la non-connaissance de l'onde de source[7]. Récemment, des méthodes dites 2-D, et même 3-D, furent proposées; elles reposent sur le principe d'un regroupement d'un ensemble de traces sismiques[8].

Le principe de base de ces traitements est de modéliser l'intérieur de la terre par un milieu stratifié horizontalement, sans pertes et dans lequel les signaux acoustiques se propagent verticalement. Les couches sont définies de telle manière que le signal a besoin d'une unité de temps pour traverser chacune d'elles. Cet artifice nous permet d'éviter le calcul des temps de transit. Parmi plusieurs approches utilisées, on peut citer celle qui consiste à modéliser les interfaces par un modèle aléatoire Bernoulli-gaussien [9].

Un signal acoustique bref et de grande énergie, produit artificiellement à la surface du sol (explosion), pénètre à l'intérieur de la terre. A la frontière entre deux couches physiques différentes, une partie du signal est transmise et l'autre partie est réfléchi vers la direction opposée, dans un rapport déterminé par le coefficient de réflexion de l'interface. Ce rapport s'exprime, de façon simple, en fonction des impédances acoustiques (ou des vitesses de propagation) des 2 couches adjacentes. A la surface du sol, on recueille et on enregistre, à l'aide d'un dispositif de détection (géophone), un signal sismique, appelé sismogramme ou trace sismique, qui est la somme des ondes multiples réfléchies et transmises à travers les couches géologiques du sous-sol. Le but de l'inversion et de la déconvolution est de calculer, à partir du sismogramme, la position des interfaces ainsi que la valeur des coefficients de réflexion. Ces paramètres peuvent être utilisés par le géophysicien, en vue de l'évaluation des potentialités en hydrocarbures.

L'objectif du présent travail est l'étude et la simulation de plusieurs méthodes de déconvolution et d'inversion. La présentation du travail qui a été fait dans le cadre de cette thèse commence (chapitre I) par une introduction des notions de base concernant la sismique réflexion et aboutira à la modélisation de notre système physique .

Dans le chapitre II on abordera l'inversion comme une méthode d'estimation des paramètres de la couche terrestre.

Dans le chapitre III la question d'estimation des paramètres de notre système se traduira, après quelque simplifications des équations physique du modèle , au lieu d'une inversion totale, par un problème conceptuellement plus simple de déconvolution. Les différents cas possibles qui seront analysés sont :

- La déconvolution prédictive,
- La déconvolution par filtre de Kalman avec application de l'estimation par la méthode du minimum de variance et l'utilisation d'un modèle autorégressif,
- La déconvolution par la méthode du maximum de vraisemblance.

Enfin dans le chapitre IV nous concluons cette thèse par un bilan de l'ensemble des travaux que l'on a effectués ainsi qu'une évaluation des résultats obtenus.

# CHAPITRE I

TRAITEMENT DU SIGNAL SISMIQUE

**1 INTRODUCTION :**

Ce chapitre présente le principe général de la prospection sismique, avec son environnement de définitions nécessaire, pour cerner le problème donné, ainsi que la modélisation du phénomène physique subit par le sous-sol, associé à quelques modélisation mathématique des systèmes, pour une assise théorique.

**2 PRINCIPE DE BASE :**

Un ébranlement sismique est produit par l'explosion d'une charge de dynamite, par un vibreur, ou par la chute d'un poids. L'onde ainsi créé se propage dans le sous-sol et subit une réflexion à la frontière de deux couches différentes, elle remonte alors vers la surface et est détecté par une série de géophones plantés dans le sol fig (I-1).

**2-1 ONDES SISMIQUES :**

Les ondes sismiques se divisent en deux catégories

**\*\* Les ondes longitudinales ou de compression**

Ce sont les ondes ' P ' ou primaires (vibration des particules parallèlement a la direction de propagation )

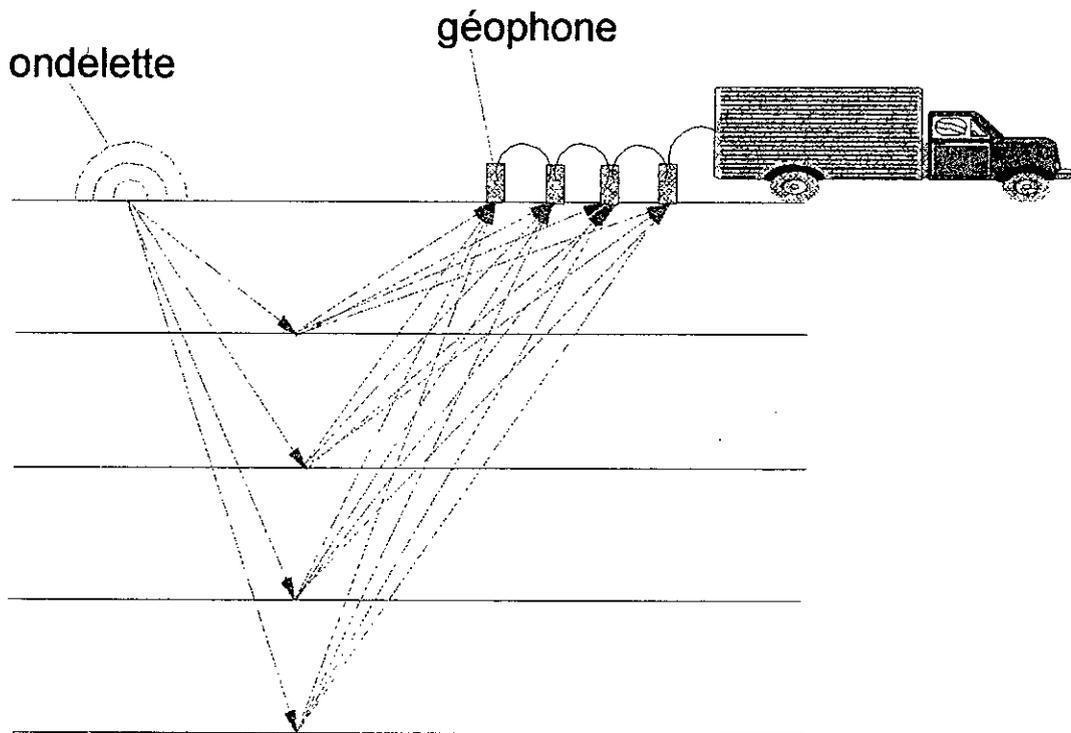
**\*\* Les ondes transversales ou de cisaillement**

Ce sont des ondes ' S ' ou secondaires (vibration des particules perpendiculairement à la direction de propagation).

**2-2 IMPULSION SISMIQUE :**

C'est le train d'ondes élémentaires émis par la source d'ébranlement ; celui-ci est souvent crée à la surface de la terre par une explosion de dynamite ou par un vibreur. C'est donc une énergie émise durant un temps court.

Au cours de son trajet, l'impulsion subit des modifications dues principalement à l'atténuation des hautes fréquences, à l'absorption à la divergence sphérique et à la structure du sous-sol.



**Fig (I-1) PRINCIPE DE BASE**

**2-3 BRUITS SISMIQUES :**

Dans la pratique, l'enregistrement sismique du signal utile est toujours affecté de bruits qui se divisent en deux catégories:

**a) Bruit aléatoires**

Un bruit est aléatoire lorsqu' aucun événement de ce bruit n'est prédictible à partir d'un autre événement. Dans ce bruit on y rencontre les bruits d'appareillages, les bruits naturels et les bruit industriels.

b) Bruits causés par la structure du sous-sol.

On distingue deux types:

- **Les bruits multiples:**

L'énergie primaire provenant directement du réflecteur constitue l'information recherchée; les réflexions multiples sont par contre des énergies parasites qu'il faudrait, si non éliminer, en tout cas identifier.

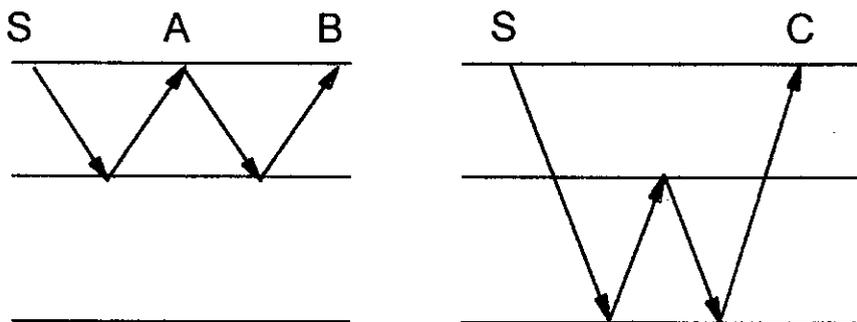


Fig (I-2 ) Les bruits multiples

A - Réflexion primaire

B - Multiple de surface

C - Multiple interne

- **Les bruits de réverbérations :**

Elles ont lieu dans les couches minces, et deviennent importantes lorsque l'impédance acoustique de ces roches est forte par rapport à celle des couches voisines. Elles ont pour effet la détérioration de l'onde émise.

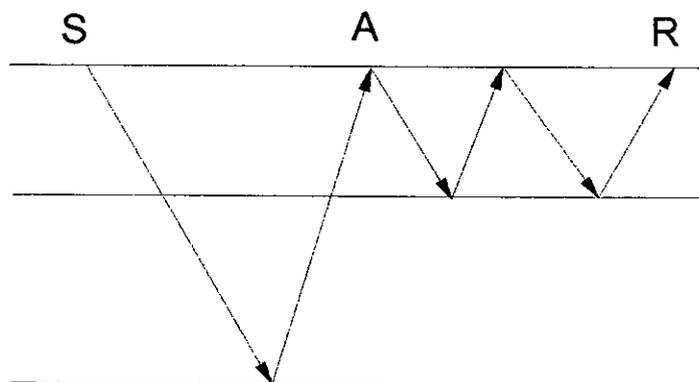


Fig (I-3 ) Les bruit de Réverbération

**2-4 REPRESENTATION DU SOUS-SOL:**

Le sous sol est généralement présenté comme une succession de couches de nature différentes. Elles sont caractérisées par la densité, l'impédance acoustique, la vitesse de propagation et les coefficients de réflexion.

**2-4-1 NOTION D'IMPEDANCE ACOUSTIQUE:**

L'impédance acoustique d'une couche est par définition le produit de sa masse volumique «  $\rho$  » par la vitesse de propagation «  $V$  » d'une onde dans cette même couche, qui est donnée par

$$Z = \rho \cdot V$$

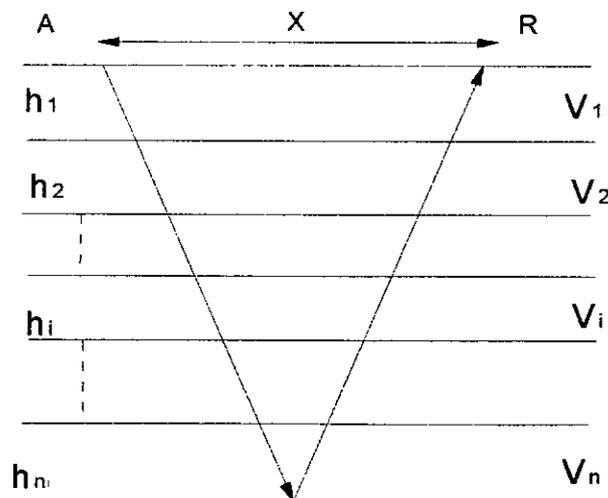
A chaque changement d'impédance acoustique des réflexions se produisent. Les interfaces géologiques repérées sont appelées aussi réflecteur.

**2-4-2 VITESSE DE PROPAGATION :**

La vitesse de propagation d'une onde dans une couche géologique homogène d'épaisseur  $H$  est dite vitesse d'intervalle. Elle est donnée par

$$V_i = H / t \quad (t \text{ est le temps du trajet à l'intérieure de la couche d'épaisseur } H)$$

Pour un milieu constitué d'un empilement de  $n$  couches horizontales et homogène d'épaisseur  $H_i$  et de vitesse de propagation  $V_i$  dans chaque couche



**Fig (I-4) Vitesse moyenne**

La vitesse de l'onde sismique générée en « A » est détectée en « R » traversant les n couches selon le chemin rapide est appelée « vitesse moyenne ». Cette vitesse est considérée comme la vitesse fictive, d'une couche homogène de même épaisseur que la série des n couches. En établissant l'égalité des parcours dans la série et de n couches homogène nous avons

$$\sum V_i T_i = V_m \cdot T$$

ou  $T_i$  est le temps double de parcours dans la *i*ème couche et T le temps double de parcours total.

La vitesse de l'onde dépend de la densité du milieu traversé, de la constante d'élasticité  $\lambda$  et de la viscosité  $\mu$ .

### **2-4-3 COEFFICIENT DE REFLEXION**

On appelle coefficient de réflexion d'une interface « C », le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchi «  $A_r$  » sur l'amplitude de l'onde incidente «  $A_i$  » pour une onde qui passe d'un milieu «  $i$  » de vitesse «  $V_i$  » et de densité «  $\rho_i$  » à un milieu «  $j$  » de vitesse «  $V_j$  » et de densité «  $\rho_j$  », avec une incidence proche de la normale, le coefficient de réflexion est définie par l'expression suivante

$$C_{ij} = A_r / A_i = (V_j \rho_j - V_i \rho_i) / (V_j \rho_j + V_i \rho_i) = [Z_j - Z_i] / [Z_j + Z_i]$$

où  $Z$  étant l'impédance acoustique de chaque couche.

### **2-5 TRACE SISMIQUE**

Lorsqu'une explosion est produite à la surface du sol, un signal est alors émis et se combine avec les différents coefficients de réflexion respectifs des réflecteurs pour donner des ondellettes élémentaire; la somme de ces ondellettes constituera la trace sismique (sismogramme) qui nous montrera la variation de la propagation de l'onde avec le temps après l'explosion.

Cette trace est généralement affectée de bruits convolutif et additionnels (aléatoires ou cohérents).

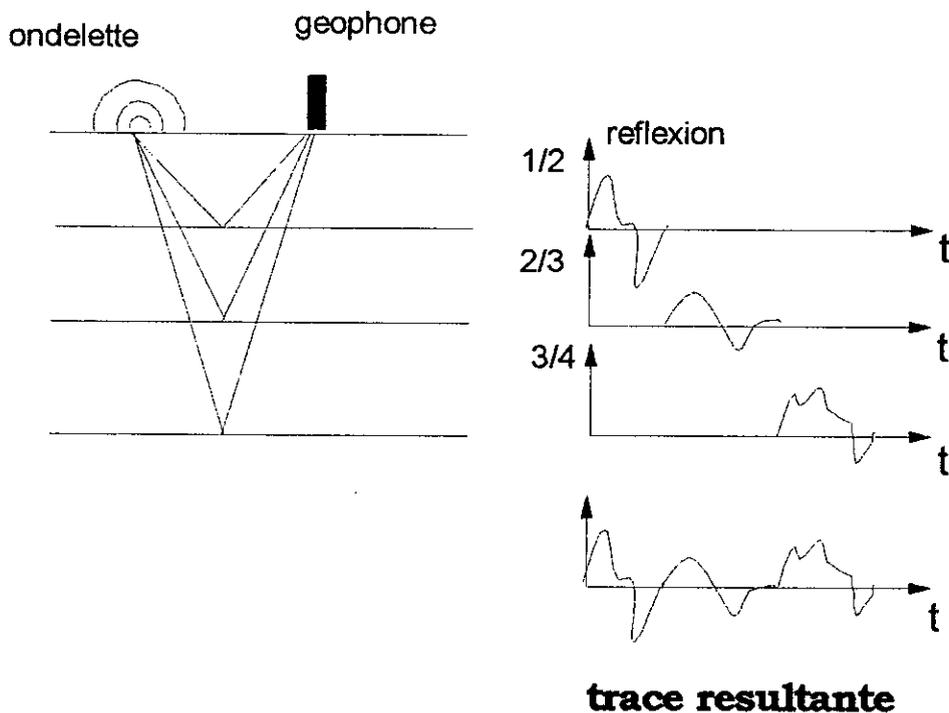


Fig (I-5) Trace sismique (sismogramme)

### 3 MODELISATION DE LA DISPERSION D'ONDE

L'analyse d'un processus qui est le préalable à toute étude d'un système, a pour objet la recherche d'un modèle mathématique fiable représentant le comportement du processus tant en régime statique que dynamique .

Ce modèle de procédé est donc, un ensemble de relations mathématiques (équation différentielles, équation discrète, ou temporel) permettant de décrire avec une précision suffisante le phénomène physique du processus.

Notre étude, porte sur les modèles décrivant l'évolution de l'onde sismique durant sa propagation dans les couches terrestres.

#### 3-1 REPRESENTATION DU PROCEDE

On modélise l'intérieur de la terre par un système de couches horizontales dont les signaux se propagent dans la direction verticale et dont les propriétés physiques varient avec la profondeur seulement. On suppose que chaque couche est sans perte. Quand un signal arrive à la frontière entre deux couches pour lesquelles les vitesses de propagation sont différentes une partie de ce signal est réfléchi et une autre transmise en proportion avec le

coefficient de réflexion de la séparation. Le coefficient fournit une indication sur les propriétés physiques de deux couches adjacente, ce qui est très utile dans la recherche pétrolière. Cependant on ne peut déterminer ou mesurer les coefficients directement, on peut par contre mesurer à la surface les signaux qui proviennent de l'intérieur de la terre (signaux sismiques, sismogramme) par des géophones ou hydrophones.

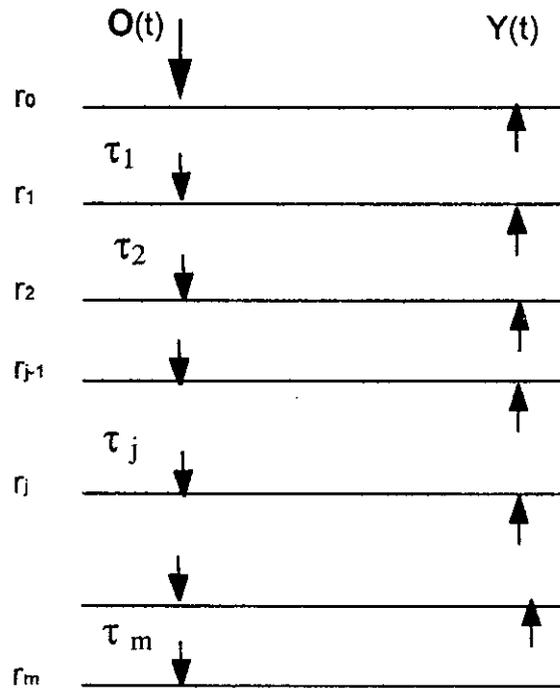
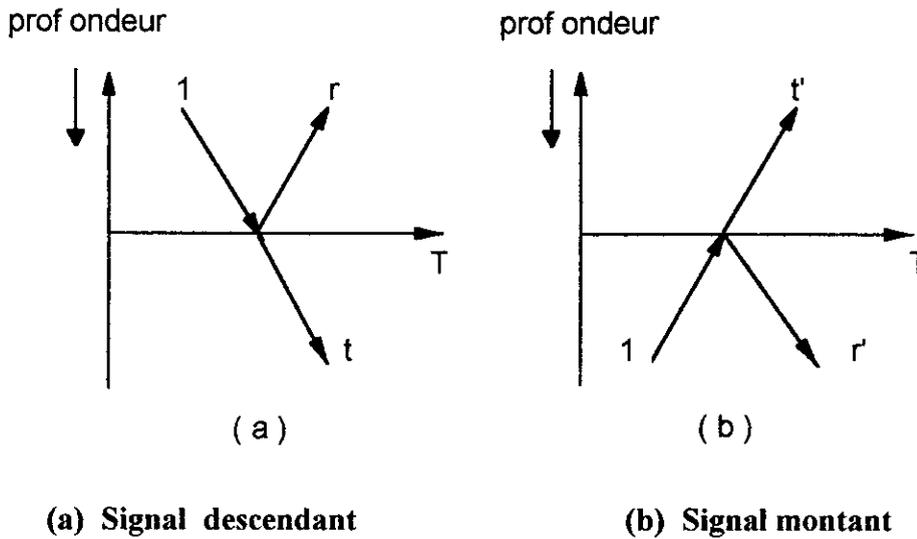


Fig ( I-6 ) Modèle à incidence normal

### 3-1 REFLEXION ET TRANSMISSION A LA LIMITE DE DEUX COUCHES

- Cas de transmission d'onde unitaire

En considérant deux couches homogènes, sans pertes et en supposant qu'à travers chacune des deux couches, un signal d'amplitude unitaire se propage verticalement vers la limite commune, à l'arrivé une partie du signal est réfléchié et l'autre partie est transmise ; les signaux sont dit dispersés. La dispersion des deux signaux peut-être représentée dans la figure (I-7). Respectivement dans ces figures les axes horizontaux correspondent au temps et les axes verticaux aux profondeurs.



**Fig( I-7) Réflexion et transmission à la limite de deux couches (d'onde unitaire)**

Les signaux réfléchis sont notés  $r$  et  $r'$

Les signaux transmis sont notés  $t$  et  $t'$

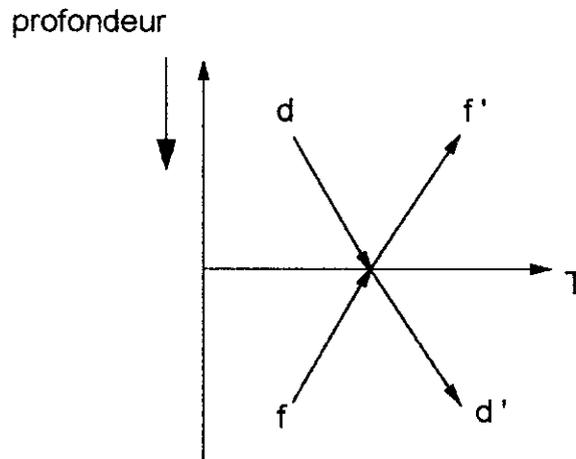
On remarquera que  $\Gamma$  représente le coefficient de réflexion des couches adjacentes pour le cas où l'onde transmise est d'amplitude unitaire .

Les amplitudes des signaux répartis satisfont les équations suivantes

$t = 1 + r$  ;  $t' = 1 + r'$  ;  $r = -r'$  et  $|r| < 1$  du fait que les couches sont sans perte la représentation des signaux à la limite peut-être exprimée par un seul paramètre  $r$  , appelé coefficient de réflexion de l'interface.

- Cas de transmission d'onde quelconque

Si deux signaux verticaux traversent deux couches adjacentes et arrivent à la limite commune on a la situation suivante



**Fig (I-8) Dispersion d'onde quelconque**

$d$  et  $f$  représentent les amplitudes des signaux descendant et montant avant la dispersion quant à  $d'$  et  $f'$  ils représentent les amplitudes des signaux descendant et montant après dispersion .

En utilisant la superposition on obtient

$$d' = t.d + r'.f = (1 + r) d - r.f \quad \text{I-1}$$

$$f' = r.d + t'.f = r.d + (1 - r).f \quad \text{I-2}$$

d'où on aura

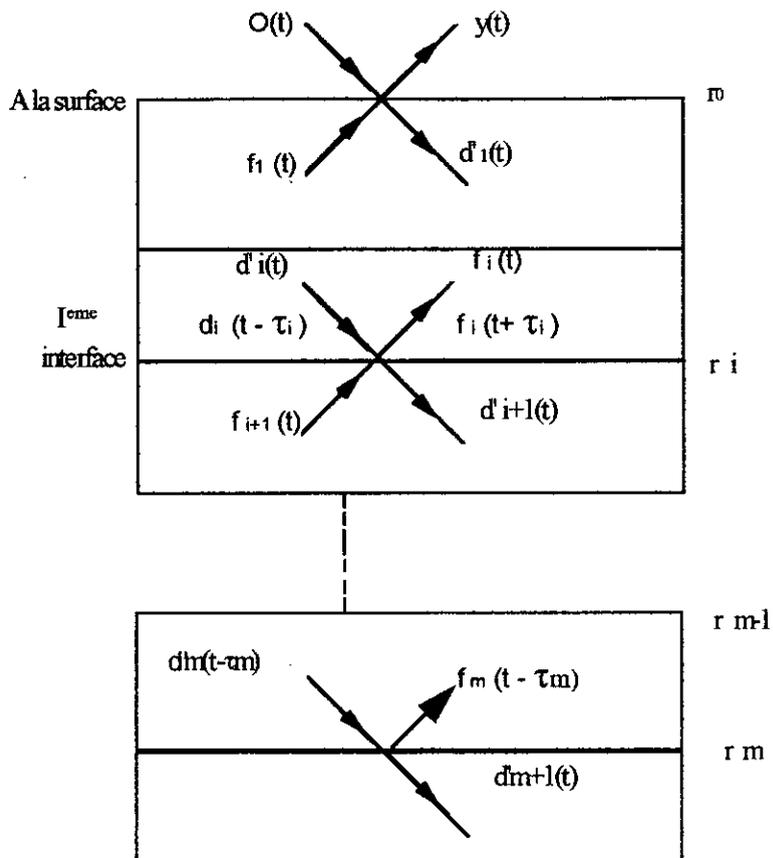
$$\begin{bmatrix} d' \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r & -r \\ r & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}$$

En prend compte que  $1-r \neq 0$  (si  $r=1$  alors la limite est un réflecteur parfait pour les deux signaux descendant et montant).

Ces réflecteurs parfait ( $r = 1$ ) ne surviennent pas en pratique et donc on suppose dans la suite que tout les coefficients de réflexion ont un module inférieur a 1 ( $|r| < 1$ )

### 3-3 COUCHE MULTIPLE

L'intérieur de la terre est habituellement modélisé par un milieu stratifié horizontalement, comportant  $M$  couches, et dans lequel les signaux acoustique se propagent verticalement sans perte. Les couches sont définies de manière à ce que le signal a besoin d'une unité de temps pour traverser chacune d'elle . On suppose qu'avant  $t=0$  aucun signal n'est présent dans le système des couches . En outre, on suppose qu'à partir de  $t=0$  une ondellette de source est émise dans la terre le long de la verticale ,et pour tout  $t$  aucun signal ne vient du sous-sol, enfin on notera  $O(t)$  l'ondellette de source émise de la terre et  $y(t)$  le sismogramme, le signal réfléchi de la terre d'où le processus de dispersion au temps  $t$  , dans toutes les couches peut être présenté par fig (I-9).



**Fig ( I-9) Modèle de dispersion à m couches**

Dans la figure (I-9), le coefficient de réflexion à la limite entre la  $i^{ième}$  couche et la  $(i + 1)^{ième}$  couche et noté par  $r_i$ .

Les signaux descendants et montants avant la dispersion dans la couche  $i$  sont notés  $d_i(t - \tau_i)$  et  $u_{i+1}(t)$  ils sont définis au dessus et au dessous de la couche  $i$ , respectivement.

En se référant à la figure(I-9) et les equations (I-1) (I-2) on aboutit aux équations de dispersion d'onde suivantes

\* - à la surface :

$$\text{on a : } y(t) = r_0 O(t) + (1 - r_0) f_1(t) \quad \text{I-3}$$

$$\text{et } d'_1(t) = (1 + r_0) O(t) - r_0 f_1(t) \quad \text{I-4}$$

\* - à la  $i^{ième}$  couche :

$$\text{on a : } d'_{i+1}(t) = (1 + r_i) d_i(t - \tau_i) - r_i f_{i+1}(t) \quad \text{I-5}$$

$$f_i(t + \tau_i) = r_i d_i'(t - \tau_i) + (1 - r_i) f_{i+1}(t) \quad \text{I-6}$$

\* - à la M<sup>ème</sup> couche

On suppose qu'il n'y a pas de retour d'ondes à partir de la .M+1<sup>ème</sup> couche c'est à dire :  $f_{m+1}(t) = 0$

$$\text{alors : } f_m(t + \tau_m) = r_m d_m'(t - \tau_m) \quad \text{I-7}$$

$$d_{m+1}'(t) = (1 + r_m) d_m'(t - \tau_m) \quad \text{I-8}$$

le signal  $d_{m+1}'(t)$  est généralement ignoré ( au dessous du sol ) .

En regroupant les équations précédentes selon l'ordre des couches :

$$d_1'(t) = -r_0 f_1(t) + (1 + r_0) O(t)$$

$$f_1(t + \tau_1) = r_1 d_1'(t - \tau_1) + (1 - r_1) f_2(t)$$

$$d_2'(t) = (1+r_1) d_1'(t - \tau_1) - r_1 f_2(t)$$

•  
•  
•

$$d_i'(t) = (1 + r_{i-1}) d_{i-1}'(t - \tau_{i-1}) - r_{i-1} f_i(t)$$

$$f_i(t + \tau_i) = r_i d_i'(t - \tau_i) + (1 - r_i) f_{i+1}(t) \quad \text{I-9}$$

•  
•  
•

$$d_m'(t) = (1 + r_{m-1}) d_{m-1}'(t - \tau_{m-1}) - r_{m-1} f_m(t)$$

$$f_m(t + \tau_m) = r_m d_m'(t - \tau_m)$$

$$\text{On suppose que : } d_i(t) = d_i'(t - \tau_i) \quad \text{I-10}$$

Les équations I-9 devient :

$$d_1(t + \tau_1) = -r_0 f_1(t) + (1 + r_0) O(t)$$

$$f_1(t + \tau_1) = r_1 d_1(t) + (1 - r_1) f_2(t),$$

$$\left. \begin{aligned} d_i(t + \tau_i) &= (1 + r_{i-1}) d_{i-1}(t) - r_{i-1}(t) f_i(t) \\ f_i(t + \tau_i) &= r_i d_i(t) + (1 - r_i) f_{i+1}(t) \end{aligned} \right\} i = 2, 3, \dots, m-1$$

$$d_m(t + \tau_m) = (1 + r_{m-1}) d_{m-1}(t) - r_{m-1} f_m(t)$$

$$f_m(t + \tau_m) = r_m d_m(t) \quad \text{I-11}$$

De même on pourra écrire les équations précédentes pour la  $i^{\text{ème}}$  couche et en ayant seulement son coefficient de réflexion

$$\begin{aligned} d_{i+1}(t) &= (1 + r_i) d_i(t) - r_i f_{i+1}(t) \\ f_i(t) &= r_i d_i(t) + (1 - r_i) f_{i+1}(t) \end{aligned} \quad \text{I-12}$$

Les conditions initiales pour les ondes réfléchies et incidentes sont :

$$d_i(t) = 0 \quad \text{et} \quad f_i(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \tau_i$$

La discrétisation du système d'équations I-11 donne :

pour  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$d_i(k + \tau_i) = (1 + r_{i-1}) d_{i-1}(k) - r_{i-1}(k) f_i(k) \quad \text{I-13}$$

$$f_i(k + \tau_i) = r_i d_i(k) + (1 - r_i) f_{i+1}(k) \quad \text{I-14}$$

De même pour le domaine discret on a :

$$f_{m+1}(k) = 0 \quad \text{I-15}$$

$$\text{et} \quad Y_0(k) = r_0 O(k) + (1 - r_0) f_1(k) \quad \text{I-16}$$

$$d_i(k) = 0 \quad \text{et} \quad f_i(k) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq \tau_i. \quad \text{I-17}$$

Si l'on ignore une partie de l'onde incidente, celle causée par la réflexion de l'onde réfléchie dans chaque couche, l'équation I-13 devient :

$$d_i(k + \tau_i) = (1 + r_{i-1}) d_{i-1}(k) \quad \text{I-18}$$

à partir des d'équations I-14 , I-16 et I-18 on obtient le signal de sortie  $y(t)$  comme suit

$$Y_0(k) = \sum_{j=1}^m \left[ r_j \prod_{i=1}^j (1 - r_{i-1}^2) O \left( k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i \right) \right] \quad \text{I-19}$$

en négligeant  $r_i$  devant 1 [29] on auras

$$Y_0(k) = \sum_{j=1}^m r_j O(k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) \quad \text{I-20}$$

Les effets du coefficient  $r_0$  peuvent être ignorés, ceci est possible car  $r_0$  est mesurable, c'est le coefficient à la surface de la terre

Soit maintenant le modèle suivant

$$Y_1(k) = O(k) * U(k)$$

Où  $O(k)$  représente un signal et  $U(k)$  étant le produit de la séquence de réflectivité (un train d'impulsion dont leur amplitude sont égale à ceux des coefficients de réflexion), qui souvent assumé à des éléments aléatoirement distribués et statistiquement indépendants, est un modèle constitué par un produit Bernoulli-gaussien[29] suivant :

$$U(k) = r(k) \cdot s(k) \quad \text{I-21}$$

ou  $r(k)$  est un bruit GAUSSIEN à moyenne nulle et variance  $\sigma_r^2$  et  $s(k)$  est une séquence aléatoire de Bernoulli de " 1 " et " 0 " avec les paramètres statistique  $\lambda$  tel que :

$$\Pr[s(k)] = \begin{cases} \lambda & S(k) = 1 \\ 1 - \lambda & S(k) = 0 \end{cases}$$

d'où la séquence  $U(k)$  a pour variance :

$$\sigma_u^2 = \lambda \sigma_r^2 \quad \text{I-22}$$

$$\text{Soit } S(k) = \delta(k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) \quad \text{I-23}$$

$$\text{alors : } U(k) = r_j \left( \prod_{i=1}^j (1 - r_i^2) \right) S(k) \quad \text{I-24}$$

$$\text{Ou } \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{I-25}$$

Et en négligeant  $r_i$  devant 1 l'équation (I-24) s'écrit :

$$U(k) = r_j \delta(k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) \quad \text{I-26}$$

Si on suppose  $Y_1(k) = O(k) * U(k)$ .

Alors

$$\begin{aligned} Y_1(k) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} U(n)O(k-n) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} r_j \delta(n - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) O(k-n) \\ Y_1(k) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} r_j O(k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) \end{aligned}$$

Le signal étant causal c'est à dire :

$$Y_1(k) = \sum_{j=1}^m r_j O(k - 2 \sum_{i=1}^j \tau_i) \quad \text{I-27}$$

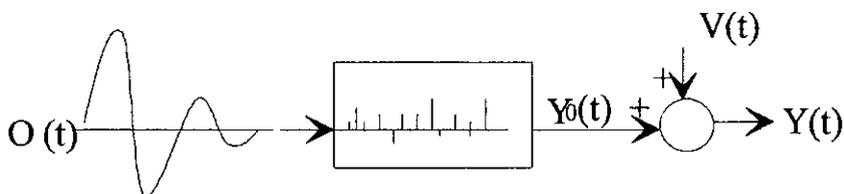
Par comparaison de  $Y(k)$  obtenu du problème d'inversion et de  $Y_1(k)$  on déduit que  $Y(k) = Y_1(k)$ . d'où  $Y(k)$  est la convolution de l'ondelette  $O(k)$  et de la séquence de reflectivite de réflexion  $U(k)$ .

On pourra dire que La trace sismique est le produit de convolution de l'ondelette et la série des coefficients de réflexion des couches

$$\begin{aligned} Y_0(t) &= O(t) * \sum_{i=1}^n r_i \delta(t - t_i) \\ Y_0(t) &= \sum_{i=1}^n r_i O(t - t_i) \end{aligned}$$

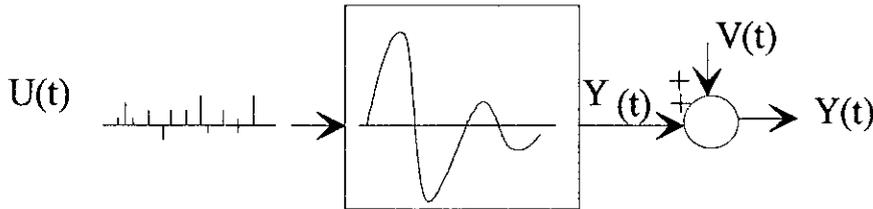
En tenant compte des différentes perturbations, la trace aura alors comme modèle :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n r_i O(t - t_i) + V(t)$$



**Fig (I-10) Modèle général de la trace sismique**

Par commutativité du produit de convolution  $Y(t)$  peut être considérée comme sortie d'un système linéaire d'ordre  $n$  excité par une série de coefficients de réflexion et ayant pour réponse impulsionnelle l'ondelette  $O(t)$ .



**Fig (I-11) Modèle équivalent de génération de la trace sismique**

#### **4 REPRESENTATION DE SIGNAUX**

On a deux type de représentation d'un signal, une représentation dite non paramétrique et une autre dite paramétrique [10][11]. La première fait appelle à une représentation analogique de tout phénomène physique, cette représentation qui à l'avantage d'être dans certain cas facilement manipulable, à longtemps été la préoccupation majeure des électroniciens, qui ont développé des circuits et des dispositifs adaptés à chaque type d'application .

Mais le développement des calculateurs numérique, l'influence des méthodes d'identification développées en automatique a incité les électroniciens à se pencher vers une autre représentation dite paramétrique d'un processus donnée à un modèle mathématique linéaire

##### **4-1 DESCRIPTION DES MODELES**

Le plus complet des modèles paramétrique est le modèle autoregressif à moyenne ajustée [A.R.M.A ] autorégressive moving average. En appliquant un signal  $U(k)$  à un tel modèle le processus  $Y(k)$  sera décrits par l'équation au différences finie suivantes

$$Y(k) + a_1 Y(k-1) + \dots + a_p Y(k-p) = b_0 U(k) + b_1 U(k-1) + \dots + b_q U(k-q) \quad (\mathbf{A})$$

Une telle représentation constitue un modèle A.R.M.A d'ordre  $(p,q)$

en passant à la transformée en Z l'équation **(A)** seras

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_q Z^{-q}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_p Z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

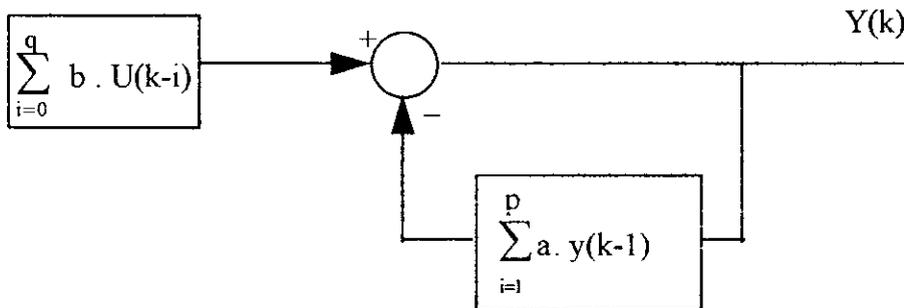
avec  $a_0=1$

Cette représentation paraît intéressante car elle présente une infinité d'échantillons qu'il est nécessaire de stocker pour représenter un signal, elle substitue un nombre finie de paramètre qui caractérise le signal et qui nous permettra de le reconstitue

#### 4-2 REPRESENTATION DES MODELES LINEAIRE DISCRET

Comme on a vu précédemment nous adopterons pour la suite que  $a_0=1$ , notre modèle sera comme suit :

$$Y(k) = - \sum_{i=1}^p a_i \cdot Y(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i \cdot U(k-i)$$

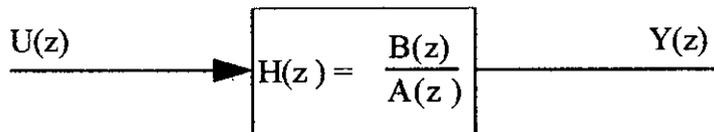


**Fig (I-12) Schéma bloc de la représentation temporelle**

avec sa représentation dans le domaine ( Z )

$$H(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_q Z^{-q}}{1 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_p Z^{-p}} = \frac{B(Z)}{A(Z)}$$

fonction de transfert



**Fig(I-13) Représentation spectrale du modèle A.R.M.A**

**4-3 MODELE A MOYENNE AJUSTEE (MA)**

Pour ce cas, les  $a_i$  sont nuls  $a_i = 0$  pour n'importe qu'elle valeur de  $i$  sauf  $a_0 = 1$   
 sa représentation temporelle sera  $y(k) = b_0 U(k) + \dots + b_q U(k-q)$

$$Y(k) = \sum_{i=0}^q b_i U(k-i)$$

sa représentation dans le domaine Z

$$Y(z) = \sum_{i=0}^q b_i Z^{-i}$$

**4-4 MODELE AUTOREGRESSIF (AR) :**

Dans le cas où les  $b_i$  sont nuls ,sauf  $b_0$  , le modèle se réduit à:

$$y(k) + a_1.y(k-1) + \dots + a_p y(k-p) = b_0 U(k)$$

La fonction de transfert sera alors :

$$H(Z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{i=1}^p a_i Z^{-i}}$$

**4-5 REPRÉSENTATION DANS L'ESPACE D'ÉTAT:**

La représentation classique dans l'analyse des circuits ou des signaux a été la représentation par des équations différentielles. Elle est la plus naturelle vu qu'elle traduit de manière directe le comportement du système analysé, elle peut être aussi ramenée à une représentation par la fonction de transfert.

Soit  $x(t)$  un vecteur de dimension  $n$  ayant les composante suivante:

$$x(t) = [ x_1(t); \dots\dots\dots x_n(t) ]'$$

On appellera l'état  $x(t)$  du système, étant donné la valeur donnée la valeur initiale de  $x(t_0)$ , permettant de déterminer  $x(t)$  pour une certaine entrée  $u(t)$  comme pour tout  $t > t_0$ .

En résumé l'état d'un système est un résumé d'information suffisante permettant l'évolution du système d'un point  $t_0$  à un autre.

Un système est dit dans l'espace si son fonctionnement ou son comportement régit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = a(t).x(t) + b(t).u(t)$$

$$y(t) = h. x(t) + n(t)$$

└───────────┬─── bruit

Le vecteur  $x$  n'étant pas forcément accessible à la mesure et dans le cas général il n'est accessible qu'à travers une observation ou équation modélisant le vecteur  $x$  en fonction de la mesure  $y(t)$ .

**4-5-1 EQUATION D'ÉTAT DANS LE CAS D'UN SYSTEME DISCRET:**

Equation décrivant le système comme étant de la forme

$$\dot{X}(t) = A . X(t) + B . U(t)$$

$$Y(t) = H . X(t) + V(t)$$

Pour discrétiser les équations continue on adoptera la relation

$$\dot{X}(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

ainsi 
$$\frac{x(k+1) - x(k)}{T} = A \cdot X(k) + B \cdot U(k)$$

$$X(k+1) = [I + AT] \cdot X(k) + B \cdot T \cdot U(k)$$

En prend  $I + A \cdot T = \Phi$  et  $B \cdot T = G$

On aura alors:

$$X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + G(k) \cdot U(k)$$

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k) + V(k)$$

#### **4-5-2 REPRESENTATION DES MODELES A.R.M.A DANS L'ESPACE D'ETAT:**

Soit le modèle ARMA d'ordre (p,q)

$$Y(k) + a_1 Y(k-1) + \dots + a_p Y(k-p) = b_0 U(k) + \dots + b_q U(k-q)$$

La représentation d'état étant:

$$X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + G(k) \cdot U(k)$$

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k) + V(k)$$

Cette représentation n'est pas unique, de manière générale on dégage différente représentation et chaque représentation est caractérisée par le triplet  $\Phi, G, H$  qui constitue une réalisation particulière de la fonction de transfert. C'est ainsi que l'on peut citer les représentations particulières suivantes :

- Représentation de JORDAN
- Représentation contrôlable ou commandable
- Représentation Observable

Nous nous attachons ici à la forme observable car elle est plus appropriée à l'objectif que nous nous sommes fixé (estimation de paramètre des modèles)

#### **- FORME OBSERVABLE**

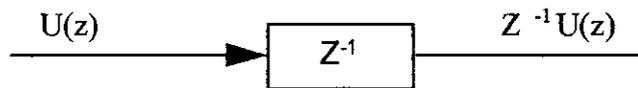
Nous avons vu que la représentation spectrale du modèle A.R.M.A conduit à la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_q Z^{-q}}{1 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_p Z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

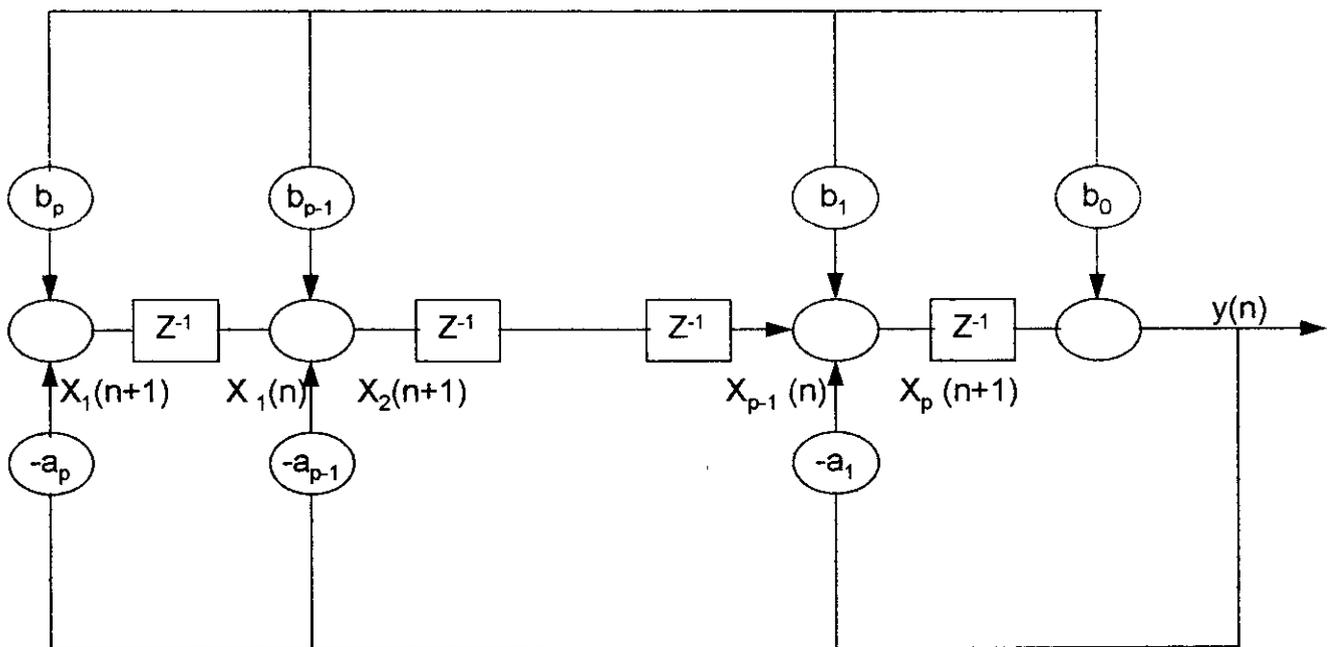
que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$Y(z) = U(z) b_0 + Z^{-1} (b_1 U(z) - a_1 Y(z)) + Z^{-2} (b_2 U(z) - a_2 Y(z)) + \dots + Z^{-p} (b_p U(z) - a_p Y(z))$$

En utilisant l'opérateur retard



On peut alors représenter l'équation précédente par le diagramme structurel suivant la figure suivante



**Fig (I-14) Diagramme structurel d'un modèle A.R.M.A**

Appelons les sorties auxiliaires de chaque cellule de retard

$$X_1(n), X_2(n), X_3(n), \dots, X_p(n)$$

En tenant compte de ce diagramme on écrira à la sortie

$$Y(n) = X_p(n) + b_0 U(n)$$

avec

$$\begin{aligned} X_p(n+1) &= b_1 U(n) - a_1 Y(n) + X_{p-1}(n) \\ &= X_{p-1}(n) + (b_1 - a_1 b_0) U(n) - a_1 X_p(n) \end{aligned}$$

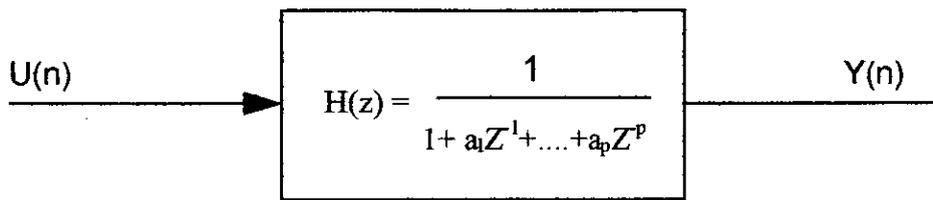
En mettant l'ensemble de ces équations sous forme matricielle, on obtient la représentation d'état suivante

$$\begin{bmatrix} X_1(n+1) \\ \vdots \\ X_p(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_p \\ 1 & 0 & \dots & -a_{p-1} & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \\ \vdots \\ X_{p-1}(n) \\ X_p(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p - a_p b_0 \\ b_{p-1} - a_{p-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} U(n)$$

$$Y(n) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(n) \\ \vdots \\ X_p(n) \end{bmatrix} + b_0 U(n)$$

**4-6 REPRÉSENTATION D'UN MODELE A.R PAR LES EQUATIONS D'ETAT:**

Soit le système suivant



**Fig (I-15) Schéma bloc du modèle A.R**

en explicitant ce système on auras

$$Y(n) + a_1Y(n-1) + \dots + a_pY(n-p) = U(n)$$

en posant  $X_1(n) = a_1$  ;  $X_2(n) = a_2$  ; ..... ;  $X_p(n) = a_p$

D'où le vecteur d'état  $X(n) = A(n) = [ a_1, a_2, \dots, a_p ]$

et la matrice d'observation deviendra

$$X^o = [ Y(n-1), \dots, Y(n-p) ]$$

Nous remarquerons que quel que soit n  $X_i(n+1) = X_i(n)$  ce qui entraîne que

$$X(n+1) = X(n)$$

d'où on aboutit au modèle suivant

$$A(n+1) = A(n)$$

$$Y(n) = X^o \cdot A(n) + U(n)$$

On remarquera par la suite que la modélisation précédente ne peut être appliquée que pour les cas stationnaires, ce qui ne permet pas de suivre la variation des paramètres même si elle est très lente, pour ce faire nous introduirons un bruit  $V(n)$  sur l'état qui enrichira les nouvelles estimations, et le modèle sera

$$A(n+1) = A(n) + V(n)$$

$$Y(n) = X^o \cdot A(n) + U(n)$$

## **5 CONCLUSION:**

Nous avons présenté, dans ce chapitre quelques notions relatives aux signaux sismiques. L'adoption du modèle du sous-sol constitué par un milieu stratifié horizontalement sans perte et dans lequel les signaux acoustiques se propagent verticalement, nous a permis de modéliser notre système. Nous avons montré que la trace sismique est le produit de la convolution des coefficients de réflexion avec l'onde émise (source). Les modèles mathématiques (A.R., A.R.M.A, modèle d'état) nécessaires pour la représentation d'un système linéaire ont été introduits. Ceci va nous permettre dans les prochains chapitres de résoudre le problème qui est posé à savoir la détermination des coefficients de réflexion à partir du sismogramme.

# CHAPITRE II

## ALGORITHME D'INVERSION

**CHAP II ALGORITHME D'INVERSION**

**1 INTRODUCTION :**

Il s'agit de déterminer les coefficients de réflexion de k couches caractérisant le modèle et ce à partir de l'ondelette source et du sismogramme et cela en utilisant les équations physiques du modèle; notre travail suivra alors les étapes suivantes:

- En premier lieu, on générera une trace sismique synthétique à l'aide de l'ondelette et des coefficients de réflexion.
- En deuxième lieu, en utilisant seulement la trace sismique générée et l'ondelette on déterminera les coefficients de réflexion.

On supposera que chaque couche est sans pertes et a une épaisseur telle que le signal nécessite une unité de temps pour la traverser.

**2 ALGORITHME DE GENERATION DES SIGNAUX :**

La génération de la trace découle des équations physiques de l'onde (chapitre I), et les hypothèses à considérer sont :

- Connaissance de l'ondelette.
- Connaissance des coefficients de réflexion pour chaque couche.

Pour décrire les caractéristiques principales de l'algorithme on notera :

$$d(i) = d_i(t) \quad ; \quad ff(i) = f_i(t) \quad ; \quad dd(i) = d_i(t+1) \quad \text{et} \quad ff(i) = f_i(t+1)$$

pour tout,  $i = 0, 1, \dots, k+1$  en un instant  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ . En tenant compte des hypothèses prises au chapitre précédent (I-12) les relations suivantes sont satisfaites.

$$d(0) = O(t)$$

$$dd(i+1) = (1 + r_i) d_i - r_i f(i+1) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k-1$$

$$ff(i) = r_i d(i) + (1 - r_i) f(i+1)$$

$$f_{k+1}(t) = 0 \quad \text{pour tout } t,$$

$$ff(k) = r_k d(k)$$

$$y(t) = ff(0)$$

En utilisant la règle suivante de calcul :

$$d(i) \leftarrow dd(i) \text{ et } f(i) \leftarrow ff(i) \quad \text{pour } i=1, \dots, k \text{ et } t \leftarrow t+1$$

la relation précédente permettra d'établir un algorithme pour calculer la trace sismique  $y(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$ , à l'aide de l'ondelette  $O(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$  et les coefficients de réflexion  $r_i = 0, 1, \dots, k$ .

**- ALGORITHME DE CALCUL DES COEFFICIENTS DE REFLEXION**

a) les signaux sont non bruités :

En se basant toujours sur les équations de modélisation (I-12) de notre problème on va déterminer les coefficients de réflexion en ayant l'ondelette et la trace sismique. L'hypothèse qui nous permettra de déterminer les coefficients de réflexion est basée sur l'observation suivante :

Soit  $\nu$  le plus petit entier tel que  $O(\nu) \neq 0$  c-à-d  $\nu = \min(t, 0 \leq t \leq T / m(t) \neq 0)$

qui est le temps où  $O(t)$  démarre ; alors il résulte de (I-3) que

$$d_i(\nu+i) \neq 0 \text{ et } f_i(\nu+i) = 0$$

pour  $i=0, 1, \dots, k$  ceci veut dire que

$$f_i(\nu+i+1) - r_i d_i(\nu+i) = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, k \text{ ou}$$

$$r_i = \frac{f_i(\nu+i+1)}{d_i(\nu+i)} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k$$

Ceci implique que  $r_0 = y(\nu) / f(\nu)$

En utilisant les remarques précédentes nous pouvons décrire l'algorithme du problème d'inversion. Ainsi, pour  $i \geq 0$  donné, représentant le numéro d'une couche, on dénote

$$d(t) = d_i(t+\nu)$$

$$f(t) = f_i(t+\nu+1)$$

$$dd(t) = d_{i+1}(t+\nu)$$

$$ff(t) = f_{i+1}(t+\nu+1)$$

pour  $t = i, i+1, \dots, T-\nu-i$ .

$d$  et  $f$  représentent les signaux descendant et montant de la couche  $i$

$dd$  et  $ff$  représentent les signaux descendant et montant de la couche  $i+1$

d'où il résulte de (I-12) que:

$$r_i = \frac{f(i)}{d(i)}$$

$$dd(t+1) = \frac{1}{1-r_i} [d(t) - r_i f(t)] \quad \text{pour } t = i, i+1, \dots, T-v-i-1$$

$$ff(t-1) = \frac{1}{1-r_i} [f(i) - r_i d(t)] \quad \text{pour } t = i+1, \dots, T-v-i$$

avec les règles de récursion,  $d(t) \leftarrow dd(t)$ ,  $f(t) \leftarrow ff(t)$ , pour  $t = i+1, \dots, T-v-i-1$  et  $i \leftarrow i+1$ .

De là on obtient alors un algorithme qui peut déterminer les coefficients de réflexion.

L'algorithme peut être initialisé en mettant

$$d(t) = 0 \quad (t+v)$$

$$f(t) = y \quad (t+v)$$

pour  $t = 0, 1, \dots, T-v$ , pour  $i = 0$ .

#### b) SIGNAUX BRUITES :

Le bruit est un phénomène qui se présente comme une source de difficulté, car son comportement est aléatoire et vient s'ajouter au signal transportant les informations désirées; le bruit dans notre cas provient surtout de l'environnement externe et de l'équipement utilisé. Dans les méthodes que l'on va étudier on supposera que l'ondelette source et la trace sismique sont tous deux corrompues par du bruit, ceci à la différence avec certaines méthodes existantes pour la reconstitution des coefficients de réflexion à partir de données bruitées; dans ces méthodes il est toujours supposé que l'ondelette est connue avec exactitude, cependant souvent l'ondelette peut être totalement inconnue.

Pour mieux voir l'effet du bruit sur le modèle utilisé précédemment on utilisera la transformée en z de la fonction de transfert de la sortie du système (sismogramme) sur l'entrée (l'ondelette source). Soit  $f = \{f(t) / t \geq 0\}$  une fonction du temps alors la transformée en z de f, notée F(z) est définie par :

$$F(z) = \sum_{t \geq 0} f(t)z^{-t}$$

Si  $g = \{f(t+1) / t \geq 0\}$  et  $f(0)=0$ , alors  $g(z) = z F(z)$ .

avec les conditions initiales nulles

### 3 REPRESENTATION A. R. X:

En appliquant la transformée en z à l'équation I-12, on obtient (en posant  $M=k$ ) :

$$\begin{bmatrix} Z & d_{i+1}(z) \\ Z & f_i(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r_i & -r_i \\ r_i & 1-r_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i(z) \\ f_{i+1}(z) \end{bmatrix} \quad (z) \quad \text{II-1}$$

pour tout  $i = 0, 1, \dots, (M-1)$

avec  $f_i(0) = 0$  ; pour  $i = 0, 1, \dots, M$

$d_{i+1}(0) = 0$  ; pour  $i = 0, 1, \dots, M-1$

Si nous dénotons la fonction de transfert de  $d_i(k)$  vers  $f_i(k+1)$  par  $R_i(z)$  il vient (II-1)

$$Zf_{i+1}(z) = R_{i+1}(z) d_{i+1}(z)$$

$$Zf_i(z) = R_i(z) d_i(z)$$

$$R_i[z] = \frac{z^2 r_i + R_{i+1}(z)}{z^2 + r_i R_{i+1}(z)} \quad \text{II-2}$$

Pour  $i = 0, 1, \dots, M-1$  et  $R_M(z) = r_M$

La relation précédente II-2 montre bien que  $R_i(z)$  est un facteur rationnelle en z que l'on peut écrire sous forme de :

$$R_i[z] = \frac{b_i(z)}{a_i(z)}$$

$a_i$  et  $b_i$  sont des polynôme en z avec des coefficients réels.

En utilisant (II-2) on aura :

$$\frac{b_i(z)}{a_i(z)} = \frac{z^2 r_i a_{i+1}(z) + b_{i+1}(z)}{z^2 a_{i+1}(z) + r_i b_{i+1}(z)} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k-1$$

$$\text{d'où } a_i(z) = z^2 a_{i+1}(z) + r_i b_{i+1}(z)$$

II-3

$$b_i(z) = z^2 r_i a_{i+1}(z) + b_{i+1}(z)$$

$$\text{avec } a_M(z) = 1 \quad \text{et} \quad b_M(z) = r_M$$

et

$$a_{i+1}(z) = \frac{1}{z^2(1-r_i^2)} [a_i(z) - r_i b_i(z)]$$

II-4

$$b_{i+1}(z) = \frac{1}{1-r_i^2} [b_i(z) - r_i a_i(z)]$$

Il est clair, alors, que les  $a_i(z)$  et  $b_i(z)$  sont des polynômes en  $Z^2$ . On peut montrer que le coefficient du plus haut degré de  $a_i(z)$  est égal à 1 et celui de  $b_i(z)$  à  $r_i$ . Par conséquent si on arrive à trouver, par quelque moyen,  $a_0(z)$  et  $b_0(z)$  on pourra calculer à l'aide des équations [(II-4) et (II-3)] les  $a_i$  et  $b_i$ , et donc les  $r_i$  pour  $i=0, \dots, M$ .

En se rappelant que

$$R_0(z) = \frac{b_0(z)}{a_0(z)} = \frac{zF_0(z)}{D_0(z)} = \frac{Y(z)}{O(z)}$$

on peut déduire

$$A_0(z)Y(z) = B_0(z)O(z) \tag{II-5}$$

$$\text{Si on pose } A_0(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{2j} \quad \text{et} \quad B_0(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{2j},$$

l'équation (II-5) devient dans le domaine temporel :

$$\sum_{j=0}^M a_j y(k+2j) = \sum_{j=0}^M b_j O(k+2j) \tag{II-6}$$

pour  $k \geq 0$ , en ayant supposé que  $O(k) = y(k) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, 2M-1$ . En sélectionnant les échantillons pairs (ou impairs) et en utilisant une nouvelle unité de temps double de l'ancienne, l'équation (II-6) se transforme en :

$$\sum_{j=0}^M a_j Y(k+j) = \sum_{j=0}^M b_j O(k+j) \tag{II-7}$$

pour  $k \geq 0$  et  $O(k) = y(k) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, M-1$ .

La relation (II-7) définit un modèle appelé ARX ('autoregressive with exogenous input') [12][13] entre l'onde de source  $O$  et le sismogramme  $y$ . On écrit l'équation (II-7) sous forme matricielle avec :

$$\theta = (a_0 \dots a_{M-1}, b_0 \dots b_M)'$$

$$H = \begin{bmatrix} y(0) \dots y(M-1), -O(0) \dots -O(M) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y(T-M) \dots y(T-1), -O(T-M) \dots -O(T) \end{bmatrix}$$

$$w = (-y(M) \dots -y(T))'$$

où  $T$  est le nombre d'échantillons utilisés et  $(\cdot)'$  est l'opération de transposition de matrice.

Ainsi, on a :

$$H\theta = W + \underbrace{V(k)}_{\text{bruit}} \tag{II-8}$$

Une autre formulation matricielle peut être utilisée sous la forme suivante :

$$O = [O(0), O(1), \dots, O(T)]' \text{ représentant l'ondelette}$$

$$Y = [y(0), y(1), \dots, y(T)]' \text{ représentant le sismogramme}$$

$$H = [Y', -O']'$$

$$A = [A'_0, A'_1, \dots, A'_{T-K}]$$

$$B = [B'_0, B'_1, \dots, B'_{T-K}]$$

$$\text{avec } A_i = [0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots, a_K, 0, \dots, 0]$$

$$B_i = [0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_k, 0, \dots, 0]$$

où tout  $A_i$  et  $B_i$  ont  $i$  zéros au début du vecteur et  $T-k-i$  zéros à la fin du vecteur, ce qui donne :

Chapitre II

$$A_0 = [ a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, 0, \dots, 0 ]$$

$$A_1 = [ 0, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, 0, \dots, 0 ]$$

$$A_{k-1} = [ 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, 0 ]$$

$$A_k = [ 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k ]$$

$$B_0 = [ b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, 0, \dots, 0 ]$$

$$B_1 = [ 0, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, 0, \dots, 0 ]$$

$$B_{k-1} = [ 0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, 0 ]$$

$$B_k = [ 0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k ]$$

Ceci qui donne :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_0 & \dots & a_k & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & \dots & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & b_k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_0 & \dots & b_k & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & \dots & b_k \end{bmatrix}$$

On posera :

$$D = [A \ B]$$

$$D = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_k & 0 & 0 & b_0 & \dots & \dots & b_k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_0 & \dots & a_k & 0 & \dots & \dots & \dots & b_0 & \dots & \dots & b_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & \dots & b_k & 0 \end{bmatrix}$$

Nous remarquerons que les matrices A, B et D sont des matrices de Toeplitz. Comme  $a_k = 1$ , les matrices A et D sont non singulières.

Pour ce qui suit nous représentons les signaux  $o(t)$  et  $y(t)$  comme étant des signaux bruités tels que

$$\begin{aligned} O(t) &= \overline{O(t)} + O'(t) \\ y(t) &= \overline{y(t)} + y'(t) \end{aligned}$$

$\overline{O(t)}$  et  $\overline{y(t)}$  sont les valeurs des signaux sans bruit et  $O'(t)$  et  $y'(t)$  sont leurs composantes de bruit au temps  $t$ .

Le vecteur de coefficients de réflexion généré est :

$$U = [ r_0, r_1, \dots, r_k ]$$

#### 4 METHODES DE RESOLUTION:

Il existe plusieurs méthodes de résolution du système d'équations (II-8) pour trouver le vecteur  $\theta$  des paramètres du modèle ARX [7]. Dans cette partie, nous examinons plusieurs méthodes avec des degrés de sophistication croissants. On peut choisir, par exemple, la solution approchée au sens des moindres carrés obtenue à l'aide de la pseudo-inverse de H :

$$\theta_1 = (H' H)^{-1} A' W$$

Une approche plus générale est d'utiliser la solution pondérée :

$$\theta_2 = (H' Q H)^{-1} A' Q W$$

où  $Q$  est une matrice symétrique non singulière et souvent diagonale. Une valeur élevée de  $q_{ii}$  mesure un taux élevé de confiance aux données de la  $i$ ème ligne de  $H$ . Une autre approche, plus élaborée, consiste à partitionner les données en blocs et à utiliser alors une procédure récursive, toujours au sens des moindres carrés pondérés. Supposons que  $\theta_j$  soit une solution donnée par (II-9), pour le  $j$ ème bloc de données. Alors, une meilleure estimation est dérivée en utilisant un nouveau bloc de données :

$$\theta_{j+1} = \theta_j + K_j [w_{j+1} - H_{j+1} \theta_j] \quad \text{II-10}$$

où

$$K_j = P_j H_{j+1}' [H_{j+1} + Q_{j+1}^{-1}]^{-1}$$

$$P_j = [H_j' Q H_j]^{-1}$$

La nouvelle matrice  $P_{j+1}$  peut être calculée à partir de  $P_j$  par :

$$P_{j+1} = [P_j + H_{j+1}' Q_{j+1} H_{j+1}]^{-1}$$

Si les matrices  $Q_j$  et  $P_j$  sont interprétés de manière statistique, alors les équations (II-10) ne représentent qu'un exemple de filtre de Kalman discret.

Comme nous le verrons en illustration, ces méthodes fonctionnent très bien lorsque le rapport signal sur bruit est assez élevée. Dans le cas contraire, on obtient des valeurs de  $r_i$  qui n'ont plus de signification physique, c'est-à-dire pour lesquelles  $r_i$  ne satisfait pas à la condition  $|r_i| < 1$ . Comme la relation qui lie les  $r_i$  aux  $(a_i, b_i)$  n'est pas linéaire, il est difficile d'inclure cette condition directement dans la formulation du problème.

Nous exposons, maintenant, une méthode développée par Van der Woude [8] par laquelle la condition suscitée est incluse directement dans un problème de minimisation :

Désormais l'équation (II-7) devient alors :

$$D(\theta) H = 0 + \underbrace{V(k)}_{\text{bruit}} \quad \text{II-11}$$

Le système (II-11) peut être résolu au sens des moindres carrés, par la minimisation d'une fonction coût écrite sous la forme ( voir annexe I ) :

$$J(\theta) = Z' D'(\theta) [D(\theta) D'(\theta)]^{-1} D(\theta) Z \quad \text{II-12}$$

L'algorithme se décompose alors, en les étapes suivantes :

- a- Calculer  $r_i = (2/\pi) \arctan(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, M$   
( ce qui assure que  $|r_i| < 1$  )
- b- Calculer  $\theta$  à partir des  $r_i$
- c- Soit  $y = D(\theta) H$
- d- Trouver  $x$  tel que  $D(\theta) D'(\theta) x = y$ , par l'intermédiaire de la récursion de Levinson
- e- En déduire  $J(\theta(r)) = x' y$
- f- Calculer  $(\partial / \partial r_i) \theta(r)$
- g- Calculer  $(\partial / \partial r_i) J(\theta(r)) = 2 x' [(\partial / \partial r_i) D\theta(r)] (Z - D'\theta(r) x)$
- h- Trouver  $(\partial / \partial s_i) J(\theta(r(s))) = (2/\pi) (1/(1 + s_i^2)) (\partial / \partial r_i) J(\theta(r))$

i- Utiliser une méthode du gradient pour améliorer la solution actuelle puis revenir à l'étape (a).

Cette procédure est plus complexe mais elle fonctionne bien, même dans les cas d'un faible rapport signal sur bruit.

Dans ce qui va suivre nous représenterons les logigrammes concernant la génération des signaux et celle de minimisation du coût.

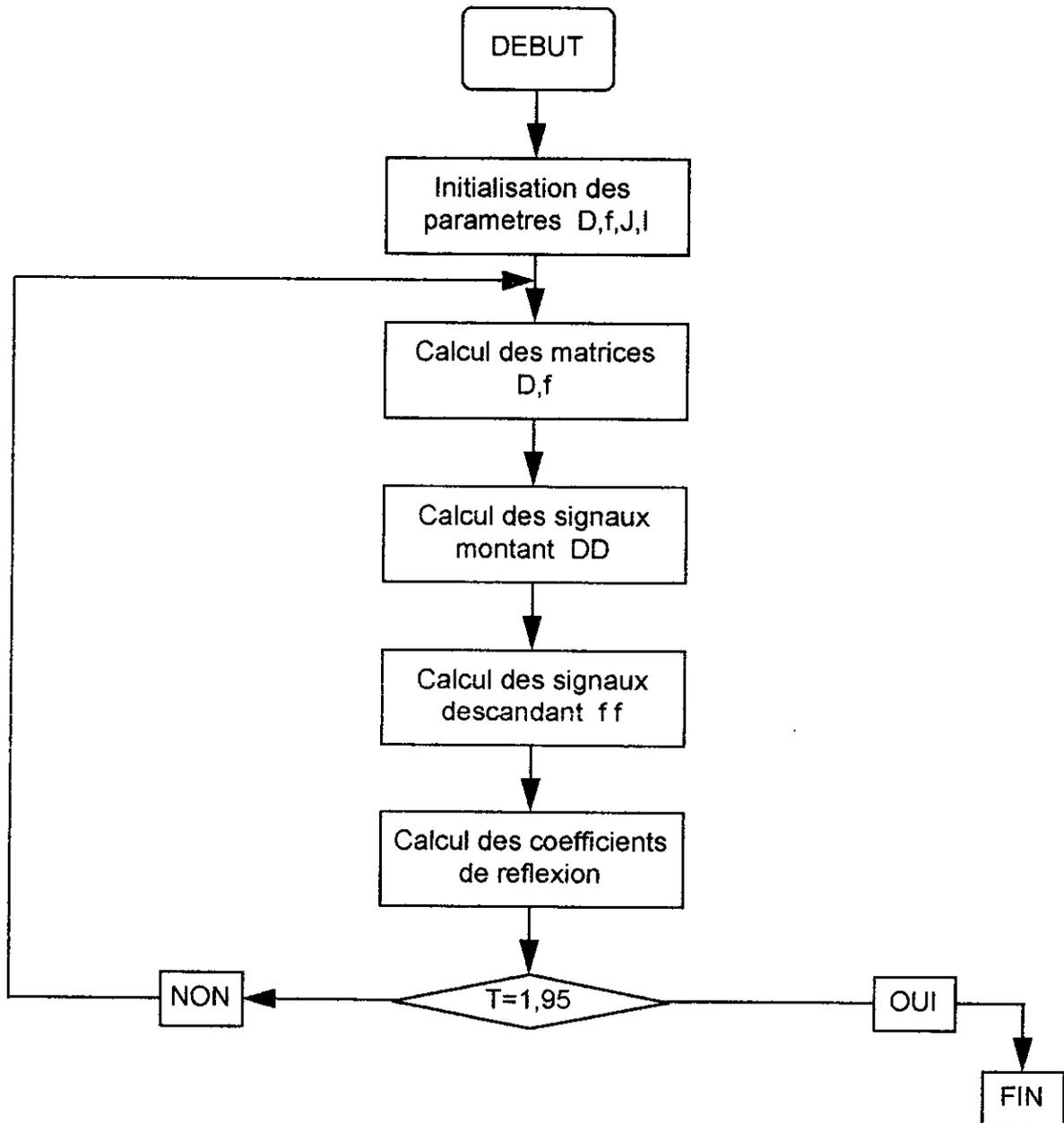
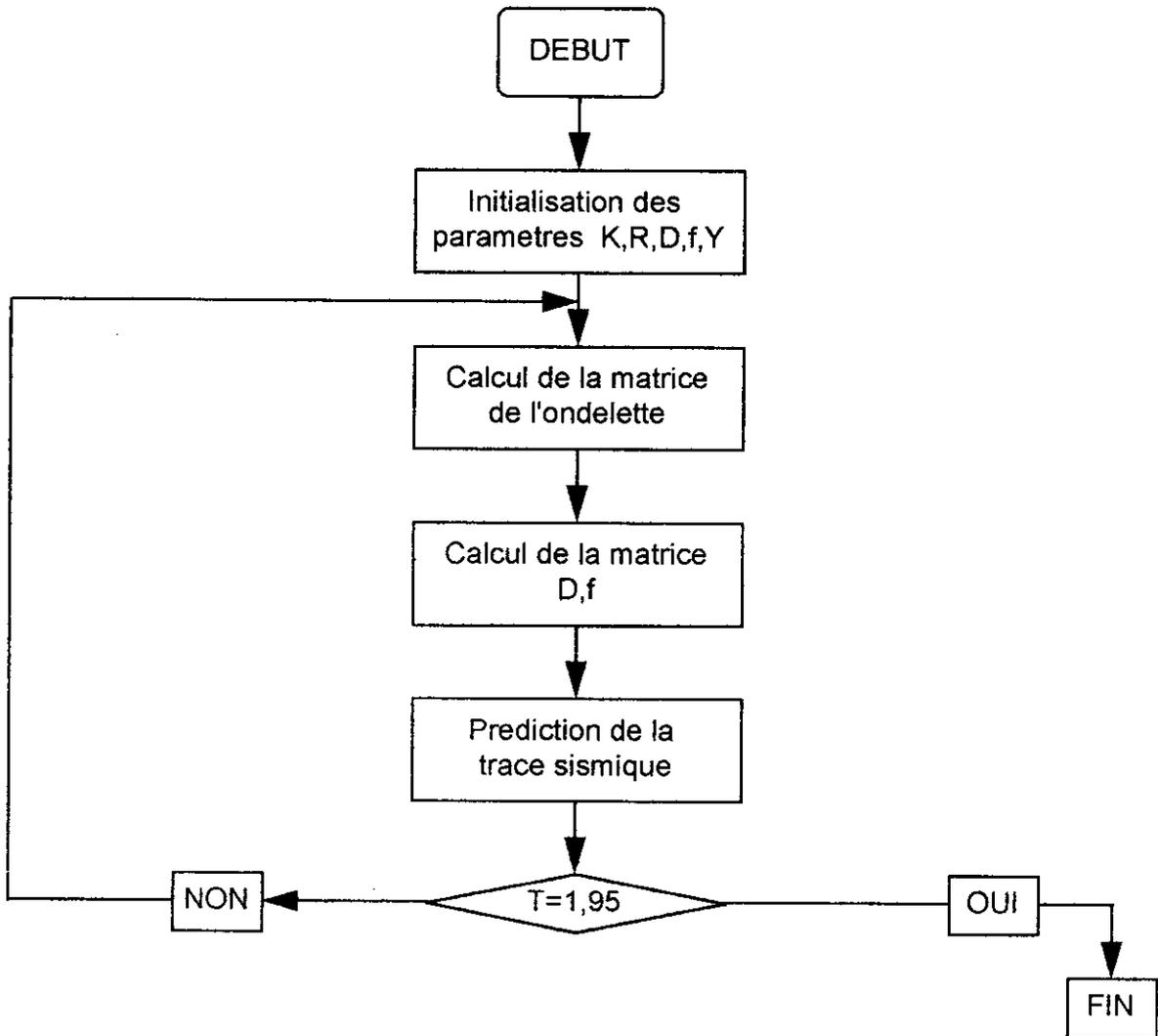


Fig (II-1) Organigramme de calcul des coefficients de réflexion



**Fig ( II-2) Organigramme de la trace sismique**

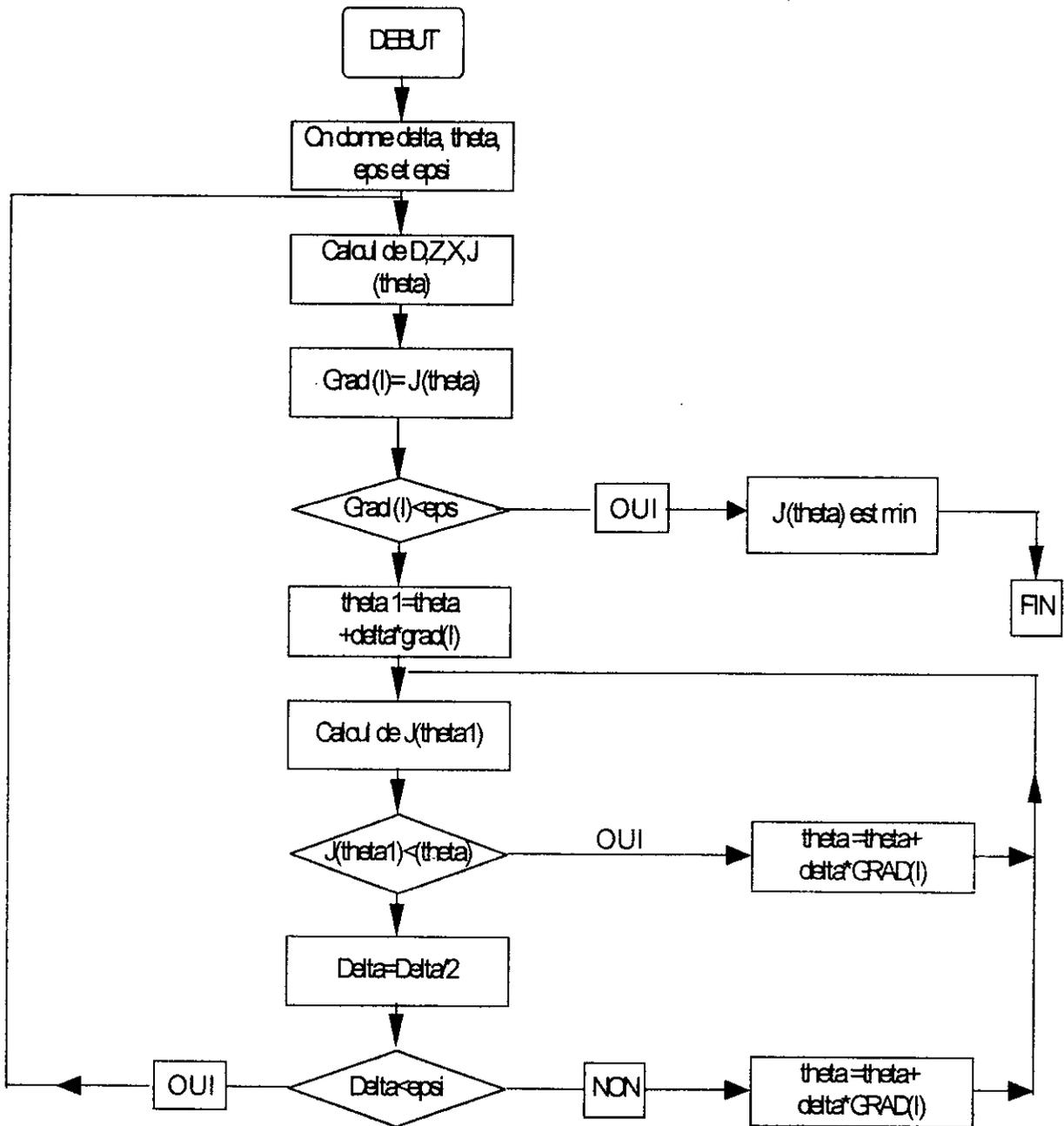


Fig (II-3) Organigramme de minimisation du critère

## **5 METHODES DE DETECTION DES INTERFACES**

Les exemples montrent que toutes les méthodes précédentes produisent, en plus des coefficients recherchés, des paramètres parasites. Puisqu'au départ, nous avons supposé l'existence de  $M$  interfaces, nous aboutissons obligatoirement à  $M$  coefficients  $r_i$ , non nécessairement tous nuls, alors que le nombre réel d'interfaces peut être inférieur à  $M$ . Nous avons besoin donc, d'une méthode de détection qui nous permet de déterminer la position correcte des coefficients  $r_i$  non nuls. Comme certains  $r_i$  ont une valeur très faible, on peut vouloir les éliminer à l'aide d'une valeur seuil. Le défaut de cette approche primaire est qu'elle élimine du même coup les interfaces réels pour lesquels les  $r_i$  ont une faible amplitude. C'est-à-dire qu'elle ne discrimine pas entre les interfaces existants, et de faible amplitudes, et les interfaces parasites également de faible amplitudes. D'autres méthodes plus sophistiquées existent, elles sont souvent très complexes et augmentent considérablement le temps de calcul. Nous développons ici une technique, conceptuellement plus simple, qui consiste à ajouter un terme supplémentaire à la fonction coût utilisée dans le problème de minimisation, dans le calcul des  $r_i$  [8]. Elle fonctionne sur le principe de réduction du nombre de paramètres [9], par l'encouragement de l'algorithme d'optimisation à rechercher les paramètres qui contiennent le plus de zéros (ou les plus proches de zéro) possibles. Ceci est accompli en ajoutant un terme à la fonction objective, ce qui pénalise la solution pour l'inclusion de paramètres non nuls. Le nouveau coût a la forme :

$$J_n(r) = J(\omega) + \lambda \sum_i r_i^2 \quad \text{II-13}$$

où  $J(\omega)$  est l'ancien coût, et le terme supplémentaire est une somme de tous les paramètres du système. Le paramètre  $\lambda$  est une constante positive faible que nous utilisons pour contrôler l'influence de ce terme relativement au coût des moindres carrés. Le modèle est alors encouragé à trouver des solutions qui ont des paramètres plus petits. Mais comment ceci peut-il répondre à notre exigence d'élimination des interfaces erronés ? La réponse est que tous les paramètres ne diminuent pas de manière relativement égales. Plus spécifiquement, les coefficients se divisent en deux catégories : ceux qui ont une grande influence sur la solution (qu'ils aient une grande ou petite amplitude) et ceux qui ont peu ou pas d'influence. Donc, les coefficients de la deuxième catégorie sont en excès et peuvent, par conséquent, être éliminés. Cette méthode nous permet ainsi de détecter les paramètres réels en se basant non pas sur leur amplitude, mais sur leur influence dans la fonction erreur. La procédure consiste donc à exécuter une fois l'algorithme de minimisation, en utilisant le coût (II-12), puis de réexécuter, une autre fois, l'algorithme mais avec le coût (II-13). Ensuite, on peut éliminer les paramètres pour lesquels les variations sont supérieures à un seuil donné.

## **6 CONCLUSION**

Nous avons exploré dans ce chapitre les méthodes de résolution du problème d'inversion unidimensionnel à incidence normale de données sismiques bruitées. Nous avons défini un modèle sans pertes dans lequel les informations recherchés sont les positions et les amplitudes des coefficients de réflexion situés aux interfaces entre les diverses couches de la terre.

Nous avons exposé la représentation paramétrique ARX du modèle qui permet de tenir compte des réflexions multiples subies par l'onde de source injectée dans le sous-sol, puis

recueillie sous forme d'un sismogramme à sa surface. Nous avons ensuite dérivé, à l'aide de méthodes diverses, plus ou moins sophistiquées, des algorithmes d'estimation des coefficients à partir des données d'entrée-sortie que sont l'onde de source et le sismogramme. Ces procédures, basées sur le principe des moindres carrés, sont efficaces et relativement peu complexes dans les cas où le rapport signal sur bruit est élevé. Dans les cas contraires, elles fournissent des paramètres possédant des valeurs non physiques. Puis nous avons exposé une autre technique qui résout ce problème en contraignant les coefficients à posséder des valeurs inférieures à 1 en valeur absolue.

Toutes ces méthodes possèdent l'inconvénient d'introduire dans la solution des paramètres fictifs non nuls supplémentaires. En général, dans la réalité physique, seul un petit nombre de coefficients non nuls existe. Aussi, une méthode de détection est nécessaire pour estimer le nombre et la position des coefficients réels et éliminer les coefficients superflus. Nous avons développé, dans ce chapitre, un détecteur rapide qui est en même temps peu complexe et très sensible. Il est basé sur l'incorporation d'un terme supplémentaire dans la fonction quadratique du coût, ce qui impose à l'algorithme d'optimisation de rechercher les solutions qui contiennent le moins de coefficients non-nuls possible. Un interface est alors détecté, si sa variation relative entre les minimisations, sans et avec terme supplémentaire, est faible. L'exemple montré (chapitre IV Simulation) illustre parfaitement les avantages de cette démarche. Parmi les difficultés non encore bien résolues, reste le problème du choix de  $\lambda$  et du seuil de détection, qui sont ici choisis empiriquement. Egalement, dans tout ce qui précède, le nombre de couches  $M$  est supposé a priori connu, alors que souvent, dans les situations pratiques, il ne l'est pas. Dans le futur, il serait intéressant d'étudier l'extension des méthodes proposés au cas où le nombre de couches est inconnu. Une possibilité, en cours d'étude, serait de démarrer avec un nombre quelconque, mais petit, de coefficients, puis d'augmenter ce nombre au fil des blocs de données tout en observant les coûts obtenus. Lorsque la variation relative du coût devient négligeable, on peut estimer avoir atteint le nombre correcte d'interfaces.

**CHAPTER III**  
**DECONVOLUTION**

**1 INTRODUCTION :**

La deconvolution est l'étape du traitement qui améliore la résolution temporelle de l'enregistrement sismique. Elle consiste à restituer à l'ondelette enregistrée ses caractéristiques initiales. Cette restitution ne sera qu'approchée et fera appel à plusieurs modélisations et hypothèses mathématiques. C'est un processus compliqué, du fait que quelques composants fréquentiels sont perdus dans le trajet à travers la terre, et les instruments d'enregistrement; le signal est modifié par le filtre naturel « transmission terrestre » ; ainsi le spectre du signal subira de considérables atténuations particulièrement en hautes fréquences.

Dans ce chapitre l'étude de la deconvolution sera l'objet principale de notre travail, elle aura pour base le modèle trouvé dans le chapitre précédent (chapitre ( I ) )

On commencera par l'étude de la déconvolution prédictive , ensuite on appliquera le filtre de KALMAN et à la fin on utilisera l'identification par la méthode du maximum de vraisemblance pour l'estimation des différents paramètres de notre système.

**2 DECONVOLUTION PREDICTIVE****2-1 METHODE DE DECONVOLUTION**

Il s'agit d'appliquer un filtre convolutif dans le but d'aboutir à la série des coefficients de réflexion [14 ][15 ] . Soit un filtre  $F(t)$  , son application au sismogramme (trace sismique)  $Y$  donne:

$$Y(t) * F(t) = [O(t) * U(t) + \Pi(t)] * F(t)$$

$$Y(t) * F(t) = O(t) * U(t) * F(t) + \Pi(t) * F(t)$$

Dans le cas idéal nous aurions obtenu l'équation suivante:

$$Y(t) * F(t) = U(t)$$

En réalité au niveau du calcul , il y a toujours l'introduction d'un terme représentant l'erreur de la méthode :

$$Y(t) * F(t) = U(t) + \varepsilon(t)$$

où  $\varepsilon(t)$  est l'erreur de la méthode .

Donc

$$U(t) = Y(t) * F(t) + \varepsilon(t)$$

$$U(t) = O(t) * U(t) * F(t) + n(t) * F(t) + \varepsilon(t)$$

Le filtre  $F(t)$  doit donc être déterminé de sorte à minimiser une fonctionnelle de l'écart  $\varepsilon(t)$  et du bruit  $n(t)*F(t)$  .

Si nous négligeons l'importance du terme  $n(t)$  , la trace se réduit à :

$$Y(t) = O(t) * U(t)$$

Or notre but est d'avoir , si l'ondelette était parfaitement impulsionnelle, un sismogramme  $Y(t)$  de la forme suivante:

$$Y'(t) = \delta(t) * U(t) = U(t)$$

pour cela nous chercherons à appliquer à la trace sismique  $Y(t)$  un filtre  $F(t)$  tels que nous aurons l'équation suivante

$$Y'(t) = Y(t) * F(t)$$

où  $F(t)$  : filtre de déconvolution recherché

$$Y'(t) = Y(t) * F(t)$$

$$Y'(t) = [ O(t) * U(t) ] * F(t)$$

$$Y'(t) = [ O(t) * F(t) ] * U(t)$$

$$Y'(t) = \delta(t) * U(t)$$

nous pourrons donc écrire l'équation suivante:

$$O(t) * F(t) = \delta(t)$$

$$O(f) \cdot F(f) = 1$$

Dans le domaine fréquentiel , cette dernière égalité s'écrit sous la forme :

$$O(f) \cdot F(f) = 1$$

d'où

$$F(f) = \frac{1}{O(f)}$$

Donc en première conclusion , nous dirons que le filtre à appliquer doit avoir pour spectre d'amplitude l'inverse du spectre de l'ondelette d'où l'appellation de filtre inverse [16].  
L'ondelette  $O(t)$  est souvent prise à phase minimale.

### 2-1-2 DETERMINATION DU FILTRE DE DECONVOLUTION

#### - Méthode de WEINER :

La théorie de Wiener « posée en termes de filtrage » délivre un filtre qui minimise la variance de l'erreur résiduelle .

L'erreur résiduelle est la différence entre la sortie réelle et la sortie désirée .  
Le principe de la méthode est schématisé par la figure ( III-1).

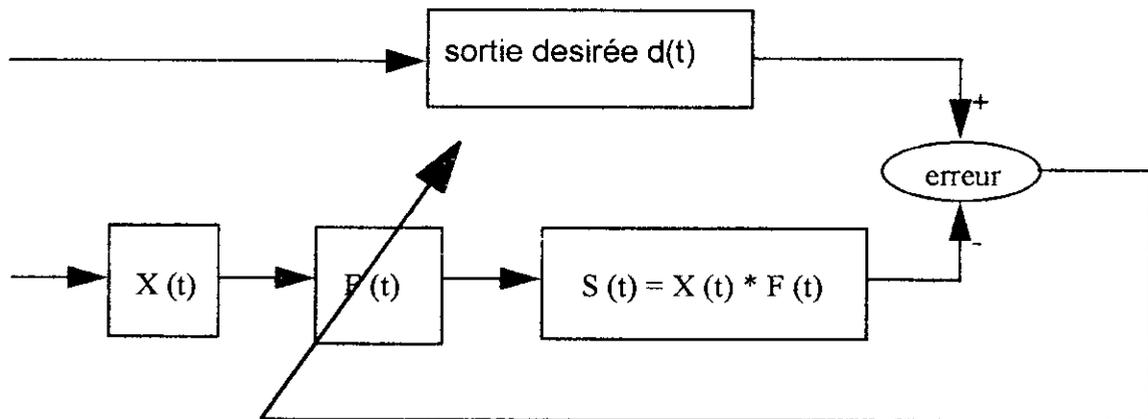


Fig ( III-1 ) PRINCIPE DU FILTRE DE WEINER

- $F(t)$  : Filtre inverse
- $X(t)$  : Signal d'entrée
- $S(t)$  : Signal de sortie
- $d(t)$  : Sortie désirée

On cherche les coefficients d'un filtre  $F(0), F(1), \dots, F(n)$  tels que  $S(t) = X(t) * F(t)$  avec l'approximation au sens des moindres carrés minimisant l'écart entre la sortie désirée et la sortie réelle. Ceci se traduit par l'équation suivante :

$$e = \sum_{t=1}^n (d(t) - S(t))^2 \quad \text{III-1}$$

$e$  : Erreur r résiduelle

$$S(t) = X(t) * F(t)$$

$$e = \sum_{t=1}^n [d(t) - X(t) * F(t)]^2$$

Sachant qu'une dérivée est nulle aux extrema, nous pouvons écrire l'équation suivante .

$$\frac{\delta e}{\delta f(i)} = 0 \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\delta e}{\delta f(i)} = \frac{\delta}{\delta f(i)} \left( \sum_{t=1}^n [d(t) - X(t) * F(t)]^2 \right) = 0$$

Nous sommes en présence d'un système causal, par hypothèse les séries  $d(t)$ ,  $X(t)$  et  $f(t)$  sont convergentes.

Nous pouvons donc écrire l'équation suivante :

$$\frac{\delta e}{\delta f(i)} = 2 \sum_{t=1}^n [d(t) - X(t) * F(t)] \cdot \frac{\delta}{\delta f(i)} [d(t) - X(t) * F(t)] = 0$$

D'où l'égalité suivante :

$$\sum_{t=1}^n (d(t) - X(t-i)) = \sum_{t=1}^n \left[ \sum_{\tau=1}^n f(\tau) X(t-\tau) \right] X(t-i)$$

$$\sum_{t=1}^n (d(t) - X(t-i)) = \sum_{\tau=1}^n f(\tau) \sum_{t=1}^n X(t-\tau) X(t-i) \dots \dots \dots \quad \text{III-2}$$

Nous remarquons que l'expression :

$$\Phi_{dx}(i) = \sum_t d(t) X(t-i)$$

représente la fonction de cross-correlation du signal désiré et du signal d'entrée .

$$\Phi_{xx}(i-\tau) = \sum_t X(t-i) X(i-\tau)$$

représente la fonction d'auto-correlation du signal désiré et du signal d'entrée décalée de  $\tau$ .

On pose :

$$g(t) = \Phi dX(i)$$

$$r(i) = \Phi_{xx}(i-\tau) \quad \text{avec} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nous pouvons écrire l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} \Phi_{dx}(i) &= \sum_{\tau=1}^n f(\tau) \Phi_{xx}(i-\tau) & \text{III-3} \\ g(t) &= \sum_{\tau=1}^n f(\tau) r(i-\tau) \end{aligned}$$

L'équation (III-3) représente l'équation générale de weiner .

C'est une équation qui régit tous les filtres inverses.

En développant cette équation , nous obtenons la forme suivante:

$$F(0) r(0) + F(1) r(1) + \dots + F(n) r(n) = g(0)$$

$$F(0) r(1) + F(1) r(0) + \dots + F(n) r(n-1) = g(1)$$

III-4

$$F(0) r(n) + F(1) r(n-1) + \dots + F(n) r(0) = g(n)$$

L'auto-correlation étant paire , nous avons utilisé , pour écrire ce système , le résultat suivant:

$$\Phi_{xx}(i) = \Phi_{xx}(-i)$$

Le système d'équation (III-4) peut être écrit sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(n) \\ r(0) & r(1) & \dots & r(n-1) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ r(0) & r(1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ g(n) \end{bmatrix} \quad \text{III-5}$$

F(t) : Filtre de Weiner

On remarque que la matrice d'auto-corrélation est une matrice carrée, symétrique par rapport à la diagonale, il suffit de connaître donc sa première ligne ou colonne pour la construire complètement ; c'est une matrice du type de Toeplitz.

Le filtre de déconvolution sera donné par la résolution du système matriciel à l'aide de l'algorithme de « LEVINSON ».

### **- Application du filtre**

Le filtre F(t) cherche à aboutir à partir de l'ondelette enregistrée O(t), une ondelette O'(t), débarrassée de l'ensemble des perturbations que O(t) a subi durant sa propagation pour revenir à son état à l'émission,

$$O(t) * F(t) = O'(t)$$

Son application au sismogramme nous donnerait :

$$F(t) * Y(t) = F(t) * (U(t) * O(t)) = (F(t) * O(t)) * U(t) = O'(t) * U(t)$$

L'application de ce filtre au sismogramme, nous donne donc une trace déconvoluée, et dans le cas idéal où  $F(t) * O(t) = O'(t) = \delta(t)$  on arrive à la série des coefficients de réflexion U(t)

## **2-2 DECONVOLUTION PREDICTIVE :**

Le filtre de Weiner défini précédemment s'avère être un outil très performant dans la réduction des traces sismiques; il est possible d'arriver à un filtre de Weiner qui permet l'élimination d'événements répétitifs à partir d'un certain temps, appelé distance de prédiction. Un tel filtre est appelé filtre de déconvolution prédictive; on dira donc que la déconvolution prédictive utilise les résultats des moindres carrés pour calculer un filtre dit de prédiction qui élimine les effets de prédiction multiples.

### **2-2-1 ETAPES DE LA DECONVOLUTION PREDICTIVE**

La déconvolution prédictive comporte deux étapes principales qui sont :

- \* Le calcul d'un opérateur de prédiction ( Filtre de prédiction) P de n échantillons
- \*\* Le calcul du filtre de déconvolution prédictive ainsi que son application .

a) CALCUL DE L'OPERATEUR DE PREDICTION

Nous savons que le filtre de weiner F(t) est obtenue par l'équation matricielle

$$[\Phi_{xx}(t)]. [F(t)] = [\Phi_{dx}(t)]$$

Appliquant ce résultat au cas sismique ( X(t) et d(t), ondelettes d'entrée et désirée ). Pour une ondelette désirée égale à l'ondelette d'entrée à partir d'un certain temps  $\alpha$  « distance de prédiction », le filtre F(t) est appelé opérateur de prédiction et on le note P(t).

L'intercorelation entre le signal désiré et l'ondelette sera maintenant

$$\Phi_{dx}(\tau) = \Phi(X(t+\alpha) X(t)) = \sum_t X(t+\alpha) X(t-\tau) = \sum_t X(t) X(t-(\alpha+\tau))$$

D'où :

$$\Phi_{dx}(\tau) = \Phi(X(t+\alpha) X(t))$$

Donc le second membre de l'équation matricielle décrit le vecteur dont les termes sont les échantillons, après le temps  $\alpha$ , de l'auto-correlation de l'ondelette d'entrée .

L'équation matricielle s'écrit alors:

$$[\Phi_{xx}(t)]. [P(t)] = [\Phi(X(t+\alpha) X(t))]$$

Posons  $\Phi_{xx}(i) = r_i$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_n \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{n-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ r_n & r_{n-1} & \dots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \cdot \\ P(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_{\alpha+1} \\ \cdot \\ r_{\alpha+n} \end{bmatrix}$$

Le système peut être résolu à l'aide de l'algorithme de LEVINSON pour donner l'opérateur de prédiction P ( 0 ,1.....n ) .

b) OPERATEUR D'ERREUR DE PREDICTION

Soit  $\epsilon(t+\alpha)$  l'erreur ( ou l'écart entre la vraie valeur X(t+\alpha) et la valeur prédite  $\hat{X}(t+\alpha)$  ), on a :

$$\varepsilon(t + \alpha) = X(t + \alpha) - \hat{X}(t + \alpha) \tag{III-6}$$

En portant l'équation (22) dans (II-6) on aura :

$$\varepsilon(t + \alpha) = X(t + \alpha) - \sum_1 X(t) P(\tau - t) \tag{III-7}$$

La transformée en Z de l'équation (II-7) nous donne :

$$Z^{-\alpha} E(Z) = Z^{-\alpha} X(Z) - X(Z) P(Z)$$

En multipliant cette dernière équation par  $Z^\alpha$  on obtient :

$$E(Z) = X(Z) - Z^{-\alpha} X(Z) P(Z)$$

$$E(Z) = X(Z) [1 - Z^{-\alpha} P(Z)]$$

On remarque d'après cette équation, qu'on applique à la transformés en Z de X(t) un opérateur  $(1 - Z^{-\alpha} P(z))$ . Cet opérateur est la transformée en Z de l'erreur de prédiction qui n'est autre que la différence entre le dirac à l'origine et l'opérateur de prédiction P(t) translaté de la distance  $\alpha$  :

$$(1 - Z^{-\alpha} P(Z)) = T\{Z\} (\delta(t) - P(t - \alpha))$$

L'opérateur d'erreur de prédiction correspondant à l'opérateur de prédiction P(t) serait alors:

$$f(t) = (1, 0, 0, \dots, 0, -P_0, -P_1, \dots, -P_n)$$

### C) FILTRE DE DECONVOLUTION PREDICTIVE

Nous allons montrer que l'opérateur d'erreur de prédiction n'est autre que le filtre de deconvolution prédictive. On montrera ainsi que ce filtre transforme un ondelette inconnue de longueur  $(\alpha + n)$  en une autre ondelette inconnue de longueur  $\alpha$ .

Construisons le filtre de déconvolution prédictive à partir de opérateurs de prédiction. L'équation matricielle donnant l'opérateur P(t) est :

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & & r_n \\ r_1 & r_0 & & r_{n-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ r_{n-1} & r_{n-2} & & r_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_{\alpha+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{\alpha+n-1} \end{bmatrix}$$

Le développement de cette équation donne:

$$\begin{aligned}
 r_0 P_0 + r_1 P_1 + \dots + r_{n-1} P_{n-1} &= r_{(\alpha)} \\
 r_1 P_0 + r_0 P_1 + \dots + r_{n-2} P_{n-1} &= r_{(\alpha+1)} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 r_{n-1} P_0 + r_{n-2} P_1 + \dots + r_0 P_{n-1} &= r_{(\alpha+n-1)}
 \end{aligned}$$

Le système de n équations à n inconnues peut être augmenté de manière à transformer l'opérateur de prédiction en l'opérateur de déconvolution prédictive [15]: on commencera par retrancher le second membre de chaque coté des équations

$$\begin{aligned}
 -r_{(\alpha)} + r_{(0)} P(0) + \dots + r_{(n-1)} P(n-1) &= 0 \\
 -r_{(\alpha+1)} + r_{(\alpha)} P(1) + \dots + r_{(n-2)} P(n-1) &= 0 \\
 &\vdots \\
 -r_{(\alpha+n-1)} + r_{(n-1)} P(0) + \dots + r_{(0)} P(n-1) &= 0
 \end{aligned}$$

on ajoute maintenant  $\alpha$  équations de la forme :

$$\begin{aligned}
 -r_{(0)} - \dots + r_{(\alpha)} P(0) + r_{(\alpha+1)} P(1) + \dots + r_{(\alpha+n-1)} P(n-1) &= -\rho_{(0)} \\
 -r_{(1)} - \dots + r_{(\alpha-1)} P(0) + r_{(\alpha)} P(1) + \dots + r_{(\alpha+n-2)} P(n-1) &= -\rho_{(1)} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 -r_{(\alpha-1)} - \dots + r_{(1)} P(0) + r_{(2)} P(1) + \dots + r_{(n)} P(n-1) &= -\rho_{(\alpha-1)}
 \end{aligned}$$

le système initial devient alors (après avoir multiplié les équation par (-1))

$$\begin{aligned}
 r_{(0)} + 0 + \dots - r_{(\alpha)} P(0) - r_{(\alpha+1)} P(1) - \dots - r_{(\alpha+n-1)} P(n-1) &= -\rho_{(0)} \\
 r_{(1)} + 0 + \dots - r_{(\alpha-1)} P(0) - r_{(\alpha)} P(1) - \dots - r_{(\alpha+n-2)} P(n-1) &= -\rho_{(1)} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 r(\alpha - 1) + 0 + \dots - r(1)P(0) - r(2)P(1) - \dots - r(n)P(n-1) &= \rho(\alpha - 1) \\
 r(\alpha) + 0 + \dots - r(0)P(0) - r(1)P(1) - \dots - r(n-1)P(n-1) &= 0 \\
 r(\alpha + n - 1) + 0 + \dots - r(n-1)P(0) - r(n-2)P(1) - \dots - r(0)P(n-1) &= 0
 \end{aligned}$$

L'écriture matricielle de ce système est alors la suivante:

$$\begin{bmatrix}
 r(0) & r(1) & \dots & r(\alpha + n - 1) \\
 r(1) & r(0) & \dots & r(\alpha + n - 2) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 r(\alpha) & r(\alpha - 1) & \dots & r(n - 1) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 r(\alpha + n - 1) & r(\alpha + n - 2) & \dots & r(0)
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -P(0) \\
 \vdots \\
 -P(n-1)
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \rho(0) \\
 \rho(1) \\
 \vdots \\
 \rho(\alpha - 1) \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\rho(i) = r(i) - \sum_{k=0}^{n-1} r(\alpha - i + k)P(k) \quad i = 0, 1, \dots, \alpha - 1$$

La solution de cette équation matricielle nous donne l'opérateur d'erreur de prédiction ou le filtre de déconvolution prédictive avec une distance de prédiction  $\alpha$

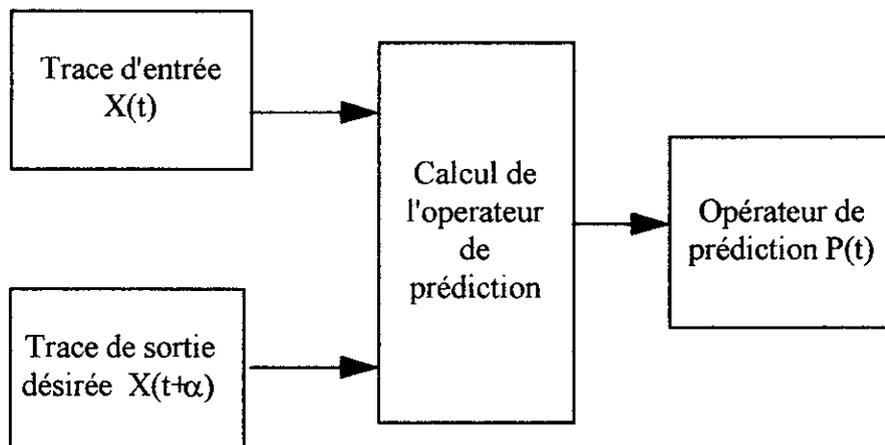
$$(1, 0, 0, \dots, -P(0), -P(1), \dots, -P(n-1))$$

( $\alpha - 1$ ) zeros

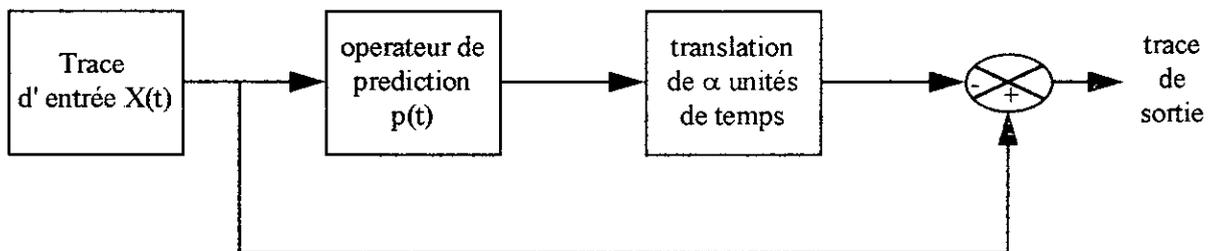
Cet opérateur a réalisé une double fonction : il a estimé la traîne de longueur  $(n - \alpha)$  et l'a retranché de l'ondelette initial e de longueur n, pour donner une ondelette de longueur  $\alpha$ .

Donc le choix de  $\alpha$  sera tributaire du degré de résolution recherché, c'est à dire du niveau voulu de réduction de l'ondelette.

La schématisation du calcul du filtre de déconvolution prédictive [17] et de son application est la suivante:



**Fig (III-2) Calcul de l'opérateur de prédiction**



**Fig ( III-4 ) Application du filtre**

$X(t+ \alpha)$  est la quantité prédite de  $X(t)$  à partir de  $\alpha$

### 3 IDENTIFICATION PAR LE FILTRE DE KALMAN

Dans le chapitre précédent on a vu que la trace sismique n'est autre que la convolution entre les coefficients de réflexion et l'ondelette. Dans cette partie l'étude sera axée sur la déconvolution du signal d'observation en estimant les coefficients de réflexion et les paramètres de l'ondelette ; l'algorithme de minimisation de la variance de l'erreur d'estimation d'état sera utilisé à cet effet.

Pour remédier au problème d'estimation non linéaire, un modèle A.R de l'ondelette a été pris pour cette étude.

#### 3-1 REPRESENTATION DU MODELE A.R PAR LES EQUATIONS D'ETATS

On a vu précédemment qu'un processus physique peut-être représenté soit par des équations d'états qui s'écrivent comme suit :

$$X(k+1) = \phi(k) \cdot X(k) + G(k) \cdot U(k) \quad \text{III-8}$$

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k) + V(k) \quad \text{III-9}$$

$\phi$ ,  $G$  et  $H$  sont définis dans le chapitre ( I ),

ou par une fonction de transfert dont la relation entrée - sortie est :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{B(Z)}{A(Z)}$$

Dans le cas où les  $b_i$  sont nuls (sauf  $b_0 \neq 0$ ), l'équation aux différences finis se réduit à :

$$Y(k) = \sum_{i=1}^p a_i Y(k-i) + b_0 U(k)$$

ainsi le polynôme  $B(Z)$  se réduit à une constante  $b_0$  et la fonction de transfert  $H(Z)$  ne contient plus que des pôles.

En posant :

$$\begin{aligned} X_1(n) &= a_1 \\ X_2(n) &= a_2 \\ &\vdots \\ X_p(n) &= a_p \end{aligned}$$

Le vecteur d'état paramétrique est :  $X(n) = A(n) = [a_1, a_2, \dots, a_p]'$

Et la matrice d'observation deviendra :  $T' = [ y(n-1), \dots, y(n-p) ]$

Nous remarquerons que quelque soit  $n$ ,  $X_i(n+1) = X_i(n)$  ce qui entraîne que  $X(n+1) = X(n)$  et que l'observation s'écrit sous la forme suivante:

$$Y(n) = T'_0 A(n) + U(n)$$

alors, on aboutit au modèle suivant :

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) \\ Y(n) &= T'_0 A(n) + U(n) \end{aligned}$$

└─────────── processus générateur

Pour prendre en considération la variation des paramètres en fonction du temps, nous avons introduit à l'état du système un bruit aléatoire  $W(n)$  [18][19], de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$  qui permet de matérialiser la variation des paramètres de l'ondelette. Ainsi, le modèle pris précédemment sera réécrit sous la forme suivante:

$$A(n+1) = A(n) + W(n)$$

$$Y(n) = T' A(n) + U(n)$$

avec ,  $Q = E [ W(n) \cdot W'(n) ]$

### 3-2 ESTIMATION MINIMUM DE VARIANCE

Notre but est d'obtenir un estimateur à variance minimale de  $X(k)$  compte tenu des signaux d'observation bruités disponibles à l'instant  $n$ , postérieur, antérieur ou identique à l'instant  $k$ .

Nous avons en principe à considérer les 3 cas possibles :

- $k = n$  filtrage
- $k > n$  prédiction
- $k < n$  lissage

Nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets caractérisés par le vecteur d'état  $y(k)$  lequel est corrompu par un bruit additive  $V(k)$ ; les équations d'état et les observateurs sont :

$$X(k+1) = \phi(k+1,k) X(k) + G(k+1,k) \cdot U(n)$$

└─────────── processus générateur

et

$$y(k) = H(k) \cdot X(k) + V(k)$$

└─────────── bruit de mesure

Dans ce modèle ,  $U(k)$  et  $V(k)$  sont non corrélés et sont des bruit blancs, d'où :

$$E [ U(i) . U'(j) ] = Q(i) \delta ij'$$

$$E [ V(i) . V'(j) ] = R(i) \delta ij'$$

et,  $E [ U(i) . V'(j) ] = 0$

Une telle estimation est aussi définie par la valeur moyenne du vecteur d'état  $X(k)$  [20], connaissant les mesures de notre système :

$$\hat{X}(k/n) = E[ X(k)/y(1), \dots, y(n)]$$

En appliquant cette définition à III-8 on aura

$$\hat{X}(k/k-1) = \phi \hat{X}(k-1/k-1) \tag{III-10}$$

Notre but est d'obtenir l'estimation de  $X(k)$  en utilisant le minimum de variance de l'erreur d'estimation :

$$\tilde{X} = X - \hat{X}$$

L'objectif est de prendre une estimation récursif qui nous permettra d'estimer le vecteur d'état en utilisant le critère :

$$E [(X - \hat{X})(X - \hat{X})']$$

Nous adopterons l'estimateur linéaire suivant :

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k) [y(k) - n(k) . \hat{X}(k/k-1)] \tag{III-11}$$

Cette relation exprime le fait que la nouvelle estimation du vecteur d'état à l'instant  $k$ , est égale à l'estimation à l'instant  $(k-1)$  mise à jour par un certain poids  $K(k)$  accordé à cette mis a jour .

Notre objectif dans ce cas est de trouver  $K(k)$  en minimisant la moyenne de l'erreur au sens des moindres carrés entre l'état et son estimation:

$$\tilde{X}(k) = X(k) - \hat{X}(k/k)$$

### 3-2-1 Estimation du vecteur d'état:

Il s'agit maintenant de chercher l'expression du gain de KALMAN  $K(k)$  qui minimise le critère  $J = \text{trace} ( P(k/k) )$  [10] avec

$$P(k/k) = E [ (X(k) - \hat{X}(k/k)) ( X(k) - \hat{X}(k/k)' ) ] = E [ (\tilde{X}(k)) (\tilde{X}'(k)) ] \tag{III-12}$$

(c.a.d)  $\frac{\partial J(k)}{\partial K(k)} = 0$

$P(k/k)$  est l'expression de la matrice de covariance de l'erreur.

Nous allons à partir des équations d'état et de la relation linéaire de l'estimateur, expliciter la matrice de covariance  $P(k/k)$  en fonction du gain  $K(k/k)$ ; la minimisation du critère aboutit à l'algorithme suivant [21] :

$$\text{Equation du filtre : } \hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k) [ y(k) - H(k) \hat{X}(k/k-1) ] \quad \text{III-13}$$

$$\hat{X}(k/k) = \phi(k/k-1) \hat{X}(k-1/k-1) + K(k)[ y(k) - H(k) \hat{X}(k/k-1)] \quad \text{III-14}$$

$$\text{Expression du gain : } K(k) = P(k/k-1) H'(k) [ H(k)P(k/k-1) H'(k) + R(k) ]^{-1} \quad \text{III-15}$$

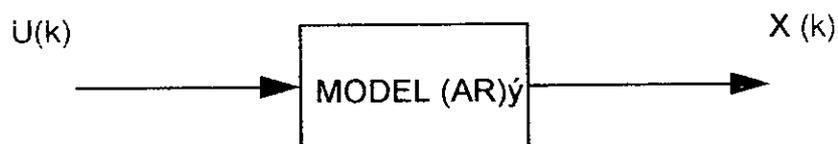
$$K(k) = P(k/k-1) H'(k) R^{-1}(k) \quad \text{III-16}$$

$$\text{Variance à posteriori : } P(k/k) = [ I - K(k) H(k) ] P(k/k-1) \quad \text{III-17}$$

$$\text{Variance à priori : } P(k/k-1) = \phi(k, k-1) P(k-1/k-1) \phi'(k, k-1) + G(k-1) Q(k-1) G'(k-1) \quad \text{III-18}$$

### 3-2-2 Estimation des paramètres du modèle (AR) :

Le modèle est:



$$X(k) + a_1 X(k-1) + a_2 X(k-2) + a_3 X(k-3) + \dots + a_p X(k-p) = U(k) \quad \text{III-19}$$

De l'équation (III-19), on a :

$$X(k) [ 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_p Z^{-p} ] = U(k)$$

$$H(Z) = \frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{1}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_p Z^{-p}}$$

La trace sismique est modélisée par :

$$X(k) = \sum_{i=1}^p a_i X(k-i) + U(k) \quad \text{III-20}$$

où

$$X(k) = X'(k) \cdot A(k) + U(k) \quad \text{III-21}$$

avec  $A(k) = [ a_1, a_2, \dots, a_p ]$ , vecteur d'état,

et  $X'(k) = [ X(k-1); X(k-2); \dots; X(k-p) ]$

Le problème posé est de trouver l'estimation du vecteur d'état  $A(k)$ , en se basant sur les observations  $(X(1), X(2), \dots, X(k))$  en ayant les données des expressions (III-9) et (III-10), tels que la trace de  $E[(A(k) - \hat{A}(k)) \cdot (A(k) - \hat{A}(k))']$  soit minimisée.

- Les équations du modèle sont [21] (toutes les équations qui suivent sont déduites des résultats du paragraphe précédent) :

$$A(k+1) = A(k) + W(k)$$

$$X(k) = X'(k) \cdot A(k) + V(k)$$

$$E[V(k) \cdot V'(k)] = R \cdot \delta(k)$$

- Les équations de l'estimation d'état sont :

$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + K(k+1) \cdot Y(k)$$

$$Y(k) = X(k) - X'(k) \cdot \hat{A}(k)$$

- le gain de KALMAN est donné par la relation :

$$K(k+1) = P(k) \cdot X'(k+1) [ X'(k+1) \cdot P(k) \cdot X'(k+1) + R(k+1) ]^{-1}$$

- la matrice de covariance est :

$$P(k+1) = [I - K(k+1).X'(k+1)].P(k)[I - K(k+1).X'(k+1)]' + K(k+1).R(k+1).K'(k+1)$$

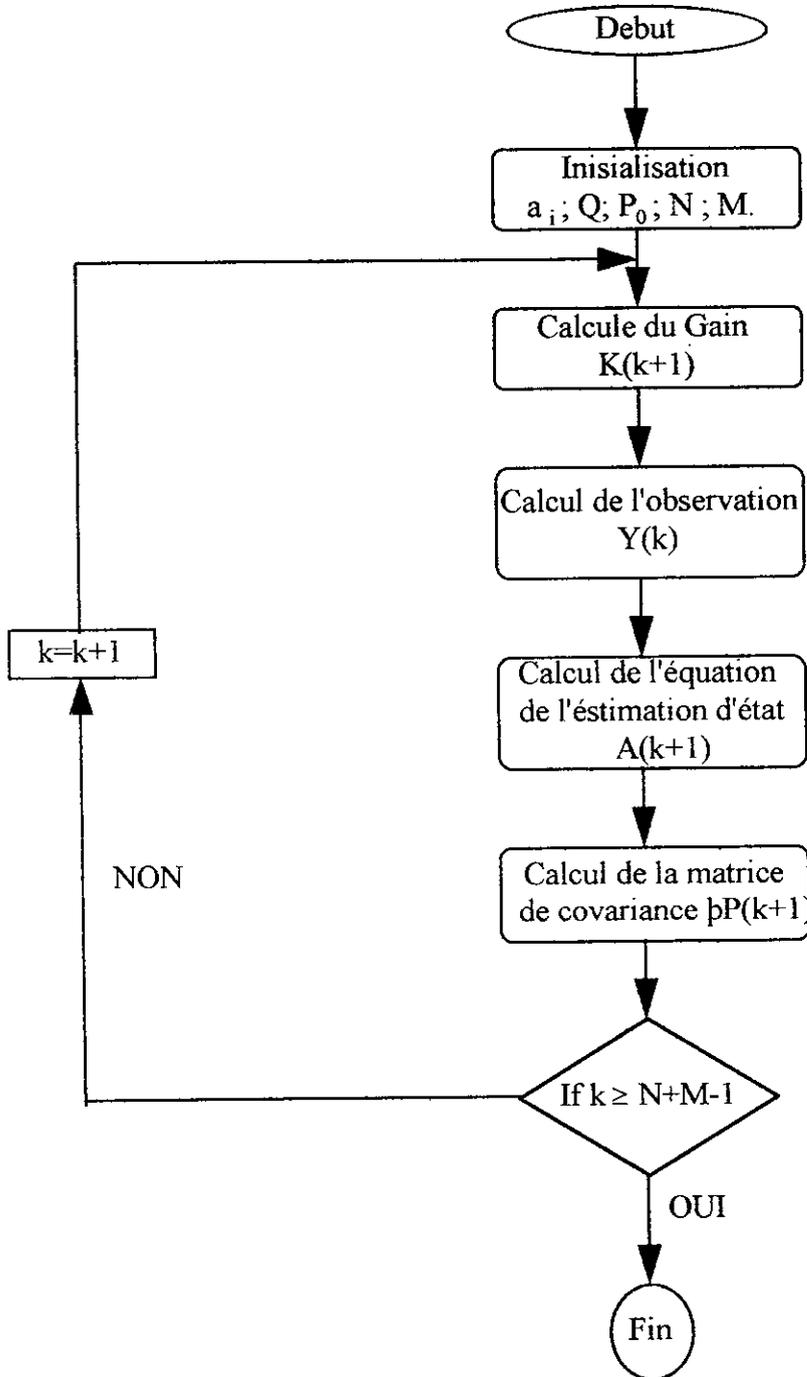


Fig ( III-5 )Logigramme d'estimation des paramètre de l'ondelette

**3-2-3 Estimation optimale des coefficients de réflexion :**

Connaissant les paramètres de l'ondelette du paragraphe précédent diverses méthodes ont été utilisées pour l'estimation des coefficients de réflexion.

**a) Méthode OTT et MEDER**

OTT et MEDER ont défini un estimateur prédictif de  $U(k)$  [?] comme étant la différence des équations suivantes :

$$X(k+1) = \phi X(k) + G.U(k) \quad \text{III-22}$$

$$\hat{X}(k+1/k+1) = \phi \hat{X}(k/k) + K(k+1) \tilde{y}(k+1/k) \quad \text{III-23}$$

En comparant les deux équations (III-22) et (III-23) on remarque que

$$G.U(k) = K(k+1) \tilde{y}(k+1/k)$$

L'expression précédente ne peut pas déterminer les équations du système. Alors ils ont utilisé la pseudo-inverse de  $G$ , notée  $G^+$ , de telle manière que :

$$U(k) = G^{+1} . G . G' . K(k+1) . \tilde{y}(k+1/k)$$

$$U(k) = G^+ . K(k+1) . \tilde{y}(k+1/k) \quad \text{III-24}$$

$$\text{avec } G^+ = (G' . G)^{-1} . G'$$

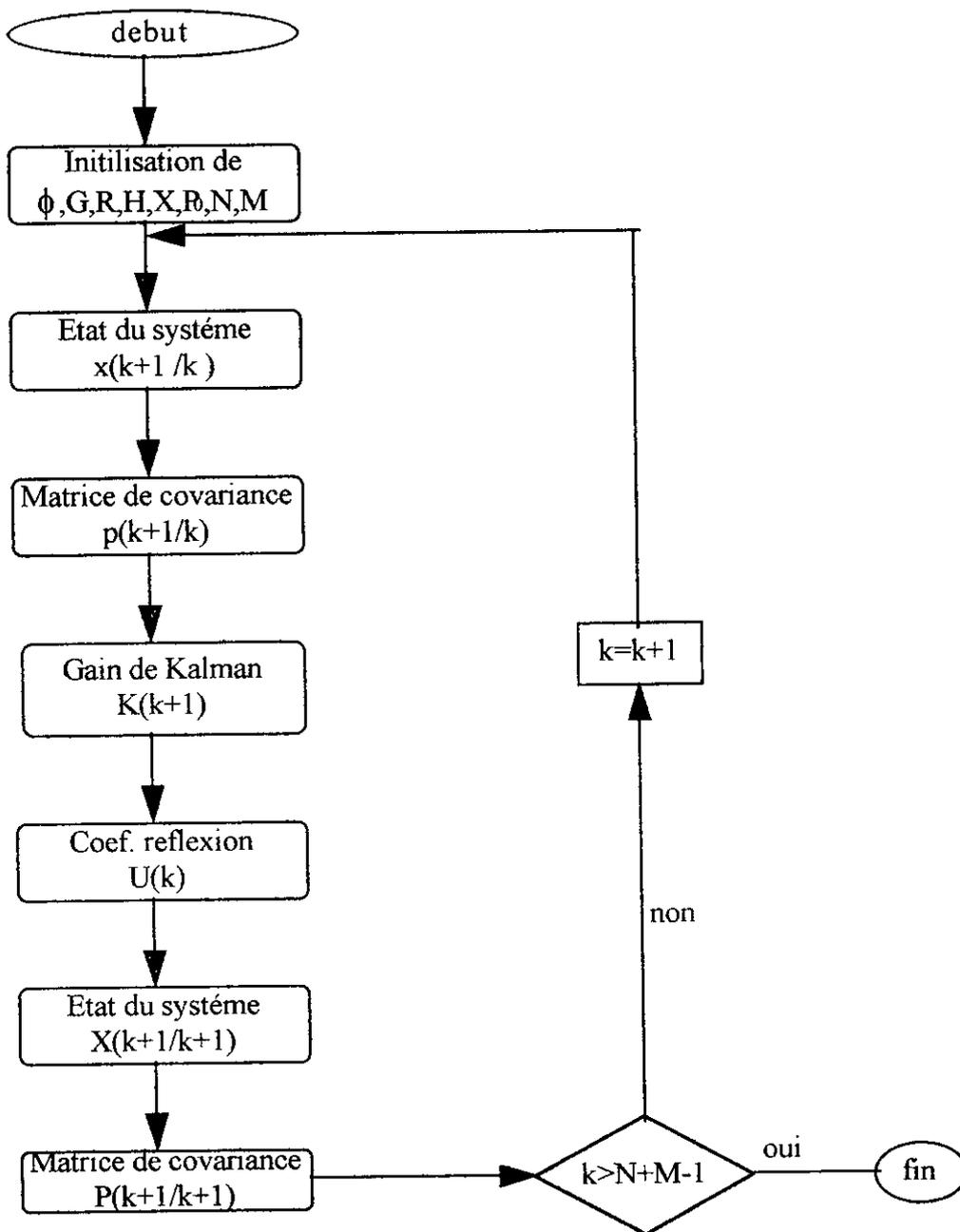


Fig ( III-6 ) Logigramme de l'algorithme D'OTT et MEDER

**b) Estimation des coefficients de réflexion par un lissage à un pas**

Notre but dans ce paragraphe est de déterminer les coefficients de réflexion en ayant une information en plus que pour le cas du filtrage (pour k quelconque) ; pour concrétiser cette démarche on représentera nos équations de notre estimation par  $U(k/k+1)$ . On peut montrer (voir annexe) qu'en démarrant des équations d'états du système et de l'erreur de covariance, que :

$$U(k/k+1) = Q.G'.P^{-1}(k+1/k) . K(k+1). \tilde{y}(k+1/k) \quad \text{III-25}$$

et l'erreur de covariance est :

$$\Psi_w(k/k+1) = Q - Q.G'.H'.[H.P(k+1/k) . H' + R]^{-1} . H.G.Q \quad \text{III-26}$$

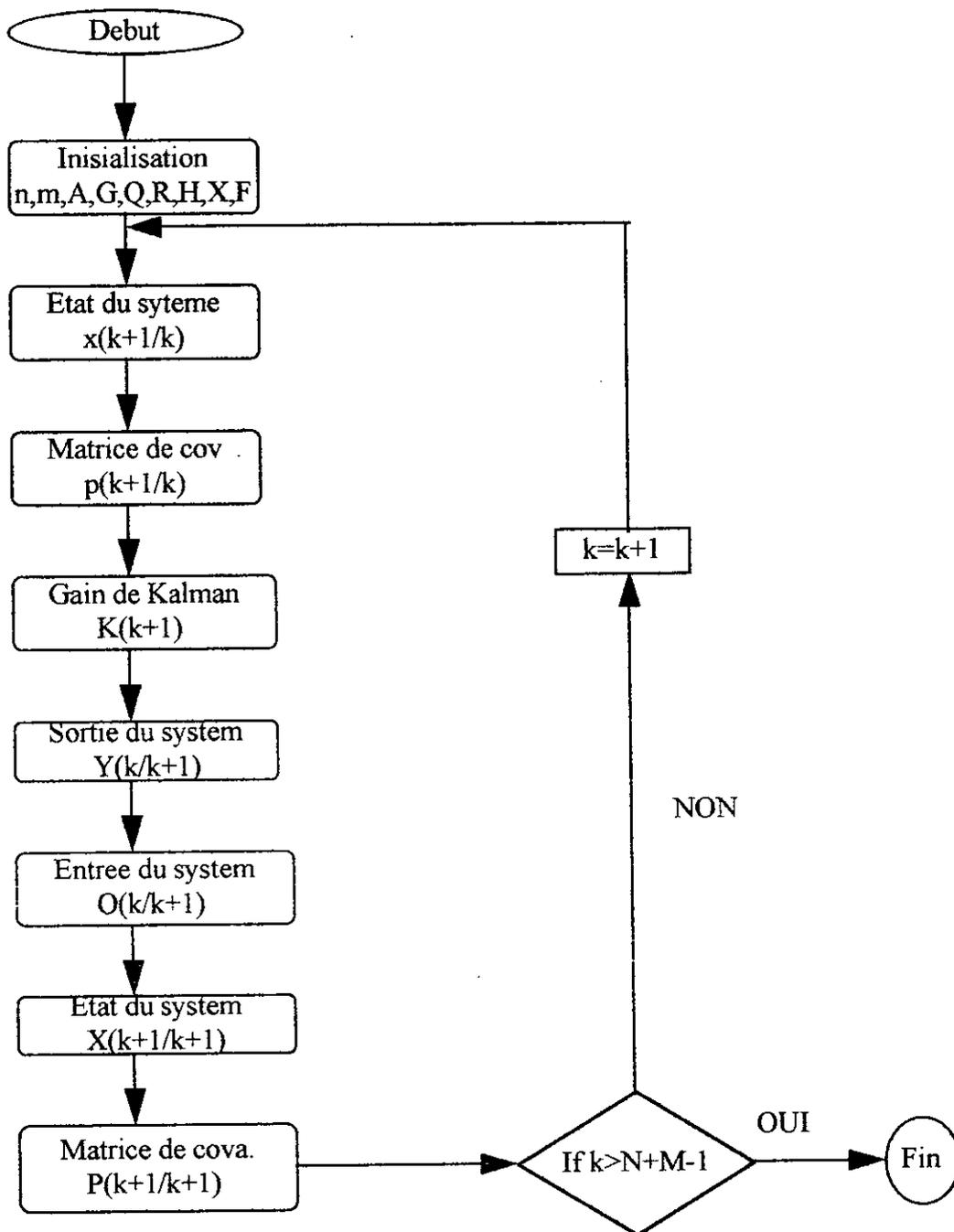


Fig ( III-7 )Logigramme de l’algorithme du lissage a un pas

c) Estimation des coefficients de réflexion pour un lissage à l - pas:

Le principe utilisé dans le cas de l'estimation des coefficients de réflexion avec un lissage a l-pas est le même que celui à un pas, et on peut montrer (voir annexe) que :

$$U(k / k+l) = \hat{U} (k / k + l - 1) + N_U (k / k+l) \tilde{y} (k+l) (k+l-1)$$

avec,

$$N_U (k / k+l) = Q \Gamma^{-1} P^{-1} (k+1 / k) . K (k+1)$$

et,

$$N_U (k / k+l) = Q \Gamma^{-1} P^{-1} (k+1/k) [ \prod_{i=k+1}^{k+l-1} A(i) ] . (k / k+l)$$

$$A(i) = P(i/i) \phi' P^{-1}(i+1/i)$$

et l'erreur de covariance est alors,

$$\Psi_U (k/k+l) = \Psi_U (k/k + l-1) - N_U (k / k+l) [ HP(k+l / k+l-1)H' + R ] N_U' (k/k+l)$$

(Nous verrons les démonstrations de ces estimations en annexe II )

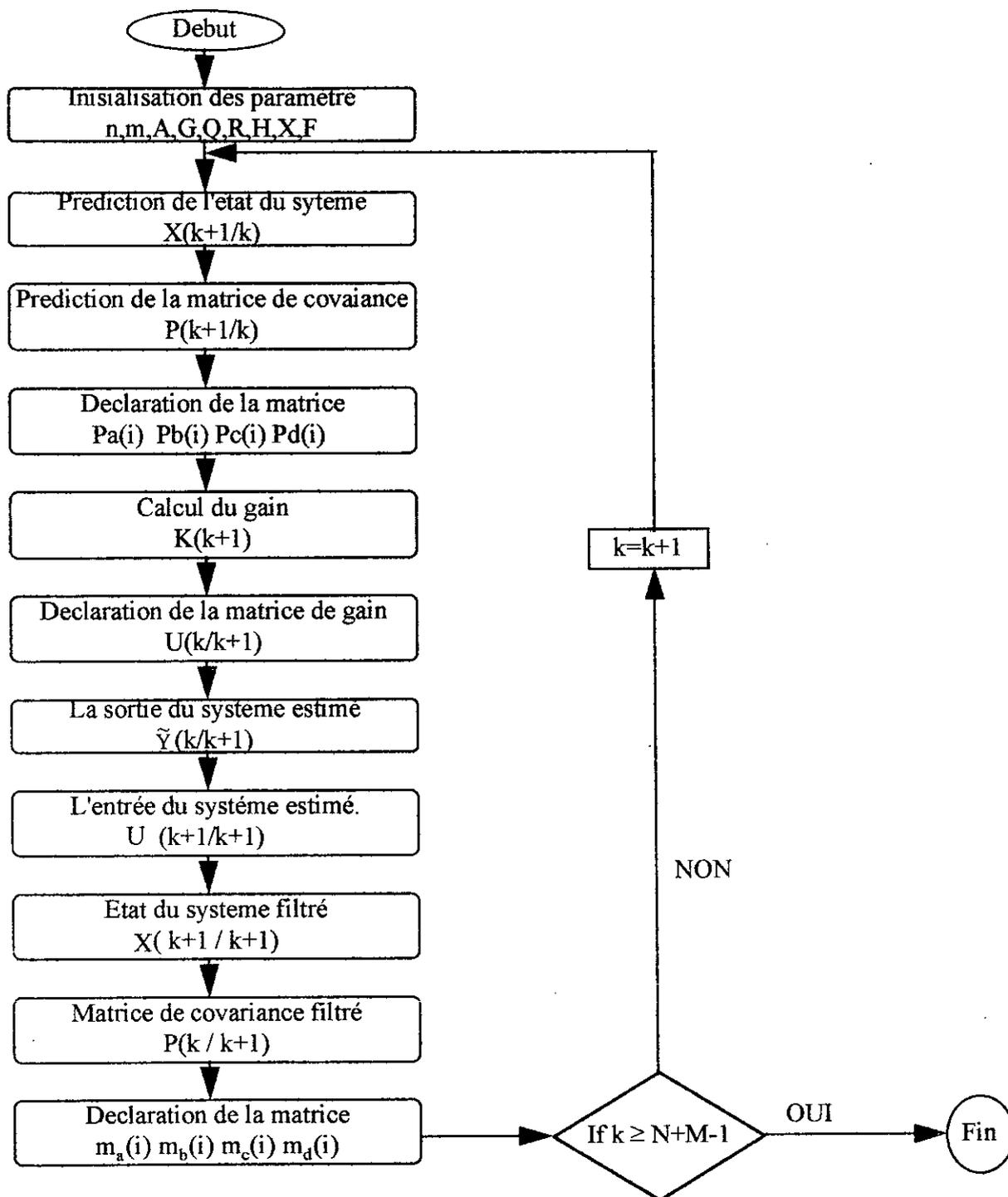


Fig ( III-8 )Logigramme de l’algorithme du lissage a L pas



D'où :

$$\begin{aligned} E(U(k) \tilde{y}(k+1/k)) &= Q.G'.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \\ E(\hat{U}(k/k+1). U(k)') &= Q.G'.H'(H.P.H' + R)^{-1} E(\tilde{y}(k+1/k)).U(k)') \\ &= Q.G'.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \end{aligned}$$

Alors,

$$E(\hat{U}(k/k+1). \hat{U}(k/k+1)') = Q.G'.H'(H.P.H'+R)^{-1} -E((\tilde{y}(k+1/k)) (\tilde{y}(k+1/k))' (H.P.H + R)^{-1} H.G.Q$$

On peut montrer que :

$$E((\tilde{y}(k+1/k)) (\tilde{y}(k+1/k))') = H.P.H' + R$$

D'où :

$$E(\hat{U}(k/k+1). \hat{U}(k/k+1)') = Q.G'.H'.(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q$$

et on aura

$$\Psi_U(k/k+1) = Q - Q.G'.H'.[H.P(k+1/k).H' + R]^{-1}.H.G.Q$$

b)

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation de l'estimateur D'OTT et MEDER est :

$$\begin{aligned} \Psi_{U(k)} &= E \{ \tilde{U}(k). \tilde{U}(k)' \} \\ &= E ( [U(k) - \hat{U}(k)] [U(k) - \hat{U}(k)]' ) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{U}(k) = G^+ .K(k+1). (\tilde{y}(k+1/k))$$

Alors :

$$\Psi_{U(k)} = E ( U(k).U(k)' ) - E ( U(k). \hat{U}(k) ) - E(\hat{U}(k).U(k)') + E(\hat{U}(k). \hat{U}(k)')$$

$$E ( U(k).U(k)' ) = Q$$

$$\begin{aligned} E(U(k). \hat{U}(k)) &= E \{ U(k). (\tilde{y}(k+1/k))' \} K(k+1)' G^{+*} \\ &= Q.G'.H'.K(k+1)'.G^{+*} \\ &= Q.G'.H' [H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{U}(k).U(k)') &= G^+ K(k+1) E(\tilde{y}(k+1/k).U(k)') \\ &= G^+ K(k+1).H.G.Q = G^+ .P.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \\ E(\hat{U}(k). \hat{U}(k)') &= G^+ .K(k+1). E [\tilde{y}(k+1/k). \tilde{y}(k+1/k)'] .K(k+1)'.G^{+*} \\ &= G^+ .K(k+1).[H.P.H' + R] K(k+1) G^{+*} \\ &= G^+ .P.H' .[H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_U(k) &= Q - Q.G'.H' [H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} - G^+ .P.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \\ &\quad + G^+ .P.H' .[H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} \end{aligned}$$

### COMPARAISON DES DEUX ESTIMATEURS:

Pour comparer les deux estimateurs et voir lequel est le meilleur nous comparerons leur matrice de covariance de l'erreur et on dira que le meilleur estimateur est celui qui a la matrice de covariance la plus petite (minimale).

on a

$$\begin{aligned} \Psi_U(k) &= Q - Q.G'.H' [H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} - G^+ .P.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \\ &\quad + G^+ .P.H' .[H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} \end{aligned}$$

et,

$$\Psi_U(k/k+1) = Q - Q.G' . H' . [ H.P(k+1/k) . H' + R ]^{-1} . H.G.Q$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi_U(k) - \Psi_U(k/k+1) &= Q - Q.G'.H' [H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} - G^+ .P.H'(H.P.H' + R)^{-1} H.G.Q \\ &\quad + G^+ .P.H' .[H.P.H' + R]^{-1} H.P.G^{+*} - Q + Q.G' . H' . [ H.P(k+1/k) \\ &\quad . H' + R ]^{-1} . H.G.Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_U(k) - \Psi_U(k/k+1) &= (G^+ .P - Q.G') . H' . (H.P.H' + R)^{-1} . H . (G^{+*} . P - QG^{+*}) \\ &= \quad X \quad \quad \quad Y \quad \quad \quad X' \end{aligned}$$

Par définition, la matrice de covariance est définie et positive si Y est positive-définie, alors  $X.Y.X' > 0$ . C'est bien le cas ici puisque  $Y = (H.P.H' + R)^{-1}$  est positive-définie ( $P > 0$ ,  $R > 0$ ).

Alors,

$$\Psi_U(k) - \Psi_U(k/k+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_U(k) > \Psi_U(k/k+1)$$

D'où on pourra conclure que le lissage donne une meilleur solution que le filtrage.

#### **4 DECONVOLUTION DES SIGNAUX SISMIQUES PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE**

Dans ce paragraphe nous allons proposer une approche qui nous permettra d'estimer les coefficients de réflexions ( l'information désirée) en n'utilisant aucune information autres que celles de la trace sismique et les données statistiques supposées. Pour arriver à ce résultat nous allons estimer chaque paramètre en utilisant des hypothèses, et à la fin nous proposerons un bloc complet qui permettra de nous faire toutes les estimations sans hypothèses.

##### **4-1 MODELES DE DESCRIPTION:**

Le sismogramme mesuré s'exprime par :

$$y(k) = y_0(k) + n(k) \quad \text{III-27}$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^N U(k) O(k-1) + n(k) \quad \text{III-28}$$

Dans ce modèle  $y_0(k)$  est un signal mesuré non bruité,  $n(k)$  est un bruit de mesure qui englobe tous les effets physiques non exprimés par  $y_0(k)$ ,  $O(k)$  est la séquence associée à l'ondelette source et  $U(k)$  est la séquence de réflectivité qui contient des informations importantes à propos de couches de l'écorce terrestre.

L'approche adoptée considère un modèle ARMA pour l'ondelette représentée dans l'espace d'état par :

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k)$$

$$y(k) = h' X(k) + n(k)$$

Avec la forme canonique du système où :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1)^T \quad \text{et} \quad h = (b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1)$$

Le bruit de mesure  $n(k)$  est un bruit blanc gaussien avec une variance

$$E \{n^2(k)\} = \rho$$

L'unique information sur la séquence de réflectivité, est une relation Bernoulli-Gaussienne exprimée sous la forme :

$$U(k) = r(k) \cdot q(k) \quad \text{III-29}$$

$q(k)$  est une séquence de Bernoulli

Le modèle convolutionnel (III-28) s'écrit sous forme matricielle:

$$y = O \cdot U + n \quad \text{III-30}$$

avec

$$y = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(N)]'$$

$$U = [u(1) \quad u(2) \quad \dots \quad u(N)]'$$

$$\mathbf{n} = [n(1) \ n(2) \ \dots \ n(N)]'$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} O(0) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ O(1) & O(0) & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O(N-1) & O(N-2) & \cdot & \cdot & O(0) \end{bmatrix}$$

Une autre modélisation qui permettra de faciliter certaines opérations est :

$$\mathbf{R} = [r(1), r(2), r(3), \dots, r(n)]'$$

$$\mathbf{Q}_q = \text{diag} [ q(1), q(2), \dots, q(n) ]$$

$$\mathbf{S} = [ q(1), q(2), \dots, q(n) ]'$$

l'équation (III-30) pourra s'écrire dans ce cas

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{n}$$

A partir du modèle produit (III-29):

$$E = \{ U^2(k) / q(k) \} = \sigma_r^2 q(k)$$

On remarquera en connaissant  $\mathbf{Q}$  la trace sismique suit une densité gaussienne puisque  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}$  sont indépendants et gaussiens, alors la fonction de densité  $p(\mathbf{y} / \mathbf{q}, \mathbf{O})$  s'écrira

$$p(\mathbf{y} / \mathbf{q}, \mathbf{O}) = (2 \cdot \Pi)^{-N/2} |\Omega_q|^{1/2} \exp(-\mathbf{Y}' \Omega_q^{-1} \mathbf{Y} / 2) \quad \text{III-31}$$

avec

$$\Omega_q = E[ Y.Y' / q, O ] = \sigma_r^2 . O . Q . O' + \rho I \quad \text{III-32}$$

De même pour les éléments  $q(k)$  indépendamment distribués on aura alors :

$$\Pr (q) = \prod_{k=1}^N \Pr (q (k)) = \lambda^{m_s} (1 - \lambda)^{N - m_s} \quad \text{III-33}$$

$m_s$  est le nombre d'événements de S .

$q$  étant une séquence binaire alors ,

$$m_s = \sum_{k=1}^N q (k) \quad \text{III-34}$$

#### **4-2 ESTIMATION DE Q PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE**

L'estimation de  $q$  par la méthode du maximum de vraisemblance  $q = q_{MV}$  est obtenue en optimisant la fonction de vraisemblance  $l (q / y, O)$ , et par définition  $l (q / y, O)$

est proportionnel à  $p(y, O / q)$  et de la probabilité conjointe, ce qui nous donne

$$l (q / y, O) \propto p(y, O / q) = p (y / q, O) . P (q / O) \quad \text{III-35}$$

l'objectif est de maximiser la fonction de vraisemblance  $l (q / y, O)$  par rapport au vecteur  $q$ ,

pour cela on va expliciter tous les éléments de la relation (III-31).

Nous définissons notre fonction de vraisemblance comme étant

$$l (q / y, O) \propto p(y, O / q) = p (y / q, O) . P (q / O) = (2 . \Pi)^{-N/2} \exp ( -J(q)/2) \quad \text{III-36}$$

ainsi trouver  $q_{MV}$  tel que  $l (q / y, O)$  soit maximum revient à trouver  $q_{MV}$  qui minimise  $J(q)$  ( ce qui revient à minimiser  $J(q)$  ). En utilisant les équations précédentes (III-31; III-33) on obtient

$$J(q) = Y' \Omega_q^{-1} Y + \ln |\Omega_q| - 2 m_q \ln(\lambda) - 2 (N - m_q) \ln(1 - \lambda) \quad \text{III-37}$$

L'estimation de q par la méthode de maximum de vraisemblance ( $q = q_{MV}$ ) est la valeur pour laquelle  $J(q_{MV})$  est minimale.

Pour une ondelette A. R. M. A il n'y a pas une solution simple pour déterminer  $q_{MV}$ , et cela est dû à une interaction non linéaire des différents paramètres dans  $J(q)$ , en plus q représente des valeurs binaires (0, 1). Il est nécessaire pour évaluer  $J(q)$  pour n'importe quelle séquence possible de q, de trouver q pour lequel  $J(q)$  soit un minimum global, et cela est dû à ce que  $Q(k)$  ne peut avoir que deux valeurs possibles, c.a.d  $2^N$  possibles séquences de q où N est le nombre d'éléments de q.

Pour évaluer  $J(q)$  nous sommes appelés à utiliser l'équation (III-37)

Mais nous remarquons que le calcul  $\Omega_q^{-1}$  est très encombrant puisque  $\Omega_q$  est une matrice  $N \times N$ , ce qui demande un temps excessif pour le calcul du minimum de  $J(q)$ . Ceci nous amène à utiliser le théorème de J.MENDEL[21] qui nous conduit à la relation

$$J(q) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{Y_q^2(k/k-1)}{\eta_q(k)} + \ln \eta_q(k) \right] - 2m_q \ln(\lambda) - 2(N-m_q) \ln(1-\lambda) \quad \text{III-38}$$

Nous remarquons que le calcul de la relation (III-38) est très délicate. J.MENDEL a utilisé  $2^N$  filtres de kalman pour trouver le minimum de  $J(q)$  ce qui augmente considérablement le temps de calcul. Ceci nous amène à utiliser une autre approche de détection (S.M.L.R) [23] qui ne demande pas trop de calculs mais qui risque de converger vers un minimum local

### 4-3 DETECTION S.M.L.R

Le détecteur S.M.L.R (single most likely replacement) est un algorithme itératif qui compare la vraisemblance d'une séquence  $S_r$  à un nombre limité de différentes séquences de tests  $S_t$ [24]. A chaque itération, il doit converger vers une série d'estimateurs de la séquence inconnue S qui réduit la valeur du critère  $J(S)$ :

$$J(\hat{S}_{i+1}) \leq J(\hat{S}_i)$$

L'objectif est de maximiser la fonction de vraisemblance  $l(S/Y)$  par rapport au vecteur S :

$$l(S/y) \propto P(Y/S) Pr(S) \quad \text{III-39}$$

Une fois S connu, Y est Gaussien, par conséquent:

$$P(Y/S) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Omega_S|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Y' \Omega_S^{-1} Y\right) \quad \text{III-40}$$

Les éléments  $S(k)$  sont indépendamment distribués, d'où on a :

$$\Pr(S) = \prod_{k=1}^N \Pr(S(k)) = \lambda^{m_s} (1-\lambda)^{N-m_s}$$

$m_s$  est le nombre d'événements de  $S$ .  $S$  étant une séquence binaire alors :

$$m_s = \sum_{k=1}^N S(k)$$

Chaque séquence de test diffère de la séquence de référence en une seule location :

$$S_i(i) = \begin{cases} S_r(i) & i \neq k \\ 1 - S_r(i) & i = k \end{cases} \quad \text{III-41}$$

Le critère de décision qui joue un rôle important dans la règle de choix entre deux séquences, dit rapport de vraisemblance, est obtenu par :

$$A_{tr} = \frac{l(S_t/Y)}{l(S_r/Y)} \geq 1 \quad \text{III-42}$$

La fonction de vraisemblance s'exprime ainsi :

$$l(S/y, \theta) \propto P(Y/S, \theta) \Pr(S, \theta)$$

Avec :

$$J(S) = Y' \Omega_S^{-1} Y + \log |\Omega_S| - 2m_s \log(\lambda) - 2(N - m_s) \log(1 - \lambda)$$

Adoptons les notations suivantes :

$$\Omega_t = \Omega_S / S = S_t$$

$$\Omega_r = \Omega_S / S = S_r$$

Le logarithme népérien est utilisé par simplicité, l'équation (III-42) devient :

$$2 \log A_{tr} = Y' (\Omega_r^{-1} - \Omega_t^{-1}) Y - \log |\Omega_r^{-1} \Omega_t^{-1}| + 2 (m_t - m_r) \log \frac{\lambda}{1-\lambda} \begin{matrix} S_r \\ < \\ > \\ S_r \end{matrix} 0$$

En utilisant l'équation (III-32), on obtient :

$$\Omega_t = \Omega_r + \sigma_r^2 O (Q_t - Q_r) O' \tag{III-43}$$

C'est à dire :

$$\Omega_t^{-1} = \Omega_r^{-1} - \Omega_r^{-1} O [(S_t - S_r)^{-1} + O' \Omega_r^{-1} O]^{-1} O' \Omega_r^{-1}$$

Pour que cette équation soit valide, il faut que la matrice (S<sub>t</sub> - S<sub>r</sub>) soit toujours inversible: S<sub>t</sub>(k) ≠ S<sub>r</sub>(k), ce qui est rarement vrai en pratique.

Donc pour contourner ce problème, on procède de la façon suivante :

soit M une matrice satisfaisant:

$$MM' = 1 \tag{III-44}$$

Cette Matrice est telle que :

$$M' (S_t - S_r) M = \begin{bmatrix} S_{t1} - S_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où:

(S<sub>t1</sub> - S<sub>r1</sub>) est une matrice inversible.

$$WM = [ W1 \ W2 ]$$

En insérant l'équation (III-44) dans l'équation (III-43), cette dernière devient :

$$\Omega_t = \Omega_r + w MM' (S_t - S_r) MM' w'$$

$$\Omega_t = \Omega_r + [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} S_{t1} - S_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_t = \Omega_r + w_1 (S_{t1} - S_{r1}) w'$$

D'où :

$$\Omega^{-1}_t = \Omega^{-1}_r - \Omega^{-1}_r w_1 [(S_t - S_r)^{-1} + w'_1 \Omega^{-1}_r w_1]^{-1} w'_1 \Omega^{-1}_r \quad \text{III-45}$$

Utilisant l'équation (III-43) :

$$\begin{aligned} |\Omega^{-1}_r \Omega_t| &= |I + \Omega^{-1}_r w (S_t - S_r) w'| \\ |\Omega^{-1}_t \Omega_t| &= |I + w' \Omega^{-1}_r w (S_t - S_r)| \end{aligned} \quad \text{III-46}$$

L'équation (III-44) insérée dans l'équation (III-46) donne :

$$|\Omega^{-1}_r \Omega_t| = |MM' + MM' w' \Omega^{-1}_r MM' (S_t - S_r) MM'|$$

$$|\Omega^{-1}_t \Omega_t| = \det \begin{bmatrix} I + w' \Omega^{-1}_r w_1 (S_{t1} - S_{r1}) & 0 \\ w'_2 \Omega^{-1}_r w_1 (S_{t1} - S_{r1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\Omega^{-1}_t \Omega_t| = |I + w' \Omega^{-1}_r w_1 (S_{t1} - S_{r1}) w'| \quad \text{III-47}$$

Finalement , utilisant les équation (III-45) et (III-46) et tenant compte de l'équation (III-41) , la matrice  $w_1$  se simplifie à la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $w$  ; notre règle de détection se réduit à :

$$\begin{aligned} 2 \log A_{tr} (k) &= \frac{(w'_k \Omega^{-1}_r Y)' (w'_k \Omega^{-1}_r Y)}{C^{-1} (S_t(k) - S_r(k))^{-1} + w'_k \Omega^{-1}_r w_k} - \log (1 + w'_k \Omega^{-1}_r w_k \sigma_r^2 (S_t(k) - S_r(k))) \\ &+ 2(m_k - m_r) \log \frac{\lambda}{1 - \lambda} \end{aligned} \quad \text{III-48}$$

Les quantités  $(w'_k \Omega^{-1}_r w_k)$  et  $(w'_k \Omega^{-1}_r Y)$  peuvent être calculées simultanément en utilisant un lissage optimal à intervalle fixe .

Pour une séquence de référence  $S_r (\hat{S}(0))$  l'algorithme de détection S.M.L.R utilise l'équation (III-48) pour calculer N rapports de vraisemblance correspondants aux N différentes séquences de test données par l'équation (III-41), la séquence de référence pour la prochaine itération.

Si après un certain nombre d'itérations la séquence la plus vraisemblable est obtenue, alors la recherche s'arrête et ainsi, la séquence de Bernoulli est détectée (estimée)

Jusqu'à présent nous n'avons pas parlé du choix de  $q_t$  par rapport à  $q_r$ . Nous remarquerons que l'équation de (III-48) peut être appliquée pour n'importe quel vecteur  $q_t$ .

Le but du détecteur S.M.L.R est de choisir  $q_t$  qui diffère de  $q_r$  d'un élément de  $Q_r$ . Le problème qui se pose est de trouver la position (k) de cette élément. La règle de détection S.M.L.R est de créer N tests de séquence en changeant du premier au N<sup>ème</sup> élément de  $q_r$ , chacun à la fois, (de 0 à 1 ou de 1 à 0) et après on calcule  $\log(\text{atr}(1))$ ,  $\log(\text{atr}(2))$ , jusqu'à  $\log(\text{atr}(n))$ , et ensuite on compare les N rapports et on choisit le maximum de ces rapports.

Soit  $\log(\text{atr}(k'))$ , représentant le maximum de ces rapports, par conséquent la séquence test ressemblera à la séquence de référence sauf à la position  $k'$  où  $q(t)$  diffère de  $q_r$ . Cette séquence de test remplacera la séquence de référence et la procédure S.M.L.R. sera répétée.

La méthode décrite précédemment peut aboutir à un minimum local; pour cela le choix de  $q_r$  (référence) doit être un choix judicieux, d'où l'idée de prendre  $q_r$  comme étant la solution d'un autre algorithme de détection. J.MENDEL a évoqué la détection de THRESHOLD proposée par [ 24 ] ( voir annexe III )

#### 4-4 ESTIMATION DE L'ONDELETTE ET DES VARIANCES $\rho$ ET $\sigma^2$

On se propose d'étudier le problème de l'estimation de l'ondelette source  $O(k)$  et des variances  $\rho$  et  $\sigma^2$ , les locations des coefficients de réflexions étant connus au préalable[25], en utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance, ce qui nous permettra de déterminer l'ondelette source à un facteur près.

Puisque l'ondelette s'exprime comme fonction des paramètres d'un modèle ARMA d'ordre fini et connu alors estimer l'ondelette revient à trouver l'estimateur de ces paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance de ces paramètres.

En plus des paramètres de l'ondelette ( $a_i, b_i$ ), les variances  $\rho$  et  $\sigma$  sont inclus dans le vecteur  $\theta$  à estimer.

La fonction de vraisemblance conditionnelle étant :

$$l(\theta / Y \hat{S}) \propto P(\theta / Y \hat{S})$$

$$P(\theta / Y \hat{S}) = (2\pi)^{-N/2} |\Omega_0|^{-\frac{1}{2}} \exp(-Y \Omega_0^{-1} Y / 2)$$

où :

$$\Omega_0 = E ( Y Y' / \theta , \hat{S} )$$

Le vecteur  $\theta$  estimé est celui qui maximise la fonction :

$$L ( \theta / Y \hat{S} ) = -\frac{1}{2} \log | \Omega_0 | - \frac{1}{2} Y' \Omega_0^{-1} Y$$

En pratique deux problèmes majeurs s'imposent : l'obtention d'une expression de la fonction de vraisemblance, et son optimisation avec estimation du vecteur inconnu  $\theta$ .

En se référant au théorème 1 ( voir annexe IV ) le logarithme de la fonction de vraisemblance d'un système dynamique s'exprime par :

$$L ( \theta / Y \hat{S} ) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\tilde{Y}_0^2 (J/J-1)}{\eta_\theta (J)} \right) + \log \eta_\theta (J)$$

On doit itérativement changer  $\hat{\theta}$  de façon qu'il maximise cette fonction; c'est un problème d'optimisation non linéaire.

On notera que l'estimation du vecteur  $\theta$  est un problème d'optimisation non linéaire, alors au lieu d'optimiser la fonction  $L ( \theta / Y \hat{S} )$  on peut minimiser la fonction  $J ( \theta )$  définie par

$$J ( \theta ) = -2 L ( \theta / Y \hat{S} ) \quad \text{III-49}$$

#### 4-4-1 METHODE D'OPTIMISATION

La méthode de Levenburg - Marquardt [26] est l'une des méthodes les plus employées et remarquablement adaptée à ce problème; l'algorithme est :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - (H_i + D_i)^{-1} g_i$$

où :

$$g_i = \left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_i} ; \quad H_i = \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \right|_{\hat{\theta}_i}$$

Dont :  $g_i$  est le vecteur des gradients et  $H_i$  la matrice pseudo-hessienne.

$D_i$  est une matrice diagonale qui sert à rendre la matrice  $(H_i + D_i)$  positive définie ( $(H_i + D_i)$  inversible). Les éléments de la matrice  $D_i$  sont calculés en utilisant l'algorithme itérative suivant :

$$[ D_{i+1} ]_{jj} = [ D_i ]_{jj} / a_j$$

avec :

$$a_j = 1 - \frac{[g_i]_j}{[g_{i+1} - g_i]_j}$$

Le déroulement de l'algorithme est illustré par l'organigramme de la page 82

#### 4-4-2 CALCUL DU GRADIENT:

D'après l'algorithme précédent, il y a nécessité de calculer les gradients. Pour ce faire la méthode du gradient récursif est utilisée; c'est une méthode qui requiert beaucoup de calculs mais qui possède l'avantage de générer aussi le pseudo - hessien.

A partir de l'équation (III-49):

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\tilde{Y}_\theta^2(k/k-N)}{\eta_\theta(k)} + \log \eta_\theta(k) \right) \quad \text{III-50}$$

$\tilde{Y}_\theta(k/k-1)$  et  $\eta_\theta(k)$  sont calculés à partir des équations du filtre de KALMAN suivantes:

$$\begin{aligned} \hat{X}_\theta(k/k-1) &= \Phi_\theta \hat{X}_\theta(k-1/k-1) \\ P_\theta(k/k-1) &= \Phi_\theta P_\theta(k-1/k-1) \Phi_\theta' + \Gamma_c S(k-1) \Gamma_c' \\ \hat{X}_\theta(k/k) &= \hat{X}_\theta(k/k-1) + K_\theta(k) \tilde{Y}_\theta(k/k-1) \\ \tilde{Y}_\theta(k/k-1) &= Y(k) - h_\theta' \hat{X}_\theta(k/k-1) \end{aligned} \quad \text{III-51}$$

$$\eta_\theta(k) = h_\theta' P_\theta(k/k-1) h_\theta + \rho_\theta \quad \text{III-52}$$

$$K_\theta(k) = P_\theta(k/k-1) h_\theta \eta_\theta^{-1}(k)$$

et

$$P_\theta(k/k) = (I - K_\theta(k) h_\theta') h_\theta P_\theta(k/k-1)$$

Soit  $\theta_j$  le  $j^{\text{ieme}}$  élément du vecteur  $\theta$  et soit à différentier l'équation (III-50) par rapport à  $\theta_j$ , l'expression suivante est obtenue pour la  $j^{\text{ieme}}$  composante de  $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ .

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_J} = \sum_{k=1}^N \left[ 2 \frac{\tilde{Y}_\theta(k/k-1)}{\eta_\theta(k)} \frac{\partial \tilde{Y}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} + \left( \frac{1}{\eta_\theta(k)} - \frac{\tilde{Y}_\theta^2(k/k-1)}{\eta_\theta^2(k)} \right) \frac{\partial \eta_\theta(k)}{\partial \theta_J} \right] \quad \text{III-53}$$

Pour évaluer  $\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_J}$  il faut calculer  $\partial \tilde{Y}_\theta(k/k-1)$  et  $\partial \eta_\theta(k) / \partial \theta_J$  pour toutes les valeurs de  $k$ .

Différentions les équation (III-51) et (III-52) par rapport à  $\theta_J$ .

$$\frac{\partial \tilde{Y}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} = -h'_\theta \frac{\partial \hat{X}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} - \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta_J} \hat{X}_\theta(k/k-1) \quad \text{III-54}$$

$$\frac{\partial \eta_\theta(k)}{\partial \theta_J} = h'_\theta \frac{\partial P_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} h_\theta + 2h'_\theta P_\theta(k/k-1) \frac{\partial h_\theta}{\partial \theta_J} + \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta_J}$$

A ce stade là, il est clair qu'il faut différentier l'ensemble des équations du filtre de Kalman par rapport à  $\theta_J$ .

$$\frac{\partial \hat{X}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} = \phi_\theta \frac{\partial \hat{X}_\theta(k-1/k-1)}{\partial \theta_J} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta_J} \hat{X}_\theta(k-1/k-1)$$

$$\frac{\partial P_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} = \phi_\theta \frac{\partial \hat{X}_\theta(k-1/k-1)}{\partial \theta_J} \phi'_\theta + \phi_\theta \frac{\partial \phi'_\theta}{\partial \theta_J} P_\theta(k-1/k-1) +$$

$$\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta_J} P_\theta(k-1/k-1) \phi'_\theta + \Gamma \frac{\partial c}{\partial \theta_J} \hat{S}(k-1) \Gamma'$$

$$\frac{\partial \hat{X}_\theta(k/k)}{\partial \theta_J} = \frac{\partial \hat{X}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} + K_\theta(k) \frac{\partial \tilde{Y}_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} + \frac{\partial K_\theta(k)}{\partial \theta_J} \tilde{Y}_\theta(k/k-1)$$

$$\frac{\partial K_\theta(k)}{\partial \theta_J} = \frac{\partial P_\theta(k/k-1)}{\partial \theta_J} h_\theta \eta^{-1}_\theta(k) + P_\theta(k/k-1) \frac{\partial h_\theta}{\partial \theta_J} \eta^{-1}_\theta(k) -$$

$$\frac{\partial P_{\theta}(k/k)}{\partial \theta_j} = (1 - K_{\theta}(k) h'_{\theta}) \frac{\partial P_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial K_{\theta}(k)}{\partial \theta_j} h'_{\theta} P_{\theta}(k/k-1) - K_{\theta}(k) \frac{\partial h'_{\theta}(k)}{\partial \theta_j} P_{\theta}(k/k-1)$$

III-55

Un nombre de simplifications des équations (III-54) à (III-55) est possible :

$$\theta_j = a_i : \frac{\partial h_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial c}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} = 0$$

$$\theta_j = b_i : \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial c}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} = 0$$

$$\theta_j = \sqrt{\rho} : \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial h_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial c}{\partial \theta_j} = 0 \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} = 2 \theta_j$$

$$\theta_j = \sqrt{c} : \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial h_{\theta}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} = 0 \text{ et } \frac{\partial c}{\partial \theta_j} = 2 \theta_j$$

#### 4-4-3 CALCUL DE LA MATRICE HESSIENNE :

En différentiant l'équation (III-53) par rapport à  $\theta_i$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = & \sum_{k=1}^N \left( \frac{2}{\eta_{\theta}(k)} \frac{\partial \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_j} + \frac{2 \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\eta_{\theta}(k)} \frac{\partial \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_j} \right. \\ & - \frac{2 \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\eta_{\theta}^2(k)} \frac{\partial \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \eta_{\theta}(k)}{\partial \theta_i} + \frac{2 \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\eta_{\theta}^2(k)} \frac{\partial \tilde{Y}_{\theta}(k/k-1)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \eta_{\theta}(k)}{\partial \theta_i} \Big) + \\ & (\eta^{-2} \theta(k) - 2 \frac{\tilde{Y}_{\theta}^2(k/k-1)}{\eta_{\theta}(k)}) \frac{\partial \eta_{\theta}(k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \eta_{\theta}(k)}{\partial \theta_j} + (\eta^{-1} \theta(k) - \frac{\tilde{Y}_{\theta}^2(k/k-1)}{\eta_{\theta}^2(k)}) \frac{\partial^2 \eta_{\theta}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \end{aligned}$$

On note que le calcul des éléments du Hessien est compliqué ; d'où une approximation de ce dernier (pseudo-hessien) est utilisée en négligeant les termes  $\partial^2 \tilde{Y}_\theta (k/k-1) / \partial\theta_i \partial\theta_j$  et  $\partial^2 \eta_\theta(k) / \partial\theta_i \partial\theta_j$  puisqu'ils tendent vers zéro.

**4-5 ESTIMATION DU PARAMETRE  $\lambda$  :**

Ce paragraphe considère le problème d'estimation du paramètre statistique du signal d'entrée (séquence de Bernoulli) pour le cas où cette dernière doit être estimée.

Quand les locations d'événements sont inconnus, l'expression de vraisemblance pour l'estimation simultanée du paramètre et la séquence de Bernoulli est :

$$L(\theta / Y \hat{S}) | \Omega_\theta | \hat{\theta} \lambda \alpha$$

$$l(\lambda, S / Y, \hat{\theta}) \propto P(Y / S, \hat{\theta}) Pr(S / \lambda) \tag{III-56}$$

$P(Y / S, \hat{\theta})$  est une fonction de densité Gaussienne :

$$P(Y / S, \hat{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Omega_{\theta S}|^{-\frac{1}{2}} \exp(-Y' \Omega^{-1}_{\theta S} Y / 2)$$

où

$$\Omega_{\theta S} = E(Y Y' / S, \hat{\theta})$$

$P(S / \lambda)$  s'exprime par l'équation (11),  $m$  étant le nombre d'événements de la séquence  $S$ .

En dérivant l'équation (III-56) par rapport à  $\lambda$  on obtient :

$$\hat{\lambda} = m / n \tag{III-57}$$

Dans ce cas l'équation (III-57) ne donne pas une valeur proche de  $\lambda$ , car  $m$  est une fonction de  $\hat{S}$ .

Ainsi en se référant au théorème de J. M. Mendel qui énonce :

Soit  $\hat{S}$  et  $m(\lambda)$  la séquence d'événements du maximum de vraisemblance et le nombre d'événements détectés respectivement, l'itérative la plus simple adoptée pour l'estimation de  $\lambda$  :

$$\hat{\lambda}_{i+1} = m(\hat{\lambda}_i) / N$$

doit converger d'une manière monotone vers un maximum local de l'équation (III-56) en N étapes ou moins, pour un  $\hat{\lambda}_0$  choisi appartenant à l'intervalle [ 0 , 1 ] .

Le nombre d'événements s'exprime par :

$$m(\hat{\lambda}_i) = \sum_{k=1}^N \hat{S}(k / \hat{\lambda}_i)$$

L'estimation du paramètre  $\lambda$  est une étape qui doit suivre l'opération de détection de la séquence de Bernoulli dans chaque itération, quand cette dernière doit être estimée.

#### 4-5-1 ESTIMATION DES AMPLITUDES :

La déconvolution à minimum de variance basée sur une théorie très riche met à notre disposition plusieurs procédures capables d'estimer le train de réflecteurs uniformément distribués et à amplitudes Gaussiennes .

Le lissage à intervalle fixe peut être utilisé pour le modèle produit correspondant à la décomposition et à la description de l'équation (III-29); il essaye de développer la structure de l'estimateur de  $\mu(k)$ ,  $\hat{\mu}(k/n)$ , sachant que la séquence de Bernoulli S est connue . Tenant compte du modèle convolutionnel (III-28) , de la forme matricielle (III-30) et de l'équation (III-32) , avec :

$$Q_s = \text{diag} [\hat{S}(1) \hat{S}(2) \dots \hat{S}(N)]$$

le modèle produit (5) peut s'exprimer sous la forme :

$$\mu = Q_s r$$

Selon le théorème, l'estimateur à minimum de variance de  $\mu$ , Y et  $\hat{S}$  étant connus, est:

$$\mu = c Q_s w / \Omega_s^{-1} Y$$

D'où :

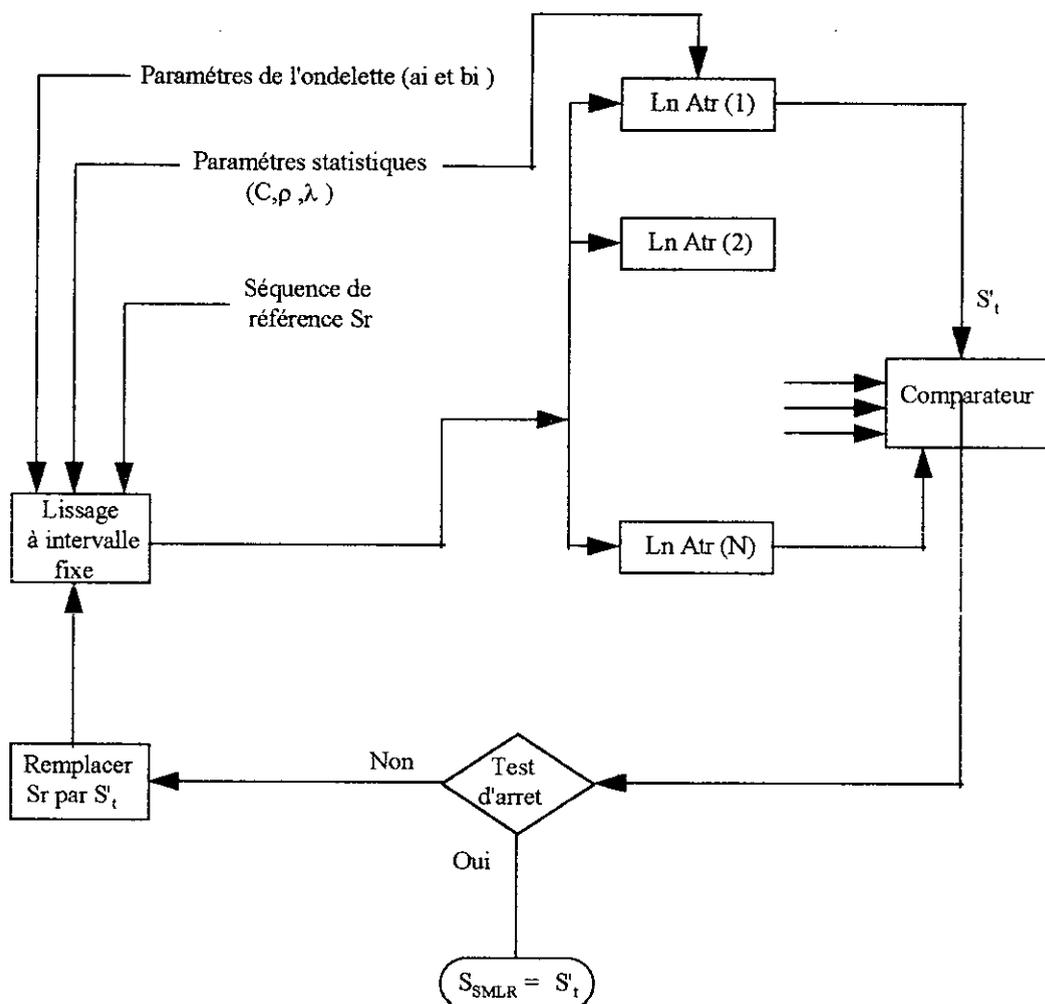
$$\mu = c S^2(k) (w / \Omega_s^{-1} Y)$$

Cette équation est obtenue en considérant le k<sup>ème</sup> élément de l'équation précédente.

**CONCLUSION :**

La résolution du problème général avec peu d'hypothèses consiste à concevoir un algorithme qui à chaque itération détecte la séquence de Bernoulli  $S$ , puis estime le paramètre statistique  $A$ , puis si la convergence a lieu l'estimation de l'ondelette source et des variances est abordée.

L'estimation des amplitudes termine notre travail, elle est intégrée une fois que tous les autres inconnues sont estimés. (Les Organigrammes des algorithmes d'estimation du Vecteur de détection, des paramètres de l'ondelette, et de la résolution du problème général sont les suivant)



**Fig (III-10 ) Organigramme du detecteur S.M.L.R**

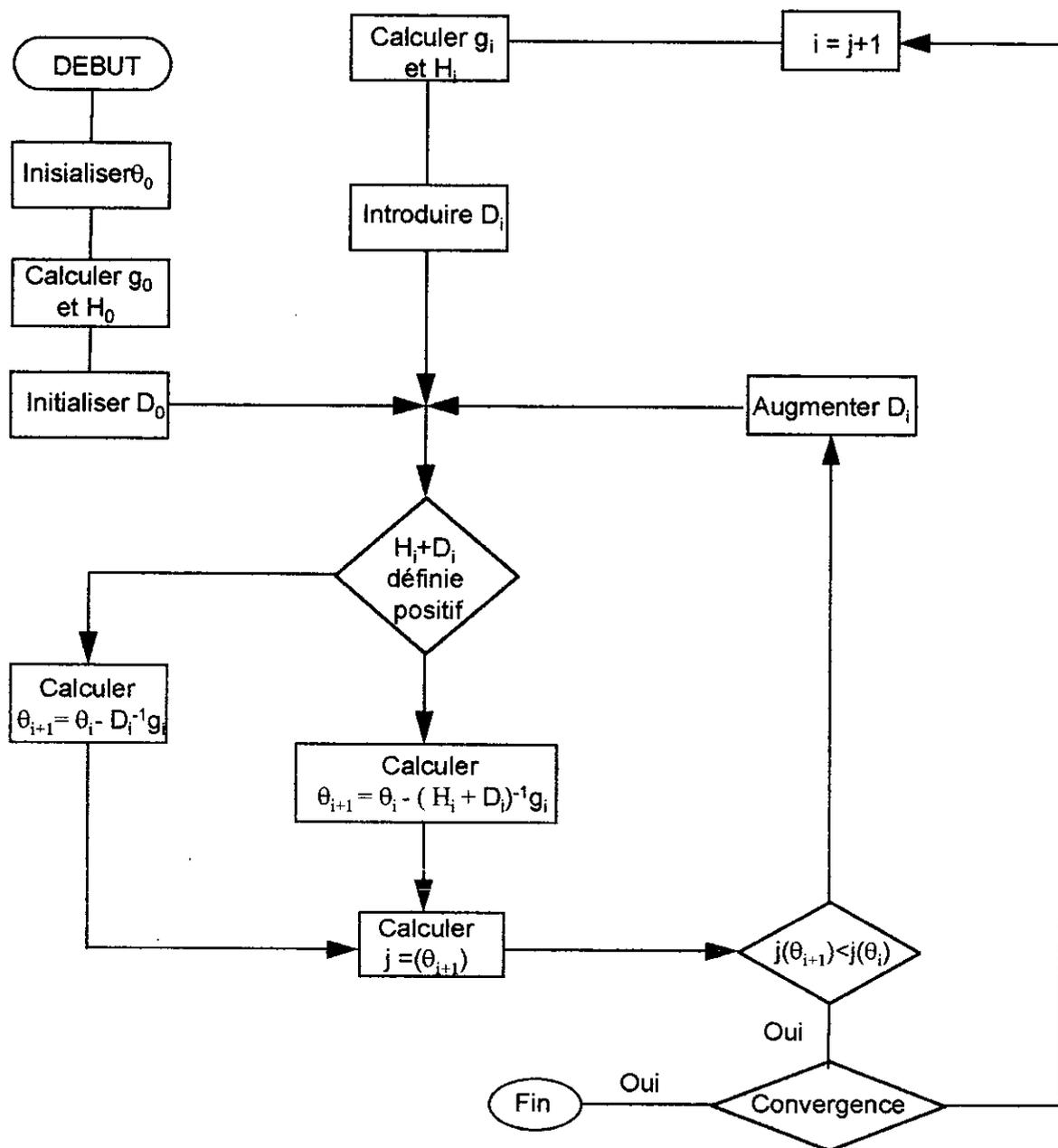
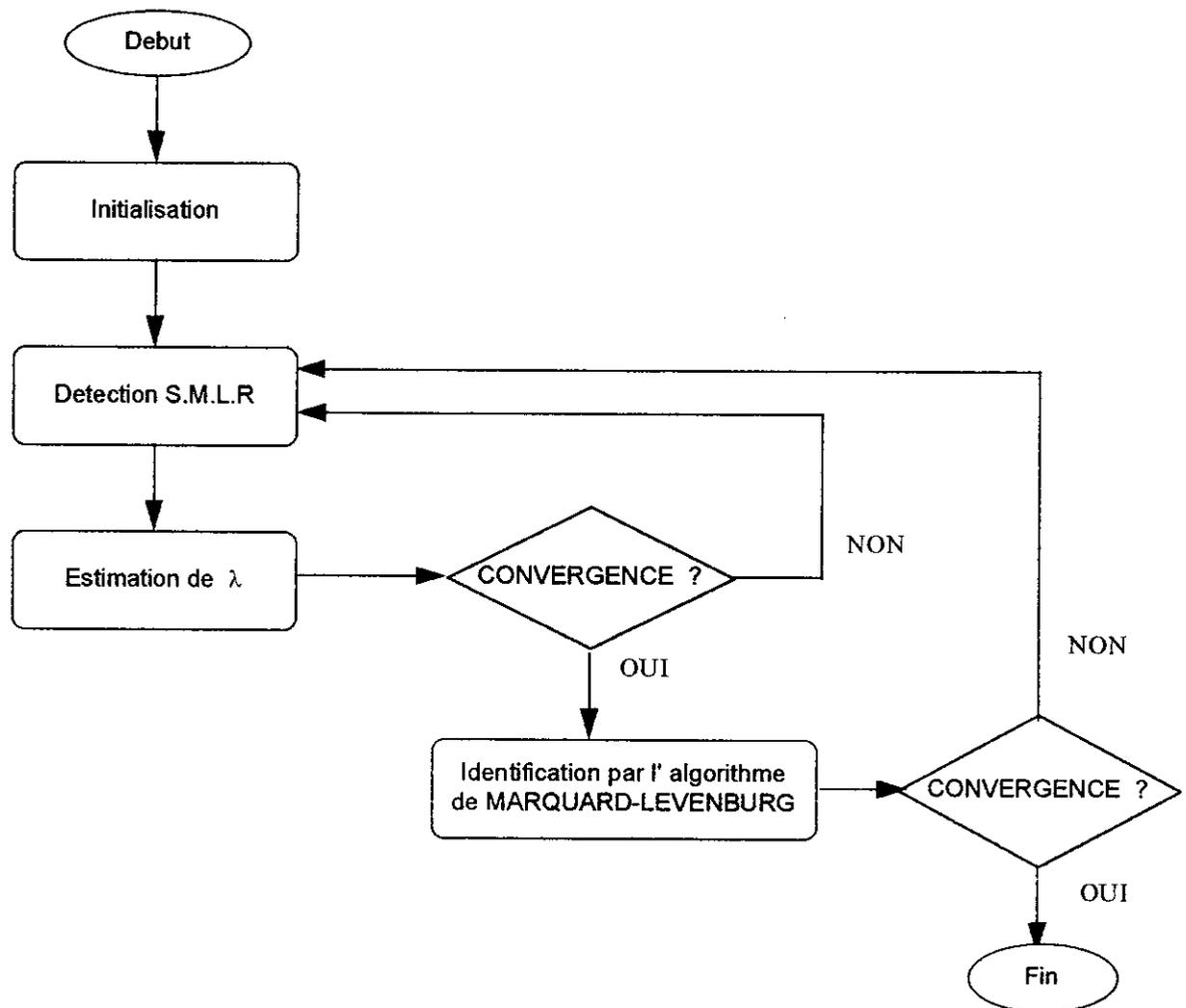


Fig (III-11 ) Organigramme d'estimation de l'ondelette



**Fig (III-9 ) Organigramme de la methode de traitement du probleme générale**

**CHAPITRE IV**  
SIMULATION ET RESULTATS

## CHAP IV SIMULATION ET RESULTATS

### 1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons illustrer les différents algorithmes étudiés par diverses simulations en utilisant le logiciel matlab.

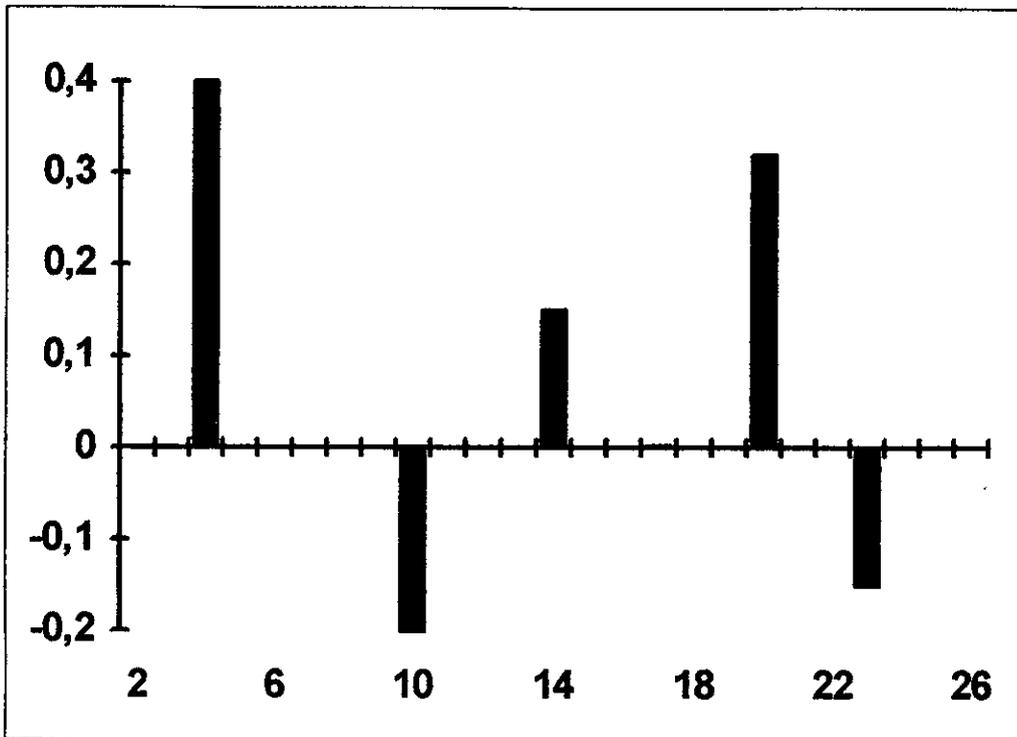
En premier lieu nous allons commencer par la génération des signaux sismiques, à savoir l'ondelette, les coefficients de réflexions et la trace sismique et ensuite on estimera les divers paramètres, en utilisant chaque algorithme étudié auparavant.

### 2 ALGORITHME D'INVERSION :

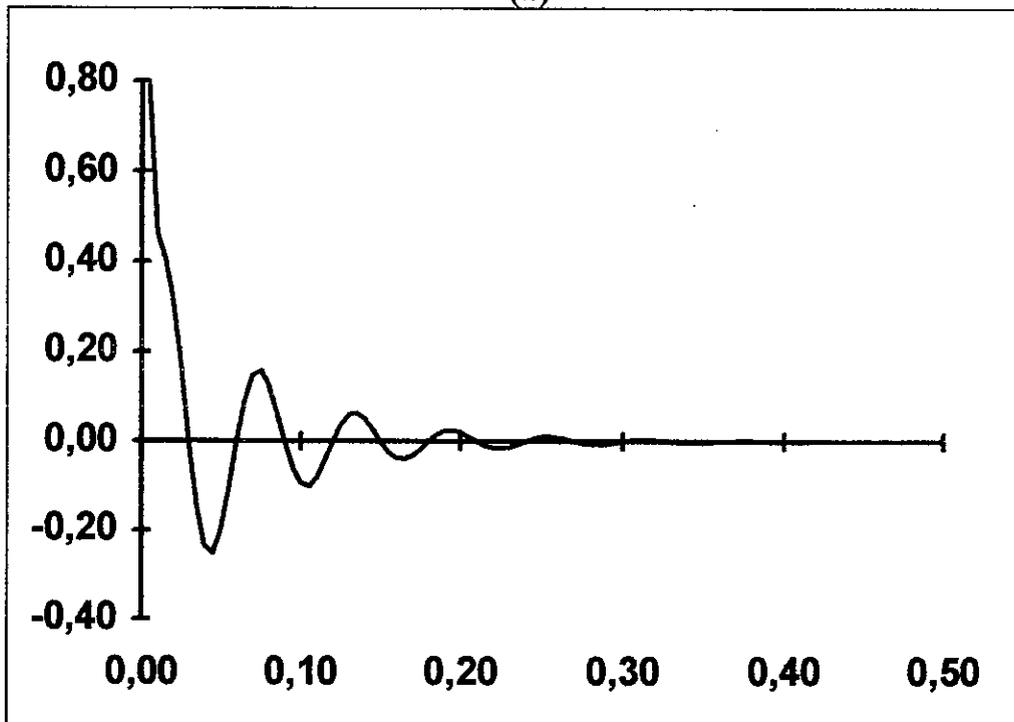
A l'aide d'exemples nous illustrons, dans ce paragraphe, les résultats obtenus par les diverses méthodes présentées. Nous choisissons un modèle à 20 couches dans lequel tous les coefficients de réflexion sont nuls, sauf  $r_4 = 0.40$ ,  $r_{10} = -0.20$ ,  $r_{14} = 0.15$ ,  $r_{17} = 0.002$ ,  $r_{20} = 0.32$  et  $r_{23} = -0.15$ . L'onde de source utilisée est semblable à celle utilisée dans [8], et est donnée par :

$$O(t) = 1360 t e^{-500 t} + 0,5 e^{-15,3 t} \sin (2 \pi t / 0,06)$$

L'unité de temps utilisée est 0.001 et  $T = 60$ . L'onde de source et les coefficients de réflexion sont tracés dans la figure (IV-1). Le sismogramme calculé est alors représenté par la figure (IV-2). Les logigrammes concernant la generation des signaux et la minimisation du cout sont au chapitre II. Dans un premier exemple, nous bruitons l'ondelette source et le sismogramme en leur ajoutant un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance égale à  $4 \cdot 10^{-6}$  (rapport signal sur bruit égal à 50 db). On inverse, simplement, le sismogramme à l'aide de l'algorithme (10). Le résultat, illustré dans la figure (IV-3), montre le bon fonctionnement de l'algorithme. Il démontre aussi l'existence de paramètres fictifs en plus des coefficients recherchés. Dans le deuxième exemple, nous augmentons la puissance du bruit, en prenant comme variance la valeur  $4 \cdot 10^{-2}$  ( $S/N = 9$  db) comme le montre la figure (IV-5). Les résultats de l'inversion par (8) donnent des valeurs erronées, comme l'illustre la figure(IV-6). Pour y remédier, nous utilisons l'algorithme de Van der Woude. Le résultat affiché dans la table 1 montre le bon fonctionnement de la méthode. Cette fois encore, on observe la production de paramètres superflus. Nous exécutons alors notre algorithme dont les résultats sont également affichés dans la table 1, en prenant  $\lambda=0,01$ . En apparence, les 2 résultats semblent identiques, mais observons bien, dans la table 1, les anciennes et les nouvelles valeurs des coefficients ainsi que leur variation relative. Ces variations sont plus ou moins importantes. Eliminons alors, les coefficients dont les variations sont supérieurs à un seuil choisi égal à 140%. Le résultat obtenu est parfait.



(a)



(b)

Fig(IV-1) - (a) Coefficients de reflexion. (b) Onde de source.

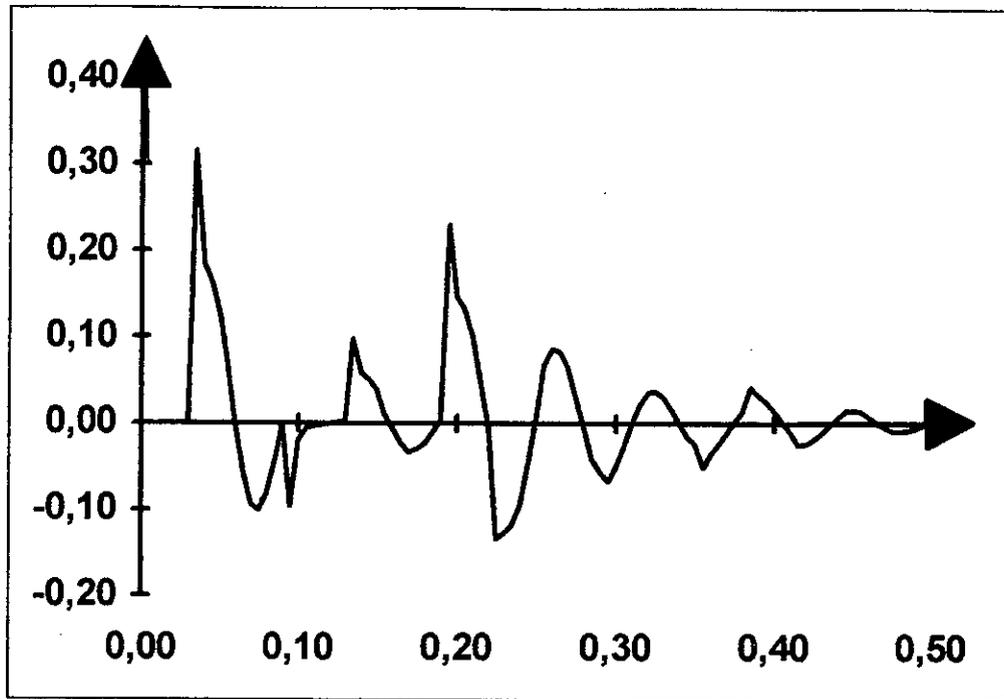


Fig (IV-2) - Sismogramme.

Estimation des coefficients de reflexions

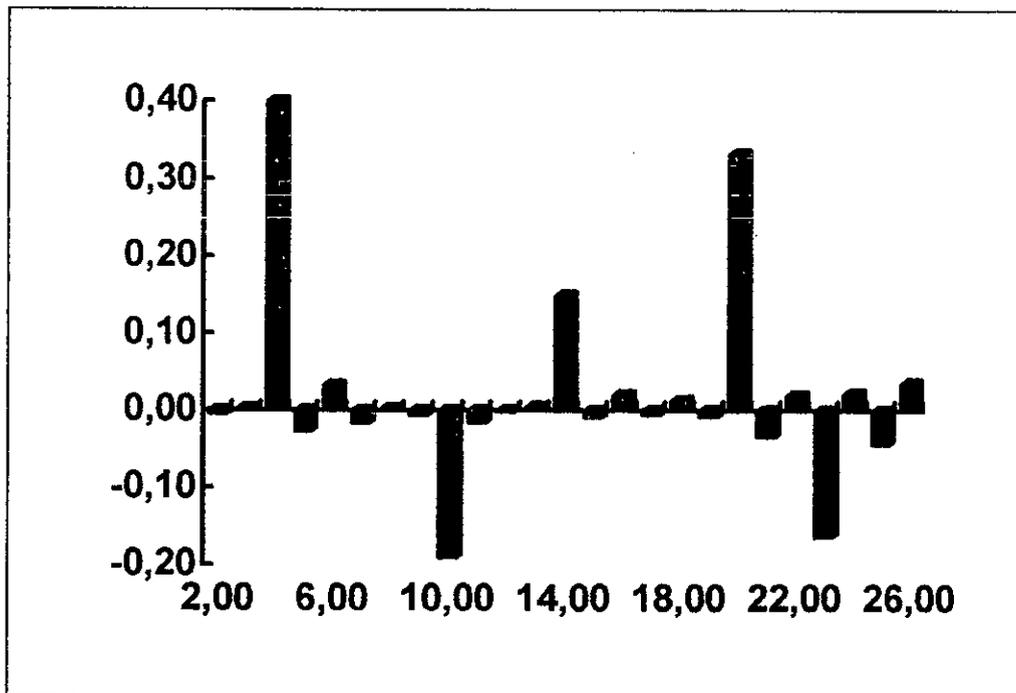
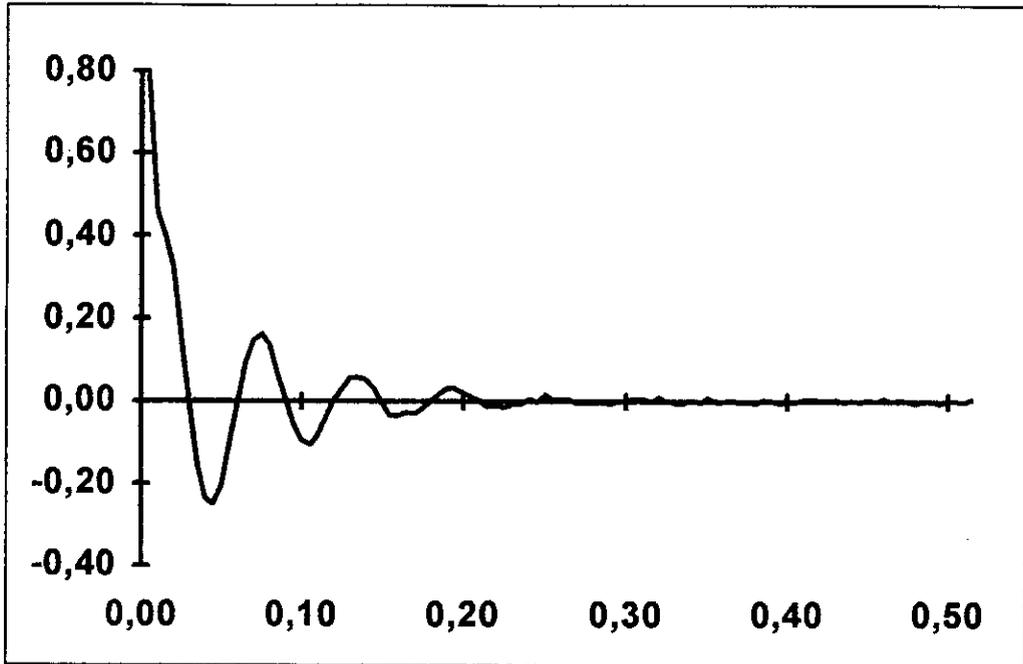
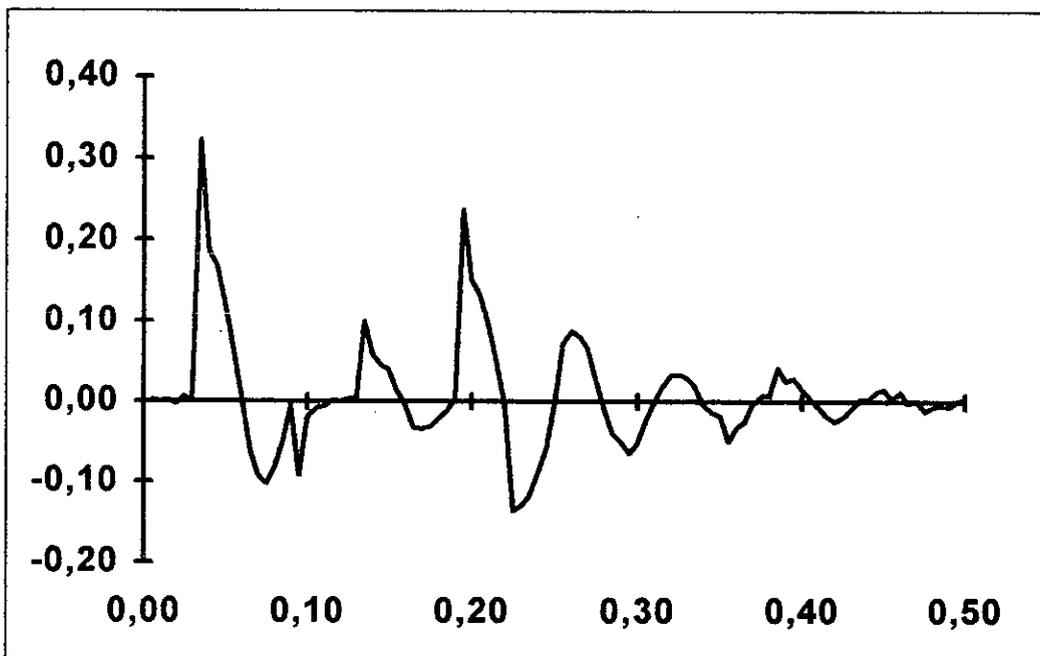


Fig (IV-3) - Les coefficients de reflexion obtenus par inversion ( S/N = 50 db ).

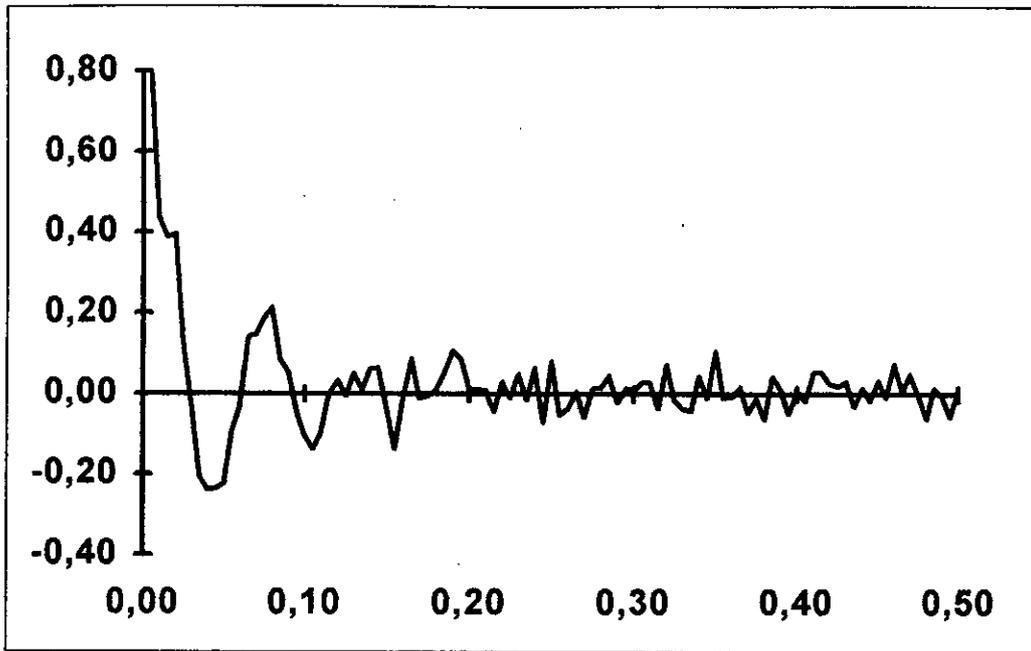


(a)

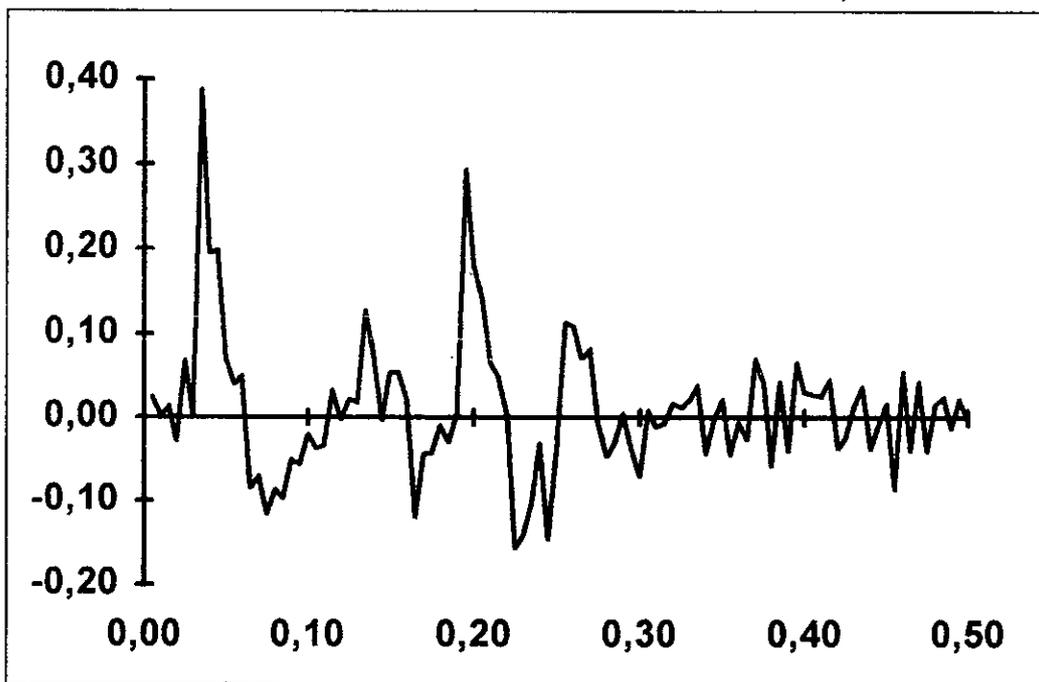


(b)

Fig (IV-4) (a) onde de source avec bruit (  $S/N = 50$  db ). (b) Sismogramme avec bruit (  $S/N = 50$  db ).



(a)



(b)

Fig (IV-5) (a) onde de source avec bruit (  $S/N = 9$  db ). (b) Sismogramme avec bruit (  $S/N = 9$  db ).

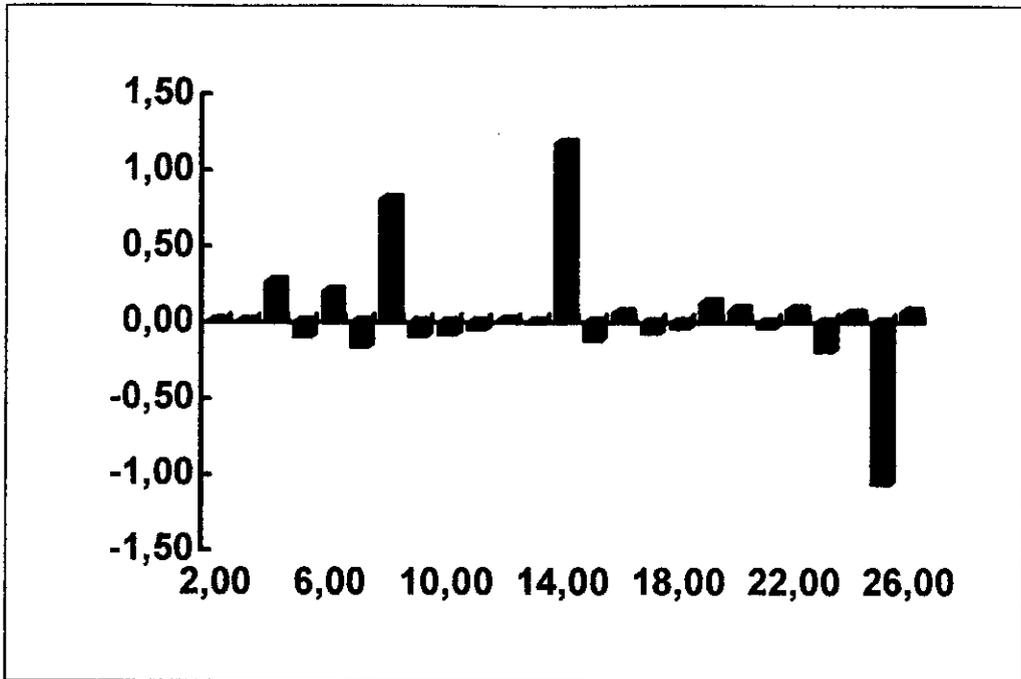


Fig (IV-6)- Les coefficients de reflexion obtenus par inversion ( S/N = 9 db ).

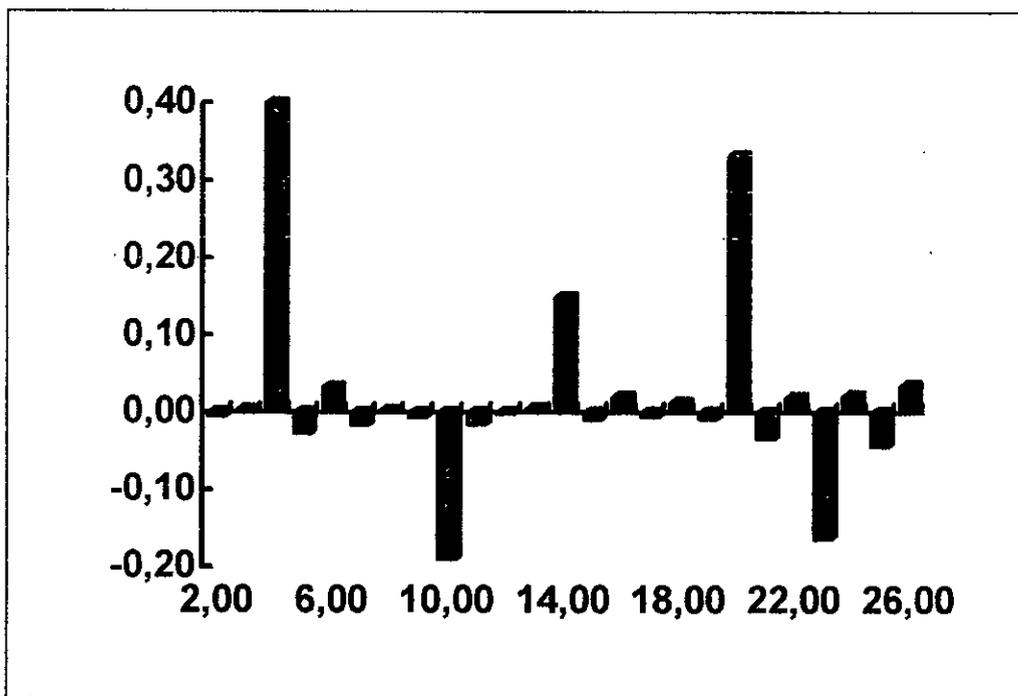


Fig (IV-7)- Les coefficients de reflexion estimés à l'aide de l'algorithme de Van Der Woude ( S/N = 9 db ).

n	Valeurs réelles	Sans coût supplémentaire	Avec coût supplémentaire	Variation relative	Valeurs détectés
1	0	-0,0109	0,0008	1,0752	0
2	0	-0,0053	-0,0010	0,8211	0
3	0	-0,0015	-0,0067	-3,5670	0
4	0,4000	0,3968	0,3651	0,0801	0,3968
5	0	-0,0695	0,1147	2,6505	0
6	0	0,0893	0,1717	-0,9235	0
7	0	-0,0617	-0,0346	0,4392	0
8	0	0,0279	0,0139	0,5026	0
9	0	-0,0292	0,0191	1,6560	0
10	-0,2000	-0,1672	-0,1859	-0,1120	-0,1672
11	0	-0,0404	-0,0850	-1,1024	0
12	0	0,0060	0,0044	0,2657	0
13	0	0,0021	-0,0021	2,0153	0
14	0,1500	0,1557	0,1614	-0,0372	0,1557
15	0	-0,0318	-0,0158	0,5026	0
16	0	0,0478	0,0778	-0,6279	0
17	0,0020	-0,0236	-0,0226	0,0445	-0,0236
18	0	0,0317	-0,1276	5,0296	0
19	0	-0,0193	0,0112	1,5830	0
20	0,3200	0,3447	0,3021	0,1234	0,3447
21	0	-0,0915	-0,1277	-0,3951	0
22	0	0,0695	-0,0761	2,0953	0
23	-0,1500	-0,2181	-0,2017	0,0752	-0,2181
24	0	0,0957	0,2508	-1,6204	0
25	0	-0,1443	-0,0502	0,6521	0
26	0	0,1405	0,0831	0,4086	0

**Table 1. Valeurs obtenues par inversion et détection des coefficients de réflexion**

### Conclusion

Nous avons exploré dans ce paragraphe les méthodes de résolution du problème d'inversion unidimensionnel à incidence normale de données sismiques bruitées. Nous avons défini un modèle sans pertes dans lequel les informations recherchés sont les positions et les amplitudes des coefficients de réflexion situés aux interfaces entre les diverses couches de la terre.

Nous avons exposé la représentation paramétrique ARX du modèle qui permet de tenir compte des réflexions multiples subies par l'onde de source injectée dans le sous-sol, puis recueillie sous forme d'un sismogramme à sa surface. Nous avons ensuite dérivé, à l'aide de méthodes diverses, plus ou moins sophistiquées, des algorithmes d'estimation des coefficients à partir des données d'entrée-sortie que sont l'onde de source et le sismogramme. Ces procédures, basées sur le principe des moindres carrés, sont efficaces et relativement peu complexes dans les cas où le rapport signal sur bruit est élevé. Dans les cas contraires, elles fournissent des paramètres possédant des valeurs non physiques. Puis nous avons exposé une autre technique qui résoud ce problème en contraignant les coefficients à posséder des valeurs inférieures à 1 en valeur absolue.

Toutes ces méthodes possèdent l'inconvénient d'introduire dans la solution des paramètres fictifs non nuls supplémentaires. En général, dans la réalité physique, seul un petit nombre de coefficients non nuls existe. Aussi, une méthode de détection est nécessaire pour estimer le nombre et la position des coefficients réels et éliminer les coefficients superflus. Nous avons développé, dans cet article, un détecteur rapide qui est en même temps peu complexe et très sensible. Il est basé sur l'incorporation d'un terme supplémentaire dans la fonction quadratique du coût, ce qui impose à l'algorithme d'optimisation de rechercher les solutions qui contiennent le moins de coefficients non-nuls possible. Un interface est alors détecté, si sa variation relative entre les minimisations, sans et avec terme supplémentaire, est faible. L'exemple montré illustre parfaitement les avantages de cette démarche. Parmi les difficultés non encore bien résolues, reste le problème du choix de  $\lambda$  et du seuil de détection, qui sont ici choisis empiriquement. Egalement, dans tout ce qui précède, le nombre de couches  $M$  est supposé a priori connu, alors que souvent, dans les situations pratiques, il ne l'est pas. Dans le futur, il serait intéressant d'étudier l'extension des méthodes proposés au cas où le nombre de couches est inconnu. Une possibilité, serait de démarrer avec un nombre quelconque, mais petit, de coefficients, puis d'augmenter ce nombre au fil des blocs de données tout en observant les coûts obtenus. Lorsque la variation relative du coût devient négligeable, on peut estimer avoir atteint le nombre correcte d'interfaces.

### 3 DECONVOLUTION :

Dans ce paragraphe nous allons appliquer tous les algorithmes étudiés auparavant dans le chapitre déconvolution. Nous choisirons un modèle de  $k$  couches dont les coefficients seront modélisées par une suite BERNOULLI-GAUSSIENNE sous la forme :

$$U(k) = r(k).S(k)$$

où  $r(k)$  est un bruit gaussien blanc à moyenne nulle et de variance  $\sigma_r^2$ , et  $S(k)$ , une suite aléatoire de bernoulli de « 1 » et de « 0 » à paramètre  $\lambda$  telle que la probabilité est définie comme suit :

$$P[S(k)] = \begin{cases} \lambda & S(k) = 1 \\ 1 - \lambda & S(k) = 0 \end{cases}$$

La représentation de notre ondelette sera la réponse impulsionnelle d'un système représenté par sa fonction de transfert. Pour la déconvolution prédictive et le filtre de KALMAN un modèle A.R est pris comme exemple, et le modèle A.R.M.A est pris pour la déconvolution par la méthode du maximum de vraisemblance.

### 3-1 DECONVOLUTION PREDICTIVE :

#### 3-1-1 GENERATION DES SIGNAUX SISMIQUES :

##### a) L'ondelette :

L'ondelette est à minimum de phase , elle est construite à partir d'un filtre auto-regressif A.R. :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + a_3 Z^{-3}}$$

avec  $a_1 = -1,5$   
 $a_2 = 0,6$   
 $a_3 = 0,1$

##### b) Les coefficients de réflexion :

On modélise la série des coefficients de réflexion comme une suite BERNOULLI-GAUSSIENNE sous la forme :

$$U(k) = r(k) \cdot S(k)$$

où  $r(T)$  est un bruit gaussien blanc a moyenne nulle variance  $\sigma_r^2 = 0,001$  , et  $S(T)$  est une suite aléatoire de BERNOULLI de 1 et 0 à paramètre  $\lambda > 0,7$  , avec :

$$r(k) = r_J \sum_{J=1}^k \prod_{i=1}^J (1 - r_{i-1}^2)$$

alors la série des coefficients de réflexion est définie par :

$$U(k) = r_J \left[ \prod_{J=1}^k (1 - r_{i-1}^2) \right] \cdot S(k)$$

##### c) La trace sismique :

Elle résulte d'un produit de déconvolution entre l'ondelette et la série des coefficients de réflexion :

$$Y(k) = O(k) * U(k) + n(k)$$

$Y(k)$  : trace sismique .  
 $O(k)$  : Ondelette  
 $n(k)$ : bruit additif .

- **Simulation par le filtre de weiner :**

Le traitement de déconvolution consiste , dans son ensemble à calculer les coefficients de déconvolution par la méthode de weiner « moindres carrés » puis à convoluer avec le signal à traiter : c'est à dire avec la trace sismique.

Nous avons procédé de la manière suivante :

- Calcul de l'auto-corrélation de la séquence à traiter.
- Calcul de l'opérateur à partir de l'auto-corrélation.
- Convolution de la trace à déconvoluer par l'opérateur .

\* Calculer de l'auto corrélation de la séquence à traiter

Pour pouvoir calculer les coefficients du filtre de déconvolution capable de détecter chaque réflexion de l'enregistrement sismique , il est nécessaire de connaître d'abord le signal d'entrée ou de la source .

Nous rappelons que le signal émis subit , au cours de son trajet dans la terre , des altérations dues à l'atténuation en hautes fréquences .

Il est donc préférable d'extraire de la trace elle même l'information recherchée. Pour cela , il faut connaître la fonction d'auto-corrélation  $R(t)$  du signal d'entrée . Comme cette dernière n'est pas connue , nous pouvons la considérer égale à l'auto-corrélation de la trace sismique avec les conditions suivantes :

- La série des coefficients de réflexion de la trace forme une suite aléatoire.
- Le rapport signal sur bruit est assez grand pour que nous puissions négliger le bruit.

En effet la trace sismique  $T(t)$  peut être schématisée sous forme d'un produit de déconvolution de l'ondelette  $O(t)$  et de la série des coefficients de réflexion  $R(t)$ .

$$T(t) = O(t) * R(t)$$

L'auto-corrélation de  $T(t)$  est donnée par:

$$\text{AUTO-TRACE} = (O * R) * (\overline{O * R}) = (O * \overline{O}) * (R * \overline{R})$$

Nous obtenons l'égalité suivante :

$$\text{AUTO-TRACE} = \sigma^2 * \text{AUTO-ONDELETTE} ; R * \overline{R} = \sigma^2$$

Nous pouvons dire que l'auto-corrélation de la trace sismique est égale à un coefficient près à l'auto-corrélation de l'ondelette.

\*\* Calcule de l'opérateur de déconvolution :

Pour calculer l'opérateur de déconvolution , on utilise l'algorithme de LEVINSON « voir annexe I » .

\*\*\* Convolution de la trace avec l'opérateur:

La trace traitée, « déconvolution »  $T'(t)$ , sera le produit de convolution de la trace à traiter  $T(t)$  et de l'opérateur de déconvolution conformément à la relation suivante :

$$T'(t) = T(t) * F(t)$$

En pratique nous calculons la fonction d'auto-correlation pour une partie de la trace  $n$ , nous déduisons ensuite l'opérateur de déconvolution qui sera appliqué pour tout l'enregistrement.

### 3-1-2 ALGORITHME DE DECONVOLUTION PREDICTIVE :

Le déroulement de l'algorithme de déconvolution prédictive se fait comme suit

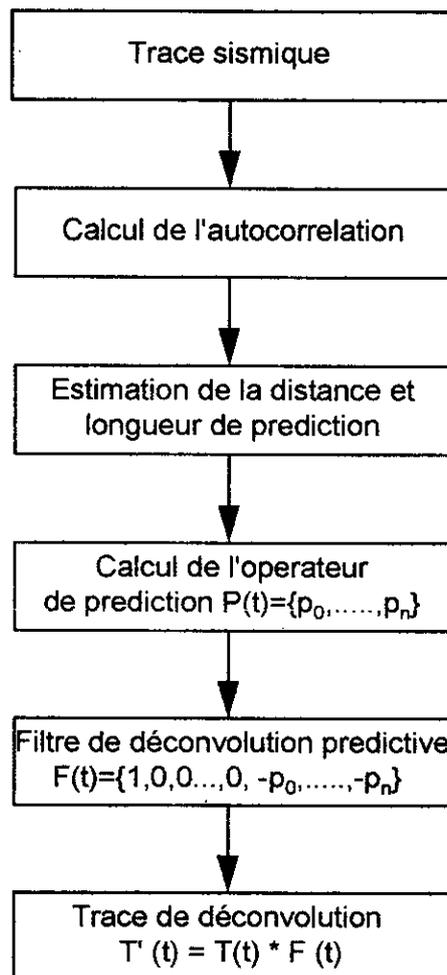
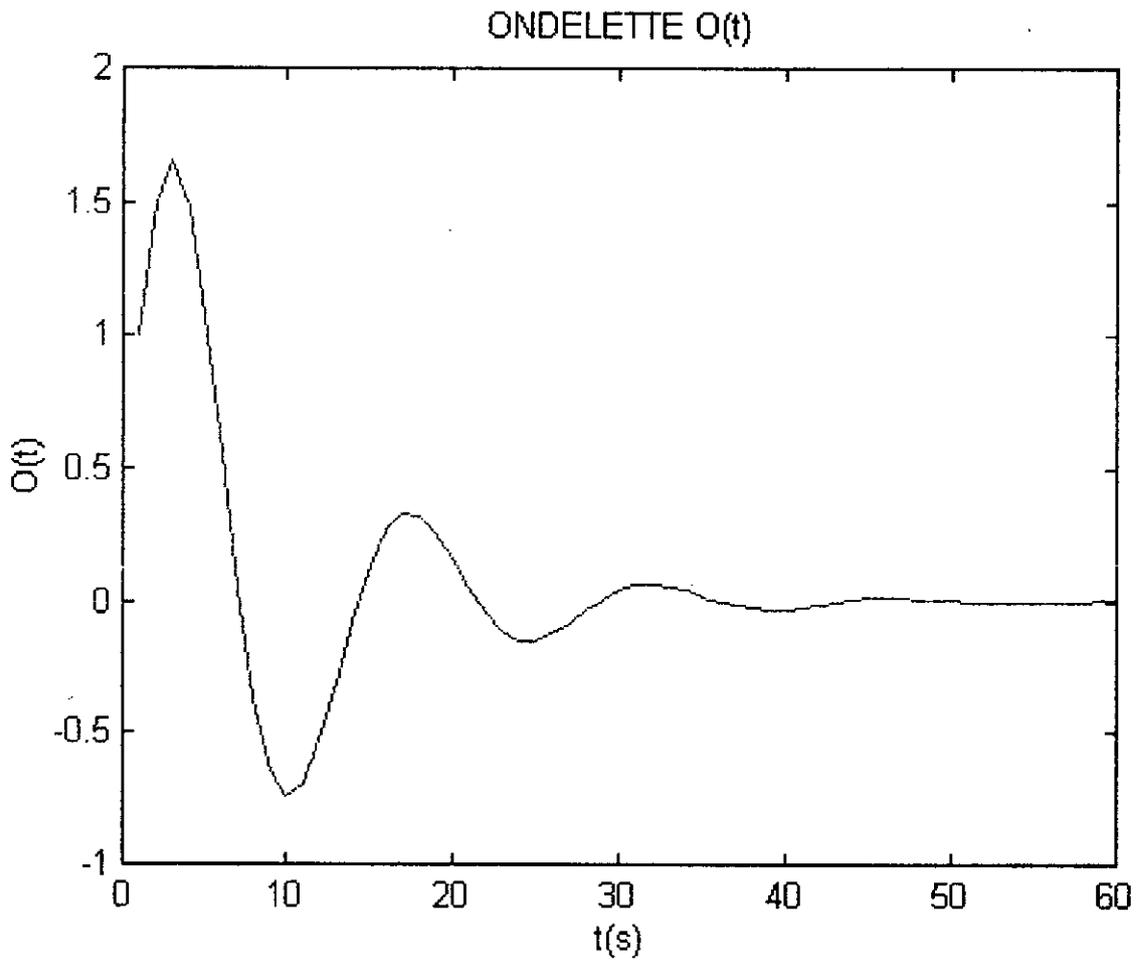


Fig ( IV-8 ) Organigramme d'application du filtre de déconvolution prédictive

**GENERATION DES SIGNAUX**

\* ONDELETTE



**Fig ( IV-9) ONDELETTE**

\*\* COEFFICIENTS DE REFLEXION

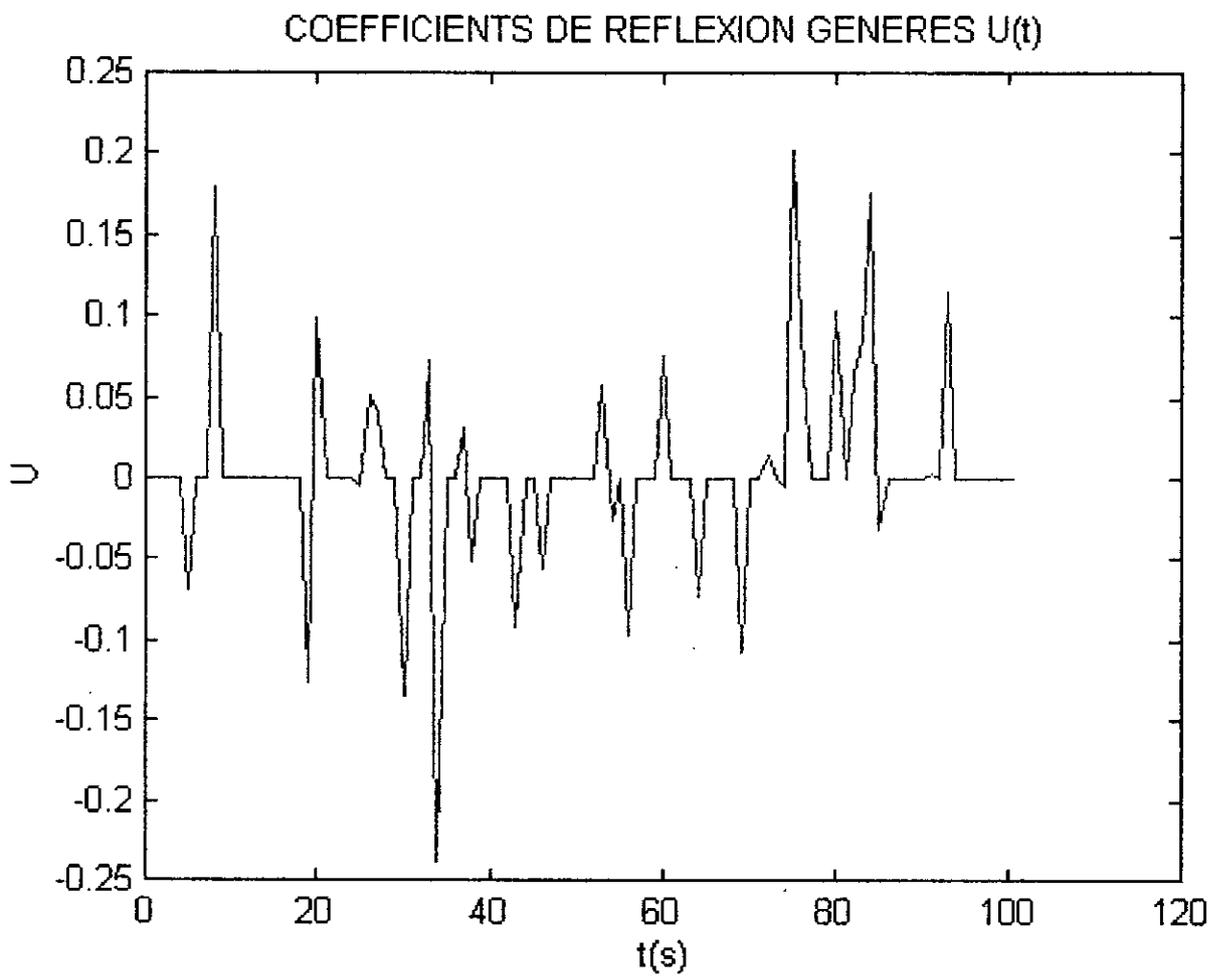


fig ( IV-10 ) COEFFICIENTS DE REFLEXION

\*\*\* TRACE SISMIQUE

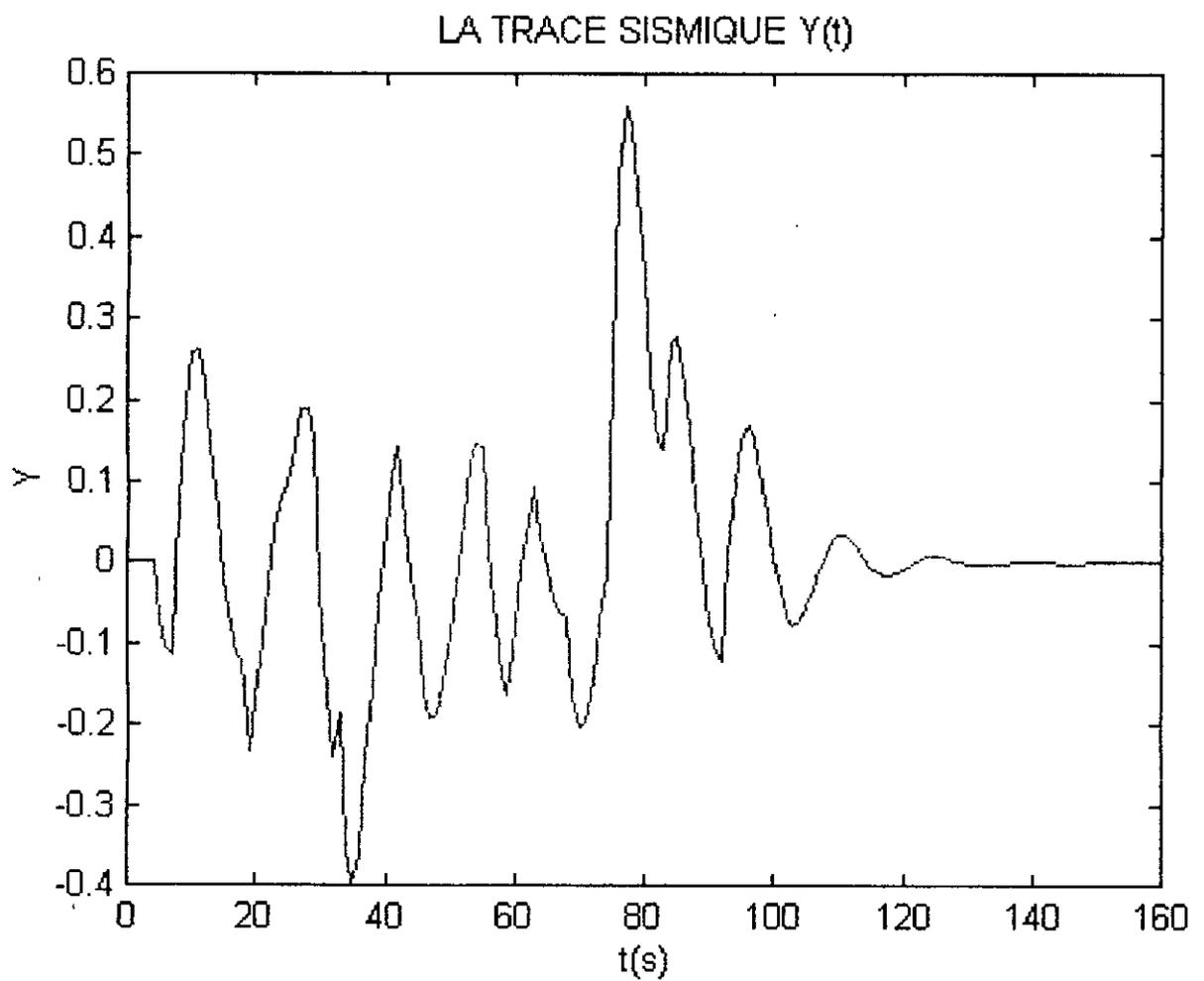
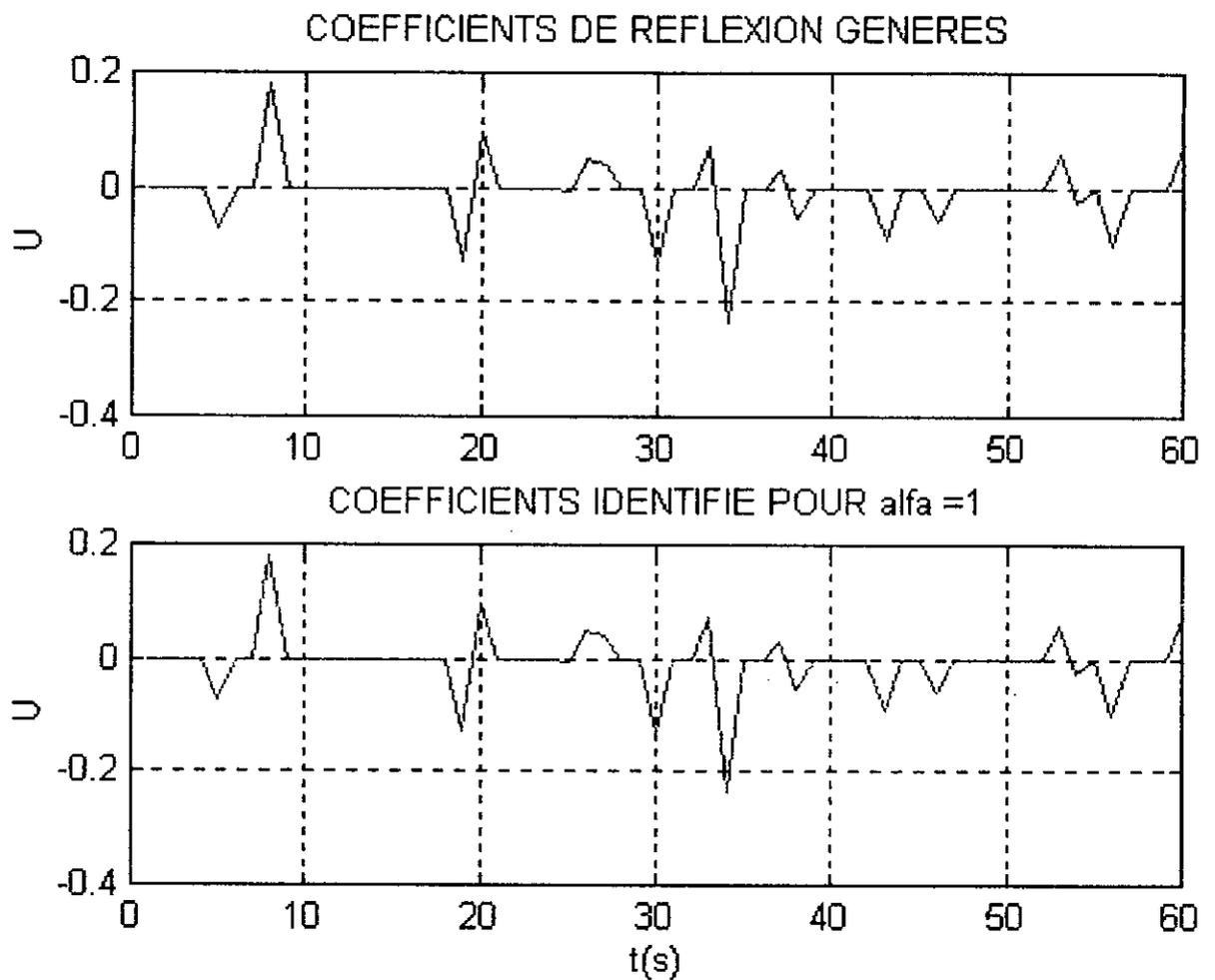


Fig ( IV-11 ) SISMOGRAMME

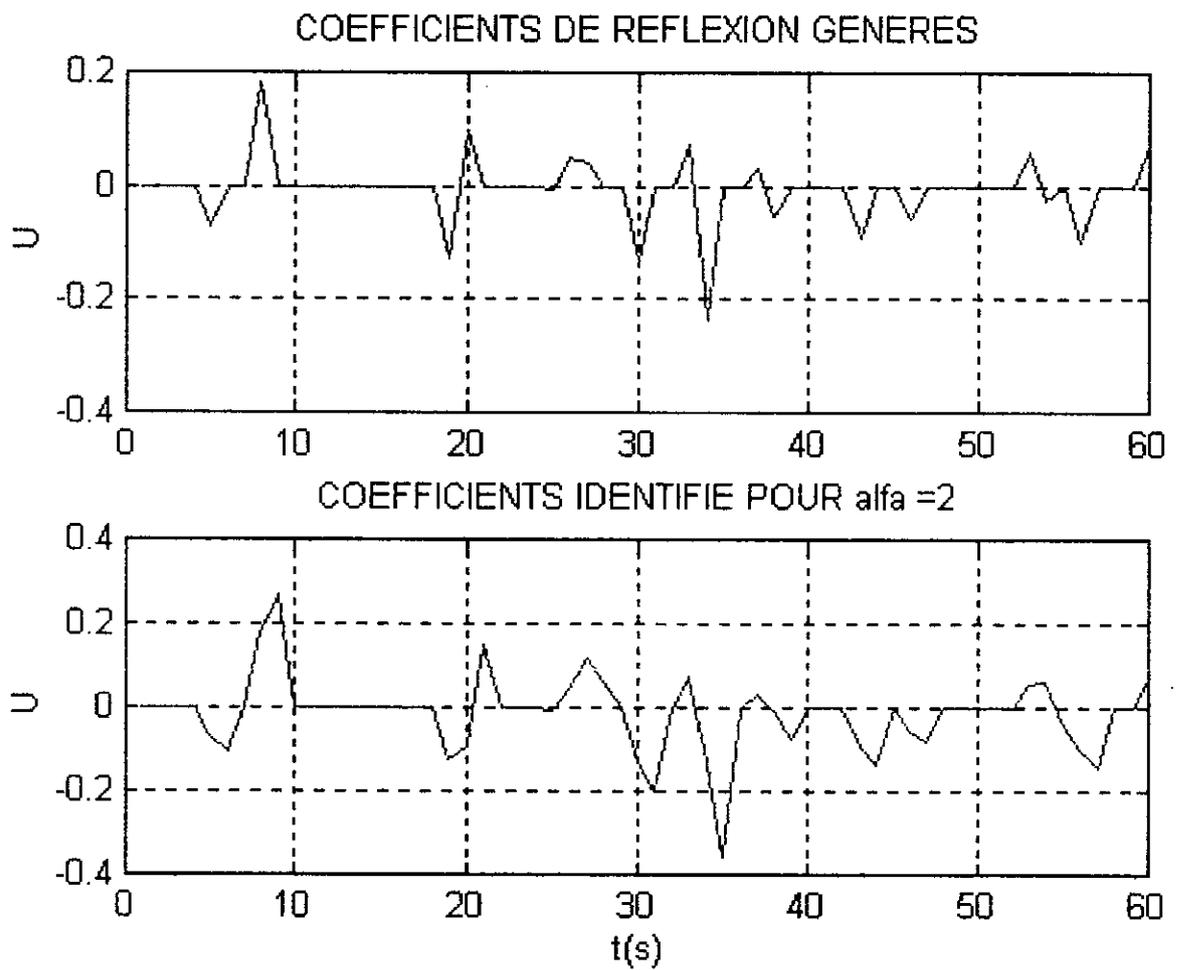
\*\*\*\* DECONVOLUTION

- Deconvolution pour une distance de prediction  $\alpha = 1$



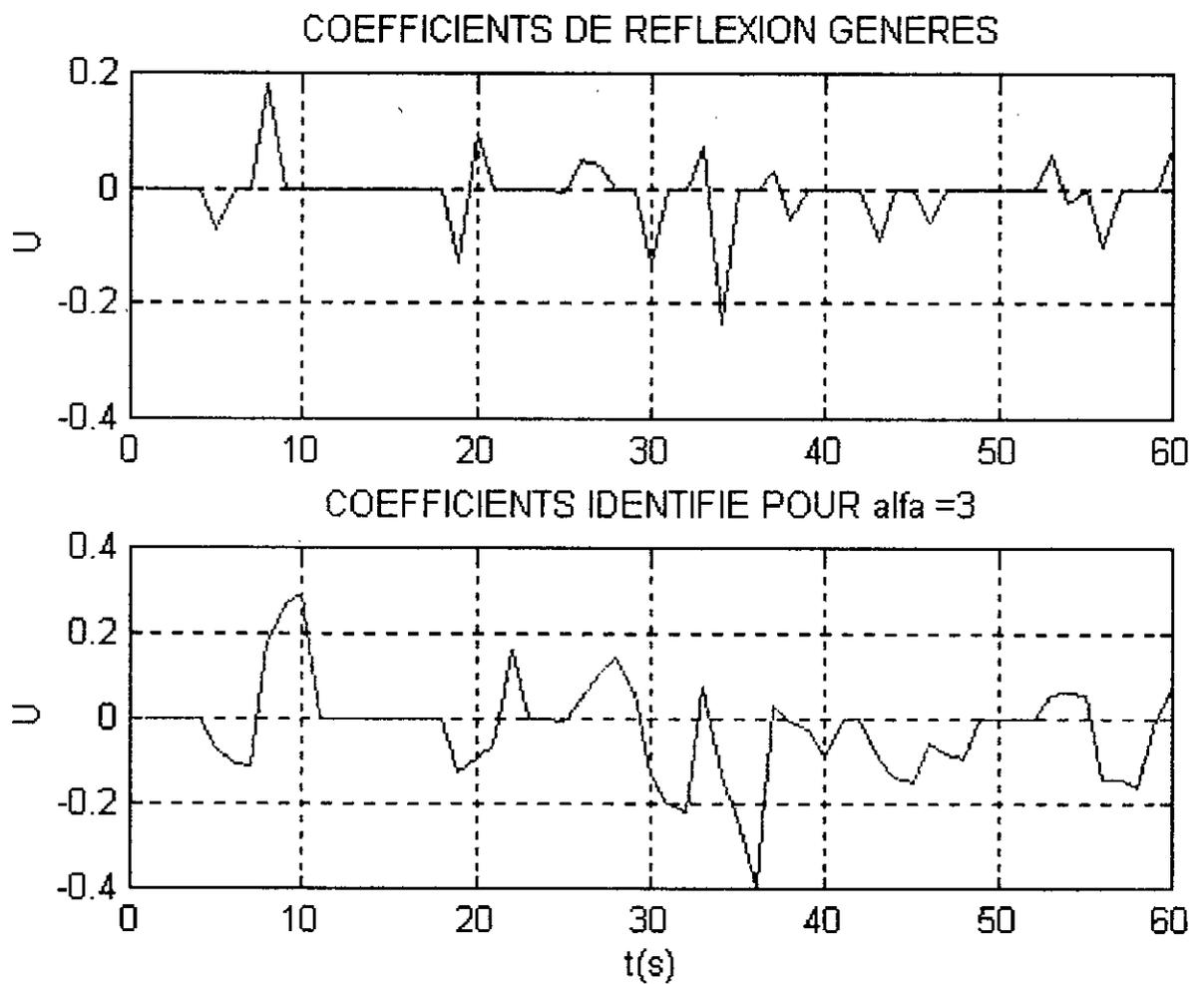
**Fig ( IV-12) ESTIMATION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION POUR  $\alpha=1$**

- Deconvolution pour une distance de prediction  $\alpha = 2$



**Fig ( IV-13 ) ESTIMATION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION POUR  $\alpha = 2$**

- Deconvolution pour une distance de prediction  $\alpha = 3$



**Fig (IV-14) ESTIMATION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION POUR  $\alpha=3$**

- Deconvolution pour une distance de prediction  $\alpha = 4$

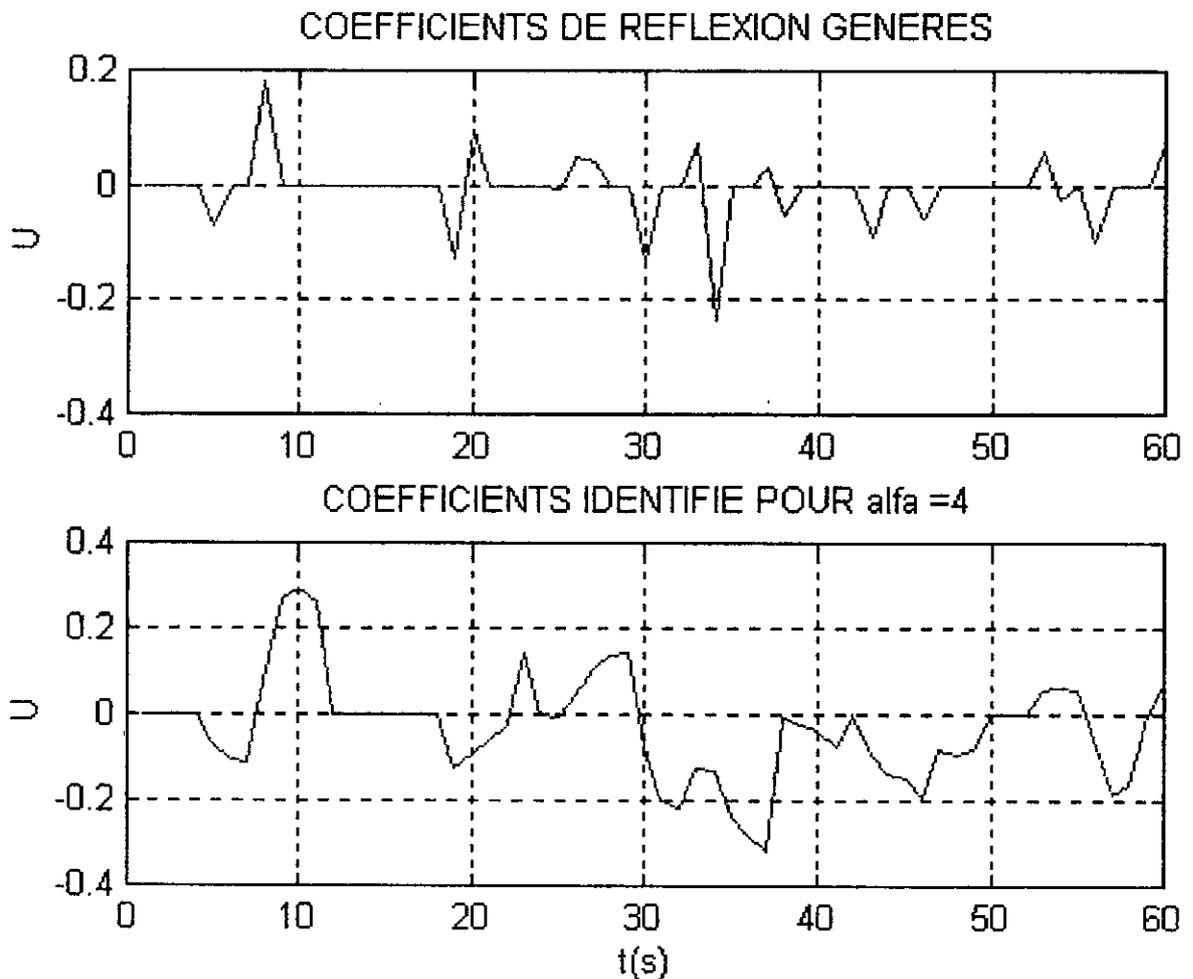


Fig (IV-15) ESTIMATION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION POUR  $\alpha=4$

**CONCLUSION :**

En visualisant les figures de (IV-12) à (IV-15) , on remarque que plus  $\alpha$  augmente plus l'estimation des coefficients de réflexion est mauvaise; cela est dû à ce que on s'éloigne de plus en plus de l'ondelette.

Nous remarquons que cette methode de déconvolution (déconvolution prédictive) ne peut etre appliquée que pour des données stationnaires . Cette stationarité se résume dont le fait que l'ondelette n'est pas perturbée tout le long du déroulement du phénomeme physique.

L'objet du paragraphe qui va suivre est l'étude des résultats à partir des données obtenus lorsque l'ondelette change au moins une fois lors de l'expérience

### 3-2 DECONVOLUTION PAR LE FILTRE DE KALMAN :

Dans ce paragraphe nous allons illustrer et voir le comportement de notre algorithme pour le problème posé, à savoir l'estimation conjointe de l'ondelette et des coefficients de réflexions .

Tout d'abord nous allons appliquer l'algorithme d'estimation des paramètres de l'ondelette dans le cas où cette dernière est non stationnaire. Pour cela on prendra deux ondelettes différentes et une série de coefficients de réflexions et de là on générera la trace sismique. Après que la génération des signaux est faite, on estimera les paramètres de l'ondelette en ayant seulement le sismogramme.

En deuxième lieu on utilisera l'algorithme général, à savoir l'algorithme d'estimation des paramètres de l'ondelette et l'estimation des coefficients de réflexion, pour résoudre le problème posé.

#### 3-2-1 Estimation des paramètre ( $a_i$ ) de l'ondelette :

L'ondelette est à phase minimale, elle est construite à partir d'un modèle AR d'ordre 3; elle est composée de deux parties :

$$\text{de } T=0 \rightarrow 100 : H_1(Z^{-1}) = \frac{1}{1 - 1,5Z^{-1} + 0,6Z^{-2} - 0,1Z^{-3}}$$

$$\text{de } T=100 \rightarrow 200 : H_1(Z^{-1}) = \frac{1}{1 - 1,8Z^{-1} + 0,5Z^{-2} - 0,1Z^{-3}}$$

On suit l'organigramme représenté par la figure (6.2) avec les conditions initiales suivantes:

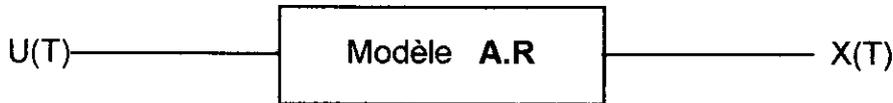
- Covariance du processus générateur  $q=0,001$
- Les paramètres de l'ondelette:
  - $a(1,1) = -1,10$
  - $a(2,1) = 0,50$
  - $a(3,1) = 0,20$
- Matrice de covariance initiale :

$$P[100 \ 0 \ 0 ; 0 \ 100 \ 0 ; 0 \ 0 \ 100 ]$$

Les paramètres estimés alors sont :

$$\begin{array}{ll} a(1,100) = 1,6008 & a(1,200) = 1,4690 \\ a(2,100) = -0,6990 & a(2,200) = -0,7464 \\ a(3,100) = 0,0574 & a(3,200) = 0,0978 \end{array}$$

Les techniques de détection les plus répandues utilisent un modèle AR pour blanchir le signal. Nous rappelons que ce modèle donne une bonne approximation avec un nombre d'échantillons relativement réduit :



L'erreur de prédiction linéaire  $e(n)$  est obtenue en filtrant le signal  $X(n)$  à travers un filtre blanchissant, selon l'équation suivante:

$$e(n) = X(n) - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \hat{X}(n-k)$$

$$= X(n) - \hat{X}(n)$$

Les paramètres du filtre peuvent être connus au préalable ou identifiés de façon séquentielle à l'aide d'algorithme adaptatif comme dans notre cas, « l'algorithme de KALMANE ».

La détection du changement est alors réalisée sur l'erreur de prédiction en testant son éloignement de l'hypothèse bruit blanc.

Selon la rapidité de convergence de l'algorithme, un saut plus ou moins brutal pourra être décalé sur l'énergie de l'erreur de prédiction linéaire, celui-ci sera révélateur de la présence d'une non stationnarité locale.

Pour le filtre de KALMAN, la trace sismique est modélisée par :

$$X(T + 1) = X'(T) A(T) + V(T)$$

où  $A(T) = [ a_1, \dots, a_p ]$  : vecteur d'état

$X'(T) = [ X(T-1) X(T-2) \dots X(T-p) ]$

$V(T)$  : bruit blanc

Dans l'étude du filtre de KALMAN, on va estimer le vecteur d'état  $A(T)$  en se basant sur les observations  $X(T)$ .

L'expression du vecteur d'état estimé est :

$$\hat{A}(T+1) = \hat{A}(T) + K(T) [ X(T) - H(T) \hat{A}(T) ]$$

L'expression de l'erreur de prédiction est :

$$e(T) = X(T) - H(T) \hat{A}(T)$$

On déduit le signal de la trace sismique estimé :

$$\hat{X}(T) = H(T) \hat{A}(T)$$

On conclut que la trace de déconvolution est l'erreur de prédiction  $e(T)$ .

3-2-2 Simulation et résultats de l'estimation des paramètres  $a_i$  de l'odelette

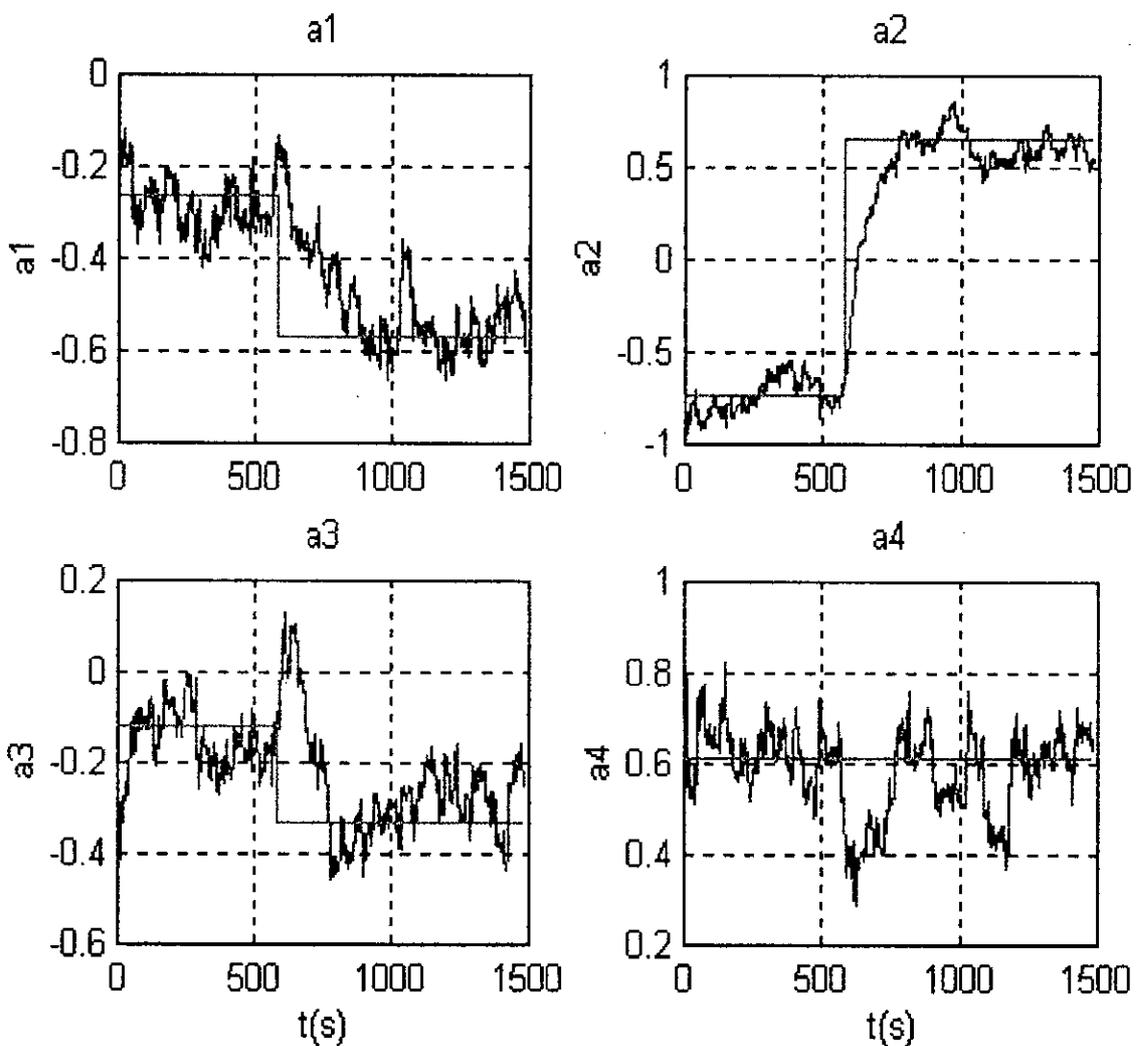


fig (IV-16) Estimation des paramètres  $a_i$

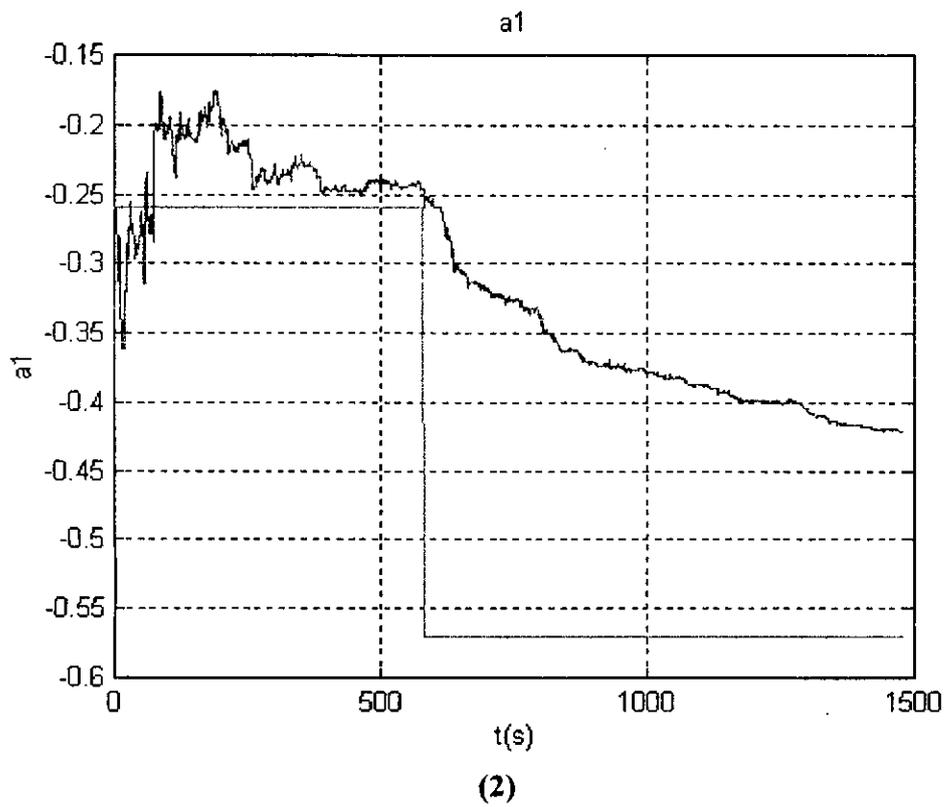
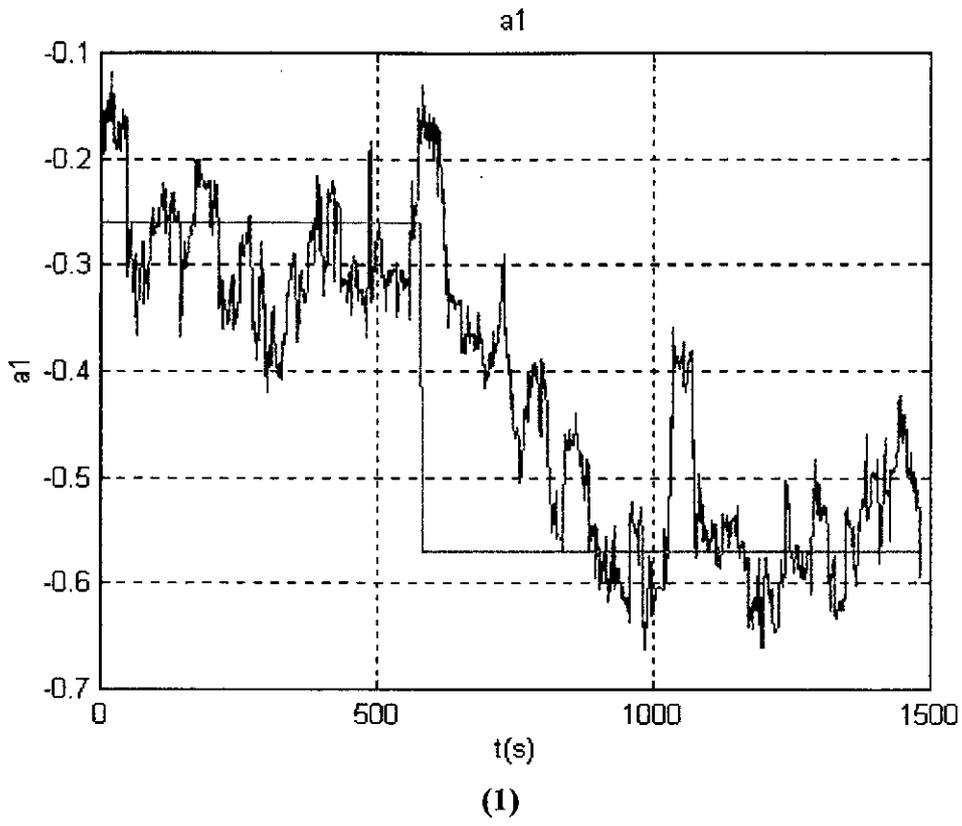
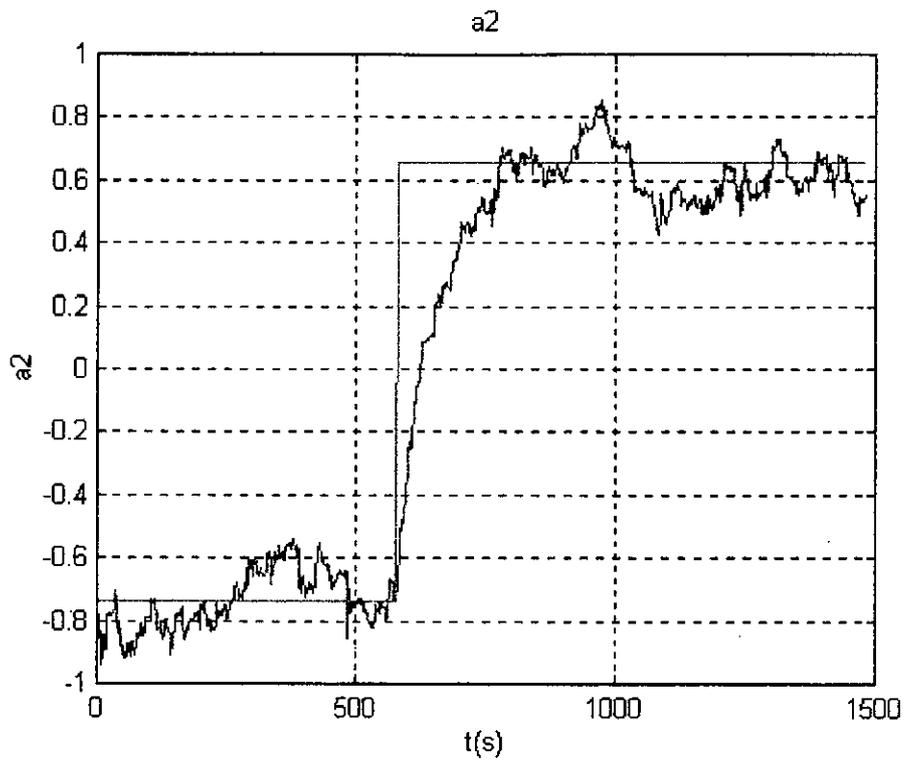
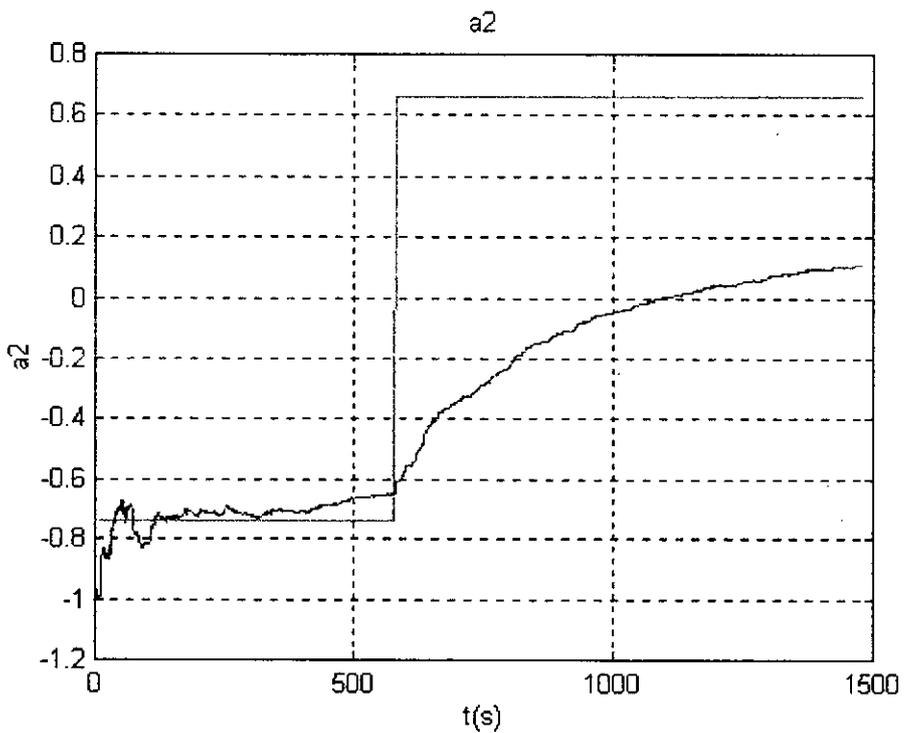


fig (IV-17) Estimation du paramètre  $a_1$  pour (1)  $Q = 0.001$  et (2)  $Q=0$

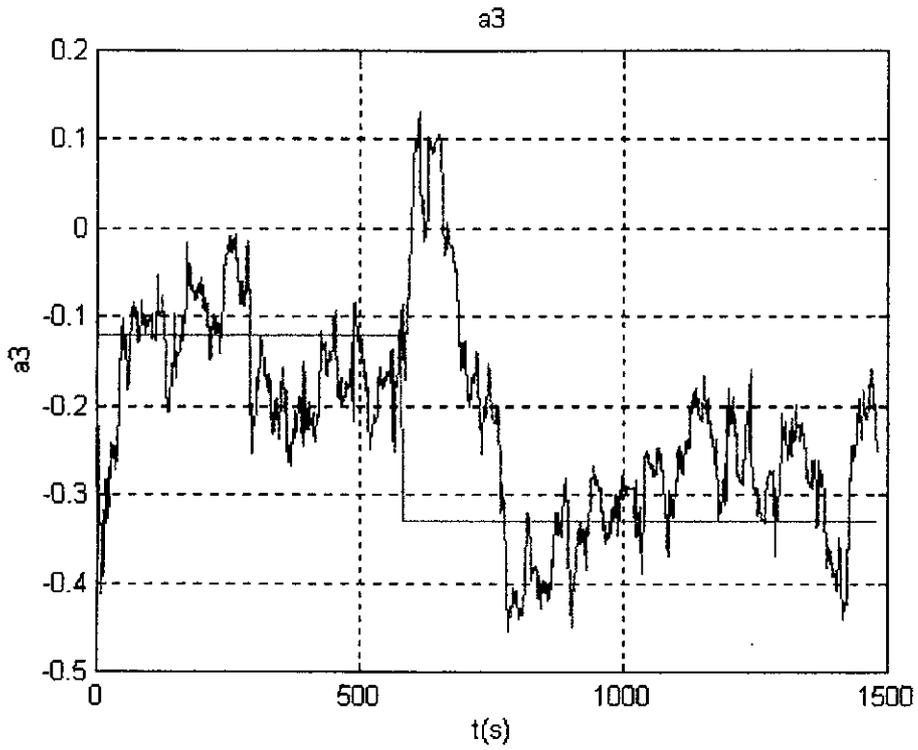


(1)

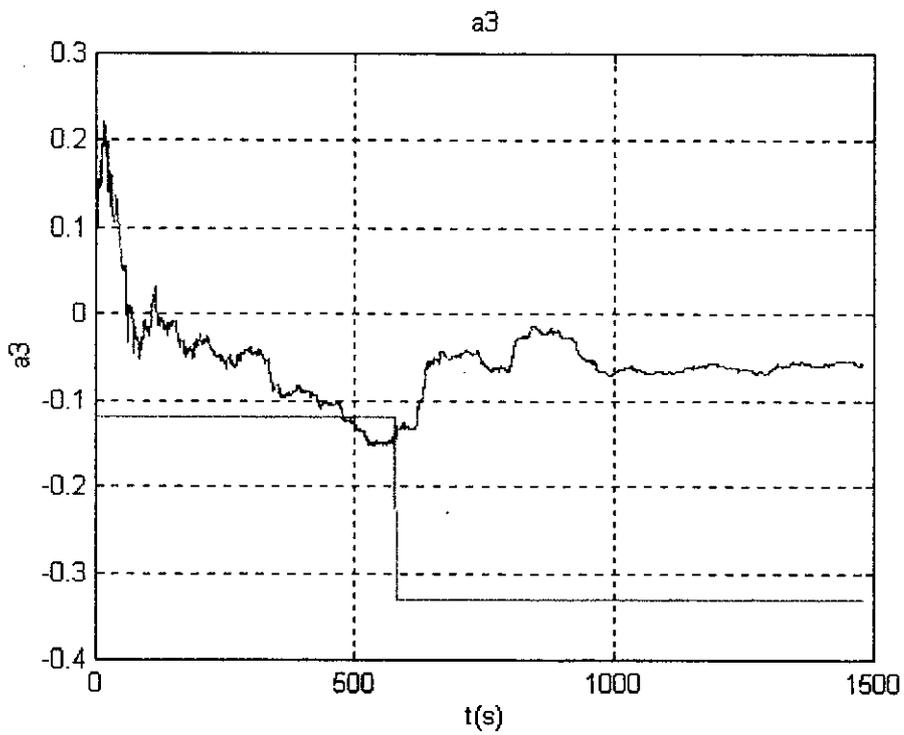


(2)

Fig (IV 18) Estimation du paramètre  $a_2$  pour (1)  $Q = 0.001$  et (2)  $Q=0$

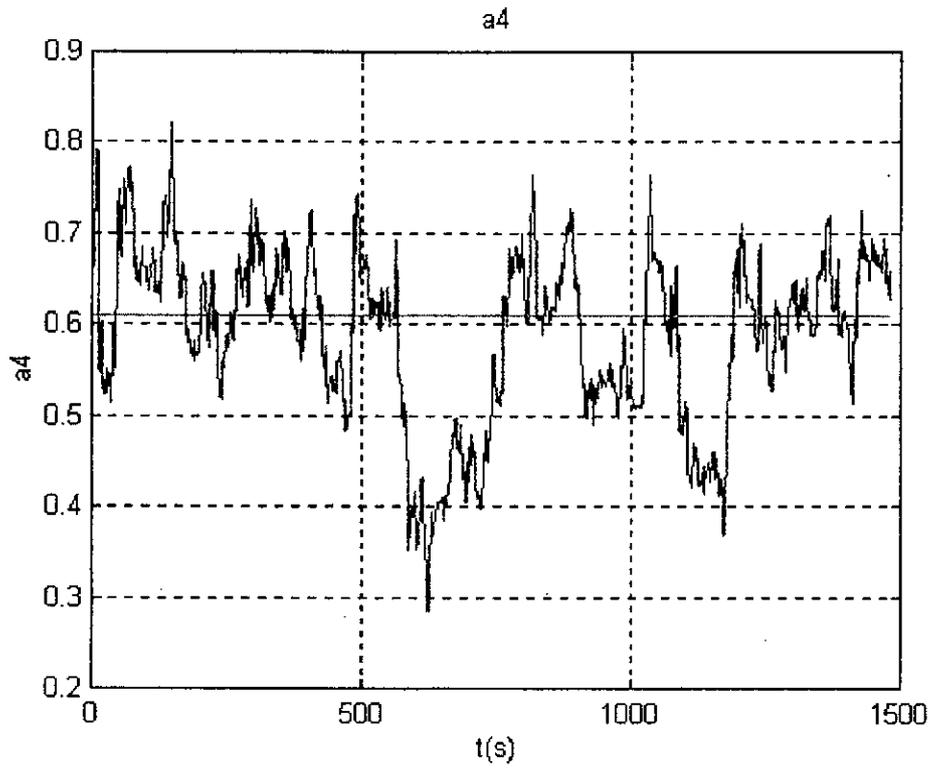


(1)

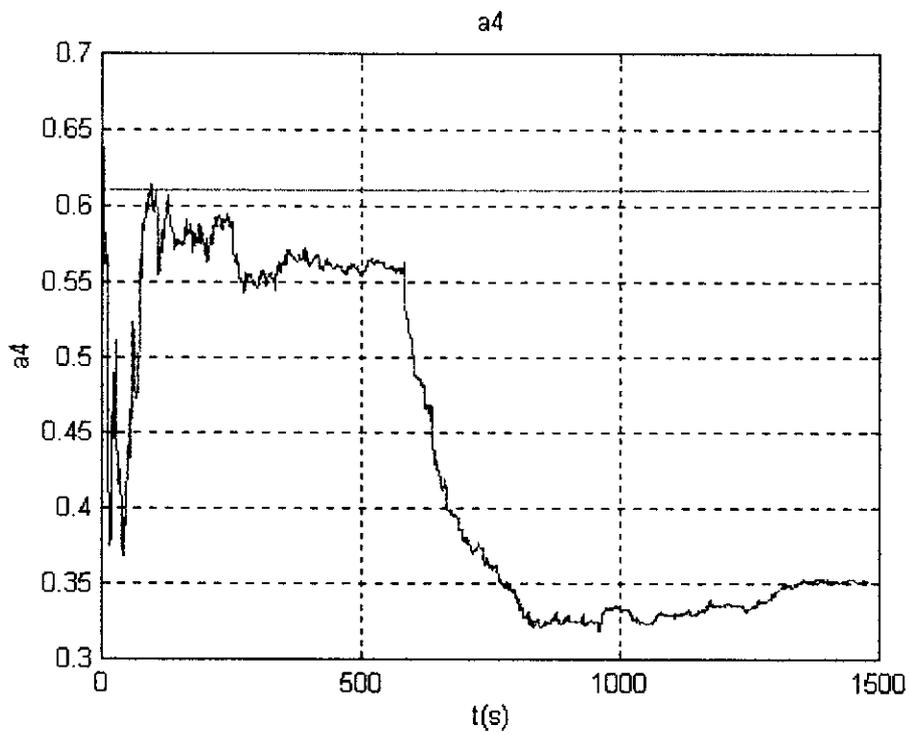


(2)

Fig ( IV-19 ) Estimation du paramètre  $a_3$  pour (1)  $Q = 0.001$  et (2)  $Q=0$



(1)



(2)

Fig (IV-20) Estimation du paramètre  $a_4$  pour (1)  $Q = 0.001$  et (2)  $Q=0$

### Commentaires sur l'estimation des paramètres $a_i$ :

Lors du déroulement de notre algorithme on remarque pour la figure (IV-17) à (IV-20), avec un bruit blanc de  $Q = 0,001$ , que le déroulement de notre algorithme suit bien les paramètres  $a_i$  de notre ondelette et cela dans le cas où notre ondelette est non stationnaire ; cette poursuite n'est possible que lorsque on ajoute le facteur  $Q$  à la matrice de covariance  $P(k)$  du filtre de KALMAN ; ce qui rend le gain  $K(k)$  non nul et permet la poursuite des variations des paramètres  $a_i$ .

#### 3-2-2 Déconvolution par le filtre de Kalman

Le déroulement de cette algorithme se fera comme suit :

- Génération des signaux
  - \* Ondelette
  - \*\* Coefficients de réflexion
  - \*\*\* Trace sismique
  
- Estimation des paramètres de l'ondelette
  
- Déconvolution des signaux sismiques par :
  - \* Méthode OTT et MEDER
  - \*\* Lissage à un pas
  - \*\*\* Lissage à quatre pas

- Génération des signaux

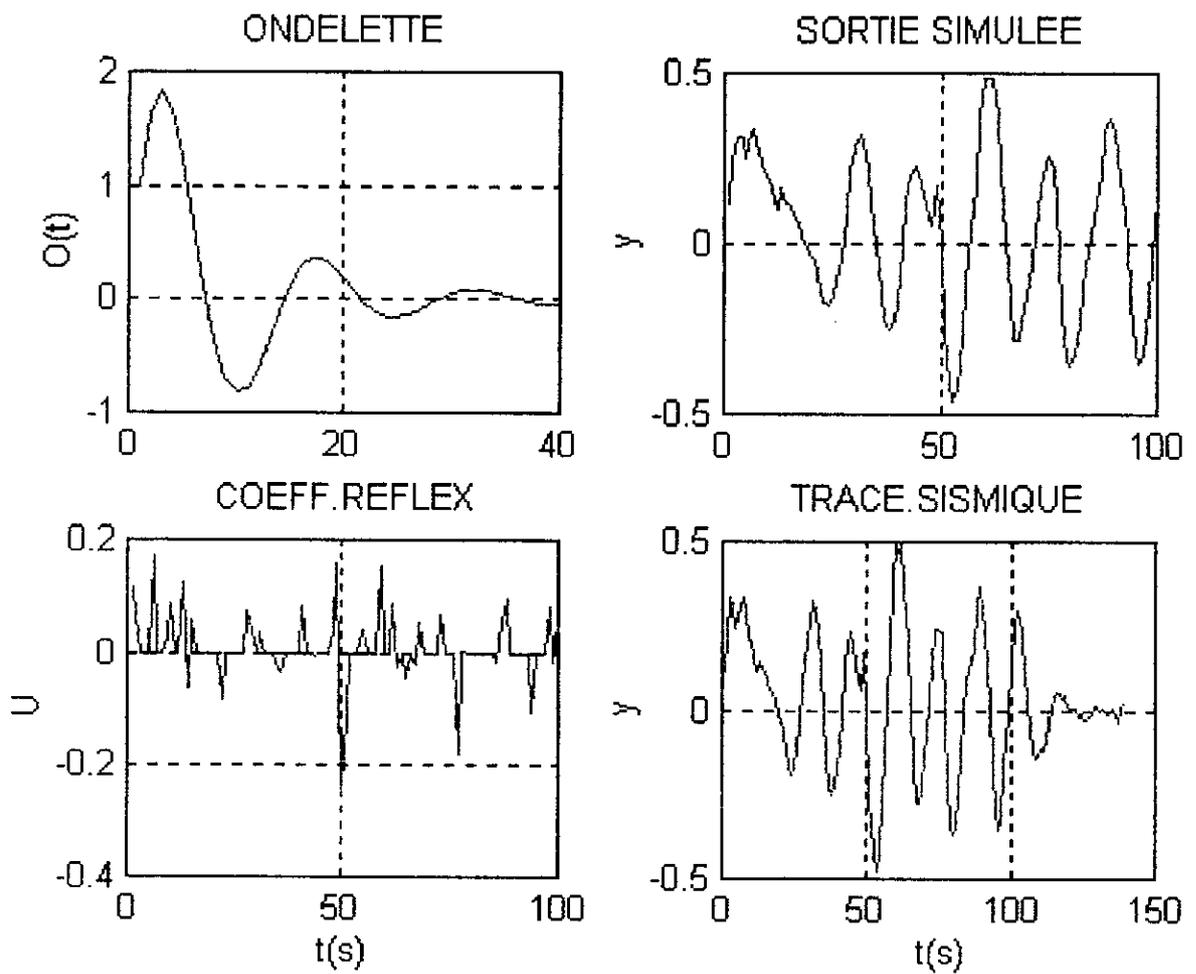
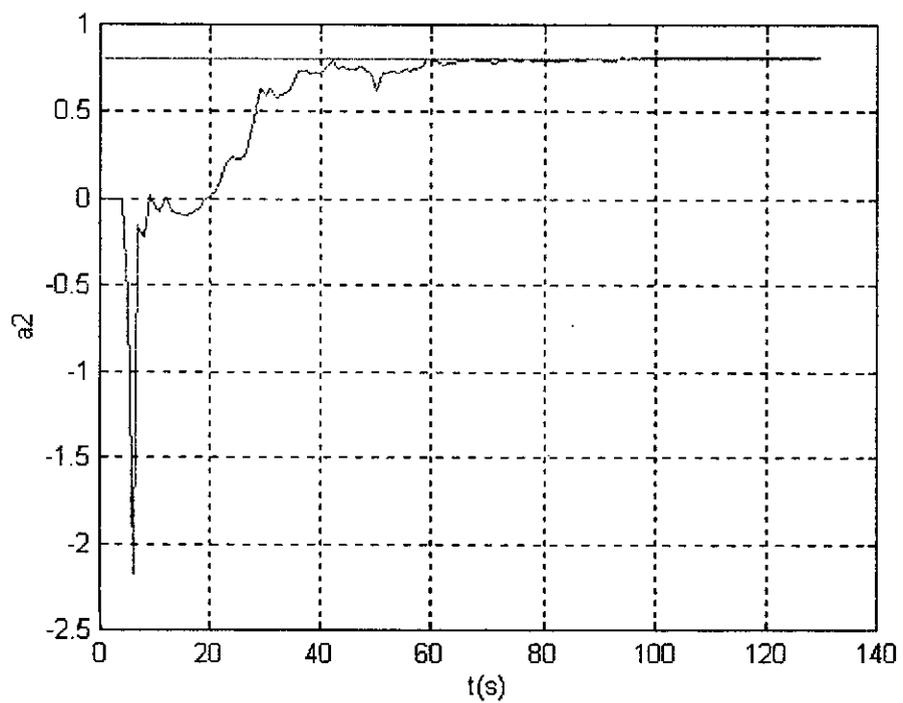
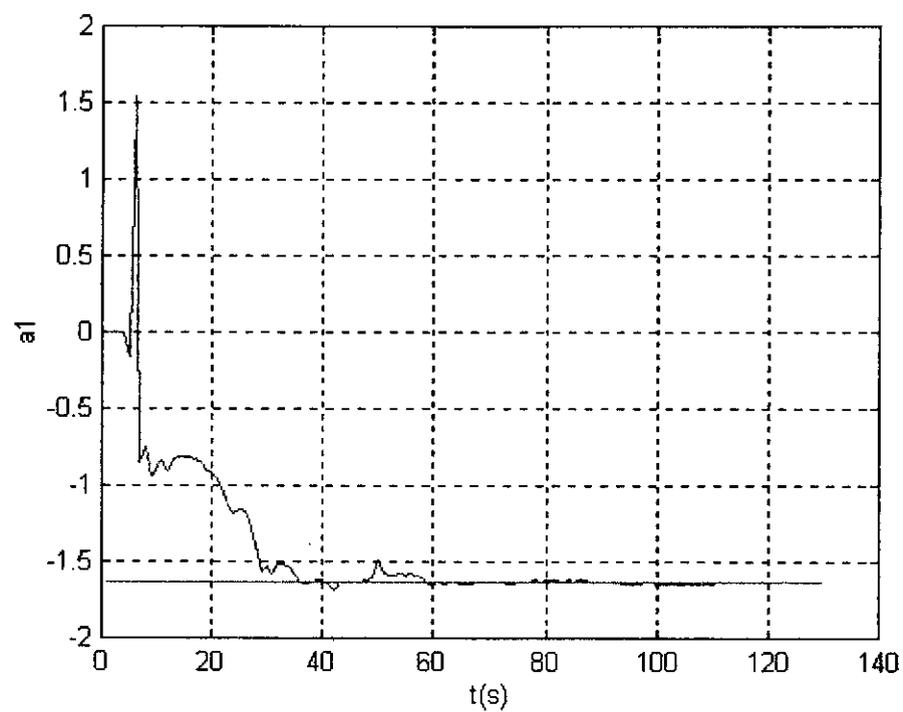


Fig (IV-21) Generation des signaux

**b) Estimation des paramètres de l'ondelette**



**Fig (IV-22) Estimation des paramètres  $a_1$  et  $a_2$**

Estimation des paramètres  $a_i$  :

La figure [ ] nous montre bien qu'en ayant seulement la trace sismique on a pu estimer les paramètres de l'ondelette, et la convergence est pratiquement parfaite (comme le montre si bien la figure [ ])

Après l'estimation des paramètres  $a_i$  de l'ondelette, nous pouvons maintenant en utilisant les données suivantes :

- le paramètre  $a_i$  de l'ondelette (estimé auparavant),
- le signal d'observation (la trace sismique),

identifier les coefficients de réflexion, et cela sera fait par les méthodes suivantes :

- par un filtrage (OTT et MEDER) .
- par un lissage à un pas .
- par un lissage à 4 pas .

c)- Deconvolution des signaux sismique

\* Méthode OTT et MEDER

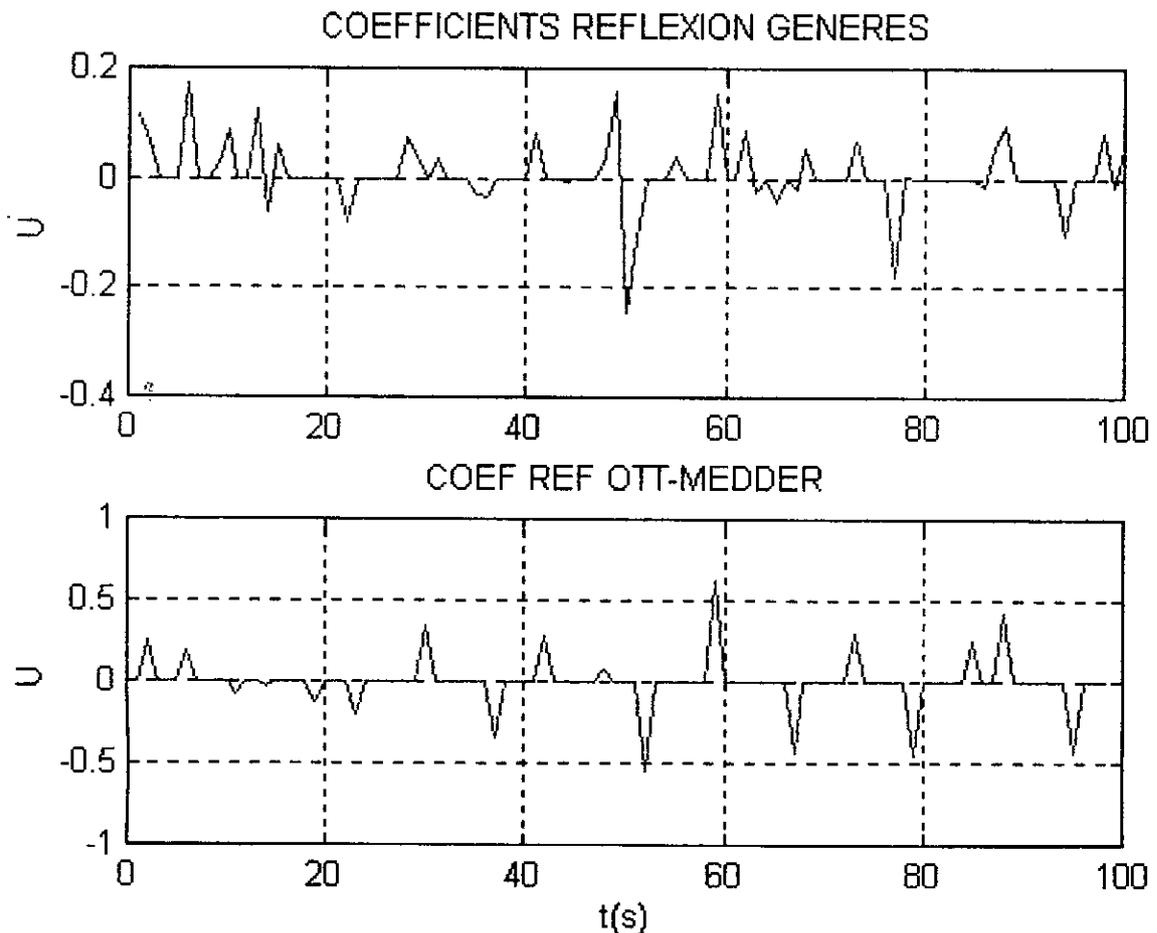
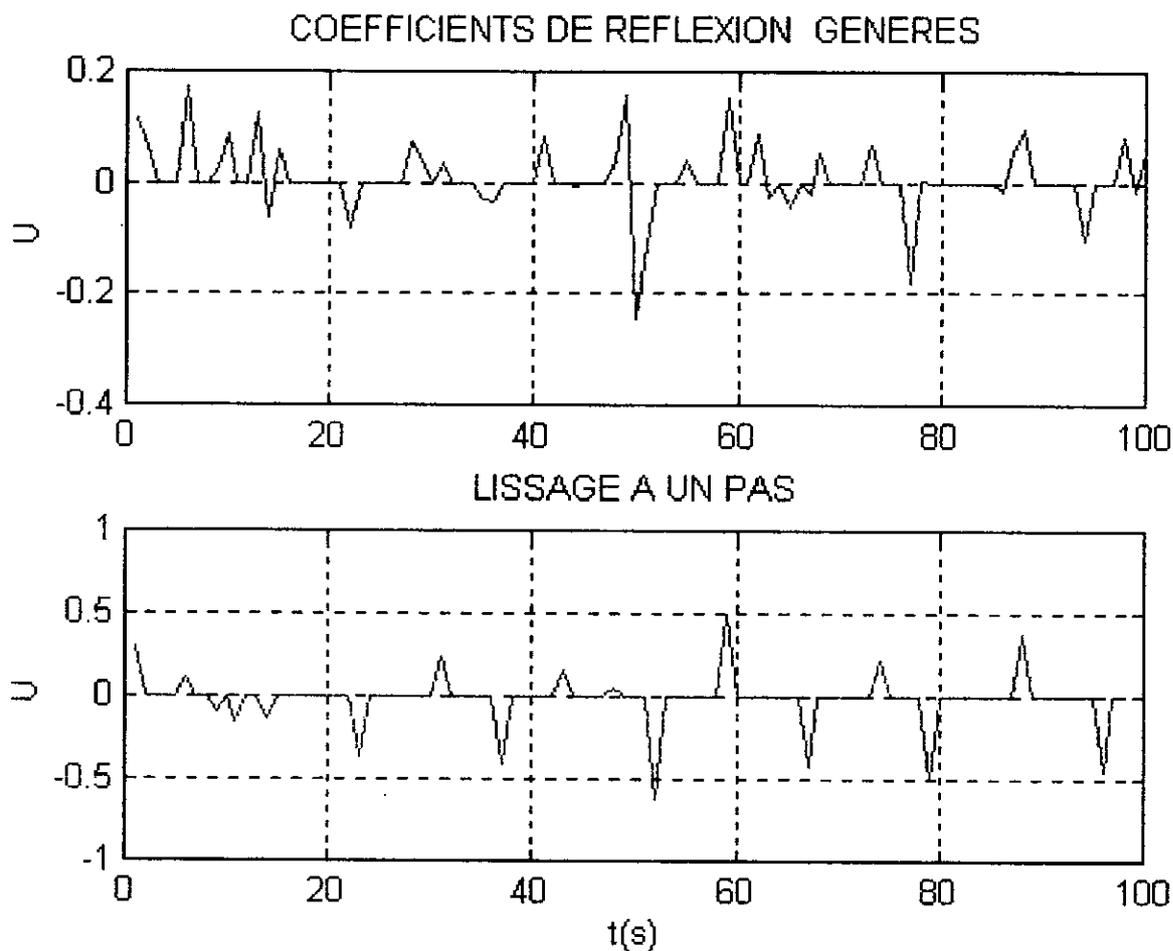


Fig (IV-23) Estimation des coefficients de réflexions (OTT et MEDER)

METHODE OTT ET MEDER :

La figure (IV-23) nous montre bien que les coefficients de réflexion estimés par cette méthode sont très grands par rapport aux coefficients de réflexion générés ( elles sont comprises entre -0,2 et 0,2 ) alors que les coefficients de réflexion estimés sont compris entre -1 et 1 .

\*\* Lissage à un pas



**Fig (IV-24) Estimation des coefficients de réflexions (Lissage a un pas)**

METHODE DU LISSAGE A 1 PAS:

L'application de cette algorithme nous donne de meilleurs résultats que ceux de OTT et MEDER , mais on remarque quelle sont toujours loins des valeurs générés.

\*\*\* Lissage à quatre pas

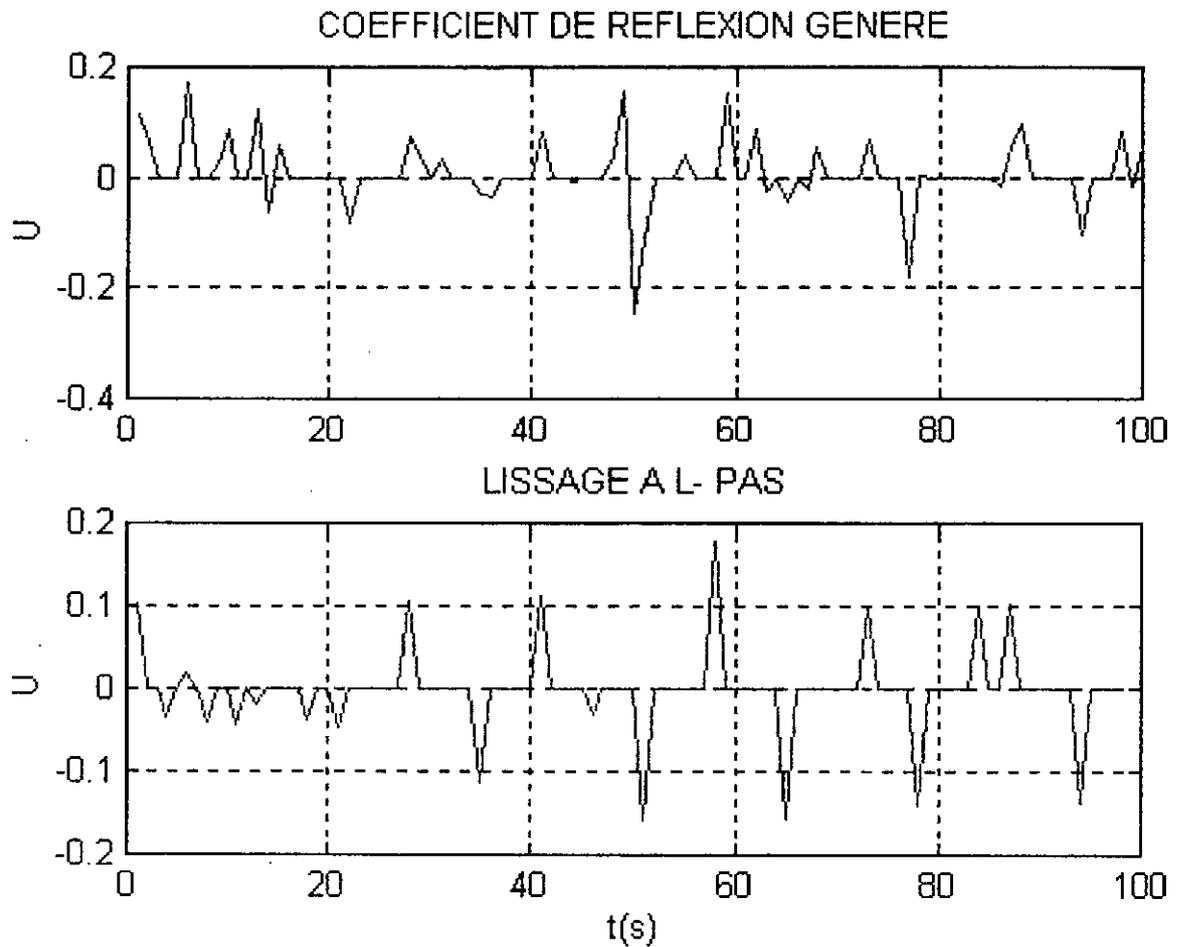


Fig (IV-25) Estimation des coefficients de réflexions (Lissage a L- pas)

METHODE DU LISSAGE A 4 PAS :

Les figures [ IV-24 et IV-25 ] nous montrent bien que cette méthode est meilleure que les précédentes. La figure (IV-25) montre que les modules des coefficients de réflexion estimés sont de même grandeur que ceux des coefficients générés , et sont tous compris entre [-0,2 et 0,2 ]. La figure (IV-26) montre que la méthode utilisant un lissage à 4 pas est meilleure que celle à 1 pas.

Tout ces résultats obtenus par simulation on été prédits au chapitre (III) avec toutes les démonstration en ANNEXE.

\*\*\* Comparaison de l'estimation des coefficients de réflexion entre le lissage à un pas et le lissage à quatre pas

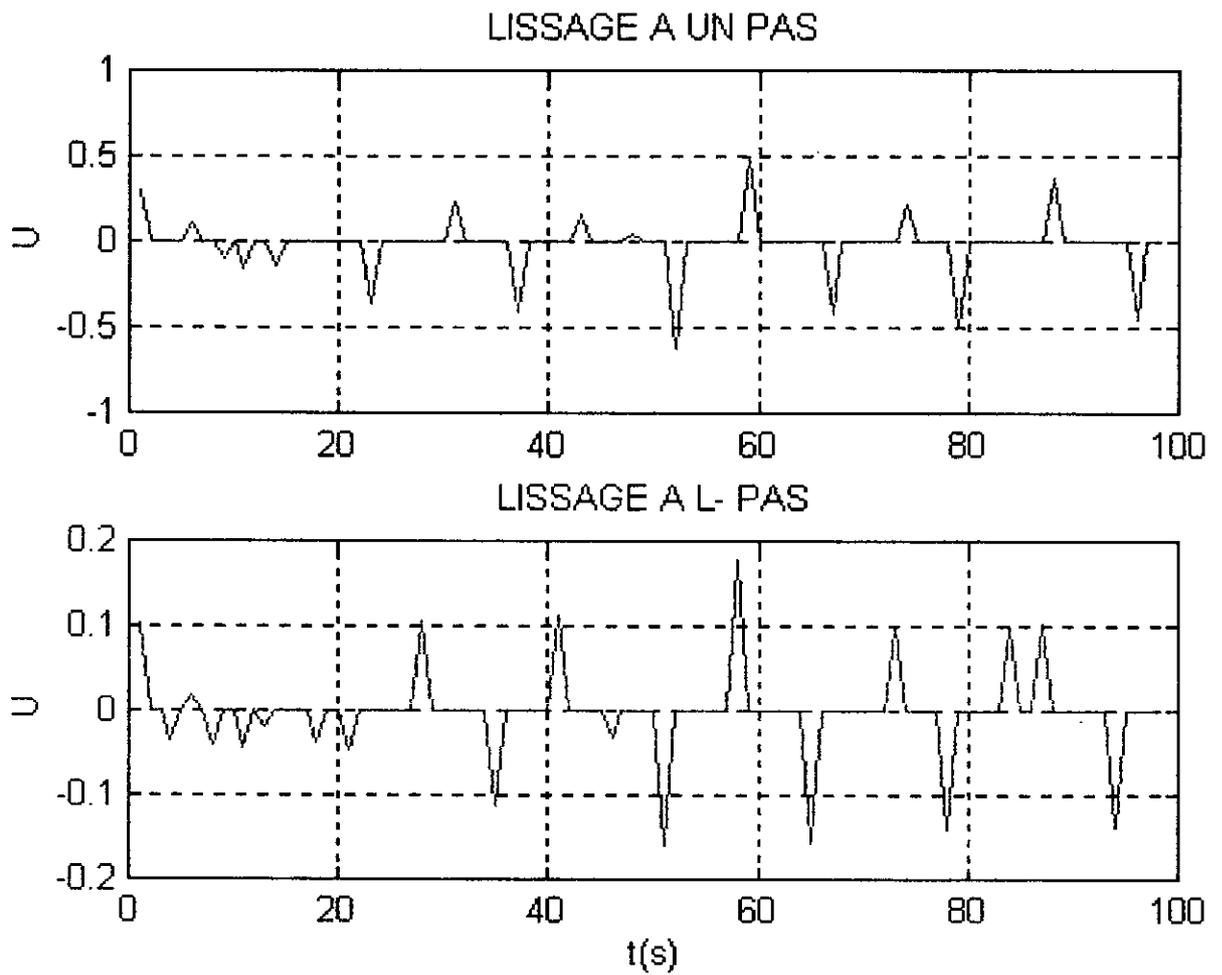


Fig (IV-26) Comparaison des estimations entre Lissage à un pas et lissage à 4-pas

## **CONCLUSION**

Dans ce paragraphe nous avons traité le problème de la réflexion sismique en générale, à savoir l'estimation de l'ondelette et des coefficients de réflexion ,en ayant comme hypothèses seulement la trace sismique et l'ordre du modèle de l'ondelette. Lors de la génération des signaux nous avons pris un modèle [ A.R ] pour l'ondelette et les coefficients de réflexion sont représentés par un bruit blanc [2] (référence de l'article de MENDEL).

Les résultats de notre étude nous montrent bien que les performances du lissage sont plus nettes que celle du filtrage [OTT et MEDER ] et plus l'on augmente le pas du lissage plus le résultat est meilleur .

Les résultats étudiés dans ce paragraphe étant le cas d'une ondelette [ A.R ] , nous proposerons pour le paragraphe qui suit l'étude des résultats d'une déconvolution pour un modèle [ A.R.M.A ] de l'ondelette , avec une approche autre que celle du minimum de variance. on utilisera l'approche du maximum de vraisemblance ( pour l'estimation des coefficients de réflexion ) associée avec l'approche de Newton (pour l'estimation de l'ondelette).

### **3-3 DECONVOLUTION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE :**

Dans cette partie nous allons voir la réponse de notre algorithme au problème de l'estimation des coefficient de réflexion par la méthode du maximum de vraisemblance  
Tout d'abord nous allons appliquer l'algorithme S.M.L.R pour l'estimation du vecteur de détection Q, ensuite les paramètres de l'ondelette seront estimée par l'algorithme de MARQUARD LEVENBURG.

## GENERATION DES SIGNAUX:

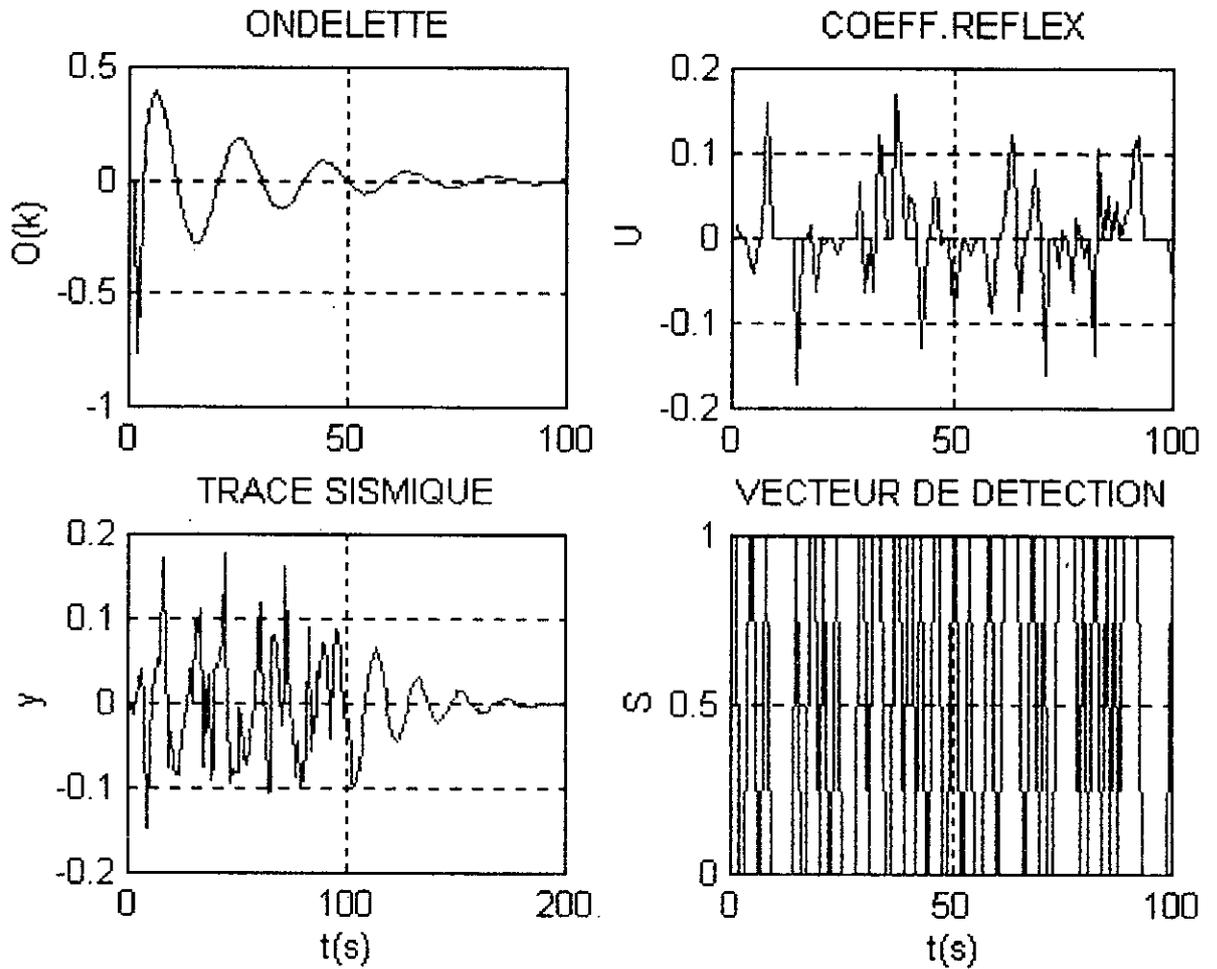


Fig (IV-27) Génération des signaux

### 3-3-1 Détecteur S.M.L.R :

Comme on a vu au chapitre III l'algorithme S.M.L.R doit être initialisé par un algorithme de seuil ( THRESHOLD ), dont le seuil est :

$$t1 = [ 1 - (1 - \lambda) \cdot \sigma_{\mu}^2 / \sigma_r^2 \cdot \lambda ] \cdot \sigma_{\mu}^2 \cdot [ \ln [ \sigma_r^2 / \sigma_{\mu}^2 - (1 - \lambda) / \lambda ] - 2 \ln(\lambda / (1 - \lambda)) ]$$

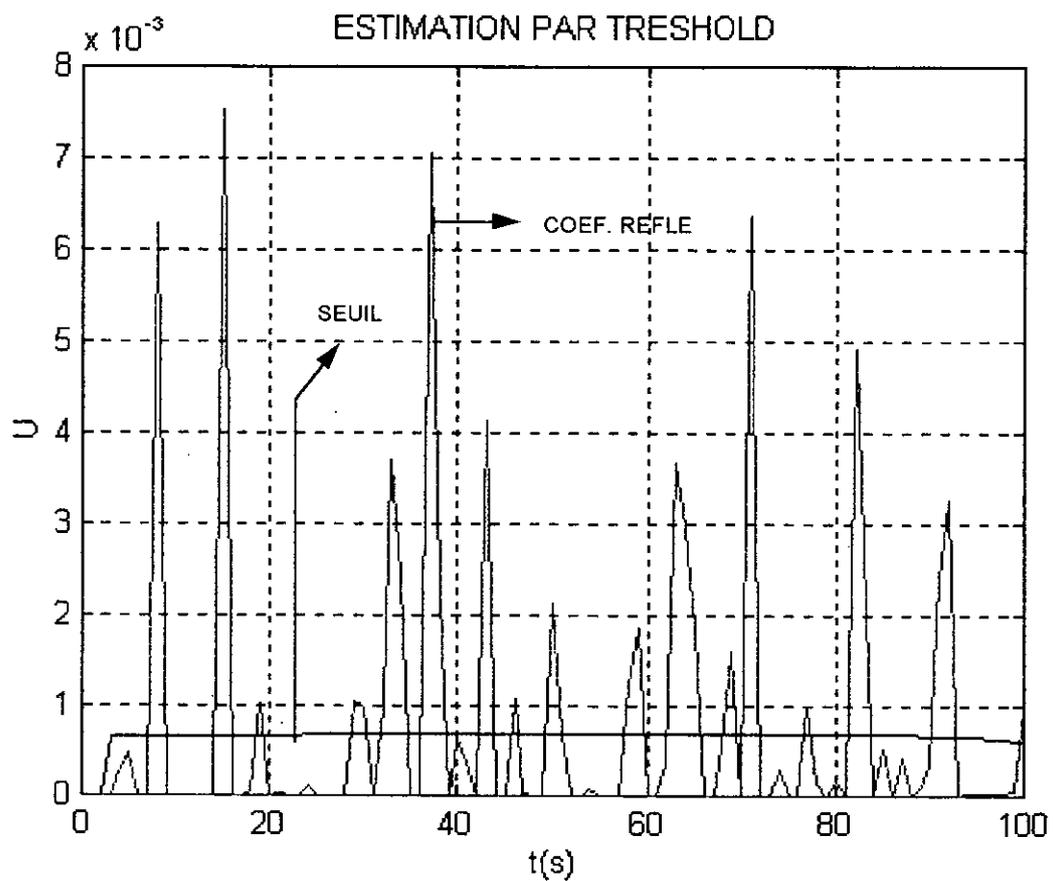
$$U = \sigma_r^2 Q_q W' \Omega^{-1} y$$

(voir annexe 5)

$$\text{avec } Q_r(i) = 1 \quad \text{si } U^2 > t1$$

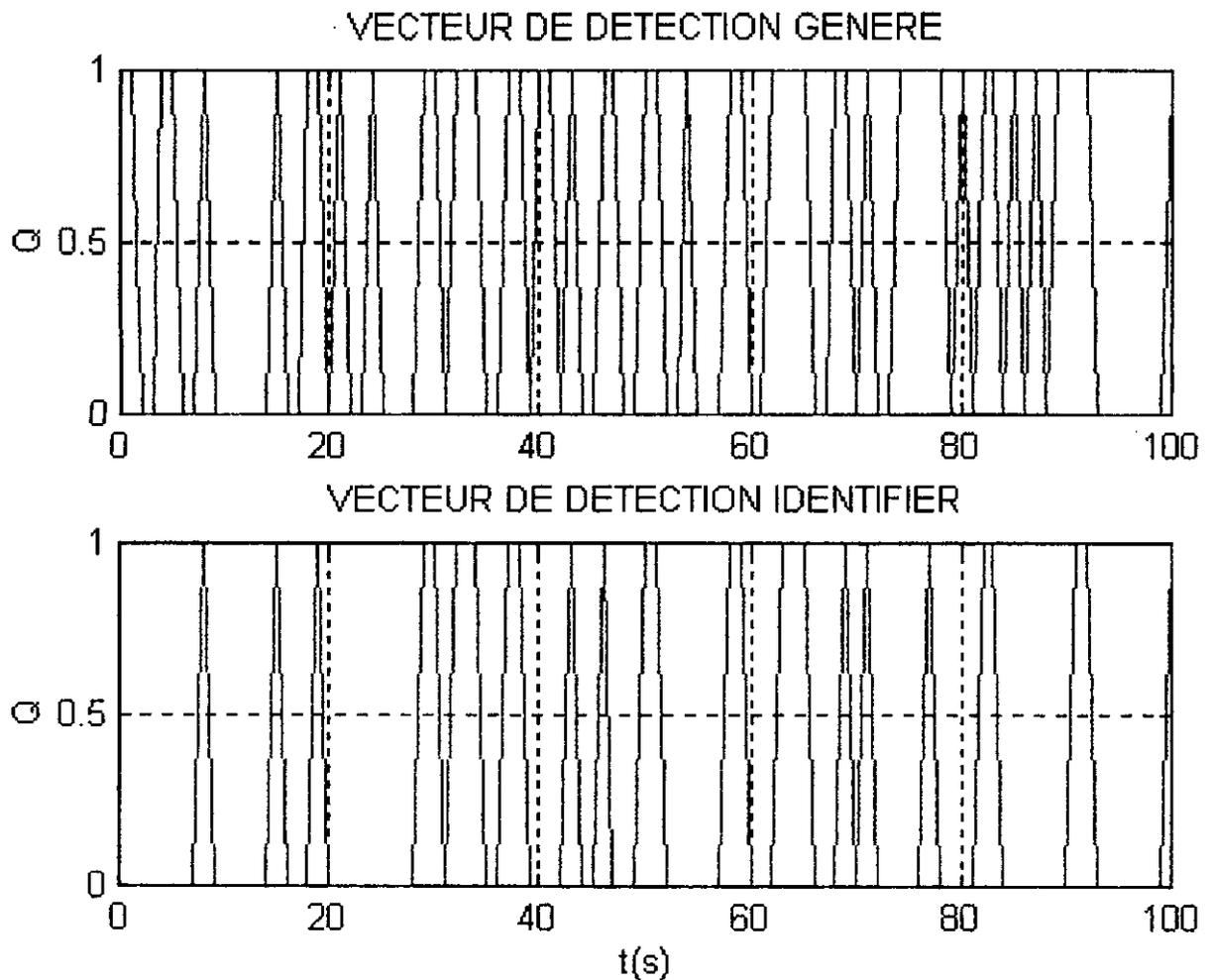
$$Q_r(i) = 0 \quad \text{si } U^2 < t1$$

$Q_r$  est le vecteur de référence initial de l'algorithme S.M.L.R .



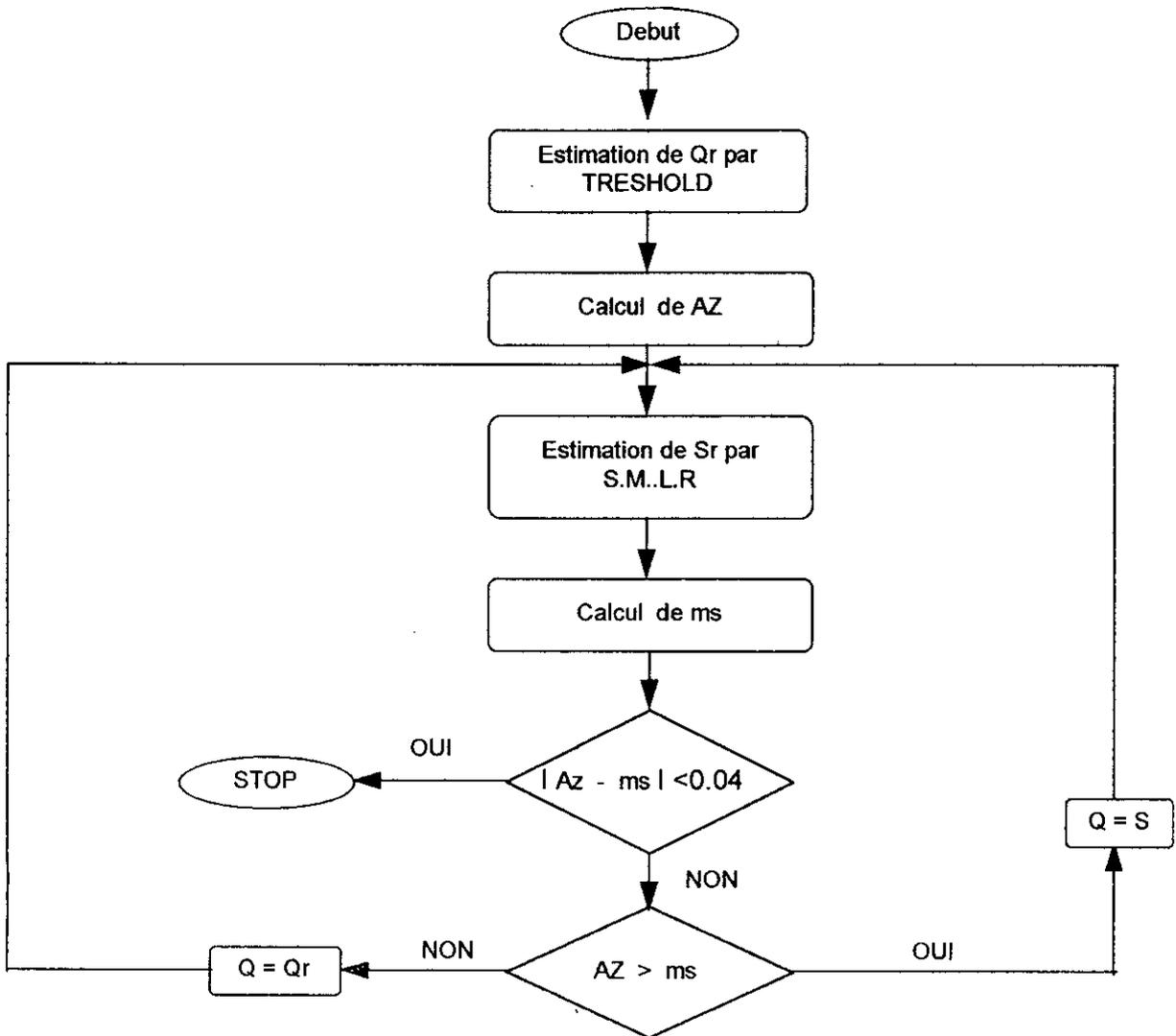
**Fig (IV-28) Détecteur du seuil**

Connaissant  $Q_r$  et en déduisant  $Q_t$ , l'algorithme S.M.L.R (organigramme du chapitre III) a été appliqué et les résultats obtenus sont représentés par les figures ci-dessous :



**Fig (IV-29) Estimation du vecteur de d détection**

**Commentaire :** Après l'exécution de l'algorithme S.M.L.R on est arriver à détecter les séquence de bernouli qui diffère de la séquence générée de (21) locations  
 Il faut noter que le test de comparaison des coût d'erreur d'événement a été utilise pour chaque itération , comme l'indique l'organigramme ci dessous



**Fig (IV-30) Organigramme du test de comparaison du coût d'erreur**

### 3-3-2 Estimation des parametre de l'ondelette:

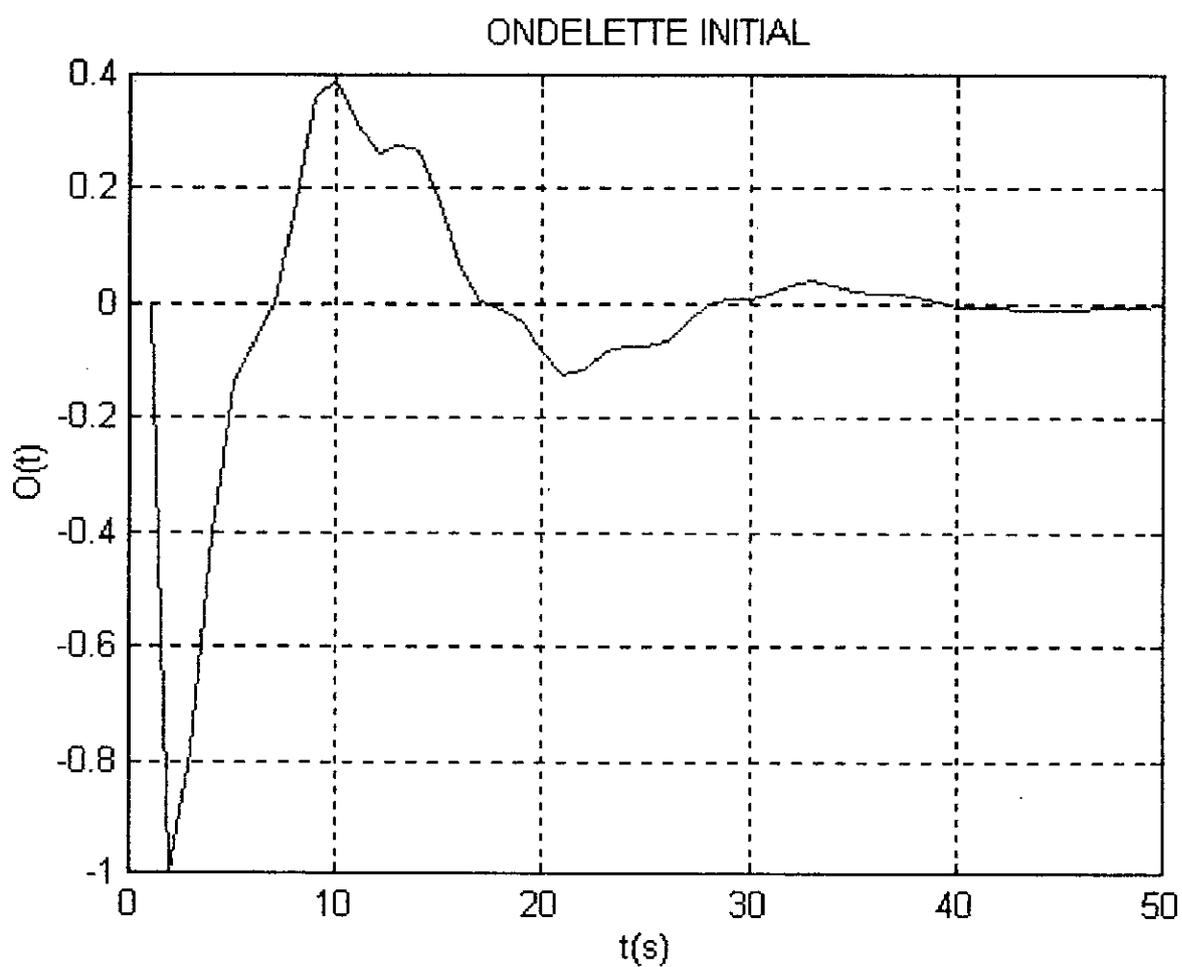
Suite a l'étude théorique de l'algorithme de MARQUARD-LEVENBURG vue au chapitre III les conditions initiales choisis pour la simulation sont :

- filtre de KALMAN:

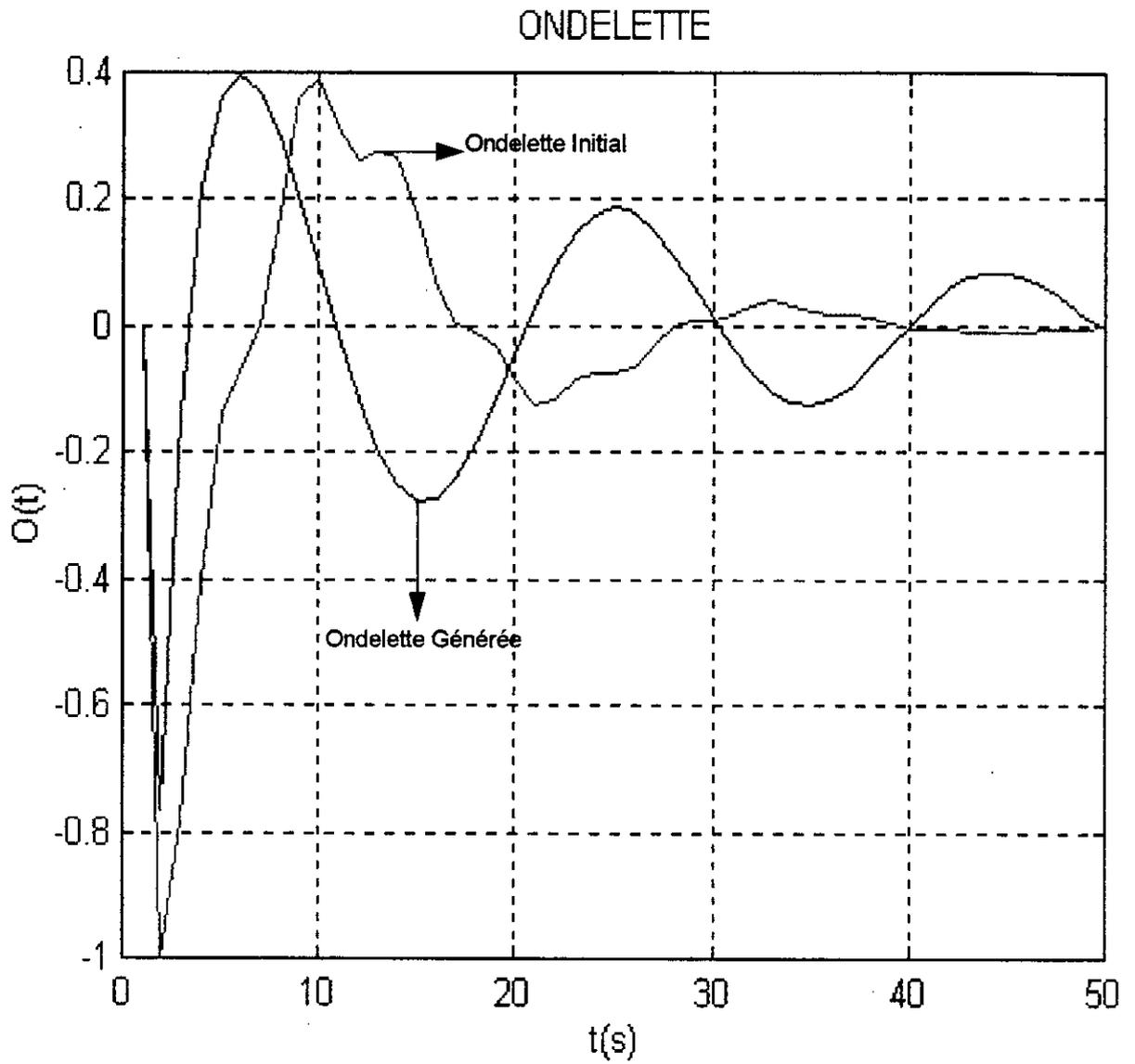
$$P = 100.I ; X(0) = 0$$

et les dérivées premiere et seconde nul pour le du gradient et du Hissien

La figure ci-dessous représente l'ondelette initial et l'ondelette réelle.

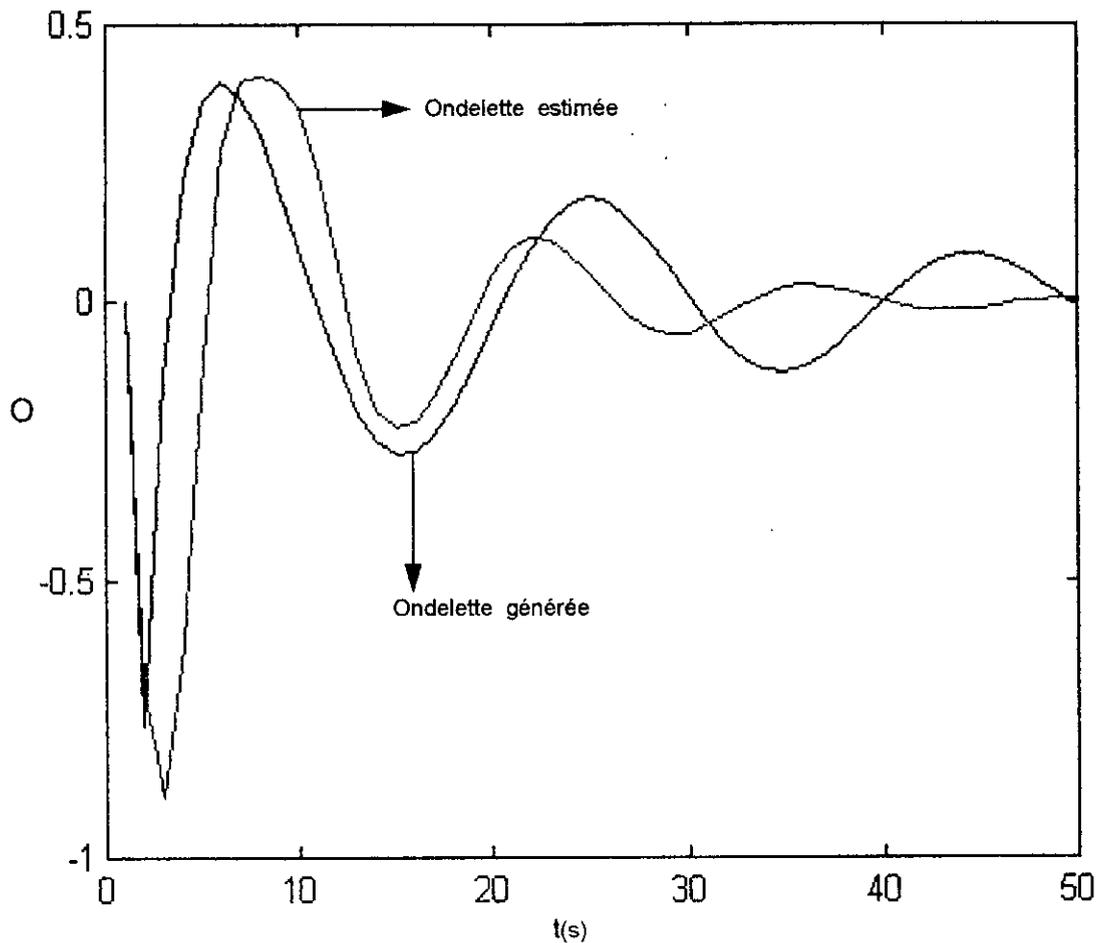


**Fig (IV-31) Ondelette initial**



**Fig (IV-32) Ondelette [Généré et initial ]**

Les résultats de l'estimation de l'ondelette par l'algorithme non-linéaire de MARQUARD-LEVENBERG est présenté par la figure qui suit



**Fig (IV-33) Ondelette estimée**

On note que l'ondelette estimée approche  $O(t)$  (l'ondelette Générée) par la forme

**CONCLUSION:**

Les algorithmes utilisés dans ce chapitre nous ont donné les résultats escomptés. En effet, dans le cas où le rapport signal sur bruit est élevé la méthode d'inversion, qui utilise le principe des moindres carrés, est efficace et relativement peu complexe.

Dans le cas où l'ondelette est inconnue la déconvolution prédictive basée sur l'autocorrélation du sismogramme nous a permis d'estimer les coefficients de réflexion en ayant seulement la trace sismique. Pour se rapprocher du cas réel, le choix d'une ondelette non stationnaire est justifié, alors la méthode d'estimation adoptée, en utilisant le filtre de KALMAN, nous a donné des résultats appréciables.

Dans tout ce qui a été vu précédemment les lois de répartition statistique du bruit et du sismogramme sont supposées inconnues; dans le cas où les processus stochastiques sont connus, et le système est représenté par un modèle A.R.M.A, on a vu que la méthode du maximum de vraisemblance peut donner de bons résultats.

CONFESSION

GENERALE

## CONCLUSION

Dans la prospection pétrolière, une information majeure est de déterminer la valeur des coefficients de réflexion de chaque interface, pour déterminer la profondeur et la nature des couches terrestres.

Dans cette thèse, notre travail a consisté à étudier et à faire une synthèse des principaux algorithmes d'estimation des coefficients de réflexion.

Deux types de modèle de représentation de notre système ont été utilisés, la première en tenant compte seulement des équations de dispersion d'onde, la deuxième en faisant certaines simplifications pour aboutir à un problème de déconvolution.

La première méthode étudiée est l'inversion, dont le modèle de représentation est déduit des équations physiques du système. Les résultats de simulation obtenus montrent que la méthode fournit en plus des coefficients désirés des valeurs superflues. Pour contourner ce problème on a introduit une correction concernant le coût de notre critère, nous sommes alors arrivés à une meilleure estimation des coefficients de réflexion. Nous rappelons que ces résultats sont obtenus en ayant comme hypothèses que l'ondelette et la trace sismique sont connues a priori. Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on est amené à utiliser la déconvolution prédictive, qui nous a donné de bons résultats. Dans cet algorithme trois étapes de calcul sont nécessaires: le calcul des estimés de l'autocorrelation à partir de données, la résolution d'un ensemble d'équations simultanées et l'application de l'opérateur obtenue aux données pour obtenir la trace déconvoluée. L'inconvénient majeur de cet algorithme est qu'il ne s'applique qu'à des données stationnaires. Pour remédier à ce problème de stationnarité, on a utilisé un filtre de KALMAN pour l'estimation de l'ondelette dans le cas où cette dernière change lors du déroulement de l'expérience, et on a utilisé une représentation A.R. de l'ondelette pour éliminer le problème de la non-linéarité de notre processus, et enfin on a estimé les coefficients de réflexion. L'application de cet algorithme nous a donné des résultats appréciables.

Pour résoudre le problème de la non-linéarité de notre système nous avons introduit un algorithme général basé sur l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance pour le cas où l'ondelette représente un modèle A.R.M.A. Il faut noter que lors de la simulation plusieurs problèmes ont surgi tels que : phase non-minimale de l'ondelette, ondelette non identifiable et non stable, et on peut rencontrer lors du déroulement de l'algorithme de MARQUARDT LEVENBERG et du S.M.LR des minima locaux qui ne vont pas permettre d'aboutir aux résultats escomptés. Par conséquent, la déconvolution des signaux sismiques dans le cas où le système est non linéaire (A.R.M.A) et non stationnaire, est loin d'être clos. D'autres approches plus modernes dans l'identification et l'estimation des signaux peuvent être utilisées pour la déconvolution des signaux sismiques. Parmi ces méthodes on peut citer l'utilisation des réseaux de neurone [27] qui ont reçu une attention particulière ces dernières années.

Les techniques de déconvolution et d'inversion étudiées dans cette thèse ne sont pas appliquées seulement en réflexion sismique, mais peuvent être utilisées pour n'importe quel phénomène physique qui fait appel à l'identification.

En perspectives, on peut proposer l'étude des méthodes 2-D et 3-D pour l'inversion des signaux sismiques. Ces méthodes utilisent les corrélations qui existent entre plusieurs traces pour améliorer la détection. Elles s'apparentent à l'analyse multicanaux.

# ANNEXE

**CALCUL DU COUT J(θ) POUR LA METHODE DE L'INVERSION****1-Demonstration de la formule de J(θ)**

$$\text{On a } Z - \hat{Z} = D' \lambda$$

$$DZ - D\hat{Z} = DD' \lambda$$

$$D\hat{Z} = 0$$

$$\Rightarrow DZ = DD' \lambda \quad \Rightarrow \lambda = (D \cdot D')^{-1} DZ$$

$$J(\theta) = (Z - \hat{Z}) \cdot (Z - \hat{Z})$$

$$= \lambda^2 \cdot D \cdot D' \lambda$$

$$= Z' \cdot D' \cdot ((D \cdot D')^{-1})' \cdot DD' \cdot (D \cdot D')^{-1} DZ$$

$$= (Z' \cdot D' \cdot (D' D)) \cdot DZ$$

On posant  $X = (Z' \cdot D' \cdot (D' D))'$  et  $U = DZ$  on auras

$$J(\theta) = X' U$$

Car  $U = DZ$  et  $(D \cdot D') X = U \Rightarrow X (D \cdot D')^{-1} U$

**2-Demonstration de la formule du gradient de J(θ)**

$$\text{On a } J(\theta) = X' U$$

$$J'(\theta) = (X')' U + X' U'$$

Dans le cas unidimensionnel (sans perte de généralité)

$$* j = X U \Rightarrow j' = X' \cdot U + X \cdot U'$$

$$* U = DZ \Rightarrow U' = D' Z$$

$$* D^2 \cdot X = U, (X = D^{-2} \cdot U) \Rightarrow 2 DD' \cdot X = D^2 \cdot X' = U'$$

$$\Rightarrow X' = D^{-2} \cdot U' - 2 D^{-1} \cdot D' \cdot X$$

$$\Rightarrow X' \cdot U = D^{-2} \cdot U' \cdot U - 2 D^{-1} \cdot D' \cdot X \cdot U$$

$$= X' \cdot U + D^{-2} \cdot U' \cdot U - 2 D^{-1} \cdot D' \cdot X \cdot U$$

$$= X \cdot U' - 2 D \cdot D' \cdot X^2$$

$$J' = X \cdot U' - 2 D \cdot D' \cdot X^2 + X \cdot U' = 2 X \cdot U' - 2 D \cdot D' \cdot X^2$$

$$= 2 X \cdot D' \cdot Z - 2 D \cdot D' \cdot X^2$$

Ce qui donne

$$J'(\theta) = X \cdot D' \cdot (Z - D' \cdot X)$$

**ESTIMATION DES COEF DE REFLEXION ET LA MATRICE DE COVARIANCE  
POUR LE LISAGE**

**A]** Notre but est de calculer l'estimation du vecteur  $U$  (coefficient de réflexion) (1) et l'erreur de la covariance (2)

$$\hat{U}(k/k+1) = Q G' P^{-1}(k+1/k) K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) \quad 1$$

$$\Psi_U(k/k+1) = Q - Q G' H' [H P(k+1/k) H' + R]^{-1} H G Q \quad 2$$

a) En démarrnant des équations du modèle d'état III-8 et III-9 on auras alors

$$G \hat{U}(k/k+1) = \hat{X}(k+1/k+1) - \Phi \hat{X}(k+1/k+1) \quad 3$$

en appliquant le résultats de MEDITCH [11] on auras

$$\hat{X}(k/k+1) = \hat{X}(k/k) + A(k) K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) \quad 4$$

avec

$$A(k) = P(k/k) \Phi'(k+1,k) P^{-1}(k+1/k) \quad 5$$

En combinant et substituons les équations 4, III-11, 3 et III-10

$$\begin{aligned} G \hat{U}(k/k+1) &= \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) \\ &\quad - \Phi [\hat{X}(k/k) + A(k) K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k)] \\ &= \Phi \hat{X}(k/k) + [I - \Phi A(k)] K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) - \Phi \hat{X}(k/k) \\ &= [I - \Phi A(k)] K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) \end{aligned} \quad 6$$

en utilisant l'équation 5

$$\Phi A(k) = \Phi P(k/k) \Phi' P^{-1}(k+1/k) \quad 7$$

En utilisant l'équation III-12

$$\Phi P(k/k) \Phi' = P(k+1/k) - G Q G' \quad 8$$

$$\Phi A(k) = I - G Q G' P^{-1}(k+1/k) \quad 9$$

$$I - \Phi A(k) = G Q G' P^{-1}(k+1/k) \quad 10$$

En reprenant l'équation 10 dans l'équation 6

$$\hat{U}(k/k+1) = Q G' P^{-1}(k+1/k) K(k+1) \tilde{Y}(k+1/k) \quad 11$$

b) Calcul de l'erreur de la covariance (2)

$$\Psi_U(k/k+1) \cong E \{ [\hat{U}(k/k+1) - E\{\hat{U}(k/k+1)\}] [\hat{U}(k/k+1) - E\{\hat{U}(k/k+1)\}]' \} \quad 12$$

$\tilde{Y}(k+1/k)$  est un bruit blanc de moyenne nul

$$E\{\tilde{Y}(k+1/k) \tilde{Y}'(k+1/k)\} = H P(k+1/k) H' + R \quad 13$$

de plus

$$E\{\hat{U}(k/k+1)\} = 0 \text{ du fait que } E\{U(k) - E\{\hat{U}(k/k+1)\}\} = 0$$

$$\begin{aligned} \Psi_U(k/k+1) &= E\{\hat{U}(k/k+1) - \hat{U}'(k/k+1)\} \\ &= E\{[U(k) - \hat{U}(k/k+1)][U(k) - \hat{U}(k/k+1)]'\} \\ &= Q - E\{U(k) \hat{U}(k/k+1)\} - E\{\hat{U}(k/k+1) U'(k)\} \\ &\quad + E\{\hat{U}(k/k+1) \hat{U}'(k/k+1)\} \end{aligned} \quad 14$$

En développant les équations 14 avec les équations 11 [12]

$$E\{\hat{U}(k/k+1) \hat{U}'(k/k+1)\} = Q G' H' [H P(k+1/k) H' + R]^{-1} H G Q \quad 15$$

$$E\{U(k) \tilde{Y}'(k+1/k)\} = Q G' H' \quad 16$$

En utilisant les équation

$$Y(k+1/k) = H \hat{X}(k+1/k) + v(k+1) \quad 17$$

$$\hat{X}(k+1/k) = \Phi \hat{X}(k/k) + G U(k) \quad 18$$

$$\tilde{Y}(k+1/k) = H \Phi \hat{X}(k/k) + H G U(k) + v(k+1) \quad 19$$

De équation 18 et en prenant  $k = k-1$  on auras

$$\begin{aligned} \hat{X}(k/k) &= [I - K(k) H(k)] \Phi(k, k-1) \hat{X}(k-1/k-1) \\ &\quad + [I - K(k) H(k)] G(k-1, k) U(k-1) - K(k) v(k) \end{aligned} \quad 20$$

en remarque que  $\hat{X}'(k/k)$  dépend de  $U(k-1)$  d'où

$$E\{U(k) \tilde{Y}'(k+1/k)\} = E\{U(k) \hat{X}'(k/k)\} (H\Phi)' + QG'H\gamma' \\ + E\{U(k) v'(k+1)\} = QG'H' \quad 21$$

pour lesquelles les équations 16, 1 et 21 nous trouvons alors

$$E\{U(k) \hat{U}'(k/k+1)\} = QG'H'K'(k+1)P^{-1}(k+1/k)GQ\gamma' \quad 22$$

$$E\{U(k) \hat{U}'(k/k+1)\} = QG'H'[HP(k+1/k)H'+R]^{-1}HGQ \quad 23$$

en reprenant les équations 15, 23 et 14 on obtient

$$\Psi_U(k/k+1) = Q - QG'H'[HP(k+1/k)H'+R]^{-1}HGQ$$

**B]** Pour la démonstration qui vient par la suite c'est une généralisation des résultats trouvés auparavant au lieu que lissage soit à 1 pas il va être à  $l$  pas

$$\Psi_U(k/k+l) = E\{[\hat{U}(k/k+l) - E\{\hat{U}(k/k+l)\}][\hat{U}(k/k+l) - E\{\hat{U}(k/k+l)\}]'\}$$

$$\hat{U}(k/k+l) = U(k) - \hat{U}(k/k+l)$$

$$\hat{U}(k/k+l) = \hat{U}(k/k+l-1)N_U(k/k+l)\tilde{Y}(k+1/k+l-1)$$

$$N_U(k/k+1) = GQ'P^{-1}(k+1/k)K(k+1)$$

$$N_U(k/k+l) = GQ'P^{-1}(k+1/k) \left[ \prod_{i=k+1}^{k+l-1} A(i) \right] K(k+l)$$

$$\Psi_U(k/k+l) = \Psi_U(k/k+l-1) - N_U(k/k+l)[HP(k+1/k+l-1)H'+R]N_U'(k/k+l)$$

$$\Psi_U(k/k) \cong Q$$

$$\prod_{i=a}^b A(i) = A(a)A(a+1)\dots A(b).$$

$$G\hat{U}(k/k+l) = \hat{X}(k+1/k+l)\Phi\hat{X}(k/k+l)$$

$$N_U(k/k+1) = Q(k)G'(k+1,k)H'(k+1)[H(k+1)P(k+1)+H'(k+1)R(k+1)]^{-1}$$

$$D(k,l) = D(k,l-1)[I - K(k+l-1)H(k+l-1)]' \Phi' (k+l, k+l-1)$$

$$D(k,l) = Q(k) G' (k)$$

$$N_U(k/k+l) = Q G' P^{-1} (k+1/k) \left[ \prod_{i=k+1}^{k+l-2} P(i/i) \right] \phi' (i+1) P^{-1} (i+1/i)$$

$$A(k+l-1) K(k+l)$$

$$A(k+l-1) K(k+l) = P(k+l-1/k+l-1) \Phi' (k+l, k+l-1) \\ H'(k+l) [H(k+l)P(k+l/k+l-1) H'(k+l) + R(k+l)]^{-1}$$

$$[I - K(k+1) H(k+1)]' = P^{-1} (k+1/k) P (k+1/k+1)$$

$$N_U(k/k+l) = Q G' \left\{ \prod_{i=1}^{l-1} [I - K(k+i) H(k+i)]' \right\}$$

$$H'(k+l) [H(k+l) P(k+l/k+l-1) H'(k+l) + R(k+l)]^{-1}$$

$$D(k,l) = Q G' \prod_{i=1}^{l-1} [I - K(k+i) H(k+i)]' \Phi' (k+i+1, k+i)$$

$$N_U(k/k+l) = D(k,l) H'(k+l) [H(k+l) P(k+l/k+l-1) H'(k+l) + R(k+l)]^{-1}$$

$$X(k+1) \Phi(k+1,k) X(k) + G(k+1,k) U(k+1)$$

$$N_U(l) = D(l) H' (H \bar{P} H' + R)^{-1}$$

$$D(l) = D(l-1) [I - \bar{K}H]' \Phi', \quad D(1) = QG',$$

$$\hat{U}(k/k+l) = \sum_{J=1}^l N_U(k/k+J) \tilde{Y}(k+J/k+J-1)$$

$$\hat{U}(k/k+2) = N_U(k/k+1) \tilde{Y}(k+1/k) + N_U(k/k+2) \tilde{Y}(k+2/k+1)$$

$$\hat{U}(k/k+l) = 0 \quad \text{pour } l=1,2, \dots, J$$

$$\hat{U}(k/k+J+1) \neq 0$$

**DETECTEUR DE SEUIL**

$l(S / y) \propto P(Y / S) \Pr(S)$

Ce type de détection est basé sur la comparaison de  $\hat{U}^2(k/N)$  (estimateur à minimum de variance) à un certain seuil  $t(k/N)$ , les données disponibles sont traitées une seule fois et le détecteur doit converger vers un estimateur de la séquence de Bernoulli  $Q$  dit  $\hat{Q}_{TD}$ .

$$\hat{U}(k/N) = V(k, k) U(k) + e(k) \quad (1)$$

Sur ceci, la fonction de vraisemblance pour la détection de la séquence de Bernoulli est:

$$L(q, k) / \hat{U}(k/N) \propto P(\hat{U}(k/N) / Q(k)) \Pr(Q(k)) \quad (2)$$

Il s'agit d'une fonction de densité Gaussienne telle que :

$$P(\hat{U}(k/N) / Q(k)) = (2\pi \Omega_{Q(k)})^{-\frac{1}{2}} \exp(-\hat{U}^2(k/N) / 2 \Omega_{Q(k)}) \quad (3)$$

Avec :

$$\Omega_{Q(k)} = E(\hat{U}^2(k/N) / Q(k)) \quad (4)$$

$Q(k)$  étant une valeur digitale, le rapport de vraisemblance inconditionnel s'écrit :

$$A(k) = \frac{P(Q(k) = 1 / \hat{U}(k/N))}{P(Q(k) = 0 / \hat{U}(k/N))} = \frac{P(\hat{U}(k/N) / Q(k) = 1) \Pr(Q(k) = 1)}{P(\hat{U}(k/N) / Q(k) = 0) \Pr(Q(k) = 0)} \quad (5)$$

Le détecteur de seuil à maximum de vraisemblance inconditionnel s'écrit:

$$\hat{U}^2(k/N) \dots\dots\dots t(k/N) \quad (6)$$

Calcul du seuil  $t(k/N)$  :

Sachant que :

$$\log \frac{\Pr(Q(k) = 1)}{\Pr(Q(k) = 0)} = \log \frac{\lambda}{1 - \lambda} \quad (7)$$

Et:

$$\log \left( \frac{P(\hat{U}(k/N) / Q(k) = 1)}{P(\hat{U}(k/N) / Q(k) = 0)} \right) = \log \frac{(2\pi \Omega_1(k))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\hat{U}^2(k/N) / 2 \Omega_1(k))}{(2\pi \Omega_0(k))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\hat{U}(k/N) / \Omega_0(k))}$$

D'où :

$$\log \left( \frac{P(\hat{U}(k/N) / Q(k)=1)}{P(\hat{U}(k/N) / Q(k)=0)} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\Omega_0(k)}{\Omega_1(k)} + \frac{1}{2} \hat{U}^2(k/N) \left( \frac{1}{\Omega_0(k)} - \frac{1}{\Omega_1(k)} \right) \quad (8)$$

Avec :

$$\Omega_0(k) = \Omega_{Q(k)=0} \quad ; \quad \Omega_1(k) = \Omega_{Q(k)=1}$$

En remplaçant les equation (7) et (8) dans l'expression  $\log A(k)$  où  $A(k)$  est donnée par l'équation (5), alors :

$$\log A(k) = \frac{1}{2} \log \frac{\Omega_0(k)}{\Omega_1(k)} + \frac{1}{2} \hat{U}^2(k/N) \left( \frac{1}{\Omega_0(k)} - \frac{1}{\Omega_1(k)} \right) + \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\log A(k) = \frac{1}{2} \hat{U}^2(k/N) \left( \frac{\Omega_1(k) - \Omega_0(k)}{\Omega_1(k)\Omega_0(k)} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{\Omega_0(k)}{\Omega_1(k)} + \log \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (9)$$

La règle de détection par le maximum de vraisemblance inconditionnelle est :

$$\log A(k) \quad 0$$

De cette équation , il en résulte que :

$$\hat{U}^2(k/N) \left( \frac{\Omega_0(k)\Omega_0(k)}{\Omega_1(k) - \Omega_0(k)} \right) \log \left( \frac{\Omega_0(k)}{\Omega_1(k)} \right) + 2 \log \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \quad (11)$$

Ceci représente un test de seuil sur  $\hat{U}^2(k/N)$  , pour son évaluation , il est nécessaire de calculer

$\Omega_{Q(k)}$

A partir de l'équation (4) :

$$\Omega_{Q(k)} = \left( 1 - \frac{\sigma^2 U(k/N)}{\lambda \sigma_\sigma^2} \right)^2 \sigma_r^2 U + \left( 1 - \frac{\sigma^2 U(k/N)}{\lambda \sigma_\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 U(k/N) \quad (12)$$

Substituant pour  $\hat{U}(k/N)$  dans l'équation 4 en utilisant l'équation (1) :

$$\Omega_{Q(k)} = w^2(k, k) \sigma_r^2 U + E(e^2(k)) \quad (13)$$

Cette équation contient deux inconnues  $w(k,k)$  et  $E(e^2(k))$  .

La soustraction de l'équation (1) de  $U(k)$  donne :

$$\tilde{U}(k/N) = (1 - V(k, k)) U(k) - e(k) \quad (14)$$

La soustraction de l'équation (1) de  $U(k)$  donne :

$$E(1 - V(k, k) U(k) - e(k)) (V(k, k) U(k) + e(k)) = 0 \quad (15)$$

d'où :

$$(1 - V(k, k)) V(k, k) \lambda \sigma_r^2 - E(e^2(k)) = 0 \quad (16)$$

D'après l'équation (14), il se voit que :

$$\begin{aligned} E \tilde{U}^2(k/N) &= \sigma_{U(k/N)}^2 = E(((1 - V(k, k)) U(k) - e(k))^2) \\ \sigma_{U(k/N)}^2 &= \lambda \sigma_r^2 + E(e^2(k)) \end{aligned} \quad (17)$$

La somme des deux équations (16) et (17) donne :

$$V(k, k) = 1 - \frac{\sigma_{U(k/N)}^2}{\lambda \sigma_r^2} \quad (18)$$

En substituant cette équation dans l'équation (16), on trouve :

$$E(e^2(k)) = \sigma_{U(k/N)}^2 \left( 1 - \frac{\sigma_{U(k/N)}^2}{\lambda \sigma_r^2} \right) \quad (19)$$

Finalement l'expression de  $\Omega_{Q(k)}$  est obtenue en remplaçant les équation (18) et (19) dans l'équation (13):

Les quantités de l'équation (11) sont calculés en utilisant l'expression (12):

$$\Omega_1(k) - \Omega_0(k) = \left( 1 - \frac{\sigma_{U(k/N)}^2}{\lambda \sigma_r^2} \right)^2 \sigma_r^2 \quad (20)$$

$$\frac{\Omega_0(k) - \Omega_1(k)}{\Omega_1(k) \Omega_0(k)} = \left( 1 - \frac{(1 - \lambda) \sigma_{U(k/N)}^2}{\lambda \sigma_r^2} \right) \sigma_{U(k/N)}^2 \quad (21)$$

$$\frac{\Omega_1(k)}{\Omega_0(k)} = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{U(k/N)}^2} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (22)$$

Substituant les équation (21) et (22) dans le terme droit de l'équation (11) pour obtenir l'expression de  $t(k/N)$  :

$$\hat{U}^2(k/N) \left( 1 - \frac{(1-\lambda)\sigma_{U(k/N)}^2}{\lambda\sigma_\sigma^2} \right) \sigma_{U(k/N)}^2 \left( \log \left( \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{U(k/N)}^2} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) - 2 \log \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \right) \quad (23).$$

Le détecteur de seuil est appelé aussi « détecteur à la loi carre » du moment que c'est  $\tilde{U}^2(k/N)$  qui est comparé au seuil  $t(k/N)$ .

Pour cette valeur  $\hat{Q}_{TD}$  détectée , on peut évaluer une certaine fonction  $J(S)$  donnée par les équations de Kalman , malheureusement il n y a aucune idée sur la valeur ferme du minimum global de cette fonction .

**LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN DE VRAISEMBLANCE POUR LES  
SYSTEME DYNAMIQUES**

**CALCUL DU COÛT**

L'obtention d'une expression pour la fonction de vraisemblance est une étape importante dans la pratique de l'identification .

Soit L un système linéaire invariant dans le temps décrit par .

$$X(k+1) = \phi X(k) + \Gamma U(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Hx(k) + b(k) \quad (2)$$

$$k=0, \dots, N-1$$

U(k) et b(k) sont des séquences de bruit blanc Gaussien et stationnaire avec :

$$E( U(k) U'(k) ) = Q \quad (3)$$

$$E( b(k) b'(k) ) = R \quad (4)$$

Soit :

$$\theta = \text{col} (\text{element de : } \phi, \Gamma, H, Q \text{ et } R )$$

et

$$y = \text{col} (y(1), y(2), \dots, y(N)) \quad (6)$$

Alors :

$$L(\theta / y) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ( \tilde{y}'(j/j-1) N^{-1}(j/j-1) \tilde{y}(j/j-1) + \log |N(j/j-1)| ) \quad (7)$$

Avec :

$$N(j/j-1) = HP(j/j-1)H' + R \quad (8)$$

N(j/j-1) représente la covariance du processus .

Ce théorème est aussi applicable aux systèmes variant dans le temps et /ou aux systèmes non stationnaires .

## DEMONSTRATION:

Tout d'abord, il faut obtenir la fonction densité de probabilité  $P(y / \theta)$  :

$$P(y / \theta) = P(y(1), y(2), \dots, y(N) / \theta)$$

Puisque  $X(k)$  satisfait les équations (1) et (2) alors les  $N$  mesures obtenues ne sont pas statistiquement indépendantes :

$$P(y(1), y(2), \dots, y(N) / \theta) \neq P(y(1) / \theta), P(y(2) / \theta), \dots, P(y(N) / \theta)$$

La fonction de densité :

$$\tilde{P}(\tilde{y}(1/0), \tilde{y}(2/1), \dots, \tilde{y}(N/N-1))$$

Contient la même information que  $P(y(1), y(2), \dots, y(N) / \theta)$  par conséquent  $L(\theta / y)$  peut être remplacée par  $\tilde{L}(\theta / \tilde{y})$  où :

$$\tilde{y} = \text{col}(\tilde{y}(1/0), \tilde{y}(2/1), \dots, \tilde{y}(N/N-1))$$

et

$$\tilde{L}(\theta / \tilde{y}) = \log \tilde{P}(\tilde{y}(1/0), \tilde{y}(2/1), \dots, \tilde{y}(N/N-1) / \theta)$$

Ceci est obtenu en se référant aux résultats de la théorie d'estimation à minimum de variance.

Le bruit étant blanc Gaussien,  $\tilde{L}(\theta / \tilde{y})$  est exprimée sous la forme :

$$\tilde{L}(\theta / \tilde{y}) = \log \prod_{j=1}^N P_j^N(\tilde{y}(j/j-1) / \theta)$$

$$\tilde{P}_j(\tilde{y}(j/j-1) / \theta) = \tilde{P}(\tilde{y}(j/j-1) / \theta) \quad j=1, \dots, N$$

Par conséquent

$$\tilde{L}(\theta / \tilde{y}) = \log \sum_{j=1}^N \tilde{P}(\tilde{y}(j/j-1) / \theta) \quad (12)$$

Sachant que

$$\tilde{P}(\tilde{y}(j/j-1) / \theta) = ((2\pi)^m |N(j/j-1)|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{y}(j/j-1) N^{-1}(j/j-1) \tilde{y}(j/j-1)\right) \quad (13)$$

où  $N(j/j-1)$  est la covariance de  $\tilde{y}(j/j-1)$  définie par l'équation (8).

$$\tilde{L}(\theta / \tilde{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{y}'(j/j-1) N^{-1}(j/j-1) \tilde{y}(j/j-1) + \log |N(j/j-1)|) \quad (14)$$

Le terme  $(-\log (2\pi)^{m/2})$  a été négligé car il ne dépend pas de  $\theta$ .

Puisque  $\tilde{P}(\cdot / \theta)$  et  $P(\cdot / \theta)$  contient la même information alors  $\tilde{L}(\theta / \tilde{y})$  et  $L(\theta / y)$  doivent aussi contenir la même information, cependant  $L(\theta / y)$  est utilisé pour exprimer ce qui est à droite de l'équation (14) :

$$L(\theta / y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{y}'_{\theta}(j/j-1) N^{-1}_{\theta}(j/j-1) \tilde{y}_{\theta}(j/j-1) + \log |N_{\theta}(j/j-1)|) \quad (15)$$

L'indice  $\theta$  est utilisé pour indiquer la dépendance des quantités droite à l'équation (14) du vecteur utilisé pour  $\theta$  le processus  $\tilde{y}_{\theta}(j/j-1)$  peut être générée par un filtre de KALMAN.

**LE LISSAGE OPTIMAL A INTERVALLE FIXE**

Le but principal de l'estimation à minimum de variance est d'aboutir à un estimateur de l'état  $X(k)$  à partir d'un nombre limité de mesures bruitées.

$\hat{X}(k/J)$  est l'estimateur de  $X(k)$  au temps  $t_k$

Quand  $k > j$  :  $\hat{X}(k/j)$  est une valeur prédite de  $X(k)$

Quand  $k = j$  :  $\hat{X}(k/j)$  est une valeur filtrée de  $X(k)$

Quand  $k < j$  : il s'agit d'un lissage

Un lissage est plus compliqué qu'un filtrage d'où l'existence de trois types de lissage, le lissage à intervalle fixe, lissage à un point fixe et le lissage à pas fixe.

Quand on veut estimer un vecteur d'état  $X(k)$  en se basant sur  $N$  mesures disponibles sur tout l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq N$ , il s'agit d'un lissage à intervalle fixe.

En déconvolution sismique, on cherche toujours à obtenir une estimation à minimum de variance de la séquence de réflectivité  $U(k)$ , le lissage à intervalle fixe est souvent utilisé :

$$\hat{X}(k/N) = E(X(k) / y(1), y(2), \dots, y(N)) \quad (1)$$

$$\hat{X}(k/N) = \hat{X}(k/k-1) + P(k/k-1) r(k/N) \quad (2)$$

où :

$k=N-1, N-2, \dots, 1$  et le vecteur  $r$  ( $n \times 1$ ) satisfait l'équation récursive :

$$r(j/N) = \phi_P(j+1, j) r(j+1/N) + H'(j) [H(j) P(j/j-1) H'(j) + R(j)]^{-1} \tilde{y}(j/j-1)$$

Avec :

$$j = N, N-1, \dots, 1 \text{ et } r(N/N-1) = 0$$

La matrice de covariance de l'erreur du lissage est :

$$P(k/N) = P(k/k-1) - P(k/k-1) M(k/N) P(k/k-1) \quad (3)$$

où :

$k=N-1, N-2, \dots, 1$  et la matrice  $S$  ( $n \times 1$ ) satisfait l'équation récursive :

$$M(j/N) = \phi_P(j+1, j) M(j+1/N) \phi_P(j+1, j) + H'(j) [H(j) P(j/j-1) H'(j) + R(j)]^{-1} H(j)$$

Avec :

$j = N, N-1, \dots, 1$  et  $M(N/N-1) = 0$

La matrice  $\phi_p$  est définie par :

$$\phi_p(k+1, k) = \phi(k+1, k) [I - K(k) H(k)] \quad (4)$$

$K(k)$  représente le gain KALMAN,  $\phi$  et  $H$  découlent de représentation d'état du système et  $R(j)$  représente la covariance du bruit.

En appliquant le lissage optimal à intervalle fixe au modèle de la séquence de réflectivité sismique  $U(k)$ :

$$U(k) = r(k) S(k) \quad (5)$$

$r(k)$  est un bruit blanc Gaussien.

La structure de l'estimateur  $\hat{U}(k/N)$  de la séquence  $U(k)$  peut être développée:

$$\hat{U} = E(U/y, S) \quad (6)$$

$S$  donnée,  $U$  et  $y$  sont Gaussiens alors :

$$\hat{U} = E(U y' / S) [E(y y' / S)]^{-1} y$$

$$E(U y' / S) = E(U (U' W' + n') / S) : \sigma^2_r Q_s W'$$

De plus :

$$E(y y' / S) \text{ est donné par l'équation (V.8)}$$

D'où :

$$\hat{U} = \sigma^2_r Q_q W' \Omega^{-1} y \quad (7)$$

$Q_q$  et  $W$  sont exprimés dans le chapitre III.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. Claerbout, *Fundamentals of Geophysical Data Processing*, *Mc Graw-Hill*, New York, 1976.
- [2] J. M. Mendel and J. Goutsias, One-dimensional normal-incidence inversion : A solution procedure for band-limited and noisy data, *Proc. IEEE*, Vol. 74, 1986, pp 401-414.
- [3] A. Robinson and S. Treitel , *Geophysical analysis*
- [4] F. Habibi-Ashrafi and J. M. Mendel, Estimation of parameters in lossless layered media systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-27, 1982, pp 31-49.
- [5] B. Ursin and K. A. Berteussen, Comparison of some inverse methods for wave propagation in layered media, *Proc. IEEE*, Vol. 74, 1986, pp 389-400.
- [6] S. Kollias, P. Foudopoulos and C. Halkias, One-dimensional seismic inversion using adaptive deconvolution, *Signal Processing*, Vol. 14, 1988, pp 269-285.
- [7] K. P. Bube and R. Burridge, The one-dimensional inverse problem of reflection seismology, *SIAM Rev.*, Vol. 25, 1983, pp 497-559.
- [8] J.F Claerbout , *Fundamentals of Geophysical data processing*, Stanford University 1996
- [9] N.A Anstey , *Seismic prospecting instruments vol 1 , signal characteristics and instrument specifications* .Berlin, Germany Gebruder borntraeger , 1970
- [10] M. Najim , *Modelisation et identification en traitement du signal* , *Masson* 1988
- [11] W. L. Brogan, *Modern Control Theory*, Quantum Publishers, New York, 1974.
- [12] J. W. Van der Woude, System identification of lossless layered media from input-output data, *Signal Processing*, Vol. 22, 1991, pp 269-285.
- [13] A. Guessoum et Z. Benselama , *Méthode d'inversion des signaux sismiques avec détection rapide des interfaces*, 2<sup>iem</sup> *Congrès de la physique et de ses applications C.N.P.A* 1996
- [14] S. Treitel and K.L. Peacock , *Prédictive deconvolution theory and practice* , *Geophysics* Vol-34 1969
- [15] E.A Robinson , *Prédictives décomposition of times series with application to seismic exploration* *Geophysics* Vol-32 1967
- [16] L.J Griffiths , *A simple adaptive algorithm for real time processing in antenna arrays* , *IEEE* Vol-57 1969

- [17] S.Treitel . Principles of digital multichannel filtering *Geophysics* Vol-35 1970
- [18] S. Prasad and A.K . Mahalanabis , Adaptive filter structures for déconvolution of seismic signals , *IEEE Trans. Geosci.* Vol. GE-18 1980
- [19] D.Aboutadjine and M.Najim , Comments on « adaptive filter structures for déconvolution of seismic signal , *IEEE Trans.on Geosci.* Vol- Ge-23 1984
- [20] J.Mendel , White noise estimator for seismic data processing in oil exploration , *IEEE trans. Automat.Control* Vol AC-22 1977
- [21] J. M. Mendel ,*Optimal seismic déconvolution* , *Academic press*, New York , 1983
- [22] J.S Meditch , Stochastic optimal lineaire estimation and control , Mc GRAW HILL (Newyork) 1969
- [23] J.Kormylo J.M. Mendel , Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes, *IEEE on information theory* V(IT-28) 1982
- [24] J.L Melsa and D.L Cohn , Decision and estimation theory , Mc GRAW HILL (Newyork) 1978
- [25] J.Mendel , Minimum-variance and maximum-likelihood recursive waveshaping , *IEEE trans. Acoust. Speech Signal Process* ASSP-31 ,1983
- [26] D.W Marquart ,An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J.Soc.indust.Appl.Math* 11(2) 1963
- [27] D. R. Hush and B. G. Horne, Progress in supervised Neural Networks, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 10, No. 1, Jan. 1993, pp. 8-39.
- [28] J.F Claerbout ,Basic Earth imaging, Stanford University 1995
- [29] S.Kollias , P. Foudopoulos and C.Halkias , One-dimensional seismic inversion using adaptive deconvolution , *Signal processing* 14 , 1988 , pp 269-285