

13/98

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

D.E.R de Génie Electrique & Informatique

FILIERE : AUTOMATIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire

En vue d'obtenir le diplôme
D'ingénieur d'Etat en AUTOMATIQUE

THEME

COMMANDE ADAPTATIVE
DÉCENTRALISÉE
PAR LA TECHNIQUE DE
BACKSTEPPING
APPLICATION EN ROBOTIQUE

Proposé et dirigé par :

Mr D. BOUKHETALA.
Mr F. BOUDJEMA

Fait par :

S. GHARBI
F. HADJ MILOUD

PROMOTION 1998

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

D.E.R de Génie Electrique & Informatique

FILIERE : AUTOMATIQUE

Mémoire

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

En vue d'obtenir le diplôme
D'ingénieur d'Etat en AUTOMATIQUE

THEME

COMMANDE ADAPTATIVE
DÉCENTRALISÉE
PAR LA TECHNIQUE DE
BACKSTEPPING
APPLICATION EN ROBOTIQUE

Proposé et dirigé par :

Mr D. BOUKHETALA.
Mr F. BOUDJEMA

Fait par :

S. GHARBI
F. HADJ MILOUD

PROMOTION 1998

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce travail à

Ma très chère mère

Mon très cher père

Mes frères et sœurs

Particulièrement ma petite sœur Zineb

Toute la famille Gharbi

Tous mes amis

G.Salim

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce travail à

Ma très chère mère

Mon très cher père

Mes frères et sœur

Toute la famille Hadj Miloud

Tous mes amis

H.FATHI

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous tenons à présenter nos vifs remerciements à nos promoteurs *Mr.D.BOUKHETALA* et *Mr.F.BOUDJEMA* pour l'aide précieuse qu'ils nous apportée, dans la réalisation de ce travail.

Notre sincère reconnaissance à messieurs les membres du jury, qui nous ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Nous tenons à remercier *SALEH* de la bibliothèque, ainsi que tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

ملخص

قمنا في هذا العمل بتقديم طريقة الرجوع المرحلي ، بأشكالها المختلفة ، و هي ، الرجوع المرحلي الكلاسيكي ، الرجوع المرحلي التلأمي و الرجوع المرحلي الانزلاقي .

كما تم عرض عرض كيفية تطبيق هذه الطريقة على الحالة المركزية و كذلك على الحالة اللامركزية و في هذه الأخيرة قدمنا وجهتين ، وجهة تستعمل التحكم التلأمي لمواجهة التدخلات بين مختلف الأنظمة و الأخرى تستعمل التقدير المستمر للعوامل الغير معرفة ، أضفنا الى هاتين الحالتين التحكم الانزلاقي بغية تحسين امتيازات النظام ، و تم تطبيق مختلف هذه الطرق على يد آلية PUM560

الكلمات المفتاحية :

الرجوع المرحلي ، التحكم التلأمي ، التحكم الانزلاقي ، اللامركزية .

Abstract :

In this work , we have presented the backstepping under its differentes forms , classical backsteppng , adeptive backstepping and sliding mode backstepping .

Two cases are studied , centralized and decentralised , in this last ense , two approches are developped , the first , uses an adaptation law to counter the effect of interconnexion , the second estimites the uncentain parameters , this two approche were modified bey sliding mode in the goal of amelioration of the performances , this diferentes approches were applied to Robot PUM560.

Key words :

Backstepping , adaptif , sliding mod , decentralization

Résumé :

Dans ce travail nous avons présenté le backstepping sous ses différentes formes à savoir bakstepping classique , backstepping adaptatif et backstepping avec mode glissant .

Deux cas sont présentés , le cas centralisé et le cas décentralisé , dans ce dernier cas deux approches ont été présenté , la première utilise une loi d'adaptation afin de contourner l'effet des interconnexions , la seconde fait appel à l'identification contenue des paramètres, ces deux derniers ont été simplifier par le mode glissant afin d'améliorés les performances.

Ces différentes approches ont été appliquer au bras manipulateur PUM560.

Mot clé :

Bacstepping , adaptatif , mode glissant et décentralisé .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

Sommaire

Introduction générale

CHAPITRE I	MODELISATION DU PUMA 560	
I-1	Introduction	3
I-2	Modélisation cinématique	4
I-2-1	Représentation de DENAVIT-HARTENBERG	6
I-2-2	Modélisation géométrique	9
I-2-3	Modélisation cinématique	10
I-3	Génération de trajectoire	12
I-4	Modélisation dynamique	13
I-4-1	Formalisme d'EULER-LAGRANGE	13
I-4-2	Modele dynamique du robot PUMA 560	17
I-5	Résultats de simulation	20
I-6	Conclusion	20
CHAPITRE II.	Rappel sur la stabilité des systèmes non-linéaires	
II-1	Introduction	22
II-2	Définition du point d'équilibre	22
II- 3-1	Théorème de la stabilité	23
II-3-2	Théorème de LASALL-YOSHIZAWA	23
II-4-1	La stabilité locale par la méthode de linéarisation	24
II- 4-2-1	Théorème de stabilité	25
II-4-2-2	Théorème de stabilité de stabilité globale	25
II-5	Stabilité des systèmes interconnectés	26
II-6	La synthèse de la commande par la méthode directe de LYAPUNOV	27a
II-7	Conclusion	28a
CHAPITRE III	Backstepping	
III-1	Introduction	27
III-2	Backstepping dans le cas monovariante	27
III-3	Backstepping dans le cas multivariante	31
III-4	Mode glissant	34
III-5	Backstepping adaptatif	36

III-6 Conclusion

42

CHAPITRE IV *Synthèse de la commande via le backstepping*

IV-1 Première approche	44
IV-1-2 Synthèse de la commande	45
IV-1-3 application de première approche au PUMA560	52
- Simulation	56
- Interprétation des résultats	57
IV-1-4 Application de la commande par backstepping décentralisé	
- adaptatif avec mode glissant	63
-a- Approche par la fonction sign	63
Simulation	65
- Interprétation des résultats	66
-b- Approche par la fonction sat	72
- Simulation	72
-Interprétation des résultats	72
IV-2 Deuxième approche	79
IV-2-1 Présentation du système	79
IV-2-2 Synthèse de la commande	80
i- Problème de régulation	81
ii- Problème de poursuite	88
IV-2-3 Commande décentralisée par backstepping adaptatif avec mode glissant	92
IV-2-4 Application de la commande adaptative	93
- Simulation	96
- Interprétation des résultats	96
IV-2-5 Application de commande adaptative avec le mode glissant	109
-Résultats de simulation	109
IV -3 Comparaison entre les différentes commandes	120
IV-4 Conclusion	121

Conclusion générale

Bibliographie

Annexe

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Avec l'avènement de nouvelles technologie ,les installations industrielles devenait de plus en plus complexes, leurs commande devenait de plus en plus difficile ,de fait de leur complexité d'une part, et de leur non-linearité ,d'une autre part .les commandes synthétisées devenaient de plus en plus complexes et leur implémentation nécessitaient un matériel de plus en plus sophistiqué, ce qui rendait ces commandes de moins en moins économiques.

C'est dans ce contexte que les chercheurs se sont intéressaient à de nouvelles techniques permettant d'aborder les systèmes de grande dimension, avec une approche systématique

Une de ces méthodes, est la méthode du **BACKSTEPPING** ,qui à été introduite pendant les années 90,par plusieurs chercheurs ,on citera entre autre : *P.KOKOTOVIC* ,*H.K.KHALIL* ,l'application de cette dernière ,on la retrouve, dans le domaine de l'aéronautique [*M.KRSTIC 95*], dans les systèmes à grande échelle tel que les réseaux électriques [*F.KHORRAMI 95*],ainsi qu'au machines électriques[*JIAN-XIN XU 96*]. Le backstepping à travers ces différentes applications à été associé à d'autre type de commande ,tel que la commande adaptative ,ou ,la commande par mode glissant

C'est en tentant de commander les systèmes mal modélisés, ou de s'adapter au systèmes ayant des paramètres dynamiques pendant les années 50, que la commande adaptative à été introduite ,son efficacité n'est apparues qu'avec le développement de l'informatique, et de l'électronique en générale .

En s'imprégnant des deux philosophies précédemment citées , nous avons essayés de combiner les deux approches ,pour synthétiser une commande susceptible de donner de meilleurs performances.

Dans ce travail , nous allons présenter la méthode du backstepping sous ses différentes formes à savoir, backstepping classique, backstepping adaptatif et backstepping avec mode glissant . Deux cas sont abordés, le cas le cas centralisé et le cas décentralisé. Dans ce dernier cas , deux approches ont été présentées .la première utilise une adaptation qui contourne les termes d'interconnexions ,la seconde fait appel l'estimation continue des paramètres.

Ces différentes approches ont été appliquée au robot PUMA 560. Des résultats de simulation ainsi que des testes de robustesse ont été effectuées pour montrer la validité de l'approche théorique et l'apport de la commande décentralisée .

Notre contribution dans ce travail réside essentiellement dans la synthèse de la commande décentralisé avec mode glissant par l'approche backstepping , l'application d'une approche théoriques [KHORRAMI 97.a],[KHORRAMI 97.b] sur le backstepping au bras de robot. Et la démonstration de la stabilité pour l'application du mode glissant sur le model du robot dans la première approche ,pour cas général dans la deuxième approche

Notre travail s'organise comme suit :

Un premier chapitre est consacré à la modélisation du bras manipulateur PUMA 560, où est abordé les différents outils mathématiques permettant une modélisation qui soit la plus fine possible.

En second lieu ,on présentera les différents outils et théories nous permettant de synthétiser une commende, c'est l'objet du deuxième et troisième chapitres.

En troisième lieu, on présentera les différentes commande, où, on a utilise soit, le backstepping adaptatif, soit le backstepping adaptatif avec mode glissant, ces différentes approches seront validées en les soumettant à différents testes standards.

On terminera notre travail ,avec une conclusion générale, avec les perspectives en vue.

CHAPITRE I

MODELISATION DU ROBOT PUMA560

CHAPITRE I

MODELISATION DU PUMA 560

I.1 INTRODUCTION

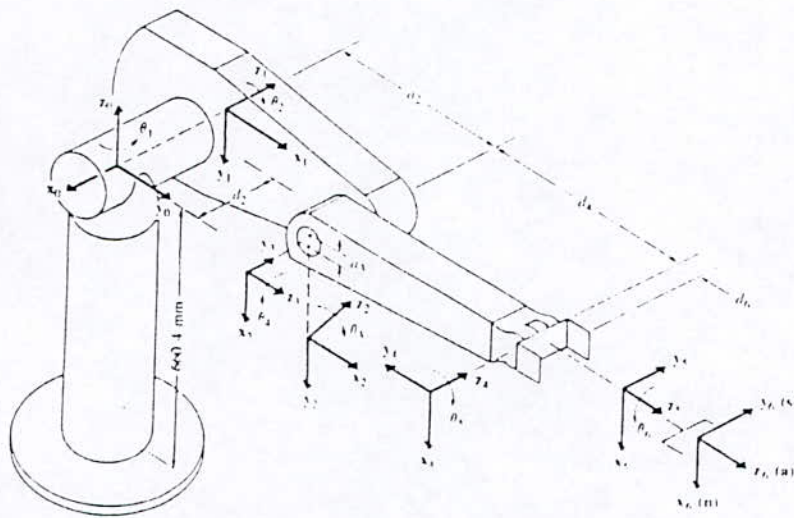
Depuis la nuit des temps ,l'homme à toujours essayé de reproduire ses propres taches en utilisant les outils qui étaient à sa disposition ; avec le développement de nouvelles techniques en électronique ,et en informatique ,il réussi ,à donner naissance à une nouvelle discipline ,qui est la robotique .

Le mot robot vient du mot tchèque « **ROBOTA** » ,qui signifie ouvrier travailleur ,on peut définir un robot comme étant un système mécanique ,composé de corps mobiles reliés par des actionneurs ,qui lui donnent des capacités de mouvement dans l'espace physique .Il est équipé de capteurs multiples, les mesures obtenues permettent de construire des représentations de l'état du système ,et de l'environnement dans lequel il évolue .

On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation d'un bras manipulateur **PUMA 560** ,en vue de le commander .Cette étape est très importantes ,elle fait appel à différentes techniques tel que le formalisme de EULER-LAGRANGE .

Avant d'entamer la modélisation du bras manipulateur ,il nécessaire de prendre en considération les hypothèses suivantes :

1. Les frottements sont de nature visqueuse ,et linéaires par rapport à la vitesse .
2. les différentes liaisons sont rigides .
3. Les actionneurs sont idéaux , ie, la force généralisée est proportionnelle au signal de commande .
4. Les capteurs ont un gain unitaire ,et sont de dynamique négligée .



fig(1.1) Présentation du PUMA 560

I.2 MODELISATION CINEMATIQUE. [MADANI 97] [LALLEMAND 88]

Un manipulateur peut être considéré comme étant une chaîne de liaisons connectées par des articulations de type charnière ou glissière, chaque liaison est caractérisée par son propre repère, et l'orientation d'un repère par rapport à un autre se fait en utilisant une transformation dite homogène.

L'exécution d'une tâche en robotique nécessite au préalable de positionner et d'orienter l'organe terminale; car dans une application industrielle, il est nécessaire de positionner ce dernier par rapport à un référentiel fixe appelé espace des tâches.

I.2.1 REPRESENTATION DE DENAVIT-HARTENBERG. [VIBET 87]

Denavit et Hartenberg (1955) ont introduit une méthode systématique afin de faire correspondre à chaque articulation un système de coordonnées, puis d'en déduire les transformations qui relient chaque référentiel au référentiel précédent.

L'avantage de ce paramétrage est l'étude systématique des chaînes articulées, il permet d'avoir des matrices de transformation, ayant toutes la même forme littérale, ce qui facilite les calculs.

Pour pouvoir appliquer cette transformation il faut d'abord fixer les différents repères dans chaque articulation d'une façon successive, en suivant les étapes suivantes :

Etape1

Numéroter chaque liaison et articulation en commençant de la base ,notée liaison « 0 » ,jusqu'à l'élément terminal ,noté liaison « n »,la liaison « i » ,se déplace autour (rotation),ou le long (prismatique),de la liaison « i-1 » .

Etape2

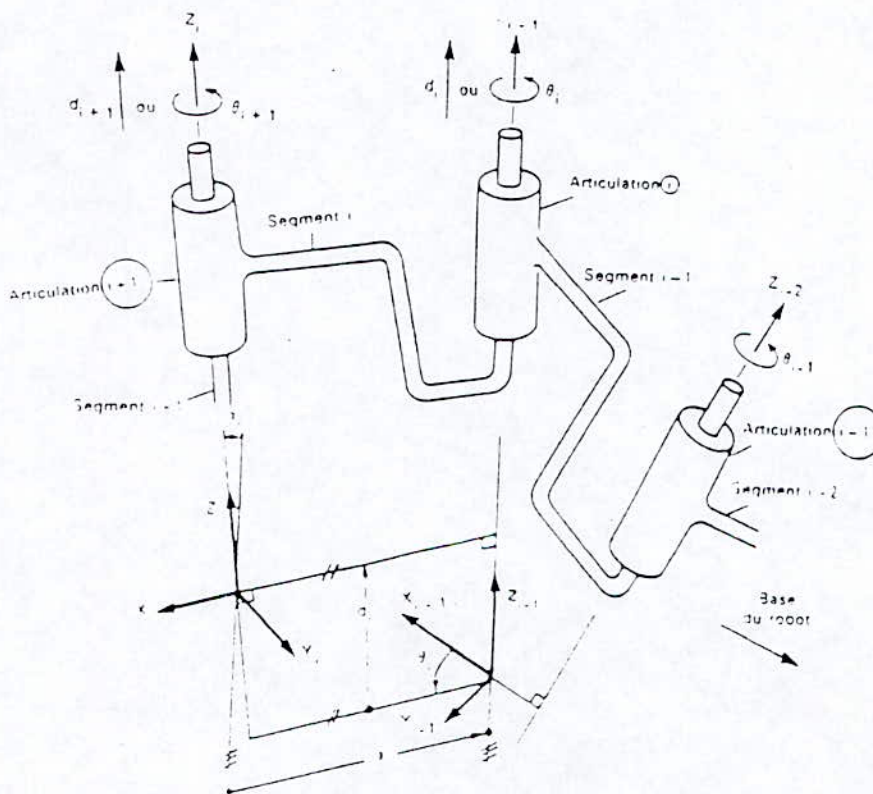
Etablir le repère de chaque articulation en suivant les règles :

- L'axe Z_{i-1} correspond au déplacement du segment « i » dans le référentiel «i-1» .
- L'axe X_i est choisi perpendiculaire à Z_{i-1} tel que :
 - a) Si Z_i et Z_{i-1} ne se coupent pas , X_i est choisit colinéaire à la perpendiculaire commune à Z_i et Z_{i-1} .
 - b) Si Z_i et Z_{i-1} se coupent ,on choisi X_i arbitrairement .
- L'axe Y_i ,est choisi de telle sorte à former un trièdre droit .

Etape3

Définir les paramètres θ_i , d_i , α_i et a_i ,tel que :

- θ_i : l'angle entre X_{i-1} et X_i obtenu par rotation de X_{i-1} vers X_i autour de Z_{i-1} .
- d_i : coordonnée de l'origine sur l'axe Z_{i-1} ,ou d'une autre manière ,c'est la distance entre O_{i-1} et l'intersection de Z_{i-1} avec X_i .
- α_i : l'angle obtenu en visant Z_{i-1} vers Z_i autour de X_i .
- a_i : distance entre Z_{i-1} et Z_i le long de X_i .



fig(1.2) Présentation du référentiel selon DENAVIT-HARTENBERG

Etape 4

former la matrice homogène à chaque articulation, chaque point exprimé dans le référentiel « i », peut être exprimé dans le référentiel « i-1 » en effectuant les opérations suivantes :

1. Translation le long de l'axe Z_{i-1} d'une distance d_i .
2. Rotation autour de l'axe Z_{i-1} d'un angle θ_i .
3. Translation le long de l'axe X_i d'une distance a_i .
4. Rotation autour de l'axe X_i d'un angle α_i .

$$\mathbf{R}_i = \text{Trans}(Z,d) \cdot \text{ROT}(Z,\theta) \cdot \text{Trans}(X,a) \cdot \text{ROT}(X, \alpha) \mathbf{R}_{i-1}$$

On obtient alors la matrice homogènes suivante :

$$\mathbf{T}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & a_i \cdot \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & a_i \cdot \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

En identifiant la géométrie du PUMA560, au paramétrage de DANAVID-HARTENBERG, le choix des différents repères est donné par la **fig(1.1)**, on obtient le résultat suivant :

N° de la Liaison	variable	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	q_1	θ_1	0	0	-90°
2	q_2	θ_2	l_2	d_2	0
3	q_3	θ_3	l_3	0	0

Tableau 1.1 - Informations géométriques sur le robot PUMA 560

Ainsi nous pouvons représenter les trois rotations du PUMA560, par les matrices de transformation homogènes suivantes :

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} C_1.C_2 & -C_1.S_2 & -S_1 & l_2.C_1.C_2 - d_2.S_1 \\ S_1.C_2 & -S_1.S_2 & C_1 & l_2.C_2.S_1 + d_2.C_1 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & -l_2.S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.2)$$

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} C_1.C_{23} & -C_1.S_{23} & -S_1 & C_1.(l_2.C_2 + l_3.C_{23}) - d_2.S_1 \\ S_1.C_{23} & -S_1.S_{23} & C_1 & S_1.(l_2.C_2 + l_3.C_{23}) + d_2.C_1 \\ -S_{23} & -C_{23} & 0 & -(l_2.S_2 + l_3.S_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$C_i = \cos(\theta_i), S_i = \sin(\theta_i), \\ C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j), S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j).$$

Les repères sont définis comme suit :

1. Le repère d'inertie $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$ son origine est pris à l'intersection de l'axe de la première articulation et l'axe de liaison 1 tel que :

Z_0 est parallèle à la première articulation .

X_0 est parallèle à l'axe de liaison 1 .

2. Le repère $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$ son origine coïncide avec celle du repère $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$ et Z_1 , est parallèle à l'axe de la deuxième articulation .

3. Le repère $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$ se repose sur l'articulation 2, et X_2 est suivant l'axe de la liaison

4. Le repère $R_3(X_3, Y_3, Z_3)$ est sur le centre de masse de l'effecteur .

I.2.2 MODELISATION GEOMETRIQUE

La modélisation géométrique nous permet de connaître la situation du bras manipulateur en fonction de sa configuration ,grâce à la relation qui existe entre coordonnées opérationnelles et coordonnées généralisées .

La portée de la charge est caractérisée par un point centrique dans l'espace qui définit une position en coordonnées cartésiennes, et donne à l'élément terminal la position et l'orientation pour manipuler les objets .

Les transformations précédentes permettent d'exprimer la position de l'organe terminale par rapport au repère R_0 sous la forme d'une fonction $r(R_0)$, à partir des variables articulaires q_i :

$$r(R_0)=F(q) \text{ avec } \begin{cases} q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \\ r = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix}^T \\ F(q) = T_0^3 \cdot r_3^3 \end{cases} \quad (I.3)$$

tel que :

r_3^3 : coordonnées de l'outil terminal dans le referentiel R_3 ;donc ; $r_3^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$.

$F(q)$: fonction vectorielle .

En utilisant les transformation homogènes précédentes ,on a :

$$r = T_0^3 \cdot r_3^3 \quad (I.4)$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} P_x = C_1 \cdot (l_3 \cdot C_2 + l_3 \cdot C_{23}) - d_2 \cdot S_1 \\ P_y = S_1 \cdot (l_2 \cdot C_2 + l_3 \cdot C_{23}) + d_2 \cdot C_1 \\ P_z = - (l_2 \cdot S_2 + l_3 \cdot S_{23}) \end{cases} \quad (I.5)$$

La relation (I.5) nous donne la modélisation géométrique du bras manipulateur ,c'est à partir de cette dernière qu'on peut retrouver la relation inverse qui lie les coordonnées généralisées Q_i ,aux coordonnées cartésiennes ,ce qui constitue la modélisation cinématique inverse

I.2.3 MODELISATION CINEMATIQUE INVERSE [BACHIR 97]

On peut toujours trouver une solution au problème de cinématique direct , et cela en établissant une relation entre la position géométrique et les variables articulaires , cependant ,le problème inverse ne l'est pas ,car on ne peut pas atteindre n'importe quelle position géométrique ,sous une attitude quelconque ,pour cela on peut citer quelques solutions existantes :

- Quaternion dual : *YANG ET ARENDEN 1964*
- Transformation inverse : *PAUL ET AL 1981* .
- Approche géométrique : *LEE ET ZEIGLER 1984* .
- Méthode des matrices duales : *DENAVIT 1956* .

On s'intéressera à l'approche géométrique .

Avant d'entamer le modèle cinématique inverse ,on définit les différentes configurations du bras manipulateur [NEDJARI 95]:

Right arm : θ_2 positif ,fait mouvoir le poignet du manipulateur dans le sens des Z_0 positifs, alors que la troisième articulation est inactive .

Left arm : θ_2 positif ,fait mouvoir le poignet du manipulateur dans le sens des Z_0 négatifs, alors que la troisième articulation reste inactive .

Above arm :la position du poignet dans la configuration Right arm (resp .Left arm) par rapport au référentiel de l'épaule a une coordonnée négative (resp. positive) le long del'axe y_2 .

Blow arm :la position du poignet dans la configuration Right arm (resp .Left arm) par rapport au référentiel de l'épaule a une coordonnée positive(resp. négative) le long del'axe y_2 .

Wrist down et Wrist up : donnent la configuration de mouvement du poignet .

sachant que :

arm (bras),

elbow (couds),

wrist(poignet)

Les six configurations prennent la valeur de +1 ou de -1 pour indiquer le sens du mouvement de la configuration .

$$\text{arm} = \begin{cases} +1 & \text{right arm} \\ -1 & \text{left arm} \end{cases} \quad \text{elbow} = \begin{cases} +1 & \text{above arm} \\ -1 & \text{below arm} \end{cases} \quad \text{wrist} = \begin{cases} +1 & \text{wrist down} \\ -1 & \text{wrist up} \end{cases}$$

Nous exposerons ci-dessous ,le principal résultat ,qui nous permet d'écrire les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées cartésiennes :

Solution de la 1^{ère} articulation :

$$\theta_1 = \text{Tan}^{-1} \cdot \left[\frac{-\text{arm} \cdot p_y \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x \cdot d_2}{-\text{arm} \cdot p_x \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y \cdot d_2} \right] \quad \text{avec } (-\pi \leq \theta_1 \leq \pi) \quad (\text{I.6})$$

Solution de la 2^{ème} articulation :

$$\theta_2 = \text{Tan}^{-1} \cdot \left[\frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{arm} \cdot \text{elbow} \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \text{arm} \cdot \text{elbow} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right] \quad \text{avec } (-\pi \leq \theta_2 \leq \pi) \quad (\text{I.7})$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-\text{arm} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (\text{I.8})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{-p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (\text{I.9})$$

$$\cos(\beta) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2 + l_2^2 - l_3^2}{2 \cdot l_2 \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (\text{I.10})$$

Solution de la 3^{ème} articulation :

$$\theta_3 = \phi - \pi/2 \quad \text{avec} \quad (-\pi \leq \theta_3 \leq \pi) \quad (\text{I.11})$$

$$\cos(\phi) = \frac{l_2^2 + l_3^2 - p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}{l_3^2} \quad (\text{I.12})$$

$$\sin(\phi) = \text{arm.elbow} \cdot \sqrt{1 - \cos(\phi)^2} \quad (\text{I.13})$$

I.3 GENERATION DE TRAJECTOIRE [BACHIR 97]

Le but de la commande d'un bras manipulateur ,est de déplacer l'outil terminal(charge), d'un point à un autre et cela en suivant une trajectoire donnée cette dernière doit répondre aux exigences de continuité en position ,vitesse et accélération ,et cela à cause du comportement dynamique du bras manipulateur

Il existe deux trajectoire standard en robotique ,la trajectoire polynomiale ,et la trajectoire cycloïdale ,toutefois nous avons choisi de travailler avec la trajectoire cycloïdale, car elle ne demande pas une grande énergie .

Nous présentons ici l'expression analytique de la trajectoire cycloïdale :

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t_F) + \frac{\Delta}{2 \cdot \pi} \cdot [\omega \cdot t - \sin(\omega \cdot t)] & t_0 \leq t \leq t_F \\ \theta(t_F) & t \geq t_F \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{avec :} \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{t_F}, \quad \Delta = \theta(t_F) - \theta(t_0)$$

I.4 MODELISATION DYNAMIQUE

La modélisation dynamique est l'aboutissement d'une combinaison entre les différentes lois qui régissent le mouvement du bras manipulateur ,elle est établie en vue d'une simulation sur micro-ordinateur , avant l'implémentation de la commande sur le bras réel ,et cela dans le but de synthétiser une commande qui satisfait les performances désirées .

Elle fait appel à différentes approches entre autre,on citera celle de NEWTON-EULER ou celle de d' EULER-LAGRANGE , cette dernière sera utilisée pour modéliser notre bras manipulateur .

I.4.1 FORMALISME D'EULER-LAGRANGE

L'approche d'EULER-LAGRANGE permet d'exprimer convenablement les équations générales du mouvement d'un bras manipulateur ,celle-ci permet une meilleur manipulation des équations mises sous forme matricielle ,afin de les programmés .

L'équation d'EULER-LAGRANGE est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = T_i \quad i = 1, \dots, n \quad (I.15)$$

où L est le LAGRANGIEN qui s'exprime par :

$$L = E_c - E_p \quad (I.16)$$

- E_c : énergie cinétique totale de toute les liaisons.
- E_p : énergie potentielle totale de toute les liaisons .
- E_D : énergie de dissipation en cas de présence de frottement visqueux .
- T_i : force généralisée de la $i^{\text{ème}}$ articulation .
- n : nombre de degrés de liberté .
- q_i : coordonnée généralisée d'ordre i .
- \dot{q}_i : dérivée de la coordonnée généralisée .

a) *Energie cinétique*

Le calcul de l'énergie cinétique demande une connaissance de la vitesse de chaque liaison ; ayant un point de la liaison i définie par ses coordonnées r^i dans le repère R_i , l'expression de la vitesse est :

$$V_0^i = \frac{d r_0^i}{d t} \quad (I.17)$$

$$r_0^i = T_0^i r_i \quad (I.18)$$

Comme la liaison n'est pas flexible, on a $\frac{d r_i^i}{d t} = 0$ donc :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \frac{d q_j}{d t} r_i \quad (I.19)$$

Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i [U_{ij} \dot{q}_j] r_i \quad (I.20)$$

tel que

$$U_{ij} = \begin{cases} T_{j-1}^i Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j \geq i \end{cases} \quad (I.21)$$

avec :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.22)$$

L'énergie cinétique de l'élément (i) de la liaison (i) est :

$$d E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace}(V_i V_i^T) d m \quad (I.23)$$

en développant l'expression précédente ,on obtient alors :

$$d E_{C_i} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} (r_i^i r_i^{i^T} dm) U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (I.24)$$

l'énergie cinétique de la liaison (\mathbf{i}) est :

$$E_{C_i} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} J_i U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (I.25)$$

avec :

$$J_j = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (I.26)$$

L'énergie cinétique des actionneurs est donnée par :

$$E_{C_a} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 \quad (I.27)$$

où I_i caractérise un moment d' inertie .

L'énergie cinétique totale est décrite par :

$$E_{C_i} = \sum_{i=1}^n E_{C_i} + E_{C_a} \quad (I.28)$$

b) Energie potentielle :

Elle est exprimée par la relation suivante :

$$E_p = \sum_{i=1}^n -m_i g^T r_0^i = - \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (I.29)$$

avec

$$g^T = [0 \quad 0 \quad 9.81 \quad 1] \quad (I.30)$$

L'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{vi} \dot{q}_i^2 \quad (I.31)$$

où f_{vi} est le coefficient de frottement visqueux .L'expression finale du LAGRANGIEN est :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{trace}(U_{ij} J_i U_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (I.32)$$

En appliquant la formule d'Euler-Lagrange à la fonction Lagrangienne donnée par la relation (1.32), on obtient la force (couple) généralisée :

$$T_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{trace}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \text{trace}(U_{jkl} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ij} + f_{vi} \dot{q}_i \quad (I.33)$$

avec :

$$U_{ijk} = \begin{cases} T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^{i-1} Q_j T_{j-1}^i & k \leq j \leq i \\ T_0^{i-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & j \leq k \leq i \\ 0 & j < i < k \end{cases} \quad (I.34)$$

l'expression matricielle de la relation (1.33) s'écrit sous la forme :

$$T = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_{m0} \quad (I.35)$$

avec :

- $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'inertie symétrique et définie positive .
- $N \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à l'accélération de coriolis et centrifuge .
- $G \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à la gravitation .
- $T_{m0} \in \mathbb{R}^n$: Couple dû à l'effet de la charge .
- $T \in \mathbb{R}^n$: vecteur des forces généralisées .

I.4.1 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT PMA 560 [MADANI 97]

Le calcul du modèle dynamique explicite à été effectué à l'aide de l'approche présentée précédemment , ce manipulateur réalise trois mouvement rotationnels ,le premier dans le plans horizontal ,le second et le troisième suivant deux axes verticaux .Le modèle dynamique est le suivant :

$$T = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_{m0}$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_9 \end{bmatrix} \quad (I.36)$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2 I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2^2 + (2 I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (I_5 c_{23}) \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1^2 - (I_4 s_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_3^2 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1^3 + (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (I.37)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix} \quad (I.38)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (I.39)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i) & s_i &= \sin(q_i) \\ c_{ij} &= \cos(q_i + q_j) & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3} + I_{xxt} + m_t d_2^2 + I_{Mt} \\ I_2 &= I_{yy3} - I_{xx3} + I_{yyt} - I_{xxt} + m_t l_3^2 \\ I_3 &= I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2 + m_t l_2^2 \\ I_4 &= m_3 l_2 l_3 + 2 m_t l_2 l_3 \\ I_5 &= 0.5 m_3 l_3 d_2 + m_t l_3 d_2 \\ I_6 &= 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2 + m_t d_2 l_2 \\ I_7 &= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2 + I_{zxt} + m_t (l_2^2 + l_3^2) + I_{M1} \\ I_8 &= I_{zz3} + I_{zxt} + m_t l_3^2 \\ I_9 &= I_8 + I_{M3} \end{aligned} \tag{I.40}$$

La matrice ΔM représentant les effets de l'effecteur, est donnée par les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \Delta M_{11} &= I_{xxt} + m_t d_2^2 + I_{M1} + (I_{yyt} - I_{xxt} + m_t l_3^2) c_{23}^2 + m_t l_2^2 c_2^2 + 2 m_t l_2 l_3 c_2 c_{23} \\ \Delta M_{12} &= m_t l_3 d_2 s_{23} + m_t d_2 l_2 s_2 \\ \Delta M_{13} &= m_t l_3 d_2 s_{23} \\ \Delta M_{22} &= I_{zxt} + m_t (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2} + 2 m_t l_2 l_3 c_3 \\ \Delta M_{23} &= I_{zxt} + m_t l_3^2 + m_t l_2 l_3 c_3 \\ \Delta M_{33} &= I_{zxt} + m_t l_3^2 + I_{M3} \end{aligned} \tag{I.41}$$

I_{mi} moment d'inertie des différents moteurs .

$I_{xxt}, I_{yyt}, I_{zxt}$ moments d'inertie total par rapport aux principaux axes de l'effecteur .

Le vecteur des couples additifs T_{m0} représente l'effet de la charge, il est calculé par la matrice Jacobienne, cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur .

$$J_j(q) = \frac{\partial P}{\partial q_j} \tag{I.42}$$

avec :

$$P = [c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_2 \quad s_1(l_2 c_2 + l_2 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})]^T \quad (\text{I.43})$$

et

$$J(q) = [J_1(q) \quad J_2(q) \quad J_3(q)] \quad (\text{I.44})$$

on déduit donc la matrice Jacobienne :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 & -c_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -c_1(l_3 s_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 & -s_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -s_1(l_3 s_{23}) \\ 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_3 c_{23}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.45})$$

Le couple dû à l'effet de la charge est :

$$T_{m_0} = m_0 J^T(q) [J(q) \ddot{q} + j(q, \dot{q}) \dot{q} + g] \quad (\text{I.46})$$

avec $g = [0 \quad 0 \quad 9.81]^T$

Les paramètres réels du bras de robot PUMA 560 [MADANI 97]

a) masses des différentes liaisons :

$$\begin{array}{lll} m_2 = 17.40 \text{ kg} & m_3 = 5.04 \text{ kg} & m_4 = 0.82 \text{ kg} \\ m_5 = 0.35 \text{ kg} & m_6 = 0.09 \text{ kg} & m_t = m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg} \end{array}$$

b) paramètres géométriques :

$$d_2 = 149.09 \text{ mm} \quad l_2 = 431.8 \text{ mm} \quad l_3 = 433.07 \text{ mm}$$

c) paramètres d'inerties :

N° de la liaison	$I_{xxi} (kg m^2)$	$I_{yyi} (kg m^2)$	$I_{zz_i} (kg m^2)$	$I_{mi} (kg m^2)$
1	-	$350 \cdot 10^{-3}$	-	1.14
2	$130 \cdot 10^{-3}$	$524 \cdot 10^{-3}$	$539 \cdot 10^{-3}$	4.71
3	$192 \cdot 10^{-3}$	$15.4 \cdot 10^{-3}$	$212 \cdot 10^{-3}$	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	-
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	-
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	-

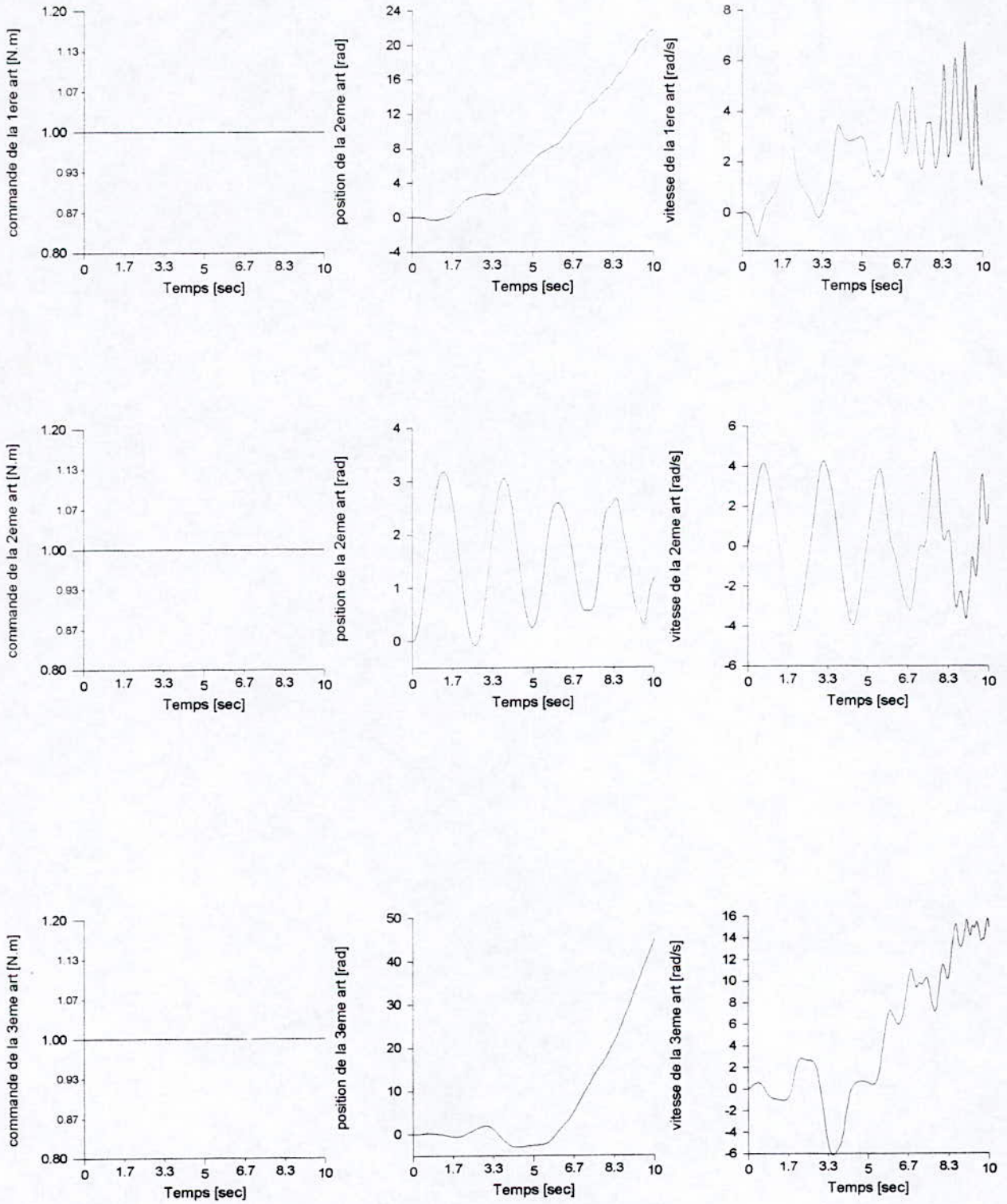
Tableau 1.2 - Paramètres d'inertie pour le robot PUMA 560

I.5 RESULTATS DE SIMULATION

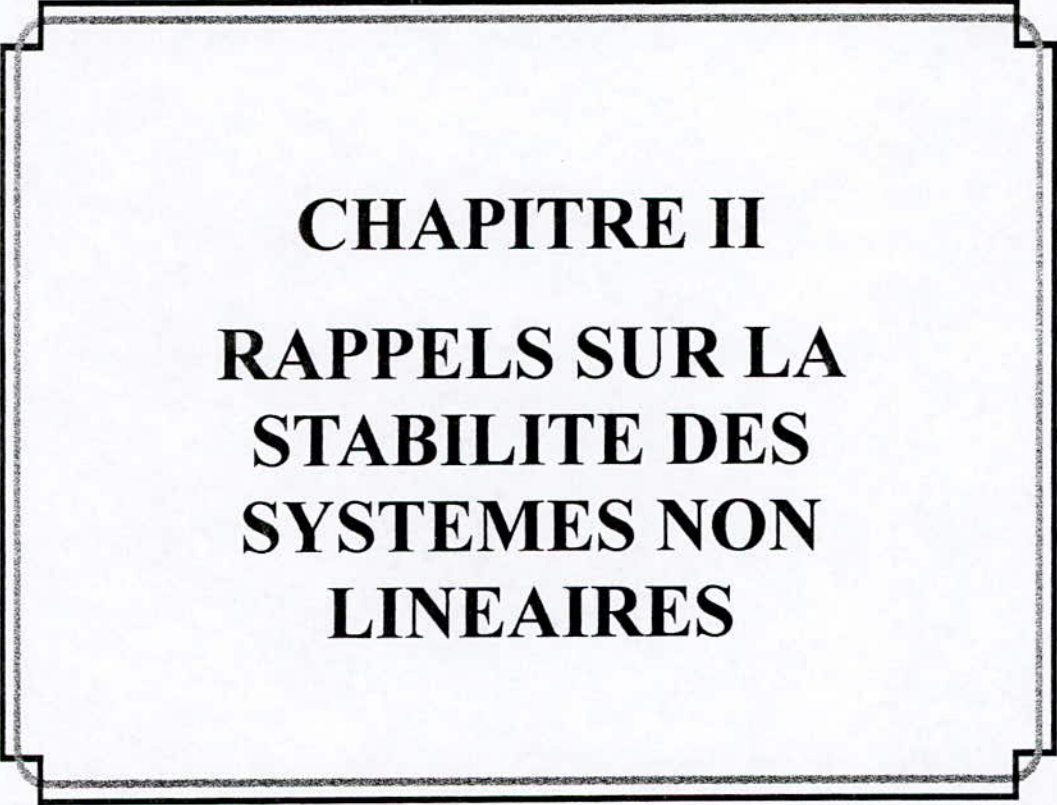
La figure (1.3) montre le comportement des différentes articulations du bras de robot soumises à une excitation indicielle ,sans charge ,elle met en évidence le caractère instable du robot.

I.6 CONCLUSION

Après avoir calculer un modèle mathématique du PUMA 560, on peut dire que ce dernier présente de fortes interconnexions nonlineaire ,et au vue des résultats obtenue en simulation en boucle ouverte ,une commande décentralisée ,voir adaptative ,est nécessaire pour obtenir de bonnes performances .



fig(1.3) Réponse indicielle du robot PUMA 560 ,en position et en vitesse



CHAPITRE II
RAPPELS SUR LA
STABILITE DES
SYSTEMES NON
LINEAIRES

CHAPITRE II

RAPPEL SUR LA STABILITE DES SYTEMES NONLINEAIRES

II-1-INTRODUCTION

Un système non linéaire est tout système dont la dynamique est régie par une équation différentielle non linéaire. L'étude de la stabilité de ces systèmes est très complexe, l'approche la plus utilisée pour l'étude de cette dernière est la théorie introduite au 19^{ème} siècle par le mathématicien russe ALEXANDRE MIKHAILOVICH LYAPUNOV. Son travail intitulé «*the general problem of the motion stability*» illustre les deux méthodes pour l'analyse de la stabilité :

1-la méthode de linéarisation

2-la méthode directe

La première concerne la stabilité locale autour d'un point d'équilibre, par contre la deuxième détermine la stabilité des systèmes en construisant une fonction scalaire des états du système dont on examinera la variation temporelle.

II-2-DEFINITION DU POINT D'EQUILIBRE [KHALIL 96]

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n \quad (\text{II-1})$$

soit $x^* \in R^n$

x^* est un point d'équilibre du système précédant si est seulement si :

$$\forall t \quad f(x^*) = 0 \quad (\text{II-2})$$

Remarque :

Notre but est d'étudier la stabilité de ce point d'équilibre ,nous allons donner toutes les définitions et les théorèmes dans le cas ou le point d'équilibre est l'origine de $R^N (x^* = 0)$.si ce point est différent de l'origine ,on va remédier à ce problème par un changement de variables .

Soit $x^* \neq 0$ posant $y = x - x^*$ alors
 $\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*) \stackrel{def}{=} g(y)$

Donc, $g(0) = f(0) = 0$

II-3-1-THEOREME DE LA STABILITE [KHALIL 96]

Soit le système suivant : $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$

Soit aussi le point d'équilibre $x^* = 0$

alors le point d'équilibre est dit :

- stable si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad tq \quad \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (III-3)$$

- asymptotiquement stable si :

il est stable et (δ) peut être choisi pour que :

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (II-4)$$

-exponentiellement stable si :

$$\exists \alpha, \lambda \quad tq \quad \|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (II-5)$$

II-3-2-THEOREME DE LASALLE –YOSHIZAWA : [KOKOTOVIC 95]

Soit le système régi par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (II-6)$$

soit $x=0$ le point d'équilibre de ce système, s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive qui vérifie :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in R^n \quad (\text{II-7})$$

Alors les solutions du système précédent sont globalement bornées et satisfassent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (\text{II-8})$$

et si $W(x)$ est définie positive alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

II-4-1-LA STABILITE LOCALE PAR LA METHODE DE LINEARISATION [SLOTINE 91]

Cette méthode analyse la stabilité locale des systèmes non linéaires. Le comportement du système non linéaire est le même que son approximation linéaire pour des petites variations autour du point d'équilibre

Considérons le système régi par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad \text{où } f \text{ est une fonction non linéaire}$$

l'approximation linéaire de ce système autour du point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ est

$$\dot{x} = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x}) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=\tilde{x}} + f_{h.o.t}(x) \quad (\text{II-9})$$

$f_{h.o.t}$ regroupe les termes d'ordre élevé de x .

Considérons maintenant le développement en série de Taylor d'ordre 1 de f et aussi $f(0)=0$, car le point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ alors l'approximation linéaire devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x \quad \text{tq} \\ A &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

Considérons maintenant le système régi par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{tq} \quad f(0,0) = 0 \quad (\text{II-11})$$

alors son approximation linéaire devient :

$$\dot{x} = A.x + B.u \quad tq \quad A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x=0, u=0)} \quad , B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x=0, u=0)} \quad (II-12)$$

Théorème

Si le système linéarisé est stable (les valeurs propres de A sont à partie réelle négative) alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable pour le système non linéaire considéré

II-4-2-LA METHODE DIRECTE DE LYAPUNOV [KHALIL 96]

La philosophie de cette méthode n'est que l'extension mathématique d'un phénomène physique observé, car les systèmes mécaniques et électriques perdent de l'énergie pour se stabiliser au point d'équilibre.

II-4-2-1-THEOREME DE STABILITE [KHALIL 96]

Soit le système suivant : $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, $\tilde{x} = 0$, est un point d'équilibre.

Considérons $V(x)$ une fonction scalaire définie positive, continue et différentiable sur $D \subset R^n$ tq $\tilde{x} \in D$.

- Si $V(0)=0$ et $V(x)>0 \quad \forall x \in D - \{0\}$ et $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$, alors le point d'équilibre ($\tilde{x}=0$) est stable.

- Si $V(0)=0$ et $V(x)>0 \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$, alors le point d'équilibre ($\tilde{x}=0$) est asymptotiquement stable.

I-4-2-2-THEOREME DE LA STABILITE GLOBALE [SLOTINE 91]

$\exists V(x)$ une fonction scalaire en (x) si

- $V(x)$ est définie positive

- $\dot{V}(x)$ est définie négative .

- $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

Alors le point d'équilibre ($\tilde{x}=0$) est globalement stable.

II-5-STABILITE DES SYSTEMES INTERCONNECTES [KHALIL 96] :

La complexité de l'étude la stabilité des systèmes non linéaire croit en fonction de l'ordre des systèmes et des interconnexions. Cette réalité nous motive à chercher des outils dans le but de simplifier cette étude. alors quand le système peut être modéliser comme étant des sous systèmes interconnectes alors l'analyse de la stabilité globale se fait en deux étapes.

1ère étape : décomposer le système en sous systèmes d'ordre réduit et analyser la stabilité de chacun d'eux en ignorant les interconnexions.

2ème étape : on combine entre les conclusions de l'étape précédente et les informations sur les interconnexions dans le but de tirer des conclusions sur la stabilité du système globale. Cette idée a été utilisée afin de rechercher la fonction de Lyapunov du système interconnecté.

Considérons le système interconnecté suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + g_i(x) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\in R^{n_i}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = N, \quad x = [x_1^t \quad x_2^t \quad \dots \quad x_m^t]^t \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

On suppose que f_i, g_i sont continues et lisses et que $(\tilde{x}=0)$ est un point d'équilibre du système. Nous allons étudier la stabilité de ce point par la méthode directe de Lyapunov. Considérons le sous système (i) en ignorant les interconnexions $g_{ai}(x)$:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) \quad (\text{II-14})$$

Supposant qu'on connaît les fonctions de Lyapunov $V_i(x)$ de chaque sous système alors la fonction de Lyapunov globale candidate est :

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{i=1}^m d_i V_i(x_i) \quad d_i > 0 \\ \dot{V}_i(x) &= \sum_{i=1}^m d_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(x_i) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

Nous avons le terme : $\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i)$ est défini négatif car nous avons supposé auparavant

L'existence de la fonction de Lyapunov qui vérifie la stabilité des sous systèmes, mais le signe du terme due aux interconnexions est inconnu.

Supposant que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) &\leq -\alpha_i \phi_i^2(x_i) \\ \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| &\leq \beta_i \phi_i(x_i) \quad \text{avec } \alpha_i, \beta_i > 0 \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

et que les interconnexions satisfont

$$\begin{aligned} \|g_i(x_i)\| &\leq \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \phi_j(x_j) \\ \text{alors} \\ \dot{V}(x) &\leq \sum_{i=1}^m [-\alpha_i \phi_i^2(x_i) + \sum_{j=1}^m \beta_i \gamma_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j)] \\ \text{posant} \\ \phi &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_m] \\ D &= [d \quad d_2 \quad \dots \quad \dots \quad d_m] \\ s_{ij} &= \begin{cases} \alpha_i - \beta_i \gamma_{ij}, & i = j \\ -\beta_i \gamma_{ij}, & i \neq j \end{cases} \\ \text{alors} \\ \dot{V}(x) &\leq -\frac{1}{2} \phi^T (DS + S^T D) \phi \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

Donc s'il existe une matrice diagonale D définie positive tel que $\phi^T (DS + S^T D) \phi < 0$ et $\phi(0)=0$ alors $\dot{V}(x)$ est définie négative.

C'est une condition suffisante pour la stabilité asymptotique du point d'équilibre.

II-6-LA SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR LA METHODE DIRECTE DE LYAPUNOV [KHALIL 96]

Dans les paragraphes précédant nous avons étudié la stabilité des systèmes ou on a supposé implicitement que la loi de commande a été choisie et notre but était de vérifier la stabilité du système avec cette loi de commande.

Mais le problème dans cette synthèse est comment trouver cette commande qui stabilisera le système, dans les chapitres suivants, nous allons présenter une méthodologie qui combine entre la recherche de la fonction Lyapunov et la loi stabilisante.

En générale il existe deux concepts pour l'application de la méthode directe de Lyapunov pour la synthèse d'une commande stable :

Ière concept : on suppose que la loi de commande existe et on cherche la fonction de Lyapunov qui justifie ce choix.

2^{ème} concept : cette fois si on fait un choix sur $V(x)$ la fonction de Lyapunov candidate et on cherchera la loi de commande qui rendra cette fonction candidate la fonction de Lyapunov réelle.

II-7-CONCLUSION :

La stabilité est une notion fondamentale dans l'analyse des systèmes et la synthèse des commandes.

Puisque la solution analytique des équations différentielles non linéaire est très complexe ,alors les deux méthodes de Lyapunov sont essentiellement les plus utilisées pour déterminer la stabilité de ses systèmes.

Dans la plupart des théorèmes et lemmes de la stabilité au sens de Lyapunov, l'existence de la fonction de Lyapunov était assumée et l'objectif était de déterminer la stabilité de ces systèmes. Mais dans la plupart de cas la recherche de cette fonction est très difficile. Dans le prochain chapitre, nous présenterons la notion du **Backstepping** qui nous offre une solution à ce problème.



CHAPITRE III
BACKSTEPPING

CHAPITRE III

BACKSTEPPING

III-1 INTRODUCTION

La théorie de Lyapunov nous offre des outils très puissants pour l'analyse de la stabilité des systèmes et ces mêmes outils peuvent être utilisés dans la synthèse de la commande. C'est dans ce contexte que se situe le backstepping.

On peut définir le backstepping comme étant une procédure récursive qui combine entre le choix de la fonction de Lyapunov et la synthèse de la loi de commande, cette méthode transforme le problème de synthèse de commande pour le système global à une synthèse de séquence de commandes pour des systèmes réduits (même des systèmes scalaires). En exploitant la flexibilité des systèmes réduits, le backstepping peut répondre aux problèmes de régulation, poursuite et de robustesse avec des conditions moins restrictives que d'autres méthodes. [KHALIL 95]

III-2-BACKSTEPPING DANS LE CAS MONOVARIABLES : [KHALIL 96]

a)- considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \zeta \\ \dot{\zeta} = u \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

tel que $[\eta^T \quad \zeta]^T \in R^{n+1}$, $u \in R$ et $f(0) = 0$

Nous voulons synthétiser une loi de commande (feed-back) pour stabiliser le point d'équilibre (II-2). Le système (III-1) peut être décomposé en deux sous-systèmes dont le premier est : $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \zeta$ où ζ est considéré comme étant une commande de ce sous-système et le second qui est un intégrateur ($\dot{\zeta} = u$). Supposons qu'on peut stabiliser le premier sous-système par une commande $\phi(\eta)$; telle que :

$$\phi(0) = 0 \quad , \quad \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \phi(\eta)$$

et en plus connaissant la fonction Lyapunov $V(\eta)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] &\leq -w(\eta) \quad , \forall \eta \in D \\ W(\eta) &\geq 0 \quad , \forall \eta \in D \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

avec addition et soustraction du terme $g(\eta)\phi(\eta)$ dans (III-1) nous aurons :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)[\zeta - \phi(\eta)] \\ \dot{\zeta} = u \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

posons : $z = \zeta - \phi(\eta)$. alors on aura :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta).z \\ \dot{z} = u - \dot{\phi} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial f}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\zeta] \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

posons : $v = u - \dot{\phi}(\eta)$, alors le système (II-4) devient :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) + g(\eta).z \\ \dot{z} = v \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Ce système est similaire au système (III-1) sauf que maintenant le premier sous système $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) + g(\eta).z$ est asymptotiquement stable quand $z=0$, ce résultat sera exploité pour la synthèse de la commande v .

Considérons la fonction de Lyapunov candidate :

$$V_a(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}.z^2 \quad (\text{III-6})$$

en dérivant $V_a(\eta, z)$ par rapport au temps :

$$\dot{V}_a = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} .g(\eta).z + z.v \quad (\text{III-7})$$

en utilisant (III-2) dans (III-7), nous aurons :

$$\dot{V}_a \leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} .g(\eta).z + z.v \quad (\text{III-8})$$

$$\text{On choisit } v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - K.z \quad , \text{ alors } \dot{V}_a(\eta, z) \leq -W(\eta) - K.z^2 \quad (\text{III-9})$$

D'après le théorème de Lyapunov le point $z=0$ est asymptotiquement stable, puisque $\phi(0)=0$, alors le point $(\eta = 0, \zeta = 0)$ est aussi asymptotiquement stable, d'où :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\zeta] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - K(\zeta - \phi(\eta)) \quad (\text{III-10})$$

Et si $V(\eta)$ est radialement borné, on peut conclure que l'origine est globalement stable.

Lemme III-1 : [KHALIL 96]

Considérons le système (III-1), supposons qu'il existe un retour $\phi(\eta)$ satisfaisant (III-2) avec $\phi(0) = 0$ et $V(\eta)$ une fonction de Lyapunov qui satisfait aussi (III-2), alors la commande u de (III-9) stabilise l'origine de (III-1), avec $V_a(\eta, \zeta) = V(\eta) + \frac{1}{2} \zeta^2$ comme étant la fonction de Lyapunov globale, et si $V(\eta)$ est radialement borné alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement et globalement stable.

b)- considérons un système plus générale que (III-1) :

soit :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} = f_a(\eta, \zeta) + g_a(\eta, \zeta)u \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

avec $g_a(\eta, \zeta) \neq 0 \quad \forall \eta, \zeta$

Considérons la transformation :

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \zeta)} [u_a - f_a(\eta, \zeta)]. \text{ alors le système (III-11) devient :}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} = u_a \end{cases}$$

S'il existe un retour $\phi(\eta)$ et une fonction de Lyapunov $V(\eta)$ qui vérifient (III-2) alors :

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \zeta)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} (f(\eta) + g(\eta)\zeta) - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - K(\zeta - \phi) - f_a(\eta, \zeta) \right]$$

avec $K > 0$ et $V_a(\eta, \zeta) = V(\eta) + \frac{1}{2} [\zeta - \phi(\eta)]^2$

sont respectivement, la commande stabilisante et la fonction de Lyapunov pour le système globale (III-11).

Avec une application récursive du backstepping, on peut stabiliser des systèmes dits «strict feedback systems» qui ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x).z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1).z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2).z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_k = f_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k).u \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

avec $x \in R^n$ et z_1, z_2, \dots, z_k sont des scalaires et $g_i(x, z_1, \dots, z_i) \neq 0 \forall 1 \leq i \leq k$

La procédure du backstepping récursive commence par le système :

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x).z_1$$

Considérons z_1 comme étant une commande virtuelle de ce sous-système $z_1 = \phi_0(x)$, $\phi_0(0) = 0$ et la fonction de Lyapunov $V_0(x)$ qui vérifie :

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x).\phi_0(x)] \leq -W(x) \quad \text{avec } W(x) \geq 0 \quad (\text{III-13})$$

Remarque :

Dans la plupart des cas d'application du backstepping x est choisi comme scalaire pour simplifier la procédure du backstepping.

Maintenant, avec $\phi_0(x)$ et $V_0(x)$ connus, on procède à l'application systématique du backstepping, soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x).z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1).z_2 \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

c'est un cas simple du système (III-11), en appliquant le lemme (III-1) et avec :

$x = \eta, z_1 = \zeta, z_2 = u, f_0 = f, g_0 = g, f_1 = f_a, g_1 = g_a$, alors le système (III-14)

peut être stabiliser par :

$$\phi_1(x, z_1) = \frac{1}{g_1} \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x} (f_0 + g_0 z_1) - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0 - K_1.(z_1 - \phi_0) - f_1 \right]$$

et la fonction de Lyapunov candidate est :

$$V_1(x, z_1) = V_0(x) + \frac{1}{2}(z_1 - \phi_0(x))^2$$

considérons le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x).z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1).z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2).z_3 \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

avec : $\eta = \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\zeta = z_2$, $u = z_3$, $f = \begin{bmatrix} f_0 + g_0.z_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}$, $f_a = f_2$, $g_a = g_2$

Le système (III-15) peut être stabiliser par :

$$\phi_2(x, z_1, z_2) = \frac{1}{g_2} \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x} (f_0 + g_0.z_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1} (f_1 + g_1.z_2) - \frac{\partial V_1}{\partial z_1} g_1 - k_2.(z_2 - \phi_1) - f_2 \right]$$

et sa fonction de Lyapunov est :

$$V_2(x, z_1, z_2) = V_1(x, z_1) + \frac{1}{2}(z_2 - \phi_1)^2$$

Finalement, en répétant cette procédure k fois on obtient la loi de commande globale et aussi la fonction de Lyapunov associée : $u = \phi_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$ et $V_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$

III-3-BACKSTEPPING DANS LE CAS MULTIVARIABLES [KHALIL 96]

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + G(\eta).\zeta \\ \dot{\zeta} = f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta).u \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

Avec, supposons que le premier sous système de (III-16) est stabilisable par une commande $\zeta = \phi(\eta)$ $\phi(0) = 0$, et connaissant la fonction de Lyapunov $V(\eta)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + G(\eta).\phi(\eta)] &\leq -W(\eta) \\ W(\eta) &> 0 \quad \forall \eta \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

soit $V_a(\eta, \zeta) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\zeta - \phi(\eta)]^T [\zeta - \phi(\eta)]$ la fonction de Lyapunov candidate, en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{V}_a = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f + g\phi] + \frac{\partial V}{\partial \eta} G[\zeta - \phi] + [\zeta - \phi]^T [f_a + G_a u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f + G\zeta]]$$

choisissant :

$$u = G_a^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f + G\zeta] - \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} G \right)^T - f_a - K. [\zeta - \phi] \right]$$

alors \dot{V}_a devient :

$$\dot{V}_a = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f + G.\phi] - K. [\zeta - \phi]^T [\zeta - \phi] \leq -W(\eta) - K [\zeta - \phi]^T [\zeta - \phi]$$

Donc le point d'équilibre ($\eta = 0, \zeta = 0$) est asymptotiquement stabilisable par la commande u.

III-3- ROBUSTESSE DE LA COMMANDE SYNTHETISE PAR BACKEPPING [KHALIL 96]

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta).\zeta + \delta_\eta(\eta) \\ \dot{\zeta} = f_a(\eta, \zeta) + g_a(\eta, \zeta) + \delta_\zeta(\eta, \zeta) \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

avec δ_η et δ_ζ sont des termes inconnus, supposons que :

$$\|\delta_\eta(\eta)\|_2 \leq \alpha_1 \|\eta\|_2 \quad (\text{III-19})$$

$$\|\delta_\zeta(\eta, \zeta)\|_2 \leq \alpha_2 \|\eta\|_2 + \alpha_3 \|\zeta\|_2 \quad (\text{III-20})$$

Supposant qu'il existe une commande $\zeta = \phi(\eta)$ et $\phi(0) = 0$, qui stabilise le premier sous système de (III-18) et aussi $V(\eta)$ qui vérifie :

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) + \delta(\eta)] \leq -c \|\eta\|_2, \quad c > 0 \quad (\text{III-21})$$

d'après l'inégalité (III-21) le point ($\eta=0$) est un point d'équilibre asymptotiquement stable du premier sous système de (III-18)

$$\text{si} \quad \|\phi(\eta)\| \leq \alpha_4 \|\eta\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\| \leq \alpha_5 \|\eta\| \quad (\text{III-22})$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate globale :

$$V_a(\eta, \zeta) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\zeta - \phi(\eta)]^2 \quad (\text{III-23})$$

dérivant $V_a(\eta, \zeta)$ par rapport au temps :

$$\dot{V}_a = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f + g\phi + \delta_\eta] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\zeta - \phi) + (\zeta - \phi) \left[f_a + g_a u + \delta_\zeta - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f + g\zeta + \delta_\eta] \right]$$

avec :

$$u = \frac{1}{g_a} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} (f + g\zeta) - \frac{\partial V}{\partial \eta} g - f_a - K(\zeta - \phi) \right] \quad (\text{III-24})$$

on aura

$$\dot{V}_a \leq -c\|\eta\|_2 + (\zeta - \phi) \left[\delta_\zeta - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \delta_\eta \right] - K(\zeta - \phi)^2 \quad (\text{III-25})$$

En utilisant (III-19), (III-20), (III-21), (III-22), on aura :

$$\dot{V}_a \leq -c\|\eta\|_2 + 2\alpha_6\|\eta\|_2|\zeta - \phi| - (k - \alpha_6)(\zeta - \phi)^2$$

$$\dot{V}_a \leq - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ |\zeta - \phi| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c & -\alpha_6 \\ -\alpha_6 & k - \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ |\zeta - \phi| \end{bmatrix}$$

$$\alpha_6 > 0 \quad \text{si} \quad K > \alpha_3 + \frac{\alpha_6^2}{c} \quad \text{on aura} \quad \dot{V}_a \leq \sigma \|\eta\|_2^2 + (\zeta - \phi)^2 \quad \sigma > 0$$

Lemme III-2 [KHALIL 96]

Considérons le système (III-18) dont les incertitudes vérifient les conditions (III-19), (III-20), (III-22), s'il existe $\phi(\eta)$ qui stabilise le premier sous système de (III-18) et la fonction de Lyapunov qui vérifie la condition (III-21), alors la loi de commande de (III-24) avec aussi grand stabilise l'origine du système globale et si $V(\eta)$ est radialement borné alors l'origine est asymptotiquement et globalement stable.

III-4-MODE GLISSANT PAR BACKSTEPPING [KHALIL96]

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f_0(x) + \delta_1(x) + G(x) \cdot [u + \delta_2(x, u)] \quad (\text{III-26})$$

$x \in R^n, u \in R^p$, δ_1, δ_2 sont les termes inconnus, soit D_0 un domaine qui contient l'origine. considérons le diffeomorphisme T tel que :

$$T : D_0 \rightarrow R^n$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ G_2(x) \end{bmatrix} \text{ avec } G_2(x) \text{ une matrice } (p \times p), \text{ soit le changement de}$$

variables suivant :

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = T(x) \quad , \eta \in R^{n-p}, \zeta \in R^p$$

qui transformera le système (III-26) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta, \zeta) + \delta_\eta(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} = f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta) \cdot [u + \delta_\zeta(\eta, \zeta)] \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

avec :

$$G_a(\eta, \zeta) = G_2 \left(T^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \right)$$

En introduira le mode glissant pour synthétiser une commande u , afin de stabiliser le point d'équilibre $(\eta = 0, \zeta = 0)$ en présence des incertitudes, et cela en appliquant le backstepping.

Commençons par le système :

$$\dot{\eta} = f(\eta, \zeta) + \delta_\eta(\eta, \zeta) \quad (\text{III-28})$$

avec ζ comme commande virtuelle, sachant qu'il existe un retour $\zeta = \phi(\eta)$ avec $\phi(0) = 0$ tel que l'origine de (III-28) sera asymptotiquement stable

Remarque

Ce problème de stabilisation peut être traité simplement par le backstepping seulement.

Maintenant, on procède à la conception de la commande par mode glissant.

Soit : $z = \zeta - \phi(\eta)$, il est visible que si $z=0$ alors $\zeta = \phi(\eta)$ d'où la variable η approche l'origine asymptotiquement.

Dans l'approche du backstepping, étudiée précédemment, la commande a été synthétisée afin de stabiliser le point $(z = 0, \eta = 0)$ simultanément avec une fonction de Lyapunov candidate. Mais avec le mode glissant le problème va être approché différemment, car nous allons synthétiser une commande de façon à amener la variable z vers 0 en un temps infiniment petit et le maintenir dans cette position pendant tout le temps futur.

Soit :

$$\dot{z} = f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta)[u + \delta_\zeta(\eta, \zeta, u)] - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta, \zeta) + \delta_\eta(\eta, \zeta)] \quad (\text{III-29})$$

Posons u comme :

$$u = u_{eq} + G_a^{-1}(\eta, \zeta).v$$

u_{eq} est choisie pour éliminer les termes connus de (III-29), donc :

$$u_{eq} = G_a^{-1}(\eta, \zeta) \left[-f_a(\eta, \zeta) + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}.f(\eta, \zeta) \right] \quad (\text{III-30})$$

u_{eq} est appelée la commande équivalente, dans l'absence des incertitudes, $u = u_{eq}$ donc $\dot{z} = 0$ et cela assure que la condition $z=0$ peut être maintenu pendant le temps futur

Remplaçons (III-30) dans (III-29) on aura :

$$\dot{z} = v + \Delta(\eta, \zeta, v) \quad (\text{III-31})$$

avec :

$$\Delta(\eta, \zeta, v) = G_a(\eta, \zeta)\delta_\zeta(\eta\zeta + u_{eq} + G_a^{-1}(\eta, \zeta)v) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\delta_\eta(\eta, \zeta) \quad (\text{III-32})$$

Sachant que :

$$\|\Delta(\eta, \zeta, v)\|_\infty \leq \rho(\eta, \zeta) + k\|v\|_\infty \quad \forall (\eta, \zeta, v) \in D \times R \times R^p \quad (\text{III-33})$$

avec $\rho(\eta, \zeta) \geq 0$ $k \in [0 \ 1]$

En utilisant (III-33), on a procédé à calculer v afin de forcer z pour se maintenir à 0, réécrivons (III-31) sous la forme de p équations différentielles :

$$\dot{z}_i = v_i + \Delta_i(\eta, \zeta, v)$$

Soit :

$$V_i = \frac{1}{2} z_i^2 \text{ la fonction de Lyapunov de la variable } z_i$$

donc :

$$\dot{V}_i = \dot{z}_i z_i = z_i v_i + z_i \Delta_i(\eta, \zeta, v) \quad 1 \leq i \leq p \quad (\text{III-34})$$

en utilisant (III-33) on aura :

$$\dot{V}_i \leq z_i v_i + |z_i| [\rho(\eta, \zeta) + k \|v\|_\infty]$$

posant :

$$v_i = -\frac{\beta(\eta, \zeta)}{1-k} \text{sign}(z_i) \text{ avec } \beta(\eta, \zeta) \geq \rho(\eta, \zeta) + b, b \geq 0$$

donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\frac{\beta(\eta, \zeta)}{1-k} |z_i| + \rho(\eta, \zeta) |z_i| + k \frac{\beta(\eta, \zeta)}{1-k} |z_i| \\ \dot{V}_i &\leq -\beta(\eta, \zeta) |z_i| + \rho(\eta, \zeta) |z_i| \\ \dot{V}_i &\leq -b |z_i| \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

L'inégalité (III-35) assure que si la trajectoire des solutions du système (III-27) arrive sur la surface $z=0$ à n'importe quel temps elle restera à cette surface, car pour quitter cette surface il faut que \dot{V}_i soit positif et cela est impossible d'après (III-35)

III-5-BACKSTEPPING ADAPTATIF [KOKOTOVIC 95] :

Si le modèle du système présente des termes inconnus ou variant dans le temps, la loi de commande doit les prendre en considération afin d'apporter au système de bonnes performances, donc cette loi de commande doit générer une loi d'adaptation pour contourner le problème d'incertitude paramétrique.

Pour présenter la méthodologie du backstepping adaptatif commençons par l'exemple suivant :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta \phi(x_1) \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (\text{III-36})$$

si θ est connu, l'application directe du backstepping nous donne :

$$\begin{cases} \alpha(x_1, \theta) = -c_1 x_1 + \theta \phi(x_1) \\ u = -x_1 - c_2 (x_2 - \alpha(x_1, \theta)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \theta \phi(x_1)) \\ V(x_1, x_2, \theta) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_2 - \alpha(x_1, \theta))^2 \\ \dot{V} = -c_1 x_1^2 - c_2 (x_2 - \alpha(x_1, \theta))^2 \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

D'où le point $(x_1 = 0, x_2 = -\theta \phi(0))$ est asymptotiquement stable.

Maintenant si θ est inconnu, on remarque alors que le terme $\alpha(x_1, \theta)$ regroupe aussi des termes inconnus donc on ne peut pas continuer la procédure, d'où on est dans l'obligation de générer une loi d'adaptation pour estimer le paramètre θ et cela en utilisant le backstepping,

Soit v_1 l'estime de θ , alors :

$$\alpha(x_1, v_1) = -c_1 x_1 - v_1 \phi(x_1) \quad (\text{III-38})$$

Considérons la variable virtuelle z_1 tel que :

$$z_1 = x_2 - \alpha(x_1, v_1) \quad (\text{III-39})$$

alors \dot{x}_1 devient :

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + z_1 - v_1 \phi + \theta \phi \quad (\text{III-40})$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V(x_1, v_1)$ tel que :

$$V(x_1, v_1) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2\gamma} (\theta - v_1)^2 \quad (\text{III-41})$$

Dérivons cette fonction par rapport au temps :

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 - \frac{1}{\gamma} \dot{v}_1 (\theta - v_1) \quad (\text{III-42})$$

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 + x_1 z_1 + (\theta - v) \left(x_1 \phi - \frac{1}{\gamma} \dot{v}_1 \right)$$

choisissons :

$$\dot{v}_1 = \gamma x_1 \phi(x_1) \quad (\text{III-43})$$

alors :

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 + x_1 z_1 \quad (\text{III-44})$$

en dérivant (III-39) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha} \\ &= u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \dot{v}_1\end{aligned}\quad (\text{III-45})$$

en utilisant (III-36) et (III-43) dans (III-45), on aura :

$$\dot{z}_1 = u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \gamma \cdot \phi \cdot x_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \theta \cdot \phi \quad (\text{III-46})$$

Considérons la fonction de Lyapunov augmenté :

$$V_a(x_1, z_1, v_1) = V(x_1, v_1) + \frac{1}{2} z_1^2 \quad (\text{III-47})$$

Dérivons cette fonction par rapport au temps :

$$\dot{V}_a = -c_1 x_1^2 + z_1 \left(x_1 + u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \gamma \cdot \phi \cdot x_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \theta \cdot \phi \right) \quad (\text{III-48})$$

Si on choisit :

$$u = -x_1 - c_2 z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \gamma \cdot \phi \cdot x_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} v_1 \cdot \phi \quad (\text{III-49})$$

On aura :

$$\dot{V}_a = -c_1 x_1^2 - c_2 z_1^2 - (\theta - v_1) \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \phi \cdot z_1 \quad (\text{III-50})$$

On remarque que dans la relation (III-50) l'existence du terme $(\theta - v_1)$ et pour éliminer, on doit générer une nouvelle estimée v_2 de la variable v_1 et la remplacer dans les équations précédentes.

donc :

$$\begin{aligned}u &= -x_1 - c_2 z_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \gamma \cdot \phi \cdot x_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x} v_2 \cdot \phi \\ \dot{z}_1 &= -c_2 z_1 - x_1 - (\theta - v_2) \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \cdot \phi\end{aligned}\quad (\text{III-51})$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate :

$$V_i(x_1, z_1, v_1, v_2) = V(x_1, v_1) + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2 \gamma} (\theta - v_2)^2 \quad (\text{III-52})$$

en dérivons cette fonction par rapport au temps :

$$\dot{V}_i = -c_1 x_1^2 - c_2 z_1^2 - (\theta - v_2) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \phi z_1 + \frac{1}{\gamma} \dot{v}_2 \right) \quad (\text{III-53})$$

Si on choisit : $\dot{v}_2 = \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \phi z_1$ alors :

$$\dot{V}_i = -c_1 x_1^2 - c_2 z_1^2 \quad (\text{III-54})$$

D'après (III-52), (III-54) le point $(x = 0, z_1 = 0, \theta = v_1, v_1 = v_2)$ est asymptotiquement stable,

Considérons maintenant un système plus général que (III-36).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + f(x)\theta + g(x)\zeta \\ \dot{\zeta} = u \end{cases} \quad (\text{III-55})$$

Où $x \in R^n$, $\theta \in R^p$, $(u, \zeta) \in R \times r$, avec les termes inconnus.

On s'intéresse au premier sous système de (III-55) :

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + g(x)\zeta$$

avec ζ comme étant une commande virtuelle

Supposons qu'il existe $\alpha(x, v)$ et $T(x, v)$ ou (v) est l'estime de (θ) avec :

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha(x, v) \\ T(x, v) &= \dot{v} \end{aligned}$$

est une fonction de Lyapunov $V(x, v)$

qui vérifient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f + F\theta + g\alpha(x, v)] + \frac{\partial V}{\partial v} T(x, v) \leq -W(x, v) \quad \text{avec } W(x, v) \geq 0 \quad (\text{III-56})$$

Soit la variable virtuelle $z = \zeta - \alpha$ et \tilde{v} la nouvelle estimée de (θ) .

Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V_a(x, v, \tilde{v}, \zeta)$ telle que :

$$V_a(x, v, \tilde{v}, \zeta) = V + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} (\theta - \tilde{v})^T \Gamma^{-1} (\theta - \tilde{v}) \quad (\text{III-57})$$

on dérive cette fonction par rapport au temps, on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial x} [f + F\theta + g\alpha + g z] + \frac{\partial V}{\partial v} T + \\ &+ z \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f + F\theta + g(\alpha + z)) - \frac{\partial \alpha}{\partial v} T \right] - \dot{\tilde{v}}^T \Gamma^{-1} (\theta - \tilde{v}) \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

en utilisant (III-56), on aura :

$$\dot{V}_a \leq -W(x, v) + z \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f + F \cdot \tilde{v} + g(\alpha + z)) - \frac{\partial \alpha}{\partial v} T + \frac{\partial V}{\partial x} g \right] - \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} F \cdot z + \dot{\tilde{v}} \cdot \Gamma^{-1} \right] (\theta - \tilde{v})$$

si on choisit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}} &= -\Gamma \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} F \right)^T \cdot z \\ u &= -c \cdot z + \frac{\partial \alpha}{\partial x} [f + F \cdot \tilde{v} + g \cdot (z + \alpha)] + \frac{\partial \alpha}{\partial x} T - \frac{\partial V}{\partial x} g \end{aligned} \quad (\text{III-59})$$

alors

$$\dot{V}_a \leq -W(x, v) - c \cdot z^2 \quad (\text{III-60})$$

D'après (III-57), (III-60) le point $(x = 0, \zeta = \alpha(0, v), \theta = v, \theta = \tilde{v})$ du système (III-55) est asymptotiquement stable

Considérons maintenant un système dont la forme est dite '*strict feed-back*' qui se présente comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1^T(x_1) \theta \\ \dot{x}_2 = x_3 + \phi_2^T(x_1, x_2) \theta \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \phi_{n-1}^T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \theta \\ \dot{x}_n = \beta(x) u + \phi_n^T(x) \theta \end{cases} \quad (\text{III-61})$$

avec $\beta(x) \neq 0, \forall x \in R^n$.

Pour ce système le nombre d'étapes du backstepping à appliquer est égal au degré (n) du système lui-même. A chaque étape, une variable virtuelle, une fonction stabilisante α_i et un estimateur paramétrique v_i seront générés. En définitif, si le système comporte p paramètres inconnus, la loi d'adaptation doit développer (p×n) estimateurs paramétriques.

Théorème (III-5) [KOKOTOVIC 95]

Pour le système (III-61), la loi adaptative suivante :

$$u = \frac{1}{\beta(x)} \alpha_n(x, v_1, \dots, v_n) \quad (\text{III-62})$$

$$\dot{v}_1 = \Gamma \left(\phi_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j \right) \cdot z_i \quad (\text{III-63})$$

avec $v_i \in R^p$ sont des estimateurs multiples de θ , $\Gamma = \Gamma^T$ est la matrice du gain d'adaptation, la variable virtuelle z_i et la fonction stabilisante α_i , $i=1, \dots, n$ sont définis par les expressions récursives suivantes :

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, v_1, \dots, v_{i-1}) \quad (\text{III-64})$$

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -c_i \cdot z_i - z_{i-1} - \left(\phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \cdot \phi_j \right) \cdot v_i \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \cdot x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial v_j} \cdot \Gamma \left(\phi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k} \right) \cdot z_j \right] \end{aligned} \quad (\text{III-65})$$

Ces équations assurent la bornitude de $x(t)$, $v_1(t), \dots, v_n(t)$ et la régulation de $x_1(t)$ et $x_i(t) - x_i^e$ vers 0, $i=2, \dots, n$.

avec $x_i^e = \theta^T \phi_{i-1}(0, x_2^e, \dots, x_{i-1}^e)$

La démonstration de ce théorème est comme suit :

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V(z_1, z_2, \dots, z_n, v_1, \dots, v_n)$ tel que :

$$V(z_1, \dots, z_n, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[z_i^2 + (\theta - v_i)^T \Gamma^{-1} (\theta - v_i) \right] \quad (\text{III-66})$$

dérivons cette fonction par rapport au temps et utilisant les relations (III-64), (III-65), (III-63) nous aurons :

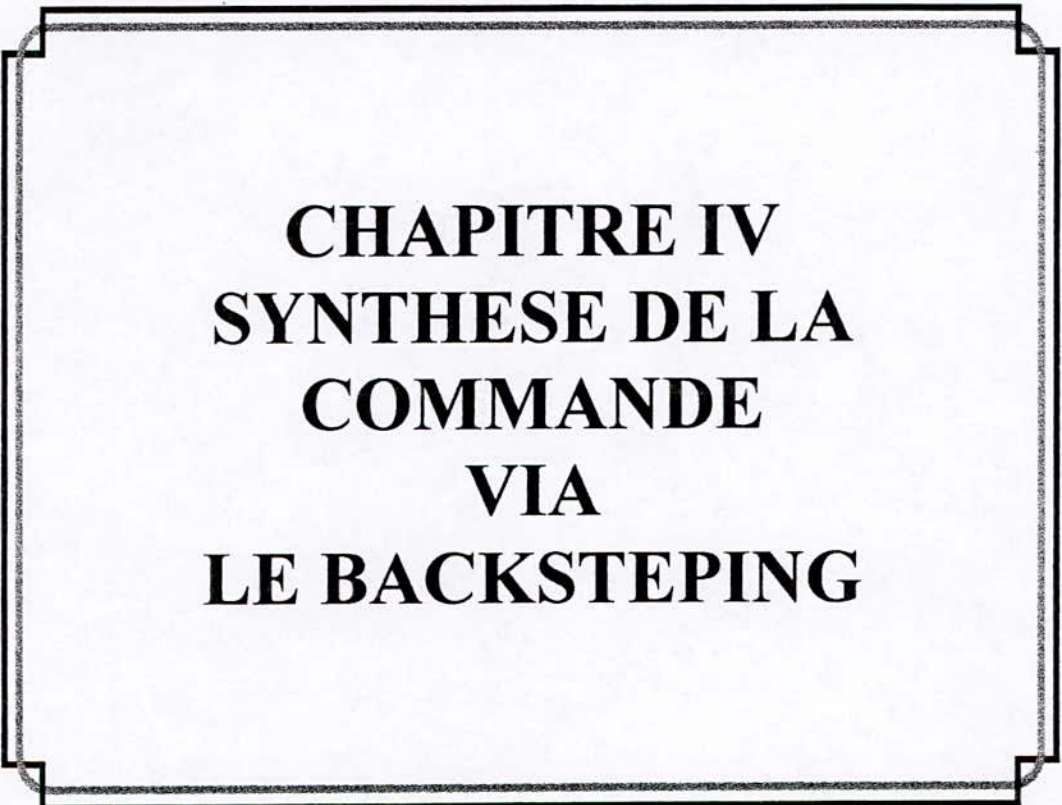
$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T \dot{z} - \sum_{i=1}^n v_i^T \Gamma^{-1} (\theta - v_i) \cdot \\ &= \sum_{i=1}^n \left[-c_i \cdot z_i^2 + z_i \cdot w_i (\theta - v_i) - z_i \cdot w_i (\theta - v_i) \right] \\ &= -\sum_{i=1}^n c_i \cdot z_i^2 \\ &\text{avec } w_i = \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \cdot \phi_j \end{aligned} \quad (\text{III-67})$$

D'après (III-66) et (III-67) et en appliquant le théorème de LaSalle Yoshizawa (II-5) et le théorème de stabilité globale on aura $z(t)$, $v_i(t)$ $i=1, \dots, n$ qui sont bornés et $z(t)$ qui tend vers 0.

III-6- CONCLUSION

La méthodologie du backstepping a été introduite dans l'idée de construire la fonction de Lyapunov qui nous assure la stabilité par une séquence d'étapes et en même temps de calculer la loi de commande nécessaire, c'est à dire, la commande qui rendra cette fonction de Lyapunov candidate, la fonction réelle du système globale.

Cette méthode ne s'applique pas directement à tous les systèmes, mais à une classe de systèmes non linéaires dite '*strict feedback*', et pour remédier à ce problème il faut trouver un difféomorphisme afin de transformer le système de sa forme initiale vers la forme désirée.



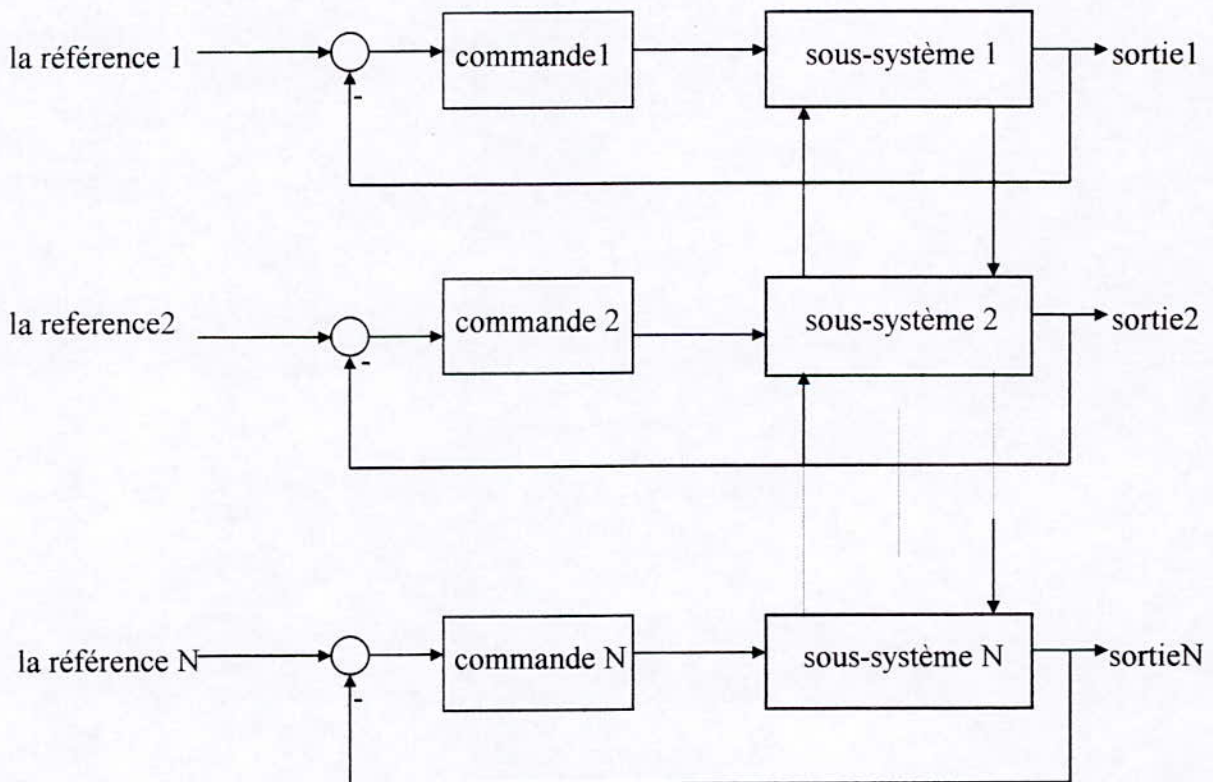
**CHAPITRE IV
SYNTHESE DE LA
COMMANDE
VIA
LE BACKSTEPING**

CHAPITRE IV

SYNTHESE DE LA COMMANDE VIA LE BACKSTEPPING

IV- COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE PAR LE BACKSTEPPING

Dans ce chapitre, nous allons exposer différentes approches de commande adaptative décentralisée dont l'adaptation consiste à estimer les termes inconnus, d'une part, et à palier au problème des interconnexions d'une autre part, en estimant les paramètres de bornitude des interconnexions. La commande de chaque sous système n'utilise que les informations disponibles au niveau de ce dernier.



fig(1) Schéma de commande

IV-1- PREMIERE APPROCHE [KHORRAMI 97.b]

Nous présenterons dans cette approche, un contrôleur adaptatif décentralisé pour des systèmes nonlineaires interconnectés. Nous prendrons en considération les incertitudes paramétriques et dynamiques avec la supposition que ces interconnexions peuvent être bornées par un polynôme d'ordre (p) en fonction des sorties du système.

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^N g_i(x_i) u_i \\ y_i &= h_i(x) \end{aligned} \quad (IV-1)$$

avec $x \in R^n$ sont les états du système globale $u_i \in R$ et $y_i \in R$ sont la commande et la sortie de chaque sous système respectivement . nous avons aussi :

$$f(0) = 0, h_i(0) = 0 \text{ et } g_i(0) \neq 0 \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq N$$

le contrôleur adaptatif décentralisé présenté dans cette approche est applicable au système transformable avec un diffeomorphisme :

$$z = [z_{11} \cdots z_{1k_1}, z_{21} \cdots z_{2k_2}, \cdots z_{n1} \cdots z_{nk_n}]^T = \Phi(x) \quad \text{avec } \Phi(0) = 0$$

vers la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i2} + \phi_{i1}(y_1 \cdots y_N) \\ \vdots \\ \dot{z}_{ip_i} = z_{i,p_{i+1}} + \phi_{i,p_i} \cdot (y_1 \cdots y_N) + b_{i,k_i-p_i} \cdot \delta_i(y_i) \cdot u_i \\ \vdots \\ z_{i,k_i} = \phi_{i,k_i} \cdot (y_1 \cdots y_N) + b_{i0} \delta_i(y_i) \cdot u_i \\ y_i = z_{i1} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (IV-2)$$

avec k_i pour $1 \leq i \leq n$ est un indice d'observabilité et : $\sum_{i=1}^N k_i = N$

Les interconnexions satisfont :

$$\|\phi_{i,j}(y_1 \cdots y_N)\| \leq \sum_{k=0}^{p_{i,j}} \sum_{l=1}^N \zeta_{i,j,l}^k \cdot \|y_l\|^k \quad (IV-3)$$

avec : $\zeta_{i,j,l}^k$ inconnu.

$\phi_{i,j}(y_1 \cdots y_N)$ peut contenir des termes inconnus mais la quantité $p = \max.(p_{i,j})$ doit être connu.

IV-1-2-SYNTHESE DE LA COMMANDE

Considérons le ieme sous système du système (IV-2), la procédure récursive se déroule comme suit :

A chaque étape, on augmente l'ordre du système considère et on génère une commande virtuelle afin de stabiliser ce système augmente jusqu'à ce que la commande réelle apparaisse à la p-ème étape.

Etape1

On définit l'erreur de poursuite pour le i-eme sous système :

$$e_{i,1} = z_{i,1} - y_{i,ref} \quad (IV-4)$$

donc :

$$\dot{e}_{i,1} = \dot{z}_{i,1} - \dot{y}_{i,ref} \quad (IV-5)$$

en utilisant (IV-2) dans (IV-5) :

$$\dot{e}_{i,1} = z_{i,2} + \phi_{i,1} - \dot{y}_{i,ref} \quad (IV-6)$$

Considérons la fonction Lyapunov initiale :

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_i \cdot e_{i,1}^{2k} + \Gamma_i^{-1} (\beta_i - \beta_i^*)^2 \right\} \quad (IV-7)$$

Où β_i est le gain d'adaptation variant dans le temps injecte pour contourner l'effet des interconnexions, sa valeur désirée est :

Dérivons V_1 par rapport au temps :

$$\dot{V}_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p 2k \lambda_i e_{i,1}^{2k-1} \cdot \dot{e}_{i,1} + 2 \Gamma_i^{-1} \dot{\beta}_i (\beta_i - \beta_i^*) \right\}$$

en utilisant (IV-6), \dot{V}_1 devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p 2k \lambda_i e_{i,1}^{2k-1} \cdot (z_{i,2} + \phi_{i,1} - \dot{y}_{i,ref}) + 2 \Gamma_i^{-1} \dot{\beta}_i (\beta_i - \beta_i^*) \right\} \\ \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p 2k \lambda_i e_{i,1}^{2k-1} \cdot \phi_{i,1} + \sum_{k=1}^p 2k \lambda_i e_{i,1}^{2k-1} \cdot (z_{i,2} - \dot{y}_{i,ref}) + 2 \Gamma_i^{-1} \dot{\beta}_i (\beta_i - \beta_i^*) \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p 2k \cdot \lambda_i \cdot \|e_{i,1}\|^{2k-1} \cdot \phi_{i,1} + \sum_{k=1}^p 2k \cdot \lambda_i \cdot e_{i,1}^{2k-1} \cdot (z_{i,2} - \dot{y}_{i,ref}) + 2 \cdot \Gamma_i^{-1} \cdot \dot{\beta}_i \cdot (\beta_i - \beta_i^*) \right\} \quad (IV-8)$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schawrtz suivantes :

$$2 \cdot ab \leq a^2 + b^2 \quad (IV-9)$$

$$\left(\sum_{k=1}^p a_k \cdot b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^p a_k^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^p b_k^2 \right) \quad (IV-10)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^p |a_i| \right\}^k \leq \sum_{i=1}^p 2^k \cdot |a_i|^k \quad (IV-11)$$

Considérons $z_{i,2}$ comme étant une commande virtuelle :

$$z_{i,2} = \alpha_{i,1}(e_{i,1}, \beta_i) \quad (IV-12)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p 2k \cdot \lambda_i \cdot \|e_{i,1}\|^{2k-1} \cdot \|\phi_{i,1}\| = \Delta_{i,1}$$

en utilisant (IV-3), on aura :

$$\Delta_{i,1} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p 2k \cdot \lambda_i \cdot \|e_{i,1}\|^{2k-1} \sum_{k_1=1}^{p_{i,j}} \sum_{j=1}^N \zeta_{i,1,j}^k \cdot \|y_j\|^{k_1}$$

en utilisant (IV-9) :

$$\Delta_{i,1} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{k_1=1}^{p_{i,j}} \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p (k \cdot \lambda_i \cdot \|e_{i,1}\|^{2k-1})^2 + (\zeta_{i,1,j}^{k_1})^2 \cdot \|y_j\|^{2k_1} \right\}$$

en utilisant (IV-10) :

$$\Delta_{i,1} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p \left(k \cdot \lambda_i \cdot \|e_{i,1}\|^{2k-1} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k_1=1}^{p_{i,1}} \sum_{j=1}^N (\zeta_{i,1,j}^{k_1})^2 \cdot \|y_j\|^{2k_1}$$

$$\text{soit : } d_{1,i,k} = \sum_{j=1}^N (\zeta_{i,1,j}^k)^2$$

alors :

$$\Delta_{i,1} \leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^p k^2 \cdot \lambda_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^p \|e_{i,1}\|^{4k-2} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{p_{i,1}} d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k}$$

$$\text{Soit : } \gamma_{i,1} = \sum_{k=1}^p k^2$$

en utilisant (IV-11)

$$\Delta_{i,1} \leq \sum_{i=1}^N \gamma_{i,1} \cdot \lambda_i^2 \sum_{k=1}^p \|e_{i,1}\|^{4k-2} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{p_{i,1}} 2^{2k} \cdot d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k} \quad (IV-13)$$

dans notre commande virtuelle on ne peut qu'éliminer le terme $\sum_{i=1}^N \gamma_{i,1} \cdot \lambda_i^2 \cdot \sum_{k=1}^p \|e_{i,1}\|^{4k-2}$

choisissant $\alpha_{i,1}(e_{i,1}, \beta_i) = -k_{i,1} \cdot e_{i,1} - \beta_i \cdot e_{i,1} - \gamma_{i,1} \cdot \lambda_{i,1}^2 (e_{i,1} + e_{i,1}^{2p-1}) + \dot{y}_{i,ref}$

et en utilisant (IV-13) et $\alpha_{i,1}$ dans (IV-8), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^p 2^{2k} \cdot d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k} + \gamma_{i,1} \cdot \lambda_{i,1}^2 \cdot \sum_{k=1}^p \|e_{i,1}\|^{4k-2} - 2 \cdot k_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} \cdot \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} \right. \\ \left. - 2 \cdot \lambda_{i,1} \cdot \beta_i \cdot \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - 2 \cdot \gamma_{i,1} \cdot \lambda_{i,1}^2 \cdot \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{(2p+2k-2)} + 2 \cdot \Gamma_{i,1}^{-1} \cdot \dot{\beta}_i \cdot (\beta_i - \beta_i^*) \right\} \end{aligned}$$

Sachant que : $2k+2p-2 > 4k-2$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2 \cdot k_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - 2 \lambda_{i,1} (\beta_i - \beta_i^*) \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - 2 \lambda_{i,1} \cdot \beta_i^* \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} + \sum_{k=1}^p 2^{2k} \cdot d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k} \right. \\ \left. + 2 \cdot \Gamma_{i,1}^{-1} \cdot \dot{\beta}_i (\beta_i - \beta_i^*) \right\} \end{aligned}$$

En choisissant : $\dot{\beta}_i = \Gamma_i \cdot \lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - \sigma_i \cdot \beta_i$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2 \cdot k_{i,1} \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - 2 \cdot \sigma_i \beta_i (\beta_i - \beta_i^*) + \sum_{k=1}^p 2^{2k} d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k} - 2 \lambda_{i,1} \beta_i^* \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} \right\} \\ \dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2 \cdot k_{i,1} \cdot \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - \sigma_i (\beta_i - \beta_i^*)^2 + \sigma_i (\beta_i^*)^2 + \sum_{k=1}^p 2^{2k} d_{1,i,k} \cdot \left(\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\| \right)^{2k} \right. \\ \left. - 2 \cdot \lambda_{i,1} \beta_i^* \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} \right\} \quad (IV-14) \end{aligned}$$

Le terme $d_{1,i,k}$ dans l'inégalité(IV-14) influe sur le signe de \dot{V}_i , il est dû aux interconnexions $\phi_{i,1}$ et il apparaît en même temps que la commande virtuelle. Son effet peut être éliminer en utilisant une valeur assez grande du β_i^* cette valeur va être déterminée dans la dernière étape.

Considérons, maintenant :

$$e_{i,2} = z_{i,2} - \alpha_{i,1}(e_{i,1}, \beta_i)$$

d'où :

$$\dot{e}_{i,2} = \dot{z}_{i,2} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_{i,1}} \dot{e}_{i,1} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \ddot{y}_{i,ref} \quad (IV-15)$$

on pose :

$$\dot{e}_{i,2} = z_{i,3} + \xi_{i,2}(e_{i,1}, e_{i,2}, \beta_i, y_{i,ref}, \dot{y}_{i,ref}, \ddot{y}_{i,ref}) + \varpi_{i,2}(e_{i,1}, \beta_i) f(\phi_{i,1}, \phi_{i,2})$$

en connaissant les termes :

$$e_{i,1}, e_{i,2}, \beta_i, \dot{\beta}_i, \alpha_{i,1}, \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_{i,1}}, \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \beta_i}$$

alors par définition :

$\xi_{i,2}$ représente la fonction qui regroupe les termes connus $(z_{i,1}, z_{i,2}, \beta_i, y_{i,ref}, \dot{y}_{i,ref}, \ddot{y}_{i,ref})$.

$\varpi_{i,2}$ représente la fonction qui est multipliée par les termes inconnus $(\phi_{i,1}, \phi_{i,2})$.

Maintenant la synthèse récursive peut se dérouler systématiquement, de la manière suivante :

Considérons l'étape (m) :

Dans les (m-1) étapes précédentes, des commandes virtuelles $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,m-1}$ ont été générées

Soit :

$$e_{i,m} = z_{i,m} - \alpha_{i,m-1}(z, \dots, z, \beta, y_{i,ref}, \dot{y}_{i,ref}, \dots, y_{i,ref}^{(m)})$$

la dynamique de $\dot{e}_{i,m}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{i,m} = & z_{i,m+1} + \xi_{i,m}(z_{i,1}, \dots, z_{i,m}, \beta_i, y_{i,ref}, \dots, y_{i,ref}^{(m)}) \\ & + \varpi_{i,m}(z_{i,1}, \dots, z_{i,m}, \beta_i, y_{i,ref}, \dots, y_{i,ref}^{(m)}) f(\phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,m}) \end{aligned}$$

Soit $z_{i,m+1}$ la commande virtuelle et V_m la fonction de Lyapunov augmentée telle que :

$$V_m = V_{m-1} + \sum_{i=1}^N e_{i,m}^2$$

dérivons V_m par rapport temps, nous aurons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_m \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2k_{i,1}\lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} - \sigma_i(\beta_i - \beta_i^*)^2 - 2 \sum_{j=1}^{m-1} k_{i,j} e_{i,j}^2 + 2e_{i,m}(z_{i,m+1} + \xi_{i,m}(\cdot)) \right. \\ \left. + 2e_{i,m}\varpi_{i,m}(\cdot)\phi_{i,m} + \sum_{k=1}^p 2^{2k} (d_{1,i,k} + \dots + d_{m-1,i,k}) (\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\|)^{2k} + \sigma_i(\beta_i^*)^2 \right. \\ \left. - 2\lambda_{i,1}\beta_i^* \sum_{k=1}^p k e_{i,1}^{2k} \right\} \quad (IV16) \end{aligned}$$

en utilisant (IV-3), (IV-9), (IV-10) et (IV-11), nous aurons :

$$\sum_{i=1}^N 2e_{i,m}\varpi_{i,m}(\cdot)\phi_{i,m} \leq \sum_{i=1}^N e_{i,m}^2 \varpi_{i,m}^2(\cdot) + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p 2^{2k} d_{m,i,k} (\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\|)^{2k}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{V}_m \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2k_{i,1}\lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p k e_{i,1}^{2k} - 2 \sum_{j=2}^{m-1} k_{i,j} e_{i,j}^2 + 2e_{i,m}(z_{i,m+1} + \xi_{i,m}(\cdot) + e_{i,m}^2 \varpi_{i,m}^2(\cdot)) - \sigma_i(\beta_i - \beta_i^*)^2 \right. \\ \left. + \sigma_i(\beta_i^*)^2 - 2\beta_i^* \lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p k e_{i,1}^{2k} + \sum_{k=1}^p 2^{2k} (d_{1,i,k}, \dots, d_{m,i,k}) (\|y_{i,ref}\| + \|e_{i,1}\|)^{2k} \right\} \end{aligned}$$

on choisit :

$$\bar{z}_{i,m+1} = \alpha_{i,m}(z_{i,1}, \dots, z_{i,m}, \beta_i, y_{i,ref}, \dots, y_{i,ref}^{(m)}) = -k_{i,m} e_{i,m} - \xi_{i,m}(\cdot) - e_{i,m}^2 \varpi_{i,m}^2(\cdot)$$

Continuons cette procédure jusqu'à l'étape (ρ), ou apparaît pour la première fois la commande réelle u_i .

$$\dot{e}_{i,\rho} = z_{i,\rho+1} + b_{i,k_i-\rho} \delta_i(y_i) u_i + \xi_{i,\rho}(\cdot) + \varpi_{i,\rho}(\cdot) f(\phi_{i,\rho})$$

Considérons la fonction de Lyapunov augmentée à cette étape :

$$V_\rho = V_{\rho-1} + \sum_{i=1}^N e_{i,\rho}^2$$

la dynamique de V_ρ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2k_{i,1}\lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} - 2 \sum_{k=1}^{p-1} k_{i,j} e_{i,j}^2 + 2e_{i,\rho}(z_{i,\rho} + b_{i,k_i-\rho} \delta_i(y_i) u_i + \xi_{i,\rho}(\cdot) + \varpi_{i,\rho}(\cdot) f(\phi_{i,\rho})) \right. \\ \left. - \sigma_i(\beta_i - \beta_i^*)^2 + \sigma_i(\beta_i^*)^2 - 2\lambda_{i,1}\beta_i^* \sum_{k=1}^p k e_{i,1}^{2k} \right\} \end{aligned}$$

La commande décentralisée adaptative réelle u_i est donnée par :

$$u_i = \frac{-1}{b_{i,k_i-\rho}} \left[k_{i,\rho} e_{i,\rho} + \xi_{i,\rho}(\cdot) + e_{i,\rho}^2 \omega_{i,\rho}^2(\cdot) \right] \quad (\text{IV-17})$$

Théorème : [KHORRAMI 97.b]

Pour le système (IV-1) transformable vers le système (IV-2) qui satisfait (IV-3) avec la loi d'adaptation (IV-15) sous la supposition que les signaux d'entrées sont bornés, la commande (IV-17) assure la stabilité de l'erreur de poursuite, l'erreur de poursuite ne s'affecte par les interconnexions et elle est réduite avec un choix judicieux des gains de commandes.

La démonstration du théorème est comme suit :

Pour contourner les interconnexions, il suffit que β_i^* soit :

$$\beta_i^* \geq \frac{1}{\lambda_i} \max_{k=1,\dots,k} \left[2^{2k} (d_{1,i,k} + \dots + d_{\rho,i,k}) \right] \quad (\text{IV-18})$$

tel que $d_{l,i,k} = \sum_{k=1}^p (\zeta_{l,i,k}^k)^2$ puisque $\zeta_{l,i,k}^k$ existe d'après (IV-3) alors β_i^* existe aussi .

alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -2k_{i,1} \lambda_{i,1} \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} - 2 \sum_{j=1}^N k_{i,j} e_{i,j}^2 - \sigma_i (\beta_i - \beta_i^*)^2 + \sigma_i (\beta_i^*)^2 \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^p 2^{2k} (d_{1,i,k} + \dots + d_{\rho,i,k}) \|y_{i,ref}\| \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

On peut écrire :

$$\dot{V}_\rho \leq -\mu V_\rho(e_1, \dots, e_\rho, \beta) + \Psi \quad (\text{IV-20})$$

avec :

$$e_i = [e_{1,i}, \dots, e_{N,i}]$$

$$\mu = \min_{1 \leq i \leq N} (\min(2k_{i,1}, \dots, 2k_{i,\rho}, \Gamma_i \sigma_i)) \quad (\text{IV-21})$$

$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_N]$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \left\{ \sigma_i (\beta_i^*)^2 + \sum_{k=1}^p 2^{2k} (d_{1,i,k} + \dots + d_{\rho,i,k}) \|y_{i,ref}\|^{2k} \right\} \quad (\text{IV-22})$$

Ψ est borné si β_i^* et $y_{i,ref}$ sont bornées et \dot{V}_ρ est négative tant que les solutions $(e_1, \dots, e_\rho, \beta)$ n'atteignent pas le domaine compact Ω_f qui est défini comme suit :

$$\Omega_f = \{(e_1, \dots, e_\rho, \beta) \in R^N \times \dots \times R^N \times R^N : V_\rho \leq V_f\} \quad (IV-23)$$

avec :
$$V_f = \mu^{-1} \cdot \Psi \quad (IV-23)$$

Donc les solutions $(e_1, \dots, e_\rho, \beta)$ sont bornées en respectant la bornitude de V_f . La bornitude des autres signaux se vérifie comme suit :

Considérons la transformation suivante :

$$\begin{aligned} \eta_i &= T \cdot z_i \text{ tel que } (\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,\rho}) = (z_{i,1}, \dots, z_{i,\rho}) \\ \text{on obtient : } \eta_{i,j} &= z_{i,j} - \frac{b_{i,k_i-j}}{b_{i,k_i-\rho}} z_{i,\rho} \quad j = \rho-1 \dots k_i \\ \text{on obtient : } \dot{\eta}_{i,j} &= \eta_{i,j+1} + \phi_{i,j} \quad j = 1 \dots \rho-1 \\ \dot{\eta}_{i,\rho} &= \eta_{i,\rho+1} + \frac{b_{i,k_i-\rho-1}}{b_{i,k_i-\rho}} \eta_{i,\rho} + \phi_{i,\rho} + b_{i,k_i-\rho} \delta_i(y_i) u_i \\ \dot{\eta}_{i,j} &= \frac{b_{i,k_i-j}}{b_{i,k_i-\rho}} \eta_{i,\rho+1} + \eta_{i,\rho} \left\{ \frac{b_{i,k_i-j-1}}{b_{i,k_i-\rho}} - \frac{b_{i,k_i-j}}{b_{i,k_i-\rho}^2} \right\} + \left\{ \phi_{i,\rho+1} - \frac{b_{i,k_i-j}}{b_{i,k_i-\rho}} \phi_{i,\rho} \right\} \\ &\quad j = \rho+1 \dots k_i-1 \\ \dot{\eta}_{i,k_i} &= -\frac{b_{i,0}}{b_{i,k_i-\rho}} \eta_{i,\rho+1} - \eta_{i,\rho} \frac{b_{i,0} \cdot b_{i,k_i-\rho-1}}{b_{i,k_i-\rho}} + \left\{ \phi_{i,k_i} - \frac{b_{i,0}}{b_{i,k_i-\rho}} \phi_{i,\rho} \right\} \end{aligned} \quad (IV-24)$$

puisque $\phi_{i,j}$ et $y_{i,ref}$ sont bornés alors $z_{i,j}$ $j = 1 \dots \rho$ est borné, d'où, on peut conclure que $\eta_{i,j}$ $j = 1 \dots \rho$ sont aussi bornés. D'après (IV-24) et ce qui vient d'être déduit les états $\eta_{i,j}$ $j = \rho+1 \dots k_i$ sont bornés ; alors, les variables $z_i = T^{-1} \eta_i$ $i = 1 \dots N$

sont globalement bornés .

Maintenant puisque tous les signaux sont bornés, la dimension de Ω_f et l'erreur de poursuite peuvent être rendus petites en augmentant les gains de la commande $k_{i,j}$ [KHORRAMI 97.b].

D'après la définition de (IV-21),(IV-22), nous avons :

ψ est proportionnel à σ_i .

μ est proportionnel à σ_i et Γ_i .

choisissons Γ_i proportionnel à $\frac{1}{\sigma_i}$ et $\sigma_i \rightarrow 0$

alors :

$$\Psi \rightarrow \sum 2^{2k} (d_{1,i,k} + \dots + d_{\rho,i,k}) \|y_{i,ref}\|^{2k}$$

en augmentant la valeur de $k_{i,j}$, et d'après (IV-23) la valeur de $V_f = \mu^{-1} \cdot \Psi$ va être déterminé par les valeurs de ces gains car :

$k_{i,j} \gg 1 \Rightarrow \mu \gg 1 \Rightarrow \mu^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow V_f \rightarrow 0$ donc $\Omega_f = \emptyset$ car $V_\rho \geq 0$ par définition (une fonction de Lyapunov), d'où :

$$\dot{V}_\rho \leq \sum_{i=1}^N \left[-2 \cdot k_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} \cdot \sum_{k=1}^p k \cdot e_{i,1}^{2k} - 2 \sum_{j=2}^p k_{i,j} e_{i,j}^2 \right] \quad (IV-25)$$

$$V_\rho = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{i,1} \cdot \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} + \Gamma_i^{-1} (\beta_i - \beta_i^*)^2 + \sum_{j=2}^p k_{i,j} \cdot e_{i,j}^2 \right] \quad (IV-26)$$

d'après (IV-25) et (IV-26) et en appliquant le théorème de Lasalle (chap. II), on aura :

$$e_{i,j} = 0 \quad j = 1 \dots \rho \quad i = 1 \dots N$$

$$d'où \quad y_i = y_{i,ref}$$

IV-I-3-APPLICATION DE LA PREMIERE APPROCHE AU PUMA 560:

Dans la partie précédente, nous avons présenté une synthèse générale d'une commande adaptative décentralisée pour des systèmes non linéaires interconnectés. pour valider ces résultats, nous appliquerons cette méthode sur un bras manipulateur PUMA560 ; modélisé dans le chapitre II.

Prenons les notations suivantes :

$$z_{i,1} = q_i \quad , \quad z_{i,2} = \dot{q}_i \quad , \quad u_i = T_i \quad , \quad y_i = z_{i,1} \quad , \quad i = 1, \dots, 3$$

tel que : q_i et \dot{q}_i représentent la position et la vitesse de i-ème articulation (respectivement)

d'après (I-36), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{i,1} = z_{i,2} \\ \dot{z}_{1,2} = \frac{1}{I_1} u_1 + \phi_{1,2} \\ \dot{z}_{2,1} = z_{2,2} \\ \dot{z}_{2,2} = \frac{1}{I_7} u_2 + \phi_{2,2} \\ \dot{z}_{3,1} = z_{3,2} \\ \dot{z}_{3,2} = \frac{1}{I_9} u_3 + \phi_{3,2} \end{array} \right. \quad (\text{IV-27})$$

tel que :

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} = \frac{1}{I_1} & \left(- (I_1 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23}^2) \dot{z}_{1,2} - (I_5 s_{23} + I_6 s_2) \dot{z}_{2,2} - I_5 s_{23} \dot{z}_{3,2} \right. \\ & \left. + N_1 \cdot z_{1,2} \cdot z_{2,2} + N_2 \cdot z_{1,2} \cdot z_{3,2} - N_3 \cdot z_{2,2}^2 + N_4 \cdot z_{2,2} \cdot z_{3,2} + N_5 \cdot z_{3,2}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV-28})$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,2} = \frac{1}{I_7} & \left(- (I_5 s_{23} + I_6 s_2) \dot{z}_{1,2} - I_4 c_3 \cdot z_{2,2} - (I_8 + 0.5 c_3) \cdot \dot{z}_{3,2} - N_6 \cdot z_{1,2}^2 \right. \\ & \left. + N_7 \cdot z_{2,2} \cdot z_{3,2} + N_8 \cdot z_{3,2}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

$$\phi_{3,2} = \frac{1}{I_9} \left(- I_5 s_{23} \cdot \dot{z}_{1,2} - (I_8 + 0.5 I_4 c_3) \dot{z}_{2,2} - N_9 z_{1,2}^2 - N_{10} z_{2,2}^2 + 0.5 m_3 l_3 g \cdot c_{23} \right) \quad (\text{IV-29})$$

tel que :

$$c_i = \cos(z_{i,1}) \quad , \quad c_{ij} = \cos(z_{i,1} + z_{j,1}) \quad , \quad s_i = \sin(z_{i,1}) \quad , \quad s_{ij} = \sin(z_{i,1} + z_{j,1})$$

$$N_1 = 2(I_3 s_2 c_3 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23}) \quad , \quad N_2 = (2I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23})$$

$$N_3 = I_6 c_2 + I_5 c_{23} \quad , \quad N_4 = 2I_5 c_{23} \quad , \quad N_5 = I_5 c_{23} \quad , \quad N_6 = I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})$$

$$N_7 = I_4 s_3 \quad , \quad N_8 = 0.5 I_4 s_3 \quad , \quad N_9 = I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 c_2 s_{23} \quad , \quad N_{10} = 0.5 I_4 s_3$$

Suppositions

- La vitesse de rotation de chaque articulation est bornée, cela est due aux actionneurs utilisés ; d'habitude c'est un moteur à courant continu ; et cela en raison du phénomène de saturation, car la machine ne peut donner une vitesse au-delà de sa vitesse maximale.
- L'accélération de chaque articulation est aussi bornée, cela est due toujours à la saturation mais aussi à la constante du temps électrique de la machine, $\tau = \frac{L\omega}{R}$, où R est

la résistance interne, L est l'induction propre. Car l'accélération dépend de la variation instantanée du couple, ce dernier est en fonction de la variation du courant qui est limité par la présence de l'inductance [LALLEMAND 88].

Donc récapitulons tout ce si :

$$\dot{q}_i = z_{i,2} \text{ est borné}$$

$$\ddot{q}_i = \dot{z}_{i,2} \text{ est borné}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |z_{i,2}| &\leq v_{\max} \\ |\dot{z}_{i,2}| &\leq a_{\max} \quad , i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

Sachons que :

$$|\sin(x)| \leq |x| \quad (\text{IV-31})$$

$$|\cos(x)| \leq 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{IV-32})$$

Donc $\sin(x).\cos(y)$, $\sin(x).\sin(y)$ et $\cos(x).\cos(y)$ sont bornés par des polynômes d'ordre p en x et y .

En remarquant bien les interconnexions, on conclut qu'ils sont en fonction de $z_{i,2}$, $\dot{z}_{i,2}$, $\cos(z_{i,1})$, $\sin(z_{i,1})$, $\cos(z_{i,1} + z_{j,1})$ et $\sin(z_{i,1} + z_{j,1})$ et tous ces termes sont bornés.

D'après (iv-30), (IV-31) et (IV-32), nous aurons :

$$|\phi_{i,2}| \leq \sum_{k=0}^p \sum_{l=1}^N \zeta_{i,2,l}^k |y_l|^k \quad , y_l = z_{i,1} \quad (\text{IV-33})$$

tel que $\zeta_{i,2,l}^k$ est un terme non linéaire qui englobe $(v_{\max}, a_{\max}, z_{i,1})$

et de l'équation (IV-27), en déduit que : $\phi_{i,1} = 0$

De (IV-27) et (IV-33), en se référant au théorème précédent, on peut maintenant appliquer les résultats précédents à notre type d'application.

On a :

$y_{i,ref}$ est une trajectoire cycloïde définie au chapitre

$$e_{i,1} = y_i - y_{i,ref}$$

$$\beta_i = \Gamma_i \lambda_i \sum_{k=1}^p k e_{i,1}^{2k} - \sigma_i \beta_i$$

$$\alpha_{i,1} = -k_{i,1} e_{i,1} - \beta_i e_{i,1} - \gamma_i \lambda_i e_{i,1}^{2p-1}$$

$$e_{i,2} = z_{i,2} - \alpha_{i,1}$$

$$\dot{e}_{i,2} = \frac{1}{b_i} \left[k_{i,1} + \beta_i + (2p-1) e_{i,1}^{2p-2} \right] (z_{i,2} - \dot{y}_{i,ref}) + e_{i,1} \left(\Gamma_i \lambda_i \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} - \sigma_i \beta_i \right) + \phi_{i,2} - \ddot{y}_{i,ref}$$

$$u_i = -b_i \left[k_{i,2} e_{i,2} + (k_{i,1} + \beta_i + (2p-1) e_{i,1}^{2p-2}) (z_{i,2} - \dot{y}_{i,ref}) + (\Gamma_i \lambda_i \sum_{k=1}^p e_{i,1}^{2k} - \sigma_i \beta_i) - \ddot{y}_{i,ref} \right]$$

$$b_i = \begin{cases} I_1 & i = 1 \\ I_7 & i = 2 \\ I_9 & i = 3 \end{cases}$$

$$V_p = \sum_{k=1}^p \left\{ (y_1 - y_{1,ref})^{2k} + (y_2 - y_{2,ref})^{2k} + (y_3 - y_{3,ref})^{2k} \right\} + \Gamma_1 (\beta_1 - \beta_1^*)^2 + \Gamma_2 (\beta_2 - \beta_2^*)^2 \\ + \Gamma_3 (\beta_3 - \beta_3^*)^2 + (z_{1,2} - \alpha_{1,1})^2 + (z_{2,2} - \alpha_{2,1})^2 + (z_{3,2} - \alpha_{3,1})^2.$$

simulation :

Un programme a été élaboré pour effectuer les simulations ,en utilisant un logiciel spécialisé, les équations différentielles ont été résolues par la fonction ODE 45 avec un pas de simulation adaptatif.

Les gains utilisés sont :

1ere commande

$$k_{1,1} = 20 \quad , k_{1,2} = 80 \quad \gamma_1 = 0.6 \quad , \sigma_1 = .0001$$

2eme commande

$$k_{2,1} = 20 \quad , k_{2,2} = 80 \quad \gamma_2 = 0.6 \quad , \sigma_2 = .0001$$

3eme commande

$$k_{3,1} = 20 \quad , k_{3,2} = 80 \quad \gamma_3 = 0.6 \quad , \sigma_3 = .0001$$

La commande a été synthétisée pour une trajectoire normale dont les caractéristiques sont les suivantes

les trois articulations commencent de la position $[0, 0, 0]$ et atteignent la position $[60, -60, 60]$. le temps de l'établissement est de 3 secondes, avec une trajectoire cycloïdale .

C'est dans cet essai que les gains de la commande ont été ajustés afin de donner de bonnes performances , nous avons fait par la suite des essais pour valider la rapidité et la robustesse de cette commande .

- Essai 1 (test de LEAVHY)

Les articulations démarrent de la position $[-50, -135, 135]$ (degrés) et atteignent la position $[50, 80, 45]$ (degrés) en un temps de 1.5 seconde sous une trajectoire cycloïdale sans charge .

Ce test est introduit pour valider la rapidité de cette commande , car la différence entre cette trajectoire et la précédente réside :

le temps d'établissement est moins et la variation est plus grande .

- Essai 2 (test de LEAVHY avec une charge)

les articulations suivent les mêmes trajectoires que le test précédent en plus l'effecteur supporte une masse de 10 Kg . ce test est introduit dans le but de vérifier la robustesse de la commande vis à vis d'une variation paramétrique .

=

Essai 3 (test de chute de masse)

Les même trajectoires que le test de LEAVHY ,en plus d'une masse de 10 Kg ,lâchée à $t=0.75s$. Le but de l'introduction de ce test est de voir la robustesse de cette commande ,dans le cas d'un changement paramétrique qui surgit en milieu de la trajectoire .

-Essai 4 (rupture de commande)

Sous les même trajectoires que le test de LEAVHY, avec rupture de la deuxième commande à $t=0.75 s$. le but de ce test est de valider la décentralisation de la commande .

Remarque

Les quartes essais seront appliqués au différentes approches.

Interprétation des résultats de la première approche**Test de validation**

Nous remarquons que les erreurs de poursuites de toutes les articulations s'annulent rapidement (en négligeant les termes terminaux d'ordre 10^{-4}), nous observons aussi que les erreurs sont maximales au démarrage, cela est dû à la position initiale de la 2eme et la 3eme articulation, car elles sont sous l'effet de la gravité.

En ce qui concerne les commandes, elles sont lisses et non oscillatoires. Les pics initiaux de ces dernières sont dus au faite qu'elles sont contraintes de générer, en même temps à ($t=0$), un couple pour éliminer l'effet de la gravité et un autre pour réaliser la poursuite.

Essa1 (trajectoire de LEAVHY)

Fig.(4.2) illustre la robustesse de la commande par backstepping adaptatif décentralisée vis à vis des variations rapides des termes d'interconnexions dues à la rapidité de la trajectoire imposé par le test de LEAVHY.

Essai2

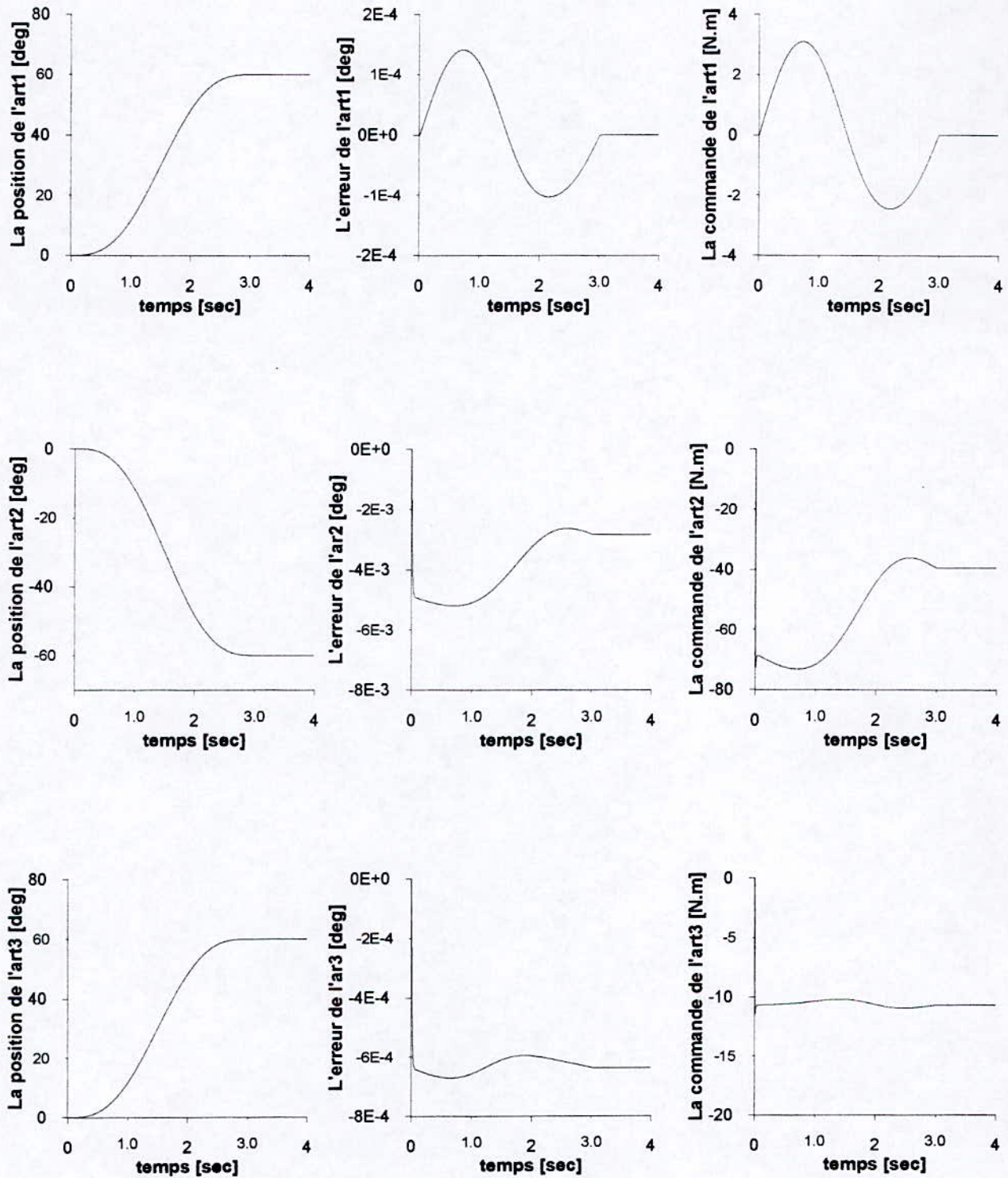
Fig.(4.3) illustre la robustesse de la commande face au variation de la masse de la charge, ainsi même pour des charges importantes ,la commande répond très rapidement .

Essai3

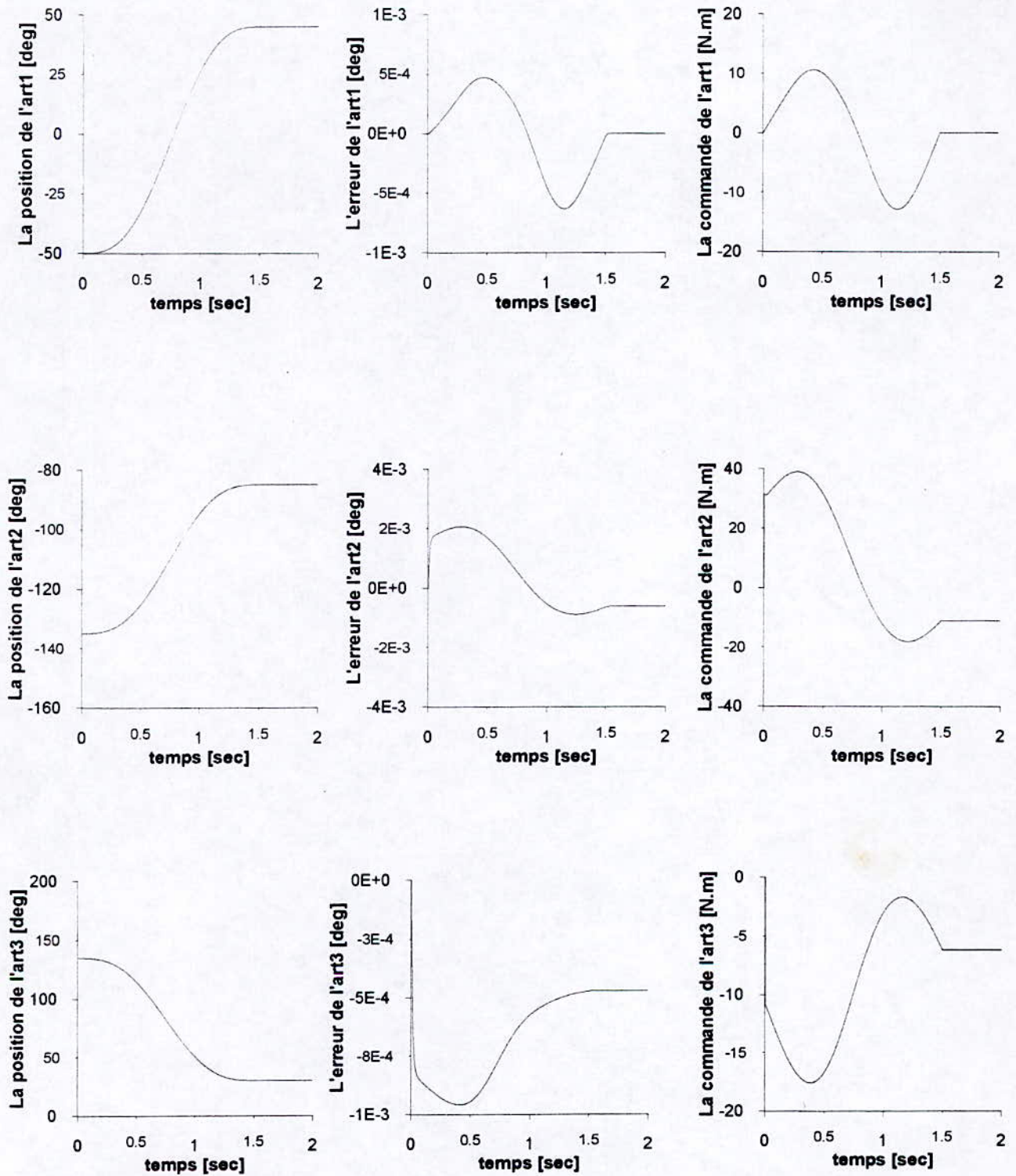
Fig. (4.4) montre la robustesse de la commande face aux variations subite de la charge, ainsi la commande peut répondre au problème de variation paramétrique .

Essai4

Fig.(4.5) illustre la décentralisation de cette commande, malgré l'annulation de la deuxième commande, les articulations (1) et(3) poursuivent leurs trajectoires.



fig(4-1) Trajectoire normale sans charge



fig(4. 2) Trajectoire de Leavhy sans charge

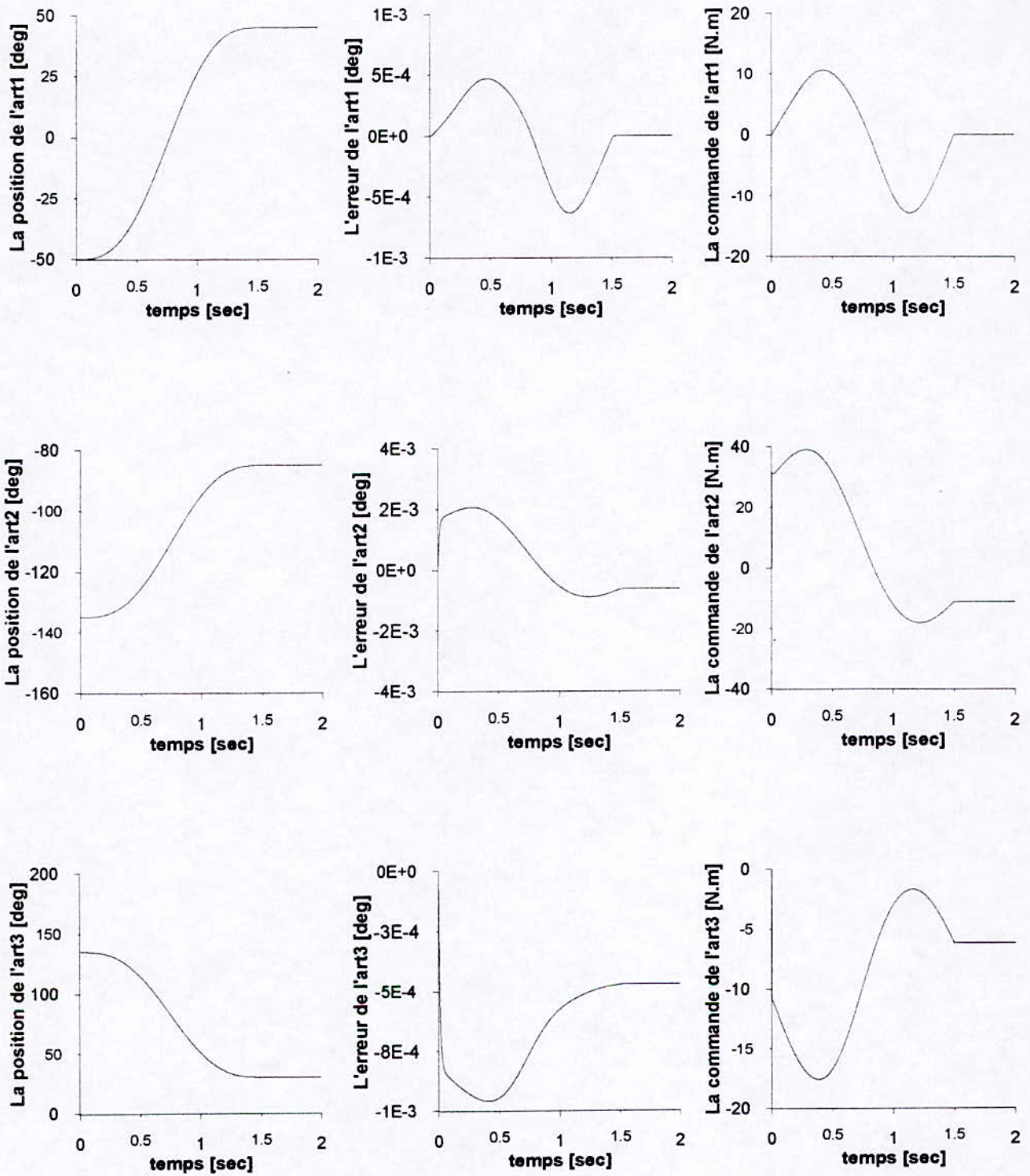


Fig (4.3) Trajectoire de Leavhy avec une charge de 10 Kg

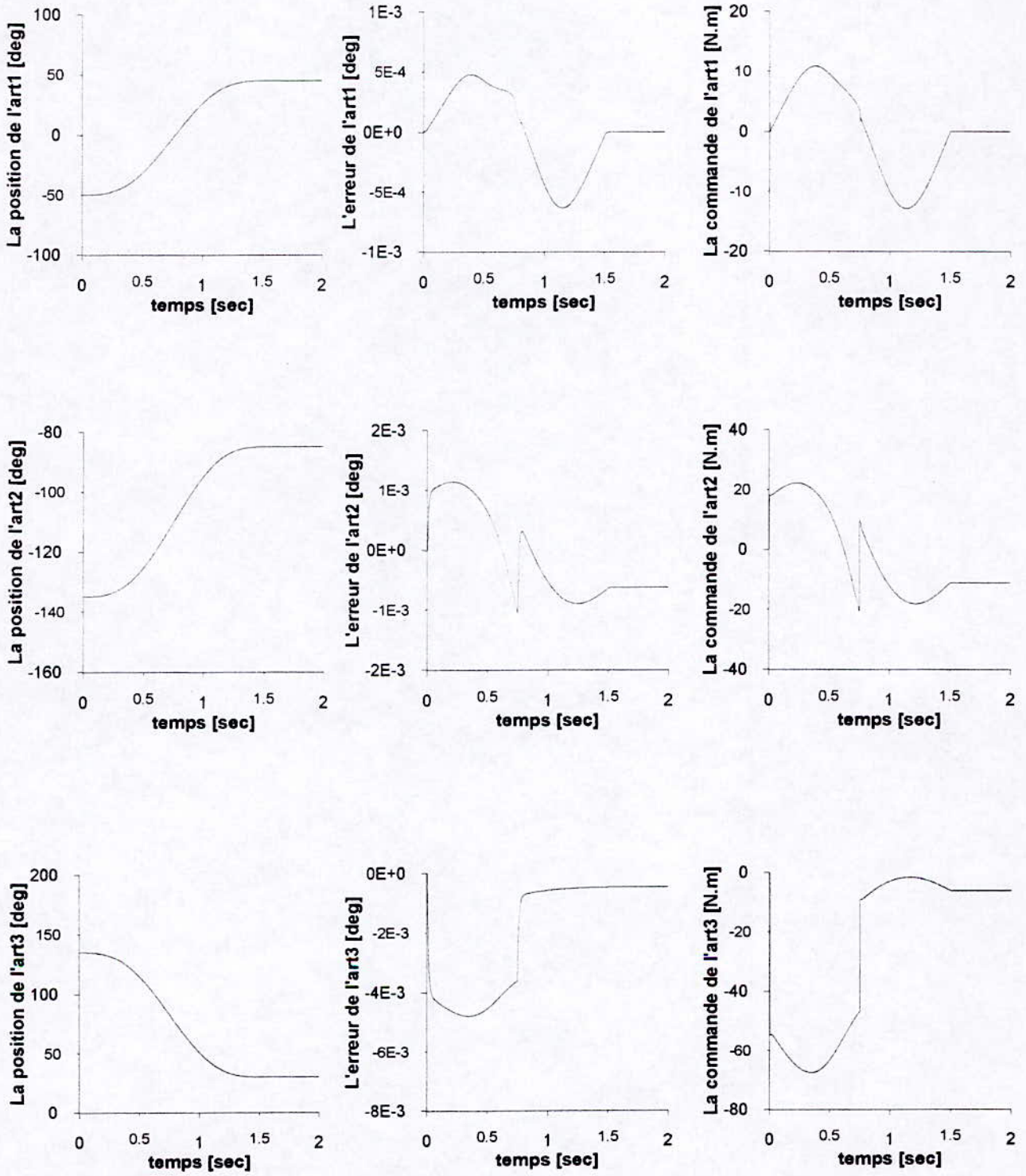


Fig (4. 4) Trajectoire de Leavy avec une charge de 10Kg , lâchée à t=0.75

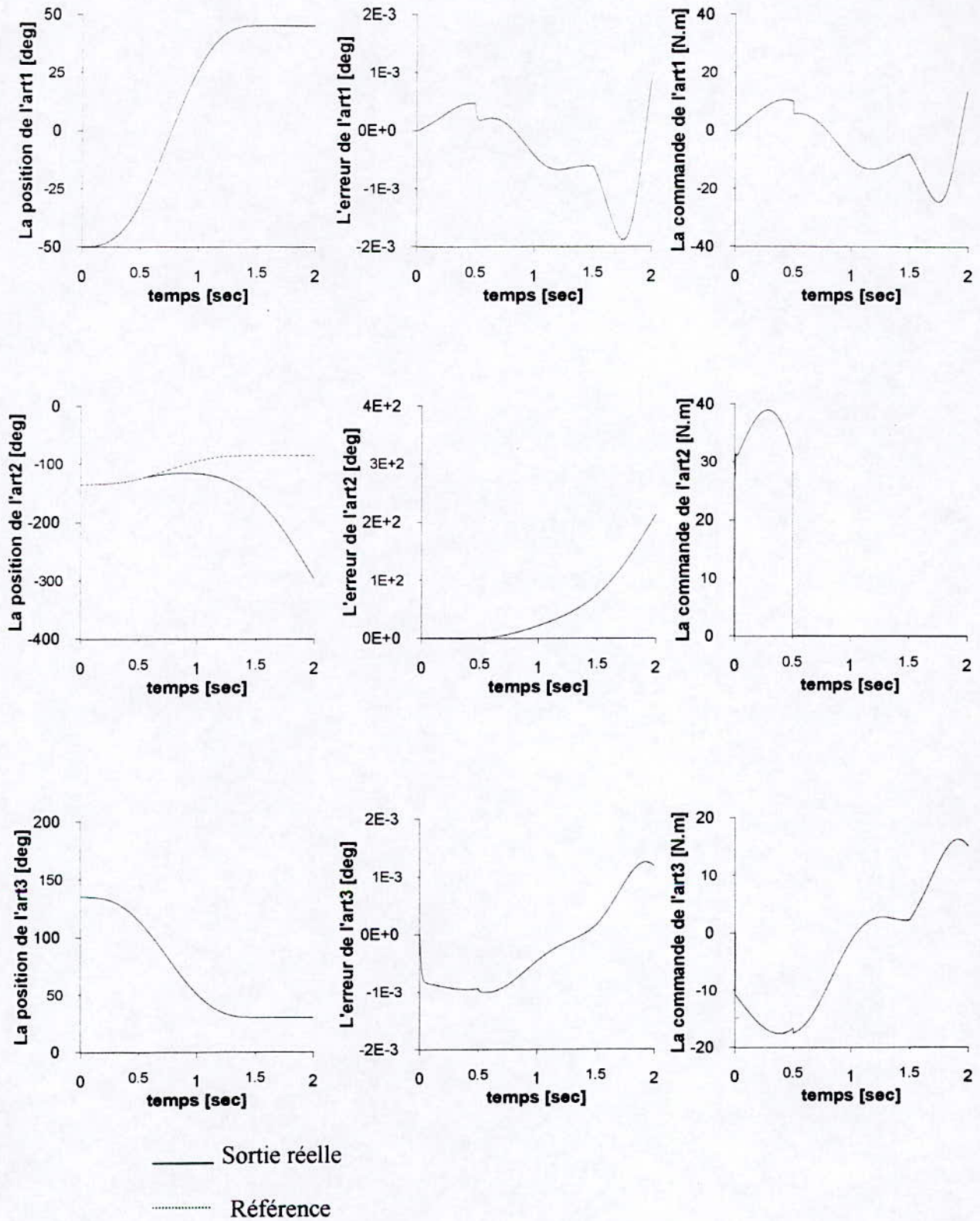


fig (4. 5) Trajectoire de Leavhy avec rupture de la deuxième commande à t=0.5 s

IV-I-4 APPLICATION DE LA COMMANDE PAR BACKSTEPPING DECENTRALISEE ADAPTATIVE AVEC MODE GLISSANT

a) APPROCHE PAR LA FONCTION SIGN

Dans ce paragraphe ,nous présenterons un contrôleur décentralisé ,en utilisant le mode glissant par backstepping . En se référant au chapitre III et en utilisant quelques résultats de la partie précédente , on peut développer les étapes de la synthèse de ce type de commande comme suit : (pour le modèle exprimé par les équations (I.36),(I.37),(I.38),(I.39))

Nous avons d'après les équations (IV-27.)

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,1} &= z_{i,2} \\ \dot{z}_{i,2} &= b_i u_i + \phi_{i,2} \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (IV.33)$$

Soit l'erreur de poursuite

$$e_i = z_{i,1} - y_{i,ref} \quad (IV.34)$$

etape0 :

Soit :

$$V_0 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^p e_i^{2k} \quad (IV.35)$$

On obtient

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^p 2k e_i^{2k-1} z_{i,2} \quad (IV.36)$$

En choisissant $z_{i,2}$ comme commande virtuelle

$$z_{i,2} = \alpha_{i,1}(e_i) = -k_i e_i - \gamma_i (e_i + e_i^{2p-1}) \quad (IV.37)$$

On obtient alors

$$\dot{V}_0 \leq - \sum_{i=1}^3 \left\{ k_i \sum_{k=1}^p e_i^{2k} + \gamma_i \sum_{k=1}^p (e_i^{2k} + k \cdot p \cdot e_i^{4p-2}) \right\} \quad (IV.38)$$

On remarque bien que :

$$\dot{V}_0 \leq 0 \quad (\text{IV.39})$$

etape1

Soit

$$s_i = z_{i,2} - \alpha_{i,1} \quad (\text{IV.40})$$

tel que s_i représente la surface de glissement .

On obtient alors

$$\dot{s}_i = b_i u_i + \phi_{i,2} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_i} \cdot z_{i,2} \quad (\text{IV.41})$$

En utilisant (III-4)

$$u_i = u_{i,eq} + \frac{1}{b_i} \cdot v_i \quad (\text{IV.42})$$

avec

$$u_{i,eq} = \frac{1}{b_i} \left(\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_i} \cdot z_{i,2} \right) \quad (\text{IV.43})$$

D'après les résultats de la commande par backstepping adaptatif, le terme β_i^* contourne les interconnexions , donc

$$\beta_i^* \geq \phi_{i,2}$$

d'après (III-4)

$$v_i = -\hat{\beta}_i \cdot \text{sign}(s_i) \quad (\text{IV.44})$$

avec $\hat{\beta}_i \geq \beta_i^* + C_i$, $C_i > 0$

D'ou v_i est commande qui force la surface s_i à se maintenir dans la surface $s_i = 0$

démonstration

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_i = \frac{1}{2} \cdot s_i^2 \quad (\text{IV.45})$$

On obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_i \cdot \dot{s}_i \\ \dot{V}_i &= s_i \cdot (v_i + \phi_{i,2}) \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

Nous avons

$$\hat{\beta}_i = \beta_i^* + C_i \quad C_i > 0 \quad (\text{IV.47})$$

donc

$$\dot{V}_i \leq s_i \cdot v_i + |s_i| \cdot \beta_i^* \quad (\text{IV.48})$$

On choisi

$$v_i = -\hat{\beta}_i \cdot \text{sign}(s_i) \quad (\text{IV.49})$$

d'ou

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\hat{\beta}_i |s_i| + \beta_i^* |s_i| \\ \dot{V}_i &\leq -b |s_i| \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

donc

$$\dot{V}_i \leq 0$$

En conclusion ,on aura

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,eq} + b_i \cdot v_i \\ u_{i,eq} &= \frac{1}{b_i} \cdot \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_i} \cdot z_{i,2} \\ v_i &= -\hat{\beta}_i \cdot \text{sign}(z_{i,2} - \alpha_{i,1}) \\ \hat{\beta}_i &= \beta_i^* + C_i \quad , C_i > 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Avec la fonction de Lyapunov globale

$$V_i = V_0 + \sum_{i=1}^3 V_i \quad (\text{IV.52})$$

Simulations

les gains des commandes sont :

1ere commande

$$k_1 = 80 \quad , \lambda_1 = 10 \quad , C_i = 10$$

2eme commande

$$k_2 = 80 \quad , \lambda_2 = 10 \quad , C_i = 10$$

3eme command

$$k_3 = 80 \quad , \lambda_3 = 10 \quad , C_i = 10$$

.Interprétation des résultats

Test de validation

On remarque, d'après la fig.(4.6) que les erreurs sont très faibles (d'ordre de 10^{-3} deg) et toujours les pics initiaux sont dus à l'effet de la gravité.

Les commandes sont lisses et non oscillatoires.

Essai1

D'après la fig.(4.7), les erreurs de poursuite sont très faibles. La commande de la 3ème articulation présente des petites oscillations à la fin de simulation, dues à l'introduction de la fonction non linéaire sign dans le terme de commande.

Essai2

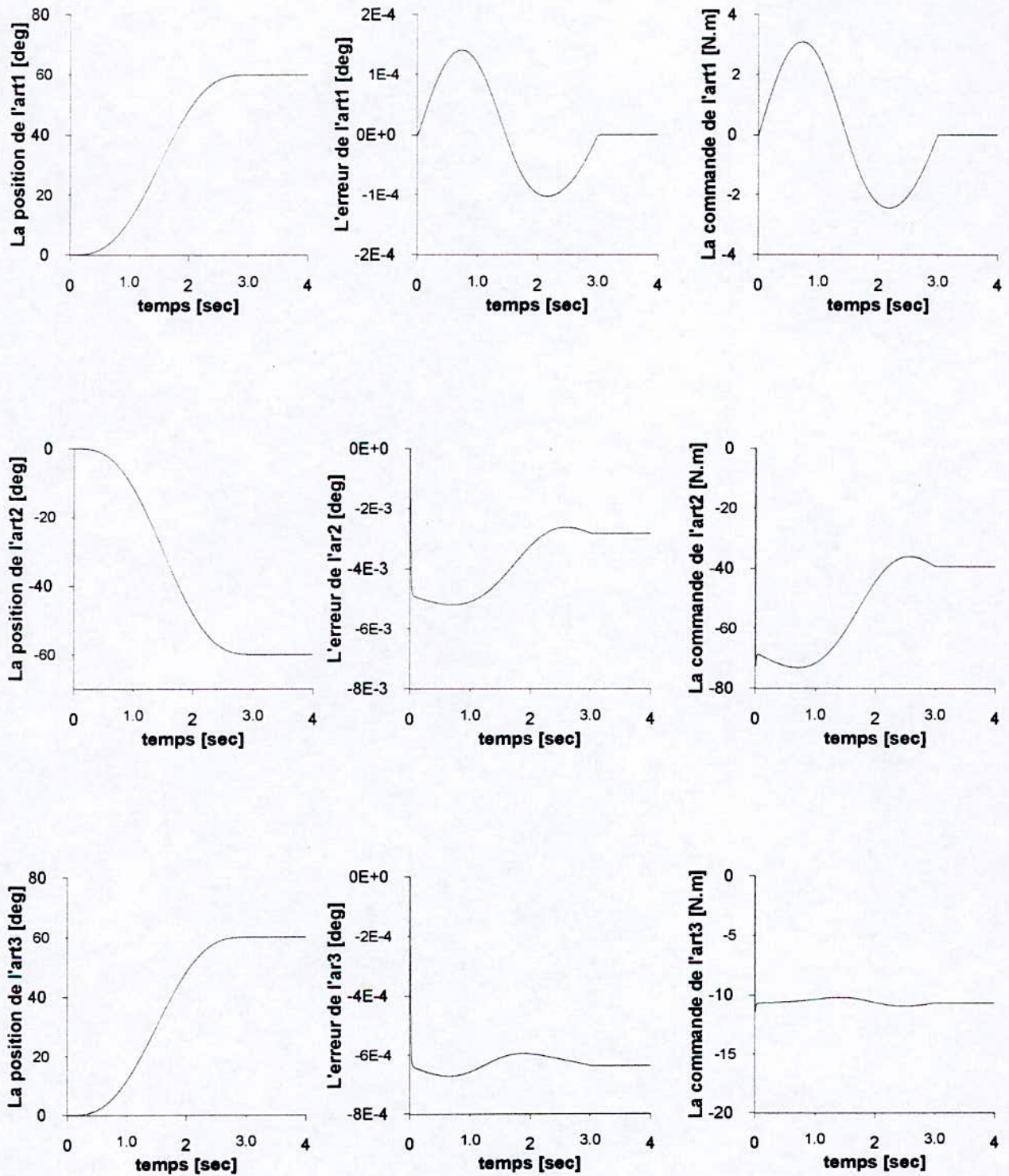
La fig.(4.8) illustre la robustesse de la commande vis à vis d'un changement paramétrique introduit au départ.

Essai3

La fig.(4.9) montre la robustesse de cette commande face à un changement paramétrique introduit au milieu de la trajectoire.

Essai4

La fig.(4.10) vérifie la décentralisation de cette commande, car même avec l'annulation de la deuxième commande, les autres articulations réalisent leurs trajectoires avec des erreurs très faibles.



fig(4-6) Trajectoire normale sans charge

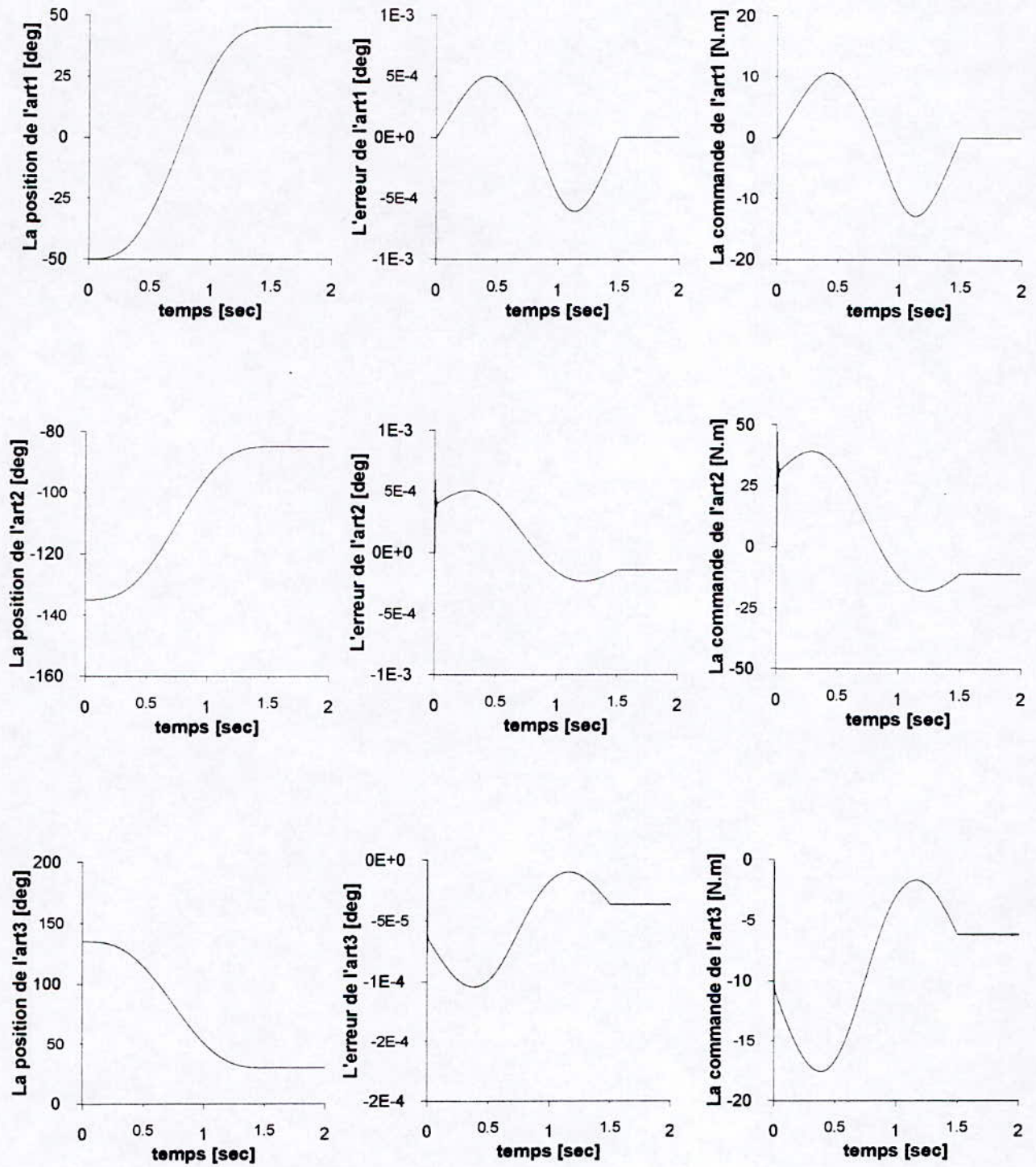


fig.(4- 7) Trajectoire de Leavhy sans charge

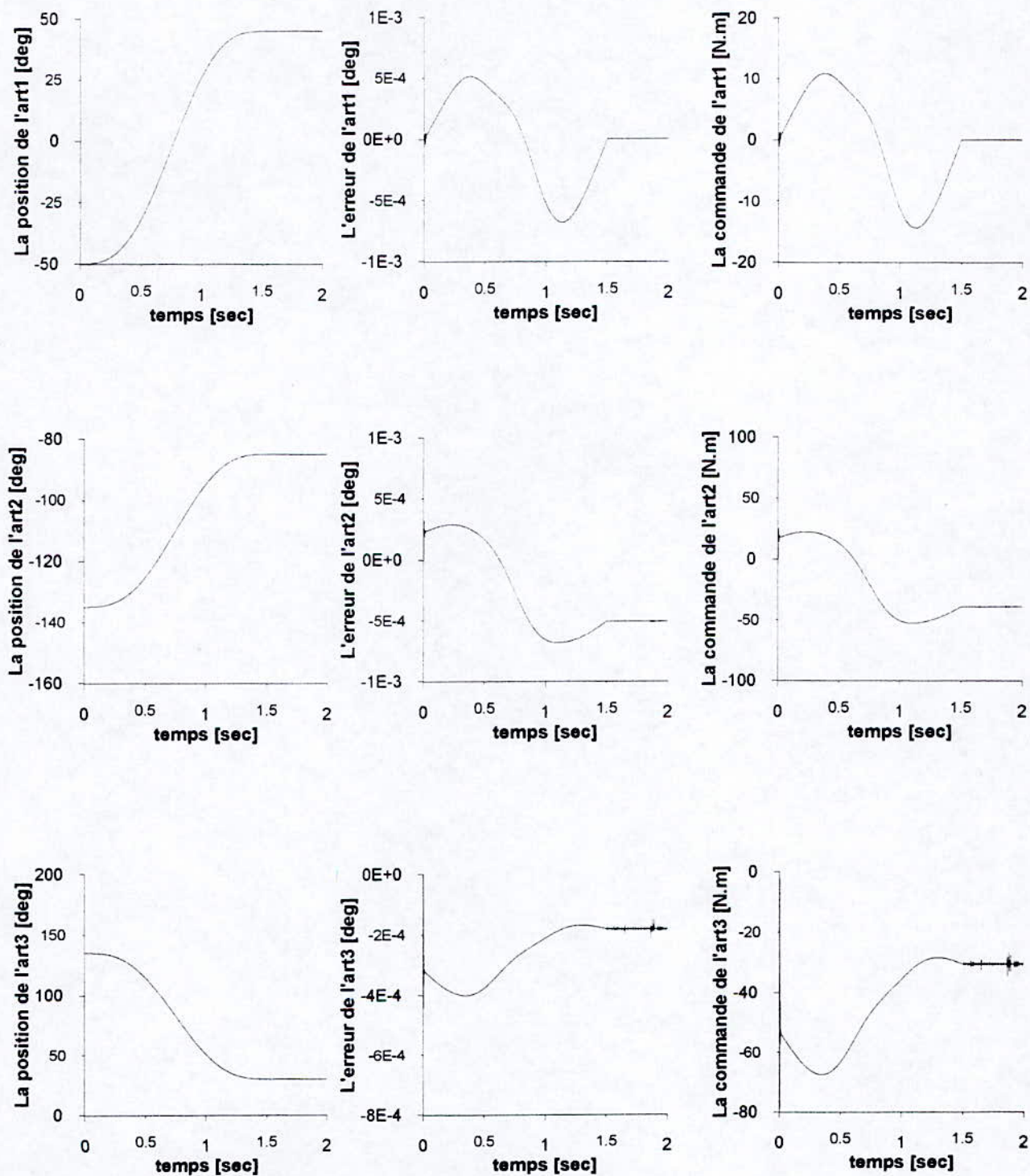
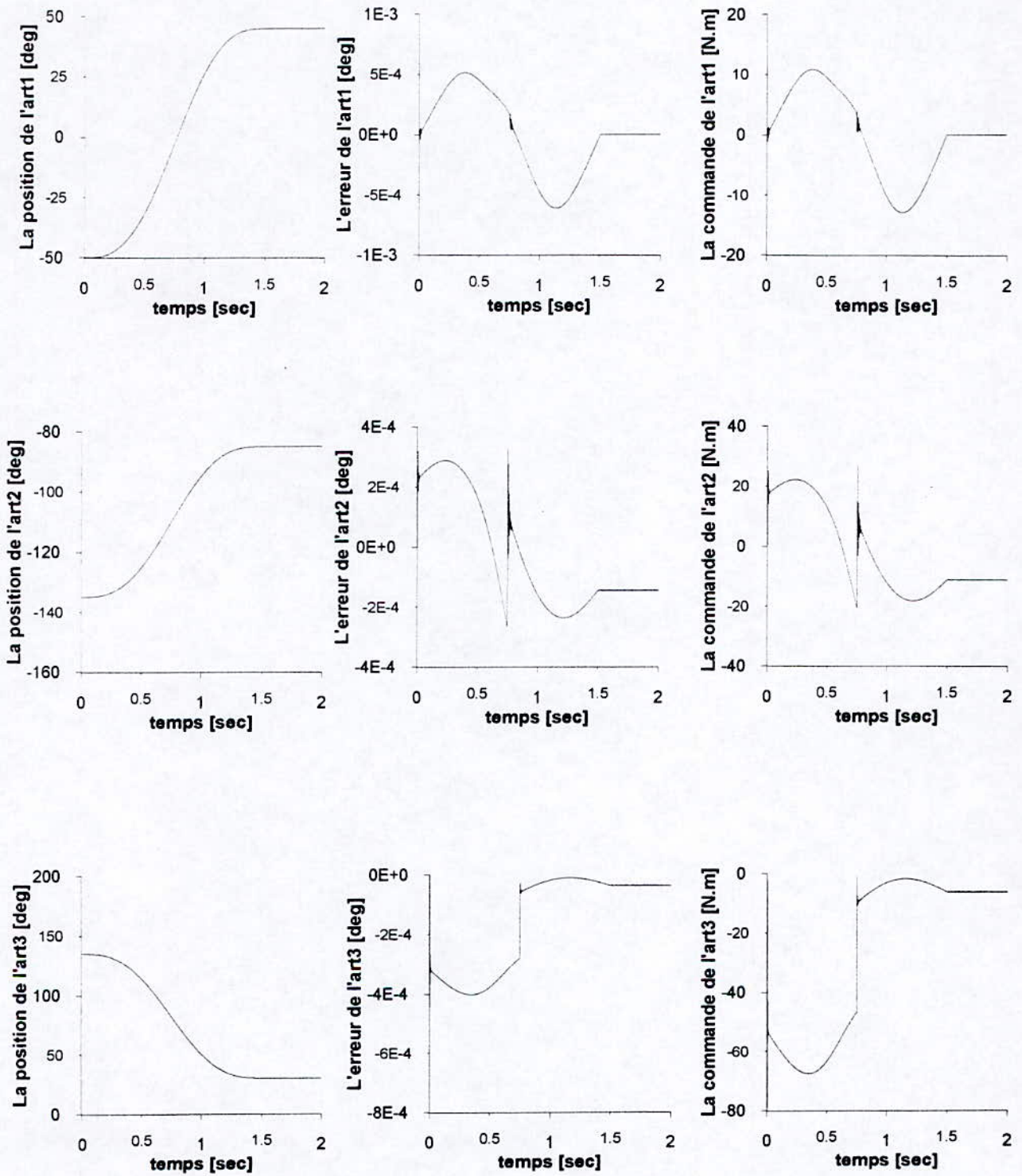
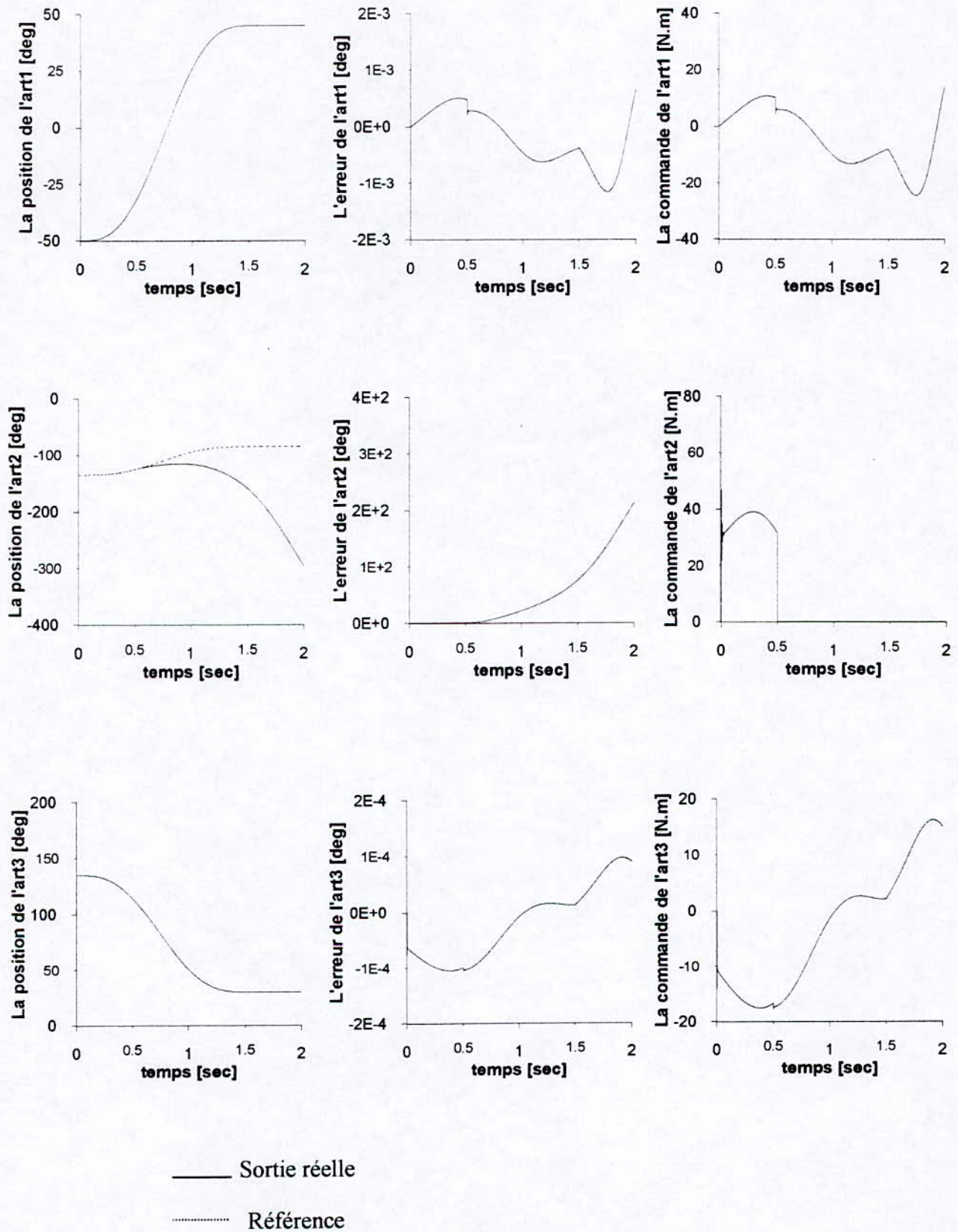


fig (4.8) trajectoire de Leavhy avec une charge de 10Kg



fig(4-9) Trajectoire de Leavhy avec une charge de 10 Kg, lâchée à t=0.75sec



fig(4-10) Trajectoire Leavhy avec rupture de la deuxième commande à $t=0.5\text{sec}$

b) APPROCHE PAR LA FONCTION SAT

Après les tests effectués sur la commande par mode glissant (fonction sign), on remarque des petites oscillations, pour remédier à ce problème nous allons introduire la fonction sat au lieu qui définit par

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) & , \text{si } |x| > \varepsilon \\ x/\varepsilon & , \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases} \quad (\text{IV.53})$$

Les lois de commande deviennent

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,eq} + b_i \cdot v_i \\ v_i &= -\hat{\beta}_i \cdot \text{sat}(z_{i,2} - \alpha_{i,1}) \\ u_{i,eq} &= \frac{1}{b_i} \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial e_i} z_{i,2} \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Telle que : $\hat{\beta}_i = \beta_i^* + C_i$, $C_i > 0$

-Simulations

les gains des commandes sont

1ere commande

$$k_1 = 80 \quad , \lambda_1 = 10 \quad , C_1 = 10$$

2eme commande

$$k_2 = 80 \quad , \lambda_2 = 10 \quad , C_2 = 10$$

3eme commande

$$k_3 = 80 \quad , \lambda_3 = 10 \quad , C_3 = 10$$

Interprétation des résultats

Test de validation

On remarque d'après la fig.(4.11) que les erreurs sont très faibles et les commandes sont lisses et ne présentent aucune oscillation.

Essai1

Fig.(4.12), montre que les erreurs de poursuite sont très faibles et les commandes lisses et non oscillatoire. Cette fois ci, on remarque la disparition des petites oscillations de l'ancienne commande, car la fonction sat a été introduite dans ce sens.

Essai2

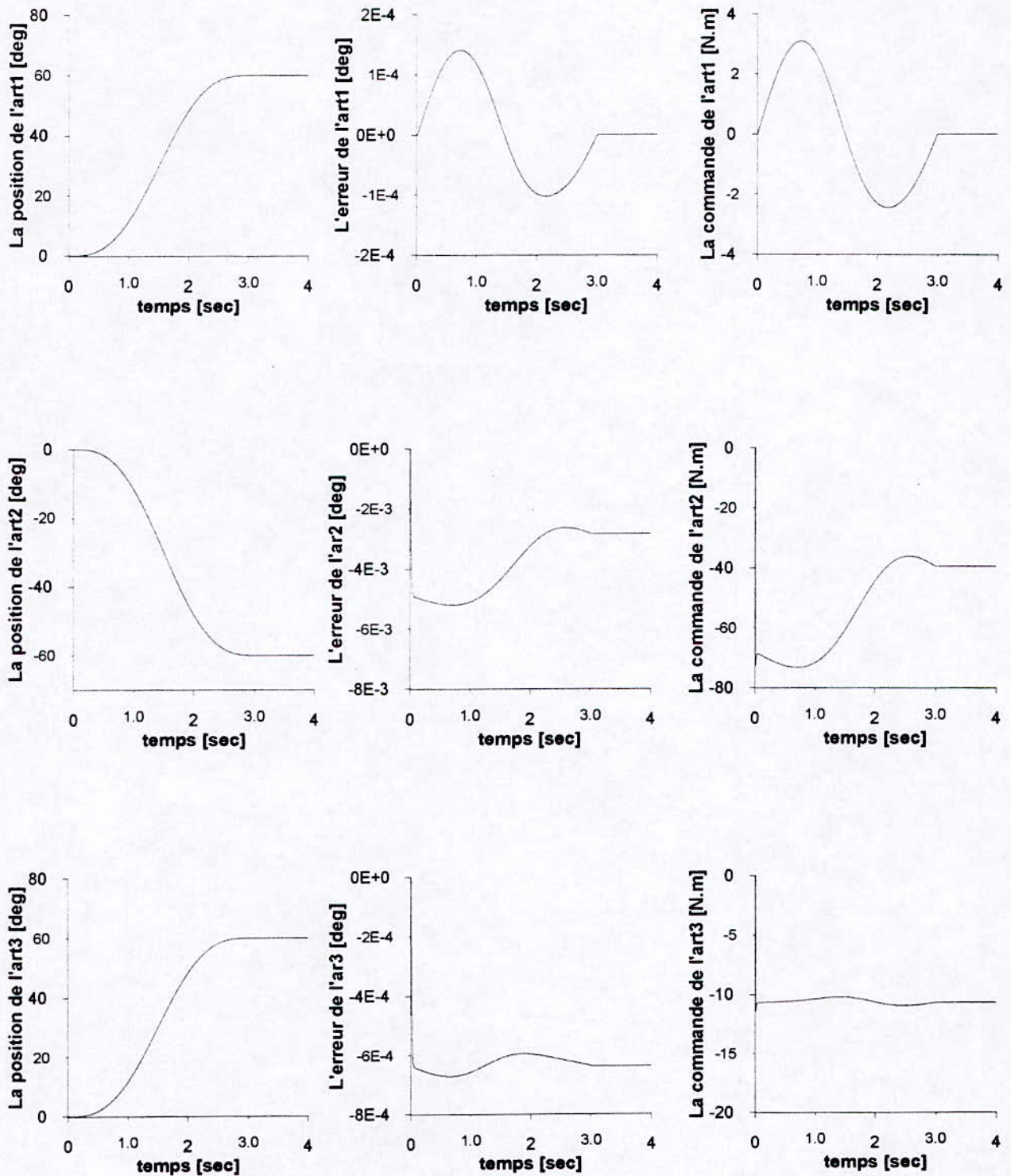
Fig.(4.13), illustre la robustesse de cette commande face au changement paramétrique due à la masse portée par l'effecteur.

Essai3

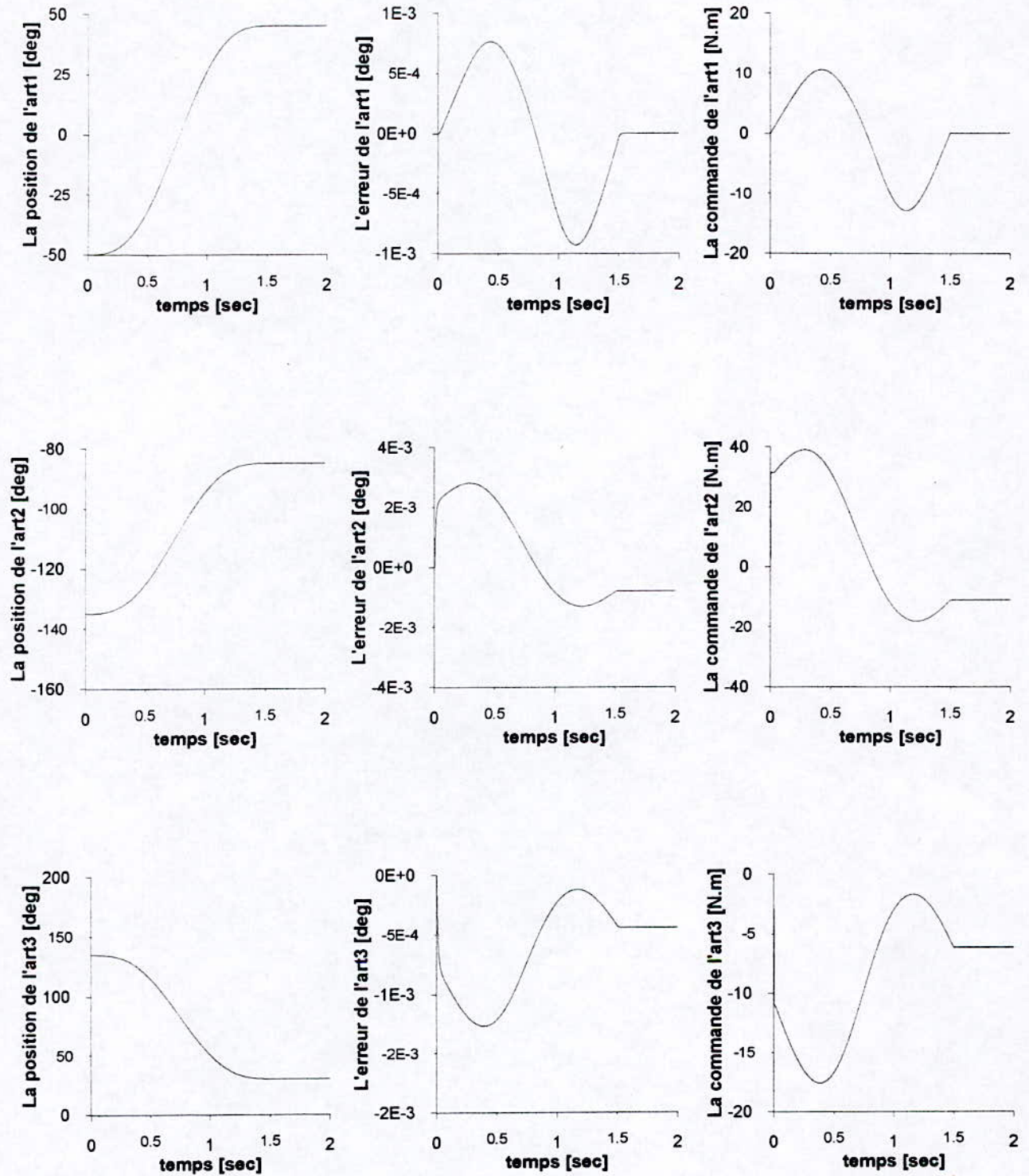
Fig.(4.14), illustre la robustesse de cette commande face au changement paramétrique due au lâchage de la masse portée par l'effecteur.

Essai4

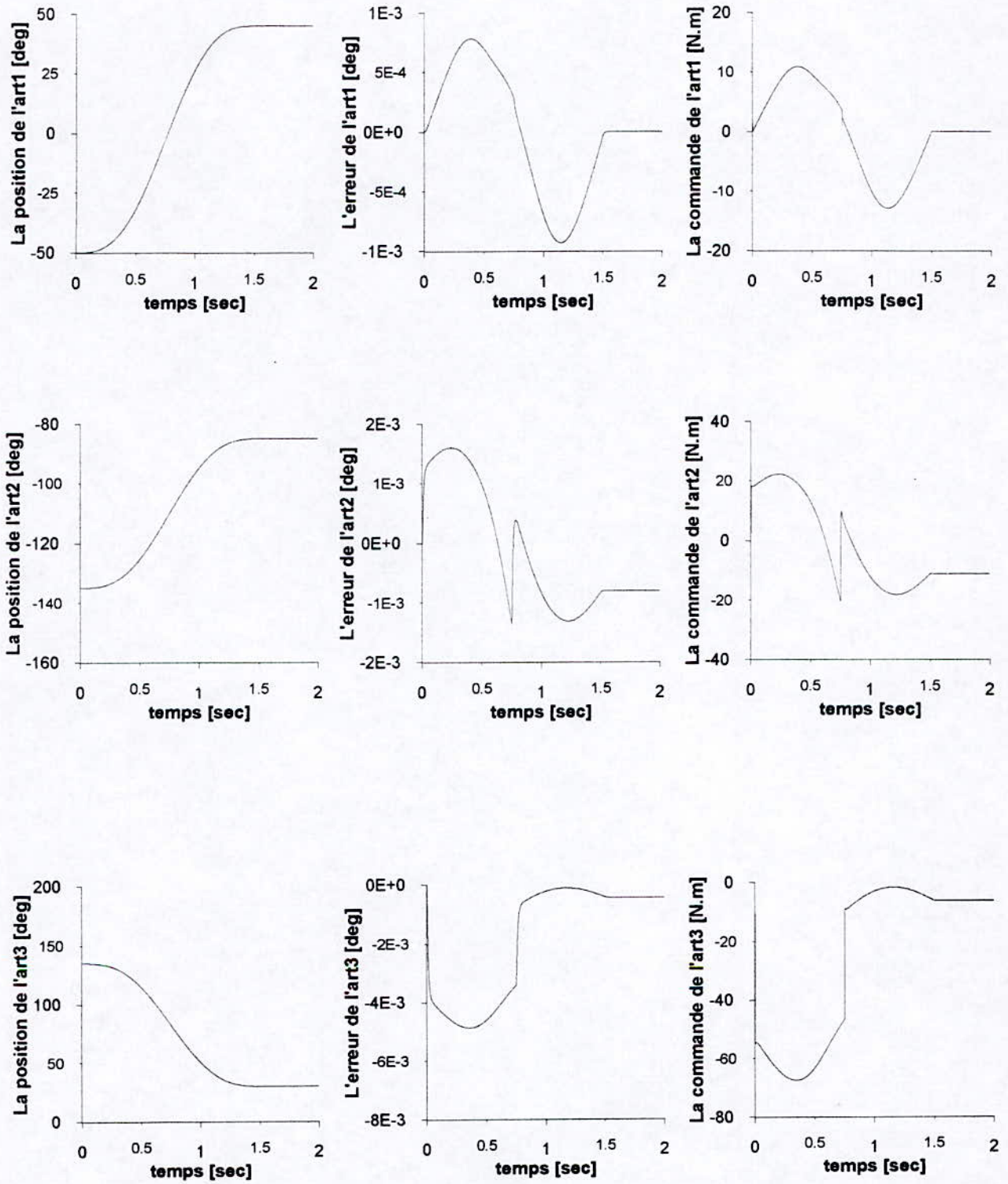
Fig.(4.15), nous permet de constater la décentralisation de la loi de commander qui est un avantage très important, car il nous permet de contrôler le robot même si une de ses stations de commande est défectueuse



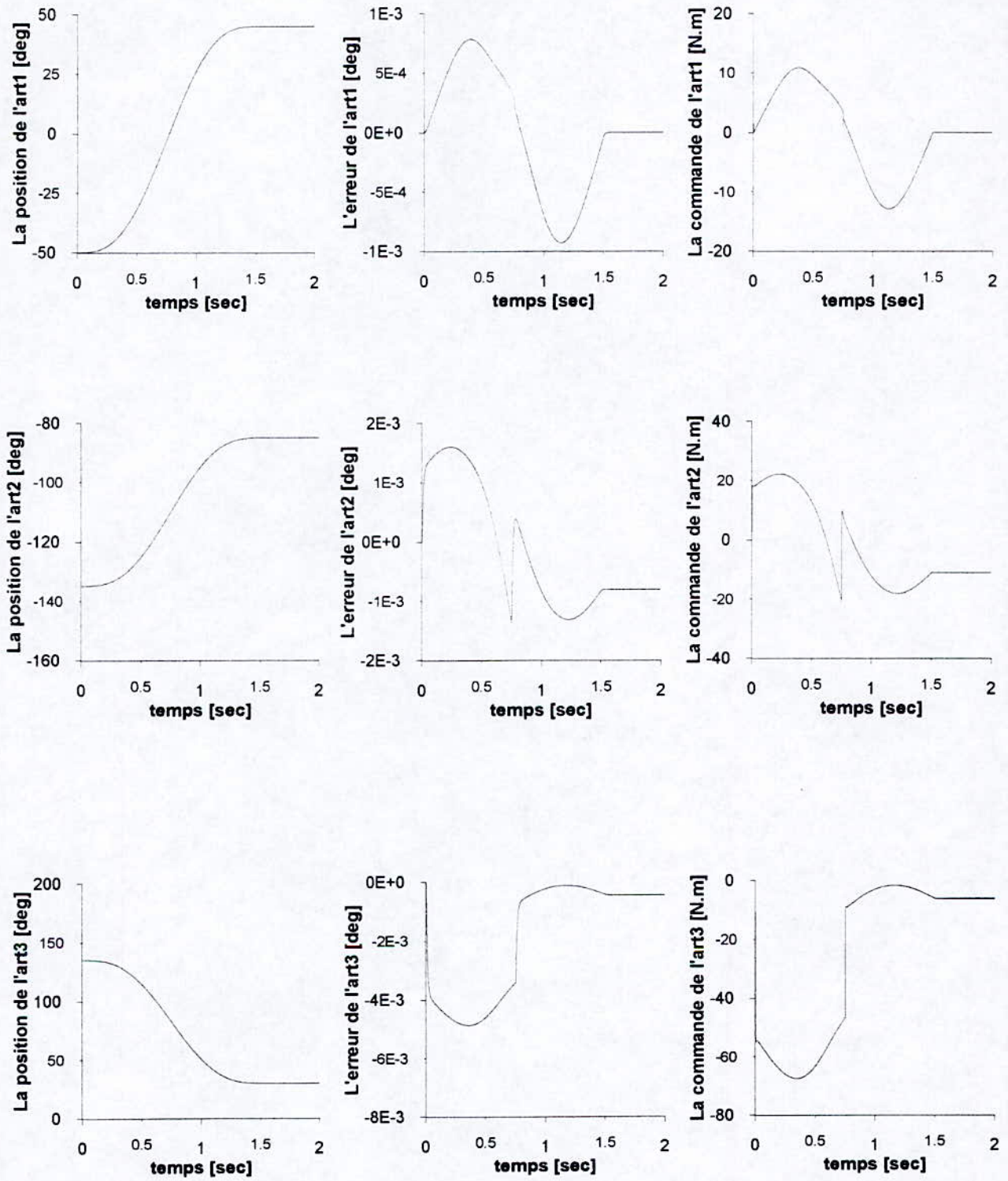
fig(4-11) Trajectoire normale sans charge



fig(4-12) Trajectoire de Leavhy sans charge



fig(4-14) Trajectoire de Leavhy avec une charge de 10Kg lâchée à t=0.75sec



fig(4-14) Trajectoire de Leavhy avec une charge de 10Kg lâchée à t=0.75sec

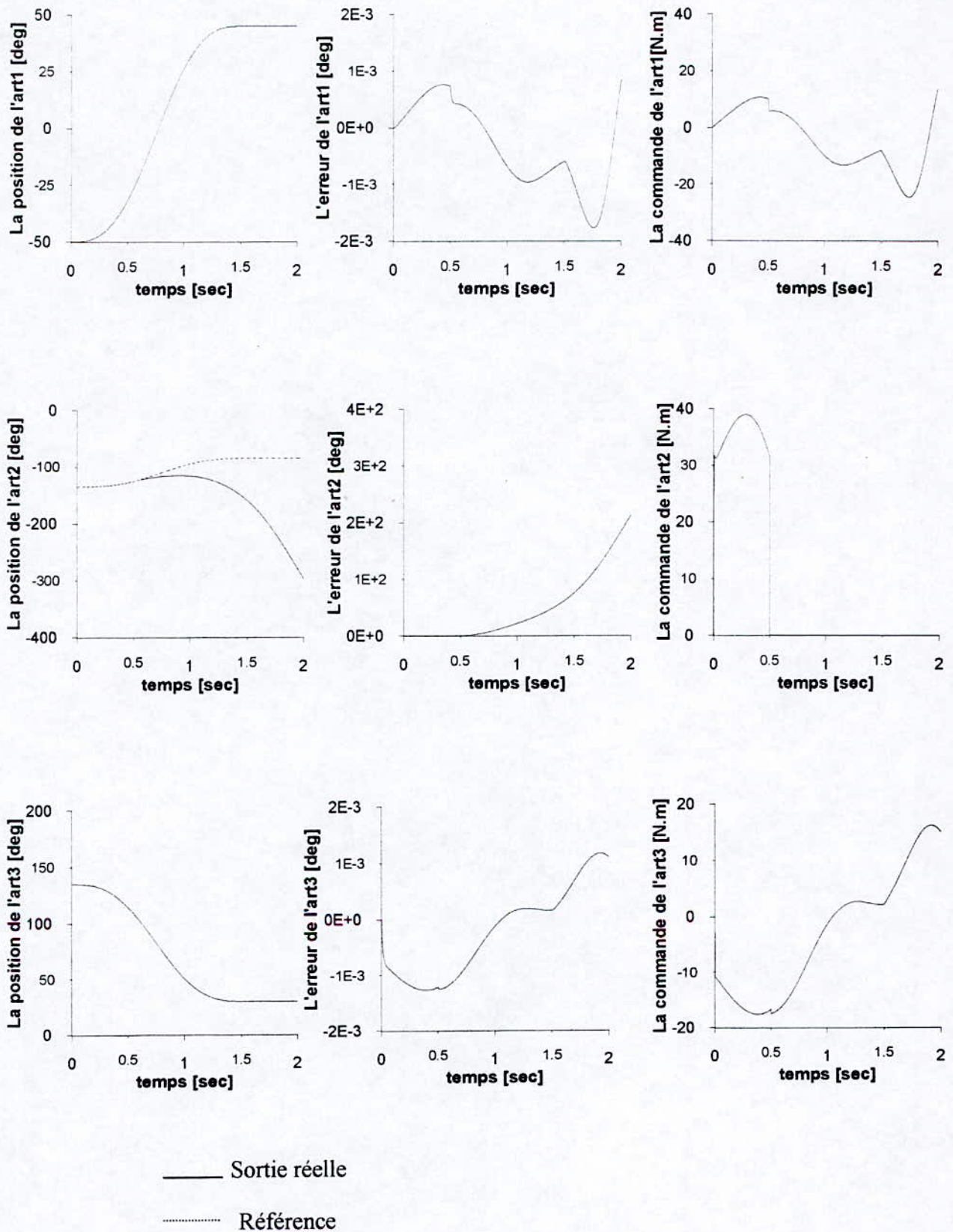


fig (4-15) trajectoire de Leavhy avec rupture de la deuxième commande à $t=0.5s$

IV.2 DEUXIEME APPROCHE :[KHORRAMI 97.a]

Une commande adaptative décentralisée sera présentée dans ce chapitre ,appliquée à une classe de systèmes nonlineaires multivariables ,comportant des interconnexions entre les différents sous systèmes.

IV.2.1 PRESENTATION DU SYSTEME

Considérant un système nonlineaire multivariable, composé de N sous systèmes interconnectés ,chaque sous système s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\zeta}_i = f_{i0}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{p_i} \theta_{ij} f_{ij}(\zeta) + g_{i0} u_i \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{IV.54})$$

avec

$\zeta_i \in \mathbb{R}^N$: vecteur d'état du i^{eme} sous système .

$\zeta \in \mathbb{R}^N$: vecteur du système global .

$u_i \in \mathbb{R}$: commande du i^{eme} sous système .

$\theta_i = [\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ipi}]$: vecteur des paramètres inconnus du i^{eme} sous système .

Suppositions sur le système :

1-les fonctions f_{ij}, f_{i0}, g_{i0} sont supposées lisses .

2- $f_{ij}(0) = 0, f_{i0}(0) = 0, g_{i0}(0) \neq 0$.

3- le système décrit par l'équation (4.1) isolé : $\dot{\zeta}_i = f_{i0}(\zeta_i) + g_{i0} u_i$
est linéarisable

Le système (4.1) est mis sous une forme dite 'stricte feedback form' ,en utilisant une transformation nonlineaire $\phi(\zeta_i)$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{i1} &= \omega_{i2} \\ \dot{\omega}_{i2} &= \omega_{i3} \\ &\vdots \\ \dot{\omega}_{i,ki} &= \omega_{i,ki} \\ \dot{\omega}_{i,ki} &= \omega_{i,ki+1} + \theta_i^T \gamma_{i0}(\omega_{j1}, \dots, \omega_{jkj}) \quad 1 \leq j \leq N \\ \dot{\omega}_{i,ki+1} &= \omega_{i,ki+2} + \theta_i^T \gamma_{i1}(\omega_{j1}, \dots, \omega_{j,kj}, \omega_{jkj+1}) \\ &\vdots \\ \dot{\omega}_{i,mi-1} &= \omega_{imi} + \theta_i^T \gamma_{i,mi-ki-1}(\omega_{j1}, \dots, \omega_{imi-2}, \omega_{jni-1}) \\ \dot{\omega}_{i,mi} &= v_i(\omega_i) + \theta_i^T \gamma_{mi-ki}(\omega_{j1}, \dots, \omega_{j,ni-1}, \omega_{jni}) + \delta_i(\omega_i) u_i \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

avec

$$v_i(0) = 0, \gamma_{ij}(0) = 0, \delta_i(\omega_i) \neq 0$$

On définit un paramètre $\rho_i = n_i - k_i$, qui exprime le nombre d'états du sous système i qui subissent les effets des autres sous systèmes, ou autrement, le nombre des états où apparaissent les interconnexions. Il définit la séparation entre les interconnexions et la commande, il est appelé 'degree of mismatch'.

IV.2.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE

La synthèse de la commande se fera à partir du système (IV.55); pour simplifier les notations, on supposera que ρ_i est constant en chaque sous système. On notera les k premiers états du sous système i par y_i , et les ρ_i états restants par x_i , on obtient alors le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \begin{bmatrix} \dot{y}_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_{i,k-1} \\ \dot{y}_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x_{i1} + \theta_i^T \gamma_{i0}(y_1, \dots, y_N)) \\ &= A_i y_i + B_i (x_{i1} + \theta_i^T \gamma_{i0}(y_1, \dots, y_N)) \\ \dot{x}_{i1} &= x_{i2} + \theta_i^T \gamma_{i1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}) \\ \dot{x}_{i2} &= x_{i3} + \theta_i^T \gamma_{i2}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_{i,n-k-1} &= x_{n-k} + \theta_i^T \gamma_{i,n-k-1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{n-k-1}) \\ \dot{x}_{i,n-k} &= v_i(y_i, x_i) + \theta_i^T \gamma_{i,n-k}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{n-k}) + \delta_i(y_i, x_i) u_i \end{aligned} \quad (IV.56)$$

On supposera que les interconnexions γ_{ij} sont bornées par un polynôme en y_j où $1 \leq i \leq N$, qui est donné par :

$$\left\| \theta_i^T \gamma_{ij}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{ij}) - \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}, \dots, x_{ij}) \right\| \leq \sum_{k=1}^{P_{ij}} \sum_{l=1}^N \eta_{ij}^k(x_{i1}, \dots, x_{ij}) \zeta_{i1l}^k \|y_l\|^k \quad (IV.57)$$

$$1 \leq i \leq N \quad 1 \leq j \leq n-k$$

Remarque :

Le choix de P_{ij} et de η_{ij} dépend de la structure des interconnexions que le système contient. Ce type de bornage introduit le paramètre θ_i qui représente les incertitudes paramétriques, et le coefficient ζ_{ij} qui est inconnu et qui sera estimé par des lois d'adaptation.

Dans ce qui suit on présentera une méthode systématique pour synthétiser une commande adaptative décentralisée, on débutera par la considération d'un problème de régulation, le problème de poursuite sera l'extension du premier.

i. problème de régulation : [KHORRAMI 97.a]

Etape 0 : On définit

$$P = \max (P_{ij}) \quad 1 \leq i \leq N \quad 1 \leq j \leq n-k$$

On considère la partie du sous système i décrite par le vecteur y_i , avec x_{i1} la commande virtuelle. Sachant que la paire (A_i, B_i) est commandable, alors il existe une matrice symétrique et positive, qui est solution de l'équation de RICCATI suivante :

$$A_i^T P_i + P_i A_i - 2 \alpha_i B_i B_i^T P_i + Q_i = 0 \quad (\text{IV.58})$$

avec

$$\alpha_i > 0$$

Q_i matrice symétrique définie positive

La commande virtuelle du $i^{\text{ème}}$ sous système est donné par [8] :

$$\begin{aligned} x_{i1} &= -\alpha_i B_i^T P_i y_i - \hat{\beta}_i B_i^T P_i y_i (1 + (y_i^T y_i)^{p-1}) \\ &\hat{=} r_{i1}(y_i, \hat{\beta}_i) \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

où $\hat{\beta}_i$ est une loi d'adaptation qui va nous servir à contrebalancer les effets des interconnexions, notons par β_i^* sa valeur désirée.

On définit la première variable intermédiaire Z_{i1} par :

$$Z_{i1} = x_{i1} - r_{i1}(y_i, \hat{\beta}_i) \quad (\text{IV.60})$$

on obtient alors

$$\dot{y}_i = A_i y_i + B_i (Z_{i1} + r_{i1}(y_i, \hat{\beta}_i) + \theta_i^T \gamma_{i0}(y_1, \dots, y_N)) \quad (\text{IV.61})$$

On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_0 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^p (y_i^T P_i y_i)^k + \Gamma_i^{-1} (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)^2 \right) \quad (\text{IV.62})$$

où Γ_i est une constante positive.

Remarque :

la fonction de Lyapunov qu'a été choisie, englobe tout le système, et cela dans le but de trouver une solution à la stabilité globale du système en utilisant des commandes décentralisées.

En dérivant l'équation (IV.62) par rapport au temps on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & \sum_{i=0}^N \left\langle \sum_{k=1}^P k (y_i^T P_i y_i)^{k-1} \left[y_i^T (A_i^T P_i + P_i A_i - 2\alpha_i P_i B_i B_i^T P_i) y_i + 2 y_i^T P_i B_i Z_{i1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 (B_i^T P_i y_i) \left\{ -\hat{\beta}_i B_i^T P_i y_i [1 + (y_i^T P_i)^{P-1}] + \theta_i^T \gamma_{i0}(y_1, \dots, y_N) \right\} \right] \right. \\ & \left. + 2 \Gamma_i^{-1} (\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \dot{\hat{\beta}}_i \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

Dans ce qui suit on va borner (IV.63) en utilisant les relation (IV.57) et (IV.58), sachant que $\eta_{i0}=1$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & \sum_{i=1}^N \left\langle \sum_{k=1}^P \left\{ 2k (y_i^T P_i y_i) y_i^T P_i B_i Z_{i1} - k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) \|y_i\|^{2k} \right\} - 2\hat{\beta}_i \|B_i^T P_i y_i\|^2 [1 + \|y_i\|^{2(P-1)}] \right. \\ & \cdot \left. \sum_{k=1}^P k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \|y_i\|^{2(k-1)} + 2(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \left\{ \Gamma_i^{-1} \dot{\hat{\beta}}_i - \|B_i^T P_i y_i\|^2 [1 + \|y_i\|^{2(P-1)}] \cdot \sum_{k=1}^P k (y_i^T P_i y_i)^{(k-1)} \right\} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^P k \lambda_{\max}^{k-1}(P_i) \|y_i\|^{2(k-1)} \cdot \sum_{K1=1}^{P_i0} \sum_{j=1}^N \varsigma_j^{1/2} \varsigma_j^{-1/2} \varsigma_{j0}^{K1} \|y_j\|^{K1} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.64})$$

Où ς_j est degré de liberté qu'on a introduit pour les besoins de signe de la dérivée de la fonction de Lyapunov, le premier terme souligné est une bornitude des termes quadratiques, le second terme souligné nous permet d'introduire un terme en β_i^* qu'on utilisera pour le signe négatif de la dérivée de la fonction de Lyapunov finale; le dernier terme souligné a été introduit par l'équation (IV.57); ce dernier peut être borner à son tour en utilisant les relation suivantes :

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad (\text{IV.65})$$

$$\left(\sum_{k=1}^P a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^P a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^P b_k^2 \right) \quad (\text{IV.66})$$

le dernier terme souligné sera réécrit tel que :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\langle 2 \sum_{k=1}^P k \lambda_{\max}^{k-1}(P_i) \|y_i\|^{2(k-1)} \cdot \|B_i^T P_i y_i\| \sum_{k1=1}^{P_i0} \sum_{j=1}^N \varsigma_j^{1/2} \varsigma_j^{-1/2} \varsigma_{j0}^{K1} \|y_j\|^{K1} \right\rangle \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \varsigma_i^* d_2 \|B_i^T P_i y_i\|^2 \sum_{k=1}^P \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i) \|y_i\|^{4(k-1)} + \varsigma_i^{-1} \sum_{k=1}^{P_i0} d_{ik0} \|y_i\|^{2k} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.67})$$

Avec

$$\begin{aligned} d_2 &= P_{i0} \sum_{k=1}^P k^2 \\ \varsigma_i^* &= \sum_{j=1}^N \varsigma_j \\ d_{ik0} &= \sum_{j=1}^N (\varsigma_{ji0}^k)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

Cette opération de bornage sera répétée à chaque étape ,on changera seulement la valeur de P_{i0} par P_{ij} ,avec j correspondant à l'étape j ($0 \leq j \leq \rho_i$)

De l'équation (IV.64) le deuxième souligné nous permet de déduire l'expression analytique de la dynamique de la loi $\hat{\beta}$ qui est :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\beta}} &= \Gamma_i \|B_i^T P_i y_i\|^2 [1 + \|y_i\|^{2(P-1)} \sum_{k=1}^P k (y_i^T P_i y_i)^{(k-1)}] \\ &\triangleq \tau_{i0}(y_i)\end{aligned}\quad (IV.69)$$

On remarquera que cette expression contient le terme y_i qui tend vers zéro ce qui nous assurera la convergence de la loi d'adaptation

En injectant la loi de β dans l'équation (IV.65), on obtient l'expression finale de la dérivée de la fonction de Lyapunov pour l'étape 0 :

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &\leq \sum_{i=1}^N \left\langle \sum_{k=1}^P 2k (y_i^T P_i y_i)^{(k-1)} y_i^T P_i B_i Z_{i1} - \left\{ k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - \zeta_i^{-1} d_{ik0} \right\} \|y_i\|^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \dot{V}_{i0}(y_i) \right\rangle\end{aligned}\quad (IV.70)$$

avec

\dot{V}_{i0} est un terme qui contient β_i^* , qui par un choix judicieux de β_i^* , nous permettra de lui donner un signe négatif.

Pour passer à l'étape suivante ,on a besoin de la dérivée de Z_{i1} .

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{i1} &= x_{i2} - \frac{\partial r_{i1}}{\partial y_i} \dot{y}_i - \frac{\partial r_{i1}}{\partial \hat{\beta}} \tau_{i0}(y_i) + \theta_i^T \gamma_{i1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}) \\ &= x_{i2} + v_{i1}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) + \underbrace{\sum_{l=0}^1 \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \theta_i^T \gamma_{i1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1})}_{\text{}}\end{aligned}\quad (IV.71)$$

le dernier terme a été introduit par les expressions de \dot{y}_i, \dot{x}_{i1}

Etape1 :

Dans cette étape on considérera x_{i2} comme une commande virtuelle ,et on introduira deux lois d'adaptations qui nous permettront soit d'estimer les erreurs paramétriques θ_i ,soit d'estimer les coefficients de bornitude des interconnexions ζ_i .

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = V_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ Z_{i1}^2 + (\hat{\theta}_i - \theta_i)^T (\hat{\theta}_i - \theta_i) + (\hat{\zeta}_i - \zeta_i^*)^2 \right\}\quad (IV.72)$$

Avec

$\hat{\theta}_i$ est l'estimée de θ_i

$\hat{\zeta}_i$ est l'estimée de ζ_i^*

En dérivant V_1 en fonction du temps ,et en utilisant les relations (IV.57), (IV.64)et(IV.71),on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \sum_{i=1}^N \left\langle \dot{y}_{i0}(y_i) - \sum_{k=1}^P [k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q) - \zeta_i^{-1} d_{ik0}] \|y_i\|^{2k} \right. \\ & + 2Z_{i1} \left\{ x_{i2} + \sum_{k=1}^P k (y_i^T P_i y_i)^{(k-1)} \cdot y_i^T P_i B_i + v_{i1}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) + \sum_{l=1}^1 \underline{\varphi'_{il}(y_i, \hat{\beta})} \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right\} \\ & + 2(\hat{\theta}_i - \theta_i) \dot{\hat{\theta}}_i + 2(\hat{\zeta}_i - \zeta_i) \dot{\hat{\zeta}}_i \left. \right\rangle \\ & + \underline{\sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^1 2 \|Z_{i1} \varphi'_{il}\| \left\| \theta_i^T \gamma_{ij}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}) - \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right\|} \end{aligned} \quad (IV.73)$$

Le dernier terme souligné est issu du fait qu'on a borné les interconnexions ,est du fait qu'on a ajouté et soustrait le premier terme souligné ,en utilisant la relation (4.4),on le réécrit tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^1 2 \|Z_{i1} \varphi'_{il}\| \left\| \theta_i^T \gamma_{ij}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}) - \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right\|} \leq & \zeta_i^* \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^1 \varpi_{il} Z_{i1} \|\varphi'_{il}\|^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{k=l=0}^P \zeta_i^{-1} d_{ikl} \|y_i\|^{2k} \end{aligned} \quad (IV.74)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{ik0} &= \sum_{L=1}^N (\zeta_{Li}^k)^2 \\ \varpi_{il}(x_{i1}, \dots, x_{il}) &= \sum_{k=1}^{P_{ij}} (\eta_{il}^k)^2 \end{aligned} \quad (IV.75)$$

En utilisant la relation (IV.74) dans la relation(IV.73),on choisit la commande virtuelle x_{i2} telle que:

$$\begin{aligned} x_{i2} &= - \left[C_{i1} Z_{i1} + \sum_{k=1}^P k (y_i^T P_i y_i)^{(k-1)} y_i^T P_i B_i + v_{i1}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) + \frac{\hat{\zeta}_i}{2} Z_{i1} \sum_{l=0}^1 \varpi_{il} \|\varphi'_{il}(y_i, \hat{\beta}_i)\|^2 \right. \\ & \quad \left. + \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right] \\ & \hat{=} r_{i2}(y_i, \hat{\beta}_i, Z_{i1}, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \end{aligned} \quad (IV.76)$$

avec

$$C_{i1} > 0$$

On définit Z_{i2} tel que :

$$Z_{i2} = x_{i2} - r_{i2}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \quad (IV.77)$$

En utilisant les relations (IV.74), (IV.75), (IV.76) et (IV.77), on obtient la dérivée suivante de la fonction de Lyapunov finale pour l'étape 1 :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \sum_{i=1}^N \dot{v}_{i0}(y_i) - \sum_{k=1}^p \left[k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - (2d_{ik0} + 2d_{ik1}) \zeta_i^{-1} \right] \|y_i\|^{sk} - 2C_{i1} Z_{i1}^2 \\ & + 2(\hat{\theta}_i - \theta_i)^T \left\{ \dot{\hat{\theta}}_i - Z_{i1} \sum_{l=0}^1 \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \gamma_{i1}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right\} \\ & + 2(\hat{\zeta}_i - \zeta_i^*) \left\{ \dot{\hat{\zeta}}_i - \frac{Z_{i1}^2}{2} \sum_{l=0}^1 \varpi_{i1} \left\| \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \right\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (IV.78)$$

On définit les deux fonctions suivantes qu'on appellera fonction de réglage (*tuning function*) :

$$\begin{aligned} \tau_{i1} &= ((y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) = Z_{i1} \sum_{l=0}^1 \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \gamma_{i1}(0, \dots, 0, x_{i1}) \\ \varepsilon_{i1}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) &= \frac{Z_{i1}^2}{2} \sum_{l=0}^1 \varpi_{i1} \left\| \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \right\|^2 \end{aligned} \quad (IV.79)$$

Pour la prochaine étape, on définit la dérivée de Z_{i2} par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{i2} &= x_{i3} + \frac{\partial r_{i2}}{\partial y_i} \dot{y}_i - \frac{\partial r_{i2}}{\partial Z_{i1}} \dot{Z}_{i1} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \hat{\beta}_i} \dot{\hat{\beta}}_i - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \hat{\theta}_i} \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \hat{\zeta}_i} \dot{\hat{\zeta}}_i + \theta_i^T \gamma_{i2}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}) \\ &= x_{i3} + v_{i2}(y_i, Z_{i1}, Z_{i2}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) + \dot{\hat{\theta}}_i \psi_{i2}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i, \hat{\zeta}_i) + \dot{\hat{\zeta}}_i \xi_{i2}(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i, \hat{\zeta}_i) \\ &+ \sum_{l=0}^2 \varphi_{i2}^l(y_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \theta_i^T \gamma_{i2}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}). \end{aligned} \quad (IV.80)$$

Dans ce qui va suivre, toutes les étapes auront la même approche analytique, le changement se fera au niveau de l'ordre des interconnexions, la fonction de Lyapunov à chaque étape m sera décrite par l'expression suivante :

$$V_m = V_{m-1} + \sum_{i=1}^N Z_{im}^2 \quad (IV.81)$$

avec $2 \leq m \leq \rho - 1$

La synthèse de la commande finale se fera à l'étape ρ :

Etape ρ :

A l'étape $\rho - 1$ la commande virtuelle était comme suit :

$$x_{i,\rho} \hat{=} r_{i,\rho}(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\zeta}_i) \quad (IV.82)$$

et sachant que :

$$Z_{i,\rho} = x_{i,\rho} - r_{i,\rho}(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\zeta}_i) \quad (IV.82)$$

La dérivée par rapport au temps de $Z_{i,\rho}$ sera donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{i,\rho} = & v_i(x_i) + v_{i,\rho} + \hat{\theta}_i^T \psi_{i,\rho} + \hat{\zeta}_i \zeta_{i,\rho} \\ & + \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \theta_i^T \gamma_{i,\rho}(y_i, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{i,\rho}) \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

avec

$$\begin{aligned} v_{i,\rho} & \hat{=} v_{i,\rho}(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \\ \psi_{i,\rho} & \hat{=} \psi_{i,\rho}(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \\ \zeta_{i,\rho} & \hat{=} \zeta_{i,\rho}(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

En dérivant par rapport au temps la relation(IV.81) pour $m=\rho$ et en utilisant les relations (IV.83)et (IV.57) pour $j=\rho$, ainsi que les relations(IV.64), (IV.65),on obtient le résultats suivant :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho \leq & \sum_{i=1}^N [\dot{v}_{i0} - \sum_{k=1}^{\rho} [k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - \langle (\rho+1)d_{ik0} + \rho d_{ik1} + \dots + d_{ik,\rho} \rangle \zeta_\rho^{-1}] \|y_i\|^{2k} \\ & - 2C_{i1} Z_{i1}^2 - \dots - 2C_{i,\rho-1} Z_{i,\rho-1}^2 + 2 \left\{ \hat{\theta}_i - \tau_{i,\rho-1} \right\}^T \sum_{j=21}^{\rho-1} Z_{ij} \psi_{ij} + 2 \left\{ \hat{\zeta}_i - \varepsilon_{i,\rho-1} \right\} \sum_{j=2}^{\rho-1} Z_{ij} \zeta_{ij} \\ & + 2Z_{i,\rho} \left[Z_{i,\rho-1} + \delta_i(y_i, x_i) u_i + v_i(x_i) + v_{i,\rho} + \theta_i^T \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l \gamma_{i,l}(0, \dots, 0, x_i) \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_i^*}{2} Z_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \varpi_{i,l} \|\varphi_{i,\rho}^l\|^2 + \hat{\theta}_i^T \psi_{i,\rho} + \hat{\zeta}_i \zeta_{i,\rho} \right] + 2(\hat{\theta}_i - \theta_i)^T (\hat{\theta}_i - \tau_{i,\rho-1}) \\ & \left. + 2(\hat{\zeta}_i - \zeta_i^*) (\hat{\zeta}_i - \varepsilon_{i,\rho-1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

Ainsi on peut déduire la commande suivante qui peut être appliquée au sous système i :

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{1}{\delta_i(y_i, x_i)} \left[-v_i(x_i) - Z_{i,\rho-1} - C_{i,\rho} Z_{i,\rho} - v_{i,\rho} - \frac{\hat{\zeta}_i}{2} Z_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \varpi_{il} \|\varphi_{i,\rho}^l\|^2 \right. \\ & \left. - \hat{\theta}_i^T \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l \gamma_{i,l}(0, \dots, 0, x_i) - \tau_{i,\rho} \psi_{i,\rho} - \varepsilon_{i,\rho} \zeta_{i,\rho} \right. \\ & \left. - \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l \gamma_{il}(0, \dots, 0, x_i) \sum_{j=2}^{\rho-1} Z_{ij} \psi_{ij} - \frac{1}{2} Z_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \varpi_{il} \|\varphi_{i,\rho}^l\|^2 \sum_{j=2}^{\rho-1} Z_{ij} \zeta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.86})$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i & = \tau_{i,\rho} = \tau_{i,\rho-1} + Z_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l \gamma_{i,\rho}(0, \dots, 0, x_i) \\ \tau_{i,j} & = \tau_{i,j-1} + Z_{ij} \sum_{l=0}^j \varphi_{i,j}^l \gamma_{i,l}(0, \dots, 0, x_i) \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_i &= \varepsilon_{i,\rho} = \varepsilon_{i,\rho-1} + \frac{1}{2} Z_{i,\rho}^2 \sum_{l=0}^{\rho} \varpi_{il} \|\varphi_{i,\rho}^l\|^2 \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{i,j-1} + \frac{1}{2} Z_{ij}^2 \sum_{l=0}^j \varpi_{ij} \|\varphi_{ij}^l\|^2\end{aligned}\tag{IV.88}$$

ε_{i1} , τ_{i1} sont données par la relation(IV.79)

En remplaçant l'équation (IV.86) dans l'équation (IV.85), on obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov du système globale :

$$\begin{aligned}\dot{V}_\rho &\leq \sum_{i=1}^N \left[-2\beta_i^* \|B_i^T P_i y_i\|^2 [1 + \|y_i\|^{2(P-1)}] \cdot \sum_{k=1}^P k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \|y_i\|^{2(k-1)} \right. \\ &\quad + \zeta_i^* d_2 \|B_i^T P_i y_i\|^2 \sum_{k=1}^P \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i) \|y_i\|^{4(k-1)} - \sum_{k=1}^P \left\{ k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) \right. \\ &\quad \left. - [(\rho+1)d_{ik0} + \rho d_{ik1} + \dots + 2d_{ik,\rho-1} + d_{ik\rho}] \zeta_i^{-1} \right\} \|y_i\|^{2k} \\ &\quad \left. - 2C_{i1} Z_{i1}^2 - \dots - 2C_{i,\rho-1} Z_{i,\rho-1}^2 - 2C_{i,\rho} Z_{i,\rho}^2 \right]\end{aligned}\tag{IV.89}$$

Les deux premiers termes ayant comme facteurs $\|y_i\|^{2(P-1)}$ et $\|y_i\|^{4(k-1)}$, le signe négatif de leur différence sera assuré par un choix de β_i^* , l'existence de ce dernier est motivé par le fait que tous les signaux sont bornés, ainsi que le signe négatif de la dernière somme, qui sera assuré par le degré de liberté ζ_i^{-1} , qui a été introduit lors de l'étape 0 tel que :

$$\zeta_i \geq \max_{k \in \{1, \dots, P\}} \left[\frac{(\rho+1)d_{ik0} + \rho d_{ik1} + \dots + 2d_{ik,\rho-1} + d_{ik\rho}}{k \lambda_{\min}(Q_i) \lambda_{\min}^{k-1}(P_i)} \right]\tag{IV.90}$$

Ainsi on peut assurer une stabilité globale autour du point d'équilibre, et il en résultera :

$$\begin{aligned}Z_i &= 0 \quad ; \quad \hat{\theta}_i \rightarrow \theta_i \quad ; \quad \hat{\zeta}_i \rightarrow \zeta_i^* \quad ; \quad \hat{\beta}_i \rightarrow \beta_i^* \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) &= 0\end{aligned}$$

ii. *problème de poursuite* : [KHORRAMI 97.b]

L'objectif de cette approche est la synthèse d'une commande adaptative décentralisée pour la poursuite ,d'un modèle de référence ,ou d'une référence.

On définit le modèle de référence comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{mi} &= A_i y_{mi} + B_i x_{mi1} \\
 \dot{x}_{mi1} &= x_{mi2} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{mi,n-k-1} &= x_{mi,n-k} \\
 \dot{x}_{mi,n-k} &= K_i [y_{mi}^T x_{mi}^T]^T + b_{mi} r_i
 \end{aligned} \tag{IV.91}$$

$$1 \leq i \leq N$$

avec r_i référence du $i^{\text{ème}}$ sous système

On définit le modèle de l'erreur comme étant $\tilde{y}_i = y_i - y_{mi}$ et $\tilde{x}_i = x_i - x_{mi}$,on obtient le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{y}}_i &= A_i \tilde{y}_i + B_i \tilde{x}_{i1} + B_i \theta_i^T \gamma_{i0}(y_1, \dots, y_N) \\
 \dot{\tilde{x}}_{i1} &= \tilde{x}_{i2} + \theta_i^T \gamma_{i1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,n-k-1} &= \tilde{x}_{i,n-k} + \theta_i^T \gamma_{i,n-k-1}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{i,n-k}) \\
 \dot{\tilde{x}}_{i,n-k} &= v_i(y_i, x_i) + \theta_i^T \gamma_{i,n-k}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{i,n-k}) \\
 &\quad + \delta_i(y_i, x_i) u_i - K_i [y_{mi}^T x_{mi}^T]^T - b_{mi} r_i
 \end{aligned} \tag{IV.92}$$

Une fois le modèle de l'erreur obtenu ,on applique la procédure précédente ,avec des modification au niveau des loi d'adaptations

Etape0:

En considérant \tilde{x}_{i1} comme commande virtuelle ,et d'après l'équation (IV.59),on a :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{i1} &= -\alpha_i B_i^T P_i \tilde{y}_i - \hat{\beta}_i B_i^T P_i \tilde{y}_i [1 + (\tilde{y}_i^T \tilde{y}_i)^{(p-1)}] \\
 &\hat{=} r_{i1}(\tilde{y}_i, \hat{\beta}_i)
 \end{aligned} \tag{IV.93}$$

Avec

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_i &= \Gamma_i \|B_i^T P_i \tilde{y}_i\|^2 [1 + \|\tilde{y}_i\|^{2(P-1)}] \cdot \sum_{k=1}^P k (\tilde{y}_i^T P_u \tilde{y}_i)^{(k-1)} - \Gamma_{i1} \sigma_{i1} \hat{\beta}_i \\ &\hat{=} \tau_{i0}(\tilde{y}_i)\end{aligned}\quad (\text{IV.94})$$

On remarque que la loi (IV.94) a été modifiée par un terme en $\hat{\beta}_i$, ce qui nous garantira la stabilité, par un choix de σ_{i1} [IOANNOU 84].

On peut analyser les propriétés de cette loi de commande virtuelle, par la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^P (\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^k + \Gamma_i^{-1} (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)^2 \right\} \quad (\text{IV.95})$$

Du fait que les interconnexions dépendent de x_i et de y_i , on aura à recourir à l'équation suivante :

$$\left(|a_1| + |a_2|\right)^k \leq 2^{k-1} \left(|a_1|^k + |a_2|^k\right) \quad (\text{IV.96})$$

Ainsi on pourra borner les interconnexions comme suit :

$$\begin{aligned}&\left\| \theta_i^T \gamma_{ij}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{ij}) - \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1}, \dots, x_{ij}) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^N \eta_{il}^k \zeta_{ij}^k \left(\|y_{ml}\| + \|\tilde{y}_l\| \right)^k \\ &\leq \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^N 2^{P_{ij}-1} \eta_{il}^k \zeta_{ij}^k \|y_{ml}\|^k + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{P_{ij}} 2^{P_{ij}-1} \eta_{il}^k \zeta_{ij}^k \|\tilde{y}_l\|^k \\ &\leq N \zeta_{\max}^j \bar{y}_m \hat{\eta}_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{ij}) + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{P_{ij}} 2^{P_{ij}-1} \eta_{il}^k \zeta_{ij}^k \|y_l\|^k\end{aligned}\quad (\text{IV.97})$$

avec

$$\begin{aligned}\zeta_{\max}^j &= \max(\zeta_{ij}^k) & i, l \in \{1, \dots, N\}, k \in \{1, \dots, P\} \\ \bar{y}_m &= \max\left(\|y_{ml}\|^k\right) \\ \hat{\eta}_{il}(x_{i1}, \dots, x_{ij}) &= \sum_{j=1}^{P_{ij}} \eta_{il}^j \quad \text{et} \quad \hat{\eta}_{i0} = p_{i0}\end{aligned}$$

\dot{V}_0 est obtenu de la même manière que dans le cas de la régulation

L'apparition dans l'équation (IV.99) du terme ζ_{\max}^1 , nous mène à introduire dans l'étape suivante une loi d'adaptation dans la prochaine étape, tel que :

$$\zeta_{\max} \hat{=} \max(N \zeta_{\max}^l \bar{y}_m)^2 \quad (\text{IV.98})$$

ζ_{\max} sera estimé par $\hat{\zeta}_{\max}$

Pour l'étape 1 la fonction de Lyapunov sera définie par :

$$V_1 = V_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ \tilde{Z}_{i1}^2 + (\hat{\theta}_i - \theta_i)^T \Gamma_{i1}^{-1} (\hat{\theta}_i - \theta_i) + \Gamma_{i2}^{-1} (\hat{\zeta}_i - \zeta_i^*)^2 + \Gamma_{i3}^{-1} (\hat{\zeta}_{\max}^i - \zeta_{\max})^2 \right\} \quad (\text{IV.99})$$

avec $\Gamma_{ik} > 0$

Pour l'étape m ,tel que $2 \leq m \leq \rho$,on a :

$$\tilde{Z}_{im} = \tilde{x}_{im} - r_{im}(\tilde{y}_i, \tilde{Z}_{i1}, \dots, \tilde{Z}_{i,m-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_{ii}, \hat{\zeta}_{\max}^i) \quad (\text{IV.100})$$

et

$$V_m = V_{m-1} + \sum_{i=1}^N Z_{im}^2$$

La commande finale sera calculée à l'étape ρ , elle est donnée par :

$$\begin{aligned} u_i = \frac{1}{\delta_i(y_i, r_i)} \left\{ -v_i(x_i) + K_i [y_m^T x_m^T]^T + b_m r_i - \tilde{Z}_{i,\rho-1} - C_{i,\rho} \tilde{Z}_{i,\rho} - v_{i,\rho} \right. \\ - \frac{\hat{\zeta}_i}{2} \tilde{Z}_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \omega_{il} \|\varphi_{i\rho}^l\|^2 - \hat{\theta}_i^T \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i\rho}^l \gamma_{il}(0, \dots, 0, x_i) - \hat{\zeta}_{\max}^i \left(\sum_{l=0}^{\rho} \|\hat{\eta}_{il} \varphi_{i\rho}^l\| \right)^2 \\ - \tau_{i\rho} \psi_{i\rho} - \varepsilon_{i\rho} \xi_{i\rho} - \omega_{i\rho} \vartheta_{i\rho} - \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i\rho}^l \gamma_{il}(0, \dots, 0, x_{il}) \sum_{j=2}^{\rho-1} \tilde{Z}_{ij} \psi_{ij} \\ \left. - \frac{1}{2} \tilde{Z}_{i,\rho} \sum_{l=0}^{\rho} \omega_{il} \|\varphi_{i\rho}^l\|^2 \sum_{j=2}^{\rho-1} \tilde{Z}_{ij} \xi_{ij} - \frac{\tilde{Z}_{i\rho}}{2\ell_\rho} \left(\sum_{l=0}^{\rho} \|\hat{\eta}_{il} \varphi_{i\rho}^l\| \right)^2 \sum_{j=2}^{\rho-1} \tilde{Z}_{ij} \vartheta_{ij} \right\} \quad (\text{IV.101}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i &= \Gamma_{i2} \tau_{i\rho} - \sigma_{i2} \Gamma_{i2} \hat{\theta}_i \\ \dot{\hat{\zeta}}_i &= \Gamma_{i3} \varepsilon_{i3} - \sigma_{i3} \Gamma_{i3} \hat{\zeta}_i \\ \dot{\hat{\zeta}}_{\max}^i &= \Gamma_{i4} \omega_{i4} - \sigma_{i4} \Gamma_{i4} \hat{\zeta}_{\max}^i \end{aligned} \quad (\text{IV.102})$$

Et

$$\begin{aligned} \omega_{im} &= \omega_{i,m-1} + \frac{\tilde{Z}_{im}^2}{2\ell_m} \left(\sum_{l=0}^m \|\hat{\eta}_{il} \varphi_{im}^l\| \right)^2 \\ \omega_{i1} &= \frac{\tilde{Z}_{i1}^2}{2\ell_1} \left(\sum_{l=0}^1 \|\hat{\eta}_{il} \varphi_{i1}^l\| \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.103})$$

les fonctions $\tau_{i\rho}$ et $\varepsilon_{i\rho}$ sont données par les relations (IV.79) et (4.87)

$$\vartheta_{im} = \frac{\partial r_{im}}{\partial \hat{\zeta}_{\max}^i} \quad (\text{IV.104})$$

IV.2.3 COMMANDE DECENTRALISEE PAR BACKSTEPPING ADAPTATIVE AVEC MODE GLISSANT

Dans cette approche on présentera l'introduction du mode glissant dans la commande présentée précédemment

Le principe de la synthèse est le même pour les ρ premières étapes ,on aura recours seulement aux lois d'adaptations $\hat{\beta}$ et $\hat{\theta}$,ainsi l'étape 0 sera similaire à celle de la méthode précédente ,avec :

$$V_0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^P (\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^k + \Gamma_i^{-1} (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)^2 \right\} \quad (IV.105)$$

On utilisera le même principe de bornage ,que celui donnée dans (IV.99),l'expression de $\hat{\beta}_i$ est donnée par l'équation (IV.94),à l'étape suivante ,l'équation de Lyapunov sera décrite par :

$$V_i = V_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ \tilde{Z}_{i1}^2 + (\hat{\theta}_i - \theta_i)^T \Gamma_{i1}^{-1} (\hat{\theta}_i - \theta_i) \right\} \quad (IV.106)$$

Pour $2 \leq m \leq \rho - 1$,la fonction de lyapunov sera donnée par l'équation (4.43) , à l'étape ρ ,on définit la surface de glissement donnée par :

$$\tilde{Z}_{im} = \tilde{x}_{im} - r_{im}(\tilde{y}_i, \tilde{Z}_{i1}, \dots, \tilde{Z}_{i,m-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i) \quad (IV.107)$$

La commande finale sera donnée par :

$$u_i = \frac{1}{\delta_i(y_i, x_i)} \left[-v_i(x_i) + K_i [y_{mi}^T x_{mi}^T]^T + b_{mi} r_i - \tilde{Z}_{\rho-1} - \dot{\tilde{Z}}_{i,\rho} - \theta_i^T \sum_{l=0}^{\rho} \phi_{i\rho}^l \gamma_{il}(0, \dots, 0, x_i) \right] \quad (IV.108)$$

Le choix de $\dot{\tilde{Z}}_{i,\rho}$ est donnée par :

$$\dot{\tilde{Z}}_{i,\rho} = q_i \tilde{Z}_{i,\rho}^2 \text{Sign}(\tilde{Z}_{i,\rho}) \quad q_i > 0 \quad (IV.109)$$

La fonction de Lyapunov finale sera donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho \leq & \sum_{i=1}^N \left[-2\beta_i^* \|B_i^T P_i \tilde{y}_i\|^2 [1 + \|y_i\|^{2(P-1)}] \cdot \sum_{k=1}^P k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \|\tilde{y}_i\|^{2(k-1)} \right. \\ & + \zeta^* d_2 \|B_i^T P_i \tilde{y}_i\|^2 \sum_{k=1}^P \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i) \|\tilde{y}_i\|^{4(k-1)} - \sum_{k=1}^P \left\{ k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) \right. \\ & \left. - [(\rho+1)d_{ik0} + \rho d_{ik1} + \dots + 2d_{ik,\rho-1} + d_{ik\rho}] \zeta_i^{-1} \right\} \|\tilde{y}_i\|^{2k} \\ & \left. - 2C_{i1} \tilde{Z}_{i1}^2 - \dots - 2C_{i,\rho-1} \tilde{Z}_{i,\rho-1}^2 - 2C_{i,\rho} \tilde{Z}_{i,\rho} \dot{\tilde{Z}}_{i,\rho} + R t_i \right] \end{aligned} \quad (IV.110)$$

où $R t_i$ est un terme positif.

Avec un choix adéquat des C_{ij} , on peut s'assurer du signe négatif de (IV.110)

IV.2.4 APPLICATION DE LA COMMANDE ADAPTATIVE :

Nous avons appliqué cette commande au modèle présenté par les équations (I.36),(I.37),(I.38),et(I.39).Après identification des différents paramètres du modèle présenté par l'équation (IV.56), on obtient le résultat suivant :

1-le degrés de séparation (degree of mismatch) $\rho_i = 1$.

2-la matrice $A_i=0$,le vecteur $B_i=1$.

3-en utilisant l'équation(IV.58),on que trouve P_i ,est donné par la relation suivante :

$$P_i^2 = \frac{Q_i}{2 \alpha_i B_i^2}$$

Pour la suite du développement on a pris les notations suivantes :

y_i : représente la position du sous-système i (q_i).

x_i : représente la vitesse du sous-système i .

avec ($i=1,2,3$)

La mise en forme des interconnexions, pour chaque sous-système ,est comme suit :

$$\gamma_{i0} = 0 \quad \text{pour } i=1,2,3.$$

$$\gamma_{11} = [N11, N12, N13, N14, N15] \text{ tel que :}$$

$$N11 = c_{35}^2 \dot{X}_2 - 2 s_{35} c_{35} X_2 X_4 - 2 s_{35} c_{35} X_2 X_6$$

$$N12 = c_3^2 \dot{X}_2 - 2 s_3 c_3 X_2 X_4$$

$$N13 = c_3 c_{35} \dot{X}_2 - c_3 s_{35} \dot{X}_2 X_4 - c_3 s_{35} X_2 X_6$$

$$N14 = 2 c_{35} X_4 X_6 + c_{35} X_6^2$$

$$N15 = c_3 X_4^2$$

$$\gamma_{21} = [N21, N22, N23, N24, N25, N26, N27, N28], \text{ tel que:}$$

$$N21 = s_{35} \dot{X}_2$$

$$N22 = s_3 \dot{X}_2$$

$$N23 = \dot{X}_6$$

$$N24 = 0.5 c_5 \dot{X}_6 - s_5 X_4^2 x_6^2 - 0.5 s_5 X_6^2 + 0.5 s_5 X_6^2$$

$$+ 0.5 s_3 c_{35} X_2^2 + c_5 \dot{X}_4 + c_3 s_{35}$$

$$N25 = c_3 s_3 X_2^2$$

$$N26 = c_{35} s_{35} X_2^2$$

$$N27 = c_3$$

$$N28 = c_{35}$$

$\gamma_{31} = [N31, N32, N33, N34, N35]$ tel que:

$$N31 = s_{23}$$

$$N32 = \dot{X}_4$$

$$N33 = s_{23} c_{23} \dot{X}_2^2$$

$$N34 = 0.5 c_3 \dot{X}_4 + 0.5 c_2 s_{23} X_2^2 + 0.5 s_3 X_4^2$$

$$N35 = -0.5 g c_{23}$$

avec

$$c_{ij} = \cos(X_i + X_j), \quad s_{ij} = \sin(X_i + X_j)$$

$$c_i = \cos(X_i), \quad s_i = \sin(X_i)$$

et sachant que :

$$y_1 = X_1, \quad y_2 = X_3, \quad y_3 = X_5$$

$$x_1 = X_2, \quad x_2 = X_4, \quad x_3 = X_6$$

ainsi que :

$$i=1,2,3$$

Pour le calcul du modèle de l'erreur on choisit un modèle de référence idéale, autrement dit c'est le modèle de la cycloïde.

Pour les raisons précédemment ,on considérera que :

- les interconnexions sont bornées par un polynôme en x_i ,on mettra $p = \max(p_{ij}) = 2$; alors $\eta_{i1} = x_i$.
- les accélérations sont bornées ,pour des raisons physiques.

En posant y_{ref} ,comme étant la trajectoire de la cycloïde(relation(I.14)) ,et \dot{y}_{ref} sa première dérivée par rapport au temps ,et \ddot{y}_{ref} sa deuxième dérivée par rapport au temps, on obtient le modèle de l'erreur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \tilde{x}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i &= a_i u_i + \theta^T \gamma_{i1} - \ddot{y}_{ref_i} \end{aligned} \quad (IV.111)$$

tel que

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= y_i - y_{ref_i} \\ \tilde{x}_i &= x_i - \dot{y}_{ref_i} \end{aligned} \quad (IV.112)$$

étape 0 :

En utilisant la relation (IV.93) ,on obtient la première commande virtuelle ,qui est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= -\alpha_i P_i \tilde{y}_i - \hat{\beta}_i P_i \tilde{y}_i (1 + (\tilde{y}_i)^{2p-2}) \\ &\hat{=} r_i(\tilde{y}_i, \hat{\beta}_i) \end{aligned} \quad (IV.113)$$

D'après la relation(IV.94) la dynamique de $\hat{\beta}$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\beta}} = \Gamma_i P_i^2 \tilde{y}_i^2 [1 + \tilde{y}_i^{2p-2}] [1 + 2(P_i^2 \tilde{y}_i^2)] - \Gamma_{i1} \sigma_{i1} \hat{\beta}_i \quad (\text{IV.114})$$

etape1 :

On définit l'erreur $\tilde{Z}_i = \tilde{x}_i - r_i(\tilde{y}_i, \hat{\beta}_i)$

En dérivant cette relation par rapport au temps ,et en utilisant l'équation (IV.71),on trouve que :

1. $v_i = [\alpha_i P_i + \hat{\beta}_i P_i (1 + (2p-1)\tilde{y}_i^{2p})] \tilde{x}_i + P_i \tilde{y}_i (1 + \tilde{y}_i^{2p-2}) \hat{\beta}_i$
2. $\varphi_i^0 = 0$ et $\varphi_i^1 = 1$

En utilisant la relation (IV.101),on obtient la loi de commande finale suivante :

$$u_i = \frac{1}{a_i} \left[\dot{y}_{ref_i} - C_i \tilde{Z}_i - v_i - \frac{\hat{\zeta}_i}{2} \tilde{Z}_i \bar{\omega}_i - \hat{\theta}_i^T \gamma_{i1}(0, x_i) - \hat{\zeta}_{\max}^i \frac{\tilde{Z}_i}{2\ell_i} \hat{\eta}_i^2 \right] \quad (\text{IV.115})$$

avec

$$\hat{\eta}_i = \sum_{k=1}^p \eta_i^k$$

$$\bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^p \eta_i^k$$

avec

$$a_1=I_1, \quad a_2=I_7, \quad a_3=I_9$$

Les lois d'adaptation sont obtenues en utilisant les relations(IV.102), (IV.103) ainsi que les relations(IV.79) et(IV.87), on aura alors :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i &= \Gamma_{i2} \tilde{Z}_i \gamma_{i1}(0, x_i) - \sigma_{i2} \Gamma_{i2} \hat{\theta}_i \\ \dot{\hat{\zeta}}_i &= \Gamma_{i3} \frac{\tilde{Z}_i}{2} \tilde{x}_i^2 - \sigma_{i3} \Gamma_{i3} \hat{\zeta}_i \\ \dot{\hat{\zeta}}_{\max}^i &= \Gamma_{i4} \frac{\tilde{Z}_i^2}{2\ell_i} \hat{\eta}_i^2 - \sigma_{i2} 4\Gamma_{i4} \hat{\zeta}_{\max}^i \end{aligned} \quad (\text{IV.116})$$

Paramètres de la commande : on donnera les valeurs des principaux paramètres.

a) commande de la première articulation

$$C_1=120, P_1=70, \ell_1=500.$$

b) commande de la deuxième articulation

$$C_2=180, P_2=100, \ell_2=500.$$

c) commande de la troisième articulation

$$C_3=130, P_3=70, \ell_3=500.$$

Interprétation des résultats de la deuxième approche

Test de validation

D'après la figure fig (4.16), les erreurs sont de l'ordre de 10^{-3} , on remarquera aussi que la commande est lisse, l'apparition d'un pic au démarrage au niveau de la commande 2 et 3, cela à cause de l'effet de la gravité, concernant les différentes lois d'adaptation, leur convergence est apparente, on remarquera aussi les faibles valeurs que prennent les lois ζ et ζ_{\max} , ce qui nous amènera à ne pas les utiliser dans l'approche avec mode glissant.

Essai 1

Les figures fig(4.23) et fig(4.24) font apparaître le comportement du système, lorsqu'il est sollicité par une trajectoire, en un temps petit.

Essai 2

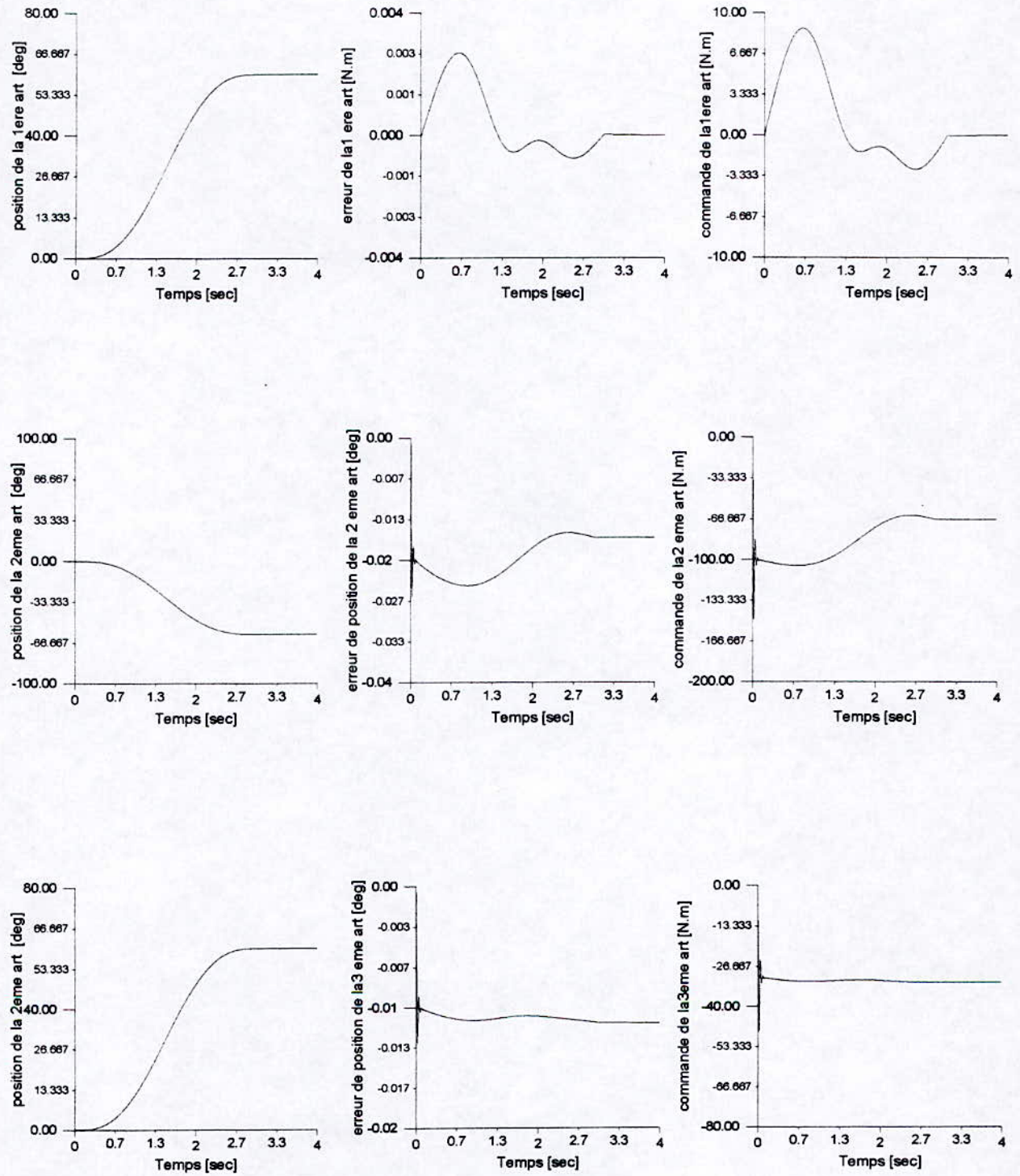
Les figures fig(4.25) et fig(4.26), nous renseignent sur la robustesse de la commande, vis à vis d'un changement paramétrique, qui est la masse, on remarque que la commande de la première articulation atteint une valeur assez élevée.

Essai 3

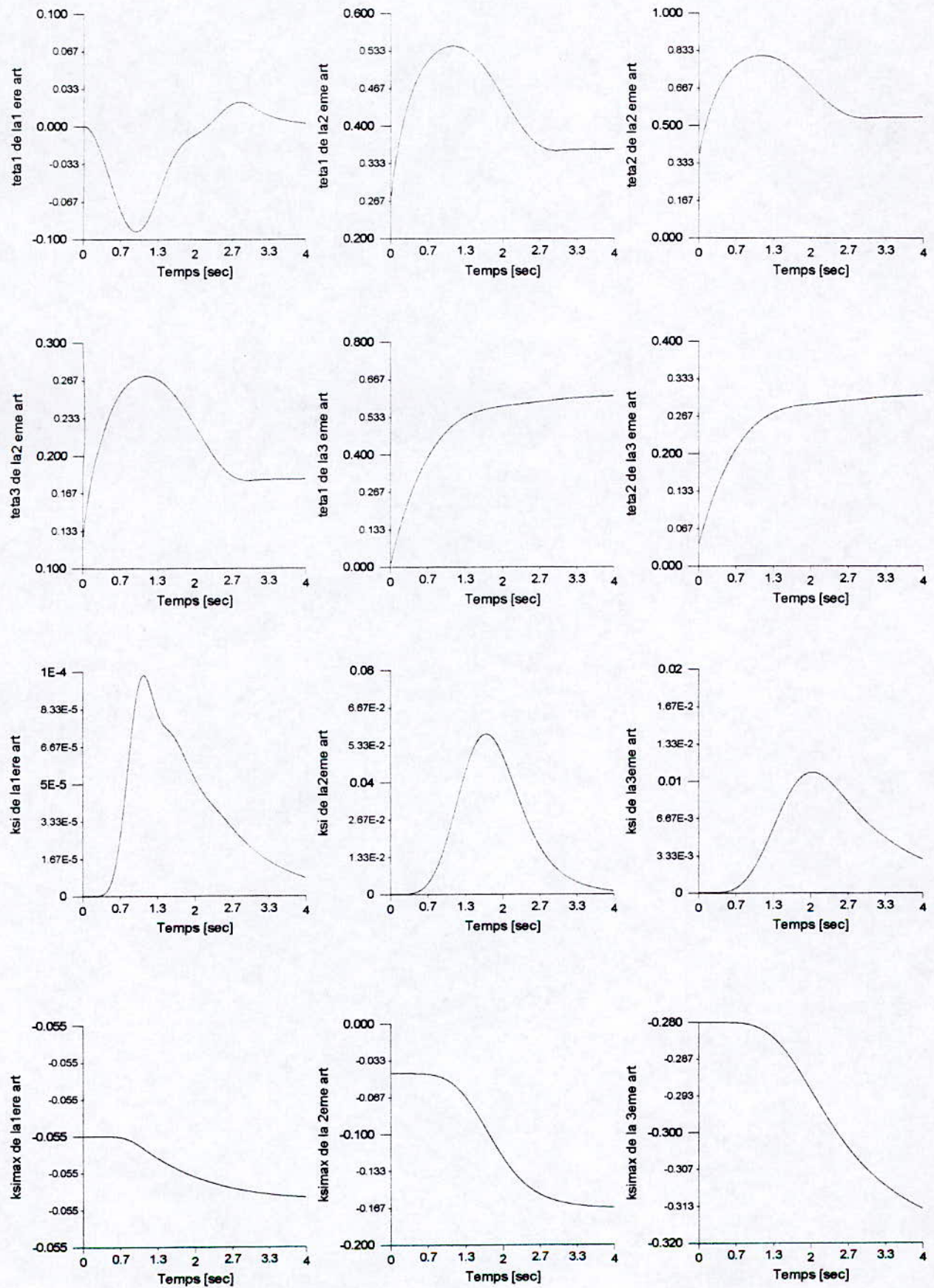
Les figures fig(4.27) et fig(4.28), nous renseignent sur la robustesse de la commande, lorsqu'il y a un changement paramétrique pendant l'exécution de la tâche, on remarquera l'influence de ce changement paramétrique sur la loi d'adaptation τ , au niveau de la deuxième articulation.

Essai 4

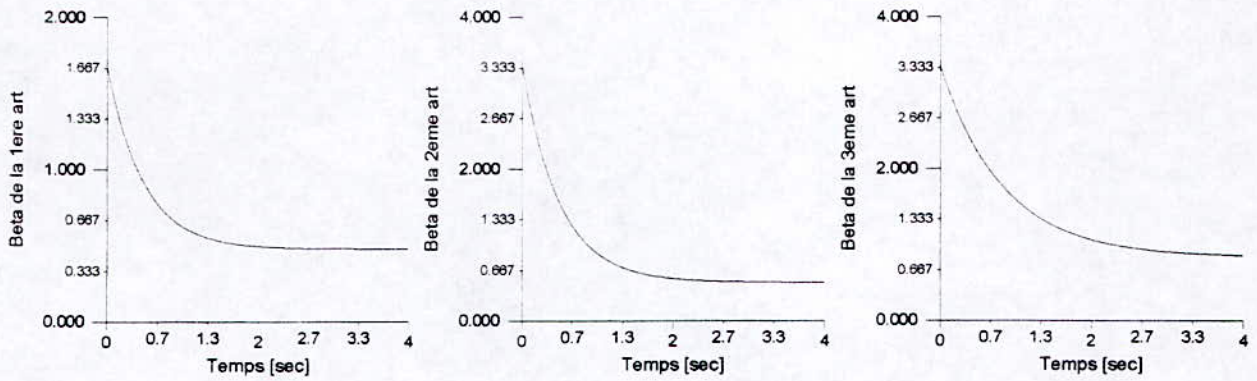
Les figures fig(4.29) et fig(4.30), nous informent sur le caractère décentralisé de la commande, car on remarque que les trajectoires sont suivies au niveau de la première et la troisième articulation, au moment où la commande de la deuxième articulation est rompue.



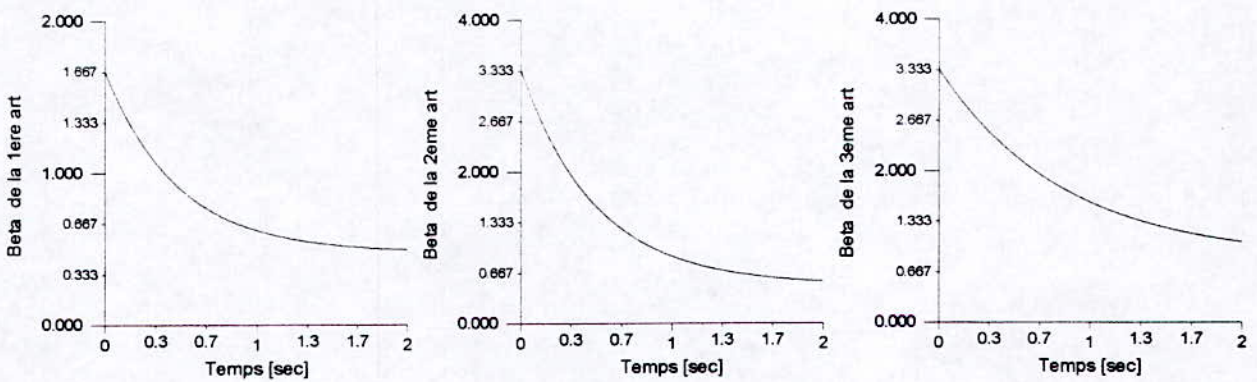
fig(4.16) Trajectoire normale avec une charge nulle



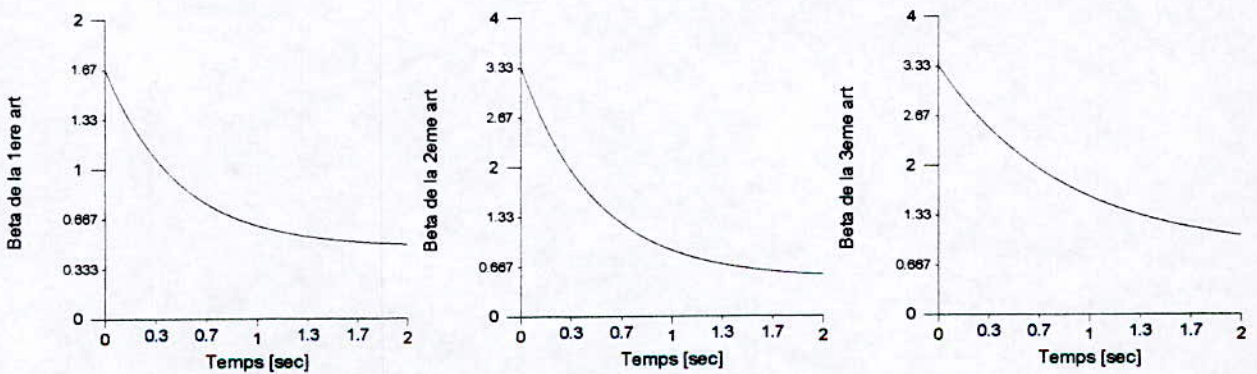
fig(4.17) différentes lois d'adaptation pour une trajectoire normale



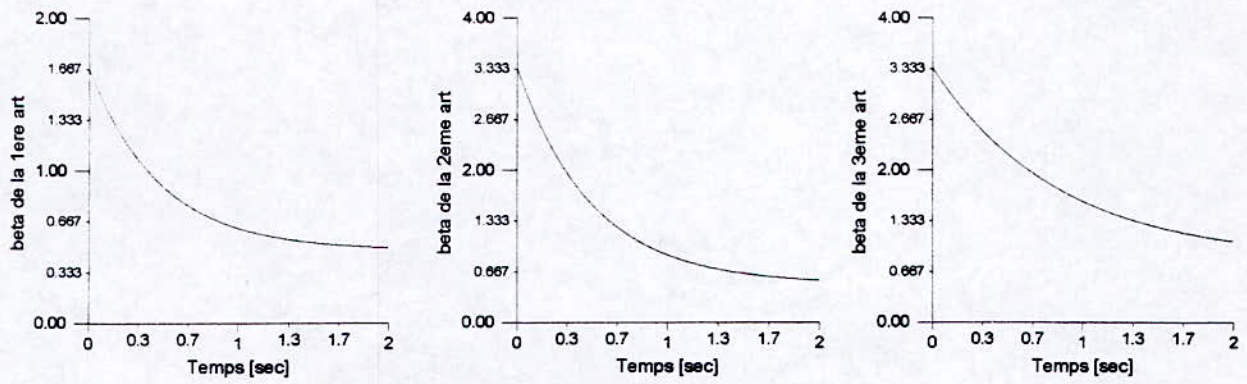
fig(4.18) La loi Beta pour une trajectoire normale



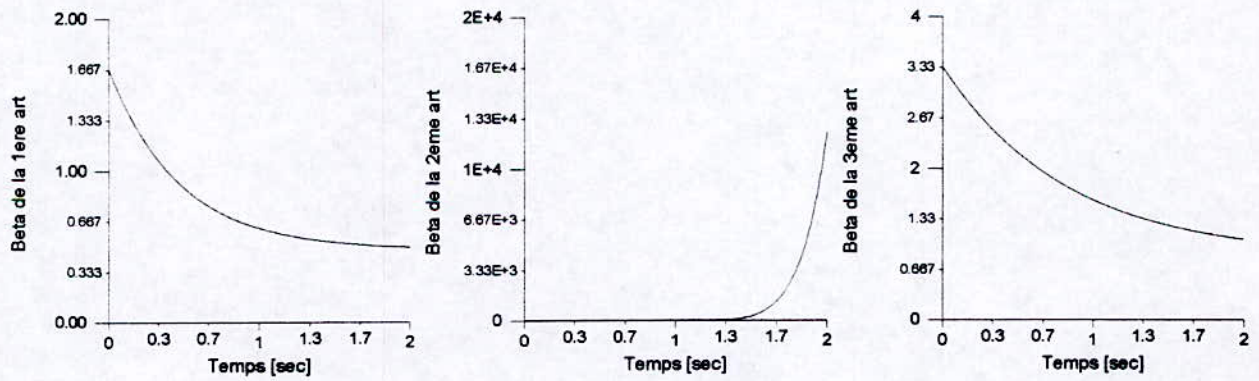
fig(4.19) La loi Beta pour une trajectoire de LEAVHY à vide



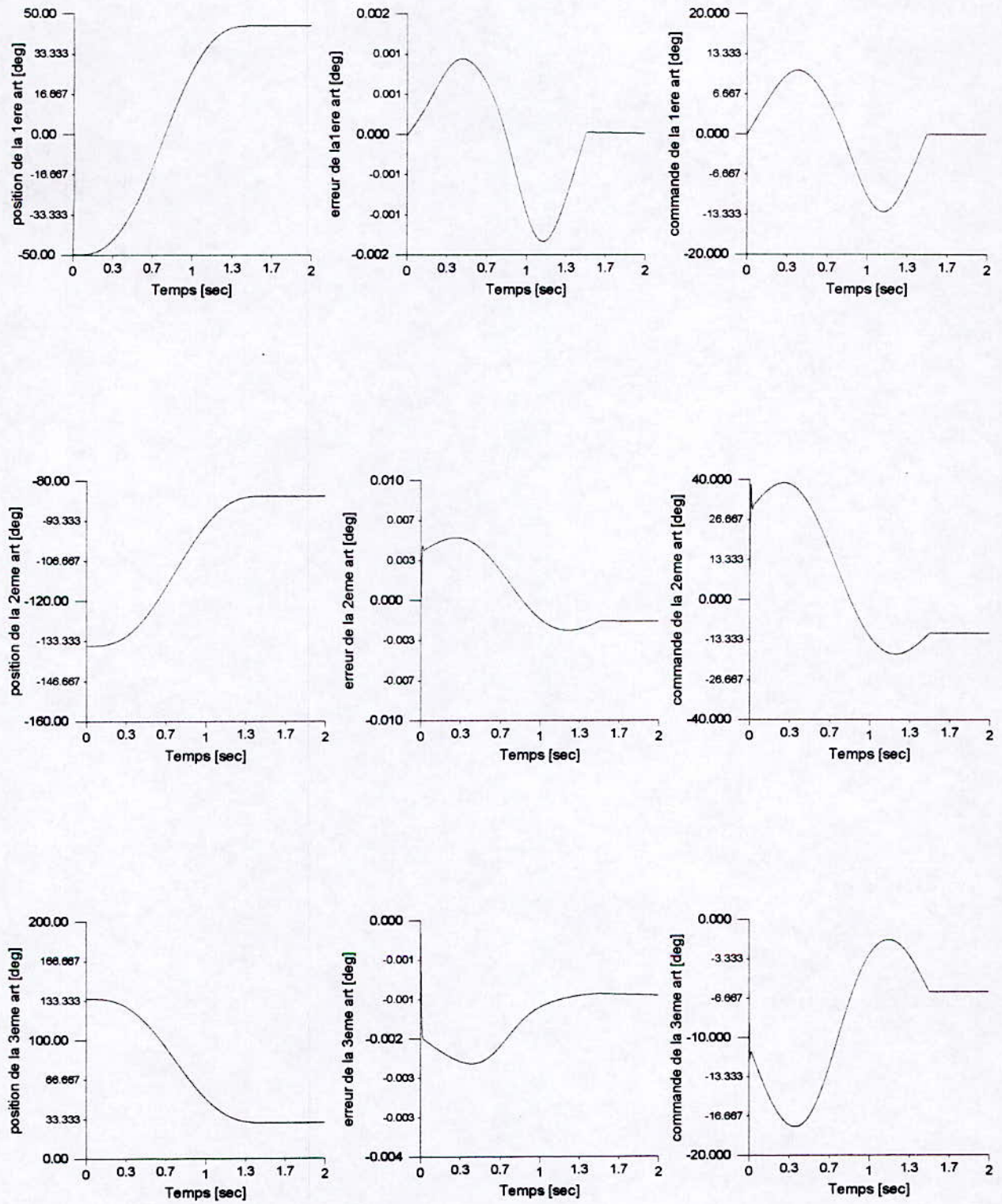
fig(4.20) La loi Beta pour une trajectoire de LEAVHY ,pour une masse de10 Kg



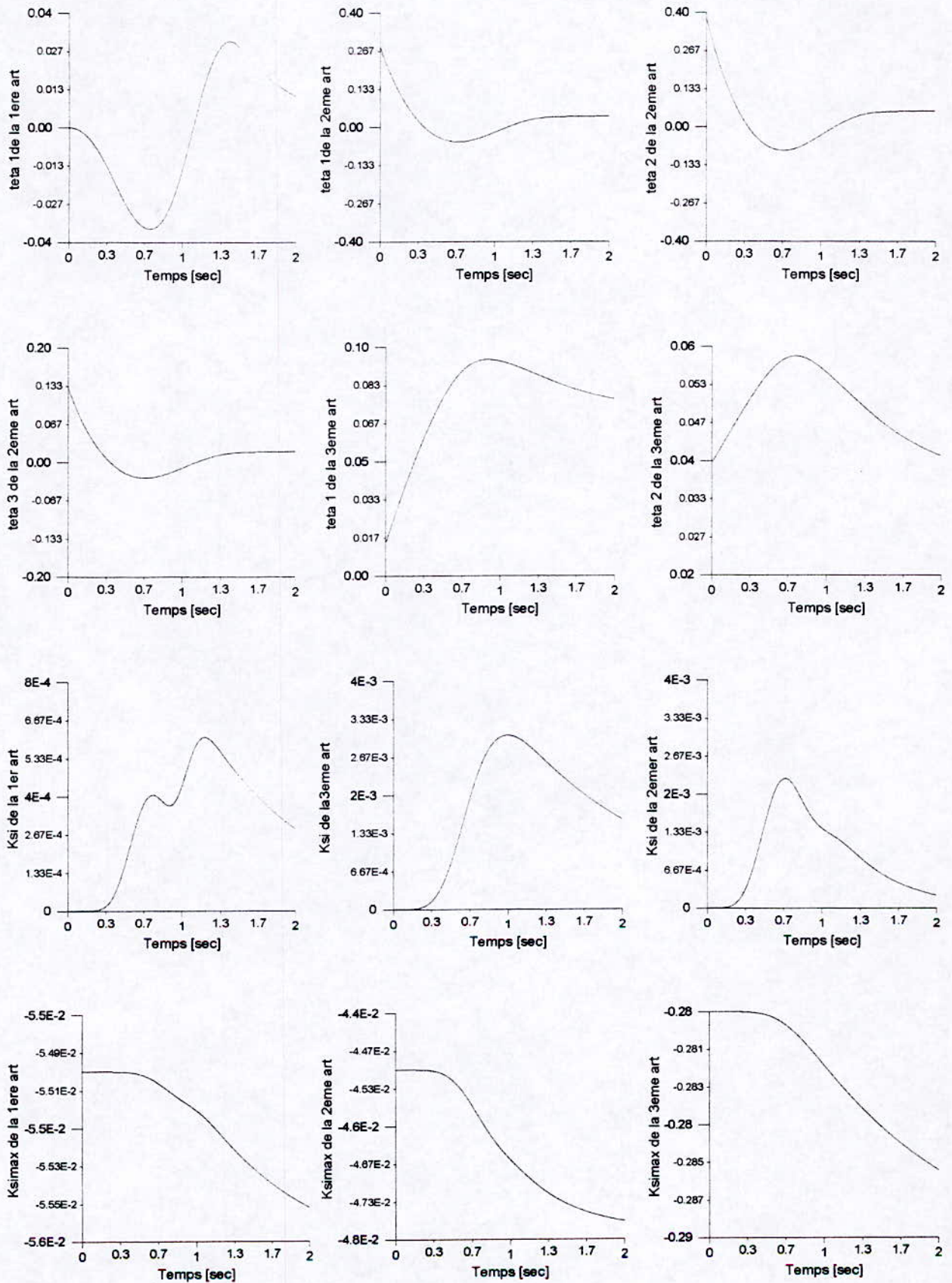
fig(4.21) La loi beta pour une trajectoire de LEAVHY ,avec chute de masse à $t=0.75s$



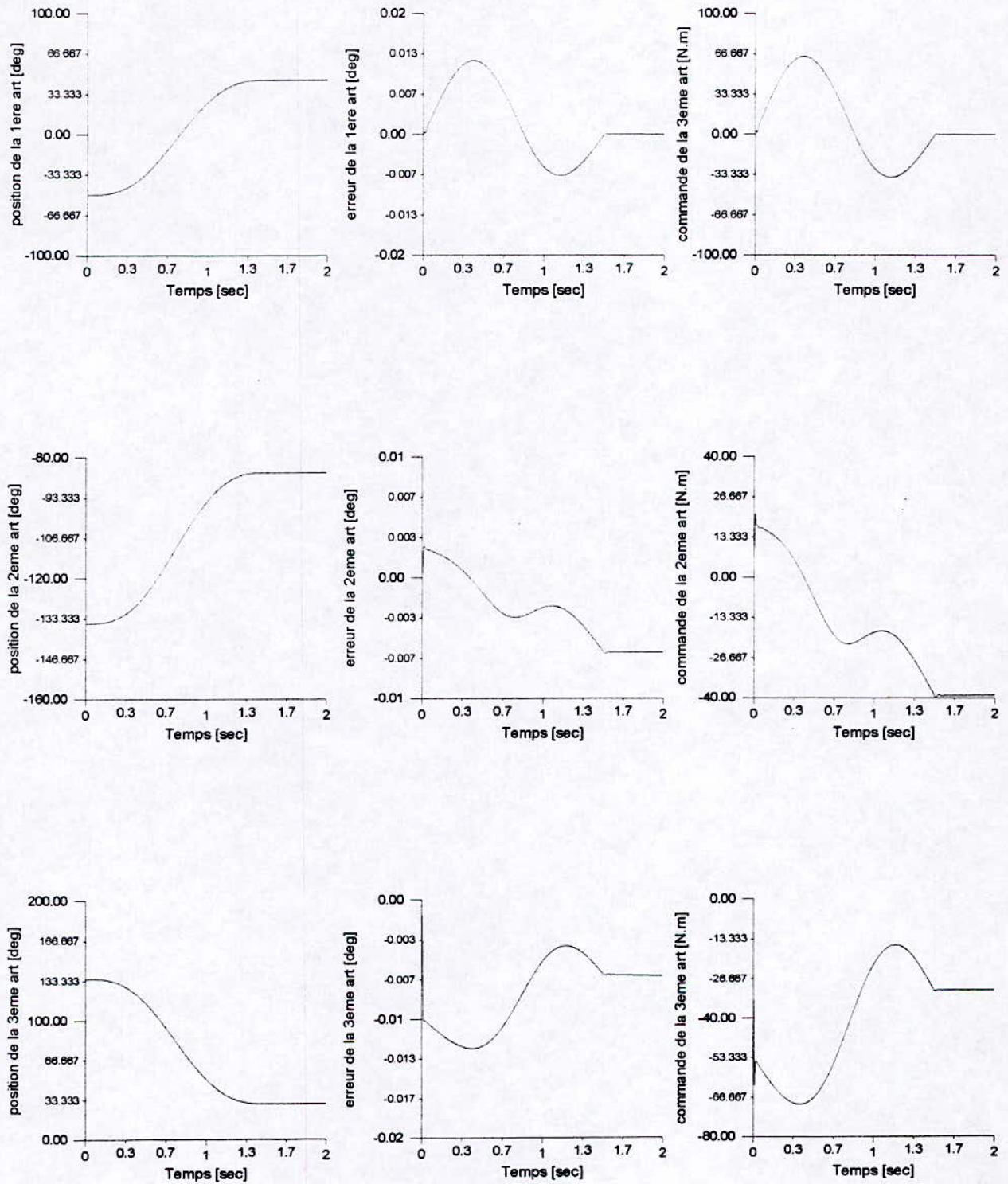
fig(4.22) La loi beta pour une trajectoire de LEAVHY , avec rupture de la commande à $t=0.75s$



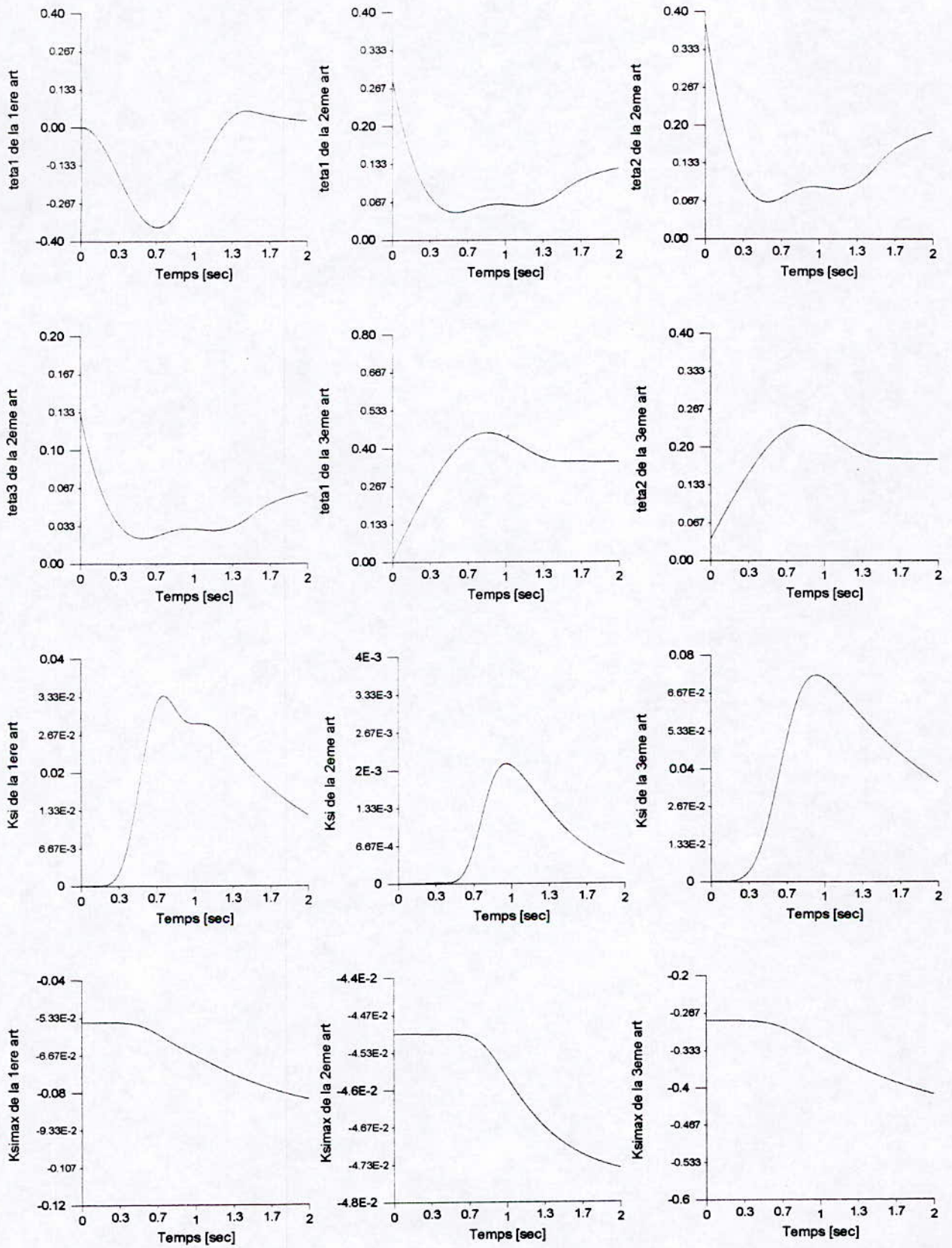
fig(4.23) Trajectoire de LEAVHY à vide



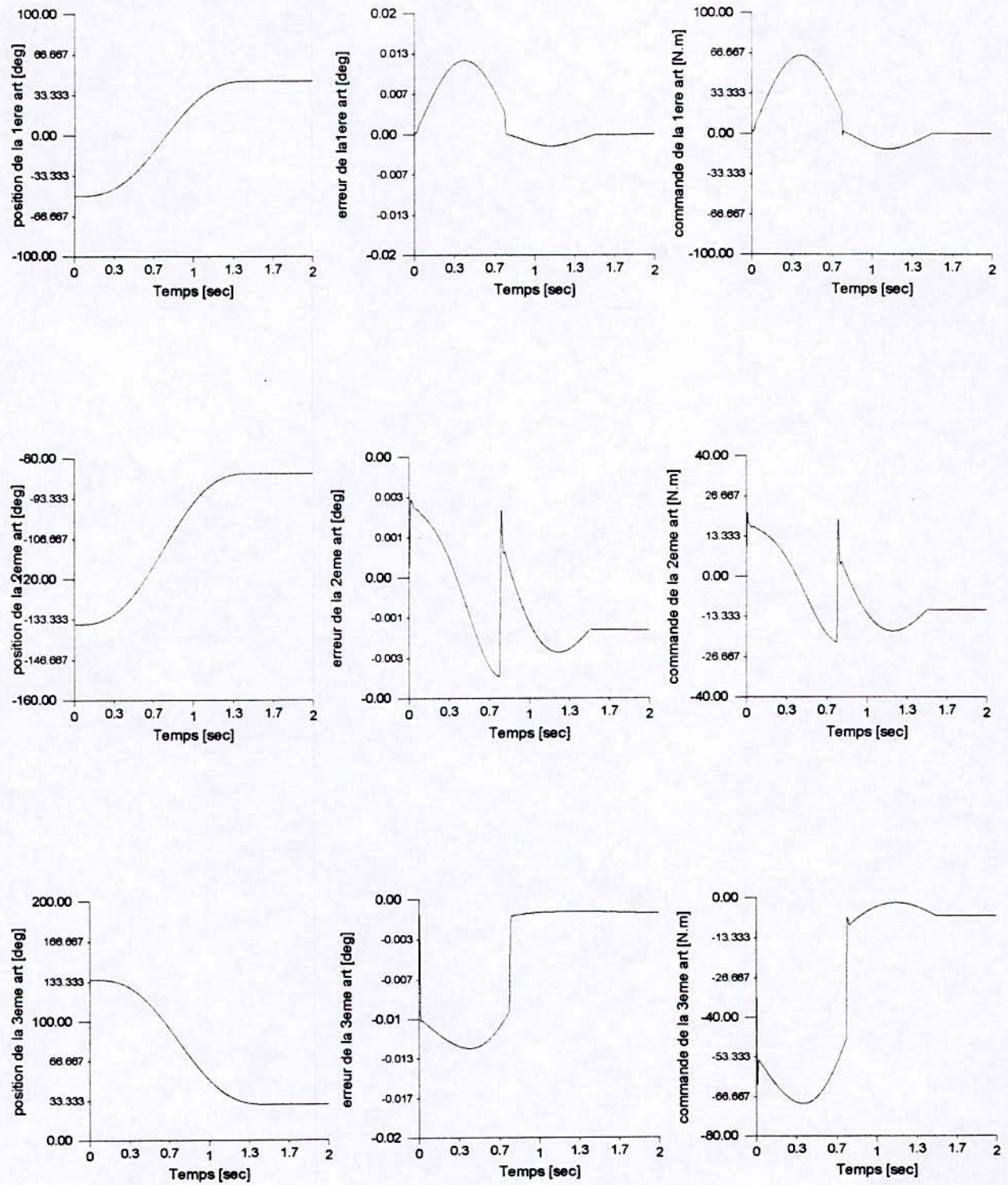
fig(4 .24) Les différentes lois d'adaptations pour une trajectoire de LEAVHY à vide



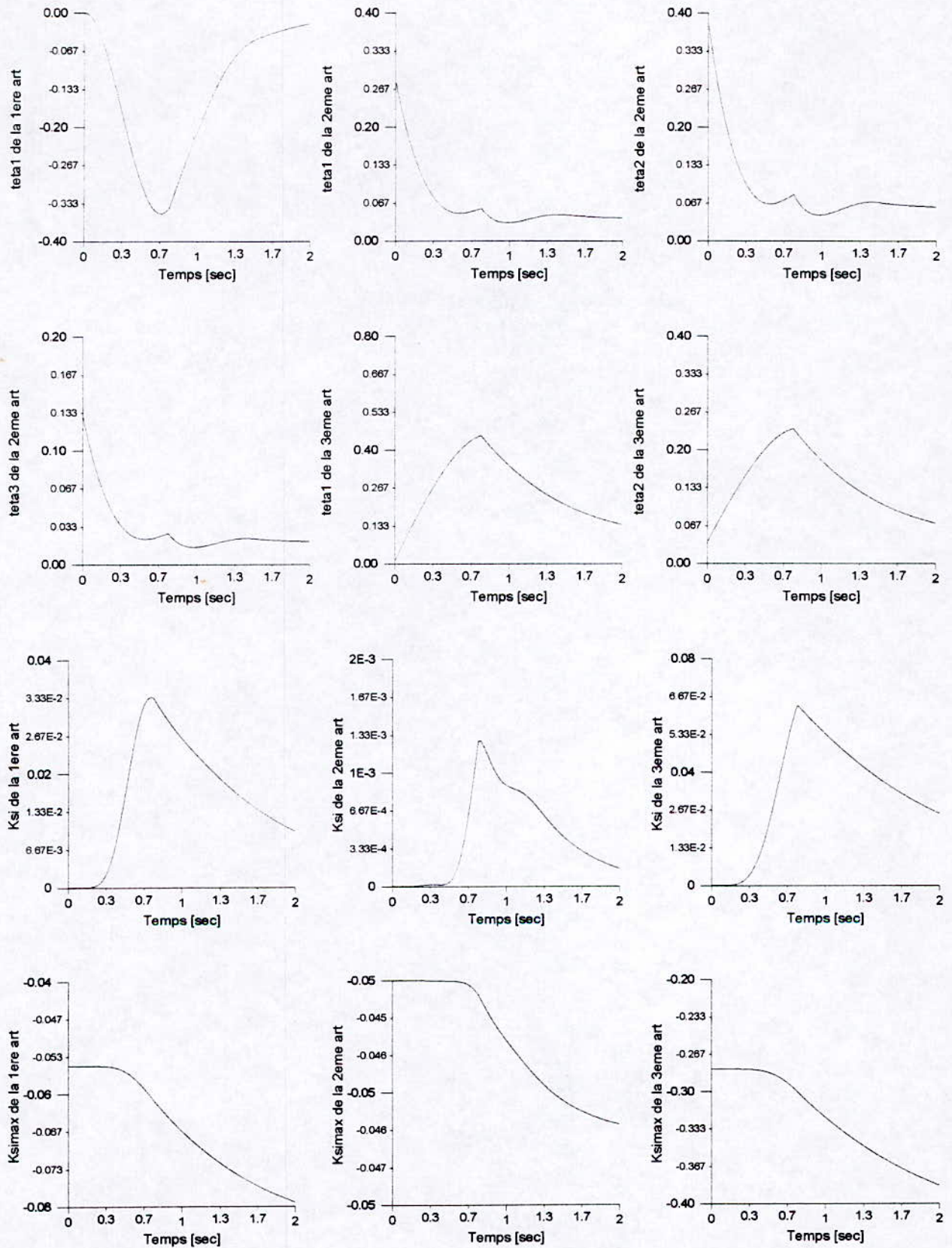
fig(4.25) Trajectoire de LEAVHY avec une masse de 10Kg



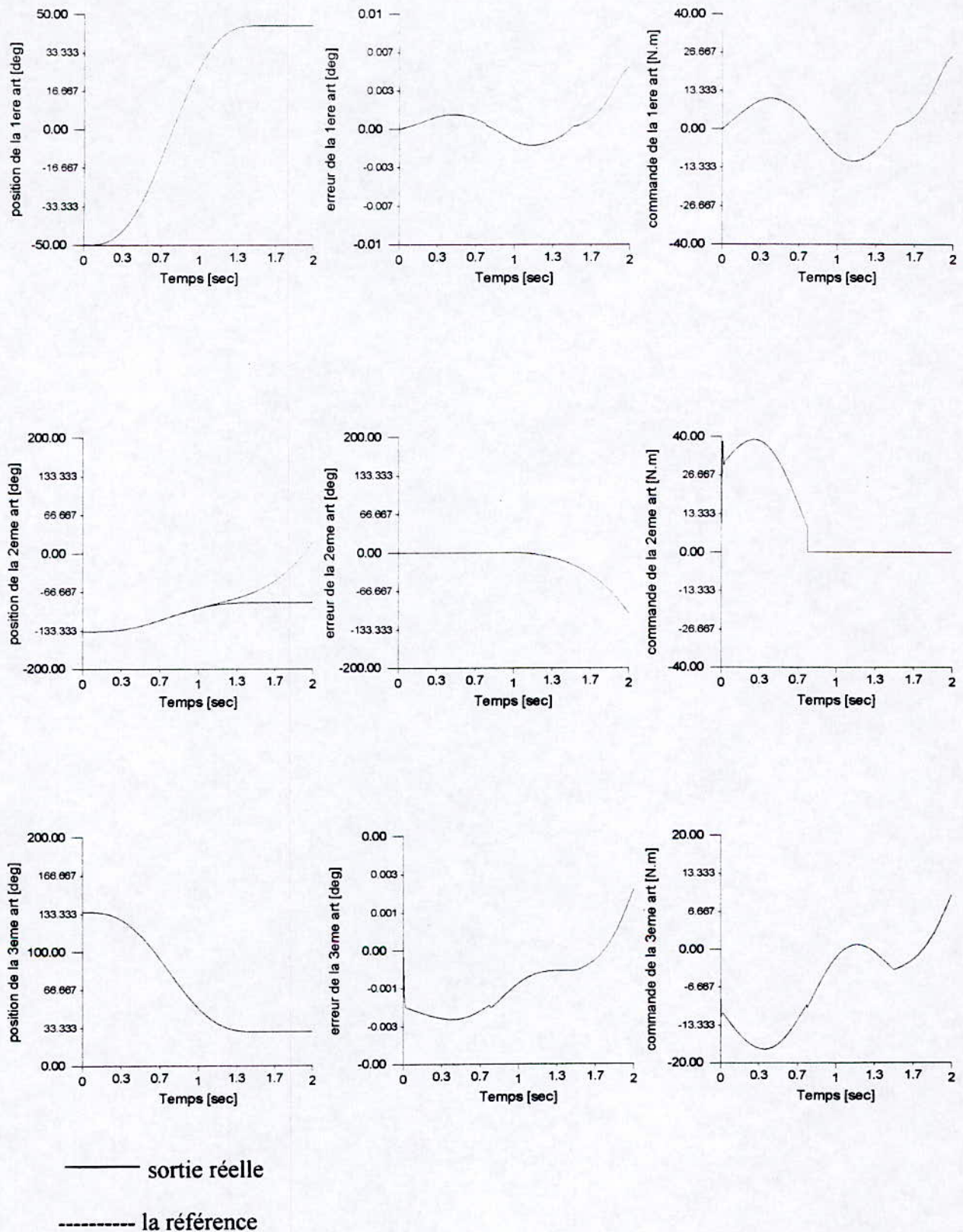
fig(4.26) Les différentes lois d'adaptations pour une trajectoire de LEAVHY , avec une masse de 10Kg



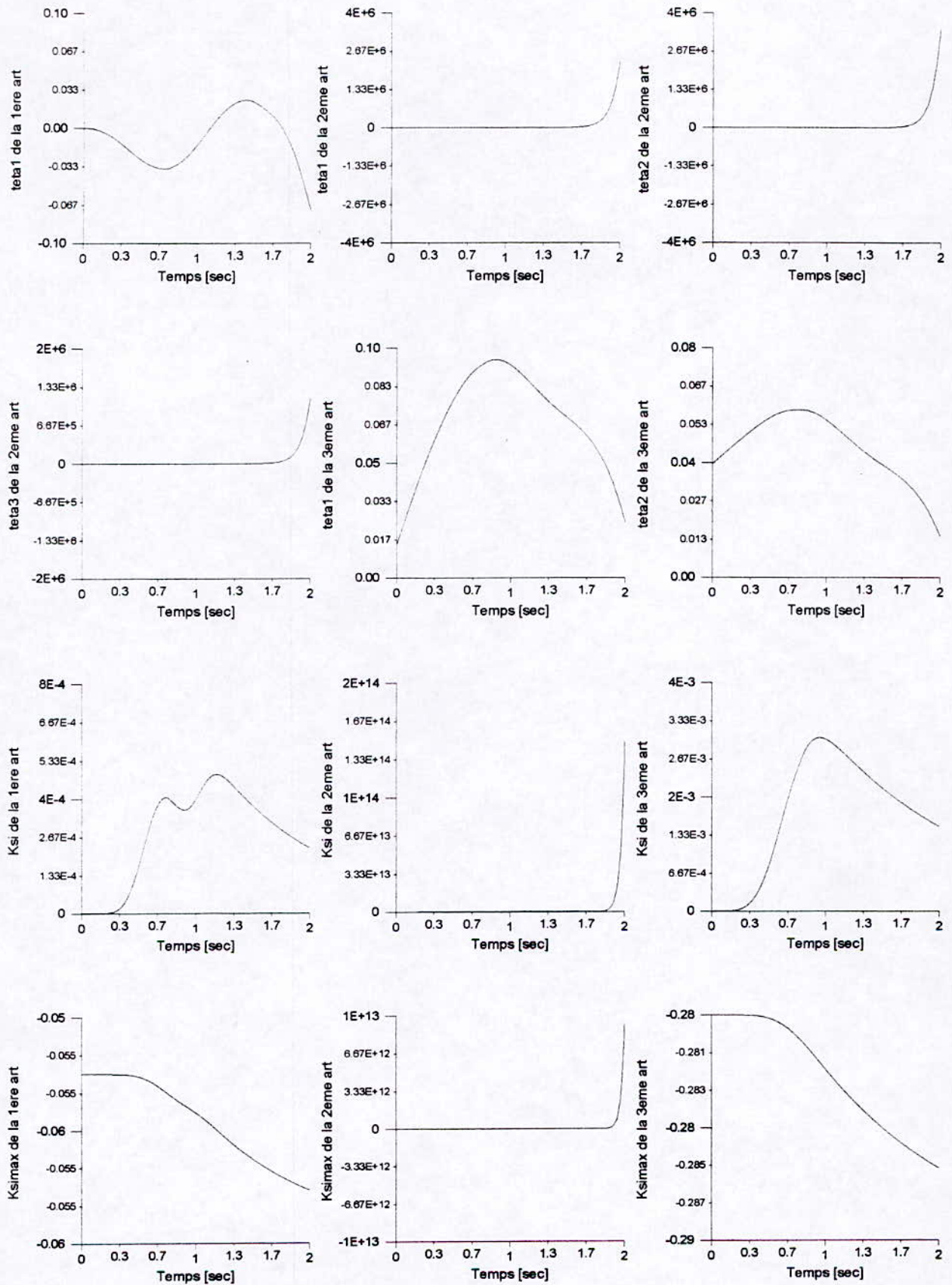
fig(4.27) Trajectoire de LEAVHY avec chute de masse à $t=0.75s$



fig(4.28) Les différentes lois d'adaptations pour une trajectoire de LEAVHY, avec chute de masse à $t=0.75s$



fig(4.29) trajectoire de LEAVHY avec rupture de la deuxième articulation à $t=0.75$ s



fig(4.30) Les différentes lois d'adaptations pour une trajectoire de LEAVHY ,
rupture de la deuxième articulation ,à $t = 0.75$ s

IV-2.5 APPLICATION DE LA COMMANDE ADAPTATIVE AVEC MODE GLISSANT

Dans cette commande on utilisera seulement deux lois d'adaptation ,l'une pour contenir l'effet des interconnexions, l'autre pour palier au problème des incertitudes paramétriques, et cela dans le but de faire apparaître l'influence du mode glissant sur les performances de la commande.

L'identification du modèle du robot ,avec le modèle donné par l'équation(IV.55),donne les mêmes résultats, que celles obtenus dans la partie précédente,
La synthèse se fait comme suit :

etape0 :

On suivra le même raisonnement que dans le cas de la commande adaptative sans mode glissant, on obtiendra la même commande virtuelle, la même loi d'adaptation β , équation(IV.114)

étape 1 :

Le calcul de la dérivée de \tilde{Z}_i ,nous donne le résultat suivant :

$$\dot{\tilde{Z}}_i = a_i u_i + v_i + \theta_i^T \underline{\gamma_{i1}(y_i, y_2, y_3, x_i, x_2, x_3)} - \ddot{y}_{ref_i} \quad (IV.117)$$

On remarquera que le terme souligné, ne dépend pas seulement des états du sous-système i , mais aussi des états des autres sous-systèmes ,ce qui nous mènera à utiliser les techniques de bornitude données par les équations(4.11), (4.12) et(4.19), une fonction du même que l'équation (4.18),sera obtenue.

En choisissant $\dot{\tilde{Z}}_i = -q_i \tilde{Z}_i^2 \text{sign}(\tilde{Z}_i)$ avec $q_i > 0$,on obtient la commande finale suivante :

$$u_i = \frac{1}{a_i} \left[\ddot{y}_{ref_i} - v_i - \theta_i^T \gamma_{i1}(0, x_i) - q_i \tilde{Z}_i^2 \text{sign}(\tilde{Z}_i) \right] \quad (IV.118)$$

sachant que :

a_i, v_i ont été obtenues ,lors de l'application de la commande adaptative par backstepping.

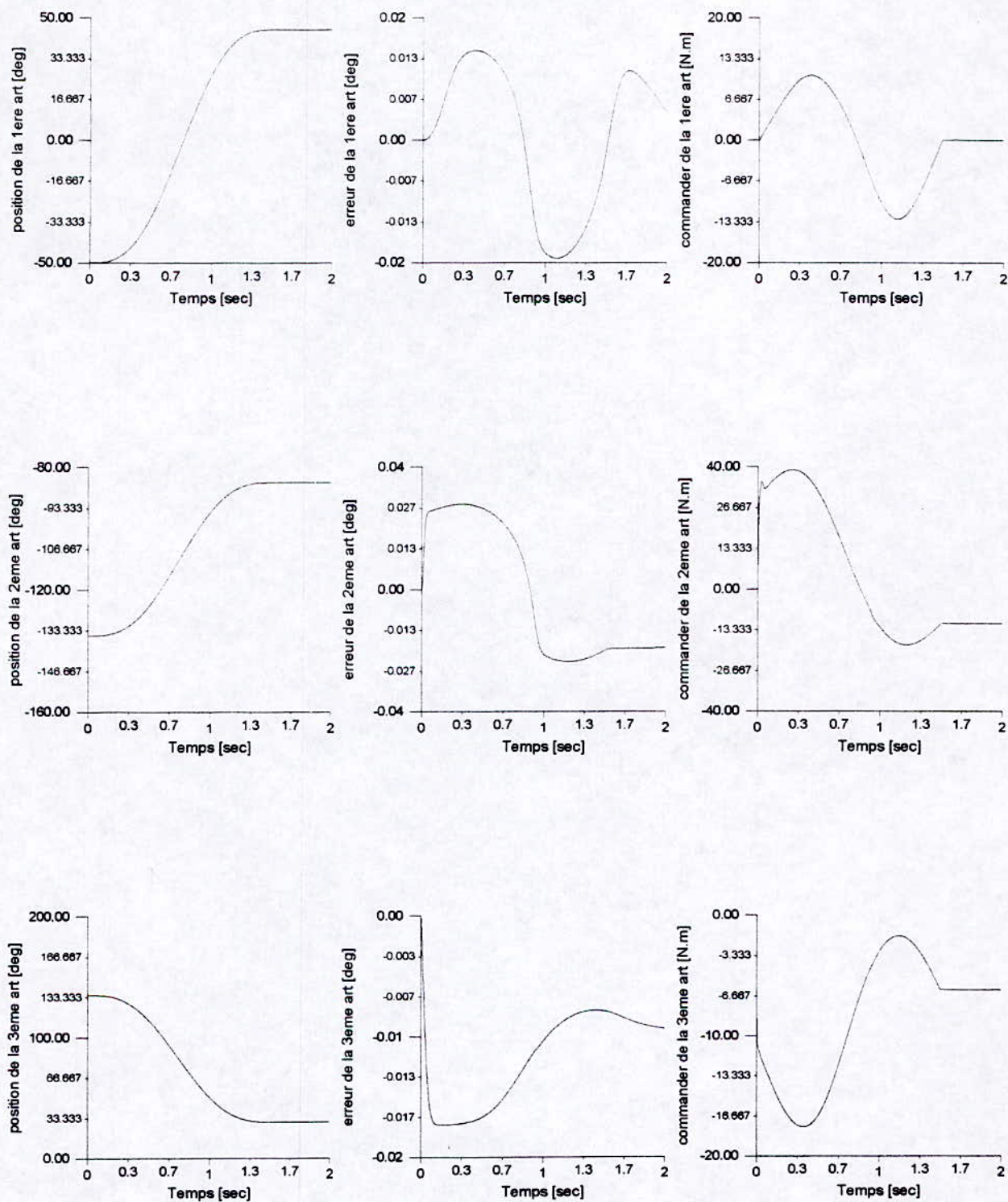
Paramètres de la commande : on donnera les valeurs des principaux paramètres.

- a) commande de la première articulation
 $C_1=120, P_1=70, q_1=20$
- b) commande de la deuxième articulation
 $C_2=180, P_2=100, q_2=20$
- c) commande de la troisième articulation
 $C_3=130, P_3=70, q_3=20$

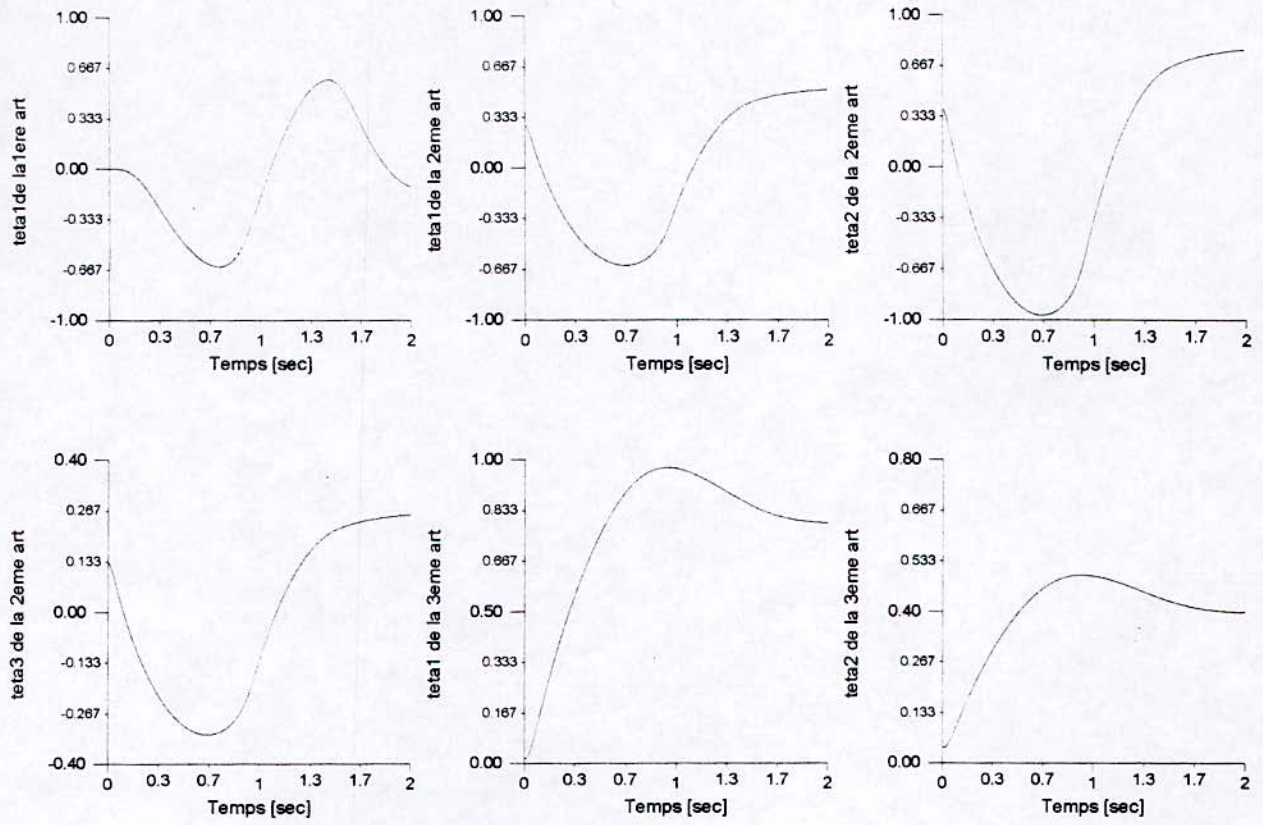
La démonstration de la stabilité sera donné dans l'annexe

Résultats de simulation

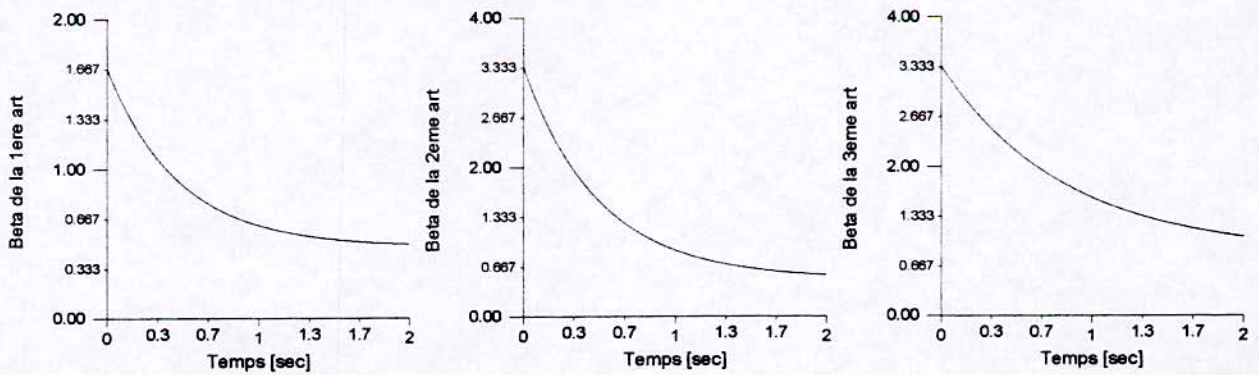
Les résultats suivants montrent les caractères de robustesse ,de rapidité et décentralisée de la commande synthétisée précédemment



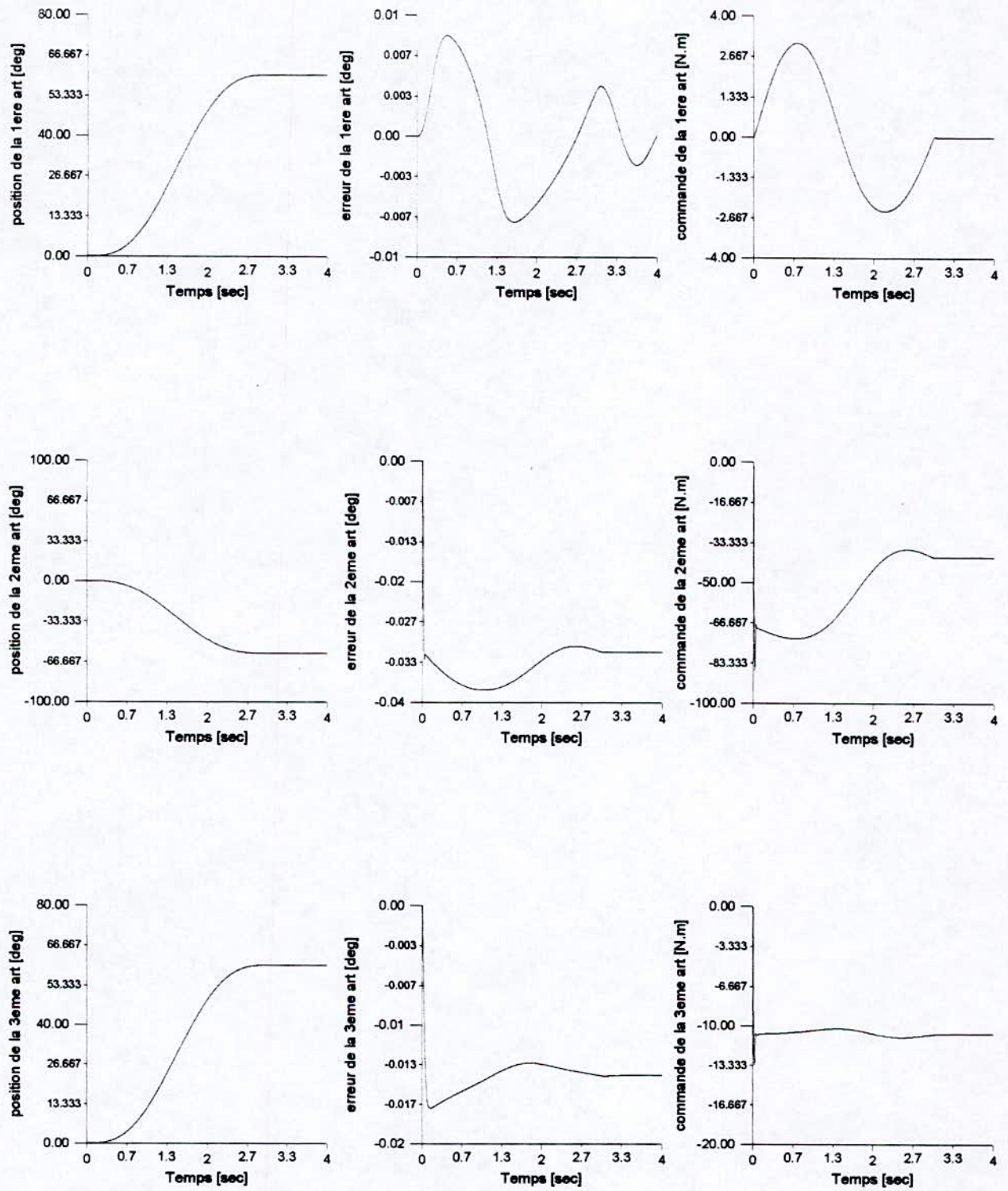
fig(4.31) Trajectoire de LEAVHY, avec une charge nulle



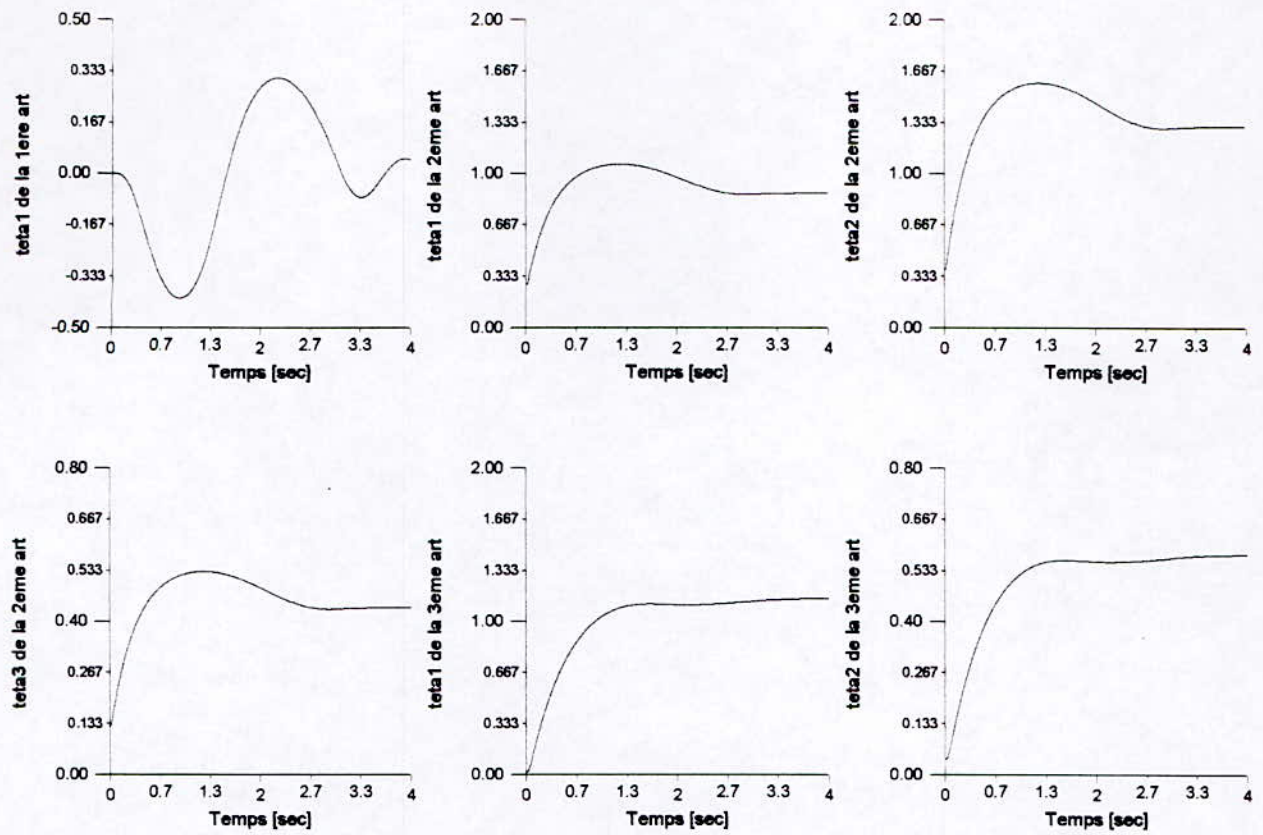
fig(4.32) la loi d'adaptation TETA ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec une charge nulle



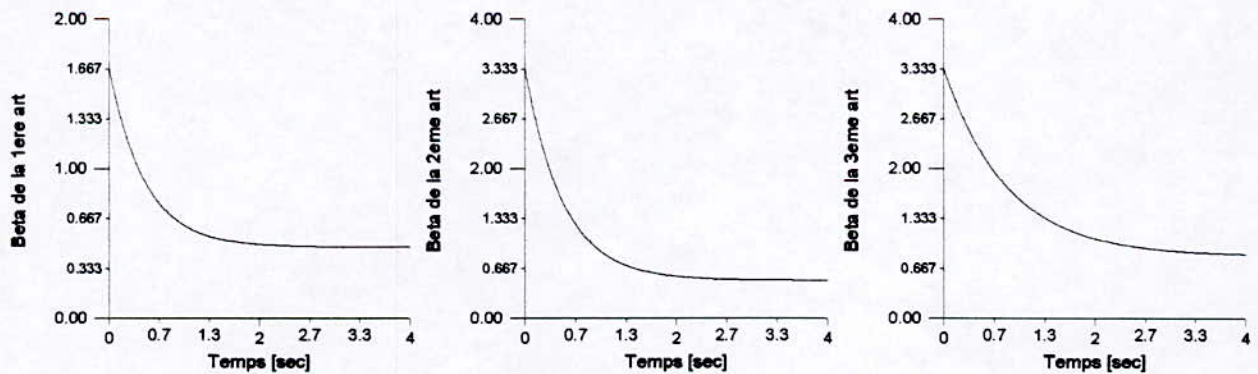
fig(4.33) la loi d'adaptation Beta ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec une charge nulle



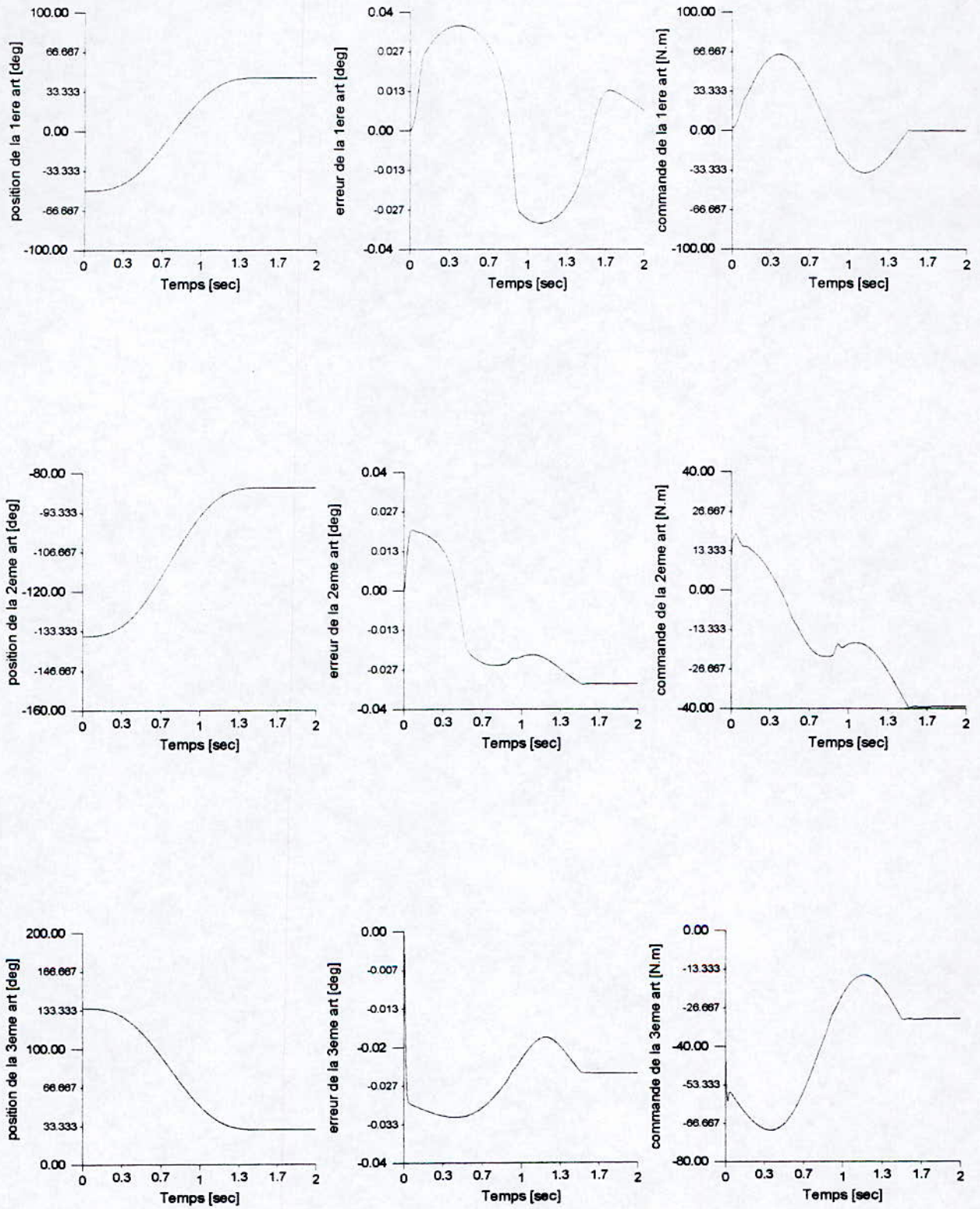
fig(4.34) Trajectoire normale avec une masse nulle



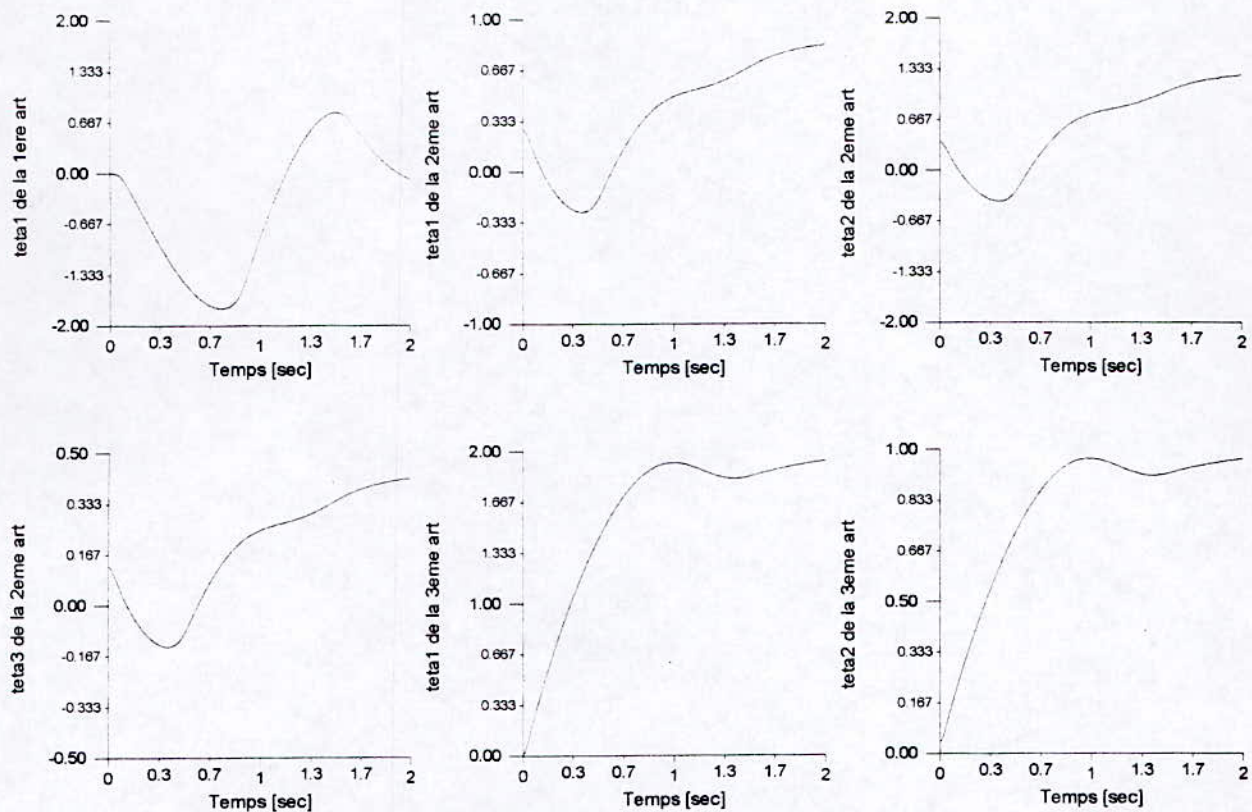
fig(4.35) La loi d'adaptation TETA pour une trajectoire normale



fig(4.36) La loi d'adaptation Beta pour une trajectoire normale



fig(4.37) Trajectoire de LEAVHY avec une charge de 10Kg



fig(4.38) La loi d'adaptation Teta ,pou une trajectoire de LEAVHY , avec une charge de 10Kg

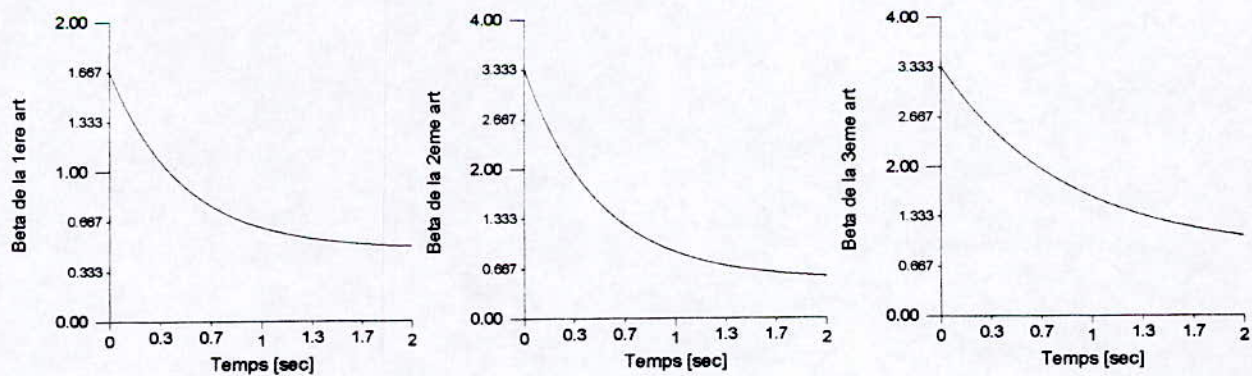
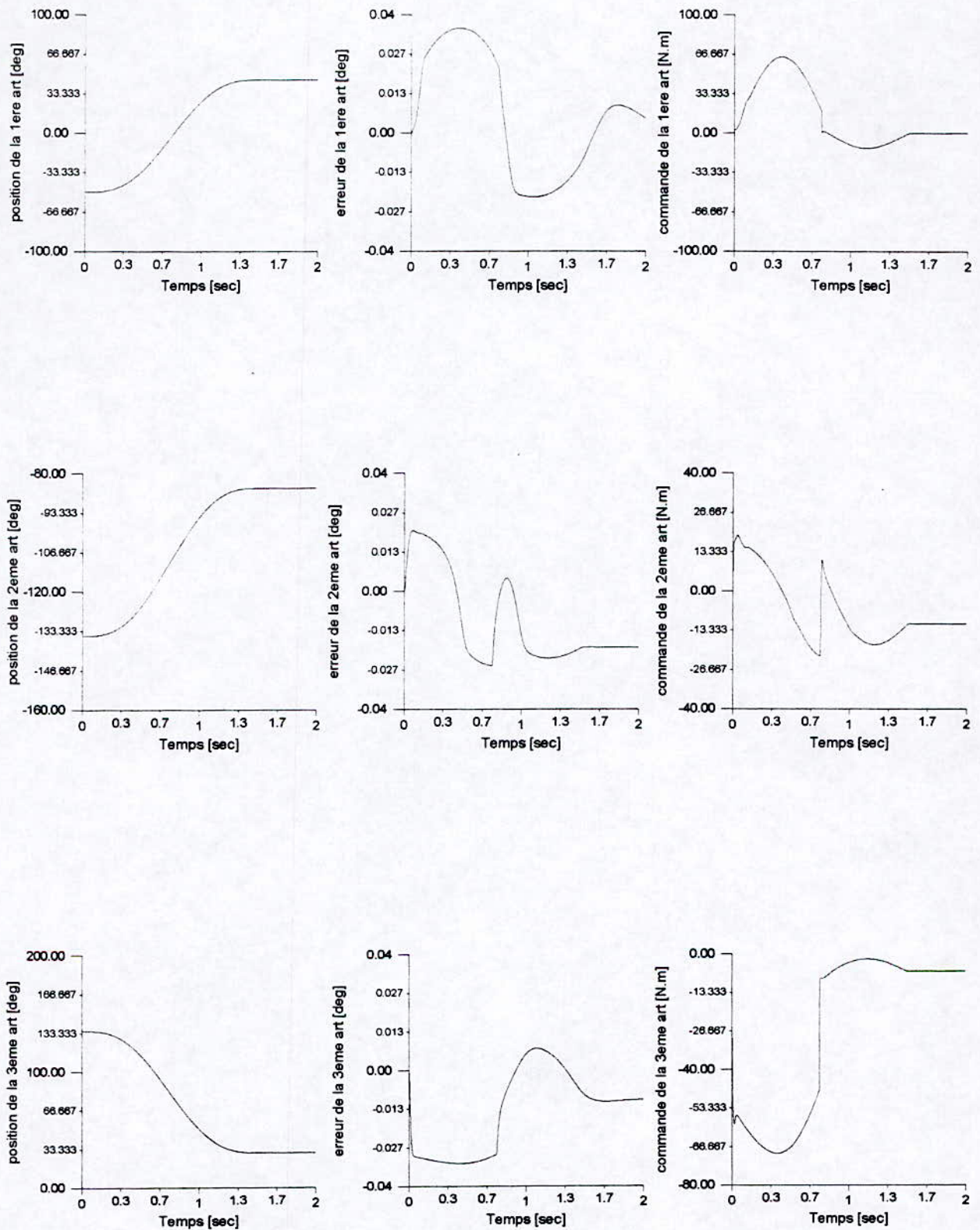
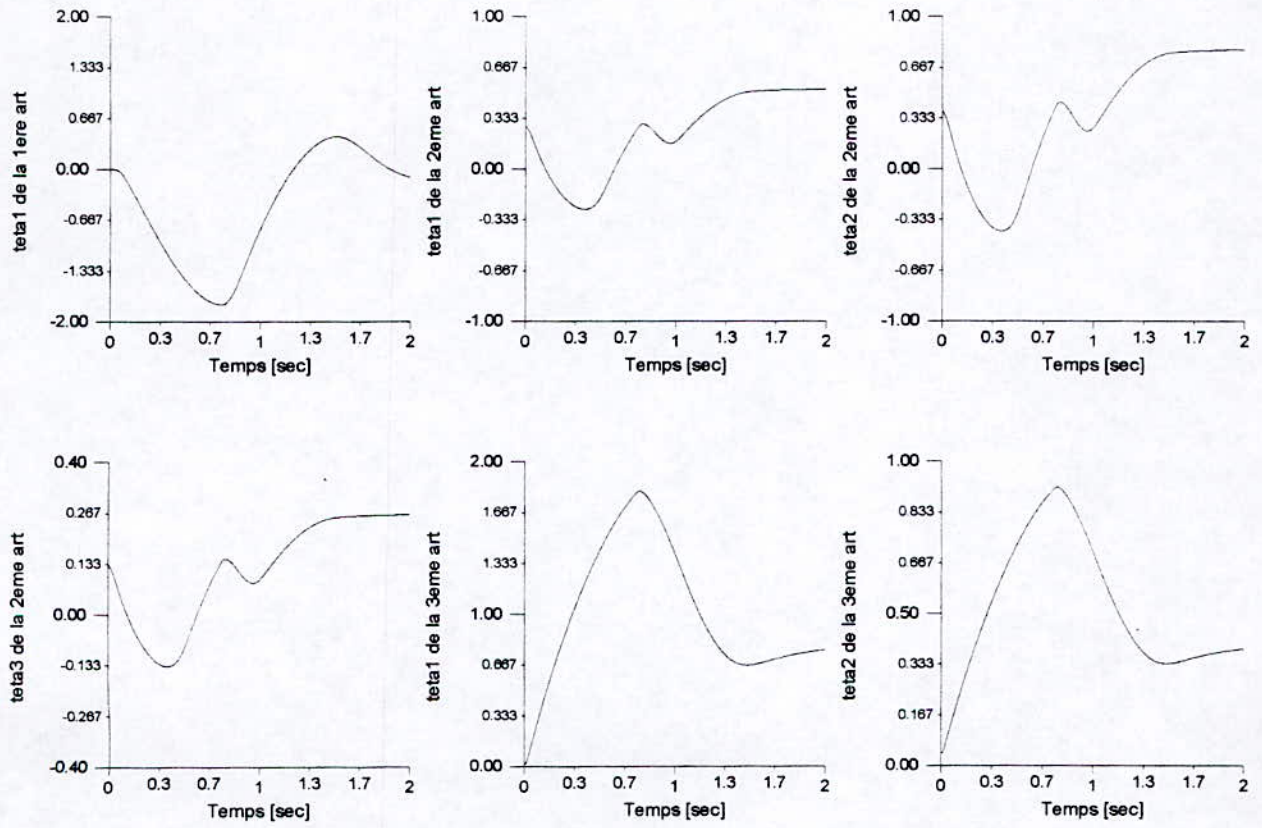


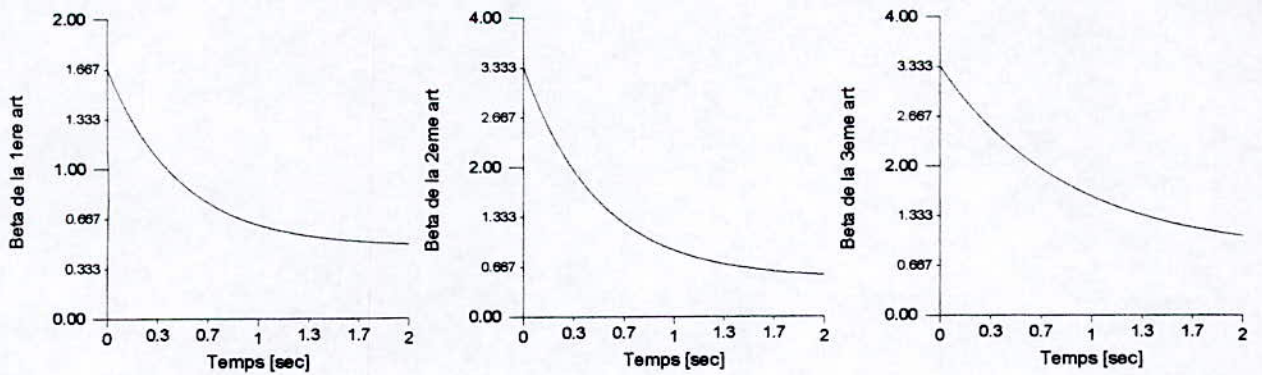
fig (4.39) La loi d'adaptation Teta ,pou une trajectoire de LEAVHY , avec une charge de 10Kg



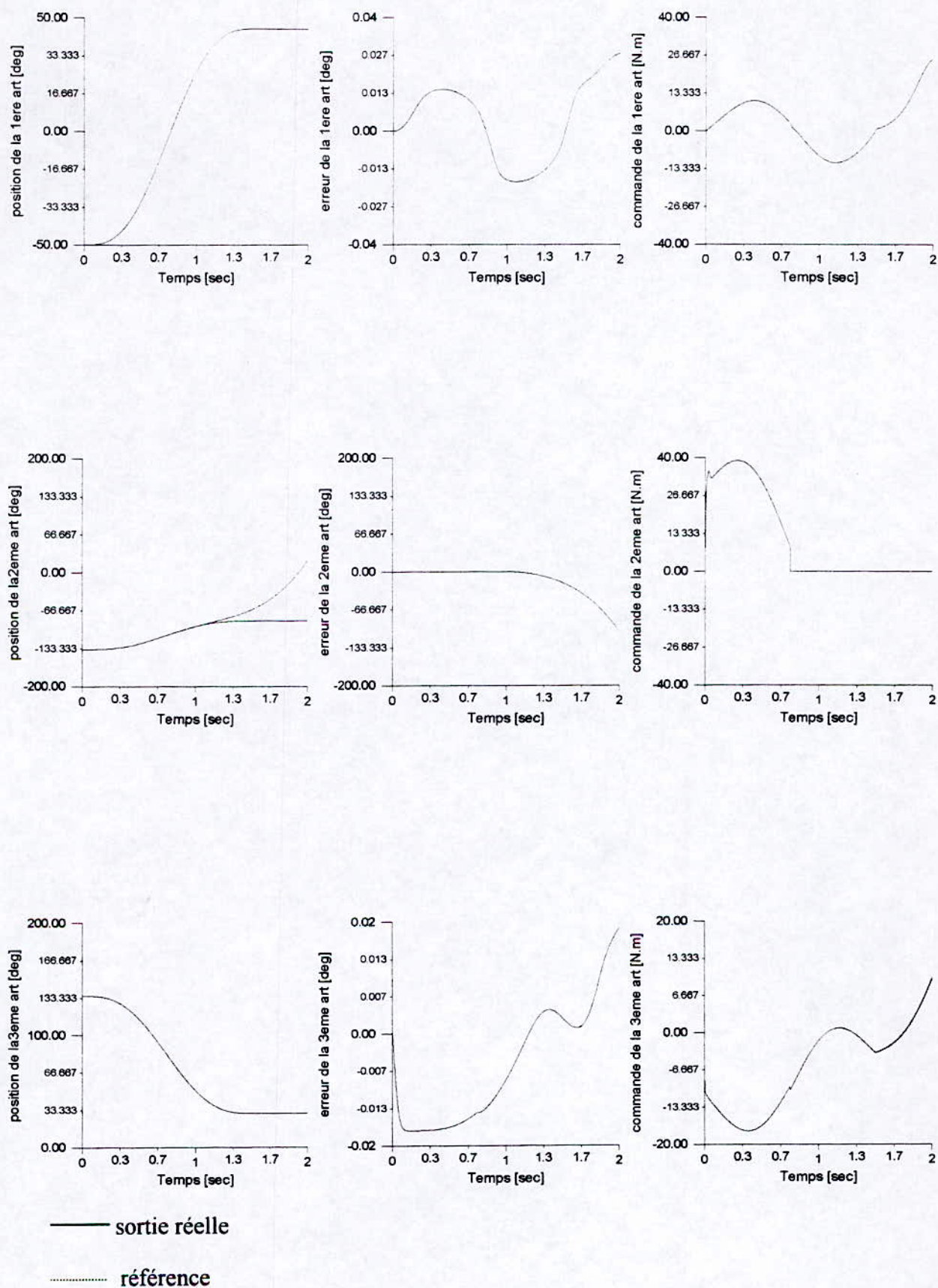
fig(4.40) Trajectoire de LEAVHY avec chute de la charge à $t=0.75$ s



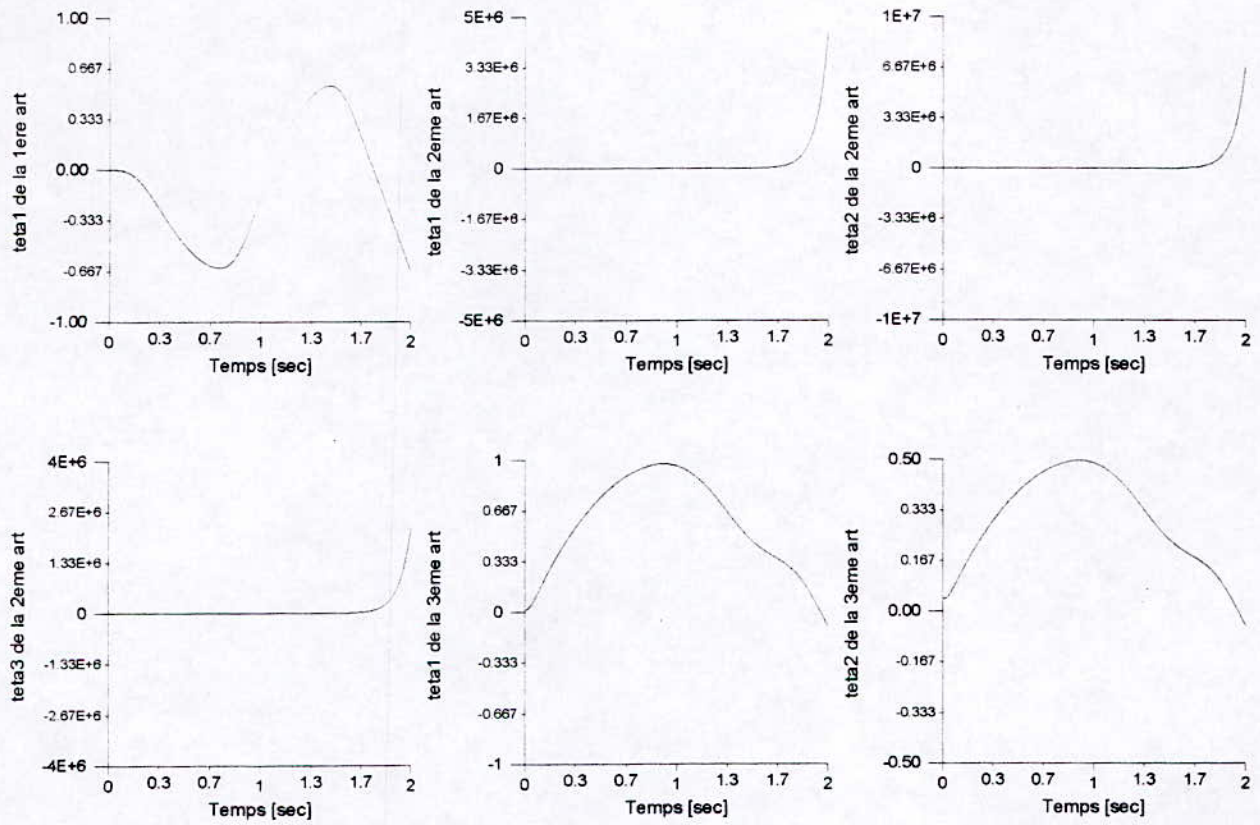
fig(4.41) La d'adaptation Teta ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec chute de la charge à t=0.75s



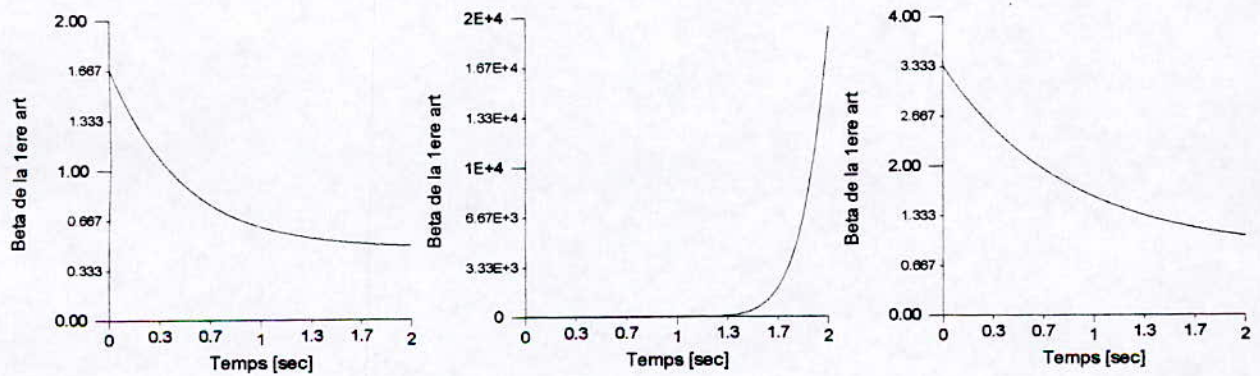
fig(4.42) La d'adaptation Beta ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec chute de la charge à t=0.75s



fig(4.43)Trajectoire de LEAVHY ,avec rupture de la deuxième articulation à t=0.75s



fig(4.44) La loi d'adaptation Teta ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec rupture de la deuxième articulation à t=0.75s



fig(4.45) La loi d'adaptation Beta ,pour une trajectoire de LEAVHY , avec rupture de la deuxième articulation à t=0.75s

IV-3 COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES COMMANDES

Après avoir synthétiser les différentes commandes, on a appliquées ces dernières à notre système, qui est un bras manipulateur en le soumettant à différents tests, on a choisit le test de LEAVHY avec la chute d'une charge de 10Kg, car ce dernier soumet le système à un effort considérable, et fait apparaître les caractéristique de rapidité, robustesse vis à vis d'un changement paramétrique, et la continuité de la commande.

Type de la commande	Grandeur de l'erreur	L'allure de la commande	Lois d'adaptations
Première approche adaptative	art1 : 10^{-4} art2 : 10^{-3} art3 : 10^{-3}	lisse avec un pic lors de la chute de la masse	convergente
Première approche avec mode glissant (fonction sign)	art1 : 10^{-4} art2 : 10^{-4} art3 : 10^{-4}	lisse avec un pic très prononcé lors de la chute de la masse	convergente
Première approche avec mode glissant (fonction sat)	art1 : 10^{-4} art2 : 10^{-3} art3 : 10^{-3}	lisse sans pic de démarrage, le pic lors de la chute s'est adouci	convergente
Deuxième approche adaptative	art1 : 10^{-2} art2 : 10^{-2} art3 : 10^{-2}	lisse avec un léger pic de démarrage, le pic lors de la chute est saillant	convergente la loi teta de la deuxième art est sensible à la chute
Deuxième approche avec mode glissant (fonction sign)	art1 : 10^{-2} art2 : 10^{-2} art3 : 10^{-2}	lisse sans pic de démarrage, le pic de lors de la chute est très adouci	convergente la loi teta de la deuxième art est sensible à la chute

art i : articulation numéro i

Tableau(4.1) *Tableau comparatif des différentes commandes*

Remarque

Les grandeurs des commandes sont les mêmes pour toutes les approches utilisées et cela pour toutes les articulations.

IV-4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé différentes commandes ,ces dernières nous les avons soumises à différents testes de robustesse, les résultats on été très concluant au stade des simulation, les quatre commandes synthétisées on données de bons résultats qu'on a présentés dans un tableau, chaque commande présentées des avantages par rapport aux autres dans un testes donné, la commande adaptative décentralisée par backstepping présente de bon résultats au niveau de l'erreur de poursuite ,mais présente des pics prononcés lors du test de robustesse lors d'un changement paramétrique, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on introduit le mode glissant sur la commande, où l'erreur augmente, mais les pics s'adoucissent lors de la chute de la charge . On remarque aussi que les pics de démarrage son moins prononcés lorsque on utilise une commande avec mode glissant, que lorsque on utilise une adaptation, mais la commande reste toujours lisse pour les différents testes, avec les différentes commandes.

Si on devait choisir une commande parmi celle précédemment synthétisée, la commande avec mode glissant (fonction sat) de la première approche est plus concluante au vue des différents tests



**CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES**

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire, illustre une nouvelle technique de synthèse de commande, en se basant sur la théorie de Laypunov.

Cette technique ; nommée dans la littérature par backstepping ; combine entre le choix de la fonction de Lyapunov et la commande nécessaire pour valider ce dernier.

En premier lieu, nous avons développé l'étude théorique et générale de cette technique pour le cas centralisé et nous avons relevé ses performances à savoir :

- une bonne stabilité
- une bonne précision
- une robustesse vis à vis des variations paramétriques

L'inconvénient que présente cette technique est la complexité de la synthèse et l'encombrement de la loi de commande, dans le cas des systèmes de grandes dimensions d'où la décentralisation de la commande

Cette méthode, nous offre aussi la possibilité de lui associer d'autres types de commandes comme :

- la commande adaptative
- la commande par mode glissant

et cela pour améliorer ses performances.

En second lieu, nous avons appliqué ces différents types de commandes pour le cas décentralisé sur un bras manipulateur PUMA560, à savoir.

- la commande par backstepping adaptatif décentralisé sous deux approches :
 - 1- adaptation de la fonction qui contourne les interconnexions
 - 2- adaptation paramétrique
- la commande par backstepping et mode glissant sous deux formes :
 - 1- fonction sign
 - 2- fonction sat

notre contribution dans ce travail réside dans :

- l'application de la théorie du backstepping adaptatif au modèle du robot PUMA560
- association de la commande par mode glissant au backstepping adaptatif dans le cas décentralisé
- démonstration de la stabilité pour l'application du mode glissant sur le modèle du robot dans la première approche, pour le cas général dans la seconde approche.

Au terme de cette étude, les résultats de simulations montrent les performances de chaque type de commande, car le backstepping et l'adaptation offrent de bonnes performances en stabilité, précision et nous assure une convergence asymptotique, mais ils engendrent une commande complexe dont l'implémentation présentera le problème du temps de calcul. Alors en introduisant le mode glissant, la commande devient plus simple.

Comme perspective, il serait intéressant de synthétiser des observateurs non linéaires par cette technique ainsi de l'appliquer pour des systèmes à grande échelle comme les réseaux électriques et la colonne à distiller.

Finalement, le grand avantage de cette technique est l'assurance de la stabilité qu'elle nous offre, et ce critère est très important dans le choix de la commande.

BIBLIOGRAPHIE

- [**Iouannou 84**] P.Iouannou , P.V.Kokotovic «Robust redesign of adaptive control»
IEEE transaction on automatic control vol A-C 29 ,march 1984
- [**Jankovic 97**] M.Jankovic , R. Spulcher ,P.Kokotovic «Global adaptive stabilization of
cascade nonlinear systems».Automatica vol33,1997
- [**Jiang 97**] Z.P.Jiang , H.Nejmeijer «Tracking control : A case study»
IEEE transaction on automatic control vol 33 ,november 1988
- [**Khalil 96**] H.Khalil « Nonlinear systems » .Edition Printence Hall 1996
- [**Khorrami 95**] S.Jain , F.Khrrami « Application of a decentralized adaptive out put
feedback based on backstepping to power systems »
Proceeding of 34th conference on decision and control .december 1995
- [**Khorrami 97.a**] F.khorrami , S.Jain « decentralized adaptive control of a class of large
scale interconnected nonlinear systems » IEEE transaction on automatic
control vol 42 ,february 1997
- [**Khorrami 97.b**] F.khorrami , S.Jain « Decentralized adaptive out put feedback based for
large scale interconnected nonlinear systems ». IEEE transaction on
automatic control vol 42 ,may 1997
- [**Kokotovic 95**] P.Kokotovic , M.Krstic « Estimation based adaptive backstepping design for
non linear systems ». Proceeding of 34th conference on decision and control
.december 1995
- [**Krstic 95.a**] M.Krstic , T.M.Portz « Backstepping design for jet engin stall and surge
control ». Proceeding of 34th conference on decision and control .december
1995
- [**Krstic 95.b**] M.Krstic , P.Kokotovic »Nonlinear and adaptive contril design »Edition
Jhon Wiley 1995
- [**Lallemand 94**] Lallemand : « Robotique : aspects fondamentaux «. Edition Masson,
1994.
- [**Ling 95**] Y.Ling , Gang Tao « Adaptive backstepping control design for multivariabl
plants». Proceeding of 34th conference on decision and control .december
1995

- [Madani 97]** T. Madani , S. Amrati : «Commande décentralisée à structures variables». PFE – ENP, juin 1997.
- [Nedjari 96]** M. S Nedjari , H . Boukari : «commande adaptative décentralisée. Application en robotique». PFE - ENP, juin 1996.
- [Seraji 89]** H . Seraji : « decentralized adaptive control of manipulators : theory, simulation and experimentation». IEEE trans. on robotics and automation, Vol. 5, N° 2, Avril 1989.
- [Slotine 88]** J.J.E.Slotine : « adaptive manipulator control :A case study». IEEE transaction on automatic control vol 33 ,november 1988
- [Slotine 91]** J.J.E.Slotine « Applied nonlinear control »Edition Printence Hall 1991
- [Spooner 95]** Z.p Jiang , H.Neijsmeier « Tracking control of a class of decentralized nonlinear systems ». Proceeding of 34th conference on decision and control .december 1995
- [Xu 95]** J.Xu , Q.Jia , T.Lee « Analysis of adaptive robust backstepping control schemes for PM synchronous motors ». Proceeding of 34th conference on decision and control .december 1995



ANNEXE

ANNEXE

Dans cette partie nous présenterons une démonstration de la stabilité de l'approche avec le mode glissant ,et en utilisant des information de l'approche adaptative où on a considéré les paramètres de bornitude inconnus ,dans cette approche on supposera qu'il sont connus ,ca concerne les paramètres ζ et ζ_{max}

En utilisant le modèle donné par (IV-92), la synthèse se fait comme suit :

A l'étape 0 ,on n'introduit pas de changements ,on obtiendra la même expression de β et de V_{i0}

Etape 1

On pose :

$$V_1 = V_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ \tilde{z}_{i1}^2 + (\hat{\theta}_i - \theta_i)^T \Gamma_{i1}^{-1} (\hat{\theta}_i - \theta_i) \right\} \quad (\text{Ann.1})$$

Pour la bornitude des interconnexions ,on utilise la relation (IV.96),(IV,97),la dérivée de V_{i1} devient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ \dot{v}_{i0}(\tilde{y}_i) - \sum_{k=1}^P [k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - \zeta_i^{-1} d_{ik0}] \|\tilde{y}_i\|^{2k} + 2\tilde{Z}_{i1} \sum_{i=1}^P k(\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^{(k-1)} \tilde{y}_i^T P_i B_i \right. \\
& + 2Z_{i1} \left\{ x_{i2} \sum_{k=1}^P v_{i1}(\tilde{y}_i, Z_{i1}, \hat{\beta}_i) + \sum_{l=1}^l \frac{\varphi_{i1}^l(\tilde{y}_i, \hat{\beta}) \theta_i^T \gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1})}{\gamma_{ij}(0, \dots, 0, x_{i1})} \right\} \\
& + 2\Gamma_{i1}^{-1}(\hat{\theta}_i - \theta_i) \dot{\hat{\theta}}_i + \\
& \left. + \sum_{l=1}^l \varphi_{i1}^l(\tilde{y}_i, \hat{\beta}_i) \theta_i^T \gamma_{i1}(0, \dots, x_{i1}) \right\} + \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^l \|\varphi_{i1}^l \tilde{Z}_{i1}\| N_{\max}^i \zeta_m \gamma \hat{\eta}_{i1} + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^l \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{P_i} [\|\tilde{Z}_{i1} \varphi_{i1}^l\| \\
& 2^{P_i l - 1} \eta_{i1}^k \zeta_{i1}^k \|\tilde{y}_i\|^k] \quad (Ann.2)
\end{aligned}$$

Les dernier terme de (ann.2) nous permet d'utiliser l'équation(IV.67)

$$\tilde{x}_{i1} = -v_{i1} - \sum_{i=0}^l \varphi_{i1}^l \theta_i^T \gamma_{i1} - C_{i1} \tilde{Z}_{i1} \quad (Ann.3)$$

$$= r_{i2}$$

En choisissant

$$\tilde{Z}_{i2} = \tilde{x}_{i2} - r_{i2}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \leq & \sum_{i=1}^N \dot{v}_{i0}(y_i) - \sum_{k=1}^P [k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - (2d_{ik0} + d_{ik1}) \zeta_i^{-1}] \|\tilde{y}_i\|^{2k} - 2C_{i1} Z_{i1}^2 \\
& + 2\Gamma_{i1}^{-1}(\hat{\theta}_i - \theta_i)^T \left\{ \dot{\hat{\theta}}_i - Z_{i1} \sum_{l=0}^l \varphi_{i1}^l(y_i, \hat{\beta}_i) \gamma_{i1}(0, \dots, 0, x_{i1}) \right\} \\
& + 2\tilde{Z}_{i1} \sum_{k=1}^P k(\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^{k-1} \tilde{y}_i^T P_i B_i - 2C_{i1} \tilde{Z}_{i1}^2 + 2\tilde{Z}_{i1} \tilde{Z}_{i2} + 2(\hat{\theta}_i - \theta_i)^T (\Gamma_{i1}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_i \\
& - \tilde{Z}_{i1} \sum_{l=0}^l \varphi_{i1}^l \gamma_{i1}(0, \dots, \tilde{x}_{i1})) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^l \bar{\omega}_{i1} \tilde{Z}_{i1} \|\varphi_{i1}^l\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^l \|\tilde{Z}_{i1} \varphi_{i1}^l\|^2 N \zeta_{\max} \bar{y}_m \hat{\eta}_{i1} \quad (Ann.4)
\end{aligned}$$

En dérivant Z_{i2} par rapport au temps ,on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{i2} &= x_{i3} + \frac{\partial r_{i2}}{\partial \tilde{y}_i} \tilde{y}_i - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \tilde{Z}_{i1}} \tilde{Z}_{i1} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \hat{\beta}_i} \hat{\beta}_i - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \hat{\theta}_i} \hat{\theta}_i + \theta_i^T \gamma_{i2}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}) \\
&= x_{i3} + v_{i2}(y_i, \tilde{Z}_{i1}, \tilde{Z}_{i2}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i) + \hat{\theta}_i^T \psi_{i2}(y_i, \tilde{Z}_{i1}, \hat{\beta}_i) + \\
&\quad + \sum_{l=0}^2 \phi_{i2}^l(y_i, \tilde{Z}_{i1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i) \theta_i^T \gamma_{il}(y_1, \dots, y_N, x_{i1}, x_{i2}). \tag{Ann.5}
\end{aligned}$$

On utilisera cette dernière dérivée pour la prochaine étape.

A chaque étape m , on pose

$$V_m = V_{m-1} + \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{im}^2$$

avec

$$\tilde{Z}_{im} = \tilde{x}_{im} - r_{im}$$

La dérivée de V_{im} sera donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{im} &\leq \sum_{i=1}^N [V_{i0}(\tilde{y}_i) - \sum_{k=1}^P \{ k \lambda_{\min}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) - (m d_{ik0} + (m-1) d_{ik1} + \dots + d_{ikm}) \zeta^{-1} \} \|\tilde{y}_i\|^{2k} \\
&\quad + 2Z_{i1} \sum_{k=1}^P (\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i) \tilde{y}_i^T P_i B_i^T - 2C_{im} \tilde{Z}_{im}^2 - 2C_{im-1} \tilde{Z}_{im-1}^2 + 2\tilde{Z}_{im} \tilde{Z}_{im+1} \\
&\quad + 2(\hat{\theta}_i - \tau_{im})^T \sum_{j=1}^m \tilde{Z}_{ij} \psi_{ij} \\
&\quad + \sum_{h=1}^m \left[\sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^m \|\tilde{Z}_{ih} \phi_{ih}^l\| N \zeta_{\max} \bar{y}_m \hat{\eta}_l(\tilde{x}_{i1}, \dots, \tilde{x}_{il}) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^m \zeta^* \omega_{il} \tilde{Z}_{ih} \|\phi_{ih}^l\|^2 \right] \tag{Ann.6}
\end{aligned}$$

Etape ρ :

On définit $\tilde{Z}_{i,\rho} = \tilde{x}_{i,\rho} - \tilde{r}_{i,\rho}(y_i, \tilde{Z}_{i1}, \dots, \tilde{Z}_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i)$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Z}}_{i\rho} &= v_i(\tilde{x}_i) + \hat{\theta}_i^T \psi_{i,\rho} + \delta_i(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) u_i - K_i [y_m^T x_m^T]^T - b_{m_i} r_i \\ &+ \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i,\rho}^l(y_i, Z_{i1}, \dots, Z_{i,\rho-1}, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i) \theta_i^T \gamma_{i,\rho}(y_i, \dots, y_N, x_{i1}, \dots, x_{i,\rho}) \end{aligned}$$

On pose

$$\dot{\tilde{Z}}_{i\rho} = -q_i \tilde{Z}_{i\rho}^2 \text{sign}(\tilde{Z}_{i\rho})$$

$$V_\rho = V_{\rho-1} + \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{i\rho}^2$$

En dérivant $V_{i\rho}$ par rapport au temps, et en remplaçant u_i par l'expression suivante :

$$u_i = \frac{1}{\delta_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)} \left[-v_i(\tilde{x}_i) - \dot{\tilde{Z}}_{i\rho} - \hat{\theta}_i^T \sum_{l=0}^{\rho} \varphi_{i\rho}^l \gamma_{il}(0, \dots, \tilde{x}_{i1}, \dots, \tilde{x}_{i\rho}) - v_{i\rho} \right] \quad (\text{Ann.7})$$

On obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho &\leq \sum_{i=1}^N \left[-2\beta_i^* \|B_i^T P_i \tilde{y}_i\|^2 [1 + \|\tilde{y}_i\|^{2(P-1)}] \cdot \sum_{k=1}^P k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \|\tilde{y}_i\|^{2(k-1)} + 2\tilde{Z}_{i1} \sum_{k=1}^{\rho} k (\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^{k-1} \tilde{y}_i P_i B_i \right. \\ &+ \zeta^* d_2 \|B_i^T P_i \tilde{y}_i\|^2 \sum_{k=1}^P \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i) \|\tilde{y}_i\|^{4(k-1)} - \sum_{k=1}^P \{k \lambda_{\min}^{k-1}(P_i) \lambda_{\min}(Q_i) \\ &- [(\rho+1)d_{ik0} + \rho d_{ik1} + \dots + 2d_{ik,\rho-1} + d_{ik\rho}] \zeta_i^{-1} \} \|\tilde{y}_i\|^{2k} \\ &\left. - 2C_{i1} \tilde{Z}_{i1}^2 - \dots - 2C_{i,\rho-1} \tilde{Z}_{i,\rho-1}^2 - 2C_{i,\rho} \tilde{Z}_{i,\rho} \dot{\tilde{Z}}_{i\rho} + \sum_{h=1}^{\rho} \left[\sum_{l=0}^{\rho} \|\tilde{Z}_{ih} \varphi_{ih}^l\| N \zeta_{\max} \hat{\eta}_l + \sum_{l=1}^{\rho} \zeta^* \omega_{il} \tilde{Z}_{ih} \|\varphi_{i\rho}^l\| \right] \right] \quad (\text{Ann.8}) \end{aligned}$$

Le choix de β est le même que dans le cas de régulation, mais dans notre cas le choix des C_i , est tel que :

$$\sum_{i=1}^{\rho} \left[-2C_{il} \tilde{Z}_{il}^2 + \sum_{h=0}^{\rho} \left[\|\tilde{Z}_{ih} \varphi_{ih}^h\| N \zeta_{\max} \bar{y}_m \hat{\eta}_l \right] + \sum_{h=0}^{\rho} \left[\zeta^* \omega_{il} \tilde{Z}_{i\rho}^2 \|\varphi_{ih}^h\| \right] + \sum_{k=1}^{\rho} k (\tilde{y}_i^T P_i \tilde{y}_i)^{k-1} \tilde{y}_i P_i B_i \right] < 0 \quad (\text{Ann.9})$$

En choisissant $C_{i\rho}$ comme suit :

$$C_{i\rho} > b \times \max(N \zeta_{\max} \bar{y}_m, \zeta^*, \rho \bar{y}_m)$$

Ainsi on peut s'assurer du signe de la dérivée de $V_{i\rho}$, avec b un terme qu'on choisit assez grand.