

15/98

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique  
D.E.R. Génie Electrique et Informatique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**FILIERE : AUTOMATIQUE**

**COMMANDE ROBUSTE PAR  $H_{\infty}$**   
**Théorie et Applications**

**Présenté par**  
**Mr KHADIR TOUFIK**

**Dirigé par**  
**Mr M. TADJINE**  
**Mr F. BOUDJEMAA**

**Juin 1998**

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique  
D.E.R Génie Electrique et Informatique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**FILIERE : AUTOMATIQUE**

**COMMANDE ROBUSTE PAR  $H_{\infty}$**   
**Théorie et Applications**

Présenté par  
Mr KHADIR TOUFIK

Dirigé par  
Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMAA

M. TADJINE  


Juin 1998

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Science sans Conscience n'est que ruine de l'âme.*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A mes Parents*

## Remerciements

Je tiens à remercier Mr M. Tadjine et Mr F. Boudjema pour leurs aides et conseils tout au long de mon projet.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui m'ont aidé à effectuer ce travail.

Tous mes remerciements ne suffiront jamais à exprimer ma reconnaissance envers ma famille.

ملخص:

هذا العمل يخص التحكم الخطي المضلع .  
القسم الأول يقدم كيفية تحليل الأنظمة المتعددة المتغيرات باستعمال مفهوم Valeurs Singulieres  
القسم الثاني يدرس كيفية استخلاص الأنظمة المضلعة  $H_\infty$  بطريقة Mixed sensitivity problem  
و طريقة McFarlane & Glover .  
القسم الأخير يخص تطبيق نظم التحكم المقترحة على مثالين من أجل توضيح ضعف وقوة الطرق المدروسة .  
كلمات أساسية : تحكم مضلع -  $H_\infty$  - العوامل الأولية - تحكم خطي .

### Summary:

The aim of this work is the study of Linear Robust Control.  
The first part is dedicated to the analysis of multivariable systems using singular values .  
In the second part, we present the techniques used in the design of an  $H_\infty$  robust controller,  
more precisely, we focus on the mixed sensitivity problem and the Glover McFarlane  
approach.  
The last part, is concerned to simulation results to highlight the effectiveness and the limits of  
the discussed methods .

**Key Words :** Robustness - Performances -  $H_\infty$  - Mixed sensitivity - Coprime Factors .

### Résumé:

Ce travail est consacré à l'étude de la Commande Linéaire Robuste.  
La première partie est dédiée à l'analyse des systèmes de commande multivariables  
par les valeurs singulières.  
La deuxième partie concerne les méthodes de synthèses des commandes robuste par  
 $H_\infty$ , à savoir la commande à sensibilité mixte et l'approche de Glover et McFarlane.  
La dernière partie est consacrée à des exemples d'applications afin de montrer les  
performances et les limites des méthodes présentées .

**Mots Clés:** Robustesse - Performances -  $H_\infty$  Facteurs coprimés .

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE .....	1
1 INTRODUCTION A LA COMMANDE $H_\infty$ .....	3
1.1 Principe de la commande $H_\infty$ .....	3
1.2 Commande $H_\infty$ optimale .....	5
1.3 Position des problèmes de commandes sous forme $H_\infty$ .....	6
1.3.1 Rejet de perturbations	
1.3.2 Limitation de la commande	
1.4 Conclusion .....	7
2 ELEMENTS D'ANALYSE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES .....	8
2.1 Valeurs singulières .....	8
2.1.1 Exemple	
2.1.2 Décomposition en valeurs singulières	
2.1.3 Propriétés	
2.1.4 Définition de la norme $H_\infty$	
2.2 Sensibilité .....	12
2.3 Performances nominales .....	14
2.3.1 Poursuite	
2.3.2 Rejet des perturbations	
2.3.3 Bruit des mesures	
2.3.4 Remarques	
2.4 Stabilité robuste .....	15
2.4.1 Représentation des incertitudes	
2.4.2 Le théorème du petit gain	
2.4.3 Marges de stabilité additive et multiplicative	
2.5 Exemple .....	20
2.5.1 Réponses fréquentielle	
2.5.2 Réponses temporelles	
2.6 Conclusion .....	24
3 SYNTHESE D'UNE COMMANDE ROBUSTE .....	25
3.1 Méthodes classiques .....	25
3.2 Robustesse de la commande Quadratique .....	26
3.2.1 Marges de stabilité de la commande LQ	
3.2.2 Robustesse de la commande LQG	
3.2.3 LQG/LTR	
3.3 La commande $H_\infty$ standard .....	30
3.3.1 Le problème standard	
3.3.2 Mise des problèmes sous formes standard	
3.3.3 Solution du problème standard	
3.3.4 Les hypothèses dans un cadre plus général	
3.3.5 Validation de l'hypothèse II	
3.3.6 Pôle et zéros sur l'axe imaginaire .	
3.3.7 Choix des fonctions de pondération .	

<b>3.4</b>	<b>Synthèse <math>H_\infty</math> par les facteurs coprimés normalisés .....</b>	<b>43</b>
3.4.1	Représentation par les facteurs coprimés	
3.4.2	Position du problème	
3.4.3	Solution	
3.4.4	Implémentation par Loopshaping	
3.4.5	Conclusion	
<b>3.5</b>	<b>Applications aux systèmes non linéaires .....</b>	<b>49</b>
3.5.1	Commande à gain préprogrammé	
3.5.2	Commande par compensateurs commutés	
3.5.3	Commande par réseaux de modèle locaux	
<b>3.6</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>APPLICATIONS .....</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Application à un système linéaire .....</b>	<b>53</b>
4.1.1	Synthèse par la méthode des facteurs coprimés	
4.1.2	Compensateurs à sensibilité mixte	
4.1.3	Comparaison et simulations	
4.1.4	Conclusion	
<b>4.2</b>	<b>Applications au modèle d'un simulateur d'Hélicoptère .....</b>	<b>63</b>
4.2.1	Description	
4.2.2	Modélisation	
4.2.3	Commande par $H_\infty$ sensibilité mixte	
4.2.4	Synthèse par la méthode des facteurs coprimés	
4.2.5	Comparaison	
4.2.6	Commande par L.M.N	
<b>4.3</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>84</b>
	<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>85</b>
	<b>PERSPECTIVES .....</b>	<b>86</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>87</b>

## Introduction Générale

Pour commander un système on a besoin d'un modèle mathématique le représentant. Le modèle mathématique, aussi précis soit-il n'est qu'une approximation de la réalité.

Ce modèle doit aussi nous permettre de synthétiser une commande. La simplicité de cette commande est inversement liée à la complexité du modèle.

Une fois le système est représenté par un modèle, le but de l'automaticien est d'utiliser ce modèle pour commander le système réel.

Une commande est dite Robuste si elle garantit la stabilité ou (et) les performances, non pour le modèle seulement, mais pour le système réel qu'il représente.

### Historique [1, 28]

Dés les années 30 les travaux de Bode ont mis l'accent sur les notions de marge de gain et marge de phase, pour étudier la stabilité et la robustesse des systèmes de commandes .

Les méthodes de synthèses basées sur les représentations fréquentielles telles que les diagrammes de Bode de Nyquist ou de Black, ont été très utiles et permettent de résoudre plusieurs problèmes.

L'inconvénient principal de ces méthodes dites " classiques " est que la synthèse se fait de manière itérative (essais - erreur ), en plus on n'est jamais sûr qu'on ne peut pas faire mieux.

Un autre inconvénient de ces méthodes est la difficulté de les utiliser pour les systèmes MIMO, ou des notions tels que les zéros, la bande passante, les marges de gain et de phase devienne difficile à définir.

Durant les années 60, une nouvelle théorie de la commande, basée sur la représentation des systèmes dans l'espace d'état "s'est imposée" [7] .

La commande optimale linéaire quadratique présente l'avantage de traiter les systèmes multivariables, et surtout, le plus important c'est qu'elle **est optimale**.

C'est à dire qu'on espérait se débarrasser complètement des méthodes de synthèses par (essais-erreurs) itérations, d'autant plus que la commande LQG à été appliquée pour les programmes Aérospatiales de l'époque .

Malheureusement, l'espoir ne s'est pas réalisé car l'application de la commande LQG en industrie a donné de mauvais résultats.

En effet la commande LQG suppose une modélisation assez précise et la connaissance des caractéristiques statistiques des phénomènes perturbateurs, ce qui n'était pas le cas pour les processus industriels.

Et donc on se retrouve toujours devant le problème de Robustesse vis à vis des variations du modèle.

Durant les années 70 les études concernant la robustesse des systèmes se sont multipliées. Les recherches étaient dirigées vers la généralisation des méthodes fréquentielles classiques, pour les systèmes multivariables.

En 1981, Zames [14] a exposé l'idée d'utiliser les valeurs singulières et de la norme **infinie** pour la commande **Robuste** des systèmes Multivariables.

Le problème de la commande Robuste a été posé sous forme de minimisation d'une norme infinie, la solution à ce problème par les méthodes de l'analyse complexe est très compliquée.

En 1984, Doyle a présenté une solution, mais cette dernière aussi était assez complexe. Ce n'est qu'en 1988, que D.G.F.K ont présenté les solutions du problème H-infini sous forme de solutions d'équations de Ricatti [17]; cette dernière solution a permis l'application pratique de la théorie de la commande H-infini qui a connu un très grand développement depuis.

### **Organisation du travail**

Notre étude comporte 4 chapitres :

Le chapitre 1 est une introduction à la commande  $H_\infty$ . Dans le chapitre 2 on présente les méthodes d'analyse des performances et de la robustesse des systèmes multivariables par les valeurs singulières.

Le chapitre 3 est consacré à la synthèse d'une commande linéaire robuste, nous présentons la méthode de commande LQG/LTR, la commande  $H_\infty$  standard et l'approche par les facteurs coprimés normalisés, enfin nous allons voir comment appliquer des compensateurs linéaires pour commander des systèmes nonlinéaires.

Dans le chapitre 4 nous allons appliquer les méthodes de synthèses présentées sur deux modèles:

Un modèle linéaire présenté dans [1], nous comparerons nos résultats avec ceux de [1].

Le second est un modèle nonlinéaire d'un simulateur d'hélicoptère à deux degrés de liberté [13].

Tout au long de ce travail, nous avons essayé de souligner tout les problèmes rencontrés lors du calcul des compensateurs  $H_\infty$  par les programmes *des Toolbox Mu-tools et Robust Control de Matlab*.

Nous espérons que notre travail sera une introduction pour d'autres études sur la commande  $H_\infty$  et la commande robuste en général.

## **Chapitre 1**

## Chapitre 1

### Introduction à la Commande $H_\infty$

La commande H-infini est la réponse au besoin d'une théorie sur la commande des systèmes multivariables qui tient compte explicitement des erreurs de modélisation.

#### 1.1 Principe de la Commande $H_\infty$

Le principe est simple :

Je sais que le système est différent de mon modèle.

Si je fais en sorte que ma commande stabilise le modèle nominal associé à la plus grande perturbation ou incertitude possible, alors je suis sûr de la stabilité du système.

En d'autres termes, je commande le pire des cas " Worst Case Control ".

*Par exemple:*

soit  $g(s)$  la fonction de transfert nominal d'un système.

Si le système réel est représenté par:

$$\tilde{g}(s) = (1 + \delta(s))g(s) \quad (1.1)$$

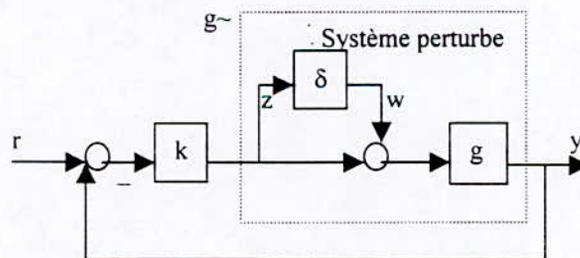


Figure 1.1

avec  $\delta(s)$  fonction de transfert stable inconnu, mais d'amplitude bornée.

$$|\delta(j\omega)| < M, \forall \omega \quad (1.2)$$

Du schéma on peut voir que

$$z = gk(1 + gk)^{-1}w \quad (1.3)$$

et donc la stabilité du système de la figure (1.1) est équivalente à celui de la figure(1.2) :

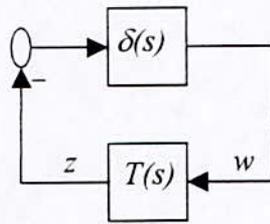


Figure 1.2

$$T(s) = gk(1 + gk)^{-1} \quad (1.4)$$

Le critère de Nyquist nous permet de dire le système en boucle fermée est stable si et seulement si le diagramme de Nyquist de  $\delta(j\omega)T(j\omega)$  n'encercle pas le point  $(-1+0j)$ .

Une condition suffisante pour la stabilité est donc:

$$|\delta(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{\omega} |\delta(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad (1.6)$$

Puisque  $\delta(s)$  est inconnu il serait mieux d'utiliser le fait que

$$|\delta(j\omega)T(j\omega)| \leq |\delta(j\omega)| |T(j\omega)| \quad (1.7)$$

Une condition suffisante pour la stabilité du système est donc:

$$\sup_{\omega} |T(j\omega)| \sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < 1 \quad (1.8)$$

Et Puisque nous avons supposé que

$$\sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < M \quad (1.9)$$

Alors le problème de la stabilité du système perturbé revient à trouver  $k(s)$  tel que

$k(s)$ stabilise $g(s)$  $\sup_{\omega}  T(j\omega)  < 1/M \quad , \quad T(j\omega) = gk(1 + gk)^{-1}$
--

La quantité  $\sup_{\omega} |T(j\omega)|$  vérifie les conditions d'une norme.

Elle est appelée *la norme infinie* de la fonction de transfert  $T$ .  
 Nous avons:

$$\|T\|_{\infty} = \sup_{\omega} |T(j\omega)| \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \|T\|_{\infty} &\geq 0, \quad \|T\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow T = 0 \\ \|\alpha T\|_{\infty} &= |\alpha| \|T\|_{\infty} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \|T + Q\|_{\infty} &\leq \|T\|_{\infty} + \|Q\|_{\infty} \end{aligned} \quad (1.11)$$

En plus la norme  $\infty$  vérifie :

$$\|TQ\|_{\infty} \leq \|T\|_{\infty} \|Q\|_{\infty} \quad (1.12)$$

cette dernière propriété est utilisée dans de tout les théorèmes sur la stabilité Robuste.

## 1.2 La Commande $H_{\infty}$ Optimale

Connaissant une borne sur l'incertitude nous avons déduit dans le paragraphe précédent une condition sur  $k(s)$  pour stabiliser le système perturbé.

On peut poser le problème autrement

On ne connaît pas la borne de  $|\delta(j\omega)|$ , mais on veut que le système soit stable pour la plus grande incertitude possible.

La condition de stabilité Robuste s'écrit:

$$\sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < 1 / \sup_{\omega} |T(j\omega)| \quad (1.13)$$

$$\|\delta(j\omega)\|_{\infty} < 1 / \|T(j\omega)\|_{\infty} \quad (1.14)$$

maximiser l'incertitude revient donc à minimiser  $\|T(j\omega)\|_{\infty}$ .

et donc le problème de **Stabilité Robuste Optimale** et de trouver  $k(s)$  tel que :

$$\begin{aligned} &k(s) \text{ stabilise } g. \\ &\|gk(1 + gk)^{-1}\|_{\infty} \text{ est minimale.} \end{aligned}$$

## Remarques

Si  $g(s)$  est stable, le problème de stabilité Robuste posé ci-dessus a pour solution  $k(s) = 0$ . c'est à dire pas de commande.

C'est surprenant mais c'est logique, car on s'est posé seulement le problème de stabilité, et pour  $g(s)$  stable, il est clair que le système reste stable pour toute incertitude  $\delta(s)$  stable, sans  $k$

L'idée est que pour la commande  $H_\infty$  puisse être utile, il faut qu'on puisse traduire tout les objectifs de la commande ( poursuite, rejet de perturbation ...etc) sous forme de minimisation d'une norme infinie.

## 1.3 Position des Problèmes de Commandes sous Forme $H_\infty$

Nous allons montrer comment poser quelques problèmes de commande sous forme d'optimisation  $H_\infty$ .

### Rejet de perturbations

Soit le système de commande de la figure 1.3.

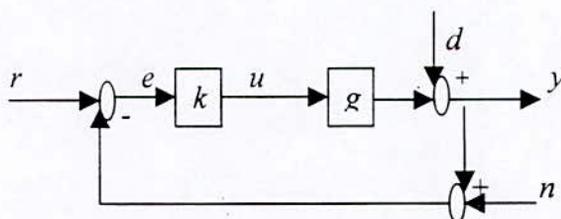


Figure 1.3

$d$  est une perturbation sur la sortie.

$n$  est un bruit de mesure.

On veut atténuer l'effet de  $d$  sur  $y$ .

Nous avons:

$$y = gk(1 + gk)^{-1}(r - n) + (1 + gk)^{-1}d \quad (1.15)$$

L'effet de  $d$  sur  $y$  est

$$y_d = (1 + gk)^{-1}d \quad (1.16)$$

Minimiser  $y_d$  revient à minimiser  $\|(1 + gk)^{-1}\|_\infty$ , ( le gain maximum entre  $d$  et  $y$  ).

le problème est donc de trouver  $k(s)$  pour:

- stabiliser  $g$ .
- minimiser  $\|(1 + gk)^{-1}\|_{\infty}$ .

### Limitation de la Commande

Parfois on veut minimiser l'énergie de la commande pour éviter les saturations et le gaspillage inutile d'énergie.

De la figure 1.3 on a:

$$u = k(1 + gk)^{-1}(r - d). \quad (1.17)$$

Minimiser la commande revient donc à minimiser tout simplement  $\|k(1 + gk)^{-1}\|_{\infty}$ .

Le problème de commande n'est jamais posé comme stabilisation toute seule ou rejet de perturbation. tout seule, mais c'est un ensemble de spécifications à satisfaire.

C'est pour cela qu'en général le problème de la commande  $H_{\infty}$  est de minimiser un critère formée de plusieurs objectifs .

Le problème est donc de trouver la commande qui minimise  $\|J(j\omega)\|_{\infty}$  avec:

$$J = [w_1 h_1 \quad w_2 h_2 \quad w_3 h_3]' \quad (1.18)$$

ou  $h_1, h_2, h_3$  sont des fonctions de transfert telles que

$$(1 + gk)^{-1}, gk(1 + gk)^{-1}, k(1 + gk)^{-1} \quad (1.19)$$

et  $w_1(s), w_2(s), w_3(s)$  sont des fonctions de pondération fréquentielles.

## 1.4 Conclusion

La commande  $H_{\infty}$  est une méthode de synthèse fréquentielle qui tient compte explicitement des erreurs de modélisation.

Le problème de la commande se ramène à une minimisation d'une norme infinie avec des contraintes de stabilité.

Dans ce chapitre nous avons parlé de systèmes SISO, mais l'utilité de la "commande  $H_{\infty}$  optimale " est due au faits suivant:

Elle est directement applicable au système MIMO

Il existe une théorie permettant de nous renseigner sur l'existence de la solution, et qui la donne si elle existe.

C'est l'objet des chapitres suivants.

## Chapitre 2

## Chapitre 2

### Eléments d'Analyse des Systèmes MIMO

Pour les systèmes SISO, les performances sont déterminées par le gain en boucle ouverte, des notions telles que la bande passante (qui est liée à la rapidité), atténuation des bruits et des perturbations, peuvent être analysés à partir du diagramme de Bode par exemple, la Robustesse aussi est étudiée en utilisant les marges de gain et de phase.

Pour généraliser cette approche aux systèmes Multivariables, on rencontre le problème du gain d'une matrice de transfert.

Le Gain du système dépend des composantes du vecteur d'entrée.  
En raisonnant simplement, le Gain est déterminé par le rapport

$$\frac{\|G(s)u(s)\|}{\|u(s)\|} \quad (2.1)$$

Où  $\| \cdot \|$  est la norme euclidienne :

$$\|v\| = \sqrt{v^H v} \quad \text{avec} \quad v^H = \bar{v}^T \quad (2.2)$$

#### 2.1 Valeurs Singulières

Notre problème est que notre Gain n'a pas d'expression déterminée.

Heureusement qu'on peut borner le Gain par une **norme induite** de la matrice  $G(s)$ .

$$\|G\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|}{\|x\|} \quad (2.3)$$

la norme induite ainsi définie est appelée la norme de Hilbert ou la norme Spectrale, nous avons la relation suivante :

$$\|G\|_s = \bar{\sigma}(G) \quad (2.4)$$

Avec :

$\bar{\sigma}^2$  : la plus grande valeur propre de  $G^H G, (\bar{G}^T G)$ .

On définit les racines des valeurs propres de  $(G^H G)$  comme étant les valeurs singulières de  $G$ ,  $\|G\|_s$  est donc la plus grande valeur singulière de  $G$ , et c'est la nomination qui est répandue.

En ce qui nous concerne  $G$  est une Matrice de transfert  $G(j\omega)$ , et les valeurs singulières sont des fonctions de  $(\omega)$ , pour faire l'analogie avec le cas SISO, on les appelle aussi "Principal Gains" les Gains principaux [1,3].

Avant de présenter quelques propriétés des valeurs singulières, nous illustrons l'intérêt de cette notion pour l'étude de l'inversibilité des Matrices et donc, la stabilité du système :

### 2.1.1 Exemple [7]

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Le but est d'étudier l'inversibilité de la matrice  $A$  en fonction de  $\varepsilon$ .

Avant les valeurs singulières, essayons le déterminant :

$$\text{Det } A = 1 \quad (2.6)$$

Essayons encore les valeurs propres :

$$\text{eig}(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 1\} \quad (2.7)$$

D'après le déterminant et les valeurs propres, la matrice  $[A]$  est inversible  $\forall \varepsilon$ , et donc elle est loin d'être singulière, alors qu'en réalité :

Une variation de  $\varepsilon$  sur le  $(0)$  de la matrice la rend singulière.

Essayons les valeurs singulières

D'après la définition :

$$\sigma(A) = \sqrt{\text{eig}(A^T A)} \quad (2.8)$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1/\varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1/\varepsilon^2 & 1/\varepsilon \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\det(\lambda I - A^T A) = \lambda^2 - \lambda(2+1/\varepsilon^2) + 1 \quad (2.10)$$

$$\lambda_1 = 1+1/2\varepsilon^2 + 1/2\varepsilon^2 \sqrt{1+4\varepsilon^2} \quad (2.11)$$

$$\lambda_2 = 1+1/2\varepsilon^2 - 1/2\varepsilon^2 \sqrt{1+4\varepsilon^2} \quad (2.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1 = \infty \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 \rightarrow 0$$

Le fait que  $\sigma_2 \rightarrow 0$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  nous indique que pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  la matrice est très proche de la singularité.

Remarquons aussi que pour les deux valeurs singulières s'éloignent, non seulement la matrice devient singulière, mais un de ses éléments tend vers l'infini, on dit que la matrice est 'mal conditionnée'.

Pour quantifier cette notion on définit le *conditionnement* d'une matrice  $G$  par :

$$\kappa(G) = \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (2.14)$$

$\kappa$  représente la proximité à la singularité de la matrice  $G$ .

Plus  $\kappa$  est grand plus la matrice est proche de la singularité et on dit qu'elle est mal conditionnée.

Dans cet exemple, nous avons parlé de singularité (inversibilité) d'une matrice, ce qui est équivalent à parler de la stabilité d'un système bouclé car :

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (2.15)$$

La stabilité revient à l'inversibilité de  $(I + GK)^{-1}$ .

Ce qui montre l'utilité des valeurs singulières dans les études de Robustesse des systèmes MIMO.

## 2.1.2 Décomposition en Valeurs singulières

### Théorème [1,3]

Pour toute matrice complexe  $G (m, p)$ , il existe  $Y, U, \Sigma$  tel que :

$$G = Y \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (2.16)$$

en supposant  $m \geq p$ .

$Y, U$  sont des matrices unitaires :

$$Y^*Y = U^*U = I_p \quad (2.17)$$

$\Sigma$  matrice réelle diagonale  $(p, p)$ :

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_p = 0$$

$$r \leq \min(m, p) = p \quad (2.19)$$

$$\bar{\sigma}(G) = \sigma_1, \quad \underline{\sigma}(G) = \sigma_p, \quad (2.20)$$

L'équation (2.16) est appelée la décomposition en valeurs singulières de  $G$ .

### 2.1.3 Propriétés

De la relation précédente on démontre les propriétés suivantes :

$$\text{rang}(G) = r \quad (2.21)$$

pour  $m = p$  l'inverse de  $G$  est donné par

$$G^{-1} = U\Sigma^{-1}Y^* \quad (2.22)$$

Puisque  $\bar{\sigma}(\cdot)$  est une norme elle vérifie toutes les conditions d'une norme (1.11).

Elle vérifie aussi l'inégalité suivante :

$$\bar{\sigma}(GH) \leq \bar{\sigma}(G)\bar{\sigma}(H) \quad (2.23)$$

Le 'gain' de  $G$  est déterminé par:

$$\bar{\sigma}(G) = \max_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \quad (2.24)$$

$$\underline{\sigma}(G) = \min_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \quad (2.25)$$

avec  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne d'un vecteur.

Nous avons donc:

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \leq \bar{\sigma}(G) \quad (2.26)$$

*Le gain du système est toujours entre la plus petite et la plus grande valeur singulière de  $G$ .*

On comprend pourquoi elles sont appelées 'principal gains'.

En conclusion, pour les systèmes MIMO nous allons utiliser  $\bar{\sigma}(G)$ , ou  $\underline{\sigma}(G)$  au lieu de  $|G|$ .

La relation (2.26) permet d'avoir une idée sur le gain du système en fonction de la fréquence  $\omega$ .

### 2.1.4 Définition de la Norme Infinie

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la norme infinie est une norme indépendante de  $\omega$ .

En utilisant les valeurs singulières on définit la *norme infinie d'une matrice de transfert* comme suit:

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.27)$$

La norme infinie représente le plus grand gain que peut apporter le système  $G$ .

Dans le cas SISO on a vu que  $\|g\|_{\infty}$  est le pic de résonance dans le diagramme de Bode de  $g(j\omega)$ ; de la même manière, pour les systèmes MIMO,  $\|G\|_{\infty}$  est la plus grande valeur dans le diagramme de  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ .

Nous allons utiliser les valeurs singulières pour analyser la stabilité et les performances des systèmes multivariables; pour commencer, nous introduisons la notion de sensibilité.

## 2.2 Sensibilité

La sensibilité de la sortie  $y$  par rapport aux variations d'un paramètre  $a$  est définie par

$$S_a^y = \frac{y}{\frac{\partial y}{\partial a} a} \quad (2.28)$$

Bode fut le premier à étudier la sensibilité d'un système en boucle fermée par rapport aux variations du modèle[1.3].

Soit les deux systèmes SISO des figures(2.1),(2.2).

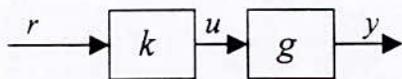


Figure 2.1

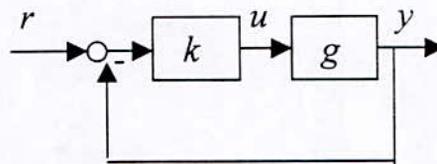


Figure 2.2

En boucle ouverte on a:

$$y = gk r \quad (2.29)$$

$$S_g^y = 1 \quad (2.30)$$

Les variations de  $G$  sont directement transmises à la sortie.

En boucle fermée:

$$y = [gk / (1 + gk)] r \quad (2.31)$$

$$S_g^y = [1 / (1 + gk)] \quad (2.32)$$

On définit la fonction de sensibilité par:

$$S = 1/(1 + gk) \quad (2.33)$$

On définit aussi la fonction de sensibilité complémentaire par:

$$T = gk/(1 + gk) \quad (2.34)$$

$S$  est l'inverse de la fonction de différence retour  $(1 + gk)$ .

$T$  est la fonction de transfert en boucle fermée du système.

Nous avons  $S + T = 1$ .

la relation (2.32) montre que l'effet des variations du modèle sur la sortie du système en boucle fermée dépend de la fonction de sensibilité  $S$ .

La relation (2.32) nous permet de d'écrire:

$$|S| \ll 1 \Rightarrow \text{le système est insensible aux variations de } g.$$

$$|S| > 1 \Rightarrow \text{les variations de } g \text{ sont amplifiées à la sortie.}$$

Mais il ne faut pas oublier que la fonction de sensibilité est définie par une dérivée, c'est à dire que la relation (2.32) n'est valable que pour les **faibles variations 'paramétriques' de  $g$** .

Nous allons voir dans (§2.4) que la robustesse du système pour un autre type d'incertitudes impose que  $T$  soit faible, contrairement à ce que nous venons de voir.

Dans le cas MIMO, le modèle et le compensateur sont représenté par les matrices de transfert  $G$ ,  $K$ ,  $S$  et  $T$  sont des matrices et sont définies par:

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (2.35)$$

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (2.36)$$

En multivariable les 'gain' de  $S$  et de  $T$  n'étant plus définis, on utilise les valeurs singulières afin de pouvoir voir l'effet des faibles variations 'paramétriques' de  $G$  sur le système en boucle fermée.

La relation (2.26) nous permet d'écrire:

La sensibilité est faible si sa plus grande valeur singulière est faible.

Elle est élevée si sa plus petite valeur singulière est grande.

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Rightarrow \text{la sensibilité est faible.} \quad (2.37)$$

$$\underline{\sigma}(S) > 1 \Rightarrow \text{le système est plus sensible qu'en boucle ouverte.} \quad (2.38)$$

Mais généralement à cause de fait que  $S + T = I$ .

On ne peut pas avoir  $\bar{\sigma}(S(j\omega)) < 1$ ,  $\forall \omega$ .

Il y a d'autres spécifications à vérifier, c'est ce que nous allons voir dans les sections suivantes.

## 2.3 Performances Nominales

On utilise les valeurs singulières pour analyser les performances d'un système multivariable [1,2,3].

Soit le système de commande suivant :

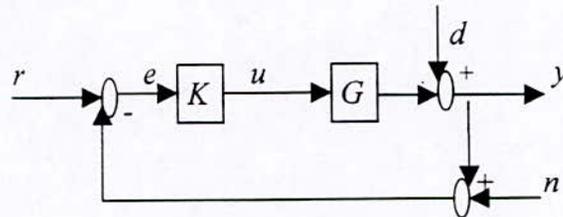


Figure 2.3

$r$  : référence.  
 $d$  : perturbation.  
 $n$  : bruit de mesure.

Nous avons les relations suivantes:

$$y(s) = GK(I + GK)^{-1}(r - n) + (I + GK)^{-1}d \quad (2.39)$$

$$u(s) = K(I + GK)^{-1}(r - n - d) \quad (2.40)$$

$$e(s) = (I + GK)^{-1}(r - n - d) \quad (2.41)$$

En utilisant S et T:

$$y(s) = T(r - n) + Sd \quad (2.42)$$

$$u(s) = KS(r - n - d) \quad (2.43)$$

$$e(s) = S(r - n - d) \quad (2.44)$$

### 2.3.1 Poursuite

La poursuite de  $r \Leftrightarrow e \rightarrow 0$ .

à partir de (2.44), l'erreur est faible si  $\bar{\sigma}(S) \ll 1$

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Rightarrow \text{une bonne poursuite} \quad (\text{I})$$

### 2.3.2 Rejet des Perturbations

A partir de (2.42), la perturbation  $d$  est rejetée si le gain de la fonction de sensibilité est faible et donc :

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Rightarrow \text{rejet des perturbations en sortie} \quad (\text{II})$$

### 2.3.3 Bruit de Mesure

A partir de(2.42), le bruit de mesure est atténué si  $T$  est faible:

$$\bar{\sigma}(T) \ll 1 \Rightarrow \text{atténuation du bruit de mesure} \quad (\text{III})$$

Mais pour une bonne poursuite on a  $\bar{\sigma}(S) \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(T) \rightarrow 1$ .

Remarquons que lorsque le système suit la référence, le bruit de mesure est directement transmis à la sortie.

### 2.3.4 Remarques

De (I) et (II) on peut voir que la poursuite de la référence  $r$  et le rejet de la perturbation  $d$  sont deux objectifs compatibles.

A partir de (I),(II) et(III) et en se rappelant *que*  $S+T=I$  on voit qu'il n'est pas possible de réaliser une bonne poursuite et une atténuation du bruit de mesure simultanément.

Heureusement pour nous que les bruits de mesure sont généralement de haute fréquence, et les consignes à suivre ainsi que les perturbations sont de basse fréquence.

Un bon comportement du système revient à avoir:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(S) < 1 & \omega < \omega_B \\ \bar{\sigma}(T) < 1 & \omega > \omega_B \end{cases} \quad (2.45)$$

$\omega_B$  délimite les basses fréquences , c'est en quelque sorte la bande passante du système.

Où en utilisant ( $S$ ) seulement

$$\bar{\sigma}(W_S S) < 1 \quad (2.46)$$

Avec  $W_S$  une fonction de transfert ayant un gain élevé pour les basses fréquences, permettant ainsi de garantir l'objectif (2.45).

Nous allons voir maintenant comment étudier la Robustesse d'un système de commande.

## 2.4 Stabilité Robuste

Pour étudier la stabilité Robuste d'un système, il faut avoir des informations sur les erreurs de modélisation.

Il existe plusieurs manières pour représenter les variations du modèle.

### 2.4.1 Représentation des Incertitudes

On peut représenter un système par une matrice de transfert avec des paramètres incertains, ou par sa représentation d'état (A, B, C, D) et ( $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta C$ ,  $\delta D$ ).

Dans le cadre de la commande  $H_\infty$  on représente le système perturbé par une matrice de transfert nominale, et une **incertitude non structurée** sous forme de matrice de transfert linéaire invariante  $\Delta(s)$  [1,2,3,8].

Une incertitude non structurée est une incertitude qui n'est connue que par une majoration de sa norme.

$$\bar{\sigma}(\Delta(s)) < \delta(s) \quad , \forall s = j\omega \quad (2.47)$$

Donc

$$\Delta = \{ \Delta(j\omega), \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \delta(j\omega) \} \quad (2.48)$$

$\Delta$  représente un ensemble infini de Matrices de transfert.  
Le système perturbé par  $\Delta$  peut être représenté de plusieurs manières.

#### Incertitudes Additive

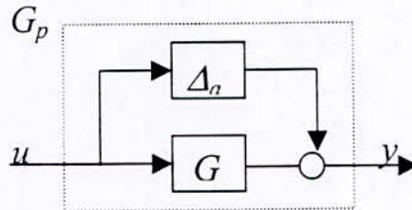


Figure 2.4

G : Matrice de transfert nominale.  
 $\Delta_a$  : incertitude additive.

$$\bar{\sigma}_{\Delta_a}(j\omega) < \delta_a(j\omega) \quad (2.49)$$

Le système perturbé est donné par:

$$G_p(s) = \{ G(s) + \Delta_a(s), \bar{\sigma}(\Delta_a(s)) \leq \delta_a(s) \} \quad (2.50)$$

#### Incertitude Multiplicative

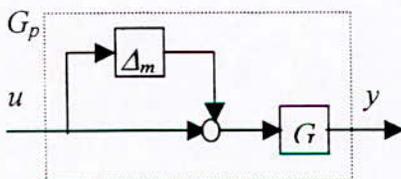


Figure 2.5

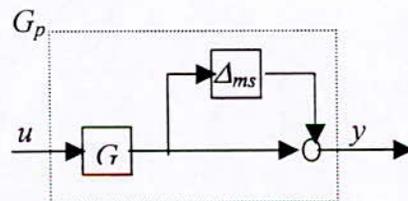


Figure 2.6

la figure (2.5 )représente une incertitude multiplicative en entrée.

$$G_p(s) = \{G(s)(I + \Delta_m(s)) / \bar{\sigma}(\Delta_m(s)) \leq \delta_m(s)\} \quad (2.51)$$

Puisque en multivariable le produit matriciel n'est pas commutatif, on représente dans la figure (2.6) une incertitude multiplicative en sortie.

$$G_p(s) = \{(I + \Delta_{ms})(G(s)) , \bar{\sigma}(\Delta_{ms}(s)) \leq \delta_{ms}(s)\} \quad (2.52)$$

### Remarques

On peut représenter le système par des incertitudes inverses,  $\Delta$  est un bloc de retour.

Les incertitudes en entrée représentent les erreurs dues aux actionneurs tandis que l'effet des capteurs peut être représenté par des incertitudes en sortie.

Lorsqu'on a plus d'informations sur l'incertitude, il est préférable d'utiliser des incertitudes structurées, car comme nous allons le voir les incertitudes non structurées tendent à "dramatiser";

On peut sacrifier des performances pour garantir la stabilité à une classe de systèmes, qui ne se réalisera pas en réalité.

Mathématiquement le non structuré est plus facile à résoudre.

### 2.4.2 Le Théorème du Petit Gain 'The Small Gain Theorem'

Ce théorème est la base des théorèmes de stabilité Robuste qui suivront [1,2,3] :

Soit le système représenté par

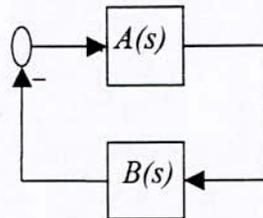


Figure 2.7

Pour  $A(s)$  et  $B(s)$  des fonctions de transfert propres et stables.

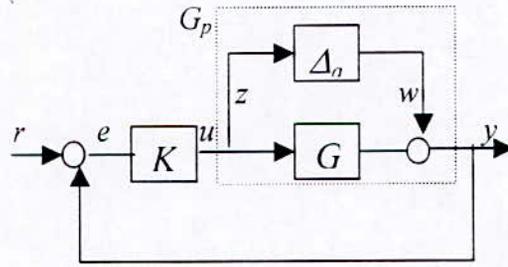
si :

$$\bar{\sigma}(A(j\omega)) \bar{\sigma}(B(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in \mathcal{R} \quad (2.53)$$

le système est **stable**.

Nous allons voir comment appliquer ce théorème pour déduire des conditions de stabilité pour les systèmes perturbés décrits dans la section précédente.

**Pour les Incertitudes Additives**



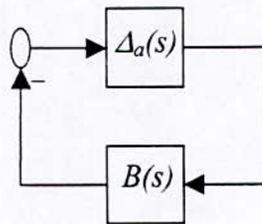
**Figure 2.8**

Soit le système de la figure (2.8):

Pour étudier la stabilité robuste, on doit se ramener au schéma de la figure (2.7).  
 Nous avons:

$$z = K(I + GK)^{-1} w$$

Le système est équivalent à la figure (2.9) avec :



**Figure 2.9**

avec

$$B(s) = K(I + GK)^{-1} \tag{2.54}$$

Pour appliquer le théorème, il faut que :

- Δ(s) soit stable
- B(s) soit stable ⇒ K(s) stable et stabilise G.

Pour ces conditions vérifiées on a donc :

Le système est stable si :

$$\bar{\sigma}(K(I + GK)^{-1}) \bar{\sigma}(\Delta) < 1 \tag{2.55}$$

et puisque :

$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) \leq \delta_a(j\omega) \tag{2.56}$$

on peut écrire

Pour K(s) stabilisant le système nominal, le système reste stable sous l'effet de Δ<sub>a</sub>(s)

$$\text{Si } \bar{\sigma}(KS)\delta_a(s) < 1, \forall s = j\omega \tag{2.57}$$

### Pour les Incertitudes Multiplicatives

De la même manière on obtient:

$K(s)$  stabilisant le système nominal, le système reste stable pour toute  $\Delta_m(s)$  stable

$$\text{Si } \overline{\sigma}(T)\delta_m(s) < 1, \forall s = j\omega \quad (2.58)$$

Pour une incertitude multiplicative en sortie, on a la même relation avec  $T_0$  à la place de  $T$

$$T_0 = KG(I + KG)^{-1} \quad (2.59)$$

En général, pour toute forme d'incertitude  $\Delta$ :

On met le système sous la forme de la figure (2.7), avec  $A = \Delta$ .

La condition suffisante de stabilité robuste est directement déduite du théorème du petit gain.

On se restreindra à ses deux formes d'incertitudes car ce sont les plus utilisées.

#### 2.4.4 Marges de stabilité Additive et Multiplicative

La marge de stabilité additive (ASM) est définie comme la norme infinie de la plus petite incertitude additive  $\Delta_a(s)$  déstabilisant le système.

De la même manière on définit la marge de stabilité Multiplicative (MSM).

La condition de stabilité robuste pour incertitudes additives est:

$$\overline{\sigma}(KS) \overline{\sigma}(\Delta_a) < 1 \quad (2.60)$$

$$\Leftrightarrow \|KS\|_\infty \|\Delta_a\|_\infty < 1 \quad (2.61)$$

et donc

$$\|\Delta_a\|_\infty < \frac{1}{\|KS\|_\infty} \quad (2.62)$$

$$\text{Toute incertitude additive de norme infinie } < ASM = \frac{1}{\|KS\|_\infty} \quad (2.63)$$

garantit la stabilité du système perturbé.

La condition suffisante de stabilité (2.63) est plus restrictive que (2.57), mais elle présente l'avantage quelle est indépendante de la fréquence  $\omega$ .

De la même manière, on a pour les incertitudes multiplicatives:

$$\bar{\sigma}(T) \bar{\sigma}(\Delta_m) < 1 \quad (2.64)$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta_n\|_\infty < \frac{1}{\|T\|_\infty} \quad (2.65)$$

donc 
$$MSM = \frac{1}{\|T\|_\infty} \quad (2.66)$$

Le principe de la commande  $H_\infty$  est de maximiser  $ASM$ , ou  $MSM$  et donc minimiser  $\|KS\|_\infty$  où  $\|T\|_\infty$ .

Pour nous familiariser avec les valeurs singulières, les notions de  $S$ ,  $T$  et  $ASM$ ,  $MSM$ , nous allons reprendre un exemple proposée dans [1]

## 2.5 Exemple

Soit le système multivariable défini dans l'espace d'état par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.67)$$

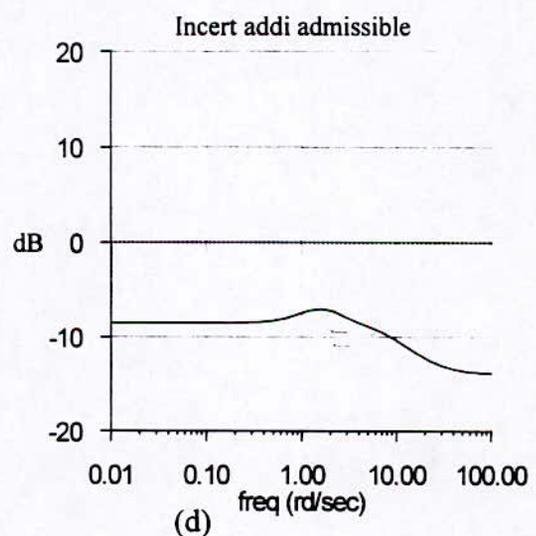
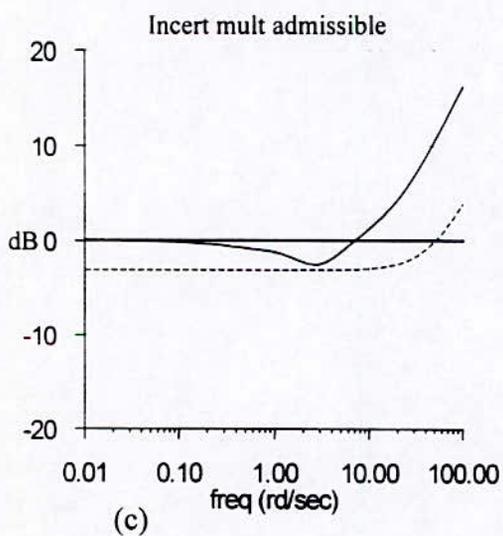
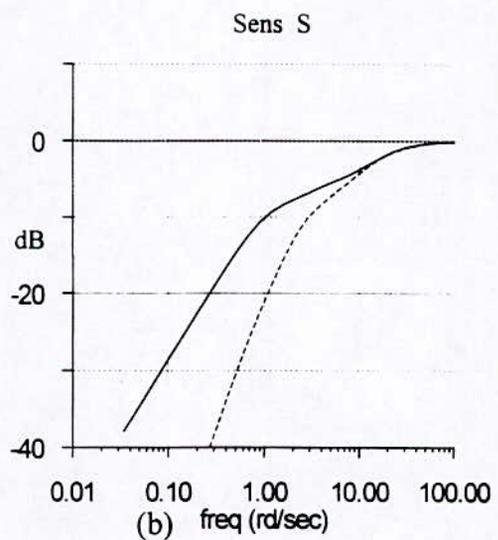
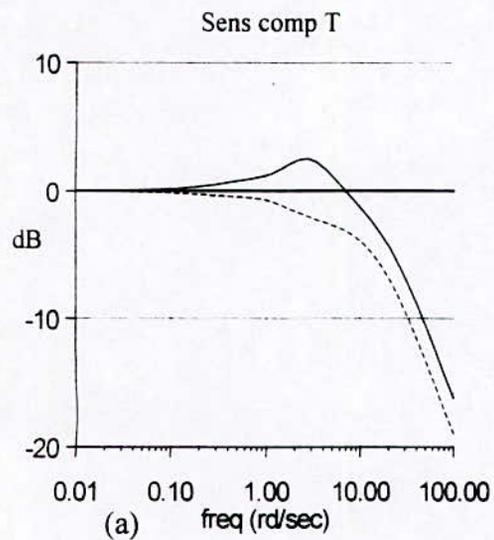
$$A = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.675 \\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple, nous n'allons pas synthétiser une commande mais analyser la commande proposée dans [1].

Limbeer propose le compensateur PI suivant :

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2 + \frac{2}{s} \\ -5 - \frac{8}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$



**Figure 2.10** diagrammes fréquentiels, (a) représente  $\bar{\sigma}(T)$  et  $\underline{\sigma}(T)$ , (b)  $\bar{\sigma}(S)$  et  $\underline{\sigma}(S)$ , (c)  $1/\bar{\sigma}(T)$  et  $\bar{\sigma}(\Delta)$ , (d) représente  $1/\bar{\sigma}(KS)$ .

### 2.5.1 Réponses Fréquentielles:

Dans la figure (2.10) (a) et (b) on représente les valeurs singulières de (S) et (T).

A partir de la figure (2.10.a) on peut voir que le système possède une bande passante de 10rd/sec, et chute par -20dB/dec pour les hautes fréquences.

Et de même on peut bien voir des diagrammes que  $S + T = I$ , en effet pour les faibles fréquences T est au voisinage de 0dB alors que  $\bar{\sigma}(S)$  est très faible, en haute fréquences c'est l'inverse.

La robustesse vis à vis des incertitudes additives et multiplicatives est déterminé par les valeurs singulières de  $1/KS$  et  $1/T$ .

$\underline{\sigma}(1/KS) = 1/\bar{\sigma}(KS)$  ( resp,  $1/\bar{\sigma}(T)$  ) représente la limite des incertitudes additives (resp, multiplicatives) pour lesquels on est sûr que le système reste stable.

Le fait que  $1/\bar{\sigma}(T)$  augmente pour les hautes fréquences signifie que notre système tolère des incertitudes dont l'amplitude peut être supérieure à 1 pour les fréquence  $> 10\text{rd/sec}$ .

Pour les incertitudes additives, le système est plus sensible car  $1/\bar{\sigma}(KS)$  tend vers (-15dB) pour  $\omega \rightarrow \infty$ .

En utilisant les définitions, on calcul les marges de stabilité additives et multiplicatives à partir des figures (c) et (d), On trouve:

$$\begin{aligned} \text{ASM} &= 0.2 \\ \text{MSM} &= 0.74 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Les diagrammes (c) et (d) sont un meilleur indicateur de robustesse que ASM et MSM.

### 2.5.2 Réponses temporelles

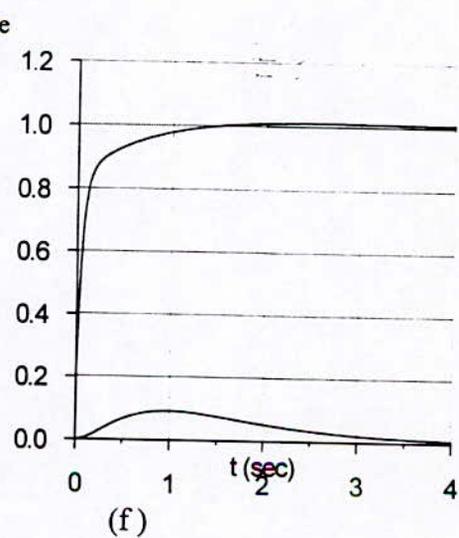
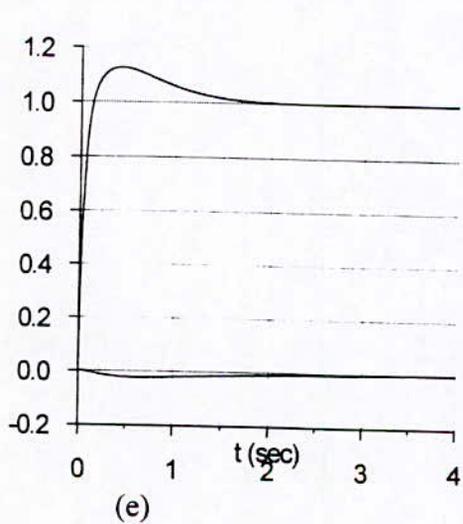
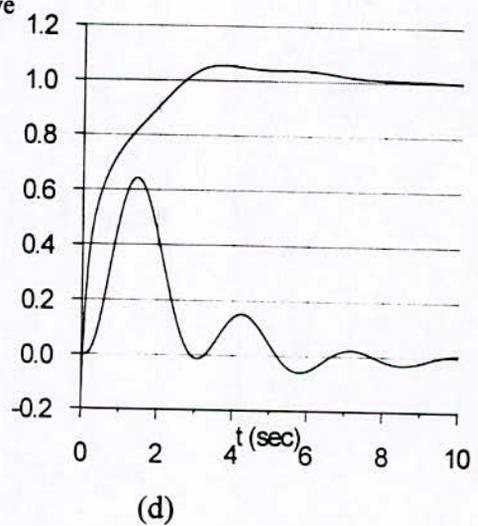
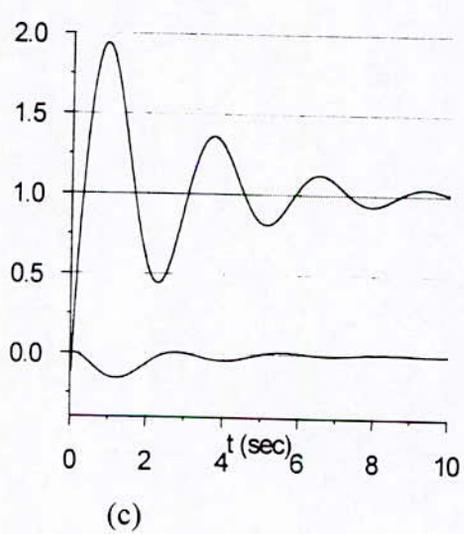
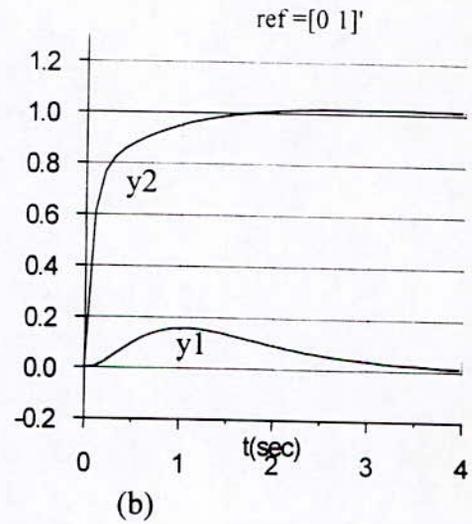
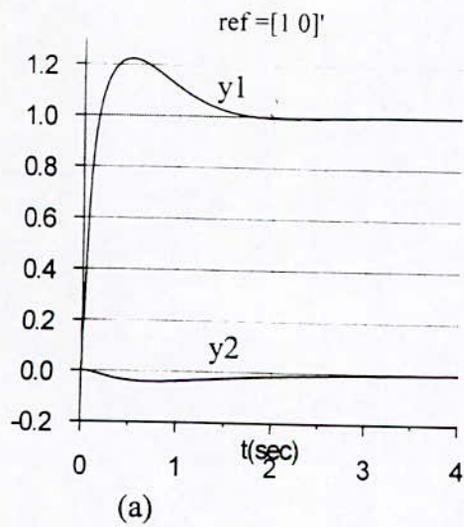
Dans la figure (2.11) nous avons présenté les réponses temporelles pour le système nominal (a) et (b), puis pour le système perturbé par une incertitude multiplicative positive (c)et(d), et négative (e) et (f), l'incertitude est représenté dans la figure (2.10.c).

Le système nominal possède un temps de 2 secondes avec un dépassement de 20% sur  $y_1$ . Les dynamiques de  $y_2$  et  $y_1$  sont découplés.

On remarque que la réponse de  $y_2$  ne présente pas de dépassement, ce qui veut dire que  $y_2$  et  $y_1$  n'ont pas le même amortissement.

En fréquentiel on peut expliquer cette remarque par le fait que  $\bar{\sigma}(T)$  possède un pic de résonance tandis que  $\underline{\sigma}(T)$  est plus amortis.

*Cette remarque nous rappelle que les caractéristiques du système sont déterminés par toutes ses valeurs singulières et non  $\bar{\sigma}$  seulement.*



**Figure 2.11:** réponses temporelles, (a) et (b) système nominal, (c) et (d) système perturbé avec une Incertitude multiplicative  $-\Delta(s)$ , (e) et (f) système perturbé avec  $+\Delta(s)$ .

Dans la figure (2.10.c) on remarque que l'incertitude utilisée vérifie bien la condition de stabilité robuste de l'équation(2.58).

A partir des figures on voit que l'incertitude multiplicative positive améliore les performances du système alors que pour l'incertitude négative le système s'approche de l'instabilité.

Cette remarque nous montre que les marges déduites pour des incertitudes *non-structurées* sont très pessimistes (conservatives).

## 2.6 Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons vu que :

Les valeurs singulières nous permettent de généraliser les notions de Gain, de Bande passante et de Robustesse pour les systèmes MIMO.

Le théorème du petit gain nous a permis d'avoir des conditions suffisantes de stabilité Robuste.

On représente le système perturbé par un système nominal et des incertitudes linéaires bornées.

La poursuite et le rejet de perturbation reviennent à minimiser  $\bar{\sigma}(s)$ . Tandis que la stabilité Robuste et l'atténuation des bruits de mesure reviennent à minimiser  $\bar{\sigma}(T)$ .

Le problème de la commande est la recherche du meilleur compromis Robustesse/Performance.

## Chapitre 3

## Chapitre 3

# Synthèse d'une Commande Robuste

Après avoir vu comment analyser les performances et la Robustesse d'un système, nous allons voir comment synthétiser une commande linéaire robuste .

Nous verrons d'abord la Robustesse pour les méthodes de synthèses "classiques" et pour la commande L.Q.G.

### 3.1 Méthodes Classiques

Par méthodes classiques on veut dire la synthèse de régulateur P-I-D ou avance retard de phase, basée sur les diagrammes de Bode, Niquist, Black et le lieu d'Evans.

Ces méthodes sont appliquées pour les systèmes SISO.

Pour un système multivariable, il est nécessaire de **découpler** le système pour se ramener à la synthèse de régulateurs SISO.

Cette méthode est très intéressante et elle est sûrement applicable pour une bonne classe de systèmes, mais elle présente quelques difficultés.

La première difficulté est liée au découplage du système.

La synthèse se fait sur le modèle nominal, et donc le découplage n'est réalisé que sur le modèle nominal.

Le problème qui se pose aussi est qu'il n'y a pas de relation directe entre la "Robustesse" des systèmes SISO et la "Robustesse" du système MIMO initial.

C'est à dire, de bonnes marges de Gain et de phase pour les systèmes SISO, n'impliquent pas une stabilité Robuste du système MIMO initial.

La dernière remarque concerne l'utilisation des **marges de Gain et de phase** comme indicateurs de Robustesse.

Par définition la marge de Gain est la variation de Gain admissible avant l'instabilité du système, mais ce qu'il faut noter dans cette définition est qu'on parle seulement de variation de Gain, tout les autres paramètres du système sont supposés constants.

Et de même pour la marge de phase, on parle de déphasage seulement.

Les incertitudes réelles ne sont jamais un Gain seul ou un retard seul.

On peut donc avoir une marge de Gain de 20 DB, et une marge de phase de 60° Mais un Gain de 5 DB et un retard de 20° simultanés, peuvent déstabiliser le système.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les marges de stabilité sur les incertitudes non structurées peuvent être très "pessimiste", et nous pouvons dire donc que les marges de phase peuvent être très "optimiste".

Le problème est donc de trouver un indicateur de Robustesse "réaliste".

Il y a aussi les méthodes telles que "Quantitative Feedback Théorie", qui sont une généralisation de ces méthodes de synthèses pour les systèmes MIMO [3.6].

### 3.2 Robustesse de la Commande Linéaire Quadratique

Le problème de la commande optimale linéaire quadratique est de trouver la commande qui minimise le critère :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.1)$$

pour le système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans le cas où (A,B) est commandable et (A,Q) observable, la solution est donnée par :

$$u = -R^{-1} B' P x = -Kx \quad (3.3)$$

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0 \quad (3.4)$$

La commande est un retour d'état.

Le problème réel de l'automaticien n'est pas de minimiser le critère mais de choisir les matrices de pondérations Q et R afin de réaliser les différents compromis du cahier de charge.

#### 3.2.1 Marges de Stabilité de la commande LQ

Pour raisons de simplicité nous allons étudier les marges de gain et de phase de la commande linéaire quadratique dans le cas SISO, le cas MIMO est traité dans [1,3,4,15].

Nous allons utiliser le schéma de la figure (3.1).

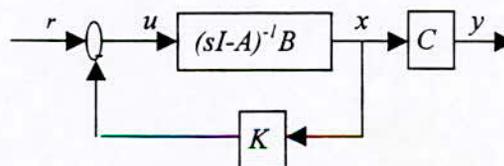


Figure 3.1

La stabilité du système dépend de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{LQ}(s) = K(sI - A)^{-1}B \quad (3.5)$$

Avant de parler de robustesse il faut parler de la stabilité.

Dans [4] on démontre que les valeurs propres de  $(A-BK)$  avec  $K$  issus de la commande LQ, sont toutes à partie réelles négative : et donc le système en boucle fermée est stable.

La base de notre raisonnement est que pour  $K$  vérifiant (3.3), nous avons l'inégalité suivante sur la fonction de différence retour :

$$\boxed{|1 + G(j\omega)| \geq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}} \quad (3.6)$$

ou  $|S| \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.6')$

Nous allons utiliser ce résultat pour établir les marges de gains et de phases du système.

L'inégalité précédente signifie que le diagramme de Nyquist du système *ne passe pas* par le disque de centre  $(-1+0j)$  et de rayon l'unité.

La figure ci dessous représente les représentations que peut prendre le diagramme de Nyquist en vérifiant l'inégalité (3.6).

On prenant les cas limites on peut voir facilement : qu'une **marge de gain infini** et **une réduction de 1/2** sont toujours garanties.

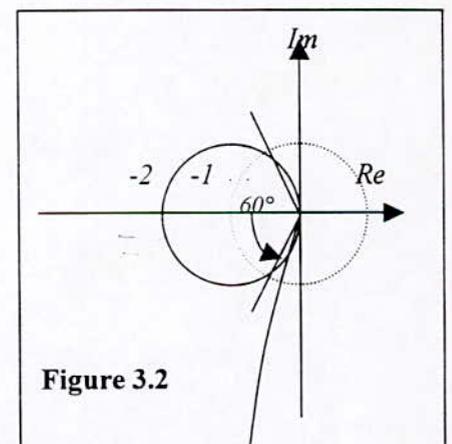
C'est à dire qu'on peut introduire un gain appartenant à l'intervalle  $]1/2, \infty[$  sans changer le nombre d'encerclement du point  $(-1+0j)$ , donc sans déstabiliser notre système.

Pour la marge de phase, on trace le cercle de centre l'origine et de rayon unité, les points d'intersection avec le cercle de centre  $(-1+0j)$  sont les points limites possédant une marge de phase minimale.

Pour calculer cette marge de phase remarquons que les deux triangles formés par les points  $(-1+0j)$ ,  $(0+0j)$ , et les deux points d'intersection sont isocèles et donc la **marge de phase minimale est  $\pm 60^\circ$** .

C'est à dire qu'on peut introduire un déphasage  $\theta \in ]-60^\circ, 60^\circ[$  sans déstabiliser le système.

On voit donc que les marges de Gain de phase de la commande L.Q sont très satisfaisantes et lui ont valu la *réputation* d'être une commande "Robuste".



### 3.2.2 Robustesse de la commande LQG

En pratique, les états du système ne sont pas tous accessibles, et donc l'implémentation de la commande L.Q sous forme de retour d'état n'est pas possible.

Alors, on utilise un observateur d'état et pour rester dans l'optimale, on utilise le filtre de Kalman, la commande avec filtre de Kalman est connue sous le nom de la commande L.Q.G linéaire quadratique Gaussienne.

La commande est donnée par les équations suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fv \quad (3.7)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Ke(y - C\hat{x}) \quad (3.8)$$

$$y = Cx + w \quad (3.10)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (3.11)$$

et schématisé dans la figure (3.3)

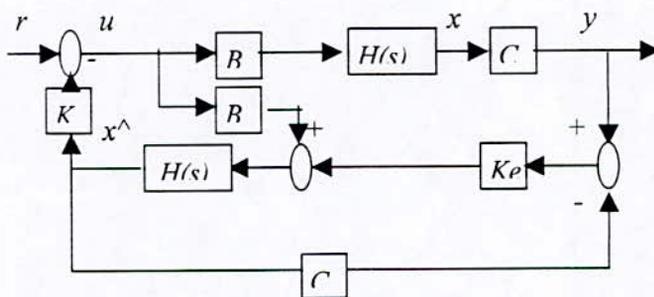


Figure 3.3

Avec

$$H(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.12)$$

$K$  est donné par (3.3) et (3.4).

$Ke$  est donné par des équations duales à (3.3) et (3.4) dépendant de  $F$ ,  $V$  et  $W$ .

$V$  et  $W$  sont les matrices de covariances des bruits blanc  $v$  et  $w$  [4,7].

Pour pouvoir étudier les caractéristiques de robustesse nous avons le schéma équivalent suivant :

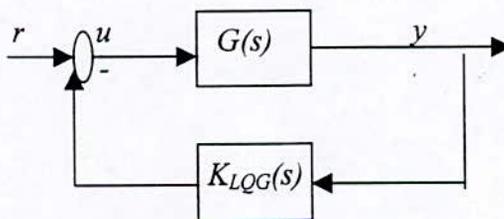


Figure 3.4

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (3.13)$$

$$K_{LQG}(s) = K(sI - A + BK + KeC)^{-1} Ke \quad (3.14)$$

La fonction de transfert du contrôleur LQG est déduite des équations (3.7-3.11).

La stabilité est déterminée par la fonction de transfert en boucle ouverte (en entrée) :

$$G_{LQG}(s) = K(sI - A + BK + KeC)^{-1} KeC(sI - A)^{-1} B \quad (3.15)$$

On remarque que  $G_{LQG}(s)$  est très différente de  $G_{LQ}(s)$ .

**L'inégalité de la fonction différence retour n'est pas vraie** pour la commande LQG.

Ce qui veut dire que nous n'avons **aucune garantie** sur la robustesse du système.

Dans la littérature [4.15], on présente plusieurs exemples de commande LQG possédant des marges de Gain de phase très faible.

Les propriétés de Robustesse de la commande LQG doivent être étudiées après la synthèse, c'est un inconvénient majeur, car dans l'industrie, on a ni le temps ni l'argent à gaspiller dans les essais.

Cet inconvénient de la commande LQG a été le point de départ des recherches portant sur la commande Robuste "a priori".

### 3.2.3 LQG / LTR

Avant d'arriver à la commande  $H_\infty$ , il y a eu plusieurs méthodes d'amélioration de la commande LQG. Parmi lesquelles la commande LQG/LTR est celle qui a connue une grande utilisation.

LQG / LTR : LQG avec Loop Transfer Recovery ou avec recouvrement de boucle.

Le principe est d'agir sur les matrices de pondération Q et R où les matrices de covariance V et W afin de retrouver les propriétés de Robustesse de la commande LQ avec retour d'états.

Le fondement est le théorème suivant :

**Théorème** [3,4,5,16]

Pour Q et R déterminé,

et  $W = W_0$ ,  $V = \sigma V_0$

Alors

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G_{LQG}(s) = G_{LQ}(s) \quad (3.16)$$

$G_{LQG}(s)$  fonction de transfert en boucle ouverte pour la commande LQG (3.15).

$G_{LQ}(s)$  fonction de transfert en boucle ouverte de la commande LQ (3.5).

Puisque  $G_{LQG}(s) \rightarrow G_{LQ}(s)$ , les propriétés de robustesse de la commande LQG tendent vers celle de la commande LQ qui sont considérées satisfaisantes.

*La méthode de synthèse est la suivante :*

- 1- Traduire le cahier de charge sous forme d'une fonction de transfert en boucle ouverte désirée "Loop Shaping".
- 2- Trouver Q et R qui permettent d'avoir  $G_{LQ}(s) = K(sI - A)^{-1}B$  comme spécifiée dans l'étape 1, calculer K.
- 3- Pour  $W_0$  et  $V_0$  spécifiées, augmenter  $\sigma$ , calculer le gain du filtre de Kalman  $K_e$ , comparer  $G_{LQG}(s)$  avec  $G_{LQ}(s)$ , on s'arrête d'augmenter pour un bon comportement de  $G_{LQG}(s)$ .

### Remarques

La commande LQG /LTR est considérée comme une méthode de synthèse Multivariable et assez efficace.

Elle représente l'inconvénient de simplifier les zéros du système, ce qui implique qu'elle n'est pas **directement** applicable aux systèmes à phase non-minimale.

Le développement de la commande  $H_\infty$ , s'est accompagné d'une nouvelle interprétation des commandes linéaires quadratique dans le domaine fréquentiel, où elles sont appelées les commandes  $H_2$ , et on a donc développé les solutions pour la commande LQG à pondérations fréquentielles.

## 3.3 La Commande $H_\infty$

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment traduire le cahier de charges sous forme de minimisation de normes infinies.

Pour ne pas avoir à traiter chaque problème indépendamment, on utilise une forme standard, laquelle peut regrouper tous les problèmes de la commande  $H_\infty$ .

### 3.3.1 Le Problème Standard

Soit le schéma général de la figure (3.5) :

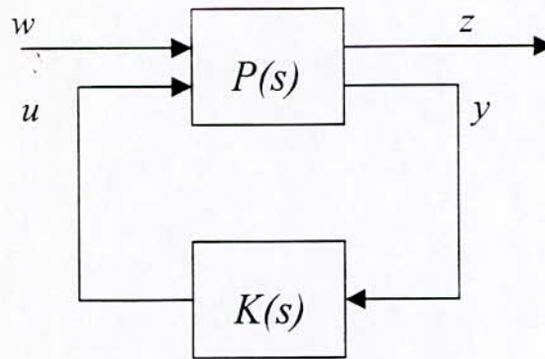


Figure 3.5

$y$  : le vecteur des mesures.

$w$ : les entrées extérieures (consigne, perturbation).

$u$ : les commandes.

$z$  : les signaux à minimiser ( les indicateurs de performances et de robustesse).

Le problème standard est posé de la manière suivante :

Trouver le compensateur  $K(s)$  qui stabilise  $P$  et minimise  $\|T_{zw}\|_{\infty}$ .

$T_{zw}$  est la matrice de transfert entre  $w$  et  $z$

$P(s)$  est le système augmenté qui nous permet de générer  $z$  correspondant aux objectifs de la commande.

$P$  est représenté dans l'espace d'état par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Ou par sa Matrice de transfert :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{21} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Puisque les solutions du problème standard sont connues ( ), alors le seul problème qui reste est de transformer notre problème de commande en un problème standard.

### 3.3.2 Mise des Problèmes sous Formes Standard

Nous allons présenter le principe par un exemple.

Soit le système de la figure(3.6) :

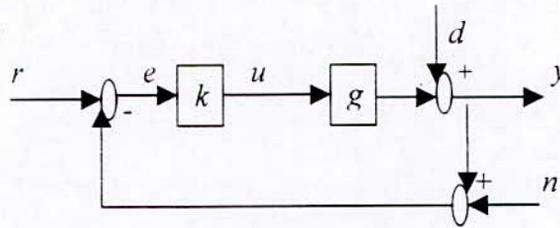


Figure 3.6

Les objectifs de la commande sont (§2.3)(§2.4):

Rejeter de la perturbation  $d$   
Poursuite de la référence  $r$

$$\Rightarrow \text{minimiser } \|W_S S\|_{\infty} \quad (3.19)$$

Atténuation du bruit de mesure  $n$   
Maximiser la marge de stabilité multiplicative  
(incertitude multiplicative en entrée)

$$\Rightarrow \text{minimiser } \|W_T T\|_{\infty} \quad (3.20)$$

Maximiser la marge de stabilité Additive  
Limiter l'amplitude de la commande.

$$\Rightarrow \text{minimiser } \|W_U K S\|_{\infty} \quad (3.21)$$

$$\text{donc on veut minimiser } \left\| \begin{pmatrix} W_S S \\ W_T T \\ W_U K S \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.22)$$

On peut représenter le problème standard équivalent par le schéma :

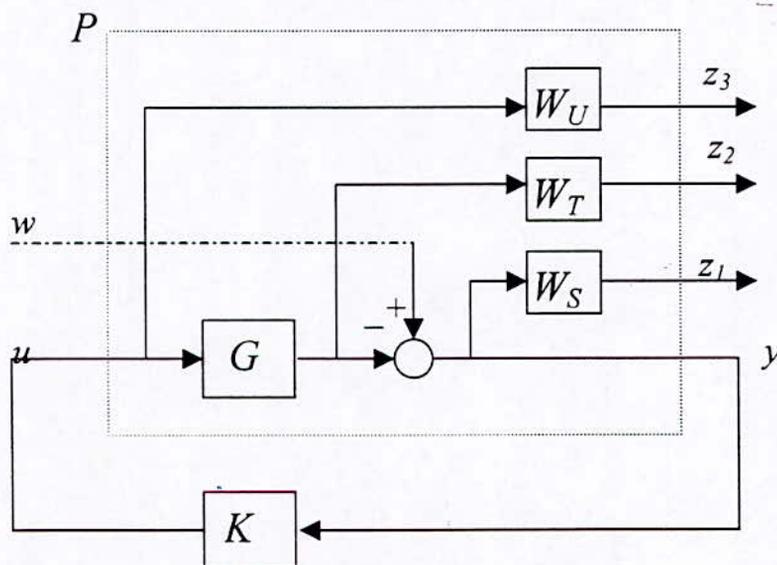


Figure 3.7

$$\begin{aligned}
 y &= -Gu + w \\
 z_1 &= W_S(-Gu + w) \\
 z_2 &= W_T(Gu) \\
 z_3 &= W_U u
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_S & | & -W_S G \\ 0 & | & W_T G \\ 0 & | & -W_U \\ \hline I & | & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}
 \tag{3.24}$$

en remplaçant  $u$  par  $Ky$ , on voit bien que :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \\ W_U K S \end{bmatrix}
 \tag{3.25}$$

C'est ce dernier problème qui est résolu par les programmes *'hinf'* ou *'hinfopt'* du Toolbox 'Robust control' de Matlab [11], on l'appelle 'mixed sensitivity problem'.

On peut avoir d'autre représentation du système augmenté, par exemple, au lieu d'utiliser une entrée exogène ( $w$ ) et plusieurs  $z_i$ , on peut avoir  $w_1, w_2, w_3$  et un seul  $z$ .

### En résumé

la synthèse d'une commande  $H_\infty$  passe par les étapes suivantes :

- 1- Traduire les objectifs  $\| \cdot \|_\infty$
- 2- Choisir les pondérations fréquentielles
- 3- Trouver la Matrice (P) du problème de standard équivalent
- 4- Résoudre le problème d'optimisation
- 5- Tester les performances, si c'est pas bon  $\longrightarrow$  (2)

Dans ce qui suit nous allons voir la solution du problème standard, et comment choisir les pondérations fréquentielles de telle manière à **avoir une solution** qui vérifie le cahier de charge.

### 3.3.3 Solution du Problème Standard

Doyle, G, F,K ont présenté les solutions du problème de commande  $H_\infty$  dans [17].

Ils ont même fait plus car dans '*mu analysis and synthesis toolbox*' de Matlab [10], on trouve les programmes permettant, de retrouver le problème standard à partir du système et des fonctions de pondération et puis de donner la représentation d'état du compensateur directement, sans avoir à faire aucun calcul.

Nous présenterons des solutions au problème de retour d'état et retour de sortie  $H_\infty$ , dans le cadre d'hypothèses simplificatrices, afin de voir la ressemblance existante entre les solutions du problème LQG et  $H_\infty$  [17,31].

Ainsi que pour se familiariser avec les hypothèses à vérifier car avec les Toolbox '*mutools*' et '*Robust*', le seul problème qui reste est de vérifier les hypothèses; après les solutions nous parlerons des hypothèses.

#### Retour d'Etats $H_\infty$

Pour la synthèse d'un retour d'état on suppose que tout les états sont mesurables c'est à dire :

$$y = x \quad (3.26)$$

On fait aussi les hypothèses suivantes :

$$1-(A, B_2) \text{ est stabilisable} \quad (3.26)$$

$$2-D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I] \quad (3.27)$$

$$3-D_{11} = 0 \quad (3.28)$$

$P$  est donné par :

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.29)$$

Le problème est de trouver le compensateur stabilisant  $P$  et minimisant le critère  $\|T_{zw}\|_\infty$ .

la solution suivante est une solution sous-optimale car elle garantit seulement que

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (3.30)$$

## Théorème

Il existe un retour d'états stabilisant  $P$  et vérifiant (3.30)

si et seulement si l'équation de Riccati dont le hamiltonien est :

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Admet une solution  $X$  vérifiant :

$$\begin{aligned} X &> 0 \text{ (définie positive)} \\ X &= X^T \\ X &\text{ est stabilisant} \end{aligned} \quad (3.32)$$

la commande est alors donnée par

$$\begin{aligned} u &= -B_2^T X x \\ u &= -F x \end{aligned} \quad (3.33)$$

## Remarques

- Le Hamiltonien  $\begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A' \end{bmatrix}$  correspond à l'équations de Riccati suivante:

$$A' X + X A + X R X - Q = 0$$

$X$  est stabilisant si  $(A + R X)$  est stable [2,31].

- L'hypothèse (1) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution .

- Les hypothèses (2) et (3) permettent de simplifier l'expression des solutions, et elles peuvent être évitées dans le cas général.

- Remarquons que pour  $\gamma \rightarrow \infty$ , on retrouve la solution de la commande LQ avec :

$$\begin{aligned} Q &= C_1 C_1^T \quad \text{et} \quad R = I \\ J &= \int_0^{\infty} (x^T C_1^T C_1 x + u^T u) dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

- La solution ne minimise pas  $\|T_{zw}\|_{\infty}$ .

Pour minimiser  $\gamma$  il faut procéder par itérations successives, en diminuant  $\gamma$  jusqu'à ce que la solution de l'équation de Riccati ne vérifie plus les conditions (3.32).

Pour notre cas nous n'allons pas utiliser le retour d'états  $H_{\infty}$ , car les états ne sont pas mesurables, nous allons voir la solution au problème  $H_{\infty}$  par retour de sorties.

### La Commande $H_\infty$ par Retour de Sortie [1,2,17]

Toujours pour présenter des solutions simples on prendra le cas où  $D_{11} = D_{22} = 0$

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.35)$$

Les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

$$1- (A, B_2) \text{ stabilisable, } (A, C_2) \text{ détectable.} \quad (3.36)$$

$$2- D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I] \quad (3.37)$$

$$3- \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

#### Théorème [1,2,17]

Les conditions (1), (2), et (3) étant vérifiées

Il existe un compensateur  $K(s)$  stabilisant  $P$  et vérifiant (3.30)

si et seulement si :

1- il existe une solution  $X = X^T \geq 0$  pour l'équation de RICATTI

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

2- et il existe une solution  $Y = Y^T \geq 0$  pour l'équation de RICATTI

$$\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$3- \rho(XY) < \gamma^2 \quad (3.41)$$

$\rho$  : désigne le rayon spectrale d'une matrice (la plus grande valeur propre).

La représentation d'état du compensateur est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L C_2}{F} & \frac{-ZL}{0} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} F = -B_2^T X \\ L = -Y C_2^T \\ Z = (I - \gamma^{-2} X Y)^{-1} \end{cases} \quad (3.43)$$

Le compensateur peut être mis sous la forme d'un retour d'état avec observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1 \hat{d}_p + B_2 u + ZL(C_2 \hat{x} - y) \\ \hat{d}_p &= \gamma^{-2} B_1^T X \hat{x} \\ u &= F \hat{x} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\hat{d}_p$  est un terme supplémentaire qui correspond à l'estimation de  $w$  dans le cas le plus défavorable [1,3,5,31].

### Remarques

- Lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , la condition (3) est impliquée par (1) et (2). ( $\hat{d}_p \rightarrow 0$ ),  $\Rightarrow$  on retrouve le compensateur de la commande LQG [5].
- l'hypothèse (1) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.
- Les conditions (2) et (3) permettent de simplifier l'expression des solutions.
- Le compensateur est du même ordre que le système augmenté  $P$  qui est égale au degré de  $G$  plus celui des fonctions de pondérations.
- Le compensateur que nous avons donné n'est pas la seule solution, il existe une paramétrisation de tous les compensateurs résolvant le problème en fonction d'une matrice  $Q(s)$  stable et propre vérifiant  $\|Q\|_\infty \leq \gamma$ .

En général on utilise le compensateur central que nous avons donné.

Nous allons maintenant voir les conditions à vérifier dans un cadre plus général de la commande  $H_\infty$ , et comment faire **pour les valider**.

### 3.3.4 Les Hypothèses dans un Cadre plus Général

On se situe, dans un cadre plus général, [1,17,31].

$D_{11}, D_{22}$  ne sont pas nuls.

Les hypothèses utilisées pour résoudre le problème  $H_\infty$  sont les suivantes :

$$\text{I. } (A, B_2) \text{ stabilisable et } (A, C_2) \text{ détectable.} \quad (3.45)$$

$$\text{II. } \text{Rang}(D_{12}) = m_2 = \text{Dim}(u), \text{ et } \text{Rang}(D_{21}) = p_2 = \text{Dim}(y), \quad (3.46)$$

$$\text{III. } D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\text{IV. } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{22} \end{bmatrix} = n + m_2, \quad \forall \omega \in R \quad (3.48)$$

$$\text{V. } \text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2, \quad \forall \omega \in R \quad (3.49)$$

Comme nous l'avons déjà dit, la condition ( I ) est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.

Les hypothèses (II), (IV) et (V) garantissent que le problème est bien posé, c'est à dire que le compensateur est propre.

Les hypothèses (IV) et (V) signifient que  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéros sur l'**axe imaginaire**, elles peuvent être évitées [17].

L'hypothèse (III) permet de simplifier la **solution**.

Si l'hypothèse (II) est vérifiée, on peut transformer le système pour vérifier l'hypothèse (III), c'est une opération qui est faite automatiquement par le programme *hinfsyn* ou *hinf* de Matlab.

Le problème qui reste est validation de l'hypothèse II .

### 3.3.5 Validation de l'Hypothèse II

En exécutant l'instruction '*hinfsyn*' de mutools ou '*hinf*' de 'Robust Control Toolbox', le signal d'erreur suivant :

*"matrix D<sub>12</sub> is not in full column rank"*

apparaît souvent.

Ce signal veut dire que l'hypothèse (II) n'est pas vérifiée.

L'hypothèse (II) n'est pas vérifiée lorsque les fonctions de transfert  $P_{12}(s)$  ou  $P_{21}(s)$  ont des zéros à l'infini [31].

Pour remédier à ce problème nous avons trouvé dans la littérature deux solutions:

### Transformation bilinéaire [31]

Elle Consiste à faire le changement de variable

$$s = \frac{\alpha - z}{\beta z - 1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3.50)$$

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 1/\beta \quad (3.51)$$

Les zéros de  $(s)$  à l'infini sont transformés en zéros réels, ce qui permet de vérifier la condition sur rang  $(D_{12})$  et rang  $(D_{21})$ .

Après avoir synthétiser le compensateur pour  $P(z)$ , on fait la transformation inverse pour retrouver le compensateur de notre système initial.

Nous avons essayer cette méthode.

C'est vrais que le signal d'erreur disparaît  $\Rightarrow$  la condition II est vérifiée ;

mais la commande dépend de  $\alpha$  et  $\beta$ , et nous n'avons aucune indication sur la manière de varier  $\alpha$  et  $\beta$  pour obtenir un bon  $(\gamma)$ .

### Méthode des Perturbations

Nous reprenons ici la solution proposée dans l'article [23].

Pour vérifier l'hypothèse (II) nous avons vu que  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  ne doivent pas contenir de zéros à l'infini, l'idée est de modifier le degré relatif de  $G(s)$  sans changer la dynamique du système dans la plage de fréquences qui nous intéresse, (la bande passante).

C'est le même principe qu'on utilise lorsqu'on remplace l'action dérivé  $ks$  par  $ks/(1+\tau s)$

Si on a par exemple

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.52)$$

on prend

$$\hat{G}(s) = \frac{0.01s+1}{s+1} \quad (3.53)$$

et on travaille avec  $\hat{G}(s)$ .

Pour le domaine des fréquence faibles, il n'y a pas de différence entre  $G$  et  $\hat{G}$ .

Le compensateur synthétisé pour  $\hat{G}$  est aussi bon pour  $G$ .

Dans les démonstrations du Toolbox Robust, Chiang et Safonov [11], utilise le même principe mais en choisissant la fonction de pondération  $W_T$ , de telle manière que  $W_T G$  soit de degré relatif zéro.

Pour notre cas nous avons combiné les deux méthodes, agir sur  $W_T$  et agir sur  $G$ .

### 3.3.6 Pôles et Zéros sur l'Axe Imaginaire

Les conditions (IV) et (V) signifient que les zéros de  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$ . ne doivent pas être sur l'axe imaginaire.

Le problème des zéros imaginaires est résolu par les opérations de conditionnements effectuées par les programmes de [10,11].

Le problème se pose aussi lorsque  $G(s)$  qui est représenté par  $P_{22}(s)$  contient des pôles sur l'axe imaginaire, car si  $P_{22}(s)$  contient des pôles sur l'axe imaginaire; en formant la représentation d'état de  $P$ ,  $P_{12}$  et  $P_{21}$  vont contenir des zéros correspondant ou pôles de  $G(s)$ .

Une manière de résoudre le problème des pôles imaginaires de  $G(s)$  est de décaler

$$s \rightarrow s' = s - a \quad (3.54)$$

avec  $a$  assez petit par exemple 0.01.

Le pôle  $s = jb$  est transformé en  $s' = -a + jb$ ,

On fait la synthèse pour  $s'$  et puis on revient vers  $s$ .

Après avoir vu les solutions du problème  $H_\infty$  standard, nous allons voir comment choisir les fonctions de pondérations afin de réaliser un bon compromis Robustesse - Performances.

### 3.3.7 Le Choix des Fonctions de Pondérations

Nous allons nous situer dans le cas d'un problème à sensibilité mixte, c'est à dire le critère est

$$J = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.55)$$

La commande doit vérifier  $J < 1$  et dans le cas optimal minimiser  $J$ .

Le problème standard correspondant est celui de la section (3.3.2) avec  $W_U = 0$ .

Dans le critère précédent :

$\|W_S S\|_\infty$  représente les performances nominales.

$\|W_T T\|_\infty$  représente la stabilité Robuste.

## Le Choix de $W_S$

Les performances sont exigées dans le domaine des Basses fréquences

Alors  $|W_S|$  doit être grand en basses fréquences et faibles en hautes fréquences, donc c'est un filtre passe bas.

Nous allons utiliser une approche par "Loop-shaping", c'est à dire on va considérer  $W_S$  comme Borne supérieure de S en utilisant le fait que :

$$\bar{\sigma}(S) \leq \frac{1}{\sigma(W_S(j\omega))}, \quad \forall \omega \in R \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(W_S S) < 1 \quad (3.57)$$

Pour les systèmes Multivariables on choisit une Matrice de la forme  $W_S = W_S I$ , où  $W_S$  est la fonction de pondération choisie.

Et donc on choisit  $W_S$  pour que S vérifie :

$$\text{Ou} \quad |S(j\omega)| < \frac{1}{|W_S(j\omega)|} \quad (3.58)$$
$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < \frac{1}{|W_S(j\omega)|} \quad \text{pour MIMO}$$

## Erreur Statique

Si on impose dans le cahier de charges une erreur statique minimale :  $ess$ .

Alors puisque nous avons (2.44):

$$e = S r \quad (3.59)$$

pour r échelon unité, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \quad (3.60)$$

on doit donc avoir

$$|S(0)| \leq ess \quad (3.61)$$

Ce qui est vérifié en prenant

$$\frac{1}{|W_S(0)|} \leq ess \quad (3.62)$$

$$|W_S(0)| \geq \frac{1}{ess} \quad (3.63)$$

Ce qui donne une Borne inférieure sur le Gain statique de  $W_S$ .

### Bande passante

Puisque nous sommes toujours contraints par la relation  $S + T = I$ , la bande de fréquences pour laquelle  $\bar{\sigma}(S)$  s'approche de 1 doit être proche de la bande passante désirée de  $T$ .

En général on prend

$$W_S^{-1}(s) = \text{ess} \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2} \quad (3.64)$$

avec

$$\omega_1 \ll \omega_B$$

$\omega_2$  est supérieure à  $\omega_B$

$$(3.65)$$

où  $\omega_B$  est la bande passante désirée

L'article [20] donne l'expression suivante pour  $W_S(s)$ .

en spécifiant :

Erreur statique, et donc  $W_S(0) = 1/\text{ess}$ .

Bande passante désirée  $\omega_B$ .

Gain pour les hautes performances  $W_S(\infty) = 1/M$

$$W_S(s) = \frac{1}{\text{ess}} \frac{1 + s/M\omega_B}{1 + s/\text{ess}\omega_B} \quad (3.66)$$

### Le choix de $W_T$

Nous avons vu qu'une condition suffisante de stabilité Robuste pour incertitude multiplicative (en entrée) est donnée par :

$$\bar{\sigma}(\Delta T) < 1 \quad (3.67)$$

Pour notre critère on vérifie

$$\bar{\sigma}(W_T T) < 1 \quad (3.68)$$

Et donc on doit avoir

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < |W_T(j\omega)|, \quad \forall \omega \in R \quad (3.69)$$

Lorsque nous avons des informations assez précises sur l'amplitude de  $\Delta(j\omega)$ , alors il est essentiel de vérifier l'inégalité précédente.

Comme les incertitudes et les dynamiques négligées sont en général de hautes fréquences,  $W_T(j\omega)$  est un filtre passe haut, et donc favorisant la Robustesse pour les hautes fréquences  $\omega > \omega_\beta$ , et les performances pour les basses fréquences  $\omega < \omega_\beta$ .

Lorsqu'une Borne sur  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))$  n'est pas connue alors on procède par "Loopshaping" comme précédemment et  $|W_T^{-1}(j\omega)|$  est considérée comme une Borne supérieure de  $T(j\omega)$ .

### Remarques

- A cause du fait que l'ordre du compensateur est égal à (ordre de  $G$  + ordre de  $W_S$  + ordre de  $W_T$ ), on essaye toujours de prendre  $W_S$  et  $W_T$  d'ordre 1.

- Pour valider l'hypothèse d'un rang complet de  $D_{12}$  et  $D_{21}$ , on peut choisir  $W_T(s) = ks$  Ou  $ks^2$ , afin que  $P_{12}$  et  $P_{21}$  soit de degré relatif zéro.

- Le choix final de  $W_S$  et  $W_T$  n'est effectué qu'après plusieurs essais, car la nature contradictoire des objectifs nous rend la tâche "difficile".

- En choisissant  $W_S$  et  $W_T$  nous sommes en train de faire un "Loop-Shaping" en boucle fermée, un inconvénient de cette approche est qu'il est possible que les spécifications en boucle fermée soit en contradiction avec la nature du système en boucle ouverte .

Une méthode de synthèse utilisant un Loopshaping en boucle ouverte et l'optimisation  $H_\infty$  est présenté dans ce qui suit.

### 3.4 Synthèse par la Méthode des Facteurs Coprimes Normalisés

Nous allons présenter la commande proposée par Glover et McFarlane dans [2,18,1].

Nous avons présenté des théorèmes sur la stabilité Robuste, en utilisant des incertitudes additives et Multiplicatives.

Nous avons vu que le théorème du petit Gain impose aux incertitudes d'être stable, et donc le nombre de pôles instable du système perturbé est le même que pour le modèle nominal.

Pour montrer les limites de ces représentations, nous allons reprendre l'exemple de [1], soit le système qui a deux pôles incertains de l'axe imaginaire.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 1 + \alpha} \quad (3.70)$$

$$\Delta_a(s) = G_p(s) - G(s) = \frac{-\alpha}{(s^2 + 1)(s^2 + 1 + \alpha)} \quad (3.71)$$

$$\Delta_m(s) = \frac{G_p(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{-\alpha}{s^2 + 1 + \alpha} \quad (3.72)$$

On voit bien que  $\Delta_a(s)$  et  $\Delta_m(s)$  possèdent des pôles sur l'axe imaginaire, et donc on ne peut représenter  $G_p$  par une incertitude additive ou Multiplicative stable.

La représentation des incertitudes par facteurs coprime est la seule qui permettent que le nombre de pôles instables de  $G_p$  et  $G$  ne soit pas la même.

### 3.4.1 Représentation par les Facteurs Coprimes Normalisés

#### Définition

Les deux matrices  $M$  et  $N$  propres et stables sont dites Facteurs Coprime Normalisés à gauche de  $G$  si et seulement si,  $MN$  sont coprime et :

$$\begin{aligned} G &= M^{-1}N \\ MM^* + NN^* &= I \\ M &\text{ inversible} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$M$  et  $N$  étant des fonctions de transfert propre et stable, elles sont appelées coprime à gauche

$$\Leftrightarrow \exists : U \text{ et } V \text{ propres et stables tel que } MV - NU = I. \quad (3.74)$$

$G$  étant défini par ses facteurs coprime à gauche, on définit le système perturbé par :

$$G_p = \left\{ (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N), (\Delta_M, \Delta_N) \in RH_\infty, \|\Delta_M, \Delta_N\|_\infty < \varepsilon \right\} \quad (3.75)$$

$$\varepsilon = \gamma^{-1} \quad (3.76)$$

$RH_\infty$  est l'espace des fonctions de transfert propres et stables.

### 3.4.2 Position du Problème

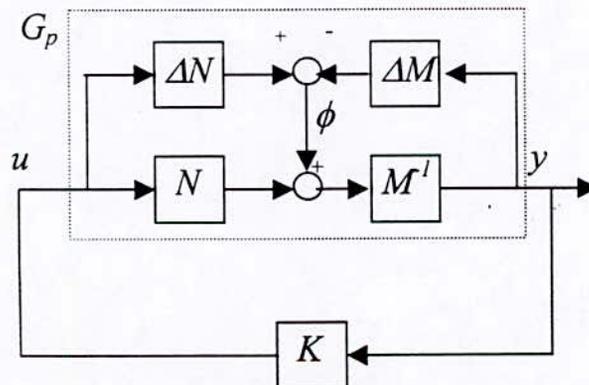


Figure 3.8

A partir du schéma de la figure (3.8) nous avons

En boucle ouverte

$$y = (M + \Delta_M)^{-1} (N + \Delta_N) u \quad (3.77)$$

$$\Rightarrow My = -\Delta_M y + \Delta_N u + Nu \quad (3.78)$$

$$\Rightarrow My = Nu + [\Delta_N, -\Delta_M] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$My = Nu + \phi \quad (3.80)$$

$$\phi = [\Delta_N, -\Delta_M] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$\phi$  représente l'incertitude du système.

En boucle fermée

On peut montrer facilement que :

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \phi = H\phi \quad (3.82)$$

et 
$$\phi = [\Delta_N, -\Delta_M] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Le système est donc équivalent à celui de la figure (3.9).

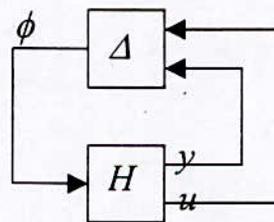


Figure 3.9

Le théorème du petit Gain nous permet d'assurer que :

Si  $K$  vérifie

$$\|H\|_{\infty} \|\Delta\|_{\infty} < 1 \quad (3.84)$$

ou en utilisant (3.75)  $\|\Delta\|_{\infty} < \gamma^{-1}$

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} [I - GK]^{-1} M^{-1} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (3.85)$$

Le système perturbé représenté par  $G_p$  est toujours stable.

Puisque  $[N, M]$  est normalisée

$$\text{Alors} \quad \|H[N, M]\|_{\infty} = \|H\|_{\infty} \quad (3.86)$$

$$\text{et puisque} \quad M^{-1}[N, M] = [G, I] \quad (3.87)$$

Le problème de la commande Robuste optimale qui consiste à maximiser  $\varepsilon$  et minimiser  $\gamma$  revient à minimiser :

$$J = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} [I - GK]^{-1} \begin{bmatrix} G & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.88)$$

On voit que le critère à minimiser contient quatre *objectifs*  $S, KS, SG, KSG$ .

Le second avantage de la représentation en facteur coprime est que  $\gamma$  optimal est directement donné, sans les  $\gamma$  itérations du problème standard.

### 3.4.3 La Solution

#### Théorème

$$\text{Soit} \quad G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (3.89)$$

Soit  $X, Y > 0$  les solutions définies positives définies des équations de Riccati suivantes :

$$A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0 \quad (3.90)$$

$$AY + YA^T - YC^T CY + BB^T = 0 \quad (3.91)$$

$$\text{Alors} \quad \begin{cases} \gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(XY)} \\ \varepsilon_{\max} = \gamma_{\min}^{-1} \end{cases} \quad (3.92)$$

$$\text{Pour} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \quad (3.93)$$

Le compensateur central qui *stabilise*  $G$  et *vérifie*

$$J < \gamma \quad (3.94)$$

est donné par la représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \begin{bmatrix} A + BB^T + \varepsilon^{-2} Z^{-1} Y C^T C & \varepsilon^{-2} Z^{-1} Y C^T \\ B^T X & 0 \end{bmatrix} \\ Z = [I + (YX - \varepsilon^{-2} I)] \end{array} \right. \quad (3.95)$$

### 3.4.4 Implémentation par Loopshaping

Dans le "Mixed Sensivity Problème" du §(3.3.7) la synthèse consiste à maintenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sigma}(S) \text{ faible pour } \omega < \omega_B \\ \overline{\sigma}(T) \text{ faible pour } \omega > \omega_B \end{array} \right. \quad (3.96)$$

En utilisant :

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (3.97)$$

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (3.98)$$

On voit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sigma}(S) \text{ faible pour } \underline{\sigma}(GK) \text{ grand} \\ \overline{\sigma}(T) \text{ faible pour } \overline{\sigma}(GK) \text{ faible} \end{array} \right. \quad (3.99)$$

Les valeurs singulières en boucle ouverte doivent être grandes en basses fréquences pour avoir une Bonne poursuite, et faibles pour les hautes fréquences afin d'avoir une Bonne Robustesse.

Selon le cahier de charges, on se fixe des limites sur le diagramme des valeurs singulières.

Une propriété du compensateur synthétisé par la méthode exposée, est que les valeurs singulières de GK se rapprochent de ceux de G.

Ce qui veut dire que si K garantit la stabilité Robuste de G, il aura des performances identiques à ceux du système non compensé G.

*La solution est de remplacer G par GW de telle manière que les valeurs singulières de GW satisfont aux performances désirées, et ensuite trouver le compensateur K qui stabilise GW.*

La méthode de synthèse est la suivante :

1- Loopshaping:

On choisit un précompensateur  $W$  de telle manière que les valeurs singulières de  $GW$  vérifient l'allure désirée.

2- Stabilité Robuste.

Calculer  $\varepsilon_{\max}$  pour  $GW$ , si  $\varepsilon_{\max}$  est très faible, modifier  $W$  et répéter jusqu'à ce qu'on trouve un  $W$  satisfaisant la première condition et fournissant un bon  $\varepsilon_{\max}$ , une fois  $W$  déterminé ; calculer le compensateur  $K$  à partir des équations(3.95).

3- Le compensateur final  $K_f$  est représenté par

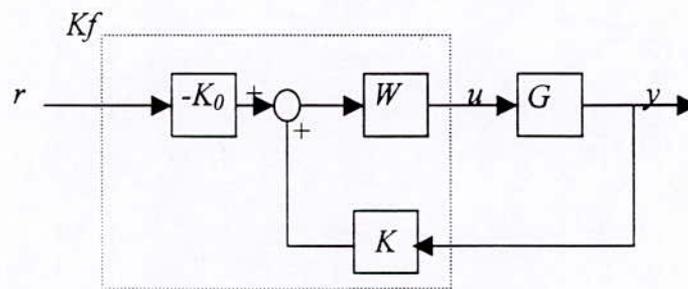


Figure 3.10

$K_0$  est le Gain statique de  $K(s)$ .

**Remarques:**

L'ordre du compensateur final est égal à l'ordre de  $G$  + 2 fois l'ordre de  $W$ .

Le compensateur final  $K_f$  est à 2 entrées et une sortie.

Le signe du retour positif dans la figure (3.10) correspond à la convention utilisée par plusieurs livres sur la commande robuste, et qui est utilisée aussi par les programmes du Toolbox *Mutools* de Matlab.

La relation entre la référence et la sortie est déterminée par

$$\begin{aligned} y(s) &= F(s)r(s) \\ F(s) &= -GW(I - GWK)^{-1}K_0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

De la relation précédente on peut voir que l'erreur statique pour des références en échelon est nulle lorsque  $W(s)$  contient un intégrateur.

La robustesse du système de commande de la figure (3.10) vis-à-vis des incertitudes multiplicatives est déterminée par le comportement de :

$$T = GWK(I - GWK)^{-1} \quad (3.101)$$

Pour les incertitudes additives l'indicateur de robustesse est:

$$WKS = WK(I - GWK)^{-1} \quad (3.102)$$

### 3.4.5 Conclusion

La représentation des incertitudes par les facteurs coprimes permet de décrire une plus grande classe de systèmes, et c'est la seule qui permettent que le système perturbé ait plus de pôles instables que le système nominal.

La méthode des facteurs coprimes fournit directement le  $\gamma$  minimal ( $\varepsilon_{\max}$ ) sans passer par les  $\gamma$  itérations.

L'implémentation par Loopshaping permet de séparer la synthèse, en une première étape de Loopshaping par W et une seconde étape de stabilisation par K.

## 3-5 Application aux systèmes nonlinéaires

Dans ce que nous avons présenté jusqu'à maintenant, nous avons parlé de modèles linéaires. Les systèmes réels étant tous nonlinéaires, notre commande n'est applicable que pour les systèmes qu'on peut représenter par un modèle linéaire du moins autour d'un point de fonctionnement.

L'un des buts implicite de la commande linéaire robuste est de palier aux incertitudes dû aux nonlinéarités, mais le problème se pose lorsqu'un compensateur linéaire ne peut pas garantir les performances désirées pour tout le domaine de fonctionnement.

Plusieurs approches ont été proposé dans la littérature [9,26,27,32]

La solution qui à été utilisée durant plusieurs années surtout dans le domaine de l'aviation, est la commande à gain préprogrammé 'Gain Scheduling'.

### 3.5.1 Commande à Gain Préprogrammé

Dans sa forme la plus simple, la commande à gain préprogrammé consiste a un compensateur linéaire avec un gain k variant en fonction d'une variable 'Scheduling variable' indiquant le point de fonctionnement du système, cette variable peut être la sortie comme elle peut être un autre paramètre mesuré, nous la désignerons par z.

Dans le cas général, ce n'est pas seulement le gain qui dépend du point de fonctionnement, mais tout le compensateur.

La relation compensateur 'Scheduling variable' (z), peut être déduite par interpolation sur quelques compensateurs synthétisés pour des points de fonctionnement représentatifs.

La structure de la commande est illustrée dans la figure suivante:

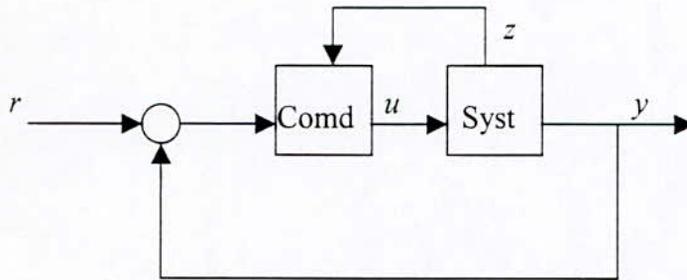


Figure 3.11

La commande par ' Gain Scheduling ' est une commande nonlinéaire pour laquelle il n'existe pas de démonstration théorique de stabilité, toutefois pour un faible taux de variation de la variable  $z$  on prévoit un bon comportement de la commande [9,26].

### 3.5.2 Commande par Compensateurs Commutés :

Dans la commande à gain préprogrammé, le compensateur est varié de manière continue en fonction de la variable indiquant le point de fonctionnement. Une version ' discrète ' du ' Gain Scheduling ' consiste à utiliser un nombre fini de compensateurs linéaires, chacun dans son domaine de fonctionnement. Le principe de la commande est illustré par la figure :

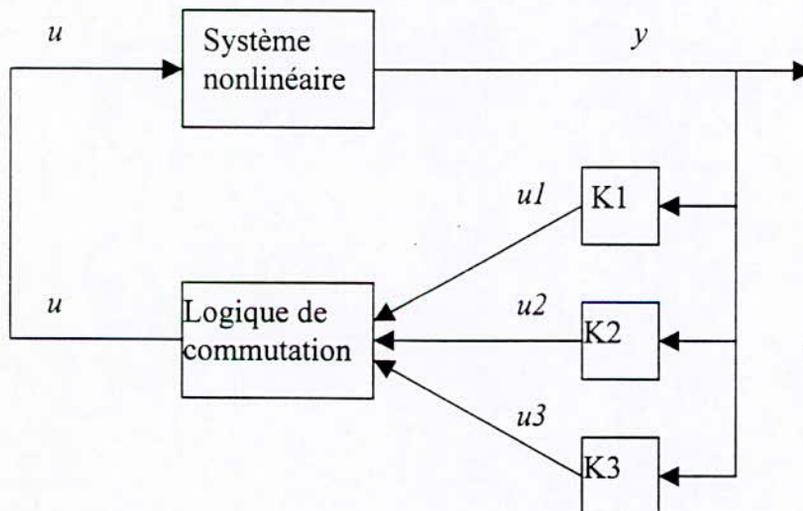


Figure 3.12

L'avantage de cette structure par rapport au schéma de la figure (3.11) est que nous n'avons pas à faire l'interpolation, et en plus la reconnaissance du domaine de fonctionnement est beaucoup plus facile que la mesure d'un paramètre représentant le point de fonctionnement du système.

En contre partie, le problème est d'assurer la continuité de la commande lors des commutations, dans [1,32] deux solutions pour résoudre le problème des commutations sans à coup 'Bumpless Transfer' sont proposées.

Une autre approche consiste à transiter progressivement entre les compensateurs.

### 3.5.3 Commande par Réseaux de Modèles Locaux :

Le principe est illustré par le schéma suivant :

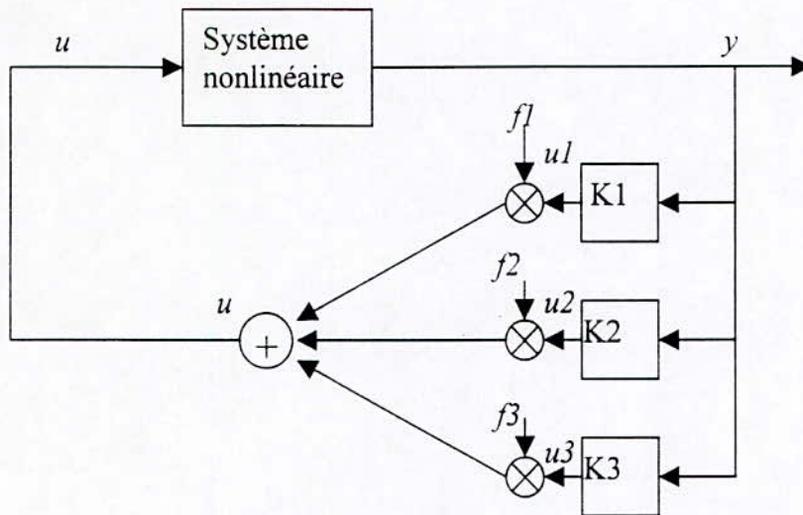


Figure 3.13

La commande est donnée par:

$$u = f_1 u_1 + f_2 u_2 + \dots + f_n u_n \quad (3.103)$$

Avec les  $f_i$  des fonctions dépendant du point de fonctionnement et vérifiant la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad (3.104)$$

Les  $f_i$  permettent de privilégier chaque compensateur dans son domaine de fonctionnement. Un choix simple de fonctions  $f_i$  est d'utiliser les fonctions Trapèzes comme indiqué dans la figure suivante.

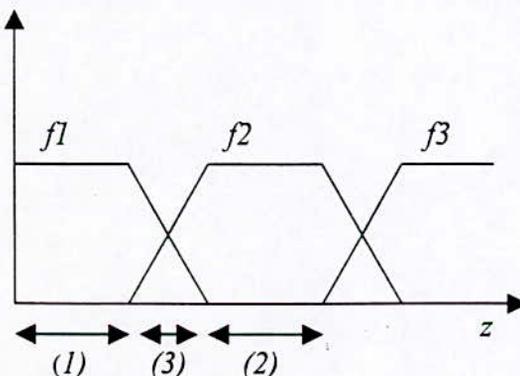


Figure 3.14

Dans la zone (1) c'est le compensateur  $K_1$  qui est opérationnel, dans la zone (3), le système est commandé par une combinaison linéaire de  $K_1$  et  $K_2$ , dans la zone (2), on arrive au compensateur  $K_2$ .

Comme on l'a déjà dit, pour un bon comportement, il faut que le point de fonctionnement soit décrit par une variable variant lentement avec le temps.

Pour des cas simples, on peut utiliser la référence où la sortie comme indicateur du point de fonctionnement.

On remarque que les structures de commandes présentées dans ce paragraphe se rapproche de la commande adaptative avec l'avantage que la partie identification et estimation des paramètres est évitée, ce qui signifie moins de calcul est un meilleur temps de réponse.

Une comparaison entre la commande par réseaux de modèles locaux et les commandes linéaires telles que la commande adaptative et la commande à structure de variable serait d'un très grand intérêt.

### **3.6 Conclusion:**

Dans ce chapitre nous avons vu les points suivants:

- On peut toujours se ramener au problème standard de la commande  $H_\infty$ .
- Pour valider les hypothèses de l'algorithme  $H_\infty$  standard, on doit effectuer des opérations de conditionnement, parfois on est même contraint à perturber le système.
- La commande à sensibilité mixte consiste à minimiser un critère formé de la sensibilité  $S$  représentant les performances nominales, et de la sensibilité complémentaire  $T$  pour la stabilité robuste.
- La méthode de Glover McFarlane consiste à stabiliser le système pour des incertitudes sur les facteurs coprimes du système, après une première étape de loopshaping en boucle ouverte.
- Pour les deux techniques le problème revient à un bon choix des pondérations fréquentielles.
- La commande à gain préprogrammé et la commande à réseaux de modèles locaux permettent l'application des techniques présentées aux systèmes nonlinéaires.

L'application des méthodes exposées est l'objet du chapitre suivant.

## **Chapitre 4**

## Chapitre 4

### Applications

#### 4.1 Application à un Système Linéaire

Nous allons reprendre l'exemple du chapitre 2 et synthétiser un compensateur par la méthode  $H_\infty$  à sensibilité mixte et un compensateur par la méthode des facteurs coprimés, et comparer nos résultats avec le P-I présenté dans §(2.5).

##### 4.1.1 Synthèse par la méthode des Facteurs Coprimés

Notre objectif est de faire mieux que le P-I qu'on a étudié au paragraphe (2.5).

En suivant les étapes décrites dans le paragraphe (3.4), nous sommes arrivés après quelques essais à la synthèse suivante :

$$W(s) = \frac{80}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$emax = 0.37 \quad (4.2)$$

Le compensateur est directement calculé par 'ncfsyn'.

#### Réponses Fréquentielles

- Les réponses fréquentielles *en boucle ouverte* sont montrées dans la figure (4.1).

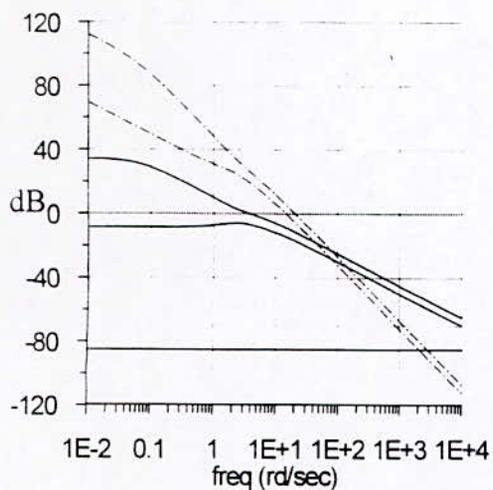
On remarque dans la figure (a) l'amélioration apportée par (W), une augmentation du gain aux basses fréquences, et une diminution en fréquences élevées, la pente de GW est de -40dB/dec alors que celle de G est de -20dB/dec.

On remarque aussi que les valeurs singulières de (GWK) sont très proches de (GW) ce qui a été prédit par la théorie.

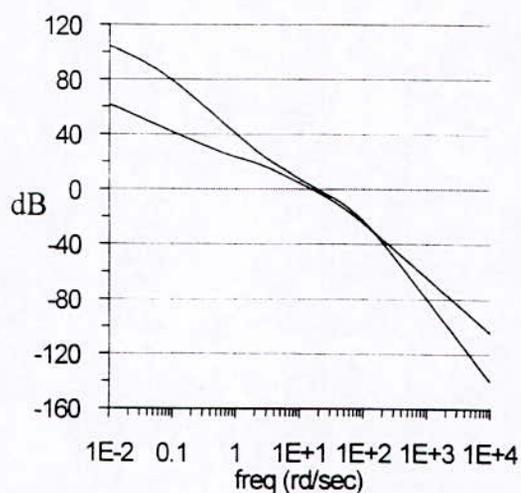
- Dans la figure (4.2) on présente les réponses fréquentielles *en boucle fermée*.

(a) représente la robustesse vis à vis des incertitudes additives et multiplicatives,  $1/\bar{\sigma}(WKS)$  et  $1/\bar{\sigma}(T)$ .

(b) représente  $\bar{\sigma}(S)$  et  $\bar{\sigma}(T)$ .



(a)



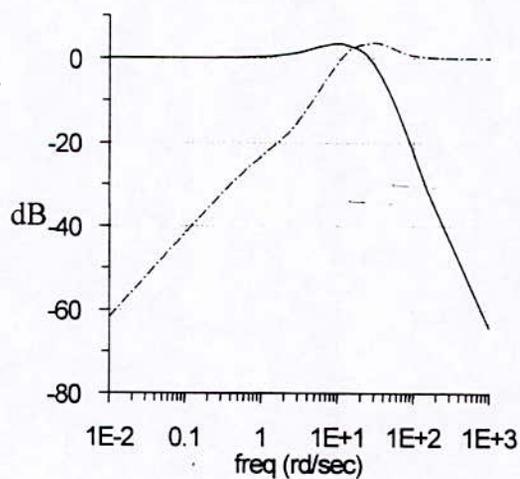
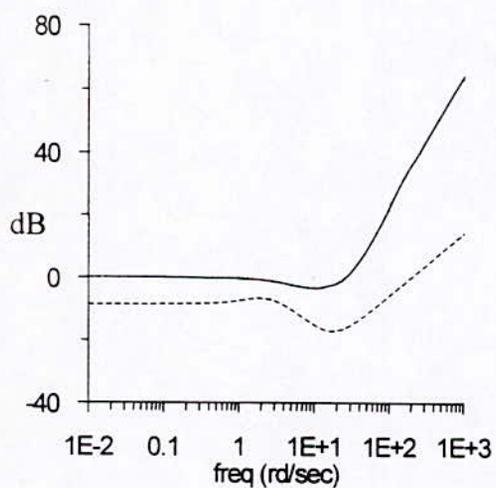
(b)

**Figure 4.1** : représentations fréquentielles en boucle ouverte pour Ncf.

(a): ( - - - - - )  $\sigma(GW)$ , et ( ——— ) représente  $\sigma(G)$ .

(b): le système stabilisé,  $\sigma(GWK)$ .

On remarque l'effet de W sur G, et on remarque aussi que K ne change pas l'allure du gain en boucle ouverte.



**Figure 4.2** : Réponses fréquentielles en boucle fermée.

(a): ( - - - - - )  $1/\bar{\sigma}(KS)$  la limite des incertitudes additives permises.

( ——— )  $1/\bar{\sigma}(T)$  la limite des incertitude multiplicatives.

(b): ( - - - - - )  $\bar{\sigma}(S)$  et ( ——— )  $\bar{\sigma}(T)$ .

La robustesse vis à vis des incertitudes multiplicatives est meilleure que pour les incertitudes additives,  $1/\bar{\sigma}(T)$  monte avec 40dB/dec alors que  $1/\bar{\sigma}(WKS)$  avec 20dB/dec, et le pic de T est inférieur à celui de WKS.

On remarque aussi que  $S \rightarrow 0$  pour  $\omega \rightarrow 0$  ce qui implique une erreur statique nulle.

Avant de passer aux réponses temporelles, nous allons voir le compensateur  $H_\infty$  à sensibilité mixte et comparer les réponses fréquentielles des trois systèmes de commande PI, NCF et MS

#### 4.1.2 Compensateur $H_\infty$ à sensibilité mixte :

Pour atteindre la meilleure synthèse possible ou le meilleur compromis robustesse performances, il faut choisir les bonnes fonctions de pondération.

En essayant d'augmenter la rapidité ( bande passante ) du système, on se retrouve avec un pic de résonance qui diminue la robustesse vis à vis des incertitudes multiplicatives.

Pour cette raison les objectifs de départ sont amenés à être modifiés pour être réalisables.

Après plusieurs essais les fonctions de pondération finales sont :

$$W_S(s) = \frac{0.18s + 1}{0.2s + 0.01} \quad (4.3)$$

$$W_T(s) = \frac{s}{30} \quad (4.4)$$

on obtient un  $\gamma$  minimal

$$\gamma = 0.9 \quad (4.5)$$

$W_S(s)$  correspond à l'expression (3.66) avec

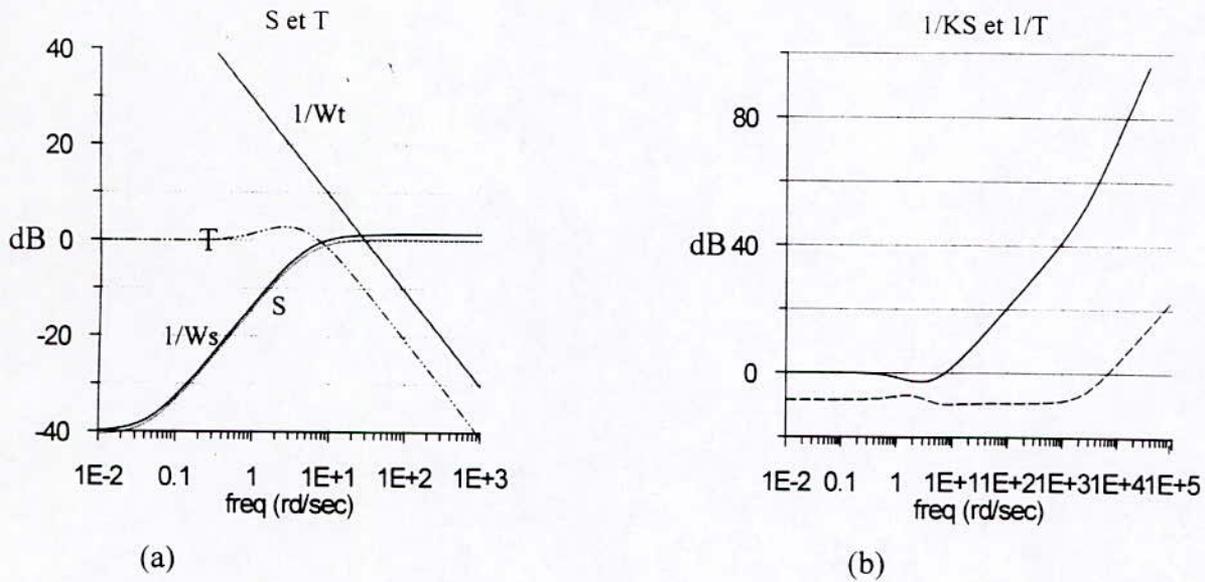
$$\begin{aligned} ess &= 1\% \\ \omega_B &= 5 \text{ rd/sec} \\ M &= 1.2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

- Les valeurs singulières de S, T,  $1/\bar{\sigma}(KS)$  et  $1/\bar{\sigma}(T)$  sont représentées dans la figure (4.3).

On remarque S est collée à  $W_S^{-1}$  mais toujours inférieur.

On remarque aussi que T à une bande passante de 10 rd/sec un dépassement de 3dB et descend avec -20dB/dec.

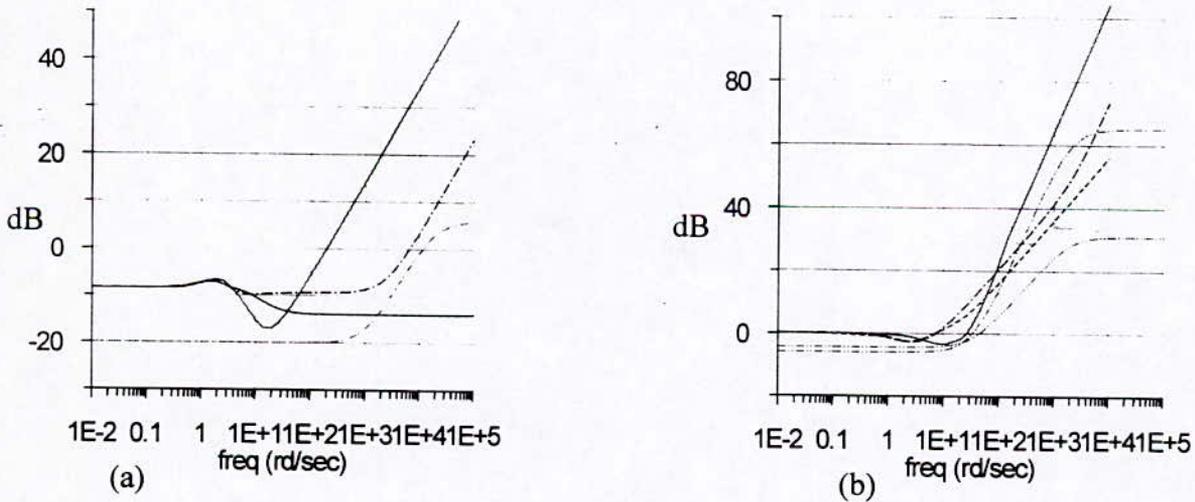
On constate aussi que la robustesse vis-à-vis des incertitude multiplicatives est meilleurs que pour les incertitudes additives, ce qui est prévisible car notre critère contient seulement S et T, c'est à dire que dans notre synthèse on n'a considéré que les incertitudes multiplicatives.



**Figure 4.3 :** Réponses fréquentielles en boucle fermée du système compensé par MS.

(a): (-----)  $\bar{\sigma}(S)$  et  $1/\bar{\sigma}(W_s)$ , et (-----)  $\bar{\sigma}(T)$  et  $1/\bar{\sigma}(W_T)$ .

(b): (-----)  $1/\bar{\sigma}(KS)$ , et (——)  $1/\bar{\sigma}(T)$ .



**Figure 4.4 :** comparaison des réponses fréquentielles pour les trois compensateurs.

(a):  $1/\bar{\sigma}(KS)$  et  $\bar{\sigma}(\Delta_a)$ , (b):  $1/\bar{\sigma}(T)$  et  $\bar{\sigma}(\Delta_{m1})$  et  $\bar{\sigma}(\Delta_{m3})$

(-----) le MS, (-----) le PI, et (——) le NCF.

(-----) les incertitudes.

### 4.1.3 Comparaisons et Simulations

- La figure (4.4) représente  $1/\bar{\sigma}(KS)$  et  $1/\bar{\sigma}(T)$  pour les 3 compensateurs; le PI, le  $H_\infty$  à sensibilité mixte (MS) et le NCF ( pour le NCF  $1/\bar{\sigma}(WKS)$  et non  $1/\bar{\sigma}(KS)$  ).

A partir de la figure (4.4.a) on remarque que le PI est le plus sensible vis à vis des incertitudes additives.

Pour les incertitudes multiplicatives le PI et le MS, ont une pente de 20dB /dec alors que le NCF a une pente de 40db/dec.

On remarque aussi que la bande passante du NCF est de 30rd /sec alors que le PI et le MS 10rd /sec. on s'attend donc à avoir une réponse plus rapide de la part de NCF.

- Mais ce qu'il ne faut pas oublier que le compensateur du NCF n'est pas dans la boucle directe dans le retour. figure(3.10), ce qui veut dire que la fonction de transfert entre la référence et la sortie n'est pas T mais :

$$F(s) = -GW(I - GWK)^{-1} K_0 \quad (4.7)$$

dont le diagramme des valeurs singulières est représenté par :

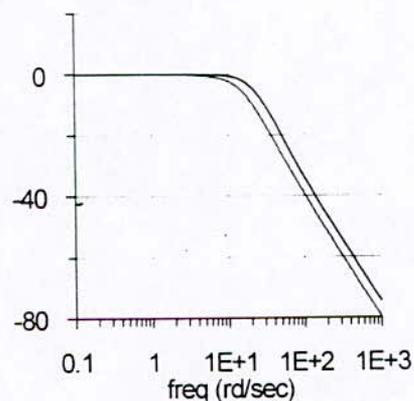


Figure 4.5

On remarque que la bande passante est de l'ordre de 20rd/sec, on remarque aussi que contrairement à T le dépassement est faible par rapport au MS et au PI. Ce qui nous prédit une réponse plus rapide et mieux amortie.

Contrairement à la remarque que nous avons faite au §(2.5) pour les valeurs singulières de T pour le PI, on constate dans la figure (4.5) que  $\bar{\sigma}(F)$  et  $\underline{\sigma}(F)$  sont très proches, ce qui veut dire que la dynamique du système est la même pour  $y_1$  et  $y_2$ , ce qui n'est pas vrai pour le PI et le MS.

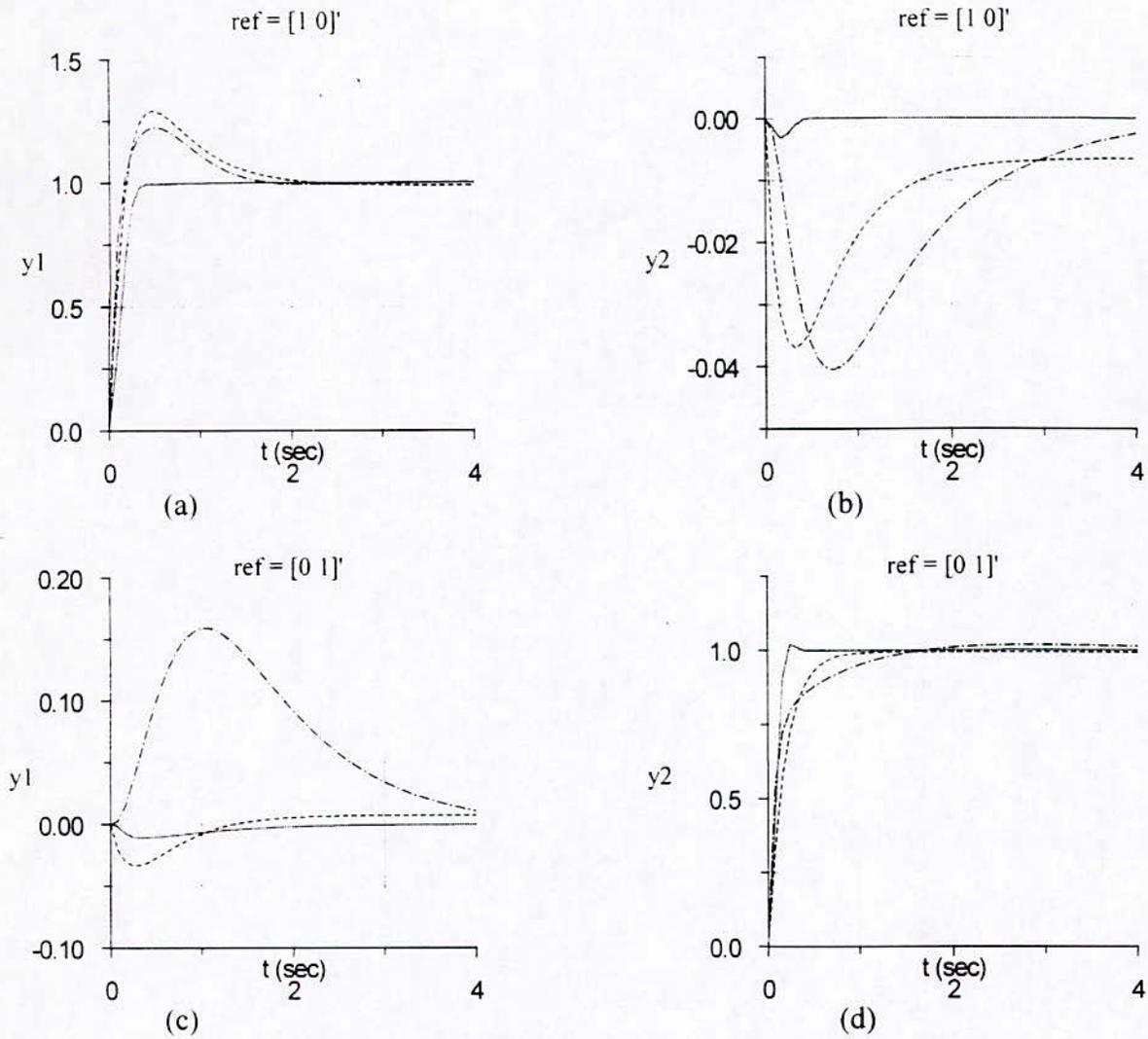


Figure 4.6 : réponse à un échelon du système nominal ,Comparaison entre les trois compensateurs.(---)Ms, ( - - - - ) le PI, ( ——— ) le NCF.

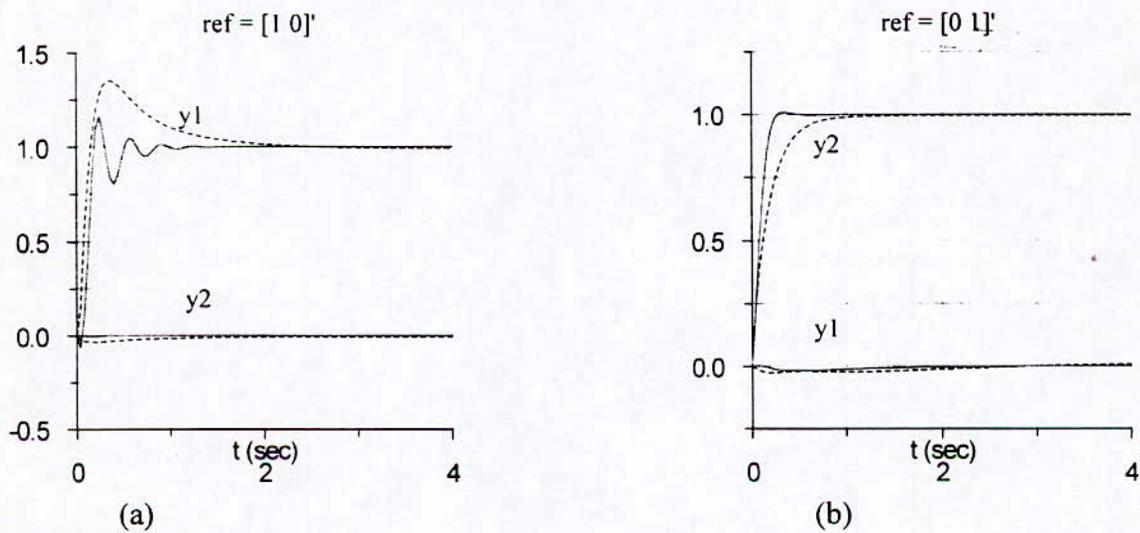


Figure 4.7 : Réponses temporelles du système perturbé par une incertitude additive (4.8), Comparaison entre les trois compensateurs, le PI est instable.

Pour valider nos raisonnements sur les réponses fréquentielles nous présentons les réponses temporelles.

- Dans la figure (4.6) on représente les réponses à un échelon sur  $y_1$  puis  $y_2$  pour les 3 compensateurs.

On remarque comme prévu que le PI et le MS présentent des réponses très similaires.

Un dépassement de l'ordre de 20% et un temps de réponse de 2 secondes pour  $y_1$ .

Une réponse bien amortie et un temps de réponse inférieur à 1 seconde pour  $y_2$ .

Le MS répond avec une erreur statique de 1%.

Le NCF réagit de meilleure façon sur tous les plans, un temps de réponse inférieur à 0.5 sec, pratiquement pas de dépassement et un couplage très faible qui tend vers zéro.

L'erreur statique du MS est due au fait que contrairement au PI et au NCF, le MS ne possède pas d'intégrateurs, toutefois on constate que l'erreur statique est inférieure au maximum spécifié par  $W_s$  dans (4.6).

Dans la figure précédente, nous avons analysé les performances du système nominal.

Pour montrer la stabilité robuste des systèmes, nous allons le perturber par des incertitudes additives et multiplicatives représentées dans les diagrammes de la figure (4.4).

- Dans la figure (4.7) on a les réponses à un échelon pour les systèmes perturbés avec l'incertitude additive :

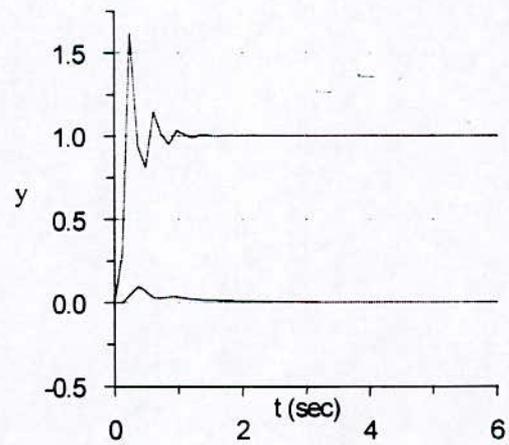
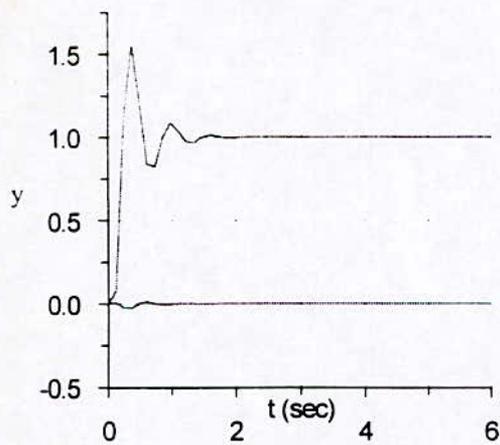
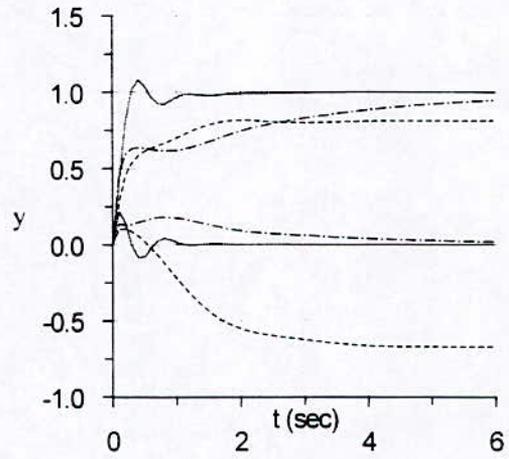
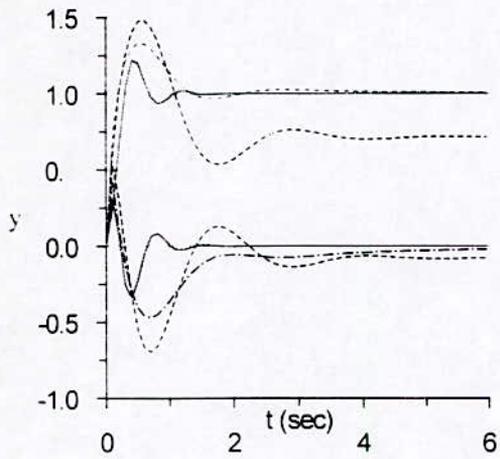
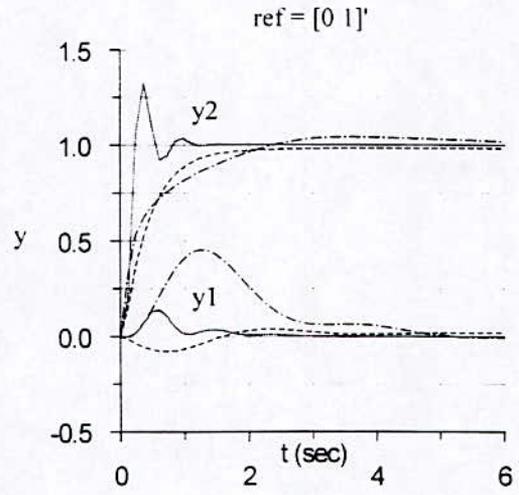
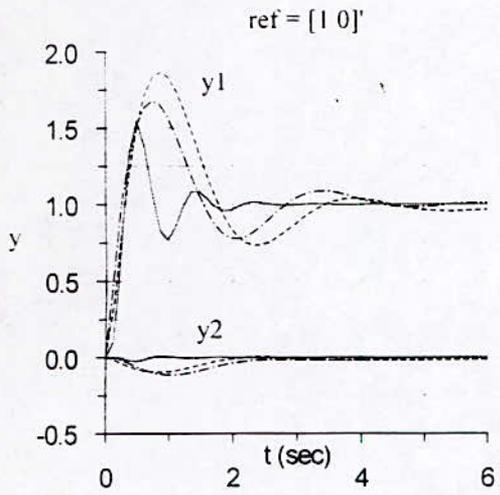
$$\Delta_a(s) = \frac{0.1(0.001s + 1)}{0.00005s + 1} \quad (4.8)$$

La première remarque est que le PI est stable, c'est normal car  $\overline{\sigma}(\Delta_a)$  est supérieur à  $1/\overline{\sigma}(KS)$ .

Puisque  $\overline{\sigma}(\Delta)$  est inférieure à  $1/\overline{\sigma}(KS)$  du MS et du NCF, les deux systèmes restent stables.

On remarque aussi une apparition d'oscillations pour le NCF mais il est toujours meilleur que le MS.

- Dans la figure (4.8), on présente les réponses pour le système perturbé par des incertitudes multiplicatives :



**Figure 4.8 :** Réponses à un échelon du système perturbé avec des incertitudes multiplicatives (a) et (b):  $\Delta_{m_1}(s)$ , (c) et (d):  $\Delta_{m_2}(s)$ , (e) et (f):  $\Delta_{m_3}(s)$  le PI et le MS sont déstabilisés.

Pour les figures 4.8 (a) et (b)

$$\Delta_{m1}(s) = -0.6 \begin{pmatrix} 0.03s+1 \\ 0.0005s+1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Une incertitude diagonale vérifiant les conditions de stabilité robuste pour les 3 compensateurs .

Pour  $y_1$  le MS présente un dépassement de 80%, le PI 70% avec un temps de réponse pour les deux de l'ordre de 4 sec , la dynamique de  $y_2$  n'est pas trop affectée pour le MS et le PI.

Le NCF réagit avec un dépassement de 50% pour  $y_1$  et 30% pour  $y_2$  avec un temps de réponse de 2 sec pour  $y_1$  et 1sec pour  $y_2$ .

Il est clair que les dépassements de 70% et 80% sont à éviter, ce qui privilégie le NCF.

Pour les figures (c) et (d) :

$$\Delta_{m2}(s) = -0.6 \begin{pmatrix} 0.03s+1 \\ 0.0005s+1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Nous avons essayé des incertitudes croisées, nous n'avons aucune idée quand à la possibilité d'avoir des incertitudes pareil en réalité, mais on est en train de raisonner en non-structuré comme le  $H_\infty$  .

Les réponses à cette incertitude nous réservent des surprises pour le MS.

Il est clair (fig 4.4) que  $\Delta_{m2}(s)$  vérifie les conditions de stabilité robuste, mais la première chose à remarquer est la détérioration des performances du MS :

- une erreur statique de 30% sur  $y_1$ , 20% sur  $y_2$ .
- un couplage  $2 \rightarrow 1$  statique de -0.7.

avant de commenter les autres courbes il faut expliquer cette détérioration de performances.

En réalité, nous n'avons rien à expliquer car *la commande  $H_\infty$  n'a jamais prétendu garantir les performances pour les système perturbé.*

Dans tout les théorèmes et résultats énoncés, nous avons parlé de performances nominales et de stabilité robuste, ce qui est bien vérifié car le système est bien stable.

- Le problème de performances robuste consiste à maintenir les performances pour les systèmes perturbé c'est à dire  $|W_s S_p|_\infty < 1$  avec  $S_p$  la fonction de sensibilité du système perturbé et non du modèle nominal :

La figure suivante montre les valeurs singulières de  $S_p$  comparées à  $W_s^{-1}$  pour le MS,

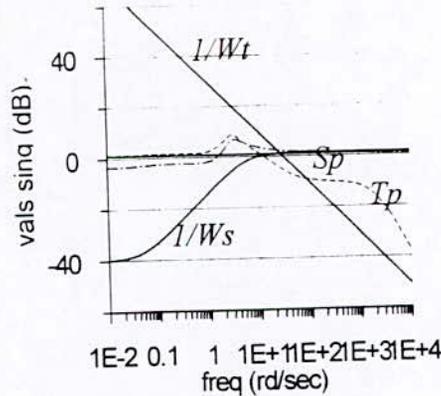


Figure 4.9

Il est clair que la condition de performances robustes n'est pas vérifiée.

Le problème de performance robuste est un problème qu'on essaye de résoudre par la mu-synthèse ou les valeurs singulières structurées mais qui reste un sujet de recherche jusqu'à aujourd'hui [13,21,23].

En revenant au PI et NCF, on remarque la réponse de  $y_2$  pour le PI présente un temps de réponse de 5 secondes, on remarque aussi que le couplage ( $1 \rightarrow 2$ ) présente des dépassements considérables. Mais en global le NCF est meilleur.

- Pour montrer l'intérêt d'avoir une grande pente pour les hautes fréquences, nous avons perturbé le système par une incertitude multiplicative  $\Delta_{m3}(s)$ :

$$\Delta_{m3}(s) = -0.5 \left( \frac{0.03s+1}{0.0005s+1} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

De la figure (4.4.b) on voit que la condition de stabilité robuste n'est vérifiée que pour le NCF, car le MS et le PI ont des pentes de 20dB/dec, contrairement au NCF (40dB/dec).

Les réponses temporelles montrent que le PI et le MS sont déstabilisés.

La réponse du NCF est présentée dans la figure (4.8.e et f).

Malgré le dépassement de 50%, la réponse est acceptable, en tout cas mieux que l'instabilité.

#### 4.1.4 Conclusion :

Nous avons comparé le compensateur proposé dans [1] avec les 2 compensateurs que nous avons synthétisés par la méthode  $H_\infty$  à sensibilité mixte et par la technique 'Loopshaping Design Procedure' des facteurs coprimés normalisés.

Nous ne savons pas comment le PI a été synthétisé et comment ils ont choisi la structure

croisé  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  pour le PI mais ce qui est sûr c'est que ce choix n'est pas évident a priori.

Pour nos 2 méthodes de synthèses, le découplage est effectué sans notre intervention.

Le choix de  $W$  pour le NCF est beaucoup plus simple que le choix des fonctions de pondération pour le MS.

Le NCF ne représente pas les problèmes de validation des hypothèses.

La présence de l'intégrateur pour le PI et le MS, garantit des erreurs statiques nulles et des couplages tendant vers zéro contrairement au MS.

Les réponses fréquentielles et les simulations temporelles ont montré que les performances du MS et du PI sont très similaires alors que le NCF est meilleur sur tout les plans.

## 4.2 Application au Modèle d'un Simulateur d'Hélicoptère

### 4.2.1 Description

Nous allons essayer d'appliquer les méthodes synthèses décrite dans le chapitre 3 pour commander le simulateur d'hélicoptère représenté par le schéma suivant:

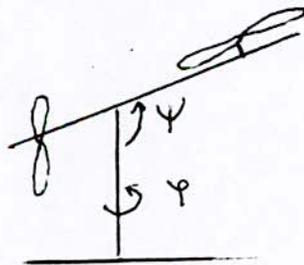


Figure 4.10

Le système consiste en deux Rotors ( principal et latéral ) actionnés par deux moteurs à courant continu, le tout porté par le corps du système.

Le système est a deux degrés de liberté, l'angle d'élévation, par rapport à l'axe horizontal ( $\psi$ ). L'angle d'azimut, par rapport à l'axe vertical ( $\varphi$ ). Voir la figure (4.10).

Les entrées du système sont les tensions d'induit des moteurs à courant continu.

Les sorties à commander sont  $\psi$  et  $\varphi$ , et sont mesurées pour pouvoir faire le feedback.

Le système "réel" est un outil pédagogique conçu pour faire des travaux pratiques d'automatique, il est fourni avec une interface permettant de le commander directement par micro ordinateur, et sous environnement Matlab [13].

Nous n'avons pas la maquette, on a seulement le manuel d'utilisation à partir duquel on a pu avoir le modèle sur lequel on a travaillé.

#### 4.2.2 Modélisation

Malgré le fait que plusieurs articles traitent de la commande d'hélicoptère ou de simulateur d'hélicoptère [30,31], nous n'avons trouvé de modèle nonlinéaire que dans [13].

##### Modèle Nonlinéaire

- Le système est nonlinéaire pour plusieurs raisons :
  - le couple engendré par les Rotors dépend du carré de la vitesse de rotation de ce dernier.
  - Le moment d'inertie du corps par rapport aux deux axes dépend de  $\psi$  et  $\phi$ .
  - Les dynamiques de  $\psi$  et  $\phi$  sont liées par des termes de couplages dépendant du sinus et du cosinus de  $\psi$  et  $\phi$ .
  - Le couple de gravité dépend de  $\sin(\psi)$ .
  
- Les dynamiques de  $\psi$  et  $\phi$  sont essentiellement liées par deux couples :
  - Le couple de Réaction engendré par le rotor principal sur le système et qui crée une rotation autour de l'axe verticale de l'hélicoptère, la réaction du rotor latéral est négligeable.
  - Le couple Gyroscopique:  
Lorsque le système est à un angle  $\psi$  non nul, la vitesse de rotation d'azimut  $\dot{\phi}$  engendre une vitesse de rotation  $\dot{\psi}$ , (phénomène de la toupie).  
On suppose généralement que  $\dot{\psi}$  est assez faible, et on néglige le couple gyroscopique agissant sur  $\phi$ .
  
- Nous n'allons pas écrire les équations nonlinéaires du système car nous n'avons pas les paramètres numériques du modèle théorique exposé dans [13].

Le modèle avec lequel on peut travailler est un modèle nonlinéaire empirique simplifié, c'est à dire que les paramètres sont déterminés par identification, on l'a directement pris de [13].

Le schéma Bloc est représenté dans la figure (4.11).

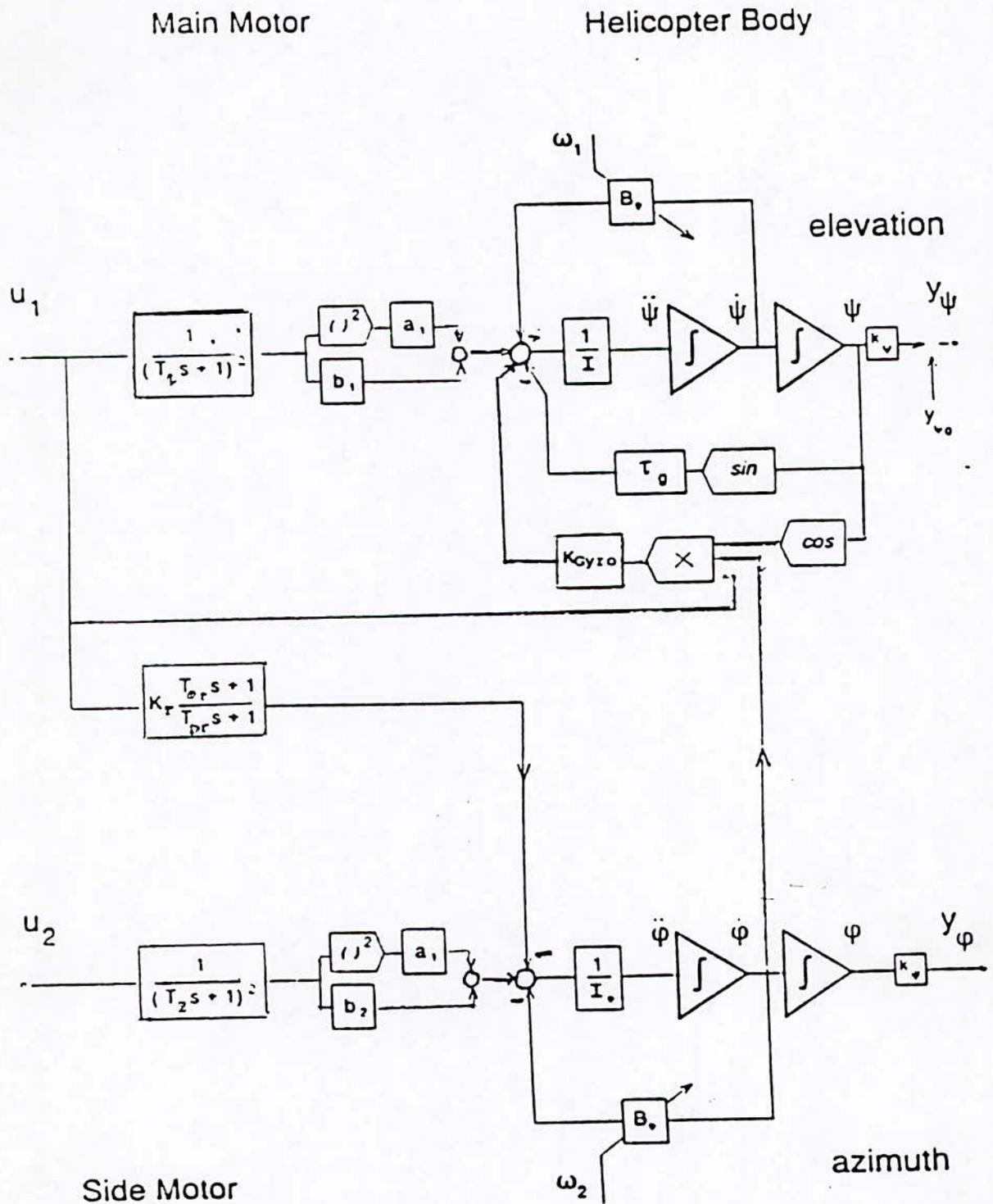


Figure 4.11

Dans ce schéma nous avons considéré que :

- Les Moteurs à courant continu sont identifiés par une fonction de transfert d'ordre deux

$$m(s) = \left( \frac{1}{(1 + Ts)^2} \right) \quad (4.12)$$

- Le couple engendré par les rotors est identifié par la nonlinéarité statique

$$T = (a\omega^2 + b\omega) \quad (4.13)$$

$\omega$  est la vitesse de rotation du rotor

- Pour l'élévation le système est régi par :

$$\ddot{\psi} = T_1 - T_f - \tau_g \sin(\psi) - T_{Gyro} \quad (4.14)$$

$T_1$  : le couple du rotor principal.

$T_f$  : les couples de frottements:

$$T_f = B_\psi \dot{\psi} . \quad (4.15)$$

$\tau_g \sin(\psi)$  : le couple gravitationnel.

$T_{Gyro}$  : le couple gyroscopique d'élévation.

$$T_{Gyro} = K_{Gyro} \dot{\phi} u_1 \cos(\psi) \quad (4.16)$$

- Pour l'angle d'azimut nous avons:

$$\ddot{\psi} = T_2 - T_r - T_f \quad (4.17)$$

$T_2$  : le couple du Rotor latéral.

$T_r$  : le couple de *réaction* du Rotor principal, il est identifié par une fonction de transfert linéaire.

$T_f$  : le couple des frottements.

Les valeurs numériques des paramètres sont données dans [13].

### **En résumé:**

Notre système est un système multivariable ( 2 entrées, 2 sorties), nonlinéaire et couplé.

Ne disposant pas d'un modèle de connaissance on utilise un modèle nonlinéaire "empirique" pour représenter notre système.

Le schéma (4.11) représente désormais notre simulateur d'hélicoptère.

Pour pouvoir utiliser la commande  $H_\infty$  il nous faut un modèle linéaire. Pour cela nous allons linéariser autour d'un point de fonctionnement.

### Linéarisation

La représentation d'état du système est obtenue à partir de la figure (4.11) :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.18)$$

où  $x$  est le vecteur d'état d'ordre 9.

2 états pour chaque Moteur, 2 états pour  $\psi$ , 2 pour  $\varphi$  et 1 état pour le couple de réaction.

$u = [u_1 \ u_2]'$  la commande.

Pour linéariser autour d'un point de fonctionnement  $(x_0, u_0)$  on utilise le développement de Taylor au premier ordre:

$$f(x, u) = f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u \quad (4.19)$$

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \Delta u \quad (4.20)$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \quad (4.21)$$

et donc au voisinage du point de fonctionnement, on considère que le système est décrit par le modèle linéaire:

$$\dot{x} = Ax + Bu + v(x_0, u_0) \quad (4.22)$$

$v(x_0, u_0)$  est un terme constant considéré comme une perturbation extérieure.

On remarque que le modèle linéaire tiré des équations (4.19-22) ne dépend pas de  $\varphi_0$ , ce qui veut dire que pour un  $\psi_0$  déterminé, on peut représenter le système par un modèle linéaire pour toute les valeurs de  $\varphi$ .

### Le Point de Fonctionnement

Généralement le point de fonctionnement est choisit comme étant un point d'équilibre c'est à dire que:

$$x|_{x_0, u_0} = f(x_0, u_0) = 0 \quad (4.23)$$

- En se fixant  $\psi_0$  et  $\varphi_0$ , le système d'équations (4.12) est un système de (09) neuf équations à (09) neuf inconnus, à partir duquel on détermine les autres composantes de  $x_0$ , et  $u_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix}$ .

Lors de la résolution de (4.12) on est amené à résoudre l'équation :

$$a_1 u_1^2 + b_1 u_1 - \tau_g \sin(\psi_0) = 0 \quad (4.24)$$

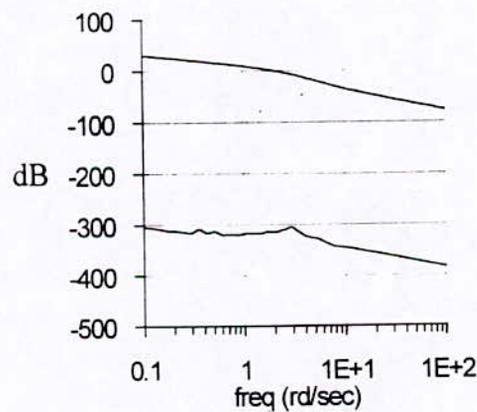
l'équation (4.24) n'admet pas de solutions réelles pour:

$$\begin{aligned} b_1^2 + 4a_1 \tau_g \sin(\psi_0) &< 0 \\ \sin(\psi_0) &< \frac{-b_1}{4a_1 \tau_g} = z \end{aligned} \quad (4.25)$$

et donc pour les valeurs de  $\psi_0$  négatives inférieures à  $(\arcsin(z))$ , on obtient un modèle linéaire à *paramètres complexes*, c'est à dire *on ne peut pas linéariser*.

- Pour les valeurs de  $\psi_0$  très proche de zéro on obtient un modèle linéaire mal conditionné

La figure suivante représente les valeurs singulières pour le modèle linéarisé autour de  $\psi_0 = -0.2 \text{ rd}$ .



**Figure 4.12**

Un système mal conditionné est très difficile à commander [22].

A cause des remarques précédentes, nous n'avons pas pu commander le système pour les valeurs négatives de  $\psi_0$ .

Dans ce qui suit nous allons voir la commande de notre système pour les valeurs positives de l'angle d'élévation en utilisant la méthode  $H_\infty$  à sensibilité mixte (3.3) et la méthode des facteurs coprimés normalisés (3.4).

#### 4.2.3 Commande par $H_\infty$ Sensibilité Mixte:

Avant l'application de la commande  $H_\infty$  au modèle linéarisé nous avons essayé de trouver un P-I-D par les méthodes classiques et nous avons rencontré les problèmes suivants :

- En passant au fonction de transfert, on voit que les éléments de la Matrice de transfert sont de degré relatif 4 ce qui implique une grande difficulté pour stabiliser le système.
- Deux compensateurs indépendants ne stabilise pas le système nonlinéaire.

Nous n'avons pas pu commander notre système par les techniques de commandes SISO.

Le principal avantage de la commande  $H_\infty$  est qu'elle nous évite le problème du découplage.

Nous allons prendre deux modèles linéaires correspondant à  $\psi_0 = 0.3 \text{ rd}$  et  $\psi_0 = 0.5 \text{ rd}$ .  
Nous désignerons les deux compensateurs résultants par MS3 et MS5.

#### Validation des Hypothèses de la Commande $H_\infty$ :

Nous avons vu dans le paragraphe (3.3.4) que les opérations de conditionnement "scaling" du système sont automatiquement effectuées par les programmes *hinf* et *hinfsyn* de Matlab lorsque les conditions sur le rang de D12 et D21 sont vérifiées.

Le modèle linéarisé augmenté par des fonctions de pondérations *propres* ne vérifie pas la condition du rang complet.

Pour valider l'hypothèse du rang de D12 et D21, nous avons été contraint à perturber notre système pour changer son degrés relatif et au même temps choisir  $Wt(s) = ks^2$  (§ 3.3.5).

Pour perturber le système, il faut passer à la matrice de transfert en utilisant '*ss2tf*'; ensuite nous avons effectué la transformation suivante :

$$N'_{11}(s) = N_{11}(s) + 0.0001s^7 + 0.001s^6 \tag{4.26}$$

$$N'_{22}(s) = N_{22}(s) + 0.0001s^7 + 0.001s^6$$

$N_{11}(s)$  et  $N_{22}(s)$  représentent les numérateurs des éléments diagonaux de notre matrice de transfert.

L'étape suivante est de retrouver l'espace d'état en utilisant '*tfm2ss*'.

On obtient un modèle d'ordre 18.

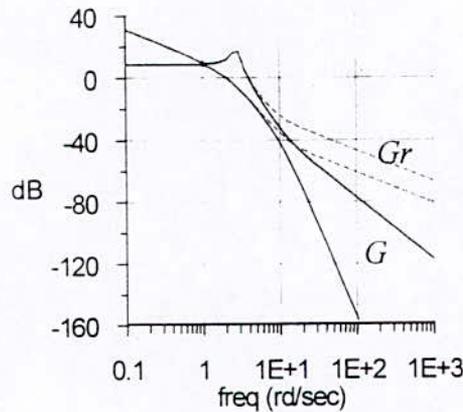
Notre système contient un intégrateur, nous avons donc appliqué la technique du §(3.3.6).

Avant d'appliquer l'algorithme de commande, on réduit l'ordre de notre système en utilisant 'minreal' et 'balmr' de Matlab.

La réduction d'ordre nous permet de travailler avec des matrices **mieux conditionnées**, et nous permet aussi d'avoir un compensateur d'ordre relativement faible.

Le système final auquel nous avons appliqué la commande  $H_\infty$  à sensibilité mixte est d'ordre 6, augmenté par les fonctions de pondération.

La figure (4.13) représente les valeurs singulières du modèle linéarisé(G) ainsi que ceux du modèle perturbé et réduit (Gr) pour  $\psi_0 = 0.5 rd$  :



**Figure 4.13**

On remarque que pour les basses fréquences les deux systèmes sont identiques, on constate aussi que le système réduit est mieux conditionné en fréquences élevées ( $\sigma$  et  $\underline{\sigma}$  sont plus proche).

### Fonctions de Pondération

Dans le paragraphe (3.3.7), nous avons donné quelques indications pour le choix des fonctions de pondération  $W_s$  et  $W_t$ , mais ce n'est qu'un choix initial, les fonctions de pondération finales sont le résultat de plusieurs essais.

Pour un cahier de charge exigeant on peut avoir la solution de notre problème avec :

$$|T_{zw}|_\infty \leq \gamma \text{ et } \gamma > 1 \quad (4.27)$$

ce qui veut dire que les conditions de performances nominales et de stabilité robuste ne sont plus satisfaites, dans ce cas il faut changer  $W_t$  et  $W_s$  de tel manière à demander des performances atteignables par le système.

Pour les deux points de fonctionnement considérés nous avons pris :

$$W_s(s) = \frac{2.5s + 0.001}{s + 1.5} = \frac{10^{-3} (1 + 2500s)}{1.5 (1 + 0.66s)} \quad (4.28)$$

$$W_T(s) = \frac{s^2}{10}$$

elles sont représentées dans la figure (4.15)

### Réponses Fréquentielles :

Pour les modèles linéaires que nous avons utilisé, les comportement des systèmes de commandes linéaires sont très semblables, et pour cela on ne représente les réponses fréquentielles et les simulations linéaires que pour  $\psi_0 = 0.5 \text{ rd}$ .

Pour le système perturbé par (4.26) et réduit à l'ordre six et les pondérations ( 4.28 ), nous avons obtenu :

$$\gamma = 0.69 \quad (4.29)$$

Les valeurs singulières de

$$\frac{1}{\gamma} T_{zw} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

sont représentées dans la figure (4.14).

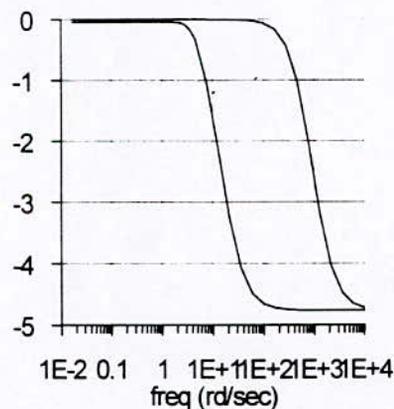


Figure 4.14

• On remarque bien que

$$|T_{zw}|_{\infty} < \gamma \quad \text{car} \quad \frac{1}{\gamma} |T_{zw}|_{\infty} < 1 \quad (4.31)$$

On remarque aussi que pour les fréquences inférieures à (100 rd/sec)  $\bar{\sigma}$  et  $\underline{\sigma}$  sont très proches de  $\gamma$ . ce qui veut dire que

$$|T_{zw}| \approx \gamma \quad (4.32)$$

et c'est justifié par le fait que  $W_s^{-1}$  et  $S$  sont très proche dans cette bande de fréquence.

Les valeurs singulières de  $S$ ,  $T$  et  $1/KS$  sont représentées dans la figure suivante :

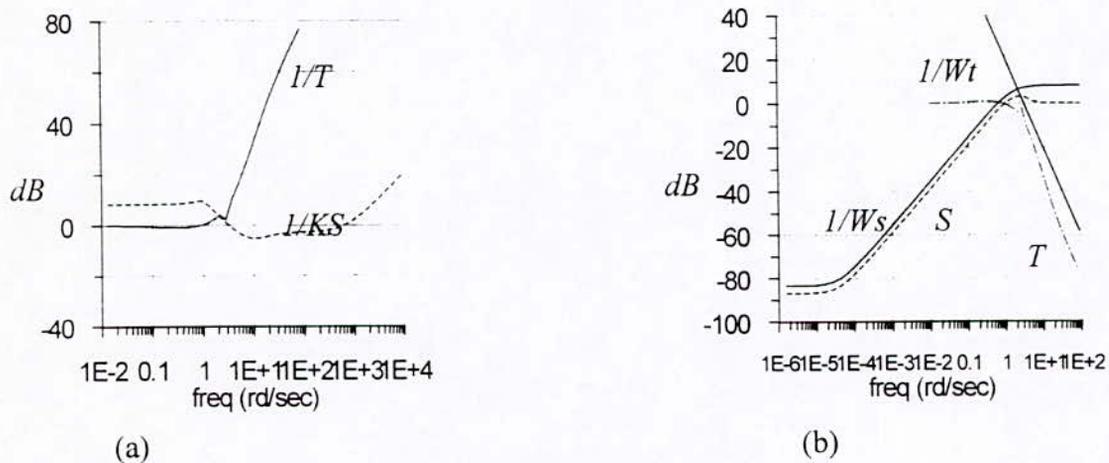


Figure 4.15

On voit que  $S$  est proche de  $W_s^{-1}$  et  $T$  de  $W_t^{-1}$  mais toujours inférieures car  $|T_{zw}| \leq \gamma < 1$ .

On remarque une bande passante de 2 rd/sec et pas de dépassement sur  $T$ .

On voit aussi que  $T$  chute de -40dB/décade pour les haute fréquences.

- La figure (4.15.a) représente la limite des incertitudes additives et multiplicatives admissibles.

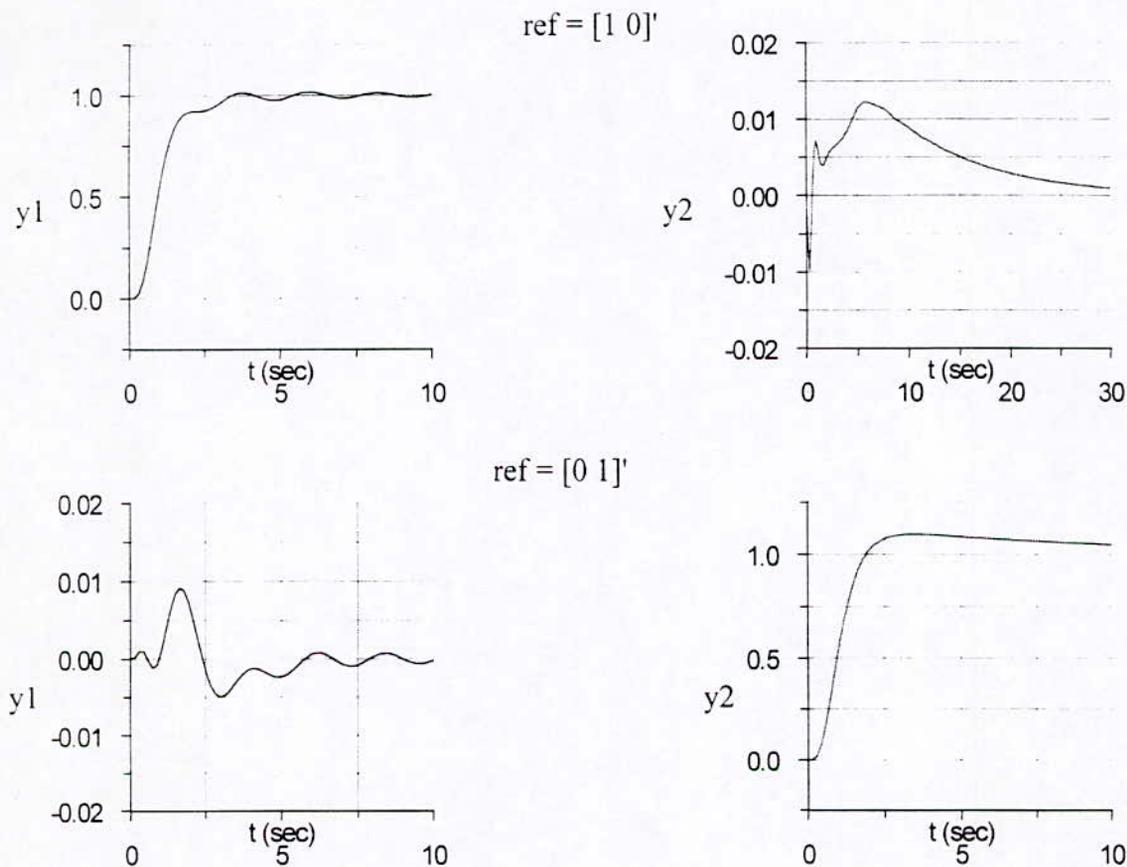
On voit qu'on a une bonne robustesse pour les incertitudes multiplicatives, une incertitude de module inférieur à 1 ne déstabilise jamais le système, et une très bonne robustesse en hautes fréquences.

Pour les incertitudes additives le système est plus robuste pour les fréquences inférieure à 1 rd/sec car  $1/\bar{\sigma}(KS)$  est au dessus de  $1/\bar{\sigma}(T)$ , mais pour les fréquences élevées le système est plus sensible aux incertitudes additives; toutefois le fait que  $1/\bar{\sigma}(KS)$  est supérieur à 1 pour les fréquences supérieurs à 1000 rd/sec est un bon signe de robustesse.

Dans ce qui va suivre nous allons tester la commande sur le système linéaire nominal puis sur le système nonlinéaire.

### Simulation Linéaire :

Les réponses temporelles obtenues par la commande MS5 appliquée au modèle linéarisé à  $\psi_0 = 0.5 \text{ rd}$  sont représentées dans la figure ci-dessous.



**Figure 4.16**

On voit que le découplage est très bon, (inférieur à 1%), même si sa dynamique est très lente pour  $\varphi$ .

Le temps de réponse de  $\psi$  est de 3sec, pour  $\varphi$  le temps de montée est de 2 sec mais  $\varphi$  n'atteint la bande des 5% qu'après 8 sec avec une erreur statique nulle.

- La réponse de  $\varphi$  nous indique que le système en boucle fermée possède des pôles lents, et de même les faibles oscillations de  $\psi$  indiquent la présence de pôles mal amortis.

Le modèle linéarisé possède autour de ( $\psi = 0.5 \text{rd}$ ) la paire de pôles suivante :

$$p_{12} = -0.21 \pm 2.76j \quad (4.33)$$

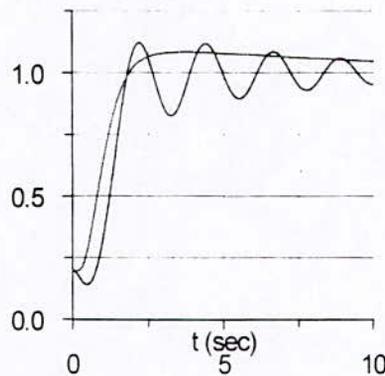
En boucle fermée on trouve la paire de pôles et la paire de zéros suivantes :

$$\begin{aligned} p_{12} &= -0.17 \pm 2.79j \\ z_{12} &= -0.3 \pm 2.75j \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ce qui montre que le compensateur  $H_\infty$  a essayé d'éliminer la paire de pôles par la paire de zéros au lieu de déplacer complètement les pôles mal amortis.

L'inconvénient des pôles mal amortis n'apparaît pas bien dans la réponse temporelle car T contient aussi la paire de zéros, mais pour des conditions initiales non nulles tout les pôles sont excités.

La figure suivante représente la réponse à un échelon sur les 2 entrées avec  $\psi(0) = \varphi(0) = 0.2 \text{ rd}$ .



**Figure 4.17**

La remarque précédente illustre un inconvénient majeur de la commande  $H_\infty$  :

Nous n'avons aucune idée sur la relation entre la position des pôles en boucle fermée et les fonctions de pondération [2,3,31].

### **Simulations Nonlinéaires :**

Nous avons appliqué les commandes issue de 2 modèles linéaires MS3 et MS5 directement au système nonlinéaire.

Les résultats des simulations sont présentés dans les figures (4.18 ) et (4.19 ).

Les figures (a) et (b) représentent la réponse pour des échelons sur  $\psi$  de différentes amplitudes ( 0.1, 0.4, 0.7 rd).

(c) et (d) représentent des échelons sur  $\varphi$  ( 0.1, 1, 1.5 rd ).

(e) représente la réponse pour une référence  $\text{ref} = [0.5 \ -1]'$  comparé avec la réponse linéaire, (g) la commande correspondante.

(f) représente la réponse pour  $\text{ref} = [0.5 \ 1]'$ , (h) la commande correspondante.

A partir des courbes on peut faire les remarques suivantes :

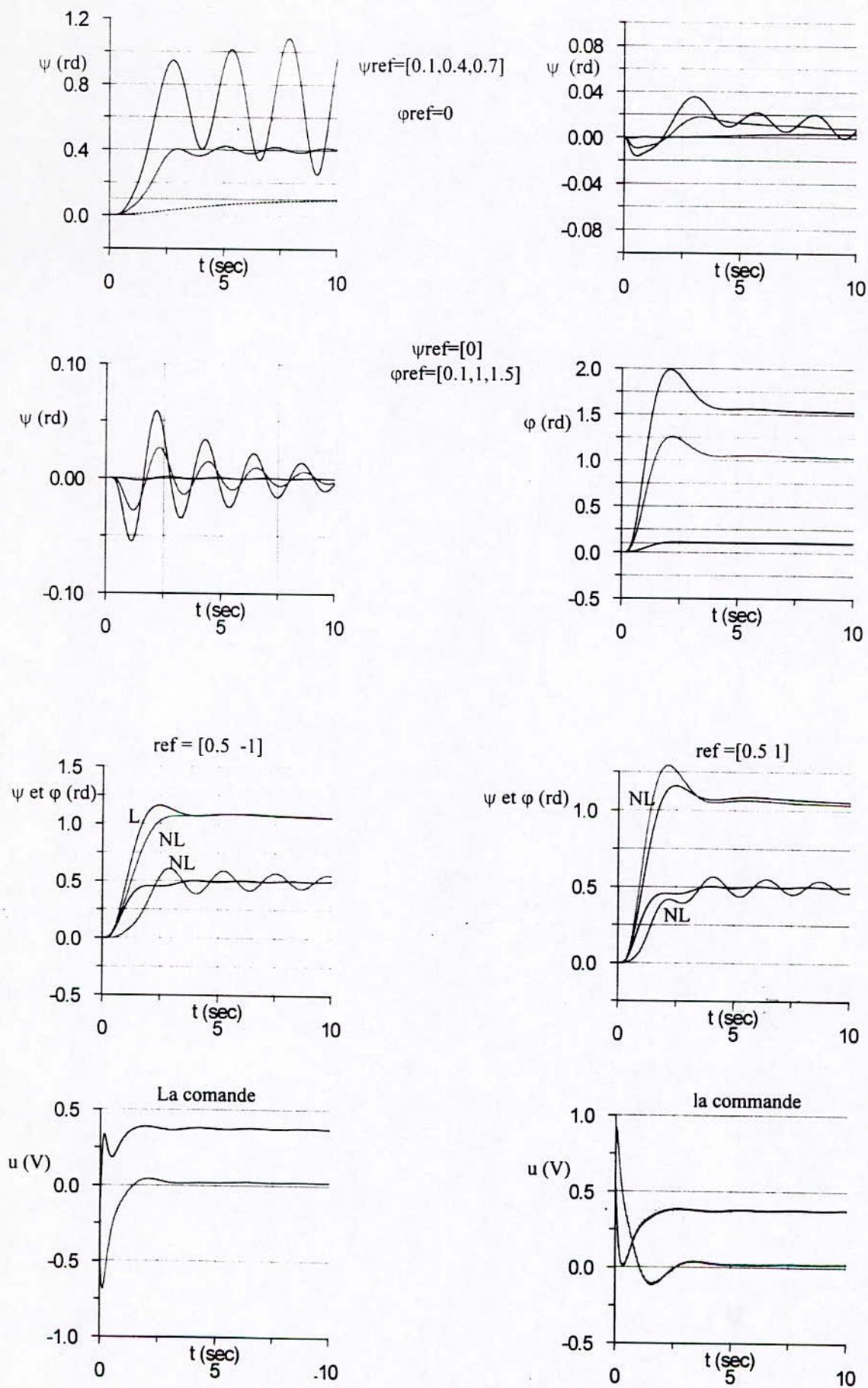


Figure 4.18: Simulations nonlinéaires pour le compensateur MS3.

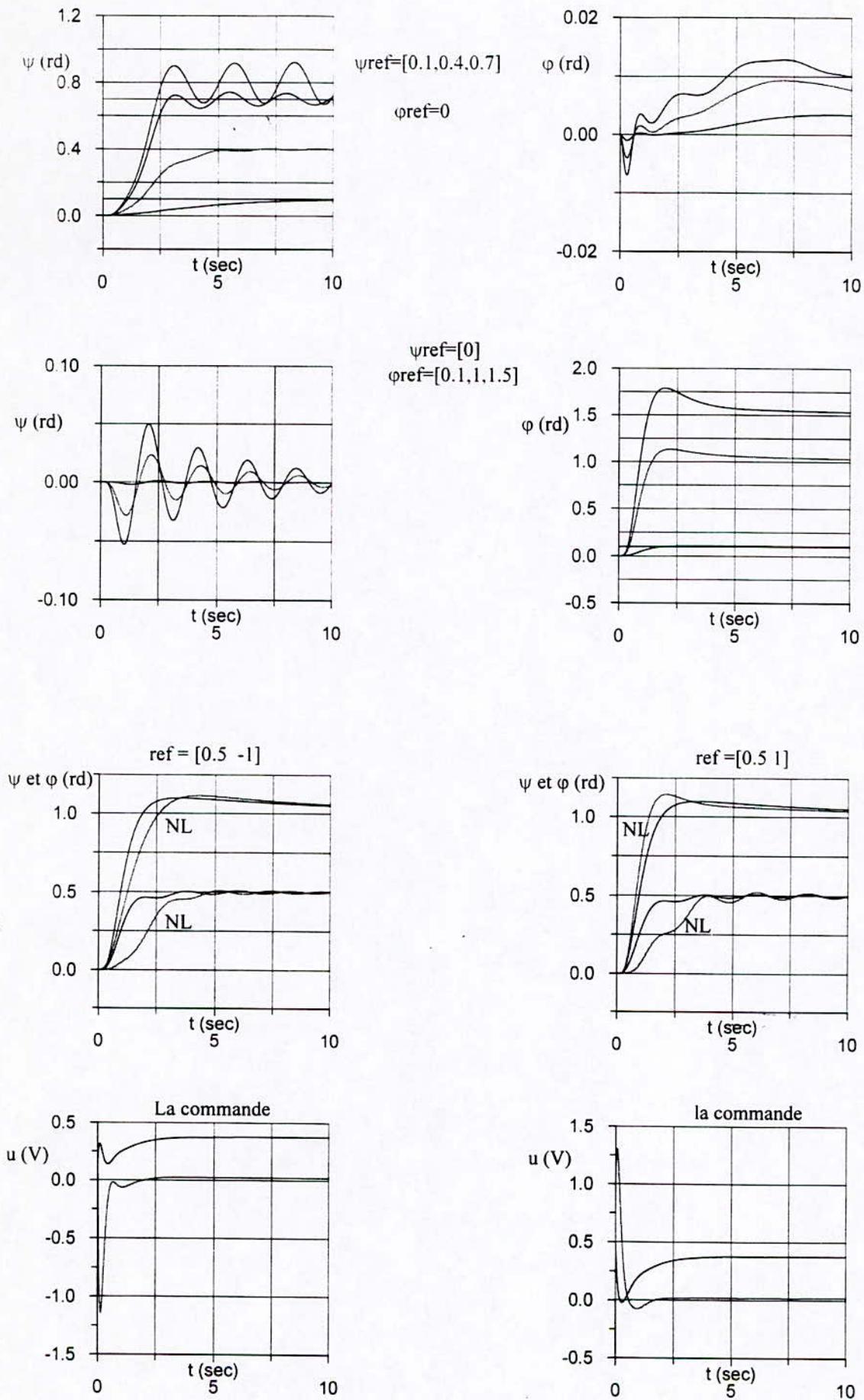


Figure 4.19: Simulations nonlinéaires pour le compensateur MS5.

- pour les faibles  $\psi$  le système nonlinéaire est plus lent que le système linéaire et MS3 est meilleur que MS5.
- $\phi$  réagit comme un système linéaire avec une légère augmentation du dépassement, et ceci tant que  $\phi$  est inférieur à 1.8 la valeur pour laquelle le système est déstabilisé.
- Les réponses pour  $[0.5 \ -1]$  sont meilleurs que pour  $[0.5 \ 1]$ , ce qui montre bien l'aspect nonlinéaire du système.
- MS3 est stable pour  $0 \leq \psi \leq 0.6$  tandis que MS5 est stable pour  $0 \leq \psi \leq 0.8$ .

### 2.3.4 Synthèses par la Méthode des Facteurs Coprimes :

Pour la commande  $H_\infty$  à sensibilité mixte, l'étape décisive est le choix des fonctions de pondérations qui peuvent réaliser les meilleures performances possibles. De la même manière dans la méthode des facteurs coprimes par loopshaping, le choix de  $W(s)$  permet d'imposer l'allure de la fonction de transfert et boucle ouverte et donc les performances du système, le compensateur vient ensuite stabiliser le système en boucle fermée (§ 3.4).

Un avantage considérable de la synthèse par les facteurs coprimes est que nous n'avons pas le problème de validation des hypothèses comme pour le Sensibilité Mixte.

#### Le Choix de W :

Pour augmenter le gain en basses fréquences on utilise un intégrateur, après quelques essais, le gain de l'intégrateur seul ne nous à pas permis d'avoir un bon compromis entre emax et la rapidité du système.

Pour avoir plus de degré de liberté on à introduit un zéro.

Après quelques essais, on a choisit :

$$W(s) = \frac{2(2s+1)}{s} \quad (4.35)$$

Une fois que W choisit, le compensateur est obtenu en exécutant 'ncfsyn' de GW.

La structure du compensateur final est représenté par la figure(3.10).

Nous avons obtenu les compensateurs NCF pour les modèles linéarisé autour de  $\psi_0 = 0.2 \text{ rd}$  et  $\psi_0 = 0.5 \text{ rd}$ , NCF2 et NCF5.

Nous allons présenter maintenant les réponses fréquentielles pour NCF2.

#### Réponses Fréquentielles :

Pour voir l'amélioration de la boucle ouverte apportée par  $W$ , on représente dans la figure suivante les valeurs singulières de  $G$ ,  $GW$  et  $GWK$ .

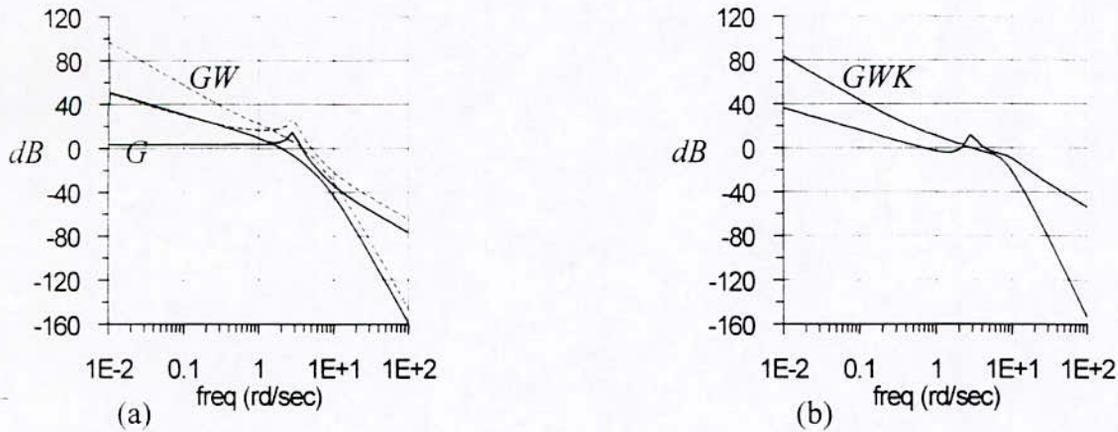


Figure 4.20

• On remarque que pour  $G(s)$ , le gain en basse fréquence est entre 0 et 50dB alors que pour  $GW$  et  $GWK$ , il est supérieur à 40dB.

Pour les hautes fréquences le diagramme de  $GW$  est légèrement supérieur à celui de  $G$  avec une pente de  $\sigma$  de  $-40\text{dB/décade}$ .

On remarque aussi que l'allure  $GWK$  est très proche de  $GW$ , ce qui vérifie nos hypothèses de départ (§3.4).

En boucle fermée nous avons les valeurs singulières de  $S$ ,  $T$ ,  $1/KS$  et  $1/T$  dans la figure suivante :

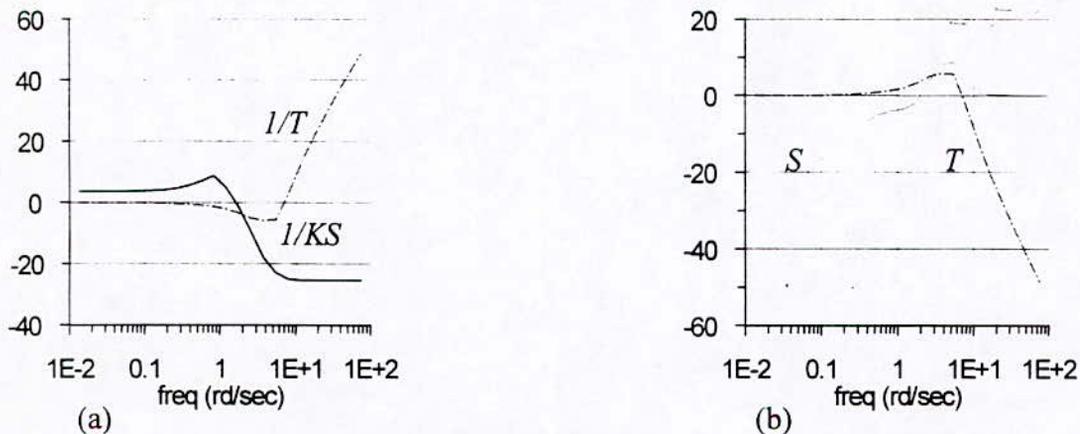


Figure 4.21

Rappelons que :

$$S = (I - GWK)^{-1} \quad (4.36)$$

On remarque que S et T présentent des pics <10dB.

Une bande passante de 7rd/sec supérieure à celle de  $H_\infty$  MS.

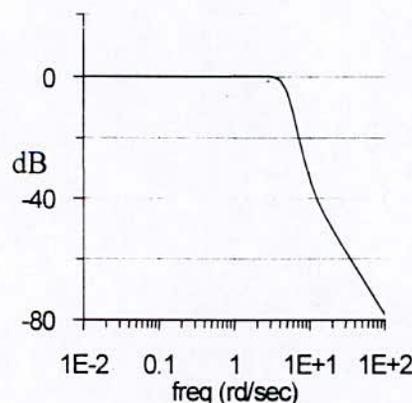
De la figure (a) on voit que le système est sensible aux incertitudes additives surtout pour les fréquences élevées contrairement aux incertitudes multiplicatives

- Même si la structure de commande de la figure (3. .) n'est pas celle qu'on utilise dans les théorèmes du §(2.4.2), on peut voir facilement que la robustesse vis à vis des incertitudes additives et multiplicatives est déterminée par WKS et T.

De la figure(3.10)on voit que la fonction de transfert entrée en sortie et la référence est donnée par :

$$\begin{aligned} F(s) &= -GW(I - GWK)^{-1} K_0 \\ F(s) &\neq T(s) \end{aligned} \quad (4.37)$$

et donc la poursuite est déterminée par F(s) et non T(s),  $\bar{\sigma}(F(s))$  est représenté dans la figure ci dessous

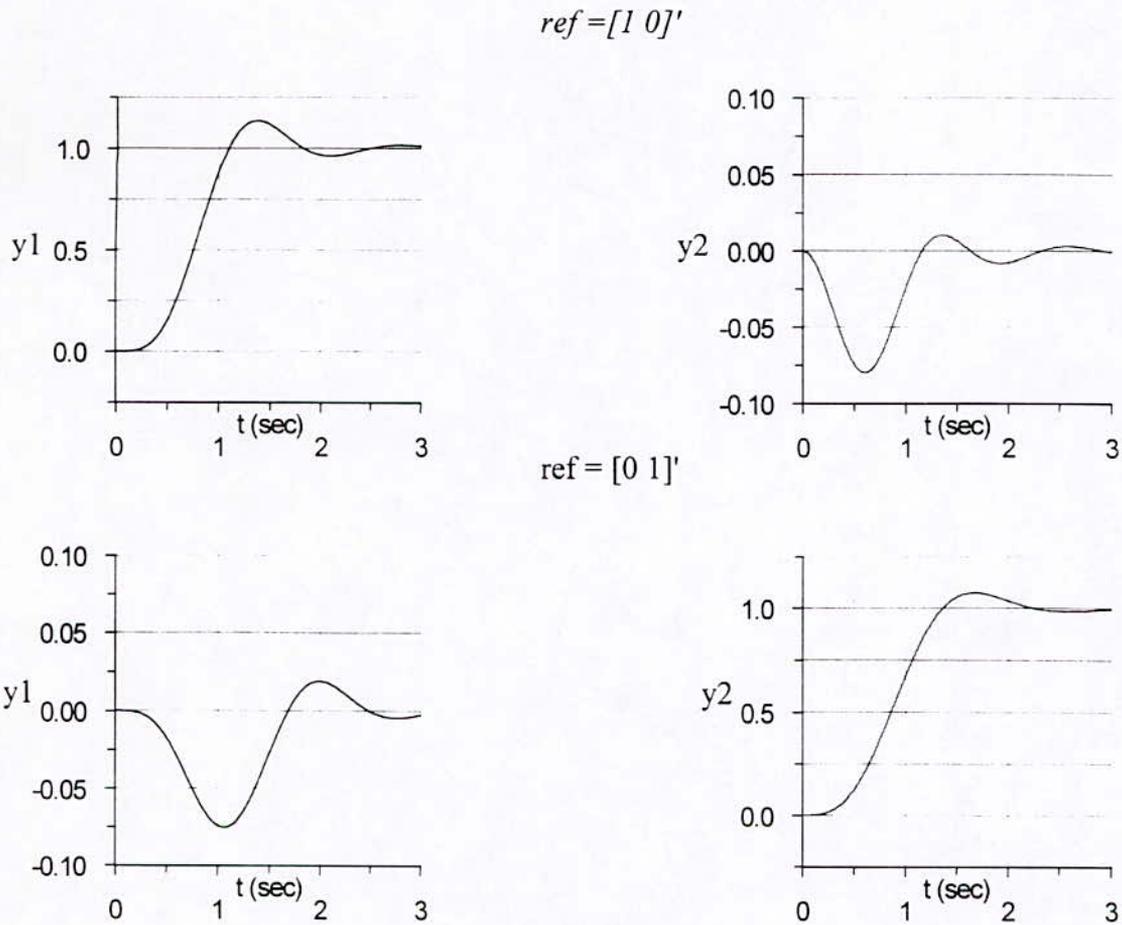


**Figure 4.22**

Nous n'avons pas de pic de résonance et la bande passante est toujours de l'ordre de 5rd/sec.

Nous allons voir maintenant les réponses temporelles de F(s) :

Les réponses à un échelon sur  $\psi$  puis  $\phi$  sont représentés dans la figure ci-dessous.



**Figure 4.23**

Des figures ci-dessus on voit que le temps de réponse est de 2 secondes, avec un léger dépassement.

Le couplage est représenté par un pique négatif de 7% puis disparaît en 2 secondes.

Les réponses sont très satisfaisantes; ce qui correspond bien au diagramme des valeurs singulières de  $F(s)$  et non de  $T(s)$ .

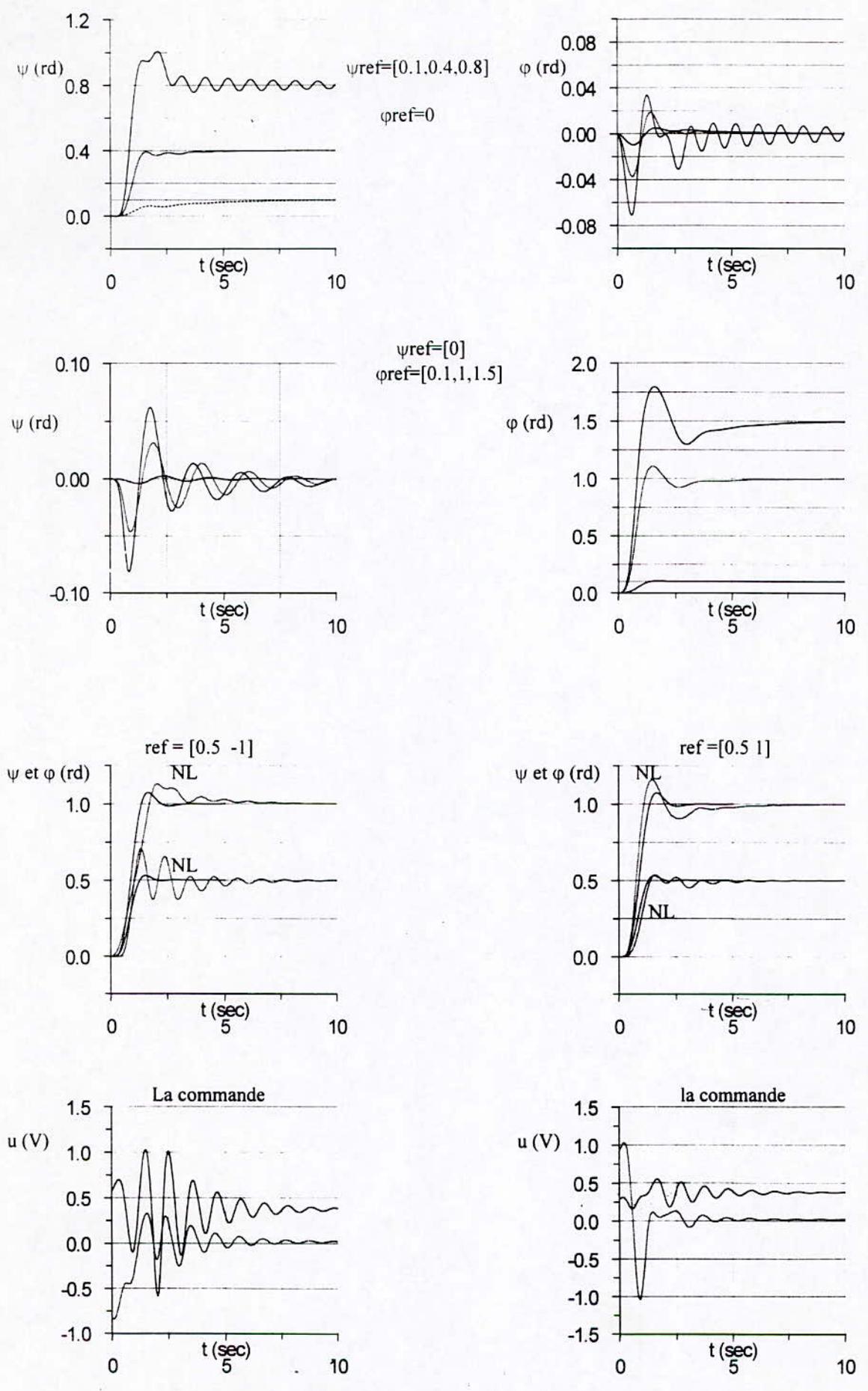
Nous allons voir maintenant la réaction du système nonlinéaire à cette commande.

### Simulations Nonlinéaires :

Les réponses temporelles pour les deux compensateurs NCF2 et NCF5 sont représenté dans les figures ( 4.24 ) et ( 4.25 ) qui sont organisé de la même manière que la figure (4.18).

On peut faire les remarques suivantes :

- une augmentation du temps de réponse pour faibles valeurs de  $\psi$ .



**Figure 4.24:** Simulations nonlinéaires pour le compensateur NC2.

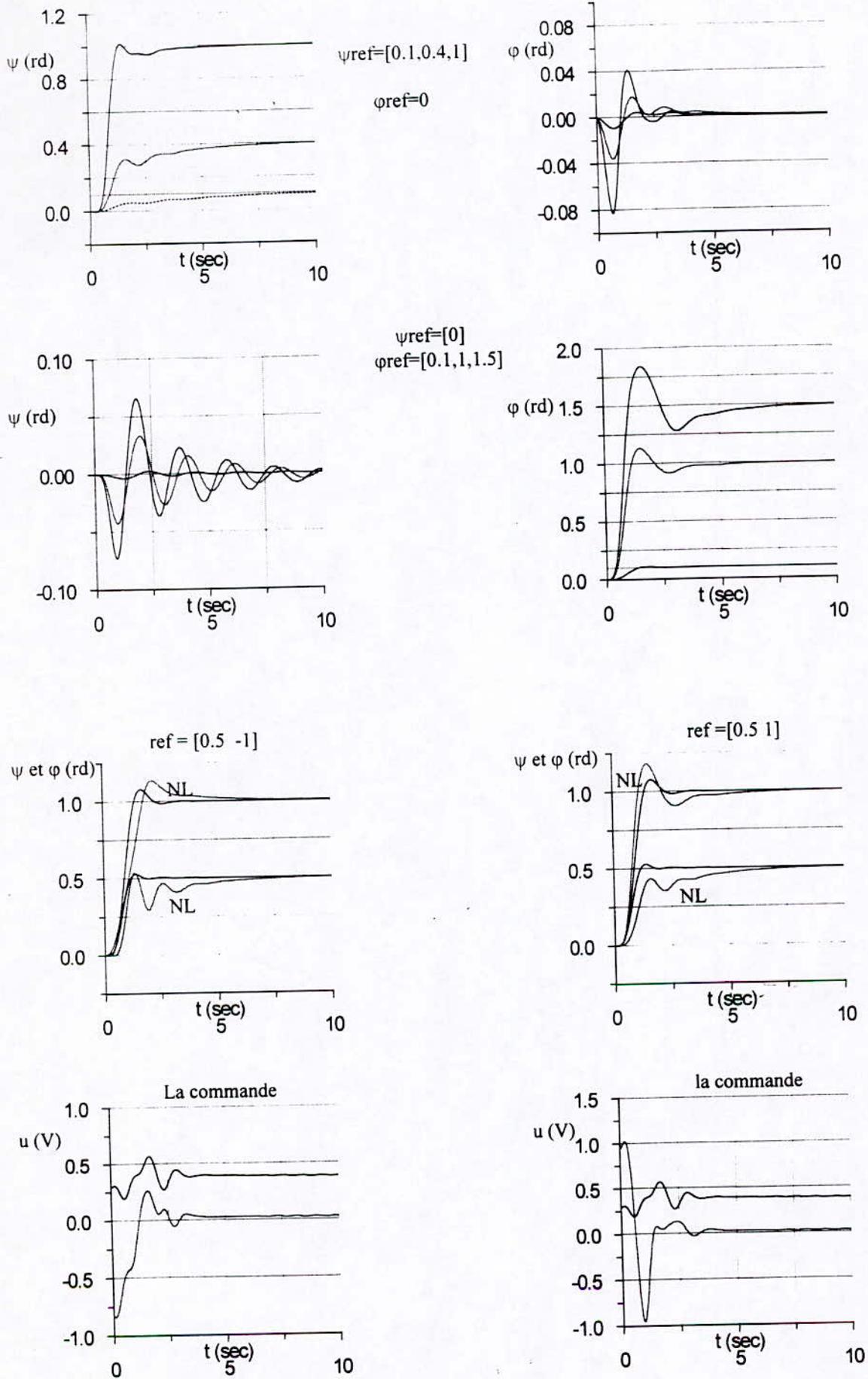


Figure 4.25: Simulations nonlinéaires pour le compensateur NC5.

- Apparition des oscillations pour les valeurs supérieures à  $\psi_0$ .
- Les commandes stabilisent le système pour une plus grande plage de  $\psi_{ref}$ .
- Les commandes sont inférieures aux valeurs maximales spécifiées dans [13].

#### 4.2.5 Comparaison

A partir des simulations on peut voir que :

Pour les simulations linéaires les performances des compensateurs NCF sont meilleures que ceux du MS, mais en contre partie la robustesse vis à vis des incertitudes additives et multiplicatives des compensateurs MS est meilleure.

Pour les simulations nonlinéaires les compensateurs NCF stabilisent le système pour un plus grand domaine de fonctionnement.

Pour  $0 \leq \psi \leq 0.4 \text{ rd}$  ( $0^\circ \leq \psi \leq 20^\circ$ ) les compensateurs MS3 et NCF2 sont meilleurs que MS5 et NCF5.

Pour les valeurs de  $\psi > 0.6$ , les compensateurs MS5 et NCF5 sont meilleurs.

Si on avait à choisir un seul compensateur notre choix dépendra du domaine de fonctionnement désiré, si on travaille seulement pour de faible  $\psi < 30^\circ$  on choisira NCF2, tandis que si on peut avoir des  $\psi$  plus élevés on choisit NCF5, car le NCF2 se déstabilise plutôt que NCF5.

Si on veut bénéficier des avantages des 2 compensateurs on utilise la technique des régulateurs commuté ou de la commande par réseau de modèles locaux décrites dans le paragraphe (3.8), c'est l'objet du paragraphe suivant.

#### 4.2.6 Commande par L.M.N

La commande est réalisée par la structure de la figure (3.13) :

$$u = f_1 u_1 + f_2 u_2 \quad (4.38)$$

avec

$u_1$  la commande générée par NCF2.

$u_2$  la commande générée par NCF5.

Notre première solution est de commuter entre les deux compensateurs en fonction de  $\psi_{ref}$ , c'est à dire que  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions de  $\psi_{ref}$  comme indiqué dans la figure ci-dessous:

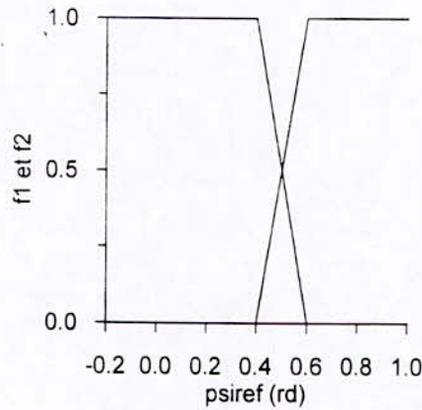


Figure 4.24

Le compensateur ainsi formé est un compensateur linéaire pour toutes références constantes:

Pour  $0 \leq \psi_{ref} \leq 0.4 \text{ rd}$   $u = u_1.$  (4.39)

Pour  $0.6 \leq \psi_{ref} \leq 1.5 \text{ rd}$   $u = u_2.$  (4.40)

Pour  $0.4 \leq \psi_{ref} \leq 0.6 \text{ rd}$   $u = f_1(\psi_{ref}) u_1 + f_2(\psi_{ref}) u_2.$  (4.41)

Pour des références *variables* supérieures à (0.4 rd) le compensateur n'est plus linéaire.

- Une autre solution consiste à utiliser la commutation en fonction de *la sortie* et non de la référence, c'est à dire que  $f_1$  et  $f_2$  sont fonction de  $\psi$  et de non de  $\psi_{ref}$ .

Ce dernier compensateur n'est linéaire que pour  $\psi_{ref} < 0.4 \text{ rd}$  dès que  $\psi_{ref} > 0.4 \text{ rd}$  (même constante), le compensateur devient non linéaire.

Comme nous l'avons dit au paragraphe (3.8) nous n'avons aucune garantie théorique quand à la stabilité du système en boucle fermée.

- Dans la figure (4.25) on représente les réponses du système non linéaire à un échelon ( $\psi_{ref} = 0.5$ ) et ( $\varphi_{ref} = 1$ ) pour les compensateurs LMN entrée et LMN sortie.

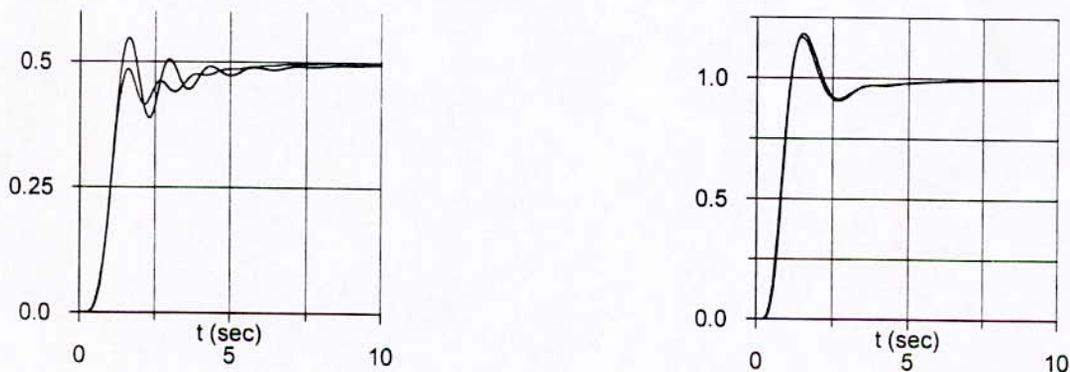


Figure 4.25

On remarque que les deux compensateurs réagissent bien et permettent d'améliorer les performances du système nonlinéaire pour un plus grand domaine de fonctionnement.

L'étude approfondie des structures de commandes proposées dans ce paragraphe nécessiterait plus de simulations.

### **4.3 Conclusion**

Nous avons vu l'application des techniques de commandes présentées dans le chapitre sur un modèle linéaire puis sur le modèle d'un simulateur d'hélicoptère.

Le premier exemple nous a permis de vérifier nos raisonnements en fréquentiel par des simulations sur le système perturbé, nous avons aussi posé le problème de performances robustes.

Dans notre seconde application, nous avons vu les différentes étapes de la commande: Linéarisation, synthèse de la commande, simulation linéaires, simulations nonlinéaires.

La comparaison entre la commande à sensibilité mixte et l'approche de Glover McFarlane a montré que la dernière est plus simple à appliquer et donne de meilleurs résultats.

## Conclusion Générale

L'étude que nous avons effectuée nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- La robustesse est un élément essentiel pour la synthèse de tout système de commande.
- Pour les méthodes classiques et la commande LQG la robustesse du système doit être étudiée à posteriori.
- *Les méthodes de synthèses par minimisation d'une norme infini permettent d'avoir des commandes optimales multivariables garantissant la stabilité pour une classe de système représentés par des incertitudes non structurées.*
- Le problème de la commande revient à avoir un bon compromis robustesse- performances et ceci par un bon choix des fonctions de pondérations fréquentielles.
- L'utilisation des deux techniques précédentes pour notre application a montré que la méthode des Facteurs Coprimes normalisés est plus facile à utiliser et permet d'avoir de meilleurs résultats, toutefois il n'est pas possible de généraliser cette remarque.
- Lorsque le système à commander est nonlinéaire et qu'on ne peut pas répondre au cahier de charge par un seul compensateur linéaire, alors on peut utiliser plusieurs compensateurs linéaires, chacun autour d'un point de fonctionnement pour commander le système nonlinéaire.
- Les méthodes de commandes optimales ont réussi à convertir le problème de la synthèse de la commande en un problème de modélisation du système et du cahier de charges:

**Un modèle simple et représentatif.**

**Un cahier de charges satisfaisant et réaliste.**

## Perspectives

Pour compléter notre étude on propose les sujets suivants :

- Comparer la commande  $H_\infty$  avec les méthodes de commandes LQG/LTR et LQG à pondérations fréquentielles [1,3].
- Etude du problème de performances robuste, et les méthodes de commandes pour le résoudre telles que la  $\mu$  synthèse [12,21].
- Comparaison entre les commandes à réseaux de modèles locaux et les commandes nonlinéaires 'robuste' : la commande adaptative et la commande par mode glissant.
- En ce qui concerne les applications, il serait très intéressant de pouvoir appliquer directement notre étude au simulateur d'hélicoptère réel, car avec la présence du système réel, les modèles linéaires peuvent être obtenus directement par identification .
- On pourrait aussi appliquer les techniques de commande  $H_\infty$  en robotique, et ceci après une première boucle de ' feedback linéarisation ', on utilise la commande  $H_\infty$  pour le système linéaire résultant afin d'améliorer la robustesse de la commande [24].

## Bibliographie

- [1] M. Green, D. Limbeer. *Linear Robust Control*, Prentice Hall, 95.
- [2] D. C. McFarlane, K. Glover. Robust Controller Design Using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions, *Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol 138 Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [3] J. M. Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*, Addison -Wesley, 1989.
- [4] B. D .O. Anderson, J. B. Moore. *Optimal Control Linéair Quadratic Methods*, Pretice Hall, 1990.
- [5] B. Shahian, M. Hassul. *Control System Design Using Matlab*, Pretice Hall.
- [6] J. Lunze. *Robust Multivariable Feedback Control*, Pretice Hall, 1989.
- [7] B. Friedland. *Control System Design An Introduction to State Space Methods*, Mc Graw-Hill, 1987.
- [8] M. Morari, E. Zafiriou. *Robust Proces Control*, Pretice Hall, 1989.
- [9] K. J. Astrom, B. wittenmark. *Adaptive Control*, Addisson Wesley, 1989.
- [10] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, R. Smith. *Mu. Analysis ad Synthesis Toolbox*, the Math Works Inc, 1993.
- [11] R. Y. Chiang, M. G. Safonov, *Robust Control Toolbox*, the Math Works Inc, 1988.
- [12] J. C. Doyle, B. A. Fracis, A. R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*, Mc Millan, 1992.
- [13] Petr Horacek. *'Helilab' CE 150 Helicopter Technical Manuel*.
- [14] G. Zames. Feedback and optimal sensivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans Aut Contr*, 1981, 585-601.
- [15] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, M. Athans. Robustness results in linear quadratic gaussian based multivariable control designs. *IEEE Trans. Aut. Contr*, Jan 1981.
- [16] G. Stein, M. Athans The LQG /LTR procedure for multivariable feedback control design *IEEE Trans. Aut. Contr*, Feb 1987.

- [17] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. A. Francis. State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Aout 1989.
- [18] D. McFarlane, K. Glover. A loopshaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, June 1992.
- [19] I. Postlethwaite, Basic principles of robust control. *Workshop on  $H_\infty$  Control*, Brighton U.K. 1991, 1-31.
- [20] P. Lundstrom, S. Skogestad, Z. C. Wang. Weight selection for H-infinity and mu-control methods: Insights and examples from process control. *Workshop on  $H_\infty$  Control*, Brighton, U.K. 1991 139-157.
- [21] G. Stein, J. C. Doyle, Beyond singular values and loop shapes. *Journal of Guidance*, Feb 1991.
- [22] S. Skogestad, M. Morari, J. C. Doyle. Robust control of ill-conditioned plants high-purity distillation column. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Dec 1988.
- [23] X. Gao, B. MacVey, R. L. Tokar. Robust controller design of four wheel steering systems using mu Synthesis techniques. *Proceeding of 34 th Conference on Decisions Control*, Dec 1995.
- [24] W. L. Stout, M. E. Sawan. Application of H-infinity theory to robot Manipulator Control.
- [25] C. Paterson, I. Postlethwaite, D. Walker, A. Bashagha. The developement and evaluation of an H-infinity induction motor controller . *IFAC World Congress*, 1996, San Francisco.
- [26] W. T. Baumann, W. J. Rugh. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Jun 1986.
- [27] K. J. Hunt, T. A. Johansen. Design and analysis of gain-sceduled control using local controller networks, *Int. Jour of Contr.*, Mars 1997.
- [28] J. Doyle. Robust and optimal control. *Proceeding of 35th C. D. C* , Kobe Japan, Dec 1996.
- [29] P. Dorato, R. Tempo, G. Muscatos. Bibillography on robust control. *Automatica* (92).
- [30] M. Akesson, E. Gustafson, K. H. Johansson. *IFAC World Congress*, 1996, San Francisco.
- [31] C. Sambalancat. *Commande Robuste Multivariable Application à l'hélicoptère*, Thèse D'état, ENSAE Toulouse 1991.
- [32] P. Chevrel. *Commande Robuste: Application à la Regulation d'un Groupe Turbo-Alternateur*.