

15/97

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

DER de : GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE

◦ Filière : AUTOMATIQUE

# Mémoire

*En vue d'obtenir le diplôme  
d'Ingénieur d'Etat en AUTOMATIQUE*

## THEME

COMMANDE DECENTRALISEE  
A STRUCTURE VARIABLE  
APPLICATION EN ROBOTIQUE

Proposé par :

Mr D. BOUKHETALA  
Mr F. BOUDJEMA

Etudié par :

Mr MADANI Tarek  
Mr AMRATI Saad

Dirigé par :

Mr D. BOUKHETALA  
Mr F. BOUDJEMA

Promotion 1997

E.N.P. 10 avenue Hassen Badi EL-HARRACH ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

بسم الله الرحمن الرحيم

والله اعلم  
بما كنا نقول

صلى الله عليه وسلم

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mon père ;*

*A ma Mère ;*

*A mes frères et soeurs ;*

*A ma famille ;*

*A tous mes amis .*

*Tarek*

# Sommaire



<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Modélisation des Robots Manipulateurs</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction.....	3
1.2 Modélisation cinématique.....	4
1.2.1 Cinématique directe.....	4
1.2.2 Convention de Denavit et Hartenberg.....	5
1.2.3 Présentation du robot à structure cylindrique.....	7
1.2.4 Présentation du robot PUMA 560.....	10
1.2.5 Présentation du robot SCARA.....	14
1.3 Modélisation dynamique.....	17
1.3.1 Introduction.....	17
1.3.2 Approche d'Euler Lagrange.....	17
- Méthode directe 1.....	20
- Méthode directe 2.....	21
- Modèle dynamique général.....	23
1.3.5 Modèle dynamique du robot à structure cylindrique.....	25
1.3.6 Modèle dynamique du robot PUMA 560.....	27
1.3.7 Modèle dynamique du robot SCARA.....	30
1.4 Génération de trajectoire.....	34
1.4.1 Trajectoire cycloïdale.....	34
1.4.2 Trajectoire de VIVIANI.....	35
1.5 Conclusion.....	36
<b>Chapitre 2 Système à Structure Variable</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction.....	37
2.2 Système à structure variable.....	38
2.3 Surface de glissement.....	39
2.4 Solution des systèmes à second membre discontinu.....	40
2.4.1 Méthode de FILLIPOV.....	40
2.4.2 Méthode d'UTKIN.....	41
2.5 Notion de géométrie différentielle.....	42
2.6 Condition d'existence du mode de glissement.....	44
2.7 Régime glissant idéal.....	47
2.8 Réduction d'ordre.....	48
2.9 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations.....	48
2.10 Commande par mode de glissement.....	50
2.10.1 Commande par diagonalisation.....	50
2.10.2 Commande par la forme quadratique.....	53
2.10.3 Commande hiérarchisée.....	56
2.10.4 Autres approche de commande.....	57
2.11 Conclusion.....	60

<b>Chapitre 3</b>	<b>Commande Décentralisée à Structure Variable</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction.....	61
3.2	Modèle dynamique décentralisé.....	62
3.3	Synthèse de la commande.....	64
3.3.1	Sélection des surfaces de glissement.....	64
3.3.2	Construction de la commande décentralisée.....	68
3.3.2.1	Première approche de commande.....	70
3.3.2.2	Deuxième approche de commande.....	73
3.4	Introduction de la couche bornée.....	75
3.5	Résultats de simulation.....	76
3.6	Conclusion.....	113
	<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>	<b>114</b>
	<b>Annexes</b>	<b>116</b>
Annexe 1 -	Calcul du modèle dynamique du robot à structure cylindrique de classe 4.....	116
Annexe 2 -	Calcul du modèle dynamique du robot PUMA 560 avec l'introduction de l'effet de l'effecteur.....	118
Annexe 3 -	Calcul du modèle dynamique du robot SCARA.....	124
	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>126</b>

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Introduction Générale

La complexité de synthétiser des commandes pour les systèmes dynamiques non linéaires particulièrement les systèmes robotisés a amené les spécialistes à se pencher vers un axe de recherche dans le but de rendre cette synthèse moins encombrante tout en satisfaisant le maximum de performances.

Ces recherches ont donné naissance durant les deux dernières décennies à une approche de commande décentralisée très répandue et ce après les résultats appréciables obtenus dans les domaines technologiques et industriels.

Ces résultats confirment que la commande décentralisée satisfait plus de contraintes que la commande centralisée, à savoir : [32]

- la réduction du coût de l'implémentation des lois de commande.
- la minimisation du taux d'informations utilisées pour la génération des lois de commande et d'autres types de contraintes selon la nature du système.
- l'augmentation de la fiabilité des contrôleurs.

Partant de l'idée de décentralisation il nous a paru judicieux d'appliquer cette technique avec une commande robuste pour composer une nouvelle commande décentralisée à structure variable.

La théorie des systèmes à structure variable et les modes de glissement associés est une technique très connue. Elle a été développée à l'issue des travaux du Mathématicien Soviétique A.F FILLIPOV [2] en résolvant le problème de l'équation différentielle à second membre discontinu en 1960. Elle a été suivie par les recherches avancées menées par le Professeur EMIL'YANOV en 1967 et son équipe (UTKIN [1],...).

La commande décentralisée à structure variable est caractérisée par la discontinuité de la commande lors du passage par une surface de glissement locale (appelée aussi surface de commutation).

La dynamique du système équivalent est implicitement liée au choix de cette surface.

La technique des modes glissants présente une multitude d'avantages lors de la commande des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires dont la robustesse vis à vis des paramètres variables et perturbations externes.

Dans le présent mémoire nous proposons deux approches de commande décentralisée à structure variable avec application à différents robots manipulateurs dans le but de satisfaire les avantages des deux techniques et une meilleure poursuite de trajectoire d'état désirée.

A cet effet, malgré le peu de références existantes dans ce domaine (CDSV) il nous a fallu faire des recherches, des analyses et tester différentes méthodes.

Les résultats du travail que nous présentons en trois chapitres est une modeste contribution au champ d'application de la technique des systèmes à structure variable et la commande décentralisée.

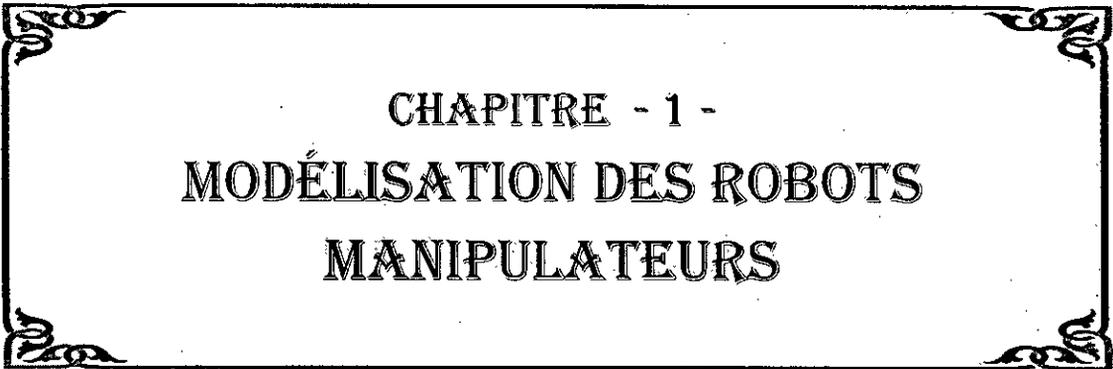
Le premier chapitre est consacré à la modélisation de trois robots : le robot à structure cylindrique caractérisé par une rotation et deux translations, le robot PUMA 560 caractérisé par trois rotations et le robot SCARA qui réalise deux rotations horizontales. Leur modélisation est basée sur le formalisme d'Euler- Lagrange augmentée par la technique présentée dans l'article [29].

Dans le second chapitre nous présentons une généralité sur la théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés dans le cas centralisé avec différentes approches de commande.

Dans le troisième chapitre nous développons la technique de décentralisation aux robots manipulateurs et la synthèse des deux nouvelles approches de commande décentralisée à structure variable avec la sélection d'une nouvelle loi de commutation qui comporte une partie linéaire, une partie non linéaire par rapport à l'erreur de poursuite et un terme d'intégration qui a pour but d'éliminer l'erreur de poursuite permanente. La fin de ce chapitre traite de l'application de cette variété aux modèles de robots étudiés.

Enfin une conclusion générale et quelques perspectives de notre travail clôturent le présent mémoire.





CHAPITRE - 1 -  
MODÉLISATION DES ROBOTS  
MANIPULATEURS

## Chapitre 1

# Modélisation des Robots Manipulateurs

### 1.1 Introduction.

Avec les nouvelles techniques qui mènent à une technologie avancée due à l'automatisation des usines qui sont assistées par des ordinateurs et des systèmes dynamiques dont l'exclusion est selon le choix avec une précision de haut niveau, ces systèmes sont les Robots. Cette appellation n'est pas nouvelle. Elle a pour origine le mot **robot** extrait de la littérature grecque et qui veut dire travail. On trouve dans la littérature différentes définitions de ce système dynamique :

- celle donnée par JIRA (Japon industriel robot industrie association) « Un robot est un système versatile doté d'une mémoire et pouvant effectuer des mouvements comme ceux d'un opérateur humain ».
- celle donnée par RIA (Robot instit of america) « Un robot étant un manipulateur à fonction multiple programmé pour réaliser automatiquement des tâches variées éventuellement répétitives ».

La définition descriptive d'un robot est : « Un robot manipulateur est caractérisé par une structure arborescente articulée simple ou multiple dont les segments sont mobiles les uns par rapport aux autres. Cet ensemble a pour objectif de mener l'organe terminal vers un lieu géométrique imposé par la tâche ».

La synthèse de la commande du robot nécessite la connaissance des relations entre ses grandeurs d'entrées et de sorties. L'ensemble de ces équations constitue le modèle mathématique du robot. Si les équations sont extraites de la physique, le modèle est appelé *modèle de connaissance*. et si ces équations découlent des observations disponibles sur le système le modèle s'appelle *modèle de représentation*.

Dans notre travail on va s'occuper d'étudier trois modèles principaux de robots.

- Robot à structure cylindrique, deux translations et une rotation.
- Robot PUMA 560 , trois rotations.
- Robot SCARA , deux rotations.

Ceci pour couvrir une certaine gamme de robots avec l'application de notre commande décentralisée à structure variable.

## 1.2 Modélisation Cinématique.

### 1.2.1 Cinématique directe.

Tout manipulateur peut être considéré comme une chaîne de liaisons connectés par des charnières ou glissières d'articulations. La liaison localise les informations à son propre repère et avec des matrices de passages d'ordre quatre définit par Denavit et Hartenberg. On peut arriver à des informations globales sur le repère d'inertie.

#### *Coordonnées homogènes d'un vecteur.*

Pour ne pas alourdir les travaux et ramener toutes les informations dynamiques et cinématiques au repaire d'inertie de la base, il est judicieux de les localiser à leurs articulations correspondantes mais avec des informations ramées à la base.

Lorsqu'on a uniquement des rotations on se satisfait à une matrice de transformation  $[n,s,a]$  de troisième ordre, et lorsqu'il existe une translation on est obligé de passer vers une matrice de quatrième ordre pour permettre au référentiel de se déplacer à un autre référentiel en translation. Dans ce cas le vecteur de position  $p$  sera augmenté par une quatrième composante pour avoir un vecteur de position  $p'$  exprimé par ses coordonnées homogènes :

$$p = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$p' = \begin{bmatrix} v p_x & v p_y & v p_z & v \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

pour  $v=1$  le vecteur  $p'$  sera exprimé par ses coordonnées physiques.

La matrice augmentée de transformation devient :

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

et

$$P'_{XYZ} = T P'_{UVW} \quad (1.4)$$

avec  $OXYZ$  référentiel fixe au niveau de socle.

$OUVW$  référentiel en mouvement par rapport a  $OXYZ$ .

la matrice  $T$  lie ces deux référentiels.

### 1.2.2 Convention de Denavit et Hartenberg, 1955. [17]

Un manipulateur est une chaîne de liaisons connectées par des articulations (charnières ou glissières). Chaque liaison fait des rotations ou translations par rapport au référentiel fixe, c'est le repère d'inertie. Il serait judicieux de situer chaque liaison à son propre référentiel, le passage entre le référentiel est garanti par des transformations homogènes basant sur la convention de Denavit et Hartenberg. Le choix adéquat des repères facilite le calcul des matrices homogènes et permet d'arriver à exprimer rapidement des informations de la base vers l'élément terminal ou l'inverse.

Cette méthode est systématique, elle permet le passage entre articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, les surfaces adjacentes restent en contact. Pour cet aspect on utilise des charnières ou des glissières

Les étapes à suivre pour cette technique sont :

1/ numérotation des segments constitutifs du bras manipulateurs de la base vers l'élément terminal. On associe le référentiel zéro à la base de celui-ci et l'ordre 'n' à la 'Pince'.

2/ définition des axes principaux de chaque segment :

- $Z_{i-1}$  est l'axe de rotation du segment (rotation).  
 $Z_{i-1}$  est l'axe de translation du segment dans  $O_{i-1}$  (translation)
- l'axe  $X_i$  est perpendiculaire a  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$ .

**Remarque :**

- Si  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  ne se coupent pas on choisit  $X_i$  de manière à être la parallèle avec l'axe perpendiculaire a  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$ .

- Si  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  sont colinéaires on choisit  $X_i$  dans le plan perpendiculaire a  $Z_{i-1}$ .

3/ Les paramètres de chaque articulation à partir de la figure 1.1 sont au nombre de quatre paramètres géométriques à fixer  $d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i$

- $d_i$  est la coordonnée de l'origine  $O_i$  sur l'axe  $Z_{i-1}$ .

Pour une glissière,  $d_i$  est une variable.

Pour une charnière,  $d_i$  est une variable.

- $\theta_i$  est l'angle que l'on obtient par vissage de  $X_{i-1}$  vers  $X_i$  autour de l'axe  $Z_{i-1}$

Pour une glissière,  $\theta_i$  est une constante.

Pour une charnière,  $\theta_i$  est une variable d'état.

- $a_i$  la distance entre les axes  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  mesurée sur l'axe  $X_i$  négatif à partir de son origine jusqu'à l'intersection avec l'axe  $Z_{i-1}$

- $\alpha_i$  l'angle entre  $Z_i$  et  $Z_{i-1}$  obtenu en vissant  $Z_{i-1}$  vers  $Z_i$  autour de  $X_i$ .

4/ On forme enfin une matrice homogène de DH de déplacement qui lie la rotation et la translation. La partie supérieure gauche définit la matrice rotation, et le vecteur droit pour la translation.

$$T_{i-1}^i = \left[ \begin{array}{ccc|c} C_{i-1}^i & & & d_{i-1}^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.5)$$

avec

$$C_{i-1}^i = \left[ \begin{array}{ccc} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{array} \right] \quad (1.6)$$

et

$$d_{i-1}^i = [a_i \cos\theta_i \quad a_i \sin\theta_i \quad d_i]^T \quad (1.7)$$

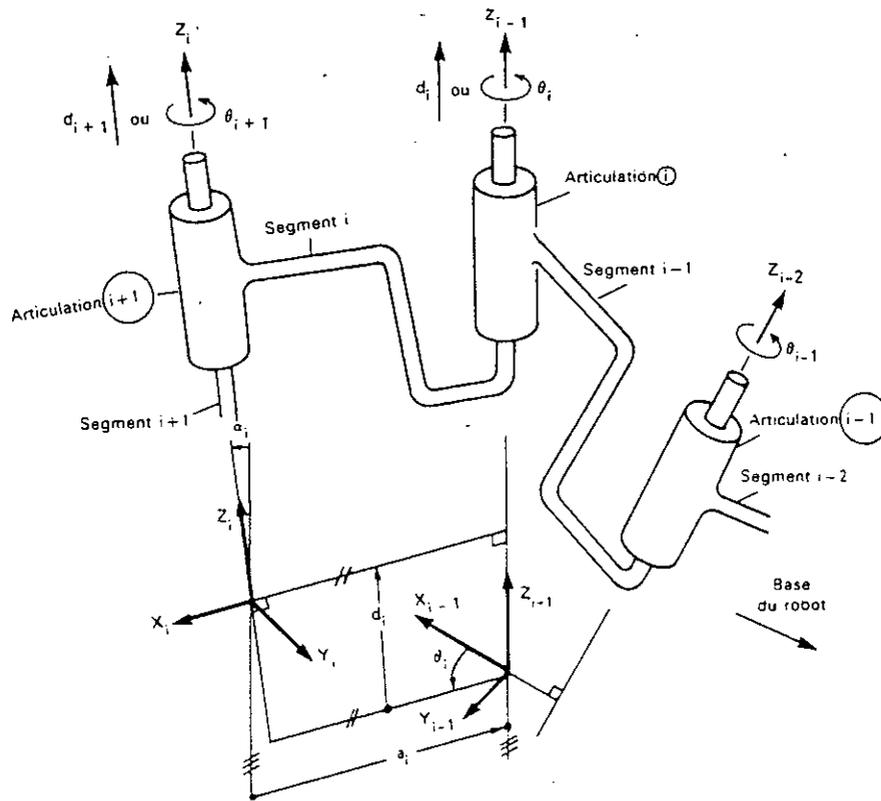


figure 1.1.- Systèmes de coordonnées associés aux segments d'un robot et leurs paramètres selon la convention de Denavit et Hartenberg.

ce qui donne la matrice de transformation homogène suivante :

$$T'_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Présentation du robot à structure cylindrique. [20] [28]

Parmi les différentes classes de robots manipulateurs établies par D. P. Stoten, et qui sont au nombre de huit [20], on a opté pour l'architecture d'un manipulateur la plus rencontrée en robotique qui est celle d'un robot à structure cylindrique de classe quatre décrite à la figure 1.2. Cette structure représente 45% des systèmes industriels qui semble être actuellement utilisés. Ce robot réalise une rotation de l'ensemble autour de l'axe vertical suivi d'un mouvement d'évolution vertical et une translation horizontale, dont les mouvements sont identifiés par les variables  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ .

L'application de la convention de Dénavit et Hartenberg est présentée par la figure 1.2.

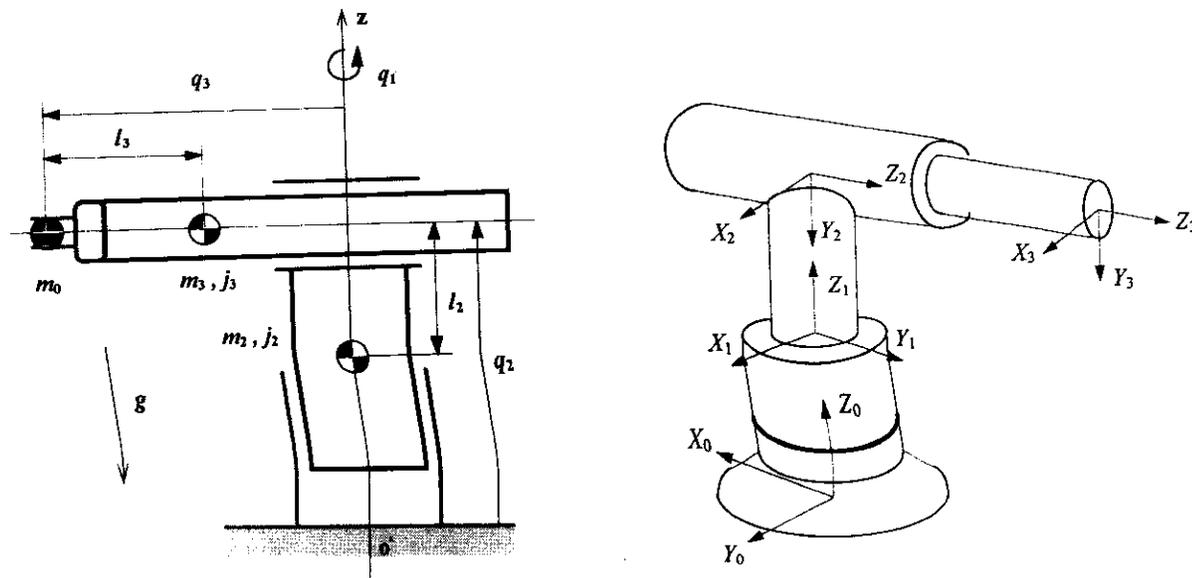


figure 1.2 - Robot de classe 4 à structure cylindrique.

Les coordonnées généralisées de ce robot sont notées par  $\theta_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ , caractérisant respectivement une rotation et deux translations. Le vecteur des coordonnées généralisées sera :

$$q = [\theta_1 \quad d_2 \quad d_3]^T \tag{1.9}$$

Le tableau suivant donne les informations géométriques de ce robot :

N° de la liaison	variable	$\theta_i$	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$\theta_1$	0	0	0
2	$q_2$	0	0	$d_2$	$-90^\circ$
3	$q_3$	0	0	$d_3$	0

Tableau 1.1 - Informations géométriques du robot à structure cylindrique.

PAO 1597

Les matrices de transformations DH appropriées à ce modèle sont :

$$\begin{aligned}
 T_0^1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_1^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_2^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_0^2 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_0^3 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -d_3 s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & d_3 c_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec  $c_1 = \cos\theta_1$  ;  $s_1 = \sin\theta_1$ .

et  $T_i^{i+1}$  est la matrice de passage du repère  $R_i(X_i, Y_i, Z_i)$  au repère  $R_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$ .

**Modélisation géométrique.**

Cette approche résout le problème de la cinématique inverse, elle positionne l'organe terminal par rapport au repère d'inertie  $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$  sous la forme d'une fonction  $r(R_0)$  à partir des variables articulaires  $q_i$ .

$$r(R_0) = F(q) \tag{1.11}$$

avec

$$\begin{cases} r = [p_x & p_y & p_z & 1]^T \\ F(q) = T_0^3 r_3^3 \end{cases} \tag{1.12}$$

et  $r_3^3$  coordonnées de l'élément terminal exprimées dans  $R_3(X_3, Y_3, Z_3)$  où :

$$r_3^3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{1.13}$$

et de l'équation (1.12) on trouve :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -d_3 s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & d_3 c_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_3 s_1 \\ d_3 c_1 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

PA01597

de l'équation (1.14) on tire les coordonnées généralisées du robot de classe 4 qui sont la rotation et les deux translations donc :

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) \\ d_2 = p_z \\ d_3 = -\frac{p_x}{\sin\theta_1} = \frac{p_y}{\cos\theta_1} \end{cases} \quad (1.15)$$

pour  $p_y \neq 0$  et  $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

### 1.2.4 Présentation du Robot PUMA 560.

Ce robot possède trois degrés de liberté caractérisant trois rotations

N° de la liaison	variable	$\theta_i$	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$\theta_1$	0	0	$-90^\circ$
2	$q_2$	$\theta_2$	$l_2$	$d_2$	0
3	$q_3$	$\theta_3$	$l_3$	0	0

Tableau 1.2 - Informations géométriques du Robot PUMA 560.

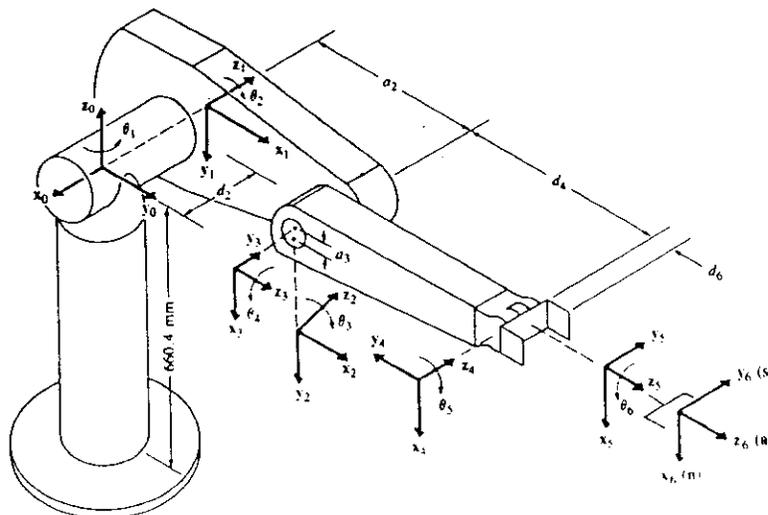


figure 2.3 - Représentation du Robot PUMA 560.

PA01597

**Modélisation géométrique.**

La portée de la charge est caractérisée par un point centrique dans l'espace qui définit une position en coordonnées cartésiennes et donne à l'élément terminal la position et l'orientation pour manipuler les objets. La cinématique inverse est imposée. Pour cela nous pouvons citer quelques unes des solutions qui existent :

- Transformation inverse, par Paul et Ai 1981.
- Approche géométrique, par Lee et Ziegler 1984.
- Méthode des matrices duelles, par Denavit 1956.
- Quaternions dual, par Yang et Arenden Stein 1964.

on s'intéresse à l'approche géométrique.

Pour le PUMA 560 on définit les indicateurs de configurations qui sont :

*arm* (bras), *elbow* (coude), *wrist* (poignet).

avec :

$$arm = \begin{cases} +1 & \text{right arm} \\ -1 & \text{left arm} \end{cases}$$

(1.17)

$$elbow = \begin{cases} +1 & \text{above arm} \\ -1 & \text{below arm} \end{cases}$$

(1.18)

$$wrist = \begin{cases} +1 & \text{wrist down} \\ -1 & \text{wrist up} \end{cases}$$

(1.19)

**Solution pour les trois premières articulations.**

On définit le vecteur position comme suit :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \\ s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \\ -(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Nous ne détaillons pas les calculs qui consistent à des projections des plans  $(X_{i-1}, Y_{i-1})$  des différentes articulations. Pour plus d'informations nous renvoyons nos lecteurs à la référence [31].

**Solution de la 1<sup>ère</sup> articulation :**

$$\sin\theta_1 = \frac{-arm p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (1.21)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{-arm p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (1.22)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{arm p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_x d_2}{arm p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y d_2} \right] \quad (1.23)$$

**Solution de la 2<sup>ème</sup> articulation :**

$$\sin\theta_2 = \sin\alpha \cos\beta + arm\ elbow \cos\alpha \sin\beta \quad (1.24)$$

$$\cos\theta_2 = \cos\alpha \cos\beta + arm\ elbow \sin\alpha \sin\beta \quad (1.25)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin\alpha \cos\beta + arm\ elbow \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + arm\ elbow \sin\alpha \sin\beta} \right] \quad (1.26)$$

avec

$$\cos\alpha = \frac{-arm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (1.27)$$

$$\sin\alpha = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (1.28)$$

$$\cos\beta = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (1.29)$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} \quad (1.30)$$

**Solution de la 3<sup>ème</sup> articulation :**

$$\cos\varphi = \frac{l_2^2 + l_3^2 - p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}{l_3^2} \quad (1.31)$$

$$\sin\varphi = arm\ elbow \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \quad (1.32)$$

avec

$$\varphi = \theta_3 + \frac{\pi}{2} \quad (1.33)$$

### 1.2.5 Présentation du Robot SCARA a 2 D.D.L. [23] [27]

Ce robot possède deux degrés de liberté caractérisant des rotations autour des axes Z

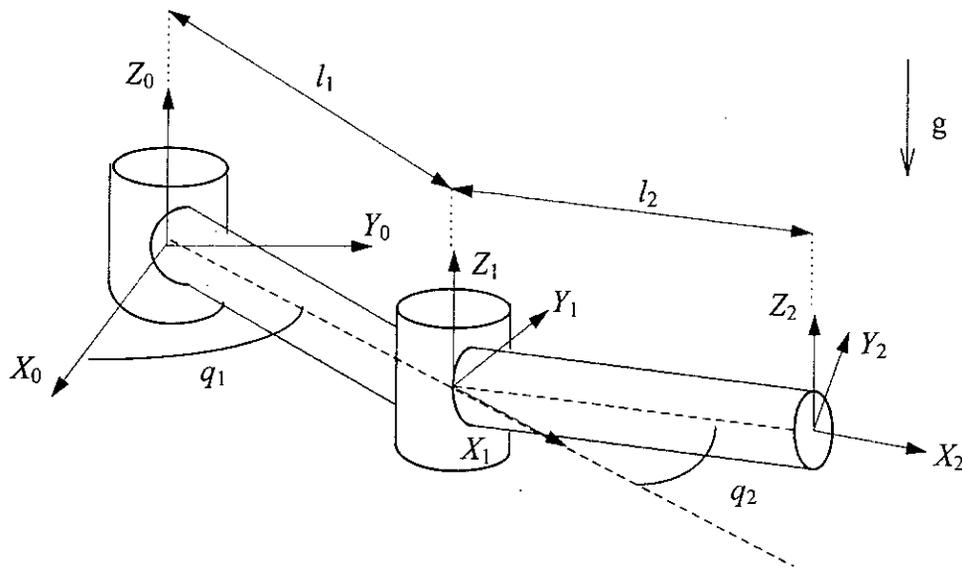


figure 1.4 - Représentation du robot SCARA.

Le vecteur des coordonnées généralisées est :

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (1.34)$$

N° de la liaison	variable	$\theta_i$	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$\theta_1$	$l_1$	0	0
2	$q_2$	$\theta_2$	$l_2$	0	0

Tableau 1.3 - Informations géométriques du Robot SCARA.

Les matrices de transformations DH appropriées à ce modèle sont :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

avec

$$\begin{aligned} c_i &= \cos \theta_i & c_{ij} &= \cos(\theta_i + \theta_j) \\ s_i &= \sin \theta_i & s_{ij} &= \sin(\theta_i + \theta_j) \end{aligned}$$

et  $T_i^{i+1}$  est la matrice de passage du repère  $R_i(X_i, Y_i, Z_i)$  au repère  $R_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$ .

### Modélisation géométrique.

Nous

$$r(R_0) = F(q) \quad (1.36)$$

avec

$$\begin{cases} r = [p_x & p_y & p_z & 1]^T \\ F(q) = T_0^2 r_2^2 \end{cases} \quad (1.37)$$

et  $r_2^2$  coordonnée de l'élément terminal dans  $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , où :

$$r_2^2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (1.38)$$

et de l'équation (1.37) on trouve :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

donc

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

le vecteur de position sur le plan OXY est :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Par une méthode géométrique, on peut déterminer les coordonnées généralisées en fonction des coordonnées cartésiennes  $p_x$  et  $p_y$ . Si  $l = l_1 = l_2$  on trouve.

$$\rho^2 = l^2 (1 + \cos\theta_2)^2 + (l \sin\theta_2)^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (1.42)$$

d'où

$$\begin{cases} \theta_2 = \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{l} \right)^2 - 1 \right] \\ \theta_1 = \arctan \left[ \frac{y}{x} \right] - \arcsin \left[ \frac{l}{\rho} \sin(\pi - \theta_2) \right] \end{cases} \quad (1.43)$$

Les conditions d'existence sont :

$$\begin{cases} \theta_1 & \text{existe si } |l \cos\theta_2| < \rho \\ \theta_2 & \text{existe toujours.} \end{cases} \quad (1.44)$$

## 1.3 Modélisation dynamique.

### 1.3.1 Introduction.

Les modèles dynamiques des bras manipulateurs sont décrits par un ensemble d'équations mathématiques qui portent la dynamique de ceux-ci et peuvent être simulées sur ordinateur dans le but de synthétiser une commande conditionnée par des performances désirées. L'ensemble des équations dynamiques peuvent être déterminées par des lois mécaniques classiques Newtoniennes et Lagrangiennes. Les approches d'Euler-Lagrange et Newton-Euler permettent d'aboutir aux équations du mouvement des robots

### 1.3.2 Approche d'Euler Lagrange. [26] [27] [31]

L'approche d'Euler-Lagrange sert à modéliser et présenter la dynamique des robots à travers les équations du mouvement. Elle s'adapte lors des calculs manuels ainsi que pour des calculs assistés par ordinateur. Le formalisme d'Euler-Lagrange et la transformation homogène de Denavit et Hartenberg amène à un algorithme compact pour présenter les équations dynamiques du mouvement.

L'équation d'Euler-Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = T_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1.45)$$

où  $L$  est le Lagrangien qui s'exprime par

$$L = E_C - E_P \quad (1.46)$$

- $E_C$  : énergie cinétique totale de toutes les liaisons ;
- $E_P$  : énergie potentielle totale de toutes les liaisons ;
- $E_D$  : énergie de dissipation en cas de présence de frottement visqueux ;
- $T_i$  : force généralisée à la  $i^{\text{ème}}$  articulation ;
- $n$  : nombre de degré de liberté ;
- $q_i$  : coordonnée généralisée d'ordre  $i$  ;
- $\dot{q}_i$  : dérivée de la coordonnée généralisée.

**Energie cinétique.**

L'énergie cinétique est calculée par l'expression de la vitesse.

$$V_0^i = \frac{dr_0^i}{dt} \quad (1.47)$$

$$r_0^i = T_0^i r_i^i \quad (1.48)$$

où  $r_i^i$  est la coordonnée homogène du point ( $i$ ) exprimée dans le repère  $R_i$ . Comme la liaison n'est pas flexible, on a  $\frac{dr_i^i}{dt} = 0$  donc :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} r_i^i \quad (1.49)$$

avec  $T_{i-1}^i$  est la matrice de transformation homogène. Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$V_0^i = \sum_{j=1}^i [U_{ij} \dot{q}_j] r_i^i \quad (1.50)$$

et

$$U_{ij} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j \geq i \end{cases} \quad (1.51)$$

pour une liaison rotative on a :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

et pour une liaison translationnelle :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

l'énergie cinétique de l'élément  $i$  dans la liaison  $i$  est

$$dE_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace}(V_i V_i^T) dm \quad (1.54)$$

en développant l'expression précédente, on obtient :

$$dE_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left( \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} (r_i^i r_i^{iT} dm) U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (1.55)$$

l'énergie cinétique de la liaison  $i$  est :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left( \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i U_{ij} J_i U_{ik}^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (1.56)$$

avec :

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

L'énergie cinétique des actionneurs est définie par :

$$E_{Ca} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 \quad (1.58)$$

où  $I_i$  caractérise un moment d'inertie dans le cas d'une rotation et une masse dans le cas d'une translation de l'actionneur  $i$ . L'énergie cinétique totale sera :

$$E_C = \sum_{i=1}^n E_{Ci} + E_{Ca} \quad (1.59)$$

L'énergie potentielle est décrite par : [31]

$$E_P = \sum_{i=1}^n -m_i g^T r_0^i = - \sum_{i=1}^n m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (1.60)$$

$$g^T = [0 \quad 0 \quad -|g| \quad 1] \quad (1.61)$$

où  $g$  est la gravité.

Enfin, l'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{Vi} \dot{q}_i^2 \quad (1.62)$$

où  $f_{Vi}$  le coefficient de frottement visqueux ( $i=1, n$ ). L'expression finale du Lagrangien sera :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{trace}(U_{ij} J_i U_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_i m_i g^T T_0^i r_i^i \quad (1.63)$$

Appliquant la formule d'Euler-Lagrange à la fonction Lagrangienne donnée ci-dessus, on trouve la force ou couple généralisé

$$T_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \text{trace}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{trace}(U_{jkl} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{j=1}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j + f_{Vi} \dot{q}_i \quad (1.64)$$

avec

$$U_{ijk} = \begin{cases} T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & k \leq j \leq i \\ T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & j \leq k \leq i \\ 0 & j < i < k \end{cases} \quad (1.65)$$

### • Méthode Directe 1. [30][31]

Cette méthode est basée essentiellement sur l'équation (1.64) qui est extraite par la méthode d'Euler-Lagrange, sa forme est :

$$T_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n N_{ijk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i(q) + H_i(\dot{q}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.66)$$

avec

$$M_{ij}(q) = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{trace}(U_{kj} J_k U_{ki}^T) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (1.67)$$

$$G_i(q) = - \sum_{j=i}^n m_j g^T U_{ji} r_j^j \quad (1.68)$$

$$N_{ijk}(q) = \sum_{l=\max(i,j,k)}^n \text{trace}(U_{ljk} J_l U_{li}^T) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{array} \quad (1.69)$$

$$H_i(\dot{q}_i) = f_{vi} \dot{q}_i \quad (1.70)$$

on peut réécrire l'équation dynamique sous forme matricielle qui sera :

$$T(t) = M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + H(\dot{q}). \quad (1.71)$$

avec  $q \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\ddot{q} \in \mathfrak{R}^n$  représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires et :

$M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  : matrice symétrique définie positive des accélérations inertielles dans l'élément  $M_{ij}$  de cette matrice est l'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  articulation sur la  $j^{\text{ème}}$  articulation et vice versa ;

$N(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur de forces et/ou couples dus aux accélérations de coriolis et centrifuge ;

$G(q) \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur de forces et/ou couples dus aux forces de gravitation ;

$H(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$  : représente les frottements visqueux ;

$T(t) \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur de forces et/ou couples moteurs.

### • Méthode Directe 2. [29] [31]

La méthode directe citée auparavant est efficace mais elle est longue lors de la détermination du vecteur due aux accélérations de coriolis et centrifuge. Pour cela on a trouvé une issue pour le calcul rapide de ce dernier. Le modèle dynamique est calculé en 3 étapes :

1) calcul des éléments de la matrice d'inertie par la méthode directe 1.

2) calcul de deux matrices centrifuges et coriolis qui sont multipliées par leurs vecteurs, la somme des vecteurs obtenue nous donne le vecteur voulu  $N$ . L'extrait de ces dernières matrices se fait par la dérivation de la matrice d'inertie (*principe de la conservation d'énergie*).

3) enfin, le calcul des vecteurs gravités et visqueux, par la méthode directe se basant sur les équations (1.68) et (1.70) respectivement. La forme appropriée du modèle final sera :

$$T(t) = M(q) \ddot{q} + D(q) [\dot{q} \dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] + G(q) + H(\dot{q}). \quad (1.72)$$

avec  $q \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\ddot{q} \in \mathfrak{R}^n$  représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires et :

$M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  : matrice symétrique définie positive des accélérations inertielles dans l'élément  $M_{ij}$  de cette matrice est l'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  articulation sur la  $j^{\text{ème}}$  articulation et viceversa ;

$D(q) \in \mathfrak{R}^{n \times \frac{n(n-1)}{2}}$  : matrice des couples de coriolis ;

$C(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  : matrice des couples de centrifuges ;

$G(q) \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur des accélérations gravitationnelles ;

$H(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$  : représente les frottements visqueux ;

$T(t) \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur de forces ou couples généralisés ;

$[\dot{q} \dot{q}] \in \mathfrak{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$  : vecteur de produit des vitesses généralisées ;

$[\dot{q}^2] \in \mathfrak{R}^n$  : vecteur de carré des vitesses généralisées ;

où :

$$[\dot{q} \dot{q}] = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_1 \dot{q}_n \quad \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad \dots \quad \dot{q}_2 \dot{q}_n \quad \dots \quad \dot{q}_{n-2} \dot{q}_n \quad \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n]^T \quad (1.73)$$

et

$$[\dot{q}^2] = [\dot{q}_1^2 \quad \dot{q}_2^2 \quad \dots \quad \dot{q}_n^2]^T \quad (1.74)$$

Le calcul de la matrice  $D$  de coriolis se base essentiellement sur la formule suivante : [29]

$$D_{ij} = 2 \beta^{i,kl} \quad (1.75)$$

d'où le symbole de Christoffel défini par :

$$\beta^{i,jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right] \quad (1.76)$$

Puisque la matrice d'inertie est définie positive, on aura les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial M_{ji}}{\partial q_k} \quad \forall i, j, k \quad (1.77)$$

et

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq k, \quad j \geq k \quad (1.78)$$

Les éléments de la matrice centrifuge sont définis par l'équation suivante : [29]

$$C_{ij} = \beta^{i,jj} \quad (1.79)$$

### • Modèle dynamique général. [5]

Le modèle dynamique général d'un robot manipulateur rigide à  $n$  degrés de liberté peut être représenté par un système d'équation différentielle non-linéaire de second-ordre à  $n$  entrées formant le vecteur de forces ou couples généralisés  $T$ , et  $n$  sorties qui forment le vecteur position  $q$ . Les équations de ce système à  $n$  liaisons, décrites dans l'espace des coordonnées articulaires, sont données sous forme matricielle comme suit : [5]

$$M(q) \ddot{q} + B(q, \dot{q}) \dot{q} + K(q, \dot{q}) q + G(q) + H(\dot{q}) = T_p(t) + T(t). \quad (1.80)$$

avec  $q \in \mathcal{R}^n$ ,  $\dot{q} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\ddot{q} \in \mathcal{R}^n$  représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires et :

$M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  : la matrice d'inertie ;

$B(q, \dot{q}) \dot{q} + K(q, \dot{q}) q \in \mathcal{R}^n$  : englobe les couples dus aux forces de coriolis et centrifuges ;

$G(q) \in \mathcal{R}^n$  : le vecteur de forces ou couples dus aux forces de gravitation ;

$T_p(t) \in \mathfrak{R}^n$  : le vecteur de forces ou couples de perturbation externe ;

$T(t) \in \mathfrak{R}^n$  : le vecteur de forces ou couples moteurs.

Les éléments de  $M$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $G$  et  $H$  sont généralement des fonctions très compliquées et non-linéaires par rapport aux coordonnées généralisées du manipulateur. Le précédent modèle du robot est complexe mais il vérifie certaines propriétés fondamentales qui peuvent être exploitées pour l'analyse du comportement du système et le calcul de la commande.

**Propriété 1 :**

La matrice  $M(q)$  est symétrique définie positive (SDP), par conséquent tous les éléments diagonaux de cette matrice sont positifs  $\{M_{ii}(q) > 0 \quad i = 1, \dots, n\}$ .

**Propriété 2 :**

Les matrices  $M$ ,  $B$ ,  $K$  et les vecteurs  $G$ ,  $H$  sont uniformément bornés

**Propriété 3 :**

L'entrée de commande est indépendante pour chaque articulation du manipulateur.

**Propriété 4 :**

Le vecteur des frottements visqueux et secs  $H(\dot{q})$  est caractérisé par les  $n$  éléments  $\{H_i(\dot{q}_i) \quad i=1, \dots, n\}$ , tel que : [34]

$$H_i(\dot{q}_i) = f_{vi} \dot{q}_i + f_{si} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i), \quad (1.81)$$

avec  $f_{vi}$  et  $f_{si}$  sont respectivement les coefficients des frottements visqueux et secs de la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

Les propriétés 1-4 découlent de la nature physique du robot manipulateur. La propriété 3 est due au fait que les flexibilités des articulations et des structures n'ont pas été prises en compte [23]. Dans ce cas de figure chaque degrés de liberté (DDL) est piloté par un actionneur (moteur à courant continu).

### 1.3.5 Modèle dynamique du robot à structure cylindrique. [20]

Suivant la démarche de D.P. Stoten, une manière générale de modéliser simplement le manipulateur de classe 4 consiste à supposer que les segments de longueurs totales  $l_2$  et  $l_3$  ont des masses localisées  $m_2$  et  $m_3$ , et que le moment d'inertie bras  $l_3$  par rapport à un axe parallèle à l'axe oz, mais passant par le centre de masse vaut  $I_3$ . Le moment d'inertie du segment  $l_2$  et de son actionneur est noté par  $I_2$ . La charge à porter est supposée une masse ponctuelle  $m_0$  rattachée avec la deuxième articulation et localisée à la distance  $q_3$  par rapport à l'axe oz. Afin d'établir le modèle dynamique, plusieurs hypothèses doivent être prises en considération : [20]

- les frottements sont de nature visqueuse et linéaire par rapport à la vitesse généralisée ;
- les différentes liaisons sont rigides ;
- les actionneurs sont idéaux (la force généralisée est directement proportionnelle au signal de commande) ;
- les capteurs ont un gain unitaire et de dynamique négligeable.

L'énergie potentielle totale du système est :

$$E_p = (m_2 + m_3 + m_0) g (q_2 - q_{20}) \quad (1.82)$$

avec  $q_{20}$  correspond à la position particulière  $q_2$  du manipulateur pour laquelle l'énergie potentielle est nulle. L'énergie cinétique s'exprime par :

$$E_c = \frac{1}{2} \left[ \left( I_2 + I_3 + m_3 (q_3 - l_3)^2 + m_0 q_3^2 \right) \dot{q}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_0) \dot{q}_2^2 + (m_3 + m_0) \dot{q}_3^2 \right] \quad (1.83)$$

avec l'introduction des frottements visqueux  $f_{v1}$ ,  $f_{v2}$ ,  $f_{v3}$  aux différentes articulations l'application du formalisme d'Euler-Lagrange donne :

$$\begin{aligned} \left( I_2 + I_3 + m_3 (q_3 - l_3)^2 + m_0 q_3^2 \right) \ddot{q}_1 + 2 \left( m_3 (q_3 - l_3) + m_0 q_3 \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + f_{v1} \dot{q}_1 &= \Gamma_1 \\ (m_2 + m_3 + m_0) \ddot{q}_2 + (m_2 + m_3 + m_0) g + f_{v2} \dot{q}_2 &= F_2 \\ (m_3 + m_0) \ddot{q}_3 - \left( m_3 (q_3 - l_3) + m_0 q_3 \right) \dot{q}_1^2 + f_{v3} \dot{q}_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (1.84)$$

avec  $\Gamma_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  couple et forces généralisés. Les équations dynamiques du manipulateur de classe 4 font apparaître des effets de coriolis puisque les masses  $m_3$  et  $m_0$  peuvent se déplacer avec un mouvement rectiligne dans un référentiel en rotation. Comme les actionneurs sont supposés idéaux les forces et les couples généralisés sont directement proportionnels aux signaux de commande ( $\Gamma_1 = k_{C1} u_1$ ,  $F_2 = k_{C2} u_2$ ,  $F_3 = k_{C3} u_3$ ).

Les paramètres du manipulateur sont : [20]

$$\begin{aligned}
 l_3 &= 0.75 \text{ m} & m_2 &= 20 \text{ kg} & m_3 &= 10 \text{ kg} & I_2 &= 2 \text{ kg m}^2 \\
 I_3 &= 0.2 \text{ kg m}^2 & f_{V1} &= 7.825 \text{ N rad}^{-1} \text{ s} & f_{V2} &= 30 \text{ N m}^{-1} \text{ s} & f_{V3} &= 20 \text{ N m}^{-1} \text{ s} \\
 k_{C1} &= 10 \text{ Nm V}^{-1} & k_{C2} &= 100 \text{ N V}^{-1} & k_{C3} &= 10 \text{ N V}^{-1} & g &= 9.81 \text{ m s}^{-2}
 \end{aligned}$$

Les réponses du robot à structure cylindrique en position et en vitesse pour une entrée échelon, sur un horizon de temps suffisant, sont consignées sur la figure 1.5 :

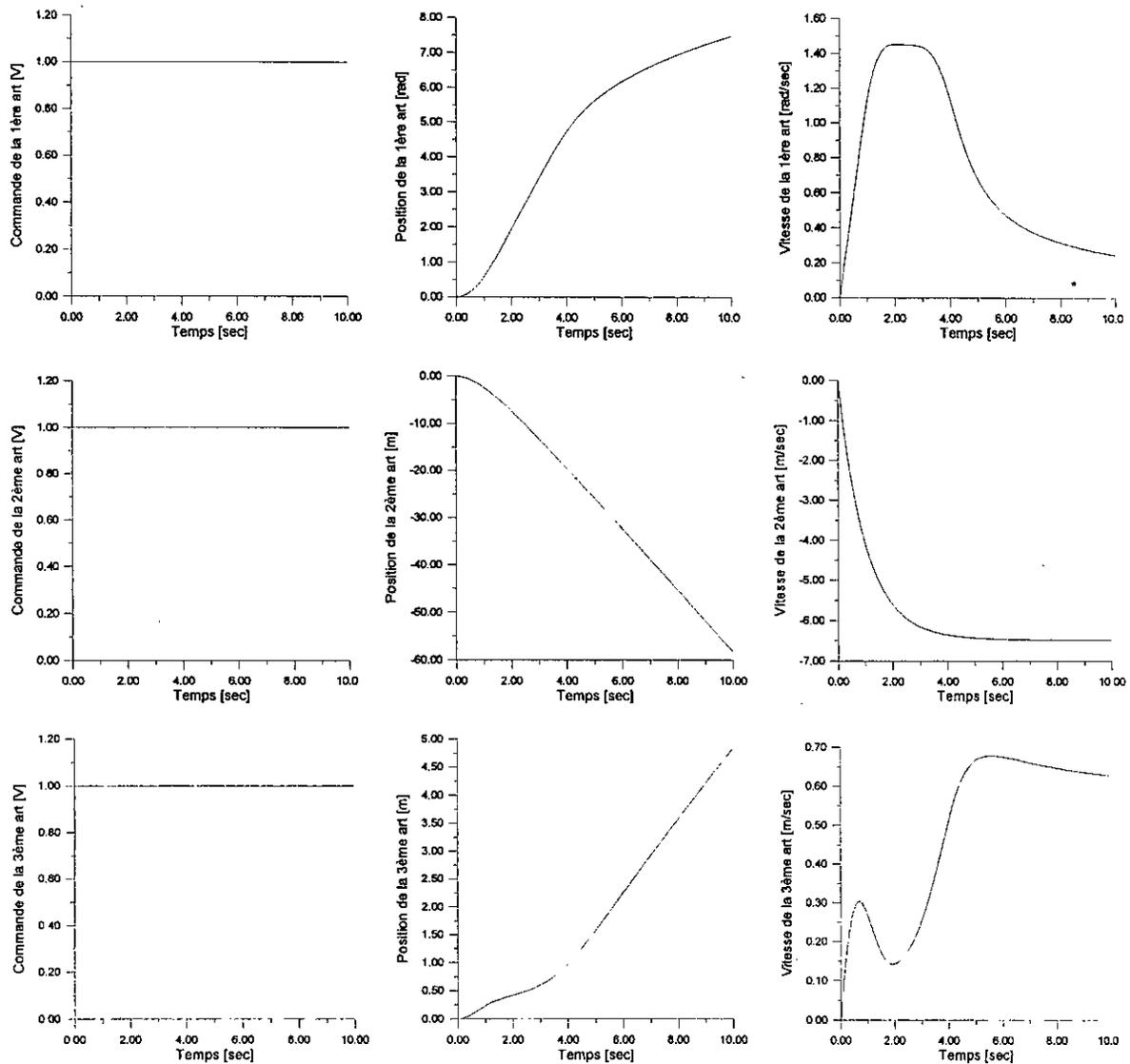


figure 1.5 - Réponse indicielle du robot à structure cylindrique en position et en vitesse.

### 1.3.6 Modèle dynamique du robot PUMA 560. [29] [30]

Le calcul du modèle dynamique est présenté en Annexe 2. Ce manipulateur réalise 3 mouvements rotationnels, le premier suivant l'axe horizontal, le second et le troisième suivant deux axes verticaux. Le modèle dynamique est le suivant :

$$T = (M(q) + \Delta M(q)) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + T_{m_0}. \quad (1.85)$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23} & I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_5 s_{23} \\ I_5 s_{23} + I_6 s_2 & I_7 + I_4 c_3 & I_8 + 0.5 I_4 c_3 \\ I_5 s_{23} & I_8 + 0.5 I_4 c_3 & I_8 \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(2(I_3 s_2 c_2 + I_2 s_{23} c_{23}) + I_4 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2 I_2 s_{23} c_{23} + I_4 c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ + (I_6 c_2 + I_5 c_{23}) \dot{q}_2^2 + (2 I_5 c_{23}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (I_5 c_{23}) \dot{q}_3^2 \\ (I_3 c_2 s_2 + I_2 c_{23} s_{23} + 0.5 I_4 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) \dot{q}_1^2 - (I_4 s_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_3^2 \\ (I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 I_4 c_2 c_{23}) \dot{q}_1^2 + (0.5 I_4 s_3) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_2 + 0.5 m_2 l_2) g c_2 - 0.5 m_3 l_3 g c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 g c_{23} \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

$$T = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

où

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i) & c_{ij} &= \cos(q_i + q_j) \\ s_i &= \sin(q_i) & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3}, \\
I_2 &= I_{yy3} - I_{xx3}, \\
I_3 &= I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2, \\
I_4 &= m_3 l_2 l_3, \\
I_5 &= 0.5 m_3 l_3 d_2, \\
I_6 &= 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2, \\
I_7 &= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2, \\
I_8 &= I_{zz3}.
\end{aligned} \tag{1.90}$$

La matrice  $\Delta M$  représente les effets de l'effecteur car ce dernier possède une masse non négligeable. Pour le calcul de cette matrice on se contente de la méthode donnée par [29] :

$$\begin{aligned}
\Delta M_{11} &= I_{xx1} + m_t d_2^2 + I_{M1} + (I_{yy1} - I_{xx1} + m_t l_3^2) c_{23}^2 + m_t l_2^2 c_2^2 + 2 m_t l_2 l_3 c_2 c_{23}, \\
\Delta M_{12} &= m_t l_3 d_2 s_{23} + m_t d_2 l_2 s_2, \\
\Delta M_{13} &= m_t l_3 d_2 s_{23}, \\
\Delta M_{22} &= I_{zz1} + m_t (l_2^2 + l_3^2) + I_{M2} + 2 m_t l_2 l_3 c_3, \\
\Delta M_{23} &= I_{zz1} + m_t l_3^2 + m_t l_2 l_3 c_3, \\
\Delta M_{33} &= I_{zz1} + m_t l_3^2 + I_{M3}.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

$I_{mi}$  moments d'inertie des différents moteurs .

$I_{xx1}, I_{yy1}, I_{zz1}$ . moments d'inertie totale par rapport aux principaux axes de l'effecteur.

La démonstration et le calcul de ces éléments sont donnés en Annexe 2.

Le vecteur des couples additifs  $T_{m0}$  représente l'effet de la charge, il est calculé par la matrice Jacobienne, cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur.

$$J_j(q) = \frac{\partial p}{\partial q_j} \tag{1.92}$$

En particulier, pour le robot PUMA 560, on a :

$$J(q) = [J_1(q) \quad J_2(q) \quad J_3(q)] \tag{1.93}$$

et

$$p = [c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \quad s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})]^T \tag{1.94}$$

d'où la matrice Jacobienne :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 s_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 & -c_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -c_1(l_3 s_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 & -s_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -s_1(l_3 s_{23}) \\ 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_3 c_{23}) \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Le couple du à la portée de la charge sera :

$$T_{m_0} = m_0 J^T(q) [J(q) \ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q}) \dot{q} + g] \quad (1.96)$$

avec  $g = [0 \ 0 \ 9.81]^T$  et  $\dot{J}(q, \dot{q})$  dérivée de la matrice Jacobienne obtenue à partir de la différentiation par rapport au temps. Les paramètres réels de ce robot sont :

masses des différentes liaisons :

$$\begin{aligned} m_2 &= 17.40 \text{ kg} & m_3 &= 5.04 \text{ kg} & m_4 &= 0.82 \text{ kg} \\ m_5 &= 0.35 \text{ kg} & m_6 &= 0.09 \text{ kg} & m_t &= m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg} \end{aligned}$$

Paramètres géométriques

$$d_2 = 149.09 \text{ mm} \quad l_2 = 431.8 \text{ mm} \quad l_3 = 433.07 \text{ mm.}$$

Paramètres d'inertie :

N° de la liaison	$I_{xxi}$ [ $\text{kg m}^2$ ]	$I_{yyi}$ [ $\text{kg m}^2$ ]	$I_{zzi}$ [ $\text{kg m}^2$ ]	$I_{Mi}$ [ $\text{kg m}^2$ ]
1	-	$350 \cdot 10^{-3}$	-	1.14
2	$130 \cdot 10^{-3}$	$524 \cdot 10^{-3}$	$539 \cdot 10^{-3}$	4.71
3	$192 \cdot 10^{-3}$	$15.4 \cdot 10^{-3}$	$212 \cdot 10^{-3}$	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	-
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	-
4+5+6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	-

Tableau 1.4 - Paramètres d'inertie pour le robot PUMA 560.

Les réponses du robot PUMA 560 en position et en vitesse pour une entrée échelon, sur un horizon de temps suffisant, sont consignées sur la figure 1.6 :

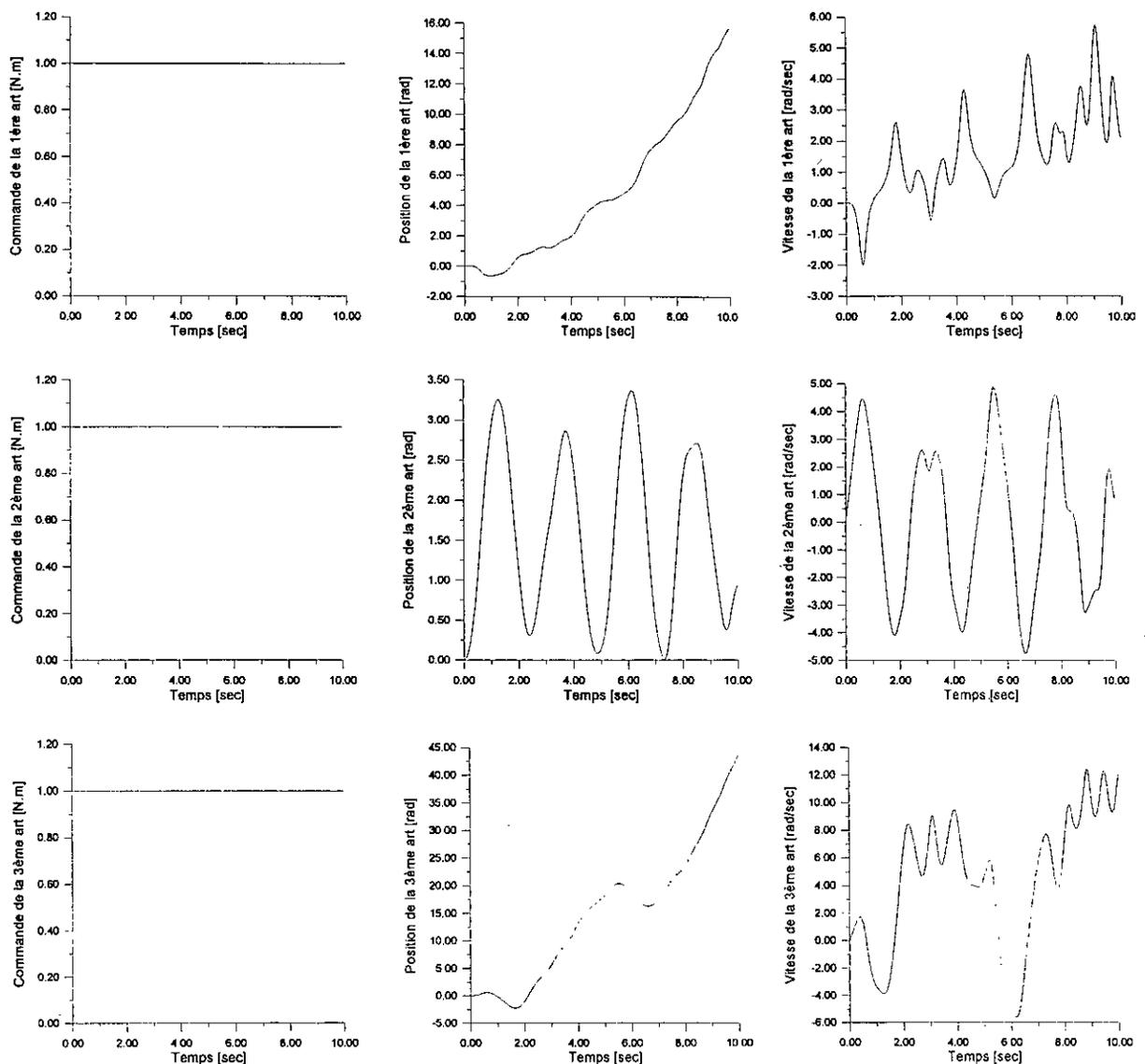


figure 1.6 - Réponse indicielle du robot PUMA 560 en position et en vitesse.

### 1.3.7 - Modèle dynamique du robot SCARA . [23]

Afin de contribuer à l'étude des différents types de robots, nous avons opté pour l'architecture d'un robot SCARA à deux degrés de liberté. Ce bras manipulateur se déplace dans le plan horizontal suivant deux mouvements de rotation identifiés par les variables  $q_1$  et  $q_2$  autour des axes verticaux. Les effets gravitationnels n'interviennent pas.

Avant d'établir le modèle dynamique, plusieurs hypothèses doivent être prises en considération : [23]

- les frottements sont secs et visqueux.
- les différentes liaisons sont rigides.
- les actionneurs sont des moteurs à courant continu (le couple moteur est directement proportionnel au signal de commande).
- les capteurs ont un gain unitaire et de dynamique négligeable.

Les moteurs ont été inclus dans le modèle dynamique, nous retrouvons leurs inerties respectives  $I_{M1}$  et  $I_{M2}$ . Les commandes calculées sont les couples à appliquer par les moteurs à chaque charge (charge de chaque moteur). Comme les moteurs considérés sont des moteurs à courant continu les commandes sont obtenues en terme de tension en multipliant les couples calculés par  $n_i^{-1} k_{Ci}^{-1}$  où  $k_{Ci}$  est la constante de couple du moteur ( $i$ ), et  $n_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  rapport de réduction.

Le modèle dynamique du robot est obtenu en utilisant le formalisme de Lagrange en passant par le calcul des énergies cinétiques et potentielles. Il est donné par [23] :

$$T = (M(q) + I_M) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) + H(\dot{q}) + T_{m_0}. \quad (1.97)$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) & I_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \\ I_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) & I_2 \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

$$I_M = \begin{bmatrix} n_1^2 I_{M1} & 0 \\ 0 & n_2^2 I_{M2} \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \left( \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\dot{q}_2^2}{2} \right) \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \frac{\dot{q}_1^2}{2} \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

$$H(\dot{q}) = \begin{bmatrix} n_1^2 (f_{v1} \dot{q}_1 + f_{s1} \operatorname{sgn}(\dot{q}_1)) \\ n_2^2 (f_{v2} \dot{q}_2 + f_{s2} \operatorname{sgn}(\dot{q}_2)) \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

$$T = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

et

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$$

d'où  $I_1$  et  $I_2$  sont les inerties par rapport aux axes de rotation  $Z_0$  et  $Z_1$  des deux articulations qui sont supposées cylindriques et uniformes.

Le vecteur des couples additifs  $T_{m_0}$  représente l'effet de la charge, il est calculé par la matrice Jacobienne. Cette dernière est la dérivée du vecteur position de l'effecteur.

$$J_j(q) = \frac{\partial p}{\partial q_j} \quad (1.103)$$

Particulièrement, pour ce robot SCARA, on a :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

Le couple du à la porte de la charge sera :

$$T_{m_0} = m_0 J^T(q) [J(q) \ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q}) \dot{q} + g] \quad (1.105)$$

avec  $g = [0 \ 0]^T$

Les valeurs numériques des différents paramètres du robot sont [23]

$$m_1 = 15.91 \text{ kg}$$

$$m_2 = 11.36 \text{ kg}$$

$$l_1 = l_2 = 0.432 \text{ m}$$

$$f_{v1} = f_{v2} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ N rad}^{-1} \text{ s}$$

$$f_{s1} = f_{s2} = 10^{-3}$$

$$I_{M1} = I_{M2} = 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$k_{M1} = k_{M2} = 0.18 \text{ Nm V}^{-1}$$

$$n_1 = 120$$

$$n_2 = 50$$

Les réponses du robot SCARA en position et en vitesse pour une entrée échelon, sur un horizon de temps suffisant, sont consignées sur la figure 1.7 :

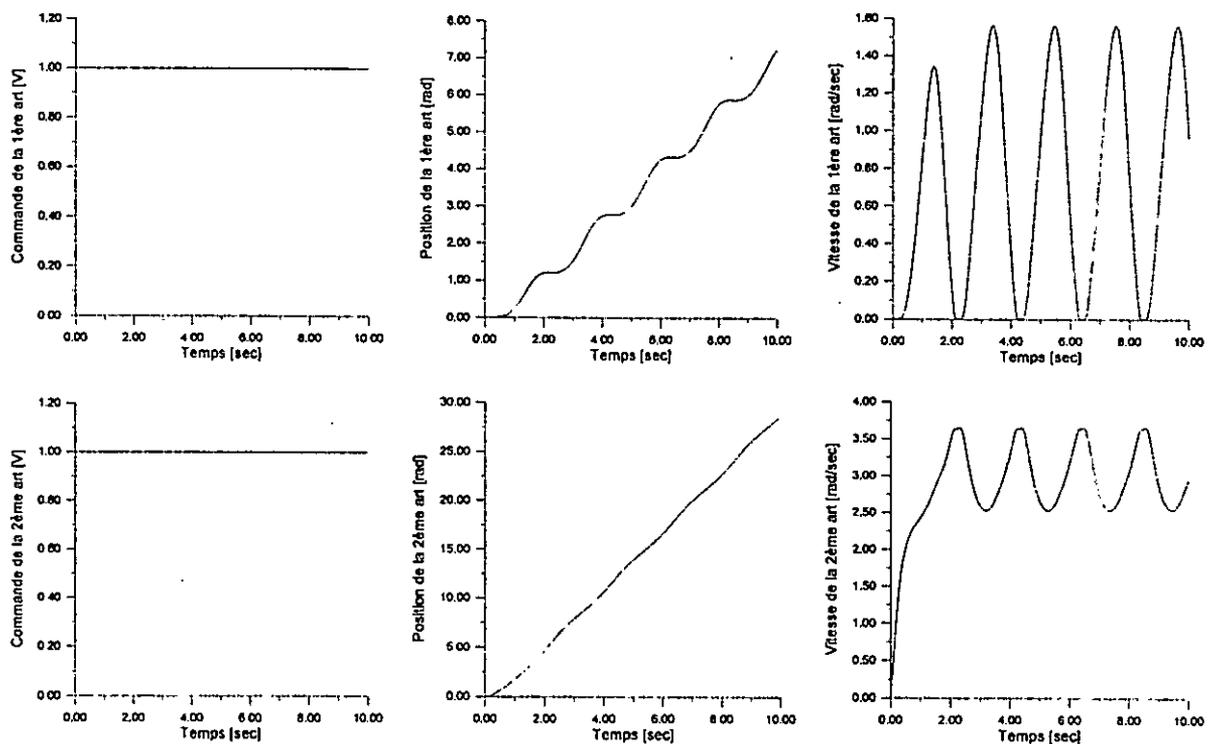


figure 1.7 - Réponse indicielle du robot SCARA en position et en vitesse.

## 1.4 Génération de trajectoire.

La dynamique des robots exige l'imposition d'une trajectoire de référence réalisable afin d'assurer le déplacement de l'élément terminal du robot d'un point initial  $q(0)$  vers le point final  $q(t_f)$  avec des commandes admissibles sur les articulations. Le choix de cette trajectoire est relié à l'évolution de la position, de la vitesse et de l'accélération désirées de chaque articulation.

Parmi les trajectoires les plus répandues en robotique, on choisit pour la conduite normale du robot une trajectoire cycloïdale qui assure une continuité en position, en vitesse et en accélération. Cet avantage offre au robot la possibilité de poursuivre cette trajectoire avec des commandes réalisables. Le test de la capacité de poursuite peut être réalisé par des trajectoires particulières qui excitent toute la dynamique du robot, on cite par exemple :

- trajectoire de VIVIANI pour le robot à structure cylindrique.
- trajectoire de LEAHVY pour le robot PUMA 560.

### 1.4.1 Trajectoire cycloïdale. [30]

La  $i^{\text{ème}}$  trajectoire de référence de type cycloïdale pour l'articulation  $i$  est donnée par la fonction du temps suivante :

$$q_{di}(t) = \begin{cases} q_{di}(0) + \frac{D_i}{2\pi} \left[ 2\pi \frac{t}{t_f} - \sin\left(2\pi \frac{t}{t_f}\right) \right] & \text{pour } 0 \leq t \leq t_f \\ q_{di}(t_f) & \text{pour } t_f < t \end{cases} \quad (1.106)$$

avec  $D_i = q_{di}(t_f) - q_{di}(0)$  est le déplacement, et  $t_f$  est l'instant finale du mouvement.

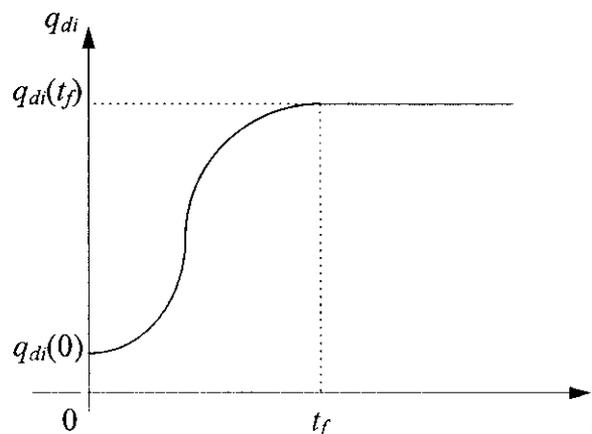


figure 1.8 - Trajectoire cycloïdale.

### Trajectoire de LEAHVY : [33]

Pour le robot PUMA 560 il existe une trajectoire cycloïdale test proposée par LEAHVY. Les différentes articulations se déplacent respectivement de la position  $\{-50^\circ, -135^\circ, 135^\circ\}$  à la position  $\{45^\circ, -85^\circ, 30^\circ\}$  en un temps de mouvement égal à 1.5 secondes. Cette trajectoire est choisie car elle excite toute la dynamique de ce bras manipulateur.

### 1.4.2 Trajectoire de VIVIANI. [26]

La trajectoire de VIVIANI s'appelle aussi fenêtre de VIVIANI. Cette dernière est spatiale, elle sert à exciter toute la dynamique du robot dont la configuration est cylindrique. L'allure de cette trajectoire est décrite par l'intersection d'un cylindre creux d'axe vertical de rayon  $r/2$  et de centre  $(0, r/2, 0)$  et une sphère de centre  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $r$ , voire figure 1.9 :

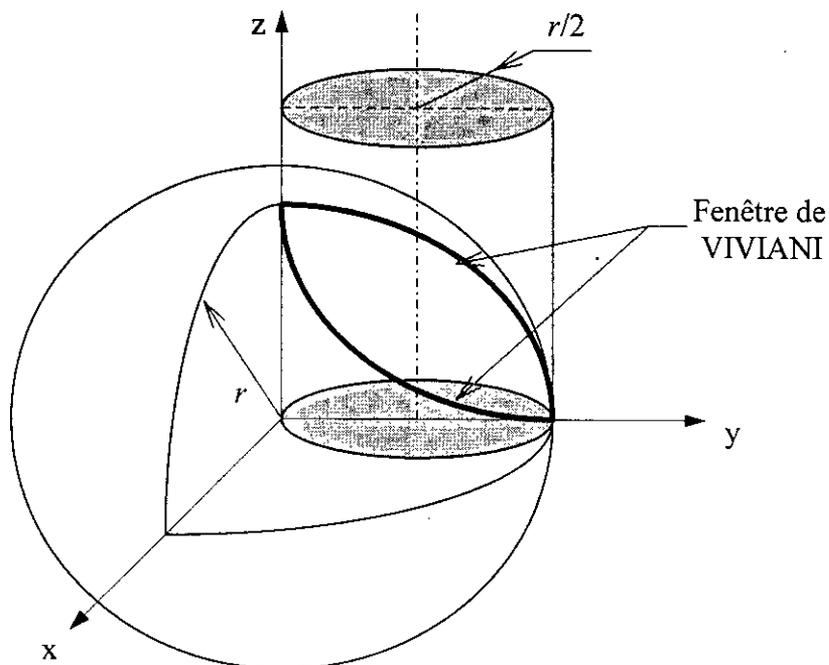


figure 1.9 - Construction de la fenêtre de VIVIANI.

L'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1.107)$$

L'équation du cylindre :

$$x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad (1.108)$$

on fait le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad (1.109)$$

en remplaçant dans l'équation (1.107) et (1.108) on obtient :

$$\begin{cases} \rho = r \sin\theta \\ z = |r \cos\theta| \end{cases} \quad (1.110)$$

La détermination de la courbe paramétrée avec  $\theta$ ,  $z$  et  $\rho$  est similaire à  $\theta_1$ ,  $d_2$  et  $d_2$  pour le robot de classe 4 à structure cylindrique. L'imposition de  $\theta$  nous donne directement  $z$  et  $\rho$ , on pose par exemple  $\theta_1 = \alpha t$  une droite de pente  $\alpha$  et passante par l'origine.

Le point de départ est choisi par les conditions initiales  $\theta = z = \rho = 0$ . Par une trajectoire cycloïdale au niveau de l'articulation relative à  $z$ , le robot se met à l'extrémité supérieure de la fenêtre, puis fait le trajet le long de la fenêtre et revient.

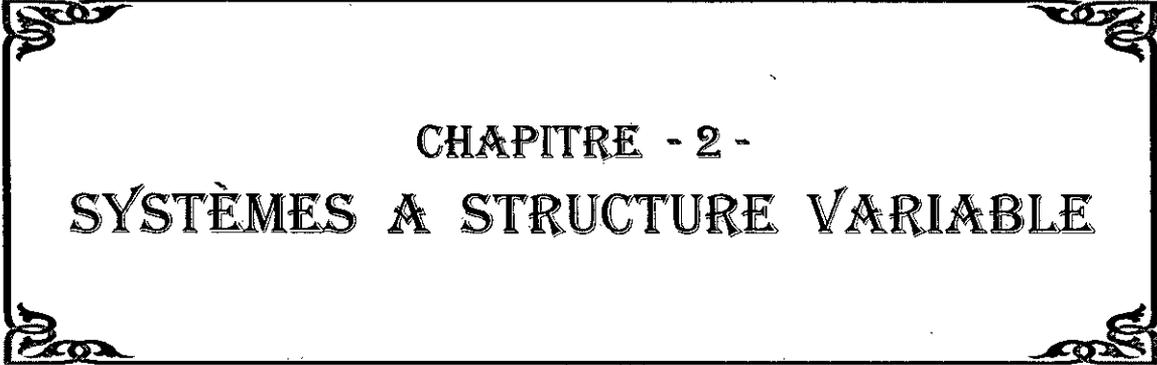
Cette méthode simple nous a amené à éviter de passer par l'approche géométrique ou cinématique.

## 1.5 Conclusion.

Les formalismes de Lagrange Euler permettent d'établir un système d'équations différentielles reliant les coordonnées généralisées aux forces et/ou couples généralisés. Cette procédure nous a permis d'obtenir les modèles dynamiques de trois principaux types de robots : robot à structure cylindrique, robot PUMA 560 et robot SCARA à deux degrés de liberté. Ces modèles ont permis de mettre en évidence la difficulté de commander ce genre de bras manipulateurs, étant donné les fortes non-linéarités qui régissent le fonctionnement dynamique de ceux-ci.

Le comportement dynamique du robot manipulateurs exige une trajectoire spécifique (continue en position, en vitesse et en accélération), permettant ainsi le contrôle du robot avec des commandes physiquement acceptable.





CHAPITRE - 2 -  
SYSTÈMES A STRUCTURE VARIABLE

## Chapitre 2

# Systèmes à Structure Variable

### 2.1 Introduction.

La théorie des systèmes à structure variable a connu un développement durant les 30 années précédentes, lors de la résolution de l'équation différentielle à second membre discontinu par le mathématicien russe Fillipov en 1960.

Le cas particulier de cette théorie n'est rien d'autre que la technique des modes glissants qui amène la trajectoire d'état du système à régler vers la surface de glissement (surface de commutation) synthétisée correctement et de la faire commuter avec une logique de commutation jusqu'au point d'équilibre.

Parmi les propriétés des modes glissants on a : [24]

- La trajectoire d'état du système en mode de glissement appartient à une surface de commutation inférieure à celle de l'espace d'état, par conséquent l'ordre des équations différentielles décrivant le fonctionnement du système en mode de glissement est réduit (réduction d'ordre).
- La dynamique du système en mode de glissement est fixée par le choix approprié des coefficients de la surface de glissement
- La théorie des modes glissants appartient bien aux systèmes dont les commandes sont discontinues.
- La théorie des systèmes à structure variable particulièrement les modes glissants présente une robustesse vis à vis des perturbations externes et des variations paramétriques.
- La mise en pratique de cette technique étant liée exclusivement au développement de l'électronique de puissance qui apporte des circuits de commutations à haute fréquence.

## 2.2 Système de réglage à structure variable.

En vue de faire une synthèse d'une commande à structure variable on propose une configuration particulière qui englobe toute les configurations de base des systèmes à structure variable. Cette dernière est illustrée par la figure 2.1.

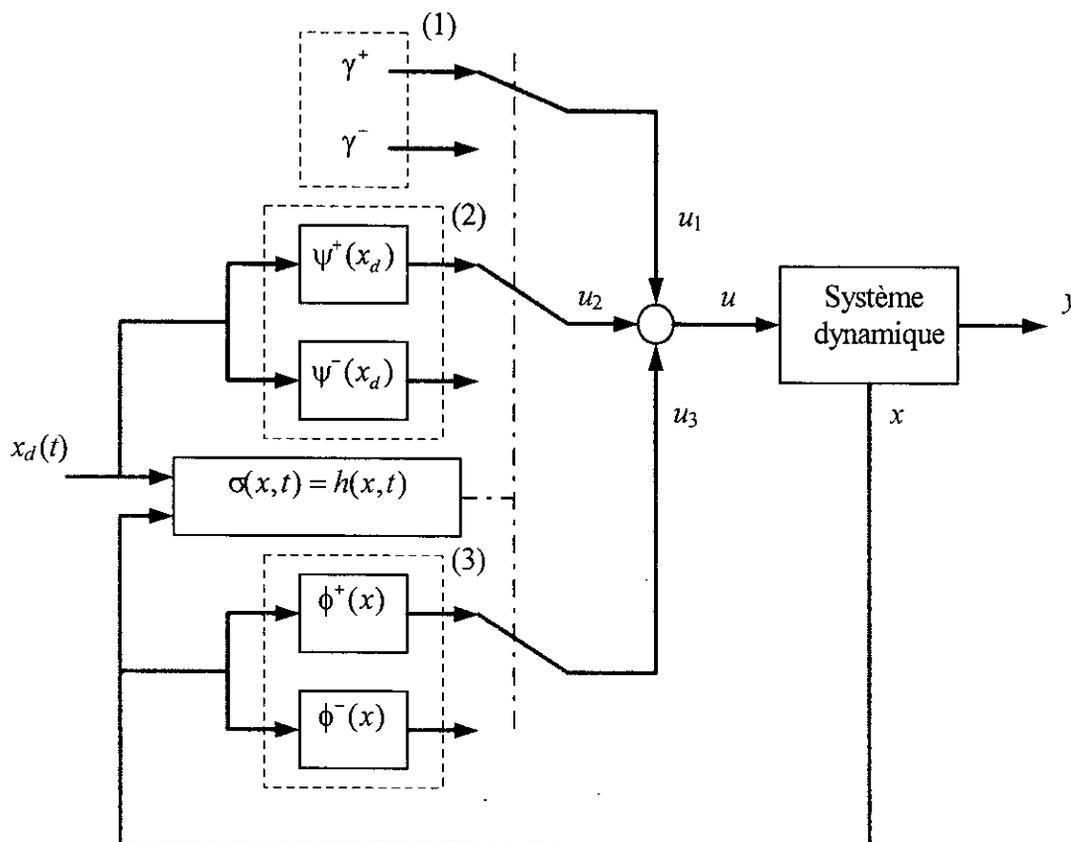


figure 2.1 - Configuration de base pour les systèmes à structure variable.

La configuration présentée par la figure 2.1 possède trois blocs élémentaires pour constituer la commande globale excitant le système à savoir :

- le premier bloc (1) constitue deux vecteurs de commandes auxiliaires, un des deux forme la première partie  $u_1$  de la commande globale suivant le signe de la loi de commutation  $\sigma(x,t)$ .
- le deuxième bloc (2) fournit la commande  $u_2$ . Cette commande est formée en multipliant le vecteur désiré par une matrice d'anticipations  $\psi^+(x_d)$  ou  $\psi^-(x_d)$  par le biais du signe de la loi de commutation.

• le troisième bloc (3) fournit la commande  $u_3$  commutant entre deux contres réactions d'état, cette commande est donnée par  $\phi^+(x) x$  ou  $\phi^-(x) x$  suivant toujours le signe de loi de commutation.

La commande résultante est décrite par la forme non linéaire suivante :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = \begin{cases} u^+ = \gamma^+ + \psi^+(x_d) x_d + \phi^+(x) x & \text{si } \sigma(x,t) > 0 \\ u^- = \gamma^- + \psi^-(x_d) x_d + \phi^-(x) x & \text{si } \sigma(x,t) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.3 Surface de glissement. [13]

La spécification essentielle pour le réglage des systèmes à structures variables, est de sélectionner une surface de glissement qui n'est en réalité rien d'autre qu'un hyperplan où le système glisse par le biais d'une commande, dont les commutations par rapport à cette surface ont des pics très fins. En générale la loi de commutation  $\sigma(x,t)$  est décrite par une fonction non linéaire  $h(x,t)$  y compris une partie linéaire et un terme d'intégration.

Il n'existe pas de critères bien spécifiés pour faire un choix approprié d'une loi de commutation non linéaire. Pour éclairer ce qui est cité auparavant on doit se contenter du cas particulier où la loi de commutation  $\sigma(x,t)$  est linéaire avec son application à des systèmes multivariables. La forme générale de cette linéaire loi de commutation est :

$$\sigma(x,t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x,t) \\ \vdots \\ \sigma_m(x,t) \end{bmatrix} = S x + S_d x_d(t) \quad (2.2)$$

avec

$x \in \mathfrak{R}^n$  vecteur d'état du système ;

$x_d \in \mathfrak{R}^n$  vecteur d'état désiré (consigne) ;

$S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  matrice des gains définissant la dynamique de la surface de glissement ;

$S_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  matrice des gains du vecteur consigne.

La surface de glissement globale est donc décomposée par  $m$  surfaces de la forme :

$$\sigma_i(x,t) = \sum_{j=1}^n S_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n S_{dij} x_{dj}(t) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

## 2.4 Solution des systèmes à second membre discontinu.

### 2.4.1 Méthode de Fillipov. [1] [14]

Le mathématicien Fillipov en 1960 a résolu l'équation différentielle du deuxième ordre dont le second membre est discontinu en démontrant l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques en régime glissant.

La méthode de Fillipov consiste à trouver le résultat de la vitesse du champ de vecteur  $f^0$  qui est piloté par la combinaison convexe de deux champs de vecteurs  $f^+$  en dessus et  $f^-$  en dessous dans l'intersection de la surface est la tangente en un point donné. Formulation de cette méthode :

soit le système non-linéaire décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.4)$$

avec la commande discontinue :

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } \sigma(x, t) > 0 \\ u^- & \text{si } \sigma(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

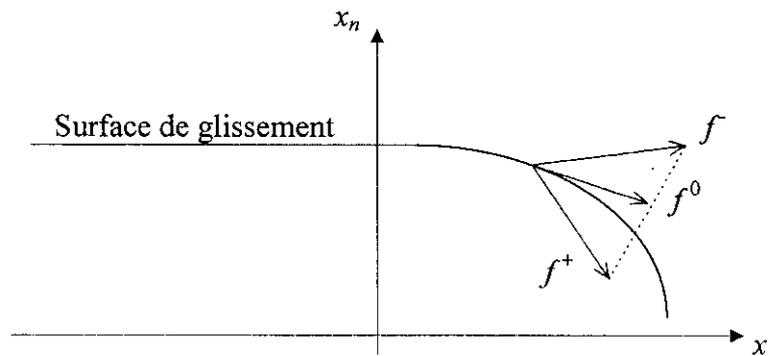


figure 2.2 - Méthode de Fillipov.

La trajectoire d'état en régime glissant s'écrit :

$$\dot{x} = f^0 = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad \text{avec} \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (2.6)$$

avec  $\mu$  dépend de la direction de la grandeur des vecteurs colonne  $f^+$ ,  $f^-$  et le rang du vecteur gradient du  $\sigma(x,t)$ .

$$\mu = \frac{[\text{grad } \sigma(x,t)] f^-}{[\text{grad } \sigma(x,t)] (f^- - f^+)} \quad (2.7)$$

substituant l'expression de  $\mu$  dans l'équation (2.6) on trouve :

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } \sigma \cdot f^-}{\text{grad } \sigma \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } \sigma \cdot f^+}{\text{grad } \sigma \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (2.8)$$

La méthode de Fillipov sert à trouver une trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Une autre méthode que nous allons présenter ci-après se basant sur la commande équivalente a été proposée par Utkin.

#### 2.4.2 Méthode d'Utkin. [1]

Soit le système non-linéaire décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t) u \quad (2.9)$$

en régime de glissement idéal la loi de commutation s'annule (expression de la surface de glissement est validée), implicitement on a pas une variation de la loi de commutation, donc  $\dot{\sigma}(x, \dot{x}, t) = 0$  avec :

$$\dot{\sigma}(x, \dot{x}, t) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.10)$$

l'introduction de l'équation (2.9) dans (2.10) donne :

$$\dot{\sigma}(x, \dot{x}, t) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \left( f(x,t) + g(x,t) u_{eq} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

avec  $u_{eq}$  est la commande équivalente en mode glissant, d'après l'équation (2.11) cette commande équivalente est donnée par la formule suivante :

$$u_{eq} = - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(x,t) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\} \quad (2.12)$$

avec la condition nécessaire de transversalité :

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{pmatrix}^T g(x,t) \right] \neq 0 \quad (2.13)$$

L'équation d'état du système équivalent en mode de glissement idéal est donc :

$$\dot{x} = \left\{ 1 - g(x,t) \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{pmatrix}^T g(x,t) \right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{pmatrix}^T \right\} f(x,t) - g(x,t) \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{pmatrix}^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.14)$$

## 2.5 Notion de géométrie différentielle. [24]

On considère le système décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u \quad (2.15)$$

d'où

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} ; \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

La dérivée de Lie de la quantité  $\lambda(x)$  suivant le champ de vecteur  $g(x)$  est donnée par :

$$L_g \lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} g_i(x) \quad (2.16)$$

La dérivée de Lie de la quantité (2,19) suivant le champ de vecteur  $f(x)$  est :

$$L_f [L_g \lambda(x)] = \frac{\partial [L_g \lambda(x)]}{\partial x} f(x) \quad (2.17)$$

Si la fonction  $\lambda(x)$  est différentiable  $n$  fois suivant le champ de vecteur  $g(x)$ , donc par récurrence :

$$L_g^n \lambda(x) = \frac{\partial [L_g^{n-1} \lambda(x)]}{\partial x} g(x) \quad (2.18)$$

avec

$$L_g^0 \lambda(x) = \lambda(x) \quad (2.19)$$

La deuxième opération sur les champs de vecteurs est le produit de Lie défini par :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (2.20)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Pour créer un nouveau champ de vecteur on combine autant de champs de vecteurs qu'on veut.

Les propriétés essentielles de cette approche sont :

### Propriété 1.

On s'intéresse à la dérivée de Lie.

- Soient  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  deux fonctions réelles,  $g$  un champ de vecteur :

$$L_{\alpha g} \beta(x) = \left( L_g \beta(x) \right) \alpha(x) \quad (2.22)$$

- Soient  $f$  et  $g$  deux champs de vecteurs, et  $\beta(x)$  une fonction réelle :

$$L_{[f, g]} \beta(x) = L_f L_g \beta(x) - L_g L_f \beta(x) \quad (2.23)$$

- Si  $g$  est un champ de vecteur, et  $\beta(x)$  une fonction réelle :

$$L_g d\beta(x) = d L_g \beta(x) \quad (2.24)$$

avec

$$d\beta(x) = \text{grad } \beta(x) = \left[ \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \beta}{\partial x_n} \right] \quad (2.25)$$

### Propriété 2.

Le produit de Lie est caractérisé par :

- Soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  des champs des vecteurs, et  $\lambda_1, \lambda_2$  deux réels, donc :

$$[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g_1] = \lambda_1 [f_1, g_1] + \lambda_2 [f_2, g_1] \quad (2.26)$$

et

$$[f_1, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2] = \lambda_1 [f_1, g_1] + \lambda_2 [f_1, g_2] \quad (2.27)$$

- La commutative

$$[f, g] = -[g, f] \quad (2.28)$$

## 2.6 Condition d'existence du mode de glissement. [13]

En utilisant une discussion géométrique, le régime de glissement sera situé à l'intersection des surfaces de commutations, dans une zone dite région d'attraction (domaine du mode glissant 'D') une partie incluse dans l'espace d'état global  $\Omega$  de dimension  $n$ . Il est nécessaire que dans cette région, le vecteur vitesse de la trajectoire d'état doit pointer vers cette surface de glissement pour toutes conditions initiales dans le domaine D.

La condition géométrique de l'existence du mode de glissement est reliée à la convergence de la trajectoire d'état vers l'origine du sous espace  $(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_m)$  de dimension  $(n-m)$ . Il est illustré par la figure 2.3 pour le cas  $(m=2)$ .

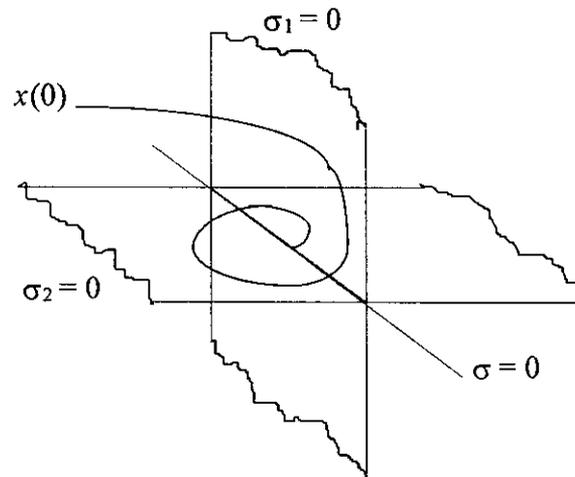


figure 2.3 - forme possible d'une Trajectoire d'état en mode de glissement, avec deux surface de commutation.

Les conditions d'existence du régime de glissement peuvent être définies par les théories de stabilité de Lyapunov.

**Théorème 2.1.**

Pour que le domaine 'D' de dimension (n-m) soit le domaine du mode de glissement, Il suffit bien sur que ce domaine soit inclus dans espace global  $\Omega$ . Par conséquent, on peut formuler une fonction  $(x, \sigma, t)$  dite fonction de Lyapunov continue dérivable qui satisfait les conditions suivantes.

- 1) La fonction  $(x, \sigma, t)$  est définie positive et respectant  $\sigma$ .

$$\begin{cases} V(x, \sigma, t) > 0 & \text{si } \sigma \neq 0 \\ V(x, 0, t) = 0 & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \quad \forall x, t \quad (2.29)$$

dans la sphère  $\| \sigma \| \leq \rho$  pour tout état x dans le domaine D et quelque soit t on a :

- $\inf_{x \in D} V(x, \sigma, t) = h_\rho \quad \text{avec } h_\rho \geq 0 \quad (2.30)$

- $\sup_{x \in D} V(x, \sigma, t) = H_\rho \quad \text{avec } H_\rho > 0 \quad (2.31)$

avec  $h_p$  et  $H_p$  sont des quantités positives et dépendantes de  $\rho$ .

2) La dérivée totale de la quantité  $V(x, \sigma, t)$  est très négative pour tout état  $x$  appartenant dans  $D$  sauf si l'état  $x$  est sur la surface de commutation où la dérivée n'existe pas.

**Preuve.**

Il n'existe pas une méthode particulière pour la détermination de la fonction de Lyapunov des systèmes, cette dernière peut être décrite par les formes particulières de  $Sg(x, t)$ .

1) Il existe deux matrices,  $\omega(x, t)$  matrice symétrique définie positive et  $R(x, t)$  matrice dont les éléments diagonaux sont dominants, avec :

$$R(x, t) = -\omega(x, t) Sg(x, t) \quad (2.32)$$

et

$$R_{ij} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |R_{ij}| \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.33)$$

La forme recommandée de  $V(x, \sigma, t)$  est la forme quadratique en  $\sigma(x, t)$  avec les coefficients dépendantes de  $x$  et  $t$ .

$$V(x, \sigma, t) = \sigma^T R(x, t) \sigma + Q(x, t) \sigma + Z(x, t) \quad (2.34)$$

où  $Q(x, t)$  et  $Z(x, t)$  sont deux fonctions.

2) Si  $Sg(x, t)$  est une matrice symétrique, la forme recommandée de  $V(x, \sigma, t)$  est :

$$V(x, \sigma, t) = \sigma^T R(x, t) \sigma \quad (2.35)$$

avec  $R(x, t)$  une matrice symétrique

3) Si  $Sg(x, t)$  matrice dont la diagonale est dominante la forme appropriée de  $V(x, \sigma, t)$  est quadratique simple :

$$V(x, \sigma, t) = \sigma^T \omega(x, t) \sigma \quad (2.36)$$

et  $\omega(x,t)$  est une matrice diagonale non singulière.

4) Si  $Sg(x,t)$  est une matrice diagonale. la forme recommandée de  $V(x,\sigma,t)$  sera :

$$V(x,\sigma,t) = \sigma^T \sigma \quad (2.37)$$

## 2.7 Régime glissant idéal. [24]

En mode de glissement idéal, la commande de l'équation d'état décrite auparavant sera formulée par la commande équivalente de la forme suivante :

$$u_{eq}(x,t) = - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(x) \right\} \quad (2.38)$$

l'équation ci-dessus représente le système idéal glissant sur la surface de commutation  $\sigma(x)$  et constitue la moyenne de la trajectoire d'état. La figure 2.4 illustre ce phénomène. Le système devient :

$$\dot{x} = \left\{ I - g(x) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\} f(x) \in \ker d\sigma(x) = \Delta_\sigma(x) \quad (2.39)$$

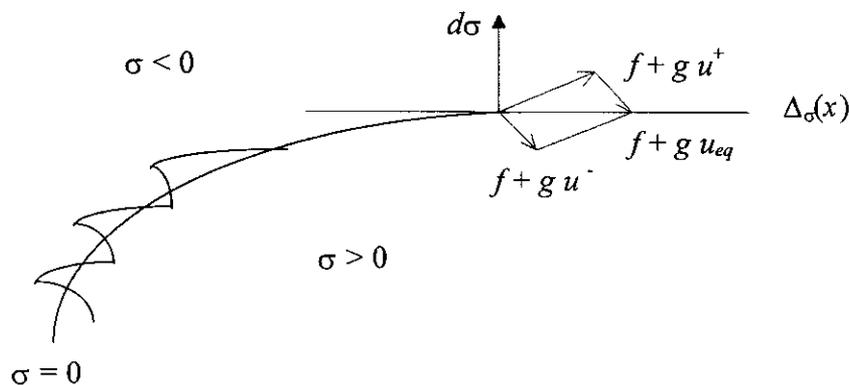


figure 2.4 - Régime de glissement idéal.

## 2.8 Réduction d'ordre. [13]

Le système équivalent en mode de glissement satisfait les  $n$  dimensions d'état dynamique et les  $m$  équations algébriques des surfaces de glissement. L'utilisation de deux contraintes amène à réduire l'ordre du système équivalente de  $n$  vers  $(n-m)$ .

### *Théorème 2.2.*

Soit le système non linéaire décrit par l'équation (2.9), il restreint à l'intersection avec la surface de glissement décrite par la loi de commutation (2.2) avec le cas particulier que  $x_d$  est constante. L'équation d'état du système équivalent est la suivante :

$$\dot{x}(t) = \left\{ 1 - g(x,t) [S^T g(x,t)]^{-1} S^T \right\} f(x) \quad (2.40)$$

Si le rang de  $S$  égal à  $m$  (les surfaces de glissement sont indépendantes), on peut exprimer  $m$  variables d'état en fonction de  $(n-m)$  variables d'état restante.

### *Preuve.*

Si le système est en régime de glissement idéal donc :

$$S x(t) + S_d x_d(x) = 0 \quad (2.41)$$

la solution de  $m$  variables d'état est exprimée implicitement en fonction du reste  $(n-m)$  variables d'état si le rang de la matrice est  $m$ . La condition que  $S$  a le rang  $m$  lorsqu'on suppose que le déterminant de la matrice  $Sg$  n'est pas nul (condition de transversalité). Le système réduit devient d'ordre  $(n-m)$ .

## 2.9 Invariance des régimes glissants par rapports aux perturbations. [1] [24]

Soit le système perturbé suivant d'écrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u + d \quad (2.42)$$

où  $d$  représente les perturbations extérieures.

### *Définition 1. [24]*

Le régime glissant jouit de propriété d'invariance forte par rapport au signal perturbateur  $d$ , à chaque fois que la dynamique du système au mode glissant est indépendante du signal perturbateur.

**Théorème.**

Le régime glissant sur  $\sigma$  du système perturbé satisfait les propriétés d'invariances vis à vis de  $d$  (perturbation) si, et seulement si, le vecteur de perturbation  $d$  satisfait la condition suivante :

$$d \in \text{span}\{g(x)\} \quad (2.43)$$

avec  $\text{span}\{.\}$  l'espace engendré par le vecteur  $\{.\}$ .

**Preuve.**

Le régime glissant idéal pour le système décrit par l'équation (2.42) est donné par :

$$\dot{x} = F(f + d) \quad (2.43)$$

avec  $F$  l'opérateur de projection .

La condition suffisante apparaît du fait que  $d \in \text{span}\{g(x)\}$  donc :

$$d = g(x) w(x) \quad (2.44)$$

pour toute  $w(x)$  fonction scalaire continue. Dans ce cas, l'opérateur  $F$  élimine l'influence du signal perturbateur  $d$  sur le système en boucle fermée.

La condition nécessaire vient du fait que si :

$$F \cdot d = \left\{ 1 - g(x) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\} d = 0 \quad (2.45)$$

nécessairement le signal de perturbation  $d$  sera :

$$d = \left\{ g(x) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\} d \quad (2.46)$$

donc  $d \in \text{span}\{g(x)\}$ .

## 2.10 Commande par mode de glissement.

La synthèse de la commande à structure variable nécessite deux étapes à suivre :

- Sélection de la surface de glissement  $\sigma = 0$  de manière à ce que la sortie  $y(t)$  du système vérifie la convergence vers une sortie désirée.
- Construction de la commande  $u(t)$  avec la condition que la trajectoire d'état du système à régler suive asymptotiquement la surface de glissement.

Le choix approprié d'une construction adéquate de la commande à structure variable fait appel à plusieurs types de commandes à savoir :

### 2.10.1 Commande par diagonalisation.

Soit le système non-linéaire décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) u(t) \quad (2.47)$$

Il existe deux formes de commande par diagonalisation pour la construction de  $u(t)$ . La première est basée sur une transformation de la commande originale et la deuxième est basée sur une transformation de la surface de glissement.

#### *Méthode 1.*

La construction du nouveau vecteur de commande se base sur une transformation non singulière de la commande originale  $u(t)$ . Cette transformation est donnée par :

$$u^*(t) = Q^{-1}(x, t) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x, t) u(t) \quad (2.48)$$

où  $Q(x, t) = \text{diag}[q_1(x, t) \dots q_n(x, t)]$  une matrice arbitraire diagonale avec :

$$\begin{cases} \inf |q_i(x, t)| > 0 \\ \forall x, \forall t > 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

l'équation dynamique du système global (2.47) devient :

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + g(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} Q(x,t) u^*(t) \quad (2.50)$$

substituant l'équation (2.50) dans l'expression de la dérivée de la loi de commutation on obtient :

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t) + Q(x,t) u^*(t) \quad (2.51)$$

Le choix de la commande  $u^*(t)$  est lié à la condition suffisante d'existence du régime glissant  $\sigma^T(x) \dot{\sigma}(x) < 0$ . Pour satisfaire à cette condition, il suffit de poser :

$$\begin{cases} q_i(x,t) u_i^{**} < -\sum_{j=1}^n S_{ij} f_j(x,t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ q_i(x,t) u_i^{*-} > -\sum_{j=1}^n S_{ij} f_j(x,t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

La commande originale sera calculée par une transformation inverse de  $u^*(t)$ .

$$u(t) = \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} Q(x,t) u^*(t) \quad (2.53)$$

### Méthode 2.

Parmi les propriétés des modes glissants, l'invariance par rapport à une transformation non singulière  $\Omega(x,t)$ .

### Théorème.

La trajectoire du système équivalent en mode de glissement est invariant par rapport à une transformation de la surface  $\sigma^*(x,t) = \Omega(x,t) \sigma(x,t)$  si  $\|\dot{\Omega}\|$  et  $\|\Omega^{-1}\|$  sont bornées.

### Preuve.

en mode de glissement idéal on a :

$$\dot{\sigma}^* = \Omega(x,t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f(x,t) + g(x,t) u_{eq}) + \Omega(x,t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \dot{\Omega} \sigma = 0 \quad (2.54)$$

La commande équivalente associée à la nouvelle surface de glissement  $\sigma^*(x,t)$  est :

$$u_{eq}^*(t) = \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t) - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \Omega^{-1} \dot{\Omega} \sigma - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.55)$$

la différence entre les deux commandes équivalentes  $u_{eq}^*(t)$  et  $u_{eq}(t)$  est uniquement par le terme  $\left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \Omega^{-1} \dot{\Omega} \sigma$ , mais il sera nul en régime de glissement idéal ( $\sigma = 0$ ), donc :

$$u_{eq}^*(t) = \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t) - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = u_{eq}(t) \quad (2.56)$$

Enfin les deux systèmes équivalents (avant et après transformation) admettent le même régime de glissement.

La deuxième procédure de commande par diagonalisation se fait par un choix d'une transformation de la surface de glissement par le biais d'une transformation non singulière  $\Omega(x,t)$ .

$$\Omega(x,t) = Q(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \quad (2.57)$$

avec  $\Omega(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]$  est une matrice diagonale.

on aura donc :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^* &= Q(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t) + Q(x,t) u(t) + \dot{\Omega}(x,t) \Omega(x,t)^{-1} \sigma^* \\ &= \sigma^{\circ}(x,t) + Q(x,t) u(t) + \sigma_{\Omega}(x,t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

La condition d'existence du régime de glissement est satisfaite si :

$$\begin{cases} q_i(x,t) u_i^+ < -\sigma_i^0(x,t) - \sigma_{\Omega_i}(x,t) & \text{si } \sigma_i^*(x) > 0 \\ q_i(x,t) u_i^- > -\sigma_i^0(x,t) - \sigma_{\Omega_i}(x,t) & \text{si } \sigma_i^*(x) < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

avec  $\sigma_{\Omega_i}(x,t)$  est l'élément  $i$  du vecteur  $\sigma_{\Omega}(x,t)$ .

### 2.10.2 Commande par la forme quadratique.

La synthèse basée sur la forme quadratique nécessite une transformation du vecteur de commande  $u$  ou une transformation de la surface de glissement. Cette transformation non singulière simplifie énormément le choix de l'équation de Lyapunov afin d'obtenir une forme quadratique définie positive, la commande travaille de manière à ce que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit définie négative.

L'existence de la fonction de Lyapunov  $V$  implique l'existence du mode glissant. Pour plus de détails nous renvoyons nos lecteurs à la référence [1] dont les pages 89-101 et 112-115.

#### Méthode 1.

La construction du nouveau vecteur de commande dans cette méthode se base sur une transformation non singulière de la commande originale  $u(t)$ . Soit le système donné par l'équation d'état (2.47) avec le vecteur de commande discontinue dont la  $i^{\text{ème}}$  élément est :

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^+(t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

et  $\sigma = Sx + S_d x_d$  la loi de commutation déterminée auparavant avec la supposition que la consigne  $x_d$  est un signal constant.

Le vecteur de commande peut être mis sous la forme suivante :

$$u = u^0 + U \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.61)$$

d'où

$$u^0 = \frac{u^+ + u^-}{2} \quad (2.62)$$

$$U = \text{diag} \left[ \frac{u_1^+ - u_1^-}{2} \quad \dots \quad \frac{u_m^+ - u_m^-}{2} \right] \quad (2.63)$$

$$\text{sgn}(\sigma) = [\text{sgn}(\sigma_1) \quad \dots \quad \text{sgn}(\sigma_m)]^T \quad (2.64)$$

Dérivant la loi de commutation par rapport au temps :

$$\dot{\sigma} = S \dot{x} \quad (2.65)$$

l'injection de l'expression d'équation d'état donne :

$$\dot{\sigma} = S f(x, t) + S g(x, t) u \quad (2.66)$$

substituant la commande donnée par l'équation (2.61) dans (2.66), on obtient :

$$\dot{\sigma} = S f(x, t) + S g(x, t) u^0 + S g(x, t) U \text{sgn}(\sigma) \quad (2.67)$$

on réarrange l'équation précédente sous une autre forme :

$$\dot{\sigma} = D(x, t) \text{sgn}(\sigma) + d(x, t) \quad (2.68)$$

avec

$$D(x, t) = S g(x, t) U \quad (2.69)$$

et

$$d(x, t) = S f(x, t) + S g(x, t) u^0 \quad (2.70)$$

la matrice  $D(x, t)$  est symétrique arbitraire dont les mineurs principaux de  $-D(x, t)^{-1}$  sont positifs et bornés.

La transformation qui lie la commande originale  $u$  avec la commande  $u^*$  est :

$$u = [S g(x, t)]^{-1} D(x, t) U^{*-1} u^* \quad (2.71)$$

d'où

$$U^* = \text{diag} \left[ \frac{u_1^{*+} - u_1^{*-}}{2} \quad \dots \quad \frac{u_m^{*+} - u_m^{*-}}{2} \right] \quad (2.72)$$

et

$$u_i^*(t) = \begin{cases} u_i^{*+}(t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^{*-}(t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

l'introduction des équations (2.70) et (2.71) dans l'équation de projection du mouvement dans le sous espace  $(\sigma_1 \dots \sigma_m)$  donnée par l'équation (2.68), donne :

$$d(x,t) = S f(x,t) + D(x,t) U^{*-1} u^{*0} \quad (2.74)$$

avec

$$u^{*0} = \left[ \frac{u_1^{*+} - u_1^{*-}}{2} \quad \dots \quad \frac{u_m^{*+} - u_m^{*-}}{2} \right]^T \quad (2.75)$$

Le domaine D est un domaine du mode de glissement si :

$$\sup_{x \in D} |\lambda_i| < 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.76)$$

avec

$$\lambda = -D(x,t)^{-1} d(x,t) \quad (2.77)$$

la condition trouvée ci dessus est bien détaillée à la référence [1] dans les pages 89-97.

On note que la condition est vérifiée si :

$$u^{*0} = -U^* D(x,t)^{-1} S f(x,t) \quad (2.78)$$

### Méthode 2

La deuxième méthode est basée sur une transformation non singulière de la surface de glissement. Chaque composante de la commande  $u$  suit une nouvelle loi de commutation décrite par une transformation de la loi de commutation originale.

$$\dot{\sigma}^* = \Omega(x,t) D(x,t) \operatorname{sgn}(\sigma^*) + \Omega(x,t) d(x,t) + \dot{\Omega}(x,t) \Omega(x,t)^{-1} \sigma^* \quad (2.79)$$

avec  $D(x,t)$  et  $d(x,t)$  sont au préalable définies, et  $\Omega(x,t)$  la transformation non singulière.

Le choix de la matrice symétrique  $D^*(x,t)$  est fait de telle manière à ce que les mineurs principaux de  $-D^*(x,t)^{-1}$  soient positifs et possèdent des bornes supérieures et inférieures pour tous  $x$  dans le domaine D. Posant  $\Omega = D^* D^{-1}$ , l'équation (2.79) devient :

$$\dot{\sigma}^* = D^*(x,t) \operatorname{sgn}(\sigma^*) + D^*(x,t) D^{-1}(x,t) d(x,t) + \frac{d[D^* D^{-1}]}{dt} D^* D^{-1} \sigma^* \quad (2.80)$$

supposant que  $\|\dot{\Omega}\|$  et  $\|\Omega^{-1}\|$  sont bornées, on peut négliger le terme en  $\sigma^*$  dans l'équation (2.80) lorsque  $\sigma^*$  est suffisamment petit. En vue de l'équation (2.80), comme  $-D^*(x,t)^{-1}$  est définie positive,  $D$  est un domaine de glissement si (2.76) existe pour tous  $x$  dans  $D$ . Cette condition est validée si :

$$u^0 = -(S g(x,t))^{-1} S f(x,t) \quad (2.81)$$

alors

$$\lambda = -D(x,t)^{-1} d(x,t) = 0 \quad (2.82)$$

La condition d'atténuation (reaching condition) ne résulte pas de l'extension de (2.76) vers l'espace d'état entier, et en plus, elle est difficile à extraire. Pour plus d'informations sur la synthèse basée sur la forme quadratique nous renvoyons nos lecteurs soucieux à la référence [1] dans les pages 89-101 et 112-115.

La synthèse basée sur la forme quadratique n'offre pas un avantage important quant à la méthode par diagonalisation, elle est difficile à appliquer.

### 2.10.3 Commande hiérarchisée. [13]

Dans l'alternative de synthétiser des commandes à savoir la commande par la méthode de diagonalisation et la commande basée sur la forme quadratique, il existe une autre forme de commande appelée commande hiérarchisée.

Soit le système dynamique excité par le vecteur de commande décomposé par  $(u_i \ i=1,\dots,m)$ . La première composante de la commande  $u_1$  conduit le système vers la première surface de glissement  $\sigma_1 = 0$ , la deuxième composante  $u_2$  conduit le système vers l'intersection des deux premières surfaces de glissement  $\sigma_1 = 0$  et  $\sigma_2 = 0$ , et ainsi de suite jusqu'à la dernière composante de la commande  $u_m$  qui conduit le système vers l'intersection de toutes les surfaces de glissement.

Dans cette méthode, on procède par récurrence. Supposant que le système est sur l'intersection de  $k$  surfaces de glissement avec  $k < m$ , à partir du système d'équation  $(\dot{\sigma}_i = 0 \ i=1,\dots,k)$  on extrait la commande équivalente  $u_{ieq}$ , avec la supposition que les composantes de la commande qui restent sont égales à  $u_i^+$  ou  $u_i^-$  dépendants du signe des loi de commutation  $(\sigma_i \ i=1,\dots,k)$ .

Substituant la commande équivalente  $u_{ieq}$  dans le système original on trouve :

$$\dot{x} = f^k(x,t) + g^k(x,t) u^k \quad k = 0, \dots, m \quad (2.83)$$

d'où

$f^k$  est un vecteur de dimension  $n$ .

$g^k = [g_{k+1}^k \ \dots \ g_m^k]$  une matrice  $n \times (m-k)$  formée par les colonnes  $g_j^k \ j = k+1, \dots, m$ .

$u^k = [u_{k+1} \ \dots \ u_m]$  un vecteur de dimension  $m-k$ .

le système original est défini par  $f^0 = f$ ,  $g^0 = g$  et  $u^0 = u$ . Et on a en plus  $u^m = 0$ .

Le mode de glissement existe en  $\sigma_{k+1} = 0$  par le biais de la commande  $u_{k+1}$  si :

$$\lim_{\sigma_{k+1} \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_{k+1} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\sigma_{k+1} \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_{k+1} > 0 \quad (2.84)$$

avec

$$\dot{\sigma}_{k+1} = \text{grad } \sigma_{k+1} f^k + \sum_{i=k+1}^m \text{grad } \sigma_{k+1} g_i^k u_i \quad (2.85)$$

donc pour assurer l'existence du mode de glissement, il suffit de poser :

$$\begin{cases} \text{grad } \sigma_{k+1} g_{k+1}^k u_{k+1}^+ < \min_{u_{k+2} \dots u_m} \left[ -\text{grad } \sigma_{k+1} f^k - \sum_{i=2}^{m-k} \text{grad } \sigma_{k+1} g_{k+i}^k u_{k+i} \right] & \text{si } \sigma_{k+1} > 0 \\ \text{grad } \sigma_{k+1} g_{k+1}^k u_{k+1}^- > \max_{u_{k+2} \dots u_m} \left[ -\text{grad } \sigma_{k+1} f^k - \sum_{i=2}^{m-k} \text{grad } \sigma_{k+1} g_{k+i}^k u_{k+i} \right] & \text{si } \sigma_{k+1} < 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

Pour plus d'informations, on renvoie nos lecteurs à la référence [1].

#### 2.10.4 Autres approches de commande.

Il existe d'autres formes pour la construction de la commande à structure variable. Dans le cas où la commande est décomposée en deux parties : partie linéaire (vecteur de commande équivalent) et partie non-linéaire discontinue (commande discontinue autour d'une moyenne), la forme est :

$$u = u_{eq} + u_N \quad (2.87)$$

à l'aide de cette forme, on peut obtenir :

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(x,t) + g(x,t) u_{eq}] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) u_N \quad (2.88)$$

il est clair qu'en régime de glissement idéal on a :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(x,t) + g(x,t) u_{eq}] = 0 \quad (2.89)$$

il résulte :

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) u_N \quad (2.90)$$

Pour une simplification de présentation, on suppose que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) = I \quad (2.91)$$

$I$  est une matrice identité de dimension  $m \times m$ .

donc  $\dot{\sigma}(x) = u_N$  d'où la vérification de la condition suffisante d'existence du mode de glissement est simple, on doit satisfaire à  $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$  quand  $\sigma_i \neq 0$

*forme 1.*

$$u_{iN} = \begin{cases} \gamma_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) & \text{pour } \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \text{pour } \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

avec  $\gamma_i < 0$ .

La condition d'existence du mode de glissement est :

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \gamma_i \sigma_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) < 0 \quad \text{pour } \sigma_i \neq 0 \quad (2.93)$$

*forme 2.*

$$u_{iN}(x) = \begin{cases} \gamma_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i) & \text{pour } \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \text{pour } \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

avec  $\gamma_i(x) < 0$ .

La condition d'existence du mode de glissement sera :

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \gamma_i(x) \sigma_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) < 0 \quad \text{pour} \quad \sigma_i \neq 0 \quad (2.95)$$

par exemple on choisit  $\gamma_i(x) = \beta_i [\sigma_i^{2k}(x) + \alpha_i]$ ,  $\beta_i < 0$  et  $\alpha_i > 0$  avec  $k$  un nombre naturel.

*forme 3.*

Retour d'état linéaire avec des gains commutants entre deux valeurs :

$$u_N(x) = \phi x \quad (2.96)$$

d'où

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{si } x_j \sigma_i > 0 \\ \beta_{ij} & \text{si } x_j \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

avec  $\alpha_{ij} < 0$  et  $\beta_{ij} > 0$

La condition d'existence du mode de glissement est :

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \sigma_i (\phi_{i1} x_1 + \dots + \phi_{in} x_n) < 0 \quad (2.98)$$

*forme 4.*

Retour d'état linéaire continu :

$$u_N = -L \sigma \quad (2.99)$$

où  $L$  est une matrice constante  $m \times m$  définie positive.

La condition d'existence du mode de glissement sera :

$$\sigma^T \dot{\sigma} = -\sigma^T L \sigma < 0 \quad \text{si} \quad \sigma \neq 0 \quad (2.100)$$

*forme 5.*

$$u_N = \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \rho \quad (2.101)$$

avec  $\rho < 0$

La condition d'existence du mode de glissement est :

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \|\sigma\| \rho < 0 \quad \text{si} \quad \sigma \neq 0 \quad (2.102)$$

## 2.11 Conclusion.

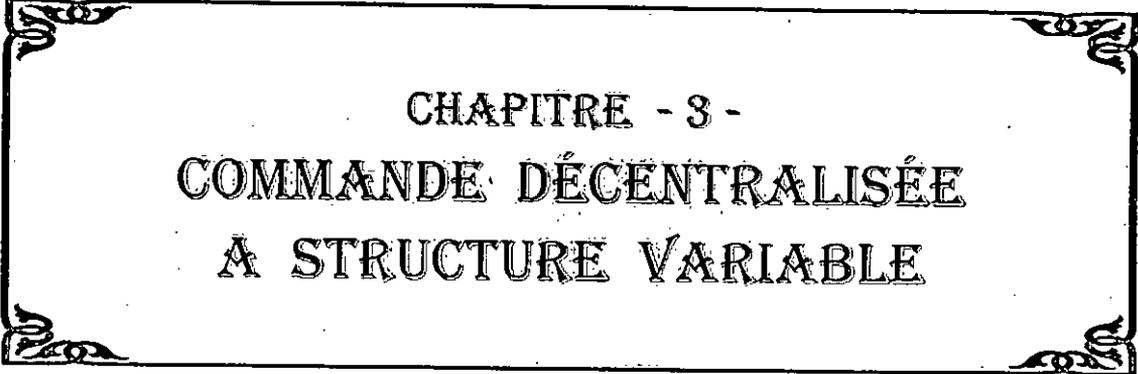
Ce chapitre est un rappel sur la théorie des systèmes à structure variable avec l'introduction de plusieurs types de commandes appropriées à cette dernière .

La commutation de la commande se fait par une logique de signe d'une loi de commutation, elle entraîne la trajectoire d'état de commuter sur une surface de glissement avec une haute fréquence, phénomène du régime de glissement (Chattering).

Les avantages de cette technique se trouvent dans le fait qu'elle utilise toute la force de la commande pour confronter les effets extérieurs et la robustesse qu'elle présente vis à vis des variations paramétriques. Malheureusement elle sollicite très fortement l'organe de commande avec une haute fréquence qui risque d'endommager ce dernier. Ce problème a fait l'objet de recherches pour remédier au phénomène de glissement de manière à réduire les fortes sollicitations de l'organe fournisseur de commande.

Notre étude sur cet aspect se fera dans le prochain chapitre où nous montrons la fonction améliorée et son influence sur une poursuite d'une trajectoire d'état désirée pour une application en robotique .





CHAPITRE - 3 -  
COMMANDE DÉCENTRALISÉE  
À STRUCTURE VARIABLE

## Chapitre 3

# Commande Décentralisée à Structure Variable

### 3.1 Introduction.

Dans le présent chapitre nous proposons deux approches de commande décentralisée à structure variable (CDSV) des robots manipulateurs à plusieurs degrés de liberté. La structure de la commande développée considère le robot comme un système interconnecté dans lequel chaque articulation constitue un sous système commandé par une station de commande locale ( $SC_i$ ). L'élaboration de la commande à structure variable est basée sur la forme générale de la surface de glissement synthétisée pour chaque sous système .

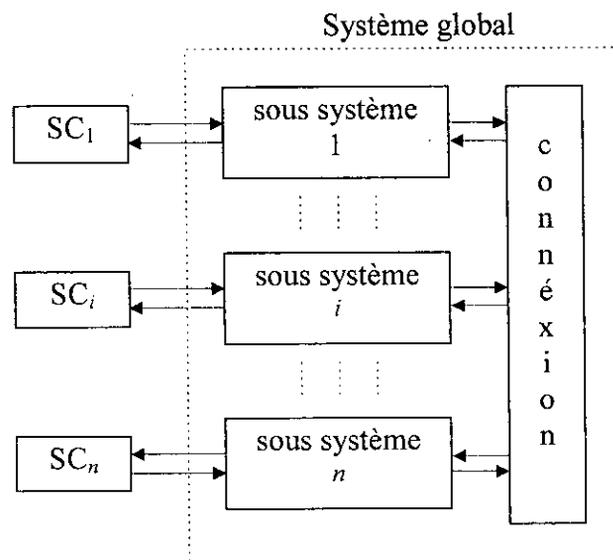


figure 3.1 - Schéma de principe de la commande décentralisée

L'objectif de la commande est d'assurer la meilleur<sup>e</sup> poursuite d'une trajectoire de référence rapide. Chaque signal de commande locale est la combinaison de trois signaux provenant d'un changement de structure; par contre réaction d'état, changement de structure par l'intervention

directe des grandeurs de références et d'un changement de structure par l'organe de commande (signal auxiliaire). La technique de commande développée sera appliquée à plusieurs types de robots et des résultats de simulations seront présentés. Plusieurs tests de robustesse seront également présentés.

### 3.2 Modèle dynamique décentralisé.

Le modèle dynamique général d'un robot manipulateur rigide à  $n$  degrés de liberté peut être représenté par un système d'équation différentiel non-linéaire de second-ordre (voir chapitre 1) :

$$M(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q})\dot{q} + K(q,\dot{q})q + G(q) + H(\dot{q}) = T_p(t) + T(t). \quad (3.1)$$

avec  $q \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\ddot{q} \in \mathfrak{R}^n$  représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires et :

$M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  : est la matrice d'inertie ;

$B(q,\dot{q})\dot{q} + K(q,\dot{q})q \in \mathfrak{R}^n$  : englobe les couples dûs aux forces de coriolis et centrifuges ;

$G(q) \in \mathfrak{R}^n$  : le vecteur de forces et/ou couples dus aux forces de gravitation ;

$H(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$  : représente les frottements visqueux et secs ;

$T_p(t) \in \mathfrak{R}^n$  : le vecteur de forces et/ou couples de perturbation externe ;

$T(t) \in \mathfrak{R}^n$  : le vecteur de forces et/ou couples moteurs.

Les éléments de  $M$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $G$  et  $H$  sont généralement des fonctions très compliquées et non-linéaires par rapport aux coordonnées généralisées du manipulateur.

Les commandes calculées sont les couples à appliquer par des moteurs à chaque charge (charge de chaque moteur). Comme les moteurs considérés sont des moteurs à courant continu, les commandes sont obtenues en terme de tension en multipliant le vecteur  $T$  par la matrice  $k_C^{-1}$  ( $u = k_C^{-1} T$  Volts), où  $k_C$  une matrice diagonale traduisant les constantes de couples des moteurs. Le problème de la commande des robots manipulateurs est d'élaborer un schéma qui génère une commande  $u(t)$  de manière à ce que la position  $q(t)$  suit une trajectoire désirée  $q_d(t)$ .

Afin de faire un développement du schéma de commande décentralisée à structure variable il est judicieux de voir chaque articulation comme un sous système du robot manipulateur. Chaque sous-système (articulation) est interconnecté avec les autres sous-systèmes par des couples et/ou forces de couplage. Le modèle dynamique du manipulateur (3.1) doit donc être mis sous la forme suivante : [19]

$$\begin{aligned}
& [M_{ii}(q) \ddot{q}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j(t)] + [B_{ii}(q, \dot{q}) \dot{q}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j(t)] \\
& + [K_{ii}(q, \dot{q}) q_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij}(q, \dot{q}) q_j(t)] + G_i(q) + H_i(\dot{q}_i) = T_{pi}(t) + T_i(t), \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

la notation par l'indice  $i$  référé à la  $i^{\text{ème}}$  articulation ( $i^{\text{ème}}$  sous système). Les termes  $M_{ij}(q)$ ,  $B_{ij}(q, \dot{q})$  et  $K_{ij}(q, \dot{q})$  sont respectivement les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne des matrices  $M(q)$ ,  $B(q, \dot{q})$  et  $K(q, \dot{q})$ . Les autres vecteurs sont décomposés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
q &= (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)^T, \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n)^T, \quad \ddot{q} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_i, \dots, \ddot{q}_n)^T, \\
G(q) &= (G_1(q), \dots, G_i(q), \dots, G_n(q))^T, \\
H(\dot{q}) &= (H_1(\dot{q}_1), \dots, H_i(\dot{q}_i), \dots, H_n(\dot{q}_n))^T, \\
T_p(t) &= (T_{p1}(t), \dots, T_{pi}(t), \dots, T_{pn}(t))^T, \\
T(t) &= (k_{C1} u_1(t), \dots, k_{Ci} u_i(t), \dots, k_{Cn} u_n(t))^T,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation (3.2) peut être mise sous une forme plus simple :

$$m_{ii}(q) \ddot{q}_i(t) + b_{ii}(q, \dot{q}) \dot{q}_i(t) + k_{ii}(q, \dot{q}) q_i(t) + d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u_{pi}(t) + u_i(t), \quad i = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
m_{ij}(q) &= k_{Ci}^{-1} M_{ij}(q) \\
b_{ij}(q, \dot{q}) &= k_{Ci}^{-1} [B_{ij}(q, \dot{q}) + f_{vi}] \\
k_{ij}(q, \dot{q}) &= k_{Ci}^{-1} K_{ij}(q, \dot{q}) \\
g_i(q) &= k_{Ci}^{-1} G_i(q) \\
u_{pi}(t) &= k_{Ci}^{-1} T_{pi}(t)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ij}(q) \ddot{q}_j(t) + b_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j(t) + k_{ij}(q, \dot{q}) q_j(t) \right) + g_i(q) + k_{Ci}^{-1} f_{si} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) \tag{3.6}$$

Les équations (3.4) (3.5) (3.6) représentent le modèle dynamique de la  $i^{\text{ème}}$  articulation avec  $u_i(t) \in \mathfrak{R}$  la commande locale.  $q_i(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $\dot{q}_i(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $\ddot{q}_i(t) \in \mathfrak{R}$  la position, la vitesse et l'accélération linéaire ou angulaire relatives à chaque articulation. Le terme  $d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathfrak{R}$  peut être considéré comme une perturbation constituant les termes de couplage entre le sous-système  $i$  et les autres sous systèmes du robot (interconnexion).

Les approches de commande décentralisée que nous allons développer consistent à synthétiser pour chaque articulation une loi de commande indépendante ne nécessitant ni la mesure des grandeurs des autres sous systèmes, ni l'utilisation du modèle dynamique complexe du robot.

### 3.3 Synthèse de la commande.

Généralement la synthèse de la commande à structure variable [1] s'effectue suivant deux étapes: sélection de la surface de glissement et construction de la commande. Pour la synthèse de la commande décentralisée à structure variable, ces deux étapes doivent être précédées par une étape de décentralisation.

La synthèse de la commande décentralisée à structure variable que nous allons développer est effectuée suivant trois parties : sélection d'une surface de glissement stable avec une forme générale non-linéaire et/ou variable dans le temps, construction de la commande décentralisée à structure variable, introduction de la fonction d'amélioration pour remédier au problème de la discontinuité de la commande locale.

#### 3.3.1 Sélection des surfaces de glissement.

De nombreuses recherches sur l'application des modes glissants aux robots manipulateurs ont été menées durant les deux dernières décennies [4][5][6]. Cependant dans la plupart de ces recherches la surface de glissement a été sélectionnée par une équation linéaire invariante exponentiellement stable (dans le plan de phase). Une forme générale de la surface de glissement non linéaire et/ou variable dans le temps proposée dans [16] inclue toutes les formes des surfaces de glissement rencontrées dans la littérature de commande à structure variable des robots manipulateurs. Cette forme générale est  $\sigma = v - \dot{q}$  avec  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)^T \in \mathfrak{R}^n$  le vecteur de la loi de commutation de chaque articulation, et  $v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)^T \in \mathfrak{R}^n$  un vecteur arbitraire fixé par les conditions de stabilité des surface de glissements locales. Dans notre cas décentralisé, pour chaque sous système nous avons :

$$\sigma_i = v_i - \dot{q}_i \quad (3.7)$$

avec  $v_i(q_i, q_{di}, \dot{q}_{di}, t) \in \mathfrak{R}$  une fonction arbitraire de plusieurs variables (position réelle, position et vitesse désirées, temps). La trajectoire de référence désirée est caractérisée par le vecteur de

position, vitesse et accélération suivant  $(q_{di}, \dot{q}_{di}, \ddot{q}_{di}) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$ . La forme de la loi de commutation (3.7) inclue toutes les formes des lois de commutations rapportées dans les publications de la commande à structure variable des robots manipulateurs, par exemple si la fonction  $v_i(q_i, q_{di}, \dot{q}_{di}, t)$  est choisie comme :

$$v_i = \dot{q}_{di} + \Lambda_i(\tilde{q}_i) + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

avec  $\tilde{q}_i = q_{di} - q_i$  représente l'erreur de poursuite, et  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  est une fonction  $C^1$  dans  $\mathfrak{R}$ , elle peut être non-linéaire par rapport à l'erreur de poursuite  $\tilde{q}_i$ .

Substituant l'expression de la fonction  $v_i$  dans l'équation (3.7) on trouve une forme plus générale d'une loi de commutation locale, cette forme est la suivante :

$$\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = \dot{\tilde{q}}_i + \Lambda_i(\tilde{q}_i) + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

avec  $\dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_{di} - \dot{q}_i$  représente l'erreur de vitesse,

La loi de commutation locale  $\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)$  peut être non-linéaire par rapport à l'erreur de poursuite  $\tilde{q}_i$  à cause de la fonction  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$ , et variable dans le temps à cause d'un terme d'intégration de l'erreur  $\tilde{q}_i$  par rapport au temps, ce qui explique sa forme générale. Dans un cas particulier on peut citer par exemple la forme de la loi de commutation linéaire avec intégrateur donnée par Slotine [22] :

$$\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = \dot{\tilde{q}}_i + 2\lambda_i \tilde{q}_i + \lambda_i^2 \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

on remarque très bien que la forme précédente est un cas particulier de la forme de la loi de commutation (3.9), puisque il suffit de poser  $\Lambda_i(\tilde{q}_i) = 2\lambda_i \tilde{q}_i$  et  $\eta_i = \lambda_i^2$ .

En mode de glissement idéal, la surface de glissement doit être associée à une équation dynamique différentielle équivalente stable. Si  $\dot{v}_i = \ddot{q}_{di} + F_{i1} \dot{\tilde{q}}_i + F_{i0} \tilde{q}_i$  en régime glissant idéal  $\sigma_i = 0$  nous avons l'équation dynamique équivalente  $\ddot{\tilde{q}}_i + F_{i1} \dot{\tilde{q}}_i + F_{i0} \tilde{q}_i = 0$ , les performances désirées sont fortement liées au choix de  $F_{i0}$  et  $F_{i1}$ .

Dans la commande des robots manipulateurs le choix de la surface de glissement est obtenu de manière à ce que en régime de glissement idéal, l'erreur de poursuite  $\tilde{q}_i$  doit converger uniformément vers zéro. En d'autres termes, il faut que la surface de glissement soit asymptotiquement stable.

**Proposition.**

Deux conditions suffisantes de stabilité asymptotique de la surface de glissement ( $\sigma_i = 0$ ) données par la loi de commutation (3.9) en régime glissant idéal, sont :

**C1** - la constante d'intégration doit être positive ou nulle ( $\eta_i \geq 0$ ).

**C2** - la fonction non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  doit être globalement située dans le premier et le troisième quadrant (le signe de cette fonction est le même que le signe de l'erreur de poursuite), c'est à dire  $\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}_i) \geq 0$ .

par conséquent la fonction non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  passe par l'origine, elle s'annule quand la poursuite est idéale ( $\Lambda_i(0) = 0$ ).

**Démonstration.**

Dans une première étape nous allons supposer que les deux conditions **C1** et **C2** de la proposition sont satisfaites, et nous démontrons la stabilité asymptotique de la surface de glissement proposée en mode glissant idéal. Pour cette démonstration la deuxième méthode de Lyapunov est utilisée.

Soit la fonction de Lyapunov suivante relative à la  $i^{\text{ème}}$  articulation :

$$V_i(\tilde{q}_i, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_i^2 + \eta_i \left( \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

il est clair que  $V_i(\tilde{q}_i, t)$  est toujours positive, puisque la constante d'intégration  $\eta_i$  est supposée positive (1ère condition **C1**). D'après la théorie de Lyapunov, la convergence asymptotique de l'erreur  $\tilde{q}_i$  vers le zéro est assurée si :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \frac{\partial V_i(\tilde{q}_i, t)}{\partial \tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{dt} + \frac{\partial V_i(\tilde{q}_i, t)}{\partial t} < 0 \quad (3.12)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (3.11) par rapport au temps on obtient :

$$\frac{dV_i(\tilde{q}_i, t)}{dt} = \tilde{q}_i \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \tilde{q}_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

donc la surface de glissement est asymptotiquement stable si :

$$\tilde{q}_i \left( \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau \right) \leq 0 \quad (3.14)$$

en régime glissant idéal  $\sigma_i = 0$ , de l'équation (3.9) on obtient :

$$\dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \int_{-\infty}^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau = -\Lambda_i(\tilde{q}_i) \quad (3.15)$$

d'après l'équation (3.15), on peut conclure que l'inégalité (3.14) est toujours satisfaite grâce à la deuxième condition C2, donc le système est bien asymptotiquement stable. Puisque la fonction non-linéaire a été supposée continue dans  $\mathfrak{R}$ , et on a en plus  $\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}_i) \geq 0$ , par conséquent on a  $\Lambda_i(0) = 0$  (la fonction non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  passe par l'origine, et elle est située dans le premier et le troisième quadrant).

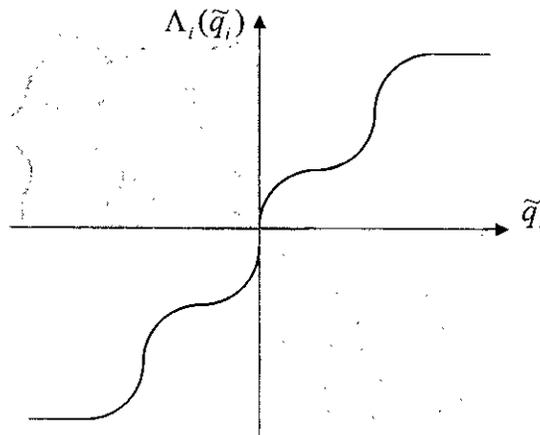


figure 3.2 - fonction non-linéaire d'une surface de glissement stable.

### 3.3.2 Construction de la commande décentralisée.

L'objectif des commandes décentralisées à structure variable que nous allons développer est de calculer une tension locale  $u_i(t)$  pour la  $i^{\text{ème}}$  articulation de manière à assurer le maintien du régime de glissement. D'autre part, la trajectoire d'état de chaque sous système suit le plus proche possible la trajectoire d'état désirée. La forme générale de la commande décentralisée locale peut être formulée comme suit [13] :

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^+(q_i, \dot{q}_i, q_{di}, \dot{q}_{di}, \ddot{q}_{di}, t) & \text{si } \sigma_i > 0 \\ u_i^-(q_i, \dot{q}_i, q_{di}, \dot{q}_{di}, \ddot{q}_{di}, t) & \text{si } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Avant de synthétiser la commande décentralisée à structure variable, les hypothèses suivantes sont considérées :

**H 1** : la trajectoire désirée  $q_{di}(t), \dot{q}_{di}(t)$  est  $C^1$  dans  $[0, +\infty[$

**H 2** : la perturbation locale est bornée de la manière suivante :

$$\min_t [u_{pi}(t)] \leq u_{pi}(t) \leq \max_t [u_{pi}(t)]$$

**H 3** : tous les termes variables de l'équation différentielle locale (3.4) sont bornés :

$$\begin{aligned} \min_q [m_{ii}(q)] &\leq m_{ii}(q) \leq \max_q [m_{ii}(q)] \\ \min_{q, \dot{q}} [b_{ii}(q, \dot{q})] &\leq b_{ii}(q, \dot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}} [b_{ii}(q, \dot{q})] \\ \min_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q})] &\leq k_{ii}(q, \dot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q})] \\ \min_{q, \dot{q}, \ddot{q}} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q})] &\leq d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) \leq \max_{q, \dot{q}, \ddot{q}} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q})] \end{aligned}$$

**H 4** : initialement à  $t = 0$  le robot est en régime glissant idéal  $\sigma_i(\tilde{q}_i(0), \dot{\tilde{q}}_i(0), 0) = 0$ , l'erreur de poursuite et l'erreur de vitesse initiales sont nulles. par conséquent on a :

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{q}_i(\tau) d\tau = 0$$

**Condition d'existence du régime glissant.**

La condition suffisante d'existence du régime glissant [1] est :

$$\dot{\sigma}_i \sigma_i < 0 \quad (3.17)$$

cette condition reste inchangée si on multiplie (3.17) par le terme positif  $m_{ii}(q)$  :

$$\dot{\sigma}_i \sigma_i < 0 \Leftrightarrow m_{ii}(q) \dot{\sigma}_i \sigma_i < 0 \quad (3.18)$$

en dérivant la loi de commutation par rapport au temps on trouve :

$$\frac{d\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{dt} = \frac{\partial\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial\dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{dt} + \frac{\partial\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial\tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{dt} + \frac{\partial\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial t} \quad (3.19)$$

de l'expression (3.9) on obtient :

$$\dot{\sigma}_i = \ddot{\tilde{q}}_i + \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i \tilde{q}_i. \quad (3.20)$$

avec la notation simplificatrice par  $\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)$  pour la dérivée de la fonction non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$  par rapport à l'erreur de poursuite où :

$$\tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) = \frac{\partial\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t)}{\partial\dot{\tilde{q}}_i} = \frac{d\Lambda_i(\tilde{q}_i)}{d\tilde{q}_i} \quad (3.21)$$

Multipliant l'équation (3.20) par le terme positif  $m_{ii}(q)$  on trouve :

$$m_{ii}(q) \dot{\sigma}_i = m_{ii}(q) \ddot{\tilde{q}}_i + m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i) \dot{\tilde{q}}_i + \eta_i m_{ii}(q) \tilde{q}_i. \quad (3.22)$$

développant l'expression précédente, de (3.4) et (3.22) on obtient :

$$m_{ii}(q) \dot{\sigma}_i = \sum_{j=0}^2 \Psi_{ij} q_{di}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij} q_i^{(j)} + \gamma_i - u_i(t). \quad (3.23)$$

avec l'exposant '(j)' indiquant la  $j^{\text{ème}}$  dérivée par rapport au temps et :

$$\begin{aligned}
\psi_{i0} &= \eta_i m_{ii}(q). \\
\psi_{i1} &= m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i). \\
\psi_{i2} &= m_{ii}(q). \\
\phi_{i0} &= k_{ii}(q, \dot{q}) - \eta_i m_{ii}(q). \\
\phi_{i1} &= b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i). \\
\gamma_i &= d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

D'après les hypothèses **H1-H4** on peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\psi_{ij} &= \bar{\psi}_{ij} + \Delta\psi_{ij}, \quad j = 0,1,2 \\
\phi_{ij} &= \bar{\phi}_{ij} + \Delta\phi_{ij}, \quad j = 0,1 \\
\gamma_i &= \bar{\gamma}_i + \Delta\gamma_i.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où  $\{\bar{\psi}_{ij}, \bar{\phi}_{ij}, \bar{\gamma}_i\}$  sont les valeurs moyennes de  $\{\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i\}$ , et  $\{\Delta\psi_{ij}, \Delta\phi_{ij}, \Delta\gamma_i\}$  sont des termes variables limités tel que :

$$\begin{aligned}
|\Delta\psi_{ij}| &< \hat{\psi}_{ij} \quad j = 0,1,2 \\
|\Delta\phi_{ij}| &< \hat{\phi}_{ij} \quad j = 0,1 \\
|\Delta\gamma_i| &< \hat{\gamma}_i
\end{aligned} \tag{3.26}$$

### 3.3.2.1 Première Approche de commande.

La première approche de commande décentralisée proposée pour la *ième* articulation à la forme suivante :

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^2 \psi_{ij}^{\pm}(t) q_{di}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij}^{\pm}(t) q_i^{(j)} + \gamma_i^{\pm}(t). \tag{3.27}$$

substituant cette commande locale dans l'égalité (3.23) on obtient :

$$m_{ii} \dot{\sigma}_i = \sum_{j=0}^2 (\psi_{ij} - \psi_{ij}^{\pm}(t)) q_{di}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 (\phi_{ij} - \phi_{ij}^{\pm}(t)) q_i^{(j)} + (\gamma_i - \gamma_i^{\pm}(t)). \quad (3.28)$$

multipliant la dernière expression par la loi de commutation  $\sigma_i$  on trouve.

$$m_{ii} \dot{\sigma}_i \sigma_i = \sum_{j=0}^2 (\psi_{ij} - \psi_{ij}^{\pm}(t)) q_{di}^{(j)} \sigma_i + \sum_{j=0}^1 (\phi_{ij} - \phi_{ij}^{\pm}(t)) q_i^{(j)} \sigma_i + (\gamma_i - \gamma_i^{\pm}(t)) \sigma_i. \quad (3.29)$$

d'après l'équation (3.29), pour que la condition (3.17) soit satisfaite il suffit de poser :

$$\begin{cases} \psi_{ij}^{\pm}(t) = \bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \operatorname{sgn}(q_{di}^{(j)} \sigma_i) + \chi_{ij} q_{di}^{(j)} \sigma_i, \\ \bar{\psi}_{ij} = \frac{\psi_{ij}^+ + \psi_{ij}^-}{2}, \quad \hat{\psi}_{ij} = \frac{\psi_{ij}^+ - \psi_{ij}^-}{2}, & j = 0,1,2 \\ \phi_{ij}^{\pm}(t) = \bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \operatorname{sgn}(q_i^{(j)} \sigma_i) + \rho_{ij} q_i^{(j)} \sigma_i, \\ \bar{\phi}_{ij} = \frac{\phi_{ij}^+ + \phi_{ij}^-}{2}, \quad \hat{\phi}_{ij} = \frac{\phi_{ij}^+ - \phi_{ij}^-}{2}, & j = 0,1 \\ \gamma_i^{\pm}(t) = \bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) + \mu_i \sigma_i, \\ \bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i^+ + \gamma_i^-}{2}, \quad \hat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i^+ - \gamma_i^-}{2}. \end{cases} \quad (3.30)$$

avec  $\{\chi_{ij}, \rho_{ij}, \mu_i\}$  des constantes positives ou nulles et :

$$\begin{cases} \psi_{i0}^+ > \max_q [\eta_i m_{ii}(q)]. & \phi_{i0}^+ > \max_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q}) - \eta_i m_{ii}(q)]. \\ \psi_{i0}^- < \min_q [\eta_i m_{ii}(q)]. & \phi_{i0}^- < \min_{q, \dot{q}} [k_{ii}(q, \dot{q}) - \eta_i m_{ii}(q)]. \\ \psi_{i1}^+ > \max_{q, \tilde{q}_i} [m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)]. & \phi_{i1}^+ > \max_{q, \dot{q}, \tilde{q}_i} [b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)]. \\ \psi_{i1}^- < \min_{q, \tilde{q}_i} [m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)]. & \phi_{i1}^- < \min_{q, \dot{q}, \tilde{q}_i} [b_{ii}(q, \dot{q}) - m_{ii}(q) \tilde{\Lambda}_i(\tilde{q}_i)]. \\ \psi_{i2}^+ > \max_q [m_{ii}(q)]. & \gamma_i^+ > \max_{q, \dot{q}, \ddot{q}, t} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t)]. \\ \psi_{i2}^- < \min_q [m_{ii}(q)]. & \gamma_i^- < \min_{q, \dot{q}, \ddot{q}, t} [d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - u_{pi}(t)]. \end{cases} \quad (3.31)$$

La fonction discontinue  $\text{sgn}(x)$  est donnée par :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

La commande locale désirée aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \sum_{j=0}^2 \left[ \bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \text{sgn}(q_{di}^{(j)} \sigma_i) + \chi_{ij} q_{di}^{(j)} \sigma_i \right] q_{di}^{(j)} \\ & + \sum_{j=0}^1 \left[ \bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \text{sgn}(q_i^{(j)} \sigma_i) + \rho_{ij} q_i^{(j)} \sigma_i \right] q_i^{(j)} \\ & + \left[ \bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \text{sgn}(\sigma_i) + \mu_i \sigma_i \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le schéma de principe de cette approche est illustré par la figure 3.3 :

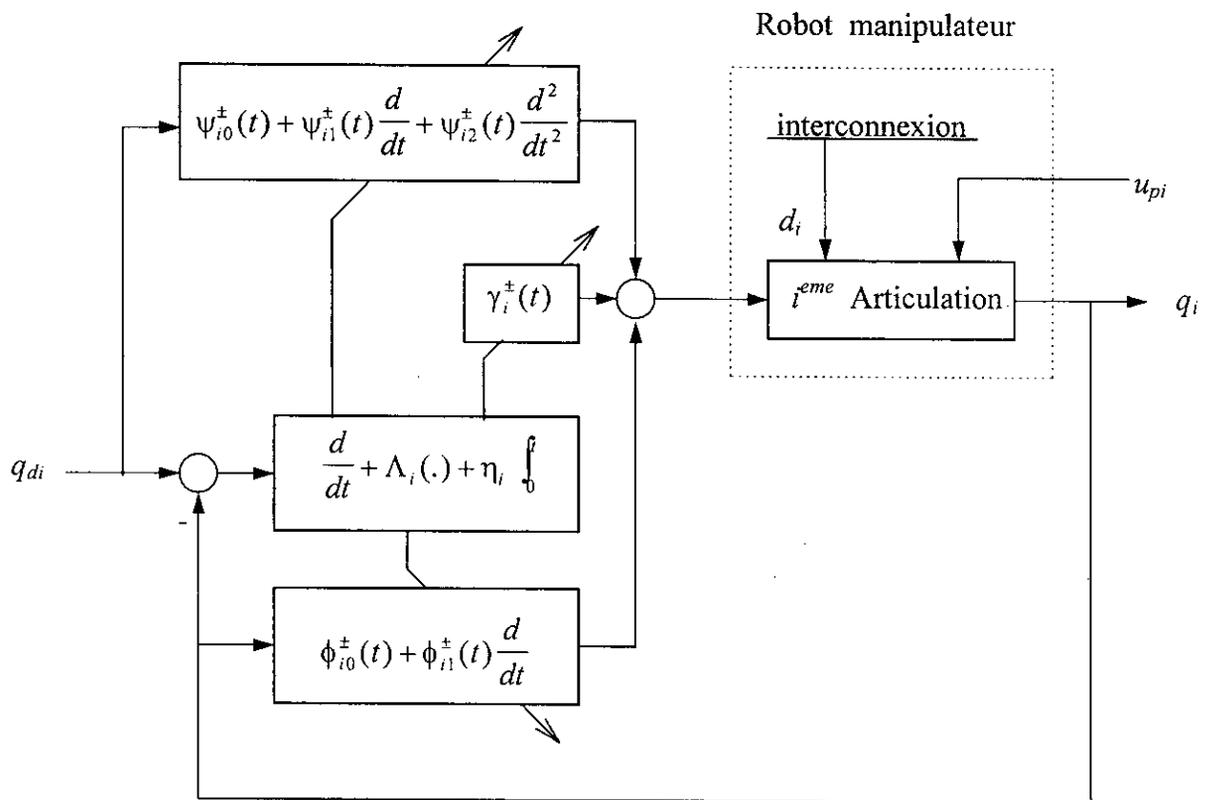


figure 3.3 - Schéma de principe de la première approche de commande décentralisée à structure variable pour les robots manipulateurs

on peut également écrire cette formule de la commande locale de la manière suivante :

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^2 [\bar{\psi}_{ij} + \hat{\psi}_{ij} \operatorname{sgn}(q_{di}^{(j)} \sigma_i)] q_{di}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 [\bar{\phi}_{ij} + \hat{\phi}_{ij} \operatorname{sgn}(q_i^{(j)} \sigma_i)] q_i^{(j)} + [\bar{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i)] + \xi_i(t) \sigma_i. \quad (3.34)$$

Enfin, la forme de la commande locale  $u_i(t)$  est décomposée en quatre termes. Le premier caractérise un changement de structure par l'intervention directe de la grandeur de consigne : position, vitesse et accélération (PD<sup>2</sup> feedforward), le deuxième caractérise un retour d'état variable (PD feedback), le troisième est un changement de structure par l'organe de commande qui a pour but d'éliminer les effets des interconnexions et les perturbations externes (signal auxiliaire). Le quatrième et dernier terme a une forme d'un correcteur PID (Proportionnel, Intégrale, Dérivée) avec un gain variable  $\xi_i(t)$ , puisque la loi de commutation locale  $\sigma_i$  comporte une action proportionnelle non-linéaire  $\Lambda_i(\tilde{q}_i)$ , et les deux actions intégrale et dérivée.

### 3.3.2.2 Deuxième Approche de commande.

La deuxième approche de commande sera effectuée en basant sur une autre forme de la condition d'existence du régime de glissement (3.17) donnée dans [9]:

$$m_{ii}(q) \dot{\sigma}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) < 0 \quad (3.35)$$

il est clair que si cette inégalité est satisfaite, la condition (3.17) d'existence du régime glissant est vérifiée. Multipliant l'équation (3.23) par la fonction  $\operatorname{sgn}(\sigma_i)$  on aura :

$$m_{ii} \dot{\sigma}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) = \sum_{j=0}^2 \psi_{ij} \operatorname{sgn}(\sigma_i) q_{di}^{(j)} + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij} \operatorname{sgn}(\sigma_i) q_i^{(j)} + \gamma_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) - u_i(t) \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad (3.36)$$

La forme de commande locale  $u_i(t)$  qui peut vérifier la condition (3.35) est celle donnée par [9], avec une forme décentralisée on obtient :

$$u_i(t) = \left\{ \sum_{j=0}^2 \psi_{ij}^+ |q_{di}^{(j)}| + \sum_{j=0}^1 \phi_{ij}^+ |q_i^{(j)}| + \gamma_i^+ \right\} \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad (3.37)$$

avec  $\{\psi_{ij}^+, \phi_{ij}^+, \gamma_i^+\}$  des constantes arbitraires.

substituant l'expression de la commande  $u_i(t)$  dans l'équation (3.36) on obtient :

$$\begin{aligned}
 m_{ii} \dot{\sigma}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) &= \sum_{j=0}^2 [\psi_{ij} \operatorname{sgn}(q_{di}^{(j)} \sigma_i) - \psi_j^+] |q_{di}^{(j)}| \\
 &+ \sum_{j=0}^1 [\phi_{ij} \operatorname{sgn}(q_i^{(j)} \sigma_i) - \phi_j^+] |q_i^{(j)}| \\
 &+ [\gamma_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) - \gamma_i^+].
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

pour valider la condition (3.35), il suffit de calculer les constantes  $\{\psi_j^+, \phi_j^+, \gamma_i^+\}$  par les relations données par (3.31).

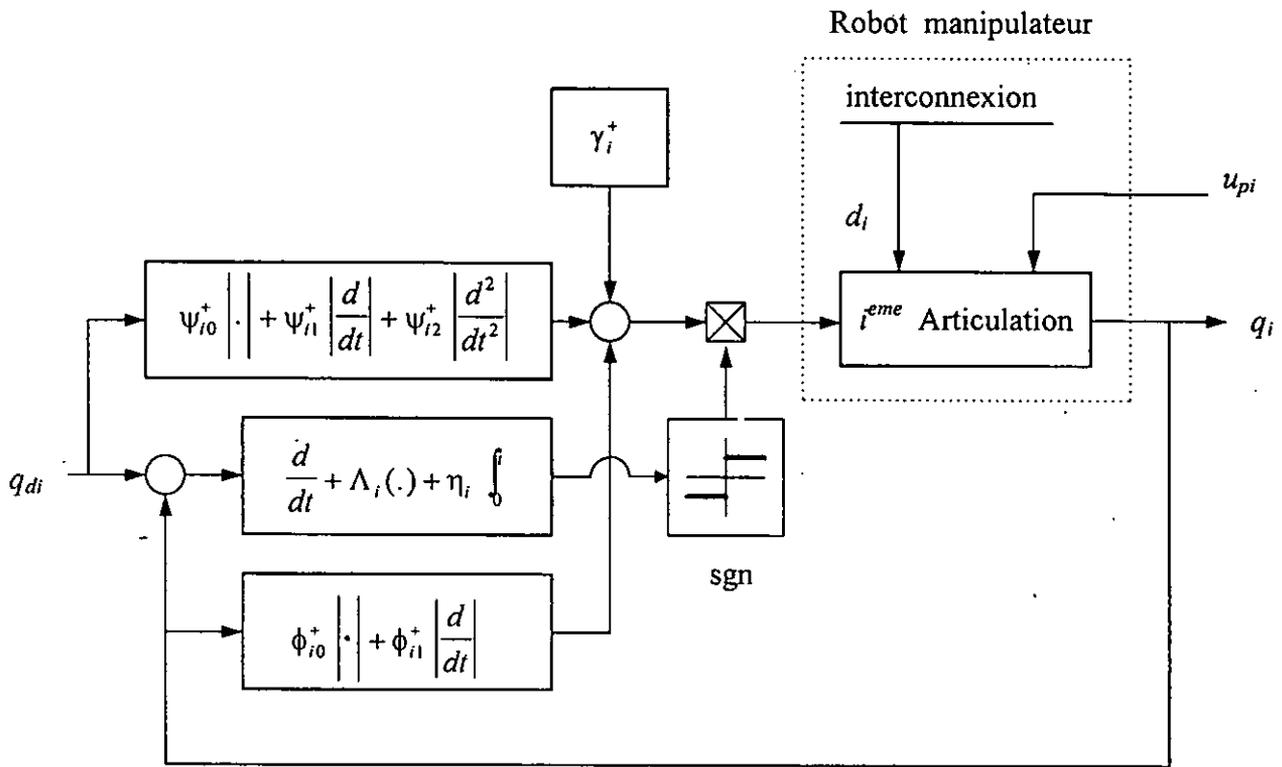


figure 3.4 - Schéma de principe de la deuxième approche de commande décentralisée à structure variable pour les robots manipulateurs

Enfin, la forme de la commande locale  $u_i(t)$  est décomposée en trois termes multipliés par le signe de la loi de commutation  $\sigma_i$ . Le premier caractérise un changement de structure par l'intervention directe de la valeur absolue des grandeurs de consigne : position, vitesse et accélération (PD<sup>2</sup> abs feedforward), le deuxième un retour de la valeur absolue du vecteur d'état (PD abs feedback), le dernier est un signal constant additif.

Il est judicieux de sélectionner une couche bornée variable en fonction de l'erreur de poursuite de manière à ce que si cette erreur de poursuite est grande la couche bornée tend vers la surface de glissement. Ce fonctionnement provoque une grande quantité d'énergie de la commande pour compenser l'agrandissement de l'erreur de poursuite. A cet effet nous avons proposé la fonction continue  $M_\delta(x)$  d'amélioration suivante relative à la  $i^{\text{ème}}$  articulation :

$$M_\delta(x) = \frac{x}{|x| + \delta_0 / (1 + \delta_1 |\tilde{q}_i|)} \quad (3.40)$$

avec  $\delta_0$  une petite constante positive,  $\delta_1$  une grande constante positive et  $\tilde{q}_i$  l'erreur de poursuite.

Il est clair que :

$$\lim_{\tilde{q}_i \rightarrow \infty} \frac{\delta_0}{1 + \delta_1 |\tilde{q}_i|} = 0 \quad (3.41)$$

donc si l'erreur de poursuite est très grande la fonction  $M_\delta(x)$  est équivalente à la fonction discontinue  $\text{sgn}(x)$ .

### 3.5 Résultats de simulation.

Nous avons procédé à la vérification des deux schémas de commande présentés dans ce chapitre par simulation, en utilisant le langage de programmation FORTRAN 77 avec le logiciel « Prospero PC Fortran version iip 1.1, Copyright © 1988 Prospero Software ». Au cours de la simulation de ces algorithmes, nous avons utilisé pour la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles non-linéaires, la méthode de Range Kutta du quatrième ordre à pas constant  $dt = 0.001 \text{ sec}$ . Pour les intégrations au niveau des commandes nous avons utilisé la méthode des trapèzes.

L'ensemble des travaux de simulation présenté ci-après a pour but de valider la robustesse des lois de commandes décentralisées par rapport aux variations paramétriques et les perturbations externes, ainsi la capacité de commander des manipulateurs très compliqués, tels que les trois robots présentés au chapitre 1, à savoir : robot à structure cylindrique de classe 4 (trois degrés de liberté), robot PUMA 560 (trois degrés de liberté), et robot SCARA (deux degrés de liberté).

Nous nous sommes intéressés à sélectionner une seule surface de glissement pour la conduite de toutes les articulations des robots manipulateurs étudiés dans le but de valider la stabilité et la robustesse de la surface de commutation. La forme proposée est la suivante :

$$\sigma_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) = \dot{\tilde{q}}_i + \lambda_i \tilde{q}_i + \Delta_i \tanh\left(\beta_i \frac{\tilde{q}_i}{e_i}\right) + \eta_i \int_0^t \tilde{q}_i(\tau) d\tau. \quad i = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

avec

$\lambda_i$  pente de la surface de glissement

$\Delta_i$  constante de la partie non-linéaire traduisant la marge de vitesse par rapport à la surface linéaire ;

$\beta_i$  une constante positive ;

$e_i$  une petite valeur positive ;

$\eta_i$  la constante d'intégration ;

$n$  le nombre de degré de liberté.

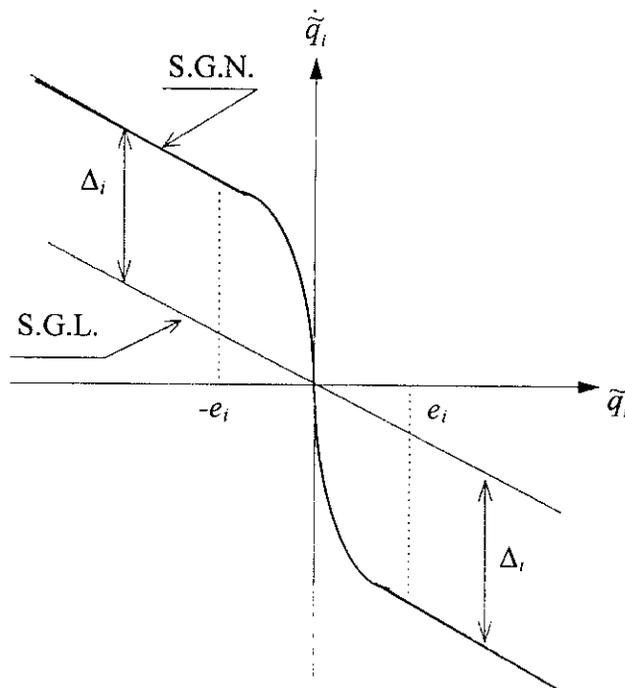


figure 3.6 - Forme des surfaces de glissement linéaire et nonlinéaire sans intégrateur.

dans ce cas particulier la fonction non-linéaire de la surface de glissement est caractérisée par :

$$\Lambda_i(\tilde{q}_i) = \lambda_i \tilde{q}_i + \Delta_i \tanh\left(\beta_i \frac{\tilde{q}_i}{e_i}\right) \quad (3.43)$$

La surface de glissement proposée est asymptotiquement stable si  $\tilde{q}_i \Lambda_i(\tilde{q}) \geq 0$ , par conséquent les constantes  $\lambda_i$ ,  $\Delta_i$  et  $\eta_i$  doivent être positives. Dans le cas où  $\Delta_i = \eta_i = 0$  on obtient une forme d'une surface de glissement linéaire sans intégrateur (S.G.L.). Si seulement  $\eta_i = 0$  on trouve la forme d'une surface non-linéaire sans intégrateur (S.G.N.). Si  $\lambda_i$ ,  $\Delta_i$  et  $\eta_i$  sont strictement positives, on aura la forme d'une surface de glissement non-linéaire avec intégrateur (S.G.N.I.) Pour la simulation nous allons présenter les résultats de ces trois possibilités dans le but de voir l'influence de la partie non-linéaire et la partie intégrateur. Les valeurs numériques des paramètres de la surface de glissement proposée sont :

$$\lambda_i = 10 \quad \Delta_i = 1 \quad \beta_i = 2 \quad e_i = 0.1 \quad \eta_i = 100 \quad i = 1, \dots, n$$

Pour illustrer la comparaison des deux lois de commandes étudiées avec les différentes possibilités de la surface de glissement, nous avons défini deux critères de comparaison  $C_1$  et  $C_2$  donnés par :

- Critère quadratique sur l'erreur de position dans l'espace des coordonnées généralisées où :

$$C_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j^2(t_i) \quad (3.44)$$

- Critère quadratique sur l'erreur de vitesse dans l'espace des coordonnées généralisées :

$$C_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^n \dot{\tilde{q}}_j^2(t_i) \quad (3.45)$$

avec

$N$  correspond au nombre total d'itération,  
 $t_i$  temps correspondant à l'itération  $i$ ,  
 $n$  nombre de degrés de liberté.

A travers ces critères, nous avons pu dresser des tableaux pour la comparaison des approches de commande. Un autre critère pourrait être celui de l'énergie des entrées de commande, mais une visualisation graphique permet de mieux appréhender la qualité des signaux des commandes.

### Application sur le robot à structure cylindrique.

Après une décentralisation du modèle dynamique de ce robot manipulateur, on peut calculer pour chaque articulation les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  par l'équation (3.31), on peut obtenir les résultats suivants :

*Première articulation.*

$$\begin{aligned}\psi_{10} &= [a_1 + a_2(\alpha - 1)^2] \eta_1 & \phi_{10} &= -[a_1 + a_2(\alpha - 1)^2] \eta_1 \\ \psi_{11} &= [a_1 + a_2(\alpha - 1)^2] \tilde{\Lambda}_1 & \phi_{11} &= a_3 - [a_1 + a_2(\alpha - 1)^2] \tilde{\Lambda}_1 \\ \psi_{12} &= [a_1 + a_2(\alpha - 1)^2] & \gamma_1 &= a_4(\alpha - 1) \dot{q}_1 \dot{q}_3 - u_{p1}\end{aligned}\quad (3.46)$$

avec  $q_3 = \alpha l_3$ , d'où  $\alpha$  vérifie la condition  $0 \leq \alpha \leq 2$

*Deuxième articulation.*

$$\begin{aligned}\psi_{20} &= a_5 \eta_2 & \phi_{20} &= -a_5 \eta_2 \\ \psi_{21} &= a_5 \tilde{\Lambda}_2 & \phi_{21} &= a_6 - a_5 \tilde{\Lambda}_2 \\ \psi_{22} &= a_5 & \gamma_2 &= a_7 - u_{p2}\end{aligned}\quad (3.47)$$

*Troisième articulation.*

$$\begin{aligned}\psi_{30} &= a_8 \eta_3 & \phi_{30} &= -a_{10} \dot{q}_1^2 - a_8 \eta_3 \\ \psi_{31} &= a_8 \tilde{\Lambda}_3 & \phi_{31} &= a_9 - a_8 \tilde{\Lambda}_3 \\ \psi_{32} &= a_8 & \gamma_3 &= a_{11} \dot{q}_1^2 - u_{p3}\end{aligned}\quad (3.48)$$

Les valeurs numériques des constantes  $\{a_k, k = 1, \dots, 11\}$  sont :

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.22 & a_2 &= 0.5625 & a_3 &= 3 & a_4 &= 1.5 & a_5 &= 0.3 & a_6 &= 0.3 \\ a_7 &= 2.943 & a_8 &= 1 & a_9 &= 2 & a_{10} &= 1 & a_{11} &= 0.75\end{aligned}\quad (3.49)$$

Pour pouvoir borner les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  de chaque articulation, on utilise les hypothèses suivantes :

$$|\dot{q}_1| < \pi \text{ rad s}^{-1}, \quad |\dot{q}_3| < 2 \text{ ms}^{-1}, \quad |u_{pi}| < 1 \text{ Volt} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.50)$$

Dans le cas où les paramètres du robot sont mal connus, il est judicieux de faire un dimensionnement robuste en faisant varier tous les paramètres  $\{a_k, k = 1, \dots, 11\}$  de 50%.

Le choix des paramètres des régulateurs  $\psi_{ij}^{\pm}, \phi_{ij}^{\pm}, \gamma_i^{\pm}$  pour la simulation est fourni par le tableau ci-dessous (valable aussi pour la deuxième approche de commande).

Paramètres des régulateurs	N° de la liaison		
	1	2	3
$\psi_{i0}^+$	117.40	45.10	150.10
$\psi_{i0}^-$	-117.40	-45.10	-150.10
$\psi_{i1}^+$	35.30	13.60	45.10
$\psi_{i1}^-$	1.00	1.40	4.90
$\psi_{i2}^+$	1.20	0.55	1.60
$\psi_{i2}^-$	0.10	0.10	0.40
$\phi_{i0}^+$	117.40	45.10	164.90
$\phi_{i0}^-$	-117.40	-45.10	-164.90
$\phi_{i1}^+$	2.90	-1.30	-3.90
$\phi_{i1}^-$	-48.40	-13.10	-42.10
$\gamma_i^+$	15.20	5.42	12.20
$\gamma_i^-$	-15.20	0.47	-12.20

Tableau 3.1 - Paramètres des régulateurs pour le robot à structure cylindrique.

Pour les autres constantes positives, nous avons fixé  $\chi_{ij} = \rho_{ij} = \mu_i = 10$ . Ainsi, les coefficients de chaque fonction d'amélioration  $M_{\delta}(x)$  sont donnés par le tableau suivant :

Commande décentralisée à structure variable								
Approches		1						2
Fonctions		$M_{\delta}(q_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\dot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\ddot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(q_i, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\dot{q}_i, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\sigma_i)$	$M_{\delta}(\sigma_i)$
1ère Articulation	$\delta_0$	8	8	8	10	10	2	3
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100
2ème Articulation	$\delta_0$	1	1	1	2	2	0.5	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100
3ème Articulation	$\delta_0$	1	1	1	2	2	0.5	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100

Tableau 3.2 - Paramètres des fonction<sup>s</sup> d'amélioration pour le robot à structure cylindrique

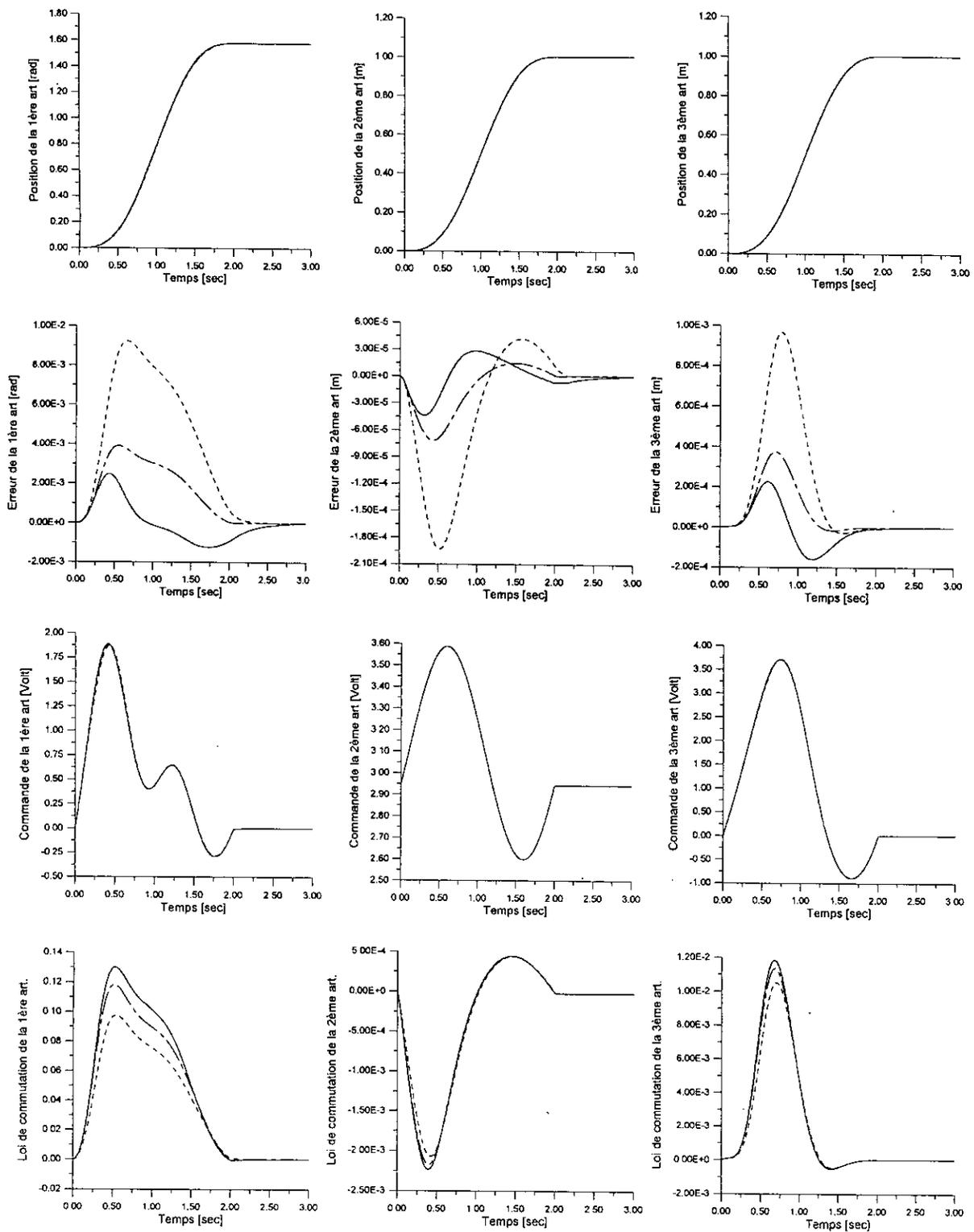


figure 3.7a - Application de la première approche sur le robot à structure cylindrique. Poursuite à vide.

-----	S.G.L.	- . - . -	S.G.N.	————	S.G.N.I.	.....	Traject. de ref.
-------	--------	-----------	--------	------	----------	-------	------------------

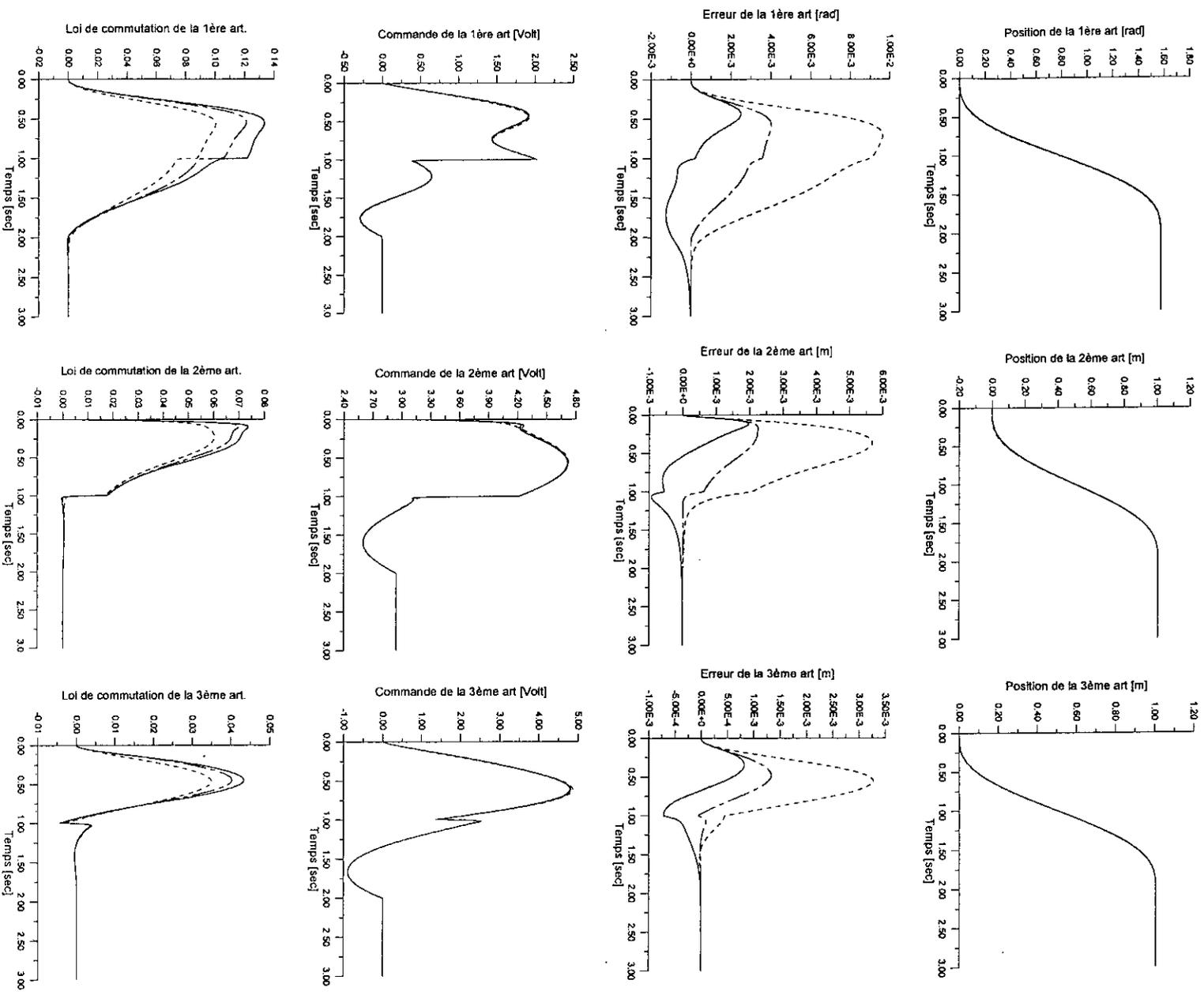


figure 3.7b - Application de la première approche sur le robot à structure cylindrique. Poursuite avec effet de la charge  $m_0 = 10$  kg et la décharge à l'instant  $t = 1$  sec.

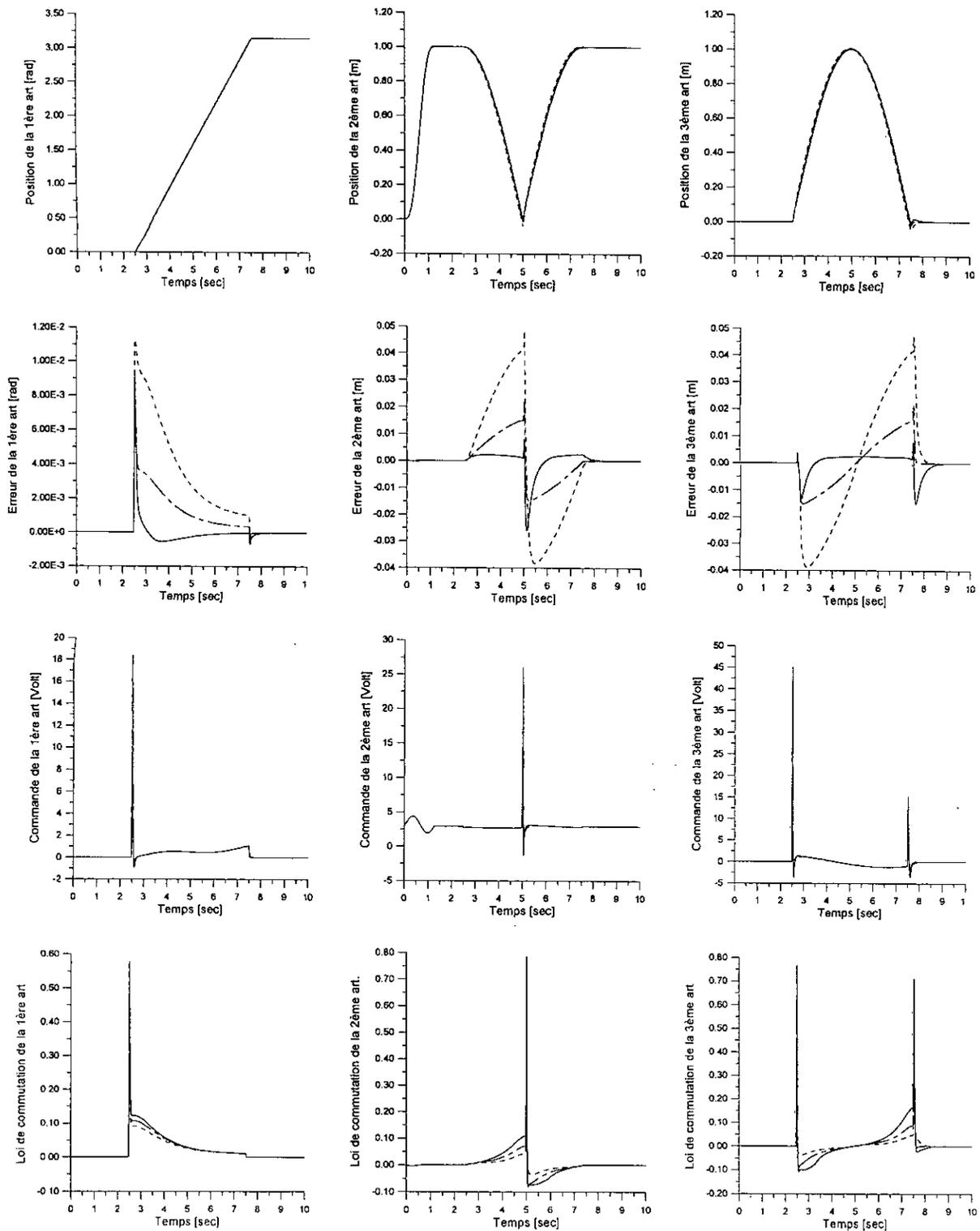


figure 3.7e - Application de la première approche sur le robot à structure cylindrique. Test de la capacité de poursuite (fenêtre de VIVIANI).

## Première approche.

L'utilisation d'une trajectoire cycloïdale au cours de laquelle les différentes articulations se déplacent respectivement de la position  $\{0 \text{ rad}, 0 \text{ m}, 0 \text{ m}\}$  à la position  $\{\pi/2 \text{ rad}, 1 \text{ m}, 1 \text{ m}\}$  avec un temps de mouvement égale à 2 sec.

- *Poursuite à vide : (figure 3.7a)*

Nous avons remarqué que l'erreur de poursuite avec l'utilisation de la surface de glissement linéaire est importante par rapport à la surface non linéaire, et la moindre erreur est présentée par l'utilisation de la surface non-linéaire avec intégrateur (S.G.N.I.). Les commandes sont lisses et réalisables.

- *Poursuite avec l'effet de la charge : (figure 3.7b)*

Après la chute d'une charge de 10 kg à l'instant  $t = 1 \text{ sec}$ . Les erreurs de poursuite sont légèrement augmentées par rapport à l'essai à vide. La composition de l'effet de cette variation brusque est immédiate, les performances des résultats obtenus par la surface non-linéaire avec intégrateur restent les meilleures.

- *Poursuite avec perturbations externes : (figure 3.7c)*

Nous constatons la robustesse par rapport à des perturbations sous forme de forces contre électromotrices ( $f_{cem}$ ) au niveau de chaque moteur, d'amplitude -1 Volt à partir de l'instant  $t=1 \text{ sec}$ . L'erreur permanente est nulle pour les trois articulations avec la surface de glissement non-linéaire avec intégrateur (S.G.N.I.).

- *Poursuite avec variation paramétrique: (figure 3.7d)*

Dans le cas où les paramètres du robot sont mal connus, on fait une variation de tous les paramètres mécaniques du robot ( $m_2, m_3, l_2, l_3, f_{v1}, f_{v2}, f_{v3}, J_2, J_3$ ) de 50% après l'instant  $t=1 \text{ sec}$ . On remarque la nette capacité de commander malgré cette variation. L'erreur de poursuite est nulle avec l'utilisation de la S.G.N.I.

- *Capacité de poursuite: (figure 3.7e)*

Le test excitant toute la dynamique de ce robot est d'appliquer la trajectoire de VIVIANI (voir chapitre 1) avec un lissage initial par une cycloïdale pour la deuxième articulation, les résultats montrent la capacité de poursuite malgré les fortes discontinuités de cette trajectoire. Le système reste stable après les pics importantes des commandes.

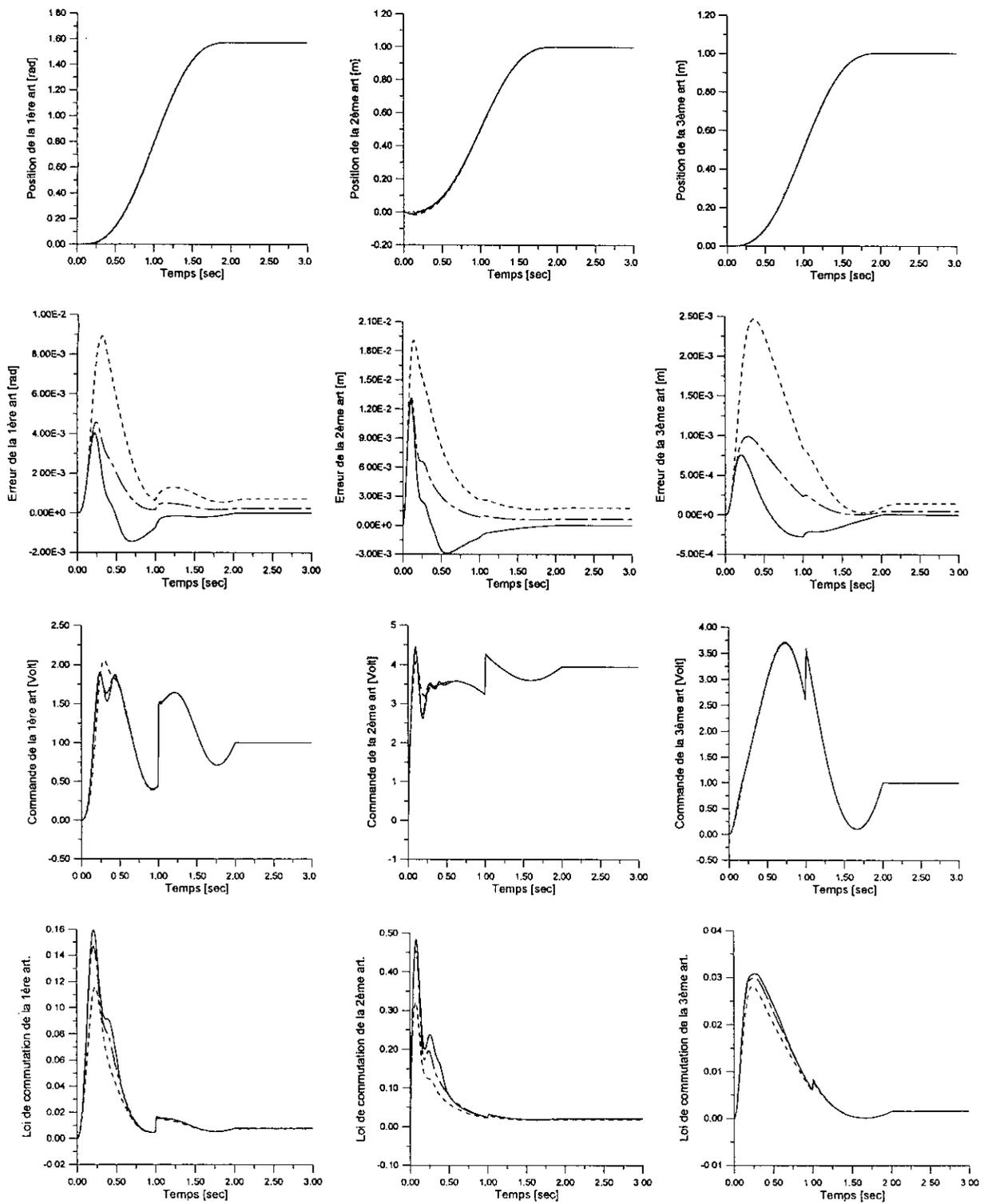


figure 3.8c - Application de la deuxième approche sur le robot à structure cylindrique. Poursuite avec des perturbations externes  $u_{pi} = -1$  Volt à partir de l'instant  $t = 1$  sec.

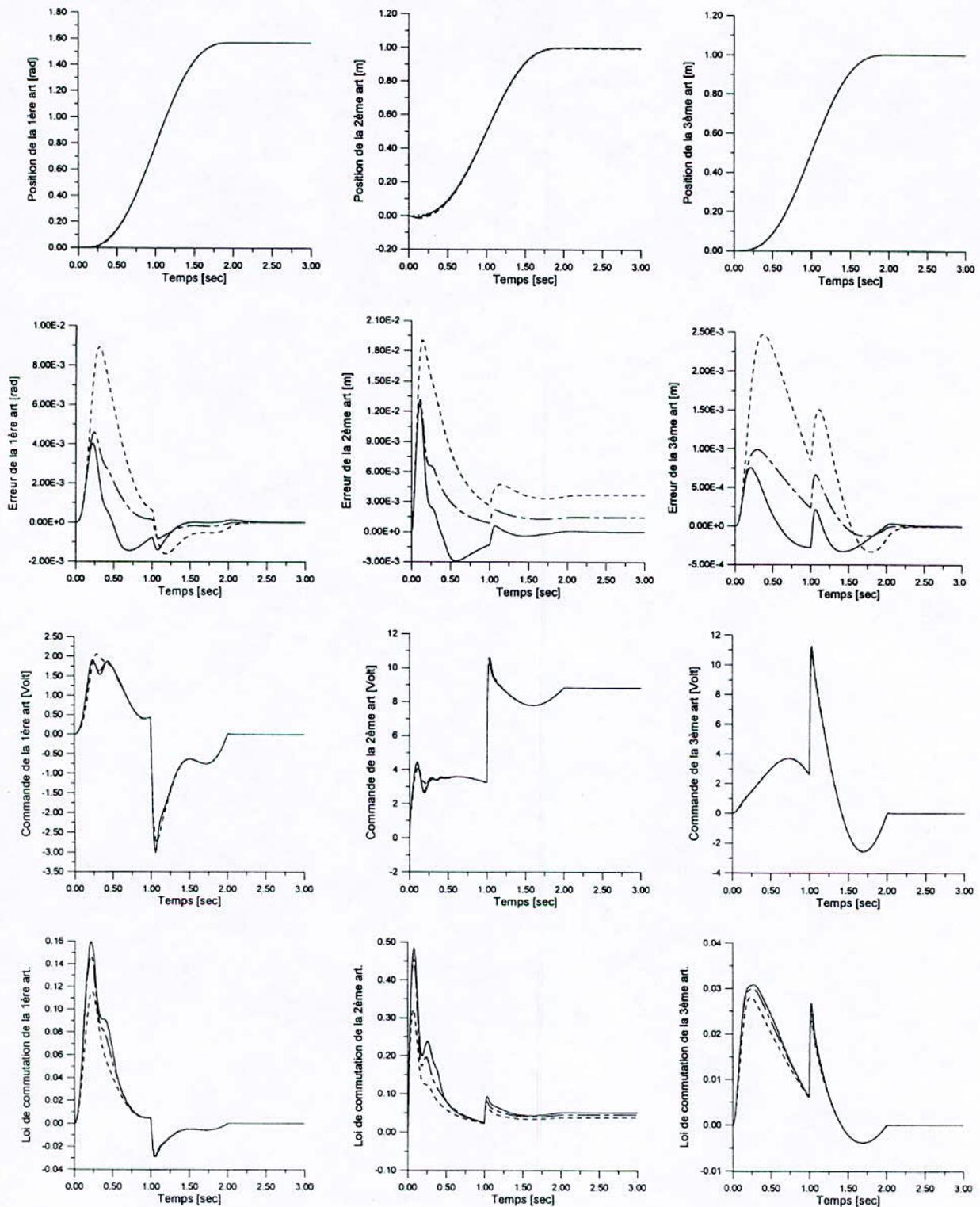


figure 3.8d - Application de la deuxième approche sur le robot à structure cylindrique. Poursuite avec une variation paramétrique de 50% à partir de l'instant  $t = 1$  sec.

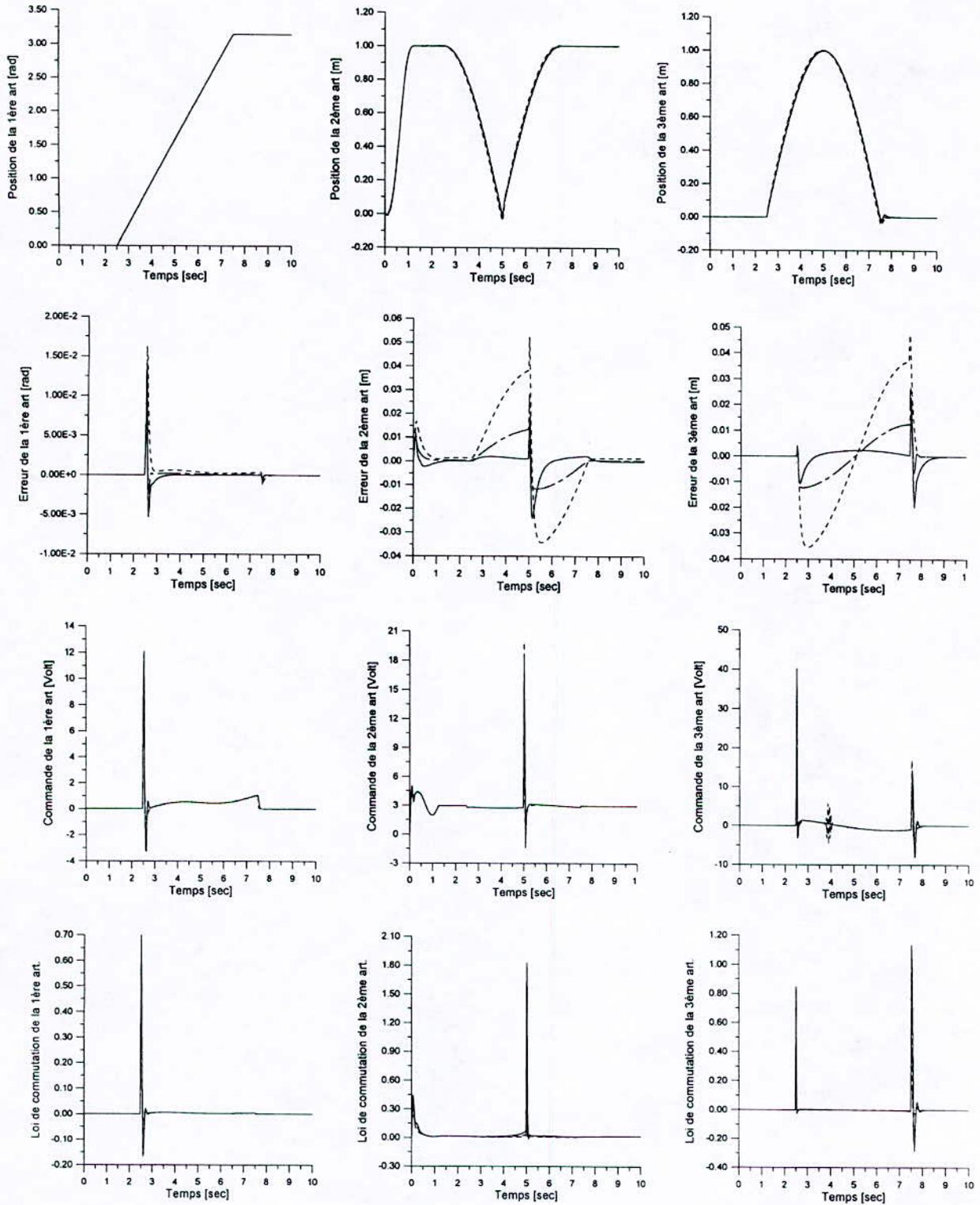


figure 3.8e - Application de la deuxième approche sur le robot à structure cylindrique. Test de capacité de poursuite (fenêtre de VIVIANI).

Commande décentralisée à structure variable							
Approches		1			2		
Surfaces		S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.	S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.
Poursuite à vide	C <sub>1</sub>	2.4673 10 <sup>-5</sup>	4.0961 10 <sup>-6</sup>	9.5071 10 <sup>-7</sup>	4.4639 10 <sup>-5</sup>	1.1063 10 <sup>-5</sup>	7.3340 10 <sup>-6</sup>
	C <sub>2</sub>	8.3863 10 <sup>-5</sup>	1.6824 10 <sup>-5</sup>	1.2737 10 <sup>-5</sup>	1.4064 10 <sup>-3</sup>	8.8996 10 <sup>-4</sup>	1.0704 10 <sup>-3</sup>
Effet de la charge	C <sub>1</sub>	3.4559 10 <sup>-5</sup>	5.6741 10 <sup>-6</sup>	1.5216 10 <sup>-6</sup>	8.5094 10 <sup>-5</sup>	2.7355 10 <sup>-5</sup>	2.2589 10 <sup>-5</sup>
	C <sub>2</sub>	1.6462 10 <sup>-4</sup>	4.1305 10 <sup>-5</sup>	3.7617 10 <sup>-5</sup>	3.0714 10 <sup>-3</sup>	2.3498 10 <sup>-3</sup>	3.0912 10 <sup>-3</sup>
Variation paramétrique	C <sub>1</sub>	2.4467 10 <sup>-5</sup>	4.0054 10 <sup>-6</sup>	9.5731 10 <sup>-7</sup>	5.2943 10 <sup>-5</sup>	1.2469 10 <sup>-5</sup>	7.3397 10 <sup>-6</sup>
	C <sub>2</sub>	9.7067 10 <sup>-5</sup>	2.3332 10 <sup>-5</sup>	2.0908 10 <sup>-5</sup>	1.4421 10 <sup>-3</sup>	9.1037 10 <sup>-4</sup>	1.0997 10 <sup>-3</sup>
Perturbation externe	C <sub>1</sub>	2.7764 10 <sup>-5</sup>	4.5700 10 <sup>-6</sup>	9.5170 10 <sup>-7</sup>	4.6037 10 <sup>-5</sup>	1.1262 10 <sup>-5</sup>	7.2887 10 <sup>-6</sup>
	C <sub>2</sub>	8.6186 10 <sup>-5</sup>	1.8820 10 <sup>-5</sup>	1.5564 10 <sup>-5</sup>	1.4066 10 <sup>-3</sup>	8.9075 10 <sup>-4</sup>	1.0720 10 <sup>-3</sup>
Trajectoire VIVIANI	C <sub>1</sub>	7.6223 10 <sup>-4</sup>	1.0335 10 <sup>-4</sup>	2.7305 10 <sup>-5</sup>	6.6978 10 <sup>-4</sup>	8.6898 10 <sup>-5</sup>	2.7482 10 <sup>-5</sup>
	C <sub>2</sub>	6.6408 10 <sup>-2</sup>	6.9700 10 <sup>-2</sup>	7.3675 10 <sup>-2</sup>	6.9493 10 <sup>-2</sup>	7.3556 10 <sup>-2</sup>	7.8076 10 <sup>-2</sup>

**Tableau 3.3** - Comparaison des approches de commandes étudiées pour le robot à structure cylindrique.

## Deuxième approche.

Nous reprenons les mêmes tests de simulation avec l'application de la deuxième approche tout en gardant les anciennes trajectoires désirées.

- *Poursuite à vide : (figure 3.8a)*

L'erreur de poursuite associée à S.G.N.I est meilleure par rapport à S.G.L. et S.G.N. L'atténuation des erreurs de poursuite est rapide en comparant avec la première approche, ceci est dû à l'intervention de la fonction d'amélioration proposée  $M_\delta$ , les erreurs permanentes liées aux surfaces S.G.L. et S.G.N. dans la deuxième articulation ne s'annulent pas à cause de l'effet gravitationnel. Toutes les commandes commencent à partir de zéro à cause des lois de commutation qui sont supposées initialement nulles.

- *Poursuite avec l'effet de la charge : (figure 3.8b)*

Comparées à la première approche les erreurs de poursuite sont légèrement grandes dès que le robot lâche cette charge  $m_0 = 10 \text{ kg}$  à l'instant  $t = 1 \text{ sec}$ . La compensation de l'effet de cette variation est immédiate. Les résultats avec S.G.N.I. restent toujours les meilleurs.

• *Poursuite avec perturbation externe : (figure 3.8c)*

Nous constatons la présence des erreurs de poursuite permanentes dans le cas des surfaces de glissement sans intégrateur.

• *Poursuite avec variation paramétrique : (figure 3.8d)*

Nous remarquons nettement le maintien de la robustesse malgré cette variation paramétrique à l'instant  $t = 1 \text{ sec}$ . L'erreur de poursuite est nulle avec l'utilisation S.G.N.I.

• *Capacité de poursuite : (figure 3.8e)*

Les résultats montrent la robustesse de la commande face aux fortes discontinuités de la trajectoire de VIVIANI.

### Application sur le robot PUMA 560.

Les commandes sont calculées en terme de couple [N.m]. Après une décentralisation du modèle dynamique de ce robot manipulateur, on peut calculer pour chaque articulation les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  par l'équation (3.31) pour obtenir les résultats suivants :

*Première articulation.*

$$\begin{aligned}
 \psi_{10} &= (a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23}) \eta_1 \\
 \psi_{11} &= (a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23}) \tilde{\Lambda}_1 \\
 \psi_{12} &= (a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23}) \\
 \phi_{10} &= -(a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23}) \eta_1 \\
 \phi_{11} &= -2 (I_1^* + I_2^*) \dot{q}_2 - 2 I_1^* \dot{q}_3 - (a_1 + a_2 c_{23}^2 + a_3 c_2^2 + a_4 c_2 c_{23}) \tilde{\Lambda}_1 \\
 \gamma_1 &= (a_5 s_{23} + a_6 s_2) \ddot{q}_2 + (a_5 s_{23}) \ddot{q}_3 + (I_3^* + I_4^*) \dot{q}_2^2 + 2 I_3^* \dot{q}_2 \dot{q}_3 + I_3^* \dot{q}_3^2 - u_{p1}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Deuxième articulation.

$$\begin{aligned}
 \Psi_{20} &= (a_7 + a_4 c_3) \eta_2 \\
 \Psi_{21} &= (a_7 + a_4 c_3) \tilde{\Lambda}_2 \\
 \Psi_{22} &= (a_7 + a_4 c_3) \\
 \Phi_{20} &= -(a_7 + a_4 c_3) \eta_2 \\
 \Phi_{21} &= -2 I_5^* \dot{q}_3 - (a_7 + a_4 c_3) \tilde{\Lambda}_2 \\
 \gamma_2 &= (a_5 s_{23} + a_6 s_2) \ddot{q}_1 + (a_8 + 0.5 a_4 c_3) \ddot{q}_3 + (I_1^* + I_2^*) \dot{q}_1^2 - I_5^* \dot{q}_3^2 - a_9 c_{23} - a_{10} c_2
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Troisième articulation.

$$\begin{aligned}
 \Psi_{30} &= a_{11} \eta_3 \\
 \Psi_{31} &= a_{11} \tilde{\Lambda}_3 \\
 \Psi_{32} &= a_{11} \\
 \Phi_{30} &= -a_{11} \eta_3 \\
 \Phi_{31} &= -a_{11} \tilde{\Lambda}_3 \\
 \gamma_3 &= (a_5 s_{23}) \ddot{q}_1 + (a_8 + 0.5 a_4 c_3) \ddot{q}_2 + I_1^* \dot{q}_1^2 + I_5^* \dot{q}_2^2 - a_9 c_{23} - u_{p3}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

avec

$$\begin{aligned}
 I_1^* &= (a_2 c_{23} + 0.5 a_4 c_2) s_{23} \\
 I_2^* &= (a_3 c_2 + 0.5 a_4 c_{23}) s_2 \\
 I_3^* &= a_5 c_{23} \\
 I_4^* &= a_6 c_2 \\
 I_5^* &= 0.5 a_4 s_3
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Les valeurs numériques des constantes  $\{a_k, k = 1, \dots, 11\}$  sont :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2.34 & a_2 &= 0.058 & a_3 &= 1.56 & a_4 &= 1.41 & a_5 &= 0.24 & a_6 &= 0.96 \\
 a_7 &= 6.874 & a_8 &= 0.45 & a_9 &= 16.05 & a_{10} &= 58.2 & a_{11} &= 1.28
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Pour pouvoir borner les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  de chaque articulation, on utilise les hypothèses suivantes :

$$|\dot{q}_i| < 1 \text{ rad s}^{-1}, \quad |\ddot{q}_i| < 1 \text{ rad s}^{-2}, \quad |u_{pi}| < 1 \text{ N.m} \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.56}$$

Le choix des paramètres des régulateurs  $\psi_{ij}^+, \phi_{ij}^+, \gamma_i^+$  pour la simulation est fourni par le tableau ci-dessous (valable aussi pour la deuxième approche de commande).

Paramètres des régulateurs	N° de la liaison		
	1	2	3
$\psi_{i0}^+$	540.00	830.00	185.00
$\psi_{i0}^-$	-540.00	-830.00	-185.00
$\psi_{i1}^+$	162.00	250.00	55.00
$\psi_{i1}^-$	-9.00	-50.00	18.00
$\psi_{i2}^+$	5.50	9.00	2.00
$\psi_{i2}^-$	-0.50	-5.00	1.20
$\phi_{i0}^+$	540.00	550.00	185.00
$\phi_{i0}^-$	-540.00	-550.00	-185.00
$\phi_{i1}^+$	-1.00	-50.00	-17.00
$\phi_{i1}^-$	-170.00	-250.00	-55.00
$\gamma_i^+$	7.00	160.00	100.00
$\gamma_i^-$	-7.00	-160.00	-100.00

Tableau 3.4 - Paramètres des régulateurs pour le robot PUMA 560

Pour les autres constantes positives, nous avons fixé  $\chi_{ij} = \rho_{ij} = \mu_i = 100$  pour chaque articulation. Ainsi, les coefficients de chaque fonction d'amélioration  $M_\delta(x)$  sont donnés par le tableau suivant :

Commande décentralisée à structure variable								
Approches		1						2
Fonctions		$M_\delta(q_{di}, \sigma_i)$	$M_\delta(\dot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_\delta(\ddot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_\delta(q_i, \sigma_i)$	$M_\delta(\dot{q}_i, \sigma_i)$	$M_\delta(\sigma_i)$	$M_\delta(\sigma_i)$
1ère Articulation	$\delta_0$	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100
2ème Articulation	$\delta_0$	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100
3ème Articulation	$\delta_0$	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100

Tableau 3.5 - Paramètres des fonction<sup>s</sup> d'amélioration pour le robot PUMA 560.

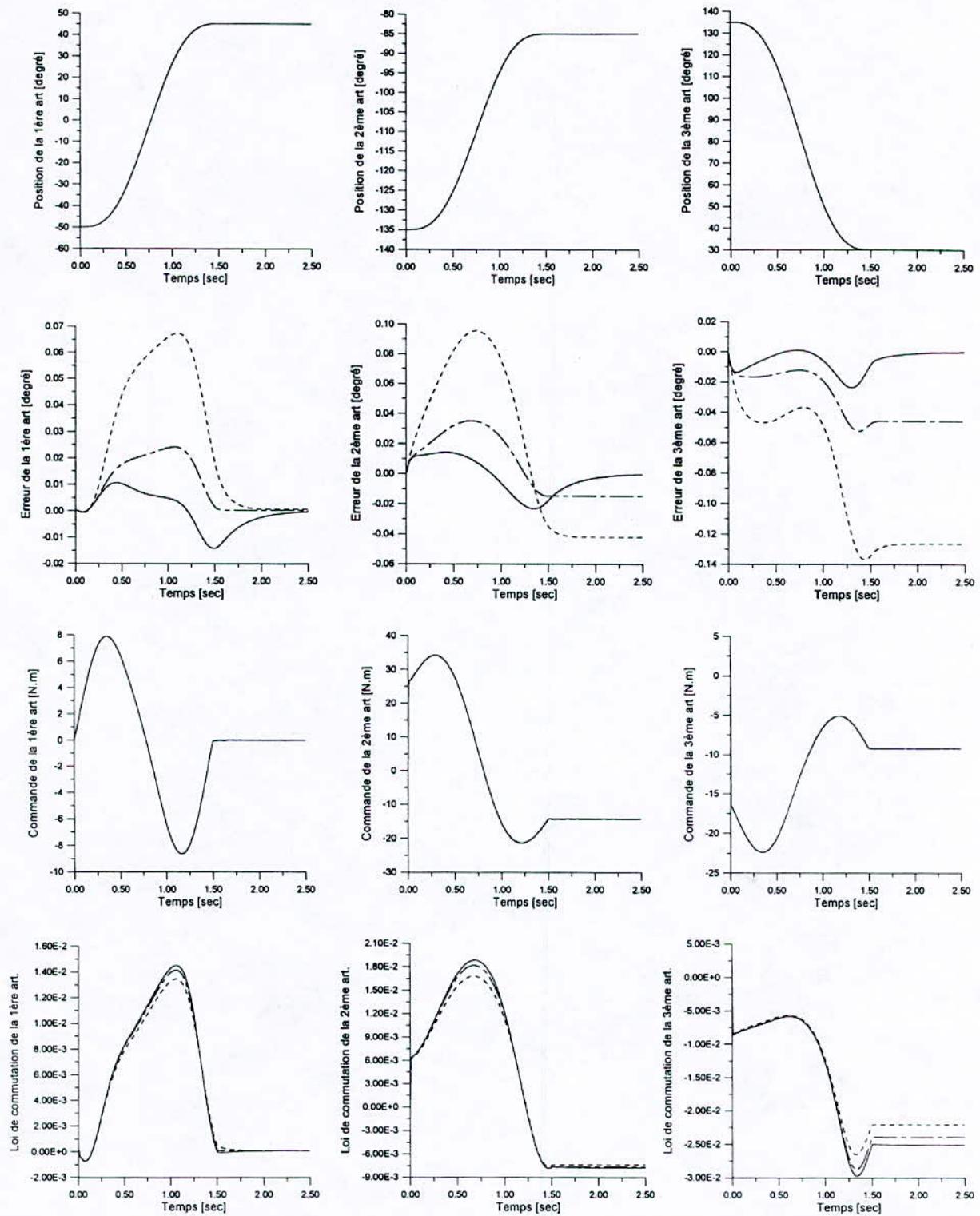


figure 3.9a - Application de la première approche sur le robot PUMA 560.  
Poursuite à vide.

.....	S.G.L.	- . - . -	S.G.N.	—	S.G.N.I.	.....	Traject. de ref.
-------	--------	-----------	--------	---	----------	-------	------------------

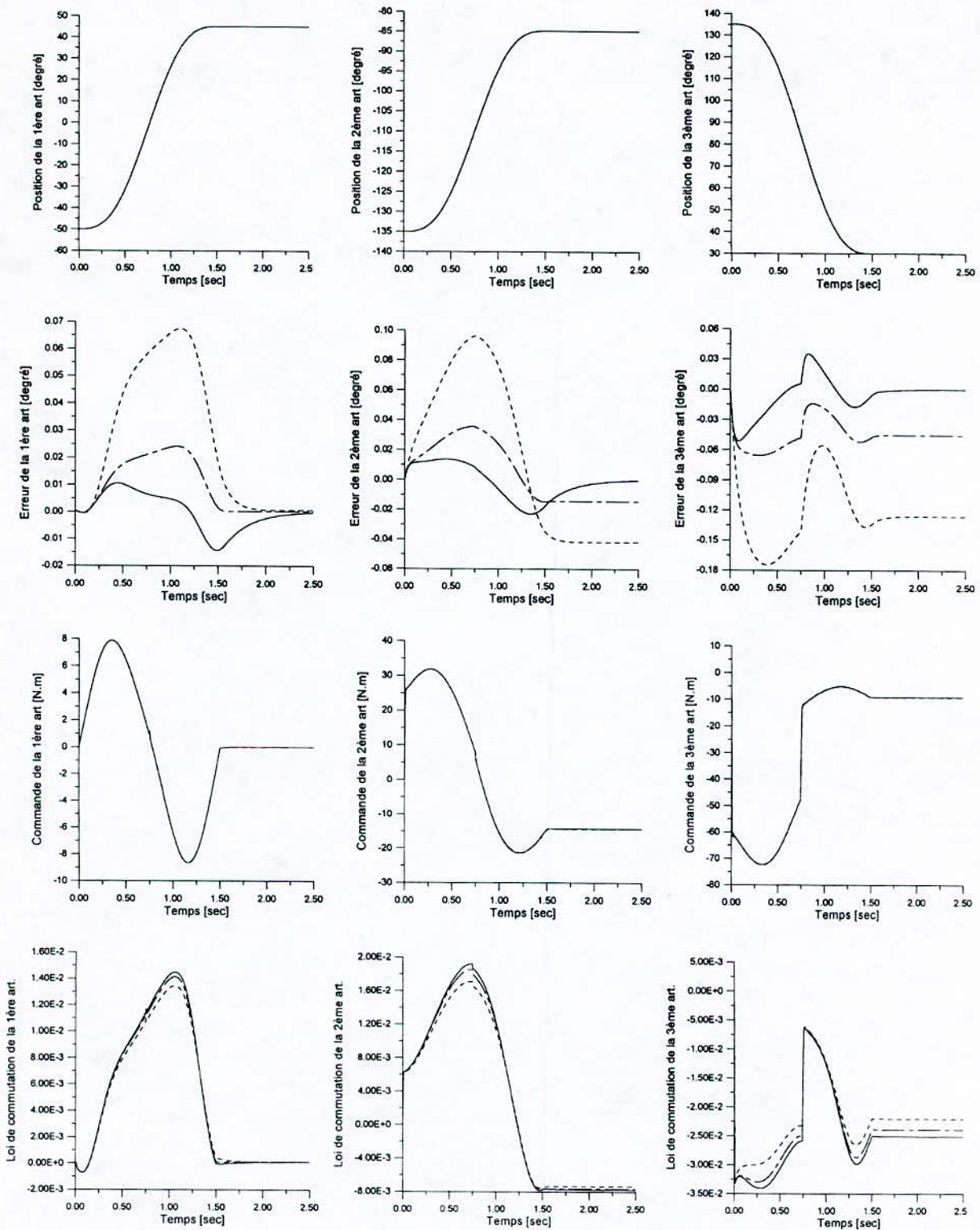


figure 3.9b - Application de la première approche sur le robot PUMA 560.  
 Poursuite avec effet de la charge  $m_0 = 10$  kg et la décharge  
 à l'instant  $t = 0.75$  sec.

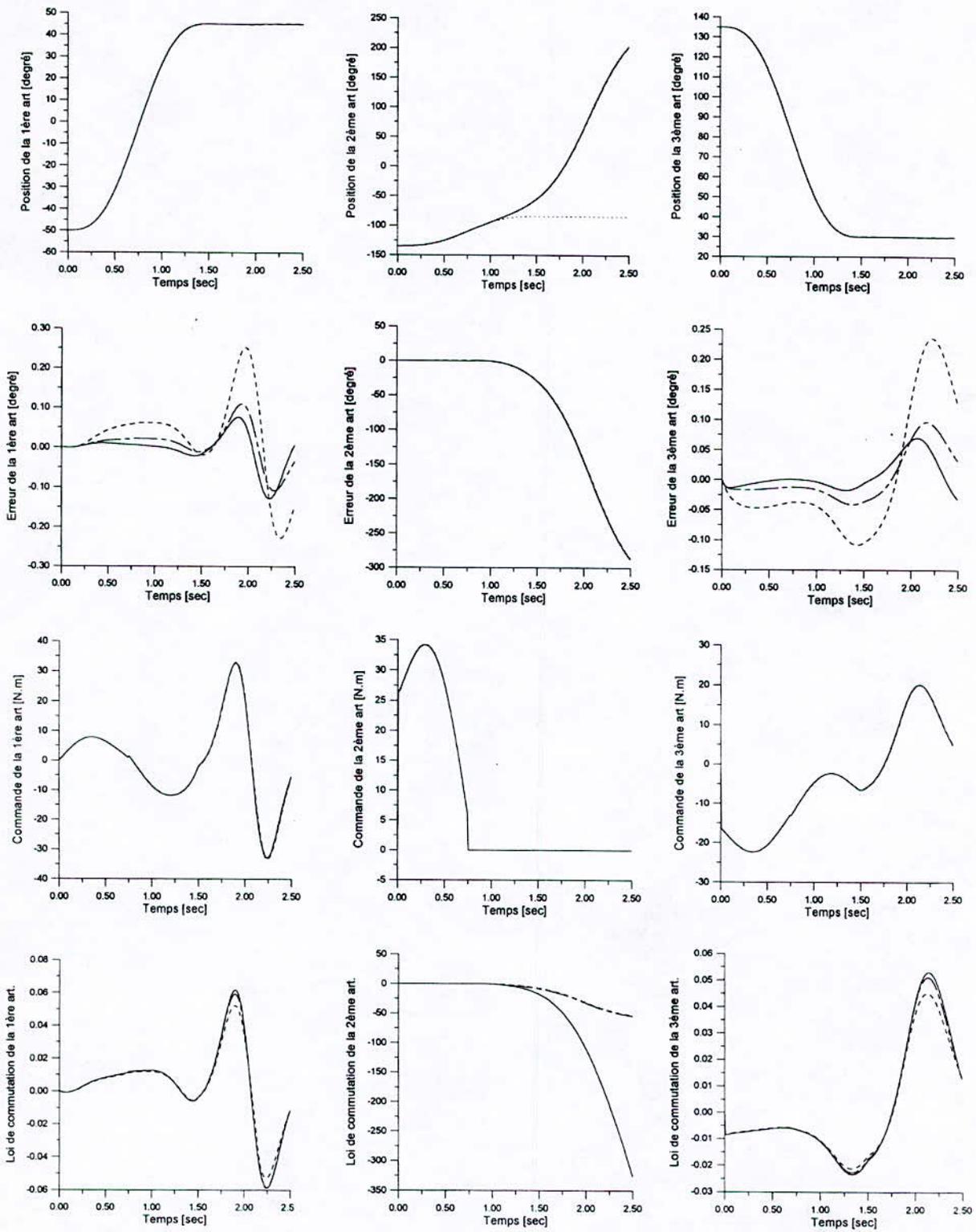


figure 3.9c - Application de la première approche sur le robot PUMA 560. Poursuite avec rupture de commande pour la 2<sup>ème</sup> articulation  $u_2 = 0$  à l'instant  $t = 0.75$  sec.

## Première approche.

Nous avons choisi à ce robot une trajectoire cycloïdale test qui excite toute la dynamique au cours de laquelle les différentes articulations se déplacent respectivement de la position  $\{-50^\circ, -135^\circ, 135^\circ\}$  à la position  $\{45^\circ, -85^\circ, 30^\circ\}$  avec un temps de mouvement égal à 1.5 sec, cette trajectoire est proposée par LEAHVY [33].

- *Poursuite à vide : (figure 3.9a)*

Les performances sont respectivement améliorées en utilisant les surfaces S.G.L. , S.G.N. et S.G.N.I. Dans les deux cas de surface de glissement sans intégrateur, il existe des erreurs permanentes, pour la deuxième et la troisième articulation. Cela est dû à l'effet de la gravité. Les commandes sont douces et physiquement réalisables.

- *Poursuite avec l'effet de la charge : (figure 3.9b)*

Les erreurs de poursuite sont légèrement augmentées durant la présence de la charge  $m_0=10kg$  ensuite elle reviennent à leur forme après une chute de cette charge à l'instant  $t=0.75sec$ . Les commandes sont pratiquement acceptables malgré cette variation brusque de la charge.

- *Poursuite avec rupture de la deuxième commande : (figure 3.9c)*

Le test adéquat à la décentralisation de la commande est de faire une rupture d'une commande au niveau d'une articulation. Cela nous amène à choisir la rupture de la deuxième commande associée à la deuxième articulation à l'instant  $t = 0.75 sec$ . Les résultats montrent que malgré la divergence de la deuxième articulation les autres articulations suivent continuellement leur trajectoire désirée, avec des commandes réalisables.

## Deuxième approche.

On reprend le même test de simulation précédente avec l'application de la deuxième approche tout en gardant les anciennes trajectoires.

- *Poursuite à vide : (figure 3.10a)*

Les erreurs de poursuite sont d'ordre inférieur à celles présentées par la première approche avec l'existence des erreurs permanentes lors de l'utilisation des surfaces sans intégrateurs. Les commandes des articulations sont douces et réalisables.

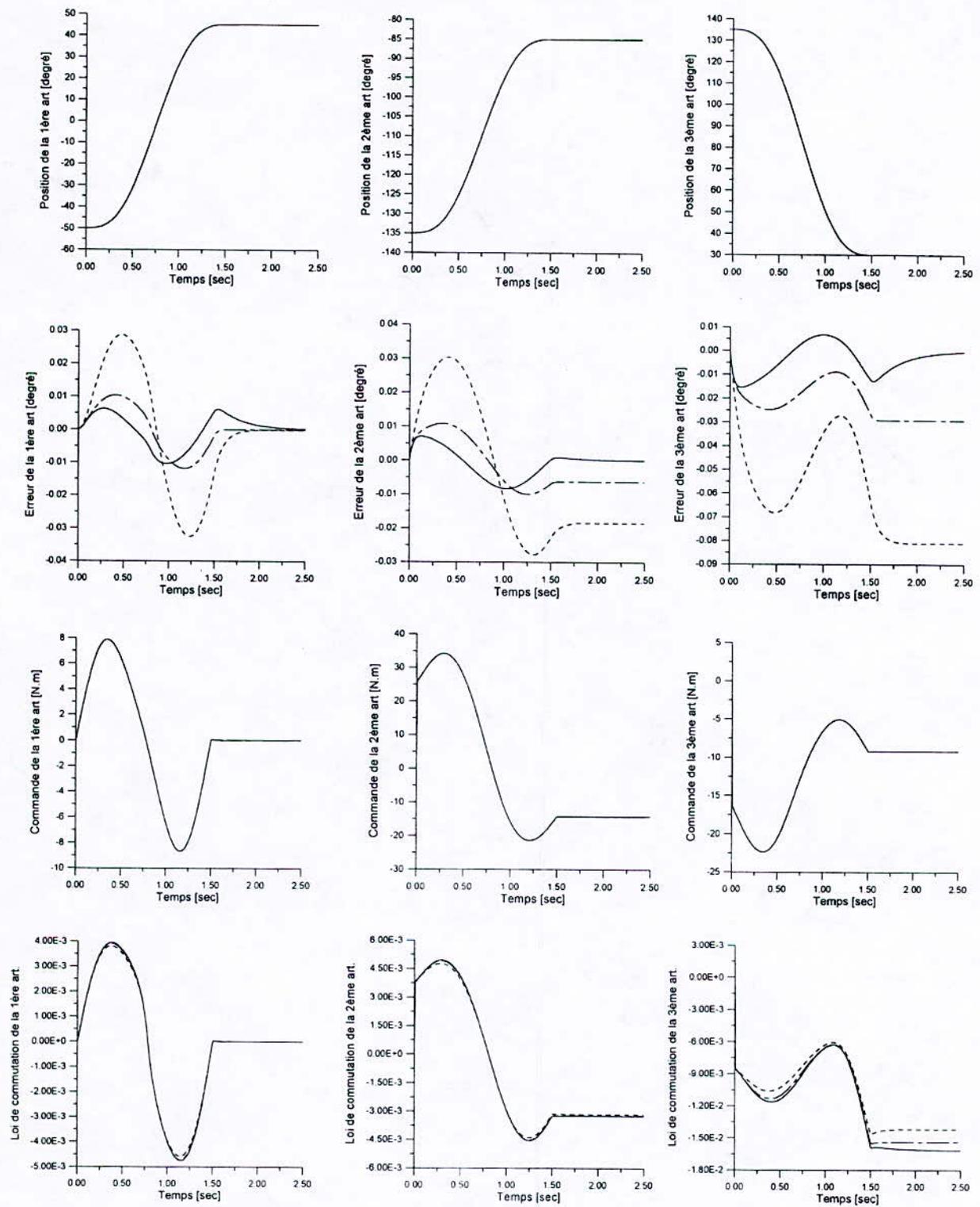


figure 3.10a - Application de la deuxième approche de commande sur le robot PUMA 560. Poursuite à vide.

.....	S.G.L.	- - - -	S.G.N.	————	S.G.N.I.	.....	Traject. de ref.
-------	--------	---------	--------	------	----------	-------	------------------

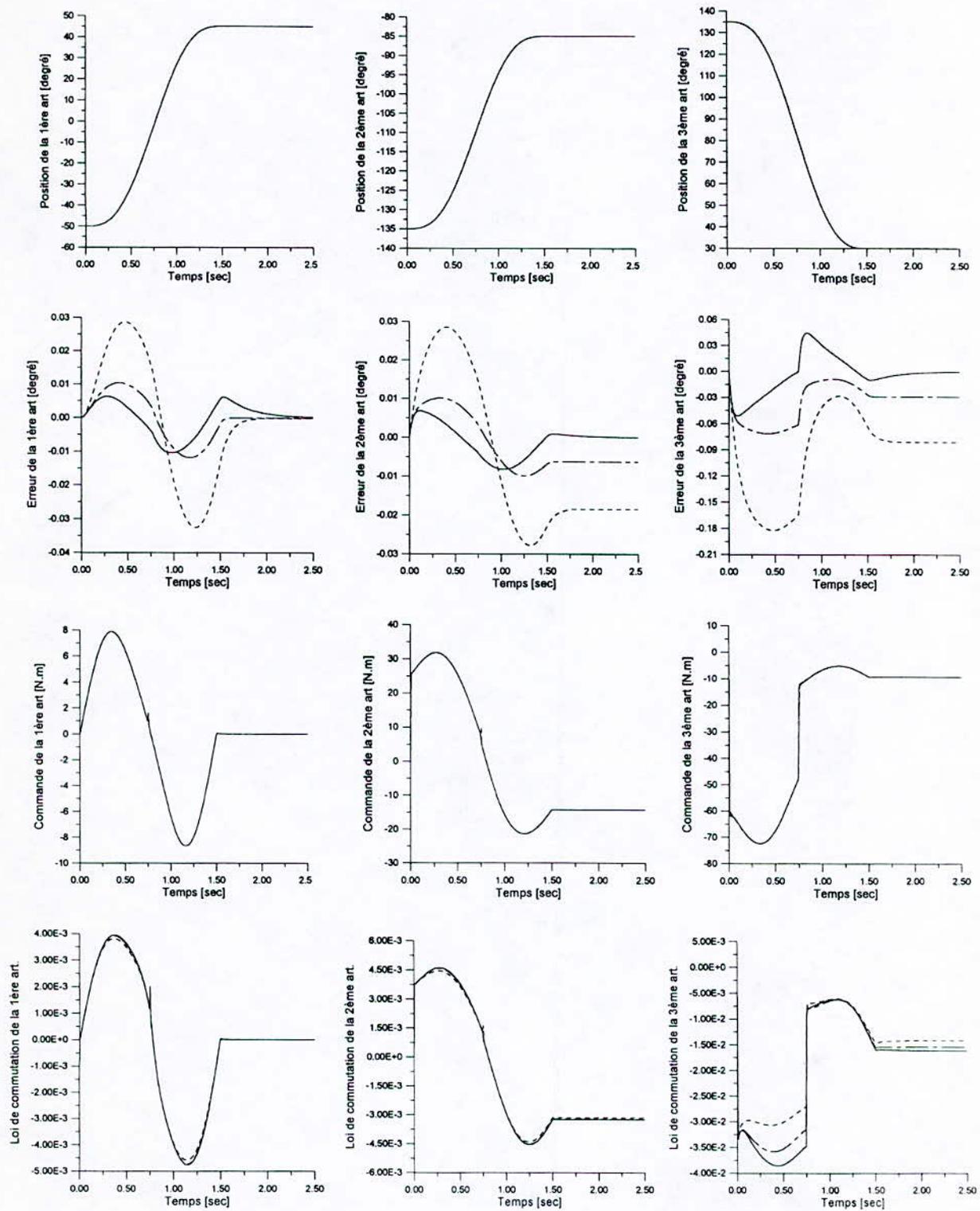


figure 3.10b - Application de la deuxième approche de commande sur le robot PUMA 560. Poursuite avec effet de la charge  $m_0 = 10$  kg et la décharge à l'instant  $t = 0.75$  sec.

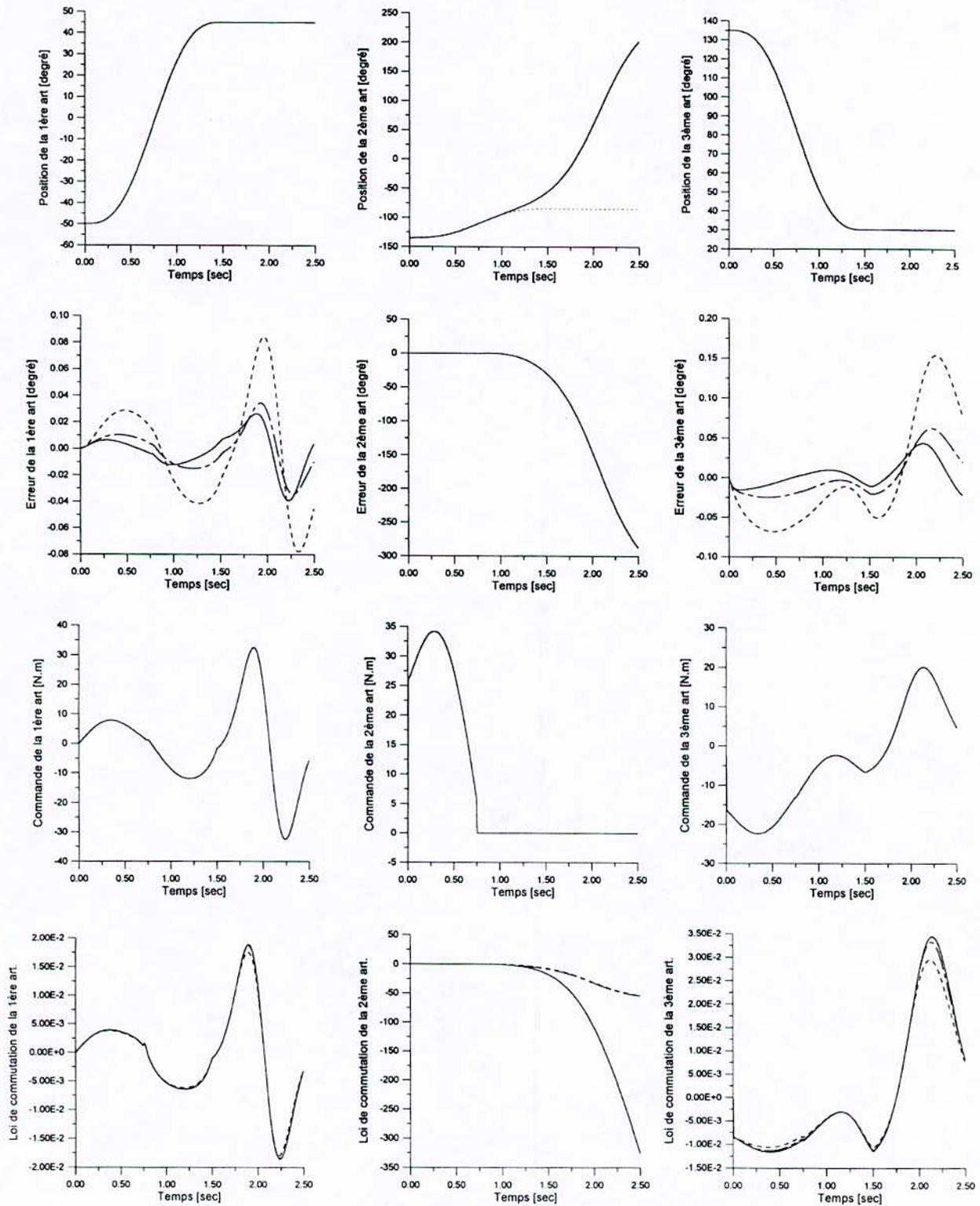


figure 3.10c - Application de la deuxième approche de commande sur le robot PUMA 560. Poursuite avec rupture de commande pour la 2<sup>ème</sup> articulation  $u_2 = 0$  à l'instant  $t = 0.75$  sec.

Commande décentralisée à structure variable							
Approches		1			2		
Surfaces		S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.	S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.
Poursuite à vide	C <sub>1</sub>	4.2442 10 <sup>-6</sup>	5.7152 10 <sup>-7</sup>	7.8465 10 <sup>-8</sup>	1.4446 10 <sup>-6</sup>	1.9392 10 <sup>-7</sup>	2.9077 10 <sup>-8</sup>
	C <sub>2</sub>	1.1828 10 <sup>-5</sup>	3.5477 10 <sup>-6</sup>	3.4729 10 <sup>-6</sup>	5.6708 10 <sup>-6</sup>	2.7738 10 <sup>-6</sup>	3.7423 10 <sup>-6</sup>
Effet de la charge	C <sub>1</sub>	6.3320 10 <sup>-6</sup>	8.6693 10 <sup>-7</sup>	1.6212 10 <sup>-7</sup>	3.6589 10 <sup>-6</sup>	5.4766 10 <sup>-7</sup>	1.6268 10 <sup>-7</sup>
	C <sub>2</sub>	3.4760 10 <sup>-5</sup>	1.2503 10 <sup>-5</sup>	1.4258 10 <sup>-5</sup>	3.1422 10 <sup>-5</sup>	1.2975 10 <sup>-5</sup>	1.6365 10 <sup>-5</sup>
Rupture de commande	C <sub>1</sub>	3.582578	3.607314	3.621009	3.626232	3.622584	3.622734
	C <sub>2</sub>	8.913685	8.929038	8.935816	8.935949	8.936909	8.937568

**Tableau 3.6** - Comparaison des approches de commandes étudiées pour le robot PUMA 560

• *Poursuite avec effet de la charge : (figure 3.10b)*

Le démarrage en charge provoque une erreur grande par rapport à l'essai à vide. La décharge à l'instant  $t = 0.75$  sec donne naissance à un autre régime transitoire qui est finalement établi. Malgré cette variation de charge les commandes sont lisses et réalisables.

• *Poursuite avec rupture de deuxième commande : (figure 3.10c)*

Les erreurs de poursuite des deux liaisons 1 et 3 restent dans une plage admissible et inférieure à celle de la première approche. Les commandes sont toujours acceptables.

### Application sur le robot SCARA.

Après une décentralisation du modèle dynamique de ce robot manipulateur, on peut calculer pour chaque articulation les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  par l'équation (3.31), pour obtenir les résultats suivants :

*Première articulation.*

$$\begin{aligned}
 \psi_{10} &= (a_1 + a_2 c_2) \eta_1 \\
 \psi_{11} &= (a_1 + a_2 c_2) \tilde{\Lambda}_1 \\
 \psi_{12} &= (a_1 + a_2 c_2) \\
 \phi_{10} &= -(a_1 + a_2 c_2) \eta_1 \\
 \phi_{11} &= a_3 - a_2 s_2 \dot{q}_2 - (a_1 + a_2 c_2) \tilde{\Lambda}_1 \\
 \gamma_1 &= (a_4 + a_5 c_2) \ddot{q}_2 - a_5 s_2 \dot{q}_2^2 + a_6 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) - u_{p1}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

*Deuxième articulation.*

$$\begin{aligned}
 \psi_{20} &= a_7 \eta_2 \\
 \psi_{21} &= a_7 \tilde{\Lambda}_2 \\
 \psi_{22} &= a_7 \\
 \phi_{20} &= -a_7 \eta_2 \\
 \phi_{21} &= a_8 - a_7 \tilde{\Lambda}_2 \\
 \gamma_2 &= (a_9 + a_{10} c_2) \ddot{q}_1 + a_{10} s_2 \dot{q}_1^2 + a_{11} \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) - u_{p2}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Les valeurs numériques des constantes  $\{a_k, k = 1, \dots, 11\}$  sont :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.2433 & a_2 &= 0.0982 & a_3 &= 0.4667 & a_4 &= 0.0327 & a_5 &= 0.0491 & a_6 &= 0.6667 \\
 a_7 &= 0.1062 & a_8 &= 0.1944 & a_9 &= 0.0786 & a_{10} &= 0.1178 & a_{11} &= 0.2778
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Pour pouvoir borner les éléments  $\psi_{ij}, \phi_{ij}, \gamma_i$  de chaque articulation, on utilise les hypothèses suivantes :

$$|\dot{q}_i| < 1 \operatorname{rad} s^{-1}, \quad |\ddot{q}_i| < 1 \operatorname{rad} s^{-2}, \quad |u_{pi}| < 1 \operatorname{Volt} \quad i = 1, 2 \tag{3.60}$$

Le choix des paramètres des régulateurs  $\psi_{ij}^{\pm}, \phi_{ij}^{\pm}, \gamma_i^{\pm}$  pour la simulation est fourni par le tableau ci-dessous (valable aussi pour la deuxième approche de commande).

Paramètres des régulateurs	N° de la liaison	
	1	2
$\psi_{i0}^+$	34.00	11.00
$\psi_{i0}^-$	-34.00	-11.00
$\psi_{i1}^+$	11.00	3.20
$\psi_{i1}^-$	3.00	1.00
$\psi_{i2}^+$	0.40	0.11
$\psi_{i2}^-$	0.10	-0.11
$\phi_{i0}^+$	14.00	10.00
$\phi_{i0}^-$	-14.00	-10.00
$\phi_{i1}^+$	-2.00	-0.80
$\phi_{i1}^-$	-10.00	-3.00
$\gamma_i^+$	4.00	3.00
$\gamma_i^-$	-4.00	-3.00

**Tableau 3.7 - Paramètres des régulateurs pour le robot SCARA.**

Pour les autres constantes positives, nous avons fixé  $\chi_{ij} = \rho_{ij} = \mu_i = 5$  pour chaque articulation. Ainsi, les coefficients de chaque fonction d'amélioration  $M_{\delta}(x)$  sont donnés par le tableau suivant :

Commande décentralisée à structure variable								
Approches		1						2
Fonctions		$M_{\delta}(q_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\dot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\ddot{q}_{di}, \sigma_i)$	$M_{\delta}(q_i, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\dot{q}_i, \sigma_i)$	$M_{\delta}(\sigma_i)$	$M_{\delta}(\sigma_i)$
1ère Articulation	$\delta_0$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100
2ème Articulation	$\delta_0$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0.5
	$\delta_1$	100	100	100	100	100	100	100

**Tableau 3.8 - Paramètres des fonctions d'amélioration pour le robot SCARA.**

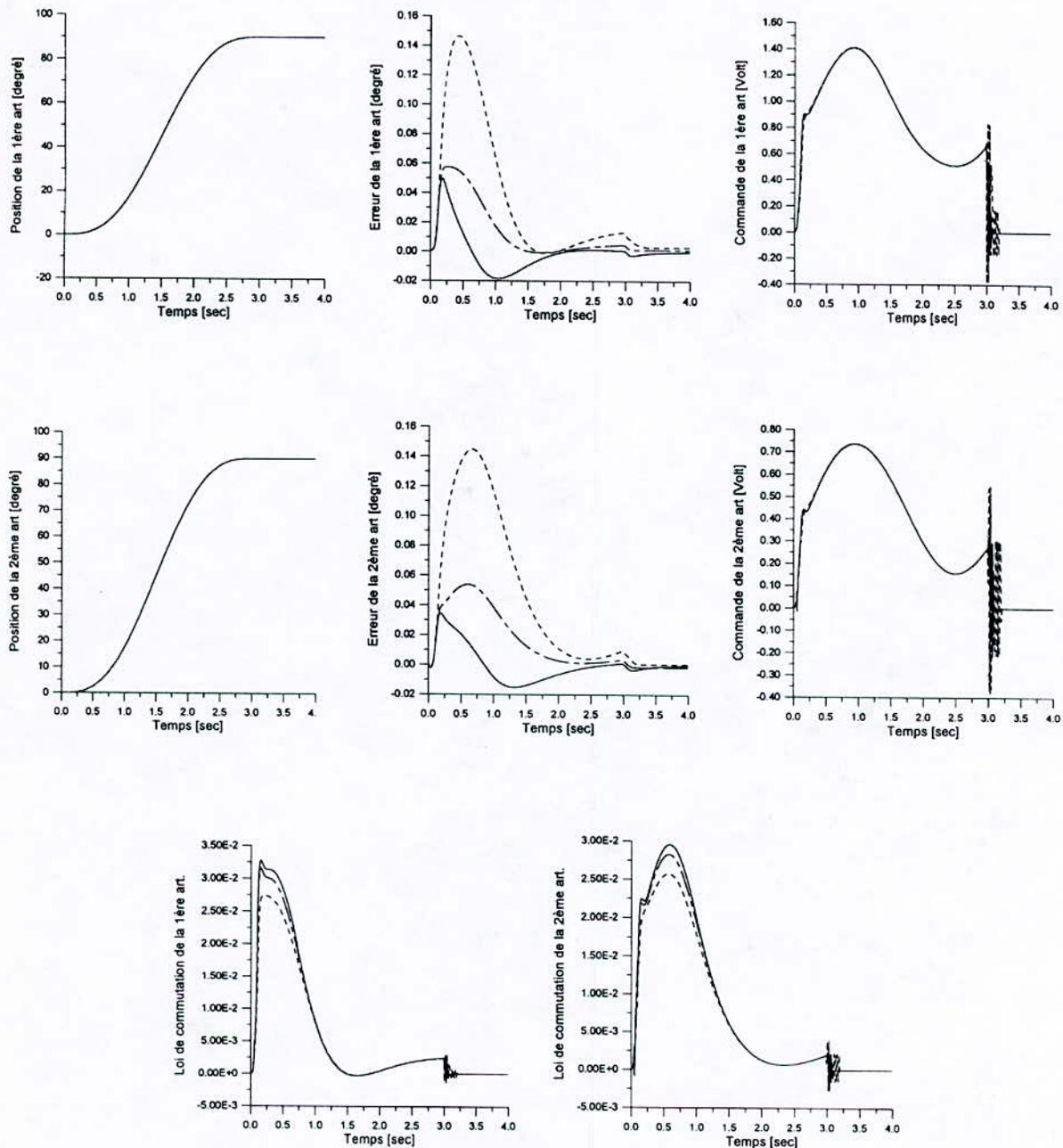


figure 3.11a - Application de la première approche de commande sur le robot SCARA..  
Poursuite à vide.

.....	S.G.L.	-----	S.G.N.	————	S.G.N.I.	.....	Traject. de ref.
-------	--------	-------	--------	------	----------	-------	------------------

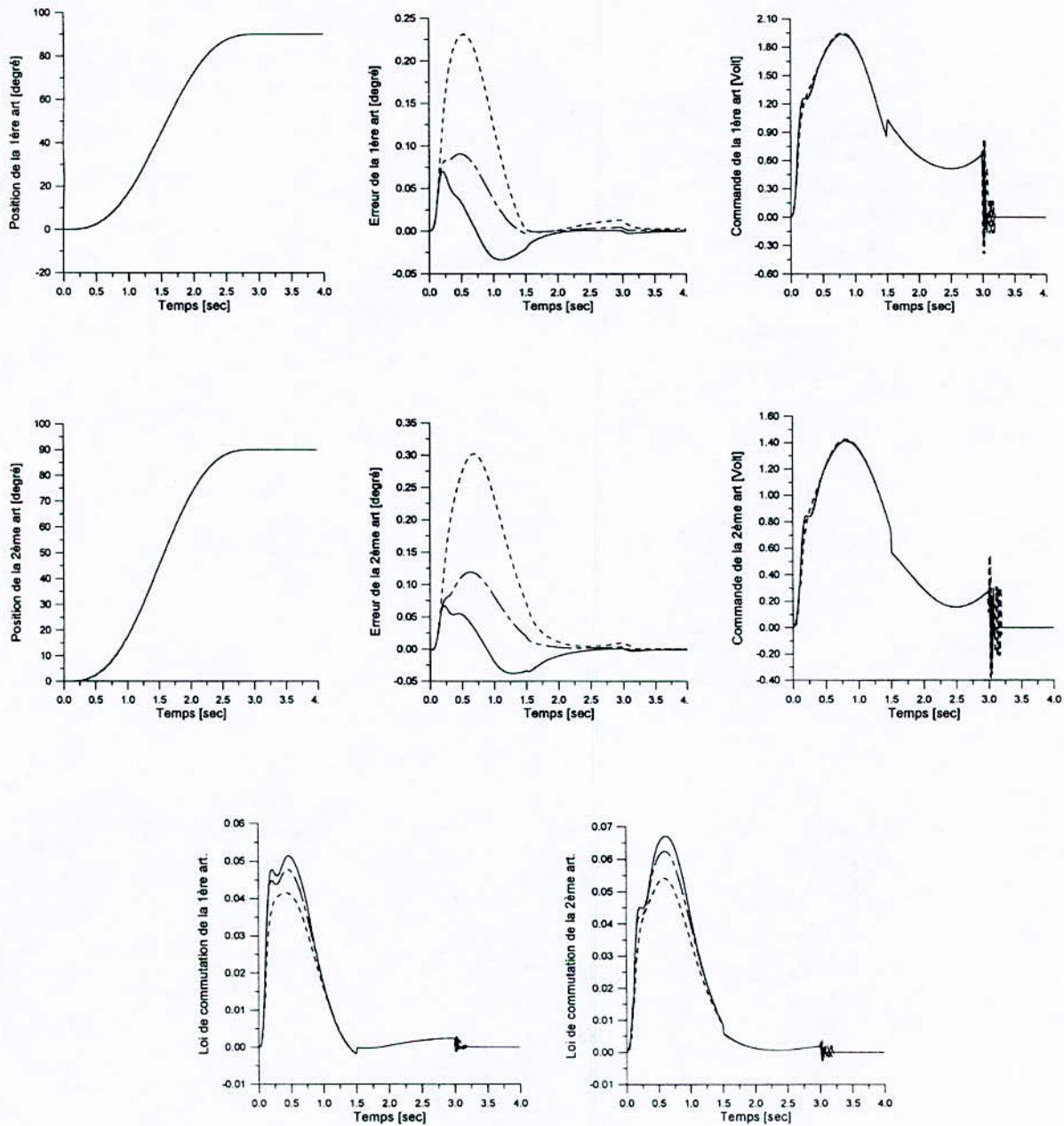


figure 3.11b - Application de la première approche de commande sur le robot SCARA..  
 Poursuite avec effet de la charge  $m_0 = 10$  kg et la décharge  
 à l'instant  $t = 1.5$  sec.

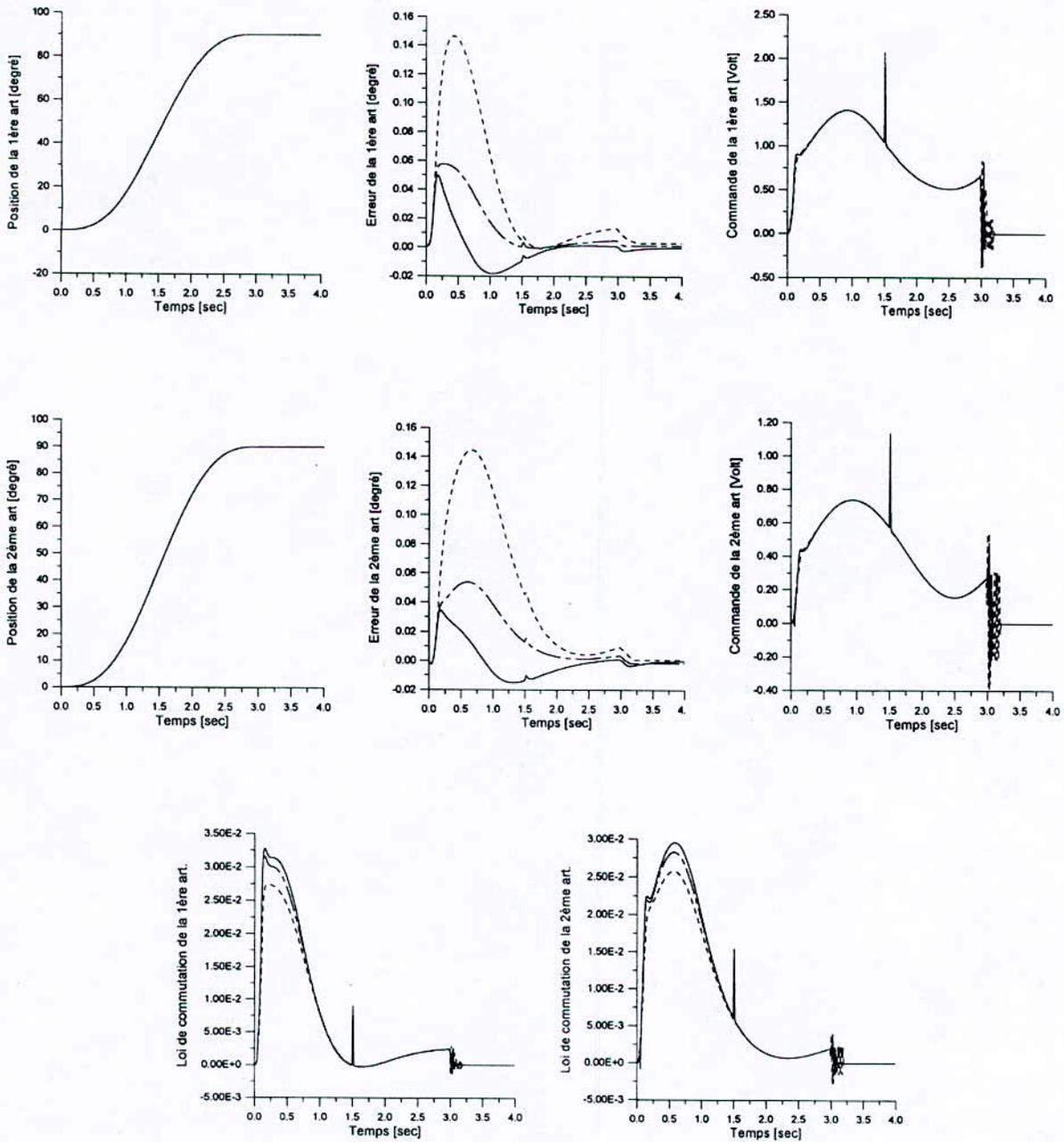


figure 3.11c - Application de la première approche de commande sur le robot SCARA..  
Poursuite avec un choc à l'instant  $t = 1.5$  sec.

## Première approche.

Nous avons utilisé une trajectoire cycloïdale normale aux deux articulations pour laquelle elles se déplacent respectivement de la position  $\{0^\circ, 0^\circ\}$  à la position  $\{90^\circ, 90^\circ\}$  en temps de mouvement de 3 sec.

- *Poursuite à vide : (figure 3.11a)*

L'erreur de poursuite due à l'utilisation de la S.G.N. est satisfaisante par rapport à celle de la S.G.L. mais la S.G.N.I. donne des erreurs de poursuite plus réduites que les deux premières. Les commandes présentent des phénomènes en hautes fréquences à la fin du mouvement. Ceux-ci sont dus aux couples des frottements secs qui sont proportionnels au signe des vitesses généralisées. A part ce problème, les commandes sont lisses et pratiquement acceptables.

- *Poursuite avec l'effet de la charge : (figure 3.11b)*

L'application d'une charge  $m_0 = 10 \text{ kg}$  au démarrage jusqu'à l'instant  $t = 1.5 \text{ sec}$  où la charge est lâchée les erreurs sont agrandies par rapport à l'essai à vide. Les commandes utilisent une grande quantité d'énergie pour vaincre l'effet de la charge.

- *Poursuite avec un choc : (figure 3.11c)*

Le deuxième test de robustesse s'intitule par un choc à l'instant  $t = 1.5 \text{ sec}$ . Ce choc peut être réalisé par des impulsions de perturbation  $u_{pi}$  d'amplitude égale au module de la commande  $u_i$  et de signe opposé, la durée d'application est de  $0.01 \text{ sec}$ . Les résultats montrent que les erreurs de poursuite ne sont pas affectées par une grande variation. Les commandes fournissent des pics, pour compenser les effets des chocs appliqués.

## Deuxième approche.

Nous reprenons les mêmes tests de simulation précédente avec l'application de la deuxième approche tout en gardant les anciennes trajectoires désirées.

- *Poursuite à vide : (figure 3.12a)*

L'application de la deuxième approche donne des erreurs de poursuites considérables par rapport à la première approche. Les erreurs permanentes sont nulles, les commandes sont lisses mis à part le phénomène des hautes fréquences en fin de mouvement. Ce dernier est moins important que celui apparu dans la première approche.

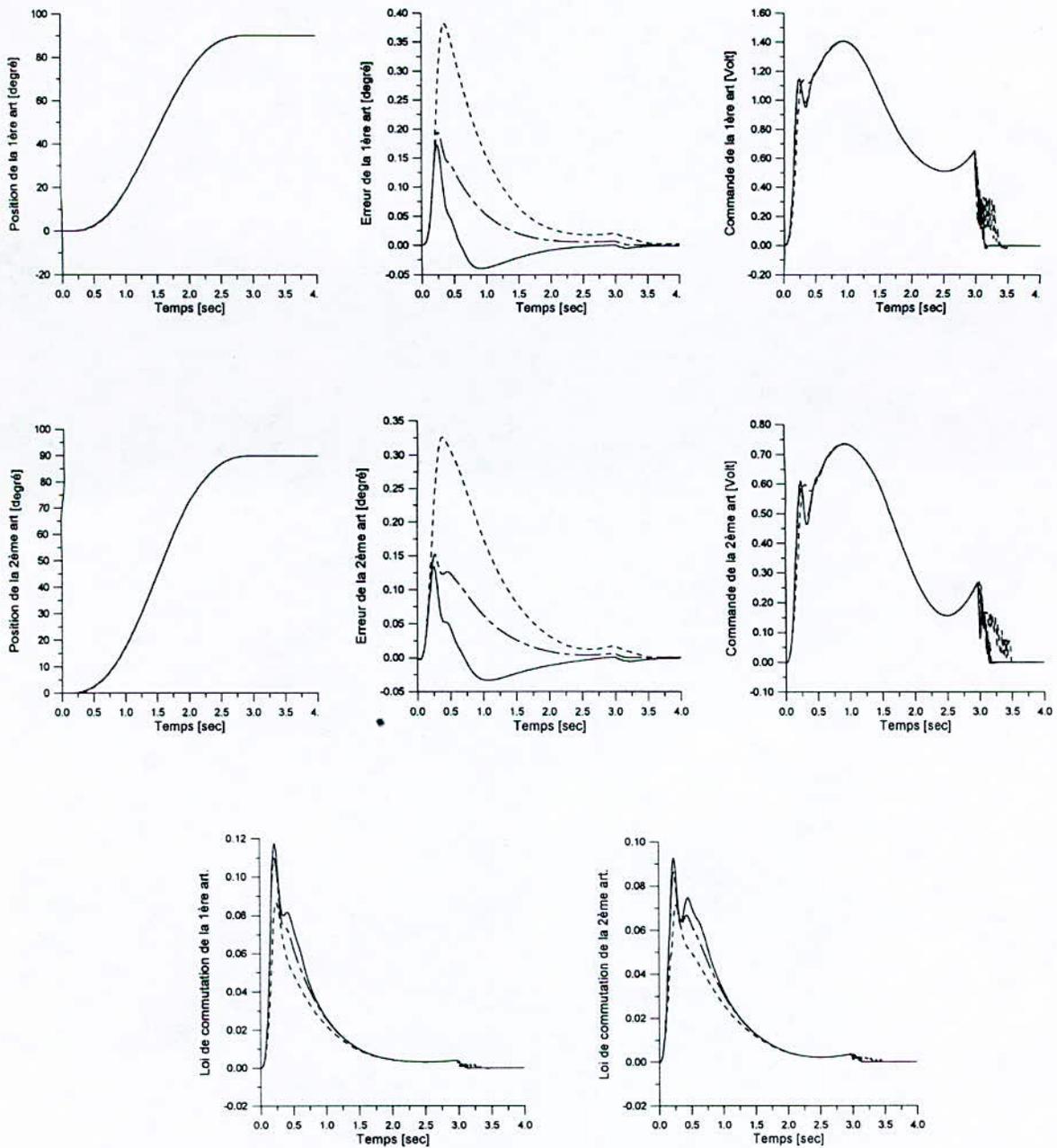
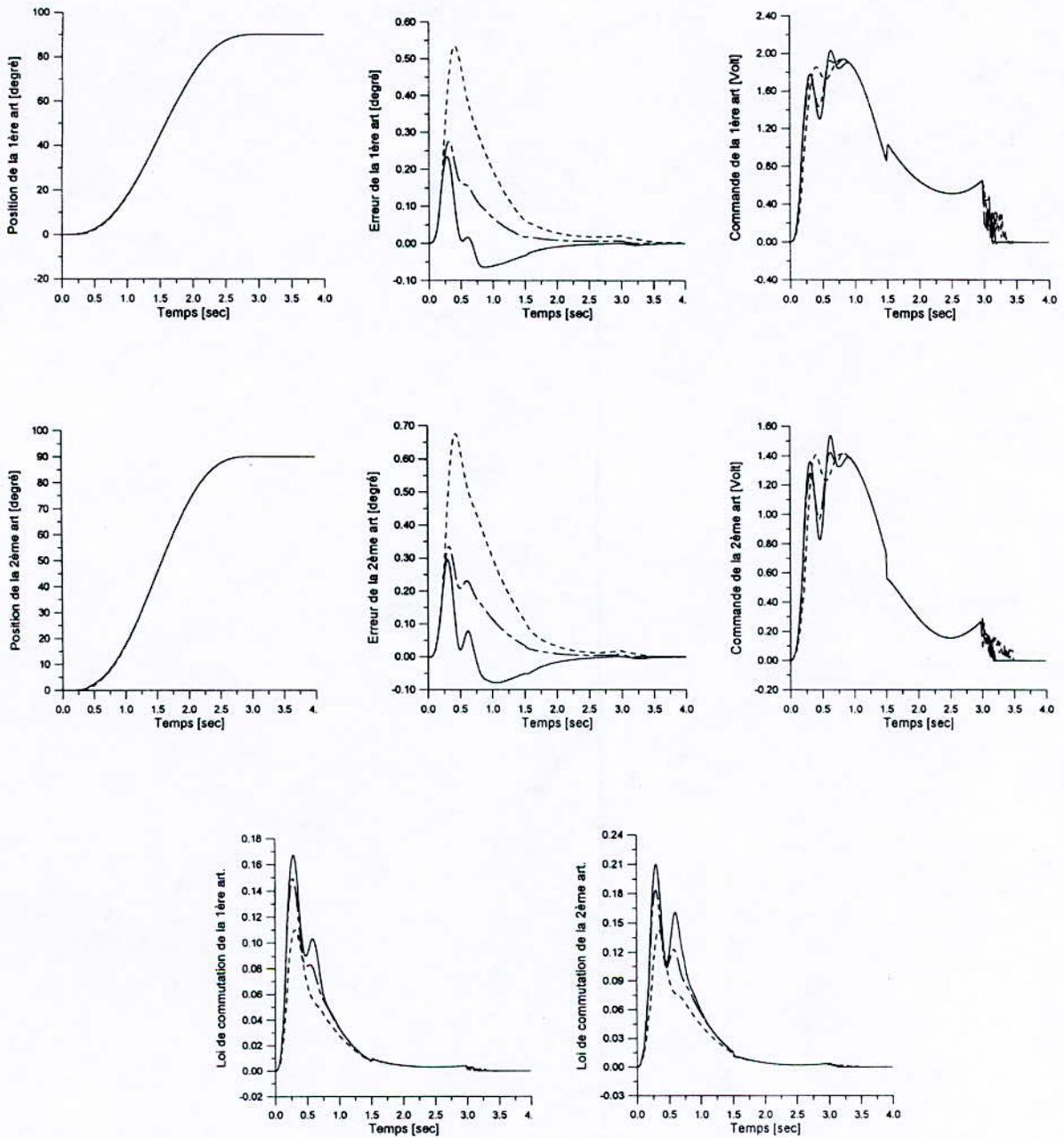


figure 3.12a - Application de la deuxième approche de commande sur le robot SCARA..  
Poursuite à vide.

.....	S.G.L.	-----	S.G.N.	————	S.G.N.I.	.....	Traject. de ref.
-------	--------	-------	--------	------	----------	-------	------------------



**figure 3.12b** - Application de la deuxième approche de commande sur le robot SCARA..  
 Poursuite avec effet de la charge  $m_0 = 10$  kg et la décharge  
 à l'instant  $t = 1.5$  sec.

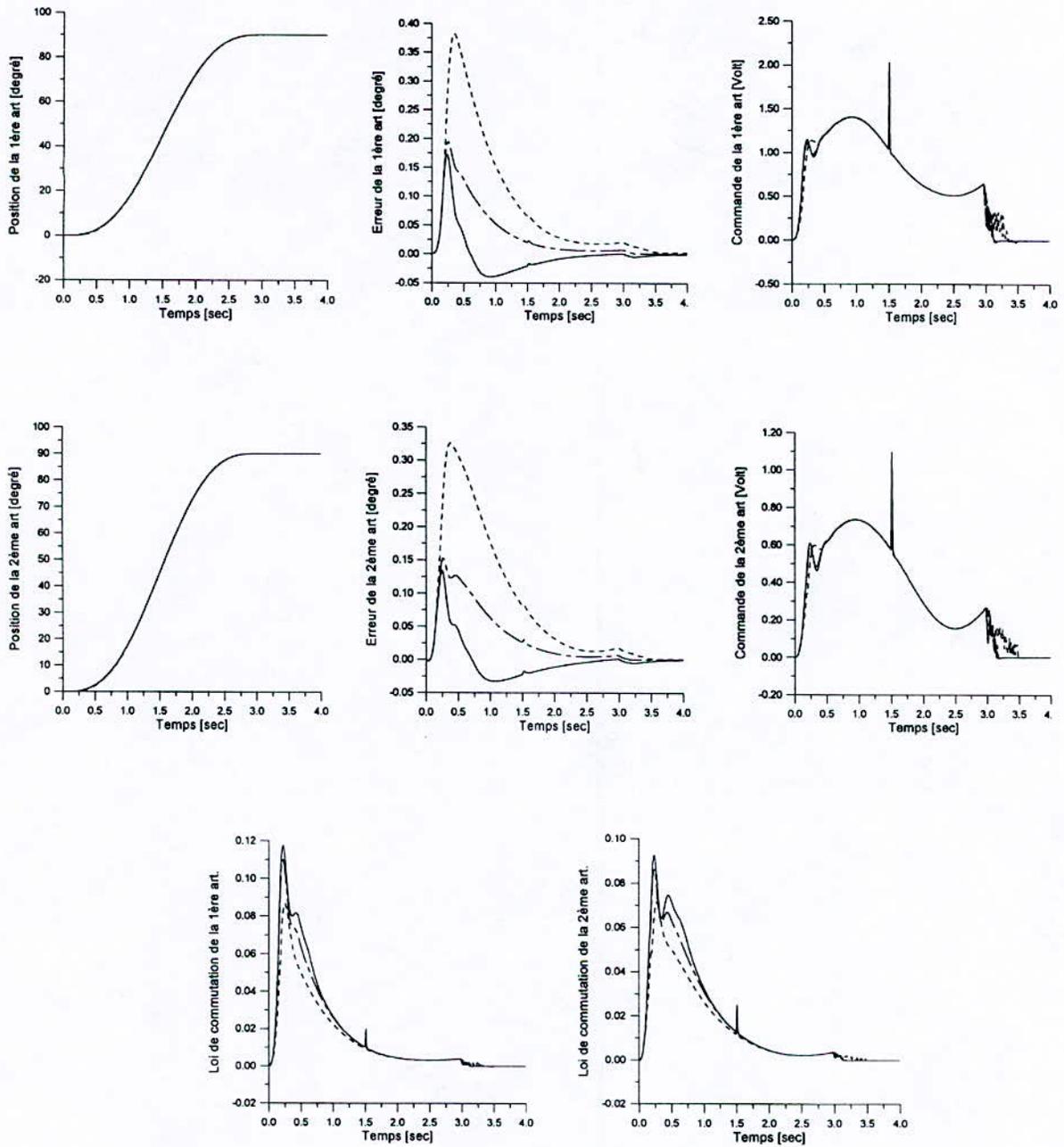


figure 3.12c - Application de la deuxième approche de commande sur le robot SCARA..  
Poursuite avec un choc à l'instant  $t = 1.5$  sec.

Commande décentralisée à structure variable							
Approches		1			2		
Surfaces		S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.	S.G.L.	S.G.N.	S.G.N.I.
Poursuite à vide	C <sub>1</sub>	2.3055 10 <sup>-6</sup>	3.2491 10 <sup>-7</sup>	9.1323 10 <sup>-8</sup>	1.0474 10 <sup>-5</sup>	1.8697 10 <sup>-6</sup>	6.7320 10 <sup>-7</sup>
	C <sub>2</sub>	1.4696 10 <sup>-5</sup>	4.0663 10 <sup>-6</sup>	4.0077 10 <sup>-6</sup>	9.9267 10 <sup>-5</sup>	3.4206 10 <sup>-5</sup>	4.0070 10 <sup>-5</sup>
Effet de la charge	C <sub>1</sub>	7.6892 10 <sup>-6</sup>	1.1630 10 <sup>-6</sup>	3.2973 10 <sup>-7</sup>	2.5626 10 <sup>-5</sup>	5.0853 10 <sup>-6</sup>	2.2219 10 <sup>-6</sup>
	C <sub>2</sub>	4.0256 10 <sup>-5</sup>	9.2480 10 <sup>-6</sup>	8.4696 10 <sup>-6</sup>	2.5593 10 <sup>-4</sup>	9.2531 10 <sup>-5</sup>	1.3117 10 <sup>-4</sup>
Effet d'un choc	C <sub>1</sub>	2.3083 10 <sup>-6</sup>	3.2526 10 <sup>-7</sup>	9.1151 10 <sup>-8</sup>	1.0484 10 <sup>-5</sup>	1.8712 10 <sup>-6</sup>	6.7286 10 <sup>-7</sup>
	C <sub>2</sub>	1.4923 10 <sup>-5</sup>	4.3242 10 <sup>-6</sup>	4.2731 10 <sup>-6</sup>	9.9585 10 <sup>-5</sup>	3.4593 10 <sup>-5</sup>	4.0478 10 <sup>-5</sup>

**Tableau 3.6** - Comparaison des approches de commandes étudiées pour le robot SCARA.

• **Poursuite avec effet de la charge : (figure 3.12b)**

Les résultats de simulation montrent que les erreurs de poursuite sont légèrement grandes en comparant avec la première approche. Mis à part le problème des frottements secs, les commandes sont physiquement acceptables.

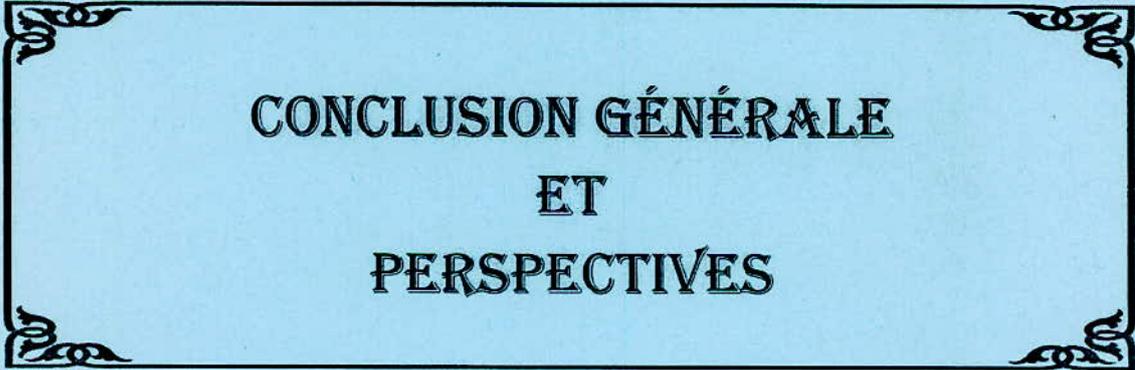
• **Poursuite avec un choc : (figure 3.12c)**

Les erreurs de poursuites n'ont pratiquement pas été affectées par ce choc. Les commandes fournissent des pics de manière à compenser les effets de ce choc.

### 3.6 Conclusion.

Dans ce chapitre nous avons développé deux approches de commande décentralisée à structure variable appliquées à trois types de robots manipulateurs. Ces deux approches présentent un vaste compromis. Cela amène à sélectionner des critères à minimiser pour faire le choix entre les deux commandes. Les différentes simulations que nous avons faites ont mis en évidence les performances de chaque approche au cours desquelles nous avons constaté pour les trois types de robots la stabilité de la surface de glissement proposée.





CONCLUSION GÉNÉRALE  
ET  
PERSPECTIVES

## Conclusion Générale et Perspectives

Notre mémoire est consacré à la Synthèse d'une commande décentralisée à structure variable avec application aux robots manipulateurs à structure cylindrique, Puma 560 et SCARA.

Lors de cette recherche nous avons proposé deux types de commandes originales qui contiennent chacune dans leurs formes trois termes élémentaires :

- Terme d'un changement de structure par retour d'état variable.
- Terme d'un changement de structure par un organe de commande introduisant un signal auxiliaire ayant pour but d'éliminer les effets des interconnexions et des perturbations externes.
- Terme d'un changement de structure par une anticipation directe des grandeurs de consigne désirées (position, vitesse et accélération)

Les paramètres de retour d'état, le signal auxiliaire et l'anticipation appartiennent aux intervalles bornés dans le but de satisfaire certaines conditions de stabilité de cette commande tout en bornant les interconnexions.

Ces commandes avec l'utilisation des fonctions signes provoquent un phénomène de glissement (en anglais : Chattering) dont les oscillations peuvent être indésirables. L'élimination de ce problème se fait par l'introduction de la couche limitée (en anglais : Boundary layer ) auprès de la surface de glissement. Elle est exprimée par une fonction continue d'amélioration, ce qui rend la commande lisse et physiquement acceptable.

Dans notre mémoire nous avons proposé une nouvelle surface de glissement non linéaire et variable dans le temps. Cette nouvelle structure de surface possède une partie non linéaire représentée par la fonction tangente hyperbolique et un terme d'intégration ayant pour but d'éliminer les erreurs permanentes. Nous avons constaté la possibilité d'un seul choix de paramètres de la surface de glissement appliqué aux trois modèles de robots étudiés.

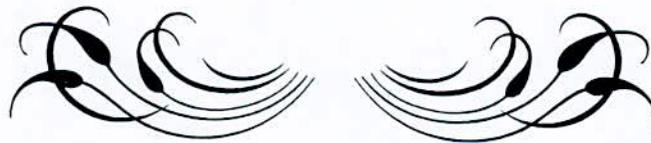
Les combinaisons de ces différentes approches de commande appliquées aux trois robots donnent de meilleurs résultats se traduisant par une poursuite parfaite d'une trajectoire d'état désirée durant un temps très court. Des tests de performances de ces nouvelles techniques ont été menés, ainsi que les tests de robustesse vis à vis des paramètres variables et des perturbations externes et l'effet de la charge relativement grande. Un test important montrant l'effet de la décentralisation a été effectué. Il est réalisé par une rupture brusque de la commande d'une liaison et nous avons constaté que les autres liaisons suivent parfaitement les trajectoires imposées préalablement.

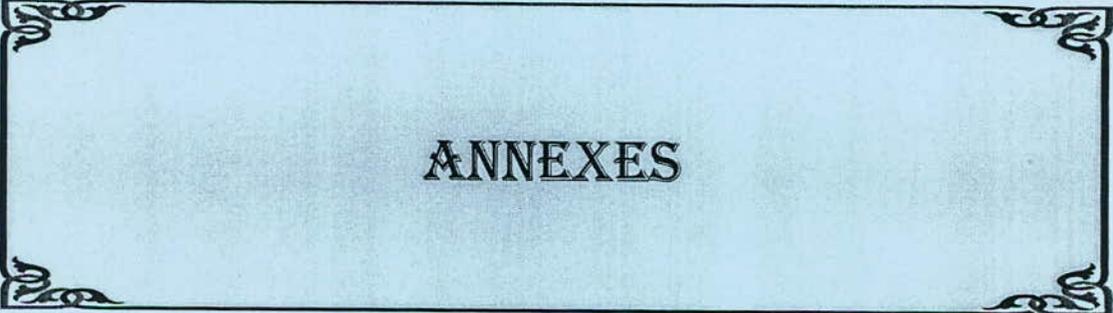
Les tests sont effectués par le choix de trois possibilités de la loi de commutation : linéaire, non linéaire et non linéaire avec intégrateur utilisant les deux approches de commandes développées. Les résultats de simulation montrent que la troisième loi de commutation est meilleure par rapport aux autres.

*Perspectives.*

Comme perspectives nous proposons de faire :

- l'application des techniques présentées dans ce mémoire au robot SCARA à trois degrés de liberté et d'autres types de robots.
- l'implémentation matérielle de ces commandes aux robots réels dans le but de valider la synthèse se basant sur les modèles physiques des robots réels.
- Développement d'autres types de commande décentralisée.





ANNEXES

## Annexe 1

Calcul du modèle dynamique du robot  
à structure cylindrique de classe 4

L'énergie potentielle :

$$E_p = (m_2 + m_3 + m_0) g (q_2 - q_{20}) \quad (\text{Ann1. 1})$$

d'où  $q_{20}$  correspond à la position particulière  $q_2$  du manipulateur pour laquelle l'énergie potentielle est nulle.

L'énergie cinétique s'exprime par :

$$E_C = \frac{1}{2} \left[ \left( I_2 + I_3 + m_3 (q_3 - l_3)^2 + m_0 q_3^2 \right) \dot{q}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_0) \dot{q}_2^2 + (m_3 + m_0) \dot{q}_3^2 \right] \quad (\text{Ann1. 2})$$

Le lagrangien est :

$$\begin{aligned} L &= E_C - E_p \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( I_2 + I_3 + m_3 (q_3 - l_3)^2 + m_0 q_3^2 \right) \dot{q}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_0) \dot{q}_2^2 + (m_3 + m_0) \dot{q}_3^2 \right] \\ &\quad - (m_2 + m_3 + m_0) g (q_2 - q_{20}). \end{aligned} \quad (\text{Ann1. 3})$$

L'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} (f_{v1} \dot{q}_1^2 + f_{v2} \dot{q}_2^2 + f_{v3} \dot{q}_3^2) \quad (\text{Ann1. 4})$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la première articulation est :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_1} = \Gamma_1 \quad (\text{Ann1. 5})$$

## Annexe 2

Calcul du modèle dynamique du robot PUMA 560  
avec l'introduction de l'effet de l'effecteur

La forme du modèle est :

$$(M(q) + \Delta M(q)) \ddot{q} + D(q) [\dot{q} \dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] + G(q) = T. \quad (\text{Ann2. 1})$$

Les matrices  $U_{ij}$  sont :

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{21} = \begin{bmatrix} -s_1 c_2 & s_1 s_2 & -c_1 & -(l_2 c_2 s_1 + d_2 c_1) \\ c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & (l_2 c_2 c_1 - d_2 s_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & 0 & -l_2 c_1 s_2 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & 0 & -l_2 s_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{31} = \begin{bmatrix} -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & c_1 & -s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 \\ -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & -s_1 & c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{32} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} & -c_1 c_{23} & 0 & -c_1 (l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & 0 & -s_1 (l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ -c_{23} & s_{23} & 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{33} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} & -c_1 c_{23} & 0 & -l_3 c_1 s_{23} \\ -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & 0 & -l_3 s_1 s_{23} \\ -c_{23} & s_{23} & 0 & -l_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = U_{13} = U_{23} = 0$$

(Ann2. 2)

avec

$$\begin{aligned} c_i &= \cos(q_i) & c_{ij} &= \cos(q_i + q_j) \\ s_i &= \sin(q_i) & s_{ij} &= \sin(q_i + q_j) \end{aligned}$$

La matrice  $J_i$  est :

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 & x_i \\ 0 & \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i & z_i \\ x_i & 0 & z_i & m_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ann2. 3})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{-I_{xxi} + I_{yyi} + I_{zzi}}{2} \\ \beta_i &= \frac{I_{xxi} - I_{yyi} + I_{zzi}}{2} \\ \gamma_i &= \frac{I_{xxi} + I_{yyi} - I_{zzi}}{2} \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Ann2. 4})$$

et

$$x_2 = -\frac{l_2}{2} m_2 \quad ; \quad x_3 = -\frac{l_3}{2} m_3 \quad ; \quad z_1 = -\frac{l_1}{2} m_1 \quad (\text{Ann2. 5})$$

Calcul de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= \text{trace}(U_{11} J_1 U_{11}^T) + \text{trace}(U_{21} J_2 U_{21}^T) + \text{trace}(U_{31} J_3 U_{31}^T). \\ &= \alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_2 c_2^2 + \beta_2 s_2^2 + \gamma_2 + 2 x_2 (l_2 c_2^2) + m_2 (l_2^2 c_2^2 + d_2 (d_2 + e)) + \alpha_3 c_{23}^2 \\ &\quad + \beta_3 s_{23}^2 + \gamma_3 + 2 x_3 (c_{23} (l_2 c_2 + l_3 c_{23})) + m_3 ((l_2 c_2 + l_3 c_{23})^2 + d_2^2). \\ &= I_1 + I_2 c_{23}^2 + I_3 c_2^2 + I_4 c_2 c_{23}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{22}(q) &= \text{trace}(U_{22} J_2 U_{22}^T) + \text{trace}(U_{32} J_3 U_{32}^T). \\ &= \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 + m_3 l_2 l_3 c_3 + m_3 l_2^2. \\ &= I_7 + I_4 c_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{33}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_3 U_{33}^T). \\ &= \alpha_3 + \beta_3 + 2 x_3 l_3 + m_3 l_3^2. \\ &= I_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{12}(q) &= \text{trace}(U_{22} J_2 U_{21}^T) + \text{trace}(U_{32} J_3 U_{31}^T). \\ &= x_2 (d_2 s_2) + m_2 (l_2 d_2 s_2) + x_3 (d_2 s_{23}) + m_3 (l_2 s_2 + l_3 s_{23}) d_2. \\ &= I_5 s_{23} + I_6 s_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{13}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_3 U_{31}^T) \\
&= x_3 (d_2 s_{23}) + m_3 (l_3 d_2 s_{23}) \\
&= I_5 s_{23}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{23}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_3 U_{32}^T) \\
&= \alpha_3 + \beta_3 + x_3 (2 l_3 + l_2 c_3) + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 c_3) \\
&= I_8 + 0.5 I_4 c_3.
\end{aligned}$$

$$M_{21}(q) = M_{12}(q) \quad ; \quad M_{31}(q) = M_{13}(q) \quad ; \quad M_{32}(q) = M_{23}(q)$$

(Ann2. 6)

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \alpha_1 + \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_2 + \beta_3 + \gamma_3 + m_3 d_2^2 + m_2 d_2 (d_2 + e) \\
&= I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3}.
\end{aligned}$$

$$I_2 = \alpha_3 - \beta_3 = I_{yy3} - I_{xx3}.$$

$$I_3 = \alpha_3 - \beta_3 + m_3 l_2^2 = I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2.$$

$$I_4 = m_3 l_2 l_3.$$

$$I_5 = 0.5 m_3 l_3 d_2.$$

$$I_6 = 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2.$$

$$I_7 = \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_2 + m_3 l_2^2 = I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2.$$

$$I_8 = I_{zz3}.$$

(Ann2. 7)

Calculs de la matrice des couples de coriolis :

$$D_{11}(q) = \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} \right) = -2 I_2 c_{23} s_{23} - 2 I_3 c_2 s_2 - I_2 (s_2 c_{23} + c_2 s_{23}).$$

$$D_{12}(q) = \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_1} \right) = -2 I_2 c_{23} s_{23} - I_4 c_2 s_{23}.$$

$$D_{13}(q) = \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_1} \right) = 2 I_5 c_{23}.$$

$$D_{21}(q) = \left( \frac{\partial M_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} \right) = 0.$$

$$D_{23}(q) = \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_2} \right) = -I_4 s_3.$$

$$D_{31}(q) = \left( \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_3} \right) = 0.$$

$$D_{32}(q) = \left( \frac{\partial M_{31}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} \right) = 0.$$

$$D_{33}(q) = \left( \frac{\partial M_{32}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} \right) = 0.$$

(Ann2. 8)

Calculs de la matrice des couples de centrifuges :

$$C_{11}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} \right) = 0.$$

$$C_{12}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} \right) = I_5 c_{23} + I_6 c_2$$

$$C_{13}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_1} \right) = I_5 c_{23}.$$

$$C_{21}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right) = I_2 c_{23} s_{23} + I_3 c_2 s_2 + 0.5 l_4 (s_{23} c_2 + s_2 c_{23}).$$

$$C_{22}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} \right) = 0.$$

$$C_{23}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_2} \right) = -0.5 l_4 s_3.$$

$$C_{31}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_3} \right) = I_2 s_{23} c_{23} + 0.5 l_4 s_{23} c_2.$$

$$C_{32}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_3} \right) = 0.5 l_4 s_3.$$

$$C_{33}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial M_{33}}{\partial q_3} \right) = 0.$$

(Ann2. 9)

Calcul des couples de gravitations :

$$r_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T ; \quad r_2^2 = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} & 0 & d_2 & 1 \end{bmatrix}^T ; \quad r_3^3 = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{Ann2. 10})$$

et

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -|g| & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{Ann2. 11})$$

donc :

$$G_1(q) = -m_1 g^T U_{11} r_1^1 - m_2 g^T U_{21} r_2^2 - m_3 g^T U_{31} r_3^3 = 0.$$

$$G_2(q) = -m_2 g^T U_{22} r_2^2 - m_3 g^T U_{32} r_3^3 = -0.5 m_2 g l_2 c_2 - 0.5 m_3 g l_3 c_{23} - m_3 g l_2 c_2.$$

$$G_3(q) = -m_3 g^T U_{33} r_3^3 = -0.5 m_3 g l_3 c_{23}.$$

(Ann2. 12)

Introduction de l'effet de l'effecteur :

$$J_4 = \begin{bmatrix} \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \quad (\text{Ann2. 13})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{-I_{xxi} + I_{yyi} + I_{zzi}}{2} \\ \beta_4 &= \frac{I_{xxi} - I_{yyi} + I_{zzi}}{2} \\ \gamma_4 &= \frac{I_{xxi} + I_{yyi} - I_{zzi}}{2} \end{aligned} \quad (\text{Ann2. 14})$$

Calcul de la matrice  $\Delta M$  :

$$\begin{aligned} \Delta M_{11}(q) &= \text{trace}(U_{31} J_4 U_{31}^T) + I_{M1} \\ &= \alpha_4 (s_1^2 c_{23}^2 + c_1^2 c_{23}^2) + \beta_4 (s_1^2 s_{23}^2 + c_1^2 s_{23}^2) + \gamma_4 \\ &\quad + m_t [(s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1)^2 + (c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1)^2] + I_{M1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{22}(q) &= \text{trace}(U_{32} J_4 U_{32}^T) + I_{M2} \\ &= \alpha_4 (c_1^2 s_{23}^2 + s_1^2 s_{23}^2 + c_{23}^2) + \beta_4 (c_1^2 c_{23}^2 + s_1^2 c_{23}^2 + s_{23}^2) \\ &\quad + m_t [c_1^2 (l_2 s_2 + l_3 s_{23})^2 + s_1^2 (l_2 s_2 + l_3 s_{23})^2] + I_{M2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta M_{33}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_4 U_{33}^T) + I_{\mathbb{R}^3} \cdot \\ &= \alpha_4 (c_1^2 s_{23}^2 + s_1^2 s_{23}^2 + c_{23}^2) + \beta_4 (c_1^2 c_{23}^2 + s_1^2 c_{23}^2 + s_{23}^2) \\ &\quad + m_t (l_3^2 c_1^2 s_{23}^2 + l_3^2 s_1^2 s_{23}^2 + l_3^2 c_{23}^2) + I_{\mathbb{R}^3} \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta M_{12}(q) &= \text{trace}(U_{32} J_4 U_{31}^T) \cdot \\ &= m_t d_2 l_2 s_2 + m_t d_2 l_3 s_{23} \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta M_{13}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_4 U_{31}^T) \cdot \\ &= \alpha_4 s_1 c_1 s_{23} c_{23} - \beta_4 c_1 s_1 c_{23} s_{23} + m_t l_3 c_1 s_{23} [s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1] \\ &\quad - \alpha_4 s_1 c_1 s_{23} c_{23} + \beta_4 c_1 s_1 c_{23} s_{23} + m_t l_3 s_1 s_{23} [c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 s_1] \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta M_{23}(q) &= \text{trace}(U_{33} J_4 U_{32}^T) \cdot \\ &= \alpha_4 + \beta_4 + m_t l_2 l_3 c_3 + m_t l_3^2\end{aligned}$$

$$\Delta M_{21}(q) = \Delta M_{12}(q) \quad ; \quad \Delta M_{31}(q) = \Delta M_{13}(q) \quad ; \quad \Delta M_{32}(q) = \Delta M_{23}(q)$$

(Ann2. 15)

## Annexe 3

## Calcul du modèle dynamique du robot SCARA

La forme du modèle est :

$$(M(q) + I_M) \ddot{q} + D(q) [\dot{q} \dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] + H(\dot{q}) = T. \quad (\text{Ann3. 1})$$

avec :

$$I_M = \begin{bmatrix} n_1^2 I_{M1} & 0 \\ 0 & n_2^2 I_{M2} \end{bmatrix} ; \quad H(\dot{q}) = \begin{bmatrix} n_1^2 (f_{v1} \dot{q}_1 + f_{s1} \text{sgn}(\dot{q}_1)) \\ n_2^2 (f_{v2} \dot{q}_2 + f_{s2} \text{sgn}(\dot{q}_2)) \end{bmatrix} \quad (\text{Ann3. 2})$$

Les matrices  $U_{ij}$  sont :

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & -l_1 s_1 \\ c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{21} = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l_2 s_{12} - l_1 s_1 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ann3. 3})$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l_2 s_{12} \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{12} = 0$$

avec

$$c_i = \cos(q_i) \quad c_{ij} = \cos(q_i + q_j) \\ s_i = \sin(q_i) \quad s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$$

La matrice  $J_i$  est :

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_i l_i^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_i l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_i l_i & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ann3. 4})$$

Calcul de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= \text{trace}(U_{11} J_1 U_{11}^T) + \text{trace}(U_{21} J_2 U_{21}^T). \\ &= \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 c_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{12}(q) &= \text{trace}(U_{22} J_2 U_{21}^T). \\ &= \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c_2. \end{aligned}$$

(Ann3. 5)

$$\begin{aligned} M_{22}(q) &= \text{trace}(U_{22} J_2 U_{22}^T). \\ &= \frac{1}{3} m_2 l_2^2. \end{aligned}$$

$$M_{12}(q) = M_{21}(q).$$

Calcul du vecteur des couples de coriolis :

$$D_1(q) = \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} \right) = -m_2 l_1 l_2 s_2.$$

(Ann3. 6)

$$D_2(q) = \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} \right) = 0.$$

Calcul de la matrice des couples de centrifuges :

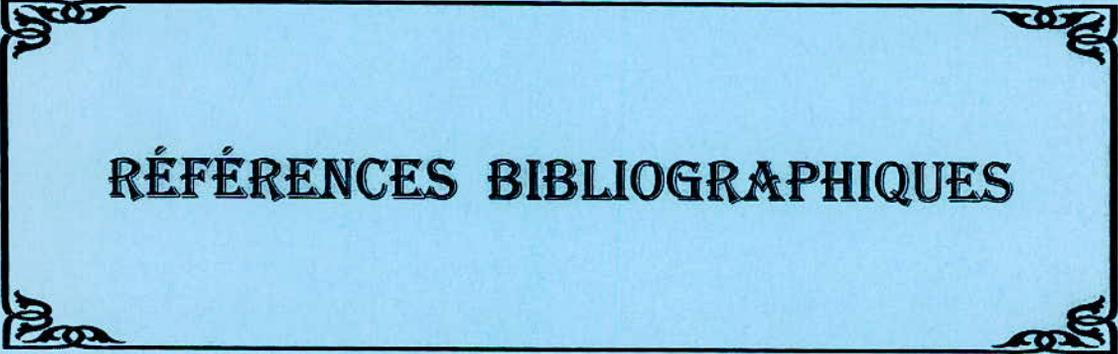
$$C_{11}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} \right) = 0.$$

$$C_{12}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} \right) = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2.$$

(Ann3. 7)

$$C_{21}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right) = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2.$$

$$C_{22}(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} \right) = 0.$$



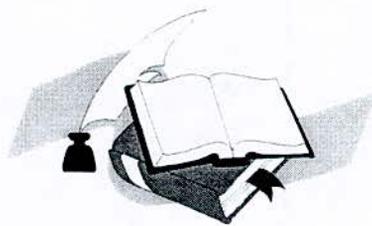
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## Références Bibliographiques

- [1] V. I. Utkin, 'Sliding modes and their application in variable structure systems,' Moscow, Soviet Union, MIR Publishers, 1978.
- [2] A. F. Fillipov, "Differential equations with discontinuous right-hand side," *Matematicheskii sbornich*, 51 no. 1, 1960, pp. 99-128 (in Russian).
- [3] D. D. Siljak, M. B. Vunkceic, "Decentralization, Stabilization and Estimation of large scal linear systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, June 1976.
- [4] J. Jacques, E. Slotine, 'Applied nonlinear control,' Prentice Hall Inc, 1991.
- [5] Kais Yeung, Y. P. Chen, "A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 33, no. 2, Feb. 1988.
- [6] T. P. Leung, Q. J. Zhou, Chun Yi Su, "An adaptive variable structure model following control desing for robot manipulateurs," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 36, no. 3, March 1991.
- [7] H. Khurana, S. I. Ahson, S. S. Lamba, "On stabilization of large scale control systems using variable systems theory," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-31, no. 2, Feb. 1986.
- [8] G. Bartolini, P. Pydynowski, "An improved chattering free V.S.C scheme for uncertain dynamique systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 41, no. 8, August 1996.
- [9] J. D. Wang, T. L. Lee, Y. T. Juang, "New methode to design an tntegral variable structure controller," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 41, no. 1, Jan. 1996.
- [10] Seungrohk O, H. K. Khalil, "Output feedback stabilization using variable structure control," *INT. J. Contr.*, vol. 62, no. 4, pp. 831-849, 1995.
- [11] I. Tounay, O. Kaynak, "A new variable structure controller for affine nonlinear systems with non-matching uncertainties," *INT. J. Contr.*, vol. 62, 1995.
- [12] R. A. Decarlo, S. H. Zak, G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems : A tutorial," *Proceedings of IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, March 1988.
- [13] Gregory Paul Mathews, 'Variable structure control of interconnected nonlinear systems,' University Microfilms international, PhD 1985.

- [14] Gregory P. Mathews, Raymond A. Decarlo, "Decentralized tracking for a class of interconnected non linear systems using variable structure Control," *Automatica*, vol. 24, no. 2, pp. 187-193, 1988.
- [15] G. Feng, Y. A. Jiang, "Variable structure based decentralized adaptive control," *IEE Proc. Cont. Theory Appl.*, vol. 142, no. 5, pp. 439-443, Sep. 1995.
- [16] Chun Yi Su, Y. Stepanenko, "Adaptive sliding mode control of robot manipulateurs : General sliding manifold case," *Automatica*, vol. 30, no. 9, pp. 1497-1500, 1994.
- [17] Yoram Koren, 'La robotique pour ingenieres,' Edition McGRAW-HILL, 1986.
- [18] Richard P. Paul, 'Robot manipulateurs : Mathematics programming and control,' Library of congress cataloging in Publication Data, 1981.
- [19] H. Seradji, "Decentralized adaptive control of manipulateur : Theory, Simulation and Experimentation," *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 5, no. 2, April 1989.
- [20] D. P. Stoten, "Generalized manipulator dynamics with retarded model reference adaptive control," *INT. J. Contr.*, vol. 50, no. 6, pp. 2249-2268, 1989.
- [21] J. Bühler, 'Reglage par mode de glissement,' Ecole polytechnique de Losane, 1986.
- [22] Slotine J. E. and Sastry S., "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *INT. J. Contr.*, vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [23] Benallegue Abdelaziz, 'Contribution à la commande dynamique adaptative des robots manipulateurs rapides,' These de doctorat de l'université PARIS VI, 21 Nov 1991.
- [24] F. Boudjema, 'Commande par mode de glissement, application aux convertisseurs électriques,' These de doctorat de l'université de Paul Sabatier, TOULOUS, 1991.
- [25] D. Boukhetala, 'Commande décentralisée des systèmes structurées,' Thèse de magister de ENP, 1993.
- [26] L. Guenfaf, 'Etude de différentes commande adaptative, application à un robot manipulateur,' Thèse de magister de ENP, 1995.
- [27] N. Bali, 'Etude des performances de la commande prédictive généralisée,' These de magister de ENP, 1995.
- [28] Claud Vibet, 'Robots principes et controle,' Edition ELLIPSES, 1987.
- [29] Brian Armstrong, Oussama Khatib and Joel Burdick, "The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm," *Proceedings IEEE*, pp. 510-519, 1986.

- [30] M. S. Nedjari et H. Boukari, 'Commande adaptative décentralisée, application en robotique,' PFE en Automatique ENP, 1996.
- [31] K. S. Fu, R. C. Gonzalez and C. S. G. Lee, 'Robotics : Control, Sensing, Vision and Intelligence,' Edition McGRAW-HILL, 1987
- [32] M. GAREH , ' Sur la commande adaptative décentralisée,' PFE en Automatique ENP, Juin 1995.
- [33] M. B. Leahvy Jr, 'Model based auxiliary input control : development and experimental analysis,' Proceedings of the 29<sup>th</sup> conference on decision and control Honolulu, Hawaii December 1990.
- [34] Philippe coiffet, 'Robot Habilis, Robot Sapiens, histoire développement et futurs de la robotique,' Edition HERMES, Paris 1993



## ملخص.

في هذا العمل نقترح طريقتين للتحكم اللامركزي ذو البنية المتغيرة للأذرع الآلية متعددة درجات الحرية بنية التحكم المستعمل تعتبر الذراع الآلي كنظام مترابط بحيث كل مفصل يكون نظام جزئي و نتحكم في هذا الأخير من مقر التحكم المحلي. مبدأ التحكم اللامركزي ذو البنية المتغيرة يعتمد على الهيئة العامة لمساحة الانزلاق الخاصة بكل مفصل.

هدف التحكم هو ضمان احسن إنباع لمسلك المرجع. كل تحكم محلي مركب من ثلاث إشارات آتية من: تغيير البنية عن طريق رد فعل الحالة، تغيير البنية عن طريق التدخل المباشر لقيم المرجع، تغيير البنية عن طريق عضو التحكم. الطريقة المطورة استعملت لثلاث أذرع آلية. ذراع ذو بنية أسطوانية، ذراع PUMA 560، ذراع SCARA. مع عرض نتائج المحاكاة العددية و اختبار عرض نتائج الضلاعة بتغيير العوامل و الإضرابات الخارجية.

كلمات المفتاح : التحكم اللامركزي ذو البنية المتغيرة، مساحة الانزلاق، ذراع آلي.

## Abstract.

In this work two approaches of Decentralized Variable Structure Control (DVSC) to multi-joint robot manipulators are proposed. The robot used is assumed to be an interconnected system for which each joint is controlled by a local station. The DVSC is based on the general sliding manifold for each sub-system.

The goal of the controller is to obtain a good tracking of the reference. Each local control signal is a combination of three signals obtained from : changing structure by state feedback, changing structure by direct intervention of reference (feedforward controller) and changing structure by controller device (auxiliary signal). The theory developed has been applied to three robot manipulators : cylindrical structure robot, PUMA 560 robot, SCARA robot. Simulation results are presented to highlight the performance of the proposed controller with deferent tests of robustness.

**Key-words :** Decentralized Variable Structure Control, Sliding Surface, Robot Manipulator

## Résumé.

Dans le présent travail nous proposons deux approches de commande décentralisée à structure variable (CDSV) des robots manipulateurs à plusieurs degrés de liberté. La structure de la commande développée considère le robot comme un système interconnecté dans lequel chaque articulation constitue un sous système commandé par une station de commande locale. L'élaboration de la commande à structure variable est basée sur la forme générale de la surface de glissement synthétisée pour chaque sous système.

L'objectif de la commande est d'assurer la meilleure poursuite d'une trajectoire de référence. Chaque signal de commande locale est la combinaison de trois signaux provenant d'un changement de structure; par contre réaction d'état, changement de structure par l'intervention directe des grandeurs de références et d'un changement de structure par l'organe de commande (signal auxiliaire). La technique de commande développée a été appliquée à trois types de robots à savoir : robot à structure cylindrique, robot PUMA 560 et le robot SCARA et des résultats de simulations ont été présentés. Plusieurs tests de robustesse par rapport aux variations paramétriques et perturbations externes ont été également présentés.

**Mots clés :** Commande Décentralisée à Structure Variable, Surface de Glissement, Robot Manipulateur