

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique

المركز الوطني المتعدد التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

thème :

LUBRIFICATION DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE DROITE ET HELICOIDALE

Dirigé par :
Dr . M. BOUAZIZ

Etudié par :
Hocine CHIHANI

Promotion :
Octobre 2001

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi - El Harrach -Alger

REMERCIEMENTS

Je tiens au début de ce mémoire à exprimer ma profonde gratitude envers tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à ma formation et aux résultats auxquels je suis parvenu.

Je remercie vivement mon Directeur de thèse, le Docteur M. BOUAZIZ pour avoir dirigé ce travail avec compétence et professionnalisme, et pour tous les conseils précieux qu'il m'a prodigué, pour réaliser ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur S. LARBI pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse.

C'est pour moi un devoir agréable de remercier Monsieur H. BELHANECH pour avoir accepté d'examiner mon travail.

ملخص :

هدف دراستنا هو دراسة تشحيم التشابكات الأسطوانية ذات الأسنان المستقيمة و الحلزونية بتعيين سمك الشريط الزيتي و

تأثير مختلف عوامل التشغيل على هذا السمك

كلمات مفتاحية : التشحيم التشابكات الاسطوانية أ سنان مستقيمة أ سنان حلزونية تشوه السطح .

Résumé :

Notre étude a pour but d'étudier la lubrification des engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale en déterminant l'épaisseur du film d'huile et l'influence des différents paramètres de fonctionnement sur cette épaisseur.

Mots Cles: lubrification ,engrenages cylindriques ,denture droite ,denture helecoidale,deformation, profil .

Abstract:

The purpose of our study is to study the lubrication of the cylindrical gear with right and helicoids teeth by determining the thickness of oil film and the influence of the various parameters of operation on this thickness.

Kay word : lubrication ,cylindrical gear , right teeth , helicoids teeth , deformation ,profile .

Nomenclature des symboles

a (m): demi-longueur de l'air de contact.

E_i (Pa): module d'élasticité du massif i .

E' (Pa): module d'élasticité réduit.

h_0 (m): épaisseur du film au centre du contact.

h_{\min} (m): épaisseur minimale du film d'huile.

L (m): longueur du contact cylindrique ou linéaire selon oz .

p (Pa): pression.

p_0 (Pa): pression hertzienne maximale.

R_i (m): rayon de courbure du massif i .

R (m): rayon de courbure réduit.

u_i (m/s): vitesse linéaire de la surface i du massif selon ox .

w (N): charge normale transmise par le contact.

α ($^{\circ}C^{-1}$): coefficient de piézoviscosité.

β (radian): angle d'hélice.

μ (Pa.s): viscosité dynamique du lubrifiant.

μ_0 (Pa.s): viscosité dynamique du lubrifiant à la température et à la pression de référence.

ν : coefficient de poisson.

ρ (Kg/m^3): masse volumique.

σ_i ($i = 1,2,3$) (Pa): contraintes principales.

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (Pa): contraintes orthogonales.

τ_{\max} (Pa): contrainte de cisaillement maximale.

SOMMAIRE

| | |
|--|----|
| Introduction générale. | 2 |
| Chapitre I : La géométrie des engrenages à denture droite. | |
| I-1 Introduction. | 5 |
| I-2 Définition. | 5 |
| I-3 Avantage du profil en développante. | 6 |
| I-4 Génération d'une denture cylindrique droite. | 7 |
| I-5 Cylindre primitif d'une roue, crémaillère génératrice. | 8 |
| I-6 Surface conjuguées de deux roues. | 9 |
| I-7 Définition du module. | 10 |
| I-8 Eléments d'une denture droite. | 10 |
| I-9 Phénomène d'interférence. | 11 |
| I-10 Denture déportée. | 12 |
| I-11 Entraxe normal. | 14 |
| I-12 Entraxe de fonctionnement. | 14 |
| I-13 Rapport de conduite. | 16 |
| I-14 Rayon de courbure. | 16 |
| Chapitre II : La géométrie des engrenages à denture hélicoïdale. | |
| II-1 Introduction. | 18 |
| II-2 Surface de denture. | 18 |
| II-3 Génération de la denture à partir de l'outil crémaillère de taillage. | 20 |

SOMMAIRE

| | |
|---|----|
| II-4 Le module apparent. | 21 |
| II-5 Eléments géométrique définissant la denture. | 22 |
| II-6 Phénomène d'interférence. | 23 |
| II-7 Condition d'engrènement de deux roues. | 23 |
| II-8 Denture déportée. | 23 |
| Chapitre III : Lubrification élastohydrodynamique. | |
| III-1 Introduction. | 25 |
| III-2 Equation de Reynolds généralisée. | 26 |
| III-3 Contact Hertzien lubrifié. | 28 |
| <i>III-3-1 Géométrie générale d'un contact Hertzien.</i> | 28 |
| <i>III-3-2 Modèle géométrique équivalent.</i> | 29 |
| <i>III-3-3 Modèle cinématique.</i> | 29 |
| III-4 Géométrie du film. | 31 |
| III-5 Théorie de Hertz. | 32 |
| III-6 Approche de Martin. | 34 |
| III-7 Approche de Grubin 1949. | 35 |
| III-8 Solution de Dowson et Higginson 1961. | 40 |
| III-9 Formule de Hamrock et Dowson. | 45 |
| <i>III-9-1 Epaisseur minimum du film d'huile.</i> | 46 |
| Chapitre IV : Résultats et interprétations. | |
| IV-1 Introduction. | 49 |
| IV-2 Equation de base. | 49 |
| <i>IV-2-1 Equation de Reynolds.</i> | 49 |

SOMMAIRE

| | |
|-------------------------------------|----|
| <i>IV-2-2 Epaisseur du film.</i> | 49 |
| IV-3 Exemple d'application . | 52 |
| IV-4 Organigramme de calcul h et p. | 56 |
| IV-5 Influence de déport. | 57 |
| <i>IV-5-1 Denture droite.</i> | 57 |
| <i>IV-5-2 Denture hélicoïdale.</i> | 57 |
| IV-6 Champ de pression. | 60 |
| Conclusion générale. | 65 |
| Annexe I. | 67 |
| Annexe II. | 70 |
| Bibliographie. | 73 |

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages sont un des éléments de machines les plus utilisés dans la construction mécanique. Leur rôle est de transmettre la puissance entre deux arbres rapprochés, avec modification du couple transmis et de la vitesse de rotation, le rapport des vitesses étant rigoureux et constant, les deux arbres peuvent être parallèles (ex : engrenages cylindriques), concourants (ex : engrenages coniques), orthogonaux (ex : engrenages gauches) ou quelconques (ex : engrenages hypnoïdes).

Les transmissions de puissance par engrenages sont largement utilisées du fait de leur grande précision, mais aussi pour leur faible encombrement et leur faible rapport poids/puissance transmise. Depuis quelques dizaines d'années, ces mécanismes ont subi des perfectionnements techniques et technologiques afin d'améliorer leur fonctionnalité tant en durée de vie, résistance et capacité de charge qu'en rapport spécifique poids/puissance.

L'un des moyens consistant à améliorer le fonctionnement des engrenages est de lubrifier les zones de contact entre les dentures avec une huile appropriée. Cependant, leur lubrification est l'un des problèmes qui pose plus de difficultés aux mécaniciens.

A l'heure où les charges transmises deviennent de plus en plus grandes, où les vitesses augmentent d'une manière souvent spectaculaire, on peut affirmer que la lubrification des engrenages a une influence croissante et primordiale[8].

La réduction des frottements permettant l'augmentation du rendement et la diminution de l'usure, sont les premières fonctions dévolues au graissage, principalement dans les mécanismes de transmission de grandes puissances, le graissage joue également un rôle important dans la protection contre la corrosion et l'amortissement des bruits et des vibrations. Donc il ne sert à rien d'améliorer les qualités géométriques des dentures, d'adopter des matériaux de plus en plus nobles et d'arriver à un stade de précision remarquable si la lubrification est négligée.

D'éminents professeurs et expérimentateurs se sont intéressés à cette question et ils ont permis de mettre sur pied un certain nombre de principes qualitatifs qui n'apportent pas malheureusement une réponse définitive, mais permettent une plus grande connaissance des phénomènes complexes intervenant dans la lubrification des engrenages.

Introduction Générale

Cette étude a pour but d'étudier la lubrification des engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale en déterminant l'épaisseur du film d'huile et l'influence des différents paramètres de fonctionnement sur cette épaisseur et sur la distribution de pression dans la zone du contact.

Notre travail se compose donc de cinq chapitres :

- Le chapitre I traitera la géométrie des engrenages cylindriques à denture droite.
- Le chapitre II nous donnera une idée sur la géométrie des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.
- Dans le chapitre III nous exposons les équations qui régissent le phénomène de la lubrification élastohydrodynamique(EHD) entre deux surfaces quelconques, ainsi que les formules de l'épaisseur du film d'huile pour différents auteurs.
- Le chapitre IV sera consacré pour les résultats et les interprétations.

CHAPITRE I

RAPPEL DE LA GEOMETRIE DES ENGRENAGES A DENTURE DROITE

I-1 Introduction :

Les engrenages cylindriques sont utilisés comme moyen de transmission de puissance entre deux arbres parallèles. Généralement les engrenages cylindriques ont une à deux paires de dent en contact, ils ont une capacité limitée à transmettre les charges, ils sont donc généralement utilisés dans des applications de charges modérés.

On rencontre différents types de profils des dentures d'engrenages : En épicycloïde à arc de cercle, à développante de cercle...etc. Actuellement la denture presque exclusivement utilisée est celle dont le profil est en développante de cercle, pour ces avantages pratique tel que la simplicité de génération, l'insensibilité aux erreurs d'entraxe...etc.

I-2 Définition :

Le profil à développante de cercle découle de la deuxième application de roulette[01]. La développante de cercle est obtenue en faisant rouler sans glisser la droite (Δ) sur le cercle C_b , appelé cercle de base (figure I-1)

Par définition, $\text{arc}TQ = \overline{TM}$

Q étant le point de rebroussement du profil.

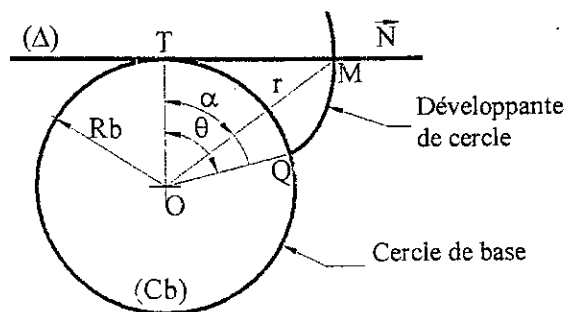


Fig.I-1 Profil en développante de cercle

Fonction involute d'un angle :

$$\text{On a : } \text{arc}TQ = \overline{TM}$$

$$\text{Il vient : } R_b \theta = R_b \text{tg} \alpha$$

D'où :

$$\theta = \text{tg} \alpha$$

De la figure I-1 on a : $\widehat{QOM} = \theta - \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$

On désigne par involute (α) (notée $\text{inv} \alpha$) la fonction définie par :

$$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha \quad (\alpha \text{ en radian})$$

* coordonnées d'un point de la développante de cercle :

$$x = \frac{R_b}{\cos \theta} \cos(\text{inv} \theta) = R_b (\cos \theta + \theta \sin \theta)$$

$$y = \frac{R_b}{\cos \theta} \sin(\text{inv} \theta) = R_b (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

Propriétés de la développante de cercle :

- La normale \vec{N} à la développante est portée par la droite (Δ).
- Les développantes d'un même cercle de base sont parallèles entre elles.
- Le rayon de courbure au point M est égale à TM (T étant le centre instantané de rotation).
- La développante de cercle ne peut avoir de point à l'intérieur de cercle de base (cercle développé).

I-3 Avantages du profil en développante :

Deux roues de même module engrènent entre elles, quel que soit leur nombre de dents, à partir d'un minimum.

L'épaisseur des dents augmente du sommet à la base (sauf pour les petits nombres de dents), ce qui augmente leur résistance et facilite leur fraisage.

La poussée de la dent menante sur la dent menée s'effectue suivant la ligne d'action, donc suivant une direction invariable.

Une légère variation d'entraxe ne modifie pas le rapport des vitesses. Ce rapport est fonction uniquement des diamètres primitifs.

Un seul outil permet de tailler toutes les roues de même module, quel que soit leur nombre de dents (taillage par génération).

I-4 Génération d'une denture cylindrique droite :

La surface de denture est obtenue en faisant rouler sans glisser sur le cylindre de base de rayon R_b un plan (P_b) dit plan de base et auquel est lié un plan (N) dit plan de génération perpendiculaire à (P_b) .

L'intersection (L) de (N) et (P_b) est parallèle à l'axe instantané de rotation TT'

La surface de denture peut être considérée comme engendrée par la droite (L) lorsque le plan P_b roule sans glisser sur (C_b) . Toutes ses génératrices sont donc parallèles à l'axe du cylindre. On obtient ainsi avec denture droite (fig I-2).

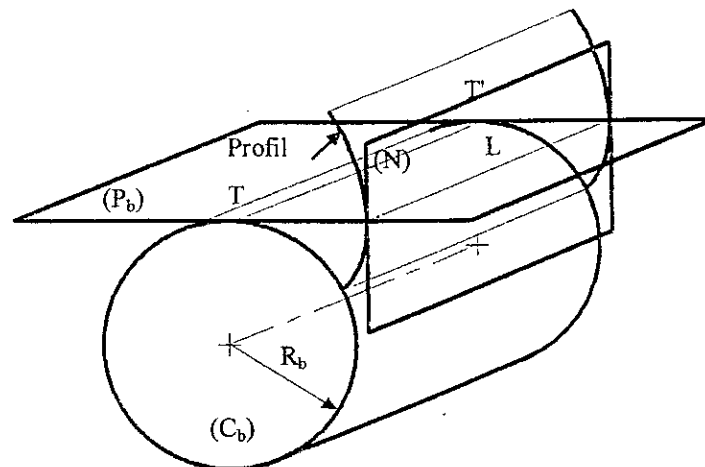


fig.I-2 Génération d'une denture cylindrique droite

I-5 Cylindre primitif d'une roue, crémaillère génératrice :

Considérons les même éléments de la figure I-2 et considérons en plus un cylindre (C_p) dit primitif de même axe que le cylindre de base et de rayon $R_p > R_b$, et un plan (P) tangent à ce cylindre suivant l'intersection de celui-ci avec le plan (P_b) (figure I-3).

Soit α l'angle entre les plans (P) et (P_b). En faisant rouler sans glisser le plan (P_b) sur le cylindre (C_b), la vitesse de translation de (P_b) est $V_b = R_b \omega$, ω étant la vitesse de rotation du cylindre (C_b). L'angle α étant fixe, il est clair que si (P_b) se déplace à une vitesse constante, (P) se déplace aussi à une vitesse constante puisque :

$V_p = R_p \omega$, il vient :

$$\frac{V_b}{V_p} = \frac{R_b \omega}{R_p \omega} = \frac{R_b}{R_p} = \cos \alpha$$

α est appelé angle de pression.

Le plan (N) constitue le plan de denture de la crémaillère génératrice.

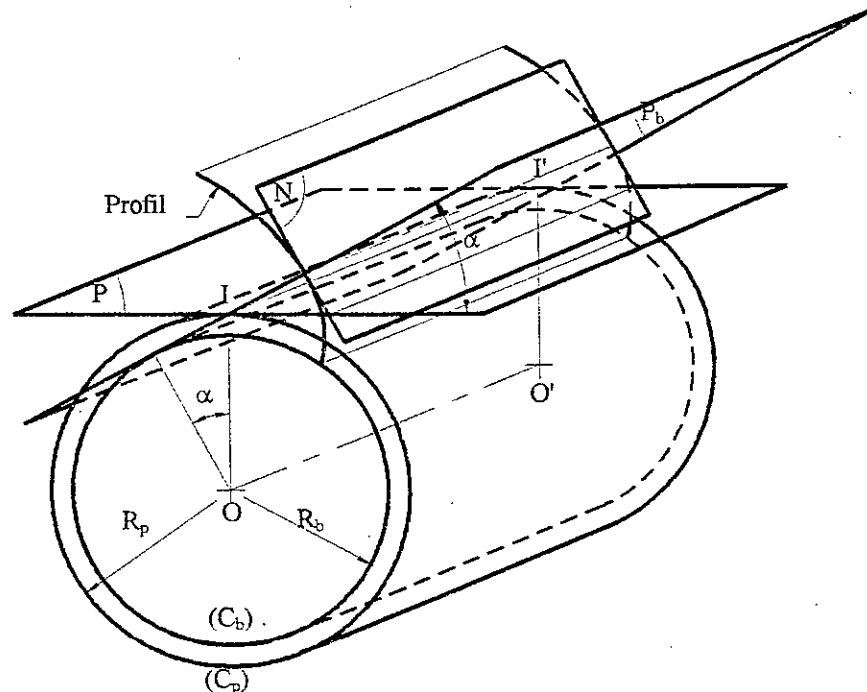


Fig.I-3 Cylindre primitif, plan de génération

La ligne d'action est la ligne suivant laquelle le point de contact se déplace. C'est donc la tangente aux deux cercles de base, sur la figure I-4 cette ligne est la droite (Δ) et le plan (P_b) appelé le plan d'action.

I-6 surfaces conjuguées de deux roues :

La figure I-4 représente deux roues de rayons de base r_{b1} et r_{b2} et de rayons primitifs r_{p1} et r_{p2} , leurs cercles de base (C_{b1}) et (C_{b2}) sont tangents au plan (P_b), et (C_{p1}) et (C_{p2}) tangents au plan (P).

$$\cos \alpha = \frac{r_{b1}}{r_{p1}} = \frac{r_{b2}}{r_{p2}}$$

lorsque (P_b) roule sans glisser sur (C_{b1}) et (C_{b2}), (P) roule sans glisser sur (C_{p1}) et (C_{p2}) d'où :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{p1}}{r_{p2}} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}}$$

Et (N) reste constamment tangent aux surfaces (P_1) et (P_2) qui sont les développantes de deux cercles (C_{b1}) et (C_{b2}).

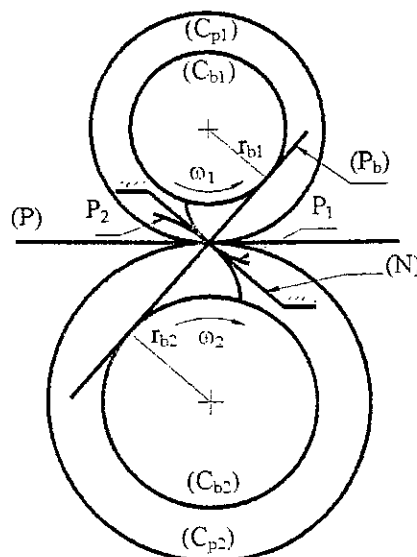


Fig.I-4 Surfaces conjuguées de deux roues

I-7 Définition du module :

On appelle module d'une denture m le quotient du pas de denture par le nombre π :

$$m = \frac{p}{\pi} \quad \text{avec :} \quad p = \frac{\pi d}{z}$$

En remplaçant p par sa valeur nous trouvons :

$$m = \frac{d}{z}$$

I-8 Élément d'une denture droite (fig I-5) :

- Angle de pression : α ($\alpha=20^\circ$ pour une denture normale).
- Diamètre primitif : $d=mz$
- Hauteur de saillie : $h_a=y.m$
- Hauteur de creux : $h_f=(y+j).m$, pour une denture normale ; $y=1, j=0.25$
- Diamètre de tête : $d_a=d-2h_a=m(z+2y)$
- Diamètre de pied : $d_f=d-2h_f=m[z-2(y+j)]$
- Pas : $p=\pi m$
- Epaisseur de denture : $s = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$ pour une denture normale.
- Intervalle de creux : $e = p - s = \frac{\pi * m}{2}$
- Largeur de la denture : $b = k m$; $k=6$ à 16 (10 à 12 valeurs courantes).
- Pour les deux roues d'un engrenage : $s_1 + e_1 = s_2 + e_2 = p$

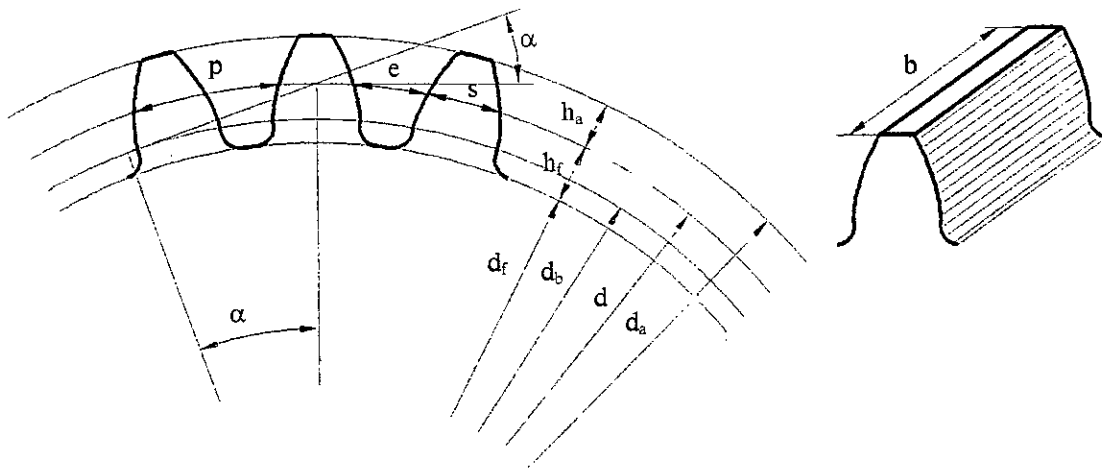


Fig.I-5 *Eléments caractéristiques d'une denture cylindrique droite*

I-9 Phénomène d'interférence :

Pour que le contact s'effectue correctement, les deux profils conjugués doivent rester constamment tangents. Dans tous les cas où le contact se fait différemment, on dit qu'il y a interférence.

C'est à dire pour le cas de denture à développante de cercle, le lieu des points de contacts est la droite T_1T_2 , on dit qu'il y a interférence quand le point de contact est à l'intérieur du segment T_1T_2 (fig I-6).
extérieur

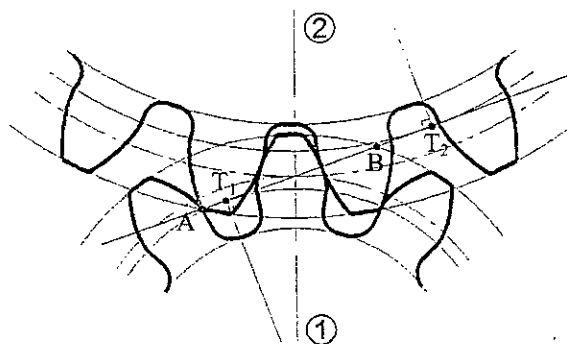


Fig I-6 *Interférence de fonctionnement*

I-10 Denture déportée :

Le déport est un mécanisme géométrique des correction de denture, qui est défini par le déplacement v de la ligne primitive de taillage (tangente au cercle primitif de denture sur lequel elle roule sans glisser durant la génération), par rapport à la ligne de référence.

Pour une denture non déportée (fig I-7) on a :

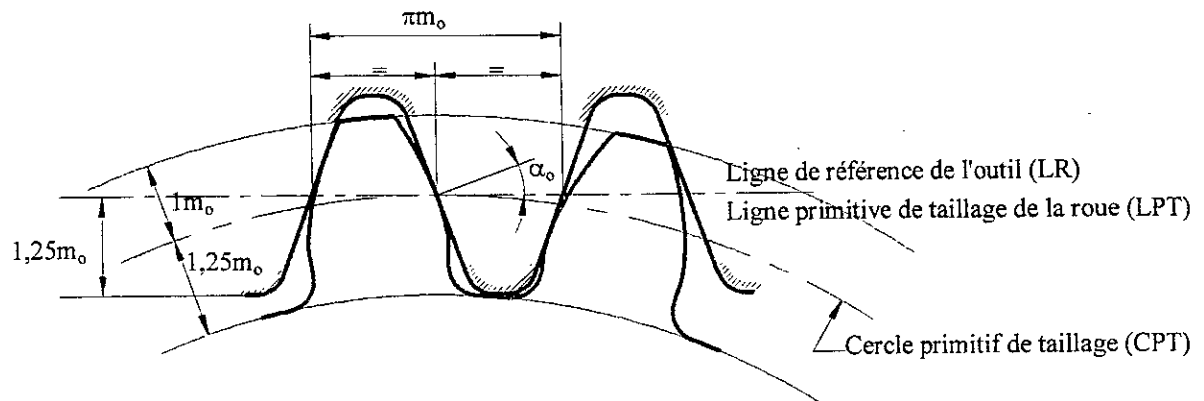


Fig.I-7 Roue taillée à denture normale

$$\text{Epaisseur} = \text{intervalle} = \frac{p}{2} = \frac{\pi m_0}{2} \quad m_0 : \text{module de la crémaillère génératrice.}$$

α_0 : angle de pression (pour une denture normalisée : $\alpha_0 = 20^\circ$)

saillie : $h_a = m_0$

creux : $h_f = 1.25 m_0$

rayon primitif : $r_p = \frac{z m_0}{2}$

pour une denture déportée, nous avons (fig I-8) :

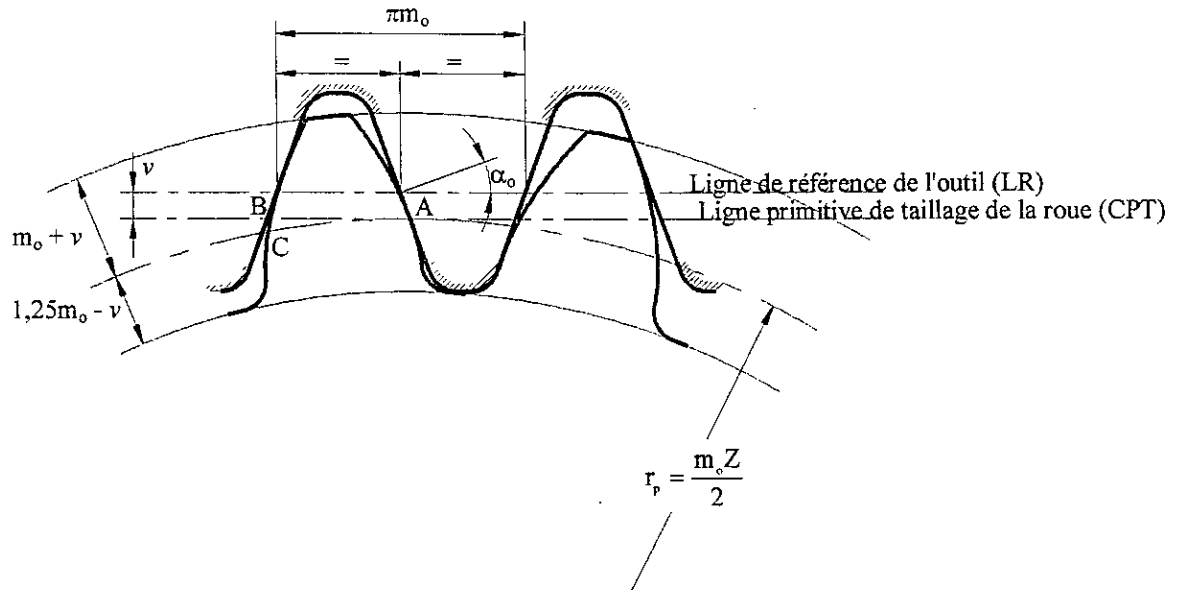


Fig.I-8 Roue taillée à denture déportée

saillie : $h_a = m_0 + v$

creux : $h_f = 1.25m_0 - v$

v est appelé déport et $x = \frac{v}{m_0}$ coefficient de déport.

Rayon primitif : $r_p = \frac{m_0}{2}$

On a donc :

Epaisseur \neq intervalle.

Epaisseur + intervalle = πm_0

Saillie $\neq m_0$

Creux $\neq 1.25m_0$

Saillie + creux = $1.25m_0$

Epaisseur de la denture : $s_p = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$

Intervalle de denture : $e_p = m_0 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$

Si la ligne de référence est à l'extérieur du cercle primitif, on a : $v > 0 \Rightarrow x > 0$

Si la ligne de référence coupe le cercle primitif, on a : $v < 0 \Rightarrow x < 0$

I-11 Entraxe normal : (fig I-9)

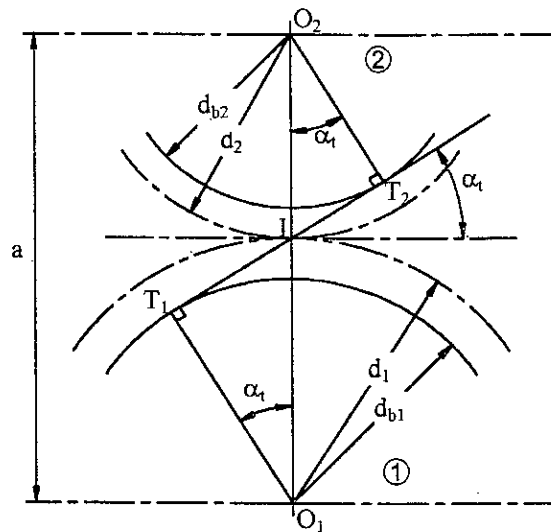


Fig.I-9 Entraxe normal

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_0 \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

I-12 Entraxe de fonctionnement :

Considérons deux roues de centre O_1 et O_2 taillées par un outil crémaillère défini par β_c et α_c .
 La roue 1 est réalisée avec un déport v_1 , la roue 2 avec un déport v_2 , soit I le point de tangence de leurs cercles de fonctionnement d'_1 et d'_2 (fig I-10)

I-13 Rapport de conduite :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{AB}{p \cos \alpha} = \frac{g_f + g_a}{p \cos \alpha} > 1 \quad AB : \text{longueur de conduite.}$$

avec : (voir figure I-11)

$$g_a = AI = AT_2 - IT_2 = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha$$

$$g_f = IB = T_1B - T_1I = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha$$

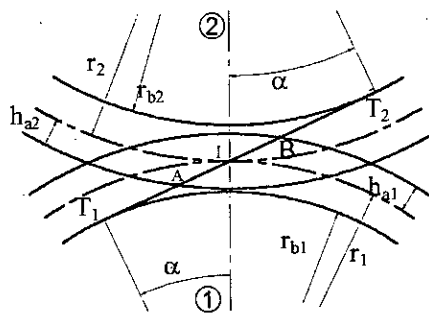


fig.I-11 Longueur de conduite

I-14 Rayon de courbure :

- La roue menante :

$$\rho_1 = T_1M + r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_1$$

- La roue menée :

$$\rho_2 = T_2M = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

d'où : $\rho_1 + \rho_2 = T_1M + T_2M = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha + r_{b2} \operatorname{tg} \alpha = (r_{b1} + r_{b2}) \operatorname{tg} \alpha$

d'une part,

d'autre part on a :

$$T_1M + T_2M = T_1I + T_2I = \underbrace{r_{p1}}_{\text{indice}} \sin \alpha + \underbrace{r_{p2}}_{\text{indice}} \sin \alpha = (r_{p1} + r_{p2}) \sin \alpha = cte$$

Donc :

$$\rho_1 + \rho_2 = cte$$

CHAPITRE II

RAPPEL DE LA GEOMETRIE DES ENGRENAGES A DENTURE HELICOIDALE

II-1 Introduction :

Les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale permettent une transmission de puissance entre deux arbres parallèles ou orthogonaux ou même occupant une position relative quelconque (engrenages gauches) où les axes appartiennent à deux plans parallèles.

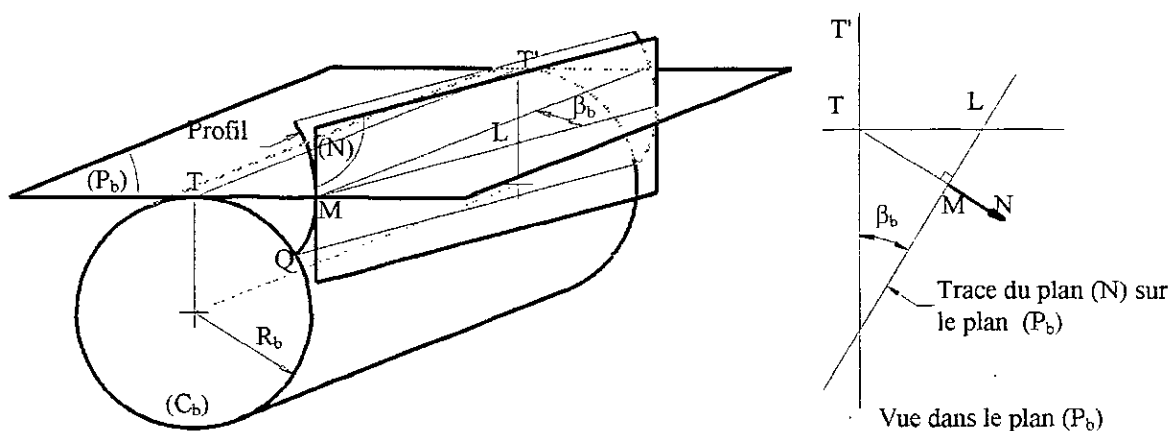
Les engrenages hélicoïdaux sont similaires aux engrenages cylindriques droits à l'exception que les dents sont taillées à angle (angle d'hélice) par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Les qualités des roues à denture hélicoïdale les font préférer aux roues à denture droite lorsqu'on recherche un fonctionnement silencieux (boîtes de vitesses d'automobiles), un très bon rendement (réducteurs de vitesse), une transmission exempte de vibrations (grande vitesse de rotation).

II-2 Surface de denture :

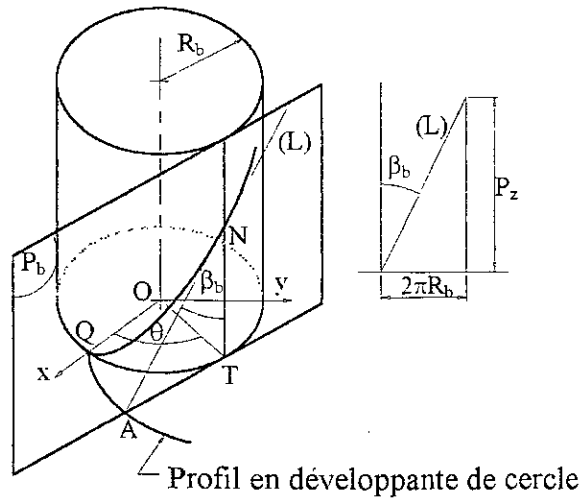
Reprenons la figure I-2 et faisons incliner le plan (N) d'un angle β_b par rapport à l'axe instantané de rotation TT' (fig II-1).

En faisant rouler sans glisser le plan (P_b) sur le cylindre de base (C_b) le plan (N) enveloppe une surface qui peut être considérée comme engendrée par la droite (L) intersection des plans (P_b) et (N). La normale N à la surface de dentures est contenue dans le plan (P_b) et perpendiculaire à la génératrice (L) elle est donc portée par la droite TM.



FigII-1 Génération d'une denture cylindrique hélicoïdale

Dans la référence [15], on trouve un calcul sur l'hélicoïde développable.



FigII-2 Hélicoïde développable

Sur la figure II-2 est représentée une hélice tracée sur le cylindre de rayon R_b .

À la figure II-2 à droite est représenté son développement, la droite (L) dans le plan (P_b) tangent au cylindre.

Le point A appartient au plan(ox,oy), par définition on peut écrire :

$$\text{arc}TQ = TA = R_b \theta$$

Le point N est tel que :

$$\frac{TN}{P_z} = \frac{R_b \theta}{2\pi R_b} = \frac{\theta}{2\pi}$$

D'où :

$$TN = \frac{P_z}{2\pi} \theta$$

P_z est le pas hélicoïdal.

En désignant par $h = \frac{P_z}{2\pi}$ (pas réduit), les coordonnées du point N et les composantes de la tangente à l'hélice s'écrivent :

$$\overline{ON} \begin{Bmatrix} R_b \cos \theta \\ R_b \sin \theta \\ h \theta \end{Bmatrix} \qquad \frac{d\overline{ON}}{d\theta} \begin{Bmatrix} -R_b \sin \theta \\ R_b \cos \theta \\ h \end{Bmatrix}$$

Soit $M(x,y,z)$ un point de cette tangente. Il satisfait la relation vectorielle :

$$\overline{NM} = \lambda \frac{d\overline{ON}}{d\theta}$$

$$\text{d'où le système d'équations : } \left\{ \begin{array}{l} x = R_b (\cos \theta - \lambda \sin \theta) \\ y = R_b (\sin \theta + \lambda \cos \theta) \\ z = h(\theta + \lambda) \end{array} \right.$$

En considérant la section passant par le plan xoy , on aura : $\lambda = -\theta$

d'où :

$$x = R_b (\cos \theta + \theta \sin \theta)$$

$$y = R_b (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

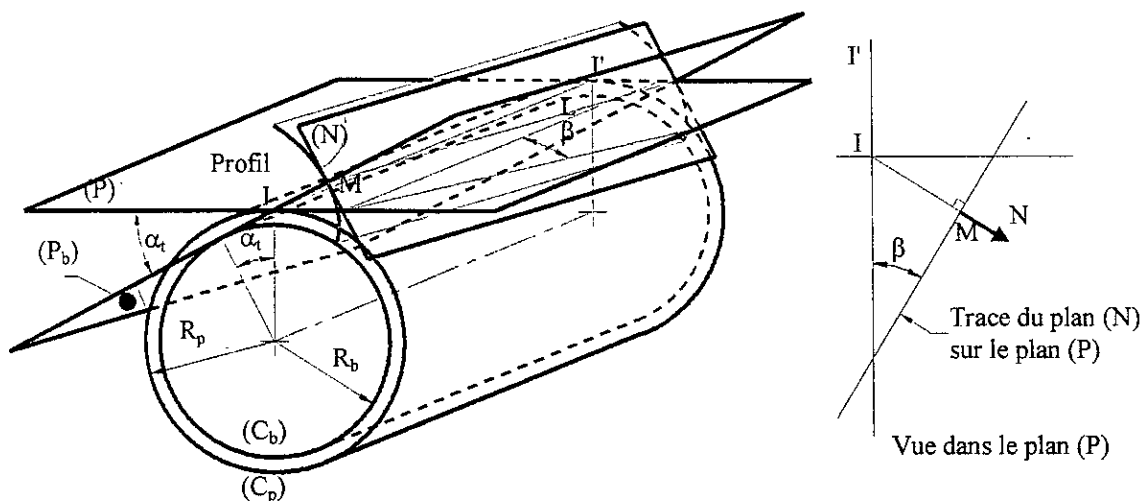
on voit donc que le profil de denture dans le plan xoy est une développante de cercle de rayon R_b .

Le plan xoy normale à oz (axe de cylindre) est choisi quelconque. Les sections de hélicoïde développable dans les plans perpendiculaires à l'axe oz sont donc des développantes de cercle identique décalées les unes des autres par déplacement hélicoïdale autour de l'axe du cylindre. Les sections cylindriques d'axe oz sont donc des hélices de même pas hélicoïdale

II-3 Génération de la denture à partir de l'outil crémaillère de taillage :

Reprenons la figure I-3 et faisons incliner (N) de l'angle β par rapport à l'axe instantané Π' (fig II-3).

Le plan (P) (plan primitif de la crémaillère génératrice) roule sans glisser sur le cylindre primitif du pignon à tailler. Dans un plan perpendiculaire à l'axe de la pièce, l'inclinaison du plan (N) par rapport à un plan perpendiculaire à (P) n'est plus l'angle α , mais l'angle α_i appelé angle de pressions apparent. Lorsque (P) roule sans glisser sur le cylindre (C_p), le plan (P_b) roule sans glisser sur le cylindre de rayon R_b .



FigII-3 Génération d'une denture cylindrique hélicoïdale par la crémaillère génératrice

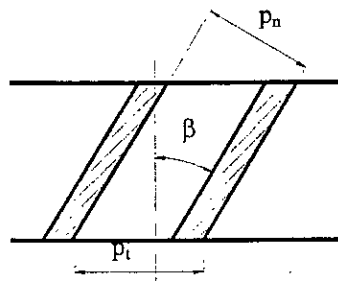
La ligne génératrice de la surface de denture est donc l'intersection des plan (N) et (P_b) .

Les surfaces de denture en développante de cercle des deux roues engrenées sont conjuguées avec le plan de génération(N). Elles sont aussi conjuguées entre elles.

Il résulte de la génération de denture que c'est le profil réel de la roue qui correspond à la crémaillère de référence, le module réel doit donc être choisi dans la série des modules normalisés, la saillie, le creux et la hauteur des dents sont pour la même raison calculés en fonction du module réel. Le tracé du profil réel est le même que celui de la denture droite de même module.

II-4 Le module apparent :

On a : $\pi d = p_t z$



FigII-4 Pas apparent, pas réel

Le module apparent est défini par :
$$m_t = \frac{d}{z} = \frac{p_t}{\pi}$$

On définit le module réel par :
$$m_n = \frac{p_n}{\pi}$$

Comme : $p_n = p_t \cos \beta$, il vient :
$$m_n = m_t \cos \beta$$

II-5 Eléments géométriques définissant la denture :

- angle de pression apparent : α_t
- angle d'hélice primitive : β
- diamètre primitif : $d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}$
- hauteur de saillie : $h_a = y m_n$
- hauteur de creux : $h_f = (y + j) m_n$

Pour une denture normale on a : $y=1, j=0.25$

- diamètre de tête : $d_a = d + 2h_a = m_n \left(\frac{z}{\cos \beta} + 2y \right)$
- diamètre de pied : $d_f = d - 2h_f = m_n \left[\frac{z}{\cos \beta} + 2(y + j) \right]$
- épaisseur de la denture :

$$\text{apparente : } s_t = \frac{p_t}{2} = \frac{\pi m_t}{2} = \frac{\pi m_n}{2 \cos \beta}$$

$$\text{réelle : } s_n = \frac{p_n}{2} = \frac{\pi m_n}{2}$$

$$\text{d'où : } s_n = s_t \cos \beta$$

- intervalle de creux pour une denture normale :

$$\text{apparent : } e_t = p_t - s_t = \frac{\pi m_t}{2} = \frac{\pi m_n}{2 \cos \beta}$$

$$\text{réel : } e_n = p_n - s_n = \frac{\pi m_n}{2}$$

$$\text{d'où : } e_n = e_t \cos \beta$$

$$\text{- largeur de denture : } b = k m_n \text{ (k=6 à 16)}$$

II-6 Phénomène d'interférence :

Le problème d'interférence théorique peut se traiter comme pour une denture droite, en se plaçant dans un plan perpendiculaire aux axes.

II-7 Condition d'engrènement de deux roues :

Pour pouvoir engrener ensemble, les deux roues doivent avoir des hélices primitives de sens contraire, l'angle d'hélice β doit être le même, comme le module réel est le même, il en résulte que le module apparent et le pas apparent ont même valeur sur les deux roues.

Celles-ci ne diffèrent donc que de sens de l'hélice et le nombre de dents.

Le module réel et les nombres de dents étant imposés, il est possible, par le choix de β , d'obtenir un entraxe donnée ; β doit rester faible pour réduire la poussée axiale.

II-8 Denture déportée :

L'étude reste applicable pour la denture hélicoïdale, mais en se plaçant dans le plan perpendiculaire à l'axe de la pièce, les éléments réels deviennent les éléments apparents.

Pour un déport $v = x m_{no}$, l'épaisseur et l'intervalle sur le cercle primitif de taillage :

$$s_p = m_{to} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_{no} \right)$$

$$e_p = \left(\frac{\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \alpha_{no} \right)$$

CHAPITRE III

LUBRIFICATION ELASTOHYDRODYNAMIQUE

III-1 Introduction :

Un film d'huile complet peut se former dans un contact Hertzien linéaire ou ponctuel pour des gammes de charges et de vitesse étendues. Les épaisseurs de ces films, pour les mécanismes réels sont typiquement de $0.01\mu\text{m}$ à $1\mu\text{m}$. [11]

La complexité du phénomène de formation du film d'huile entre les dentures conjuguées d'un engrenage est mise en évidence par le nombre de facteurs qui interviennent, certains de ces facteurs étant des plus généralement variables au cours de fonctionnement :

- géométrie de l'engrenage : rayon du courbure.
- charge sur les dentures.
- matériaux des dentures .
- cinématique de l'engrenage : vitesse de roulement et de glissement, glissements spécifiques.
- huile utilisée : viscosité, influence de la pression, influence de la température.
- états de surfaces.

Il est intéressant d'avoir une idée de la valeur de l'épaisseur minimum de film d'huile h_{\min} , car il importe que les dentures soient suffisamment écartées pour éviter le contact métal sur métal.

On peut déjà dire qualitativement que le film d'huile sera d'autant plus épais:

- que le rayon de courbure relatif sera grand .
- que la charge sera faible .
- que les vitesses de roulement seront importantes (une plus grande quantité d'huile étant amenée dans la zone de contact).
- que la viscosité de l'huile sera grande.
- que la température sera faible.

Il existe cependant une assez grande divergence dans les opinions des différents expérimentateurs, en ce qui concerne l'importance de la répercussion de ces différents facteurs. Nous pensons, cependant, que les divergences proviennent souvent du fait des conditions des essais souvent très différentes (dimension des pièces d'essais, vitesses, charge, etc....).

Dans ce travail nous considérons que le contact entre les deux dents est un contact hertzien linéaire infiniment long entre deux cylindres parallèles.

Dans ce chapitre nous allons décrire les différents approches opérés par un certain nombre d'expérimentateurs .

III-2 Equation de Reynolds généralisée :

Très souvent, on admet que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film et on place l'origine du système d'axe sur l'une des parois du contact (figure III-1). Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie, car en plaçant l'origine du système d'axe sur cette paroi, on peut poser :

$$H_1 = 0 \quad \text{et} \quad H_2 = h$$

Si par ailleurs on utilise les coordonnées cartésiennes xyz , les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

$$\text{Sur la paroi 1 : pour } y=0, \quad u = U_1, \quad v = 0, \quad w = W_1$$

$$\text{Sur la paroi 2 : pour } y=h, \quad u = U_2, \quad v = V_2, \quad w = W_2$$

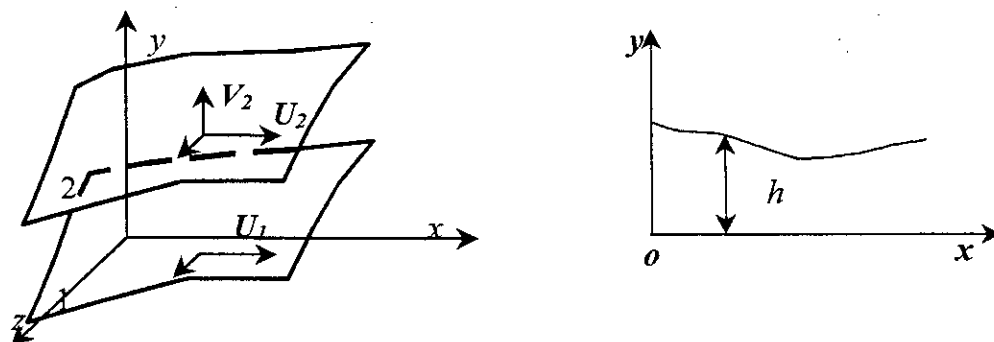


Figure III-1 Système d'axes

Pour un écoulement permanent, lorsque l'équilibre est atteint, on obtient l'équation généralisée simplifiée de Reynolds pour les fluides visqueux. Le repère étant celui représenté par la figure III-1, sur la surface de la denture, son expression est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [u_2(R_2 - F) + u_1 F] - \rho_2 u_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial z} [w_2(R_2 - F) + w_1 F] - \rho_2 w_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 v_2 \end{aligned} \quad (3-1)$$

où les fonctions R , F , G et R_2 sont défini par :

$$R = \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi \quad (3-2)$$

$$F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy \quad (3-3)$$

$$G = \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F \quad (3-4)$$

$$R_2 = \int_0^h \rho dy \quad (3-5)$$

puisque la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film, l'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux prend alors une forme simple, c'est l'équation de Reynolds qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho(u_1 - u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(w_1 - w_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho(u_1 + u_2)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(w_1 + w_2)] + 12\rho v_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (3-6)$$

III- 3 Contact Hertzien lubrifié :

III- 3-1 Géométrie générale d'un contact hertzien :

Les surfaces des deux solides 1 et 2 sont en contact en un seul point O supposé non singulier peuvent être considérés au voisinage de ce point comme des surfaces du second degré. Il est toujours possible de choisir dans le plan tangent au point de contact O, le système d'axe oxz dans lequel la distance entre les deux surfaces du contact suivant la direction normale oy s'écrit :

$$y_1 + y_2 = Ax^2 + Bz^2 \quad (3-7)$$

où A et B sont des constantes dépendant des courbures principales de chacune des surfaces en contact, de l'angle ψ que font entre eux les plans principaux normaux.

Le contact se définit donc par deux solides de révolution caractérisés par leurs rayons de courbures principaux R_{x1} , R_{z1} , R_{x2} et R_{z2} dans les plans principaux dont l'axe d'intersection OY est normal au contact et passe par le point de contact O suivant la figure (III-2). Dans ces conditions les constantes A et B qui sont des courbures, définissent la géométrie du contact dans le cas général mais dans le système d'axe particulier $oxyz$ et sont déterminées par les équations :

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{z_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} + \frac{1}{R_{z_2}} \right) \quad (3-8)$$

$$A - B = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{R_{x_1}} - \frac{1}{R_{z_1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{x_2}} - \frac{1}{R_{z_2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_{x_1}} - \frac{1}{R_{z_1}} \right) \left(\frac{1}{R_{x_2}} - \frac{1}{R_{z_2}} \right) \cos 2\psi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-9)$$

les rayons de courbures sont positifs si le centre de courbure est à l'intérieur du solide correspondant et négatif dans le cas contraire. Les courbures A et B sont de même signe, tout les points correspondant à une distance constante $y_1 + y_2$ se trouvent sur une ellipse.

III-3-2 Modèle géométrique équivalent :

Lorsque les plans principaux de chacun des surfaces du contact sont confondus, la forme géométrique des surfaces dans la zone de contact, est définie par les rayons de courbure principaux R_{x1} , R_{z1} , R_{x2} et R_{z2} situés dans les plans principaux xoy et yoZ .

La géométrie tonneau circulaire - plan est représentative de ce type de contact, (fig. III-3).

L'épaisseur du film $h(x,z)$ s'écrit dans le voisinage du contact au deuxième ordre près :

$$h = h_0 + y_1 + y_2 \quad (3-10)$$

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} \quad (3-11)$$

où : h_0 est l'épaisseur du film au centre du contact.

R_x et R_z sont les rayons de courbures équivalents du modèle défini par :

$$R_z = \frac{R_{z1} R_{z2}}{R_{z1} + R_{z2}} \quad (3-12)$$

$$R_x = \frac{R_{x1} R_{x2}}{R_{x1} + R_{x2}} \quad (3-13)$$

III-3-3 Modèle cinématique :

Dans le système d'axe $oxyz$ les rayons de courbures principaux qui définissent la géométrie du contact sont constants, par contre, l'épaisseur du film peut être fonction du temps. Du point de vue cinématique, nous définissons, (fig. III-3) les vecteurs vitesses des points M_1 et M_2 appartenant aux surfaces 1 et 2 par rapport au système d'axe $oxyz$ par leurs composantes (U_1, V_1, W_1) et (U_2, V_2, W_2) respectivement suivant ox , oy et oz .

Ce modèle géométrique et cinématique est représentatif pour les études hydrodynamiques et élastohydrodynamiques du fonctionnement d'un contact de type Hertzien tel qu'il existe entre une bille et un chemin de bague de roulement.

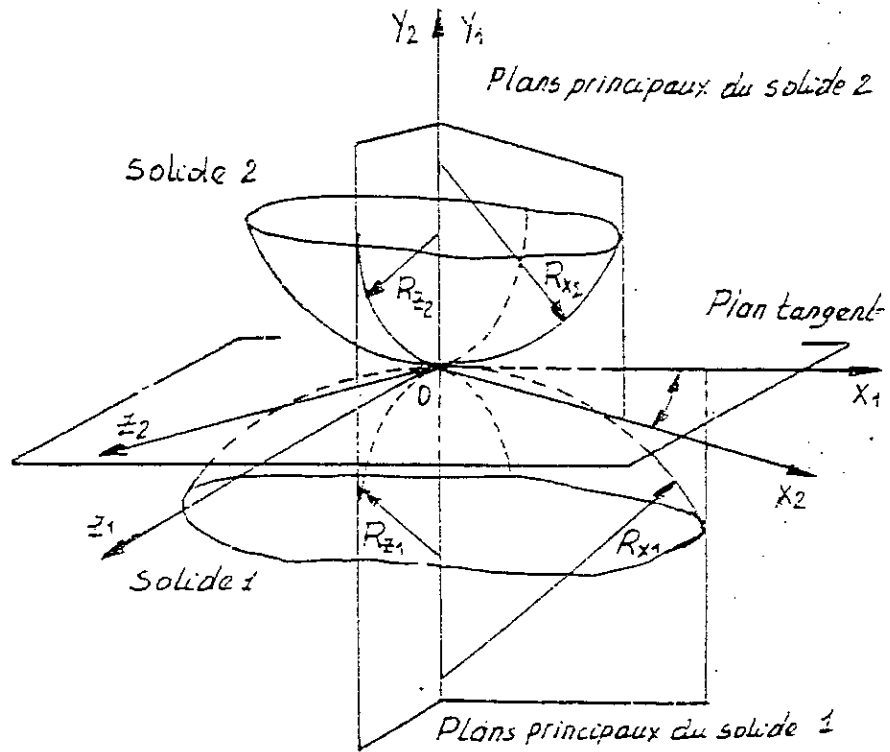


Figure III-2 Géométrie générale d'un contact Hertzien

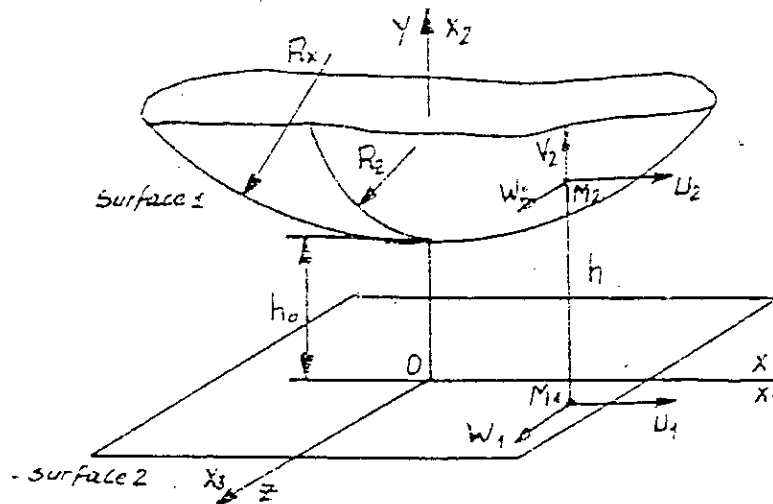


Figure III-3 Modèle géométrique et cinématique tonneau circulaire – plan

Nous allons déterminer les paramètres suivants :

L'épaisseur du film d'huile.

Le champ de pression.

Et la demi-largeur de l'air de contact.

III-4 Géométrie du film :

La géométrie non déformée par le champ de pression peut toujours être approchée par un développement limité de la forme réelle des surfaces car le champ de pression est peu étendu. Comme pour la théorie de Hertz on écrira :

$$h = h_1 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} \quad (3-14)$$

Lorsque les pressions sont suffisantes pour déformer élastiquement les surfaces, la géométrie du film s'écrit :

$$h(x, z) = h_1 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} + \frac{1}{E'} \iint \frac{p(x', z') dx' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} \quad (3-15)$$

ou en faisant apparaître l'épaisseur h_0 au centre du contact ($x=z=0$) :

$$h(x, z) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} + \frac{1}{E'} \left[\iint \frac{p(x', z') dx' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} - \iint \frac{p(x', z') dx' dz'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} \right] \quad (3-16)$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (3-17)$$

Dans le cas bidimensionnel, cette expression devient :

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{1}{E'} \int p(x') \ln \left(\frac{x-x'}{x'} \right) \frac{dx'}{d\alpha'} \quad (3-18)$$

La pression qui apparaît dans ces expressions peut être évaluée de manière approchée à partir de la théorie de Hertz, ou d'une manière exacte à partir de l'équation de Reynolds.

III-5 Théorie de Hertz :

Hertz a calculé un champ de pression elliptique provoqué par les déformations élastiques dans un contact linéaire ou ponctuel entre deux corps élastiques, au repos, lorsque :

- les matériaux sont parfaitement élastiques .
- les dimensions de l'air de contact sont petites par rapport à la courbure de la surface, ce qui permet d'approcher par une équation simple la surface de contact .
- la charge appliquée est normale à la zone de contact .
- seules les déformations verticales sont prises en compte.
- le contact entre les deux surfaces se fait sans frottement.

Dans le cas du contact linéaire (cas des engrenages), le champ de pression schématisé- figure (III-4) s'écrit par :

$$P = 0 \quad \text{pour} \quad +a < |x| < +\infty \quad (3-19a)$$

$$P = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad -a < x \leq +a \quad (3-19b)$$

avec : a demi largeur de la zone de contact, et :

$$p_0 = \frac{2}{\pi a} \frac{w}{L} \quad (3-20)$$

$$a = \sqrt{\frac{4Rw}{E_{eq} L}} \quad (3-21)$$

p_0 : pression maximale de Hertz (pour $x=0$).

w/L : charge normale par unité de longueur selon oz.

R : rayon de courbure équivalent .

E_{eq} : module d'élasticité équivalent .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3-22)$$

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (3-23)$$

ν_i et E_i sont les coefficients de pression et les modules d'Young des matériaux des massifs.

Le champ des contraintes internes au massif est représenté sur la figure (III-5)

Sur l'axe de symétrie ($x=0$) :

$$\sigma_1 = \sigma_x \quad (3-24a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_y \quad (3-24b)$$

Les variations des contraintes principales σ_1 , σ_2 et de la contrainte $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, en fonction de la profondeur sont données par la figure III-5a.

La contrainte de cisaillement passe par un maximum τ_{max} de valeur $0.3p_0$ [11], pour une profondeur $y = 0.8a$, appelée profondeur critique de Hertz.

La figure III-5b représente les variations des contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{max} en fonction de l'abscisse x/a , pour une profondeur constante $y = 0.5a$. La contrainte de cisaillement « orthogonal » τ_{xy} est alternée et impaire par rapport à x .

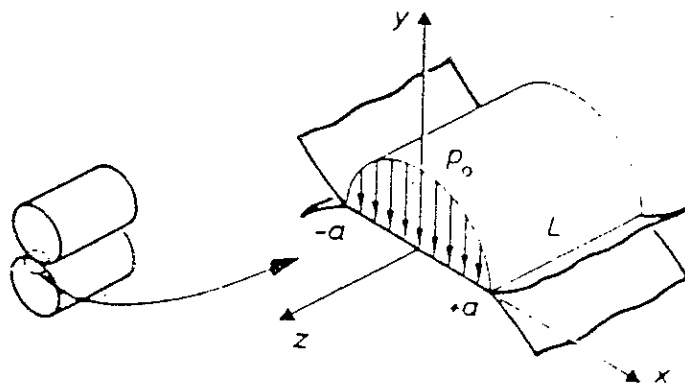


Figure III-4 Pression hertzienne dans un contact linéaire
(cylindre - cylindre)

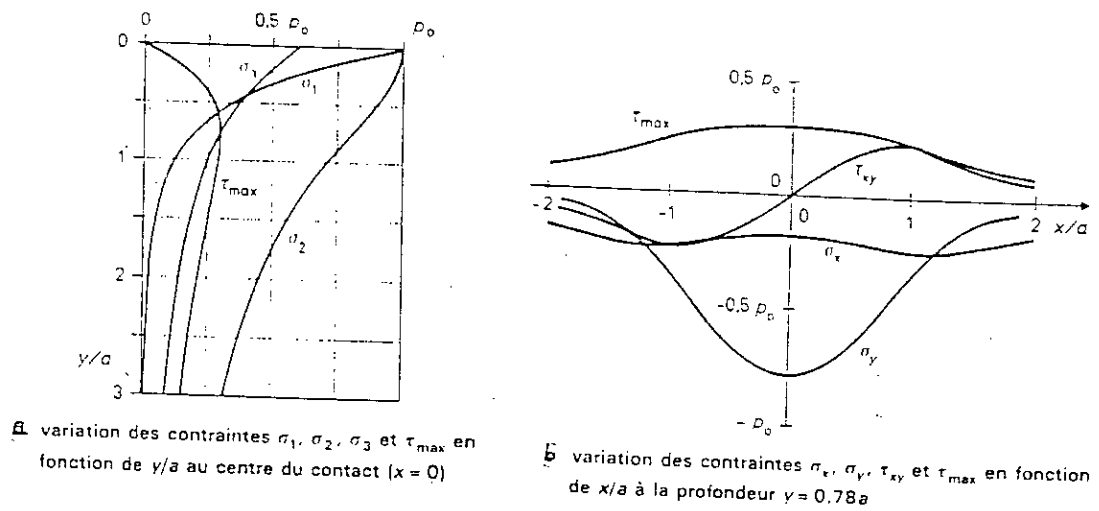


Figure III-5 Contrainte dans les massifs
(contact linéaire cylindre-cylindre)

III-6 Approche de Martin :

La plus ancienne formule de l'épaisseur minimum du film à été introduite en 1916 par Gumbel et Martin reposant en grande partie sur la théorie classique de l'hydrodynamique, en supposant que les déformations élastiques des surfaces demeurent si faibles que l'hypothèse de base de rigidité parfaite demeure valable.

$$h_{min} = \frac{2.45R\eta_0(V_{r1} + V_{r2})}{W} \tag{3-25}$$

h_{min} = épaisseur minimum du film d'huile .

R : rayon de courbure relatif .

$$\text{Avec : } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{3-26}$$

η_0 : viscosité dynamique à la température d'amenée d'huile et à la pression atmosphérique .

V_{r1} et V_{r2} : vitesse de roulement

Avec : $V_{r1} = \omega_1 R_1$ vitesse de roulement du pignon .

$V_{r2} = \omega_2 R_2$ vitesse de roulement de la roue .

III-7 Approche de Grubin 1949 :

Les investigations opérées depuis par certain nombre d'expérimentateurs ont permis de mettre en évidence que la théorie classique n'était plus applicable aux charges élevées, à cause notamment des déformations élastique des surfaces en contact, de la variation importante de la viscosité avec la pression (figure III-6), de la non uniformité de la température dans le film d'huile, et de la compressibilité de l'huile, la théorie hydrodynamique classique a été remplacée par ce qui a été appelé la théorie élastohydrodynamique .

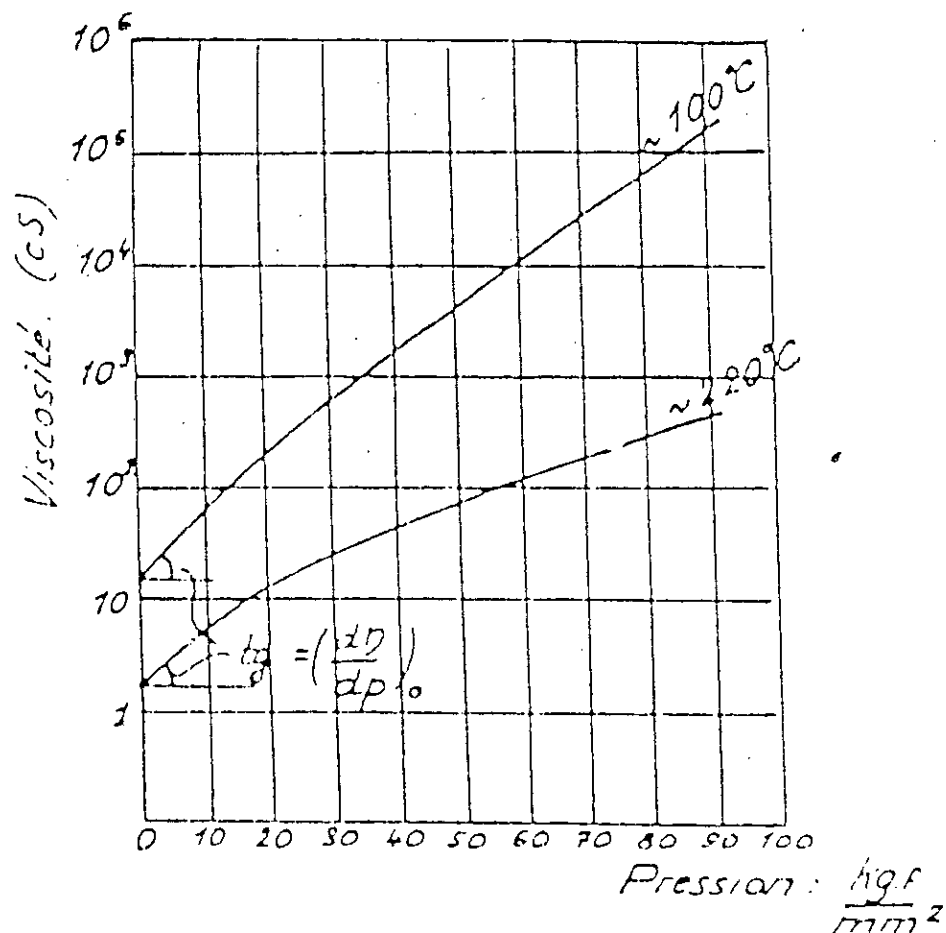


Figure III-6 Variation de la viscosité en fonction de la pression

La solution approchée du problème élastohydrodynamique de Grubin pour le contact linéaire entre deux cylindres lisses (cas des engrenages cylindriques) repose sur trois hypothèses :

- La géométrie du film d'huile, au contact et à l'entrée, est obtenue en translatant de l'épaisseur du film h_0 les déplacements résultants de la répartition de pressions de Hertz pour le cas statique et sec .

La présence du fluide est donc supposée sans effet sur la déformation des massifs .

- Le fluide est piézovisqueux , $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ et le régime est permanent et isotherme .
- La pression réelle dans le fluide tend vers l'infinie, à l'entrée de la zone de Hertz :

$$p(-a, 0) \longrightarrow \infty \quad \text{donc : } p^* \longrightarrow \frac{1}{\infty}$$

p^* pression réduite ,(fluide piézovisqueux)

$$p^* = \frac{|1 - \exp(-\alpha p)|}{\alpha} \tag{3-27}$$

le contact linéaire entre deux cylindres est assimilé à celui d'un plan rigide et d'un cylindre élastique (E) de rayon équivalent R (figure III-7).

Le champ de pression est schématisé (figure III-8)

Grubin obtient l'épaisseur du film h_{\min} , constante selon ox :

$$h_{\min} = 1.18R \left(\frac{E' \rho}{w} \right)^{0.09} \left(\frac{\eta_0 \alpha (u_1 + u_2)}{R} \right)^{0.73} \tag{3-28}$$

Cette formule est évidemment plus complexe que la formule simple de Martin.

Elle comprend les éléments suivants :

- Élément géométrique : rayon de courbure relatif R .
- Élément charge : charge unitaire W .
- Élément d'élasticité : module d'élasticité réduit E' .

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \tag{3-29}$$

avec E_1 et E_2 : modules d'élasticité de Young des deux matériaux .

ν_1 et ν_2 : coefficient de poisson (environ 0,3 pour les aciers) avec des matériaux identiques:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3-30)$$

- Élément vitesse : $u = u_1 + u_2$ (3-31)
- Élément huile :
 - a) viscosité dynamique : η_0
 - b) coefficient de variation de viscosité en fonction de pression :

$$\alpha = \left(\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dp} \right)_0 \quad (3-32)$$

La formule de Grubin est valable quel que soit le système d'unité, à condition que toutes les unités adoptées soient homogènes.

Grubin indique que sa formule est valable jusqu'à des vitesses de glissement :

$(u_1 - u_2)$ de l'ordre de 1m/s.

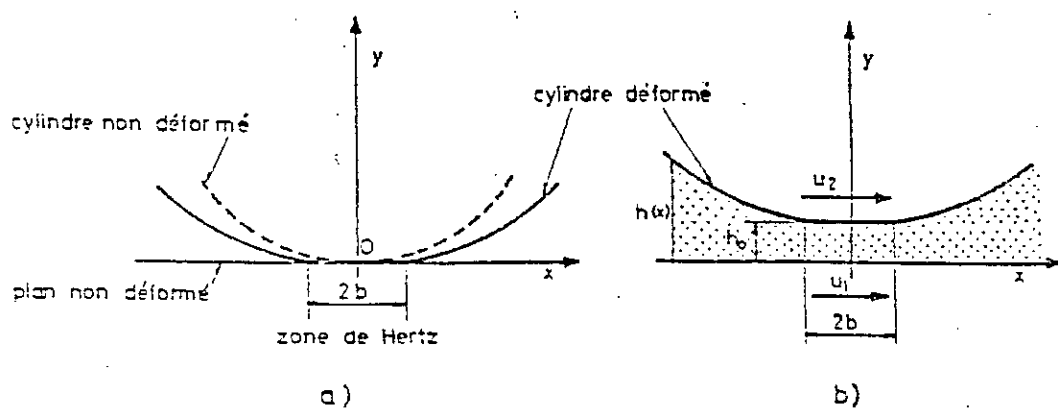


Figure III-7 Géométrie de la théorie de Grubin

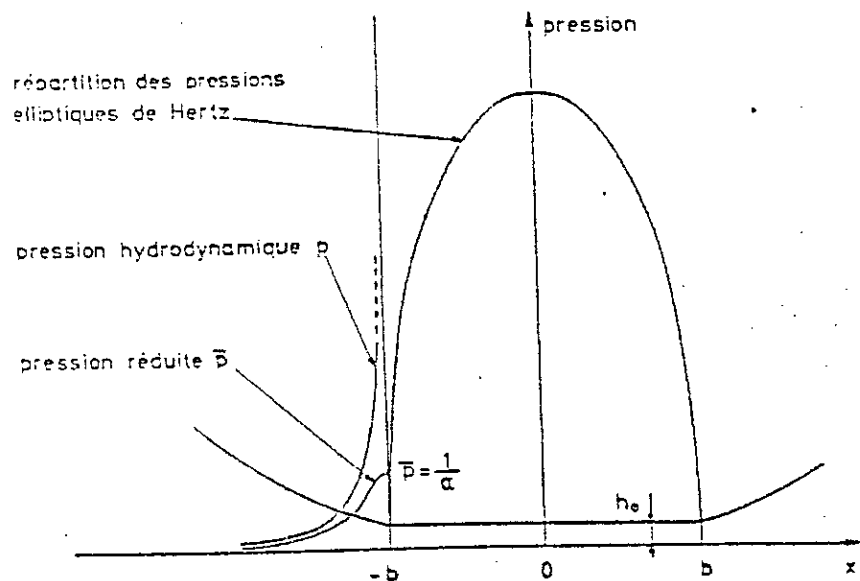


Figure III-8 Pression hydrodynamique et élastique selon Grubin

- *Influence de la charge unitaire :*

Dans la formule de Grubin on remarque la faible valeur de l'exposant 0,09 qui signifie que l'épaisseur minimum du film d'huile ne diminue que très peu lorsque la charge augmente . La figure (III-9) est tirée des essais effectifs par M.Conochie et A . Cameron[16] sur un appareil d'essai à engrenage avec cycle fermé .

Les essais ont été effectués à un entraxe de 125 mm , sur deux couples de caractéristiques suivantes :

Couple 1 :

19- 40 dent , $m = 4,25$, largeur de denture $\cong 12\text{mm}$

angle de pression $22^{\circ}30'$

acier cémenté , denture rectifiée avec dépouilles de tête de $7.5 \mu\text{m}$.

Couple 2 :

30-30 dents, $m = 4.25$, de larguer de denture = 12 mm

angle de pression non mentionné.

Acier cémenté, denture rectifiée avec dépouille de tête de $25 \mu\text{m}$

La vitesse de rotation du pignon était de 2920 tr/min.

Les résultats globaux sont groupés sur la figure III-9, les valeurs maximum correspondant à l'engrenage avec plus forte dépouille de sommet. On constate bien la faible répercussion de la variation de la charge à partir d'une certaine valeur de celle-ci.

Les valeurs résultant de la formule de Grubin on été portées à titre de comparaison, on peut vérifier qu'elles sont sensiblement situées à la moyenne.

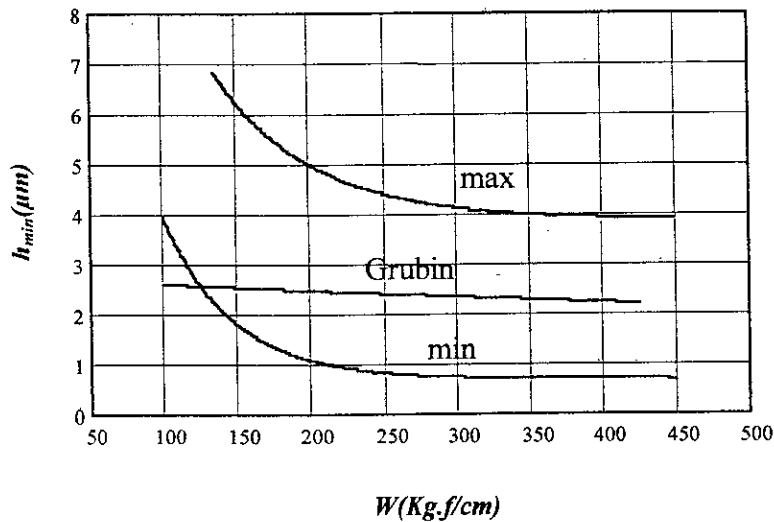


Figure III-9 Influence de la charge unitaire.

• **Influence des conditions de vitesse :**

L'épaisseur du film augmente lorsque la somme des vitesse de roulement $u = u_1 + u_2$ augmente.

Les essais de S.I.EL-Sisi et G.S.A Shawki [16] indiquent que le film à une épaisseur maximale dans les conditions de roulement pur, mais l'épaisseur du film est moins lorsqu'un glissement est introduit. Il semblerait qu'il conviendrait d'attacher une certaine importance au rapport :

$$\frac{u_g}{u} = \frac{|u_1 - u_2|}{u_1 + u_2} \tag{3-33}$$

l'épaisseur du film d'huile étant d'autant plus forte que ce rapport est faible.

- *Influence de viscosité :*

Tous les essais confirment qu'une augmentation de la viscosité entraîne une augmentation de l'épaisseur du film d'huile.

Les essais S.E.Sisi et G.S.A.Shawki indiquent en effet une augmentation de l'épaisseur du film lorsque la température d'amenée d'huile est plus faible (c'est à dire lorsque la viscosité est plus grande). Il convient toutefois de remarque que l'influence de la viscosité mise en évidence par ces essais est moins importante que nous l'indique la formule de Gubin.

III-8 Solution de Dowson et Higginson 1961 :

Les déformations élastiques des surfaces ne sont plus fixées arbitrairement, mais sont dues aux pressions hydrodynamiques.

Un calcul itératif conduit à une seule répartition de pression.

Dowson et Higginson obtiennent la répartition exacte de pression $p(x)$ et la géométrie du film $h(x)$ avec les hypothèses suivantes[16] :

- le régime est permanent et isotherme,
- le fluide est newtonien et piézovisqueux, incompressible,
- le contact est linéaire et les effets du bord négligés,
- les massifs sont élastiques et les déplacements sont calculés en supposant le massif semi-infini.

La figure III-10 représente la répartition des pressions et l'épaisseur du film dans le contact, la répartition des pressions est proche de la distribution de Hertz. Toutefois, il existe un pic de pression à la sortie du film correspondant à un étranglement de l'écoulement d'épaisseur minimum h_{\min} .

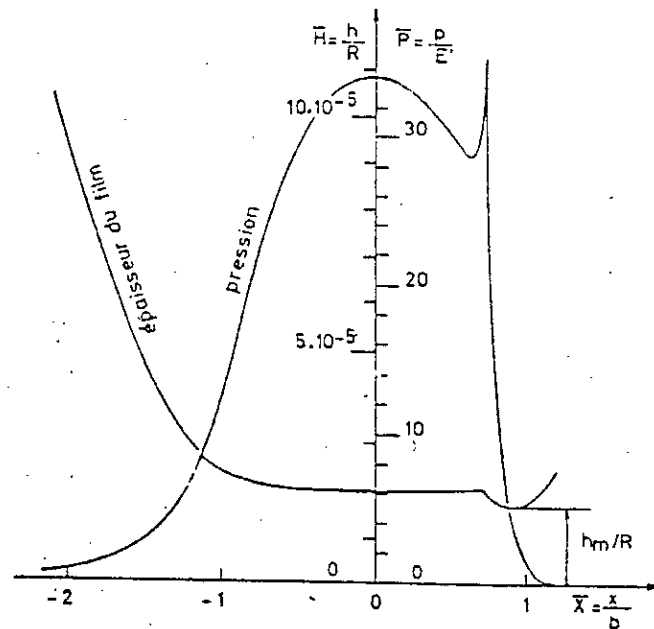


Figure III-10 Pression et géométrie selon Dowson et Higginson

Dowson et Higginson ont établis une formule empirique pour l'épaisseur du film minimale, le résultat peut être écrit comme suit[4] :

$$\frac{h_0}{R} = 1.6 \frac{(\alpha E')^{0.6} u^{0.7}}{W^{0.13}} \quad (3-34)$$

avec : $u = \frac{\eta_0(u_1 + u_2)}{2E'R}$ la vitesse adimensionnelle. (3-35)

$W = \left(\frac{w}{E'R} \right)$ la charge adimensionnelle. (3-36)

α : coefficient de piezoviscosité du fluide.

Il peut être montré que la géométrie local instantanée et les vitesses tangentielles dans le contact entre les dents d'engrenage en développante de cercle peuvent être représentées par un contact entre deux cylindres appropriés.

Ces cylindres ont des rayons égaux aux rayons de courbures locales, et tournent à la vitesse de la roue de l'engrenage, comme est montré sur la figure III-11.

Les rayons sont :

$$R_1 = r_1 \sin \alpha + s \quad (3-37)$$

$$R_2 = r_2 \sin \alpha - s \quad (3-38)$$

où : s est la distance entre le point primitif et le point de contact.

L'analogie approximative est complétée en chargeant les cylindres ensemble sous une charge égale à la charge intermédiaire des dents dans la direction de la tangente commune aux cercle de base.

Il est clair que les rayons des cylindres équivalent varient à travers la ligne de contact sur le profil de la dent, et le contact vas aussi porter la charge variable due à la charge partagée entre les paires de dent successives.

En se référant à la figure III-11 l'entraxe est :

$$a = r_1 + r_2 \quad (3-39)$$

La proportion de l'engrenage est :

$$R_g = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3-40)$$

où : N_1 et N_2 sont les vitesses des roues en tr/min.

l'entraxe des cylindres équivalent est constant et égale à $(r_1 + r_2) \sin \alpha$, où α est l'angle de pression des engrenages. Cependant, les rayons des cylindres varient en fonction de l'emplacement de point en contact sur la ligne d'action, signifie par s . Donc le rayon équivalent des deux cylindres sera, dans n'importe quel instant :

$$R = \frac{(r_1 \sin \alpha + s)(r_2 \sin \alpha - s)}{(r_1 + r_2) \sin \alpha} \quad (3-41)$$

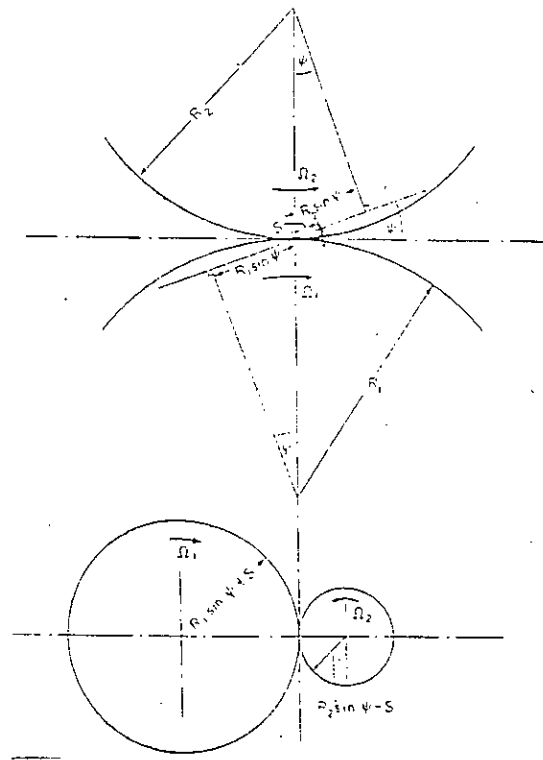


Figure III-11 Les cylindres équivalents pour les engrenages à denture droite

Les vitesses à travers la région du contact des deux cylindres sont :

$$u_1 = \frac{\pi N_1}{30} (r_1 \sin \alpha + s) \tag{3-42}$$

$$u_2 = \frac{\pi N_2}{30} (r_2 \sin \alpha - s) \tag{3-44}$$

la vitesse d'entraînement est défini comme suit :

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{\pi N_1}{30} \left[r_1 \sin \alpha - \frac{s}{2} (R_g - 1) \right] \tag{3-45}$$

il sera noté que pour $R_g = 1$, u est constante le long du chemin du contact.

L'expression (3-34), exprimée en termes dimensionnels, est :

$$h_0 = \frac{1.6 \alpha^{0.6} (\eta_0 u)^{0.7} (E')^{0.03} R^{0.43}}{W^{0.13}} \tag{3-46}$$

L'épaisseur du film peut être calculée pour le contact à n'importe quel distance s du point primitif.

Limites de contact :

pour les engrenages en développante de cercle la ligne d'action coïncide avec la tangente commun des cercles de base, mais la longueur du chemin de contact dépend essentiellement du pas diamétral. Les limites pratiques de contacte peuvent être exprimées géométriquement en termes des hauteurs de saillies de la roue et de pignon, h_{a1} et h_{a2} respectivement.

La trajectoire du contact couvre les valeurs de s de (voir figure I-11) :

$$-\left[\sqrt{(r_2 + ha_2)^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha \right] \text{ à } + \left[\sqrt{(r_1 + ha_1)^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha \right]$$

ces limites sont alors déterminées entièrement par les saillies .

dans nos calculs les saillies sont calculées par deux méthodes, pour des valeurs variables de

pas diamétrale, P défini par : $P = \frac{N}{D} = \frac{1}{\text{module}}$ (mm^{-1}):

i) saillie « Standard » :

saillie égale pour la roue et le pignon $= 1/P$

ii) les proportions anglaises standard :

$$\text{saillie du pignon} = \frac{1 + K_p}{P}$$

$$\text{saillie de la roue} = \frac{1 + K_w}{P}$$

où K_p et K_w sont déterminées comme suit en fonction de nombre de dents dans la roue et le pignon, z et z' :

a- Si $z+z' \geq 60$, K_p est la valeur supérieure de $0.4(1-z/z')$ et $0.02(30-z')$ et $K_w = -K_p$

b- Si $z+z' < 60$, $K_p = 0.02(30-z')$ et

$$K_w = 0.02(30-z)$$

Au point du contact I, on a : $s = 0$

$$\text{donc : } u = N_1 \frac{\pi}{30} r_1 \sin \alpha = N_1 \frac{\pi}{30} \left(\frac{R_g \alpha}{R_g + 1} \right) \sin \alpha \quad (3-47)$$

III-9 Formule de Hamrock et Dowson :

La hauteur du film d'huile est composée par la somme d'une hauteur hydrodynamique, d'une hauteur géométrique et de la déformation élastique.

$$h(x,y) = h_0 + s(x) + d(x) \quad (3-48)$$

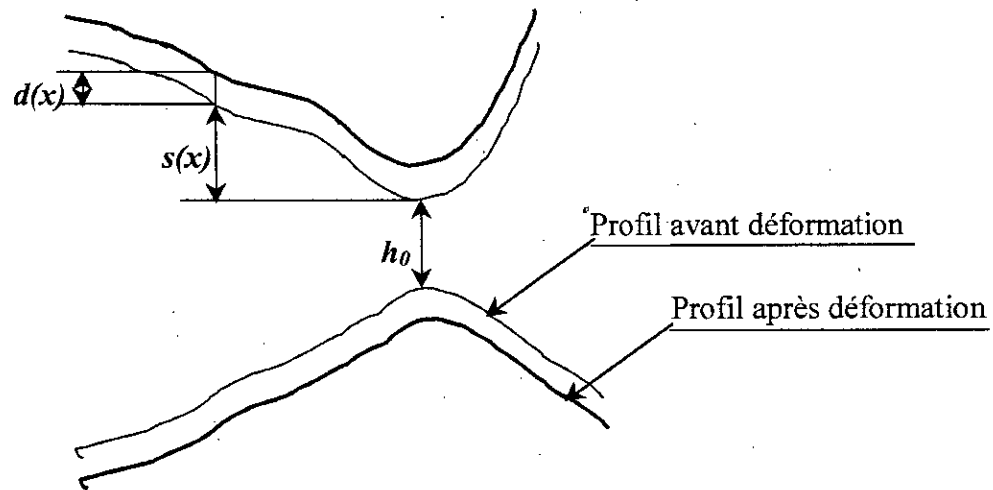


Figure III-12 La hauteur du film d'huile selon Hamrock-Dowson

- *Hauteur hydrodynamique h_0 :*

h_0 est la hauteur du film d'huile au niveau du point de contact avant la déformation du profil, sa valeur basé sur l'expérience est donnée par différentes formules selon les auteurs.

- *Hauteur géométrique :*

La hauteur géométrique $s(x)$ est la longueur entre un point de la surface active de la dent du pignon et le point correspondant de la surface active de la dent de la roue d'un point $M(x)$ avant la déformation de la surface active de la denture. Sa détermination nécessite la connaissance topographique de la surface du flanc de la denture considérée.

- *Déformation élastique $d(x)$:*

C'est la différence entre la hauteur de deux point correspondants avant et après la déformation élastique des surfaces actives.

La déformation élastique pour un contact linéaire est exprimée par la formule suivante :

$$d(x) = -\frac{2}{\pi E'} \int_0^x p(s) \ln(x-s)^2 ds + cte \quad (3-49)$$

III-9-1 Epaisseur minimum du film d'huile :

Nous présentons ici l'influence de différents paramètres sur l'épaisseur du film d'huile à l'aide de l'équation de Hamrock-Dowson appliquée aux contacts linéaires, c'est à dire pour les engrenages cylindriques à denture droite :

$$h_{min} = 1.714(E')^{0.032} (w)^{-0.128} (\eta_0 u)^{0.694} (\alpha)^{0.568} (R)^{0.434} \quad (3-50)$$

h_{min} : épaisseur minimum du film d'huile.

La théorie présentée ici considère un roulement pur des surfaces en contact (pas de vitesse de glissement). Cependant, le glissement a deux effets: il augmente l'épaisseur du film d'huile et il provoque une augmentation de température qui diminue la viscosité et donc le film d'huile.

*** effet de la charge :**

- effet direct : une augmentation de la charge entraîne une diminution de l'épaisseur du film d'huile.
- effet indirect : la charge augmente la pression de contact et donc le coefficient de piezoviscosité cela entraîne une augmentation de l'épaisseur du film.

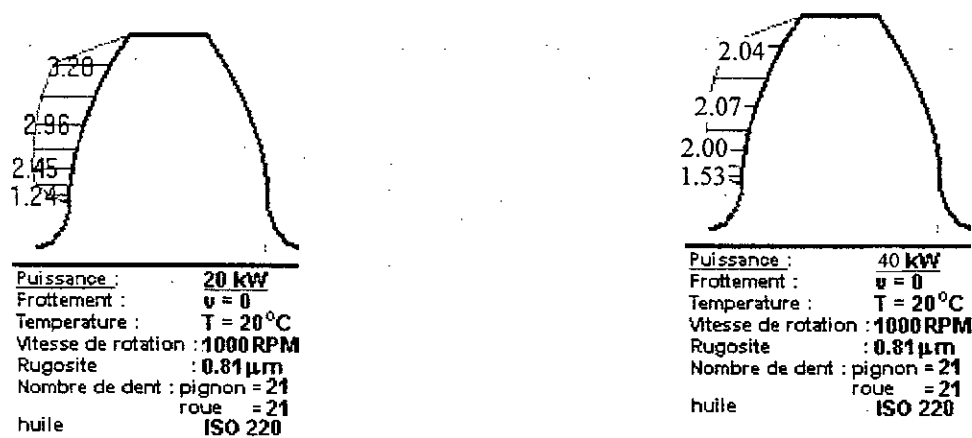


Figure III-13 Effet de la charge

*** effet de la vitesse :**

Effet direct : une augmentation de la vitesse de rotation entraîne une augmentation de la vitesse de roulement des surfaces, ce qui favorise l'effet dynamique de portance et augmente l'épaisseur du film d'huile.

La vitesse a un effet prédominant sur l'épaisseur du film d'huile.



Figure III-14 Effet de la vitesse

* effet de nombre de dent :

Le nombre de dent du pignon et de la roue ont une influence directe sur le rayon de courbure relatif R puisqu'une augmentation du diamètre de l'une ou de l'autre entraîne une augmentation de R.

Une augmentation de R entraîne une augmentation de l'épaisseur du film d'huile comme le montre l'équation (3-50)

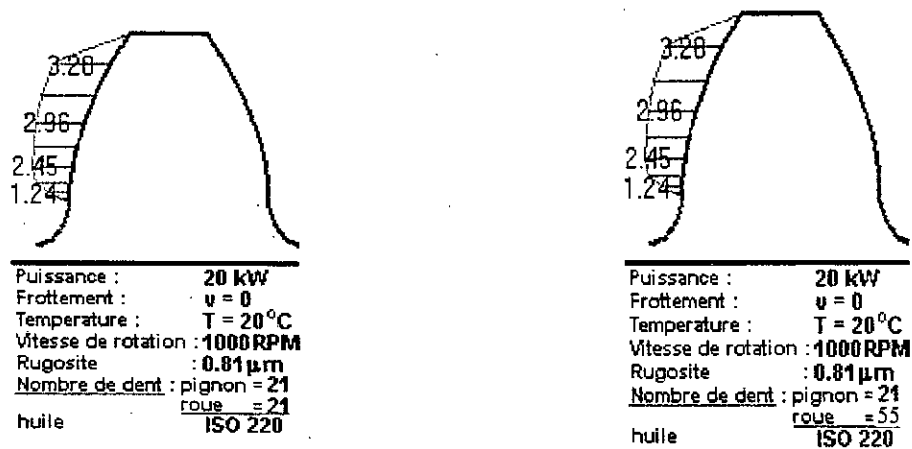


Figure III-15 Effet de nombre de dent.

CHAPITRE IV

RESULTATS ET INTERPRETATION

IV-1 Introduction :

Dans ce chapitre on calculera l'épaisseur du film d'huile en se basant sur une formule donnée et puis on tracera la variation de cette épaisseur en fonction des paramètres qui agissent sur le fonctionnement des engrenages.

IV-2 Equation de base :**IV-2-1 Equation de Reynolds :**

Dans un contact élastohydrodynamique l'équation de Reynolds est réduite à [6] :

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6\eta u \left(h - \frac{h_0 \rho_0}{\rho} \right) \quad (4-1)$$

avec :

$$u = u_1 + u_2 \quad (4-2)$$

u_1 : la vitesse de la roue menant.

u_2 : la vitesse de la roue menée.

p : la pression.

h : épaisseur de film.

h_0 : épaisseur de film au centre de contact.

ρ_0 : masse volumique du lubrifiant à la température de référence (40°C) et à la pression atmosphérique.

ρ : masse volumique du lubrifiant.

IV-2-2 Epaisseur du film :

Avec la déformation élastique, le profil du film s'exprime comme suit :

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} - \frac{2}{E'} \int_A^B \rho(\xi) \ln \left| \frac{x - \xi}{x_0 - \xi} \right| d\xi \quad (4-3)$$

avec :

x : coordonné de direction.

A : la limite d'intégration inférieur de l'équation qui égale à $-5a$.

B : la limite d'intégration supérieur qui égale à a .

x_0 : l'abscisse à la ligne du centre.

On a :

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (4-4)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{c_a p}{1 + c_b p} \right) \quad (4-5)$$

où :

η_0 : la viscosité à la température de référence et à la pression atmosphérique.

c_a et c_b égale à 0.6 et 1.7 respectivement.

Et les conditions aux limite sur la pression sont :

$$p(A) = p(B) = \left(\frac{dp}{dx} \right)_B = 0 \quad (4-6)$$

pour les relations de Hertz suivantes :

$$a = \sqrt{\frac{2R(1-\sigma^2)w}{\pi E'}} \quad (4-7)$$

$$p_0 = \frac{2w}{\pi a L} \quad (4-8)$$

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{pour} \quad \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \quad (4-9a)$$

$$p = 0 \quad \text{pour} \quad \left| \frac{x}{a} \right| > 1 \quad (4-9b)$$

l'équation (5-3) donne :

$$h = h_0 + \frac{a^2}{2R} \left[\left| \frac{x}{a} \right| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \ln \left(\left| \frac{x}{a} \right| + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \right] \quad \text{pour} \quad \left| \frac{x}{a} \right| > 1 \quad (4-10a)$$

$$h = h_0 \quad \text{pour} \quad \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \quad (4-10b)$$

avec : $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ rayon de courbure équivalent.

Dans notre étude, on détermine la hauteur du film d'huile au centre du contact h_0 , selon les résultats de l'étude menée par Cheng [11] qui donne la formule adimensionnelle suivante :

$$H_0 = 1.131U_*^{0.74} G_*^{0.74} W_*^{-0.11} \quad (4-11)$$

où :

$$H_0 = \frac{h_0}{R} \Rightarrow h_0 = R H_0 \quad (4-12)$$

$$U_* = \eta_0 \left(\frac{u_1 + u_2}{E' R} \right) \quad \text{paramètre adimensionnel de vitesse.} \quad (4-13)$$

$$G_* = \alpha E' \quad \text{paramètre adimensionnel du matériau.} \quad (4-14)$$

$$W_* = \frac{w}{E' R L} \quad \text{paramètre adimensionnel de charge.} \quad (4-15)$$

L : longueur du contact.

- Pour déterminer h_0 , R , α , p_0 , on procède comme suit :
- On calcule les rayons de courbures R_1 et R_2 en appliquant les propriétés de la développante de cercle :

$$R_1 = r_{b_1} \theta_1$$

$$R_2 = r_{b_2} \theta_2$$

avec :

$$0 < \theta < \theta_{\max}$$

$$\theta_{\max} = \frac{r_p}{r_a} \cos \alpha$$

En vertu de la développante de cercle, on a :

$$R_1 + R_2 = (r_{p_1} + r_{p_2}) \sin \alpha \quad \alpha : \text{angle de pression.} \quad (4-16)$$

R peut être ainsi facilement calculé.

- On calcule la somme des vitesses de roulement :

$$u_1 + u_2 = \frac{\pi}{30} (N_1 R_1 + N_2 R_2) \quad \text{avec } N_i \text{ en tr/min.} \quad (4-17)$$

- la valeur absolue de la vitesse de glissement :

$$|u_1 - u_2| = \left| \frac{\pi}{30} (N_1 R_1 - N_2 R_2) \right| \quad (4-18)$$

- La demi largeur de l'air de contact :

$$a = \left[\frac{8wR}{\pi L E'} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-19)$$

- La pression maximale p_0 :
- Enfin, on calcul h_0 et on trace $h(x)$

IV-3 Exemple d'application :

Considérons un engrenage cylindrique à denture droite qui est constitué d'un pignon 1 et d'une roue 2.

Les caractéristiques de cet engrenage sont données dans le tableau IV-1.

Les points remarquables de fonctionnement d'un engrenage de ce type sont situés sur la droite d'action $T_1 T_2$ (figure IV-1a) :

- Le premier point de contact A intersection du diamètre de tête du pignon avec la ligne d'action $T_1 T_2$.
- Le point de contact I correspondant au primitif.
- Le dernier point de contact B intersection du diamètre de tête de la roue avec la ligne d'action $T_1 T_2$.
- Les points C et D, transition entre un et deux couple de dents en prise.

La figure IV-1b représente, le long de la droite d'action $T_1 T_2$, les variations des paramètres cinématique, géométrique et de charge :

- La somme des vitesses de roulement $u_1 + u_2$.
- Le rayon de courbure réduit R.
- La valeur absolue de la vitesse de glissement $|u_1 - u_2|$.
- La charge linéique w/L .

La figure IV-1c représente, sur la même abscisse $T_1 T_2$, les variations des paramètres de fonctionnement du contact :

- L'épaisseur minimale du film lubrifiant h_m .
- La demi largeur de l'air de contact a .
- La pression Hertzienne maximale p_0 .

| Caractéristiques | pignon | roue |
|--|-----------------------------|--------|
| Nombre dents | 33 | 38 |
| Coefficient de déport | 0.1 | 0.0 |
| Module de taillage (mm) | 3.5 | |
| Angle de pression de taillage (°) | 20 | |
| Angle de pression de fonctionnement | 20.43 | |
| Entraxe (mm) | 124.60 | |
| Rayon de tête (mm) | 61.600 | 70.000 |
| Rayon de base (mm) | 54.267 | 62.490 |
| Rayon primitif (mm) | 57.911 | 66.585 |
| Rapport de conduite | $\varepsilon_\alpha = 1.66$ | |
| Pas de base (mm) | 10.33 | |
| Vitesse d'entrée (tr/min) | 2660 | |
| Vitesse de sortie (tr/min) | 2310 | |
| Puissance transmise (w) | 72000 | |
| Largeur de l'engrenage (mm) | 17.15 | |
| Coefficient de Poisson | 0.3 | |
| Module de Young (GPa) | 210 | |
| La viscosité de lubrifiant (Pa.s) | $\eta_0 = 0.037$ | |
| Coefficient de piézoviscosité (Pa^{-1}) | $1.5 \cdot 10^{-8}$ | |
| Masse volumique (Kg/m^3) | 7890 | |

Tableau IV-1 Caractéristiques de l'engrenage.

La fig.IV-1b montre que :

- Le rayon de courbure R et la vitesse totale de roulement u_1+u_2 varient peu, moins de 20% .
- La vitesse de glissement u_1-u_2 s'annule au primitif.
- La charge normale linéique w/L varie brutalement en C et D.

En ce qui concerne les paramètres de fonctionnement du contact, on observe que :

- L'épaisseur minimale h_m varie peu, ce qui est dû à sa quasi insensibilité à la charge normale.
- La demi-largeur de la zone de contact a et la pression Hertzienne maximale p_0 sont plus sensibles à la charge normale, mais globalement demeurent assez faibles.

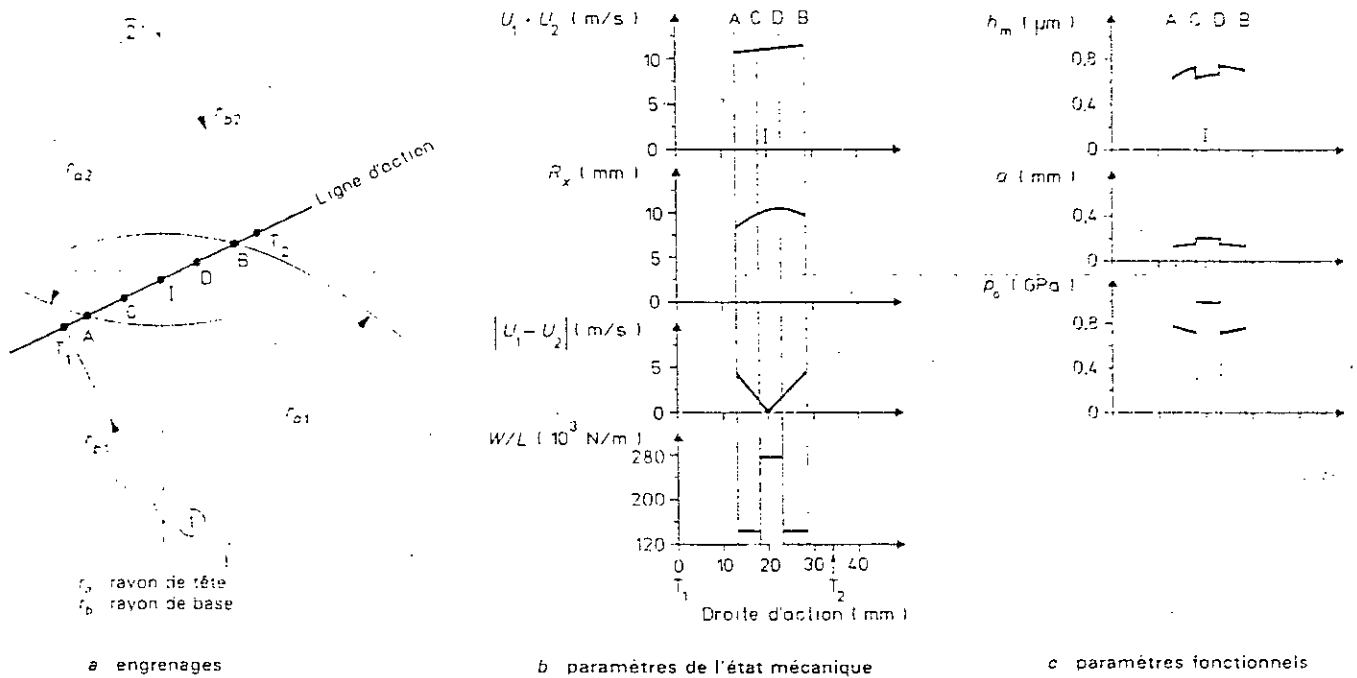


Figure IV-1 Variation des paramètres le long de la droite d'action.

Pour illustrer la variation de l'épaisseur du film $h(x)$ (figure IV-2) on choisit, à titre d'exemple, le point C dont les caractéristiques sont les suivantes :

- rayon de courbure réduit :

$$R = 10.67 \text{ mm}, \quad \text{avec : } R_1 = 18.772 \text{ mm} \\ R_2 = 24.720 \text{ mm}$$

- somme des vitesses de roulement :

$$u_1 + u_2 = 11.212 \text{ m/s}$$

- vitesse de glissement :

$$|u_1 - u_2| = 0.73 \text{ m/s}$$

- charge linéique normale :

$$w/L = 272 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

- demi largeur de la zone de contact :

$$a = 0.179 \text{ mm}$$

- épaisseur du film au centre du contact :

$$h_0 = 0.801 \text{ } \mu\text{m}$$

- la pression Hertzienne maximale :

$$p_0 = 0.97 \text{ Gpa}$$

Donc on a les fonctions suivantes :

$$p = 0.97 \sqrt{1 - \frac{x^2}{32041}} \quad \text{pour : } \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \quad (4-20a)$$

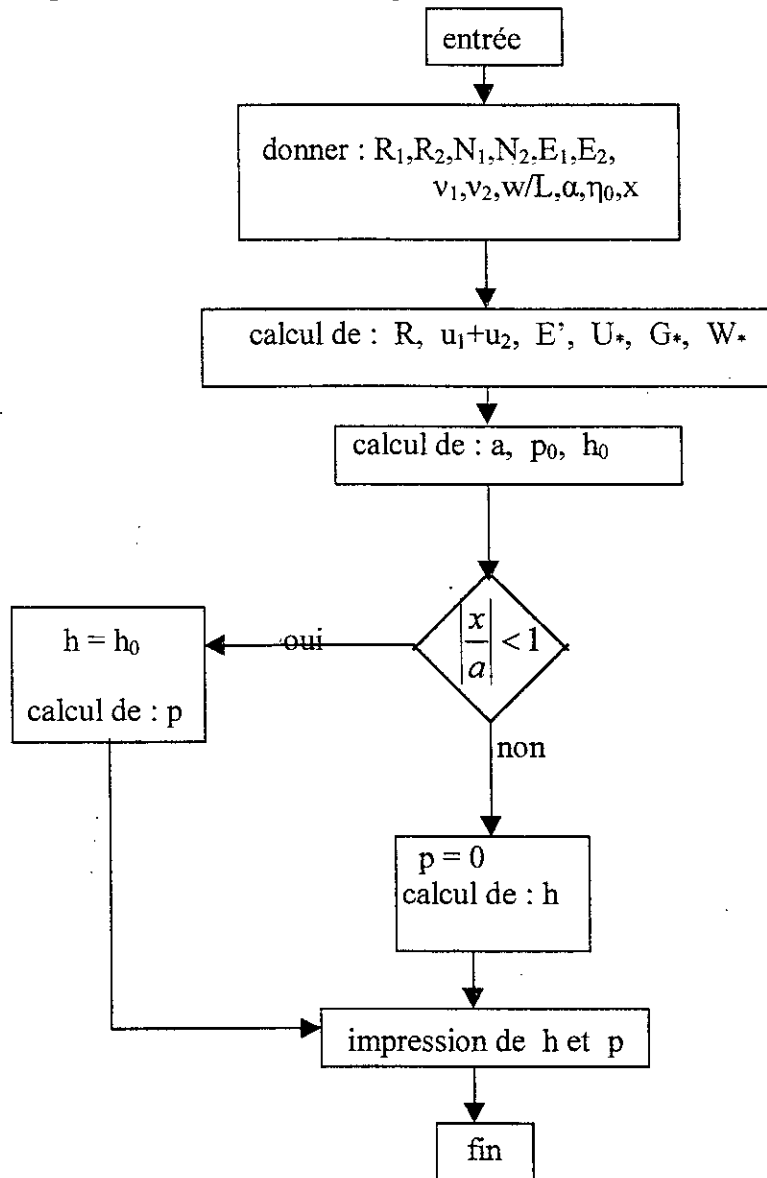
$$p = 0 \quad \text{pour : } \left| \frac{x}{a} \right| > 1 \quad (4-20b)$$

$$h = 0.801 + 1.5 \left[\left| \frac{x}{179} \right| \sqrt{\frac{x^2}{32041} - 1} - \ln \left(\left| \frac{x}{179} \right| + \sqrt{\frac{x^2}{32041} - 1} \right) \right] \quad \text{pour : } \left| \frac{x}{a} \right| > 1 \quad (4-21a)$$

$$h = 0.801 \quad \text{pour : } \left| \frac{x}{a} \right| < 1 \quad (4-21b)$$

avec : x en (μm), h en (μm), p en (Gpa).

IV-4 Organigramme de calcul de h et p :



IV-5 Influence de déport :**IV-5-1 Denture droite :**

Le tableau IV-2 représente les valeurs de h_0 et R pour des coefficients de déport différents :

| | $x_1 = 0.1,$ | $x_2 = 0.0$ | $x_1 = 0.3,$ | $x_2 = 0.1$ |
|--------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| points | $R(mm)$ | $h_0 (\mu m)$ | $R(mm)$ | $h_0 (\mu m)$ |
| A | 8.69 | 0.787 | 9.576 | 0.790 |
| C | 10.67 | 0.801 | 11.36 | 0.854 |
| I | 10.82 | 0.813 | 11.403 | 0.851 |
| D | 10.86 | 0.8128 | 11.51 | 0.868 |
| B | 6.63 | 0.852 | 10.526 | 0.874 |

Tableau IV-2 Influence de déport sur h_0 (denture droite).

IV-5-2 Denture hélicoïdale :

Le tableau IV-3 représente les valeurs de h_0 et R pour des coefficient de déport différents ($\beta = 20^\circ$) :

| | $x_1 = 0.1,$ | $x_2 = 0.0$ | $x_1 = 0.3,$ | $x_2 = 0.1$ |
|--------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| points | $R(mm)$ | $h_0 (\mu m)$ | $R(mm)$ | $h_0 (\mu m)$ |
| A | 8.482 | 0.7176 | 9.468 | 0.8050 |
| C | 10.695 | 0.7964 | 11.296 | 0.8470 |
| I | 10.798 | 0.8013 | 11.448 | 0.8486 |
| D | 10.849 | 0.8067 | 11.541 | 0.8510 |
| B | 9.491 | 0.8214 | 10.425 | 0.8603 |

Tableau IV-3 Influence de déport sue h_0 (denture hélicoïdale).

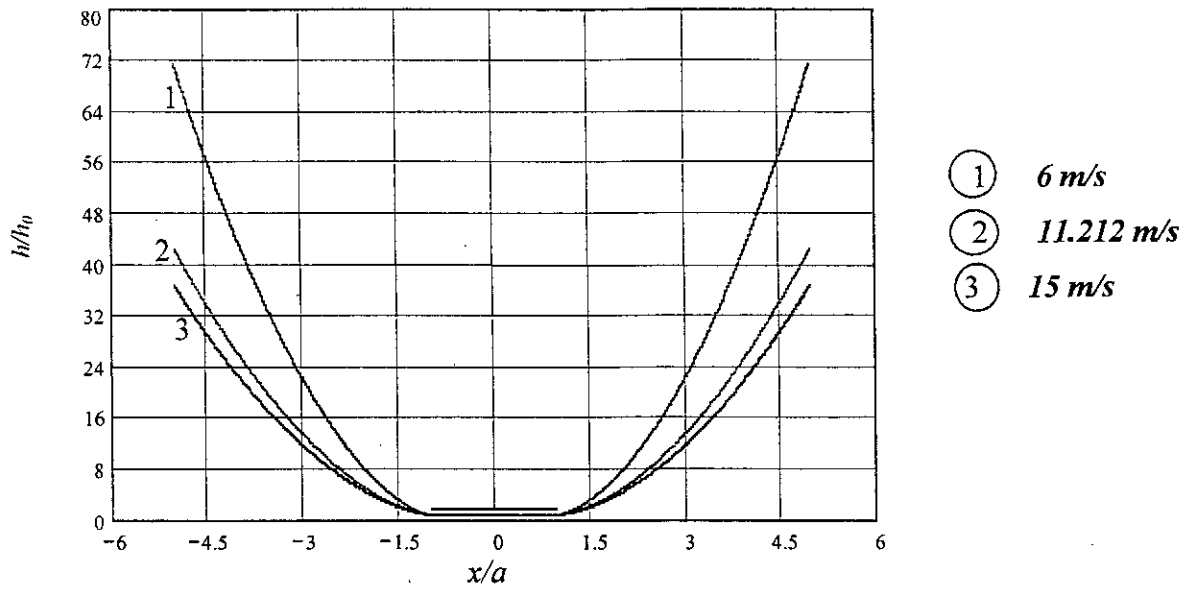


Figure IV-2 Variation de l'épaisseur de film d'huile le long de la zone de contact pour différentes vitesses de roulement (u_1+u_2)

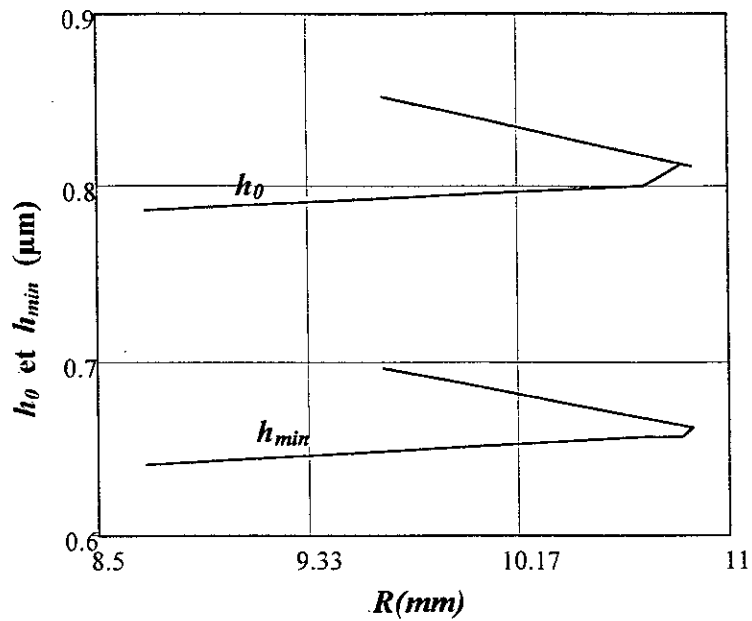
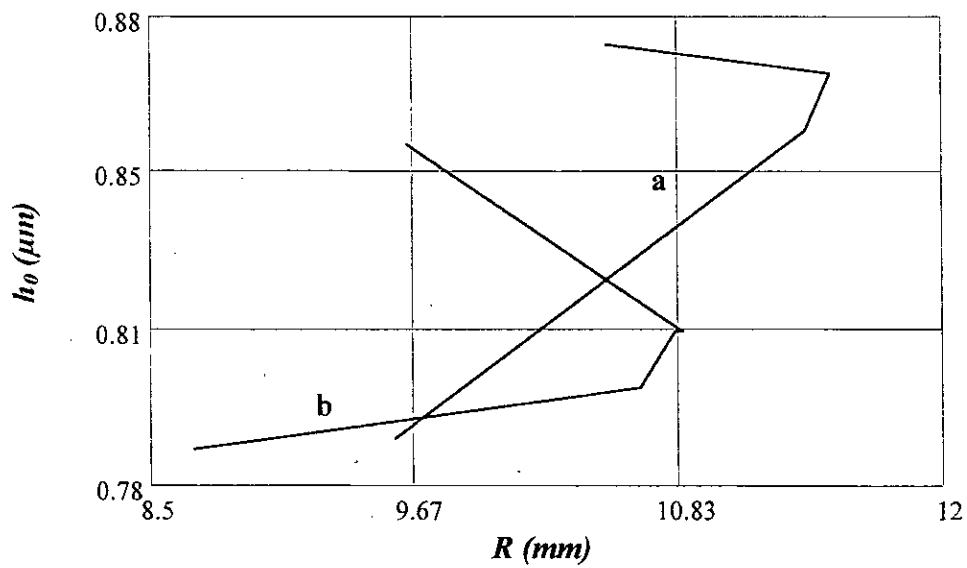


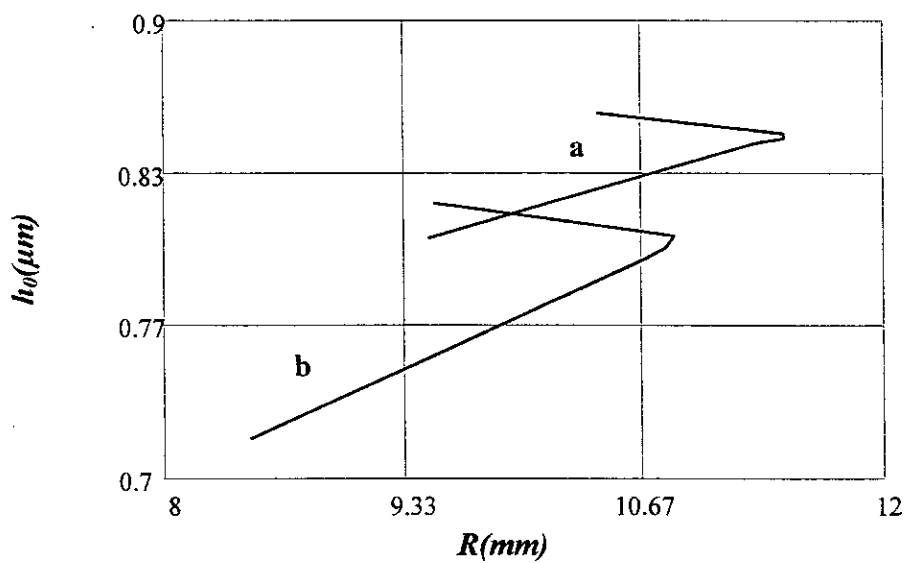
Fig. IV-3 Variation de h_0 et h_{min} en fonction du rayon de courbure réduit
Pour : $x_1=0.1$, $x_2=0.0$



a : $x_1 = 0.3, x_2 = 0.1$

b : $x_1 = 0.1, x_2 = 0.0$

Figure IV-4 Influence de déport sur h_0 (denture droite).



a : $x_1 = 0.1, x_2 = 0.0$

b : $x_1 = 0.3, x_2 = 0.1$

Figure IV-5 Influence de déport sur h_0 (denture hélicoïdale).

IV-6 Champ de pression :

Pour tracer le champ de pression il faut résoudre l'équation de Reynolds (équation 3-6) dont les coefficients sont non linéaires. Cette résolution est très difficile analytiquement, mais elle peut être réalisée par différentes méthodes d'approximation, entre autre, la méthode des éléments finis, ou par la méthode des différences finies.

Organigramme de résolution (par la méthode des différences finies)[8] :

- Calcul du point de contact sur le profil de la dent par les équations suivantes (voir figure I-1) :

$$x = \frac{R_b}{\cos\theta} \cos(\text{inv}\theta)$$

$$y = \frac{R_b}{\cos\theta} \sin(\text{inv}\theta)$$

- Calcul de la déformation élastique en résolvant l'équation suivante :

$$d(x, y) = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi E} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy'$$

- Calcul de la hauteur du film d'huile :

$$h(x, y) = h_0 + s(x, y) + d(x, y)$$

- Calcul de la pression du fluide par l'équation 3-6 par itérations jusque l'on arrive à la précision voulue.

La résolution directe de l'expression donnant la pression n'étant pas possible, nous nous contentons d'indiquer les résultats graphiques obtenus par la référence [4] qui illustrent les variations de cette pression dans la zone de contact (fig. IV-7 et fig.IV-8), x étant mesuré suivant la direction du profil.

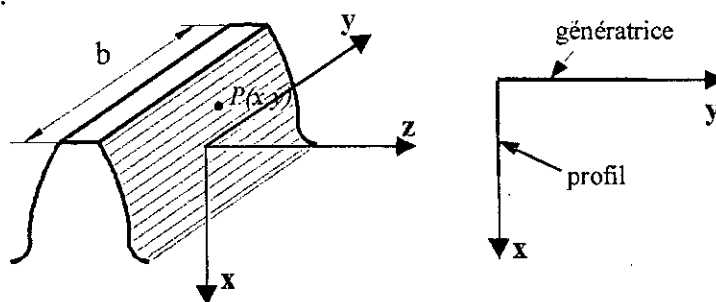


Figure IV-6 Système d'axe sur le profil de la dent.

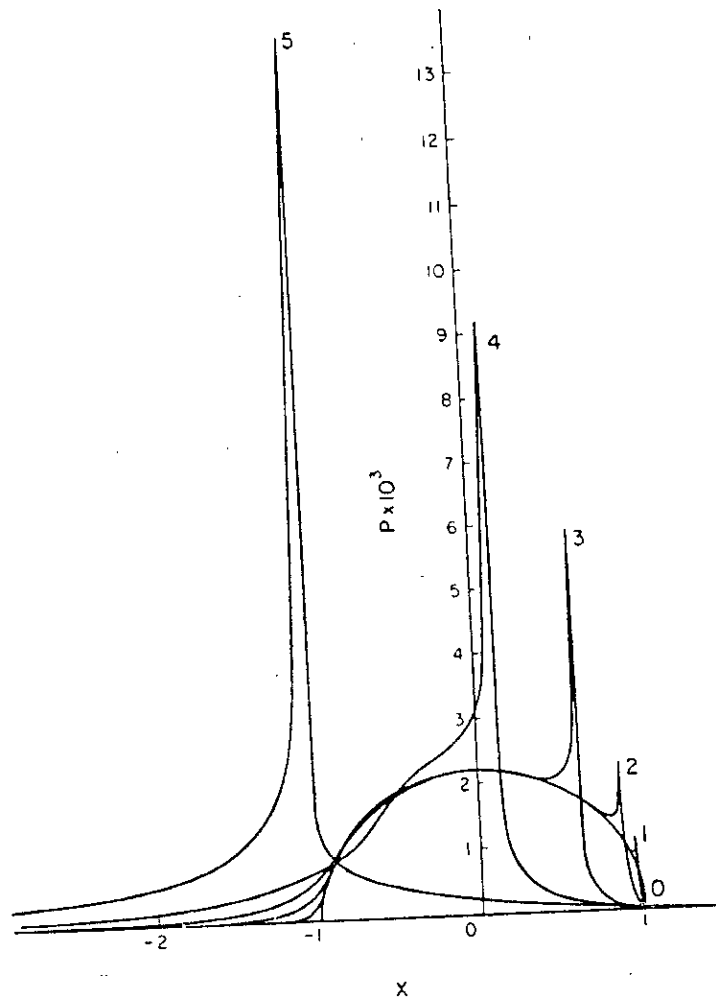


Figure IV-7 Distribution de la pression pour un lubrifiant incompressible.
 $W_*=3.10^{-5}, G_*=5000, U_*= (0) 0(\text{contact sec}), U_*= (1) 10^{-13}, U_*= (2) 10^{-12}, U_*= (3) 10^{-11}, U_*= (4) 10^{-10},$
 $U_*= (5) 10^{-9}.$

Avec :
 U_*, G_*, W_* (voir les formules : 4-13, 4-14, 4-15).
 $P = p/x, X = x/a$

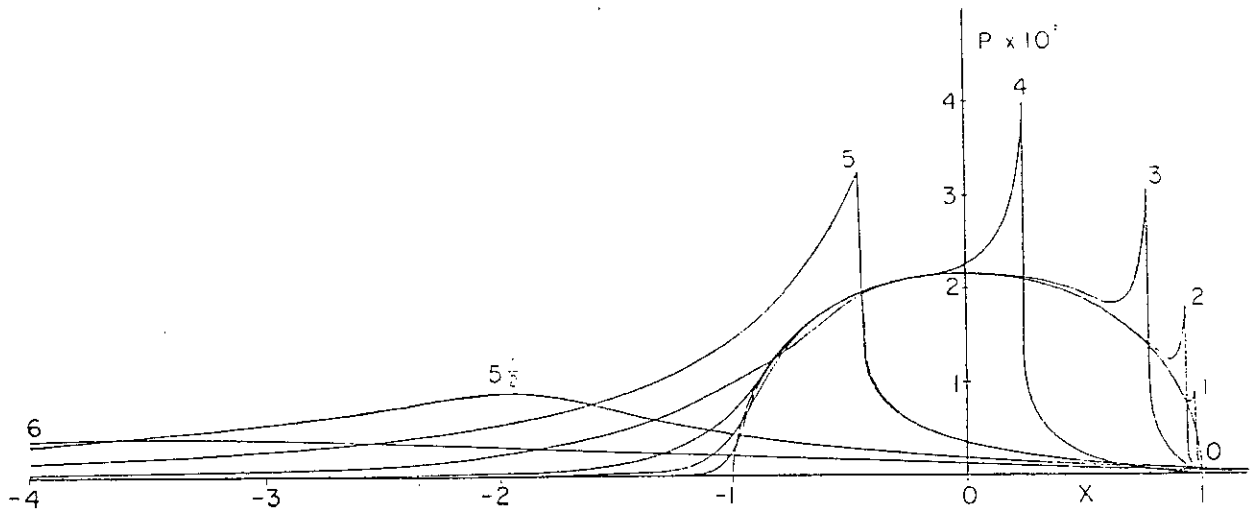


Figure IV-8 distribution de la pression pour un lubrifiant compressible.
 $W_* = 3 \cdot 10^{-5}$, $G_* = 5000$, $U_*(0) = 0$ (contact sec), $U_*(1) = 10^{-13}$, $U_*(2) = 10^{-12}$, $U_*(3) = 10^{-11}$, $U_*(4) = 10^{-10}$,
 $U_*(5) = 10^{-9}$, $U_*(51/2) = 10^{-8.5}$, $U_*(6) = 10^{-8}$.

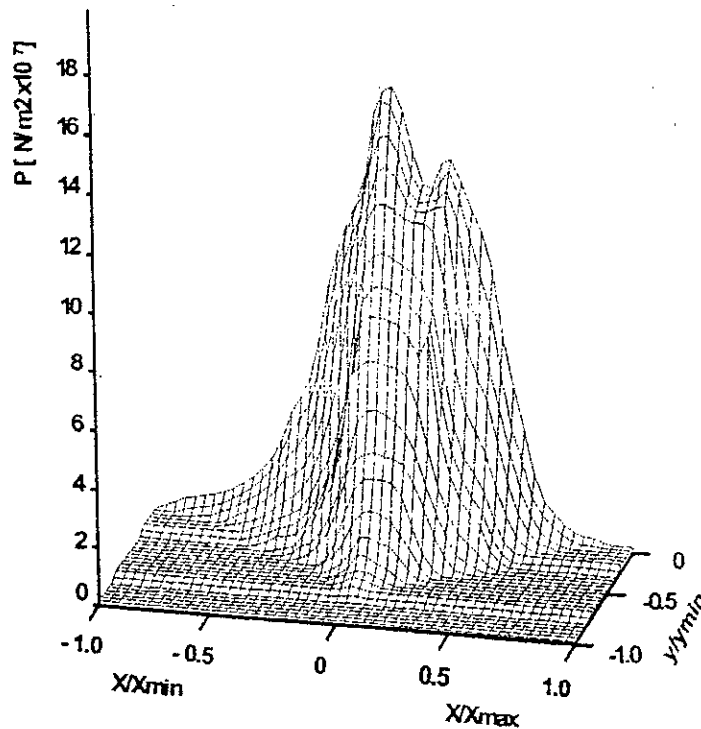


Figure IV-9 Champ de pression dans un point de contact sur le chemin d'action.

- Interprétation :

La figure IV-2 représente les variations de l'épaisseur du film d'huile le long de la zone de contact pour le même point de fonctionnement (point C), pour différentes vitesses de roulement. On remarque que l'augmentation de la vitesse de roulement entraîne une augmentation de h_0 ce qui démunie le rapport h/h_0 . Donc pour des vitesses de roulement plus élevées il faut un film d'huile plus épais.

La figure IV-3 donne les variations de h_0 et h_{min} en fonction de rayon de courbure réduit R . On voit que les courbes ont presque même allure, comme on peut remarquer que l'épaisseur du film au centre de contact h_0 est plus élevée que h_{min} pour le même point de fonctionnement.

Sur la figure IV-4 on représente l'influence de déport sur h_0 pour la denture droite. On voit que lorsqu'on augmente la valeur de déport le rayon de courbure réduit augmente de même pour l'épaisseur de film h_0 .

La figure IV-5 représente l'influence de déport sur l'épaisseur du film h_0 pour la denture hélicoïdale. On remarque la même chose que pour la denture droite.

Pour les mêmes valeurs de déport, les valeurs de R et h_0 pour la denture droite sont pratiquement peu différentes par rapport à ceux de la denture hélicoïdale.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons étudié la lubrification des engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale, en traitant la géométrie de la denture, les équations qui régissent la lubrification, les différentes approches faites dans ce domaine, et le calcul de l'épaisseur du film.

D'après nos calculs, nous remarquons que l'épaisseur du film d'huile commence à augmenter de point A (point d'intersection de cercle de tête du pignon et la ligne d'action) jusqu'au point B (point d'intersection de cercle de tête de la roue et la ligne d'action), mais l'augmentation entre les points C et D (les points de transition entre deux couples de dents en prise) est très faible.

Le rayon de courbure réduit augmente aussi du point A jusqu'au point D, et qu'il diminue brusquement au point B.

Sur la formule de l'épaisseur du film d'huile, nous constatons que :

- l'effet du module de Young de chacun des massifs est faible. Il est de même de celui de la charge normale. Ceci est le signe de la grande rigidité du film EHD.
- Par contre le coefficient de piézoviscosité, la viscosité et la somme des vitesses de chaque surface ont des effets importants sur l'épaisseur du film. Ceci est la marque de la prépondérance de l'effet hydrodynamique de l'entraînement sur cette épaisseur.
- Le pic de pression à la sortie de la zone haute pression correspond à la présence d'un bourrelet. Son effet sur la portance est faible, mais celui sur la champ de contrainte dans les massifs peut être important.

Pour la continuité de ce travail, nous recommandons une étude qui :

- Intégrera les rugosités des surfaces.
- Intégrera l'effet de la température.
- Tiendra compte de la turbulence du fluide de lubrification.

ANNEXE I

ETUDE DYNAMIQUE

1- Poussées sur les dentures :

1-1 Engrenage cylindrique à denture droite :

F_n effort normal exercé par la denture menante sur la denture menée, dirigée suivant la ligne d'engrènement, et supposé concentré au milieu de la denture (figure 1) :

$$w = F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha}$$

Avec α angle de pression.

F_t composante tangentielle (daN)

$$F_t = \frac{\text{couple moteur}}{\text{rayon de base du pignon moteur}} = 980000 \frac{\text{puissance (KW)}}{N_1 (\text{tr / min}) r_1 (\text{mm})}$$

F_r composante radiale (daN)

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha$$

1.2- Engrenage hélicoïdal :

Effort exercé par la denture menant sur la denture menée :

Effort normal :
$$F_n = \frac{F_t}{\cos \beta \cos \alpha}$$

Composante tangentielle :

$$F_t = 980000 \frac{\text{puissance (KW)}}{N_1 (\text{Tr / min}) r_1 (\text{mm})}$$

composante radiale :

$$F_r = \frac{F_t}{\cos \beta} \operatorname{tg} \alpha$$

Composante axiale : $F_x = F_t \cos \beta$

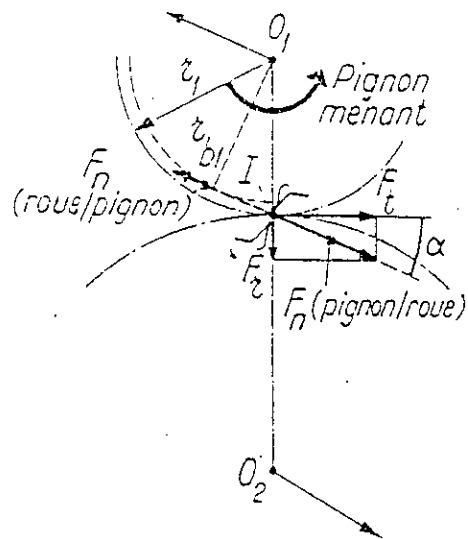


Fig.1 Engrenage parallèle à denture droite : efforts

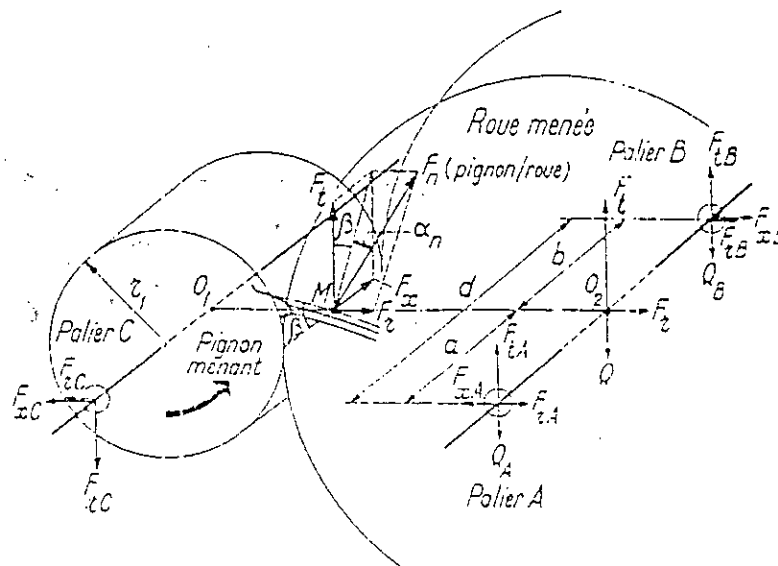


Fig.2 Engrenage parallèle à denture hélicoïdale : efforts

ANNEXE II

EFFETS INFLUANT SUR L'ÉPAISSEUR DU FILM

1- Effet de l'échauffement :

L'écoulement n'est pas parfaitement isotherme. L'échauffement du fluide dans la zone de génération de pression provoque une diminution de son épaisseur. Un facteur de correction thermique est défini de la manière suivante :

$$H(T) = \Phi_T H_0$$

Avec :

$$\phi_T = \frac{1 - 13.2 \left(\frac{P_0}{E'} \right) L_T^{0.42}}{1 + 0.213(1 + 2.23.S^{0.83}) L_T^{0.64}}$$

Où :

$$L_T = \left(\frac{-\partial\mu}{\partial T} \right) \frac{u_1 + u_2}{4K_f} \quad (\text{paramètre thermique}).$$

$$S = 2 \left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right) \quad (\text{paramètre cinématique}).$$

on a :

$$\frac{-\partial\mu}{\partial T} = \frac{\beta}{T^2} \mu$$

car :

$$\mu(T) = \mu(T_0) \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

2- Effet de l'alimentation en lubrifiant :

l'approche de Dowson, dans le domaine de pression qui nous concerne, se traduit par un facteur de correction ϕ_A défini à partir de la demi-largeur du contact a , de l'épaisseur du film h_0 en condition de lubrification surabondante et de l'abscisse d'entrée du film X_e , tel que :

$$\phi_A = \left(\frac{m-1}{m_0-1} \right)^{0.29}$$

avec :

$$m = X_e / a$$

$$m_0 = 1 + 3.06 \left[\left(\frac{R}{a} \right)^2 H_0 \right]^{0.58}$$

3- Effet de la microgéométrie des surfaces :

Il s'agit des conséquences de ce qui est appelé rugosité des surfaces.

Les aspérités des surfaces influent sur :

- la génération de pression et le débit dans le convergent, donc sur la séparation elle-même .
- la raideur, les pressions et le frottement dans le contacte.

Seul le premier de ces effets sera abordé ici. Il est encore très étudié. Retenons l'approche de Patir et Cheng pour sa simplicité. Elle se traduit par un facteur de correction Φ_R . Ce facteur dépend de l'écart-type des distributions des hauteurs des rugosités R_{a1} et R_{a2} de chaque surface, de leur orientation par rapport aux vitesses de roulement u_1 et u_2 et de leur appartenance à une surface lente ou rapide (voir tableau A-II 1).

Dans ce tableau, les rugosités des deux surfaces sont égales :

$R_{a1} = R_{a2} = R_a$ et Ra/h_0 est supposé petit.

| Sens des rugosités par rapport aux vitesses de roulement u_1 et u_2 | R_a/h_0 | | |
|--|-----------|------|------|
| | 0 | 0.5 | 1 |
| Transversale | 1 | 1 | 1 |
| Longitudinale | 1 | 0.85 | 0.42 |
| Isotrope | 1 | 1.07 | 1.29 |

Tableau A-II 1 Facteur de correction Φ_R en fonction des rugosités.

En résumé : pour un contact réel, retenons que l'épaisseur pondérée du film au centre du contact \bar{h}_0 peut être exprimée par l'expression :

$$\bar{h}_0 = \phi_T \phi_A \phi_R h_0$$

Et qu'elle est typiquement de l'ordre de 0,5 μm à 50% près.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. HENRIOT- Traité théorique et pratique des engrenages- ed. Dunod Paris Tome 1 et 2, 5^{ème} édition 1983.
- [2] D. DOWSON, G.R HIGGINSON- Elasto-hydrodynamic lubrication – ed. RERGAMON PRESS 1977.
- [3] H. BELHANECH- Lubrification elasto-hydrodynamique- Cours mécanique des contacts 5^{ème} année E.N.P.
- [4] C.M. RODRIEWICZ, V. SRINIVASAN- Elasto-hydrodynamic lubrication in rolling and sliding contact- Transactions of the ASME, october 1972.
- [5] B.J. HAMROK, D. DOWSON- Isothermal Elasto-hydrodynamic lubrication of point contacts- Journal of lubrication technology, April 1976.
- [6] L. RIACH- Etude de la lubrification elasto-hydrodynamique des engrenages spiro-coniques- Thèse de magister, E.N.P. 2000.
- [7] K.L. WANG, H.S. CHENG- A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears, part 1 Analysis- Journal of mechanical design, January 1981, Vol. 103.
- [8] Lubrification elasto-hydrodynamique- Laboratoire de mécanique des contacts, département génie mécanique développement- I.N.S.A, Lyon 1983.
- [9] Louis FLAMAND- Fatigue des surfaces - Technique de l'ingénieur - B5055 Vol. BD1 1993.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] M. BOUAZIZ- Transmission de puissance par engrenages- Cours de construction 4^{eme} année E.N.P. 2000.
- [11] G. HENRIOT- Engrenages, éléments pratique de définition, de dessin et de calcul- Technique de l'ingénieur B636, B637, B638.
- [12] G. DROUIN, M. GOU, P.THIRY, R. VINET- Eléments de machines, 2^{eme} édition, École Polytechnique de MONTREAL.
- [13] M. BOUAZIZ- Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle – Thèse de Doctorat, 1995.
- [14] G. HENRIOT- La lubrification des engrenages et ses difficultés.