

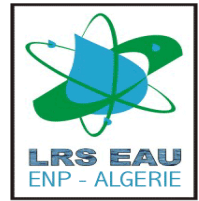
République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Hydraulique

Laboratoire de Recherche des Sciences de l'EAU (LRSEAU)



Thèse de Magister

Présentée par

Nabil SMAKGHI

Ingénieur d'Etat en Hydraulique

TITRE

**Modélisation et simulation numérique
d'écoulements diphasiques
sans reconstruction d'interfaces**

Soutenue le 25 Avril 2006

Devant le jury

Président	Pr. M. K. BERRAH : Professeur ENP
Directeurs de thèse	Melle. S. BENMAMAR : Chargée de cours ENP Pr. A. KETTAB : Professeur ENP
Examineurs	M. S. BENZIADA : Chargé de cours ENP M. M. BERKANI : Docteur Ingénieur - Chargé de cours ENP M. A. BILEK : Docteur - Chargé de cours ENP

A la mémoire de mon père...

Remerciements

Le travail rapporté dans ce mémoire a été initié à l'origine au niveau de l'Institut Nationale de Recherche en Informatique et en automatique- INRIA de Rocquencourt – France dans le cadre du projet euro- méditerranéen ESIMEAU. Par conséquent, je tiens à témoigner ici toute ma reconnaissance ainsi que ma gratitude au Professeur M. K. Berrah, ex-Directeur de l'Ecole Nationale Polytechnique, pour la confiance qu'il a indéniablement bien voulu placer en moi en m'octroyant ce stage.

M. F. Dabaghi, chargé de recherche à l'INRIA, m'a accueilli au sein de son équipe pendant une durée de 6 mois. Je lui en témoigne à lui aussi toute ma gratitude. Je ne saurais oublier toutes les séances de travail, tumultueuses, tardives mais O combien avantageuses que j'ai passées sous sa tutelle. Sous sa direction à l'INRIA, j'ai eu l'opportunité d'aborder un problème d'actualité et d'accéder ainsi à la dimension du calcul numérique avancé.

Je remercie également mon ami A. Benkenida, Docteur chercheur à l'Institut Français du Pétrole, qui a bien voulu sacrifier ses vacances pour me faire bénéficier de ses précieux conseils et de son expérience très fructueuse dans le domaine du calcul numérique des écoulements. Eternelle reconnaissance cher Adlène !

Je tiens aussi à dire ici toute ma reconnaissance aux membres du jury, en l'occurrence MM. S. Benziada, M. Berkani & A. Bilek, qui ont eu l'extrême amabilité de rapporter le présent travail.

En outre, je tiens à exprimer toute ma gratitude au Professeur A. Kettab qui m'a accueilli au sein de son laboratoire LRS EAU et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée pour l'achèvement de cette thèse.

A la fin, ce fragment est entièrement consacré à celle à qui je dois le plus, en l'occurrence ma directrice de thèse, Mlle Saadia Benmamar, que j'ai connue d'abord comme enseignante au département d'hydraulique de l'ENP et que j'ai appréciée ensuite comme promotrice lors de mon projet de fin d'études d'ingénieur. Une motion toute particulière ne peut que lui être allouée en toute loyauté. Les mots ne sont sans doute pas assez forts pour lui exprimer en ce lieu toute ma gratitude et toute ma profonde sympathie pour son aide agissante et les intarissables encouragements qu'elle n'a eu de cesse de me prodiguer tout au long de ce travail. Si je pouvais me permettre un fort modeste souhait, ce serait celui que nous puissions continuer à collaborer ensemble pour de nombreuses années encore que Dieu nous accorderait dans sa miséricordieuse magnificence.

Comme il est de coutume, je ne saurais oublier l'ensemble des membres de ma famille ainsi que tous mes amis qui n'ont jamais hésité le moindre instant à se tenir à mes côtés afin de me soutenir lors des moments relativement difficiles.

Juste un simple mot...Un grand merci à tous !

ملخص

من خلال هذه الأطروحة نقدم دراسة لجريان ثنائي الأطوار بالاعتماد على نموذج رياضي أحادي الطور بدون إعادة تشكيل الطبقة الفاصلة بين الطورين. تم الحصول على معادلات النموذج الرياضي بجمع معادلات انحفاظ كمية الحركة لكل طور و المعدلة بالنسبة للزمن. لتسهيل الدراسة قمنا بإهمال تحول المادة، التوتر السطحي، الاضطراب و أخيرا الانزلاق المحلي. لحساب معادلات كمية الحركة تم الاعتماد على طريقة الأحجام المتناهية و المخطط العددي رانج كوتا \ كرانك نكلسون لحساب الزمن. بعد ذلك قمنا بحساب معادلة انتقال الطور باستعمال مخطط عددي من نوع FCT. النتائج المتحصل عليها أظهرت توافقا جيدا مع النتائج النظرية، العددية و التجريبية لعدة باحثين.

Résumé

Nous présentons une modélisation mathématique et un outil pour la simulation numérique des écoulements diphasiques basés sur un modèle à un fluide et une méthode de capture de front sans reconstruction d'interfaces. Les équations du modèle sont obtenues en sommant les équations de la quantité de mouvement des deux phases moyennées dans le temps. Pour simplifier le modèle nous avons négligé le changement de phase, les tensions de surface, la turbulence et le glissement local entre les deux phases. Les équations de la quantité de mouvement ainsi obtenues sont résolues par une méthode volumes finis pour la discrétisation spatiale. L'avancement en temps est assuré par un schéma semi implicite à trois pas fractionnaires du type Runge Kutta/Cranck Nicholson. L'équation de transport pour le taux de présence est résolue explicitement par un schéma FCT. Des écoulements monophasiques et diphasiques de diverses configurations sont étudiés et les résultats numériques obtenus illustrent un bon accord entre nos valeurs et celles de référence.

Summary

We present a mathematical modeling and a numerical tool to compute two-phase flows based on one-fluid model and a front-capturing method without any interface reconstruction procedure. The governing equations of the model are obtained by adding of the momentum equations of each phase averaged in time. To simplify the model it's assumed that no phase change occurs, that not local slip exists between both phases and that no turbulence is present. The equations of the momentum thus obtained are solved by a finit volumes method for the space discretization. Advance in time is ensured by a Runge Kutta/Cranck Nicholson three fractional steps semi implicit scheme. The interface transport is performed by using an explicit FCT scheme. One phase and two-phases flows with various configurations are studied and the numerical results obtained illustrate a good agreement between our values and those of reference.

Résumé

Nous présentons une modélisation mathématique et un outil pour la simulation numérique des écoulements diphasiques basés sur un modèle simplifié (à un fluide) et une méthode volumique de capture de front sans reconstruction d'interfaces. Les équations du modèle sont obtenues en sommant les équations de la quantité de mouvement des deux phases moyennées dans le temps. Pour aboutir à un modèle simple, nous nous sommes placés dans le cas des écoulements sans changement de phase et nous avons négligé le glissement local entre les deux phases, les phénomènes de turbulence et les tensions de surface. Les équations du modèle ainsi obtenues ont pris la forme des équations de Navier Stokes dont les variables de l'écoulement et les propriétés du fluides ont été définies pour un fluide équivalent (mélange diphasique) en plus d'une équation de transport supplémentaire sur le taux de présence.

Pour la résolution numérique des équations de la quantité de mouvement, la méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation spatiale pour ses propriétés de conservation des différentes quantités transportables. Un schéma temporel à trois pas fractionnaires de Runge Kutta/Crank Nicholson est utilisé pour assurer l'avancement en temps de la solution. Ce dernier offre une condition de stabilité très intéressante à travers son nombre CFL qui équivaut à $\sqrt{3}$. Quant au traitement de la pression, nous avons choisi une méthode de projection.

Par la suite, on propose une extension du modèle numérique dans l'optique de la simulation des écoulements diphasiques. Ceci est réalisé par l'implémentation d'une équation de transport supplémentaire sur le taux de présence et la pondération des propriétés physiques du fluide. Pour cela un schéma numérique explicite du type FCT est utilisé.

Des écoulements monophasiques et diphasiques de diverses configurations sont étudiés et les résultats numériques ainsi obtenus illustrent un bon accord entre nos valeurs et celles de référence.

Mots clés : Ecoulement diphasique, Equations de Navier-Stokes, Taux de présence, Interface, Volumes finis, Méthode de projection, Schéma FCT.

Table des matières

Liste des figures	4
Introduction générale	6
Chapitre I : Généralités et équations fondamentales des écoulements diphasiques	9
I.1 Introduction	9
I.2 Classification des écoulements diphasiques	10
I.3 Régimes d'écoulements	12
I.3.1 Régime à bulles	12
I.3.2 Régime à poches	13
I.3.3 Régime annulaire	13
I.3.4 Régime stratifié	13
I.4 Classification des écoulements diphasiques	13
I.5 Equations générales de conservation	14
I.5.1 Forme intégrale des équations de bilan	15
a. Conservation de la masse	15
b. Conservation de la quantité de mouvement	16
I.5.2 Equations aux variables locales instantanées	16
a. Equations de conservation de la masse	16
b. Equations de conservation de la quantité de mouvement	17
Chapitre II : Méthodes numériques pour les problèmes à interface libre	20
II.1 Introduction	20
II.2 Méthodes lagrangiennes	20
II.3 Méthodes eulériennes	21
II.3.1 Méthode de suivi surfacique (Surface tracking methods)	22
II.3.2 Méthodes de suivi volumique (Volume tracking methods)	24
a. La méthode MAC (Markers and cells methods)	24
b. La méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation)	25
c. Les méthodes VOF	26
d. Méthodes de capture de front	27
II.4 Choix de la méthode	28

Table des matières.

Chapitre III : Modélisation mathématique	29
III.1 Introduction	29
III.2 Dérivation du modèle à deux fluides moyenné	30
III.2.1 Notions de base	30
a. Moyennes temporelles	30
b. Fonction indicatrice de la phase	31
c. Taux de vide local	31
III.2.2 Equations pondérées	32
III.2.3 Equations moyennées	33
III.2.4 Décomposition de Reynolds	34
a. Moyennes Pondérées	34
III.2.4 Conditions à l'interface	38
a. L'équation du bilan de masse surfacique	38
b. L'équation du bilan de moment à l'interface	38
c. Lois de fermeture à l'interface	38
III.3 Dérivation du modèle à un fluide	41
III.3.1 Condition d'incompressibilité	41
III.3.2 Absence de glissement entre les deux phases	43
III.3.3 Lois constitutives	43
III.4 Equation du taux de présence	45
III.5 Conclusion	45
Chapitre IV : Résolution des équations de Navier-Stokes	46
IV.1 Introduction	46
IV.2 Discrétisation temporelle - méthode des projections	47
IV.3 Discrétisation spatiale	50
IV.3.1 Maillage décalé	50
IV.3.2 Méthode des volumes finis	51
IV.3.3 Approximation des dérivées spatiales	53
IV.4 Avancement en temps	53
IV.4.1 Partie convection – diffusion	53
IV.4.2 Méthode des projections	55
IV.5 Conditions aux limites	56
IV.6 Méthodes numériques de résolution	57
Chapitre V : Tests monophasiques	59
V.1 Introduction	59
V.2 Ecoulement de Poiseuille	60
V.3 Ecoulement en cavité carrée	63
V.4 Ecoulement derrière une marche	68
V.5 Ecoulement derrière un élargissement brusque	72
V.6 Conclusion	80

Table des matières.

Chapitre VI : Extension du modèle aux écoulements diphasiques	82
VI.1 Introduction	82
VI.2 Schéma FCT unidimensionnel	84
VI.3 Extension du schéma FCT au cas bidimensionnel	87
VI.4 Couplage des équations du modèle	89
VI.5 Résultats numériques	89
VI.5.1 Ecoulement de Poiseuille en deux couches	89
VI.5.2 Test de rupture d'un barrage	92
VI.6 Conclusion	95
Conclusion générale	96
Bibliographie	98

Liste des figures

I-1	Ecoulements à phase dispersée	10
I-2	Ecoulements à phases séparées	10
I-3	Ecoulements de transition	11
I-4	Exemples d'écoulements diphasiques air-eau verticaux co-courant	11
I-5	Exemples d'écoulements diphasiques air-eau en conduites horizontales	12
I-6	Régimes d'écoulement gaz-liquide (phase continue liquide)	12
I-7	Système diphasique gaz-liquide	15
II-1	Maillage adaptatif	21
II-2	Interface évoluant librement sur un maillage fixe (principe de base des méthodes eulériennes)	22
II-3	Représentation de l'interface par une fonction distance par rapport à une ligne de référence	23
II-4	Représentation de l'interface par une courbe paramétrée	24
II-5	Représentation de l'interface par la méthode MAC	25
II-6	Reconstruction de l'interface par la méthode SLIC	26
II-7	Reconstruction de l'interface par la méthode VOF	27
VI-1	Position des variables sur le maillage décalé	51
V-1	Profil des vitesses pour un écoulement entre deux plans parallèles fixes	60
V-2	Conditions aux limites pour un écoulement entre deux plans parallèles fixes	61
V-3	Comparaison des profils de vitesses théoriques et numériques pour l'écoulement de Poiseuille	62
V-4	Géométrie et conditions aux limites pour l'écoulement en cavité carrée bidimensionnelle	63
V-5	Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 100$	65
V-6	Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 400$	66
V-7	Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 1000$	67
V-8	Conditions aux limites pour l'écoulement derrière une marche	68
V-9	Profils des vitesses horizontales pour la marche $h/H = 1/2$	70
V-10	Profils des vitesses horizontales pour la marche $h/H = 2/3$	70
V-11	Isovaleurs des lignes de courant pour la marche $h/H = 1/2$	71
V-12	Isovaleurs des lignes de courant pour la marche $h/H = 2/3$	71

Liste des figures.

V-13	Conditions aux limites pour l'écoulement derrière un élargissement brusque	72
V-14	Profils de vitesse horizontale $Re = 56$	76
V-15	Isovaleurs des lignes de courant $Re = 56$	76
V-16	Profils de vitesse horizontale $Re = 114$	77
V-17	Isovaleurs des lignes de courant $Re = 114$	77
V-18	Profils de vitesse horizontale $Re = 252$	79
V-19	Isovaleurs des lignes de courant $Re = 252$	79
VI-1	Géométrie de l'écoulement de Poiseuille en deux couches	90
VI-2	Profils de vitesses horizontales pour l'écoulement de Poiseuille en deux couches	92
VI-3	Configuration initiale du problème de rupture d'un barrage	93
VI-4	Evolution de l'interface à : $t^* = 2.04, 2.70, 3.36$ et 3.98	94
VI-5	Résultats obtenus par Abbès à : $t^* = 2.04, 2.70, 3.36$ et 3.98	94
VI-6	Comparaison des positions du front d'eau avec des valeurs expérimentales et numériques de référence	95

Introduction générale

Avec l'oxygène, l'eau est sans doute la ressource la plus primordiale au cycle vital de tous les êtres vivants. Alors que la population mondiale a doublé depuis 50 ans, la consommation en eau douce a quant à elle quadruplé. De là apparaît la nécessité de préserver sa qualité face aux différents impacts néfastes et en particulier celui de la pollution.

Phénomène inéluctable dans certaines régions, l'eutrophisation est un mal qui touche de plus en plus de plans d'eau. Elle a pour origine principale l'apport excessif en phosphore, généralement lié aux activités urbaines et industrielles. Il en résulte un développement important de la biomasse algale- et principalement du phytoplancton-. Celle-ci sédimente au fond de l'eau où elle se décompose en consommant une quantité non négligeable d'oxygène.

Pendant la stabilité thermique des plans d'eau, généralement d'avril à octobre, lacs et retenues d'eau possèdent une stratification thermique verticale provoquée par la différence de densité entre la couche d'eau supérieure réchauffée appelée Epilimnion et la couche d'eau inférieure dite Hypolimnion. Ces deux couches sont séparées par une couche intermédiaire appelée la Thermocline caractérisée par un gradient de température important, provoquant une stagnation des eaux froides au fond et leur appauvrissement en oxygène.

La déstratification par aération constitue un moyen de lutte très efficace contre l'eutrophisation. C'est une technique destinée à aérer dans leur totalité les couches profondes par brassage de l'ensemble des masses d'eau au moyen d'un réseau de canalisations de diffusion d'air comprimé. En montant, les bulles d'air injectées provoquent un brassage permettant de casser la stratification naturelle des eaux. Le mouvement ainsi créé permet de briser le cercle vicieux de ce processus de dégradation. Il provoque l'aération des couches profondes par contact avec la surface du plan d'eau.

Ce travail a été initié dans le cadre du projet euro méditerranéen ESIMEAU¹ qui a pour objectif l'Elaboration d'un Système Intégré pour la gestion et la Modélisation des ressources en EAU.

Notre tâche s'articule autour de la mise au point d'un outil de simulation numérique de la dynamique créée par l'injection de l'air dans les lacs et retenues d'eau eutrophisés.

Pour ce faire, la démarche que nous avons adoptée consistait donc en une modélisation bidimensionnelle de la dynamique créée au sein de la retenue par l'injection de l'air basée sur une

¹ Elaboration d'un Système Intégré pour la gestion et la Modélisation de la ressource en EAU

Introduction générale

formulation d'un modèle d'écoulement diphasique monofluide. Notre souci était d'aboutir à un modèle mathématique qui du point de vue physique est correct eu égard aux hypothèses adoptées et numériquement pas trop cher.

Les échanges de masse entre les deux phases n'étant pas importants, vu que le temps de séjour des bulles dans l'eau est très faible, on considère que l'interaction entre les deux phases se fait uniquement par échange de quantité de mouvement. C'est un écoulement sans changement de phases.

Les challenges posés dans le cadre de ce travail ainsi que la nature des équations du modèle mathématique nous ont amené à approcher le problème en deux étapes complémentaires. Lors de la première étape, nous avons jugé utile d'abord d'écrire un code de calcul pour la résolution des équations de Navier-Stokes et de tester ses performances avant d'aborder le problème diphasique dans sa globalité. Après quoi, il a été question de procéder à l'extension de l'outil numérique à l'étude des écoulements diphasiques.

Pour la résolution numérique, la méthode des volumes finis a été choisie pour la discrétisation spatiale des équations de la quantité de mouvement pour ses propriétés avantageuses de conservation. En ce qui concerne la discrétisation temporelle, nous avons adopté un schéma fractionnaire du type Runge Kutta/Cranck Nicholson à trois pas de temps. Quant à la résolution numérique du taux de présence, elle est assurée par un schéma explicite du type FCT.

Les tests numériques présentés à la fin de ce mémoire illustrent bien les performances du modèle mathématique écrit sous les hypothèses adoptées et de l'outil numérique à simuler les écoulements diphasiques de différentes configurations.

Présentation du mémoire :

Dans le premier chapitre, seront abordées les définitions, généralités et classification des écoulements diphasiques avant de passer aux équations locales instantanées dérivées à partir de lois de conservation globale.

Nous avons consacré le deuxième chapitre à la présentation des différentes approches utilisées dans la modélisation numérique des écoulements diphasiques tout en indiquant les avantages et les inconvénients de chaque méthode avant de procéder à notre choix.

Le chapitre III est scindé en deux volets principaux. Dans le premier volet, nous donnerons d'une façon détaillée les étapes menant à la dérivation du modèle à deux fluides moyenné dans le temps. Le deuxième volet sera consacré à la formulation des équations du modèle mathématique qui fera l'objet de nos travaux et les hypothèses ayant été à l'origine de ce dernier.

Par la suite, on abordera dans le IVème chapitre la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Et pour valider l'algorithme numérique adopté, des tests monophasiques pour différentes configurations sont présentés dans le Vème chapitre.

Introduction générale

Le chapitre VI traite de la résolution numérique de l'équation du taux de présence tout en opérant les modifications nécessaires sur les équations de Navier-Stokes et la manière dont s'effectuera le couplage des équations. Par la suite, des résultats de simulations numériques d'écoulements diphasiques sont présentés.

Enfin, la conclusion générale sera dédiée à la synthèse globale du présent travail et les perspectives pouvant être envisagées.

Chapitre I

Généralités et équations fondamentales des écoulements diphasiques

I.1 Introduction

Un écoulement diphasique est un écoulement mettant en présence deux corps non miscibles dont l'un au moins est un fluide. Les deux phases sont séparées par des interfaces qui constituent des surfaces de discontinuités des propriétés physiques au sein du fluide.

Dans le cas de deux fluides (gaz ou liquide), ces interfaces sont déformables et lorsque l'écoulement est turbulent, il est impossible d'en prédire finement le mouvement. En général, seule une description macroscopique est proposée.

La difficulté liée à la modélisation des écoulements diphasiques se situe tant au niveau des lois de comportement qui concernent les échanges interfaciaux (transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) qu'au niveau des lois de fermeture pour modéliser la turbulence.

Le présent chapitre porte sur une étude sommaire concernant la théorie des écoulements diphasiques et les différentes voies possibles pour les modéliser. Nous commençons d'abord par la classification des différentes configurations possibles des écoulements diphasiques, après quoi seront présentées les différentes approches de modélisation données dans la bibliographie. Par la suite, nous nous intéresserons aux différentes étapes conduisant à l'élaboration des équations locales instantanées des écoulements diphasiques à partir des lois de conservation globales.

Enfin, il est à signaler que notre étude portera sur la catégorie d'écoulements dont les aspects thermiques peuvent être négligés. Seule les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement seront développées.

I.2 Classification des écoulements diphasiques

Les écoulements diphasiques peuvent être classés selon les phases en présence (liquide, solide, gaz ou plasma (gaz ionisé)) ou selon la distribution spatiale des interfaces. Pour le premier cas, les combinaisons possibles sont les suivantes :

- *mélange solide liquide, exemple : transport de boue ;*
- *mélange gaz solide, exemple : transport de pneumatique ;*
- *mélange gaz liquide, exemple : ébullition dans les réacteurs nucléaires.*

Concernant le second cas, on distingue les écoulements schématisés par les figures I-1, I-2 et I-3 qui suivent :

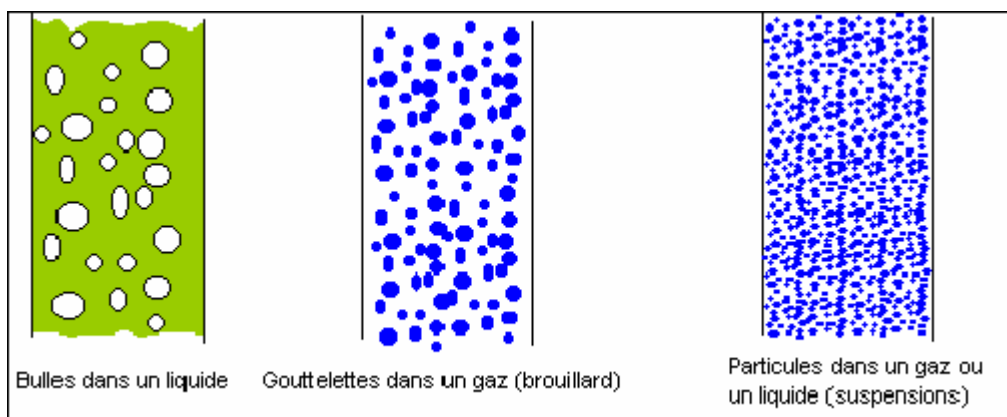


Figure I-1 : Ecoulements à phase dispersée.

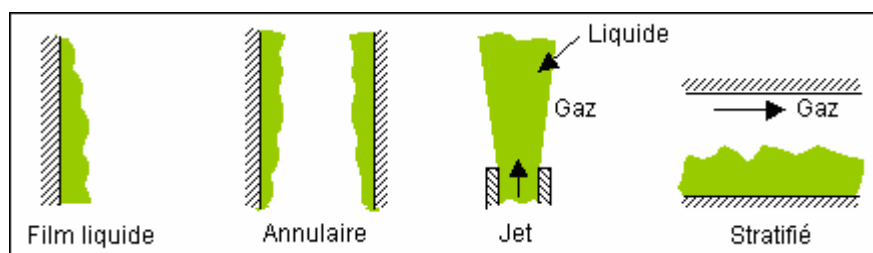


Figure I-2 : Ecoulements à phases séparées.

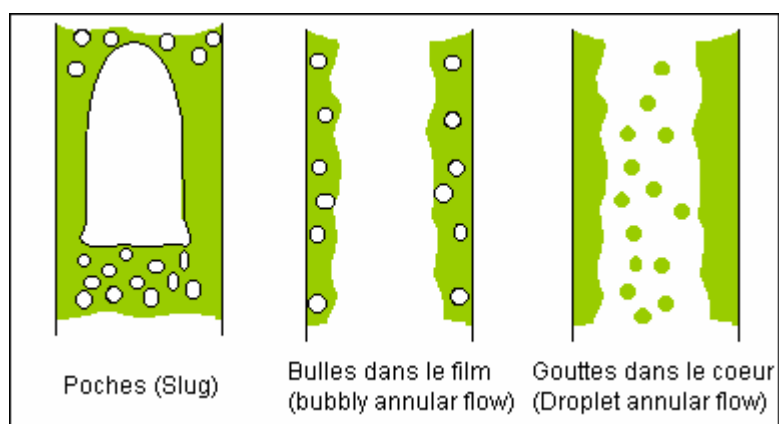


Figure I-3 : Ecoulements de transition.

En écoulement diphasique gaz liquide, les calculs et les descriptions sont effectués pour une configuration donnée de l'écoulement. Ces configurations sont basées sur la description d'interface qu'on appelle "*régimes d'écoulement*". Des exemples de régimes d'écoulements diphasiques sont illustrés dans les figures I-4 et I-5.

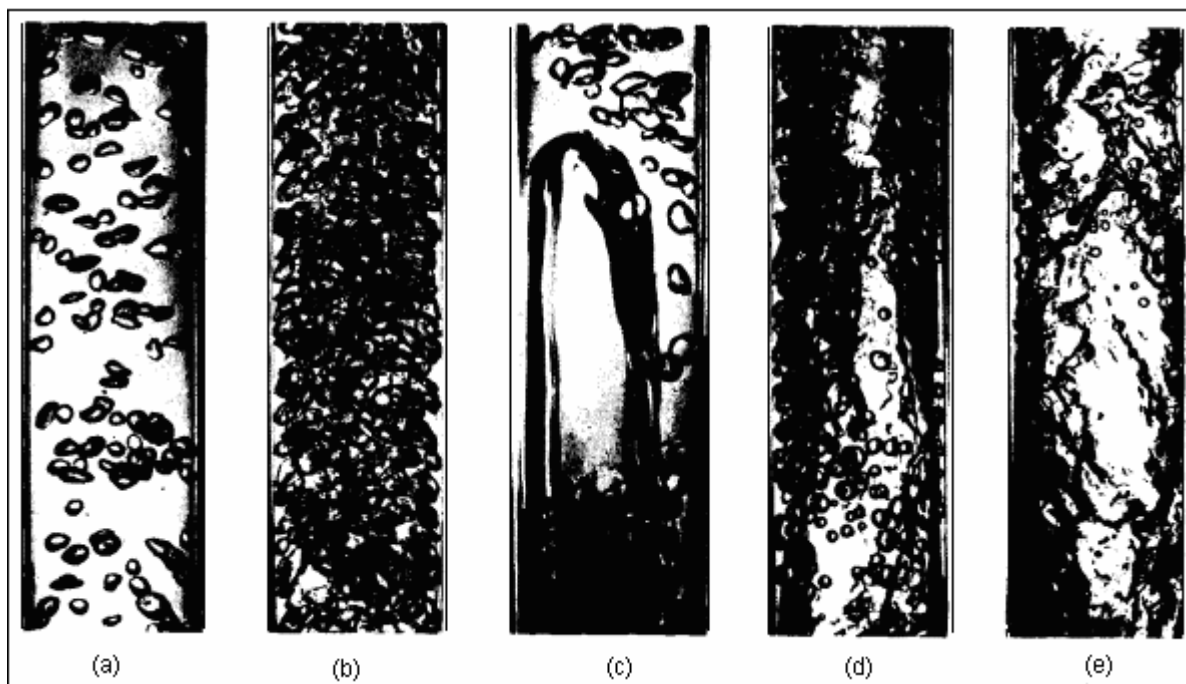


Figure I-4 : Exemples de régimes en écoulements diphasiques eau-air verticaux co-courants (Roumy, 1969) :

(a) : Bulles séparées; (b) : Lit dense de bulles; (c) : Poches; (d) : Churn; (e) : Annulaire.

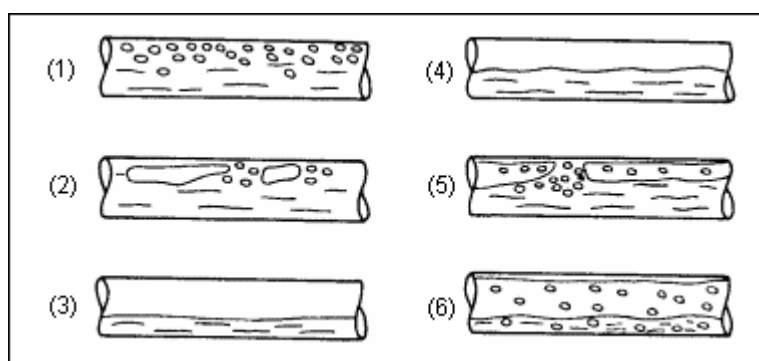


Figure I-5 : Exemples de régimes d'écoulements diphasiques eau air en conduites horizontales (Delhaye, 1981) :

- (1) : Bulles; (2) : Bulles allongées; (3) : Stratifié lisse; (4) : Stratifié ondulé; (5) : Poches;
(6) : Annulaire

I.3 Régimes d'écoulements

Lors d'un écoulement diphasique gaz liquide interne où la phase continue est le liquide, on distingue les quatre configurations principales, schématisées dans la figure I-6.

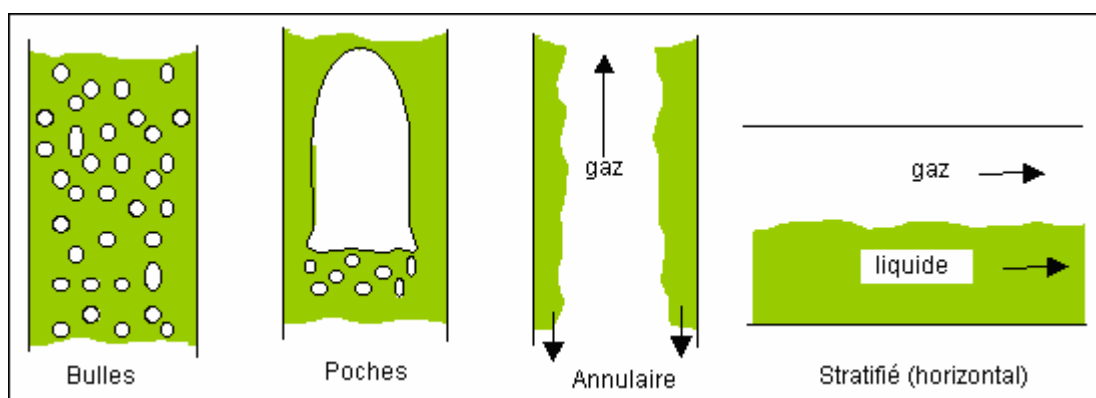


Figure I-6 : Régimes d'écoulement gaz liquide (phase continue : liquide)

I.3.1 Régime à bulles

La phase gazeuse de l'écoulement est répartie sous forme de bulles dispersées dans le liquide qui constitue la phase continue. Les dimensions de ces bulles sont petites en comparaison avec le diamètre de la conduite. Ce régime n'apparaît que pour de faibles vitesses superficielles de gaz. L'écoulement horizontal à bulles n'existe que pour des vitesses superficielles du liquide suffisamment élevées.

I.3.2 Régime à poches

En augmentant le débit de gaz, les bulles coalescent pour donner lieu à des poches séparées par des bouchons de liquide de sections voisines de celles de la conduite.

I.3.3 Régime annulaire

Le gaz circule à grande vitesse au centre de la conduite et provoque la formation d'un film liquide ondulé à la paroi.

I.3.4 Régime stratifié

L'écoulement en conduite horizontale est caractérisé par un quatrième régime appelé "*régime stratifié*". Ce dernier est causé principalement par la différence de masse volumique entre le gaz et le liquide à grandes vitesses, et provoquant leur séparation. En effet, cette différence de densité fait que le gaz circule dans la partie haute de la conduite au-dessus du liquide.

I.4 Classification des modèles diphasiques

Plusieurs approches sont possibles pour modéliser les écoulements diphasiques. Elles dépendent du phénomène physique et de la nature du problème à traiter et des équations aux dérivées partielles sont souvent utilisées.

Pour ce qui est des écoulements diphasiques à phase dispersée, deux types de formulations sont généralement utilisés. Dans la première, chacune des phases est traitée comme un fluide continu. C'est une description eulérienne du mouvement des deux phases.

Ishii (1975) divise les modèles eulériens en deux. Le modèle de mélange et le modèle à deux fluides. Le modèle de mélange est formulé en considérant le mélange air-eau comme étant un fluide équivalent. Ainsi, l'écoulement peut être représenté par une équation de continuité, une équation de quantité de mouvement et une équation d'énergie. Ces équations sont complétées par une équation de diffusion tenant compte de l'effet des gradients de concentration.

Le modèle de mélange est constitué de moins d'équations et de variables que les autres modèles, mais d'énormes difficultés apparaissent dans la fermeture des termes d'échange à l'interface [Enwald 1996, Ishii 1975].

Le modèle à deux fluides consiste à considérer que les deux phases, caractérisées par des propriétés physiques différentes, sont présentes dans tout le domaine d'étude. Le mouvement est décrit par deux équations de conservation de la masse, deux équations de quantité de mouvement et deux équations d'énergie. A ces équations, nous devons ajouter les conditions de transfert à l'interface.

La résolution de ces équations locales instantanées nécessiterait des maillages plus petits que la taille de la plus petite échelle de l'écoulement (échelle de la bulle) et des pas de temps inférieurs à l'échelle de temps de la plus petite fluctuation. Ceci n'est pas raisonnable. Pour simplifier le problème et contourner l'impossibilité des simulations directes, les techniques de moyennes sont largement utilisées. Elles consistent à appliquer un opérateur de moyenne temporelle ou spatiale sur les équations locales instantanées et l'introduction d'un taux de présence pour chaque phase. La résolution des équations ainsi obtenues devient possible moyennant des maillages plus grossiers et des pas de temps plus importants. Cependant, ce système présente plus d'inconnues que d'équations (apparition de termes supplémentaires). La difficulté de cette voie réside dans la modélisation des termes supplémentaires pour la fermeture du système.

Dans l'approche lagrangienne, la phase porteuse est traitée de façon eulérienne et son mouvement est modélisé par les équations locales instantanées de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour la phase dispersée, on s'intéresse à identifier l'ensemble des efforts appliqués à chaque particule et d'en déduire, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, la trajectoire de celle-ci dans le liquide. La contribution des bulles dans l'écoulement est prise en compte par l'intermédiaire d'un terme de forçage supplémentaire qui apparaît dans l'équation de la phase porteuse.

Climent (1996) a étudié un écoulement provoqué par l'ascension de bulles d'air en utilisant l'approche lagrangienne pour décrire le mouvement des bulles d'air. Ceci a nécessité le couplage de deux codes de calculs d'architectures différentes. Le premier pour résoudre les équations de Navier-Stokes de la phase porteuse et le deuxième pour intégrer les équations de trajectoires des bulles. Cette approche a nécessité des temps de calculs très importants et la démarche n'a été possible que grâce à l'utilisation de calculateurs très performants couplés en parallèle. Ses applications ont porté sur la simulation d'écoulements à très faibles taux de présence, donc un nombre de bulles d'air limité.

I.5 Equations générales de conservation

Dans la présente partie, nous nous intéressons au développement des principales étapes d'établissement des équations locales instantanées de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un écoulement diphasique. Nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement isothermique et les tensions de surface seront négligées. En premier lieu, nous allons établir les bilans de la masse et de la quantité de mouvement sous forme d'équations intégrales. Après quoi, nous dériverons les équations locales instantanées et les conditions de transfert dues à l'interaction entre les deux phases à l'interface. La méthodologie est semblable à celle utilisée pour l'établissement des équations de la mécanique des fluides monophasique.

I.5.1 Forme intégrale des équations de bilans

Considérons le système matériel diphasique (gaz-liquide) représenté par la figure I-7 et noté GL. Il est constitué par du gaz et du liquide occupant respectivement les domaines Ω_G et Ω_L et formant les systèmes G et L. On note par A_{eL} et A_{eG} les surfaces frontières de la phase avec le milieu extérieur.

L'interface gaz-liquide intérieure au système sera noté A_i . La normale extérieure à un domaine sera appelée \mathbf{n}_L et \mathbf{n}_G .

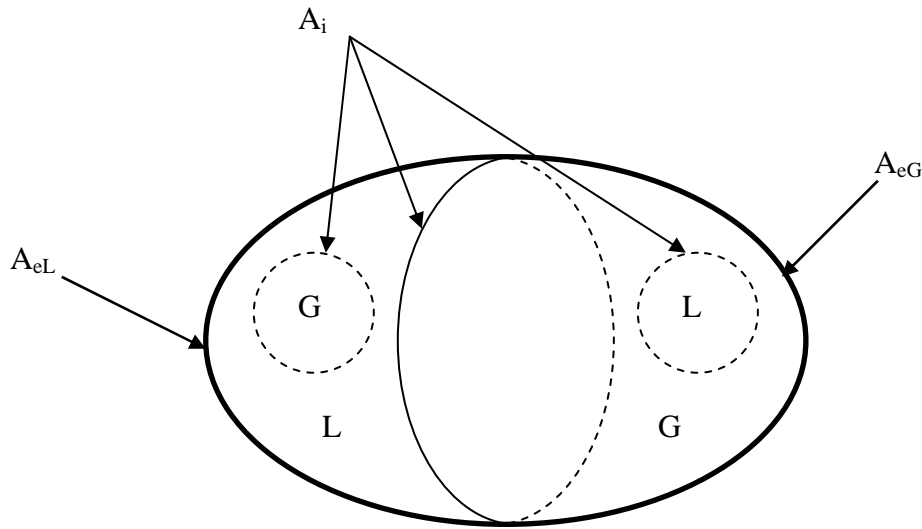


Figure I-7 : Système diphasique gaz - liquide

a. Conservation de la masse

La variation de la masse dans un volume Ω pour un temps dt peut s'écrire :

$$dt \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad (I.1)$$

Par définition, elle est nulle, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega = 0 \quad (I.2)$$

Le bilan de conservation de la masse pour un système gaz-liquide peut donc être écrit sous la forme globale :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G \, d\Omega + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L \, d\Omega = 0 \quad (I.3)$$

b. Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement exprime que « la variation de la quantité de mouvement par unité de temps du système est égale à l'ensemble des forces extérieures appliquées au système ».

Si $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des forces extérieures appliquées au système matériel et \mathbf{u}_k la vitesse de la phase k , nous aurons pour le système GL :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G \mathbf{u}_G d\Omega + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L \mathbf{u}_L d\Omega \quad (\text{I.4})$$

Si \mathbf{F} est la force extérieure massique appliquée au système, la résultante des forces extérieures de volume est égale à :

$$\iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G \mathbf{F} d\Omega + \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L \mathbf{F} d\Omega \quad (\text{I.5})$$

Soit $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_k$ le tenseur de contraintes en un point. Les forces de surface ont pour résultante :

$$\iint_{A_{eG}(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_G \mathbf{n}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_L \mathbf{n}_L d\Sigma \quad (\text{I.6})$$

La loi globale de conservation de la quantité de mouvement se traduit donc, par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G \mathbf{u}_G d\Omega + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L \mathbf{u}_L d\Omega &= \iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G \mathbf{F} d\Omega \\ &+ \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L \mathbf{F} d\Omega + \iint_{A_{eG}(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_G \mathbf{n}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_L \mathbf{n}_L d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

(I.3) et (I.7) représentent les équations intégrales des bilans de masse et de quantité de mouvement pour un écoulement diphasique.

I.5.2 Equations aux variables locales instantanées

a. Equations de conservation de la masse

Le théorème de la dérivée Lagrangienne appliqué sur l'équation (I.3) du bilan de la masse sous sa forme intégrale nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega_G(t)} \frac{\partial \rho_G}{\partial t} d\Omega + \iint_{A_{eG}(t)} \rho_G \mathbf{u}_G \mathbf{n}_G d\Sigma + \iint_{A_i(t)} \rho_G \mathbf{u}_i \mathbf{n}_G d\Sigma \\
 & + \iiint_{\Omega_L(t)} \frac{\partial \rho_L}{\partial t} d\Omega + \iint_{A_{eL}(t)} \rho_L \mathbf{u}_L \mathbf{n}_L d\Sigma + \iint_{A_i(t)} \rho_L \mathbf{u}_i \mathbf{n}_L d\Sigma = 0
 \end{aligned} \tag{I.8}$$

En plus, le théorème d'Ostogradski permet d'avoir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \iint_{A_{eG}(t)} \rho_G \mathbf{u}_G \mathbf{n}_G d\Sigma &= \iiint_{\Omega_G(t)} \nabla \cdot (\rho_G \mathbf{u}_G) d\Omega - \iint_{A_i(t)} \rho_G \mathbf{u}_G \mathbf{n}_G d\Sigma \\
 \iint_{A_{eL}(t)} \rho_L \mathbf{u}_L \mathbf{n}_L d\Sigma &= \iiint_{\Omega_L(t)} \nabla \cdot (\rho_L \mathbf{u}_L) d\Omega - \iint_{A_i(t)} \rho_L \mathbf{u}_L \mathbf{n}_L d\Sigma
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

d'où l'équation (I.8) se réduit finalement à :

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega_G(t)} \left(\frac{\partial \rho_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_G \mathbf{u}_G) \right) d\Omega + \iiint_{\Omega_L(t)} \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L \mathbf{u}_L) \right) d\Omega \\
 & - \iint_{A_i(t)} [\rho_G (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_G + \rho_L (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_L] d\Sigma = 0
 \end{aligned} \tag{I.10}$$

Cette équation doit être vérifiée quels que soient $\Omega_G(t)$, $\Omega_L(t)$ et $A_i(t)$. Nous en déduisons, selon le théorème de l'intégrale nulle :

➤ **Les équations de conservation de la masse pour chaque phase :**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_G \mathbf{u}_G) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L \mathbf{u}_L) &= 0
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

➤ **La condition d'interface :**

$$\rho_G (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_G + \rho_L (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_L = 0 \tag{I.12}$$

La relation précédente signifie que la masse du gaz qui quitte la phase gazeuse par l'interface est égale à la masse de liquide qui entre dans la phase liquide par l'interface.

b. Equations de conservation de la quantité de mouvement

L'application du théorème de la dérivée Lagrangienne aux termes du premier membre de l'équation intégrale de la quantité de mouvement (I.7) donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_G(t)} \rho_G u_G d\Omega &= \iiint_{\Omega_G(t)} \frac{\partial \rho_G u_G}{\partial t} d\Omega + \iint_{A_{eG}(t)} (\rho_G u_G u_G) n_G d\Sigma \\
 &+ \iint_{A_i(t)} (\rho_G u_G u_i) n_i d\Sigma \\
 \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_L(t)} \rho_L u_L d\Omega &= \iiint_{\Omega_L(t)} \frac{\partial \rho_L u_L}{\partial t} d\Omega + \iint_{A_{eL}(t)} (\rho_L u_L u_L) n_L d\Sigma \\
 &+ \iint_{A_i(t)} (\rho_L u_L u_i) n_i d\Sigma
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

d'autre part, le théorème d'Ostogradski nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \iint_{A_{eG}(t)} \overline{\overline{T_G}} n_G d\Sigma &= \iiint_{\Omega_G(t)} \nabla \cdot \overline{\overline{T_G}} d\Omega - \iint_{A_i(t)} \overline{\overline{T_G}} n_G d\Sigma \\
 \iint_{A_{eL}(t)} \overline{\overline{T_L}} n_L d\Sigma &= \iiint_{\Omega_L(t)} \nabla \cdot \overline{\overline{T_L}} d\Omega - \iint_{A_i(t)} \overline{\overline{T_L}} n_L d\Sigma \\
 \iint_{A_{eG}(t)} (\rho_G u_G u_G) n_G d\Sigma &= \iiint_{\Omega_G(t)} \nabla \cdot (\rho_G u_G u_G) d\Omega - \iint_{A_i(t)} (\rho_G u_G u_G) n_G d\Sigma \\
 \iint_{A_{eL}(t)} (\rho_L u_L u_L) n_L d\Sigma &= \iiint_{\Omega_L(t)} \nabla \cdot (\rho_L u_L u_L) d\Omega - \iint_{A_i(t)} (\rho_L u_L u_L) n_L d\Sigma
 \end{aligned} \tag{I.14}$$

En utilisant les expressions (I.13) et (I.14), nous pouvons écrire l'équation (I.7) de la quantité de mouvement comme suit :

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega_G} \left[\frac{\partial \rho_G u_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_G u_G u_G) - \rho_G F - \nabla \cdot \overline{\overline{T_G}} \right] d\Omega \\
 &+ \iiint_{\Omega_L} \left[\frac{\partial \rho_L u_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L u_L u_L) - \rho_L F - \nabla \cdot \overline{\overline{T_L}} \right] d\Omega = \\
 &\iint_{A_i(t)} \left\{ [\rho_G u_G (u_G - u_i)] n_G - \overline{\overline{T_G}} n_G + [\rho_L u_L (u_L - u_i)] n_L - \overline{\overline{T_L}} n_L \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{I.15}$$

Cette équation doit être vérifiée quels que soient les domaines soient $\Omega_G(t)$, $\Omega_L(t)$ et $A_i(t)$, selon le théorème de l'intégrale nulle, nous en déduisons :

➤ **L'équation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_G u_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_G u_G u_G) - \rho_G F - \nabla \cdot \overline{\overline{T_G}} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_L u_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L u_L u_L) - \rho_L F - \nabla \cdot \overline{\overline{T_L}} &= 0
 \end{aligned} \tag{I.16}$$

➤ **La condition d'interface :**

$$\left[\rho_G \mathbf{u}_G (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L) - \overline{\overline{\mathbf{T}_G}} \right] \mathbf{n}_G + \left[\rho_L \mathbf{u}_G (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}_L}} \right] \mathbf{n}_L = 0 \quad (\text{I.17})$$

En résumé, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (I.11) et (I.16) peuvent être écrites sous la forme indiquée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) &= 0 & k = 1, 2 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} - \rho_k \mathbf{F} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Les conditions d'interface sont pour l'équation de continuité :

$$\sum_{k=1}^2 \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_k = \sum_{k=1}^2 \dot{\mathbf{m}}_k = 0 \quad (\text{I.19})$$

et pour l'équation de quantité de mouvement :

$$\sum_{k=1}^2 \left[\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \right] \mathbf{n}_k = \sum_{k=1}^2 \left(\dot{\mathbf{m}}_k - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \mathbf{n}_k \right) = 0 \quad (\text{I.20})$$

Où :

k = 1 pour la phase liquide
et k = 2 pour la phase gaz.

Le système (I.18) représente les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement régissant les écoulements diphasiques en formulation locale instantanée. Sa résolution requiert l'utilisation d'un maillage dont le pas est plus petit que la taille de la plus petite échelle de l'écoulement (échelle de la bulle) et des pas de temps inférieurs à l'échelle de temps de la plus petite fluctuation. Ceci nous mènera sans doute à la résolution d'un système dont la taille est irréaliste. Pour remédier à ce problème, on fait souvent recourt à des techniques de moyennes (temporelle ou spatiale) permettant d'aboutir à des systèmes macroscopiques dont la résolution peut bien être envisagée moyennant des maillages plus grossiers et des pas de temps plus raisonnables. Les étapes permettant l'aboutissement au modèle diphasique moyenné dans le temps seront largement étalées dans le troisième chapitre.

Chapitre II

Méthodes numériques pour les problèmes à interface libre

II.1 Introduction

La présence des interfaces dans les écoulements diphasiques pose de sérieuses complications tant sur le plan physique que mathématique. En effet, ces dernières constituent des surfaces de discontinuités des propriétés physiques. Il apparaît donc que la résolution d'un problème diphasique ne se limite pas seulement à la détermination des champs hydrodynamiques de chaque phase, mais elle doit prendre en considération l'évaluation des interactions entre les deux phases et ces interfaces. Il en découle la nécessité de traiter simultanément les phases fluides et les interfaces. Ceci nécessite des méthodes numériques spéciales pour définir la localisation des interfaces, leur mouvement et leur influence sur l'écoulement.

Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes Lagrangiennes et les méthodes Eulériennes. Du choix de la méthode de traitement de l'interface dépend fortement le choix de la modélisation mathématique. C'est pour cette raison, que nous avons entièrement consacré le présent chapitre à la présentation des différentes techniques utilisées pour le traitement des interfaces en indiquant leurs principes de base, leurs avantages et leurs inconvénients.

II.2 Méthodes lagrangiennes

Les méthodes lagrangiennes sont caractérisées par l'utilisation d'un maillage mobile couvrant tout le domaine fluide et se déplaçant avec l'interface. Puisque le maillage et le fluide se déplacent ensemble, l'interface est décrite par les frontières du maillage (figure II-1). Ce maillage doit être remis à jour à chaque pas de temps.

Les méthodes lagrangiennes ont pour avantage de pouvoir suivre l'interface avec précision puisqu'elle coïncide avec les contours du maillage. Ainsi, les conditions aux limites sur les interfaces peuvent être appliquées de façon rigoureuse.

Toutefois, ce type de méthodes a l'inconvénient de ne pas permettre le traitement de problèmes faisant intervenir les phénomènes de rupture et de reconnexion d'interfaces. Dans de telles situations, nonobstant le fait qu'on doit remettre à jour le maillage, on doit tenir compte des nouvelles interfaces qui apparaissent à la suite d'une rupture et celles qui disparaissent après reconnexion. D'autre part, ces méthodes ne permettent pas de suivre des interfaces subissant de grandes déformations.

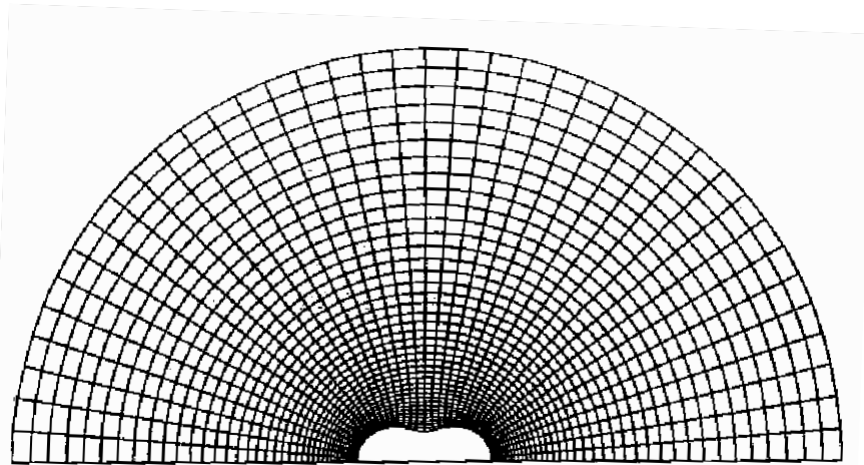


Figure II-1 : Maillage adaptatif.

II.3 Méthodes eulériennes

Les méthodes eulériennes sont caractérisées par l'utilisation d'un maillage soit fixe soit en mouvement de manière prédéfinie sur lequel les interfaces évoluent librement (figure II-2). Les particules fluides traversent le maillage, même s'il est mobile, sans en affecter sa topologie car les deux mouvements sont indépendants.

L'abandon d'un maillage adapté aux interfaces ne se fait pas sans conséquences. A cet effet, on doit introduire de nouveaux indicateurs pour repérer les interfaces et modéliser les propriétés du milieu diphasique composé des deux fluides pour chaque cellule traversée par une interface.

Les méthodes eulériennes peuvent être classées en deux catégories principales : les méthodes à maillage fixe et les méthodes à fonction de transformation de maillage.

Dans la première catégorie, le maillage utilisé est fixe dans le domaine. L'interface mobile ne coïncide pas forcément avec les noeuds du maillage. L'avantage des méthodes à maillage fixe est double. D'une part, l'interface peut subir de grandes déformations sans que la précision du calcul ne soit affectée et d'autre part ces méthodes permettent la prise en compte des interfaces

multiples. Leur inconvénient majeur est la difficulté de déterminer avec précision la position de l'interface.

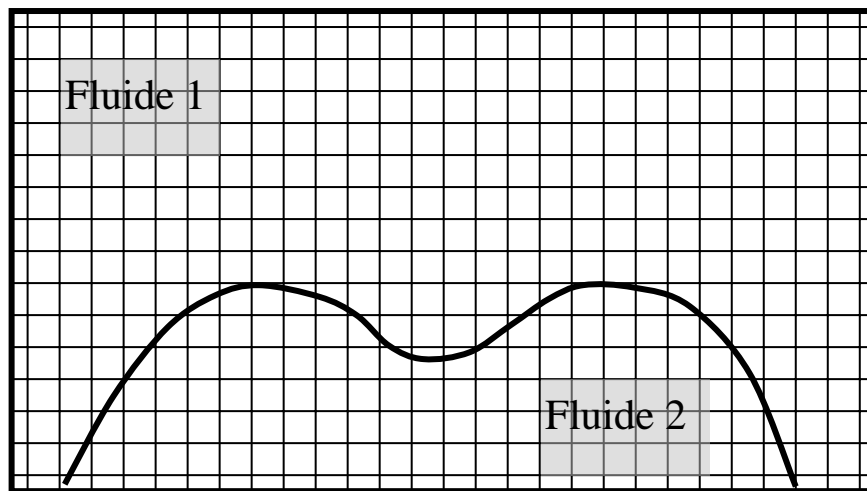


Figure II-2 : Interface évoluant librement sur un maillage fixe.
(principe de base des méthodes eulériennes)

Dans les méthodes à fonction de transformation de maillage, on utilise des fonctions de transformation pour les variables indépendantes dans le but de transformer la forme irrégulière du domaine en forme régulière avant la discrétisation des équations à résoudre.

Dans ce type de méthodes, le problème revient à résoudre les équations dans un domaine régulier dans lesquelles les fonctions de transformations apparaissent explicitement dans les variables de l'écoulement. Bien que, ces méthodes permettent de calculer les positions de l'interface avec une bonne précision, elles restent limitées à des cas ne conduisant pas à des fonctions de transformation singulières.

Le choix d'une méthode particulière dépend du type de l'écoulement à traiter. Dans les écoulements où les tensions interfaciales sont importantes, on préfère les méthodes à fonctions de transformation de maillage car le calcul précis de la position, la pente et la courbure de l'interface est indispensable. Dans le cas où l'effet des tensions de surface peut être négligé, on préfère souvent l'utilisation des méthodes à maillage fixe car la localisation de l'interface avec précision n'est pas essentielle.

II.3.1 Méthode de suivi surfacique (Surface tracking methods)

Dans ce type de méthodes appelé aussi de suivi de front, l'interface est représentée par une série de points liés entre eux par des segments fictifs qui permettent de reconstituer l'interface dans sa totalité. Ces points de repérage situés exactement sur l'interface sont appelés "marqueurs". A chaque pas de temps, on doit résoudre une équation d'évolution pour déterminer les nouvelles positions des marqueurs. La position de l'interface ainsi que son orientation et sa courbure sont connues durant tout le calcul.

La démarche la plus simple de mise en œuvre de cette technique dans le cas bidimensionnel est celle de Hyman [Abbès 2000, Benkenida 1999] qui consiste à repérer ces points par une séquence de hauteurs par rapport à une surface de référence (figure II-3). L'évolution de la hauteur $H(x,t)$ en fonction du temps est donnée par l'équation suivante [Abbès 2000] :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = v \quad (\text{II.1})$$

où u et v sont respectivement les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse de la particule, qui à l'instant t occupe la position x telle que $H(x,t)=y$ (figure II-3).

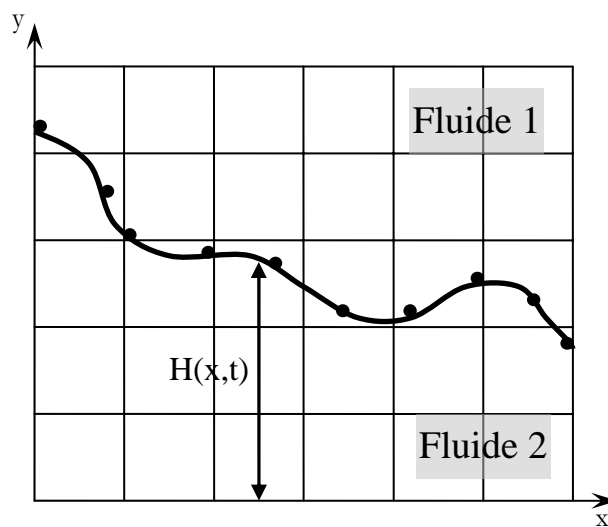


Figure II-3 : Représentation de l'interface par une fonction distance par rapport à une ligne de référence.

Cependant, quand la fonction distance $H(x,t)$ a des valeurs multiples à une même abscisse donnée, la méthode utilisée ci-dessus devient incapable de retrouver la forme correcte de l'interface. Ce problème peut être contourné en utilisant une représentation paramétrée de l'interface comme le montre la figure II-4.

L'avantage de cette méthode est de fournir une bonne précision au niveau de l'interface avec une résolution indépendante de la taille du maillage eulérien de l'écoulement.

En dépit de la grande précision de cette méthode au niveau de l'interface, elle reste caractérisée par des difficultés qui limitent d'une façon notable son champ d'applications, précisément quand il s'agit de traiter des problèmes faisant intervenir des phénomènes de coalescence ou de rupture d'interfaces. Un autre inconvénient de cette méthode réside dans la gestion d'une quantité d'informations relativement élevée. En effet, dans certains cas les marqueurs se concentrent sur une partie des segments de l'interface au détriment d'une autre. Il est donc nécessaire de contrôler la distribution des marqueurs en imposant une distance minimale et maximale entre deux marqueurs voisins.

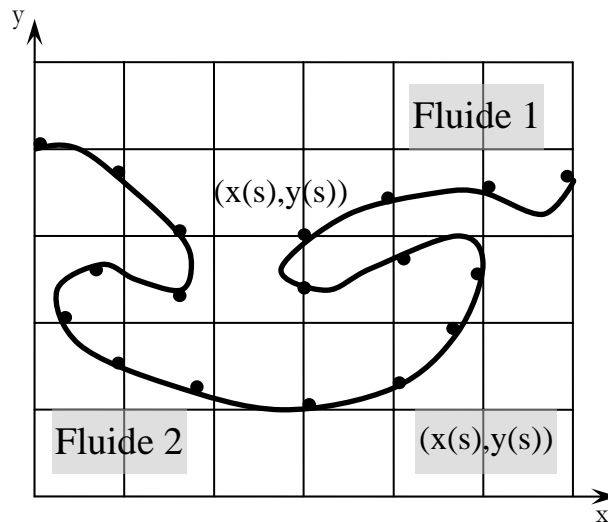


Figure II-4 : Représentation de l'interface par une courbe paramétrée.

II.3.2 Méthodes de suivi volumique (Volume tracking methods)

Dans ces méthodes, on s'attache plutôt à transporter les phases continues. Elles sont liées au principe de conservation du volume qui s'identifie dans le cas incompressible à la conservation de la masse. L'interface est reconstruite à chaque fois que c'est nécessaire, mais sans que cette reconstruction ne soit obligatoire. On verra en effet que dans certaines méthodes, on peut éliminer cette étape en se contentant de connaître approximativement la position de l'interface.

a. La méthode MAC (*Markers and cells methods*)

L'algorithme le plus simple et le plus ancien, mis au point pour traiter les problèmes à interface libre, est celui proposé par Harlow et Welch dans le cadre de la méthode MAC [Abbès 2000, Benkenida 1999]. Dans cette méthode, le fluide est représenté dans chaque élément par un certain nombre de particules appelées "marqueurs" qui se déplacent avec le fluide. Ainsi une cellule contenant des marqueurs et ayant une cellule voisine ne contenant aucun marqueur est forcément traversée par l'interface (figure II-5). Le principe de base de cette méthode consiste à connaître le position de tous les marqueurs à tout instant.

Les avantages de cette méthode sont sa capacité à traiter des surfaces libres subissant de grandes distorsions et la prise en compte d'interfaces multiples sans nécessiter d'algorithmes spéciaux pour cela. Toutefois, l'utilisation d'un nombre très important de marqueurs (nettement supérieur au nombre des mailles occupées par le fluide) est nécessaire pour fournir une bonne définition de l'interface sans avoir recours à des éléments techniques supplémentaires pour assurer une reproduction de la topologie des interfaces. Aussi, dans cette méthode on se trouve confronté au risque d'accumulation des marqueurs dans une partie du maillage ce qui nécessitera une redistribution périodique des ces derniers.

Pour pallier à ces problèmes, un nouveau concept a été introduit à partir des années 70 par DeBar (1974), Chorin (1980) et Hirt et Nichols (1981) pour simplifier la méthode MAC. Désormais, on ne se réfère plus à la quantité de marqueurs présents dans une cellule mais plutôt à la fraction volumique C (ou taux de présence) occupée par l'un des deux fluides à l'intérieur de la cellule, d'où le nom de la nouvelle méthode : méthode de volume de fluide (Volume Of Fluid). Ainsi cette fraction vaut 0 dans tous les éléments vides et vaut 1 dans les éléments totalement remplis. L'interface est localisée dans les éléments partiellement remplis ayant, donc, une fraction volumique comprise strictement entre 0 et 1. La reconstruction de l'interface est alors réalisée de différentes manières.

Le premier avantage de cette méthode par rapport à la méthode MAC est la réduction considérable de la quantité d'informations à stocker dans chaque cellule. En effet, au lieu de mémoriser une information pour chaque marqueur dans la cellule, il n'est plus nécessaire de stocker qu'une seule information (taux de présence de l'une des deux phases).

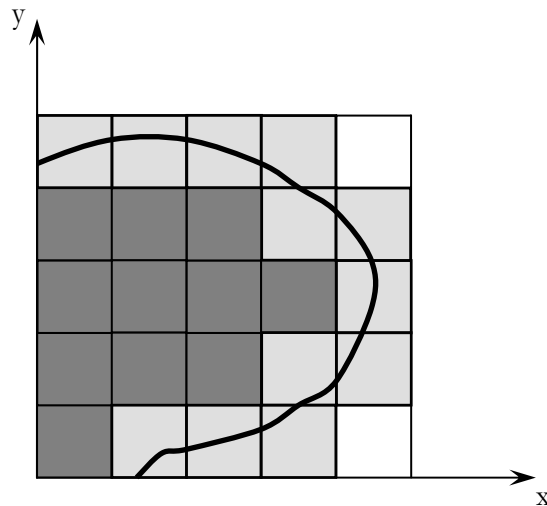


Figure II-5 : Représentation de l'interface par la méthode MAC.

b. La méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation)

Dans cette méthode, les interfaces sont définies par des composantes dans chaque direction de l'espace (figure II-6). Ces composantes unidimensionnelles permettent de reconstruire l'interface dans chaque élément la contenant par des segments de droites perpendiculaires ou parallèles à la direction concernée, et cela en fonction du voisinage de l'élément considéré. Cette méthode ne permet ni la localisation exacte ni l'orientation de l'interface.

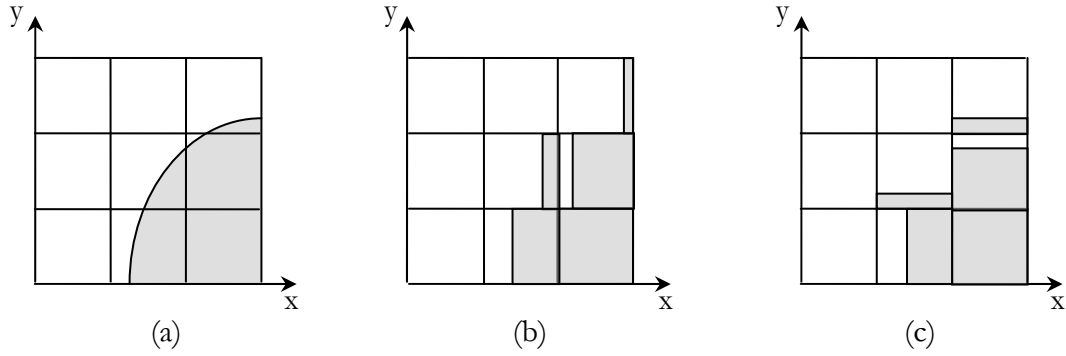


Figure II-6 : Reconstruction de l'interface par la méthode SLIC.

(a) L'interface à reconstruire (b) Construction selon x (c) Construction selon y.

c. Les méthodes VOF

Dans les méthodes VOF (Volume Of Fluid), on s'intéresse à matérialiser d'une façon satisfaisante l'interface en procédant à sa reconstruction maille par maille. La première méthodologie proposée par Hirt et Nichols (1981) [Abbès 2000, Benkenida 1999] consiste à déterminer la position de l'interface par la résolution d'une équation de transport d'une fonction scalaire $C(x,y,t)$ prenant la valeur 1 dans les éléments remplis et 0 dans les éléments vides. La propagation de la discontinuité de C , qui matérialise l'interface, est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (\text{II.2})$$

Pour la résolution de cette équation Hirt et Nichols (1981) ont utilisé dans le cadre de la méthode des différences finies, l'approximation 'donneur-accepteur' (donor-acceptor) pour l'estimation des flux sur les facettes de chaque cellule du maillage. Pour la reconstruction de l'interface, on se sert des deux informations disponibles dans chaque maille : le vecteur normal à l'interface (∇C) et la valeur de C . Dans la méthode VOF originale de Hirt et Nichols (1981), la reconstruction de l'interface est effectuée dans chaque maille la contenant par une ligne horizontale ou une ligne verticale suivant le taux de remplissage des cellules voisines. Cette méthode a été améliorée par la suite par Youngs (1982) en prenant en considération la fraction volumique de la cellule considérée et des huit cellules voisines pour déterminer la pente de l'interface. La position de l'interface est ajustée pour diviser la cellule en deux parties satisfaisant la fraction de fluide contenue dans la cellule (figure II-7).

Au vu de ce qui précède, il est clair que les méthodes VOF sont performantes, car d'une part elles assurent la conservation de la masse de chaque fluide et d'autre part elles permettent une bonne connaissance de la position de l'interface. Mais leurs limites commencent à se faire sentir devant les petites structures diphasiques dont la taille est inférieure à l'échelle de la maille. En effet, si on se place dans le cas d'une petite bulle immergée dans une cellule de calcul contenant du liquide. Disposant d'une seule information par maille, la méthode VOF est incapable de

déterminer l'orientation exacte de l'interface qui dans ce cas prend plusieurs valeurs à l'intérieur de la même cellule.

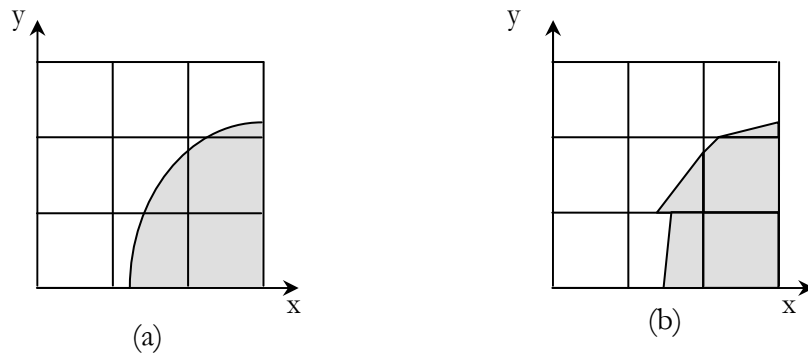


Figure II-7 : Reconstruction de l'interface par la méthode VOF.

(a) L'interface à reconstruire (b) Construction par VOF.

d. Méthodes de capture de front

Dans cette classe de méthodes, on se contente de résoudre l'équation de transport du taux de présence sans procéder à une opération de reconstruction d'interface. Il est évident que l'inconvénient de cette méthode est que la position exacte de l'interface reste méconnue, mais elle a un avantage non négligeable car la nécessité des techniques liées aux structures pouvant exister à petite échelle est complètement éliminée.

Ce type de méthodes est plus simple à mettre en œuvre que les méthodes VOF, car la partie la plus lourde relative à la reconstruction de l'interface a été éliminée, mais on reste toujours confrontés à la résolution de l'équation du taux de présence qui est loin de constituer une mince affaire. En effet, les caractères particuliers de la fonction du taux de présence sont à l'origine de complications mathématiques qui ne permettent l'utilisation d'un schéma numérique classique tel que dans les problèmes d'advection-diffusion. Des schémas numériques adaptés et plus performants sont donc nécessaires.

Enfin, nous ne saurions point achever le présente revue des différentes techniques sans évoquer les méthodes mixtes eulérienne-lagrangienne qui sont potentiellement plus performantes qu'une méthode purement eulérienne ou purement lagrangienne, car elles peuvent combiner les avantages des deux types d'approches tout en éliminant leurs inconvénients. Parmi ces méthodes, nous citons les deux techniques les plus utilisées : la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian method) et les méthodes à maillages adaptatifs. Pour plus de détails concernant les méthodes mixtes, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Abbès (2000).

II.4 Choix de la méthode

Après avoir dévoilé tout un pan de différentes méthodes numériques employées dans la résolution des problèmes à interface libre, il nous reste à présent à effectuer un choix. Dans ce dernier, il sera tenu compte de certaines considérations que nous résumons comme suit :

- pouvoir traiter le maximum possible de problèmes physiques;
- respecter le principe de conservation du volume des phases transportées;
- réduire les difficultés de mise en œuvre.

De surcroît, la précision de calcul de la position de l'interface ne constitue nullement une priorité dans notre cas. C'est pour toutes ces raisons, que notre choix se trouve tout naturellement orienté vers les méthodes de capture de front qui reposent sur le principe d'une résolution aussi précise que possible de l'équation du taux de présence en l'absence d'étape de reconstruction de l'interface. Les caractères de l'équation du taux de présence ainsi que le principe de sa résolution numérique seront développés dans le chapitre VI.

Chapitre III

Modélisation mathématique

III.1 Introduction

La modélisation des écoulements diphasiques est un sujet très complexe aussi bien du point de vue mathématique que du point de vue physique. La difficulté mathématique est liée à la formulation des écoulements diphasiques comme étant le mouvement de deux phases à part avec des frontières mobiles. Quant à la difficulté physique, elle réside dans la modélisation de l'interaction entre les deux phases à travers l'interface.

Si le nombre des particules de la phase dispersée est très important, une résolution directe des équations locales instantanées devient irréaliste. Il n'est pas raisonnable d'espérer une résolution directe à l'échelle des bulles et à l'échelle de la phase porteuse. Ceci nécessiterait des maillages énormes et des pas de temps très petits. C'est pour cela, que les techniques de moyenne sont actuellement utilisées pour contourner l'impossibilité des simulations directes. Elles consistent à appliquer un opérateur de moyenne temporelle ou spatiale sur les termes des équations de la masse et de la quantité de mouvement pondérées par un taux de présence de chaque phase et d'opérer une décomposition des variables de l'écoulement en partie moyenne et une partie de fluctuation. C'est d'ailleurs ce qu'on désigne communément par la décomposition de Reynolds. Le système d'équations ainsi obtenu contient plus d'inconnues que d'équations. Cela est dû à l'apparition de termes supplémentaires qui décrivent les échanges de masse et de quantité de mouvement entre les deux phases à travers l'interface. Pour fermer le système et le rendre solvable, des lois de fermeture seront nécessaires. L'intérêt des moyennes est de pouvoir utiliser des maillages grossiers (plus grands que l'échelle des bulles) et des pas de temps bien supérieurs aux temps des fluctuations.

Dans le cadre de ce chapitre, nous développons les principales étapes qui nous permettent d'aboutir au modèle diphasique moyenné dans le temps dit modèle à deux fluides. Ce dernier est constitué des équations de Navier-Stokes régissant l'écoulement de chaque phase dans lesquelles apparaît un membre supplémentaire qui exprime l'interaction entre les deux phases à l'interface. La résolution de ce modèle nécessitera la modélisation des termes d'échange à l'interface. Après quoi, nous allons nous appuyer sur d'autres considérations physiques à titre hypothétique afin de simplifier ce modèle en dérivant un modèle diphasique à un fluide qui sera utilisé dans la suite de nos travaux.

III.2 Dérivation du modèle à deux fluides moyenné

Considérons un écoulement diphasique composé de deux fluides distincts indicés par $k = 1$ pour la phase liquide et $k = 2$ pour la phase gaz. Rappelons que le mouvement des deux phases est décrit par le modèle à deux fluides en formulation locale instantanée associé aux conditions d'interface :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) &= 0 \\
 \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k &= 0 \\
 \frac{\partial (\rho_k \mathbf{u}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) &= \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} + \rho_k \mathbf{F} \\
 \sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k \mathbf{u}_k - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \cdot \mathbf{n}_k \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

avec,

$$\dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \tag{III.2}$$

$\overline{\overline{\mathbf{T}_k}}$ est le tenseur des contraintes et \mathbf{F} les forces de volume.

III.2.1 Notions de base

Pour la transformation des équations locales instantanées en des équations moyennées ainsi que les conditions d'interface, nous introduisons en premier lieu quelques notions de base utilisées souvent dans la modélisation des écoulements diphasiques.

a. Moyennes temporelles

Soit l'opérateur de moyenne définit par :

$$\langle \dots \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (\dots) d\tau \tag{III.3}$$

L'opérateur de la moyenne temporelle a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle &= \langle \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{g} \rangle \\
 \langle \langle \mathbf{f} \rangle + \mathbf{g} \rangle &= \langle \mathbf{f} \rangle \cdot \langle \mathbf{g} \rangle \\
 \langle \text{cons tan } t \rangle &= \text{cons tan } t \\
 \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \mathbf{f} \rangle}{\partial t} \\
 \langle \nabla \mathbf{f} \rangle &= \nabla \langle \mathbf{f} \rangle \\
 \langle \nabla \cdot \mathbf{f} \rangle &= \nabla \cdot \langle \mathbf{f} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

b. Fonction indicatrice de la phase

A tout instant t et en tout point \mathbf{x} , chacune des deux phases peut être repérée par une fonction indicatrice χ_k définie par :

$$\chi_k(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in k \\ 0, & \text{si non} \end{cases}
 \tag{III.5}$$

d'une façon plus détaillée, nous avons :

$$\chi_1(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si le point } \mathbf{x} \text{ est entouré de liquide} \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

$$\chi_2(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si le point } \mathbf{x} \text{ est entouré de gaz} \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Cela conduit naturellement à :

$$\chi_k^2 = \chi_k
 \tag{III.6}$$

c. Taux de vide local

Considérons un ensemble de N écoulements diphasiques identiques et plaçons nous en un point donné $M(\mathbf{x})$, le même dans les N écoulements à un instant t donné.

Nous pouvons définir un taux de présence de la phase liquide en M par :

$$\alpha_1(\mathbf{x}, t) = \frac{N_L(\mathbf{x}, t)}{N}
 \tag{III.7}$$

$N_L(\mathbf{x}, t)$ étant le nombre d'expérience où le point M est entouré de liquide à l'instant t .

De la même façon, nous définissons un taux de vide local instantané statistique ou le taux de présence de la phase gaz par :

$$\alpha_2(\mathbf{x}, t) = \frac{N_G(\mathbf{x}, t)}{N} \quad (\text{III.8})$$

Ainsi, nous avons de façon évidente :

$$\alpha_k = \langle \chi_k \rangle \quad (\text{III.9})$$

avec :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (\text{III.10})$$

(III.10) est souvent désignée sous le terme axiome de continuité.

III.2.2 Equations pondérées

Une relation fondamentale a été établie par Drew (1983) [Benkenida 1999, Enwald 1996] :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (\text{III.11})$$

Cette équation peut être interprétée comme étant la dérivée particulière de la fonction indicatrice de la phase à travers l'interface.

D'autre part, on peut montrer que la fonction $\chi_k(\mathbf{x}, t)$ vérifie les propriétés suivantes [Benkenida 1999, Enwald 1996, Fabre 1985] :

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_k \delta_I \quad (\text{III.12})$$

où, \mathbf{n}_k est la normale unitaire à l'interface sortant de la phase k et δ_I la distribution de Dirac attachée à l'interface.

Multiplions les termes de l'équation de continuité par $\chi_k(\mathbf{x}, t)$:

$$\chi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Nous avons aussi les relations suivantes :

$$\chi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \frac{\partial \chi_k \rho_k}{\partial t} - \rho_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \quad (\text{III.14})$$

$$\chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) - \rho_k \mathbf{u}_k \cdot \nabla \chi_k \quad (\text{III.15})$$

En combinant ces résultats avec (III.11) et (III.12), on obtient :

$$\frac{\partial \chi_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) = -\rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \quad (\text{III.16})$$

La condition de transfert de la masse à l'interface associée à l'équation de continuité est donnée par :

$$\sum_{k=1}^2 \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \delta_I = 0 \quad (\text{III.17})$$

La même démarche appliquée à l'équation de la quantité de mouvement, aboutira à l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = & \nabla \cdot (\chi_k \overline{\overline{\mathbf{T}_k}}) + \chi_k \rho_k \mathbf{F} \\ & - \left[\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \right] \mathbf{n}_k \cdot \delta_I \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

et la condition d'interface associée à cette équation sera :

$$\sum_{k=1}^2 \left[\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \right] \mathbf{n}_k \cdot \delta_I = 0 \quad (\text{III.19})$$

III.2.3 Equations moyennées

Moyennant les propriétés (III.4) et en appliquant un opérateur de moyenne temporelle sur les équations de la masse (III.16) et de la quantité de mouvement (III.18), nous obtenons :

$$\frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle) = \langle -\rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle) = & \nabla \cdot (\langle \chi_k \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \rangle) + \langle \chi_k \rho_k \mathbf{F} \rangle \\ & - \langle \left[\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}_k}} \right] \mathbf{n}_k \cdot \delta_I \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Utilisant la définition de la fonction indicatrice de la phase et les propriétés (III.4) de la moyenne temporelle, nous pouvons avoir les relations :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \chi_k f_k \rangle}{\partial t} &= \left\langle \chi_k \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\rangle + \left\langle f_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \right\rangle \\
 \nabla \langle \chi_k f_k \rangle &= \langle \chi_k \nabla f_k \rangle + \langle f_k \nabla \chi_k \rangle \\
 \nabla \cdot \langle \chi_k f_k \rangle &= \langle \chi_k \nabla \cdot f_k \rangle + \langle f_k \cdot \nabla \chi_k \rangle
 \end{aligned}
 \tag{III.22}$$

III.2.4 Décomposition de Reynolds

Les équations (III.20) et (III.21) ne peuvent pas être résolues directement, car elles contiennent des moyennes de produits de variables dépendantes. Pour les rendre solvables, elles doivent être écrites en des expressions contenant des produits de variables moyennes. Ceci est rendu possible par l'emploi de la technique de décomposition de Reynolds et une procédure de pondération par une variable avant de prendre la moyenne.

La décomposition de Reynolds et la moyenne temporelle sont généralement utilisées, dans la modélisation des écoulements monophasiques turbulents, dans le but de séparer la composante de fluctuation de la partie moyenne. Mais ici l'objectif recherché est de transformer la moyenne des produits en un produit de moyennes. Le terme « décomposition de Reynolds » n'est en fait qu'un abus de langage utilisé dans la littérature.

Cette procédure fera apparaître un terme supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement contenant la corrélation des termes de fluctuation. Ce terme est analogue au tenseur de contraintes de Reynolds dans les écoulements monophasiques turbulents.

La décomposition de Reynolds associée à une procédure de pondération d'une variable quelconque f , consiste à écrire:

$$f = \langle f \rangle^W + f' \tag{III.23}$$

$\langle f \rangle^W$ valeur moyenne pondérée

f' partie de fluctuation

a. Moyennes Pondérées

En général la valeur de la moyenne pondérée par une fonction W d'une variable quelconque f est définie par [Enwald 1996, Ishii 1975] :

$$\langle f \rangle^W = \frac{\langle W f \rangle}{\langle W \rangle} \tag{III.24}$$

W est un facteur de pondération quelconque.

Pour séparer la moyenne des produits en produit de moyenne, deux procédures de pondération sont utilisées. Les variables sont soit pondérées par la fonction indicatrice de la phase c'est la moyenne de phase, soit par la fonction indicatrice et le poids spécifique et c'est ce qu'on appelle la moyenne pondérée par la masse.

➤ **Moyennes de phase :**

La densité de la phase k est pondérée par la fonction indicatrice de la phase $\chi_k(x, t)$:

$$\langle \rho_k \rangle^{\chi_k} = \frac{\langle \chi_k \rho_k \rangle}{\langle \chi_k \rangle} = \frac{\langle \chi_k \rho_k \rangle}{\alpha_k} = \overline{\rho_k} \quad (\text{III.25})$$

De la même façon pour le tenseur des contraintes :

$$\langle \overline{T_k} \rangle^{\chi_k} = \overline{T_k}^{\chi_k} \quad (\text{III.26})$$

➤ **Moyenne pondérée par la masse :**

$$\langle f \rangle^{\chi_k \rho_k} = \frac{\langle \chi_k \rho_k f \rangle}{\langle \chi_k \rho_k \rangle} \quad (\text{III.27})$$

Introduisons la décomposition de Reynolds sur l'équation de continuité :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{U}_k + \mathbf{u}'_k \quad (\text{III.28})$$

où : \mathbf{U}_k est la partie moyenne et \mathbf{u}'_k est la partie de fluctuation.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\langle \chi_k \rho_k \rangle}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k (\mathbf{U}_k + \mathbf{u}'_k) \rangle}_{\text{terme 2}} = \langle -\rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \quad (\text{III.29})$$

La relation (III.25), nous permet d'avoir :

$$\text{terme 1} = \frac{\partial (\overline{\alpha_k \rho_k})}{\partial t} \quad (\text{III.30})$$

et moyennant les propriétés (III.22) :

$$\text{terme 2} = \nabla \cdot \left(\langle \chi_k \rho_k \mathbf{U}_k \rangle + \langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}'_k \rangle \right) \quad (\text{III.31})$$

D'autre part, la moyenne pondérée par la masse du vecteur vitesse est par définition constante [Enwald 1996], d'où :

$$\text{terme } 2 = \nabla \cdot \left(\langle \chi_k \rho_k \rangle U_k + \langle \chi_k \rho_k u'_k \rangle \right) = \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\rho_k} (U_k + \langle u'_k \rangle^{\rho_k \chi_k}) \right) \quad (\text{III.32})$$

Nous savons que: $\langle f' \rangle = 0$. Ceci réduit l'expression du deuxième terme de l'équation de continuité à : $\nabla \cdot (\alpha_k \rho_k U_k)$.

Finalement l'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial (\alpha_k \overline{\rho_k})}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k} U_k) = \Gamma_k \quad (\text{III.33})$$

Avec $\Gamma_k = \langle -\rho_k (u_k - u_i) \cdot n_k \delta_I \rangle$ qui constitue la terme de transfert de masse entre les phase à l'interface et :

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0 \quad (\text{III.34})$$

La décomposition de Reynolds appliquée à l'équation de quantité de mouvement donne :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_k \rho_k (U + u'_k) \rangle}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k (U_k + u'_k)(U_k + u'_k) \rangle}_{\text{terme 2}} \\ & - \underbrace{\nabla \cdot \langle \chi_k \overline{T_k} \rangle}_{\text{terme 3}} - \underbrace{\langle \chi_k \rho_k F \rangle}_{\text{terme 4}} = - \langle [\rho_k u_k (u_k - u_i) - \overline{T_k}] n_k \cdot \delta_I \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

En suivant la même procédure que dans l'équation de continuité nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \text{terme 1} &= \frac{\partial (\alpha_k \overline{\rho_k} U_k)}{\partial t} \\ \text{terme 2} &= \nabla \cdot \left(\langle \chi_k \rho_k U_k U_k \rangle + \langle 2 \chi_k \rho_k U_k u'_k \rangle + \langle \chi_k \rho_k u'_k u'_k \rangle \right) \\ &= \nabla \cdot \left(\langle \chi_k \rho_k \rangle U_k U_k + 2 \langle \chi_k \rho_k \rangle U_k \langle u'_k \rangle^{\chi_k \rho_k} + \langle \chi_k \rangle \langle \rho_k u'_k u'_k \rangle^{\chi_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

ayant $\langle u'_k \rangle = 0$, le deuxième terme sera donnée par :

$$\text{terme } 2 = \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\rho_k} U_k U_k - \alpha_k \langle \rho_k u'_k u'_k \rangle^{\chi_k} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{u}'_k \mathbf{u}'_k \rangle = \overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\text{Re}} \quad (\text{III.38})$$

Le terme donné par l'expression (III.38) représente le tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds.

$$\text{terme } 2 = \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k - \alpha_k \overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\text{Re}} \right) \quad (\text{III.39})$$

De la même façon si on applique la moyenne de phase sur les termes du tenseur des contraintes et des forces de volumes on aboutira finalement à :

$$\frac{\partial (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k) = \nabla \cdot \left(\alpha_k \left(\overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\chi_k} + \overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\text{Re}} \right) \right) + \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{F} + \mathbf{M}_k \quad (\text{III.40})$$

avec,

$$\mathbf{M}_k = - \left\langle \left[\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\overline{\mathbf{T}}_k} \right] \mathbf{n}_k \cdot \delta_I \right\rangle \quad (\text{III.41})$$

Le terme \mathbf{M}_k représente l'interaction entre les deux phases résultant des transferts des quantités de mouvement à travers l'interface gaz-liquide.

A ce niveau, le modèle à deux fluides moyenné avec les conditions d'interaction entre les deux phases est donné par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k) &= \Gamma_k \\ \frac{\partial (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k) &= \nabla \cdot \left(\alpha_k \left(\overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\chi_k} + \overline{\overline{\mathbf{T}}_k}^{\text{Re}} \right) \right) + \alpha_k \overline{\overline{\rho_k}} \mathbf{F} + \mathbf{M}_k \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

avec,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^2 \mathbf{M}_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^2 \alpha_k &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

où,

$$\Gamma_k = \langle -\rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k \delta_I \rangle \quad (\text{III.44})$$

$$\mathbf{M}_k = -\langle [\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) - \overline{\mathbf{T}}_k] \mathbf{n}_k \cdot \delta_I \rangle \quad (\text{III.45})$$

III.2.4 Conditions à l'interface

Avec le système macroscopique (III.42) deux conditions de transfert à l'interface doivent être impérativement satisfaites :

a. L'équation du bilan de masse surfacique

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0$$

Γ_k étant défini par l'expression (III.44).

Le temps de séjour des bulles dans l'eau étant très court (de l'ordre de quelques secondes), on peut considérer en bonne approximation qu'il n'y a pas d'échange de masse entre les deux phases et par conséquent : $\Gamma_k = 0$. En réalité le terme Γ_k n'est modélisé que pour les écoulements avec changement de phase [Ghidaglia 1996].

b. L'équation du bilan de moment à l'interface

$$\sum_{k=1}^2 \mathbf{M}_k = 0 \quad \text{ou : } \mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1$$

\mathbf{M}_k est donné par l'expression (III.45)

c. Lois de fermeture à l'interface

Il n'y a pas d'accord entre les physiciens sur une écriture des termes de transfert à l'interface [Ghidaglia 1996]. Néanmoins, il est couramment admis qu'en absence de transfert de masse pour les écoulements dispersés, le terme de transfert de quantité de mouvement à l'interface est écrit comme une somme de forces élémentaires (par unité de volume) s'appliquant à l'interface [Depeyre 1996, Enwald 1996, Sainsauliau 1992].

Depeyre (1996) s'est intéressé à l'étude des écoulements diphasiques dispersés dont la phase continue est composée d'hydrogène et la phase dispersée de gouttes d'oxygène. De tels écoulements sont rencontrés dans les moteurs diesel, les moteurs à injection directe ou les moteurs cryogéniques des fusées. En effet dans les fusées modernes, on introduit dans le

propergol solide de petite particules métalliques (par exemple, des particules d'aluminium) pour augmenter la poussée des fusées. La présence de ces particules modifie la vitesse du son dans la fusée et atténue les instabilités de combustion ; de plus, elles produisent des particules de fumées de très petite taille (1 μm), et des agglomérats de grosses tailles (100 μm) par coalescence. Dans cette étude, est stipulé, que la principale composante des forces appliquées sur l'interface est une force de frottement interfaciale ou force de traînée.

Pour modéliser le terme d'interaction, Depeyre (1996) utilise la formule de Stokes en supposant que l'écoulement est laminaire autour des particules et que ces dernières ont le même rayon r :

$$M_k = \frac{\alpha_2 \rho_2 (U_2 - U_1)}{\varepsilon} \quad (\text{III.46})$$

où ε représente le temps de relaxation donné par :

$$\varepsilon = \frac{16r^2 \rho_2}{81\mu_2} \quad (\text{III.47})$$

La force de traînée a tendance à rendre égales les vitesses du gaz et des particules, après un temps de relaxation ε .

Sur la base d'une étude bibliographique détaillée des différentes approches utilisées pour la modélisation du terme de transfert de quantité de mouvement à l'interface et l'exposé du bilan des efforts appliqués à l'interface, Enwald (1996) conclue que pour les écoulements dispersés la composante prépondérante des efforts à l'interface est la force de traînée.

Dans le cas général, le bilan des forces à l'interface comprend principalement les efforts de : traînée, de portance et de masse ajoutée. On trouve dans la bibliographie d'autres efforts tels que la force d'histoire, la force de flottabilité...

Le moment généré par ces efforts est exprimé par la relation :

$$M_k = n_p (F_{tr} + F_p + F_{aj}) \quad (\text{III.48})$$

Dans laquelle les termes entre les parenthèses sont les efforts appliqués sur une bulle en suspension et n_p le nombre de bulles par unité de volume donné par :

$$n_p = \frac{6(1-\alpha_1)}{\pi d_p^3} \quad (\text{III.49})$$

d_p étant le diamètre des bulles et α_1 taux de présence de la phase continue.

Les forces sont celles qui agissent sur les particules de gaz. Celles correspondant à la phase porteuse sont obtenues seulement par changement de signe dans la condition de transfert à l'interface.

Enwald (1996) a donné les expressions des forces agissant à l'interface :

➤ **Force de traînée :**

Elle est due aux contraintes visqueuses que le fluide exerce sur la surface de l'inclusion. Elle est donnée par :

$$F_{tr} = -C_D \frac{\pi r^2}{2} \rho_1 |U_2 - U_1| (U_2 - U_1) \quad (\text{III.50})$$

où $(U_2 - U_1)$ représente la vitesse relative de la particule par rapport au liquide.

Le coefficient C_D dépend du nombre de Reynolds de la particule :

$$C_D = \begin{cases} \frac{16}{Re} & \text{si } Re < 1 \\ \frac{16}{Re} (1 + 0.16 Re^{1/2}) & \text{si } 1 < Re < 60 \\ \frac{48}{Re} (1 - 2.21 Re^{-1/2}) & \text{si } Re > 60 \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

Le nombre de Reynolds de la particule est égal à :

$$Re = \frac{2(U_2 - U_1)r}{\nu_2} \quad (\text{III.52})$$

r étant le rayon de la particule et ν_2 est la viscosité cinématique du gaz.

➤ **Force de la masse ajoutée :**

C'est la force qu'il faut exercer sur un fluide pour déplacer en mouvement accéléré un corps dans ce fluide. Elle est exprimée par :

$$F_{aj} = \rho_1 V_b C_m \left(\frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt} \right) \quad (\text{III.53})$$

où $C_m = \frac{1}{2}$ pour une sphère et V_b volume de la bulle d'air.

➤ **Force de portance :**

C'est la force qui s'exerce sur la particule perpendiculairement à sa vitesse de glissement.

$$F_p = -C_l \rho_1 V_b (U_2 - U_1) \times \omega_1 \quad (\text{III.54})$$

où $\omega_1 = \nabla \times U_1$ en l'absence de rotation de la particule et $C_l = \frac{1}{2}$ pour une particule sphérique.

III.3 Dérivation du modèle à un fluide

Après une présentation succincte des différentes approches de modélisation des écoulements diphasiques et une étude plus détaillée des procédures permettant d'aboutir au modèle diphasique moyenné dans le temps, il serait intéressant maintenant de dériver un modèle mathématique simplifié. Cela est conforté, d'une part, par le fait que l'utilisation du modèle à deux fluides posera de grandes difficultés à la fois mathématiques et physiques et d'autre part, par le fait que les applications auxquelles nous nous intéressons nous permettent de proposer un certain nombre d'hypothèses pouvant simplifier énormément le modèle et rendre sa résolution beaucoup moins chère du point de vue numérique.

Notre choix s'est porté sur le modèle à un fluide dit aussi de mélange qui est formulé en considérant le mélange comme étant un fluide équivalent. L'écoulement sera, à cet effet, régi par un système constitué d'une équation de conservation de la masse, une équation de conservation de la quantité de mouvement et une équation de transport sur le taux de présence. Ce modèle est constitué de moins d'équations et de variables que le modèle à deux fluides. Les difficultés inhérentes à l'aspect physique du problème, notamment en ce qui concerne le choix des lois de fermeture à l'interface peuvent facilement être surmontées en se basant sur certaines considérations physiques.

Dans ce qui suit, nous allons développer les étapes qui vont nous permettre d'aboutir de manière rigoureuse au modèle mathématique qui sera adopté dans la suite de nos travaux et nous donnerons d'une manière détaillée les hypothèses adoptées lors de cette démarche.

L'écriture des sommes des équations (III.42) sur les deux phases en tenant compte des bilans aux interfaces (III.43) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \mathbf{U}_k \right) &= 0 \\ \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \mathbf{U}_k \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k \right) &= \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(\overline{\mathbf{T}}_k^{\chi_k} + \overline{\mathbf{T}}_k^{\text{Re}} \right) \right) + \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

III.3.1 Condition d'incompressibilité

Dans ce qui suit, nous allons considérer que les deux phases sont incompressibles. En effet, pour la phase eau, cela paraît tout à fait acceptable. En ce qui concerne l'air, nous faisons l'hypothèse que les bulles sont rigides et qu'elles conservent leur diamètre durant leur mouvement caractérisé

par un temps de séjour très faible (de l'ordre de quelques secondes). En plus, il a été observé que pour des vitesses d'écoulement inférieures à 0.2 - 0.3 Mach, l'air se comporte effectivement comme un fluide incompressible [Abbès 2000].

Dans ces conditions, on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad (\text{III.56})$$

Multiplions cette équation par la fonction indicatrice de la phase :

$$\chi_k \nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (\text{III.57})$$

Cette expression combinée avec (III.12), donne :

$$\nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_I = 0 \quad (\text{III.58})$$

et en sommant sur les deux phases, on obtient :

$$\nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \chi_k \mathbf{u}_k \right) + \left(\sum_{k=1}^2 \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \right) \delta_I = 0 \quad (\text{III.59})$$

En supposant l'absence de changement de phase à l'interface $\left(\sum_{k=1}^2 \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \right)$ et en appliquant les techniques de moyenne sur l'équation (III.59), on aboutit facilement à l'expression suivante :

$$\nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \mathbf{U}_k \right) = 0 \quad (\text{III.60})$$

En définissant la vitesse \mathbf{U} et la masse volumique ρ du mélange diphasique par :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k \mathbf{U}_k \\ \rho &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho}_k \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

le système (III.55) prend la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho}_k \mathbf{U}_k \right) &= 0 \\ \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho}_k \mathbf{U}_k \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho}_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k \right) &= \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(\overline{\overline{\chi}_k} \overline{\overline{T}_k} + \overline{\overline{\text{Re}}} \right) \right) + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

où, \mathbf{g} est la force de gravité.

III.3.2 Absence de glissement entre les deux phases

En négligeant le glissement local entre les deux phases, ceci revient à considérer localement l'égalité des vitesses entre les deux phases et par conséquent avec le mélange : $U_1 = U_2 = U$.

Ainsi, le système (III.62) est simplifié comme suit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot U &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U U) &= \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(\overline{\overline{T}_k^{\chi_k}} + \overline{\overline{T}_k^{\text{Re}}} \right) \right) + \rho g \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

A ce stade, nous pouvons bien remarquer que l'hypothèse d'absence de glissement, nous conduit à un résultat très intéressant à travers l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \cdot \nabla \rho = 0 \quad (\text{III.64})$$

En effet, cette dernière indique que la masse volumique ρ du mélange est constante suivant l'écoulement (le long des trajectoires). Ainsi, ρ varie d'une trajectoire à l'autre tout en conservant à l'écoulement du mélange un caractère incompressible car nous avons : $\nabla \cdot U = 0$.

Par conséquent, l'écoulement du mélange diphasique peut être régi par le système suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot U &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U \right] &= \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(\overline{\overline{T}_k^{\chi_k}} + \overline{\overline{T}_k^{\text{Re}}} \right) \right) + \rho g \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

III.3.3 Lois constitutives

En négligeant les contraintes de fluctuation dues à la turbulence, le tenseur des contraintes se décompose en deux parties, la première partie correspond aux contraintes de pression, qui sont les seules présentes en l'absence de gradients de vitesses (fluide au repos). Cette partie est purement diagonale (contraintes exclusivement normales) et isotrope. La deuxième partie qui apparaît dans les fluides en mouvement reflète les forces de frottement entre les couches du fluide et sont dues à la viscosité.

On décompose alors, le tenseur des contraintes sous la forme :

$$\nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\overline{T}_k^{\chi_k}} \right) = \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(-P_k \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}_k} \right) \right) = -\nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k P_k \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\overline{\tau}_k} \right) \quad (\text{III.66})$$

où p_k est la pression, $\bar{\mathbf{I}}$ le tenseur de Kronecker et $\bar{\boldsymbol{\tau}}_k$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

En considérant que les deux phases sont constituées de fluides newtoniens, le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_k = 2\mu_k \mathbf{S}_k - \left(\frac{2}{3}\mu_k - \lambda_k \right) (\nabla \cdot \mathbf{U}_k) \quad (\text{III.67})$$

où,

μ_k : viscosité dynamique du fluide k ;

λ_k : la deuxième viscosité du fluide k ou viscosité de volume ;

$\bar{\mathbf{S}}_k$: représente le tenseur des taux de déformation donné par :

$$\bar{\mathbf{S}}_k = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U}_k + \nabla \mathbf{U}_k^T) \quad (\text{III.68})$$

Le terme en λ_k dans l'expression du tenseur des contraintes est associé aux variables de volume du fluide par compression. Ce terme n'apparaît pas dans l'étude des fluides incompressibles [GUYON E& al. 1991].

L'absence de glissement entre les deux phases nous permet d'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_k = 0 \quad (\text{III.69})$$

Ainsi, l'expression du tenseur des contraintes se réduit à :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_k = \mu_k \cdot \nabla \mathbf{U}_k \quad (\text{III.70})$$

d'où le système (III.65) devient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{U} \right] &= -\nabla \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k p_k \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k \mu_k \nabla \mathbf{U}_k \right) + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

En adoptant les écritures suivantes pour la pression et la viscosité moyennes :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k p_k \\ \mu &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k \mu_k \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

le système (II.71) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{U} \right] &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

dans lequel \mathbf{U} et \mathbf{P} désignent respectivement la vitesse et la pression du mélange diphasique et ρ et μ la masse volumique et la viscosité dynamique.

III.4 Equation du taux de présence

En l'absence de changement de phase, la procédure de moyenne temporelle appliquée à l'expression (III-16) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{U}_k) = 0 \quad (\text{III.74})$$

Cette équation est équivalente, dans le cadre de l'hypothèse d'absence de glissement, à :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha_k = 0 \quad (\text{III.75})$$

En fin le modèle peut être écrit, en fonction du taux de présence de l'une des deux phases, tout en considérant l'axiome de continuité, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right] &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) + \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

avec,

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \\ \mu &= \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

III.5 Conclusion

Finalement, on découvre que le modèle à un fluide, écrit sous les hypothèses exposées ci-dessus, a pris la forme des équations de Navier-Stokes incompressibles. Dans ces dernières les variables de l'écoulement \mathbf{U} et \mathbf{P} désignent respectivement les champs de vitesse et de pression du mélange diphasique. Aussi, une équation de transport supplémentaire décrivant l'évolution du taux de présence est associée au modèle. Les propriétés physiques du mélange sont données en fonction de celles des deux fluides et du taux de présence.

Il est, à cet effet, nécessaire de focaliser nos efforts sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes monophasiques dans une première phase. C'est pour cette raison, que nous avons consacré entièrement la prochaine étape de notre travail à la résolution numérique de ces dernières.

Chapitre IV

Résolution des équations de Navier-Stokes

IV.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons pu mettre en évidence que le modèle diphasique à un fluide écrit sous les hypothèses adoptées et discutées s'est réduit finalement à un système d'équations semblable à celui de Navier-Stokes. Les variables de l'écoulement, pour ces équations, sont définies pour un fluide équivalent qui est le mélange diphasique. Le modèle à un fluide comprend aussi une équation de transport du taux de présence de chaque phase. Partant de là, nous avons tiré la conclusion qu'avant d'espérer à la résolution du système diphasique complet, il serait plus raisonnable de procéder à la mise en œuvre d'un outil de calcul pour la résolution des équations de Navier-Stokes monophasiques dans une première phase. Ce dernier fera, par la suite, l'objet des modifications nécessaires dans l'optique de son extension à l'étude des écoulements diphasiques. Ainsi l'objet du présent chapitre est de présenter les méthodes numériques adoptées pour la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles dans le cas incompressible.

Pour ce faire, la méthode des volumes finis, qui est une méthode de formulation intégrale des équations à résoudre au plan local sur chacun des volumes de contrôle entourant chaque nœud, a été choisie pour la discrétisation spatiale. Notre choix s'est porté sur cette méthode pour ses propriétés de conservation des différentes grandeurs transportées. En fait, une prise en compte correcte des flux transférés à travers la surface de chacun des volumes de contrôle assure bien les principes de conservation. Pour l'avancement en temps, un schéma semi implicite à trois pas de temps fractionnaires du type Runge Kutta/Cranck Nicholson a été adopté. Ainsi, les termes advectifs seront calculés par un schéma explicite de Runge Kutta à 3 pas de temps précis au troisième ordre et pour le traitement des termes visqueux, on utilise un schéma semi implicite de Cranck-Nicholson inconditionnellement stable et précis au second ordre. Le calcul de la pression est assuré par une méthode de projection. En fin de ce chapitre, les méthodes de résolution numériques utilisées dans le cadre de ce code seront présentées.

IV.2 Discrétisation temporelle - méthode des projections

Dans le cas d'un écoulement incompressible, les équations de Navier-Stokes sont la combinaison d'une équation d'évolution (quantité de mouvement où la vitesse joue le rôle d'une quantité transportable) et d'une contrainte (continuité) sur le champ des vitesses, indépendante du temps. Seule la pression qui intervient sous la forme d'un terme source du type gradient ne joue pas le rôle d'une quantité transportable. En plus, il n'y a aucune équation évidente sur la pression.

Les principales difficultés liées à la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation vitesse-pression sont :

- 1 - La présence de la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, qui doit être satisfaite à tout moment et qui ne permet pas l'utilisation d'une méthode explicite qui évite la solution d'un système d'équations algébrique.
- 2 - Il n'y a aucune condition à la limite sur la pression.

C'est pour cela que, des techniques de résolution à pas fractionnaires de type "prédicteur-correcteur" ont été mises au point. Le principe de ces méthodes consiste à approximer l'évolution temporelle par plusieurs pas de temps. Elles sont basées sur l'utilisation d'un champ de vitesses auxiliaire en utilisant les équations de quantité de mouvement où les termes de pression sont pris au pas de temps précédent ou bien sont purement et simplement supprimés. La pression et le champ de vecteur à divergence nulle sont ensuite déterminés itérativement.

Les méthodes de projection ont été indépendamment proposées par Chorin (1968) et Temam (1969) [Coré 2002, Sadat 2001, Peyret et Taylor 1983] pour calculer les écoulements incompressibles. Elles sont basées sur la théorie de décomposition de Hodge et s'effectuent en deux étapes. Tout d'abord, on estime un champ de vitesses intermédiaire par la résolution de l'équation de la quantité de mouvement sans tenir compte des termes de pression, ce qui revient à calculer les termes instationnaires et de convection-diffusion. Puis en résolvant l'équation de continuité avec ce champ de vitesses, on calcule le champ de pression, et on corrige le champ de vitesse en le projetant sur l'espace des champs vecteurs à divergence nulle.

Avant de procéder à l'utilisation de la méthode de projection, nous avons jugé utile, tout d'abord, de donner un bref aperçu théorique sur cette technique.

Les écoulements instationnaires et incompressibles sont représentés par le système d'équations de Navier-Stokes, composé de l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{IV.1}$$

et l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g} \tag{IV.2}$$

Ces équations peuvent être reformulées en introduisant le concept de projection. Ce dernier est basé sur la décomposition de Hodge qui stipule que n'importe quel champ de vecteurs \vec{W} peut être décomposé en deux composantes orthogonales : une rotationnelle à divergence nulle \vec{W}_d et l'autre solénoïdale \vec{W}_s (gradient d'un champ scalaire).

Alors la décomposition de Hodge du vecteur \vec{W} s'écrit sous la forme :

$$\vec{W} = \vec{W}_d + \vec{W}_s \quad (\text{IV.3})$$

avec :

$$\nabla \cdot \vec{W}_d = 0 \quad (\text{IV.4})$$

et

$$\vec{W}_s = \nabla \phi \quad (\text{IV.5})$$

Et si on prend la divergence du vecteur, on a :

$$\nabla \cdot \vec{W} = \Delta \phi \quad (\text{IV.6})$$

Avec cette décomposition, nous pouvons alors définir un opérateur de projection orthogonal P comme l'opérateur qui projette un champ de vecteurs \vec{W} sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle :

$$P(\vec{W}) = \vec{W}_d \quad (\text{IV.7})$$

La relation entre l'opérateur de projection P et la composante solénoïdale s'écrit alors :

$$\vec{W}_s = (I - P)\vec{W} = \nabla \phi \quad (\text{IV.8})$$

Notons que l'opérateur P opérant sur un gradient donne un zéro : $P(\nabla \phi) = 0$, tandis qu'il laisse un champ de vecteur à divergence nulle inchangé $P(\vec{W}_d) = \vec{W}_d$ [Coré 2002, Sadat 2001]. Nous avons alors $P^2 = P$.

Si l'on écrit les équations de Navier-Stokes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

on reconnaît une décomposition de Hodge et l'on peut écrire formellement :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{P}(-\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U}) \quad (\text{IV.10})$$

Cette formulation a modifié les équations de Navier-Stokes en une unique équation d'évolution pour la vitesse, pour laquelle la contrainte (IV.1) est automatiquement vérifiée si $\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}$ au temps $t=0$.

Par ailleurs, la formulation par l'opérateur de projection \mathbf{P} nous permet de mieux comprendre le rôle du gradient de pression, qui vérifie l'équation :

$$\nabla \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})(-\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U}) \quad (\text{IV.11})$$

$\nabla \mathbf{p}$ est la composante gradient de la décomposition de Hodge, qui est éliminée lorsque l'opérateur de projection est appliqué pour satisfaire la contrainte divergentielle.

La méthode de projection décompose chaque pas de temps Δt en deux sous-pas de la manière suivante :

Résoudre d'abord :

$$\frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} - \mathbf{U}^n) + \nabla \cdot (\mathbf{U}^n \mathbf{U}^n) = \nu \Delta \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (\text{IV.12})$$

Puis le champ de vitesse prédit est projeté sur l'espace des champs de vitesses à divergence nulle par l'intermédiaire de :

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{U}^{n+1} - \tilde{\mathbf{U}}^{n+1}) + \nabla \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.13-a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.13-b})$$

En prenant la divergence de l'équation (IV.13-a) et tenant compte de (IV.13-b) qui stipule que \mathbf{U}^{n+1} doit être à divergence nulle, on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta \mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (\text{IV.14})$$

Pour résumer, l'équation (IV.12) permet de calculer le champ de vitesse prédit $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1}$ qui contient la partie rotationnelle de la solution mais qui n'est pas à divergence nulle, ensuite l'équation de Poisson (IV.14) donne la valeur de la pression \mathbf{p}^{n+1} et enfin le champ de vitesse qui respecte la condition d'incompressibilité est estimé par l'équation (IV.13-a).

Cet algorithme qui a été utilisé par beaucoup d'auteurs pour la résolution des équations de Navier-Stokes [Kim & Moin 1985, Le & Moin 1991, Rai & Moin 1991], peut être amélioré en calculant une meilleure estimation du champ de vitesse prédit $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ en incorporant le gradient de pression $\nabla \mathbf{p}^n$ estimé au temps précédent t^n . Cet algorithme est noté méthode de projection incrémentale et est défini par :

Résoudre d'abord :

$$\frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} - \mathbf{U}^n) + \nabla \cdot (\mathbf{U}^n \mathbf{U}^n) + \nabla \mathbf{p}^n = \nu \Delta \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (\text{IV.15})$$

Puis le champ de vitesse prédit est projeté sur l'espace des champs de vitesse à divergence nulle par :

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{U}^{n+1} - \tilde{\mathbf{U}}^{n+1}) + (\nabla \mathbf{p}^{n+1} - \nabla \mathbf{p}^n) = 0 \quad (\text{IV.16-a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0 \quad (\text{IV.16-b})$$

En introduisant un potentiel auxiliaire qu'on va noter $\Phi^{n+1} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n$ et en prenant la divergence de l'équation (IV.16-a) et tenant compte de (IV.16-b) qui stipule que \mathbf{U}^{n+1} doit être à divergence nulle, on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta \Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (\text{IV.17})$$

D'où on peut tirer la relation entre la pression et le potentiel auxiliaire :

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Phi^{n+1} \quad (\text{IV.18})$$

Cette technique de projection peut être employée indépendamment du schéma temporel. Rai & Moin (1991) l'ont, par exemple, utilisée avec un schéma du type Adams-Bashforth/Crank-Nicolson.

IV.3 Discrétisation spatiale

IV.3.1 Maillage décalé

La méthode des volumes finis consiste à décomposer le domaine de calcul en volumes élémentaires. Par la suite, l'utilisation d'un maillage décalé facilite le calcul des flux à travers les facettes qui limitent le volume. En effet, les nœuds de pression sont situés au centre des mailles et

les nœuds de vitesses sont localisés au milieu des nœuds de pression. Les volumes d'intégration et la position des variables sont représentés sur la figure IV-1.

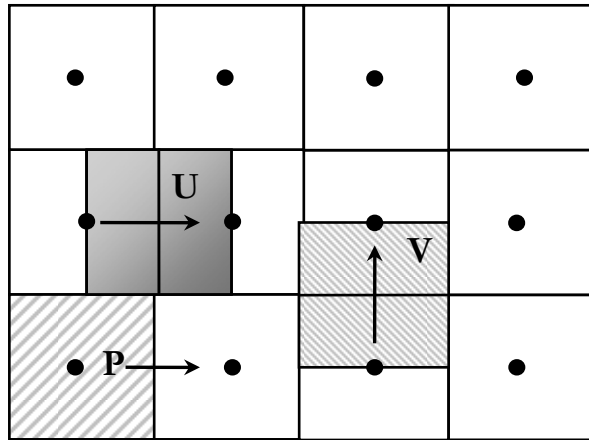


Figure IV-1 : Position des variables sur le maillage décalé.

IV.3.2 Méthode des volumes finis

Pour un écoulement instationnaire d'un fluide incompressible et Newtonien, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent sous la forme conservative :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

où :

\mathbf{U} est le vecteur vitesse,

p la pression,

ρ la masse volumique du fluide,

le tenseur des contraintes visqueuses,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique du fluide et

\mathbf{g} la gravité.

Ces équations, écrites en notation indicielle, prennent alors, dans le cas bidimensionnel, la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} &= 0 & i, j = 1, 2 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij})}{\partial x_j} + g_i \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

avec :

$$\tau_{ij} = \nu \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ étant la viscosité cinématique du fluide et g la gravité.

En intégrant les équations (IV.20) sur chaque volume élémentaire Ω borné sur une surface fermée Γ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} d\Omega &= \int_{\Omega} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - U_i U_j) d\Omega + \int_{\Omega} g_i d\Omega \end{aligned} \quad (IV.21)$$

En utilisant le théorème d'Ostogradsky, les termes de divergence sont transformés en intégrales de surface sur Γ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_j . n_j &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} d\Omega &= \int_{\Omega} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} (\tau_{ij} - U_i U_j) . n_j d\Gamma + \int_{\Omega} g_i d\Omega \end{aligned} \quad (IV.22)$$

Le système peut être écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_j . n_j &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} d\Omega &= \int_{\Omega} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega + L[U_i] + N[U_i] \end{aligned} \quad (IV.23)$$

où, l'opérateur $L[U_i]$ représente les termes traités implicitement :

$$L[U_i] = \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} . n_j d\Gamma \quad (IV.24)$$

et l'opérateur $N[U_i]$ les termes traités explicitement :

$$N[U_i] = \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} d\Gamma - \int_{\Gamma} U_i U_j . n_j d\Gamma + \int_{\Omega} g_i d\Omega \quad (IV.25)$$

IV.3.3 Approximation des dérivées spatiales

Pour le traitement des dérivées spatiales, notre choix s'est porté sur un schéma centré du second ordre. Toutes les dérivées sont approximées en utilisant deux points. En plus, on considère que les termes des forces de volume sont constants sur chaque volume de contrôle et que les grandeurs intervenant dans les termes de flux sont constantes sur chacune des facettes de la cellule considérée.

IV.4 Avancement en temps

IV.4.1 Partie convection – diffusion

Pour assurer l'avancement en temps de la solution, nous avons opté pour un schéma numérique temporel de type Runge Kutta/Crank Nicolson à trois pas de temps fractionnaires. Indépendamment de la discrétisation spatiale, ce schéma temporel a été utilisé par Le & Moin (1991) et Calmet (1995) pour ses propriétés avantageuses de stabilité. Pour cela, les termes advectifs sont résolus par un schéma explicite de type Runge Kutta à trois pas fractionnaires (RK3). Ce schéma est précis à l'ordre Δt^3 et fournit par conséquent une condition de stabilité très

intéressante puisque le nombre $(CFL = \max(|U|, |V|) \frac{\Delta t}{\Delta x})$ est égal à $\sqrt{3}$ [Le & Moin 1991,

Calmet 1995, Legendre 1996]. Cette propriété de stabilité est remarquable, car la plupart des schémas explicites conduisent à une valeur de CFL inférieure ou égale à 1, soit tout simplement à un schéma instable en l'absence de diffusion.

Pour ce qui est des termes visqueux, ils sont calculés par un schéma semi-implicite de type Crank-Nicolson (CN), qui permet d'assurer une instabilité inconditionnelle, avec une précision de l'ordre de Δt^2 .

Ainsi, dans le cadre du schéma RK3/CN, le seul critère de stabilité que le pas de temps doit vérifier est le critère CFL qui s'écrit dans le cas du schéma utilisé [Le & Moin 1991] :

$$\Delta t \leq \sqrt{3} \min \left(\frac{\Delta x \Delta y}{u_{\max} \Delta y + v_{\max} \Delta x} \right) \quad (\text{IV.26})$$

Le schéma numérique initialement proposé par Le & Moin (1991) et adapté par Calmet (1995), peut s'écrire symboliquement :

$$\begin{aligned} \frac{U_i^k - U_i^{k-1}}{\Delta t} &= \gamma_k N[U_i^{k-1}] + \zeta_k N[U_i^{k-2}] + \alpha_k [U_i^{k-1}] + \beta_k [U_i^k] - (\alpha_k + \beta_k) \frac{\partial P^k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Ces équations sont une représentation générale de chacun des 3 pas de temps du schéma de Runge-Kutta pour lesquels k prend successivement les valeurs 1, 2 et 3 et où :

$$\begin{aligned} U_i^0 &= U_i^n \\ U_i^3 &= U_i^{n+1} \\ P_k &= \frac{P_k}{\rho} \end{aligned}$$

Les coefficients $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ et ζ_k sont déterminés de sorte que l'avancement en temps constitue une approximation à l'ordre 3 pour les termes advectifs et du second ordre pour les termes diffusifs. Ces coefficients ont les valeurs suivantes [Le & Moin 1991, Calmet 1995]:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{8}{15}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4} \\ \zeta_1 &= 0, \quad \zeta_2 = -\frac{17}{60}, \quad \zeta_3 = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Le schéma de Cranck-Nicolson conduit à la relation $\alpha_k = \beta_k$, en plus la cohérence entre les termes explicites et implicites pour conserver une approximation des équations de départ implique [Le & Moin 1991, Calmet 1995] :

$$\sum_{k=1}^3 (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^3 (\gamma_k + \zeta_k) = 1 \quad (\text{IV.28})$$

il en résulte les valeurs des coefficients α_k et β_k :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 = \frac{4}{15} \\ \alpha_2 &= \beta_2 = \frac{1}{15} \\ \alpha_3 &= \beta_3 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Les trois pas de temps correspondant se déroulent aux instants [Le & Moin 1991, Calmet 1995] :

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{8}{15} \Delta t \\ \Delta t_2 &= \frac{2}{3} \Delta t \\ \Delta t_3 &= \Delta t \end{aligned}$$

Pour plus de détails concernant la détermination des coefficients $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ et ζ_k et le calcul des instants auxquels se déroulent le pas de temps, nous renvoyons le lecteur à l'article de Le & Moin (1991).

IV.4.2 Méthode des projections

La méthode des projections appliquée aux équations de Navier-Stokes dans le cadre du schéma de RK3/CN consiste à calculer à chaque pas de temps k du schéma une approximation \tilde{U}_i du champ de vitesse solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U}_i^k - U_i^{k-1}}{\Delta t} = & \gamma_k N[U_i^{k-1}] + \zeta_k N[U_i^{k-2}] + \alpha_k L[U_i^{k-1}] + \beta_k L[\tilde{U}_i^k] \\ & - (\alpha_k + \beta_k) \frac{\partial P^{k-1}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (IV.29)$$

L'approximation calculée n'est pas à divergence nulle. Pour satisfaire la condition d'incompressibilité, on introduit un potentiel auxiliaire qui vérifie l'équation

$$\frac{U_i^k - \tilde{U}_i^k}{\Delta t} = -(\alpha_k + \beta_k) \frac{\partial \Phi^k}{\partial x_i} \quad (IV.30)$$

Le champ U_i^k devant vérifier la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot U_i^k = 0$, on obtient en prenant la divergence de l'équation (IV.30) une équation de Poisson pour le potentiel auxiliaire Φ^k :

$$\nabla \cdot \frac{\partial \Phi^k}{\partial x_i} = \frac{1}{(\alpha_k + \beta_k) \Delta t} \nabla \cdot \tilde{U}_i^k \quad (IV.31)$$

Calmet (1995) a montré que le schéma de RK3/CN étant un schéma du second ordre en temps, le fait de résoudre l'équation de Poisson à la fin de chaque pas de temps k intermédiaire pour projeter la vitesse U_i^k sur le sous espace des vitesses à divergence nulle ou bien d'éliminer cet étape dans les deux premier pas n'apporte aucune différence quant à la précision temporelle du schéma global.

Cette remarque a été déjà exploitée par Le & Moin (1991) dans le cadre d'un schéma non conservatif, ce qui leur a permis de gagner un temps de calcul considérable en ne résolvant l'équation de Poisson qu'une seule fois à l'issue des trois pas de temps intermédiaires.

Le schéma temporel s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U}_i^k - \tilde{U}_i^{k-1}}{\Delta t} &= \gamma_k N[\tilde{U}_i^{k-1}] + \zeta_k N[\tilde{U}_i^{k-2}] + \alpha_k L[\tilde{U}_i^{k-1}] + \beta_k L[\tilde{U}_i^k] \\ &\quad - (\alpha_k + \beta_k) \frac{\partial P^n}{\partial x_i} \quad k = 1, 3 \end{aligned} \quad (IV.32)$$

où,

$$\tilde{U}_i^0 = U_i^n$$

A l'issue des trois étapes, on résout l'équation de Poisson pour le potentielle auxiliaire Φ^{n+1} solution de :

$$\nabla \cdot \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{U}^3 \quad (IV.33)$$

Duquel on déduit le champ à divergence nulle :

$$U_i^{n+1} = \tilde{U}_i^3 - \Delta t \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial x_i} \quad (IV.34)$$

Le champ de pressions est calculé par :

$$p^{n+1} = p^n + \Phi^{n+1} \quad (IV.35)$$

IV.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites que nous connaissons physiquement portent sur le champ de vitesse résultant d'un pas de temps complet. Calmet (1995) s'est basé sur l'analyse de Kim & Moin (1985) pour montrer que les conditions aux limites correctes, précises au second ordre, s'écrivent simplement :

$$\tilde{U}^k \cdot \mathbf{n} = U^k \cdot \mathbf{n} \quad (IV.36)$$

Lors de la résolution, la projection de \tilde{U}_i^k sur le sous espace des vitesses à divergence nulle est effectués une seule fois à l'issue des trois pas de temps et $\tilde{U}^1 \cdot \mathbf{n}$ et $\tilde{U}^2 \cdot \mathbf{n}$ sont inconnues. Cependant la relation (IV.36) est vérifiée au dernier sous pas de temps ($k=3$) et s'écrit :

$$\tilde{U}^3 \cdot \mathbf{n} = U^{n+1} \cdot \mathbf{n} \quad (IV.37)$$

A partir de (IV.37), $\tilde{U}^1.n$ et $\tilde{U}^2.n$ peuvent être calculés par interpolation linéaire, sans perdre la précision $O(\Delta t^2)$ désirée et nous obtenons la relation générale qui donne les conditions aux limites pour chacun des 3 sous pas de temps :

$$\tilde{U}^k.n = U^k.n + \sum_{l=1}^k (\alpha_l + \beta_l) (U^{n+1} - U^n).n \quad (IV.38)$$

Pour le potentiel auxiliaire, la condition à la limite à considérer s'écrit [Calmet 1995] :

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial n} = 0 \quad (IV.39)$$

IV.6 Méthodes numériques de résolution

Pour la résolution de l'équation de Poisson pour le potentiel auxiliaire (IV.33), nous avons opté pour l'algorithme itératif de Gauss Seidel.

Le système linéaire issue de la discrétisation des équations de Navier-Stokes est résolu par une méthode directe par factorisation approchée.

L'équation à résoudre (IV.32) peut être écrite sous la forme suivante dans laquelle, nous avons fait apparaître la différence $\tilde{U}^k - \tilde{U}^{k-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U}_i^k - \tilde{U}_i^{k-1}}{\Delta t} = & \beta_k L [\tilde{U}_i^k - \tilde{U}_i^{k-1}] + (\alpha_k + \beta_k) L [\tilde{U}_i^{k-1}] + \gamma_k N [\tilde{U}_i^{k-1}] + \zeta_k N [\tilde{U}_i^{k-2}] \\ & - (\alpha_k + \beta_k) \frac{\partial P^n}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (IV.40)$$

En regroupant tous les termes explicites dans un même terme source F, l'expression (IV.40) devient :

$$\frac{\tilde{U}_i^k - \tilde{U}_i^{k-1}}{\Delta t} = \beta_k L [\tilde{U}_i^k - \tilde{U}_i^{k-1}] + F(\tilde{U}_i^{k-1}, \tilde{U}_i^{k-2}, P^n) \quad (IV.41)$$

En remplaçant dans l'expression précédente l'opérateur L par son expression détaillée :

$$L = \nu \left[\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right]$$

l'équation (IV.41) prendra la forme suivante :

$$\left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \left[\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right] \right\} (\tilde{\mathbf{U}}_i^k - \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}) = \Delta t \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}, \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-2}, \mathbf{P}^n) \quad (\text{IV.42})$$

où : $\mathbf{H} = \left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \left[\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right] \right\}$ est l'opérateur de Helmholtz et Id l'opérateur identité.

La méthode de factorisation approchée consiste à remplacer, dans un premier temps, l'opérateur de Helmholtz \mathbf{H} par le produit de deux opérateurs de Helmholtz unidimensionnels agissant chacun dans une direction \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{H} \cong \left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right\} \left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right\} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{IV.43})$$

Ainsi l'équation (IV.42) sera résolue en 2 étapes successives appliquées chacune à une direction \mathbf{x}_i :

$$\left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right\} (\tilde{\mathbf{U}}_i^k - \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}) = \Delta t \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}, \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-2}, \mathbf{P}^n) \quad (\text{IV.44})$$

$$\left\{ \text{Id} - \beta_k \Delta t \mathbf{v} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right\} (\tilde{\mathbf{U}}_i^k - \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}) = (\tilde{\mathbf{U}}_i^k - \tilde{\mathbf{U}}_i^{k-1}) \quad (\text{IV.45})$$

Comme nous pouvons bien le constater, les coefficients des matrices associées aux opérateurs :

$\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$ dépendent uniquement de la géométrie du domaine et sont donc calculés une seule fois

au départ de la résolution des équations complètes. Par contre, les opérateurs de Helmholtz unidirectionnels que l'on doit effectivement inverser à chaque étape de factorisation dépendent du pas de temps Δt et les coefficients des matrices associées varient donc au cours du temps. Au lieu d'inverser directement ces matrices à chaque pas de temps, nous avons opté pour la méthode d'inversion de Cholesky qui ne nécessite aucun stockage des coefficients.

Chapitre V

Tests monophasiques

V.1 Introduction

Le présent chapitre sera entièrement dévolu à la validation numérique du code développé pour la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement laminaire, incompressible et bidimensionnel. Pour cela, des écoulements de différentes configurations seront étudiés. Les résultats ainsi obtenus seront comparés avec ceux de la littérature.

Le choix des applications n'a pas été fortuit, mais répond bien à plusieurs objectifs bien déterminés, à savoir effectuer des comparaisons soit avec les solutions analytiques pour les écoulements qui en disposent, soit avec des cas traités dans la littérature et ayant des résultats fiables. Le deuxième objectif, quant à lui, est de tester notre code dans des conditions d'écoulements complexes étalant des aspects fortement rotationnels et proches de ceux observés dans le cas des écoulements diphasiques.

Le premier cas étudié est celui de l'écoulement de Poiseuille. Ce dernier, possédant une solution analytique. Quant au second test, il concerne l'écoulement en cavité carrée pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 1000.

Après quoi, la troisième application a porté sur l'écoulement derrière une marche pour un nombre de Reynolds qui équivaut à 50.

A la fin, dans la dernière application monophasique, une étude détaillée de l'écoulement de l'air derrière un élargissement brusque relatif à plusieurs Reynolds est élaborée et nos résultats sont comparés avec ceux inhérents à l'expérimentation issue de la bibliographie.

V.2 Écoulement de Poiseuille

Cet exemple est intéressant car, tout en présentant l'ensemble des difficultés inhérentes aux écoulements de paroi, il demeure néanmoins un écoulement à géométrie simple. En régime laminaire, le problème possède une solution analytique et fournit par conséquent un bon test quant à la capacité des modèles numériques à résoudre les écoulements laminaires.

Dans la présente application, on se propose d'étudier un écoulement unidirectionnel, laminaire, incompressible et permanent entre deux plaques planes parallèles, fixes et distantes de a . Dans ces conditions, la répartition des vitesses est donnée par :

$$U = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (a y - y^2) \quad (V.1)$$

elle est parabolique (figure V-1) et valable pour un nombre de Reynolds $Re = \frac{U_{\text{moy}} a}{\nu} \leq 1200$ [Graf 1998], où, U_{moy} est la vitesse moyenne et ν la viscosité cinématique du fluide.

La vitesse maximale est atteinte au centre, $y=a/2$; elle est :

$$u_{\text{max}} = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{a^2}{4} \quad (V.2)$$

La vitesse moyenne de la section est donnée par :

$$U = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{a^2}{6} = \frac{2}{3} u_{\text{max}} \quad (V.3)$$

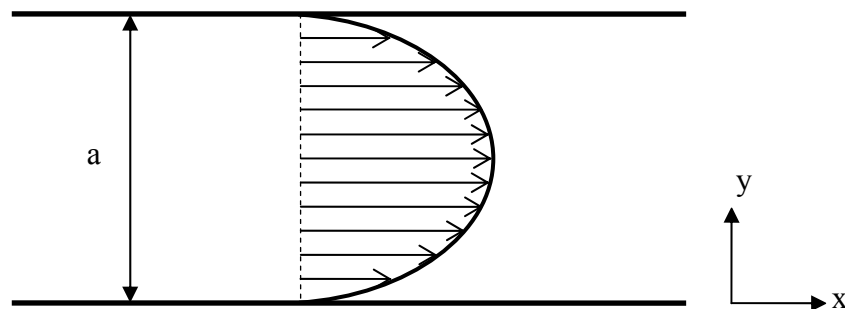


Figure V-1 : Profil des vitesses pour un écoulement entre deux plans parallèles fixes.

Pour ce qui est des conditions aux limites, il est possible de procéder de deux manières. Soit en imposant un profil de vitesse à l'entrée et en laissant s'établir l'écoulement sur une distance suffisante. Soit en imposant un gradient de pression [Jaeger 1990]. Notre choix s'est porté sur la deuxième alternative. En effet, nos calculs ont été effectués sur un domaine de dimensions 0.1×0.1 avec un maillage 20×20 . Les conditions aux limites que nous avons considérées sont schématisées sur la figure V-2 et détaillées comme suit :

- sur les deux plaques $U=V=0$
- à l'entrée et à la sortie : condition périodique
- gradient de pression négatif $\frac{dp}{dx} = -10$

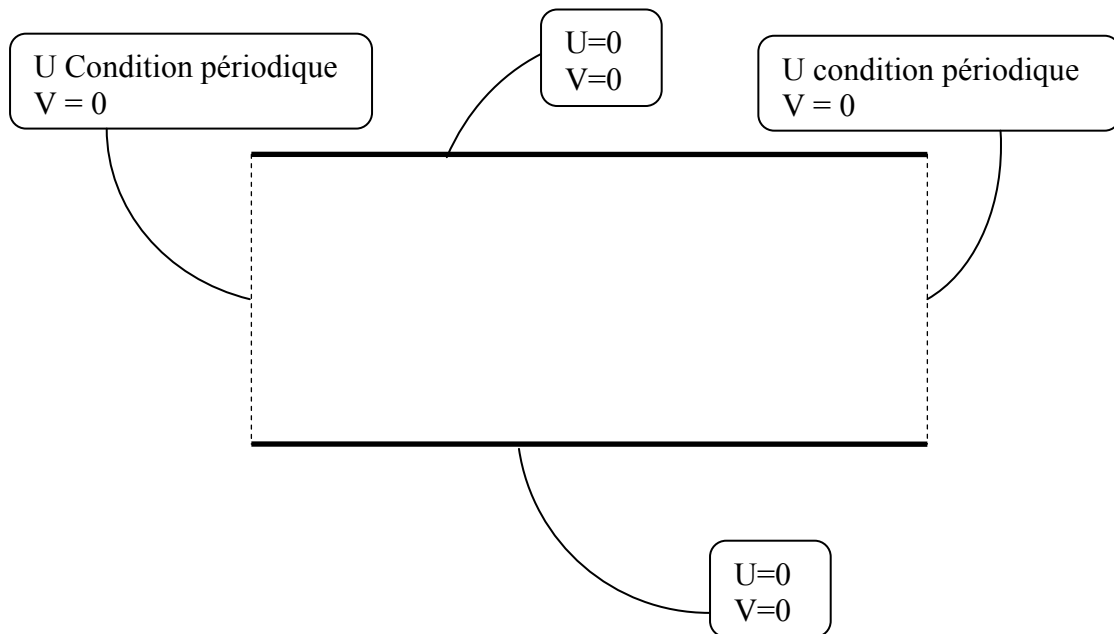


Figure V-2 : Conditions aux limites pour l'écoulement entre deux plans parallèles fixes.

La condition périodique est utilisée, soit lorsque l'écoulement est périodique ce qui permet sa résolution sur une période, soit lorsqu'il se referme sur lui-même. Il suffit dans ces deux cas de résoudre les équations de bilan sur une des deux frontières correspondant au début ou à la fin de la période et d'écrire ensuite l'égalité des vitesses sur ces frontières tout en tenant compte du gradient de pression longitudinal lorsque celui-ci existe.

Sur les graphes de la figure V-3, nous avons reporté les résultats sur la vitesse horizontale obtenus par simulation numérique pour deux nombres de Reynolds 100 et 1000 ainsi que les valeurs des vitesses calculées analytiquement. Nous constatons bien que le profil des vitesses calculé numériquement est parfaitement parabolique et concorde très bien avec le profil théorique pour les deux cas de nombre de Reynolds considérés.

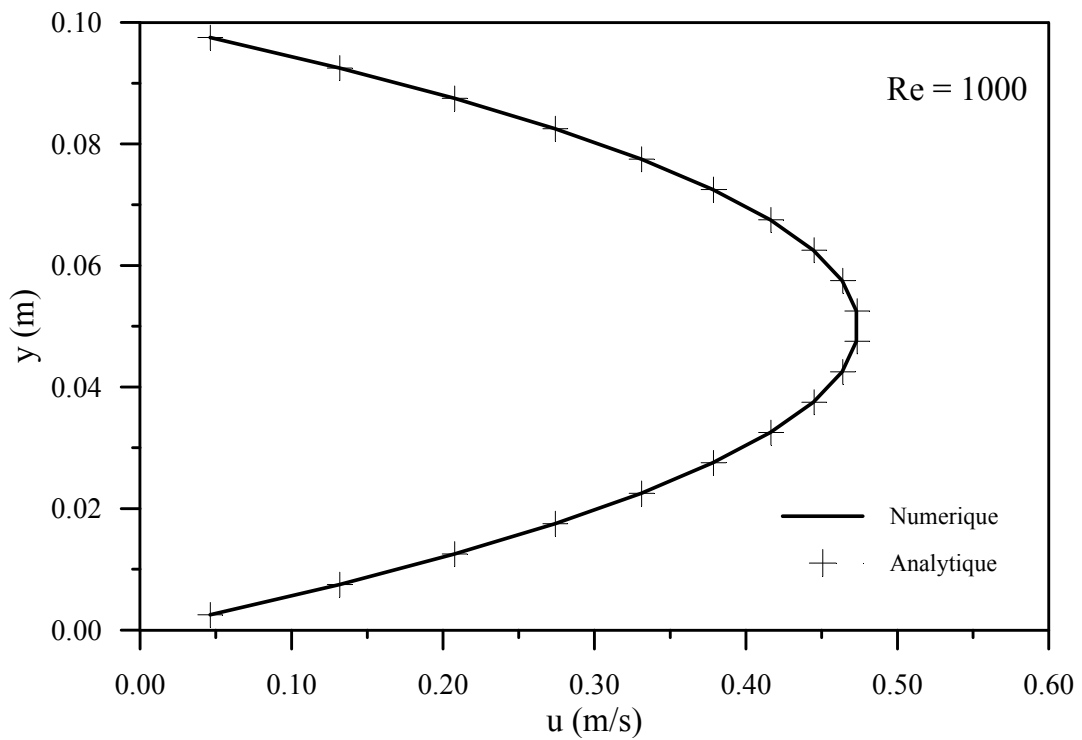
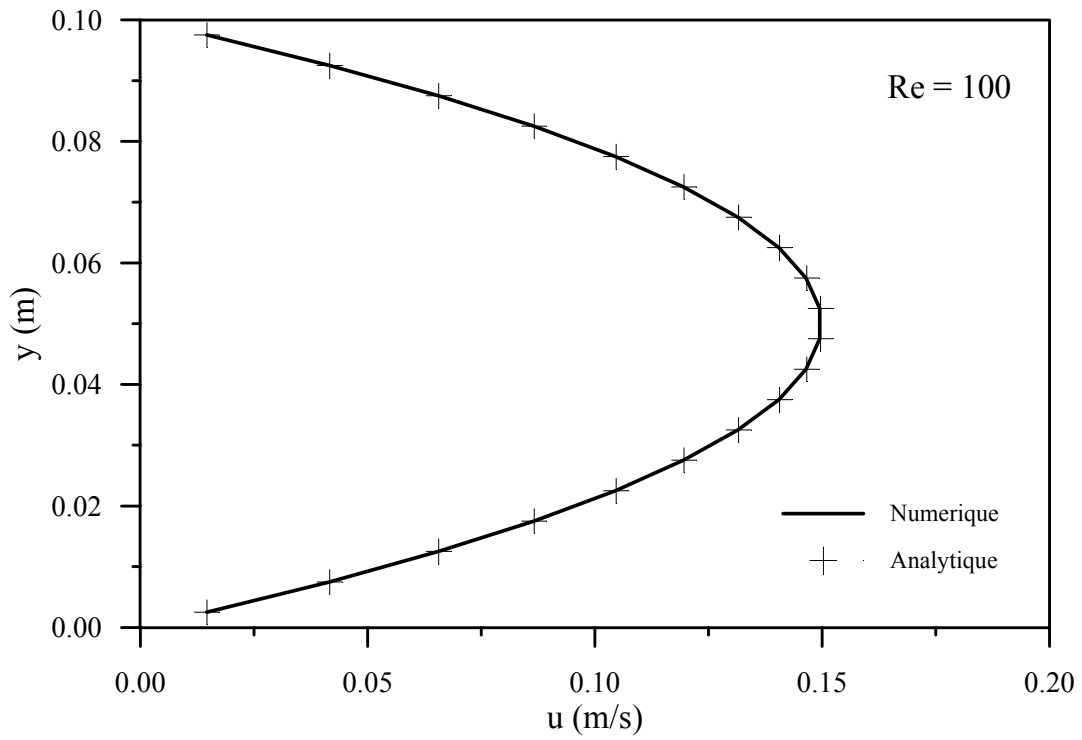


Figure V-3 : Comparaison des profils de vitesse théoriques et numériques pour l'écoulement de Poiseuille.

V.3 Écoulement en cavité carrée

Le cas le plus classique, le plus utilisé aussi, pour le test des méthodes numériques employées dans la simulation des écoulements incompressibles est celui d'un écoulement laminaire à l'intérieur d'une cavité carrée, appelée aussi cavité entraînée. Cette configuration correspond au cas d'un écoulement dans un domaine carré dont la frontière supérieure est mobile et se déplace avec une vitesse constante. Les conditions aux limites considérées sont reportées dans la figure V-4.

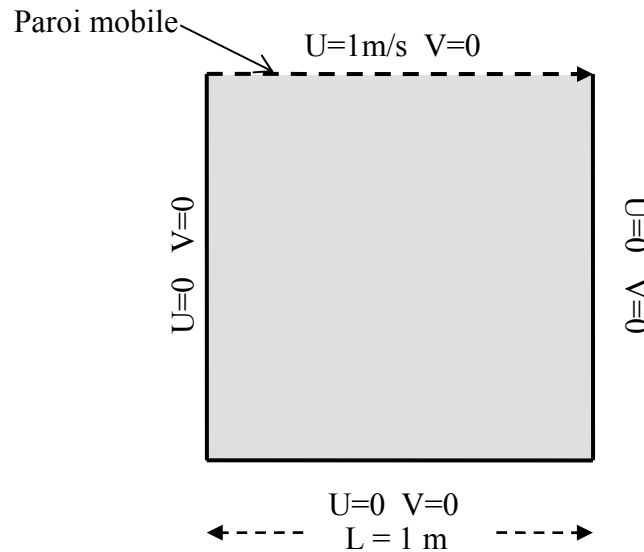


Figure V-4 : Géométrie et conditions aux limites pour l'écoulement en cavité carrée bidimensionnelle.

Les résultats de nos tests numériques seront confrontés avec ceux de Ghia et al. (1982) qui ont résolu les équations de Navier Stokes, formulées en variables fonctions de courant-vorticité (Ψ - ω), par une méthode multigrille sur un maillage de 129×129 .

Des investigations numériques ont été effectuées pour les trois nombres de Reynolds qui sont respectivement 100, 400 et 1000. L'estimation du nombre de Reynolds est basée sur la longueur du côté de la cavité et la vitesse de la paroi mobile. Les simulations numériques ont été effectuées en considérant deux maillages uniformes 20×20 et 40×40 .

Dans les figures V-5, V-6 et V-7, sont représentés les profils des vitesses horizontales au centre de la cavité ($x=0.5$) ainsi que les profils de vitesse verticale à $y=0.5$.

Pour le nombre de Reynolds de 100 (figure V-5), nos résultats sont en parfaite harmonie avec les résultats de référence de Ghia et al. (1982) et ce pour les deux maillages. Donc, il est évident de conclure que l'utilisation du maillage 20×20 aurait bien suffi à simuler cet écoulement.

Quant au nombre de Reynolds de 400, nous constatons un écart dans les profils pour le maillage 20×20 par rapport aux résultats de référence et plus particulièrement dans la région où les gradients de vitesse deviennent importants (figure V-6). Ces résultats ont été nettement améliorés avec l'utilisation du maillage 40×40 . Ainsi, nos résultats se confondent bien avec ceux de la référence pour ce dernier maillage.

Cependant, pour le Reynolds 1000 une différence significative demeure toujours au voisinage des parois où les gradients de vitesses sont très importants pour le maillage 20×20 . Par contre, le maillage 40×40 , nous a permis de rapprocher nos résultats de ceux de la référence et de les améliorer en conséquence près des parois (figure V-7). En tenant compte que Ghia et al. (1982) ont utilisé un maillage plus resserré (129×129) qui a conduit à de meilleurs résultats près des parois où le phénomène de décollement est très prononcé. Nous pouvons largement conclure que l'utilisation d'un maillage plus fin dans notre étude, conduirait nécessairement à des résultats plus en adéquation avec ceux de la référence.

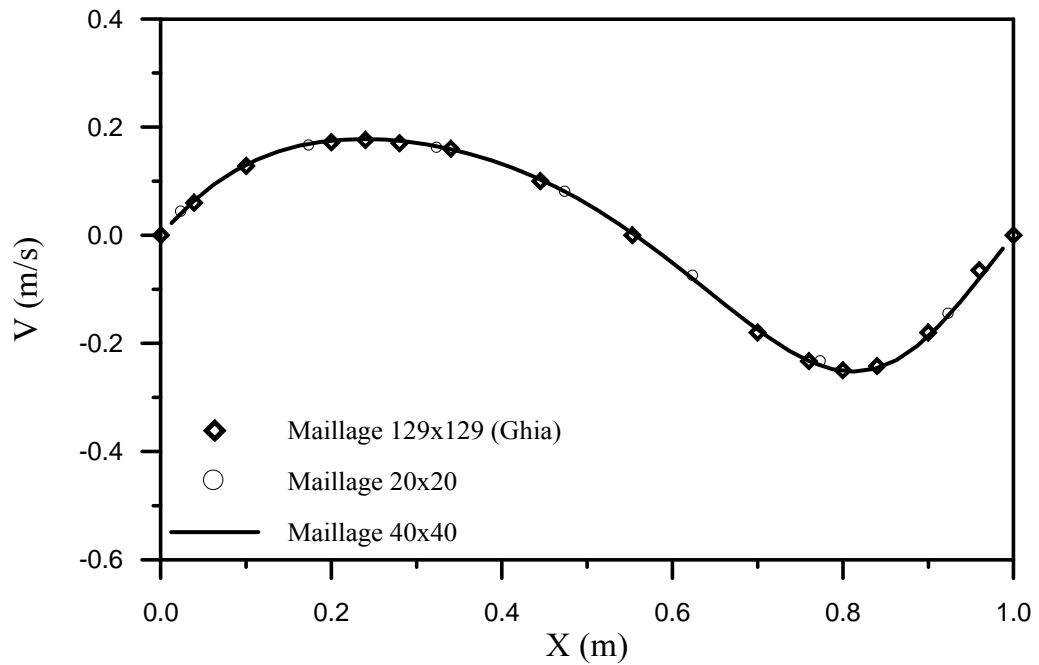
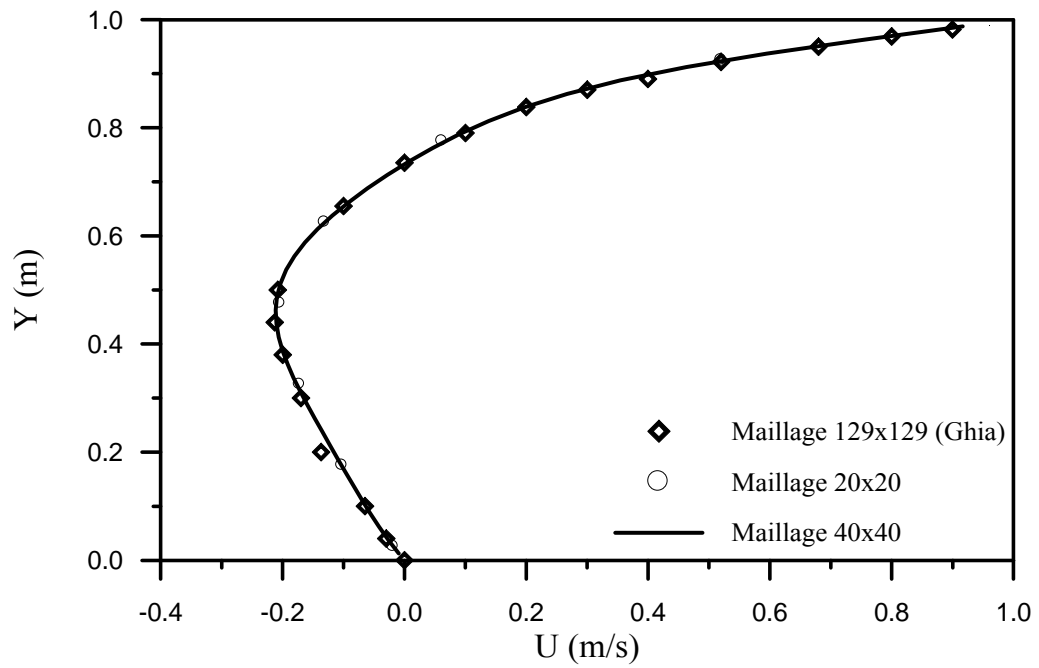


Figure V-5 : Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 100$.

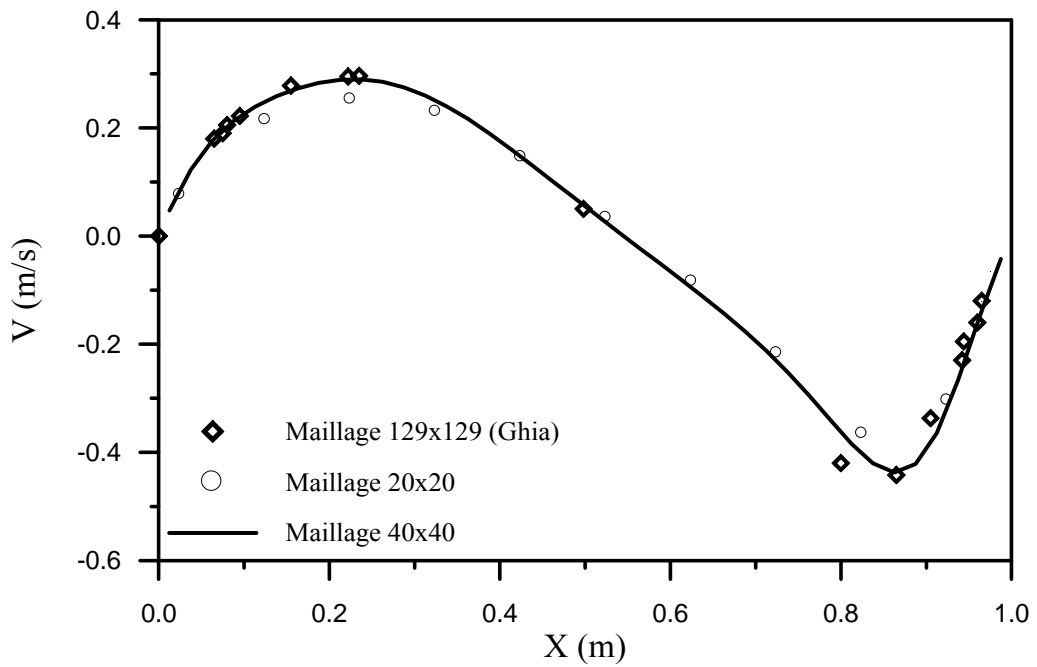
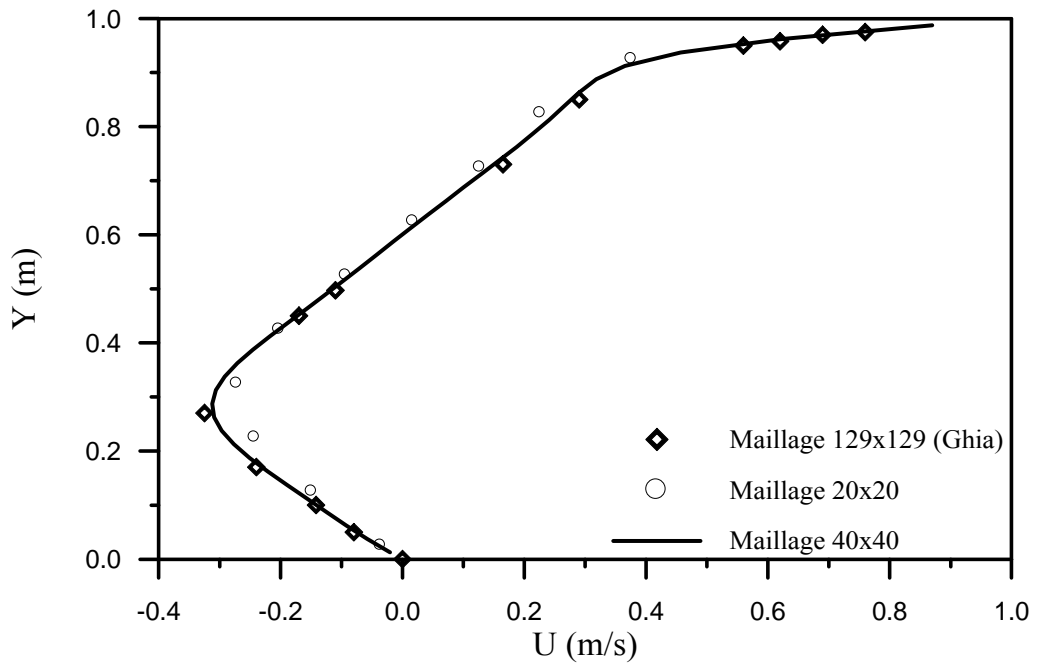


Figure V-6 : Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 400$.

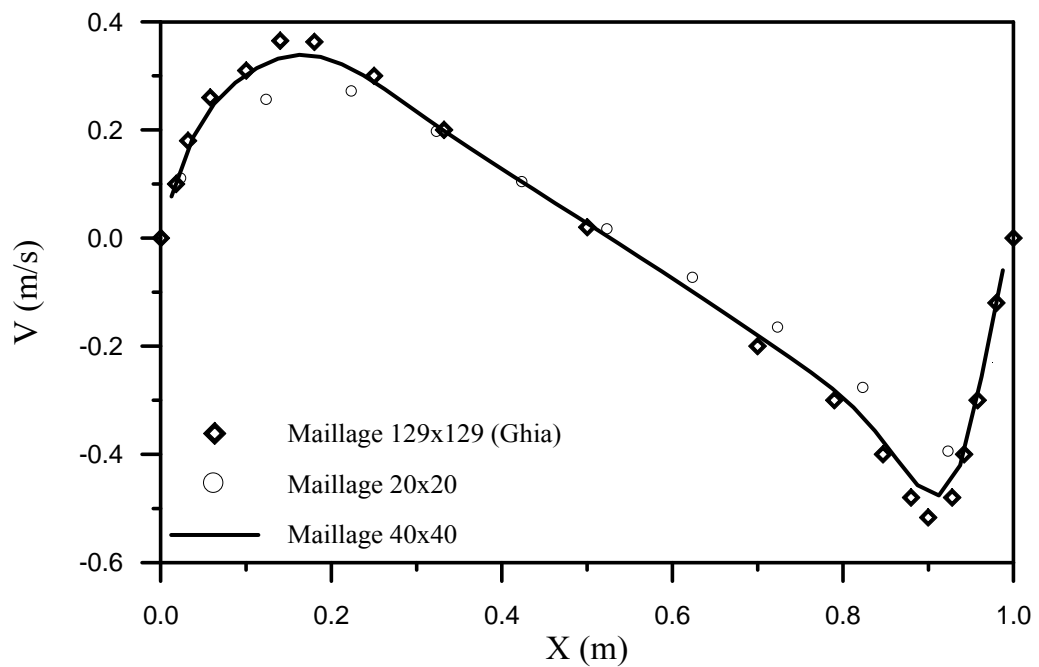
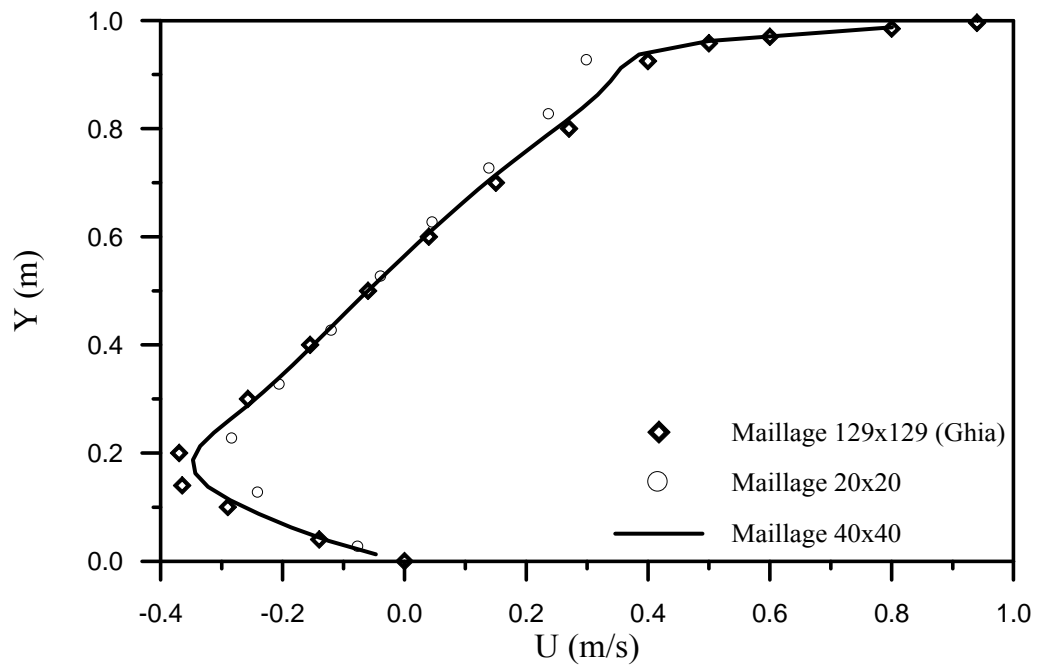


Figure V-7 : Profils des vitesses horizontales et verticales $Re = 1000$.

V.4 Écoulement derrière une marche

Cet exemple est universellement utilisé pour tester les performances des modèles numériques en mécanique des fluides, car il est assez représentatif des difficultés qui sont susceptibles d'être rencontrées dans des écoulements complexes présents dans des situations réelles (décollement et recollement de couches limites et zones de recirculation).

Dans le cadre de notre test, nous nous sommes intéressés essentiellement à l'estimation de la longueur de la zone de recirculation derrière une marche. Pour ce faire, nous nous sommes reportés aux travaux de Adjlout et al. (1998). Ces derniers ont simulé un écoulement derrière une marche caractérisée par les grandeurs géométriques H et h , qui sont respectivement la hauteur du canal et la hauteur de la contremarche.

A l'entrée du canal, la condition à la limite consiste en un profil parabolique de vitesses horizontales qui correspond au cas d'un écoulement établi dans une conduite (écoulement de Poiseuille). Enfin, on suppose que la sortie est suffisamment éloignée, pour que l'écoulement soit établi. Par la suite, on impose un profil de vitesses parabolique à la sortie du canal tout en respectant la condition de la conservation de la masse. Ce choix des conditions aux limites, a été largement utilisé dans la simulation de ce type d'écoulement [Adjlout et al 1998, Pironnot 1988]. Ainsi, le domaine de l'étude s'étend sur une distance de 20 fois la hauteur de la marche [Jaeger 1990, Pironnot 1988].

Les dimensions et les conditions aux limites considérées dans le cadre de cette application sont illustrées dans la figure V-8.

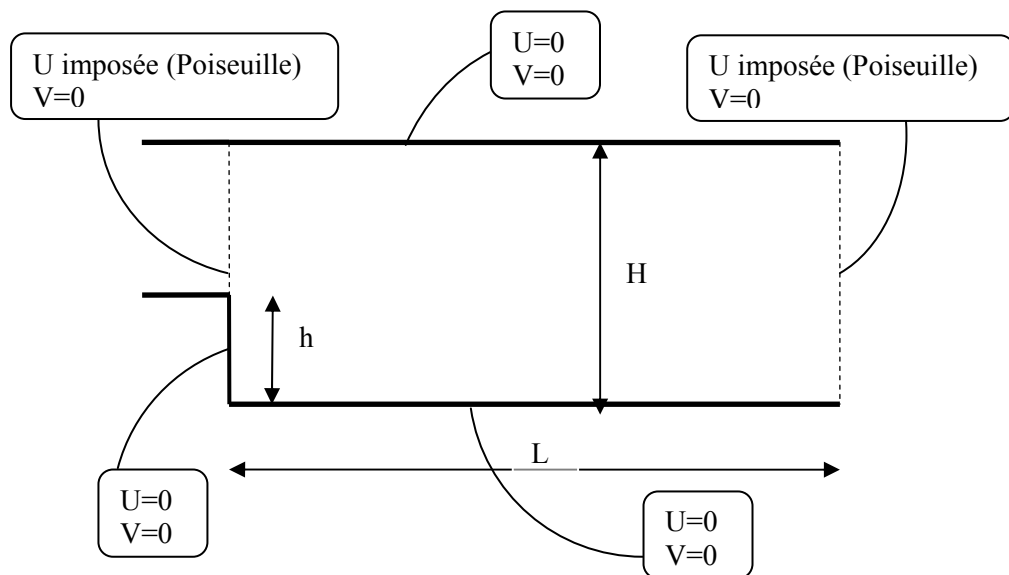


Figure V-8: Conditions aux limites pour l'écoulement derrière une marche.

Chapitre V. Tests monophasiques

Les simulations numériques ont été effectuées pour un nombre de Reynolds $Re = 50$, basé sur la vitesse au centre du canal d'amenée et sa hauteur [Adjilout et al. 1998, Jaeger 1990, Pironnot 1988].

Deux cas de configurations géométriques ont été étudiés. Le premier correspond à un rapport des hauteurs marche/canal (h/H) égal à $1/2$ et le deuxième correspond au cas $h/H = 1/3$.

Sur les graphes V.9 et V.10, nous avons reporté les profils de vitesses horizontales pour les deux cas étudiés. Les profils de vitesses montrent bien que le phénomène de décollement est plus accentué dans le cas $h/H=1/2$ que dans celui où $h/H=1/3$.

Il est à constater aussi que l'écoulement, dans les deux cas, commence par des profils symétriques au niveau de l'élargissement avec la vitesse maximale au centre de ce dernier. Ensuite, la vitesse maximale se déplace vers le bas jusqu'à l'axe de symétrie du canal, puis le profil devient entièrement parabolique correspondant au cas d'un écoulement établi. Dans les deux situations, l'écoulement atteint cet état à moins de 3.5 fois la hauteur de la marche.

Les graphes V.11 et V.12 nous ont servi à estimer la longueur de la zone de recirculation dans les deux cas. Cette dernière est égale à 2,4 m pour le cas $h/H=1/2$ et 2,2 m pour l'autre cas ($h/H=1/3$).

Ces valeurs sont confrontées aux résultats de Adjilout et al. (1998) qui ont, à leur tour, comparé leurs résultats avec ceux de workshop (1983) dans le tableau qui suit :

H/h	Résultats numériques	Adjilout et al. (1998)	Résultats de référence Workshop (1983)
2	2.4	2.2	1.75 : 4.00
3	2.2	2.5	1.00 : 3.3

A travers les résultats de référence de Workshop (1983), tirés de l'article de Adjilout et al. (1998), il est clairement établi que les valeurs de la longueur de la région de décollement est plus importante pour le premier cas correspondant au rapport hauteur marche / hauteur canal : $h/H = 1/2$ que pour le deuxième rapport $h/H = 1/3$. Cet objectif a été atteint par nos résultats mieux que ceux de Adjilout et al (1998).

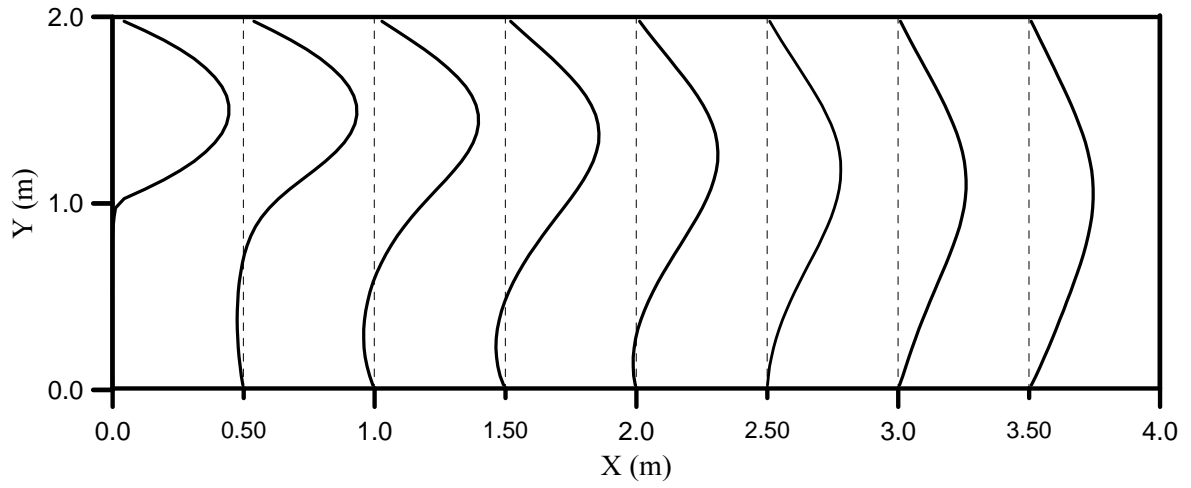


Figure V-9 : Profils des vitesses horizontales marche 1/2.

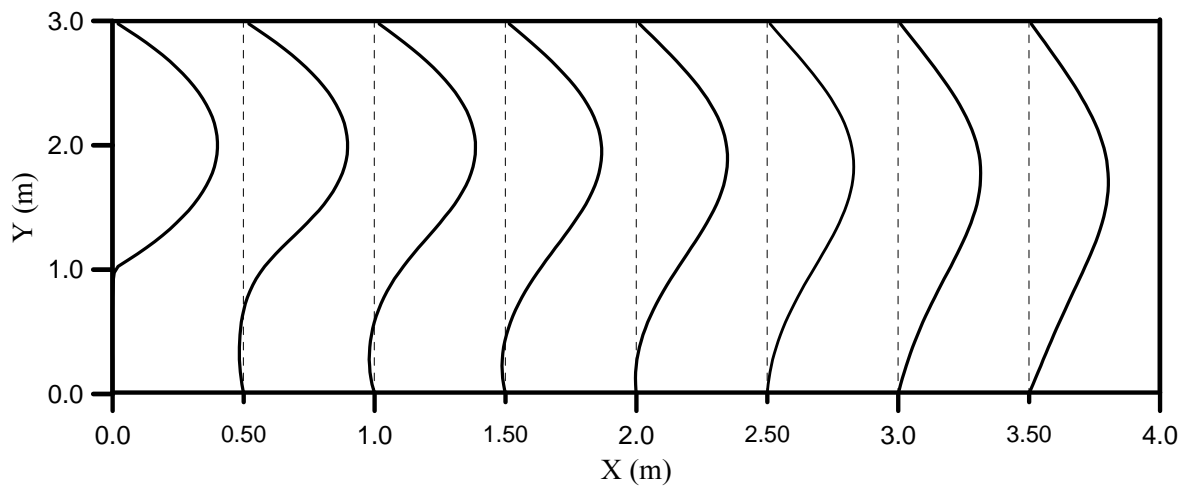


Figure V-10 : Profils des vitesses horizontales marche 1/3.

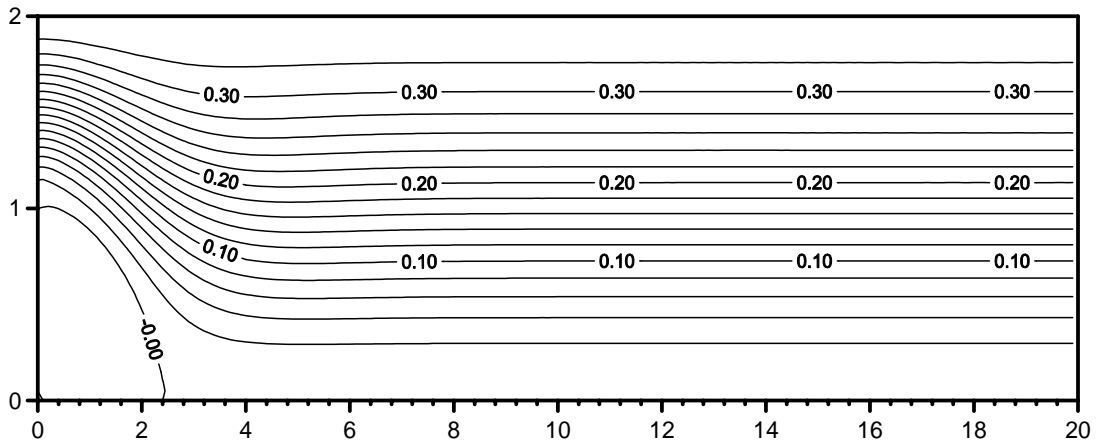


Figure V-11 : Isovaleurs des lignes de courant marche 1/2.

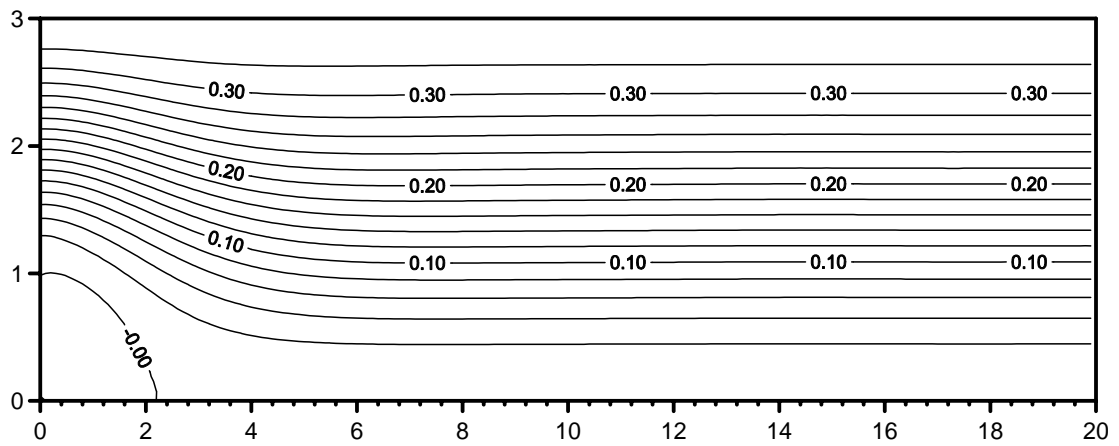


Figure V-12 : Isovaleurs des lignes de courant marche 1/3.

V.5 Écoulement derrière un élargissement brusque

A travers cette manipulation, nous cherchons à démontrer les performances de notre modèle numérique et tester sa capacité quant à la simulation des écoulements au voisinage des singularités et caractérisés par de fortes recirculations. Pour ce faire, nous avons reproduit numériquement les travaux expérimentaux de Durst et al. (1974) qui ont porté sur l'étude d'un écoulement d'air derrière un élargissement brusque pour différents nombres de Reynolds.

L'objet des expériences de Durst et al. (1974) était de fournir des informations expérimentales sur la nature, la stabilité et la symétrie de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. Pour cela, les auteurs ont conçu un appareillage permettant de générer un écoulement bidimensionnel pour des nombres de Reynolds bien inférieurs à 100. Les mesures des vitesses locales ont été réalisées par l'intermédiaire d'un anémomètre à laser à des nombres de Reynolds allant jusqu'à 252. Des illustrations photographiques ont aussi été faites.

Pour les simulations numériques, nous avons reproduit fidèlement les conditions expérimentales de l'écoulement, la configuration géométrique du dispositif expérimental, qui sont détaillées dans la figure V-13, ainsi que les caractéristiques physiques réelles du fluide.

Les calculs ont été faits pour les trois nombres de Reynolds 56, 114 et 252 tels que dans les manipulations expérimentales de la référence. Les conditions aux limites que nous avons prises en considération sont détaillées sur la figure qui suit :

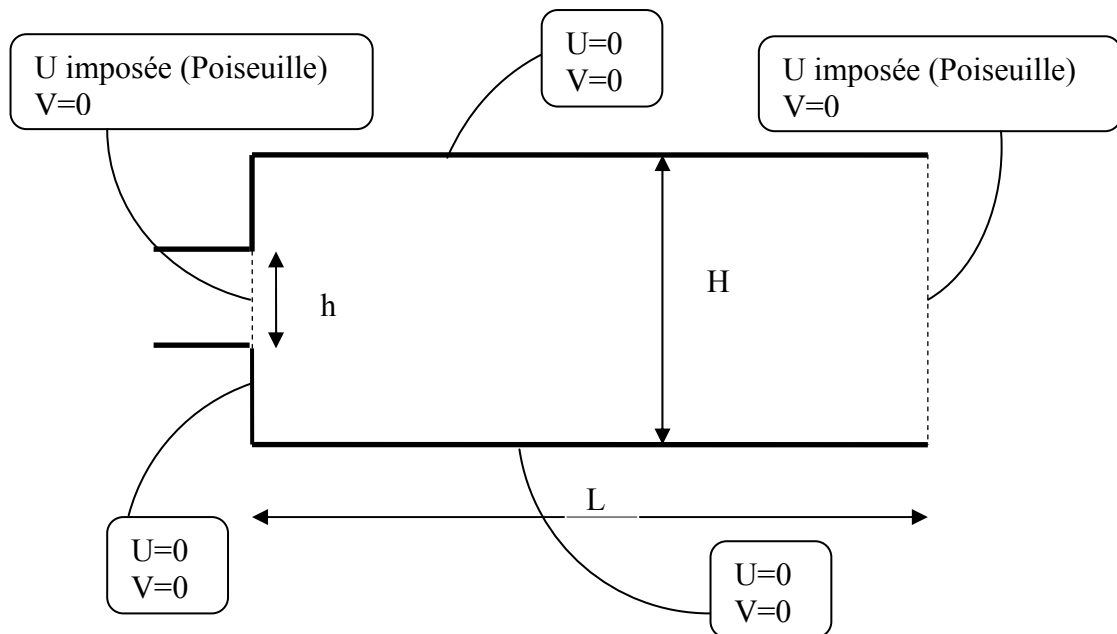


Figure V-13 : Conditions aux limites pour l'écoulement derrière un élargissement brusque.

Chapitre V. Tests monophasiques

Des profils de vitesses du type Poiseuille ont été appliqués à l'entrée de l'expansion et à la sortie du conduit principal selon les nombres de Reynolds considérés tout en respectant la condition de conservation de la masse. Ces derniers ont été estimés sur la base de la vitesse maximale à l'entrée et de la hauteur de l'expansion.

Les propriétés physiques du fluide que nous avons prises en compte sont les propriétés physiques réelles de l'air, à savoir :

- masse volumique : 1.2047 kg/m^3 ;
- viscosité dynamique : $18.288.10^{-06} \text{ kg.s/m}^2$.

Les caractéristiques géométriques du domaine de calcul correspondent bien à celles du dispositif expérimental et qui sont :

- Longueur totale du conduit : $L = 200 \text{ mm}$;
- Hauteur de l'expansion : $h = 4 \text{ mm}$;
- Hauteur total du conduit : $H = 12 \text{ mm}$.

Il est à remarquer que le rapport expansion / hauteur est de 1/3. La sortie est suffisamment éloignée pour qu'elle ne soit pas perturbée par l'entrée et laisser l'écoulement s'établir. Lors de nos différentes simulations numériques, nous avons utilisé le même maillage 400×60 .

Sur les graphes de la figure V-14 sont reportés les résultats des profils des vitesses horizontales afférentes au nombre de Reynolds de 56 à différents points caractéristiques le long du conduit où, d représente la moitié de la hauteur du conduit à l'aval de l'expansion. Les sections du conduit sur lesquelles sont donnés les profils de vitesses sont déterminées par rapport à la hauteur de l'expansion h . Les valeurs de vitesses données sur les graphes sont représentées par rapport à la vitesse maximale u_s appliquée à l'entrée qui est de 0.21 m/s .

Au vu de ces graphes, il est bien clair que les résultats numériques concordent très bien avec ceux expérimentaux de Durst et al. (1974). Aussi, nous remarquons que pour ce nombre de Reynolds l'écoulement est parfaitement symétrique sur toutes les sections illustrées à partir de l'élargissement jusqu'à ce qu'il devienne entièrement développé avec des profils de vitesse paraboliques plus loin, et ce aussi bien pour les résultats expérimentaux que pour nos résultats numériques.

Une autre remarque qui mérite d'être soulignée, c'est que la longueur des régions de séparation ou des rouleaux de re-circulation est la même de part et d'autre de l'axe de l'élargissement. Ceci est d'ailleurs bien illustré dans le graphe de la figure V-15 représentant les isovalues des lignes de courant pour ce nombre de Reynolds. Ces constatations sont en parfait accord avec les visualisations photographiques effectuées lors des travaux expérimentaux par les mêmes auteurs. Nous avons, en outre, constaté que sur les deux sections $x/h=10$ et $x/h = 40$, les profils de vitesses deviennent entièrement paraboliques et se conformant à un type d'écoulement laminaire entièrement développé. Par conséquent, il ressort que pour ce nombre de Reynolds, l'écoulement atteint cet état à moins de 10 tailles de l'expansion.

Chapitre V. Tests monophasiques

En deuxième lieu, nous avons effectué une simulation numérique pour un nombre de Reynolds plus important égal à 114. Les résultats sur les profils de vitesses horizontales obtenus par voie numérique sont comparés avec ceux issus de l'expérience sur la figure V-16.

A travers ces graphes, nous avons constaté que l'écoulement débutant par un profil symétrique, développe ensuite un aspect fortement asymétrique. Cette asymétrie devient moins prononcée jusqu'à ce que la symétrie soit restaurée. Aussi, et en parfaite concordance avec les visualisations photographiques effectuées lors des expérimentations, le deuxième graphe sur la figure V-17 représentant les isovalues des lignes de courant montre bien le caractère asymétrique de l'écoulement derrière l'élargissement. Aussi la longueur de la zone de séparation sur le côté supérieur du conduit est nettement plus grande que celle située sur le côté bas.

Pour le nombre de Reynolds de 252, nous avons une fois encore remarqué que les profils de vitesses, présentés dans la figure V-18, sont symétriques au départ et après une distance égale à 40 fois la taille de l'expansion. Mais ceux, situés entre les deux, ne l'étaient point.

Outre l'asymétrie de l'écoulement, un autre phénomène est à noter. En effet, la figure V-19, représentant le tracé des isovalues des lignes de courant, montre bien l'apparition d'une deuxième zone de recirculation du côté supérieur de l'axe de l'élargissement. La zone de recirculation sur le côté bas est plus longue que celle des deux autres qui se trouvent du côté haut. Signalons que ce phénomène a été signalé par les auteurs de l'expérimentation. Aussi, les profils de vitesse le confirment et montrent que la vitesse maximale était initialement au centre de l'élargissement et se déplace d'abord vers le côté supérieur du conduit et puis vers l'autre en bas avant de revenir au centre.

Pour ce qui est de la qualité des résultats, nous avons enregistré qu'un léger écart se crée par rapport aux résultats expérimentaux accompagnant l'augmentation du nombre de Reynolds. Ceci peut être interprété par différents aspects relatifs à l'écoulement. En effet, les auteurs de l'expérience ont remarqué qu'à partir du nombre de Reynolds de 100, l'écoulement commence à développer des aspects tridimensionnels d'une part et des aspects turbulents d'autre part. Ceci peut bien expliquer ces écarts, quoiqu'ils restent très acceptables. En plus, il convient de signaler que ces écarts ont été constatés dans les régions de forte recirculation qui montrent de forts gradients de vitesses.

Par ailleurs, deux autres remarques doivent aussi être soulevées. La première, c'est qu'il faut garder à l'esprit que les simulations effectuées ont porté sur l'air, et ce dernier doit forcément étaler des aspects compressibles à partir d'un certain nombre de Reynolds qui ne sont pas pris en considération dans notre modèle développé pour un fluide incompressible.

La deuxième remarque concerne les conditions aux limites à l'entrée de l'élargissement. Cette dernière a été imposée d'une manière "*un peu brutale*" sans disposer du moindre historique relatif à l'écoulement en amont de la singularité. Nous pensons que si l'on impose un profil du type Poiseuille un peu plus en amont de l'élargissement et si on laisse l'écoulement s'établir sur une petite distance, sera plus réaliste et se conformera mieux avec les conditions de l'expérience. De

surcroît, il est évident que si le maillage sera raffiné davantage, il conduirait à des résultats beaucoup plus proches de ceux expérimentaux qui ne sont pas eux aussi exempts d'erreurs de mesure surtout pour les nombres de Reynolds importants pouvant induire des instabilités susceptibles d'affecter distinctement la qualité des mesures.

En dépit de toutes les remarques soulevées un peu plus haut, nous considérons que les résultats obtenus sont d'une très bonne qualité et que le modèle numérique peut être considéré comme fiable pour simuler des écoulements avec des géométries plus complexes et notamment les écoulements avec zones de décollement.

A la fin, en sus des tests sur les performances du modèle numérique, nous avons pu tirer certaines conclusions physiques très importantes sur la nature des écoulements derrière des élargissements brusques dont les plus importantes sont les suivantes :

- Pour des nombres de Reynolds faibles ($Re=56$), les régions de séparation étaient de longueurs égales à chaque point à l'aval de l'élargissement. Aussi, tous les profils de vitesses étaient symétriques tout le long de l'écoulement jusqu'à ce qu'ils deviennent paraboliques et l'écoulement entièrement développé sur une distance bien en deçà, à dix fois la taille de l'expansion. L'écoulement était aussi très stable d'après Durst et al. (1974).
- Pour des nombres de Reynolds plus élevés ($Re=114$), les deux zones de séparation de part et d'autre de l'écoulement étaient de longueurs différentes conduisant à des profils de vitesses asymétriques. De plus, les constatations expérimentales de Durst et al. (1974) ont mis en évidence qu'à ce stade du nombre de Reynolds les effets tridimensionnels étaient beaucoup plus prononcés que dans le cas précédent.
- Pour le nombre de Reynolds de 252, une troisième zone de séparation est apparue sur le côté haut. Les profils de vitesses étaient asymétriques et l'écoulement est devenu très perturbé et tendant vers la turbulence.

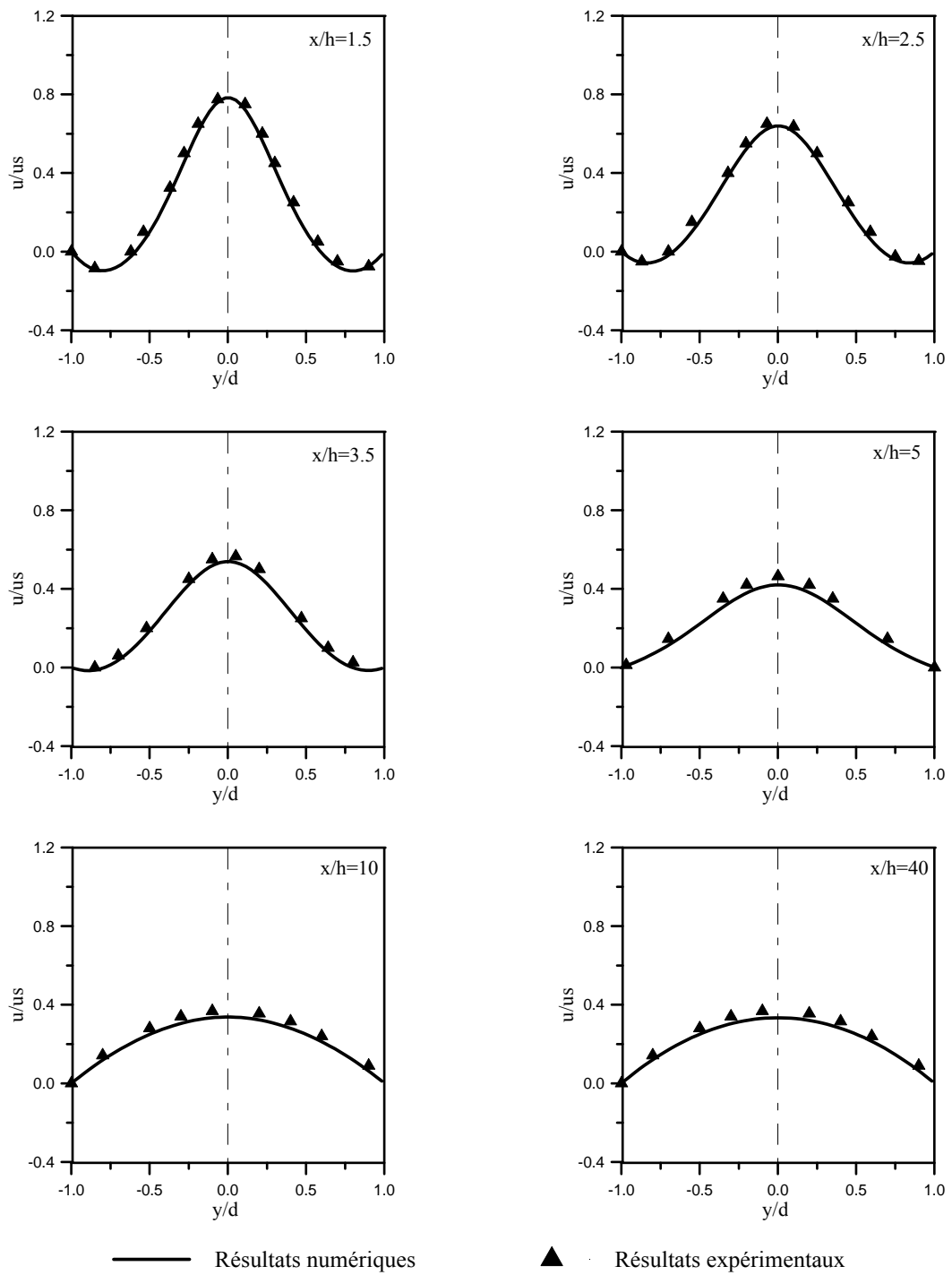


Figure V-14 : Profils de vitesse horizontale $Re = 56$.

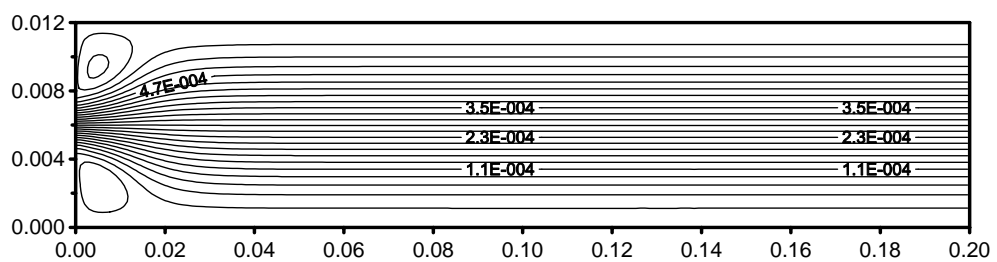


Figure V-15 : Isovaleurs des lignes de courant $Re = 56$.

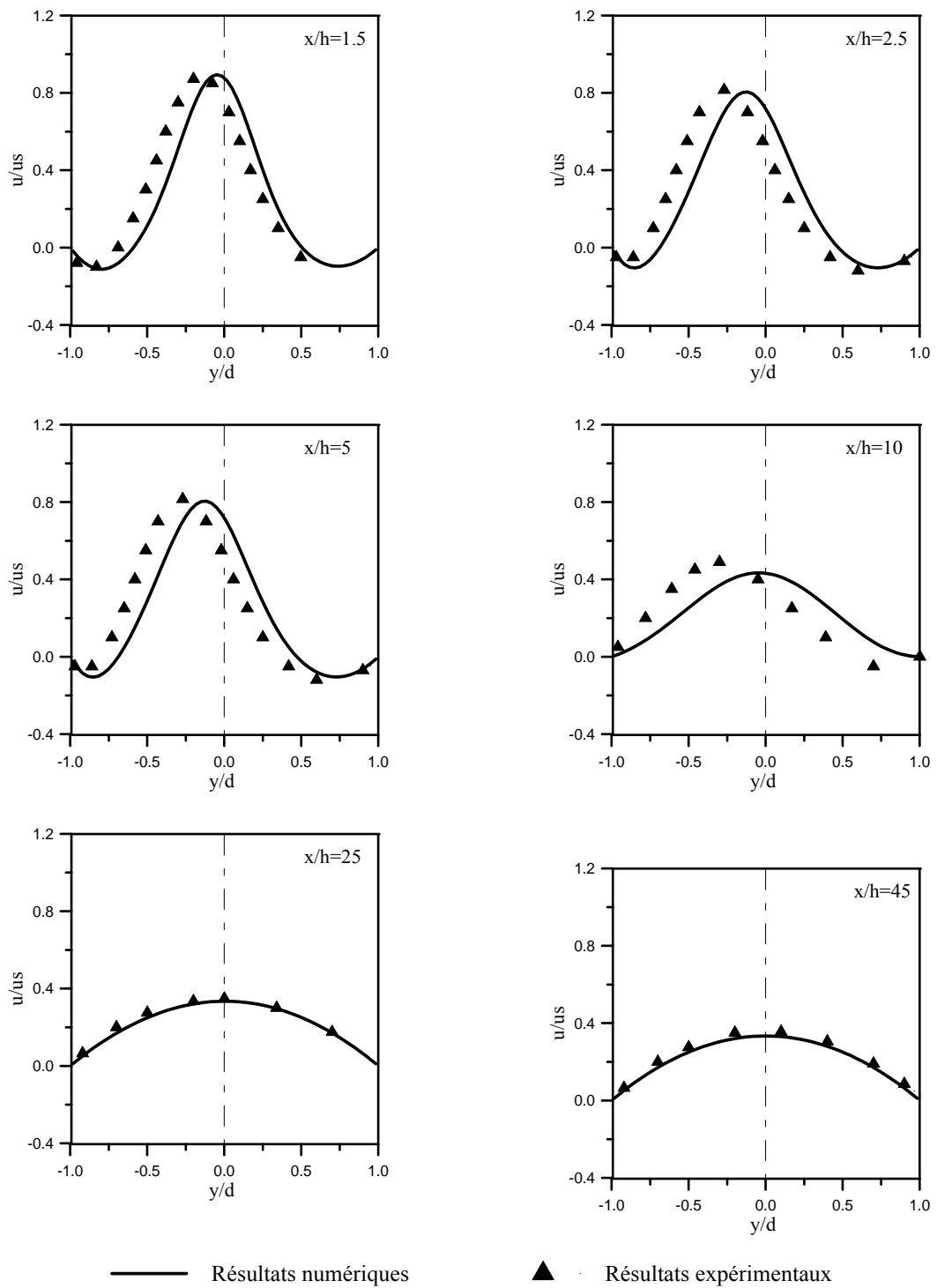


Figure V-16 : Profils de vitesse horizontale $Re = 114$.

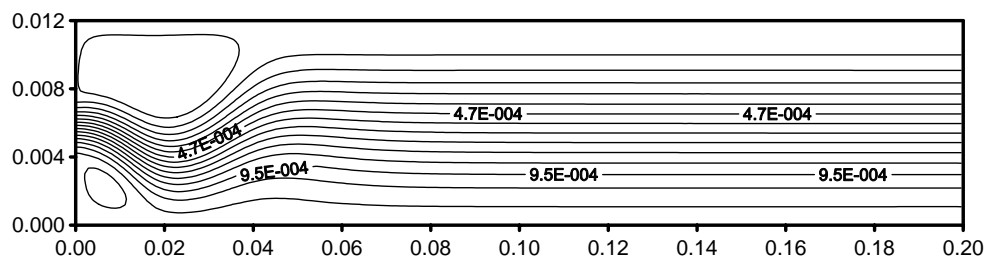


Figure V-17 : Isovaleurs des lignes de courant $Re = 114$.

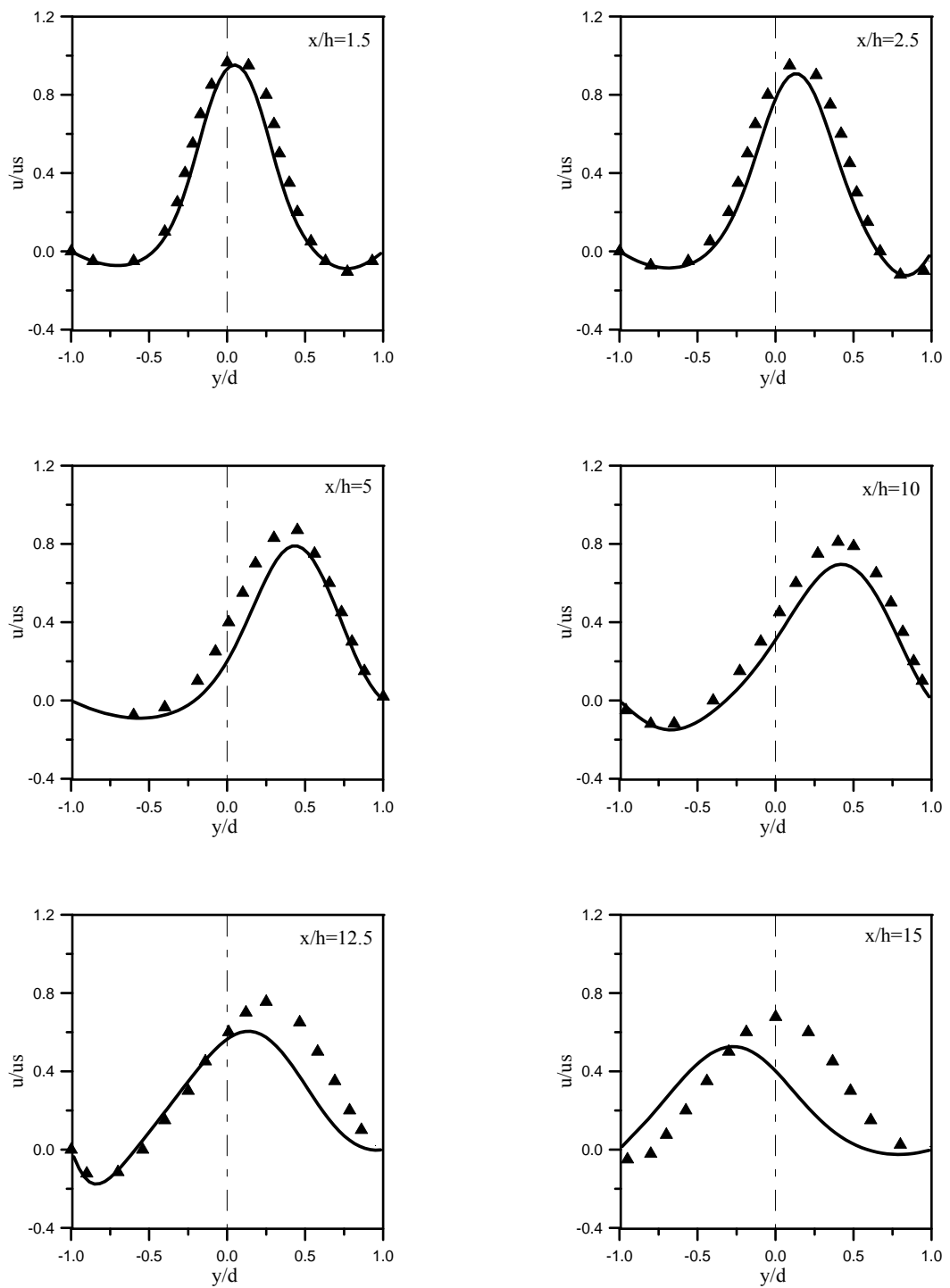


Figure V-18 (a) : Profils de vitesse horizontale $Re = 252$.

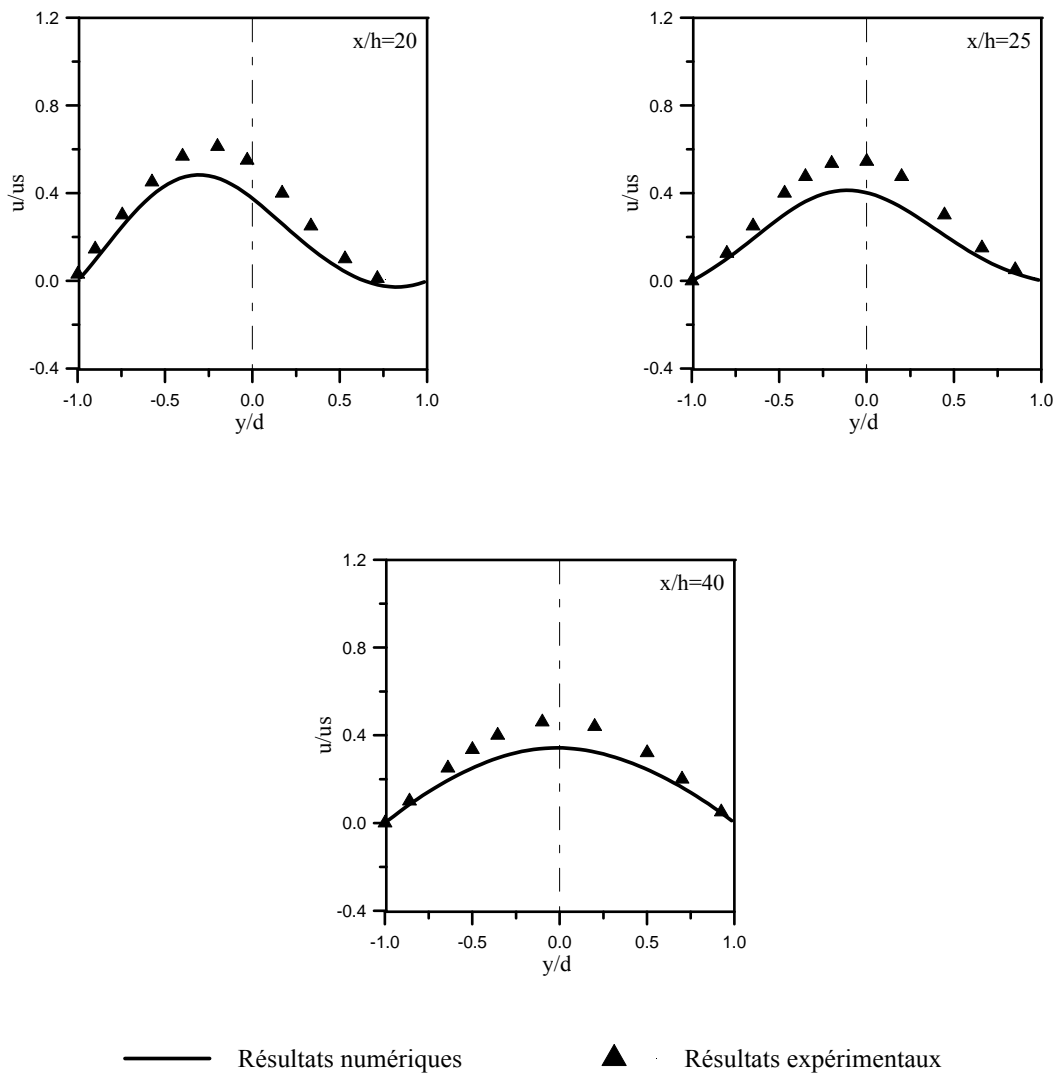


Figure V-18 (b) : Profils de vitesse horizontale $Re = 252$.

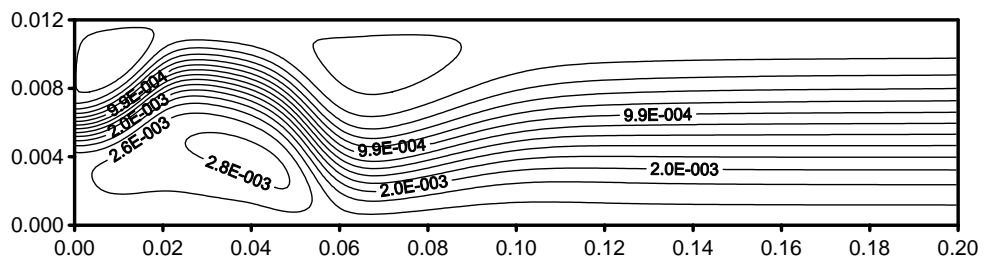


Figure V-19 : Isovaleurs des lignes de courant $Re = 252$.

V.6 Conclusion

Les soucis, primo de valider notre code de calcul des équations de Navier-Stokes, et secundo de démontrer ses performances ont été à l'origine de tous les tests numériques effectués dans ce chapitre. Cette démarche nous a conduit à effectuer notamment des tests sur des écoulements de configurations différentes et qui présentent des difficultés que l'on rencontre dans des situations réelles.

Nous avons tout d'abord étudié le cas de l'écoulement de Poiseuille qui a cet avantage de posséder une solution analytique permettant une confrontation des résultats numériques aux résultats théoriques. Quoique c'est un écoulement à géométrie simple, il n'en est pas moins caractérisé par les phénomènes liés aux écoulements de parois (couche limite). Les résultats des calculs numériques se confondent parfaitement avec les résultats théoriques.

Le second test a porté sur la simulation d'un écoulement en cavité carrée bidimensionnelle. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de la bibliographie pour des nombres de Reynolds variant de 100 à 1000. Deux maillages réguliers ont été utilisés, 20x20 et 40x40. Nous avons constaté pour le nombre de Reynolds de 100, que les résultats sur les profils des deux composantes de la vitesse étaient en parfait accord avec les résultats de référence pour les deux maillages utilisés. En conséquence, nous avons conclu que pour les faibles nombres de Reynolds l'utilisation du maillage 20x20 aurait bien suffi. Pour les nombres de Reynolds plus importants (400 et 1000), un écart a été observé entre nos résultats et ceux de la référence pour le maillage 20x20 près des parois où les gradients de vitesses étaient très importants. L'utilisation d'un maillage plus raffiné 40x40 a permis d'améliorer d'une manière assez significative la qualité de nos résultats.

Après quoi, nous avons étudié l'écoulement derrière une marche pour un nombre de Reynolds faible égal à 50. Deux cas - avec des rapports expansion/marche de 1/2 et 2/3 - ont été considérés. Les résultats obtenus ont été confrontés avec ceux de Adjilout et al. (1998) et de Workshop(1983) en ce qui concerne l'estimation de la longueur de la zone de recirculation derrière la marche et nous avons pu mettre en exergue le fait que nos résultats étaient beaucoup plus proches de ceux de la référence que ceux de Adjilout et al. (1998) de ces derniers. Sur le plan physique, nous avons pu tirer la conclusion que l'augmentation de la hauteur de la marche accentue le phénomène de décollement.

En dernier lieu, nous nous sommes attaqués à l'écoulement d'air derrière une expansion brusque qui s'apparente bien au cas d'une injection du même fluide (air) dans un domaine au repos. Dans cette manipulation, nous avons reproduit fidèlement les conditions d'expérimentation de Durst et al. (1974) qui ont étudié l'écoulement pour des nombres de Reynolds de 56, 114 et 252. Nos profils de vitesses horizontales se confondaient parfaitement avec leurs valeurs expérimentales pour le nombre de Reynolds de 56. En revanche, des écarts, quoique très acceptables, ont été observés pour les deux autres nombres de Reynolds. Ces derniers nous les avons interprétés par le fait que l'écoulement, à partir du nombre de Reynolds de 100, commence à développer des

Chapitre V. Tests monophasiques

aspects tridimensionnels d'une part et turbulents d'autre part. Les tracés des isovaleurs des lignes de courant étaient en parfaite adéquation avec les visualisations photographiques des auteurs.

Nonobstant les informations précieuses tirées sur la nature de ce type d'écoulements, ce cas test nous a permis, en plus, de démontrer la capacité de notre code à simuler des écoulements dans des conditions réelles où des difficultés résident dans le fait que c'est un écoulement d'air d'une part, et dans la présence d'importantes zones de recirculations d'autre part.

En conclusion, nous demeurons convaincus qu'il est hautement envisageable de procéder à l'extension du code de calcul monophasique afin de s'attaquer à la simulation des écoulements diphasiques en toute quiétude. Et ce, eu égard aux résultats performants obtenus et prouvés lors de la simulation des écoulements monophasiques avec des configurations plus ou moins complexes.

Chapitre VI

Extension du modèle aux écoulements diphasiques

VI.1 Introduction

Après avoir effectué diverses simulations d'écoulements monophasiques afin de démontrer les performances de l'algorithme que nous avons adopté pour la résolution des équations de Navier-Stokes, il est intéressant à présent d'envisager l'extension de notre travail à la simulation des écoulements diphasiques air-eau.

Pour cela, nos efforts seront concentrés sur la résolution de l'équation du taux de présence et d'opérer les modifications nécessaires sur les variables des équations de Navier-Stokes.

Rappelons que l'équation du transport s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (U\alpha) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

La fonction du taux de présence possède deux caractères particuliers. Le premier est la variation brutale de α au passage des interfaces. Le second est l'appartenance de α à un intervalle défini par les extrêmes 0 et 1 ($0 \leq \alpha \leq 1$). De ce fait, le schéma numérique à utiliser pour résoudre l'équation de transport du taux de présence n'est pas un schéma ordinaire tel que ceux utilisés pour une équation d'advection diffusion classique et ce à cause des difficultés engendrées par ces deux caractères particuliers de α .

En effet, les solutions recherchées sont discontinues d'une part et cette équation est gouvernée que par la convection seule d'autre part, ainsi sa représentation discrète est sujette au problème de dispersion numérique associé aux termes de convection.

A cet effet, il devient clair que la méthode à employer pour résoudre cette équation dans le cas d'une solution raide doit être plus sophistiquée que les schémas standard. Elle doit à la fois satisfaire les quatre propriétés suivantes :

- la stabilité malgré la présence de variation brutale de la solution ;
- la conservation de α , et par conséquent la conservation de la masse, aussi bien localement que sur tout le domaine de calcul ;
- la positivité de la fonction α car $0 \leq \alpha \leq 1$;
- la précision spatiale, ce qui revient en fait à minimiser la diffusion numérique des discontinuités de la fonction α .

Les travaux consacrés à la résolution de l'équation du taux de présence sont très nombreux et ont donné naissance à plusieurs schémas numériques parmi lesquels, on peut citer :

- les schémas FCT (Flux-Corrected Transport) ;
- les schémas TVD (Total Variation Diminishing) ;
- et les schémas ENO (Essentially Non-Oscillatory).

Initialement mise au point par Boris et Book (1973), la technique FCT a été utilisée dans l'optique de résoudre l'équation de conservation de la masse pour un écoulement unidimensionnel en présence d'ondes de choc. C'est la similitude partielle existant entre les interfaces en écoulement diphasique et les ondes de choc en écoulement monophasique qui nous a conduit à nous intéresser aux schémas FCT. Le principe de base de cette famille de schémas est de déterminer une solution approchée de l'équation (VI.1) qui vérifie la condition de monotonie dans un premier lieu, puis de la corriger par un limiteur de flux pour minimiser l'effet de la diffusion numérique introduite explicitement dans la première étape.

Les schémas TVD apparus plus récemment, constituent une variante du schéma FCT. Au lieu d'effectuer deux opérations successives, le transport et la correction par un limiteur de flux, le schéma TVD regroupe ces deux opérations en une seule étape de calcul. La différence fondamentale par rapport à un schéma FCT est la diffusion numérique introduite implicitement par un schéma décentré amont pour assurer la monotonie de la solution.

Les schémas ENO constituent la dernière génération des schémas mis au point pour résoudre l'équation hyperbolique (VI.1). Ils sont basés sur une formulation conservative (formulation faisant apparaître les flux sur les facettes des cellules). Cependant, le calcul des flux est totalement différent. Il consiste à déterminer la fonction primitive produisant le flux CU sur la base d'une table de différences divisées.

Une étude détaillée des différentes familles de schémas effectuée par Benkenida (1999) a montré une supériorité des schémas FCT par rapport aux autres en terme de propriété de conservation.

Dans le présent chapitre, nous décrivons en détail le schéma FCT de Boris et Book (1973) que nous avons adopté dans le cadre de nos travaux. En dernier lieu, nous achevons notre étude par deux tests numériques.

VI.2 Schéma FCT unidimensionnel

Boris et Book (1973) ont mis au point un algorithme pour résoudre l'équation (VI.1) en deux étapes : une étape de transport-diffusion et une étape de correction. Dans la première étape, Boris et Book résolvent une équation modifiée obtenue à partir de l'équation de transport (VI.1) par ajout explicite d'un terme de diffusion :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (U\alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (\text{VI.2})$$

D étant un coefficient de diffusion inconnu pour le moment. Cet ajout permet d'assurer la monotonie de la solution qui se traduit par l'absence de toute oscillation de la solution numérique. En particulier cette solution ne fait pas apparaître de nouveaux extrema et maintient la fonction α dans l'intervalle $[0,1]$. Dans la seconde étape, un limiteur de flux est utilisé pour corriger la diffusion numérique introduite par le terme diffusif de l'équation (VI.2). Cette correction doit permettre de limiter au minimum l'effet du terme diffusif pour obtenir finalement une solution numérique satisfaisante de l'équation (VI.1). Détaillons maintenant les étapes de la technique FCT.

Etape de transport-diffusion

La discrétisation de l'équation (VI.2) en volumes finis produit un champ prédicteur $\tilde{\alpha}_i$ qui s'exprime en fonction des quantités connues à l'instant $n\Delta t$ sous la forme :

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i^n - \left[\varepsilon_{i+1/2}^n \frac{\alpha_{i+1}^n + \alpha_i^n}{2} - \varepsilon_{i-1/2}^n \frac{\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n}{2} \right] + \left[v_{i+1/2}^n (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) - v_{i-1/2}^n (\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n) \right] \quad (\text{VI.3})$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2}^n &= U_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ \varepsilon_{i-1/2}^n &= U_{i-1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ v_{i+1/2}^n &= D_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ v_{i-1/2}^n &= D_{i-1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

L'équation (VI.3) peut être réécrite sous la forme d'un schéma d'avancement en temps à trois points d'espace, soit :

$$\tilde{\alpha}_i = a_i \alpha_{i-1}^n + b_i \alpha_i^n + c_i \alpha_{i+1}^n \quad (\text{VI.5})$$

avec,

$$\begin{aligned} a_i &= v_{i-1/2}^n + \frac{1}{2} \varepsilon_{i-1/2}^n \\ b_i &= 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{i+1/2}^n + \frac{1}{2} \varepsilon_{i-1/2}^n - v_{i+1/2}^n - v_{i-1/2}^n \\ c_i &= v_{i+1/2}^n - \frac{1}{2} \varepsilon_{i+1/2}^n \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

A ce stade, on peut établir les critères qui permettent de contrôler les valeurs des coefficients de diffusion numérique $v_{i+1/2}^n$ et $v_{i-1/2}^n$ de façon à maintenir la positivité et la stabilité de la solution.

Positivité

Pour assurer la positivité de $\tilde{\alpha}$ à travers tous le domaine il suffit que :

$$a_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad c_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{VI.7})$$

En remplaçant les expressions de a_i , b_i et c_i données par (VI.6), les inégalités ci-dessus peuvent se réécrire :

$$\frac{1}{2} |\varepsilon_{i+1/2}^n| \leq v_{i+1/2}^n \leq \frac{1}{2} \quad \forall i \quad (\text{VI.8})$$

Stabilité

Moyennant une étude de stabilité avec la méthode de Von Neumann et une décomposition de la solution en série de Fourier [Benkenida 1999], nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \leq v \quad (\text{VI.9})$$

On remarque que la condition de stabilité (VI.9) est incluse dans les conditions de positivité exprimées par les inégalités (VI.8).

Etape de correction

Dans les critères établis ci-dessus trois des quatre propriétés exigées à l'algorithme sont vérifiées. En effet, la stabilité, la positivité, la conservation sont assurées mais pas la précision à cause de la

diffusion numérique introduite dans la solution à l'issue de l'étape de transport diffusion. C'est dans ce but, que Boris et Book (1973) ont complété l'algorithme par une étape de correction. Le rôle de cette étape est de rattraper la dégradation de la précision provoquée par la diffusion de la première étape sans toutefois perdre les propriétés déjà acquises. Elle ne doit pas générer de nouveaux maxima ou minima, ni accentuer les extrema déjà existants.

L'étape de correction repose sur une idée simple. Elle consiste à introduire explicitement une antidiffusion, c'est-à-dire une diffusion associée à un coefficient de diffusion négatif. Ainsi, en utilisant une formulation conservative faisant intervenir les flux $\phi = \alpha U$, l'étape de correction peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha_i^{n+1} = \tilde{\alpha}_i - [\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}] \quad (\text{VI.10})$$

Si l'on suppose dans un premier temps que la correction est linéaire, le flux antidiffusif s'écrira :

$$\phi_{i+1/2} = \mu_{i+1/2}^n (\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i) \quad (\text{VI.11})$$

Une analyse de stabilité permet de déterminer l'intervalle auquel doit appartenir le coefficient d'antidiffusion $\mu_{i+1/2}^n$ (en le supposant uniforme) :

$$\mu \leq v - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (\text{VI.12})$$

En réalité cette étape ne peut être linéaire car les différentes mailles ne doivent pas être traitées de la même façon puisque dans certaines la correction est nécessaire, tandis que dans d'autres rien ne doit être modifié. A cet effet, l'expression (VI.11) du flux antidiffusif est inutilisable car elle apporte une correction uniforme sur tout le champ de α . Cependant, elle peut faire partie d'une expression générale non-linéaire traduisant le fait que l'étape de correction ne doit pas créer d'extrema locaux de la solution. Boris et Book ont proposé une expression du flux antidiffusif qui vérifie cette propriété et s'écrit :

$$\phi_{i+1/2} = S_{i+1/2} \max \left\{ 0, \min \left[S_{i+1/2} (\tilde{\alpha}_{i+2} - \tilde{\alpha}_{i+1}), \left| \mu_{i+1/2}^n (\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i) \right|, S_{i+1/2} (\tilde{\alpha}_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i-1}) \right] \right\} \quad (\text{VI.13})$$

avec, $S_{i+1/2} = \text{sign}(\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i)$

Ainsi, suivant le signe et la valeur respective des différences $\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_{i-1}$, $\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\alpha}_{i+2} - \tilde{\alpha}_{i+1}$, le flux antidiffusif peut prendre l'une des quatre valeurs de l'expression (VI.13).

En résumé, l'algorithme FCT original se présente comme suit :

Etape de transport diffusion

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i^n - \left[\varepsilon_{i+1/2}^n \frac{\alpha_{i+1}^n + \alpha_i^n}{2} - \varepsilon_{i-1/2}^n \frac{\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n}{2} \right] + \left[v_{i+1/2}^n (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) - v_{i-1/2}^n (\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n) \right] \quad (\text{VI.14})$$

avec,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1/2}^n &= U_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \forall i \\ \frac{1}{2} |\varepsilon_{i+1/2}^n| &\leq v_{i+1/2}^n \leq \frac{1}{2} \quad \forall i\end{aligned}\tag{VI.15}$$

Etape d'antidiffusion

$$\alpha_i^{n+1} = \tilde{\alpha}_i - [\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}]\tag{VI.16}$$

avec,

$$\phi_{i+1/2} = S_{i+1/2} \max\left\{0, \min\left[S_{i+1/2}(\tilde{\alpha}_{i+2} - \tilde{\alpha}_{i+1}), \left|\mu_{i+1/2}^n(\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i)\right|, S_{i+1/2}(\tilde{\alpha}_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i-1})\right]\right\}\tag{VI.17}$$

$$S_{i+1/2} = \text{sign}(\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_i)$$

$$\mu_{i+1/2}^n \leq v_{i+1/2}^n - \frac{1}{2} (\varepsilon_{i+1/2}^n)^2 \quad \forall i\tag{VI.18}$$

VI.3 Extension du schéma FCT au cas bidimensionnel

L'algorithme 1D de la technique FCT que nous avons présenté possède une structure simple et par conséquent le passage en 2D est relativement facile à mettre en œuvre. Ainsi, l'extension bidimensionnelle de l'étape de transport-diffusion est immédiate :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{i,j} &= \alpha_{i,j}^n - \left[\varepsilon_{i+1/2,j}^n \frac{\alpha_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j}^n}{2} - \varepsilon_{i-1/2,j}^n \frac{\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right] \\ &\quad - \left[\varepsilon_{i,j+1/2}^n \frac{\alpha_{i,j+1}^n + \alpha_{i,j}^n}{2} - \varepsilon_{i,j-1/2}^n \frac{\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right] \\ &\quad + \left[v_{i+1/2,j}^n (\alpha_{i+1,j}^n - \alpha_{i,j}^n) - v_{i-1/2,j}^n (\alpha_{i,j}^n - \alpha_{i-1,j}^n) \right] \\ &\quad + \left[v_{i,j+1/2}^n (\alpha_{i,j+1}^n - \alpha_{i,j}^n) - v_{i,j-1/2}^n (\alpha_{i,j}^n - \alpha_{i,j-1}^n) \right]\end{aligned}\tag{VI.19}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i+1/2,j}^n &= U_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \\
 \varepsilon_{i,j+1/2}^n &= U_{i,j+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} \\
 \frac{1}{2} \left| \varepsilon_{i+1/2,j}^n \right| &\leq v_{i+1/2,j}^n \leq \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} \left| \varepsilon_{i,j+1/2}^n \right| &\leq v_{i,j+1/2}^n \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{VI.20}$$

Par contre, l'étape d'antidiffusion peut être effectuée de plusieurs façons. En effet, on peut écrire un algorithme d'antidiffusion global faisant intervenir les deux directions d'espace :

$$\alpha_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_{i,j} - \left[\phi_{i+1/2,j} - \phi_{i-1/2,j} + \phi_{i,j+1/2} - \phi_{i,j-1/2} \right] \tag{VI.21}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 \phi_{i+1/2,j} &= S_{i+1/2,j} \max \left\{ 0, \min \left[S_{i+1/2,j} (\tilde{\alpha}_{i+2,j} - \tilde{\alpha}_{i+1,j}), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left| \mu_{i+1/2,j}^n (\tilde{\alpha}_{i+1,j} - \tilde{\alpha}_{i,j}) \right|, S_{i+1/2,j} (\tilde{\alpha}_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i-1,j}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{VI.22}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{i,j+1/2} &= S_{i,j+1/2} \max \left\{ 0, \min \left[S_{i,j+1/2} (\tilde{\alpha}_{i,j+2} - \tilde{\alpha}_{i,j+1}), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left| \mu_{i,j+1/2}^n (\tilde{\alpha}_{i,j+1} - \tilde{\alpha}_{i,j}) \right|, S_{i,j+1/2} (\tilde{\alpha}_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i,j-1}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{VI.23}$$

On peut aussi procéder à une anti diffusion direction par direction.

Suivant la direction x :

$$\alpha_{i,j}^1 = \tilde{\alpha}_{i,j} - (\phi_{i+1/2,j} - \phi_{i-1/2,j}) \tag{VI.24}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 \phi_{i+1/2,j} &= S_{i+1/2,j} \max \left\{ 0, \min \left[S_{i+1/2,j} (\tilde{\alpha}_{i+2,j} - \tilde{\alpha}_{i+1,j}), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left| \mu_{i+1/2,j}^n (\tilde{\alpha}_{i+1,j} - \tilde{\alpha}_{i,j}) \right|, S_{i+1/2,j} (\tilde{\alpha}_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i-1,j}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{VI.25}$$

Suivant la direction y :

$$\alpha_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^1 - (\phi_{i,j+1/2} - \phi_{i,j-1/2}) \tag{VI.26}$$

avec,

$$\phi_{i,j+1/2} = S_{i,j+1/2} \max \left\{ 0, \min \left[S_{i,j+1/2} (\alpha_{i,j+2}^1 - \alpha_{i,j+1}^1), \left| \mu_{i,j+1/2}^n (\alpha_{i,j+1}^1 - \alpha_{i,j}^1) \right|, S_{i,j+1/2} (\alpha_{i,j}^1 - \alpha_{i,j-1}^1) \right] \right\} \quad (\text{VI.27})$$

Dans nos calculs nous avons choisi le coefficient ν qui produit le minimum de diffusion numérique : $\nu_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left| \varepsilon_{i+1/2}^n \right|$, le coefficient d'antidiffusion étant fixé à la valeur proposée par

Boris et Book (1973) à la suite d'une analyse des erreurs de phase : $\mu_{i+1/2}^n = \frac{1}{6} \left[1 - (\varepsilon_{i+1/2}^n)^2 \right]$.

VI.4 Couplage des équations du modèle

Après avoir présenté le schéma FCT pour la résolution de l'équation de transport du taux de présence en détail, il serait intéressant de donner les étapes du schéma d'avancement de la solution qui se déroulent comme suit :

1. Résolution de l'équation du taux de présence donnant à l'instant $n+1$ la fonction α :

$$\alpha^{n+1} = \alpha^{n+1}(\alpha^n, U^n) \quad (\text{VI.28})$$

2. Calcul de ρ^{n+1} et de μ^{n+1} ;

3. Schéma fractionnaire RK3/CN pour la prédiction du champ de vitesses ;

4. Résolution de l'équation de Poisson pour la correction du champ de vitesse et la détermination du champ de pression.

VI.5 Résultats numériques

VI.5.1 Écoulement de Poiseuille en deux couches

L'écoulement de Poiseuille en deux couches va constituer le premier test auquel sera soumis notre modèle. En effet, ce problème possède, sous certaines hypothèses, une solution analytique qui peut être utilisée à des fins de comparaison.

Le problème consiste en un écoulement entièrement développé et laminaire de deux couches plates de fluides différents provoqué par un gradient de pression longitudinal moyen. Cet écoulement se tient entre deux plaques planes parallèles fixes et distantes de L .

Le domaine de calcul est constitué donc de deux couches de fluides de masses volumiques et de viscosités différentes et d'égales épaisseurs comme détaillé sur la figure VI-1.

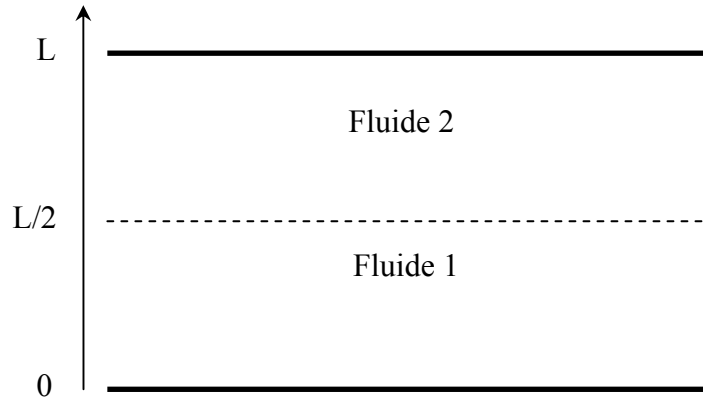


Figure VI-1 : Géométrie de l'écoulement de Poiseuille en deux couches.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, laminaire, incompressible et permanent pour les deux phases, la prédiction du mouvement de chaque phase revient alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \frac{dp}{dx} \\ \mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

qui possède une solution analytique dont l'expression est du type :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + b_1 y + c_1 y^2 \\ u_2 &= a_2 + b_2 y + c_2 y^2 \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

où, les différentes constantes d'intégration apparaissant dans l'équation précédente peuvent être déterminées en considérant les conditions aux limites suivantes :

1 – Conditions d'adhérence aux parois

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad u_1 = 0 \\ y = L & \quad u_2 = 0 \end{aligned}$$

2 – Egalité des contraintes de cisaillement à l'interface

$$y = \frac{L}{2} \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

La continuité des efforts de cisaillement interfaciaux est d'importance primaire dans cet écoulement, car la phase la plus visqueuse est essentiellement placée dans le mouvement par la moins visqueuse.

En revanche, les efforts normaux ne jouent aucun rôle puisque l'interface demeure plate. La situation serait évidemment différente dans le régime où les instabilités interfaciales sont susceptibles de se produire [Benkenida 1999].

3 – Absence de glissement entre les deux phases

$$y = \frac{L}{2} \quad u_1 = u_2$$

Avec les conditions aux limites explicitées ci-dessus, il est aisé de déterminer les valeurs correspondant aux coefficients du système (VI.30). Ces derniers sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} \\ c_2 &= \frac{1}{2\mu_2} \frac{dp}{dx} \\ b_1 &= -\frac{L}{2(\mu_1 + \mu_2)} (c_1(2\mu_1 + \mu_2) + c_2\mu_2) \\ b_2 &= \frac{L}{2(\mu_1 + \mu_2)} (c_1\mu_1 - c_2(3\mu_1 + 2\mu_2)) \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{\mu_1 L^2}{2(\mu_1 + \mu_2)} (c_1 - c_2) \end{aligned} \tag{VI.31}$$

Des investigations numériques ont été effectuées avec des rapports de viscosités $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ variant de 50 à 1000. Les résultats numériques ainsi obtenus sont comparés aux solutions analytiques pour les différents rapports de viscosités considérés- qui sont respectivement 50, 100, 500 et 1000 - sur les graphes de la figure VI-2. Ces derniers montrent un bon accord entre les valeurs de vitesses exactes et celles obtenues par simulation numérique.

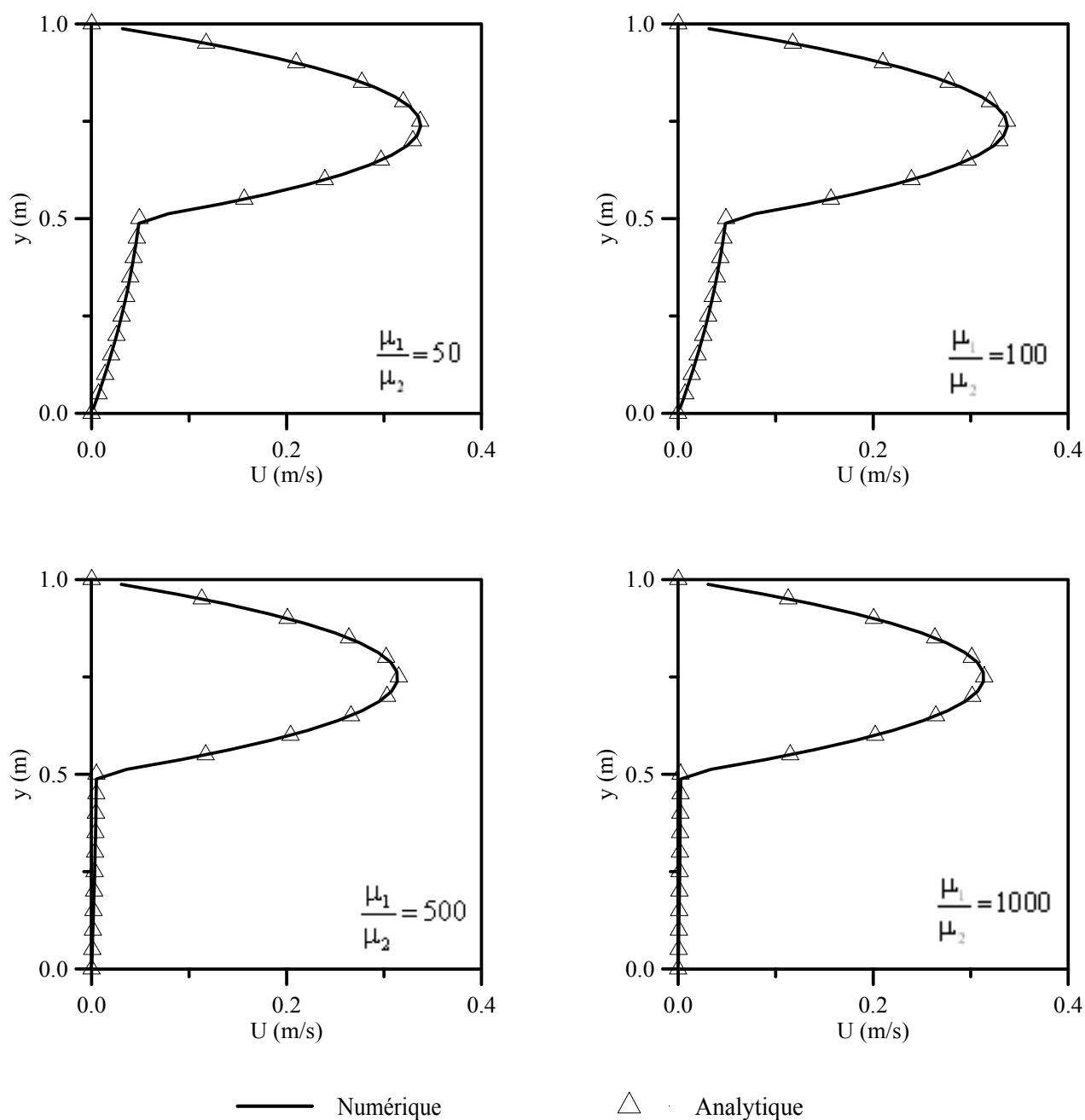


Figure VI-2: Profils de vitesses horizontales pour l'écoulement de Poiseuille en deux couches.

VI.5.2 Test de rupture d'un barrage

Dans le cadre de ce test, on cherche à valider notre modèle par rapport à un cas ayant été traité expérimentalement qui est celui de la rupture d'un barrage (*The broken dam problem*). La configuration initiale du problème correspond à une colonne d'eau initialement au repos soumise à l'action de la gravité et nous cherchons à suivre l'évolution de la position de l'interface (front d'eau) à différents temps.

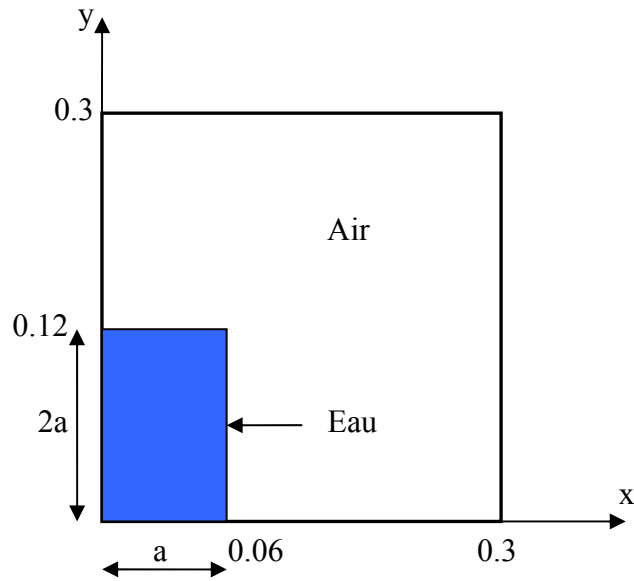


Figure VI-3: Configuration initiale du problème de rupture d'un barrage.

Les simulations numériques ont été effectuées avec un maillage 60X60. Sur la figure VI-4, nous avons tracé la configuration de la ligne d'eau à différents temps adimensionnels t^* définis par $t^* = t\sqrt{2g/a}$. Dans un premier temps nos résultats sont comparés avec les résultats numériques de Abbès (2004) sur les figures VI-4 et VI-5. Ce dernier a utilisé une technique de suivi de l'interface VOF avec une méthode éléments finis pour la résolution numérique des équations. Les graphes présentés illustrent un bon accord entre nos résultats et ceux de la référence notamment pour les trois premiers temps. Pour le dernier temps, en ce qui nous concerne, nous avons remarqué que le front d'eau atteint déjà la paroi située à une distance de 0.3 m par rapport au point de départ, et le phénomène de retour de l'onde a été bien entamé.

Sur le graphe de la figure VI-6, nos résultats numériques pour plusieurs pas de temps sont confrontés aux résultats numérique de Abbès (2004) et les mesures expérimentales de Koshizuka & Tamako et Martin & Moyce [Abbès 2004]. Ce graphe montre que nos résultats numériques sont très proches de ceux de Abbès et corroborent bien avec les autres résultats expérimentaux de référence.

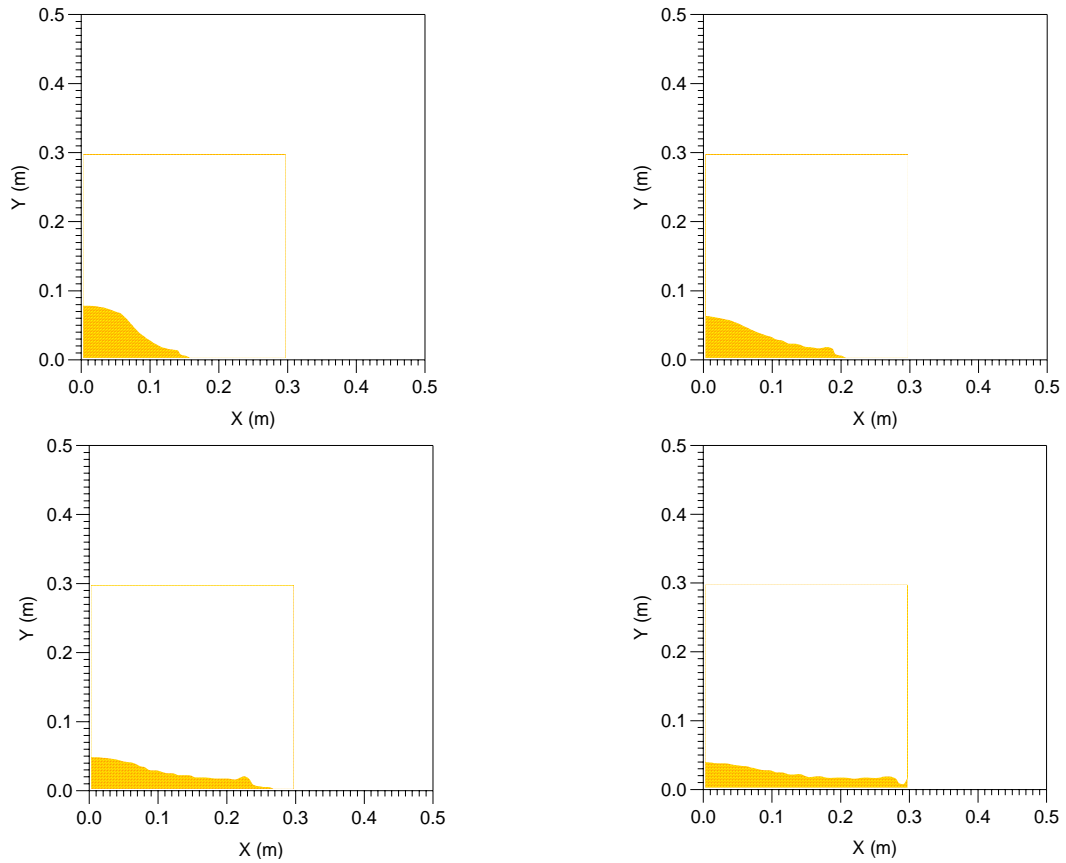


Figure VI-4 : Evolution de l'interface à : $t^* = 2.04, 2.70, 3.36$ et 3.98 .

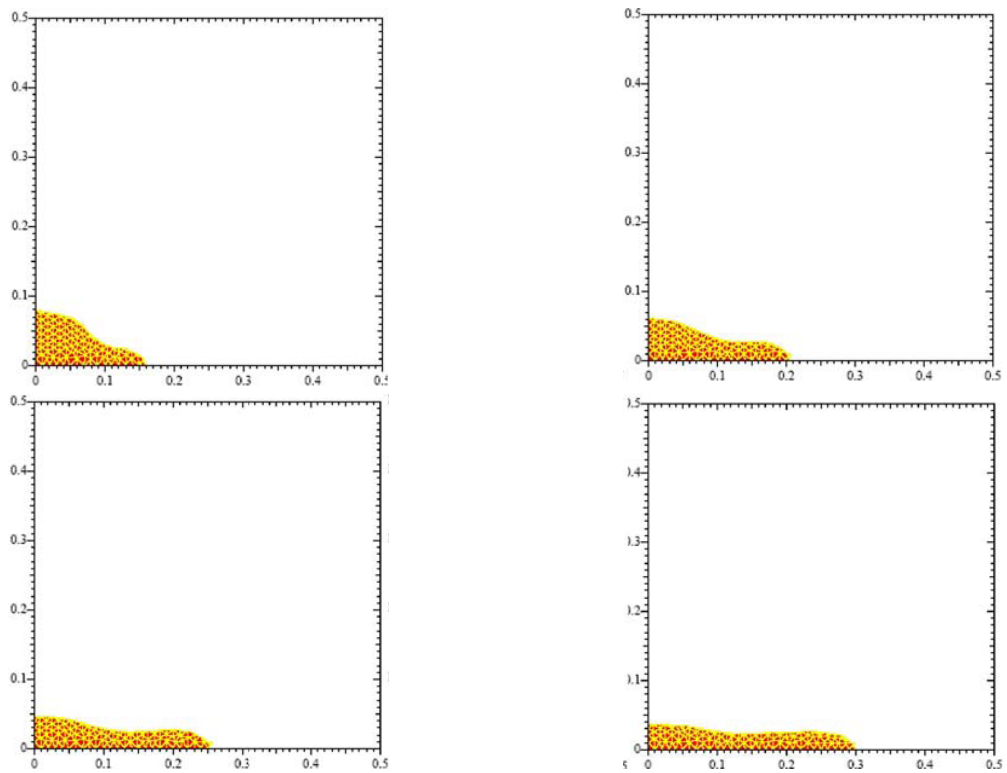


Figure VI-5 : Résultats obtenus par Abbès à : $t^* = 2.04, 2.70, 3.36$ et 3.98 .

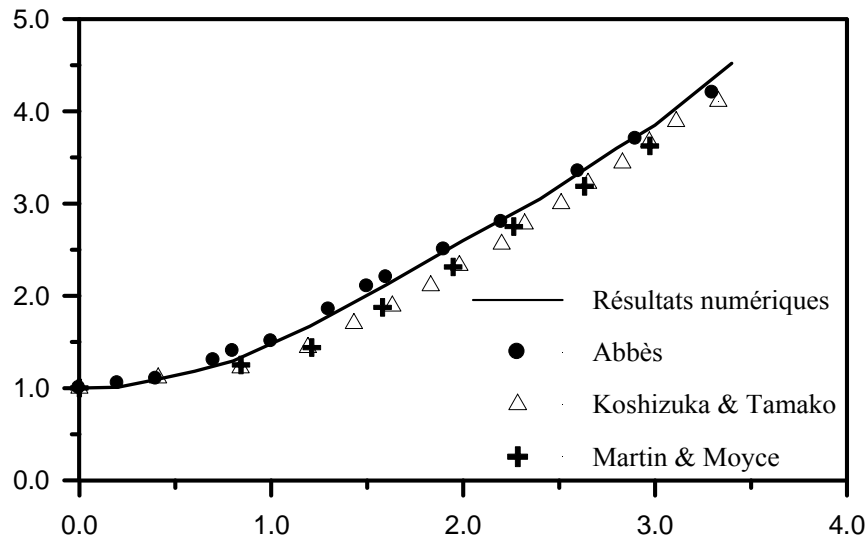


Figure VI-6 : Comparaison des positions du front d'eau avec des valeurs expérimentales et numériques de référence.

VI.6 Conclusion

En l'absence de résultats pouvant faire l'objet de comparaison pour ce qui est de la classe des écoulements à phase dispersées, nous avons été contraints de nous limiter aux deux tests présentés plus haut, à savoir l'écoulement de Poiseuille en deux couches et celui de la rupture d'un barrage. La qualité des résultats obtenus dans le cadre de ces deux tests- particulièrement concernant l'écoulement de Poiseuille en deux couches, où les hypothèses du modèle sont respectées notamment en ce qui concerne l'hypothèse d'absence de glissement entre les deux phases- est très encourageante. De ce fait, nous pouvons bel et bien prétendre que l'extension de notre modèle numérique aux cas des écoulements diphasiques à phase dispersée ne devra pas poser de problèmes notables à condition que les hypothèses que nous avons posées soient plus ou moins respectées.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, un outil numérique pour la simulation des écoulements diphasiques a été développé moyennant un modèle mathématique monofluide et une approche volumique sans reconstruction de l'interface.

Les difficultés inhérentes à la taille et à la physique des problèmes que nous avons bien voulu étudier nous ont amené à adopter une approche qui nous a permis d'aboutir à un modèle mathématiquement correct et numériquement maîtrisable. Tous ces soucis ont été à l'origine de notre méthodologie qui a consisté en une série d'étapes logiques que nous avons suivies.

Notre première démarche était théorique et a consisté en l'écriture d'un modèle mathématique simplifié (à un fluide) à partir des équations locales instantanées et en s'appuyant sur d'autres considérations à titre hypothétique notamment en négligeant le changement de phase, les tensions de surface, les aspects turbulents du problème et en dernier lieu le glissement local entre les deux phases. Les équations du modèle ainsi obtenues s'apparentaient bien aux équations Navier-Stokes dont les variables de l'écoulement et les propriétés physiques du fluide ont été écrites pour un mélange.

Le deuxième objectif que nous nous sommes fixé est celui de la mise en œuvre d'un outil pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Pour cela, la méthode des volumes finis a été adoptée pour la discrétisation spatiale. L'avancement en temps a été assuré par un schéma semi implicite à trois pas fractionnaires du type Runge Kutta /Crank Nicholson. Ce dernier a été choisi pour ses propriétés de stabilité avantageuses. Pour le traitement de la pression, nous avons opté pour une méthode de projection. Les résultats des tests numériques obtenus pour des cas de différentes configurations se sont avérés prometteurs et illustrent bien les performances de l'outil numérique développé pour la résolution des écoulements monophasiques et justifient les possibilités de son extension aux écoulements diphasiques.

Par la suite, nous avons abordé les difficultés liées aux caractères de la fonction du taux de présence. La résolution numérique de l'équation du taux de présence a nécessité l'utilisation d'un schéma numérique adapté à ce type de problèmes. C'est un schéma explicite du type FCT. Après quoi, nous avons opéré les modifications nécessaires sur les propriétés physiques du mélange diphasique dans le cadre du code de calcul des équations de Navier-Stokes.

Conclusions et perspectives

Pour la validation du modèle diphasique, notre choix s'est porté sur deux cas de tests académiques pour lesquels des résultats numériques sont disponibles. Le premier est celui de l'écoulement de Poiseuille en deux couches. Pour ce dernier, nous avons enregistré une bonne concordance entre nos résultats numériques et les valeurs de la solution exacte. Cela s'explique par le fait que les solutions exactes ont été obtenues moyennant des hypothèses en parfait accord avec celles posées lors de l'écriture de notre modèle mathématique.

Le deuxième test auquel nous avons soumis notre modèle était celui de la rupture d'un barrage appelé aussi « Dam Break Problem » ou « Broken Dam Problem ». Les résultats obtenus ont été confrontés à des résultats expérimentaux et autres résultats numériques. La qualité des résultats illustre la capacité de notre modèle à reproduire les mouvements et les formes des interfaces pour ce type de problèmes.

Ne disposant guère de résultats sur des cas d'écoulements à phase dispersée, nous avons été contraint de nous limiter dans nos simulations numériques aux deux tests cités. Néanmoins, ces deux derniers nous ont montré qu'une grande classe d'écoulements diphasiques peut être étudiée avec ce modèle.

Il importe aussi de signaler, qu'à travers les tests numériques effectués, nous avons cherché à valider nos simulations en les comparant à des solutions théoriques, des valeurs expérimentales ou d'autres simulations numériques. Notre objectif n'était point d'approfondir la physique de ces problèmes.

Il est tout à fait clair que ce travail constitue le premier noyau d'une tâche plus élaborée pour la simulation de l'injection de l'air comme moyen de lutte contre le phénomène d'eutrophisation. Partant de là, des perspectives peuvent bien entendu être envisagées. Il s'agit de s'intéresser à des cas de plus en plus réels, et là un effort particulier doit être entrepris notamment dans le choix du type de conditions aux limites à adopter, surtout quant il s'agit d'étudier des écoulements à phase dispersée. A la fin, nous ne saurons achever la présente étude sans évoquer une extension naturelle de notre travail à prévoir qui est celle de la nécessité de la prise en compte des aspects turbulents, importants pour la classe des écoulements à phase dispersée et que nous n'avons pas eu à considérer en première approximation.

Bibliographie

ABBES B. 2000 Modélisation numérique 3D volumique du remplissage des moules d'injection. *Thèse de Doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, 150 pages.*

ABDELWAHED M. 2002 Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques. *Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 166 pages.*

ADJLOUT L., NEHARI D., IMINE O. 1998 Application de méthode "Marker and Cell" améliorée au calcul des écoulements. *Actes du 6^{ème} Colloque Maghrébin sur les modèles numériques de l'ingénieur Tunis 24-26 Nov. 1998, 423-427.*

BACON G. 1995 Méthode des volumes finis. *Polycopié de cours ENSEEIHT Toulouse, 65 pages.*

BENKENIDA A. 1999 Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstitution d'interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor. *Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, 264 pages.*

BOOK D. L., BORIS J. P., & HAIN K. 1975 Flux-Corrected Transport II : generalisations of the method. *Journal of Computational physics 18, 248-283.*

BORIS J. P. & BOOK D. L. 1973 Flux-Corrected Transport I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational physics 11, 38-69.*

BORIS J. P. & BOOK D. L. 1976 a Flux-Corrected Transport III. Minimal-error FCT algorithms. *Journal of Computational physics 20, 397-431.*

BORIS J. P. & BOOK D. L. 1976 b Solution of continuity equation by the method of flux-corrected transport. *Methods in Computational Physics. Academic Press.*

CALMET I., 1995 Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane. *Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, 232 pages.*

CARRICA P. M., DREW D., BONETTO F. & LAHEY Jr R. T. 1999 A polydisperse model for bubbly two-phase flow around a surface ship. *Int. J. of Multiphase Flow Vol. 25, pp 257-305.*

Bibliographie

- CLIMENT E. 1996 Dispersion de bulles et modification du mouvement de la phase porteuse dans des écoulements tourbillonnaires. *Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, 281 pages.*
- COMOLET R. 1979 Sur le mouvement d'une bulle de gaz dans un liquide. *La Houille blanche N°1-1979,31-41.*
- CORE X. 2002 Méthode adaptative de raffinement local multi-niveaux pour le calcul d'écoulements réactifs à faible nombre de Mach. *Thèse de Doctorat, Université de Provence, 143 pages.*
- DANOV K. D., AURST R., DURST F. & LANGE U. 1995 Slow motions of a solid spherical particle close to a viscous interface. *Int. J. of Multiphase Flow Vol. 21, No 6, pp 1169-1189.*
- DANSEREAU P. 1997 L'eau une ressource exportable? *Document rédigé pour l'Union pour le Développement Durable UDD dans le cadre du débat sur l'eau.*
- DE HENAU V. & RAITHBY G. D. 1995 A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines I. Theory. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 21, No 3, pp 335-349.*
- DE HENAU V. & RAITHBY G. D. 1995 A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines II. Validation. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 21, No 3, pp 351-363.*
- DELHAYE J. M. 1968 Equations fondamentales des écoulements diphasiques. Première partie : Equations générales de conservation. *Rapport CEA-R-3429(1) Centre d'études Nucléaires de Grenoble, 86 pages.*
- DEMAILLY J. P. 1993 Analyse numérique et équations différentielles. *Office des Publications Universitaires.*
- DEPEYRE S. 1996 Une méthode couplée pour la simulation d'écoulements diphasiques dispersés. *Rapport de recherche CERMICS-INRIA N° 96-76, 57 pages.*
- DURST F., MELLING A., WHITELOW J. H. 1974 Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. *Journal of Fluid Mechanics. Vol. 64, part 1, pp. 111-128.*
- EL DABAGHI F. 1999 Numerical simulation of some eutrophication aspects. *Deliverable : report D.8 INRIA France, 45 pages.*
- ENWALD H., PEIRANO E., ALMSTEDT A. E. 1996 Eulerian two-phase flow theory applied to fluidization. *International Journal of Multiphase flow Vol.22, Suppl., pp. 21-66.*
- ESMAELLI A. & TRYGGVASON G. 1998 Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics. Vol. 377, pp. 313-345.*

Bibliographie

ESMAELLI A. & TRYGGVASON G. 1999 Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 2. Moderate Reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 385, pp. 325-358.

FABRE J. 1985 Ecoulements diphasiques. Cours de DEA.. *Inst. Nat. Polytech. de Toulouse*, 10-31.

GHIDAGLIA J. M., KUMBARO A., LE COQ G. 1996 Modélisation physique et numérique des écoulements diphasiques. *Rapport de recherche CERMICS-INRLA*, 147-156.

GONAY E. & LAFFORGUE M. 1997 Une solution pour lutter contre l'eutrophisation des lacs et des retenues : l'aération par déstratification. *Aqua Technique*, TSM N° 9, 33-45.

GRAF W. H. & ALTINAKAR M. S. 1998 Traité de Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Volume 14 **Hydrodynamique**, une introduction. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, 481 pages.

GUYON E., HULIN J.P., PETIT L., 1991 Hydrodynamique physique. *InterEditions / Editions du CNRS*, 506 pages.

ISHII M. 1975 Thermo-fluid dynamic theory of two phase flow. *Eyrolles*, 248 pages.

JAIN M. K., IYENGAR S. R. K., JAIN R. K. 1990 Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation. *Wiley Eastern Limited*, 470 pages.

JAEGER M., 1990 Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides Newtoniens par éléments finis tridimensionnels. *Thèse de Doctorat, Université de technologies de Compiègne*, 293 pages.

KIM J. & MOIN P. 1985 Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational physics* 59, 308-323.

LASCAUX P., THEODOR R. 1986 Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2. *Ed. Masson*, 790 pages.

LE H., MOIN P. 1991 An improvement of Fractional Step Methods for incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational physics* 92, 369-379.

LEGENDRE D. 1996 Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique. *Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse*, 243 pages.

MAGHNAUDET J., RIVERO M., FABRE J 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech*, vol. 284, pp. 97-135.

Bibliographie

PATANKAR S. V. 1980 Numerical heat transfer and fluid flow. *Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. Hemisphere Publishing Corporation, 197 pages.*

PIRONNEAU O. 1988 Méthode des éléments finis pour les fluides. *Editions Masson, 199 pages.*

POUILLEUTE E. 1996 Les phénomènes d'eutrophisation. *Mem. D.U. « Eau et Environnement », D.E.P., Amiens.*

PRESS W. H, FLANNERY B. P, TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T. 1988 Numerical Recipes in C. *Cambridge University Press, 735 pages.*

PEYRET R. et TAYLOR T. D. 1983 Computational Methods for Fluid Flow. *Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 358 pages.*

RAI M. M., MOIN P. 1991 Direct simulation of turbulent flow using Finite-Difference Schemes. *Journal of Computational physics 96, 15-53.*

SADAT H. 2001-2002. Résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. *Cours de méthodes numériques de l'Ecole Supérieure des Ingénieurs de Poitiers, 14 pages.*

SHERWOOD J. D. 1999 The force on a growing bubble in potential flow. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 25, pp 705-713.*

SAINSAULIEU L. 1990 An Euler system modeling vaporizing sprays. *Rapport de recherche CERMICS-ENPC.*

SAINSAULIEU L., LARROUTUROU B. 1992 Modélisation eulérienne des écoulements diphasiques dispersés et résolution par une méthode décentrée. *Rapport de recherche CERMICS-INRIA N° 92-9, 19 pages.*

SMAKGHI N., 1999 Rapport de fin de stage de Magister. *INRIA France, 43 pages.*

SMITH G.D. 1993 Numerical solution of partial differential equations. Finite Difference Methods. *Clarendon Press Oxford.*

STEIKAMP M. J. , CLARK T. T. & HARLOW F. H.. 1999 Two-point description of two-fluid turbulent mixing I. Model formulation. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 25, pp 599-637.*

VERLOOP W. C. 1995 Brief communication. The inertial coupling force. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 21, No 5, pp 929-933.*

YOUNG J. B. 1995 The fundamental equations of gaz-droplet multiphase flow. *Int. J. Multiphase Flow Vol. 21, No 2, pp 175-191.*