

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DER de : GENIE ELECTRIQUE ET IMFORMATIQUE

Filière : AUTOMATIQUE

# Mémoire

*En vue d'obtenir le diplôme  
D'Ingénieur d'Etat en AUTOMATIQUE*

## Thème

**ETUDE COMPARATIVE DE LA COMMANDE  
PAR MODE DE GLISSEMENT A BASE DES  
OBSERVATEURS  
APPLICATION POUR DIFFERENTS PENDULES  
INVERSES**

Proposé par :

Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Etudier par :

Mr KANOUN BELKACEM  
Mr KESSI IDIR

Dirigé par :

Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

Promotion 1998

E.N.P. 10 avenue HassenBadi EL-HARRACH ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DER de : GENIE ELECTRIQUE ET IMFORMATIQUE

Filière : AUTOMATIQUE

# Mémoire

*En vue d'obtenir le diplôme  
D'Ingénieur d'Etat en AUTOMATIQUE*

## Thème

**ETUDE COMPARATIVE DE LA COMMANDE  
PAR MODE DE GLISSEMENT A BASE DES  
OBSERVATEURS  
APPLICATION POUR DIFFERENTS PENDULES  
INVERSES**

**Proposé par :**

Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

**Etudier par :**

Mr KANOUN BELKACEM  
Mr KESSI IDIR

**Dirigé par :**

Mr M. TADJINE  
Mr F. BOUDJEMA

**Promotion 1998**

**E.N.P. 10 avenue HassenBadi EL-HARRACH ALGER**

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

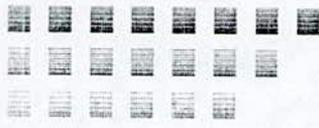
*A mes très chers parents qui m'ont soutenu ;*

*A mes frères et sœurs ;*

*A ma famille ;*

*A tous mes amis ;*

*Kaci*



## Dédicace

*A ma très chère mère, qu'elle reçoive toute ma gratitude*

*A mon très cher père*

*A la mémoire de ma très chère tante et de ma grande mère*

*A mes frères et sœurs*

*A toutes ma famille.*

*Aux familles Amnouché et Iberciène.*

*Je dédie ce modeste travail*

*Idir*



## Remerciements

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Au terme de ce travail, nous tenons à remercier vivement nos promoteurs, Mr. Tadjine Mr. Boudjema et, ainsi que les membres du jury*

*Nous tenons aussi à remercier nos amis de la filière , ainsi que Mr Sellami PG à l'ENP et Yazid PG à l'EMP.*

*Toutes nos reconnaissances et nos remerciements à tout ceux qui nous ont aidé et contribuer à la réalisation de ce mémoire.*

في هذا العمل تطرقنا إلى التحكم ذي البنية المتغيرة. و اقترحنا طريقتين للتحكم و بنيتين لراصدين غير خطيين أولهما الراصد ذي نموذج الانزلاق، و الآخر متري. في المرحلة التالية طبقنا التحكم ذي البنية المتغيرة المرتكز على الراصدين الغير الخطيين و ذلك على نواسين معكوسين البسيط و المزدوج. هدف هذا التحكم هو ضمان استقرار هذين الأخيرين، مع إجراء محاكاة عددية و عرضها هادفين إلى اختبار صمود التحكم و الراصدين إزاء تغير العوامل و الاضطرابات الخارجية.

كلمات المفتاح : الرواصد الغير الخطية، التحكم بنموذج الانزلاق، النواس المعكوس.

### Abstract :

In this work we have presented the variable structure control for two inverted pendulum. Two control approaches are established, and two non linear observers are proposed, namely the sliding and the metric observer. Next, we have applied the observers based control law to the simple and double inverted pendulum in order to test the performance of the proposed control approaches. In addition numerical simulations are performed and presented with robustness test in presence of disturbance and parameters variation.

Key words : Non linear observer, Variable structure control, Inverted pendulum.

### Résumé :

Dans ce travail nous avons abordé la commande à structure variable pour deux pendules inversés. Deux approches de commande ont été établies, ainsi que deux structures d'observateurs non linéaires, à savoir l'observateur par mode de glissement et l'observateur métrique. Dans une autre étape, nous avons appliqué la commande à structure variable à base des deux observateurs sur deux pendules inversés, simple et double, à fin de tester la commande, qui doit stabiliser les deux pendules. Des simulations ont été faites et présentées, avec des testes de robustesse vis à vis des variations paramétriques, ainsi que des perturbations externes.

Mots clés : Observateurs non linéaires, Commande à structure variable, Pendules inversés.

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Modélisation</b>	<b>3</b>
1.1 Equation d'Euler-Lagrange.....	3
1.2 Expression des énergies.....	4
1.3 Equation du mouvement.....	7
1.4 Modélisations des pendules inversés simple et double.....	8
1.4.1 Pendule inversé simple.....	9
1.4.2 Pendule inversé double.....	11
1.5 Commandabilité et observabilité des systèmes non linéaires.....	14
1.5.1 Critère de commandabilité.....	15
1.5.2 Critère d'observabilité.....	15
1.6 Simulation en boucle ouverte.....	16
1.7 Conclusion.....	16
<b>Chapitre 2 Commande à structure variable</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction.....	19
- Exemple illustratif.....	19
2.2 Position du problème de la commande à structure variable.....	22
2.3 Choix de la surface de glissement.....	22
2.4 Existence du mode de glissement.....	23
2.5 Différentes structures de commandes.....	26
2.5.1 Structure avec relais.....	26
2.5.2 Structure avec retour d'état.....	26
2.5.3 Structure avec augmentation de la commande équivalente.....	27
2.6 Dynamique du régime glissant.....	27
2.6.1 Méthode de la commande équivalente « méthode d'Utkin ».....	27
2.6.2 Méthode de Phillipov.....	28
2.7 Robustesse vis à vis des perturbations.....	30
2.8 Commande par mode de glissement.....	31
2.8.1 Méthode de diagonalisation.....	31
- Exemple.....	32
2.8.2 Méthode hierrarchique.....	35
- Exemple.....	36
2.9 Commande par mode de glissement des systèmes sous formes canoniques...	39
2.9.1 Formes canoniques.....	39
2.9.2 Calcul de la loi de commande.....	39
- Forme reduite.....	39
- Forme de découplage entrée sortie.....	40
2.10 Problème du chattring dans les modes glissant.....	42
2.11 Conclusion.....	42

<b>Chapitre 3 Synthèse de lois de commande pour les deux pendules inversés</b>	<b>44</b>
3.1 Première approche.....	44
3.1.1 Application au premier pendule.....	44
3.1.2 Application au deuxième pendule.....	45
3.2 Deuxième approche.....	46
3.2.1 Application au pendule simple.....	46
3.2.2 Application au pendule double.....	46
3.3 Commentaires et interprétations.....	56
3.4 Conclusion.....	56
<b>Chapitre 4 Observateurs non linéaires</b>	<b>57</b>
4.1 Introduction.....	57
4.2 Observateur métrique.....	58
4.2.1 Observateur métrique d'ordre complet.....	60
4.2.2 Observateur métrique d'ordre réduit.....	61
4.2.3 Etude de la stabilité de l'observateur métrique.....	62
4.3 Observateur par mode de glissement.....	65
4.3.1 Convergence de l'observateur glissant.....	66
4.3.2 Extension au cas générale des systèmes non linéaires.....	68
4.4 Application de l'observateur métrique sur les deux pendules inversés.....	69
4.5 Application de l'observateurs glissant sur les deux pendules inversés.....	72
4.6 Résultats de simulation.....	82
4.7 Interprétation et commentaire.....	95
<b>Conclusion générale</b>	<b>96</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

***INTRODUCTION***  
***GENERALE***

## **Introduction Générale**

Les systèmes physiques sont de nature non linéaire, leur comportement est beaucoup plus complexe que celui des systèmes linéaires. Ils réagissent différemment aux entrées extérieures, aux conditions initiales, et ont fréquemment plusieurs points d'équilibres [35]. Ceci nous permet de dire qu'il n'existe pas un moyen systématique pour prévoir le comportement d'un système non linéaire, de même pour procéder à la conception de la commande de ces systèmes. Par contre, dans la littérature, nous disposons d'un riche inventaire de moyens puissants d'analyse et de conception, chacun pouvant être la meilleure application pour une certaine classe particulière des systèmes.

En utilisant le terme « mouvement de mode de glissement » Nikolski a introduit le premier concept de la commande par mode de glissement en 1934, cette dernière fait partie des stratégies de commande non linéaire. Elle est aussi une phase particulière de la commande à structure variable (CSV). Le développement des systèmes à structures variable a eu lieu en URSS tout d'abord par Emelyanov puis par d'autres collaborateurs comme Utkin dans les années cinquante. Ce n'est qu'à partir de début des années 80 que la commande des systèmes à structure variable par le mode de glissement est devenue très intéressante, elle est considérée comme une des approches les plus simples pour la commande des systèmes ayant un modèle imprécis, ceci est dû à la bonne connaissance et à l'appréciation de la robustesse, propriétés très importante caractérisant cette commande. [28]

Dans plusieurs cas, on ne dispose pas de toutes les grandeurs du système intervenant dans l'expression de la commande, à cause de la non disponibilité de la grandeur elle-même ou bien à cause du manque des dispositifs de mesures. De ce fait, l'utilisation des observateurs devient nécessaire. L'observateur est un système dynamique auxiliaire qui reconstruit l'état du système. Conçu initialement pour le cas linéaire et ils sont étendus récemment au cas non linéaire.

Dans ce présent travail on propose deux approches de commande à structure variable, avec application à deux pendules inversés, dans le but de les stabiliser.

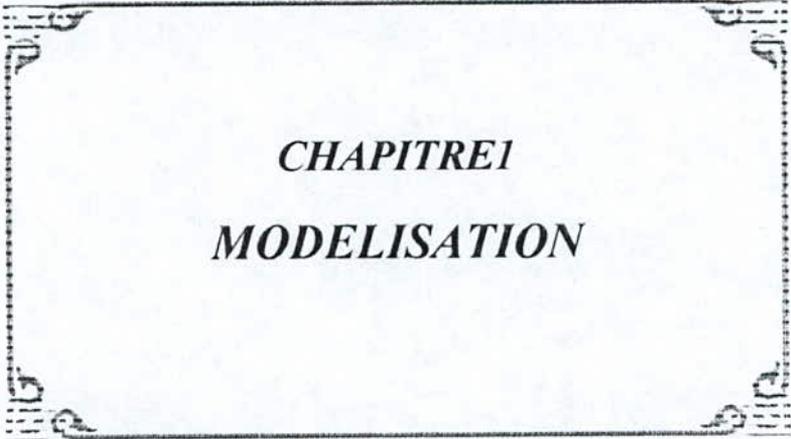
Le premier chapitre est consacré à la modélisation des deux pendules inversés, simple et double. Les critères de commandabilité et d'observabilité non linéaire sont aussi abordés.

Le deuxième chapitre, traite les concepts généraux de la théorie des systèmes à structure variable, avec toute sa diversité et richesse, tout en focalisant notre intérêt sur la synthèse de commande pour notre système d'application.

Le troisième chapitre est consacré à l'application des deux approches de commande sur les deux pendules inversés, avec des testes de robustesse.

Dans le quatrième chapitre, on a abordé l'étude et la synthèse des deux observateurs non linéaire, l'observateur métrique et l'observateur glissant. La combinaison de la deuxième approche de commande et de ces observateurs est appliquée.

Dans le dernier lieu une conclusion générale et quelque perspective terminent notre travail.



*CHAPITRE I*  
*MODELISATION*

# Chapitre 1

## Modélisation

Pour effectuer l'analyse et la synthèse d'un système dynamique, il est nécessaire de connaître les relations entre ces différentes grandeurs. L'ensemble de ces relations constitue le modèle du système.

Dans le domaine de la robotique, une modélisation dynamique, peut être faite en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange, qui constitue une approche systématique simple à mettre en œuvre, soit par calcul manuel soit par des méthodes assistées par ordinateur.

### 1.1 Equations d'Euler-Lagrange. [7]

Elles sont données par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

où

$L = E_c - E_p$ , est le Lagrangien du système.

$E_c$  : l'énergie cinématique totale du système ;

$E_p$  : l'énergie potentielle totale du système ;

$E_d$  : l'énergie de dissipation totale du système ;

$\tau_i$  : la force généralisée ;

$q_i, \dot{q}_i$  : coordonnées et vitesses généralisées ;

$n$  : le degré de liberté du système ;

### 1.2 Expression des énergies.

#### *Energie cinétique.* [7]

Soit un corps solide qui prend un volume  $B$  dans l'espace de 3 dimensions. La vitesse d'un de ses points est liée à la position de ce dernier  $V = V(x, y, z)$ , l'énergie cinématique de ce corps est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_B V^T(x, y, z) V(x, y, z) dm \quad (1.2)$$

Soit  $c$  le centre de gravité du corps  $B$ , alors la vitesse d'un point du corps est donnée par :

$$V = V_c + \omega \times \Gamma \quad (1.3)$$

où :

$V_c$  est le vecteur vitesse du centre de gravité du corps.

$\omega$  est le vecteur vitesse angulaire du centre de gravité.

$\Gamma$  est le vecteur reliant le centre de gravité au point considéré.

D'après l'algèbre vectorielle, on peut écrire la relation (1.3) comme suit :

$$V = V_c + S(\omega) \cdot \Gamma \quad (1.4)$$

où :

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$\omega_i$  sont les composantes du vecteur de la vitesse angulaire du centre de masse. Donc  $E_c$  peut être écrite comme suit :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_B [V_c + S(\omega) \Gamma]^T [V_c + S(\omega) \Gamma] dm \quad (1.6)$$

Le produit dans l'intégrale peut être développer en quatre termes :

♦ *Le premier terme :*

$$\frac{1}{2} \int V_c^T V_c dm = \frac{1}{2} m V_c^T V_c \quad (1.7)$$

ce terme représente l'énergie cinématique de translation.

♦ *Le deuxième terme :*

$$\frac{1}{2} \int V_c^T \cdot S(\omega) \Gamma dm = \frac{1}{2} V_c^T S(\omega) \int \Gamma dm = 0 \quad (1.8)$$

car  $\Gamma$  est le vecteur position des points du corps par rapport au centre de gravité, donc :

$$\int \Gamma dm = 0 \quad (1.9)$$

♦ *Le troisième terme :*

$$\frac{1}{2} \int \Gamma^T S^T(\omega) dm = 0 \quad (1.10)$$

♦ *Le quatrième terme :*

$$\frac{1}{2} \int \Gamma^T S^T(\omega) S(\omega) \Gamma dm = E_{c4} \quad (1.11)$$

en utilisant les propriétés mathématiques suivantes :

pour deux matrices A et B on a :  $\text{tr}A = \text{tr}BA$ .

pour deux vecteurs a et b on a :  $a^T b = \text{tr}ab^T$ .

on aura :

$$E_{c4} = \frac{1}{2} \int \text{Tr}S(\omega) \Gamma \Gamma^T S^T(\omega) dm \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow E_{c4} = \frac{1}{2} \text{Tr}S(\omega) J \quad (1.13)$$

avec :

$$J = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int xy dm & \int xz dm \\ \int yx dm & \int y^2 dm & \int yz dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int z^2 dm \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Substituons (1.14) dans (1.13) et remplaçons  $S(\omega)$  par sa valeur on obtient alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \quad (1.15)$$

où I est la matrice d'inertie :

$$I = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & \int -xy dm & \int -xz dm \\ \int -xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & \int -zy dm \\ \int -xz dm & \int -zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$E_{c4}$  représente l'énergie cinématique de rotation

$$E_{c4} = \frac{1}{2} (mV_c^T V_c + \omega^T I \omega) \quad (1.17)$$

Pour  $n$  articulations on a :

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{ci} \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i V_{ci}^T V_{ci} + \omega_i^T I_i \omega_i) \quad (1.19)$$

étant donné que les vitesses  $V_{ci}$  et  $\omega_{ci}$  sont données en fonction des vitesses généralisées, alors on peut écrire :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n [m_i J_{vci}^T(q) J_{vci}(q) + J_{\omega_i}^T(q) R_i^T(q) I_i R_i(q) J_{\omega_i}(q)] \dot{q} \quad (1.20)$$

où :  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  représente le vecteur des vitesses généralisées.

$J_{vci}$  et  $J_{\omega_i}$  sont les matrices jacobiennes et  $R_i$  la matrice de rotation et qui vérifient :

$$V_{ci} = J_{vci}(q) \dot{q}, \quad \omega_{ci} = R_i(q) J_{\omega_i}(q) \dot{q} \quad (1.21)$$

En d'autres termes l'énergie est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (1.22)$$

**Energie potentielle.** [7]

$$E_p = \int_B g^T \Gamma dm = g^t \int_B \Gamma dm = g^T \Gamma_c m \quad (1.23)$$

où

$\Gamma_c$  est le vecteur position du centre de gravité du système.

$g^T$  est le vecteur gravité,  $g^T = (g_x, g_y, g_z)$ , dans le repère  $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$  on a :

$$g^T = (0, 0, -g) \quad (1.24)$$

**Energie de dissipation.** [7]

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1, n} \lambda_i \dot{q}_i^2 \quad (1.25)$$

avec  $\lambda_i$  coefficient du frottement visqueux.

### 1.3 Equation du mouvement.[7]

Après avoir établi les expressions des différentes énergies, on procède à la dérivation de l'équation du mouvement.

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - E_p(q) \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(L) = \sum_j d_{kj}(q) \dot{q}_j \quad (1.27)$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum \frac{d}{dt} d_{kj} \dot{q}_j \quad (1.28)$$

$$= \sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_k \dot{q}_k \quad (1.30)$$

donc l'équation de Lagrange peut être écrite comme suit :

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} + \lambda_k \dot{q}_k = \tau_k \quad (1.31)$$

en permutant l'ordre de la sommation et en exploitant la symétrie on a :

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj} + \frac{\partial}{\partial q_j} d_{ki} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.32)$$

ainsi :

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.33)$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (1.34)$$

l'équation d'Euler-lagrange s'écrit donc :

$$\sum_{i,j} d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \lambda_k\dot{q}_k + \Phi(q) = \tau_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (1.35)$$

avec :

$$\Phi(q) = \frac{\partial E_p}{\partial q_k} \quad (1.36)$$

sous forme matricielle on aura l'équation suivante : [7] [10][22] [23]

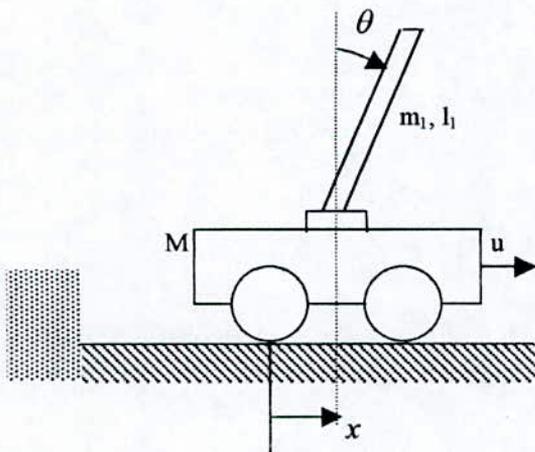
$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \Lambda\dot{q} + \Phi(q) = \tau \quad (1.37)$$

avec :

$\Lambda$  est une matrice diagonale contenant les coefficients du frottement visqueux.

$\tau$  est le vecteur des forces généralisées.

### 1.4 Modélisation des pendules inversés simple et double. [17] [18][34]



Figure(1.1) – Pendule inversé simple

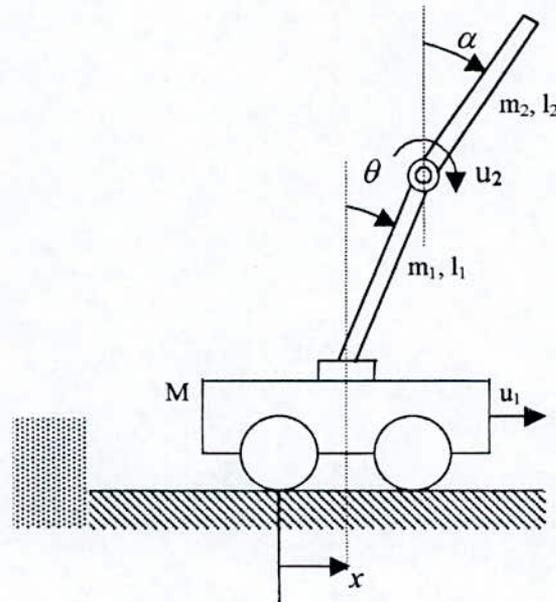


Figure (1.2) - Pendule inversé double

Le pendule inversé est le plus simple des systèmes intrinsèquement instables. Il a été toujours utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayante :

- ◆ C'est un système non linéaire et couplé.
- ◆ Système intrinsèquement instable.
- ◆ Il a plusieurs implications pratiques : (stabilisation des satellites, démarrage des fusées).

### 1.4.1 Pendule inversé simple

Ce pendule est représenté sur la figure ( ). Il est commandé par la force  $f$  appliquée au chariot. Les grandeurs à régler sont la position du chariot  $x$  et la position de l'articulation  $\theta$ . La masse  $m$  se situe à l'extrémité de l'articulation. L'énergie cinématique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}(M + m)x^2 + \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta] \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} \quad (1.39)$$

avec

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = mgl\cos\theta \quad (1.42)$$

L'énergie de dissipation est donnée par :

$$E_d = \frac{1}{2}(\lambda_x\dot{x}^2 + \lambda_\theta\dot{\theta}^2) \quad (1.43)$$

Dans ce qui suit on supposera que le frottement n'intervient que sur le chariot, donc  $\lambda_\theta = 0$ .

Le vecteur force généralisée est donné par :

$$\tau = \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

où  $u(t)$  représente la force  $f$ .

L'équation du mouvement est donnée suivant (1.26)–(1.37) par :

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_x & -ml \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Pour transformer cette équation sous la forme d'état, il suffit de trouver l'expression de  $\ddot{x}$  et  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ . Après calculs on aura :

$$\ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta - \lambda_x \dot{x} + u(t)}{M + m \sin^2(\theta)} \quad (1.46)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)g \sin \theta - u(t) \cos \theta + \lambda_x \cos \theta \dot{x}}{l(M + m \sin^2 \theta)} \quad (1.47)$$

Prenons comme vecteur d'état

$$X = \begin{bmatrix} x \\ v = \dot{x} \\ \theta \\ \omega = \dot{\theta} \end{bmatrix}, \text{ l'équation d'état est donnée par :}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ml\omega^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta - \lambda_x v + u(t)}{M + m \sin^2 \theta} \\ -ml\omega^2 \cos \theta \sin \theta + (M + m)g \sin \theta - u(t) \cos \theta + \lambda_x \cos \theta v \\ \frac{\omega}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme

$$\dot{X} = f(X) + g(X)u(t) \quad (1.49)$$

où :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ml\omega^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta - \lambda_x v}{M + m \sin^2 \theta} \\ \omega \\ \frac{-ml\omega^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)g \sin \theta + \lambda_v \cos \theta v}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M + m \sin^2 \theta}{\cos \theta} \\ l(M + m \sin^2 \theta) \end{bmatrix} u(t) \quad (1.50)$$

### 1.4.2 Double pendule inversé.

On suppose ici que les deux masses se trouvent à l'extrémité des articulations et que seul le frottement sur le chariot existe. L'énergie cinématique sera donc donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (1.51)$$

avec :

$$\dot{q} = (\dot{x} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha})^T \quad (1.52)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta & m_2 l_2 \cos \alpha \\ (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta & I + (m_1 + m_2)l_1^2 & ml_1 l_2 \cos(\theta - \alpha) \\ m_2 l_2 \cos \alpha & ml_1 l_2 \cos(\theta - \alpha) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

où  $I$  est le moment d'inertie du moteur qui relie la deuxième articulation à la troisième.

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = m_1 g l_1 \cos \theta + m_2 g [l_1 \cos \theta + l_2 \cos \alpha] \quad (1.54)$$

De même que pour le cas précédent on a l'équation du mouvement suivante :

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \Lambda\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.55)$$

avec :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_2 + m_1)l_1 \dot{\theta} \sin \theta & -m_2 l_2 \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & 0 & m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) \\ 0 & -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \sin(\theta - \alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta \\ -m_2 l_2 g \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$\Lambda = 0$$

$u_1(t)$  est la force appliquée au chariot.

$u_2(t)$  est le couple appliqué à la deuxième articulation.

L'équation d'état est obtenue de la même manière que le cas précédent, on a alors :

$$\dot{v} = v$$

$$\dot{v} = \frac{(\Delta_{11}(m_{12}l_1 + l)s\theta + \Delta_{31}m_2l_2s(\theta, \alpha))\omega^2 + m_2l_2(\Delta_{11}s\alpha - l_1\Delta_{21}s(\theta, \alpha))\varphi^2}{\det} + \frac{\Delta_{21}(m_{12}l_1 + l)gs\theta + \Delta_{31}m_2l_2gs\alpha - \Delta_{11}\lambda_x v + U_1}{\det}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{((m_{12}l_1 + l)\Delta_{12}s\theta + \Delta_{32}m_2l_2s(\theta, \alpha))\omega^2 + m_2l_2(\Delta_{12}s\alpha - l_1\Delta_{22}s(\theta, \alpha))\varphi^2}{\det} + \frac{\Delta_{22}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{32}m_2l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{12}v + U_2}{\det}$$

(1.59)

$$\dot{\alpha} = \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(\Delta_{13}(m_{12}l_1 + l)s\theta + \Delta_{33}m_2l_2s(\theta, \alpha))\omega^2 + m_2l_2(\Delta_{13}s\alpha - l_1\Delta_{23}s(\theta, \alpha))\varphi^2}{\det} + \frac{(\Delta_{23}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{33}m_2l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{13}v + U_3)}{\det}$$

avec les notations suivantes :

$$m_{12} = m_1 + m_2$$

$$s\theta = \sin \theta$$

$$s\alpha = \sin \alpha$$

$$s(\theta, \alpha) = \sin(\theta - \alpha)$$

$$c\theta = \cos \theta$$

$$c\alpha = \cos \alpha$$

$$c(\theta, \alpha) = \cos(\theta - \alpha)$$

et :

$$\begin{aligned}
\det &= m_2 l_1^2 l_2^2 \left[ M(m_{12} - m_2 c^2(\theta, \alpha)) + m_{12} (m_{12}(1 - c\theta) + m_2 c(\theta, \alpha)(c\theta - c(\theta, \alpha) + c\alpha) - m_2 c\alpha) \right] \\
\Delta_{11} &= m l_1^2 l_2^2 (m_{12} - m_2 c^2(\theta, \alpha)) \\
\Delta_{12} &= m_2 l_1^2 l_2^2 (-m_{12} c\theta + m_2 c\alpha c(\theta, \alpha)) \\
\Delta_{13} &= m_2 m_{12} l_1^2 l_2^2 (c\theta c(\theta, \alpha) - c\alpha) \\
\Delta_{21} &= m_2 l_1^2 l_2^2 (m_2 c\alpha c(\theta, \alpha) - m_{12} c\theta) \\
\Delta_{22} &= m_2 l_2^2 (M + m_{12} - m_2 c\alpha) \\
\Delta_{23} &= m_2 l_1 l_2 (m_{12} (c\theta c\alpha - c(\alpha, \theta)) - M c(\alpha, \theta)) \\
\Delta_{31} &= m_2 m_{12} l_1^2 l_2 (c\theta c(\theta, \alpha) c - c\alpha) \\
\Delta_{32} &= m_2 l_1 l_2 (m_{12} c\alpha c\theta - (M + m_{12}) c(\alpha, \theta)) \\
\Delta_{33} &= m_{12} l_1^2 ((M + m_{12} - m_{12} c^2 \theta)) \\
U_1 &= \Delta_{11} u_1 + \Delta_{31} u_2 \\
U_2 &= \Delta_{12} u_1 + \Delta_{32} u_2 \\
U_3 &= \Delta_{13} u_1 + \Delta_{33} u_2
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Cette équation d'état peut être écrite sous la forme donnée par (1.49), avec :

$$G(X) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\det} & \frac{\Delta_{31}}{\det} \\ \frac{\Delta_{22}}{\det} & \frac{\Delta_{32}}{\det} \\ \frac{\Delta_{13}}{\det} & \frac{\Delta_{33}}{\det} \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

Sous cette forme une application des critères d'observabilité et de commandabilité est aisée, le paragraphe suivant sera consacré à cette tâche.

### 1.5 Commandabilité et Observabilité des systèmes non linéaires.[9][11][12]

Avant de d'exposer les critères de commandabilité ou d'observabilité, il est nécessaire de donner quelques définitions propres aux cas non linéaires.

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, t) + \sum g_i(x) u_i \\
y &= h(x)
\end{aligned} \quad x \in M \subset R^n, y \in R^m \tag{1.62}$$

$u \in \Omega$  un sous ensemble de  $R^l$   $f$  et  $g$  des fonctions  $C^\infty$

on suppose que cette équation différentielle a une solution pour chaque condition initiale  $x_0$ .

**Définition 1.**[11]

On dit que  $x$  est  $U$  accessible à partir de  $x_0$  s'il existe  $u(t)$  mesurable et limité tel que :

- 1-  $u(t) \in \Omega$  pour  $t \in [t_0, t_1]$
- 2-  $x(t_0) = x_0$  et  $x(t_1) = x_1 \quad \forall x \in U \subset M$
- 3-  $x(t) \in U \subset M \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

**Définition 2.**[11]

Le système est dit commandable en  $x_0$  si tout les points de  $M$  sont accessibles à partir de  $x_0$ .

**Définition 3.**[11]

Le système est localement commandable en  $x_0$  si : pour un voisinage  $U$  de  $x_0$ , l'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  est un voisinage de  $x_0$ . Le système est complètement commandable s'il est commandable en tout point.

**Définition 4.**[11] [12][15]

On dit que les vecteurs d'état  $x_1, x_2 \in M$  sont indistinguable et notés  $(x_1/x_2)$  si les deux fonctions  $y(t, x_1), y(t, x_2) \quad t \geq 0$  sont identiques, ou  $y(t, x_i)$  est la sortie du système pour une condition initiale  $x_i$ .

**Définition 5.** [11] [12][15]

On dit que le système est observable si :  $\forall x_1, x_2: x_1/x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

**Définition 6.**[11][12][15]

On dit que le système est localement observable si :

$\forall u(t)$ , les points observables de  $x_0$  sont en voisinage de  $x_0$

Le système est globalement localement observable s'il l'est pour tout point  $x_0$ .

L'observabilité et la commandabilité locales sont mieux adapter pour un test algébrique.

Avant d'émettre les critères on va d'abord donner quelques notions relatives à l'algèbre de Lie.

♦ **Différentiation de Lie** : [3] [6] [8] [11]

Notée  $L_h(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)h(x)$  (1.63)

♦ **gradient** :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$
 (1.64)

♦ **Produit de Lie** : ou **crochet de Lie**. [3][6][8][11]

$$[h_1, h_2](x) = L_{h_1}(h_2)(x) - L_{h_2}(h_1)(x)$$
 (1.65)

rang  $\{df_1, \dots, df_n\} = n$  est équivalent à : [3][6][8]

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = n$$
 (1.66)

♦ **Dérivées successives de Lie** : [3][6][8]

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^1 h &= L_f h \\ &\vdots \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) \end{aligned}$$
 (1.67)

**1.5.1 Critère de commandabilité** : [3][8][11]

Le système  $\Sigma$  est localement commandable en  $x_0$  si :

$$\text{rang} \underbrace{[g, [f, g], \dots, [[f \dots f [f, g]] \dots]]}_{n \text{ éléments}} = n \quad \text{en } x_0$$
 (1.68)

Le système est dit globalement localement commandable s'il est localement commandable en tout point  $x_0$ .

Pour le premier pendule on a vérifié la condition de commandabilité locale.

### 1.5.2 Critère d'observabilité : [3][8][11][12]

Le système  $\Sigma$  est observable pour  $x = x_0$  si :

$$\text{rang} \left\{ dh, \dots, d(L_f^{n-1}h) \right\} = n \quad (1.69)$$

Si cette condition est vérifiée pour tout  $x_0$ , le système est globalement localement observable.

Nous avons fait le test d'observabilité pour les deux pendules. Les deux conditions :

$$\text{rang} \left\{ dh_1, dh_2, dl_f h_1, dl_f h_2 \right\} = 4 \quad (1.70)$$

$$\text{rang} \left\{ dh_1, dh_2, dh_3, dl_f h_1, dl_f h_2, dl_f h_3 \right\} = 6 \quad (1.71)$$

sont vérifiées.

### 1.6 Simulation en boucle ouverte :

La simulation en boucle ouverte permet de voir le comportement du système pour une entrée donnée. Dans notre cas nous avons appliqué un échelon, et avec les paramètres des deux pendules suivants :

### 1.7 conclusion :

Dans ce chapitre nous avons établi les relations générales qui régissent le fonctionnement des pendules inversés simple et double à l'aide du formalisme de Lagrange-Euler. Les critères de commandabilité et d'observabilité non linéaires sont aussi traités. La simulation en boucle ouverte des deux systèmes avec un échelon d'entrée a permis de constater leur non-linéarité, ainsi que la nécessité d'introduire une commande à fin de stabiliser le système.

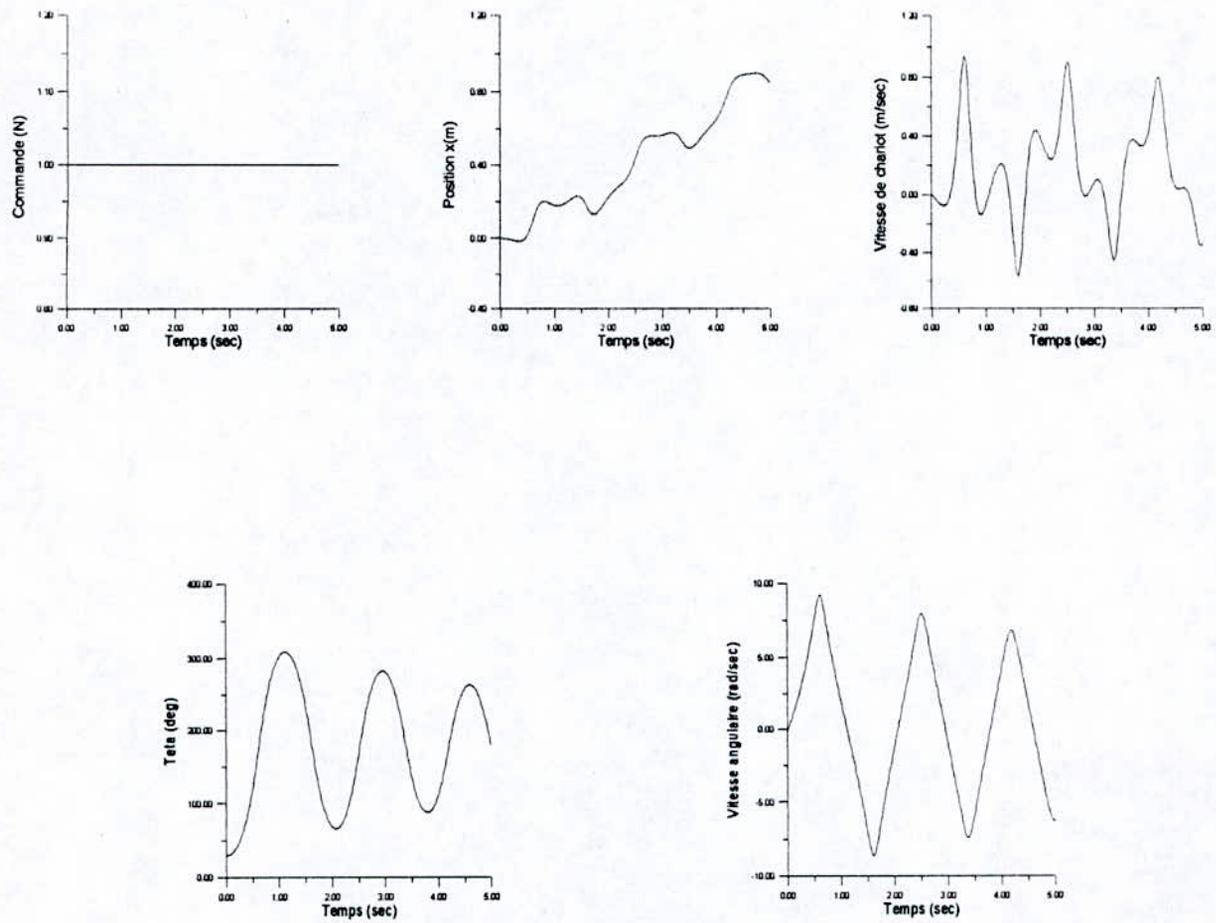


Figure (1.3) . Repense indicielle du premier pendule inversé .

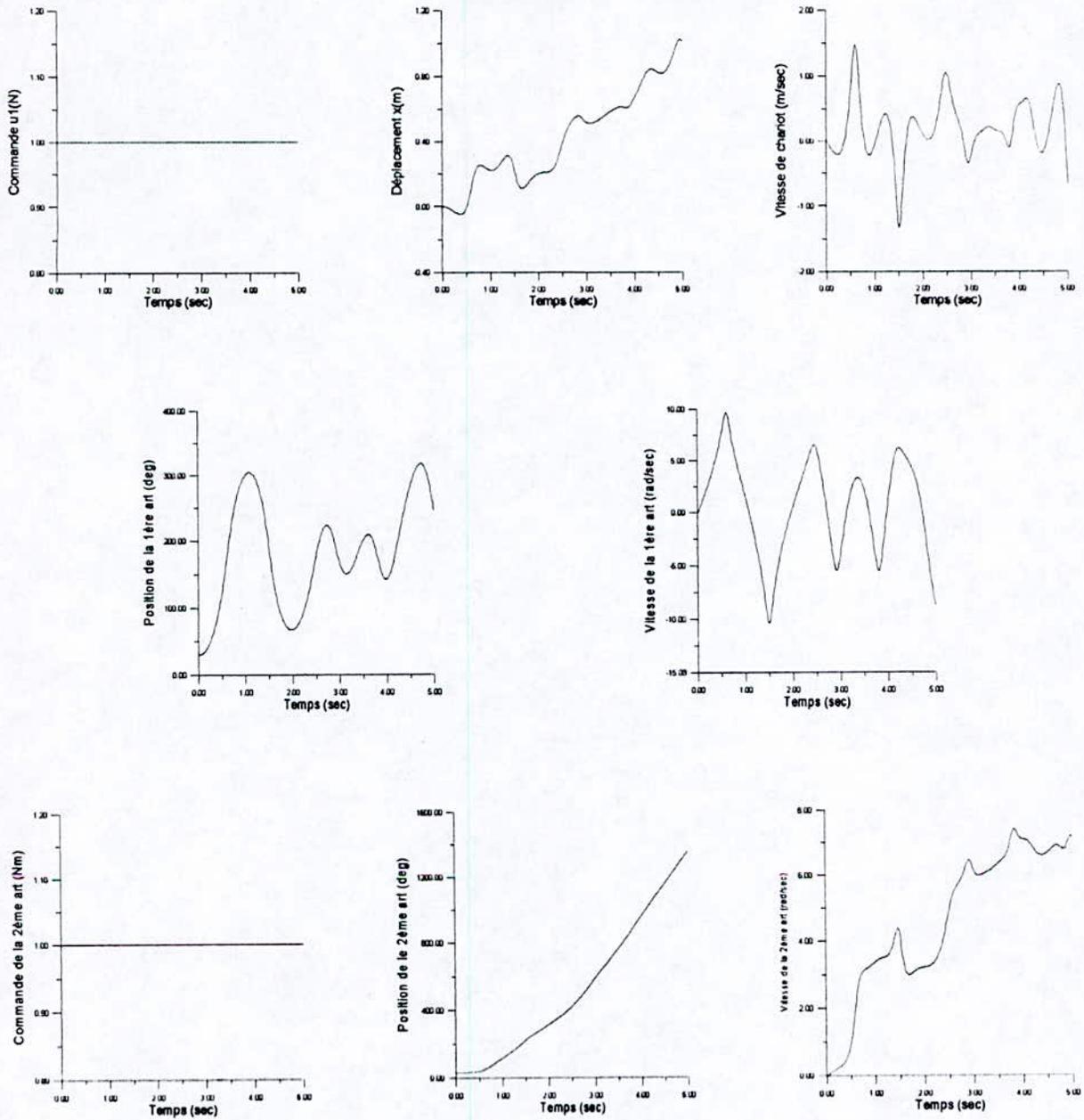
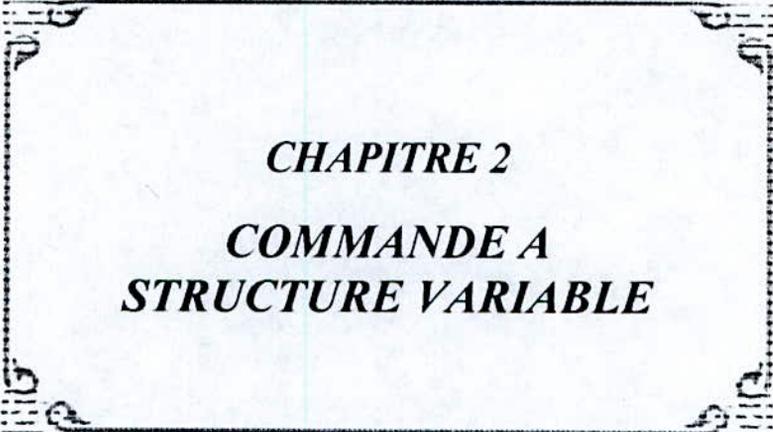


Figure (1.4) . Repense indicielle du deuxième pendule inversé.



***CHAPITRE 2***  
***COMMANDE A***  
***STRUCTURE VARIABLE***

## Chapitre 2

# Commande à structure variable

### 2.1 Introduction. [1] [2] [25] [32]

La commande à structure variable a vu le jour au URSS, au début des années 50. Elaborée initialement par EMELIYANOV, puis repris par d'autres chercheurs dont figure UTKIN, elle a des applications dans beaucoup de classe des systèmes (linéaire, non linéaire, continus, discrets, stochastiques, déterministes, ...).

La commande par mode de glissement est une commande à structure variable, elle se distingue par les propriétés suivantes :

- ◆ Robustesse vis à vis des perturbations externes, et des variations paramétriques ainsi que des incertitudes du modèle.
- ◆ C'est une commande continue par morceaux dont le second terme est discontinu à cause du changement de la structure au passage de la surface dite de glissement.
- ◆ La dynamique en boucle fermée est imposée par les paramètres de la surface de glissement sauf dans le cas du régime hors glissement.
- ◆ Implémentations aisées à cause de l'avancement de l'électronique de puissance à haute fréquence.

Néanmoins il existe des inconvénients dont on cite l'excitation permanente des organes de commande suite au commutation à haute fréquence. Des solutions à ce problème de chattering vont être exposées.

### *Exemple illustratif.* [4] [25]

Soit le système d'ordre deux suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2y - x + u \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec

$$u = -\psi x \quad (2.2)$$

où

$$\begin{cases} \psi = +4 & \text{si } \sigma(x,y) > 0 \\ \psi = -4 & \text{si } \sigma(x,y) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$\sigma(x,y) = x s \quad (2.4)$$

$$s = 0.5x + y \quad (2.5)$$

selon le signe de  $\sigma(x,y)$  on trouve les équations différentielle suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y - 5x \end{cases} \quad \text{si } \sigma > 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y - 5x \end{cases} \quad \text{si } \sigma < 0 \quad (2.7)$$

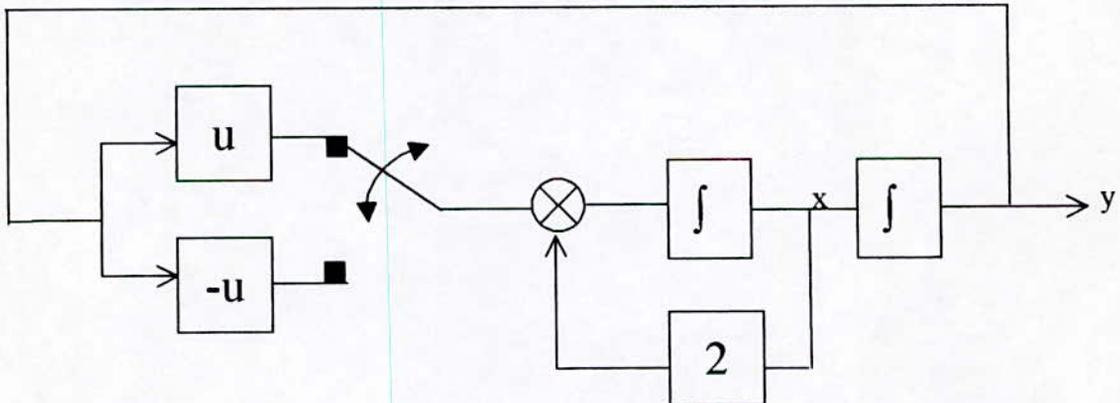
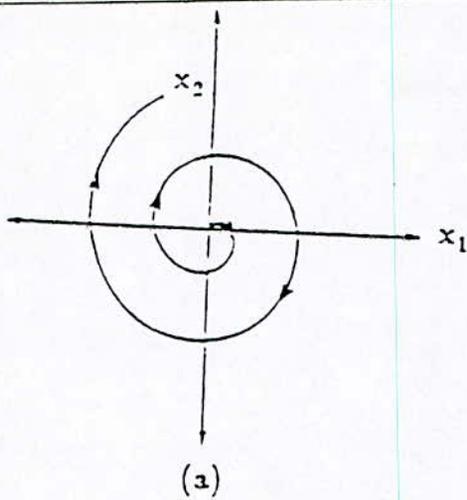


Figure 2.1

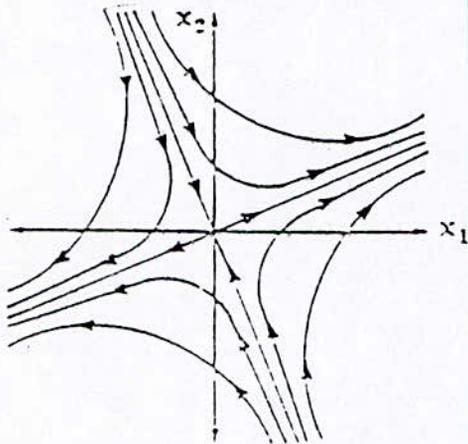
Les trajectoires dans le plan de phase des équations (2.6) et (2.7) sont données à la figure (2) et on voit bien que les points d'équilibre sont instables.

La trajectoire du système est obtenue en prenant la trajectoire de (2.6) quand  $\sigma > 0$  et de (2.7) quand  $\sigma < 0$ .

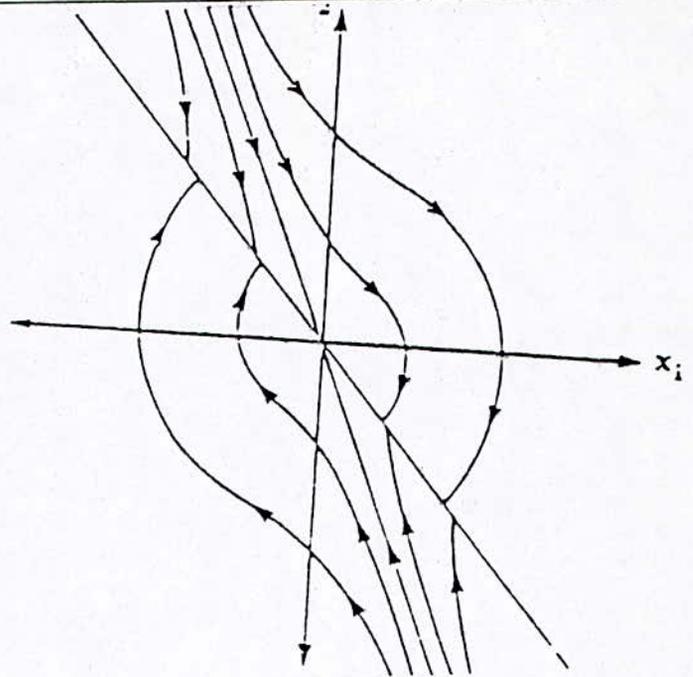
La droite  $x=0$  ne présente aucune caractéristique spéciale du mouvement (pas d'attractivité), par contre pour la droite  $s=0$ , les trajectoires se dirigent vers elle et elle est attractive. Donc le plan de phase nous donne deux régions de fonctionnement du système, la première ou le système évolue loin de la surface (régime hors glissement) à partir d'un état initial quelconque.



Figure(2.1)- Plan de phase du système avec la 1<sup>ère</sup> structure



Figure(2.2)- Plan de phase du système avec la 2<sup>ème</sup> structure



Figure(2.3)- Plan de phase du système en mode de glissement

La deuxième région quand le système atteint la surface de glissement, alors l'état du système commute autour de cette surface avec une haute fréquence, ainsi le mode de glissement s'installe et sur cette surface le système évolue jusqu'à arriver au point d'équilibre avec la dynamique suivante

$$0.5x + y = 0.5x + \dot{x} = 0 \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -0.5x \tag{2.9}$$

donc

$$x(t) = x(t_0)e^{-0.5(t-t_0)} \tag{2.10}$$

où

$t_0$ : l'instant où commence le régime de glissement ;

Cet exemple illustratif révèle quatre notions de base pour les systèmes à structure variable :

1. Le mode de glissement représente le comportement du système quand  $\sigma = 0$ .
2. Durant le mode de glissement la dynamique du système est d'ordre inférieur à l'ordre original du système (réduction d'ordre).
3. Le mode glissant est définie seulement par les paramètres de la surface de glissement.
4. La dynamique du système en mode de glissement est indépendante des dynamiques des deux structures données.

## 2.2 Position du problème de la commande à structure variable. [3] [4] [5][10][16]

Soit le système

$$\dot{x} = A(x,t) + g(x,t)u \quad (2.11)$$

avec :  $\dim(x) = n$ ,  $\dim(u) = m$ .

Le problème de la commande à structure variable se pose comme suit :

1. Trouver m surface de glissement représentées dans la forme vectorielle par  $\sigma(x)$ .
2. Trouver une commande à structure variable :

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x,t) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

de telle façon que le vecteur d'état soit ramené vers la surface de glissement en un temps fini.

Le sens physique des deux objectifs est le suivant :

1. Synthétiser une surface de la commande, c'est à dire imposer une dynamique qui dépend de cette surface et qui est d'ordre réduit.
2. Synthétiser la loi de commande qui garantira l'attractivité de la stabilité de cette surface.

Ainsi les systèmes à structure variable sont des systèmes globalement asymptotiquement stable.

## 2.3 Choix de la surface de glissement. [4] [10]

Le choix de la surface de glissement est la première étape dans la synthèse de la commande, car de la forme et des paramètres de cette surface que dépendra la dynamique en régime glissant.

Bien qu'il n'existe pas des spécifications précise pour faire un choix adéquat, et qu'un choix d'une surface non linéaire est possible mais une surface linéaire est préférable pour simplifier la synthèse de la loi de commande.

On considère la loi de commutation suivante :

$$\sigma(x,t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x,t) \\ \vdots \\ \sigma_m(x,t) \end{bmatrix} = Sx + x_d(t) \quad (2.13)$$

avec

$x \in \mathfrak{R}^n$  vecteur d'état du système ;

$x_d \in \mathfrak{R}^n$  vecteur d'état désiré (consigne) ;

$S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  matrice des gains définissant la dynamique de la surface de glissement ;

donc

$$\sigma_i(x,t) = \sum_{j=1}^n S_{ij} x_j + x_{di} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.14)$$

## 2.4 Existence du mode de glissement. [2] [4] [10] [25] [31]

L'aspect le plus important après le choix de la surface de glissement est de vérifier l'existence du mode glissant.

Le régime de glissement existe si dans le voisinage de la surface  $\sigma(x,t) = 0$ , le vecteur vitesse de la trajectoire d'état est dirigé toujours vers la surface. Il y a trois approches qui traitent cette condition :

### A) . Approche directe.

C'est la plus ancienne, proposée par Utkin et Emelyanov [4] [10]

$$\dot{\sigma}_i \sigma_i < 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

Utkin donne une condition suffisante similaire pour l'existence locale :

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_i < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\sigma_i \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_i > 0 \quad (2.16)$$

### B) . Approche par les fonctions de Lyapunov

Cette approche se base sur un choix adéquat de la fonction de Lyapunov.

#### **Théorème.** [1] [10]

Pour que le domaine 'D' de dimension  $(n-m)$  soit le domaine du mode de glissement, Il suffit que ce domaine soit inclus dans l'espace global  $\Omega$ . Par conséquent, on peut formuler

une fonction  $V(x, \sigma, t)$  dite fonction de Lyapunov continue dérivable qui satisfait les conditions suivantes :

1) La fonction  $V(x, \sigma, t)$  est définie positive et respectant  $\sigma$ .

$$\begin{cases} V(x, \sigma, t) > 0 & \text{si } \sigma \neq 0 \\ V(x, \sigma, t) = 0 & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \quad \forall x, t \quad (2.17)$$

dans la sphère  $\|\sigma\| \leq \rho$  pour tout état  $x$  dans le domaine  $D$  et quelque soit  $t$  on a :

$$\inf_{x \in D} V(x, \sigma, t) = h_\rho \quad \text{avec } h_\rho \geq 0 \quad (2.18)$$

$$\sup_{x \in D} V(x, \sigma, t) = H_\rho \quad \text{avec } H_\rho > 0 \quad (2.19)$$

avec  $h_\rho$  et  $H_\rho$  sont des quantités positives et dépendantes de  $\rho$ .

2) La dérivée totale de la quantité  $V(x, \sigma, t)$  est très négative pour tout état  $x$  appartenant dans  $D$  sauf si  $x$  est sur la surface de commutation où la dérivée n'est pas définie.

La fonction de Lyapunov ne peut être donnée a priori, mais elle est pris en générale  $\sigma^T \sigma$ , et pour des cas particuliers comme les suivantes :

- S'il existe deux matrices,  $\omega(x, t)$  matrice symétrique définie positive et  $R(x, t)$  matrice dont les éléments diagonaux sont dominants, avec :

$$R(x, t) = -\omega(x, t) Sg(x, t) \quad (2.20)$$

alors  $V(x, \sigma, t)$  est sous forme quadratique en  $\sigma(x, t)$

$$V(x, \sigma, t) = \sigma^T R(x, t) \sigma + Q(x, t) \sigma + Z(x, t) \quad (2.21)$$

où  $Q(x, t)$  et  $Z(x, t)$  sont deux fonctions scalaires dépendant de  $x$  et  $t$ .

- Si  $Sg(x, t)$  est une matrice symétrique, la forme recommandée de  $V(x, \sigma, t)$  est :

$$V(x, \sigma, t) = \sigma^T R(x, t) \sigma \quad (2.22)$$

avec  $R(x, t)$  une matrice symétrique et diagonalise  $Sg$ .

• Si  $Sg(x,t)$  est à diagonale dominante, la forme recommandée de  $V(x,\sigma,t)$  est quadratique :

$$V(x,\sigma,t) = \sigma^T \omega(x,t) \sigma \quad (2.23)$$

avec  $\omega(x,t)$  est une matrice diagonale non singulière.

• Si  $Sg(x,t)$  est une matrice diagonale. la forme recommandée de  $V(x,\sigma,t)$  est simplement :

$$V(x,\sigma,t) = \sigma^T \sigma \quad (2.24)$$

### C) . Approche de la loi d'accessibilité. [25]

Cette méthode spécifie directement la dynamique de la surface de glissement.

On pose

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma) - k f(\sigma) \quad (2.25)$$

où

$k$  et  $f$  sont des matrices de gains diagonales avec des éléments positifs.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = [\operatorname{sgn}(\sigma_1), \operatorname{sgn}(\sigma_2), \dots, \operatorname{sgn}(\sigma_m)]^T$$

$$f(\sigma) = [f_1(\sigma), \dots, f_m(\sigma)]^T.$$

les fonctions scalaires  $f_i$  satisfaisant la condition :

$$\sigma_i f_i(\sigma_i) > 0 \quad \text{si} \quad \sigma_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.26)$$

L'équation (2.25) est appelée équation d'accessibilité (accessibilité du régime glissant)  
Le choix de  $Q$  et  $k$  donne différente dynamique à la surface, par exemple :

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.27)$$

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma) - k \sigma \quad (2.28)$$

$$\dot{\sigma}_i = -k_i |\sigma_i|^\alpha \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad (2.29)$$

En plus de ces trois approches on peut citer d'autre condition additionnelle qui répondent à des contraintes pratiques comme :

$$\dot{V} = -q - kV \quad (2.30)$$

avec

$$V = \sigma^T \sigma \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i^3 \leq -\eta |\sigma_i| \quad (2.32)$$

## 2.5 Différentes structures de commandes. [25]

Il est parfois convenable d'assigner une structure à la commande, ensuite chercher les gains de la commande qui garantissent la dynamique désirée, ainsi que la stabilité de la surface

Trois types de structure sont les plus exploités :

### 2.5.1 Structure avec relais.

Chaque composante de commande est donnée sous la forme suivante :

$$u_i(x) = \begin{cases} k_i^+ & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ k_i^- & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.33)$$

les gains  $k_i$  peuvent être soit constant, ou dépendant de l'état  $x$ , ils sont choisis de telle sorte à avoir le comportement désiré, et une surface attractive.

### 2.5.2 Structure avec retour d'état.

La structure de la commande est donnée par

$$u(x) = \Psi(x)x \quad (2.34)$$

où

$\Psi(x) = [\Psi_{i,j}(x)]$  est une matrice de gains de dimension  $(m \times n)$

avec

$$\Psi_{i,j}(x) = \begin{cases} \alpha_{i,j} & \text{si } \sigma_i x_j > 0 \\ \beta_{i,j} & \text{si } \sigma_i x_j < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

où les  $\alpha_{i,j}$  et  $\beta_{i,j}$  sont déterminés de sorte à satisfaire la condition  $\dot{\sigma}_i \sigma_i < 0$

dans le cas de la poursuite  $u$  peut prendre la forme :

$$u = \Psi x + \Phi e + \theta \quad (2.36)$$

où

$e = x - x_d$  est l'erreur de poursuite

$x_d$  est la référence

### 2.5.3 Structure avec augmentation de la commande équivalente. [5] [25]

Dans ce cas la commande prend la forme suivante :

$$u = u_{eq} + \Delta u \quad (2.37)$$

où

$u_{eq}$  est la commande équivalente

$\Delta u$  est un terme ajouté pour satisfaire la condition d'attraction, et il est pris souvent comme un relais.

## 2.6 Dynamique du régime glissant.

### 2.6.1 Méthode de la commande équivalente 'méthode d'Utkin'. [1] [5] [10] [25]

Soit le système dynamique non-linéaire analytique :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.38)$$

en régime de glissement idéal on a :

$$\sigma(x, t) = 0 \quad (2.39)$$

par conséquent, la dérivée par rapport au temps doit aussi toujours être nulle :

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (2.40)$$

avec :

$$\dot{\sigma} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T (f(x,t) + g(x,t)u_{eq}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (2.42)$$

avec  $u_{eq}$  est la commande équivalente en mode de glissement, d'après la dernière équation cette commande équivalente est donnée par la formule suivante :

$$u_{eq} = - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(x,t) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\} \quad (2.43)$$

avec :

$$\det \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right] \neq 0 \quad (2.44)$$

étant la condition de transversalité.

L'équation d'état en régime de glissement idéal devient :

$$\dot{x} = \left\{ 1 - g(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\} f(x,t) - g(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.45)$$

pour le cas particulier de notre surface

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} + \dot{x}_d(t) \quad (2.46)$$

$$u_{eq} = -[Sg(x,t)]^{-1} \{ Sf(x,t) + \dot{x}_d(t) \} \quad (2.47)$$

L'équation d'état en mode de glissement devient :

$$\dot{x} = \left\{ 1 - g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1}S \right\} f(x,t) - g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1}\dot{x}_d(t) \quad (2.48)$$

### 2.6.2 Méthode de Fillipov.[1] [5] [10][31]

En 1960 Fillipov a établi la théorie mathématique des équations différentielles à second membre discontinu.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad (2.49)$$

étant donné que le système est à structure variable on peut donc écrire :

$$f(x,u,t) = \begin{cases} f^+ & \text{si } \sigma(x,t) > 0 \\ f^- & \text{si } \sigma(x,t) < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

La dynamique du système n'est pas directement définie pour  $\sigma = 0$ , pour ce la Fillipov décrit la dynamique du système comme étant la moyenne pondérée des deux équations dynamique de l'équation (2.50).

$$\dot{x} = f_0 = \mu f_0^+ + (1 - \mu) f_0^- \quad \text{avec} \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (2.51)$$

avec

$$f_0^+ = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f^+(x,u,t) \quad \text{est} \quad f_0^- = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f^-(x,u,t) \quad (2.52)$$

avec  $\mu$  dépend de la direction de la grandeur des vecteurs colonne  $f^+$ ,  $f^-$  et du rang du vecteur gradient du  $\sigma(x,t)$ , et il est déterminé de telle façons que  $f_0$  soit tangent à la surface de glissement.

$$\mu = \frac{[\text{grad} \sigma(x,t)] f^-}{[\text{grad} \sigma(x,t)] (f^- - f^+)} \quad (2.53)$$

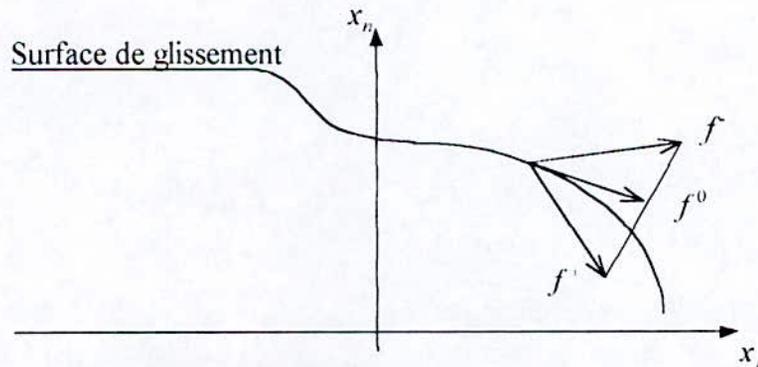


Figure 2.5 - Méthode de Fillipov.

La substitution de  $\mu$  dans l'équation (2.51) donne la dynamique du système.

$$\dot{x} = \frac{\text{grad} \sigma \cdot f^-}{\text{grad} \sigma \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad} \sigma \cdot f^+}{\text{grad} \sigma \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (2.54)$$

## 2.7 Robustesse vis à vis des perturbations.

Soit le système donné par l'équation d'état

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u + d(t) \quad (2.55)$$

où

$d(t)$  est une perturbation externe

**Théorème.**[1] [25] [31]

Le régime glissant sur  $\sigma$  du système perturbé satisfait les propriétés de robustesse vis à vis de  $d$  (perturbation) si, et seulement si, le vecteur de perturbation  $d$  satisfait la condition suivante :

$$d \in \text{span}\{g(x)\} \quad (2.56)$$

avec  $\text{span}\{.\}$  l'espace engendré par le vecteur  $\{.\}$ .

L'extension de ce théorème au cas des erreurs de modélisation est prouvée par Sira-ramirez.

Pour cela, considérons le système donné par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x,t) + \Delta f(x,t,p) + g(x,t)u + \Delta g(x,t,p)u + d(x,p,t) \quad (2.57)$$

où  $p$  est un paramètre incertain ?

Pour que le régime glissant soit robuste vis à vis des erreurs de modélisation et de perturbation, il suffit que :

$$\begin{aligned} d(x,p,t) &\in \text{span}\{g(x)\} \\ \Delta f(x,p,t) &\in \text{span}\{g(x)\} \\ \Delta g(x,p,t) &\in \text{span}\{g(x)\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

C'est à dire il existe  $\tilde{d}(x,p,t)$ ,  $\tilde{\Delta f}(x,p,t)$  et  $\tilde{\Delta g}(x,p,t)$  de telle façon que :

$$\begin{aligned} d(x,p,t) &= g(x,p,t)\tilde{d}(x,p,t) \\ \Delta f(x,p,t) &= g(x,p,t)\tilde{\Delta f}(x,p,t) \\ \Delta g(x,p,t) &= g(x,p,t)\tilde{\Delta g}(x,p,t) \end{aligned} \quad (2.59)$$

## 2.8 Commande par mode de glissement.

Le choix approprié d'une construction adéquate de la commande à structure variable fait appel à plusieurs méthodes de commande :

### 2.8.1 Méthode de diagonalisation. [1] [4]

Le but de ce paragraphe est de donner une transformation non singulière qui donne à  $Sg(x,t)$  une des formes structurelles citée dans le paragraphe ( ). De ces quatre formes, deux seulement sont facile à obtenir par une transformation, ce sont la forme diagonale et la forme à diagonale dominante. La méthode de diagonalisation permet d'avoir  $Sg(x,t)$  diagonal.

Il existe deux formes de commande par diagonalisation, une se base sur la transformation de la commande originale, et l'autre sur la transformation de la surface de glissement.

#### 1<sup>ère</sup> Méthode.

On construit un nouveau vecteur de commande par la transformation suivante :

$$u^*(t) = Q^{-1}(x,t) Sg(x,t)u(t) \quad (2.60)$$

où  $Q(x,t) = \text{diag}[q_1(x,t) \dots q_n(x,t)]$  une matrice arbitraire diagonale avec :

$$\begin{cases} \inf |q_i(x,t)| > 0 \\ \forall x, \forall t > 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

l'équation dynamique devient :

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1}Q(x,t)u^*(t) \quad (2.62)$$

et

$$\dot{\sigma} = Sf(x,t) + Q(x,t)u^*(t) \quad (2.63)$$

La commande est synthétisée de telle façon a vérifier les conditions de l'existence du mode de glissement  $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ . Et pour satisfaire cette condition il suffit de poser :

$$\begin{cases} q_i(x,t)u_i^* < -\sum_{j=1}^n S_{ij} f_j(x,t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ q_i(x,t)u_i^* > \sum_{j=1}^n S_{ij} f_j(x,t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

et la commande originale est obtenue par la transformation inverse :

$$u(t) = [Sg(x,t)]^{-1} Q(x,t) u^*(t) \quad (2.65)$$

### 2<sup>ème</sup> Méthode.

Elle se base sur la transformation de la surface de glissement, et pour cela il faut démontrer l'invariance du mode de glissement par rapport à cette transformation.

#### Théorème. [1]

La trajectoire du système équivalent en mode de glissement est invariante par rapport à une transformation de la surface  $\sigma^*(x,t) = \Omega(x,t)\sigma(x,t)$  si  $\|\dot{\Omega}\|$  et  $\|\Omega^{-1}\|$  sont bornées.

On choisit  $\Omega(x,t)$  de telle façon  $\Omega(x,t)[Sg(x,t)]$  est une matrice diagonale, on particulier choisissant une matrice  $Q(x,t)$  diagonale et calculons :

$$\Omega(x,t) = Q(x,t)[Sg(x,t)]^{-1} \quad (2.66)$$

on aura donc :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^* &= Q(x,t)[Sg(x,t)]^{-1} Sf(x,t) + Q(x,t)u(t) + \dot{\Omega}(x,t)\Omega(x,t)^{-1}\sigma^* \\ &= \sigma^{\circ}(x,t) + Q(x,t)u(t) + \sigma_{\Omega}(x,t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

la condition d'existence du mode de glissement est :

$$\begin{cases} q_i(x,t)u_i^+ < -\sigma_i^{\circ}(x,t) - \sigma_{\Omega_i}(x,t) & \text{si } \sigma_i^*(x) > 0 \\ q_i(x,t)u_i^- > -\sigma_i^{\circ}(x,t) - \sigma_{\Omega_i}(x,t) & \text{si } \sigma_i^*(x) < 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

avec  $\sigma_{\Omega_i}(x,t)$  est l'élément  $i$  du vecteur.

#### Exemple [4]

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = A(x,t)x + gu(t) \quad (2.69)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(x,t) & a_{12}(x,t) & a_{13}(x,t) & a_{14}(x,t) & a_{15}(x,t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(x,t) & a_{22}(x,t) & a_{23}(x,t) & a_{24}(x,t) & a_{25}(x,t) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

on choisit la surface.

où

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.8333 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.8333 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$S$  est choisi de telle façon que le système en boucle fermée qui est de degré  $n-m=3$  ait les pôles  $-1, -2, -3$ .

◆ *Par transformation de la commande.*

On choisit la transformation :

$$u^*(t) = Q^{-1}(x,t) S g(x,t) u(t) \quad (2.72)$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

donc

$$\dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1}Q(x,t)u^*(t) \quad (2.74)$$

Etant donné que  $Q$  est diagonale, la condition suffisante pour l'existence du mode glissant est :

$$\begin{cases} q_i(x,t)u_i^+ < -[s_{i1} \ s_{i2} \ \dots \ s_{i5}]A(x,t)x(t) & \text{si } \sigma_i > 0 \\ q_i(x,t)u_i^- > -[s_{i1} \ s_{i2} \ \dots \ s_{i5}]A(x,t)x(t) & \text{si } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad i = 1,2 \quad (2.75)$$

Posons

$$\nabla \sigma_i = [s_{i1} \ s_{i2} \ \dots \ s_{i5}] \quad (2.76)$$

donc :

$$\nabla \sigma_1 A(x,t)x(t) = \left\{ \begin{aligned} &(2a_{11} + a_{21})x_1 + (1 + 2a_{12} + a_{22})x_2 + (1.8333 + 2a_{13} + a_{23})x_3 \\ &+ (2a_{14} + a_{24})x_4 + (2a_{15} + a_{25} - 6)x_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

avec :

$$a_{ij}^{\min} \leq a_{ij}(x,t) \leq a_{ij}^{\max} \quad (2.78)$$

la loi de commande a la forme suivante :

$$u(x,t) = k(x,t)x(t) \quad (2.79)$$

avec :

$$k(x,t)_{i,j} = \begin{cases} \alpha(x,t)_{i,j} & \text{si } \sigma_i x_i > 0 \\ \beta(x,t)_{i,j} & \text{si } \sigma_i x_i < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

soit  $u^*(t) = kx$  où  $k = [k_{ij}^{\pm}]$

donc les  $k_{ij}$  doivent satisfaire l'équation (2.75) ce qui donne :

$$k_{11} = \begin{cases} < -(2a_{11}^{\max} + a_{21}^{\max}) & \text{si } \sigma_1 x_1 > 0 \\ > -(2a_{11}^{\min} + a_{21}^{\min}) & \text{si } \sigma_1 x_1 < 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

$$k_{12} = \begin{cases} < -(1 + 2a_{12}^{\max} + a_{22}^{\max}) & \text{si } \sigma_1 x_2 > 0 \\ > -(1 + 2a_{12}^{\min} + a_{22}^{\min}) & \text{si } \sigma_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

$$k_{13} = \begin{cases} < -(1.833 + 2a_{13}^{\max} + a_{23}^{\max}) & \text{si } \sigma_1 x_3 > 0 \\ > -(1.833 + 2a_{13}^{\min} + a_{23}^{\min}) & \text{si } \sigma_1 x_3 < 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

$$k_{14} = \begin{cases} < -(2a_{14}^{\max} + a_{24}^{\max}) & \text{si } \sigma_1 x_4 > 0 \\ > -(2a_{14}^{\min} + a_{24}^{\min}) & \text{si } \sigma_1 x_4 < 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

$$k_{15} = \begin{cases} < -(2a_{15}^{\max} + a_{25}^{\max} - 6) & \text{si } \sigma_1 x_5 > 0 \\ > -(2a_{15}^{\min} + a_{25}^{\min} - 6) & \text{si } \sigma_1 x_5 < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

$$k_{21} = \begin{cases} < -0.5(a_{11}^{\max} + a_{21}^{\max}) & \text{si } \sigma_2 x_1 > 0 \\ > -0.5(a_{11}^{\min} + a_{21}^{\min}) & \text{si } \sigma_2 x_1 < 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

$$k_{22} = \begin{cases} < -0.5(1 + a_{12}^{\max} + a_{22}^{\max}) & \text{si } \sigma_2 x_2 > 0 \\ > -0.5(1 + a_{12}^{\min} + a_{22}^{\min}) & \text{si } \sigma_2 x_2 < 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

$$k_{23} = \begin{cases} < -0.5(1.833 + a_{13}^{\max} + a_{23}^{\max}) & \text{si } \sigma_2 x_3 > 0 \\ > -0.5(1.833 + a_{13}^{\min} + a_{23}^{\min}) & \text{si } \sigma_2 x_3 < 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

$$k_{24} = \begin{cases} < -0.5(a_{14}^{\max} + a_{24}^{\max}) & \text{si } \sigma_2 x_4 > 0 \\ > -0.5(a_{14}^{\min} + a_{24}^{\min}) & \text{si } \sigma_2 x_4 < 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

$$k_{25} = \begin{cases} < -0.5(a_{15}^{\max} + a_{25}^{\max}) & \text{si } \sigma_2 x_5 > 0 \\ > -0.5(a_{15}^{\min} + a_{25}^{\min}) & \text{si } \sigma_2 x_5 < 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

une fois les  $k_{ij}$  choisis on utilise la transformation inverse pour retrouver  $u(t)$ .

$$u(t) = (Sg)^{-1} Q u^*(t) \quad (2.91)$$

donc

$$u = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{\pm} & k_{12}^{\pm} & k_{13}^{\pm} & k_{14}^{\pm} & k_{15}^{\pm} \\ k_{21}^{\pm} & k_{22}^{\pm} & k_{23}^{\pm} & k_{24}^{\pm} & k_{25}^{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

### 2.8.2 Méthode hiérarchique. [1] [4]

Soit le système excité par le vecteur de commande ( $u_i, i=1, \dots, m$ ).

Dans cette méthode on établit une certaine hiérarchie artificielle des composantes de la commande, de telle façon à ce que la première composante de la commande  $u_1$  ramène le système vers la première surface de glissement  $\sigma_1 = 0$ , la deuxième commande  $u_2$  conduit le système vers l'intersection des deux premières surfaces de glissement  $\sigma_1 = 0$  et  $\sigma_2 = 0$ , et ainsi de suite jusqu'à  $u_m$  qui ramène le système vers l'intersection de toutes les surfaces.

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.93)$$

posons  $f^0 = f, g^0 = g$  et  $u^0 = u$

supposons que le vecteur d'état est sur l'intersection de  $k$  surfaces  $\sigma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, k < m$ ), à partir de  $\dot{\sigma}_i = 0$  on trouve  $u_{ieq}$  et en remplaçant dans l'équation d'état on aura :

$$\dot{x} = f^1(x, t) + g^1 u^1 \quad (2.94)$$

où  $u^1 = [u_2 \dots u_m]^T$ , et ainsi de suite, donc on aura les équations suivantes :

$$\dot{x} = f^k(x, t) + g^k(x, t)u^k \quad k = 0, \dots, m \quad (2.95)$$

où

$f^k$  est un vecteur de dimension  $n$ .

$g^k = [g_{k+1}^k \ \dots \ g_m^k]$  une matrice  $n \times (m-k)$  formée par les colonnes.  
 $u^k = [u_{k+1} \ \dots \ u_m]$  un vecteur de dimension  $m-k$ .

Pour déterminer la condition d'existence de régime glissant dans la surface  $\sigma_{k+1} = 0$  on utilise la condition :

$$\lim_{\sigma_{k+1} \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_{k+1} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\sigma_{k+1} \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_{k+1} > 0 \quad (2.96)$$

avec

$$\dot{\sigma}_{k+1} = \text{grad} \sigma_{k+1} f^k + \sum_{i=k+1}^m \text{grad} \sigma_{k+1} g_i^k u_i \quad (2.97)$$

cette condition doit être vérifiée pour tout  $u_i^\pm$  avec  $i = k+2, \dots, m$ , donc pour assurer l'existence du mode de glissement, il suffit de poser :

$$\begin{cases} \text{grad} \sigma_{k+1} g_{k+1}^k u_{k+1}^+ < \min_{u_{k+2}, \dots, u_m} \left[ -\text{grad} \sigma_{k+1} f^k - \sum_{i=2}^{m-k} \text{grad} \sigma_{k+1} g_{k+i}^k u_{k+i} \right] & \text{si } \sigma_{k+1} > 0 \\ \text{grad} \sigma_{k+1} g_{k+1}^k u_{k+1}^- > \max_{u_{k+2}, \dots, u_m} \left[ -\text{grad} \sigma_{k+1} f^k - \sum_{i=2}^{m-k} \text{grad} \sigma_{k+1} g_{k+i}^k u_{k+i} \right] & \text{si } \sigma_{k+1} < 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Pour résumer,  $u_1$  garantie que  $\sigma_1 = 0 \ \forall \ u_2, u_3, \dots, u_m$   
 $u_2$ , garantie  $\sigma_1 = 0$  et  $\sigma_2 = 0$  pour toute valeur de  $u_3, \dots, u_m$  et ainsi de suite.

Pour illustrer cet algorithme on va donner un exemple linéaire simple.

**Exemple[4]**

Soit le système donné par l'équation d'état

$$\dot{x} = Ax + gu \quad (2.99)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

on choisit la surface  $\sigma(x) = Sx$  où :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Pour trouver  $u_1$  qui ramène le système vers la surface  $\sigma_1 = S^1 x$ , on procède comme suit :

$$S^1 A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad S^1 g = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\dot{\sigma}_1 = S^1 A x + S^1 g u = 0 \quad (2.103)$$

$$\Rightarrow u_{1eq} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} x - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

insérons (2.104) dans l'équation d'état, on aura :

$$\dot{x} = A^1 x + g^1 u^1 \quad (2.105)$$

avec :

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad g^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Maintenant, pour trouver  $u_{2eq}$  on doit résoudre

$$\dot{\sigma}_2 = S^2 A^1 x + S^2 g^1 u^1 = 0 \quad (2.106)$$

où

$$S^2 A^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$S^2 g^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

et on trouve :

$$u_{2eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x - u_3 \quad (2.109)$$

remplaçant l'équation (2.109) dans l'équation (2.105), on aura :

$$\dot{x} = A^2 x + g^2 u^2 \quad (2.110)$$

où

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, g^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u^2 = u_3 \quad (2.111)$$

l'équation (2.1) donne :

$$\begin{aligned} S^3 g_3^2 u_3^+ &< -S^3 A^2 x \\ S^3 g_3^2 u_3^- &> -S^3 A^2 x \end{aligned} \quad (2.112)$$

avec :  $S^3 g_3^2 = 1$  et  $S^3 A^2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -2]$

donc il suffit de prendre :

$$\begin{aligned} u_3^+ &< -S^3 A^2 x \\ u_3^- &> -S^3 A^2 x \end{aligned} \quad (2.113)$$

pour  $u_2^\pm$  on a :

$$\begin{aligned} S^2 g_1^2 u_2^+ &< \min_{u_3} [-S^2 A^1 x - S^2 g_1^3 u_3] \\ S^2 g_1^2 u_2^- &> \max_{u_3} [-S^2 A^1 x - S^2 g_1^3 u_3] \end{aligned} \quad (2.114)$$

avec :  $S^2 g_1^2 = 0.5$  ,  $S^2 g_1^3 = 0.5$  et  $S^2 A^1 = [0 \ -0.5 \ 1 \ 1 \ -0.5 \ 0]$

pour satisfaire (2.114) il suffit d'avoir :

$$\begin{aligned} u_2^+ &< -(2S^2 A^1 x + u_3^-) \\ u_2^- &> -(2S^2 A^1 x + u_3^+) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Pour trouver  $u_1$  on utilise les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} S^1 g_1 u_1^+ &< \min_{u_2, u_3} [-S^1 A x \ -S^1 g_2 u_2 \ -S^1 g_3 u_3] \\ S^1 g_1 u_1^- &> \max_{u_2, u_3} [-S^1 A x \ -S^1 g_2 u_2 \ -S^1 g_3 u_3] \end{aligned} \quad (2.116)$$

donc il suffit d'avoir :

$$\begin{aligned} u_1^+ &< -0.5(S^1 A x + u_2^- + u_3^-) \\ u_1^- &> -0.5(S^1 A x + u_2^+ + u_3^+) \end{aligned} \quad (2.117)$$

en résumé on a :

$$u_3 = \begin{cases} < -S^3 A^2 x & \text{si } \sigma_3 > 0 \\ > -S^3 A^2 x & \text{si } \sigma_3 < 0 \end{cases} \quad (2.118)$$

$$u_2 = \begin{cases} < -(2S^2 A^1 x + u_3^-) & \text{si } \sigma_2 > 0 \\ > -(2S^2 A^1 x + u_3^+) & \text{si } \sigma_2 < 0 \end{cases} \quad (2.119)$$

$$u_1 = \begin{cases} < -0.5(2S^2 A^1 x + u_2^- + u_3^-) & \text{si } \sigma_1 > 0 \\ > -0.5(2S^2 A^1 x + u_2^+ + u_3^+) & \text{si } \sigma_1 < 0 \end{cases} \quad (2.120)$$

## 2.9 Commande par mode de glissement des systèmes sous formes Canoniques.

### 2.9.1 Formes canoniques. [25]

Mettre le système non linéaire sous une forme canonique facilite beaucoup sa commande, car ça permet d'utiliser des méthodes systématiques. Nous allons donner quelques formes canoniques utiles pour la synthèse de la commande à structure variable.

#### ◆ *Forme canonique réduite*

On divise le vecteur d'état  $x$  en  $x_1$  et  $x_2$ , avec  $\dim x_2 = \dim u = m$ , et  $\dim x_1 = \dim x - \dim u$

$g$  prend la forme :  $g = \begin{bmatrix} 0 & g^* \end{bmatrix}$

où  $g^*$  est réversible de dimension  $(m \times m)$ .

la forme réduite est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + g^*(x)u \end{aligned} \quad (2.121)$$

#### ◆ *Forme de découplage entrée-sortie.*

Soit  $y = c(x, u)$  la sortie du système.

$y^{(r)}$  la  $r$  ième dérivée de  $y$  par rapport au temps.

$r$  : degré relatif représente le nombre minimal de dérivation de  $y$  pour que  $u$  apparaisse explicitement dans  $y^{(r)}$ .

Pour un système de  $m$  sorties, le degré relatif total est :  $r = r_1 + \dots + r_m$ .

Si  $r=n$  alors il existe des conditions de telle façon que le système :

$$\dot{x} = A(x,t) + g(x,t)u \text{ soit écrit :}$$

$$y_i^{(r_i)} = f_i(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(r_m-1)}) + g_i(y_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(r_m-1)})u_i \quad (2.122)$$

$$i = 1, \dots, m$$

## 2.9.2 Calcul de la loi de commande.

### ◆ *Forme reduite.* [25]

La surface de glissement à la forme :

$$\sigma(x) = \sigma(x_1, x_2) = x_2 - w(x_1) \quad (2.123)$$

on choisit  $w(x_1)$  de façon à garantir la stabilité du mode de glissement. Une fois  $\sigma$  trouver, la commande est trouvée en utilisant la méthode de la loi d'atteignabilité :

$$u(x) = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g^*(x)\right)^{-1} \left[ Q \operatorname{sgn}(\sigma) + k h(\sigma) + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} f_2(x) \right] \quad (2.124)$$

### ◆ *Forme de découplage entrée sortie.* [3] [25]

La surface est de préférence choisie comme suit :

$$\sigma_i(x_i) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n_i-1} (x_i - x_{i,d}) \quad (2.125)$$

ou bien :

$$\sigma_i(x_i) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n_i-1} \int_0^t (x_i - x_{i,d}) dt \quad (2.126)$$

Notre système d'application est sous cette forme, nous allons lui consacrer ce paragraphe.

Considérons le système suivant :

$$\ddot{x} = f + g u \quad (2.127)$$

où

$$0 < g_{\min} < g < g_{\max}$$

le problème est de trouver la loi de commande qui vérifie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma^2 < -\eta |\sigma| \quad \eta > 0 \quad (2.128)$$

avec :

$$\sigma(x, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{x} \quad \lambda > 0 \quad (2.129)$$

on choisit  $\hat{g}$  comme étant la moyenne géométrique  $\hat{g} = \sqrt{g_{\min} g_{\max}}$   
de l'équation (2.127) on peut écrire :

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{g}}{g} \leq \beta \quad (2.130)$$

où :

$$\beta = \sqrt{\frac{g_{\max}}{g_{\min}}} \text{ qui caractérise la marge de gains du système ?}$$

La loi de commande trouver est :

$$u = \hat{g}^{-1} [\hat{u} - k \operatorname{sgn}(\sigma)] \quad (2.131)$$

avec :

$$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (2.132)$$

$$\sigma = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad (2.133)$$

La stabilité est garantie si  $\sigma \dot{\sigma} < 0$

on a :

$$\dot{\sigma} = (f - g\hat{g}^{-1}\hat{f}) + (1 - g\hat{g}^{-1})(-\ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}) - b\hat{b}^{-1}k \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.134)$$

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \Rightarrow k \geq \hat{g}g^{-1}F + \eta\hat{g}g^{-1} + |\hat{g}g^{-1} - 1| |\hat{f} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}|$$

$$\Rightarrow k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\hat{u}| \quad (2.135)$$

avec :  $|f - \hat{f}| \leq F$

**Remarque :**

$K$  est choisi grand de telle façon a rejeter les effets des incertitudes du modèle.

**Cas multivariable.**

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}_i^{(n_i)} = f_i(x) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(x) u_j \quad (2.136)$$

et on a :

$$|f_i - \hat{f}_i| \leq F_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.137)$$

$$\beta = (I + \Delta)\hat{\beta}, \quad |\Delta_{ij}| \leq D_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (2.138)$$

Le vecteur surface  $\sigma$  est composé de  $m$  surfaces

$$\sigma_i(x, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^{n_i-1} \tilde{x}_i \quad \lambda_i > 0 \quad (2.139)$$

on peut écrire  $\sigma_i$  comme suit :

$$\sigma_i = x_i^{(n_i-1)} - x_{ri}^{(n_i-1)} \quad (2.140)$$

on pose :

$$x_r^{n-1} = \left[ x_{ri}^{(n_i-1)} \right]^T \quad (2.141)$$

est donnée par :

$$u = \hat{\beta}^{-1} \left( x_r^{(n-1)} - \hat{f} - k \operatorname{sgn}(\sigma) \right) \quad (2.142)$$

le vecteur  $k$  est déterminé selon la condition de glissement  $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$

$$\dot{\sigma}_i = \hat{f}_i - f_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \left( x_{rj}^{(n_j-1)} - \hat{f}_j \right) - \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} k_j \operatorname{sgn}(\sigma_j) - (1 + \Delta_{ii}) k_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad (2.143)$$

d'où la condition de glissement :

$$(1 - D_{ii}) k_i \geq F_i + \sum_{j=1}^n D_{ij} \left| x_{rj}^{(n_j-1)} - \hat{f}_j \right| - \sum_{j \neq i} D_{ij} k_j + \eta_i \quad (2.144)$$

un choix particulier de  $k$  est donné par :

$$(1 - D_{ii}) k_i + \sum_{j \neq i} D_{ij} k_j = F_i + \sum_{j=1}^n D_{ij} \left| x_{rj}^{(n_j-1)} - \hat{f}_j \right| + \eta_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.145)$$

## 2.10 Problème du chattering dans les modes glissant. [5][24] [25][28]

La commande par mode de glissement est par essence discontinue, elle commute d'une valeur à une autre avec une fréquence théoriquement infinie.

Cela n'est pas possible pour des raisons telles que les limitations physiques des actionneurs et les limitations du calculateur numérique, donc le phénomène de chattering aura lieu. Ce phénomène est généralement indésirable par ce qu'il excite les dynamiques du système à haute fréquence qui ne sont pas modélisées.

Plusieurs approches ont été abordées pour faire face à ce phénomène.

◆ *Approche de continuation.* [5][25]

Dans cette approche on remplace la fonction 'sgn' par une fonction plus douce, par exemple la fonction de saturation 'sat'

$$\text{sat}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma > l \\ -1 & \text{si } \sigma < -l \\ \frac{\sigma}{l} & \text{si } |\sigma| \leq l \end{cases} \quad (2.146)$$

une autre méthode est de remplacer :

$$\Lambda = \frac{c^T x}{|c^T x|} \quad \text{par} \quad \Lambda = \frac{c^T x}{|c^T x| + \delta} \quad (2.147)$$

où

$\delta > 0$  rend  $\Lambda$  continu.

Cette approche permet d'éviter l'excitation des modes à haute fréquence de résonance mais détériore la stabilité du régime glissant ainsi que la robustesse. Plus la couche limite (boundary layer) est grande plus la robustesse diminue, de ce fait une autre approche est proposée.

◆ *Approche de la loi d'atteignabilité du régime glissant.* [25] [28]

Le chattering peut être réduit par l'utilisation de la surface donnée par :

$$\dot{\sigma}_i = q_i \text{sgn}(\sigma_i) - k_i \sigma_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.148)$$

En choisissant les gains  $q_i$  petit, l'amplitude du chattering sera réduite, mais  $q_i$  ne peut être pris nulle, car le temps d'atteindre la surface sera long.

Une valeur grande de  $k_i$  permet d'accélérer la convergence vers la surface et une atteignabilité meilleur de cette dernière est garantie si on utilise la loi suivante :

$$\dot{\sigma}_i = -k_i |\sigma_i|^\alpha \text{sgn}(\sigma_i) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.149)$$

Notons que cette approche permet d'avoir des gains de commande moins important au voisinage de la surface, ce qui réduit énormément l'excitation des organes de commande.

## Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'introduction aux systèmes à structure variable. Un résumé théorique a été élaboré comprenant les aspects les plus importants de cette catégorie des systèmes, tels que la surface de glissement, l'existence du mode glissant, et la robustesse.

Une gamme de commandes a été proposée, ainsi que des solutions au problème de chattering qui caractérise ce type de commande.

**CHAPITRE 3**  
**SYNTHESE DE LOIS DE**  
**COMMANDE POUR LES**  
**DEUX PENDULES**  
**INVERSES**

## Chapitre 3

# Synthèse de lois de commande pour les deux pendules inversés

### 3.1 Première approche.

Le fondement théorique de cette approche a été abordé au chapitre 2. Ce paragraphe s'intéresse à l'application de cette approche sur les deux pendules inversés.

#### 3.1.1 Application au premier pendule.

Le modèle de ce pendule est donné au chapitre 1.

On pose la surface de glissement :

$$\sigma = \dot{\tilde{\theta}} + c\tilde{\theta} \quad (3.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \theta - \theta_d \\ c &= 1.2 \end{aligned}$$

La commande a la forme suivante :

$$u = \begin{cases} u^+ = \frac{c(2 + \sin \theta^2)\dot{\theta}}{\cos \theta} - 5\dot{x} + 6g \sin \theta - \sin \theta \dot{\theta}^2 - L \text{sat}(\sigma) & \text{si } \theta^2 > 10^{-4} \\ u^- = u^+ - k_1 \tilde{x} - k_2 \dot{\tilde{x}} & \text{si } \theta^2 < 10^{-4} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} L &= f + b\eta + \frac{c(2 + \sin \theta^2)(1-b)|\dot{\theta}|}{\cos \theta} \\ b &= \left( \frac{1.95 \sin \theta^2 + 3}{0.05 \sin \theta^2 + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{où } f &= 0.05 \text{ et } \eta = 0.01 \\ c_1 &= 1.5 \text{ et } c_2 = 3 \end{aligned}$$

Les résultats de simulation ont montré l'insuffisance de cette commande pour ramener le chariot vers la position désirée. Alors on a fait le cours à un retour d'état qui s'active

chaque fois que  $\theta$  se rapproche de la position d'équilibre. Ce retour d'état a été synthétisé pour imposer les pôles  $p_{1,2} = -0.5 \pm 0.5j$  quand ( ).

### 3.1.2 Application au deuxième pendule

Le vecteur surface de glissement est donné par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\theta}} + c_1 \tilde{\theta}_d \\ \dot{\tilde{\alpha}} + c_2 \tilde{\alpha}_d \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La loi de commande est :

$$u = \begin{cases} u^+ = B^{-1} \begin{pmatrix} -c_1 \tilde{\theta} - f_1 - c_3 \text{sat}(\sigma_1) \\ -c_2 \tilde{\alpha} - f_2 - c_4 \text{sat}(\sigma_2) \end{pmatrix} & \text{si } \theta^2 > 10^{-4} \\ u^- = u^+ - \begin{pmatrix} k_1 \tilde{x} + k_2 \dot{\tilde{x}} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } \theta^2 < 10^{-4} \end{cases} \quad (3.5)$$

avec :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{d_{12}}{q} & \frac{d_{32}}{q} \\ \frac{d_{13}}{q} & \frac{d_{33}}{q} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$f_1 = \frac{1.5d_{12}s\theta + 0.5d_{32}s\theta - s(\theta - \alpha)\dot{\theta}^2 + d_{12}s\alpha - 0.5d_{22}s(\theta - \alpha)\dot{\alpha}^2 + 1.5d_{22}gs\theta + d_{32}gs\alpha}{q} \quad (3.7)$$

$$f_2 = \frac{1.5d_{13}s\theta + 0.5d_{33}s\theta - s(\theta - \alpha)\dot{\theta}^2 + d_{13}s\alpha - 0.5d_{23}s(\theta - \alpha)\dot{\alpha}^2 + 1.5d_{23}gs\theta + d_{33}gs\alpha}{q} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 0.375 - 0.5(c(\theta - \alpha)^2) \\ d_{12} &= 0.5c\alpha c(\theta - \alpha) - 0.75c\theta \\ d_{13} &= 0.75c\theta c(\theta - \alpha) - c\alpha \\ d_{21} &= 0.5c\alpha c(\theta - \alpha) - 0.75c\theta \\ d_{22} &= 3.5 - c\alpha^2 \\ d_{23} &= 1.5(c\alpha c\theta - c(\theta - \alpha)) - 2c(\theta - \alpha) \\ d_{31} &= 0.75(c\theta c(\theta - \alpha) - c\alpha) \\ d_{32} &= 1.5c\alpha c\theta - 3.5c(\theta - \alpha) \\ d_{33} &= 5.25 - 2.25c\theta^2 \\ q &= 1.5 - c(\theta - \alpha)^2 + 1.125(1 - c\theta) + 1.75c(\theta - \alpha)(c\theta - c(\theta - \alpha) + c\alpha) - 0.75c\alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$c_1=7, c_2=3, c_3=15, c_4=15, k_1=72, k_2=24$$

Le retour d'état a été encore utilisé pour les mêmes causes cités précédemment avec les pôles suivants :  $p_{1,2} = -3 \pm 3j$ .

### 3.2 Deuxième approche

La première approche a montré ses limites. De ce fait une commande plus performante est nécessaire. Cette deuxième approche est proposée pour remédier à cela.

Dans cette approche on impose la dynamique de la surface de glissement comme suit :

$$\dot{\sigma} = -q_1 \operatorname{sgn}(\sigma) - q_2 \sigma \quad q_1, q_2 > 0 \quad (3.10)$$

cette structure vérifie la condition de stabilité  $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$

La commande sera déterminée de façon à vérifier la condition (3.10).

#### 3.2.1 Application au pendule simple

On a choisi la surface de glissement suivante :

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \tilde{x}_{2i} + \sum_{i=1}^2 c_i \tilde{x}_{2i-1} \quad (3.11)$$

avec  $\tilde{x}_1 = \tilde{\theta}, \tilde{x}_2 = \dot{\tilde{\theta}}, \tilde{x}_3 = x, \tilde{x}_4 = \dot{x}$

De la condition (\*) on trouve la loi de commande

$$u = \frac{(-0.25c\theta + 0.12)g\theta\dot{\theta}^2 + (2.5 - 0.25c\theta)g\dot{\theta} + (1 + 0.25s\theta^2)(q_1\sigma + q_2 \operatorname{sat}(\sigma) + c_1\dot{\theta} + (c_2 + 7)\dot{x})}{c\theta - 0.5}$$

$$\text{avec } q_1=5, q_2=5, c_1=8, c_2=0.9 \quad (3.12)$$

#### 3.2.2 Application au pendule double

La surface de glissement est choisie de la même manière

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 \tilde{x}_{2i} + \sum_{i=1}^2 c_i \tilde{x}_{2i-1} \\ \tilde{x}_6 + c_3 \tilde{x}_5 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

avec

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}, \tilde{x}_2 = \dot{\tilde{x}}, \tilde{x}_3 = \tilde{\theta}, \tilde{x}_4 = \dot{\tilde{\theta}}, \tilde{x}_5 = \tilde{\alpha}, \tilde{x}_6 = \dot{\tilde{\alpha}}$$

La commande tirée de la condition (3.10), est donnée par :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} f_1 - 7\dot{x} \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12} & d_{31} + d_{32} \\ d_{13} & d_{33} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 0.031 - 0.016(c(\theta - \alpha)^2) \\ d_{12} &= 0.031c\alpha c(\theta - \alpha) - 0.062c\theta \\ d_{13} &= 0.031c\theta c(\theta - \alpha) - c\alpha \\ d_{21} &= 0.031c\alpha c(\theta - \alpha) - 0.062c\theta \\ d_{22} &= 0.375 - 0.062c\alpha^2 \\ d_{23} &= 0.125(c\alpha c\theta - c(\theta - \alpha)) - 0.25c(\theta - \alpha) \\ d_{31} &= 0.062(c\theta c(\theta - \alpha) - c\alpha) \\ d_{32} &= 0.125c\alpha c\theta - 0.375c(\theta - \alpha) \\ d_{33} &= 0.75 - 0.25c\theta^2 \\ q &= 0.031(2 - c(\theta - \alpha)^2 + (1 - c\theta) + 0.5c(\theta - \alpha)(c\theta - c(\theta - \alpha) + c\alpha) - 0.5c\alpha) \\ f_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \\ f_2 &= r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15} \\ r_1 &= q(-c_1\dot{x} - c_2\dot{\theta} - q_1\sigma_1 - q_2\text{sat}(\sigma_1)) \\ r_2 &= -0.5((d_{11} + d_{12})s\theta + 0.25(d_{31} + d_{32})s(\theta - \alpha))\dot{\theta}^2 \\ r_3 &= -0.25((d_{11} + d_{12})s\alpha - 0.5(d_{21} + d_{22})s(\theta - \alpha))\dot{\alpha}^2 \\ r_4 &= -0.5g(d_{21} + d_{22})s\theta \\ r_5 &= -0.25g(d_{31} + d_{32})s\alpha \\ r_{11} &= q(-c_3\dot{\alpha} - q_3\sigma_2 - q_4\text{sat}(\sigma_2)) \\ r_{12} &= -0.5(d_{13}s\theta + 0.25d_{33}s(\theta - \alpha))\dot{\theta}^2 \\ r_{13} &= -0.25(d_{13}s\alpha - 0.5d_{23}s(\theta - \alpha))\dot{\alpha}^2 \\ r_{14} &= -0.5gd_{23}s\theta \\ r_{15} &= -0.25gd_{33}s\alpha \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$c_1 = 0.45, \quad c_2 = 5, \quad c_3 = 0.9$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 10$$

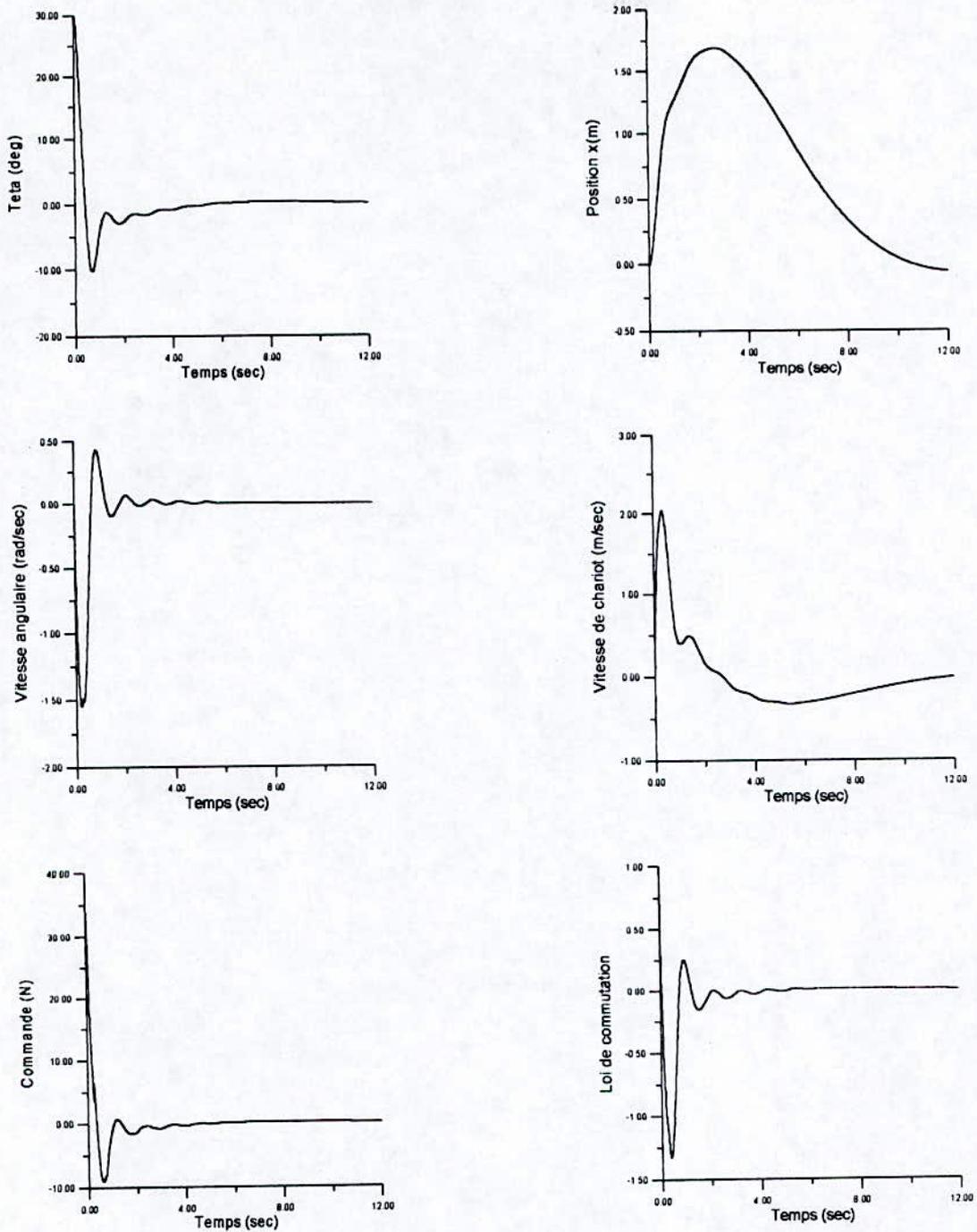


Figure (3.1) . Application de la première approche sur le premier pendule.

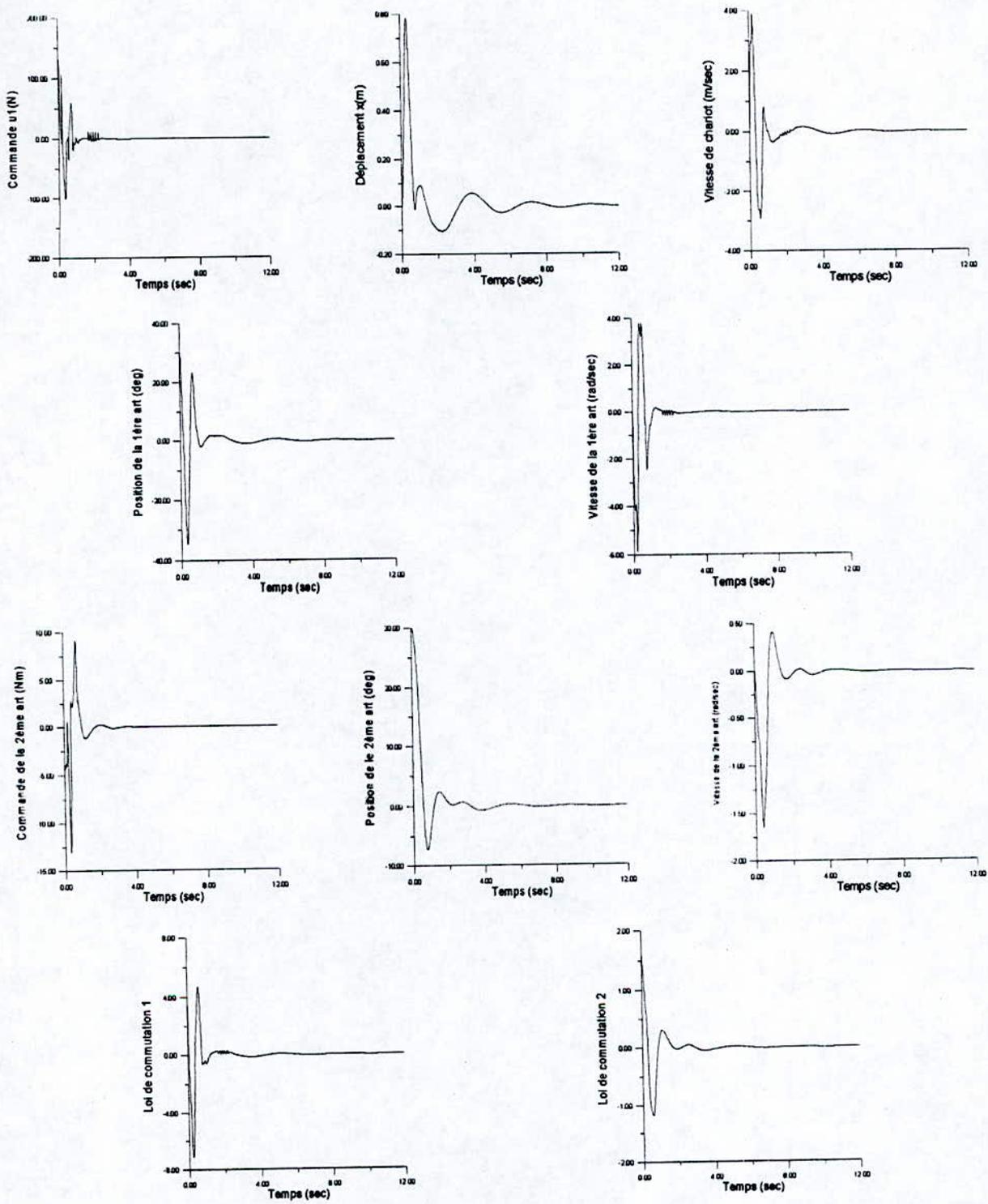


Figure (3.2) Application de la première approche sur le deuxième pendule.

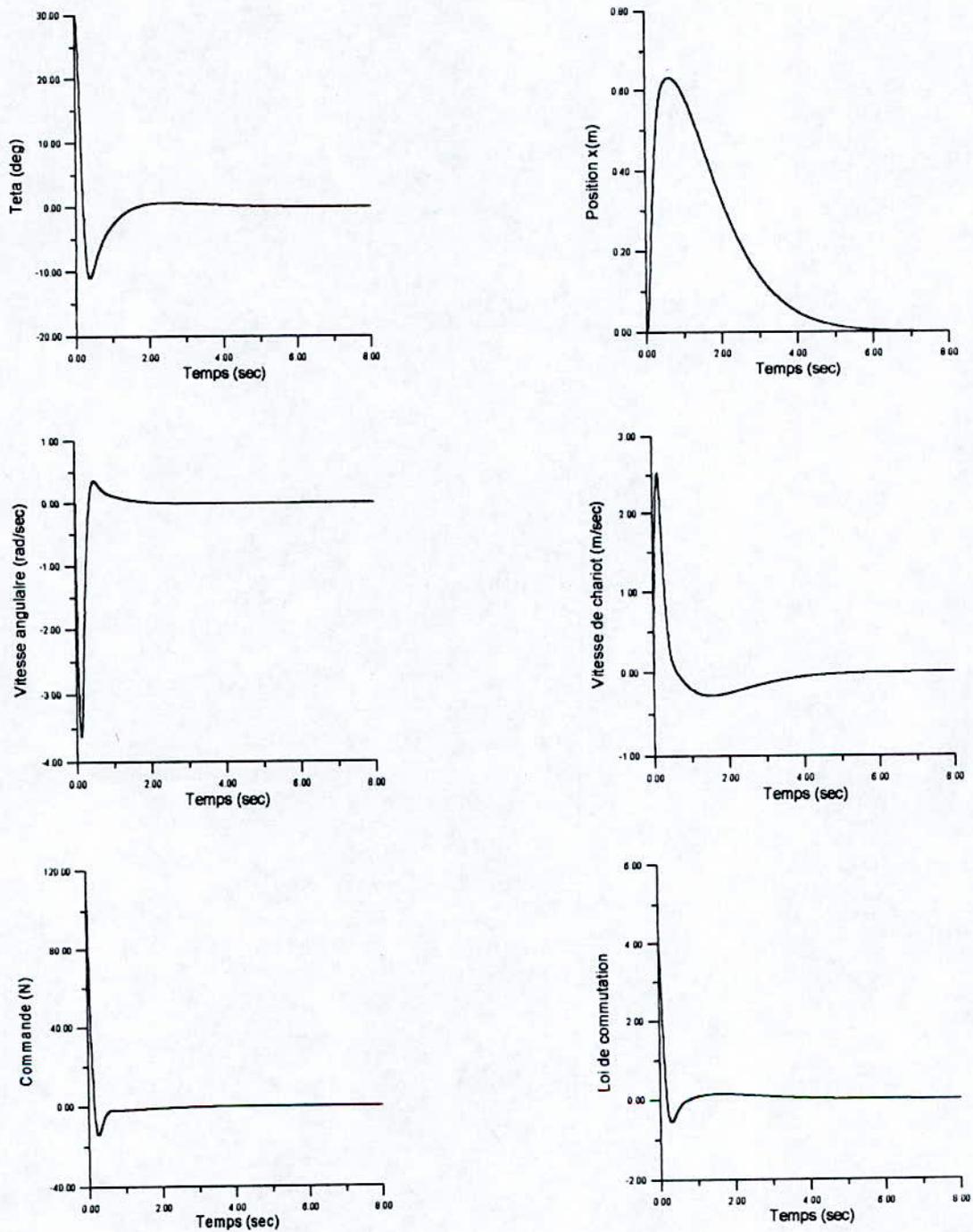


Figure (3.3) - Application de la deuxième approche sur le premier pendule inversé.

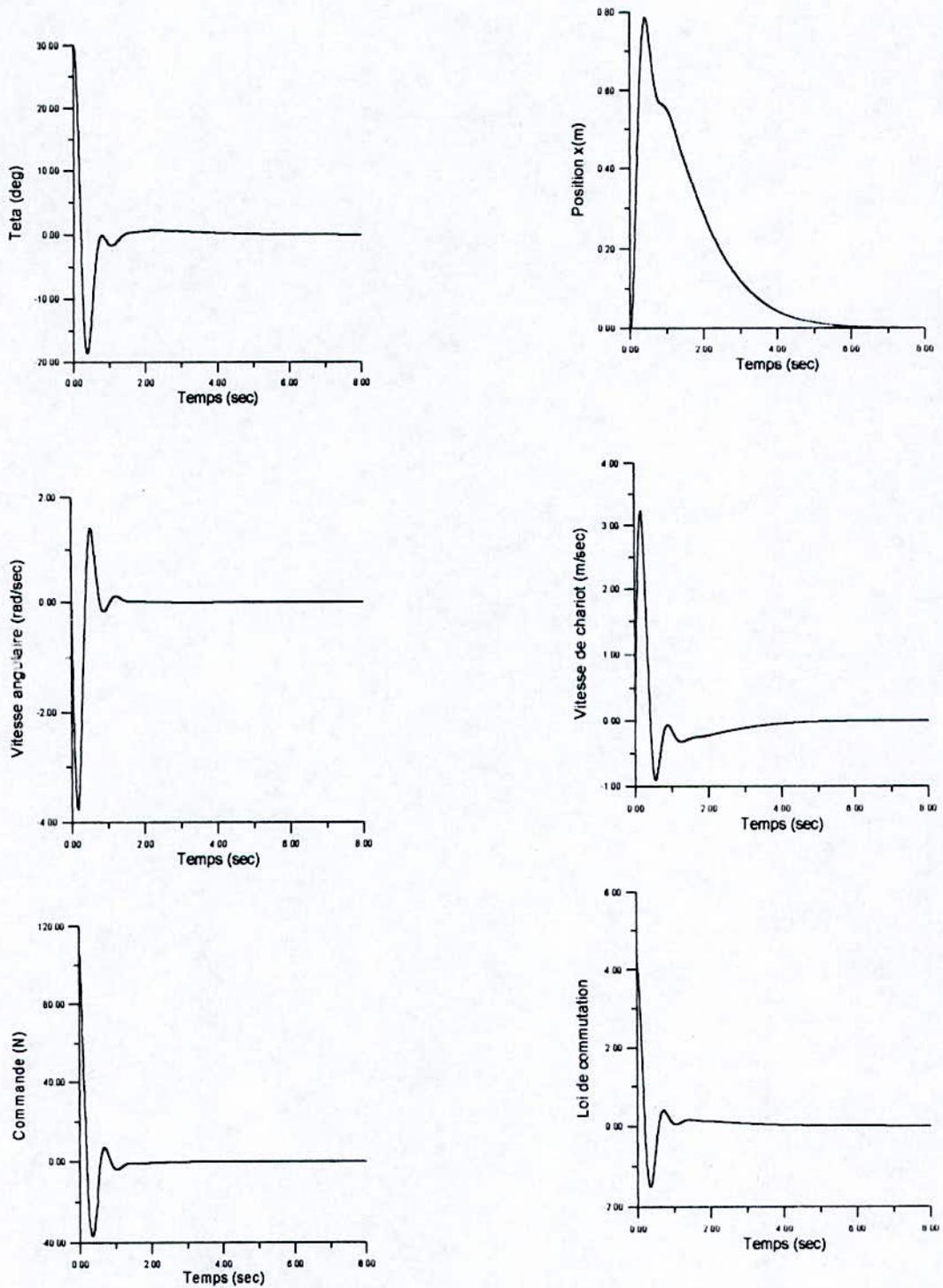


Figure (3.4) - Application de la deuxième approche sur le premier pendule inversé avec une variation paramétrique de 25%

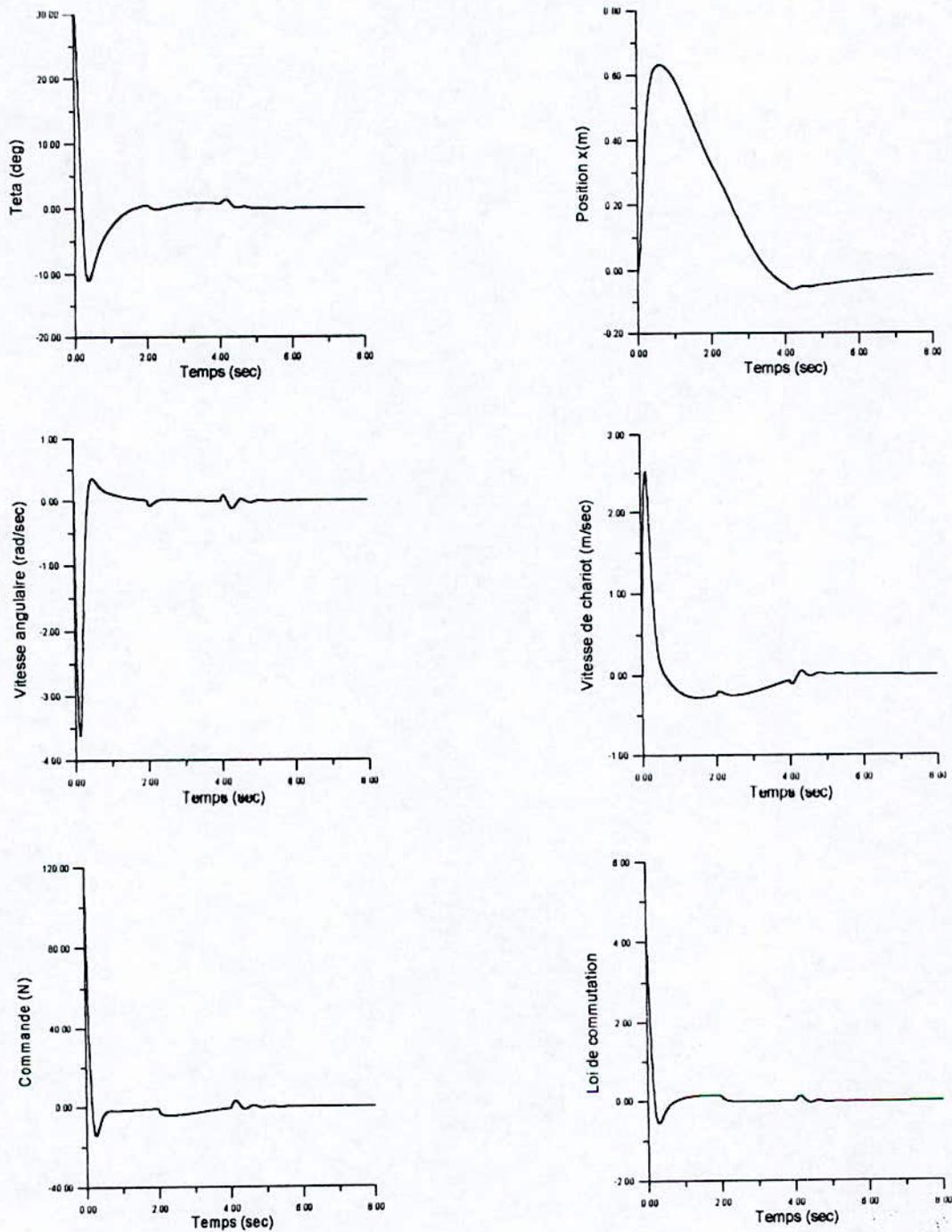


Figure (3.5) - Application de la deuxième approche sur le premier pendule inversé avec perturbations externes ( $f=+20$ ,  $f=-20$  (Ns/m) ) à partir des instants ( $t=2$ ,  $t=4$  (sec)).

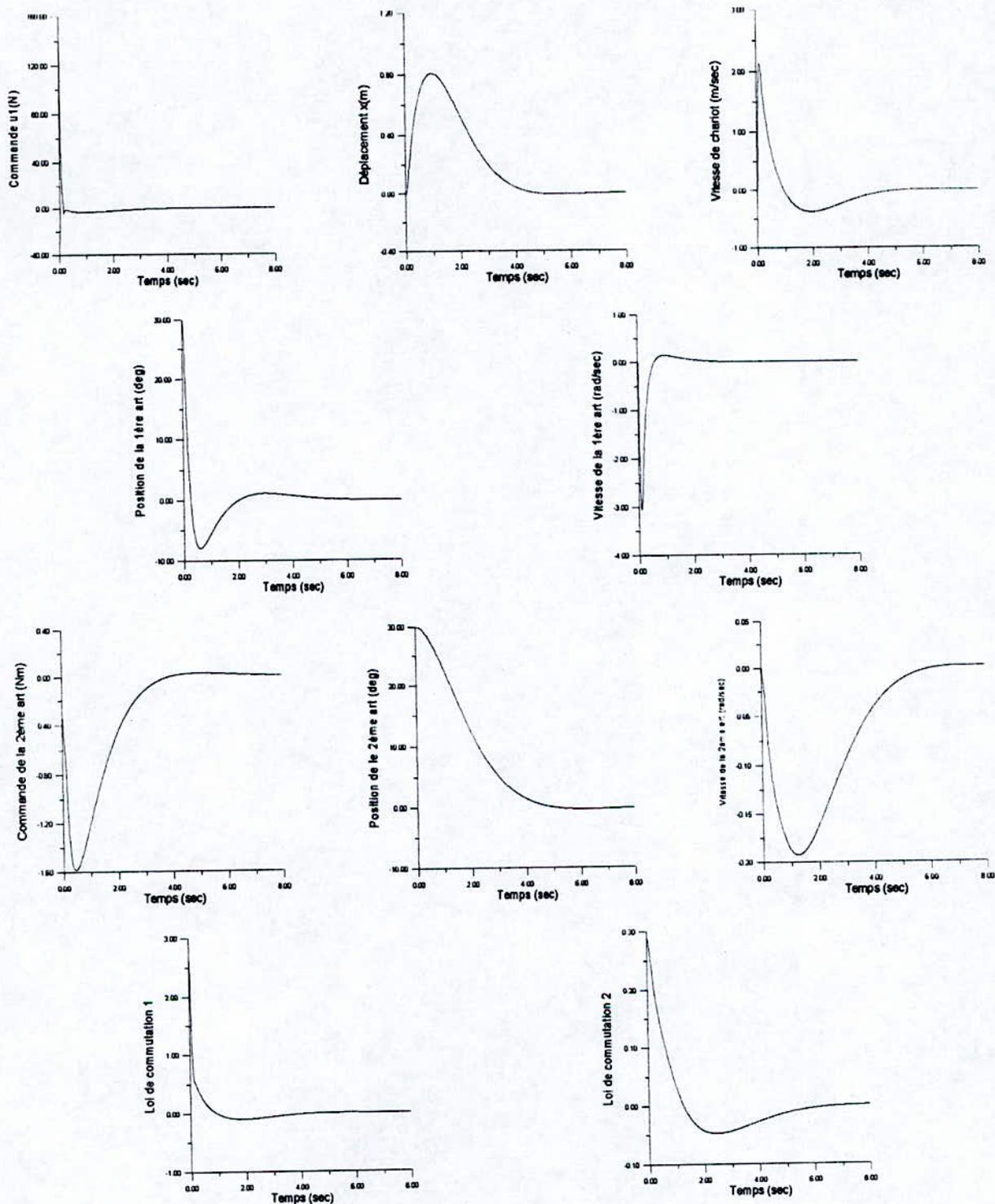


Figure (3.6) - Application de la deuxième approche sur le deuxième pendule inversé

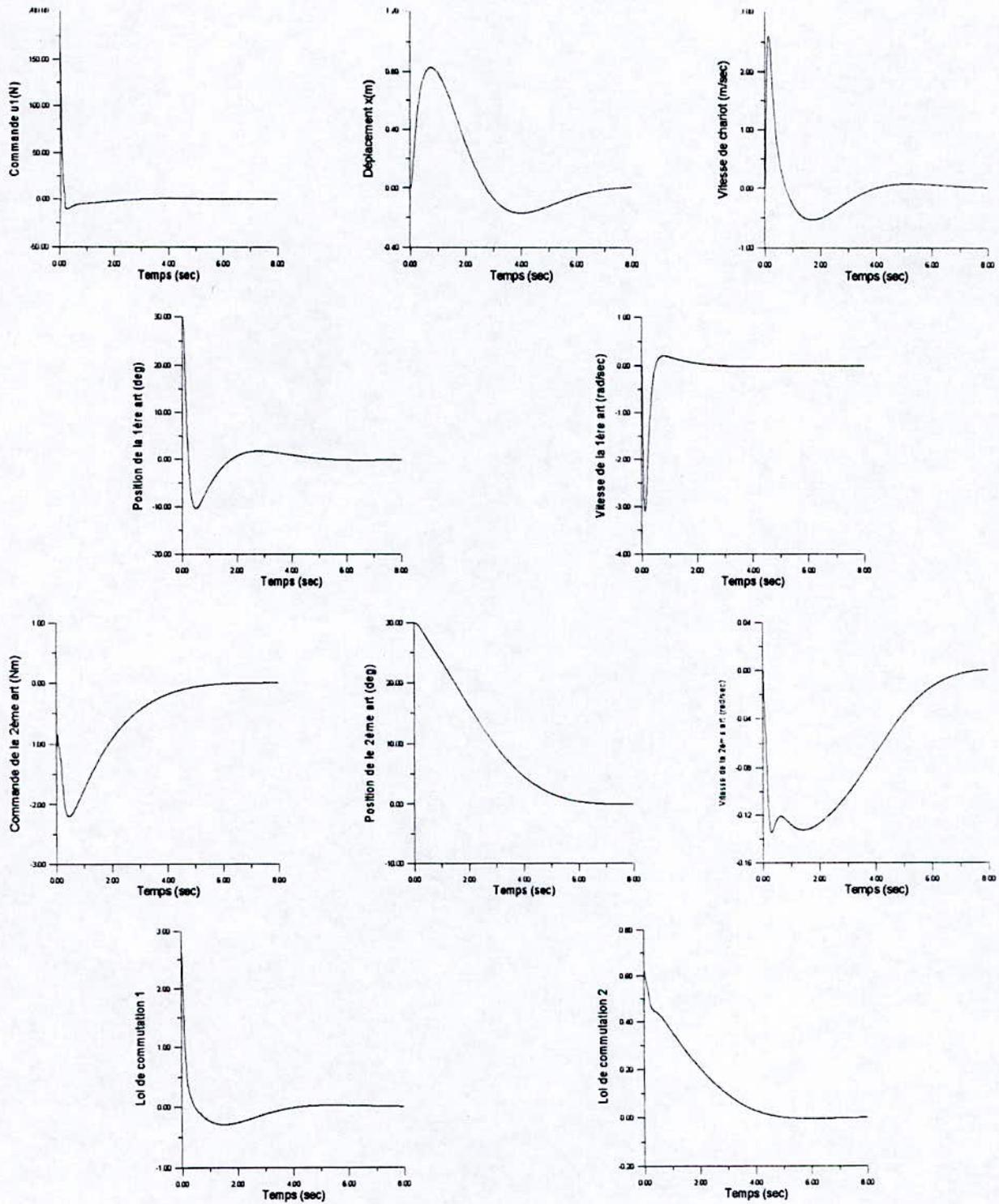


Figure (3.7) - Application de la deuxième approche sur le deuxième pendule inversé avec une variation de paramètre de 25%.

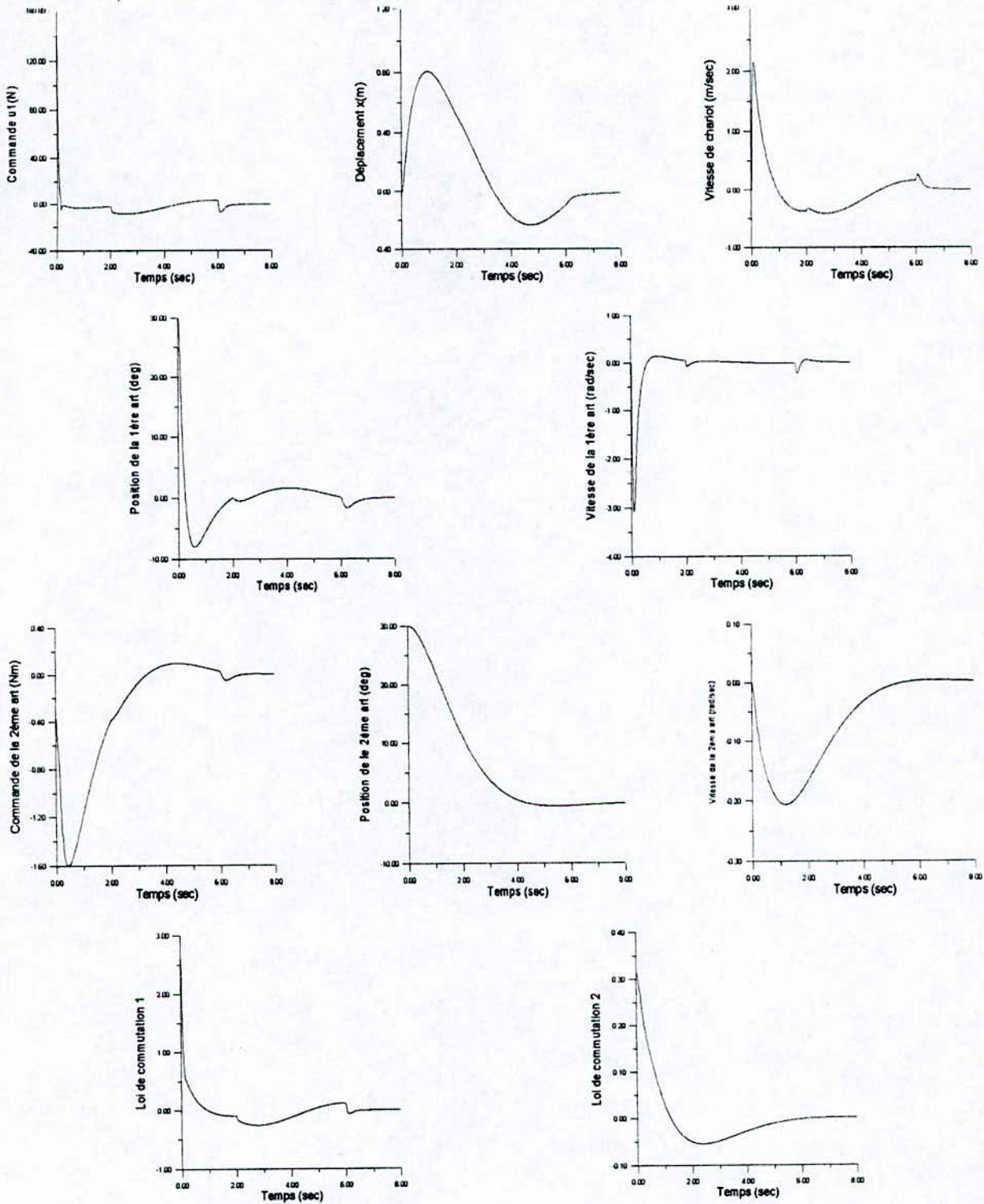


Figure (3.8) - Application de la deuxième approche sur le deuxième pendule inversé avec des perturbations externes ( $f = +20, -20 \text{ (Ns/m)}$ ) à partir des instants ( $t_1 = 2, t_2 = 6 \text{ (sec)}$ ).

### 3.3 Résultats de simulation et commentaire.

La première approche de commande a été appliquée sur les deux pendules inversés. Les résultats de simulations sont présentés dans les figures (3.1), (3.2).

◆ *Pour le cas du premier pendule.*

On remarque que, la position angulaire  $\theta$  converge, tandis que le déplacement  $x$  diverge, et dès que  $\theta$  atteint sa position désirée,  $x$  commence à converger. Cela s'explique par le fait que le retour d'état n'est activé que si la position angulaire  $\theta$  est très proche de la position désirée.

La position d'équilibre ( $x=0, \theta=0$ ) est atteinte après 12 sec, ce qui est un peu lent pour certaines applications.

Sans l'application du retour d'état, la position angulaire convergera, mais le déplacement  $x$  diverge. Donc on remarque l'intérêt de combiner le mode glissant et le retour d'état pour atteindre le point d'équilibre.

◆ *Pour le cas du deuxième pendule.*

La position d'équilibre a été rejointe après 12 sec, et cela toujours après l'ajout du retour d'état quand le système se rapprochait de la position d'équilibre de  $\theta$ .

Donc, pour les deux cas en accusait toujours une lenteur dans la convergence, ainsi que la nécessité d'un retour d'état qui ramenait le chariot vers la position d'équilibre. Néanmoins, la position d'équilibre de la loi de commutation correspond toujours à la position d'équilibre du système, ce qui explique la robustesse de cette commande vis à vis des perturbations externes, cause pour laquelle la commande par mode de glissement est fort estimée.

La deuxième approche, dite de la loi d'atteignabilité, est appliquée aux deux pendules inversés. Les résultats de simulation sont représentés dans les figures (3.3), (3.6).

*Pour les deux pendules, on remarque :*

La réduction du temps de convergence à 6 sec, ainsi que l'absence du broutement.

Donc on constate visiblement, que la deuxième approche réalise des performances meilleures avec moins d'effort de l'organe de commande. Sans oublier le fait qu'on aura pas besoin d'un retour d'état stabilisant, chose qui allège un peu l'algorithme de commande, et donc le temps de calcul.

De ce fait, on apportera plus d'intérêt à cette approche, et on fera des tests de robustesse vis à vis des variations paramétriques et des perturbations externes.

Les résultats des tests effectués sont représentés dans les figures (3.4), (3.5), (3.7), (3.8). Ces résultats apportent la preuve de la robustesse de la commande par mode de glissement, car la variation paramétrique de  $(M, m_1, m_2, l_1, l_2, \lambda)$  de 25% n'a pas modifié le temps de réponse, malgré que le régime transitoire a été affecté.

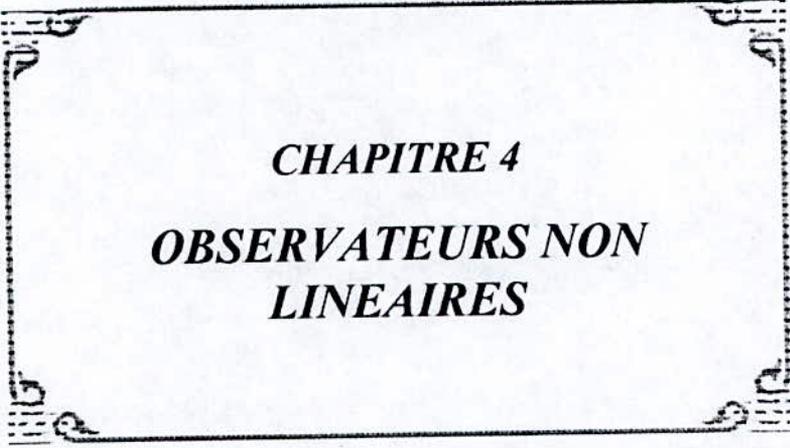
De plus, le système a tenu à rejeter les perturbations.

### 3.4 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons développé deux approches de commande, appliquée à deux pendules inversés.

L'insuffisance de la première approche prouve la difficulté de stabiliser les pendules inversés, pour cela, la deuxième approche a été introduite, elle permet de stabiliser le système, ainsi que d'éliminer le phénomène de broutement.

La robustesse de cette commande est prouvée à travers les résultats de simulation.



**CHAPITRE 4**  
**OBSERVATEURS NON**  
**LINEAIRES**

## Chapitre 4

# Observateurs non linéaires

### 4.1 Introduction :

Au début des années soixante, Kalman a fondé les premiers principes de la représentation d'état. Les automaticiens et mathématiciens de l'époque, ont combiné leurs efforts pour poser le fondement de la théorie moderne des systèmes linéaires. Une de leurs préoccupations était le problème de l'estimation des grandeurs d'état du système. De ce fait les observateurs linéaires ont vu le jour. L'avancement de l'automatique et l'expansion de celle-ci pour le cas des systèmes non linéaires, a fait perdre aux techniques linéaires beaucoup de leur brillance, au fur et à mesure que la théorie des systèmes non linéaires prenait de la place dans la pratique et dans la littérature de l'automatique. Cet état de fait s'est répercuté alors sur la théorie des observateurs non linéaires, car pour se conformer avec les nouvelles techniques de commandes non linéaires, les chercheurs ont proposé des méthodes non linéaires pour l'estimation des états du système.

Dans ce chapitre on va faire un peu de lumière sur deux types d'observateur non linéaire, qui diffèrent dans leurs structures et leurs fondements théoriques. D'abord on en parlera de l'observateur métrique, on abordera l'observateur par mode de glissement. L'application de ces deux observateurs et la simulation de leur comportement seront faits, avec application aux deux pendules, simple et double, et cela en boucle ouverte en premier lieu, puis en combinant la commande et l'observation.

## 4.2 Observateur métrique.

Différentes approches des observateurs non linéaires ont été abordées, l'une de ces approches est l'observateur métrique.

L'observateur métrique donne une méthode systématique d'estimer l'état d'un système non linéaire décrit par l'équation générale :

$$\ddot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad y = h(x) \quad (4.1)$$

La synthèse de l'observateur métrique se base sur une transformation adéquate des coordonnées

Dans ce paragraphe on établira les équations de l'observateur métrique et on étudiera sa convergence.

Soit le système variant suivant : [16]

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad y = h(x) \quad (4.2)$$

$y$  : représente les sorties ou les états mesurés;

$x$  : représente le vecteur des états internes ;

Etant donné que la commande  $u$  est fonction du temps et des états ou de leurs estimés, on peut sans perte de généralité considérer les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad , \quad y = h(x) \quad (4.3)$$

La forme de l'observateur est :

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y, t) \quad , \quad \hat{y} = h(\hat{x}) \quad (4.4)$$

$f, g, h$  étant lisse c'est à dire possèdent des dérivées continues de n'importe quel ordre.

Considérons une transformation de coordonnées : [16]

$$\tilde{x} = \tilde{x}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (4.5)$$

où pour tout  $\hat{y}$  la transformation  $\hat{x} \rightarrow \tilde{x}$  est inversible ?

La dynamique de l'observateur est donnée par : [16]

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{x}} (\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), \hat{y}) g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{y}} (\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), \hat{y}) \frac{\partial h}{\partial \hat{x}} (\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y})) g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Intégrant cette équation d'état en  $\tilde{x}$ , le résultat donne les variations de  $\tilde{x}$  au lieu de  $\hat{x}$  et pour avoir ce dernier il suffit de faire la transformée inverse  $\hat{x} = \hat{x}(\tilde{x}, \hat{y})$ .

La dynamique de  $\hat{x}$  obtenue de cette manière est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} \\ &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) \right) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}}\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}&= g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}, y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} \\ &= g(\hat{x}(\tilde{x}, \hat{y}), y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{y}} \dot{\hat{y}} \\ &\Rightarrow \dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y, t)\end{aligned}\quad (4.8)$$

On voit bien que la dynamique de l'observateur n'a pas été affectée par la transformation de coordonnées.

La sortie  $y$  est mesurable, en remplaçant  $\hat{y}$  par  $y$  mesuré l'équation dynamique de  $\tilde{x}$  devient :

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}}(\tilde{x}, y, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} (\tilde{x}(\tilde{x}, y), y, t) \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} (\tilde{x}(\tilde{x}, y)) g \quad (4.9)$$

Après avoir intégré cette équation dynamique on porte la valeur de  $\tilde{x}$  dans  $\hat{x} = \hat{x}(\tilde{x}, y)$ , la dynamique de  $\hat{x}$  obtenue par différentiation est alors :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \dot{y} \\ &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}(\tilde{x}, y), y, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}(\tilde{x}, y), y, t) \right) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \dot{y}\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}&= g(\hat{x}(\tilde{x}, y), y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} g(\hat{x}, y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \dot{y} \\ &= g(\hat{x}(\tilde{x}, y), y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \dot{y}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = g(\hat{x}(\tilde{x}, y), y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} (\dot{y} - \dot{y}) \quad (4.11)$$

Cette dernière équation nous montre que la dynamique de l'observateur dépend explicitement de  $\dot{y}$  alors que dans l'équation (4.9) ce n'était pas le cas, sa donne une alternative au concept de l'observateur linéaire qui utilise un terme de correction  $(y - \hat{y})$ .

Ce résultat sera traduit par le théorème suivant :

**Théorème : [16]**

Soit le système donné par l'équation dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.12}$$

L'équation originale de l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= g(\hat{x}, y, t) \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\tag{4.13}$$

se transforme a

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= g(\hat{x}, y, t) + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} (\dot{y} - \dot{\hat{y}}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\tag{4.14}$$

si l'équation  $\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}}(\tilde{x}, y, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} (\dot{y} - \dot{\hat{y}}) \frac{\partial h}{\partial \hat{x}}(\tilde{x}, y) g$  est intégrée au lieu de

l'équation  $\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{x}} (\dot{\hat{x}}(\tilde{x}, \hat{y}, t) + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{y}} (\dot{\hat{y}} - \dot{y}) \frac{\partial h}{\partial \hat{x}}(\tilde{x}, \hat{y})) g(\tilde{x}, \hat{y}, t)$ .

### 4.2.1 Observateur métrique d'ordre complet.[16]

Considérons un système donné par l'équation :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}\tag{4.14}$$

où

$x_2$  : représente les positions (mesurées)

$x_1$  : les vitesses (non mesurées)

La précision de l'estimation de la position peut être obtenue par l'équation de l'observateur suivante :

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 + \gamma(\hat{x}_2 - x_2)\tag{4.15}$$

Pour les vitesses on propose la structure de l'observateur suivante :

$$\dot{\hat{x}}_1 = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)\tag{4.16}$$

On choisissant la transformée de coordonnée

$$\tilde{x} = \hat{x}_1 + \gamma \hat{x}_2\tag{4.17}$$

et après substitution de  $\hat{x}_2$  par  $x_2$  on aura l'équation dynamique en  $\hat{x}_1$  suivante :

$$\dot{\hat{x}}_1 = f(\hat{x}_1, x_2, t) + \gamma(\hat{x}_1 - x_1) \quad (4.18)$$

#### 4.2.2 Observateur métrique d'ordre réduit.[16]

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2, t) \\ x_2 &= h(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ou

$x_1$  : représente les états interne non mesurés.

$x_2$  : représente les états mesurés.

La forme générale de l'observateur réduit est :

$$\dot{\hat{x}}_1 = g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t) \quad (4.20)$$

Considérons une transformation de coordonnées lisse  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ , réversible pour chaque valeur de  $\hat{x}_2$ .

Selon le théorème et avec la substitution de  $\hat{x}_2$  par  $x_2$ , la dynamique de  $\hat{x}_1$  devient :

$$\dot{\hat{x}}_1 = g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t) + \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2} \left( \dot{x}_2 - h(\hat{x}_1, x_2, t) \right) - f(x_1, x_2, t) \quad (4.21)$$

Un choix adéquat de  $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)$  garantit une convergence exponentielle de l'erreur vers le point d'équilibre.

Dans le cas des systèmes donnés par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

le choix de  $g$  et  $\tilde{x}$  se fait comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= f(\hat{x}_1, x_2, t) \\ \tilde{x}_1 &= \hat{x}_1 - \gamma \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

donc la dynamique de  $\hat{x}_1$  devient :

$$\dot{\hat{x}}_1 = f(\hat{x}_1, x_2, t) + \gamma(\hat{x}_1 - x_1) \quad (4.24)$$

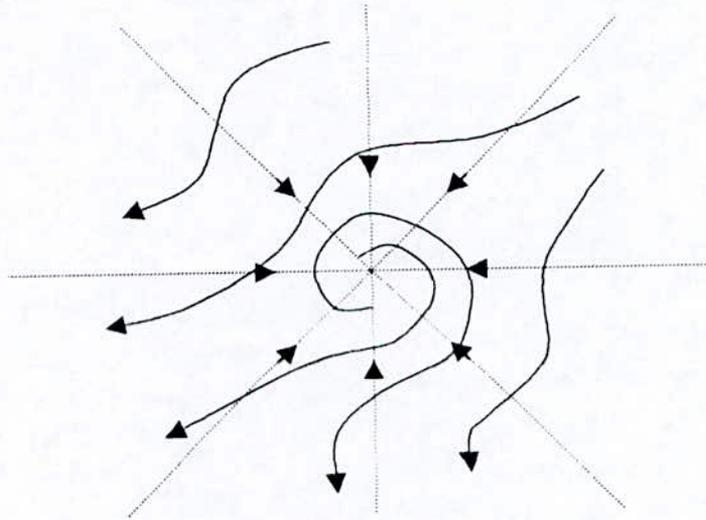


Figure ( 4.1) . Principe de l'observateur métrique.

Le principe de cet observateur est illustré à la figure ( ). Les traits continus représente le flux original autour du point d'équilibre. Le terme additionnel  $\gamma(\hat{x} - x)$  ajoute un champ d'écoulement radial centré vers le point d'équilibre. Cet écoulement doit être suffisamment fort pour garantir une convergence exponentielle.

### 4.2.3 Etude de la stabilité de l'observateur métrique.[16]

Dans ce paragraphe on établit une méthode générale pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaire.

Dans le formalisme de Lagrange , les coordonnées sont liées aux particules de l'écoulement du fluide, l'équation dynamique qui est du premier ordre donne la vitesse de la particule de l'écoulement à la position  $x$  et à l'instant  $t$ .

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (4.25)$$

Pour l'analyse de cette on prend une particule à l'instant initial  $t_0$  et à la position initiale  $x(t_0)$ , et on suit sa trajectoire, ce la est à l'origine de l'analyse des structures propre pour les systèmes linéaire, et de la théorie de LYAPUNOV por les systèmes non linéaires.

Ainsi pour chaque valeur initiale  $x(t_0)$  on pourra suivre l'évolution de la particule à chaque instant.

on a :

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x \quad (4.26)$$

$\delta x, \delta\dot{x}$  sont des déplacements virtuels à l'instant  $t_0$ .

Soit  $F$  le Jacobien de  $f$ , alors :

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f^T}{\partial x}(x, t) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f^T}{\partial x}(x, t) \right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}r \quad (4.28)$$

où :

$E$  : La partie symétrique de la déformation ;

$r$  : La partie asymétrique de la déformation ;

Dans la mécanique  $E$  représente le tenseur de déformation, et  $r$  le tenseur de déformation rotationnel.

*Définition.* [16]

Etant donné un système d'équations continu  $\dot{x} = f(x, t)$ , une région de l'espace est dite stricte négative (positive) de cette région si  $F$  ou  $E$  est uniformément définit.

$F$  est uniformément définie si :

$$\exists \beta > 0 \quad F(x, t) \leq -\beta I \leq 0 \quad \forall x, t \geq 0 \quad (4.29)$$

avec :  $I$  est une matrice identique

Considérons maintenant deux particules avec leurs voisinage immédiat, le carré de la distance entre ces deux particules est donnée par :

$$(ds)^2 = (\delta x)^2 \quad (4.30)$$

La stabilité du système est garantie si pour ces deux particules la trajectoire converge vers le même point c'est à dire que la distance entre eux diminue jusqu'à atteindre zero.

Le taux de variation de cette distance est donné par :

$$\frac{d}{dt}(\delta x)^2 = 2(\delta x)^T F(x, t)\delta x = \delta x^T E(x, t)\delta x \quad (4.31)$$

avec

$$E(x,t) = V^T(x,t)\Lambda(x,t)V(x,t) \quad (4.32)$$

où

$V(x,t)$  : matrice contenant les vecteurs propres de  $E(x,t)$

avec

$$V^T(x,t)V(x,t) = I \quad (4.33)$$

$\Lambda(x,t)$  : matrice diagonale qui contient les valeurs propres de  $E(x,t)$ .

Soit  $\lambda_{\max}(x,t)$  la plus grande valeur propre de  $E(x,t)$ , de l'équation (2) on aura :

$$\delta x^T E(x,t) \delta x \leq \lambda_{\max}(x,t) (\delta x)^2 \quad (4.34)$$

ce la implique :

$$\frac{d}{dt} (\delta x)^2 \leq \lambda_{\max}(x,t) (\delta x)^2 \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta x)^2}{(\delta x)^2} \leq \lambda_{\max}(x,t) dt$$

$$\Rightarrow (\delta x)^2 \leq (\delta x_0)^2 e^{2 \int_0^t \lambda_{\max}(x,t) dt}$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| e^{\int_0^t \lambda_{\max}(x,t) dt} \quad (4.36)$$

Donc la convergence exponentielle de  $\delta x$  est garantie si  $\lambda_{\max}(x,t)$  est uniformément strictement négative, dans ce cas toutes les particules qui se trouvent au voisinage de  $x(t_0)$  vont être emportées par l'écoulement vers le point d'équilibre.

Ce la est conforme au théorème suivant :

### **Théorème.[16]**

Soit le système décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \quad (4.37)$$

Si la condition initiale de ce système vérifie la condition (3) c'est à dire que  $x(t_0)$  se trouve dans une région contractée, alors ce système converge vers le point d'équilibre.

### 4.3 Observateur par mode de glissement. [13] [14] [19] [21]

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer le principe du mode de glissement pour la synthèse d'un observateur d'état non linéaire, et ce la pour exploiter les propriétés des modes glissant tel que la robustesse vis a vis des variations paramétriques.

Considérons les systèmes donnés par :

$$x^{(n)}(t) = f(X, t) + b(X, t) \tag{4.38}$$

où :

$$X^T(t) = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}] \tag{4.39}$$

Si on met  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , ...,  $x_n = x^{(n-1)}$ , la structure de l'observateur sera comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\alpha_1 \tilde{x}_1 + \hat{x}_2 - k_1 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\alpha_2 \tilde{x}_1 + \hat{x}_3 - k_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= -\alpha_n \tilde{x}_1 + \hat{f} - k_n \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \tag{4.40}$$

où :

$$\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$$

$\hat{f}$  : la valeur estimée de  $f$

Les constantes  $\alpha_i$  sont choisies comme dans l'observateur de LUENBERGER (ce qui correspond à  $k_i = 0$ ), de telle manière à avoir les pôles désirés, pour le système linéaire résultant.

Les  $k_i$  sont déterminés de la manière suivante :

Sur la surface de glissement la dynamique équivalente de l'observateur est définie par :

$$\det \left( SI_n - \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 & & \vdots \\ -\frac{k_4}{k_1} & 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -\frac{k_n}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{4.41}$$

où

$I_{n-1}$  : matrice identité de dimension  $(n-1)$

Donc les pôles sont donnés selon les  $\frac{k_i}{k_1}$ , un choix possible est de prendre  $k_n \geq |\Delta f|$  et  $k_1$  comme la précision désirée de  $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 - x_2$  avec :  $\Delta f = \hat{f} - f$

### 4.3.1 Convergence de l'observateur glissant : [14]

La structure donnée auparavant garantis la stabilité car :

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - k_1 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) - \alpha_1 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 - k_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) - \alpha_2 \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} = \tilde{x}_n - k_{n-1} \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) - \alpha_{n-1} \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_n = f - \hat{f} - k_n \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) - \alpha_n \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (4.42)$$

il évident qu'un choix adéquat des  $\alpha_i$  doit vérifier la condition suivante :

pour  $k_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  le système résultant doit avoir un comportement stable.

La condition d'attractivité de la surface  $\tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1 < 0$  donne :

◆ Si  $\tilde{x}_1 > 0$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1 - k_1 < 0 \\ \Rightarrow k_1 &> \tilde{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (4.43)$$

◆ Si  $\tilde{x}_1 < 0$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1 - k_1 > 0 \\ \Rightarrow k_1 &> -\tilde{x}_2 + \alpha_1 \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

donc :

$$k_1 > |\tilde{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1| \quad (4.45)$$

quand l'erreur rejoint la surface de glissement  $\tilde{x}_1 = \dot{\tilde{x}}_1 = 0$   
d'où

$$\operatorname{sgn}(\tilde{x}_1)_{eq} = \frac{\tilde{x}_2}{k_1} \quad (4.46)$$

remplaçant cette valeur dans (4.42) on trouvera :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -\frac{k_{n-1}}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{k_n}{k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

donc le choix des  $k_i$  mentionné auparavant garantis la stabilité de l'erreur.

$k_n$  peut être choisi comme suit :  $k_n > |\Delta f|$  à partir de la condition  $\tilde{x}_n \dot{\tilde{x}}_n < 0$ .

Pour ce qui concerne notre cas  $n = 2$  c'est à dire : [14] [30]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\alpha_1 \tilde{x}_1 + \hat{x}_2 - k_1 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\alpha_2 \tilde{x}_1 + \hat{f} - k_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (4.48)$$

La dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\alpha_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - k_1 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\alpha_2 \tilde{x}_1 + \Delta f - k_2 \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (4.49)$$

les  $\alpha_i, i = 1, 2$  sont déterminé pour avoir des pôles stables quand  $k_i = 0, i = 1, 2$

La condition d'attractivité  $\tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1 < 0$  donne :

$$k_1 > |\tilde{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1| \quad (4.50)$$

et quand l'erreur rejoint la surface de glissement  $\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 = 0$  (Invariance) on trouve :

$$\operatorname{sgn}(\tilde{x}_1)_{eq} = \frac{\tilde{x}_2}{k_1} \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 > 0 \quad (4.52)$$

on choisit une fonction de Lyapounov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{x}_2^2 \quad (4.53)$$

donc :

$$\dot{V} = \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 < 0 \quad (4.54)$$

♦ Si  $\tilde{x}_2 > 0$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= \Delta f - k_2 < 0 \\ \Rightarrow k_2 &> \Delta f \end{aligned} \quad (4.55)$$

♦ Si  $\tilde{x}_2 < 0$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= \Delta f + k_2 < 0 \\ \Rightarrow k_2 &> -\Delta f \end{aligned} \quad (4.56)$$

donc :

$$k_2 > |\Delta f| \quad (4.57)$$

### 4.3.2 Extension au cas générale des systèmes non linéaire. [14]

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) & x \in R^n \\ y &= Cx & y \in R^p \end{aligned} \quad (4.58)$$

On définit l'observateur par la structure :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, t) - H(y - \hat{y}) - kI_s \quad (4.59)$$

où :

$\hat{f}$  : représente notre modèle

$k$  : matrice de gain de dimension  $n \times p$

$H$  : matrice de gain de dimension  $n \times p$

$I_s$  : vecteur de dimension  $p$

$$I_s = [\text{sgn}(\tilde{y}_1), \dots, \text{sgn}(\tilde{y}_n)]^T \quad (4.60)$$

où :

$$\tilde{y}_i = c_i \hat{x} - y_i \quad (4.61)$$

On défini la surface comme étant le vecteur de l'erreur :

$$\sigma = \tilde{y} = c(\hat{x} - x) \quad (4.62)$$

Nous avons :

$$\dot{\hat{x}} = \Delta f - H\tilde{Z} - KI_s = \hat{f} \quad (4.63)$$

La surface de dimension  $p$  doit être attractive  $\Rightarrow \sigma, \dot{\sigma} < 0$

Les matrices  $H$  et  $K$  sont choisies de manière à satisfaire cette condition, la méthode de synthèse de  $H$  et  $K$  dépend de cas traité, c'est à dire de la forme de  $f$ .

En utilisant le principe de commande équivalente d'UTKIN on a : une fois le régime glissant établi,  $\sigma = 0, \dot{\sigma} = 0$

$$\Rightarrow \text{grad}(\sigma)\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{I}_s) = 0 \quad (4.64)$$

où :

$$\tilde{f} = \Delta f - H\tilde{Z} - k\tilde{I}_s \quad (4.65)$$

$\tilde{I}_s$  est le vecteur de glissement équivalent qui est obtenu par les équations précédentes.

on a

$$c(\Delta f - H\tilde{Z} - k\tilde{I}_s) = 0 \Rightarrow \tilde{I}_s = (ck)^{-1}c\Delta f \quad (4.66)$$

donc la dynamique de surface de glissement est :

$$\dot{\tilde{x}} = (I - k(ck)^{-1}c)\Delta f \quad (4.67)$$

#### 4.4 Application de l'observateur métrique sur les deux pendules inversés.

##### ◆ Pendule inversé simple.

L'équation dynamique de l'observateur est donnée dans ce cas par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{g}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v} + \gamma(\hat{x} - x)}{M + m \sin^2 \hat{\theta}} \\ \frac{ml\hat{\omega}^2 \sin \hat{\theta} - mg \sin \hat{\theta} \cos \hat{\theta} - \lambda_x \hat{v} + u(t)}{M + m \sin^2 \hat{\theta}} \\ \frac{\hat{\omega} + \gamma(\hat{\theta} - \theta)}{l(M + m \sin^2 \hat{\theta})} \\ \frac{-ml\hat{\omega}^2 \cos \hat{\theta} \sin \hat{\theta} + (M + m)g \sin \hat{\theta} + \lambda_x \cos \theta \hat{v} - u(t) \cos \hat{\theta}}{l(M + m \sin^2 \hat{\theta})} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

On effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \hat{x} \\ \tilde{v} &= \hat{v} + \gamma \hat{x} \\ \tilde{\theta} &= \hat{\theta} \\ \tilde{\omega} &= \hat{\omega} + \gamma \hat{\theta} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Cela donne la dynamique suivante en fonction des nouvelles variables :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{g}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{v} - \gamma x}{M + m \sin^2 \hat{\theta}} \left[ m(\tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta})^2 \sin \hat{\theta} - m g \sin \hat{\theta} \cos \hat{\theta} - \lambda_x (\tilde{v} - \gamma \hat{x}) + u(t) \right] \\ \tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta} \\ \frac{-m(\tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta})^2 \cos \hat{\theta} \sin \hat{\theta} + (M + m) g \sin \hat{\theta} + \lambda_x \cos \hat{\theta} (\tilde{v} - \gamma \hat{x}) - u(t) \cos \hat{\theta}}{l(M + m \sin^2 \hat{\theta})} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{v} - \gamma \hat{x} \\ 0 \\ \tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Remplaçant maintenant  $\hat{x}, \hat{\theta}$  par leurs valeurs mesurées on aura :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{g}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{v} - \gamma x}{M + m \sin^2 \theta} \left[ m(\tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta})^2 \sin \theta - m g \sin \theta \cos \theta - \lambda_x (\tilde{v} - \gamma x) + u(t) \right] \\ \tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta} \\ \frac{-m(\tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta})^2 \cos \theta \sin \theta + (M + m) g \sin \theta + \lambda_x \cos \theta (\tilde{v} - \gamma x) - u(t) \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{v} - \gamma x \\ 0 \\ \tilde{\omega} - \gamma \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Cette équation sera intégrée au lieu de (4.70). Une fois le résultat obtenu, on effectuera la transformation inverse des coordonnées. De cette manière la dynamique résultante sera :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{g}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}}{M + m \sin^2 \theta} \left[ m l \hat{\omega}^2 \sin \theta - m g \sin \theta \cos \theta \lambda_x \hat{v} + u(t) \right] \\ \hat{\omega} \\ \frac{-m l \hat{\omega}^2 \cos \theta \sin \theta + (M + m) g \sin \theta + \lambda_x \cos \theta \hat{v} - u(t) \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{bmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \hat{x} - x \\ \hat{v} - v \\ \hat{\theta} - \theta \\ \hat{\omega} - \omega \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Les simulations sont faites avec les valeurs numériques suivantes :

$$M=2\text{Kg}, \quad m=0.5\text{Kg} \quad l=0.5\text{m} \quad \gamma = -20 \quad \lambda_x = 5\text{N s/m}$$

◆ *Pendule inversé double.*

De la même manière précédente, on adopte la transformation des variables suivante :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \hat{x}, \quad \bar{\theta} = \hat{\theta} \\ \bar{v} &= \hat{v} + \gamma \hat{x}, \quad \bar{\omega} = \hat{\omega} + \gamma \hat{\theta} \\ \bar{\alpha} &= \hat{\alpha}, \quad \bar{\varphi} = \hat{\varphi} + \gamma \alpha \end{aligned} \quad (4.73)$$

La dynamique après les deux étapes de transformation et de substitution sera donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{v} - \gamma x$$

$$\dot{\tilde{v}} = \frac{l_1(\Delta_{11}m_{12}s\theta + \Delta_{31}m_{22}s(\theta, \alpha))(\tilde{\omega} - \gamma\theta)^2 + m_2l_2(\Delta_{11}s\alpha - l_1\Delta_{21}s(\theta, \alpha))(\tilde{\varphi} - \gamma\alpha)^2}{\det} + \frac{\Delta_{21}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{31}m_{22}l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{11}(\tilde{v} - \gamma x) + U_1}{\det} + \gamma(\tilde{v} - \gamma x)$$

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{\omega} - \gamma\theta \quad (4.74)$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = \frac{l_1(\Delta_{12}m_{12}s\theta + \Delta_{32}m_{22}s(\theta, \alpha))(\tilde{\omega} - \gamma\theta)^2 + m_2l_2(\Delta_{12}s\alpha - l_1\Delta_{22}s(\theta, \alpha))(\tilde{\varphi} - \gamma\alpha)^2}{\det} + \frac{\Delta_{22}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{32}m_{22}l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{12}(\tilde{v} - \gamma x) + U_2}{\det} + \gamma(\tilde{\omega} - \gamma\theta)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \tilde{\varphi} - \gamma\alpha$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \frac{l_1(\Delta_{13}m_{12}s\theta + \Delta_{33}m_{22}s(\theta, \alpha))(\tilde{\omega} - \gamma\theta)^2 + m_2l_2(\Delta_{13}s\alpha - l_1\Delta_{23}s(\theta, \alpha))(\tilde{\varphi} - \gamma\alpha)^2}{\det} + \frac{\Delta_{23}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{33}m_{22}l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{13}(\tilde{v} - \gamma x) + U_3}{\det} + \gamma(\tilde{\varphi} - \gamma\alpha)$$

Cette équation est intégrée, et la transformation inverse sera effectuée sur le résultat. La dynamique de l'observateur est :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{v} + \gamma(\hat{x} - x)$$

$$\dot{\hat{v}} = \frac{l_1(\Delta_{11}m_{12}s\theta + \Delta_{31}m_{22}s(\theta, \alpha))\hat{\omega}^2 + m_2l_2(\Delta_{11}s\alpha - l_1\Delta_{21}s(\theta, \alpha))\hat{\varphi}^2}{\det} + \frac{\Delta_{21}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{31}m_{22}l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{11}\hat{v} + U_1}{\det} + \gamma(\hat{v} - v)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega} + \gamma(\hat{\theta} - \theta) \quad (4.75)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = \frac{l_1(\Delta_{12}m_{12}s\theta + \Delta_{32}m_{22}s(\theta, \alpha))\hat{\omega}^2 + m_2l_2(\Delta_{12}s\alpha - l_1\Delta_{22}s(\theta, \alpha))\hat{\varphi}^2}{\det} + \frac{\Delta_{22}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{32}m_{22}l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{12}\hat{v} + U_2}{\det} + \gamma(\hat{\omega} - \omega)$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = \hat{\varphi} + \gamma(\hat{\alpha} - \alpha)$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = \frac{l_1(\Delta_{13}m_{12}s\theta + \Delta_{33}m_2l_2s(\theta, \alpha))\hat{\omega}^2 + m_2l_2(\Delta_{13}s\alpha - l_1\Delta_{23}s(\theta, \alpha))\hat{\varphi}^2}{\det} + \frac{\Delta_{23}m_{12}gl_1s\theta + \Delta_{33}m_2l_2gs\alpha - \lambda_x\Delta_{13}\hat{v} + U_3}{\det} + \gamma(\hat{\varphi} - \varphi)$$

les simulations sont faites avec les valeurs numériques suivantes :

$$M=2Kg, m = m_2 = 0.5Kg, l_1 = l_2 = 0.5m, I = 0.83Kgm^2, \lambda_x = 5Ns/m$$

Remarque :

On a adopté les mêmes notations que celles utilisées lors de la modélisation

### 4.5 Application de l'observateur glissant.

#### ◆ Pendule inversé simple

La structure de cet observateur set donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - \alpha_1 \tilde{x}_1 - k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{f} - \alpha_2 \tilde{x}_1 - k_2 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \tag{4.76}$$

où :

$\hat{x}_1$  est l'estime de la position

$\hat{x}_2$  est l'estime de la vitesse

$\tilde{x}_1$  est l'erreur d'estimation de la position.

Nous avons deux positions et deux vitesses, on aura donc l'équation dynamique suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{\varphi}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v} - \alpha_1 \tilde{x}_1 - k_1 \text{sa}(\tilde{x}_1)}{M + m \sin^2 \theta} - \alpha_{12} \tilde{x}_1 - k_{12} \text{sa}(\tilde{x}_1) \\ \frac{m \hat{\omega}^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta - \lambda_x \hat{v} + u(t)}{M + m \sin^2 \theta} \\ \frac{\hat{\omega} \alpha_2 \tilde{x}_1 + k_2 \text{sgn}(\tilde{x}_1)}{I(M + m \sin^2 \theta)} \\ \frac{-m \hat{\omega}^2 \cos \theta \sin \theta + (M + m)g \sin \theta + \lambda_x \cos \theta \hat{v} - u(t) \cos \theta}{I(M + m \sin^2 \theta)} + \alpha_{22} \tilde{x}_1 + k_{22} \text{sa}(\tilde{x}_1) \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

Les simulations ont été faites avec les mêmes valeurs numériques pour les masses et les longueurs et avec :

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = 200, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 20$$

$$k_{11} = k_{21}, \quad k_{12} = 250, \quad k_{22} = 400$$

♦ *Pendule inversé double.*

De la même manière précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\omega}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v} - \alpha_{11}\tilde{x} - k_{11}sat(\tilde{x}) \\ \hat{f}_1 - \alpha_{12}\tilde{x} - k_{12}sat(\tilde{x}) \\ \hat{\omega} - \alpha_{21}\tilde{\theta} - k_{21}sat(\tilde{\theta}) \\ \hat{f}_2 - \alpha_{22}\tilde{\theta} - k_{22}sat(\tilde{\theta}) \\ \hat{\phi} - \alpha_{31}\tilde{\alpha} - k_{31}sat(\tilde{\alpha}) \\ \hat{f}_3 - \alpha_{32}\tilde{\alpha} - k_{32}sat(\tilde{\alpha}) \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Les  $\hat{f}_i$  désignent les fonctions estimées du modèle

Pour la simulation on a pris les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 200, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{32} = 20, \quad k_{13} = k_{21} = k_{31} = 0.05$$

$$k_{32} = k_2 = 400, \quad k_{12} = 250$$

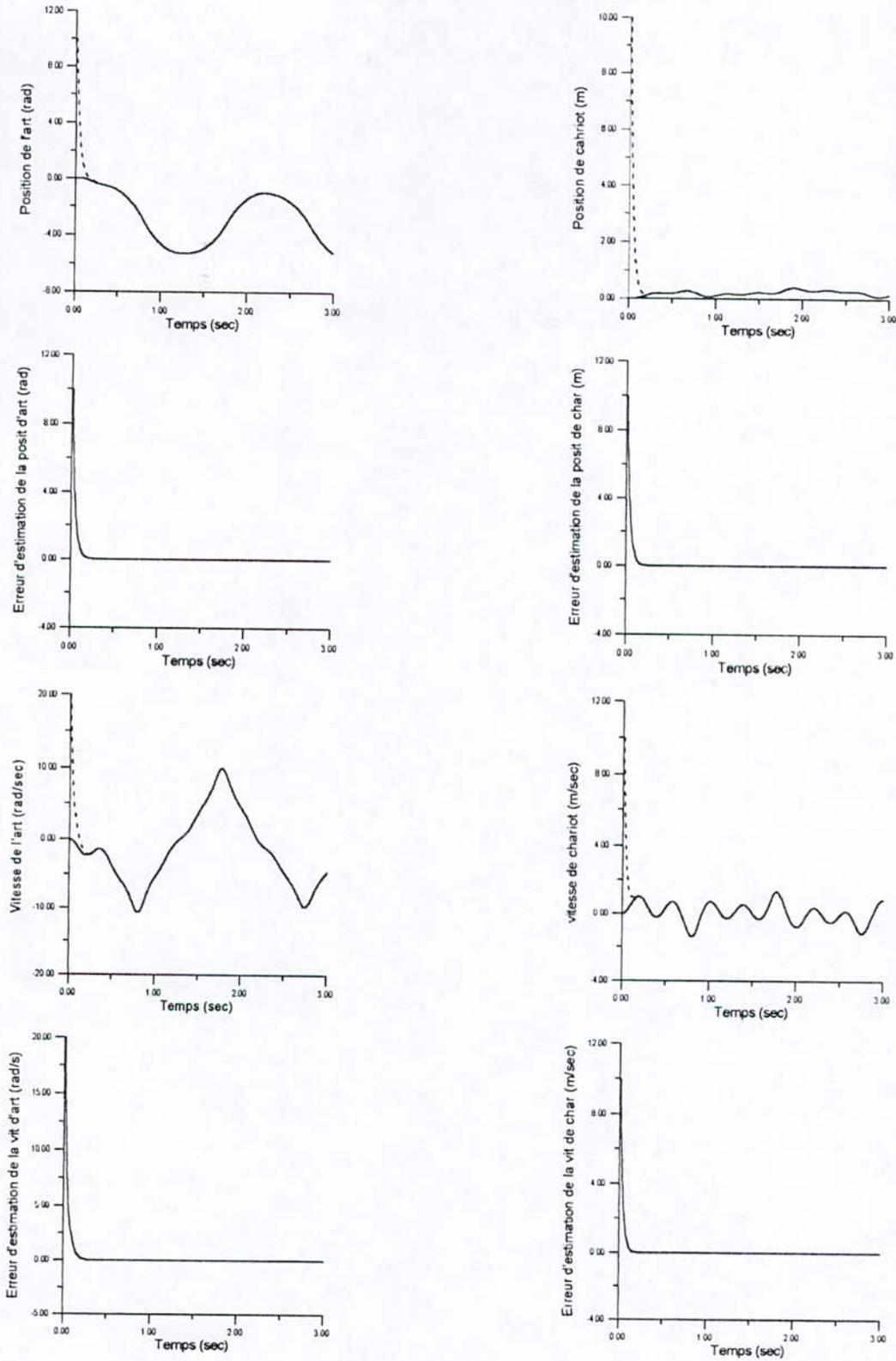


Figure (4.2) - Application de l'observateur métrique sur le premier pendule.

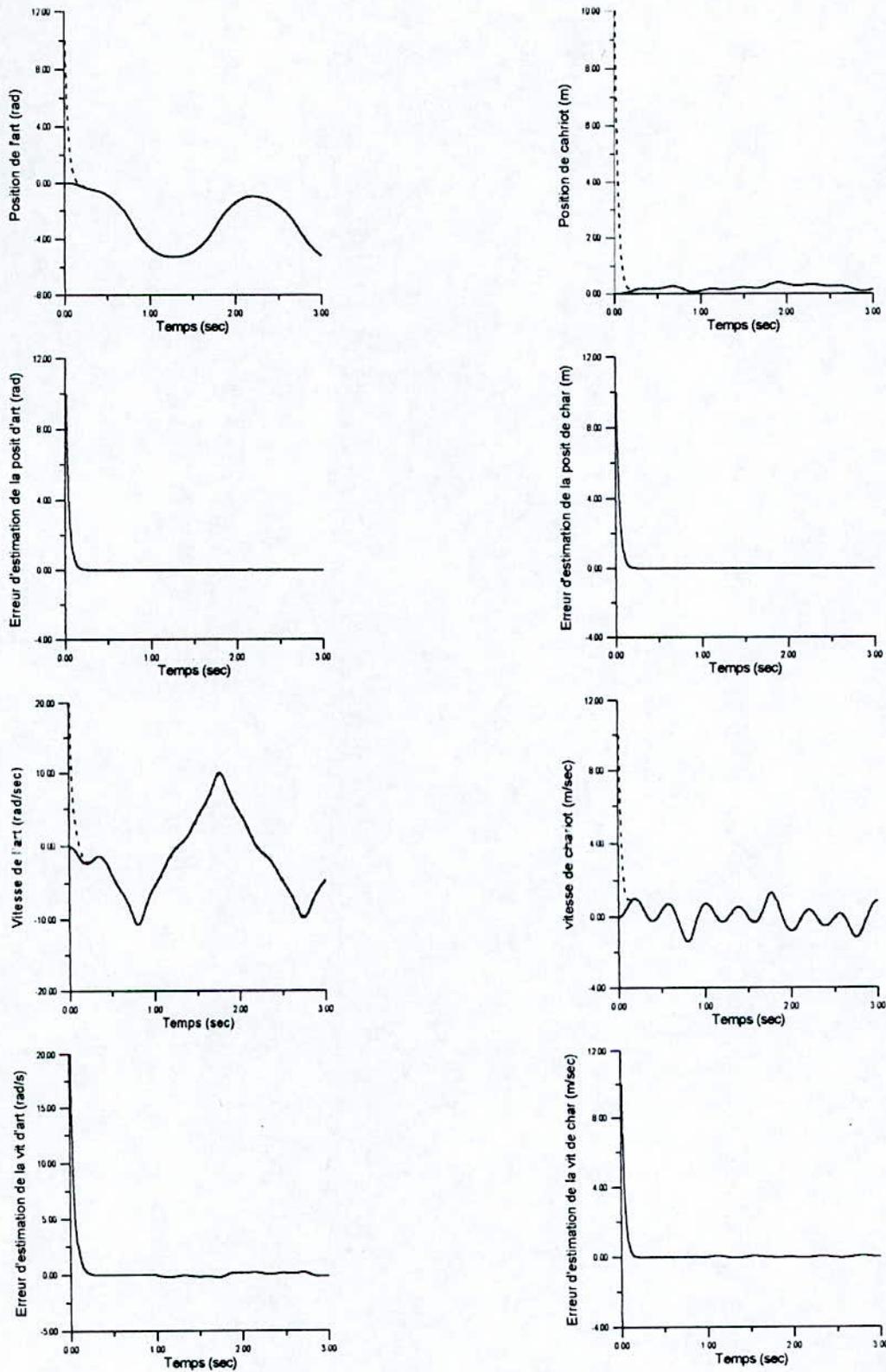


Figure (4.3) - Application de l'observateur métrique sur le premier pendule avec une variation paramétrique de 25% à partir de l'instant  $t=1$ (sec).

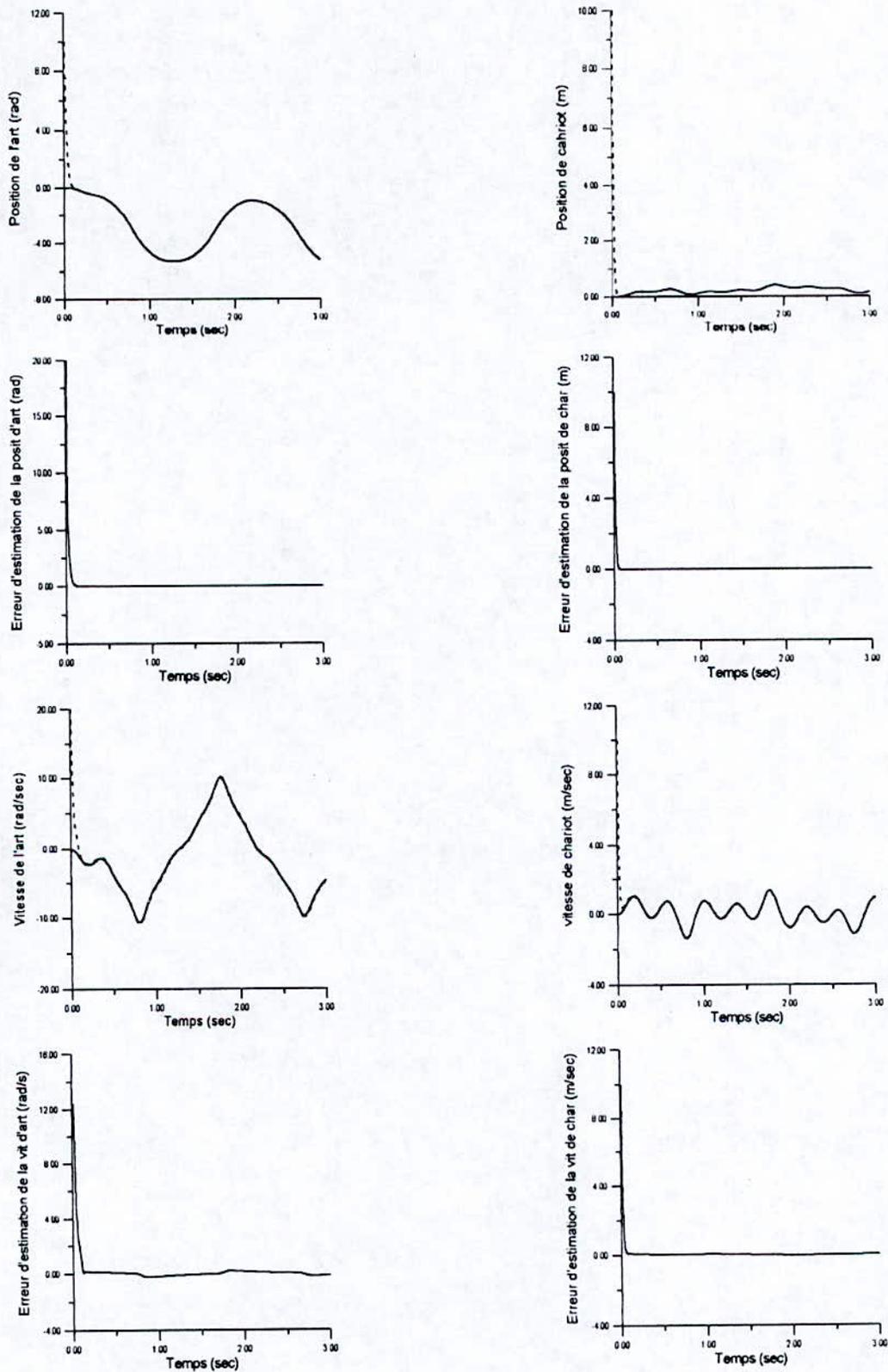


Figure (4.4) - Application de l'observateur par mode de glissement sur le premier pendule inversé.

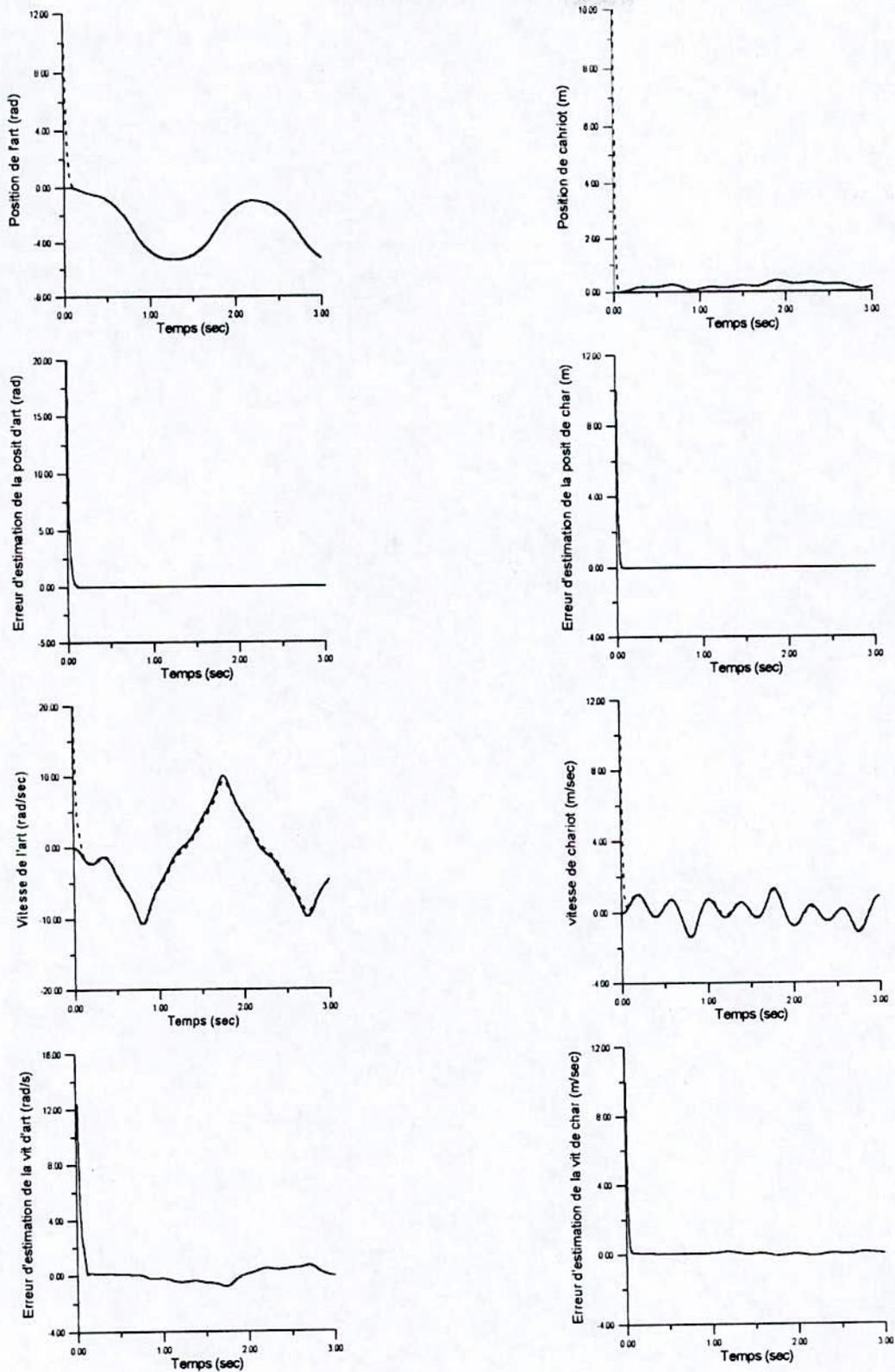


Figure (4.5) - Application de l'observateur par mode de glissement sur le premier pendule inversé avec une variation paramétrique de 20% à partir de l'instant  $t = 1$ (sec).

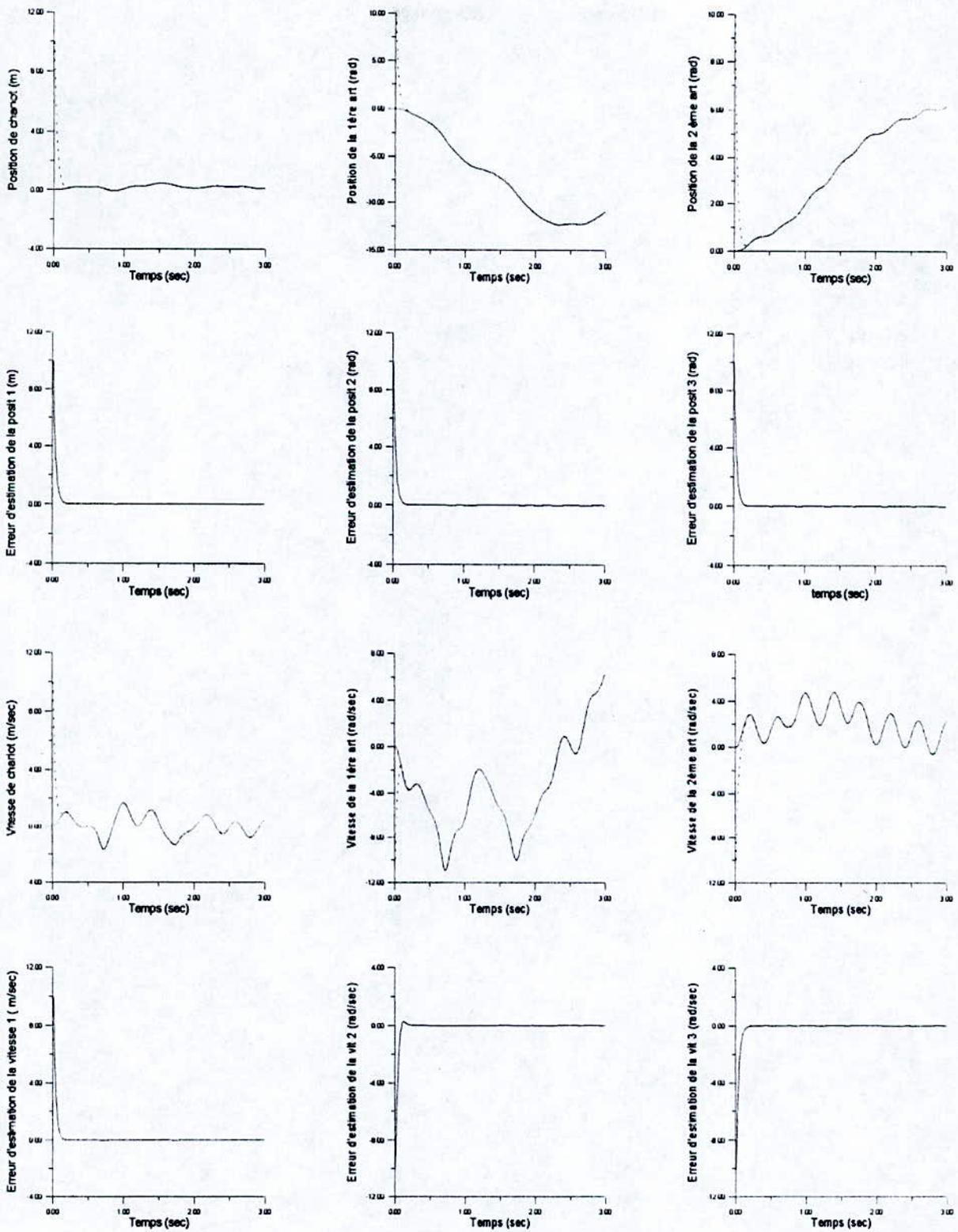


Figure (4.6) - Application de l'observateur métrique sur le deuxième pendule inversé.

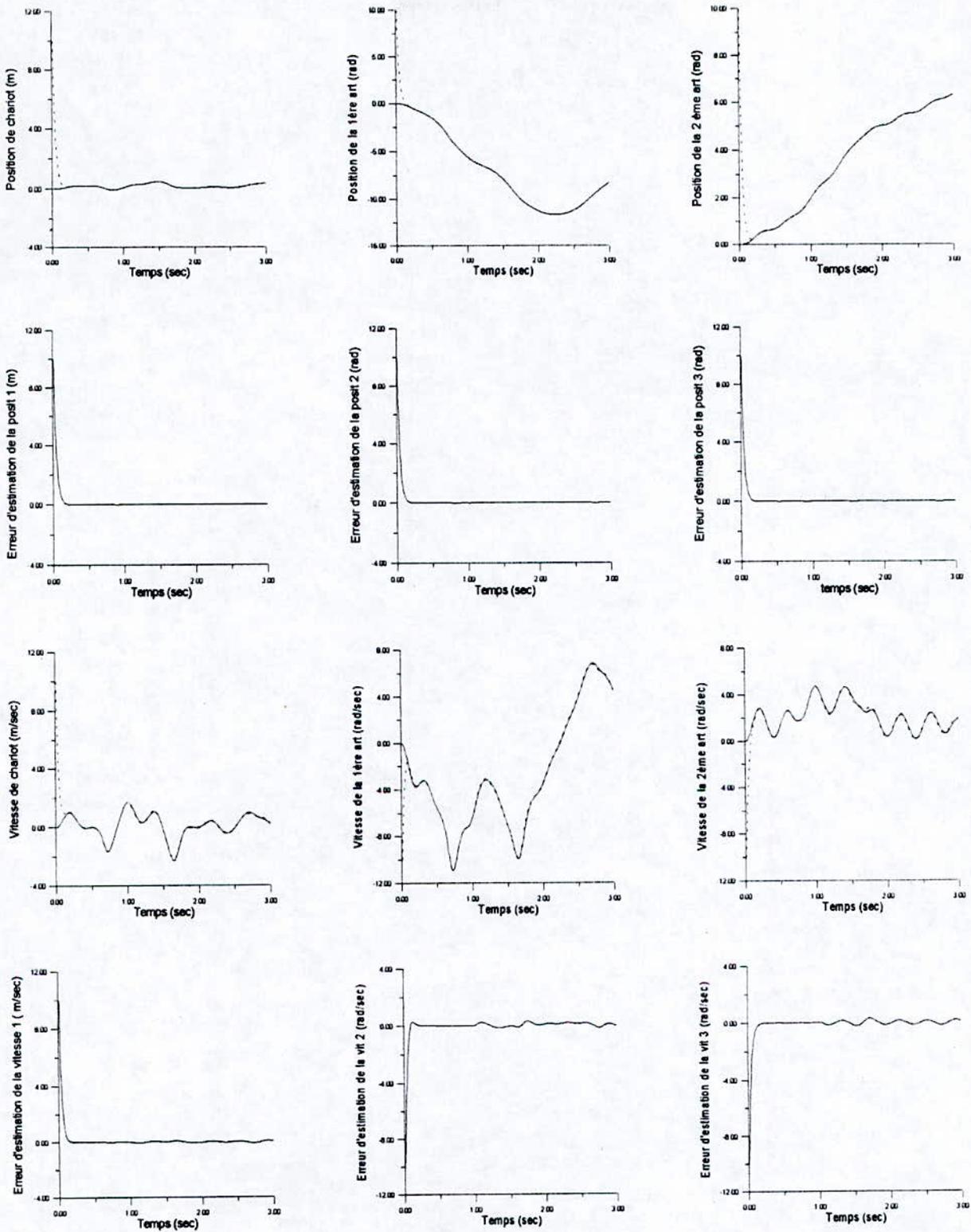


Figure (4.7) - Application de l'observateur métrique sur le deuxième pendule inversé avec une variation paramétrique de 25% à partir de l'instant  $t=1$ (sec)

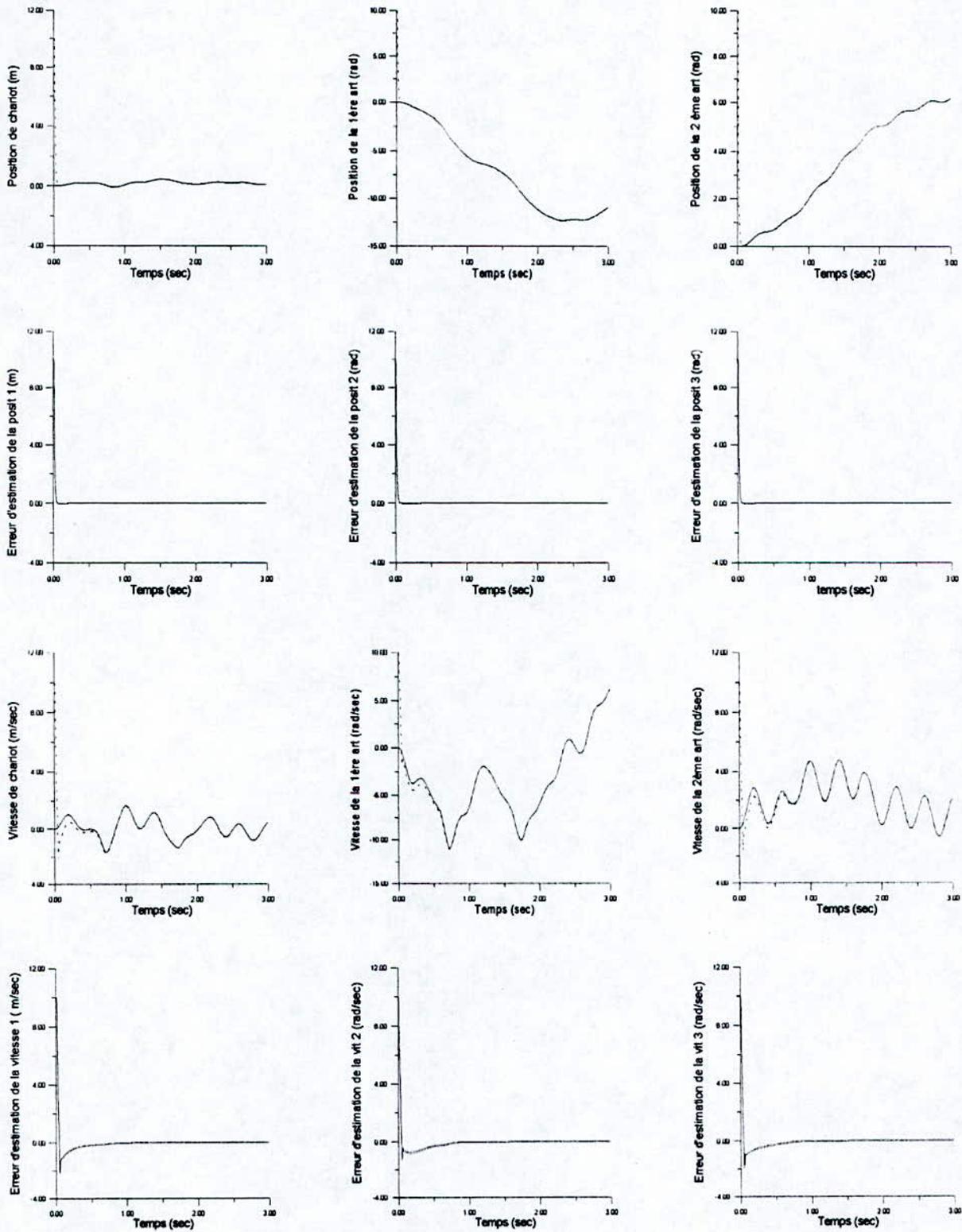


Figure (4.8) - Application de l'observateur par mode de glissement sur le deuxième pendule inversé.

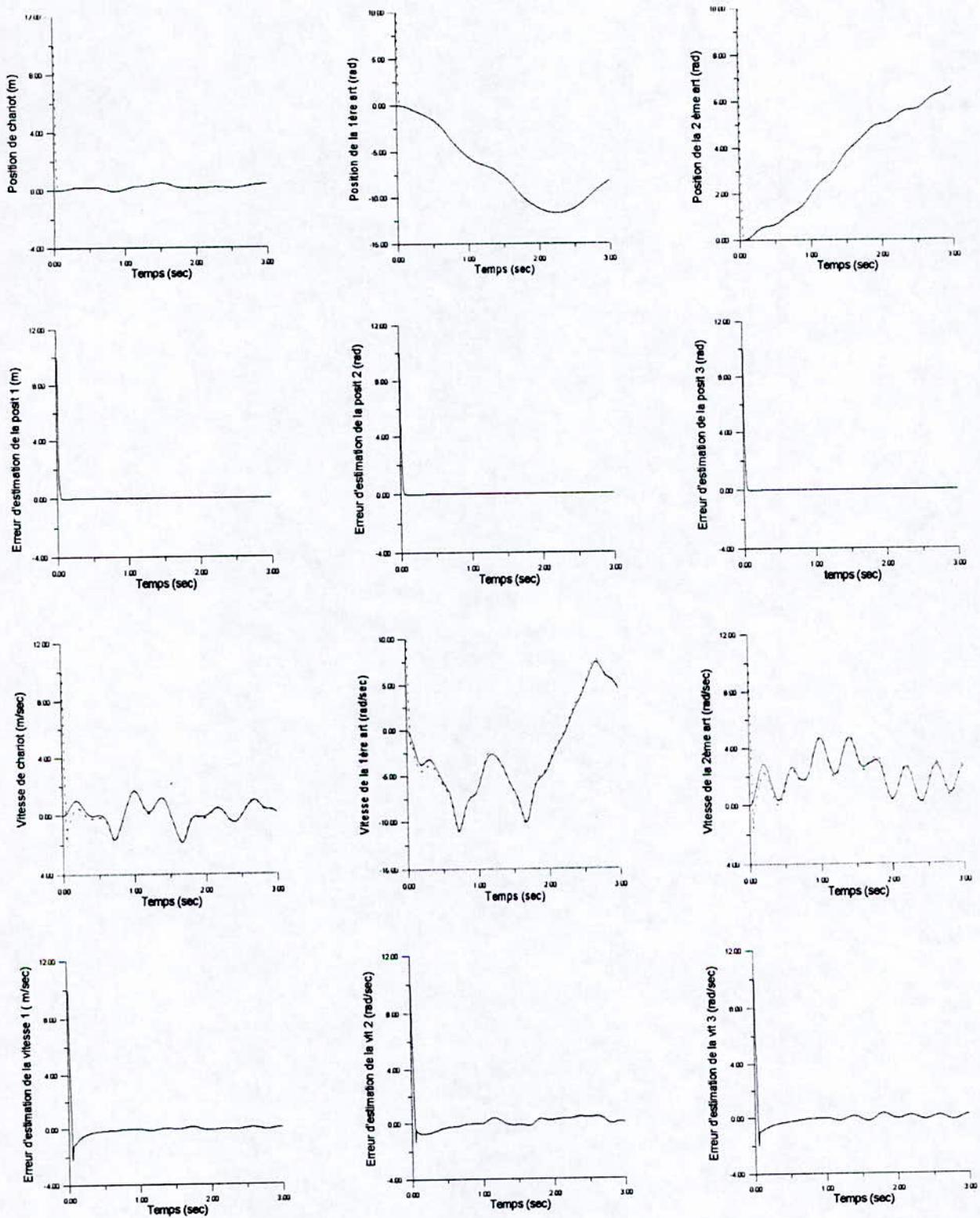


Figure (4.9) - Application de l'observateur par mode de glissement sur le deuxième pendule avec une variation paramétrique de 20% à partir de l'instant  $t = 1$ (sec).

## 4.6 Résultats de simulation

### ♦ En boucle ouverte

Les figures (4.2), (4.4), (4.6), (4.8) montre le comportement des observateurs métrique et glissant appliqués sur les deux pendules pour une entrée ( $u = 20\sin(5\pi t)$ ) à partir des conditions initiales différentes. On constate que la convergence des deux observateurs est rapide car l'erreur d'estimation s'annule après un temps très court ( $<0.2\text{sec}$ ).

On remarque aussi que l'erreur de l'estimation de la vitesse est plus petite dans le cas de l'observateur métrique.

- L'observateur métrique est plus robuste vis à vis des variations paramétriques que l'observateur glissant (20% pour l'observateur glissant et 25% pour l'autre), cela dépend peut être des paramètres intervenant lors de la synthèse des observateurs. Voir les figures (4.3), (4.5), (4.7), (4.9).

- L'observateur par mode de glissement donne une estimation précise que le métrique.

- La variation paramétrique perturbe un petit peu la convergence et engendre une erreur bornée qui tend à s'annuler.

- L'estimation de la vitesse est toujours moins précise que l'estimation de la position, et cela pour les deux observateurs.

- La différence entre l'observateur métrique et l'observateur glissant est plus apparente.

- Apparemment l'observateur glissant rejoint la trajectoire réelle plus rapidement, mais il reste moins précis et moins robuste que l'observateur métrique. Cela ne permet pas de tirer des conclusions suffisamment fiables, seul une étude approfondie des deux observateurs peut conformer les résultats.

### ♦ En boucle fermée.

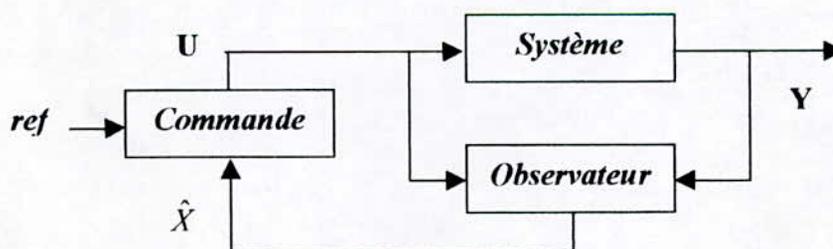
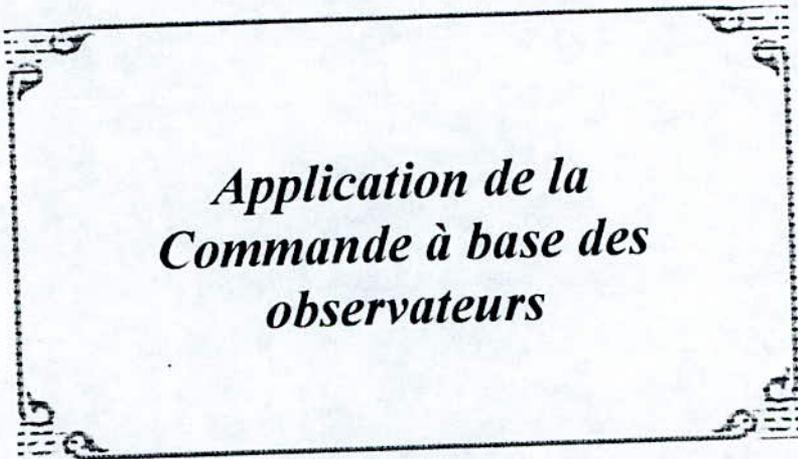


Figure (4) Commande avec observateur

Nous avons combiné la commande et l'observation, et cela en remplaçant les grandeurs estimées dans la loi de commande.



*Application de la  
Commande à base des  
observateurs*

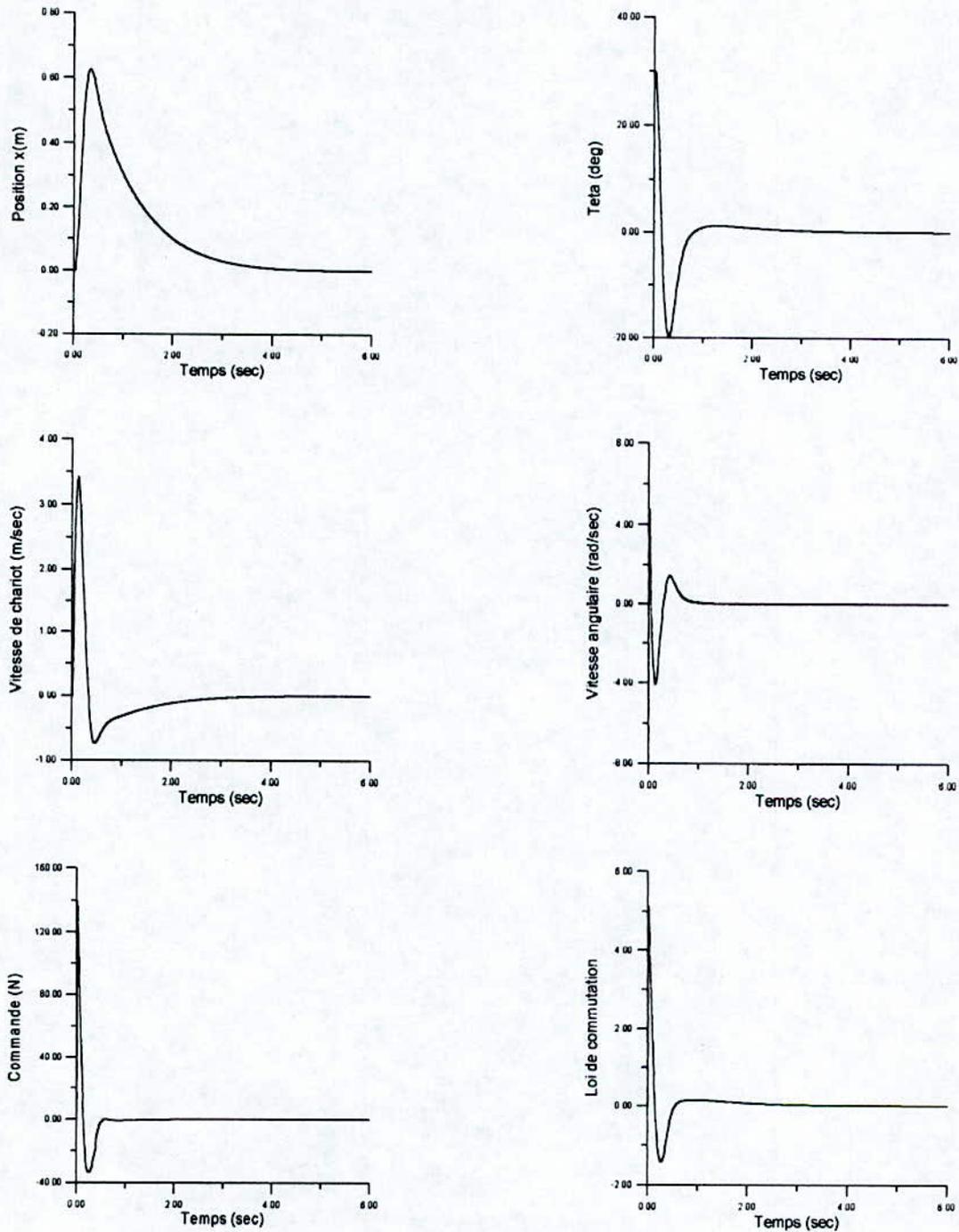
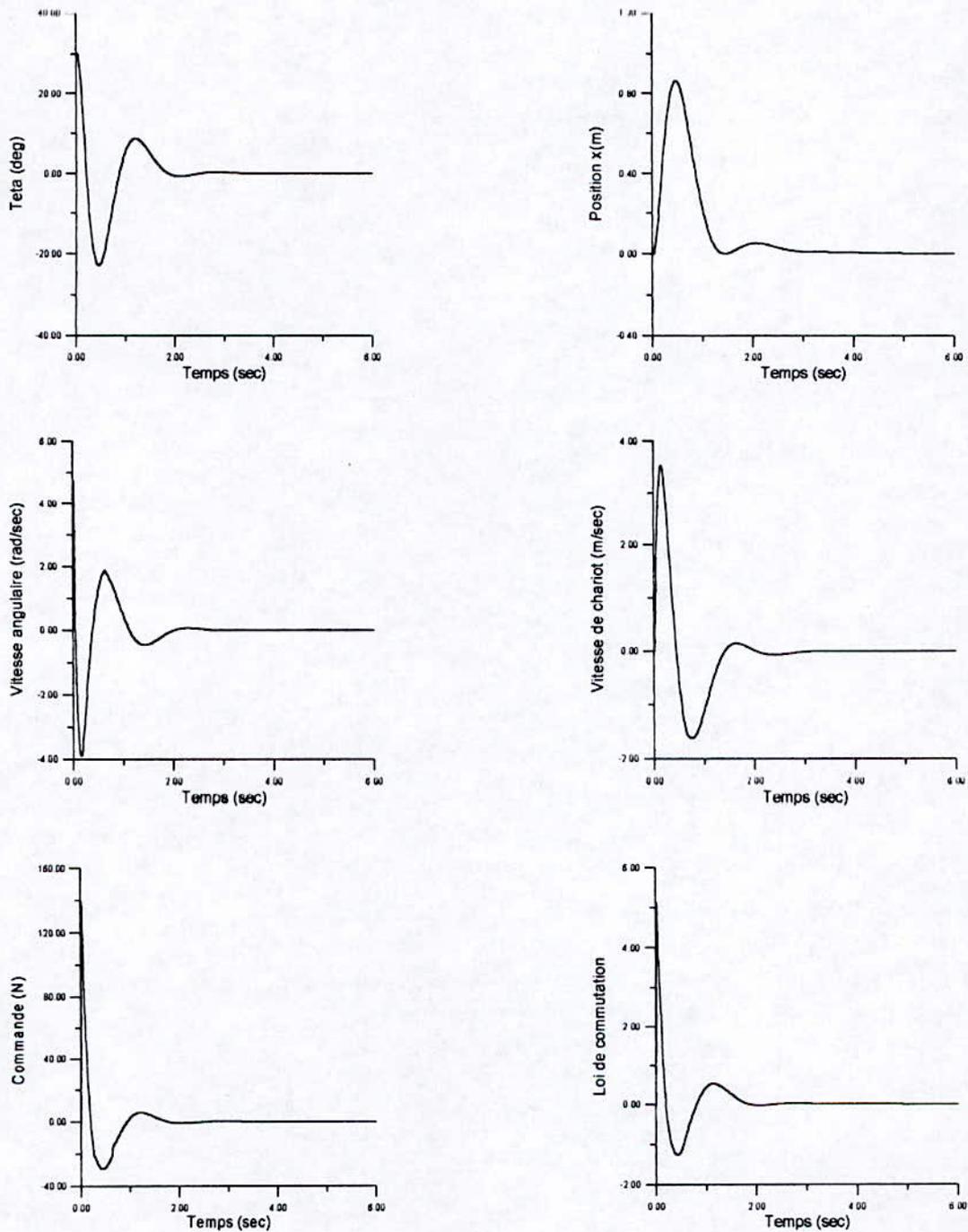
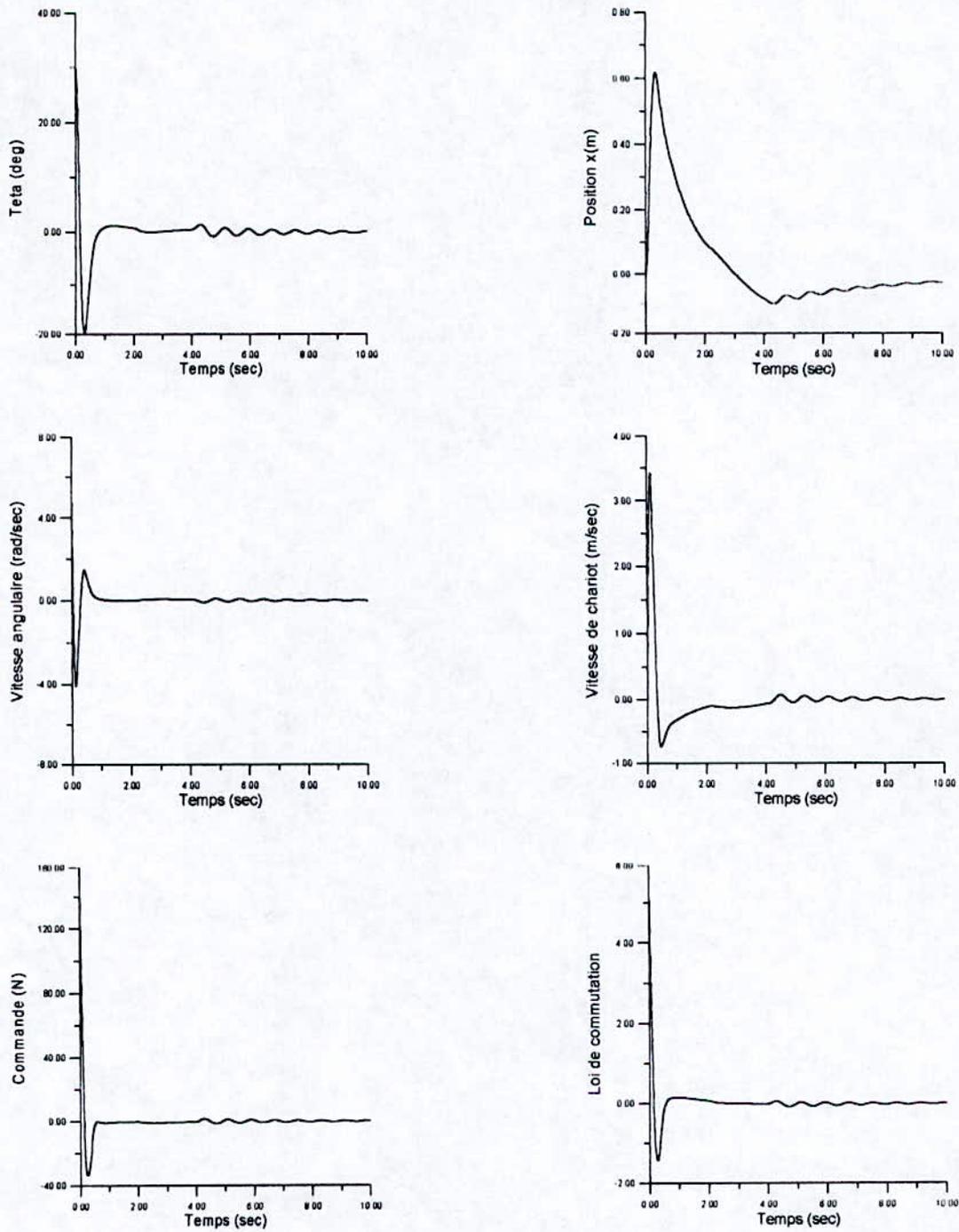


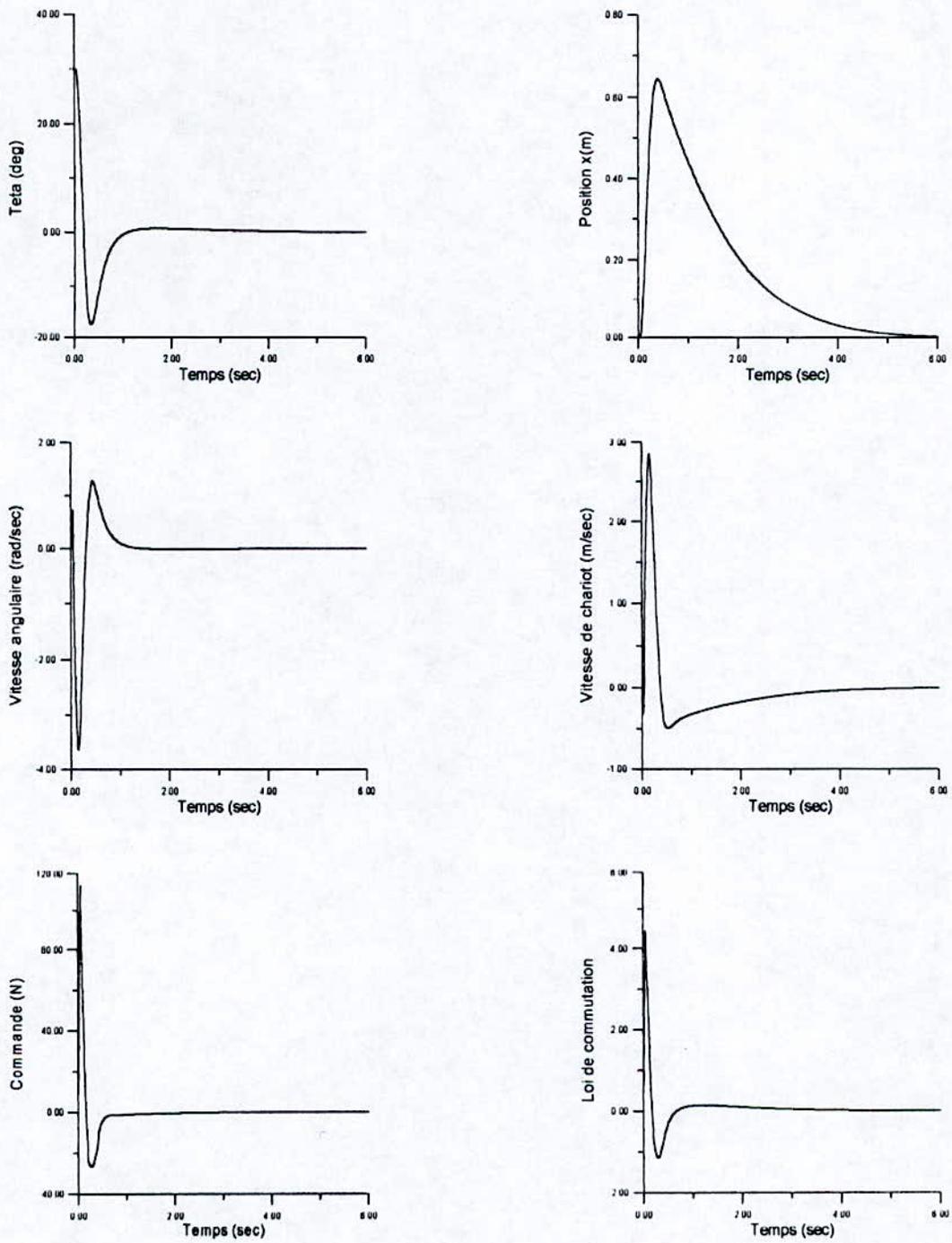
Figure (4.10) - Application de la commande avec observateur métrique sur le premier pendule inversé.



**Figure (4.11)** - Application de la commande avec observateur métrique sur le premier pendule inversé avec une variation paramétrique de 25%.



**Figure (4.12)** - Application de la commande avec observateur métrique sur le premier pendule avec des perturbations externes ( $f=+15, -15(Ns/m)$ ) à partir des instants ( $t_1=2, t_2=4$  (sec)).



**Figure (4.13)** - Application de la commande avec observateur par mode de glissement sur le premier pendule inversé.

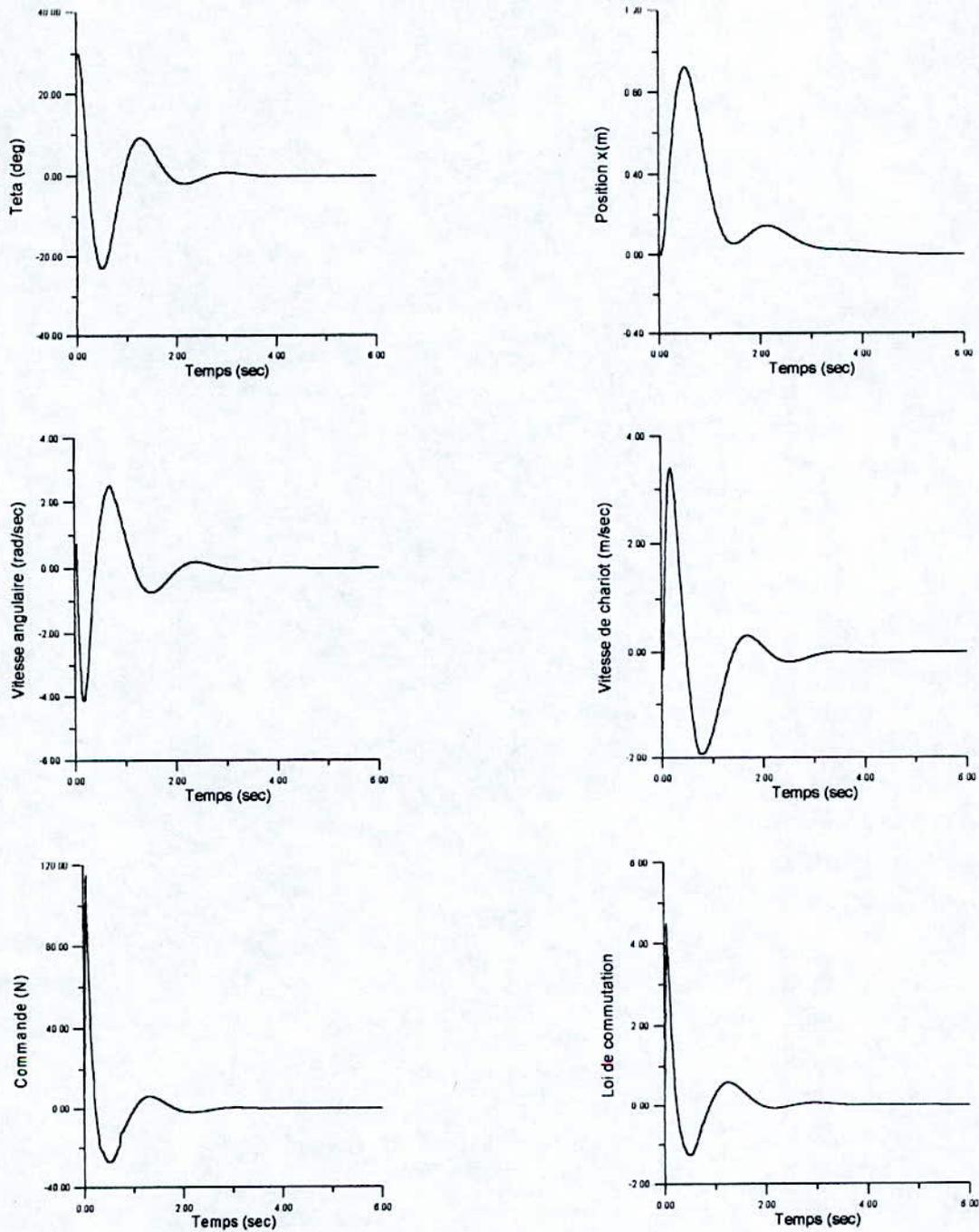


Figure (4.14) - Application de la commande avec observateur par mode de glissement sur le premier pendule inversé avec une variation paramétrique de 25%

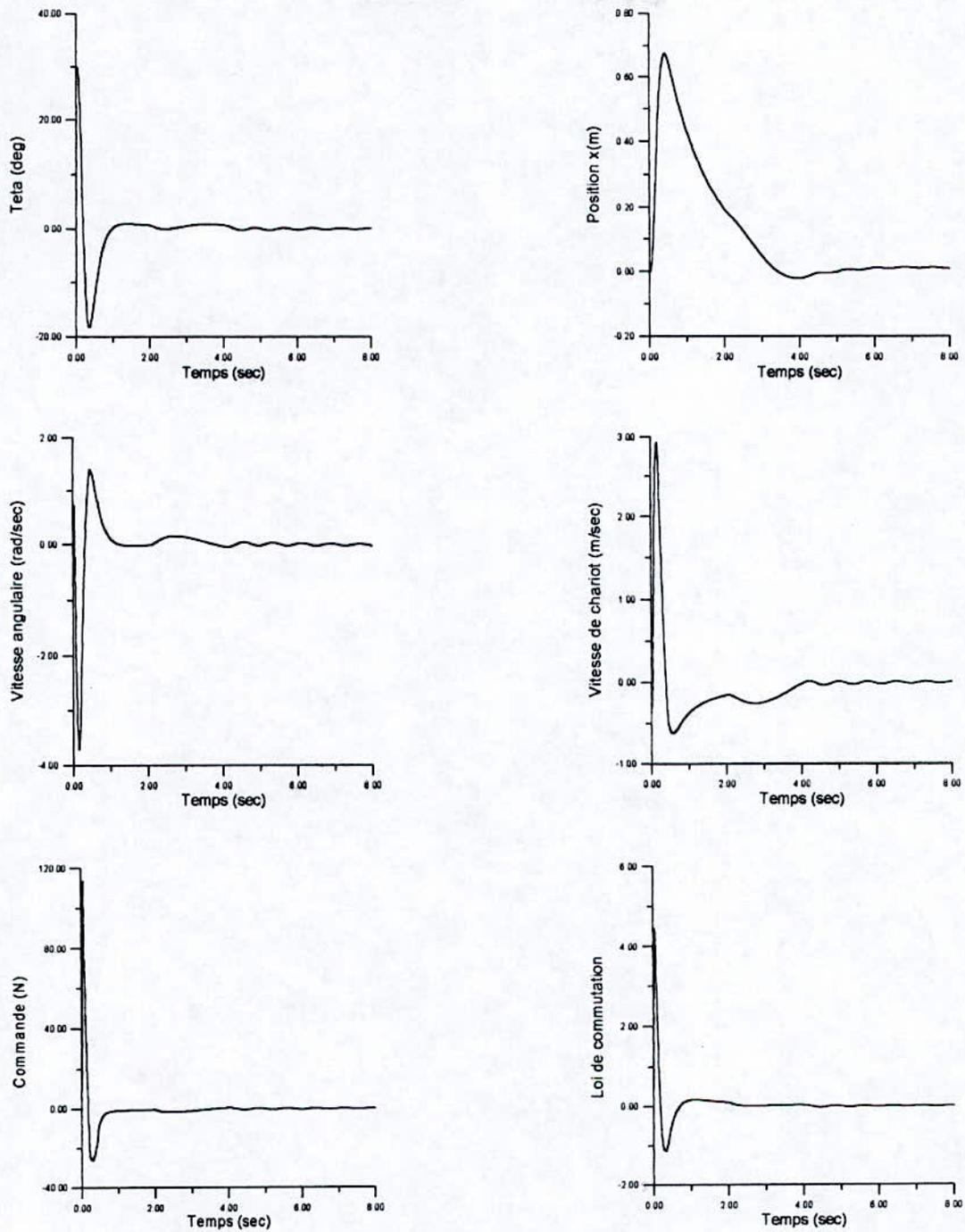


Figure (4.15) - Application de la commande avec observateur par mode de glissement avec des perturbations externes à partir des instants ( $t_1=2$ ,  $t_2=4$  (sec)).

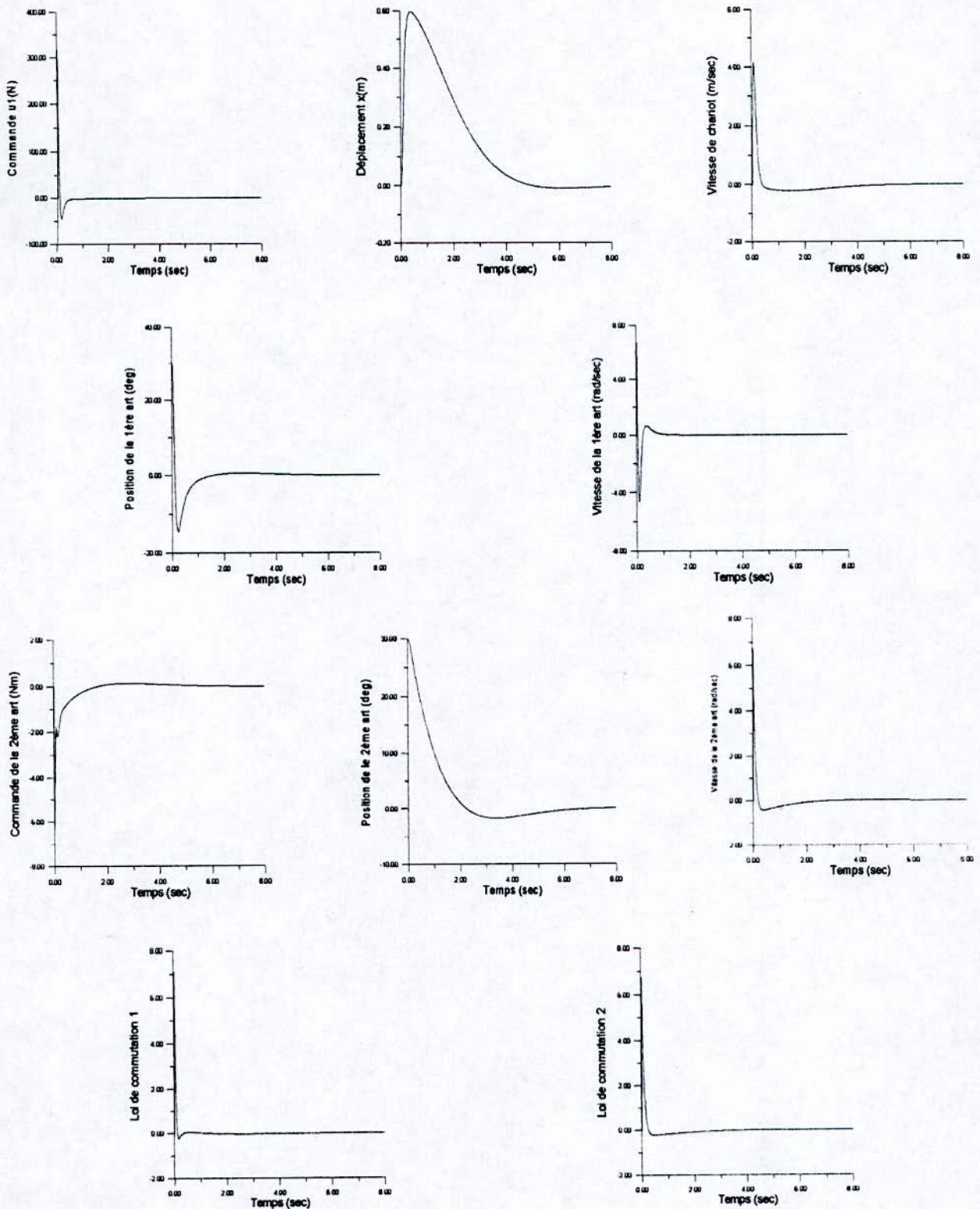


Figure (4.16) - Application de la commande avec observateur métrique sur le deuxième pendule inversé.

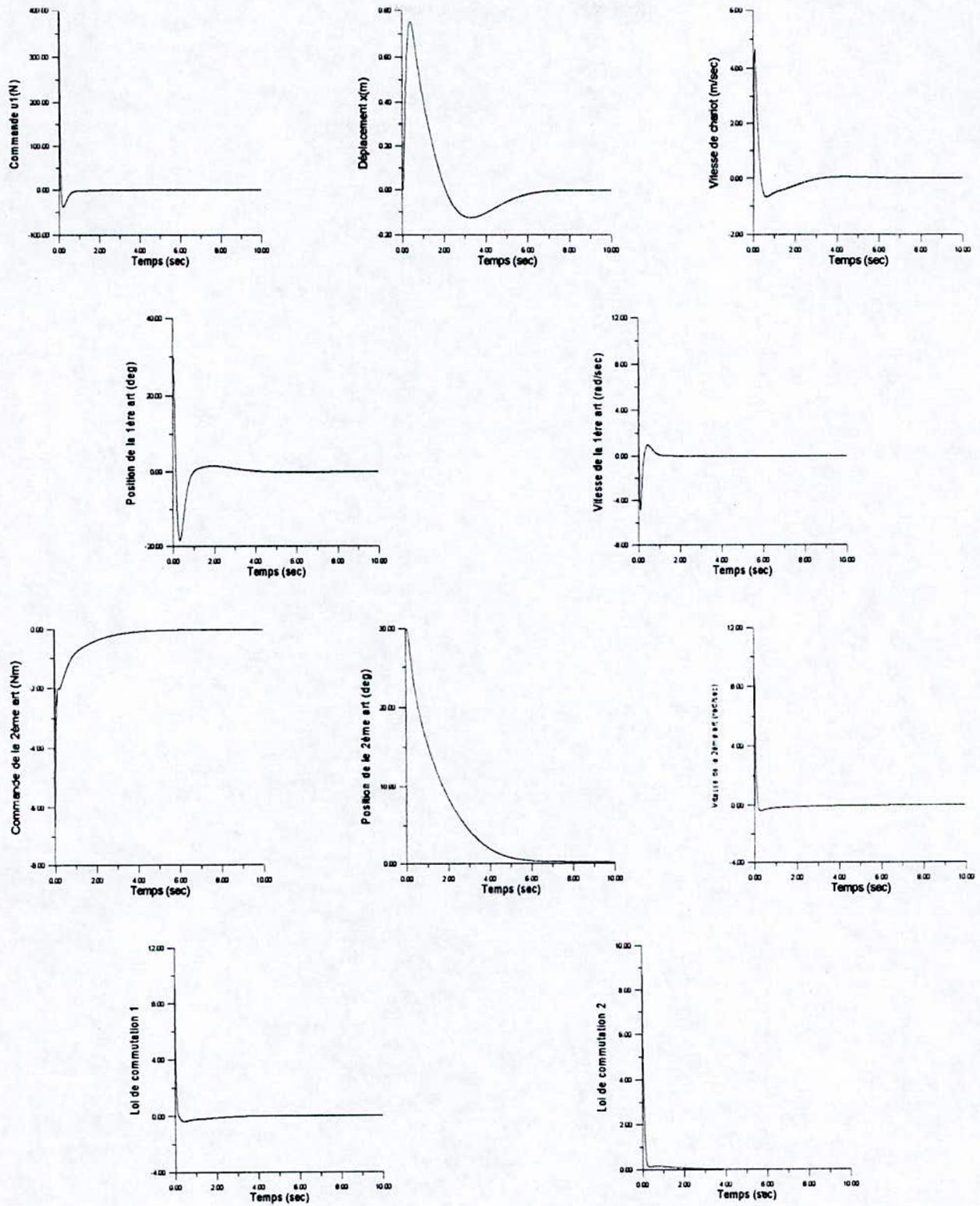


Figure (4.17) - Application de la commande avec observateur métrique sur le deuxième pendule avec une variation paramétrique de 20%.

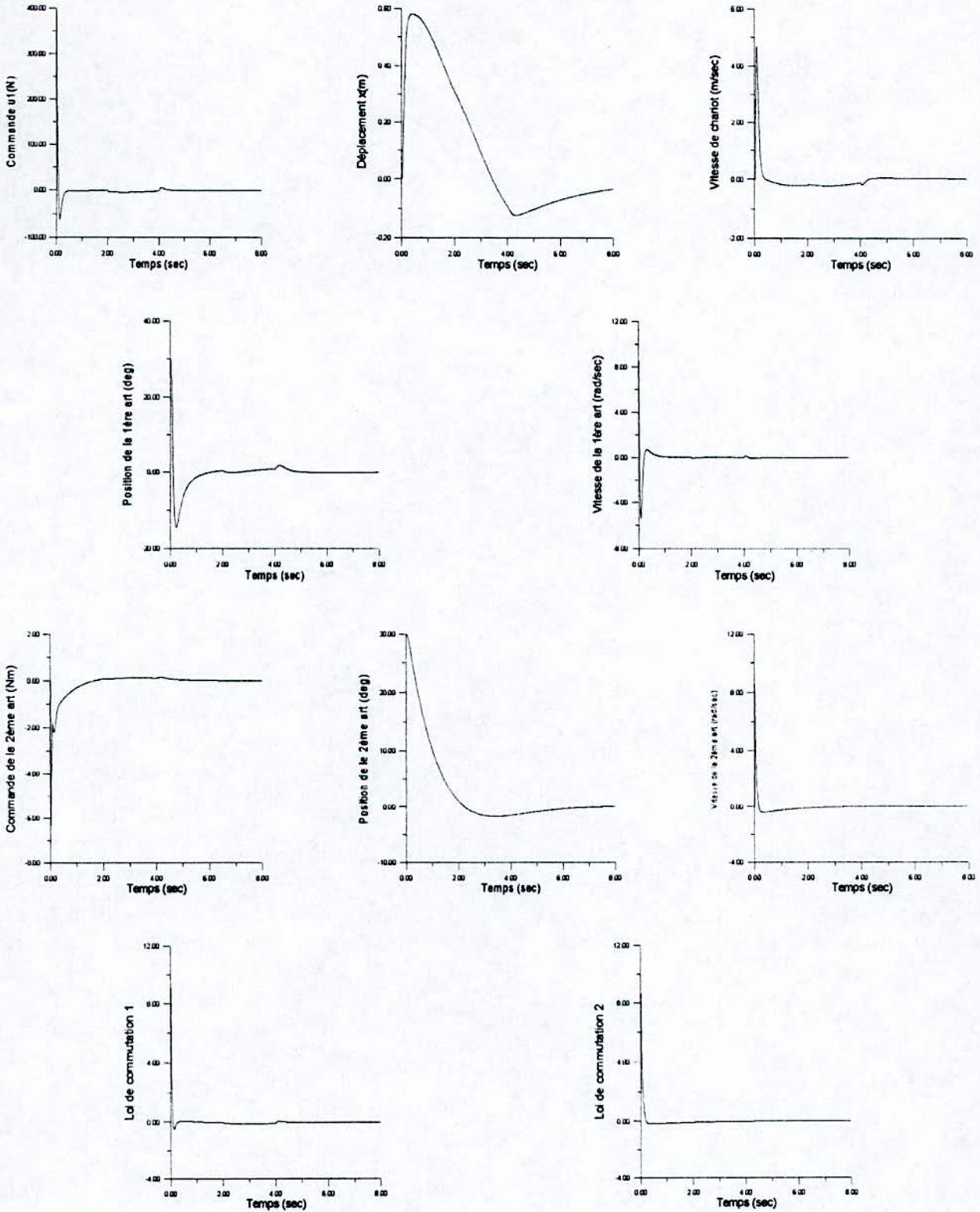


Figure (4.18) - Application de la commande avec observateur métrique sur le deuxième pendule avec de perturbations externes à partir des instants ( $t = 2$ ,  $t = 4$  (sec)).

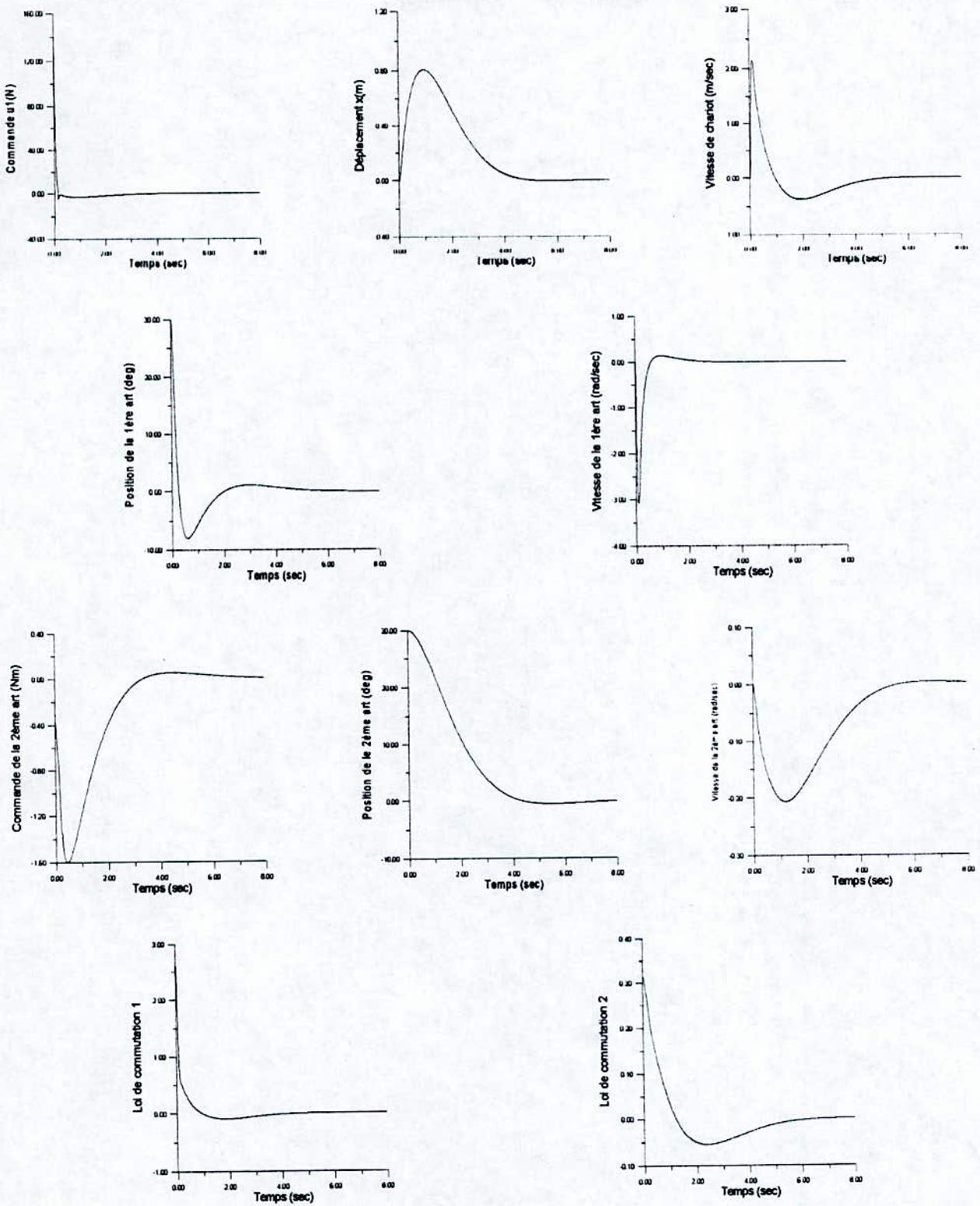


Figure (4.19) - Application de la commande avec observateur glissant sur le deuxième pendule inversé.

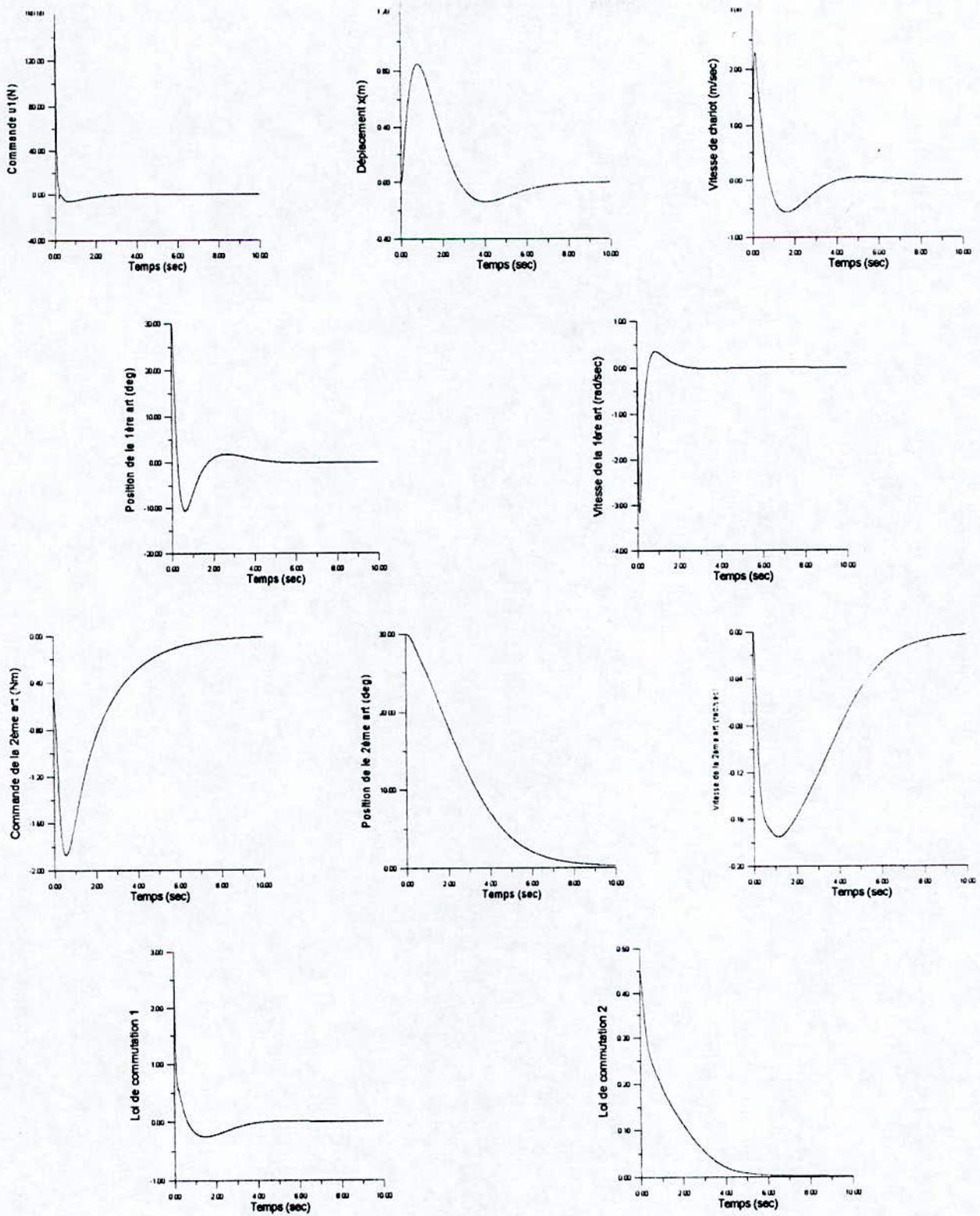


Figure (4.20) - Application de la commande avec observateur glissant sur le deuxième pendule avec une variation paramétrique de 20%

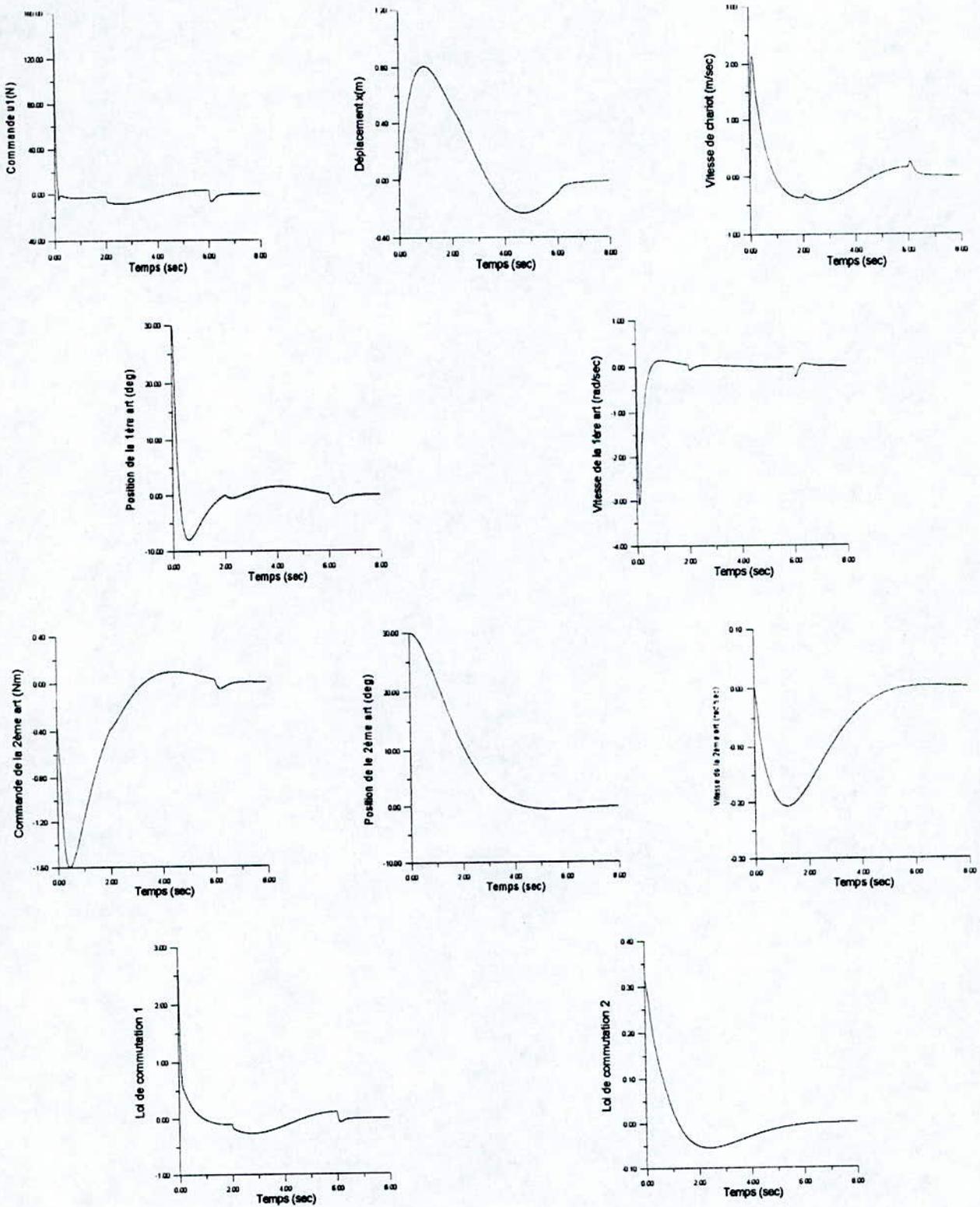


Figure ( 4.21) . Application de la commande avec observateur glissant sur le deuxième pendule avec des perturbations externes à partir des instants( $t_1=2$  ,  $t_2=4$  (sec)).

#### 4.7 Interprétations et commentaires :

La combinaison de la commande et de l'observation a été abordée et simulée. Les figures (4.10, 4.21) montrent les résultats de la simulation pour le pendule inversé simple avec l'observateur métrique et l'observateur glissant.

Les deux cas manifestent un comportement stable, c'est à dire que le système converge vers la position désirée, et cela sans que le temps de convergence soit modifié d'une manière conséquente.

Néanmoins, le cas où on utilise l'observateur métrique présente plus de performances, car dans ce cas la réponse est plus rapide, et moins sensible aux variations paramétriques ainsi qu'aux perturbations externes. Mais la commande est un peu plus importante.

Un autre fait est relevé, lorsqu'on utilise l'observateur métrique on constate des dépassements plus importants, cela se conforme au fait que la commande dans ce cas est un peu plus importante.

Lors des tests de robustesse, voir figures (4.11), (4.12), (4.14), (4.15), (4.17), (4.18), (4.20), (4.21) on a remarqué que l'observateur glissant est plus sensible aux variations paramétriques et aux perturbations externes, mais les dépassements sont dans le premier cas moins importants.

Pour les simulations de la réponse du pendule inversé double, voir figures (4.16), (4.19), on peut retenir le constat suivant:

L'utilisation de l'observateur métrique donne une réponse plus rapide, mais avec plus de dépassements.

La robustesse des deux cas d'observateurs est confirmée, mais l'utilisation de l'observateur métrique provoque une commande un peu plus importante, et rejette les perturbations plus rapidement, contrairement à l'observateur glissant, où on remarque que l'effet des perturbations se manifeste par des oscillations plus persistantes voir figures (4.17), (4.18), (4.20) et (4.21).

En somme les mêmes remarques faites dans le cas du pendule simple sont reconduites ici.

#### Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons traité deux observateurs non linéaires, glissant et métrique, et nous avons combiné la commande avec ces deux observateurs. Les résultats de simulations en boucle ouverte ont permis de révéler les performances de chacun d'entre eux. L'observateur métrique a démontré ces performances, mais cela à coûté de dépassements constatés en régime transitoire. Tandis que l'observateur glissant est un peu moins précis, et enregistre moins de dépassement.

En résumé, on retient que la commande combinée avec les deux observateurs présente des caractéristiques de performance certaines. Toutefois l'utilisation de l'observateur métrique nous a donné plus de performance. Cela est peut-être dû au choix des paramètres des deux observateurs, et il est possible qu'un autre choix de ces paramètres privilégie l'utilisation de l'observateur glissant (pour notre cas le paramètre  $\gamma$  qui définit le type de convergence est égale à 20).

## **Conclusion générale**

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la commande par mode de glissement et son application à deux pendules inversés, simple et double, en introduisant des observateurs non linéaires.

Deux approches de commande ont été proposées, la première qui est moins performante nécessite l'ajout d'un terme de contre réaction d'état stabilisant au voisinage du point d'équilibre. Tandis que la deuxième approche nous permet d'éviter cet inconvénient. La robustesse des deux approches est confirmée.

Dans ce mémoire nous avons proposé deux types d'observateurs non linéaires, qui diffèrent par leurs principes. Le premier se base sur la théorie métrique pour synthétiser un modèle d'estimation convergent. Par contre le deuxième se base sur la théorie des systèmes à structure variable.

Des tests de robustesse des deux observateurs appliqués sur les deux pendules ont fait ressortir que l'observateur métrique présente plus de performance en terme de précision et d'invariance. Il faut noter que la convergence des deux observateurs est tributaire du choix des paramètres ce qui veut dire qu'un autre choix de ces paramètres peut privilégier l'observateur glissant.

Les mêmes tests de robustesse ont été faits pour la commande à base des deux observateurs. Globalement les mêmes résultats sont obtenus.

Comme perspectives à ce travail nous pouvons citer les points suivants :

- ◆ Démonstration de la stabilité globale lors de la combinaison de la commande par mode de glissement et deux observateurs développés
- ◆ Etude théorique plus approfondie sur les observateurs métriques.
- ◆ Application de ces techniques sur d'autres systèmes.
- ◆ Développement d'autres lois de commandes et d'autres observateurs pour deux pendules.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Utkin .V.I. : Sliding Modes and Their Applications in Variable structure systems . MIR. 1978
- [2] Buhler .H : Réglage par mode de glissement . P.P.R1986
- [3] Slotine J.JE. and Li.W : Applied Non-Linear Control .Prentice Hall 1991
- [4] Matthews .G.P. : Variable structure Control of Interconnected Non-Linear Systems .PHD 1985 University-Microfilms -International
- [5] Rachid .A :Systemes de regulation .Masson 1996
- [6] Marino .R and Tomei P: Non-linear Control Design .Prentice-Hall 1995
- [7] Spong .M.W and Vidyasagar M: Robot dynamics and control .Jhon Wiley and Sons 1989
- [8] Isidori .A : Nonlinear Control Systems , Springer Verlag 1989
- [9] Fossard A.T. :Non-linear Systems ,Tome 1:Modelization and Estimation . Champan et Hall 1993
- [10] Utkin.V : Variable structure systems with sliding modes. IEEE Transaction on automatic control . Avril 1977
- [11] Herman and Krener : Non-linear Controllability and Observability. IEEE Trans on auto Control. VOL,AC-22 No5 Oct 1977 PP,728-740
- [12] Xia X, Zeitz M: On Non-linear Continuous Observer. INT. J. Control.VOL 66 No6 PP 943-954 N°6 1996
- [13] Misawa,E,A,and Hedrick,J,K: Non-linear Observers –A state of the art –Survey. ASME,J,of Dynamic Systems and Meas. Control .VOL111 PP 344-352 September 1989.
- [14] slotine ,J,J,E. Hedrick ,J,K. Misawa ,E,A :On Sliding Observers for Non-linear Systems . VOL 109 PP 245-252.Sept 1987
- [15] Garcia ,R,A,and D'Attellis,C,E :Trajectory tracking in Non-linear Systems via Non-linear Reduced Order Observers. INT.J. Control VOL 62 No3 PP 685-715.1995 .
- [16] Lohmiller ,W. and Slotine J.J.E: On Metric Observers for Non-linear systems . Proc. Of the IEEE Inter conf On Control Applications, Dearborn Sept 1996 . PP 320-326
- [17] Lohmiller ,W. and Slotine J.J.E: Applications of Metric Observers for Non-linear systems . Proc. Of the IEEE Inter conf On Control Applications, Dearborn sept 1996 .PP 367-372
- [18] Eltohamy,K,J and Kuo,C,Y: Real Time Stabilisation of a Triple Link Pendulum Using a Single control Inputs . IEE Proc on Control Theory and Applications. VOL144. N°5 PP498-504 sept 1997
- [19] Canuda .C,De Wit ,and Slotine J,J,E :Sliding Observers for Robot Manipulators .Automatica VOL27.No 5 PP859-864. 1991
- [20] Chung Choo,C and Hauser ,J: Non-linear Control for a Swinging Pendulum . Automatica VOL31. N°6 . PP851-862 .1995

- [21] Hernandez .J. Barbot .J.P: Sliding Observer-Based Feedback Control for Flexible Joint Manipulator. Automatica VOL32. N°9. PP1243-1254. 1996
- [22] Kai.S.Yeung. Yon. P.Chen : A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems .IEEE Trans on Auto Contr. Feb 1988.
- [23] Muraca.P ,and Pugliese.P: A Variable structure Regulator for Robotic Systems . Automtica N°7 1997
- [24] Jian.X . Tong .H. and Mao.W: Design of aVariable Structure Controllers with Continuous Switching Control .INT. J . Control. A survey N°3 1996.
- [25] Hung .J.Y Gao.W. and Hung .J.C: Variable Structure Control . A Survey .IEEE Trans on Industrial Electronics .1993
- [26] Misawa.E.A Hedrick .J.K Slotine J.J.E and Vergliese.G.C: Sliding Observer for Non-linear State Estimation . Symposium on Non-Linear Control System Design. PP 424-429
- [27] Utkin .V.I .and Drakunov.S :Sliding Mode Observers . Tutorial . Proc of the 34 Conf on Decision and Control.New Orleans . PP 3376-3378 1995
- [28] Yu Tang : Terminal Sliding Mode Control for Rigid Robots . Automatica 1998
- [29] Walcott .B.L. and Zak .S.H: State Observation for Non-linear Uncertain Dynamical Systems .IEEE Trans on Automatic Control . VOL,AC-32- No2 PP 166-169fev 1987
- [30] May -Win. T. and Misawa .A : Comparison of Sliding Observer to Several State Estimators Using a Rotational Inverted Pendulum .Proc of the 34 th Conf on Decision and Control. New Orleans 1995. PP 3385-3390
- [31] Boudjema .F : Commande par Mode de Glissement ,application aux convertisseurs électriques .Thèse de doct . Toulouse 1991
- [32] Ourari . M: Commande Multivariable par mode de glissement appliquée aux convertisseurs électriques .thèse de magister .E.N.P 1995
- [33] Madani.T et Amrati.S : Commande décentralisée à stucture variable .application en robotique .P.F.E .E.N.P 1997
- [34]Labioud .S : Identification et commande des systèmes dynamiques par reseaux de neurones . P.F.E. E.N.P. 1995
- [35] Gayed.A: Contribution à la commande par mode de glissement d'une machine synchrone à aimant permanent. Doctorat, Nantes 1996

## ملخص:

في هذا العمل تطرقنا إلى التحكم ذي البنية المتغيرة. و اقترحنا طريقتين للتحكم و بنيتين لراصدين غير خطيين أولهما الراصد ذي نموذج الانزلاق، و الآخر متري. في المرحلة التالية طبقنا التحكم ذي البنية المتغيرة المرتكز على الراصدين الغير الخطيين و ذلك على نواسين معكوسين البسيط و المزدوج. هدف هذا التحكم هو ضمان استقرار هذين الأخيرين، مع إجراء محاكاة عددية و عرضها هادفين إلى اختبار صمود التحكم و الراصدين إزاء تغير العوامل و الاضطرابات الخارجية.

كلمات المفتاح : الرواصد الغير الخطية، التحكم بنموذج الانزلاق، النواس المعكوس.

## Abstract :

In this work we have presented the variable structure control for two inverted pendulum. Two control approaches are established, and two non linear observers are proposed, namely the sliding and the metric observer. Next, we have applied the observers based control law to the simple and double inverted pendulum in order to test the performance of the proposed control approaches. In addition numerical simulations are performed and presented with robustness test in presence of disturbance and parameters variation.

Key words : Non linear observer, Variable structure control, Inverted pendulum.

## Résumé :

Dans ce travail nous avons abordé la commande à structure variable pour deux pendules inversés. Deux approches de commande ont été établies, ainsi que deux structures d'observateurs non linéaires, à savoir l'observateur par mode de glissement et l'observateur métrique. Dans une autre étape, nous avons appliqué la commande à structure variable à base des deux observateurs sur deux pendules inversés, simple et double, à fin de tester la commande, qui doit stabiliser les deux pendules. Des simulations ont été faites et présentées, avec des testes de robustesse vis à vis des variations paramétriques, ainsi que des perturbations externes.

Mots clés : Observateurs non linéaires, Commande à structure variable, Pendules inversés.